HAL
open science

L'analyse non standard en France 1975-1995 : une dispute avortée

Claude Lobry

▶ To cite this version:

Claude Lobry. L'analyse non standard en France 1975-1995 : une dispute avortée. Philosophie. COMUE Université Côte d'Azur (2015 - 2019), 2019. Français. NNT : 2019AZUR2017 . tel-02448561

HAL Id: tel-02448561
https://theses.hal.science/tel-02448561v1

Submitted on 22 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

ÉCOLE DOCTORALE
SOCIÉTÉS, HUMANITÉS, ARTS ET LETTRES

THÈSE DE DOCTORAT

L'Analyse Non Standard en France

1975-1995 : Une dispute avortée

Claude LOBRY

Centre de Recherche en Histoire des Idées

Présentée en vue de l'obtention du grade de docteur en Philosophie d'Université Côte d'Azur

Dirigée par : Jean-Luc Gautero

Soutenue le :10 septembre 2019

Devant le jury, composé de :
Jean-Michel Salanskis, Professeur (émérite), Université Paris 10
Markus van Atten, Directeur de recherche CNRS, CNRS/ULM
Annick Lesne,Directrice de recherche, LPTMC/Paris
Jean-Marc Lévy-Leblond, Professeur (émérite), UNSA
Frédéric Patras, Directeur de recherche CNRS, UNSA
Jean-Luc Gautero,MdC, HdR, UNSA

Remerciements

Au début des années quatre-vingt j'ai fait partie d'un groupe de mathématiciens qui soutenions la qualité d'un travail de thèse d'État contre une commission qui le jugeait insuffisant. A l'issue d'un échange assez violent nous avons perdu contre l'institution. Les arguments employés par la commission étaient si malhonnêtes que j'ai tenté de les dénoncer dans un livre qui se voulait très polémique. Mais la polémique n'eut pas lieu...

Aujourd'hui, à la fin des années deux mille dix, l'histoire a tranché : les travaux à l'époque contestés sont maintenant universellement reconnus comme une contribution significative aux mathématiques. C'est un fait nouveau important qui ne pouvait évidemment pas être avéré au moment du désaccord. C'est ce qui m'a incité à me replonger dans cette affaire vieille de trente ans dans le but, non de la relancer car les sujets de controverse se sont bien déplacés depuis, mais de tenter d'en trouver les raisons et peut être de comprendre pourquoi nous avions perdu la bataille.

J'ai donc écrit un premier jet d'une centaine de pages que j'ai soumis à quelques lecteurs amis dont mon épouse. Le retour a été unanime, «Tu nous ennuies [1] avec ces vieilleries. Cette histoire n'intéresse plus personne maintenant» et j'ai bien dû reconnaitre que, effectivement, mon texte tombait des mains. Quel genre littéraire adopter pour qu'il n'en soit pas ainsi ? Un genre qui convient à mon âge est celui des mémoires ; mais on ne lit que les mémoires des gens célèbres, je ne suis pas célèbre et je souhaite être lu. Un autre genre également pratiqué par beaucoup de scientifiques à la retraite est celui de l'essai de "philosophie naturelle", j'aurais pu y glisser au passage mon point de vue sur l'affaire. Mais alors, pour trouver un éditeur, il faut être un savant connu ou au moins avoir de bonnes qualités littéraires qui toucheront un large public ; là non plus, je ne suis pas à la hauteur. Alors m'est venue l'idée de l'enquête. Ecrire une enquête sur un évènement passé, suffisamment passé pour qu'on puisse en parler avec une certaine objectivité, assez récent pour que les traces en soient encore bien visibles. En fait ce dont je rêvais et dont je rêve encore, c'est une belle enquête comme savent si bien faire les anglo-saxons. Par exemple : le *Fermat's last theorem* de S. Singh [2], la biographie de J. Nash *A beautiful mind* de Sylvia Nasar [3] ou celle de A. Robinson *Abraham*

1. En réalité ils s'exprimaient de façon plus relâchée mais dans le cadre de ce travail académique je ne garde que l'esprit, pas la forme.

2. Fourth Estate, London, 1997 ; [74]. (Le numéro entre [ ] renvoie à une bibliographie synthétique en fin de document).

3. Simon & Schuster Paperbacks, N.Y. 1998 ; [51].

Robinson : The Creation of Nonstandard Analysis, A Personal and Mathematical Odyssey de J. W Dauben [4].

C'est donc dans l'esprit de l'enquête que j'ai entrepris une seconde rédaction. J'ai décidé que le narrateur ne serait pas moi mais un *enquêteur*. Mais ça ne marchait pas très bien non plus. D'abord parce qu'il n'est pas très facile de faire une enquête sur ses propres affaires mais surtout parce que je n'arrivais pas à inventer un enquêteur crédible. Devait-il être simple journaliste, sociologue ou historien, mathématicien, jeune, vieux ?

Journaliste ? Un journaliste enquête sur un événement susceptible d'intéresser un large public. Une commission de thèse au comportement douteux ce n'est quand même pas comparable à l'histoire de la lutte des ouvriers de chez Lip ou celle des atteintes aux droits de l'homme dans une dictature militaire. Un journaliste qui enquête sur cette minuscule histoire ce n'est pas crédible. Ou alors un journaliste scientifique ? Mais alors il n'aurait pas hésité à interroger les nombreux témoins vivants ce que je ne pouvais pas faire ; je ne pouvais quand même pas imaginer des interviews de personnes existantes et leur prêter des propos qu'elles n'approuveraient pas. Non le personnage du journaliste ne tenait pas.

Sociologue ? Pourquoi pas. J'ai été tenté par un tel personnage. Mon héros aurait été une sorte de Bruno Latour s'immergeant discrètement dans des laboratoires de mathématiques pour en découvrir les vices cachés. Mais assez vite je me suis rendu compte que je n'avais pas beaucoup de sympathie pour un tel personnage. Non que je désapprouve que l'on enquête chez les savants ; je suis tout à fait convaincu que ce travail est nécessaire. Mais je n'ai pas envie de le faire. Ce petit monde est *mon* monde et je l'aime. Je ne saurais me mettre dans la peau de celui qui observe froidement les savants comme des souris de laboratoire.

Historien ? Ça je crois que j'aurais aimé ! Mais historien des sciences est un métier sérieux que je ne connais pas. Mon historien n'aurait pas été crédible.

Un mathématicien ? A part ceux qui ont été engagés dans l'affaire, et même pas tous, les mathématiciens français ne s'intéressent plus à cette question. Un tel personnage n'aurait pas été crédible non plus. Sauf un mathématicien engagé dans l'affaire. Mais c'était moi ! J'avais déjà essayé et le récit ne prenait pas.

Vieux ? On retombait dans les mémoires. Jeune... ? Un jeune ? Mais quel genre jeune pourrait bien s'intéresser à une vieille dispute de scientifiques ? Il suffit de poser la question pour que la réponse s'impose immédiatement. Un tel jeune, ça existe ! C'est un thésard en philosophie, en épistémologie ou en histoire des idées. Alors s'est imposée la figure de Luc Balderoy auteur d'un mémoire de

4. Princeton, NJ : Princeton University Press, 1998 ; [18].

thèse et un presque moi même.

Balderoy, après un parcours assez brillant [5] en écologie théorique (école prestigieuse, thèse, quelques post-doc), change brusquement d'orientation. Il veut faire de l'épistémologie des mathématiques. Pour cela il a une bonne raison : comprendre le rôle joué par les mathématiques dans les représentations scientifiques du monde, en particulier celles qu'il a rencontrées dans son travail de biologiste. De mon côté si je n'ai pas un parcours académique standard en écologie théorique j'ai quand même, à travers mes collaborations, une expérience d'un quart de siècle dans ce domaine et des vraies publications dans des "vraies revues-internationales-avec-comité-de-lecture" qui feraient de moi un honorable sinon brillant post-doc. En revanche mon intérêt pour "les mathématiques-à-quoi-et-comment-ça-sert" remonte à mes études. Sur cette question j'ai plus d'expérience que Balderoy mais certainement pas plus d'autorité qu'un étudiant en thèse.

Je me lance donc dans une nouvelle rédaction. Il s'agit cette fois encore d'une enquête, mais d'une enquête philosophique sous la forme d'un mémoire de thèse. Au bout de quelques temps je me retrouve à la tête d'un manuscrit de près de 200 pages que je présente sous une couverture type mémoire de thèse (voir un peu plus loin la figure 1) écrit par le jeune Luc Balderoy, sous la direction de Élisée del Braucoly pour obtenir le grade de docteur de l'Université de Maripassoula [6]. Je l'envoie à quelques amis et en particulier, sans commentaire, à deux honorables professeurs d'université que je connais bien. Tous les deux me répondent qu'ils ont bien reçu le manuscrit mais qu'ils sont submergés de travail et qu'ils n'ont pas la possibilité d'envisager dans un avenir proche de pouvoir se consacrer à la lecture d'un mémoire de thèse. Ils pensaient que je les sollicitais comme rapporteurs ! Ces deux honorables Professeurs et amis, dont je tairai charitablement les noms mais qui se reconnaitront facilement, sont les deux premières personnes que je remercie chaleureusement. Ce sont évidemment elles qui sont à l'origine de *ma* thèse qu'il ne faut pas confondre avec celle de *Balderoy*.

Quelques temps après je racontais cette histoire à Jean-Marc Lévy-Leblond. Il l'a trouvée drôle et m'a suggéré de faire comme Romain Gary, monter un canular et soutenir à nouveau une thèse sous un pseudonyme. Bonne idée, et je ne peux que le remercier chaleureusement de me l'avoir donnée. Il me suffisait "simplement" de trouver mon Paul Pavlowitch, c'est à dire un jeune terminant son mastere

5. J'ai dit un *presque* moi même. On me pardonnera de prêter à ce personnage des qualités que j'aurais bien aimé posséder !

6. Maripasoula est un chef lieu de canton de Guyane française ; c'est la commune la plus étendue de France mais seulement peuplée de 12000 habitants. Elle n'est pas accessible par la route.

de philosophie prêt à sacrifier trois ans de sa vie à me servir de prête nom ; autre solution me fabriquer une fausse identité et trouver une justification à mon inscription à plus de soixante dix ans en thèse. Impossible. Il ne restait plus qu'une possibilité : *tenter* de m'inscrire moi même en thèse. Je dis bien "tenter" car ce n'est pas si facile.

Il faut être présenté par un *Directeur de thèse*. J'avais croisé Jean Luc Gautero au début des années 1980 dans les combles du château de Valrose qui à l'époque abritaient, en plus de divers gauchistes, les mathématiciens (souvent les mêmes) de l'Université de Nice, alors qu'il n'était pas encore philosophe mais thésard en astronomie. Je l'ai revu, un peu plus tard au séminaire d'épistémologie et d'histoire des sciences qu'il animait avec Pierre Souffrin puis récemment quand, retraité, je me suis mis à fréquenter le campus de la faculté de lettres. Qui mieux que lui, titulaire d'un D.E.A. de littérature, d'une agrégation de mathématiques, d'un doctorat d'astronomie et d'une H.d.R. de philosophie aurait pu accueillir un tel projet ? Il a accepté sans hésiter. Jean-Marc pour avoir suggéré la chose et Jean-Luc pour l'avoir rendue possible vous avez droit à ma reconnaissance éternelle. Et ce n'est pas rien l'éternité.

Le Directeur de thèse trouvé il faut l'accord d'un *laboratoire d'accueil*. Le laboratoire CRHI, ce qui veut dire Centre de Recherche en Histoire des Idées, convenait particulièrement bien à mon projet, mais accepterait-il un vieux mathématicien ? Le laboratoire Dieudonné auquel j'appartenais encore en 1990 n'aurait certainement pas vu d'un bon œil un philosophe prétendre soutenir une thèse de mathématiques dans ses murs ; on lui aurait certainement demandé de "faire ses preuves" en passant deux ou trois U.V. de base d'abord. Si le CRHI avait procédé de même mon projet n'aurait pas vu le jour. Pierre-Yves Quiviger et Philippe Audegean qui, comme directeurs successifs du CRHI m'avez accueilli chaleureusement je vous remercie pour cette largeur d'esprit si rare, quoiqu'on en dise, dans le monde académique.

A cette thèse il fallait un jury et donc deux rapporteurs. Je voulais qu'ils soient incontestables. On se doute bien qu'un vieux professeur à la retraite qui, allez savoir pourquoi, veut être docteur en philosophie trouvera bien quelques collègues peu scrupuleux pour satisfaire son caprice. Mais ce n'est pas pour porter une épitoge à trois rangs d'hermine que je défend cette thèse puisque j'ai déjà le droit d'en porter une amarante, ce que je n'ai jamais fait. En soutenant "officiellement" une thèse qui pose plus de questions qu'elle n'en résout, j'espère que mon travail intéressera quelques chercheurs, cette fois jeunes et dynamiques. Pour que ce plan ait quelque chance de réussir il faut que le Jury et particulièrement les rapporteurs, inspire confiance. Annick Lesne, et Jean-Michel Salanskis, vous avez accepté de

rapporter sur mon travail. Cependant je doute que vous partagiez toutes les opinions que je soutiens (et c'est avec un petit frisson que je découvrirai vos questions lors de la soutenance car mon Directeur de thèse, soucieux du respect des traditions, ne m'a pas communiqué vos rapports). En acceptant qu'elles soient présentées vous affirmez publiquement qu'elles méritent être discutées et votre compétence scientifique et philosophique très largement reconnue donne du poids à cette affirmation. Annick et Jean-Michel, un très grand merci.

Frédéric Patras et Mark van Atten [7] vous êtes des "vrais philosophes" qui montrez par votre présence dans ce jury que vous acceptez d'écouter un amateur ; plus encore peut-être que mes rapporteurs vous devez avoir des désaccords avec moi, aussi je vous remercie (et me réjouis) par avance de nos disputes à venir.

J'ai voulu dresser la liste de tous ceux à qui ce travail doit quelque chose mais, très vite, je me suis rendu compte que si je tentais de la mener à son terme elle serait très, très longue et que je risquais d'oublier certains, ce qui, par avance, me désole. Alors je renonce à établir une liste nominative :

— de mes collègues et amis que j'ai si souvent bassinés avec ces idées confuses qui grâce à leurs remarques, ont pu accéder au statut de pensée intelligible et avec qui j'ai pu collaborer à l'écriture d'articles plus ou moins facilement acceptés,

— de mes thésards qui n'ont pas eu peur de faire une thèse utilisant des infinitésimaux fixés une fois pour toute,

— tous les collègues qui refusaient d'écouter mes discours de propagande prétextant qu'ils avaient mieux à faire.

Tous je vous remercie. Sans vous ma vie professionnelle aurait été bien terne.

Je ne remercierai pas mes proches ici. Pas parce que je ne leur dois rien, bien au contraire. Je n'ai simplement pas le goût d'en parler publiquement.

7. On devine pourquoi mes remerciements vont par paires : c'est pour remercier "au pluriel", cachant ainsi un tutoiement qui serait déplacé entre un thésard et les les autorités qui le jugent.

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITÉ de MARIPASOULA

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE
par

Luc BALDEROY

L'ANALYSE NON STANDARD EN FRANCE
1975-1995 : Une dispute avortée

Soutenue le ..... devant la commission d'examen :

M. XXX Président

M. Elisée del Braucoly (directeur de thèse)

MM. XXX Examinateurs.

FIGURE 1 – Mémoire de Balderoy

Première partie

Préface au manuscrit de Balderoy

Le mathématicien A. Robinson (1918-1974) publiait en 1966 le livre *Non-standard Analysis* qui était l'aboutissement des travaux de l'auteur et de quelques autres mathématiciens pour donner des fondements au « calcul avec des infinitésimaux » compatibles avec les standards de rigueur mathématique du XXème siècle. Rappelons en peu de mots et de façon non technique quel est le problème.

L'observation de la nature nous confronte à des grandeurs qui ne sont pas du même ordre, par exemple le contenu de mon verre d'eau et celui de la Méditerrannée. Vider mon verre d'eau dans la mer ne changera rien à cette dernière. Il est utile de pouvoir distinguer dans un formalisme mathématique des quantités "infinitésimales" et que l'on décide de certaines règles les concernant telles que :

1. On peut négliger un infinitésimal devant une quantité appréciable.
2. La somme de deux infinitésimaux est un infinitésimal.
3. Si a est une quantité non nulle aussi grande que soit la quantité b il existe un entier n tel que la quantité $n \times a$ soit supérieure à b.

Le calcul avec des infinitésimaux est efficace. Par exemple, de combien augmente-t-on la surface d'un carré de côté a lorsqu'on augmente la longueur du côté d'une quantité da infinitésimale ? La réponse est $2a \times da$ puisque $(da+a)^2 - a^2 = da^2 + 2da \times a + a^2 - a^2 = da \times (2a + da)$ et que l'on peut négliger da devant a. Ceci permet de répondre rapidement à la question : de combien faut-il augmenter le côté d'un champ carré de $a = 100\ m$ de côté pour que sa surface augmente de $10m^2$? Comme la quantité cherchée da est manifestement petite par rapport à a nous avons $2da \times 100 = 10$ soit $da = 5cm$. Pour qui sait extraire une racine carrée (ou possède une calculette) une valeur plus précise de l'accroissement peut être obtenue : $da = 4,998750\ldots cm$. On voit que l'erreur commise est de l'ordre du millimètre.

Malheureusement cette façon de calculer en négligeant ce qui doit l'être, qui était celle des mathématiciens du 17 ème siècle et qui est restée celle des physiciens jusqu'à nos jours, posait le problème suivant : soit dx un infinitésimal strictement positif ; puisque (règle n° 3) il existe un entier n tel que $n \times dx > 1$ il existe un premier entier n_0 tel que $n_0 \times dx$ cesse d'être infinitésimal ; mais alors $(n_0 - 1) \times dx$ est infinitésimal et en vertu de la règle 2) $(n_0 - 1) \times dx + dx = n_0 \times dx$ est infinitésimal ce qui est une contradiction. Ce paradoxe des infinitésimaux, version mathématique du paradoxe du tas de sable, a été contourné par les mathématiciens du XIX ème siècle grâce à ce qu'on appelle la méthode des $\varepsilon\ \delta$ (parfois appelée *epsilontique*). Ainsi pour dire d'une fonction f qu'elle est continue on ne dirait plus, comme le disait encore Cauchy [8] dans son cours de l'école Polytech-

8. Le très grand mathématicien Augustin-Louis Cauchy est considéré comme un des pères de

nique :

$$dx \approx 0 \Longrightarrow f(x+dx) - f(x) \approx 0$$

qui se lit *lorsque dx est infinitésimal l'accroissement correspondant de f est infinitésimal* mais :

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0 : |dx| < \eta \Longrightarrow |f(x+dx) - f(x)| < \varepsilon$$

qui peut se lire de façon laxiste *lorsque dx tend vers* 0 *f(x+dx) tend vers* $f(x)$. mais qui en toute rigueur doit se lire littéralement, c'est à dire :

> *Pour tout ε strictement positif il existe η strictement positif tel que pour tout dx satisfaisant $|dx| < \eta$ on a $|f(x+dx) - f(x)| < \varepsilon$.*

On reconnait le discours, qui, au début de l'enseignement de l'analyse à la fin des années de lycée, scelle définitivement le divorce d'avec les mathématiques de ceux qui n'ont pas la "bosse des maths".

Cependant l'avènement de cette nouvelle façon plus rigoureuse de parler n'a pas pour autant sonné le glas du « calcul avec les infinitésimaux ». Mathématiciens et physiciens ont continué à le pratiquer, les mathématiciens en cachette, les physiciens ouvertement. Et voila qu'en 1966 un livre proposait un cadre rigoureux, accessible à un large public de mathématiciens, où cette pratique jusque là honteuse allait enfin pouvoir s'exposer ouvertement. On conçoit que sa publication puisse être considérée comme un événement particulièrement important des mathématiques du XX ème siècle. Événement qui a rapidement suscité l'intérêt de philosophes.

Ainsi A. Badiou écrivait-il dès 1968, dans les "Cahiers pour l'Analyse", n° 9, *La subversion infinitésimale* [3] , un texte dans lequel il rendait compte du contenu de l'ouvrage de Robinson. Comme l'indique le titre de son article il voyait dans ce livre une sorte de révolution à laquelle il faisait un accueil enthousiaste. Ainsi, après avoir longuement détaillé les objections historiques aux infinitésimaux en actes il écrivait :

---

la "rigueur" moderne en analyse. Il disait dans son cours de 1921 :

> (···)la fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. I.re partie. Analyse algébrique. Imprimerie royale chez Debure frères, 1821 ; [11].
Cité par Stefan Neuwirth sur son site :
`http://lmb.univ-fcomte.fr/IMG/pdf/la_continuite_chez_cauchy.pdf`

> Mais l'infinitésimal est un nombre : énoncé qui subvertit l'Analyse dans l'exclusion dont elle avait fini par naitre, et restaure, fondée, l'innocence inventive des pionniers du « nouveau calcul » .
>
> De plus loin, cette subversion déplace l'effet ininterrompu, à travers plusieurs époques du concept, des apories de Zénon sur continuité et divisibilité ; elle redispose le champ de rationalité que ces apories commandaient selon l'impératif, souvent muet, d'avoir à ne pas s'y exposer. Depuis une dizaine d'années, les travaux d'Abraham Robinson [9] ont établi qu'on pouvait reconstruire entièrement l'analyse classique en «plongeant le corps des réels dans un corps non-archimédien, par le marquage inaugural d'un infini-point - un nombre infiniment grand - et le libre usage corrélatif d'éléments infnitésimaux.
>
> Outre qu'elle transfère enfin le refoulement séculaire de ces concepts, la découverte de Robinson administre une preuve convaincante des capacités productives de la pensée formelle. C'est en effet une large classe d'infinis-points dont Robinson garantit le marquage cohérent, par le recours exclusif à la théorie des systèmes formels.

Dix ans plus tard, le philosophe et historien des mathématiques I. Lakatos (1922-1974), publiait *Cauchy and the Continuum : The Significance of Non-standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics* [10]. Encore une dizaine d'années plus tard, H. Barreau (1929-2014) responsable de l'unité C.N.R.S. *Fondements des Sciences* de l'Université de Strasbourg éditait l'ouvrage collectif *La mathématique Non Standard* où interviennent, à côté de mathématiciens, des historiens et des philosophes ; peu de temps après, J-M. Salanskis co-éditait en 1992, 1995, 1997 trois ouvrages collectifs où l'Analyse Non Standard (notée A.N.S. à partir de maintenant) est présente et il écrivait deux ouvrages où elle est centrale : *Herméneutique formelle* [11] et *Le constructivisme non standard* [12]. Tous ces auteurs

9. Cf. le livre fondamental, qui nous sert ici de référence constante : A. Robinson, Non-standard analysis, Amsterdam, 1966 ; [66]. La découverte de Robinson remonte à l'automne 1960. Les premières publications sont de 1961. Mais l'idée de base figurait implicitement dans les travaux de Skolem sur les modèles non-standard de l'arithmétique, travaux qui remontent à I930-35. Dans la suite, nous traduirons « standard » par « conforme ».(Note de A. Badiou)

10. dans *Mathematics, Science and Epistemology : Philosophical Papers*, ed. J. Worrall and G. Currie. Vol. 2. Cambridge : Cambridge University Press, pp. 43-60 (1978). Repris dans *The Mathematics Intelligencer* 1(3) ; [46] : 151-161 (1978).

11. Editions du C.N.R.S., Paris(1991) ; [70].

12. Presses Universitaires du Septentrion, Paris (1999) ; [69]

voyaient dans l'avènement de l'A.N.S. un moment important de la recherche mathématique contemporaine.

Or cette théorie a été très mal reçue par les mathématiciens Français. Voyons rapidement comment. Une petite école d'Analyse Non Standard s'était formée à partir de 1975 autour du mathématicien G. Reeb à Strasbourg. G. Reeb (1920-1993) était un géomètre, connu en France et dans le monde pour ses travaux de topologie, qui avait découvert les travaux de Robinson au début des années 1970. Très vite il sait convaincre plusieurs jeunes et quelques moins jeunes. Rapidement, fruits des travaux d'un séminaire dynamique, plusieurs thèses et un ouvrage didactique [13] sont publiés. Parallèlement ces mathématiciens animent avec H. Barreau, déjà mentionné, un séminaire où l'analyse non standard, le formalisme et l'intuitionnisme étaient abordés d'un point de vue historique et philosophique. Or cette activité a été très vivement attaquée par les autorité du C.N.R.S. d'alors dans des termes qui méritent d'être détaillés ici [14].

Le cadre institutionnel de la collaboration Barreau-Reeb était l'U.P.R. (Unité Propre de Recherche du C.N.R.S.) "Fondements des Sciences". Dans l'élaboration de leur travail ils avaient été conduits à énoncer, à usage interne mais non secret, douze thèses dont voici les cinq premières :

1. La théorie de Nelson [15] (I.S.T.) expose le vrai Calcul infinitésimal.
2. Non seulement Leibniz et Carnot sont de brillants précurseurs de Nelson, mais on ne trouve chez eux aucune contradiction avec ce dernier.
3. Skolem, Gödel, et les logiciens qui ont élaboré la Théorie des Ensembles sont les inspirateurs insignes du mouvement qui s'est concrétisé chez Robinson et Nelson.
4. Intuitionnisme et Formalisme doivent se réconcilier, contrairement à ce qui fut le cas dans le passé. Ce sont deux manières "complémentaires" d'aborder l'objet mathématique.
5. La perspective de cette réconciliation implique une saine vision de l'I.S.T. de Nelson.

13. Robert Lutz - Michel Goze, *Nonstandard Analysis : a practical guide with applications.* Springer-Verlag Lecture Notes in Mathematics n° 881 Berlin, Heidelberg, New York (1981) ; [50].

14. L'histoire des relations de l'UPR "Fondements des Sciences" avec les autorités du C.N.R.S. est relatée par H. Barreau dans un texte écrit pour le bulletin de l'IREM de Strasbourg : L'OUVERT N° spécial G. Reeb (1994). Ce texte est ma principale source d'information.

15. Le nom d'Édouard Nelson (1932-2014) apparait pour la première fois dans ce travail et y reviendra souvent.

Il est facile (et malhonnête, faut-il le préciser ?) de s'appuyer sur des documents internes pour critiquer des orientations de recherche. C'est pourtant ce que fit la commission du C.N.R.S. (commission 03, Mathématiques) chargée de l'évaluation (pour la partie mathématique) du travail de cette U.P.R. En 1984 le rapporteur devant la commission 03 écrivait :

> Les préoccupations de l'E.R. "Fondements des Sciences " sont très éclectiques. Pour la part qui relève de la compétence de notre Commission, il s'agit quasi exclusivement d'une étude épistémologique, avec certains aspects historiques et didactiques, de l'Analyse Non Standard (A.N.S.).
>
> Ce choix d'une branche marginale de la discipline s'accompagne d'une volonté explicite de promouvoir l'intuitionnisme en tant que doctrine opposée au formalisme dominant dans les mathématiques contemporaines. Cette approche conduit naturellement à une attitude plus apologétique qu'objective, ainsi qu'en témoignent les douze thèses et questions qui constituent le noyau central de réflexion de la sous-équipe "Mathématiques pures et appliquées" (voir thèses n°1 à 5 notamment, dans le rapport scientifique ci-joint.)
>
> Le rapporteur est dans ces conditions amené à formuler des réserves sur l'activité scientifique de cette formation.

Ce rapport devait conduire la commission 03 à adopter à l'unanimité de ses vingt membres la motion :

> La Commission 03 émet des réserves très sérieuses sur les thèses présentées par Monsieur Barreau et, sauf évolution positive, ne voit pas comment elle pourra renouveler son soutien à cette formation.

H. Barreau demanda une "contre expertise" qui fut confiée à Alain Connes, Médaille Field, qui connaissait bien les travaux de Robinson. Ce dernier, après avoir visité l'équipe, produisit le rapport suivant :

> Pour la part qui relève de la section 03, l'activité de recherche de l'équipe "Fondements des Sciences" est centrée autour de l'Analyse non standard. Comme il s'agit d'une théorie séduisante, en particulier par le sens qu'elle donne à la notion d'infiniment petit il me semble nécessaire de mettre en évidence les points suivants :
>
> 1. Le vice principal de l'analyse non standard est qu'il est ***impossible*** d'expliciter un seul nombre non standard, c'est un théorème mathématique. On peut parler de ces nombres mais leur utilité en tant qu'entité mesurable est nulle.
> 2. La séduction de l'analyse non standard est due en grande partie à la création d'un vocabulaire suggestif ; la géométrie différentielle s'est

bien gardée de céder à cette tentation, ce qui aurait été facile par exemple dans la théorie des solutions asymptotiques aux équations différentielles.

3. Il existe un outil puissant : les ultraproduits, qui permet d'exploiter au maximum l'axiome de choix, il est peu connu des mathématiciens et l'analyse non standard est ***strictement*** contenue dans son utilisation.

Il me semble que la vulgarisation de l'analyse non standard peut rendre service en faisant connaître (3) mais devrait prévenir de (2)... Mais l'équipe est à voir avant la décision définitive.

On comprend qu'il s'agit de l'opposition du courant "main stream" des mathématiques françaises à des activités qu'il juge marginales, voire pernicieuses, mais rien dans ces prises de position n'est choquant. Il est normal que des idées nouvelles suscitent de la résistance institutionnelle et les archives du C.N.R.S. doivent regorger de rapports négatifs de ce type. D'ailleurs le principal intéressé, H. Barreau lui même, en convient :

> Encore une fois, les mathématiciens de la Commission 03 admirent que nous étions respectables et même, pendant deux ans, m'invitèrent à certains de leurs conciliabules. Je garde donc, je dois dire, une impression plutôt positive à leur égard (...)

Mais il s'est passé des choses beaucoup plus surprenantes, que je relate rapidement maintenant. En 1983 un élève de l'école de Strasbourg se voyait interdire la soutenance de sa thèse sur le territoire de l'Ile de France par la "Commission des Thèses Parisiennes de Mathématiques", une instance non officielle mais puissante qui prétendait s'assurer, au nom de la communauté, de la qualité des travaux présentés. Plus étonnant, peut être, que l'existence d'un organisme de censure non officiel dont les mathématiciens de la région parisienne semblaient accepter les avis, est que cette "Commission des thèses", dont les noms des membres n'étaient pas rendus publics, *ne motivait pas ses jugements*. Au jury pressenti qui l'interrogeait sur les raisons scientifiques du refus d'autoriser la soutenance d'une thèse se réclamant de l'A.N.S., la Commission a répondu :

> Je vous réponds au nom de la Commission des Thèses à la lettre que vous avez adressée au président de l'université de Paris VII au sujet du fonctionnement de la Commission des Thèses. Cette lettre nous a bien sûr été transmise.(...)
>
> Dans cette lettre, vous soulevez le cas de la thèse de Monsieur (...) pour laquelle la Commission des thèses a demandé l'avis d'un deuxième rappor-

> teur à la suite d'un premier rapport qui n'a pas permis à la Commission de prendre une décision définitive.
>
> Vous nous demandez de vous transmettre ce dernier rapport. La Commission a été unanime pour trouver votre demande irrecevable. C'est un principe fondamental du fonctionnement de la Commission que le caractère confidentiel des rapports demandés, ce qui garantit la liberté de jugement du rapporteur. (...)

On devine que les choses n'en sont pas restées là [16]. Un conflit de plus en plus violent s'est développé entre les tenants de l'A.N.S. et l'institution mathématique qui en est sortie victorieuse en ce sens qu'à partir des années 1990 presque plus aucune thèse de mathématiques se réclamant explicitement de l'A.N.S. ne s'est soutenue en France.

Plus d'un quart de siècle s'est écoulé depuis 1990. C'est une durée significative à l'échelle d'une controverse scientifique. Dans notre cas ce qui était l'objet de polémiques ne l'est plus maintenant. Ainsi :

1. La légitimité des méthodes de l'A.N.S. au regard des canons de la rigueur mathématique contemporaine est universellement reconnue.
2. La fécondité du point de vue A.N.S. s'observe de plus en plus dans de nombreux domaines applicatifs, notamment les sciences informatiques où les idées intuitionnistes "à la Reeb", que la commission 03 jugeait si marginales, sont centrales dans la réflexion présente.
3. Cerise sur le gâteau (pour moi), les travaux refusés par la Commission des thèses, sont le point de départ d'une activité scientifique internationale importante.

Je ne demande pas qu'on me croie sur parole : c'est ce que je pourrai démontrer assez facilement en mettant en avant quelques éléments objectifs incontestables, ce qui me conduira à rechercher les raisons de cette bataille perdue par l'A.N.S. en France. Les raisons sont-elles purement et simplement crapuleuses (tous les moyens sont bons pour éliminer les concurrents quand les postes se font rares) ou, à l'opposé, plus noblement, s'agit-il d'une opposition irréductible entre deux philosophies des mathématiques totalement irréconciliables (par exemple, comme le veut la vulgate, *intuitionnisme* contre *formalisme*) ? Les institutions en charge de la recherche en France dysfonctionnent-elles plus en mathématiques qu'ailleurs ?

16. Cet événement, que je connais de première main puisque j'étais un des membres du jury pressenti, sera détaillé et analysé au cours de ce travail.

Mon projet est donc d'aborder cette question d'histoire contemporaine des sciences d'un point de vue philosophique. J'entends par "philosophique" un exercice de pensée contre soi même, un exercice où l'on se doit de fournir tous les éléments en notre possession qui pourraient soutenir une pensée adverse. Très bien, mais alors comment un ex-mathématicien professionnel peut-il se livrer à l'exercice philosophique lorsqu'il s'agit d'examiner une controverse *a priori* interne aux mathématiques, surtout si ce dernier a été partie prenante dans la controverse ? Il me semble que la difficulté est la suivante.

Supposons qu'à un moment donné j'ai besoin d'affirmer (ce qui sera le cas) : « Le système I.S.T. de Nelson est conservatif, i.e. tout énoncé interne à Z.F.C. démontré dans I.S.T. est démontrable dans Z.F.C. » je n'ai pas besoin de me justifier. Il s'agit d'un énoncé interne aux mathématiques pour lequel on peut me faire confiance. En revanche, quand je dis (ce que je dirai de façon un peu plus nuancée) :« c'est une ânerie de prétendre, comme le fait G. Debreu que le théorème de Brouwer entraine qu'une "économie de marché" possède un équilibre », mon affirmation n'est pas un énoncé mathématique. Elle porte un jugement de valeur (une ânerie), ce que ne font jamais les énoncés mathématiques, dans un domaine (l'économie) étranger aux mathématiques. Je dois évidemment justifier une telle affirmation, argumenter au plus près, faute de quoi je tomberais dans la polémique, ce que je ne souhaite pas. Dans l'exemple que je viens de produire faire la distinction entre ce qui appartient au discours des mathématiques et ce qui n'en fait pas partie est facile à faire. Mais supposons maintenant que je dise :

> L'A.N.S. permet de démontrer l'existence d'oscillations de relaxation dans l'équation de Van der Pol singulièrement perturbée, c'est la méthode à utiliser.

La première partie de la phrase est un fait mathématique incontestable auquel j'ai ajouté une opinion qui n'est pas celle de tous les mathématiciens. Un adversaire de l'A.N.S. peut soutenir avec raison qu'il existe d'autres méthodes, ce qui est un fait, qu'il juge plus pertinentes, ce qui est à son tour une opinion. J'ai compétence pour affirmer la première partie de la phrase, je dois justifier la seconde. On voit donc que dans le travail d'analyse que je me propose d'entreprendre il faudra qu'en permanence le lecteur sache "qui est en train de parler" : le mathématicien ou l'apprenti philosophe ? Pour cela le plus simple est encore de donner des noms à "qui est en train de parler" et de recourir à des dialogues à l'intérieur d'une fiction littéraire.

Le procédé qui consiste à utiliser une fiction littéraire et des dialogues pour aborder des questions philosophiques n'est certes pas original. Il remonte au moins

à Platon. Plus près de nous Diderot en a largement usé et, dans le champ de l'épistémologie des mathématiques qui nous intéresse ici, Lakatos est célèbre pour son *Preuves et réfutations* qui met en scène l'histoire de la formule d'Euler-Poincaré sous la forme d'un dialogue socratique. Il existe d'innombrables autres exemples et il est inutile que je défende plus avant ce style d'exposition.

Le corps de mon travail se présente donc comme une fiction littéraire sous la forme du mémoire d'une thèse de philosophie préparée à l'université imaginaire de Maripasoula. Un apprenti philosophe, Luc Balderoy, enquête sur les évènements rapportés plus haut et, pour les besoins de son enquête dialogue avec le mathématicien Paul Duchemin. Pourquoi une telle mise en abîme ? Elle a, pour moi, l'immense avantage de mettre en scène dans la personne du jeune Balderoy mes insuffisances philosophiques. Ainsi, lorsqu'il sera un peu court, c'est au personnage qu'il faudra adresser les reproches et juger si son ignorance est pardonnable dans le contexte qui est le sien.

Le mémoire porte donc sur la dispute à propos de l'A.N.S..

— Le thésard, *Luc Balderoy*, n'est pas un mathématicien, mais sa formation de base n'est pas non plus la philosophie. Au départ il est biologiste, plus précisément spécialiste d'écologie théorique et de dynamique des populations. Il est reconverti à la philosophie et s'intéresse à la question de la production ou, si l'on préfère, de l'émergence des idées scientifiques. Sans être partisan d'un relativisme radical, qui ne verrait pas plus d'objectivité dans le discours scientifique que dans n'importe quel autre discours sur le monde, poétique, politique ou religieux, il attache une grande importance au contexte social dans lequel travaillent les savants. S'il n'est pas mathématicien ses activités scientifiques antérieures l'ont familiarisé avec les mathématiques, assez élémentaires, qui interviennent en écologie théorique. N'ayant pas la formation de mastère en philosophie il a obtenu son inscription en thèse grâce à des règles d'équivalence.

— Son directeur de Thèse, *Elysée del Braucoly*, qui interviendra assez peu est passablement anarchiste. On a du mal à imaginer un directeur de thèse de cet acabit. Les conseils qu'il prodigue à son élève ne l'aideront certainement pas à trouver un poste de maitre de conférence mais pour un personnage de fiction comme l'est Balderoy ce n'est évidemment pas très important.

— Balderoy conçoit son travail comme une enquête sur un évènement interne à la communauté mathématique française. Il considère, il expliquera pourquoi, qu'il a besoin de comprendre ce qu'il signifie du point de vue des

mathématiciens. N'étant pas mathématicien et n'ayant pas le temps matériel nécessaire pour acquérir les compétences requises il n'a d'autre solution que d'interroger des mathématiciens. Il le fera à travers des textes et surtout en dialoguant avec un mathématicien particulier. Ce sera le mathématicien *Paul Duchemin*. Pour qu'il présente un intérêt pour Balderoy il fallait qu'il connaisse l'A.N.S. : ce sera le cas puisqu'il a collaboré à quelques publications utilisant la méthode, mais il ne sera pas pour autant un défenseur inconditionnel de la pratique des infinitésimaux. Sur cette question il est tout à fait modéré et je me suis attaché à ne lui faire tenir, lorsqu'il est question de mathématiques, que des propos qui ne pourraient jamais être violemment récusés par un autre mathématicien. Je crois même pouvoir affirmer que la plupart du temps son point de vue est très consensuel. Mais modéré ne veut pas dire mou et il n'hésite pas à exprimer son opinion, souvent négative, sur les institutions et leur fonctionnement.

La « thèse de Balderoy » est une fiction qui, comme telle, n'expose que les *thèses de Balderoy*. A elle seule elle ne peut constituer *ma* thèse. En effet, en tant qu'auteur de la « thèse de Balderoy » je ne suis pas tenu d'approuver les opinions de mes personnages mais le jury qui a la charge de juger mon travail doit savoir quelles sont *mes* thèses et comment je les soutiens. Sur deux points au moins je me distingue notablement de Balderoy. Balderoy est jeune et enthousiaste, il a le droit de prendre le risque d'opinions peut être insuffisamment étayées, mais moi, qui suis sensiblement plus âgé, je dois être plus circonspect. C'est pourquoi je serai conduit à reprendre quelques points soulevés par Balderoy, à les étendre et à les nuancer dans une courte "postface à la Thèse de Balderoy".

D'autre part ni Balderoy, par incompétence, ni Duchemin, en raison du rôle que je lui ai assigné, ne peuvent exprimer mes positions sur diverses questions concernant la nature des mathématiques où, pour le coup, je n'ai pas l'impression que mon point de vue soit largement partagé. En effet, d'un côté, comme presque tous les mathématiciens, je suis largement platonicien en ce sens que, quand je fais des mathématiques, je crois dur comme fer que les objets que j'étudie (dans mon cas des solutions d'équations différentielles) *existent* et que je *découvre* leurs propriétés. Mais, d'autre part et cette fois contrairement à beaucoup, je ne crois pas qu'il y ait la moindre parcelle de vérité dans les mathématiques ce qui fait de moi un *formaliste* pour qui les mathématiques *ne sont que des démonstrations* écrites qui ne disent rien d'autre que tel ou tel assemblage de signes est valide ou non ; pour le formaliste les signes mathématiques ne dénotent rien. Il ne m'a pas échappé qu'il y avait quelques chose d'un peu contradictoire à être à la fois plato-

nicien et formaliste ou, si l'on préfère, être à la fois réaliste et non réaliste. C'est pourquoi j'ai pendant longtemps caché honteusement cet aspect irrationnel de ma vision des mathématiques jusqu'à ce que je découvre que le *fictionnalisme* est une doctrine philosophique respectable et que je suis *fictionnaliste* sans le savoir. Il existe même un *fictionnalisme mathématique* défendu par des auteurs anglo-saxons.

Mais je n'en dis pas plus ici pour ne pas biaiser la lecture du mémoire de thèse de Balderoy qui n'est pas une thèse sur la nature des mathématiques mais une thèse en histoire des idées.

Le mémoire de Balderoy est présenté comme un document séparé sous une couverture en attente de la composition du jury. Seul figure le nom du directeur de thèse, del Braucoly. En effet je ne veux pas préjuger de la possibilité de réunir un jury sur la base de ce manuscrit. Dans ses remerciements Balderoy anticipe en remerciant collectivement son jury. On peut penser que s'il va jusqu'au bout de son entreprise il remplacera cette phrase par des remerciements individualisés.

Deuxième partie

Thèse de Balderoy

Voir document annexé

Troisième partie

Postface

Postface
Retour sur la "thèse de Balderoy"

Quelque soin que l'on apporte à rendre un discours objectif il contient forcément une part de la subjectivité de son auteur. Le manuscrit "thèse de Balderoy" n'échappe pas à ce constat. En raison des thèmes abordés il est clair que ma vision des mathématiques en a influencé l'écriture. Quelle est donc ma "vision des mathématiques" ?

C'est ce que j'aborde dans un premier chapitre.

Pour éviter tout malentendu j'insiste sur le mot "vision". Je n'ai pas dit ma "philosophie des mathématiques" ce qui m'aurait obligé à me situer dans les grands courants philosophiques et à veiller à la cohérence de mes thèses. Une "vision" est quelque chose de très différent, à la fois beaucoup plus superficiel et beaucoup plus profond. Plus superficiel : c'est un ensemble d'images qui s'imposent à l'esprit à un moment particulier, susceptibles de disparaitre à tout moment au profit d'autres et éventuellement contradictoires. Plus profond en ce sens que, si le mathématicien peut se passer d'une philosophie des mathématiques, que cela lui plaise ou non, il a une "vision" qui à chaque instant, consciemment ou non, oriente son travail mathématique.

Identifier, puis exposer sa vision des mathématiques c'est, en quelque sorte, faire une tentative d'(auto)analyse freudienne de son inconscient mathématique. Le lecteur qui pense avoir bien cerné ma personnalité mathématique, ou qui se moque de mes motivations inconscientes, peut sans dommage se dispenser de la lecture du premier chapitre de cette postface, la suite en est indépendante.

Le second chapitre est un retour critique sur les thèses de Balderoy. Les thèses défendues par mon apprenti philosophe sont un peu naïves et manquent parfois de fondement. Il me semble qu'il peut difficilement en être autrement dans un travail de trois ans. Est-ce suffisant pour constituer une thèse de philosophie ? Ce n'est pas à moi d'en juger mais à son Jury. En revanche, moi, j'ai plus de recul que lui et donc des opinions plus nuancées. Mais je n'ai pas jugé utile de les lui donner. En effet sa thèse, parce qu'elle est un peu simpliste, a le mérite d'être claire. Elle affirme que, au delà des questions personnelles ou philosophiques, la cause profonde de la "non-dispute" se trouve dans une éthique un peu relâchée de la communauté mathématique française à un moment donné. Nous allons voir comment nuancer ce point de vue. Ce second et dernier chapitre peut donc être

considéré comme la réponse que Balderoy ferait aux critiques de son jury. Mais il ne m'échappe pas que je suis un jury particulièrement bienveillant.

Enfin, j'ai écrit une petite conclusion qui résume ces deux chapitres. J'ai essayé de la rendre lisible à quiconque n'aurait pas eu le courage ou le temps de lire toute la postface. Mais je peux aussi bien conseiller à tout le monde de la lire tout de suite ; on pourra s'en satisfaire ou bien lire ensuite les deux chapitres en ayant à l'avance une petite idée de là où je veux en venir.

Chapitre 1

Une vision des mathématiques

Sommaire

1.1 Être fictionnaliste sans le savoir. 24

1.1.1 Le Sphinx et l'automaticien. 26

1.1.2 Ce que dit la théorie mathématique (élémentaire) des systèmes linéaires. 34

1.1.3 Une interprétation de la fable du Sphinx et de l'automaticien. 40

1.2 Une boutade de V. Arnold 42

1.2.1 Un dialogue entre mathématiciens et physiciens 46

1.2.2 La déduction mathématique 50

1.3 Le cahier des charges de la physique 65

1.3.1 Clarifier les observations empiriques. 65

1.3.2 La difficulté à parler du mouvement. 68

1.3.3 La géométrie non commutative 69

1.4 Les mathématiques de l'ingénieur 71

1.4.1 Les moteurs de la géométrie 71

1.4.2 Le régulateur de Watt et la stabilité des systèmes. . . . 76

1.4.3 La théorie du contrôle et la géométrie différentielle . . 78

1.5 Deux autres visions des mathématiques 81

1.5.1 Jean-Louis Krivine 81

1.5.2 Frédéric Patras 83

1.6 Les mathématiques : une "indiscipline" ? 85

1.1 Être fictionnaliste sans le savoir.

En travaillant sur le "roman mathématique" je ne pouvais pas manquer de lancer le mot "fiction" sur Google et de fil en aiguille tomber sur *fictionnalisme*. A ma grande surprise j'ai découvert que le fictionnalisme est une doctrine philosophique respectable et que je suis fictionnaliste sans le savoir ! Cela étant dit c'est avec beaucoup de mauvaise conscience que je livre cette section au lecteur.

Pour commencer, du *fictionnalisme* que je viens de découvrir je n'ai qu'une connaissance tout à fait superficielle que je décris tout de suite en quelques lignes. Lorsque l'on travaille sur internet avec ce mot clef on voit apparaitre des noms récents de la philosophie anglo-saxonne comme P. Benacerraf (1931-) et son élève G. Rosen (1962 -) mais aussi des noms plus anciens comme celui de H. Vaihinger (1852-1933). Voici ce que j'en ai retiré. Le *fictionnalisme* est la doctrine ainsi décrite par le résumé de l'article "Fictionalism" de la "Stanford Encyclopedia of Philosophy" :

> Fictionalism about a region of discourse can provisionally be characterized as the view that claims made within that discourse are not best seen as aiming at literal truth but are better regarded as a sort of 'fiction'. As we will see, this first characterization of fictionalism is in several ways rough. But it is a useful point of departure.

Dans *Une métaphysique fictionnaliste : De Vaihinger à Whitehead*[17], Bogdan Rusu décrit plus précisément la position de Vaihinger :

> 1. Dans ses activités scientifiques l'homme utilise de facto des fictions (des constructions idéelles fausses ou auto-contradictoires).
> 2. Les fictions sont adoptées et utilisées en raison de leur utilité pour divers buts pratiques.
> 3. Le fait que les fictions soient utiles ou fécondes n'implique pas qu'elles soient vraies ; la vérité diffère de l'utilité.
> 4. L'usage des fictions conduit ou peut conduire (en science) à la connaissance de la réalité.

Toujours en utilisant internet j'ai constaté qu'il existe un fictionalisme mathématique[18] mais je n'ai pas persévéré dans cette direction parce que très vite les

17. Alliage, n° 65 - 2009 ; [68]

18. voir l'article de Mark Balaguer *Fictionalism in the Philosophy of Mathematics*, "Stanford Encyclopedia of Philosophy" [4]
`https://plato.stanford.edu/entries/fictionalism-mathematics/`.

articles sont techniques. La lecture du livre de Vaihinger *La Philosophie du comme si* [19], de l'article de l'encyclopédie et de celui de B. Rusu m'a semblée suffisante.

Ma seconde raison de mauvaise conscience est que ce que je vais dire a déjà été dit pour l'essentiel par J. Harthong dans un petit essai lumineux de quinze pages, *La dialectique de l'objectivité et du sens* [20]. Harthong y soutient que la science ne peut progresser que sur deux pieds : D'une part l'observation froide et sans état d'âme des *faits de la nature*, de l'autre, la nécessité pour l'esprit humain de leur donner un *sens*. La découverte du "comment" des choses ne pouvant se faire efficacement que dans le cadre d'une "fiction", échafaudage provisoire mais nécessaire à l'esprit pour avancer. Je ne peux que conseiller au lecteur de lire cet article. Il pourra ainsi apprécier la lourdeur et la confusion avec avec lesquelles je paraphrase un texte clair et vigoureux.

Mon excuse est de saisir ce prétexte pour tenter de vulgariser auprès d'un plus large public un chapitre peu connu de la culture de l'ingénieur automaticien : la *théorie de la réalisation*. Tous les philosophes des sciences savent très bien, au moins depuis Duhem, que le système de Copernic n'est pas plus "vrai" que celui de Ptolémée en ce sens que tous deux "sauvent les apparences". Ils se souviennent également que le cours de physique du lycée leur a enseigné que deux objets aussi différents qu'une masse suspendue par un ressort et un circuit électrique "self-capacité-résistance" ont le même comportement dynamique (décrit par une équation différentielle du second ordre dont les paramètres et les variables ont une interprétation différente) et donc que du simple comportement dynamique d'une variable il n'est pas possible de déterminer le mécanisme qui l'a produit et, inversement, suivant les variables choisies, l'expression mathématique du même phénomène peut sembler très différente. En revanche il est beaucoup moins connu qu'il existe une théorie, enseignée dans de nombreuses écoles d'ingénieurs, qui systématise ces observations.

Dans les cours d'automatique [21], on enseigne la *théorie de la réalisation* qui

19. préface et traduction de Christophe Bouriau, Philosophia Scientiæ, Kimé, (2013) ; [75]

20. dans *De la science à la philosophie, hommage à Jean Largeault*, ouvrage collectif édité chez l'Harmattan, Paris, 2002, sous la direction de Miguel Espinoza, collection "Ouverture philosophique". ISBN : 2-7475-1876-0) ; [28]

21. L'automatique est la discipline qui s'occupe de tout ce qui touche à la conduite des systèmes artificiels complexes ce qui inclut la connaissance :

— des *capteurs* et du *traitement du signal qu'ils produisent*,

— des dispositifs de "manipulation" des forces (*pneumatique, hydraulique*$\cdots$),

— et de techniques mathématiques spécifiques.

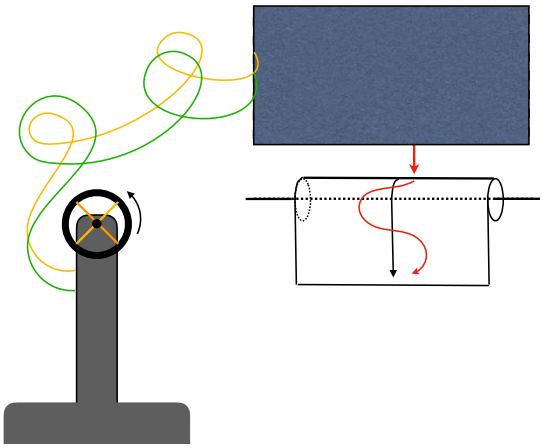

FIGURE 1.1 – Le jeu du Sphinx

est très largement utilisée dans la conception et la fabrication des objets techniques qui nous entourent. C'est une théorie mathématique pas particulièrement difficile (elle utilise le concept d'équation différentielle et un peu de techniques d'algèbre linéaire) mais dont la formalisation, sinon les idées, est assez récente (les années cinquante-soixante). J'essaye de l'expliquer de la façon la moins technique possible mais il est à craindre que cela reste un peu obscur pour qui n'a pas de (ou a oublié sa) formation mathématique. Je le fais parce que je trouve dommage qu'elle soit si peu connue de ceux qui réfléchissent à l'usage des mathématiques dans les sciences et qui se réfèrent toujours à la physique et aussi parce que je crois qu'elle est pour beaucoup dans ma vision des mathématiques et de leur place dans les sciences.

1.1.1 Le Sphinx et l'automaticien.

Le dispositif du Sphinx et sa mise en équation. Dans la petite fable qui suit deux personnages s'affrontent, le Sphinx qui, comme le veut la tradition, pose des énigmes et Œdipe qui tente de les résoudre. Le Sphinx connait bien la physique du XIX ème siècle [22] et est capable de bricoler des dispositifs mécaniques assez complexes ; Œdipe, lui, est assez bon mathématicien, plus précisément un bon

22. C'est surprenant pour un personnage de l'antiquité égyptienne, mais le Sphinx n'est pas un personnage ordinaire.

automaticien du XXème siècle [23].

Le Sphinx a construit un dispositif matériel (nous verrons lequel) qu'il cache à Œdipe dans une "boite" (noire) ; la boite est reliée par des fils électriques à un volant extérieur qu'Œdipe peut tourner à sa guise dans le sens direct ou rétrograde et cette action a pour conséquence l'inscription d'une courbe par un stylet sur un papier déroulant (voir figure 1.1). Œdipe a le droit de manipuler son volant, comme il l'entend, autant de fois et pendant autant de temps qu'il le désire. Il réalise ainsi des "expériences" à partir desquelles le Sphinx lui demande de déduire quel est le mécanisme contenu dans la "boite".

Ce mécanisme est décrit sur la figure 1.2. Dans la "boite" (le rectangle en pointillé) on trouve une masse m maintenue entre deux plaques métalliques (les segments verticaux rouges). Cette masse est une masse métallique qui possède une charge électrique E. Les plaques métalliques constituent un condensateur soumis à un potentiel électrique par un dispositif (non représenté) tel que le champ électrique u résultant puisse être varié au gré d'un manipulateur (en tournant un volant). Lorsque le champ électrique varie au cours du temps, sous l'effet de la force exercée par le champ, la masse m va osciller et l'oscillation est inscrite par un stylet sur un enregistreur déroulant. Une "expérience" consiste à :

— partir de l'équilibre avec $u = 0$,

— à faire varier au cours du temps le champ électrique selon une loi dite "fonction d'entrée" $t \mapsto u(t)$,

— à observer le résultat.

Donc, si nous notons $y(t)$ l'écart du stylet par rapport à la position d'équilibre, nous avons un dispositif matériel qui à une "fonction d'entrée" $(t \mapsto u(t))$ fait correspondre une fonction dite de "sortie" $(t \mapsto y(t))$ (voir figure 1.3).

Nous mettons en équation ce dispositif à l'aide des lois bien connues de la physique. Pour cela nous introduisons les variables x_1 pour l'écart à l'équilibre de la masse m et x_2 pour sa vitesse :

$$x_2 = \frac{dx_1}{dt}$$

Comme y est l'écart du stylet par rapport à la position d'équilibre nous avons : $y = x_1$. Les lois de la mécanique et de l'électrostatique nous disent que :

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = m\frac{dx_2}{dt} = -kx_1 - rx_2 + Eu \tag{1}$$

23. Voir note 22

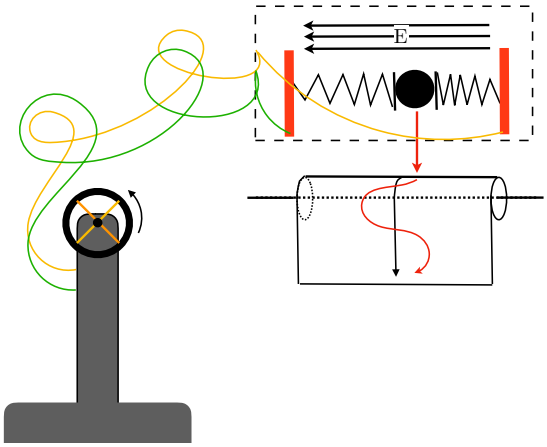

FIGURE 1.2 – La ”mécanique” du Sphinx

où k est la ”raideur” du ressort et r les forces de frottement. Le lecteur qui possède un baccalauréat scientifique reconnait ce qu'on appelle l'équation de l'oscillateur harmonique forcé. Cette équation *linéaire* est valide uniquement pour des petites valeurs de x_1 et x_2 (ce que nous supposerons). Ceci peut (doit !) s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{r}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{E}{m} \end{pmatrix} u \\ y &= (1,0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

%————

Les *matrices* ont été inventées dans la seconde moitié du XIXème siècle. Ce sont des tableaux de nombres comme par exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

pour lesquels on définit des opérations de “somme ” et de “produit ”; ainsi le “produit ” de A par B est-il :

$$A\,B = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Peu nous importe ici la connaissance de ces règles de manipulation des matrices qui sont enseignées au début de la licence de mathématiques. J'ai dit que le "système *doit* s'écrire". En effet les notations matricielles sont beaucoup plus qu'un jeu d'écriture. Elle permettent, par leur concision de "visualiser " des propriétés de structure des systèmes qui autrement disparaitraient sous l'abondance des notations.
%————-

Nous allons supposer que les forces de frottement ne sont pas nulles, ce qui fait qu'entre deux expériences la masse retourne au repos, mais assez faibles pour que leur effet puisse être négligé devant k et E au cours d'une expérience. Nous supposons également que les unités ont été choisies de manière à ce que les constantes soient toutes égales à 1. Nous avons donc le modèle mathématique ci-dessous dont nous supposons qu'il reproduit la réalité avec une précision très supérieure aux instruments de mesure disponibles, donc de façon parfaite. C'est le *modèle du sphinx.* :

$$\Sigma_{Sphinx} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ \\ y & = & (1,0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{3}$$

Le système d'équation (3) est donc un "dispositif mathématique" capable de *prédire* pour un $(t \mapsto u(t))$ donné quel sera le comportement de $(t \mapsto y(t))$ à la sortie de la boite, par des calculs à la main si $(t \mapsto u(t))$ est simple, à l'aide d'un ordinateur si $(t \mapsto u(t))$ est trop compliquée.

Les questions du Sphinx. Le Sphinx tient à Œdipe le discours suivant :

Mon cher Œdipe, tu vois le système devant toi. Si tu tournes le volant tu verra, en réponse, le stylet s'agiter sous l'effet d'un mécanisme particulier. Je te pose deux défis :

1. Je te proposerai une loi $t \mapsto u(t)$ de manipulation du volant, tu devras *prédire* le comportement du stylet.
2. Je te demanderai ensuite de me dire quelle est le système différentiel d'ordre 2, tu vois je t'aide un peu, qui modélise le dispositif.

Je sais que tu es bon mathématicien, je t'autorise à utiliser toutes les théories que tu voudra et à faire usage d'un ordinateur, si nécessaire. Bonne chance !

Donc le Sphinx demande à Œdipe de "deviner" quelles sont les équations (3).

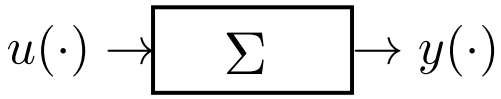

FIGURE 1.3 – Système *entrée-sortie*

Le travail d'Œdipe Œdipe se remémore ses cours d'ingénieur. Il voit qu'il est en présence de ce qu'on lui a appris être un *système "entrée-sortie"*, I.O.S. en abrégé (et en anglais [24]). Un dispositif matériel qui en "réponse" à un "signal d'entrée" $(t \mapsto u(t))$ fournit un "signal de sortie" appelé aussi "réponse" $(t \mapsto y(t))$ qu'il note :

$$(t \mapsto u(t)) \quad \rightarrow \quad \big(t \mapsto \Sigma_{(t \mapsto u(t))}(t)\big) \tag{4}$$

où plus simplement en notant $(t \mapsto f(t)) = f(\cdot)$:

$$u(\cdot) \mapsto \Sigma_{u(\cdot)}(\cdot) \tag{5}$$

%————————-
Les notations ci-dessus doivent paraitre assez obscures. Ce sont des notations de mathématicien destinées à chasser tout ambiguïté. Il s'agit d'exprimer qu'un signal temporel $(t \mapsto u(t))$ produit ($\mapsto$) un autre signal temporel $\big(t \mapsto \Sigma_{(t \mapsto u(t))}(t)\big)$.
Dans le formalisme des ingénieurs un I.O.S. est schématisé par le dessin de la figure 1.3 qui, lui, est assez parlant.
%————————-

Quelques expériences montrent à Œdipe que le système réagit de façon linéaire i.e.

$$\Sigma_{\lambda_1 u_1(\cdot)+\lambda_2 u_2(\cdot)} = \lambda_1 \Sigma_{u_1(\cdot)} + \lambda_2 \Sigma_{u_2(\cdot)}$$

et il est content car il sait que dans ce cas il dispose d'outils *d'identification* qui vont lui permettre de répondre à la première question. Il fait un grand nombre d'expériences et à l'aide des techniques qui lui ont été enseignées il détermine le système :

24. I.O.S. = Input-Output-System.

$$\Sigma_{OEdipe} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) \\ y & = & 2\xi_1 - \xi_2 \end{array} \right. \tag{6}$$

dont il constate que le pouvoir prédictif est parfait. Il écrit sur son ordinateur un petit programme qui, lorsqu'on lui donne une fonction $u(\cdot)$ en "entrée" prévoit la "sortie" produite par le système (6).

Si l'on oublie le travail mathématique, on peut considérer que Œdipe a construit un dispositif matériel : l'ordinateur et son programme, qui produit exactement le même comportement "entrée-sortie" que le dispositif mécanique du Sphinx [25].

Le dialogue entre Œdipe et le Sphinx Œdipe retourne voir le Sphinx.

— Œ : Sphinx je suis prêt à t'affronter. Vas-y, donne moi une fonction d'entrée.

— S : Voici $u(.)$

Œdipe fait fonctionner son ordinateur et propose sa "sortie" comme prédiction. Le Sphinx fait fonctionner sa machine. On compare. La prédiction est parfaite.

— S : Tu as eu de la chance. Voici un autre $u(.)$

— Œ : Comme tu voudra...

On recommence plusieurs fois l'expérience avec succès.

— S : Bravo. Tu as dont bien trouvé le système d'équations qui commande à ma mécanique. Quel est-il ?

— Œ : J'ai pris le système :

$$\Sigma_{OEdipe} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u(t) \\ y & = & 2\xi_1 - \xi_2 \end{array} \right. \tag{7}$$

25. Ici on peut faire une petite remarque. La *machine de Turing* est un dispositif idéal qui à une suite donnée 0010011011111001...10 de 0 et de 1 *entrée* est capable de donner *en sortie* une autre suite de 0 et de 1. C'est un concept très proche (sinon le même) de celui du système *entrée-sortie* des automaticiens. Mais l'objectif est ici différent. Il ne s'agit pas de reproduire des correspondances entre entrées et sorties mais de donner une définition formelle de ce que veut dire "calculer".

— S : Ce n'est pas la bonne réponse ! Je ne sais pas par quel don de divination tu es capable de prédire la sortie correctement mais je t'avais demandé quelles sont les équations. Tu ne les a pas trouvées, tu vas donc mourir.

— Œ : Eh ! Attend un instant Sphinx ! Tu ne peux pas me faire mourir ainsi. Tu sais bien qu'il y a une infinité de systèmes possibles qui permettent une prédiction parfaite. J'en ai choisi un particulier parce qu'il le fallait pour les simulations. Le tien se déduit certainement du mien par un changement de variable linéaire.

— S : (Ébranlé par l'assurance d' Œdipe) Qu'est ce que c'est que cette histoire. Je ne suis qu'un pauvre physicien constructeur de machines du XIXème siècle. N'essaye pas de me rouler avec des trucs de mathématiques modernes que je ne comprendrai pas. Explique moi clairement. Si tu me convainc je te ferai grâce.

— Œ : Bon, j'imagine que tu as construit une machine, mécanique ou électrique ou les deux à la fois, ou tout autre dispositif matériel qui réalise cette relation "entrée-sortie" que tu m'as demandée de deviner. Les lois de la physique, que tu connais bien, t'ont donc permis de déterminer un système de trois matrices :

  — Une matrice 2×2 : A (en effet tu m'as dit que ton système est d'ordre 2),

  — Une matrice 2×1 : B,

  — Une matrice 1×2 : C,

  telles que le système :

$$\Sigma_{A,B,C} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + Bu(t) \\ y & = & C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{8}$$

  reproduit fidèlement le comportement "entrée-sortie" du système matériel que tu as imaginé. Comme je sais que tu es scrupuleux tu as certainement fait quelques tests de vérification. Une erreur est toujours possible. Exact ?

— S : Exact. Mais ne va pas trop vite avec tes matrices. Ce sont des techniques de calcul qui viennent tout juste de sortir et que je ne maîtrise pas très bien.

— Œ : D'accord, je vais doucement. Prends une matrice inversible P et considère les variables :

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Le système :

$$\Sigma_{PAP^{-1},PB,CP^{-1}} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} & = & PAP^{-1}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + PBu(t) \\ y & = & CP^{-1}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \end{array} \right. \tag{10}$$

a exactement le même comportement "entrée-sortie" que ton système. En d'autres termes tous les triples de matrices $(PAP^{-1}\ ,\ PB\ ,\ CP^{-1})$ définissent exactement le même comportement "entrée-sortie". Si tu me donnes ton triple, je te donnerai la matrice P qui donne mon système à partir du tien.

— Je suis ébranlé par ton argument. Ainsi donc tu prétends qu'il existe une matrice P qui permet de passer de mon système au tien ? Ainsi il y aurait plusieurs systèmes différents d'équations qui produisent le même comportement et l'on pourrait passer des uns aux autres par de simples changements de variables !

— Œ : Absolument, c'est le théorème d'isomorphie des réalisations minimales.

— S : Voici mon triple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (1\ ,\ 0) \tag{11}$$

Sauras-tu le transformer en ton triple ?

Après quelques petites recherches Œdipe propose une matrice....

— Œ : La matrice P est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Alors le Sphinx se livre aux vérification :

— Calcul de l'inverse de P

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

— Calcul de PAP^{-1}

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

— Calcul de PB

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

— Calcul de CP^{-1}

$$(1,0) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = (2,-1) \tag{16}$$

— Œ : Tu vois Sphinx, ce sont bien mes trois matrices. Il y a autant de modèles que de matrices inversibles P.

— S : J'ai compris Œdipe. *Une infinité de modèles ont exactement le même comportement "entrée-sortie"*. Le mien était construit sans référence au comportement "entrée-sortie", exclusivement sur la base des lois de la physique de mon dispositif. Inversement la connaissance du comportement "entrée-sortie" sortie permet de déterminer un modèle prédictif correct mais elle ne permet pas de retrouver le dispositif de départ. Il est est bien vrai que sur la simple information qu'elle donne l'heure avec précision on ne peut décider quel est le mécanisme d'une montre ; ce peut être une montre à ressort ou une montre électrique. Je n'avais pas pensé à ça. J'aurais dû y penser plus tôt. Pour te récompenser tu auras la vie sauve.

1.1.2 Ce que dit la théorie mathématique (élémentaire) des systèmes linéaires.

Le lecteur qui n'est pas rebuté par l'algèbre élémentaire sera peut être intéressé par ce paragraphe mais il n'est pas indispensable de le lire pour aborder comme je le fais plus loin les enseignements de la fable du Sphinx et de l'automaticien.

Le lecteur est évidemment familier avec le concept mathématique de fonction : Une fonction est un "mécanisme" (un procédé, une procédure) qui permet d'associer à tout nombre x un nombre $f(x))$ bien déterminé, une fois pour toutes. Par exemple la fonction que l'on note $(x \mapsto y = x^2)$ est la "procédure" qui consiste à multiplier x par lui même. La fonction $(x \mapsto y = 3.5(x+1)+7)$ est la "procédure" qui consiste en :

1. Ajourer 1 à x et noter z le résultat,
2. multiplier z par 3.5,
3. ajouter 7.

On notera tout de suite que la procédure :

1. multiplier x par 3.5,
2. ajouter 3.5,
3. ajouter 7.

est différente de la précédente mais donne le même résultat. C'est un premier exemple simple où des "mécanismes" différents donnent le même résultat. Mais il y a des procédures bien plus radicalement différentes qui donnent le même résultat. Par exemple la fonctions trigonométrique $(x \mapsto y = \sin x)$ peut être définie de façon géométrique comme l'ordonnée du point du cercle trigonométrique correspondant à l'angle x mais aussi comme la somme de la série entière :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

Ainsi des "procédures" très différentes comme *mesurer avec soin sur un dessin* ou *ajouter des nombres en grande quantité* comme dans le calcul de la somme ci-dessus peuvent donner des résultats identiques. Ce qu'on appelle "fonction" ce n'est pas le mécanisme mais le résultat. Ainsi, dans une "fonction" on oublie le mécanisme pour ne garder que le fait qu'à toute valeur x de la variable correspond une *unique* valeur. À chaque procédure on peut associer un unique dessin : son graphe. Mais réciproquement à un graphe correspondent une ou plusieurs procédures. Finalement, dans la théorie des ensembles, dans la notion de fonction on oublie toute idée de procédure ou de mécanisme et on ne garde que le graphe. Une "fonction" de X dans Y est une partie G de $X \times Y$ telle que $\forall x \in X\ \exists y \in Y\ :\ (x,y) \in G$, y unique.

C'est cet oubli (volontaire) de s'intéresser aux "procédures " qui fait que les mathématiques dérivées de la théorie des ensembles sont inaptes à formaliser les concepts de l'informatique qui pour le faire doit s'appuyer sur des systèmes formels d'un genre différent.

La nature fournit de nombreux exemples de correspondances entre grandeurs qu'on cherche à représenter par des fonctions (dans ce cas on dit des lois) :

— Le phénomène de dilatation fait qu'à une température T correspond la longueur d'une tige métallique $l(T)$.

— Dans une réaction enzymatique à une concentration de substrat s correspond une vitesse de réaction $\mu(s)$.

— Dans une pompe à une pression P correspond un volume $V(p)$

Pratiquement il n'est pas possible de consigner T, μ ou V pour *toutes* les valeurs de la variable T, s ou P ; on ne peut faire qu'un nombre fini d'expériences ! L'expérimentation fournit un "nuage " de points par lesquels on fait passer un graphe. Par un nombre fini de points on peut faire passer une infinité de courbes différentes, donc il existe une infinité de fonctions susceptibles de coïncider avec un nombre fini de points expérimentaux. C'est pourquoi on fixera, *a priori* une classe de fonctions - par exemple un polynôme de degré donné - dont on choisira les paramètres pour ajuster au mieux les données expérimentales. Si nous appelons "théorie" une fonction qui ajuste un nuage de points nous avons ici une illustration mathématique banale de l'idée de la thèse de "sous détermination des théories" de Quine : l'ajout de points supplémentaires peut conduire à une modification de la fonction.

J'ai fait ce petit rappel de faits très élémentaires et bien connus pour mettre en évidence ce que la notion de "système" apporte d'original. On peut n'y voir qu'une sorte de généralisation de la notion de fonction : ce n'est plus à un nombre (ou à plusieurs) qu'on fait correspondre un autre nombre mais à une fonction $U(\cdot)$ (l'entrée : un signal temporel) une autre fonction $Y(\cdot)$ (la sortie : un autre signal temporel). En réalité il s'agit de beaucoup plus qu'une simple généralisation du concept de fonction. La théorie des systèmes distingue :

1. Les variables d'entrée $U = (u_1, \cdots, u_p)$ au nombre de p (p = 1 dans la fable) qui doivent être pensées comme des entités matérielles connues et manipulables, auxquelles sont associés des "nombres" (l'angle que fait le volant de la fable par rapport à la position neutre).
2. Les variables de sortie Y qui sont des grandeurs observables (la position du stylet de la fable sur le rouleau) c'est à dire des nombres associés à certaines entités matérielles (l'écart du stylet à sa position d'équilibre).
3. Des variables *intermédiaires* $X = (x_1, \cdots, x_n)$ (n = 2 dans la fable) appelées *variables d'état* qui vont permettre de définir quel type de relation doit exister entre "entrées" et "sorties".

La relation doit être dynamique. La fonction d'entrée $U(\cdot) = (t \mapsto U(t))$ doit être conçue comme une *action dans le temps* d'un expérimentateur (d'où) le choix de t pour la variable et $Y(\cdot) = (t \mapsto Y(t))$ est la *réaction* observable du système le

lien se faisant à travers les variables d'état X et le système différentiel :

$$\Sigma^{A,B,C} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dX}{dt} & = & AX + BU(t) \\ Y & = & CX \end{array} \right. \tag{17}$$

(où A B et C sont des matrices de taille ad-hoc) que l'on intègre à partir de la condition initiale 0 [26]. Un système est donc entièrement spécifié par la donnée d'un triplet de matrices :

$$A(n \times n) \quad , \quad B(n \times p) \quad , \quad C(q \times n) \tag{18}$$

auquel est associée l'application "entrée-sortie" :

$$U(\cdot) \mapsto Y(\cdot) = \Sigma^{A,B,C}_{U(\cdot)}(\cdot) \tag{19}$$

Par rapport à la notion statique de fonction $U \mapsto Y = f(U)$ qui ne fait intervenir que les grandeurs du monde accessibles à l'expérimentateur-observateur la théorie des systèmes introduit des variables d'état *qui peuvent être connues -c'est le cas du Sphinx- ou non -c'est le cas d' Œdipe- de l'expérimentateur-observateur.*

On dira que deux systèmes $\Sigma_{A,B,C}$ et $\Sigma_{A',B',C'}$ sont équivalents si :

$$\Sigma^{A,B,C}_{U(\cdot)}(\cdot) \equiv \Sigma^{A',B',C'}_{U(\cdot)}(\cdot)$$

Donc, la théorie des systèmes officialise le fait qu'une même fonction peut être produite par deux mécanismes différents et fixe *a priori* la classe des mécanismes possibles : c'est celle des systèmes différentiels. Cette théorie ne rendra donc pas compte de ce que la valeur de $\sin \pi/3$ s'obtient en mesurant soigneusement sur un cercle trigonométrique ou en calculant la somme d'une série mais son champ d'application reste cependant très vaste.

On remarquera que deux systèmes peuvent très bien être équivalents sans que le nombre des variables d'état soit le même. Il suffit pour cela de rajouter a un système dont les variables d'état sont X_1 des variables d'état X_2 *qui ne sont pas observées* et qui n'agissent pas sur X_1, soit le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dX_1}{dt} & = & A_{11}X_1 + \ 0\,X_2 + B_1U(t) \\ \dfrac{dX_2}{dt} & = & A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + B_2U(t) \\ Y & = & C_1X_1 \end{array} \right. \tag{20}$$

26. Comme le système est linéaire on peut montrer que ce choix, qui peut sembler particulier, ne diminue pas la généralité de l'étude.

Ce système a évidemment la même application “entrée-sortie ” que le système Σ_{A_{11},B_1,C_1}.

C’est un exercice de manipulation de matrices élémentaire de démontrer la proposition suivante :

Proposition 1.1.1 *Soit un triplet de matrices :*

$$A(n \times n) \quad , \quad B(n \times p) \quad , \quad C(q \times n) \tag{21}$$

et une matrice $(n \times n)$ *inversible. Les systèmes* $\Sigma^{A,B,C}$ *et* $\Sigma PAP^{-1}, PB, CP^{-1}$ *sont équivalents.*

Soit maintenant une application “entrée-sortie”

$$U(\cdot) \mapsto \Sigma_{u(\cdot)}^{\mathscr{A},\mathscr{B},\mathscr{C}}(\cdot) \tag{22}$$

On dit qu’un système équivalent à (22) est une *réalisation minimale de (22)* si la dimension n de son vecteur d’état est la plus petite possible. Le théorème de la réalisation minimale dit :

Théorème 1.1.2 *Si* $\Sigma_{A,B,C}$ *et* $\Sigma_{A',B',C'}$ *sont deux réalisations minimales alors il existe une matrice inversible P telle que :*

$$A', B', C' = PAP^{-1}, PB, CP^{-1}$$

Ce résultat a été établi dans les années 50 et 60 et est facile à démontrer (ce sont des applications de l’algèbre linéaire de base). Ils fait partie du bagage des ingénieurs automaticiens. Ils est complété par des techniques qui permettent *d’identifier* (déterminer un triplet A, B, C) une réalisation minimale à partir de la donnée de l’application “entrée-sortie” en tenant compte des imperfections des situations réelles telles que la présence de bruit sur les données.

Par exemple, quand on veut fabriquer un modèle informatique d’un système artificiel complexe comme un avion on procède ainsi :

— On détermine des variables d’entrée : position des commandes d’attitude (manche, palonnier) de configuration (volets, aérofreins) de poussée etc.

— On détermine des variables de sortie : position, vitesse, attitude, altitude etc.

Comme l’avion est un dispositif matériel qui a été construit en respectant des lois physiques connues, il est, en principe, possible en les appliquant d’en construire un modèle, comme l’a fait le Sphinx pour son dispositif. Mais ce sera extrêmement

compliqué et le nombre de variables du système sera considérable. Un modèle obtenu de cette façon s'appelle un *modèle de connaissance*.

Mais l'on peut aussi observer le comportement "entrée-sortie" de l'avion (par exemple dans une soufflerie physique ou numérique) et en déduire une *réalisation minimale* à l'aide des techniques évoquées ci-dessus. On parle alors de *modèle de comportement*.

Notons deux choses avant de terminer ce paragraphe. La première est que dans une large mesure le théorème de réalisation minimale se généralise aux systèmes non linéaires grâce à des travaux de H. Sussmann des années 1970 mais, contrairement à la théorie linéaire qui est à l'œuvre dans toutes sortes d'objets techniques [27] qui nous entourent, la théorie non linéaire n'a, pour le moment, pas d'applications pratiques ; elle n'est pas encore (à ma connaissance du moins) un outil ordinaire de l'ingénieur. La seconde est que la pertinence du concept d'"entrée-sortie" est remise en cause par plusieurs grands noms de l'automatique [28]. En effet, de nombreux exemples simples et pratiques (comme la conduite d'une grue) montrent que la dissymétrie de traitement entre l'entrée (la cause) et la sortie (l'effet) n'est pas toujours pertinente et qu'il serait mieux de voir dans les systèmes des ensembles de relations entre éléments en oubliant la causalité. Je ne sais pas si ce point de vue finira par s'imposer sur le point de vue "entrée-sortie" qui date des années 1950. La question n'est pas évidente tant il est vrai que l'idée de *causalité* à laquelle est relié le concept d'"entrée-sortie" (le *signal d'entrée* est la *cause* du *signal de sortie*) a rendu et continue à rendre d'immenses services.

Mais cela n'a pas d'importance pour ma discussion.

---

27. L'automatique, l'art de piloter les machines, est une discipline ancienne que les spécialistes s'accordent généralement à faire remonter au milieu du XIXe siècle. Elle s'est considérablement développée en raison de l'effort de guerre et de guerre froide à partir de 1940. On associe le nom de Rudolph Kalman (1930-2016) à la théorie présentée ici mais il est encore plus connu pour le "filtre de Bucy-Kalman" qui est une technique statistique pour améliorer en temps réel la précision des mesures faites sur des objets en mouvement.

28. Par exemple :

— M. Fliess, *Variations sur la notion de contrôlabilité* Journée Soc. Math France, 17 juin 2000 ; [31] `https://cel.archives-ouvertes.fr/inria-00001042/document`

— J. C. Willems, *The Behavioral Approach to Open and Interconnected Systems,* IEEE CONTROL SYSTEMS MAGAZINE, Décembre 2007, p.46-54 ; [82]

1.1.3 Une interprétation de la fable du Sphinx et de l'automaticien.

La fable du Sphinx et de l'automaticien est très concrète en ce sens qu'on peut remplacer le Sphinx par un professeur d'automatique qui fournit à un étudiant (Œdipe) un "exécutable" [29] qui produit sur un ordinateur un certain comportement "entrée-sortie" et qui lui demande de trouver un code produisant le même comportement. Mais on peut la considérer aussi (avec un peu d'humour et sans aller trop loin) comme une métaphore de l'activité scientifique. Remplaçons le Sphinx et sa machine par Dieu et le monde.

Dieu, qui sait tout, savait évidemment que l'homme ferait assez de mathématiques pour comprendre un jour le sens de l'indication :

> *Le "Monde matériel" est régi par un (très) grand système d'équations différentielles* Σ.

que plusieurs prophètes de la religion de la science nous ont transmise.

Donc, dans un premier temps les hommes se sont donné pour tâche de connaître Σ, puis, comprenant la vertu des changements de variables (ou si l'on préfère des changements de points de vue) ils ont compris qu'un tel objectif n'était pas réalisable et, retournant à Platon, ils ont réduit leur ambition à proposer des théorie qui ne font que *Sauver les apparences*, c'est à dire trouver un triplet particulier de la classe des réalisations minimales. C'est la thèse soutenue par P. Duhem dans *Sauver les apparences, sur la notion de théorie physique* [30].

Devons nous conclure que l'automaticien est un relativiste pour qui tous les modèles se valent ? Certainement pas. Le gros avantage du *modèle de connaissance* du Sphinx sur le modèle trouvé par Œdipe est que le premier est déduit des lois de la physique et que de ce fait il contient toute une culture : le modèle du Sphinx contient implicitement tout ce que la physique nous a enseigné sur l'oscillateur harmonique. Ca ne sert à rien tant qu'il s'agit de reproduire un comportement "entrée-sortie", ce qui était la devinette du Sphinx, mais ça permet d'aller bien plus loin.

Je vais illustrer ce dernier point par une histoire pratique bien réelle [31] qui ressemble beaucoup à la fable du Sphinx.

---

29. Un "exécutable" est le résultat de la compilation d'un programme. Il n'est pas possible de retourner au programme source.

30. VRIN 3003 ; [27].

31. Je la raconte de mémoire car malheureusement je n'ai pas été capable d'en retrouver des traces écrites. Je ne peux pas garantir les détails mais seulement la philosophie générale.

Un pont à l'embouchure d'un fleuve est régulièrement submergé par les eaux lors d'épisodes pluvieux importants. Pour des raisons de sécurité (fermer l'accès au pont) on désire prévoir la hauteur de la crue avec un peu d'avance à partir de pluviomètres installés en amont. L'agence d'aménagement du bassin versant du fleuve avait soumis ce problème comme un challenge à une communauté d'ingénieurs. L'agence fournissait un grand nombre de données passées de la relation entre les mesures enregistrées par les pluviomètres et la hauteur de la crue et gardait pour elle quelques enregistrements pour mesurer la qualité de prédiction des modèles proposés. Une première équipe avait utilisé un modèle numérique du bassin versant particulièrement détaillé, faisant la différence entre les zones construites où l'eau ruisselle et les zones où l'eau s'infiltre dans la terre. A l'aide d'un ordinateur puissant elle calculait dans le détail le parcours de l'eau et en déduisait la hauteur de la crue. Une autre équipe procédait simplement par identification d'un modèle de comportement. Le modèle obtenu était très simple et pouvait être mis en oeuvre avec un simple ordinateur personnel. Les deux modèles donnaient des résultats satisfaisant du point de vue de la prédiction. Le modèle de comportement était efficace mais ne donnait pas d'informations sur les raisons de la montée des eaux. Le modèle de connaissance basé sur la représentation du terrain permettait lui, par simple manipulations de paramètres, de mettre en évidence la part de responsabilité des zones commerciales et industrielles dans la hauteur des crues. Deux modèles ayant même comportement "entrée-sortie" ne sont *équivalents* que du point de vue de la définition mathématique. Pas plus.

Revenons-en au *fictionalisme*. Dans la *La Philosophie du comme si*[32] Hans Vaihinger, soutient que nous pouvons croire "dur comme fer" à des "fictions" que par ailleurs nous savons être fausses et que *cette attitude est utile*.

Pour Vaihinger le fictionalisme est présent partout comme en témoigne la table des matières de son ouvrage que je reproduis partiellement ci-dessous :

Deuxième partie. Questions spécifiques

1. La classification artificielle.
2. Autres divisions artificielles.
3. La méthode d'Adam Smith en économie politique.
4. La méthode de Bentham en science politique.
5. Les méthodes abstractives et fictionelles en physique et en psychologie.
6. La statue imaginaire de Condillac.

32. Traduction et préface de C. Bouriau, Philosophia Scientiæ, Cahier spécial 8, (2013) Editions KIMÉ ; [75]

7. L'animal hypothétique de Lotze
8. La fiction de la force.
9. La matière et le matérialisme comme idées auxiliaires.
10. Les concepts abstraits comme fictions.
11. Fictions par sommation, fictions nominales, substitutions.
12. les forces et les lois de la nature comme fictions.
13. L'atomisme comme fiction.
14. Les fictions de la physique mathématique.
15. La fiction du pur espace absolu ;
16. Surface, ligne, point etc. en tant que fictions.
17. La fiction de l'infiniment petit.
18. etc.

Voici, par exemple, ce qu'il nous dit du *point* dans son chapitre 16 :

> A tous égards, le point mathématique est un parfait exemple de « fiction véritable» de la science mathématique. Comme construction de dimension nulle, le point est une idée parfaitement contradictoire en soi, mais aussi nécessaire qu'absurde. (...) Nous opérons avec elles [les idées de point, de ligne, de surface] *comme si* des réalités leur correspondaient. (...) Celui qui est conscient de ce fait et qui , en outre, voit que certaines idées sans corrélat réel nous sont nécessaires et utiles, celui là a compris le concept véritable, scientifique de la fiction.

Si Vaihinger avait développé sa philosophie de nos jours il aurait certainement rajouté un chapitre consacré à la modélisation et à la pratique de la théorie des systèmes en automatique.

1.2 Une boutade de V. Arnold

Les mathématiques sont souvent considérées - et ce n'est pas leur manquer de respect que de le faire - comme un *outil* dont disposent les sciences pour forger leurs concepts. En effet, sans les notions mathématiques de continuité et de dérivée pas de concepts de mouvement ni de vitesse instantanée, pas de mécanique,

c'est une banalité de le dire. L'outil est puissant au point que l'on peut s'étonner du "miracle de l'efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles" [33]. Dans cette vision les mathématiques sont en position d'extériorité par rapport aux sciences ; elles sont supposées avoir un développement autonome et, comme par miracle, elles se révèlent être un outil à l'efficacité déraisonnable. C'est cette vision des mathématiques que je vais contester dans cette section.

Prenons cet autre outil puissant qu'est le microscope, en particulier dans sa version électronique incluant les accélérateurs de particules. Pose-t-on la question du "miracle de l'efficacité du microscope dans les sciences" ? Ce serait parfaitement ridicule puisqu'il a précisément été créé dans le but de voir des choses de plus en plus petites par les scientifiques eux-mêmes. Il est conçu dans le cadre des théories physiques du moment et ce qu'il nous montre doit être interprété dans le cadre de ces même théories. Ainsi les sciences passent-elles un temps considérable à créer les outils dont elles se servent, au point que dans l'affaire de la "découverte" du boson de Higgs on ne sait plus très bien ce qu'il faut admirer le plus : la prédiction théorique de son existence ou l'instrument, le LHC du CERN, qui a coûté environ 9 milliards de dollars et est servi par quelques milliers de scientifiques ? Si miracle il y a, ce n'est pas celui de l'adéquation du "microscope CERN" au désir du physicien de "voir" de plus en plus plus petit mais celui du génie humain qui a permis l'existence de tels objets [34]. Alors pourquoi cette différence de perception entre l'outil mathématique et le microscope ?

Le monde sensible se présente à notre conscience par le truchement des sens et, à partir de là, notre conscience élabore des fables sur le monde. La science

33. Allusion à la célèbre conférence prononcée par E.P. Wigner à la New York University en mai 1959, *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences*, Communication on pure and applied mathematics, vol XIII (1960)(pour une traduction française par F. Balibard : Rue Descartes 2012/2 (n° 74), P. 99-116).
L'article de Wigner annonce dans son titre les "sciences de la nature" mais en fait ne parle que de physique. Balderoy a rapporté dans son chapitre 6, *De l'usage des mathématiques*, comment J-M. Lévy-Leblond renverse la proposition en définissant la physique comme la science expérimentale où les mathématiques s'impliquent.

34. Sur le site du CERN on trouve :

> Le 4 juillet 2012, les expériences ATLAS et CMS, menées au Grand collisionneur de hadrons (LHC), ont annoncé qu'elles avaient toutes deux observé une nouvelle particule dont la masse se situait dans la région des 126 GeV. Cette particule présente des caractéristiques compatibles avec celles du boson de Higgs prédit par le Modèle standard. Le boson de Higgs, tel que le décrit ce modèle, est la manifestation la plus simple du mécanisme de Brout-Englert-Higgs. D'autres types de bosons de Higgs sont prédits par d'autres théories qui vont au-delà du Modèle standard.

essaye d'élaborer des fables de plus en plus adéquates que nous appelons théories. Pour cela, d'une part, elle améliore les performances de ses sens en créant des outils comme le microscope, d'autre part elle améliore les performances de son appareil à fabriquer des théories grâce aux mathématiques. Comme s'occuper des mécanismes de la pensée, prendre de façon réflexive son propre appareil cognitif pour en améliorer les performances comme le font les mathématiques, semble être un travail d'une autre nature que celui de l'agencement optimal de lentilles du lunetier, cela pourrait expliquer la perception particulière que nous avons de l'*outil* mathématique. Mais si nous ne considérons pas, comme c'est mon cas ici [35], l'activité de la pensée consciente comme une fonction cérébrale radicalement différente de celle de traitement du signal qu'opère la vue, il n'est pas aberrant d'aborder la question de l'usage des mathématiques comme on aborderait celle de l'utilisation des microscopes. C'est ce à quoi je vais me livrer.

Prétendre que les mathématiques ne sont pas une activité autonome indépendante de la physique à qui cette dernière serait en partie inféodée n'est pas une position répandue chez les mathématiciens mais elle n'est pas totalement originale. Ainsi le grand mathématicien V. Arnold nous dit dans un article récent [36] :

> Les mathématiques font partie de la physique. La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles. Les mathématiques, ce sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher.(···).

Cette thèse est provocatrice. L'article d'où elle est extraite est un article au ton polémique où il dénonce le style de l'enseignement mathématique en France, trop abstrait et dogmatique à son goût. Je ne sais pas dans quelle mesure il l'aurait défendue dans d'autres contextes.

Ce sont pourtant des arguments en faveur de cette thèse que je vais développer plus loin mais avant, pour bien montrer que je suis conscient de son caractère provocateur, je vais développer deux contre-arguments qui viennent tout de suite à l'esprit.

— Faire des mathématiques ou de la physique ce n'est évidemment pas la même chose et pour le voir quoi de mieux que comparer la pratique d'un mathématicien et d'un physicien lors d'une collaboration ?

— La déduction mathématique, telle que les Grecs nous l'ont léguée ne peut se réduire aux sciences de la nature. Pour discuter ce point je serai conduit

35. Je ne prétends pas, définitivement, qu'il n'y a pas de différence, entre la conscience et le traitement du signal opéré par la vue ; c'est juste un hypothèse ad-hoc.

36. Gazette des mathématiques, Société Mathématique de France, n°78, 1998 P. 19.

à examiner dans le détail ce qu'est la preuve mathématique et en quoi elle diffère de ce qui se fait dans les autre sciences.

Nous verrons que ces deux points contre la thèse d'Arnold ne sont pas si décisifs qu'ils paraissent.

%————————————————————————————-

Vocabulaire pour éviter les malentendus.

Comme le préconise Jean-Marc Lévy-Leblond dans *Physique et Mathématiques*[37], j'appelle *physique* toute science expérimentale qui élabore ses concepts en termes mathématiques. Les termes «expérimentale » et « mathématiques» sont tous deux nécessaires : l'astronomie, l'économie et l'astrologie, qui sont fortement mathématisées ne sont pas expérimentales ; les concepts de la biologie moléculaire qui est incontestablement expérimentale n'ont que peu à faire des mathématiques pour le moment. Cette définition rend compte de l'adéquation des mathématiques à la physique mais ne se prononce pas sur l'affirmation d'Arnold.

On dit "sciences physiques", "sciences économiques", "sciences humaines", "sciences biologiques", "sciences de la terre". On utilise donc le mot science pour désigner des savoirs et des activité assez différents ce qui peut poser problème. Une façon radicale de régler la question pourrait être de décréter qu'il n'est de science que physique mais je ne suivrai pas cette voie car elle sous entend que les savoirs acquis par le truchement de la déduction mathématique seraient plus «vrais» que les autres. Je prendrai donc le mot science dans une acception large, dont je ne précise pas l'étendue, qui contient la théorie de l'évolution mais qui n'ira pas jusqu'à l'astrologie.

Je ne parlerai pas de la *vérité* d'un savoir mais de son *adéquation* à son objet. L'adéquation est un terme un peu vague qui peut désigner des choses assez différentes. La mécanique quantique est adéquate en ce sens qu'elle permet de prédire de façon précise le résultat de certaines expériences ; la théorie de l'évolution est un récit qui explique de façon beaucoup plus adéquate de nombreux faits d'observation que ne le fait la lecture littérale de la Bible ; les théories psychanalytiques peuvent être bien plus adéquates que n'importe quel modèle mathématique pour comprendre le délire d'un malade sans pour autant fournir de recettes pour sa guérison. En dépit, ou plutôt à cause, de ce vague, je préfère "adéquation" à "vérité".

%————————————————————————————

37. dans *Penser les Mathématiques*, Seuil 1982 ; [47].

1.2.1 Un dialogue entre mathématiciens et physiciens

Nous allons imaginer une collaboration entre un mathématicien (appelé M.) et un physicien (appelé P.) sur une question théorique en microbiologie : Expliquer la compétition dans le chémostat [38].

Dans un premier temps M. et P. se mettent assez rapidement d'accord sur le fait que leur phénomène (un dispositif expérimental) "obéit" à un certain système d'équations différentielles, le "modèle". Dans l'élaboration du "modèle" l'action de P. est prépondérante parce qu'il domine mieux la manipulation des variables physiques (le temps, l'espace, la masse,$\cdots$) mais pas exclusive. Voici un exemple possible d'action de M..

— M. : Tu supposes un taux de croissance linéaire en fonction de la quantité de substrat. Tu tiens à cette hypothèse ?

— P. : Je voulais faire simple pour commencer, pour des petites variations c'est le cas. Pourquoi ta question ?

— M. : Parce que pour ce genre d'équation il est plus facile de montrer que les solutions existent si on suppose que le taux est une fonction bornée (ce qui n'est pas le cas des fonctions linéaires), sinon on a du mal à prouver que les solutions n'explosent pas en temps fini. Ce qu'on gagne d'un côté on le paye par des calculs plus délicats.

— P. : Mais je verrai bien en simulation si ma solution explose ou pas.

— M. : Oui mais ta simulation est de durée limitée, rien ne garanti ce qui se serait passé sur un temps plus long et un artéfact numérique peut empêcher la simulation de voir que la solution explose.

— P. : Mais c'est peu probable.

— M. : Oui mais c'est mieux d'avoir une certitude.

— P : Mais à quel prix ! Les calculs vont être épouvantables.

---

38. En 1950, le biologiste J. Monod et de façon indépendante les physiciens A. Novick et L. Szilard décrivent un dispositif de laboratoire destiné à cultiver les micro-organismes dans un milieu constant. Ce dispositif, connu sous le nom de chémostat, est devenu d'un usage courant dans les laboratoires. En 1955 paraissait le premier article consacré la théorie mathématique de ce dispositif. Depuis cette date des dizaines d'articles de mathématiques consacrés à ce sujet ont été publiés. Une première synthèse a été faite en 1995 dans le livre de H. Smith et P. Waltmann *The theory of the chemostat* et depuis cette date, chaque année, sont publiés quelques dizaines d'articles de mathématiques sur cette question. La culture en continu des microorganismes fait incontestablement partie de la (bio)physique au sens où je l'entends ci-dessus.

— M. : Ce n'est pas certain, je pense que ça pourrait rentrer dans le cadre des systèmes conservatifs qui sont assez bien connus.

— etc.

La discussion se poursuit entre M. et P. sur les avantages et inconvénients de telle ou telle forme du modèle. Notons que dans un champ plus classique de la physique la négociation aurait plutôt lieu dans la tête d'un même personnage, le physicien, qui maitrise parfaitement l'outil mathématique dont il se sert et n'a que rarement besoin de faire appel au mathématicien. Ici la collaboration est nécessaire parce que comme le domaine est nouveau on a besoin d'une culture assez large pour savoir où l'on s'engage.

Maintenant que veut dire "le phénomène obéit au modèle" ? Pour le physicien cela veut dire quelque chose d'assez complexe que le mathématicien a du mal à comprendre :

— Que certaines variables sont reliées entre elles pas des lois en "béton", par exemple la conservation de la masse.

— Que beaucoup de phénomènes ont été négligés, certains parce qu'ils sont négligeables de façon évidente, d'autres parce qu'il semble que beaucoup de chercheurs le font dans des domaines plus ou moins similaires, ou que cela a été efficace dans tel problème, enfin, certains, parce qu'il faut bien avancer (cela fera partie des hypothèses du modèle).

— Que certaines prédictions du modèle (au moins une, plus si possible) pourront être testées expérimentalement.

A ce stade "obéit" est un vœux. On espère que petit à petit, après corrections, les prédictions seront vérifiées expérimentalement et que le modèle *expliquera* quelque chose. Devant toute cette complexité qu'il trouve vaseuse M. va se concentrer *tout seul* sur l'étude mathématique des équations. Après un certain travail M. retrouve P.

— Voici ce que j'ai démontré pour le moment [39] :

1. Les solutions existent pour tout t.
2. Si D_s et les D_{x_i} sont les paramètres de dilution du substrat et des espèces, dans le cas $D_s = D_{x_i} = D$ je sais montrer en toute généralité que

39. Les trois points ci-dessous constituent l'état actuel des connaissances mathématiques relativement à un vieux problème des années 1970 concernant la compétition dans un chémostat (voir par exemple [35]). Si la question mathématique n'est pas complètement élucidée et suscite encore un article de temps en temps, du point de vue biologique la question s'est déplacée et la solution complète du problème mathématique n'y apporterait plus rien de pertinent

si $D \geq \mu(S_{in})$ le lessivage est globalement stable, dans le cas contraire, si $D < \mu(S_{in})$, un unique équilibre où une seule des espèces possède une biomasse positive existe, il est globalement stable.

3. Si $D_s \neq D_{x_i}$ je sais encore démontrer en toute généralité que le résultat ci-dessus est vrai à condition de remplacer global par local. Sinon je sais encore démontrer qu'on a global, mais seulement pour des fonctions de Monod ou assimilées.

— P. : Mais c'est très bien tout ça, on retrouve bien ce que dit l'expérience, y compris si $D_s \neq D_{x_i}$ que j'ai testé.

— M. : Oui mais je ne sais pas le démontrer en toute généralité.

— P. : Bon mais que disent les simulations ?

— M. : Oh ça marche très bien. D'ailleurs je n'ai pas de doute. Je suis certain que ça marche toujours, mais je ne sais pas le démontrer. Et puis si je me trompais ?

— P. : Et bien alors c'est o.k. On peut passer à la suite...

La suite c'est P. qui va s'en charger. Il va rédiger un article pour la revue Physica D. et M. va insister très lourdement pour qu'il soit bien précisé que certains résultats ne sont pas démontrés ; il acceptera de plus ou moins bon cœur de signer en second auteur[40]. Ensuite M. dira à P. « je vais travailler sur la conjecture, si j'arrive à la démontrer je te contacterai, nous écrirons un article que nous soumettrons à une bonne revue. Je pense que ce sera considéré comme un joli résultat. » Et leur collaboration va s'arrêter là ! P. va se dire *in petto* que « ces mathématiciens, s'il fallait les écouter avec leurs frayeurs de midinette, on en serait encore à la lampe à pétrole» et de son coté M. va maugréer que « ces physiciens n'ont aucun souci de rigueur » ce qui est tout à fait discutable. Si rigoureux veut dire conforme aux lois de la déduction mathématique alors c'est le mathématicien qui est rigoureux ; mais si rigoureux veut dire adéquat dans la recherche de la vérité, de nos deux personnages celui qui a ce souci c'est certainement le physicien.

Car le physicien, lui, se souvient bien que les hypothèses sur lesquelles ils ont bâti leur modèle mathématique sont très fragiles, qu'une nouvelle observation ou un apport d'une autre théorie peut très facilement les ruiner. Il considère également que ce modèle mathématique n'est pas une fin en lui même mais un simple élément contribuant partiellement à la solidité de la théorie qu'il cherche à établir.

40. Il y a un demi-siècle M., n'ayant pas à se soucier comme maintenant de son h-index pour gagner sa vie, n'aurait même pas co-signé, estimant sa contribution mathématique peu significative.

Dans ces conditions il serait tout à fait ridicule de consacrer des efforts démesurés à fournir une preuve définitive et irréfutable que l'équilibre est globalement stable. Le physicien s'arrête d'explorer mathématiquement le modèle quand son flair lui dit qu'il n'a plus rien de significatif à gagner dans cette direction.

Le mathématicien va réagir différemment. Il n'aura de cesse que quand il aura su expliquer dans les moindres détails le comportement de son équation. S'il arrive à ses fins, s'il trouve enfin sa preuve il ne sera pas tout de suite content. Il est rare en effet qu'une première preuve soit satisfaisante. Elle est généralement trop compliquée et, surtout, le mathématicien pense qu'il n'a pas trouvé la "bonne raison". Maintenant qu'il a la démonstration que le résultat est juste il va chercher pourquoi. Car pour le mathématicien, en un sens précis que je vais expliquer section 1.2.2, "démonstration" ne vaut pas "preuve". On le voit, le mathématicien est bien loin de la préoccupation initiale qui était de mieux comprendre un dispositif expérimental permettant de mesurer la croissance des populations de micro-organismes. Le mathématicien travaille en fonction de critères internes à sa discipline.

Mais cette indifférence de M. à la question de physique initiale ne ruine pas la thèse d'Arnold. En effet Arnold dit «Les mathématiques font partie de la physique», pas « les mathématiciens sont des physiciens ». Observer des pratiques de mathématiciens (contemporains dans le cas présent) est certainement utile, et même nécessaire, pour mieux cerner ce que sont les mathématiques mais ce n'est pas suffisant pour affirmer la différence des deux disciplines car les "mathématiques" et la "physique" sont des entreprises *collectives* qui ont une *longue histoire* et ce sont ces entreprises qui nous intéressent pas les contingences de la division du travail : sur un bateau le soutier et le radio-navigateur ont des activités assez différentes mais c'est la marche du navire qui nous intéresse.

Reprenons la métaphore du microscope comme quoi les mathématiques sont au raisonnement humain ce que le microscope est aux yeux : un prolongement. Un individu qui travaille à la fabrication de microscope n'est pas un physicien à proprement parler mais il connait un bon bout de physique. De son côté, le physicien qui dresse le cahier des charges d'un instrument à fabriquer connait les grands principes physiques qui seront à l'œuvre dans sa fabrication mais ne connait pas les techniques métallurgiques qui permettent d'assurer la rigidité nécessaire à un bon alignement des lentilles. Dans notre petite fable le mathématicien n'est pas satisfait parce que son microscope présente une petite aberration chromatique qui n'est pas gênante pour ce que le physicien veut observer mais qui le gène en tant que fabricant de microscope. Car le fabricant de microscope a des soucis que n'a

pas le physicien, par exemple de rendre son outil le plus universel possible pour élargir sa clientèle. Nous comprenons bien en quoi le métier de fabriquant de microscope n'est pas exactement celui de Einstein mais nous n'allons pas pour autant ériger la fabrication de microscopes en une discipline scientifique autonome qui serait apparue miraculeusement dans la Grèce antique (pardon à la Renaissance) et ensuite nous émerveiller du mystère de l'adéquation du CERN aux besoins de la physique.

1.2.2 La déduction mathématique

Essayons maintenant d'argumenter contre Arnold de façon plus solide en mettant en avant que ce qui fait le cœur des mathématiques, l'argumentation, la déduction, la *preuve* sont vraiment spécifiques des mathématiques. Dans une présentation "à la Bourbaki" des mathématiques on dira qu'à partir d'*axiomes* on *déduit* des *théorèmes* ; on évoquera rapidement la discussion sur la nature des *axiomes* : intuitions, hypothèses sur la réalité ou simples conventions, pour conclure que la réponse dépend de la philosophie de chacun mais qu'en définitive cela n'a pas d'importance pour les mathématiques parce que les mathématiques c'est l'activité de déduction et *rien d'autre*. Beaucoup de mathématiciens contesteront le *rien d'autre* (par exemple les réalistes) mais tous conviendront que l'activité de démonstration (sous entendu démonstration mathématique rigoureuse) est le cœur des mathématiques et n'a pas d'équivalent dans d'autres disciplines.

Le défaut de cette présentation est que l'on fait comme si ce qu'est une démonstration, une preuve mathématique, était quelque chose de clair. Avant d' examiner la force de cet argument travaillons un peu sur ces concept de *preuve* et de *démonstration*.

Quelques définitions

Pour les besoins de la discussion je dois distinguer les individus (mathématiquement) “naïfs” des “mathématiciens”. Un individu “naïf” est un individu qui sait lire, compter, qui comprend un idéogramme simple mais qui ne connait rien aux mathématiques. Ce peut être, par exemple, un étudiant d'une école de beaux arts qui a tout oublié des mathématiques qu'il a reçues au lycée ou mieux, un individu qui aurait échappé à tout enseignement des mathématiques. A l'opposé, ce que j'appelle un “mathématicien” est un individu qui a bien assimilé les connaissances mathématiques d'une première année post-baccalauréat scientifique, d'une licence scientifique mais pas nécessairement plus.

Venons en à des notions plus subtiles que j'emprunte à un travail récent de G. Wallet [41]. Alors qu'ils sont habituellement synonymes, Wallet distingue soigneusement "preuve" de "démonstration". Un individu possède une "preuve" d'une proposition lorsque cette dernière est pour lui une évidence absolue. Une "preuve" est une expérience personnelle, intime. Je cite Wallet :

> *Une preuve d'un jugement est une expérience singulière, celle par laquelle un mathématicien saisit l'évidence de ce jugement.*

Une "preuve" est donc tout le contraire de quelque chose d'objectif. Je cite encore Wallet.

> On peut dire que la preuve est l'expérience par laquelle ce mathématicien littéralement voit ce jugement ; alors, pour le sujet de cette expérience, le jugement est, pleinement, sans restriction au point qu'il lui est impensable d'en douter, de s'y soustraire. Chaque terme de la définition a son importance : "expérience" bien entendu pour qualifier une dynamique se déroulant dans le flux de la vie consciente, "singulière" pour signifier que cette expérience est propre à un individu, "mathématicien" pour indiquer que la reconnaissance pleine et entière de cette expérience nécessite une compétence généralement acquise par l'enseignement et la pratique au sein d'une communauté scientifique spécifique, enfin "l'évidence" pour marquer que la preuve rend visible et manifeste le jugement, qu'elle expose au regard la totalité d'un arrangement qui le valide sans conteste et l'établit comme "fait mathématique". (...) Ce qui prime pour ce point de vue est qu'un jugement est adopté par un mathématicien lorsqu'il réussit à mettre en place un dispositif dont l'expérience est vécue comme la manifestation incontestable du bien-fondé - l'évidence - du jugement. En général, cette évidence n'est pas immédiatement accessible.

Venons en maintenant à ce qu'est une "démonstration", toujours selon Wallet.

> *Une démonstration d'un jugement donné est une inscription scripto-visuelle (couchée sur le papier, tracée sur un tableau, enregistrée dans un fichier*

41. Mes citations sont extraites d'un texte de Guy Wallet *Essai d'instauration des êtres mathématiques dans l'ontologie latourienne* daté du 14 septembre 2016 qui a connu une circulation restreinte. Ce texte, significativement remanié, maintenant signé de Guy Wallet et Stephane Neuwirth, a été déposé sur arXiv sous le titre *Enquête sur les modes d'existence des êtres mathématiques*.
`https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01824928/document`

> *informatique, etc) présentant une configuration d'arguments textuels et graphiques susceptible en principe de permettre ou de favoriser l'expérience appelée preuve du jugement.*

On le voit "preuve" et "démonstration" seront pris ici dans des sens radicalement différents qui vont s'avérer très efficaces pour analyser ce qu'est l'activité mathématique [42].

A partir de maintenant j'utilise les guillemets " " lorsque je veux parler de "naïf", "mathématicien", "preuve" et "démonstration" au sens très précis de ce paragraphe.

Un exemple

Je vais détailler un exemple sur lequel on verra fonctionner la différence introduite entre "preuve" et "démonstration".

Théorème 1.2.1 *Il y a exactement autant de façons de ranger p boules indiscernables dans n urnes numérotées qu'il y a de façons de choisir une partie à p éléments dans un ensemble à $p+n-1$ éléments.*

Démonstration-I. Observons la Fig. 1.4.

— Ligne (a) nous voyons un rangement possible de 12 boules dans 8 urnes.

— Passage de la ligne "a" à la ligne "b" : c'est le même agencement, on a simplement collé les urnes les unes aux autres.

---

42. Dans la seconde version *Enquête sur les modes d'existence des êtres mathématiques*, la terminologie a évolué :

— *Preuve* est devenu *expérience de démonstration* :

> *Une expérience de démonstration d'un jugement est une expérience par laquelle un mathématicien saisit l'évidence de ce jugement*

— et *démonstration* est devenu *inscription de démonstration*

> *Une inscription de démonstration d'un jugement donné est une inscription scripto-visuelle (couchée sur le papier, tracée sur un tableau, enregistrée dans un fichier informatique...) présentant une configuration d'arguments textuels et graphiques susceptible en principe de permettre ou de favoriser l'expérience de démonstration du jugement.*

Cette nouvelle terminologie a été choisie par les auteurs pour résoudre certains problèmes soulevés chez le lecteur par la confusion entre l'usage usuel de "preuve" et "démonstration" et l'usage proposé. C'est pourquoi ils ont préféré inventer une terminologie nouvelle. Je préfère garder l'ancienne, plus spectaculaire.

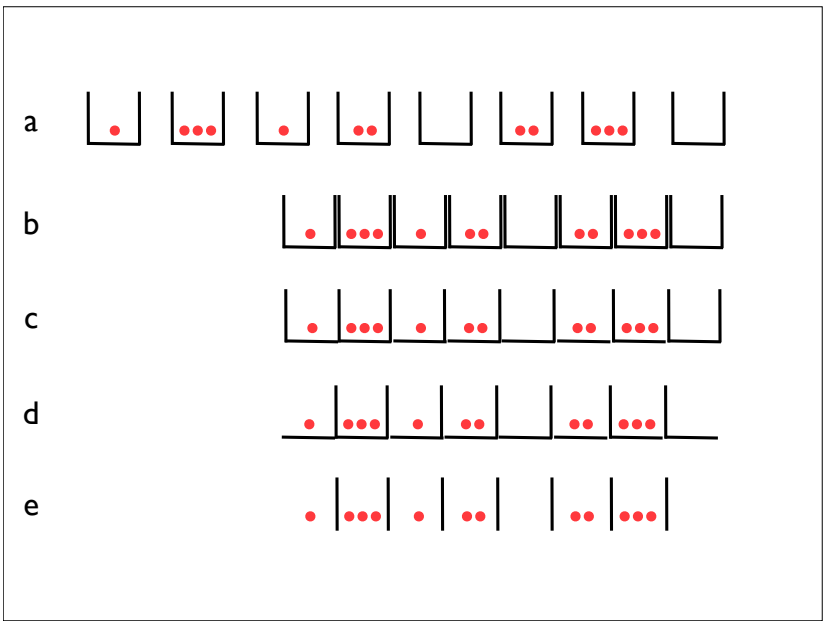

FIGURE 1.4 – Rangement de 12 boules dans 8 urnes.

— Passage de "b" à "c" : La double cloison pour séparer les urnes est inutile, nous n'en gardons qu'une.

— Passage de "c" à "d" : Les deux cloisons des extrémités ne servent à rien, on garde la même information en les supprimant.

— Passage de "d" à "e" : de la même manière l'existence d'un "plancher" sous les urnes n'est pas informatif ; il ne set à rien, on le supprime.

— Ce que nous voyons sur la ligne "e" c'est un ensemble à 12 (les boules) + 7 (les cloisons) éléments dont on a spécifié 12 éléments. Dit autrement si on prend un ensemble à "p (nombre de boules)" + "n (nombre d'urnes - 1)" éléments, dont on spécifie p éléments (les boules) c'est comme si on avait rangé les boules dans les urnes. Nous avons donc démontré le théorème.

Cette "démonstration-1", sur laquelle nous reviendrons, est susceptible de ne pas

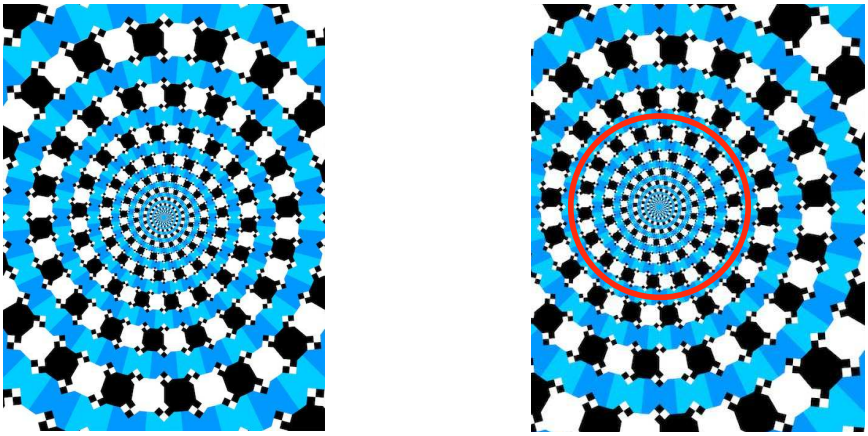

FIGURE 1.5 – Fausse spirale

satisfaire certains “mathématiciens” [43] qui ne la trouveront pas rigoureuse pour trois raisons au moins.

1. Elle repose sur l’observation d’une succession de dessins. Les dessins peuvent être trompeurs comme on peut le voir sur la figure 1.5 où ce qui est pris pour une spirale (à gauche), n’en est pas une (à droite).
2. Elle est faite dans le cas particulier de 12 boules et 8 urnes.
3. Le langage des boules et des urnes n’est pas un langage mathématique.

Donnons donc une démonstration compréhensible par un "mathématicien" [44] qui ne tombe pas sous le coup de ces critiques, ce que l’on appelle habituellement une démonstration "rigoureuse".

Démonstration-2 Nous utilisons le concept (mathématique) d’application f de

43. Mais ce n’est pas le cas de tous. Cette démonstration se trouve dans l’ouvrage de W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications* (Wiley 1968, p. 38) ; [29]. Cet ouvrage est considéré comme un des meilleurs cours de probabilités qui soit par la communauté des probabilistes.

44. Je rappelle que j’ai décidé qu’un "mathématicien" a au moins le niveau d’une licence de mathématiques mais pas nécessairement plus et que donc ses connaissances en logique mathématique sont *a priori* très limitées. Le texte qui suit pourrait s’adresser à un étudiant de première année de licence ou de "prépa" scientifique.

l'ensemble fini $[1,2,\cdots,n]$ dans les entiers que nous notons :

$$f = (f(1), f(2), \cdots, f(n))$$

On commencera par donner une définition plus mathématique de "rangement de boules dans des urnes". Etant donnés deux entiers strictement positifs p et n, un "rangement de p boules dans n urnes numérotées $1,2,\cdots,n$" est une "application $f(1), f(2), \cdots, f(n)$ dans les entiers positifs ou nuls tels que $f(1)+f(2)+\cdots+f(n) = p$. En effet on peut interpréter $f(1)$ comme étant le "nombre de boules mises dans l'urne 1", $f(2)$ comme étant le "nombre de boules mises dans l'urne 2" etc. Ce qui nous donne la définition/notation :

Notation 1 *Soient p et n deux entiers tels que $n \geq 1$. On note :*

$$\mathscr{B}_n^p$$

l'ensemble des applications $f = (f(1), f(2), \cdots, f(n))$ de l'ensemble $[1,2,\cdots,n]$ dans l'ensemble des entiers naturels $0,1,2,\cdots$ telles que $f(1)+f(2)+\cdots+f(n) = p$.

Soit donc un élément $(f(1), f(2), \cdots f(n)$ de $\mathscr{B}_n^p)$; on a : $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) = p$. Pour i compris entre 1 et $n-1$ on définit l'entier v_i par la règle :

1. $v_1 = f(x_1)+1$
2. $v_i = v_{i-1}+f(x_i)+1$

On voit immédiatement que les v_i qui viennent d'être définis constituent une suite strictement croissante et le plus grand, v_{n-1}, est inférieur ou égal à $n-1+p$ (on a, en ajoutant toutes les lignes $v_{n-1} = n-1+f(1)+\cdots+f(n-1) = n-1+p-f(n)$). La suite des v_i spécifie donc un sous ensemble $G(v_1,\cdots,v_{n-1})$ à $n-1$ éléments de l'ensemble à $n-1+p$ éléments $[1,2,\cdots,(n-1)+p]$ dont le complémentaire $H(v_1,\cdots,v_{n-1})$ est un sous ensemble à p éléments de $[1,2,\cdots,(n-1)+p]$.

Nous venons de décrire une procédure (une fonction) H de $\mathscr{B}_n^p$ dans l'ensemble $\mathscr{C}_{n+p-1}^p$ des parties à p éléments d'un ensemble à $n+p-1$ éléments qui à la fonction f de $\mathscr{B}_n^p$ associe l'élément H(f) de $\mathscr{C}_{n+p-1}^p$.

Réciproquement nous nous donnons une partie à p éléments de $[1,2,\cdots,n+p-1]$ son complémentaire est constitué de $n-1$ points $v_1 < v_2 < \cdots < v_{n-1}$ et on définit l'application :

$$f(1) = v_1 - 1,\ f(2) = v_2 - v_1, \quad \cdots, \quad f(i) = v_i - v_{i-1},\ f(n) = n+p-1-v_{n-1}$$

Nous venons de définir une application K de $\mathscr{P}^p_{n+p-1}$ dans $\mathscr{B}^p_n$ qui a la propriété que $K \circ H = id$ et $H \circ K = id$ ce qui entraine que H définit bien une bijection. Nous avons démontré le :

Théorème 1.2.2 *Il existe une bijection entre $\mathscr{B}^p_n$ et $\mathscr{C}^p_{n+p-1}$* et donc ces deux ensembles ont bien le même nombre d'éléments.

Démonstration-3 Voici maintenant une dernière démonstration qui aura probablement toute la faveur d'un individu "mathématicien".

Nous reprenons la notations $\mathscr{B}^p_n$ de la démonstration précédente et nous notons B^p_n le nombre des éléments de cet ensemble. Nous désignons par :

$$\mathscr{C}^p_n$$

l'ensemble des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments et par C^p_n le nombre de ses éléments. Nous utilisons la notation classique (factoriel) $k\,!$ pour désigner le produit des entiers consécutifs de 1 à k (avec la convention $0\,! = 0$). Nous rappelons la proposition suivante :

Proposition 1.2.3 ***Formule des combinaisons*** *Le nombre C^p_n des éléments de $\mathscr{C}^p_n$ est :*

$$C^p_n = \frac{n\,!}{(n-p)\,!p\,!}$$

Notre objectif est donc de démontrer la proposition :

Théorème 1.2.4 *Pour tout p et tout $n \geq 1$ nous avons :*

$$B^p_n = \frac{(n+p-1)\,!}{(n-1)\,!\,p\,!} \tag{23}$$

ce que nous allons faire par récurrence sur le nombre $k = n+p$. Mais avant nous établissons le lemme :

Lemme 1.2.5 *Pour $n \geq 2$ on a ;*

$$B^p_n = B^p_{n-1} + B^{p-1}_n \tag{24}$$

En effet l'ensemble $\mathscr{B}^p_n$ est la réunion disjointe de deux ensembles d'application f de $[1,2,\cdots,n,n]$ dans $\mathbb{N}$, celles pour lesquelles $f(n) = 0$ (il y en a B^p_{n-1}) et celles

pour lesquelles $f(n) > 0$ (il y en a B_n^{p-1} puisque l'application $f(1), \cdots, f(n)-1$ est une application de $[1, 2, \cdots, n]$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(1) + \cdots + f(n) - 1 = p - 1$.

Soit k un entier plus grand que 1. Nous appelons $\mathscr{P}(k)$ la proposition :

$$\mathscr{P}(k) = \forall\, p\, \forall\, n \left\{ p + n = k \Longrightarrow B_n^p = \frac{(n+p-1)\,!}{(n-1)\,!\,p\,!} \right\}$$

1. La proposition $\mathscr{P}(1)$ est vraie. En effet pour $k = 1$ on a nécessairement $n = 1$ et $p = 0$; il n'y a qu'une seule application de $[1]$ dan $\mathbb{N}$ prenant la valeur 0 et on a bien $\frac{(n+p-1)\,!}{(n-1)\,!\,p\,!} = \frac{0\,!}{0!1\,!} = 1$).
2. Soit k un entier, on suppose que $\mathscr{P}(k)$ est vraie et nous en déduisons $\mathscr{P}(k+1)$. En effet :
   — Soient p et n tels que $p + n = k + 1$.
   — Si $n = 1$ on a évidemment $B_1^n = 1$, ce qui est bien égal à $\frac{(n+p-1)\,!}{(n-1)\,!\,p\,!} = \frac{p\,!}{0!p\,!} = 1$.
   — Si $n \geq 2$ on peur écrire :

   $$B_n^p = B_{n-1}^p + B_n^{p-1}$$

   Comme $n + p = k + 1$ on a $n - 1 + p = n + p - 1 = k$ et nous pouvons appliquer l'hypothèse que $\mathscr{P}(k)$ est vraie aux deux termes de droite, ce qui nous donne :

   $$B_n^p = \frac{(n+p-2)\,!}{(n-2)\,!p\,!} + \frac{(n+p-2)\,!}{(n-1)\,!(p-1)\,!}$$

   après réduction au même dénominateur :

   $$B_n^p = \frac{(n+p-2)\,!(n-1)}{(n-1)\,!p\,!} + \frac{(n+p-2)\,!p}{(n-1)\,!p\,!}$$

   et finalement :

   $$B_n^p = \frac{(n+p-2)\,!(n+p-1)}{(n-1)\,!p\,!} = \frac{(n+p-1)\,!}{(n-1)\,!p\,!} = C_{n+p-1}^p$$

Comme 1) et 2) sont vraies le principe d'induction nous permet d'affirmer que $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout k ce qui démontre le théorème 1.2.4 et donc le théorème 1.2.1.

Analyse des “preuves” induites par les “démonstrations” 1, 2 et 3

Nous allons comparer la façon dont démonstration-1,2 et 3 sont susceptibles d’induire une “preuve” des jugements qu’elles proposent. Démonstration-1,2 et 3 sont considérés ici comme des “démonstrations” au sens de Wallet, c’est à dire comme "des inscriptions scripto-visuelles couchées sur le papier présentant une configuration d’arguments textuels et graphiques susceptible de permettre ou de favoriser l’expérience appelée preuve".

Démonstration-1 induit une “preuve” chez l’individu “naïf” ou pas. Je suis certain qu’un un individu "naïf" à qui je fournirai le dessin et le texte accompagnant la démonstration-1 vivra assez vite l’expérience de la “preuve” du théorème 1.2.1. Probablement refera-t-il pour lui quelques dessins analogues à celui que j’ai proposé (peut être en modifiant le nombre de boules et d’urnes) et il finira assez rapidement par dire : *il n’y a pas de doute, c’est bien le même nombre*. Ma conviction se base sur le fait qu’un grand nombre d’étudiants en sciences de la vie à qui j’ai proposé cette démonstration-1 se sont dits tout à fait convaincus ; ils ont fait l’expérience de la “preuve”. Je ne l’ai pas fait, mais j’ai la conviction qu’un enfant de dix ans à qui on présenterait cette question de façon ludique éprouverait lui aussi l’expérience de la “preuve”.

Un individu “mathématicien” fera lui aussi l’expérience de la preuve à la lecture de la démonstration-1 mais il ne sera peut-être pas satisfait car, comme nous l’avons déjà dit, elle repose sur un dessin et l’examen d’un cas particulier. Il va souvent préférer démonstration-2 qui semble lui fournir un accès plus solide à la vérité de la formule :

$$B_n^p = C_{p+p-1}^p$$

Démonstration-2 induit une “preuve” chez l’individu “mathématicien”. Cette démonstration ne repose pas sur une figure : il n’y a pas de dessin. Elle remplace le vocabulaire des "urnes" et des "boules" par le vocabulaire mathématique que "mathématicien" connait bien : "application", "injective", et identifie, comme il l’a appris, "A et B ont le même nombre d’éléments" avec "il existe une bijection entre A et B".

La certitude que $\mathscr{B}_{n+1}^p$ peut s’interpréter comme les rangements possibles de p boules dans n urnes est très facilement acquise ; c’est sur la base de "modélisations" de ce type que le "mathématicien" est éduqué.

Le passage :

Pour i compris entre 1 et $n-1$ on définit l'entier v_i par la règle :

1. $v_1 = f(x_1) + 1$
2. $v_i = v_{i-1} + f(x_i) + 1$

est une version symbolique du dessin des urnes remplies (plus exactement de la dernière ligne de la figure), les $n-1$ nombres v_i figurant la place des "cloisons verticales" qui subsistent pour séparer les boules. Toute cette construction est indépendante de n et p en ce sens que quels que soient des entiers concrets n et p et une application f concrète nous pourrons définir les v_i en appliquant la règle.

Cette démonstration est un peu plus savante que la démonstration-1 car elle utilise un vocabulaire spécialisé qui a une certaine efficacité car il permet de substituer à un dessin plus ou moins arbitraire des inscriptions symboliques comprises sans ambiguïté par tout "mathématicien". Sa lecture entrainera certainement l'expérience de la preuve après un petit travail de réflexion qui pourra être pour certains un dessin évoquant des urnes ou, pour d'autres, la vérification avec des entiers petits comme $n = 10$ et $p = 7$ qu'ils comprennent bien ce que dit la règle de construction des v_i.

Démonstration-3 induit une "preuve" chez l'individu "mathématicien". Le "mathématicien" de la démonstration-3 connait (c'est un des premiers résultats qu'on lui enseigne à la sortie du lycée) la formule du nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments, c'est pourquoi il pense tout de suite à écrire la formule 23 et à la démontrer par récurrence. Il démontre donc le lemme 1.2.5 qui établit le lien entre les systèmes à n et $n-1$ urnes. Ensuite il applique impeccablement le "principe d'induction" ou "théorème de récurrence" selon l'enseignement qu'il a reçu.

Le "principe d'induction" dit que si $\mathscr{P}(n)$ est une propriété qui porte sur les entiers telle que :

1. $\mathscr{P}(n_o)$ est vraie,
2. $\mathscr{P}(n)$ est vraie $\Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie

alors, pour tout $n \geq n_o$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie .

Le "théorème de récurrence" dit (dans le cadre de la théorie des ensembles) que si E est un sous ensemble de $\mathbb{N}$ tel que :

1. $0 \in E$
2. $n \in E \Longrightarrow (n+1) \in E$

alors $E = \mathbb{N}$.

Pour cette démonstration, en plus de la reconnaissance de ce que ce que nous cherchons à identifier est le nombre des éléments de $\mathscr{B}^p_{n+1}$, il y a deux éléments : un calcul et l'usage de l'induction. La vérification d'un calcul, surtout quand il est très simple comme ici, donne une certitude très forte et la certitude qu'apporte l'induction tient dans la vérification (ici également très simple) du respect de l'application des règles. Évidemment ce genre de certitudes n'est pas accessible à l'individu "naïf".

Force des preuves induites. La force d'une preuve est la force de la "croyance" que nous avons dans la proposition dont nous venons de faire l'expérience de la preuve. Il est communément admis que le propre de la démonstration mathématique est d'induire une croyance très forte, plus forte que toute autre type de démonstration, voire une "croyance" absolue. Il me semble que la situation est un peu plus compliquée. Reprenons notre exemple.

La démonstration-1 est la ré-interprétation, induite par une succession de dessins, d'un système d'urnes contenant des boules en des points séparés par des barres verticales. La force de l'évidence proposée par l'observation visuelle de la démonstration-1 est affaiblie (à vrai dire très peu) par notre connaissance des cas où nos sens (la vue par exemple) sont abusés et par le risque associé à la généralisation à des entiers arbitraires de ce qui a été observé pour quelques cas particuliers.

La démonstration-2 élimine la représentation par un dessin des urnes qu'elle remplace par la "vision" plus symbolique d'une suite de nombres $f(1), f(2), \cdots, f(n)$ et la "démonstration" purement visuelle par l'énoncé de la règle de définition des v_i :

> Pour i compris entre 1 et $n-1$ on définit l'entier v_i par la règle :
>
> 1. $v_1 = f(x_1) + 1$
> 2. $v_i = v_{i-1} + f(x_i) + 1$

Ici, comme dans le cas du dessin où l'on demande de bien se convaincre que le résultat ne dépend pas du choix de p et n, il faut être bien convaincu que la règle définit bien les v_i. Si l'on n'est pas immédiatement convaincu il suffit de faire fonctionner la règle dans quelques cas particuliers. Finalement les preuves induites par démonstration-1 et 2 reposent sur des croyances très proches.

La démonstration trois, la plus "mathématique", semble échapper à cet écueil de l'absence de généralité. Est-ce bien certain ? Pour la commencer on introduit l'innocent symbole $n\,!$ qui représente le produit des n premiers entiers consécutifs

(à partir de 1). Voila, semble-t-il, quelque chose de bien défini. Du solide ! Pour en être certain nous disposons maintenant d'un outil précieux : l'ordinateur. Posons nous la question de faire un programme qui, lorsqu'on lui propose un entier n nous affiche le nombre $n\,!$. En voici un :

1. $I \leftarrow 0$
2. $F \leftarrow 1$
3. Repeat :
4. $\qquad I \leftarrow I + 1$
5. $\qquad F \leftarrow F * I$
6. Until $I = n$
7. Write(F)

qui nous donne :

$5\,! = 120$

$10\,! = 3\,628\,800$

$100\,! = 93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915608941463976156518286253697920827223758251185210916864000000000000000000000000$

Donc, en notation décimale ordinaire, le nombre $100\,!$ est un nombre de 158 chiffres. Le nombre $1000\,!$ est le nombre de 2 568 chiffres de la figure 1.6, pour $10000\,!$ c'est un nombre de 35 660 chiffres que je renonce à montrer puisqu'il est plus de dix fois plus long que le précédent. Pour 100 000 ! mon ordinateur me propose un nombre de 456 574 chiffres, pour 200 000 ! un nombre de 973 351 chiffres puis refuse d'aller au delà.

Ce qui veut dire que si le "mathématicien" pense avoir une conscience claire du nombre $n\,!$, *quel que soit n*, il n'en est pas de même pour un ordinateur dont la capacité à manipuler des nombres entiers est forcément limitée. Pour mon ordinateur $1\,000\,000\,!$ ne veut rien dire. Bien sûr, qu'il soit "naïf" ou "mathématicien", l'homme a tendance à croire que les capacités de son cerveau surpassent celles de l'ordinateur[45] et pense avoir une vision claire de ce qu'*est* $n\,!$. Cela dit, les jeunes de maintenant à qui l'on enseigne un peu de programmation, sont mis en

45. Il peut le croire à condition de ne pas le provoquer au jeu de go !

```
4023872600770937735437024339230039857193748642107146325437999104299385 12\
3986290205920442084869694048004799886101971960586316668729948085589013 23\
8296699445909974245040870737599188236277271887325197795059509952761208 74\
9754624970436014182780946464962910563938874378864873371191810458257836 47\
8499770124766328898359557354325131853239584630755574091142624174743493 47\
5534286465766116677973966688202912073791438537195882498081268678383745 59\
7317461360853795345242215865932019280908782973084313928444032812315586 11\
0369768013573042161687476096758713483120254785893207671691324484262361 31\
4125087802080002616831510273418279777047846358681701643650241536913982 81\
2648102130927612448963599287051149649754199093422215668325720808213331 86\
1168115536158365469840467089756029009505376164758477284218896796462449 45\
1607653534081989013854424879849599533191017233555566021394503997362807 50\
1378376153071277619268490343526252000158885351473316117021039681759215 10\
9077880193931781141945452572238655414610628921879602238389714760885062 76\
8629671466746975629112340824392081601537808898939645182632436716167621 79\
1689097799119037540312746222899880051954444142820121873617459926429565 81\
7466283029555702990243241531816172104658320367869061172601587835207515 16\
2842255402651704833042261439742869330616908979684825901254583271682264 58\
0665267699586526822728070757813918581788896522081643483448259932660433 67\
6601769996128318607883861502794659551311565520360939881806121385586003 01\
4356945272242063446317974605946825731037900840244324384656572450144028 21\
8852524709351906209290231364932734975655139587205596542287497740114133 46\
9627154228458623773875382304838656889764619273838149001407673104466402 59\
8994902222217659043399018860185665264850617997023561938970178600408118 89\
7299183110211712298459016419210688843871218556461249607987229085192968 19\
3723886426148396573822911231250241866493531439701374285319266498753372 18\
9406942814341185201580141233448280150513996942901534830776445690990731 52\
4332782882698646027898643211390835062170950025973898635542771967428222 48\
7575867657523442202075736305694988250879689281627538488633969099598262 80\
9561214509948717012445164612603790293091208890869420285106401821543994 57\
1568059418727489980942547421735824010636774045957417851608292301353580 81\
8400969963725242305608559037006242712434169090041536901059339838357779 39\
4109700277534720000000000000000000000000000000000000000000000000000000 00\
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000 00\
0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000 00\
0000000000000000000000000000000000000000000000
```

FIGURE 1.6 – Le nombre 1000 ! en écriture décimale.

garde contre l'usage de nombres qui pourraient être trop grands pour être manipulés par l'ordinateur et savent très bien que pour calculer des B_n^p il vaut mieux s'en remettre à la formule :

$$B_n^p = B_{n-1}^p + B_n^{p-1}$$

qui permet de les calculer de proche en proche comme le faisait déjà Pascal avec son célèbre triangle pour le calcul des C_n^p. Une telle procédure permet d'accéder à tous les B_n^p qui sont représentables. On obtient ainsi sans problème le nombre de rangements possible de 10 boules dans 10^6 urnes.

$$B_{1000000}^{10} = 2755855932732609816091471751889670638152284575001000 00$$

alors qu'en utilisant la formule 23 à base de (!) c'est impossible (avec mon ordinateur). Ces petites expériences sur ordinateur nous montrent que si nous avons une vision claire de ce qu'est le nombre désigné par 7 ! c'est peut être moins clair pour un nombre arbitraire.

Venons en à l'autre ingrédient de démonstration-3 : le "principe de récurrence". Ce principe, lui aussi, repose sur l'évidence de quelques exemples et la croyance (extrêmement forte) que nous ne serons jamais trahis par lui. Poincaré qui le tient pour central dans le raisonnement mathématique le décrit ainsi [46] :

> Ce procédé est la démonstration par récurrence. On établit d'abord un théorème pour $n = 1$; on montre ensuite que s'il est vrai de $n - 1$ il est vrai de n et l'on en conclut qu'il est vrai pour tous les nombres entiers.

Et il ajoute plus loin :

> Cette règle, inaccessible à la démonstration analytique et à l'expérience, est le véritable type de jugement synthétique *a priori*(...) Pourquoi donc ce jugement s'impose-t-il à nous avec une irrésistible évidence ? C'est qu'il n'est que l'affirmation de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible. L'esprit a de cette puissance une intuition directe et l'expérience ne peut être pour lui qu'une occasion de s'en servir et par là d'en prendre conscience.

Pour Poincaré, on le voit, le raisonnement par récurrence est bien une "preuve" au sens de Wallet, une "évidence" qui s'impose à l'esprit et qui ne peut pas se réduire à des principes encore plus évidents. Ce que Poincaré oublie de dire c'est que cette évidence ne s'impose qu'à l'individu "mathématicien" : il faut pratiquer quelques exercices pour en arriver là, les professeurs de mathématiques en savent quelque chose [47]. Depuis Poincaré, en particulier depuis l'avènement de l'ordinateur on a beaucoup réfléchi à ces questions. Nous verrons plus loin, quand il sera question de la pensée de Nelson que, pour ce dernier, croire en l'induction c'est la même chose que croire de façon platonicienne à l'existence des nombres et que donc les formalistes conséquents devraient renoncer au principe d'induction (au moins dans toute sa généralité).

---

46. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, (1902) Champs Flamarion pour l'édition 1968, p. 38 ; [64]

47. Il est illusoire de croire que le "théorème de récurrence" de la théorie des ensembles nous apporte quelque chose sur la solidité de notre croyance en les démonstrations mathématiques car il remplace le "principe d'induction" par l'axiome de l'"existence d'un ensemble infini" qui n'est pas plus rassurant.

Je conclurai ce paragraphe en disant que la croyance que la démonstration-3 nous apporte en l'égalité :

$$B^{10}_{1\,000\,000} = 2755855932732609816091471751889670638152284575001000 00$$

n'est ni plus ni moins forte celle que nous apportent les démonstrations -1 et 2 car toutes reposent sur le même genre de croyances en la légitimité d'extrapoler à partir de cas isolés et en notre capacité à reproduire le même acte une fois qu'il a été produit une fois.

Mais alors à quoi servent les mathématiques si, tout bien analysé, elles ne peuvent pas nous donner plus de certitude que notre simple bon sens. Que nous apporte donc la démonstration-3, ne serait-elle qu'une pure pédanterie sans intérêt ? Loin de là !

En effet, on sent bien que le défaut des démonstration-1 et 2 est qu'elles sont *astucieuses* ; elle sont étroitement liée à ce que nous pensons des boules et des urnes et on ne voit pas à quoi elles pourraient servir d'autre. En revanche on comprend bien que la démonstration-2 n'a pas demandé d'astuce. On a appliqué une méthode qui s'applique à toutes sortes de problèmes du même type ; on a utilisé un outil mathématique, la fonction "factorielle" qui avec d'autres outils (les fonctions puissance, l'exponentielle, le raisonnement par récurrence etc.) sont d'une remarquable efficacité pour résoudre *par le calcul* toutes sortes de questions pratiques. Mais ce genre de calcul n'est pas forcément ce qui conduira à l'expérience de la preuve [48]. Un mathématicien peut très bien être en présence d'un résultat "montré" par un calcul (ou toute autre manipulation formelle) irréfutable, sans qu'il éprouve l'expérience de la "preuve" ; c'est même une situation courante où l'on dit "ne pas comprendre la démonstration" alors qu'on est capable de vérifier l'exactitude formelle de toutes ses étapes.

Que conclure de cet analyse par le menu [49] d'une *preuve/démonstration* relativement à la thèse d'Arnold ?

48. En fait en combinatoire on utilise des techniques de démonstration spécifiques qui tendent à systématiser la construction de la bijection de la démonstration-2. Par exemple, sur le site du Mathématicien G. Viennot
`http://www.xavierviennot.org/xavier/recherches.html`
on peut lire :

> In bijective combinatorics, the purpose is to "explain" the various formulae or equations appearing in combinatorics with the explicit construction of bijections and correspondences between various classes of combinatorial objects.

49. Dans la présentation de l'ouvrage collectif *Le déclin de la philosophie analytique* (PUF 1999) , [13], Pascal Nouvel conclut :

Quand on discute de la différence entre physique et mathématiques ont met en avant le contact avec la réalité sensible pour la première, le travail purement formel de la déduction pour les secondes. Toutefois on nuance très vite ce jugement en remarquant qu'en physique le contact avec le réel se fait par le truchement d'instruments et que, donc, les observations ne sont pas directes mais se font à travers un appareil théorique abstrait qui peut être considérable [50]. Mais, en revanche, on met moins souvent en avant le fait que notre croyance dans la force des déductions mathématiques que nous utilisons dans nos théorie est de son côté fortement ancrée dans l'observation la plus immédiate qui soit du monde sensible.

Tout ceci pour dire que constater la spécificité de l'activité de déduction dans les mathématiques ne suffit pas pour balayer d'un revers de la main la thèse d'Arnold.

Mais venons en maintenant à des remarques qui vont plutôt dans le sens d'Arnold.

1.3 Le cahier des charges de la physique

Il est banal d'observer que dans l'histoire les besoins de la physique ont été un moteur puissant du développement des mathématiques. Je revisite quelques exemples bien connus pour les tirer dans le sens d'Arnold.

1.3.1 Clarifier les observations empiriques.

Sur la figure 1.7 j'ai tracé (en utilisant la règle et le compas), avec une maladresse qui essaye d'imiter les faibles moyens techniques de l'antiquité, à gauche les hauteurs, à droite les médiatrices, d'un triangle. Quiconque a oublié ses cours de géométrie élémentaire du collège (comme moi) se convainc facilement que si " médiatrice de AB " veut dire *perpendiculaire au milieu du segment* alors cela veut dire aussi *lieu des points à égale distance*. Alors le fait que les médiatrices

> Bien souvent les philosophes ont décrit leur travail à l'aide d'un instrument, d'un outil. Nietzsche parlait de philosopher au marteau, et Wittgenstein, lui, voyait sa pensée comme une bêche qui attaquait le sol raboteux du langage. Alors, quel est l'outil le plus propre à caractériser la philosophie analytique ? La pince à épiler peut-être.

Je me demande si je ne viens pas d'abuser de la pince à épiler ?

50. Ce qui fait dire à quelqu'un comme Quine que prétendre confronter une hypothèse à des faits comme le prétend le falsificationnisme n'est pas une affaire si claire qu'elle parait. Notre observation du monde, qu'on le veuille ou non, est imprégnée de nos théories.

de ABC se coupent en un même point est évident. En effet si 0 est l'intersection de la médiatrice de AB avec la médiatrice de BC le point 0 est à égale distance de A et B, à égale distance de A et C, donc à égale distance de A et C. Il y a une explication claire à ce fait d'observation.

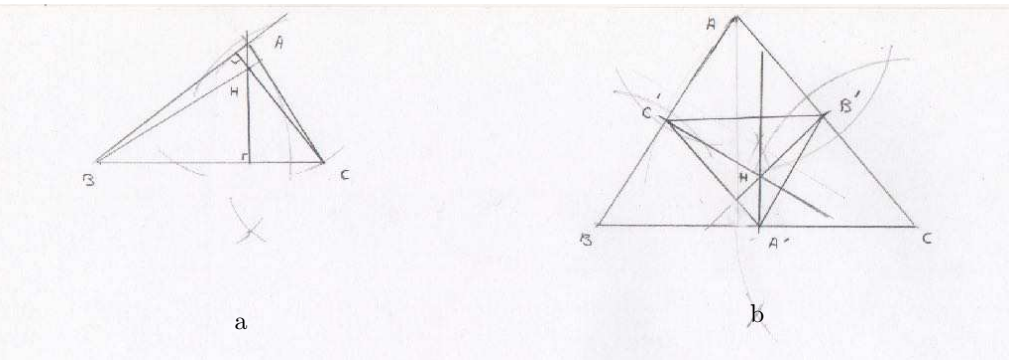

FIGURE 1.7 – Hauteurs et médiatrices du triangle.

Si maintenant nous traçons les hauteurs de ABC nous constatons qu'elles sont aussi concourantes. Les moyens pratiques mis en œuvre dans les deux cas sont exactement les mêmes et la difficulté de la construction du même ordre. En revanche, si vous avez oublié vos cours de mathématiques du collège, vous aurez bien du mal à trouver une bonne raison qui fasse que les hauteurs sont concourantes. Les géomètres Egyptiens avaient probablement fait cette remarque et l'on peut penser que si Euclide et Imothep s'étaient rencontrés le premier aurait dit au second « il faut trouver une raison à ces deux phénomènes ». C'est bien une attitude de physicien : donner des explications (raconter des histoires) qui rendent compte de façon adéquate du monde sensible. La géométrie euclidienne se construit bien comme une théorie physique de l'espace (à notre échelle). De plus j'insiste sur un point qui est rarement mis en avant. Quand nous constatons l'adéquation entre l'observation empirique du fait que les hauteurs sont concourantes et la démonstration euclidienne de ce fait, nous nous convainquons au moins autant de la qualité de notre machine à raisonner que de la qualité des axiomes d'Euclide à rendre compte du monde sensible. L'expérience valide non seulement les axiomes mais aussi les règles de déduction utilisées dans les démonstrations. Je suis donc tenté de dire que Arnold marque bien un point mais J. Harthong dans

L'idéalisme platonicien et la science [51] le contesterait de la façon suivante.

Le rapport de la longueur de la circonférence d'un cercle est connu depuis la plus haute antiquité comme approximativement égal à $3,14\cdot$. Les premières mesures donnent 1, puis 2 décimales et avec l'amélioration des techniques le nombre des décimales augmente. Je ne sais pas combien donnent de décimales les pieds à coulisse contemporains et je ne doute pas que les gravures laser utilisées pour la fabrication des microprocesseurs permettraient d'en gagner quelques unes. Mais à un moment donné du développement des techniques on ne sait pas quelle sera la valeur de la décimale suivante de π. De leur côté les mathématiques ont inventé (ou découvert, je ne prends pas parti) le nombre π dont elles calculent les décimales bien avant que la technique ne puisse les atteindre et personne ne doute que le jour où la technique permettra d'atteindre la $n-$ème décimale celle ci sera conforme à la valeur mathématique [52]. Selon Harthong ce qui a permis ce pouvoir de prédiction c'est d'avoir imaginé que la valeur du rapport est conséquence d'une propriété *qualitative* de l'espace, induite par l'observation, mais indépendante de son imperfection. Je cite :

> Si on lit l'un après l'autre les axiomes d'Euclide, on se rend compte qu'ils énoncent tous des propriétés qualitatives de l'espace, $(\cdots)$. Par exemple pour l'axiome des parallèles ou postulat d'Euclide, on ne peut distinguer expérimentalement des droites passant par un même point et pratiquement confondues ; mais si deux telles droites sont distinguables empiriquement l'une de l'autre, alors on peut aussi établir empiriquement que l'une des deux au moins coupera la parallèle à l'autre. L'énoncé empirique du postulat serait donc le suivant : si on trace une droite sur une très grande étendue de sable, et par un point extérieur à cette droite, une seconde droite qui, aussi loin qu'on puisse aller, ne coupe pas la première, alors, si on essaie d'en tracer une troisième passant par le même point et ne coupant pas non plus la première, on ne pourra la distinguer de la seconde. La vérité empirique de ce postulat fait appel à un seuil de précision qui est quantitatif, mais en dehors de ce seuil, l'énoncé est purement qualitatif. Il est donc possible par la pensée de séparer la vérité empirique en deux : d'un côté, la précision des instruments de vérification (qui est une quantité), et de l'autre la propriété abstraite (qui est qualitative). Si on ne retient de tous les axiomes d'Euclide dans leur version empirique que les propriétés qualitatives, on peut en déduire par la pensée pure toute la géométrie, mais celle-ci ne contient plus l'estimation des incertitudes.$(\cdots)$.

51. Dans *l'objectivité mathématique*, M. Panza et J-M. Salanskis eds., Masson 1995 ; [61].

52. Bien entendu il y a des limites à cette exploration expérimentale qui sont la structure atomique de la matière qui ne permet pas de "tracer" des cercles.

> On peut donc résumer tout cela en disant que ce qui a permis de faire du nombre π un nombre mathématiquement défini et non une valeur approchée est d'avoir érigé une loi approchée mais qualitative en loi mathématique ; une fois la loi mathématique énoncée, elle peut mener une vie propre.

Pour Harthong, donc, les mathématiques ont une « vie propre » ce qui, sans la contredire formellement, va plutôt contre l'hypothèse d'Arnold. Mais ce n'est pas mon propos de décider si ce texte d'Harthong va dans le sens d'Arnold, d'autant que le centre d'intérêt de son article ne porte pas sur cette question. Pour ma part je retiendrai simplement ici l'existence d'un "cahier des charges" clair : rendre compte à partir d'un petit nombre de lois (les axiomes d'Euclide), par la pensée pure, d'un grand nombre de faits observables.

1.3.2 La difficulté à parler du mouvement.

Le paradoxe d'Achille et la Tortue n'a rien à voir avec des observations remarquables. Il est bien établi empiriquement, depuis que l'homme existe, qu'un individu qui court deux fois plus vite qu'un autre finit par le dépasser ! Le problème est notre langage ordinaire qui a bien du mal à en rendre compte de ce que c'est que "aller plus vite". Ainsi, lorsqu'Achille a parcouru la moitié de la distance D qui le séparait de la tortue, cette dernière avance de $D/4$, ils sont maintenant distants de $3D/4$. On recommence et ce n'est qu'à la suite d'une infinité de constats de ce type que la distance sera nulle. Mais, si les suites indéfinies se conçoivent il n'en est pas de même d'une infinité réalisé, une infinité en acte. Il semble que Achille ne rattrape jamais la tortue. Pourtant si Achille met une minute pour parcourir la distance D il est tout à fait clair qu'au bout de deux minutes il aura rattrapé la tortue et sera largement devant au bout de trois minutes.

On voit bien qu'ici, il ne s'agit plus de rechercher des explications à des observation qui étonnent, mais de comprendre pourquoi le langage, c'est à dire pourquoi notre appareil à raconter des histoires, a autant de mal à parler de choses en apparence toutes simples. Ici l'objet de la recherche n'est pas la réalité sensible mais bien l'appareil cognitif qui la traite. Notre microscope-pensée a des aberrations chromatiques qu'il nous faudrait bien corriger. La chose n'est pas simple et il aura fallu un bon millénaire à l'humanité pour s'en sortir. Il a fallu inventer le "continu mathématique" et le calcul infinitésimal. Je retiens ici que Gallilée et Newton n'ont pas trouvé dans des mathématiques toutes prêtes de leur époque ce dont ils avaient besoin. C'est pour pouvoir parler du mouvement que la science des XVI et XVIIème siècles invente les mathématiques qui permettront d'écrire la

mécanique classique et il est tout à fait vain de vouloir distinguer ce qui ressortit des mathématiques de ce qui est de la physique.

Si cet exemple est clairement en faveur de la thèse d'Arnold, il ne l'établit pas définitivement. En effet on pourrait dire que bien entendu les mathématiques et la physique ont une origine commune mais qu'avec le temps elles se sont différenciées et que depuis l'avènement de la mécanique les mathématiques ont une vie propre, de plus en plus éloignée des motivations originelles. Comme dirait Harthong « elles vivent leur vie ».

Mais est-ce si évident ?

1.3.3 La géométrie non commutative

Les propriétés de l'espace et de la matière à l'échelle atomique sont surprenantes, tellement surprenantes que les théories physiques ont bien du mal à en rendre compte avec les mathématiques actuellement disponibles. Beaucoup de mathématiciens s'en moquent, mais pas tous. La *géométrie non commutative* de A. Connes (celui dont il a été question dans la dispute sur l'A.N.S.) en donne un exemple.

Une C^*-algèbre, comme son nom l'indique, est un objet algébrique. L'ensemble des fonctions continues sur un espace (par exemple un domaine de l'espace à trois dimensions) est une C^*-algèbre commutative (le produit fg de deux fonctions est égal au produit gf) et il est remarquable que réciproquement, toute C^*-algèbre commutative est l'algèbre des fonctions continues d'un certain *espace géométrique* au sens usuel (un espace de "points" sur lesquels on mesure des distances). Donc, d'un point de vue algébrique, la géométrie ordinaire, mais incluant les géométries non euclidiennes utilisées en physique, est l'étude des C^*-algèbre commutatives. On parle de "dualité", on fait de la géométrie via l'algèbre (ce qui est aussi le cas dans la correspondance via la notion de coordonnées cartésiennes entre une figure, par exemple le cercle, et une formule algébrique, dans ce cas : $x^2 + y^2 = 1$. Si l'on oublie les figures il est assez naturel pour un mathématicien de s'intéresser à ce qui se passe dans les C^*-algèbres lorsque l'on supprime l'hypothèse de commutativité.

Mais Alain Connes va plus loin. Il propose les C^*-algèbres *non commutatives* pour conceptualiser l'espace physique à l'échelle quantique. Je n'en dirai pas plus car je n'ai pas la compétence pour parler de cette question et je ne sais pas ce que "la physique" pense de cette tentative mais, et c'est la seule chose qui importe ici, elle est considérée comme sérieuse par "la mathématique" qui a une très grande considération pour ce travail récompensé par de nombreux prix. De plus

A. Connes revendique souvent l'applicabilité de sa théorie comme par exemple dans cette citation [53]

> If one assumes that bodies exist independently of position, then the curvature is everywhere constant, and it then follows from astronomical measurements that it cannot be different from zero ; or at any rate its reciprocal must be an area in comparison with which the range of our telescopes can be neglected. But if such an independence of bodies from position does not exist, then one cannot draw conclusions about metric relations in the infinitely small from those in the large ; at every point the curvature can have arbitrary values in three directions, provided only that the total curvature of every measurable portion of Space is not perceptibly different from zero. Still more complicated relations can occur if the line element cannot be represented, as was presupposed, by the square root of a differential expression of the second degree. Now it seems that the empirical notions on which the metric determinations of Space are based, the concept of a solid body and that of a light ray, lose their validity in the infinitely small ; it is therefore quite definitely conceivable that the metric relations of Space in the infinitely small do not conform to the hypotheses of geometry ; and in fact one ought to assume this as soon as it permits a simpler way of explaining phenomena.

Ceci est donc un exemple de mathématiques très récentes et très abstraites développées explicitement pour les besoins de la physique. Et ce n'est pas moi qui fait dire au texte d'A. Connes ce qui m'arrange. Dans une conférence de 2016 dans le cadre d'un cycle interdisciplinaire organisé par l'université Paris - Sciences - et - Lettres [54] il dit, en réponse à une question :

> Il n'y a pas d'un côté les mathématiques et de l'autre le physique. C'est la même chose. On essaye tous de comprendre. Et justement il y a cette profondeur dans certains concepts des mathématiques qui viennent immédiatement de la physique.(...) C'est la nature qui nous parle.

Mais nous n'avons parlé que de mathématiques et physique. C'est oublier qu'à l'instant ou je parle, sur cent individus en train d'utiliser des mathématiques d'un niveau avancé probablement plus de quatre vingt dix le font dans le cadre d'un travail d'ingénieur. Que peut on dire sur les ingénieurs et les mathématiques ?

---

53. : Citation extraites de NONCOMMUTATIVE GEOMETRY YEAR 2000, arXiv `https://arxiv.org/abs/math/0011193`

54. `https://www.youtube.com/watch?v=qrpp1Mh8EDo`

1.4 Les mathématiques de l'ingénieur

Bien avant la pensée grecque, l'humanité s'est préoccupée de fabriquer des objets "utiles". J'ai mis utile entre " " parce que bien évidemment il faudrait de long discours pour préciser ce qu'est "utile", mais ce n'est pas mon objet. Les objets que j'appelle "utiles" sont "utiles" en ce sens qu'à un moment donné la société juge important de les produire. De ce point de vue, la roue, le moulin à vent, la machine à vapeur, les smartphones, les pesticides chimiques, les missiles de croisière sont des objets "utiles" et j'appelle *ingénieurs* ceux qui les conçoivent et les produisent depuis les temps préhistoriques. J'appelle *technique* l'activité correspondante. Dans l'inconscient du monde académique, surtout en France où les écoles d'ingénieurs sont séparées de l'Université, la technique est subordonnée à la science ; ce serait dans le savoir scientifique accumulé que les ingénieurs puiseraient, pour le meilleur ou pour le pire, la matière de leurs inventions. Bien entendu cette vision ne résiste pas à un examen un peu sérieux mais les études sur ces questions ne sont pas encouragées par les institutions qui gèrent la recherche pour la simple raison que leurs responsables doivent pouvoir dire au politique « certes, Monsieur le ministre, nos recherches n'ont pas d'applications immédiates mais à long terme...» et de citer telle découverte de la recherche pure dont les applications remarquables se sont fait attendre longtemps, parfois plusieurs siècles. Dans nos temps où le seul objectif de la gestion des affaires publiques est un rapide retour sur investissement, pour utiliser le vocabulaire libéral à la mode, nous ne pouvons pas blâmer les responsables de la recherche. Mais une conséquence fâcheuse de cette situation est que les exemples démontrant que la science mathématique précède la technique l'emportent largement sur ceux qui disent le contraire ce qui contribue à donner une idée biaisée de la nature des mathématiques. L'objet de cette section est de rétablir un peu l'équilibre en donnant des exemples d'un poids équivalent à ceux du paragraphe précédent où les besoins pratiques des ingénieurs font progresser les mathématiques.

1.4.1 Les moteurs de la géométrie

Le savoir faire technique en géométrie des Mésopotamiens et des Egyptiens était considérable. Il précède largement les mathématiques Grecques. Les historiens semblent nous dire que Thalès et ses successeurs possédaient le savoir des Egyptiens mais personne ne nous dit que ce sont des problèmes pratiques qui ont

contribué à l'éclosion des mathématiques d'Euclide [55]. Il n'est pas absurde d'imaginer (je dis bien imaginer !) que des problèmes de géométrie qui résistaient aux conditions matérielles des tracés de l'époque ont poussé à démontrer que certaines propriétés de figures difficiles à tracer sont idéalement vraies ? La réponse à ces questions est difficile en raison du peu de traces que nous avons mais la difficulté ne décourage pas des historiens comme Maurice Caveing [56], Olivier Keller [57], Reviel Nertz [58] dans leurs tentatives de reconstitution des pratiques mathématiques chez Euclide et avant. Il reste cependant bien difficile de séparer dans la motivation des mathématiciens antiques la démarche du physicien (comprendre le monde) de celle de l'ingénieur (agir sur le monde).

En revanche, quand on se rapproche dans le temps il est plus facile d'être affirmatif. Dans la définition très large de l'ingénieur et de la technique (produire des objets utiles) que j'utilise ici j'ai le droit d'inclure les peintres et la peinture. Parlons de la perspective. L. Alberti (1404 - 1472), un de ses inventeurs, qui connaissait les mathématiques de son temps, s'en est servi pour donner une méthode de construction de la décroissance de la profondeur apparente des carreaux lorsque l'on s'éloigne et, surtout, pose en 1435 la question "quelles sont les propriétés géométriques communes à deux perspectives d'une même figure" qui est “La question” de la géométrie projective. La géométrie projective, théorie mathématique qui contient les résultats de la perspective des peintres, est fondée bien plus tard au XVIIème siècle, notamment par G. Desargues [59] (1591-1661) et devient un grand chapitre des mathématiques où s'illustreront J-V. Poncelet (1788 - 1867), A-F Möbius (1790 - 1868) et F. Klein (1849-1925) au XIXème siècle. C'est certainement, en partie, pour mieux comprendre les lois de la perspective que les "ingénieurs peintres" avaient dégagées que les mathématiciens ont développé la géométrie projective.

---

55. Dans cet ordre d'idées on peut se demander si la corde à 13 œuds précède ou non le théorème de Pythagorre. On soupçonne sans en avoir la preuve que son usage était connu des Egyptiens ; en revanche on est certain qu'elle était d'un usage courant au moyen âge.

56. *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, Presses Univ. Septentrion, 1998 ; [12]

57. *La géométrie des Sulbasutras. Exemple de géométrie rituelle de l'Inde védique : l'agrandissement de l'autel en forme de faucon.* Repères IREM n°40 (2000) ; [44] : pp.115-124.
Préhistoire de la géométrie : la gestation d'une science d'après les sources archéologiques et ethnographiques, Thèse Paris, EHESS, 1998.

58. *The shaping of deduction in Greek mathematics : A study in cognitive history*, Cambridge University Press, Vol. 51, (2003) ; [59].

59. Desargues était mathématicien et architecte, on peut dire qu'il faisait des mathématiques appliquées au sens moderne de l'expression.

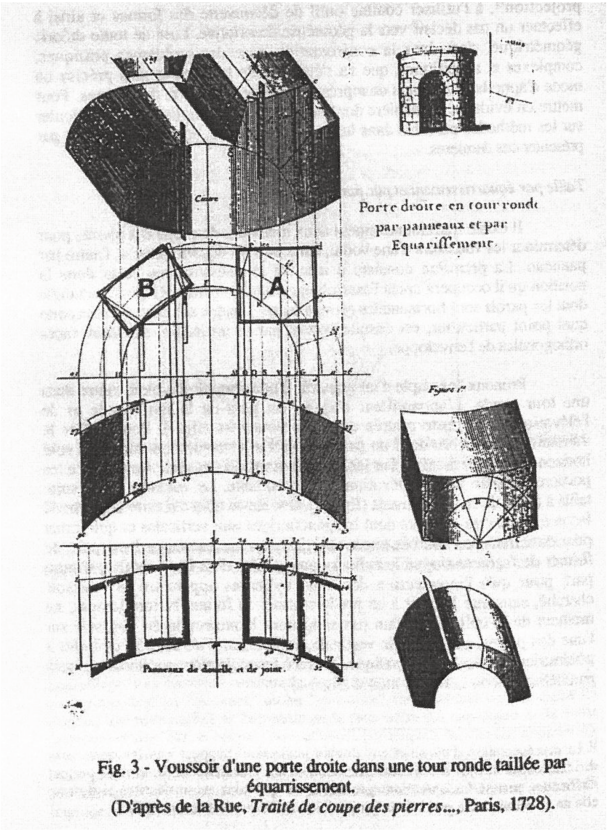

FIGURE 1.8 – Taille des pierres d'après J. Sakarovitch

Mais je veux bien admettre que les artistes peintres et les architectes sont, par leur recherche de la beauté, plus proches de « l'honneur de l'esprit humain» que de vulgaires ingénieurs et que ce dernier exemple pourrait être considéré comme peu probant pour ma thèse. Alors prenons l'exemple des tailleurs de pierre. Quoi de plus concret et prosaïque que la taille de la pierre. J'emprunte ce qui suit à un article de J. Sakarovitch : *La taille des pierres et la géométrie descriptive* [60].

La taille des pierres qui constituent les voutes des édifices n'est pas évidente. De la forme que la pierre doit avoir dans divers plans il faut déduire sa forme dans l'espace, et le volume final doit être obtenu à partir d'un bloc initial ayant la forme d'un parallélépipède. La méthode de taille n'est pas indifférente et la taille

60. Colloque inter-irem *La figure et l'espace*, ISBN 2906943290 (1993) pp. 117-138

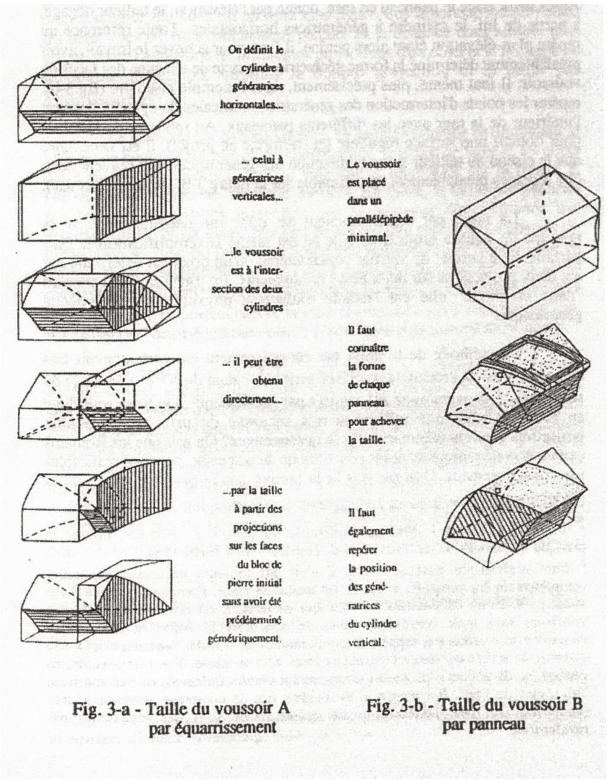

FIGURE 1.9 – Taille des pierres d'après J. Sakarovitch

par panneau (voir figure 1.9) permet d'économiser 30 % de matériau brut sur la taille par équarrissement. Ces techniques sont connues des tailleurs de pierre depuis très longtemps, peut être dès les Vème ou VIème siècles.

> Le premier traité de taille des pierres est publié par Philibert de l'Orme en 1567. Avec les traités la méthode par panneau s'impose définitivement. (···) Ce premier traité de stéréonomie est conçu comme un catalogue de cas auquel le praticien peut se référer. Les démonstrations données dans les textes d'accompagnement restent confuses et comportent même de nombreuses erreurs.

Près d'un siècle plus tard, en 1640, le mathématicien-architecte G. Desargues que nous avons déjà vu apparaitre à propos de perspective, publie un court texte de huit pages.

> D'esprit novateur et de lecture ardus, utilisant un vocabulaire novateur, le

> texte de Desargues n'est pas compris des professionnels auquel il s'adresse.
>
> A partir de Desargues se développe une double tradition, celle des praticiens et celle des théoriciens.

Dans la tradition des praticiens nous retiendrons *Le traité des coupes de pierre* de J-B De La Rue publié en 1728 qui présente des « planches $(\cdots)$ très bien gravées et très bien illustrées » que le mathématicien G. Monge (1746 - 1818) utilisera dans ses cours à l'école Polytechnique.

Je ne présente pas la grande figure bien connue de Gaspard Monge, grand savant de la Révolution, mais j'insiste sur un point. Entré en 1764 comme élève à l'Ecole du génie de Mézières il est en 1775 "Professeur royal de mathématiques et physique" de cette même école, promotion rapide qu'il doit entre autres à la solution qu'il propose du "problème du défilement" [61] :

> A l"Ecole du génie de Mézières, Monge n'enseigne pas encore la géométrie descriptive en tant que telle - du moins nous n'en avons pas la trace - et l'expression même de "géométrie descriptive" n'existe pas. Elle apparaît pour la première fois, sous la plume de Monge, en 1793, dans un texte où il présente un projet d'organisation pour les écoles secondaires du département de la Seine. L'acte institutionnel de naissance de cette discipline est donc très étroitement lié aux projets pédagogiques que Monge élabore sous la Révolution. Mais sa conception même date surement de la période où Monge enseigne à Mézières et c'est sur cette époque que nous voudrions revenir.

Et J. Sakarovitch développe ce qu'il définit comme un transfert de technologie : la transformation d'un ensemble de techniques en une théorie mathématique rigoureuse enseignée à l'école Polytechnique naissante. La géométrie descriptive devient alors un outil remarquablement puissant : c'est en quelque sorte l'outil de conception assistée par ordinateur d'avant l'ordinateur ; les algorithmes y sont des procédures de dessin (tracer les lignes de rappel, effectuer un changement de plan) presque mécaniques, enseignées pour elles même et figurant, avec l'usage de la règle à calcul, au concours des grandes écoles prestigieuses jusque dans les années mille neuf cent soixante et plus.

Il est tout à fait clair que le schéma : les mathématiques créent des concepts et des méthodes qui trouvent (comme par miracle) un jour des applications ne fonctionne pas pour la géométrie descriptive.

---

61. C'est une question de technique militaire. Quelle forme doit-on donner à un mur de protection contre les boulets de canon compte tenu de la topographie autour du lieu à protéger.

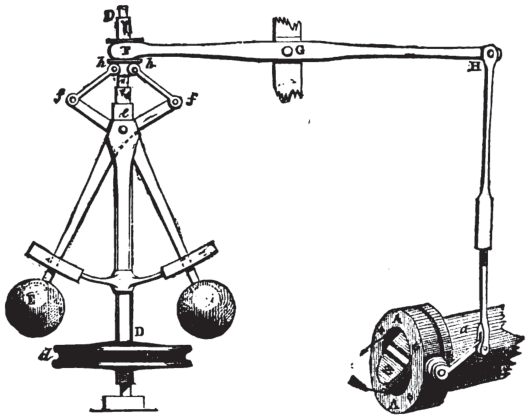

FIGURE 1.10 – Régulateur à boules

1.4.2 Le régulateur de Watt et la stabilité des systèmes.

L'histoire suivante se situe environ un siècle plus tard et elle raconte à peu près la même chose. L'émergence, à partir de pratiques de l'ingénieur et de la nécessité d'améliorer la "technique", de nouvelles préoccupations mathématiques : la théorie de la stabilité des états stationnaires des systèmes dynamiques.

Le régulateur à boules, dont on attribue l'invention à Watt (1736-1819) en 1788, est un dispositif (voir figure 1.10) destiné à stabiliser la vitesse d'une machine à vapeur. Le principe en est simple. Les deux masselottes tournent autour d'un axe vertical dont le mouvement est solidaire du volant d'une machine à vapeur. Lorsque la vitesse du volant augmente, celle de l'axe de rotation des masselottes aussi et, sous l'action de la force centrifuge, ces dernières s'écartent provoquant par l'intermédiaire d'un système mécanique une diminution de la pression de vapeur. C'est ce que, dans un langage largement répandu de nos jours, on appelle une *rétroaction*. Ce dispositif était universellement utilisé sur les machines à vapeur au milieu du XIXème siècle.

Dans son livre *Equations différentielles ordinaires* le mathématicien L. Pontryagin (1908 - 1988) raconte que le régulateur à boules, qui remplissait parfaitement son office dans les premiers temps de son invention, fonctionnait de plus en plus mal au milieu du XIXème siècle. Il attribue la théorie mathématique qui a résolu le problème à l'ingénieur Russe Vichnégradski, « le fondateur de la théorie de la régulation automatique ». Mais Pontryagin n'est pas un historien des

sciences et, dans le contexte de la guerre froide, il s'applique à défendre la science russe. En réalité les travaux de Vichnégradski datent de 1876 et, presque dix ans avant, en 1868, le grand J. C. Maxwell publiait *On the governors* qui est considéré comme l'article fondant l'*automatique* moderne.

Toutefois ce qui est intéressant dans le livre de Pontryagin c'est l'explication de la dégradation des performances des régulateurs. Un dispositif tel que le régulateur de Watt se modélise mathématiquement sous le forme d'un système de trois équations différentielles qui dépendent de paramètres physiques tels que la masse des masselottes (m), les forces de frottement (b) , l'inertie du volant (J). On peut démontrer qu'une condition nécessaire de stabilité est que l'inégalité :

$$\frac{bJ}{m}\nu > 1$$

soit satisfaite, où ν est un paramètre qui dépend du rapport des vitesses de rotation du volant et de l'axe de rotation des masselottes. Cette formule explique en quoi l'évolution de la technique avait eu un effet négatif sur la stabilité. Les machines étaient mieux usinées diminuant les frottements (b), avaient des volants de moment d'inertie plus faible (J) et les masselottes étaient plus importantes (m) pour agir sur des soupapes plus lourdes. Trois progrès techniques qui allaient à l'encontre de la stabilité. En ré-introduisant des frottement et en jouant sur le paramètre ν les choses rentrèrent dans l'ordre.

La démonstration de la condition nécessaire de stabilité repose sur l'analyse du signe des parties réelles des racines d'une équation de degré trois associé à une certaine matrice. Au milieu du XIXème siècle la mise en équation du régulateur était maitrisée mais aucune théorie de la stabilité des systèmes n'était disponible. Au plan théorique les travaux de Maxwell et Vichnégradski étaient précurseurs mais incomplets et ce n'est qu'à partir de 1900 qu'on a disposé, grâce aux travaux des mathématiciens E. Routh (1831-1907), A. Hurwitz (1859 - 1919) et A. Liapunov (1857-1918), d'une théorie achevée de la stabilité des systèmes au voisinage de leurs points d'équilibre, très largement enseigné de nos jours dans les écoles d'ingénieurs. Cette théorie a évidemment bénéficié des connaissances sur les équations différentielles, notamment des travaux de mécanique céleste, mais elle ne pouvait pas s'y trouver toute prête puisque, en mécanique céleste, il n'y a pas de frottement !

La théorie du régulateur à boules n'est donc pas non plus une application de mathématiques toutes prêtes. Elle est le résultat d'une longue tradition qui remonte à la clepsydre et au sablier, puis passe par le développement de l'horlogerie qui débute au XIVème siècle pour aboutir à la "science des automatismes". Ce

sont les besoins de l'industrie du XIXème siècle qui ont stimulé une recherche mathématique qui est loin d'être anecdotique et se poursuit de nos jours comme nous allons le voir.

1.4.3 La théorie du contrôle et la géométrie différentielle

Dans les années 1950 un effort considérable était consacré au "guidage" des engins divers dont une grande partie, mais pas tous, était à usage militaire. Voici quelques problèmes classiques de l'époque :

— Comment régler la force de propulsion d'une fusée pour qu'elle atteigne une altitude la plus grande possible ?

— Comment intercepter un missile en vol avec un autre missile ?

— Le rendez vous orbital : comment manœuvrer une fusée pour qu'elle rencontre en douceur un satellite déjà en orbite ?

— Comment piloter de façon plus ou moins automatique un avion ou une centrale nucléaire ?

— etc.

Ces problèmes sont essentiellement mathématiques. En effet les pratiques du moment déterminent l'essentiel de la conception d'un engin, par exemple un réacteur nucléaire, dont un modèle mathématique est réalisé, et "l'ingénieur mathématicien" travaille sur le modèle pour en établir les propriétés et les améliorer. La partie mathématique du travail s'appelle "théorie du contrôle" (ou "théorie de la commande") [62].

Ce travail mathématique, qui n'était pas à proprement parler de la recherche mathématique, se faisait dans les bureaux d'étude des industriels et les "laboratoires de mathématiques appliquées" des Universités avec des systèmes de collaboration dépendants de la culture scientifique des pays concernés.

Dans les années 1960 l'objet mathématique central de la "théorie du contrôle"

62. Signalons, pour la bonne conscience des mathématiciens qui font de la théorie du contrôle, que le problème du contrôle de la fusion nucléaire qui procurerait à l'humanité une source d'énergie propre et inépuisable est principalement un problème d'automatique : contrôler en temps réel le confinement d'un plasma à l'aide de champs électromagnétiques.

était un système différentiel de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x,u(t)) \\ x(0) &= x_o \\ u(\cdot) &\in \mathscr{U} \end{aligned}$$

écrit dans la tradition héritée du régulateur à boules, et le problème était de décrire l'ensemble des solutions possibles lorsque $u(\cdot)$ parcourait l'ensemble $\mathscr{U}$. C'est ce que l'on appelait le problème de la *contrôlabilité* du système.

Peu importe ce que représentent ces écritures et ce que cela veut dire. Disons simplement que ce formalisme entraine dans l'univers de l'analyse fonctionnelle et des techniques qui y sont attachées comme, par exemple, la théorie des distributions alors en plein développement. A la fin des années 1960 quelques auteurs plutôt mathématiciens mais liés au monde des ingénieurs, proposent une reformulation de la question sous la forme :

> Le problème de la contrôlabilité d'un système est celui de la *transitivité* d'un certain *semi-groupe* engendré par une *famille de champs de vecteurs*.

Cette nouvelle formulation faisait basculer le problème dans un champ complètement différent de celui de l'analyse fonctionnelle : celui de la géométrie différentielle. Quelques résultats remontant au début du siècle furent appliqués avec succès [63].

---

63. Je ne chercherai pas à dire qui à fait quoi. L'histoire est récente et l'on pourrait me reprocher de l'avoir écrite dans un sens favorable à telle ou telle école (la compétition était vive entre différents groupes), ce qui détournerait de mon propos. Toutefois le lecteur intéressé pourra consulter les notes historiques du livre *Geometric control theory* par V. Jurdjevic, Cambridge University Press, 1997 ou encore la remarquable étude historique de H. Sussmann et I. Willems *Three Centuries of Curve Minimization : from the Brachistochrone to Modern Optimal Control Theory*,
`https://scholar.google.fr/scholar?hl=fr&as_sdt=0%2C5&q=Three+Centuries+of+Curve+Minimization&btnG=`
d'où j'extrais :

> More recently, it has become apparent that, as R. Hermann (cf. [70]) and others (cf. Brockett [31], Hermes [71], Krener [83], Lobry [93], Jurdjevic-Sussmann [127, 77]) had argued since the 1960s and early 70s, a controlled dynamics such as (XVI.1) is, really, a family of vector fields, and such an object has to be studied using the machinery of differential geometry, which allows us to associate an algebraic structure to a family of vector fields, by looking at their Lie brackets. This rich and interesting algebraic structure, arising from a controlled dynamics even in the absence of an optimization problem, is completely absent from the classical calculus

Jusqu'ici nous sommes donc dans le schéma où, dans le réservoir des connaissances mathématiques établies, des praticiens puisent des résultats qui leur sont utiles. Mais ces premiers succès avaient plus valeur de test de la méthode que la résolution de problèmes sérieux. En effet ce que la théorie mathématique toute prête avait à offrir ce n'était pas la théorie « $\cdots$ de la *transitivité* d'un certain *semi-groupe* engendré $\cdots$ » mais celle de la de la *transitivité* d'un certain *groupe* engendré $\cdots$ et d'un point de vue pratique la transitivité du groupe n'est pertinente que pour quelques cas très limités. Du point de vue de l'esthétique des mathématiques des années soixante faire la théorie de la *transitivité des semi-groupes engendrés* était de peu de valeur. Si les besoins de la pratique n'avaient pas été derrière il est peu probable qu'elles se seraient emparées de la question. Donc, entre 1970 et 1990 des mathématiciens appliqués ont travaillé sur la transitivité des semi-groupes en mettant en avant l'utilité pratique de leurs résultats. Mais au passage ils ont démontré des résultats dont l'esthétique du point de vue le plus pur était incontestable qui, associés à de vieilles idées de physique mathématique, ont définit un nouveau champ de recherche qu'on appelle maintenant la *géométrie sous-riemanienne* qui a parfois oublié ses origines prolétaires et se développe dans les endroits les plus chics [64]. Cette question de contrôlabilité des systèmes ne montre certes pas que les mathématiques sont un sous produit de l'activité des ingénieurs automaticiens mais elle met en lumière une réelle fécondité mutuelle [65].

On peut raconter la même histoire avec l'informatique. Au tournant du XXème siècle des mathématiciens se posent des questions de nature philosophique sur les fondements de leur discipline (Cantor, Hilbert, Gödel). Ils inspirent l'informatique (machine de Turing en 1936) qui en retour introduit dans les mathématiques une nouvelle vision, des nouveaux concepts (la question du constructivisme en mathématiques n'est plus celle de savoir ce qui est "en principe" constructif, mais ce qui est effectivement calculable avec une machine concrète) et des bouleversements pratiques (la vérification des preuves) dont nous ne mesurons pas encore toute la portée.

---

of variations.

64. Kupka, Ivan. *Géométrie sous-riemannienne*, Séminaire Bourbaki 38 (1997) : 351-380.

65. Dans le même ordre d'idées on pourrait citer les travaux : Fliess, M., Lévine, J., Martin, P., & Rouchon, P. (1995). *Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples*, International journal of control, 61(6), 1327-1361 (1995) et une bonne partie des travaux de M. Fliess.

1.5 Deux autres visions des mathématiques

Dans ce paragraphe j'expose rapidement, en essayant de ne pas trop les trahir, les points de vue de deux autres mathématiciens. Ce qui m'intéresse ici c'est de constater que des approches radicalement différentes de la mienne conduisent à une vision où les mathématiques ne sont plus du tout en position d'extériorité par rapport à la physique et retrouvent toute leur place dans le monde "sensible".

1.5.1 Jean-Louis Krivine

Jean-Louis Krivine est un Informaticien-Logicien-Mathématicien (dans l'ordre alphabétique, il n'y a pas de hiérarchie dans les disciplines) dont le manuel *Théorie des ensembles* est un classique (cité par Duchemin) et connu pour ses travaux sur le λ-calcul. Dans *Mathématique des programmes et programme des mathématiques* [66] il pose la question, « qu'est-ce que les mathématiques, et pourquoi en fait-on ? » et pense que les outils de sa discipline permettent de lui apporter une réponse :

> (...) dans mon domaine de recherches, à la frontière entre la logique mathématique et l'informatique, des outils puissants ont été découverts, grâce auxquels il me semble possible d'apporter une réponse à ce problème.

Voyons.

En informatique il faut distinguer entre *programme* et *code*. Le code est strictement une suite de 0 et de 1 stockée quelque part dans la machine sous une forme physique ou une autre et qui est traitée par les éléments physiques de la machine (le processeur). Peu importe ici comment. La chose qui importe est que la suite de 0 et de 1 n'a rigoureusement aucun sens pour un observateur humain. Nous allons supposer, par exemple, que ce code a la propriété que si nous rentrons dans la machine un nombre x, son exécution fournit le nombre $\sqrt{x}$ avec six décimales correctes. Ce code a été produit à partir d'un *programme* qui pourrait être quelque chose comme :

1. $a \leftarrow 0$;
2. $b \leftarrow 1+x$
3. repeat :
4. $\qquad c = (a+b)/2$;

66. Colloque "La seconde vie de la logique mathématique" : E.N.S. 6 Avril 1992
`https://www.irif.fr/~krivine/articles/mathpro2.pdf`

5. if $(a+b)/2 < u$ then $a \leftarrow c$ else $b \leftarrow c$
6. until $(b-a) < 10^{-6}$
7. write(c) ;

Ce programme, qui lui est parfaitement lisible par un humain spécialisé (ici un programmeur) est une mise en programme possible d'un algorithme (l'algorithme de dichotomie), qui, si l'on lui propose un nombre x, fabrique une suite $x_1, x_2, \cdots, x_n$ qui tend vers $\sqrt{x}$.

Le programme est introduit dans la machine qui possède un dispositif qui va le transformer en *code*. Ce dispositif s'appelle un *compilateur* et l'opération de transformation d'un *programme* en *code* s'appelle la *compilation* [67].

Or il se trouve que si la *compilation* est une opération aisée (quand on possède le *compilateur*), en revanche, retrouver un *programme* à partir du *code* est une opération pratiquement impossible. Ça fait partie de ces opérations pratiquement irréversible comme retrouver, à partir de leur produit, deux nombres premier très longs. Déjà, ce que la théorie des systèmes nous a enseigné, c'est que, sur la simple information que le *programme* calcule la racine carrée d'un nombre, il n'y a pas d'espoir de le retrouver pour la simple raison qu'il y a toutes sortes d'*algorithmes* différents qui calculent la racine carrée. Ensuite, dans notre exemple simple, on devinera facilement après plusieurs expériences ce que fait le *code*, mais pour des *codes* sophistiquées il n'est pas évident de savoir ce qu'ils font exactement [68]. On peut au mieux (comme dans la théorie des systèmes) fabriquer un nouveau *programme* qui aura le même comportement après compilation que le *code initial*.

L'idée de Krivine est que le cerveau humain est une machine d'une extraordinaire complexité destinée à traiter l'information reçue de l'environnement via les sens et à produire les actions pertinentes pour l'individu qui par exemple s'arrête au bord d'une falaise de plus de x mètres parce qu'il sait qu'au delà la chute sera rude [69]. Toujours selon Krivine un tel comportement est codé et le *code* est le résultat de millions d'années d'évolution. Pour lui, faire des mathématiques, c'est *décompiler le code du cerveau*. Cette idée qui pouvait sembler un peu folle en

67. Le *compilateur* est en fait le code d'un (gros) programme. Il n'y a pas à se torturer l'esprit sur l'origine du compilateur qui a compilé le compilateur qui a compilé $\cdots$: c'est historique. On a créé, à partir du langage machine (suite de 0 et de 1), des langages de plus en plus lisibles par des humains avec des compilateurs de plus en plus complexes compilés avec les compilateurs de génération précédente etc.

68. C'est le problème de l'open source : on reproche à certains industriels de l'informatique de ne fournir que les codes, mais pas le programme (on dit le source).

69. Ce comportement complexe n'est pas le propre du seul cerveau humain et x dépend de l'espèce.

1992, prend de la consistance devant l'avancée des neurosciences [70] et les performances des ordinateurs joueurs de Go.

Cette vision résout le problème de la miraculeuse adéquation des mathématiques à décrire les lois de la physique de la façon suivante. Je cite :

> En fait, l'explication est simple, justement si l'on admet que les mathématiques ne sont que le décodage de programmes "utilitaires" que dieu, autrement dit un milliard d'années d'évolution, a écrits dans le cerveau des êtres vivants supérieurs. Il n'y a alors vraiment rien d'étonnant â ce que ces programmes soient en profond accord avec l'environnement de ces êtres vivants ; sinon, ils rempliraient bien mal leur rôle, qui est d'adapter le mieux possible l'organisme qu'ils régissent à cet environnement. Par suite, rien d'étonnant non plus à ce que, en lisant ces programmes dans notre propre cerveau, nous croyions découvrir des "lois de la nature".

Ce n'est pas exactement dire, comme Arnold, que les mathématiques font partie de la physique ; faire des mathématiques, ce serait plus exactement faire de la neurophysique, c'est à dire étudier (décompiler) les traces que l'évolution a laissé sous forme de code dans le cerveau des êtres vivants supérieurs.

1.5.2 Frédéric Patras

Frédéric Patras est un mathématicien qui travaille sur des aspects algébriques et combinatoires qui interviennent en géométrie et en physique mathématique. Il porte depuis toujours un regard philosophique sur les mathématiques. Dans l'ouvrage *La pensée mathématique contemporaine* [71] il se livre, dans une analyse guidée par la phénoménologie de Husserl, à une déconstruction du structuralisme mathématique à la Bourbaki pour montrer à un large public (y compris de mathématiciens) que la recherche d'une philosophie pour les mathématiques a toujours tout son sens en ce début de XXIème siècle. Je dois tout de suite avouer ici mon abyssale ignorance des travaux de Husserl et de ce qu'est la phénoménologie [72] mais j'ajoute tout de suite que cela ne m'a absolument pas gêné pour comprendre les thèses exprimées dans *La pensée mathématique contemporaine* ; c'est dû au grand talent de l'auteur pour expliquer simplement des concepts difficiles.

---

70. c.f. Stanislas Dehaene, *Le code de la conscience*, Odile Jacob (2014) ; [19].
71. PUF, (2001) ; [62]
72. Je tiens à préciser qu'il ne s'agit pas du tout d'une position doctrinale, je n'ai rien contre la phénoménologie, mais d'une ignorance coupable. J'espère que j'aurai le temps de combler cette lacune.

Le livre explique la genèse des objets mathématiques :

> Ainsi des cercles ou des triangles ou encore des premiers nombres naturels, dont on admettra qu'ils puissent faire l'objet d'une expérience quotidienne être reconnus nécessairement comme des concepts abstraits.(...) De notre expérience des cercles tracés, nous procédons jusqu'à l'idée de cercle (...). Lorsque le mathématicien dispose de concepts mathématiques il est assuré de leur existence sans avoir à revenir sans cesse aux intuitions à partir desquelles il a pu abstraire ces concepts.

Et après avoir développé d'autres exemples plus abstraits comme celui de "loi de composition" il conclut ce paragraphe par :

> Les idées mathématiques habitent le monde vécu !

Puis il s'attache à montrer, à partir d'exemples contemporains pris dans l'œuvre de A. Grothendieck ou R. Thom, que les plus grandes abstractions sont elles aussi ancrées dans le monde sensible.

> Ainsi, l'idée, chère à Thom, de bord est-elle abstraite de notre fréquentation de l'espace vécu. La notion de bord, aussi bien au sens intuitif qu'au sens de la géométrie différentielle ou de la topologie, se manifeste à nous à travers la vue ou de contacts physiques. Un échange se produit selon deux directions : percevoir la notion de bord dans ses manifestations concrètes enrichit notre intuition mathématique, mais en retour notre perception du vécu est affinée par les développements de la théorie mathématique : la pensée mathématique habite le monde réel et en informe les perceptions !

Sans aller jusqu'à dire comme Arnold que les mathématiques sont un chapitre de la physique, Frédéric Patras refuse donc de les considérer comme des idées pures qui nous viendraient d'on ne sait où.

Il critique le structuralisme de Bourbaki

> (...) depuis la rupture des années 1950, c'est à dire depuis l'instauration de l'esprit structuraliste et moderniste, les mathématiciens les plus en vue ont le plus souvent cautionné l'idée d'une indépendance des contenus mathématiques à l'égard de leurs implications ou présupposés philosophiques.

et ajoute un peu plus loin :

> Cette attitude détestable est-elle en passe de prendre fin ? Il faut l'espérer et cela pourrait bien passer par les nouvelles «mathématiques applicables». Les liens toujours plus nombreux qu'entretient la recherche mathématique avec l'univers phénoménal exigent que soient repensés les fondements de la

> validité mathématique, en particulier dans sa fonction d'approximation du réel.

Il conclut en appelant de ses vœux un renouveau de l'attitude des mathématiciens :

> Ainsi, qu'il faille aux mathématiciens professionnels (re)lire Husserl avec un regard dégagé de préjugés devrait aller de soi, car où aller chercher sinon les matériaux fondateurs de ce poststructuralisme dont leur science à si terriblement besoin ?

1.6 Les mathématiques : une "indiscipline" ?

Finalement que conclure relativement à la proposition d'Arnold ? On voit qu'il y a quelques raisons de la prendre au sérieux mais il est malgré tout difficile de le suivre jusqu'au bout. Par leur apparent désintérêt pour toute confrontation à la réalité sensible, par leur absence de procédures de falsification dirait Popper, les mathématiques peuvent difficilement prétendre être de la physique, ni même de la science.

Entre le moment où elles naissent de ce que nos sens nous disent du monde (ou de notre besoin de nous y adapter) et celui où elles nous aident à mieux le comprendre (ou à mieux le maitriser), les mathématiques vivent leur vie propre. Elles se posent des questions hautement spéculatives :

— qu'est ce que l'"infini" ?

— que sont le "point", la "ligne", le "continu géométrique" ?

— qu'est-ce que le “hasard” ?

— qu'est-ce qu'une "procédure" ?

— $\cdots$

auxquelles elles ne prétendent pas apporter de réponses définitives mais élaborent des concepts :

— les ensembles, les ensembles "équipotents" et enfin les ensemble équipotents à une partie propre $\cdots$, pour parler de l'infini,

— les nombres pour compter, les grandeurs pour mesurer, les nombres "rationnels" les nombres "réels"$\cdots$,

— le hasard pur des "mesures équiprobables", la "complexité algorithmique" de Kolmogorov-Chaikin $\cdots$,

— la machine de Turing,

qui nous aident à les préciser. Elles s'interrogent sur la validité de leur discours en remettant périodiquement en cause ce qui paraissait pourtant bien établi.

Qu'est-ce donc que cette activité sinon celle du philosophe ?

Ce n'est pas parce que Dieudonné a raison de dire (dans les années soixante-dix) « que la quasi totalité des mathématiciens se moquent de la philosophie» que les mathématiques ne s'occupent pas de philosophie. Mais alors, si ce qui caractérise les mathématiques au sein de la physique c'est que les expériences y sont bon marché, qu'en est-il quand elles sont considérées comme faisant partie de la philosophie ? Je dirais que, pour moi, c'est la quête permanente de la certitude partagée. Une vérité mathématique n'est vérité que lorsque tous les mathématiciens la reconnaissent comme telle. Mais pour une exigence aussi exorbitante il y a un prix à payer : ne s'intéresser qu'aux questions *que l'on se pose* qui sont évidemment plus faciles à résoudre que celles *qui se posent*. Les mathématiques restreignent soigneusement le champ de leur investigation à des questions, certes parfois difficiles à résoudre, mais que tous les mathématiciens comprennent et qu'ils espèrent pouvoir résoudre à plus ou moins brève échéance.

Ainsi, pour paraphraser Arnold qui nous disait :

> Les mathématiques font partie de la physique. La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles. Les mathématiques, ce sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher.(···).

je dirai que :

> Les mathématiques font *aussi* partie de la philosophe. La philosophie est une activité purement spéculative, une réflexion sur la pensée. Les mathématiques, ce sont la partie de la philosophie où l'on ne se pose que des questions dont le sens est clair et dont la réponse semble à portée de main.

Alors, finalement, où est-ce que je vois les mathématiques ? Dans la physique ou dans la philosophie ? Ni dans l'une ni dans l'autre ou, plutôt, dans les deux à la fois. Si elles sont dans les deux, alors, nous dit la "théorie des ensembles"

Les mathématiques, sont dans l'intersection de la physique et de la philosophie

mais le mathématicien Michel-Mendes France (1836-2018) nous rappelle dans un dessin éloquent (figure 1.11) l'absurdité de ce genre de pédanteries [73].

...

73. Il faut peut être rappeler que dans les années 1960 il y a eu un mouvement mondial de renouvellement de l'enseignement des mathématiques dont un des excès a été de vouloir introduire trop tôt, dès les classes primaires, voire la maternelle, des rudiments de théorie naïve des ensembles. Pensant habituer les enfants à la logique on enseignait les diagrammes de Venn (un outil destiné

FIGURE 1.11 – Illustration de Michel Mendes-France pour *Les mathématiques pures n'existent pas* de Didier Nordon [60].

à maitriser la complexité logique d'une phrase avec beaucoup de "ou" et de "et"). Pratiquement on représentait au tableau ou sur une feuille de papier deux courbes fermée sans forme particulière que rapidement on a appelé "patates" qui symbolisaient (par exemple) l'un l'"ensemble" des petites filles de l'école, l'autre l'"ensemble" des élèves de la classe et on demandait de colorier l'"ensemble" des petites filles de la classe.

Chapitre 2

Retour sur le manuscrit de Balderoy

Sommaire

2.1 Sur la méthode de Balderoy 89

2.2 Sur l'affaire de la commission des thèses 95

2.2.1 Le comportement de la commission et l'attitude des Nonstandardistes 95

2.2.2 Sur le statut actuel de l'A.N.S. 97

2.3 Le *mythe de la rupture* 105

2.3.1 La lecture de Récoltes et semailles 106

2.3.2 Pour une histoire du pouvoir dans les mathématiques française contemporaines 116

2.3.3 Balderoy et le mythe de la rupture ? 118

2.4 Rigueur et philosophies des mathématiques 119

2.4.1 La rigueur mathématique selon Duchemin 119

2.4.2 Philosophie et A.N.S. selon Duchemin 122

2.4.3 Images mentales du mathématicien ordinaire 124

2.4.4 $\mathbb{R}$ et son *image mentale* 127

2.5 Un peu plus sur Nelson et Reeb 137

2.5.1 Le réalisme de Nelson 138

2.5.2 L'intuitionisme de Reeb 146

2.5.3 Au delà des étiquettes 152

2.1 Sur la méthode de Balderoy

Lorsqu'il s'explique sur la façon dont il envisage son travail, Balderoy évoque les "guerriers de la science" pour critiquer leur attitude et il affirme qu'il a l'intention d'aborder "l'affaire Vénissac" autant de l'intérieur, du point de vue des mathématiques, que de l'extérieur, du point de vue de celui qui veut comprendre comment *se font les mathématiques*. J'aurais donc pu lui donner pour maître à penser quelqu'un comme David Bloor et son *programme fort* qu'il défend ainsi dans une controverse avec Bruno Latour [74] :

> Latour's attack depends on a specific characterisation of the aims of those who pursue the Strong Program. They are said to be trying to explain nature in terms of society. In reply it has to be said that this is a profound misrepresentation. The aim isn't to explain nature, but to explain shared beliefs about nature. The enquiry is into the character and causes of knowledge, or what passes as knowledge, and not (in general) into the objects which the knowledge is meant to be about. Obviously I will soon have to confront the question of whether, and how far, we can talk about the knowledge of an object without talking about the object itself, but we need to begin by getting the overall aims of the enquiry properly in view.

C'est bien ce que fait Balderoy. Il ne cherche pas à comprendre la nature des mathématiques mais ce que sont les croyances des mathématiciens sur les mathématiques, comment elles se forment et comment elles s'expriment. Il sait que que les controverses scientifiques existent, il en connait un exemple en écologie théorique et il est surpris par ce qu'il observe chez les mathématiciens. Ainsi j'aurais peut être pu (du ?) faire de Balderoy un adepte du *programme fort* [75] mais

74. Stud. Hist. Phil. Sci., Vol. 30, No. 1, pp. 81–112, (1999)

75. Dans son ouvrage fondateur *Knowledge ans Social Imagery*, (University of Chicago press, 1991 [8]) David Bloor le définit ainsi :

1. It would be causal, that is, concerned with the conditions which bring about belief or states of knowledge. Naturally there will be other types of causes apart from social ones which will cooperate in bringing about belief.
2. It would be impartial with respect to truth and falsity, rationality or irrationality, success or failure. Both sides of these dichotomies will require explanation.
3. It would be symmetrical in its style of explanation. The same types of cause would explain, say, true and false beliefs.
4. It would be reflexive. In principle its patterns of explanation would have to be applicable to sociology itself. Like the require- ment of symmetry this is a response to the need to seek for general explanations. It is an obvious requirement of principle be- cause otherwise

j'ai préféré faire de lui un disciple de D. Nordon, l'auteur de *Les mathématiques pures n'existent pas* [76], qui n'est clairement ni un sociologue, ni un épistémologue reconnu. Pourquoi ce choix ?

Essentiellement pour deux raisons. Une première, qui, j'en conviens, n'est pas très bonne, est la paresse : il m'aurait fallu me plonger dans une abondante littérature pour voir exactement de quoi il retourne à propos de sociologie, d'histoire des sciences et de "social studies of sciences". Je n'en avais pas le courage.

Heureusement ma seconde raison est plus sérieuse. Je voulais, à travers Balderoy, tenter de préciser une figure de ce que J-M Lévy-Leblond appelle un « critique de science » dans *Pour une critique de science* [77] et qu'il reprend plus récemment dans *Il n'y a pas de maîtrise démocratique de la science* [78] :

> Trouver un équilibre entre le développement de la recherche scientifique pour ses résultats pratiques et défendre en même temps sa portée intellectuelle, culturelle, sans pour autant semer d'illusions sur ses résultats, c'est très difficile et cela demande une bien meilleure compréhension collective de ce qu'est la science. D'où la nécessité de ce que j'appelle une « critique de science ». La critique de science n'est pas — en tout cas pas nécessairement — une critique de la science. *Critique de science est à entendre comme critique d'art* [79]. C'est ce qui permet d'en comprendre le sens et la portée [80].

La critique d'art peut s'exercer de l'intérieur comme de l'extérieur. Ainsi, le cinéaste Bertrand Tavernier est aussi critique de cinéma de même que Raymond Chandler, le père de l'enquêteur Philip Marlowe, est l'auteur de *The Simple Art of Murder*, un essai sur l'art d'écrire un roman policier : ils critiquent de l'intérieur ; inversement, Diderot, qui ne manipulait pas le pinceau (à ma connaissance), ne se

---

sociology would be a standing refutation of its own theories.

These four tenets, of causality, impartiality, symmetry and reflexivity, define what will be called the strong programme in the sociology of knowledge.

76. Actes Sud 1981 ; [60]

77. dans *La pierre de touche. La science à l'épreuve*, Gallimard 1996 ; [48].

78. Entretien avec Aurélie Delmas, journaliste à SCIENCES CRITIQUES,
`http://sciences-critiques.fr/jean-marc-levy-leblond-le-developpement\`
`-de-la-science-nest-pas-democratique/`
à l'occasion de la sortie de son livre *La science expliquée à mes petits-enfants*, Seuil.

79. Souligné par moi.

80. C'est bien là ce que les « guerriers de la science » semblent ne pas avoir compris. Etre « critique de science » comme on est « critique d'art » ce n'est évidemment pas porter un jugement négatif sur la science en tant que telle mais tout simplement chercher quel est son sens, sa signification humaine.

privait pas d'écrire sur Vernet et la plupart des critiques de cinéma n'ont jamais tourné le moindre film : ils critiquent de l'extérieur. Qu'en est-il de la "critique de mathématiques" ?

Quand elle vient de l'extérieur, elle est presque exclusivement le fait de philosophes des mathématiques. Il y a bien des exceptions comme M. Rocard et P. Bourdieu (cités par Balderoy à propos de la crise financière) mais leurs critiques ont été balayées d'un revers de main par les représentants officiels de la communauté. Ils tolèrent poliment que des philosophes glosent sur les mathématiques même s'ils pensent au fond d'eux même que parler des mathématiques lorsqu'on n'est pas à même de les comprendre, donc d'être mathématicien soi même, c'est un peu parler pour ne rien dire. Ils laissent dire, au moins quand ils ne sont pas des "guerriers de la science", parce qu'ils pensent que la critique philosophique ne remonte pas jusqu'au Prince.

Voyons maintenant la critique venant de l'intérieur. Existe-t-elle ? Elle est rare car je ne compte pas les ouvrages, au demeurant intéressants, qu'écrivent les "grands mathématiciens" à l'heure de la retraite sur leur vie et leur "philosophie naturelle" qui, le plus souvent, sont des récits héroïques à la gloire de leur auteur, pour les plus narcissiques, de leur discipline ou de la Science, pour les plus généreux. Dans la période récente je ne vois guère, comme très grands mathématiciens, à trente ans d'intervalle, que Hardy et Grothendieck qui se soient exprimés publiquement sur leur discipline et la marche du monde car je ne compte pas non plus les engagements courageux d'un Schwartz et d'un Kahane contre les guerres d'Algérie et du Vietnam ou ceux, tout aussi courageux, d'un Dieudonné pour le respect des droits de l'homme qui sont des engagements de citoyens, pas de mathématiciens en tant que tels. Je note bien que, dans la foulée de "mai 68" on trouve également des mouvements comme *Survivre* ou les textes compilés dans *(auto)critique de la science* [42] mais ils sont plus l'expression militante d'une dénonciation du mauvais usage de la techno-science en général qu'une critique spécifique des mathématiques.

Pour finir cette revue des mathématiciens critiques de leur activité il reste les mathématiciens ordinaires, ceux qui n'ont même pas « publié la démonstration d'un théorème non trivial une fois dans leur vie » . Je fais ici allusion à Dieudonné qui dans *Pour l'honneur de l'esprit humain* [81] appelle mathématicien « quelqu'un qui a publié au moins la démonstration d'un théorème non trivial » et explique ce qu'il entend par trivial, ce qui le conduit à estimer, selon ses critères, à environs cent cinquante le nombre de mathématiciens actifs en France. Or, à cette époque,

81. Hachette, 1987 ; [25].

on compte de l'ordre de deux mille cinq cent enseignants-chercheurs en mathématiques, si l'on y ajoute une partie des informaticiens qui font des mathématiques et tous les ingénieurs qui font du calcul scientifique, on arrive à plusieurs milliers de personnes qui ont le niveau du doctorat actuel et qui gagnent leur vie en faisant des mathématiques sous une forme ou une autre. Je ne donne pas cette évaluation pour contester le chiffre avancé par Dieudonné. Avec le niveau de créativité qu'il sous-entend dans « non trivial » son estimation est certainement raisonnable. Je donne ces chiffres pour rappeler qu'à cette époque, pour les mathématiciens importants comme Dieudonné 90%, sinon plus, des "travailleurs des mathématiques" n'étaient pas considérés comme des mathématiciens mais comme des exécutants, dont, certes, on reconnaissait l'utilité, mais qui n'étaient pas censés s'exprimer et encore moins se livrer à de la "critique de mathématiques". Si vous ne respectiez pas cette règle de discrétion, si vous vous exprimiez publiquement sur votre activité professionnelle, vous étiez rapidement exclu ; si vous ne faisiez pas partie du « beau monde » des mathématiques, comme dirait Grothendieck dans *Récoltes et Semailles*, vous n'aviez pas droit à la parole. Voyez si j'exagère.

Les mathématiques pures n'existent pas de D. Nordon, publié en 1981, est clairement un exercice de "critique de science" qui a été reconnu comme tel par un large public, si l'on en juge par ses rééditions successives. Mais il n'en a pas été de même à l'intérieur de la communauté. Pour donner une idée de cet accueil voici la recension qui a été faite en 1982 du livre de Nordon pour le Zentralblatt [82] (vol. 473, 20 août 1982) que je ne peux que citer dans sa totalité :

> Il est surprenant qu'un enseignant de mathématiques appliquées au calcul électronique et à l'informatique dans un UER français se permette de parler dans des termes inadmissibles de la plus noble des activités humaines : il s'agit de la difficile recherche faite par les mathématiciens "purs" non pas de vérités relatives mais de vérité tout court, de vérité absolue, et irréfutable qui de ce fait échappe évidemment au temps, ce que n'a pas compris l'auteur d'un pamphlet dont le titre est une grossière contre-vérité, dont la présentation saugrenue et les illustrations ridicules (le livre s'ouvre sur la représentation de l' "intersection" d'un bébé et d'une gigantesque pomme de terre !) enlèvent toute envie d'entreprendre la lecture de ce texte. Pour pouvoir en parler en connaissance de cause, nous avons néanmoins parcouru ce pamphlet dirigé contre la Science que nous représentons, pamphlet que nous ne saurions recommander à aucun lecteur. Le but de l'A. est de tenter de mon-

82. Une des deux grandes revues internationales consacrées à la recension des articles et des livres de mathématiques.

> trer, par des exemples qu'il croit judicieux et des citations de divers auteurs, sceptiques pour la plupart, que contrairement à l'usage, il serait faux de juger de l'intelligence des gens par leurs aptitudes pour les mathématiques et, après avoir étalé son point de vue sur plusieurs dizaines de pages, il parvient à la conclusion absurde qu'un mathématicien qui livre tout son temps et ses forces à la recherche pure et désintéressée est un être insignifiant, nul ou même nuisible qui ignore tout de la vie et de lui même. Bref, que "les mathématiques pures n'existent pas". Si Monsieur l'Auteur, elles existent bel et bien et n'ont jamais cessé de faire honneur à l'humanité. Nous vous recommandons la lecture de l'ouvrage du grand mathématicien français (un pur des purs) Paul Montel : "Les mathématiques et la vie". Cet ouvrage vous prouvera à l'évidence que les génies en mathématiques pures n'ignorent rien de la vie et des applications innombrables des mathématiques à tous les domaines de l'activité humaine, y compris celui des beaux-arts.
>
> S. Piccard (Un représentant des mathématiques pures) [83].

Ce qui est surprenant dans ce texte ce n'est pas tant sa stupidité abyssale [84] que de le voir publié dans un journal comme le Zentralblatt qui assure un service public de première importance ; normalement on demande aux reviewers qui sont sollicités pour les recensions un style neutre et objectif. Comment les éditeurs ont-ils pu laisser passer une telle perle ? On peut penser à une simple négligence mais est-ce bien certain ? Moins de dix ans plus tard, dans la même revue on trouve, cette fois sous la plume de J. Dieudonné [85] :

> Les mathématiciens actifs ("working mathematicians") ont presque tous une même conception de ce que c'est qu'une "vérité mathématique" : a savoir, dans une théorie donnée, une proposition démontrée à partir des axiomes par une suite d'inférences correctes. L'A. de cet article estime que cela est "en tout point contraire à la vérité" et se propose d'expliquer ce qu'est, à son sens, cette "vérité". Il en présente deux conceptions, débattues depuis

83. Il pourrait s'agir, mais je n'en ai pas la certitude, de Sophie Piccard (1904-1990) qui a été professeure à l'Université de Neuchâtel, la première femme à recevoir le titre de " professeur ordinaire "en Suisse (selon wikipedia).

84. Un lecteur attentif de ce travail me fait remarquer que ce texte pourrait très bien être lu au second degré comme une caricature de la pensée dominante. Cette hypothèse est tentante. Pour la soutenir il faudrait commencer par identifier avec certitude l'auteur de la critique ce qui suppose une enquête dans les archives du *Zentralblatt* qui doit prendre un certain temps. Je laisse donc cette hypothèse ouverte pour le moment.

85. Zbl 0706 00001

> longtemps entre philosophes. L'une est que les vérités mathématiques ne sont pas des créations de l'esprit humain mais reposent sur des "vérités factuelles" extérieures. L'autre est que tout théorème est destiné à devenir une conséquence triviale des axiomes, et que l'essentiel du travail du mathématicien consiste, non pas à inventer des théorèmes, mais bien de rendre triviaux ceux qui sont déjà connus. Le seul exemple qu'il donne est la démonstration "élémentaire" du théorème des nombres premiers, dont bien peu se soucient encore aujourd'hui. On serait heureux de savoir quelle est, selon lui, la "vérité factuelle" qui se cache derrière la théorie du corps de classes, ou la cohomologie étale des schémas, ou la classification des groupes simples finis ; et s'il croit vraiment que ces théories deviendront un jour triviales. Finalement, d'ailleurs, l'A. paraît renoncer à adopter l'une ou l'autre de ces conceptions, et semble conseiller de se réfugier dans la métaphysique. Je crois plutôt que la plupart des mathématiciens se détourneront de ce genre de discussions oiseuses, et préfèreront se mettre au courant des grandes idées mathématiques qui surgissent sans cesse sous nos yeux et qu'ils appellent des progrès, n'en déplaise à l'auteur.

Cette analyse est celle d'un article de Gian-Carlo Rota(1932-1999), *Les ambiguïtés de la pensée mathématique* [86]. Comment expliquer cette fois-ci le ton condescendant de Dieudonné, puisque Rota est certainement mieux qu'un "mathématicien" qui a démontré un théorème non trivial. En effet dans sa notice nécrologique publiée sur le site du M.I.T. on peut lire :

> Dr. Rota was the invited presenter at the 1998 American Mathematical Society (AMS) Colloquium Lectures, a series of three lectures of increasing complexity presented each year by one of the world's most eminent mathematicians. He was to have presented three lectures — the Groswald Memorial Lectures — at Temple University in Philadelphia on Monday, Tuesday and Wednesday.

S'il est évident que Dieudonné ne pouvait pas ignorer que Rota était un grand mathématicien, même si sa spécialité, la combinatoire, n'était pas la tasse de thé de Bourbaki, on peut aussi penser qu'il avait eu vent d'une particularité de Rota : il était aussi un philosophe reconnu. Toujours sur le site du M.I.T. on peut lire :

> Dr. Rota was the only MIT faculty member ever to hold the title of Professor of Applied Mathematics and Philosophy.(...)

86. Gaz. Math., Soc. Math. Fr. 45, 54-64 (1990) ; [67].

> As a philosopher working in the 20th century continental tradition of phenomenology — a philosophical tradition established by Edmund Husserl — Dr. Rota was known for his humanistic approach.(...)
>
> The book [Indiscrete Thoughts (Birkhäuser, 1997)], which is divided into three parts — two on mathematics and one on philosophy — has been nominated for the 1999 Edwin Goodwin Ballard Book Prize in phenomenology presented by the Society for Phenomenology and Existential Philosophy.

Voila qui donne une idée de ce que pouvait être le mépris du « beau monde » mathématique français dans les années 1980 pour qui n'en faisait pas partie et du courage qu'il fallait pour oser la plus timide excursion sur les sentiers de la critique.

En dehors des idées que défend *Les mathématiques pure n'existent pas* que je partage pour l'essentiel, en faisant de D. Nordon l'inspirateur méthodologique de Balderoy j'ai voulu rendre hommage à son courage.

2.2 Sur l'affaire de la commission des thèses

2.2.1 Le comportement de la commission et l'attitude des Nonstandardistes

Je partage évidemment l'indignation de Balderoy sur le fait que les procédés de la commission des thèses étaient inadmissibles et qu'il doivent être condamnés avec la plus grande fermeté ; c'est bien ce qui m'avait poussé à écrire *Et pourtant ils ne remplissent pas* $\mathbb{N}$*!* Toutefois, Balderoy note avec à propos que les membres du jury pressenti n'ont pas saisi la perche tendue par la commission. Cette critique me touche de plein fouet puisque j'étais un membre du jury. Qu'ai-je à dire sur cette question ?

Nous étions quatre membres du jury, pas toujours absolument du même avis sur la conduite à tenir vis à vis de la commission. En particulier pour moi l'existence même de cette structure était un scandale en soi alors que pour l'un de mes collègues elle était une bonne chose ; pour lui le problème était que «la commission commettait une erreur». En dépit de ces divergences sur la légitimité de la commission nous avons élaboré très facilement cette position commune intransigeante qui a été la notre. On peut l'expliquer par une indignation tout à fait légitime mais je ne crois pas que ce soit suffisant. En effet Balderoy note un certain élitisme chez les nonstandardistes en s'appuyant essentiellement sur le témoignage de Duchemin. Je peux en dire ici un peu plus que lui puisque c'est de moi

qu'il tient ses informations :-)

Reeb répétait souvent que « les bonnes idées, finissent toujours par triompher » Je ne sais pas en quel sens il entendait "bonne idée", mais clairement l'A.N.S. en était une ; je ne sais pas non plus combien de temps il pensait devoir attendre pour assister à son triomphe mais un aspect de sa personnalité peut nous éclairer.

Reeb était chrétien et ne séparait pas sa foi religieuse de sa vision des mathématiques. Il s'en est expliqué dans un texte d'une dizaine de pages dans l'ouvrage collectif dirigé par Jean Delumeau « *Le savant et la foi : des scientifiques s'expriment.* » [87] d'où j'extrais :

> Le moment est venu de témoigner plus personnellement, plus profondément, d'une progression que je crois faire dans l'assimilation de lectures bibliques, dans l'interprétation de cette Parole de Vie dans ma vie. Je m'explique : je ne saurais parler de ma vie, de ma progression (y aurait-il quelque utilité à un exercice pour lequel je n'ai guère de préparation ?). Mais je sais une analogie, entre ma profession et mon désir de comprendre la Bible, qui est au centre de ce que je persiste à nommer progression.
>
> L'objet de l'analogie est de rendre sensible un fait : le message de la Parole est pour tout le monde. Il est pour tout le monde, réellement, en substance, en simplicité en gratuité $\cdots$ au pied de la lettre ! Cependant le cheminement n'est ni facile, ni définitif, ni reposant, bien au contraire !
>
> $(\cdots)$
>
> Le premier terme de l'analogie promise est la réputation de haute difficulté faite à certains textes bibliques. Pour fixer les idées je pense au texte de l'Apocalypse. $(\cdots)$ Une caricature de la situation se décrit ainsi : le pasteur recommande (il parle à un paroissien de bonne volonté mais peu versé dans les études) : « Ces beaux textes sont bien difficiles, voire mystérieux. Les théologiens ne s'y retrouvent pas bien. Croyez mon conseil, ce n'est pas pour vous. Peut être comprendrons nous mieux, $\cdots$ plus tard ! »
>
> Le deuxième terme de l'analogie est la réputation de haute difficulté faite à certains textes scientifiques mathématiques. Pour fixer les idées je pense à des textes de Gödel, Brouwer, etc, évoqués plus haut. $(\cdots)$ Une caricature de la situation se décrit ainsi : le professeur recommande (il parle à un étudiant de bonne volonté mais moyen) : « Ces beaux textes sont bien difficiles. Les mathématiciens ne s'y retrouvent pas bien. Croyez mon conseil, ce n'est pas pour vous on verra plus tard ! » [88]

87. Flamarion (1989) ; [22].

88. Je laisse à Reeb la responsabilité de ce qu'il dit concernant les textes bibliques mais je peux témoigner que, concernant les textes mathématiques, c'est presque mot pour mot ce j'ai entendu

Comme il se doit Reeb n'évoquait jamais dans le travail ses convictions religieuses (c'est tout à fait par hasard que je suis tombé sur ce texte) mais il m'influençait beaucoup et il m'avait convaincu de la nécessité du triomphe de l'A.N.S. Je peux également affirmer que je n'étais pas le seul dans ce cas et il me semble, avec le recul, que ce n'est pas totalement sans raison que, comme l'a noté Balderoy, certains voyaient dans notre groupe une sorte secte. Pour conclure sur ce point je dirai que, dans notre refus de la perche tendue il y avait certes une grande part d'indignation légitime mais aussi, au moins chez moi, la vanité d'avoir compris avant les autres une « bonne idée qui ne manquerait pas de s'imposer».

On ne s'étonnera pas, au vu de mon intérêt actuel pour la mise en relation étroite de la genèse d'une idée scientifique avec les conditions sociales de sa production et de sa réception, si je dis que je ne crois plus du tout au «triomphe inéluctable des bonnes idées». Mais je ne peux cependant pas m'empêcher d'imaginer Reeb, la haut, sur son petit nuage : « Tu dis que tu ne crois plus au triomphe inéluctable des bonnes idée mais alors que dis-tu de la consécration des "canards" et de la pratique de l'A.N.S. de T. Tao ? » Je lui répondrais certainement, mais sans espoir de le convaincre, que le triomphe de l'A.N.S. est encore loin d'être assuré et qu'un long travail de propagande attend encore ses partisans. A quoi il répondrait par un haussement d'épaules l'air de dire « mais ai-je jamais dit autre chose ? », pensant probablement qu'entre la parole du Christ et la conversion de Constantin trois siècles s'étaient écoulés.

Donc, en conclusion, je suis pleinement d'accord avec Balderoy, peut être que si la proposition d'armistice de la commission avait été entendue les choses auraient évolué autrement et plus positivement au profit de l'A.N.S. Mais je laisse à d'autres le soin d'aller plus loin sur cette question.

2.2.2 Sur le statut actuel de l'A.N.S.

Balderoy affirme que la commission « s'est lourdement trompée » en refusant la thèse de Vénissac. Je suis bien entendu, là aussi en parfait accord avec lui : créer un objet mathématique et lui donner un nom qui est retenu par l'histoire est une chose rare dont peu de thèses peuvent s'enorgueillir. Ajoutons que depuis peu cette reconnaissance est officielle en France puisque le site de vulgarisation du CNRS, *image des mathématiques*, offre depuis 2015 un article, *Des canards dans mes neurones* [89], qui officialise en quelque sorte pour le public francophone l'ap-

en 1963 de mon professeur de maitrise, C. Chabauty, un membre de Bourbaki.

89. `http://images.math.cnrs.fr/Des-canards-dans-mes-neurones.html`

pellation "canard", le nom des inventeurs et cite l'article *Canards et enlacements* issu de la thèse de E. Benoit.

Quand j'ai écrit « *Et pourtant ils ne remplissent pas* $\mathbb{N}$*!* » je ne pouvais que mettre en avant ma conviction et celle de quelques autres sur la légitimité et la pertinence de l'A.N.S. C'était conviction contre conviction. Vingt cinq ans plus tard on peut, sur une base objective, affirmer que tous les mathématiciens reconnaissent dans l'A.N.S. une méthode de déduction parfaitement rigoureuse et que certains parmi les plus grands, comme T. Tao, en font la promotion. L'argumentation de Balderoy s'appuie sur des faits bibliométriques incontestables. Sur cette question il n'y a plus grand chose à dire sauf, peut être, comme le note Balderoy, de répéter que ceci ne prouve pas que la communauté mathématique s'est ralliée dans son ensemble à considérer l'A.N.S. comme une pratique mathématique pertinente [90]. Nous en sommes encore loin. Mais les évolutions peuvent être très lentes en mathématiques et des thèmes considérés à un moment comme importants peuvent presque disparaître pour ressurgir un demi-siècle plus tard ou plus. On peut citer des travaux de Poincaré redécouverts près d'un siècle plus tard dans le cadre de ce qu'on appelle maintenant le "chaos déterministe" ou, peut être encore plus spectaculaire, le regain d'activité autour des "séries divergentes" [91]. Peut-être en sera-t-il ainsi pour l'A.N.S., peut être pas. Peut être que ces questions d'analyse seront considérées comme secondaires par rapport à des questions plus directement liées à l'usage de l'ordinateur en mathématique [92].

En attendant tout ce que l'on peut dire c'est qu'il existe une activité significative et croissante autour de l'A.N.S. à laquelle participent des mathématiciens d'horizons géographiques ou culturels variés. L'article collectif récent auquel j'ai

90. En particulier, l'article *Des canards dans mes neurones* ne mentionne pas l'usage de l'A.N.S. ce qui est difficile à interpréter. Si la découverte avait eu lieu en utilisant des techniques de l'analyse de Fourier qui sont des techniques largement répandues, ce fait n'aurait probablement pas été mentionné dans un article de vulgarisation. C'est peut être ce qu'a pensé l'auteur de l'article. Mais il a peut être aussi pensé qu'il n'était pas utile de prononcer ce qui aux yeux de certains pourrait être considéré comme un gros mot.

91. Tous les étudiants de mathématiques apprennent en licence et même au delà que les seules séries légitimes sont les "séries convergentes". Ils sont alors très surpris, s'ils continuent leurs études mathématiques, d'apprendre qu'il existe une activité de recherche importante autour de l'étude des séries divergentes et que ces recherches renouent avec des travaux qui remontent à E. Borel voire avant. Le lecteur intéressé par l'histoire de ce sujet peut consulter J-P. Ramis, *Séries divergentes et procédés de resommation*, journées X-UPS 1991, qui est peu technique.
`http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups91.pdf`

92. Peut être, si toutefois l'urgence incomparablement plus grande de la question écologique ne détourne pas provisoirement l'humanité des question mathématiques.

collaboré *Approaches to Analysis with Infinitesimals following Robinson, Nelson, and others* [93] essaye de rendre compte d'une petite partie de cette activité. De mon point de vue, un des aspects les plus intéressants des travaux actuels est relatif à l'utilité pratique de l'A.N.S. A l'époque de la polémique certains des détracteurs mettaient en avant le caractère "idéal" des infinitésimaux prétendant qu'ils ne permettaient pas de faire des "calculs effectifs". Les partisans de l'A.N.S. avaient de quoi répondre [94] mais la discussion restait limitée et la polémique ne permettait pas d'avancer sérieusement. J'ai sélectionné les deux titres suivants, que je commente rapidement, qui montrent comment a évoluée la discussion sur cette question.

— Sanders, Sam, *The unreasonable effectiveness of Nonstandard Analysis*, arXiv preprint arXiv :1508.07434 (2015).

— Sanders, Sam, *To be or not to be constructive, that is not the question*, Indagationes Mathematicae, 29.1 (2018) ; [72] : 313-381 [95].

Sam Sanders est un jeune logicien-philosophe, actuellement au *Munich Center for Mathematical Philosophy (MCMP)* de la *Ludwig-Maximilians-University* de Munich. Dans ses travaux il cherche le meilleur cadre logique formel qui permette de rendre compte d'une remarque de Keissler (cité par Sanders) :

> (...) hyperreal proofs seem to be more 'constructive' than classical proofs. For example, the solution of a stochastic differential equation given by the hyperreal proof is obtained by solving a hyperfinite difference equation by a simple induction and taking the standard part. The hyperreal proof is not constructive in the usual sense, because in ZFC the axiom of choice is needed even to get the existence of a hyperreal line. What often happens is that a proof within RZ or IST of a statement of the form $(\exists x)\phi(x)$ will produce an x which is definable from H, where H is an arbitrary infinite hypernatural number. Thus instead of a pure existence proof, one obtains an explicit solution except for the dependence on H. The extra information one gets from

93. Peter Fletcher, Karel Hrbacek, Vladimir Kanovei, Mikhail G. Katz, Claude Lobry, and Sam Sanders, Real Analysis Exchange, vol 42, n°2, pp. 193-252 (2017) ; [30].

94. La théorie du Moiré de Harthong, l'explication par les "canards" de certaines simulations d'ordinateur sont des travaux tout à fait concrets. Cette question importante n'a pas échappé à J-M. Salanskis qui lui a consacré l'ouvrage *Le constructivisme non standard*, Presses Univ. Septentrion (1989) ; [69]. Certains aspects de cet ouvrage préfigurent la discussion actuelle entre logiciens de haut vol.

95. *Indagationes Mathematicae* est la revue de la société mathématique de Hollande. L'article de Sanders figure dans un numéro spécial consacré à Brouwer qui était Hollandais.

> the explicit construction of the solution from H makes the proof easier to understand and may lead to additional results [96].

Sanders définit ce qu'il appelle un énoncé d'analyse nonstandard "pure" (en gros un énoncé non interne de I.S.T. faisant un usage explicite ou implicite du prédicat st) et montre comment, en un sens précis, il est "plus constructif" que l'énoncé classique correspondant [97]. En d'autres termes c'est de vouloir retourner à un énoncé classique qui oblige à de larges appels à l'axiome du choix. Ce qui peut être rapproché de ce que dit Nelson :

> The purpose of this appendix is to demonstrate that theorems of the conventional theory of stochastic processes can be derived from their elementary analogues by arguments of the type usually described as generalized nonsenses ; there is no probabilistic reasoning in this appendix. This shows that the elementary nonstandard theory of stochastic processes can be used to derive conventional results ; on the other hand it shows that neither the elaborate machinery of conventional theory nor the devices from the full theory of nonstandard analysis, needed to prove the equivalence of the elementary results with their conventional forms, add anything of significance : the elementary theory has the same scientific contains as conventional theory [98].

Je reviendrai longuement sur Nelson un peu plus loin.

Arrivé à ce stade je devrais consacrer un assez long développement à un aspect du développement de l'A.N.S. qui sort complètement du cadre de la théorie des ensembles et de sa variante I.S.T. que nous avons considérées jusqu'ici, malheureusement mon incompétence sur le sujet ne me permettra que d'y faire une rapide allusion.

Il existe une activité scientifique importante impliquant des informaticiens, des logiciens et des mathématiciens sur un thème commun : pour les mathématiciens il s'agit de questions liées au constructivisme et pour les informaticiens de questions relatives au "calcul effectif" ; la logique, elle, tente de fournir un cadre à toutes ces réflexions qui débouchent sur des réalités très concrètes comme les

96. Keisler, H. J. (1994). "The hyperreal line" in *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua* (pp. 207-237). Springer, Dordrecht, p. 235

97. La remarque qui suit donne une idée (mais seulement une idée) de la raison. La continuité A.N.S. : $dx \sim 0 \Longrightarrow f(x+dx) \sim f(x)$ est une affirmation sur laquelle on peut s'appuyer pour poursuivre le raisonnement ; la traduction "epsilontique" est $\forall \varepsilon \exists\ \eta \cdots$ qui demande, pour être constructive, que l'on donne une procédure effective de désignation de η à partir de ε.

98. Nelson, Edward *Radically Elementary Probability Theory*, (AM-117). Vol. 117. Princeton University Press, (1987) p.80 ; [55].

"assistants de preuve". Ce sont des logiciels qui, alimentés par des textes mathématiques convenablement formalisés, sont capables de déceler des erreurs dans les démonstrations. Je n'en dirai pas plus sur le fond de ce sujet que je survole en amateur en "cliquant" d'une publication à l'autre selon l'indication des introductions et des bibliographies. Dans cette activité je suis frappé de retrouver toutes sortes de noms qui sont intervenus à des titres divers dans cette histoire de la réception de l'A.N.S. En voici quelques uns, dans l'orde alphabétique : Brouwer, Cartier, Grothendieck, Kreisel, Nelson auxquels on peut rajouter ceux de Coquand, Martin-Löf, Voedvodsky et le «Univalent Foundation Program ». Deux mots sur ce programme. Il s'agit d'une tentative de reconstruction des mathématiques sur une base radicalement différente de la base traditionnelle, démarrée en 2012 par un séminaire à l'Institute for Advanced Studies (I.A.S.) de Princeton, organisé par Steve Awodey, Thierry Coquand et Vladimir Voevodsky (Fields 2002, décédé brutalement en 2017 à 51 ans) [99]. Voici ce qu'en dit Voedvodsky lors d'une conférence "grand public" à l'I.A.S. [100] :

> *The first component* is a formal deduction system : a language and rules of manipulating sentences in this language that are purely formal, such that a record of such manipulations can be verified by a computer program.
> *The second component* is a structure that provides a meaning to the sentences of this language in terme of mental objects intuitively comprehensible to humans.
> *The third component* is a structure that enables humans to encode mathematical ideas in terms of the objects directly associated with the language.

Dans toutes ces questions la *théorie des types intuitionniste* [101] développée par le logicien P. Martin-Lof joue un rôle central. C'est dans ce cadre que G. Wallet [102] a poursuivi sa réflexion sur le caractère effectif de l'A.N.S. Il conclut son article *Integer calculus on the Harthong-Reeb Line* [103]par :

> More generally, this is the old debate about the constructivity of nonstandard analysis which arise again. On the one hand, the main criticism made against

99. Une des retombées de ce séminaire est le livre *Homotopy type theory : Univalent foundations of mathematics* [79].
100. Voir la vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=E9RiR9AcXeE`
101. *An Intuitionistic Theory of Types : Predicative Part , in "Logic Colloquium '73", H.E. Rose and J.C. Shepherdson eds., (1975), 73–118.*
102. que Balderoy à évoqué à propos de l'influence éventuelle des présupposés philosophiques sur la réception de l'A.N.S.
103. Revue ARIMA - vol 9, 2008, pp. 517–536 [80]
`https://hal.inria.fr/hal-01277784/document`

> NSA is that this theory is highly non-constructive. (···) On the other hand, Harthong and Reeb explains in [16] that, far from being an artefact, nonstandard analysis necessarily results of an intuitionnistic interpretation of the classical mathematical formalism (see also [41]). In a more concrete way, it is a common remark that the practice of NSA has a relatively constructive appearance. Moreover, some strange structural similarities have been noted between nonstandard and constructive proofs [44]. Finally, thanks to the works of P. Martin-Löf [26], I. Moerdijk [27] and E. Palmgren [30, 31], there are now new presentations of nonstandard analysis which completely fit with the constructive constraints (see also [5]).
>
> Thus, it is now time for us to move beyond a sterile polemic and to begin the conceptual analysis of the question of the constructivity of the Harthong-Reeb line $\mathscr{HR}_\omega$. In a recent work [13], we have shown that $\mathscr{HR}_\omega$ (...) [104]

La référence [13] ci-dessus est un travail issu de la thèse de A. Chollet, *Formalismes non classique pour le traitement informatique de la topologie et de la géométrie discrète* [105], soutenue le 7 décembre 2010 devant un jury composé de Gilles Dowek, Henry Lombardi, Jean-Pierre Reveillès, Jean Petitot, Michel Ber-

104. Les références de cette citation :

— (16) = "Intuitionisme 84" dans *La mathématique non standard* (1989, CNRS Paris [5]

— (41) = Salanskis J-M.", “Le constructivisme non standard”, Presses Universitaires du Septentrion, 1999 [69].

— (44) = Wattenberg F., “Nonstandard Analysis and Constructivism ?”, Studia Logica, Springer Netherland, vol. 47, num. 3, 1988, 303-309.

— (26) = Martin-Löf P., “Mathematics of infinity”, COLOG-88 Computer Logic, Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag, 1990, 146-197.

— (27) = Moerdik I., “A model for intuitionnistic non-standard arithmetic”, Annals of Pure an Applied Logic, vol. 73, 1995, 37-51.

— (30) = Palmgren E., “A constructive approach to nonstandard analysis”, Annals of Pure and Applied Logic, vol. 73, 1995, 297-325.

— (31) = Palmgren E., “Developments in Constructive Nonstandard Analysis”, The Bulletin of Symbolic Logic, vol. 4, num. 3, 1998, 233-272.

— (5) = Boldini P., “La priorité de la preuve : le cas de la signification non-standard des constantes logiques”, Revue Internationale de Philosophie, vol. 230, 2004, 437-447.

— (13) = Fuchs L., Largeteau-Skapin G., Wallet G., Andres E., Chollet A.", “A first look into a formal and constructive approach for discrete geometry using nonstandard analysis”, in Discret Geometry for Computer Imagery, Lecture Notes in Computer Science, vol. 4992, Springer Berlin / Heidelberg, 2008, 21-32.

105. `https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00579781`

thier, Guy Wallet, Eric Andres, Laurent Fuchs. Cette thèse établit des liens très forts entre des questions fondationnelles (l'intuitionnisme de Brouwer et ses successeurs), des questions de pratique mathématique (la pratique via l' A.N.S. d'un traitement finitaire du continu) et des questions informatiques très pratiques (la représentation sur un écran pixellisé des objets de la géométrie et les graphes de fonctions). Elle contient, ce qui est inhabituel pour une thèse de mathématique, d'importantes informations historiques sur l'origine des concepts utilisés qui rendent les aspects techniques plus faciles à aborder.

Wallet poursuit sa réflexion sur cette question dans un article plus récent, *Suite de choix et extension nonstandard de la théorie des types* [106] :

> Bien que ce ne soit pas son but principal, cet article peut être vu comme une introduction informelle à la théorie des type de Martin-Löf. (···) De fait, le fil directeur de cette étude est celui de la définition d'une extension non-standard de la théorie des types. Ce thème constitue un excellent champ d'expérimentation pour les différents mécanismes de la théorie des types initiale. Cette extension présente elle-même un fort intérêt car elle propose ni plus ni moins que l'édification d'une forme d'analyse nonstandard radicalement constructive très proche de l'univers de l'informatique. (···) Cet essai se situe dans un des courants de recherche qui, depuis la fin des années 80, a eu pour objet de développer une approche constructive de l'analyse nonstandard.

Il conclut son article par :

> Une raison au moins rend crédible cette piste [*Il s'agit de résoudre une question posée par Wallet*] : de nombreuses formes d'analyse nonstandard basées sur une axiomatique minimaliste ont été dotées d'un principe de récurrence externe afin d'obtenir une théorie relativement opérationnelle [26].

que je cite en raison de sa note 26 :

> La meilleure référence est sans conteste le superbe traité de Nelson sur les probabilités qui est vraisemblablement à l'origine de ces axiomatiques minimales. A ce propos, comment ne pas rêver à une synthèse entre les idées de Nelson et de Martin-Löf ?

Je n'en dirai pas plus sur cette question sur laquelle je réaffirme ma grande incompétence mais je ne pouvais pas ne pas en parler tant elle montre combien

106. ARIMA Journal, vol 20, 2016, pp. 237-265 [81].
`https://arima.episciences.org/1995/pdf`.

le travail réflexion de l'UPR "fondements des sciences" de H. Barreau, concrétisé en 1989 dans l'ouvrage *La mathématique mon standard* [5] puis, dix ans plus tard, des réflexions ultérieures de l'école de Strasbourg exposées par J-M. Salanskis dans *Le constructivisme nonstandard* [69] étaient originaux et en avance sur leur époque. Ces travaux auraient auraient mérité d'être accueillis avec plus de bienveillance par la communauté mathématique française et on mesure à quel point le rapporteur du CNRS était à côté de la plaque quand il disait, à propos de l'intérêt du groupe pour l'intuitionnisme : « Ce choix d'une branche marginale de la discipline [L'A.N.S.] s'accompagne d'une volonté explicite de promouvoir l'intuitionnisme en tant que doctrine opposée au formalisme dominant dans les mathématiques contemporaines. Cette approche conduit naturellement à une attitude plus apologétique qu'objective, $(\cdots)$ ».

Mais le scientifique de base, l'ingénieur par exemple, pourrait dire que toutes ces histoires ne sont que des arguties de mathématiciens et de logiciens dont les praticiens n'ont que peu d'usage. C'est pourquoi, pour moi, et je pense que cela l'aurait été aussi pour Reeb, l'indice le plus éclatant de l'effectivité de l'A.N.S. ce sont les articles suivants dont les titres des journaux où il sont publiés ne laissent aucun doute sur leur caractère "appliqué" à la science des ordinateurs, donc à une science qui, par essence, se préoccupe d'effectivité !

Pour commencer, un article de Michel Fliess (un grand nom de l'automatique contemporaine) qui milite pour une nouvelle façon d'envisager le traitement du signal :

— Fliess, Michel, Cédric Join, and Hebertt Sira-Ramirez. *Non-linear estimation is easy,* International Journal of Modelling, Identification and Control 4.1 (2008) : 12-27 : [33].

d'où je tire :

> Remark 3.4. See Fliess (2006) for a precise mathematical foundation, which is based on nonstandard analysis. A highly fluctuating function of zero mean is then defined by the following property : its integral over a finite time interval is infinitesimal, i.e., "very small". Let us emphasize that this approach, which has been confirmed by numerous computer simulations and several laboratory experiments in control and in signal processing, is independent of any probabilistic setting. No knowledge of the statistical properties of the noises is required.

La référence Fliess 2006 est la suivante dont on appréciera le titre éloquent.

— M. Fliess, *Analyse non standard du bruit* , C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 342 (2006) ; [32].

L'autre article est lui aussi proposé par des noms importants de l'automatique :

— A. Benveniste, T. Bourke, B. Caillaud, M. Pouzet, *Non-standard semantics of hybrid systems modelers*, Journal of Computer and System Sciences (2011), vol 78, n° 3 (2012) pp. 877-910. ; [7]

Ci-dessous un passage extrait de l'introduction.

> *Contribution of the paper.* First, we propose a semantics based on non-standard analysis after an original idea due to Bliudze and Krob [10]. Roughly speaking, non-standard analysis is an extension of classical analysis in which infinitesimals (the ε and η in the celebrated generic sentence $\forall\, \varepsilon\, \exists\, \eta \cdots$ in college maths) can be manipulated as first class citizens. This provides a "synchronous-like" interpretation of the whole system where the base clock is an infinite sequence of infinitesimals—it is both dense and discrete. This interpretation clarifies the treatment of zero-crossings in modelers and provides a firm basis for rejecting or accepting programs.

2.3 Le *mythe de la rupture*

Ce que Balderoy nous dit de Grothendieck correspond en gros à l'image que la plupart des mathématiciens de ma génération en ont : celle du génie des mathématiques qui à quarante ans quitte la communauté pour élever des chèvres dans les Cévennes. Avec quelques détails en plus mais pas beaucoup.

Comme j'avais participé au congrès international de Nice de 1972 j'avais été témoin de l'activisme de Grothendieck et j'ai rédigé quelques pages de souvenirs (Annexe D2 du manuscrit de Balderoy) dont le seul mérite (en dehors de mon plaisir narcissique) est, me semble-t-il, de montrer que l'hagiographie grothendieckenne a beaucoup gonflé l'ampleur de l'incident. Mais, plus sérieusement, j'ai commencé à consulter quelques documents, histoire de ne pas faire dire trop bêtises à mon personnage sur les dates et l'enchaînement des événements. Les sources secondaires comme les articles de journaux mentionnant la disparition du mathématicien en 2014, les revues de vulgarisation scientifique, les biogra-

phies [107] et des articles d'historiens [108] laissent toutes entendre que *Grothendieck a rompu* avec la communauté mathématique a partir de sa démission de l'I.H.É.S. Sur les raisons de cette *rupture* on avance son engagement écologiste radical et/ou la frustration de voir son ancien élève Deligne démonter les conjectures de Weil avant lui. Sur un plan plus technique, plus pertinent relativement à mon intérêt pour une théorie mathématique rejetée, on avance aussi l'accueil mitigé fait à la théorie des catégories. Les réticences de certains étaient-elles de même nature que celles des détracteurs de l'A.N.S. ? Il était intéressant d'en savoir plus.

2.3.1 La lecture de Récoltes et semailles

En recherchant sur internet à partir de quelques mots clef comme "Grothendieck", "catégories", "I.H.É.S." je suis tombé sur un article (publié de façon interne par l'I.H.É.S.) de Alain Herreman *Découvrir et transmettre : la dimension collective des mathématiques dans Récoltes et semailles d'Alexandre Grothendieck* [109]. Il s'agit d'une analyse remarquable d'une partie de *Récoltes & semailles* où Grothendieck s'interroge sur la création mathématique. Je cite Herreman :

> Ce témoignage, à bien des égards exceptionnel, donne des mathématiques et de la communauté des mathématiciens entre les années 1950 et 1980 une image un peu différente de celle qu'offrent les rapports d'Académies, les souvenirs recueillis en l'honneur d'un mathématicien à l'âge avancé ou les notices nécrologiques. Ce sont là autant d'occasions qui incitent plus à la célébration et au portrait édifiant qu'à une réflexion sincère. *Récoltes et semailles* est à l'opposé de ces textes de circonstances : il est le fruit d'un

107. J'en ai lu quatre :

— G. Bringuier, *Alexandre Grothendieck : Itinéraire d'un mathématicien hors normes*, Privat, Toulouse, (2015) ; [9].

— P. Douroux, *Alexandre Grothendieck : sur les traces du dernier génie des mathématiques*, Allary Éditions (2016) ;[26].

— A. Jackson, Comme Appelé du Néant—As if summoned from the void : The life of Alexandre Grothendieck, Notices of the A.M.S. 51(4) (2004) ; [41, 40].

— Y. Pradeau, *Algèbre : Éléments de la vie d'Alexandre Grothendieck*, Éditions Allia (2016) ; [65].

108. Winfried Scharlau, *Who Is Alexander Grothendieck ?* , Notices of the American Mathematical Society (2008) [73]

109. `https://perso.univ-rennes1.fr/alain.herreman/decouvrir-transmettre.pdf`

> travail de longue haleine, obstiné et quotidien, mené sans complaisance à l'égard de son auteur et des autres, et parcouru par un véritable souci d'honnêteté. Mais ses réflexions sur la création en mathématiques et plus généralement sur son rapport aux mathématiques l'ont néanmoins progressivement conduit à découvrir et à dénoncer la manière dont ses élèves ont après son départ pris en charge la diffusion de son œuvre, dont ils ont assumé la rédaction de ses séminaires et développés ses idées. Ce texte a dès lors vite acquis la réputation d'être un règlement de comptes dans "le beau monde mathématique", d'être une affaire scabreuse dans laquelle des mathématiciens parmi les plus prestigieux sont mis en cause par leur maître.

Il n'en fallait pas plus pour que je m'attelle à la lecture de *Récoltes & semailles*. C'est un texte long (1000 pages environ), bourré de notes, de notes de notes, de parenthèses, bref un texte qui n'est pas facile à lire, mais dont la lecture vaut la peine. Ce texte commencé en 1983 montre à l'évidence que Grothendieck n'a jamais tourné le dos à la communauté mathématique [110] mais bien qu'il a été rejeté par "le beau monde mathématique" dont parle Herreman (l'expression est dans *Récoltes & semailles* où elle désigne une nébuleuse de mathématiciens qui ont gravité autour du Séminaire de Géométrie Algébrique à l'I.H.É.S. dans les années cinquante-soixante, quelques ainés, ses élèves, des collaborateurs...). Sur cette questions deux points significatifs se dégagent de la lecture de R&S [111] :

1. Professeur à Montpellier, Grothendieck a encadré les travaux de recherche d'au moins quatre mathématiciens qui ont tous fait une carrière très honorable.
2. Il a eu du mal à faire reconnaître leurs travaux et à les faire publier.

110. La preuve la plus éclatante en est peut être que le programme qu'il proposait pour sa réintégration au C.N.R.S. en 1984 a été une source d'inspiration de la médaille Fields 2002 V. Voedvodski. Par exemple dans *Drawing Curves Over Number Fields* (in *The Grothendieck Festschrift*, Springer 1990), G.B. Shabat and V. Voedvodsky commencent leur introduction par : « This paper develops some of the ideas outlined by Alexander Grothendieck in his unpublished *Esquisse d'un programme* in 1984.», introduction qu'ils concluent par « The main reasons to publish our results in the present state is our eagerness to invite our colleagues into the world of the divine beauty and simplicity we have been living in since we have been guided by the *Esquisse*. We emphasize that in the present text we use only a very small part of the ideas one can find in the epoch-making paper. »

111. Mes références à *Récoltes et Semailles* (noté R&S) se rapportent à la version téléchargeable sur le site du Laboratoire d'Informatique de l'Université Paris Nord : `lipn.univ-paris13.fr/~duchamp/Books&more/Grothendieck/RS/pdf/RetS.pdf` Les n° des pages sont ceux des pages effectives du document .pdf et non ceux du document original indiquées dans la marge.

Le premier point est aisément vérifiable : sur internet on trouve rapidement la trace, à des postes d'enseignant-chercheur des protagonistes. Le second repose sur le témoignage de Grothendieck qui bien sûr ne doit pas être pris pour argent comptant mais mérite quand même considération. Voici quelques extraits :

Olivier Leroy est dans ces années 1970 un jeune montpelliérain qui impressionne beaucoup Grothendieck par ses capacités :

> C'était un jeune gars de vingt ans peut-être, qui devait avoir tout juste une teinture de schémas, un peu de topologie et de topos, il avait quand même pas mal manipulé des groupes discrets infinis je crois. . . C'était trois fois rien, pour tout dire, et avec ça il arrivait à remplir quand-même tous les blancs et à "sentir" sans effort ce que moi, vieux vétéran, lui racontais à toute allure en deux heures ou trois sur la base d'une familiarité de quinze ans avec le sujet. Je n'avais jamais rien rencontré de tel, ou tout au plus chez Deligne, et peut-être chez Cartier, qui avait été aussi assez extraordinaire dans cette ligne-là, dans son jeune âge.
> R&S p 406

Olivier a Leroy a rédigé sous la forme d'une note aux CRAS une partie de ses travaux. La note a été refusée. Grothendieck a une opinion sur ce rejet :

> Tel de mes amis et compagnons d'antan m'a expliqué gentiment dernièrement que par les temps qui courent, hélas, avec l'afflux démesuré qu'on sait de la production mathématique, "on" est absolument obligé, qu'on le veuille ou non, de faire un tri sévère dans les papiers qui sont écrits et soumis pour publication, de n'en publier que juste une petite partie. Il le disait d'un air sincèrement désolé, comme s'il était lui-même un peu victime de cette fatalité inéluctable - un peu l'air qu'il avait aussi pour dire qu'il faisait lui-même partie, eh oui c'est malheureux mais c'est comme ça !, des "six ou sept personnes en France" qui décident quels articles vont être publiés, et lesquels non.(...)
> R&S p. 187

Grothendieck qui vient de nous offrir un portrait assez juste d'un membre du "grand monde"revient sur ce personnage :

> Un ou deux mois plus tard j'ai d'ailleurs appris que ce collègue avait refusé il y a quelques années de recommander la publication d'une certaine note aux CR, dont l'auteur aussi bien que le thème (que je lui avais proposé il doit y avoir sept ou huit ans) me tiennent à cœur. (...) Je pense qu'il a fait un excellent travail (présenté comme thèse de 3e cycle). Je n'ai pas été le "patron" de ce jeune chercheur, brillamment doué il se trouve (j'ignore s'il

> continuera à appliquer ses dons dans les mathématiques, vu l'accueil. . .), et il a fait son travail sans aucun contact avec moi. Mais il est vrai aussi que la provenance du thème développé ne pouvait faire aucun doute ; il était mal barré le pauvre, et sans se douter de rien sûrement ! Ce collègue y a d'ailleurs mis les formes, c'est au moins ça et je n'en aurais pas attendu moins de lui, "sincèrement désolé mais vous comprenez. . . ". Deux ans de travail d'un chercheur débutant fortement motivé, contre une note aux CR de trois pages - combien aurait-elle coûté de deniers publics ?
> R&S pp. 188-189

Puis il nous livre alors une description savoureuse, mais totalement imaginée du comportement du censeur :

> Ce même projet de note aux CR avait eu l'honneur déjà d'être soumis à un autre parmi les "six ou sept personnes en France...", qui l'a renvoyé au "patron" de l'auteur, car ces mathématiques "ne l'amusaient pas" (textuel !). (Le patron, écœuré mais prudent, lui-même en position plutôt précaire, a préféré les deux fois s'écraser plutôt que de déplaire...) Ayant eu l'occasion de parler de la chose avec ce collègue et ex- élève, j'ai appris qu'il avait pris la peine de lire avec attention la note soumise et d'y réfléchir (elle devait lui rappeler bien des souvenirs. . .), et qu'il avait trouvé que certains des énoncés auraient pu être présentés de façon plus serviable pour l'utilisateur. Il n'a pas daigné pourtant gaspiller son temps précieux à soumettre ses commentaires à l'intéressé : quinze minutes de l'homme illustre, contre deux ans de travail d'un jeune chercheur inconnu ! Les maths l'ont bien "amusé" assez pour saisir cette occasion de reprendre contact avec la situation étudiée dans la note (qui ne pouvait manquer de susciter en lui, tout comme en moi-même, un riche tissu d'associations géométriques diverses), d'assimiler la description donnée, puis, sans mal vu son bagage et ses moyens, détecter les maladresses ou lacunes. Il n'a pas perdu son temps : sa connaissance d'une certaine situation mathématique s'est précisée et enrichie, grâce à deux ans de travail consciencieux d'un chercheur faisant ses premières armes ; travail que le Maître aurait certes été capable de faire (dans les grandes lignes et sans démonstrations) en quelques jours. Cela acquis, on se rappelle qui on est - la cause est jugée, deux ans de travail de Monsieur Personne sont bons pour la poubelle. . .
> R&S p. 189

Dans l'affaire suivante Grothendieck est plus directement concerné puisqu'il s'agit d'un de ses élèves.

> Mes premières expériences dans ce sens ont été les fruits inattendus de mes efforts infructueux pour essayer de faire publier la thèse de Yves Ladegaillerie sur les théorèmes d'isotropie sur les surfaces, travail aussi bon certes qu'aucun des onze travaux de doctorat d'état ("d'avant 1970", il est vrai !) pour lesquels j'avais fait figure de "patron".
> R&S p. 278
>
> Yves Ladegaillerie a commencé à travailler avec moi en 1974. C'était "à tout hasard", dans un moment de creux chez lui - je lui ai soumis alors quelques réflexions naïves sur les plongements de 1-complexes topologiques dans les surfaces, à un moment où je ne connaissais rien sur les surfaces (sauf la notion de genre), et lui encore moins. Ça faisait un peu grothendieckerie (chez moi de toutes façons ça commence tou- jours comme ça. . .), et ça a accroché chez lui plus ou moins, jusqu'au jour où ça a fini par faire "tilt", je ne sais plus trop quand et pourquoi. (...) À partir du moment où Yves avait "accroché", il a fait sa thèse dans un an, un an et demi, résultats, rédaction, tout, et à quatre épingles encore. C'était une thèse brillante, moins épaisse que la plupart de celles qui s'étaient faites avec moi, mais aussi substantielle qu'aucune autre de ces onze thèses. La soutenance s'est faite en mai 1976.
>
> La thèse n'est toujours pas publiée aujourd'hui. (...) Le résultat central va finalement paraître, neuf ou dix ans après et réduit à l'os, dans un court article de Topology (chut - j'ai un complice dans le Comité de Rédaction de cet estimable journal. . .).
> R&S pp. 399-340

Le mathématicien ordinaire de ma génération qui n'a pas côtoyé le "grand monde", ne sera pas étonné par ce témoignage qu'il aura lu avec jubilation. C'est un peu l'arroseur arrosé. Grothendieck, dont l'avis devait être sollicité comme la parole divine quand il était le gourou du "grand monde", n'arrive même plus à faire passer une pauvre petite "note" maintenant qu'il n'y est plus reconnu ! Continuons notre lecture.

Carlos Contou-Carrère est un mathématicien au parcours non traditionnel. Titulaire d'un doctorat étranger il est l'unique candidat sur un poste de professeur à Perpignan et proposé par les mathématiciens locaux. Le CCU (l'ancêtre du CNU) refuse la proposition :

> Toujours est-il que la candidature de Contou-Carrère a été jugée irrecevable par le Comité Consultatif des Universités et le dossier renvoyé. La chose qui m'a alors soufflé, c'est que ni le Président du CCU (l'organisme national qui a pris la décision), au nom du Comité, ni aucun des membres à titre personnel, n'ait eu ce minimum de respect d'écrire, soit au principal intéressé

> Contou-Carrère lui-même, soit au moins au directeur de l'Institut de Mathématiques de Perpignan, pour donner quelques mots d'explication sur le sens de ce vote, qui en l'absence de toute explication ne pouvait être reçu que comme un désaveu cinglant du choix des collègues de Perpignan, et comme un désaveu de leur unique candidat comme apte à remplir honorablement le poste pour lequel il était proposé.
> R&S p. 400.

Ce mépris affiché par le CCU est significatif de l'esprit du "grand monde". Bien entendu le CCU avait peut être raison sur le fond, je n'en ai pas la moindre idée, mais il est tout à fait inadmissible de ne pas s'expliquer sur les raisons du rejet. Voilà qui nous rappelle les agissements de la commission des thèses.

Enfin, un tout dernier incident qui a humilié Grothendieck, ravalé au rang de mathématicien tout à fait ordinaire. En 1983 il souhaitait faire soutenir une thèse à Contou-Carrère.

> Il est d'autant plus remarquable que J-L. Verdier ait refusé ma proposition de faire partie du Jury de thèse de Contou-Carrère en décembre 1983, avec J. Giraud, et moi-même faisant fonction de directeur de recherches, estimant que la thèse (entièrement rédigée pourtant et lue avec soin par J. Giraud) et le jury n'offriraient pas les garanties de sérieux suffisants, sans en référer au contrôle d'une Commission des Thèses des Universités Parisiennes (Sic) [112]

La *Commission des Thèses des Universités Parisiennes* ! Vous avez bien lu. La même année, en 1983, la même commission refusait la soutenance de E. Benoit (Vénissac). En demandant à Balderoy de s'intéresser un peu à Grothendieck je ne me doutais pas qu'il y aurait une relation aussi forte avec l'affaire des Canards.

Dans la citation précédente le « Il est d'autant plus remarquable que J-L. Verdier ait refusé » fait allusion à la propre soutenance de J-L. Verdier dont il parle par ailleurs :

> Vers l'année 1960 ou 1961 je propose à Verdier, comme travail de thèse possible, le développement de nouveaux fondements de l'algèbre homologique, (...)
> Son travail de fondements se poursuit de façon satisfaisante, se matérialisant en 1963 par un "État 0" sur les catégories dérivées et triangulées, multigraphié par les soins de l'IHÉS.(...)
> Si la soutenance n'a pas eu lieu en 1963, mais en 1967, c'est qu'il était impensable que ce texte de 50 pages, embryon d'un travail de fondements

112. Le "Sic" est de Grothendieck.

> encore à venir, puisse constituer une thèse de doctorat d'État - et la question bien sûr ne s'est pas même posée. Pour cette même raison, lors de la soutenance de thèse le 14 juin 1967 (devant un Jury comprenant C. Chevalley, R. Godement et moi-même qui présidais), il n'était pas question de présenter ce travail comme une thèse. Le texte soumis au jury, de 17 pages (+ bibliographie), se présente comme l'introduction à un travail d'envergure en cours de rédaction.(...)
> R&S p. 352

Nous sommes bien loin de la tradition qui à l'époque imposait, pour la thèse d'État, la soutenance d'une "seconde thèse" qui consistait en l'exposé de travaux étrangers à la spécialité du candidat ! Grothendieck le reconnaît :

> Si le titre de docteur ès-sciences a été décerné à J-L. Verdier sur la foi de ce texte de 17 pages, esquissant des idées dont il dit lui-même qu'elles ne lui sont pas dues, c'était là clairement un contrat de bonne foi entre le jury et lui : qu'il s'engageait à mener à terme et à mettre à la disposition du public ce travail dont il présentait une introduction brillante.

Que ce témoignage de Grothendieck soit fait dans le cadre de son "règlement de compte" avec ses anciens élèves n'enlève rien à l'objectivité de faits qui ont leur importance car ils concernent le successeur de H. Cartan comme Directeur d'étude à l'ENS. Que Verdier ait été à ce moment un mathématicien de grande qualité ne fait probablement pas de doute pour les spécialistes de la discipline - je n'en sais rien -, mais était-ce une raison suffisante pour passer par dessus les règles et les traditions et accepter qu'il se dispense d'un travail de rédaction minimal ? L'auteur de R&S, considère effectivement qu'à cette occasion il a fait preuve de légèreté :

> J'admets ma responsabilité entière, en tant que directeur de thèse de J-L. Verdier et président du jury, pour ma légèreté de lui avoir décerné (conjointement avec C. Chevalley et R. Godement faisant confiance à la caution que je donnais) le titre de docteur sur un travail qui n'était pas encore fait.(...)
> À cette responsabilité, je devrais ajouter encore celle de n'avoir pas veillé, au cours des deux ans qui ont suivi (avant mon départ de la scène mathématique) à ce que Verdier tienne bel et bien le contrat qu'il avait passé.

Grothendieck est certainement fautif, mais moins me semble-t-il que Chevalley et Godement et plus généralement que le microcosme du SGA qui ont laissé faire. Lui qui ne vivait que pour les mathématiques qu'il identifiait à l'activité du SGA était excusable de ce mépris de la tradition, tradition qu'en raison de son parcours atypique il ne connaissait d'ailleurs pas très bien.

On peut dire, à juste titre, que ces citations ne montrent pas grand chose d'autre qu'un Grothendick en conflit avec la communauté mathématique En effet, il est possible que les réticences du "beau monde mathématique" aient été scientifiquement fondées, que Grothendieck raconte l'histoire à sa façon et qu'une analyse soigneuse des travaux incriminés et des témoignages de contemporains est nécessaire pour se faire une opinion. Je ne discute pas ce point et je serai le premier à me réjouir que des spécialistes, historiens et mathématiciens ouvrent ce dossier mais on ne pourra rien m'objecter si je dis que l'histoire du *départ volontaire* de Grothendieck de sa communauté au tournant des années soixante-dix est un *mythe*. Grothendieck a bel et bien été *rejeté* par sa communauté, celle du "beau monde mathématique".

J'ai écrit un petit article sur ce sujet à destination de la communauté mathématique française. Il se concluait par :

> Maintenant gardons nous bien de conspuer vertueusement le "grand monde" que nous venons d'évoquer et qui n'existe plus sous cette forme.(...) Ce serait pour la communauté mathématique actuelle une erreur tout aussi regrettable que celle de refuser de prendre en compte le témoignage d'un de ses membres les plus insignes. Nous devons nous rappeler l'exceptionnelle rapidité de la croissance de la communauté entre 1950 et 1980. (...) (...) Avant la guerre, quelques normaliens seulement, souvent après un passage dans le secondaire, accédaient à la recherche. La situation n'a pas beaucoup évolué dans l'immédiat après guerre puis brusquement les choses s'emballent. Il était normal de s'inquiéter des conséquences de la "massification" du métier de mathématicien. L'arrogance des individus du "grand monde" n'était certainement pas une bonne réponse mais c'est dans ce contexte qu'il faut l'analyser.
>
> Nous ne devons pas oublier que ce "grand monde" qui tenait le haut du pavé est quand même celui qui a créé l'IHÉS, ce petit institut aux quelques millions de budget annuel qui a abrité en un demi siècle d'existence pas moins de 11 médailles Fields. Ce n'est pas rien quand même ! D'autant que des disciplines que Bourbaki avait "loupées" s'y trouvent maintenant représentées en bonne place. Et si l'on estime que ma référence à l'IHÉS est par trop élitiste que l'on regarde le CIRM, cet instrument parfaitement démocratique au service de la communauté la plus large, que nous devons en grande partie à l'énergie du plus élitiste d'entre les élitistes : Jean Dieudonné.
>
> Le rôle du "grand monde" est à apprécier dans le contexte de l'époque qui est celui d'une transition entre le monde féodal et le monde capitaliste. Dans l'après guerre et jusque dans les années 1970 le monde mathématique français fonctionnait sur le mode féodal où la *légitimité découle de la lignée*.

> Vingt ans plus tard il était clairement rentré dans le monde capitaliste où la *légitimité découle de l'argent qu'on est capable de brasser*. Cette transition s'est opérée dans l'affrontement de l'ancien monde, celui des *mathématiques pures*, avec le nouveau monde des *mathématiques appliquées* et de l'informatique. Le déclin de l'empire bourbachique voyait l'expansion d'une nouvelle forme de domination qui proposait ses nouveaux modes d'organisation de la recherche. Plus de grandes organisations pyramidales soutenant les grands noms du moment mais des *petites équipes concurrentes* animées par une unique personnalité scientifique dynamique. L'INRIA, entre autres, et Jacques-Louis Lions figure emblématique de l'essor des mathématiques liées à l'ordinateur, proposaient avec succès ce nouveau modèle de développement aux mathématiques pour leur entrée dans la techno-science. De nouvelles dynamiques se sont mises en place, le contrôle par le "grand monde" a cédé place à celui des "évaluations" et l'arrogance de brillants mathématiciens à celle de non moins brillants "managers". Qui sait si la résistance du "grand monde", en dépit de ses dérives condamnables, ne nous a pas en partie protégés (provisoirement ?) d'un mercantilisme sans limite qui lui, à coup sûr, signera la fin de la science comme nous la concevons depuis Galilée ? Il existe encore trop peu d'études sur l'évolution des structures de pouvoir dans la communauté mathématique au tournant des années 1970. Une bonne connaissance des mécanismes qui ont conduit à la situation présente est évidemment essentielle pour mieux appréhender l'avenir et la lecture critique mais de bonne foi de R&S peut y aider.

J'ai proposé cet article à la Gazette des Mathématiques, une publication de la Société Mathématique de France. Ma proposition a reçu la réponse négative suivante :

> Cher collègue,
>
> le comité de rédaction de la gazette vous remercie pour votre proposition de texte. Nous avons fait relire celui-ci par quelqu'un qui connait profondément à la fois l'oeuvre et la vie de Grothendieck. Ce choix est par ailleurs à l'origine du long délai séparant votre soumission et le présent message. Délai pour lequel je tiens à vous présenter mes excuses. Malheureusement, le rapport que nous avons obtenu nous a convaincu de renoncer à publier votre article.
>
> En effet, bien que votre texte ne porte pas explicitement sur le contenu de son oeuvre, il semble primordial que l'auteur d'un tel texte ait une connaissance avancée des mathématiques de Grothendieck et des contributions des acteurs principaux de l'époque. Connaissance qui ne se limite pas à la lecture, même

> approfondie, du texte "Récoltes et Semailles", lequel est par essence hautement subjectif. Beaucoup de collègues ont lu tout ou partie de R&S, mais seul le travail profond d'un historien nous semble pouvoir garantir d'éclairer les propos de Grothendieck avec une rigueur nécessaire, en recoupant par exemple les faits annoncés avec des témoignages d'autres mathématiciens impliqués à l'époque ou en consultant certaines archives.
>
> Nous espérons que vous comprendrez notre décision et nous vous remercions encore d'avoir pensé à la Gazette.
>
> En vous souhaitant une très bonne année 2018, bien cordialement,

On voit que la raison avancée du refus : «(...) seul le travail profond d'un historien nous semble pouvoir garantir d'éclairer les propos de Grothendieck avec une rigueur nécessaire (...)» n'est pas très bonne puisque c'est exactement ce que demandait mon texte. En revanche je crois deviner les raisons cachées. Elles me semblent exactement de même nature que celles qui ont décidé de l'étouffement de la dispute sur l'A.N.S. La communauté mathématique française semble toujours aussi frileuse devant le débat [113].

Cela dit il faudrait aussi préciser de quel travail historique je veux parler et qui n'est peut être pas celui que les responsables de la Gazette ont en tête. Sur cette question il existe déjà un travail important accompli par le *Grothendieck circle* :
`http://www.grothendieckcircle.org`
de mise en ligne d'informations sur la vie et l'œuvre de Grothendieck. On y trouve la traduction (de l'allemand) d'un livre de Winfried Scharlau :

Who Is Alexandre Grothendieck ? Anarchy, Mathematics, Spirituality, Solitude
Volume 3 : Spirituality (1970-1991)

qui comme l'indique le titre retrace la période qui m'intéresse de la vie du mathématicien. C'est un travail biographique très minutieux qui donne énormément d'informations basées sur ses écrits (principalement R&S) recoupées au mieux auprès d'autres témoignages. Alors que les deux autres volumes s'intéressent à l'enfance et à l'œuvre mathématique le volume trois est centré sur l'engagement spirituel de Grothendieck. Scharlau présente son travail de la façon suivante :

> The third volume of Alexander Grothendieck's biography covers the years from 1970 until 1991, the years from "the great turning point" in his life

113. Une version écrite pour un public de non mathématiciens est parue dans le n° 79 (été 2018) de la revue *Alliage*. Au moment où ce manuscrit de thèse est déposé l'article refusé par la *Gazette* est accepté par :'*European Mathematical Society Newsletter* sous réserve de sa traduction en anglais.

> until his disappearance from the public sphere. It is with some doubt and only after much hesitation that I present this volume to the public. One reason is that various relevant documents were not available to me, and many contemporary witnesses could or would provide only fragmentary information, so that many large holes remain in my account and without doubt some errors have slipped in. Even more than in regard to the first volume, I am immensely grateful to a great many people for their assistance in completing this project. (...) I will say more on this in the afterword. To conclude I would like to remark that the work on this biography is an ongoing adventure which continues to take astonishing twists and turns, while providing abundant food for thought.

Et il le conclut par une courte postface où, après avoir cité ses sources il lance une sorte d'appel :

> It must be emphasized that until now almost none of the original documents concerning Grothendieck can be found in archives or similar institutions. In my opinion there is a great danger that a large part of his bequest will be scattered and possibly lost forever. I have made every effort to keep a record of documents which I have viewed, and file them in my personal archives, but I stress the fact that I possess almost no original documents. **I consider it as the urgent task of the scientific community to preserve Grothendieck's scientific and private bequest for the future and to archive it professionally** [114]**.**

Mais si, comme je l'ai déjà dit, il s'agit là d'un travail remarquable par le soin avec lequel il est conduit, il ne s'agit que d'une partie du travail historique que j'appelle de mes voeux. Maintenant que la vie exceptionnelle de Grothendieck commence à être bien documentée il devrait être possible de l'aborder d'un point de vue plus "social studies".

2.3.2 Pour une histoire du pouvoir dans les mathématiques française contemporaines

La leçon que je retire de l'"affaire Vénissac" et de ma brève incursion autour de Bourbaki, l'IHÉS, le S.G.A. et autres institutions mathématiques en rapport avec Grothendieck est que, plus encore que ne laisse entendre Balderoy, une bonne compréhension de la mauvaise réception de l'A.N.S. en France passe par une

114. Souligné par l'auteur.

meilleure connaissance de l'exercice du pouvoir à l'intérieur de la communauté mathématique française et du rapport des détenteurs du pouvoir avec la société, entre la fin de la guerre et 1980. Il n'existe pas encore beaucoup d'études de ce type. Il me semble que la liste ci-dessous n'est pas loin d'être exhaustive.

— Aubin, David, *L'Institut des Hautes Études Scientifiques, la théorie des catastrophes et le chaos déterministe : Mathématiques, industrie et politique*, dans Les mathématiques dans la cité , Presses universitaires de Vincennes pp. 129-154 (2006) ; [2].

— Dahan, Amy, and David Aubin. "Systèmes dynamiques et Chaos : Convergences et recompositions, un aperçu historique." Chaos et Systèmes dynamiques, 2007 Hermann, Paris (2007) : 327-356 ; [15].

— Aubin, David. "Forms of explanation in the catastrophe theory of René Thom : topology, morphogenesis, and the structuralism." Growing explanations : Historical perspectives on recent science. Duke Univ. Press, 2004. 95-130 ; [1].

— Dahan Dalmedico, A. "Pur versus appliqué ? Un point de vue d'historien sur une 'guerre d'images'." La gazette des mathématiciens 80 (1999) : 31-46 ; [16].

— Pessis, Céline. "Les années 1968 et la science." Survivre... et Vivre, des mathématiciens critiques à l'origine de l'écologisme, Paris, Mémoire en Sciences Sociales. EHESS-Centre Alexandre Koyré (2009).

— Dahan-Dalmedico, Amy. Jacques-Louis Lions, un mathématicien d'exception : entre recherche, industrie et politique. La découverte, 2005 ; [17].

— Jackson, Allyn. "The IHES at forty." Notices of the American Mathematical Society 46.3 (1999) : 329-337 ; [39].

auxquels on peut ajouter divers articles des bulletins de la SMF et de la SMAI. Ces articles sont loin de répondre à toutes les questions qui se posent. En particulier comment s'est effectuée la transition entre la production artisanale des thèses avant la guerre - quelques thèses au plus par an autour de l'E.N.S. - à la production de masse actuelle - plusieurs centaines par an sur tout le territoire - ? Comment est-on passé de l'idée de cooptation, qui était encore pleinement en vigueur dans les années soixante pour la soutenance d'une thèse d'état, à la production massive de thèses "bac+huit" destinées à satisfaire les besoins du développement industriel, suivie pour certains de l' H.D.R. pour encadrer la production des thèses en question ? Reste-t-il de la recherche scientifique dans cette production et où la

trouve-t-on ? C'est dans tout ce contexte encore mal connu de l'évolution des institutions (réformes du statut des universités, réformes du CNU, du CNRS, création des écoles doctorales...) et des structures de pouvoir (par exemple l'ENS a-t-elle perdu de l'influence, si oui au profit de qui ?) que doit être analysé le fonctionnement de la commission des thèses. En particulier voici quelques questions qui trahissent certainement mon ignorance des méthodes de l'histoire des sciences car ce ne sont peut être pas les bonnes questions à se poser, mais dont j'aimerais bien connaitre la réponse quand même.

1. Quel était réellement le pouvoir de Bourbaki ? Uniquement intellectuel ? Que nous dirait une étude sérieuse sur la présence des Bourbaki et/ou de leurs élèves dans les instances telles que le CNU (CCU à l'époque), les commissions du CNRS, l'Académie, la Direction des enseignements supérieurs.... ?
2. Comment a évolué la tutelle de Paris sur la province ?
3. Quelle était l'importance réelle de la Géométrie Algébrique dans le paysage mathématique français et mondial de l'époque ? Grothendieck, Dieu (ou prophète) de la discipline l'était-il de toute les mathématiques pures et moins pures ?
4. N'y avait-il pas une forme d'instrumentalisation de Grothendieck par une certaine forme de pouvoir ? N'ayant pas l'expérience ordinaire (classes préparatoires, normale sup. ...) des jeunes mathématiciens de sa génération n'était-il pas plus facilement manipulable ?
5. etc...

On a dit qu'après le "grand tournant de 1970" (c'est l'expression de Scharlau) Grothendieck était devenu fou. Ne pourrait-on pas renverser les choses et dire que jusqu'en 1970 Grothendieck était fou (il ne faisait que des mathématiques, quinze heure par jour, et n'avait une vie sociale que très réduite) et que dans les années soixante-dix il est devenu normal en ne faisant plus que raisonnablement des mathématiques (ses travaux avec ses élèves montpelliérains, ses correspondances...) et en s'ouvrant au monde extérieur. Ce qui expliquerait que n'ayant plus la forme de folie qui était utile au pouvoir du "beau monde mathématique" Grothendieck était devenu inutile et devait être rejeté ?

2.3.3 Balderoy et le mythe de la rupture ?

Je pense qu'on comprend pourquoi la découverte de ce que j'ai appelé le *mythe de la rupture* m'a conduit à faire le travail qui précède mais on se demandera peut-

être pourquoi je l'ai pas fait porter par Balderoy ?

Pour démontrer l'existence d'une composante éthique à l'origine de la non dispute, Balderoy propose de mettre en perspective la polémique autour de l'école de Strasbourg avec deux polémiques contemporaines mais de nature différente. L'une, éthique et politique autour de Grothendieck, l'autre, interne à la science, autour de la pertinence de la théorie des catastrophe. Concernant Grothendieck il lui suffisait de reprendre à son compte la vulgate sur la rupture. Je ne lui ai pas fait assumer la dénonciation du mythe que je propose ici pour ne pas affaiblir l'argumentation de sa thèse.

En effet, comme le montrent les raisons avancées pour le rejet de ma proposition d'article à la Gazette des mathématiciens, il est encore un peu trop tôt pour que s'ouvre une discussion sereine sur le sujet des relations de Grothendieck avec la communauté mathématique. Sur ce sujet il y a certainement encore matière à polémique alors que sur l'"affaire Vénissac", du point de vue soutenu par Balderoy, il n'y a plus matière à discussion. Mettre les deux en parallèle affaiblirait la démonstration de Balderoy.

Il y a une autre raison de ne pas le faire. Est-ce que le conflit qui a opposé Grothendick à sa communauté est du même ordre de grandeur que celui qui a opposé (et oppose encore en partie) l'A.N.S. à une partie des mathématiciens ? Concernant Grothendieck et Robinson, seul les historiens du futur seront à même de nous dire lequel de ces deux géants était le plus grand. Mais il ne fait pas de doute que l'impact sur la communauté mathématique française des idées du traité S.G.A. est absolument sans commune mesure avec celui de l'école de Reeb. En associant ces deux histoires on pourrait accuser Balderoy de tenter de donner à son affaire une importance qu'elle n'a pas.

2.4 Rigueur et philosophies des mathématiques

2.4.1 La rigueur mathématique selon Duchemin

Dans la mesure où j'ai prétendu que le personnage de Duchemin ne tient, en mathématiques, que des propos qui seraient acceptés par la quasi unanimité des mathématiciens, je dois m'expliquer sur la leçon que ce dernier propose sur les fondements des mathématiques parce qu'un mathématicien de ma génération ne présente normalement pas les choses ainsi.

Le mathématicien de ma génération commence par ce qu'on appelle un exposé

de "théorie naïve des ensembles". Le "naïve" de "théorie naïve des ensembles" n'est pas une expression de mon cru mais bien l'expression consacrée : *Naïve set theory* est le titre d'un ouvrage célèbre du mathématicien P.R. Halmos [115]. La théorie naïve des ensembles est une théorie où l'on expose le vocabulaire de base : union, intersection, application, les symboles de base $\in$, $\exists$, $\forall$ etc.... Ensuite, ce travail fait, mon mathématicien mettra en évidence un paradoxe, par exemple celui de l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas [116] :

$$y = \{x : x \notin x\}$$

Ce paradoxe montre la nécessité de parler une langue formelle où tout ne peut pas se dire, en particulier où la possibilité de parler de *l'ensemble des qui ...* doit obéir à des règles strictes [117]. Cette présentation était la plus souvent adoptée quand j'étais jeune parce qu'elle a le mérite, en même temps qu'elle informe sur la nécessité des langages formels, de familiariser avec une terminologie utile par ailleurs.

Donc ce mathématicien de ma génération dira probablement que la présentation de Duchemin n'est pas classique, mais il ne pourra pas dire qu'il raconte des âneries, comme il l'aurait probablement fait dans les années quatre-vingt, parce que les choses ont évolué. Tous les mathématiciens reconnaissent en 2015, au moment où Duchemin est sensé donner ses explications, que l'A.N.S. est une théorie mathématique sérieuse. Cela étant dit il se pourrait aussi que beaucoup des mathématiciens des nouvelles générations, plus portés sur les questions motivées par la science des ordinateurs, trouvent la présentation de Duchemin plus intéressante parce qu'elle met en avant la difficulté de parler des nombres et de les représenter. Je crois donc pouvoir conclure que Duchemin est bien dans son rôle de mathématicien consensuel quand il écrit ce petit texte.

Le lecteur aura peut-être remarqué que le discours de Duchemin sur les entiers naïf, par son insistance sur l'apprentissage de la "récitation", a un petit côté Wittgensteinien. Pourtant il n'y fait pas référence. C'est que Duchemin est dans

115. Peut être Reeb y pensait-il quand il parlait d'entiers naïfs. Je ne sais pas. Dans la mesure où, si l'on suit Reeb, les entiers naïfs préexistent à toute forme de mathématiques il serait intéressant de savoir, au vu du succès de la théorie des ensembles, s'il en est de même des "ensembles naïfs". J'entend par là toutes les opérations de collectivisations naïves qui conduisent à donner un nom à des collectivités ; par exemple, si je suis berger, mon troupeau est l'ensemble de mes moutons.

116. Si $y \in y$ alors y n'est pas dans l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas, mais si $y \notin y$ alors il devrait être dans l'ensemble des ensembles qui ne se contiennent pas.

117. Être déjà éléments d'un ensemble établi et satisfaire une propriété "mathématique" en un sens précis.

son rôle de mathématicien représentatif qui n'a pas lu Wittgenstein et de plus il n'est pas tenu de payer les dettes de son créateur. Effectivement, en ce qui me concerne, j'ai lu un peu Wittgenstein [118] mais je ne prétends pas y avoir compris grand chose. Ce qui ne veut pas dire que je n'ai pas été influencé et Duchemin en a peut-être hérité. Cependant je crois que le mathématicien moyen de ma génération pourrait, sans avoir lu Wittgenstein, tenir les mêmes propos. En effet les mathématiciens et particulièrement ceux qui ont à enseigner les mathématiques, sont sensibles à l'importance des règles (le calcul) et à leur apprentissage. Ils sont bien placés pour constater que les enfants savent compter sans se tromper très longtemps avant de savoir ce qu'est un nombre (à supposer que quelqu'un le sache). En s'intéressant à la règle, Wittgenstein se démarque de la philosophie traditionnelle des mathématiques plus préoccupée par l'ontologie que par les procédures et se rapproche ainsi du mathématicien réel. On peut aussi se demander dans quelle mesure son expérience d'instituteur de 1923 à 1926 a influencé l'orientation de ses recherches [119].

D'autre part, la lecture d'un ouvrage savant comme celui de Olivier Keller *L'invention du nombre* [120] montre toute la distance qui sépare les phantasmes de mathématicien moyen de Duchemin sur l'origine de l'art de compter de la réalité historique. Enfin Duchemin est toujours dans son rôle en ne remarquant pas que l'écriture décimale d'un nombre $x = \sum a_n 10^n$ avec l'usage de l'exponentielle est déjà problématique comme le montrent des travaux récents de Nelson dont je reparlerai plus loin.

Mais tout ceci n'affaiblit pas la démonstration de Balderoy. En effet, pour comprendre l'affaire de la commission des thèses ce dernier avait seulement besoin de savoir si le travail de Vénissac transgressait ou non le large consensus de la communauté mathématique sur la nécessité de l'usage de la méthode formaliste (souvent appelée aussi axiomatique) dans la pratique contemporaine des mathématiques. Si Vénissac n'avait pas respecté cette méthode, la commission aurait été fondée à émettre des réserves. En proposant un exposé acceptable de la méthode formaliste faisant rentrer rapidement dans la problématique A.N.S., Duchemin répond aux attentes de Balderoy ; il explique le système formel I.S.T. utilisé par l'école de Strasbourg. Il signale, sans insister, à la fin de son exposé

118. *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Gallimard (1983) ; [83] et *Recherches philosophique*, Gallimard (2004) ; [84].

119. Dans son *Ludwig Wittgenstein*, Seuil (1989) [14], Christianne Chauviré accorde de l'importance à l'épisode "instituteur" mais n'évoque pas la possibilité d'un lien entre cette expérience et l'importance qu'il attribue à la "règle" .

120. Classiques Garnier (2016) ; [45].

qu'il existe d'autres possibilités de formalisation. Je reviens plus loin sur ces différences de formulations mais je ne pouvais pas confier ce travail à Duchemin car les conséquences que j'en tire ne sont certainement pas consensuelles.

2.4.2 Philosophie et A.N.S. selon Duchemin

On a vu quelques échanges entre Balderoy et Duchemin sur le fait de savoir si les "canards" ont été *inventés* ou *découverts*. Donc, comme tout le monde Balderoy a entendu dire qu'il y a plusieurs positions philosophiques sur la nature des mathématiques. Il sait que le "réalisme" (ou platonisme) est la philosophie spontanée des mathématiciens mais il a aussi entendu parler de courants plus minoritaires comme l'intuitionnisme ou le constructivisme.

Entre parenthèse, je dois dire qu'il me semble tout à fait inopportun de parler de la question du réalisme en mathématiques en termes d'"invention" et de "découverte" car c'est alors s'interdire l'usage ces deux expressions hors de leur sens commun, ce qui ne facilite pas la conversation. Je pense en effet qu'on peut parfaitement parler de la *découverte* des "canards" et avoir simultanément une philosophie non réaliste. Il est parfaitement légitime pour un non réaliste d'affirmer que dans l'immense combinatoire des signes mathématiques que les mathématiciens accumulent jour après jour, au sein de ceux que nous faisons rentrer dans la catégorie équations différentielles, nous avons *découvert* une combinaison particulière qu'il nous a plu d'appeler "canard". Soyons encore un peu plus concrets. Imaginons que nous ayons écrit un programme d'ordinateur qui, lorsqu'on lui propose un nombre réel a en entrée, produit une courbe du plan $\varphi(a)$; supposons qu'après plusieurs millier de simulations avec des nombres différents la courbe observée ait toujours été fermée. Alors on fera la conjecture que " pour tout a la courbe $\varphi(a)$ est fermée " ; supposons toujours, qu'un jour, un expérimentateur prenne, au hasard (en utilisant une instruction "random"), le nombre $a_o = 0.69456731$ et qu'il observe que la courbe $\varphi(a_o)$ n'est pas fermée. Dira-t-on qu'il a *inventé* un contre exemple à la conjecture ? Non car l'idée d'invention ne colle pas avec le tirage au sort. On dira bien qu'il a *découvert* un contre exemple sans que cela implique une philosophie réaliste des mathématiques. Inversement je ne pense pas qu'un réaliste s'offusquerait que l'on dise que les "canards" sont inventés, au contraire ; pour le réaliste le problème est justement de faire la part entre ce qui est la "réalité mathématique" et les artifices que nous inventons pour y accéder. L'aphorisme de L. Kroneker «Dieu a fait les nombres, tout le reste est l'œuvre de l'homme» pourrait être celui de bien des réalistes et, à ce compte, les "canards", qui font partie "du reste" sont bien des inventions. Balderoy et Duchemin ne font qu'utiliser là

un langage convenu mais qui, je crois, ne contribue pas à l'éclaircissement de la question.

Donc, comme tout le monde, Balderoy a entendu dire qu'il y a plusieurs positions philosophiques sur la nature des mathématiques et son problème est de savoir dans quelle mesure ces positions, assumées ou inconscientes, peuvent influer sur l'attitude d'un mathématicien relativement à l'A.N.S. Pour avancer il demande à Duchemin de lui expliquer les présupposés philosophiques plus ou moins largement partagés par ses collègues. Duchemin ne répond pas vraiment à la question car il sait que les attitudes philosophiques des mathématiciens, quand elles son assumées, ne semblent pas être corrélées avec leur perception de l'A.N.S. C'est pourquoi il ne se lance pas dans une description des différentes philosophies des mathématiques, ce que au demeurant il serait bien incapable de faire, et préfère au contraire décrire ce qui est, selon lui, un sentiment très partagé de la communauté. Il expose la métaphore très classique et très largement consensuelle chez les mathématiciens de l'entreprise scientifique considérée comme l'exploration d'un continent. Mais Duchemin insiste sur ce que cette image, qui sent le platonisme à plein nez peut convenir au non réaliste parce que ce dernier, dans sa pratique effective, fait semblant de croire à l'existence des "objets mathématiques" qu'il manipule.

Il défend un réalisme qu'il qualifie de " naïf " pour lequel il est utile de croire, quand on pratique les mathématiques, que les nombres existent, même si dans le fond on ne comprend pas très bien ce ça veut dire pour des nombres : "exister". On remarquera cependant qu'il ne se mouille pas directement sur les mathématiques mais qu'il prend un exemple dans la physique avec l'image mécaniste de la loi des gaz parfaits parce qu'il se souvient de ses professeurs de physique qui commençaient leurs explications par un sempiternel *tout se passe comme si*. Mais je ne lui fais pas dire que « tout se passe comme si les entiers existaient » car ce serait certainement le faire sortir de son rôle de mathématicien consensuel.

En revanche Duchemin élabore un peu sur l'image de l'exploration en spécialisant le travail des mathématiciens : ce sont des alpinistes, et il nous montre que sa métaphore a une certaine efficacité, mais on comprend, au bout du compte, que s'il y tient, c'est surtout pour placer que *l' A.N.S. est aux mathématiques ce que l'invention de la semelle* vibram *fut à l'alpinisme*. Sur ce point Duchemin n'est probablement pas consensuel mais je ne le fais pas vraiment sortir du rôle que je lui ai assigné car il ne s'agit plus de mathématiques proprement dites mais d'un discours sur les mathématiques. Nous verrons, un peu plus loin, à propos du formalisme de Nelson et de l'intuitionnisme de Reeb pourquoi je pense que ces derniers n'auraient pas récusé cette image.

Ensuite, dans la discussion, les exemples fournis de Connes, Harthong, Nelson, Reeb, Wallet montrent bien qu'une affirmation du genre «la communauté mathématique française a rejeté l'A.N.S. parce qu'elle est platonicienne» est une affirmation insoutenable. C'est tout ce que Balderoy voulait savoir et il n'a pas besoin d'aller plus loin. Il n'en reste pas moins que la citation qu'il fait de Nelson « One of the most treasured experiences of my life is my friendship with Georges Reeb. We had many strong discussions together, intuitionist versus formalist » est intrigante. Je vais revenir dessus un peu plus loin.

Dans le cadre de l'instruction de la thèse de Balderoy, (expliquer le comportement inadmissible de la commission et la non-dispute qui s'en est suivie) ces considérations sont suffisantes. Au delà de cette question, ce que la thèse de Balderoy ne cherche pas à expliquer c'est l'accueil pour le moins frileux que l'A.N.S. a reçu chez les mathématiciens. Sur cette question j'ai une idée que je vais développer un peu. Elle repose sur l'*image mentale* du *continu* que se font les *mathématiciens ordinaires*. Trois termes que je vais devoir préciser.

2.4.3 Images mentales du mathématicien ordinaire

L'invention de l'A.N.S. remet évidemment à l'ordre du jour la grande question philosophique de la nature du *continu*. J-M. Salanskis et H. Sinaceur ont organisé en 1990 un colloque de Cerisy sur ce thème dont les actes sont publiés sous le titre *Le labyrinthe du continu* [121]. Cet ouvrage aborde la question du continu sous tous ses aspects, historique, philosophique et scientifique et sa lecture reste, après plus d'un quart de siècle, pleine d'enseignements. Dans son article, *Le Destin du Modèle de Cantor-Dedekind*, J-M. Salanskis s'interroge sur ce que $\mathbb{R}$ inventé à la fin du XIXe et début du XXe siècles nous dit encore du *continu* en particulier depuis l'avènement de l'A.N.S. Le *continu* dont il nous parle (et dont parle plus généralement le colloque) est un *continu* "savant", de philosophes, d'historiens, de mathématiciens ou physiciens qui réfléchissent à ce qu'ils font. Mais ce *continu* savant est-il bien celui du mathématicien ordinaire, et en quoi cela nous intéresse-t-il ?

La réponse à cette dernière question est évidente. Il est clair que depuis la fin du XIXe siècle les mathématiques sont une immense entreprise où interagissent des gens qui les inventent, des gens qui les enseignent, des gens qui les utilisent. Les "inventeurs", tout comme les "utilisateurs", ont été enseignés par des "enseignants" qui à leur tour ont été enseignés souvent par des inventeurs et il arrive que

121. Springer-Verlag France 1992 ; [71].

des "utilisateurs" inventent. Ceci pour dire que tout est en boucle, qu'il n'y a pas de hiérarchie et que les mathématiques actuellement vivantes sont le résultat de cette interaction entre des milliers d'individus dont l'immense majorité est constituée de mathématiciens "ordinaires". Dans son analyse J-M. Salanskis nous explique comment des mathématiciens "non ordinaires" comme Cartier, Harthong, Nelson et Reeb sont en train avec l'A.N.S. de renouveler la vision du *continu* savant mais ce continu dont il parle n'est pas celui du *mathématicien ordinaire* et il a certainement de bonnes raisons de ne pas aborder ce point dans le cadre de son article. Mais moi, dont le but est ici de mieux comprendre le comportement des mathématiciens contemporains sur une question particulière, je dois procéder différemment tout en restant conscient que je suis malgré tout imprégné de vision savante. Pour éviter les malentendus je commence par préciser ce dont je parle.

Le *mathématicien ordinaire* qui m'intéresse est celui qui dans sa vie professionnelle a entendu parler de l'invention de Robinson comme quelque de chose de nouveau, c'est à dire dont la carrière débute au plus tôt vers 1930 et au plus tard vers 1990. Par "ordinaire" j'entends qu'il a reçu une éducation mathématique du niveau de la licence (mais pas nécessairement plus), qu'il enseigne les mathématiques (au niveau collège, lycée, université), ou qu'il fait de la recherche en mathématiques, ou enfin qu'il utilise les mathématiques (ingénieur, chercheur d'une autre discipline). Ces mathématiciens, lorsqu'ils font des mathématiques, les écrivent comme on le leur a appris de le faire, dans une langue naturelle un peu formalisée, mais avant de les écrire il les "font dans leur tête". Peut-on savoir ce savoir ce qui se passe dans la tête du *mathématicien ordinaire* ? Prenons un exemple simple. Ecrivons dans le langage formel autorisé (Z.F.C.) l'axiome de l'ensemble des parties :

$$\forall x \exists y : \big(z \in y \Longleftrightarrow (t \in z \Longrightarrow t \in x)\big)$$

qui dit que la collection des parties d'un ensemble est un ensemble. L'image mentale qu'à de cet axiome le *mathématicien ordinaire* n'est certainement pas la ligne ci-dessus mais le fait que ce qu'il "voit " très bien pour les ensembles finis, par exemple que les parties de l'ensemble fini à trois éléments a, b, c sont l'*ensemble* à 8 éléments :

$$\Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\Big\},$$

est pris pour axiome valant aussi pour des ensembles infinis. Cette *image mentale* qui est la mienne n'est peut être exactement pas celle de mon collègue mais je suis certain qu'elle y ressemble beaucoup. Parce-que tous les mathématiciens

ordinaires ont été à un moment donné, en général très tôt, dressés à énumérer divers sous ensembles d'un ensemble particulier (par exemple les figures, ou les cœurs d'un jeu de 52 cartes). C'est cette familiarité avec l'objet mathématique que j'appelle son *image mentale*. C'est aussi ce qu'on appelle souvent "intuition de" mais je préfère "image mentale" qui est plus neutre. "Intuition" évoque tout de suite la discussion philosophique sur le réalisme ce qui pourrait être source de malentendu. Tout le monde convient que les mathématiciens, lorsqu'ils travaillent donnent un sens à ce qu'ils écrivent à partir d'*images mentales* ; le plus souvent dans la communication mathématique on échange des *images mentales* plus ou moins claires que le langage mathématique, en référence à la théorie des ensembles, permet de préciser.

Ainsi, si l'*image mentale* que j'ai de $\mathbb{R}$ (mon intuition de $\mathbb{R}$, mon *continu*), n'est pas exactement celle de mon collègue, ce n'est pas grave et nous n'avons pas besoin de nous disputer là dessus. Peu importe l'image que nous nous faisons de $\mathbb{R}$, la seule chose qui compte finalement c'est tout ce qui peut être tiré légalement de $\mathbb{R}$ en respectant les règles. Mais le mathématicien n'est pas une machine et c'est le sens qu'il leur donne qui le guide dans le choix des calculs à entreprendre. Et pour qu'ils aillent tous plus ou moins dans la même direction il faut bien que les mathématiciens ordinaires aient à peu près tous une *image mentale* plus ou moins semblable des objets qu'ils utilisent, en particulier quand ce sont des objets aussi essentiels que $\mathbb{R}$.

Les *images mentales*, le sens que des mathématiciens attribuent à un moment donné à des objets mathématiques particuliers sont un moteur puissant de la recherche. Tout fonctionne très bien pendant un certain temps jusqu'à ce que des malentendus surgissent, ce qui est inévitable dans des échanges dans une langue qui n'est pas formalisée. Mais justement, puisqu'il s'agit de mathématiques, la possibilité de régresser jusqu'à un texte dépourvu d'ambiguïtés permettra de se mettre finalement d'accord sur une interprétation commune jusqu'à ce qu'à nouveau une ambiguïté se manifeste etc. C'est cette dynamique permanente entre les *images mentales* et les textes plus ou moins formalisés que J-M. Salanskis théorise dans son *Herméneutique formelle* [122]. Essayons maintenant de nous faire une idée de l'image mentale que le mathématicien ordinaire se fait du continu et de sa représentation mathématique.

122. Éditions du C.N.R.S. 1991, seconde édition Klincksieck, continents philosophiques, 2013 ; [70].

2.4.4 $\mathbb{R}$ et son *image mentale*

Dans les années 1980, le système formel de référence "universellement" accepté par les *mathématiciens ordinaires* était donc Z.F.C. Personne ne le remettait en cause ce système élaboré dans les années 1930 et qui donnait satisfaction depuis un bon demi siècle, sauf bien entendu les logiciens dont le métier est précisément de s'intéresser aux systèmes formels en tant que tels, les philosophes et mathématiciens philosophes qui s'intéressent au sens de leur travail, et enfin les "mathématiciens de l'informatique" car théoriser l'informatique (ce que je considère comme faire des mathématiques) c'est travailler sur des systèmes formels qui ne sont pas Z.F.C.

On a vu que I.S.T. est un nouveau système formel de référence qui voudrait remplacer [123] Z.F.C. Mais n'est-ce pas là une prétention exorbitante que de prétendre remplacer ce qui satisfait pleinement tout le monde depuis aussi longtemps [124] ? C'est pourquoi il existe une alternative à I.S.T. [125] pour faire de l'analyse non standard qui est de *construire* au sein de Z.F.C. un nouvel ensemble de nombres ${}^*\mathbb{R}$ qui a toutes les propriétés des nombres habituels, et tel que les nombres usuels, c'est à dire $\mathbb{R}$, s'y *injectent canoniquement*. C'est cette stratégie qui a été celle de Robinson. Il est resté au sein de Z.F.C. et a construit un "surensemble" ${}^*\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ et montré comment le jeu entre ces deux ensembles permet de fonder une analyse infinitésimale.

Pour bien voir ce qui se passe je dois rappeler les règles du jeu des constructions ensemblistes telles qu'on les enseigne au futur *mathématicien ordinaire*.

1. Les seuls concepts primitifs (en plus de ceux de la logique des prédicats) sont celui d'ensemble et la relation d'appartenance $x \in y$. C'est tout.
2. Des axiomes, une dizaine, explicitent comment construire des ensembles à partir d'ensembles déjà construits, par exemple, l'*axiome de l'ensemble des parties* (que je rappelais plus haut) :

$$\forall x \exists y : \{z \in y \Longleftrightarrow [t \in z \Longrightarrow t \in x]\}$$

3. Tout nouveau concept (objet) mathématique doit être construit en tant qu'en-

123. En réalité il s'agit plus de compléter que de remplacer, nous reviendrons là dessus un peu plus loin.
124. En réalité bien plus d'un demi siècle car le style"théorie des ensembles" a émergé à la fin du XIXème siècle avec avec Cantor et ses contemporains et Z.F.C. n'a fait que fournir le cadre juridique d'une pratique qui s'était imposée.
125. Qui d'ailleurs est historiquement antérieure à I.S.T.

semble à partir d'ensembles déjà construits en respectant les règles spécifiées par 2).

Ensuite on construit tout à partir de rien, c'est à dire l'ensemble vide qui existe par l'axiome $\exists\, \emptyset : \forall x\, x \notin \emptyset$ puis l'ensemble dont l'unique élément est l'ensemble vide, soit $\{\emptyset\}$ puis l'ensemble à deux éléments $\{\emptyset\{\emptyset\}\}$, puis $\{\{\emptyset\{\emptyset\}\}\}$ etc. en vérifiant bien à chaque fois qu'on respecte scrupuleusement les règles. En général le futur mathématicien ne comprend pas très bien où l'on va mais il est rassuré car on finit par lui dire qu'on a construit un ensemble $\mathbb{N}$ dont on lui dit qu'il est exactement la suite inépuisable des entiers qu'il connait bien, dont il a une *image mentale* très claire, 0, 1, 2, etc que Reeb appellerait les "entiers naïfs". Dans l'éducation du mathématicien ordinaire il n'y a pas de cours de logique sérieux [126] et quand on lui dit que, $\mathbb{N}$ est *exactement* l'image mentale qu'il a de la suite des entiers, il ne demande qu'à le croire. À partir de $\mathbb{N}$ il n'est pas difficile de construire $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs ; je saute.

Nous allons maintenant construire de nouveaux nombres, que nous appellerons *rationnels*, associés à la notion familière de fraction. Une fraction est le quotient de deux entiers, noté :

$$\frac{p}{q}$$

mais comme on a, par exemple, $\frac{6}{5} = \frac{36}{30}$ il faut "mettre dans un même sac" toutes les fraction qui sont *équivalentes*. Comme "mettre dans un même sac" est un peu cavalier l'on procède comme suit dans tous les cours élémentaires de début de licence :

1. On considère l'ensemble des paires d'entiers (relatifs, avec signe)

$$(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$$

2. On considère sur $\mathbb{Z}^2$ la relation d'équivalence $\mathscr{R}$:

$$(p,q)\mathscr{R}(r,s) \Longleftrightarrow ps = rq$$

3. On appelle ensemble des nombres *rationnels* :

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Z}^2/\mathscr{R}$$

le quotient de $\mathbb{Z}^2$ par la relation $\mathscr{R}$

126. Rappelons qu'il s'agit des années 1950 à 1970. Je ne sais pas ce qu'il en est maintenant, un demi siècle plus tard, mais on peut espérer que les choses ont un peu évolué dans le bon sens.

4. On *injecte canoniquement* $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ en posant :

$$i(p) = (p, 1)$$

et on note :

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

Le premier point est une des premières opérations ensemblistes autorisées : A deux ensembles A et B on associe un nouvel ensemble noté $A \times B$ qui est l'ensemble dont les éléments sont les paires (a, b) telles que a soit un élément de A et b un élément de B. C'est ce qu'on appelle le produit cartésien de A et B. L'opération 2) est une opération de regroupement qui se comprend aisément. Pour prendre un exemple non mathématique disons que, dans une ville, deux humains sont équivalents s'ils portent le même nom de famille ; on dira qu'ils sont homonymes. On peut demander aux homonymes de se regrouper (par exemple en constituant une unique ronde avec tous les homonymes) en classes d'homonymie. Ce point 3), lui, est un grand pas dans l'abstraction. En considérant l'*ensemble des classes d'équivalence* on donne à ces classes le statut d'objet que l'on va pouvoir manipuler (par exemple les "ajouter"). Dire que les classes constituent un ensemble est autorisé en théorie des ensembles. Enfin le dernier point se comprend aisément : certaines classes sont naturellement identifiables à l'ensemble des entiers de départ (les fractions de dénominateur égal à 1).

L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs nous intéresse parce que l'on sait y faire les additions [127], (notées $+$). Nous voulons que les nouveaux nombres de $\mathbb{Q}$ que nous venons de construire puissent aussi s'additionner, qu'ils "héritent" de ce que l'on savait faire avec les entiers. On définira donc sur l'ensemble des rationnels une loi d'addition notée (provisoirement) $\bigoplus$ en faisant attention à ce que :

$$i(p+q) = i(p) \bigoplus i(q)$$

On voit bien que dans la construction des rationnels que nous venons de faire aucune notion nouvelle n'est introduite. On *construit* uniquement à partir de la notion d'entier et des opérations autorisées de théorie des ensemble. Mais ce n'est pas parce qu'on lui enseigne cette construction que l'apprenti mathématicien perd l'idée qu'il se faisait des entiers et fractions, idée lentement acquise à l'école, par exemple que "$\frac{2}{3}$ de tarte" c'est "deux tartes partagées de façon équitable entre trois frères". Et quand il a bien compris son cours il se fait une *image mentale* de :

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

127. Et aussi des multiplications, et aussi comparer deux nombres. C'est toute cette structure qu'il faut "transporter" sur le nouvel ensemble.

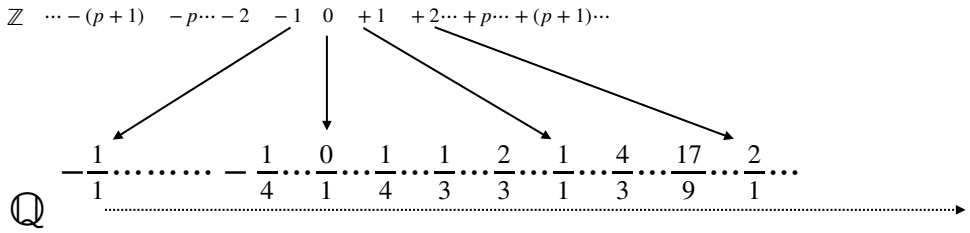

FIGURE 2.1 – Une image de $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$

qui est plus ou moins celle de la figure 2.1 où l'on reconnait en haut les entiers relatifs $\mathbb{Z}$ rangés de $-\infty$ à $+\infty$ et en dessous les rationnels sous la forme d'un pointillé orienté dont certains éléments sont représentés par des fractions (de l'école primaire) et les flèches montrent qu'il a bien compris l'identification des nombres entiers avec certains nombres rationnels.

Maintenant que l'apprenti mathématicien a bien compris la construction des rationnels on va le mettre au courant du scandale qui avait déjà ému les Grecs, celui de l'inexistence d'un rationnel x tel $x^2 = 2$. En effet il y a des "trous" dans l'ensemble des nombres rationnels. Par exemple on peut les ranger en deux ensembles complémentaires : l'ensemble $E_>$ de ceux dont le carré est strictement supérieur à 2 et l'ensemble $E_<$ de ceux dont le carré est strictement plus petit que 2 ; ces deux ensembles sont disjoints et tout élément de $E_<$ est plus petit que tout élément de $E_>$. Ce serait une bonne chose d'enrichir les rationnels de façon à supprimer ces trous. C'est ce que va faire le cours de mathématiques en *construisant* à partir de $\mathbb{Q}$ un nouvel ensemble $\mathbb{R}$. Une construction possible est très proche de la précédente. C'est celle des *suites de Cauchy*.

1. On définit l'ensemble (C) des suites de Cauchy.
2. On définit l'équivalence($\mathscr{R}$) de deux suites de Cauchy.
3. Par définition $\mathbb{R}$ est le quotient de C par $\mathscr{R}$
4. On définit toutes les opérations usuelles sur les nombres.
5. L'injection canonique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ est l'opération qui consiste à associer à un rationnel x la classe d'équivalence de la suite de Cauchy constante de terme général x.

$$i(x) = x, x, x, \cdots, x, \cdots$$

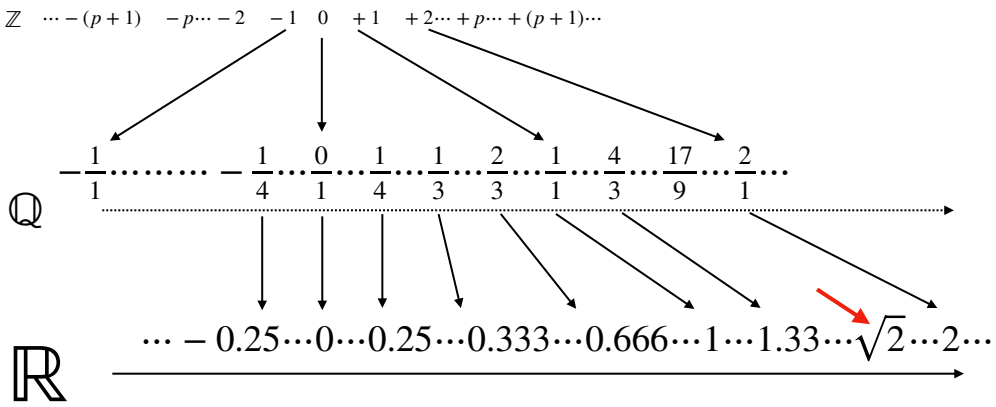

FIGURE 2.2 – Une image de $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$

et on résume tout ça dans :

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$$

et, dans sa tête, l'apprenti mathématicien (qui progresse) aura une image qui est plus ou moins celle de la figure 2.2. Les nombres réels sont vus avec leur représentation décimale, on reconnait dans la représentation décimale 0.666... la fraction $\frac{2}{3}$ et on "voit" $\sqrt{2}$ (la petite flèche rouge) entouré d'une infinité de rationnels de plus en plus proches qui sont à la fois une suite d'approximations de $\sqrt{2}$ et aussi une suite de Cauchy définissant ce nouveau nombre. Là aussi je dis "plus ou moins" parce que l'*image mentale* du mathématicien reflète son éducation. *Ma* figure est celle de *mon* image mentale qui n'est pas exactement celle de mon collègue mais qui en est certainement proche parce que nous avons tous reçu à peu près la même éducation mathématique et fait les mêmes exercices.

Cet ensemble $\mathbb{R}$ n'est encore pas satisfaisant parce qu'on aimerait bien que l'équation $x^2 = -1$ possède deux racines, comme $x^2 = 1$ mais, hélas, le carré d'un nombre réel est toujours désespérément positif. C'est pour que toutes les équations de degré n aient toujours n racines qu'on a introduit ces nombres d'abord appelés imaginaires, puis maintenant complexes. Les historiens ont bien décrit et les philosophes expliqué les scrupules des mathématiciens pour élever au rang de "nombre" ces êtres qui semblaient être contradictoires. Du point de vue moderne de la théorie des ensembles l'ensemble $\mathbb{C}$ est des plus simples. C'est le produit cartésien $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni d'une loi d'addition et de multiplication particulières qui

en font un corps algébriquement clos et ont une interprétation géométrique particulièrement intéressante. Du point de vue de l'image mentale il n'y a aucune difficulté à se représenter le *plan complexe*.

Le mathématicien confirmé devine alors ce que pourrait être une construction de cet ensemble ${}^*\mathbb{R}$ des réels hyperfinis selon la méthode bien rodée maintenant de la relation d'équivalence sur un ensemble de nombres de l'étage précédent. On considère des suites de nombres réels d'un certain type (peu nous importe ici) [128], on définit une relation d'équivalence ad-hoc on prend le quotient et on identifie. Ce qui nous donne :

$$\mathbb{R} \hookrightarrow {}^*\mathbb{R}$$

par une construction qui est devenue familière à notre mathématicien. La seule chose est d'étendre au nouveau monde tout ce que l'on savait faire avant ce qui devient de plus en plus compliqué dans la mesure où l'on sait faire de plus en plus de choses dans $\mathbb{R}$. Est-ce que le théorème d'existence des équations différentielles qui est vrai dans $\mathbb{R}$ l'est encore dans ${}^*\mathbb{R}$? La réponse est oui. Mais faudra-t-il faire une démonstration pour chaque théorème ? Faut-il refaire toute l'analyse sur ce nouvel ensemble ? La réponse est non. Sous quelques réserves, qu'on apprend à identifier, on peut *transférer* les mathématiques connues de l'ancien monde dans le nouveau monde étoilé : il faut apprendre à manipuler les ensembles nonstandard, ceux qui sont précédés d'une *. Tout cela devient abstrait et compliqué, mais pas plus que dans d'autres branches des mathématiques. Un jeune mathématicien formé à la méthode formaliste moderne ne recule pas devant ce genre d'obstacle.

En revanche, là ou il y a un problème et même un très gros problème c'est en ce qui concerne l'*image mentale*, donc l'usage possible de ces infinitésimaux. Les constructions de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Z}$ ne sont que des constructions destinées à donner un cadre ensembliste rigoureux à des pratiques de calcul antérieures et solidement installées à la suite d'une longue éducation. Mais pour le mathématicien au travail, qui réfléchit, ce ne sont pas les constructions ensemblistes qui s'agitent dans sa conscience, mais bien les *images mentales*.

Une *image mentale* prégnante du *mathématicien ordinaire* est celle du *continu* "dessiné" c'est à dire le continu d'un trait tracé sur la feuille de papier sans lever la pointe du crayon. Dans cette image mentale si nous traçons une courbe fermée sans point double, toute ligne continue qui joint un point A de l'intérieur à un point B de l'extérieur doit couper la courbe fermée en au moins un point. Une courbe

128. L'idée est que la suite $n \to \frac{1}{n^2}$ tend vers 0 plus vite que la suite $n \to \frac{1}{n}$ (parce que le rapport $\frac{1}{n^2}/\frac{1}{n}$) tend vers 0 et les anciens avaient formalisé cette affaire par les notation o et O (ici $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$). Ca marchait très bien mais malheureusement manquait de consistance logique.

continue enserre parfaitement une surface et de même, dans l'espace, des surfaces continues déterminent des volumes. Le ballon de baudruche est un continu qui enserre un volume d'air. Bien entendu il s'agit d'une baudruche idéale car nous savons bien que dans la réalité l'air s'échappe quand même tout doucement, de même que si nous regardions nos lignes continues sur le papier à l'échelle de la molécule nous ne verrions que des atomes distincts les uns des autres. Mais ce continu idéalisé est tellement nécessaire pour décrire le monde à notre échelle que son image hante le cerveau de tout mathématicien avant même qu'il soit allé bien loin en mathématiques. Il a bien compris que les "nombres à virgule", au développement décimal fini (les rationnels) permettent d'approcher autant qu'on le veut n'importe quelle grandeur, mais il ne sera pas difficile de lui montrer que si on ne considère que les points rationnels sur un cercle de rayon 1, c'est à dire l'ensemble des couples de nombres rationnels (p,q) tels que $p^2+q^2=1$ il est possible de s'échapper du disque en passant par le point $(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2)$. Il y des trous dans $\mathbb{Q}$ que nous ressentons plus comme un pointillé que comme un continu. Alors on construit des nouveaux nombres, on construit $\mathbb{R}$.

Mais rien ne nous dit que nous avons bouché tous les trous ! Certes nous avons rajouté des nombres, mais entre ces derniers ne subsiste-t-il pas encore des vides ? Et bien non. C'est le miracle sur lequel l'enseignement va insister fortement. *Il n'y a pas de trous dans* $\mathbb{R}$. C'est le premier théorème de l'analyse, le théorème de la valeur intermédiaire qui nous dit que toute fonction continue, qui vaut -1 en 0, $+1$ en 1 s'annule au moins une fois, a un graphe qui coupe le segment $[0,1]$ de l'axe horizontal en au moins un point. Il n'y a pas de trou dans $[0,1)]$ par lequel il serait possible de passer. Cerise sur le gâteau le théorème de Jordan affirme que toute courbe γ continue fermée sans point double du plan définit bien deux parties du plan : l'intérieur et l'extérieur, et pour passer de l'une à l'autre de façon continue il faut nécessairement couper γ en au moins un point.

Ainsi dans l'*image mentale* commune que se fait le mathématicien ordinaire de $\mathbb{R}$ il y a cette conviction très forte qu'il **il n'y a plus de trous à combler**. Où mettre ces nouveaux nombres non standard en gardant l'image de la ligne ordonnée sachant qu'il n'y a plus de place ? Ce qui donne une image mentale du genre de la figure 2.3 qui n'est pas du tout satisfaisante parce qu'elle ne fait pas cohabiter, vivre dans le même monde, des entités destinées à être ajoutées ou multipliées entre elles.

Cette figure est extraite d'un article [43] de Mikhait Katz et David Sherry, *Leibniz's infinitesimals : Their fictionality, their modern implementations, and*

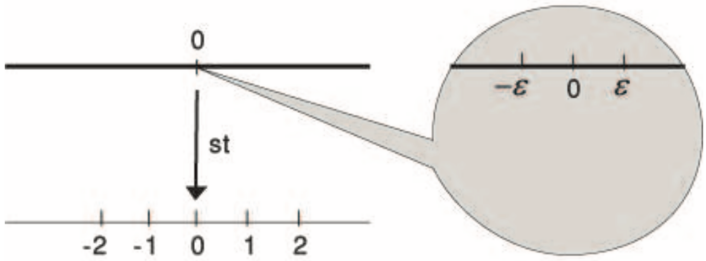

FIGURE 4. Zooming in on infinitesimal ϵ (here $\mathrm{st}(\pm\epsilon) = 0$)

FIGURE 2.3 – Figure extraite de [43]

their foes from Berkeley to Russell and beyond[129] où les auteurs examinent les attaques de Berkeley contre le calcul infinitésimal de Leibniz. Cette image et le pastiche qu'ils font de Saint George terrassant le dragon montrant George Berkeley terrassant l'infinitésimal qui se cache (où ?) dans les nombres (Figure 2.4) nous montrent la difficulté de se faire une *image mentale* cohérente du nouveau monde $\mathbb{R} \hookrightarrow^* \mathbb{R}$. Cette difficulté peut naturellement être surmontée.

La recette est toujours la même, on utilise de façon formelle les nouveaux objets (on calcule sans rien comprendre) et, à force de pratique, des *images mentales* finissent par se former qui vont se superposer sur les anciennes. Mais cela suppose quand même une grande dextérité dans la manipulation de formules dépourvues de sens, ce qui n'est pas donné à tout le monde et ceux qui en sont capables préfèrent s'attaquer à des théories où les bénéfices des efforts consentis semblent plus assurés. C'est cette absence d'*image mentale* de $^*\mathbb{R}$ qui explique, selon moi, la mauvaise réception de l'usage des infinitésimaux dans le style avec des *.

Mais, comme nous le savons, la théorie I.S.T. de Nelson et les "entiers naïfs" de Reeb procèdent tout autrement.

Dans la théorie I.S.T. *on ne touche pas* aux nombres réels traditionnels $\mathbb{R}$ ni à toute la mathématique classique qui va avec, mais on enrichit le langage : on pourra dire qu'un nombre x est standard ou ne l'est pas. D'un point de vue formel on pourrait remplacer "standard" par "moldu", ce qui compte ce sont les règles (I.S.T.) de manipulation de "moldu". L'image mentale n'est plus celle de la construction de nouveaux objets, on se contente de $\mathbb{R}$ et de tout ce qu'on a pu

129. Erkenntnis, vol 78, n° 3 (2015)

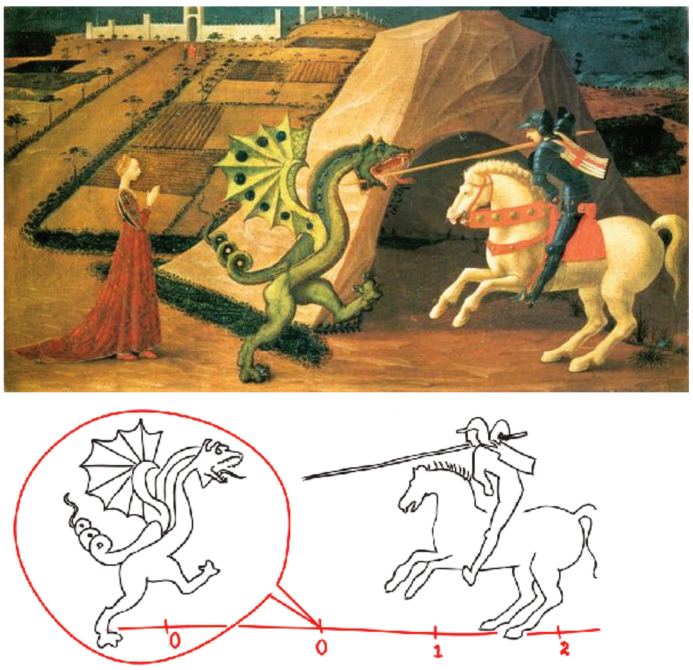

FIGURE 3. George's attempted slaying of the infinitesimal, following E. T. Bell and P. Uccello

FIGURE 2.4 –

dire à son propos (ce qui constitue le corpus considérable de toutes les mathématiques classiques) et on enrichit le langage qui parle de ces objets déjà construits. L'image mentale est celle de la couleur qui enrichit le noir et blanc. C'est ce point de vue très différent qui fait dire à Nelson dans I.S.T. [53] :

> In our approach we refer to the internal sets simply as sets. Once one recovers from the shock of being told that infinitesimals and other idealized elements were there all along in the sets with which we are familiar and learns to avoid illegal set formation, one will find our approach very easy to use. All familiar results are available without change ; they do not have to be extended to a new system.

De son côté, dans l'ouvrage de cours qu'il co-signe avec F. Diener [130], Reeb dit exactement la même chose.

130. F. Diener et G. Reeb, Analyse Non Standard, HERMANN (1989) ; [23].

> En l'adoptant [Le point de vue A.N.S.] on ne doit abandonner aucun de ses modes de raisonnement favoris : si l'on est géomètre, on reste géomètre ; si l'on est physicien, on reste physicien. On acquiert seulement des possibilités nouvelles qui viennent s'ajouter à ses instruments habituels en leur donnant une force nouvelle.

Il ne s'agit pas de changer ses *images mentales* mais simplement de les enrichir petit à petit.

Le *mathématicien ordinaire* qui veut bien jouer le jeu de I.S.T. est immédiatement confronté au problème de la formation illégale d'ensemble. Il va considérer dans $\mathbb{N}$ l'ensemble S des entiers standard, va dire qu'il contient 0, que $n \in S \Longrightarrow n+1 \in S$ donc que d'après le théorème de récurrence $S = \mathbb{N}$, et que donc tous les nombres entiers et plus généralement tous les objets mathématiques sont standard. C'est à ce moment qu'il faudra faire un rapide petit cours de logique à notre *mathématicien ordinaire* qui est généralement incompétent dans ce domaine. Il faudra lui expliquer ce qu'est une extension de Z.F.C. par l'adjonction d'un prédicat *non défini* (ici $st(x)$), et qu'on peut démontrer que la théorie augmentée est relativement consistante (inutile de le faire soi même, on peut faire confiance). Tout ceci est très simple et facile à expliquer au *mathématicien ordinaire*. Ces explications vont le rassurer sur la consistance logique de l'A.N.S. et attirer son attention sur le fait que la phrase : *L'ensemble des x de* $\mathbb{R}$ *tels que "et patati et patata"* n'est correcte que si la phrase "et patati et patata" est prononcée dans le langage classique exclusivement. Sinon rien ne garantit que la collection des x qui satisfont la propriété exprimée par le "et patati et patata" est un ensemble ; dans certains cas on peut démontrer qu'il en est effectivement un, dans d'autres qu'il ne l'est pas et il arrive qu'on ne sache pas décider. Toute cette petite gymnastique, que Duchemin a partiellement décrite, s'acquiert très facilement quand on est un *mathématicien ordinaire déjà formé*, ou un mathématicien en formation, comme l'ont montré quelques expériences pédagogiques [131]. Dans les deux cas tout se passe très bien parce que l'image du *continu* que $\mathbb{R}$ représente n'est pas modifiée. On travaille et on calcule sans rien changer, comme le dit Reeb «On acquiert seulement des possibilités nouvelles qui viennent s'ajouter à ses instruments habituels en leur donnant une force nouvelle.»

Là non plus ça n'a pas marché, mais pour une raison différente de celle d'un conflit réel avec les habitudes du *mathématicien ordinaire.* Cette fois c'est parce

131. On peut mentionner le cours optionnel de niveau "bac+1" expérimenté avec succès à l'Université Paris 7 qui a donné naissance à l'ouvrage de A. Deledic et M. Diener *Leçons de calcul infinitésimal*, Armand Colin [21], 1989, mais il y a d'autres exemples.

qu'il est proposé de transgresser le dogme fondamental de l'Eglise Ensembliste Universelle qui ne reconnait de la pratique formaliste que celle qui se réfère à Z.F.C. et rien d'autre.

Deux mots sur l'Eglise Ensembliste Universelle. Les concepts de logique que nous manipulons en ce moment, *système formel*, *déduction*, *incomplétude* etc. sont des conquêtes récentes, des années 1930. Dans leur forme originale ils sont difficiles à comprendre mais il n'est pas absolument nécessaire que le mathématicien ordinaire les maitrise. Il suffit qu'il suive les règles précises édictées par ceux qui comprennent (ou croient comprendre), par les dignitaires de l'Eglise. Est-ce dans un souci louable de simplification ou simplement par ignorance, toujours est-il que ces dignitaires ont laissé croire que, dans la méthode formaliste, le seul système autorisé était Z.F.C. ? Les contrevenants sont sévèrement punis. Comme cette église était puissante jusqu'à la fin du siècle dernier, les mathématiciens ordinaires évitaient d'en transgresser les dogmes mais comme, en ce début de XXIème siècle elle a beaucoup perdu de son pouvoir il me semble que ce dernier obstacle est en train de disparaître.

Pour terminer on voit que si ces remarques qui enrichissent le discours de Duchemin apportent un peu de lumière sur la (mauvaise) réception de l'A.N.S elle sont loin d'être indiscutables. J'ai abondamment utilisé les concepts d'*image mentale* et de *mathématicien ordinaire* que j'ai sommairement définis, en espérant que l'on me comprendrait mais il y aurait beaucoup à en dire, en particulier sur leur pertinence à expliquer la pratique mathématique.

La règle du jeu pour Duchemin était qu'il soit irréprochablement consensuel, je ne pouvais donc pas les lui attribuer.

2.5 Un peu plus sur Nelson et Reeb

Il a beaucoup été question de Nelson et Reeb dans ce travail, notamment à propos de leurs positions philosophiques relativement aux mathématiques. Est-il possible d'en dire un peu plus que ce que Balderoy et Duchemin nous en ont dit ? Oui si l'on oublie un peu l'affaire des "canards" pour replacer leurs écrits mathématiques ou philosophiques dans le contexte plus général de leur trajectoire scientifique. C'est ce que je vais faire sans épuiser le sujet.

2.5.1 Le réalisme de Nelson

Nelson, né en 1932, soutient son Ph. D. en 1955, fait un "post doc." à l'Institute for Advanced Study, intègre l'Université de Princeton où il effectue toute sa carrière. Il décède en 2014. Sur le "mémorial " du site de l'Université [132] on trouve :

> At Princeton, under Arthur Wightman's influence, he developed an interest in questions of mathematical physics, where his earliest contributions made rigorous sense of Feynman path integrals. His most influential work concerned the interaction of mathematics with relativistic quantum field theory, an area in which he was one of the pioneers. He realized that probabilistic techniques could provide critical additional tools. The techniques he introduced for establishing in two space-time dimensions the stability of the quantic interaction were fundamental and strongly influenced the further development of rigorous quantum field theory in space-time dimension 3. He also fired the first shots and developed the basic framework of what became known as the Euclidean revolution, under which the analytic continuation of relativistic field theory to imaginary time formally transforms the Minkowskian field theory into a Euclidean theory. He realized that this was not just a formal trick but provided a mathematical interpretation of certain stochastic processes, furnishing a mathematically rigorous approach that combined the operator formalism in Minkowski space with the use of a Markov property symmetry with respect to space and time. Once his work was understood, all further contributions to the subject used his formalism. For his extremely innovative work he received the Steele Prize for Seminal Contributions to Research from the American Mathematical Society in 1995 [133].

On constate donc que E. Nelson était un physicien théoricien important et reconnu. Reconnu mais aussi contesté. Sa proposition d'interprétation de la mécanique quantique appelée *mécanique stochastique* [134] ne faisait pas l'unanimité et Nelson lui même devait la retirer considérant que les expériences d'Aspect l'invalidaient.

Toujours sur le site de Princeton on peut lire :

---

132. `https://www.math.princeton.edu/people/edward-nelson`
133. Le prix Steele est une récompense prestigieuse. La liste de ses récipiendaires comprend une quantité impressionnante de mathématiciens de tout premier plan.
134. E. Nelson, *Quantum fluctuations*, Princeton series in physics, Princeton University Press (1985) ; [54].

> In the 1980's Nelson became interested in non-standard analysis. (...) Nelson gave a complete axiomatization of non-standard analysis, and more generally of set theory, in his work Internal Set Theory. He then applied this approach to another area of his expertise, probability theory. In his beautiful book Radically Elementary Probability Theory he showed how the theory of infinite continuous sample spaces can be reduced to simpler "finite" non-standard sample spaces. For instance, difficult theorems in Brownian motion are reduced to simple results on random walks with infinitesimal steps. Nelson was planning to give a seminar this academic year on radically elementary mathematics.

Nelson était évidemment conscient de son anticonformisme. Voici comment il concluait en 1985 une intervention au colloque *Mathématiques finitaires et A.N.S.* organisé par M. Diener et G. Wallet au CIRM à Luminy [135] après avoir présenté sa mécanique stochastique *dans le langage non standard* :

> The theory is controversial and there are physicists who regard stochastic mechanics as a kind of subculture to which one would do well to close the door. I have never before mixed nonstandard analysis with stochastic mechanics, for obvious political reasons.

Nelson est partisan d'un formalisme radicalement strict dit ultra finitiste. Sa position est que le type de finitisme accepté par la metamathématique hilbertienne est trop laxiste en ce sens qu'il présuppose que l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$ nous est donné dès lors que nous acceptons le principe de récurrence. Il exprime vigoureusement cette position dans le titre : *Taking formalism seriously*, d'un article dans *The Mathematical Intelligencer*, vol15, n°3 (1993) [56]. Il veut dire que si nous acceptons le principe de récurrence tel qu'il est présenté dans les axiomes de Peano alors nous croyons en l'existence des entiers (pas nécessairement en une globalité achevée, mais de tous ceux dont nous pourrions avoir envie d'évoquer dans un discours mathématique) et il évoque avec humour dans l'introduction de cet article ce que pourrait être la "disparition des entiers" :

> Almost all mathematicians believe that the natural numbers exist. How would the world be different if they did not exist ? Share with me a fantasy [136] : We open our morning newspaper to find a report with a banner headline : "Numbers Vanish !–Early last night the natural numbers, so called because

135. Les actes du colloque ont été refusés pour publication par la revue Astérisque. Ils existent sous la forme d'un ouvrage multigraphié réalisé par l'Université Paris 7.

136. Ce que je ferai en conclusion de ce travail.

> they have always been found in nature, suddenly disappeared. Mathematicians have expressed stunned despair. Without numbers, they say, they can no longer prove theorems. Numbers are the foundation of science and technology, and without them humanity will soon revert to barbar- (*continued on an inside page*)."
>
> This is nonsense. The newspaper could still put marks 2, 3, etc., on the inside pages for ease of reference. Machines could still function as before. And we mathematicians could continue to put marks on paper, just as before, and hopefully submit them to editors of mathematical journals. We do not need the natural numbers.
>
> Some would maintain that the natural numbers exist of necessity and could not disappear. This is a religious belief that I do not share.

C'est la position qu'il développe dans son livre *Predicative arithmetic*. Toutefois ce livre est assez technique et je vais plutôt me concentrer sur *Warning Signs of a Possible Collapse of Contemporary Mathematics* [137] (abrégé en CCM), écrit pour un large public dont je traduis (assez librement) maintenant quelques extraits.

Le langage formel P, (avec P pour Peano) contient en plus des symboles logiques les symboles 0, S (pour successeur), + et $\cdot$. Les axiomes de P nous disent comment manipuler les assemblages autorisés du langage P.

1. $\neg Sx = 0$ 0 n'a pas de prédécesseur
2. $Sx = Sy \Rightarrow x = y$ Deux nombres qui ont les mêmes successeurs sont égaux
3. $x + 0 = x$
4. $x + Sy = S(x + y)$
5. $x \cdot 0 = 0$
6. $x \cdot Sy = (x \cdot y) + x$
7. $\varphi(0) \& \forall x[\varphi(x) \Rightarrow \varphi(Sx)] \Rightarrow \forall x[\varphi(x)]$

L'axiome 7 est bien sûr le principe d'induction qui s'applique à toute formule φ du langage P. L'idée à la base de ces axiomes est de rester "finitiste", de ne jamais faire appel à la totalité des $0 \quad S0 \quad SSO \quad SSSO \quad \cdots$, de tout construire uniquement en passant au successeur de ce qui est acquis. Tout ceci nous semble extrêmement rassurant mais Nelson veut nous convaincre du contraire. Par exemple dans l'introduction de *Predicative arithmetic* :

137. Heller, Michael, and W. Hugh Woodin, eds. Infinity : new research frontiers. Cambridge University Press, 2011 : p.76-88. ; [58]
`https://web.math.princeton.edu/~nelson/papers/warn.pdf`

> (...) let $\pi(n)$ be the property that there exists a non-zero number m that is divisible by all numbers from 1 to n.

On a $\pi(0)$ (prendre $m = 1$) ; si m est divisible par tous les nombres de 1 à n alors $m \cdot (n+1)$ est divisible par tous les nombres de 1 à $n+1$, donc $\pi(n)$ entraine $\pi(n+1)$ et le principe d'induction entraine $\pi(n)$ pour tout n. Oui, mais quand nous écrivons $\pi(n)$, même si nous supposons que n fait partie de ces nombres que nous venons de construire pas à pas, rien ne nous dit que ce nombre $\pi(n)$ en fait partie. Nous devons le prendre dans une totalité qui pré-existe à toute nos constructions. Le principe de récurrence ne serait donc pas si finitiste qu'il y parait. Cette inquiétude encore un peu vague Nelson la formalise de la façon suivante.

On rajoute au langage précédent le prédicat Nnaïf et on rajoute à la liste 1 à 7 les deux axiomes

8. 0 est *Naïf au sens de Nelson* (Nnaïf)
9. Si x est Nnaïf, alors Sx est Nnaïf

Nelson ne dit pas *Nnaïf* mais "counting number" que je ne sais pas traduire. Comme nous sommes dans le domaine formel le sens n'a pas d'importance et mon *Nnaïf* est légitime. Légitime mais pas innocent. Je fais évidemment référence aux *naïfs* de Reeb dont nous reparlerons au paragraphe suivant.

On reconnait ici le procédé cher à Nelson (utilisé dans I.S.T.) d'extension d'un système formel par adjonction d'un prédicat non défini, *Nnaïf* et de ses règles de manipulation 8 et 9 qui reproduisent les instructions de Reeb sur les entiers naïfs. Puisque l'axiome d'induction 7 ne s'applique qu'aux formules du langage P qui ne contiennent pas *Nnaïf* il n'y a aucun espoir de montrer que tous les entiers sont *Nnaïfs* (et c'est en introduisant axiomatiquement le contraire qu'on ouvre la porte à l'A.N.S., mais ce n'est pas le point ici). Si maintenant nous voulons travailler avec les *Nnaïfs* il serait souhaitable que la somme de deux *Nnaïfs* ainsi que leur produit soient *Nnaïfs*. Mais Nelson nous informe que d'après un résultat de Gödel c'est sans espoir. Diable !

Heureusement on peut s'en tirer en définissant une forme plus contraignante de nombres : les nombres *additionnables* et *multipliables*

10. Définition : x est additionnable si pour *Nnaïf* y la somme $y + x$ est *Nnaïf*

et l'on a immédiatement le :

11. Théorème. Si x est *additionnable* alors x est *Nnaïf*

puisque $x = 0 + x$ et 0 est *Nnaïf*, d'après la définition x est *Nnaïf*. Puis les théorèmes :

12. Théorème. 0 est *additionnable*.

En effet si y est *Nnaïf*, comme $y+0=y$, $y+0$ est *Nnaïf*.

13. Théorème. Si x est *additionnable* il en est de même de Sx.

Soit x *additionnable* alors pour tout y *Nnaïf* $y+x$ est *Nnaïf*. Comme $y+Sx = S(y+x)$ et que $(y+x)$ est *Nnaïf* nous avons $y+Sx$ est *Nnaïf* . Pour finir nous avons :

14. Théorème. Si x est *additionnable*, si y est *additionnable* alors $x+y$ est *additionnable*.

Preuve. Soient x_1 et x_2 *additionnables*. Nous devons montrer que pour tout *Nnaïf* y le nombre $y+(x_1+x_2)$ est *Nnaïf*. On a :

$$y+(x_1+x_2) = (y+x_1)+x_2$$

Comme x_1 est *additionnable* $y+x_1$ est *Nnaïf* et comme x_2 est *additionnable* $(y+x_1)+x_2$ est *Nnaïf*.

Maintenant on définit *multipliable* par :

15. Définition : x est multipliable si pour tout *additionnable* y le produit $y \cdot x$ est *additionnable*

et par une suite de raisonnements élémentaires du type précédent on obtient :

17. Théorème. Si x est *multipliable* alors x est *additionnable*
18. Théorème. Si x est *multipliable* alors x est *Nnaïf*
19. Théorème. 0 est *multipliable*
20. Théorème. Si x est *multipliable* alors Sx est *multipliable*
21. Théorème. Si x_1 et x_2 sont *multipliables* alors x_1+x_2 l'est.
22. Théorème. Si x_1 et x_2 sont *multipliables* alors $x_1 \cdot x_2$ l'est.

Comme pour 14 la preuve de ce dernier théorème repose sur *l'associativité* de la multiplication.

La morale de ceci est que l'usage de l'addition et de la multiplication du système P ne pose pas de problème, elle nous laisse dans le monde des *Nnaïfs* pour lesquels le recours à la donnée de la totalité du système des entiers n'est pas nécessaire (l'usage de l'induction n'a pas été nécessaire).

> The significance of all this is that addition and multiplication are unproblematic. We have defined a new notion, that of a multiplicable number, that is stronger than the notion of counting number, and proved that multiplicable

> numbers not only have successors that are multiplicable numbers, and hence counting numbers, but that the same is true for sums and products of multiplicable numbers. For any specific numeral SSS. . . 0 we can quickly prove that it is a multiplicable number.

Continuons. Essayons de faire subir à l'exponentielle x^y le même traitement. Définissons des nombres *exponentiables* dans le même esprit. Malheureusement nous n'arriverons pas à montrer que si x_1 et x_2 sont *exponentiables* il en est de même de $x_1^{x_2}$ et *la raison en est que l'exponentiation n'est pas associative*. Nelson donne l'exemple :

$$\left(2^2\right)^3 = 4^3 = 64 \qquad 2^{\left(2^3\right)} = 2^8 = 256$$

qui restent dans les *Nnaifs* mais que se passerait-il avec $2^{2^{10}}$. D'un côté nous avons :

$$\left(2^2\right)^{10} = 4^{10} = 1024^2$$

qui reste un nombre tout à fait concevable mais de l'autre :

$$2^{\left(2^{10}\right)} = 2^{1024}$$

qui l'est beaucoup moins. Et Nelson conclut son CCM

> For any specific numeral SSS...0 we can indeed prove that it is an exponentiable number, but we cannot prove that the world of exponentiable numbers is closed under exponentiation. And superexponentiation leads us entirely away from the world of counting numbers. The belief that exponentiation, superexponentiation, and so forth, applied to numerals yield numerals is just that—a belief. Here we have the third, and most serious, warning sign of trouble in contemporary mathematics.

Le signe avant coureur d'un "pépin" [138] n'est pas le pépin lui même. Il est toujours possible de faire l'autruche. Nelson voulait plus : prouver formellement que le sytème P est contradictoire. Il croyait tenir une telle preuve en 2011, il l'a annoncé sur son site et proposé une démonstration. Malheureusement elle contenait une erreur qui a été décelée par Terence Tao et Daniel Tausk, indépendamment. Immédiatement Nelson a retiré son article et s'est remis au travail et a produit deux articles dont l'un contenait le plan d'une nouvelle démonstration. Ces deux

138. J. Sendy traduit le titre de la nouvelle de Chandler "Trouble is my business" par "Les pépins c'est mes oignons".

articles n'ont pas eu le temps d'être publiés (c'est à dire soumis à la relecture minutieuse des spécialistes) mais ils ont été déposés par son épouse sur ArXiv [139] suivis d'une postface de Samuel Buss et Terence Tao dont voici quelques extraits.

> The Elements manuscript gives a detailed, high-level outline of Nelson's plan for a proof of the inconsistency of Peano arithmetic (and primitive recursive arithmetic).
> (...) The detailed plan of the inconsistency proof is outlined as Steps 1-17 in section 9 near the end of Elements.(...) The heart of the argument is reached in Step 16. Unfortunately, the argument becomes very uncertain here. Nelson argues that S^* disproves a sequence of statements : first $A_{k,0}$, then $A_{k,1}$, etc., up through $A_{k,I}$. The base case that S^* disproves $A_{k,0}$ is fine, but the later stages are unclear. It seems that the disproof of $A_{k,\delta}$ requires an assumption that S^* is consistent. The reason for this is that the Chaitin machine cannot be given the value of δ as an input since the Kolmogorov complexity of δ may not be sufficiently below that of k. The only alternative to explicitly specifying δ that we can think of, is for the Chaitin machine to first search for the S^* proof that $\neg A_{k,\delta+1}$ and then also wait until δ many strings are found to have Chaitin complexity less than k. This however assumes that S^* is consistent. Of course, S^* does not prove its own consistency. Perhaps Nelson had a different argument in mind, but this is our best attempt to flesh out his arguments. At any rate, Nelson was apparently aware of the potential problem here, since he earlier discusses the need for a system to prove the "consistency of its own arithmetization".

En dépit de ce qu'ils considèrent comme une probable erreur les auteurs de la postface soutiennent le dépôt du texte et en donnent la raison :

> *We of course believe that Peano arithmetic is consistent* [140] ; thus we do not expect that Nelson's project can be completed according to his plans. Nonetheless, there is much new in his papers that is of potential mathematical, philosophical and computational interest. For this reason, they are being posted to the arXiv. Two aspects of these papers seem particularly useful. The first aspect is the novel use of the "surprise examination" and Kolmogorov complexity ; there is some possibility that similar techniques might lead to new separation results for fragments of arithmetic. The second aspect is

139. arXiv :1510.00369v1 [math.LO] 30 Sep 2015 et arXiv :1509.09209v1 [math.LO] 30 Sep 2015
140. Souligné par moi.

> Nelson's automatic proof-checking via TeX and qea. This is highly interesting and provides a novel method of integrating human-readable proofs with computer verification of proofs.

Pour clore ce paragraphe sur Nelson voici ce qu'il dit de l'intuitionnisme. Son point de vue, suivant un argument attribué à Gödel, est que, en fait, les mathématiques classiques sont intuitionnistes en ce sens que toute preuve formelle d'un théorème classique peut être transformée en une preuve intuitionniste du même théorème qui naturellement n'a plus la même interprétation. Il l'explique, toujours dans *Confessions of an apostate mathematician*, page 5 :

> Here is a slightly – but only slightly – simplified account of Gödel's argument. To an intuitionist, $\exists x\, A(x)$ means "I know how to construct an x with the property $A(x)$." This certainly implies $\neg\forall x \neg A(x)$: "it is not the case that all x fail to have the property $A(x)$" ; the converse implication certainly does not hold. But a realist interprets $\exists x\, A(x)$ as "in the pre-existing abstract universe of mathematical objects, there is at least one of them, x, with the property $A(x)$." And to the realist, this is equivalent to $\neg\forall x \neg A(x)$, which means the same to the realist and the intuitionist provided they agree about the meaning of A(x). Similarly, to an intuitionist $A(x) \vee B(x)$ means "x has the property $A(x)$ or x has the property $B(x)$, and I can say which." This is stronger than $\neg[\neg A \wedge \neg B]$ – "it is not the case that x fails to have the property $A(x)$ and x fails to have the property $B(x)$." But to a realist, both mean the same in the Pythagorean heaven. Gödel says in effect : replace each formula $\exists x\, A(x)$ in a classical proof by $\neg\forall x \neg A(x)$ and each $A(x) \vee B(x)$ by $\neg[\neg A \wedge \neg B]$. The realist, regarding them as equivalent, cannot object ; the intuitionist accepts this as a reinterpretation of what the realist is saying. And then it turns out (and this is a fact, not depending on any view of mathematics) that the classical proof transformed in this way gives an intuitionistic proof of the reinterpreted theorem !
>
> In the light of Gödel's result, we can say that what Brouwer really did was extend classical mathematics by the creation of two new logical operators : the constructive there exists and the constructive or, stronger than their classical counterparts. Unfortunately for clarity and civility, Gödel's paper did not receive the proper attention or interpretation, and the unseemly squabble dragged on.

2.5.2 L'intuitionisme de Reeb

Dans *Nelson's Work on Logic and Foundations and Other Reflections on Foundations of Mathematics* [141], un article en grande partie consacré aux positions philosophiques de Nelson [142], Samuel Buss dit :

> One frustrating aspect of trying to understand Nelson's philosophy is that he never makes a clear statement of his reasons for doubting the integers.

Que dirait-il alors au sujet des *entiers naïfs* de Reeb ! Ce dernier était une sorte de Socrate entouré de disciples - Je dis cela avec beaucoup de :-)) mais parmi eux il manquait le Platon qui aurait pu nous instruire de la pensé du Maître. Pour essayer de la saisir il faudra nous contenter de ses très rares écrits et de quelques témoignages.

Dans *La Mathématique non standard, vieille de soixante ans* [143], après avoir assumé tous les objets de la mathématique formelle ensembliste (identifiée au manuel de Bourbaki) et en particulier «$\mathbb{N}$ [qui] designe l'*ensemble* des entiers naturels» il donne la définition :

> Les entiers naïfs (notion non définie dans *Bourbaki* mais susceptible d'y figurer) sont ceux des éléments de $\mathbb{N}$ énoncés (ou écrits) *concrètement* lorsqu'on obéit à l'instruction :
>
> > Ecrivez 0, puis 1, puis 2, quand à un certain stade vous aurez écrit n (qui sera un élément de $\mathbb{N}$) vous écrirez au stade suivant $n+1$.

et toujours dans *La Mathématique non standard, vieille de soixante ans* mais dans la version du colloque dédié à Charles Ehresmann [144]

> Nous appelons *naïfs* les éléments de N déclarés tels par application des seuls principes suivants :
>
> 1. 0 est réputé *naîf*
> 2. Si x est connu pour être *naïf*, alors $x+1$ est réputé *naïf*.

141. Samuel Buss, "Nelson's work on logic and foundations and other reflections on foundations of mathematics" in Diffusion, quantum theory, and radically elementary mathematics, (W. G. Faris ed.) Princeton University Press, mathematical notes n°47 (2006) : 183-208 ; [10]. `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.128.7133&rep=rep1&type=pdf`

142. L'article contient également des informations sur le travail que Nelson consacrait à la vérification automatique de démonstrations écrites dans un formalisme lisible par un humain dont il est question dans la citation précédente de Buss et Tao.

143. Dans la version multigraphiée de l'Université de Strasbourg reprise dans [69]

144. *Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, T22, n°2 (1981), p. 149-154)

Les deux versions sont très différentes mais sur le point des entiers naïfs elles sont en parfait accord.

J'avoue ne pas voir de différence entre les *naifs* de Reeb, (que je vais appeler les *Rnaïf* et les *Nnaïfs* de Nelson. Tous les deux se placent dans un système formel de référence puissant dans le cas de Reeb (la théorie des ensembles), plus faible dans le cas de Nelson, l'arithmétique de Peano, tous deux introduisent un nouveau "prédicat" pour lequel ils ne supposent pas le principe d'induction. J'ai mis "prédicat" entre guillemets car il y a une petite différence : chez Nelson qui se revendiquait comme formaliste pur et dur "prédicat" a le sens technique que lui confère la logique formelle alors que pour Reeb il a celui de la langue naturelle. Faut-il voir ici la distance irréductible qui sépare le point de vue formaliste du point de vue intuitionniste ? Si l'on en reste à la vulgate intuitionniste sur la dyade temporelle entre le passé et le futur qui serait l'intuition fondamentale de l'unité et le refus qu'une chose puisse être vraie ou fausse et rien d'autre [145] on ne voit pas très bien le rapport. Mais Harthong nous a prévenu clairement dans *Commentaires sur Intuitionnisme 84* [146]

> (...) dans Intuitionnisme 84 nous prônons sans vergogne un réalisme mathématique, alors que les exégètes ont toujours attribué à Brouwer et à l'intuitionnisme "officiel" un refus du réalisme (...)
>
> A cela je réponds :
>
> 1. Nous avions parfaitement le droit de nous référer à Dieu sans passer par les prophètes.
> 2. (...)
> 3. Je ne prétends nullement que la lecture de Brouwer exposée dans. *Intuitionnisme 84* soit la bonne : elle est différente de celle des commentateurs, c'est tout. Nous n'affirmons pas : "voici ce que pensait Brouwer", mais "voici ce que *nous* pensons après avoir lu Brouwer dans son texte.(...)
> 4. (...)

Ce n'est certes pas Reeb qui parle directement mais nous avons tout lieu de croire que c'était aussi ce qu'il pensait. Donc si nous recherchons ce qui différencie

145. Les adversaires de la pensé de Brouwer en ont fait une caricature qui sert bien leur cause. Comment ne pas considérer comme farfelu quelqu'un qui prétend qu'une chose pourrait être autre que vraie ou fausse si l'on oublie de préciser que le sens des mots "vrai" et "faux" utilisés ici est particulièrement technique et long à préciser.

146. dans *La mathématique non standard*, Editions du CNRS, Paris, 1989. [5]

Reeb de Nelson oublions cette étiquette “intuitionniste” et revenons sur l’usage de “prédicat”. Faut-il le prendre au sens commun ou au sens technique de la logique ?

Dans la dispute sur le non standard Reeb était perçu comme un (ex) mathématicien (compétent) mais pas comme un logicien, ne se pourrait-il pas que ses connaissances en logique aient été sommaires et que ce soit là la différence avec Nelson ? Il n’en est rien.

Je ne sais comment expliquer que dans toute la dispute il n’ait jamais été question d’un texte conséquent [147] qu’il avait écrit avec son collègue et ami A. Fuchs : un cours de logique de 320 pages. Reeb lui même n’en faisait jamais mention et je ne l’ai découvert que tardivement. Les premières lignes de la préface nous éclairent tout de suite :

> La logique ne nous apprend pas à penser : nous pensons naturellement.(...) La logique est (donc) plutôt réflexion de la pensée sur elle même et il n’est pas de son propos de vouloir apprendre à penser à quelqu’un qui n’en serait pas capable ‘naturellement”. Les Messieurs de Port-Royal ont fort bien mis en relief ce côté de la logique dans le passage suivant de la Logique de Port-Royal (p. 231) “Ceux qui ne seraient pas capables de reconnaître la fausseté d’un raisonnement par la seule lumière de la raison ne le seraient pas ordinairement d’entendre les règles que l’on donne et encore moins de les appliquer”.

Ensuite le plan du cours nous montre que cette profession de foi est bien à prendre au pied de la lettre :

- Chapitre I
  1. La logique des propositions du point de vue naïf.
  2. Le système formel de la logique des propositions.
- Chapitre II Le calcul (restreint) des prédicats.
  1. Les prédicats à une variable.
  2. Les prédicats à deux ou plusieurs variables.
  3. Calcul des classes.
  4. Système formel de la logique des prédicats.
  5. Le syllogisme aristotélicien.
  6. Exercices sur le calcul des prédicats.
- Chapitre III Systèmes formels.

147. Fuchs, Aimé, and Georges Reeb. *Logique*. Institut de Recherche Mathématique Avancée (Strasbourg), 1981 ; [34].

1. Introduction : langage, théorie, modèle.
2. Un outil : la théorie des ensembles.
3. Langage, théorie ; interprétation, modèle.
4. Un modèle non standard de l'arithmétique.
5. La notion de déduction formelle : le théorème de la déduction.
6. Consistance, complétude, catégoricité.
7. Retour à la notion générale de théorie.
8. Erreurs et paradoxes.

Les "choses " existent donc du point de vue naïf. L'introduction du chapitre 1 commence par la :

> *Définition provisoire 1 (Proposition ; anglais : Sentence, allemand : Aussage)*
> *On appelle* proposition *un assemblage de mots d'une langue naturelle vérifiant les trois propriétés suivantes :*
>
> 1. *Il est reconnu grammaticalement (mieux : syntaxiquement) correct.*
> 2. *Il est sémantiquement correct.*
> 3. *Il est possible de lui assigner sans ambiguïté valeur de vérité (vrai ou faux).*

Et de donner tout de suite un exemple de la relativité du vrai avec la proposition :'Un condamné à mort est guillotiné" qui est vraie en France mais pas en Angleterre, qui est à rapprocher de la section 2 du chapitre III : *Un outil : la théorie des ensembles*. Nous sommes prévenus, la vérité est relative au contexte et ce que nous propose la théorie formelle des ensembles n'est qu'un outil, pas une vérité définitive.

Notre position de lecteur informé par la "thèse de Balderoy" nous pousse naturellement à rechercher dans cette table des matières où se trouve l'A.N.S. et de la trouver au paragraphe 4 du chapitre III donc vers la fin du cours (p. 226). Il commence par la définition d'un ultrafiltre sur l'ensemble $\mathbb{N}$ que nous donne la théorie des ensembles et celle de ${}^*\mathbb{N}$ qui est l'ensemble des suites de $\mathbb{N}$ modulo un ultrafiltre non dégénéré [148]. Nous sommes donc en pleine mathématique ensembliste et il nous est démontré (très simplement) que bien que $\mathbb{N}$ et ${}^*\mathbb{N}$ soient tous deux un modèle du langage de l'arithmétique, ils ne sont par isomorphes du point de vue

148. C'est ce type de construction qui est à l'œuvre dans la fabricarion du ${}^*\mathbb{R}$ évoqué précédemment

de la théorie des ensembles ; dans la mesure où $\mathbb{N}$ peut être considéré comme un sous ensemble de ${}^*\mathbb{N}$ (prendre la suite constante) il est évident que la classe de la suite $0, 1, 2, ...n...$ est plus grande que tout élément de $\mathbb{N}$, c'est donc un infiniment grand. Mais le cours ne va pas plus loin dans cette direction. Tout le bénéfice pour l'analyse de l'existence d'un entier non standard avait déjà été expliqué un peu plus tôt (p.195) en postulant un modèle non standard de l'arithmétique après avoir expliqué ce qu'est un modèle dans le paragraphe 4 de la section 1 du chapitre III. Ce paragraphe se présente comme un dialogue entre deux mathématiciens $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}^*$ qui possèdent chacun un modèle de l'arithmétique celui de $\mathscr{M}$ étant strictement contenu dans celui de $\mathscr{M}^*$. Ils en déduisent que les entiers de $\mathscr{M}^*$, étant plus grands que tous ceux de $\mathscr{M}$, méritent le statut d'infiniment grand. Et $\mathscr{M}^*$ de conclure le dialogue par un :

> Je sens qu'on va bien s'amuser.

J'insiste sur ce *Je sens qu'on va bien s'amuser* qui résume Reeb : pour lui, faire des mathématiques est une activité jubilatoire. Ce sera tout sur l'A.N.S. et rien sur les Naïfs. En revanche la section 2 du premier chapitre est très largement consacrée à la logique intuitionniste et il y est démontré notamment le résultat de Gödel que Nelson évoquait plus haut sous une forme pratiquement identique (paragraphe 2.5.1) :

> Citons enfin une autre interprétation, due à Gödel , du calcul des propositions classique (C.P.C.) dans le calcul des propositions intuitionniste (C.P.I.) qui fournit également un modèle du C.P.C. dans le C.P.I. À chaque formule A du C.P.C. on associe la formule A' du C.P.I. selon le code suivant :
>
> — a) Si A est une variable propositionnelle, x' est la formule x.
>
> — b) si A et B sont des formules :
>
> 1. $(\bar{A})'$ est la formule $\overline{(A')}$
> 2. $(A \wedge B)$ est la formule $(A' \wedge B')$
> 3. $(A \vee B)'$ est la formule $\overline{\overline{A' \vee B')}}$
> 4. $(A \Rightarrow B)'$est la formule $A' \Rightarrow \overline{\overline{B'}}$
>
> On a alors le
> THÉORÈME (Gödel) : Soit A une formule du calcul des propositions : alors A est un théorème du C.P.C. si et seulement si A' est un théorème du C.P.I.

Maintenant que nous sommes convaincus que Reeb n'est pas un amateur lorsqu'il parle de logique nous pouvons apprécier la note de bas de page n° 3 de la *Mathématique non standard vieille de soixante ans ?* version Salanskis ([69] p. 286) :

> Une distinction - trop subtile - s'impose ici. En mathématique formelle l'instruction I fait référence à l'ensemble $\mathbb{N}$ déjà connu et elle énonce un procédé pour écrire, dans l'ordre, certains éléments de $\mathbb{N}$: 0,1,2 3, 4, 5, $\cdots$. Par contre en mathématiques intuitionniste, on ne dispose pas de $\mathbb{N}$, l'énoncé I de l'instruction doit être modifié légèrement en I' :
>
> — Partez de rien (ou écrivez 0)
>
> — Ajoutez un bâtonnet (ou écrivez I ou 1)
>
> — Ajoutez un bâtonnet (ou écrivez II ou 2)
>
> — Ajoutez un bâtonnet (ou écrivez III ou 3)
>
> —
>
> —
>
> — à chaque nouveau stade ajoutez un nouveau bâtonnet au tas dont vous disposez.

Les *Rnaïfs* ne supposent donc pas l'existence des nombres. Reeb est semble-t-il, comme Nelson, un mathématicien apostat ! Cela étant dit il ne nous propose pas de construire un système formel qui ne reposerait pas sur la croyance en l'existence des entiers et qui permettrait de faire des mathématiques, il nous conseille même de ne rien changer et de rester dans Z.F.C. Paresse ou plutôt le sentiment qu'il est prématuré de formaliser tant que la pratique mathématique n'a pas intégré significativement l'usage des infinitésimaux ? Je penche pour cette dernière hypothèse au vu du nombre incroyable et de la diversité des pistes, que j'évoque au paragraphe suivant, qu'avec ses élèves il a suggéré en moins de vingt ans.

Pour clore sur l'intuitionnisme de Reeb voici la conclusion d'un article récent de M. van Atten [149]

> Weyl was well aware of the discrepancy between his constructivist philosophy of pure mathematics and his classical practice in mathematical physics. Did Weyl ever hope to give his in infinitesimal geometry a constructive foundation later – Brouwer had taken that attitude towards his own theorems in classical topology –, and can a notion of subjectivity be motivated that supports, as Weyl's philosophical foundation of physics requires, the idea of a subject located in a point and whose intuitive space is of infinitesimal size without, at the same time, idealising beyond a notion of subject appropriate for constructive mathematics ? To investigate these questions would go beyond the scope of the present paper. But if there is no construction allowing to treat infinitesimals as individual objects, then to Weyl, Reeb's approach, what with its combination of a classical formalism for nonstandard

149. "Weyl and intuitionistic infinitesimals." arXiv preprint arXiv :1803.05014 (2018) ; [76].

> analysis and a nevertheless intuitionistic epistemology, might have made the glass seem at least half full.

2.5.3 Au delà des étiquettes

Appelons "radicalement-formaliste" la position de Nelson dans *Predicative arithmetic* pour la distinguer du formalisme classique à la Hilbert. Pour Nelson, les mathématiques ne sont qu'un jeu d'écriture qui ne parle de rien : «But now it is time to move forward, to reject the semantic view, and concentrate on what is real in mathematics. And what is real in mathematics is the notation, not an imagined denotation». Mais est-ce un jeu futile ? Certainement pas. Il écrivait [150] un an avant de disparaitre :

> [Le projet proposé] challenges the entire current understanding and practice of mathematics....It will radically change the way mathematics is done. This will affect the philosophy of mathematics, how the nature of mathematics is conceived. It will also affect the sciences that use mathematics, especially physics....It addresses a very big question : does mathematics consist in the discovery of truths about some uncreated eternal reality (the traditional Platonic view), or is it a humble human endeavor to construct abstract patterns that will be sound, free of all contradiction, in the hope that some will be beautiful, uplifting the human spirit, and that some (not necessarily different ones) will be of practical use to improve the human lot ?"

En créant donc des diagrammes abstraits nous espérons que certains pourront servir à "améliorer la condition humaine". Les mathématiques ne sont pas un jeu futile. On peut naturellement ne voir dans cette cette citation qu'une déclaration exagérément emphatique, aussi oublions la pour nous pencher sur des faits.

Dans la préface de la première édition de son *Dynamical Theories of Brownian Motion* [151], en 1967, Nelson écrit :

> It is customary in Fine Hall to lecture on mathematics, and any major deviation from that custom requires a defense.(...)
>
> The only legitimate justification is a mathematical one. Now "applied mathematics" contributes nothing to mathematics. On the other hand, the sciences

150. Voir l'introduction par Sarah Jones Nelson de l'article *Elements* déposé sur arXiv `https://arxiv.org/abs/1510.00369v1`

151. Second edition, August 2001 disponnible en ligne à `http://www.math.princeton.edu/?nelson/books.html` ; [52].

> and technology do make vital contribution to mathematics. The ideas in analysis that had their origin in physics are so numerous and so central that analysis would be unrecognizable without them.
>
> A few years ago topology was in the doldrums, and then it was revitalized by the introduction of differential structures. A significant role in this process is being played by the qualitative theory of ordinary differential equations, a subject having its roots in science and technology. There was opposition on the part of some topologists to this process, due to the loss of generality and the impurity of methods.
>
> It seems to me that the theory of stochastic processes is in the doldrums today. It is in the doldrums for the same reason, and the remedy is the same. We need to introduce differential structures and accept the corresponding loss of generality and impurity of methods. I hope that a study of dynamical theories of Brownian motion can help in this process.

Donc les mathématiques doivent soutenir des théories sur le monde sensible et les besoins de la physique inspirent les mathématiciens. Mais, plus intéressant, chapitre 11 (p. 65) de ce même livre on peut lire :

> Let $x(t)$ be the position of a particle at time t. What does it mean to say that the particle has a velocity $\dot{x}(t)$? It means that if Δt is a very short time interval then
>
> $$x(t+\Delta t) - x(t) = \dot{x}(t)\Delta t + \varepsilon,$$
>
> where ε is a very small percentage error.(...)
>
> The particle should have some tendency to persist in uniform rectilinear motion for very small intervals of time. Let us use $Dx(t)$ to denote the best prediction we can make, given any relevant information available at time t, of
>
> $$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$
>
> for *infinitely small* [152] positive Δt.
>
> Let us make this notion precise.$\cdots$

Malheureusement nous sommes en 1967 et Nelson ne dispose pas encore de l'A.N.S. pour rendre précis cet *infiniment petit* Δt. Alors il procède de façon classique en faisant tendre Δt vers 0.

152. Souligné par moi.

Il faut bien insister sur ce en quoi cette procédure est peu naturelle. Dans la description du "mouvement continu" (celui d'une pierre qui tombe dans la mécanique classique) il est assez naturel de considérer des intervalles de temps divisibles à l'infini, notre intuition du temps est bien celle d'une "chose" divisible à l'infini. Mais dans la description du mouvement brownien il y a une difficulté. Rappelons que le mouvement brownien physique est celui d'une particule légère (historiquement un grain de pollen) soumise aux chocs successifs et indépendants les uns des autres des atomes du milieu ambiant. Une idéalisation (à une dimension) de cette situation physique est la marche aléatoire pure (la marche de l'ivrogne) :

— $x_0, x_{\Delta t}, x_{2\Delta t}, \cdots, x_{k\Delta t}, \cdots$ sont les positions successives d'un mobile sur une droite,

— à chaque instant $k\Delta t$ on a :

$$x_{(k+1)\Delta t} = x_{k\Delta t} \pm \Delta x$$

— où le choix $\pm$ en avant ou en arrière du pas en espace *est tiré au sort selon une probabilité* $1/2$,

— et les choix successifs sont indépendants.

En d'autres termes, dans sa marche, l'ivrogne fait des *choix successifs*, par tirage au sort indépendants, de la direction du pas de longueur Δx. Dans le cas du mouvement brownien physique le phénomène aléatoire (le bombardement par les molécules) a lieu à une échelle microscopique inobservable par rapport à l'échelle d'observation (au microscope) de la particule et l'on devine qu'une marche aléatoire de pas infiniment petit est le bon candidat pour notre modèle idéal : nous fixons Δt infiniment petit, au sens de l'A.N.S.

La mathématique classique n'a pas cette possibilité. Alors on pose $\Delta t = \frac{1}{n}$ ce qui donne une suite indexée par n de marches aléatoires dont on prend la limite lorsque n tend vers l'infini cette limite est ce qu'on appelle le processus de Wiener [153]. Le problème est que lors de cette idéalisation on perd toute référence avec la réalité du phénomène : *on ne peut pas* imaginer une *suite continue* d'instants de tirage au sort indépendants !

153. Norber Wiener (1894-1964), ne pas le confondre avec Christian Wiener (1826-1896) mathématicien-philosophe qui a joué un rôle dans la mise en évidence des causes moléculaires du mouvement brownien.

Ce n'est donc pas par hasard que Nelson est séduit par les infiniment petits de Robinson et propose dix ans plus tard sa théorie I.S.T. [154] (ou il montre que la théorie élémentaire des probabilités (par exemple la loi forte des grands nombres) peut être avantageusement décrite par des espaces de probabilités finis en évitant tout le vocabulaire pédant sur les tribus, événements de probabilité nulle qui se produisent quand même, etc.). Et enfin, encore dix ans plus tard, dans le livre *Radically Elementary Probability Theory* [155] il nous offre la théorie alternative au processus de Wiener dont tout le monde rêve où le mouvement Brownien est représenté par une *marche aléatoire de pas infiniment petit*. Il utilise un système plus faible que I.S.T. (on introduit seulement des entiers infiniment grands) et démontre des résultats profonds sur les marches aléatoires (par exemple la continuité presque sure des trajectoires du mouvement brownien) sans sortir du cadre des probabilités élémentaires sur un ensemble fini (mais infiniment grand) et il montre comment les énoncés usuels classiques peuvent s'y ramener. Voici ce qu'en dit la recension du livre [156] de L. Pitt parue dans le bulletin de l'AMS :

> In the book REPT the nonstandard analysis is an axiomatic I.S.T. development, but is simplified and entirely confined to the natural numbers and $\mathbb{R}$. The basic new axioms are (1) 0 is standard, (2) there is an n in N that is not standard, (3) for all n in N if n is standard then n + 1 is standard and (4) if, A(0) and if for all n whenever A(n) then A(n + 1), then for standard n we have A(n). A fifth less essential axiom was occasionally used. It is truly remarkable how far one can go with these axioms. In particular, they support Nelson's entire elementary development of stochastic processes.
>
> An appendix relates the elementary theory to the conventional theory. It presents several large (non elementary) theorems which show that the elementary theorems imply their conventional analogues. Thus the elementary approach is available to prove conventional theorems. This however is not Nelson's aim. The elementary theory is simpler and has the "same scientific content as the conventional theory." His conclusion is that the elementary theory stands on its own without being translated back into the more elaborate conventional language. A monograph illustrating how elementary non-

154. C'est bien entendu une hypothèse que j'avance ; il n'existe pas de biographie détaillée de Nelson qui la démontrerait. Le seul indice solide est la liste de ses publications dont aucun des titres antérieurs à I.S.T. ne fait allusion aux infinitésimaux.

155. (AM-117). Vol. 117. Princeton University Press, 1987 ; [55].

156. BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 20, Number 2, April 1989

> standard analysis can be used to do conventional mathematics would not be radical. *It is radical to suggest that the translation be skipped and that the mathematics be left in its elementary finite form* [157].

Nelson est un physicien qui cherche les mathématiques les plus efficaces pour parler du monde et quand il ne les trouve pas toute prêtes il les construit. Son formalisme radical n'a rien d'un jeu gratuit et possède même une dimension éthique comme il l'exprime dans *The virtue of simplicity* [158]

> Heretofore nonstandard analysis has been used primarily to simplify proofs of theorems. But it can also be used to simplify theories. There are several reasons for doing this. First and foremost is the aesthetic impulse, to create beauty. Second and very important is our obligation to the larger scientific community, to make our theories more accessible to those who need to use them. To simplify theories we need to have the courage to leave results in simple, external for fully to embrace nonstandard analysis as a new paradigm for mathematics.

Venons en maintenant à Reeb. C'est peut-être dans l'entretien qu'il a accordé à l'Ouvert [159] que l'on cerne le mieux sa personnalité. On trouve au début :

> Les mathématiques, j'ai toujours aimé ça. Mon père qui était tonnelier me faisait faire du calcul mental très fréquemment, plus exactement je lui demandait de m'en faire faire. Chez moi, les mathématiques et un certain sens de la pratique ça allait de pair. Je me souviens très bien en classe de quatrième le professeur avait posé un problème concernant une roue, la roue d'un char cerclée par un forgeron. Il avait donné toutes les dimensions, la densité du métal, le prix du métal, etc. et il fallait calculer le prix du cerceau. Pour moi il était clair, parce que. j'avais vu les charrons à l'œuvre, que le cerceau était un parallélépipède rectangle qu'on repliait pour en faire un cerceau. Par conséquent j'ai calculé son volume de cette manière.

Le professeur qui voyait plutôt une application des formules sur le volume des cylindres ne l'a, dit-il, pas félicité. Il raconte ensuite une autre petite histoire concernant le certificat de mécanique rationnelle où la simple utilisation du bon sens permet d'échapper à un calcul douloureux.

---

157. Souligné par moi

158. dans l'ouvrage collectif *The strength of nonstandard analysis*, I. van den Berg et V. Neves (eds.) (Springer 2007) [78] .

159. L'entretient a eu lieu peu de temps avant la disparition de Reeb et n'a pas été relu par ce dernier : L'Ouvert n° 76, spécial G. Reeb. Disponible en ligne à l'adresse : `http://publimath.univ-irem.fr/biblio/IST94005.htm`

Comme il le dit pudiquement,

> C'était en 1939. L'environnement particulier imposait quelques contraintes.(...),

à cause de la guerre il a fait ses études à Clermont-Ferrand :

> En tant qu'étudiant, l'enseignement était fait par des gens qui appartenaient de près ou de loin au groupe Bourbaki. J'ai donc été élevé au biberon bourbakiste. J'ai beaucoup aimé cela. Je ne serai certainement jamais efficace comme formaliste mais j'ai beaucoup d'admiration pour le formalisme et encore plus d'admiration pour ceux qui savent le manipuler.

Effectivement il est frappant de constater à quel point l'œuvre mathématique de Reeb contient peu (ou pas !) de résultat qu'on qualifie habituellement de techniques, c'est à dire de long développements formels. Quand ses proches l'interrogeaient sur ce sujet il répondait que cela l'ennuyait.

Il profite de cette information sur son éducation mathématique pour nous livrer sa position sur les fondements :

> J'ai toujours été choqué par le fait que les mathématiciens ne s'intéressent pas au débat entre intuitionnistes et formalistes. Mais j'ai considéré qu'il n'était pas important de prendre position dans un tel débat. Je n'irai certainement pas dire que je suis intuitionniste, encore moins formaliste.

On retrouve bien ici le refus des étiquettes imposées par la vulgate qui est largement développé dans *Intuitionnisme 84*. Plus loin il aborde ses débuts de chercheur sous la direction de C. Ehresmann et la théorie des feuilletages qui a fait sa renommée.

> Ehresmann m'a communiqué le sujet qui allait être celui de ma thèse, les variété feuilletées. La description la plus simple est de dire que c'est de la pâte feuilleté, comme son nom l'indique.

Toujours le goût des images concrètes, et il continue sur le sujet :

> Ce sujet était excellent, la rencontre a été bonne. Ca m'a inspiré. Ma thèse est de 48. Le sujet a fait une belle carrière. Des centaines et des centaines de papiers. Et d'autre part une université californienne a pour motif décoratif une sculpture sur ce qui est appelé le feuilletage de Reeb. La réussite, c'est celle d'Ehresmann d'avoir proposé le sujet.

Ensuite il parle de sa fonction d'enseignant à Clermont-Ferrand, Grenoble puis enfin (pour lui) Strasbourg.

> Je ne revendique certainement pas d'avoir été un bon prof. (...) Je revendique de n'avoir jamais reculé devant un enseignement nouveau à faire. Par

> exemple à une époque où les enseignements de statistiques étaient très peu fréquents en France, à Clermont-Ferrand j'ai flairé le vent et je me suis lancé dedans sans aucune compétence et je crois que j'ai rudement bien fait.(...) J'attachais une grande place aux choses extérieures aux mathématiques : savoir pourquoi on fait telle ou telle chose. Pour revenir aux probabilités et aux statistiques, à vrai dire la théorie mathématique des probabilités, je m'en fiche. Si je rencontre un Monsieur qui me dit : " si j'avais quelques ingénieurs qui sachent faire un peu contrôle de qualité, alors ma boite s'en porterait peut-être mieux", ça m'intéresse.

Son peu d'appétence pour la technique mathématique était-elle une question de goût comme il le disait à souvent à ses élèves où, plus sérieusement, une incapacité comme il l'avoue crûment ?

> J'ai été candidat à l'agrégation mais j'ai toujours été collé avec brio, étant toujours très nettement au dessous de la barre.

Je dirais que plus probablement il faut attribuer son incapacité à réussir ce concours à sa lenteur toute alsacienne dont témoigne la mathématicienne Strasbourgeoise Michèle Audin [160]

> Georges Reeb fit all the prejudices French people might have against Alsatians : he was massive and slow, very slow. Slowness is not a quality French mathematicians usually praise very much. But Reeb did not care. He was even proud of it. He used to say that, when he was a professor at Grenoble University (namely, at the time of our picture), the students attending his course suggested recording his lectures on tape, so that they could listen to them at double speed.

Toujours dans son entretient à l'Ouvert, Reeb nous parle de sa rencontre avec le livre de Robinson.

> J'ai ouvert le livre. Evidemment je n'ai pas commencé par le lire à partir de la page 1, car pour moi il était de toutes façons évident que je n'y comprendrait rien ; j'ai commencé à la page 51 comme le conseillait Robinson : instantanément j'ai vu que Robinson avait raison et que c'est ce genre de mathématiques qu'il fallait faire. Un quart d'heure après avoir eu le livre en main, j'ai écrit dans ma tête les 200 pages suivantes.

et, à propos de sa bataille contre les détracteurs de l'A.N.S. :

> Je pense que certains mathématiciens m'ont reproché d'avoir popularisé un truc qui était réservé à une élite.

160. dans : "Differential Geometry, Strasbourg, 1953." Notices of the AMS 55.3 (2008).

Cette dernière citation résume Reeb en quelques mots : il pensait que les mathématiques ne doivent pas être réservées à une élite et les *entiers naïfs*, s'ils sont une façon de jeter un regard intuitionniste sur le formalisme de I.S.T., étaient certainement aussi pour Reeb la façon de populariser «ce truc réservé à une élite».

Reeb voulait donc que les mathématiques servent et l'on retrouve cette même vision du "radicalement élémentaire" de Nelson à travers les travaux de ses élèves dont je mentionne les plus marquants :

— *La théorie Z.F.L.* : Zermelo, Fraenkel et L pour "limité". C'est une sous théorie de I.S.T. (donc une extension conservative de Z.F.C.) où l'on introduit sur les nombres réels le prédicat "l" : $l(x)$ se lit *x est limité*. R. Lutz [161] et J-L. Callot [162] on développé une partie de l'analyse classique élémentaire sous cette axiomatique reprise par A. Deledic à l'usage de l'enseignement secondaire [163]. A. Deledic et M. Diener ont également écrit un livre [164] à l'usage des premières années d'université.

— *La théorie R.I.S.T.* [165] de Y. Péraire qui étend la théorie de Nelson en créant le prédicat $x\mathscr{R}\mathscr{S}y$ qui se lit x est standard relativement à y.

— *Equations différentielles*. En plus des travaux sur les *Canards* beaucoup de travaux sur les équations différentielles et les systèmes dynamiques dont je ne cite que les auteurs (en priant ceux que j'oublie de bien vouloir m'excuser), les références sortant du cadre de ce travail : R. Bebouchi, A. Delcroix, A. Fruschard, V. Gautheron, E. Isambert, R. Lutz, T. Sari, A. Troesh, E. Urlacher.

— *Le moiré*. Reeb ne se lassait pas d'exposer cette élégante théorie due à J. Harthong [166] du phénomène physique bien connu.

— *La droite de Harthong-Reeb*. C'est une construction radicalement élémentaire des nombres réels $\mathbb{R}$ s'appuyant uniquement sur l'existence d'un entier infiniment grand. Cette construction introduite par Harthong [167] est reprise dans le contexte de la géométrie des écrans (pixelisés) des ordinateurs.

161. *Rêveries infinitésimales*, Gazette des mathématiciens, n° 34, pp. 79-87 (1987) ; [49].
162. *Trois leçons d'analyse infinitésimale*, dans Le labyrinthe du continu, J-M. Salanskis et H. Sinaceur eds, Springer-Verlag (1992) ; [71].
163. *Teaching with infinitesimals*, dans Nonstandard Analysis in Practice, pp.225–238,Springer, (1995) ; [20].
164. *Leçons de calcul infinitésimal*, Armand Colin, (1989) ; [21].
165. *Théorie relative des ensembles internes*, Osaka J. Math, 29 (1992), pp 267-297 [63].
166. *Le moiré*, Advances in Applied Mathematics, vol.2, n°1, pp.24–75, (1981) ; [36].
167. Jacques Harthong et Georges Reeb, *Intuitionnisme 84*, [38]

— *Extension de REPT* à des processus de diffusion par E. Benoit [168].

— *La propagation des ondes* de J. Harthong [169] où l'équation de Schroedinger est étudiée avec pour constante de Plank h un réel infiniment petit *fixé*, ce qui est évidemment plus naturel que de la "faire tendre vers 0" comme le font les classiques.

— *Re-écriture de l'asymptotique classique* [170] par I. van den Berg.

Nelson, Reeb et leurs élèves ont amorcé tout un programme de recherche, d'une part de re-écriture d'une partie des mathématiques, d'autre part d'utilisation directe des infinitésimaux dans les modèles physiques.

Cette entreprise en rappelle une autre, plus récente : la re-fondation des mathématiques sur la *théorie homotopique des types*. Il s'agit de reconsidérer le formalisme mathématique de façon à ce qu'il soit simultanément porteur de sens pour un humain et lisible par un ordinateur. Ce dernier serait alors à même de déceler des erreurs de démonstration [171]. Pour moi il est tout à fait significatif que l'on retrouve, dans cette entreprise récente, les théories intuitionnistes et le nom Martin-Löf qui ont tenu une certaine place dans l'histoire de l'aventure de l'A.N.S. que je viens de raconter.

168. *Diffusions discrètes et mécanique stochastique* (deuxième édition), Prépublications de l'Université de Nice, Mathématiques, juin 1989 [6].

169. Jacques Harthong, *Etudes sur la mécanique quantique*, Astérisque n°111, Société mathématique de France, (1984) ;[37].

170. *Nonstandard asymptotic analysis*, Springer 2006 (1987) [77].

171. Je n'en dis pas plus par manque de compétence et je revoie à un très bel article de Antoine Chambert-Loir *À LA CROISÉE DES FONDEMENTS DES MATHÉMATIQUES, DE L'INFORMATIQUE ET DE LA TOPOLOGIE : Théorie homotopique des types* dans "Image des Mathématiques" sur le site du C.N.R.S.
http ://images.math.cnrs.fr/A-la-croisee-des-fondements-des-mathematiques-de-l-informatique-et-de-la.html

Sommaire

2.1 Sur la méthode de Balderoy 89
2.2 Sur l'affaire de la commission des thèses 95
2.2.1 Le comportement de la commission et l'attitude des Nonstandardistes 95
2.2.2 Sur le statut actuel de l'A.N.S. 97
2.3 Le *mythe de la rupture* 105
2.3.1 La lecture de Récoltes et semailles 106
2.3.2 Pour une histoire du pouvoir dans les mathématiques française contemporaines 116
2.3.3 Balderoy et le mythe de la rupture ? 118
2.4 Rigueur et philosophies des mathématiques 119
2.4.1 La rigueur mathématique selon Duchemin 119
2.4.2 Philosophie et A.N.S. selon Duchemin 122
2.4.3 Images mentales du mathématicien ordinaire 124
2.4.4 $\mathbb{R}$ et son *image mentale* 127
2.5 Un peu plus sur Nelson et Reeb 137
2.5.1 Le réalisme de Nelson 138
2.5.2 L'intuitionisme de Reeb 146
2.5.3 Au delà des étiquettes 152

Conclusion

L'idée centrale de la "thèse de Balderoy" est dans le fond assez simple. Il s'agit de mettre en résonance sur une question particulière - trouver les raisons d'une dispute avortée - des point de vue différents, à chaque fois assez largement partagés, pour faire émerger une conclusion qui, elle, peut surprendre. Rien de ce que dit Balderoy de la communauté mathématique ni de ce que son interlocuteur Duchemin dit de la science mathématique n'est sérieusement contestable. Tout ce qui est affirmé sur l'organisation sociale des mathématiques françaises est connu et même revendiqué par les autorités ; tout ce qui concerne la rigueur mathématique, le formalisme et son usage est enseigné dans les écoles. Enfin, sauf peut-être sur la

forme, la thèse de Balderoy sur la modélisation mathématique en tant que roman, se situe dans la tradition *neo - hypothético - déductive* [172] la plus banale qui soit. De tout ça Balderoy conclut que c'est la fonction idéologique assigné aux mathématiques par les forces politiques au pouvoir qui explique pourquoi la dispute n'a pas eu lieu. En dénonçant l'instrumentalisation idéologique des mathématiques Balderoy n'est, là non plus, pas très original ; il suffit de penser à la "sélection par les mathématiques" maintes fois dénoncée. Mais je crois qu'il l'est un peu quand il conclut son travail par ces deux phrases :

> En attendant la leçon que nous pouvons retirer de cette affaire est que, si une communauté scientifique ne peut pas éviter de composer avec les princes du moment pour assurer sa subsistance, les responsables qui en ont la charge doivent le faire en connaissance du prix à payer. Si, pour les mathématiques, le prix est de devoir renoncer à la dispute il est certainement exorbitant.

Les technocrates qui croient, souvent sincèrement, sauver la science en se pliant servilement aux exigences des marchés ne font qu'accélérer sa décomposition. Balderoy, lui, a ajouté sa petite pierre aux efforts de ceux qui voudraient que la science soit autre chose qu'une simple technique au service de la "croissance".

Les insuffisances de l'argumentation de Balderoy sont dues essentiellement à deux causes. D'une part, le principe même de la fiction du jeune thésard qu'il est sensé être, ne lui permet pas d'approfondir suffisamment tous les points qu'il aborde. D'autre part, ses insuffisances sont aussi le reflet de mes propres insuffisances. Sur ce dernier aspect je ne peux rien. En revanche sur le premier je peux agir en essayant de clarifier quelques points. Je l'ai fait dans une postface qu'au départ j'imaginais courte et qui finalement est assez longue. En particulier j'ai reconsidéré d'un peu plus près certains aspects concernant la communauté mathématique et quelques affaires. Ce travail m'a fait mettre le doigt sur ce que j'appelle le *mythe de la rupture* de Grothendieck d'avec la communauté scientifique, mythe créé pour étouffer, comme dans le cas de la dispute sur l'A.N.S., une autre dispute au sein des mathématiques. J'ai donc dénoncé le *mythe de la rupture* dont les similitudes avec l'étouffement de l'Analyse Non Standard sont si fortes qu'une étude comparative des deux affaires s'impose. Toutefois je ne l'ai pas fait pour ne pas affaiblir, comme je l'ai expliqué dans la postface, la thèse de Balderoy .

Maintenant, si l'on peut considérer que le travail de Balderoy en tant qu'étude d'une affaire particulière mettant en cause l'éthique de la communauté mathématique française dans le dernier quart du XXe est achevé, il reste cependant un

172. j"entends par là une tradition qui intègre les critiques de Quine aux positions du Cercle de Vienne.

point sur lequel il nous laisse sur notre faim. Admettons que le fonctionnement, que je résume par l'adjectif "stalinien" pour faire vite, de la communauté mathématique en France explique les dérives de la commission et l'étouffement de la polémique, cela n'explique pas le peu de succès mondial, au moins jusqu'à une date récente, de l'Analyse Non Standard. Et, de même que le milieu social des petites cours allemandes où vivait Gauss n'explique pas pourquoi il s'est préoccupé de la construction des polygones à dix sept côtés [173], la montée en puissance de la mondialisation libérale ne peut visiblement pas expliquer non plus la réception frileuse du retour à la méthode des infinitésimaux. Pour le coup, je pense que, sur cette question, les causes sont à rechercher plus dans la logique interne du développement des mathématiques, même si des causes externes ne sont évidemment pas à exclure *a priori*.

J'ai donc repris les questions internes aux mathématiques là où Duchemin les avait laissées. Comme, contrairement aux siennes, je ne crois pas que mes idées sur les mathématiques soient largement partagées, je me devais de me "positionner", de dire d'"où je parle" comme on l'exigeait en mai soixante-huit. Or j'ai une vision des mathématiques que je ne sais pas ranger, sans doute faute de vraiment les comprendre, dans les cases philosophiques officielles : platonisme, formalisme, intuitionnisme, etc. Duchemin, interrogé par Balderoy sur sa position par rapport au réalisme, a répondu « qu'il ne participait plus aux guerres de religion ». S'il joue effectivement son rôle de mathématicien représentatif en refusant de rentrer dans ce genre de débat, il traduit aussi mon grand désarroi. Plutôt partisan de ne pas fuir les combats quand ils sont nécessaires je prendrais bien volontiers du service dans un camp si je savais lequel choisir. Mon problème est que je me sens simultanément [174] réaliste et non réaliste, platonicien et anti platonicien. Je ne dis pas "ni l'un ni l'autre mais autre chose", ce qui traduirait le refus de me positionner dans les cases officielles, mais bien "et l'un" "et l'autre", ce qui pour la logique formelle est une position intenable. On ne peut pas être à la fois une chose et sa négation ? Pendant longtemps j'ai mal vécu cette incohérence jusqu'à ce que je découvre, tout à fait par hasard, qu'il existe une doctrine philosophique : le *fictionnalisme*, associée au nom de Hans Vaihinger (1852-1933) qui affirme qu'il est tout à fait raisonnable de croire dur comme fer à des choses dont on sait bien qu'elles n'existent pas, parce que ces fictions sont utiles. Si nous pleu-

173. Je fais allusion à Dieudonné dans *mathématiques vides, mathématiques significatives*, Seuil 1982 ; [24] : « Celui qui m'expliquera pourquoi le milieu social des petites cours allemandes du XVIIIe siècle où vivait Gauss devait inévitablement le conduire à s'occuper de la construction du polygone à dix-sept côtés, eh bien, je lui donnerai une médaille en chocolat. »

174. On appréciera, j'espère, le soin avec lequel j'évite le "en même temps" de E. Macron.

rons à chaudes larmes en lisant la mort d'Anna Karenine [175], si Alexandre Dumas pleurait [176] en écrivant la mort de Porthos, comment s'étonner qu'un mathématicien, qui y consacre sa vie, croie à l'existence des nombres ? Le fictionnalisme, qui me permet donc de croire à l'existence des objets mathématiques tout en sachant très bien qu'ils n'existent pas, me satisfait pleinement et je me suis permis d'y apporter une toute petite contribution en exposant de façon que j'espère lisible par un non spécialiste, un chapitre de la théorie des systèmes bien connu des ingénieurs automaticiens que Vaihinger aurait pu ajouter à la liste des exemples de sa *Philosophie du comme si*.

Les mathématiciens sont imprégnés d'images mentales construites dès leur plus jeune âge par l'éducation mathématique (Wittgenstein dirait le "dressage"). L'image la plus prégnante, parce que constamment utilisée dans la pratique, est celle des nombres réels conçus comme des "nombres à virgule", des développements décimaux éventuellement illimités, où il trouve un bon modèle de sa sensation du continu physique (le continu spatial, l'écoulement continu du temps). Et quand on lui propose une construction formelle de ces nombres, le $\mathbb{R}$ de la théorie des ensembles, l'apprenti mathématicien est pleinement satisfait par une théorie qui lui restitue très fidèlement son image mentale. Tout fonctionne donc pour le mieux dans la profession avant les travaux de Robinson.

Qu'est-ce qui pose donc problème avec la théorie de Robinson ? En effet elle ne remet pas en cause la théorie des ensembles dont elle est un des chapitres. Aux aspects techniques près, largement maîtrisables par un étudiant de fin de licence, la construction des hyper-réels ${}^*\mathbb{R}$ ne présente pas de difficulté particulière. Une fois qu'elle est réalisée on dispose d'un nouvel ensemble de nombres, ${}^*\mathbb{R}$, qui contient strictement l'ancien, $\mathbb{R}$. Une construction de plus s'est ajoutée à l'édifice déjà conséquent des mathématiques ensemblistes.

Le problème est qu'à ce ${}^*\mathbb{R}$ il ne correspond aucune image mentale. En effet, comme les mathématiciens sont entrainés à voir dans l'ensemble $\mathbb{R}$ un ensemble définitivement achevé, une image parfaite du continu, *il n'y a plus de place* pour de nouveaux individus dans leur vision des nombres. Il n'y a donc pas de représentation de ${}^*\mathbb{R}$ et, à part quelques mathématiciens virtuoses du maniement du formalisme, les autres, les mathématiciens ordinaires, ne savent travailler qu'avec les images mentales construites au cours de leur éducation [177]. Ainsi, sauf à recon-

175. C'est l'exemple que choisit Christophe Bouriau, spécialiste de fictionnalisme et traducteur de *La philosophie du comme si* (KIMÉ, 2013) ; [75] de Hans Vaihinger.

176. dit-on.

177. On peut penser que les champions du formalisme se sont forgé, a force de travail, des images mentales particulières qui échappent au mathématicien moins virtuose mais c'est une autre ques-

sidérer toute l'éducations mathématique, de l'école primaire à la fin de la licence, l'Analyse Non Standard dans le style "étoilé" ne peut intéresser qu'une minorité de mathématiciens.

Mais il y a une autre façon d'envisager l'Analyse Non Standard qui, elle, est compatible avec l'image mentale actuelle que les mathématiciens se font des nombres. Nous la devons aux deux grandes figures de Nelson et Reeb sur lesquelles je me suis attardé très longuement dans la postface. Conscients de ce que les mathématiques sont une activité collective, riche d'une culture de plus de deux millénaires, pratiquées par des hommes à l'inconscient mystérieux, ils nous disent, chacun dans son style particulier : *« On ne change rien à nos habitudes »* . Le premier en proposant un nouveau formalisme, I.S.T. :

> Once one recovers from the shock of being told that infinitesimals and other idealized elements were there all along in the sets with which we are familiar (...) one will find our approach very easy to use. All familiar results are available without change ; they do not have to be extended to a new system [178].

le second en jetant un regard intuitionniste sur Z.F.C. :

> En l'adoptant [Le point de vue A.N.S.] on ne doit abandonner aucun de ses modes de raisonnement favoris : si l'on est géomètre, on reste géomètre ; si l'on est physicien, on reste physicien. On acquiert seulement des possibilités nouvelles qui viennent s'ajouter à ses instruments habituels en leur donnant une force nouvelle. [179]

Cette fois il ne devrait plus y avoir de problème. Chacun garde son image mentale ainsi que toute la mathématique classique qui va avec et acquiert une nouvelle capacité : pratiquer un langage plus riche qui permet de dire, sans risque de contradiction supplémentaire, si un entier est "infiniment grand" ou pas, si un réel est "infiniment petit" ou pas etc. Chaque mathématicien devrait donc se lancer joyeusement dans la Nouvelle et Simple Analyse [180] mais c'est sans compter sur le premier commandement de la Religion Ensembliste Universelle :

En mathématiques, ce qui ne peut être dit dans Z.F.C. jamais tu ne prononceras.

Pratiquer l'Analyse Non Standard dans le style de Nelson et de l'école de Reeb c'est aller contre la religion. Non que la foi soit restée très forte chez les mathématiciens mais l'église est encore puissante. Alors on évite de transgresser.

---

tion.

178. Dans le texte fondateur de I.S.T., [53]

179. F. Diener et G. Reeb, *Analyse Non Standard*, HERMANN (1989) ; [23]

180. Expression inventée par A. Délédicq *La Nouvelle et Simple Analyse*, IREM Université Paris VII (1989).

Cette religion a des racines lointaines. Elle repose sur le mythe de l'existence des nombres entiers, mythe auquel Nelson ne croit plus et auquel il veut s'attaquer de la façon la plus radicale qui soit : en montrant l'existence d'une contradiction dans notre formalisation actuelle des mathématiques, formalisation que nous ne pouvons justifier pour le moment que parce que *nous croyons à l'existence des nombres*. Il ne critique pas l'existence de mythes en tant que telle, les mythes peuvent servir les mathématiques, et il considère que la mythologie autour des "canards" est une belle mythologie.

Mais il pense que le mythe pythagoricien de l'existence des nombres, après plus de 2000 ans des bons et loyaux services, a fini de servir la cause des mathématiques. Rappelons cette citation déjà proposée par Balderoy.

> Despite its complete lack of justification, the semantic view of mathematics – the discovery of properties of entities existing in a Pythagorean world – has served mathematics reasonably well for a very long time. But now it is time to move forward, to reject the semantic view, and concentrate on what is real in mathematics. And what is real in mathematics is the notation, not an imagined denotation [181].

Nelson n'a pas eu le temps de mener son projet à terme et nous ne savons pas pour le moment s'il le sera un jour. Mais rien ne nous empêche d'imaginer un instant que, vers 2030, un mathématicien démontre la contradiction des mathématiques et que l'ensemble des nombres entiers, sous quelque forme que l'on l'imagine, n'existe pas. L'affaire ferait certainement un très grand bruit.

Je propose dans l'encadré suivant quelques extraits possibles de la presse généraliste après la mise en évidence de la contradiction de l'arithmétique.

181. *Confessions of an Apostate Mathematician*, [57]
`http://www.math.princeton.edu/?nelson/papers.html`

Les Échos du 11/04/2030. À l'annonce de l'existence d'une contradiction dans les mathématiques les principales bourses de la planète dévissent. Vingt deux ans après la crise des subprimes la confiance dans les produits financiers s'effondre. Voir nos explications (...)

Le Monde du 13/04/2030. Selon le Professeur Reebson de l'Université de Princeton les *nombres n'existent pas*. Les conséquences de cette découverte sont inimaginables. Voir en p. 3 de notre cahier *Science & médecine*.

Libération du 15/04/2030. La directrice du CERN, Ann Abrahamson-Moretti, se veut rassurante : « Bien sûr le "modèle standard" n'a plus de sens, mais le L.H.C. (Large Hadron Collider *n.d.l.r.*) semble fonctionner normalement.»

Le Point du 18/04/2030. De notre correspondant aux États Unis : Les avocats de l'escroc Madoff (92 ans) demandent sa remise en liberté immédiate, « puisque la contradiction des mathématiques entraine que tous les nombres sont égaux on ne peut pas juger notre client coupable d'avoir détourné des milliards de dollards, » affirment-ils.

Paris Match du 22/04/2030. : Le "crash" du vol AF 578 Barrow-Paris serait dù à la disparition des paramètres de vol des écrans de contrôle. Ce drame serait-il la conséquence de la disparition des nombres ?

Personne ne peut évidemment croire que le monde serait bouleversé à ce point par l'existence d'une contradiction dans l'arithmétique de Peano mais quand même la chose ne passerait pas inaperçue.

Pour commencer chez les mathématiciens qu'elle obligerait à faire un petit effort pour s'intéresser un peu plus aux fondements de leur discipline. Ils auraient une meilleure conception de ce qu'est la rigueur et cela infléchirait progressivement l'orientation de leurs recherches. Mais ça ne changerait pas fondamentalement leurs pratiques. Les mathématiques existaient bien avant l'invention des systèmes formels, elles continueront, même si Peano s'avère inconsistant. Les mathématiques continueraient à faire partie de la physique et les ingénieurs à les utiliser. On a fait du calcul différentiel et fait fonctionner les équations de la phy-

sique bien avant de construire $\mathbb{R}$ dans la théorie des ensembles, on continuera à le faire après, tout en sachant que la construction est branlante et en attendant quelque chose de plus satisfaisant. Simplement ce serait enfin le coup de grâce pour l'Eglise Ensembliste Universelle et les Non Standardistes pourraient en profiter. Souhaitons seulement qu'ils n'en abusent pas au point de créer une nouvelle religion. De toutes façons on peut parier que les nouvelles pratiques de calcul induites par l'usage de l'ordinateur et les redoutables problèmes théoriques que pose ce dernier bouleverseront bien plus profondément les mathématiques que l'existence éventuelle d'une petite contradiction dans un système formel particulier.

Ensuite, et c'est peut être ce qui importe le plus, la fonction idéologique des mathématiques à dire le "vrai" en prendrait un coup sévère. Certes les modèles mathématiques continueraient à avoir leur place dans les sciences mais seulement comme fictions utiles et non comme vérités définitives et indiscutables. Il serait alors beaucoup plus difficile de s'appuyer sur les mathématiques pour faire croire que l'utopie ultra libérale est la seule possible.

Les mathématiques ne consisteraient plus, pour reprendre les mots de Nelson,

> *dans la découverte de vérités concernant une certaine réalité éternelle et non crée mais en un humble effort humain pour construire des modèles rationnels, libres de toute contradiction, dans l'espoir que certains seront beaux, élèveront l'esprit humain, et que certain (pas nécessairement différents) seront utiles pour améliorer la condition humaine* [182].

Mais rien ne nous empêche d'adopter ce point de vue dès maintenant, même si la contradiction n'est pas avérée. Comme quoi certaines questions sur le fondement des mathématiques peuvent être aussi entendues comme des questions éthiques.

---

182. Ma traduction de la citation déja proposée au paragraphe 2.5.3 :

> It addresses a very big question : does mathematics consist in the discovery of truths about some uncreated eternal reality (the traditional Platonic view), or is it a humble human endeavor to construct abstract patterns that will be sound, free of all contradiction, in the hope that some will be beautiful, uplifting the human spirit, and that some (not necessarily different ones) will be of practical use to improve the human lot ?"

Extrait d'un "proposal" de Nelson soumis en 2013. Dans *Élements*, introduction parSarah Jones Nelson, déposé sur arXiv :
`https://arxiv.org/abs/1510.00369v1`
avec une postface de S. Buss et T. Tao.

Index

A.N.S., 96–99, 104, 106, 115, 116, 120, 122–124, 139, 141, 149, 150, 158

Bloor, 89

Cartan, 112
Chevalley, 112

Dieudonné, 93

Gian-Carlo Rota, 94
Godement, 112
Grothendieck, 91, 92, 105–116, 118

Harthong, 99, 124, 147, 159

I.H.É.S., 106, 107

Krivine, 81

Lévy-Leblond, 3, 45, 90
Latour, 89

Nelson, 100, 101, 103, 121, 123–125, 134, 137–141, 143, 145, 147, 148, 150–153, 155, 156, 159
Nordon, 95

Quine, 36, 65

Reeb, 96, 97, 119, 120, 123–125, 134, 137, 141, 146–148, 150, 151, 156–160

Salanskis, 10, 67, 99, 150, 159

Thom, 117

Wittgenstein, 121

Bibliographie

[1] David Aubin. Forms of explanation in the catastrophe theory of rené thom : topology, morphogenesis, and the structuralism. In *Growing explanations : Historical perspectives on recent science*, pages 95–130. Duke Univ. Press, 2004.

[2] David Aubin. L'institut des hautes études scientifiques, la théorie des catastrophes et le chaos déterministe : Mathématiques, industrie et politique. *Les mathématiques dans la cité*, pages 129–154, 2006.

[3] Alain Badiou. La subversion infinitesimale. *Cahiers pour l'analyse*, 9 :118–137, 1968.

[4] Mark Balaguer. Fictionalism in the philosophy of mathematics. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, fall 2018 edition, 2018.

[5] Hervé Barreau and Jacques Harthong. La mathématique non standard. *Editions du CNRS, Paris*, 1989.

[6] Éric Benoît. Diffusions discrètes et mécanique stochastique. *Prépublications Université de Nice, Mathématiques*, 1989.

[7] Albert Benveniste, Timothy Bourke, Benoit Caillaud, and Marc Pouzet. Non-standard semantics of hybrid systems modelers. *Journal of Computer and System Sciences*, 78(3) :877–910, 2012.

[8] David Bloor. *Knowledge and social imagery*. University of Chicago Press, 1991.

[9] Georges Bringuier. *Alexandre Grothendieck : Itinéraire d'un mathématicien hors normes*. Privat, Toulouse, 2015.

[10] Sam Buss. Nelson's work on logic and foundations and other reflections on foundations of mathematics. In *Diffusion, quantum theory, and radically elementary mathematics*. Princeton University Press, 2006.

[11] Augustin Louis Cauchy. *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*. Debure, 1821.

[12] Maurice Caveing. *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, volume 3. Presses Univ. Septentrion, 1998.

[13] Stanley Cavell. *Le déclin de la philosophie analytique*. Presses universitaires de France, 1999.

[14] Christiane Chauviré. *Ludwig Wittgenstein*. Seuil, 1989.

[15] Amy Dahan and David Aubin. *Systèmes dynamiques et Chaos : Convergences et recompositions, un aperçu historique*.

[16] A Dahan Dalmedico. Pur versus appliqué ? un point de vue d'historien sur une 'guerre d'images'. *La gazette des mathématiciens*, (80) :31–46, 1999.

[17] Amy Dahan-Dalmedico. *Jacques-Louis Lions, un mathématicien d'exception : entre recherche, industrie et politique*. La découverte, 2005.

[18] Joseph Warren Dauben. *Abraham Robinson : The Creation of Nonstandard Analysis, a Personal and Mathematical Odyssey*. Princeton University Press, 2014.

[19] Stanislas Dehaene. *Le Code de la conscience*. Odile Jacob, 2014.

[20] André Deledicq. Teaching with infinitesimals. In *Nonstandard Analysis in Practice*, pages 225–238. Springer, 1995.

[21] André Deledicq and Marc Diener. *Leçons de calcul infinitésimal*. Armand Colin, 1989.

[22] Jean Delumeau. *Le savant et la foi : des scientifiques s' expriment*. Flammarion, 1989.

[23] Francine Diener and Georges Reeb. *Analyse non standard*. Hermann, 1989.

[24] Jean Dieudonné. Mathématiques vides et mathématiques significatives. *Penser les mathématiques, Seuil*, 1982.

[25] Jean Dieudonné. *Pour l'honneur de l'esprit humain*. Hachette Paris, 1987.

[26] Philippe Douroux. *Alexandre Grothendieck : sur les traces du dernier génie des mathématiques*. Allary Éditions, 2016.

[27] Pierre Duhem. *Sauver les apparences. Sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée, Vrin*. 2004.

[28] Miguel Espinoza. De la science à la philosophie : hommage a jean largeault. 2002.

[29] Willliam Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume 2. John Wiley & Sons, 2008.

[30] Peter Fletcher, Karel Hrbacek, Vladimir Kanovei, Mikhail G Katz, Claude Lobry, and Sam Sanders. Approaches to analysis with infinitesimals following robinson, nelson, and others. *Real Analysis Exchange*, 42(2) :193–252, 2017.

[31] Michel Fliess. Variations sur la notion de contrôlabilité.

[32] Michel Fliess. Analyse non standard du bruit. *Comptes rendus-Mathematique*, 10(342) :797–802, 2006.

[33] Michel Fliess, Cedric Join, and Hebertt Sira-Ramirez. Non-linear estimation is easy. *Int. J. of Modelling*, 4(1) :12–27, 2008.

[34] Aimé Fuchs and Georges Reeb. *Logique*. IRMA, Université de Strasbourg,, 1981.

[35] Jérôme Harmand, Claude Lobry, Alain Rapaport, and Tewfik Sari. *Le chémostat : Théorie mathématique de la culture continue de micro-organismes*, volume 1. ISTE Editions, 2017.

[36] Jacques Harthong. Le moiré. *Advances in Applied Mathematics*, 2(1) :24–75, 1981.

[37] Jacques Harthong. *Etudes sur la mécanique quantique*. Astérisque n°111, Société mathématique de France, 1984.

[38] Jacques Harthong and Georges Reeb. Intuitionnisme 84. In *La mathématique nonstandard, CNRS*, pages 307–329, 1989.

[39] Allyn Jackson. The ihes at forty. *Notices of the American Mathematical Society*, 46(3) :329–337, 1999.

[40] Allyn Jackson. Comme appele du neant–as if summoned from the void : The life of alexandre grothendieck, part ii-the life and mathematics of one of the most influential living twentieth-century mathematicians. *Notices of the American Mathematical Society*, 51(10) :1196–1213, 2004.

[41] Allyn Jackson. Comme appelé du néant—as if summoned from the void : The life of alexandre grothendieck. *Notices of the AMS*, 51(4), 2004.

[42] Alain Jaubert and Jean Marc Lévy-Leblond. *(Auto) critique de la science : textes*. Éditions du Seuil, 1975.

[43] Mikhail G Katz and David Sherry. Leibniz's infinitesimals : Their fictionality, their modern implementations, and their foes from berkeley to russell and beyond. *Erkenntnis*, 78(3) :571–625, 2013.

[44] Olivier Keller. La géométrie des sulbasutras. exemple de géométrie rituelle de l'inde védique : l'agrandissement de l'autel en forme de faucon. *Repères-IREM*, 40, 2000.

[45] Olivier Keller. *L'invention du nombre*. Classiques Garnier, 2016.

[46] Imre Lakatos. Cauchy and the continuum. *The Mathematical Intelligencer*, 1(3) :151–161, 1978.

[47] Jean-Marc Lévy-Leblond. Physique et mathématiques. In *Penser les mathématiques*. Le Seuil.

[48] Jean-Marc Lévy-Leblond. La pierre de touche, la science à l'épreuve. 1996.

[49] Robert Lutz. Rêveries infinitésimales. *Gazette des mathématiciens*, (34) :79–87, 1987.

[50] Robert Lutz and Michel Goze. *Nonstandard Analysis. : A Practical Guide with Applications.*, volume 881. Springer, 1981.

[51] Sylvia Nasar. *A beautiful mind*. Simon and Schuster, 2011.

[52] Edward Nelson. *Dynamical Theories of Brownian Motion*. Princeton University Press, 1967.

[53] Edward Nelson. Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83(6) :1165–1198, 1977.

[54] Edward Nelson. *Quantum fluctuations*, volume Princeton series in physics. Princeton University Press, 1985.

[55] Edward Nelson. *Radically Elementary Probability Theory.(AM-117)*, volume 117. Princeton University Press, 1987.

[56] Edward Nelson. Taking formalism seriously. *The Mathematical Intelligencer*, 15(3) :8–11, 1993.

[57] Edward Nelson. Confessions of an apostate mathematician. *University of Rome*, 1995.

[58] Edward Nelson. Warning signs of a possible collapse of contemporary mathematics. In *Infinity : new research frontiers*. Cambridge University Press, 2011.

[59] Reviel Netz. *The shaping of deduction in Greek mathematics : A study in cognitive history*, volume 51. Cambridge University Press, 2003.

[60] Didier Nordon. *Les mathématiques pures n'existent pas*. Editions Actes Sud, 1981.

[61] Marco Panza and Jean-Michel Salanskis. *L'objectivité mathématique. Platonismes et structures formelles.* Masson. Paris, Milan, Barcelone, 1995.

[62] Frédéric Patras. *La pensée mathématique contemporaine*. Presses universitaires de France, 2001.

[63] Yves Péraire. Théorie relative des ensembles internes. *Osaka Journal of Mathematics*, 29(2) :267–297, 1992.

[64] Henry Poincaré. *La science et l'hypothèse*. Champs Flamarion, 1968.

[65] Yan Pradeau. *Algèbre : Éléments de la vie d'Alexandre Grothendieck*. Editions Allia, 2016.

[66] Abraham Robinson. *Non-standard analysis*. Princeton University Press (réédition), 2016.

[67] Gian-Carlo Rota. Les ambiguïtés de la pensée mathématique. *Gazette des mathématiciens*, 45 :54–64, 1990.

[68] Bogdan Rusu. Une métaphysique fictionnaliste : De vaihinger à whitehead. *Alliage*l, 65, 2009.

[69] Jean-Michel Salanskis. *Le constructivisme non standard*. Presses Univ. Septentrion, 1999.

[70] Jean-Michel Salanskis. *L'herméneutique formelle : l'infini, le continu, l'espace*. Klincksieck, 2013.

[71] Jean-Michel Salanskis and Hourya Sinaceur. *Le labyrinthe du continu*. 1992.

[72] Sam Sanders. To be or not to be constructive, that is not the question. *Indagationes Mathematicae*, 29(1) :313–381, 2018.

[73] Winfried Scharlau. Who is alexander grothendieck ? *Notices of the American Mathematical Society*, pages 930–942, 2008.

[74] Simon Singh and David Rintoul. *Fermat's last theorem*. Fourth Estate London, 1997.

[75] Hans Vaihinger. *La philosophie du comme si.* Préface et traduction de Christophe Bouriau. Philosophia Scientiæ, Kimé, 2013.

[76] Mark Van Atten. Weyl and intuitionistic infinitesimals. *arXiv*, 1803.05014, 2018.

[77] Imme Van den Berg. *Nonstandard asymptotic analysis*, volume 1249. Springer, 2006 (1987).

[78] Imme van den Berg and Victor Neves. *The strength of nonstandard analysis*. Springer, 2007.

[79] Vladimir Voevodsky et al. *Homotopy type theory : Univalent foundations of mathematics*. 2013.

[80] Guy Wallet. Integer calculus on the harthong-reeb line. *Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées*, 9 :517–536, 2008.

[81] Guy Wallet. Choice sequence and nonstandard extension of type theory. *Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées*, 20, 2016.

[82] Jan C Willems. The behavioral approach to open and interconnected systems. *IEEE Control Systems*, 27(6) :46–99, 2007.

[83] Ludwig Wittgenstein. *Remarques sur les fondements des mathématiques*. Gallimard, 1983.

[84] Ludwig Wittgenstein. *Recherches philosophiques*. Gallimard, 2004.

Table des matières

I Préface au manuscrit de Balderoy **7**

II Thèse de Balderoy
Voir document annexé **19**

III Postface **20**

1 Une vision des mathématiques **23**
1.1 Être fictionnaliste sans le savoir. 24
1.2 Une boutade de V. Arnold 42
1.3 Le cahier des charges de la physique 65
1.4 Les mathématiques de l'ingénieur 71
1.5 Deux autres visions des mathématiques 81
1.6 Les mathématiques : une "indiscipline" ? 85

2 Retour sur le manuscrit de Balderoy **88**
2.1 Sur la méthode de Balderoy 89
2.2 Sur l'affaire de la commission des thèses 95
2.3 Le *mythe de la rupture* 105
2.4 Rigueur et philosophies des mathématiques 119
2.5 Un peu plus sur Nelson et Reeb 137

Index **169**

Bibliographie **169**

Annexe

Thèse de Balderoy

T H E S E

présentée à

L'UNIVERSITÉ de MARIPASOULA

pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE
par

Luc BALDEROY

L'ANALYSE NON STANDARD EN FRANCE
1975-1995 : Une dispute avortée

Soutenue le ..... devant la commission d'examen :

M. XXX Président

M. Elisée del Braucoly (directeur de thèse)

MM. XXX Examinateurs.

Remerciements

Sans le Professeur Elisée del Braucoly, mon directeur de thèse, ce travail n'existerait pas.

Jamais phrase de remerciements aussi conventionnelle aura été autant méritée. C'était il y a maintenant presque quatre ans, E.d.B. m'avait demandé de le suivre dans son bureau et je me souviens presque mot pour mot de ses paroles dont on reconnaîtra la vigueur habituelle :

> « Balderoy, vous m'avez demandé un sujet de thèse n'est-ce pas ? Quelle drôle d'idée de vous lancer dans une thèse de philosophie ! Vous aviez une voie toute tracée. Avec votre classement à l'ENSBT [1] suivi de votre brillante maitrise de sciences de la vie et votre non moins brillante thèse en écologie théorique toutes les portes vous étaient ouvertes dans ce domaine. En revanche si vous pensez gagner votre vie dans la philosophie vous trompez lourdement. Ce n'est pas dans notre ordre mendiant que vous ferez fortune. Mais bon, cela ne me regarde pas, si vous voulez crever de faim, c'est votre choix. J'ai réfléchi à ce qui pourrait vous intéresser et je crois que j'ai quelque chose pour vous. Voyez ce petit livre. *Et pourtant ils ne remplissent pas N!* de C. Lobry, obscur professeur d'université de province, publié en 1989 par un encore plus obscur petit éditeur. Il y est question d'un événement microscopique de la vie universitaire : l'opposition d'une commission académique à la soutenance d'une thèse de mathématiques qui prétendait utiliser les infinitésimaux à la Leibniz. Ce livre est une sorte de capharnaüm où s'entassent pêle-mêle un essai de vulgarisation de mathématiques fort abstraites, des considérations sur la vie académique, des portraits vivants de personnages hauts en couleur, des témoignages divers et des considérations narcissiques. L'auteur, très remonté contre ce qu'il appelle les G.I.P., les "Grands Intellectuels Parisiens", y dénonce donc ce refus de soutenance comme un scandale dû, selon lui, au refus de l'intelligentia mathématique d'accepter une nouvelle théorie révolutionnaire : L'Analyse Non Standard. Mon intuition me dit qu'à partir de ce livre, qui est resté très confidentiel, il y a quelque chose à apprendre sur la pratique des mathématiques contemporaines. »

L'intuition était bonne. Mon travail est là pour en témoigner même s'il ne doit

1. Ecole Normale Supérieure de Biologie Théorique de la rue Valette

qu'à des rapporteurs trop indulgents l'honneur d'être présenté devant un jury prestigieux. Mais ma reconnaissance envers E.d.B. va plus loin.

En effet, il pensait au départ qu'à partir de ce livre j'allais découvrir un ensemble de textes reflétant une polémique dont mon travail philosophique serait de découvrir les enjeux cachés et d'en restituer l'importance. Or des textes il n'y en avait pour ainsi dire pas. La "dispute" dont parlait le livre de Lobry avait-elle seulement existé ? Heureusement, comme l'affaire n'était pas très ancienne, une trentaine d'années, il était possible d'interroger des acteurs encore vivants, notamment Paul Duchemin qui a été un proche collaborateur de Lobry. Je l'ai interrogé et il s'est révélé assez bavard ! Il m'a communiqué quelques manuscrits non publiés et a accepté de longs entretiens qui m'ont fourni un des matériaux de base de mon travail. Ma gratitude envers lui est *infiniment grande*.

A partir de ces éléments assez disparates s'est profilée une thèse que je crois pouvoir timidement défendre. Si timidement que sans les encouragements de E.d.B. jamais je n'aurais osé la présenter. A nouveau je me souviens mot pour mot :

> « Qu'est ce que vous me dites Balderoy ! Que vous ne voulez pas soutenir, que votre thèse n'est pas suffisamment étayée, que vous avez des doutes, qu'il faudrait vérifier ceci, cela, et puis ci et puis ça... Qu'est ce que c'est que ces angoisses de midinette ? Vous croyez vous encore au vingtième siècle où une thèse était l'œuvre d'une vie laborieuse de rat de bibliothèque. Vous avez travaillé plus de trois ans, j'ai obtenu en exerçant un petit chantage sur le Directeur de l'École Doctorale une prolongation de six mois à votre bourse de thèse et vous me dites que vous n'êtes pas prêt, que vous voulez encore approfondir, qu'il vous faut encore du temps ! Du temps toujours du temps...
> Vous vous figurez donc qu'un philosophe doit avoir murement réfléchi à tous les arguments possibles de tous les détracteurs imaginables ? Oui, je sais, c'est ce qu'on vous enseigne, mais ce sont des foutaises (sic). Affirmez ce que vous voudrez, ça n'a aucune importance puisque personne ne vous lira sauf, peut être, vos deux rapporteurs que nous choisirons avec soin. Le Directeur de l'École Doctorale ne pourra pas les récuser puisque je serai toujours en mesure d'exercer sur lui ce même petit chantage. Soutenez, Balderoy, soutenez, tout le monde s'en fiche puisque le facteur d'impact des revues de philosophie reste encore la meilleure illustration de ce qu'est un "infinitésimal " en acte. Soutenez, il en restera peut-être quelque chose. »

Me voici donc devant vous, Jury, que, respectueusement, je remercie collecti-

vement.

Avant propos

A l'image de *"Et pourtant ils ne remplissent pas* $\mathbb{N}$ *!*[2] [3] le fil directeur de mon travail n'est pas très clair. A vrai dire il n'en a pas. J'ai pourtant essayé d'en trouver un mais en vain. Le mieux que je sache faire est de commenter tout de suite, et très rapidement, la table des matières [4].

Chapitre 1 : La controverse

Il s'agit d'un bref résumé d'une petite partie du contenu de *"Et pourtant ils ne remplissent pas* $\mathbb{N}$*!* : le refus de présentation d'une thèse de mathématiques jugée insuffisante par la *Commission des Thèses (parisiennes de mathématiques)*. J'examine les questions que posent ce refus et l'accueil fait à [LdL]. J'explique la méthode que j'envisage de suivre pour tenter d'y répondre. En particulier je présente le mathématicien Paul Duchemin qui sera mon référent pour les questions mathématiques.

Chapitre 2 : De la rigueur en mathématiques

Ce deuxième chapitre traite de ce que l'on entend par "rigueur mathématique". On sait que l'idée que se font les mathématiciens de ce qu'est un raisonnement rigoureux a évolué depuis l'antiquité. Il ne s'agit pas de faire l'histoire de la notion de rigueur mais d'expliquer ce qu'elle est actuellement. Pour l'essentiel ce chapitre est constitué d'un texte non publié du professeur Duchemin. J'ai tenu à insérer ce texte intégralement car il explique le titre de [LdL] : *Et pourtant ils ne remplissent pas* $\mathbb{N}$! Ce chapitre peut être lu tout à fait indépendamment du précédent.

2. Claude Lobry, ALEAS éditeur, 15 quai Lassagne Lyon, 1989. Sera cité sous la forme [LdL] (Livre de Lobry) ;[76].

3. Les notes de bas de page bibliographiques comme ci-dessus se terminent par une référence entre [ ] qui renvoie à la bibliographie synthétique en fin de document.

4. Á la fin du manuscrit on trouvera une table des matières plus détaillée.

Chapitre 3 : Communauté et institutions mathématiques

Comme ne l'indique pas son titre il ne s'agit pas d'une description de la communauté mathématique mais simplement d'un ensemble d'informations assez accessibles qui ont un rapport direct avec mon questionnement.

Chapitre 4 : Première conclusion

Je montre que les travaux jugés insuffisants par la *Commission des Thèses* sont maintenant (en 2018) reconnus au plan international comme les travaux fondateurs d'une activité mathématique conséquente. Mais je constate que la dispute qui aurait normalement dû se poursuivre s'arrête peu après la publication de LdL en 1989.

Chapitre 5 : De la philosophie des mathématiciens

Cette fois, comme l'indique son titre, ce chapitre traite effectivement de la philosophie des mathématiciens. La question est de savoir si le rejet de l'A.N.S. pourrait être motivé par un présupposé philosophique sur la nature des mathématiques. En clair, est-ce que la position réaliste qui est la philosophie spontanée de la majorité des mathématiciens conduit à rejeter les méthodes de l'A.N.S. ? Nous verrons qu'il n'en est rien.

Chapitre 6 : De l'usage des mathématiques

Quelle que soit l'idée que s'en font les mathématiciens, que cela leur plaise ou non, les mathématiques sont utilsées dans de nombreuses activités civiles ou militaires. Ce chapitre met en évidence, à côté d'un usage "classique" et bien compris en physique et en sciences de l'ingénieur, un usage particulier qui existe dans des sciences "molles" ou "semi-molles" comme l'écologie ou l'économie : Ce que j'appelle le "roman mathématique".

Chapitre 7 : De l'éthique des mathématiciens

Il est un peu question des problèmes éthiques soulevées par l'usage classique des mathématique mais surtout des questions que posent son usage en tant que "roman". J'expliquerai la distinction que je fais de l'usage instrumental des mathématiques dans diverses activité humaines de son usage idéologique.

Chapitre 8 : Thèse

Il s'agit enfin de l'énoncé de la thèse que je soutiens dans ce travail. Sa défense est très brève.

Annexes

J'y ai rassemblé des références et des notes sur le matériel que j'ai été amené à consulter.

Mes entretiens avec Duchemin sont restitués de mémoire sous la forme d'une succession de "Lui" , "Moi" et quelques notes contextuelles. Ces échanges ont été relus par Duchemin qui accepte de reconnaître tous les propos que je lui attribue. Deux textes non publiés de lui, qu'il m'a communiqués, sont reproduits ici également avec son accord.

Les notes de bas de page sont, sauf mention explicite du contraire, les miennes.

Chapitre 1

La controverse

Sommaire

1.1 L'Affaire Vénissac selon [LdL] 9
1.2 Premiers commentaires sur l'Affaire 14
1.3 Une interrogation au delà de l'Affaire 16
1.4 Questions de méthode 19
1.5 Rencontre n° 1 : Prise de contact avec P. Duchemin 23

Et pourtant ils ne remplissent pas $\mathbb{N}$*!* se présente comme une autobiographie où l'auteur nous explique comment il a découvert l'Analyse Non Standard dans un contexte où la majorité des mathématiciens rejetaient [5] cette méthode. Comme il veut prendre à témoin un large public l'ouvrage fait une grande place à la vulgarisation mathématique. C'est le refus, selon lui injustifié, par une commission universitaire, d'accorder l'autorisation de soutenance à une thèse qui a poussé Lobry à écrire ce livre. C'est cette affaire que je tente de résumer au mieux dans ce chapitre rendu un peu indigeste par de longues mais indispensables citations.

Au début des années 1980 il y avait autour du professeur G. Reeb de l'université de Strasbourg un petit groupe de mathématiciens qui travaillaient sur l'Analyse Non Standard (souvent résumé en A.N.S. dans la suite). Un membre de cette petite communauté avait consciencieusement travaillé, publié quelques articles et enfin rédigé un mémoire de thèse en vue du doctorat d'Etat [6]. Pour diverses raisons la thèse devait être soutenue à Paris. A cette époque la préparation des thèses scientifiques et leur soutenance ne se faisaient pas dans des "Ecoles Doctorales" [7]. Les "thèses" étaient encore le résultat d'un véritable travail de création intellectuelle qui se faisait dans un cadre bureaucratique léger.

Ainsi, les textes de l'époque prévoyaient-ils que c'était simplement au président de l'université d'autoriser la soutenance et de fixer la composition du jury. Bien entendu, les choses ne se passaient pas exactement ainsi. Généralement le directeur de thèse contactait quelques spécialistes de sa connaissance et leur demandait de manière tout à fait informelle si, au cas où ils seraient formellement sollicités, ils accepteraient de participer au Jury et, mieux, de faire un rapport de pré-soutenance sur la valeur des travaux. Les personnes sollicitées pouvaient refuser, accepter sans condition ou, ce qui était le plus souvent le cas, demander des modifications et des améliorations ; par approximations successives un "jury pressenti" se constituait autour du candidat qui déposait sa thèse auprès du président de l'université qui déléguait alors à une commission le soin d'accepter la

5. L'accord du verbe peut, dit-on, se faire avec "majorité" (au singulier) ou avec " les mathé maticiens" (pluriel) ce qui a à voir avec l'axiome de compréhension qui joue un rôle central dans la formalisation de l'A.N.S. : peut-on parler d'un "ensemble" qui serait "la majorité des" ? Si l'on refuse l'existence d'un tel ensemble il faut accorder au pluriel. Qu'on ne prenne pas mon choix comme une prise de position prématurée. Il faut bien choisir un accord.

6. Cette institution ayant disparu je serai conduit à préciser plus tard ce qu'elle représentait alors pour les mathématiciens. En première approximation c'est notre H.D.R. actuelle.

7. Que de plus en plus de voix dénoncent comme n'étant pas autre chose qu'un des instruments de l'exploitation des jeunes scientifiques. [LdL] a été écrit avant 90 à un moment où cette évolution de la recherche scientifique n'était pas flagrante en mathématiques.

soutenance et de confirmer le jury [8].

1.1 L'Affaire Vénissac selon [LdL]

Dans son livre Lobry nous rapporte sur un ton qui se veut provocateur une "affaire" qui l'a manifestement profondément ulcéré. En deux mots il faisait partie d'un "jury pressenti" pour une thèse dont la soutenance a été refusée. J'essaye ici de rapporter cette histoire de la façon la plus neutre possible.

Dans la région parisienne, à cette époque, en mathématiques, il existait une commission informelle, dite *Commission des Thèses (parisiennes de mathématiques)* qui donnait son avis pour toutes les thèses de toutes les Universités de la région parisienne. Jean Vénissac, déposait donc son mémoire et, parallèlement, avec son directeur de thèse A. C..., il sollicitait J. M..., J-P. R... et Lobry pour constituer son jury [9]. Au bout d'un temps anormalement long la *Commission des Thèses* des thèses n'avait toujours pas donné sa réponse ce qui conduisit les membres du "jury pressenti" à s'impliquer dans le processus. Ils envoyèrent donc une première lettre au président de Paris VII.

Le 10 mars 1983,
C.L..., J.M.... et J-P. R...(professeurs)
à Monsieur le président de l'université PARIS VII.

> Monsieur le président,
>
> il vous appartient en tant que président d'université de désigner les jurys de thèses. C'est à ce titre que nous vous écrivons.

8. C'est du moins ainsi que les choses se passaient en mathématiques selon les témoins de l'époque. Cette précision s'impose car l'évolution des pratiques n'est pas simultanée dans tous les champs scientifiques.

9. Lobry dans [LdL] a décidé de ne pas donner les noms des protagonistes : Vénissac est une invention. Il justifie son choix par le fait qu'il ne veut pas qu'on voie dans cette affaire une question de personnes. J'ai décidé de garder ce pseudonyme mais il est très facile de retrouver qui est "Vénissac" à partir des travaux qui seront évoqués dans la suite. Alors autant éviter cette peine au lecteur et donner son nom tout de suite : il s'agit du mathématicien Eric Benoit. Les autres protagonistes sont Alain Chenciner (A. C...), Jean Martinet (J. M...) et Jean-Pierre Ramis (J-P. R...). Par ailleurs je peux garantir la réalité de la correspondance : D'une part j'ai vu les photocopies des originaux et, d'autre part, personne n'a protesté contre leur publication intégrale dans [LdL].

> Nous avons été pressentis pour être membres du jury de la thèse de M. J. Vénissac. Nous avons accepté ; deux d'entre nous ont préparé des rapports à cet effet, l'un est responsable du second sujet.
>
> Nous n'ignorons pas qu'à Paris et dans d'autres universités il est de tradition que le président prenne l'avis d'une "commission des thèses". A cet effet Vénissac a déposé son manuscrit à la fin de l'année dernière et nous venons d'apprendre que le "rapporteur secret" a fait un rapport suffisamment négatif pour que la commission demande l'avis d'un second rapporteur. En ce qui nous concerne, vous pourrez en juger par la lecture des deux rapports ci joints, notre opinion est claire : le travail de Vénissac constitue une excellente thèse d'état. Nous aimerions connaître les arguments du "rapporteur secret" car nous avons tout lieu de penser que ce dernier a commis une erreur de jugement, mais pour le montrer il nous faudrait connaître son rapport. (...)

Le jury pressenti demandait donc que lui soient communiqués les arguments scientifiques qui avaient conduit au rejet du manuscrit de Vénissac. Bien entendu il ne demandait pas le nom du rapporteur ! Suivaient des considérations sur le préjudice que pourrait causer au candidat une erreur d'appréciation et la formule de politesse d'usage. La réponse fut la suivante :

Le 25 mars 1983,
de H. S...
à Messieurs C.L..., J.M.... et J-P. R... Professeurs (...)

> Cher Collègues,
>
> Je vous réponds au nom de la Commission des Thèses à la lettre que vous avez adressée au président de l'université de Paris VII au sujet du fonctionnement de la Commission des Thèses. Cette lettre nous a bien sûr été transmise.(...)
>
> Dans cette lettre, vous soulevez le cas de la thèse de Monsieur J. Vénissac pour laquelle la Commission des Thèses a demandé l'avis d'un deuxième rapporteur à la suite d'un premier rapport qui n'a pas permis à la Commission de prendre une décision définitive.
>
> Vous nous demandez de vous transmettre ce dernier rapport. La Commission a été unanime pour trouver votre demande irrecevable. C'est un principe fon-

> damental du fonctionnement de la Commission que le caractère confidentiel des rapports demandés, ce qui garantit la liberté de jugement du rapporteur. (...)

Cette réponse est proprement stupéfiante ! En effet, la dernière phrase est contraire à tous les usages en vigueur dans la communauté scientifique la plus large. Prenons le cas des publications : les projets d'articles qui sont soumis aux revues sont examinés par des relecteurs *anonymes* - c'est effectivement ainsi que l'on garantit leur indépendance - qui produisent des rapports *qui sont ensuite communiqués aux auteurs* ; plusieurs avis sont sollicités et souvent une correspondance s'installe entre les auteurs et les relecteurs ce qui conduit à une amélioration de l'article. Il n'est pas rare qu'un article publié se termine par : « L'auteur(e) (les auteur(e)s) remercie(ent) le "referee" anonyme qui a, par ses remarques pertinentes, permis une amélioration substantielle du texte initial ». Quand la publication est refusée la décision est motivée. Par principe, les décisions scientifiques procèdent de l'argumentation rationnelle et logique, jamais de l'argument d'autorité. Il est clair qu'une telle réponse ne pouvait que conduire à la réaction suivante :

Le 29 mars 1983,
de C.L..., J.M.... et J-P. R... Professeurs (. . .)
à H. S. . .

> Cher Collègue,
>
> Les arguments exposés dans votre lettre du 25 Mars nous paraissent inacceptables.
>
> L'interprétation que la *Commission des Thèses* donne du caractère confidentiel du rapport "secret" est absolument contraire à toute la déontologie de notre profession. Voici deux exemples : (...)

Suivaient l'exemple des publications dans les revues que je viens de rappeler et l'exemple du fonctionnement du "Comité Consultatif", structure qui décidait à l'époque de la carrière des enseignants de l'université, et ils concluaient :

> Nous insistons donc pour connaître avec précision les arguments du rapport secret (le nom du rapporteur pouvant évidemment rester secret). Si la commission refuse de nous donner satisfaction, nous nous verrons obligés de porter le débat devant la communauté mathématique. (. . .)

Le dossier de [LdL] sur cette affaire contient encore cinq lettres. Je résume les deux suivantes :

— président de la commission à jury : Refus de communiquer le rapport et annonce de la consultation d'un nouvel expert.

— jury à président : Réaffirmation des arguments de la lettre précédente sur un ton plus véhément.

Puis, après un délai important le jury a reçu une lettre du président de la commission qui présente un changement de ton.

Le 24 juin 1983, de H. S... à jury

> Chers Collègues,
>
> La thèse de Vénissac a été soumise à un premier délégué dont le jugement, tout en reconnaissant à la thèse des qualités certaines, n'aboutissait pas à une conclusion jugée suffisamment nette par la Commission. La Commission a donc comme elle le fait, en pareil cas, désigné un second délégué.
>
> Celui-ci a subordonné son accord à la réalisation par le candidat d'un complément de travail pour lequel il donne des directives précises (voir feuilles jointes).
>
> La commission est entièrement liée par le fait que son second délégué ait demandé un complément de travail. En ce qui concerne les suggestions précises faites par le second délégué, la commission les estime intéressantes et souhaite que le candidat en tienne compte ultérieurement par un travail personnel lié ou non à la thèse.
>
> Mais la commission ne subordonne pas une seconde présentation de la thèse par le candidat (présentation qu'elle souhaite prochaine) à la réalisation de ce travail précis. Elle demande simplement un travail complémentaire comportant un résultat nouveau. (...)

On peut considérer qu'il s'agit d'un recul très significatif de la commission. Elle ne se déjuge pas mais elle déroge à cette règle qu'elle avait dit être intangible : « le caractère confidentiel des rapports demandés » et elle communique des arguments scientifiques. De plus, pour qui veut bien lire entre les lignes, le supplément demandé est de pure forme puiqu'elle « (...) demande simplement un travail complémentaire comportant un résultat nouveau ». Plus d'une année s'étant écoulée depuis le début de cette controverse la commission pouvait raisonnablement

penser que le candidat avait travaillé ; il suffisait d'ajouter ce travail. Il s'agissait simplement, pour la commission, de ne pas se déjuger complètement. Voyons maintenant à quoi ressemble cette argumentation scientifique. Extraits du rapport du "délégué".

> (...) In chapter 4 Venissac gives a very nice idea of studying the system :
>
> $$\varepsilon x'' + \Phi(x)x' + \alpha x = b\cos t$$
>
> instead of the usual case $\alpha = \varepsilon$. Such a decoupling of parameters should produce a simplification of proofs involved in some earlier works [11], [22], etc *.
>
> Such a decoupling is also very natural since ε is responsible for the expansion ("Ducks"), α for the shear ; it is these two effects combined with the oscillations given by $b\cos t$ that result in the interesting behaviour of system * ([21], p 18, line 6).
>
> I would feel more justified in giving a positive review to Venissac work if he would further devellop this nice idea. In particular, while it is stated that the analysis should be simpler for α and ε decoupled, such an analysis is not given. Although there is a heuristic description of the formation of a horseshoe and of folding in chapter 4, these phenomena are not given a precise formulation or a rigorous proof. Also, a more complete heuristic description of a similar system has been given in [21], pp. 17-23, with a proof for a certain class of systems. (...)

Bon c'est un peu du Chinois, pas parce que c'est écrit en Anglais, mais parce que ce sont des mathématiques très spécialisées. On comprend quand même que le rapport n'est pas totalement négatif puisqu'il parle de «nice idea» mais qu'il n'est pas totalement satisfait : «I would feel more justified in giving a positive review (...)»

A ce stade on pourrait penser que le recul de la commission était suffisant et que les choses allaient rentrer dans l'ordre. Ça n'a pas été le cas ! Suivent, toujours dans la correspondance rapportée dans [LdL] :

— Une lettre du jury au président de PARIS VII. On peut dire que cette lettre traduit une sainte colère. Le jury affirme, entre autres, l'incompétence partielle du second expert et dénonce les procédés de la commission qu'elle juge malhonnêtes. Je n'en retiendrai que le passage suivant qui est une remarque sur les critiques du rapporteur anglophone :

> (...) L'identité du second rapporteur ressort clairement des extraits de son rapport communiqués au candidat. Il s'agit cette fois sans conteste d'un excellent spécialiste de la théorie qualitative des équations différentielles. Mais il ne semble pas avoir étudié de près les techniques originales [10] utilisées par Vénissac, car son rapport qualifie d'heuristique la démarche de Vénissac dans son dernier chapitre, alors qu'il s'agit d'un plan de démonstration précise et rigoureuse.

— Puis, pour finir, la lettre suivante, du 23 novembre 1983, du président de la *Commission des Thèses* à un membre du jury.

> Cher Collègue,
>
> A la suite d'une lettre de G. R... [11], la Commission des Thèses a demandé, fin septembre 1983, un complément d'information scientifique sur la thèse de J. Vénissac par une personnalité connaissant très bien l'Analyse Non Standard.
>
> Au vu de cette information, il apparaît très clairement que la rédaction du chapitre IV de la thèse laisse fortement à désirer : une thèse doit comporter des démonstrations détaillées et complètes et non pas seulement des plans de démonstration.
>
> La commission juge donc la thèse inacceptable dans son état actuel. Elle demande à nouveau que Vénissac, ou bien fasse une refonte complète du chapitre IV avec des démonstrations plus claires et moins concises conformément au vœu du second rapporteur ou bien qu'il présente un résultat nouveau en remettant à plus tard l'amélioration du chapitre IV. (...)

Pour en terminer avec les faits bruts ajoutons que la thèse a finalement été soutenue peu de temps après dans une université de province. Le candidat et le Jury avaient renoncé.

1.2 Premiers commentaires sur l'Affaire

Je prie encore une fois mes lecteurs de bien vouloir m'excuser pour ces longues citations mais il le fallait pour montrer le côté inouï de ce que j'ai décidé d'appeler l'Affaire Vénissac. J'ai longuement hésité avant d'employer cette expression.

10. Il s'agit bien évidemment de l'usage de l'Analyse Non Standard.
11. Il s'agit de G. Reeb dont il sera abondamment question dans ce travail.

“Affaire” est un mot fort. On pense tout de suite à l’Affaire Dreyfus. Il n’y a évidemment pas de commune mesure mais il y a quand même toutes les apparences d’un scandale. Je dis bien "apparence" car, pour le moment, à part le fait que la correspondance est bien réelle, sa publication et sa contextualisation sont de [LdL] et l’auteur de [LdL] ne saurait être considéré comme impartial. Maintenant explicitons un peu en quoi il semble y avoir scandale.

Certes, le grand public et même la communauté scientifique considèrent souvent que les mathématiciens sont des êtres à part aux pratiques parfois extravagantes. Mais à ce point ! Comment accepter qu’une autorité scientifique apparemment légitime, mais non officielle et dont la composition est secrète [12] refuse de communiquer les arguments scientifiques qui motivent une de ses décisions ? Comment une telle décision peut-elle avoir force de loi dans la région parisienne au point que la thèse a été soutenue en province ? Cette affaire ne se passe-t-elle pas plutôt dans la Russie stalinienne de l’époque Lyssenko et L’Analyse Non Standard serait-elle une science bourgeoise ? Restons sérieux. Une enquête très rapide m’a permis sans difficulté de savoir que G. Reeb, personnage central dans [LdL], est un mathématicien mondialement connu et que trois des soutiens de Vénissac, A. C. . ., J. M. . . et J-P. R. . . déjà connus à l’époque, sont maintenant reconnus et honorés très au delà de nos frontières. Plusieurs personnalités insoupçonnables m’ont confirmé sans hésitation l’exactitude des faits rapportés dans [LdL] mais sans se prononcer sur l’interprétation qu’en faisait Lobry, ce que je ne leur demandais pas d’ailleurs. Nous retenons donc que l’incident rapporté dans [LdL] a bien eu lieu et il semble assez surprenant pour qu’on en recherche une explication.

Une première hypothèse se présente immédiatement à l’esprit. Le groupe auquel appartient Venissac est un groupe ultra marginal composé d’hurluberlus qui font perdre leur temps à la communauté et, dans ce cas, même si son attitude est condamnable, on peut comprendre que la *Commission des Thèses*, agacée, n’ait pas eu envie de discuter et ait essayé de se débarrasser au plus vite de ce problème. Cette hypothèse semble *a priori* peu plausible en raison de la qualité que j’ai rappelée des soutiens de Vénissac mais elle mérite tout de même une petite investigation. En effet, il arrive dans toutes les communautés scientifiques qu’un petit groupe ayant au départ une solide réputation se singularise par des excentricités au point d’être finalement rejeté. On peut penser à l’affaire de la “mémoire de l’eau” ou au “climato-scepticisme” d’un Claude Allègre. Si c’est le cas il n’y a plus vraiment d’affaire Vénissac. Il y a simplement l’existence d’un groupe qui s’est marginalisé et d’une communauté scientifique, représentée ici par la com-

12. Peut-être serait-il plus juste de dire « dont la composition n’est pas publique ».

mission, qui est excédée.

Autre hypothèse, il existe une controverse sérieuse entre deux écoles de pensée sur la façon de faire les mathématiques et la *Commission des Thèses* appartient au camp opposé à celui du jury de Vénissac. Sur ce point, dans le rapport du second "délégué" on lit : « Although there is a heuristic description of the formation of a horseshoe and of folding in chapter IV, these phenomena are not given a precise formulation or a rigorous proof. » à quoi le Jury répond : « (...) Mais il ne semble pas avoir étudié de près les techniques originales [13] utilisées par Vénissac, car son rapport qualifie d'heuristique la démarche de Vénissac dans son dernier chapitre, alors qu'il s'agit d'un plan de démonstration précise et rigoureuse.» Le rapporteur estime que la description du phénomène est heuristique et le jury estime, au contraire, qu'elle est précise, mais que le rapporteur ne la comprend pas faute de connaitre les «techniques originales» utilisées par Vénissac. On sent qu'il y a la une divergence sérieuse sur le style de la rédaction. La rapporteur parle d'absence de preuve rigoureuse ce que le jury admet implicitement en parlant de « plan précis de démonstration ». Un plan de démonstration n'est pas une démonstration, ce que la commission reprend à son compte dans sa dernière correspondance. Finalement le jury est resté sur sa position intransigeante et la thèse a été soutenue en province, en dehors de la juridiction de la commission. Mais peut-être excessivement intransigeante ? En effet, comme nous l'avons déjà remarqué, la commission a quand même fait en grande partie machine arrière. Elle a bien voulu communiquer un extrait de rapport scientifique et puis elle a finalement tendu une énorme perche en demandant un "résultat nouveau". Le jury de Vénissac ne s'est-il pas crispé sur une position manquant de pragmatisme ? Ou bien les enjeux étaient-ils si grands que tout compromis était inacceptable ?

Une partie de ce travail de thèse sera de tenter de trancher entre ces deux hypothèses.

1.3 Une interrogation au delà de l'Affaire

Et pourtant ils ne remplissent pas $\mathbb{N}$*!* tranche fermement en faveur de la seconde hypothèse. Pour [LdL] l'Analyse Non Standard est clairement une révolution scientifique et son propos est provocateur comme on peut en juger à partir du petit échantillon suivant. A propos de la *Commission des Thèses* :

13. Je l'ai déjà dit il s'agit l'usage de l'Analyse Non Standard

> Ce système fonctionnait très bien [14] mais les culturistes Parisiens s'en sont mêlés il y a quelques années. Figurez vous qu'ils découvrirent que des maigrichons accédaient à l'honneur de l'adoubement. Insupportable ! Alors ils inventèrent une commission, relativement secrète, la "Commission des thèses parisiennes " .

ou encore d'un séminaire de mathématiques décrit comme un match de football :

> Conférencier. *Maintenant nous sommes en mesure de poser la question de l'existence d'une cohomologie à valeur dans $\mathbb{Z}$ pour les sous martingales. (...)*
> Un auditeur à l'air décidé (il demande poliment au conférencier s'il peut l'interrompre, ce dernier acquiesce). *Quand vous procédez ainsi vous adoptez un point de vue résolument topologique, mais supposons que l'on fasse l'inverse et que l'on se place du point de vue algébrique.*
> Conférencier (avec un petit sourire qu'il a du mal à dissimuler...) *oui...*
> L'autre. *Donc on laisse tomber la catégorie des fibrés en sphères pour celle des modules faiblement tordus, libres et de type fini, bien entendu...*
> Epais silence dans la salle. On sent le souffle de l'histoire qui suspend le temps, les bouches s'ouvrent chez les auditeurs découragés, le champion local, le petit club de quatrième division va-t-il écraser le Paris-Saint-Germain ? Les mandarins, eux, branlent imperceptiblement la tête.
> L'autre (tel Cyranno à la fin de l'envoi...). ... *alors, j'applique le lemme du serpent.*
> Conférencier. *Non.*
> L'autre. *Non ?*
> Conférencier. *Si* .
> L'autre *Non !*
> Conférencier (d'un ton sec). *On n'a pas le droit dans les modules faiblement tordus,* (hautain) *c'est en exercice dans BOURBAKI* [15].
>
> Ceci clot le bec du champion local ; le ballon a rebondi sur le poteau et est parti en touche, on est passé à côté de l'exploit, mais les dieux n'étaient pas avec nous. L'assistance comprend qu'il ne se passera plus rien, l'équipe vaincue va sombrer dans la déroute.

---

14. Il s'agit du système des thèses pratiqué autrefois avant l'existence de ce type de commission.

15. J'ai eu un peu de mal à comprendre la suite des "non" "non ?" "si" "non !" . Finalement je comprends ce dialogue ainsi :
Conférencier. *Non.*
L'autre. *Non ?* (comment, on n'a pas le droit d'utiliser le lemme du serpent ?)
Conférencier. *Si* . (le conférencier confirme)
L'autre *Non !* (l'autre est désespéré d'avoir fait une intervention qui le ridiculise)

Personne n'est obligé de rire à ce genre d'humour mais la question n'est pas là. Lobry provoque. Et plutôt vigoureusement. Mettre scène l'opposition Paris/Province et la superbe bourbakiste dans le cadre d'une compétition sportive est certainement iconoclaste.

Or il n'y a pas eu de réponse. Une étude soignée montre que la presse spécialisée n'a pas fait écho à ce livre. Plus généralement on n'y trouve pratiquement pas de trace de débats sur l'Analyse Non Standard. Pourtant le livre existe ! L'éditeur consulté nous dit qu'il a été vendu à environ 700 exemplaires, ce qui est assez bien pour ce type de littérature et une maison d'édition aussi confidentielle qu'ALEAS. J'ai vérifié qu'on le trouve dans beaucoup de bibliothèques des laboratoires de mathématiques. A première vue il n'aurait pas été difficile de ridiculiser son auteur sur la forme au moins. La fameuse intelligentsia parisienne qu'il prétend dénoncer ne manque pas de plumes brillantes. Et sur le fond ? Comment imaginer que la présentation de [LdL] de questions de logique et de fondements des mathématiques ne prête pas le flanc à la moindre critique, à la moindre discussion ?

Ce silence, en effet, résonne étrangement avec une affaire plus récente qui a fait un peu plus du bruit, mais pas beaucoup plus. Je pense au rôle éventuel des mathématiques financières dans la crise économique. Les mathématiciens Français sont pionniers dans cette discipline et le provocateur n'était pas n'importe qui : Michel Rocard, interrogé par Françoise Fressoz et Laetitia Van Eeckhout, déclarait dans le "Monde" des 2 et 3 novembre 2008 :

> On reste trop révérencieux à l'égard de l'industrie de la finance et de l'industrie intellectuelle de la science financière. Des professeurs de maths enseignent à leurs étudiants comment faire des coups boursiers. Ce qu'ils font relève, sans qu'ils le sachent, du crime contre l'humanité.

Cette provocation de M. Rocard n'a appelé en réponse que deux ou trois textes de personnalités mathématiques qui ne pouvaient que laisser insatisfait tant ils bottaient en touche. En gros ils refusaient toute responsabilité. Il y eu quelques discussions dans la profession mais pas beaucoup. La communauté mathématique, comme l'armée, serait-elle une "grande muette" elle aussi ?

C'est à cette seconde question que nous nous attellerons quand nous aurons clarifié le statut de l'"affaire Vénissac".

1.4 Questions de méthode

Il existe un débat assez vif, appelé parfois la “guerre des sciences”, entre les tenants d’une science qui découvrirait des vérités objectives et éternelles : les “guerriers de la science”, et les “relativistes” qui tiendraient le discours scientifique comme un discours parmi d’autres porteur de ni plus ni moins de vérité sur le monde que l’astrologie et autres pensées superstitieuses. En particulier, pour les “relativistes” le discours scientifique ne serait que le résultat des conditions sociales de sa production. Ce débat est souvent violent et la plupart du temps chacun y caricature la position de l’autre. Pour caricaturer à mon tour les deux adversaires je dirai que pour un “relativiste” (caricatural) il n’y a pas d’affaire Vénissac. Pour lui, pour qui met sur le même plan les discours d’Albert Einstein et d’Elisabeth Tessier, pour citer deux personnalités que tout le monde connait, il n’y a pas de problème : le Jury de Vénissac parle le “Non Standard”, les membres de la *Commission des Thèses* le “classique” ; ces deux langages sont incommensurables, ils ne peuvent donc pas se comprendre. Pour le “relativiste” ce qui compte c’est d’expliquer comment les “classiques” sont arrivés au pouvoir et comment ils en seront éventuellement chassés. Un “guerrier de la science” (caricatural), de son côté affirmera que la question de savoir si la *Commission des Thèses* avait raison ne peut se trancher que de l’intérieur des mathématiques. Seul un comité d’experts mathématiciens peut, sur la base des textes (donc de la lecture de la thèse), trancher et dire qui avait raison du jury ou de la commission ; le reste, la façon dont les choses se sont passées, n’est qu’une péripétie sans importance.

Pour sortir de ces caricatures on peut dire que les excès sont une mauvaise chose et qu’il y a du bon dans les deux attitudes ; on peut plaider pour un juste milieu. Mais ce ne sera pas mon choix. La position que je veux adopter n’est pas une position entre les deux mais *avec les deux* en assumant dans les deux attitudes ce qu’elles ont de plus fort. J’entends par là qu’un événement scientifique, une découverte ou une controverse, ne peuvent être correctement appréciés que si, d’une part, on les comprend de l’intérieur du discours scientifique et si, d’autre part, on connaît les conditions historiques et sociales qui ont conduit des hommes à s’y intéresser. Cette attitude me semble être le simple bon sens comme le rappelle une image parlante de J-L Gautero [16] à propos de l’"affaire Sokal".

Sokal et Bricmont semblent en fait confondre " construction " et " créa-

16. *Raisonner sans entraves : les enjeux politiques de l’affaire*, Revue Alliage n° 35-36, (1998) ; [65]
`http://www.tribunes.com/tribune/alliage/35-36/03gaut.htm`

> tion arbitraire ex nihilo ". Il s'agit pourtant de deux concepts bien différents : qu'un immeuble soit une construction sociale ne l'empêche pas d'être bâti à l'aide d'un matériau préexistant, tout matériau n'aurait pas également convenu, et toute organisation de ce matériau n'aurait pas fourni des logements vivables ; il existe cependant divers types d'architecture, et il est même possible - et souhaitable - de construire autre chose que des immeubles : pour aller de New-York à Paris, l'utilité d'un immeuble est assez limitée ; et le constater, ce n'est pas dire que le travail de ceux qui ont construit cet immeuble est inutile. Sokal n'a donc pas à avoir peur : dire que la " réalité " physique est une " construction sociale ", ce n'est pas faire de lui l' " Emily Post [17] de la théorie quantique des champs ", c'est faire de lui un simple travailleur (peut-être certes préfère-t-il se voir comme un Grand Prêtre), ce n'est pas dire que la physique ne sert à rien, c'est dire qu'il est permis de se demander si d'autres approches de la réalité n'ont pas la même valeur, voire la même objectivité [18].

Je considère donc qu'il est absolument nécessaire, pour commencer, de se faire une opinion sur la qualité du travail de Vénissac *du point de vue de la science mathématique actuelle* indépendamment de toute considération sociologique. S'il est avéré, trente ans après, que ce travail n'est pas intéressant (ou insuffisant), comme le pensait la commission, l'analyse de la controverse ne sera pas la même que si, inversement il est confirmé qu'il s'agissait d'une contribution significative. C'est seulement une fois ce point éclairci que je pourrai essayer de comprendre pour quelles raisons extra-mathématiques nobles (respect de la rigueur, présupposés philosophiques, attachement aux traditions...) ou crapuleuses (corporatisme, existence de maffias, paresse intellectuelle...) la commission des thèses a agi comme elle l'a fait. Ainsi j'essaye de suivre une méthodologie que D. Nordon, connu comme chroniqueur à la revue *Pour la Science* et pour divers essais, se proposait de suivre dans *Les mathématiques pures n'existent pas* [19]. Je cite dans la préface de son livre :

> Nous allons donc tenter d'étudier les mathématiques [20] d'un point de vue qui ait les surprenantes vertus d'être assez à l'intérieur d'elles, mais pas trop, et en même temps à l'extérieur d'elles, mais pas trop. *Assez à l'intérieur*,

17. Emily Post étant l'auteur d'un manuel américain d'étiquette mondaine.Note de J-L. G.
18. On reconnait chez J-L Gautero le combat de J-M. Levy-Leblond, qu'on pourrait aussi citer ici, pour remettre la science dans la culture qui, lorsqu'il sera gagné, rendra parfaitement vain le discours des guerriers de la science.
19. Editions Actes Sud, 1981, 1993 ; [90]
20. (moi l'affaire Vénissac).

> des mathématiques pour comprendre en quoi certains de leurs projets ou de leurs méthodes sont, bien loin d'être "purs", influencés par la façon de voir de notre société, même si le mathématicien n'en a pas toujours conscience. *Assez à l'extérieur*, pour voir ce que le sens d'une notion mathématique peut avoir comme origine ou comme influence sociales. *Pas trop à l'intérieur*, pour ne pas nous livrer à un discours d'expert. (...)
> *Pas trop à l'extérieur*, enfin, pour ne pas laisser indifférents ceux qui semblent les mieux à même de faire évoluer certaines choses et en tout cas sont les premiers concernés : les mathématiciens.

Poser ce principe : comprendre les choses à la fois du *dedans* et du *dehors*, est plus facile à énoncer qu'à appliquer ! Un relativiste aurait beau jeu de me demander comment je vais faire pour interroger "La Science Mathématique" ? Interroger des mathématiciens c'est certainement possible, mais pour la "Science Mathématique" comment fait-on ? En effet, où trouver ce que dit la "Science Mathématique" sur ce qui nous intéresse, sur l'"affaire Vénissac" ? Ma réponse à cette question est que je considérerai tout consensus largement partagé de mathématiciens comme étant ce que dit la "Science Mathématique" (à un moment donné) et, s'il n'y avait visiblement pas consensus au moment de l'affaire, les choses sont peut être différentes maintenant. Ce qui divisait alors quelques mathématiciens (la commission et le jury) ne pose peut être plus de problème. Plus d'un quart de siècle est un temps assez long. Je peux aussi essayer d'interroger des protagonistes de cette polémique et corroborer ce qu'ils disent avec des sources plus objectives, je pense en particulier aux publications dans les revues de mathématiques.

On pourra contester cette démarche comme étant philosophiquement bien peu rigoureuse ! Ne conviendrait-il pas de commencer par prendre moi même du recul et me plonger dans ce que disent les philosophes des mathématiques ? N'aurais-je pas dû relire (parfois lire pour la première fois !) les quelques grands textes classiques de l'antiquité, puis, plus près de nous de Descartes, de Leibniz, de Pascal qui m'ont été conseillés lors de ma formation ? Relire Poincaré ? Lire tous les penseurs modernes comme Badiou, Bouveresse, Cavailles, Desanti, Hacking, Lautman, Petitot, Quine, Salanskis, Wittgenstein [21] et j'en oublie, dont on sait qu'ils se sont intéressés aux mathématiques ? Bien sûr, mais je n'avais que trois ans devant moi, comme me l'a si bien rappelé E. d. B. ! Ce n'était certainement pas possible en aussi peu de temps.

21. En annexe on trouvera des commentaires sur quelques ouvrages, certains que j'ai lus attentivement et d'autres simplement survolés .

Après quelques recherches sur internet j'ai trouvé le site de Paul Duchemin, ancien professeur de mathématiques à l'Université de Montpellier, qui vient juste de prendre sa retraite et qui a cosigné avec Lobry plusieurs articles où il est question d'A.N.S. J'ai donc décidé d'interroger Duchemin pour commencer. On verrait bien.

e-mail n°1 Balderoy à Duchemin (...)

Monsieur le Professeur,
Je suis doctorant en épistémologie à l'Université de Maripasoula.
Mon Directeur de thèse, le Professeur del Braucolly, me suggère de partir du livre *Et pourtant ils ne remplissent pas* $\mathbb{N}$ *!* de C. Lobry pour aborder le thème de la pratique contemporaine des mathématiques.

J'ai lu ce livre avec intérêt et je crois avoir grosso modo compris ce qu'est l'A.N.S.. Toutefois mon sujet n'est pas de faire une analyse philosophique des fondements de l'A.N.S. Mon sujet, à la limite de la sociologie, est de tenter de comprendre les raisons du rejet de cette nouvelle méthode par la communauté mathématique française des années quatre-vingt.

A la lecture de ce livre j'ai compris, à propos du refus de soutenance de la thèse de Vénissac, que des mathématiciens professionnels pouvaient s'affronter sur la question de savoir si un texte mathématique est rigoureux. Je dois avouer que ni ma formation initiale (j'ai une maitrise de biologie) ni ma formation récente en philosophie ne m'éclairent beaucoup sur la question. Je suis même surpris qu'il puisse y avoir, chez les professionnels des mathématiques, des discussions sur ce qu'est la rigueur.

Ne sachant trop comment m'y prendre pour clarifier ce point je sollicite votre avis. J'ai constaté sur votre site que vous avez été un proche collaborateur de C. Lobry et que vous n'êtes plus en activité. J'espère toutefois que vous avez gardé assez d'intérêt sur ces questions pour m'accorder un peu de votre temps.

Je vous prie de croire.....

e-mail n°2 Duchemin à Balderoy(...)

```
   Cher Monsieur,

La dispute sur l'A.N.S. est bien vieille maintenant ! En trente ans
notre petit monde mathématique à tellement changé ! Ce n'est pas
à une enquête philosophique que vous allez vous livrer. Vous vous
lancez dans de la paléoanthropologie ! Croyez vous qu'il y ait un
sujet de thèse là dedans ? Mais bon, c'est à vous et votre encadrant
d'en juger.

Je ne suis pas Parisien et il est peu probable que je monte de si
tôt dans la capitale d'où partent, me dit-on, des vols pour Maripasoula.
Mais Nice, où j'habite maintenant, ne mérite-t-elle pas à elle seule
le voyage au cas où vous seriez déçu par notre rencontre ? Je suis
retraité, donc assez libre de mon temps. Faites moi des propositions
de date.

Bien cordialement Paul Duchemin.
```

J'ai donc pris rendez-vous. Je passe sur les aspects matériels qui ne nous apprendraient rien.

1.5 Rencontre n° 1 : Prise de contact avec P. Duchemin

La première rencontre s'est assez bien passée. Comme il l'avait laissé entendre dans son e-mail, ma démarche le surprenait.

–**Lui -** La dispute sur le Nonstandard date d'une bonne trentaine d'années maintenant. Le monde mathématique a complètement changé depuis cette époque. L'ordinateur et la révolution qu'il impose aux pratiques mathématiques rendent cette querelle un peu ridicule. Vous devriez vous intéresser à des choses plus modernes que ces vieilleries.
–**Moi -** Cette question de l'A.N.S. est-elle donc complètement réglée ?

–**Lui -** Non, on ne peut pas dire ça, il y a bien encore quelques discussions. Mais sans grande passion. Il y a toujours des détracteurs particulièrement incompétents qui profèrent des âneries mais ils ont peu l'occasion de le faire. Autrement on peut dire que la pratique de l'A.N.S. est tombée dans une indifférence polie.
–**Moi -** Vous le regrettez ?
–**Lui -** Je ne sais pas. D'un côté oui... La passion est un signe de jeunesse. Nous sommes un certain nombre à nous être bien amusés. D'un autre côté il n'est pas désagréable de reconsidérer les choses dans le calme. Avec le recul on gagne en sérieux.
–**Moi -** Mais les travaux contestés par la *Commission des Thèses* ont-ils été validés ? Sont ils reconnus comme corrects ?
–**Lui -** Beaucoup mieux que ça. Non seulement leur exactitude est reconnue mais ils sont le point de départ d'une activité qui se poursuit et qui est très dynamique. Si vous me demandez si la *Commission des Thèses* s'est trompée je vous réponds oui. Sans aucun doute. Notez bien que je ne vous demande pas de me croire sur parole mais je peux vous donner les éléments qui vous convaincront aisément.
–**Moi -** Mais alors c'est une véritable injustice dont ont été victimes Vénissac et plus généralement les partisans de l'A.N.S. Ne convient-il pas de la réparer ?
–**Lui -** N'exagérons rien. Il n'y a pas eu mort d'homme. Quelques petits retards de carrière, ce n'est pas très grave ni très croustillant.

Je retrouvais dans son attitude un peu du ton de [LdL] ce qui n'était pas étonnant de la part de quelqu'un qui avait été très proche de Lobry. Mais en beaucoup moins provocateur. Il a continué.

–**Lui -** Comme je vous disais, il serait certainement intéressant de reprendre calmement toute cette histoire maintenant mais je ne le ferai certainement pas.
–**Moi -** Et pourquoi ?
–**Lui -** Mais parce que je ne travaille plus ! La république m'offre généreusement de quoi vivre très confortablement à ne rien faire. Vous n'imaginez pas que je vais passer à côté de cette chance ! Je suis retraité, croyez moi, j'ai d'autres soucis....

Là j'ai eu l'impression qu'il voulait faire du [LdL] mais ça sonnait si faux que je me suis permis de le contrer directement.

–**Moi -** J'ai du mal à vous croire. Pourquoi alors avoir gardé une page web ? Pourquoi avoir répondu si vite à mon e-mail ? Rien ne vous y obligeait.
–**Lui -** Bon ! Vous marquez un point. Il est vrai que j'ai gardé une passion dérai-

sonnable pour la discussion, alors, si vous voulez discuter nous pourrons discuter. Mais ne m'en demandez pas plus. Pour votre thèse vous vous débrouillez tout seul avec votre encadrant et les autorités. Vous me comprenez ?

J'avais donc gagné une première manche : Il était d'accord pour discuter. Je lui ai expliqué comment je voulais m'y prendre : je délimitais un thème de discussion, je lui posais des questions, il me donnait ses réponses et des éléments pour poursuivre ma propre enquête. Il a été d'accord.

Chapitre 2

De la rigueur en mathématiques

Sommaire

2.1 Rencontre n° 2 : Une histoire de Montgolfière 27

2.2 Rigueur mathématique et A.N.S. (par P. Duchemin) 35

2.2.1 Les “entiers-naïfs” 36

2.2.2 Le besoin des *infinitésimaux* 47

2.2.3 Echapper aux pièges de la langue : La méthode formaliste 52

2.2.4 La théorie des ensembles 55

2.2.5 Mathématiques et théorie des ensembles 59

2.2.6 Peut-on mécaniser les mathématiques ? 61

2.2.7 Les Entiers Naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$ 64

2.2.8 Le système I.S.T. de Nelson 68

2.3 Premières remarques sur la rigueur 69

2.1 Rencontre n° 2 : Une histoire de Montgolfière

Mon objectif, dans cet entretien, était d'avoir avec Duchemin une longue discussion sur la notion de rigueur mathématique en évitant de parler de tout ce qui pourrait se rapporter à l'affaire.
–**Moi -** J'ai deux questions importantes. Je vous pose la première : dans [LdL], l'auteur critique, avec assez peu de nuance je dois dire, le fonctionnement de votre communauté...
–**Lui -** Vous préférez la langue de bois ?
–**Moi -** Non, pas spécialement, mais pas la caricature non plus.
–**Lui -** Bon c'est votre travail de savoir si Lobry caricaturait. Moi je trouve qu'il fait une peinture assez fidèle du milieu que je fréquentais à cette époque. Mais quelle est votre question ?

Ça commençait de manière un peu crispée ! Je me suis appliqué à plus de diplomatie.

–**Moi -** Comprenez moi bien, je ne mets pas en doute ce que dit [LdL], j'ai même un *a priori* favorable. Mais comme vous le remarquez, c'est mon travail de savoir jusqu'à quel point il caricature. J'ai besoin que vous me donniez quelques éléments pour commencer mon enquête, quelques recommandations de lecture, peut être des personnes à interroger. Je voudrais pouvoir donner une image assez fidèle de la communauté mathématique française dans les années soixante-dix et quatre-vingt.

Il a réfléchi quelques temps, puis ....

–**Lui -** Il ne manque pas de documents "officiels" sur les mathématiques et les mathématiciens de cette époque. Vous les trouverez sans peine. Vous les trouverez sur le site du "politburo"...
–**Moi -** ...politburo ?
–**Lui -** Pardon, je veux dire de la Société Mathématique de France (S.M.F.). Excusez cette plaisanterie de mauvais goût. Je trouve qu'à l'époque qui vous intéresse la communauté mathématique française avait un petit côté soviétique. Il y avait une "ligne du parti" qui s'élaborait dans divers lieux plus ou moins officiels dont la S.M.F. Mais vous ne devez pas y accorder d'attention car c'est une vision personnelle que j'émets, je ne sais pas si beaucoup de mes collègues seraient d'accord avec moi. D'autre part ce qui était vrai il y a trente ans ne l'est peut être plus main-

tenant. Donc je répète, vous trouverez des informations sur le site de la S.M.F. et aussi dans la littérature de vulgarisation. Vous n'avez pas besoin de moi pour ça d'autant que, maintenant, avec internet ces recherches sont grandement facilitées. En revanche, moi je vous recommande un petit livre de D. Nordon dont le titre est *Les mathématiques pures n'existent pas* aux éditions Actes Sud ; c'est moins officiel mais certainement plus réaliste [22].
–**Moi -** Ah bon, il est comme [LdL], il critique la communauté ?
–**Lui -** Non, rien à voir avec ce que ce qu'a fait Lobry qui a dit les choses comme il les ressentait sous le coup de l'émotion. Ça lui venait du fond du cœur. Nordon, lui, est objectif. Il interroge les textes, livre des faits ; son livre est un livre sérieux, pas un pamphlet vite écrit comme celui de Lobry. Le livre de Nordon a été accueilli avec beaucoup de froideur et même avec hostilité par la communauté mathématique mais il a été un succès de librairie. Réédité. Vous savez pourquoi ? Grâce à une critique très positive dans le journal "Elle". Ainsi vont les choses !
–**Moi -** Et à part Nordon vous avez un autre conseil ?
–**Lui -** Non, non. Je suis certain que vous trouverez bien sans moi. Et je ne veux surtout pas vous influencer.

Etait-il sincère ou de mauvaise foi ? J'ai estimé inutile de continuer sur ce sujet.

–**Moi -** Ma seconde question a trait aux mathématiques. La commission des thèses dit que le travail de Vénissac n'est pas rigoureux. Le jury prétend le contraire. Comment un non mathématicien comme moi peut-il, sans accepter des arguments d'autorité, se faire une idée correcte sur cette question ? Je sais bien entendu que les philosophes se sont beaucoup intéressés à cette question de la rigueur et en particulier aux fondements logiques des mathématiques. Mais s'agissant d'une querelle interne aux mathématiques ce n'est pas tant l'idée que se font les philosophes de la rigueur mathématique qui compte mais bien celle des mathématiciens contemporains.
–**Lui -** Je crains ne pas savoir répondre à votre question qui, dans le fond, est à peine moins difficile que celle de la nature des mathématiques. Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Un mathématicien contemporain de premier plan, Laurent Lafforgue, dit qu'il est aussi illusoire de prétendre expliquer à un profane ce que font les mathématiciens que vouloir décrire une symphonie avec des mots. Dans [LdL] Lobry a fait un effort pédagogique important pour expliquer ce qu'est

22. On a deviné que j'ai suivi ce conseil puisque je l'ai déjà cité

l'*Analyse Non Standard*, l'objet de la polémique. Je pourrais vous y renvoyer.
–**Moi -** C'est inutile. J'ai lu soigneusement ce livre. J'ai été sensible à son effort de vulgarisation même si je dois avouer que je suis loin d'avoir tout compris. Ça reste très technique pour un non mathématicien.
–**Lui -** Je sais. C'est ce qu'on nous dit souvent quand nous essayons d'expliquer. Mais n'est-ce pas un peu de la paresse de votre part ? Après tout Badiou [23] ce n'est pas particulièrement facile à lire non plus !
–**Moi -** Mais je crois que là n'est pas le vrai problème. Dans [LdL] on met beaucoup de passion à défendre les méthodes de l'A.N.S., on nous dit qu'elles sont rigoureuses et révolutionnaires, mais dans le fond on ne passe pas beaucoup de temps à nous expliquer ce qu'est la rigueur mathématique. Pourriez vous oublier l'A.N.S. un instant et me parler de "rigueur" ? Rien que de la "rigueur "

Son œil s'est mis à pétiller...

–**Lui -** O.K. J'adore expliquer ce que sont les mathématiques et surtout ce qu'elles ne sont pas à mes yeux ! Et tant pis si Lafforgue a raison ; on peut quand même essayer d'expliquer.

Il s'est concentré un moment comme s'il cherchait un angle d'attaque puis il est parti :

–**Lui -** Commençons par une petite histoire que j'aime bien. Notez que je la tiens de Jacques Harthong, un acteur important de la polémique A.N.S.

La scène se passe sur la place d'un petit village de Normandie. Comme souvent en Normandie le ciel est entièrement bouché par des gros nuages noirs et bas. Un homme est assis sur un banc. Soudain, entre deux nuages, apparaît une montgolfière avec trois hommes dans la nacelle. L'un d'eux hurle :
- Où...ù so...ommes nou...ous .... ?
L'homme sur le banc se lève, marche de long en large, se gratte la tête puis, après un long moment, hurle à sont tour aux occupants de la nacelle :
- Vou...ous ê..êtes dans un ba...allo...on....
A quoi les occupants de la nacelle reconnaissent immédiatement que l'homme du

23. Sur le moment je n'ai pas saisi. Je ne savais pas alors qu'A. Badiou que je ne connaissais que comme militant de gauche et philosophe médiatique était aussi un philosophe des mathématiques. J'ai essayé de rattraper cette lacune en lisant plusieurs de ses textes consacrés aux mathématiques. Je peux confirmer : ce n'est souvent pas facile à lire ! Pour les autres textes je ne sais pas, je n'ai pas essayé.

banc est un mathématicien. En effet, il a *longuement réfléchi* avant de fournir une réponse qui est *incontestablement exacte* mais *totalement inutile*.

À cette histoire, avant de la commenter, je voudrais ajouter une boutade. Demandez à deux médecins en quoi consiste la Médecine ; ils seront d'accord pour dire quelque chose du genre :« Il s'agit de soulager la souffrance physique et parfois morale des individus .... » et demandez leur ensuite de porter un diagnostic sur un malade ; il y a peu de chance pour qu'ils soient d'accord. Demandez à deux mathématiciens ce que sont les mathématiques ; ils vont se chamailler indéfiniment ; posez leur une question interne aux mathématiques ; ils *finiront immanquablement par se mettre d'accord*.

Il est remarquable de constater que quand un mathématicien expose une démonstration à un autre mathématicien de talent comparable ce dernier sera amené à lui dire le plus souvent « je ne comprends pas ce point, que veux-tu dire ? ». Exceptionnellement il dira « ce point me semble faux ». Lorsque le résultat a une certaine ampleur c'est une petite communauté de spécialistes qui va en discuter. Il suffit qu'un seul soulève une question pour qu'immédiatement tous les autres y réfléchissent ; la seule règle de décision admise étant celle de l'unanimité [24] ils vont discuter et finir par tomber d'accord que la démonstration est parfaitement claire ou qu'il est parfaitement clair qu'elle est fausse. Il est essentiel de remarquer que si cette unanimité peut être longue à acquérir, elle finit cependant tou-

24. La célèbre histoire de la démonstration de la conjecture de Fermat par A. Wiles, est très instructive à ce sujet. Le physicien et journaliste scientifique S. Singh en a fait un récit passionnant dans *Fermat's last theorem*, Fourth Estate Limited, London, 1997, traduction française *Le dernier théoème de Fermat*, Hachette, 1998 ; [112]. Après 7 ans de travail solitaire Wiles soumet son travail à une revue qui demande à 6 "referees" d'analyser le texte. C'est un des "referees", N. Katz qui parle :

> Je me trouvais à Paris pour l'été, pour travailler à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, et j'emportais l'ensemble des deux cent pages ; le chapitre qui me concernait faisait soixante-dix pages. Quand je fus sur place je décidai que j'avais besoin de fortes compétences techniques et j'insistai donc pour que Luc Illusie, qui se trouvait également à Paris, fît office de co-referee pour ce chapitre. Nous nous rencontrâmes plusieurs fois par semaine cet été là, nous instruisant l'un l'autre à fond pour tenter de comprendre ce chapitre. Nous ne fîmes littéralement rien d'autre que réviser ce manuscrit ligne par ligne pour nous assurer qu'il ne recélait pas d'erreur. Quelques fois, nous nous trouvions déconcertés et tous les jours, parfois deux fois par jour, j'adressai une question à Andrew par internet : Je ne comprends pas ce que vous dites à cette page, ou bien il me semble que cette ligne est erronée. Je recevais d'habitude une réponse le jour même ou le jour suivant qui clarifiait le problème et nous continuions jusqu'au problème suivant.

jours par se produire et ce *quels que soient les présupposés des uns et des autres sur l'essence des mathématiques*. Les présupposés métaphysiques n'interviennent pas dans l'accord sur le fait qu'*on s'est compris*. Maintenant que nous dit de plus la petite histoire du ballon ? On imagine les pensées de l'homme qui réfléchit sur la place de l'église : « voyons... moi, je suis sur la place de l'église de Cerisy la Salle, ce ballon, lui, n'est pas exactement à ma verticale mais est-il exactement à la verticale de l'église ? Difficile à dire... Et puis il bouge ce ballon... En fait la seule chose dont je suis absolument certain c'est que, eux, sont dans un ballon. » D'où la réponse. Par cette gentille auto-dérision les mathématiciens nous rappellent qu'il est difficile d'affirmer des choses qui soient tout à la fois parfaitement claires et certaines et qui, de plus, soient autre chose que des banalités.

–**Moi -** Il me semble effectivement avoir entendu dire que le mathématicien René Thom affirmait :"Tout ce qui est rigoureux est insignifiant". Je comprend mieux ce qu'il voulait dire [25] .

–**Lui -** Oui, bien sur, je sais que Thom a dit quelque chose comme ça. Je peux même vous en dire un peu plus à ce sujet. Un jour, je ne me souviens pas très bien quand, peut être à un repas de thèse, je lui demande : « Que voulez vous dire, au juste, quand vous affirmez, je ne sais plus où : La science est encombrée de choses exactes ?». Il nous a répondu quelque chose dans le genre : « Il existe des milliers de biologistes qui passent un temps considérable à analyser la composition des "pets de lapin" ou, si vous préférez la composition des gaz intestinaux des cobayes. Ils disent incontestablement des choses exactes...». On comprend pourquoi Thom n'avait pas que des amis chez les biologistes ! Mais revenons à ce que je vous dis sur les mathématiques : *En mathématiques on finit toujours par se comprendre.* Je vous demande de bien noter que ce que je suis en train d'affirmer n'est pas une opinion personnelle ou celle d'un groupe dissident plus

25. J'ai vérifié que cet aphorisme ne ressortait pas de la légende urbaine. Il se trouve effectivement dans l'article *La science malgré tout...* de l'*organum* de l' Encyclopedia Universalis (Vol 17, 1968).

> Ainsi donc on voit dans quelle direction va s'infléchir - selon nous - la recherche scientifique. Elle va perdre son aspect technique pour reprendre contact avec la réflexion individuelle, peut être même comme c'est le cas en mathématiques, avec l'esthétique, l'art. Elle y perdra sans doute en certitude. En rigueur. Mais elle y gagnera en importance « humaine ». Qu'on me permette ici une interprétation - toute personnelle - du fameux principe de complémentarité en mécanique quantique, selon lequel on ne peut connaitre simultanément la position et la vitesse d'une particule. Pour moi, le vrai principe de complémentarité, qui domine toute notre activité intellectuelle s'énonce : Tout ce qui est rigoureux est insignifiant.

ou moins important, ni une affirmation provocatrice. C'est tout bonnement un fait empirique que quiconque qui pratique les mathématiques peut constater, dont les exemples abondent, et qu'aucun mathématicien ne contestera [26].

J'ajouterai même que c'est une remarque plutôt banale. C'est pourtant elle que je vous propose de prendre au sérieux, au pied de la lettre et que j'énonce précisément :

Quand on observe l'activité mathématique on constate que :

1. *chaque participant veut être absolument certain qu'il parle bien de la même chose que son interlocuteur,*
2. *chacun essaye de se convaincre et de convaincre les autres qu'il parle bien de quelque chose d'intéressant.*

---

26. J'ai interrogé plusieurs mathématiciens sur ce point. Ils ont confirmé. Mieux que ces témoignages je peux citer un passage d'un texte du grand mathématicien E. Borel sur lequel je suis tombé au hasard de mes lectures.

> Le point sur lequel je m'accorderai le plus volontiers avec Monsieur Hadamard, c'est sur la possibilité même d'un accord ; je ne puis en effet, malgré l'opinion de Poincaré, croire que cet accord puisse être impossible entre mathématiciens, en raison de la différence des natures de leurs esprits ; du moment qu'il s'agit de mathématiques et non de philosophie, le désaccord ne peut provenir que d'un malentendu. Je voudrais essayer d'éclaircir ce malentendu en ...

E. Borel, *L'infini mathématique et la réalité* Revue du Mois, n° 18, p 71–84, (1914) ; [18]
Mais peut être encore plus intéressant encore voici l'opinion d'un mathématicien contemporain Sam Buss trouvée sur le forum FOM (Foundation Of Mathematics)
`https://cs.nyu.edu/pipermail/fom/1999-December/003498.html`. Buss est intéressant pour mon enquête, d'une part parce qu'il est connu et représentatif d'une nouvelle génération de mathématiciens-logiciens-informaticiens et, d'autre part, il a effectué son PhD à Princeton où il a bien connu E. Nelson dont il sera abondamment question dans ce travail.

> One of the distinguishing features of mathematics is the use of proof and of mathematically rigorous reasoning. Especially noteworthy is the fact that mathematicians will nearly always agree on whether a given asserted theorem has been correctly proved. When there are disagreements on whether a proof is correct, mathematicians try to resolve their disagreement by breaking their argument into smaller steps, down to the level of first-order logic if necessary (but not down to the level of set theory.) Lasting disagreements on whether a proof is correct are rare ; on the contrary, they can usually be resolved to *everyone's* satisfaction. I believe that this fact is due directly to the fact that mathematicians are reasoning with methods that are *formalizable in principle* in a first-order system. This makes the notionof mathematical rigor a robust and objective concept.

L.B.

L'ordre est important. Tant que l'accord ne s'est pas réalisé sur le premier point, en principe, on ne se pose pas la question de l'intérêt ; pour un mathématicien tant qu'on ne sait pas clairement de quoi on parle on est hors du champ des mathématiques. Mais le risque de cette parfaite clarté, de cette certitude absolue est bien entendu celui de la vacuité : Il ne sert pas à grand chose d'être sûr de son discours si ce dernier ne parle de rien.
–**Moi -** Qu'entendez vous ici par "chose" ?
–**Lui -** par "chose " ? Que voulez vous dire ?
–**Moi -** Et bien que le concept de "chose" n'est pas évident, que...
–**Lui -** Oh là, là. Vous n'êtes pas philosophe pour rien, vous ! Tout de suite les grandes interrogations ! Quelle est donc la "chose" dont parlent les mathématiques. Vous avez lu Heidegger et moi, en bon petit auditeur de France Culture, j'en ai entendu parler. Essayez d'oublier un peu cette grande question et revenons à "ma chose", ma "petite chose". Dans mes points un et deux vous voyez bien que je n'ai pas appuyé sur le mot "chose". Non seulement je n'ai pas appuyé mais j'ai immédiatement ajouté les adjectifs "même chose" puis "chose intéressante" qui font pour ainsi dire disparaitre toute la charge métaphysique que porte "chose" à lui tout seul. Existe-t-il une réalité mathématique que l'activité des mathématiciens nous dévoile petit à petit, une "chose" dont parlent les mathématiques ? Ce n'est pas du tout le point que je veux évoquer. En effet, sur cette question de la "chose" dont les mathématiques seraient l'objet deux mathématiciens peuvent avoir des avis très divergents. On peut même dire : ont presque toujours des avis divergents. Mais ce n'est pas de "chose" en ce sens dont il est question ici. Ainsi j'aurais pu formuler très différemment comme par exemple : *Quand on observe l'activité mathématique on constate que :*

1. *chaque participant veut être absolument certain qu'il comprend bien ce que veut dire son interlocuteur,*
2. *chacun essaye de se convaincre et de convaincre les autres que ce qu'il dit est intéressant.*

en m'interdisant l'usage de "chose". Mais alors on se déplace sur le terrain du *sens* à cause de l'usage de "comprendre" et ce n'est pas exactement ce que je veux dire dans le point un. Je voudrais que vous preniez le mot "chose" le plus au ras des pâquerettes possible, comme vous l'utilisiez avant d'avoir entendu parler de Heidegger, comme quand vous dites "il y a quelque chose que je ne comprends pas dans la position du patronat sur les retraites" et je vous laisse le soin de trouver une formulation philosophiquement plus acceptable. C'est votre métier après tout.

Je n'ai pas ressenti le besoin de formuler autrement ses propos mais j'y noté une analogie avec ce que disait déjà [LdL] des "entiers naïfs ". Je notais au passage que trente ans étaient passés et que le ton des adeptes de la mathématique de Robinson était plus posé. Lobry aurait probablement dit "la position du Pape sur le préservatif", pas "du patronat sur les retraites". Mais passons. . ..

– **Moi -** Je commence à saisir votre propos. Auriez vous des textes à me recommander ?
–**Lui -** Vous avez parlé de René Thom. Je trouve son petit livre d'entretiens avec Emile Noël, *Prédire n'est pas expliquer*, assez éclairant sur cette question mais, comme je vous le rappelais les mathématiciens étaient à l'époque assez critiques à l'égard de son œuvre non mathématique et vous savez peut être qu'il y a eu de très vives polémiques autour de sa "théorie des catastrophes". Ça n'a rien à voir avec l'A.N.S. mais ça se passe à la même époque. Curieux, non ? Soit dit en passant, si je vous parle de R. Thom ce n'est pas pour vous orienter vers un mathématicien aux idées marginales qui aurait eu de la sympathie pour l'A.N.S.. Au contraire, il était très critique [27]. Vous avez peut être quelque chose à creuser dans cette direction ? Mais comme Thom ne parle pas de façon très concrète de la pratique mathématique je peux aussi vous donner un petit texte de moi que j'avais rédigé pour un public non mathématicien. C'était un peu avant ma retraite. J'avais caressé l'espoir de faire quelques cours devant des philosophes mais ça n'a pas pu se faire. Je vous envoie ce texte par e-mail dès que je l'aurai retrouvé dans les profondeurs de mon disque dur.

J'ai eu envie de lui faire remarquer qu'avec un moteur de recherche ça ne devrait lui prendre que quelques secondes mais je me suis retenu à temps. Peu de temps après Duchemin m'a envoyé un .pdf d'une trentaine de pages que j'ai trouvé plus facile à lire que [LdL] et qui m'a éclairé sur plusieurs points. Pour l'exploiter dans le cadre de ce travail j'aurais besoin d'en faire de très larges citations. Comme il n'est pas long il m'a semblé que le plus simple était encore de le reproduire intégralement [28]. Avec l'accord de l'auteur, bien entendu, et encouragé par E.d.B. !

27. On trouvera en annexe un extrait d'une lettre où il s'exprime clairement sur cette question.
28. Toutes les notes concernant ce texte sont de P. Duchemin.

2.2 Rigueur mathématique et A.N.S. (par P. Duchemin)

L'objet de ce cours est de montrer en quoi l'utilisation d'infinitésimaux en mathématiques est compatible avec les exigences de la rigueur mathématique actuelle.

Depuis la plus haute antiquité les mathématiciens se sont préoccupés de la sureté de leurs raisonnements au point qu'une certitude acquise par la voie d'une démonstration mathématique est réputée inattaquable. On dit « c'est mathématique » pour affirmer une certitude absolue. Arriver à une telle confiance ne s'est pas fait du jour au lendemain. Ainsi dans une conférence [29] le grand mathématicien contemporain Jean Dieudonné [30] évoquait-il " La crise des fondements" au début du siècle dernier mais pour se faire tout de suite rassurant. Je cite :

> Le système qui satisfait actuellement, disons, 95% des mathématiciens au moins, c'est le système bien connu de Zermelo-Fraenkel, arrangé, formalisé (...).

Ce système est également appelé "Théorie des ensembles". C'est ce qu'est ce "système" que nous allons essayer de comprendre.

Avant de poursuivre il faut bien voir que le simple usage de l'expression "crise des fondements" risque de nous fourvoyer. Elle renvoie à l'idée que jusqu'à une certaine date les bases des mathématiques étaient incertaines puis des esprits éclairés s'en sont aperçu et, après une période de flottement, tout est rentré dans l'ordre. Ainsi, après la crise, les bases des mathématiques seraient décrites une fois pour toutes dans une logique absolument sûre qui ne devrait rien aux mathématiques proprement dites. A partir de ces bases on construirait les nombres entiers, les nombres fractionnaires, tout le calcul etc... Dans cette optique les "vérités mathématiques" seraient des vérités absolues, éternelles. Peut être certains mathématiciens nourrissaient-ils encore de tels espoirs au début du siècle dernier mais, avec les célèbres théorèmes dits "de limitation" de Gödel (1931) et l'avènement de la science informatique aujourd'hui, tous reconnaissent l'impossibilité d'un fondement absolu et définitif comme le dit ce passage de l'article de Dieudonné déjà cité :

29. *Mathématiques vides et mathématiques significatives*, dans "Penser les mathématiques", Seuil (1982), pp : 15-38 ; [64]

30. Un des créateurs de Bourbaki.

> Il se peut (...) qu'il y ait autant de systèmes à partir du système central qu'il y a de possibilités, suivant le genre de mathématiciens. Je n'en sais rien. Il n'y a que l'avenir qui puisse le dire.

Nous savons donc depuis Gödel que les mathématiques n'ont pas de fondement absolu et définitif mais il est significatif qu'un demi siècle plus tard une telle terminologie soit encore utilisée.

2.2.1 Les "entiers-naïfs"

Il est probable que le lecteur a déjà entendu parler de la *théorie naïve des ensembles*. Si elle lui a été expliquée par un enseignant peu informé de ces questions de logique il en aura retenu qu'il existe une "vraie" théorie des ensemble, que cette dernière est très technique et difficile, réservée à des spécialistes, et que la théorie "naïve" en est une version édulcorée, moins rigoureuse, crée pour la pratique des mathématiciens non logiciens. Cette vision n'est pas correcte. En réalité la théorie "naïve" préexiste et est nécessaire à la construction de la "vraie" théorie qui, en quelque sorte, ne fait que restituer ce qui existait déjà ! Je devrais donc commencer par parler de la '*théorie naïve des ensembles*' mais je vais procéder autrement, d'une façon qui nous plongera plus rapidement dans l'Analyse Non Standard.

Les "entiers-naïfs" sont l'équivalent des "ensembles-naïfs", en plus facile. Voyons de plus près.

Je sais que vous, lecteur, que vous ayez fait des études scientifiques ou non, vous savez compter :

$$1, 2, 3, ..., 9, ...15, ...etc...$$

Quand je dis « voici trois doigts » et que je vous présente ma main pleine je suis certain que vous répondrez :« Non ! Cinq doigts ! » En revanche si je vous posais la question « Qu'est-ce que "trois" ? Quelle est l'essence de "trois" ? », je ne sais pas ce que serait votre réponse car c'est une vieille interrogation philosophique et chacun a sa petite idée sur la question. Je vous donne la mienne en passant :

"Trois" c'est ce que :

- *trois pommes,*
- *trois doigts,*
- *trois vers de Victor Hugo,*
- *trois bonnes sœurs,*
- *trois oraisons funèbres,*

— *trois théorèmes,*

— *les trois coups de l'horloge,*

— ....

ont de plus immédiatement, de plus évidemment en commun,

mais pas pour tenter de vous convaincre de la pertinence de ma vision. Je n'ouvre pas le débat là dessus. Bien au contraire. En effet, ce que je constate, et qui est essentiel pour ce qui va suivre, est que bien que nous soyons tous susceptibles de dire tout et n'importe quoi sur l'"essence", la "transcendance", la "réalité", l'"immanence", l'"idéalité" de "trois", tous, mis en présence d'un *petit* nombre d'objets, nous répondons tous la même chose : "sept", si c'est sept qu'il faut répondre. Notons que cette faculté humaine ne fonctionne que pour des petits nombres. Si nous avons un sac de billes, si elles sont plus nombreuses que la dizaine, nous sommes incapables, d'un seul coup d'œil, de dire combien il y en a. Il nous faut les "compter". Que voulons nous dire par là ?

Nous savons tous (je vais tout de suite nuancer) par cœur la même récitation :

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix sept,.....

qui a la particularité de ne pas avoir de fin. En même temps que nous prononçons "un" nous retirons une bille du sac, puis nous retirons une nouvelle bille en prononçant "deux", puis une autre en prononçant "trois" et ainsi de suite. Si à "quinze" le sac est vide nous disons : « Il y a quinze billes dans le sac ». C'est ce qu'on appelle savoir compter.

Le fait que nous sachions par cœur une récitation qui ne s'arrête jamais peut étonner, mais pas trop si nous réfléchissons un peu. En fait ce que nous connaissons c'est une règle qui nous dit comment continuer la récitation. Je précise. Nous avons des symboles équivalents à "un", "deux", etc qui sont :

$$un = 1$$

$$deux = 2$$

$$trois = 3$$

$$....$$

$$neuf = 9$$

et grâce à l'astuce qui consiste a noter **zéro** $= 0$ quand il n'y a rien nous savons que :

$$3029$$

se prononce “trois mille vingt neuf” et que le suivant dans la liste est :

3030

et se prononce “trois mille trente”. Toutefois cette “récitation” n’est pas innée. Ce sont nos maîtres et maîtresses d’école qui nous l’ont apprise. Mais qu’en était il donc pour nos ancètres préhistoriques qui n’avaient pas eu la chance d’aller à l’école et qui commençaient à pratiquer le petit commerce ? Ils ne connaissaient pas encore la récitation eux !

Je vais vous proposer une petite histoire de la construction des nombres par nos ancètres préhistoriques. Cette histoire est totalement inventée et je ne sais pas ce qui est sérieusement connu sur ces questions. Cette histoire imaginée n’est là que pour nous aider à élaborer le concept d’ “entier-naïf” qui va jouer un rôle absolument central dans toute la suite.

Donc nos lointains ancètres d’avant l’écriture n’avaient pas appris à l’école comment compter mais ils pouvaient juger du “plus grand” et “plus petit” et donc de l’égalité même pour des gros sacs de billes en utilisant une procédure très sure : *Retirer simultanément une bille de chaque sac jusqu’à ce qu’un d’entre eux soit vide*. Mais comment comparer deux sacs éloignés qu’il n’est pas possible de déplacer ? Alors on a inventé le truc des petits os de mammouth sur lesquels étaient gravés [31] :

“Une barre verticale” : (|)
“Deux barres verticales” : (||)
“Trois barres verticales" : (|||)
“Quatre barres verticales” : (||||)
. . . . . .
“Seize barres verticales” (||||||||||||||||)
“Dix sept barres verticales” (|||||||||||||||||)

et la procédure qui consiste en, même temps qu’on retire une bille du sac, de passer d’un os au suivant [32]. Mais bien entendu ils ne connaissaient pas les noms modernes (“un”, “deux”, “trois”...) qu’on donnerait à ces petits os ; tout au plus devaient-ils avoir des noms pour les quelques premiers. Ce qui importe c’est qu’à tout paquet d’objet pouvait être associé un os précis et qu’ils savaient reconnaitre que tel os avait une barre de plus qu’un autre.

31. J’ai mis une parenthèse de chaque côté pour symboliser l’os de mammouth.
32. Sous d’autres cieux on a inventé des colliers de perles qu’on fait glisser à la manière des billes d’un chapelet.

C'est cette succession ininterrompue, jamais achevée de barres verticales[33] dont la connaissance est partagée par plusieurs milliards d'êtres humains depuis les temps les plus anciens que Georges Reeb (1920 -1993), le mathématicien qui a crée l'école française d'Analyse Non Standard, appelle les **"entiers-naïfs"**. Il y a donc deux choses à bien distinguer. D'une part la suite :

(|)
(||)
(|||)
(||||)
. . . . . .
(||||||||||||||||)
(|||||||||||||||||)

de "paquets de barres" verticales obtenues par l'instruction "pour obtenir le "paquet" suivant *ajouter une barre*" qui est une intuition "naïve", d'autre part, la suite :

$1, 2, 3, 4, ..., 16, 17, ...$

qui n'est pas une suite d'"entiers-naïfs" mais que nous devons interpréter comme une représentation de la précédente dans le système de numération décimale que nous avons appris à l'école. Notons que nous aurions aussi bien pu représenter notre suite d'"entiers-naïfs" dans le système de numération romain (qui est bien moins pratique) :

I, II, III, IV,.....,XVI, XVII

ou dans le système binaire (qui est pratique pour la mécanisation du calcul) :

1, 10, 11, 100,....,10000,10001

Comme nous avons tous un concept d'entier plus ou moins élaboré en tête c'est à dessin que j'écris "entier-naïf" en un seul mot. L' "entier-naïf" n'est pas un entier qui serait de surcroît "naïf", il préexiste à toute forme de système de

33. Bien sur il y a une limite à la longueur des os de mammouth mais pas à l'imagination qui peut toujours se représenter un os un peu plus long avec une barre de plus.

numérotation. En revanche, concevoir un système de numérotation efficace pour représenter la suite des “paquets” de barres procède déjà d’une pensé mathématique élaborée.

En quoi cette suite des “entier-naïfs” est-elle si importante ? Parce que en mathématiques nous voulons absolument “être sûr que nous parlons bien de la même chose” ou encore “être sûr que nous pensons bien la même chose”. C’est bien certainement un vaste problème philosophique que celui de la pensée et du langage. La pensée existe-t-elle en dehors du langage ? Le langage est-il un habillage de la pensée ? N’y a-t-il que du langage ? Il n’est pas question de rentrer ici dans ce débat mais de rappeler l’importance pour le mathématicien de la non ambiguïté. Il voudrait fonder sa science sur des connaissances dont il est absolument certain et dont il veut être sûr que cette certitude soit partagée. Mais encore faut il être certain qu’on parle de la même chose. Regardez le problème que pose un mot comme “rouge” : le moment ou le rouge cesse de l’être pour devenir orange varie avec les individus. C’est pourquoi il est évident qu’un mot comme “rouge" (à moins de lui donner par convention un sens mathématique particulier) ne peut convenir comme point de départ. En revanche je suis *absolument convaincu* que “entier-naïf”, maintenant que j’ai consacré quelques dizaines de lignes à vous expliquer ce que je veux dire, représente dans *votre tête* absolument la même chose que dans *ma tête*. Il me semble d’ailleurs que si nous ne croyons pas au moins à ça nous devons renoncer à toute forme de communication.

Le problème est que, s’il est dépourvu d’ambiguïté, le langage des petites barres sur les os de mammouth n’a pas beaucoup d’usage hors du petit commerce de voisinage préhistorique. Pour arpenter les champs ou faire de l’astronomie il faudra autre chose. C’est ce que nous verrons dans le paragraphe suivant mais pour le moment nous allons essayer de rester dans la peau de notre ancêtre et jouer avec notre système d’os pour voir jusqu’où nous pouvons aller. Le premier jeu qui vient à l’esprit est celui de l’addition :

Si je mets deux os côte à côte, comme ceci :

(|||||) (|||)

quel est l’os qui a le même nombre de barres que les deux os réunis ? Facile, dans ce cas c’est :

(||||||||)

Evidemment ce sera plus difficile avec des os plus “longs” comme :

(||||||||||||||||||||||||||||||) (||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||)

pour lesquels il faudra peut être trouver des procédures mécaniques pour vérifier que le bon os est :

$$(|||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||)$$

Appelons **addition** l'opération qui consiste à trouver l'os qui contient autant de barres que deux os donnés. Tout ça nous donne envie d'écrire :

$$(|||||)+(|||)=(||||||||)$$

Comme ce jeu est utile au petit commerce :

> - si je vais vendre à la ville voisine mon troupeau de $(|||||)$ moutons et celui de mon voisin qui en a $(|||)$ il est utile que je sache que pendant le voyage je devrai nourrir et abreuver $(||||||||)$ moutons -

l'humanité préhistorique va travailler à le perfectionner.

Comme nous l'avons déjà remarqué, l'œil et le cerveau humains sont ainsi faits qu'ils ont du mal à distinguer :

$$(||||||||||||)$$

de

$$(|\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |\ |)$$

En fait, ici, c'est l'os le plus long qui a le moins de marques parce qu'elles y sont moins serrées. On a bien essayé de faire les marques avec beaucoup de soin mais c'était difficile avec un silex. Jusqu'à ce qu'on invente un marquage symbolique des os beaucoup plus facile à distinguer. Par exemple chez un peuple d'Afrique dont j'ai oublié le nom on avait la correspondance :

$(|) \longleftrightarrow (\Delta)$
$(||) \longleftrightarrow (\alpha)$
$(|||) \longleftrightarrow (\Theta)$
$(||||) \longleftrightarrow (\chi)$
$(|||||) \longleftrightarrow (\beta)$
$(||||||) \longleftrightarrow (\bullet)$
$(|||||||) \longleftrightarrow (\Sigma)$
$(||||||||) \longleftrightarrow (\Lambda)$
$(|||||||||) \longleftrightarrow (\in)$

(||||||||||) $\longleftrightarrow$ (ρ)
(|||||||||||) $\longleftrightarrow$ $(\approx)$
(||||||||||||) $\longleftrightarrow$ $(\uparrow)$
(|||||||||||||) $\longleftrightarrow$ $(\clubsuit)$
(||||||||||||||) $\longleftrightarrow$ $(\exists)$
(|||||||||||||||) $\longleftrightarrow$ $(\Re)$
(||||||||||||||||) $\longleftrightarrow$ $(\aleph)$

Cette fois les os étaient très faciles à distinguer et on avait établi la table d'addition :

+	(Δ)	(α)	(Θ)	(χ)	(β)	$(\bullet)$	(Σ)
(Δ)	(α)	(Θ)	(χ)	(β)	$(\bullet)$	(Σ)	(Λ)
(α)	(Θ)	(χ)	(β)	$(\bullet)$	(Σ)	(Λ)	$(\in)$
(Θ)	(χ)	(β)	$(\bullet)$	(Σ)	(Λ)	$(\in)$	(ρ)
(χ)	(β)	$(\bullet)$	(Σ)	(Λ)	$(\in)$	(ρ)	$(\approx)$
(β)	$(\bullet)$	(Σ)	(Λ)	$(\in)$	(ρ)	$(\approx)$	$(\uparrow)$
$(\bullet)$	(Σ)	(Λ)	$(\in)$	(ρ)	$(\approx)$	$(\uparrow)$	$(\clubsuit)$
(Σ)	(Λ)	$(\in)$	(ρ)	$(\approx)$	$(\uparrow)$	$(\clubsuit)$	$(\exists)$

C'était le début des mathématiques financières.

Avec les progrès de la globalisation les troupeaux sont devenus de plus en plus importants et il a fallu trouver des symboles pour des os aussi "gros" que :

(|||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||)

(|||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||)

la somme de ces deux os et ainsi de suite.

Le plus dur était de connaitre sa table des $(\bigoplus)$ (se prononçait "bigoplus" ; pour nous $(\bigoplus) = 100$), c'est à dire toutes les sommes pour tous les os jusqu'à $(\bigoplus)$, ce qui faisait quand même 5050 résultats à mémoriser. Jusqu'à ce qu'on invente la numérotation de position.

Pour cela il a fallu faire un effort important vers l'abstraction. Qu'est ce que le nombre :

2357

Dans le langage moderne. C'est :

7 unités + 5 dizaines + 3 centaines + 2 milliers

Mais il est préférable de dire que les centaines sont des "dizaines de dizaines", les milliers des "dizaines de dizaines de dizaines" soit encore, avec une notation ultra moderne : $10, 10^2, 10^3, 10^4, \ldots$. Dans 2357 on sait que 3 est le nombre des "dizaines de dizaines" parce qu'il est en *troisième position* a partir de la droite. Reste un petit problème, comment représenter :

7 unités + "pas de dizaines" + 3 centaines + 2 milliers ?

Une réponse assez naturelle est de laisser une place vide pour marquer qu'il n'y a rien, soit :

23 7

mais alors on a un problème avec :

"pas d'unités" + 5 dizaines + 3 centaines + 2 milliers ?

pour voir que la première place à droite n'est pas occupée. Et puis il est risqué de laisser un intervalle vide dont la largeur n'est pas bien précise. Il est préférable de laisser "pas de" soit :

7 unités + "pas de dizaines" + 3 centaines + 2 milliers = 23 "pas de"7

Mais ce n'est pas joli. Finalement on a inventé une marque, le 0, pour dire "pas de" et donc :

7 unités + "pas de dizaines" + 3 centaines + 2 milliers =2307

"pas d'unités" + 5 dizaines + 3 centaines + 2 milliers =2350

Ainsi on a introduit un os sans marque, l'os [34] :

$() \longleftrightarrow 0$

34. Les philosophes préhistoriques qui, déjà, s'intéressaient aux mathématiques se sont immédiatement mis à gloser sur ce que pouvait bien être une marque qui est la marque du "rien" et 0 est rapidement devenu l'objet de grandes méditations métaphysiques. Il est remarquable que ces préoccupations n'ont pas du tout touché les mathématiciens.

on a gardé les 9 os :

(|)
(||)
(|||)
(||||)
(|||||)
(||||||)
(|||||||)
(||||||||)
(|||||||||)

et appris ce que représentait :

(||||) (|||||||) () (||)

Avec 10 jeux des 10 os de 0 à 9 vous pouvez représenter n'importe quel nombre de dix chiffres [35], c'est à dire quelque chose d'assez considérable, assez pour chiffrer les pertes causées à la Société Générale par un trader incontrôlé. La grande finance pouvait enfin se développer !

Ainsi, partant d'un concept limpide, celui d'"entier-naïf", en quelques millénaires, nous (l'humanité) avons mis au point un système de notation qui permet de désigner n'importe lequel d'entre eux. Que demander de plus quand on est raisonnable ?

Le problème est que le système décimal ne permet qu'en principe de représenter n'importe quel nombre. L'écriture pourrait en être trop longue. Comment faire pour représenter des très grands nombres ? Il y a des astuces. Par exemple, le nombre :

1 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000

est parfaitement défini par la phrase :

1 suivi de 63 zéros.

On peut perfectionner encore un peu en écrivant :

$$10^{63}$$

35. Vous savez comme moi, parce que vous êtes du XXIe siècle, qu'en réalité deux symboles suffisent : 0 et 1, à condition de les répéter aussi longtemps que nécessaire, pour exprimer n'importe quel nombre. C'est le système "binaire".

qui est la notation exponentielle (qui rappelle que le nombre que nous regardons c'est aussi $10 \times 10 \times ... \times 10$ soixante trois fois de suite). La finitude des feuilles de papier nous oblige à inventer des notations encore plus concises mais qui seront définies de façon précise, sans ambiguïté. Par exemple, dans cette voie, nous avons les notations inventées par D. Knuth. Ainsi le nombre :

$$10^{63}$$

est déjà très grand, mais que dire alors de :

$$10^{(10^{63})}$$

(Les parenthèses indiquent qu'il faut d'abord calculer 10^{63}) c'est un nombre indiciblement grand. Regardez, rien que :

$$10^{(2^{(2^3)})}$$

vaut :
10 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000
000 000 000 000 000
Mais il n'est pas pratique d'écrire toutes ces exponentiations emboitées et c'est pourquoi Knuth propose de noter :

$$a \uparrow\uparrow b \;=\; \underbrace{a^{(a^{(\cdot^{\cdot^{a}})})}}_{b\ fois}$$

Mais nous devons prendre garde à une chose particulièrement importante : *Si nous avons des systèmes de notations qui nous permettent de désigner des entiers de plus en plus grands ces systèmes ne désignent pas tous les nombres, mais une seule petite partie d'entre eux.* Ainsi entre 10^1 et 10^2 il y a 89 nombres qui ne sont pas désignés par cette notation exponentielle, entre 10^2 et 10^3 il y en manque 899, entre 10^3 et 10^4 il en manque 8999 et ainsi de suite. C'est un problème fondamental que nous allons retrouver et qu'il faut commencer à élucider.

Tous les systèmes de notation sont équivalents en ce sens qu'on peut toujours établir une correspondance entre des symboles écrits. Un exemple bien connu est la correspondance alphabet grec $\leftrightarrow$ alphabet romain :

$$a \leftrightarrow \alpha$$

$$b \leftrightarrow \beta$$
$$\ldots.$$

Il n'est pas nécessaire que deux alphabets aient le même nombre d'éléments pour coder l'un dans l'autre. En fait il suffit de deux symboles : 0 et 1 pour coder n'importe quoi. Exemple :

$$a \leftrightarrow 0$$
$$b \leftrightarrow 1$$
$$c \leftrightarrow 10$$
$$d \leftrightarrow 11$$
$$e \leftrightarrow 100$$
$$f \leftrightarrow 101$$
$$\ldots.$$

ce qui fait que "baffe" s'écrit : "1 0 101 101 100". Puisque tous les systèmes d'écriture sont transcriptibles les uns dans les autres choisissons en un famillier : *la langue française*. Les mots de la langue française sont, pour notre discussion présente, tous ceux qui se trouvent dans le "dictionnaire en ligne" qui se trouve à l'adresse « www.le-dictionnaire.com/ » qui possède 95000 mots. Une phrase de la langue française est une succession de mots séparés par des espaces, la réciproque n'est pas vraie puisque toute succession de mots n'est pas forcément une phrase douée de sens. Nous en déduisons qu'il y a moins (en fait beaucoup moins) de 95000^{100} phrases de 100 mots [36]. Comme 95000 est plus petit que $100000 = 10^5$ nous sommes certains qu'il y a moins de 10^{500} phrases de moins de 100 mots de la langue française et donc encore beaucoup moins d'entiers naturels qui peuvent être désignés explicitement par une phrase de cent mots. Hors en moins de 100 mots j'ai été capable de définir un symbole tel que $10^{(10^{500})}$ qui est incroyablement plus grand que 10^{500}. Dit autrement, si nous convenons d'*imaginer* le long d'un axe, de la gauche vers la droite, la succession jamais achevée des entiers "naïfs" si nos systèmes de notations nous permettent d'en désigner qui sont de plus en plus grands la proportion entre tous ceux que nous aurons désignés avant lui et tous ceux qui le précèdent se raréfie inexorablement.

Avant de conclure ce paragraphe penchons nous sur un court extrait d'un texte de H. Poincaré que nous sommes maintenant en mesure d'accueillir avec profit.

36. C'est un exercice assez simple de se convaincre que si vous avez p symboles différents il est possible de former exactement p^n suites de n différentes avec ces p symboles.

> Quel est le plus petit nombre entier qui ne peut pas être défini par une phrase de moins de 100 mots de la langue française ? Et d'abord, ce nombre existe-t-il ?
> *Oui*, car avec cent mots français, on ne peut construire qu'un nombre fini de phrases, puisque le nombre des mots du dictionnaire français est limité. Parmi ces phrases, il y en aura qui n'auront aucun sens ou qui ne définiront aucun nombre entier. Mais chacune d'elle pourra définir *au plus* un seul nombre entier. Le nombre des entiers susceptibles d'être définis de la sorte est donc limité ; par conséquent il y a certainement des entiers qui ne peuvent l'être ; et parmi ces entiers, il y en a certainement un qui est plus petit que tous les autres.
> *Non*, car si cet entier existait, son existence impliquerait contradiction, puisqu'il se trouverait défini par une phrase de moins de cent mots français, à savoir la phrase même qui affirme qu'il ne peut pas l'être.

Je ne vais pas éclairer maintenant ce paradoxe introduit en 1906 par B. Russell (attribué par Russell à Berry) et utilisé dans ses polémiques avec Poincaré. La suite du texte de Poincaré éclairera utilement mais ce sera pour plus tard.

Pour le moment, de cette affaire, je voudrais simplement retenir que ce ne sont pas des spéculations métaphysiques sur l'essence des nombres qui nous ont conduits au paradoxe de Berry. Ce sont des considérations extrêment concrètes de numérotation. C'est en travaillant à faire de notre concept très sur, mais un peu limité, d'"entier-naïf" un outil de calcul efficace que nous sommes tombés sur l'idée de "notation" "définie" dans la langue ordinaire qui immanquablement conduit à un paradoxe. D'où l'idée d'échapper à la langue ordinaire que j'expliciterai dans un paragraphe ultérieur. Maintenant nous allons passer à des nombres qui servent non pas à "compter" mais à "mesurer".

2.2.2 Le besoin des *infinitésimaux*

Mesurer c'est comparer à quelque chose de fixe. Pour ce faire il faut inventer les fractions qui permettent de comprendre ce que veut dire une phrase comme :

> Nous sommes trois frères, notre grand-mère nous a confectionné quatre tartes, nous avons donc chacun
>
> $$\frac{4}{3}$$
>
> de tarte.

C'est ce que nous avons appris à l'école primaire. Un peu plus tard on nous a familiarisés avec les "nombres à virgule " comme :

$$3,02705 = 3 + \frac{0}{10} + \frac{2}{100} + \frac{7}{10000} + \frac{0}{10000} + \frac{5}{100000}$$

qui permet de désigner avec une précision aussi grande que souhaitée le rapport de deux grandeurs. Ces nombres exprimables sous la forme de fractions sont ce qu'on appelle les *nombres rationnels* [37]

Je ne vais pas développer cette histoire importante, connue depuis l'antiquité et que vous avez probablement déjà entendue, au sujet de l'insuffisance des nombres rationnels à satisfaire nos besoins de mesurer. Il s'agit du fait que, d'une part le célèbre théorème de Pythagore nous dit que le carré de la longueur de la diagonale d'un carré de côté unité est égal à 1+1 = 2 et, d'autre part, qu'il n'existe pas de fraction $\frac{p}{q}$ dont le carré serait égal à 2. Ce qui veut dire que notre système de nombres rationnels ne parvient pas à donner une longueur exacte à la diagonale d'un carré (de côté unité), mais donne une longueur exacte, à savoir 5, à l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés 3 et 4 puisque 3x3+4x4 = 5x5. Il serait quand même bon de pouvoir mesurer toutes les diagonales ! Le 19 ème siècle a apporté une réponse jugée satisfaisante par la construction de ce qu'on appelle les *nombres réels*. (Ce sont tous les nombres représentables par un développement décimal éventuellement illimité).
Mais je vais développer un autre aspect de l'insuffisance des nombres rationnels : l'absence d'infinitésimaux.

La mesure des grandeurs physiques est toujours imprécise. C'est comme ça ! Prenez le poids des objets. Vous pouvez avoir une chaîne d'objets $A_0, A_2, \cdots, A_N$ telle que le poids de deux éléments consécutifs soit toujours le même et telle que le poids de A_0 soit strictement plus petit que celui de A_n.

Ça parait bizarre dit comme ça et pourtant. Prenez des grains de sable tous identiques, cubiques (pour faciliter mes calculs) de 0.1mm de côté faits d'un matériau de densité 2,5. Il pèse 2,5 microgramme et il en faut dix milliards pour faire un sac de 25 kg. Imaginez maintenant un premier sac contenant 1 grain de sable, à sa droite un second contenant 2 grains de sable, à sa droite un sac contenant 3 grains de sable et ainsi de suite une succession de sacs contenant à chaque fois un grain de plus que le précédent jusqu'au dix milliardième qui pèsera 25 kg.

37. Un nombre rationnel n'a pas forcément un développement décimal fini ($\frac{1}{3} = 0.666666666\cdots$) mais il "finit" par être périodique comme $\frac{17}{1100} = 0.0154545454\cdots$; un nombre rationnel (une fraction) est donc un peu plus général qu'un "nombre à virgule".

Comparez maintenant le poids de deux sacs consécutifs avec votre balance favorite précise au gramme près. De ses indications vous ne pourrez pas retenir lequel des deux sacs est effectivement le plus lourd (le moindre souffle de l'air environnant fera pencher aléatoirement les plateaux d'un côté ou de l'autre) et vous serez conduit à décider que les deux sacs ont le même poids. Tous ces sacs de poids en apparence égaux deux à deux constituent une chaine qui relie le sac de poids 0 au sac de 25 kg. [38].

Je conçois que ces histoires de grains de sable [39] puissent vous paraitre peu sérieuses, c'est pourquoi je vais faire appel à une autorité incontestable : Richard Feynman. [40] Dans son cours de physique Feynman introduit la notion de vitesse (Mécanique chapitre 8). Après avoir glosé sur la notion de distance parcourue en fonction du temps il continue :

> (...) Nous pouvons voir à partir de cet exemple qu'il y a en fait certaines subtilités à raisonner sur la vitesse.
>
> Afin d'introduire ces subtilités d'une manière plus claire, nous allons vous rappeler une plaisanterie que vous avez déjà sûrement entendue. A l'endroit où la femme dans la voiture est arrêtée par un agent, l'agent vient à elle et dit « Madame, vous rouliez à 100 km à l'heure !» Elle dit : « C'est impossible, Monsieur, je roule depuis 7 minutes. C'est ridicule - comment puis-je faire 100 kilomètres en une heure, alors que je n'ai pas roulé pendant une heure ?

(Cette courte citation où une femme joue le rôle d'une idiote ne plait pas à mes ami(e)s féministes ; attendons la suite pour décider si nous classons Feynman parmi les immondes phallocrates.) Ensuite Feynman nous explique que l'agent veut parler de "vitesse instantanée", celle qui est indiquée par le compteur de vitesse, mais que nous ne pouvons nous contenter de définir la vitesse par ce qu'indique le compteur car la dame pourrait dire *mon compteur de vitesse est cassé. Il n'indiquait rien du tout.* Alors l'agent doit élaborer :

> (...) si vous rouliez pendant une seconde vous auriez parcouru 28 mètres (....)» Elle dit «Oui, mais il n'y a pas de loi interdisant d'aller à 28 mètres par seconde ! Il y a une loi contre les vitesses de 100 kilomètres à l'heure.

après quelques considération supplémentaires Feynman en arrive à dire :

---

38. G. Reeb aimait dire « le fils d'un singe est un singe, le père d'un homme est un homme, il existe pourtant une chaine qui relie le singe à Darwin »
39. ou de singes.
40. R. Feynman(1918-1988), prix Nobel de Physique est célèbre pour son cours de physique de base : les *Feynman Lectures on physics*.

> En d'autres termes on peut trouver la vitesse de la manière suivante : Nous demandons de combien nous nous déplaçons pendant un temps très court ? Nous divisons cette distance par le temps et ceci donne la vitesse. Mais le temps doit être rendu aussi court que possible, le plus court sera le mieux, car des changements peuvent avoir lieu pendant ce temps.(...)
>
> La définition précédente comporte une nouvelle idée, une idée que les Grecs ne possédaient pas sous sa forme générale. Cette idée était de prendre *une distance infinitésimale* et le *temps infinitésimal* correspondant et de former le rapport, et de regarder ce qui arrive à ce rapport lorsque le temps que nous utilisons devient de plus en plus petit.(...) Cette idée fut inventée par Newton et Leibniz, indépendamment, et fut à l'origine d'une nouvelle branche des mathématiques appelé *calcul infinitésimal.*

Feynman a dit "et de regarder ce qui arrive lorsque le temps que nous utilisons est de plus en plus petit". Il fait donc référence à la notion de dérivée, de limite d'un rapport. La vitesse est :

$$\lim_{dt \to 0} \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$

où x(t) est la distance parcourue à l'instant t mais il ne refuserait pas de dire que la vitesse est le nombre obtenu, lorsque dt est *infinitésimal* "infinitésimal" voulant dire que compte tenu de l'imperfection de nos mesures on ne pourra pas distinguer les vitesses obtenues pour deux infinitésimaux différents.

Ainsi nous voyons se dessiner une logique des infinitésimaux, une logique du calcul infinitésimal :

1. Un infinitésimal n'est pas nul, car sinon on ne pourrait pas écrire le rapport

$$\frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$$

2. La somme de deux infinitésimaux est toujours un infinitésimal.
3. "A force" d'ajouter des infinitésimaux on finit par sortir des infinitésimaux. En effet, nous voulons une arithmétique telle que si a est un nombre strictement positif à force d'ajouter a à lui même : $a + a + a + \cdots$ finisse par dépasser n'importe quelle valeur, la valeur 1 en particulier

qui nous conduit tout doucement à un problème sérieux.

— Soit ε un infinitésimal. $1 \times \varepsilon$; $2 \times \varepsilon$; $3 \times \varepsilon$; $\cdots$ sont infinitésimaux en vertu de 1.

— en vertu de 3 ci-dessus $n \times \varepsilon$ finit par atteindre 1 qui n'est pas infinitésimal, donc on sort des infinitésimaux et il existe un n_0 qui est le dernier entier tel que $n_0 \times \varepsilon$ est infinitésimal.

— Mais alors le successeur de n_0, soit (n_0+1), est tel que $(n_0+1) \times \varepsilon$ n'est pas infinitésimal, mais comme $(n_0+1) \times \varepsilon = n_0 \times \varepsilon + \varepsilon$, d'après (2) $(n_0+1) \times \varepsilon$ est infinitésimal ce qui est une contradiction.

Voila qui est fâcheux ! C'est ce qu'on appelle *le paradoxe des infinitésimaux*[41].

Il n'est pas évident de se sortir de cette affaire. Les mathématiciens de l'antiquité grecque avaient rencontré ce problème en voulant calculer des aires et avaient trouvé des solutions fort rigoureuses pour certains cas particuliers. Newton et Leibniz ont élaboré un calcul général efficace mais dont les bases pouvaient être considérées comme fragiles. C'est seulement au 19 ème siècle que ce problème a été *contourné* par l'invention des nombres réels et la notion de limite. Il n'est pas le sujet ici de retracer l'histoire de cette construction associée à l'approfondissement de la notion de rigueur mathématique. En revanche je dois expliquer pourquoi j'ai dit que le problème avait été *contourné* et non *résolu*. Dans les mathématiques actuellement enseignées et pratiquées il n'existe pas de concept d'*infiniment petit*. Pour parler de la continuité d'une fonction $x \mapsto f(x)$ le physicien dira que :

« À un "petit" accroissement δx de la variable correspond un "petit" accroissement Δf de la valeur de la fonction»

Il aura envie de dire que plus δx est petit plus Δf devra être petit, mais il ne le dira pas familier qu'il est des oscillations amorties où, le temps passant, on est de plus en plus près de l'équilibre, mais pas de façon monotone. Mais si cette idée d'évolution au cours du temps des quantités est bien celle que reprend le mathématicien quand il dit :

« La fonction est continue si *lorsque dx tend vers 0* la *valeur* $f(x+dx)$ *tend vers* $f(x)$ »

elle ne règle pas complètement la question car que veut dire *dx tend vers 0* ? On sous entend que dx varie au cours du temps, donc qu'on a affaire à un $dx(t)$ et que quand t varie... on ne peut pas définir la continuité d'une fonction en ayant recours à la variation continue d'une fonction du temps ! Et que vient faire le temps ici ? En fait dans la définition ci-dessus les expressions *dx tend vers 0* et $f(x+dx)$ *tend vers* $f(x)$ n'ont pas de sens l'une sans l'autre. C'est le bloc complet : *lorsque dx tend vers 0* $f(x+dx)$ *tend vers* $f(x)$ qui est défini par l'expression

41. Une version équivalente du paradoxe nous est proposée par l'humoriste Raymond Devos : «rien, c'est rien ; rien+rien c'est encore rien ; rien+rien+rien c'est trois fois rien, mais trois fois rien c'est déjà un petit quelque chose»

bien connue [42] :

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \eta > 0 \text{ tel que : } [\ |dx| < \eta \Longrightarrow |f(x+dx) - f(x)| < \varepsilon\ ]$$

C'est la méthode des ε , η, élaborée au 19 ème siècle, qui se présente comme un jeu : «Donnez moi un ε, sous entendu aussi petit que vous aurez la capacité de l'imaginer (mais positif) je vous trouverai un η strictement positif en dessous duquel l'accroissement sera plus petit que votre ε». Désormais les qualités douteuses de "petit" ou "infiniment petit" sont d'un usage interdit et remplacées par un jeu avec les quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Le problème des infinitésimaux n'a pas été résolu mais bien *contourné* !

Quel rapport avec les *entiers naïfs* ? Pour le moment aucun.

2.2.3 Echapper aux pièges de la langue : La méthode formaliste

Tout le monde sait que pour efficaces qu'aient été les efforts du 19 ème siècle pour mieux assurer la rigueur des raisonnements il restait des points obscurs, délicats, des antinomies dont la plus célèbre est celle de l'ensemble de tous les ensembles qui ne se contiennent pas eux-même, mais qui n'angoissaient pas le commun des mortels (j'entends pas là le mathématicien au travail) qui est rarement confronté à des abstraction d'un tel niveau. En revanche nous avons vu que des questions assez concrètes conduisent très vite au paradoxe de Berry et nous avons vu comment Poincaré l'introduisait. Voyons maintenant ce qu'il en disait (pour la facilité de lecture je reprends toute la citation) :

> Quel est le plus petit nombre entier qui ne peut pas être défini par une phrase de moins de 100 mots de la langue française ? Et d'abord, ce nombre existe-t-il ?
> *Oui*, car avec cent mots français, on ne peut construire qu'un nombre fini de phrases, puisque le nombre des mots du dictionnaire français est limité. Parmi ces phrases, il y en aura qui n'auront aucun sens ou qui ne définiront aucun nombre entier. Mais chacune d'elle pourra définir *au plus* un seul

42. "Bien connue". C'est la première fois que je l'emploie cette expression dans ce texte. Être "bien connu" est très relatif ! Dans les années quatre-vingt on s'attendait à ce qu'un bachelier scientifique ait entendu parler de ce formalisme et l'on exigeait d'un étudiant de mathématiques à bac+1 qu'il le maitrise. J'espère que s'il ne dit (plus) rien au lecteur cela ne l'empêchera pas de continuer. Pour se rassurer il pourra remplacer, quand ils sont présents, les symboles $\forall$ par "pour tout", $\exists$ par "il existe" et $\Longrightarrow$ par "entraine".

> nombre entier. Le nombre des entiers susceptibles d'être définis de la sorte est donc limité ; par conséquent il y a certainement des entiers qui ne peuvent l'être ; et parmi ces entiers, il y en a certainement un qui est plus petit que tous les autres.
> *Non*, car si cet entier existait, son existence impliquerait contradiction, puisqu'il se trouverait défini par une phrase de moins de cent mots français, à savoir la phrase même qui affirme qu'il ne peut pas l'être.
>
> Ce raisonnement repose sur une classification des nombres entiers en deux catégories, ceux qui peuvent être définis par une phrase de moins de cent mots français et ceux qui ne peuvent pas l'être. En posant la question, nous proclamons implicitement que cette classification est immuable et que nous ne commençons à raisonner qu'après l'avoir établie définitivement. Mais cela n'est pas possible. La classification ne pourra être définitive que lorsque nous aurons passé en revue toutes les phrases de moins de cent mots, que nous aurons rejeté celles qui n'ont pas de sens, et que nous aurons fixé définitivement le sens de celles qui en ont un. Mais parmi ces phrases, il y en a qui ne peuvent avoir de sens qu'après que la classification est arrêtée, ce sont celles où il est question de la classification elle-même.(...).

Poincaré met bien en évidence le problème qui est celui de toutes ces sortes d'antinomies : *l'auto référence.* Je suis Crétois et je dis que tous les Crétois sont menteurs. Ce problème a été résolu (peut être devrais-je dire contourné :-)) par la *méthode formaliste* dont je donne une présentation résolument moderne à partir d'un objet qui nous est familier : l'ordinateur.

Un ordinateur exécute de façon mécanique des *instructions* ; les instructions sont écrites dans un langage particulier, dit *langage formel* ou *langage de programmation*. En voici un exemple :

Ce programme calcule le produit des N premiers entiers

1. writeln(' Valeur de N ?') ; demande la valeur de N
2. readln(N) ; enregistre la valeur de N
3. $I \leftarrow 0$; Initialise l'entier courant ; on met dans la mémoire (la flèche) notée I la quantité inscrite à droite.
4. $P \leftarrow 1$; Contient la valeur courante du produit
5. repeat
6. begin

7. $I \leftarrow I + 1$;
8. $P \leftarrow P * I$
9. end
10. until I = N ;
11. Write(' La valeur du produit est ') ; writeln(P) ; Affiche le résultat

Dans ce programme, ce qui est écrit en bleu s'appelle un *commentaire* ; le commentaire est totalement inutile pour que la machine exécute les instructions (*à condition que la syntaxe du programme soit correcte*, nous y reviendrons) mais il est nécessaire pour qu'un programmeur puisse sans trop de difficulté comprendre ce que va faire la machine.

Le programme ci-dessus respecte la syntaxe du langage PASCAL. Il existe un manuel, *naturellement écrit en bleu*, à l'usage du programmeur, qui explique dans la *langue naturelle* du programmeur (en général l'anglais :-)) ce que sont les règles (la syntaxe) que doit respecter un texte écrit en PASCAL. On dit que le PASCAL est la *langue formelle*, que l'anglais est la *meta langue*. Celui qui ne connait pas l'anglais ne peut pas apprendre le PASCAL.

Nous ne voyons absolument rien de très profond ni de métaphysique dans tout ça. Simplement une machine, fabriquée par l'homme, capable de répéter avec une absence d'erreur pratiquement absolue des instructions simples un très grand nombre de fois. J'insiste sur notre certitude que les instructions seront effectuées sans erreur ; pour qu'une erreur se produise il faudrait qu'une salve d'électrons se comporte de travers ce qui est statistiquement impossible. Ne pas confondre avec une machine qui "plante" : il s'agit d'un programme qui ne fait pas ce à quoi nous nous attendons [43].

Revenons à la question de la rigueur en mathématiques. Le gens qui réfléchissent à la correction du raisonnement ont remarqué que nous aimons bien faire des "associations", que nous appelons "ensembles", d'objets qui ont une propriété particulière :

— L'ensemble des nombres pairs (divisibles par 2)

— L'ensemble des nombres premiers (divisibles seulement par 1 et eux mêmes)

— L'ensemble des racines de l'équation $x^2 + 1 = 0$

— L'ensemble des nombres entiers qui ne peuvent pas être définis par une phrase de moins de 100 mots de la langue française ?

43. Par exemple, remplaçons la ligne 10 par «until I < 0» la machine ne s'arrête jamais, où plutôt s'arrête lorsque P devient un entier trop grand pour elle, mais n'affiche pas ce qu'on attend.

Toutefois, s'il est clair que les trois premiers ensembles ne posent pas de problème, nous avons vu que le dernier ne peut pas raisonnablement être accepté. Ne peut-on pas imaginer un *langage formel* assez strict pour nous assurer que ce genre de problème ne se posera pas ? Un langage assez strict pour que, si nous en respectons la syntaxe, nous soyons certains de ne jamais rencontrer d'antinomie, de contradiction. C'est pour répondre à ce souhait qu'est né le système formel (le langage formel) théorie des ensembles Z.F. C.(du nom de ses inventeurs Zermelo et Fraenkel et de l'axiome dit *axiome du choix* qu'il utilise) [44]. Ce système est, comme le langage PASCAL, décrit dans des "documentations", pardon *des livres de logique* [45].
Donnons une idée de la façon dont il se présente.

2.2.4 La théorie des ensembles

L'idée de base de la théorie des ensembles est de tout construire sur une notion première, celle d'ensemble. On considèrera donc un langage formel qui en plus des symboles de la logique $(\ ) = \forall \exists \neg \vee \wedge \cdots$ possède un prédicat à deux places :

$$x \in y$$

qui se lit : *l'ensemble x est un élément de l'ensemble y* et de donner une liste d'axiomes qui réglementent l'usage du symbole $\in$. On a une bonne idée du jeu qui va maintenant se jouer en considérant que la théorie formelle des ensembles est un graphe, c'est à dire un ensemble de points (appelés sommets), notés $x, y, z, \cdots$, reliés par des flèches, la présence d'une flèche de x vers y ayant la même signification que $x \in y$. Les axiomes, que je ne vais pas tous décrire nous donnent quelques informations de base sur la structure de ce graphe et comment le construire de proche en proche.

— **Axiome 1** (axiome d'extensionnalité). $\forall x\ (x \in a \Leftrightarrow x \in b) \Longrightarrow a = b$ qui dit qu'il ne peut pas y avoir d'ensembles identiques de flèches qui aboutissent sur deux sommets différents.

44. Tout ça ne s'est pas fait du jour au lendemain mais a pris un bon siècle. Je donne le résultat final !

45. Dans mon cas j'ai appris dans le livre de J-L. Krivine *Théorie axiomatique des ensembles*, Presses Universitaires de France, Paris, 1969 ; [67]. On pourra également consulter du même auteur une version à l'usage des étudiants de licence de mathématiques disponible en ligne :
`http://www.logique.jussieu.fr/~sami/Ensembles_L3/Krivine%20JL%20-%20LTA.pdf`
que j'utilise pour mon exposé.

— **Axiome 2** (axiome de compréhension). Etant donné un ensemble a et une propriété P portant sur les ensembles il existe un unique ensemble b dont les éléments sont ceux, parmi les éléments de a, qui ont la propriété P. On note :

$$b = \{x \in a : P(x)\}$$

qui se lit b est l'ensemble des x de a qui possèdent la propriété P.

Cet axiome est celui qui permet de donner le statut d'ensemble à tous les éléments d'un ensemble donné à priori qui satisfont une propriété donnée. Il est important de remarquer ici qu'il n'est pas possible de donner le statut d'ensemble à la collection de tous les ensembles qui satisfont une propriété donnée car si c'était le cas on pourrait parler de :

$$b = \{x : x \notin x\}$$

qui est contradictoire. En effet, si $b \in b$ alors $b \notin b$ et si $b \notin b$ alors $b \in b$. (C'est le paradoxe de Russell). Mais plus important encore est de bien comprendre ce que veut dire "une propriété" P dans le cadre d'une théorie formelle. Dans l'exemple précédent la propriété P qui porte sur l'ensemble x est $x \notin x$. Cette écriture ne fait apparaitre que la lettre x et le symbole $\in$. On conçoit qu'une "propriété" ne peut pas être n'importe quoi. Il n'y aurait pas de sens à parler des ensembles "rouges" ou encore "qui pèsent 10 grammes". Une propriété est un assemblage de lettres et de symboles autorisés $(\ )\ =\ \forall\ \exists\ \neg\ \vee\ \wedge\ \in$ qui respectent des règles d'écriture comme dans n'importe quelle langue et c'est pour ça qu'on parlera du langage, $\mathscr{L}$, de la théorie des ensembles. Par exemple $\forall x(x \in a \Rightarrow x \in b)$ (qui se comprend a est inclus dans b)[46] est autorisé mais $x(y\forall\ \in z))(p)$ ne l'est pas. Il n'est pas très difficile de décrire la syntaxe du langage $\mathscr{L}$ (ce qu'il est autorisé d'écrire dans $\mathscr{L}$) mais c'est un petit peu long (et ennuyeux) et n'apporte rien à ce qui nous intéresse. En revanche il est important de bien comprendre que si nous introduisons un nouveau symbole *qui n'est pas un substitut d'un assemblage donné*, comme par exemple st, et les règles de sa manipulation nous aurons un langage $\mathscr{L}'$ plus riche que $\mathscr{L}$ en ce sens qu'un assemblage de $\mathscr{L}$ sera un assemblage de $\mathscr{L}'$ mais,

46. On remarquera au passage que le symbole $\Rightarrow$ n'est pas dans la liste. Qu'est-ce à dire ? Simplement qu'au fur et à mesure du travail de développement d'un système formel on introduit, pour simplifier les écritures, des nouveaux symboles qui représentent des assemblages particuliers. Ici on a introduit $\Rightarrow$ qui remplace $\neg a \vee b$. Il faut faire très attention à ne pas confondre les symboles, qui sont des signes inscrits sur le papier et rien d'autre, avec leur verbalisation qui induit un sens. Ainsi les inscriptions $\Rightarrow$ et $\neg a \vee b$ sont réputées identiques mais "a implique b" ne dit pas exactement la même chose que "non a ou b". Donner du sens au texte formel est nécessaire pour qu'une intelligence humaine puisse le suivre et le mémoriser mais peut nuire au respect de la syntaxe.

en revanche, qu'un assemblage de $\mathscr{L}'$ qui comporte au moins une fois une occurence du nouveau symbole st ne peut pas être considéré comme un assemblage de $\mathscr{L}$. On dit que $\mathscr{L}'$ est une *extension* de $\mathscr{L}$.

De l'axiome 2 nous déduisons l'existence d'un unique ensemble unique noté $\emptyset$:

$$\emptyset = \{x \in a : x \neq x\}$$

l'ensemble vide. Pour échapper au vertige métaphysique que procure le fait de "dénoter" ce qui n'est rien on pensera à l'image du graphe. C'est simplement un sommet où il n'arrive aucune flèche.

Je saute des axiomes :

— **Axiome 3** (axiome de la paire) a et b étant des ensembles, il existe un ensemble qui a comme éléments a, b et eux seulement. On le note a, b

— **Axiome 4** (axiome de la réunion)

— **Axiome 5** (axiome de l'ensemble des parties)

qui permettent de construire de proche en proche des ensembles de plus en plus compliqués comme $x \cup \{x\}$ qui est l'ensemble dont les éléments sont exactement ceux de x et x lui même pour arriver à l'axiome de l'infini :

— **Axiome 6** (dit axiome de l'infini) Il existe un ensemble A tel que $\emptyset \in A$ et si $x \in A$ alors $x \cup \{x\} \in A$.

qui permet de montrer l'existence d'un unique ensemble $\mathbb{N}$ qui possède les propriété suivantes. Sur $\mathbb{N}$ est défini une relation d'ordre $x\mathscr{R}y$ (qui se lit x est inférieur ou égal à y) telle que :

1. Toute partie non vide possède un plus petit élément et en particulier $\exists 0\ \forall x \in \mathbb{N} : 0\mathscr{R}x$
2. Tout élément x de $\mathbb{N}$ possède un successeur Sx (le successeur Sx est tel que $x\mathscr{R}Sx$ et pour tout y tel que $x\mathscr{R}y$ alors $Sx\mathscr{R}y$
3. Tout élément, sauf 0 possède un prédécesseur (pour tout $x \neq 0$ il existe y tel que $Sy = x$)
4. **Théorème d'induction** Si P est une propriété telle que :
   — P(0) est vraie.
   — pour tout n de $\mathbb{N}$ si $P(n)$ est vraie il en est de même de $P(Sn)$

   alors P est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

Le théorème d'induction se dit aussi : Si E est un sous ensemble de $\mathbb{N}$ tel que :

— $0 \in E$

— pour tout n de $\mathbb{N}$ si $n \in E$ alors $Sn \in E$

alors $E = \mathbb{N}$ (ici la propriété est : $P(x)$ *est vraie si* $x \in E$).

Cet ensemble s'appelle *ensemble des entiers naturels* et c'est de lui dont il est question dans le slogan de Reeb : *Les entiers naïfs ne remplissent pas* $\mathbb{N}$.

À partir de maintenant nous pouvons compter (au sens de la théorie des ensembles). Compter un ensemble A c'est établir une application injective[47] f de l'ensemble des prédécesseurs d'un nombre noté $[0, \cdots, n]$ dans A . Il semble intuitif que si A est un ensemble infini alors il existe une application injective f de $\mathbb{N}$ tout entier dans A, mais ceci ne peut être démontré formellement qu'en rajoutant un axiome appelé axiome du choix. Il peut s'énoncer :

— **Axiome 7** (Axiome du choix). Pour toute famille (A_i) $i \in I$ d'ensembles non vides, il existe une fonction f de domaine I telle que $f(i) \in A_i$ pour tout $i \in I$.

Pour finir deux mots nécessaires sur la *consistance* et la *complétude* d'un système formel. La consistance c'est le fait, dans un système formel, de ne pas pouvoir démontrer à la fois une proposition et sa négation. C'est la moindre des exigences ! Un peu plus subtil le désir de complétude. Un système formel fonctionne dans un monde où il existe des vérités préalables à sa construction et dont il essaye de rendre compte. Ainsi il se peut qu'une propriété énoncée dans le système formel soit connue pour vraie mais ne puisse pas être démontrée. Un système formel est complet s'il n'en est pas ainsi : toute propriété vraie doit pouvoir être démontrée. Il existe des systèmes formels consistants et complets mais malheureusement ils sont trop pauvres pour qu'on puisse y faire de l'arithmétique et K. Gödel a démontré en 1931 que pour tout système formel assez puissant pour décrire les entiers :

— s'il est consistant alors il ne peut pas être complet,

— s'il est consistant, sa consistance ne peut être démontrée à l'intérieur du système.

Sur ces résultats il a été beaucoup glosé. Le lecteur en a certainement entendu parler. Il y aurait beaucoup à dire sur ce sujet mais je ne le ferai pas car là aussi il n'y a pas d'interférence avec la question de la rigueur et de l'Analyse Non Standard.

47. Telle que $n_1 \neq n_2 \Rightarrow f(n_1) \neq f(n_2)$

Les mathématiciens auraient bien aimé pouvoir se référer à un système formel consistant et complet. Avant Gödel ils pensaient qu'ils y arriveraient, ils savent maintenant que ce n'est pas possible mais ça ne les perturbe pas vraiment. A ce jour personne n'a trouvé de contradiction dans Z.F.C. et s'il s'en trouvait une un jour tout le monde est bien convaincu que ça ne remettrait pas en cause toute les mathématiques [48]. Tout au plus quelques ajustements seraient-ils nécessaires. Est-ce à dire que les mathématiciens seraient prêts à accueillir n'importe quel système formel pourvu qu'il ne soit pas trop visiblement inconsistant ? Certainement pas. La confiance, pour un système formel, ça se mérite et pour toutes sortes de raisons les mathématiciens pensent dans leur immense majorité qu'on peut faire confiance à Z.F.C. Mais il y a un "truc" qui permet d'élargir facilement la classe des systèmes en qui on a confiance : c'est démontrer la *consistance relative* à Z.F.C. On dira d'un système $\mathscr{S}$ qu'il est relativement consistant à Z.F.C. s'il est démontré que l'existence d'une contradiction dans $\mathscr{S}$ entraine automatiquement l'existence d'une contradiction dans Z.F.C. En d'autres termes le système $\mathscr{S}$ tient au moins aussi bien la route que Z.F.C.

2.2.5 Mathématiques et théorie des ensembles

La grande différence différence entre la langue naturelle et une langue formelle est la souplesse de la première par rapport à la rigidité de la seconde. Un texte dans une langue naturelle peur être résumé, dégradé sans perdre tout son sens. La langue naturelle tolère des sous entendus, des non-dits. Ainsi la phrase :

> Parce qu'il était chauve, qu'il pleuvait et qu'il n'aimait pas la sensation des gouttes sur sa peau lisse, l'homme ouvrit un parapluie et partit acheter du pain à la boulangerie.

peut se raccourcir en :

> Il pleuvait. L'homme ouvrit un parapluie et partit acheter du pain.

Toute l'information contenue dans la phrase initiale n'est pas perdue. Ce n'est pas le cas pour un langage formel. Prenez un programme d'ordinateur qui marche,

48. Sur cette question une petite anecdote. Le grand mathématicien E. Nelson (1932-2014), créateur du formalisme I.S.T. dont nous allons parler, a pensé tenir une preuve de l'inconsistance logique de l'arithmétique de Péano et l'a annoncé publiquement en 2011 sous la forme d'un "work in progress" mis en ligne. Un autre très grand, mais jeune mathématicien, T. Tao (1975 –), a trouvé une faille dans la démonstration de Nelson qui a retiré son texte. Ceci pour dire qu'il existe encore de nos jours, et chez les plus grands mathématiciens actifs, des réflexions sur la nature du travail mathématique.

supprimez un seul point-virgule qui annonce la fin d'une instruction, il ne fonctionnera plus ! De la même manière il n'existe pas de formalisation mathématique dégradée. Un texte n'est pas plus ou moins formel, il est formel ou il n'est pas formel. Cette absence de souplesse est le prix à payer pour l'absence d'ambiguïté !

Mais alors le problème avec les textes formels est qu'ils sont très longs. Bien trop longs pour être réellement écrits dès qu'il est question de faire une démonstration mathématique un peu substantielle. La *formalisation des mathématiques* dans Z.F.C. n'est matériellement pas possible, elle n'est que potentielle. Alors à quoi cela sert-il ? Bourbaki nous l'explique de façon lumineuse dans l'introduction du livre "Théorie des ensembles" [49].

> En fait le mathématicien qui désire s'assurer de la parfaite correction, ou comme on dit de la "rigueur " d'une démonstration ou d'une théorie, ne recourt guère à l'une des formalisations complètes dont on dispose aujourd'hui ni même le plus souvent aux formalisations partielles et incomplètes fournies par le calcul algébrique et d'autres similaires ; il se contente en général d'emmener l'exposé à ce point où son expérience et son flair de mathématicien lui enseignent que la traduction en langage formalisé ne serait plus qu'un exercice de patience (sans doute fort pénible). Si, comme il arrive mainte et mainte fois, des doutes viennent à s'élever, c'est en définitive sur la possibilité d'aboutir sans ambiguïté à une telle formalisation qu'ils portent, soit qu'un même mot ait été employé en des sens différents suivant le contexte, soit que les règles de la syntaxe aient été violées par l'emploi inconscient de modes de raisonnement non spécifiquement autorisés par elle, soit encore qu'une erreur matérielle ait été commise. Ce dernier cas mis à part le redressement se fait tôt ou tard par la rédaction de textes se rapprochant de plus en plus d'un texte formalisé, jusqu'à ce que, de l'avis général des mathématiciens, il soit devenu superflu de pousser ce travail plus loin ; autrement dit c'est par comparaison, plus ou moins explicite, avec les règles d'un langage formalisé, que se fait l'essai de la correction d'un texte mathématique.
>
> La méthode axiomatique [50] n'est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à concevoir.

Ce texte laisse entendre qu'il existe divers systèmes de formalisation possibles, ce qui est exact, mais ce qu'il ne dit pas c'est que l'immense majorité des textes mathématiques (Dieudonné dirait 95% mais je pense qu'il sous estime, moi je dirais 99%) se réfèrent implicitement (rarement explicitement) à un même langage

49. Bourbaki, Nicolas, *Théorie des ensembles*, Springer (2006) ; [22].
50. Synonyme chez Bourbaki de méthode formaliste.

formel, la théorie Z.F.C. que je viens de décrire. Pourquoi cet unique système formel ? Il existe en effet d'autres systèmes. Par exemple :

— Le système dit "Axiomes de Peano" qui permet de faire de l'arithmétique. Mais il est considéré comme peu pratique pour faire de l'analyse (traiter de la continuité) et on lui préfère pour cela Z.F.C.

— "Les Principia", un système dû à A. Whitehead et B. Russell qui est une sorte de théorie des ensembles où les ensembles sont hiérarchisés. Il est considéré comme trop compliqué pour faire des mathématiques.

— Plus radicalement différent, un système imaginé par le philosophe W. Quine [51] où il n'est plus du tout question d'ensembles. Ce système inventé pour montrer que la théorie des ensembles n'est pas le seul système possible n'est en fait pas utilisé pour faire des mathématiques.

— Le système I.S.T. qui est une extension de Z.F.C., mais nous en reparlerons longuement.

— ...

Qu'est-ce qui fait le succès de la théorie des ensembles ? J'avoue que je n'en sais rien.

2.2.6 Peut-on mécaniser les mathématiques ?

J'ai laissé entendre, parce que je pense que la notion de programme est familière au lecteur, qu'un texte mathématique est semblable à un programme d'ordinateur mais on n'a bien compris que cette image doit être nuancée. La réduction à un tel programme serait trop longue aussi, comme dit Bourbaki, un texte mathématique "rigoureux" est-il un texte « dont la formalisation est facile à concevoir ». Mais l'analogie avec un programme d'ordinateur doit être analysée un peu plus finement pour être correcte. En gros, dans la mathématique formalisée on écrit des "assertions" (des phrases qui respectent des règle de formation) qui peuvent être "vraies" ou "fausses". Une assertion est vraie dans le cas seulement où elle appartient à une liste d'assertions vraies donnée au départ de la théorie (les axiomes) ou alors elle se *déduit* d'une assertion vraie à l'aide d'une règle de déduction autorisée. Par exemple si l'assertion est [52] :

$$\neg(\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall\, x\ \forall\, y\ ((|x-y| < \eta) \Longrightarrow (|f(x)-f(y)| < \varepsilon)))$$

51. W. V. Quine, *Nouveaux fondements pour la logique mathématique* in *"From the logical point of view"*, 1953, p. 123 de la traduction française "Du point de vue logique", Vrin 2003 ; [99].

52. Il s'agit de la négation de la continuité uniforme d'une fonction f

est vraie alors il en est de même de l'assertion :

$$\exists\, \varepsilon > 0\, \forall \eta > 0 \quad (\exists\, x\, \exists\, y\, (|x-y| < \eta \wedge \neg(|f(x)-f(y)| < \varepsilon)))$$

si l'on peut passer de l'une à l'autre en appliquant un nombre fini de fois une règle prise dans un ensemble donné de règles telles que :

— On peut remplacer : $\neg\neg(\cdots)$ par $(\cdots)$

— On peut remplacer : $\neg((\cdots) \vee (\cdots))$ par : $\neg(\cdots) \wedge \neg(\cdots)$

— On peut remplacer : $\neg((\cdots) \wedge (\cdots))$ par : $\neg(\cdots) \vee \neg(\cdots)$

— .....

— On peut remplacer : $\neg(\forall x\, \exists y(\cdots))$ par : $\exists x\, \forall y\, \neg(\cdots)$

— .....

Ainsi un texte mathématique formalisé est une succession finie d'assertions, les premières étant les axiomes de la théorie, les suivantes se déduisant par application d'une des règles. On peut donc concevoir un ordinateur qui vérifiera, ligne après ligne, si les règles sont correctement appliquées : on applique la règle 1 à la ligne n ; si on obtient $n+1$ on continue sinon on applique la règle 2 et ainsi de suite. Ainsi, en un nombre fini d'opérations il est possible de dire mécaniquement si la dernière formule est bien déduite des axiomes.

Donc on pourrait être tenté de dire qu'il est possible de "mécaniser" les mathématiques et, effectivement, en un certain sens c'est possible. Il s'agit de tout un champ de recherche très actif plus ou moins recouvert par l'expression "Correspondance de Curry-Howard". Voici ce que l'on peut en apprendre sur les sites d'enseignement[53] d'informatique :

> In programming language theory and proof theory, the Curry–Howard correspondence (also known as the Curry–Howard isomorphism or equivalence, or the proofs-as-programs and propositions- or formulae- as-types interpretation) is the direct relationship between computer programs and mathematical proofs. It is a generalization of a syntactic analogy between systems of formal logic and computational calculi that was first discovered by the American mathematician Haskell Curry and logician William Alvin Howard. It is the link between logic and computation that is usually attributed to Curry and Howard, although the idea is related to the operational interpretation of intuitionistic logic given in various formulations by L. E. J. Brouwer, Arend

53. Ici celui de Paul Tarau, `http://www.cs.unt.edu/~tarau`

> Heyting and Andrey Kolmogorov (see Brouwer–Heyting– Kolmogorov interpretation) and Stephen Kleene (see Realizability). The relationship has been extended to include category theory as the three-way Curry–Howard–Lambek correspondence.

Mais cela ne veut pas dire que dans l'immédiat le développement des mathématiques puisse être entièrement confié à un ordinateur qui déroulerait aveuglément des proposition exactes. Car ce qui compte dans une proposition c'est bien sûr que sa déduction soit correcte (ce qui peut donc être vérifié par un ordinateur) mais surtout qu'elle soit considérée par les mathématiciens comme une proposition *"intéressante"* . Et la question de savoir si une proposition est "intéressante" n'est pas une question qui se décide dans le système formel. C'est une question d'ordre culturel. Ainsi tous les mathématiciens pensent que la proposition :

Proposition 2.2.1 *Le résultat de la multiplication de :*

$$1034189054678934567111140765013 6$$

par :

$$77754325553$$

est un nombre de 42 chiffres dont les 15 premiers sont :

$$80416724408552$$

est absolument sans intérêt alors que la

Proposition 2.2.2 *Toute application continue de la boule unité de $\mathbb{R}^n$ dans lui même possède un point fixe.*

est du plus haut intérêt. Tout le monde comprend pourquoi le résultat du produit de deux nombres très longs ne constitue pas un résultat mathématique intéressant. En revanche, sans culture mathématique suffisante, (bac +2 d'une filière mathématiques), on ne peut pas apprécier la seconde proposition.

Si décider de la pertinence d'un résultat est une affaire de culture il n'en reste pas moins que, dans un système formel, décider de l'exactitude de sa preuve est une affaire purement mécanique. Alors pourquoi ne pas demander à un ordinateur d'explorer, à partir des axiomes, l'arbre de toutes les démonstrations possibles et d'afficher les résultats ? A partir de là des comités de mathématiciens décideraient de leur intérêt. En fait, quelle que soit la rapidité future des calculateurs cette procédure ne donnerait rien car la proportion de résultats intéressants au sein de

tous les énoncés possibles est infime et il prendrait un temps inimaginable à des humains pour en faire le tri.

Ceci ne veut pas dire que l'ordinateur n'apporte rien aux mathématiques. Au contraire. En remplaçant le cerveau humain dans des tâches pour lesquelles il est plus performant : rapidité d'exécution de tâches élémentaires, capacité de stockage d'information, fiabilité des calculs, gestion d'une réflexion collective, ... l'ordinateur ouvre des perspectives inouïes sur l'évolution de la pratique mathématique. Mais ceci est une autre histoire qui qui nous entraînerait trop loin de notre sujet.

2.2.7 Les Entiers Naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$

Nous avons passé beaucoup de temps à essayer de comprendre ce qu'est un entier naïf en tant que concept primitif (on pourrait dire intuition fondamentale) partagé par au moins 6 milliards [54] d'humains et a bien le différencier de toute élaboration intellectuelle postérieure. Nous avons montré comment la méthode formaliste nous permet de nous assurer (dans une certaine mesure) de la rigueur de nos argumentations mathématiques et comment le système Z.F.C. permet de produire un ensemble $\mathbb{N}$ dit "ensemble des entiers naturels".

Il est essentiel ici de bien comprendre que *nous n'avons en aucun cas construit les "entiers-naïfs "*. En effet nous avons abondamment utilisé les entiers-naïfs pour construire notre système formel Z.F.C. ne serait-ce qu'en écrivant des formules, c'est à dire en mettant des symboles à la queue leu-leu, en mettant un 1er symbole, puis un 2 ème symbole à la suite, puis un 3 ème etc... En d'autres termes un cerveau qui ne saurait concevoir les entiers naïfs ne saurait concevoir Z.F.C. et donc "construire" les entiers.

Quand dans l'enseignement mathématique universitaire (en général immédiatement après le baccalauréat) on dit aux étudiants qu'on "construit" les "entiers naturels" on se conduit mal [55]. On devrait dire qu'on construit un ensemble (au sens fort de la théorie Z.F.C.), que cet ensemble s'appelle "ensemble des entiers naturels" (c'est le droit des mathématiciens de donner aux ensembles qu'ils fabriquent dans Z.F.C. le nom qu'ils veulent), que cet ensemble est ordonné et que

54. J'avais envie de dire "tout être humain" mais ce n'est probablement pas vrai des très jeunes bébés d'où cette évaluation peut être fantaisiste de 6 milliards.

55. Entendons nous. Pour avancer en mathématiques il faut bien soulager l'angoisse métaphysique de tout un chacun et donc mentir sur la vraie nature des choses. Peut être faut-il pendant un certain temps laisser croire qu'on a construit quelque chose mais il faut quand même, à un moment donné, rétablir la vérité.

ses premiers éléments 0, $S0$, $SS0$, $\cdots$ ont exactement les mêmes propriétés que les entiers qu'il a appris à manipuler à l'école élémentaire, puis au lycée. Mais rien ne permet d'affirmer formellement (c'est à dire dans le langage de Z.F.C.) que la succession des entiers naïfs va épuiser $\mathbb{N}$ puisque la phrase :

Les entiers naïfs remplissent $\mathbb{N}$

n'est pas une phrase de Z.F.C. mais une phrase de la *meta* langue qui permet de fonder Z.F.C.

En revanche il est possible de prendre au sérieux le constat que *Les Entiers Naïfs ne remplissent pas* $\mathbb{N}$ en écrivant (en bleu, dans la *meta* - langue) :

— Il existe $\omega \in \mathbb{N}$ et ω est *non naïf*

— d'où il découle aisément que si a est naïf alors $a < \omega$

— si a est naïf $\cdots, \omega - a, \cdots, \omega - 3, \omega - 2, \omega - 1, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \cdots, \omega + a, \cdots$ sont *non naïfs*

Un tel ω ne mérite-t-il pas le nom d'entier *infiniment grand* ?

Et c'est maintenant que nous voyons le rapport des entiers naïfs avec les infinitésimaux. Prenez l'inverse de ω. Il est petit, plus petit que $\frac{1}{a}$ pour n'importe quel entier naïf a, nous avons une définition des infinitésimaux :

— On dira que $\varepsilon > 0$ est infinitésimal si pour tout naïf a on a $\varepsilon < \frac{1}{a}$

— Comme $\frac{1}{a} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}$ la somme de deux infinitésimaux est un infinitésimal , la somme d'un nombre naïf d'infinitésimaux est un infinitésimal ...

— ... et il existe certainement un entier n tel que $n\varepsilon > 1$; naturellement ce n ne pourra pas être naïf !

Donc, à condition de ne pas confondre les entiers naïfs et les entiers tout court (ceux de la théorie Z.F.C.) nous pouvons faire des mathématiques avec des infiniment petits sans craindre le paradoxe des infinitésimaux. En effet il est intraduisible dans la mathématique formelle.

Petite parenthèse qui mérite un peu plus qu'une note de bas de page

Le lecteur qui suit attentivement mon texte pourrait être tenté de me rappeler la propriété 4 de l'ensemble $\mathbb{N}$ de la théorie formelle Z.F.C. qui dit que si E est un sous ensemble de $\mathbb{N}$ qui possède la propriété :

— $0 \in E$

— Si $n \in E \Longrightarrow Sn \in E$

alors $E = \mathbb{N}$. Il pourrait me suggérer d'appliquer ce théorème à l'ensemble E des entiers n tels que $n\varepsilon$ est infinitésimal et faire ressurgir le paradoxe mais il ne le fera pas parce qu'il m'a bien lu attentivement et a compris que E n'est pas, *priori* un ensemble de Z.F.C. puisque la propriété qui le définit n'appartient pas au langage $\mathscr{L}$. En fait tout ce qui peut être dit est que cet "ensemble" n'est pas un ensemble au sens de Z.F.C. En effet, si cet ensemble était un ensemble au sens formel de Z.F.C. il serait en vertu du théorème de récurrence égal à $\mathbb{N}$ tout entier, donc 1 serait plus petit qu'un infinitésimal, donc serait infinitésimal, donc plus petit que $\frac{1}{2}$ ce qui est impossible. Donc il est contradictoire de supposer que E est un ensemble au sens formel et donc le n_0 qui conduisait au paradoxe des infinitésimaux n'existe pas d'un point de vue formel (ou plutôt on ne peut pas prouver qu'il existe !).

C'est cette erreur (la formation illégale d'ensembles) qui était souvent commise par les détracteurs de l'A.N.S. peu informés des questions de logique.
Fin de petite parenthèse

Reconnaissons que nous venons de jouer à un jeu qui peut sembler étrange, voire pas très honnête. Quand ça nous arrange nous considérons les choses d'un point de vue formel, mais seulement quand ça nous arrange ! Examinons sérieusement cette critique. Pour commencer remarquons que le fait d'utiliser des arguments informels dans une argumentation mathématique ne saurait nous être reproché. Nous avons vu qu'une argumentation mathématique de quelque importance ne peut être écrite effectivement dans un système formel. En revanche il serait plus sérieux d'objecter que, d'un point de vue informel, il y a forcément un dernier entier n tel que $n_o\varepsilon$ soit infinitésimal et, si telle est *votre croyance* je ne vois pas comment je pourrais vous prouver le contraire ! Mais je peux essayer d'ébranler cette croyance. Si un tel entier existe il doit être très grand et donc bien difficile à désigner par un symbole puisque nous avons vu que, malgré toute notre bonne volonté, les entiers que nous pouvons désigner deviennent de plus en plus rares. Cet entier n_o n'est-il pas alors tout aussi chimérique que les petits hommes verts venus de la planète Mars dont on ne peut prouver l'inexistence mais dont postuler l'existence n'apporte pas grand chose [56] ? En fait ce double jeu, a condition qu'il soit joué correctement, n'est pas plus condamnable que celui qui consiste à écrire un programme d'ordinateur accompagné de nombreux commentaires. Le programme en lui même est lisible par la machine qui effectue de façon mécanique, donc de façon absolument parfaite, sans erreur possible, des calculs et dont

56. Je veux dire n'apporte pas grand chose à la science au sens strict. Naturellement cette hypothèse apporte beaucoup à la science-fiction.

les commentaires démontrent à une intelligence humaine que ce sont bien les calculs qu'il faut faire. Dans une argumentation mathématique il n'est pas mauvais d'abandonner au formalisme le travail d'effectuer de façon mécanique et efficace une partie de l'argumentation mais aussi d'abandonner le formalisme quand il devient inutilement trop lourd.

Sur cette question le philosophe Quine [57] nous dit.

> Dans les systèmes logiques et mathématiques, on peut rechercher deux types d'économie possibles, mutuellement antagonistes ; l'un et l'autre ont une utilité pratique particulière. D'une part on peut rechercher l'économie d'expression - on cherche alors à énoncer avec aisance et brièveté des relations aux multiples facettes. Ce type d'économie exige d'ordinaire des notations concises et caractéristiques pour des concepts abondants. D'autre part et par contraste, on peut chercher à économiser la grammaire et le vocabulaire. On peut essayer de trouver un minimum de concepts de base, tels que une fois qu'on a trouvé pour chacun une notation caractéristique, on puisse exprimer n'importe quel concept supplémentaire en combinant et en répétant simplement nos notations de base. En un sens, ce deuxième type d'économie n'est pas très pratique, puisque la pauvreté des expressions de base contribue nécessairement à rallonger le discours. Mais en un autre sens, il est pratique : il simplifie beaucoup le discours à propos du langage en minimisant les termes et les formes de construction dont se compose le langage.
>
> Même si elles sont à première vue incompatibles, ces deux espèces d'économie sont précieuses à leur manière. Il est donc devenu courant de les combiner en forgeant de fait deux langages, dont l'un est une partie de l'autre. Le langage incluant sera redondant par sa grammaire et son vocabulaire, mais économique par la brièveté des ses messages. Le langage inclus, appelé notation primitive, sera économique par sa grammaire et son vocabulaire. Le tout et la partie sont corrélés par des règles de traduction grâce auxquelles chaque idiome, qui n'est pas écrit en notation primitive, est identifié à un complexe construit à partir de la notation primitive. Ces règles de traduction sont ce qu'il est convenu d'appeler des définitions, dans les systèmes formalisés. Il faut se les représenter, non pas comme des ajouts à un langage, mais comme des corrélation entre deux langages dont l'un est partie de l'autre.

Supposons maintenant que nous soyons un mathématicien élevé dans le style de Bourbaki et que nous soyons un farouche défenseur de la méthode axiomatique

57. W. V. Quine,*"From the logical point of view"*, 1953, bas de la page 56 de la traduction française "Du point de vue logique", Vrin 2003 ; [99].

qui serait l'art de rédiger des textes *dont la formalisation est facile à concevoir.* Nous serions en droit de dire que, bien sûr nous ne sommes pas dupes que les fondements de tout formalisme ne sont en définitive pas plus solides que la (*meta*)langue dans laquelle il est décrit mais que la méthode formaliste bien comprise exige un *formalisme de référence* dans lequel "la formalisation est facile à concevoir". « *Votre* méthode du double langage n'est pas compatible avec *notre* méthode formaliste » nous dira le mathématicien bourbakiste. Comme, 99% des mathématiciens se reconnaissent implicitement dans cette méthode, refuser de considérer cette objection ce serait se mettre irrémédiablement en marge de toute la communauté et en quelque sorte renoncer à la qualité de mathématicien. **Mais il existe une réponse imparable à cette objection.**

2.2.8 Le système I.S.T. de Nelson

Il existe un système formel (inventé par E. Nelson , publié en 1976) qui rend compte de l'idée de l'existence de deux types d'entiers, *on pourrait dire les entiers standards et les entiers non standard* et, puisque *in fine* en mathématiques tout se construit à partir des entiers, de deux types d'objets mathématiques, les objets standard et les autres. Ce système c'est le système I.S.T. Le sigle I.S.T. vaut pour deux raisons :

— Le nom de la théorie : "Internal Set Theory".

— Le nom de trois axiomes : Idéalisation, Standardisation, Transfert.

Si là non plus il n'est pas question de décrire les détails de cette nouvelle théorie formelle, il est facile d'en expliquer le principe.

— On considère le langage $\mathscr{L}$ de la théorie Z.F.C. et ses axiomes.

— On considère le prédicat ${}^{st}x$, non défini dans $\mathscr{L}$, qui se lit «x est *standard*»

et les trois axiomes Idéalisation, Standardisation et Transfert qui règlent l'usage de st. Comme st n'est pas une abréviation pour désigner un objet qui aurait été défini dans $\mathscr{L}$, à partir de maintenant nous aurons des formules, dites *internes*, qui n'utilisent pas la nouvelle lettre et celles qui l'utilisent, dites *externes*. Il est toujours vrai que si F *est une formule interne* :

$$\exists\, z\, ((x \in y \text{ et } F(x)) \Longleftrightarrow x \in z)$$

qui se lit : les éléments x de l'ensemble y qui satisfont la formule F constituent un ensemble. Mais si, en revanche, F *est une formule externe* rien n'assure l'existence d'un tel ensemble et même, dans certains cas, comme nous l'avons vu, le supposer

conduirait à une contradiction. Des axiomes I. S. et T. il découle assez facilement que 0 est standard, que si n est standard alors $n+1$ est standard et qu'il existe un entier ω (qu'on dira infiniment grand) qui est plus grand que tous les entiers standard.

Last but not the least on montre que I.S.T. *est relativement consistant* à Z.F.C. Il n'y a donc pas plus de risque à formaliser les raisonnements dans I.S.T. que dans Z.F.C.

Pour paraphraser Bourbaki je dirai donc maintenant que *faire de l'Analyse Non Standard n'est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à concevoir dans I.S.T.*

Certes ceux qui connaissent la question critiqueront, à juste titre, cette affirmation. I.S.T. n'est pas le seul formalisme à rendre compte de la pratique des infinitésimaux. En particulier le fondateur de l'A.N.S., A. Robinson propose une méthode pour formaliser directement les infinitésimaux dans Z.F.C. et de nombreux mathématiciens suivent Robinson sur ce point. Il existe même des discussions entre les partisans de I.S.T. et ceux de Robinson. Une formulation plus correcte est donc : *Cet art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à concevoir dans I.S.T. est* une *façon de faire de l'Analyse Non Standard.*

2.3 Premières remarques sur la rigueur

Pour voir si j'avais bien compris j'ai envoyé un e-mail à Duchemin.

e-mail n°3 Balderoy à Duchemin, date ...

```
Monsieur le Professeur,

   voici ce que je retiens de votre cours que j'ai trouvé très lumineux.

  1. La rigueur n'est « à proprement parler pas autre chose que cet
     art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à
     concevoir...
  2. ... dans le système de (Zermelo Fraenkel ) de la théorie des
     ensembles », quand on fait des mathématiques classiques,
  3. ... dans le système I.S.T. de E. Nelson » quand on fait de l'Analyse
     Non Standard.
```

4. S'il existait une contradiction dans le système de Nelson il y en aurait une dans celui dans la théorie des ensenbles.
5. Donc les mathématiques non standard sont aussi rigoureuses que les autres.

Naturellement il y a une part de confiance de ma part dans l'acceptation de vos propos. Je ne serais évidemment pas capable de déceler une inexactitude technique dans votre cours mais comme d'une part je le trouve assez proche de ce qui est dit dans [LdL] et que d'autre part, à ma connaissance, vous n'avez jamais été dénoncé comme un dangereux imposteur incompétent je m'en tiendrai là pour le moment.

Je vous prie...

Il m'a répondu ceci :

e-mail n°4 Duchemin à Balderoy, date ...

Cher Monsieur Balderoy

Je vous remercie de votre lecture attentive (merci pour les coquilles relevées) et de ce résumé qui me semble parfait. Je crois que je n'aurais pas pu faire mieux ! Grace à lui je me rends compte que dans ce cours je n'ai pas insisté sur un aspect essentiel de la rigueur mathématique. Son caractère ‘‘herméneutique". Je me sens un peu gêné d'employer cette expression savante devant vous qui devez la comprendre bien mieux que moi. Je vous prie d'excuser par avance mes maladresses. Pour moi l'herméneutique est une théorie de l'*interprétation* dans laquelle un texte ‘‘fondateur’’ ne peut être compris que par quelqu'un qui en connait déjà les conséquences. Mais comment peut-on être fondateur de ce qui est déjà connu ? C'est exactement ce que prétend Bourbaki dans le mode d'emploi de son traité. Je cite : « *Le traité prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc en principe chez le lecteur, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique, et un certain pouvoir d'abstraction. Néanmoins, le traité est destiné plus particulièrement à des lecteurs possédant au moins une bonne connaissance des matières enseignées, en France, dans les cours de mathématiques générales (...) et, si possible, une certaine connaissance des parties essentielles d'un cours de*

calcul différentiel et intégral». En gros, un texte mathématique ne peut être lu avec profit que si, dans une certaine mesure, on a déjà une idée assez précise de ce qu'il contient. Le défaut du cours que je vous ai envoyé est qu'il laisse entendre qu'il y a une sorte de progrès linéaire vers une meilleure compréhension. En fait il y a des aller-retour perpétuels entre des textes plus ou moins formalisés selon le schéma suivant :

1. Un texte mathématique (informel) laisse entrevoir des ambiguïtés....
2. Une formalisation (partielle) permet de lever les doutes précédents et conduit à une...
3. ...nouvelle interprétation informelle qui à son tour soulève de nouvelles questions qui....
4. ....à leur tour demandent une nouvelle formalisation ....

Pour autant que j'ai bien compris, cette vision de la pratique mathématique est défendue par le philosophe J-M. Salanskis. Je ne sais plus si je vous ai parlé de lui. Il est étroitement associé à l'aventure A.N.S. Il faisait partie, en tant que philosophe, du groupe qui travaillait autour de Reeb. Je pense que vous aurez un très grand profit à lire quelques uns de ses travaux (en particulier *L'Herméneutique formelle*) ; tout est aisément accessible sur son site:
http ://jmsalanskis.free.fr
Cordialement...

J'ai évidemment suivi le conseil de Duchemin concernant la lecture de Salanskis [58]. Je suis également tombé un peu par hasard (en introduisant "langue" et "mathématique" sur Google) sur le texte de L. Lafforgue (Médaille Fields 2002) [59] *Les mathématiques sont-elles une langue*, auquel Duchemin faisait allusion lors de notre deuxième entretient. Il dit des choses assez proches :

> (...) Il convient de dire en sens inverse que la métaphore des langues ne rend compte que partiellement de la nature des mathématiques. Tout d'abord, les mathématiques ne sont qu'à un faible degré une langue de communication : il est vrai que tout texte mathématique est

58. Voir Annexe C.3
59. sur son site `http://www.ihes.fr/~lafforgue/textes/LangueMathematique.pdf`

> susceptible d'être lu, c'est même sa destination finale, mais cette lecture est toujours laborieuse – autrement dit la communication mathématique est réelle mais lente et difficile – et surtout l'écriture mathématique est faite pour l'exploration. Le mathématicien écrit d'abord pour lui-même et pour la vérité. D'autre part, les mathématiques sont moins une langue que la recherche d'une langue, et la remise sur le métier jamais lassée d'une version approchée, toujours raffinée et enrichie de cette langue idéale.(...)

Nous comprenons donc que la discussion entre mathématiciens est la base du travail mathématique, peut être plus que la réflexion personnelle. Mais pas n'importe quelle discussion. Une discussion qui doit inéluctablement aboutir, qui doit se terminer par un accord.

Comment les mathématiciens gèrent-ils ces discussions ? Comme les discussions fructueuses supposent une organisation convenable des interlocuteurs nous nous doutons qu'il doivent être bien organisés. Il est plus qu'urgent maintenant de voir à quoi ressemble la communauté des mathématiciens.

Chapitre 3

Communauté et institutions mathématiques

Sommaire

3.1 Doctorat en mathématiques dans les années 50-60 75
3.2 . . . puis peu plus près de nous. 79
3.3 Bourbaki et les écoles mathématiques françaises 81
3.4 Une exception culturelle française 87
3.5 Jean Dieudonné et sa vision des mathématiques 88
3.6 Georges Reeb et l'Ecole de Strasbourg 92

L'école mathématique française a la réputation, en France, d'être une des meilleures du monde. Cette réputation n'est certainement pas usurpée puisque au classement des médailles Fields, récompense décernée depuis 1936 par l'Union Mathématique Internationale, on compte [60] 12 médaillés aux Etats Unis, 11 en France, 9 en Russie, 5 au Royaume Uni,. . .On dit que la médaille Fields est l'équivalent du prix Nobel qui n'existe pas en mathématiques. Ce n'est pas tout à fait vrai. Pour commencer la médaille Fields est une médaille en chocolat (15 000 $ contre 1 000 000 $ pour un prix Nobel) et, surtout elle ne récompense qu'un(e) mathématicien(ne) de moins de quarante ans [61]. Le prix Abel, lui, est plus proche du prix Nobel : il est sans limite d'âge et d'un montant comparable au Nobel. Créé il y a dix ans il a récompensé treize mathématiciens dont un français de souche et deux immigrés ; plus sérieusement sur seize institutions qui ont soutenu les récipiendaires du prix Abel quatre sont françaises. Le prix Crafoord qui récompense des chercheurs de disciplines oubliées par Nobel compte également des mathématiciens Français. Avec la physique les mathématiques sont de plus en plus citées au tableau d'honneur de la science française par nos hommes politiques qui s'inquiètent du classement de Shangaï. Plus même que la physique, peut être parce qu'elles coûtent moins cher ? Les mathématiciens se félicitent tous les jours de devenir médiatiquement plus visibles.

Certes, mais nous leur conseillons de garder la tête froide. En effet. Il y a un peu moins de 400 chercheurs en mathématiques au CNRS, le groupe "mathématiques et informatique" des enseignants du supérieur, toutes catégories confondues, comporte environ 9000 individus. Il y a également des mathématiciens dans les grandes écoles d'ingénieurs, dans les établissements de recherche comme l'Inria, l'Inra, l'Inserm etc... Qui fait de la recherche en mathématiques ? Certainement tous les chercheurs du CNRS et une proportion difficile à évaluer parmi les universitaires d'autant plus que la qualité de "chercheur en mathématiques" est attribuée de façon différente si l'on est un "mandarin conservateur et élitiste" ou un "syndicaliste gauchiste". Ne nous avançons donc pas et contentons nous de dire qu'il y a *quelques milliers* de personnes en France qui ont un lien fort avec la recherche en mathématiques. Quand on sait que dans ce même pays y a moins d'un milliers de joueurs de football professionnels, on voit tout de suite que la couverture médiatique des mathématiques et, malheureusement, de la science en général, reste bien modeste en regard de celle du ballon rond. Mais c'est hors

60. en 2014.

61. Notons que la première mathématicienne récompensée par la médaille Fields, Maryam Mirzakhani (1977-2017) l'a été en 2014.

sujet.

C'est donc un rapide portrait de ce qu'était ce fleuron de la science française dans les années soixante-dix quatre-vingt que nous allons dresser dans ce chapitre. Je viens de dire *dans les années soixante-dix quatre-vingt*. Je dois insister sur ce point. Les institutions évoluent et ce qui était vrai à cette époque ne l'est plus nécessairement maintenant. Je vois en particulier deux faits remarquables qui bouleversent la pratique des mathématiques et dont nous ne mesurons pas encore toutes les conséquences :

— La pénétration du monde marchand dans les lieux de production de savoir mathématique.

— L'utilisation de l'ordinateur dans les sciences et les pratiques de l'ingénieur puis l'avènement d'internet dans le monde mathématique. En particulier : Les sites de dépôt de textes (arXiv) et les publications en ligne, les sites de production massivement collaborative (Polymath Project), les *blogs* animés par des (jeunes) personnalités de grand renom (John Baez, Cedric Villani, Terence Tao,...).

3.1 Doctorat en mathématiques dans les années 50-60 ...

Puisque l'"affaire" est relative à la soutenance d'une thèse il nous faut comprendre ce que représente exactement une soutenance de thèse à l'époque des faits. Avant tout rappelons que le système français des thèses ne s'est aligné que récemment (après 1984) sur le système anglo-saxon de la thèse unique préparée en 3 ou 4 ans. Chez nous la thèse est maintenant suivie plus tard d'une Habilitation à Diriger des Recherches (HDR). Avant il y avait la "thèse de 3 ème cycle" correspondant à un travail d'une durée de 2 ans après le Diplôme d'Etudes Approfondies (DEA) obtenu à Bac+4. Ensuite il y avait la "thèse d'état" dont la préparation, en mathématiques, durait de 5 à 10 ans, rarement moins, rarement plus. La thèse de Vénissac, dont il est question ici était une "thèse d'état". La description qui suit est spécifique des mathématiques. On trouverait des nuances importantes par rapport à ce tableau si l'on s'intéressait à des disciplines, comme la physique ou la biologie moléculaire, rentrées plus tôt que les mathématiques dans l'ère de la techno-science.

Dans les décennies qui nous intéressent, « faire des mathématiques » est un métier depuis environ au moins un siècle (il est difficile d'être plus précis sans

entrer dans le détail de ce que l'on entend par « métier »). Pour exercer ce métier il faut être *docteur*, avoir une *thèse*. Comment devient-on docteur ?

Rappelons qu'il arrive que des polémiques surgissent dans la communauté scientifique à propos de la soutenance de certaines thèses et que le cas de la thèse de Vénissac dont nous nous préoccupons dans ce travail n'est pas unique. On se souvient que l'astrologue Elisabeth Teissier a soutenu en 2001 une thèse de sociologie et obtenu le grade de docteur avec la mention très honorable. La soutenance avait été vivement critiquée par une partie de la communauté scientifique concernée. Mais ces polémiques ne sont pas réservées aux sciences dites "molles" comme la sociologie, les sciences "dures" n'y échappent pas elles aussi. Par exemple, les frères Bogdanov, présentateurs connus d'émissions télévisées, soutenaient, l'un une thèse de mathématique en 1999, l'autre une thèse de physique théorique en 2002, thèses qui ont provoqué un émoi considérable chez les physiciens et mathématiciens au point qu'une commissions du CNRS laissait « fuiter » dans Marianne en 2010 :

> « l'ensemble des articles considérés ici ne répond à aucun critère de clarté, de précision et d'exactitude en vigueur en physique théorique. Ce manuscrit de thèse ne peut pas être qualifié de contribution scientifique» [62]

jugement qui est à rapprocher de l'unique argument que la "commission des thèses parisiennes" avait fourni pour justifier son refus de soutenance du travail de Vénissac .

> «Au vu de cette information, il apparaît très clairement que la rédaction du chapitre IV de la thèse laisse fortement à désirer : une thèse doit comporter des démonstrations détaillées et complètes et non pas seulement des plans de démonstration»

S'agit-il de la même critique ? Pour mieux comprendre regardons d'un peu plus près ce qu'est une thèse.

62. Il s'agissait d'une thèse constituée d'articles publiés dans des revues-avec-comité-de-lecture. Nous ne nous plaindrons pas que, pour une fois, des articles aient été lus par des commissions qui ont à juger de travaux mais il est piquant que ces mêmes commissions passent leur temps à juger les individus, les équipes et les laboratoires sur la base du h-index et autres critères quantitatifs, sans même jeter un œil sur les articles.

Thèse [63]

— Proposition théorique, opinion, position sur quelque chose dont on s'attache à démontrer la véracité : *Soutenir une thèse. Quelle est la thèse de la police sur cette affaire ?*

— Ensemble des travaux présentés, sous forme d'ouvrage, en vue de l'obtention du grade de docteur (..).

Ici il faut bien comprendre la différence entre la réussite à un examen qui fait de vous, par exemple, un "licencié" et la soutenance d'une thèse qui fait de vous un "docteur". La réussite à un examen atteste qu'une personne a, sur un sujet donné, les connaissances requises. Les connaissances en question sont réputées *bien établies* et l'examen est un dispositif permettant de vérifier qu'elles sont maîtrisées par le candidat. Il est a noter qu'il n'est pas nécessaire que l'examinateur maîtrise lui même le sujet. Pour prendre un exemple extrême, si les connaissances sont constituées par la listes nominative des départements français il n'est pas nécessaire de la connaître soi même pour vérifier que quelqu'un la sait par cœur. Tout autre est la question des thèses de doctorat puisqu'elles interviennent dans la constitution de ce savoir scientifique bien établi.

Mais comment devient-on une de ces connaissances (scientifiques) *bien établies* ?

On enseigne aux enfants des écoles que les savants formulent des hypothèses qui sont confrontées à la réalité et qu'on ne garde que celles qui ne sont pas contredites. On dit que c'est la méthode "hypothético-déductive" et, quand on veut impressionner on dit que la "falsifiabilité" est le critère popperien [64] de démarcation de la Science : Une *hypothèse* est formulée, on en *déduit* par le raisonnement des conséquences qui sont confrontées à la réalité et tant qu'il n'y a pas de contradiction avec la réalité on dit que l'hypothèse est corroborée, sinon elle est *falsifiée*, donc rejetée. Il est probablement utile d'enseigner ces choses aux petits enfants, il faut bien commencer par des idées simples, et insister sur la nécessaire confrontation des énoncés scientifiques avec la réalité est une très bonne chose. Mais il n'est pas possible d'en rester à ce stade. La façon dont nos énoncés sur le monde sont en relation avec avec les expériences n'est pas si clair. Par exemple Quine nous enseigne dans son célèbre article déjà cité *Two Dogmas of Empiricism* [65] que :

63. Selon Larousse (http ://www.larousse.fr/dictionnaires/francais/thèse/77858)

64. de Karl Popper.

65. Dans *From a logical point of view* , 1953, 1961, 1980 , traduction française *Du point de vue logique* Librairie Philosophique J. VRIN, 2003 p. 75 ; [99].

> (...) nos énoncés sur le monde extérieur affrontent le tribunal de l'expérience sensible, non pas individuellement, mais seulement collectivement [66].

Mais ce n'est pas ce point que je voudrais contester dans une vision trop simpliste de la méthode scientifique. Il existe un autre point important et qui nous concerne tout particulièrement ici. Avant d'être *bien établi* un fait scientifique n'est qu'une *proposition-de-fait-scientifique-nouveau*. Dans *La science de l'Enfer et l'envers de la science, de Galilée au prix IgNobel* [67] J-M. Lévy-Leblond nous montre comment Galilée (le grand Galilée en personne !), écrivait un article sur certaines propriétés géométriques et physiques de l'Enfer qui n'ont probablement pas été réfutées mais simplement pas été retenues.

> Ainsi la question classique de la validation, ou de la réfutation, des idées scientifiques le cède-t-elle en importance au profit de considérations sur leur qualification ou leur disqualification. De fait bien des travaux sont abandonnés sans être tombés sous le coup d'une critique explicite ou rédhibitoire ; le plus souvent, c'est insidieusement que les voies de la recherche prennent une autre orientation, laissant en jachère au bord de la route abandonnée des terrains à moitié explorés. Si peu de travaux scientifiques accèdent au Paradis de la reconnaissance définitive, peu aussi sont condamnés à l'Enfer de l'oubli ou du rejet absolu. La plupart se retrouvent en Purgatoire.

Les mathématiques n'échappent pas à ce constat et les mathématiciens le rappellent eux même dans une blague :

> «*En mathématiques 1 % des résultats sont justes, 9% sont faux et 90% ne sont même pas faux.*

Une thèse n'est rien d'autre qu'une "proposition-de-fait-scientifique-nouveau" et le travail des docteurs est, en grande partie, de faire le tri dans toutes les propositions.

C'est donc à un jury de thèse, composé de docteurs, qu'il appartient de prendre la responsabilité de décider qu'un ensemble de travaux est digne de constituer une "thèse" c'est à dire une "proposition-de-fait-scientifique-nouveau" prometteuse. Jusque dans les années 50 - 60, quand une petite poignée de docteurs jugeait monsieur X digne de devenir *leur pair* ils demandaient au Président de leur université de les constituer en jury, on organisait une soutenance publique, le président du jury demandait aux membres du jury de s'exprimer sur le travail de Mr X, ensuite

66. C'est ce qu'on appelle la. thèse de Duhem-Quine car Duhem soutenait cette position dès 1906 dans son *La théorie physique : son objet sa structure* réédition VRIN 1989 ; [47].

67. *La Vitesse de l'ombre* Seuil, 2006, pp. 77-93 ; [74].

demandait si dans l'assistance il y avait un docteur qui désirait exprimer une opinion [68], puis, après avoir délibéré, le jury annonçait que, à partir de ce moment, Mr X était docteur. Le jury qui jusqu'à cet instant vouvoyait Mr X se mettait à le tutoyer. Cette sympathique cérémonie se terminait par un "pot" offert par le nouveau docteur.

On le voit, la soutenance de doctorat était clairement une cooptation. Admettre quelqu'un dans la confrérie ce n'était pas attester que ses contributions faisaient immédiatement partie des connaissances solidement établies mais simplement dire : « Tu as le droit maintenant de discuter d'égal à égal avec nous ». Les scientifiques qui critiquent les doctorats de Mme Teissier et des frères Bogdanov ne disent finalement rien d'autre que : « Nous n'avons pas de temps à perdre à discuter avec ces gens là ». Et ce faisant ils représentent 99,999 % de la communauté scientifique.

Le refus de la commission des thèses est-il de cette nature ? La question est posée pour le moment et nous y répondrons plus tard par la négative avec des arguments très forts. Mais pas tout de suite.

3.2 ... puis peu plus près de nous.

L'entrée dans l'ère de la techno-science a notablement bouleversé le schéma précédent. Dans la mesure où les thèses (et les années de post-doc) ne sont, de plus en plus souvent, qu'un travail d'ingénieur spécialisé sans "proposition-de-fait-scientifique-nouveau" effectué par une main d'œuvre hautement spécialisée (bac + 5), mais rémunérée au SMIC sur des CDD, les critères d'attribution des thèses ont profondément évolué et n'ont maintenant plus grand chose à voir avec une cooptation. Mais, comme nous l'avons déjà remarqué, dans les années quatre-vingt, les mathématiques ne commencent que timidement à rentrer dans la techno-science.

La recherche mathématique française qui entre les deux guerres et dans l'immédiat après guerre était organisée autour de l'Ecole Normale Supérieure, la Sorbonne et quelques très rares et très grandes universités de province, avait, dans les années 1970, littéralement explosé. Des dizaines d'universités étaient maintenant susceptibles de constituer des jurys de thèse. Le monde de la recherche universitaire avait cessé d'être une grande famille où tout le monde se connaissait. Les présidents des universités, qui ne pouvaient plus avoir une opinion fondée

68. A dire vrai cette option était rarement utilisée, elle devait remonter à une époque ou la soutenance d'une thèse était une véritable "dispute".

sur tel ou tel collègue se sont mis à demander des rapports faits par des rapporteurs, en principe indépendants du postulant et de son directeur de thèse. Ne sachant trop comment choisir les rapporteurs ils s'en remettaient à la sagesse du conseil scientifique de l'établissement qui déléguait à son tour ... Ces systèmes, plus ou moins informels, étaient à l'œuvre à peu près partout et, sous une forme ou sous une autre, c'était finalement l'université qui prenait ses responsabilités. Dans ces conditions une grande diversité pouvait s'installer. On comprend que le ticket d'entrée pour avoir le droit de discuter avec d'obscurs petits maîtres de province n'est pas le même que celui qui vous autorise à tutoyer les plus grands. Dans une culture anglo-saxonne libérale et peu centralisatrice cela conduit à hiérarchiser les universités, une thèse du M.I.T. ou de Cambridge n'ayant pas la même valeur qu'une thèse de...ne vexons personne. Mais chacun sait que notre tradition est centralisatrice et élitiste et l'idée était plutôt que toute thèse de tout point du territoire devait avoir la même valeur que toute autre. Il fallait donc contrôler. Notons qu'une certaine forme de contrôle existait déjà puisque pour avoir le droit d'être recruté comme professeur dans une université il fallait être inscrit sur une "liste d'aptitude" établie au niveau national par une commission représentative de la discipline. Mais s'il y a du sens à établir un contrôle au niveau national de la qualité des enseignants des universités (le contribuable ne peut quand même pas payer n'importe qui :-)) il semble plus malaisé de définir ce qu'est le contrôle d'une cooptation. Qui sont les "pairs" plus égaux que les autres qui ont la charge de contrôler ? En quoi ont-ils une vision plus sûre que les autres de ce que sont les "bonnes connaissances", les "bonnes recherches" à entreprendre ? Que signifie le refus d'une soutenance proposée par un jury particulier : que les membres du jury pressenti qui propose la cooptation ne sont plus dignes de la communauté ? Mais alors ne serait-il pas souhaitable, en même temps que la soutenance est refusée, de remettre en cause aussi le doctorat des membres du jury ? Il semble bien que, par son principe même, le processus de cooptation soit difficile à contrôler et de fait, à cette époque les textes officiels continuaient à confier aux universités le soin de désigner les jurys et autoriser les soutenances [69].

Toutefois, une communauté a toute latitude pour s'organiser comme elle l'entend (à condition de ne pas troubler l'ordre public) et rien n'empêchait, en principe, les mathématiciens d'organiser un tel contrôle des thèses au plan national, si telle était leur volonté, sauf la complexité du dispositif à mettre en place et l'absence de financement pour le faire fonctionner. Mais, dans le cas de la région

69. Maintenant les choses sont beaucoup plus encadrées à travers des écoles doctorales qui doivent justifier leur existence et sont évaluée nationalement.

parisienne il n'y avait pas d'obstacle matériel majeur à constituer une "Commission des thèses parisiennes de mathématiques", ce qui fut fait. En se dotant d'une telle commission les mathématiciens de la région parisienne se prévalaient d'un "sérieux" dont les provinciaux auraient été privés et en tiraient argument pour imposer leurs vues, c'est à dire décider de ce qui était important ou pas en recherche mathématique. Ce phénomène centralisateur n'a pas été particulier aux mathématiques mais il y était particulièrement développé.

Ce qui en revanche semble étrange est le secret qui entourait cette commission dont seul le président était connu (il faut bien pouvoir s'adresser à quelqu'un !), qui demandait des rapports qui restaient secrets et prononçait ses verdicts sans les justifier : niveau insuffisant. Point. Et encore plus surprenant est le fait que les mathématiciens semblaient avoir, dans leur immense majorité, accepté sans grogner un tel système. Faut-il rapprocher ce fait du phénomène Bourbaki ? Voyons un peu.

3.3 Bourbaki et les écoles mathématiques françaises dans les années 50-80.

Le "phénomène Bourbaki " est bien connu et bien documenté [70]. J'en rappelle rapidement quelques traits qui pourraient avoir un rapport avec notre questionnement.

Dans les années 30, un petit groupe d'une demi-douzaine de mathématiciens issus de l'Ecole Normale Supérieure (promotions 23, 24, 25), insatisfaits des ouvrages à leur disposition pour enseigner les mathématiques décide d'en rédiger un. L'objectif était de "remettre à plat" les mathématiques de l'époque. Ce groupe était "secret". Secret de Polichinelle mais il n'empêche : aucun membre ne pouvait se prévaloir de son appartenance au groupe. Faut-il y voir une sympathique modestie, ou le visage inquiétant de l'"intellectuel collectif" qui se dissout pour

70. En fait il serait plus exact de dire le "mythe Bourbaki". En effet s'il existe de nombreux écrits hagiographique sur Bourbaki : naissance du personnage, le mystère entourant ses membres, l'annonce de sa mort, les études historiques cherchant à expliquer dans le contexte social l'existence de ce phénomène particulier sont encore rares ; cependant une histoire critique de Bourbaki commence à se construire à travers de auteurs comme D. Aubin, L. Corry, A. Dahan-Dalmedico. D'autre part le mythe Bourbaki est sérieusement mis à mal dans *Récoltes et Semailles*, l'ouvrage inclassable : réflexion philosophique, autobiographie, auto-analyse, règlement de compte, de A. Grothendieck dont il sera question plus tard mais dans ce paragraphe c'est bien le "mythe Bourbaki" que je décris.

céder place à la "ligne du Parti" ? On peut aussi se tourner vers l'explication psychanalytique en proposant qu'on pourrait y voir une affirmation inconsciente de la position philosophique *réaliste* en mathématiques : ainsi le traité de Bourbaki serait les mathématiques elles mêmes, mieux, la Mathématique tout court (au singulier et avec un grand M, comme le dit Bourbaki), pas l'œuvre de ses rédacteurs qui ne font que découvrir et dont il convient donc de taire les noms.

C'est probablement un mélange de toutes ces raisons. Voyez ce qu'en dit Maurice Mashaal, un journaliste scientifique qui a fait une enquête pour le magazine Pour la Science [71].

> Plusieurs raisons expliquent cette tradition - ou manie ? - du secret. Celle invoquée par les Bourbakis est l'aspect collectif qu'ils souhaitaient conférer à leur entreprise. La rédaction du traité s'effectuant en commun, nul membre ne doit se mettre en avant, que ce soit pour le mérite scientifique ou pour le versement des droits d'auteur engendrés par la vente des livres. Sans doute le secret assure-t-il au groupe une certaine tranquillité dans son travail : le fait que le mutisme de Bourbaki ait été le plus grand durant son âge d'or, les années 1950 à 1970, le suggère. Une autre explication possible est la protection des individus vis-à-vis d'éventuelles personnalités influentes, mais sceptiques ou hostiles au projet et il y en eut dès le début. Par ailleurs la non divulgation de la composition de l'équipe Bourbaki renforce l'autorité de son traité : ce qui s'y trouve apparaît comme l'expression d'un consensus, les éventuelles divergences de vue au sein du groupe y étant invisibles. Enfin le secret a également rempli une fonction sociale : renforcer l'identité et la cohésion du groupe, participer à la création d'un mythe. Ce n'est pas le moindre des charmes de Bourbaki .

Donc Bourbaki a écrit un traité d'une taille considérable : Les "Eléments de mathématique". Environ 7000 pages publiées entre 1939 et 1998, mais les traités qui auront le plus d'influence paraitront dans les années 50-60. Un traité a un style. Qu'est ce que le style Bourbaki ?

— *La généralité.* Ecrire avec le souci de la plus grande généralité possible. Traquer dans les démonstrations les hypothèses superflues.

— *La neutralité.* Ecrire de la façon la plus impersonnelle possible. Pas de commentaires dans le texte mathématique proprement dit.

— *Les définitions.* Elles doivent être précises et définitives ainsi que les notations. Pour préserver le souci de neutralité, les mots de la langue qui ré-

71. Collection "Les génies de la Science", n° 2 mai 2000.

sument les définitions seront, lorsque la tradition ne les a pas déjà imposés, les plus farfelus possibles pour qu'il soit clair qu'il ne peut y avoir le moindre lien entre leur sens ordinaire et le sens mathématique. Ainsi dire qu'une «partie convexe cerclée et équilibrée est un *tonneau*» ne doit rien à l'art du tonnelier.

— *Pas de figures* .

Le style Bourbaki est souvent critiqué. "Bourbakiser" une théorie, "faire du Bourbaki " a de nos jours un sens péjoratif nous disent de nombreux mathématiciens. Mais il ne faut pas se tromper. Ce qui est critiqué ce sont les excès. Tout le monde reconnait que Bourbaki a créé certains standards qui doivent être respectés. Beaucoup de mathématiciens ayant débuté leur carrière dans l'immédiat après guerre reconnaissent avoir été influencés.

Bourbaki ne s'est pas contenté d'écrire un traité. Il organisait, (et organise toujours) trois fois par an, un séminaire (le fameux séminaire Bourbaki) où des mathématiciens brillants sont invités à exposer les travaux récents d'un autre mathématicien, ou d'une école mathématique. Le choix des sujets et des conférenciers est fait par Bourbaki. Le niveau est très élevé et c'est un véritable honneur que d'y être invité. Les sujets abordés étaient à l'époque très loin de couvrir toutes les recherches mathématiques pratiquées. En particulier trois domaines étaient totalement absents : Le calcul des probabilités, les mathématiques de la physique et celles de l'ordinateur. Quand on connait la suite on voit que ce furent des omissions considérables et Bourbaki a souvent été critiqué pour ses choix. Critique à laquelle Bourbaki répondait qu'il avait bien le droit de choisir ce qu'il lui plaisait de faire. Ce qui était une réponse empreinte d'un peu de mauvaise foi car Bourbaki ambitionnait d'exercer une influence et y réussissait. Bourbaki exerçait un véritable pouvoir dans la communauté mathématique française. Essayons de cerner la nature de ce pouvoir.

Au vu du caractère secret du groupe on peut craindre une sorte de fonctionnement maffieux où l'on soutient les petits copains et les copains des copains. Cette crainte semble infondée pour de multiples raisons dont la plus convaincante est que les membres de Bourbaki étaient suffisamment brillants et connus en dehors de leur appartenance à Bourbaki pour n'avoir certainement pas besoin de "piston". Ceci qui est certainement vrai pour les fondateurs doit être nuancé pour les générations suivantes selon le témoignage de Claude Chevalley, cité par M. Mashaal [72].

72. Dans *Bourbaki*, dans "Les génies de la science" n° 2, mai 2000.

> Pendant tous les premiers congrès, jusqu'à la guerre, il était tacitement entendu qu'on ne parlait pas des questions de carrière universitaire (...) Malheureusement c'est devenu envahissant après la guerre ; probablement cela est dû au fait que lorsqu'on a fait venir des jeunes, on s'est tout naturellement préoccupé qu'ils aient des postes. C'était le doigt dans l'engrenage fatal. Peu à peu on a parlé des carrières de tout le monde : c'était la décadence complète.

Cette crainte écartée il reste celle, peut être encore plus effrayante, de la société secrète de fanatiques qui se battent pour le triomphe de la "Cause". La cause en l'occurrence étant une certaine idée des mathématiques. Cette hypothèse est plus difficile à écarter mais je crois qu'on peut quand même le faire et j'avancerai deux raisons. La première est que plusieurs membres de Bourbaki ont occupé des postes de pouvoir officiels (présidents de comités, présidents d'université,...) où ils ont fait preuve d'une probité exemplaire. La seconde raison, plus décisive à mes yeux, est que Bourbaki faisait preuve d'humour et les fanatiques brillent rarement par leur sens de l'humour. Il reste que Bourbaki exerçait un réel pouvoir intellectuel. Jean-Pierre Kahane, important mathématicien contemporain, qui n'en était pas membre dit ceci [73] :

> Bourbaki a eu un pouvoir intellectuel, pas institutionnel. Ses membres n'ont pas été particulièrement présents aux postes de pouvoir, et personnne n'a critiqué des gens comme Delsarte ou Dieudonné au plan du pouvoir qu'ils ont exercé ; au contraire, ils se distinguaient par une certaine rigueur morale.

Mais le pouvoir intellectuel n'est-il pas, lui aussi dangereux ? Après tout le gourou d'une secte n'exerce pas autre chose qu'un pouvoir intellectuel ! Bien entendu ce n'est pas ce type de pouvoir qui est sous entendu ici. Si l'on suit J-P. Kahane on pense à la force de la raison sur des esprits libres et critiques. Ainsi les vues de Bourbaki ne s'imposeraient à une partie des mathématiciens que parce qu'elles seraient les plus rationnelles, les plus solides, les plus belles. Et les mathématiciens ne sont-ils pas particulièrement dotés d'esprit critique ? Ne devons nous donc pas considérer que l'influence de Bourbaki était justifiée ?

Ce n'est pas si simple. La sociologie des sciences nous apprend que le scientifique ordinaire ne passe que peu de temps à exercer son esprit critique sur son milieu. Que ce soit par modestie, ou par paresse, probablement un mélange des deux, il estime qu'il ne peut pas influer sur le cours des choses. Il n'aspire qu'à faire une carrière sans histoire et se contente de creuser gentiment le sillon où le

73. Cité par M. Mashaal, dans *Bourbaki*, dans "Les génies de la science" n° 2, mai 2000.

destin l'a placé. Il fait son travail honnêtement et s'en remet à l'air du temps pour le reste. En mathématiques comme partout et peut être même plus que partout. Mais qui fait donc l'air du temps ? La réponse est simple : les hommes de pouvoir qui font marcher les institutions. Ceux qui participent aux commissions de gestion des départements et laboratoires, à la gestion des universités, à la direction du CNRS, au comité national du CNRS, au comité national des universités (CNU), à la direction des sociétés savantes etc... Il est inutile pour notre propos de faire la liste de ces organismes ni d'en analyser le fonctionnement qui ne diffère pas chez les mathématiciens de celui des autres disciplines scientifiques. Ce sont donc ces hommes de pouvoir qui créent les modes et décident ce qu'est le bon goût mathématique. Ils décideront dans les années 60 que le bon goût était celui de Bourbaki et jusqu'à la fin des années 70 il n'y avait guère de salut en dehors de l'allégeance à cette petite caste de dirigeants, en partie tout aussi occulte que Bourbaki mais pour des raisons moins avouables. Bourbaki n'est pas directement responsable de ces excès technocratiques mais on peut quand même regretter de sa part une forme d'apolitisme scientifique qui frisait la complaisance [74].

Notons que si Bourbaki avait une influence importante ce n'était quand même pas sur la totalité de la communauté. Il y avait de la résistance chez des mathématiciens de renom comme par exemple Arnaud Denjoy(1884-1974) qui écrivait à H. Cartan en 1954 [75].

> Je redoute votre absolutisme, votre certitude de détenir la vraie foi en mathématiques, votre geste mécanique de tirer le glaive pour exterminer l'infidèle au Coran bourbakiste. (...) Nous sommes nombreux à vous juger despotique, capricieux, sectaire.

D'autre part, à la même époque, ce qui allait être une révolution et qui avait échappé à Bourbaki n'avait pas échappé à quelques jeunes mathématiciens visionnaires eux aussi issus de la rue d'Ulm : la révolution informatique. Un des plus éminents d'entre eux, J-L. Lions était en 1965, à moins de 40 ans, à la tête d'un empire scientifique naissant qui commençait à concurrencer sérieusement le pouvoir qui se réclamait de Bourbaki. Lions et quelques autres mathématiciens de sa génération avaient clairement vu que l'ordinateur changeait le rapport des

74. Je reviendrai sur cette question dans le chapitre consacré à l'éthique des mathématiciens.

75. Lettre de Arnaud Denjoy à Henri Cartan (22 mai, 1954). Archives de l'Académie des sciences, fonds Montel, carton 1.
Cité dans : Anne-Sandrine Paumier, David Aubin *Polycephalic Euclid ? : Collective Practices in Bourbaki's History of Mathematics*,2014 ; [92] ; HAL Id : hal-00871784
`http://hal.upmc.fr/hal-00871784v3`

mathématiques au monde en les faisant rentrer directement dans le processus de production industrielle. Mais ce qui est évident maintenant ne l'était pas en 1960 et c'est en cela que des mathématiciens comme J-L. Lions étaient des visionnaires [76]. Si nous évoquons "l'empire Lions" ici ce n'est pas pour introduire l'histoire des "mathématiques appliquées", la guerre "mathématiques-pures/mathématiques appliquées" et l'émergence de l'Informatique, qui n'ont que peu à voir, au moins directement, avec notre sujet mais pour rappeler l'existence d'autres courants de pensée et la montée en puissance d'un autre pouvoir efficace. A côté de ces deux grands groupes, il existait bien quelques écoles mathématiques "indépendantes", mais sans pouvoir réel. La vie mathématique institutionnelle (partage des crédits, des postes, définition des programmes), depuis deux décennies, se résumait pour l'essentiel à l'affrontement de deux ensembles : Les "mathématiciens purs" qui se réclamaient plus ou moins explicitement de Bourbaki et les "mathématiciens appliqués" qui se réclamaient essentiellement de Lions [77]. Mais comme le système était globalement en expansion les individus isolés, les petites écoles de pensée, qui ne se reconnaissaient dans aucun des deux camps n'avaient pas trop à souffrir. Une fois servis les institutionnels il se trouvait toujours quelque miette de crédit ou quelque poste oublié à leur offrir.

Avant d'en finir avec Bourbaki notons que la consultation des titres du "séminaire" fait apparaitre que le mathématicien Pierre Cartier (membre de Bourbaki) possède un spectre de compétences mathématiques remarquablement large puisqu'il il y est l'auteur de plusieurs dizaines d'exposés portant sur des sujets incluant, à côté de la géométrie algébrique, de la physique mathématique, de la combinatoire ou la théorie des probabilités ! Or cette liste d'exposés de P. Cartier contient le titre : *Perturbations singulières d'équations différentielles ordinaires*

76. Lors d'un de nos entretiens P. Duchemin m'a apporté des propos de Lobry qui avait fait ses études à Grenoble dans les années soixante.

> Ainsi je me souviens, en 1963 à Grenoble, de Claude Chabauty, éminent Bourbaki, en train de se désoler devant moi que son jeune collègue (il avait deux ans de moins) Jean Kuntzmann, reçu troisième à Normale Sup. et premier à l'agrégation, ait abandonné les mathématiques «pour enfoncer de ridicules petits plots de cuivre » faisant allusion à des calculateurs analogiques encore en usage à l'époque. Jean Kuntzmann est resté dans l'histoire comme le fondateur de l'importante école de mathématiques appliquées de Grenoble.

77. A partir de maintenant, dans tout ce travail je désignerai par "mathématiciens purs" (et leurs mathématiques les "mathématiques pures") et "mathématiciens appliqués" (et leurs mathématiques mathématiques appliquées") ces deux grands groupes.

et analyse non-standard[78]. La lecture de l'article montre qu'il porte un regard très positif sur les travaux de l'école de Reeb et la théorie I.S.T. de Nelson[79], ce qui, pour au moins une partie importante de la communauté mathématique, aurait du être considéré comme une reconnaissance en quelque sorte officielle des travaux sur l'A.N.S..

3.4 Une exception culturelle française : L'Ecole Normale Supérieure et les grandes écoles.

Pourquoi cette section ? Parce que dans [LdL] l'Ecole Normale Supérieure (E.N.S.) joue un rôle négatif important. Comme l'auteur n'en est pas un ancien élève on peut penser que sa critique comporte une composante importante de frustration. C'est probable mais ne permet pas conclure que cette question du rôle de l'E.N.S. est sans intérêt pour notre problème car, nous allons le voir, G. Reeb non plus n'en était pas issu et *en souffrait* manifestement. Essayons donc de dire des choses objectives sur ce sujet délicat.

Pour bien faire il faudrait situer l'E.N.S. dans le contexte particulier du système des grandes écoles et des grands corps de l'État qui y sont associés, système unique au monde, système qui soulève les passions. Mais nous lancer dans une analyse critique de cette exception culturelle française nous entraînerait tellement loin qu'il faut y renoncer dans le cadre de ce travail. Contentons nous de l'énoncé de quelques faits solidement établis.

— Avant 1980 presque tous les grands mathématiciens français étaient issus de l'E.N.S.. Le polytechnicien H. Poincaré est une exception. De nos jours, en ce qui concerne les mathématiciens reconnus (seule l'histoire peut décider qui sont les "grands") il faut ajouter une proportion très significative d'anciens polytechniciens. Les mathématiciens Français reconnus qui ne sortent pas d'une grande école sont rares. C'est une particularité de la France.

78. Séminaire Bourbaki n° 580, 1981-82 ; [24].

79. Il est à noter que Nelson n'est pas un inconnu pour Cartier quand il aborde I.S.T. Il avait déjà eu l'occasion de le louer dans l'exposé *n* 189 (mai 1959) intitulé *Vecteurs analytiques (d'après E. Nelson* :

> (...) à ce qu'il me semble, Nelson a trouvé un procédé d'une grande simplicité et d'une grande efficacité qui doit s'appliquer dans de nombreuses situations d'équations aux dérivées partielles.

Cet article de Nelson, qui n'a rien à voir avec l'A.N.S., a eu un succès important (il est actuellement cité plus de 1000 fois).

— A leur sortie de l'E.N.S. tous les normaliens sont des gens brillants mais tous, loin de là, n'apporteront pas une contribution significative à la recherche mathématique. Il en existe beaucoup dont la contribution est tout à fait ordinaire. Il en existe également un certain nombre qui deviennent des hommes de pouvoir, technocrates et hommes politiques.

— Les mathématiciens non normaliens se plaignent souvent que les normaliens qui ne sont pas des mathématiciens d'exception ont des carrières universitaires plus brillantes que ne devraient l'autoriser leurs simples mérites. Mais ils ne peuvent cependant rien montrer de vraiment scandaleux.

— Aussi loin que l'on se reporte et encore maintenant, on constate que l'essentiel des positions de pouvoir est occupé par des normaliens ou des polytechniciens. La différence entre les années soixante et maintenant est qu'alors elles étaient encore occupées par des scientifiques. Maintenant elles le sont surtout par des technocrates.

— Plus des trois quart des bourbakis sont des normaliens.

A ces faits incontestables ajoutons en un qui n'est pas sans importance pour ce travail : Vénissac est un ancien élève de l'E.N.S..

3.5 Jean Dieudonné et sa vision des mathématiques

Jean Dieudonné (1906-1992) est un personnage important des mathématiques françaises contemporaines. Il a été un des membres fondateurs de Bourbaki mais, surtout, en a été l'inlassable animateur. Loin de l'image du mathématicien dans sa tour d'ivoire il n'a jamais hésité à descendre dans l'arène publique pour défendre son idée des mathématiques et à utiliser sa notoriété pour défendre des collègues persécutés par des régimes autoritaires. Il a fait bénéficier un large public de sa connaissance encyclopédique en publiant *Pour l'honneur de l'esprit humain, les mathématiques aujourd'hui* [80] un livre adressé au non spécialiste qui a été un succès de librairie. Jean Dieudonné était aussi, avant l'avènement de la bureaucratie, un des dernier scientifiques ayant du pouvoir. Il était redouté pour ses coups de gueule et respecté pour sa probité. Il est à l'origine de diverses réalisations comme l'Institut des Hautes Études Scientifiques (I.H.É.S.) dont il sera question plus loin et le remarquable centre de rencontres de Luminy près de Marseille. La communauté mathématique française lui doit beaucoup. Il n'est pas directement impliqué

80. Hachette 1987 ; [46]

dans cette histoire mais il est, en dehors de sa production strictement mathématique, l'auteur de textes qui nous intéressent, car, compte tenu de la personnalité de leur auteur, ils témoignent de l'air du temps.

En 1976 il prononce une conférence au séminaire "Philosophie et Mathématiques" de l'École Normale Supérieure. Le texte de cette conférence (déjà évoquée par Duchemin dans son cours) [81], est assez court et mériterait d'être lu en entier. Je me contenterai pourtant des extraits suivants qui nous concernent plus.

> (...) Mais avant de vous dire ce que sont les mathématiques, je crois qu'il n'est peut être pas inutile, surtout pour ceux d'entre vous qui ne sont pas des mathématiciens professionnels, d'essayer de vous expliquer comment les mathématiciens voient actuellement les mathématiques.

Il s'agit donc du point de vue d'un mathématicien.

> Je crois que l'on peut dire qu'on n'a jamais trouvé autant de résultats nouveaux et importants qu'actuellement et, sans exagération, qu'il est possible de dire qu'il s'est produit plus de mathématiques fondamentales depuis 1940 qu'il n'y en a eues entre Thalès et 1940.

Dieudonné s'appuie, pour sa démonstration, sur la croissance du nombre des publications et insiste sur le fait que ce n'est pas seulement un accroissement quantitatif : les mathématiciens viennent à bout des grandes questions historiques.

> Donc, à tous les points de vue, on peut dire que les mathématiques connaissent actuellement une prospérité extraordinaire.

Ceci conclut son introduction. Le premier paragraphe est consacré à la logique et il commence par :

> Les philosophes et les logiciens ont une tendance, parfaitement naturelle et excusable, à croire que les mathématiciens s'intéressent beaucoup à ce qu'ils font. Détrompez les, ce n'est pas vrai : 95% des mathématiciens se moquent éperdument de ce que peuvent faire tous les logiciens et tous les philosophes. Cela ne les intéresse absolument pas.

On a là un exemple du culot [82] et du franc parler de Dieudonné ! Il s'agit bien entendu des mathématiciens actuels, actifs...

> (...) sur les trois cent pages environ de ce numéro des *Mathematical Review* (février 1976), il n'y en a que huit consacrées à la logique mathématique.

---

81. *Mathématiques vides et mathématiques significatives*, dans "Penser les mathématiques", Seuil (1982), pp : 15-38 ; [64].

82. Il s'exprime quand même dans le cadre d'un séminaire de philosophie !

et cela pose question....

> Pourquoi donc les mathématiciens ne s'intéressent-ils pas à la logique ? Il y a eu effectivement une période - la fameuse crise des fondements, qui commence aux environs de 1895 et qui continue jusque vers 1930 - où beaucoup de mathématiciens étaient troublés par les paradoxes et les difficultés de raisonnement qui avaient l'air de surgir de tous côtés.

...mais c'est du passé...

> Le système qui satisfait actuellement, disons, 95% des mathématiciens au moins, c'est le système bien connu de Zermelo-Fraenkel, arrangé, formalisé (...).
>
> Ce système répond exactement aux besoins de tous les mathématiciens, excepté, bien sûr, les logiciens et aussi ceux que leur attitude philosophique empêche d'accepter les prémisses d'un tel système, c'est à dire des mathématiciens dits intuitionistes ou constructivistes.

Ainsi Dieudonné le concède : il y a bien une (petite) résistance à la belle sérénité philosophique des mathématiciens. Il va même prendre les devants un peu plus loin :

> D'abord il y a des gens qui vous disent : « *Et que faites-vous de l'Analyse Non Standard ?* » Ah que voila une belle invention, qui date d'une quinzaine d'années, et qui, pour autant que je puisse en juger, nous vient des logiciens. Historiquement ce sont les logiciens qui ont inventé cette méthode ; ils en ont tiré quelques beaux résultats et il n'est pas du tout dit qu'entre les mains de gens très astucieux elle ne va pas donner beaucoup mieux encore. Mais, en réalité, c'était une notion mathématique comme une autre basée sur la notion d'ultra-produit.

Donc les logiciens (ou les philosophes, pour Dieudonné c'est un peu la même chose :-)) ont découvert quelque chose avec l'Analyse Non Standard, mais ce quelque chose, au demeurant intéressant, s'est trouvé n'être en définitive qu'une notion mathématique classique.

Il parle ensuite un peu de questions d'indécidabilité, laisse la porte ouverte à une pluralité de mondes mathématiques ...

> Il se peut aussi que cela n'arrive jamais et qu'à partir de maintenant il y ait autant de systèmes à partir du système central qu'il y a de possibilités, suivant le genre de mathématiciens. Je n'en sais rien. Il n'y a que l'avenir qui puisse le dire.

...pour conclure :

> Cela règle la question des rapports des mathématiques et de la logique. Donc, à partir de maintenant, je ne vais plus parler de logique du tout.

Et il attaque le deuxième paragraphe où il sera question de l'origine des théories mathématiques.

Nous l'avons dit, Dieudonné était un homme passionné qui a consacré sa vie à défendre une certaine vision des mathématiques et il n'était pas un adepte de la langue de bois. La conférence dont nous venons de voir quelques extraits était évidemment un brin provocatrice dans le cadre d'un séminaire consacré à la philosophie des mathématiques. D'autres mathématiciens auraient peut être étés plus nuancés mais sur le fond d'accord avec lui. On peut dire qu'en 1976 Dieudonné était bien le porte parole d'une grande partie de la communauté mathématique française, au moins de cette partie de la communauté qu'on appelait les "mathématiciens purs".

Mais avant de passer à la suite citons la fin du petit livre de Nordon que Duchemin nous a conseillé de lire,

> Insignifiantes alors les mathématiques ? En un sens oui, et il n'est malheureusement pas tout à fait insignifiant que notre société leur accorde une telle place, que l'enseignement les présente de façon si formelle. Mais elles ne sont pas qu'insignifiantes, pourtant ! Elles participent d'une connaissance du monde qui a fait trembler la terre et les hommes. Et nous avons vu que, quoiqu'en aient les mathématiciens, les mots arriment à jamais l'une à l'autre la cité humaine et les mathématiques. Et puis les passions qu'inspirent les mathématiques, de quel droit les juger insignifiantes ? Passions irrationnelles, certes, qui consument le mathématicien en des veillées fébriles à la recherche d'un résultat que lui même parfois juge d'avance devoir être dérisoire. Mais l'irrationnel n'est-il pas autant que la raison le propre de l'homme ? "Pour l'honneur de l'esprit humain", mot si caractéristique de l'alliance intime entre cette extrême modestie : ne servir à rien, et cet orgueil extrême : ne servir à rien.(...)

qui semble nous dire que tout n'est pas aussi lisse que pourrait le laisser croire le discours de Dieudonné. J'ai interrogé Duchemin sur la réception du livre de Nordon par la communauté (rappelons que la première édition est de 1981). Il m'a dit qu'à l'époque ses collègues disaient généralement que les "mathématiciens ordinaires" n'ont pas à s'exprimer sur les mathématiques. Cette compétence, cette capacité à parler "sur" n'était accordée qu'aux "grands". Ainsi, pour beaucoup, Nordon un enseignant-chercheur qui n'était qu'un "mathématicien (très) ordinaire" était-il *a priori* disqualifié. Pour certains, même, Nordon qui pourtant menait

une enquête à charge et à décharge et qui, s'il émettait des avis éventuellement critiques, était toujours nuancé, était considéré comme un véritable traître à la "cause mathématique". Nous en reparlerons.

3.6 Georges Reeb et l'Ecole de Strasbourg

Nous avons déjà évoqué de G. Reeb et de son école le strict minimum pour situer l'affaire de la commission des thèses. C'est le moment maintenant d'en dire plus.

C'est à Abraham Robinson (1918-1974) [83] qu'on doit le premier formalisme permettant de parler librement d'infinitésimaux "fixés une fois pour toute" (voir le cours de Duchemin pour le sens de cette expression). Son livre *Non-standard analysis* [84] a eu un grand retentissement et est toujours cité en référence. Il semble que G. Reeb se soit intéressé au livre de Robinson peu après sa parution. Il a commencé à créer son école au milieu des années 1970 [85], école qui a publié ses premiers résultats significatifs à la fin de ces mêmes années. L'Analyse Non Standard n'est donc pas une invention française. Mais l'école de Reeb (ou l'école de Strasbourg comme certains l'appellent) a certainement été un contributeur important au développement de l'utilisation de l'A.N.S. au niveau international.

Attardons nous sur le personnage de Reeb. Il est né en 1920. *Il n'est pas ancien élève de l'E.N.S.* Il a fait ses études et sa thèse à l'université de Strasbourg pendant la guerre. Après la guerre il a eu la charge, en tant que militaire occupant l'Allemagne, de garder la bibliothèque du centre mathématique d'Oberwolfach. Selon ses dires ce fut pour lui l'occasion d'acquérir une culture mathématique libre de préjugés.

Il est mondialement connu en tant que géomètre, comme l'inventeur de la théorie des feuilletages [86]. Un objet mathématique porte depuis longtemps son nom dans la communauté mathématique : *Le feuilletage de Reeb* ; plus récemment,

83. Voir le livre de J. W. Dauben, intitulé *ABRAHAM ROBINSON, The creation of Nonstandard Analysis, a Personal and Mathematical Odyssey*, Princeton University Press (1995) ; [31].

84. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1966 ; [101]

85. Selon son élève R. Lutz c'est en 1973, à la bibliothèque de l'institut de mathématiques de Strasbourg que Reeb a découvert le livre de Robinson. Voir *La saga du bon maitre Reeb*, L'Ouvert n° 76, spécial G. Reeb. Disponible en ligne à l'adresse :
`http://publimath.univ-irem.fr/biblio/IST94005.htm`
Selon Reeb lui même, dans sa préface à l'ouvrage collectif *La Mathématique Non Standard* (Barreau-Harthong Eds.), Editions du C.N.R.S. (1989) ; [13], ce serait en 1969

86. Reeb a toujours attribué cette invention à son maitre C. Ehresmann (1905-1979).

dans la communauté des informaticiens spécialistes du traitement de l'image, un autre objet portant son nom est apparu : *le graphe de Reeb* ; dans un milieu plus restreint lié à l'Analyse Non Standard on parle de la *droite de Harthong-Reeb*. Il a tout de suite été reconnu en France pour ses travaux de topologie : invité deux fois au séminaire Bourbaki (exposés 21 en 1949 et 192 en 1959) ; institutionnellement il a été président de la Société Mathématique de France, fondateur de l'IRMA (Institut de Recherche en Mathématiques Avancées de l'université de Strasbourg) premier laboratoire universitaire de mathématiques associé au CNRS ; il a atteint rapidement le plus haut grade possible des professeurs. Ainsi, au moment des faits, vers 1975, quand il se lance à fond dans l'A.N.S., G. Reeb est loin d'être un marginal. Il a 55 ans, il a fait ses preuves, des idées nouvelles venant de lui devraient donc être accueillies avec un intérêt tout particulier. Ça n'a pas été le cas et nous cherchons à comprendre pourquoi.

Pour cela il nous faut aller plus loin dans l'exploration de la personnalité de Reeb [87]. C'était un Alsacien fier de ses origines et il se définissait politiquement comme un "modéré" (il n'aurait probablement pas récusé le terme "de centriste") dans un milieu professionnel qui se prétendait majoritairement de gauche (chez les jeunes, 1968 était passé par là !). Mais il était tout sauf un être consensuel !

D'après [LdL] (et Duchemin me l'a confirmé) il avait une sorte de manie qui était de s'attaquer en tout lieu et toute heure à ce qu'il appelait la "mafia", c'est à dire, pour lui, les anciens élèves de l'E.N.S.. Cette aversion pour l'E.N.S. s'étendait, mais avec moins de virulence, à tout le système des grandes écoles. Selon lui, et contre toute évidence, rien de bon n'était jamais sorti de ces institutions. On conçoit qu'il n'avait pas que des amis ! Nous avons vu plus haut ce qu'étaient Bourbaki, l'E.N.S. et l'ambiance de cette époque. Je vous laisse décider si Reeb avait raison ou non de parler de "mafia".

Si beaucoup ne l'aimaient pas, l'autre trait caractéristique de sa personnalité était la sorte de vénération que lui portaient ses élèves. Voici ce qu'en disait le mathématicien G. Choquet dans une lettre à son collègue Daniel Bernard en 1993.

> Mon second contact prolongé avec G. Reeb, - et ce fut malheureusement le dernier -, eut lieu lors du colloque de Cerisy la Salle, sur le Continu et le Dis-

87. Quatre de ses admirateurs et amis ont fait un assez long portrait de lui, par ordre chronologique, Lobry en 1989 dans "Et pourtant ils ne remplissent pas N !...", puis Jacques Harthong, Jean-Michel Salanskis et Robert Lutz dans le journal "L'Ouvert" n° 76 de l'IREM de Strasbourg à l'occasion de son décès. Ce numéro spécial disponible en ligne
`http://publimath.univ-irem.fr/biblio/IST94005.htm`
contient d'autres témoignages sur G. Reeb et une courte autobiographie intellectuelle de ce dernier. Ce sont mes sources principales.

> cret. Beaucoup de ses élèves étaient présents ; et je fus le témoin émerveillé de l'affection et de l'admiration dont ils l'entouraient ; affection et respect mutuels, car il savait attirer et retenir les jeunes par le respect de leurs idées, sa façon socratique de leur faire découvrir leurs errements et choisir des voies fécondes.

auquel s'ajoute le témoignage [88] du créateur de I.S.T., E. Nelson lors d'un colloque après la disparition de Reeb .

> One of the most treasured experiences of my life is my friendship with Georges Reeb. We had many strong discussions together, intuitionist versus formalist. What he created was unique in my experience. His rare spirit, gentle but fiercely demanding of the highest standards, inspired a group of younger mathematicians with an unmatched ethos of collegiality. And their discoveries are extraordinary. Reeb found, and led others to find, not only knowledge and beauty in mathematics, but also virtue. His insights into the nature of mathematics will point the way towards the mathematics of the future.

Il faut insister sur ce que ces deux derniers témoignages sont ceux de deux personnalités des mathématiques, pas de disciples. En effet, dans toutes les écoles de pensée, les disciples manquent d'esprit critique. Ainsi il fut parfois reproché à l'école de Reeb de se conduire comme une secte. Il est difficile de dire si ce reproche était fondé [89], ce comportement sectaire, s'il a existé, n'a pas laissé de trace écrite. De plus le comportement sectaire se caractérise en particulier par le refus d'accepter l'ordre social actuel ; au contraire Reeb insiste dans ses (rares) écrits sur le fait que la révolution nonstandard à cette particularité de conserver tout l'ordre ancien - entendez que tous les acquis des mathématiques classiques sont repris par l'A.N.S. En voici un exemple tiré de l'introduction du livre [90] qu'il co-signe avec Françine Diener :

> Une seconde idée reçue est que pour apprendre l'analyse non standard il faudrait remettre en cause les méthodes mathématiques que l'on utilisait jusque là, abandonner quelques unes de ses convictions. Nous espérons montrer dans ce livre que ce point de vue est erroné. L'analyse non standard n'est

88. dans *Ramified recursion and intuitionism* ; [89] un texte disponible sur le site de Nelson : `http://www.math.princeton.edu/?nelson/papers.html`

89. Une caractéristique des sectes est d'avoir un gourou. Tous les membres interrogés de l'école de Reeb rejettent avec vigueur l'idée que Reeb ait été un gourou et, comme G. Choquet cité plus haut, insistent sur le caractère socratique de son enseignement.

90. *Analyse Non Standard*, HERMANN (1989)

> pas en dehors des mathématiques classiques, encore moins en conflit avec elles. Elle en est l'un des aspects et s'y intègre parfaitement. En l'adoptant on ne doit abandonner aucun de ses modes de raisonnement favoris : si l'on est géomètre, on reste géomètre ; si l'on est physicien, on reste physicien. On acquiert seulement des possibilités nouvelles qui viennent s'ajouter à ses instruments habituels en leur donnant une force nouvelle.

Pour terminer ce rapide portrait ajoutons que Reeb était chrétien et ne s'en cachait pas [91].

Donc, à partir de 1975 Reeb a commencé à constituer un groupe autour de lui. Dans les années 80 ce groupe comprenait de dix à trente personnes selon le degré d'attachement au groupe choisi. Il y avait un premier cercle de jeunes qui s'étaient lancés dans l'A.N.S. immédiatement, ou presque, après leurs études. On peut estimer à une bonne douzaine le nombre des thèses soutenues avant 1985 directement sur des idées proposées par Reeb *ce qui est considérable* et mérite un petit développement.

A cette époque, faire passer une douzaine de thèse de mathématiques en cinq ans attirait l'attention et éveillait le soupçon. Toutes ces thèses étaient-elles toutes de bonne qualité ? La réponse que je propose ici sera *oui* et *non*.

— Oui, si l'on estime qu'elles étaient porteuses de "propositions-de-faits-scientifiques-nouveaux" qui méritaient d'être portés à la connaissance de la communauté pour y être discutés.

— Non, si comme beaucoup de mathématiciens le disent, elles étaient assez "triviales", c'est à dire ne nécessitant pas des trésors d'ingéniosité technique. Pour ces thèses il semble que, une fois passé l'obstacle psychologique à utiliser l'A.N.S. (obstacle insurmontable pour certains), il était facile d'obtenir des résultats, parfois surprenants, dont les démonstrations étaient très simples. Ainsi, il nous a été dit que les résultats de l'école de Strasbourg auraient du constituer 2 ou 3 thèses, pas plus [92].

Arrêtons nous sur ce dernier point : le concept de "trivial" qui semble si important dans la communauté mathématique. Dans les sciences de la nature ce qui compte c'est la découverte. Quand Y. Coppens découvre Lucy on se préoccupe assez peu de savoir s'il a eu du mal ou non à se procurer les crédits nécessaires

91. Il s'est exprimé à ce sujet dans l'ouvrage collectif "Le savant et la foi" Flamarion 1989 ; [38].

92. Duchemin m'a dit qu'un professeur de Strasbourg prétendait que toutes ces thèses réunies ne valaient pas une seule des siennes et demandait à ce que la commission des thèses parisiennes de mathématiques soit saisie.

à ses expéditions et si le climat était rude en Éthiopie. La découverte aurait la même valeur si elle avait été faite à Villeneuve-Saint-Georges et s'il a bénéficié de financements généreux, tant mieux pour lui. *A contrario*, pour beaucoup de mathématiciens il semble que la difficulté soit une qualité essentielle d'une découverte. Une découverte faite facilement est qualifiée péjorativement de "triviale". Mais ces mêmes mathématiciens vous parleront de l'élégance des démonstrations et si vous leur demandez ce qu'est l'élégance il parleront de simplicité. Difficile de s'y retrouver[93]. Nous reviendrons longuement sur ce point dans une discussion avec P. Duchemin quand nous aborderons la question de la philosophie des mathématiciens.

Pour le moment contentons nous de faits : sur les douze auteurs des thèses en question[94], huit sont devenus professeur d'université, six en France, un en Algérie et un au Portugal. Cela ne prouve pas que les thèses n'étaient pas triviales, puisque trivial est une notion plutôt subjective, mais cela montre certainement qu'il n'y avait pas scandale puisque que leurs auteurs ont su convaincre une partie de la communauté de leurs mérites, dans une période où faire carrière n'était pas

93. Surtout quand les plus grands mathématiciens viennent compliquer la donne ! Voici une note de bas de page de Alexandre Grothendieck dans *Récoltes et Semailles* p. 188 : « Ronnie Brown m'a fait part d'une réflexion de J.H.C. Whitehead (dont il a été élève), parlant du "snobisme des jeunes, qui croient : "qu'un théorème est trivial parce que sa démonstration est triviale". Beaucoup de mes amis d'antan auraient intérêt à méditer ces paroles. Ce "snobisme"- là n'est aujourd'hui nullement limité aux jeunes, et je connais plus d'un mathématicien prestigieux qui le pratique couramment. J'y suis tout particulièrement sensible, car ce que j'ai fait de mieux en mathématiques (et ailleurs aussi. . .), les notions et structures que j'ai introduites qui m'apparaissent les plus fécondes, et les propriétés essentielles que j'ai pu en dégager par un travail patient et obstiné, tombent toutes sous ce qualificatif de "trivial". (Aucune de ces choses n'aurait eu de nos jours grande chance à se voir accepter pour une note aux CR, si l'auteur n'était déjà une célébrité !) Mon ambition de mathématicien ma vie durant, ou plutôt ma passion et ma joie ont été constamment de trouver les choses évidentes, et c'est ma seule ambition aussi dans le présent ouvrage (y compris dans le présent chapitre introductif).(. . .), La chose décisive souvent, c'est déjà de voir la question qui n'avait pas été vue (quelle qu'en soit la réponse, et que celle-ci soit déjà trouvée ou non) ou de dégager un énoncé (fut-il conjectural) qui résume et contienne une situation qui n'avait pas été vue ou pas été comprise ; s'il est démontré, peu importe que la démonstration soit triviale ou non, chose entièrement accessoire, ou même qu'une démonstration hâtive et provisoire s'avère fausse. Le snobisme dont parle Whitehead est celui du viveur blasé qui ne daigne apprécier un vin qu'après s'être assuré qu'il a coûté très cher. Plus d'une fois en ces dernières années, repris par accès par mon ancienne passion, j'ai offert ce que j'avais de meilleur, pour le voir rejeté par cette suffisance-là. J'en ai ressenti une peine qui reste vivante, une joie s'est trouvée déçue - mais je ne suis pas à la rue pour autant, et je n'essayais pas, heureusement pour moi, de caser un article de ma composition. »

94. Mentionnées dans [LdL]

particulièrement facile.

Autour de ce premier cercle s'agrégeaient des chercheurs qui avaient déjà une certaine expérience mathématique, voire une petite notoriété, avant de se lancer dans l'aventure de l'A.N.S.. Ces deux cercles étaient constitués pour l'essentiel de mathématiciens de Strasbourg, mais pas exclusivement comme c'était le cas pour Lobry. Ajoutons, ce qui est tout à fait inhabituel pour des mathématiciens, que ces deux premiers cercles entretenaient des relations suivies avec des philosophes professionnels. En effet, il existait alors à Strasbourg une unité C.N.R.S., U.P.R. 265, *Fondements des Sciences* dirigée par H. Barreau où avaient lieu des séminaires réguliers sur des questions philosophiques relatives aux mathématiques non standard. J-M. Salanskis, qui est maintenant un philosophe reconnu (entre autres) pour ses contributions à l'épistémologie des mathématiques, participait activement à ces réunions.

Il faut mentionner ici, à propos de l'U.P.R. *Fondements des Sciences* qu'elle a connu des difficultés lors de son évaluation scientifique par le CNRS. Les critiques qu'elle a subi n'ont pas le caractère scandaleux de la condamnation sans explication de la thèse de Vénissac mais elles témoignent du rejet que subissait à l'époque l'A.N.S. de la part des mathématiciens. On lira avec intérêt le témoignage de H. Barreau sur ce point [95].

Pour terminer cette brève description de l'école de Reeb, à ces deux cercles il faut ajouter quelques mathématiciens bien établis, français ou non. A titre d'exemple et pour en montrer la diversité, en dehors de Nelson déjà cité, citons un mathématicien Belge très connu J. Mawhin, un spécialiste des systèmes dynamiques et de théorie du contrôle L.W. Markus [96], le Bourbaki très actif P. Cartier déjà cité, deux mathématiciens Strasbourgeois de renom J. Martinet et J-P. Ramis (deux membres du Jury pressenti de Vénissac). Si en général ils ne contribuaient pas directement à l'A.N.S. ils participaient à la discussion avec des commentaires plutôt favorables. Enfin, si l'Ecole de Reeb entretenait une relation très forte avec E. Nelson dont elle avait adopté le système axiomatique I.S.T., en revanche elle avait assez peu de contacts avec une école plus internationale et plus nombreuse qui utilisait le formalisme de Robinson.

Ce tour d'horizon peut sembler un peu "franco-français". On peut se demander si la petite communauté entourant Reeb était, à cette époque, tout à fait ignorée au plan international. En fait ce n'est pas le cas. Ainsi, par exemple, on trouve (pp.

95. Voir *Georges Reeb et l'UPR fondements des Sciences*, L'Ouvert n° 76, spécial G. Reeb. Disponible en ligne à l'adresse :
`http://publimath.univ-irem.fr/biblio/IST94005.htm`

96. Voir annexe D un témoignage de ce dernier.

79-86) dans un ouvrage de Ian Stewart[97] une description élogieuse des travaux de l'école de Strasbourg. Ian Stewart est un mathématicien connu du grand public pour son travail de vulgarisation ; il est significatif qu'il ait fait une place non négligeable à l'A.N.S "à la Reeb" dans un ouvrage consacré à un vaste panorama des mathématiques contemporaines. Dans le même orde d'idée, un des quatre co-auteurs de l'article sur les canards, Marc Diener, publiait dans le journal de grande audience dans la communauté mathématique internationale "The Mathematical Intelligencer"[98] *The Canard Unchained or How Fast/Slow Dynamical Systems Bifurcate*[99].

On doit quand même remarquer que l'école de Reeb publiait assez peu, presque toujours en français, et surtout ne publiait généralement pas dans les grandes revues mathématiques prestigieuses. Il y avait plusieurs raisons à cela :

— Le maitre Reeb était d'une génération où l'on publiait moins et lui même n'était pas excessivement porté sur l'écrit. La nécessité de produire des articles pour justifier son statut de chercheur devant les commissions d'évaluation n'avait pas encore atteint le délire actuel.

— Les membres du premier cercle et dans une moindre mesure ceux du second ne semblaient pas particulièrement obsédés par une carrière rapide qui serait passée par la publication de nombreux articles.

— Certaines revues "prestigieuses " refusaient souvent les propositions d'articles A.N.S. prétendant qu'elles n'étaient pas compétentes.

— Enfin, le groupe avait une forte tendance à une certaine forme d'élitisme (que certains traitaient de sectarisme, nous l'avons vu). Il y avait l'idée que,

97. *Les mathématiques*, Belin, Paris (1989) ; [113], traduit de l'anglais, copyright Oxford University Press, 1987.

98. Il s'agit d'un journal de "culture mathématique". Il se définit ainsi :

> The Mathematical Intelligencer publishes articles about mathematics, about mathematicians, and about the history and culture of mathematics. Written in an engaging, informal style,* our pages inform and entertain a broad audience of mathematicians and the wider intellectual community. We welcome expository articles on all kinds of mathematics, and articles that portray the diversity of mathematical communities and mathematical thought, emergent mathematical communities around the world, new interdisciplinary trends, and relations between mathematics and other areas of culture. Humor is welcome, as are puzzles, poetry, fiction, and art. *Note : The traditional Definition/Theorem/Proof style of research articles is not appropriate here, nor are articles aimed only at specialists.

99. *The mathematical intelligencer*, Vol 6, n°3 pp. 38-49 (1984) ; [43].

> à partir du moment où le groupe avait "ouvert la voie", d'autres, plus besogneux, allaient continuer l'œuvre [100] [101]

Cependant quelques articles de l'école de Reeb ont été publiés par des revues prestigieuses (comme par exemple Vénissac à l'I.H.É.S. ou F. Diener dans la revue SIAM Journal of mathematical analysis) mais ils ne sont pas très nombreux.

---

100. Par exemple Harthong publiait un article dans la revue La Recherche (148, octobre 1983, pp. 1195- 1201) *L'analyse non-standard*, où il parlait de "révolution scientifique".

101. Pour illustrer ce point voici un témoignage de Duchemin recueilli dans une discussion à bâtons rompus. C'est lui qui parle :

> C'était en 1985 au cours du colloque "Mathématiques finitaires" organisées par le groupe. Un point à l'ordre du jour était celui de la création éventuelle d'une revue consacrée à l'A.N.S.. Se poser cette question n'avait rien de mégalomaniaque, bien au contraire. Il existe d'innombrables revues qui traitent d'un aspect particulier, voire très particulier des mathématiques. Toutefois le projet ne fut pas adopté au nom de l'argument suivant, majoritaire chez les participants : «Il ne fait pas de doute que "la bonne manière" de faire des mathématiques est celle de l'A.N.S.. Les résistances constatées sont celles que rencontre toute révolution scientifique. Créer une revue dédiée à l'A.N.S. n'a pas de sens. Ce sont toutes les branches des mathématiques qui vont progressivement accepter l'A.N.S., comme le "prouve" la publication de quelques articles par des revues de premier rang». On le voit, que de prétention et de naïveté à la fois ! Ne croyez surtout pas que Lobry était plus clairvoyant que les autres. Sans être le plus intégriste il était quand même de ceux qui soutenaient fermement ce point de vue.

Chapitre 4

Première conclusion

Sommaire

4.1 Les Canards... 101
4.2 ...et ce qu'ils sont devenus 103
4.3 Première conclusion. 107
4.4 Une dispute avortée. 109

4.1 Les Canards...

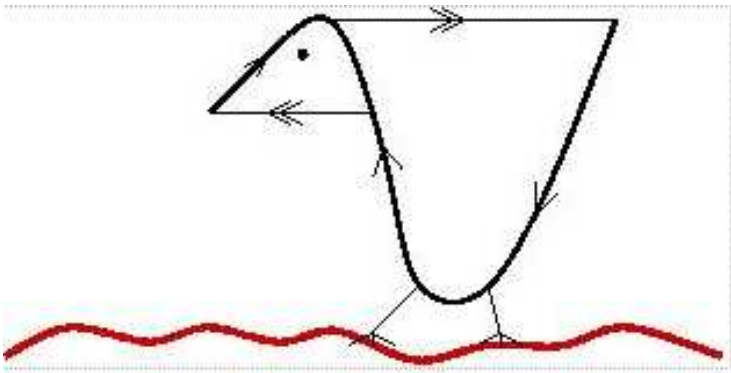

FIGURE 4.1 – Extrait de : http ://www.scholarpedia.org/article/Canards

Le mémoire de thèse soumis par Vénissac à la critique de la commission s'intitule :

Canards de $\mathbb{R}^3$

Il faut donc dire quelques mots sur l'invention des "canards" puisque c'est d'eux qu'il est question. Le mot apparait dans un article publié dans la revue espagnole Collectanea Matematica, intitulé *Chasse au canard* [102] signé de quatre personnes dont Vénissac. Pour ce que le non mathématicien que je suis peut comprendre un "canard" est une solution spéciale de certaines équations différentielles comme celle de Van der Pol [103]. Cette solution est très instable et donc difficile à mettre en évidence par des simulations sur ordinateur, d'où leur découverte récente. Le nom de "canard" vient de la Fig.4.1. On y voit que la trajectoire tracée (la courbe avec les flèches), si on lui ajoute le point et les pattes qui naturellement n'ont rien à voir avec les mathématiques, évoque la forme d'un canard. Il s'agit donc d'un choix terminologique dans le plus pur style de Bourbaki *à la fois formaliste et potache*, où le sens usuel du nom donné à l'objet mathématique n'a stricte-

102. Collectanea Mathematica, 31-32 (1-3), 37-119 (1981) ; [16].
103. C'est ce sujet que traitait l'exposé de P. Cartier évoqué plus haut. L'équation de Van der Pol est une équation très importante en physique dans la modélisation de certains phénomènes non linéaires.

ment aucun rapport avec lui [104]. Deux années après cet article, un article utilisant les techniques classiques retrouvait les “canards” et traduisait le mot en “french ducks” [105]. Après quelques années de flottements “canard” s’est imposé sans traduction ce qui est la reconnaissance internationale que l’article séminal est bien celui des quatre Français.

Ici il faut faire une mention spéciale pour un article paru en 1984 dans Uspekhi Mat. Nauk (une revue Russe consacrée à des articles de revue) et immédiatement traduite dans Russian Math. Surveys. Il s’agit de *Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations* par A.K. Zvonkin et M.A. Shubin [106]. Cet article cite plus de soixante travaux, ouvrages, articles et prépublications de l’école de Strasbourg ce qui en fait un recensement presque complet. Il mentionne dans son introduction l’article de Cartier au séminaire Bourbaki, et propose une introduction à l’A.N.S. dans le style de Robinson ce qui est surprenant dans la mesure ou tout le reste est consacré à la théorie des "canards" du plan qui a été faite initialement dans I.S.T. Ils accordent cependant une grande importance au style d’exposition adopté par l’école de Strasbourg. Ainsi ils écrivent à la fin du chapitre introductif :

> All this is done in §5, where we also give a short survey of the literature available to us. We only point out that most of the results described here are due to young mathematicians from Strasbourg, who later worked in Mulhouse (France), and also in Tlemcen and Oran (Algeria). Their work was inspired by one question formulated by G. Reeb in 1977. The enthusiasm of the authors of the theory described here has influenced, in particular, their terminology. *We have tried to preserve their vivid style, since it undoubtedly helps the comprehension of the results.*

C’est moi qui ai souligné la dernière phrase. En effet ces auteurs Russes, donc de culture mathématique assez différente de la culture occidentale, considèrent comme important l’apport du style littéraire d’un travail mathématique à la compréhension de ce dernier, ce qui contraste avec le style froid et impersonnel prôné par l’école formaliste française. Il est possible de voir là une raison de l’agacement du rapport de A. Connes, dont il est question un peu plus loin (c.f. note 114)

104. Duchemin m’a dit que, pour lui, ce choix n’est pas bon. Il pense qu’un choix plus réaliste comme "sur-stable" ou "meta-stable" aurait été plus adapté comme l’a fait plus tard G. Wallet pour des questions analogues dans le champ complexe.

105. W. Eckhaus *Relaxation oscillations including a standard chase of French ducks* ; in Asymptotic Analysis II, Springer Lecture Notes Math. 985, 449-494, (1983) ; [50].

106. Uspekhi Mat. Nauk 39 : 2 (1984), p. 77-127 traduit dans Russian Math. Surveys 39 : 2 (1984), p. 69-131 ; [128]

sur l'équipe de H. Barreau :

> La séduction de l'analyse non standard est due en grande partie à la création d'un vocabulaire suggestif ; la géométrie différentielle s'est bien gardée de céder à cette tentation, ce qui aurait été facile par exemple dans la théorie des solutions asymptotiques aux équations différentielles.

Dans la théorie des équations différentielles passer de la dimension deux, ce qui est le cas de l'équation de van der Pol, à la dimension trois n'est pas un exercice de routine. En effet, les solutions des équations différentielles sont des courbes *qui ne se coupent pas*, donc dans le plan leur organisation est très contrainte alors que, dès la dimension trois, elles peuvent s'entortiller, s'enlacer (un l'article de Vénissac a pour titre *Canards et enlacements*), former des nœuds. Vénissac a démontré l'existence de "canards" dans les systèmes de dimension trois et à commencé l'étude de ces derniers. D'où le titre de son mémoire de thèse : *Canards de* $\mathbb{R}^3$.

Les résultats issus de ce mémoire ont été publiés avant 1990 dans diverses revues renommées dont les prestigieuses publications de l'I.H.É.S [107]. La personne, avec une bonne culture mathématique, qui voudrait en savoir plus pourra consulter l'article "Canards" de Scholarpedia [108]
`http://www.scholarpedia.org/article/Canards`
qui donne plus d'informations sur de cette théorie.

4.2 ...et ce qu'ils sont devenus

Le fait qu'ils aient été publiés dans des revues de qualité montre que les travaux de Vénissac et ses collègues étaient des propositions-de-fait-scientifique-nouveau susceptibles d'être retenues. Ont-elle été effectivement retenues ? Oui, sans aucun doute, les travaux sur les "canards " ont eu une postérité importante. Pour le montrer je vais utiliser la base de données Google Scholar [109] à la date de

107. L'Institut des Hautes Etudes Scientifiques est une fondation qui accueille dans la région parisienne la fine fleur des mathématiques de la planète sur des postes permanents ou temporaires. L'institut édite une revue qui a une très grande réputation. Nous aurons l'occasion de reparler de l'I.H.É.S.

108. Scholarpedia est une encyclopédie mathématique en ligne coordonnée par des mathématiciens de renom.

109. Cette base de données n'est pas parfaite. Elle ne recense que ce qui existe sur internet et même dans ce cas elle commet des erreurs mais cela n'a pas d'importance pour mon étude où

juin 2017.

1. L'article séminal de Benoit E., Callot J-L, Diener F. et Diener M. *Chasse au canard (première partie)*, Colectanea Mathematica, Vol 32, n°1 (1981) [16] est cité 443 fois.
   C'est, en mathématiques, un chiffre significatif surtout pour un article paru dans une revue qui ne fait pas partie des "grandes" revues et, circonstance aggravante, est écrit en Français. Par tranches de 5 ans, depuis 1982 l'augmentation est constante jusqu'en 2016 et s'établit ainsi : 14, 13, 24, 31, 68, 110, 160 .
2. L'article de W. Eckhaus, *Relaxation oscillations including a standard chase on French ducks* [50] qui est une traduction en langage classique (et en Anglais) des résultats de *Chasse au canard (première partie)*, Lecture Notes in Mathematics Volume 985, 1983, pp 449-494, est cité 267 fois.
3. La théorie des "Mixed mode oscillations", importante dans les neurosciences, repose en partie sur celle des "canards" ; Le récent article de revue de Mathieu Desroches, John Guckenheimer, Bernd Krauskopf, Christian Kuehn, Hinke M. Osinga et Martin Wechselberger, *Mixed-Mode Oscillations with Multiple Time Scales*, SIAM Rev., 54(2), 211–288. (78 pages) ; [39] paru en 2012 dans un journal de premier rang en est déjà 176 citations.
4. Les articles de Vénissac relatifs à sa thèse sont :
   Systemes lents-rapides dans R3 et leurs canards Astérisque (1983) ; [15]. Cité 116 fois.
   Canards et enlacements Publications IHES (1990). Cité 108 fois.

Toutefois ces nombres de citations n'ont pas grande valeur dans l'absolu. Ils doivent être comparés aux scores obtenus dans des domaines comparables ; il est bien connu que le nombre de citations d'un article varie beaucoup avec la discipline. Prenons, pour commencer, deux exemples en biologie :

— F. Jacob, J. Monod *Genetic regulatory mechanisms in the synthesis of proteins* - Journal of molecular biology, (1961) Elsevier [62], cité 6146 fois.

— R. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature 261, pp. 459–467 [84], cité 6292 fois.

et comparons avec, en mathématiques, le travail de A. Wiles sur le théorème de Fermat :

---

seuls comptent des ordres de grandeur.

— *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem* - Annals of Mathematics-Second Series, (1995) [123] , cité 2188 fois.

Bien qu'elle soit l'achèvement d'une longue quête de plusieurs siècles, la démonstration de la conjecture de Fermat n'atteindra jamais le score des articles séminaux en biologie [110].

Il faut donc tenter de comparer ce qui est comparable. Prenons les trois articles les plus cités (toujours selon Google Scholar) de deux médaillés Fields Français, P-L. Lions et J-C. Yoccoz, tous deux académiciens et professeurs au Collège de France, dont les travaux sont contemporains des travaux sur les "canards".
Lions pour commencer :

— M-G. Crandall, H. Ishii, P-L. Lions *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations* - Bulletin of the American Mathematical Society (1992) [29] , cité 4241 fois.

— M-G. Crandall, P-L. Lions - *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations* - Transactions of the American Mathematical Society(1983) [30], cité 2838 fois .

— P-L. Lions *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case, part 1* - Annales de l'institut Henri Poincaré (1984) [75], cité 1826 fois.

et maintenant Yoccoz :

— J-C. Yoccoz *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne* - Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (1984) [124], cité 246 fois .

— J-C. Yoccoz *Petits diviseurs en dimension 1*, Astérisque, 1995, [126] cité 149 fois.

— J-C. Yoccoz *Il n'y a pas de contre-exemple de Denjoy analytique*, CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math, (1984) [125], cité 162 fois.

Comment expliquer une telle disparité à l'intérieur des mathématiques ? La langue joue certainement un rôle, Yoccoz publie en Français. La base de données de Google Scholar n'est peut être pas parfaite mais comment connaître ses biais ? Ce qui est certain c'est que les communautés scientifiques auxquelles s'adressent

110. Dans une thèse d'un homonyme de Lobry on trouvera une analyse détaillée du nombre de citations attachées au "Modèle de Monod" : J-R Lobry, *Re - évaluation du modèle de croissance de Monod. Effet des antibiotiques sur l'énergie de maintenance*, Thèse Université de Lyon, (1991), `http://pbil.univ-lyon1.fr/members/lobry/articles/THESE_JRL.pdf`

ces deux auteurs sont très différentes. Le champs d'application des travaux de P-L. Lions mentionnés est celui que communément on appelle "mathématiques appliquées" ou encore "analyse appliquée" ; ce sont des mathématiques qui interviennent de façon massive en physique et dans les sciences de l'ingénieur, notamment en mécanique des fluides et des milieux continus et en optimisation ; les travaux de J-C. Yoccoz, eux, portent sur des aspects très pointus de la théorie des systèmes dynamiques ; ce sont des travaux fondamentaux de mathématiques "pures". Les communautés scientifiques concernées ne sont pas de taille équivalente.

Les travaux sur les "canards" intéressent une communauté assez proche de celle qui est concernée par les travaux de J-C. Yoccoz mais certainement plus plus large car elle contient aussi des "mathématiciens appliqués" (par exemple ceux qui s'occupent d'applications aux neurosciences).

Alors que conclure de toutes ces comparaisons ? Contrairement à ce que voudraient nous faire croire les maniaques du h-index, il est bien difficile de se faire une idée de l'importance d'une théorie mathématique (ou autre) à partir uniquement des recensions des citations des articles. Cette remarque n'est pas une révélation. Toutefois il me semble clair que si, à partir de ces chiffres, nous ne pouvons pas nous prononcer sur son importance, nous pouvons certainement conclure à l'existence d'une activité significative et durable autour des "canards".

Ce qui suffit à mon propos qui est de démontrer que la commission des thèses s'est trompée. Trente ans après leur découverte les "canards" et donc les travaux de Vénissac, font indéniablement partie des "faits scientifiques reconnus". Afin d'éviter tout malentendu sur l'objectif de cette section j'insiste sur le fait *que je ne cherche pas à montrer plus que ce que je viens de dire*.

En particulier je ne cherche pas à montrer que l'A.N.S. a joué un rôle décisif dans cette découverte. Si je voulais le faire il me faudrait avancer d'autres arguments car, comme me l'a expliqué P. Duchemin, un interlocuteur hostile à l'A.N.S. pourrait facilement m'objecter que :

— Les "canards" sont clairement présents dans un article de M.A. Shishkova plus ancien (1973) [111] mais leur importance n'est pas perçue à l'époque comme l'explique Lobry dans un de ses articles [112].

— Comme mentionné plus haut, les résultats de l'article séminal BCDD seront rapidement (deux ans après) re-démontrés en "classique" par W. Ekhaus.

111. *Examination of a system of differential equations with a small parameter in the highest derivatives*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 209, 3, 1973, p. 576-579 ;[111].

112. *A propos du sens des textes mathématiques un exemple : La théorie des "Bifurcations Dynamiques"*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **42**, 1-2 (1992), 327-351 ;[77].

— Excepté par les pionniers, le langage non standard n'est pratiquement jamais utilisé par les auteurs des articles récents qui traitent de "canards".

Sur ce dernier point on lira avec intérêt ce que pense Vénissac [113] :

> Initiée par A.Robinson dans les années soixante, puis remodelée par E.Nelson et vantée par G.Reeb, l'analyse non standard est une théorie des infinitésimaux qui permet une pratique du calcul infinitésimal plus proche de l'intuition "naturelle". L'introduction d'un nouveau prédicat, nommé standard permet de distinguer les infiniment grands parmi les nombres entiers naturels. La théorie axiomatique qui gère l'usage de ce nouveau prédicat est une extension conservative de la théorie classique de Zermelo, Fraenkel avec axiome du choix.
>
> Tous les résultats standard prouvés à l'aide de méthodes non standard peuvent être redémontrés à l'aide de méthodes classiques, mais (c'est là mon opinion personnelle) la traduction en classique nuit à l'élégance, à la clarté et au caractère naturel des preuves. De plus, les questions posées et les énoncés des théorèmes dans le langage non standard sont plus riches, plus intuitifs et plus "physiques".
>
> Les applications de l'analyse non standard sont très variées, de l'analyse à l'algèbre. Quant à moi, m'ont intéressé les équations différentielles et les probabilités.
>
> L'immensité du savoir mathématique énoncé dans le formalisme classique de Cauchy-Bolzano-Weierstrass-Cantor-... rend important le coût d'une révolution non standard qu'on pourrait espérer. C'est la raison fondamentale qui fait que cette nouvelle théorie n'obtient pas dans la communauté mathématique la place à laquelle elle pourrait prétendre. Sous la pression des habitudes de cette communauté, je pratique donc assez peu cette théorie dans mes écrits, bien que, dans ma façon de penser, de raisonner, de chercher, de trouver, l'analyse non standard soit omniprésente. Une exception : un article sur le feuilletage des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1.

4.3 Première conclusion.

L'objet de cette thèse est de mettre en lumière des raisons qui pourraient expliquer le silence qui a suivi la publication du [LdL] et l'effacement progressif de l'école non standard en France. Je disais, alors que je m'expliquais sur la méthode : « S'il est avéré, trente ans après, que ce travail n'est pas intéressant (ou

113. Sur son site `http://perso.univ-lr.fr/ebenoit/`

insuffisant), comme le pensait la commission, l'analyse de la controverse ne sera pas la même que si, inversement il est confirmé qu'il s'agissait d'une contribution significative. C'est seulement une fois ce point éclairci (...) ».

Je considère comme pleinement établi que la commission des thèses :

1. a *failli à sa mission* en refusant de considérer comme "proposition-de-fait-scientifique-nouveau" les résultats d'un travail qui offrait des garanties tout à fait raisonnables de sérieux,
2. et s'est *lourdement trompée* en refusant un travail que l'histoire devait retenir comme une contribution tout à fait significative.

Tout le monde peut se tromper, même une commission occulte, mais, avec le recul, cette erreur reste quand même étonnante quand on voit que des autorités comme Dieudonné et Cartier considéraient explicitement l'A.N.S. comme une pratique mathématique licite.

Certes il existait des opposants, et non des moindres, comme A. Connes [114]. Mais dans un fonctionnement institutionnel normal, même si A. Connes affirmait que la pratique de l'A.N.S. n'était pas une bonne chose, ce qui était bien entendu son droit d'autant plus qu'il argumentait son point de vue, la commission se devait de considérer la question comme *non tranchée* et estimer que suffisamment d'éléments objectifs étaient réunis pour que la cooptation de Vénissac soit possible.

Etant acquis que la commission ne s'est pas bien comporté on peut maintenant se demander pourquoi. Compte tenu de ce que nous savons de l'hostilité de Reeb par rapport à l'E.N.S. nous pouvons imaginer que la commission comportait beaucoup de normaliens et que ces derniers voulaient se venger. En dehors du fait que je ne vois pas très bien comment je pourrais me procurer la composition de cette commission je ne crois pas à une telle hypothèse. Certes il pouvait exister un ou deux individus qui n'aimaient pas Reeb, mais pas toute une commission. Et puis Vénissac était Normalien. Pour aller plus loin dans cette direction il faudrait prendre du recul par rapport à l'affaire Vénissac et analyser la place qu'a eue cette commission dans le dispositif de "régulation" des thèse de mathématiques dans la région parisienne, dans les années quatre-vingt. La question serait de savoir si ce dispositif était au service de la communauté dans son ensemble ou un instrument de pouvoir entre les mains d'un groupe de pression, donc d'analyser dans le détail la structure du pouvoir mathématique à ce moment. Cette direction a son intérêt

114. A. Connes est un mathématicien de tout premier plan, médaillé Fields 1982, qui a pris publiquement position contre l'A.N.S.. et qui a été sollicité comme expert par le C.N.R.S. pour apprécier le travail de l'équipe de Recherche animée par H. Barreau (voir note 95).

mais ce n'est pas celle que je souhaite prendre car elle m'éloigne de la question de la réception de l'Analyse Non Standard.

4.4 Une dispute avortée.

Notons que la commission ne critique pas explicitement l'usage de l'A.N.S. en tant que telle ; elle critique la rigueur de la rédaction. On peut donc imaginer qu'elle est informée des méthodes de l'A.N.S. et qu'elle reproche à Vénissac « de ne pas rédiger un texte dont la formalisation est facile à concevoir dans le système I.S.T. de E. Nelson [115] ». Les membres du jury pressenti ne partagent pas cet avis puisqu'ils accusent la commission de choisir des rapporteurs incompétents. En quoi ils font preuve d'un certain culot puisqu'à ce moment ils n'ont, eux non plus, pratiquement pas de publications dans ce domaine !

Nous avons déjà remarqué que le Jury pressenti n'a pas voulu profiter de l'ouverture offerte par la commission. Les membres de l'Ecole de Strasbourg interrogés témoignent qu'ils n'ont pas ménagé leur peine pour faire savoir leur indignation autour d'eux et Reeb n'a pas été le plus paresseux à cette tâche. D'après les témoignages il semble qu'un certain nombre de membres importants de la communauté mathématique étaient informés de cette affaire mais il n'y a pas de trace évidente de ce qu'a été leur attitude et s'ils ont agi c'est avec une rare discrétion ! Quatre ans plus tard Lobry publie son livre dont nous avons vu qu'il était une provocation. Il est recensé discrètement, de façon assez neutre dans le "Monde" et le "Figaro", certainement trop discrètement pour toucher un public au delà des mathématiques. Il fait l'objet de recensions très positives dans le bulletin des IREM, le bulletin de la SMAI, et le bulletin du SneSup [116], mais ces revues ne touchent que peu ou pas le public plus concerné des "mathématiciens purs". Ainsi, après des recherches sérieuses nous ne trouvons pas de trace écrite de réponse aux provocations de Lobry. Pourquoi ce silence ?

115. Je paraphrase Bourbaki .

116.

— IREM : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Une structure nationale créée pour accompagner dans las années 1970 la réforme dite des "mathématiques modernes" au lycée et collège.

— SMAI : Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles. Société savante créée pour accompagner le développement des mathématiques associées à l'usage de l'ordinateur.

— SneSup : Syndicat National de l'Enseignement Supérieur.

Mais d'abord pourquoi cette question ? Les scientifiques ne sont-ils pas des gens rationnels à la recherche de la "vérité" et hostiles à la polémique ? Nous savons bien qu'il n'en est rien. Dans d'autres disciplines des polémiques sévères peuvent s'exprimer dans la presse professionnelle. En voici un exemple que j'appelle la *"dispute de la ratio-dépendance"*. Elle est à peine postérieure à l'affaire Vénissac et se tient en écologie théorique. Deux auteurs, R. Arditi et L. Ginzburg proposent en 1989 une théorie qui bouscule un peu les habitudes : elle remet en cause la pertinence des "équations de Lotka-Volterra" dans la représentation de la relation proie-prédateur en introduisant la notion de *ratio-dépendance*. Il est inutile de savoir quel est l'enjeu, les titres de l'article initial et de quelques publications qui ont suivi suffisent :

— Arditi R. and L. R. Ginzburg. Coupling in predator-prey dynamics : Ratio-dependency. *Journal of theoretical biology*, 139 :311–326, 1989 [6].

— Diehl S., P. A. Lundberg, H. Gardfjel, L. Oksanen, and L. Persson. Daphnia - phytoplancton interactions in lakes, **is there a need for** ratio-dependant consumer ressources models ? *American Naturalist*, 142 :1053–1061, 1993 [40].

— Abrams P. The **fallacies** of "ratio-dependent" predation. *Ecology*, 75 :1842–1850, 1994 [1].

— Akçakaya H., R. Arditi R., and L. R. Ginzburg. Ratio-dependent predation : **an abstraction that works.** *Ecology*, 76 :995–1004, 1995 [4].

— Abrams P. **Anomalous predictions** of ratio-dependent models of predation. *Oikos*, 80 :163–171, 1997 [2].

Les mots soulignés (par moi) en gras sont assez rudes ! Ajoutons que les revues où ces articles sont publiés sont parmi les plus grandes revues, sinon les plus grandes, de l'écologie théorique.

Vingt cinq ans après l'article séminal la question est à peu près entendue en ce sens que le nouveau point de vue est enseigné dans les ouvrages de cours. Toutefois il existe quelques combats d'arrière garde :

— En 2013, dans la revue "Theorical Ecology" (Theor Ecol DOI 10.1007/s12080-013-0201-9) on trouve : REVIEW ARTICLE, F. Barraquand, *Functional responses and predator–prey models : a critique of ratio-dependence*.

— Abrams *Why ratio-dependence is (still) a bad model of predation*, Biological Reviews, 2015 [3].

Bien sur Duchemin nous a prévenu : à l'intérieur des mathématiques les mathématiciens finissent toujours par se mettre d'accord. Certes, mais mais il ne nous

a pas dit que cet accord est toujours immédiat. C'est un principe méthodologique que la discussion doive aboutir, mais il doit y avoir discussion. Alors pourquoi n'y a-t-il pas trace de dispute dans les revues mathématiques spécialisées ? Clairement en écrivant son livre Lobry voulait lancer un débat qu'il espérait animé sur les mérites de l'A.N.S.. Pourquoi ces mathématiciens ne voulaient-ils donc pas se disputer en public ? La bataille d'Hernani de l'A.N.S. qu'il entendait provoquer n'a pas eu lieu. Pourquoi ?

Chapitre 5

Platonisme, formalisme et A.N.S.

Sommaire

5.1 Rencontre n° 3 : Mathématiques et alpinisme 113
5.2 Notes sur le "réalisme" (par P. Duchemin) 123
5.3 Style mathématique et réalisme 130
5.3.1 A propos de " il existe " (par P. Duchemin.) 132

On sait que, depuis Platon, une des grandes questions philosophique sur les mathématiques, sinon La question, est celle du *réalisme*. Conformément à la tradition j'appelle *réalistes*, (on dit aussi *platoniciens*), les mathématiciens pour qui il existe une *réalité* mathématique, réalité non matérielle mais réalité quand même, indépendante de l'homme et que l'homme explore et *découvre* petit à petit. Ils parlent de *découverte* mathématique dans le même sens où l'on parle de la découverte de l'Amérique. Les *non réalistes* pensent eux que les mathématiques sont une pure création de l'esprit humain, comme une sculpture qui émerge petit à petit du bloc de marbre sous l'action du ciseau du sculpteur [117]. Pour le *non réaliste* les mathématiques sont *inventées*.

Mais Dieudonné nous l'a dit : les mathématiciens ne s'occupent pas de philosophie des mathématiques. S'ils ont une philosophie, c'est une philosophie spontanée, non réfléchie. Alors le désaccord sur l'A.N.S. ne relèverait-il pas de positions métaphysiques inconscientes mais irréductibles ? Et les mathématiciens ne voulant pas discuter de philosophie cela expliquerait-il l'absence de débat ?

C'est le point que j'examine dans ce chapitre.

5.1 Rencontre n° 3 : Mathématiques et alpinisme

Je suis retourné voir Duchemin. Je commençai par lui redire que j'avais apprécié son petit cours pour philosophes et lui m'a gentiment félicité pour ma synthèse des mœurs des mathématiciens des années quatre-vingt et je conclus :
– **Moi -** Finalement, vous mathématiciens vous êtes des sortes de vulgarisateurs. Vous essayez de rendre accessible à de pauvres cervelles humaines un texte formel parfait, un texte que seul Dieu pourrait écrire.
– **Lui -** Je ne peux pas m'élever contre cette formulation mais j'aurais quand même préféré : "un texte que seule une machine pourrait écrire".
– **Moi -** Pourtant ce texte formel parfait, idéal, mais bien trop long pour qu'un homme puisse envisager de l'écrire, n'est-il pas de ces œuvres qu'on aime bien attribuer à Dieu, pas forcément un Dieu qui se mêle de nos petites affaires humaine, mais un Dieu qui serait une sorte de principe créateur ?
– **Lui -** C'est une façon de voir les choses qui va vous conduire à vous demander si Dieu ou votre principe créateur n'a pas une préférence : I.S.T. ou pas I.S.T. ?

117. Souvent on identifie *non réaliste* et *formaliste* mais pour notre sujet ce n'est pas une très bonne chose. Nous avons vu ce qu'est la *méthode formaliste* qui est une pratique qu'il ne faut pas confondre avec une position philosophique qui serait le *formalisme*. Pour ne pas risquer de confusion je m'en tiendrai donc à *non réaliste*.

Dieu préfère-t-il l'A.N.S. ?
– **Moi -** Non, non. Ne devrait-on pas plus simplement voir les choses comme les physiciens ? Pour ces derniers le monde matériel, créé ou non, existe et il a des lois que nous essayons de comprendre. Les mathématiques existent, quoique non matérielles et vous cherchez à comprendre leurs lois.
– **Lui -** Ah ! ah ! J'avais déjà bien repéré votre position réaliste lors de notre première discussion. Dans votre texte sur notre communauté vous récidivez avec la "découverte des canard", comme s'ils avaient étés toujours là [118].
– **Moi -** Vous voulez dire que si j'avais été "non réaliste" j'aurais plutôt dit que l'école de Strasbourg avait *inventé* les canards. Mais on dit que la philosophie spontanée de la grande majorité des mathématiciens est *réaliste*, j'ai donc adopté cette position mais en le faisant je me demandais si ce rejet de l'A.N.S. ne serait pas dû à une opposition entre "réalistes" et "non réalistes". D'ailleurs il me semble que le livre de Lobry affiche un certain anti réalisme. C'est un péché pour vous d'être réaliste ?
– **Lui -** Oh non ! Certainement pas. Je disais ça juste pour faire un petit peu le malin devant vous. Juste pour vous montrer que je ne suis pas totalement inculte. Vous avez dû remarquer que sur les questions philosophiques les mathématiciens sont souvent assez primitifs, non ? Je crois que je le suis un petit peu moins que la moyenne mais je dois avouer que je ne participe plus à ces guerres de religions faute d'avoir pu trouver nettement quel était mon camp. Je mourrai sans savoir si je suis platonicien. Je crois d'ailleurs que ces présupposés, réalisme ou non, n'ont que peu, ou même pas du tout d'influence sur la pratique des mathématiques.
– **Moi -** Il est quand même difficile de croire que les mathématiciens seraient si particuliers. Ils n'auraient donc pas de vision du monde ? Plus ou moins consciente peut-être. Et cette vision du monde n'aurait pas d'influence sur leur façon de concevoir les mathématiques ?
– **Lui -** Entendons nous bien. Les mathématiciens sont comme tout le monde. Ils ont peur dans le noir et se racontent comme tout un chacun des histoires pour se rassurer. Mais ces histoires n'ont pas d'influence sur leur pratique des mathématiques. Je vous rappelle votre propre citation de Dieudonné : « *Les philosophes et les logiciens ont une tendance, parfaitement naturelle et excusable, à croire que les mathématiciens s'intéressent beaucoup à ce qu'ils font. Détrompez les, ce n'est pas vrai : 95% des mathématiciens se moquent éperdument de ce que*

118. Là je dois avouer que j'ai eu du mal à retenir un sourire. En fait c'était un petit piège que j'avais tendu à Duchemin. J'avais remarqué de mon côté, lors de ce premier entretien, une certaine nervosité de sa part sur l'emploi du mot "chose ". Je voulais savoir comment il se situait par rapport à la question du "réalisme".

peuvent faire tous les logiciens et tous les philosophes. Cela ne les intéresse absolument pas. »Voulez vous que je vous dise comment les mathématiciens voient les choses ?
– **Moi -** Comment vous voyez les choses vous, ou comment vous croyez que vos collègues les voient ?
– **Lui -** Comment je vois les choses moi, mais il ne me semble pas en cela être très différent de mes collègues [119]. Je vous explique, mais ce sera un peu long.
– **Moi -** Je vous écoute.
– **Lui -** Vous avez constaté qu'il n'est pas facile de se faire une idée de la philosophie d'un mathématicien ordinaire. Si vous en interrogez un sur ce sujet il répond toujours modestement qu'il ne s'intéresse pas beaucoup à ces questions qui sont trop difficiles pour lui, qu'il n'y connaît rien. *Ce qui, la plupart du temps, est vrai !* En effet il est rare que, dans ce domaine, la culture d'un mathématicien dépasse celle des souvenirs d'un bachelier moyen. Il semble que ce soit spécifique des mathématiciens. Alors que les ouvrages où des grands scientifiques s'expriment sur leur philosophie naturelle sont légion ceux écrits par des mathématiciens sont excessivement rares...
– **Moi -** Quand même, Newton, Leibniz, d'Alembert, Condorcet n'étaient pas de mauvais philosophes, plus près de nous Poincaré, Borel...
– **Lui -** Je pensais à la science contemporaine et aux mathématiciens ordinaires. Prenez la collection Point Science, au Seuil, dans leur dernier catalogue il y a trois mathématiciens sur cinquante-deux auteurs, même proportion dans le catalogue de la collection "Science ouverte"... Notez que c'est bien de leur faute ! Ils auraient pu améliorer leur score en publiant le livre de Lobry. Ils l'ont refusé. Ils ont dit que c'était mal écrit et entre les lignes laissaient entendre qu'il n'y aurait pas énormément de lecteurs.
– **Moi -** Ce refus l'a contrarié ?
– **Lui -** Bien sûr. Il ne m'en a jamais parlé mais j'ai bien senti que se voir notifier officiellement sa médiocrité en matière littéraire l'avait blessé. Mais revenons à nos moutons. Je crois qu'il y a une raison forte qui tient les mathématiciens éloignés de la philosophie, plus que le simple fait d'avoir le nez dans le guidon comme tous les autres scientifiques. Je vous ai dit à quel point il est dans l'essence même des mathématiques d'aboutir à cette certitude qu'on parle bien de la même chose, qu'on "se comprend". Ca devient une véritable déformation professionnelle chez eux et beaucoup sont véritablement terrorisés à l'idée de dire "n'importe quoi". Alors ils se taisent, mais pas tous... Quelques uns parmi les plus grands s'ex-

119. Sur ce point voir annexe D quelques avis de mathématiciens.

priment, vous l'avez vu avec Dieudonné, il y a aussi A. Grotendieck, R. Thom, A. Connes pour s'en tenir à des médaillés Fields, et il y en a d'autres. Mais reconnaissons quand même que le Hubert Reeves des mathématiques n'est pas encore né [120] ! En revanche, s'il est avare en considérations philosophiques, le mathématicien ordinaire vous décrira volontiers son activité et l'idée qu'il se fait de son utilité. Le discours varie d'un individu à l'autre mais il est possible d'en faire la synthèse suivante en re-visitant l'image classique des scientifiques considérés comme les explorateurs d'un continent.

Nous dirons donc que la "réalité" est un continent à explorer et à connaître. La *recherche de la vérité* c'est l'exploration du continent. Dans ce que je vais dire il n'est surtout pas essentiel que cette "réalité" soit exclusivement matérielle comme elle pourrait l'être en physique, ou exclusivement immatérielle, ou les deux à la fois. La seule chose qui compte est qu'il y ait "quelque chose" à explorer.
– **Moi -** Mais vous posez d'emblée une attitude *réaliste*. Qu'il y a "quelque chose" à découvrir !
– **Lui -** Nous avons déjà eu cette discussion sur le mot "chose" que je vous avais demandé de prendre au sens le plus naïf qui soit. Je vous demande ici de considérer mon réalisme comme une sorte de réalisme naïf. Tenez, prenons un exemple chez les physiciens. A l'école on m'a expliqué les gaz, et leurs propriétés en me disant que les atomes sont des *petites billes agitées dans tous les sens* et c'était diablement efficace : plus les billes sont agités, plus le volume est petit et plus la pression, c'est à dire le nombre chocs sur les parois, est forte. Je sais maintenant, enfin j'ai su à un moment donné, car c'est bien compliqué, que réduire les atomes à de simples petites billes ne permet pas de tout expliquer, que vouloir tout réduire en termes de petites billes conduit à des impasses que seul le concept d'onde-particule en un seul mot permet, provisoirement, de surmonter en attendant de nouveaux problèmes. Il n'empêche que cette *ontologie*, c'est le terme qui convient je crois, cette *ontologie* des petites billes fonctionne très bien dans certaines limites. Quant je lis la formule $P \cdot V = K \cdot T$ je crois dur comme fer qu'il y a de l'ordre de 10^{22} petites billes qui s'agitent et je m'en porte bien. Pas la peine d'être quantique à ce moment. La "philosophie des mathématiques" que je vous propose tout de suite elle est comme les petites billes de la loi des gaz parfaits. Elle a un pouvoir explicatif fort, enfin me semble-il, sur l'activité mathématique et elle est naïve en ce sens qu'elle est minimale, si minimale que tous les mathématiciens

120. Je me demande si Duchemin n'est pas un peu éloigné de l'actualité. Il me semble qu'un mathématicien comme Cédric Villani est tout le contraire du mathématicien dans sa tour d'ivoire. Je vois aussi que plusieurs mathématiciens et mathématiciennes publient des romans.

sont susceptibles de s'y reconnaître, comme tous les humains connaissent les entiers naïfs. Vous me suivez ?
– **Moi -** Pas très bien. Une philosophie mathématique ne doit elle pas être une attitude sur les fondements, sur la nature des mathématiques...
– **Lui -** Mais justement j'essaye de vous expliquer que le mathématicien au travail n'a pas de philosophie. Je reviens à mon image qui d'ailleurs est très banale ; combien de fois n'a-t-on pas comparé la recherche scientifique à une exploration ? Mais pour les mathématiciens il y a une petite subtilité. Pour eux deux professions interviennent de façon essentielle dans l'exploration du continent :

— Celle des "vrais explorateurs" : entendez les *vrais scientifiques* : physiciens, chimistes, biologistes,....

— Et les "alpinistes" : entendez *les mathématiciens*.

– **Moi -** Les mathématiciens des alpinistes ! Qu'entendez vous par "alpiniste" ?
– **Lui -** Rien de plus que ce qu'on trouve sur Wikipedia : «L'alpinisme est une pratique sportive de la haute montagne qui repose sur différentes techniques de progression »
– **Moi -** Vous êtes assez loin de l'image d'Épinal des mathématiques "reines des sciences".
– **Lui -** Vous oubliez : *et servantes*, "reines *et servantes* des sciences". Mon image serait plutôt du côté "servantes ". Revenons y. Admettons que les montagnes à gravir sur le continent soient l'équivalent des "vérités" scientifiques ou des "propositions-de-fait-scientifique" comme vous le dites avec beaucoup d'à propos dans votre analyse. Vous voyez que j'essaye ici de ne pas rentrer dans l'épineuse question de la "vérité" et de laisser ouvertes toutes les interprétations possibles. Il y a des petites et des grandes montagnes à conquérir. Les "vrais explorateurs", donc les scientifiques, pas les mathématiciens, souhaitent conquérir des sommets d'où ils ont une vision plus large d'une partie du continent. Selon l'idée que l'on se fait de la science on peut imaginer différents types de continents. Dans une conception scientiste un peu dépassée le continent serait une sorte de cône immense et la marche de la science une longue ascension en spirale vers le sommet alors qu'une vision plus moderne serait plutôt celle d'un continent assez chaotique d'où aucun sommet particulier ne semble émerger et où le cheminement est plus contingent. Peu importe la forme du continent-science. Les "alpinistes" sont surtout intéressés par la pratique de l'escalade. Bien sur ils ne s'interdisent pas de regarder le paysage à l'occasion mais ce n'est pas leur motivation première. Ce sont "des conquérants de l'inutile"...
– **Moi -** Vous faites allusion au livre de l'alpiniste Lionel Terray ?

– **Lui -** Oui, je vois que vous avez aussi un peu de culture montagnarde. J'étais Grenoblois comme lui à l'époque de ses exploits ; sur le campus universitaire tout le monde avait une paire de chaussures dans le coffre de sa voiture et les mathématiciens étaient très fiers de G. de Rham, mathématicien connu de l'Université de Lausanne et alpiniste de renom [121] ; vous voyez que je ne pouvais échapper à la montagne. Les mathématiciens sont donc des conquérants de l'inutile "pour l'honneur de l'esprit humain"...
– **Moi -** Cette fois vous faites allusion à la célèbre lettre de Jacobi à Legendre et au titre du livre de Dieudonné sur les mathématiques...
– **Lui -** Encore gagné, d'ailleurs nous allons regarder la citation exacte.
Il ouvre une tablette, ouvre Google et nous trouvons immédiatement :

> M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.

– **Lui -** Dans le fond le livre de Nordon que je vous ai conseillé de lire est en un certain sens une longue dissertation sur le sujet : Jacobi a dit «M. Fourier avait l'opinion que....». Expliquez et commentez.
– **Moi -** A propos de Nordon j'ai noté que la dernière édition contient quelques allusions à l'A.N.S....
– **Lui -** Ah bon !
– **Moi -** Oui. Par exemple j'ai noté....
Je lui montre le passage que j'ai repéré dans *Les mathématiques pures n'existent pas* [122].

> La mise au point de l'analyse non standard, ces dernières années, a suscité des réticences de la part de certains mathématiciens français, décrites avec verve par C. Lobry (1989). Il serait intéressant d'étudier si la question de l'intervention du temps dans les mathématiques n'est pas une des explications possibles de ces réticences. En effet l'analyse non standard permet de manipuler des quantités à la fois fixes et infiniment petites, alors que l'analyse classique ne manipule que des quantités qui tendent vers zéro. Sous jacente à l'analyse non standard, y aurait-il l'intuition d'un temps discontinu, de "grains de temps infinitésimaux", et sous-jacente à l'analyse classique celle d'un temps continu ?

121. Voir annexe 9.4 un témoignage de de Rham.
122. p. 112 Actes Sud 1993 ; [90].

– **Lui -** Eh ! il est gentil avec Lobry, Nordon ! Notez qu'il ne faut rien en conclure rapidement. Nordon et lui étaient collègues et plutôt amis. J'avais été frappé, comme tous ceux qui à un moment se sont intéressés à l'A.N.S., à ce point sur le temps et l'A.N.S. que signale Nordon. Mais je dois vous avouer que je n'ai pas assez travaillé pour avoir une opinion claire sur cette question qui est reliée au traitement mathématique du "continu" ; c'est un vrai sujet philosophique auquel J-M Salanskis et H. Sinaceur ont consacré un "Colloque de Cerisy" [123].

Je ne sais pas si je suis d'accord d'accord avec Nordon sur le temps et l'A.N.S. mais il y a un point que je veux souligner. Les mathématiques classiques cherchent à tout prix à cacher tout ce qui pourrait rappeler leur origine humaine. C'est un point que nous reprendrons, si vous le voulez bien, mais en attendant je voudrais revenir à l'image de l'alpiniste. Vous allez voir qu'elle rend compte de beaucoup de phénomènes.

— Les "alpinistes" ne sont pas des explorateurs mais ils accompagnent très souvent les expéditions. Quand les parois sont trop délicates ils partent en avant puis sécurisent des voies pour des grimpeurs moins habiles. Les mathématiciens sont les spécialistes du raisonnement. Dans les cas difficiles seule une mathématisation (mise en équation du problème) permet d'en assurer la sécurité. Une fois les choses clarifiées les mathématiciens peuvent se retirer.

— Il existe des parois qui, quoi que l'on fasse, feront toujours appel aux techniques de l'escalade. On pourrait dire que ce sont ces domaines de la physique où les mathématiques s'impliquent dans l'énoncé même des lois et qui faisaient dire à Galilée que «Le livre de la Nature est écrit dans le langage mathématique.» [124]

— La pratique des mathématiques est une ascèse comme l'escalade de haut niveau. C'est par la pratique quotidienne d'exercices de musculation (cérébrale) qu'un mathématicien maintient sa compétence...

---

123. *Le labyrinthe du continu*, J-M. Salanskis et H. Sinaceur (Eds.), Springer-Verlag France (1992) ; [109].

124. La citation exacte est : « La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaitre les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique, et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. », *L'essayeur* (1623), traduction de Christiane Chauviré, Annales littéraires de l'Université de Besançon, n° 234, Paris, Les Belles Lettres, 1979.

— ... mais de la même manière qu'un excellent grimpeur en salle n'est pas forcément un bon alpiniste, la résolution quotidienne d'exercices difficiles ne fera pas forcément de vous un grand mathématicien.

— Comme pour l'alpinisme, l'activité mathématique est généralement collective et aussi parfois solitaire. Une cordée ne comporte que quelques individus. Une bonne équipe de mathématiciens, elle aussi, est généralement composée de peu d'individus. Deux ou trois, rarement plus alors que les cordées de physiciens et autres explorateurs peuvent être beaucoup plus nombreuses.

— Les performances individuelles de deux mathématiciens sont facilement comparables et, comme chez les grimpeurs, chacun connait assez bien ses limites. Le niveau des mathématiciens peut être très variable, et, comme en escalade, il existe des extra-terrestres dont on se demande comment ils procèdent.

– **Moi -** Je suis d'accord que votre image de l'alpiniste rend bien compte du paradoxe pour la mathématique d'être la reine et la servante des sciences. C'est la reine en ce sens qu'à elle seule les sommets les plus difficiles sont accessibles et la servante puisqu'elle accepte d'équiper les voies pour d'autres.
– **Lui -** Nous sommes donc d'accord. Mais, pour moi, le point le plus intéressant dans cette image est certainement qu'elle rend compte de deux sentiments omniprésents dans la pratique mathématique : La difficulté et la beauté. C'est "trivial" ! Certains vous ont dit que les travaux de l'école de Strasbourg étaient "triviaux" et vous vous êtes posé des questions sur le sens de "trivial". S'agissant d'une démonstration, "trivial" veut dire qu'elle est sans aucune difficulté, que l'on peut en venir à bout très facilement. Naturellement, trivial, est relatif à la compétence d'un individu. Une escalade facile pour Gaston Rebuffat ne l'est pas pour un débutant. Donc pris dans ce sens purement factuel "trivial" ne semble pas poser de problème. Mais il arrive que tout un travail, qu'un ensemble de travaux, soient qualifiés de "triviaux" avec une connotation manifestement péjorative. De quoi s'agit-il ? Il pourrait s'agir, par exemple, de l'appréciation d'un alpiniste sur *Voyage avec un âne dans les Cévennes* de R.L. Stevenson. Certes R.L. Stevenson relate une randonnée dans la montagne mais du point de vue de l'alpiniste les difficultés techniques sont tellement faibles qu'il ne vaut pas la peine d'en parler bien que d'un point de vue plus large, disons celui de l'explorateur, ce récit soit passionnant. Un travail mathématique digne de ce nom doit être non trivial, difficile. Mais cet idéal de la difficulté rentre en conflit avec un autre idéal, celui de la *beauté*.

Une démonstration doit être “belle”. Pour cela le sommet atteint doit être majestueux, le cheminement élégant, les passages techniques (escalade artificielle) doivent être franchis rapidement. Une belle démonstration doit laisser une impression de facilité. Beauté, trivialité, ces deux notions s’opposent et inutile de dire que nous rentrons dans le domaine de la plus grande subjectivité. Mais dans tous les cas l’accord se fera sur le fait que le passage a bien été franchi. Une démonstration correcte c’est une démonstration menée à son terme.

L’usage de pitons métalliques et des techniques de l’escalade artificielle est assez comparable à l’usage des systèmes formels : ils assurent la sécurité (du raisonnement) dans les passages particulièrement dangereux et, toujours dans le cadre de cette image de l’alpinisme, l’A.N.S. peut être comprise comme l’introduction d’une nouvelle technique. Je pense à l’introduction par L. Lachenal de la semelle en caoutchouc sculpté dans de vieux pneus de voiture qui remplaçait la chaussure cloutée et qui donnait aisance et rapidité dans les courses mixtes rocher-glace. Elégance et facilité ! L’A.N.S. étant l’équivalent d’une semelle *Vibram* on comprend que quelques détracteurs aient pu dire : «C’est efficace mais ce n’est pas de jeu ! »

– **Moi -** Précisez ce que vous voulez dire.

– **Lui -** Je pense à ce qui m’a été rapporté d’un probabiliste connu : après avoir étudié soigneusement l’ouvrage de Nelson *Radically Elementary Probability*, il aurait déclaré : «Si nous acceptons ce point de vue il ne restera rien de la subtilité et de la beauté de nos raisonnement !». En effet, si l’on admet que la théorie des probabilités ressemble à une course mixte rocher-glace, elle nécessite de nombreuses haltes et manœuvres de cordes complexes pour passer les chaussons d’escalade. La semelle caoutchouc permet un passage direct, sans grande subtilité. Si ce qui m’a été rapporté est bien vrai on peut comprendre ce mathématicien. Ce que vous avez entendu à propos des thèses de l’école de Strasbourg est vrai. D’un certain point de vue les thèses en question étaient assez triviales. Des grimpeurs très moyens avaient réussi grâce à leurs “semelles en caoutchouc” des courses que les plus doués des classiques, avec leurs “ailes de mouches” n’envisageaient même pas d’entreprendre. Je le répète “ce n’était pas de jeu”.

– **Moi -** Mais c’est là une attitude bien peu scientifique. Ce qui compte c’est que les sommets soient atteints, que le continent soit découvert. Tant mieux si les techniques nouvelles permettent d’aller plus vite.

– **Lui -** Mais pourquoi voulez vous que les mathématiciens soient des scientifiques ! Les mathématiciens, sont surtout conservateurs. Ils tiennent à ce qu’un certain savoir-faire soit conservé. Voyez l’hélicoptère qui permet maintenant d’at-

teindre pratiquement tous les sommets et sauve bien des vies d'alpinistes ; mais il arrive de temps en temps à des alpinistes qui ont conservé leur savoir faire "avec les mains" de sauver des vies mises en péril dans un accident d'hélicoptère.

– **Moi -** Vous me semblez autrement plus mesuré que Lobry dans son livre. À l'entendre, à l'époque, l'A.N.S. était une véritable révolution contrariée par d'abominables obscurantistes.
– **Lui -** Comme vous l'avez remarqué son livre était volontairement provocateur. Mais il était également sincère. Je suis certain qu'il pensait réellement que l'A.N.S. allait révolutionner la pratique des mathématiques.
– **Moi -** Ça n'a pas été le cas que je sache ! [125].
– **Lui -** Homme de peu de foi, je vous donne rendez vous dans un siècle ! Non, je plaisante. En fait je pense maintenant que des phénomènes beaucoup plus profonds que la controverse sur l'A.N.S. sont à l'œuvre qui vont changer la pratique mathématique. Je pense aux rapports des mathématiques et de l'ordinateur. Vous savez probablement que Reeb et Harthong ont proposé une façon de concevoir les nombres réels plus proche de ce que font les ordinateurs que la façon classique. C'est ce qu'on appelle la "droite de Harthong-Reeb". Ce qui est peut être moins connu c'est que Reeb, dans un cours de logique non publié mais dont il nous reste un polycopié [126], disait avec son ami Fuchs, dans les années 80 des choses que ne renierait pas P. Martin-Löf un grand logicien contemporain. Mais nous nous éloignons du sujet...
– **Moi -** Qui était, j'ai un peu oublié.
– **Lui -** Moi pas. J'ai compris que vous vouliez m'entrainer sur un véritable terrain philosophique. Vous vous demandez si cette histoire pas très reluisante de commission des thèses ne cache pas en fait des divergences profondes que les mathématiciens n'arrivent pas à exprimer clairement mais qui sont bien réelles. Vous vous demandez si les classiques ne seraient pas fondamentalement des "réalistes" conscients ou non. Vous avez certainement constaté que Alain Connes, qui est indéniablement un très grand mathématicien, s'affiche simultanément comme "réaliste" et comme adversaire de l'A.N.S. Lobry avait laissé transparaitre dans son livre une position qui pourrait sembler anti-réaliste, mais avait-il réfléchi sérieusement à ces questions ? Quand à moi, sauf quand j'essaye de faire un peu le malin avec vous, comme je vous l'ai dit je ne participe plus aux guerres de reli-

125. Je me suis livré à une rapide enquête sur les tentatives de popularisation de l'A.N.S., en particulier dans l'enseignement. Voir appendice B.
126. Fuchs, Aimé et Georges Reeb. *Logique*, polycopié, Institut de Recherche Mathématique Avancée (Strasbourg), 1981 ; [53].

gion.
– **Moi -** Et pourquoi donc ce pacifisme tardif ?
– **Lui -** Reeb répondait souvent aux questions par des histoires qu'il prétendait alsaciennes. En voici une qu'il aimait bien :

> Dans le bureau du Maire d'un village d'Alsace rentre une femme :
> - Monsieur le Maire ça ne peut plus durer, mon mari Hans rentre tous les soir de plus en plus tard ; il passe sa vie au café avec ses copains. Tu dois le sermonner...
> - Tu as raison, Hilda, je vais m'en occuper.
> Peu de temps après Hans, très en colère, rentre dans le bureau :
> - Qu'est-ce que j'apprends ! Hilda vient te déranger jusque dans ton bureau. Cette épouse est vraiment impossible. Elle me reproche les soirées que je passe avec mes amis. Ca ne peut plus durer. Tu dois agir.
> - Tu as raison, Hans, je vais m'en occuper.
> Dans une pièce voisine du bureau du Maire, sa fille, institutrice, qui fait office de secrétaire de mairie a tout entendu.
> - Papa il faut que je te demande quelque chose. J'ai entendu, sans le faire exprès, la porte n'était pas bien fermée. Hilda vient se plaindre de son mari et tu lui dis qu'elle a raison. A son tour Hans se plaint de Hilda et tu lui dis qu'il a raison. Je ne comprends pas.
> - Ma fille, tu as raison.

Cette petite histoire pour vous dire qu'en matière philosophique je ne suis pas très sûr de moi. J'ai remarqué que je suis très souvent d'accord avec le dernier qui a parlé. Quand j'ai préparé le petit cours de maths pour philosophes que vous avez lu, j'ai voulu aborder cette question de présupposés "anti réalistes" ou non à une bonne réception de l'A.N.S. . J'ai lu quelques textes ce qui m'a complètement brouillé l'esprit. J'avais rassemblé et commenté quelques citations dont je n'ai finalement rien fait. Je vous les enverrai par mail. Peut être en ferez vous quelque chose ?

Nous nous sommes quittés là dessus.

5.2 Notes sur le "réalisme" (par P. Duchemin)

e-mail n°4 Duchemin à Balderoy, date „,)

`Cher Luc Balderoy,`

`Comme promis lors de notre dernier entretien voici quelques notes sur le ‘‘réalisme’’ (en fichier joint). Elles devaient accompagner le petit cours de vulgarisation :` ***Rigueur et Analyse Non Standard.*** `que vous avez lu.`

Notes sur le “réalisme”.

Vous qui êtes des jeunes gens cultivés vous avez lu *Qu’est-ce qu’une chose* de M. Heidegger et *De ce qui est* de W. O. Quine. Les mathématiques sont elles une “chose” et, si oui, quelle est la nature de cette “chose” ? Une seule chose (:-)) certaine est que sur la “chose ” que sont les mathématiques les positions philosophiques, des mathématiciens et des non mathématiciens, sont très diverses.

Pour commencer il y a une façon plutôt innocente de se servir de du mot “chose”. Par exemple, si le Pape et moi lisons dans un dictionnaire la phrase :

— Augustin d’Hippone est né le 13 novembre 354 et mort le 28 août 430 à Hippone (actuelle Annaba, Algérie).

y lisons nous bien la même *chose* ? Si la *chose* est le fait historique qu’un homme qui s’appelait Augustin est né et mort aux dates cités à Hippone, la réponse est évidemment oui. Si la *chose* est le fait que Augustin est un grand philosophe et théologien chrétien la réponse sera encore oui parce que j’ai un petit peu de culture. En revanche il est tout à fait clair que Saint Augustin ne représente pas exactement la même *chose* pour le Pape et pour moi qui suis résolument athée.

Nous avons exactement la même situation en mathématiques. Ainsi considérons la phrase :

— La longueur de la circonférence d’un cercle est égale à la longueur de son diamètre multipliée par π.

Qu’est-ce que la “chose” π là dedans ? Pour un élève du collège et pour moi cette phrase signifie que si je prends un cercle concret dans la nature, si je mesure la longueur de sa circonférence, si je la divise par la longueur de son diamètre, alors je trouverai un nombre qui sera plus ou moins proche de 3,141 592 654... Nous sommes bien certains de parler de la même “chose”. Maintenant si je parle avec un collègue mathématicien, le symbole π sera aussi un des ingrédients de la formule assez magique [127] :

$$e^{i\,\pi} = -1$$

127. Elle ne contient que des nombres qui ont posé problème : les nombres négatifs, les nombres

et encore nous parlerons bien de la même chose. Mais je ne serai pas forcément d'accord avec un ami mathématicien sur le mode d'existence du nombre π, sur son statut ontologique. Sur ce qu'est la "chose" π .

Dans notre culture, au Pape et à moi, nous savons à peu près délimiter le domaine où nous nous comprenons sur la "chose Augustin" et acceptons de ne pas nous comprendre sur le reste ce qui ne nous empêchera pas d'en discuter car nous avons le désir de comprendre pourquoi l'autre ne nous comprend pas. En mathématiques ce sera pareil. Il y a une frontière un peu floue, au delà de laquelle deux mathématiciens qui n'arrivent pas à se mettre d'accord conviendront qu'ils « ne font plus des mathématiques mais de la philosophie ». Ils pourront, s'ils le désirent, continuer leur discussion, mais cette fois ci sans avoir la certitude qu'ils finiront assez rapidement par se comprendre. En définitive il n'y a pas lieu de s'émerveiller que les mathématiciens finissent toujours par se comprendre puisque, pour les mathématiciens, ce sur quoi un accord n'est pas envisageable dans un proche avenir n'est, par définition, pas du domaine mathématique. Et s'il est une question sur laquelle un accord ne semble pas près de se réaliser c'est bien celle du *réalisme* en mathématiques. Si les mathématiciens sont absolument certains de bien se comprendre quand ils parlent de π pour ce qui est de savoir ce qu'est la *chose* π c'est une autre affaire !

Pour le dire vite, le problème du *réalisme* en mathématiques est le problème du mode d'existence de ces "choses" : les *nombres*, les *figures*, les *théorèmes*, que manipulent les mathématiciens. En d'autres termes bien connus les mathématiciens sont ils :

— Position *réaliste* :
  Les découvreurs, les explorateurs, d'un monde qui, quoique non matériel, existe indépendamment de l'espèce humaine.

— Position *anti réaliste* :
  Les inventeurs de textes qu'ils créent de toutes pièces à partir du langage ?

On sait qu'il y a eu des partisans et des détracteurs de l'A.N.S. Qu'en est-ils de leurs positions philosophiques ? Les réticences à l'usage de cette méthodes ont-elles un fondement philosophique ? Dans son livre d'entretiens avec le biologiste Jean-Pierre Changeux [128] qui défend une sorte de "réductionnisme neuronal" des

---

transcendants (π, e), les nombres imaginaires (i). On l'appelle "formule d'Euler", car ce dernier à inventé les notations e et i ainsi que popularisé π ; on raconte qu'il aurait apostrophé l'athée Diderot à la cour de Russie d'un « $e^{i\pi} = -1$, donc Dieu existe ! Répondez.»

128. A. Connes et J-P. Changeux, *Matière à pensées*, Odile Jacob, 2000 ; [25].

objets mathématiques, A. Connes, qui est un adversaire résolu de l'A.N.S., propose une forme de réalisme qu'il refuse cependant d'identifier au Platonisme.

> Je pense être assez proche du point de vue réaliste. Pour moi, la suite des nombres premiers par exemple, a une réalité plus stable que la réalité matérielle qui nous entoure. On peut comparer le mathématicien au travail à un explorateur à la découverte du monde. La pratique découvre des faits bruts. On s'aperçoit par exemple, en faisant des calculs simples, que la suite des nombres premiers ne semble pas avoir de fin. Le travail du mathématicien consiste alors à démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers. C'est un vieux résultat qu'on doit à Euclide. Cette démonstration prouve que si quelqu'un affirme un jour avoir trouvé le plus grand nombre premier, il sera facile de lui montrer qu'il a tort.(P.28)

Voyons un peu plus loin.

> Comparons la réalité mathématique au monde matériel qui nous entoure. Qu'est ce qui prouve la réalité de ce monde matériel en dehors de la perception que notre cerveau en a ? Principalement la cohérence de nos perceptions, et leur permanence. Plus précisément la cohérence du toucher et de la vue pour un seul et même individu. Et la cohérence entre la perception de plusieurs individus. La réalité mathématique est de la même nature. Un calcul effectué de plusieurs manières différentes donne le même résultat, qu'il soit fait par un seul individu ou par plusieurs.(p. 40)

Comparez maintenant cette citation à ce que dit J. Harthong, de façon tout à fait indépendante, dans *Commentaires sur Intuitionisme 84* [129]

> Voici deux algorithmes utilisés pour calculer π :
>
> **1. Formule de John Machin (1706)**
>
> $$\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$$
>
> on calcule $\arctan\frac{1}{5}$ et $\arctan\frac{1}{239}$ par la série :
>
> $$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

129. Reeb et Harthong ont écrit un long papier *Intuitionisme 84* (dans "La mathématique Non Standard", Editions du CNRS 1989 [13].) qui a suscité pas mal de discussions qui ont motivé à leur tour des "mises au point" de J. Harthong dans ce même ouvrage collectif.

> **2. Par la moyenne arithmético-géométrique** On définit les deux suites a_n et b_n par la récurrence :
>
> $$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$
>
> et les valeurs initiales : $a_0 = a \quad b_0 = b$. Il se trouve que : $lim_{n\to\infty} a_n = lim_{n\to\infty} b_n$ et cette limite, notée $AG(a,b)$, est appelée la moyenne arithmético-géométrique de a et b. On peut démontrer que pour $a = 1$ et $b = 1/\sqrt{2}$ on a
>
> $$\frac{\pi}{4} = \frac{AG(a,b)^2}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1}(a_n^2 - b_n^2)}$$
>
> J'ai choisi ces deux algorithmes (tous les deux rapides) parce qu'ils sont très différents l'un de l'autre. Ce qui se passe dans le secret des microprocesseurs lorsqu'on fait exécuter les deux programmes est donc très différent de l'un à l'autre. D'un point de vue strictement empirique il n'y a à priori aucune raison que l'un et l'autre fournissent le même résultat final ; seule la théorie (c'est à dire le calcul infinitésimal) permet de prédire cela et en effet l'expérience le confirme. (...) Nous disons qu'il existe un objet réel (ou une réalité objective) que nous appelons $\frac{\pi}{4}$, parce que ce recoupement entre deux observations a priori indépendantes a lieu, de même que nous disons qu'il existe un objet réel que nous appelons la Lune, parce que nous recoupons l'observation d'un disque lumineux dans le ciel avec les marées, les éclipses, et le truc dur que Neil Armstrong a senti sous ses pieds un jour de juillet 1969. (...) J'insiste encore sur le point suivant : la Lune est un corps matériel, π est un nombre (une idéalité, si vous voulez) ; mais l'objectivité de l'une ou de l'autre procèdent exactement du même argument épistémologique : la possibilité de faire des recoupements entre plusieurs expériences apparemment indépendantes.

On voit que Connes et Harthong partagent une même forme de réalisme. Bien entendu, si l'on regardait plus en détail on trouverait peut être que le réalisme de Harthong n'est pas exactement celui de Connes mais à première vue ils se ressemblent beaucoup. Pourtant voyez ce que Connes dit de l'A.N.S. [130] :

> Mais au bout du compte je me suis aperçu d'un défaut absolument majeur de cette théorie, *vice* [131] qui ne sera jamais corrigé. C'est le suivant. Dans l'analyse non standard, on est censé avoir des infinitésimaux. Or, si l'on donne

130. Dans *Triangle de pensées*, A. Connes , A. Lichnerowicz, M-P Schützenberger, Odile Jacob 2000 [28]

131. Souligné par moi.

> un tel infinitésimal , on donne de manière automatique à partir de ce non standard, un sous ensemble de l'intervalle $[0, 1]$ qui n'est pas mesurable au sens de Lebesgue.(...)
>
> La conclusion que j'en ai tirée, c'est que jamais personne ne pourra me montrer un nombre non standard. On sait, en effet, d'après un théorème de Solovay, un logicien de Berkeley, qu'il est impossible d'exhiber un sous ensemble de $[0, 1]$ qui ne soit pas mesurable.

Aucun non standardiste de ma connaissance ne contestera cette affirmation de Connes concernant la théorie de Robinson ou la théorie Z.F.C.+I.S.T. qui sont hautement non constructives. Là ou les opinions divergent c'est sur les conclusions à en tirer. Pour un mathématicien non standard, les méthodes de l'A.N.S. restent très attractives en dépit de ce "vice", voire même pour quelqu'un comme Reeb, grace à ce "vice".

Pour continuer à brouiller les pistes voyez maintenant la position de E. Nelson, créateur du formalisme I.S.T. [132]. Il est tout sauf réaliste !

> Let me conclude with a brief but passionate apologia for formalism.(...)
> Formalism denies the relevance of truth to mathematics. But, one might object, mathematics works – the evidence is all around us. Does this not imply that there is truth in mathematics ? Not in the slightest. Suppose we find a primitive people, or an advanced people, but a people with a world-view utterly alien to ours, who have an herb that is quite effective for a certain illness. They explain its efficacy in terms of the divine action of the shuki on the body's okrus. We find that the herb is equally effective in our society. How much evidence does this provide for belief in the shuki ? None at all. The syntax is correct ; the semantics is irrelevant. So it is with mathematics. It works. But this is no evidence whatsoever that the religion of mathematics has any truth in it. In mathematics, reality lies in the symbolic expressions themselves, not in any abstract entities they are thought to denote. The symbol $\exists$ is simply a backwards E. If we conclude that a certain entity exists just because we have derived in a certain formal system a formula beginning with $\exists$, we do so at our peril. The dwelling place of meaning is syntax ; semantics is the home of illusion.(...)

132. Extrait d'une conférence donnée à Rome : *Confessions of an Apostate Mathematician* [88], à trouver sur le site de Nelson
`http://www.math.princeton.edu/?nelson/papers.html`

> Abstract beliefs affect concrete actions. Despite its complete lack of justification, the semantic view of mathematics – the discovery of properties of entities existing in a Pythagorean world – has served mathematics reasonably well for a very long time. But now it is time to move forward, to reject the semantic view, and concentrate on what is real in mathematics. And what is real in mathematics is the notation, not an imagined denotation.
> Let one brief example suffice. Abraham Robinson 's creation of non- standard analysis was a revolutionary simplification and extension of mathematical practice, but the mathematical community has been very slow, or unwilling, to adopt it because it conflicts with the Pythagorean religion.(...)

Nelson se présente donc comme anti-réaliste absolu et impute à des présupposés réalistes les réticences des mathématiciens par rapport à l'A.N.S.. Pourtant Harthong Non Stansardiste s'il en fût, nous semblait réaliste. Et, pour terminer, la position de G. Wallet, un ami de Reeb et Harthong, adepte de l'A.N.S., et connaisseur de Wittgenstein, entre autres philosophes. [133]

> Que reste-t-il si l'on rejette simultanément le formalisme et le réalisme ? Est-il possible d'éviter l'impasse d'un anti-réalisme rejetant dans l'insignifiance et l'arbitraire absolu le discours mathématique ? Il est bien connu que la métaphysique a horreur du vide, et ce serait une prétention exorbitante que de prétendre s'en affranchir à tout jamais. Mais une grande leçon de la philosophie de Wittgenstein est qu'il est possible de la faire notablement reculer, suffisamment en tout cas pour que les vieilles classifications (formalisme, réalisme, anti-réalisme, etc.) perdent toute pertinence et tout attrait. Ainsi, à mon sens, si le nombre π ne renvoie à aucune réalité indépendante ou préexistante cela ne veut pas dire qu'il n'a pas de sens ou que ce dernier est arbitraire. Ce nombre, comme tout objet mathématique, a un authentique contenu sémantique : c'est tout ce que nous savons actuellement sur lui et (...)
>
> Il est possible de conclure en donnant une interprétation du constat intuitionniste et malicieux de Reeb selon lequel *les entiers naïfs ne remplissent pas* $\mathbb{N}$. Oui, c'est vrai, parce qu'en l'occurrence, il n'y a strictement rien à remplir...

Que conclure de cette longue suite de citations ? Rien si ce n'est que le goût d'un mathématicien pour le style non standard ou son rejet ne semblent pas reposer,

133. Dans *Le Labyrinthe du Continu*, Springer Verlag, France 1992 , [109]

lorsque ces derniers sont assumés, sur des choix philosophiques relativement à la nature des mathématiques.

Je n'ai volontairement cité que des opinions philosophiques de mathématiciens qui se sont intéressés au Non Standard. Mais il existe aussi des philosophes français contemporains qui se sont exprimés sur ce sujet et même très tôt, comme A. Badiou dès 1968, puis J. Petitot, J-M. Salanskis, H. Barreau, ... Leur point de vue est évidemment important mais il n'explique pas le comportement des mathématiciens.

5.3 Style mathématique et réalisme (correspondance avec P. Duchemin)

La lecture du brouillon de Duchemin ne m'a pas été inutile. Un passage d'une citation de Nelson a particulièrement attiré mon attention.

> *The symbol $\exists$ is simply a backwards E. If we conclude that a certain entity exists just because we have derived in a certain formal system a formula beginning with $\exists$, we do so at our peril.*

Je savais depuis longtemps, depuis le lycée je crois, que le signe $\exists$ doit se lire "il existe" et que le signe $\forall$ se lit "pour tout" et je comprenais même une formule du genre :

$$\neg\{\forall x\, x \in F\ \exists y\ \ y \in G : \rho(x,y)\} = \{\exists x\ \ x \in F\ \forall y\ \ y \in G : \neg\rho(x,y)\}$$

Je rappelle que le signe $\neg$ se lit "la négation de" et que $\rho(x,y)$ est une "relation" entre x ret y qui peut être vraie ou fausse. Je la comprenais sur des exemples concrets. Par exemple si F est l'ensemble des filles, si G est l'ensemble des garçons, dans une classe mixte d'une école primaire, s'il y a moins ou autant de filles que de garçons le maître pourra, s'il le désire, faire assoir systématiquement une fille à côté d'un garçon. Dans ce cas on pourra dire que :

> "pour toute" "entité " x, telle que x est une petite fille, " il existe" une "entité" y où y est un petit garçon et x et y sont assis à côté l'un de l'autre.

En revanche, si dans la classe il y a plus de filles que de garçons cette proposition ne pourra pas être vraie, sa négation sera vraie, c'est à dire :

> "il existe" une entité x, telle que x est une petite fille et telle que "pour toute" entité y, telle que y est un garçon, x et y ne sont pas assis côte à côte.

Mais si j'ai bien compris le cours de Fuchs et Reeb ce n'est pas la logique formelle qui montre que mon histoire de petites filles et de petits garçons est correcte mais, au contraire, c'est la logique formelle qui essaye de dégager et de systématiser ce que les humains ont identifié comme des raisonnements corrects [134]. Toujours, si j'ai bien compris, l'avantage de cette traduction formelle qui peut sembler bien artificielle, c'est l'introduction de règles mécaniques de déduction, par exemple exécutables par un ordinateur, qui permettent de s'assurer de la correction d'un long raisonnement. Ce que je n'avais pas compris, et que Nelson pointe, c'est que si après une longue suite de formules apparaît :

$$\exists x : F(x)$$

où $F(x)$ se lit "x est un éléphant rose", je devrai rester très prudent avant de faire une communication dans les comptes rendus l'Académie des Sciences dans la rubrique *Biologies*.

J'ai eu l'impression de mettre le doigt sur une affaire importante et j'ai immédiatement demandé par e-mail son avis à Duchemin. Il m'a répondu :

e-mail n°5 Duchemin à Balderoy, date „,)

```
Cher Luc Balderoy,

   Bien vu ! C'est effectivement quelque chose de très important
que cet usage de ''il existe'' en mathématiques. Si vous êtes intéressé
nous pouvons échanger quelques mails sur ce sujet. Je ne vous invite
pas à me rencontrer car en ce moment mes horaires sont totalement
imprévisibles et fonction de la météo. Mais j'ai de grandes plages
de libres. Et puis, comme la discussion risque d'être un peu technique,
c'est aussi bien de le faire par écrit.

    Le passage qui vous a frappé chez Nelson est tiré du texte d'une
conférence au ton ironique, donnée en Novembre 1995 à la Sapienza
```

134. Je cite dans la préface du Fuchs-Reeb : « Les Messieurs de Port-Royal ont fort bien mis en relief ce côté de la logique dans le passage suivant de la Logique de Port-Royal (p. 231) : "Ceux qui ne seraient pas capables de reconnaître la fausseté d'un raisonnement par la seule lumière de la raison ne le seraient pas ordinairement d'entendre les règles que l'on donne et encore moins de les appliquer.". »

à Rome, dont le titre est *Confession of an Apostate Mathematician* où il se moque de la ‘‘foi’’ des mathématiciens. Essayons de nous placer sous son autorité. Comme je vais manipuler des formules je vous prie de prendre connaissance du .pdf joint Bien cordialement P. D.

5.3.1 A propos de “ il existe ” (par P. Duchemin.)

(Pièce jointe au mail précédent.)

Nous avons compris que la rigueur mathématique

> « n'est à proprement parler pas autre chose que cet art de rédiger des textes dont la formalisation est facile à concevoir»

et il y a un très large consensus chez les mathématiciens sur ce point. Le désaccord des adversaires de l'A.N.S. porte uniquement sur la pertinence qu'il y a à se référer à un formalisme qui intègre les infiniment petits. Nous devinons que le style de deux textes mathématiques ne sera pas le même si les systèmes formels de référence sont différents. Ainsi toute la polémique sur l'A.N.S. ne serait qu'une querelle sur le style ? Une pure affaire d'esthétique ? Donc ce serait une question externe aux mathématiques sur laquelle un accord ne pourra pas nécessairement se faire comme ce serait le cas pour une question de mathématiques. Pour aller plus avant sur cette question je vous propose de regarder de près la notion de continuité, notion fondamentale en analyse mathématique.

Je vous rappelle que, d'un point de vue intuitif, une fonction continue est une fonction dont le graphe peut se dessiner sans lever le crayon de la feuille de papier ; d'un trait continu. Voyons ce que ça donne mathématiquement. Prenons dans un ouvrage classique [135] des années 60 la définition de la continuité :

Définition Classique *Une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue au point x_o si $f(x)$ tend vers $f(x_o)$ quand x tend vers x_o*

Ce n'est évidemment pas une définition formelle et le texte fait quelques lignes plus loin un pas vers plus de formalisme en disant que :

Cette définition peut être traduite alors ainsi :
A tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un α tel que si x satisfait à $|x - x_o| < \alpha$, $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$

135. C. Pisot et M. Zamansky, *Mathématiques Générales*, Dunod 1959 ; [96].

Ce qui donne en utilisant les symboles de quantification $\forall$ et $\exists$ (ce que ne fait pas le livre) :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \alpha : \{|x - x_o| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(x_o)| < \varepsilon\} \tag{1}$$

J'ai choisi ce livre parce qu'il est représentatif de ce qui se faisait à l'époque en classe préparatoire ou en première année d'université. C'est ainsi que la plupart des protagonistes de l'affaire du nonstandard ont été éduqués. Mais les choses n'ont pas beaucoup évolué sur ce point ; un ouvrage plus récent dirait essentiellement la même chose.

Voyons maintenant ce que dirait un ouvrage utilisant l'A.N.S.

Définition A.N.S. *Une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue au point x_o si $f(x) - f(x_o)$ est infiniment petit lorsque $x - x_o$ est infiniment petit.*

et il rappellera la définition de "infiniment petit" si c'est nécessaire :

Définition "infiniment petit". *On dit que $\varepsilon > 0$ est "infiniment petit" si quel que soit le standard $\alpha > 0$ on a $\varepsilon < \alpha$.*

ce qui donne pour la formalisation de la continuité :

$$\{\forall^{st} y > 0 : |x - x_o| < y\} \Longrightarrow \{\forall^{st} y > 0 : |f(x) - f(x_o)| < y\}$$

Reformulons les deux définitions informelles qui se présentent sous la forme si "A" alors "B" par "A" implique "B" :

Définition Classique :

$$\{\ x \text{ tend vers } x_0\} \Longrightarrow \{\ f(x) \text{ tend vers } f(x_0)\}$$

Définition A.N.S. :

$$\{\ x - x_0 \text{ infiniment petit }\} \Longrightarrow \{\ f(x) - f(x_0) \text{ infiniment petit }\}$$

Dans les deux définitions, la phrase informelle se présente comme une implication :

Une qualité du couple x, x_0 (a savoir que x tend vers x_0 ou que $x - x_0$ est infiniment petit) entraine une qualité du couple $f(x), f(x_0)$ (a savoir que $f(x)$ tend vers $f(x_o)$ ou que $f(x) - f(x_0)$ est infiniment petit) mais il y a une grande différence :

Dans le cas A.N.S. l'expression informelle "infiniment petit" est équivalente à l'expression formelle :

$$\forall^{st} y > 0 : |x - x_o| < y$$

alors qu'il n'existe pas de traduction formelle classique de "tend vers". En effet $|x - x_0| < \alpha$ ne dit rien d'autre que $|x - x_0|$ est plus petit que α. C'est tout le bloc $\{$ x tend vers $x_0\} \Longrightarrow \{$ $f(x)$ tend vers $f(x_0)\}$ qui possède un équivalent formel. On voit que le lien entre la définition informelle classique et sa traduction formelle est assez subtil et nécessite de nombreux exercices pour être bien assimilé. Tous les enseignants confrontés à ce problème le confirmeront. Alors que dans le second cas l'expression "est infiniment petit" appliquée à un nombre ε *peut être considérée comme formelle* puisqu'elle est synonyme d'une expression formelle. Ce n'est qu'une question d'écriture.

En Analyse Non standard l'expression ε est "infiniment petit" peut donc être entendue de deux façons, dans son sens informel, intuitif ou dans son sens formel. Aux yeux d'un non standardiste c'est un point très positif.

e-mail n°6 Balderoy à Duchemin, date ,,,)

```
Cher Professeur Duchemin,

    Je crois avoir compris. Dans le monde réel dire qu'une quantité
est ''infiniment petite'' a du sens. Par exemple la masse d'un grain
de sable est infiniment petite par rapport à la masse de la grande
pyramide. Comme ces questions d'ordre de grandeur sont omniprésentes
dans les sciences, particulièrement en physique, il est avantageux
d'avoir un langage formel qui colle au plus près de la pratique.
Ne serait-ce pas une bonne raison pour enseigner l'A.N.S. dès le
lycée?
Bien à vous, L. B.
```

e-mail n°7 Duchemin à Balderoy, date ,,,)

```
Cher Luc Balderoy,
```

Je ne serai pas le dernier à vous suivre sur le constat de l'avantage pédagogique, sur la facilité d'écriture qu'apporte l'A.N.S.. D'ailleurs plusieurs mathématiciens[136] ont pensé qu'il serait préférable d'enseigner directement au lycée l'A.N.S. et ont fait des propositions dans ce sens. Notons cependant que G. Reeb, lui, n'est jamais allé très loin dans cette direction. Il n'a jamais semblé fortement désireux de voir l'A.N.S. enseignée au Lycée. Il répétait volontiers qu'il suffisait de dire que la méthode des ε, η est *une des façons* possible de parler des infinitésimaux et non *la seule façon....* L'objection que le prix à payer pour assimiler les bases de l'A.N.S. serait trop cher pour justifier un maigre avantage rédactionnel n'est pas très forte car tous ceux qui ont essayés en conviennent : pour qui a bien assimilé les bases de l'analyse classique, les bases de l'A.N.S. sont très faciles à acquérir. On pourrait imaginer qu'un cursus de formation classique de mathématicien professionnel, disons de futur professeur de lycée, soit complétée par une introduction à I.S.T. Mais, pour être honnête, sur cette question de la définition de la continuité, je dois vous dire qu'un mathématicien classique pourrait se défendre assez efficacement de la façon suivante (c'est d'ailleurs une approche qui est largement utilisée dans les classes élémentaires) :

On considère *les suites x_n de nombres réels qui tendent vers x_o*. Formellement on dit qu'une suite x_n tend vers x_o si :

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_\varepsilon\, \forall n : n > n_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - x_o| < \varepsilon$$

formule que l'on résume par :

$$x_n \longrightarrow x_o$$

et il est possible de prendre pour définition de la continuité la définition suivante :

Définition *Une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est continue au point x_o si pour toute suite x_n :*

$$\{x_n \longrightarrow x_o\} \Longrightarrow \{f(x_n) \longrightarrow f(x_o)\}$$

qui est très proche de la définition A.N.S. Le prix à payer est de remplacer un unique x infiniment proche de x_o par une ‘‘suite x_n tendant

136. Voir l' annexe B dédiée à cette question.

vers x_o''
C'est d'ailleurs une approche possibles de l' A.N.S. : on définit un infiniment petit comme une classe d'équivalence, pour une certaine relation, de suites qui tendent vers 0.

Bien cordialement P.D..

e-mail n°8 Balderoy à P. Duchemin, date ,,,)
Cher Professeur Duchemin,

Mais le tenant de l'A.N.S. (que je semble devenir ! :-)) aura beau jeu à son tour de dire que le problème a été déplacé car :

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_\varepsilon\, \forall n : n > n_\varepsilon \Longrightarrow |x_n - x_o| < \varepsilon$$

est bien compliqué pour formaliser $x_n \longrightarrow x_o$ alors que lui dira simplement:

$$n \text{ infiniment grand} \Longrightarrow x_n \text{ infiniment proche de } x_o$$

Je résume donc ce que je comprends, dites moi si vous êtes d'accord.
Des deux formalismes Z.F.C. et I.S.T. différents découlent deux styles différents.

— En analyse classique on a des textes utilisant des expressions localement non-formalisables (comme ''x tend vers") qui associées à d'autres (comme "tend vers (...) quand tend vers (...)'') constituent des phrases qui globalement le sont. Si nécessaire, pour qu'il n'y ait pas de confusion un texte plus proche du texte formel est fourni.

— En A.N.S. on utilise abondamment tout un vocabulaire imagé : ''infiniment petit'', ''infiniment proche de'', ''appréciable'' (ni infiniment petit, ni infiniment grand), ''halo(A)'' (les points infiniment proches de A) etc... dont la transformation en un texte formel est immédiate ou presque.

A ce stade on se dit, et c'est ce que disent les partisans de l'usage de l'A.N.S., qu'il est plus avantageux d'avoir un formalisme qui traduise plus directement ce qu'on a envie de dire instinctivement.
Alors pourquoi ces réticences si fortes ?

`Bien à vous, L.B.`

e-mail n°9 Duchemin à Balderoy, date „,)
`Cher Luc Balderoy,`

`Je crois avoir un début de réponse, voyez le .pdf joint qui est reconstitué à partir du texte d'une conférence donnée par Lobry à la fin des années quatre-vingt.`
`Bien cordialement P. D.`

Pièce jointe au mail précédent.

Thèse *Le style A.N.S. rappelle en permanence par son vocabulaire à forte charge émotionnelle (métaphysique) comme "être infiniment petit" le caractère humain (et donc approximatif, imparfait) de l'activité mathématique alors que le style classique essaye à tout prix de le cacher.*

C'est ce que j'argumente sur un exemple un peu plus savant que la continuité.

Comparons les deux expressions ci-dessous dont les traductions formelles sont équivalentes.

— *Formulation "rigoureuse" classique*. Il existe ε_o tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_o$ l'équation de Van der Pol :

$$\varepsilon x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0$$

possède un cycle limite.

— *Formulation "rigoureuse" A.N.S.* . Pour ε infiniment petit l'équation de Van der Pol :

$$\varepsilon x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0$$

possède un cycle limite.

Peu importe ce que veut dire "l'équation de Van der Pol possède un cycle limite" [137]. C'est une propriété mathématique qui est vraie pour certaines valeurs du paramètre ε et c'est seulement la manière de le dire qui nous intéresse.

137. L'équation de Van der Pol est une équations différentielle importante en physique. Dire qu'elle possède un cycle limite c'est dire qu'elle possède une solution périodique isolée.

— Dans le premier cas on dit *qu'il existe* un $\varepsilon_o > 0$ tel que un certain phénomène va se produire et nous n'avons formellement pas besoin de préciser que nous ne savons rien sur ce nombre sauf qu'*il existe* ! Mais il pourrait être si petit que notre ordinateur dont la petitesse des nombres est limité inférieurement (ce n'est qu'une création humaine) pourrait bien ne pas être capable de produire le phénomène.

— Dans le second cas notre attention est attirée sur le fait que l'ordinateur n'est peut être pas capable de produire un nombre assez petit pour qu'il possède effectivement les propriétés de cet infiniment petit *ideal*.

Mais regardez maintenant ce qui se passerait si nous posions que : L'écriture formelle : $\{\exists\, \varepsilon_o > 0 : \forall\, \varepsilon < \varepsilon_o\}$ est strictement synonyme de {pour ε suffisamment petit} ce qui est autorisé en mathématiques classique, et si inversement on s'interdisait l'expression française *infiniment* au profit de la seule écriture formelle $\{\forall\, \varepsilon : \forall^{st} \alpha \;\; \varepsilon < \alpha\}$. Les formulations deviendraient :

— *Formulation "rigoureuse" classique*. {Pour ε suffisamment petit} l'équation de Van der Pol :

$$\varepsilon x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0$$

possède une solution périodique.

— *Formulation "rigoureuse" A.N.S.* . $\{\forall\, \varepsilon : \forall^{st} \alpha \;\; \varepsilon < \alpha\}$ entraine que l'équation de Van der Pol :

$$\varepsilon x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0$$

possède une solution périodique.

et les rôles seraient inversés.

Donc finalement les formulations "modestes " ne sont pas l'apanage de l'A.N.S. et cette question du statut des théorèmes d'existence de la forme "Il existe tel ou tel objet mathématique ayant telle ou telle propriété" ne date pas de la "dispute sur l'A.N.S.". De tout temps les mathématiciens ont fait une distinction importante entre ce qui est constructif et ce qui ne l'est pas. Une façon constructive de parler de la continuité d'une fonction ce n'est pas dire ce que nous avons pu dire mais dire, par exemple :

$$|f(x) - f(x_0)| < 10 * |x - x_0|$$

là on sait de quoi on parle vraiment. Cette question de distinguer en mathématique ce qui peut être construit effectivement a commencé de façon assez philosophique par un affrontement entre Hilbert qui défendait le formalisme de la théorie des ensembles contre Brouwer (notons au passage que ce dernier a été une immense source d'inspiration pour G. Reeb). Dans les années quatre vingt l'histoire officielle rapportait que la bagarre entre Hilbert et Brouwer s'était soldée par une victoire totale des formalistes. Mais cette histoire doit être complètement re-visitée maintenant devant la montée en puissance des mathématiques de l'ordinateur. C'est un domaine d'une vitalité extraordinaire, que je ne connais malheureusement pas, que je ne connaîtrai pas mais du triomphe duquel je ne doute pas. La dispute de l'A.N.S. en sera-t-elle considérée un jour comme une péripétie annonciatrice ? Peut être.

e-mail n°10 Balderoy à P. Duchemin, date „,)

Cher Professeur Duchemin,
Je voudrais conclure notre échange de mails par l'idée que je me fais maintenant de l'affaire Vénissac. L'Analyse Non Standard bouscule un peu les habitudes prises à l'école. Les hommes sont paresseux, les mathématiciens sont des hommes comme les autres, ils sont donc naturellement réticents devant la nouveauté. Il suffit que quelque autorité mathématique déclare publiquement que l'A.N.S. n'est pas intéressante pour que l'immense majorité se frotte les mains. Ouf, nous ne devrons pas changer nos petites habitudes. Jusque là rien de très particulier. Les partisans de l'A.N.S., de leur côté, n'ont pas une politique de communication particulièrement efficace et leur chef de file est un personnage très controversé.

La commission des thèses a des pratiques étranges mais on devine qu'il y a derrière ce secret qui entoure ses décisions beaucoup d'hypocrisie. On imagine bien que dans le microcosme parisien les gens se connaissent, que les travaux des candidats ont une ‘‘réputation’’ informelle et, quand cette dernière est suffisante, le passage devant la commission est une formalité. C'est ainsi que les choses se passent pour les initiés. Peut être que Vénissac et son jury qui ne faisaient pas partie de ce petit monde ont fait preuve de légèreté en soumettant un travail sans se renseigner sur les règles du jeu ? Peut être a-t-on ressenti cette attitude comme de l'arrogance ? Peut être que certains dans la commission n'aimaient pas Reeb ? Probablement un peu de tout

ça. Les choses se crispent jusqu'à un point où la commission fait un pas en arrière, tend une perche qui n'a pas été saisie. Ce qu'on peut aussi comprendre car, d'une part Vénissac et ses soutiens n'avaient pas été traités convenablement par la commission et, d'autre part, certains chez les ''nonstandardistes'' se sentaient investis d'une ''mission''.

Mais cette affaire de thèse, pour importante qu'elle soit pour l'intéressé, qui entre parenthèses, pour ce qu'il m'en a dit[138], n'en faisait pas un drame, était une péripétie par rapport à un enjeu bien plus important : travailler à se mettre d'accord à l'intérieur des mathématiques. Et l'accord aurait bien fini par se faire puisqu'il s'agissait d'une question interne aux mathématiques. Pourquoi ne pas avoir polémiqué, au sens noble, j'entends ? Pourquoi ne pas avoir développé des controverses dans des revues spécialisées ? Il me semble qu'au début du XXème siècle les débats publics à propos des mathématiques n'ont pas manqué ; je pense en particulier aux controverses de Poincaré et Russell sur la géométrie et la logique.

Bien à vous L. B.

e-mail n°11 Duchemin à Balderoy, date „,)

Cher Luc Balderoy,

Votre dernière question est excellente. Pourquoi cet absence de dialogue ? Je ne sais malheureusement pas y répondre. Vous parlez d'une perche de la commission des thèses qui n'a pas été saisie. Je reconnais avec vous que le Jury de Vénissac aurait dû accepter le compromis. Mais vous posez une question plus générale. Une péripétie comme cette histoire de thèse n'aurait pas dû bloquer ainsi la discussion.

Je crois que Lobry y était totalement ouvert. N'oubliez pas qu'il ne faisait pas partie de ce que vous avez appelé le ''premier cercle'', les élèves directs de G. Reeb. Certes, il devait beaucoup à Reeb qu'il avait connu à Grenoble mais ses premiers travaux ne devaient rien à l'A.N.S. et il pouvait se prévaloir de (petits) résultats en mathématiques "dites appliquées". D'une manière générale les nonstandardistes ont essayé avec beaucoup de constance de dialoguer mais

138. J. Vénissac, communication personnelle.

sans grand succès. Il n'y avait pas d'interlocuteur. Les plus bêtes disaient que puisque A. Connes avait dit qu'il était contre l'A.N.S., la discussion était close. Entre parenthèses je ne sais pas ce qu'ils diraient maintenant que le jeune Médaillé Fields T. Tao dit sur son blog tout le bien qu'il pense de l'A.N.S. [139] ? Un médaillé Fields contre un autre, que faire ! Les autres prétendaient que la polémique ne les intéressait pas, qu'ils n'avaient pas d'opinion. L'école de Strasbourg a bien organisé des colloques, publié des ouvrages collectifs mais, dans le fond, chacun restait dans son coin.

Reeb, lui aussi, ne demandait que la discussion. Mais ça n'a jamais marché. Je ne sais pas très bien pourquoi. Rien n'aurait dû l'empêcher de dialoguer avec les plus grands des adversaires de l'A.N.S. comme A. Connes. Il était peut être bloqué par son aversion pour l'E.N.S. Plus fondamentalement je crois qu'il pensait que le temps travaillait pour lui. Il affirmait souvent que les bonnes idées finissent toujours par triompher. D'un autre côté les autres, très modestes mathématiciens comme moi, ne se voyaient pas interpeller A. Connes! Pour reprendre l'image de l'alpiniste, pauvres randonneurs de montagne à vaches nous ne nous voyions pas défiant Bonatti.

C'est certainement ce qui a poussé Lobry à écrire la provocation qui vous a conduit vers moi. C'est un livre discutable à bien des égards mais vous lui reconnaîtrez au moins une qualité : il ne maniait pas la langue de bois et appelait un chat un chat. En l'écrivant il était certain de faire réagir. Il m'a dit peut de temps avant sa parution qu'il craignait beaucoup que les faiblesses de son livre, et il ne doutait pas qu'il y en avait beaucoup, ne soient tournées en dérision. Comme mathématicien classique ses travaux étaient tout à fait ordinaires et sa compréhension philosophique de la méthode formaliste était celle d'un tout jeune débutant. Il craignait des jugements cinglants sur son incompétence. Il avait naturellement demandé à Reeb si, d'une part, il acceptait le portrait qu'il faisait de lui et si, d'autre part, il cautionnait sa science. Reeb a répondu oui aux deux questions, lui a fait une ou deux suggestions sur le fond, mais ne lui apporté aucune aide sur la forme.

Comme il avait fait des efforts pédagogiques dans l'espoir de toucher un large public, son éditeur a pensé judicieux de le présenter

139. On trouvera annexe B quelques extraits du texte en question.

pour le prix D'Alembert de la Société Mathématique de France [140].

Le livre n'a pas eu le prix ce qui peut s'expliquer par toutes sortes de bonnes raisons. Mais en voici une qui, au contraire, me semble bien mauvaise ; voici le rapport qu'en a fait pour le jury du prix un éminent mathématicien de l'époque, en charge d'importantes responsabilités.

> Il s'agit d'un excellent texte de vulgarisation des mathématiques. En ce sens que l'auteur - et c'est ce qu'il faut faire - revient sans cesse sur ce sujet mais avec des approches et des métaphores chaque fois différentes. En outre le style est très vivant, l'auteur est certainement un bon littérateur.
> On peut seulement regretter qu'il ait inclus dans son texte une part importante consacrée à régler des comptes personnels avec différents éléments de la vie universitaire française, tels que l'Ecole Normale Supérieure et le Comité Consultatif des Universités. Le signataire de ces lignes exprime ce regret avec une certaine force. Non pas qu'il prétende que l'univers mathématique français soit "tout blanc" ou encore composé seulement de colombes. Mais parce que les mathématiciens français, et plus généralement les universitaires, ont assez de difficultés à plaider leurs causes financières et culturelles, pour que l'un d'entre eux ne vienne pas torpiller ces efforts en donnant des armes contre nous à ceux auprès de qui il faut plaider. C'est d'autant plus regrettable que le fond de son texte, son but central, étaient excellents.

En clair : *surtout pas de vagues*. Pas un mot sur ce qui était quand même au centre du livre l'Analyse Non Standard et l'indéniable, quoique non reconnue, polémique qui l'entourait.

C'est à cette époque, début des années 1990 que, voyant qu'ils ne pouvaient discuter raisonnablement, que leurs articles étaient souvent refusés sur des critères peu scientifiques, que leurs élèves ne trouvaient que trop difficilement des emplois, les non standardistes ont, pour la plupart, changé l'orientation de leurs recherches.

Après la disparition de Reeb en 1993, ce que vous avez appelé "école de Strasbourg" a perduré sous l'appellation de *Réseau Georges Reeb*. Animé par M. et F. Diener il a à son actif quelques manifestations

140. Sur le site de la société on lit « Ce prix vise à encourager la diffusion de la connaissance des mathématiques vers un large public. »

scientifiques et l'édition d'un livre collectif *Nonstandard Ananlysis in Practice*[141] mais il n'a jamais réussi à s'imposer institutionnellement.

Il ne m'a pas été très difficile de trouver le nom du rapporteur du prix D'Alembert. Il s'agit du mathématicien M. Berger qui à l'époque était le directeur de l'I.H.É.S. ce qui explique peut être sa réaction sur la question de la difficulté à « plaider les causes financières » des mathématiciens. Nous avons déjà rencontré ce sigle à propos des publications de l'I.H.É.S. et, comme il va revenir plus tard associé au noms de Grothendieck et de R. Thom, il est nécessaire d'en dire quelques mots. L'Institut des Hautes Etudes Scientifique est à la fois minuscule (son budget annuel salaires inclus est de quelques millions d'Euros) et prestigieux. Créé en 1958 il a accueilli comme professeurs permanents, Dieudonné, Grothendieck (Fields 66), Deligne (Fields 78), Bourgain (Fields 94), Connes (Fields 82), Gromov (Abel 2002), Sullivan, Kontsewitch (Field 98) et autant de physiciens théoriciens aussi prestigieux. Il comporte en 2016 sept professeurs permanents, dont quatre mathématiciens. L'I.H.É.S. est le fruit de la volonté d'un industriel amoureux des maths L. Motchane (il soutient une thèse de mathématiques à 54 ans) qui réussit à créer une fondation privée financée partiellement par l'industrie. L'historien David Aubin nous informe[142] sur les « fondements sociaux et idéologiques de l'I.H.É.S. ». Motchane avait le soutien de R. Oppenheimer, alors directeur de *l'institute for advanced studies* de Princeton. S'appuyant sur une note adressée par Motchane au directeur des études et recherches d'EDF D. Aubin nous dit :

> Des interprètes : voila l'apport fondamental que l'I.H.É.S. devait fournir au monde industriel, aussi bien du côté nationalisé que privé et militaire. C'est un argument que Motchane et ses supporters répéteront à l'envi au cours des années qui suivent.(...)
> Mais qu'est-ce donc cette *recherche fondamentale* qui devait se faire à l'I.H.É.S. ?

Dans sa note au directeur des recherches de E.D.F. Motchane insiste sur le caractère fondamental des recherches qu'il souhaite voir financées mais aussi, on comprend bien pourquoi, sur ce que pourraient apporter de pratique des avancées en physique des particules et une meilleure maîtrise de l'atome. Je cite encore Aubin :

141. Diener, Francine and Diener, Marc Eds., Springer (1995) ; [41].

142. *L'institut des Hautes Etudes Scientifiques, la théorie des catastrophes et le chaos déterministe : mathématiques, industrie et politique* dans Les mathématiques dans la cité, dir. Marie-Josée Durand-Richard, Presses universitaires de Vincennes, 2006, P. 129-154 ; [49]

> Mais il reste clair, pour Motchane comme pour les industriels impliqués, que les recherches de l'I.H.É.S., quoique « fondamentales », recèlent un important potentiel en vue d'applications futures militaires et industrielles. Bien sûr, personne ne croit que quoi que ce soit de directement utile pour l'industrie ou la défense nationale puisse sortir de l'I.H.É.S. Mais l'hypothèse de départ, largement partagée, reste que ces recherches fondamentales pourraient un jour s'avérer utiles.

Ceci se passait dans les années 1950, rappelons le dans l'ambiance de la guerre froide. En 1989, quand M. Berger écrit son rapport, le contexte est bien différent mais on peut penser que le directeur de l'I.H.É.S., qu'il est, doit se battre en permanence pour trouver les fonds nécessaires à son institut. Cela explique probablement son irritation mais sur le fond, comme le fait remarquer Duchemin, comment comprendre que *ce rapport ne fasse aucune allusion à ce qui est quand même le thème central de* Et pourtant ils ne remplissent pas $\mathbb{N}$ *: l'Analyse Non Standard ?* C'est pourquoi il n'est pas interdit de penser que cette irritation est feinte et qu'elle ne sert qu'à évacuer la question de fond ?

Imaginons un instant que, tout en gardant le style pédagogique qui a plu à M. Berger, l'auteur de *Et pourtant ils ne remplissent pas* $\mathbb{N}$ se soit abstenu de provocations et ait simplement fait état des divergences dans la communauté mathématique à propos l'A.N.S.. Le rapporteur aurait-il conclu par :

> On peut seulement regretter qu'il ait inclus dans son texte une part importante consacrée à exposer des divergences de point de vue entre les partisans et les adversaires de l'Analyse Non Standard. Le signataire de ces lignes exprime ce regret avec une certaine force. Non pas qu'il prétende que les mathématiciens soient toujours d'accord entre eux. Mais parce que les mathématiciens français, et plus généralement les universitaires, ont assez de difficultés à plaider leurs causes financières et culturelles, pour que l'un d'entre eux ne vienne pas torpiller ces efforts en étalant sur la place publique nos divergences. C'est d'autant plus regrettable que le fond de son texte, son but central, étaient excellents.

Faisons rapidement le point. Nous avons essayé de restituer le cadre institutionnel dans lequel évoluaient les acteurs de l'affaire Vénissac et essayé de voir dans quelle mesure leurs différentes positions philosophiques sur la nature des mathématiques pouvait être à l'origine de leur différent. Nous n'avons rien trouvé de très probant dans cette direction. Mais, à l'instant, en nous intéressant à l'I.H.E.S., nous nous rappelons (enfin !) que si les mathématiques ne sont (peut être) pas de ce monde, les mathématiciens eux le sont et qu'il ont besoin d'argent pour exis-

ter. Même si l'on croit comme Dieudonné que les mathématiques se font « pour l'honneur de l'esprit humain » il faut bien que des gens comme Motchane se préoccupent de l'intendance. Nous allons donc regarder d'un peu plus près à quoi servent les mathématiques et pourquoi on paye les mathématiciens.

Chapitre 6

De l'usage des mathématiques

Sommaire

6.1 La mathématisation du réel 147

6.1.1 Mathématiques, physique et modélisation 147

6.1.2 La modélisation dans les sciences de l'ingénieur . . . 150

6.1.3 Les mathématiques en écologie 154

6.2 Le "roman mathématique" 157

6.2.1 Un dialogue qui aurait pu avoir lieu. 157

6.2.2 Le roman selon Umberto Eco 166

6.3 Mathématiques et théorie de la valeur 171

6.3.1 Une fronde estudiantine 171

6.3.2 Une fable de H. Simon 172

6.3.3 Le roman mathématique de G. Debreu 175

6.3.4 La *méthode axiomatique* en économie 181

6.4 Mathématiques et théories écologiques 186

Jusqu'à présent il a été assez peu question de "mathématiques appliquées" sinon pour dire rapidement que "l'affaire" semblait être interne au monde des "mathématiques pures" mais nous ne pouvons pas écarter sans examen tout lien entre la "non-dispute" et la question de l'usage des mathématiques. D'autant plus que certains des travaux de l'école de Strasbourg portent explicitement sur ce sujet ; citons seulement *Mathématiques non classiques, mathématiques appliquées ?* [143] et l'ouvrage collectif *Analyse Non Standard et représentation du réel* [144].

Dans ce chapitre je vais travailler sur la façon dont les mathématiques interviennent de nos jours dans la pratique des sciences. C'est un sujet si vaste qu'un modeste chapitre d'une thèse ne peut prétendre le traiter dans toute sa généralité. En réalité mon objectif est beaucoup plus modeste. Je me contenterai de rappeler quelques faits bien connus afin de situer mieux une pratique que je reconnais dans au moins deux disciplines, la théorie écologique et les sciences économiques. Le produit de cette pratique est ce que j'appellerai le "roman mathématique" et je le caractériserai dans le cadre de la théorie écologique. C'est bien sûr à dessein de provoquer que j'appelle "roman" le produit d'une pratique scientifique. Ne dit-on pas « c'est du pur roman » pour qualifier ce qui nous semble hautement improbable ? Tout le contraire des affirmations scientifiques. Mais ce n'est pas que pour provoquer. C'est aussi, nous le verrons, par *souci éthique.*

6.1 La mathématisation du réel

Le titre de cette section reprend celui de l'ouvrage de l'historien des sciences G. Israel *"La mathématisation du réel, essai sur la modélisation mathématique"* [145].

6.1.1 Mathématiques, physique et modélisation

On dit souvent que les mathématiques sont une "langue" qui, par sa précision, serait la seule adéquate pour faire correctement de la science. Rappelons ce

143. Conférence donnée lors du "Colloque national d'analyse numerique" d'Aussoi (1981), publication interne "Analyse appliquée et Informatique" n° 8106 de l'université Bordeaux I. Ce colloque était la réunion annuelle d'une très grande partie de la communauté "mathématique appliquée" française.

144. M. Diener and C. Lobry eds. Collection Outils et Modèles Mathématiques pour l'Automatique et le Traitement du Signal. OPU, Alger et CNRS, Paris, 1985 ; [45].

145. Seuil, (1998) ; [61]

fameux texte de Galilée [146]

> La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaitre les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langue mathématique, et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. »

que nous avions déjà évoqué avec Duchemin. Citation qui nous conduit inévitablement au prix Nobel de physique E. Wigner et son article célèbre : « The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences » [147] qui a fait couler beaucoup d'encre. Il a été remarqué qu'en fait Wigner ne parle pas des sciences naturelles en général mais seulement de la physique et que, si les mathématiques interviennent ailleurs, par exemple en génétique, en écologie, en économie, leurs succès sont moins éclatants. Alors pourquoi cette déraisonnable efficacité des mathématiques en physique ? J-M. Lévy-Leblond a proposé [148] une solution simple et radicale :

> (...) *son rapport aux mathématiques constitue la détermination spécifique de la physique*. En d'autres termes, c'est par la nature de son rapport aux mathématiques, par le rôle constitutif qu'elles y jouent, que tel ou tel canton du continent des sciences accède à cette reconnaissance qui le situe dans le territoire de la physique.

Il n'y a donc pas lieu de s'étonner que les mathématiques soient efficaces en physique puisque, *par définition*, la physique c'est là où les mathématiques sont efficaces ! Suffit-il pour autant que les mathématiques soient présentes dans une discipline pour que cette dernière appartienne à la physique ? Non, il faut aussi qu'elle pratique la méthode expérimentale. Je cite, encore dans le même article :

> L'astronomie en effet, beaucoup plus vieille que la physique, était considérée comme une discipline mathématique et le resta bien après la naissance de la physique. La fondation de l'astrophysique (que l'on peut faire remonter à la fin du siècle dernier) et la progressive extinction de l'astronomie à son profit résultent justement de l'introduction de ces pratiques expérimentales

146. *L'essayeur* (1623), traduction de Christiane Chauviré, Annales littéraires de l'Université de Besançon, n° 234, Paris, Les Belles Lettres, 1979 ;[26].

147. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, XIII 1960 1-14 ; [122].

148. *Physique et Mathématiques*, dans *Penser les Mathématiques*, Seuil 1982, p-p. 195-210 ; [73].

> dans un domaine déjà mathématiquement constitué, lui donnant d'ailleurs une extension considérable.

Mais l'élucidation des rapports des mathématiques et de la physique ne règle pas la question de l'utilisation des mathématiques. Ainsi nous savons que des mathématiques sont massivement présentes dans les sciences de l'ingénieur, les sciences économiques, en écologie, en génétique des populations et autres sciences réputées plus ou moins "molles". Elles interviennent dans ce qu'on désigne maintenant sous le nom de *modélisation* et qui est devenu une pratique scientifique omniprésente. Tout le monde a entendu parler des "modèles climatiques" et, dans la littérature savante on peut citer un ouvrage collectif assez ancien qui contient de nombreux articles de référence : *Élaboration et justification des modèles* [149], ou un petit essai d'un grand biométricien, J-M. Legay (1925-2012), fondateur de l'école française de biométrie dans les années soixante, intitulé *L'expérience et le modèle : Un discours sur la méthode* [150].

Qu'est-ce qu'un "modèle" ? Qu'est-ce que la "modélisation" ? Quel rôle les mathématiques y jouent-elles ? Le livre de G. Israel précédemment cité se présente comme un "essai sur la modélisation mathématique" dans le cadre d'une épistémologie internaliste. De leur côté les ouvrages de N. Bouleau *Philosophies des mathématiques et de la modélisation : du chercheur à l'ingénieur* [151] et *La modélisation critique* [152] abordent des questions plus sociétales sur la question de l'usage des modèles. Et, dans le registre philosophique, on peut citer de Jean Petitot *Nature et enjeux de la modélisation en sciences sociales* [153]. Je ne vais pas aborder ce problème dans toute son ampleur mais me focaliser uniquement sur le mode d'intervention des mathématiques dans l'élaboration des modèles.

Il y a deux façons radicalement différentes d'entendre le mot "modèle" selon qu'on se trouve dans le contexte des sciences de l'ingénieur ou dans celui de la "science-en-train-de-se-faire" au sens ou Bruno Latour emploie cette expression [154]. A la "science-en-train-de-se-faire" j'opposerai la "science-bien-établie" [155]. C'est le cas, par exemple, de la mécanique classique qui est la "science-

149. Pierre Delattre et Michel Thellier, *Actes du colloque" Elaboration et justification des modèles : applications en biologie"*, Paris, 9-14 octobre 1978 , Maloine (1979) ; [35]
150. INRA éditions 1997 ; [70]
151. l'Harmattan 1999 . . . [19]
152. éditions Quæ, NSS-Dialogues, 2014 ; [20].
153. dans *Le Genre Humain*, Paris, n° 33 Interdisciplinarités, 1998 , p. 75-101 ; [95].
154. Notamment dans *Le métier de chercheur. Regard d'un anthropologue*, INRA Editions, 1995 ; [69].
155. Latour utilise les expressions "science-faite" ou "ready made science"

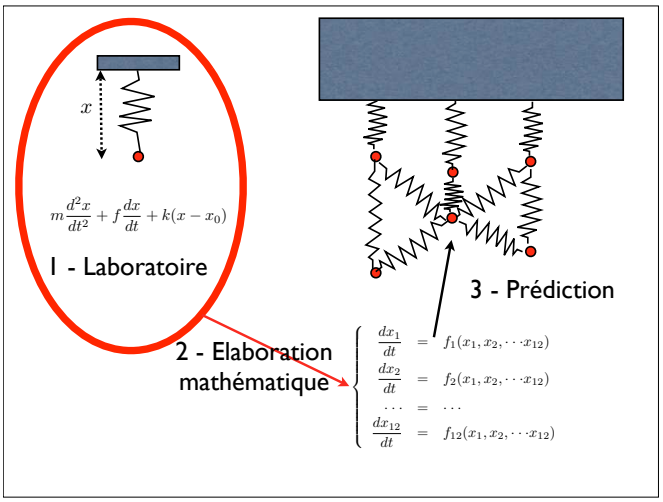

FIGURE 6.1 – Du laboratoire à la réalité

bien-établie" par excellence. Les résultat de la "science-bien-établie" sont si bien établis qu'il est impensable de les remettre en question. Les objets techniques fabriqués par les ingénieurs doivent être fiables car ils sont susceptibles, en cas de défaillance, de porter préjudice aux humains qui les utilisent, c'est pourquoi les ingénieurs qui les conçoivent travaillent dans le cadre de la "science-bien-établie". Bien entendu elle sera plus ou moins "bien-établie" selon le degré de fiabilité souhaité. De son côté, par définition, la "science-en-train-de-se-faire" spécule sur les lois de la nature et s'attend à ce que ses premières spéculations soient souvent complètement erronées. Il résulte de cette différence fondamentale une pratique très différente malheureusement désignée dans les deux cas par la même expression : "modélisation".

6.1.2 La modélisation dans les sciences de l'ingénieur

Les ingénieurs sont certainement les plus gros consommateurs actuels de mathématiques. Voyons sur un exemple académique comment cela fonctionne. Sur la Fig. 6.1 on peut voir en haut à droite un dispositif constitué de 6 masses rouges reliées par des ressorts et suspendues au plafond. Imaginons que pour une raison quelconque on désire prévoir comment vont vibrer ces ressorts en cas de déplace-

ment du support [156]. L'ingénieur procède de la façon suivante :

1. Dans une première phase il analyse dans un laboratoire le mouvement d'une masse suspendue à un ressort et il établit que ce mouvement est parfaitement décrit par l'objet mathématique "équation différentielle" :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + f\frac{dx}{dt} + r(x - x_o) = 0$$

   dont les paramètres m, r et f dépendent des caractéristiques de la masse et du ressort.
2. Ensuite l'ingénieur "assemble " les équations ci-dessus en un système plus complexe de 6 équations couplées dont il sait que la "résolution" permettra de répondre à la question (prédire le mouvement en cas de secousse).
3. Enfin l'ingénieur "résout" les équations.

En fait, comme chacun le sait, les choses ne se passent pas exactement ainsi. Les trois phases ci-dessus sont un petit résumé de plus de 4 siècles d'activité scientifique. La phase 1, la possibilité de faire tenir tout mouvement possible d'une masse suspendue à un ressort (ou d'un pendule) dans une petite équation mathématique correspond aux tout débuts de la mécanique classique avec Galilée puis Newton et la formalisation de choses aussi peu intuitives que la vitesse instantanée qui trouve son expression mathématique dans la *dérivée* représentée par le symbole $\frac{dx}{dt}$. Bien entendu l'ingénieur moderne n'a plus à faire les expériences de la phase 1 qui relient le monde des ressort à celui des équations. Elles ont été faites maintes et maintes fois et les résultats consignés dans d'innombrables ouvrages où il a puisé sa formation de base [157]. En revanche, pour chaque dispositif nouveau l'ingénieur aura à "assembler" un nouveau système d'équations (c'est pour ça qu'on le paye) en respectant des règles qui elles sont éternelles (à l'échelle de la vie humaine), celles qui découlent des lois de la mécanique (classique). Enfin, pour la "résolution des équations" on fera appel au savoir faire accumulé dans la "théorie des systèmes dynamiques", la branche des mathématiques qui s'occupe de ce genre de problèmes depuis Newton et qui est encore très vivante de nos jours, surtout depuis qu'elle doit "contrôler" ce que font les ordinateurs.

156. En fait l'exemple n'est pas si académique que ça. Pensons à un immeuble, structure plus ou moins souple susceptible de vibrer lors d'une secousse sismique.

157. En réalité, au XXI ème siècle, plus que les expériences de Galilée, ce sont les innombrables vérifications accumulées en quatre siècles de conséquences de ces lois qui en font une science de mieux en mieux établie. Chaque vol Air-France est une tentative de falsification parmi d'autre des lois de la mécanique. Ce qui ne veut pas dire qu'à chaque crash on remette en cause ces lois : il n'y a pas que les lois de la mécanique qui font voler les avions.

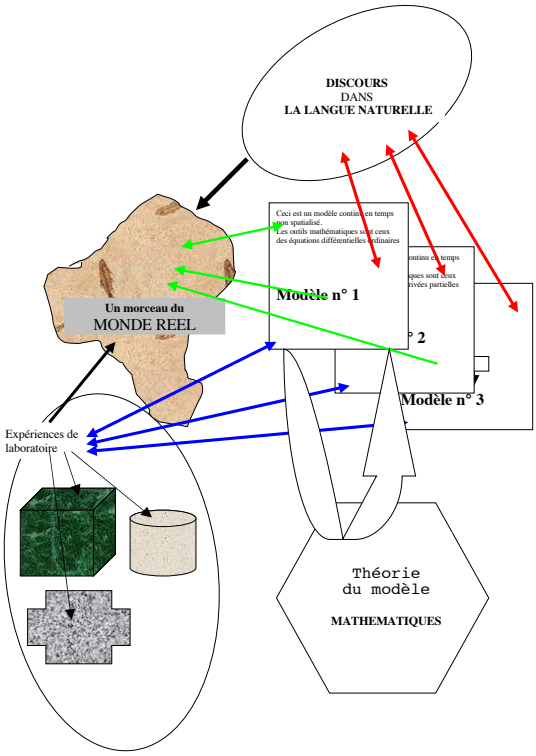

FIGURE 6.2 – Du laboratoire à la réalité

C'est en gros toujours ce même schéma qui est reproduit, qui permet les exploits époustouflants de la sonde spatiale Rosetta et surtout la confiance qui nous fait accepter de monter dans un objet aussi complexe qu'un avion de transport. C'est ce type d'activité que j'essaye de synthétiser sur la Fig. 6.2 que je commente :

— On fait des *expériences de laboratoire* qui ont un rapport plus ou moins lointain avec le morceau de *monde réel* qui nous intéresse (flèche noire).

— Chaque expérience de laboratoire est en relation très forte (flèches bleues) avec des "équations mathématiques", appelées Modèle 1, Modèle 2 etc... Il est à noter que la même expérience peut être associée à des modèles différents et inversement un même modèle peut servir pour plusieurs ex-

périences.

— Le morceau de réalité est considéré dans le cadre d'une théorie exprimée essentiellement dans une langue naturelle, mais dont les concepts peuvent être très abstraits. C'est la flèche noire.

— Les modèles sont assemblés correctement et les équations résolues (de nos jours simulées sur ordinateurs) : c'est faire *la théorie du modèle*. La flèche blanche. C'est, en principe, une opération interne aux mathématiques. En particulier, en cas de simulations numériques il s'agit de savoir si les solutions produites par l'ordinateur ne sont pas de purs artéfacts numériques et sont bien interprétables à partir des paramètres. C'est ce qu'on appelle le *calcul scientifique*, discipline qui s'est vertigineusement développée ces cinquante dernières années.

— Les prédictions des modèles sont *interprétées* dans le cadre du discours théorique (flèches rouges) et aussi *confrontées* à la réalité (les flèches vertes).

On remarque le caractère plutôt "holiste" de cette description. Si quelque chose ne fontionne pas bien globalement il y a beaucoup de points qui peuvent être remis en cause. Suivant les cas les rôles des différents champs d'activité pourront être plus ou moins solides ou importants. Dans le cas d'un avion de transport un modèle pourra être le "pilote automatique", c'est à dire un programme d'ordinateur capable de remplacer le pilote. Comme c'est la sécurité qui prime avant tout on choisira un cadre théorique particulièrement solide : la mécanique classique évidemment et si possible pas trop de capteurs sophistiqués reposant sur les limites des connaissances actuelles, et surtout des outils informatiques particulièrement éprouvés ; on multipliera les expériences de validation du modèle global. Dans le cas de Rosetta on pourra prendre un peu plus de risques avec le cadre théorique et on ne multipliera pas les vérifications de bon fonctionnement du modèle ; on espère qu'il fonctionnera bien une fois, *la bonne.*

Le point essentiel à retenir est que dans les sciences de l'ingénieur la modélisation se fait sous le contrôle des sciences bien établies. Il ne s'agit pas, bien entendu, d'un contrôle hiérarchique qu'exerceraient quelques "savants", détenteurs du "savoir scientifique", sur une armée d'ingénieurs obéissants. Par contrôle j'entends le contrôle intellectuel qu'exerce sur chaque participant sa propre connaissance des lois physiques impliquées. Ce contrôle nécessite une organisation sociale considérable, donc susceptible de présenter des lacunes, ce qui, dans le débat sur le climat [158], fait dire à certains scientifiques qu'ils n'ont pas confiance. À

158. Les modèles du climat sont de même nature, mais sont d'une complexité sans commune

ces scientifiques d'autres scientifiques feront remarquer que pour qu'un avion ne fonctionne pas il suffit de peu de choses lors de sa fabrication. Qu'on oublie un chiffon dans un mauvais endroit ou de bien serrer un boulon et c'est la catastrophe. Or les catastrophes de ce type sont très peu fréquentes, c'est bien la preuve que l'organisation sociale est capable d'une certaine forme de perfection. Je n'irai pas plus loin dans ce débat important mais qui n'intervient pas dans la suite de mon propos.

6.1.3 Les mathématiques en écologie

La science écologique est beaucoup plus jeune que la physique. Elle débute à peu près en même temps que la théorie de l'évolution et la science économique dans la seconde moitié du XIXe siècle. Certaines de ses connaissances sont bien établies mais pour l'essentiel il s'agit de "science-en-train-de-se-faire". Nous pouvons dire que la plupart des résultats des publications actuelles en écologie théorique ne sont que des «propositions-de-faits-scientifiques-nouveaux-soumis-à-la-discussion». Bien que ce soit une science de la nature elle n'est pas beaucoup plus assurée que certaines sciences humaines comme l'économie. Voyons, dans la science écologique telle qu'elle se construit, comment la notion de modèle et l'usage des mathématiques posent question.

Commençons par nous rendre à l'entrée *Theoretical ecology* de Wikipédia [159]. On lit dans le résumé de l'article :

> Theoretical ecology is the scientific discipline devoted to the study of ecological systems using theoretical methods such as simple conceptual models, mathematical models, computational simulations, and advanced data analysis. (...).
>
> Based on biologically realistic assumptions, theoretical ecologists are able to uncover novel, non-intuitive insights about natural processes. Theoretical results are often verified by empirical and observational studies, revealing the power of theoretical methods in both predicting and understanding the noisy, diverse biological world.

---

mesure, que ceux qui sont impliqués dans la fabrication d'un avion, ce qui rend le "contrôle" par les lois bien établies très difficile. Dans ce cas ce qui rend les choses particulièrement délicates c'est le couplage nécessaire entre des sciences dont les concepts peuvent être de nature très différente. Par exemple la dynamique de la croissance du plancton (consommateur de carbone) est couplée à la dynamique des courants marins.

159. Visite du 22/01/17

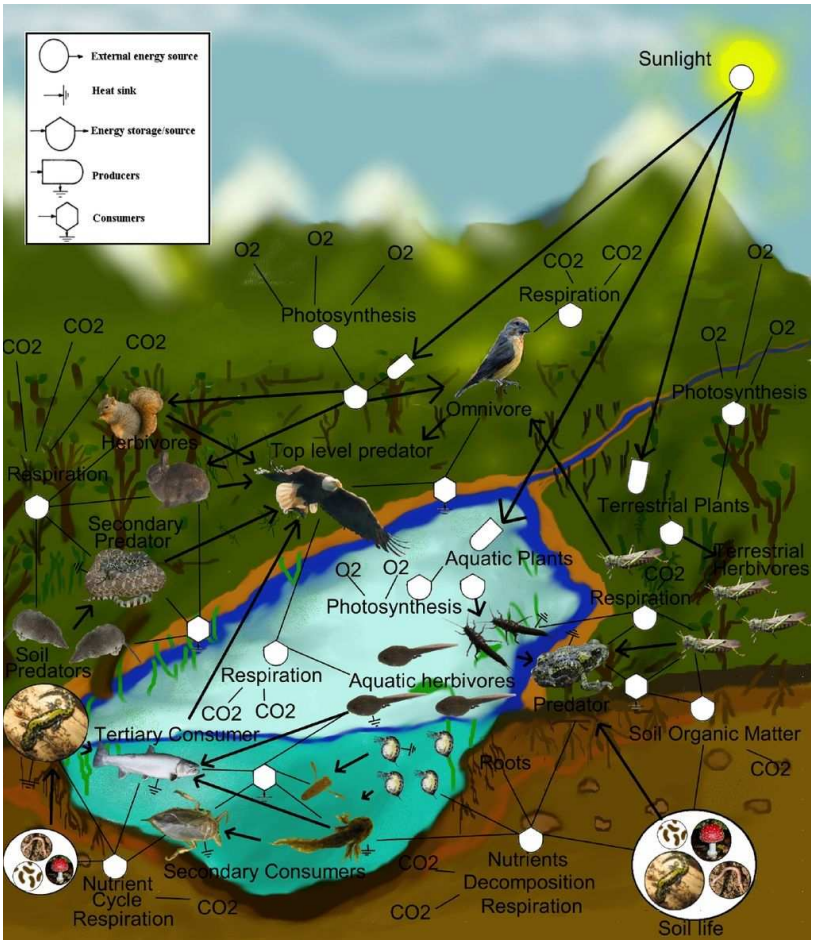

FIGURE 6.3 – Mathematical models developed in theoretical ecology predict complex food webs are less stable than simple webs (Wikipedia *Theoretical ecology*).

Ensuite le résumé fait le bilan des disciplines sur lesquelles s'appuie la théorie écologique, décrit ses objectifs et note pour terminer :

> Theoretical ecology has further benefited from the advent of fast computing power, allowing (...). Importantly, these modern tools provide quantitative predictions about the effects of human induced environmental change on a diverse variety of ecological phenomena, such as : species invasions, climate change, the effect of fishing and hunting on food network stability, and the global carbon cycle.

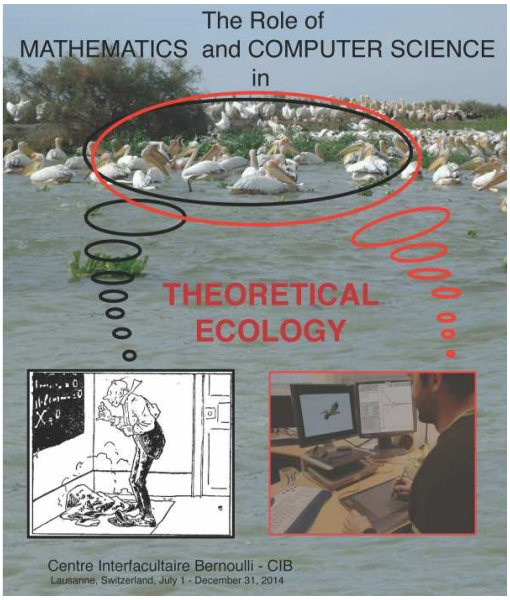

FIGURE 6.4 – L'affiche d'un semestre scientifique

Ce résumé est accompagné sur sa droite de l'image de la figure 6.3. Dans l'ensemble cette entrée en matière est destinée à donner de l'écologie théorique l'image d'une science assez bien établie pour ne pas dire triomphante. Car ce n'est pas rien que de « fournir des prédiction quantitatives sur le cycle global du carbone » !

Rendons nous maintenant sur une page du site du Centre Interfaculaire Bernoulli (C.I.B.) de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (E.P.F.L.) : `https://bernoulli.epfl.ch/semesters/6/show`.
Il s'agit (voir la figure 6.4) de l'annonce s'un semestre de recherches de juillet à décembre 2014 [160]. Le titre du semestre est *The role of mathematics and computer sciences in ecological theory* et le résumé de présentation est le suivant :

> The issues of climate change and biodiversity loss are definitely the major concerns for 21st-century science. Ecology is one of the most involved sciences in this challenge. Undoubtedly, mathematics and computer simulations have played an important role in the development of theoretical ecology for almost one century. They are often designated as "modeling". But what are "modeling" and "theory" in ecology and what are the places occu-

160. L'E.P.F.L. héberge le C.I.B. qui organise des rencontres mathématiques de haut niveau sous la forme de semestres accueillant de nombreux chercheurs sur un thème donné.

pied respectively by mathematics and computer science are still controversial issues.

Les organisateurs du semestre insistent donc, comme le faisait Wikipedia, sur l'importance de la théorie écologique pour appréhender le défi du changement climatique mais, contrairement à Wikipédia, ne sont pas du tout triomphalistes sur le rôle de la modélisation. Sur l'affiche publicitaire de leur manifestation le choix ironique d'une vignette du Savant Cosinus [161] est le signe que pour les organisateurs le rôle des mathématiques dans la théorie écologique n'est pas clair et sera l'objet d'un examen critique. Le fait que ce semestre scientifique auquel ont participé une centaine de chercheurs se tienne à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne qui n'est pas connue pour être un repaire de gauchistes déviants montre bien qu'il s'agit d'une "vraie" question qui préoccupe la communauté scientifique "sérieuse". La discordance entre l'article de Wikipédia et la réalité de l'activité scientifique mériterait des commentaires sur la "science-qui-se-fait" mais qui me conduiraient trop loin de mon sujet. Retenons simplement que les mathématiques interviennent incontestablement dans la théorie écologique et que la nature de cette intervention est l'objet de discussions.

6.2 Le "roman mathématique"

6.2.1 Un dialogue qui aurait pu avoir lieu.

Je vais utiliser la technique classique du dialogue entre deux personnages pour exposer une pratique qui est à l'œuvre dans le monde de l'écologie théorique. J'insiste tout de suite sur le fait que ce que je vais décrire n'est qu'un petit aspect de l'écologie théorique qui ne se réduit en aucun cas à une pratique mathématique. Ce dialogue essaye de donner une idée de discussions, parfois vives, qui peuvent avoir lieu entre chercheurs, directement dans les conférences et à travers des articles. Il présente une vision du rôle des mathématiques dans la théorie en écologie qui est assez proche de celle de R. Arditi et L. Ginzburg, vision décrite dans leur livre : *How Species Interact : Altering the standard view on trophic ecology* [162].

161. Christophe est l'auteur en 1900 d'une bande dessinée intitulée "L'idée fixe du savant COSINUS" [27] qui met en scène un mathématicien ayant tellement peu de sens pratique qu'il n'arrive pas en dépit de tous ses efforts à sortir de Paris. Christophe était un naturaliste professeur à la Sorbonne et on dit qu'il s'est inspiré de collègues illustres mathématiciens tels Hadamar et Painlevé.

162. OXFORD univesity press, 2012 [7] ; la lecture de l'ouvrage *Ecological Orbits*, OXFORD univesity press, 2004 [57] de tournure plus philosophique de L. Ginzburg et M. Colyvan (Colyvan

Avant de commencer je dois rappeler quelques concepts de l'écologie tels qu'ils sont enseignés dans les premières années universitaires des filières de Sciences de la Vie.

En écologie on s'intéresse à des grands nombres d'individus, appartenant à différent groupes (espèces, groupes d'espèces etc...) qui interagissent entre eux. La *dynamique des populations* cherche à expliquer et prédire l'évolution au cours du temps de la taille de ces groupes. Par exemple on pourra s'intéresser aux poissons de la mer Adriatique et aux relations entre les Sélaciens qui sont des *prédateurs* d'autres poissons qui sont leurs *proies* [163]. On dit dans ce cas qu'on étudie la *relation proie-prédateur*. Le concept de *relation proie-prédateur* est assez clair. Par exemple si on dit que "le lynx mange du lièvre" on entend que de la matière vivante (du lièvre) est transformée en une autre matière vivante (du lynx). On préfère souvent, à la place de "proie - prédateur ", dire *ressource-consommateur* qui inclut le cas où ce qui est mangé n'est pas un animal (comme " la vache mange de l'herbe") ni même vivant (les "bactéries absorbent de l'azote").

Il existe une autre relation classique dans la théorie écologique : c'est celle de *compétition*. Mais ce concept de relation est beaucoup moins clair que celui de prédation. Un simple exemple le montrera : certaines bactéries envoient dans le milieu naturel où elles se trouvent des enzymes destinées à fractionner des molécules de cellulose qui ne sont pas assimilables directement en des molécules plus petites, disons du glucose pour faire vite, qui, lui, est assimilable. En tant que producteurs d'enzymes les bactéries collaborent en ce sens que les enzymes qu'elles envoient serviront à casser des grosses molécules de cellulose en petites de glucose qui constituent un substrat à la disposition de toute la communauté ; mais, en tant que consommateurs du substrat les bactéries sont en compétition. Ainsi la pertinence du concept de *compétition* est elle discutable et discutée [164]. C'est de la façon dont les mathématiques sont susceptibles d'intervenir dans ce genre de discussion que mon dialogue veut donner une idée.

Dans le dialogue prennent la parole un théoricien de l'écologie que nous appellerons Théo (pour **théo**ricien) et un mathématicien que nous appellerons Umberto (pour une raison qui apparaîtra plus tard mais qu'on peut deviner dès maintenant).

---

est épistémologue) m'a également été profitable.

163. Je n'ai pas choisi cet exemple par hasard. C'est à propos de cette relation que Volterra s'est intéressé à la dynamique des populations et a inventé son célèbre modèle.

164. A l'idée de compétition est associée celle d'exclusion (le mauvais compétiteur est éliminé) et donc de sélection naturelle. On voit que ce sont des questions tout à fait fondamentales.

– Theo Soient deux populations - je pourrais aussi dire espèces, mais sans que "espèce" ait précisément le sens qu'il a en biologie, je veux simplement dire que mes individus dans chaque population partagent une caractéristique commune. Soient donc A et B deux populations dont on note $x(t)$ et $y(t)$ les tailles respectives à l'instant t. Je dis que A et B sont en compétition dans un "environnement" E si toute augmentation de y diminue la vitesse de croissance de x et réciproquement. Et j'ajoute :

l'environnement E est favorable à B si la population B gagne la compétition,

c'est à dire si B "élimine" A , ce qui veut dire qu'au cours du temps A finit par disparaître ou, si tu préfères, toi qui est mathématicien, si $x(t)$ tend vers zéro. Mais un environnement n'est généralement pas fixe dans le temps. Par exemple, la saisonnalité peut être responsable d'une succession d'environnements E_1 puis E_2 puis E_1 puis E_2 puis etc... Si E_1 et E_2 sont tous deux favorables à B il n'y a pas de problème, B élimine A. En revanche si E_1 est favorable à A mais E_2 est favorable à B il y a problème et l'issue de la compétition est incertaine. Mais je reste certain que **l'affirmation** :

"Une succession d'environnements favorables à B est favorable à B".

est vraie. C'est le bon sens même. Pourtant quelques collègues me contestent ce point.

– Umberto Je ne connais rien à la réalité de l'écologie mais je peux te montrer qu'ils n'ont peut être pas tort.

– Theo Je serais curieux de connaitre tes raisons qui sont probablement des raisons de mathématicien.

– Umberto Absolument. Mais avant il me faut, sans rentrer dans les détails techniques, préciser un peu plus ce que font les mathématiques en dynamique des populations. J'ai déjà évoqué avec toi, quand nous parlions de modélisation dans les sciences de l'ingénieur, les modèles constitués d'assemblages d'équations différentielles. Pour que tu comprennes bien ce que j'ai à te dire il me faut préciser un peu ce que c'est qu'une "équation différentielle ". Tu as entendu tendu parler du poète Persan Omar Khayyam, du philosophe René Descartes et du mathématicien Alexandre Grothendieck qui vient de disparaitre ?

– Theo Certainement, mais qu'ont-ils en commun ?

– Umberto Ils ont en commun d'avoir joué un rôle décisif dans ce qu'on appelle la Géométrie Algébrique. La géométrie Euclidienne était l'art dire des choses incontestables sur les figures que l'on peut tracer à l'aide de la "règle et du compas" ; les Grecs étaient aussi intéressés par les propriétés des nombres et se sont posé des questions sur la possibilité de résoudre des équations du type $a^n + b^n = c^n$ où a, b, c, et n sont des entiers et qui ont donné naissance à l'algèbre où l'on manipule des équations qui portent sur des nombres plus généraux que les entiers comme les nombre réels. On attribue à Omar Khayyam l'idée d'associer des *figures* (des dessins) et des *équations* avec des nombres plus généraux, idée semble-t-il perdue puis retrouvée par Descartes. Ainsi en établissant un lien systématique entre une *paire de nombres* et un point du plan (ses *coordonnées*) nous avons appris à l'école à associer à la figure du cercle l'équation $x^2 + y^2 = r^2$ où, cette fois x, y et r sont des nombres dits réels (nombres qui s'écrivent avec un développement décimal).

– Theo Et Alexandre Grothendieck, dont j'ai entendu parler dans les années 70-80 pour ses position écologiques ultra radicales ?

– Umberto Il est tout simplement considéré par les mathématiciens contemporains comme le plus grand continuateur des Grecs, de Khayyam et de Descartes. Mais son engagement citoyen est étranger à notre question. On peut dire que la géométrie algébrique ce sont les mathématiques de la forme fixe. L'ambition de la théorie des équations différentielles est différente. Elle est de rendre compte de ce qui évolue dans le temps. Quand une quantité change dans le temps on garde la trace de cette évolution en dessinant une '"courbe", par exemple la "courbe de température" d'un malade, des chutes de pluie d'une station touristique ou de la bourse. Tu comprends ça ?

– Theo Ne me fais pas plus ignare que je suis ! En écologie nous avons une quantité considérable de courbes de ce genre. Nous les appelons parfois des chroniques. Nous gardons la trace de l'évolution des populations sous la forme de courbes qui retracent leur abondance.

– Umberto Et bien les "équations différentielles" sont des sortes de machines mathématiques qui permettent de produire des courbes qui traduisent une évo-

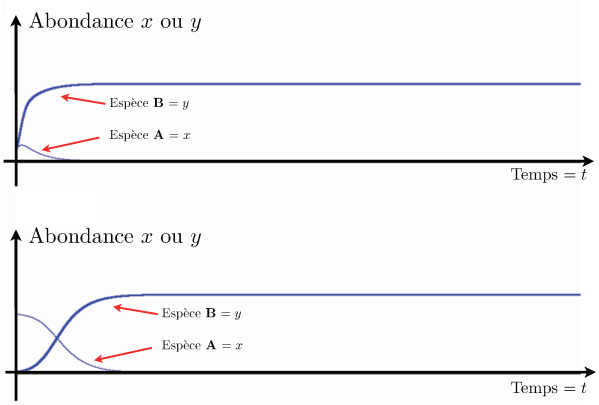

FIGURE 6.5 – Competition dans l'environnement $\mathbf{E}_1$ modélisé par (1). On a représenté l'évolution des espèces A et B à partir d'une même condition initiale (en haut) et à partir d'une condition initiale où A est beaucoup plus abondante que B. Dans les deux cas c'est B qui l'emporte.

lution temporelle, des courbes que vous, théoriciens, pourriez interpréter comme des évolutions d'abondance. On a une très bonne idée de ce que font les "équations différentielles" si l'on pense à un programme d'ordinateur qui, chaque fois qu'on l'appelle, trace une ou plusieurs courbes à l'écran. L'expression "équation différentielle" est donc un peu trompeuse car il n'y a rien à "résoudre" mais plutôt à "produire". Cela s'explique historiquement mais peu importe pour nous. Ainsi, du système différentiel ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & x(1-2.0\,x-2.0\,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & 2.5\;\;y(1-1.5\,x-1.5\,y) \end{array} \right. \tag{1}$$

nous retiendrons que c'est un objet mathématique qui "produit" des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ dont on peut tracer le graphe (l'évolution) comme indiqué sur la Fig. 6.5.

– Theo Cher Umberto tu exagères décidément un peu trop mon incompétence mathématique. Il me semble me souvenir qu'au cours de ma licence de Sciences de la Vie un professeur de mathématiques plein de bonne volonté nous avait montré des équations de ce genre et nous avait expliqué dans quelles conditions elles

étaient représentatives d'une relation de compétition. Je me souviens qu'à cette théorie étaient attachés les noms de Lotka et Volterra.

– Umberto C'est très bien. Ainsi puisque tu as accepté l'idée que ce genre d'équations peut, dans une certaine mesure, représenter une relation de compétition, tu n'auras pas de mal à accepter mes arguments.

– Theo Oui, je suis tout à fait ouvert à l'idée qu'une idéalité mathématique puisse être associée efficacement à la compréhension d'un phénomène naturel. Une abstraction mathématique peut, en simplifiant la complexité du réel, faire ressortir un trait essentiel qui autrement serait noyé dans un fatras de faits secondaires. Ainsi dans ton système d'équations (1) les signes "moins" qu'on trouve dans les parenthèses expriment clairement pour moi une relation de compétition.

– Umberto Parfait. Alors observe la Fig. 6.5 - haut. Nous voyons deux courbes, une en bleu gras l'autre en bleu fin ; l'axe horizontal est censé représenter le temps, l'axe vertical la valeur de x et y de l'abondance à l'instant t des espèces A et B. On voit que x qui avait la même valeur que y au temps 0 décroît et disparait alors que y croît jusqu'à une certaine valeur pour ne plus en bouger. De même sur la Fig. 6.5 - bas, bien qu'au temps 0 la valeur de y soit très petite et la valeur de x importante, au bout d'un certain temps c'est toujours y qui se rapproche d'une valeur non nulle alors que x finit par sembler très petit, voire nul.

– Theo Si tes équations produisent bien ces courbes, ce que je crois volontiers car j'ai confiance en toi, je suis tout à fait prêt à accepter que le système d'équations différentielles (1) est un *modèle* de la situation d'un *environnement favorable à l'espèce B*. Je vois dans les équations différentielles (1)

1. Une construction mathématique susceptible d'être légitimement associée à l'évolution de la taille de deux populations en compétition.
2. Une instantiation de cette construction (i.e. le choix des paramètres, des nombres qui apparaissent) qui représente bien le fait que l'environnement est favorable à B.

Comme je t'ai déjà dit le point 1) m'a été enseigné en licence. Pour le point 2), une fois accepté que x et y sont les abondances de deux populations en compétition, je vois bien que B élimine A. Je pourrais te demander « qu'est-ce qui me prouve que, quelles que soient les conditions initiales de la simulation, on aura

toujours le même résultat ? » mais je sais d'expérience que tu me répondrais probablement que ce fait peut se "démontrer mathématiquement" ; si tu me le dis je te fais confiance, même si je ne peux pas m'en convaincre moi même.

– Umberto C'est exact. Il n'est pas difficile de démontrer, au sens mathématique du terme, que l'élimination de A a toujours lieu et ne dépend pas des abondances relatives initiales. Précisément je peux montrer la ...

Proposition 6.2.1 *Pour toute condition initiale les solutions $x(t)$ et $y(t)$ de (1) satisfont :*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) > 0$$

Ca fait plus savant mais ça ne dit rien de plus. Je te propose maintenant une autre instantiation du modèle de Lotka-Volterra, donc un autre environnement E_2 où c'est toujours B qui gagne la compétition puisque sur les courbes de la Fig. 6.6 c'est toujours x qui tend vers 0.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{dx}{dt} & = & 2.5\ x(1-0.75\,x-0.75\,y) \\ \dfrac{dy}{dt} & = & y(1-0.70\,x-0.70\,y) \end{array}\right. \tag{2}$$

Pour ce système (2) on a aussi la ...

Proposition 6.2.2 *Pour toute condition initiale les solutions $x(t)$ et $y(t)$ de (2) satisfont :*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$$

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) > 0$$

– Theo Il n'y a aucun doute. Tu m'as donc proposé deux modèles de deux environnements distincts qui sont tous deux favorables à B.

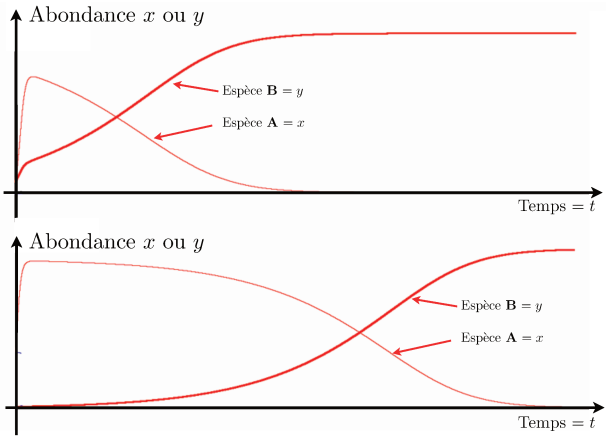

FIGURE 6.6 – Competition dans l'environnement $\mathbf{E}_2$ modélisée par (2)

– Umberto Alors voyons maintenant ce qui se passe si nous faisons agir successivement les deux environnements. Examinons maintenant la Fig. 6.7. Elle a été produite en faisant agir les *modèles* (1) et (2) pendant des durées de temps de une unité (peu importe l'unité) pendant 100 unités de temps, donc 100 alternances des environnements 1 et 2. Le code couleur précédent a été maintenu : les parties bleues correspondent à E_1 les rouges à E_2. Nous observons que la population B (la courbe en trait gras) disparait au profit de la population A [165].

Donc une succession d'environnements favorables à B s'est révélée être favorable à A

ce qui t'oblige à revoir ton **affirmation**.

– Theo Le résultat de cette simulation est à première vue paradoxal. Il y a donc quelque chose qui cloche dans mon affirmation car je ne peux mettre en doute le résultat de ta simulation.

– Umberto Là tu as peut être tort ! Il faut toujours être prudent dans l'interprétation des simulations. Certains phénomènes peuvent être de purs artefacts liée à la

165. On observe également une oscillation dans la taille des populations, mais ce n'est pas le point essentiel.

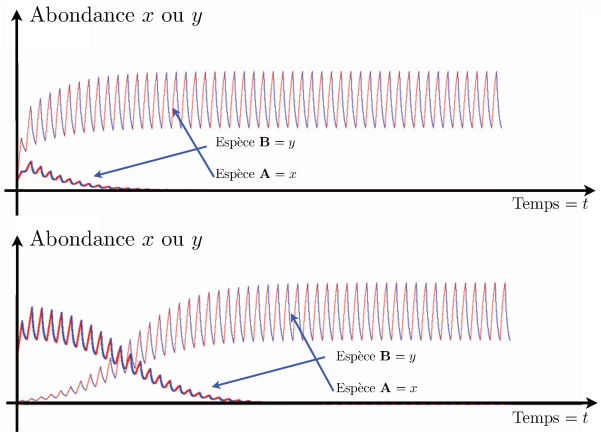

FIGURE 6.7 – Competition dans une succession d'environnements $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{E}_2$ modélisés par (1) et (2)

façon dont le programme est implémenté et dont la machine l'exécute. Les simulations numériques produites par des ordinateurs n'ont de valeur que lorsqu'elles sont encadrées par une solide théorie mathématique. Mais c'est le cas ici. Tu peux avoir confiance. Je sais démontrer le ...

Théorème 6.2.3 *Soit le système différentiel non autonome de période T défini en intégrant successivement pendant des durées $T/2$ le système (1) puis (2) puis (1) etc... Il existe T_o tel que $\forall T < T_o$*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

$$\liminf_{t\to\infty} x(t) > 0$$

– Theo Essayons de trouver ce qui cloche. Peut être ai-je accepté trop vite de considérer que tes deux modèles étaient des modèles d'environnement favorables à B. Je remarque que sur la Fig. 6.6 il est flagrant que l'abondance x de l'espèce A, avant de tendre vers 0, *commence par croître* beaucoup plus efficacement que l'abondance de B. Tu ne peux pas dire qu'alors l'environnement est favorable à B.

– Umberto Ah, pardon ! C'est toi qui m'a dit que favorable à B voulait dire « B gagne la compétition ». C'est bien le cas, non !

– Theo Non, tu as une vision trop stricte de "favorable".

– Umberto Ça ce n'est pas mon problème, mon travail est de proposer des interprétations *non ambigües* de ce que tu dis. Libre à toi de prendre ou pas, mais tu avais accepté mon modèle.

– Theo Bon, tu as raison, il faut que je réfléchisse à ce que je veux dire par "favorable" voire même par "compétition".

Pour conclure ce dialogue, avant de passer à la suite, il me faut préciser que le personnage de Théo, pour les besoins de mon exposé, est mathématiquement beaucoup trop naïf. Un vrai théoricien de l'écologie est beaucoup plus compétent en mathématiques mais cet exemple, quoique très simple, est représentatif d'un certain usage des mathématiques en écologie théorique. C'est cet usage que je vais analyser maintenant.

6.2.2 Le roman selon Umberto Eco

Les citations suivantes sont extraites de l'*Apostille au Nom de la Rose* de Umberto Eco.

> Je pense que pour raconter, il faut avant tout se construire un monde, le plus meublé possible, jusque dans les plus petits détails .(...)
>
> Il faut se créer des contraintes pour pouvoir inventer en toute liberté. En poésie (...). Pour la narrativité, la contrainte est donnée par le monde sous-jacent. Et cela n'a rien à voir avec le réalisme (même si cela explique jusqu'au réalisme). On peut construire un monde totalement irréel, où les ânes volent et où les princesses sont ressuscitées par un baiser : mais il faut que ce monde, purement possible et irréaliste, existe selon des structures définies au départ (il faut savoir si c'est un monde où une princesse peut être ressuscitée uniquement par le baiser d'un prince, ou encore par celui d'une sorcière, si le baiser d'une princesse retransforme en princes les seuls crapauds ou bien aussi, mettons, les tatous).(...)
>
> Quand j'ai mis Jorge dans la bibliothèque, je ne savais pas encore que c'était lui l'assassin. Il a pour ainsi dire tout fait tout seul. Et qu'on n'aille pas penser qu'il s'agit là d'une position « idéaliste » — les personnages ont une vie

> propre et l'auteur, presque en transes, les fait agir en fonction de ce qu'ils lui suggèrent : ce sont des sottises, tout juste bonnes pour un sujet de dissertation au baccalauréat. Non. La vérité est que les personnages sont contraints d'agir selon les lois du monde où ils vivent et que le narrateur est prisonnier de ses prémisses.

Décortiquons maintenant le dialogue entre Théo et Umberto dans le cadre théorique proposé par Eco.

Au départ Théo s'interroge sur la compétition. Théo pense avoir une vision claire de ce que sont les concepts de "population", de "gagner une compétition" et "d'environnement". Il en déduit le concept "d'environnement favorable" et formule son affirmation :

"une succession d'environnements favorables à B est favorable à B".

Intervient Umberto, qui va écrire un "roman mathématique". En effet, il va poser les bases d'un monde virtuel, dont personne n'affirme qu'il ait une ressemblance quelconque avec un ecosystème particulier si ce n'est que Théo accepte de reconnaitre qu'il a quelque rapport avec son discours (qui lui porte sur le monde réel).

— Dans les équations (1) et (2) il reconnait dans les variables x et y des quantités qui pourraient bien être les abondances de deux populations A et B

— Dans les deux figures Fig. 6.5 et Fig. 6.6 il accepte de voir que B "gagne la compétition".

Ces deux équations constituent la base du monde virtuel, de la fiction, qu'Umberto va faire "fonctionner". Il va *déduire* de (1) et (2) une conséquence qui s'impose : dans une certaine succession c'est la population A qui remporte la compétition. Donc dans le monde virtuel de Umberto une succession d'environnements favorables n'est pas nécessairement favorable. Reprenons ce que disait Eco du roman :

> Pour la narrativité, la contrainte est donnée par le monde sous-jacent. (...). On peut construire un monde totalement irréel (...) mais il faut que ce monde, purement possible et irréaliste, existe selon des structures définies au départ.

Pour Umberto ce sont donc les deux équations (1) et (2)) qui fixent le monde sous-jacent. Comme dans un roman ce monde n'a pas besoin d'être réel et les équations ne représentent pas un écosystème concret .

> Quand j'ai mis Jorge dans la bibliothèque, je ne savais pas encore que c'était lui l'assassin. Il a pour ainsi dire tout fait tout seul. (...) La vérité est que les

> personnages sont contraints d'agir selon les lois du monde où ils vivent et que le narrateur est prisonnier de ses prémisses.

A partir du moment où Umberto a fixé ses deux équations, donc son monde sous-jacent, il n'est plus totalement libre et les déductions mathématiques vont s'imposer à lui. Certes Umberto a décidé de porter son regard sur ce qui se passerait dans le cas d'une succession d'environnements mais cette décision prise il n'a plus le choix de ce qui va se passer, il est prisonnier de ses prémisses.

De même que le roman n'a pas la prétention de décrire le monde tel qu'il est mais d'alimenter notre réflexion sur lui, le modèle de Umberto n'est pas une image fidèle du monde mais une fiction qui a apporté sa petite pierre à sa théorisation. Elle a montré que le discours sur le monde porté initialement par Théo était incohérent. Je dirais donc que *Le monde mathématique de Umberto est un "modèle" du discours porté sur le monde écologique par Théo.* Pourquoi Théo a-t-il accepté aussi facilement que son discours soit considéré comme incohérent ? Après tout le lecteur d'un roman n'est pas forcément d'accord avec ce que le narrateur fait faire à son héros. N'a-t-on pas reproché au Guillaume du Nom de la Rose d'être resté bien froid devant le sort réservé à la pauvre paysanne qu'avait aimé Adso ? Eco s'en est défendu... Donc le lecteur d'un roman qui a accepté le monde sous-jacent de l'auteur n'accepte pas forcément toutes ses déductions. Mais il se trouve que le roman que Umberto nous propose est un "roman mathématique" et que dans le monde de la science rien n'est considéré comme plus solide qu'une *déduction mathématique*. Toute révérence gardée envers Galilée qui disait que le livre de la Nature était écrit dans la langue mathématique moi je dirais plutôt que nous humains, quand nous voulons décrire la nature, utilisons la déduction mathématique pour pallier la faiblesse des capacités de déduction de notre pauvre "intelligence naturelle".

En mathématiques, s'il peut y avoir des doutes sur la "vérité" d'un énoncé, quel que soit le sens que l'on donne au mot "vérité", puisque la démonstration de cet énoncé dépend des axiomes choisis (du monde sous-jacent dirait Eco), il n'y a en revanche "jamais" de doute sur ce qu'est une démonstration correcte. Dans le monde savant jamais on ne contestera une démonstration mathématique. On peut se demander ce qui donne cette force de conviction aux preuves mathématiques. C'est un vaste sujet que je n'aborderai pas [166]. Constatons que simplement c'est un fait et revenons aux mathématiques comme roman dans la science écologique.

166. Certes, la notion de rigueur et de démonstration mathématique évolue au cours du temps, il n'en reste pas moins, qu'à un moment donné la certitude d'une déduction mathématique, est la certitude la plus forte qu'un scientifique pourra avoir.

Maintenant rien ne nous empêche d'écrire une suite au roman de Umberto. Toujours dans le même monde sous-jacent on peut s'amuser à développer d'autres conséquences que celle que j'ai décrite. C'est ce que quelques dizaines de spécialistes des équations de Lotka-Volterra et plus généralement de *dynamique des population* s'appliquent à le faire dans le monde.

Pour les besoins de ma démonstration j'ai simplifié à l'extrême le roman mathématique de Umberto. Dans un vrai travail de recherche, sans être forcément très sophistiqué mathématiquement, le roman mathématique a une certaine ampleur qui le rend un peu obscur à Théo. Les théoriciens de l'écologie sont donc obligés de dialoguer longuement entre eux et avec des mathématiciens, sans trop se comprendre et parfois avec pugnacité avant qu'un petit progrès théorique se produise. Mais cet état de fait est certainement provisoire. Car de plus en plus souvent on rencontre des théoriciens de l'écologie qui maitrisent suffisamment les mathématiques pour pouvoir se passer de Umberto et écrire eux même leurs romans mathématiques, comme en physique où les physiciens, s'ils utilisent les mathématiques, se passent en général totalement des mathématiciens. Pour le moment les mathématiques ne sont pas encore indispensables pour exprimer des concepts propres à l'écologie. L'avenir nous dira s'il en sera toujours ainsi, si les mathématiques s'y impliqueront un jour, si une partie de l'écologie sera un jour rattachée au continent de la physique [167]. En attendant je propose d'appeler le travail de Umberto un *roman mathématique*. Un *roman mathématique* consiste en :

1. Un certain nombre de propositions mathématiques A_1, A_2, $\cdots A_p$.
2. Une *interprétation* $\mathscr{E}(A_i)$ de chaque proposition A_i dans le langage de l'écologie théorique (ou de toute autre théorie scientifique).
3. Une démonstration mathématique d'un certain nombre de théorèmes $\mathbf{T}_i$, $i = 1, 2, \ldots q$. Dans notre exemple le théorème 6.2.3.
4. Des *interprétations* $\mathscr{E}(\mathbf{T}_i)$ des théorèmes $\mathbf{T}_i$.

Dans un roman mathématique les étapes 1 et 3 appartiennent aux mathématiques et sont logiquement indépendantes de 2) et 4). Les étapes 2 et 4 d'interprétation appartiennent à l'écologie théorique (ou à toute autre théorie scientifique). La différence essentielle entre le roman mathématique et le modèle tel qu'il fonctionne dans les sciences de l'ingénieur est dans l'ordre et la signification des points

167. En réalité c'est déjà vrai pour certaines activités comme l'écologie microbienne : il y a des activités de laboratoire (essentiellement des cultures d'organismes) et des observations de terrain (par exemple des campagnes océanographiques) reliées par des mathématiques. Mais on ne parle pas encore d'éco-physique ou de bio-physique à leur sujet.

1 et 2. Dans le modèle au sens de la pratique de l'ingénieur les propositions mathématiques de départ ne sont pas "interprétées" en des propositions portant sur le monde. C'est l'inverse. *On sait*, dans le cadre de telle ou telle théorie scientifique, que ces assertions mathématiques sont une représentation adéquate : *on sait* que les ressorts se conduisent bien comme les mathématiques de l'oscillateur harmonique nous le disent. Ensuite le travail de déduction mathématique sera le même que dans la phase 3 du roman mathématique et une prédiction fiable du comportement du système modélisé pourra être faite. Fiable parce que les prémisses et la construction du modèle élaborées dans le cadre de *théories scientifiques bien établies* sont solides et la déduction mathématique est irréprochable.

Notons que si la forme sous laquelle j'ai défini le *roman mathématique* est peut être originale l'idée, elle, ne l'est certainement pas. On la trouve clairement exprimée sous la plume de D. Nordon dans *Mathématiques, forme littéraire* [168] où il dit :

> Frêles et forts comme les mots, les objets mathématiques ont le même genre d'existence que, disons, le personnage de Jean Valjean. Ce sont des mots qui, induisent des représentations, des affects, des questions, des exigences, etc. Jean Valjean est bien plus que l'ensemble des signes utilisés par Hugo pour le décrire ; sa force ne vient pourtant pas de quelque fidélité à une réalité dont il serait issu. De même, les objets mathématiques sont plus que l'ensemble des signes utilisés par les mathématiciens. On ne peut pas les manipuler n'importe comment - ce qui ne signifie pas qu'ils soient astreints à exprimer objectivement quoi que ce soit de réel : Hugo non plus n'a pas créé Jean Valjean n'importe comment. Les personnages du roman ont leur autonomie, et imposent leur logique à l'auteur.

Ensuite Nordon argumente sur les mathématiques considérés comme un objet littéraire, ce qui va beaucoup plus loin que ma proposition de dénomination d'une certaine forme de l'activité de modélisation [169].

De plus, je ne dis pas que tous les cas d'utilisation des mathématiques en écologie théorique ressortissent du roman. Il y a des cas (par exemple en écologie

168. *Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, 1996, fascicule 4
`http://www.numdam.org/item/?id=SPHM_1996___4_A1_0`

169. Le même texte de Nordon réfère à une conférence du mathématicien Y. Manin, *Mathematics as Metaphor*, au Congrès International des Mathématiciens de Tokio (1990), d'où j'extrais :

> In a way, mathematics is a novel about Nature and Humankind. One cannot tell precisely what mathematics teaches us, in much the same way as one cannot tell what exactly we are, taught by "War and Peace".

microbienne dans l'étude de la croissance des tailles de populations de micro-organismes) où l'*on sait* que telle équation différentielle représente effectivement correctement le phénomène et dans ce cas on peut légitimement parler de "modèle mathématique" au sens des ingénieurs. Mais dans ce cas seulement. En revanche, dans bien des cas, un "modèle en écologie" sera un mélange plus ou moins confus d'utilisation des mathématiques au sens de l'ingénieur et de roman au sens de Umberto ; les praticiens s'y retrouvent généralement. Mais il peut y avoir des cas où il est judicieux de faire le tri. Pour faire le tri il est nécessaire d'avoir des mots pour désigner l'activité à laquelle se sont livrés Théo et Umberto. Je propose donc *"roman mathématique"*. Je reviendrai sur les raisons du choix de cette terminologie provocatrice.

6.3 Mathématiques et théorie de la valeur

6.3.1 Une fronde estudiantine

On se souvient peut être que le 17 juin 2000 le journal Le Monde publiait une courte *Lettre ouverte des étudiants en économie aux professeurs et responsables de l'enseignement de cette discipline* qui en trois paragraphes :

1. Sortons des mondes imaginaires,
2. Non à l'usage incontrôlé des mathématiques,
3. Pour un pluralisme des approches en économie,

critiquait l'enseignement qui leur était dispensé. Je cite le paragraphe 2 en totalité.

> L'usage instrumental des mathématiques semble nécessaire. Mais le recours à la formalisation mathématique, lorsqu'elle n'est plus un instrument mais devient une fin en soi, conduit à une véritable schizophrénie par rapport au monde réel. La formalisation permet par contre de construire facilement des exercices, de "faire tourner" des modèles où l'important est de trouver "le bon" résultat (c'est à dire le résultat logique par rapport aux hypothèses de départ) pour pouvoir rendre une bonne copie. Ceci facilite la notation et la sélection, sous couvert de scientificité, mais ne répond jamais aux questions que nous nous posons sur les débats économiques contemporains.

Le 31 octobre de la même année Le Monde donnait en réponse la parole à une poignée d'universitaires économistes pour une tribune intitulée : *Contre-appel pour préserver la scientificité de l'économie* d'où je tire :

> Si donc l'enseignement de l'économie réclame une prise en compte importante de l'histoire, il ne peut se passer de formalisation, en particulier celle que confère l'usage - certes non exclusif - des mathématiques.
>
> Cette formalisation n'est là ni pour masquer des intentions politiques coupables, ni pour conférer aux économistes le sentiment d'échapper aux critiques de la société. Elle vise ni plus ni moins à se donner les moyens de la vérification expérimentale et évite ainsi que l'économie ne devienne un simple discours général qui ne saurait être prouvé ni démontré.
>
> L'appel contre la modélisation s'inscrit de surcroît dans une logique que l'on pourrait qualifier de " théorie du complot " : il juge la valeur d'un résultat ou d'une théorie non pas au travers de sa conformité à la réalité mais au travers de l'origine sociale ou des intentions politiques prêtées à ceux qui les énoncent.
>
> Est-il besoin de rappeler que le recours à la formalisation n'est pas le fait d'une minorité partisane mais de la très grande majorité de nos collègues à travers le monde, et ce quelles que soient leurs opinions politiques et croyances philosophiques ?

En gros ces enseignants nous disent si vous critiquez l'usage (ou un certain usage) des mathématiques en économie c'est parce que vous êtes un "anti-libéral" qui avance masqué ou, pire, un obscurantiste qui n'a rien compris à la méthode scientifique. La lettre ouverte des étudiants appelait une réponse plus sérieuse.

G. Debreu, prix Nobel d'économie 1983, est considéré comme un des inventeurs de ce qu'on appelle la "méthode axiomatique" en économie. Il l'a exposée dans son livre fondateur de 1959 : *Theory of Value : An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium* (Cowles Foundation Monographs Series) [33], publié en Français par Dunod en 1966 [32]. C'est ce livre que je vais analyser après avoir fait un petit détour chez Herbert Simon, prix Nobel d'économie (1978) qui est également connu pour ses travaux en intelligence artificielle.

6.3.2 Une fable de H. Simon

Une fable est un court récit, souvent peu réaliste, d'où doit se dégager une morale. Oublions la morale pour ne garder que le court récit. Ce récit obéit aux même règles que le roman : description d'un monde sous jacent où la logique appelle un dénouement particulier. Une fable mathématique est donc une petite pièce où un argument mathématique fort conduit à une conclusion. En voici une due à Herbert Simon.

Il pose la question « est-il possible de prédire *et de publier* avec exactitude le résultat d'un scrutin à venir ? » Le sel de la question réside naturellement dans le mot "publier". En effet, on peut penser que la prédiction se fait sur la base d'une connaissance de l'opinion publique avant le vote mais la publication de la prédiction va modifier l'opinion générale et donc le vote. On reconnait toutes les discussions à propos des sondages et de leur interdiction 48h avant les scrutins. H. Simon pense qu'il existe au moins une prédiction, parmi toutes les prédictions possibles, qui se réalisera et il prétend le démontrer de la façon suivante à travers la "modélisation mathématique" suivante :

> Imaginons un scrutin à deux candidats, appelons x le nombre de voix annoncées pour le candidat A et $f(x)$ le nombre de voix obtenues effectivement par A exprimés en pourcentage (Simon appelle cette fonction "fonction de réaction"). La fonction f est une fonction de l'intervalle $[0\,;\,100]$ dans lui même donc d'après le théorème de Brouwer, nous dit Simon, elle possède un point fixe : il existe au moins une prédiction exacte.

On reconnait la structure d'un roman mathématique :

1. Une proposition mathématique : Une application $x \mapsto f(x)$ de $[0\,;\,100]$ dans lui même.
2. Une interprétation : *x est la prédiction du nombre de voix qu'obtiendra le candidat A et $f(x)$ est ce qu'il obtiendra effectivement.*
3. Une déduction mathématique : Si f est continue, d'après le théorème de Brouwer elle possède un point fixe : $\exists x$ tel que $f(x) = x$.
4. Une interprétation : *il existe une prédiction (un des x ci-dessus) exacte du résultat effectif à venir.*

Il existe beaucoup de critiques à faire à ce raisonnement ; je ne doute pas qu'il en vienne de nombreuses à l'esprit du lecteur et j'en mentionnerai quelques unes dans un instant. Mais avant je voudrais proposer ma façon de détruire l'argument de H. Simon par une simple petite "contre fable". Je vais imaginer une population dont la réaction des électeurs à une prédiction est toujours la même. Supposons que les électeurs se répartissent comme suit :

— 44 % sont définitivement acquis à A.

— 46 % sont définitivement acquis à B.

— sur les 10 % d'indécis :

— 2 % sont des "béni-oui-oui" qui volent au secours du candidat annoncé victorieux.

— 8% sont des "rebelles" qui votent systématiquement contre le candidat annoncé victorieux.

— les 10 % se répartissent moitié moitié en cas d'égalité annoncée.

Toute prédiction x du résultat est dans une des classes “A est vainqueur", “B est vainqueur”, “égalité”. Voyons, selon ces trois annonces possibles, quels seront les résultats du scrutin.

— Si l'on annonce un chiffre $x < 50\%$, c'est B qui est annoncé victorieux et, en vertu de nos règles A recueille 44%+8% = 52% .C'est A qui est élu.

— Si l'on annonce un chiffre $x > 50\%$, c'est A qui est annoncé victorieux et, en vertu de nos règles A recueille 46%+2% = 48%. C'est B qui est élu.

— Si l'on annonce l'égalité c'est B qui est élu.

Contrairement à la fable de H. Simon la mienne ne peut pas vraiment être qualifiée de fable mathématique, les mathématiques se réduisant à trois petites additions. Pourtant ma fable est plus convaincante (c'est du moins ce que je pense) car elle décrit une situation, qui même si elle n'est pas réaliste - personne ne sait s'il existe un corps électoral se conduisant de la manière décrite - est plausible. Cela suffit à détruire l'argument de Simon qui à la prétention à l'universalité. Un contre exemple suffit de même que c'est un contre exemple qui a détruit l'universalité de la proposition de Théo.

Ceci étant dit, I. Lakatos [170] nous a habitués à ce qu'un petit contre exemple local ne suffise pas à lui seul à détruire toute une théorie ; elle doit être critiquée de façon plus profonde pour qu'on mesure ce “qui cloche” comme dirait Théo. Une telle critique a été menée de façon minutieuse par le mathématicien K.E. Aubert [171] et c'est l'esprit de sa critique que je reprends ci-dessous sans rentrer dans les détails :

— Utiliser des variables continues (des nombres réels) pour représenter une réalité discrète (un nombre d'électeurs) se discute.

— L'existence d'une relation déterministe (la fonction f(x)) entre une prédiction et le résultat est hautement discutable.

170. Je pense évidemment à son célèbre "Proofs and refutations".

171. dans l'article *Spurious mathematical modelling* dans le journal *The Mathematical Intelligencer* , vol 6, n° 3 (1984) ; [8]. En fait c'est de la lecture de cet article que je tiens la connaissance d'une polémique entre Aubert et Simon.

— L'hypothèse de continuité (nécessaire pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires) est intestable.

— Invoquer un théorème difficile et profond comme le théorème de Brouwer là où suffit le théorème élémentaire de la *valeur intermédiaire* est une opération d'intimidation.

La dernière remarque de Aubert sur la manœuvre d'intimidation que constitue l'invocation du théorème de Brouwer mérite un petit développement.

Théorème 6.3.1 (Brouwer) *Soit f une application continue d'un convexe fermé de $\mathbb{R}^N$ dans lui même alors elle possède un point fixe : $\exists\, x : f(x) = x$.*

C'est un théorème difficile à démontrer dès que $N > 1$. En revanche, le cas $N = 1$ (qui est le cas de l'argument de Simon) est facile et connu par tous les étudiants de niveau bac+1 en mathématiques. Il se déduit immédiatement du classique :

Théorème 6.3.2 (Valeur intermédiaire) *Soit f une application de $[a\,,\,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b) \leq 0$ alors il existe x tel que $f(x) = 0$.*

Les mêmes étudiants de mathématiques savent que ce théorème est la réponse apportée par les mathématiques du XIX ème siècle à la question des anciens Grecs : *Qu'est-ce donc qu'un nombre x tel que $x^2 = 2$?* Et la réponse, à savoir $\sqrt{2}$, "existe" en tant que *coupure de Dedekind* ou encore que *classe d'équivalence de suite de Cauchy*. Confondre ce mode d'existence avec celui de l'existence d'un institut de sondage capable de prédictions exactes relève pour le moins de l'insouciance sinon de la mystification.

Les théorèmes du type ci-dessus s'appellent des "théorèmes de point fixe". Ils sont au centre de la "théorie de la valeur" que j'aborde maintenant.

6.3.3 Le roman mathématique de G. Debreu : "Théorie de la valeur"

A propos du livre de Debreu Google Books nous dit :

> Seul ouvrage du prix Nobel 1983, *Théorie de la valeur* propose une démonstration rigoureuse de l'existence d'un équilibre concurrentiel qui est toujours aujourd'hui le fondement de nombreuses études d'économie théorique et appliquée. Spécialiste de la théorie pure de l'équilibre général, Gérard Debreu est unanimement considéré comme l'auteur de référence dans ce domaine. Salué par les jurés du prix Nobel pour sa " clarté, sa rigueur analytique, sa

> valeur générale et l'élégance de sa présentation ", ce livre est l'un de ceux qui ont le plus influencé la théorie économique fondamentale dans les quarante dernières années. (...)

Theory of Value : An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium est une assez brève monographie (115 pages dans la version française). Je commence par citer quelques passages de la préface de *Théorie de la valeur*[172].

> Avant propos. Page XLIII
> Les deux problèmes centraux de la théorie présentée dans cette monographie sont (1) l'explication de la valeur des biens et des services résultant de l'interaction par l'intermédiaire des marchés, des agents d'une économie de propriété privée, (2) l'explication du rôle des prix dans un état optimal d'une économie donnée.

Il s'agit donc, à priori, d'une tentative d'explication de certains aspects de la réalité.

> Les premières solutions des deux problèmes précédents ont été données respectivement par L. Walras et V. Pareto, mais ni les maîtres de l'école de Lausanne, ni leurs disciples n'ont fait un exposé très rigoureux de leurs idées pendant plusieurs décades. (...)

Ensuite G. Debreu cite quelques penseurs qui l'ont inspiré. Puis :

> La théorie de la valeur est traitée ici sur le modèle de la rigueur de l'école formaliste contemporaine de mathématiques. L'effort vers la rigueur substitue des raisonnements et des résultats corrects à ceux qui ne l'étaient pas (...)
>
> (...) La fidélité à la rigueur dicte la forme axiomatique de l'analyse où la théorie, au sens strict, est logiquement complètement disjointe de ses interprétations. Pour mettre pleinement en relief cette coupure, toutes les définitions, toutes les hypothèses et les principaux résultats de la théorie, au sens strict, sont écrits en italique. En outre la transition entre la discussion non formelle des interprétations et la construction formelle de la théorie est souvent indiquée par l'une des expressions «dans le langage de la théorie», «formellement».

L'ouvrage s'ouvre sur un chapitre 1 de trente pages intitulé "Mathématiques". Il s'agit d'un résumé dans le plus pur style bourbachique des années soixante du

172. Pour les citations je me réfère à la troisième édition Dunod de 2001.

cours de "topologie générale" enseigné alors dans toutes les licences de mathématiques [173]. Je donne maintenant quelques extraits du chapitre 2 **Marchandises et prix** pour donner une idée du style.

> § 2.5 page 35.
> En résumé une marchandise est un bien ou un service complètement spécifié physiquement, temporellement et spatialement. Nous supposons qu'il n'y a qu'un nombre fini l de marchandises distinctes, qui seront repérées par un indice h allant de 1 à l. Nous supposons aussi que la quantité de chacune des marchandises peut être n'importe quel nombre réel.(...)
> L'espace $\mathbb{R}^l$ s'appelle l'*espace des marchandises*. Pour chaque *agent* économique un plan d'action complet(...) ou plus simplement une *action* est une spécification pour chaque marchandise de la quantité qu'il rendra disponible ou qui lui sera rendue disponible (...). Avec les conventions de signe de 2.3 une action est donc représentée par un point a de $\mathbb{R}^l$.
>
> § 2.6 page 37
> Le prix p_k d'une marchandise peut être positif (marchandise *rare*), nul (marchandise *gratuite*), ou négatif (marchandise *nuisible*).(...)
> Le *système de prix* est le l-tuple $p = (p_1, \ldots, p_k, \ldots, p_l$; il peut être représenté par un point de $\mathbb{R}^l$.
> La *valeur* d'une action a par rapport à un système de prix p est
>
> $$\sum_{h=1}^{l} p_h a_h,$$
>
> c'est à dire le produit intérieur $p \cdot a$
>
> § 2.8 page 39
> **2.8 Théorie et interprétation**
> Pour conclure ce chapitre, il ne reste plus qu'à résumer la formulation de tous les concepts précédents dans le langage de la théorie :
> *Le nombre l de marchandises est un nombre positif donné. Une action a d'un agent est un point de $\mathbb{R}^l$, l'espace des marchandises. Un système de prix p est un point de $\mathbb{R}^l$. La valeur d'une action a par rapport à un système de prix est le produit intérieur p.a.*

173. J'ai une culture mathématique suffisante pour reconnaitre un exposé de topologie élémentaire. C'est P. Duchemin qui m'a affirmé que son style est le "style bourbachique des années soixante".

> Tout ce qui précède cet énoncé n'a aucun rapport avec le développement logique de la théorie. Son but était de fournir des interprétations possibles de cette dernière.(...).

On retrouve bien très exactement une caractéristique de ce que j'ai appelé un *roman mathématique* : *des propositions mathématiques précises et leur interprétation*. Les chapitres 3 et 4 sont consacrés à des formalisations du même genre des concepts de *producteur* et de *consommateur* pour arriver au chapitre 5 à la question de l'*équilibre* dans une *économie de propriété*. A partir de maintenant les énoncés en italique, i.e. "dans le langage de la théorie", deviennent assez abscons et on ne peut en deviner l'interprétation sans faire l'effort de lire les explications qui sont données.

> § 5.6 page 86.
> (...) Formellement :
> *Une économie de propriété $\mathscr{E}$ est définie par une économie $\big((X_i, \succsim_i), (Y_j), \omega)$; pour chaque i un point ω_i de $\mathbb{R}^l$ tel que : $\sum_{i=1}^m \omega_i = \omega$; pour chaque couple (i, j) un nombre réel non négatif θ_{ij} tel que $\sum_{i=1}^m \theta_{ij} = 1$ pour tout j.*
> *Un équilibre de l'économie de propriété privée $\mathscr{E}$ est un $m+n+1)$-tuple $\big((X_i^*), (Y_j^*), p^*\big)$ de points de $\mathscr{E}$ tels que*
> — (α) *x_i^* est un plus grand élément de*
>
> $$\{x_i \in X_i : p^*.x \leq p^*.\omega_i + \sum_{i=1}^{n} \theta_{ij} p * .y_j\}$$
>
> *pour $\succsim_i$ quel que soit i,*
> — (β) *y_j* maximise le profit relatif à p^* sur Y_j, pour tout j*
> — (γ) $x^* - y^* = \omega$
>
> (...) La question fondamentale se pose immédiatement : étant donnée une économie de propriété privée, a-t-elle un équilibre ? Une réponse y sera donnée dans 5.7. Un théorème préliminaire va être démontré dans la section suivante.

> § 5.6 page (...)
> *(1) Soit Z un sous-ensemble compact de $\mathscr{E}$. Si ζ est une correspondance semi-continue supérieurement de P dans Z telle, que pour p dans P , l'ensemble $\zeta(p)$ soit (non vide) convexe et satisfasse $p.\zeta(p) \leq 0$ alors il existe un p dans P tel que $\zeta(p) \cap (-\Omega) \neq \emptyset$*

On remarque que cette dernière proposition labellisée (1) est strictement interne au mathématiques ; elle ne fait intervenir aucun terme de la "théorie". Elle se déduit assez rapidement (une page) d'un théorème important de Kakutani [174] rappelé dans le chapitre 1 de l'ouvrage :

> (2) (Kakutani) *Si S est un sous ensemble non vide, convexe, compact de $\mathbb{R}^n$ et si φ est une correspondance de S dans S semie-continue supérieurement et telle que pour tout $x \in S$ l'ensemble $\varphi(x)$ soit convexe (non vide) alors φ a un point fixe.*

On énonce et démontre alors un des principaux résultats de *Théorie de la valeur* :

> §5.7 page 90
> **5.7 Equilibre**
> Il est possible maintenant de répondre à la question posée à la fin de 5.5.
> (1) *L'économie de propriété privée*
>
> $$\big((X_i, \precsim_i\,), (Y_j), (\omega_i), (\theta_{ij})$$
>
> *possède un équilibre si :*
>
> — *pour tout i*
>
> — *(a) X_i est fermé, convexe, et a un minorant pour $\leq$*
>
> — *(b.1) Il n'existe pas de consommation de saturation dans X_i,*
>
> — *(b.2) pour tout x_i' dans X_i les ensembles $\{x_i \in X_i : x_i' \precsim_i x_i\}$ et $\{x_i \in X_i : x_i \precsim_i x_i'\}$ sont fermés dans x_i*
>
> — *(b.3) si x_i^1 et x_i^2 sont deux points de X_i et si t est un nombre réel de $]0,1[$, alors $x_i^1 \prec i\ x_i^2$ implique*
>
> $$x_i^1 \prec i\ tx_i^2 + (1-t)x_i^1$$
>
> — *(c) il y a un x_i^0 dans X_i tel que $x_i^0 << \omega_i$*
>
> — *pour tout j*
>
> — *(d.1) $0 \in Y_j$,*
>
> — *(d.2) Y est fermé et convexe,*
>
> — *(d.3) $(Y) \cap (-Y) \subset \{0\}$,*
>
> — *(d.4) $(-\Omega \subset Y$*

174. Le théorème de Kakutani est un avatar du théorème de Brouwer évoqué à propos du problème de H. Simon et pose les même questions philosophiques sur la nature de ce qui *existe* dans l'énoncé du théorème.

La preuve de ce résultat est assez technique et s'étend sur quatre pages. Elle repose sur la proposition du § 5.6. Son interprétation est que sous un certain nombre d'hypothèses une *économie privée* possède un équilibre.

Donc ce que G. Debreu appelle "forme axiomatique de l'analyse" est très exactement ce que j'ai appelé un "roman mathématique". La seule différence entre *Théorie de la valeur* et l'exemple donné dans la discussion entre Théo et Umberto est que le roman mathématique de Debreu contient des démonstrations mathématiques incontestablement assez élaborées, plus élaborées que beaucoup de celles qui interviennent en Ecologie théorique. C'est tout. Je crains d'avoir lassé le lecteur par mes longues citations sans avoir atteint le but que je me fixais qui était de ne surtout pas caricaturer les idées de l'auteur de *Théorie de la valeur*. Au risque de me brouiller définitivement avec lui (le lecteur !) voici encore une citation, cette fois ci de quelqu'un qui n'est pas tendre avec le bourbakisme. Il s'agit de Philip Mirowski, historien de la pensée économique, dans *L'irraisonnable efficacité des mathématiques en économie moderne* [175]

> Comme il fallait s'y attendre, Debreu produisit sa propre version du bourbakisme à destination des économistes sous la forme d'un volume intitulé The Theory of Value (1959) ; on y retrouve tout ce qui caractérise le style de Bourbaki : mépris affiché à l'encontre de l'analyse et du calcul, fascination pour la topologie, élitisme revendiqué, affirmation, sans autre forme de procès, que le modèle de l'équilibre général de Walras est la structure engendrant toute l'économie, usage horripilant de l'abstraction, allégeance dévote à la méthode axiomatique. De plus, le livre ne contenait rien de « nouveau » en dehors de quelques allusions à une redéfinition de la commodité sur les états du monde. Comme il fallait également s'y attendre, Debreu niait que l'économie néoclassique soit née de l'imitation de la physique, ne serait-ce que pour couper le système de Walras de tout lien avec une quelconque nécessité physique – ce qui était pourtant bien le cas à l'origine. Les Bourbakistes de la Commission Cowles sont donc à l'origine de l'idée – depuis lors abondamment serinée par bien des économistes orthodoxes – que l'ambition d'imiter la physique, pour décisive qu'elle ait été lors de l'invention par Walras du concept d'équilibre général, s'est rapidement trouvée reléguée au second rang par la force de conviction de la rigueur telle que la conçoivent les mathématiciens. C'est à ce moment que, dans l'esprit de bien des chercheurs, le champ de l'économie néoclassique s'est trouvé tout simplement

175. **Collège international de Philosophie** | Rue Descartes 2012/2 - n° 74 pages 117 à 133 ; [85].

> rattaché à celui des mathématiques.

J'ai interrogé Duchemin sur ce qu'on pouvait penser des contributions de Debreu sur un plan strictement mathématique. Son opinion est claire : « Sur un plan strictement "mathématiques pures" les théorèmes de Debreu étaient des applications assez élémentaires de résultats classiques de topologie. Ils n'auraient pas été publiés dans des "grandes revues". La question de leur pertinence en économie ne regarde pas les mathématiciens. G. Debreu n'est pas J. Nash qui, indépendamment de sa contribution à la théorie économique (les "équilibres de Nash"), était un "vrai mathématicien" qui faillit recevoir la médaille Field et finit par être récompensé par le Prix Abel».

6.3.4 La *méthode axiomatique* en économie

Debreu est donc à l'origine de ce que l'on appelle maintenant la méthode axiomatique (en économie) et qu'il décrit ainsi peu après son prix Nobel [176] :

> An axiomatized theory first selects its primitive concepts and represents each one of them by a mathematical object. [...] Next assumptions on the objects representing the primitive concepts are specified, and consequences are mathematically derived from them. The economic interpretation of the theorems obtained is the last step of the analysis. According to this schema an axiomatized theory has a mathematical form that is completely separated from its economic content.

il insiste sur le fait que, étant mathématiques, les déductions sont sures, et cerise sur le gâteau, on peut changer les interprétations sans perdre la validité des déductions. On retrouve la même idée dans un cours de Jacques Bouveresse au Collège de France [177] où il explicite ce qu'on entend par méthode axiomatique en philosophie :

> Ce que veut dire Granger est, je suppose, que, si ce qu'on attend de l'axiomatique est qu'elle nous permette d'obtenir plus facilement des garanties concernant la cohérence et la rigueur déductive des démarches intellectuelles concernées, on ne voit pas très bien comment elle pourrait éviter d'être formelle. Comme le remarquait déjà Leibniz, le seul moyen d'éviter l'erreur

176. Debreu, Gerard. 1986. *Theoretic models : mathematical form and economic content*, Econometrica, 54 (6) : 1259-1270 ; [34].

177. Bouveresse, cours au collège de France, *Qu'est-ce qu'un système philosophique. Cours 11. Méthode axiomatique et philosophie*.
`https://books.openedition.org/cdf/1752`

> à coup sûr sur ce point est de s'astreindre à n'effectuer, autant que possible, que des raisonnements in forma, dans lesquels la considération des choses est remplacée par des opérations sur les signes – des signes qui, bien entendu, sont capables, lorsqu'on leur fait correspondre une interprétation appropriée, de nous reconduire aux choses à propos desquelles nous raisonnons. Or le propre des raisonnements formels est que leur validité est indépendante des contenus particuliers que nous sommes susceptibles d'assigner aux termes non logiques qui y figurent, et le fait que ces contenus soient ou ne soient pas philosophiques ne fait, sur ce point, aucune différence. Si nous formalisons un raisonnement utilisé par un philosophe dans le but de tester sa correction logique et si nous constatons qu'il est effectivement valide, nous savons du même coup que n'importe quel raisonnement ayant la même forme et faisant intervenir des contenus de nature complètement différentes et aussi peu philosophiques que l'on veut serait également valide.

Remplacez philosophie par économie et vous avez exactement ce que veut exprimer le texte de Debreu et à des détails de formulation près ce que j'ai appelé "roman mathématique".

Je ne vois pas de raison de refuser à l'économie l'usage de la méthode axiomatique ainsi décrite si ce n'est que l'utilisation de cette terminologie participe chez certains auteurs plus de l'intimidation, comme le dénonçait K. G. Aubert à propos de l'usage du théorème de Brouwer en lieu et place du simple théorème de la valeur intermédiaire chez H. Simon, que de la discussion de bonne foi. Ainsi, à la suite de la polémique sur l'usage des mathématiques en économie, l'économiste et philosophe de l'économie Philippe Mongin publie dans la "Revue économique" [178]*L'axiomatisation et les théories économiques*. C'est un essai où l'auteur montre (j'allais dire étale) une culture assez large (quoique fortement Bourbaki-centrée) de logique contemporaine (il cite Kleene, Carnap, Hilbert, Cödel, Church, Skolem, j'en oublie probablement) et consacre de longs développements au couple syntaxique/sémantique de la logique mathématique. Duchemin à qui j'ai demandé son avis m'a dit que ça avait l'air de se tenir mais que cela dépassait largement ses compétences mathématiques ; on peut penser que c'est le cas de beaucoup des lecteurs de la "Revue économique". Cet article n'a pas laissé indifférent la communauté à laquelle il s'adressait ce qui a conduit la revue à pu-

178. Revue économique,Vol 54, N° 1, (2003) pp 99-138 ; [86]

blier deux analyses critiques [179] et une réponse de Ph. Mongin [180] dans le même numéro. Ces critiques font montre d'une culture logique également très solide et le lecteur non spécialiste se sent parfaitement dépassé. Quoi de plus normal pour une discussion entre spécialistes dans une revue savante.

Le problème est que Ph. Mongin n'est pas que le savant neutre qui s'exprime avec nuance et compétence dans les revues savantes, il est aussi un homme engagé qui apporte son soutien à N. Sarkozy pour la présidentielle de 2012 [181] et s'exprime de façon plus polémique dans la revue "Commentaire" [182] dont je cite la conclusion :

> Plus généralement qu'à la prévision, nous pensons aux techniques formelles qui permettent aux économistes de jouer (...) le rôle d'*ingénieurs sociaux* [183] que le grand public attend finalement d'eux. (...)
>
> Il y a des exemples qui parleront mieux aux goûts de l'époque. Le meilleur, sans conteste, est offert par la finance mathématique : non pas la théorie financière axiomatisante héritée de Debreu, non pas la modélisation microéconomique des secteurs bancaire et financier, mais la finance des instruments dérivés, celle de Black, Sholes et leurs héritiers, dont les formules de calcul sont passées dans la pratique ordinaire de milliers d'opérateurs.(...)
>
> Dans toutes ces activités, l'économiste abandonne la figure traditionnelle du généraliste des marchés, des agrégats nationaux et des tendances, adepte de grandes théories discutables. Il devient l'analyste polyvalent de questions circonscrites ; il s'attaque, avec les moyens du bord, aux problèmes concrets de la société. Qu'il se spécialise dans l'un de ces problèmes, et il devient ce qu'on appelle un expert, l'une des figures les plus honorables de sa profession. Elle semble échapper entièrement aux auteurs de la « Lettre ouverte » et aux petits maîtres de la pensée « critique ». L'ingénieur social, l'expert : ces figures apparemment subalternes sont les meilleurs répondants de l'efficacité de la discipline. Comme on est loin du discours juvénile des «enjeux» et des «débats», qui prétendait faire du malheureux économiste l'arbitre de

179. Revue économique, Vol 55 N°1 (2004) *A PROPOS DE...« L'axiomatisation et les théories économiques » de Philippe Mongin* par E. Agliari : *Axiomatization and economic theories : some remarks* p. 123-129 et par M. Armatte *l'Axiomatisation et les théories économiques : un commentaire* P. 130-142

180. Revue économique, Vol 55 N°1 (2004), *l'Axiomatisation et les théories économiques ». réponses aux critiques* p. 143-147

181. Le Monde, 2 mai 2012, "Economistes, sans parti pris idéologique, nous soutenons Sarkozy"

182. *La théorie économique a-t-elle besoin des mathématiques ?*, Commentaire, N 93 (2001), p.129-140

183. Emphase de l'auteur

la rationalité du réel !

Dans son article de 2003, P. Mongin applique des concepts de la logique mathématique au delà de ce que je peux comprendre à tout un corpus de connaissances économiques que je n'ai pas. Il m'est donc impossible de juger de la pertinence de sa démarche, mais concernant Debreu et la méthode axiomatique il me semble que le point suivant a échappé à Ph. Mongin et ses détracteurs.

Le livre de Debreu s'intitule *Théorie de la valeur*. N'y a-t-il pas une sorte d'escroquerie à qualifier de *théorie* ce qu'il nous propose ? *Oui et non* et c'est bien là que se trouve tout le problème.

Si par théorie nous entendons une *théorie scientifique* c'est à dire quelque chose comme [184] :

> (...) D'abord et avant tout, une théorie digne de ce nom permet de comprendre ce qui se passe et ce qui peut s'observer : elle permet de rationaliser un champ de recherches en fournissant, en première approximation du moins, une représentation des choses qui paraisse, sinon plausible du point de vue du sens commun, du moins cohérente et vraisemblable. Elle fournit un modèle de situation, de comportement, de mécanisme qui rend compte plus ou moins adéquatement des faits que le chercheur a en vue, et qui lui permet de résoudre les problèmes qui se posent à lui dans le cours de ses travaux. En second lieu, elle permet d'expliquer des phénomènes qui, sans elle, auraient pu passer inaperçus dans beaucoup de cas : en dévoilant la nature des êtres qui habitent une région de l'univers physique ou social, elle permet de prédire avec des marges d'erreur qu'on souhaite de plus en plus réduites ce qui se produira dans telle ou telle circonstance si telle et telle conditions se réalisent, toutes choses étant égales par ailleurs (cette dernière précaution, appelée "clause ceteris paribus", étant absolument indispensable, implicitement ou explicitement, dans toute explication). Troisièmement, parce qu'elles servent de la sorte comme procédure heuristique, parce qu'elles permettent d'étendre le champ de nos connaissances et qu'elles nous donnent accès à des réalités le plus souvent insoupçonnées, nos théories scientifiques les mieux établies, même celles qu'on dit être les plus pures et fondamentales, donc les plus éloignées des préoccupations pratiques (par exemple, la théorie de la gravitation universelle), entrent en ligne de compte dans le jeu des interventions humaines (ici, la conquête de l'espace). (...) Sans science

184. citation de *La nature des théories scientifiques* de Robert Nadeau, Encyclopédie philosophique universelle, tome I : L'Univers philosophique, volume dirigé par André Jacob, p. 557-566. PUF (1998).

> fondamentale, la recherche n'aurait la plupart du temps aucune retombée technologique car il n'y aurait tout simplement pas de science appliquée.

alors *non*, *Théorie de la valeur* n'est pas une théorie scientifique.

Mais si par *théorie* nous entendons *théorie mathématique*, c'est à dire un ensemble de faits et de déductions portant sur un objet mathématique particulier comme par exemple la "théorie des graphes" ou la "théorie des groupes" (à l'entrée "List of mathematicals theories" Wikipedia propose plus de cinquante théories mathématiques différentes) alors "Théorie de la valeur" est effectivement une *théorie*.

Pour le voir il suffit dans la définition du roman mathématique :

1. Un certain nombre de propositions mathématiques A_1, A_2, $\cdots A_p$.
2. Une *interprétation* $\mathscr{E}(A_i)$ de chaque proposition A_i.
3. Une démonstration mathématique d'un certain nombre de théorèmes $\mathbf{T}_i$, $i = 1, 2, \ldots q$.
4. Des *interprétation* $\mathscr{E}(\mathbf{T}_i)$ des théorèmes $\mathbf{T}_i$.

d'inverser les points 2) et 3). Enoncer des propositions de départ, des définitions des axiomes, puis démontrer des théorèmes c'est bien faire une *théorie mathématique* axiomatisée et sur un plan strictement logique il n'y a rien à redire à procéder ainsi. Ensuite rien n'interdit non plus d'interpréter globalement 1)+2).

Mais alors pourquoi ne pas procéder plutôt ainsi dans l'exposition de *Théorie de la valeur ?* Probablement pour ne pas rentre trop visible ce que le mathématicien H. Sussmann [185] dit plaisamment :

> « En mathématiques, les noms sont arbitraires. Libre à chacun d'appeler un opérateur auto-adjoint un "éléphant" et une décomposition spectrale une "trompe". On peut alors démontrer un théorème suivant lequel "tout éléphant à une trompe". Mais on n'a pas le droit de laisser croire que ce résultat a quelque chose à voir avec de gros animaux gris. » .

Mais peut-on accepter que 1+3 soit une "théorie mathématique" ? Prenons l'exemple de la théorie des groupes. Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne notée + qui satisfait les axiomes :

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ (associativité)
2. $\exists e \forall a : e + a = a + e = a$ (existe un élément neutre)
3. $\forall a \, \exists a' : a + a' = a' + a = e$ (tout élément possède un inverse)

185. Cité dans I. Ekeland, *Le calcul, l'imprévu*, Le Seuil, 1984.

Si tout ce qui peut se déduire de ces trois axiomes est si important c'est que les "interprétations" de groupe sont omniprésentes en mathématiques (le groupe des entiers relatifs, des permutations, des rotations, des symétries du carré etc...) et justifient l'intérêt de les étudier. Une théorie mathématique *pertinente* doit s'insérer dans la culture mathématique et répondre à des questions qui s'y posent. Est-ce le cas de la théorie de Debreu ? Non. Enlevez l'interprétation économique il ne reste qu'une axiomatique sans intérêt mathématique.

Théorie de la valeur joue sur les mots : elle n'est pas une théorie scientifique (ce qu'elle ne revendique pas) ni une théorie mathématique. C'est une théorie axiomatique dont une interprétation économique est possible et dont la pertinence se discute. Bref c'est un "roman mathématique".

6.4 Mathématiques et théories écologiques

Dire que l'on écrit des romans mathématiques c'est dire exactement la même chose que dire que l'on pratique la méthode axiomatique (ou la modélisation) mais cela permet plus difficilement le glissement de sens que je viens dénoncer dans le cas de l'économie. Glissement de sens que l'on retrouve à des degrés divers dans d'autres disciplines. Le cas de *Théorie de la valeur* dans les sciences économiques est un exemple qui appartient peut être au passé. Car les mathématiques économiques ont du plomb dans l'aile. Depuis la crise des "subprimes" on semble se méfier un peu des "mathématiciens purs" et on voit se développer depuis le début de ce siècle un courant d'*éconophysique* qui, entre autres, dénonce l'économie mathématisée comme une machine de guerre issue de la lutte anti-communiste :

> The supposed omniscience and perfect efficacy of a free market stems from economic work in the 50s and 60s, which with hindsight looks more like propaganda against communism than a plausible scientific description. In reality, markets are not efficient, humans tend to be over-focused in the short-term and blind in the long-term, and errors get amplified through social pressure and herding, ultimately leading to collective irrationality, panic and crashes. Free markets are wild markets. It is foolish to believe that the market can impose its own self-discipline, as was promoted by the US Securities and Exchange Commission in 2004 when it allowed banks to pile up new debt [186].

et le signataire de ces lignes ne peut pas être soupçonné d'appartenir à la gauche

186. J-P Bouchaud, *Economics needs a scientific revolution*, NATURE|Vol 455|30 October 2008

de la gauche, comme on dit maintenant, puisqu'il est responsable d'un hedge fund réputé performant ; dans cette opinion envoyée à Nature il s'exprime en scientifique, simplement. Est-ce que l'*économphysique* est bien une science expérimentale dont les concepts ne peuvent s'exprimer qu'à travers les mathématiques ? Je n'en sais rien et il est probablement prématuré d'en juger.

En revanche l'écologie scientifique est une science en pleine évolution. Perçue longtemps par le public comme une discipline pour doux rêveurs amateurs de petites fleurs de sous bois ou d'oiseaux exotiques des terres australes elle va affirmer de plus en plus son "expertise" dans le champ politique en raison de la catastrophe écologique en cours. Voici deux exemples parmi tant d'autres où des "grands noms" de l'écologie théorique s'impliquent dans un grand débat contemporain : Le réchauffement climatique et le développement durable.

— **Simon Levin**, *What Mathematics can do for Sustainability*, Bull Math Biol (2015) 77 :251–253 [71]. Il s'agit d'un avant propos d'un numéro special du Bulletin of Mathematical Biology intitulé *Toward a Quantitative Science of Sustainability*. S. Levin est connu pour de très nombreuses contribution mathématiques à l'écologie théorique.

— Joseph Fargione, Jason Hill, **David Tilman**, Stephen Polasky, Peter Hawthorne, *Land Clearing and the Biofuel Carbon Debt*, SCIENCE VOL 319 29 FEBRUARY 2008 [51]. David Tilman est connu pour son ouvrage de 1982 : *Resource Competition and Community Structure.*.

Cette implication de l'écologie scientifique dans la sphère de l'écologie politique est tout à fait naturelle dans les circonstances actuelles et pose le même problème que celui posé par la "science économique". Qu'est ce qui relève de la science solidement établie, donc de l'avis d'experts autorisés, qu'est-ce qui relève de l'opinion et de l'idéologie, donc du débat démocratique ? La frontière est difficile à établir surtout quand les mathématiques interviennent et le risque est grand de voir ces dernières mises en avant pour cautionner de mauvaises causes.

Faisons un peu de science fiction.

Dans le livre de Monsieur Van trucBidule *Théorie du développement soutenable* [187] on trouve dans l'introduction :

> Les deux problèmes centraux de la théorie présentée dans cette monographie sont (1) l'explication de la diminution de la biodiversité résultant de la

187. Dunod 2031.

> tradition de l'agriculture familiale dans les pays du sud, (2) l'explication du rôle des intrans industriels dans un état optimal d'un écosystème donné.(...)
>
> Les premières solutions des deux problèmes précédents ont été données respectivement par S. Labière et D. Tilgirl, mais ni les maîtres de l'école de Princeton, ni leurs disciples n'ont fait un exposé très rigoureux de leurs idées pendant plusieurs décades. (...)
>
> La théorie du développement soutenable est traitée ici sur le modèle de la rigueur de l'école formaliste contemporaine de mathématiques. L'effort vers la rigueur substitue des raisonnements et des résultats corrects à ceux qui ne l'étaient pas.
>
> (...) La fidélité à la rigueur dicte la forme axiomatique de l'analyse où la théorie, au sens strict, est logiquement complètement disjointe de ses interprétations. Pour mettre pleinement en relief cette coupure, toutes les définitions, toutes les hypothèses et les principaux résultats de la théorie, au sens strict, sont écrits en italique. En outre la transition entre la discussion non formelle des interprétations et la construction formelle de la théorie est souvent indiquée par l'une des expressions «dans le langage de la théorie», «formellement».

C'est ce que nous risquons. Sauf si le concept de "roman mathématique" s'imposait. Alors nous lirions à la place des deux derniers paragraphes quelque chose de beaucoup plus modeste du genre :

> Nous allons tenter de justifier notre point de vue en utilisant la méthode des "modèles", maintenant largement utilsée et reconnue sous le nom de "roman mathématique". Nous allons créer un monde virtuel V obéissant à des règles formelles mathématiques où nous espérons que le lecteur voudra bien reconnaitre quelques éléments de notre problématique. Ensuite, par des démonstrations strictement mathématiques, nous montrerons comment dans notre monde V l'usage d'intrans industriels est optimal (...) Maintenant, toute la question qui reste ouverte est celle de montrer la pertinence du monde vituel V où, si l'on préfère l'ancienne terminologie, de notre modèle mathématique [188].

188. Un lecteur particulièrement consciencieux m'a fait remarquer que Labière et Tilgirl devaient sévir quelques décennies avant la date de publication, 2031, du livre de Van truc Bidule et que donc on devrait facilement trouver leurs traces sur Internet et il en concluait qu'il devait s'agir d'une coquille et que la vraie date était 2131. Je n'ai pas envie de suivre cette suggestion car elle

Ajoutons, pour terminer cette section que traiter *Théorie de la valeur* ou telle théorie écologique de roman n'a aucun caractère infamant. Après tout Balzac et Zola ont écrit des romans tout à fait éclairants sur le développement du capitalisme en France et les romans de science fiction nous aident à imaginer ce que sera notre planète après la catastrophe écologique.

---

sous entend que le petit train train de la science a pu se poursuivre jusqu'à une date aussi lointaine alors que je pense, au contraire, qu'améliorer la qualité de la science environnementale, en particulier celle de la science écologique, est une urgence absolue. Je maintien donc mon optimiste 2031 et m'excuse auprès de mes lecteurs qui se désoleraient de ne pas prouver Labière et Tilgirl sur Google ; ce sont de pures fictions !

Chapitre 7

De l'éthique des mathématiciens

Sommaire

7.1 Quelques mathématiciens devant la guerre 192

7.1.1 G.H. Hardy 193

7.1.2 A. Grothendieck 196

7.1.3 R. Godement 197

7.1.4 J. von Neumann 198

7.2 L'idéologie de l'expert 200

7.3 ··· et ce qu'en pensent les mathématiciens. 208

7.3.1 Grothendieck et le mouvement "Survivre" 208

7.3.2 Bourbaki 213

7.3.3 R. Thom 218

7.3.4 D. Nordon 221

7.3.5 J-P. Aubin et le CEREMADE. 222

Je distingue la responsabilité du "citoyen-mathématicien" de la responsabilité du "mathématicien" (tout court)". Dans le premier cas il s'agit du citoyen qui, scientifique reconnu, utilise sa notoriété pour faire progresser les idées qu'il croit justes sur la marche du monde. L'exemple français contemporain le plus illustre de "citoyen-mathématicien" est probablement Laurent Schwartz dont les engagements militants ont été constants tout au long de sa vie. Il n'est pas le seul. Beaucoup de mathématiciens se sont engagés politiquement dans les années cinquante, soixante et soixante-dix pour dénoncer les guerres coloniales, la guerre du Vietnam ou les atteintes aux droits de l'homme dans les dictatures. Ce n'est pas ce qui m'intéresse ici.

Ce que j'entends par responsabilité du mathématicien c'est la responsabilité qu'il y a à faire des mathématiques. A quoi servent les mathématiques et les mathématiciens ? J'entends des questions du genre : «Les mathématiques servent-elles à quelque chose ? Si oui sont elles utiles ? Peuvent-elles être nuisibles ? Ne me paye-t-on pas pour faire des choses que je réprouve moralement ?» ou bien, inversement «Est-ce que je fais quelque chose d'utile pour la société qui me donne mon salaire». C'est ce que j'entends ici par "questions éthiques".

Dans la mesure où les mathématiques sont impliquées dans la physique et la physique impliquée dans la fabrication d'objets utiles (appareils de radiographie) ou nuisibles (armes de guerre) les questions éthiques qui concernent le physicien sont aussi celles du mathématicien ; tout au plus le mathématicien pourra-t-il se sentir plus loin des applications concrètes, encore que ce soit de moins en moins vrai : le guidage d'un missile de croisière relève au moins autant de mathématiques à l'état brut que de chimie des propulseurs et de physique des capteurs. De plus la période qui nous intéresse, les années soixante-dix, est celle de la montée en puissance de la communauté mathématique (française) des "mathématiques appliquées" (et industrielles) [189], du développement des contrats avec l'industrie et l'armée (DRET). Nul doute que les mathématiciens qui travaillaient dans ces domaines appliqués ont dû se sentir de plus en plus proches de leurs collègues physiciens et certains ont dû s'exprimer. Il y aurait certainement des choses très intéressantes à apprendre de ce côté mais éloignées de notre sujet. La question de l'A.N.S., rappelons le, était essentiellement une question qui divisait certains "mathématiciens purs" [190]. Toutefois, le chapitre précédent nous ayant montré que

189. Création du GAMNI (Groupe pour l'Avancement des Méthodes Numériques de l'Ingénieur) en 1974 puis de la SMAI (Société de Mathématiques Pures et Industrielle) en 1985 sur le modèle U.S. de la SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) créée en 1951.

190. J'ai demandé à Duchemin s'il savait comment Lobry qui, à l'époque appartenait à la communauté "mathématiques appliquées", avait été mêlé à cette affaire de l'A.N.S. ? « Comme il l'a

les mathématiques les plus bourbachiques qui soient sont directement utilisées par la science économique dominante il n'est pas inutile de s'intéresser aux questions éthiques dans la communauté des mathématiciens purs et c'est essentiellement à elle que je vais restreindre mon investigation.

Ce chapitre aurait donc dû s'intituler plus honnêtement : "De l'éthique des mathématiciens purs", mais ça pouvait laisser entendre qu'elle était plus relâchée que celle des "mathématiciens appliqués" ce que je ne prétend surtout pas. En revanche ce que je veux contester c'est l'idée que sous prétexte qu'il travaillent sur la plus haute abstraction les "purs" seraient moins compromis que les "appliqués" [191]. Autre point important sur le titre. Il aurait été plus honnête également de dire : "De l'éthique des quelques mathématiciens". Affirmer quoi que ce soit sur l'éthique *des mathématiciens* demande un autre travail que l'examen des positions publiques d'une dizaine d'individus ; ces prises de positions me servent plutôt à illustrer la façon dont il me semble que les questions éthiques se posent au mathématicien.

Finalement un titre comme : *"Sur les questions éthiques qui se posent aux mathématiciens avec quelques exemples chez les mathématiciens "purs" mais pas seulement"*, aurait été plus honnête mais beaucoup trop long.

7.1 Quelques mathématiciens devant la guerre

La "nuisance" la plus évidente est celle de contribuer à la fabrication d'armes de guerre et plus généralement à l'effort de guerre. Les mathématiciens sont des hommes sensibles comme les autres et plusieurs se sont exprimés sur ce point. Voici l'exemple de trois mathématiciens qui ont exprimé avec force leur position pacifiste suivi d'un contre exemple. Ce paragraphe qui n'est pas une étude de

---

expliqué dans son livre, Lobry était aidé dans son travail de thèse, précisément sur les questions de "maths. pures" qu'il ne dominait pas, par Jean Martinet, élève de Reeb et professeur à Strasbourg et il connaissait Reeb qui avait été professeur à Grenoble quand il était en licence. D'autre part il était attaché à la communauté "mathématiques pures" par ses études (licence et DEA de mathématiques pures), un enseignement "formaliste" d'un Bourbaki (C. Chabauty), enseignement qu'il avait apprécié, et un premier poste d'enseignant (assistant) en mathématiques pures. Ce n'est qu'au bout de quatre ans qu'il a "trahi" pour passer en mathématiques appliquées. Je n'ai pas immédiatement le souvenir de la présence d'un autre "mathématicien appliqué" que lui autour de Reeb à cette époque».

191. Rappelons que Debreu était normalien et qu'il a reçu le soutien mathématique de plusieurs Bourbaki (voir plus loin le paragraphe7.3.2 consacré à Bourbaki). Ce n'est pas rien de participer au fondement d'une théorie qui prétend justifier la "science économique" neo-libérale.

la communauté mathématique devant la question du pacifisme, vise simplement à donner des exemples de mathématiciens qui "sortent de leur tout d'ivoire" ; la question de savoir si la spécificité des mathématiques induit chez les mathématiciens, sur la question des armes, une attitude différente de celle des autres scientifiques reste posée.

Ces exemples, qui ne prétendent donc absolument pas rendre compte de l'attitude générale des mathématiciens sur cette question, se sont présentés à moi dans mon enquête sur l'A.N.S., nous verrons pourquoi.

7.1.1 G.H. Hardy

La question de l'éventuelle nuisance des mathématiques a hanté Godfrey Harold Hardy (1877-1947) très grand mathématicien de la première moitié du XXème siècle. Pacifiste, soutien de Bertrand Russell pendant la première guerre mondiale [192], il s'est exprimé dans son émouvant témoignage *A Mathematician's Apology* [193]

> A man who sets out to justify his existence and his activities has to distinguish two different questions. The first is whether the work which he does is worth doing ; and the second is why he does it, whatever its value may be. The first question is often very difficult, and the answer very discouraging, (...)
>
> Is mathematics 'useful', directly useful, as other sciences such as chemistry and physiology are ? This is not an altogether easy or uncontroversial question, and I shall ultimately say No, though some mathematicians, and some outsiders, would no doubt say Yes. And is mathematics 'harmless' ? Again the answer is not obvious, and the question is one which I should have in some ways preferred to avoid, since it raises the whole problem of the effect of science on war. Is mathematics harmless, in the sense in which, for example, chemistry plainly is not ? I shall have to come back to both these questions later.(...)

Hardy ne refuse pas la question de la responsabilité de l'homme de science devant la guerre. Il y consacre de nombreuses pages de son essai que je ne peux pas toutes

192. En 1916 Russell fut démis de son poste de "lecturer" à Trinity College (Cambridge) en raison de son activisme pacifique. Hardy, qui fit partie de ses soutiens a écrit un petit livre qui relate cet évènements : *Bertrand Russell and Trinity, a college controversy of the last war*, University press, Cambridge 1942.

193. Première édition 1940 ; [59], accessible en version électronique à l'adresse : `http://www.math.ualberta.ca/mss/`

citer ici. Pour arriver à justifier sa conclusion que les mathématiques ne servent à rien, donc ne peuvent faire de mal, il va distinguer les "real mathematics" des "trivial mathematics" ce que j'aurais envie de traduire par les "vraies mathématiques" et les "mathématiques vulgaires", en reprenant pour une fois le sens usuel du mot "trivial". Il n'est pas facile en quelques mots de dire ce qu'il entend par là. Essayons quand même. Il commence par afficher une position philosophique résolument réaliste :

> For me, and I suppose for most mathematicians, there is another reality, which I will call 'mathematical reality' ; and there is no sort of agreement about the nature of mathematical reality among either mathematicians or philosophers. Some hold that it is 'mental' and that in some sense we construct it, others that it is outside and independent of us. A man who could give a convincing account of mathematical reality would have solved very many of the most difficult problems of metaphysics. If he could include physical reality in his account, he would have solved them all. I should not wish to argue any of these questions here even if I were competent to do so, but I will state my own position dogmatically in order to avoid minor misapprehensions. I believe that mathematical reality lies outside us, that our function is to discover or observe it, and that the theorems which we prove, and which we describe grandiloquently as our 'creations', are simply our notes of our observations.

et pour lui les "real mathematics" sont celles qui découvrent cette réalité. Elles sont parfaitement inutiles. Il y range sa spécialité, la théorie des nombres mais, curieusement, parmi les "real mathematicians" il n'hésite pas à enrôler les grands physiciens :

> I count Maxwell and Einstein, Eddington and Dirac, among 'real' mathematicians.

Les autres, les "trivial mathematics", celles qui sont utiles, ne sont pas forcément faciles mais elles ont un autre objectif qui n'est pas "l'honneur de l'esprit humain". C'est cette distinction qui lui permet de s'exonérer de toute responsabilité :

> There is one comforting conclusion which is easy for a real mathematician. Real mathematics has no effects on war. No one has yet discovered any warlike purpose to be served by the theory of numbers or relativity, and it seems very unlikely that anyone will do so for many years.

Evidemment le lecteur actuel de ces lignes a de quoi être surpris. Quel aveuglement ! Mais il s'explique immédiatement après :

> It is true that there are branches of applied mathematics, such as ballistics and aerodynamics, which have been developed deliberately for war and demand a quite elaborate technique : it is perhaps hard to call them 'trivial', but none of them has any claim to rank as 'real'.

Ainsi il concède que des mathématiques utilisées pour la guerre peuvent être difficiles mais elles sont loin de la contemplation de la "réalité mathématique" et de plus elles sont *laides* :

> They are indeed repulsively ugly and intolerably dull ; even Littlewood could not make ballistics respectable, and if he could not who can ? So a real mathematician has his conscience clear ; there is nothing to be set against any value his work may have ; mathematics is, as I said at Oxford, a 'harmless and innocent' occupation. The trivial mathematics, on the other hand, has many applications in war. The gunnery experts and aeroplane designers, for example, could not do their work without it. And the general effect of these applications is plain : mathematics facilitates (if not so obviously as physics or chemistry) modern, scientific, 'total' war...
>
> I have never done anything 'useful'. No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world. I have helped to train other mathematicians, but mathematicians of the same kind as myself, and their work has been, so far at any rate as I have helped them to it, as useless as my own. Judged by all practical standards, the value of my mathematical life is nil ; and outside mathematics it is trivial anyhow. I have just one chance of escaping a verdict of complete triviality, that I may be judged to have created something worth creating. And that I have created is undeniable : the question is about its value.

Il serait facile de se moquer de Hardy en lui faisant remarquer que les réflexions théoriques de ses amis physiciens ne sont pas étrangères à l'arme atomique et qu'un de ses élèves A. Turing, qui participa à l'effort de guerre en contribuant au décriptage des codes nazi, est à l'origine de l'usage massif de la théorie des nombres (la spécialité de Hardy) dans la pratique actuelle de la cryptographie. Sans doute, écrivant ce qu'il écrivait en 1940, manquait-il totalement de clairvoyance mais son extrême souci d'être "inoffensif", qui l'oblige à affirmer si fermement sont "inutilité", mérite autre chose que de la moquerie.

7.1.2 A. Grothendieck

Avec A. Grothendieck (1928-2014) qui défraya la chronique dans les années soixante-dix par ses démêlées avec la communauté mathématique nous avons un autre exemple de mathématicien qui exprima des soucis éthiques.

Grothendieck est un très grand mathématicien dont la vie fut tout à fait extraordinaire [194]. La voici résumée en quelques lignes. Fils d'un anarchiste russe assassiné par les nazis il étudie les mathématiques à l'Université de Montpellier dans l'immédiat après guerre. Soutenu par Dieudonné, il a animé le "Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie" du nom d'un petit bois près de l'I.H.É.S. où se déroulait le séminaire de 1960 à 1969. A cette date, Grothendieck apprend que l'I.H.É.S. est (minimalement) soutenu par des crédits militaires. Il rompt avec l'institut [195].

Au congrès international des mathématiques de Nice [196] de 1970 il crée le scandale [197] en interpellant le mathématicien soviétique L.S. Pontryagin sur l'usage militaire de ses théories. Il se fait aussi remarquer par son activisme pour le mouvement "Survivre" qu'il venait de créer avec quelques autres mathématiciens. En 1972 le cours consacré à discuter de la responsabilité du savant qu'il voulait don-

194. Le livre *Alexandre Grothendieck, itinéraire d'un mathématicien hors normes* de Georges Bringuier, éditions Privat, Toulouse, 2015, donne une idée globale de ce que fut la vie de ce mathématicien.

195. Voici ce que nous en dit P. Cartier, fin connaisseur de l'I.H.É.S., dans *Un pays dont on ne connait que le nom*, Inference : International Review of Science,
`http://inference-review.com/article/un-pays-dont-on-ne-connaitrait-que-le-nom`
« Suivirent quelques années d'errance : démission de l'I.H.É.S.– sous un prétexte assez mineur(13) – en septembre 1970.(...)
(13) La découverte d'une subvention modeste accordée, sur la recommandation de Michel Debré, par la DRET (organisme de financement de la recherche militaire) à l'I.H.É.S.. Le financement de l'I.H.É.S. resta longtemps assez opaque, mais les crédits militaires n'y jouèrent qu'un rôle très accessoire. Il n'est cependant pas absurde d'imaginer qu'il y ait eu un plan mondial pour la remobilisation éventuelle des scientifiques dans une nouvelle guerre totale (contre l'URSS cette fois) et que l'I.H.É.S. ait fait partie de ce réseau. Seul Motchane aurait pu nous éclairer sur ce point. »
Est-il certain que cette affaire de financement militaire soit l'unique raison du départ de Grothendieck ? Cartier parle de prétexte.

196. Ce congrès organisé tous les quatre ans par l'Union Mathématique Internationale réunit plusieurs milliers de participants ; les noms des médaillés Fields y sont dévoilés et les grands mathématiciens du moment y donnent des conférences plénières.

197. Duchemin m'a donné un témoignage de Lobry sur ce scandale. C'est un petit peu long et un ou deux courts extraits suffiraient, mais je ne veux pas vexer Duchemin qui se donne du mal pour me fournir des matériaux. Je l'ai reporté en annexe D.2 avec un autre témoignage.

ner au Collège de France est refusé par le collège des professeurs et il n'est pas renouvelé. Il quitte la communauté de la recherche, termine sa carrière de professeur à Montpellier, se retire dans les montagnes des Pyrénées où il décède en 2014.

Sur le scandale de 1970 je rappellerai qu'il a lieu au plus fort de la guerre du Vietnam, que de très nombreux mathématiciens français soutiennent la lutte du peuple Vietnamien et Grothendieck est de ceux là [198]. Curieusement je n'ai pas trouvé chez Grothendieck ni autour de lui, à l'exception de R. Godement, de référence à Russell et Hardy. Pourtant, si on peut imaginer qu'ils ne considéraient pas comme des leurs le logicien Russell dont les propositions de formalisation ont été écartées au profit de la théorie des ensembles, ni Grothendieck, ni les rares mathématiciens qui l'ont soutenu ne pouvaient ignorer le très grand mathématicien Hardy et ses positions pacifistes. Il est possible que certaines références à Hardy m'aient échappé mais si ce n'est pas le cas je ne vois pas d'explication à ce silence.

Grothendieck apparaît dans ce paragraphe parce qu'il s'est résolument battu contre l'usage militaire de la science mais sa réflexion sur la responsabilité du savant a été beaucoup plus générale qu'une simple condamnation, somme toutes assez consensuelle, des usages militaires de la science et je serai amené à en reparler longuement dans un paragraphe suivant.

7.1.3 R. Godement

Roger Godement (1921-2016) est normalien et a soutenu une thèse dirigée par H. Cartan en 1946. Il a été membre de Bourbaki dans les années 1950. Voici ce qu'en dit L. Schwartz [199]

> Godement lutta toute sa vie durant contre le complexe militaro-industriel international, avec une rage et une passion qui rendaient toute discussion avec lui difficile. C'est sans doute pour cette raison qu'il resta assez isolé.

à côté de louanges de ses qualité de mathématiciens. De son côté, peu de temps après, dans une très longue postface de son "cours d'analyse" [200] intitulée " Science, technologie, armement" Godement juge sévèrement Schwartz :

198. Grothendieck ne se contentait pas d'engagements verbaux, il s'impliquait physiquement aussi : il a fait des cours au Nord Vietnam dès 1967, en pleine guerre.
199. dans *Un mathématicien aux prises avec le siècle* Odile Jacob, Paris 1997, p 288 ; [110].
200. Analyse mathématique II (Springer, 1998) ; [58]

> Dans le divertissant chapitre de ses mémoires qu'il consacre à son enseignement à l'Ecole polytechnique, Laurent Schwartz accuse, p. 355 et p. 173, les mathématiciens purs français et particulièrement les membres du groupe Bourbaki d'avoir fait preuve "d'ostracisme" à l'égard de leurs collègues appliqués. Il nous assène que *tout mathématicien doit se soucier des applications de ce qu'il fait* sans, apparemment, se rendre compte de l'ambiguïté de sa formule : se soucier peut aussi bien signifier choisir, refuser ou dénoncer, mais ce n'est manifestement pas ce que suggère Schwartz.(...)
>
> Outre le fait que les scientifiques ont le droit de ne pas se soucier des applications au sens ou l'entend Schwartz, la question fondamentale est évidemment de savoir s'ils doivent s'intéresser à toutes les applications possibles ou s'il ne s'imposerait pas de procéder à des choix ; l'imagerie médicale et les armes nucléaires ne relèvent pas de la même conception de la civilisation et les scientifiques auraient, me semble-t-il, intérêt à enregistrer cette distinction : elle n'est ni particulièrement subtile, ni très nouvelle.

Et il se livre ensuite à une description précise de quelques liens indiscutables de deux élèves de Schwartz : P. Faurre et J-L. Lions, avec l'industrie française de l'armement.

R. Godement est l'auteur de très nombreux textes [201]. Notons que Godement n'ignore pas Hardy et s'y réfère souvent. Je serai amené, comme pour Grothendieck, à reparler de lui un peu plus tard.

7.1.4 J. von Neumann

Tous les mathématiciens ne sont pas comme Hardy, Grothendieck ou Godement. Beaucoup apportent leur compétence à l'industrie de l'armement, nous l'avons vu plus haut, voire même directement à l'effort de guerre [202]. Je n'en donnerai qu'un seul exemple – mais quel exemple !– : J. von Neumann, sur qui je serai très bref. J. von Neumann (1902-1957) est un (le ?) géant des mathématiques du milieu du XX-ème siècle, un peu postérieur à Hardy. Sa créativité était telle que

201. accessibles sur son site :
`http://godement.eu/site/wp-content/files/Scientifique_militaire.pdf`
extrêmement bien documentés dénonçant le complexe scientifico-militaro-industriel.

202. Sur ce thème on pourra lire *The total war of Paris mathematicians* de D. Aubin, Hélène Gispert et Catherine Goldstein, AMS History of mathematics, vol 42 (2010) [9], où l'on verra que les mathématiciens français se sont très largement impliqués dans l'effort de guerre pendant la période 1914-1918.

mathématiciens purs et appliqués, informaticiens et même économistes peuvent le revendiquer. Actif avec beaucoup d'autres dans la conception de la première bombe atomique il voyait dans les mathématiques un outil puissant pour agir sur le monde et assumait pleinement sa volonté de puissance. Il ne partageait certainement pas le souci de Hardy de rester inoffensif et bien loin de soutenir l'effort du physicien L. Szilard (1898-1964) pour éviter l'envoi des bombes sur le Japon il participait au "target committee" chargé de définir la façon la plus efficace de les utiliser. Les activités "militaires" de von Neumann sont très largement documentées. Sur Wikipedia on trouve :

> Along with four other scientists and various military personnel, von Neumann was included in the target selection committee responsible for choosing the Japanese cities of Hiroshima and Nagasaki as the first targets of the atomic bomb. Von Neumann oversaw computations related to the expected size of the bomb blasts, estimated death tolls, and the distance above the ground at which the bombs should be detonated for optimum shock wave propagation and thus maximum effect.

Ceux qui n'auraient pas confiance dans Wikipedia peuvent se reporter à Godement dont les sources sont précises. Dans *Scientifiques, militaires et industriels* [203] il brosse en note de bas de page le portrait suivant :

> Mathématicien d'une extraordinaire précocité, l'un des premiers à avoir pratiqué les méthodes axiomatiques de la "mathématique moderne", von Neumann, au cours de la période 1925-1940, publia un grand nombre de travaux de première importance sur la logique, la théorie spectrale dans les espaces de Hilbert et les fondements de la Mécanique Quantique. La guerre l'oriente définitivement vers les mathématiques appliquées (propagation des processus explosifs à l'intérieur ou à l'extérieur d'une bombe A - c'est apparemment lui qui calcula la hauteur optimale à laquelle devait exploser la bombe de Hiroshima - , théorie des jeux, etc), après quoi son activité se concentre sur la conception des premiers ordinateurs électroniques, les calculs relatifs à la bombe H, et le développement des missiles intercontinentaux (il préside en 1954 le comité scientifique chargé de les développer et rendra même visite au président Eisenhower pour en recommander la construction). Meurt prématurément d'un cancer en 1957.

203. Sur le site de Godement, voir note 201.

7.2 L'idéologie de l'expert ...

Dans le paragraphe précédent les questions éthiques posées aux mathématiciens découlaient de l'utilisation directe de mathématiques dans l'élaboration d'engins de guerre. Nous pourrions examiner d'autres domaines où les mathématiques sont utilisées à des fins pour le moins discutables. D'une manière générale tous les objets de haute technologie produits au XXI ème siècle contiennent une part importante et incontournable de mathématiques. Que ces objets soient utilisés à des fins positives ou nuisibles la responsabilité des mathématiciens est engagée, comme l'est celle de tous les spécialistes qui ont contribué à la conception et la fabrication des objets en question.

Mais à propos d'éthique se présente la même distinction que celle que nous avions faite à propos de l'usage des mathématiques dans les sciences. Les mathématiques peuvent *s'appliquer* ou *s'impliquer*.

Je dirais donc que, dans le domaine éthique, les mathématiques *s'impliquent* lorsque, explicitement ou implicitement, elles interviennent dans la justification d'une pensée ou d'une idéologie. Je ferai le parallèle suivant avec les sciences du vivant. Lorsque les connaissances biologiques servent à perfectionner des vaccins ou des armes biologiques il y a *application* de la biologie à des fins civiles ou militaires, lorsque le théorie de l'évolution est invoquée pour justifier une idéologie raciste il y a *implication*.

Beaucoup a été dit et écrit sur le mauvais usage de la théorie de Darwin dont je ne parle ici que pour bien expliciter la différence que je fais entre les *applications* des mathématiques et leur *implication* dans une entreprise intellectuelle. L'exemple le plus évident d'une telle implication est la doctrine phytagoricienne qui pose que « tout est nombre », on peut aussi penser à « que nul n'entre ici s'il n'est géomètre» et finalement au « livre du monde écrit en langue mathématique » ce qui nous ramène à la discussion sur l'application/implication des mathématiques dans les sciences discutée au chapitre précédent.

Dans ce paragraphe je vais expliquer comment je pense que les mathématiques s'impliquent dans le fondement de ce que j'appelle l' "idéologie de l'expert". Commençons par définir cette dernière. On trouve dans Wikipedia à l'entrée *idéologie* (en juin 2013) :

> Pour **Karl Marx**, l'idéologie est l'ensemble des idées, des valeurs et des normes servant à légitimer la division en classes de la société. L'idéologie au sens marxiste décrit donc l'idéologie dominante en tant que vision du monde imposée par la classe dominante. C'est la construction intellectuelle

> qui expliquerait et justifierait un ordre social existant à partir de raisons naturelles ou religieuses. Cette vision ne serait en réalité qu'un voile destiné à cacher la poursuite d'intérêts matériels égoïstes que la classe dominante utiliserait pour renforcer ou étendre sa domination : ainsi pour renforcer le pouvoir en place, l'idéologie de la classe dominante se présenterait de manière à ce que les intérêts de la classe dominante paraissent être les intérêts de tous. L'idéologie devient une superstructure de la société dont elle émane et qu'elle soutient.

Cette vision de l'idéologie de Wikipedia attribue à Marx me semble tout à fait satisfaisante mais je conçois qu'on ne partage pas le point de vue de l'encyclopédie participative sur la lutte des classes, aussi contentons nous de dire que, contrairement à une philosophie qui est un système de pensée qui ne dissimule pas ses objectifs, une idéologie a tendance à cacher ses buts ultimes. Une idéologie est autoritaire et manipulatrice là où au contraire une philosophie essaye de mettre en lumière toutes les objections possibles.

J'appelle "idéologie de l'expert", l'idéologie qui prétend remplacer le débat démocratique par l'avis de l'expert. Voici un exemple contemporain de sa façon de fonctionner.

Commençons par une citation de l'accroche de l'émission *L'économie en question.* sur le site de France Culture [204],

> Chaque samedi de 11h à 12h, quatre économistes, professeurs d'économie et/ou chercheurs parmi les plus reconnus, viennent débattre autour de Dominique Rousset des sujets qui ont fait l'actualité économique de la semaine, en France et dans le monde. Pour éclairer ces sujets par la confrontation de leurs analyses, pour les rapporter le plus souvent possible à la théorie économique ou à l'histoire de la pensée économique, pour anticiper les prochaines évolutions. Dans une période particulièrement importante pour l'économie mondiale, les grands enjeux, qu'il s'agisse de la régulation de la finance internationale, de l'avenir de l'industrie, des questions environnementales, de l'emploi et du marché du travail ou de l'économie de la connaissance sont tous abordés. Ces tables rondes réunissent ou opposent de façon très régulière Patrick Artus, Philippe Askenazy, Nicolas Baverez, Elise Huillery, Philippe Martin, Jacques Mistral, Olivier Pastré, Dominique Plihon, Xavier Timbeau, David Thesmar. D'autres économistes viennent les rejoindre et

204. Site de France Culture, année 2014, *l'économie en question* le samedi de 11h à 12h émission de Dominique Rousset

> apporter leur *expertise*[205] sur des thèmes dont ils sont spécialistes, quand l'actualité le demande.

et maintenant allons sur Google voir ce que Wikipedia nous dit[206] de ces "experts".

> *Patrick Artus* (né le 14 octobre 1951) est un économiste français, directeur de la recherche et des études de **Natixis** qui a en particulier travaillé sur les nouvelles stratégies boursières des entreprises. *Natixis* est la **banque de financement et d'investissement** du groupe B.P.C.E., issu de la fusion des groupes Caisse d'Épargne et Banque populaire.
>
> *Philippe Askenazy*, né le 22 octobre 1971, est un économiste français, directeur de recherche au C.N.R.S., chercheur à l'École d'économie de Paris, et docteur de l'École des hautes études en sciences sociales. A été **chroniqueur dans "Les Echos"**. *Les Échos*, fondé en 1908, est un quotidien français d'information économique et financière, propriété du Groupe Les Échos, pôle médias du groupe L.V.M.H. **D'orientation libérale** et imprimé en France (...).
>
> *Nicolas Baverez*, né le 8 mai 1961 à Lyon et avocat depuis 1998, est un essayiste français. Normalien de la rue d'Ulm (promotion 1980) et énarque (promotion Michel de Montaigne, 1988), il est également docteur en histoire et agrégé de sciences sociales. De 1995 à 1998, il occupe chez **Fimalac le poste de directeur de la communication et du développement** . En 1998, il rejoint le barreau de Paris et devient associé chez Brandford-Griffith & Associés, en charge de l'activité de droit public économique (...) *Fimalac*, ou Financière Marc Ladreit de Lacharrière **est une société holding**, fondée et dirigée par le milliardaire Marc Ladreit de Lacharrière.
>
> *Jacques Mistral*, né le 22 septembre 1947, est un économiste français, et professeur des universités. Il est membre du Conseil d'analyse économique (CAE), membre du Cercle des économistes, et, depuis octobre 2009, membre du conseil scientifique et d'évaluation du **think tank de centre-droit** et d'orientation libérale Fondation pour l'innovation politique.(...) Entre temps il exerça en entreprise, comme **directeur central du *Groupe AXA***, notamment directeur opérationnel pour la zone Asie-Pacifique, directeur des res-

205. Souligné par moi LB..
206. Les mots soulignés en gras le sont, là aussi, par moi LB.

sources humaines (France), directeur plan-budget-résultats AXAFrance de 1992 à 2000.

Olivier Pastré, né le 15 décembre 1950 à Neuilly-sur-Seine (Hauts-de-Seine, Île-de-France), est un économiste français, professeur d'économie à l'université de Paris VIII, **président de la *banque d'affaires I.M.M. Bank*** (Tunis) (International Maghreb Merchant Bank), et membre du Cercle des économistes.

Dominique Plihon est professeur d'économie financière à l'université Paris XIII et participe à l'édition de plusieurs revues. *Militant altermondialiste*, il est par ailleurs **président du conseil scientifique de l'association *Attac*.**

David Thesmar est un **économiste libéral** français né le 3 juillet 1972. Il est membre du *Cercle des économistes* et chroniqueur au quotidien français Les Échos.

À l'évidence, les «quatre économistes, professeurs d'économie et/ou chercheurs» invités à chaque émission ne sont pas que cela ! Certaines personnes s'en étaient émues et avaient provoqué une petite polémique. Dominique Rousset s'en était défendue sur les ondes en affirmant que ses invités l'étaient en tant que professeurs et/ou chercheurs et que peu nous importait si par ailleurs ils pratiquaient telle ou telle activité. Elle avait laissé entendre qu'à l'avenir il y aurait plus d'informations sur le CV des participants mais ce ne fut pas suivi d'effet. Peut être que les pressions sont fortes.

Ce que nous retiendrons de cette émission c'est 1) *La* théorie économique (le "la" est dans l'accroche) est là pour nous éclairer sur les grands problèmes du moment, 2) que des experts (ceux qui connaissent "la" théorie en question) nous aident à mieux comprendre. *Rien de politique dans tout ça* ! A la rigueur on vous concédera (car ces gens ne sont pas des idiots, j'écoute même avec plaisir cette émission que je trouve intéressante) que c'est effectivement politique mais que l'émission est pluraliste et que les diverses "sensibilités" de l'économie sont respectées, ce que je veux bien croire encre que, à première vue un seul membre de la liste semble appartenir au courant étérodoxe, mais je ne suis pas "expert" moi !).

En revanche que le débat politique sur les importantes questions de « régulation de la finance internationale, de l'avenir de l'industrie, des questions environnementales, de l'emploi et du marché du travail ou de l'économie de la connais-

sance » soit monopolisé (sur France Culture) par des "experts de la théorie économique" pose problème. Où est le débat démocratique dans tout ça ? Après tout il ne serait pas inintéressant d'avoir une émission hebdomadaire qui inviterait les experts en "travail humain" que sont les syndicalistes, les médecins du travail et les responsables de petites entreprises à débattre de ces mêmes questions. Ce serait une émission intéressante et digne de France Culture.

L'idéologie de l'expert est évidemment là pour aider à faire sortir du champ de la discussion politique les sujets qui dérangent. Les exemples abondent : experts en nucléaire, experts en construction de l'Europe, climatosceptiques qui se réclament de leur expertise en géologie, experts en santé publique qui travaillent pour les firmes pharmaceutiques, laboratoires publics de l'INRA qui passent des contrats avec l'industrie agro-alimentaire et donnent des avis etc... et, heureusement, il y a beaucoup de discussions sur ces questions. Reconnaissons aussi que mener un débat démocratique dans des contextes où les connaissances scientifiques jouent un rôle décisif n'est pas facile. Au delà de toutes considérations, les ingénieurs du C.E.A. sont certainement de très bons connaisseurs des problèmes de sécurité nucléaire, sinon les meilleurs. Ainsi je ne critique pas directement Dominique Rousset qui me semble être une journaliste compétente, mais que les dirigeants de France Culture obligent probablement à respecter un certain style ; lesquels dirigeants font peut être eux aussi la part du feu pour obtenir du gouvernement les moyens financiers nécessaires à une radio de service public capable de faire parler pendant deux heures et demie (émission "à voix nue") des personnalités aussi variées que Alain Krivine, François Jacob, Georges Moustakis, Dominique Rocheteau ou Jean-Marc Lévy-Leblond.

Je ne cherche pas à expliquer les origines de l'idéologie de l'expert [207]. Je me contente de constater qu'elle existe et se développe au moins depuis la fin de la seconde guerre mondiale et qu'elle a définitivement supplanté dans notre pays les idéologies communiste et anti-communiste qui s'affrontaient pendant la guerre froide.

Mais il ne semble pas, m'objecterez vous, que les mathématiciens, surtout les "purs" soient invités souvent à se prononcer en tant qu'experts. Dans les tribunaux il y a des experts assermentés de toutes sorte. Pas d'expert mathématicien. Quoi de moins sollicité que l'expertise mathématique ? C'est vrai. Mais en réalité, au

207. Ce que je viens de décrire comme l'*idéologie de l'expert* est très proche de ce qu'on désigne souvent comme le *scientisme*. Toutefois, bien que scientisme soit généralement une expression péjorative, on peut nuancer ; ainsi on peut, par exemple, soutenir avec de bons argument que le scientisme de Jules Vernes dans *l'Ile mystérieuse* est positif. C'est pour qu'il n'y ait pas de risque d'ambiguïté que je préfère *idéologie de l'expert* : cette dernière ne saurait rien avoir de positif.

moins dans la période qui nous concerne, les années 1980, les mathématiciens ont une fonction plus importante mais non officielle, pour ne pas dire secrète : Ils n'agissent pas directement en tant qu'experts mais *participent au fondement de l'idéologie de l'expert*. Voyons.

Comment justifie-t-on l'argent que les mathématiciens coûtent à la société ? Je ne parle pas ici des professeurs de lycée et collège dont le rôle est évident, je parle des quelques milliers de chercheurs en mathématiques français, dans leur quasi totalité fonctionnaires dans un grand établissement de recherche ou une université. Que font-ils pour mériter leur salaire ? Officiellement ils sont payés :

1. pour former les professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire (fonction importante des universités) ;
2. pour participer à la formations des ingénieurs dans les écoles d'ingénieurs et à l'université ;
3. pour participer à la création d'objets à haute valeur technologique, par exemple :
   — fournir des codes de cryptage pour la protection des données informatiques,
   — fournir un cadre théorique pour résoudre des problèmes d'imagerie médicale,
   — fournir des outils de calcul pour améliorer le profil des ailes d'avions,
   — etc...
4. pour aider les recherches dans d'autres disciplines (assurer la "sécurité du raisonnement") ;
5. pour faire de la recherche en mathématiques ;

et peut être quelques autres activités honorables que j'oublie ici.

S'il a une vision à peu près claire des quatre premiers points, le contribuable ne comprend pas très bien le dernier. Sa tendance naturelle serait de penser que tout a été trouvé en mathématiques et qu'il n'est pas très raisonnable de consacrer de l'argent à de telles recherches. Et dans une certaine mesure il n'a pas tort : à l'exception de celles qui interviennent dans la conception des outils informatiques (ce qui n'est quand même pas rien !), toutes ces "mathématiques appliquées" qui sont utilisées par les ingénieurs qui fabriquent ces objets à haute valeur technologique qui nous entourent sont essentiellement des mathématiques inventées au XIX ème siècle. Or, si l'on peut admettre que le contribuable a gardé une certaine curiosité intellectuelle et qu'il est prêt à mettre quelques sous dans des études hautement spéculatives il n'en est certainement pas de même du système économique

neo-libéral qui gouverne le monde. Dans une économie libérale le retour sur investissement doit être rapide ! Comme ce n'est pas le contribuable qui décide du nombre et du salaire des mathématicien mais le système libéral au pouvoir comment expliquer ce traitement de faveur dont bénéficiaient les mathématiciens dans les années 1970-1980 [208] ? Je le répète : c'est parce qu'ils participent au fondement de l'idéologie de l'expert.

En effet dans l'esprit du public les mathématiques ont une position particulière que nous révèlent les quelques citations suivantes extraites du *Petit Larousse illustré* dans son édition de 1980.

— **MATHÉMATIQUES** : Disciplines étudiant par le moyen du raisonnement déductif les propriétés des êtres (nombres, figures géométriques...) ainsi que les relations qui s'établissent entre eux. *Mathématiques élémentaires*, ancien nom de la *terminale C.//Mathématiques spéciales* classe de préparation aux concours des grandes écoles scientifiques.// *Mathématiques supérieures* classe de préparations aux mathématiques spéciales.

— **MATHÉMATIQUEMENT** : Selon les règles mathématiques.// Avec une exactitude rigoureuse, inévitablement.

— **MATHÉMATISER** : Introduire dans un domaine les méthodes mathématiques (lois, concepts, formalisation) : *Mathématiser une théorie économique*.

En 1980 internet n'existe pas et l'on consulte encore les dictionnaires. Donc quoi de mieux qu'un "petit" dictionnaire pour envoyer des messages subliminaux. On peut penser que les jeunes cervelles qui les lisaient n'y voyaient pas malice. Ainsi, de même que certaines morales se prétendent justifiées par les commandements de Dieu, l'idéologie de l'expert se réclame des mathématiques. Je détaille :

1. Les mathématiques disent la Vérité (*ce qui est rigoureux, ce qui est inévitable*).
2. Il est difficile d'être mathématicien, il faut faire math elem., puis maths sup., puis math spé., pour pouvoir rentrer dans une grande école (*les bons experts sont issus des grandes écoles*).
3. Les théories qui, *comme l'économie*, sont mathématisées, disent donc la vérité (*sur comment va le monde*).

208. Je me limite à cette période qui est celle qui nous intéresse et je précise tout de suite que je ne sais pas si ce que je vais dire pour cette époque est encore pertinent aujourd'hui. Mais c'est une autre question.

La cause est entendue : dans les années 1980, une des fonctions, cachée mais importante, des mathématiques est de fonder l'idéologie de l'expert et plus particulièrement la science économique qui à son tour prétend justifier scientifiquement l'ultra-libéralisme économique. Or, nous l'avons vu, rien n'est moins scientifiquement solide que la *Théorie de la valeur* un des piliers de l'économie mathématisée. Une telle mystification ne peut pas être possible sans un minimum de complicité des acteurs, donc des économistes, mais ce n'est pas eux qui m'intéressent, et de la communauté mathématique elle même à pourrait largement s'étendre la critique de P. Bourdieu dans un article au *Monde Diplomatique* [209] :

> Sans partager nécessairement les intérêts économiques et sociaux des vrais croyants, les économistes ont assez d'intérêts spécifiques dans le champ de la science économique pour apporter une contribution décisive, quels que soient leurs états d'âme à propos des effets économiques et sociaux de l'utopie qu'ils habillent de raison mathématique, à la production et à la reproduction de la croyance dans l'utopie néolibérale. Séparés par toute leur existence et, surtout, par toute leur formation intellectuelle, le plus souvent purement abstraite, livresque et théoriciste, du monde économique et social tel qu'il est, ils sont particulièrement enclins à confondre les choses de la logique avec la logique des choses.(...)
>
> Confiants dans des modèles qu'ils n'ont pratiquement jamais l'occasion de soumettre à l'épreuve de la vérification expérimentale, portés à regarder de haut les acquis des autres sciences historiques, dans lesquels ils ne reconnaissent pas la pureté et la transparence cristalline de leurs jeux mathématiques, et dont ils sont le plus souvent incapables de comprendre la vraie nécessité et la profonde complexité, ils participent et collaborent à un formidable changement économique et social qui, même si certaines de ses conséquences leur font horreur (ils peuvent cotiser au Parti socialiste et donner des conseils avisés à ses représentants dans les instances de pouvoir), ne peut pas leur déplaire puisque, au péril de quelques ratés, imputables notamment à ce qu'ils appellent parfois des « bulles spéculatives », il tend à donner réalité à l'utopie ultraconséquente (comme certaines formes de folie) à laquelle ils consacrent leur vie.

209. Le *Monde Diplomatique* du mois de mars 1998.

7.3 ··· et ce qu'en pensent les mathématiciens.

En dehors de quelques sites militants "anti économie libérale" où quelques mathématiciens s'expriment il n'y a pas beaucoup de réflexion sérieuse sur le thème : "les mathématiques servent-elles à cautionner le système idéologique au pouvoir ? ", du moins si l'on exclut tout ce qui a été écrit sur la "sélection par les mathématiques" qui est une question proche mais un peu différente. Comme je l'ai fait à propos de la guerre, je vais examiner quelques positions de mathématiciens sur l'idée qu'ils se font du rôle des mathématiques et d'eux même dans la société. Toujours autour des années soixante-dix, et toujours à la recherche de quelque explication de l'affaire de l'A.N.S.

7.3.1 Grothendieck et le mouvement "Survivre"

A tout seigneur tout honneur ! Le mouvement "Survivre" que Grothendieck a créé avec quelques autres (et notamment les mathématiciens C. Chevalley, R. Godement et P. Samuel) en 1970 est considéré comme un des précurseur des mouvements écologistes radicaux mais je ne vais pas l'analyser dans toute sa dimension. Pour une mise en perspective de ce mouvement dans le contexte des années post-soixante-huit on pourra lire le travail très bien documenté de Céline Pessis, *Les années 1968 et la science Survivre ... et Vivre, des mathématiciens critiques à l'origine de l'écologisme*[210]. Moi je vais me concentrer sur un seul texte, attribué à Grothendieck, publié dans le n° 9 de la revue Survivre (aout-septembre 1971)[211]. C'est un texte assez court (10 pages dans l'édition du Seuil) intitulé *La nouvelle église universelle*. J'en cite de larges extraits.

> La méthode expérimentale et déductive, depuis quatre cents ans de succès spectaculaires, augmente sans cesse son impact sur la vie sociale et quotidienne, et par suite, jusqu'à une date récente, son prestige.
>
> En même temps, à travers un processus « d'annexion impérialiste » qui devrait être analysé de façon plus serrée, la science a créé son idéologie propre,

210. Mémoire en Sciences Sociales Mention Histoire des sciences, technologies et sociétés EHESS-Centre A. Koyré 2008-2009.

211. Le texte est signé "La direction". Il a été repris dans :

— *Pourquoi la mathématique*, R. Jaulin éditeur, Union Générale d'Édition, 1974.

— *(Auto)critique de la science* J-M. Lévy-Leblond et A. Jaulin eds. Seuil,1975.

Il est attribué par R. Jaulin à Grothendieck. Je reprends à mon compte cette attribution même si elle est peut être inexacte. Cela n'a pas d'importance car il ne fait aucun doute que Grothendieck a participé de façon essentielle à sa rédaction et qu'il le revendique dans son intégralité.

> ayant plusieurs des caractéristiques d'une nouvelle religion, que nous pouvons appeler le *scientisme*.

Ce que j'ai appelé "idéologie de l'expert" est évidemment très proche de ce que Grothendieck entend par "scientisme".

> Ce pouvoir, principalement pour le grand public, tient au prestige de la science, lui-même dû à ses succès. Le scientisme est maintenant fermement enraciné dans tous les pays du monde, qu'ils soient capitalistes ou dits socialistes, développés ou en voie de développement (à d'importantes restrictions près pour la Chine). Il a de loin, supplanté toutes les religions traditionnelles. (...)

Après un court développement il conclut :

> (...) Ceci rend compte de certaines des caractéristiques du scientisme comme religion. En tant que telle, il est tout aussi irrationnel et émotionnel dans ses motivations, et intolérant dans sa pratique journalière, que n'importe laquelle des religions traditionnelles qu'il a supplantées. Bien plus, il ne se borne pas à prétendre que seul ses propres mythes soient vrais ; il est la seule religion qui ait poussé l'arrogance jusqu'à prétendre n'être basée sur aucun mythe quel qu'il soit, mais sur la Raison seule,(...)

Les scientifiques sont directement mis en cause :

> Aux yeux du grand public, les prêtres et les grands prêtres de cette religion sont les scientifiques, au sens large, plus généralement les technologues les technocrates, les experts. (...)
>
> L'immense majorité des scientifiques est tout à fait prête à accepter ce rôle de prêtres et de grands prêtres de la religion dominante d'aujourd'hui. (...)

Après cette introduction le texte décrit le "dogme" sur la base de six mythes que je cite in extenso. Chaque mythe est accompagné d'un commentaire plus ou moins long que je ne reproduit pas.

> Il n'existe pas de dogme écrit explicite du scientisme auquel nous puissions nous référer. Cependant, bien qu'il ne soit formulé explicitement, un tel dogme existe implicitement et il est tout à fait précis, tout particulièrement parmi les scientifiques. Nous allons faire un essai de formulation de ce qu'on peut appeler le credo du scientisme, compris comme une collection de mythes principaux. (...)
>
> **Le crédo du scientisme.**

Mythe 1 Seule la connaissance scientifique est une connaissance véritable et réelle, c'est-à-dire, seul ce qui peut être exprimé quantitativement ou être formalisé, ou être répété à volonté sous des conditions de laboratoire, peut être le contenu d'une connaissance véritable. La connaissance « véritable » ou « réelle », parfois aussi appelée connaissance « objective», peut être définie comme une connaissance universelle, valable en tout temps, tout lieu, et pour tous, au-delà des sociétés et des formes de cultures particulières.
Commentaires :(...)

Mythe 2 Tout ce qui peut être exprimé de façon cohérente en termes quantitatifs, ou peut être répété sous des conditions de laboratoire, est objet de connaissance scientifique et, par là même, valable et acceptable. En d'autres termes, la vérité (avec son contenu de valeur traditionnel) est identique à la connaissance, c'est-à-dire identique à la connaissance scientifique.
Commentaires :(...)

Mythe 3 Conception « mécaniste », ou « formaliste », ou « analytique » de la nature : le rêve de la science. Atomes et molécules et leurs combinaisons peuvent être entièrement décrits selon les lois mathématiques de la physique des particules élémentaires ; la vie de la cellule en termes de molécules ; les organismes pluricellulaires en termes de populations cellulaires ; la pensée de l'esprit (comprenant toutes les sortes d'expérience psychique) en termes de circuits de neurones, les sociétés animales et humaines, les cultures humaines, en termes des individus qui les composent. En dernière analyse, toute la réalité, comprenant l'expérience et les relations humaines, les événements et les forces sociales et politiques, est exprimable en langage mathématique en termes de systèmes de particules élémentaires, et sera effectivement exprimée ainsi dès que la science sera assez avancée. A la limite, le monde n'est qu'une structure particulière au sein des mathématiques.
Commentaires :(...)

Mythe 4 Le rôle de l'expert : la connaissance, tant par son développement que pour sa transmission par l'enseignement, doit être coupée en de nombreuses tranches ou spécialités : d'abord en larges champs tels que les mathématiques, la physique, la chimie, la biologie la sociologie, la psychologie, etc. qui sont encore subdivisés ad libitum, à mesure que la science avance. Pour n'importe quelle question appartenant à un domaine donné, seule l'opinion des experts de ce domaine particulier est pertinente ; si plu-

> sieurs domaines sont concernés, seule l'opinion collective des experts de tous ces domaines l'est.
>
> Commentaires :...
>
> **Mythe 5** La science et la technologie issue de la science peuvent résoudre les problèmes de l'homme, et elles seules. Ceci s'applique également aux problèmes humains, notamment aux problèmes psychologiques, moraux, sociaux, et politiques.
>
> Commentaires : Ceci conduit logiquement au...
>
> **Mythe 6** Seuls les experts sont qualifiés pour prendre part aux décisions, car seuls les experts savent.
>
> Commentaires :(...)

Tout ce que j'ai dit à propos du "roman mathématique" que constitue la *théorie de la valeur* et de ce que j'ai appelé l'idéologie de l'expert peuvent clairement se réclamer de ce texte mais je n'en recherche pas pour autant la caution. Si je l'ai si largement cité c'est pour, en dehors de la sympathie qu'il m'inspire, évoquer l'accueil qu'il a reçu chez les mathématiciens.

On constate que ce texte, si l'on veut bien se souvenir de l'ambiance post mai-68 de l'époque, n'est pas particulièrement violent. De plus, les commentaires que je n'ai pas cités en adoucissent fortement quelques aspects manichéens. Rien d'extraordinaire donc dans ce manifeste qui paraît un an après le petit scandale du congrès de Nice. Au même moment Grothendieck proposait, comme le voulait le règlement, à E. Wolff, Administrateur au Collège de France, son projet de cours pour l'année à venir. Ce projet comprenait deux parties :

— La première une « discussion, avec la participation de tous les auditeurs intéressés, de thèmes non techniques liés par le titre général suivant : Science Et Technologie Dans La Crise Évolutionniste Actuelle : Allons-Nous Continuer La Recherche Scientifique ?» [212],

— la seconde sur la «Théorie de Dieudonné des Groupes de Barsotti -Tate».

Les projets de cours au Collège de France devaient être approuvés par un vote de l'ensemble des professeurs, vote purement formel et acquis d'avance puisque la plupart étaient incompétents pour juger le contenu proposé par le collègue. Encore fallait-il respecter une règle implicite : le cours devait porter sur la spécialité scientifique de son porteur. En proposant pour la première partie de son cours une

212. Survivre n°9

discussion sur des questions d'éthique Grothendieck sait parfaitement qu'il sort des clous. Dans la discussion animée qui précéda le vote il ne fut pas particulièrement soutenu par les mathématiciens. Je le cite [213] :

> J. P. Serre, mathématicien, qui avait fait la proposition de ma nomination au poste de professeur associé et à mon renouvellement pour une deuxième année, à la fois visiblement excédé et très gêné vis à vis de ses collègues, se considérait comme partiellement responsable des complications causées par ma présence au Collège de France ; comme excuse, il indique qu'aux moments où il avait fait ces deux propositions, rien ne permettait de prévoir mon évolution future (que manifestement il déplore).(...)
>
> Je me trouvais placé dans l'Assemblée à côté de J. Leray et A. Lichnerowisz, mathématiciens tous deux. J. Leray était visiblement ému, insistant que « ces sujets sont trop importants pour qu'on ait le droit de se tromper en en parlant — et livré à vos seules lumières, vous êtes sûr de vous tromper ! ». C'est en ces termes qu'il m'exhortait à renoncer à traiter ces questions dans mon cours de mathématiques, pour m'associer plutôt à un séminaire interdisciplinaire qui serait placé sous le patronage de plusieurs professeurs au Collège de France.
>
> Lichnerowicz abondait dans le même sens, visiblement perplexe ; j'avais l'impression qu'il sentait bien que « du nouveau » était en train de se préparer, et ferait irruption fatalement tôt ou tard, y compris au Collège de France, et quel inconvénient il y aurait que ce soit un vote formel de l'Assemblée qui exclue des amphithéâtres du Collège de France, la libre discussion de certains des problèmes les plus brûlants de notre temps, directement liés à la science qu'on y enseigne. Il a préféré ne pas intervenir dans la discussion, et n'a pas pris oralement de position très nette pour ou contre mon projet.

Grothendieck ne visait pas particulièrement la responsabilité du mathématicien mais celle du scientifique en général. Cependant il ne voulait pas que sa responsabilité personnelle soit noyée dans un débat général et "mou" sur "science et société" comme en témoigne ce passage du débat sur le cours.

> «Aussi je fus obligé d'expliquer que mon but n'était pas de créer une nouvelle spécialité au Collège de France, fût-elle interdisciplinaire, mais bien d'intégrer à l'avenir (que ce soit au Collège ou ailleurs) mon enseignement mathématique avec des perspectives critiques sur le rôle social de la science

213. Survivre n°9

> que j'enseigne, et de la science en général — et que j'espérais ce faisant inciter d'autres universitaires à faire de même.

Après un vote séparé le cours sur la Théorie de Dieudonné des Groupes de Barsotti-Tate est accepté et la proposition de cours sur la responsabilité du savant est écartée (32 non, 9 oui, 1 abstention, 1 nul). Ce cours ne bénéficiera donc pas du label officiel Collège de France.

Un an plus tard Grothendieck n'était pas nommé à un poste permanent au Collège comme il avait été plus ou moins prévu puis, après une année sur un poste temporaire à Orsay, il intégrait l'université de Montpellier et se retirait du monde de la recherche.

Nous l'avons vu, *Survivre* n'a pas été créé par Grothendieck seul, d'autres, en particulier des mathématiciens, y ont participé. J'extrais du mémoire de Céline Pessis, [214] la courte citation suivante :

> Suite à sa remise en cause personnelle [215], Grothendieck se tourne vers le milieu le plus proche de lui, ses amis et collègues Bourbaki. Un temps proche de L. Schwartz, il trouvera un soutien en C. Chevalley et R. Godement, puis en P. Samuel. De sensibilité pacifiste et frappés par l'esprit libertaire de la révolte étudiante, C. Chevalley et P. Samuel embrassent les préoccupations non-violentes de Survivre. R. Godement a présidé à la naissance du groupe mais il s'en tient par la suite à une distance raisonnable. Il se proposera néanmoins, en relation avec Survivre, d'animer un séminaire Science et Société à la Faculté d'Orsay.

et je m'en tiendrai là, ce qui évidemment ne rend pas justice au rôle important joué par ces personnalités dans la dénonciation de la fonction idéologique des mathématiques [216] mais mon sujet n'est pas une analyse du rôle de la place des mathématiciens dans les événements de 1968 et leur suite.

7.3.2 Bourbaki

Bourbaki n'a jamais rien écrit sur ses positions éthiques. En avait-il et, si oui, quelles étaient-elle ? Il ne semble pas que des historiens se soient déjà emparés de

214. Voir note 210
215. Dans l'effervescence des mouvements de contestation Grothendieck a été traité de "mandarin". (LB)
216. par exemple le texte de P. Samuel *Mathématiques, latin et sélection des élites* dans *Pourquoi la mathématique*, R. Jaulin ed., Union Générale d'Édition, 1974 ; [63].

cette question, peut-être parce que les documents disponibles ne le permettent pas. En revanche plusieurs membres notoires de Bourbaki se sont exprimés, comme nous venons de le voir pour Chevalley, Godement, Grothendieck et Samuel, mais c'était très clairement en tant que citoyens, voire de mathématiciens, jamais au nom de Bourbaki dont ils semblaient peu se soucier à ce moment.

En revanche, J. Dieudonné et P. Cartier qui chacun à leur manière se sont identifiés à Bourbaki se sont exprimés sur ce thème.

J. Dieudonné qui a été l'infatigable animateur du groupe dès sa naissance, aimait s'exprimer sur les mathématiques et il n'était jamais très clair s'il parlait pour lui ou pour le groupe. Ainsi, nous pourrions dire que Dieudonné-Bourbaki a toujours affiché une "position à la Hardy" : « les mathématiques pures ne servent à rien, donc elles sont inoffensives, elles se développent *pour l' honneur de l'esprit humain*. » Quant à l'explication de leur "efficacité" voici ce qu'il en disait en 1948 [217] :

> Qu'il y ait une connexion étroite entre les phénomènes expérimentaux et les structures mathématiques, c'est ce que semble confirmer de la façon la plus inattendue les découvertes récentes de la physique contemporaine ; mais nous en ignorons totalement les raisons profondes, (...) et nous les ignorerons peut-être toujours.(...) La mathématique apparaît en somme comme un réservoir de *formes* abstraites – Les structures mathématiques –; et il se trouve – sans que l'on sache bien pourquoi – que certains aspects de la réalité expérimentale viennent se mouler en certaines de ses formes.

La position de Cartier-Bourbaki est plus complexe et documentée car, contrairement à la plupart de ses collègues mathématiciens, il s'exprime beaucoup sur les mathématiques. Dans le très long entretien qu'il a accordé à Marjorie Senechal pour le *Mathematical intelligencer* le 18 juin 1997,, il définit ce qu'il appelle *l'idéologie* de Bourbaki, qu'il tente de replacer dans "l'air du temps" :

> – **Cartier** : André Weil was fond of speaking of the *Zeitgeist*, the spirit of the times. It is no accident that Bourbaki lasted from the beginning of the thirties to the eighties, while the Soviet system lasted from 1917 to 1989. (...) The 20th century, from 1917 to 1989, has been a century of ideology, the ideological age.

217. *L'architecture des mathématiques*, dans "Les grands courants de la pensée mathématique, sous la direction de F. Le Lionnais [21], nouvelle édition, A. Blanchard, Paris (1960). Ce texte a été traduit en anglais et publié dans "The American Mathematical Monthly", Vol. 57, No. 4. (Apr., 1950), pp. 221-232.

> – **Senechal** : By ideology, do you mean the idea of a blueprint that can serve for all purposes and for all time ?
> – **Cartier** : A final solution. There are good reasons to hate that expression, but it was in the people's minds that we could reach a final solution.(...) Hilbert, I think, reflected this Zeitgeist. There is one recording of his voice ; in Constance Reid's book about Hilbert there is a floppy disk of it, a record of some speech that Hilbert gave in Germany in the thirties. It's very ideological. At the time Hilbert was aging and so his views were solidifying. If you put the manifesto of the surrealists and the introduction of Bourbaki side by side, as well as other manifestos of the time, they look very similar.
>
> (...) The stated goal of Bourbaki was to create a new mathematics. He didn't cite any other mathematical texts. Bourbaki is self-sufficient. Of course at the time the communists in the Soviet Union were claiming the same. We know now it was a lie, and that the leaders knew at the time they were lying. Certainly Bourbaki was not lying, but still, the spirit was the same. It was the time of ideology : Bourbaki was to be the New Euclid, he would write a textbook for the next 2000 years [218].

Il ne mentionne aucun cas où Bourbaki aurait pris position en tant que tel sur un problème de société et, sans même aller aussi loin, il note son peu d'attrait pour les mathématiques directement impliquées dans la physique.

> – **Senechal** : Was there a bias against physics, or did Bourbaki just not think about it ?
> – **Cartier** : Well, of course there was a strong bias against it, for most people.
>
> (...) A few years ago, in a discussion with André Weil, just after he published his own memoirs, I said, "You mentioned that in 1926 you were at Göttingen ... in 1926 something happened in Göttingen." And Weil asked, "What did happen in Göttingen ?" and I said "Oh ! Quantum mechanics !" And Weil said, "I don't know what that is." He was a student of Hilbert in 1926 and Hilbert himself was interested in quantum mechanics, Max Born was there,

218. Il est clair que ce que Cartier entend par "idéologie" n'est pas la même chose que ce que Wikipedia attribue à Marx. Autant l'"idéologie de l'expert" avance masquée, autant ce que Cartier entend par "idéologie" affiche ses propositions de "solution définitive" de façon tonitruante. Le parallèle qu'il fait entre l'U.R.S.S. et Bourbaki peut choquer mais, après tout il peut se le permettre, n'est-il pas un membre éminent du groupe ? Il est à noter que dans ces citations Cartier a une position résolument externaliste : ce ne sont pas des nécessités internes au développement des mathématiques qui ont conduit à la naissance et au développement de Bourbaki mais *l'air du temps* et il pousse très loin cette idée. C'est une position si rarement défendue par les mathématiciens qu'elle mérite d'être soulignée ici.

> Heisenberg was there, and others, but apparently André Weil didn't pay any attention to it (...).

Ce dédain affiché de l'usage des mathématiques en physique de deux des membres les plus éminents du groupe contraste avec l'indéniable influence du bourbakisme sur l'économie mathématisée. Cette implication du bourbakisme dans le développement de la "science économique" dans les années 1950-60 est analysée dans les termes suivants par Philip Mirowski dans, *L'irraisonnable efficacité des mathématiques en économie moderne* que j'ai déjà eu l'occasion de citer à propos de Debreu : [219]

> Même si les premiers économistes néoclassiques ont eu à cœur de faire valoir leurs compétences, réelles, dans le domaine des mathématiques, ce n'est qu'au bout de quatre-vingts ans que s'est fait sentir l'influence « philosophique » des mathématiciens de métier sur l'économie. Le contact avec la profession des mathématiciens fut établi à l'occasion de deux événements pas totalement indépendants : l'entrée à la Commission Cowles, dans les années cinquante, de cadres d'orientation bourbakiste d'une part ; et d'autre part, la diffusion, lente mais continue à partir des années quarante, de thèmes inspirés par von Neumann. (...)
>
> Il peut paraître curieux de voir l'austère doctrine « philosophique » de Bourbaki, célèbre pour avoir défendu la « pureté » des mathématiques, loin de toute idée d'application, s'introduire dans un contexte aussi inévitablement « appliqué » que celui de l'économie néoclassique – américaine qui plus est. L'histoire du bourbakisme aux États-Unis dans les années quarante, particulièrement à l'Université de Chicago, est bien documentée ; on sait moins que la Commission Cowles, qui s'est réunie à Chicago de 1938 à 1954, a servi de rampe de lancement au bourbakisme à l'intérieur de la profession des économistes.(...) En 1948 lorsque Tjalling Koopmans prit la direction des opérations, les chercheurs, qui avaient cherché à améliorer par des techniques statistiques l'évaluation empirique du modèle d'équilibre général de Walras, avaient été contraints d'abandonner l'idée d'une justification empirique de l'équilibre pour se concentrer sur la construction d'un modèle mathématique abstrait. Lorsque Gérard Debreu arriva en 1949 à la Commission, les chercheurs étaient donc prêts à accepter toute autre forme de justification « philosophique » à leurs travaux mathématiques. Debreu était élève de Henri Cartan, (...)

219. Rue Descartes, 2012/2 n° 74, p. 117-133. DOI : 10.3917/rdes.074.0117

Sur ce lien de Debreu avec Bourbaki voici ce que Till Düppe et E. Roy Weintraub nous en disent dans le livre *Finding Equilibrium : Arrow, Debreu, McKenzie and the Problem of Scientific Credit* :[220]

> The Debreu familly arrived in Chicago in August 1950. They where warmly welcomed. When his wife, Françoise, took the boat from France to the United States with her two babies, onboard she was recognized by Eveline Weil, the wife of the Chicago mathematician André Weil, one of the leading Bourbakists (and Brother of Simone Weil). Though she and Françoise had not been close in Paris, Eveline Weil had known the Debreus coming to Chicago, and the two women quikly became good friends. Their husbands would become closer, too. André Weil at Chicago since 1947, enjoyed having Debreu in Chicago as a university colleague with whoom he could speak both French and mathematics. Debreu also developped cordial relations with other Bourbakists at Chicago, such as Samuel Eilenberg, and Serge Lang. It was through Weil that he also remained in contact with members back in France such as Pierre Samuel, Jean-Pierre Serre, Jean-Louis Koszul, and later Laurent Schwartz.

Si nous acceptons que ces auteurs sont bien documentés nous devons admettre que beaucoup de membres de Bourbaki avaient connaissance du fondement bourbachique de *Théorie de la valeur*. Comment des bourbaki très engagés politiquement à gauche comme P. Samuel ou R. Godement ont-ils pu ignorer l'implication du bourbakisme dans une entreprise idéologique qu'ils désapprouvaient certainement : la promotion de l'économie de marché ? Bourbaki n'a certes jamais revendiqué l'extension de l'usage de sa méthode axiomatique à des théories économiques mais il n'a jamais non plus dit publiquement, haut et fort, qu'en tant que "théorie mathématique" *Théorie de la valeur* était une théorie de très peu de valeur. Ce silence assourdissant de Bourbaki, mais aussi des "guerrier de la science" si prompts à dénoncer quelques écarts de langage de philosophes, sur ce qui constitue quand même une des grosses impostures intellectuelles de l'après guerre, mériterait d'être étudié avec plus de soin que je ne le fais ici.

Il y a encore beaucoup à comprendre sur le célèbre mathématicien polycéphale.

220. Princeton University press, 2014 ; [48].

7.3.3 R. Thom

René Thom (1923-2002) a reçu la médaille Fields en 1958 pour ses travaux de géomètre. Il est lié à l'histoire de la réception de l'A.N.S. à deux titres : d'une part ill est strasbourgeois et a bien connu G. Reeb dont il ne partageait pas l'enthousiasme pour la théorie de Robinson ; d'autre part, sa "théorie des catastrophes" a, elle aussi, été au centre d'une sévère polémique dans les années 70-80.

La "théorie des catastrophes" est au départ une théorie mathématique. J'ai demandé à P. Duchemin de me la décrire en quelques mots. Voici ce qu'il m'a écrit :

> Il existe une théorie mathématique qui traite de la "stabilité" des applications d'un espace de dimension arbitraire dans un autre. Donnons une idée de ce que veut dire "stabilité". Intéressons nous aux deux fonctions $x \mapsto f(x) = x + x^3$ et $x \mapsto g(x) = x^3$ sur l'intervalle $[-1, +1]$. Toutes les deux s'annulent pour la valeur $x = 0$ et seulement pour elle ; c'est une propriété qualitative de f et g de s'annuler exactement une fois. Perturbons maintenant f et g en leur ajoutant la fonction $x \mapsto \alpha x$ et posons nous la question « est-ce que si l'on prend α assez petit cette propriété est conservée ?». La réponse est oui pour f et non pour g. Dans le cas de f la dérivée de $f(x) + \alpha x$ est $1 + \alpha + 3x^2$ qui est strictement positif si l'on prend $|\alpha| < 1$ et donc la fonction est strictement croissante, elle ne peut s'annuler qu'une fois. En ce qui concerne g on voit que si l'on prend α négatif, aussi petite que soit sa valeur absolue, la fonctions $g + \alpha x = x(\alpha + x^2)$ s'annule trois fois : pour $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{-\alpha}$. On dit que f est "structurellement stable" et que g ne l'est pas.
>
> Ce concept de "stabilité structurelle" est important en mathématiques et s'applique à des objets bien plus complexes que celui d'une fonction d'une variable. Etant donné un ensemble d'objets mathématiques (par exemple les équations différentielles de $\mathbb{R}^n$), chaque fois que l'on dispose d'une notion d'équivalence de deux objets (les trajectoires de deux systèmes différentiels s'échangent par changement de variable) et d'une notion de proximité (deux systèmes différentiels sont proches quand leurs second membres les sont) on dispose d'une notion de stabilité structurelle : L'objet X est structurellement stable si tous les objets Y voisins de X sont équivalents à X. Ainsi la classification des classes d'équivalence de systèmes dynamiques structurellement stables est elle un des chapitre important de la théorie des équations différentielles.

> Il est assez facile de dire quelles sont les fonctions d'une seule variable structurellement stables (ce sont celles qui ne s'annulent pas en même temps que leur dérivées), pas trop difficile de les décrire en dimension deux, et contre toute attente c'est encore possible en dimension plus grande, mais c'est alors très technique. C'est ce qu'on appelle la "théorie des singularités d'applications différentiables", théorie à laquelle Thom a largement contribué et qu'il a rebaptisée "théorie des catastrophes".

Il se trouve que :

1. le début de cette théorie (applications de $\mathbb{R}^2$ dans lui même) peut se vulgariser facilement auprès d'un public de scientifiques grâce à quelques dessins,
2. qu'elle a des exemples d'applications simples en mécanique et en optique,
3. que la classification des sept catastrophes élémentaires est un fait mathématique spectaculaire que peuvent apprécier les mathématiciens.

Les point 1) et 2) ne posent pas de problème aux mathématiciens qui, au contraire, y ont vu des exemples de mathématiques vulgarisables. Le point 3) a motivé Thom dans une entreprise beaucoup plus ambitieuse. Il a été inspiré par le livre du biologiste Darcy Thompson *On Growth and Form* [221] qui pensait que les biologistes avaient surestimé l'évolution au détriment des contraintes physiques dans l'explication des formes du vivant. Le livre de Thom *Stabilité structurelle et morphogénèse* [222] est à la fois une vulgarisation de la théorie mathématique et l'exposé d'une certaine philosophie de la représentation et de l'explication de l'évolution des formes principalement en biologie et en linguistique. A côté de Thom quelques scientifiques se sont enthousiasmés et l'on a vu fleurir, dans les années 1970-1980, des multitudes d'applications qui, pour l'essentiel, étaient des romans mathématiques au sens où je l'ai défini plus haut. En fait "théorie des catastrophes" joue sur la même ambiguïté du sens du mot "théorie" que "théorie de la valeur" à la différence que si son caractère de théorie scientifique est discutable elle est effectivement une théorie mathématique.

Thom lui même n'a pas caché le caractère très spéculatif de sa "théorie". Il écrit, en conclusion de son livre (pp. 325-326) :

> Ce n'est pas sans quelque mauvaise conscience qu'un mathématicien s'est décidé à aborder des sujets apparemment si éloignés des ses préoccupations

221. Cambridge University Press, Oxford, (1942), 1961 ; [117].
222. W.A. Benjamin, Inc. Massachusetts, 1972 ; [115].

> habituelles. Une grande partie de mes affirmations relèvent de la pure spéculation ; on pourra sans doute les traiter de rêveries... J'accepte le qualificatif ; la rêverie n'est-elle pas la catastrophe virtuelle en laquelle s'initie la connaissance ? Au moment ou tant de savants calculent de part le monde, n'est-il pas souhaitable que d'aucuns, qui le peuvent, rêvent ?

Toutefois le succès médiatique considérable de la "théorie des catastrophes" dû évidemment à son intitulé racoleur associé au fait que son auteur était un mathématicien de renom a énervé beaucoup de scientifiques. J'en donnerai deux exemples.

La première critique, très violente, provient de deux mathématiciens H. Sussmann et R. Zahler de Rutgers University qui ont publié, entre autres, *Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences : A critique* [223] et surtout, dans "Nature", *Claims and accomplishments of applied catastrophe theory* [224] d'où j'extrais :

> It may be said that catastrophe theory is a new theory and that, while all the applications proposed so far have serious flaws, each one has benefits that make if worthwhile. Our criteria for judging a theory (or method) are rather generous. Even if a theory rests on questionnable assumptions, or is based on faulty reasoning, or leads to false conclusion, or deals with ambiguous concepts, or does not make true testable predictions, we are ready to accept that it may be valuable, so long as it does not have all of these defaults at once.

La seconde critique que je mentionnerai vient de l'extérieur, c'est celle du physicien J-M. Lévy-Leblond dans *Des mathématiques catastrophiques* [225] que je cite :

> L'ampleur colossale et le caractère paradoxal du programme de Thom apparaissent alors. Il s'agit de fonder une nouvelle « philosophie naturelle » qui dépasserait l'ambiguïté et l'ésotérisme des sciences actuelles, en surmontant l'opposition des langages formels et naturels (telle qu'elle apparaît en physique). Or la théorie des catastrophes est, avant tout une théorie mathématique tout à fait particulière qui met à l'œuvre des concepts élaborés de géométrie et de topologie différentielles. On rencontre donc ici chez Thom, une contradiction incontournable : d'un côté il reconnaît la nécessité, pour

223. *Synthese*, vol37, pp 117-216 (1978) ; [114]
224. *Nature*, vol 269 pp759-763 (1977) ; [127].
225. *Critique*, Vol 33, pp 430-441 (1977) ; [72].

> comprendre la théorie des catastrophes, d'une « familiarité étendue » avec ces disciplines mathématiques, et souligne, dans la plus pure tradition élitaire, qu'il n'y a « qu'une science réellement difficile : c'est la mathématique », accessible aux seuls mathématiciens professionnels ; de l'autre, il critique l'ésotérisme croissant de la science moderne, son isolement, et assure que cette même théorie des catastrophes « seule (...) peut assurer à l'interdisciplinarité une base rigoureuse ».

Si Thom, qui était un grand amateur de polémiques, ne s'est pas privé de répondre à ces critiques, il ne s'est en revanche pratiquement jamais exprimé sur des questions éthiques [226] qui sont le sujet de ce chapitre et c'est paradoxalement la raison pour laquelle je l'y ai fait figurer. Nous verrons pourquoi. Retenons que deux grands mathématiciens font scandale, le premier pour ses prises de positions éthiques, le second sur des questions scientifiques.

7.3.4 D. Nordon

D. Nordon (1946-) sera probablement amusé de voir son nom suivre celui de deux géants des mathématiques mais sur ce sujet il n'est pas de petite voix et la sienne a été particulièrement éloquente. *Les mathématiques pures n'existent pas* publié en 1981 est très explicitement une réflexion éthique sur la place des mathématiques et du mathématicien dans la société française des années 1970. Nous avons déjà eu un aperçu de ses thèmes. Voici la citation qui s'impose ici :

> Une des principales fonctions dévolues aux mathématiques dans notre société est d'apparaître comme un ilot de pureté qui donne à une théorie un fondement d'autant plus objectif et dépourvu de préjugé – en un mot : scientifique – que la place faite aux mathématiques y est (ou y semble) plus grande. Montrer qu'il y a un aspect relatif et même social dans les mathématiques permet de voir que cette fonction dévolue aux mathématiques est

226. On trouve cependant, cité par D. Aubin dans *L'Institut des Hautes Études Scientifiques, la théorie des catastrophes et le chaos déterministe : Mathématiques, industrie et politique* dans *Les mathématiques dans la cité*, sous le direction de Marie-José Durand-Richard, Presses universitaires de Vincennes, 2006. :

> Lorsque j'ai créé la théorie des catastrophes, il y a une dizaine d'années, il ne m'est jamais venu à l'esprit que cette théorie pourrait recevoir une utilisation malfaisante. J'en suis moins sur aujourd'hui (...) mais s'il était à refaire, je referais ce chemin, étant donné que les possibilités d'application intéressante ou bénéfique peuvent contrebalancer les utilisations malfaisantes.

> idéologie, et non pas "imposée par la nature des choses". [227]

Son livre, qui se voulait ouvert à un large public, a été un succès comme en témoigne sa réédition. Mais qu'en a pensé la communauté mathématique ? Je n'ai pas trouvé de traces à ce sujet autres que ce que Duchemin m'en a dit : « Lobry a eu l'occasion de me parler de Nordon dont il était le collègue à Bordeaux dans les années 1970. D'après lui, à part quelques collègues amis, les mathématiciens avaient au mieux de l'indifférence, au pire du mépris, pour ses efforts. »

7.3.5 J-P. Aubin et le CEREMADE.

Le CEREMADE, Centre de Recherche en Mathématique de la Décision "affiche" clairement la couleur. Son objectif n'est certainement pas les mathématiques pures. Sa place ici est donc un peu marginale puisque j'ai décidé dans ce chapitre de m'intéresser aux "mathématiciens purs", pas aux mathématiciens qui revendiquent l'application des mathématiques. Cependant il n'est pas inutile de faire une petite parenthèse sur ce monde pour voir comment il appréhende la question de la mathématisation de l'économie.

Le CEREMADE nait en 1970 en plein essor des "mathématiques appliquées". Les "mathématiques appliquées" ne sont pas une génération spontanée mais en grande partie filles de Bourbaki. Le normalien J-L Lions avait pour directeur de thèse L. Schwartz, le fondateur du CEREMADE, J-P. Aubin avait pour maîtres J-L. Lions et L. Schwartz. Voici ce qu'il dit en 1996 de ses motivations [228] :

> Lorsque j'ai crée en 1970 l'UER de Mathématiques de la Décision et le CEREMADE de l'Université de Paris-Dauphine, je souhaitais faire œuvre originale et utile à notre pays afin de
> 1. développer en milieu universitaire de nouveaux domaines de motivation et d'application des mathématiques laissés en jachère ailleurs, tant au niveau de l'enseignement que de la recherche. Profitant du cadre de Dauphine, privilégier les mathématiques de la décision, qui englobent les mathématiques motivées par l'économie, la gestion et la finance, par des aspects des sciences cognitives et donc, dans une certaine mesure, de problèmes biologiques, par des aspects des sciences sociologiques et des sciences de l'homme. Bref, par les mathématiques motivées par l'évolution et la régulation des grandes organisations, particulièrement celles issues des sciences de l'homme et de

227. *Les mathématiques pures n'existent pas !*, Actes Sud 1993 p. 10 (Première édition 1981).
228. J-P. Aubin, *L'adieu au CEREMADE*, http ://lastre.asso.fr/aubin/ADIE-CER.pdf

> la société.
> 2. attirer des jeunes mathématiciens (...)

On remarque « les mathématiques *motivées* par l'économie » ; c'est une expression qu'on retrouve souvent dans les travaux d'Aubin qui, chez son auteur, s'oppose à "mathématiques appliquées". Ce ne sont plus les mathématiques qui imposent leurs vues mais la réalité qui "inspire" le mathématicien ; non pas, comme chez Hardy, la "réalité mathématique", mais la "réalité concrète". C'est la classique position où les mathématiques sont inspirées par le monde réel mais ici le monde réel déborde largement celui de la matière et inclut le monde vivant et social. Ce que ne dit pas cette citation mais qui était certainement dans l'esprit de l'inventeur de "CEREMADE" c'est que le "de la décision" fait écho chez les spécialistes à la "recherche opérationnelle" discipline mathématique, que Hardy aurait probablement trouvée d'une laideur insoutenable, qui s'est considérablement développée pendant la seconde guerre mondiale [229]. On remarque également « faire œuvre (...) utile à mon pays». La citation est extraite d'un texte où l'auteur explique les raisons qui lui font quiter le CEREMADE qui ne correspond plus en 1996 ce qu'il avait voulu.

> Pour que mon activité puisse être poursuivie au CEREMADE, comme l'a recommandé le dernier rapport du "comité scientifique du CEREMADE", il aurait fallu abjurer l'usage de l'analyse multivoque, me convertir aux E.D.P. et devenir un marrane scientifique. *Pourtant, utiliser à tout prix ces outils motivés par les sciences physiques pour résoudre des problèmes nouveaux issus des sciences du vivant conduit à fausser leur modélisation et pervertir leur résolution.*(...)
> *Mais aux yeux de son fondateur*, le Centre de Recherches de Mathématiques de la Décision de l'Université de Paris-Dauphine *tel qu'il était conçu est décédé à l'âge de 25 ans, après une agonie de 10 ans.*

Il est banal qu'après un quart de siècle le créateur d'une institution soit poussé plus ou moins humainement vers la sortie et que ce dernier en éprouve quelque amertume mais on voit ici, qu'au delà d'une affaire de personnes, ce sont bien des conceptions des mathématiques qui s'affrontent. J-P. Aubin, auteur de la "théorie mathématique de la viabilité" est un auteur prolifique qui a écrit de nombreux ouvrages abondamment cités ; son *Set valued analysis* avec A. Frankowska est cité près de 5000 fois, ce qui est considérable pour ce type d'ouvrage. Il s'est exprimé

229. Il s'agissait, par exemple, de déterminer les paramètres (trajectoire, taille des convois, positions relative des navires) permettant de minimiser les pertes sur les convois allant des Etats Unis en Grande Bretagne.

à plusieurs reprises sur sa conception de l'usage des mathématiques qui est assez proche de ce que j'ai appelé roman mathématique mais qu'il préfère appeler "métaphore mathématique" ; le travail et la pensée de J-P. Aubin mériteraient une plus longue analyse mais qui nous éloignerait trop de l'affaire Vénissac.

Le CEREMADE a accueilli et accueille encore de nombreuses personnalités mathématiques. L'une d'elle, I. Ekeland, est connue d'un large public pour ses livres sur les mathématiques et ses interventions souvent brillantes et toujours très pédagogiques devant de larges audiences. L'une d'elles, de 2000, porte sur *Mathématiques et économie*[230]. C'est le début de la "fronde" des étudiants en économie, il ne l'ignore pas. Il le rappelle dans son introduction, puis :

> Il me semble que la raison profonde de (...) l'incompréhension (...) des immenses progrès qu'ont accompli les sciences économiques, (...) tient au fait que les gens,(...), ne comprennent pas ce qu'est un Modèle. Par ce mot j'entends une représentation mathématique de la réalité et je vais passer toute la première moitié de cette conférence à expliquer cette notion : qu'est ce qu'un modèle et comment l'utiliser ?

Il consacre effectivement une bonne partie de la conférence à décrire une conception du "modèle" assez proche de la tradition "hypothético-déductive" :

> Dans quelle mesure peut-on dire qu'un modèle est vrai ? (...) pour ma part je me range volontiers sous la bannière du Cercle de Vienne et plus précisément de Karl Popper, selon lequel une théorie scientifique ne saurait être vraie qu'à titre provisoire, dans l'attente d'une réfutation que l'on s'ingéniera à susciter (...). On ne sait pas assez que le même critère de scientificité s'applique à l'économie. Construire un modèle n'est rien ;(...) Ce qui est difficile c'est de le(s) corroborer, c'est à dire d'en déduire le plus possible de conséquences logiques mais imprévues, et d'aller voir sur le terrain si elles sont vérifiées.
>
> C'est le rôle de l'économétrie de faire ce travail.

Donc pour Ekeland, l'ouvrage *Théorie de la valeur*, en tant que tel, n'est pas une "théorie" mais est susceptible de le devenir si ses conséquences sont confrontées à la réalité, rôle dévolu à l'économétrie ; il ne donne pas d'exemple d'une telle confrontation mais sa conférence ne porte pas spécialement sur l'ouvrage de Debreu. En revanche il détaille une confrontation explicite d'une prédiction de la théorie des jeux (très présente en économie) avec la réalité mais elle sort du domaine économique puisqu'il s'agit de la façon optimale de tirer ou recevoir un

230. Exposé dans le cadre de «l'Université de tous les savoirs» le 23 juin 2000 ; Odile Jacob 2002

pénalty au football ! [231]

231. C'est typiquement une situation de théorie des jeux qui a l'avantage d'être bien documentée ; l'observation de plusieurs centaines de tirs de pénalty corrobore effectivement un point de la théorie.

Chapitre 8

Thèse

Une dispute avortée.

Le point de départ de ce travail était de trouver une explication à un évènement particulier survenu dans la communauté mathématique française : une "dispute" dont je rappelle la teneur. Contre l'avis de quelques mathématiciens (dont certains de renom) une "commission des thèses" attachée aux universités de la région parisienne estimait insuffisant le travail d'un certain Vénissac pour en autoriser la soutenance. Mon enquête montre sans aucun doute possible que la commission s'est trompée. Les travaux en question sont maintenant reconnus et sont à l'origine d'une activité mathématique internationale significative. Les chiffres que j'ai rassemblés sont éloquents et incontestables. Ce point étant acquis comment expliquer les pratiques inacceptables de la commission ? S'expliquent-elles par des raisons extra-scientifiques telles que des inimitiés personnelles ou le corporatisme ? A part la personnalité clivante de Georges Reeb qui indisposait peut être quelques membres de la commission (mais certainement pas au point de commettre une injustice) rien ne permet d'imaginer des motifs crapuleux : le candidat n'était en compétition avec personne et c'est un peu par hasard qu'il était inscrit en thèse à Paris. Les membres de la commission étaient peut être sincères quand ils affirmaient que les méthodes utilisées par le candidat, celles de l'Analyse Non Standard, n'étaient pas conformes aux canons de la rigueur mathématique ; si tel est le cas, sur ce point ils retardaient un peu. La théorie de Robinson publiée de façon synthétique en 1966, l'article de Nelson de 1977 démontraient clairement la *légitimité* de l'utilisation d'infinitésimaux en actes à l'intérieur du système formel universellement pratiqué : la théorie des ensembles ; ce fait commençait à être reconnu autour de 1980 (affirmations de Dieudonné, séminaire Bourbaki de Cartier) et n'est maintenant plus jamais contesté. Aujourd'hui la controverse s'est déplacée et la seule chose qui se discute est celle de la *pertinence*. Le débat est loin d'être clos ; l'A.N.S. a trouvé un soutien de poids dans la personne de T. Tao (médaille Field 2006, prix Crafoord 2012) qui contrebalance les détracteurs "historiques" de poids comme P. Halmos (1916-2006) et A. Connes (médaille Field 1982, prix Crafoord 2001).

L'affaire de la thèse se situe donc dans le contexte des discussions et des controverses que suscitent naturellement, comme dans toutes les sciences, l'introduction de méthodes nouvelles. En mathématiques, tous les mathématiciens l'affirment, un consensus doit finir par se dégager non, comme l'affirme Kuhn dans *La structure des révolutions scientifiques*, par disparition naturelle des tenants de l'ancien paradigme, mais parce qu'il est de l'essence même des mathématiques qu'un accord doive se faire tôt ou tard.

C'est dans ce sens, je crois, qu'il faut comprendre l'affirmation abrupte de J. Dieudonné : « 95% des mathématiciens se moquent éperdument de ce que peuvent faire tous les logiciens et tous les philosophes. Cela ne les intéresse absolument pas. » Ceci ne doit pas être entendu comme un quelconque mépris pour l'interrogation de type philosophique mais comme le fait que tout simplement celle ci n'a pas sa place à l'intérieur des mathématiques de la même manière que les convictions de droite ou de gauche d'un chirurgien n'auront pas d'influence sur la précision de son coup de scalpel. En revanche les convictions politiques du médecin pourront s'affirmer dans le choix de ses interventions, par exemple préférer la médecine de brousse à des interventions de pointe avec du matériel sophistiqué et coûteux. En mathématiques aussi les positions morales peuvent avoir une influence sur le choix des mathématiques que l'on pratique, les choix de Hardy et de Von Neuman en témoignent. Il est probable que des convictions extra-mathématiques motivent les choix relativement à l'A.N.S. et nous avons cité plusieurs cas où ces convictions sont pleinement assumées. Mais la situation est beaucoup trop complexe pour que nous soyons capables d'en tirer une leçon. En effet nous avons vu que Edouard Nelson et Jacques Harthong se réclament, le premier du formalisme le plus rigoureux, le second d'un réalisme que ne désavouerait pas Alain Connes ; le *Constructivisme Nonstandard* de Jean-Michel Salanskis nous explique comment Reeb entendait s'appuyer sur les idées de Brouwer pour fonder les infinitésimaux. Le(s) sens philosophique(s) profond(s) de la (des) posture(s) sur l'A.N.S. reste(nt) dans une large mesure à élucider.

Pour conclure sur cette question de la résistance à l'introduction de l'A.N.S. dans la pratique mathématique je dirais qu'on observe un débat normal, avec quelques inévitables excès et des particularismes liés aux mathématiques, comme il s'en produit régulièrement dans le monde scientifique et sur l'existence duquel il n'y pas lieu de s'étonner.

Maintenant, ce qui pose problème ce sont les raisons pour lesquelles le débat qui commençait à se développer au début des années 1980 s'est brutalement arrêté. Pas du fait des partisans de l'A.N.S. Nous avons vu que ces derniers croyaient fermement en leurs thèses et se montraient très prosélytes. Ils cherchaient à s'exprimer devant tous les publics qui leurs étaient accessibles et l'on trouve de nombreuses traces écrites de leurs interventions [232]. En revanche, les adversaires, à part quelques grandes voix, ne s'exprimaient guère publiquement. L'opposition

232. Voir appendice B

était plus institutionnelle que scientifique. On refusait l'inscription sur les listes d'aptitudes et on s'opposait au recrutement de non standardistes sur la base d'arguments qui se voulaient scientifiques mais qui, destinés à des membres de commissions, restaient très confidentiels. L'affaire de la thèse en est la manifestation la plus extrême. Mais si les méthodes de la commission des thèses doivent être regardées comme un dévoiement inacceptable de "l'évaluation par les pairs" le corporatisme chez les mathématiciens ne semble pas plus développé qu'ailleurs. Par exemple on sait bien qu'en sciences économique les membres du courant dit "non orthodoxe" ont des difficultés à se faire recruter et on le sait parce que le débat entre les "orthodoxes" et les "non orthodoxes" est à la fois public et musclé. C'est bien là une grande différence différence avec les mathématiques.

La raison de ce "non-débat"public je pense finalement que c'est le rapporteur de *Et pourtant ils ne remplissent pas* $\mathbb{N}$*!* pour le prix d'Alembert qui nous la donne avec une certaine ingénuité. Je cite à nouveau [233] ses propos :

> (...) Mais parce que les mathématiciens français, et plus généralement les universitaires, ont assez de difficultés à plaider leurs causes financières et culturelles, pour que l'un d'entre eux ne vienne pas torpiller ces efforts en donnant des armes contre nous à ceux auprès de qui il faut plaider. C'est d'autant plus regrettable que le fond de son texte, son but central, étaient excellents.

En quoi la publicité autour de disputes chez les mathématiciens nuirait-elle à leur cause auprès des pouvoirs publics ? Ma réponse est : à cause du rôle dévolu aux mathématiques par l'idéologie de l'expert. Pour l'idéologie de l'expert les *mathématiques disent le vrai*. Certes aucun mathématicien n'acceptera de reprendre littéralement ce slogan à son compte et la seule chose qu'il acceptera d'assumer pleinement c'est que ses démonstrations mathématiques sont logiquement fondées et correctes. Ainsi dans la formulation : « Il est vrai que "la boule unité d'un espace de Banach est compacte pour la topologie faible" » les mathématiciens sont d'accord pour dire que ce qui est vrai c'est que la phrase entre guillemets est un théorème, une proposition démontrée de Z.F.C. Savoir si elle nous dit quelque chose de vrai sur le monde réel est une affaire qui est laissée au philosophe et au physicien. Nous l'avons vu, les mathématiciens sont très pointilleux sur ce point. Mais s'ils sont pointilleux lorsqu'on les interroge explicitement en revanche ils laissent largement l'ambiguïté s'installer dans la pratique de tous les jours.

Il ne s'agit pas uniquement d'une position hypocrite. Dans la discussion ordinaire avec un mathématicien il est fréquent que les choses soient claires sans

233. voir chapitre 4

que ce dernier ait besoin de préciser. Ainsi, par exemple, la phrase "les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point" a deux sens possibles. Elle peut être entendue au sens mathématique : "dans la géométrie d'Euclide on démontre que"... mais aussi au sens physique : "si l'on trace soigneusement les médianes d'un triangle sur une feuille de papier, aux imperfections inhérentes à toute entreprise humaine près, on voit qu'elles se coupent en un même point". La géométrie Euclidienne n'est donc pas qu'une théorie mathématique formelle, c'est aussi une excellente théorie de l'espace physique à notre échelle. Plus de deux mille ans de pratique de l'arpentage ou du dessin d'architecture nous en ont convaincu et ont créé dans notre esprit cette confusion entre ce qui est démontré [234] et ce qui rend bien compte de la réalité. C'est pourquoi quand on dit que les trois médianes d'un triangle se coupent on ne précise pas ce que l'on veut dire et c'est à l'interlocuteur de comprendre en fonction du contexte. Tout autre comportement serait considéré comme pédant.

Mais ce qui est vrai pour la géométrie élémentaire n'est pas transposable sans précaution à une théorie économique moderne. Nous avons vu que la "Théorie de la valeur" de G. Debreu est une théorie mathématique irréprochable, que ce que nous dit Debreu sur l'existence d'un équilibre dans une "économie de concurrence", au sens axiomatique du terme, est effectivement bien démontré. En revanche, ce que cela nous dit de vrai sur l'économie réelle est beaucoup moins évident. C'est en jouant habilement sur cette polysémie de "vrai" que l'idéologie de l'expert veut faire passer pour scientifiques ses choix politiques qui deviennent alors « mathématiquement inéluctables ».

Pour arriver à ses fins l'idéologie de l'expert a besoin d'une certaine forme de complicité des mathématiciens "purs". On ne leur demande pas d'approuver quoi que ce soit : on [235] leur demande simplement de se tenir publiquement les plus éloignés possible de toute réflexion philosophique sur leur pratique et surtout de ne pas faire étalage de leurs désaccords quand ils en ont.

La dispute sur les infinitésimaux avait de très bonnes raisons d'être vive et

234. l'expression "démontrer" elle même est également ambiguë. Quand un biologiste nous dit « Il a été *démontré* que les bactéries communiquent par des signaux chimiques » il fait allusion à un ensemble d'expériences et d'arguments assez éloignés de ce que le mathématicien entend par *démontrer*.

235. Qu'on me comprenne bien. Je ne suis pas devenu brusquement un adepte des théories du complot. "On" n'est pas un homme ni un groupe qui de façon secrète dicterait leur conduite aux mathématiciens. Je le répète "on" c'est l'idéologie, que je pense dominante à cette époque, et que j'ai appelée "idéologie de l'expert". Les mathématiciens, dans leur immense majorité, s'y soumettent volontairement de façon plus ou moins consciente.

durable chez les mathématiciens car bien des points posaient problème :

— L'usage rigoureux d'infiniments petits en acte justifie *a posteriori* les pratiques de calcul des physiciens réputées douteuses voire dangereuses ; c'est un petit peu vexant tout de même et mérite donc que l'on prenne la chose avec précaution.

— La possibilité de contourner la litanie des ε, η :

$$\textit{Pour tout } \varepsilon > 0 \textit{ il existe } \eta > 0 \textit{ tel que } |x - x_o| < \eta \textit{ implique.....}$$

qui, comme le savent tous les professeurs de mathématiques est l'obstacle que ne surmonteront pas une partie considérable de leurs élèves, avait de quoi séduire les chercheurs des IREM. Mais la mésaventure des "mathématiques modernes" était encore présente dans tous les esprits. Il était normal que des voix s'élèvent pour crier "casse cou". On n'allait quand même pas sacrifier une nouvelle génération d'élèves !

— La propagande efficace des formalistes "à la Bourbaki" avait fini par laisser croire aux mathématiciens qu'ils vivaient dans un monde ou ces questions fondamentales n'avaient plus cours comme le disait Dieudonné.

— Les mathématiques traditionnelles reposent sur le mythe Pythagorréen, l'A.N.S. est en conflit avec ce mythe nous dit Nelson ; on ne remet pas si facilement en cause un mythe fondateur. Et puis, comme le souligne Dieudonné, [236] :

> Alors, quand Gödel et Cohen sont venus nous dire qu'il était inutile de nous tracasser les méninges et que jamais nous ne démontrerions ni l'hypothèse du continu ni sa contradiction, nous avons dit : « Ouf ! Quelle veine ! On n'aura plus à s'occuper de cet abominable problème ».

Ce n'est pas pour se torturer à nouveau l'esprit sur des questions philosophiques.

C'est ce qu'ont très bien vu ceux qui se sentaient en charge de la communauté. Il ont compris que, du point de vue de l'idéologie de l'expert, il n'était pas bon pour la communauté de voir son image de pourvoyeuse de vérité absolue et définitive écornée par une dispute interne. Ils l'ont étouffée.

On pourra rétorquer à cette assertion que je surestime complètement la perception qu'avait la communauté du petit groupe nonstandard de Strasbourg. Après tout n'étaient impliqués directement que quelques dizaines d'individus ce qui est

236. dans *Mathématiques vides et mathématiques significatives*, dans"Penser les mathématiques", Seuil (1982), p : 18 ; [64]

peu pour une communauté de plusieurs milliers de membres. On peut parfaitement imaginer que la communauté tenait le groupe nonstandard pour insignifiant et ne souhaitait pas perdre son temps avec lui. Le rapport pour le prix d'Alembert n'est qu'une indication mais pas un argument décisif. Je réponds à cette critique en m'appuyant sur ma description succincte des rapports de la communauté mathématique française avec deux de ses membres les plus éminents A. Grothendieck et R. Thom. Cette fois on ne peut plus m'accuser d'insignifiance.

Je remarque que moins de dix ans plus tôt elle avait agi avec Grothendieck de la même façon qu'avec les partisans de l'A.N.S. Ce dernier était certainement un des mathématiciens dont la communauté était le plus fier et pourtant il a été rejeté du jour où il a voulu mêler à son enseignement au collège de France une réflexion éthique sur la place de la science et particulièrement des mathématiques dans la société. Il n'a pas été contredit sur le fond de ses positions mais, à part quelques uns, les mathématiciens se sont détournés de lui. On lui a refusé un poste au C.N.R.S après son éviction du collège de France, et il a gagné sa vie comme professeur dans une université de province. Certes son attitude était hors normes, mais était-ce une raison suffisante pour lui refuser un poste au C.N.R.S. ? Il avait déjà tant donné aux mathématiques que lui attribuer une sinécure à vie n'aurait rien eu de scandaleux. S'il avait réclamé un tel poste pour se consacrer à la pêche à la ligne on aurait certainement trouvé un arrangement mais il voulait s'exprimer sur sa responsabilité en tant que mathématicien dans les malheurs du monde et ça, la communauté ne pouvait l'accepter. Accepter que le meilleur de ses membres doute publiquement des bienfaits de son art aurait ruiné l'autorité de la communauté à *dire le vrai*.

Alors la communauté a traité Grothendieck comme un anarchiste totalement ingouvernable, s'excusant par avance de ses écarts de langage. Il ne fallait pas que cet homme qui attaquait frontalement l'idéologie de l'expert puisse continuer à se prévaloir de son statut de mathématicien [237].

237. Le mathématicien français Jean-Paul Allouche s'en émeut dans la revue qu'il fait du livre *Alexandre Grothendieck. A mathematical portrait*, Leila Schneps ed., International Press of Boston, dans la Newsletter de l'European Mathematical Society de Mars 2015. : « What strikes me in the view that mathematicians have of Grothendieck's work and life is the huge gap between the interest and fascination for his mathematical work and – at least for a large majority of mathematicians – the fact that they are rejecting the rest of Grothendieck's thoughts (should we accept military grants, the unbearable explicit hierarchy that mathematicians build among themselves, the urgency of working in ecology and the like instead of dealing with mathematics, etc.). It is so easy to declare that he was "a bit mad" or "deeply depressed" or even "suffering of psychosis" rather than to think that he could well have been very much in advance also in these subjects. »

Par contraste il est significatif d'observer comment l'autre très grand mathématicien contemporain, R. Thom, qui a défrayé la chronique à la même époque, a été traité différemment. Nous avons vu que, au tournant de sa maturité, il a partiellement délaissé les mathématiques pour promouvoir une vision originale des sciences et plus particulièrement des mathématiques dans les sciences de la vie. Sa "théorie des catastrophe" a connu un véritable succès médiatique mais aussi a été très vivement critiquée de l'intérieur comme de l'extérieur. Des mathématiciens ont critiqué Thom et surtout des biologistes qui n'ont pas été impressionnés par le prestige du mathématicien. Mais à la différence de Grothendieck, Thom est resté à l'I.H.E.S. et a continué à être respecté par l'institution. Bien sur il était moins turbulent que son collègue mais expliquer les destins très différents de Grothendieck et de Thom uniquement sur la base de leurs caractères me semble tout à fait insuffisant.

La grande différence est que la controverse autour des idées de Thom ne portait, ni sur des questions internes aux mathématiques comme pour l'ANS, ni sur des questions éthiques comme dans le cas de Grothendieck, qui toutes deux pouvaient lever le voile sur la fonction idéologique des mathématiques. Dans la mesure ou la "théorie des catastrophes" ne remettait pas en cause le soutien implicite à l'idéologie de l'expert ni ne pointait la responsabilité sociale du savant il n'était pas nécessaire d'exclure Thom. La "dispute" sur la théorie des catastrophe n'était qu'une "banale" dispute scientifique et elle a pu se déployer jusqu'à son terme.

On pourrait certainement objecter ici que les collègues et amis de Grothendieck qui ont participé avec lui à *Survivre* et ont critiqué sans ménagement les

---

On trouve également la même interrogation dans le "Bloc-Note" de D. Nordon (Pour la Science, mars 2016) : « Lorsque Grothendieck s'est mis à critiquer l'institution scientifique, dans les années 1960-70, certains ont discrédité ses objections en disant qu'elles avaient sa frustration pour fondement : il n'avait pas su démontrer les conjectures de Weil, et se consolait en vilipendant l'institution.

Le problème de ce genre d'explications par la psychologie est qu'elles sont toujours plausibles, et jamais intéressantes.

La frustration est la chose la mieux partagée. Tous, nous avons été - et plus d'une fois - le renard face aux raisins inaccessibles. Il n'est donc pas de lanceur d'alerte qu'on ne puisse accuser d'être mû par quelque frustration. Mais cela ne dit rien sur la valeur de ses propos. Si n'avaient une chance d'être judicieux que les arguments provenant d'auteurs vierges de toute frustration, aucun argument judicieux n'aurait jamais été avancé depuis que le monde est monde !

Disqualifier un argument en l'interprétant comme l'expression déguisée d'une amertume de son auteur est un avatar d'un procédé ancien, aussi injuste qu'efficace : déconsidérer un individu est plus facile que réfuter ses arguments. Surtout s'ils sont pertinents. »

compromissions des mathématiques avec les militaires et les idéologies ambiantes n'ont, semble-t-il, pas eu à subir de rejet de la part de leur communauté. Cela n'indique-t-il pas que la communauté est prête à accepter des critiques sur son *implication* dans telle ou telle idéologie ? Je vois essentiellement deux réponses à cette critique. La première est que Chevalley, Godement et Samuel étaient surtout connus pour leur engagement contre les *applications* des mathématiques à des fins militaires ce que les institutions n'avaient pas de raison de refuser. La seconde est que, d'une part, Chevalley, Godement et Samuel n'étaient pas connus en dehors des mathématiciens "purs" et de petits cercles gauchistes, contrairement à Grothendieck qui avait été en quelque sorte "starisé", et, d''autre part, gardaient un comportement d'universitaires bien élevés. Ils ne distribuaient pas des tracts, le crâne rasé et en short à l'entrée du congrès international de Nice. Il était certainement plus économique de les ignorer que de les dénoncer. Et puis Grothendieck n'était pas un enfant de la famille normalienne qui avait un peu mal tourné ; il avait été adopté et c'est grâce à elle que son talent avait pu se déployer. Sa trahison était difficile à accepter.

Pour conclure je résume ma thèse en trois points :

1. Pour des raisons contingentes et somme toute subalternes (opposition province - Paris, inimitiés personnelles, crises d'ego etc...) le débat normal interne aux mathématiques relatif à l'A.N.S. dont on trouve des traces au début des années quatre-vingt, par exemple dans le séminaire Bourbaki de P. Cartier, prend une vilaine tournure à l'occasion de la thèse de Vénissac. En dépit des méthodes très contestables de la commission des thèses, la controverse aurait du se poursuivre après cet épisode désagréable puisque les deux camps possédaient des avocats parmi les meilleurs mathématiciens actifs. Il n'en a rien été. Pourtant, de leur côté, les nonstandardistes qui croyaient à l'importance de leur point de vue s'appliquaient à porter le débat devant un public plus large que celui de la stricte communauté des chercheurs en mathématiques. Rappelons l'ouverture de l'école de Strasbourg vers la philosophie, le prosélytisme devant les professeurs de mathématiques, les provocations ... Pourquoi cette dispute avortée ?

2. A la même époque, pour le public peu informé, les mathématiques disent le "vrai". En particulier, en se mathématisant, ce qui était "l'économie politique" jusqu'au milieu du XX ème siècle s'est élevé au rang de "science économique". Les "théorèmes économiques" se substituent au débat politique. L'idéologie dominante demande aux mathématiques de cautionner cette entreprise. C'est, en partie, pour ça que sont payés les chercheurs en

mathématiques.

3. La communauté mathématique, ou du moins ceux qui en ont la charge, ne peuvent accepter que soit donné en public le spectacle de désaccords internes et profonds sur la nature des "vérités mathématiques". Ce serait aller contre ce que l'idéologie dominante attend de la communauté. Elle étouffe donc l'affaire. L'A.N.S. n'est pas fondamentalement en cause. Tout autre débat où l'on aurait vu des mathématiciens s'affronter bruyamment sur la nature des "vérités mathématiques" aurait été également censuré.

Au plan international il semble que les discussions autour de l'ANS n'ont jamais cessé et qu'elles prennent une certaine ampleur à travers des revues spécialisées et les nouveaux outils de communication que sont les blogs. Après une longue absence les mathématiciens Français reprendront-ils part à ces développements ? L'avenir le dira. En attendant la leçon que nous pouvons retirer de cette affaire est que, si une communauté scientifique ne peut pas éviter de composer avec les princes du moment pour assurer sa subsistance, les responsables qui en ont la charge doivent le faire en connaissance du prix à payer.

Si, pour les mathématiques, le prix est de devoir renoncer à la dispute il est certainement exorbitant.

Annexe A

Ouvrages techniques

Cette annexe contient des références aux ouvrages techniques couramment cités par l'école de Strasbourg accompagnées de quelques commentaires. L'ensemble de ces références ne constitue absolument pas un panorama de la littérature technique mondiale relative à l'A.N.S. ; en particulier il existe de nombreux ouvrages didactiques en langue anglaise.

L'ordre est chronologique.

- **Abraham Robinson.** *Nonstandard Analysis*. Amsterdam : North - Holland (1966) ; [102] ; réédité en 1970 et 1974.
  Le livre fondateur que tout le monde cite.
  Il existe un livre de l'historien des mathématiques J. W. Dauben, intitulé *ABRAHAM ROBINSON, The creation of Nonstandard Analysis, a Personnal and Mathematical Odyssey*, Princeton University Press (1995) remarquablement documenté. Le personnage de Robinson y aparait comme particulièmement romanesque. Reeb, l'école de Strasbourg et les "canards" sont mentionnés (P. 374-75), ainsi que [LdL].
- **Edward Nelson** , *Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis,* Bull. Amer. Math. Soc. 83, no. 6, 1165–1198, (1977) ; [87].
  Dans son Bulletin d'octobre 2011 (BAMS, 48 n° 4) l'éditeur du Bulletin of American Mathematical Society a demandé à six de ses éditeurs adjoints de sélectionner un article publié par le Bulletin dans les décennies passées. L'article de Nelson a eu l'honneur d'être l'un d'eux.
- **Robert Lutz - Michel Goze.** *Nonstandard Analysis : a practical guide with applications.* Springer-Verlag New York (1981 ; [82]).
  Un des premiers livres de cours. Il contient une introduction à l'approche de Robinson et à l'approche I.S.T. de Nelson. Le livre s'adresse à un mathématicien non logicien

(i.e. ignorant les théories logiques) et explique très pédagogiquement les principes de la formalisation mathématique. Centré sur l'utilisation plutôt que les fondements de l'A.N.S. le livre procure de nombreux exemples d'applications.

- **Alain Robert**. *Analyse non standard*, Presses polytechniques romandes EPFL-Lausanne(1985) ; [101].
  Une introduction à la théorie de Nelson. Une traduction anglaise a été éditée quelques années après.
- **Marc Diener - Claude Lobry**. (Eds.) *Analyse non standard et représentation du réel* - OPU, Alger, CNRS, Paris, (1985) ; [45].
  Ouvrage collectif. Ce sont les actes d'un colloque tenu en Algérie dans les environs d'Oran. Une grande partie des membres de l'école de Strasbourg s'y exprime [238].
- **I. van den Berg**. *Nonstandard asymptotic analysis*, Vol. 1249. Springer, (2006) [118].
  Un ouvrage montrant comment les techniques de l'A.N.S. s'appliquent dans les "méthodes asymptotiques" par un membre non Français de l"école de Strasbourg".
- **Hervé Barreau - Jacques Harthong**. (Eds.). La mathématique non standard : Histoire - Philosophie - Dossier Scientifique. Editions du CNRS, Paris (1989) ; [13].
  Cet ouvrage collectif contient des textes d'historiens, mathématiciens et philosophes. Il contient notamment un des rares écrits de G. Reeb : *Mathématique non Standard.*
- **André Deledic - Marc Diener**. *Leçons de calcul infinitésimal*, Armand Colin, Paris (1989) ; [37].
  Livre de cours destiné à un enseignement optionnel de mathématiques à l'université.
- **Francine Diener - Georges Reeb.** *Analyse Non Standard* Hermann (1989) ; [42].
  Le dernier chapitre intitulé *0,1,2, etc... ne remplissent pas (du tout)* $\mathbb{N}$, rédigé par Reeb, expose sa vision intuitionniste de l'A.N.S.
- **Francine Diener - Marc Diener.** *Nonstandard Analysis in Practice* Springer - Verlag Berlin Heidelberg (1995) , [41].
  Ouvrage collectif. Contient un tutoriel suivi de développements plus récents.

238. Il est notable que l'édition soit conjointe entre l'Office des Publications Universitaire algérien (O.P.U.) et le C.N.R.S. français. En effet plusieurs élèves de Reeb (E. Benoit, J-L. Callot, F. et M. Diener, I. Van den Berg) ont été coopérants à Oran et Tlemcen dans les années soixante-dix et sont à l'origine d'une collaboration sur le long terme entre la France et l'Algérie. L'article séminal sur les canards [16] a été réalisé à Oran-Tlemcen

- **Gautheron, Véronique - Emmanuel Isambert**. *Lire l'analyse Non Standard*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin 3.3 (1996) : 29-50. ; [54]
  Article d'introduction qui en vingt pages donne les bases et les premières applications.
- **Diener Marc**. *Enseigner l'analyse avec des ordres de grandeur*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin 5.5 (1998) : 19–38. ; [44]
  Compte rendu d'une expérience d'enseignement des ordres de grandeur dans un cursus de sciences économiques.
- **Ponstein, J. (2001)**. *Nonstandard analysis : A Naive Way to the Infinitesimals (an unorthodox treatment of Nonstandard Analysis)*. Universiteitsbibliotheek Rijksuniversiteit Groningen ; [97].
- **I. van den Berg - V. Neves**. *The strength of Nonstandard Analysis*, Springer (2007) ; [119].
  Actes d'un important colloque sur l'A.N.S. organisé à Evora (Portugal) en 2004. Il contient, outre trois articles des fondateurs, Keissler, Hrbacek et Nelson, des contributions de nombreux acteurs contemporains dont quelques anciens membres de l'école de Strasbourg.

Il existe différentes façons de fonder la pratique de l'ANS. Le lecteur intéressé trouvera des références utiles dans l'article de revue :

- **Peter Fletcher, Karel Hrbacek, Vladimir Kanovei, Mikhail G. Katz, Claude Lobry, and Sam Sanders**, *Approaches to analysis with infinitesimals following Robinson, Nelson, and others*, Real Analysis Exchange, vol 43 (2017) ; [52], et sur :
  `arXiv:1703.00425[math.CA]`

Annexe B

Propagande et polémiques

Cette annexe contient des informations accompagnées de quelques commentaires sur divers textes de propagandistes de l'A.N.S. (ici propagandiste n'a pas de connotation péjorative) ou de détracteurs. Il ne s'agit en aucun cas d'une étude exhaustive.

B.1 En France

B.1.1 Trois partisans et deux détracteurs

- **G. Reeb**, *La mathématique non standard vieille de soixante ans*, publication de l'Institut de Recherche Mathématiques Avancée (IRMA), Université Louis Pasteur de Strasbourg, 1979 64/P-30 ; [100].
  Les publications de l'IRMA sont des textes polycopiés largement diffusés. Il s'agit d'un court texte de dix sept pages qui commence par :

  > Q : "Les entiers naïfs ne remplissent pas $\mathbb{N}$".
  > L'assertion Q énonce - abruptement et trop brièvement - un constat bien connu des mathématiciens*, qui remonte (...)
  > (.....)
  >
  > * Il est vrai, qu'à l'exception d'une phrase de NELSON, nous n'avons rencontré dans la littérature aucune formulation comparable à Q ; par contre, nous avons rencontré de nombreux passages - et le lecteur aura probablement fait une constatation analogue - que l'on peut entendre comme suggérant Q, ou encore comme commentant Q.

C'est la première trace écrite que j'ai trouvée du fameux slogan de Reeb qui a inspiré le titre de [LdL].

- **P. Cartier**, *Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard*, Séminaire Bourbaki, 24 (Novembre 1981), Exposé No. 580, 24 p. ; [24]
  P. Cartier (1932-). Soulignons que Cartier est membre de Bourbaki et est tout à fait extérieur à l'école de Reeb. Il n'en est que plus intéressant de constater que son texte est particulièrement élogieux pour l'A.N.S. :

  > (...) Les développements récents dont nous allons rendre compte sont dus à l'école de Reeb à Strasbourg, Mulhouse et Oran. Ils ont donné lieu à d'innombrable notes publiées par l'Institut de Recherche Mathématiques Avancée de Strasbourg (IRMA). (...) L'originalité de ces recherches réside dans m'emploi des méthodes infinitésimales (ou non-standard) élaborées par A. Robinson dans l'ouvrage [21] qui est peut être un des chefs-d'œuvre mathématiques du 20e siècle. (...) [21] ROBINSON A., Nonstandard Analysis, North Holland, Amsterdam 1966.

  De plus on notera qu'il approuve le choix du formalisme de Nelson :

  > Le point de vue que nous avons exposé a été complètement axiomatisé par Nelson (...) et Hrbacek (...) ; il me semble plus commode que le point de vue initial introduit par Robinson (...).

- **C. Lobry**, *Mathématiques non standard mathématiques appliquées ?* Rapport interne, mathématiques Université de Bordeaux, 22 p. 1981.
  Il s'agit du texte d'une conférence plénière devant le Congrès National d'Analyse Numérique (Aussois 1981) qui réunissait chaque année une partie importante des "mathématiciens appliqués" de France. Cette conférence n'a donné lieu à aucun commentaire, qu'il soit positif ou négatif. Le texte correspondant n'est pas visible sur internet, le manuscrit m'en a été communiqué par Duchemin.

- **A. Connes**.
  Il s'est exprimé plusieurs fois dans des écrits "non techniques" d'où je tire quelques citations :
  A. Connes, *Triangle de pensées*, Odile Jacob ? Paris (2000) ; [28]. Au cours d'un entretient avec deux autres mathématiciens : M-P. Schützengerger et A. Lichnerowicz, A. Connes explicite les raisons de son rejet de la la méthode.

  > Mais ou bout du compte je me suis aperçu d'un défaut absolument majeur de cette théorie [239], vice qui ne sera jamais corrigé. C'est le suivant. Dans l'Analyse non standard, on est censé avoir des infinitésimaux. Or, si l'on se

239. Le théorie de Robinson

> donne un tel infinitésimal, on donne de manière automatique, à partir de ce nombre non standard, un sous ensemble de l'intervalle $[0,1]$ qui n'est pas mesurable au sens de Lebesgue. (...) La conclusion que j'en ai tirée, c'est que jamais personne ne pourra me montrer un nombre non standard.On sait, en effet, d'après un théorème de Solovay, un logicien de Berkeley, qu'il est impossible d'exhiber un sous ensemble de l'intervalle $[0,1]$ qui ne soit pas mesurable au sens de Lebesgue.(...) Quelle conclusion en tirer pour l'analyse non standard ? Cela signifie que, comme jamais personne ne sera capable de nommer un nombre non standard, c'est une théorie qui reste à l'état virtuel et qui ne peut absolument pas avoir de signification autre que celle d'outil permettant de comprendre ce que j'ai appelé « réalité mathématique archaïque »

Rapport écrit par A. Connes sur une équipe soutenue par le CNRS à l'occasion de son renouvellement. Texte cité par H. Barreau dans *L'histoire des relations de l'UPR "Fondements des Sciences*, bulletin de l'IREM de Strasbourg L'OUVERT N° spécial G. Reeb (1994).

> Pour la part qui relève de la section 03, l'activité de recherche de l'équipe "Fondements des Sciences" est centrée autour de l'Analyse non standard. Comme il s'agit d'une théorie séduisante, en particulier par le sens qu'elle donne à la notion d'infiniment petit il me semble nécessaire de mettre en évidence les points suivants :
>
> 1. Le vice principal de l'analyse non standard est qu'il est ***impossible*** d'expliciter un seul nombre non standard, c'est un théorème mathématique. On peut parler de ces nombres mais leur utilité en tant qu'entité mesurable est nulle.
> 2. La séduction de l'analyse non standard est due en grande partie à la création d'un vocabulaire suggestif ; la géométrie différentielle s'est bien gardée de céder à cette tentation, ce qui aurait été facile par exemple dans la théorie des solutions asymptotiques aux équations différentielles.
> 3. Il existe un outil puissant : les ultraproduits, qui permet d'exploiter au maximum l'axiome de choix, il est peu connu des mathématiciens et l'analyse non standard est ***strictement*** contenue dans son utilisation.
>
> Il me semble que la vulgarisation de l'analyse non standard peut rendre service en faisant connaître (3) mais devrait prévenir de (2)... Mais l'équipe est à voir avant la décision définitive.

Le même article de H. Barreau cite un commentaire de Reeb à ce rapport :

> Rapport Connes
> Le point (3) est parfaitement exact et parfaitement connu. Œuvrer pour faire connaitre (3) ou œuvrer en ANS, quelle différence ?
> Si dans (1) on remplace "vice" par "fait" on est d'accord sur la première phrase ; mais je continuerais ainsi : " Adoptant la vue I.S.T. on ne peut pas parler de l'ensemble des nombres standard. C'est en cela que réside l'utilité".
> Au point (2) j'oppose l'avis d'un spécialiste d'asymptoties : "L'article de Zvonkin Shubin est une contribution importante à la littérature de perturbation singulière, il explique bien l'utilité et la beauté de l'approche non standard" Howes, Math. Rev. Le point (1) a été clairement perçu par Brouwer. Le rapport retarde de 10 ans sur le travail de l'équipe.

- **R. Thom** Duchemin m'a communiqué une lettre de janvier 1982 de R. Thom à C. Lobry relative à des points techniques concernant la théorie des canards. J'en cite un extrait :

> Sur la question des "non standards" j'avoue n'être pas convaincu par le zèle émouvant du maître Reeb. Il me semble que la magie du non-standard ne permet pas d'éviter l'analyse fine de ce qui se passe en un point singulier du "champ contraint" . En un point régulier (i.e. non-pli ou adhérent au pli) du champ contraint, il y a je pense, des arguments du type Whitney pour les feuilletages analytiques qui permettraient d'affirmer que la trajectoire contrainte est limite de la trajectoire régulière pour $\varepsilon \to 0$. 5...) Ceci dit je ne veux interdire à personne de s'amuser.

  Cette critique est immédiatement tempérée par :

> Il est certain que cette théorie des perturbations singulières est d'une admirable richesse, et il faut être reconnaissant à l'école de Strasbourg - et ses dérivés - d'avoir mis en évidence tous ces phénomènes : "stabilisation des trajectoires instables" et autre "canard".

- **Y. André** est un mathématicien d'une génération plus récente. Dans un livre disponible sur internet :
  `https://cel.archives-ouvertes.fr/cel-01359200/document`
  destiné à un public de non mathématiciens il expose une opinion tout à fait négative dès l'introduction :

> Il [le livre] ne s'agit pas non plus d'une introduction historique, ni d'une apologie, ni d'une anthologie, ni d'un catalogue raisonné, ni d'un survol panoramique (encore que l'on puisse tirer de ces pages des tables d'orientation pour un assez vaste pan des Mathématiques contemporaines) ; ni d'une

> « entreprise scientifico- caritative », comme disait G. Châtelet, et nous nous abstiendrons de déployer la panoplie puérile charriée par le big-bang (qui ne cesse de commencer), le chaos (qui neutralise tout), [...] le fractal (qui fascine surtout les esprits un peu simples), ainsi que les néo-indivisibles de la prétendue « analyse non-standard » et les guirlandes tressées autour des théorèmes de Gödel - bref, les thèmes-bateaux qu'une certaine vulgarisation mathématique ressasse sur un ton guilleret.

opinion qu'il exprime à nouveau dans une note de bas de page (page 99) à propos du titre d'un ouvrage de Lagrange : *Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies (1797).*

> Il faut sans doute ouvrir ici une parenthèse anachronique et glisser un mot de la prétendue « analyse non-standard », compte tenu de l'incroyable publicité dont elle a joui. Si ses « tenants », en Logique et en Théorie des ensembles, sont fascinants et féconds, ses « aboutissants » sont en revanche plutôt douteux : combat d'arrière-garde pour « justifier les indivisibles » des débuts du Calcul infinitésimal, sans regard épistémologique critique sur les liens supposés entre ses « néo-infinitésimaux » et ceux, fort divers, des anciens. Son foyer d'intérêt - des questions inactuelles de fondements - étant très loin des problèmes qui drainent l'Analyse contemporaine, il n'est pas étonnant que ses contributions y soient minimes. Mais elle s'est bien vendue auprès d'épistémologues friands de curiosités « non-standard » (et semble actuellement faire des ravages en didactique).

Ces remarques polémiques sont surprenantes à une date (2009) où la passion sur la question de la légitimité de l'A.N.S. semble apaisée.

B.1.2 Dans le milieu de l'enseignement secondaire

Il existe dans l'enseignement secondaire deux institutions importantes de mathématiciens.

— L'APMEP : L'Association de Professeurs de Mathématiques de l'Ecole Publique, association professionnelle dynamique.

— Les IREM : Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques. Ce sont des petites structures, plus ou moins formelles, attachées à chaque Université, qui avaient été crées dans les années soixante au moment de la

réforme dite des “Mathématiques Modernes” pour informer et recycler les professeurs du second degré. Ces structures, au delà de la réforme sont rapidement devenues des lieux d’échange entre mathématiciens du secondaire et du supérieur. Les IREM éditent une revue de réflexion sur l’enseignement des mathématiques, la revue “Repères IREM”.

Nous avons vu que pour ses partisans, l’A.N.S. permet d’aborder de façon plus naturelle les grandes questions de l’analyse mathématique que sont la continuité et la dérivation et qui occupent une place importante dans l’enseignement pré-baccalauréat, au moins dans les sections scientifiques. Il était donc naturel que les “nonstandardistes” français se tournent vers ces deux structures et y donnent des conférences. S’il existe de nombreuses traces de cette activité, trop nombreuses pour être toutes citées, il est en revanche difficile de mesurer l’impact qu’elles ont eu. Je citerai ici sur ce thème quelques articles :

R. Lutz, proche collaborateur de Reeb, co-auteur de l’ouvrage didactique cité dans l’annexe A a été un ardent propagandiste de la méthode auprès des IREM et de l’APMEP. Il a laissé des traces écrites dans la revue de l’IREM de Strasbourg : L’OUVERT.

- **Lutz**. *Rêveries infinitésimales*, Gazette des mathématiciens, n°34 (1987) [80]
- **Lutz**. *L’interprétation de l’analyse en termes d’ordre de grandeur : fondements pour une nouvelle pédagogie*, L’OUVERT 72 (1993)
- **Lutz**. *Réflexions sur l’approche de l’analyse en termes d’ordres de grandeur*, L’OUVERT, n° 107 (2003)

Dans la revue nationale des IREM on trouve :

- **T. Gilbert .** *Qu’est-ce que l’analyse non-standard.* REPERES-IREM, n° 11 (1993) ;[56].
- **T. Gilbert**. *L’enseignement de la continuité et de la dérivabilité en analyse non-standard*, REPERES-IREM, n° 13-octobre (1993) ; [55].
- **A. Deledic**. *Est-il possible d’enseigner l’analyse aujourd’hui ?* REPERES-IREM, n° 24 (1996) pp. 79-102 ; [36].
- **R. Lutz, A. Makhlouf, E. Meyer**. *L’enseignement de l’analyse en termes d’ordre de grandeur : nécessité et fondements*, REPERES-IREM, n° 24 (1996) pp. 103-116 ; [83].

Au plan international nous avons l’ICMI : International Commission on Mathematical Instruction qui tous les quatre ans organise une conférence. On y trouve :

- **B. Hodgson**, *Le calcul infinitésimal*, Hodgson, B. R. (1994). Le calcul infinitésimal. In Choix de conférence du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (I.C.M.E.-7) (pp. 157-170) ; [60].

B.2 Hors de France

Pour la théorie des "canards" qui nous intéresse, elle a été rapidement perçue positivement à l'étranger dans deux travaux (au moins). Plus généralement la pratique de l' A.N.S. a reçu récemment un défenseur de poids en la personne de T. Tao. qui est certainement un mathématicien de niveau comparable à celui de A. Connes. C'est pourquoi je le cite assez longuement.

- **Zvonkin, Alexander Kalmanovich and Shubin, Mikhail Aleksandrovich**, *Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations*, Russian Mathematical Surveys, Vol 39, n° 2 (1984) ;[128].
  L'article initial, en Russe, est entièrement consacré à la vulgarisations des travaux sur les "canards".
- **Albeverio, Sergio and Fenstad, Jens Erik and Høegh-Krohn, Raphael and Lindstrøm, Tom**, *Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics*, Academic Press, (1986) ; [5].
  Il s'agit d'un ouvrage largement consacré à des travaux qui n'ont rien à voir avec ceux de l'école de Strasbourg mais qui, pour introduire la méthode des infinitésimaux, utilise à titre d'exemple la théorie des "canard".
- **T. Tao** *Ultrafilters, nonstandard analysis, and epsilon management* blog du 25 juin 2007 sur le site de T. Tao
  `https://terrytao.wordpress.com/`
  `2007/06/25/ultrafilters-nonstandard-analysis-and-epsilon-management/`
  Il commence par expliquer qu'en analyse classique on peut être conduit à gérer un grand nombre de quantificateurs ε, δ

  > Arguments in hard analysis are notorious for their profusion of "epsilons and deltas". In the more sophisticated arguments of this type, one can end up having an entire army of epsilons that one needs to manage, in particular choosing each epsilon carefully to be sufficiently small compared to other parameters (including other epsilons), while of course avoiding an impossibly circular situation in which a parameter is ultimately required to be small with respect to itself, which is absurd. This art of epsilon management, once mastered, is not terribly difficult – it basically requires one to mentally keep track of which quantities are "small", "very small", "very very small", and

> so forth – but when these arguments get particularly lengthy, then epsilon management can get rather tedious, and also has the effect of making these arguments unpleasant to read. In particular, any given assertion in hard analysis usually comes with a number of unsightly quantifiers (For every there exists an N...) which can require some thought for a reader to parse. (...)

Après avoir exprimé le désir de simplifier cette situation il évoque les notations classiques de l'analyse asymptotique :

> One important step in this direction has been the development of various types of asymptotic notation, such as the Hardy notation of using unspecified constants C, the Landau notation of using O() and o(), or the Vinogradov notation of using symbols such as or ; each of these symbols, when properly used, absorbs one or more of the ambient quantifiers in a hard analysis statement, thus making these statements easier to read. But, as useful as these notations are, they still fall a little short of fully capturing one's intuition regarding orders of magnitude. For instance, we tend to think of any quantity of the form $O(1)$ as being "bounded", and we know that bounded objects can be combined to form more bounded objects ; for instance, if $x = O(1)$ and $y = O(1)$, then $x+y = O(1)$ and $xy = O(1)$. But if we attempt to formalise this by trying to create the set of all bounded numbers, and asserting that this set is then closed under addition and multiplication, we are speaking nonsense ; the $O()$ notation cannot be used within the axiom schema of specification, and so the above definition of A is meaningless.

Il termine le paragraphe en annonçant que l'A.N.S. permet de surmonter ces difficultés.

> There is however, a way to make concepts such as "the set of all bounded numbers" precise and meaningful, by using non-standard analysis, which is the most well-known of the "pseudo-finitary" approaches to analysis, in which one adjoins additional numbers to the standard number system.

Le reste du texte est consacré à expliquer le rôle que jouent les ultra-filtres dans la fabrication des hyper-réels de l'A.N.S. et comment il a été conduit à les utiliser comme dans l'exemple suivant .

> As a specific example of this type of thing from my own experience, in one of my papers with Van Vu, we had a large parameter n, and had at some point to introduce the somewhat fuzzy notion of a "highly rational number", by which we meant a rational number a/b whose numerator and denominator were both at most in magnitude. Such numbers looked like they were forming a field, since the sum, difference, product, or quotient of two highly rational numbers was again highly rational (but with a slightly different rate of decay in the o() notation). Intuitively, one should be able

> to do any algebraic manipulation on highly rational numbers which is legitimate for true fields (e.g. using Cramer's rule to invert a non-singular matrix) and obtain an output which is also highly rational, as long as the number of algebraic operations one uses is O(1) rather than, say, O(n). We could not actually formalise this rigorously in our standard notation, and had to resort to informal English sentences to describe this ; but one can do everything perfectly rigorously in the non-standard setting by letting n be non-standard, and defining the field F of non-standard rationals a/b where ; F is genuinely a field of non-standard rationals (but not a non-standard field of rationals), and so using Cramer's rule here (but only for matrices of standard size) would be perfectly legitimate. (We did not actually write our argument in this non-standard manner, keeping everything in the usual standard hard analysis setting, but it would not have been difficult to rewrite the argument non-standardly, and there would be some modest simplifications.)

Il termine par la conclusion suivante :

> — Conclusion —
>
> I hope I have shown that non-standard analysis is not a totally "alien" piece of mathematics, and that it is basically only "one ultrafilter away" from standard analysis. Once one selects an ultrafilter, it is actually relatively easy to swap back and forth from the standard universe and the non-standard one (or to doubly non- standard universes, etc.). This allows one to rigorously manipulate things such as "the set of all small numbers", or to rigorously say things like " is smaller than anything that involves ", while greatly reducing epsilon management issues by automatically concealing many of the quantifiers in one's argument. One has to take care as to which objects are standard, non-standard, sets of non-standard objects, etc., especially when transferring results between the standard and non-standard worlds, but as long as one is clearly aware of the underlying mechanism used to construct the non-standard universe and transfer back and forth (i.e. as long as one understands what an ultrafilter is), one can avoid difficulty. The main drawbacks to use of non-standard notation (apart from the fact that it tends to scare away some of your audience) is that a certain amount of notational setup is required at the beginning, and that the bounds one obtains at the end are rather ineffective (though, of course, one can always, after painful effort, translate a non-standard argument back into a messy but quantitative standard argument if one desires). I plan to discuss some specific translations of some recent hard analysis results (e.g. the sum-product theory of Bourgain) to the non-standard analysis setting some time in the

> future, in the spirit of other translations such as van der Dreis and Wilkie's non-standard proof of Gromov's theorem on groups of polynomial growth.

Depuis ce Blog il a écrit de nombreux textes où il explique ce qu'est l'A.N.S. ou encore où il l'utilise comme par exemple le livre *Hilbert's Fifth Problem and Related Topics* publié par l'A.M.S., version préliminaire disponible sur son site `https://terrytao.wordpress.com/` .

Ce blog de 2007 ne semble pas correspondre à un engouement passager de T. Tao puisqu'il consacre une longue discussion à l'analyse des équations de Navier-Stokes dans un blog du 9 décembre 2018.

Avant A. Connes, L'A.N.S. a eu des détracteur de très haut niveau en la personne de mathématiciens célèbres comme E. Bischop (1928-1983), un mathématicien constructiviste, ou de P. Halmos (1916-2006) [240]. Leurs critiques ont été analysées et discutées de façon vive par des mathématiciens, des historiens et des philosophes puis contre analysées par d'autres etc... Cette "dispute" est postérieure à la "non-dispute que j'étudie". Elle n'est donc pas directement liée à mon sujet sauf qu'elle montre que si la "dispute" avait pu se déployer en France elle aurait eu un peu d'avance sur ce qui se développe maintenant. C'est pour cette raison que je cite quelques articles parus dans des revues ayant "pignon sur rue" :

- **Kanovei, V. ; Katz, M. ; Mormann, T.**. *Tools, Objects, and Chimeras : Connes on the Role of Hyperreals in Mathematics*, Foundations of Science 18, no. 2, 259–296, (2013) ;[66]

  Sur le site de la revue on trouve :

  Foundations of Science : The official Journal of the Association for Foundations of Science, Language and Cognition.

  Foundations of Science focuses on significant methodological and philosophical topics concerning the structure and the growth of science. It serves as a forum for exchange of views and ideas among working scientists and theorists of science, and promotes interdisciplinary cooperation.

- **Jacques Bair, Piotr Blaszczyk, Robert Ely, Valérie Henry, Vladimir Kanovei, Karin U. Katz, Mikhail G. Katz, Semen S. Kutateladze, Thomas McGaffey, David M. Schaps, David Sherry, and Steven Shnider**. *Is Mathematical History Written by the Victors ?*, notices of the A.M.S. vol 6 n°7, p. 886-904, (2013) ; [12]

  D'après le site de la revue : *The Notices of the American Mathematical Society* is the world's most widely read magazine aimed at professional mathematicians.

240. Voir l'article *Criticism of non-standard analysis* de Wikipedia.
`https://en.wikipedia.org/wiki/Criticism_of_non-standard_analysis`

- **Tiziana Bascelli, Emanuele Bottazzi, Frederik Herzberg, Vladimir Kanovei, Karin U. Katz, Mikhail G. Katz, Tahl Nowik, David Sherry, and Steven Shnider**. *Fermat, Leibniz, Euler, and the Gang : The True History of the Concepts of Limit and Shadow*, Notices of the A.M.S., Vol 61, n°8, (2014) ; [14]
- **Piotr Blaszczyk, Alexandre Borovik, Vladimir Kanovei, Mikhail G. Katz, Taras Kudryk Semen S. Kutateladze David Sherry**. *A Non-Standard Analysis of a Cultural Icon : The Case of Paul Halmos* Logica Universalis, Vol 10 n° 4, p. 393-405, (2016) ; [17].
  Cet article met en évidence un comportement pour le moins discutable de P. Halmos dans ses rapports avec Robinson.

L'article de revue déjà cité dans les ouvrages techniques :

- **Peter Fletcher et al.**, *Approaches to analysis with infinitesimals following Robinson, Nelson, and others*, Real Analysis Exchange, vol 43 (2017), et sur : `arXiv:1703.00425[math.CA]`

contient une liste d'une dizaine d'articles de différents mathématiciens critiquant l'A.N.S. associés chacun à une réplique d'adeptes de la méthode. Pour terminer, le site de :

- **M. Katz** : `http://u.cs.biu.ac.il/~katzmik/`

contient beaucoup d'informations sur la discussion actuelle.

Annexe C

Regards philosophiques sur l'A.N.S.

Je distinguerai le regard des "amateurs", c'est à dire celui des mathématiciens professionnels qui portent un regard philosophique sur l'A.N.S., du regard des philosophes professionnels. Je dois commenter cette distinction *a priori* curieuse.

Mon problème est celui de la confiance qu'on peut accorder au type qui se dit plus fort que le champion de boxe et le champion de billard. C'est à dire qui bat le champion de billard à la boxe et le champion de boxe au billard. Je m'explique. Je travaille sur une controverse interne à la communauté mathématique. Pour juger de la légitimité ou de l'autorité d'un jugement à propos de mathématiques je peux m'appuyer sur la "légitimité professionnelle" de son locuteur. C'est pourquoi assez systématiquement j'ai tenu à rappeler les titres (professeur, professeur au collège de France, etc...) et les honneurs (Médaille Field, exposés au séminaire Bourbaki) des protagonistes. Mais s'agissant d'analyser une controverse je ne peux évidemment pas prendre le parti des plus titrés ou celui de la majorité. Je dois aussi m'intéresser à des jugements de nature non mathématique - pour dire vite philosophiques - qui interviennent dans la controverse. Que valent ces jugements ? On peut parier que Dieudonné aurait vite fait de récuser des arguments de philosophes au motif que, selon lui, ces derniers ne s'intéressent qu'à des questions qui n'ont rien à voir avec l'intérêt des mathématiciens et inversement les philosophes seront eux aussi assez prompts à se moquer de la naïveté philosophique d'un mathématicien. Comment procéder ?

La reconnaissance institutionnelle est une façon raisonnable de savoir si l'on a affaire à un joueur de billard ou à un boxeur mais là encore ce n'est pas si simple. Pour un profane, comment savoir si une publication dans telle revue, par exemple les publications de l'I.H.E.S. pour les mathématiques ou un Colloque de Cerisy pour la philosophie, est une reconnaissance institutionnelle de poids ?

C'est pourquoi j'ai décidé de définir la reconnaissance institutionnelle de la façon la plus étroite qui soit : est un mathématicien (resp. philosophe) professionnel quelqu'un(e) qui gagne sa vie dans une institution académique dédiée aux mathématiques (resp. à la philosophie). Ceci ne préjuge en rien de la qualité : des philosophes amateurs ont pu être reconnus comme de bons philosophes (on pense à Poincaré) et nombre de philosophes (Badiou, Petitot, Salanskis...) sont des mathématiciens très compétents.

C.1 A propos du réalisme et de l'intuitionnisme

J'ai évoqué ces questions dans le chapitre intitulé «De la philosophie des mathématiciens» pour essayer de comprendre si la controverse était une controverse philosophique et pour conclure que ça n'en était pas une. J'en suis resté là parce que c'était suffisant pour ma thèse.

Mais les textes évoqués dans cette annexe, notamment ceux de "l'école de Strasbourg" mentionnent *l'intuitionnisme* ou *le constructivisme.* C'est l'occasion de dire un mot sur une particularité non encore mentionnée de l'école de Strasbourg. Reeb s'est très tôt assumé comme un disciple de Brouwer, comme un *intuitionniste* [241]. Il a toujours tenu à replacer l'A.N.S. dans sa démarche intuitionniste. On ne s'étonnera donc pas des titres des textes mentionnés ici.

C.2 Regards d'amateurs

J. Harthong et G. Reeb ont écrit *Intuitionnisme 84* et J. Harthong *Commentaires sur Intuitionnisme 84* publiés tous deux dans l'ouvrage collectif *La Mathématique Non Standard* dirigé par H. Barreau et J. Harthong (Fondement des sciences CNRS 1989 [13]). Ces deux textes où il n'est pratiquement jamais question d'A.N.S. éclairent cependant sur le sens du slogan de Reeb : *Les entiers naïfs ne remplissent pas* $\mathbb{N}$.

A propos de ces textes Jean Largeault a écrit dans *Intuition et intuitionisme*, J. Vrin 1993 ; [68], p. 64, note1 :

241. On sait qu'au début du siècle une controverse, parfois vive, s'est développée entre deux courants qu'on a appelés le *formalisme* auquel on a attaché le nom de Hilbert et *l'intuitionnisme* dont le chef de file était Brouwer, controverse évoquée par Dieudonné dans la conférence que j'ai déjà longuement citée. La vulgate mathématique voulait, dans les années quatre-vingt, que cette controverse se soit achevée par le triomphe de Hilbert et du formalisme. Avec le développement des ordinateurs les mathématiciens sont maintenant beaucoup plus nuancés.

> Affirmer que la preuve de l'existence d'une essence ou de la vérité d'une proposition réside non pas dans la non contradiction mais dans l'épreuve directe (Brouwer[1948] : «Il n'y a de vérités que celles dont on a l'expérience») ressortit à l'empirisme plutôt qu'à l'idéalisme. J. Harthon et G. Reeb («Intuitionisme 84» in *La Mathématique Non Standard* , CNRS 1989), abusés par la nomenclature philosophique ambigüe ont décrit Brouwer comme un *réaliste* : ils touchent plus juste que les philosophes professionnels qui ont confondu théorie empiriste de la connaissance et idéalisme métaphysique.

J. Harthong s'est exprimé sur le mode philosophique sur diverses questions. On peut trouver ses textes sur son site :
`http://moire4.u-strasbg.fr/apache2-default/Jacques.htm`.

G. Wallet. J'ai eu l'occasion de le citer à propos de la question de l'objectivité du nombre π. La citation est extraite de :

- Réflexions sur l'Objectivité en Mathématiques, *Le Labyrinthe du Continu*, Springer Verlag, France 1992 ; [109].

G.Wallet s'est exprimé à plusieurs reprises sur la question de la nature des objets mathématiques :

- *Enquête sur les modes d'existence des êtres mathématiques*, soumis à Philosophia Scientiae, écrit en collaboration avec Stefan Neuwirtz.
- *Insight in discrete geometry and computational content of a discrete modele of the continuum*, en collaboration avec A. Chollet, L. Fuchs, G. Largeteau-Skapin, E. Andres, Pattern Recognition, 42, 2220-2228, 2009.
- *La construction des objets mathématiques*, Journées La Rochelle 2008, Bulletin de l'Association des Professeur de Mathématiques de l'Enseignement Public, N0 483, pages 491-500, 2009.
- *Integer calculus on the Harthong-Reeb line,* ARIMA - Volume 9 - 2007 Conference in Honor of Claude Lobry - Editors : Mary Teux Niane, Gauthier Sallet, Tewfik Sari, Hamidou Touré, (2008) ; [121]
- *Démonstration et signification en mathématiques*, Séminaire de Philosophie et Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure, publié par l'IREM de Paris-Nord, N° 84, (1993) ; [120].

C. Lobry. Il s'est exprimé sur un mode philosophique au sujet de sa vision des mathématiques comme une "herméneutique" dans au moins deux publications.

- *L'herméneutique mathématique*. Dans "L'herméneutique : Les textes, la Science", (Salanskis, Rastier, Scheps eds.) Collection Philosophie d'Aujourd'hui, pages 333 – 355. P.U.F., 1997 ; [78].
- *La méthode des élucidations successives*. ARIMA, 9 :171– 193, 2008 ; [79]

L'A.N.S. n'est pas le sujet direct de sa réflexion mais est présente dans les exemples.

R. Lutz Déjà mentionné à propos de son activité auprès des enseignants du second degré, R. Lutz publie avec L. Gonzaga une analyse philosophique de la nature des infinitésimaux.

- *Modern infinitesimals as a tool to match intuitive and formal reasoning in analysis*, Synthese, vol134 (1-2), pp. 325–351, (2003) [81]

E. Nelson. Son site :
`https://web.math.princeton.edu/~nelson/`
contient de nombreux articles où il exprime ses positions philosophiques sur les mathématiques.

Y. Peraire est l'auteur d'une théorie dans le style I.S.T. appelée R.I.S.T. où il est possible de manipuler plusieurs ordre de grandeurs grace à l'introduction d'un prédicat à deux places $x\mathscr{S}\mathscr{R}y$ qui se lit " x est standard relativement à y ". Il s'est exprimé ensuite sur les liens entre les langues formelles comme Z.F.C. ou I.S.T. et la langue naturelle, prise soit comme meta-langue soit comme langue source ou cible dans des traductions entre formel et informel.

- Y. Péraire, *Théorie relative des ensembles internes*, Osaka Journal of Mathematics, 29(2), 1992, pp. 267–297 [93].
- Y. Péraire, *Le Replacement du référent dans les pratiques de l'analyse issues de E. Nelson et de G. Reeb*, Philosophia Scientiæ, CS 5, pp 257–273 [94].

C.3 Regards de philosophes

Lazare Carnot. Je ne savais pas très bien dans quelle catégorie le mettre : mathématicien, physicien, militaire, philosophe... Il a écrit un petit livre :

- *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal*, Paris (1797) ; [23], réédition Librairie Scientifique et Technique A. BLANCHARD, Paris (1970).

On a l'impression de lire un texte moderne sur l'A.N.S. Mais je ne suis pas historien ; ma lecture est peut être anachronique.

Alain Badiou est un philosophe contemporain connu (EdB dirait "à la mode") qui a écrit plusieurs gros ouvrages (EdB dirait "pavés") de philosophie des mathématiques, en particulier *L'être et l'événement* (seuil 1988) [11] où il soutient la thèse que les mathématiques sont l'ontologie. Il a écrit dans les Cahiers pour l'analyse, n° 9 (1968) un texte qui s'intitule *La subversion infinitésimale* [10] dans lequel il rend largement compte du livre *Nonstandard Analysis* de Robinson. Il est remarquable que cet article ait été écrit si tôt (et de façon aussi compétente, selon Duchemin) après la parution du livre de Robinson.

Hervé Barreau, dans les années quatre-vingt, était reponsable de l'unité CNRS «Fondements des Sciences» de l'Université de Strabourg. Dans ce cadre il animait un séminaire où se rencontraient philosophes et mathématiciens sur le thème de l'A.N.S. Il a co-édité avec J. Harthong *La Mathématique Non Standard* (Fondement des sciences CNRS 1989) déjà cité. Dans cet ouvrage il signe *LAZARE CARNOT et la conception liebizienne de l'infini mathématique*. L'ensemble de l'ouvrage mérite d'être lu par qui veut comprendre l'esprit de "l' Ecole de Strasbourg".

Jean-Michel Salanskis, est un philosophe Français contemporain qui s'est impliqué dans les développements de l'A.N.S. en France. A la fin des années soixante-dix il était un des membres actifs du séminaire de Strasbourg de H. Barraud (voir ci-dessus). Sa formation initiale de mathématicien en faisait évidemment un interlocuteur de choix. D'autre part Lobry reconnait dans plusieur de ses écrits une dette intellectuelle importante à J-M. S.
Site de J-M. S. : `http://jmsalanskis.free.fr`
0uvrages collectifs co-dirigés par J-M. S. où l'A.N.S. est présente :

- Avec H. Sinaceur, *Le Labyrinthe du Continu*, Colloque de Cerisy, Springer-Verlag 1992 ; [109]. Cet ouvrage contient , en plus de textes de personnalité importantes de la philosophie, l'histoire des sciences et les sciences (H. Barreau, M. Panza, K. Chemla, J. Dhombres, M. Blay, H. Breger, D.D. Spalt, R. Peiffer-Reuter, H. Sinaceur, M.A. Dieckmann, R. Thom, D. Laugwitz, P. Ehrlich, J. Benabou J. Bouveresse, G. Choquet, A. Robert, M. Le Bellac A. Dahan-Dalmedico, Fr. Balibar, C. Chevalley, F. Bailli, des textes relatifs à l'A.N.S. de plusieurs membres de l'école de Strasbourg (J-L. Callot, J-P. Reveillès, F. Diener, M. Goze, R. Lutz, M. Diener), de Lobry, des textes de nature philosophique liés à l'A.N.S. de E. Nelson, G. Wallet, J. Hartong, J. Petitot, J.M. Salanskis.
- Avec M. Panza *L'objectivité mathématique* Masson 1995 ; [91]. L'A.N.S. n'est pas centrale mais présente. Contient un texte de J. Harthong *L'idéalisme plato-*

nicien et la science.

- Avec F. Rastier et R. Scheps *herméneutique : textes, science*, Colloque de Cerisy, PUF 1997 ; [104].

Contributions de J-M. S. à la philosophie des mathématiques.

- *L'herméneutique formelle*, CNRS 1991, seconde édition augmentée KLINCKSIEC, Continents philosophiques 2013 ; [108].
- *Le temps du sens*, HYX 1997 ; [105] .
- *Le constructivisme non standard*, Presses Universitaires du Septentrion, 1999 ; [106]. Ce livre aurait tout aussi bien pu se situer dans l'annexe consacrée aux ouvrages techniques sur l'A.N.S.. On y trouve un long développement («L'asymptotique non standard») consacré aux "canards" et à des question connexes. De l'avis de Duchemin ce passage est irréprochable au plan des mathématiques et profond dans ses interprétations. Noter que le texte de Reeb difficile à se procurer *La mathématique non standard vieille de soixante ans*, publication de l'Institut de Recherche Mathématiques Avancée (IRMA), Université Louis Pasteur de Strasbourg, 1979 64/P-30. est reproduit en annexe.
- *Philosophie des mathématiques* Vrin 2008 ; [107].

Annexe D

Témoignages

D.1 Témoignages de mathématiciens “explorateurs”

L’image d’un continent que la science explore est tout à fait banale. Elle donne son titre à une émission de France Culture : Continent-Sciences. J’ai cherché quelques témoignages de mathématiciens décrivant leur activité comme l’exploration d’un continent pour voir si ils acceptent cette image pour leur discipline.

A. Connes

Quelques extraits de "A view of mathematics” un texte postérieur à 2005 (sur son site http ://www.alainconnes.org/docs/maths.pdf).

> The scientific life of mathematicians can be pictured as a trip inside the geography of the “mathematical reality” which they unveil gradually in their own private mental frame.(. . .)
> The really fundamental point in that respect is that while so many mathematicians have been spending their entire scientific life exploring that world they all agree on its contours and on its connexity : whatever the origin of one’s itinerary, one day or another if one walks long enough, one is bound to reach a well known town i.e. for instance to meet elliptic functions, modular forms, zeta functions. “All roads lead to Rome” and the mathematical world is “connected”.
> In other words there is just “one” mathematical world, whose exploration is the task of all mathematicians and they are all in the same boat somehow.
> Moreover exactly as the existence of the external material reality seems un-

> deniable but is in fact only justified by the coherence and consensus of our perceptions, the existence of the mathematical reality stems from its coherence and from the consensus of the findings of mathematicians. The fact that proofs are a necessary ingredient of a mathematical theory implies a much more reliable form of "consensus" than in many other intellectual or scientific disciplines. It has so far been strong enough to avoid the formation of large gatherings of researchers around some "religious like" scientific dogma imposed with sociological imperialism.
>
> Most mathematicians adopt a pragmatic attitude and see themselves as the explorers of this "mathematical world" whose existence they don't have any wish to question, and whose structure they uncover by a mixture of intuition, not so foreign from "poetical desire", and of a great deal of rationality requiring intense periods of concentration.

Dans l'image du continent Connes insiste sur la connexité (l'unité des mathématiques) et le fait que la nécessité des preuves en mathématiques entraine l'existence d'un consensus.

D. Ruelle

Dans *L'étrange beauté des mathématiques*, O. Jacob 2008 ; [103].

> Nous pouvons dire que notre bon mathématicien, après avoir passé une beaucoup de son temps à explorer une certaine partie du paysage mathématique, écrit un article qui décrit un itinéraire à travers ce paysage. Si cet itinéraire contient un raccourci interdit, il sera sans doute possible de trouver un autre chemin.

R. Thom

Dans *Prédire n'est pas expliquer*, Champs Flammarion 1993 p. 132 ; [116].

> Cette formule [242], que j'ai cherché à expliciter dans un article, je ne peux mieux l'expliquer qu'en ayant recours à un dessin, une sorte de "carte du tendre".
>
> En bas, on trouve un océan, la mer de l'Insignifiance. Sur le continent, le vrai est d'un côté, et le faux de l'autre, séparés par un fleuve, le fleuve du Sens.(...)

Il continue sur plusieurs lignes. Une carte est dessinée p.137

242. «Ce qui limite le vrai, ce n'est pas le faux, c'est l'insignifiant» Note de L.B.

G. de Rham

Pour clore cette courte liste de témoignages deux mots sur Georges de Rham (1903-1990). C'est un mathématicien important, mondialement connu, on dit de lui «le plus grand mathématicien Suisse du XXème siècle». Il a la particularité d'être plus largement connu dans son pays comme un grand alpiniste ayant ouvert de nombreuses voies. Voici deux témoignages de sa part[243], le premier sur la beauté :

> On peut se demander quelle est la motivation profonde des recherches mathématiques ? Pour moi, Poincaré l'a dit : c'est un sens de la beauté qui est le véritable mobile du savant. Ce sens de la beauté est aussi le mobile, non seulement de l'artiste et du musicien, mais encore, de l'alpiniste. Car l'alpinisme n'est pas seulement un exercice physique, c'est aussi un travail de l'esprit, et il permet de réaliser une merveilleuse harmonie entre la nature, l'âme et le corps.

le second sur l'analogie entre une démonstration mathématique et un passage délicat en escalade :

> Un passage même extrêmement difficile ne constitue qu'en une succession de mouvements qui, pris isolément, sont tous parfaitement naturels et à la portée de tout être humain physiquement bien constitué.
>
> De même que chaque articulation d'une démonstration mathématique se résout en une démarche parfaitement naturelle à la portée de tout esprit sain. Une fois que l'on a compris, on a l'impression que c'est facile. La difficulté consistait précisément à comprendre, c'est-à-dire à résoudre le passage en mouvements simples. Le faire proprement, c'est le décomposer en mouvements absolument naturels, sans aucune crispation, marque d'un effort exagéré. Certains passages - comme certaines démonstrations mathématiques - exigent une concentration d'esprit exténuante. La varappe est ainsi avant tout un jeu de l'esprit ; c'est ce qui en fait une chose si captivante, passionnante.

D.2 A propos de A. Grothendieck

P. Duchemin m'a confié ce témoignage de Lobry sur le congrès de Nice de 1970. Il ne se souvient par pour quelle raison il avait été écrit.

243. tirés de l'article de O. Burlet, *Souvenirs de Georges de Rham*, (2004) sur le site de la société de mathématiques suisses :
`http://www.math.ch/cuso/activities/deRham/derham.pdf`

Mon témoignage doit être pris avec précaution. C'est celui d'un très jeune professionnel qui n'a pas encore soutenu sa thèse d'état et qui participe pour la première fois à un grand congrès. Mes préoccupations de l'époque sont contradictoires et banales. D'une part, égoïstement, je cherche à valoriser dans le cadre de cette manifestation mes travaux personnels en discutant avec des personnalités de mon domaine susceptibles de me soutenir pour un futur emploi de professeur ; d'autre part nous sommes en pleine "guerre froide" (l'affaire des missiles de Cuba en 1965, engagement militaire U.S. au Vietnam et escalade, les campagnes de bombardement du Nord Vietnam débutées en 65, culminant par les bombardement de la ville de Hanoï de décembre 1972) et comme beaucoup (la majorité ?) de jeunes scientifiques français je m'implique (très modestement) dans le soutien au peuple Vietnamien. Il faut ajouter que l'attitude relativement à la "guerre froide", n'était pas très clivante dans le milieu universitaire scientifique de l'époque où il était plutôt "bien vu" (en tout cas chez les jeunes) de dénoncer la politique U.S., les divergences entre communistes et "gauchistes" ne portant que sur les modalités de l'action. A côté de la "guerre froide" il y avait une "petite guerre", celle là franco-française, entre "mathématiques pures" et "mathématiques appliquées" où les nouvelles disciplines associées au développement des ordinateurs cherchaient à étendre leur place au soleil. La "petite guerre" tenait aussi beaucoup de place, ce qui nous ramène à ma première et égoïste préoccupation.

Une des conférences plénières avait été attribuée à L.S. Pontryagin. Si l'on veut comprendre le sens et la porté de l'incident Grothendieck une longue digression s'impose sur Pontryagin. En 1970 Pontryagin a 62 ans, il est connu pour des travaux considérables en mathématiques (très) pures dans ses années de jeunesse et peut être encore plus pour sa reconversion en "mathématiques appliquées" dans les années 1950. Son ouvrage traduit en anglais *The Mathematical Theory of Optimal Processes* en 1962 [244] est très connu chez les "mathématiciens appliqués" Français, mais pas seulement. En réalité ces travaux représentent, avec ceux de leurs concurrents Etats-Uniens une avancée importante d'un chapitre particulièrement ancien et glorieux des mathématiques : *Le calcul des variations* [245]. Ils font partie d'un champ scientifique en pleine expansion, la *Théorie du Contrôle Optimal*, dont les applications plus ou moins directes dans la course aux armements sont au moins aussi importantes que celles de la physique. Qu'on en juge :

— Le contrôle optimal a permis de piloter spectaculairement plus efficacement les chasseurs chargés d'intercepter des bombardiers à haute altitude en mettant en évidence des trajectoires optimales contre-intuitives.

— Les rendez-vous spatiaux bénéficient (encore maintenant) du contrôle optimal.

244. Synthèse de ses travaux avec ses collaborateurs V.G. Boltyanskii, R.V. Gamkrelidze et E.F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience, 1962, [98] travaux couronnés par le prix Lénine.

245. Le *calcul des variations* remonte au moins à Euler et est un des ingrédients de base de la mécanique (la mécanique de Lagrange)

— L'optimisation des formes aérodynamiques (des avions de guerre en particulier) bénéficient directement de ces méthodes.

— etc...

Certes, mais le "Principe du maximum de Pontryagin" permet aussi :

— D'économiser le carburant pour relier New-York à Paris.

— De participer à la division par deux ou trois de la consommation des voitures.

— D'améliorer les performances des procédés de dépollution.

— etc...

En bref le mathématicien qui fait du "contrôle optimal" est confronté à la question de l'usage civil ou militaire de ses découvertes comme n'importe lequel de ses collègues physicien spécialiste du nucléaire ou des lasers. J'étais un spécialiste du "contrôle optimal" et, comme tous mes collègues, j'étais bien conscient de ce problème vieux comme le monde. Ce qui nous ramène à la "petite guerre", celle des "mathématiques pures" contre les "mathématiques appliquées". Les "mathématiciens purs" ne se privaient pas de nous interpeller sur nos "compromissions" avec l'industrie de l'armement. Ils pouvaient nous donner des leçons, eux, puisqu'ils étaient "purs" !

L'histoire semble avoir retenu que Pontryagin avait mentionné dans sa conférence le possible usage militaire des travaux qu'il exposait mais je ne me souviens pas de ce point. Il me semble qu'il a simplement expliqué ce qu'est un problème de poursuite, cas particulier d'un "jeu différentiel" : Comment rejoindre de la façon la plus efficace possible une cible mouvante qui cherche à esquiver. Mais ne chipotons pas, en dehors de la chasse à courre, on ne voit pas très bien quelles autres applications que militaires peut avoir une telle théorie [246].

A la fin de l'exposé Grothendieck est monté à la tribune et a interpelé Pontryagin, ce qui n'est pas l'usage dans une conférence plénière du congrès international. Il n'était pas très agressif, j'avais l'impression qu'il était géné devant la stature du conférencier, a félicité l'orateur pour le "joli morceau de mathématiques" puis lui a demandé s'il ne pensait pas qu'il devrait éviter de se livrer à ce type de travaux en raison de leurs applications militaires. Pontryagin a répondu que ses travaux étaient très loin des applications réelles et que c'étaient d'autres que lui, des ingénieurs, qui travaillaient sur la question. Réponse

246. Les "jeux différentiels" sont des cas particulier de problèmes de la *Théorie des jeux* utilisée en "science économique". Je le signale. A vous de voir si c'est une application militaire !

D'autre part il y a une interprétation qui est celle des "jeux contre la nature" utilisée dans la modélisation en "environnement inconnu et incertain" ; dans ce cas un des deux joueurs est l'ingénieur qui cherche à optimiser le fonctionnement d'un dispositif dans le cadre d'un environnement inconnu, l'autre joueur est "la nature" dont on imagine qu'elle cherche à "saboter" l'action de l'ingénieur. Il s'agit donc de trouver des stratégies d'optimisation qui fonctionnent "dans le pire cas possible". Ce sont des applications qui débordent très largement le champ militaire. LB

qui était un peu minable et qui fit dire à un de mes amis communiste « Ces p... de Soviétiques ils ne répondent jamais sur le fond. Moi j'aurais dit que si la *théorie des jeux différentiels* permet de fabriquer des missiles efficaces contre les B-52 c'est un devoir de solidarité avec le Peuple Vietnamien que de travailler les jeux différentiels. »Il me semble que l'assistance semblait plus gênée (en tout cas c'était mon cas) que scandalisée par l'incident qui a été assez bref. La gène était accrue par le fait que Pontryagin était âgé et non voyant.

Pour ma part j'ai surtout vu dans cette apostrophe de Grothendieck une attitude antisoviétique parmi d'autres. Je ne sais pas si c'était justifié mais avec le recul je peux faire la remarque suivante. A ce même congrès J-L. Lions était également présent et en passe de devenir à 45 ans le chef de file incontesté des mathématiques appliquées françaises, avec toutes les relations que cela implique avec l'industrie de l'armement. N'aurait-il pas été plus sportif de la part de Grothendieck de s'attaquer à un homme de son âge en pleine possession de ses moyens ? En fait je ne crois pas que Grothendieck ait eu peur de Lions : tout ce que nous savons de lui indique qu'il était un homme courageux et intègre. Je pense plutôt qu'il ignorait tout simplement l'existence de J-L. Lions et d'une communauté deja significative et surtout en expansion de mathématiciens appliqués "compromise" bien au delà de ce qu'il pouvait imaginer. Il venait de quitter l'I.H.É.S. dont il avait découvert qu'une infime partie (je crois moins de 3 %) de son financement était militaire ! Il faut savoir que Grothendieck appartenait au groupe des plus purs des "mathématiciens purs", aux spécialistes de la Géométrie Algébrique assemblés dans un sous groupe de Bourbaki. Ces "purs" parmi les "purs" professaient un tel mépris pour les "appliqués" qu'il n'est pas du tout inimaginable que Grothendieck ait purement et simplement ignoré leur existence. [247]

Il y a eu quelques manifestation publiques organisées par "Survivre" (j'ai assisté à un meeting qui réunissait quelques dizaines de personnes, peut être plus d'une centaine, je ne me souviens pas, dans un style assez "mai soixante-huit") et quelque petites opérations de commando gauchistes dans salles où exposaient des mathématiciens appliqués des pays de l'est. Mais il ne me semble pas que le congrès ait été significativement affecté par ces manifestations. [248] En revanche Dieudonné, l'organisateur du congrès, à qui Grothendieck devait beaucoup, en a certainement beaucoup souffert. Certains ont dit que ce jour Grothendieck tuait le père. »

---

247. Ce souverain mépris des "mathématiciens purs" pour les "applications" fait naturellement penser à Hardy auquel, curieusement, ils ne se réfèrent pas. On retrouve ce désagréable côté "table rase" de la littérature de l'époque. L.B.

248. (note de Lobry). Je me souviens d'un exposé d'un mathématicien Polonais qu'un petit groupe de mathématiciens gauchistes niçois avaient décidé d'interpeler. J'étais près d'eux et au bout de dix minute l'un a murmuré « Avant que les militaires comprennent quelque chose à ce bazar il aura coulé de l'eau sous les ponts ; viens on s'en v.a. ». Et ils on quitté la salle avant la fin de l'exposé. Il est vrai que, même pour le spécialiste que j'étais, les propos de l'orateur étaient bien obscurs. On le voit l'ambiance était plutôt bon enfant.

Ce témoignage peut être mis en relation avec la reconstitution de l'évènement que nous propose l'historien Winfried Scharlau : [249]

> Grothendieck's main concern at the Nice conference was publicity for Survivre. He expected and hoped for a massive recruitment. In actual fact he gained, as he relates with disappointment in Survivre's bulletin, exactly four new members and 1300 Francs in donations. In spite of this he attracted quite a lot of attention ; after all he was one of the most famous mathematicians of all time, and the overall political climate was favorable to him. Thus, on September 4, about three hundred people attended a public discussion about the goals of Survivre. Together with his son Serge, Grothendieck set up an information stand and distributed hundreds of brochures about Survivre. This led to a fiery discussion with Dieudonné, who was responsible to the administration for the smooth running of the conference. (During the years of the student revolt the authorities were – rightly or wrongly – always prepared for the worst.) As a result of this, Grothendieck carried his information stand out of the building where the lecture hall was and onto the street. That made things even worse, because the organizers had promised that there would be no public political demonstrations. The chief of police of Nice appeared, and Grothendieck was asked to remove his stand from the street. It would only have meant taking a couple of steps backwards, but he refused. Cartier, who witnessed everything, exclaims "He wanted to go to prison, he simply wanted to go to prison !" Finally Cartier and a few colleagues themselves carried the information table a few feet to the side. Allyn Jackson quotes Cartier on these – and other – events with the following words : "In his heart he was always an anarchist. In regard to many points my own position was not far from his. But he was so naive that it was completely impossible to undertake anything political with him."
>
> If one speaks today with participants at the ICM in Nice, they frequently refer to his clash with Lev Pontryagin. Pontryagin was a prominent participant from the Soviet Union ; he gave a lecture on linear differential games and mentioned, as an application, the pursuit of one airplane by another. Grothendieck was not present at the talk, but some listeners who had not really appreciated the topic, or perhaps the application, told him about it. Upon this he ascended the podium after the lecture and demanded from the spea-

249. *Who Is Alexandre Grothendieck ? Anarchy, Mathematics, Spirituality, Solitude* Volume 3 : Spirituality (1970-1991) Translated from the German by Melissa Schneps. Accessible sur internet sur le site du Grothendieck circle.
`http://www.grothendieckcircle.org`

ker and the audience an opinion as to whether it would not be preferable to renounce doing research that has military applications, no matter how interesting the theoretical content. Pontryagin made some excuses and received demonstrative applause from the audience. Dieudonné or Cartier (or both) interceded, and Grothendieck attempted to discuss the issues that had been raised in a personal conversation with Pontryagin. Pontryagin was obviously uncomfortable, and eventually declared that all mathematics could be used for military purposes and that it was therefore not possible to concern oneself with the possible applications of such research.

Jacob Murre, who witnessed all these events, also participated in the discussion meeting about Survivre. In a private conversation he later expressed his – very legitimate – doubts, namely that most of the participants and people interested in the event were not true "ïdealists", but were attracted mainly by Grothendieck's fame as a mathematician.

We shall conclude this account of the ICM 1970 with a very small but very typical detail : Grothendieck naturally refused to book a hotel, but had instead preferred humble lodgings in a dormitory.

D.3 Témoignages à propos de l'A.N.S.

D.3.1 Témoignage de L.W. Markus

L.W. Markus (1922...), est un mathématicien contemporain et ami de G. Reeb. Il est spécialiste de la théorie des systèmes dynamiques et de la théorie du contrôle. Il est célèbre dans la communauté des mathématiciens appliqués pour son *Foundations of Optimal Control Theory* écrit avec E. Lee (on dit familièrement "le Lee et Markus"). Il a fait parvenir à Reeb un "compte rendu scientifique" d'un exposé sur l'A.N.S. En voici une copie.

De L. Markus à G. Reeb. – Peut être ≈ 85

Scientific Report

by L. Markus

On 6 and 13 October I gave hour lectures presenting technical expositions of Non-Standard Analysis, in the Mathematics Department of the University of Minnesota (see enclosed Seminar List). I followed the theories of IST (Nelson 1977) and various papers of Reeb. Starting with preliminary intuitive and philosophical beginnings, I gradually presented

$$IST = ZFC + (T) + (I) + (S)$$

and finally led to non-standard proofs of such results of analysis as: a continuous function on $[0,1]$ assumes its maximum, existence theorem of ODE, and then concluded with some results on the "standard shadow" of a solution of a singular perturbation problem of ODE. I think that the expositions were well presented, and were well received by the audience (about 35 mathematics faculty and graduate students). Most of the audience were analysists but also several logicians attended.

The main problems of exposition seemed to be:

1) Loud blabber-mouth logicians who interrupt frequently to explain (wrongly) what you really mean to say!

2) The difficulty of conventional mathematicians to accept the existence of infinitesimals (or unlimited reals) as already present in $\mathbb{R}$, without any further extensions. To overcome this psychological difficulty (Non-Standard Anxiety) one could give the following rough analogy:

Suppose we define a "prestandard number" as a real number that could appear on a print-out from a hand-held calculator operating for less than one hour. Then everyone agrees that there exist "pre-infinitesimals" in $\mathbb{R}$ that are positive yet less than each such print-out, and also unlimited integers in $\mathbb{N}$ that are larger. From this viewpoint axiom (I) is essentially a philosophical assertion that there are intrinsic limitations on those real numbers (and other mathematical objects) that can be defined by a hand-held calculator or by any other standard mathematical scheme of description. The real numbers $\mathbb{R}$ (formulated within ZFC by existential arguments concerning Platonic ideals) thereby transcend the standard numbers that can be specified by any human mathematical description of a standard type.

Thus (I) is essentially an announcement of a new "uncertainty principle" of mathematics. Just as the Heisenberg uncertainty principle contrasts the Platonic ideals of electrons with the human processes of physical measurement, just so (I) contrasts the ideal system $\mathbb{R}$ with human mathematical definability. This was the end of my motivating analogy in my lectures.

If you wanted to go further with these speculations (or amusements), you could say that (I) is related to a re-interpretation of Zeno's Paradox where the ideal concept of continuous motion is contrasted with the psychological description of the discrete stages or steps of the motion. Even more speculatively,

FIGURE D.1 –

Scientific Report
L. Markus
Page 2

the left-half brain supposedly deals with discrete decisions and the right half-brain with intuitive idealizations of continuity. Hence Zeno's Paradox and also Non-Standard Analysis are intrinsic patterns arising from the two different modes of human thought produced in different halves of the brain.

We can continue these conversations in Strasbourg.

As a separate matter I want to comment on the nonlinear oscillator of Mme. Diener

$$\varepsilon \ddot{x} + (x^2 - 1)\, \dot{x}^{[s]} + x = 0 \quad .$$

She explained, among other results, that for all suitably small $\varepsilon > 0$, and for $0 < s < 2 + \varepsilon/4$, there exists a unique limit cycle. I asked my colleagues, Y. Sibuya and W. Loud, and looked at various references (Levinson-Smith theorems as reported in texts by S. Lefschetz, and also Reissig-Sansone-Conti), but the result seems new as far as I can determine. It is significant that this interesting result can be found from an attack on the problem using the concepts and method of Non-Standard Analysis.

FIGURE D.2 –

D.3.2 Manifeste du mathématicien vert

Présentation d'une conférence de C. Lobry dans le bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (1991).

Bulletin de l'APMEP n° 379 - juin 1991

CONFÉRENCE DU VENDREDI
16 H - 18 H.

"Le manifeste du mathématicien vert"

par Claude Lobry (un porte parole des mathématiciens verts*)
Université de Nice

Analyse non-standard et informatique

Le mathématicien vert aime les mathématiques mais considère que le bonheur des hommes passe avant toute chose.

Le mathématicien vert aime comprendre ce qu'il fait et le faire partager aux autres.

Le mathématicien vert a une culture historique modeste mais suffisante pour savoir que les mathématiques ne se réduisent pas à un texte écrit ou à écrire dans le cadre de la "théorie des ensembles" ou de toute autre théorie formelle.

Le mathématicien vert constate que l'attachement quasi exclusif des mathématiciens actuellement au pouvoir à des techniques issues de la théorie des ensembles engendre des désordres sociaux graves, typiques d'une société industrielle rétrograde :

- spécialisation excessive et prématurée, travail répétitif,
- incommunicabilité croissante,
- structuration rigide de la communauté,
- valorisation excessive des élites,
- pouvoir illégitime des comités occultes,
- etc...

Il dénonce ce "meilleur des mondes mathématiques" imposé au nom d'une marche incertaine vers le "progrès".

Le mathématicien vert constate avec joie, qu'à l'aube du troisième millénaire, l'usage raisonné des infinitésimaux (l'Analyse Non Standard)

---

* Le mouvement des mathématiciens verts regroupe tous les mathématiciens qui le veulent et qui se reconnaissent plus ou moins dans un des points ci-dessus. C'est un mouvement sans structure et donc sans chef. Le porte parole provisoire remercie au nom du mouvement l'A.P.M.E.P.de lui offrir une tribune dans son *Bulletin* et à son Congrès.

Bulletin de l'APMEP n° 379 - juin 1991

ouvre, à des petites bandes de copains, la possibilité d'explorations de continents mathématiques jusqu'ici restés vierges, en dépit des efforts considérables d'énormes expéditions officielles. Il est convaincu que d'autres inventions, aussi géniales, ouvriront un jour d'autres perspectives. Mais, en attendant, il s'amuse déjà bien sur les sentiers ouverts par Robinson, Nelson, Reeb et quelques autres...

Le mathématicien vert ne refuse pas le progrès. Par exemple, il aime la bicyclette. Il considère que l'analyse du 19ème siècle,plus l'ordinateur individuel, constituent à eux seuls un remarquable Vélo Tout Terrain.

La mathématique verte n'est pas totalitaire. Elle reconnait le droit absolu à l'**irrationnalité**. Un homme peut avoir la passion des "belles mécaniques" et ne concevoir ses déplacements qu'au volant d'une Bugatti Royale, Porsche 1911 ou autre Ferrari Testa Rossa. De même un mathématicien peut très bien avoir la passion de la "mesure de Wiener" et ne rêver que de processus "progressivement mesurables" ou bien encore ne concevoir d'autre façon de s'exprimer que "cohomologique". Simplement, il doit reconnaître le caractère passionnel de sa démarche et veiller à ce qu'elle ne rentre pas de façon excessive en conflit avec l'intérêt collectif.

Le mathématicien vert est réaliste. Il sait que la pratique individuelle de la mathématique verte n'est pas toujours possible pour des raisons de sécurité. Tant que la circulation automobile sera ce qu'elle est sur certaines voies, y rouler à bicyclette aura un caractère suicidaire. De la même manière, tant que les commissions officielles ou occultes qui décident du "bon goût mathématique" seront ce qu'elles sont, il n'encouragera pas un jeune sans emploi à ses pratiques. Par contre les vieux, qui eux sont titulaires, auraient bien tort de se gêner.

Le mathématicien vert sait que l'humour et l'auto-dérision sont les plus sûrs remparts contre les tentations totalitaires. C'est pourquoi il remplace, à la fin de ses démonstrations, le classique C.Q.F.D." par sa devise : **C'est Vert, Mais Juste.**

	Suite à la conférence : *Atelier permanent* . Démonstrations commentées sur ordinateur (Callot, Reeb, Deledicq etc)	
	Claude Lobry	

Le débat ainsi ouvert pourra être poursuivi au cours d'un atelier permanent où seront présentées des expériences sur ordinateurs que nous trouvons simples, amusantes et instructives, comme le tracé de graphes de fonctions, les artéfacs de "pixèlisation", les "moirés", les "canards"...(avec Callot, Reeb, Deledicq, Diener,...)

D.4 Témoignages de F. et M. Diener

Le 01/10/2018 à 18 :09, Luc Balderoy a écrit : De Luc Balderoy
À Professeurs F. et M. Diener

Bonjour,

Comme vous le savez par le prof. Duchemin (qui m'a dit de vous écrire) je travaille dans le cadre d'une thèse (en histoire des idées) sur le thème de la réception de l'A.N.S. en France.

En 1981 P. Cartier a fait un exposé au séminaire Bourbaki où il rend compte de vos travaux sur les champs lent-rapides[250]. Cet article fait l'éloge du système I.S.T. et montre comment vos travaux utilisent avec profit ce nouveau formalisme. Comme P. Cartier est à cette époque un éminent bourbakiste ses avis devraient avoir du poids dans la communauté. Ceci rend étrange les difficultés rencontrées par la suite pour la soutenance de la thèse de E. Benoit à Paris. Je suis donc attaché à clarifier au maximum les rapports de P. Cartier avec l'A.N.S.

J'ai suivi ses discussions postérieures avec J. Harthong et ses travaux avec Y. Perrin sur la moyennisation mais je n'ai pas trouvé de trace antérieure à 1981 de contact avec l'A.N.S. Comme son premier travail dans le domaine est la recension de vos travaux je suppose qu'à un moment donné, sous une forme ou une autre, vous avez été en contact et que peut-être vous pouvez répondre à une partie de mes interrogations.

Auriez vous la gentillesse de répondre à mes questions ? Vos réponses n'ont pas besoin d'être longues. Elles figureront intégralement dans les documents annexés à ma thèse.

1. Avez vous rencontré P. Cartier avant son exposé au séminaire Bourbaki ?

Si la réponse à cette question est oui :

2. Qui a pris l'initiative de votre rencontre : lui ou vous ?
3. Que savait-il de l'A.N.S. au moment de votre rencontre ?

250. Les "champs lent-rapides" sont le type des équations différentielles sur lesquelle ont été découverts les "canards ". Note de LB.

Je vous remercie par avance de votre aide. Si mon projet de thèse aboutit je ne manquerai pas de vous en faire parvenir un exemplaire.

Je vous prie d'agréer Madame la professeure, Monsieur le professeur l'expression de mon profond respect.

Luc Balderoy

Le 7 oct. 2018 à 17 :56, Francine et Marc Diener a écrit : Bonjour,

C'est Francine qui te répond. Désolée pour mon absence de réponse rapide...un peu débordée...bien que je sois à la retraite depuis peu. J'essayerai d'être plus rapide la prochaine fois ;-)!

Voici mes réponses.

1. Avez vous rencontré P. Cartier avant son exposé au séminaire Bourbaki ?

Oui. Pierre Cartier était professeur à Strasbourg lorsque Marc et moi y avons débuté nos études et il était aussi un "fidèle" de mon père, pasteur à l'église Saint Nicolas, avec qui il avait de longues conversations philosophiques. A l'automne 1968, nous débutions notre première année, il était un prof "de gauche", qui soutenait la plupart de nos "revendications" mais il était aussi, pour nous, un "mandarin". La aussi, nombreuses discussions entre lui et nous...Nous étions un peu extrémistes à l'époque... Nous l'avons eu comme professeur en troisième année pour le cours de théorie de la mesure et au même moment nous avions aussi comme professeur Georges Reeb pour le cours de topologie. Pour son contenu scientifique, nous préférions, sans hésitation, le cours de Reeb, bien que nous le considérions alors comme un pur mandarin, pire encore que Cartier de ce point de vue là. Puis, nous avons presque totalement perdu P. Cartier de vue car il a quitté Strasbourg pour l'IHES et nous sommes partis trouver un gagne pain à l'Université d'Oran. Bien des années plus tard, au printemps 1981, nous avions presque fini nos thèses, la polémique anti non standard battait son plein, et Reeb réfléchissait à haute voix sur la composition de nos deux jurys de thèse. J'ai proposé de demander à P. Cartier pour mon jury, Reeb était un peu sceptique mais il n'était pas opposé à ce que j'essaie (je crois qu'il pensait qu'il pourrait demander à Cartier de me donner un deuxième sujet (ce qui était l'habitude à ce moment là, deuxième sujet que j'ai d'ailleurs refusé de faire (par principe) quand Cartier me l'a proposé un peu plus tard). J'ai donc fait, dès que je l'ai pu, le voyage

d'Oran à Paris et j'ai été reçu par Cartier à l'IHES. La façon dont la discussion s'est engagée m'a passablement surprise. En effet, à Oran, nous étions relativement loin de l'agitation crée par les anti non standardistes et, de mon point de vue, leurs arguments étaient tout simplement des arguments de mauvaise fois de gens qui sont assez stupides pour avoir une opinion négative et à priori sur quelque chose qu'ils ne connaissaient pas. Je ne doutais pas une seconde que Cartier que je connaissais comme un individu sincère et ouvert au débat (il est vrai que je n'avais l'expérience que de débats politiques ou philosophiques avec lui) puisse croire à ces idioties. J'ai donc été stupéfaite de sa position, pour le moins sceptique envers l'analyse non standard au début de notre discussion. J'ai donc du batailler des heures durant, pied à pied, j'ai remis en question une par une toutes ses idées reçues, je l'ai quitté en lui laissant ma thèse et quelques autres papiers de la bande des non standardistes. Il m'a dit qu'il allait y réfléchir. Quelques semaines après, nous étions en France pour les vacances d'été, nous lui avons à nouveau rendu visite, avec Marc cette fois. Il a accepté d'être dans mon jury de thèse et il a demandé qu'on lui envoi de nombreux autres papiers auxquels nos deux thèses renvoyaient (Callot, Benoit, Reeb, Urlacher, Troesch, etc...) et aussi d'autres dont nous ne parlions pas comme Harthong ou Lutz. Je me souviens que sur son bureau, on a pu voir en partant une pile impressionnante, d'au moins 20 ou 30 cm de divers preprints, et comme, je voyais bien qu'il n'avait encore presque rien lu, et assez peu compris, j'étais loin d'imaginer qu'il serai en mesure, quelque mois plus tard d'exposer nos travaux à Bourbaki, en faisant la preuve qu'il en avait compris jusqu'aux aspects les plus techniques comme le principe de Fehrele.

Si la réponse à cette question est oui. 2. Qui a pris l'initiative de votre rencontre : lui ou vous ? Comme je viens de l'expliquer, je cherchais un membre de jury pour ma thèse. C'est moi qui lui ai demandé un rendez-vous et je suis venue d'Oran pour le rencontrer.

3. Que savait-il de l'A.N.S. au moment de votre rencontre ?

En fait, il connaissait Nelson et ses travaux antérieurs à IST en physique et théorie de représentation des groupes (sans doute proches de ses propres travaux et "concurrents") et, dans la polémique ambiante, il s'était fait une idée (à partir de ce qu'il avait entendu à l'IHES et d'une rapide lecture du papier de Nelson) qui était complètement

négative. Il a essayé de me convaincre de la validité de ses critiques et de ses doutes mais j'ai rapidement compris qu'ils étaient tout sauf solides.

Voila, cher Luc, j'espère que mes renseignements te seront utiles. Je reste disponible pour répondre à d'autres questions si tu en ressens le besoin. Cordialement, Francine Diener

Le 07/10/2018 à 19 :07, Luc Balderoy a écrit : Bonjour Madame Diener,

Je vous remercie pour votre témoignage qui figurera dans sa totalité dans mon mémoire. Encore une petite question s'il vous plait : Qu'est ce que le « principe de Fehrele » ? J'ai lu dans votre livre que c'est un théorème de I.S.T. (aucun halo n'est une galaxie), mais pourquoi ce nom ?

Je vous remercie par avance. Luc Balderoy.

Le 7 oct. 2018 à 23 :54, Francine et Marc Diener a écrit : Cher Luc,

là je préfère passer le clavier à Marc, qui connait plus d'alsacien que moi (bien que ses parents ne le lui ont jamais appris, car ils avaient bien peiné sous le slogan "C'est chic de parler français" imposé par les français " de l'intérieur" à la Libération)

Fehrele est le prénom alsacien pour "Alexis". Fehrele est célèbre pour les réponse (décalées) qu'il donne quand on l'interroge à l'école (selon une chanson traditionnelle bien connue en Alsace). Par exemple: en géométrie:

- Dann hann se ne gfroejt in d'Scheometrie, was het de Fehrele gsajt? [puis ils ont interrogé Fehrele en Geometrie, qu'a dit Fehrele?]

- a Drejeck kann ken Viereck sih, des het de Fehrele gsajt (bis) [un triangle ne peut pas être un carré, voilà ce qu'a dit Fehrele]

Quand nous avons soumis à Georges Reeb le theorème(1) que nous venions de démontrer qu'un halo ne peut être une galaxie, et que nous lui avons demandé ce qu'il en pense, il nous a répondu que cela lui rappelle la chanson de Fehrele. Ce qui revient à ajouter la strophe

suivante (qui respecte les canons de la chanson, dont les rimes en "i")

- Dann hann se ne gfroejt in d'net-standard Theorie, was het de Fehrele g'sajt: [puis ils ont interrogé Fehrele en Theorie Nonstandard, qu'a dit Fehrele?]

- a Halo isch ken Galaxie, des het de Fehrele gsajt (bis) [un halo n'est pas une galaxie, voilà ce qu'a dit Fehrele]

Le terme "Principe de Fehrele" a instantanément été adopté par la bande des "canardeur" (mais qui a inventé cette autre terminologie?)

Bon courage à vous,
Marc et Francine Diener

(1) A l'origine il y a l'échange suivant: Marc, sur la route du séminaire au couscous méridien, suggère aux canardeurs d'introduire un nom pour l'ensemble externe de réels infinitésimaux de l'ordre de epsilon, et propose le nom de epsilon-halo, ce à quoi Jean-Louis répond immédiatement que ce serait mieux de l'appeler epsilon-galaxie, ce qui a instantanément convaincu tout le monde comme une évidence? M a alors voulu comprendre pourquoi J-L avait évidement raison...
Sur Cartier: Francine oublie qu'en mai 68 Cartier avait invité chez lui, quai Rouget-de-Lisle, quelques leader dont Jean-Claude Picard mais aussi Francine alors-Rusch et Marc pour discuter où tout cela pourrait aller; Les gauchistes présents on été impressionnés lorsque le mandarin a fait venir le chariot des rafraichissements...

D.5 Témoignage de T. Sari

Le 10/12/2018 à 18 :09, Luc Balderoy a écrit : De Luc Balderoy

à Professeur T. Sari.
Monsieur le Professeur,

le Professeur Duchemin, que vous connaissez, m'indique que que vous avez participé, dans les années 1970, au séminaire ‘‘trajectorien’’ de Strasbourg où G. Reeb a commencé à développer ses idées sur l'

A.N.S.

Je suis doctorant en philosophie (histoire des idées) et je me pose deux questions :

— - Pourquoi l'A.N.S. a-t-elle été mal reçue par la communauté mathématiques ?

— - Pourquoi le débat, qui se développait dans les années 1980, a-t-il rapidement disparu dans les années 1990 ?

Pour mieux comprendre il me serait utile de savoir comment le groupe de mathématiciens du séminaire ''trajectorien'' abordait la question de l'A.N.S.. Voici une liste de questions plus précises.

1. A quelle date G. Reeb a-t-il parlé pour la première fois de l'A.N.S. au séminaire ?
2. De quelle forme d'AN.S. s'agissait-il ? Robinson ou Nelson (l'article de Nelson est de 1976, je crois).
3. Comment les membres du séminaire percevaient-ils l'A.N.S. ?
4. Les autres mathématiciens de Strasbourg étaient-ils au courant ? Si oui quelle était leur réaction ?

Bien entendu vous vous n'êtes pas tenu de répondre directement à mes questions qui ne sont là que pour vous indiquer quelles sont mes préoccupations. Je vous demanderai probablement l'autorisation de citer tout ou partie de votre témoignage.

J'espère que votre responsabilité de directeur d'un gros laboratoire de l'institut IRSTEA vous laissera un peu de loisir pour répondre à mes questions qui sont certainement très éloignées de vos activités actuelles consacrées à la science de l'environnement.

Je vous prie d'agréer, Monsieur le professeur, l'expression de mon profond respect.

Luc Balderoy

Le 15/12/2018 à 18 :09, T. Sari a écrit : Cher Monsieur

Votre directeur de thèse m'a déjà parlé de votre travail. C'est une immense tâche et votre travail sera sans doute très utile pour les historiens qui étudieront cette période du développement mathématique et des idées en France dans les années 70-80.

En ce qui me concerne, j'ai été un témoin direct de cette période en 1976-1983. Je vais essayer de rassembler mes souvenirs pour vous

apporter des réponses aussi précises et détaillées que possible à vos questions

1. A quelle date G. Reeb a-t-il parlé pour la première fois de l'A.N.S. au séminaire ?

En 1975/1976 j'étais étudiant en Maitrise de mathématiques (Master 1 comme on dit aujourd'hui). G. Reeb a été invité (il me semble que c'était au printemps) à l'université d'Oran par Rachid Bebbouchi et par Francine et Marc Diener (qui étaient coopérants en Algérie). Il a fait une série de conférences sur les feuilletages, les structures de contact et sur l'analyse non standard, dans sa présentation Robinsonnienne.

En septembre 1976 je suis arrivé à Strasbourg, pour faire un DEA de mathématiques (Master 2 comme on dit aujourd'hui). J'ai assisté alors aux exposés du "Séminaire trajectorien" qui se tenait chaque mardi à l'IRMA (Institut de Recherche Mathématique Avancée) de Strasbourg. Ce séminaire était consacré cette année-là à la lecture et l'étude du livre d'Abraham Robinson. Robert Lutz, qui était professeur à l'université de Mulhouse, venait chaque mardi pour expliquer les fondements logiques de l'ANS de Robinson, et en particulier les notions de superstructures, de modèles, d'ultra-produits...

Reeb était présent à ces séminaires, mais les exposés était faits par son disciple Robert Lutz, qui avait entrepris, avec son élève Michel Goze, le projet d'écrire un livre sur le sujet. J'allais moi-même tous les lundis et les jeudis à Mulhouse car je suivais le cours de DEA de Lutz sur la Topologie Algébrique et j'assistais semaine après semaine aux discussions sur l'ANS et sur le projet du livre. Ce livre s'inspirait dans sa présentation du "Klein-Reeb", un livre très apprécié d'Analyse du niveau premier cycle, qui était organisé en leçon commençant chacune par une formule importante, suivie de commentaires sur la formule, commentaires qui pouvaient prendre la forme aussi de preuves, d'exercices, d'énoncés complémentaires de la formule... C'est la raison pour laquelle le Lutz-Goze était organisé en "Lessons".

2. De quelle forme d'AN.S. s'agissait-il ? Robinson ou Nelson (l'article de Nelson est de 1976, je crois).

Durant l'année 1976/1977, le séminaire Trajectorien était donc consacré à des exposés de Lutz sur l'approche de Robinson de l'ANS. Cette approche sémantique de l'ANS était très difficile à comprendre,

de moi et de la plupart des participants au séminaire. L'article de Nelson sur IST est paru l'année suivante, en novembre 1977. Dès sa parution, Reeb a immédiatement commencé à nous en parler et à en faire la publicité. En effet l'approche syntaxique de IST était beaucoup plus proche des habitudes de la plupart des mathématiciens. Une anecdote me vient à l'esprit : lorsqu'il nous avait fait son exposé à Oran au printemps 1976, je lui avais demandé à la fin de l'exposé ce qu'était de $^*R$?, qu'on nous avait appris dans nos cours de licence qu'il y avait un seul ensemble R, à isomorphisme près; quels étaient les axiomes de cette théorie ? Il m'avait répondu que c'était différent, que c'était une construction de logicien, qu'il fallait comprendre Lovenheim et Skolem, bref, avait-il dit en souriant que 'vous comprendrez quand vous serez plus grand'. A l'automne 1977, il m'a tout de suite apostrophé dans la bibliothèque de l'IRMA en me disant "Voici la présentation axiomatique de l'ANS que vous vouliez!"

Le livre de Lutz-Goze, Nonstandard Analysis in Practice présente les deux approches, celle de Robinson et celle de Nelson, car dès l'apparition de IST, la majorité des adeptes de l'ANS ont adopté IST. A Strasbourg, le seul mathématicien qui continuait à parler en langage Robinsonien était Jacques Harthong.

3. Comment les membres du séminaire percevaient-ils l'A.N.S. ?

4. Les autres mathématiciens de Strasbourg étaient-ils au courant ? Si oui quelle était leur réaction?

Je réponds à 3 et 4. Il avait ceux qui croyaient en Reeb, et ceux qui était hostiles à l'ANS, mais qui venaient quand même au séminaire trajectorien, car c'était une véritable institution de l'IRMA. J'étais très jeune en 1976, j'étais surpris de constater qu'en mathématique il pouvait y avoir des "opposants" ou des personnes "hostiles à des théories". Les séances étaient très houleuses, car il s'agissait d'une théorie difficile, et les opposants à l'ANS guettaient la moindre faille ou erreur dans l'exposé de Lutz pour critiquer la théorie ou les personnes (Lutz, Reeb) qui prétendaient vouloir en faire et qui n'y comprenaient rien. On pouvait entendre de la part des soutiens des phrases du genre "on ne peut pas être pour ou contre le nombre pi" !. Je crois que cette période a été racontée aussi dans un numéro spécial de l'Ouvert consacré à Reeb.

Reeb et ses élèves, Emile Urlacher et Albert Troesch, avaient fait aussi durant ce séminaire des exposés "plus simples" sur l'utilisation

de l'ANS dans la théorie des perturbations singulières des équations différentielles, notamment sur l'existence du cycle limite dans l'équation de Van der Pol, sur le phénomène du crépitement. Les opposants à l'ANS disaient qu'il s'agissait de trivialités... Plus tard dans la période 1978-1981, il y a eu plusieurs résultats spectaculaires (notamment sur les canards), l'exposé de Cartier au séminaire Bourbaki, l'article de Zvonkin et Shubin, les soutenances d'un grand nombre de thèses d'états (E. Urlacher, A. Troesch, Bobo Seke, J.L. Callot, M. Diener, F. Diener, R. Bebbouchi, M. Goze...) et de thèses de 3ème cycle (notamment celle d'Eric Benoit).

Les opposants continuaient leur dénigrement. On entendait des phrases du genre "Van der Pol, ras le bol !". Un ancien élève et ami de Reeb (Gérard, pour ne pas le citer, un expert en équation différentielles dans le champs complexe) avait même dit (je ne l'ai pas entendu de vive voix) qu'une seule des thèses de 3ème cycle qu'il avait fait soutenir, valait tous les doctorats d'état que Reeb avait suscités. D'ailleurs Reeb avait refusé d'être dans les jurys de ces thèses d'état pour ne pas causer de tort aux jeunes collègues mathématiciens qu'il avait entrainés dans cette voie. Il voulait que d'autres mathématiciens prestigieux cautionnent les travaux. Si mes souvenirs sont bons, je crois qu'il n'avait siégé que dans le jury de Marc Diener, car celui-ci avait vraiment insisté.

Je me suis mis moi-même à faire du nonstandard en 1980 (après avoir soutenu une thèse de 3ème cycle en décembre 1979). J'ai soutenu ma thèse d'état à l'université de Mulhouse en mai 1983. Reeb a accepté de siéger dans mon jury de thèse. J'avais insisté et je lui disais que j'allais en Algérie et donc sa "présence dans mon jury" ne pouvait pas me causer de torts.

Je suis retourné en Algérie en septembre 1983 et je n'ai assisté que de loin à la suite des tribulations du nonstandard en France. Lorsque je suis revenu en 1991 en France, la guerre semblait être finie: plusieurs nonstandardistes avaient eu des postes en France, des nouvelles thèses avaient été faites, notamment à Paris, où les Diener, de retour d'Algérie avaient créé un groupe de travail très actif.

Je reste à votre écoute pour vous apporter plus de détails sur ce témoignage.

Bien cordialement

Prof. Tewfik SARI
Directeur de Recherche à Irstea
Directeur de l'UMR ITAP
"Information-Technologie- Analyse environnementale - Procédés agricoles"

Index

A.N.S., 5, 8, 22–24, 29, 34, 35, 69, 71, 87, 93–95, 97–99, 106, 108, 109, 111, 113, 114, 121–123, 125–129, 132–141, 228, 234–237, 240, 244, 250, 251, 253–255

Badiou, 21, 29, 130, 251, 254
Baez, 75
Barreau, 97, 130, 237, 251, 254
Bourbaki, 60, 61, 67, 69, 70, 81–88, 93, 101, 109, 234, 240, 250
Bouveresse, 21, 181

Cartier, 86, 97, 101, 108, 234, 240
Connes, 108, 116, 122, 125–128, 141, 256, 257

Dieudonné, 35, 60, 84, 88–91, 108, 114, 116, 118, 228, 250, 251
Duhem, 78

E.N.S., 2, 79, 81, 87–89, 93, 141, 142
Eco, 166, 167

Fields, 71, 74, 108, 116

Grothendieck, 81, 96, 143, 159, 160, 196–198, 208, 209, 211–213, 232, 233, 259–261

Hardy, 193, 195, 199, 214, 261
Harthong, 29, 93, 99, 122, 126, 127, 129, 237, 251, 252, 254
herméneutique, 70, 252, 253, 255

I.H.É.S., 143, 196
I.S.T., 68, 69, 97, 109, 113, 128, 136, 236
infinitésimal, 3, 50, 51, 65, 66, 128

Lévy-Leblond, 78, 148, 204, 208, 220
Lafforgue, 28
Lautman, 21

naïfs, 34, 36, 52, 64, 65, 117, 129, 239, 251
Nelson, 68–70, 94, 97, 109, 121, 128–131, 227, 236, 237, 240, 253, 254
Nordon, 20, 28, 91, 118, 119, 221

Petitot, 21, 130, 149
Platon, 113, 126

Quine, 21, 61, 67, 77, 124

Reeb, 8, 14, 15, 39, 49, 71, 87, 92–95, 97–99, 109, 122, 123, 126, 128, 129, 131, 135, 139–141, 236, 237, 239, 240, 251, 252, 255
rigueur, 4, 20, 22, 27–29, 31, 51, 52, 54, 58, 60, 64, 69, 70, 84, 109, 132, 203
Robinson, 69, 92, 97, 128, 129, 227, 236, 240, 254

Salanskis, 21, 71, 93, 97, 119, 130, 228, 253, 254
système formel, langage formel, 53, 55, 58, 59, 61, 63, 64, 68

Tao, 75
Thom, 31, 34, 116, 143, 218–221, 232, 233, 242, 257

Umberto Eco, 167, 168

Vénissac, 9, 10, 12, 14–16, 18–22, 24, 28, 76, 88, 99, 101, 104, 106, 108–110, 139, 140, 234
Villani, 75
von Neumann, 198

Z.F.C., 59, 61, 64–66, 68, 69, 136

Bibliographie

[1] Peter Abrams. The fallacies of "ratio-dependent" predation. *Ecology*, 75(6) :1842–1850, 1994.

[2] Peter Abrams. Anomalous predictions of ratio-dependent models of predation. *Oikos*, pages 163–171, 1997.

[3] Peter Abrams. Why ratio dependence is (still) a bad model of predation. *Biological Reviews*, 90(3) :794–814, 2015.

[4] Resit Akcakaya, Roger Arditi, and Lev Ginzburg. Ratio-dependent predation : an abstraction that works. *Ecology*, 76(3) :995–1004, 1995.

[5] Sergio Albeverio, Jens Erik Fenstad, Raphael Høegh-Krohn, and Tom Lindstrøm. *Nonstandard methods in stochastic analysis and mathematical physics*.

[6] Roger Arditi and Lev Ginzburg. Coupling in predator-prey dynamics : ratio-dependence. *Journal of theoretical biology*, 139(3) :311–326, 1989.

[7] Roger Arditi and Lev Ginzburg. *How species interact : altering the standard view on trophic ecology*. Oxford University Press, 2012.

[8] Karl Egil Aubert. Spurious mathematical modelling. *The Mathematical Intelligencer*, 6(3) :54–60, 1984.

[9] David Aubin, Hélène Gispert, and Catherine Goldstein. The total war of paris mathematicians. *The War of Guns and Mathematics : Mathematical Practices and Communities in France and Its Western Allies Around World War I*, pages 125–78, 2014.

[10] Alain Badiou. La subversion infinitesimale. *Cahiers pour l'analyse*, 9 :118–137, 1968.

[11] Alain Badiou. *L'être et l'événement*. Le Seuil, 2014.

[12] Jacques Bair, Piotr Błaszczyk, Robert Ely, Valérie Henry, Vladimir Kanovei, Karin U Katz, Mikhail G Katz, Semen S Kutateladze, Thomas McGaffey, David M Schaps, et al. Is mathematical history written by the victors ? *Notices of the AMS*, 60(7) :886–904, 2013.

[13] Hervé Barreau and Jacques Harthong. La mathématique non standard. *Editions du CNRS, Paris*, 1989.

[14] Tiziana Bascelli, Emanuele Bottazzi, Frederik Herzberg, Vladimir Kanovei, Karin U Katz, Mikhail G Katz, Tahl Nowik, David Sherry, and Steven Shnider. Fermat, leibniz, euler, and the gang : The true history of the concepts of limit and shadow. *Notices of the AMS*, 61(8), 2014.

[15] Éric Benoît. Systemes lents-rapides dans $\mathbb{R}^3$ et leurs canards. *Astérisque*, 109(110) :159–191, 1983.

[16] Éric Benoit, Jean-Louis Callot, Francine Diener, and Marc Diener. Chasse au canard. *Collectanea Mathematica*, 32(2) :37–119, 1981.

[17] Piotr Blaszczyk, Alexandre Borovik, Vladimir Kanovei, Mikhail G Katz, Taras Kudryk, Semen S Kutateladze, and David Sherry. A non-standard analysis of a cultural icon : The case of paul halmos. *Logica Universalis*, 10(4) :393–405, 2016.

[18] Émile Borel. L'infini mathématique et la réalité. *Revue du mois*, 18 :71–84, 1914.

[19] Nicolas Bouleau. *Philosophies des mathématiques et de la modélisation : Du chercheur à l'ingénieur*. L'Harmattan Paris, 1999.

[20] Nicolas Bouleau. *La modélisation critique*. Quae, 2014.

[21] Nicolas Bourbaki. L'architecture des mathématiques. *Les grands courants de la pensée mathématique*, pages 35–47, 1948.

[22] Nicolas Bourbaki. *Théorie des ensembles*. Springer, 2006.

[23] Lazare Carnot. *Reflexions sur la metaphysique du calcul infinitesimal*. M. me Ve Courcier, impr. libraire pour les mathématiques, quai des Augustins, 1813.

[24] Pierre Cartier. Perturbations singulières des équations différentielles ordinaires et analyse non-standard. *Séminaire Bourbaki*, 24 :21–44, 1981.

[25] Jean-Pierre Changeux and Alain Connes. *Matière à pensée*. Odile Jacob, 1989.

[26] Christiane Chauviré (trad.). *L'essayeur de Galilée*, volume 234. Presses Univ. Franche-Comté, 1980.

[27] Christophe. *L'idée fixe du savant Cosinus*. Armand Colin, 2012.

[28] Alain Connes, André Lichnerowicz, and Marcel Paul Schützenberger. *Triangle de pensées*. Odile Jacob, 2000.

[29] Michael Crandall, Hitoshi Ishii, and Pierre-Louis Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American mathematical society*, 27(1) :1–67, 1992.

[30] Michael Crandall and Pierre-Louis Lions. Viscosity solutions of hamilton-jacobi equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 277(1) :1–42, 1983.

[31] Joseph Warren Dauben. *Abraham Robinson : The Creation of Nonstandard Analysis, a Personal and Mathematical Odyssey*. Princeton University Press, 2014.

[32] Gérard Debreu. Théorie de la valeur. *Dunod, Paris*, 1966, 1966.

[33] Gérard Debreu. *Theory of value : An axiomatic analysis of economic equilibrium*. Number 17. Yale University Press, 1987.

[34] Gérard Debreu. Theoretic models : mathematical form and economic content. In *Joan Robinson and Modern Economic Theory*, pages 264–277. Springer, 1989.

[35] Pierre Delattre and Michel Thellier. *Actes du colloque" Elaboration et justification des modèles : applications en biologie", Paris, 9-14 octobre 1978*. Maloine, 1979.

[36] André Deledicq. Est-il possible d'enseigner l'analyse aujourd'hui ? *Repères IREM*, 24 :79–102, 1996.

[37] André Deledicq and Marc Diener. *Leçons de calcul infinitésimal*. Armand Colin, 1989.

[38] Jean Delumenau. Le savant et la foi. *Flammarion, Paris*, 1993.

[39] Mathieu Desroches, John Guckenheimer, Bernd Krauskopf, Christian Kuehn, Hinke M Osinga, and Martin Wechselberger. Mixed-mode oscillations with multiple time scales. *Siam Review*, 54(2) :211–288, 2012.

[40] Sebastian Diehl, Peter A Lundberg, Hans Gardfjell, Lauri Oksanen, and Lennart Persson. Daphnia-phytoplankton interactions in lakes : is there a need for ratio-dependent consumer-resource models ? *The American Naturalist*, 142(6) :1052–1061, 1993.

[41] Francine Diener and Marc Diener. *Nonstandard analysis in practice*. Springer Science & Business Media, 1995.

[42] Francine Diener and Georges Reeb. *Analyse non standard*. Hermann, 1989.

[43] Marc Diener. The canard unchained or how fast/slow dynamical systems bifurcate. *The Mathematical Intelligencer*, 6(3) :38–49, 1984.

[44] Marc Diener. Enseigner l'analyse avec des ordres de grandeur. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, 5(5) :19–38, 1998.

[45] Marc Diener and Claude Lobry (eds). *Analyse non standard et représentation du réel*. OPU, Alger, 1985.

[46] Jean Dieudonné. *Pour l'honneur de l'esprit humain*. Hachette Paris, 1987.

[47] Pierre Duhem. La théorie physique : son objet sa structure. VRIN (réédition), 1989.

[48] Till Düppe and E Roy Weintraub. *Finding equilibrium : Arrow, Debreu, McKenzie and the problem of scientific credit*. Princeton University Press, 2014.

[49] Marie-José Durand-Richard. Les mathématiques dans la cité. *Culture et société*, 2006.

[50] Wiktor Eckhaus. Relaxation oscillations including a standard chase on french ducks. In *Asymptotic Analysis II—*, pages 449–497. Springer, 1983.

[51] Joseph Fargione, Jason Hill, David Tilman, Stephen Polasky, and Peter Hawthorne. Land clearing and the biofuel carbon debt. *Science*, 319(5867) :1235–1238, 2008.

[52] Peter Fletcher, Karel Hrbacek, Vladimir Kanovei, Mikhail G Katz, Claude Lobry, and Sam Sanders. Approaches to analysis with infinitesimals following robinson, nelson, and others. *Real Analysis Exchange*, 42(2) :193–252, 2017.

[53] Aimé Fuchs and Georges Reeb. *Logique*. Institut de Recherche Mathématique Avancée, 1986.

[54] Véronique Gautheron and Emmanuel Isambert. Lire l'analyse non standard. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society Simon Stevin*, 3(3) :29–50, 1996.

[55] Thérèse Gilbert. L'enseignement de la continuité et de la dérivabilité en analyse non-standard. *Repères IREM*, (13), 1993.

[56] Thérèse Gilbert. Qu'est-ce que l'analyse non-standard. *Repères IREM*, (11), 1993.

[57] Lev Ginzburg and Mark Colyvan. *Ecological orbits : how planets move and populations grow*. Oxford University Press on Demand, 2004.

[58] Roger Godement. *Analyse mathématique II : Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes*, volume 2. Springer Science & Business Media, 2003.

[59] Godfrey Harold Hardy. *A mathematician's apology*. Cambridge University Press, 1992.

[60] B Hodgson. Le calcul infinitésimal. In *Choix de conférence du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques (ICME-7)*, pages 157–170, 1994.

[61] Giorgio Israel. *La mathématisation du réel : essai sur la modélisation mathématique*. 1996.

[62] François Jacob and Jacques Monod. Genetic regulatory mechanisms in the synthesis of proteins. *Journal of molecular biology*, 3(3) :318–356, 1961.

[63] Alain Jaubert and Jean Marc Lévy-Leblond (eds.). *(Auto) critique de la science : textes*. Éditions du Seuil, 1975.

[64] Dieudonné Jean. Mathématiques vides et mathématiques significatives. *Penser les mathématiques, Seuil*, 1982.

[65] Gautero Jean-Luc. Raisonner sans entraves : les enjeux politiques de l'affaire. *Alliage*, 35-36, 1998. `http://www.tribunes.com/tribune/alliage/35-36/03gaut.htm`.

[66] Vladimir Kanovei, Mikhail G Katz, and Thomas Mormann. Tools, objects, and chimeras : Connes on the role of hyperreals in mathematics. *Foundations of Science*, 18(2) :259–296, 2013.

[67] Jean-Louis Krivine. *Théorie axiomatique des ensembles*. Presses universitaires de France, 1969.

[68] Jean Largeault. *Intuition et intuitionisme*. Vrin, 1993.

[69] Bruno Latour. *Le métier de chercheur. Regard d'un anthropologue : 2e édition revue et corrigée*. Quae, 2001.

[70] Jean-Marie Legay. *L'expérience et le modèle*. Editions Quae, 1997.

[71] Simon Levin. What mathematics can do for sustainability. *Bulletin of mathematical biology*, 77(2) :251–253, 2015.

[72] Jean-Marc Lévy-Leblond. Des mathématiques catastrophiques. *Critique*, 33 :430–441, 1977.

[73] Jean-Marc Lévy-Leblond. Physique et mathématiques. *In Coll., Penser les mathématiques, Le Seuil, Paris*, 1982.

[74] Jean-Marc Lévy-Leblond. *La Vitesse de l'ombre : Aux limites de la science*. Le Seuil, 2009.

[75] Pierre-Louis Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. the locally compact case, part 1. In *Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis*, volume 1, pages 109–145. Elsevier, 1984.

[76] Claude Lobry. *Et pourtant, ils ne remplissent pas* $\mathbb{N}$*!* ALEAS, 15 quai Lassagne Lyon, 1989.

[77] Claude Lobry. A propos du sens des textes mathématiques, un exemple : la théorie des "bifurcations dynamiques". *Annales Institut Fourier*, 42 :327–351, 1992.

[78] Claude Lobry. L'herméneutique mathématique. In *Herméneutique : textes, sciences*, page 333. Presses Universitaires de France, 1997.

[79] Claude Lobry. La méthode des élucidations successives. *Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées*, 9 :171–193, 2008.

[80] Robert Lutz. Rêveries infinitésimales. *Gazette des mathématiciens*, (34) :79–87, 1987.

[81] Robert Lutz and Luis Gonzaga Luis Gonzaga. Modern infinitesimals as a tool to match intuitive and formal reasoning in analysis. *Synthese*, 134(1-2) :325–351, 2003.

[82] Robert Lutz and Michel Goze. *Nonstandard Analysis. : A Practical Guide with Applications.*, volume 881. Springer, 1981.

[83] Robert Lutz, Abdelnacer Makhlouf, and Etienne Meyer. L'enseignement de l'analyse en termes d'ordre de grandeur : nécessité et fondements. *REPERES-IREM*, (24) :103–116, 1996.

[84] Robert May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261(5560) :459, 1976.

[85] Philip Mirowski. L'irraisonnable efficacité des mathématiques en économie moderne. *Rue Descartes*, (2) :117–133, 2012.

[86] Philippe Mongin. L'axiomatisation et les théories économiques. *Revue économique*, 54(1) :99–138, 2003.

[87] Edward Nelson. Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 83(6) :1165–1198, 1977.

[88] Edward Nelson. Confessions of an apostate mathematician. *University of Rome*, 1995.

[89] Edward Nelson. Ramified recursion and intuitionism. *manuscript, Princeton University*, 1997.

[90] Didier Nordon. *Les mathématiques pures n'existent pas*. 1981.

[91] Marco Panza and Jean-Michel Salanskis. L'objectivité mathématique : platonismes et structures formelles. 1995.

[92] Anne-Sandrine Paumier and David Aubin. Polycephalic euclid ? collective practices in bourbaki's history of mathematics. In *Historiography of Mathematics in the 19th and 20th Centuries*, pages 185–218. Springer, 2016.

[93] Yves Péraire. Théorie relative des ensembles internes. *Osaka Journal of Mathematics*, 29(2) :267–297, 1992.

[94] Yves Péraire. Le replacement du référent dans les pratiques de l'analyse issues de e. nelson et de g. reeb. *Philosophia Scientiæ. Travaux d'histoire et de philosophie des sciences*, (CS 5) :257–273, 2005.

[95] Jean Petitot. Nature et enjeux de la modélisation en sciences sociales. *Le Genre Humain*, pages 75–101, 1998.

[96] Charles Pisot and Marc Zamansky. *Mathématiques générales : algèbre-analyse*. Dunod, 1959.

[97] Jacob Ponstein. *Nonstandard analysis : A Naive Way to the Infinitesimals (an unorthodox treatment of Nonstandard Analysis)*. Universiteitsbibliotheek Rijksuniversiteit Groningen, 2001.

[98] Lev Semenovich Pontryagin. *Mathematical theory of optimal processes*. Routledge, 2018.

[99] Willard Quine. *From a logical point of view : 9 logico-philosophical essays*, volume 9. Harvard University Press, 1980.

[100] Georges Reeb. La mathématique non standard vieille de soixante ans ? *IRMA, Université Louis Pasteur de Strasbourg*, P30, 1979.

[101] Alain Robert. *Analyse non standard*. PPUR presses polytechniques, 1985.

[102] Abraham Robinson. *Non-standard analysis*. North-Holland Publishing Co., 1966.

[103] David Ruelle. *L'Étrange Beauté des mathématiques*. Odile Jacob, 2008.

[104] J Salanskis, François Rastier, and Ruth Scheps. Herméneutique textes, sciences. 1997.

[105] Jean-Michel Salanskis. *Le temps du sens*. Ed. HYX, 1997.

[106] Jean-Michel Salanskis. *Le constructivisme non standard*. Presses Univ. Septentrion, 1999.

[107] Jean-Michel Salanskis. *Philosophie des mathématiques*. Vrin, 2008.

[108] Jean-Michel Salanskis. *L'herméneutique formelle : l'infini, le continu, l'espace*. Klincksieck, 2013.

[109] Jean-Michel Salanskis and Hourya Sinaceur. *Le labyrinthe du continu*. 1992.

[110] Laurent Schwartz. *Un mathématicien aux prises avec le siècle*. Odile Jacob, 1997.

[111] M A Shishkova. Examination of a system of differential equations with a small parameter in the highest derivatives, soiet math. dokl. 14. 1973.

[112] Simon Singh and David Rintoul. *Fermat's last theorem*. Fourth Estate London, 1997.

[113] Ian Stewart and François Gallet. *Les mathématiques*. Pour la science, 1989.

[114] Hector Sussmann and Raphael Zahler. Catastrophe theory as applied to the social and biological sciences : A critique. *Synthese*, 37(2) :117–216, 1978.

[115] René Thom. *Stabilité structurelle et morphogénèse : essai d'une théorie générale des modèles*. WA Benjamin Reading, Mass., 1972.

[116] René Thom. Prédire n'est pas expliquer. 1992.

[117] D'Arcy Thompson. *On growth and form*. Cambridge Univ. Press, 1942.

[118] Imme van den Berg. *Nonstandard asymptotic analysis*. Vol. 1249. Springer, 1987 (2006).

[119] Imme van den Berg and V. Neives. *The strength of Nonstandard Analysis*. Springer, 2007.

[120] Guy Wallet. *Démonstration et signification en mathématiques*. IREM Paris-Nord, 1993.

[121] Guy Wallet. Integer calculus on the harthong-reeb line. *Revue Africaine de la Recherche en Informatique et Mathématiques Appliquées*, 9 :517–536, 2008.

[122] Eugène Wigner. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13 :001–14, 1960.

[123] Andrew Wiles. Modular elliptic curves and fermat's last theorem. *Annals of mathematics*, 141(3) :443–551, 1995.

[124] Jean-Christophe Yoccoz. Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne. In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, volume 17, pages 333–359. Elsevier, 1984.

[125] Jean-Christophe Yoccoz. Il n'ya pas de contre-exemple de denjoy analytique. *CR Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 298(7) :141–144, 1984.

[126] Jean-Christophe Yoccoz. Petits diviseurs en dimension 1. *Astérisque*, 1995.

[127] Raphael Zahler and Hector Sussmann. Claims and accomplishments of applied catastrophe theory. *Nature*, 269(5631) :759, 1977.

[128] Alexander Zvonkin and Mikhaïl Shubin. Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations. *Russian Mathematical Surveys*, 39(2) :69, 1984.

Table des matières

1 La controverse **7**
1.1 L'Affaire Vénissac selon [LdL] 9
1.2 Premiers commentaires sur l'Affaire 14
1.3 Une interrogation au delà de l'Affaire 16
1.4 Questions de méthode 19
1.5 Rencontre n° 1 : Prise de contact avec P. Duchemin 23

2 De la rigueur en mathématiques **26**
2.1 Rencontre n° 2 : Une histoire de Montgolfière 27
2.2 Rigueur mathématique et A.N.S. (par P. Duchemin) 35
2.3 Premières remarques sur la rigueur 69

3 Communauté et institutions mathématiques **73**
3.1 Doctorat en mathématiques dans les années 50-60 75
3.2 . . . puis peu plus près de nous. 79
3.3 Bourbaki et les écoles mathématiques françaises 81
3.4 Une exception culturelle française 87
3.5 Jean Dieudonné et sa vision des mathématiques 88
3.6 Georges Reeb et l'Ecole de Strasbourg 92

4 Première conclusion **100**
4.1 Les Canards... 101
4.2 ...et ce qu'ils sont devenus 103
4.3 Première conclusion. 107
4.4 Une dispute avortée. 109

5 Platonisme, formalisme et A.N.S. **112**
5.1 Rencontre n° 3 : Mathématiques et alpinisme 113

5.2 Notes sur le “réalisme” (par P. Duchemin) 123
5.3 Style mathématique et réalisme 130

6 De l’usage des mathématiques 146
6.1 La mathématisation du réel 147
6.2 Le "roman mathématique" 157
6.3 Mathématiques et théorie de la valeur 171
6.4 Mathématiques et théories écologiques 186

7 De l’éthique des mathématiciens 190
7.1 Quelques mathématiciens devant la guerre 192
7.2 L’idéologie de l’expert 200
7.3 $\cdots$ et ce qu’en pensent les mathématiciens. 208

8 Thèse 226

A Ouvrages techniques 236

B Propagande et polémiques 239
B.1 En France 239
B.2 Hors de France 245

C Regards philosophiques sur l’A.N.S. 250
C.1 A propos du réalisme et de l’intuitionnisme 251
C.2 Regards d’amateurs 251
C.3 Regards de philosophes 253

D Témoignages 256
D.1 Témoignages de mathématiciens “explorateurs” 256
D.2 A propos de A. Grothendieck 258
D.3 Témoignages à propos de l’A.N.S. 263
D.4 Témoignages de F. et M. Diener 268
D.5 Témoignage de T. Sari 272

Index 280

Bibliographie 280