



HAL
open science

Mesure des défauts de forme de microballons par imagerie X : exploitation du phénomène de contraste de phase

Vincent Dutto

► **To cite this version:**

Vincent Dutto. Mesure des défauts de forme de microballons par imagerie X : exploitation du phénomène de contraste de phase. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université de Toulon, 2018. Français. NNT : 2018TOUL0013 . tel-02451690

HAL Id: tel-02451690

<https://theses.hal.science/tel-02451690>

Submitted on 23 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE
Mer et Sciences (ED 548)

THÈSE présentée par :
Vincent DUTTO

soutenue le : **16 novembre 2018**

pour obtenir le grade de Docteur en Sciences et Technologies Industrielles

**Mesure des défauts de forme de
microballons par imagerie X : exploitation
du phénomène de contraste de phase**

THÈSE dirigée par :
M. BUSVELLE Éric

Professeur des Universités, Université de Toulon

JURY :

M. BINCZAK Stéphane

Professeur des Universités, Université de
Bourgogne

M. MENK Ralf

Senior Scientist, Sincrotrone Trieste

Mme. ARFELLI Fulvia

Professor, Sincrotrone Trieste

M. SUGNY Dominique

Professeur des Universités, Université de
Bourgogne

M. CHOUX Alexandre

Ingénieur de recherche (PhD), CEA

Mme. CHITTARO Francesca

Professeur des Universités, Université de Toulon

M. GAUTHIER Jean-Paul

Professeur des Universités, Université de Toulon

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 13 |
| 1 Contexte | 17 |
| 1.1 Introduction | 17 |
| 1.2 Fabrication et caractérisation des microballons | 18 |
| 1.2.1 Procédé de fabrication d'un microballon | 18 |
| 1.2.2 Chaîne de caractérisation d'un microballon | 21 |
| 1.3 Dispositif de radiographie X à micro-foyer | 23 |
| 1.3.1 Générateur X à micro-foyer | 23 |
| 1.3.2 Capteurs | 26 |
| 1.3.3 Supports | 29 |
| 1.3.4 Ensemble mécanique motorisé | 32 |
| 1.4 Conclusion | 33 |
| 2 Modélisation de la propagation des rayons X | 35 |
| 2.1 Introduction | 35 |
| 2.2 Définition du problème | 36 |
| 2.3 Modélisations existantes | 39 |
| 2.3.1 Optique géométrique | 39 |
| 2.3.2 Optique physique | 41 |
| 2.4 Conclusion | 48 |
| 3 Applications des modèles | 49 |
| 3.1 Introduction | 49 |
| 3.2 Équation des ondes électromagnétiques stationnaires, en milieu hétérogène | 50 |
| 3.3 Résolution analytique de l'équation en intégrale du potentiel de diffusion | 53 |
| 3.3.1 Théorie | 53 |
| 3.3.2 Application de l'approximation de Born | 55 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3.3.3 | Solution numérique de l'équation du potentiel de diffusion | 56 |
| 3.4 | Simulation numérique de l'équation en intégrale du potentiel de diffusion | 61 |
| 3.5 | Modélisation par l'optique géométrique | 69 |
| 3.5.1 | Théorie | 69 |
| 3.5.2 | Simulations | 77 |
| 3.6 | Conclusion | 85 |
| 4 | Estimation des modes de déformations par détection de contour | 87 |
| 4.1 | Introduction | 87 |
| 4.2 | Perturbations des surfaces | 88 |
| 4.2.1 | Théorie | 88 |
| 4.2.2 | Validation numérique | 91 |
| 4.3 | Applications | 93 |
| 4.3.1 | Prise d'un cliché | 93 |
| 4.3.2 | Détection de contour | 95 |
| 4.4 | Validation de la méthode | 97 |
| 4.5 | Métrologie empirique | 101 |
| 4.6 | Conclusion | 107 |
| | Conclusion | 109 |
| A | Changement de coordonnées | 117 |
| A.1 | Calcul jacobienne $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \sigma, \theta)$ (ellipse) | 117 |
| A.2 | Calcul jacobienne $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, \theta)$ (sphérique) | 118 |
| B | Validation expérimentale du calcul numérique par méthode de Monte Carlo | 119 |
| C | Programme Python de modélisation par optique géométrique | 121 |
| D | Estimation des coefficients de la série de Fourier sur une période incomplète | 123 |
| E | Recherche de l'indice de réfraction | 127 |
| F | Programme d'estimation des perturbations de surfaces | 129 |
| F.1 | Fonction principale | 129 |
| F.2 | Fonction de détection des contours | 131 |
| F.3 | Fonction d'estimation des moindres carrés | 135 |

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Procédé d'injection. | 19 |
| 1.2 | Schéma de principe du réacteur de dépôt GDP. Le plasma est représenté en mauve. | 20 |
| 1.3 | Cliché radiographique d'un microballon CH_x dans un support rectangulaire (cf. section 1.3.3 p.29). | 23 |
| 1.4 | Générateur L10711 d'Hamamatsu. | 25 |
| 1.5 | Schéma d'un générateur en transmission, avec la représentation d'électrons (e^-) et de photons X (X). | 25 |
| 1.6 | Spectre du générateur pour une tension d'accélération de 25 kV. | 26 |
| 1.7 | Photo de l'amplificateur de brillance et du capteur numérique à haute définition. | 27 |
| 1.8 | Schéma du principe de fonctionnement de l'amplificateur de brillance tiré de [Wang et Blackburn, 2000]. | 28 |
| 1.9 | Schémas des supports; de gauche à droite, rectangulaire avec membrane, cylindrique avec micro-aspiration, conique, emboîtable "poupées russes". | 30 |
| 1.10 | Cliché d'un microballon sur support cylindrique. | 31 |
| 1.11 | Schéma des déplacements possibles sur le banc de radiographie. | 32 |
| 2.1 | Radiographie d'une bille de CH (plastique), avec localisation du contraste de phase. | 38 |
| 2.2 | Représentation par l'optique géométrique. | 40 |
| 2.3 | Représentation par l'optique géométrique de l'absorption. L'épaisseur du trait représente l'intensité de la lumière. | 40 |
| 2.4 | Représentation par l'optique ondulatoire (Principe Huygens-Fresnel). | 43 |
| 2.5 | Réfraction selon le principe d'Huygens-Fresnel. | 44 |
| 2.6 | Représentation du front d'onde en fonction de la distance à la source. | 44 |
| 3.1 | Notations, plan 3D au dessus et vue latérale (plan Oxz) au dessous. | 58 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.2 | Fonction oscillante représentée en une dimension (les deux autres sont fixées). | 63 |
| 3.3 | Schéma du calcul de l'erreur d'intégration numérique entre deux cônes. | 64 |
| 3.4 | Profil obtenu par simulation de la radiographie d'un microballon CH_x plein de $600 \mu m$ de rayon avec une ouverture de cône $\epsilon = 1 \cdot 10^{-5} rad$ | 65 |
| 3.5 | Profil obtenu par simulation de la radiographie d'un microballon CH_x plein de $600 \mu m$ de rayon avec une ouverture de cône $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ | 66 |
| 3.6 | Profil obtenu par simulation de la radiographie d'un microballon CH_x plein de $600 \mu m$ de rayon avec une ouverture de cône $\epsilon = 12.2 \cdot 10^{-5} rad$ | 67 |
| 3.7 | Profils obtenus par simulation de la radiographie d'un microballon CH_x plein de $600 \mu m$ de rayon avec une ouverture de cône $\epsilon \in [10^{-4}, 2 \cdot 10^{-4}]$ | 68 |
| 3.8 | Paramétrage des droites. | 70 |
| 3.9 | Calcul des coefficients de Fresnel pour $n = 1 - 10^{-7}$ | 72 |
| 3.10 | Notation des angles | 75 |
| 3.11 | Deux rayons arrivant au même point de l'écran, un rayon direct (en bleu) et un rayon réfracté (en vert). | 76 |
| 3.12 | Rayons traversant le microballon et rayons directs | 79 |
| 3.13 | Profil simulé, par modélisation de la réfraction et de l'absorption, d'un microballon de rayon extérieur $R_{ext} = 1 mm$ et d'indice de réfraction $n = 1 - 8 \cdot 10^{-7} + i 1, 3 \cdot 10^{-9}$ | 80 |
| 3.14 | Comparaison entre un profil obtenu avec la prise en compte des coefficients de Fresnel et l'autre sans cette prise en compte. | 81 |
| 3.15 | Profil, d'un microballon de rayon extérieur $R_{ext} = 722 \mu m$ et d'indice de réfraction $n = 1 - 8 \cdot 10^{-7} + i 1, 3 \cdot 10^{-9}$, expérimental et simulé par modélisation de la réfraction et de l'absorption. | 82 |
| 3.16 | Profil, d'un microballon de rayon extérieur $R_{ext} = 722 mm$ et d'indice de réfraction $n = 1 - 8 \cdot 10^{-7} + i 1, 3 \cdot 10^{-9}$, expérimental et simulé avec floutage. | 83 |
| 3.17 | Dérivées secondes des profils, simulé et expérimental, d'un microballon de rayon extérieur $R_{ext} = 722 \mu m$ et d'indice de réfraction réel $n = 1 - 8 \cdot 10^{-7} + 1, 3 \cdot 10^{-9}$ | 84 |
| 3.18 | Angles maxima $\varphi_{C_1}^{max}, \varphi_{C_2}^{max}$ et φ_{C_1, C_2}^{max} de chaque couche délimitée par leurs contours C_1 et C_2 | 84 |
| 4.1 | Estimation pour une surface. | 92 |
| 4.2 | Variance des erreurs sur les coefficients estimés. | 93 |

| | | |
|------|---|-----|
| 4.3 | Clichés d'un microballon de <i>CHSi</i> poli d'un diamètre extérieur de $2230 \mu m$ | 95 |
| 4.4 | Différents filtrages. | 97 |
| 4.5 | Différents filtrages sur une image de tomographie (conditions expérimentales différentes de la radiographie). | 98 |
| 4.6 | Détection de contour du microballon en coordonnées polaires. | 101 |
| 4.7 | Cliché d'un microballon de <i>CHSi</i> poli d'un diamètre extérieur de $2230 \mu m$, avec les points détectés des contours extérieur et intérieur. | 102 |
| 4.8 | Exemple de différence obtenue entre la surface extérieure par rapport à la surface intérieure, i.e. épaisseur. | 103 |
| 4.9 | Reconstructions de l'épaisseur du microballon PAMS de $955,3 \mu m$ de rayon interne. | 104 |
| 4.10 | Résultats comparés de 7 lots de mesures d'un microballon de <i>CHSi</i> poli d'un diamètre extérieure de $2230 \mu m$ | 106 |
| D.1 | $\varepsilon(\theta)$ et son estimée, pour $\theta \in [0; 2\pi]$ | 124 |
| D.2 | $\varepsilon(\theta)$ et son estimée, pour $\theta \in [0; 1, 6\pi]$ | 125 |
| D.3 | Différence entre les fonctions estimées sur une période complète et sur moins d'une période. | 125 |

Constantes et Symboles

| Nom | Symbole | Valeur | Unité |
|------------------------|-----------|-----------------------|--------------------|
| Célérité dans le vide | c | $3 \cdot 10^8$ | $m \cdot s^{-1}$ |
| Constante de Planck | h | $6,63 \cdot 10^{-34}$ | $J \cdot s$ |
| Constante de Boltzmann | k_b | $1,38 \cdot 10^{-23}$ | $J \cdot K^{-1}$ |
| Photon X | X | | |
| Électron | e^- | | |
| Énergie | E | | eV ou J |
| Intensité | I | | A |
| Fréquence | ν | | m^{-1} |
| Longueur d'onde | λ | | m |
| Nombre d'onde | k | | $rad \cdot m^{-1}$ |
| Indice de réfraction | n | | |

Introduction

Depuis l'arrêt définitif des essais nucléaires, la Direction des Applications Militaires du CEA s'appuie sur le triptyque modélisation physique – validation expérimentale– simulation numérique pour comprendre, prévoir et garantir le fonctionnement des armes nucléaires. Ce fonctionnement repose sur des processus physiques complexes, couplant une large gamme d'échelles d'espace et de temps et engendrant des conditions extrêmes de température et de pression.

Parmi les grands équipements contribuant à la validation des modèles physiques implémentés dans les logiciels de calcul, le Laser MegaJoule (LMJ) permet d'étudier expérimentalement des phénomènes de même nature que ceux intervenant dans les armes et de pouvoir les mesurer avec les précisions requises. La famille d'objets expérimentés sur cette installation est dénommée « microcibles laser ».

Elaborées au Centre de Valduc, ces cibles sont constituées de divers éléments et matériaux. Parmi ceux-là, un microballon, bulle plastique de taille et épaisseur variables, est utilisé pour une catégorie d'expériences. Ce microballon reçoit une grande quantité d'énergie qui le comprime fortement.

Ainsi, la symétrie de la compression, qui est une spécification requise de l'expérience, repose sur l'état des surfaces des parois interne et externe du microballon. En effet, tout défaut de forme ou d'état de surface du microballon induit une réaction inverse et proportionnelle à l'énergie appliquée, rompant de fait la symétrie de la compression. Aussi, les microballons expérimentés doivent-ils présenter une rugosité de surface la plus faible possible et une absence totale de défaut de forme. Malgré cela, l'expérience tolère quelques imperfections, mais nécessite une connaissance la plus exhaustive possible de leurs caractéristiques.

La caractérisation de ces imperfections peut être réalisée par différents moyens de métrologie, avec ou sans contact, optiques ou radiographiques. Actuellement, seule la radiographie X permet et est utilisée par les équipes en charge de ces contrôles pour caractériser l'état de surface interne des microballons expérimentés.

Compte tenu de la nature physico-chimique des matériaux constituant les microballons, des distances source de rayonnements – microballon – capteur et des énergies de rayons X mises en œuvre, il apparaît sur chaque image radiographique des anneaux sombres et clairs sur les contours du microballon. L’origine de ces anneaux, qui est une interaction des rayons X avec le microballon, est définie par le phénomène physique appelé contraste de phase. Sa manifestation sur les images radiographiques est non seulement présente aux interfaces du microballon, mais également sur l’ensemble de l’image.

Les surbrillances sombres et claires observées sur les contours du microballon radiographié peuvent alors introduire des incertitudes sur la mesure du diamètre interne de celui-ci. Afin de réduire au maximum ces incertitudes pour une caractérisation la plus exacte possible des microballons expérimentés, la genèse et la manifestation observable de ce phénomène de contraste de phase ont été étudiés.

Cette étude a non seulement apporté une méthode permettant de réduire les incertitudes de mesures du microballon mais a aussi fortement contribué à une évaluation des défauts de forme de celui-ci.

En effet, à partir de la combinaison de plusieurs images radiographiques, représentant des projections du microballon sur un plan, une estimation globale des défauts de forme présents sur chacune de ces surfaces peut être effectuée. La qualité et la précision du résultat dépendent de plusieurs facteurs, dont le nombre d’images nécessaires qu’il s’agit de quantifier. Ce manuscrit se compose de quatre chapitres dont les thèmes sont les suivants.

Le premier chapitre a pour but de présenter le contexte et le cadre de l’étude dans lesquels s’inscrivent ces travaux de recherche, au travers de la description du procédé de fabrication des microballons, des différentes caractéristiques dimensionnelles à mesurer et des moyens de métrologie associés. Il est aussi dédié au dispositif de radiographie à rayonnement ionisant X utilisé dans cette étude. Les principales spécificités du dispositif pour imager les microballons sont énoncées, tout comme l’instrumentation nécessaire au maintien et placement de ces derniers pour une métrologie parfaitement contrôlée.

Le deuxième chapitre présente l’état de l’art sur la modélisation de la propagation du rayonnement ionisant X et de l’interaction des rayons X avec la matière, plus particulièrement sur le contraste de phase, en proposant une synthèse des différentes approches de l’optique. L’analyse montre la nécessité d’utiliser la propagation des ondes électromagnétiques décrites par les équations de Maxwell pour mettre en équation la formation de l’image radiographique d’un microballon.

Le troisième chapitre est consacré à la résolution de différents modèles représentant la formation d’un cliché par radiographie X d’un microballon.

Trois modélisations sont présentées : la résolution analytique de l'approximation de Born au 1^{er} ordre à la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu diffusant, la résolution numérique de la même équation, puis, la résolution analytique des équations de l'optique géométrique. L'optique géométrique, sous l'hypothèse que la nature ondulatoire joue peu sur la formation de l'image, donne des informations sur la position des interfaces sur les clichés.

Le quatrième et dernier chapitre est consacré à l'estimation des déformations des surfaces du microballon et à la métrologie associée. L'information observée sur les images radiographiques est localisée et extraite à l'aide d'une méthode de détection de contour spécifique à la présence du contraste de phase. Ces données représentent des informations dimensionnelles des différentes surfaces du microballon. Or ces dernières ne sont pas parfaitement lisses et concentriques entre elles. Un algorithme combinant toutes les données dimensionnelles incomplètes (qui ne couvrent pas toute la surface) et permettant ainsi une estimation spatiale de ces surfaces, est alors créé. Il s'appuie sur la méthode des moindres carrés. Les résultats de cet algorithme sont ensuite déclinés en mesures des défauts de rugosité de surface et de l'épaisseur des microballons. Chaque mesure présentant une incertitude particulière, la métrologie associée est ensuite détaillée.

Chapitre 1

Contexte

1.1 Introduction

Le microballon, au coeur de mon travail de thèse, constitue un élément primordial dans les expériences lasers menées par le CEA. Cet élément peut être utilisé, par exemple, dans le cadre d'expériences d'instabilités hydrodynamiques. L'énergie laser déposée sur les parois d'une cavité en or est convertie en rayonnement X qui vient chauffer et comprimer le microballon placé en son centre. Au cours de cette implosion, les diagnostics permettent d'observer le développement de perturbations susceptibles de venir contrarier les objectifs initialement définis. C'est pourquoi il est crucial de caractériser le plus finement possible l'état de surface initial de ce microballon.

Toutes les caractéristiques dimensionnelles des microballons sont mesurées, à savoir la rugosité des surfaces, les défauts de concentricité et les écarts à la sphéricité telles que les formes ellipsoïdales ou plus complexes.

Dans ce chapitre, le procédé de fabrication des microballons et la chaîne de caractérisation associée sont décrits.

Dans la chaîne de caractérisation figure le banc de radiographie X. Ce dispositif est employé dans cette thèse pour quantifier les défauts des microballons. Il est composé d'un générateur X à micro-foyer, d'imageurs (capteurs numériques), de supports de maintien des microballons et d'un ensemble de tables motorisées. Il est adapté à la radiographie d'objets millimétriques telles que les microballons.

Pour analyser les clichés X d'un microballon, il est important de connaître certaines caractéristiques de ce dernier (dimensions, masse volumique), de la source de rayons X, des capteurs, mais aussi du support de maintien du microballon (qui est radiographié de fait) et de la géométrie du système (distances, mouvements possibles). Les paragraphes suivants détaillent tous

ces éléments d'intérêt.

1.2 Fabrication et caractérisation des microballons

1.2.1 Procédé de fabrication d'un microballon

Les microballons pour le Laser MégaJoule (LMJ) sont des bulles de plastique, de diamètre 2 mm , d'épaisseur $200\ \mu\text{m}$ dont les défauts de circularité et de rugosité sont faibles (nécessitent une caractérisation pour les quantifier). Pour les synthétiser, un procédé de fabrication spécifique a été développé [McQuillan *et al.*, 1997]. C'est le seul moyen d'obtenir ces microballons. Il se compose de plusieurs étapes détaillées dans les paragraphes suivants.

Étape 1 : la synthèse du support

La procédure de fabrication débute par la mise en œuvre d'une technique chimique dite d'émulsion. Schématiquement, de la même façon que l'on fait des bulles de savon, une bulle de plastique est réalisée puis solidifiée. En réalité, toute une chimie complexe des interfaces et des tensio-actifs doit être maîtrisée lors de cette étape de fabrication. Le matériau de départ est un plastique brut de très haute qualité (grande pureté), c'est un dérivé du polystyrène. Il est dissout dans un solvant et devient un « plastique liquide » (O_1) que l'on peut mettre en forme de microballon. Pour cela, des microinjecteurs spécifiques sont utilisés (cf. figure 1.1 p.19) et, grâce à ce système, des bulles de plastique liquide remplies d'eau (W_1) sont créées, elles-mêmes plongées dans de l'eau (W_2). L'étape suivante consiste à solidifier cette bulle de plastique. Pour ce faire, le solvant est lentement évaporé du plastique. Cette phase est très délicate, car il faut empêcher toute déformation du microballon. On obtient alors un microballon plastique rempli d'eau. Il faut ensuite éliminer l'eau de ces coquilles.

Pour ce faire, le phénomène physico-chimique dit d'osmose est mis à profit. Les microballons remplis d'eau sont plongés dans l'alcool. L'eau est une petite molécule, elle peut traverser la paroi de plastique du microballon. En revanche, la molécule d'alcool est de grande taille et ne peut pas traverser la paroi. L'eau à l'intérieur du microballon va donc naturellement sortir pour diluer l'alcool à l'extérieur de la paroi. Pour cette étape également, il faut procéder très lentement pour ne pas déformer le ballon. Cet ensemble d'opération dure 7 semaines. A la fin de cette opération, les premiers microballons

fins sont obtenus. Ces microballons n'ont, pour l'instant, ni les spécifications dimensionnelles requises, ni la composition physico-chimique désirée.

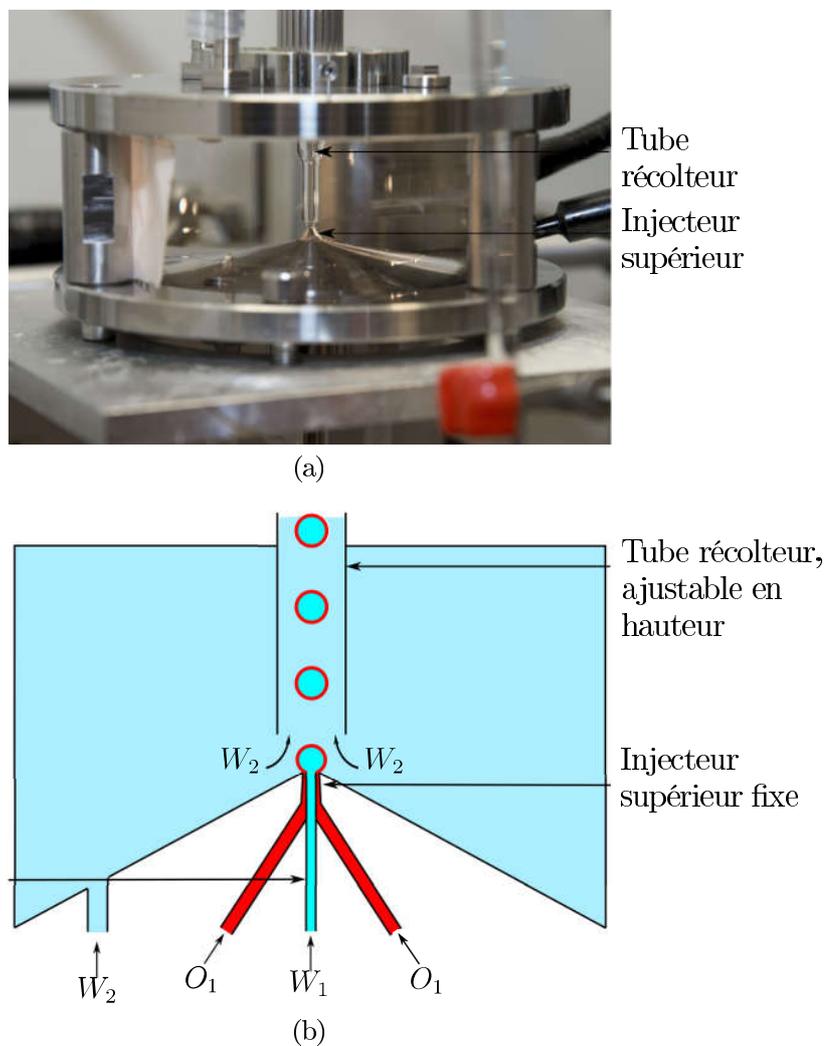


FIGURE 1.1 – Procédé d'injection.

Étape 2 : la création du microballon

Pour obtenir un microballon avec la bonne épaisseur et le bon diamètre nécessaire à l'expérimentation, une technique de dépôt sous vide assistée par plasma est utilisée. Le principe de cette technique de dépôt est le suivant : dans un bâti de dépôt sous vide, un mélange gazeux hydrocarboné (à base de

trans-2-butène) est introduit (cf. figure 1.2 p.20). Ce mélange gazeux passe dans le tube en quartz à l'intérieur duquel on crée une décharge électrique qui allume un plasma. Les molécules sont fractionnées et vont venir se déposer sur le substrat.

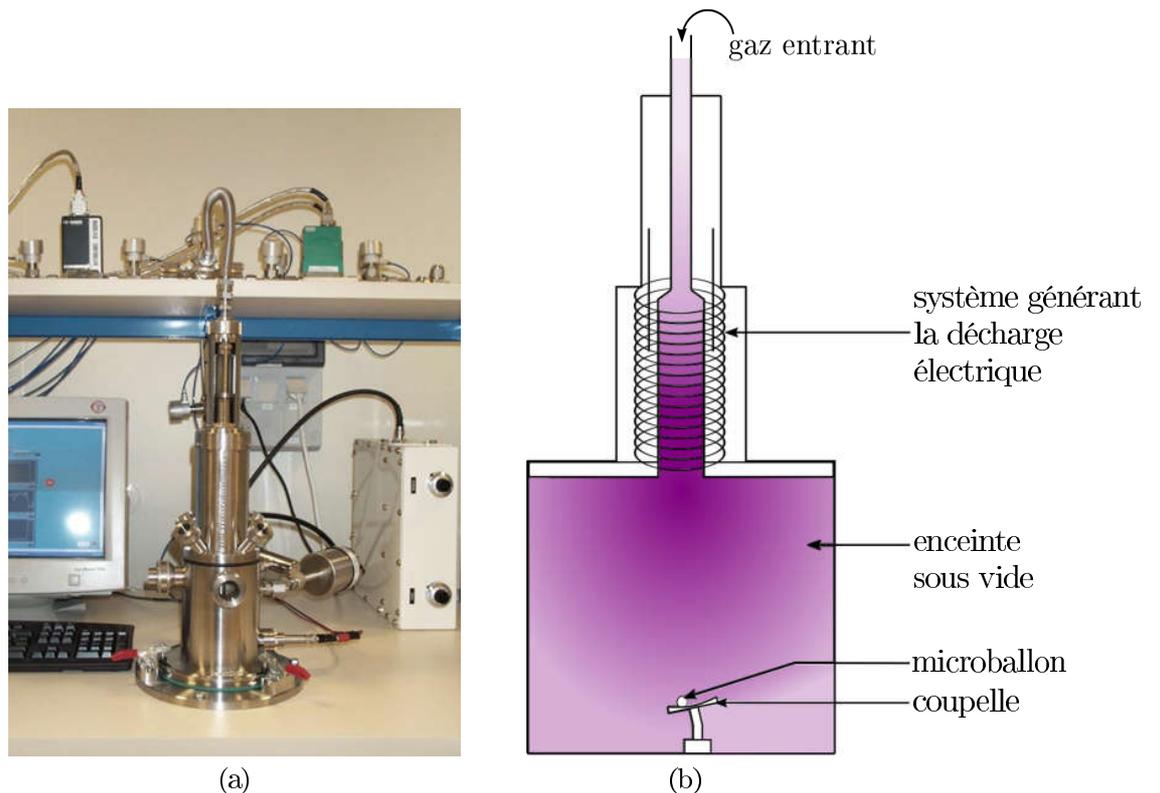


FIGURE 1.2 – Schéma de principe du réacteur de dépôt GDP. Le plasma est représenté en mauve.

Les microballons plastiques initiaux sont placés dans une coupelle qui est mise en agitation sous le plasma. On obtient ainsi un dépôt très homogène sur toute la surface du support.

Cette technique présente également l'énorme avantage de permettre l'ajout d'autres molécules au plastique (des dopants tels que du silicium ou du germanium). Seule cette technologie plasma permet de le faire.

La principale difficulté de cette phase est la maîtrise de la rugosité. En effet, des phénomènes de croissances de surface anarchiques peuvent être observés, ce qui génère en surface de fortes rugosités (effet « chou-fleur »). Pour minimiser les défauts de croissance et la rugosité, il est indispensable d'op-

timiser les paramètres du procédé. Cela conduit à réaliser les dépôts à très faible vitesse. Pour fabriquer un microballon de $200\mu m$, il faut approximativement 4 semaines de dépôt.

Étape 3 : l'élimination du support

L'opération d'élimination du support initial est réalisée par chauffage. Le plastique réalisé lors de l'étape 2 par polymérisation plasma est plus résistant thermiquement que le plastique de l'étape 1, car il est très réticulé (il présente un réseau carboné très lié). Dans un four réglé très finement en température, le support initial va fondre et se transformer en gaz, puis s'échapper au travers de la paroi. Il ne subsiste alors qu'un microballon en plastique, dopé ou non en silice ou germanium.

Les microballons ainsi obtenus vont faire l'objet de contrôles très poussés pour vérifier qu'ils respectent bien les spécifications imposées par la physique étudiée lors des expérimentations.

1.2.2 Chaîne de caractérisation d'un microballon

Les microballons subissent ensuite toute une chaîne de caractérisation pour déterminer et mesurer toutes leurs spécificités (sphéricité, diamètre, rugosité, etc...). Parmi ces spécificités, le respect et donc la connaissance de la sphéricité et de la rugosité des surfaces interne et externe est primordiale pour la bonne réussite des expériences sur le LMJ. Leurs caractéristiques s'effectue donc par l'étude des défauts géométriques des surfaces interne et externe du microballon, défauts décrits par des écarts autour de la sphère parfaite¹.

Ces écarts peuvent être quantifiés aux travers des modes d'une base de fonctions trigonométriques (série de Fourier, harmoniques sphériques, etc...) : ils sont appelés modes de déformation. La rugosité est définie comme les modes supérieurs au mode 2 pour les surfaces (et au mode 1 pour les épaisseurs) ; les modes inférieurs sont des défauts de sphéricité ou de décentrage.

Les différents moyens de caractérisation mis en œuvre pour déterminer les caractéristiques des microballons sont détaillés ci-après :

- le microscope télécentrique permet d'obtenir le diamètre externe moyen des microballons, ainsi que les écarts par rapport à ce dernier. Le microscope télécentrique est constitué d'une caméra, d'une source lumineuse collimatée et d'un objectif télécentrique. La caractérisation

1. Les surfaces du microballon sont représentées dans les coordonnées sphériques. Dans la suite de la thèse, les harmoniques sphériques seront utilisées pour décrire les surfaces des microballons.

est faite sur une image 2D du microballon, grâce à de l'ombroscopie [Lamy, 2003, Choux, 2006]. Comme le montre [Lamy, 2003], les méthodes ombroscopiques ne permettent pas la caractérisation de l'ensemble de la surface externe. En effet, les phénomènes optiques de réfraction et de réflexion empêchent l'accès à une partie de l'information. Ainsi, seul un équateur du microballon est caractérisé de façon nominale. Les modes de déformations des surfaces interne et externe ne sont pas caractérisés.

- le microscope électronique à balayage (MEB) [Paqueton et Ruste, 2006] fonctionne comme suit : un faisceau d'électrons excite les atomes dans une zone ; puis les ré-émissions résultantes de l'interaction des électrons avec la matière sont détectées. La matière émet plusieurs types de rayonnements, dont des rayonnements électroniques et des rayonnements X. La destruction des microballons étudiés est nécessaire pour la mesure des épaisseurs. Cette caractérisation destructive permet l'obtention d'une image électronique. Les modes de déformations des surfaces interne et externe ne sont pas obtenus.
- le microscope holographique digital (DHM : *Digital Holographic Microscopy*) [Marquet *et al.*, 2005] utilise l'holographie pour obtenir des informations topographiques de l'objet holographié, et ainsi caractériser les défauts locaux (dômes, creux) présents à la surface externe. Cet appareil est basé sur les principes d'interférométrie. Un ensemble de clichés holographiques de $250\ \mu\text{m}$ de côté est pris, puis une reconstruction de l'objet holographié est faite. La résolution en hauteur est de l'ordre de $0,1\ \mu\text{m}$. Les défauts de la surface externe sont mesurés mais pas ceux de la surface interne du microballon.
- le microscope à force atomique (AFM : *Atomic Force Microscope*) [Kasas, 1992] mesure les défauts de la surface externe en utilisant une pointe au contact du microballon, liée à un système piézoélectrique, qui permet de mesurer des variations de hauteur lors du déplacement sur la surface. Cette méthode topographie la surface externe des microballons. La précision dépend de plusieurs facteurs, dont la forme de la pointe ou encore du matériau utilisé ; la résolution est inférieure au nanomètre. Les déformations de la surface externe sont caractérisées et comparées à des critères d'acceptations [Haan *et al.*, 2007]. Les modes de déformations de la surface interne ne sont pas obtenus.
- la radiographie numérique par rayons X [Choux *et al.*, 2011] (et par extension la tomographie par rayons X [Choux *et al.*, 2017, Choux *et al.*, 2018]) est le seul moyen de contrôle non destructif permettant d'obtenir une image (cf. figure 1.3 p.23), appelée radiographie ou cliché, contenant des informations sur l'ensemble du microballon,

notamment sur les surfaces externe et interne. Néanmoins, la taille du spot d'émission des rayons X, la résolution spatiale du capteur (pixels) et le positionnement du microballon constituent des limitations aux possibilités offertes par cette technique de caractérisation.

Le dispositif de radiographie, moyen retenu dans le cadre de cette thèse, est présenté plus en détails dans le chapitre suivant.

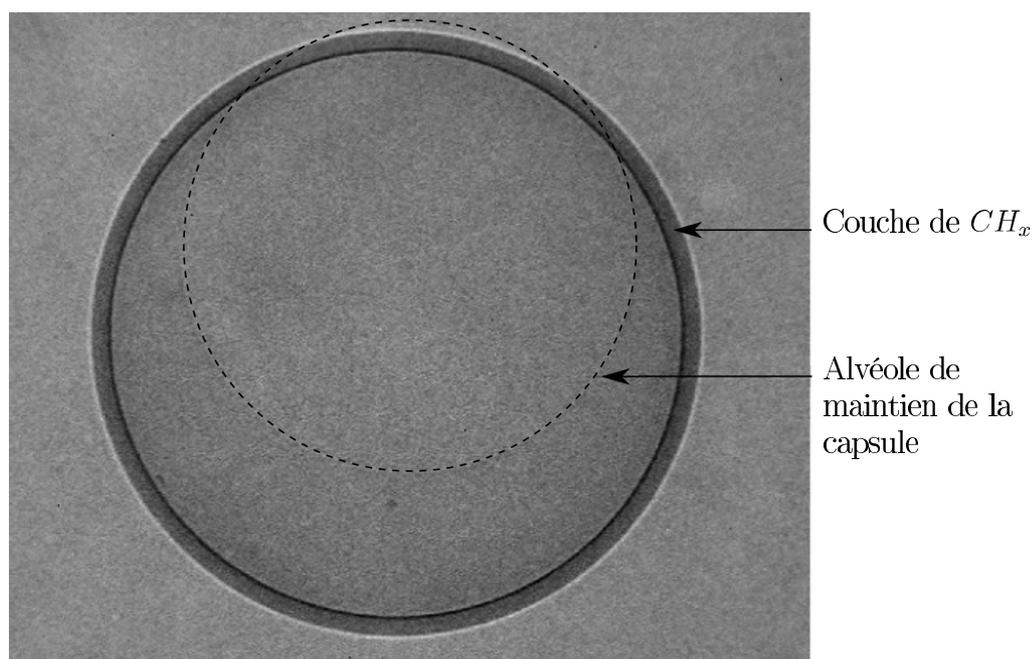


FIGURE 1.3 – Cliché radiographique d'un microballon CH_x dans un support rectangulaire (cf. section 1.3.3 p.29).

1.3 Dispositif de radiographie X à micro-foyer

1.3.1 Générateur X à micro-foyer

La source X du dispositif de radiographie est un générateur de la marque Hamamatsu (cf. figure 1.4 p.25) référencé L10711. Il s'agit d'un générateur de rayons X en transmission (à fenêtre frontale) (cf. figure 1.5 p.25). Ce type de générateur permet un meilleur contrôle sur le flux d'électrons, la taille du spot d'émission, et donc sur le champ de rayons X émis en comparaison à un générateur en réflexion (à fenêtre latérale). Dans une chambre à vide de pression $8 \cdot 10^{-6}$ mbar, une tension d'accélération (la tension entre la cathode

et l'anode, aussi nommée tension de consigne) permet d'arracher les électrons (e^-) à une cathode en LaB_6 . Ces électrons sont ensuite guidés, via un déflecteur et des bobines magnétiques, vers une cible en tungstène [Ruault, 1991], l'élément du générateur produisant les rayons X à partir de l'énergie cinétique des électrons reçus.

Les bobines magnétiques orientent le faisceau d'électrons entre la cathode et la cible afin d'avoir un maximum de flux sur la cible. Environ 1% de l'énergie échangée lors des interactions entre les électrons et la cible en tungstène produit un champ de rayons X. L'énergie de ces rayons X dépend de l'énergie des électrons. Le spectre produit (cf. figure 1.6 p.26) est alors fonction des couches électroniques du tungstène et du rayonnement de freinage (Bremsstrahlung).

L'énergie du champ électromagnétique est exprimée dans ce mémoire de thèse en électron-volt (eV). La formule de Planck-Einstein permet de convertir les énergies en longueur d'onde λ ou en fréquence ν :

$$E = h\nu \tag{1.1}$$

E : l'énergie en joule ($1eV = 1.602 \cdot 10^{-19} J$),

h : la constante de Planck ($h = 6.63 \cdot 10^{-34} J.s$),

ν : la fréquence en hertz (avec $\nu = \frac{c}{\lambda}$, c la célérité).

Le tableau ci-dessous présente des exemples de conversion entre énergie, fréquence et longueur d'onde :

| | | | | | |
|---------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| E (keV) | 5 | 8.3 | 9.6 | 11.3 | 25 |
| ν (Hz) | $1.21 \cdot 10^{18}$ | $2.08 \cdot 10^{18}$ | $2.41 \cdot 10^{18}$ | $2.83 \cdot 10^{18}$ | $6.63 \cdot 10^{18}$ |
| λ (m) | $2.48 \cdot 10^{-10}$ | $1.44 \cdot 10^{-10}$ | $1.25 \cdot 10^{-10}$ | $1.06 \cdot 10^{-10}$ | $4.97 \cdot 10^{-11}$ |

Les valeurs correspondent aux émissions minimale (5 keV) et maximale (25 keV) du générateur lorsqu'il a une tension d'accélération de 25 kV, et aussi aux raies d'émission du tungstène (voir le spectre mesuré présenté en figure 1.6 p.26).

La taille du foyer de la source X peut être réglée selon 3 modes de fonctionnement du générateur (nano, micro, large) et variant de 0.8 à 8 micromètres. Ce foyer est localisé au niveau d'une cible collée sur la fenêtre en Béryllium.

Le spectre du générateur a été mesuré à la position du capteur par un spectromètre *1-2-3 Cd Te x-ray spectrometer* de la marque AmpTec. Sur la figure 1.6 en page 26, le rayonnement de freinage et les raies spectrales L du tungstène sont observables; elles correspondent aux raies d'énergies 8.398, 8.335, 9.672, 9.962 et 11.29 keV² [Bearden, 1967]. Les raies spectrales

2. les raies à 8.398 et 8.335 keV sont confondues sur le spectre, tout comme les raies à 9.672 et 9.962 keV.

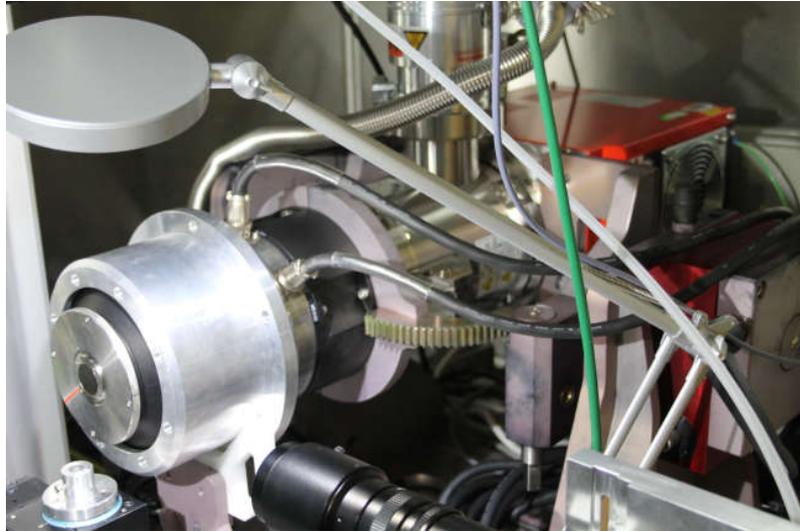


FIGURE 1.4 – Générateur L10711 d’Hamamatsu.

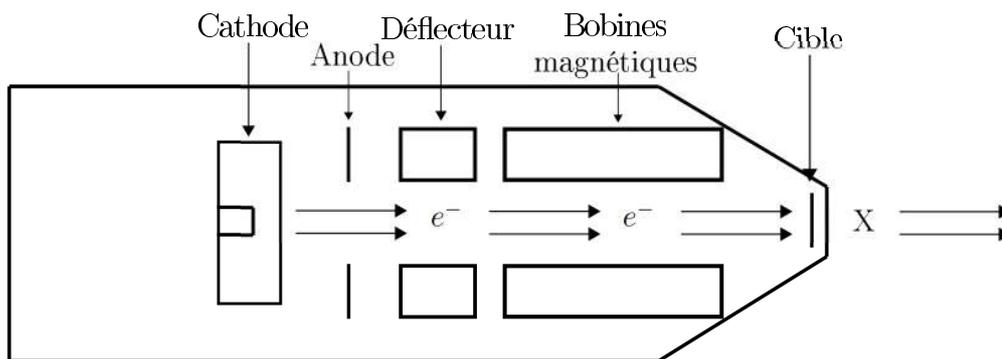


FIGURE 1.5 – Schéma d’un générateur en transmission, avec la représentation d’électrons (e^-) et de photons X (X).

de la couche K à 59.318, 57.982 et 67.244 keV ne sont pas observables car leurs énergies sont supérieures à la tension d’accélération du générateur. Les énergies des raies générées par les couches M et N sont en dehors de la gamme spectrale du spectromètre (< 5 keV).

Le générateur émet alors un spectre polychromatique depuis une source micrométrique. La tension de consigne de ce dernier est comprise entre 20 à 110 kilovolts (kV) pour une intensité maximale de 50 microampères (μA). Le faisceau émis permet d’obtenir une image grâce à des capteurs. Afin de corriger les défauts propres à la génération de rayons X, une opération de division pixel par pixel, est réalisée sur le cliché avec microballon par le

cliché sans microballon. Cette opération est appelée *shading*.

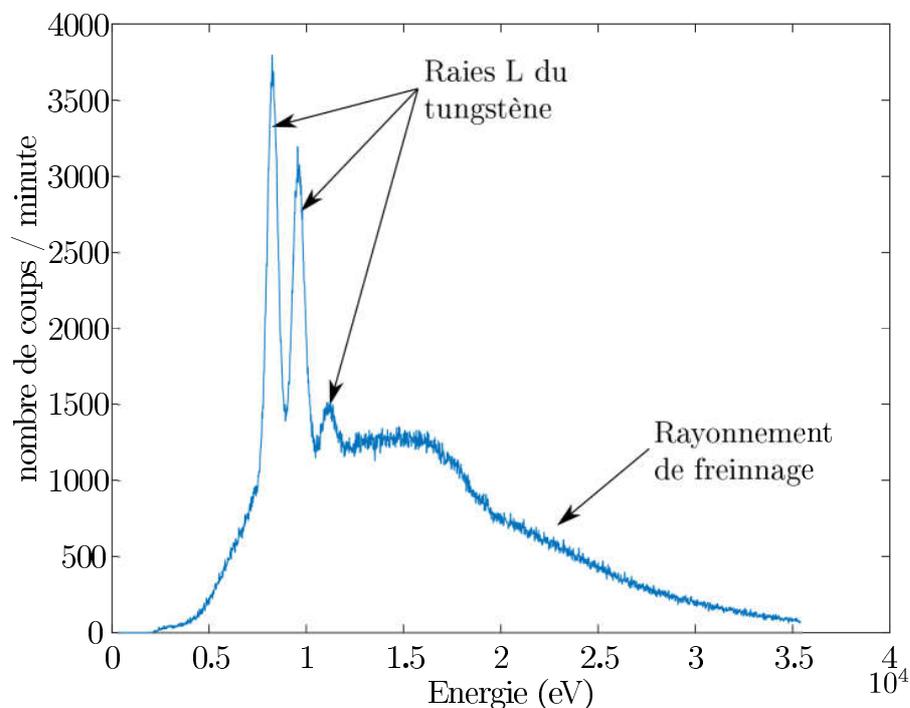


FIGURE 1.6 – Spectre du générateur pour une tension d'accélération de 25 kV.

1.3.2 Capteurs

Les capteurs sensibles aux rayons X convertissent le champ électromagnétique reçu en un cliché radiographique. Plusieurs types de capteurs existent. Le laboratoire en possède deux : l'amplificateur de brillance de la marque Hamamatsu, et le capteur numérique haute résolution fabriqué par la société Photonic Science (cf. figure 1.7 p.27). Chacun d'entre eux a des caractéristiques qui lui sont propres ; elles sont illustrées dans les sections suivantes.

Amplificateur de brillance

L'amplificateur de brillance du fabricant Hamamatsu est composé d'un scintillateur inorganique en Iodure de Césium, d'un accélérateur d'électrons et d'une caméra CCD.

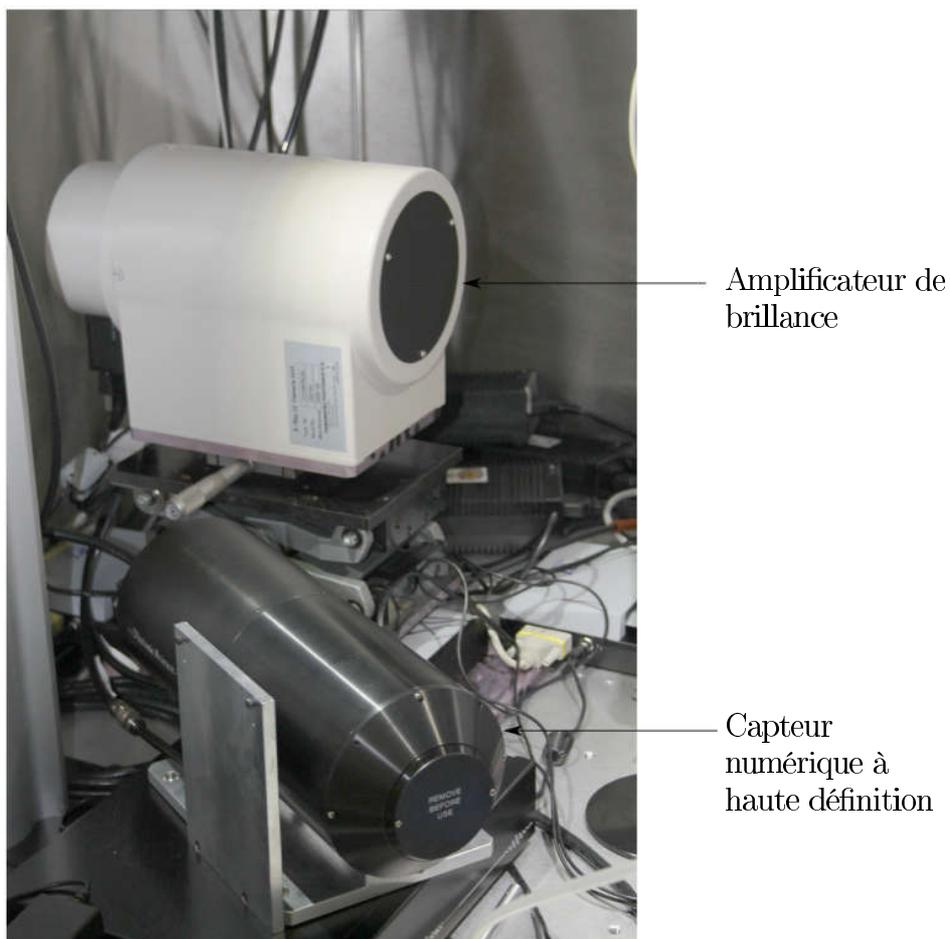


FIGURE 1.7 – Photo de l’amplificateur de brillance et du capteur numérique à haute définition.

Le scintillateur est l’élément du capteur qui permet la conversion des rayons X en rayons visibles (cf. figure 1.8 p.28). Le processus est le suivant : le champ électromagnétique X va exciter le matériau qui compose le scintillateur ; ce dernier ré-émet un champ électromagnétique à des énergies plus faibles. Dans le cas d’un scintillateur en Iodure de Césium, la longueur d’onde maximale ré-émise est de 315 nm . Le scintillateur est protégé de l’oxydation

par $500 \mu\text{m}$ de béryllium et 1 mm de carbone. L'intensité du champ électromagnétique résultant de l'interaction avec le scintillateur est amplifiée par un dispositif appelé amplificateur de brillance [Wang et Blackburn, 2000]. Le scintillateur diminue la résolution de l'image d'un facteur d'environ 8.5^3 .

Enfin, le champ est capté par un ensemble de dispositifs à transfert de charges (CCD) de 1380 par 1030 pixels. La taille des pixels est de $6,45 \times 6,45 \mu\text{m}^2$. Chaque pixel de l'image mesure le champ électromagnétique moyen à la surface de l'amplificateur de brillance (soit une résolution d'environ $55 \times 55 \mu\text{m}^2$). Le temps d'acquisition du capteur dans notre système est d'environ 1 min par cliché.

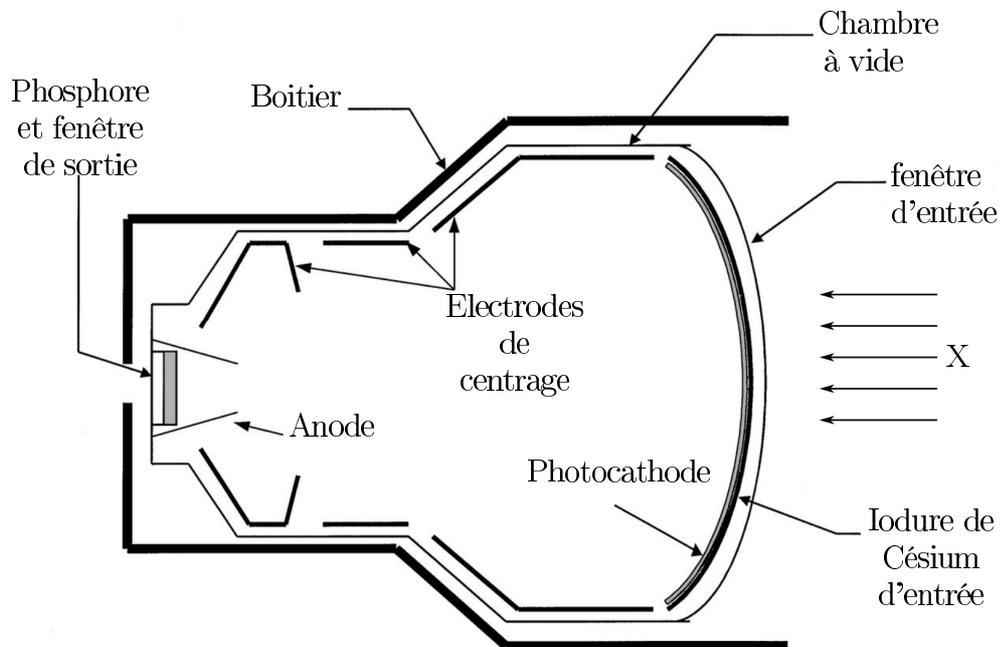


FIGURE 1.8 – Schéma du principe de fonctionnement de l'amplificateur de brillance tiré de [Wang et Blackburn, 2000].

Le scintillateur et la détection par le CCD entraînent un bruit corrigé par une opération de soustraction d'un cliché pris avec le faisceau de rayons X, avec un cliché généré par le capteur lorsqu'il n'y a pas de rayonnement X. Cette opération est appelée *background*.

3. donnée constructeur

Capteur numérique à haute résolution

Le capteur numérique à haute résolution est produit par le fabricant Photonic Science. Il est composé d'un scintillateur inorganique en Gadolinium Oxysulphide dopé au Terbium, de fibres optiques, et d'une caméra CCD . Le fonctionnement de ce capteur est analogue à celui décrit précédemment, les rayons X sont transformés en un rayonnement de plus faible énergie en traversant le scintillateur.

Dans le cas d'un scintillateur en Gadolinium Oxysulphide dopé au Terbium la longueur d'onde maximale émise est de 545 nm . Le scintillateur est protégé de l'oxydation par $10 \mu\text{m}$ d'aluminium.

Un ensemble de fibres optiques conduit les photons jusqu'au capteur CCD.

Enfin, le champ est capté par un ensemble CCD de 4008 par 2670 pixels. La taille des pixels est de $9 \times 9 \mu\text{m}^2$. C'est aussi la résolution du capteur. Le temps d'acquisition du capteur dans notre système est d'environ 5 min par cliché.

Une opération *background* est réalisée sur les images obtenues pour les corriger des erreurs liées au capteur.

1.3.3 Supports

Le microballon est placé dans un support pendant le temps de la caractérisation. Ce support est utilisé pour positionner le microballon dans le faisceau en direction du capteur. Il est, de fait, radiographié et peut alors entraîner des difficultés dans la caractérisation du microballon. Divers supports sont disponibles, dont les deux derniers qui ont été réalisés au cours de la thèse, chacun avec des avantages et des inconvénients qui leurs sont propres (cf. figure 1.9 p.30).

Parmi eux, certains ne permettent pas d'acquérir des clichés sous différents angles du microballon. D'autres supports ont une partie totalement absorbante aux rayons X masquant alors une partie du microballon. Plus précisément :

- Le support rectangulaire avec membranes de maintien est un coffret constitué de deux parties complémentaires. Ces deux parties sont composées d'un alliage métallique absorbant la totalité des rayons X émis par la source X. Des trous de quelques millimètres de diamètre et profondeur ont été percés afin de pouvoir y placer des microballons. Pour maintenir les microballons, de fines membranes en plastique sont disposées sur chaque trou (cf. figure 1.3 p.23). L'avantage de ce support est de ne présenter aucune surface de contact totale-

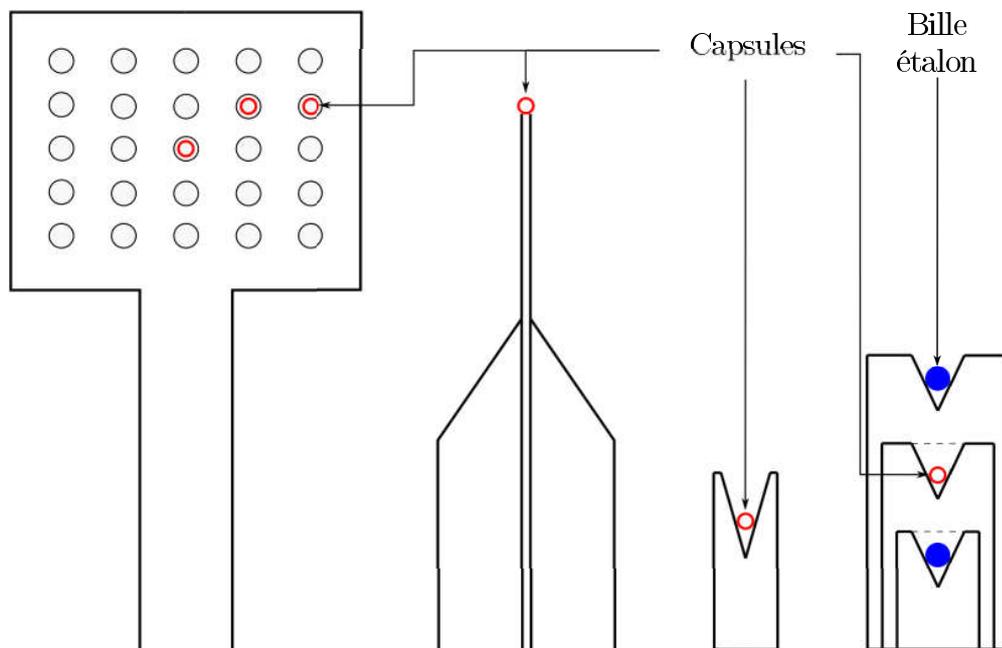


FIGURE 1.9 – Schémas des supports; de gauche à droite, rectangulaire avec membrane, cylindrique avec micro-aspiration, conique, emboîtable "poupées russes".

ment absorbante avec le microballon. Néanmoins, afin de caractériser tri-dimensionnellement le microballon, plusieurs clichés doivent être pris avec différents angles de vue, ce qui n'est pas possible au delà de quelques degrés avec ce support. De plus, les membranes ne sont pas totalement transparentes aux rayons X et ajoutent un contraste d'absorption non uniforme due aux déformations élastiques autour du microballon.

- Le support cylindrique avec micro-aspiration est une tige constituée d'un long cylindre creux en métal qui est fortement absorbant aux rayons X. Les avantages de ce support sont que les rayons X ne traversent que le microballon et que plusieurs prises de clichés avec différents angles de vue (autour d'un axe fixé) sont possibles. Néanmoins, la tige a une surface de contact qui masque une partie de l'information sur les surfaces du microballon (environ 45°)(cf. figure 1.10 p.31).
- Le support conique est un cylindrique de 4 mm de diamètre tronqué par une forme conique. L'axe du cylindre est identique à l'axe du cône. Le support conique est en rhéolite (matière plastique). L'avantage de ce support est de posséder des ruptures franches permettant de

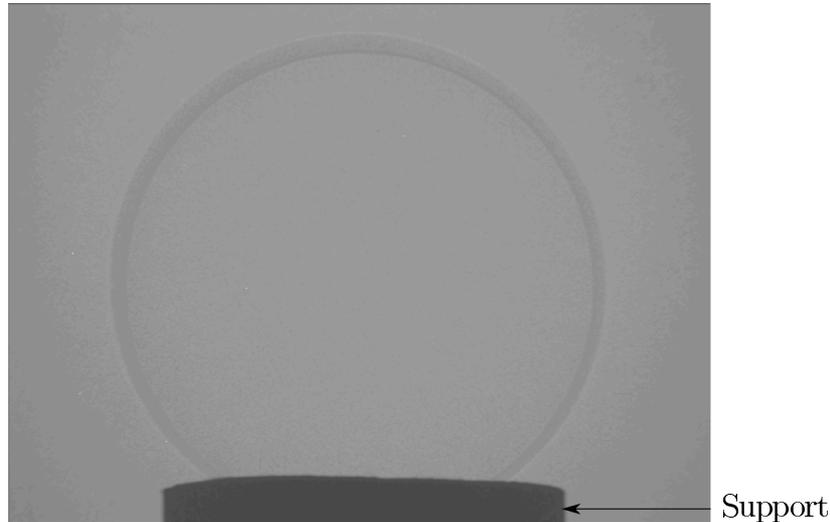


FIGURE 1.10 – Cliché d'un microballon sur support cylindrique.

dissocier, lors du traitement du cliché X, le support du microballon.

- Le support "poupées russes" est un ensemble de plusieurs supports coniques en rhéolite emboîtés les uns dans les autres. L'objectif est d'avoir plusieurs microballons caractérisables dans un même support et de pouvoir utiliser des billes étalons. Avec deux billes étalons en saphir, il est possible de vérifier à partir de leur radiographie si l'axe du support coïncide avec l'axe de rotation de l'ensemble mécanique motorisé, et ainsi de corriger si nécessaire un faux-rond, c'est-à-dire une erreur introduite par l'écart entre ces deux axes. En effet, en cas de faux-rond les billes étalons projettent une ellipse et non un disque dans le plan du capteur. Ceci est dû au désalignement des axes qui provoque une dilatation de l'objet observé⁴.

Le choix du support influence ce qu'il est possible de caractériser, mais aussi la précision pouvant être donnée à la caractérisation.

4. Il y a une distorsion car le champ émis par la source est sphérique et le capteur est plan. Cette distorsion peut être corrigée si la direction du faisceau est connue, et si l'objet étudié est considéré comme un plan orthogonal à la direction de propagation des rayons X. Dans le cas d'un faux rond, le plan de l'objet n'est pas orthogonal à la direction de propagation, la distorsion n'est alors plus corrigée correctement et entraîne la déformation de l'image des objets.

1.3.4 Ensemble mécanique motorisé

Des tables de déplacements motorisées sont utilisées pour manipuler et agir sur les positions respectives du microballon et du capteur (cf. figure 1.11 p.32). La source, quant à elle, est fixe. La précision demandée sur les différentes caractéristiques géométriques des microballons est inférieure à la taille physique des pixels des capteurs. Un grandissement des clichés est opéré par géométrie, en éloignant le capteur de la source.

Le système de support du microballon possède 6 degrés de liberté : il peut se déplacer dans les trois directions de l'espace (x, y, z) , peut pivoter en restant dans l'axe du faisceau de rayons X (rotation axe x). L'inclinaison propre au système de déplacement du support peut être corrigé pour ne pas avoir de faux-rond lorsqu'il est en rotation.

Le capteur peut être déplacé dans la direction de la propagation des rayons X (z').

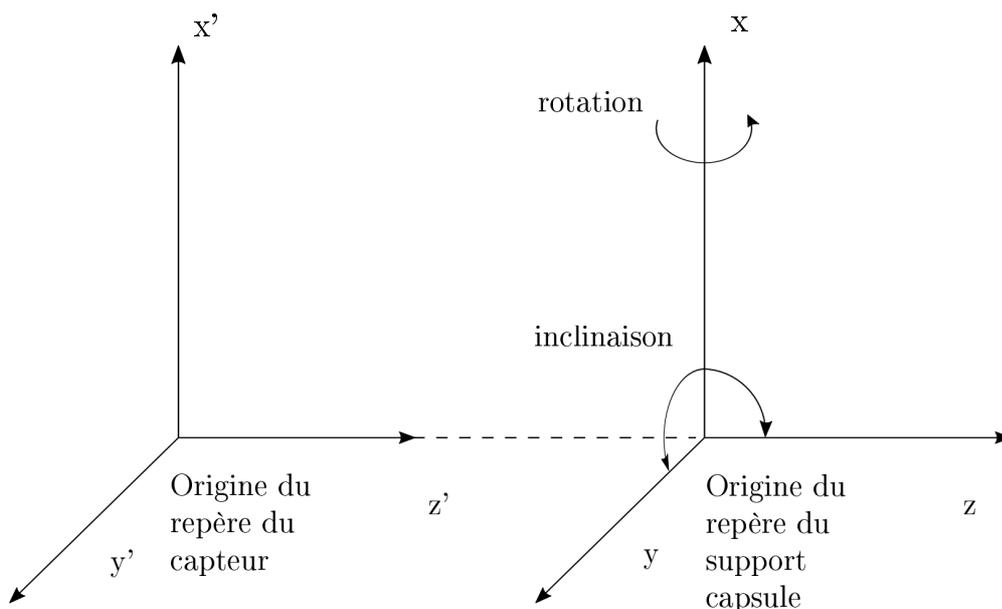


FIGURE 1.11 – Schéma des déplacements possibles sur le banc de radiographie.

Le pas de déplacement de cet ensemble de tables motorisées est de $0,1 \mu\text{m}$. Le pas de rotation est de $0,1^\circ$.

La distance entre le microballon et la source de rayonnement est de l'ordre 1 cm . La distance entre le capteur et la source est comprise entre 30 cm et 40 cm . Ces dimensions déterminent le domaine de grandissements possibles sur les radiographies X.

1.4 Conclusion

Le microballon est un élément expérimenté au LMJ qui doit respecter un cahier des charges très strict. Cela implique la mise en place de plusieurs procédés de fabrication particuliers. Le microballon fabriqué, un ensemble de dispositif de caractérisation est utilisé pour vérifier la conformité de ce dernier au cahier des charges.

La radiographie est alors le moyen de caractérisation non destructif permettant d'obtenir des informations sur les différentes surfaces du microballon.

Les spécificités du système source-microballon-écran étudié conditionnent la modélisation de l'image radiographique, au travers des dimensions de la source et du microballon, des distances source-microballon et source-écran, du spectre de la source localisé dans les basses énergies et des matériaux constituant le microballon.

L'ensemble des tables motorisées, et leur précision, ainsi que la résolution spatiale du dispositif permettent de définir des stratégies de développement et leurs limites pour la métrologie des défauts de rugosité des surfaces des microballons.

Chapitre 2

Modélisation de la propagation des rayons X

2.1 Introduction

Comme il a été décrit dans les chapitres précédents, la radiographie par rayons X [Choux *et al.*, 2011] est un moyen de contrôle non destructif permettant de caractériser du microballon.

Les images radiographiques X sont formées, dans la plupart des cas de caractérisation industrielle, par la variation d'intensité (ou niveau de gris) liée à l'absorption. Cette variation d'intensité, dépendant des matériaux traversés et de leurs dimensions, provoque une variation de contraste sur le cliché.

Ces radiographies de microballons contiennent donc de l'information relative à la surface interne de ces dernières. Pour extraire cette information, il est nécessaire de comprendre la formation de ces clichés notamment à travers la modélisation de la propagation des rayons X et de leurs interactions avec la matière.

Sur les clichés radiographiques des microballons, la présence d'anneaux sombres et clairs est remarquée aux interfaces des matériaux traversés (cf. figure 1.3 p.23). De plus, l'intensité du cliché radiographique du microballon est inférieure à l'intensité théorique liée à l'absorption du microballon. Cette différence n'est pas provoquée par l'absorption du microballon, mais par une autre interaction des rayons X avec le microballon appelée contraste de phase. Son étude est un point essentiel de la thèse.

Ce chapitre constitue un état de l'art de la modélisation des rayons X et de l'interaction de ces derniers avec la matière, en particulier avec des microballons faiblement absorbants aux rayons X et en présence de contraste de phase.

Les définitions, utilisées par la suite pour la modélisation, sont données dans une première section. Ensuite, différentes considérations sur les rayons X sont discutées comme la modélisation par l'optique géométrique de la propagation des rayons X, la physique corpusculaire et quantique, la physique ondulatoire.

2.2 Définition du problème

Le microballon est un petit élément en plastique de faible masse volumique. Afin d'obtenir des informations sur l'intérieur du microballon, les rayons X générés pour la radiographie sont de faibles énergies (entre 5 et 20 keV), permettant une absorption partielle pouvant être observée et analysée sur les clichés. En effet, à des énergies plus élevées, le matériau est très faiblement absorbant, et à des énergies plus faibles, le matériau est totalement absorbant. C'est sur ces clichés qu'un phénomène de brusque variation de l'intensité lumineuse des pixels est observé aux contours du microballon. Afin de comprendre ce phénomène et choisir une modélisation appropriée, les rayons X et les phénomènes associés sont d'abord définis.

Les rayons X sont des ondes électromagnétiques¹ dont la longueur d'onde est comprise entre 10^{-12} et 10^{-8} mètres. Dans le vide, les rayons X ne subissent aucune transformation. Lorsqu'ils rencontrent un matériau, ils interagissent avec ce dernier. Cette interaction modifie leurs trajectoire et intensité et se traduit par des phénomènes physiques tels que la réflexion, la réfraction, l'absorption, la diffraction, la ré-émission.

La réflexion est le phénomène optique le plus connu. Lorsqu'une onde incidente rencontre un milieu différent de celui dans lequel elle se propage, elle est réfléchie, c'est-à-dire qu'une partie ou la totalité de son énergie est renvoyée avec un angle identique à l'angle incident par rapport à la normale à la surface. Un métal poli est un exemple de matériau réfléchissant pour la lumière visible.

La réfraction est aussi un phénomène de déviation d'une onde incidente lorsqu'elle rencontre un milieu différent de celui dans lequel elle se propage. Elle est la déviation d'une partie ou de la totalité de l'onde avec un angle de réfraction α' différent de l'angle incident α dans le milieu rencontré. L'image d'un bâton semi-immergé dans de l'eau illustre ce phénomène.

L'absorption est un phénomène qui se produit quand la lumière se propage dans un milieu absorbant. L'intensité de la lumière diminue en fonction de

1. Par la suite, les ondes électromagnétiques à toutes les longueurs seront désignées de manière générique par le terme lumière [Robert *et al.*, 2008].

la distance parcourue dans le milieu.

La diffraction est un phénomène qui se produit lorsque des ondes, quelle que soit leur nature, rencontrent des obstacles ou des ouvertures dont les dimensions sont de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Cette diffraction se traduit par des perturbations dans la propagation de ces ondes (c'est-à-dire, le contournement d'obstacles ou la divergence à partir d'ouverture dans ces obstacles). Une illustration de ce phénomène est la diffraction des ondes radio lorsqu'elles rencontrent une montagne (cf. ellipsoïde de Fresnel).

L'interférence est le phénomène qui apparaît lorsque plusieurs ondes, provenant de sources différentes, se rencontrent.

La ré-émission est le phénomène d'émission d'un matériau après que celui-ci a reçu une énergie suffisante pour réaliser une transition électronique. Dans le cas d'un microballon en plastique, les raies d'émission sont faibles. Le carbone a une raie d'émission à 277 eV. Les énergies émises par le générateur et captées par la caméra sont autour de 10 keV, ce qui est très grand devant l'énergie des transitions électroniques du carbone. La ré-émission pouvant être générée par le plastique du microballon est donc négligeable.

Toute transformation d'onde électromagnétique est décrite par trois caractéristiques : la direction, l'intensité et le déphasage. L'absorption et les phénomènes ondulatoires sont définis par le déphasage et l'absorption [Wilkins *et al.*, 1996]. Ces transformations sont modélisées sous différentes hypothèses émises sur la lumière qui seront énoncées plus loin dans ce chapitre.

Définition 1

Soit un champ plan électromagnétique $U = |U|e^{i\phi}$ se propageant dans une direction quelconque dans le vide et traversant un milieu M .

Soit le champ sortant $U' = |U'|e^{i\phi'}$ du milieu M .

Il y a absorption par le milieu M lorsque $|U'| < |U|$, et déphasage ($\phi' \neq \phi$) $\forall (\phi, \phi')$, $U'U^ = |U'||U|e^{i(\phi'-\phi)} \neq |U'||U|$ (U^* correspond au complexe conjugué de U).*

L'interaction de la lumière avec la matière peut être décrite par un paramètre appelé indice de réfraction, souvent noté par la lettre n . Il dépend de la longueur d'onde λ de l'onde électromagnétique. La partie réelle caractérisée par la fonction $\delta(\lambda)$ est liée au déphasage et la partie imaginaire notée $\beta(\lambda)$ est liée à l'absorption. L'indice de réfraction dans un matériau s'écrit comme suit :

$$n(\lambda) = 1 - \delta(\lambda) + i\beta(\lambda) \quad (2.1)$$

L'indice de réfraction dans le vide est égal à 1. La base de Henke *et al.* [Henke *et al.*, 1993] répertorie les indices de réfraction mesurés pour un grand nombre de matériaux.

Sur la radiographie d'une bille de plastique en figure 2.1 p.38, en plus de l'absorption, un phénomène de variation brusque du contraste est observé. Ces variations sont localisées aux contours des différents éléments présents dans la radiographie. Ce phénomène est appelé contraste de phase, car il ne dépend pas de l'absorption mais provient d'une interaction faisant intervenir la phase de l'onde électromagnétique.

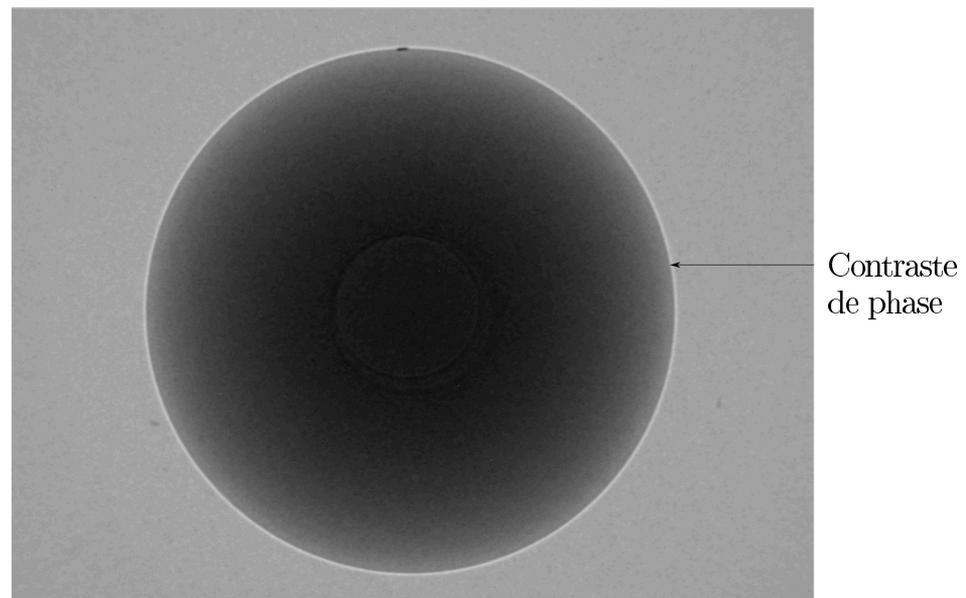


FIGURE 2.1 – Radiographie d'une bille de CH (plastique), avec localisation du contraste de phase.

De façon générale, comme défini par l'encyclopédie Larousse [Larousse, 2018], deux types de modélisation pour ce phénomène existent : l'optique géométrique et l'optique physique. L'optique géométrique est la recherche des propriétés de la lumière, développée à partir de principes fondamentaux (propagation rectiligne, lois de la réflexion et de la réfraction), sans qu'il soit fait d'hypothèses sur sa nature. L'optique physique est l'interprétation de ces propriétés par la connaissance de la nature de la lumière (considérée comme étant des photons ou des ondes électromagnétiques). Des modélisations possibles pour les différents phénomènes cités sont listées dans la suite de ce chapitre. Parmi celles-ci, celle permettant d'estimer les déformations des surfaces à partir de plusieurs clichés sera sélectionnée.

Selon Cloetens et al. [Cloeten *et al.*, 2000] ou encore Nallet [Nallet, 2009], le phénomène observé sur les clichés des microballons étudiés est de la diffraction aux petits angles, ou, diffraction de Fresnel. Pour Wilkins et Da-

vis [Wilkins *et al.*, 1996, Davis *et al.*, 1995] les modélisations peuvent être effectuées par la physique ondulatoire (Huygens-Fresnel, l'équation de transport d'intensité ou l'électromagnétisme). Il est important de noter que les articles précités se situent dans le cadre d'un synchrotron, et donc que le faisceau de rayons X à une grande cohérence spatiale et temporelle.

2.3 Modélisations existantes

2.3.1 Optique géométrique

Elle est historiquement la première description des phénomènes optiques. L'optique géométrique permet de modéliser la réfraction, la réflexion ainsi que l'absorption, lorsque les objets étudiés ont des dimensions très grandes devant la longueur d'onde électromagnétique. La longueur d'onde des rayons X étant d'environ 10^{-10} m, pour des microballons d'environ 10^{-3} m, l'optique géométrique est applicable dans notre cas.

La loi de Snell-Descartes modélise le phénomène de réfraction et de réflexion (cf. figure 2.2a et figure 2.2b p.40).

Définition 2 (Loi de Snell-Descartes)

Soit \mathbf{n} le vecteur normal à la surface du milieu réfractant.

Soient α l'angle d'un rayon lumineux incident par rapport à \mathbf{n} et α' l'angle d'un rayon réfracté par rapport à $-\mathbf{n}$.

Soient n l'indice de réfraction du milieu dans lequel arrive le rayon incident, et n' l'indice de réfraction du milieu réfractant.

La loi de Snell-Descartes est la suivante :

$$n \sin \alpha = n' \sin \alpha' \quad (2.2)$$

Pour les rayons X traversant nos matériaux, la partie réelle de l'indice de réfraction est inférieure à 1 (typiquement, $\Re(n) = 1 - 10^{-7}$) et le phénomène est nommé ultra-réfraction (cf. chapitres 3 et 4).

La réflexion peut avoir lieu en même temps que la réfraction. Afin de connaître l'intensité du rayon incident transmise aux rayons réfractés et réfléchis, les coefficients de Fresnel sont calculés [Born et Wolf, 1999] et pondèrent l'intensité de chaque rayon. Des calculs seront menés dans la section 3.5 page 69.

La modélisation de l'absorption en optique géométrique est donnée par la loi de Beer-Lambert schématisée sur la figure 2.3 p.40.

Définition 3 (Loi de Beer-Lambert)

Soit x la distance parcourue dans un milieu d'indice de réfraction complexe

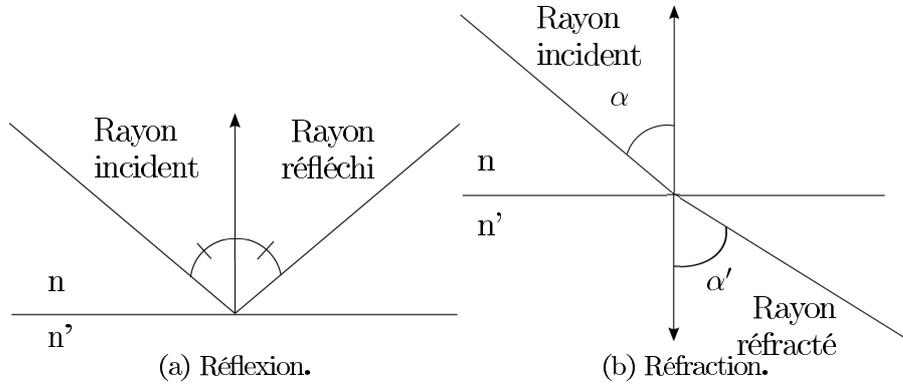


FIGURE 2.2 – Représentation par l’optique géométrique.

n .

Soit I l’intensité du rayon avant absorption.

L’intensité du rayon après absorption I_{abs} est donnée par la loi de Beer-Lambert suivante :

$$I_{abs} = I e^{-\frac{4\pi\beta(\lambda)}{\lambda}x} \quad (2.3)$$

où $\beta(\lambda)$ est la partie imaginaire de l’indice de réfraction et λ est la longueur d’onde des rayons X .

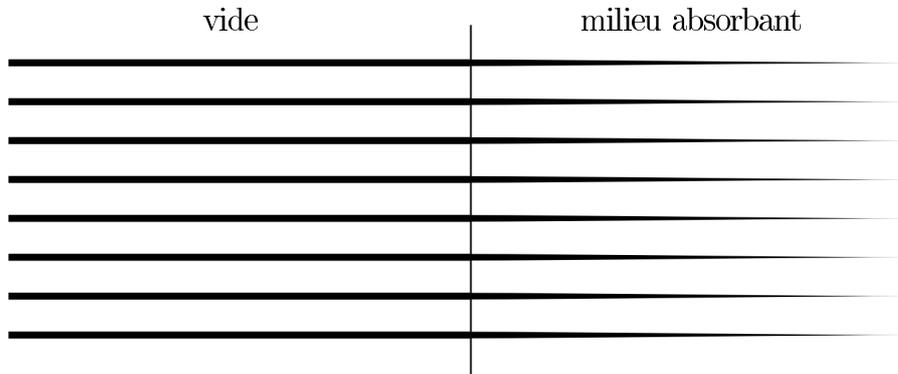


FIGURE 2.3 – Représentation par l’optique géométrique de l’absorption. L’épaisseur du trait représente l’intensité de la lumière.

Dans sa thèse, Alexandre Choux [Choux, 2006] explique la présence très visible d’un anneau lumineux sur des images ombroscopiques par l’existence d’une caustique, c’est-à-dire une concentration de rayons lumineux. La caustique s’explique très bien par le modèle géométrique de propagation des

rayons lumineux. En l'occurrence, il s'agissait de multiples réfractions et d'une réflexion à travers le microballon et la lentille du capteur. Pour compléter le modèle géométrique présenté dans la thèse de Alexandre Choux, il est possible de calculer l'absorption subie par chaque rayon X, à l'aide de la loi de Beer-Lambert, et l'intensité du rayonnement est pondérée par le facteur d'absorption $\beta(\lambda)$.

Les anneaux observés sur les images radiographiques ne semblent pas résulter de l'existence d'une caustique (les rayons X sont peu sujets aux réflexions). Pour expliquer l'anneau visible sur les images radiographiques, il n'est pas possible, a priori, de négliger la nature ondulatoire des rayons X. Par conséquent, une façon de traiter le problème est de le considérer dans sa généralité et de modéliser tous ses aspects, géométriques et physiques, afin de déterminer ensuite la nature de l'anneau. L'optique physique va donc être maintenant exposée, ce qui nous amènera à un modèle plus complet de l'expérience.

Une autre façon d'aborder le problème de modélisation serait d'émettre des hypothèses sur les phénomènes optiques ayant lieu et de les tester. Celles expliquant le mieux le phénomène observé seront alors validées. Ce qui sera fait principalement dans la troisième partie du chapitre 3.

2.3.2 Optique physique

Optique corpusculaire - quantique

En optique corpusculaire - quantique, la lumière est considérée comme formée de photons². L'optique corpusculaire est particulièrement efficace pour décrire les interactions entre la lumière et les particules. Ceci permet de modéliser entre autre la diffusion Compton, la diffusion Thomson et les effets photoélectriques.

Les travaux récents (dans les années 2000) de recherche [Jaenisch *et al.*, 2016] utilisent des méthodes stochastiques de Monte Carlo afin d'obtenir une radiographie virtuelle tenant compte de ces différents phénomènes physiques mis en jeu lors d'une radiographie.

Le microballon est un objet macroscopique composé de plastique n'ayant pas d'électrons libres ou faiblement liés à son atome. Il s'agit donc d'un milieu diélectrique dans lequel ces diffusions ne sont pas observées.

L'optique corpusculaire n'est donc pas adaptée pour modéliser les radiographies de microballons.

2. Les interactions entre lumière et matière peuvent avoir lieu seulement sous forme d'échange de quantités discrètes (quanta) d'énergie, appelés photons.

Optique ondulatoire : diffraction

La diffraction - principe de Huygens-Fresnel

Les modèles du contraste de phase basés sur la diffraction sont les plus répandus. Ce sont des approximations des phénomènes physiques ayant lieu lors de l'interaction entre des ondes électromagnétiques et un obstacle.

Les théories de la diffraction permettent d'expliquer les phénomènes d'interférences, de diffraction et de réfraction en considérant la lumière comme une onde. Le principe de Huygens-Fresnel énoncé par Fresnel [Fresnel, 1818] est établi comme base de ces théories : *"Chaque point M d'une surface S atteinte par la lumière peut être considéré comme une source secondaire émettant une onde sphérique dont l'amplitude et la phase sont celles de l'onde incidente au point M ".*

L'onde est décrite par une fonction $U = |U|e^{i(\phi+\omega t)}$ où $|U|$ est l'amplitude de l'onde, $\phi + \omega t$ la phase, ϕ le déphasage, ω la pulsation et t le temps. La représentation du front d'onde, c'est-à-dire la surface d'une onde sur laquelle la phase est uniforme, pour une période et une demi-période lorsqu'il y a réfraction ou diffraction, fait apparaître les interférences constructives et destructives. Ces phénomènes de diffractions et d'interférences sont montrés par la figure 2.4a p.43. Les traits pleins sont les fronts d'ondes pour une phase ψ donnée, les traits en pointillés sont les fronts d'ondes pour une demi-période $\psi + \pi$.

Dans le cas de la réfraction, la vitesse de phase c_0 de l'onde incidente change en fonction du matériau traversé. La vitesse dans le milieu réfractant est alors $c = c_0/n$ avec n l'indice de réfraction de ce matériau³. Le retard ou l'avance provoqué par le milieu crée alors le phénomène de réfraction. La figure 2.5 p.44 montre comment la réfraction est expliquée avec ce principe. Le front d'onde est dessiné pour des temps t_i . La direction du front d'onde, par exemple au temps t_3 , est :

- pour la partie de l'onde non réfractée : la direction du rayon incident ;
- pour la partie de l'onde réfractée : la normale à la tangente des ondes créées par les sources secondaires du principe Huygens-Fresnel.

Les théories de la diffraction font intervenir deux zones : la zone de Fresnel et la zone de Fraunhofer [Bronnikov, 2006, Wilkins *et al.*, 1996]. Selon la zone dans laquelle est placée le capteur, le modèle utilisé pour décrire le champ électromagnétique est différent. Les champs sphériques sont approximés par des champs plans en zone de Fraunhofer, ce qui n'est pas justifié en zone de Fresnel (cf. figure 2.6 p.44).

3. Il est aussi possible de parler de susceptibilité électrique χ du matériau, sachant que l'indice de réfraction s'exprime aussi par $n = \sqrt{1 - \Re(\chi)}$.

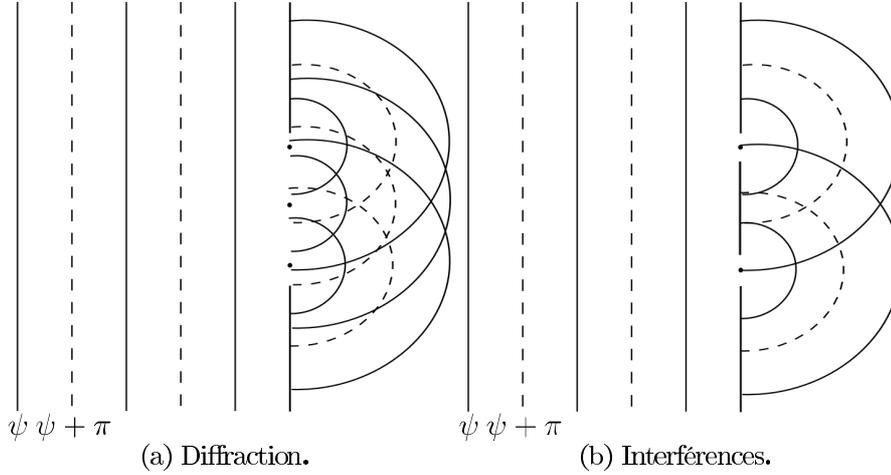


FIGURE 2.4 – Représentation par l’optique ondulatoire (Principe Huygens-Fresnel).

La limite empirique entre ces deux zones se situe à une distance z de la source :

$$z = \frac{D^2}{\lambda} \quad (2.4)$$

où D est la dimension de l’objet ou de l’ouverture, et λ la longueur d’onde des ondes électromagnétiques.

Les auteurs [Bronnikov, 2006, Wilkins *et al.*, 1996] indiquent que le contraste de phase n’est observable qu’en champ proche (dans la zone de Fresnel, et proche de l’objet diffractant).

Il peut très bien s’expliquer par des interférences provoquées par de la diffraction ou de la réfraction en zone de Fresnel. En effet, dans le cas étudié dans ces travaux de recherche, le microballon est très proche de la source (1 cm), et le capteur est éloigné (40 cm) ; le diamètre d’un microballon est de l’ordre du millimètre et les énergies des rayonnements électromagnétiques vont de 8 à 20 keV. En prenant par exemple un diamètre de microballon $D = 1000 \mu m$, et une longueur d’onde de $\lambda = 3,9.10^{-11} m$ (soit 20 keV), la distance $z = \frac{D^2}{\lambda} = 2564 m$ est trouvée. Ceci est significativement plus grand que la distance source capteur du dispositif radiographique disponible. Il faut donc en conclure que le cas d’étude de cette thèse se situe en champ proche. Néanmoins le microballon est un objet complexe : l’épaisseur du microballon est d’environ $100 \mu m$. Or d’après la formule 2.4 si D diminue, alors z diminue. Il est donc difficile d’être affirmatif sur l’hypothèse émise d’être en champ proche.

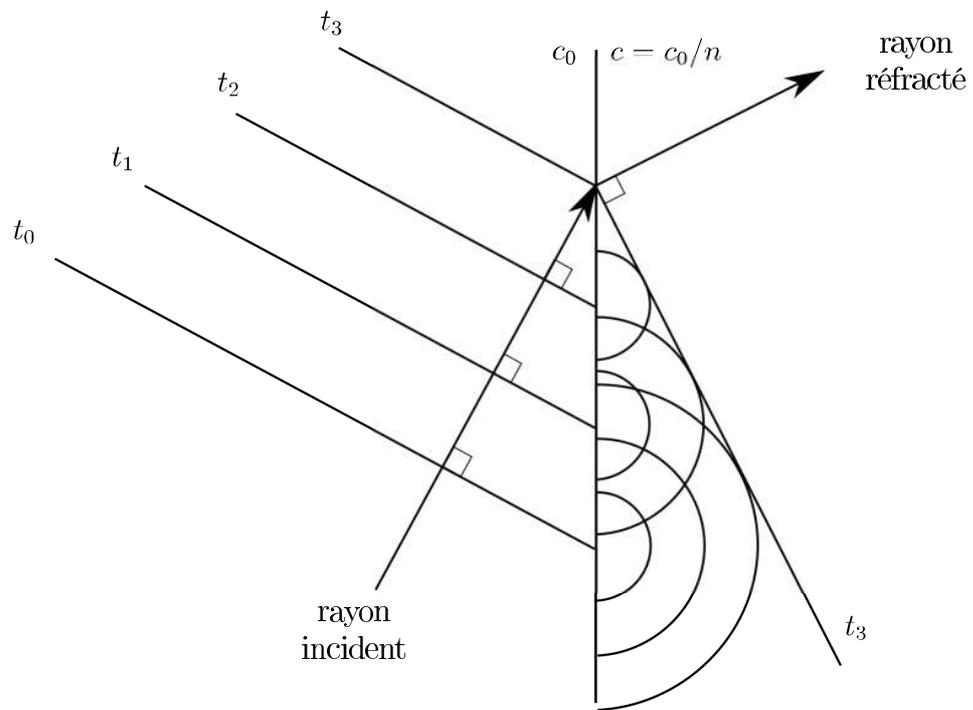


FIGURE 2.5 – Réfraction selon le principe d’Huygens-Fresnel.

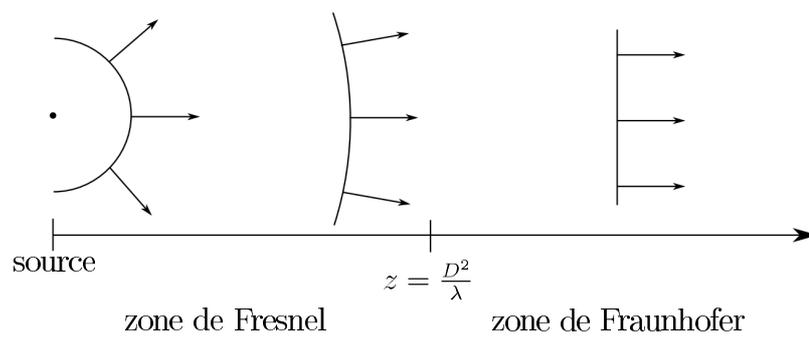


FIGURE 2.6 – Représentation du front d’onde en fonction de la distance à la source.

Ces mêmes auteurs [Bronnikov, 2006, Wilkins *et al.*, 1996] précisent que le contraste de phase résulte des interférences entre le champ émis par la source et le champ diffracté ou réfracté par l'objet. Il est bien connu que les interférences, pour être visibles, nécessitent d'avoir la cohérence des faisceaux impliqués [Born et Wolf, 1999]. La cohérence de la source utilisée pour ces travaux de recherche est alors étudiée.

Il y a deux types de cohérences : temporelle et spatiale. La cohérence temporelle dépend de la monochromie relative du faisceau de rayons X. Elle peut se mesurer par la longueur de cohérence temporelle L_c :

$$L_c = \frac{v}{\Delta\nu} \quad (2.5)$$

où v est la vitesse de l'onde en mètre par seconde ($v = 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), et $\Delta\nu$ est l'amplitude fréquentielle du flux émis par la source en seconde.

Dans notre cas, le faisceau est polychromatique (de 6 keV à 100 keV maximum), mais certaines fréquences sont plus intenses que d'autres, notamment celles liées aux raies spectrales L de la cible en tungstène⁴. Dans le cas présent $L_c = 3,5.10^{-10} \text{ m}$; or la distance source-capteur est de 0,4 m, ce qui est très grand devant L_c . Sur une distance de 0,4 m, les ondes ne sont plus en phase de plusieurs périodes, la cohérence temporelle n'est donc pas assurée.

La cohérence spatiale peut se mesurer par la largeur de cohérence L_s :

$$L_s = \frac{\lambda Z}{\Delta S} \quad (2.6)$$

où Z est la distance d'observation (4.10^{-2} m), λ est la longueur d'onde ($1,5.10^{10} \text{ m}$, pour une énergie de 8.3 keV) et ΔS est la taille de la source (8.10^{-7} m).

Dans notre cas, $L_s = 7,5.10^{-6} \text{ m}$. La taille d'un pixel sur le capteur avec amplificateur de brillance est de $6,45 \mu\text{m}$, l'amplificateur de brillance multiplie par 10 cette valeur. Pour le capteur numérique à haute résolution, la taille des pixels est de $9 \mu\text{m}$. Dans les deux cas, les interférences ne sont pas observables avec le système disponible.

Un exemple d'application de la théorie de la diffraction est réalisé pour la radiographie de microballons dans l'article de B. Kozioziemski [Kozioziemski *et al.*, 2015]. Dans cet article, les microballons sont caractérisés par radiographie X, avec la présence d'une couche cryogénique.

La théorie de la diffraction permet alors de modéliser la réfraction et la diffraction, mais dans notre cas, les interférences ne sont pas observables.

Dans les théories basées sur la diffraction, les objets tri-dimensionnels sont approximés par leur projection bidimensionnelle, dans un plan objet. Cette

4. Les énergies à 8,3 keV et 11,3 keV seront celles considérées.

approximation entraîne des erreurs difficiles à estimer. Or, les microballons doivent être caractérisés dans une démarche qui relève de la métrologie. La quantification des erreurs est par conséquent indispensable et interdit toute approximation non triviale, susceptible d'occasionner des erreurs de l'ordre du pixel. C'est pour quoi il n'est pas possible, a priori, de baser l'intégralité de l'étude sur la seule diffraction.

Equation de transport d'intensité

L'équation de transport d'intensité est une solution en champ proche basée sur les théories de la diffraction. Trois éléments conditionnent cette modélisation :

- la monochromie du flux de rayons X, qui permet une modélisation linéaire du problème, grâce à une transformation de Radon (projection d'un ensemble de plans (les clichés) sur un plan (l'image reconstruite, la coupe tomographique)) traduisant l'absorption de l'objet ;
- le flux élevé, afin d'obtenir une résolution élevée sur le cliché radiographique. En effet, pour avoir un rapport signal sur bruit constant entre les images, il faut que le flux de rayons X capté par le détecteur soit égal à l'inverse de la taille au cube de la cellule détectrice ;
- la cohérence spatiale, qui permet d'exploiter les phénomènes de propagation pour connaître le contraste de phase.

Les modèles utilisant l'équation de transfert d'intensité sont le plus souvent utilisés pour des dispositifs instrumentaux tels que les synchrotrons de l'ESRF (European Synchrotron Radiation Facility) à Grenoble ou Soleil, implanté sur le plateau de Saclay, exploité par le CEA et le CNRS. Sur ces synchrotrons est réalisée de la tomographie assistée par ordinateur. La reconstruction de l'objet s'effectue via la transformée de Radon de l'équation d'intensité, comme il est écrit dans les articles de A. Bronnikov [Bronnikov, 1999a, Bronnikov, 1999b, Bronnikov, 2001, Bronnikov, 2006], ou encore Mayo dans [Mayo *et al.*, 2003], ou bien les équipes de l'ESRF [Langer *et al.*, 2008].

Les moyens nécessaires à la mise en œuvre de cette méthode nécessitent de respecter les conditions précitées. Comme vu précédemment, le dispositif radiographique du laboratoire n'a pas la cohérence, ni la monochromatie, ni le flux d'un synchrotron, même si des parallèles sont possibles au niveau de la reconstruction tomographique d'un objet. Pour ces raisons, la modélisation par l'équation de transport n'est pas adaptée.

Optique ondulatoire : électromagnétisme

En optique ondulatoire électromagnétique, la lumière est considérée comme une onde électromagnétique. Cette approche de l'optique est basée sur les

équations de Maxwell et permet de modéliser les phénomènes optiques lorsque les longueurs d’ondes sont proches ou inférieures aux dimensions des objets étudiés, pour les objets diélectriques ou conducteurs. Plusieurs théories sont fondées sur ces équations, chacune s’obtenant sous certaines hypothèses (Mie, Rayleigh, Raman, etc.).

Dans le cas d’un objet très grand devant les longueurs d’ondes, tel que le microballon devant les rayons X, les équations de Maxwell avec les hypothèses émises par Born peuvent être utilisées [Born et Wolf, 1999].

Le développement de Born est basé sur la théorie de l’électromagnétisme de Maxwell [Maxwell, 1865, Heaviside, 1893]. Ce modèle est une approximation de la solution de l’équation de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu réfractant et absorbant. Born propose d’approximer le champ avec un développement perturbatif de l’équation du potentiel de diffusion.

Une hypothèse importante pour justifier l’utilisation de ce modèle est que l’introduction d’un objet dans l’espace induit de très légères variations du champ. Dans notre cas, cette hypothèse peut être considérée comme applicable puisque l’indice de réfraction induit une très légère variation (l’indice du milieu $n_{milieu} \simeq 1 - 10^{-6} + i10^{-9}$ par rapport à celui de l’air considéré comme identique à celui du vide $n_{air} \simeq 1$).

La méthode de Born est la première itération d’une méthode d’intégrales récurrentes pour résoudre les équations de Maxwell. La solution exacte des équations de Maxwell pourrait donc être obtenue en itérant la méthode de Born, sous réserve de convergence. Cependant, les calculs numériques nécessitent des moyens importants⁵.

Une autre approximation de la solution de la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu inhomogène est celle de Rytov [Fannjiang, 2010, Spivack, 2012]. Cette approximation est obtenue en considérant que le milieu génère une succession de déformations sur l’onde principale. Il n’est pas nécessaire de l’utiliser si seul le premier ordre de la solution de Born est considéré [Born et Wolf, 1999].

L’approche de Born par une équation intégrale permet d’obtenir une relation entre l’objet 3D radiographié et l’image obtenue. De plus, elle permet l’application d’une méthode de petite perturbation nécessaire à l’expression des perturbations des surfaces du microballon. Elle permet de modéliser l’ensemble des phénomènes de l’optique ondulatoire, bien que pour notre cas les interférences ne soient pas observables.

5. Comme il sera montré dans le chapitre suivant, une fonction fortement oscillante est à intégrer, ce qui numériquement nécessite plus de 10^{10} calculs, uniquement pour la première itération de Born. Les moyens disponibles ne permettent pas ce calcul dans un temps raisonnable (de l’ordre du mois).

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, les différents phénomènes physiques, se produisant lors des interactions entre les rayons X et la matière, ont été présentés. Ces phénomènes sont l'absorption, la réfraction, la diffraction, la réflexion, les interférences et la ré-émission. Les caractéristiques du dispositif de radiographie ont été analysées et le système ne permet pas d'observation des interférences.

Les méthodes basées sur l'optique géométrique ou la diffraction utilisent une approximation qui est une projection de l'objet 3D, sur un plan 2D. Ces approches ne sont pas appropriées pour l'objectif métrologique, car elles peuvent impliquer des erreurs non quantifiables. Par conséquent, un modèle basé sur des équations d'électromagnétisme est choisi. Les équations de Maxwell reflètent tous les phénomènes physiques qui se produisent dans l'expérience. Il sera possible d'estimer les erreurs au cours de la résolution. Plus précisément, l'équation intégrale du potentiel de diffusion, voir [Born et Wolf, 1999], est utilisée.

L'équation intégrale du potentiel de diffusion est développée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Applications des modèles

3.1 Introduction

Dans cette partie, la modélisation générale du problème sera abordée, d'abord sans émettre d'hypothèses a priori sur la nature des contrastes lumineux visibles sur les images expérimentales, puis en prenant les hypothèses de l'optique géométrique. En effet, les différentes approches utilisables pour construire un modèle physique (optique géométrique ou physique) nécessitent une hypothèse a priori sur la nature du phénomène à l'origine des images observées. Ainsi, des anneaux lumineux sur des images de microballons obtenues par ombroscopie ([Choux, 2006, Choux *et al.*, 2007]) ont déjà été observés et le phénomène résultait de la formation d'une caustique, mettant en jeu de la réflexion et de la réfraction de rayons lumineux. Mais la nature très pénétrante des rayons X incite plutôt à penser que cette fois-ci il s'agit du contraste de phase qui pourrait mettre en jeu la nature ondulatoire des rayons X.

Une approche très générale du problème nécessite la résolution des équations de Maxwell, dans un milieu hétérogène. Or il va apparaître que cette résolution, nécessairement numérique, est difficile en raison de la très courte longueur d'onde des rayons X par rapport aux dimensions du microballon.

Dans un premier temps le problème sera simplifié, en faisant toutes les hypothèses qui s'y appliquent (sur les dimensions, la nature des matériaux...), de façon à établir l'équation la plus explicite possible. Cette équation, qui sera mise sous forme intégrale, demeure assez générale. La méthode de Born sera ensuite utilisée pour calculer une solution approchée de cette équation. Le but est de comparer la solution obtenue aux images expérimentales.

Il apparaîtra dans la suite de ce chapitre que la résolution numérique des équations de propagation est très difficile à cause d'une fonction très

oscillante, relative à toute approximation par des méthodes classiques (quadratures, Monte Carlo). Une méthode adaptée aux intégrales fortement oscillantes sera donc proposée, et les symétries du problème seront utilisées, pour simplifier au maximum les expressions à calculer, avant de passer au calcul numérique. Ainsi, grâce aux expressions mathématiques du modèle, il sera montré que la contribution de l'intégration sur certains domaines est négligeable, et que la contribution à l'anneau visible sur les images est nécessairement due à des rayons lumineux faiblement déviés. La valeur de l'intensité lumineuse reçue par des pixels de cet anneau sera estimée en intégrant numériquement sur de petites parties du domaine.

Tous les calculs dépendent de plusieurs paramètres, dont un prépondérant : l'indice de réfraction. Ce dernier n'est pas parfaitement connu pour les matériaux rencontrés dans ces travaux de recherches, car leur densité exacte n'est elle-même pas bien connue. Pour estimer l'indice de réfraction, le procédé expérimental a été simulé et des clichés théoriques ont été calculés. Les amplitudes du contraste de phase sur les clichés théoriques avec celui mesuré sur les clichés expérimentaux ont été comparées. Pour cette validation, le modèle utilisé pour une itération de la méthode de Born est supposé suffisant pour interpréter le phénomène. Cette hypothèse est en fait difficile à valider a priori. Ce problème sera explicité dans ce chapitre.

Une approche par l'optique géométrique sera ensuite développée. En utilisant les travaux de Choux ([Choux, 2006, Choux *et al.*, 2007]), l'ensemble des réfractions (et des réflexions) ayant lieu dans le microballon par la loi de Snell-Descartes ont été modélisées, et le phénomène d'absorption, par la loi de Beer-Lambert, y est ajouté. Les coefficients de Fresnel permettent de tenir compte de l'intensité de la réfraction et de la réflexion. Les simulations de clichés radiographiques de microballons à partir du modèle basé sur l'optique géométrique concordent avec les clichés expérimentaux. Cette méthode donne des informations sur le contraste de phase, informations qui seront utilisées dans le chapitre 4 lors de l'analyse des clichés pour la réalisation d'une détection de contour.

3.2 Équation des ondes électromagnétiques stationnaires, en milieu hétérogène

Une façon de modéliser l'ensemble des phénomènes est de considérer les équations de Maxwell, et plus précisément de revenir à l'équation des ondes en milieu hétérogène. Cette équation est rapidement énoncée, ce qui permettra de clarifier les notations (standard) et surtout de clarifier les hypothèses qui

seront utilisées dans ce chapitre. Les hypothèses nécessaires à l'obtention de l'équation du modèle (3.24) sont indiquées en italique dans le texte. Le développement suivant est inspiré de [Born et Wolf, 1999, chapitres 1 et 13].

Dans la suite de ce chapitre, les vecteurs sont notés en caractères gras pour les distinguer des scalaires, \mathbf{E} le champ électrique, \mathbf{B} le champ magnétique, \mathbf{J} la densité de courant électrique. La divergence sera notée $\nabla \cdot$ et le rotationnel $\nabla \times$ (\times le produit vectoriel).

Le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{q}, t)$, au point \mathbf{q} dans un espace ayant pour origine la source de rayonnement, à l'instant t , est solution de l'équation des ondes, et s'écrit :

$$\mathbf{E}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(k|\mathbf{q}|-\omega t)} = \mathbf{E}(\mathbf{q}) e^{-i\omega t} \quad (3.1)$$

où $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ est la vitesse de la lumière dans le vide, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde, $\lambda \approx 10^{-10} \text{ m}$ et $\omega = kc$. $|\mathbf{q}|$ est la norme du point \mathbf{q} donc la distance du point \mathbf{q} à la source ponctuelle des rayons X , supposée centrée à l'origine. La norme de \mathbf{q} est notée parfois $q = |\mathbf{q}|$. De façon équivalente, $\mathbf{B}(\mathbf{q}, t)$ le champs magnétique au point \mathbf{q} à l'instant t s'écrit :

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{q}) e^{-i\omega t},$$

Dans ce chapitre, sauf mention contraire, *la source du rayonnement X sera supposée ponctuelle et monochromatique.*

L'équation de Maxwell-Faraday, qui décrit le phénomène d'induction électromagnétique entre le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{q}, t)$ et le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{q}, t)$ est la suivante :

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{q}, t) + \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}, t) = 0. \quad (3.2)$$

L'équation de Maxwell-Ampère représente les effets des charges électriques sur le champ magnétique (théorème d'Ampère) :

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{q}, t) = \mu(\mathbf{J}(\mathbf{q}, t) + \varepsilon \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{q}, t)) \quad (3.3)$$

où μ est la perméabilité magnétique et ε est la permittivité diélectrique. *Le matériau est supposé non magnétique* par conséquent $\mu = 1$ (mais μ est conservé dans les équations par souci d'homogénéité). En revanche, la permittivité diélectrique n'est pas supposée constante, et dépend du point \mathbf{q} considéré.

Dans un 1^{er} temps, le champ magnétique \mathbf{B} va être éliminé des équations (3.2) et (3.3). Pour cela, l'équation (3.3) est dérivée par rapport au temps :

$$\nabla \times \dot{\mathbf{B}} = \mu(\dot{\mathbf{J}} + \varepsilon \dot{\mathbf{E}} + \varepsilon \ddot{\mathbf{E}}) \approx \mu \varepsilon \ddot{\mathbf{E}} \quad (3.4)$$

où deux hypothèses sont faites :

- *il n'y a pas de circulation de courant dans le matériau étudié, en particulier $\mathbf{J} = 0$;*
- $\frac{d\varepsilon}{dt} \ll kc$. Cette hypothèse se traduit littéralement par la supposition que *la permittivité diélectrique $\varepsilon(\mathbf{q})$ varie très peu sur des distances de l'ordre de la longueur d'onde.* Ainsi,

$$\frac{\dot{\varepsilon}}{\varepsilon} \ll \omega \implies |\dot{\varepsilon}\omega| \ll |\varepsilon\omega^2| \implies |\dot{\varepsilon}\dot{\mathbf{E}}| \ll |\varepsilon\ddot{\mathbf{E}}|$$

ce qui explique l'approximation (3.4).

En prenant le rotationnel de l'équation (3.2), il est obtenu

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \mu\varepsilon\ddot{\mathbf{E}} = 0.. \quad (3.5)$$

En appliquant l'identité du calcul vectoriel $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \cdot \mathbf{A}$, et la divergence du champ électrique donnée par la loi de Gauss $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} = 0$, où $\rho = 0$ sous l'hypothèse que *la cible étudiée est sans charges électriques*, il s'en suit :

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}. \quad (3.6)$$

Il s'en déduit :

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{q}, t) - \mu\varepsilon \frac{d^2 \mathbf{E}(\mathbf{q}, t)}{dt^2} = 0 \quad (3.7)$$

En remplaçant $\mathbf{E}(\mathbf{q}, t)$ par son expression $\mathbf{E}(\mathbf{q}) e^{-i\omega t}$, la dépendance temporelle est décorélée dans l'équation, et l'équation statique est considérée :

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{q}) + \mu\varepsilon\omega^2 \mathbf{E}(\mathbf{q}) = 0. \quad (3.8)$$

L'indice optique complexe au point \mathbf{q} est défini comme :

$$n(\mathbf{q}) = \sqrt{\mu\varepsilon(\mathbf{q})}c = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} \quad (3.9)$$

où μ_0 et ε_0 sont respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité diélectrique dans le vide, et $\mu_0\varepsilon_0 c^2 = 1$.

Finalement, l'équation stationnaire vectorielle suivante est obtenue,

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{q}) + k^2 n^2(\mathbf{q}) \mathbf{E}(\mathbf{q}) = 0. \quad (3.10)$$

Puisque l'équation vectorielle (3.10) fait intervenir trois équations scalaires découplées, elle est réécrite pour une composante,

$$\nabla^2 U(\mathbf{q}) + k^2 n^2(\mathbf{q}) U(\mathbf{q}) = 0 \quad (3.11)$$

où $U = E_x, E_y, E_z$, $E_x, E_y, E_z \in \mathbb{R}^3$.

3.3 Résolution analytique de l'équation en intégrale du potentiel de diffusion

3.3.1 Théorie

Le développement ci-dessous est encore repris de [Born et Wolf, 1999, chapitre 13]. Pour une onde électromagnétique monochromatique de nombre d'onde k , le champ sortant d'un milieu inhomogène U s'écrit sous la forme suivante :

$$U(\mathbf{q}) = U_0(\mathbf{q}) + U^{(s)}(\mathbf{q}) \quad (3.12)$$

où

- \mathbf{q} , un point de l'espace ;
- $U(\mathbf{q})$, le champ observé en \mathbf{q} ;
- $U_0(\mathbf{q})$, le champ incident, provenant de la source, dans le vide ;
- $U^{(s)}(\mathbf{q})$, la variation du champ due au milieu dispersant.

Le champ incident est

$$U_0(\mathbf{q}) = E_0 \frac{e^{ik|\mathbf{q}|}}{|\mathbf{q}|}, \quad (3.13)$$

où E_0 est l'énergie de la source (située à l'origine, au point 0). Cette expression est la solution de l'équation d'Helmholtz dans le vide avec la source ponctuelle en \mathbf{q} :

$$\nabla^2 \cdot U_0(\mathbf{q}) + k^2 U_0(\mathbf{q}) = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{q}), \quad (3.14)$$

où $\delta^{(3)}(\mathbf{q})$ est la distribution de Dirac tridimensionnelle (et k représente toujours le nombre d'onde).

Or, en dehors de l'origine, U est solution de l'équation (3.11) qui peut s'écrire

$$\nabla^2 \cdot U(\mathbf{q}) + k^2 n^2(\mathbf{q}) U(\mathbf{q}) = k^2 (1 - n^2(\mathbf{q})) U(\mathbf{q}) = -4\pi F(\mathbf{q}) U(\mathbf{q}), \quad (3.15)$$

où le potentiel de diffusion est

$$F(\mathbf{q}) = \frac{k^2}{4\pi} (n^2(\mathbf{q}) - 1). \quad (3.16)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \cdot U(\mathbf{q}) + k^2 n^2(\mathbf{q}) U(\mathbf{q}) &= \nabla^2 \cdot U_0(\mathbf{q}) + \nabla^2 \cdot U^{(s)}(\mathbf{q}) \\ &\quad + k^2 n^2(\mathbf{q}) U_0(\mathbf{q}) + k^2 n^2(\mathbf{q}) U^{(s)}(\mathbf{q}) \\ &= \nabla^2 \cdot U^{(s)}(\mathbf{q}) + k^2 n^2(\mathbf{q}) U^{(s)}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

En utilisant (3.15) et (3.17), l'égalité suivante est obtenue :

$$\nabla^2 \cdot U^{(s)}(\mathbf{q}) + k^2 n^2(\mathbf{q}) U^{(s)}(\mathbf{q}) = k^2(1 - n^2(\mathbf{q})) U(\mathbf{q}) = -4\pi F(\mathbf{q}) U(\mathbf{q}) \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) exprime la conservation de l'énergie d'un champ transformé par le potentiel de diffusion F donnant un champ sphérique propagé (et de fait diffusé) $U^{(s)}$ (à U_0 près). Il faut donc résoudre cette équation pour calculer le champ $U^{(s)}(\mathbf{q})$, sachant que sa valeur dans le plan du capteur explique l'image obtenue.

Cette équation différentielle va être écrite sous forme intégrale. Pour ce faire, la fonction de Green est introduite. Elle est solution à l'équation suivante :

$$\nabla^2 \cdot G(\mathbf{q} - \mathbf{q}') + k^2 G(\mathbf{q} - \mathbf{q}') = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \quad (3.19)$$

où \mathbf{q}' est un point de l'espace. La fonction de Green solution de l'équation (3.19), s'écrit :

$$G(\mathbf{q} - \mathbf{q}') = \frac{e^{ik|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|}}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} \quad (3.20)$$

L'équation (3.19) est multipliée par $U^{(s)}(\mathbf{q})$ puis soustraite à l'équation (3.18) du champ dispersé multiplié par $G(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$. Il s'en suit l'équation suivante :

$$U^{(s)}(\mathbf{q}) \nabla^2 \cdot G(\mathbf{q} - \mathbf{q}') - G(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \nabla^2 \cdot U^{(s)}(\mathbf{q}) = G(\mathbf{q} - \mathbf{q}') 4\pi F(\mathbf{q}) U(\mathbf{q}) - U^{(s)}(\mathbf{q}) 4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \quad (3.21)$$

Le référentiel est fixé de telle sorte que la sphère dont est cherchée l'image soit contenue dans la boule $B(\mathbf{a}, R)$ centrée au point $(a, 0, 0)$ et de rayon R . Cette sphère hétérogène peut être constituée de plusieurs couches d'indice optique différent noté $n(\mathbf{q})$ (et qui pourrait être noté $n(|\mathbf{q}|) = n(q)$ puisque la sphère est supposée à symétrie radiale). L'équation (3.21) est intégrée sur un grand volume V ne contenant pas la source à l'origine mais contenant la sphère $B(\mathbf{a}, R)$. La surface du volume V est notée ∂V . L'équation (3.21) devient :

$$U^{(s)}(\mathbf{q}) = \int_V U(\mathbf{q}') G(\mathbf{q} - \mathbf{q}') F(\mathbf{q}') d^3 \mathbf{q}' - \frac{1}{4\pi} \int_V [U^{(s)}(\mathbf{q}') \nabla^2 \cdot G(\mathbf{q} - \mathbf{q}') - G(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \nabla^2 \cdot U^{(s)}(\mathbf{q}')] d^3 \mathbf{q}' \quad (3.22)$$

En appliquant le théorème de Green et le fait que la diffusion est nulle dans le vide, l'équation (3.22) devient :

$$U^{(s)}(\mathbf{q}) = \int_V U(\mathbf{q}')G(\mathbf{q} - \mathbf{q}')F(\mathbf{q}')d^3\mathbf{q}' - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left[U^{(s)}(\mathbf{q}') \frac{\partial G(\mathbf{q} - \mathbf{q}')}{\partial \nu} - G(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \frac{\partial U^{(s)}(\mathbf{q}')}{\partial \nu} \right] dS_{\mathbf{q}} \quad (3.23)$$

où $\nu(\mathbf{q})$ désigne la normale à la surface ∂V au point \mathbf{q} .

L'intégrale de surface peut être omise car sa contribution est faible lorsque $|\mathbf{q}'| \ll |\mathbf{q}|$ (i.e. lorsque *la taille de l'objet est petite par rapport à la distance objet-écran*, ce qui est le cas ici car l'objet a pour diamètre $\approx 1mm$ alors que la distance objet-écran est de l'ordre de 40 cm). De plus, l'intégrale sur V se réduit à une intégrale sur $B(\mathbf{a}, R)$ puisque $n(\mathbf{q}) = 1$ sur $V \setminus B(\mathbf{a}, R)$. En reprenant l'équation (3.12), l'équation de la propagation des ondes en milieu hétérogène peut alors s'écrire sous la forme suivante, appelée *équation intégrale du potentiel de diffusion* :

$$U(\mathbf{q}) = U_0(\mathbf{q}) + \int_{B(\mathbf{a}, R)} U(\mathbf{q}')G(k, \mathbf{q}, \mathbf{q}')F(\mathbf{q}')d^3\mathbf{q}' \quad (3.24)$$

3.3.2 Application de l'approximation de Born

En général, en dehors de cas particuliers (par exemple, un champ plan sur une interface plane), il n'est pas simple de trouver une solution à l'équation (3.24) (ni analytique, ni même numérique, comme cela sera montré dans la suite de ce chapitre). Born [Born et Wolf, 1999, chapitre 13] propose une méthode basée sur des intégrales itérées, appelée par la suite méthode de Born, ou approximation de Born. L'approche utilisée par Born consiste à remplacer l'équation par une itération, comme dans une méthode de point fixe. A l'ordre i , le champ $U_i(\mathbf{q})$ observé en \mathbf{q} s'écrit :

$$U_i(\mathbf{q}) = U_0(\mathbf{q}) + \int U_{i-1}(\mathbf{q}')G(k, \mathbf{q}, \mathbf{q}')F(\mathbf{q}')d\mathbf{q}' \quad (3.25)$$

en omettant d'écrire le volume d'intégration V_r et en écrivant $d\mathbf{q}'$ l'élément de volume. La méthode de Born à l'ordre 1 s'écrit donc :

$$U_1(\mathbf{q}) = U_0(\mathbf{q}) + \int U_0(\mathbf{q}')G(k, \mathbf{q}, \mathbf{q}')F(\mathbf{q}')d\mathbf{q}' \quad (3.26)$$

où $U_0(\mathbf{q})$ est le champ électromagnétique dans le vide au point \mathbf{q} .

L'approximation de Born va être effectuée jusqu'en i . Pour cela, l'équation (3.26) est intégrée avec le noyau $G(\mathbf{q}, \cdot)F(\cdot)$, puis U_0 est ajouté, U_2 ainsi obtenu et par conséquent :

$$U_2(\mathbf{q}) = U_0(\mathbf{q}) + \int U_0(\mathbf{q}')G(k, \mathbf{q}, \mathbf{q}')F(\mathbf{q}')d\mathbf{q}' + \iint U_0(\mathbf{q}'')G(k, \mathbf{q}', \mathbf{q}'')F(\mathbf{q}'')G(k, \mathbf{q}, \mathbf{q}')F(\mathbf{q}')d\mathbf{q}''d\mathbf{q}' \quad (3.27)$$

Après itération, l'expression de U_i fait intervenir la somme de U_0 et de i intégrales itérées de U_0 . La convergence de cette méthode dépend du propagateur et des constantes, en particulier de la longueur d'onde et de l'indice optique correspondant. La convergence de la méthode n'a pas été étudiée car cette dernière n'est utilisée qu'à l'ordre 1. Néanmoins, il peut être supposé que la méthode itérative converge d'autant plus vite vers la solution exacte que le milieu disperse faiblement les rayons X, c'est-à-dire que l'indice de réfraction est proche de 1. Dans les cas similaires d'équations de Fredholm, la méthode converge si le noyau de l'intégrale très oscillante est contractant [Ruston, 2004].

3.3.3 Solution numérique de l'équation du potentiel de diffusion

Tout d'abord, un lemme est énoncé lié à des travaux dans [Stein, 1993, Olver, 2006, Iserles et Nørsett, 2005] concernant les intégrales oscillantes de la forme

$$I(k) = \int_a^b H(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi \quad (3.28)$$

où

- le paramètre k est supposé être grand donc $e^{ik\varphi}$ varie très rapidement ;
- H est une fonction à valeurs réelles et il existe une fonction h telle que

$$H(\varphi) = H(a) + \int_a^\varphi h(x)dx.$$

Il est remarqué que contrairement au travail de Olver, Stein, Iserles et al. [Stein, 1993, Olver, 2006, Iserles et Nørsett, 2005], H n'est pas supposée être une fonction différentiable (seulement une fonction absolument continue).

Dans (3.28), I est écrite comme une fonction de k puisqu'un développement limité de I en fonction de k va être réalisé. Ce développement sera par ailleurs d'autant plus précis que k sera grand.

Lemme 1

$$I(k) = \frac{1}{ik} [H(\varphi) e^{ik\varphi}]_a^b - \frac{1}{ik} \int_a^b h(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi, \quad (3.29)$$

Démonstration. Si H est différentiable, cette formule est juste une intégration par partie. Si ce n'est pas le cas, une version spéciale de l'intégration par parties basée sur le théorème de Fubini (voir [Rudin, 2006]) est utilisée. Soit I_2 tel que :

$$I_2(k) = ik \int_a^b \int_a^b h(\varphi) e^{ikx} d\varphi dx = (H(b) - H(a)) (e^{ikb} - e^{ika}) \quad (3.30)$$

qui peut être intégré sur $U = \{(\varphi, x); x > \varphi\}$ et $L = \{(\varphi, x); x \leq \varphi\}$ car $[a, b] \times [a, b] = U \cup L$ (et $U \cap L = \emptyset$) :

$$\begin{aligned} I_2(k) &= ik \int_a^b \left(\int_a^\varphi e^{ikx} dx \right) h(\varphi) d\varphi + ik \int_a^b \left(\int_a^x h(\varphi) d\varphi \right) e^{ikx} dx \\ &= \int_a^b h(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi - e^{ika} (H(b) - H(a)) \\ &\quad + ik \int_a^b H(x) e^{ikx} dx - H(a) (e^{ikb} - e^{ika}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

de sorte que, en utilisant le théorème de Fubini entre (3.30) et (3.31) :

$$ik \int_a^b H(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi = H(b) e^{ikb} - H(a) e^{ika} - \int_a^b h(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi. \quad (3.32)$$

□

Remarque 1

Ce lemme peut facilement être étendu à des cas plus généraux (en utilisant $e^{ikG(\varphi)}$ au lieu de $e^{ik\varphi}$ par exemple). Ici est indiquée la version la plus simple, adaptée aux calculs suivants.

Remarque 2

Bien que ce processus puisse être itéré si H est assez lisse, dans le cas présent, il ne peut être obtenu un développement en $\frac{1}{k^n}$, en raison du manque de régularité de la fonction H .

Quelques notations sont rappelées (voir Figure 3.1).

La source des rayons X est indiquée par le point S . Le centre du microballon est noté C et se trouve à la distance \tilde{a} du point S . La ligne SC

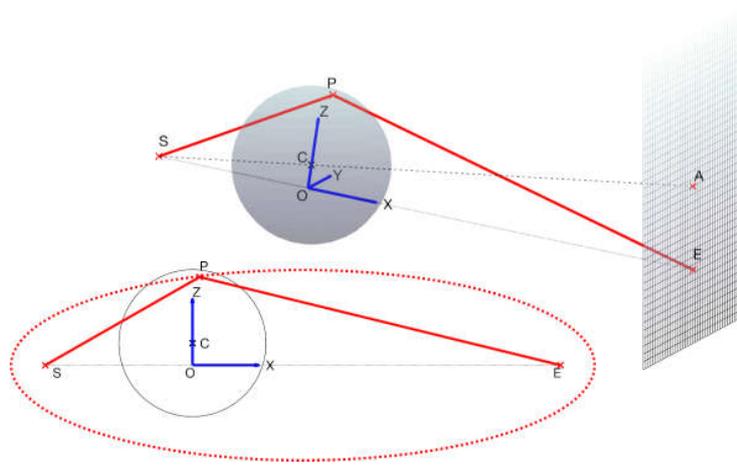


FIGURE 3.1 – Notations, plan 3D au dessus et vue latérale (plan Oxz) au dessous.

définit l'axe optique. Le capteur CCD est situé à la distance \tilde{d} du centre du microballon et est orthogonal à l'axe optique. Un pixel du capteur CCD est considéré. Il est assimilé à un point E . Le repère choisi est tel que Ox est orienté le long de la ligne SE , et Oxz est un plan contenant E . La position de O sur la ligne SE est telle que la composante de C selon Ox est égale à zéro. Oy est choisi de façon à ce que le repère soit bien orienté. Soient $a = SO$ et $d = OE$.

Dans cette section, un algorithme numérique va être proposé pour calculer l'approximation du premier ordre de l'équation (3.24). Plus précisément, le résultat suivant va être prouvé :

Proposition 1

L'indice de réfraction complexe du matériau constituant le microballon étant noté $n = 1 - \delta + i\beta$, l'approximation de Born de l'équation (3.24) au 1^{er} ordre s'écrit :

$$U(\mathbf{q}) = (1 + ik(n^2 - 1)\mathcal{A}(R, w)) U_0(\mathbf{q}) + \frac{k^2(n^2 - 1)}{4\pi} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} H'(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi \quad (3.33)$$

où

- H est une fonction absolument continue donnée par l'équation (3.39),
- $\mathcal{A}(R, w) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - w^2} & \text{si } w \leq R \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, où w est la distance CO fonction de \mathbf{q} .

En particulier, le coefficient \mathcal{A} devant $U_0(\mathbf{q})$ satisfait l'équation suivante :

$$|1 + ik(n^2 - 1)\mathcal{A}(R, w)| = 1 - 2k\beta\mathcal{A}(R, w) + o(\delta, \beta) \quad (3.34)$$

c'est-à-dire que le premier terme de (3.33) représente principalement l'absorption. Pour des raisons similaires, jusqu'au second ordre, le second terme représente principalement la dispersion.

Démonstration. Écrite en coordonnées cartésiennes, dans le repère $Oxyz$ de la figure 3.1 p.58, l'équation (3.24) est :

$$U(\mathbf{q}) = U_0(\mathbf{q}) + \frac{k^2(n^2 - 1)}{4\pi} \iiint_S \frac{e^{ik\sigma(x,y,z)}}{\sigma(x,y,z)} \frac{e^{ik\rho(x,y,z)}}{\rho(x,y,z)} dx dy dz \quad (3.35)$$

où $\sigma(x, y, z)$ est la distance SP , $\rho(x, y, z)$ est la distance PE , P étant le point de coordonnées (x, y, z) qui est la variable d'intégration. Le changement de variable $(x, y, z) \rightarrow (\theta, \rho, \sigma)$ est réalisé. Les points définis pour $\rho(x, y, z)$ et $\sigma(x, y, z)$ donnés sont à l'intersection de deux sphères centrées respectivement en S et en E (et de rayons respectifs ρ et σ). Ces points sont donc situés sur un cercle dont le centre est sur l'axe SE et qui est dans le plan orthogonal à SE , le plan Oyz . La dernière coordonnée, θ , est l'angle dans le plan Oyz qui localise le point P sur ce cercle (rotation par rapport à l'axe Oz , c'est-à-dire que le plan de coupe de la figure 3.1 p.58 correspond à $\theta = 0$). La jacobienne du changement de variable est $dx dy dz = \frac{\sigma\rho}{a+d} d\theta d\rho d\sigma$ (cf. annexe A.1) (3.35) s'écrit :

$$\begin{aligned} U(\mathbf{q}) &= U_0(\mathbf{q}) + \frac{k^2(n^2 - 1)}{4\pi} \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \int_{\rho_{\min}(\sigma)}^{\rho_{\max}(\sigma)} \int_{\theta_{\min}(\rho,\sigma)}^{\theta_{\max}(\rho,\sigma)} \frac{e^{ik\sigma}}{\sigma} \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \frac{\sigma\rho}{a+d} d\theta d\rho d\sigma \\ &= U_0(\mathbf{q}) + \frac{k^2(n^2 - 1)}{4\pi(a+d)} \int_{\sigma_{\min}}^{\sigma_{\max}} \int_{\rho_{\min}(\sigma)}^{\rho_{\max}(\sigma)} \int_{\theta_{\min}(\rho,\sigma)}^{\theta_{\max}(\rho,\sigma)} e^{ik\sigma} e^{ik\rho} d\theta d\rho d\sigma. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Un second changement de variable $(\theta, \rho, \sigma) \rightarrow (\theta, \rho, \varphi)$ est effectué avec $\varphi = \sigma + \rho$. La surface $\varphi = cte$ forme une ellipsoïde de révolution autour de l'axe (SE) , S et E étant ses deux foyers. Pour $\varphi = cte$ et $\theta = cte$, l'ellipse correspondante est paramétrée par ρ (ρ désigne un point unique de l'ellipse).

Dans ces nouvelles coordonnées l'équation (3.36) devient :

$$U(\mathbf{q}) = U_0(\mathbf{q}) + \frac{k^2(n^2 - 1)}{4\pi(a+d)} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} e^{ik\varphi} \int_{\rho_{\min}(\varphi)}^{\rho_{\max}(\varphi)} \int_{\theta_{\min}(\rho,\varphi)}^{\theta_{\max}(\rho,\varphi)} d\theta, d\rho, d\varphi \quad (3.37)$$

$$= U_0(\mathbf{q}) + \frac{k^2(n^2 - 1)}{4\pi(a+d)} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} e^{ik\varphi} \int_{\rho_{\min}(\varphi)}^{\rho_{\max}(\varphi)} 2\theta_{\max}(\rho, \varphi) d\rho d\varphi \quad (3.38)$$

puisque $\theta_{\max}(\rho, \varphi) = -\theta_{\min}(\rho, \varphi)$ par symétrie.

En notant :

$$H(\varphi) = \int_{\rho_{\min}(\varphi)}^{\rho_{\max}(\varphi)} \theta_{\max}(\rho, \varphi) d\rho \quad (3.39)$$

l'équation (3.38) s'écrit :

$$U(\mathbf{q}) = U_0(\mathbf{q}) + \frac{k^2(n^2 - 1)}{2\pi(a + d)} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} H(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi. \quad (3.40)$$

Des remarques importantes peuvent être faites sur H :

- $\rho_{\min}(\varphi)$ et $\rho_{\max}(\varphi)$ sont deux fonctions différentiables, chacune d'elles croissent entre φ_{\min} et une valeur φ_{mid} et décroissent entre φ_{mid} et φ_{\max} (il se peut que $\varphi_{\min} = \varphi_{\text{mid}}$).
- $\theta_{\max}(\rho, \varphi)$ est intégrable en sa première variable et différentiable entre $]\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$ et $\frac{d}{d\varphi}\theta_{\max}(\rho, \varphi)$ est $L^1([\varphi_{\min}, \varphi_{\max}])$.

Ces deux points peuvent être prouvés par des calculs trigonométriques mais le résultat est une fonction compliquée et les détails sont omis. Ces remarques nous permettent d'utiliser le théorème 2.7 dans [Šremr, 2012] qui montre que $H(\varphi)$ est absolument continue. Ce résultat n'est pas surprenant (la définition de H dans (3.39) est presque la définition d'une fonction absolument continue) mais les remarques précédentes sont nécessaires car $\theta_{\max}(\rho, \varphi)$ n'est pas différentiable en φ_{\min} .

L'équation (3.40) étant de la forme (3.28), elle peut s'écrire :

$$\int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} H(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi = \frac{1}{ik} [H(\varphi) e^{ik\varphi}]_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} - \frac{1}{ik} \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} h(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi \quad (3.41)$$

Le premier terme de la somme est considéré. Si $w \geq R$ (ce qui est vrai si la segment SE n'intersecte pas l'intérieur du microballon) alors $H(\varphi_{\min}) = H(\varphi_{\max}) = 0$ car $\rho_{\min} = \rho_{\max}$ dans (3.39).

Si $w < R$, $H(\varphi_{\max}) = 0$ pour la même raison que précédemment, mais pas pour le cas de $H(\varphi_{\min})$:

$$H(\varphi_{\min}) = H(a + d) = \int_{d - \sqrt{R^2 - w^2}}^{d + \sqrt{R^2 - w^2}} \pi d\rho = 2\pi\sqrt{R^2 - w^2} \frac{e^{ik(a+d)}}{a + d} \quad (3.42)$$

En ne gardant que le premier terme dans (3.41), et en remplaçant le tout dans (3.40), il est obtenu :

$$\begin{aligned} U(\mathbf{q}) &= U_0(\mathbf{q}) + \frac{k^2(n^2 - 1)}{2\pi(a + d)} 2\pi\sqrt{R^2 - w^2} e^{ik(a+d)} \\ &= \left(1 + ik(n^2 - 1)\sqrt{R^2 - w^2}\right) U_0(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

En passant au module

$$\begin{aligned} |U(\mathbf{q})| &= \left| 1 + ik \left((1 - \alpha + i\beta)^2 - 1 \right) \sqrt{R^2 - w^2} \right| |U_0(\mathbf{q})| \\ &\approx \left(1 - 2k\beta\sqrt{R^2 - w^2} \right) |U_0(\mathbf{q})| \end{aligned} \quad (3.44)$$

en supposant $k\alpha R \ll 1$ et $k\beta R \ll 1$. Cela permet de négliger les termes du second ordre α et β , et ensuite de constater que la contribution du terme en α est négligeable devant celle en β .

Cette approximation au premier ordre est parfaitement compatible avec la formule de Beer-Lambert qui donne dans ce cadre (au premier ordre) :

$$|U(\mathbf{q})| = e^{-k\beta \times 2\sqrt{R^2 - w^2}} |U_0(\mathbf{q})| \approx \left(1 - 2k\beta\sqrt{R^2 - w^2} \right) |U_0(\mathbf{q})| \quad (3.45)$$

Par conséquent, le terme d'ordre 2 dans (3.42) (le dernier terme qui est bien, contrairement aux apparences, en $\frac{1}{k^2}$) doit expliquer l'anneau lumineux. Ce terme est quant à lui très difficile à développer. \square

De façon heuristique, il y a au minimum deux interactions des rayons lumineux avec le microballon, une entrante et une sortante. La conjecture peut être faite que ces deux interactions entraînent une variation du champ qui ne peut être modélisée par l'approximation de Born au 1^{er} ordre. Cela implique la résolution par un ordre plus élevé que le premier ordre de Born. Néanmoins la complexité de ce calcul rend difficile une résolution analytique.

3.4 Simulation numérique de l'équation en intégrale du potentiel de diffusion

La résolution numérique précédente a montré certaines propriétés de la solution mais n'a pas permis de résoudre explicitement l'équation. Une résolution numérique par une méthode de Monte Carlo va donc être réalisée. L'objectif final est de pousser l'ordre d'approximation de Born au 2^e ordre (voir plus) pour obtenir une modélisation rendant compte du phénomène de contraste de phase. La première étape est la simulation numérique de l'équation en intégrale du potentiel de diffusion avec l'approximation de Born au 1^{er} ordre.

Pour rappel, l'image sur le capteur est formée à partir d'un champ électromagnétique émis par une source ponctuelle et traversant le microballon, dont l'indice de réfraction du matériau est très faible. Le champ électromagnétique est par conséquent peu déformé. Dans un premier temps, il sera considérée

l'hypothèse selon laquelle *la majorité de l'énergie reçue en un pixel provient d'un petit espace autour de la droite passant par la source et le pixel*. Cette hypothèse doit tenir compte de la présence de contraste de phase observé sur plusieurs pixels, nécessitant le calcul numérique dans un cône assez large pour contenir les rayons déviés.

Soit un cône C ayant pour sommet la source et pour directrice la droite passant par la source et un point sur l'écran. L'angle de l'ouverture du cône ϵ est un paramètre de l'estimation numérique. La formule (3.26) peut alors être mise en forme comme il suit :

$$U_1(\mathbf{q}) = U_0(\mathbf{q}) + \int_{V_r \setminus C} U_0(\mathbf{q}') G(k, \mathbf{q}, \mathbf{q}') F(\mathbf{q}') d^3 \mathbf{q}' + \int_C U_0(\mathbf{q}') G(k, \mathbf{q}, \mathbf{q}') F(\mathbf{q}') d^3 \mathbf{q}' \quad (3.46)$$

Lors de l'intégration numérique, la fonction $U_0(\mathbf{q}') G(k, \mathbf{q}, \mathbf{q}')$ est très oscillante sur le domaine d'intégration. Son graphe, pour un point $\mathbf{q}' = (x', y', z')$ fixé, est représenté par la figure 3.2 p.63, ϵ est l'angle de l'ouverture du cône choisi. Sur cette figure, y et z sont fixés, la fréquence des oscillations diminue quand $x' \rightarrow x$ avec $x = 0$ dans l'exemple. Le domaine d'intégration est donc divisé en deux parties : l'intersection du cône C avec la boule B (appelée K), et le reste de la boule ($B \setminus K$).

Une validation analytique de cette hypothèse a été tentée. L'objectif était d'utiliser le développement asymptotique multivariable à l'extérieur du cône (partie oscillante) présenté en annexe G) pour montrer ensuite que la contribution de l'intégrale à l'extérieur du cône était négligeable. Néanmoins certaines conditions ne sont pas remplies pour appliquer ce théorème.

Cette hypothèse peut être validée dans le cas monovarié. Dans le plan Oxz , le développement réalisé à l'équation (3.27) est réalisé au 1^{er} ordre c'est-à-dire :

$$\int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} H(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi = \frac{1}{ik} [H(\varphi) e^{ik\varphi}]_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (3.47)$$

L'approximation (3.47) est d'autant plus valide lorsque k est très grand. Dans le cas des rayons X, $k \approx 10^{10}$.

Le développement de Stein n'est valable qu'en dehors de la droite directrice de C (comme montré dans la section précédente). Si l'ouverture du cône est petite, la zone exclue est elle-même petite et pourra facilement être calculée par une méthode de Monte Carlo avec peu de points. Mais le développement sera imprécis car $O(\frac{1}{k})$ sera grand (c'est-à-dire que la constante dans $O(\frac{1}{k})$ sera grande bien que $\frac{1}{k}$ soit petit). Pour que le développement soit rapidement décroissant, il faut ouvrir le cône en augmentant ϵ , et il faudra

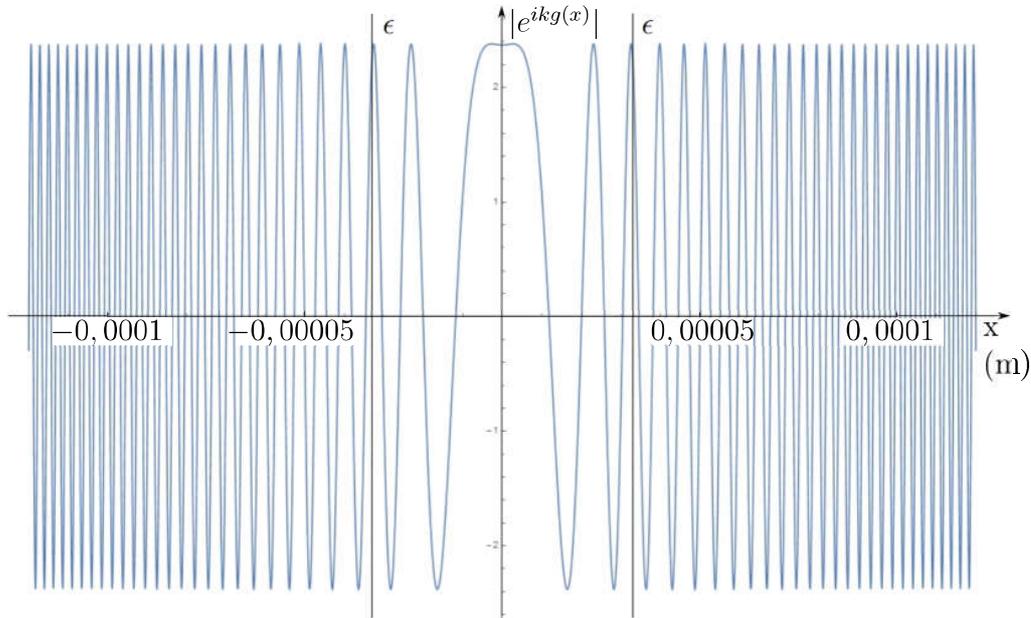


FIGURE 3.2 – Fonction oscillante représentée en une dimension (les deux autres sont fixées).

utiliser énormément de points pour la méthode de Monte Carlo. Il y a donc un compromis à trouver sur ϵ . Nous allons voir ci-dessous comment valider le choix de ϵ .

Les deux hypothèses suivantes vont être validées conjointement :

1. l'intégrale à l'intérieur du cône peut être approchée avec une bonne précision par une méthode de Monte Carlo, à condition de prendre suffisamment de points ;
2. l'intégrale à l'extérieur du cône peut être estimée à l'aide du développement de Stein avec une bonne précision, pourvu que l'ouverture du cône soit assez grande, afin d'éviter la singularité.

Pour cela, deux cônes sont considérés, d'ouverture respectivement ϵ_1 et ϵ_2 , $\epsilon_1 < \epsilon_2$ (cf. figure 3.3 p.64). Il est supposé que ϵ_1 est assez grand pour que le développement de Stein soit correct et que ϵ_2 est assez petit pour que la méthode de Monte Carlo puisse être appliquée. Ces deux hypothèses vont être validées.

Soient I_1^{num} et I_1^{dev} (I_2^{num} et I_2^{dev}) les intégrales évaluées numériquement par la méthode de Monte Carlo dans le cône 1 et estimées par le développement de Stein à l'extérieur du cône 1 (et par le cône 2, respectivement). Si les hypothèses sont correctes, la zone située entre le cône 1 et le cône 2 peut

être calculée de deux façons :

- numériquement, par $I_2^{dev} - I_1^{dev} = \Delta I^{dev}$
- à l'aide du développement, $I_2^{num} - I_1^{num} = \Delta I^{num}$

L'erreur maximale d'estimation peut être obtenue en comparant la valeur de l'intégrale entre les deux cônes, à la fois par le développement (ΔI^{dev}) et par l'estimation numérique (ΔI^{num}) :

$$erreur = \max \left(\frac{\Delta I^{dev} - \Delta I^{num}}{|I^{num}|} \right). \quad (3.48)$$

La méthode de Monte Carlo est utilisée pour approximer l'intégrale à plusieurs variables, présente dans l'équation en intégrale du potentiel de dispersion (3.47). Les points générés pour appliquer la méthode de Monte Carlo constituent une suite de Sobol [Sobol', 1967].

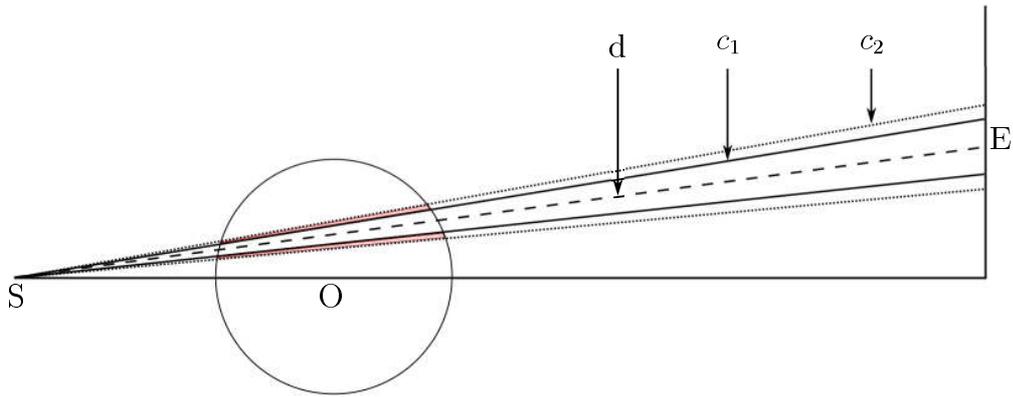


FIGURE 3.3 – Schéma du calcul de l'erreur d'intégration numérique entre deux cônes.

Dans les calculs numériques, le paramètre N est fixé à $2 \cdot 10^5$. Pour $\epsilon_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ rad et $\epsilon_2 = 4.5 \cdot 10^{-2}$ rad, l'erreur d'estimation calculée est de 1,448 %. Pour $\epsilon_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ rad et $\epsilon_2 = 4 \cdot 10^{-2}$ rad, l'erreur d'estimation calculée est de 5,404 %. Il existe, à N fixé, une valeur de ϵ telle que l'erreur de l'approximation numérique de l'intégrale soit minimale.

De plus, ce calcul permet aussi de comparer la contribution de l'intégration numérique d'un cône par rapport au développement de Stein. Sous l'hypothèse que l'erreur de l'approximation numérique de l'intégrale soit minimale, il est trouvé que la contribution du calcul dans le cône C_1 au résultat de l'intégrale est de 99% ; la contribution du développement de Stein correspondant au cône C_1 est alors inférieure à 1%.

L'hypothèse selon laquelle la contribution principale provient d'une zone autour de la droite passant par la source et un point sur l'écran est valide dans le cas plan.

Une simulation de radiographie de microballon va être réalisée. La valeur de $U(\mathbf{q})$ va être calculée, pour \mathbf{q} décrivant un profil, c'est-à-dire une série de pixels le long d'une demi-droite d'origine le centre du capteur. Les paramètres de simulation sont :

- un microballon en plastique plein de $600 \mu m$ de rayon,
- un faisceau monochromatique d'énergie $E = 8,3 \cdot 10^3 keV$,
- une distance source-microballon de $2 cm$ et une distance source-capteur de $40 cm$,
- un indice de réfraction du plastique pour des densités proches du plastique des microballons, soit $n = 1 - 10^{-6} + i10^{-10}$ [Henke *et al.*, 1993],
- un cône d'ouverture $\epsilon = 10^{-5} rad$,
- le nombre de points générés pour le calcul numérique par Monte Carlo $N = 10^6$.

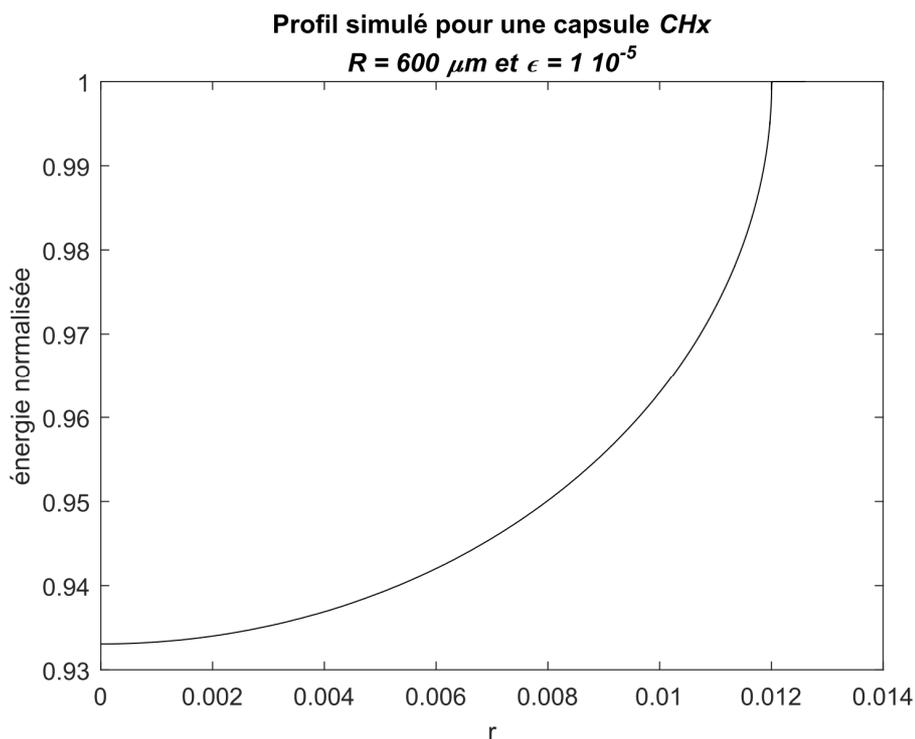


FIGURE 3.4 – Profil obtenu par simulation de la radiographie d'un microballon CH_x plein de $600 \mu m$ de rayon avec une ouverture de cône $\epsilon = 1 \cdot 10^{-5} rad$.

La figure 3.4 page 65 présente un profil d'absorption ce qui indique que

l'ouverture du cône n'est pas assez grande. Vérifions la qualité du résultat pour d'autres valeurs du paramètre d'intégration numérique ϵ .

En répétant la simulation en choisissant $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$, nous constatons sur la figure 3.5 page 65 des variations de la courbe de profil ce qui nous suggère que l'approximation numérique est fautive. De plus, la courbe semble en totale contradiction avec les observations. Cette remarque sera étudiée en commentant la figure 3.7 page 3.7.

En augmentant encore l'ouverture du cône à $\epsilon = 12.2 \cdot 10^{-5}$ en figure 3.6 page 67, cette fois est observé un profil similaire aux profils expérimentaux, avec une absorption et une variation brusque à l'interface. Sur cette même figure, la courbe est bruitée car la précision numérique de la méthode de Monte Carlo diminue¹.

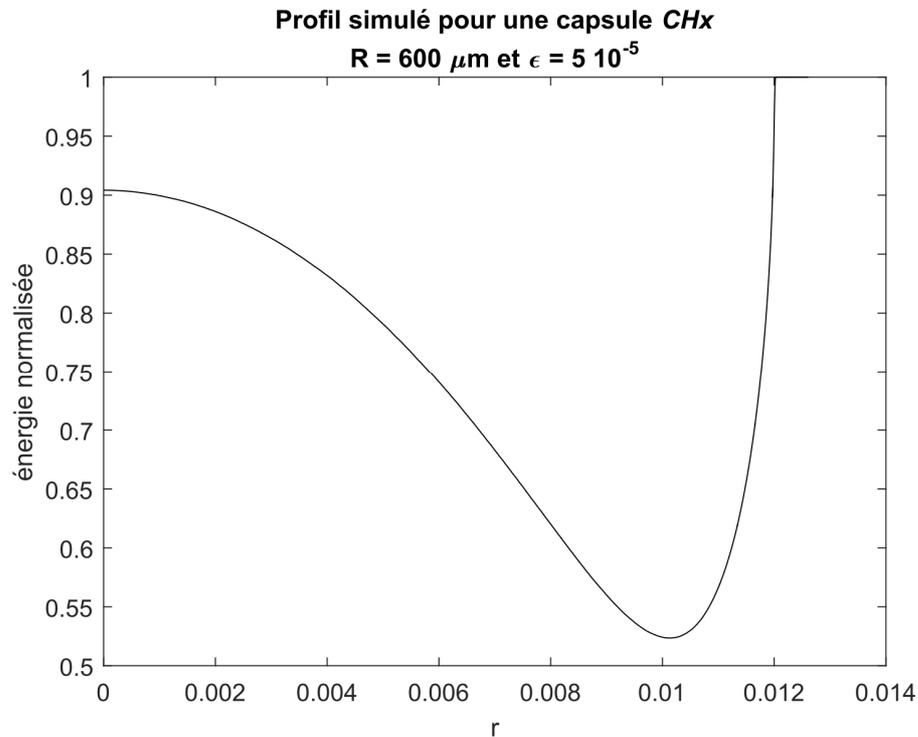


FIGURE 3.5 – Profil obtenu par simulation de la radiographie d'un microballoon CH_x plein de $600 \mu\text{m}$ de rayon avec une ouverture de cône $\epsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

Sur la figure 3.7 page 68, l'ensemble des profils obtenus pour $\epsilon \in [10^{-4}, 2 \cdot 10^{-4}]$ sont tracés. Les oscillations des profils en fonction du paramètre ϵ sont ob-

1. En effet, le volume intégré augmente pour un nombre de points de Monte Carlo identique.

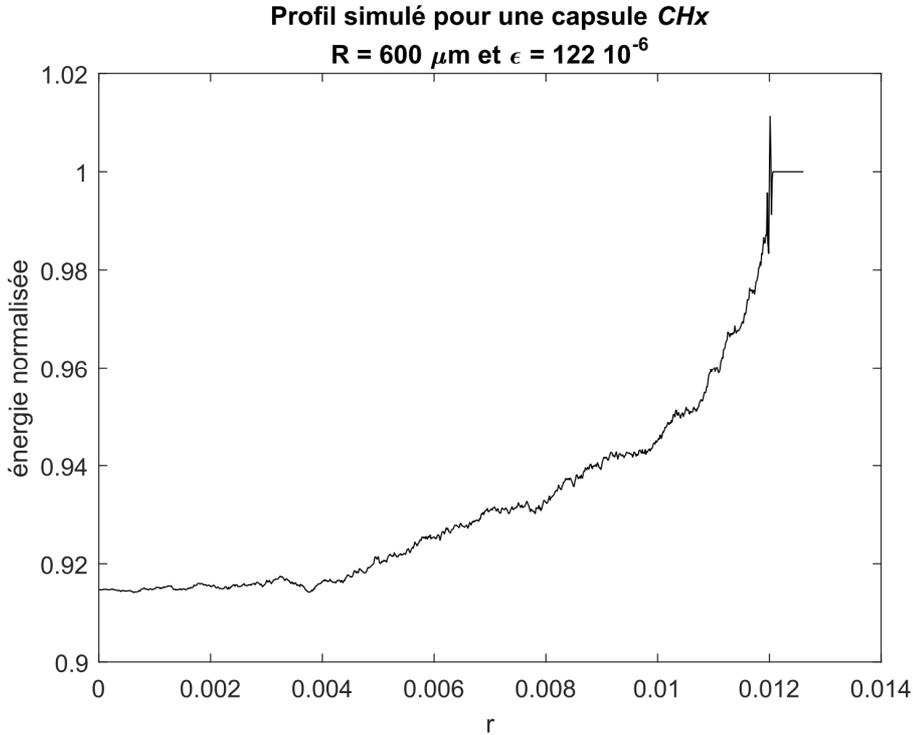


FIGURE 3.6 – Profil obtenu par simulation de la radiographie d'un microballon CH_x plein de $600 \mu\text{m}$ de rayon avec une ouverture de cône $\epsilon = 12.2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$.

servées.

De ces observations, il est déduit que le paramètre ϵ change la valeur du résultats.

Les résultats qualitatifs ne sont pas reproductibles de façon probante. De plus, la méthode utilisée génère beaucoup de bruit numérique et reste très gourmande en ressources de calcul. Plusieurs explications sont possibles concernant la non-reproductibilité des résultats de la luminosité de l'anneau :

1. Une explication mathématique : le modèle utilisé est obtenu en appliquant l'approximation de Born au premier ordre. Il est possible que la contribution de termes d'ordres supérieurs augmente le contraste de l'anneau. Concernant le modèle obtenu dans le paragraphe 3.3.3, il se peut aussi que le développement en $\frac{1}{k}$ doit être poussé à un ordre supérieur, car même si k est très grand, certaines fonctions sont discontinues et donc susceptibles de faire apparaître des termes très grands en leurs points de discontinuité (qui sont justement les interfaces du microballon).

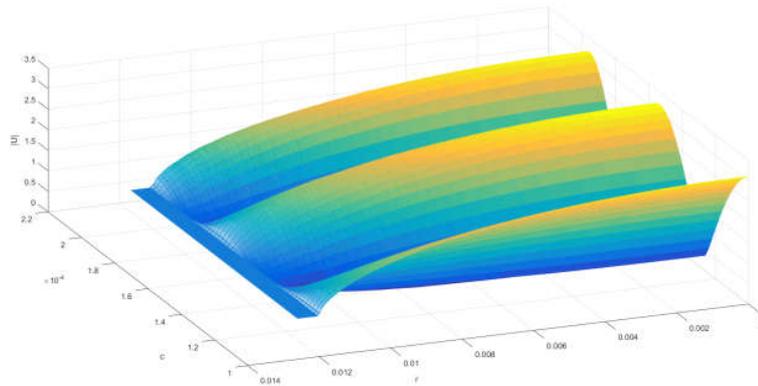


FIGURE 3.7 – Profils obtenus par simulation de la radiographie d’un microballon CH_x plein de $600 \mu m$ de rayon avec une ouverture de cône $\epsilon \in [10^{-4}, 2 \cdot 10^{-4}]$.

2. Une explication numérique : les résultats obtenus varient en fonction de la valeur de l’ouverture du cône, ϵ . De plus, si la valeur de ϵ est trop grande, les calculs prennent trop de temps ou sont imprécis. Si la valeur de ϵ est trop petite, le phénomène physique n’est que partiellement modélisé. Or la valeur idéale de ϵ est difficile à estimer a priori. Elle correspond à la valeur à partir de laquelle l’intégrande est fortement oscillante, mais cette valeur dépend des rayons (de leur longueur d’onde et de leur trajet).
3. Une explication sur les matériaux radiographiés : l’indice optique a été estimé à partir de tables et de quelques expériences réalisées, mais en supposant que chaque couche de matériau constituant le microballon était homogène. Il est déjà connu que cette hypothèse relève plus du besoin que de la réalité. Actuellement, nous ne savons pas résoudre ce problème avec un matériau non homogène. Pourtant il est connu que le matériau, en vieillissant, évolue plus vite en surface qu’en profondeur, ce qui peut affecter la valeur radiale de l’indice optique.
4. Une explication sur les conditions expérimentales : deux hypothèses ont été formulées concernant la source des rayons X :
 - (a) La source des rayons X a été supposée ponctuelle. C’est une explication qui semble justifiée quand la taille de la source (d’environ $1 \mu m$) est comparée à celle de l’objet (d’environ $1 mm$), mais l’erreur commise, qu’il faut expliquer, est très petite (en termes d’énergie). Il se peut donc que cette hypothèse puisse être remise

en cause.

- (b) Les rayons X sont supposés monochromatiques. Cette hypothèse est fautive. En réalité, le spectre d'émission de la source à rayonnement X (cf. figure 1.6 p.26) est constitué de trois raies principales et d'un fond continu d'émission autour de ces trois raies. L'image obtenue doit donc être une superposition des différentes contributions des longueurs d'ondes émises². Cela peut évidemment expliquer la sous-estimation du pic de luminosité de l'anneau simulé par rapport à l'anneau expérimental.

Ces calculs ne permettent pas de conclure sur la nature du phénomène observé. Il semble peu vraisemblable qu'il résulte de phénomènes purement ondulatoires d'ondes se propageant via des chemins très différents. Cette remarque pousse à tenter une explication purement géométrique, uniquement basée sur la réfraction des rayons lumineux au passage des interfaces du microballon (et en intégrant évidemment l'absorption au modèle). Cette approche est présentée et validée dans la section 3.5.

3.5 Modélisation par l'optique géométrique

3.5.1 Théorie

Dans cette section, un cliché de microballon va être simulé en utilisant les lois de l'optique géométrique, de façon similaire aux travaux de thèse de Choux [Choux, 2006]. L'optique géométrique ne permettant pas de représenter les phénomènes ondulatoires, seule la réfraction et l'absorption sont modélisées.

Dans sa thèse, le paramétrage choisi par Choux permet d'exprimer l'ensemble des réfractions et réflexions ayant lieu dans un microballon bicouche par des rayons lumineux situés dans le domaine du visible. C'est la couche interne qui induit la réflexion des rayons lumineux, créant le phénomène particulier de caustique. Dans le cas d'une radiographie par rayons X d'un microballon en plastique, les réflexions des rayons X sont minimes, il n'y a donc pas d'apparition de phénomène de caustique. Néanmoins, la déviation légère des rayons X par la réfraction provoque le phénomène de contraste de phase aux interfaces du microballon.

Les travaux présentés dans la thèse de Choux vont être utilisés, afin de modéliser les multiples réfractions du microballon. Il sera joint à cela le calcul de l'absorption et des coefficients de Fresnel. Le cas d'un microballon plein sera alors modélisé, simulé et enfin comparé à l'expérimentation.

2. Cette hypothèse est raisonnable car les longueurs d'ondes émises sont proches

Dans cette section, la symétrie de rotation autour de l'axe de propagation permet la modélisation par l'optique géométrique en deux dimensions.

Cas général

Les différentes lois de l'optique géométrique appliquées à un microballon sont présentées ci-dessous. Il s'agit de :

- la réfraction,
- la réflexion (au travers des coefficients de Fresnel)
- et l'absorption.

Soit un repère (z, x) dont l'origine est le centre du cercle $C(r, (0, 0))$. Soient les paramètres φ et ρ décrivant une droite D tels que, ρ est la distance x à laquelle la droite D coupe l'axe (Ox) et, φ est l'angle entre l'axe optique (Oz) et la droite D (cf. figure 3.8 p.70).

Ainsi, l'équation de la droite D , dans le repère (z, x) est :

$$x = z \tan(\varphi) + \rho. \quad (3.49)$$

Cette paramétrisation ne permet pas d'obtenir les droites verticales mais ces dernières sont orthogonales à l'axe optique z et n'interviennent pas dans le modèle présenté.

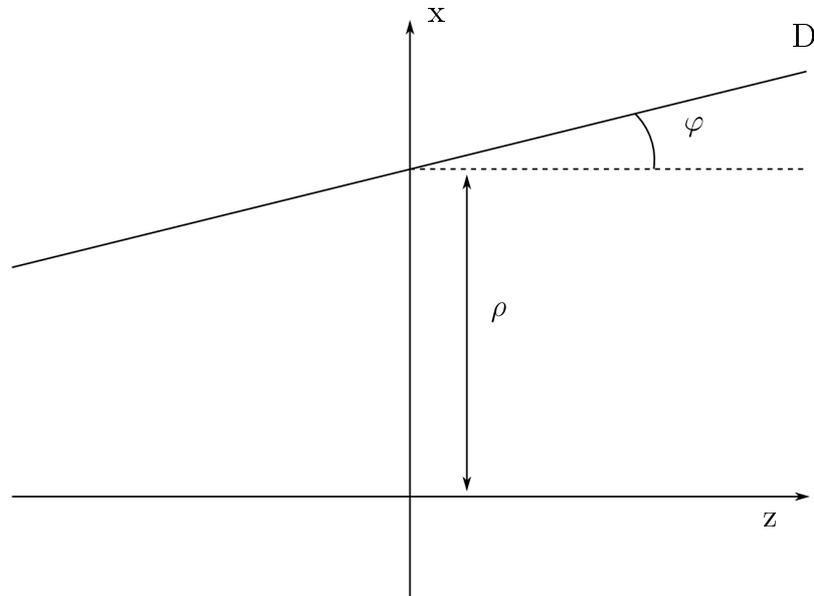


FIGURE 3.8 – Paramétrage des droites.

Les rayons D , provenant de la source au point $(-a, 0)$ sont alors définis

par les paramètres φ et ρ comme il suit :

$$\begin{aligned}\varphi &= \alpha \\ \rho &= a \tan(\varphi)\end{aligned}\tag{3.50}$$

où $\alpha \in]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est l'angle du rayon émis par rapport à l'axe optique (Oz).

La réfraction est la déviation d'un rayon lorsqu'il change de milieu.

Soit une surface S et le vecteur normal à cette surface \mathbf{n} .

Soient l'angle α d'un rayon lumineux incident par rapport à \mathbf{n} et l'angle α' d'un rayon réfracté par rapport à $-\mathbf{n}$.

Soient n , l'indice de réfraction réel du milieu dans lequel arrive le rayon incident, et n' l'indice de réfraction réel du milieu réfractant. La loi de Snell-Descartes est la suivante :

$$n \sin \alpha = n' \sin \alpha'\tag{3.51}$$

Il est possible d'écrire l'équation (3.51) dans les coordonnées proposées par Choux pour de multiples réfractions, comme le montrent les lemmes 14 et 17 (cf. figure 3.18 p.84).

Pour une réfraction entrante, c'est-à-dire lorsque la réfraction concerne un rayon qui franchit une interface en approchant du centre du microballon, les relations suivantes existent [Choux, 2006, lemme 14] :

$$\rho_{i+1} = \frac{n\rho_i \cos \varphi_i}{n' \cos(\varphi_{i+1})}\tag{3.52}$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \arcsin\left(\frac{\rho_i \cos(\varphi_i)}{r}\right) + \arcsin\left(\frac{n\rho_i \cos(\varphi_i)}{n'r}\right)\tag{3.53}$$

Pour une réfraction sortante, c'est-à-dire lorsque la réfraction concerne un rayon qui franchit une interface en s'éloignant du centre du microballon, les relations suivantes existent [Choux, 2006, lemme 17] :

$$\rho_{i+1} = \frac{n\rho_i \cos \varphi_i}{n' \cos(\varphi_{i+1})}\tag{3.54}$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \arcsin\left(\frac{\rho_i \cos(\varphi_i)}{r}\right) - \arcsin\left(\frac{n\rho_i \cos(\varphi_i)}{n'r}\right)\tag{3.55}$$

Chaque rayon émis par la source est réfracté par une ou plusieurs couches. Le nombre de couches traversées dépend de l'angle du rayon émis. Il y a deux réfractions par couche, une entrante et une sortante. L'air contenu dans le microballon est considéré comme une couche d'indice de réfraction égal à 1.

Afin de connaître l'énergie transmise et l'énergie réfléchie, les coefficients de Fresnel sont calculés. Dans le cas de microballon en plastique, le matériau

n'est ni conducteur, ni magnétique. Les lois de Fresnel sont, pour la réfraction (ou transmission) Tra et la réflexion Ref :

$$Tra = \frac{2n_1 \cos(\theta_{inc})}{n_1 \cos(\theta_{inc}) + n_2 \cos(\theta_{ref})} \quad (3.56)$$

$$Ref = \frac{n_1 \cos(\theta_{inc}) - n_2 \cos(\theta_{ref})}{n_1 \cos(\theta_{inc}) + n_2 \cos(\theta_{ref})} \quad (3.57)$$

où

- θ_{inc} est l'angle incident appartenant à $]0, \frac{\pi}{2}[$;
- θ_{ref} est l'angle de réfraction ;
- n_1 et n_2 sont les indices de réfraction respectivement du milieu incident et réfracté.

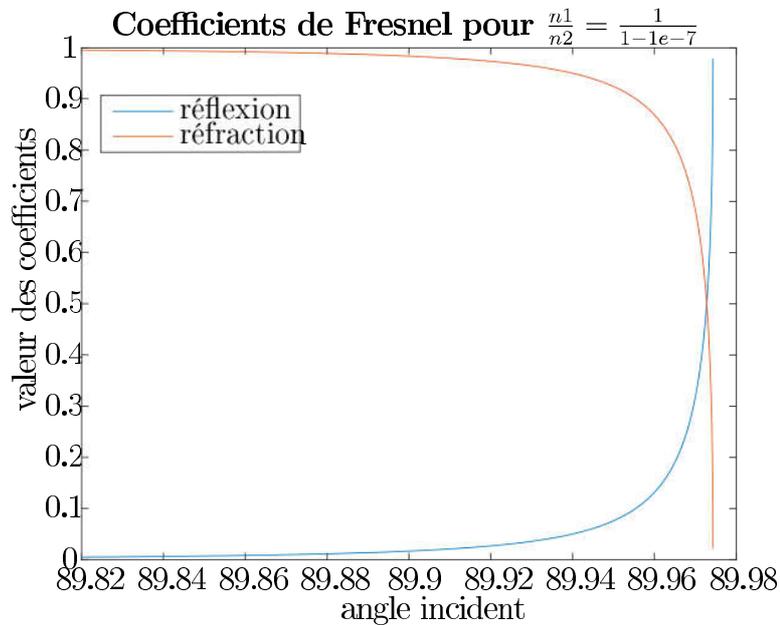


FIGURE 3.9 – Calcul des coefficients de Fresnel pour $n = 1 - 10^{-7}$.

Un exemple du calcul des coefficients de Fresnel pour $n = 1 - 10^{-7}$ (indice de réfraction du plastique soumis à des rayons X d'énergie $E \simeq 10$ keV) variant en fonction de l'angle d'incidence est donné sur la figure 3.9 page 72. Sur cet exemple, les angles incidents à partir desquels l'amplitude de la réflexion est plus élevée que celle de la réfraction est très proche de l'horizontale de la surface du milieu réfractant (89.97 deg dans l'exemple). Dans la section 3.5.2 dédiée à la simulation, l'impact de la variation d'intensité en fonction de l'angle de réfraction sera étudié. La réfraction sera alors considérée comme contribuant majoritairement à la formation des profils.

L'absorption dans le milieu suit la loi de Beer-Lambert.
Soit la distance κ parcourue dans un milieu d'indice de réfraction complexe n .

Soit I , l'intensité du rayon avant absorption.

L'intensité du rayon après absorption I_{abs} est donnée par la loi de Beer-Lambert suivante :

$$I_{abs} = I e^{-\frac{4\pi\Im(n(\lambda))}{\lambda}\kappa} \quad (3.58)$$

Ces formules sont applicables pour tous les cas. L'application pour le cas d'une boule est faite dans le paragraphe suivant.

Cas d'une boule

Le modèle basé sur l'optique géométrique, en tenant compte de la réfraction, la réflexion et l'absorption pour une sphère pleine de rayon R est réalisé. L'indice de réfraction de l'air est $n_1 = 1$ et celui de la boule est $n_2 \in \mathbb{C}$.

Les rayons émis par la source sont paramétrés par les formules (3.50),

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \alpha \\ \rho_0 &= a \tan \varphi_0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

où a est la distance entre la source et le centre de la boule de rayon R .

Chaque rayon émis possède une intensité $I_1 = 1$.

Pour un rayon émis par la source, il y a deux cas possibles :

1. soit le rayon coupe la sphère, et il y a réfraction, réflexion et absorption,
2. soit le rayon ne rencontre pas la sphère, et le rayon continue sa propagation linéairement jusqu'à l'écran.

L'angle limite entre ces deux cas est $\varphi_0 = \arcsin \frac{R}{a}$.

Dans le cas où le rayon coupe la sphère, il faut calculer l'ensemble des directions que prennent les rayons après leurs interactions avec le matériau, ainsi que l'absorption. La première réfraction est entrante. Sa modélisation est donnée par (3.53), dont l'application dans notre cas donne les formules :

$$\rho_1 = \frac{\Re(n_1)\rho_0 \cos \varphi_0}{\Re(n_2) \cos \varphi_1} = \frac{\rho_0 \cos \varphi_0}{\Re(n_2) \cos \varphi_1} \quad (3.60)$$

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \arcsin \frac{\rho_0 \cos \varphi_0}{R} + \arcsin \frac{\rho_0 \cos \varphi_0}{\Re(n_2)R} \quad (3.61)$$

Le rayon subit ensuite une réfraction en sortant de la sphère. En appliquant les formules (3.55), il est obtenu :

$$\rho_2 = \frac{\Re(n_2)\rho_1 \cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \quad (3.62)$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \arcsin \frac{\rho_1 \cos \varphi_1}{R} - \arcsin \frac{\Re(n_2)\rho_1 \cos \varphi_1}{R} \quad (3.63)$$

Dans l'équation (3.62), ρ_1 est remplacé par son expression (3.60) et dans l'équation (3.63), φ_1 est remplacé par son expression (3.61) :

$$\rho_2 = \rho_0 \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_2} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \varphi_0 - \arcsin \frac{\rho_0 \cos \varphi_0}{R} + \arcsin \frac{\rho_0 \cos \varphi_0}{\Re(n_2)R} \\ + \arcsin \frac{\rho_0 \cos \varphi_0}{\Re(n_2)R} - \arcsin \frac{\rho_0 \cos \varphi_0}{R} \end{aligned} \quad (3.65)$$

En simplifiant, l'équation (3.65) devient :

$$\varphi_2 = \varphi_0 + 2 \left(\arcsin \frac{\rho_0 \cos \varphi_0}{\Re(n_2)R} - \arcsin \frac{\rho_0 \cos \varphi_0}{R} \right) \quad (3.66)$$

L'intensité du rayon diminue lorsqu'il traverse la sphère par le phénomène d'absorption exprimé au travers de la loi de Beer-Lambert (3.58). Il faut connaître la distance κ que le rayon parcourt dans la sphère du point entrant au point sortant, soit une corde. Elle est donnée par l'équation suivante :

$$\kappa = 2\sqrt{R^2 - (\rho_2 \cos(\varphi_2))^2} \quad (3.67)$$

Remarque 3

Le parcours du rayon dans la boule est symétrique par rapport à la droite bissectrice du rayon à l'intérieur de la boule (la corde) et le centre du micro-ballon.

L'absorption des rayons est alors :

$$I_{abs} = I e^{-\frac{4\pi\Im(n_2(\lambda))}{\lambda}\kappa}. \quad (3.68)$$

Les rayons se propagent alors en ligne droite jusqu'à l'écran positionné en $(z_{ec}, 0)$.

L'intensité des phénomènes de réflexion et de réfraction est modélisé, grâce aux coefficients de Fresnel, dans le cas d'une boule. Pour cela, les

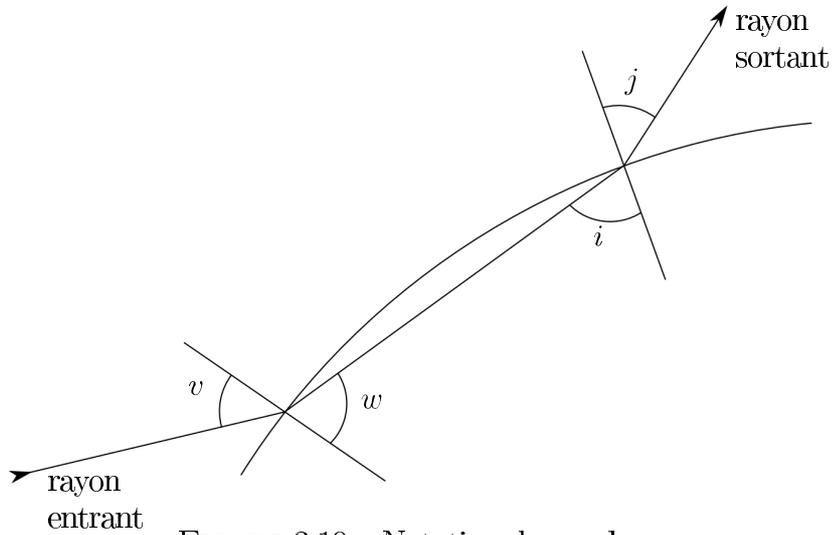


FIGURE 3.10 – Notation des angles

coefficients sont calculés pour la réfraction entrante et pour la réfraction sortante.

Soient les angles v, w, i, j présentés à la figure 3.10 p.75, avec $i = w$ et $j = v$ (cf. remarque 3).

Les relations (3.7) et (3.8) dans la référence [Choux, 2006] expriment les angles v, w, i, j en fonction des angles de réfraction :

$$\sin v = \rho_0 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)}{r} = \rho_0 \frac{\cos \varphi_0}{r} \quad (3.69)$$

$$\sin w = \rho_1 \frac{\cos \varphi_1}{r} \quad (3.70)$$

$$\sin i = -\rho_1 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)}{r} = -\rho_1 \frac{\cos \varphi_1}{r} \quad (3.71)$$

$$\sin j = \rho_2 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_2\right)}{r} = -\rho_2 \frac{\cos \varphi_2}{r} \quad (3.72)$$

Les coefficients de Fresnel sont obtenus grâce à 3.57, pour la 1^{re} réfraction

(entrante) :

$$Ref_1 = \frac{\cos v - \Re(n_2) \cos w}{\cos v + \Re(n_2) \cos w} \quad (3.73)$$

$$= \frac{\sqrt{1 - \rho_0^2 \frac{\cos^2 \varphi_0}{r^2}} - \Re(n_2) \sqrt{1 - \rho_1^2 \frac{\cos^2 \varphi_1}{r^2}}}{\sqrt{1 - \rho_0^2 \frac{\cos^2 \varphi_0}{r^2}} + \Re(n_2) \sqrt{1 - \rho_1^2 \frac{\cos^2 \varphi_1}{r^2}}} \quad (3.74)$$

$$= \frac{\sqrt{r^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0} - \sqrt{\Re(n_2)^2 r^2 - \Re(n_2)^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1}}{\sqrt{r^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0} + \sqrt{\Re(n_2)^2 r^2 - \Re(n_2)^2 \rho_1^2 \cos^2 \varphi_1}} \quad (3.75)$$

$$= \frac{\sqrt{r^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0} - \sqrt{\Re(n_2)^2 r^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0}}{\sqrt{r^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0} + \sqrt{\Re(n_2)^2 r^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0}}, \quad (3.76)$$

et de façon similaire pour la 2^e réfraction (sortante) :

$$Ref_2 = \frac{\Re(n_2) \cos i - \cos j}{\Re(n_2) \cos i + \cos j} \quad (3.77)$$

$$= \frac{\sqrt{\Re(n_2)^2 r^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0} - \sqrt{r^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0}}{\sqrt{\Re(n_2)^2 r^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0} + \sqrt{r^2 - \rho_0^2 \cos^2 \varphi_0}}. \quad (3.78)$$

Il est remarqué que $Ref_2 = -Ref_1$, c'est-à-dire que l'intensité est atténuée pour les deux réfractions d'un même coefficient de Fresnel.

Enfin, le profil théorique obtenu par ces calculs géométriques va être calculé. Ce dernier est proportionnel à la puissance reçue sur le capteur. En raison de la symétrie de rotation autour de l'axe optique, la modélisation dans un plan est considérée (cf. figure 3.11 p.76)

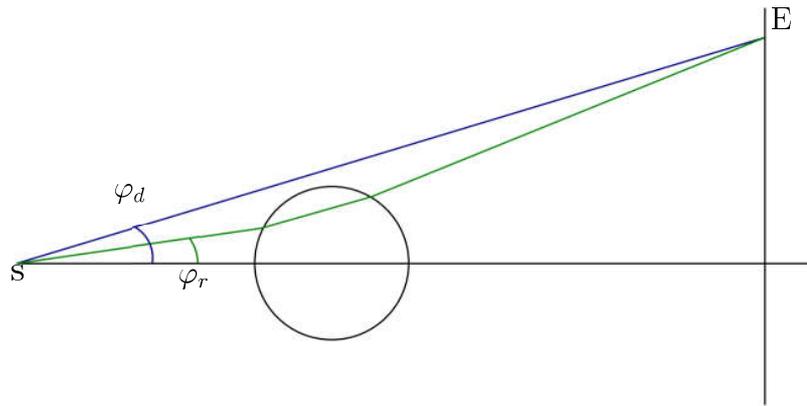


FIGURE 3.11 – Deux rayons arrivant au même point de l'écran, un rayon direct (en bleu) et un rayon réfracté (en vert).

En chaque point de l'écran peuvent arriver au plus un rayon direct émis avec un angle φ_d et un rayon réfracté émis avec un rayon φ_r ³.

La puissance d'un rayon direct est notée $p_d(\varphi_d)$. La puissance d'un rayon réfracté, calculée à partir des coefficients de Fresnel et de l'absorption, est noté $p_r(\varphi_r)$. Lorsque le rayon émis avec l'angle φ est direct (respectivement lorsqu'il est réfracté), la puissance de ce rayon est $p_r(\varphi) = 0$ (respectivement $p_d(\varphi) = 0$).

La puissance reçue sur un petit élément $[y, y + dy]$ provient donc des rayons directs émis avec les angles $[\varphi_d, \varphi_d + d\varphi_d]$ et des rayons réfractés émis avec les angles $[\varphi_r, \varphi_r + d\varphi_r]$:

$$P_{[y, y+dy]} = \int_{\varphi_d}^{\varphi_d+d\varphi_d} p_d(\varphi) d\varphi + \int_{\varphi_r}^{\varphi_r+d\varphi_r} p_r(\varphi) d\varphi \quad (3.79)$$

(pour certaines plages de $[y, y + dy]$, seule l'une des deux intégrales est présente).

Soit $y = f_d(\varphi)$ (respectivement $y = f_r(\varphi)$) le point d'arrivée d'un rayon direct (respectivement réfracté) émis avec l'angle φ .

Dans les deux intégrales le changement de variable est appliqué. En posant $y = f(\varphi)$, l'élément d'intégration devient $dy = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$. L'équation suivante est donc obtenue

$$P_{[y, y+dy]} = \int_y^{y+dy} \frac{p_d(f_d^{-1}(y))}{f'_d(f_d^{-1}(y))} dy + \int_y^{y+dy} \frac{p_r(f_r^{-1}(y))}{f'_r(f_r^{-1}(y))} dy \quad (3.80)$$

Ainsi la puissance reçue en y est :

$$P_y = \frac{p_d(f_d^{-1}(y))}{f'_d(f_d^{-1}(y))} + \frac{p_r(f_r^{-1}(y))}{f'_r(f_r^{-1}(y))}. \quad (3.81)$$

Cette puissance est donc la somme de deux fonctions. La première présente une discontinuité au point \bar{y} définie par la droite issue de S et tangente au microballon. La seconde fonction est continue. Donc P_y est discontinue en \bar{y} . Le paragraphe suivant illustre cette remarque numérique.

3.5.2 Simulations

Microballon PAMS

Une simulation de radiographie de microballon va maintenant être réalisée à partir des formules énoncées. Dans un premier temps, le microballon

3. Les angles réfléchis sont négligés (cf. section 3.5.2 P.77).

est considéré comme plein, c'est-à-dire comme une boule. Cette boule est réfractante, absorbante, et a pour indice $n' = 1 - 8.10^{-7} + i 1,3.10^{-9}$. Cet indice a été choisi dans la banque de données de [Henke *et al.*, 1993] pour du *CH* à des énergies de 10 *keV*, puis a été modifié légèrement pour tenir compte de la densité incertaine du matériau du microballon. La boule a un rayon de 1 *mm*. La distance source-centre de la boule est de 1,5 *cm*. La distance source-capteur est de 40 *cm*. L'air est considéré comme du vide, d'indice $n = 1$. La taille des pixels est de 55 μm (à l'entrée du capteur, cf. section 1.3.2 p.26).

Soit un rayon émis par la source ponctuelle avec un angle φ par rapport à l'axe optique. Il existe un angle $\bar{\varphi}$ tel que :

- si $\varphi \leq \bar{\varphi}$ alors le rayon traverse le microballon,
- si $\varphi = \bar{\varphi}$, le rayon est tangent au microballon,
- et si $\varphi > \bar{\varphi}$, le rayon atteint le capteur sans rencontrer le microballon.

Dans le premier cas, si $\varphi \leq \bar{\varphi}$, alors ce rayon est réfracté une première fois en entrant dans le microballon puis une seconde fois en ressortant du microballon. A la sortie du microballon, le rayon a été dévié et l'angle entre ce rayon et l'axe optique est φ' qui est supérieur à φ (cf. figure 3.11 p.76). Le rayon qui suit l'axe optique n'est pas dévié, et lorsque $\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ ($\varphi < \bar{\varphi}$), les rayons réfractés le sont de plus en plus. Il existe une valeur de φ pour laquelle la déviation est maximale et les rayons arrivent sur le capteur en un point plus éloigné du centre optique que le rayon tangent, c'est-à-dire au delà du bord de l'image projetée du microballon.

Ceci est constaté sur la figure 3.12 page 79. La courbe bleue montre le point où arrive un rayon (en abscisse, la distance entre le point où le rayon rencontre le capteur et le centre optique) et sa puissance. Il est constaté que les rayons traversant le microballon arrivent jusqu'au point d'abscisse 22,5 *mm*. Le rayon qui tangente le microballon sans être réfracté arrive au point d'abscisse 20 *mm*. En ce point, la puissance des rayons réfractés n'est pas nulle. La contribution, en terme de puissance, en ce point est donc la somme des contributions des rayons réfractés et des rayons directs. Cette puissance admet donc une discontinuité en ce point, visible sur la figure 3.13 page 80.

La figure 3.13 affiche le profil p d'un microballon. La discontinuité correspondant au bord du microballon est clairement visible. En pratique, le profil n'est pas directement mesuré car l'image est pixelisée et floue (pour plusieurs raisons, en particulier le fait que la source n'est pas ponctuelle). L'image réelle peut être vue comme la convolution du profil théorique $P(y)$ par une fonction g qui représente le filtre du procédé d'acquisition. La fonction g est supposée être un noyau de convolution positif très localisé (à support dans $[-\eta, \eta]$), pair, et différentiable. La dérivée du profil obtenu après convolution

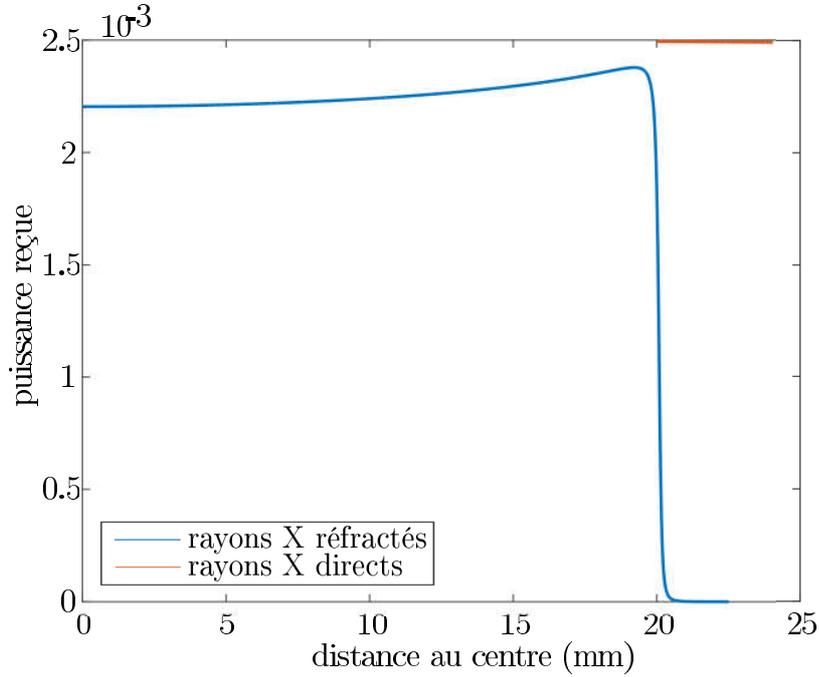


FIGURE 3.12 – Rayons traversant le microballon et rayons directs

est calculée :

$$\frac{d}{dy} P * g(y) = \int_{-\eta}^{\eta} P(y-t)g'(t)dt. \quad (3.82)$$

Si $P(y)$ est continue entre $y - \eta$ et $y + \eta$, $P(y-t) = P(y) + o(t)$ et donc cette intégrale vaut

$$P(y) \int_{-\eta}^{\eta} g'(t)dt + \underbrace{\int_{-\eta}^{\eta} o(t)g'(t)dt}_{o(\eta)}. \quad (3.83)$$

Mais $P(y)$ est une fonction discontinue de 1^{re} espèce en $\bar{y} \in [y - \eta, y + \eta]$ alors

$$\frac{d}{dy} P * g(y) = P(\bar{y}^-) \int_{-\eta}^{y-\bar{y}} g'(t)dt + P(\bar{y}^+) \int_{y-\bar{y}}^{\eta} g'(t)dt + o(\eta) \quad (3.84)$$

$$= [P(\bar{y}^-) - P(\bar{y}^+)] g(y - \bar{y}) + o(\eta). \quad (3.85)$$

En notant $P(\bar{y}^-) = \lim_{y \rightarrow \bar{y}^-} P(y)$ et $P(\bar{y}^+) = \lim_{y \rightarrow \bar{y}^+} P(y)$, le profil obtenu au point \bar{y} a une dérivée seconde nulle (la dérivée première s'annule et change de signe).

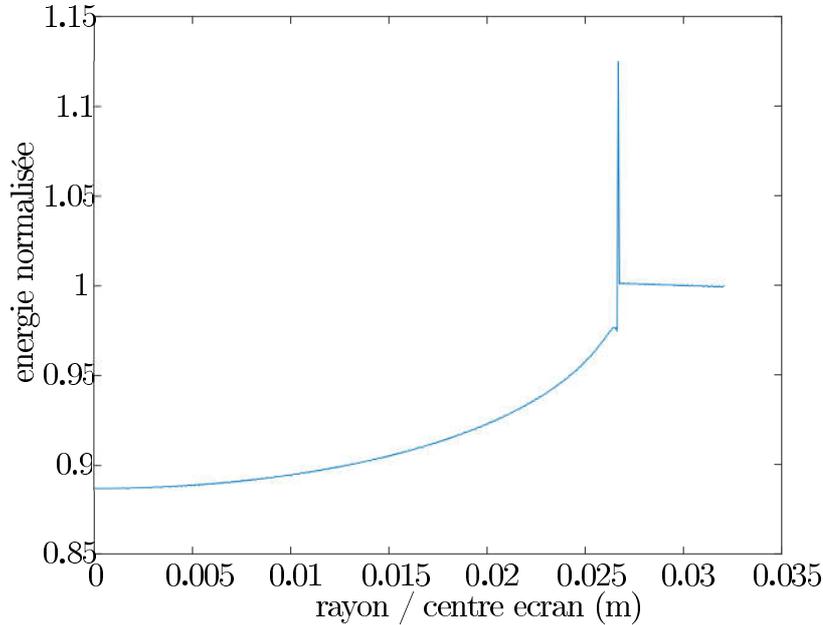


FIGURE 3.13 – Profil simulé, par modélisation de la réfraction et de l’absorption, d’un microballon de rayon extérieur $R_{ext} = 1$ mm et d’indice de réfraction $n = 1 - 8.10^{-7} + i 1, 3.10^{-9}$.

Sur la figure 3.14 page 81, un profil obtenu avec la prise en compte des coefficients de Fresnel est comparé à un profil qui ne tient pas compte de ces coefficients. Les deux courbes sont identiques à une variation maximale de 0,1%. La variation de l’intensité en fonction de l’angle incident est donc négligeable. Cette remarque justifie le fait que la réflexion soit négligeable, puisque cette dernière ne contribue qu’au plus à 0,1% au profil théorique.

Un profil expérimental obtenu à partir d’une bille de PAMS de $722 \mu m$ de rayon est comparé à un profil simulé. Le support rectangulaire est utilisé, la membrane en plastique absorbe donc très légèrement les rayons X. L’indice de réfraction est choisi empiriquement. Des méthodes de minimisation de critère d’erreur peuvent être utilisées pour trouver l’indice de réfraction le plus vraisemblable (voir annexe E). Le résultat est montré en figure 3.15 page 82.

Sur la figure 3.15, la dynamique d’absorption de la courbe simulée est identique au profil expérimental. La différence d’absorption au centre, du pixel 1 au pixel 130 est due à l’alvéole du support. Un pic lié au contraste de phase est présent à l’interface du microballon, néanmoins ce pic à une amplitude supérieure à celui présent sur le profil expérimental. De plus le pic du profil expérimental est plus large que le pic simulé. Ces observations sont

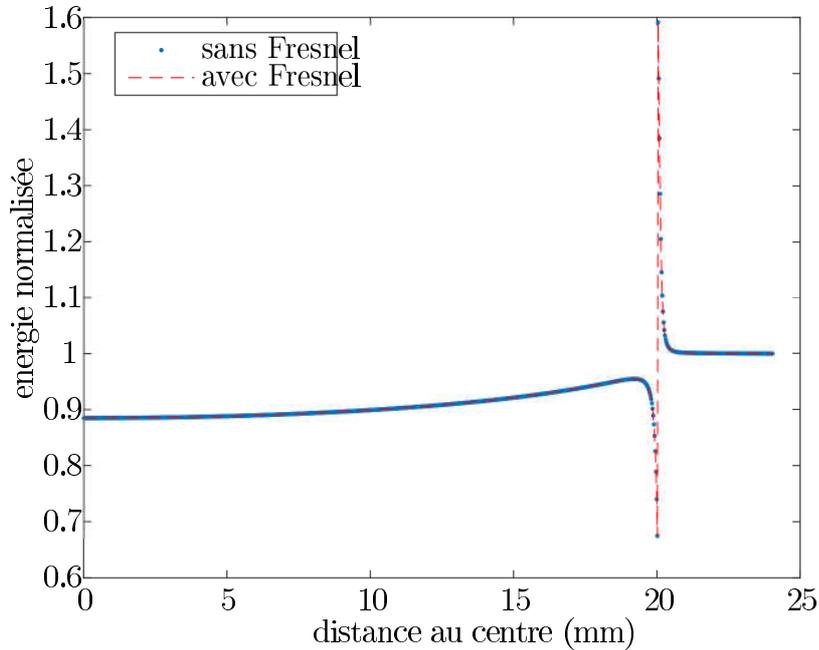


FIGURE 3.14 – Comparaison entre un profil obtenu avec la prise en compte des coefficients de Fresnel et l'autre sans cette prise en compte.

compatibles avec les explications données précédemment sur la différence entre le profil théorique et expérimental (flou dû à la source non ponctuelle, à la résolution spatiale du capteur, à la diffusion dans le scintillateur, etc...).

Pour tenir compte des phénomènes de flou géométrique lié à la taille de la source, le profil simulé est convolué avec une gaussienne dont la largeur est de l'ordre de la taille des pixels. Dans notre cas, la gaussienne est d'écart-type 2.10^{-7} . Le résultat est montré en figure 3.16 page 83.

Sur la figure 3.16, la courbe simulée est en accord très satisfaisant avec profil expérimental. L'erreur moyenne entre les deux courbes est 0,6% et l'erreur maximale de 5%. Le modèle obtenu par l'application de l'optique géométrique donne des résultats satisfaisant. L'analyse de ces résultats, permet d'identifier un point particulier sur les profils simulés : un point d'inflexion.

Point d'inflexion

Une information intéressante peut être obtenue par la simulation des microballons. *L'image réelle peut donc être vue comme une convolution $p * f$ de ce profil théorique p avec une gaussienne f (ou une fonction similaire). Le point d'inflexion de la courbe qui en résulte est exactement localisé sur le point de discontinuité qui correspond au bord du microballon.*

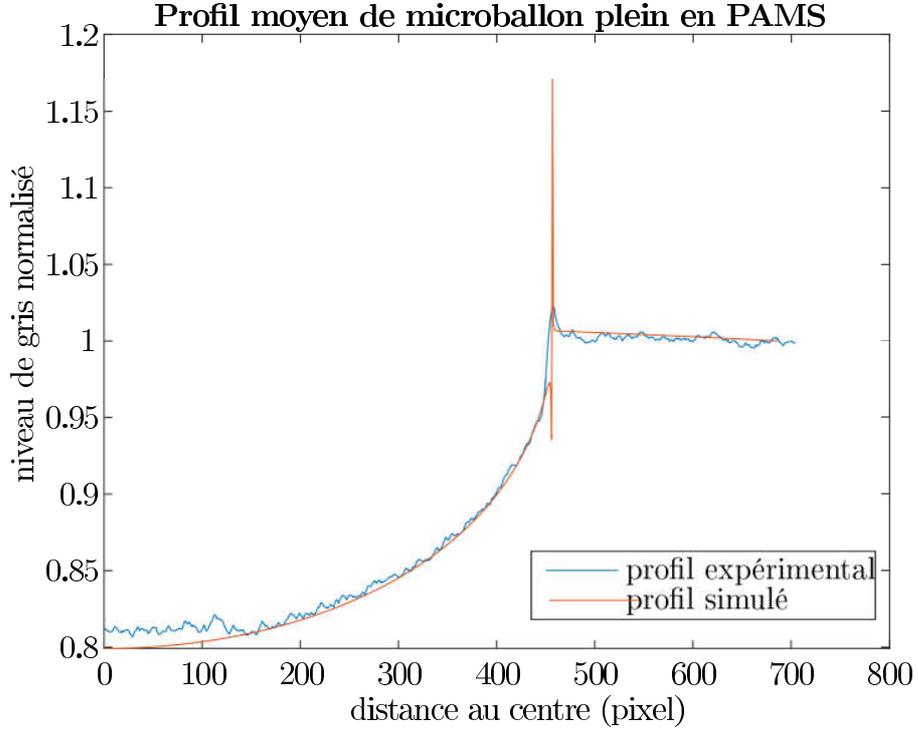


FIGURE 3.15 – Profil, d’un microballon de rayon extérieur $R_{ext} = 722 \mu m$ et d’indice de réfraction $n = 1 - 8.10^{-7} + i 1, 3.10^{-9}$, expérimental et simulé par modélisation de la réfraction et de l’absorption.

La figure 3.17 p.84 montre les dérivées secondes des profils, expérimental et simulé, de la figure 3.16 p.83. Sur cette figure, la position de l’interface est calculée et représentée par la ligne verticale noire. Les dérivées secondes des profils, expérimental (bleu) et simulé (rouge), se superposent au bruit expérimental près. Il est remarqué que l’interface coupe les courbes, expérimentale et simulée, lorsque celles-ci sont entre un minimum, localisé au pixel 455, et un maximum, localisé au pixel 460. Entre ces deux valeurs les courbes changent de signe, ce qui définit un point d’inflexion.

Remarque 4

Une remarque importante est que la tangente au microballon est le point d’inflexion du profil, c’est-à-dire le point pour lequel la dérivée seconde change de signe. La relation entre la position du microballon $(0, a)$, la position de l’écran $(0, a+d)$ et le rayon du microballon R donne la position de la tangente sur l’écran ρ pour la première interface :

$$\rho = \frac{R(a+d)}{\sqrt{a^2 - R^2}} \quad (3.86)$$

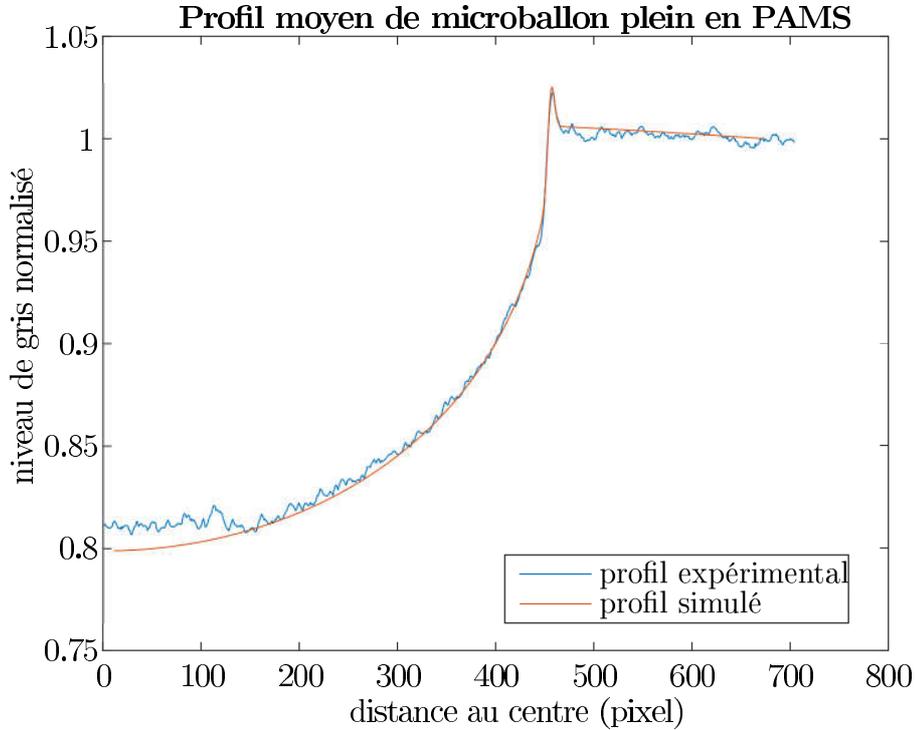


FIGURE 3.16 – Profil, d’un microballon de rayon extérieur $R_{ext} = 722 \text{ mm}$ et d’indice de réfraction $n = 1 - 8.10^{-7} + i 1, 3.10^{-9}$, expérimental et simulé avec floutage.

Au point ρ , la dérivée seconde de la fonction permettant d’obtenir les réfractations s’annule.

Un microballon agit comme une lentille divergente sur les rayons X. Un microballon composé de plusieurs couches va agir comme plusieurs lentilles divergentes ou convergentes (selon les indices de réfraction), ce qui entraîne une déviation des positions des interfaces intérieures projetées sur l’écran.

Exemple numérique :

Soit un microballon de $722 \mu\text{m}$ de rayon et de $122 \mu\text{m}$ d’épaisseur. La deuxième couche est de l’air (indice de réfraction égal à 1). L’écran est placé à 40 cm de la source, le centre du microballon est placé à 1 cm de la source. Soient l’angle $\varphi_{C_1}^{max}$ du rayon γ_1 tangent à la couche C_1 , l’angle $\varphi_{C_2}^{max}$ du rayon γ_2 non réfracté par la couche C_1 tangent à la couche C_2 et l’angle φ_{C_1, C_2}^{max} du rayon γ_3 tangent à la couche C_2 après réfraction de la couche C_1 (cf. figure 3.18 p.84).

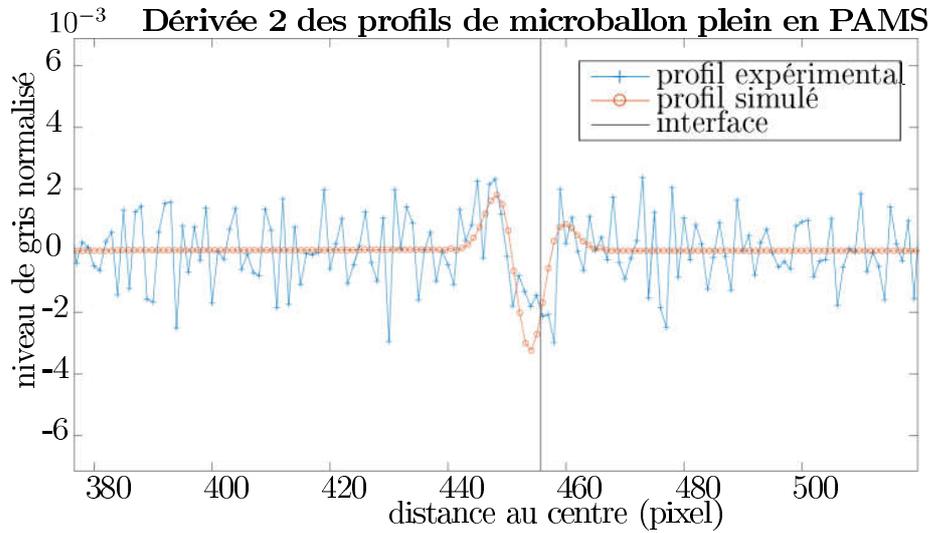


FIGURE 3.17 – Dérivées secondes des profils, simulé et expérimental, d'un microballon de rayon extérieur $R_{ext} = 722 \mu m$ et d'indice de réfraction réel $n = 1 - 8.10^{-7} + 1,3.10^{-9}$.

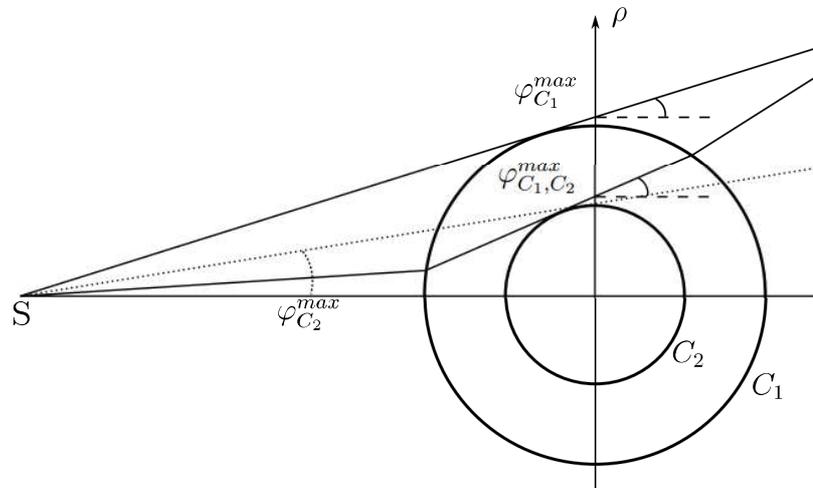


FIGURE 3.18 – Angles maxima $\varphi_{C_1}^{max}$, $\varphi_{C_2}^{max}$ et φ_{C_1,C_2}^{max} de chaque couche délimitée par leurs contours C_1 et C_2

Soit x la distance entre le centre du capteur et un point du capteur. Pour chaque rayon, la distance x à leur arrivée sur le capteur est calculée. Les rayons γ_1 et γ_2 ne sont pas réfractés, le rayon γ_3 est réfracté 2 fois (réfractions entrante et sortante).

La recherche du rayon tangent est effectuée numériquement⁴, c'est le rayon maximal non réfracté par C_2 mais qui au minimum a été réfracté par C_1 .

La tangente à la surface extérieure du rayon passant par la source est à une distance $x = 2,888 \text{ cm}$ sur le plan écran, la tangente de la surface intérieure du rayon passant par la source est à une distance $x = 2,4 \text{ cm}$.

La position du rayon qui tangente la deuxième interface, réfracté par la première surface, en entrant puis en sortant du microballon, est observé sur l'écran. La déviation est alors la différence entre la position sur l'écran de ce rayon avec la position sur l'écran de la tangente de la surface intérieure du rayon passant par la source. Pour un indice de réfraction de $n = 1 - 8.10^{-7}$, La déviation de la deuxième interface est de $0,01 \text{ cm}$. Pour un indice de réfraction plus élevé de $n = 1 - 5.10^{-6}$, la déviation de la deuxième interface est de $0,04 \text{ cm}$. Pour un indice de réfraction plus faible de $n = 1 - 5.10^{-7}$, la déviation de la deuxième interface est de 0 (à la précision numérique près).

Comme le capteur a une résolution de $55 \mu\text{m}$, selon l'indice de réfraction, cette variation peut changer la position de l'interface sur l'écran.

Hormis cette variation et le flou géométrique, l'approximation réalisée par l'utilisation de l'optique géométrique est correcte. L'hypothèse d'une diffraction très faible réalisée pour appliquer l'optique géométrique peut néanmoins être discutée. En effet, la diffraction peut modifier légèrement les valeurs obtenues expérimentalement. De plus les résultats obtenus dépendent de plusieurs paramètres, dont l'indice de réfraction. Cet indice est estimé à partir des valeurs expérimentales car toutes les caractéristiques de ce matériau qui compose le microballon ne sont pas exactement connues. Il est possible que l'indice trouvé pour la modélisation grâce aux lois de l'optique géométrique soit légèrement différent du véritable indice de réfraction du matériau.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, trois modélisations ont été abordées :

- la résolution analytique de l'approximation de Born appliquée à l'équation en intégrale du potentiel de diffusion,
- la résolution numérique de cette même équation, à l'aide d'une méthode de Monte Carlo,
- la résolution analytique par l'optique géométrique, à savoir les équations de Snell-Descartes et Beer-Lambert.

4. Le calcul peut être effectué analytiquement. Ici, comme les rayons ont déjà été calculés numériquement pour les différentes réfractions, le choix numérique est pragmatique.

Les résolutions, analytique et numérique, de l'équation en intégrale du potentiel de diffusion n'ont pas donné des résultats exploitables. La complexité du calcul analytique, l'ordre de l'approximation de Born, ou encore les ordres de grandeurs entre les longueurs d'ondes des rayons X et la taille du volume radiographié ont poussé à développer une modélisation basée sur l'optique géométrique.

La résolution analytique utilisant l'optique géométrique, sous réserve d'approximations quant aux phénomènes impliqués dans l'apparition du contraste de phase, est satisfaisante.

Dans le chapitre suivant, l'application du modèle basé sur l'optique géométrique sera utilisé pour la caractérisation des déformations des surfaces de microballons.

Chapitre 4

Estimation des modes de déformations par détection de contour

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, un modèle du procédé expérimental, basé sur l'optique géométrique, a été proposé puis validé. Plus précisément, il a été montré que le bord du microballon correspond à un contour sur l'image expérimentale.

Dans ce chapitre, une détection de contour est réalisée sur plusieurs clichés afin d'estimer les modes de déformations, par des harmoniques sphériques, de chaque surface du microballon. Une méthode d'estimation permet, à partir de ces contours, d'estimer les coefficients des harmoniques sphériques.

La métrologie associée à cette méthode d'estimation des déformations est effectuée expérimentalement, par répétabilité, permettant ainsi de caractériser les surfaces du microballon en donnant une erreur de mesure sur chaque mode. Puis, l'incertitude de mesure est donnée en suivant la démarche du Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (*Guide to the expression of Uncertainty in Measurement* [BIPM, 2008]).

4.2 Perturbations des surfaces

4.2.1 Théorie

La surface du microballon peut être décrite comme une sphère déformée. L'équation en coordonnées sphériques d'une sphère est :

$$\rho(\theta, \varphi) = R. \quad (4.1)$$

où θ et φ sont les angles des coordonnées sphériques conventionnelles, la relation avec les coordonnées cartésiennes étant :

$$\begin{aligned} x &= \rho(\theta, \varphi) \sin \varphi \cos \theta, \\ y &= \rho(\theta, \varphi) \sin \varphi \sin \theta, \\ z &= \rho(\theta, \varphi) \cos \varphi, \end{aligned}$$

avec $\varphi \in [0, \pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$.

Pour une sphère déformée par une petite perturbation, cette équation s'écrit :

$$\rho(\theta, \varphi) = R + \varepsilon(\theta, \varphi) \quad (4.2)$$

où $\varepsilon(\theta, \varphi)$ représente la petite déformation radiale autour de R en (θ, φ) . Les déformations $\varepsilon(\theta, \varphi)$ peuvent être développées en série d'harmoniques sphériques [Guillaume, 2006][Chapitre 1, page 14] :

$$\varepsilon(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \lambda_{l,m} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (4.3)$$

où,

- l est le mode de l'harmonique sphérique ;
- m est l'ordre de l'harmonique sphérique ;
- $Y_l^m(\theta, \varphi)$ sont les harmoniques sphériques normalisées, $Y_l^m(\theta, \varphi) \in \mathbb{C}$;
- $\lambda_{l,m}$ sont des coefficients complexes.

Définition 4 (Harmoniques sphériques)

Des relations existent entre les différentes harmoniques complexes d'un même mode :

$$\forall m > 0, Y_l^{-m} = (-1)^m \overline{Y_l^m} \quad (4.4)$$

$\overline{Y_l^m}$ désignant le conjugué de Y_l^m . Ces relations permettent d'écrire les harmoniques sphériques réelles (cf. [Keegstra et al., 1997]) qui sont, $\forall l \geq |m|, m < 0$,

$$\hat{Y}_l^m = \sqrt{2} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \sin(|m|\phi), \quad (4.5)$$

$m = 0$,

$$\hat{Y}_l^0 = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l^0(\cos \theta), \quad (4.6)$$

et $m > 0$

$$\hat{Y}_l^m = \sqrt{2} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) \cos(|m|\phi). \quad (4.7)$$

Les contours de la sphère sont discrétisés lors de la mesure car l'image est composée de pixels, mais aussi par une opération moyenne angulaire et d'interpolation afin de diminuer le bruit du niveau de gris des pixels. En effet, connaissant le centre d'une surface du microballon, les pixels sont interpolés afin de donner les valeurs du niveau de gris pour une distance au centre, puis la moyenne pour un angle d'ouverture choisi est calculée. L'équation (4.2) discrétisée est :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \text{ avec } i \leq N \text{ et } j \leq M, \quad \rho(\theta_i, \varphi_j) = R + \varepsilon(\theta_i, \varphi_j) \quad (4.8)$$

où

- N est le nombre de points sur un contour ;
- M est le nombre de clichés pris pour différents angles de vue.

En remplaçant dans la formule (4.8) $\varepsilon(\theta_i, \varphi_j)$ par la formule (4.3), l'équation suivante est obtenue :

$$\rho(\theta_i, \varphi_j) = R + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \lambda_{l,m} \hat{Y}_l^m(\theta_i, \varphi_j). \quad (4.9)$$

Par la suite, \hat{Y} sera noté Y .

Remarque 5

Il est remarqué que $Y_0^0(\theta_i, \varphi_j)$ est constant, donc :

$$R + \lambda_{0,0} Y_0^0 = \left(\frac{R}{Y_0^0} + \lambda_{0,0} \right) Y_0^0 = \tilde{\lambda}_{0,0} Y_0^0. \quad (4.10)$$

L'équation (4.9) peut s'écrire :

$$\rho(\theta_i, \varphi_j) = \tilde{\lambda}_{0,0} Y_0^0 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \lambda_{l,m} Y_l^m(\theta_i, \varphi_j). \quad (4.11)$$

Les harmoniques sphériques formant un système orthogonal pour le produit scalaire sur \mathbb{S}^2 muni de la mesure $\sin \theta d\theta d\phi$, l'équation (4.9) est inversible. Les coefficients des harmoniques sphériques $\lambda_{l,m}$ peuvent être estimés

jusqu'au mode L par projection orthogonale sur la base des $(Y_l^m)_{0 \leq m \leq l \leq L}$. A partir des valeurs $\rho(\theta_i, \varphi_i)$ cette projection peut être calculée par une méthode d'estimation (par exemple des moindres carrés pondérés).

Soit P, les coefficients des harmoniques sphériques :

$$P = [\tilde{\lambda}_{0,0} \quad \lambda_{1,0} \quad \lambda_{1,1} \quad \dots \quad \lambda_{L,L}],$$

Soit A, les valeurs des harmoniques sphériques en chaque point :

$$A = \begin{bmatrix} Y_0^0 & Y_0^1(\theta_1, \varphi_1) & \dots & Y_L^L(\theta_1, \varphi_1) \\ Y_0^0 & Y_0^1(\theta_2, \varphi_2) & \dots & Y_L^L(\theta_2, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_0^0 & Y_0^1(\theta_N, \varphi_M) & \dots & Y_L^L(\theta_N, \varphi_M) \end{bmatrix},$$

avec, N le nombre de points du contour, M le double du nombre de prise de vue (2 angles sur un seul cliché), Q la matrice diagonale de pondération. En effet sur un cliché, les points $\rho(\theta_i, \varphi_j)$ sont obtenus pour les deux angles θ_i et $\theta_i + \pi[2\pi]$.

Les harmoniques sphériques sont décrites dans les coordonnées sphériques, alors que les points mesurés sur les contours sont dans les coordonnées cartésiennes. Un changement de variables des coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées sphériques (ρ, θ, φ) avec $\theta \in [0; 2\pi]$ et $\varphi \in [0; \pi]$ de ces points est réalisé afin d'appliquer la méthode d'estimation. La jacobienne du changement de variables est égale à $-\rho^2 \sin \varphi$. Une pondération par $\sin \varphi$ ($-\rho^2$) est alors effectuée pour tenir compte de la répartition des points utilisés pour appliquer la méthode d'estimation. En effet, le changement de variable indique que la densité des points augmente lorsque $\varphi \rightarrow 0$ ou $\varphi \rightarrow \pi$. La matrice de pondération Q est :

$$Q = \begin{bmatrix} \sin(\varphi_1|\theta_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sin(\varphi_2|\theta_1) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \sin(\varphi_M|\theta_N) \end{bmatrix}.$$

Soit R, le vecteur des points qui composent les contours :

$$R = [\rho(\theta_1, \varphi_1) \quad \rho(\theta_2, \varphi_1) \quad \dots \quad \rho(\theta_N, \varphi_M)]$$

La relation donnant les coefficients des harmoniques sphériques est :

$$P = (A^T Q A)^{-1} (A^T Q R) \quad (4.12)$$

Les coefficients des harmoniques sphériques sont alors obtenus et modélisent les déformations des surfaces et des épaisseurs. Les coefficients caractérisant l'épaisseur sont égaux à la différence des coefficients modélisant les surfaces de cette épaisseur, par linéarité de (4.3).

4.2.2 Validation numérique

La méthode d'estimation abordée à la section 4.2.1 va maintenant être présentée. Elle est robuste par rapport aux choix des paramètres (nombre de points, nombres d'images) et aux erreurs (erreurs lors de la prise des clichés, erreurs lors de la détection de contour). La méthode d'inversion sera également validée, les phénomènes physiques n'étant pas étudiés dans cette partie. Dans cette section, la méthode d'estimation utilisée est la méthode des moindres carrés, néanmoins d'autres méthodes peuvent être utilisées comme les quadratures de Gauss.

Pour valider la méthode d'estimation appliquée aux harmoniques sphériques, l'erreur d'estimation commise en fonction des paramètres d'entrées et d'erreurs connues est calculée. Plusieurs surfaces du microballon sont simulées avec des déformations connues, décrites par les harmoniques sphériques (cf. figure 4.1a p.92). Un nombre N de contours est alors pris, sur ces surfaces, avec un pas de rotation uniforme $\theta \in [0; 2\pi]$ autour de l'axe x , orthogonal à l'axe de propagation des rayons z et passant au centre du microballon. Sur ces contours, une erreur distribuée par une loi uniforme de 0,01% du rayon est ajoutée ; ces 0,01% sont de l'ordre des erreurs de positions entre des pixels de quelques μm pour des microballon de 1 mm de rayon.

A partir des N contours bruités, les coefficients des harmoniques sphériques sont estimés (cf. figure 4.1b p.92). L'erreur entre les paramètres de simulation et l'estimation sur chaque coefficient est calculée (cf. figure 4.1c p.92).

Cette opération a été répétée pour 30 microballons afin de quantifier l'erreur entre les coefficients, paramètres de la simulation, et les coefficients estimés. Le nombre de modes simulés L_s et le nombre de modes estimés L_e ne font pas varier les résultats. Sur la figure 4.2 p.93, le nombre de cliché est $N = 11$, et il y a respectivement sur 4.2a et 4.2b, $L_s = 5$ $L_e = 7$ et $L_s = 7$ $L_e = 7$. La variance entre les 30 résultats est très faible $\sim 10^{-5}$.

Néanmoins le nombre d'image influence grandement l'erreur comme le montre les figures 4.2c et 4.2d, où respectivement $N = 6$ et $N = 3$ pour $L_s = L_e = 7$. La variance entre les résultats est de $\sim 10^{28}$, l'estimation échoue.

L'erreur observée est très grande lorsque le nombre d'image est inférieur ou égal au mode maximal estimé. Lorsque le nombre d'image est supérieur au mode estimé, l'erreur sur le coefficient du mode est de l'ordre de grandeur du bruit uniforme ajouté aux contours lors de la simulation.

Il est clair que si le nombre d'images est trop petit par rapport au mode estimé, il ne sera pas possible de reconstituer ce mode, en vertu du principe de Shannon. Bien que la borne n'est été calculée explicitement à partir de

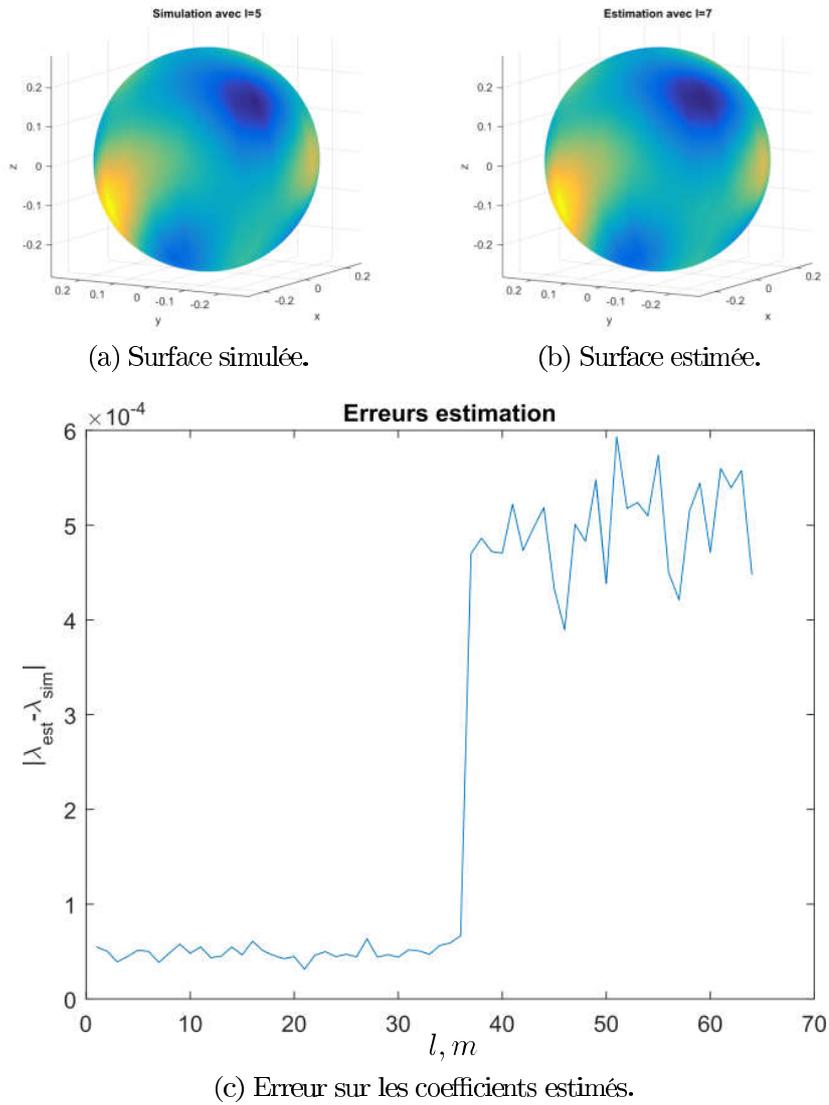


FIGURE 4.1 – Estimation pour une surface.

laquelle la reconstruction est possible (fréquence de Nyquist), il est constaté que pour un nombre d'images suffisant (de l'ordre du mode), la reconstruction est possible.

Il a été montré numériquement que la méthode d'estimation est robuste.

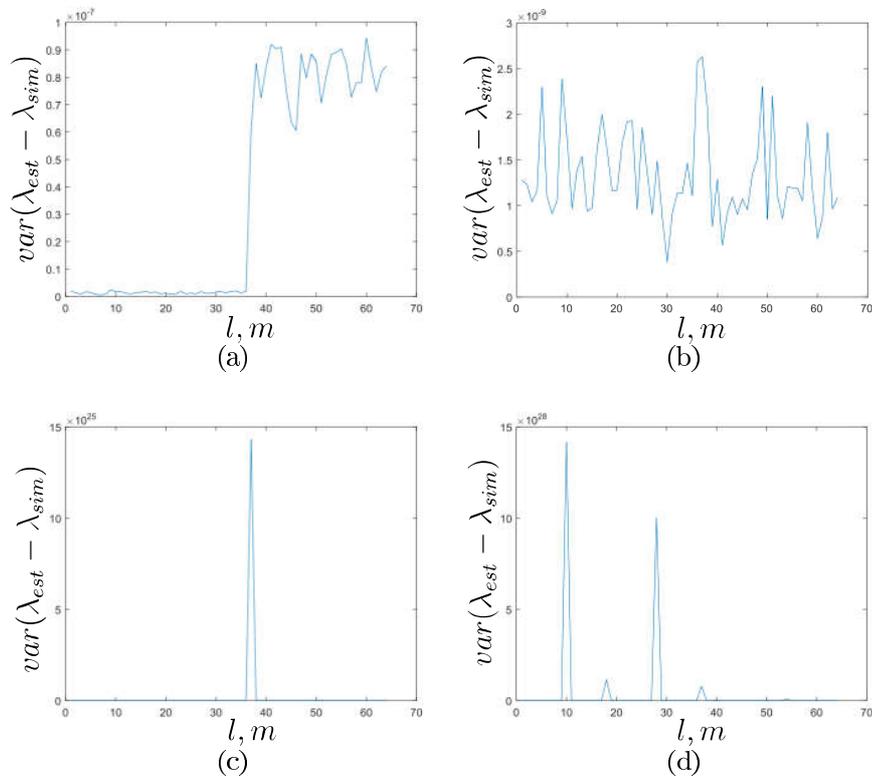


FIGURE 4.2 – Variance des erreurs sur les coefficients estimés.

4.3 Applications

4.3.1 Prise d'un cliché

Les conditions de prise de clichés jouent un rôle important dans la caractérisation. L'énergie de consigne du générateur, le temps d'acquisition en fonction du flux du faisceau X, la position des différents éléments, le type de support choisi, ont un impact sur la qualité des données enregistrées et sur le traitement de ces derniers.

Le choix du support est important ; en effet, si une partie du contour du microballon est manquante, des phénomènes particuliers seront visibles lors de l'application de la méthode des moindres carrés pour estimer les coefficients des harmoniques sphériques. Un exemple est donné pour le cas analogue de la transformée de Fourier en annexe D. Le support conique permet une détection de contour totale. L'absorption est néanmoins hétérogène mais ne gêne pas la détection de contour. Différentes tailles de supports existent,

le but étant de choisir celui pour lequel le microballon n'a qu'un anneau de contact horizontal avec le support conique (cela permet une détection plus simple des bords car il n'y a pas de discontinuité le long des bords).

L'ensemble support-microballon est positionné sur le banc de radiographie X, dans l'ensemble de tables motorisées. Le microballon et le support sont alignés au faisceau de rayons X (cf. chapitre 1). Ils sont ensuite approchés du générateur micro-foyer afin d'assurer un grandissement maximal et ainsi une image du microballon la plus grande possible.

La prise de cliché suit la procédure suivante : d'abord un premier cliché est réalisé en choisissant les paramètres d'acquisitions, à savoir :

- la tension d'accélération, choisie autour de 20 keV pour avoir une absorption par le matériau en plastique observable sur les clichés, le générateur délivre un faisceau de rayons X qui a pour spectre la figure 1.6 p.26,
- une intensité et un temps d'exposition qui améliore le contraste en augmentant le nombre de photons reçus sur le capteur pendant l'acquisition (généralement, 30 s pour une intensité sur la cible du générateur de 5 μ A).

Des rotations avec un pas régulier connu, dépendant du nombre de clichés à réaliser, sont effectuées. Par exemple, pour 11 clichés, le pas est de 32,7 degrés. Une série de clichés est alors réalisée (cf. figure 4.3 p.95). Pour chaque cliché, l'angle de rotation est connu.

Le microballon se déplace légèrement d'image en image car la rotation n'est pas parfaite. Il peut y avoir un faux-rond. Ce défaut peut être corrigé grâce à des étalons de mesures, qui permettent de connaître avec précision le coefficient de grandissement à la position de l'étalon. Le grandissement est donc connu par la position du microballon, et la taille de ce dernier peut être mesurée¹.

De plus, afin d'utiliser la méthode des moindres carrés avec les harmoniques sphériques, un point du microballon doit servir de référence sur toutes les images. Il n'est pas possible de réaliser un marquage de référence sur le microballon. Il est fait l'hypothèse que le barycentre de la surface intérieure est un point fixe sur nos images. Cette hypothèse implique une erreur qui ne peut pas être évaluée². Ce point de référence doit être retrouvé.

1. C'est la méthode qui sera utilisée à terme. Actuellement, il n'existe pas de support conique nécessaire pour placer plusieurs microballons et billes saphirs en même temps. A défaut, le rayon moyen de la surface extérieure du microballon mesuré sur le microscope télécentrique est utilisé, et il est admis que les rayons moyens des contours extérieurs sur chaque cliché prennent cette valeur. Ceci implique une erreur de mesure importante relative aux erreurs de grandissement.

2. En effet, il faudrait avoir une référence, une surface par exemple. Or l'objectif de la

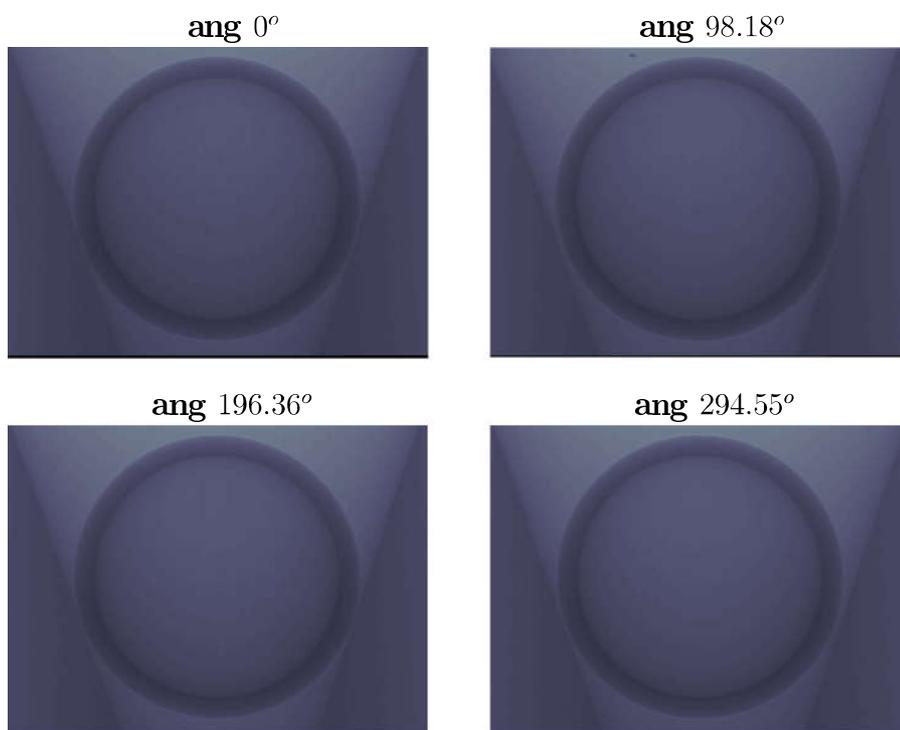


FIGURE 4.3 – Clichés d’un microballon de *CHSi* poli d’un diamètre extérieur de $2230 \mu\text{m}$.

4.3.2 Détection de contour

Une fois les clichés réalisés, une détection de contour va être effectuée.

Une méthode classique pour la détection de contour est l’application d’un filtre de Canny. Sans seuillage (cf. figure 4.4a p.97) ou avec seuillage (cf. figure 4.4b p.97), il est constaté que la détection par le filtre de Canny est bruitée et dépend fortement du contraste de l’image (lui-même lié au flux du générateur et au temps d’acquisition d’un cliché). Ce filtre seul n’est pas robuste.

Pour réaliser un filtrage plus robuste aux conditions expérimentales, deux informations sur le microballon radiographié vont être utilisées :

- la radiographie d’un microballon est approximativement un disque centré sur l’image ;
- les interfaces sont délimités par un point d’inflexion sur les profils de

mesure est la connaissance des surfaces qui n’est pas détenue a priori. Cette erreur est donc inhérente à la méthode s’il n’y a pas un moyen d’établir un lien entre les différents repères relatifs des clichés et un repère absolu pour l’ensemble des clichés (et du microballon).

la radiographie.

Sachant que les contours du microballon sont approximativement des cercles à peu près centrés sur l'image, un passage en coordonnées polaires est effectué.

Un filtre gaussien est alors appliqué dans ce domaine, permettant de diminuer le bruit de fond en fonction de l'écart-type σ de la gaussienne utilisée. Ce filtre peut induire un biais qui n'est pas quantifiable sans connaissance sur le bruit de mesure. En effet, le filtre gaussien apporte un flou l'image sans pour autant décaler les contours s'il n'y a pas de bruit. En cas de bruit important, le floutage peut décaler les contours et induire un biais sur la détection.

Sachant que le contour est déterminé par un point d'inflexion sur chaque profil, un filtre laplacien est appliqué afin d'amplifier le contraste (cf. figure 4.4c p.97), c'est-à-dire les variations autour des contours et rendre le point d'inflexion plus visible. De plus, ce filtrage est effectué en coordonnées polaires permettant d'amplifier les variations sur les profils passant par le centre de l'image.

Après filtrage, l'image est replacée dans les coordonnées cartésiennes. Un filtre de Canny, avec seuillage, donne alors les contours (cf. figure 4.4d p.97). Le filtre est ensuite plus robuste, comme il est possible de le constater sur des clichés du microballon avec un dispositif de radiographie différent (par exemple, un cliché tiré d'une tomographie X du même microballon que précédemment, cf. figure 4.5 p.98)

Grâce à la transformée de Hough de cercle, une première estimation du centre du microballon peut être trouvée, mais l'erreur est encore trop grande (la transformée de Hough n'offre pas une précision inférieure au pixel). Ensuite, sur chaque profil passant par le centre défini précédemment, un maximum d'amplitude est trouvé : il correspond au pic de contraste observé sur les contours. Comme le filtre gaussien et le filtre laplacien ne déplacent pas le point d'inflexion (si le bruit n'est pas trop important), il est possible de connaître les tangentes aux interfaces du microballon. Ce sont les points autour du maximum de chaque profil où les dérivées secondes changent de signe (cf. figure 4.6 p.101). Une fois les points d'inflexion trouvés, une méthode des moindres carrés permet d'estimer le cercle moyen que forment ces derniers.

Les points P définissant chaque contour sont alors trouvés pour chaque cliché (cf. figure 4.7 p.102).

Ces points sont alors utilisés par la méthode des moindres carrés pondérés présentée précédemment, pour estimer les coefficients des harmoniques sphériques (cf. les valeurs des coefficients des 3 premiers modes pour les différentes surfaces, tableau 4.1). Une hypothèse forte est que le centre de la surface intérieure est identique sur tous les clichés. Il est possible que le mode

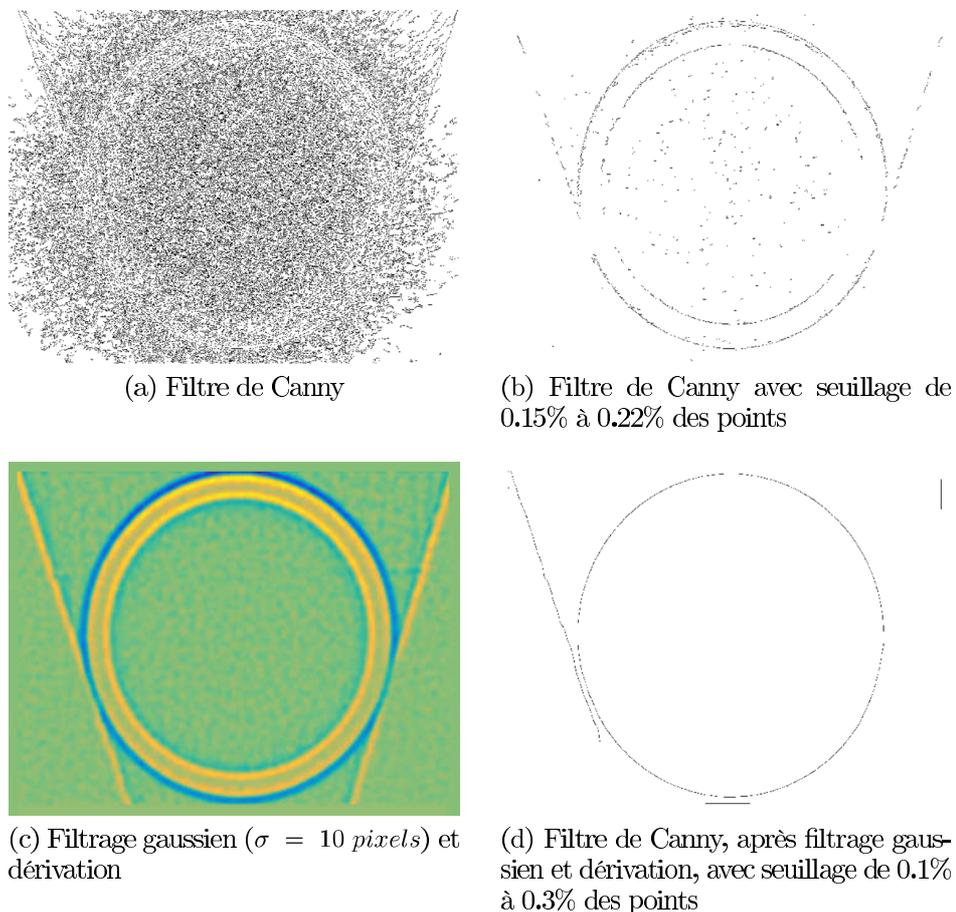


FIGURE 4.4 – Différents filtrages.

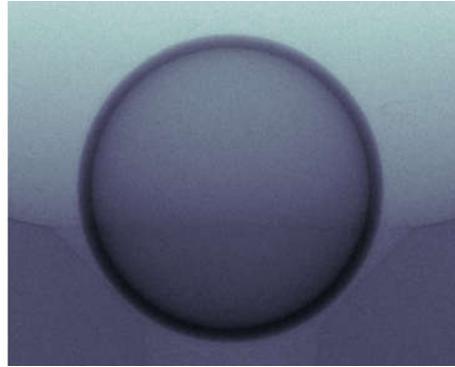
1 estimé soit non-nul, donc, la valeur obtenue est considérée comme un biais qui est corrigé.

Ces résultats caractérisent les surfaces et les épaisseurs du microballon, et il est possible de reconstruire la surface du microballon en 3D comme le montre la figure 4.8 page 103.

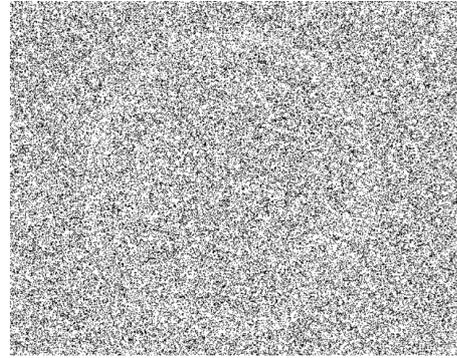
4.4 Validation de la méthode

Afin de valider la méthode présentée précédemment, des microballons sont caractérisés plusieurs fois. Les résultats des caractérisations sont comparés afin de valider qu'à un microballon correspond un seul résultat.

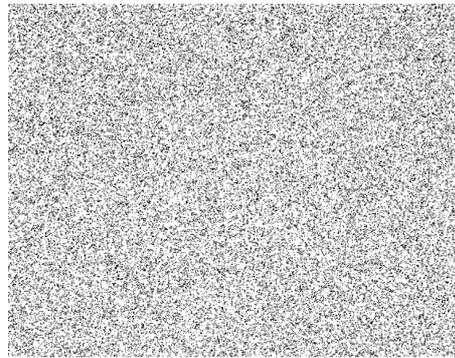
Un premier microballon de PAMS de $955,3 \mu\text{m}$ de rayon externe est ca-



(a) Cliche d'un microballon sur la tomographie



(b) Filtre de Canny



(c) Filtre de Canny avec seuillage de 0.15% à 0.22% des points



(d) Filtre de Canny, après filtrage gaussien et dérivation, avec seuillage de 0.1% à 0.3% des points

FIGURE 4.5 – Différents filtrages sur une image de tomographie (conditions expérimentales différentes de la radiographie).

ractérisé³. Les résultats de la caractérisations, pour deux caractérisations indépendantes (rotation "à la main" du microballon), sont données dans les tableaux qui suivent, par les coefficients des modes des harmoniques sphériques 4.2 p.99 et 4.3 p.100 et par leur puissance 4.4 p.100.

A partir de ces coefficients, une reconstruction des surfaces est effectuée permettant ainsi une comparaison des rayons moyens. Pour la surface extérieure, le rayon moyen calculé à la première caractérisation est de $953,61 \mu m$ et le rayon moyen calculé à la deuxième mesure est de $956,13 \mu m$. Pour la surface intérieure, le rayon moyen calculé à la première caractérisation est de $935,77 \mu m$ et le rayon moyen calculé à la deuxième mesure est de $937,61 \mu m$.

3. Le rayon a été obtenu au microscope télécentrique.

TABLE 4.1 – Exemple d'estimation de coefficients.

| l | m | extérieure | intérieure |
|---|----|------------|------------|
| 0 | 0 | +1578,137 | +1340,433 |
| 1 | -1 | -0,543 | +0 |
| 1 | 0 | +0,013 | +0 |
| 1 | 1 | -2,257 | +0 |
| 2 | -2 | +0,021 | +0,016 |
| 2 | -1 | +0,115 | +0,046 |
| 2 | 0 | -0,05 | -0,023 |
| 2 | 1 | +0,013 | +0,011 |
| 2 | 2 | +0,044 | +0,069 |

TABLE 4.2 – Coefficients estimés pour la mesure 1.

| l | m | extérieure | intérieure | épaisseur |
|---|----|------------|------------|-----------|
| 0 | 0 | +953,61 | +935,77 | +17,84 |
| 1 | -1 | +0,64 | +0 | -1,62 |
| 1 | 0 | +0,09 | +0 | -0,03 |
| 1 | 1 | -0,7 | +0 | +1,94 |
| 2 | -2 | +2,57 | +2,2 | +0,37 |
| 2 | -1 | -0,19 | -0,15 | -0,04 |
| 2 | 0 | +0,47 | +0,15 | +0,32 |
| 2 | 1 | -0,59 | -0,54 | -0,05 |
| 2 | 2 | +3,41 | +3,21 | -0,20 |

TABLE 4.3 – Coefficients estimés pour la mesure 2.

| l | m | extérieure | intérieure | épaisseur |
|---|----|------------|------------|-----------|
| 0 | 0 | +956,24 | +937,62 | +18,61 |
| 1 | -1 | -0,7 | +0 | +1,06 |
| 1 | 0 | +0,10 | +0 | -1,51 |
| 1 | 1 | -0,22 | +0 | -3,55 |
| 2 | -2 | -2,32 | -2,18 | -0,14 |
| 2 | -1 | -0,28 | -0,22 | -0,06 |
| 2 | 0 | -0,41 | -0,06 | -0,35 |
| 2 | 1 | -2,78 | -2,91 | +0,13 |
| 2 | 2 | -3,2 | -2,71 | -0,5 |

TABLE 4.4 – Puissance des modes estimés pour les mesures 1 et 2.

| l | extérieure 1 | extérieure 2 |
|---|--------------|--------------|
| 0 | 953,61 | 956,24 |
| 1 | 0,95 | 0,74 |
| 2 | 4,34 | 4,85 |
| l | intérieure 1 | intérieure 2 |
| 0 | 935,77 | 937,62 |
| 1 | 0 | 0 |
| 2 | 3,93 | 4,54 |
| l | épaisseur 1 | épaisseur 2 |
| 0 | 17,84 | 18,61 |
| 1 | 2,53 | 4 |
| 2 | 0,53 | 0,64 |

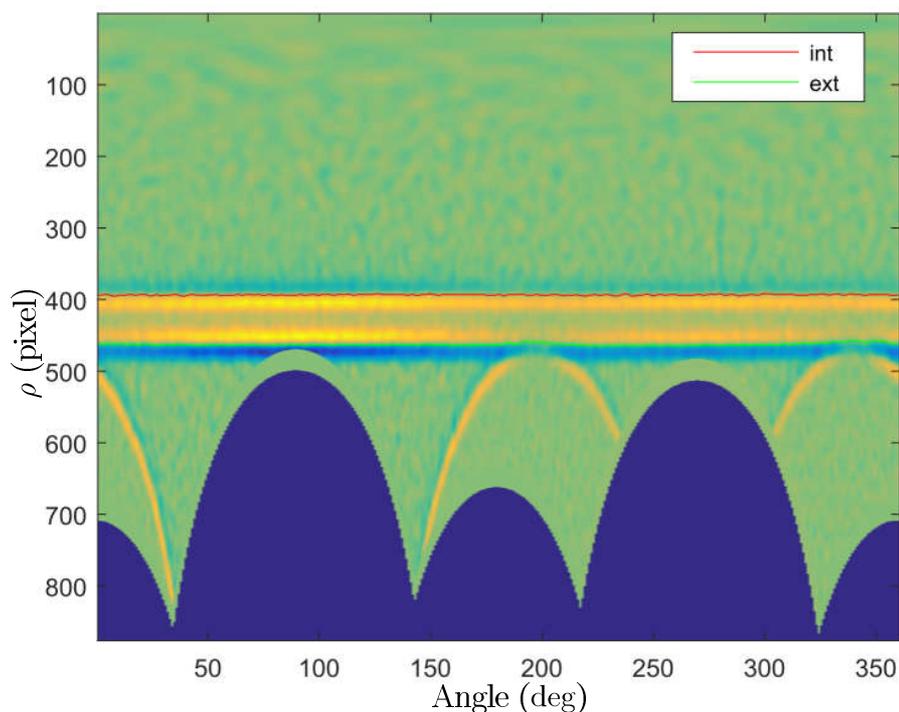


FIGURE 4.6 – Détection de contour du microballon en coordonnées polaires.

Dans l'exemple présenté, les résultats sont identiques à une variation de quelques micromètres. Les résultats obtenus, pour la caractérisation d'un microballon, sont uniques (à l'erreur de mesure près).

4.5 Métrologie empirique

La démarche du Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (*GUM : Guide to the expression of Uncertainty in Measurement*) [BIPM, 2008] est appliquée. Pour cela, un ensemble de paramètres doit être pris en compte, dont la répétabilité de la mesure. Les propriétés du matériel seront alors prises en compte pour obtenir l'incertitude de mesure.

A l'aide du *GUM* [BIPM, 2008], l'incertitude u pour N mesures est calculée.

Sur un cliché d'angle θ , la mesure de la distance ρ entre le centre du microballon et un point d'un contour est :

$$\rho(\theta, \varphi) = \bar{\rho}(\theta, \varphi) \pm U; \quad (4.13)$$

où $\bar{\rho}$ est le mesurande de la distance, et U est appelée incertitude élargie.

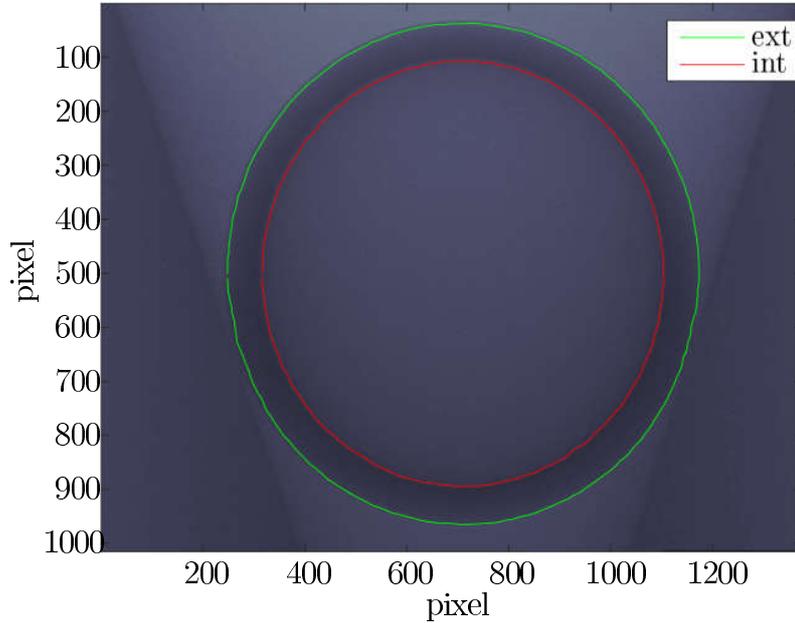


FIGURE 4.7 – Cliché d’un microballon de $CHSi$ poli d’un diamètre extérieur de $2230 \mu m$, avec les points détectés des contours extérieur et intérieur.

L’incertitude élargie U tient compte de paramètres très variés au travers d’un facteur k choisi en fonction du nombre de mesures effectuées et de la confiance accordée à ces mesures (cf. *GUM* [BIPM, 2008]), et de l’incertitude u .

Cette incertitude u s’exprime comme il suit :

$$u^2 = u^2(C_j) + u^2(C_q) + u^2(C_m) \quad (4.14)$$

où

- C_j est la correction de l’erreur de justesse,
- C_q est la correction erreur de quantification (la résolution de l’appareil),
- C_m est la correction liée à l’écart-type.

Erreur de justesse

L’erreur de justesse est obtenue en caractérisant un étalon de mesure. Si la caractérisation de cet étalon avec notre méthode donne des résultats dans la plage de l’incertitude de l’étalon, alors la justesse prise en compte est l’incertitude de l’étalon de mesure extraite de son certificat d’étalonnage.

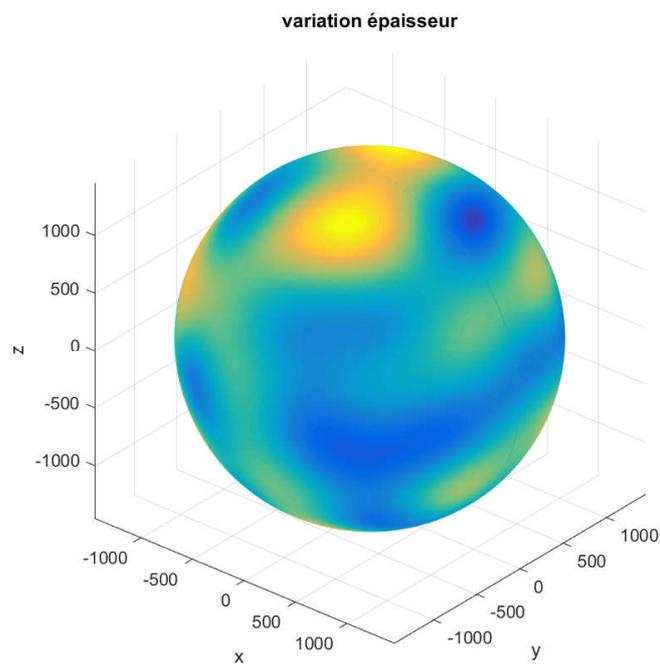


FIGURE 4.8 – Exemple de différence obtenue entre la surface extérieure par rapport à la surface intérieure, i.e. épaisseur.

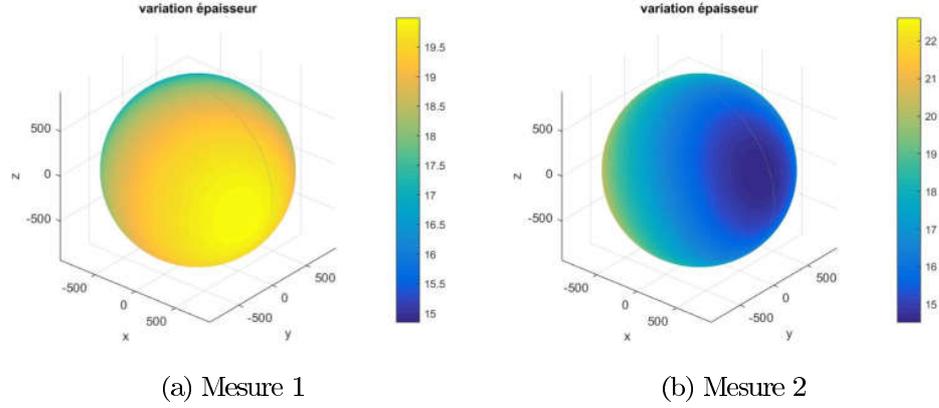


FIGURE 4.9 – Reconstructions de l'épaisseur du microballon PAMS de $955,3 \mu m$ de rayon interne.

Les étalons à disposition sont sphériques. L'incertitude de ces étalons est uniquement donnée pour le rayon. L'hypothèse que cette incertitude est identique pour l'ensemble des modes sera faite. L'étalon sélectionné est une bille saphir de $1002 \mu m \pm 0,5 \mu m$. La correction de l'erreur de justesse suivra une loi uniforme d'incertitude $0.5 \mu m$.

Erreur de quantification

La résolution de l'appareil est l'erreur induite par l'appareil de mesure. Dans le cas d'un capteur de rayons X, la taille des pixels, la distorsion de l'image, et la variation du grandissement entrent en compte dans ce coefficient.

Soit un espace (z, x, y) , avec z l'axe de propagation des rayons X. L'écran est un plan orthogonal à l'axe z placé en $z = z_{ec}$. Le microballon est un objet à peu près sphérique, de rayon moyen R , contenu dans un cube de côté $2R$ centré en $(0, 0, a)$, où a est la distance entre la source et le centre du microballon. Pour une hauteur $x = R$ identique, la différence de position sur l'écran entre la projection du point en $(-R, R, 0)$ et du point en $(R, R, 0)$ est alors :

$$\Delta x = R \left(\frac{z_{ec}}{a - R} - \frac{z_{ec}}{a + R} \right) \quad (4.15)$$

Pour $R = 1 \text{ mm}$, $a = 1 \text{ cm}$ et $z_{ec} = 40 \text{ cm}$, $\Delta x = 80 \mu m$. Cette erreur est de l'ordre 1,5 pixel ($55 \times 55 \mu m$) sur le capteur avec amplificateur de brillance, de plusieurs pixels ($9 \times 9 \mu m$) sur le capteur numérique. Le capteur avec amplificateur de brillance comporte environ 1000×1000 pixel. La distance du centre du microballon à un point sur le contour vaut environ la moitié des

pixels⁴. La déviation par pixel d_r est donc de $\frac{1,5}{500} = 0,003$ pixel, soit $d_r = 0,165 \mu m$. Cette déviation par pixel est considérée comme étant l'erreur de résolution de l'appareil la plus importante. Il est supposé que cette incertitude suit une loi uniforme, l'incertitude type est alors $\frac{d_r}{N \cdot 2\sqrt{3}} \mu m$.

Répétabilité

La métrologie est réalisée de façon empirique, c'est-à-dire que la démarche de prise de clichés et d'estimation des coefficients des harmoniques sphériques est répétée plusieurs fois, avec un microballon positionné aléatoirement entre chaque série de clichés⁵.

Soient x , la mesurande (la valeur physique) des coefficients de déformations en harmoniques sphériques d'une surface de microballon et ε , l'erreur commise à chaque mesure. Une mesure y est :

$$y = x + \varepsilon \quad (4.16)$$

Si ε est une valeur de la variable aléatoire E suivant une loi normale centrée, alors y est une valeur qui suit une loi normale d'espérance x .

Ce principe est appliqué pour la caractérisation aux rayons X d'un microballon. Sept mesures sont effectuées pour diminuer l'erreur (sous l'hypothèse que l'erreur suit une loi gaussienne) et les résultats sont comparés à l'espérance de y .

La position du microballon n'est pas connue, ainsi les différentes rotations que subit le microballon lors des différentes prises de mesures impliquent que les coefficients des harmoniques sphériques n'ont pas les mêmes valeurs. Afin de comparer les résultats des différentes prises de mesure, la puissance de chaque mode sera comparée et non chaque coefficient séparément. Pour un mode l des harmoniques sphériques, la puissance P_l est alors :

$$P_l = \sqrt{\sum_{m=0}^l \lambda_{l,m}^2} \quad (4.17)$$

et elle est invariante par rotation dans l'espace [Kazhdan *et al.*, 2003].

4. Lors de la radiographie le grandissement maximal est recherché, et le microballon est projeté sur l'ensemble de l'écran.

5. Dans les faits, le microballon est retiré du support avec un pinceau puis replacé dans son support en ayant fait tourner le pinceau. Le microballon roule et glisse sur la paroi du support pour atteindre une position stable. Un biais peut alors exister par le fait qu'il y a des positions de prédilection à la stabilité du microballon. Au vu de la qualité des microballons, qui sont des sphères légèrement déformées, il a été choisi de négliger ce biais, de toute façon difficilement mesurable, sauf après validation de la méthode.

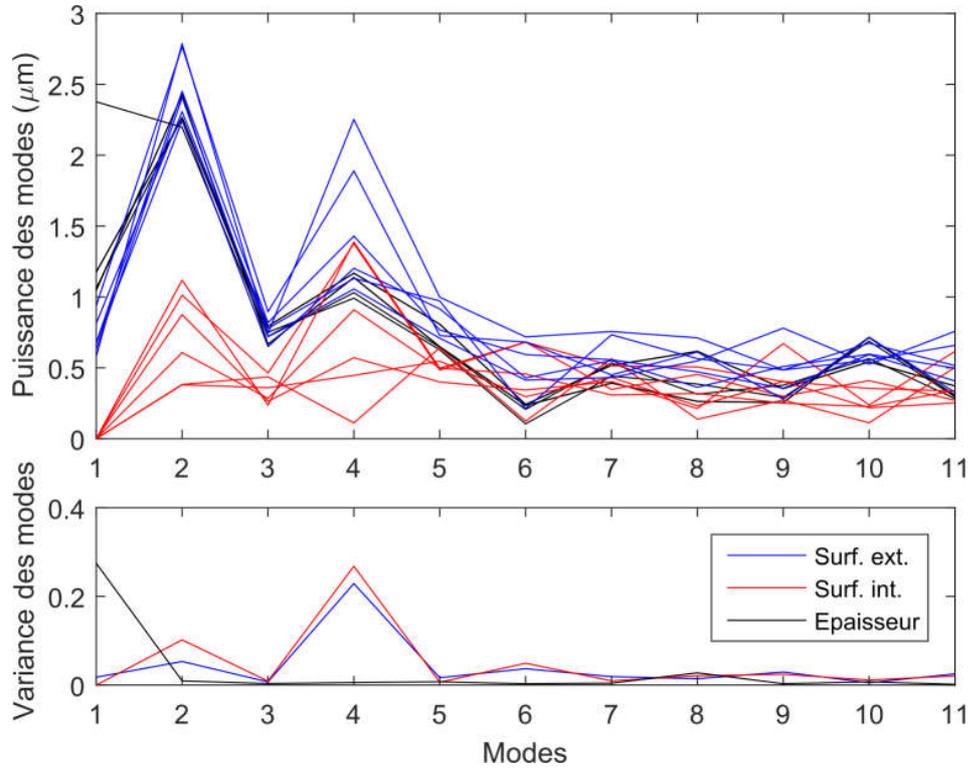


FIGURE 4.10 – Résultats comparés de 7 lots de mesures d’un microballon de *CHSi* poli d’un diamètre extérieure de $2230 \mu m$.

Les résultats de cette métrologie sont donnés à la figure 4.10 page 106, pour 7 premiers modes et 11 clichés à chaque mesure. La variance sur tout les modes est inférieure à $0.3 \mu m$.

Dans le cas des moindres carrés appliqués aux harmoniques sphériques, seule la variance entre les puissances des coefficients $\bar{\lambda}$ estimés est connue. A partir de la formule (4.13), ρ et $\bar{\rho}$ sont remplacés par leur expression dans les harmoniques sphériques. La relation suivante est obtenue :

$$\sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l \lambda_{l,m} Y_l^m(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l \bar{\lambda}_{l,m} Y_l^m(\theta, \varphi) + U. \quad (4.18)$$

Il vient alors :

$$U = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l \lambda_{l,m} Y_l^m(\theta, \varphi) - \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l \bar{\lambda}_{l,m} Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (4.19)$$

$$= \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l (\lambda_{l,m} - \bar{\lambda}_{l,m}) Y_l^m(\theta, \varphi). \quad (4.20)$$

Par répétabilité, la variance $var(\sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l \lambda_{l,m} - \bar{\lambda}_{l,m})$ est connue. C'est la variance obtenue pour un ensemble de caractérisations de N mesures, par exemple 7 pour cette mesure. Elle suit une loi normale, l'incertitude type est $\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$. Pour 7 mesures indépendante sur un microballon, le maximum d'écart-type pour l'ensemble des modes des harmoniques sphériques est de $\sqrt{0,500} \mu m$.

Calcul numérique

L'incertitude pour 7 mesures est alors (à voir selon le type incertitude choisie) :

$$u^2 = \frac{0,500}{7} + \left(\frac{0,165}{7 * 2\sqrt{3}} \right)^2 + 0,500^2 = 0,3215 \mu m.$$

Le facteur d'élargissement pour 7 mesures est $k = 2,45$ (cf. annexes *GUM*) et ainsi, l'incertitude élargie pour ce facteur d'élargissement est :

$$U = ku = 1,3891 \mu m.$$

Afin de réduire les incertitudes, des inter-comparaisons entre les différents appareils de mesures peuvent être effectuées, notamment avec la tomographie X. Cette approche n'est pas développée ici.

La mesure des coefficients des harmoniques sphériques est donnée avec une incertitude élargie de $1.4 \mu m$, ce qui est satisfaisant pour les caractéristiques recherchés de l'ordre du μm . Cette incertitude est l'incertitude maximale sur toutes les mesures des modes.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, une détection de contour est réalisée. Le contour recherché étant un point sur le profil dont la dérivée seconde s'annule, un filtre laplacien permet d'amplifier les variations de contraste de l'image, tout en conservant la position du point d'inflexion.

Une fois la détection de contour réalisée sur un ensemble de clichés, une estimation des coefficients des harmoniques sphériques permet de quantifier les modes de déformation des différentes surfaces qui forment le microballon.

Enfin, la métrologie de cette méthode est effectuée empiriquement. La variance calculée entre les différentes mesures est de l'ordre du micromètre pour des microballons de $1000 \mu m$ de rayon et de quelques micromètres de variation autour de ce rayon. Ceci permet de valider le modèle et la méthode.

Les déformations des surfaces du microballon sont caractérisées.

Conclusion

La caractérisation, et donc la connaissance, des éléments expérimentés sur le LMJ doit être la plus précise et la plus exhaustive possible pour permettre une interprétation éclairée des résultats des mesures issues des expériences menées sur l'installation laser.

Parmi ces éléments expérimentés, le microballon doit respecter des spécifications drastiques en termes de géométrie et de nature physico-chimique. La caractérisation de la nature physico-chimique du microballon n'est pas étudiée dans ces travaux de thèse. Pour s'assurer du respect des conditions géométriques, celui-ci subit un ensemble de caractérisations réalisées au moyen d'équipements aussi divers que les microscopes télécentrique, électronique à balayage, digital holographique ou à force atomique. Toutefois, seule l'imagerie par rayonnements X permet d'accéder, de manière non destructive, à des caractéristiques internes au microballon, telles que la rugosité de la surface interne ou les défauts de forme de cette surface. Le dispositif d'imagerie X mis en œuvre lors des travaux de thèse a été détaillé. En particulier, il s'agit du générateur à microfoyer de rayonnement X fournissant un faisceau polychromatique, des capteurs sensibles aux rayons X muni d'un amplificateur de brillance, et des supports de maintien des microballons.

Ce dispositif a permis d'obtenir des radiographies X des microballons étudiés. Or, de nombreux phénomènes optiques se produisent lors des interactions entre les rayons X et la matière. Outre le phénomène classique et visible du contraste d'absorption, de brusques variations de niveau de gris aux interfaces du microballon sont observables sur les clichés X. C'est la manifestation physique du phénomène de contraste de phase.

La littérature renseigne sur l'origine de ce contraste de phase. Trois phénomènes peuvent l'expliquer : la réfraction, la réfraction provoquant des interférences, la diffraction provoquant des interférences. Ainsi, l'absorption, la réfraction ou encore la diffraction sont les phénomènes à modéliser pour simuler un cliché X d'un microballon. Afin de respecter l'objectif d'une métrologie la plus précise possible, c'est l'optique physique électromagnétique qui a été choisie, au travers du développement réalisé par Born de l'équation

en intégrale du potentiel de diffusion.

Ce développement analytique est difficile à réaliser, dû à la différence d'ordres de grandeur entre les dimensions du microballon et les longueurs d'ondes des rayons X. La difficulté provient de l'intégration d'une fonction oscillante dans le volume du microballon. Un développement asymptotique spécifique aux intégrales de fonction oscillante a permis d'approximer cette intégrale, mais aucune solution évidente n'a été trouvée.

Une résolution numérique du développement de Born sur l'équation du potentiel de diffusion a été envisagée. Il a été observé que la fonction oscillante l'est peu sur une partie du domaine d'intégration. L'intégration a été scindée en deux : une zone où la fonction oscille peu et une zone où elle oscille beaucoup. La délimitation de ces deux zones est un paramètre clef de cette méthode d'intégration. Dans la partie oscillante, le cas général du développement asymptotique est effectué, et dans la partie peu oscillante, une méthode d'approximation numérique de type Monte Carlo est utilisée. Une forte dépendance des résultats au paramètre délimitant les deux zones d'intégration est constatée.

Face aux difficultés rencontrées lors de la résolution des équations, un modèle basé sur l'optique géométrique est élaboré. Les phénomènes optiques liés à la nature ondulatoire des rayons X sont donc négligés.

Ce modèle se base sur les lois bien connues de Snell-Descartes, Fresnel et Beer-Lambert. En considérant la physique du capteur à rayonnement X, le résultat du modèle est donné au travers de la puissance reçue sur le capteur. Les résultats des simulations sont comparables aux résultats expérimentaux. Il est aussi montré que la réflexion est négligeable dans le résultat final.

De plus l'optique géométrique donne des informations sur la position des interfaces sur les clichés. Ces informations sont utilisées pour le traitement de l'image réalisé sur les clichés radiographiques.

Enfin, l'estimation des déformations des surfaces du microballon et la métrologie associée est réalisée. Pour obtenir les déformations des surfaces du microballon, ces dernières sont décrites en harmoniques sphériques. L'information observée sur les images radiographiques est localisée et extraite à l'aide d'une méthode de détection de contour spécifique à la présence du contraste de phase. Ces données représentent des informations dimensionnelles des différentes surfaces de la capsule. Or ces dernières ne sont pas parfaitement lisses et concentriques entre elles. Une estimation spatiale de ces surfaces est définie par un algorithme combinant toutes les données dimensionnelles incomplètes (qui ne couvrent pas toute la surface), basé sur la méthode des moindres carrés. Les résultats issus de cette estimation forment les mesures des défauts de rugosité des surfaces et de l'épaisseur des capsules. Chaque mesure ayant une incertitude, la métrologie associée a été détaillée.

Les travaux de thèse qui ont été menés ont permis d'appréhender un phénomène physique qui était observable sur des clichés X de caractérisation courante dans la fabrication de cibles, mais peu répandu dans les domaines de caractérisation plus communs. L'absence de connaissance précise de son occurrence induisait alors la prise en compte d'incertitudes supplémentaires sur les mesures d'épaisseur des parois du microballon. Par la compréhension, la description physique et la modélisation du contraste de phase, la caractérisation des microballons s'est trouvée, dans un premier temps, confortée dans la méthode appliquée pour la mesure d'épaisseur de parois. D'autres apports ont ensuite pu être réalisés avec la possibilité d'identifier et de caractériser des défauts de forme internes au microballon. Néanmoins, l'absence de conclusion favorable à la résolution du développement de Born sur l'équation du potentiel de diffusion n'a pas permis d'atteindre d'autres objectifs ambitieux tels que l'évaluation de propriétés physico-chimique du microballon radiographié. En effet, l'indice de réfraction et la composition élémentaire des matériaux le composant sont autant de données obtenues de manière directe et non destructive sur l'échantillon expérimenté qui pourraient compléter les données prises en compte dans l'interprétation des mesures effectuées lors des expériences menées sur le LMJ. Une autre approche de la modélisation du phénomène du contraste de phase serait à étudier pour fournir ces éléments. Par ailleurs, cette approche pourrait être étayée par la prise d'images radiographiques au moyen d'un dispositif dont les caractéristiques (source de rayonnements, énergies, capteurs...) seraient adaptées et développées pour accentuer l'observation du phénomène de contraste de phase et en maîtriser son occurrence.

Bibliographie

- [Baisch et Bokelmann, 1998] BAISCH, S. et BOKELMANN, G. H. (1998). Spectral analysis with incomplete time series : an example from seismology. *Computers and Geosciences*.
- [Bearden, 1967] BEARDEN, J. (1967). X-ray wavelengths. *Reviews of Modern Physics*, 39(1):78.
- [BIPM, 2008] BIPM (2008). *Evaluation des données de mesure – Guide pour l’expression de l’incertitude de mesure*.
- [Born et Wolf, 1999] BORN, E. et WOLF, M. (1999). *Principles of optics, 7th expanded edition*. Cambridge university press.
- [Bronnikov, 1999a] BRONNIKOV, A. (1999a). Numerical solution of the identification problem for the attenuated radon transform. *Institute of physics science*.
- [Bronnikov, 1999b] BRONNIKOV, A. (1999b). Reconstruction formulas in phase-contrast tomography. *Optics communications*.
- [Bronnikov, 2001] BRONNIKOV, A. (2001). Theory of quantitative phase-contrast computed tomography. *Journal of the optical society of America A*.
- [Bronnikov, 2006] BRONNIKOV, A. (2006). Phase-contrast ct : Fundamental theorem and fast image reconstruction algorithms. *SPIE optics + photonics*.
- [Choux, 2006] CHOUX, A. (2006). *Commande optimale d’un système et conformation cryogénique d’une couche solide d’isotope de l’hydrogène dans un microballon par chauffage infrarouge*. Thèse de doctorat, Université de Bourgogne.
- [Choux et al., 2017] CHOUX, A., BARNOUIN, L., REVERDY, L. et THEOBALD, M. (2017). Characterization of microshells experimented on laser megajoule using x-ray tomography. *7th Industrial Computed Tomography, february 06–09, 2017, Leuven, Belgium*.

- [Choux *et al.*, 2018] CHOUX, A., BARNOUN, L., REVERDY, L. et THEOBALD, M. (2018). Characterization of laser megajoule targets by x-ray tomography. *Fusion Science and Technology*, pages 1–5.
- [Choux *et al.*, 2007] CHOUX, A., BUSVELLE, E., GAUTHIER, J. P. et PASCAL, G. (2007). Observer for a thick layer of solid deuterium-tritium using backlit optical shadowgraphy and interferometry. *Applied optics*, 46(33):8193–8201.
- [Choux *et al.*, 2011] CHOUX, A., GARROT, R., GEOFFRAY, G., HERMEREL, C., JEANNOT, L. et LEGAIE, O. (2011). Quantitative dimension measurement of laser target components using hamamatsu microfocus source. *Digital Industrial Radiology And Computed Tomography, june 20–22, 2011, Berlin, Germany*.
- [Cloesten *et al.*, 2000] CLOESTEN, P., LUDWIG, W., BARUCHEL, J., SCHLENKER, M. et GUIGAY, J.-P. (2000). La radiographie conquiert la phase! *Images de la physique*, pages 95–102.
- [Davis *et al.*, 1995] DAVIS, T., GAO, D., GUREYEV, T., STEVENSON, A. et WILKINS, S. (1995). Phase-contrast imaging of weakly absorbing materials using hard x-rays. *Nature*, 373(6515):595.
- [Fannjiang, 2010] FANNJIANG, A. (2010). An introduction to propagation, time reversal and imaging in random media.
- [Fresnel, 1818] FRESNEL, M. A. (1818). Mémoire sur la diffraction de la lumière.
- [Guillaume, 2006] GUILLAUME, M. (2006). *Analysis and synthesis of sound field*. Thèse de doctorat, Télécom ParisTech.
- [Haan *et al.*, 2007] HAAN, S., HERRMANN, M., SALMONSON, J., AMENDT, P., CALLAHAN, D., DITTRICH, T., EDWARDS, M., JONES, O., MARINAK, M., MUNRO, D. *et al.* (2007). Update on design simulations for nif ignition targets, and the rollup of all specifications into an error budget. *Eur. Phys. J. D*, 44:249–258.
- [Heaviside, 1893] HEAVISIDE (1893). *Electromagnetic theory, vol 1*. The electrician printing and publishing Co.
- [Henke *et al.*, 1993] HENKE, B. L., GULLIKSON, E. M. et DAVIS, J. C. (1993). X-ray interactions : photoabsorption, scattering, transmission, and reflection at e= 50-30,000 ev, z= 1-92. *Atomic data and nuclear data tables*, 54(2):181–342.
- [Iserles et Nørsett, 2005] ISERLES, A. et NØRSETT, S. P. (2005). Efficient quadrature of highly oscillatory integrals using derivatives. *In Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 461, pages 1383–1399. The Royal Society.

- [Jaenisch *et al.*, 2016] JAENISCH, G.-R., KOLKOORI, S. et BELLON, C. (2016). Quantitative simulation of back-scatter x-ray imaging and comparison to experiments. *World conference on non-destructive testing*.
- [Kasas, 1992] KASAS, S. (1992). La microscopie à force atomique dans la recherche en biologie.
- [Kazhdan *et al.*, 2003] KAZHDAN, M., FUNKHOUSER, T. et RUSINKIEWICZ, S. (2003). Rotation invariant spherical harmonic representation of 3 d shape descriptors. In *Symposium on geometry processing*, volume 6, pages 156–164.
- [Keegstra *et al.*, 1997] KEEGSTRA, P., BENNETT, C., SMOOT, G., GORSKI, K., HINSHAW, G. et TENORIO, L. (1997). Generalized spherical harmonics for all-sky polarization studies. *Astronomical Data Analysis Software and Systems*, 125.
- [Kozioziemski *et al.*, 2015] KOZIOZIEMSKI, B. J., KOCH, J. A., BARTHY, A. et MARTZ, H. E. (2015). Quantitative characterization of inertial confinement fusion capsules using phase contrast enhanced x-ray imaging. *Journal of applied physics*.
- [Lamy, 2003] LAMY, F. (2003). *Mesure par méthodes optiques de l'épaisseur et de la rugosité d'une couche de DT solide conformée dans un microballon*. Thèse de doctorat, Université de Bourgogne.
- [Langer *et al.*, 2008] LANGER, M., CLOESTENS, P., GUIGAY, J.-P. et F., P. (2008). Quantitative comparaison of direct phase retrieval algorithms in in-line phase tomography.
- [Larousse, 2018] LAROUSSE (2018). Encyclopédie larousse - optique. <http://www.larousse.fr/encyclopedie/divers/optique/75111>. [En ligne; accès le 13/05/2018].
- [Marquet *et al.*, 2005] MARQUET, P., RAPPAZ, B., MAGISTRETTI, P. J., CUCHE, E., EMERY, Y., COLOMB, T. et DEPEURSINGE, C. (2005). Digital holographic microscopy : a noninvasive contrast imaging technique allowing quantitative visualization of living cells with subwavelength axial accuracy. *Optics letters*, 30(5):468–470.
- [Maxwell, 1865] MAXWELL, J. C. (1865). A dynamic theory of the electromagnetic field. *Philosophical transactions royal society of London, volume 155*, pages 459–512.
- [Mayo *et al.*, 2003] MAYO, S., DAVIS, T., MILER, P., PAGANIN, D., WILKINS, S., GURUYEV, T., POGANY, A. et STEVENSON, A. (2003). X-ray phase-contrast microscopy and tomography. *Optical society of America*.

- [McQuillan *et al.*, 1997] MCQUILLAN, B., NIKROO, A., STEINMAN, D., ELSNER, F., CZECHOWICZ, D., HOPPE, M., SIXTUS, M. et MILLER, W. (1997). The pams/gdp process for production of icf target mandrels. *Fusion Technology*, 31(4):381–384.
- [Nallet, 2009] NALLET, F. (2009). Introduction à la diffusion aux petits angles. *Ecoles thématiques de la société française de la neutronique*.
- [Olver, 2006] OLVER, S. (2006). Moment-free numerical integration of highly oscillatory functions. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 26(2):213–227.
- [Olver, 2008] OLVER, S. (2008). *Numerical approximation of highly oscillatory integrals*. Thèse de doctorat, University of Cambridge.
- [Paqueton et Ruste, 2006] PAQUETON, H. et RUSTE, J. (2006). Microscopie électronique à balayage principe et équipement. *Techniques de l'ingénieur. Analyse et caractérisation*, (P865v2).
- [Robert *et al.*, 2008] ROBERT, P., REY-DEBOVE, J. et REY, A. (2008). *Le nouveau Petit Robert de la langue française - Lumière*.
- [Ruault, 1991] RUHAULT, P. A. (1991). *Radiologie industrielle, tome 1*.
- [Rudin, 2006] RUDIN, W. (2006). *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill.
- [Ruston, 2004] RUSTON, A. F. (2004). *Fredholm theory in Banach spaces*, volume 86. Cambridge University Press.
- [Sobol', 1967] SOBOLOV, I. M. (1967). On the distribution of points in a cube and the approximate evaluation of integrals. *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 7(4):784–802.
- [Spivack, 2012] SPIVACK, O. (2012). Wave propagation and scattering, part 3.
- [Šremr, 2012] ŠREMR, J. (2012). On differentiation of a lebesgue integral with respect to a parameter. *Math. Appl.(Brno)*, 1:91–116.
- [Stein, 1993] STEIN, E. (1993). *Harmonic analysis*. 1993.
- [Wang et Blackburn, 2000] WANG, J. et BLACKBURN, T. J. (2000). The aapm/rsna physics tutorial for residents : X-ray image intensifiers for fluoroscopy. *Radiographics*, 20(5):1471–1477.
- [Wilkins *et al.*, 1996] WILKINS, S., GUREYEV, T., GAO, D., POGANY, A. et STEVENSON, A. (1996). Phase-contrast imaging using polychromatic hard x-rays. *Letters to nature, volume 384*.

Annexe A

Changement de coordonnées

A.1 Calcul jacobienne $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \sigma, \theta)$ (ellipse)

Soient les coordonnées cartésiennes (x, y, z) , et deux distances a et d . Soient les coordonnées (ρ, σ, θ) avec :

$$\rho^2 = (x + a)^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{A.1})$$

$$\sigma^2 = (x - d)^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{A.2})$$

$$\theta = \arctan \frac{z}{y} \quad (\text{A.3})$$

Les dérivées partielles de ρ , σ et θ sont calculées :

$$\rho d\rho = (x + a)dx + ydy + zdz \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma d\sigma = (x - d)dx + ydy + zdz \quad (\text{A.5})$$

$$d\theta = \frac{\frac{1}{y}dz - \frac{z}{y^2}dy}{1 + \frac{z^2}{y^2}} = \frac{ydz - zdz}{y^2 + z^2} \quad (\text{A.6})$$

La jacobienne du changement de variable est :

$$\begin{aligned} d\theta \times d\rho \times d\sigma &= \frac{1}{\rho\sigma} \left[\frac{y}{y^2 + z^2}(x + a)y - \frac{y}{y^2 + z^2}(x - d)y \right. \\ &\quad \left. + \frac{z}{y^2 + z^2}(x + a)z - \frac{z}{y^2 + z^2}(x - d)z \right] dx \times dy \times dz \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{1}{\rho\sigma} \frac{y^2(a + d) + z^2(a + d)}{y^2 + z^2} dx \times dy \times dz, \quad (\text{A.8})$$

donc,

$$dx \times dy \times dz = \frac{\rho\sigma}{a + d} d\theta \times d\rho \times d\sigma. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Calcul jacobienne $(x, y, z) \rightarrow (\rho, \varphi, \theta)$ (sphérique)

Soient les coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Soient les coordonnées sphériques (ρ, θ, ϕ) avec $\phi \in [0, \pi]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$. Les relations suivantes existent :

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi \quad (\text{A.10})$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \phi \quad (\text{A.11})$$

$$z = \rho \cos \phi \quad (\text{A.12})$$

Les dérivées partielles de x , y et z sont calculées, ce qui donne le changement de variable :

$$\begin{aligned} dx \times dy \times dz &= \cos \phi \left(-\rho^2 \sin \phi \cos \phi \cos^2 \theta - \rho^2 \cos \phi \sin \phi \cos^2 \theta \right) \\ &\quad - \rho \sin \phi (\rho \sin^2 \phi \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \phi \sin^2 \theta) d\rho \times d\theta \times d\phi \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$= \left(-\rho^2 \theta \cos^2 \sin \phi - \rho^2 \sin \phi \sin^2 \phi \right) d\rho \times d\theta \times d\phi \quad (\text{A.14})$$

$$= -\rho^2 \sin \phi d\rho \times d\theta \times d\phi \quad (\text{A.15})$$

Annexe B

Validation expérimentale du calcul numérique par méthode de Monte Carlo

```
1 %% Initialisations
2 N=50; % Nombre de points de discrétisation
3 NT=20000; % (100000 par ex.) Nombre de points générés pour
4 % le calcul de l'intégrale en theta
5 R=1e-3; % [m] Rayon de la sphère
6 eps=5e-2; % [rad] (2e-1 par ex.) secteur angulaire
7 % où on utilise Monte Carlo : -eps..eps
8 k=1e10; % [m^{-1}]
9 zero=1e-8;
10 h = waitbar(0, 'Please wait...');
11 %% Vérification
12 [a,b]=meshgrid((1:N)/N,(1:N)/N);
13 Iterr=zeros(N,N);
14 Flerr=zeros(N,N);
15 F0err=zeros(N,N);
16 t0=eps-eps/10; % petit cone
17 t1=eps; % grand cone
18 Itheta=zeros(N,N);
19 terr_=linspace(t0,t1,NT);
20 theta_=linspace(0,eps,10*NT);
21 errmax=0;
22 prog=0;
23 for j=1:N^2
24     % Vérification du recollement
25     g=sqrt(4*a(j)+2*b(j)*(1-cos(terr_)));
26     Iterr(j)=trapz(terr_,exp(1i*k*R*g)./g)/R;
27     Flerr(j)=exp(1i*k*R*sqrt(4*a(j)+ ...
28     2*b(j)*(1-cos(t1))))/(1i*k*R.^2*b(j)*sin(t1));
```

```

29     F0err(j)=exp(1i*k*R*sqrt(4*a(j)+ ...
30     2*b(j)*(1-cos(t0))))/(1i*k*R.^2*b(j)*sin(t0));
31     %fprintf('Using trapz and Stein (%04d) = %f %f\n', ...
32     j, Iterr(j), F1err(j)-F0err(j))
33     if j/N^2>prog+0.02
34         prog=j/N^2;
35         waitbar(prog)
36     end
37     % calcul de l'intégrale (vérifier le dénominateur en R^2 !)
38     g=sqrt(4*a(j)+2*b(j)*(1-cos(theta_)));
39     F1=exp(1i*k*R*sqrt(4*a(j)+2*b(j)*(1-cos(pi-eps))))...
40     /(1i*k*R.^2*b(j)*sin(pi-eps));
41     F0=exp(1i*k*R*sqrt(4*a(j)+2*b(j)*(1-cos(eps))))...
42     /(1i*k*R.^2*b(j)*sin(eps));
43     Itheta(j)=2*trapz(theta_,exp(1i*k*R*g)./g)...
44     /R + F1 - F0;
45     %fprintf('j=%d, a=%f, b=%f, Itheta=%f — %f %f\n',...
46     j,a(j),b(j),Itheta(j),Fb,Fa)
47 end
48 Relerr=100*abs(F1err-F0err-Iterr)./abs(Iterr);
49 fprintf('Erreur relative maximale (NT=%d et eps=%g)= %5.3f%%\n'
    ,...
50 NT,eps,max(Relerr(:)))
51 close(h)
52 %% Plots
53 figure(1),set(1,'name','trapz vs Stein (relative error, %)') ,...
54 mesh(a,b,Relerr),view([120,20])
55 figure(2),set(2,'name','|Itheta|'),mesh(a,b,abs(Itheta)) ,...
56 view([120,20]),xlabel('a'),ylabel('b')
57 save('IntegraleEnTheta.mat','N','a','b','Relerr','Itheta')
58 %% Reste à fitter (ou se contenter d'interpolations ?) Itheta
59 x1=1./sqrt(4*a+2*b);
60 x2=exp(1i*k*R*x1);
61 x3=x1.*x2;
62 M=[ones(N^2,1),a(:),b(:),x1(:),x2(:),x3(:)];
63 p=M\Itheta(:);
64 figure(3),mesh(abs(reshape(M*p,N,N))),view([120,20])

```

Annexe C

Programme Python de modélisation par optique géométrique

```
1 #!/usr/bin/python
2 # -*- coding: utf8 -*-
3
4 from math import pi, asin
5 import numpy as np
6 import matplotlib.pyplot as plt
7
8 a= 10.0
9 d= 390.0
10 r = 1.0
11 # n = 1 - 1e-6 + 1e-9 i
12 n = 1.0-1e-6
13 # k = 1e-10m = 1e-7mm
14 mu = 4*pi*1.0e-9/1.0e-7
15
16 psimax = asin(n*r/a)
17 psi0in = np.linspace(0, psimax-1e-8, num=1000000)
18 psi0out = np.linspace(psimax, 1.2*psimax, num=200000)
19
20 psi2in = psi0in + 2*(np.arcsin(a*np.sin(psi0in)/(n*r))-np.arcsin(
    a*np.sin(psi0in)/(r)))
21
22 rho2in = a*np.sin(psi0in)/np.cos(psi2in)
23 y2in = rho2in + d*np.tan(psi2in)
24
25 y2out = (a+d)*np.tan(psi0out)
26 rr, = plt.plot(psi0in, y2in, label=u'Rayons réfractés')
27 rn, = plt.plot(psi0out, y2out, label=u'Rayons non réfractés')
```

```
28 ra, = plt.plot(psi0in, (a+d)*np.tan(psi0in)+2.0*d*np.arcsin(psi0in
    )*1.0e-6, label=u'Approximation')
29 plt.legend(handles=[rr, rn, ra])
30
31 abs2in = np.exp(-mu*np.sqrt(r**2-rho2in*np.cos(psi2in)/n))
32 abs2out = np.ones((psi0out.size))
33 w = np.hstack((abs2in, abs2out))
34 plt.figure()
35 plt.plot(w)
36
37 y2 = np.hstack((y2in, y2out))
38 plt.figure()
39 screen_res, dummy = np.histogram(y2, weights=w, bins=500)
40 plt.plot(screen_res)
41 plt.show()
```

Annexe D

Estimation des coefficients de la série de Fourier sur une période incomplète

Nous allons observer les problèmes existants lorsque le nombre de points décrivant le contour d'un cercle n'est pas suffisant pour remonter aux coefficients de la série de Fourier.

Nous nous plaçons dans les coordonnées polaire (ρ, θ) Soit un cercle centré de rayon $\rho = 1$. Soit une déformation $\varepsilon(\theta)$ de ce cercle. Soit les points $r(\theta)$ appartenant au cercle déformé :

$$r(\theta) = 1 + \varepsilon(\theta) \quad (\text{D.1})$$

où $\varepsilon(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\theta + b_i \sin i\theta$.

Dans la suite, les exemples numériques et les tracés seront donnés pour $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 0,5, b_8 = 1$ et le reste des coefficients nuls.

La fonction $\varepsilon(\theta)$ est discrétisée avec $\theta_j = \frac{j}{N}2\pi$, N le nombre de points, $j \in \mathbb{N}$ et $j \leq N^1$.

Nous allons maintenant estimer les coefficients de Fourier à partir de cette fonction discrétisée.

La série de Fourier est :

$$F(\theta_j) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos i\theta_j + b_i \sin i\theta_j \quad (\text{D.2})$$

(le mode 0 n'est pas estimé)

1. N assez grand pour respecter le théorème de Shannon, c'est-à-dire $N > 2 * 8$

Le vecteur C des coefficients de la série de Fourier jusqu'à $i = 3$ va être estimé par la méthode des moindres carrés :

$$C = (F^T F)^{-1} (F^T E) \quad (D.3)$$

où $E = [\varepsilon(\theta_0) \ \dots \ \varepsilon(\theta_j) \ \dots \ \varepsilon(\theta_N)]$

Les coefficients estimés sont égaux aux coefficients de $\varepsilon(\theta)$. Sur la figure D.1, $\varepsilon(\theta)$ et la fonction estimée à partir des coefficients calculés sont tracés.

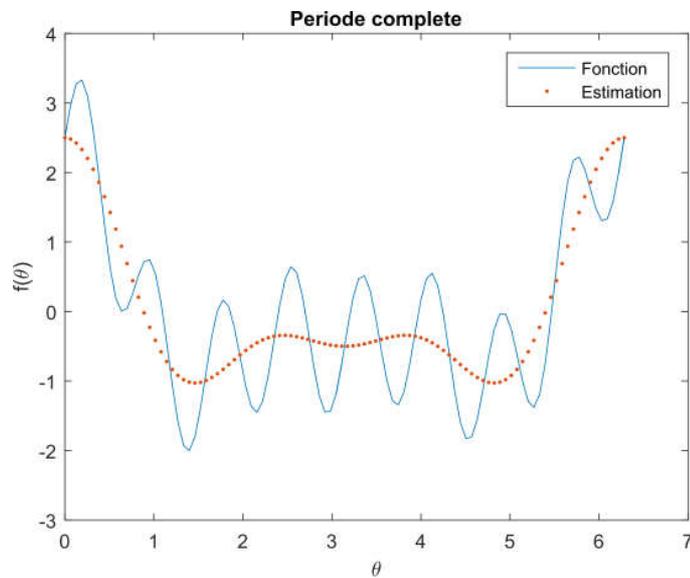


FIGURE D.1 – $\varepsilon(\theta)$ et son estimée, pour $\theta \in [0; 2\pi]$.

Maintenant prenons $\theta_j = \frac{j}{N} 1, 6\pi$. Les étapes présentées précédemment sont reconduites. Les coefficients estimés ne sont plus égaux aux coefficients de $\varepsilon(\theta)$. Sur la figure D.2, $\varepsilon(\theta)$ et la fonction estimée à partir des coefficients calculés sont tracés.

Sur la figure D.3, les fonctions estimées sont comparées dans le cas où θ_j est pris sur une période complète ou sur moins d'une période.

Une erreur entre les deux résultats est observée. En effet, les modes hauts ajoutent un bruit lors de l'estimation à partir de points décrivant moins d'une période. Pour continuer, consulter [Baisch et Bokelmann, 1998].

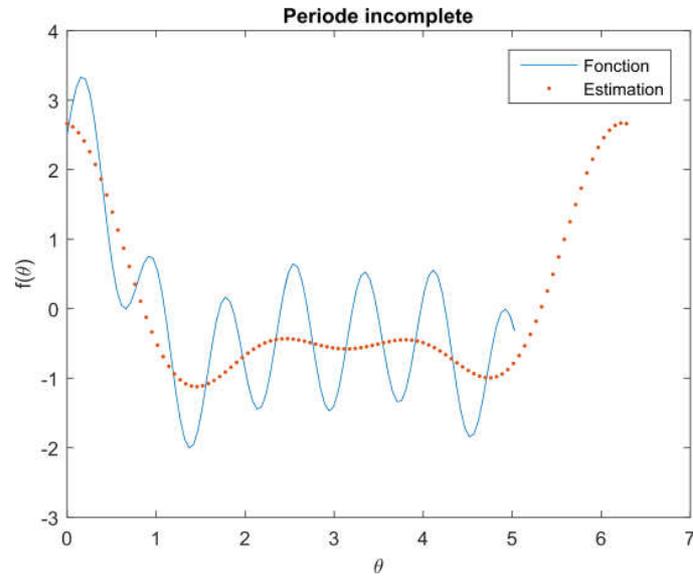


FIGURE D.2 – $\varepsilon(\theta)$ et son estimée, pour $\theta \in [0; 1, 6\pi]$.

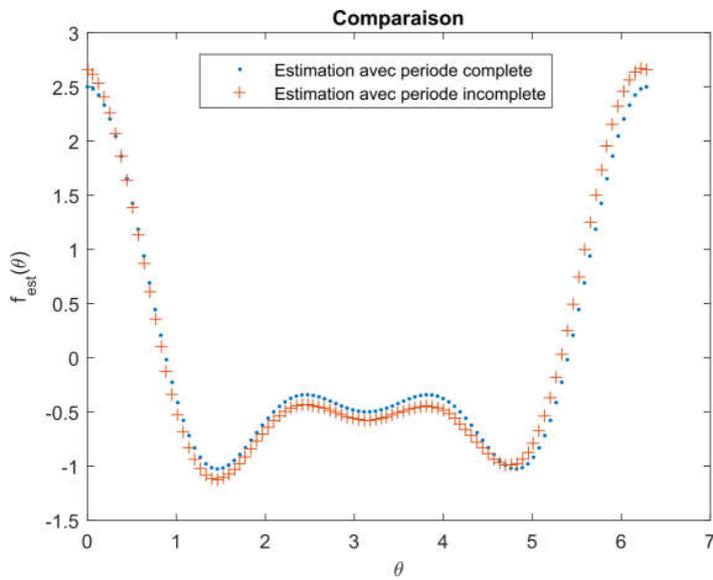


FIGURE D.3 – Différence entre les fonctions estimées sur une période complète et sur moins d'une période.

Annexe E

Recherche de l'indice de réfraction

```
1 %% Experimental
2
3 I = imread('Cliche');
4 profil=mean(I(48 5:515,:));
5 norm=mean(profil(end-100:end));
6 profil=profil/norm;
7 L=floor(length(profil)/2);
8 [~,M1]=max(profil(1:L));
9 [~,M2]=max(profil(L:end));
10 M2=M2+L;
11
12 demiprofil=profil(floor((M2-M1)/2+M1):end);
13
14 %% Simulation
15
16 a= 1e-2;
17 d= 4e-1;
18 r = 1444.4/2 * 1e-6;
19 % n = 1 - 1e-6 + 1e-9 i;
20 n = 1-8e-7;
21 % k = 1e-10 m = 1e-7mm
22 mu = 4*pi*1.30e-9/1.0e-10;
23 NPixel =length(demiprofil);
24
25 [z,y]=opticgeo(a,d,r,n,mu,NPixel);
26
27 coefMicronPixel = 15350;
28
29 %% Flou
30 Lf=25;
31 dz=linspace(-5e-7,5e-7,Lf);
32 sig=2e-7;
33 gaus=1/(sqrt(2*pi))*sig*exp(-dz.^2/sig^2);
```

```

34 zflou=conv(z,gaus,'valid');
35 Y=y(fix(Lf/2):fix(end-Lf/2)).*coefMicronPixel;
36 demiprofiltronc=demiprofil(fix(Lf/2):fix(end-Lf/2));
37
38 %% Plot sans optimisation
39
40 figure ; plot(demiprofil);
41 title('Profil moyen de microballon plein en PAMS');
42 xlabel('distance au centre (pixel)');
43 ylabel('niveau de gris normalisé');
44 hold on;plot(Y,zflou./zflou(end));
45 limite=tan(asin(r/a))*(d+a) *coefMicronPixel;
46
47 %% Recherche de l'indice de réfraction
48 n_0 = 8.0;
49 mu_0 = 1.3;
50 X0=[n_0, mu_0];
51 fun=@(X) erroropticgeoflou(a,d,r,1-X(1)*1e-7,4*pi*X(2)*1e-9/1.0e
-10,...
52 NPixel,gaus,demiprofiltronc,coefMicronPixel);
53 options = optimoptions(@fminunc,'Display','iter','Algorithm','
quasi-newton');
54 [X,fval]=fminunc(fun,X0,options);
55
56 Zest = opticgeo(a,d,r,1-X(1)*1e-7,4*pi*X(2)*1e-9/1.0e-10,NPixel);
57 Zest = conv(Zest,gaus,'valid');
58
59 %% Plot avec optimisation
60
61 figure ; plot(demiprofil);
62 title('Profil moyen de microballon plein en PAMS');
63 xlabel('distance au centre (pixel)');
64 ylabel('niveau de gris normalisé');
65 hold on ; plot(Y,Zest./Zest(end));
66
67 fprintf('indice de réfraction estimé : 1-%d\nmu estimé : %d \n',
...
68 X(1)*1e-7, 4*pi*X(2)*1e-9/1.0e-10);

```

Annexe F

Programme d'estimation des perturbations de surfaces

F.1 Fonction principale

```
1 % Ce programme estime les déformations des surfaces d'un
   % microballon.
2 % Les déformations sont estimées aux travers des coefficients de
   % Fourier donnés jusqu'à un ordre choisi.
3 % Les images sont chargées, les contours sont détectés, puis les
   % coefficients sont estimés.
4
5 clear all
6 %close all
7 clc
8 warning('off')
9
10 %% Initialisation
11 cheminprojet = genpath(pwd);
12 addpath(cheminprojet);
13 dir='E:\BallonsReels\2018\07_aout\Mesure1\';
14 nom=ls([dir,'C*final*']);
15 marge=5; % marge de l'image // défauts sur les bords du cliché
16 sig=12; % floutage gaussien
17 L=2; % modes retrouvés (inférieur ou égal au nombre d'image)
18 dia=1*2; % diamètre du microballon
19
20 %% Ouverture des images
21 NbImages=size(nom,1);
22 for j=1:NbImages
23     Cliches(:, :, j)=double(imread([dir,nom(j, :)]));
```

```

24     % image(:,:,j)=double(imread(['C:\Users\vince\Documents
    \2018\22_fevr\T13-6CH150317\' ,name(j,:) ]));
25 end
26
27 %% Detections de contour
28 PTSInt=[];
29 PTSExt=[];
30 T=[];
31 D=[];
32 EP=[];
33 num_error=[];
34 ang=0:2*pi/NbImages:2*pi-2*pi/NbImages; % angle de rotation
35
36 for j=1:1:size(nom,1)
37     try
38         fprintf('Traitement image n.%d/%d \r',j,size(nom,1))
39         [th,pti,pte] = ProfilExtr(Cliches(marge:end-marge,:,j),
    sig);
40         pause(0.2);
41         D=[D,ones(1,length(th)).*ang(j)];
42         T=[T,th];
43         PTSInt=[PTSInt,pti];
44         PTSExt=[PTSExt,pte];
45         EP=[EP,pte-pti];
46     catch
47         num_error=[num_error,j];
48         fprintf('Erreur sur image %d -> sautée \n',j);
49         continue
50     end
51 end
52
53 %% Coupage de 1 image en 2 images.
54 cond=(T>=pi);
55 T(cond)=mod(2*pi-T(cond),pi); % T sur pi (angle dans l'image)
56 D(cond)=mod(D(cond)+pi,2*pi); % D sur 2 pi (angle entre les
    images)
57
58 %% Estimation des coefficients
59 coef=dia./2./mean(PTSExt);%(micron)
60 EP=EP*coef;
61 PTSInt=PTSInt*coef;
62 PTSExt=PTSExt*coef;
63
64 [HSci,HSce,HScice]=McHs(PTSInt,PTSExt,EP,T,D,L); % attention
    entre D et T
65
66 %% Affichage
67 affichage(HSci,HSce,HScice);

```

```

68 fprintf('---Pts Ep---\nMoyenne = %f\nEcart type = %f\n',mean(EP),
        std(EP))
69
70 %% Sauvegarde
71 t = datetime('now','TimeZone','local','Format','d-MMM-y-HH-mm-ss'
        );
72 save(['resultats\save-',char(t)],'HSci','HScce','HScice','PTSExt',
        'PTSInt');
73
74 %% Relachement de mémoire
75 varlist = {'j','l','m','c','th','ph','pte','pti','ep'};
76 clear(varlist{:})

```

F.2 Fonction de détection des contours

```

1
2 function [Th,PtsInt,PtsExt]=ProfilExtr(Cliche,sig)
3 %% Cette fonction détecte les contours d'un microballon (2
4   contours, 1 épaisseur).
5 % Un filtre est appliqué (filtre gaussien), puis le centre est
6   trouvé par transformée de Hough d'un cercle.
7 % Le centre est re-estimé par moindre carré, puis les contours
8   sont détectés.
9 % Cliche : image matrice 2D
10 % sig : paramètre de filtrage
11
12 Zin=double(Cliche); % transforme le type de données de l'
13   image
14
15 %% Filtrage par Gaussienne et détection des zéros du Laplacien
16
17 [M,N]=size(Zin); % récupère les dimensions de l'image
18 N2=N/2; % récupère le centre de l'image (suivant
19   les colonnes)
20 M2=M/2; % récupère le centre de l'image (suivant
21   les lignes)
22 x=pi*((-N2):(N2-1))/N2; % x et y des angles de pi à -pi
23 y=pi*((-M2):(M2-1))/M2;
24 [X,Y]=meshgrid(x,y); % matrices X et Y des coordonnées x et y
25   de l'image
26
27 R=X.^2+Y.^2; % Création de la matrice des rayons2 pour chaque
28   points
29 clear X Y % Libération d'espace mémoire
30
31

```

```

23 Imres=fftshift(fft2(iffshift(Zin))); % Passage en coordonnées
    polaires
24
25 % filtrage par la gaussienne
26
27 Zout=Imres.*exp(-R*sig^2/2); % Image filtrée par la gaussienne de
    paramètre sig
28
29 % calcul du laplacien
30
31 Zout=Zout.*(-R); % Dérivation de Zout
32 Cliche=real(fftshift(iffshift(iffshift(Zout)))); % Retour en
    coordonnées cartésiennes
33 % clear R Zin % Libération d'espace mémoire
34
35 Cliche(1:floor(sig*3),:)=mean(Cliche(:));
36 Cliche(end-floor(sig*3):end,:)=mean(Cliche(:));
37 Cliche(:,1:floor(sig*3))=mean(Cliche(:));
38 Cliche(:,end-floor(sig*3):end)=mean(Cliche(:));
39
40 %figure; imagesc(Cliche);
41 %colormap bone;
42
43 %% liere estimation du centre // Cercle par méthode de Hough
44
45 BW=edge(Cliche,'canny',[0.1 0.3]);
46 %figure; imagesc(BW);
47
48 rr=min(size(Cliche))/2;
49 [centers,radii,~]=imfindcircles(BW,floor([rr-50 rr]),...
50     'Sensitivity',0.99);
51 if isempty(centers)==1
52 [centers,radii,~]=imfindcircles(BW,floor([rr-100 rr-51]),...
53     'Sensitivity',0.99);
54 end
55 if isempty(centers)==1
56 [centers,radii,~]=imfindcircles(BW,floor([rr-150 rr-101]),...
57     'Sensitivity',0.99);
58 end
59 if isempty(centers)==1
60 [centers,radii,~]=imfindcircles(BW,floor([rr-200 rr-151]),...
61     'Sensitivity',0.99);
62 end
63 if isempty(centers)==1
64 [centers,radii,~]=imfindcircles(BW,floor([rr-250 rr-201]),...
65     'Sensitivity',0.99);
66 end
67 centersStrong = centers(1,:);
68 radiiStrong = radii(1,:);

```

```

69
70 % metricStrong = metric(1,:);
71 % viscircles(centersStrong, radiiStrong, 'EdgeColor', 'b');
72
73
74 %% 2ieme estimation du centre // Moindres carré sur contours
75 % ConvStart=mean(ImageConv(:,1),2);
76 % figure;plot(ConvStart)
77 Lp=21;
78 Ld=360;
79 Profilm=CartToPol_vd(Cliche, centersStrong(1), centersStrong(2)
80     , ...
81     Ld*Lp, length(Cliche));
82 for t=1:Ld
83     Profils(:,t)=mean(Profilm(:,(t-1)*Lp+1:t*Lp),2);
84 end
85 % détection de contour
86 for xx=1:size(Profils,2)
87     [~,p]=max(Profils(1:floor(radiiStrong)+50,xx));
88     pmi=p;pma=p;
89     while Profils(pmi,xx)>0
90         pmi=pmi-1;
91     end
92     while Profils(pma,xx)>0
93         pma=pma+1;
94     end
95     rhoint(xx)=pmi;
96     rhoext(xx)=pma;
97 end
98
99 Th=deg2rad(0:Ld-1);
100 % figure;
101 % imagesc(Cliche); hold on
102 % xxe=rhoext.*cos(Th+pi)+centersStrong(1);
103 % yye=rhoext.*sin(Th+pi)+centersStrong(2);
104 % plot(xxe,yye,'g')
105 xxi=rhoint.*cos(Th+pi)+centersStrong(1);
106 yyi=rhoint.*sin(Th+pi)+centersStrong(2);
107 % plot(xxi,yyi,'r')
108
109
110 % Estimation du centre du contour intérieur
111 A=[2*xxi(:),2*yyi(:),ones(size(xxi(:)))];
112 b=xxi(:).^2+yyi(:).^2;
113 p=A\b;
114 xest=p(1);
115 yest=p(2);
116 % Rest=sqrt(xest^2+yest^2+p(3));

```

```

117
118 %% Détection de contour 2 (1 couche, 2 interfaces)
119
120 Profilsm=CartToPol_vd(Cliche ,xest ,yest ,...
121     Ld*Lp,length(Cliche));
122 for t=1:Ld
123 Profils2 (: , t)=mean(Profilsm (: ,(t-1)*Lp+1:t*Lp) ,2);
124 end
125
126 for xx=1:size(Profils2 ,2)
127 [~,p]=max(Profils2(1: floor(radiiStrong)+10,xx));
128 pmi=p;pma=p;
129 while Profils2(pmi,xx)>0
130     pmi=pmi-1;
131 end
132 while Profils2(pma,xx)>0
133     pma=pma+1;
134 end
135
136 % si 2ieme couche (1 min local et 1 max local +loin)
137
138 % pma2=pma;
139 % while Profils2(pma,xx)<0 % tant que nég
140 %     pma=pma+1;
141 % end
142 % while Profils2(pma,xx)>0 % tant que pos
143 %     pma=pma+1;
144 % end
145
146 rhoint(xx)=pmi;
147 rhoext(xx)=pma;
148
149 % rhomid(xx)=pma2; % si 2ieme couche
150 end
151
152 %% Affichage
153
154 % Th=deg2rad(0:Ld-1);
155 % figure ;
156 % imagesc(Zin); colormap('bone'); hold on
157 % xxe=rhoext.*cos(Th+pi)+xest ;
158 % yye=rhoext.*sin(Th+pi)+yest ;
159 % plot(xxe ,yye , 'g')
160 % xxi=rhoint.*cos(Th+pi)+xest ;
161 % yyi=rhoint.*sin(Th+pi)+yest ;
162 % plot(xxi ,yyi , 'r')
163
164 % xxm=rhomid.*cos(Th+pi)+xest ;
165 % yym=rhomid.*sin(Th+pi)+yest ;

```

```

166 % plot(xxm,yym,'y')
167 % figure;imagesc(Profils2);hold on;
168 % plot(1:size(Profils2,2),rhoint,'r')
169 % plot(1:size(Profils2,2),rhoext,'g')
170
171 %% 3e passe Verif centre
172 % xxi=rhoint.*cos(Th+pi)+xest;
173 % yyi=rhoint.*sin(Th+pi)+yest;
174 % A=[2*xxi(:),2*yyi(:),ones(size(xxi(:)))];
175 % b=xxi(:).^2+yyi(:).^2;
176 % p=A\b;
177 % xest2=p(1);
178 % yest2=p(2);
179 %% Rest=sqrt(xest^2+yest^2+p(3));
180 % fprintf(' centre 1 = [ %f %f ] \n centre 2 = [ %f %f ] \n
    centre 3 = [ %f %f ] \n',...
181 %         centersStrong(1),centersStrong(2),xest,yest,xest2,yest2);
182
183 %% RETOUR
184
185 PtsInt=rhoint;
186 PtsExt=rhoext;

```

F.3 Fonction d'estimation des moindres carrés

```

1
2 function [ HSci,HScce,HScice ] = McHs(PTSInt,PTSExt,EP,D,T,L)
3 % Moindre carrés sur Harmoniques Sphériques.
4 % T sur 2 pi
5 % D sur pi
6
7 N=numel(D);
8 %A=zeros(L*(L+1)+L+1,N);
9 for k=0:L
10     %q=k*(k+1)/2; % premiere valeur de la série.
11     q=k^2+1;
12     for m=k:k
13         A(q+m+k,:) = fct_HS(k,m,T(:),D(:));
14     end
15 end
16
17 Q = sparse(1:N,1:N,sin(D(:)),N,N);
18 % Q=eye(size(A,2));
19 HSci=(A*Q*A')^(-1)*(A*Q*PTSInt(:));
20 HScce=(A*Q*A')^(-1)*(A*Q*PTSExt(:));

```

```

21 HScice=(A*Q*A')^(-1)*(A*Q*EP(:));
22 % c=2*pi^2/N*A*Q*RHO(:); % plus rapide mais moins précis.
23
24
25 % correction du biais (le centre relatif est le centre de la
    surface interne)
26 biais=HSci(2:4);
27 HSci(2:4)=0;
28 HSce(2:4)=HSce(2:4)-biais;
29 HScice(2:4)=HScice(2:4)-biais;

```

Annexe G

Développement asymptotique multivariable

Un développement asymptotique [Stein, 1993, Olver, 2006, Iserles et Nørsett, 2005] peut être effectué dans les régions où la fonction est très oscillante. Ce développement peut être étendu au cas d'une intégrale triple; pour cela le cas multivariable présenté par Olver dans [Olver, 2008, section 2.6 Multivariate asymptotic expansion] sera utilisé.

Théorème 1 (Olver, théorème 2.6.1)

Soit Ω un volume avec frontière lisse par morceaux $\partial\Omega$, et soit $I_\varphi[f, \Omega] = \int_\Omega f(\varphi) e^{ik\varphi} d\varphi$. Si les conditions de non-résonance sont satisfaites, c'est-à-dire, si

- $\nabla\varphi(\mathbf{q}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \Omega$,
- $\nabla\varphi(\mathbf{q}) \times \mathbf{n}(\mathbf{q}) \neq 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \partial\Omega$, où $\mathbf{n}(\mathbf{q})$ dénote la normale à $\partial\Omega$ en \mathbf{q} ,

il est possible d'écrire :

$$I_\varphi[f, \Omega] \sim \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(-ik)^{(t+d)}} \Theta_t[f], \quad (\text{G.1})$$

où $\Theta_k[f] = \nabla \sigma_k \frac{\nabla \varphi}{\|\varphi\|^2}$ et $\sigma_1 = f \frac{\nabla \varphi}{\|\varphi\|^2}$.

Il faut vérifier les conditions de non-résonance pour pouvoir appliquer ce théorème. Soit le point \mathbf{q} est le point sur l'écran et soit la boule centrée en $(x_C, 0, z_C)$.

Dans la boule, la condition de non-résonance n'est pas satisfaite le long de l'axe du cône.

Preuve 1

Nous allons réaliser la démonstration en coordonnées cartésiennes. Nous pou-

vons développer le terme $U_0(\mathbf{q}')G(k, \mathbf{q}, \mathbf{q}')$ comme il suit :

$$U_0(\mathbf{q}')G(k, \mathbf{q}, \mathbf{q}') = \frac{e^{ik(|\mathbf{q}-\mathbf{q}'|+|\mathbf{q}'|)}}{|\mathbf{q}-\mathbf{q}'||\mathbf{q}'|} \quad (\text{G.2})$$

$$= f(\mathbf{q}, \mathbf{q}') e^{ik\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{q}')} \quad (\text{G.3})$$

$$= \frac{e^{ik\left(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}+\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}\right)}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}} \quad (\text{G.4})$$

avec

- $\mathbf{q} \neq \mathbf{q}'$, ce qui est vrai car les points \mathbf{q} appartiennent au plan écran et les points \mathbf{q}' appartiennent au microballon ;
- $\mathbf{q}' \neq \mathbf{0}$, ce qui est vrai car les points \mathbf{q}' appartenant au microballon ne contiennent pas l'origine du repère, la source.

Les dérivées partielles de G.4 sont :

$$\nabla_{x,y,z}g(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \begin{bmatrix} \frac{x'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}} - \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \\ \frac{y'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}} - \frac{y-y'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \\ \frac{z'}{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}} - \frac{z-z'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \end{bmatrix} \quad (\text{G.5})$$

En cherchant $(x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ tel que $\nabla_{x',y',z'}\varphi(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \mathbf{0}$, il vient immédiatement que :

$$\frac{\sqrt{(x')^2+(y')^2+(z')^2}}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} = \frac{x'}{x-x'} = \frac{y'}{y-y'} = \frac{z'}{z-z'} \quad (\text{G.6})$$

Alors,

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x \\ y' &= \alpha y \\ z' &= \alpha z \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$, une constante.

Les points où la dérivée s'annule appartiennent à la droite passant par l'origine et le point (x, y, z) ; il s'agit de la directrice du cône C . La condition de non-résonance est vraie en dehors de ces points.

Autour une petite région autour de la directrice du cône, l'intégrale ne varie pas lentement, il est donc supposé que le gradient de φ est égal à zéro sur ce volume d'intégration. Dans ce volume est réalisé l'approximation numérique.

Dans la boule privé du volume du cône, il y a deux situations :

i $B \setminus K$ est une boule trouée de part en part,

ii $B \setminus K$ est une boule décalottée par le cône.

Dans i), ∂K est composé par trois composantes :

A l'intersection de la surface du cône et de la sphère, un cône tronqué, B_1 et B_2 deux cercles déformés (calottes sphériques) ;

Or, $A \subset \partial C$ et $B_1, B_2 \subset S$.

De plus φ est la fonction qui définit l'ellipsoïde. Chaque ellipsoïde est définie par l'équation $\varphi = \text{constante}$. Le gradient de φ est la normale à l'ellipse. Donc, $\nabla\varphi \times \mathbf{n} = 0$ signifie que l'ellipse et la surface en question sont tangentes (car leur normales coïncident). Pour prouver que $\nabla\varphi \times \mathbf{n} \neq 0$, il faut donc prouver que l'ellipsoïde n'est jamais tangent à ∂K . Pour cela faire, il est supposé $y = 0$.

1. Pour A, le vertex du cône coïncide avec un des foyers de l'ellipse ; pour des raisons de convexité, les deux surfaces ne peuvent jamais être tangentes (l'ellipse est convexe, c'est-à-dire, si on prend une tangente à un point de l'ellipse, la ligne divise le plan en deux parties et l'ellipse est complètement contenue dans un de ces semi-plans. Si le cône et l'ellipse sont tangents, ceci signifierait que l'ellipse est toujours à l'intérieur du cône, ce qui n'est pas possible, car le sommet du cône est à l'intérieur de l'ellipse.
2. pour B_1 et B_2 , pour des raisons géométriques la condition est toujours valable sauf en deux points. En effet, la boule a un petit rayon devant la distance entre les foyers de l'ellipse. La surface de cette dernière tangente la boule pour des points à proximité de l'axe verticale, B_1 et B_2 sont loin de ces points.

Dans le cas ii), il n'y a qu'un point tangent pour la même raison que précédemment. L'un des deux points tangents est compris dans le volume du cône. Il existe des points où l'hypothèse n'est pas valide et le développement ne peut pas être appliqué.

Vincent DUTTO

LIS, Université de Toulon

Mesure des défauts de forme de microballons par imagerie X : exploitation du phénomène de contraste de phase

Depuis l'arrêt définitif des essais nucléaires, la Direction des Applications Militaires (DAM) du CEA s'appuie sur le triptyque modélisation physique - validation expérimentale - simulation numérique pour comprendre, prévoir et garantir le fonctionnement des armes nucléaires. Parmi les grands équipements contribuant à la validation des modèles physiques implémentés dans les logiciels de calcul, le Laser MegaJoule permet d'étudier expérimentalement des phénomènes de même nature que ceux intervenant dans les armes. La famille d'objets expérimentés sur cette installation est dénommée « microcibles laser ». Les microballons intégrés dans ces microcibles sont caractérisés par des techniques de radiographie X. Les brusques variations de niveau de gris observées sur les clichés X de microballons témoignent de la présence d'un phénomène de contraste de phase, contraste s'ajoutant au contraste d'absorption. L'information contenue dans ce phénomène est utilisée pour une détection de contours du microballon radiographié. Les points trouvés lors de la détection de contours sont alors utilisés par un algorithme d'estimation des défauts de formes des surfaces des microballons. Une étude paramétrique permet d'identifier le nombre de clichés nécessaire à l'estimation des défauts de forme en fonction du nombre de modes souhaités. L'incertitude de la méthode d'estimation est calculée permettant la caractérisation complète du microballon.

Mot clés : Rayons X, Modélisation, Electromagnétique, Optique géométrique.

Microshells form defects measurements by radiography using the phase contrast phenomenon

Since 1996, the CEA's Military Applications Division (DAM) guarantees the reliability and safety of French nuclear warheads without conducting any further nuclear test. It relies particularly on major facilities for validating the equations used to model the functioning of nuclear weapons. Among them, the Megajoule Laser (LMJ) allows studying experimentally, as "laboratory" measurements, representative phenomena gathering time-scale and space distribution of extreme temperature and pressure conditions. These experiments are led with millimetric objects named microshells. Before experimenting them, these microshells are characterized using X-rays technics. On the radiographies, one can observe straight gray level variations which are generated by the phase contrast phenomenon added to x-rays absorption contrast. Information included in this former contrast is used to sharply determine microshell's edges. The delimiting points of these edges are then integrated as input data to compute microshell's surface form defects. A study is also led to determine the optimized number of radiographies needed for estimating the search defect modes. Measurement uncertainty is finally evaluated, thus giving a complete microshell's characterization.

Keywords : X-rays, Modelization, Electromagnetic, Geometrical optics.