



HAL
open science

Analyse bayésienne de la gerbe d'éclats provoquée par l'explosion d'une bombe à fragmentation naturelle

Emeline Gayrard

► **To cite this version:**

Emeline Gayrard. Analyse bayésienne de la gerbe d'éclats provoquée par l'explosion d'une bombe à fragmentation naturelle. Probabilités [math.PR]. Université Clermont Auvergne [2017-2020], 2019. Français. NNT : 2019CLFAC039 . tel-02461049

HAL Id: tel-02461049

<https://theses.hal.science/tel-02461049>

Submitted on 30 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité : Probabilités, Statistique et Informatique

Par **Emeline GAYRARD**

**Analyse bayésienne de la gerbe d'éclats provoquée par l'explosion
d'une bombe à fragmentation naturelle.**

Soutenue publiquement le 14 novembre 2019 devant le jury présidé par Sergueï Dachian
et composé de :

Karim ABBAS	Professeur	Rapporteur
Pierre BONNET	Professeur	Directeur
Cédric CHAUVIÈRE	Maître de conférences	Directeur, Invité
Sergueï DACHIAN	Professeur	Rapporteur
Jean Lin DEQUIEDT	Ingénieur de Recherche CEA	Examinateur
Hacène DJELLOUT	Maître de conférences	Directeur, Invité
Stéphanie LÉGER	Maître de conférences	Examinatrice

Remerciements

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux à mes directeurs de thèse, Pierre Bonnet, Cédric Chauvière et Hacène Djellout. Je n'aurais jamais pu arriver au bout de ce travail sans eux. Je leur suis reconnaissante pour tout leur soutien, pour leur encadrement et la confiance qu'ils m'ont adressée. Je n'aurais pu souhaiter de meilleurs encadrants.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Karim Abbas et Sergueï Dachian pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de rapporter ma thèse. Je les remercie pour leur travail de relecture, leurs rapports encourageants et leur présence à ma soutenance. Jean Lin Dequiedt et Stéphanie Léger ont toute ma reconnaissance pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

J'adresse également mes remerciements au Commissariat à l'Énergie Atomique et aux énergies renouvelables (CEA) et au Centre d'Études de Gramat pour le financement de cette thèse. Je tiens à remercier en particulier Don Pierre Zappa, pour son aide et pour m'avoir acceptée en stage et m'avoir fait confiance pour la poursuite en thèse.

Je voudrais ensuite remercier chaleureusement les membres du laboratoire de mathématiques pour leur accueil. Je remercie le personnel du secrétariat, les bibliothécaires et les informaticiens qui ont toujours répondu à mes demandes. Je remercie en particulier Valérie Sourlier et Karine Darot pour le temps qu'elles m'ont consacré lors de l'organisation de mon voyage pour participer à la conférence ICIAM.

Je veux remercier les doctorants du laboratoire et en particulier Arthur, Fernando, Valentin et Franck sans qui l'ambiance du bureau 1109 serait bien triste. Je remercie aussi Angéline et Amina, qui m'ont soutenue moralement durant cette thèse.

Enfin, je tiens tout particulièrement à remercier mes parents, ma sœur et Loïc pour leur soutien durant ces trois dernières années. Je remercie aussi mes parents pour m'avoir toujours fait confiance et m'avoir aidée dans la poursuite de mes études. Et j'adresse encore un grand merci à ma famille qui a souhaité faire le déplacement pour assister à ma soutenance.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Problématique des effets de projection	6
2.1	Contexte général	6
2.2	Généralités sur les charges génératrices d'éclats	6
2.3	Expérience de caractérisation	9
2.4	Le formalisme JMEM	11
2.5	Méthodologie générale d'analyse de létalité d'un éclat	12
2.5.1	Balistique des éclats	12
2.5.2	Factorisation du problème	14
2.5.3	«Probabilité d'atteinte»	14
2.5.4	Pouvoir létal des éclats	15
2.5.5	Objectif de l'étude	16
3	Modèles pour la simulation de l'explosion d'une charge	18
3.1	Données expérimentales	19
3.1.1	Charge d'étude EFFECTS	19
3.1.2	Montage expérimental	19
3.1.3	Données obtenues	19
3.2	Modèle mécanique 1D	20
3.2.1	Le modèle de Mott	20
3.2.2	Modèle mécanique 1D	25
3.2.3	Résultats du modèle 1D	28
3.3	Modèle statistique pseudo-3D	29
4	Modélisation des données expérimentales avec les polynômes chaos	33
4.1	Introduction	33
4.2	Le développement en polynômes chaos	36
4.3	Calcul des coefficients des polynômes chaos	47

4.3.1	Relation fonctionnelle $Y = f(X)$ disponible	47
4.3.2	Relation fonctionnelle $Y = f(X)$ non disponible	50
4.4	Les résultats numériques	52
4.4.1	Test de Kolmogorov-Smirnov	52
4.4.2	Données provenant d'une fonction polynomiale	53
4.4.3	Données provenant d'une fonction non-polynomiale	56
4.4.4	Données expérimentales	58
5	Processus stochastiques	62
5.1	Définition	62
5.2	Exemples de processus	64
5.3	Représentation des masses des éclats	74
6	Indices de Sobol appliqués aux processus à accroissements indépendants	76
6.1	Indices de Sobol pour des variables aléatoires	77
6.2	Indices de Sobol pour des processus	91
6.2.1	Application des indices de Sobol au processus aléatoire	91
6.2.2	Équation de la balistique	101
6.2.3	Calcul des indices de Sobol pour la portée d'un éclat	105
6.2.4	Analyse des résultats	106
7	Indices de Sobol appliqués à des processus à accroissements non indépendants	112
8	Conclusion	124
A	Exemples d'application des indices de Sobol	127
A.1	Indices de Sobol pour des variables aléatoires	127
A.2	Indices de Sobol pour des processus	130

Introduction

La maîtrise des effets des armes est un enjeu majeur pour les forces armées dans le contexte actuel, tant en terme d'efficacité que d'évaluation des risques de dommages collatéraux. Malheureusement à l'heure actuelle, les outils de modélisation du fonctionnement des charges à éclats sont très limités. Le CEA de Gramat réalise donc des expérimentations qui participent à l'étude des effets de bombes à emploi général, dont les charges à fragmentation naturelle. Ces dernières présentent l'avantage d'un coût de fabrication faible associé à une résistance mécanique élevée.

Le principal effet attendu d'une charge de ce type est l'effet des éclats projetés, du fait de sa sphère d'efficacité qui englobe très largement celle du souffle et de l'effet thermique (les deux autres effets). Lors du fonctionnement d'une charge à fragmentation naturelle, la distribution spatiale des éclats générés varie d'une expérience à l'autre de par le caractère aléatoire du phénomène.

La masse des éclats, ainsi que leur nombre, sont des paramètres du système d'équations pour le vol des éclats. Ils nous permettent d'estimer la probabilité d'impact à une distance donnée (ou de non impact dans le cadre de la sécurité pyrotechnique) ainsi que la probabilité de létalité par effets d'éclats. Il est par conséquent important de maîtriser la distribution de ces paramètres. Or actuellement la représentation des gerbes d'éclats est réalisée avec le formalisme JMEM (référence internationale au sein de la communauté de défense) qui nécessite la réalisation d'essais coûteux pour calculer le nombre moyen et la masse moyenne d'un éclat pour chaque classe de masses considérée. Ces valeurs sont déterminées à partir de données provenant d'un nombre faible d'expériences (entre trois et cinq au maximum).

L'objectif, durant cette thèse, a donc été d'obtenir une méthode d'analyse statistique de la distribution en masses des éclats générés lors de l'explosion d'une bombe à fragmentation naturelle.

Dans la partie 2, avant de décrire l'analyse réalisée, nous commençons donc par présenter plus précisément la problématique des effets de projections qui nous a conduit à réaliser cette étude.

La partie 3 concerne ensuite les données utilisées. Ces données sont obtenues lors d'expériences réelles ou numériques. Dans le cadre de cette étude, on dispose des résultats de trois expériences d'explosion de cylindres. Pour réaliser notre analyse statistique, ce nombre est très faible mais d'autres expériences ne pourront être réalisées étant donné leur coût. De plus, les résultats obtenus durant ces expériences ne sont que partiels, puisque de multiples fragments ne peuvent pas être récupérés. Il nous faut donc aussi des données «numériques», c'est-à-dire des données générées par un programme, ou modèle, qui simule cette explosion. Un modèle «1D», basé sur les connaissances mécaniques du phénomène, est mis à disposition par le CEA. Ce modèle génère des masses d'éclats provenant de la fragmentation d'un anneau en expansion inertielle. Pour générer des données à partir d'un cylindre dont la longueur correspond à celle du cylindre expérimental, on pourrait tout simplement utiliser le modèle numérique existant en fixant l'épaisseur de l'anneau égale à cette longueur. Mais la distribution des masses ainsi obtenues ne serait pas réaliste. Ce modèle n'est valable que pour des anneaux d'épaisseur faible. Pour disposer de données plus adaptées, un nouveau modèle numérique, dit «pseudo-3D», est établi. Ce modèle de génération de données statistiques a été créé à partir du premier modèle. Les éclats qu'il génère ont une distribution qui, du point de vue statistique, est représentative de celle pouvant être observée lors de l'explosion d'une charge. Notre méthode d'analyse de l'explosion d'une bombe à fragmentation naturelle peut alors être réalisée à partir de ces données.

En partie 4, une première étude statistique de l'échantillon de données obtenu est présentée. Les méthodes de modélisation classiques (utilisation d'une loi de probabilité théorique, estimation non paramétrique de la distribution) ont été utilisées dans un premier temps. Ces méthodes ne donnant pas de résultats satisfaisants, une autre solution a dû être recherchée. Nous avons alors développé une méthode utilisant les polynômes chaos, définis comme orthogonaux par rapport à une fonction «poids» qui correspond à une densité de probabilité. Comme pour les méthodes classiques, des paramètres doivent être estimés pour modéliser la distribution des données, mais l'avantage est que cette méthode donne plus de choix de modélisation. De plus, la variable aléatoire obtenue, qui ici représente la masse des éclats, permet de générer plus facilement un échantillon de données qu'une autre variable dont la loi de probabilité serait théorique mais plus complexe.

En partie 5, l'application des processus stochastiques à notre échantillon de données est présentée. Ils ont, après la première analyse, été choisis à la place des variables aléatoires pour prendre en compte des corrélations entre les éclats d'une

même charge. En effet, un processus est une famille de variables aléatoires indexées et corrélées.

Dans la partie 6, tout comme la masse des éclats, les paramètres dont dépend la portée d'un éclat sont modélisés par des processus stochastiques. Ces paramètres sont l'angle d'éjection initial, la vitesse initiale et la vitesse limite de chute de l'éclat qui est notamment fonction de la masse. Une analyse de sensibilité est ensuite réalisée pour quantifier leur influence sur la portée. Différentes méthodes d'analyse de sensibilité existent, dont l'utilisation des valeurs de Shapley [59]. Nous avons choisi les indices de Sobol, qui sont le plus couramment utilisés. Ils ont pour avantage de donner une information sur l'influence globale des paramètres, ainsi que de leurs différentes interactions, sur la portée. Ces indices sont appliqués aux modèles de la forme

$$Y = f(X_1, \dots, X_p),$$

avec Y une variable aléatoire de sortie qui est fonction de variables aléatoires d'entrée (X_1, \dots, X_p) indépendantes. Ils donnent donc l'influence sur Y des différentes variables d'entrée. Dans notre étude, la portée de l'éclat représente la sortie et ses paramètres les entrées, mais ce sont des processus et non des variables aléatoires. Les indices de Sobol sont alors adaptés ici aux processus stochastiques de façon à obtenir l'information souhaitée sur la différence de portée entre deux éclats d'un même cylindre. Pour l'instant, les différents paramètres d'entrée ne peuvent être représentés que par des processus à accroissements indépendants (voir propriétés 5.1 p.64), ce qui est dû au fait que les indices de Sobol sont initialement utilisés que pour des variables aléatoires d'entrée indépendantes.

Pour finir, dans la partie 7, nous réalisons donc un état de l'art des différentes méthodes déjà existantes d'analyse de sensibilité pour des modèles dont les variables d'entrées sont dépendantes. De telles méthodes, si elles sont efficaces, pourront être adaptées à des processus dont les accroissements ne sont pas indépendants.

Problématique des effets de projection

2.1 Contexte général

La maîtrise des effets des munitions est aujourd'hui un enjeu majeur pour la fonction « létalité », tant en termes d'efficacité que d'évaluation des risques de dommages collatéraux. Depuis de nombreuses années, la communauté de défense cherche à maîtriser les effets d'une charge militaire conventionnelle. Il ne s'agit pas seulement d'analyser son efficacité. L'analyse fine des risques de dommages collatéraux est aussi très importante pour diminuer les risques sur les non-combattants durant une opération, car désormais les belligérants peuvent se dissimuler au milieu des civils.

Les effets d'une munition sont les effets thermiques, le souffle et les éclats. Ces derniers sont les plus importants puisque leur sphère d'efficacité, de rayon supérieur au millier de mètres, englobe très largement celle des deux autres. Depuis la Seconde Guerre mondiale, la modélisation des projections primaires issues de la fragmentation de l'enveloppe d'une charge militaire fait l'objet de nombreux travaux. C'est un sujet encore ouvert à ce jour car les industriels et les opérationnels ont besoin de modélisations leur permettant de faire des évaluations rapides. A l'heure actuelle, les outils d'évaluation des performances des charges génératrices d'éclats sont très limités pour ce qui relève de la fragmentation. Ce travail de recherche s'inscrit dans cette démarche de modélisation de la fragmentation.

2.2 Généralités sur les charges génératrices d'éclats

Une charge génératrice d'éclats est constituée en général de :

- un chargement explosif;

-
- un corps, aussi appelé enveloppe génératrice d'éclats ;
 - un dispositif de mise à feu (DSA : dispositif de sécurité et d'armement).

De façon générale, une charge génératrice d'éclats est de forme globalement cylindrique. Le corps de la charge est rempli d'explosif. Généralement, une cavité dans l'explosif est aménagée pour recevoir l'amorce détonateur du DSA.

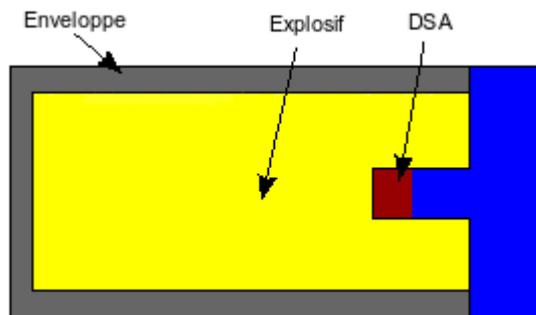


FIGURE 2.1 – Schéma de principe d'une charge à éclats

Le fonctionnement d'une telle charge peut être décomposé en plusieurs phases :

- mise en détonation du chargement explosif ;
- mise en vitesse et expansion de l'enveloppe sous l'effet de l'onde de détonation ;
- rupture de l'enveloppe métallique et formation des éclats.

Après formation des éclats, les deux phases restantes sont :

- la balistique des éclats dans l'air (« vol ») ;
- la balistique terminale des éclats (« impact »).

Lorsque l'explosif est initié par l'amorce détonateur du DSA, une onde de détonation se propage dans l'explosif. Une onde de choc précède alors les réactions chimiques qui transforment l'explosif solide en gaz de détonation. Des pressions élevées sont alors générées. Ces gaz communiquent de l'énergie cinétique à l'enveloppe qui, dans les premiers instants du choc, oppose une résistance essentiellement inertielle. Sous l'effet de la pression des gaz de détonation, l'enveloppe gonfle jusqu'à la rupture, des éclats sont alors générés.

Lorsque l'enveloppe est lisse, l'apparition des lignes de rupture n'est pas contrôlée, on dit alors que la fragmentation est naturelle. Dans ce cas, on considère que le phénomène est aléatoire ; l'écart-type de la distribution en taille des éclats est élevé. Ceci est problématique en termes d'efficacité, car le nombre d'éclats performants

peut être insuffisant. Toutefois, ce type de charges présente l'avantage d'un coût de fabrication faible associé à une résistance mécanique élevée. Pour pallier ce manque d'efficacité, on recourt à la fragmentation dite contrôlée. Les méthodes existantes de contrôle de la fragmentation visent à diminuer les variations entre les masses des éclats et à augmenter leur efficacité. Différentes technologies sont présentées en figure 2.3. Dans le cas de petites charges militaires, on peut également recourir à la technologie d'éclats pré-fragmentés telle qu'en figure 2.2.



FIGURE 2.2 – Les charges à éclats préformés

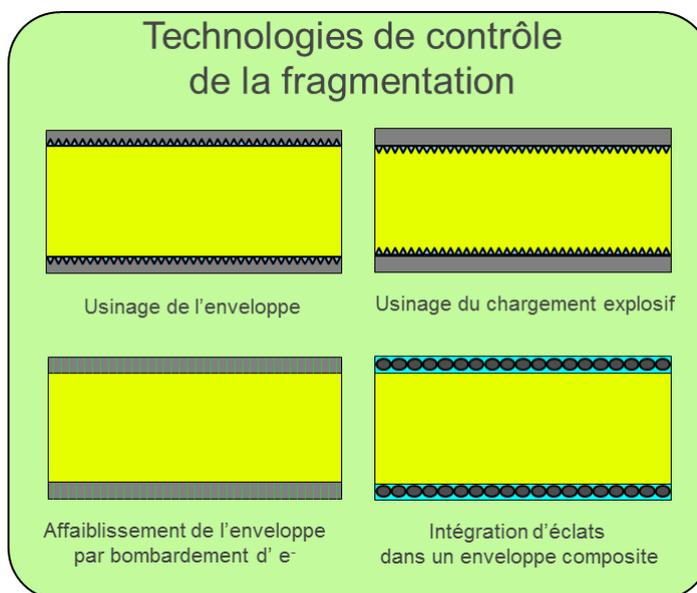


FIGURE 2.3 – Les technologies de contrôle de la fragmentation

Les éclats générés par l'explosion d'une charge militaire sont quelques centaines, voire plusieurs dizaines de milliers dans le cas d'une bombe d'aviation. Lorsqu'une

charge à éclats est mise à feu, les éclats qu'elle projette sont de masses et de vitesses différentes, plus particulièrement dans le cas de la fragmentation naturelle.

Actuellement, bien que des actions soient engagées, la modélisation physique exhaustive de la fragmentation d'une charge n'est pas encore aboutie. En outre, le temps de restitution de telles simulations serait très long et devrait être précédé de l'étude approfondie des matériaux. A ce jour, la caractérisation des charges à éclats est réalisée expérimentalement en attendant de disposer d'expériences numériques.

La fragmentation naturelle présente un aspect aléatoire du fait de la présence de défauts d'élaboration de la charge, ou d'inhomogénéités des matériaux. Pour déterminer l'efficacité d'une munition, on cherche à caractériser la répartition en masse et en vitesse des éclats. L'estimation de la distribution des éclats en termes de masse et de vitesse est appelée distribution spatiale des éclats ou encore gerbe d'éclats. Différents formalismes sont employés, dont le formalisme JMEM qui sera détaillé plus tard.



FIGURE 2.4 – Charges à fragmentation naturelle (De gauche à droite : Missile Hellfire, Obus LU211 155mm "Murat", Massive Ordnance Penetrator (Masse 11.5 t))

2.3 Expérience de caractérisation

Il s'agit d'une caractérisation entièrement expérimentale. Environ 250 sondes chronométriques, des caméras ultra-rapides avec des flashes et des capteurs de pression sont nécessaires pour la validation d'un test. On constitue une demi-arène de récupération des éclats au centre de laquelle on positionne la munition et on procède à sa mise à feu (voir figure 2.5). Ainsi on ne récupère pour chaque secteur angulaire qu'une portion des éclats. Le STANAG 4589 préconise trois à cinq réalisations. Le nombre moyen et la masse moyenne des matrices JMEM correspondent aux moyennes empiriques calculées avec les résultats finaux de l'expérience.

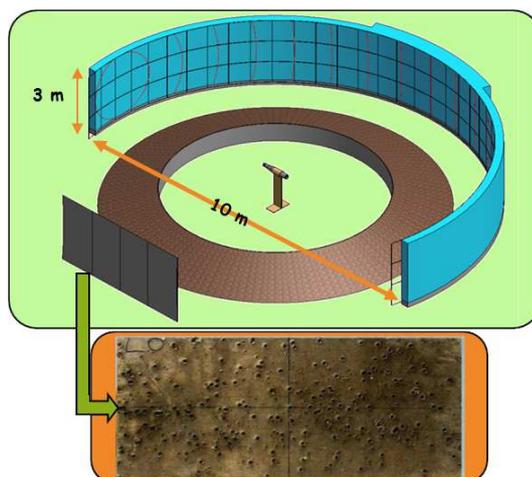


FIGURE 2.5 – L'expérience réalisée pour la construction des gerbes d'éclats

En dehors des incertitudes induites par le format JMEM lui-même, il en demeure d'autres :

- La dispersion naturelle entre deux réalisations d'une même expérience comporte un phénomène aléatoire qui est la fragmentation naturelle ;
- La dispersion des paramètres d'élaboration de la munition ;
- La projection des données expérimentales sur la famille de classes de masses.

La caractérisation des gerbes d'éclats repose donc sur la récupération d'éclats et la mesure de leur vitesse (définie par le responsable de la construction du modèle) dans les différents secteurs angulaires. La récupération des éclats se fait pour chaque portion de secteur angulaire représentée par un bloc de l'arène (figure 2.5). Chaque éclat est pesé afin de déterminer leur distribution suivant les classes de masses définies. Ensuite, pour connaître le nombre total d'éclats dans chaque secteur (une portion seulement des éclats est récupérée), un facteur de correction géométrique est appliqué après avoir déterminé pour chaque secteur la fraction d'angle solide correspondant aux blocs. On devine aisément que le coût de réalisation de tels essais est très élevé.

La caractérisation expérimentale est difficile dans la mesure où elle nécessite un grand nombre d'expériences. Un tir ayant un coût très élevé, il est compliqué de réaliser de grandes séries de tests pour obtenir un modèle. On peut également se poser la question de la pertinence de la représentation JMEM pour des analyses d'effets à grande distance.

2.4 Le formalisme JMEM

Aujourd'hui, un des standards de représentation des gerbes d'éclats est le formalisme JMEM (figure 2.6). C'est une méthode de caractérisation de la distribution spatiale des éclats générés lors de la fragmentation d'une munition. Elle est basée sur une description statistique de la gerbe d'éclats.

La première hypothèse dans cette méthode est la parfaite axisymétrie de la munition. La munition est aussi considérée comme une source ponctuelle d'éclats, celle-ci est positionnée au centre de gravité de la charge explosive. Un découpage en secteurs angulaires dans le plan méridien de la munition est considéré, tel que présenté en figure 2.6 (typiquement par intervalles de 5°). Ces secteurs correspondent dans l'espace au découpage annulaire d'une sphère. Pour chacun d'entre eux, on suppose que les éclats sont animés d'une seule et même vitesse qui est précisée dans la représentation JMEM. On se donne aussi une famille de classes de masses suivant les prescriptions du STANAG 4589 (standard OTAN). Pour chaque secteur angulaire et pour chaque élément de la famille des classes de masses, on donne la «masse moyenne» et le «nombre moyen» d'éclats (figure 2.6).

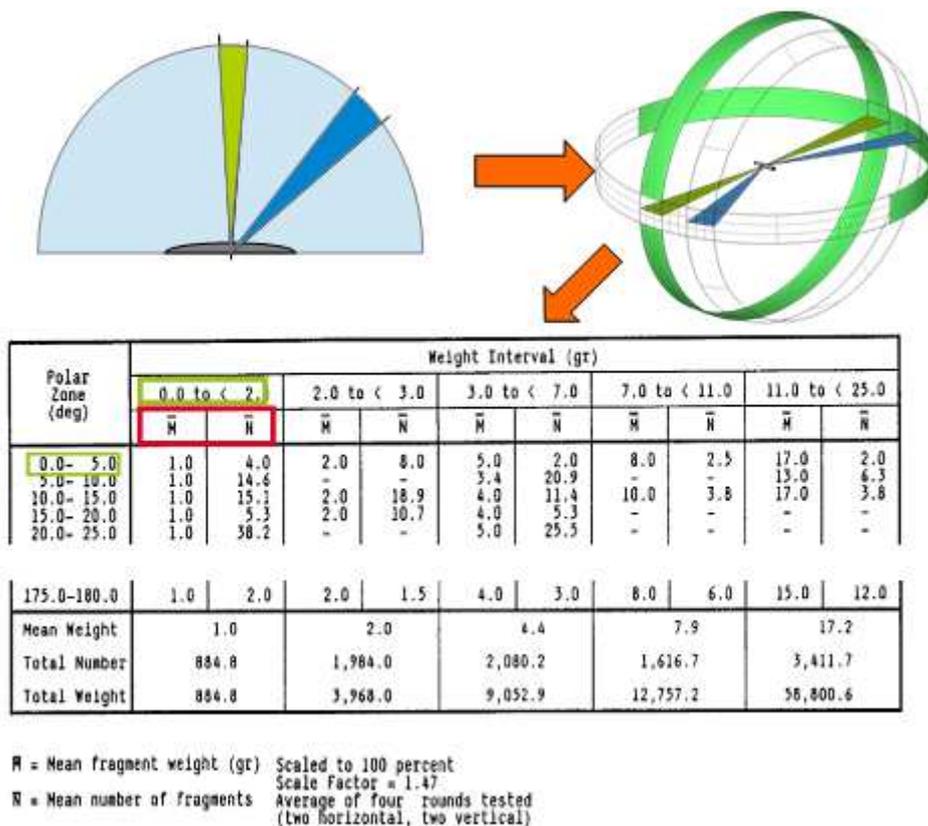


FIGURE 2.6 – La définition des secteurs angulaires JMEM et un tableau JMEM type

En outre, le format JMEM définit un paramètre permettant de relier la masse d'un éclat à son aire aérodynamique utilisée pour le calcul de balistique (vol des éclats) : le facteur de forme C_X en [gramme/m²]. Il est alors nécessaire de mesurer la surface apparente d'un certain nombre d'éclats issus d'une expérimentation. Ce format indique enfin le pourcentage de récupération de la masse totale des éclats lors des expériences. Cette description JMEM bien que perfectible est une référence internationale au sein de la communauté de défense. Le STANAG 4589, dont il est question ci-dessus, est un accord de standardisation sur la caractérisation de la gerbe d'éclats qui décrit les différentes étapes des expériences à réaliser (voir section 2.3 ci-dessus) ainsi que la méthode de réduction des résultats permettant la construction d'un modèle JMEM.

2.5 Méthodologie générale d'analyse de létalité d'un éclat

La mise en œuvre d'une munition est entachée d'incertitudes relatives à la précision du système d'arme, à son attitude lorsqu'elle détonne, ainsi qu'au processus de fragmentation (naturelle) lui-même. On souhaite connaître la probabilité de neutraliser un objectif ou de causer des dommages collatéraux, en tenant compte de l'ensemble de ces paramètres.

2.5.1 Balistique des éclats

La balistique est la science liée au vol des projectiles. Ce sujet est divisé en trois parties que sont :

- la balistique intérieure, qui concerne la propulsion dans le cas de projectiles mis en vitesse par des lanceurs ;
- la balistique extérieure, qui correspond au vol atmosphérique ;
- la balistique terminale, qui est relative à l'étude de l'impact d'un projectile sur sa cible.

On s'intéresse ici à la balistique extérieure, la balistique interne ne s'appliquant pas ici et la balistique terminale étant traitée par ailleurs.

On considère le cas d'un éclat compact de masse m et sans portance aérodynamique, ce qui nous permet de réduire le problème de balistique à celui d'un point matériel pesant soumis à la gravité et à une force de traînée. Ces hypothèses sont recevables dans la mesure où les éclats d'une charge militaire sont de forme très compacte.

Le système décrivant le vol d'un éclat, soumis aux forces de pesanteur \vec{g} et de traînée aérodynamique \vec{F}_d (voir la figure 2.7 ci-dessous), s'écrit :

$$\begin{cases} m \frac{d\vec{V}}{dt} &= m \vec{g} + \vec{F}_d \\ \vec{V}(t=0) &= \vec{V}_0 \end{cases}$$

Ici $\|\vec{V}_0\|$ étant supposée constante, on introduit le paramètre θ (l'angle d'élévation verticale) associé à la condition initiale $\vec{V}(t=0, x=0, y=0, z=0) = \vec{V}_0$.

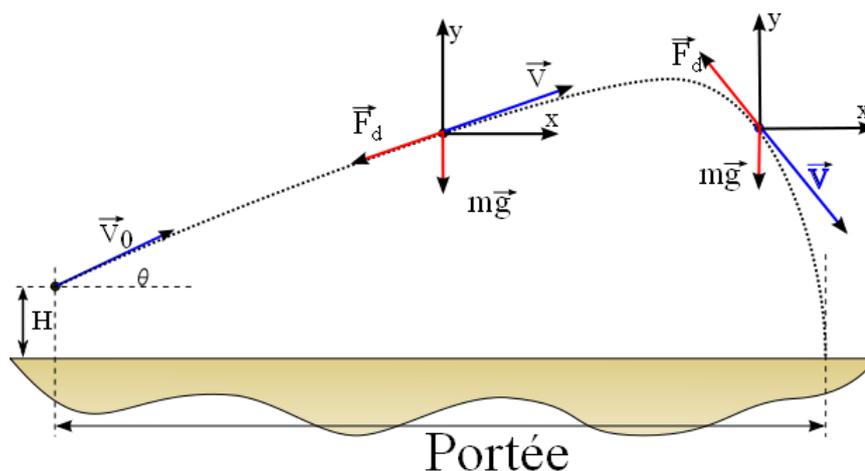


FIGURE 2.7 – Schéma de la portée des éclats

Les efforts de traînée aérodynamique sont pris en compte via leur résultante que l'on suppose être de la forme :

$$F_d = \frac{1}{2} \rho_{air} C_X S V^2.$$

ρ_{air} est la masse volumique de l'air. Le coefficient de traînée C_X dépend de la forme de l'éclat et du nombre de Mach. On va supposer qu'il est factorisé sous la forme $C_x = C_{x_0}(forme) \cdot f(M)$ avec M le nombre de Mach et f une fonction universelle.

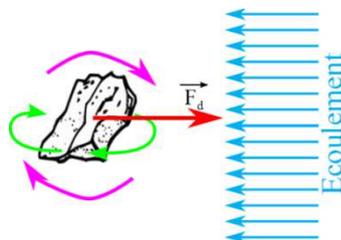


FIGURE 2.8 – Effort de traînée

Le système d'équations pour le vol des éclats vu ci-dessus s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d\vec{V}}{dt} = m \vec{g} + \frac{1}{2} C_X \rho_{air} S \|\vec{V}\| \vec{V} \\ \vec{V}(t=0, x=0, y=0, z=0) = V_0 (\cos(\theta) \vec{x} + \sin(\theta) \vec{y}) \end{array} \right.$$

On peut introduire ici le facteur de traînée $\widetilde{C}_d = C_X \frac{S}{m}$ qui regroupe tous les termes représentant l'éclat.

2.5.2 Factorisation du problème

On a vu que le facteur de traînée est égal à $\widetilde{C}_d = C_X \frac{S}{m}$. Par regroupements de coefficients dans l'équation du vol des éclats, on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{g} + \frac{1}{2} \widetilde{C}_d \rho_{air} \|\vec{V}\| \vec{V} \\ \vec{V}(t=0, x=0, y=0, z=0) = V_0 (\cos(\theta) \vec{x} + \sin(\theta) \vec{y}) \end{array} \right.$$

$S = S_N \rho_{eclat}^{-2/3} m^{2/3}$, où S_N est le facteur de forme de l'éclat et ρ_{eclat} la masse volumique du matériau. Le facteur de traînée s'écrit

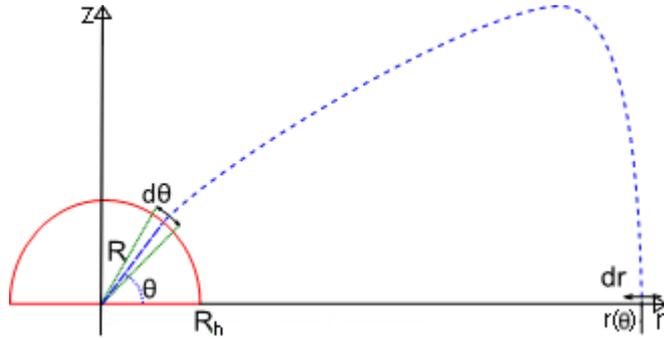
$$\widetilde{C}_d = C_X S_N \rho_{eclat}^{-2/3} m^{-1/3}.$$

Cette relation montre que l'influence du coefficient de traînée C_X est prépondérante sur la masse volumique du matériau qui elle-même est prépondérante sur la masse de l'éclat.

2.5.3 «Probabilité d'atteinte»

Dans un souci de clarté de présentation des méthodes d'analyse de létalité, on se restreint au cas d'une gerbe de N_t éclats de masses toutes identiques.

On considère ici que les éclats sont éjectés de façon homogène et isotrope sur 2π stéradians sur un terrain nu et plat. Ceci nous permet de considérer une symétrie de révolution de la charge et de se placer en coordonnées cylindriques (r, z) . En outre, on peut supposer que la charge est de forme hémisphérique de rayon R_h suffisamment petit.



Les éclats positionnés entre θ et $\theta + d\theta$ sur la charge atteignent le sol au niveau de l'anneau ($r; r + dr$). La densité surfacique (normalisée) des éclats en r s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dP_H}{ds} &= \frac{1}{N_t} \frac{dN}{2\pi r dr} \\ \frac{dP_H}{ds} &= \frac{1}{N_t} \left(\frac{N_t 2\pi R^2 \cos(\theta) d\theta}{2\pi R^2} \right) \frac{1}{2\pi r dr} \\ \frac{dP_H}{ds} &= \frac{\cos(\theta) d\theta}{2\pi r dr} \end{aligned}$$

N_t étant le nombre total d'éclats et N le nombre d'éclats sur le disque de rayon r .

Le système décrivant le mouvement des éclats permet de déterminer r fonction de θ (de façon analytique si $F_d = 0$, sinon approchée ou numérique). La fonction $\theta \mapsto r(\theta)$ n'est pas injective car deux angles d'éjection conduisent à la même portée. En pratique, on est alors amené à considérer deux restrictions de $\theta \mapsto r(\theta)$, pour $\theta > \theta(R_{max})$ et pour $\theta < \theta(R_{max})$, et donc deux densités.

On voit ici que $\frac{dP_H}{ds}$ est conditionnée par la masse et le C_X (géométrie des éclats), d'où l'importance d'une caractérisation correcte de la distribution massique des éclats.

2.5.4 Pouvoir létal des éclats

Lors de l'étude de la létalité des éclats, le taux de létalité est exprimé en fonction de l'énergie cinétique reliée à la masse par la vitesse maximale de retombée. Si on considère le cas où les N_{tot} éclats ont la même masse m , la probabilité de létalité due aux éclats est :

$$P(m, N_{tot}) = 1 - e_H^{-S_L N_{tot} \frac{dP_H}{ds} L}$$

où L est la valeur de la létalité des éclats lorsqu'ils atteignent le sol. Celle-ci est calculée à partir de la courbe de létalité représentée en figure 2.9.

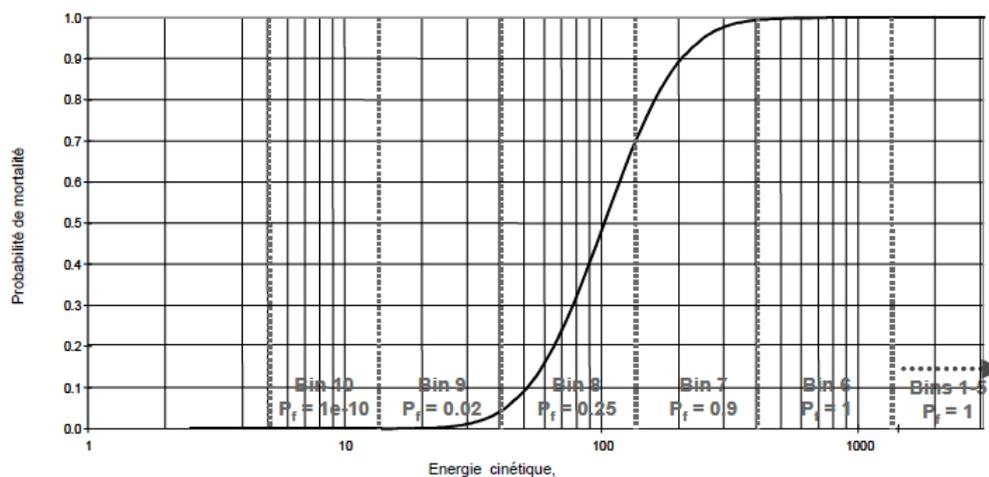


FIGURE 2.9 – Probabilité de mortalité en fonction de l'énergie cinétique des éclats

La courbe représentant la probabilité de létalité en fonction de l'énergie cinétique n'est en fait qu'une moyenne de différentes courbes. Pour des taux faibles, on arrive donc seulement à avoir une courbe moyennée entre un impact qui tombe sur la tête et un sur la main. De façon simplifiée, pour la recherche d'un seuil de létalité, cette courbe peut être associée à la réduction du système d'équations pour le vol des éclats.

2.5.5 Objectif de l'étude

Le système d'équations pour le vol des éclats, la probabilité d'atteinte ainsi que la probabilité de létalité des éclats sont déterministes, mais contiennent des paramètres tels que la masse des éclats et leur nombre, qui sont des variables aléatoires. En effet, d'un essai à un autre la distribution spatiale des éclats varie. Nous avons donc besoin d'une estimation de la répartition massique des éclats.

La fragmentation d'une charge est usuellement caractérisée à l'aide d'expériences de récupération partielle d'éclats et de mesure de la vitesse de ces derniers. Les éclats obtenus sont ensuite rangés suivant leur masse dans une famille de classes de masses. Les analyses de la létalité ou des risques de dommages collatéraux utilisent les termes sources ainsi caractérisés pour établir les cartes de «probabilité» d'atteinte et de létalité (voir la figure 2.10 ci-dessous).

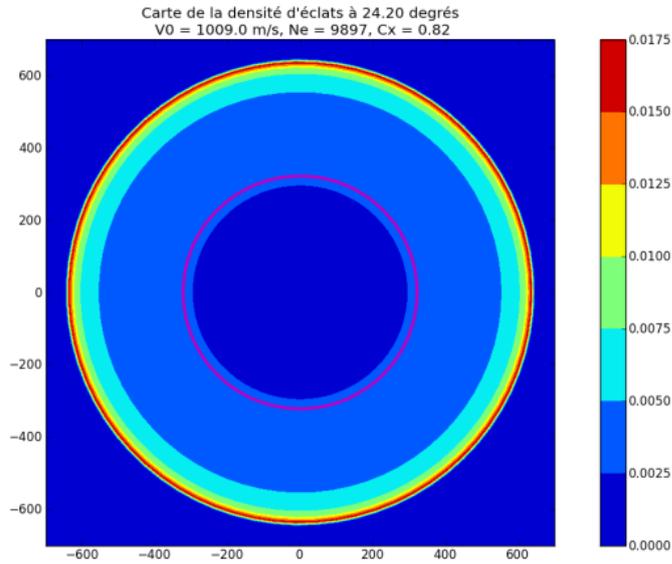
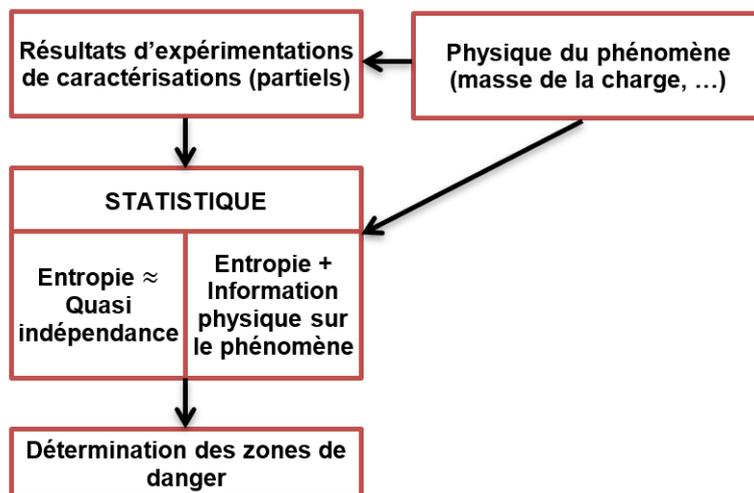


FIGURE 2.10 – Cartes de la densité d'éclats

Les travaux présentés ont pour objectif d'estimer la répartition massique des éclats à partir des observations (partielles) en utilisant, si possible, l'information physique que l'on a sur le problème. Cet objectif est résumé dans le schéma ci-dessous.



Chapitre 3

Modèles pour la simulation de l'explosion d'une charge

Dans l'étude des effets d'une munition, l'estimation statistique a un rôle important à jouer, notamment pour l'analyse de la répartition massique des éclats d'une bombe. Le CEA a déjà réalisé un premier travail sur ce sujet. Trois mêmes expériences (section 2.3 p.9) ont permis d'obtenir les données qui vont être décrites dans une première partie. Une représentation JMEM (section 2.4 p.11) de ces données peut être ensuite obtenue.

Cette représentation ne permet malheureusement pas d'avoir suffisamment d'informations sur la gerbe d'éclats d'une charge. Il faudrait analyser leur distribution massique. Cette analyse ne comprend pas seulement l'estimation de la loi de probabilité suivie par les masses des éclats. Les estimations pour le nombre d'éclats produits durant une explosion, ainsi que pour le nombre d'éclats par classes de masses, doivent aussi être réalisées. Pour ces dernières, les trois expériences ne suffisent pas. En effet, la réalisation d'une expérience nous donne une seule donnée. Il nous faut donc faire un grand nombre d'expériences.

Étant limités par les coûts engendrés par une réalisation expérimentale, nous devons reproduire numériquement le phénomène. Pour cela, un modèle a été codé au CEA de Gramat. Ce modèle dit «1D», présenté dans une seconde partie, est basé sur le modèle mécanique de Mott. Il doit être amélioré pour une imitation correcte du phénomène étudié. En effet, il ne concerne que le cas d'un anneau en expansion inertielle. Un modèle «pseudo-3D» a alors été créé, à partir du premier. C'est un modèle mathématique, en dehors de toute physique, qui génère des données statistiquement les plus proches possibles des données expérimentales disponibles. Il est décrit à la fin de ce chapitre.

3.1 Données expérimentales

3.1.1 Charge d'étude EFFECTS

La charge d'études dite «EFFECTS» est composée d'un tube d'acier dans lequel est inséré un cylindre d'explosif. L'explosif peut être amorcé par l'une des deux extrémités du tube au moyen d'un détonateur. La masse d'explosif est de l'ordre de 2 kg. Le diamètre extérieur de la charge n'excède pas 100 mm et sa longueur est inférieure à 400 mm.

3.1.2 Montage expérimental

Le montage expérimental reprend la charge, placée sur un support à une certaine hauteur du sol. L'explosif de la charge est mis en détonation. La poussée des gaz de détonation va générer l'expansion du tube d'acier jusqu'à sa rupture en de multiples fragments. Ces derniers sont projetés à vitesse élevée (>1000 m/s) et sont arrêtés par les panneaux du dispositif expérimental permettant leur récupération et leur analyse. A la suite de l'essai, un ensemble de données est généré à partir d'une récupération partielle des éclats contenant la masse, la vitesse et l'angle d'éjection de chaque éclat.

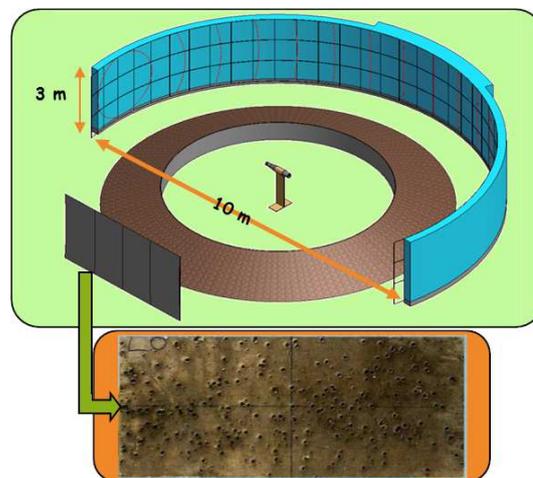


FIGURE 3.1 – L'expérience réalisée pour la construction des gerbes d'éclats

3.1.3 Données obtenues

Nous disposons d'une observation partielle de masses d'éclats obtenus à partir de trois expériences réalisées dans les mêmes conditions. Nous ne considérons pas pour l'instant la représentation JMEM de ces masses d'éclat. Chaque essai doit suivre la même loi de distribution massique théorique. De plus, la somme de ces masses

devrait être égale à environ M_T , la masse totale théorique sur un secteur angulaire. On note que la somme des masses n'est pas égale à M_T puisque tous les éclats n'ont pas pu être récupérés lors des essais.

3.2 Modèle mécanique 1D

3.2.1 Le modèle de Mott

La modélisation proposée par Mott correspond à la fragmentation d'un anneau dans le cas unidimensionnel. Dans ce cas précis, l'anneau peut être assimilé à une barre de longueur L . On considère que le matériau est rigide plastique et écouissable.

Le comportement d'un matériau est dit élastique si, sous l'effet du chargement considéré, il n'y a pas de déformation résiduelle, i.e. il retrouve sa forme initiale. Le comportement est dit plastique si une déformation résiduelle persiste. Dans le domaine élastique, linéaire, le comportement d'un matériau peut être décrit par la loi de Hooke qui relie contrainte uniaxiale et déformation axiale par la relation

$$\sigma = E\epsilon. \tag{3.1}$$

avec

- σ la contrainte exprimée en pascal (Pa);
- E le module de Young (ou d'élasticité), une constante dont la valeur dépend du matériau;
- ϵ un allongement relatif (une déformation) adimensionnel.

Cette loi s'applique pour des matériaux élastiques et isotropes. L'isotropie signifie que leurs propriétés mécaniques sont identiques en traction ou en compression (exemple : le bois est plus résistant à la traction). De plus, la loi est vraie tant que la déformation ϵ reste petite et que la contrainte limite au seuil d'écoulement plastique n'est pas atteinte. La limite correspond à la valeur σ_m telle que si la contrainte σ est supérieure à elle, la déformation subie par le matériau n'est plus élastique.

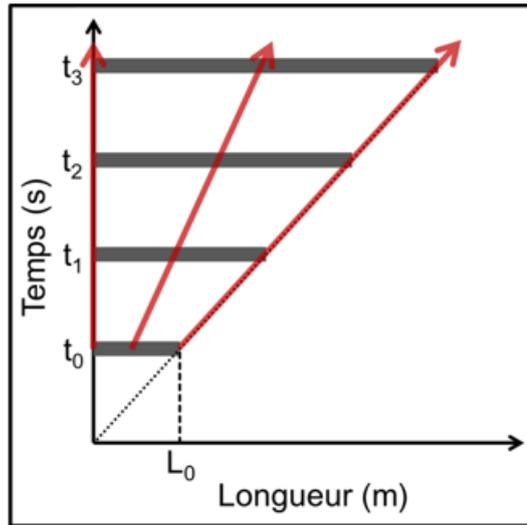


FIGURE 3.2 – Barre en extension dont la vitesse d’un point matériel sur la barre est linéaire par rapport à sa position initiale.

Si on représente la contrainte σ en fonction de la déformation ϵ , on observe en général les différentes zones de la figure 3.3 suivantes [9] :

- La zone d’élasticité, allant de O à B, qui est linéaire jusqu’à un point A. En effet, d’après la loi de Hooke (3.1), σ est proportionnelle à ϵ tant que ϵ reste petite. On note que B correspond à la contrainte limite d’élasticité σ_m .
- La zone d’écoulement, entre B et C, qui correspond au moment où le matériau se déforme sous une contrainte qui reste constante. A partir de B, la déformation est plastique.
- La zone de durcissement (ou d’écrouissage) du matériau, entre C et D.
- La zone de rupture, avec D la contrainte de la limite de résistance et E le point de rupture. A partir de D, l’allongement ne se répartit plus que sur une zone restreinte du matériau, dont l’aire diminue rapidement jusqu’à la rupture.

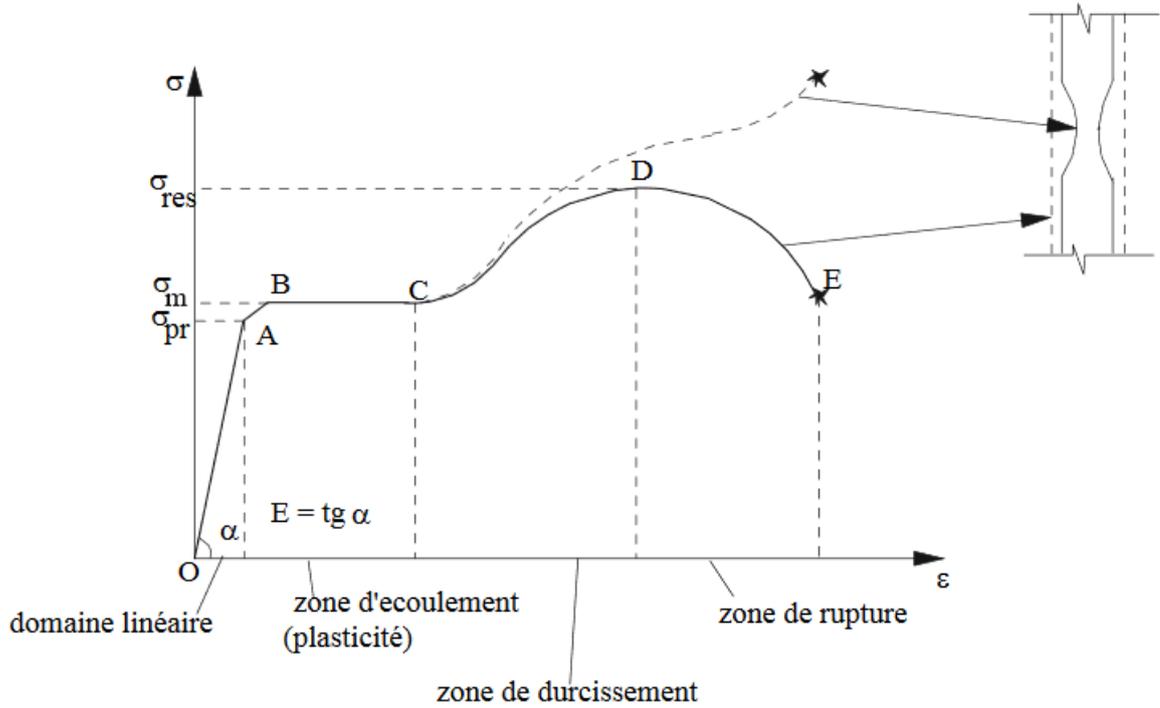


FIGURE 3.3 – Allure d'une courbe Contrainte-Déformation $\sigma = f(\epsilon)$ pouvant être obtenue lors d'un essai de traction.

Dans le cas de l'anneau, Mott fait l'hypothèse d'une ouverture des fissures instantanée, ce qui revient à négliger l'énergie de rupture (grandeur physique que l'on peut associer dans certains cas à la ténacité d'un matériau). Enfin, il néglige l'énergie associée aux déformations élastiques par rapport à celle associée aux déformation plastiques, il suppose ainsi que la loi de comportement suivie par le matériau est rigide plastique.

La loi de comportement rigide plastique correspond au cas idéalisé d'un matériau pour lequel

- Lorsque le matériau subit un chargement,
 - il y a un écoulement plastique et des déformations permanentes se développent,
 - la contrainte vaut $\sigma = \sigma_Y(\epsilon_p)$, qui correspond à la contrainte au seuil d'écoulement plastique, et σ_Y peut augmenter en fonction de ϵ_p , on parle alors d'écrouissage,
 - la vitesse de déformation est $\dot{\epsilon}(t) = \frac{d\epsilon}{dt} > 0$.
- Lorsque le matériau subit une décharge,
 - le matériau devient rigide : les déformations n'évoluent plus,

- la vitesse de déformation est $\dot{\epsilon}(t) = 0$,
- la contrainte vaut $\sigma < \sigma_Y(\epsilon_p)$.

Il est important de remarquer que le cas idéalisé de cette loi correspond au cas d'un matériau présentant un module d'élasticité infini en phase de décharge. L'état de contrainte en phase de décharge présente donc une indétermination du point de vue local. Il est nécessaire de disposer de conditions au limite (données globales) pour déterminer ce dernier.

Initialement, la barre est en expansion homogène (avant le début du processus de fragmentation), la contrainte $\sigma = \sigma_Y(\epsilon_p)$ est uniforme. La déformation est homogène. ϵ_p correspond à la déformation plastique. Au cours de l'expansion, des défauts de type instabilité plastique apparaissent. La loi de probabilité de ce phénomène est caractéristique du matériau. On suppose ici que les positions des défauts sur l'intervalle $[0, L]$ suivent une loi uniforme. Ces défauts peuvent ensuite devenir des fissures, supposées droites et instantanées.

Lorsqu'un défaut s'active à un temps t_i , il devient une fissure, la contrainte devient nulle au niveau de sa position A . Il n'y a plus d'écoulement plastique entre A et B , cette zone est alors rigide. Une onde de relâchement de contraintes, dite onde de Mott, s'étend progressivement de chaque côté de la fissure et rend la zone touchée aussi rigide (voir figure 3.4). Dans la zone où l'onde s'est propagée, il ne peut plus y avoir d'activation de défaut.

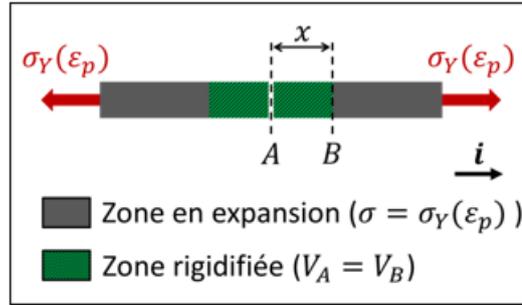


FIGURE 3.4 – Propagation d'une onde de relâchement de contraintes

La position du front d'onde (par rapport au centre de fissure en coordonnées lagrangiennes), à un instant $t > t_i$, est égale à :

$$X = \sqrt{\frac{2\sigma_Y(\epsilon_p)(t - t_i)}{\rho\dot{\epsilon}_0}} \quad (3.2)$$

où $\dot{\epsilon}_0$ est la vitesse de déformation initiale et ρ la masse volumique.

Pour déterminer cette zone sur laquelle s'étend l'onde, la vitesse de déformation $\dot{\epsilon}$ sur la barre de longueur L est considérée comme homogène et est égale à $\partial V/\partial x$.

On remarque que la propagation de cette onde est parabolique (voir figure 3.5). Dans le cas où l'on a un défaut à un temps t_i , dans une zone déjà rigide, aucune fissure n'apparaît. Au bout d'un certain temps, plus aucune fissure n'est créée puisque l'ensemble de l'anneau est rigidifié. Tous les éclats sont ainsi formés.

On peut observer ce phénomène dans l'exemple simplifié illustré ci-dessous. Les différentes étapes suivantes y sont représentées :

1. A l'instant t_1 , un défaut s'active sur la barre (ou l'anneau). La barre entière étant encore sous contrainte, une fissure se crée au niveau de ce défaut. Une onde de relâchement de contrainte va alors se propager à son voisinage. La contrainte de déformation sera nulle dans sa zone de propagation (zone en vert sous la parabole ayant pour sommet le défaut 1). Cette zone sera rigide.
2. Un deuxième défaut devrait s'activer à l'instant t_2 , or il se trouve dans la zone où la contrainte est relâchée (contrainte nulle) à cause de la première fissure. Ce défaut ne peut donc pas donner une seconde fissure.
3. A l'instant t_3 , un troisième défaut s'active. Cette fois-ci, il se trouve dans la zone encore sous contrainte. L'onde de Mott de la première fissure ne s'est pas encore propagée, ou ne peut pas se propager, jusqu'à sa position. Ce défaut donne alors une nouvelle fissure. Une autre onde de Mott va se propager à son voisinage.
4. A l'instant t_6 , la contrainte est relâchée dans toute la barre. A partir de cet instant, plus aucun défaut ne peut donner de fissure. Seulement deux fissures ont finalement été créées.

Remarque.

Le fait qu'un défaut s'active signifie que la fissure apparaît, ou s'ouvre.

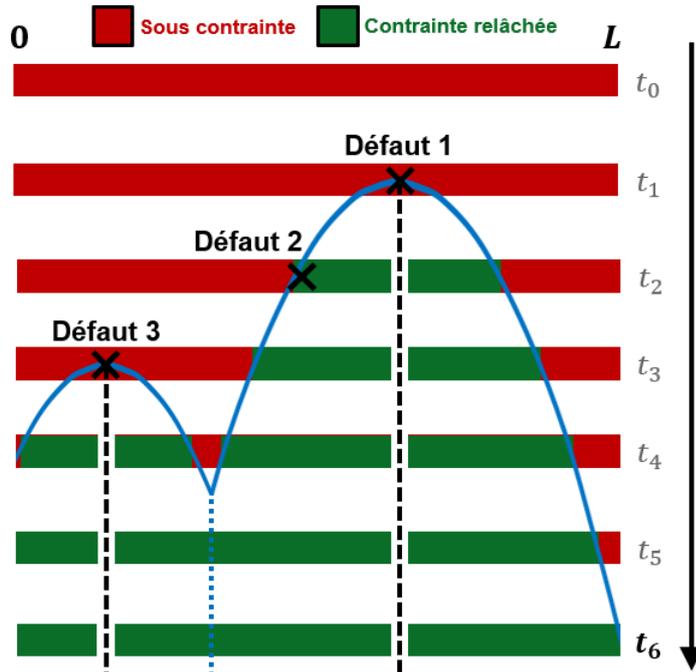


FIGURE 3.5 – Apparition des fissures sur l’anneau due à son expansion

3.2.2 Modèle mécanique 1D

Ce modèle numérique, basé sur le modèle original de Mott (section 3.2.1), est une première étape dans la réalisation d’un modèle final qui reproduira numériquement le phénomène mécanique considéré. Ce dernier devra générer des éclats provenant d’une charge d’étude EFFECTS (section 3.1.1 page 19), dont on récupèrera les masses.

Pour l’instant, nous générons seulement les masses des éclats provenant de l’explosion d’un anneau. On considère les paramètres d’entrée du modèle suivant :

- les dimensions de l’anneau, représentées sur la figure 3.6 ;
- le nombre NG de sites d’endommagement (ou défauts) générés aléatoirement autour de l’anneau ;
- le paramètre $D = 2\sigma_Y(\epsilon_p)/(\rho\dot{\epsilon}_0)$, qui correspond à la constante de la formule (3.2) donnant la position du front d’onde ;
- la borne T_{max} pour le temps d’apparition des défauts.

Dans un premier temps, les sites d’endommagement sont générés tout autour de l’anneau. Ils traversent en une ligne droite sa largeur La (figure 3.6).

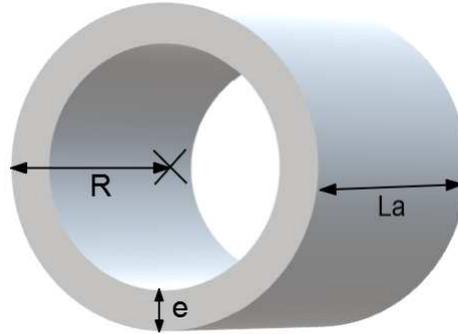


FIGURE 3.6 – Représentation de la charge utilisée par le modèle 1D

Un site, noté i , est décrit par ses coordonnées (x_i, t_i) , respectivement définies par :

- sa position autour de l'anneau, comprise dans l'intervalle $[0; 2\pi R]$;
- le moment de son activation, compris dans $[0; T_{max}]$.

Pour créer les NG sites, on génère leurs coordonnées grâce à une loi uniforme, supposée suivie par leurs positions dans le modèle de Mott (section 3.2.1). Certains de ces sites deviennent, s'ils s'activent, des fissures qui forment les éclats.

L'algorithme réalisant la sélection des fissures actives, parmi les sites générés, est le suivant :

1. Initialisation :

- Toutes les fissures sont considérées comme actives.
Un vecteur *Activ*, dont les NG valeurs sont initialisées à 1, est créé. Pour tout $i \in [0, NG]$, si la fissure d'indice i est inactive alors $Activ[i] = -1$.
- Les fissures sont classées par ordre d'apparition et sont indicées par les entiers $0, 1, \dots, (NG - 1)$.

2. Pour chaque fissure i , avec i allant de 0 à $(NG - 1)$:

- (a) On vérifie si la fissure i est active.
- (b) Si elle l'est, pour chaque fissure j , telle que $j > i$ ($t_j > t_i$) :
 - i. On vérifie si la fissure j est considérée comme active ;
 - ii. Si c'est le cas, j devient inactive dans le cas où elle appartient à la zone de relâchement de contraintes provoquée par la fissure i .

La position X du front de l'onde de Mott (formule (3.2)) nous permet de déterminer la zone de relâchement de contraintes provoquée par une fissure i en fonction du temps. Un site, de coordonnées (x_j, t_j) avec $0 \leq x_j \leq L = 2\pi R$ et $t_j > t_i$, appartient

à cette zone si la distance entre x_j et x_i est inférieure à X . Cette distance, entre deux points d'un anneau de périmètre $L = 2\pi R$, est égale à :

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} |x_j - x_i| & \text{si } |x_j - x_i| \leq \frac{L}{2} \\ L - |x_j - x_i| & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.3)$$

Ainsi, un site ne devient pas une fissure active si :

$$\begin{aligned} \text{pour } |x_j - x_i| \leq \frac{L}{2}, \quad d(x_i, x_j) \leq X &\Leftrightarrow |x_j - x_i| \leq X \\ &\Leftrightarrow t_j - t_i \geq \frac{1}{D}(x_j - x_i)^2 \\ \text{pour } |x_j - x_i| > \frac{L}{2}, \quad d(x_i, x_j) \leq X &\Leftrightarrow L - |x_j - x_i| \leq X \\ &\Leftrightarrow t_j - t_i \geq \frac{1}{D}(L - |x_j - x_i|)^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Graphiquement, on a pu voir (figure 3.5) que cette zone correspond à la surface située au dessus de la parabole ayant pour minimum le point de coordonnées (x_i, t_i) correspondant à la fissure i .

On remarque, sur la figure 3.7, le cas particulier où une fissure active a sa position proche de 0 ou du périmètre de l'anneau $L = 2\pi R$ (égal dans l'exemple à 10). Quand on considère une barre de longueur L , l'onde de Mott ne peut pas se propager plus loin que le début ou la fin de la barre. Mais dans le cas de l'anneau, le début 0 et la fin L se rejoignent. Une onde de Mott dont la fissure a une position proche de 0 s'étend donc vers «la fin de l'anneau», et inversement, d'où les deux conditions dans le résultat (3.4). C'est pour cette raison que l'on observe, pour la fissure telle que $x = 10$, que la parabole délimitant sa zone de relâchement de contraintes se termine à l'abscisse 10 puis redémarre à l'abscisse 0.

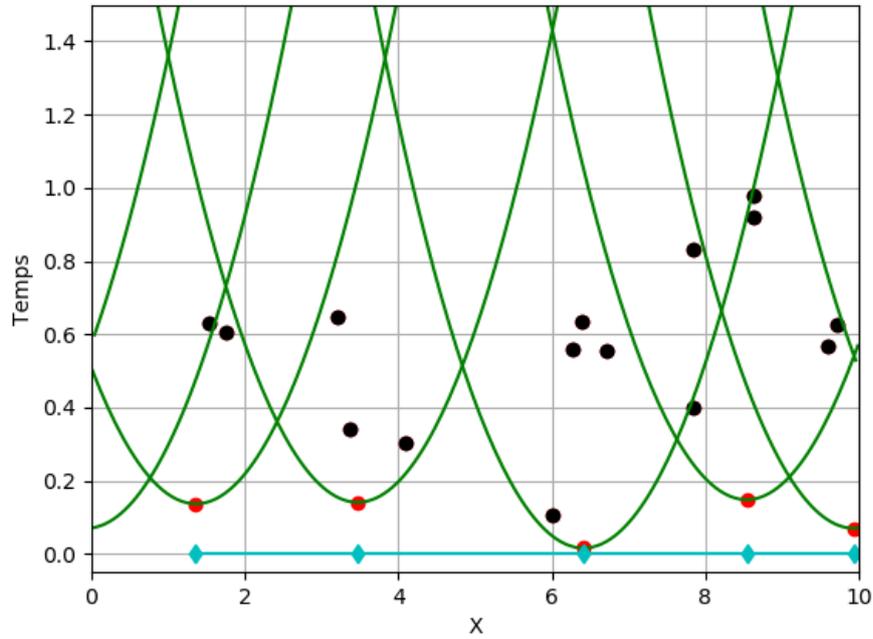


FIGURE 3.7 – Sélection des fissures actives (points oranges) parmi les sites d'endommagement générés.

Après la sélection des fissures actives, les différents éclats sont formés à partir de deux fissures voisines. Pour chaque éclat, on connaît son épaisseur e , sa largeur La (figure 3.6) et sa longueur l égale à la distance entre ses deux fissures. Avec ces données, on obtient sa masse :

$$M = \rho.l.e.La = 7800.l.e.La \text{ kg.} \quad (3.5)$$

3.2.3 Résultats du modèle 1D

Au vu de la description ci-dessus, ce modèle ne peut pas donner de résultats satisfaisants pour la simulation de l'explosion d'une charge EFFECT, dont la géométrie est cylindrique.

L'enveloppe de cette charge est un tube de longueur $L = 40$ cm, donnée en entrée du modèle avec ses autres dimensions. On obtient alors seulement de longs éclats, car ils sont formés par deux fissures qui traversent toute la largeur La . De plus, le «découpage» de l'enveloppe limité par le modèle limite fortement le nombre total d'éclats. Nous observons bien ce phénomène à chaque simulation. Dans le cas de l'une d'entre elles, nous avons obtenu seulement 54 éclats. Leurs masses, qui augmentent

avec leurs longueurs, entrent dans l'intervalle de valeurs $[0, 020; 0, 2373]$ exprimées en kg. Dans la réalité, on trouve un grand nombre d'éclats de masses faibles.

Pour éviter d'avoir des éclats trop longs, on peut partitionner l'enveloppe en différents anneaux. La somme de leurs largeurs La doit être égale à 40 cm. Dans le cas simple où les anneaux ont la même largeur, suffisamment petite, on obtient des masses dont les valeurs sont correctes (voir l'axe des abscisses de la courbe ci-dessous). Leur distribution n'est pas encore satisfaisante.

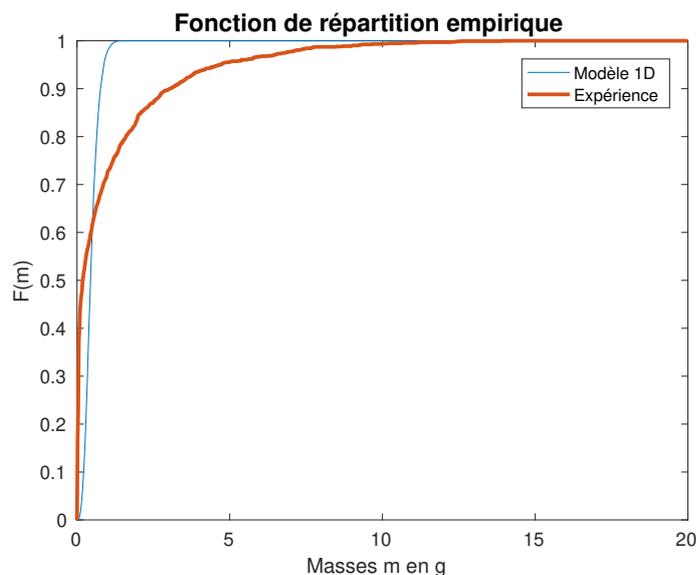


FIGURE 3.8 – Comparaison entre la fonction de répartition calculée avec les données expérimentales et celle du modèle 1D «modifié»

Pour obtenir un meilleur modèle, d'autres modifications ont dû être apportées. C'est ainsi que l'on a obtenu un nouveau modèle, dit «pseudo-3D». Ce dernier est présenté ci-dessous avec ses résultats.

3.3 Modèle statistique pseudo-3D

Le modèle mécanique à disposition ne restitue pas suffisamment bien, pour l'instant, le phénomène étudié. Il ne génère des éclats que pour le cas d'un anneau en expansion inertielle. La réalisation d'un meilleur modèle mécanique est trop longue et nous avons besoin de générer des données correspondant à la réalité. C'est pour cette raison que le modèle statistique «pseudo-3D» a été créé. Il nous permet d'avoir des données proches statistiquement des données expérimentales.

Ce modèle génère des masses d'éclats à partir d'un cylindre dont les dimensions sont choisies en entrée. Il consiste à découper ce cylindre en plusieurs anneaux, dont les épaisseurs sont choisies aléatoirement, pour lesquels des éclats sont générés en utilisant le modèle mécanique 1D fourni par le CEA Gramat. Ces éclats réunis forment l'ensemble des éclats générés à partir du cylindre (figure 3.9). Pour améliorer ce programme, de possibles propagations de fissures dans le sens longitudinal ont été modélisées en conservant d'un anneau i à un anneau $i + 1$ une certaine proportion de pseudo-fissures. Cela crée évidemment des masses plus importantes.

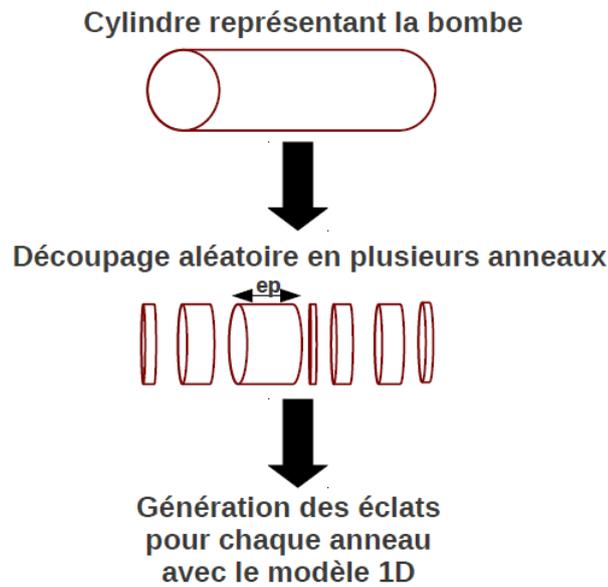


FIGURE 3.9 – Principe du modèle pseudo-3D

Le modèle pseudo-3D avec un nombre de paramètres en entrée plus important que pour le modèle mécanique 1D permet de restituer les résultats aux données expérimentales. En effet, en plus des paramètres du modèle 1D, sont définis :

- le nombre moyen d'anneaux formant le cylindre, noté \overline{N}_a ;
- les épaisseurs de ces différents anneaux ;
- les différentes proportions p_i de fissures propagées d'un anneau i à un anneau $i + 1$.

Dans le cas considéré, pour avoir des données numériques au plus proche des données expérimentales disponibles, il a fallu environ 200 anneaux et 5000 sites d'endommagement par anneau. Pour chaque tube, le nombre d'anneaux N_a est choisi aléatoirement grâce à une loi normale de moyenne \overline{N}_a . De même, le nombre de sites NG est généré grâce à une loi normale de moyenne $\overline{NG} = 5000$. Les différentes

épaisseurs sont ensuite calculées en tirant aléatoirement, avec une loi d'extremum généralisée, N_a valeurs entre 0 et 1 que l'on divise par leur somme et multiplie par l'épaisseur totale du cylindre. Enfin, les proportions p_i , pour i allant de 1 à $N_a - 1$, sont tirées aléatoirement entre 0 et 1 avec une loi gamma de paramètres $\mu = 0.03$ et $\sigma = 0.6$. On a alors les p_i égaux en moyenne à 0.01.

On peut voir sur les deux figures ci-dessous les fonctions de répartition empiriques calculées à partir des données fournies par le modèle mécanique 1D seul puis par le modèle de génération de données statistiques ainsi établi. Celles-ci sont comparées à la fonction de répartition calculée avec les données expérimentales. On observe bien une bonne adéquation des données expérimentales avec celles fournies par le modèle pseudo-3D. Le test statistique de Cramér-Von Mises (voir section suivante) est enfin utilisé pour tester l'hypothèse H_0 : « la distribution de l'échantillon de données expérimentales suit la même loi que celle de l'échantillon de données numériques ». Le test effectué indique une valeur de 0,41 qui est inférieure à 0,46, ce qui valide l'hypothèse H_0 .

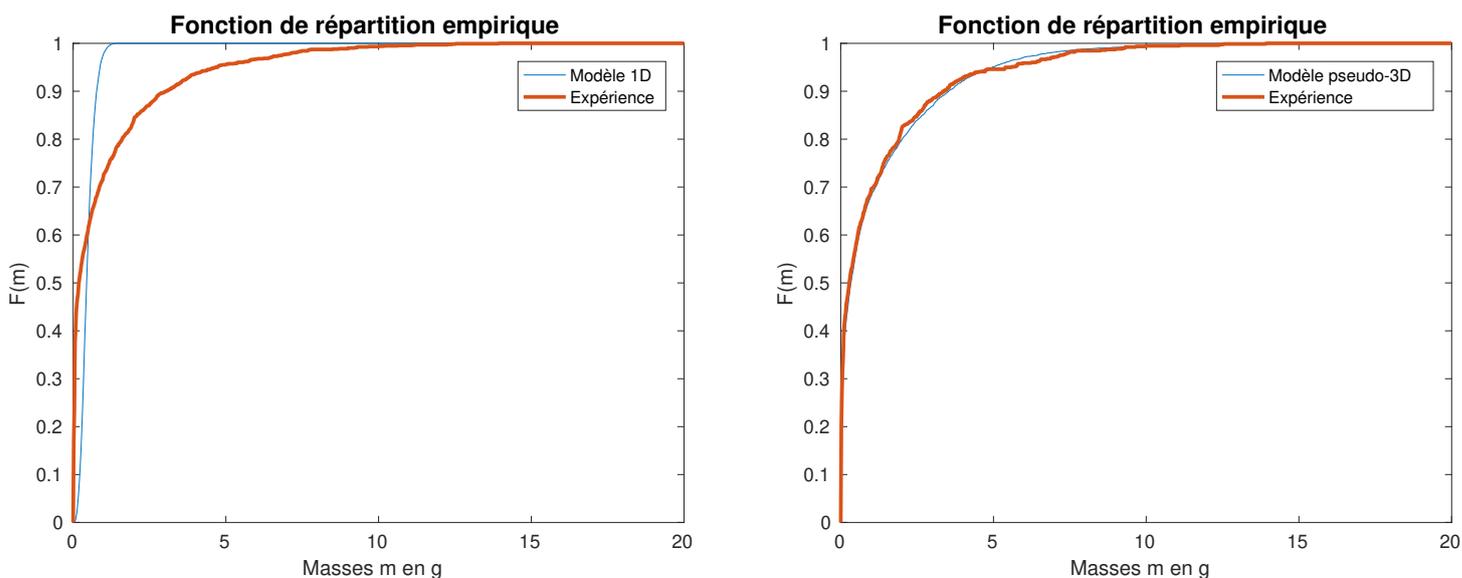


FIGURE 3.10 – Comparaison entre la fonction de répartition calculée avec les données expérimentales et celles du modèle 1D (à gauche) et du modèle pseudo-3D (à droite)

Test de comparaison pour deux échantillons de Cramér-Von Mises

Le test de Cramér-Von Mises est un test non paramétrique, c'est-à-dire que l'on ne fait pas l'hypothèse que la distribution des échantillons provient d'une loi connue. Il permet de tester si les deux échantillons considérés suivent une même loi de probabilité. Le test d'hypothèse s'écrit :

$$\begin{aligned} H_0 &: F_1(x) = F_2(x) \\ H_1 &: F_1(x) \neq F_2(x) \end{aligned}$$

où F_1 et F_2 sont les fonctions de répartition empiriques des deux échantillons.

Ce test consiste à vérifier le décalage entre les deux fonctions de répartition, au moyen d'une statistique de test qui correspond à la somme, pour chacune des valeurs des deux échantillons, des carrés des écarts entre les deux fonctions. Cette statistique s'écrit :

$$T = \frac{n_1 \times n_2}{(n_1 + n_2)^2} \sum_{i=1}^{n_1+n_2} [F_1(x_i) - F_2(x_i)]^2.$$

Elle peut aussi être exprimée grâce aux rangs des observations. Soit r_{i_k} le rang de l'observation n_{i_k} de l'échantillon k , alors la statistique peut s'écrire :

$$T = \frac{U}{n_1 n_2 (n_1 + n_2)} - \frac{4n_1 n_2 - 1}{6(n_1 + n_2)}$$

avec

$$U = n_1 \sum_{i=1}^{n_1} (r_{i_1} - i)^2 + n_2 \sum_{i=1}^{n_2} (r_{i_2} - i)^2.$$

La région critique du test, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs pour lesquelles l'hypothèse H_0 est rejetée, est alors définie par les valeurs anormalement élevées de T . Les seuils critiques, pour un risque α de rejeter à tort H_0 , sont recensés dans des tables statistiques spécifiques.

Remarque.

Le test de Kolmogorov-Smirnov permet lui aussi de tester si deux échantillons suivent une même loi, mais il est basé sur le maximum des différences entre les deux fonctions de répartition empiriques. Il est plus sensible que le premier test, puisqu'il suffit qu'on ait en un point une différence élevée entre les deux fonctions de répartition pour que l'hypothèse H_0 soit rejetée. Le test de Cramér-Von Mises est donc considéré comme le plus puissant des deux.

Modélisation des données expérimentales avec les polynômes chaos

Dans un premier temps, nous avons réalisé une estimation de la distribution des masses des éclats. Nous avons utilisé les méthodes usuelles qui sont les suivantes :

- l'utilisation d'une loi de probabilité théorique dont les paramètres sont estimés avec notamment la méthode du maximum de vraisemblance.
- l'utilisation d'une méthode non paramétrique pour l'estimation de la densité de probabilité de la masse d'un éclat (estimation par noyaux) [81].

Toutes ces méthodes ne donnant pas de résultats satisfaisants, nous avons mis au point une autre méthode. Elle consiste à modéliser l'échantillon de données à étudier sous la forme d'une décomposition en polynômes chaos. Cette nouvelle méthode a fait l'objet d'un premier article [23].

4.1 Introduction

Depuis les travaux de Wiener en 1938 [83] et le livre de Ghanem et Spanos dans les années 1990 [25], les polynômes chaos (PC) ont permis de résoudre avec succès une large variété de problèmes aléatoires dans différents domaines : mécaniques [46], électromagnétisme [14], ... La décomposition en polynômes chaos est un moyen efficace dans la plupart des cas pour construire un modèle permettant d'étudier la propagation de l'aléatoire dans un système complexe. Elle consiste à écrire la variable aléatoire d'intérêt Y en fonction d'une variable aléatoire prise en entrée X sous la forme :

$$Y = \sum_{i=0}^n \alpha_i \Psi_i(X),$$

avec les polynômes $\{\Psi_i\}_{0 \leq i \leq n}$ orthonormés et qui forment une base de degré n . Les α_i eux doivent être déterminés. Pour cela, il existe plusieurs techniques :

- des techniques intrusives : qui consiste à reformuler le modèle déterministe original pour pouvoir le résoudre [62, 17] ;
- des techniques non intrusives [85, 36] : celles-ci ne modifient pas le code original utilisé dans la simulation. Il est seulement évalué en certains points, lesquels sont ensuite utilisés pour déterminer les coefficients de la décomposition en polynômes chaos.

Après obtention des coefficients α_i , des quantités macroscopiques de Y , comme la moyenne, la variance ou encore les indices de Sobol (chapitre 6 p.76), peuvent être calculées.

La procédure semble simple, mais il y a certains points sur lesquels il faut être prudent, dont le choix de la base formée par les $\{\Psi_i\}_{0 \leq i \leq n}$ [86]. Celui-ci ne doit pas être pris à la légère pour avoir une bonne représentation de la variable Y . Pour résoudre ce problème, on peut trouver une base de polynômes chaos adaptée en s'appuyant sur un échantillon de Y [2, 57]. Une méthode existe, les polynômes chaos adaptatifs, dont l'intérêt est qu'elle ne requiert pas de connaissance a priori sur la forme de la variable d'entrée X pour construire la base formée par les $\{\Psi_i\}_{0 \leq i \leq n}$. Mais pour certaines applications, dont celle présentée ici, la connaissance de X est requise, donc on ne peut pas appliquer cette méthode.

Un autre problème rencontré avec les polynômes chaos est celui du fléau de la dimension, c'est-à-dire l'augmentation du nombre de variables aléatoires d'entrée. Dans ce cas, en admettant p variables d'entrée indépendantes $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$, la variable aléatoire de sortie peut prendre la forme :

$$Y = \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_p=0}^{n_p} \alpha_{i_1 \dots i_p} \Psi_{i_1 \dots i_p}(\mathbf{X}), \quad (4.1)$$

et le nombre de coefficients du polynôme chaos grandit très rapidement avec le nombre de variables d'entrée. Le challenge augmente dans le cas où l'on considère des processus à la place des variables en entrée [11]. Pour traiter ce problème de la dimension, des solutions qui consistent à construire une base creuse de polynômes chaos ont été conçues (voir [1], par exemple).

Ce qui est surprenant, c'est que le problème de la modélisation d'un échantillon grâce à la représentation avec des polynômes chaos a peu intéressé la communauté scientifique. Pourtant, un tel problème n'est ni trivial ni dénué d'importance. En effet, lorsque l'on souhaite modéliser un échantillon de données une loi de distribution a priori est choisie et ses paramètres sont estimés, notamment en utilisant l'estimateur du maximum de vraisemblance ou la méthode des moments [81]. Et même s'il existe beaucoup de lois théoriques, il est possible qu'aucune d'entre elles ne permette de représenter fidèlement l'échantillon. On propose donc ici une procédure alternative qui consiste à représenter un échantillon d'une variable aléatoire Y grâce à la décomposition en polynômes chaos. Pour ce problème, aucune des techniques intrusives ou non-intrusives ne peut être utilisée pour estimer les coefficients α_i de la décomposition. Cela pour la simple raison qu'elles dépendent de la relation fonctionnelle de la forme $Y = f(X)$, c'est-à-dire que pour une valeur donnée de X , on devrait être capable de retrouver la valeur correspondante de Y . Quand on a seulement les données brutes de Y , une telle relation n'existe pas. Ici, pour résoudre ce problème, on construit un problème d'optimisation basé sur la réciproque des fonctions de répartition estimées à partir des échantillons de X et Y pour calculer les coefficients α_i . On s'aperçoit que l'ajout de contraintes au problème augmente la robustesse de la procédure. Plus particulièrement, il faut imposer que la moyenne et la variance empiriques calculées à partir de l'échantillon soient les mêmes que celles de sa représentation avec les polynômes chaos.

La procédure proposée est testée numériquement sur un premier échantillon généré à partir d'une fonction polynomiale $Y = P(X)$ où X est une variable aléatoire de loi de probabilité connue. Ensuite, on montre que la méthode numérique proposée converge vers les bons coefficients polynomiaux. L'échantillon utilisé pour le second test est généré à partir d'une fonction de la forme $Y = f(X)$, où f est une fonction exponentielle. Les coefficients obtenus avec notre méthode sont ensuite comparés à ceux calculés avec la projection de Galerkin de f sur la base de polynômes chaos. Enfin, on teste la procédure sur l'échantillon des masses des éclats obtenus lors de l'explosion des trois charges EFFECTS. On montre alors que le développement en polynômes chaos surpasse la représentation du même échantillon sous la forme d'une distribution de Weibull.

Nous allons donc, dans un premier temps, expliquer plus en détail le développement en polynôme chaos d'une fonction. Ensuite, nous parlerons des méthodes d'estimation des coefficients utilisés dans un tel développement. Nous verrons ainsi la raison pour laquelle on ne peut les utiliser dans notre cas. Enfin, nous présenterons une nouvelle méthode permettant d'estimer les coefficients de la décomposition en polynômes chaos. Trois tests seront effectués pour prouver son efficacité.

4.2 Le développement en polynômes chaos

Le développement en polynômes chaos repose sur les polynômes orthogonaux, c'est pourquoi, dans cette section nous commençons par faire quelques rappels sur ce sujet. Soient V l'espace vectoriel réel de tous les polynômes avec une seule variable et des coefficients réels, et le produit scalaire de V défini par :

$$\langle u, v \rangle = \int_I u(x)v(x)p(x)dx \quad \forall u, v \in V, \quad (4.2)$$

où $p : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction positive intégrable de x considérée comme une «fonction poids». L'ensemble des polynômes $\{\Psi_n\}_{n \geq 0}$ sont dits orthogonaux par rapport à la fonction poids $p(x)$, si Ψ_n est un polynôme de degré n et

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \int_I \Psi_n(x)\Psi_m(x)p(x)dx = h_n^2 \delta_{n,m} \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad (4.3)$$

où $\delta_{n,m}$ est la fonction delta de Kronecker (définition 4.1 ci-dessous) et les h_n sont des constantes non nulles. Pour les polynômes orthogonaux de degré $d = 0$, Ψ_0 est toujours égal à une constante et le système ci-dessus est orthonormal si $h_n = 1$.

Définition 4.1. *Delta de Kronecker*

Le delta de Kronecker est la fonction

$$\begin{aligned} \delta_{n,m} : \quad \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (n, m) &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pour une fonction poids p donnée, des procédures numériques peuvent être appliquées pour construire une base orthogonale par rapport à p , dont celle proposée en 2009 par S. Rahman [65]. Cette procédure est basée sur la relation de récurrence à trois termes de Gautschi [22] (voir théorème 4.1 ci-après). Elle consiste en une approximation discrète du produit scalaire de fonction poids p .

Définition 4.2. *Polynôme unitaire*

Un polynôme P à coefficients réels, de degré n , est unitaire si le coefficient du plus grand monôme est égal à 1. Autrement dit, s'il est de la forme

$$P(x) = 1.x^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i,$$

avec pour tout $0 \leq i \leq n-1$, α_i une constante.

Lemme 4.1.

On considère un ensemble $\{P_i\}_{0 \leq i \leq n}$ de polynômes unitaires orthogonaux par rapport à une fonction densité $p : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Ces polynômes sont alors linéairement indépendants (i.e. $\sum_{i=0}^n c_i P_i(x) = 0 \Rightarrow (c_0, \dots, c_n) = (0, \dots, 0)$).

De plus, tout polynôme π de degré n peut être représenté, de façon unique, sous la forme

$$\pi(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x) \quad (4.5)$$

avec les coefficients c_i réels et constants.

Démonstration.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de fonction poids $p : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Montrons que $\pi(x) = 0$ implique que les coefficients c_i dans l'équation (4.5) sont nuls. Pour cela, on remarque que pour tout j tel que $0 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} \left\langle P_j(x), \sum_{i=0}^n c_i P_i(x) \right\rangle &= \langle P_j(x), 0 \rangle \\ \int_I P_j(x) \left(\sum_{i=0}^n c_i P_i(x) \right) p(x) dx &= 0 \\ \sum_{i=0}^n c_i \int_I P_j(x) P_i(x) p(x) dx &= 0. \end{aligned}$$

Par orthogonalité des polynômes $\{P_i\}_{0 \leq i \leq n}$, on a alors

$$c_j \langle P_j(x), P_j(x) \rangle = 0.$$

Comme $\langle P_j(x), P_j(x) \rangle \neq 0$, on en conclut que $c_j = 0$, ce qui prouve que les polynômes $\{P_i\}_{0 \leq i \leq n}$ sont linéairement indépendants.

Ensuite, on note π un polynôme de degré n . On montre que l'on peut écrire π sous la forme $\pi(x) = \sum_{i=0}^n c_i P_i(x)$. On détermine donc les coefficients c_i . Pour tout j tel que $0 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned}\pi(x) &= \sum_{i=0}^n c_i P_i(x) \\ \langle P_j(x), \pi(x) \rangle &= \left\langle P_j(x), \sum_{i=0}^n c_i P_i(x) \right\rangle \\ \langle P_j(x), \pi(x) \rangle &= \sum_{i=0}^n c_i \langle P_j(x), P_i(x) \rangle\end{aligned}$$

Par orthogonalité des polynômes $\{P_i\}_{0 \leq i \leq n}$, on a alors

$$\begin{aligned}\langle P_j(x), \pi(x) \rangle &= c_j \langle P_j(x), P_j(x) \rangle \\ c_j &= \frac{\langle P_j(x), \pi(x) \rangle}{\langle P_j(x), P_j(x) \rangle}\end{aligned}$$

□

Théorème 4.1. *Relation de récurrence à trois termes de Gautschi*

Soit une fonction poids p qui correspond à la densité d'une variable aléatoire réelle X de moments d'ordres $\leq 2m$ finis, avec $m \in \mathbb{N}$, i.e.

$$\text{pour tout entier } n \in \llbracket 0, 2m \rrbracket, \int_{\mathbb{R}} x^n p(x) dx < \infty, \quad (4.6)$$

Soit \mathcal{P} l'espace des polynômes réels et $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}$ l'espace des polynômes réels de degré $\leq m$,

Pour tous polynômes $u(x)$ et $v(x)$ de \mathcal{P} , on définit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ comme dans l'équation (4.2) avec $I = \mathbb{R}$, et la norme $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.

L'ensemble $\{P_j(x) | j = 0, 1, 2, \dots\}$ des polynômes unitaires de degré j (définition 4.2), orthogonaux suivant le produit scalaire défini, satisfont la relation

$$\begin{aligned}\forall j \in \mathbb{N}, P_{j+1}(x) &= (x - a_j)P_j(x) - b_j P_{j-1}(x), \\ P_{-1}(x) &= 0 \text{ et } P_0(x) = 1,\end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\text{avec } a_j = \frac{\langle x P_j(x), P_j(x) \rangle}{\langle P_j(x), P_j(x) \rangle} \text{ et } b_j = \begin{cases} \langle P_0(x), P_0(x) \rangle, & j = 0 \\ \frac{\langle P_j(x), P_j(x) \rangle}{\langle P_{j-1}(x), P_{j-1}(x) \rangle}, & j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

L'index j de la base $\{P_j(x) | j = 0, 1, 2, \dots\}$ peut être infini ou fini ($j \leq m-1$) suivant si le produit scalaire est défini sur \mathcal{P} , ou sur \mathcal{P}_m .

Démonstration.

Soit l'ensemble $\{P_j(x) | j = 0, 1, 2, \dots\}$ des polynômes unitaires orthogonaux et $j \in \mathbb{N}$, alors $P_{j+1}(x) - xP_j(x)$ est un polynôme de degré $\leq j$, d'après la définition 4.2 des polynômes unitaires.

D'après l'équation (4.5) du lemme 4.1, on peut représenter le polynôme $P_{j+1}(x) - xP_j(x)$ de degré j , de façon unique, par

$$P_{j+1}(x) - xP_j(x) = -a_j P_j(x) - b_j P_{j-1}(x) + \sum_{i=0}^{j-2} c_{j,i} P_i(x) \quad (4.8)$$

avec les a_j , b_j et $c_{j,i}$ constantes. Pour $j = 0$, $P_{j+1}(x) - xP_j(x)$ est de degré nul, comme $P_{j+1}(x)$ et $P_j(x)$ sont unitaires. On peut donc choisir $P_{-1}(x) = 0$ et $P_0(x) = 1$. Pour $j = 0$ ou 1 , la somme dans l'expression ci-dessus est nulle.

On détermine maintenant les valeurs des différents coefficients. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} P_{j+1}(x) - xP_j(x) &= -a_j P_j(x) - b_j P_{j-1}(x) + \sum_{i=0}^{j-2} c_{j,i} P_i(x) \\ \langle P_{j+1}(x) - xP_j(x), P_j(x) \rangle &= \left\langle -a_j P_j(x) - b_j P_{j-1}(x) + \sum_{i=0}^{j-2} c_{j,i} P_i(x), P_j(x) \right\rangle. \end{aligned}$$

Par orthogonalité des polynômes $\{P_i\}_{0 \leq i \leq n}$, on a alors

$$\begin{aligned} \langle P_{j+1}(x) - xP_j(x), P_j(x) \rangle &= -a_j \langle P_j(x), P_j(x) \rangle \\ -\langle xP_j(x), P_j(x) \rangle &= -a_j \langle P_j(x), P_j(x) \rangle \\ a_j &= \frac{\langle xP_j(x), P_j(x) \rangle}{\langle P_j(x), P_j(x) \rangle}. \end{aligned}$$

De la même manière, pour tout naturel j non nul, on détermine l'expression de b_j en calculant cette fois le produit scalaire suivant :

$$\langle P_{j+1}(x) - xP_j(x), P_{j-1}(x) \rangle = \left\langle -a_j P_j(x) - b_j P_{j-1}(x) + \sum_{i=0}^{j-2} c_{j,i} P_i(x), P_{j-1}(x) \right\rangle.$$

Par orthogonalité des polynômes $\{P_i\}_{0 \leq i \leq n}$, on obtient

$$\begin{aligned}\langle -xP_j(x), P_{j-1}(x) \rangle &= \langle -b_j P_{j-1}(x), P_{j-1}(x) \rangle \\ b_j &= \frac{\langle xP_j(x), P_{j-1}(x) \rangle}{\langle P_{j-1}(x), P_{j-1}(x) \rangle}.\end{aligned}$$

D'après l'équation (4.2),

$$\langle xP_j(x), P_{j-1}(x) \rangle = \langle P_j(x), xP_{j-1}(x) \rangle.$$

D'après le lemme 4.1, $xP_{j-1}(x)$ de degré j peut être exprimé de façon unique par

$$xP_{j-1}(x) = \sum_{i=0}^j d_i P_i(x),$$

avec les d_i constantes et $d_j = 1$. En effet, $xP_{j-1}(x)$ est un polynôme unitaire tout comme le seul polynôme de degré j de la somme ci-dessus, noté $P_j(x)$.

Par orthogonalité des polynômes $\{P_i\}_{0 \leq i \leq n}$, on a ainsi

$$\begin{aligned}\langle xP_j(x), P_{j-1}(x) \rangle &= \left\langle P_j(x), P_j(x) + \sum_{i=0}^{j-1} d_i P_i(x) \right\rangle \\ &= \langle P_j(x), P_j(x) \rangle.\end{aligned}$$

L'expression de b_j est alors la suivante :

$$b_j = \frac{\langle P_j(x), P_j(x) \rangle}{\langle P_{j-1}(x), P_{j-1}(x) \rangle}.$$

Pour $j = 0$, dans l'équation (4.8), $P_{j-1}(x)$ est nul donc on peut fixer arbitrairement $b_0 = \langle P_0(x), P_0(x) \rangle$.

Enfin, pour tout $k \leq j - 2$, on a l'égalité

$$\begin{aligned}\langle P_{j+1}(x) - xP_j(x), P_k(x) \rangle &= \left\langle -a_j P_j(x) - b_j P_{j-1}(x) + \sum_{i=0}^{j-2} c_{j,i} P_i(x), P_k(x) \right\rangle \\ - \langle xP_j(x), P_k(x) \rangle &= c_{j,k} \langle P_k(x), P_k(x) \rangle,\end{aligned}$$

d'après l'orthogonalité des polynômes $\{P_i\}_{0 \leq i \leq n}$. Et comme précédemment pour le polynôme $xP_{j-1}(x)$, d'après le lemme 4.1,

$$\langle P_j(x), xP_k(x) \rangle = \left\langle P_j(x), P_{k+1}(x) + \sum_{l=0}^k d_l P_l(x) \right\rangle$$

avec les d_l constantes. D'après l'orthogonalité des $\{P_i\}_{0 \leq i \leq n}$, ce produit scalaire est nul.

Ainsi, on trouve $c_{j,i} = 0$.

□

Exemple 1. *Construction de la base de polynômes de Legendre.*

Les polynômes de Legendre forment une base complète de polynômes orthogonaux par rapport à la densité d'une loi uniforme $\mathcal{U}([-1, 1])$. Les premiers polynômes de cette base, définis pour tout $x \in [-1, 1]$, sont construits ainsi :

$$P_{-1}(x) = 0 \text{ et } P_0(x) = 1$$

$$a_0 = \frac{\langle xP_0(x), P_0(x) \rangle}{\langle P_0(x), P_0(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x dx}{\int_{-1}^1 dx} = 0$$

et

$$b_0 = \langle P_0(x), P_0(x) \rangle = 2$$

$$\text{donc } P_1(x) = (x - a_0)P_0(x) - b_0P_{-1}(x) = x,$$

$$a_1 = \frac{\langle xP_1(x), P_1(x) \rangle}{\langle P_1(x), P_1(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x^3 dx}{\int_{-1}^1 x^2 dx} = 0$$

et

$$b_1 = \frac{\langle P_1(x), P_1(x) \rangle}{\langle P_0(x), P_0(x) \rangle} = \frac{2/3}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{donc } P_2(x) = (x - a_1)P_1(x) - b_1P_0(x) = x^2 - \frac{1}{3},$$

$$a_2 = \frac{\langle xP_2(x), P_2(x) \rangle}{\langle P_2(x), P_2(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x(x^2 - \frac{1}{3})^2 dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx} = 0$$

et

$$b_2 = \frac{\langle P_2(x), P_2(x) \rangle}{\langle P_1(x), P_1(x) \rangle} = \frac{8/45}{2/3} = \frac{4}{15}$$

$$\text{donc } P_3(x) = (x - a_2)P_2(x) - b_2P_1(x) = x(x^2 - \frac{1}{3}) - \frac{4}{15}x = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$a_3 = \frac{\langle xP_3(x), P_3(x) \rangle}{\langle P_3(x), P_3(x) \rangle} = \frac{\int_{-1}^1 x(x^3 - \frac{3}{5}x)^2 dx}{\int_{-1}^1 (x^3 - \frac{3}{5}x)^2 dx} = 0$$

et

$$b_3 = \frac{\langle P_3(x), P_3(x) \rangle}{\langle P_2(x), P_2(x) \rangle} = \frac{8/175}{8/45} = \frac{9}{35}$$

$$\text{donc } P_4(x) = (x - a_3)P_3(x) - b_3P_2(x) = x(x^3 - \frac{3}{5}x) - \frac{9}{35}(x^2 - \frac{1}{3}) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}.$$

Remarque.

Les polynômes construits selon les formules du théorème 4.1 sont seulement orthogonaux. On peut tout de même, pour tout $j \in \mathbb{N}$, diviser le polynôme $P_j(x)$ par la racine de sa norme $\langle P_j(x), P_j(x) \rangle$ pour qu'il soit orthonormé.

Pour le calcul des m premiers coefficients (a_j, b_j) , du théorème 4.1, on a besoin des $2m$ premiers moments de la variable X de densité p (équation (4.6)). Pour les lois de probabilité connues discrètes ou continues, comme les lois uniforme et normale, les valeurs de ces coefficients sont connues [22]. Malheureusement, dans le cas général, leur calcul est trop complexe. On doit donc réaliser une approximation des produits scalaires correspondants aux différents moments. Pour faire cela, on utilise la règle de quadrature de Féjer [21] définie ci-dessous.

Pour une fonction g quelconque définie sur un intervalle $[a, b]$ et pour une densité de probabilité p , il existe pour tout $n \in \mathbb{N}$ une règle de quadrature à n points

$$\int_a^b g(t)p(t)dt = \int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^n \omega_i f(x_i) + R_n(f), \quad (4.9)$$

avec f la fonction telle que $f = g \times p$. La somme à droite est une approximation de l'intégrale à gauche. Les ω_i et les x_i sont respectivement les poids et points de la règle de quadrature. $R_n(f)$ correspond à l'erreur d'approximation. Les poids et points de la règle de quadrature de Féjer sont définis, pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, par

$$\omega_k = \frac{b-a}{2} \frac{2}{n} \left(1 - 2 \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{\cos(2i\theta_k)}{4i^2 - 1} \right) \quad \text{et} \quad x_k = \frac{b-a}{2} \cos(\theta_k) + \frac{b+a}{2} \quad (4.10)$$

avec $\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi$. La notation $\lfloor n/2 \rfloor$ représente la partie entière inférieure de $n/2$ [16]. Grâce à ce résultat, calculer les intégrales intervenant dans les formules (4.7) des coefficients du théorème 4.1 revient à un simple calcul de sommes.

Les polynômes chaos forment une base, pouvant être construite comme nous venons de le voir. Après avoir déterminé cette base, un développement en polynômes chaos peut alors être réalisé pour modéliser une variable aléatoire.

Notation.

Un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est formé de :

- l'ensemble Ω , appelé l'univers, qui est l'ensemble de tous les résultats possibles ;
- l'ensemble \mathcal{F} des événements aléatoires, qui est une σ -algèbre sur Ω , c'est-à-dire l'ensemble des sous-parties de Ω ;
- la probabilité \mathbb{P} qui est une fonction de $\mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et si A et B sont deux événements indépendants alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On note maintenant $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{R} qui décrit les incertitudes en entrée. La loi de probabilité de X peut être définie par la densité de probabilité $p(x)$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note aussi $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace des variables aléatoires réelles avec les moments du second ordre finis, c'est-à-dire telles que

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2 p(x) dx < \infty, \tag{4.11}$$

où \mathbb{E} représente l'espérance mathématique. $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace de Hilbert (définition 4.3) qui peut être fourni avec une base complète $\{\Psi_j(x)\}_{j \geq 0}$ orthogonale par rapport à la densité de X . Par exemple, les polynômes de Hermite forment une base associée aux distributions gaussiennes (voir exemple 2 ci-dessous). Dans le cas d'une loi de probabilité non théorique, une base de polynômes peut être construite selon la méthode présentée ci-dessus.

Une fonction de sortie donnée $Y = Y(X)$, qui est supposée appartenir à $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, peut être représentée par [25, 86] :

$$Y(X) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \Psi_j(X). \tag{4.12}$$

Définition 4.3. *Espace de Hilbert*

Soit H un espace vectoriel, réel ou complexe, muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ associé à la norme $\| \cdot \|$ telle que $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in H$, alors H est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme $\| \cdot \|$.

H est complet si dans cet espace toute suite (u_n) de Cauchy, définie par

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que, } \forall (p, n) \in \mathbb{N}^2, (p \geq N \text{ et } n \geq N) \Rightarrow \|u_p - u_n\| < \epsilon,$$

converge.

Exemple 2. Base de polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite forment une base de polynômes orthogonaux par rapport à la densité d'une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, correspondant au degré du polynôme, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, ils sont définis par

$$P_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}. \quad (4.13)$$

On peut prouver, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} &= e^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^{n+k} \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!} x^{n-2k} \\ P_n(x) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{2^k k! (n-2k)!} x^{n-2k}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

avec $\lfloor n/2 \rfloor$ la partie entière de $n/2$.

Les premiers polynômes de la base sont donc les suivants :

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= x^2 - 1 \\ P_3(x) &= x^3 - 3x \\ P_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \\ P_5(x) &= x^5 - 10x^3 + 15x. \end{aligned}$$

On prouve leur orthogonalité (voir équation (4.3)) par rapport à la densité $f : x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ de la façon suivante :

Soient deux entiers $m \geq n$, on réalise n intégrations par parties (i.p.p), en tenant compte du fait qu'un polynôme multiplié par $e^{-x^2/2}$ tend vers 0 en $\pm\infty$. On a alors le résultat

$$\begin{aligned}
\langle P_m, P_n \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(x) P_n(x) \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx \\
&= \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^m}{dx^m} e^{-x^2/2} \right) P_n(x) dx \\
&= \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} e^{-x^2/2} \right) P_n^{(1)}(x) dx,
\end{aligned}$$

d'après une première i.p.p. Après la $n^{\text{ème}}$ i.p.p, on a

$$\langle P_m, P_n \rangle = \frac{(-1)^{m-n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} e^{-x^2/2} \right) P_n^{(n)}(x) dx$$

égal, d'après l'équation (4.14), à

$$\begin{aligned}
\langle P_m, P_n \rangle &= \frac{(-1)^{m-n}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d^{m-n}}{dx^{m-n}} e^{-x^2/2} \right) n! dx \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } m > n \\ n! \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = n! & \text{si } m = n \end{cases}
\end{aligned}$$

qui montre bien l'orthogonalité de la base de polynômes d'Hermite.

Dans les simulations numériques, la somme (4.12) est tronquée en gardant les termes inférieurs à un degré n :

$$Y(X) \approx \tilde{Y}(X) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \Psi_j(X). \tag{4.15}$$

Une fois que cette approximation de la réponse du système a été trouvée (voir section 4.3 ci-dessous), sous la forme d'une décomposition en polynômes chaos, il est facile de calculer les différentes quantités macroscopiques. Par exemple, l'espérance de \tilde{Y} est simplement le premier coefficient de la décomposition en polynômes chaos, i.e.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\tilde{Y}) &= \sum_{j=0}^n \alpha_j \mathbb{E}(\Psi_j(X)) \\
 &= \sum_{j=0}^n \alpha_j \int_{\Omega} \Psi_j(x) p(x) dx \\
 &= \sum_{j=0}^n \alpha_j \int_{\Omega} \Psi_0(x) \Psi_j(x) p(x) dx,
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

qui d'après l'orthonormalité des polynômes $\{\Psi_j(x)\}_{j \geq 0}$ est égale à

$$\mathbb{E}(\tilde{Y}) = \alpha_0.$$

De la même manière, la variance de \tilde{Y} est donnée par

$$\text{Var}(\tilde{Y}) = \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^n \alpha_j \Psi_j(X) \right)^2 \right) - \mathbb{E}^2(\tilde{Y}) \tag{4.17}$$

et d'après l'orthonormalité de $\{\Psi_j(x)\}_{j \geq 0}$,

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\tilde{Y}) &= \sum_{j=0}^n \alpha_j^2 \mathbb{E}(\Psi_j^2(X)) - \alpha_0^2 \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j^2.
 \end{aligned}$$

Dans le cas de paramètres d'entrée multiples, on verra dans la section 6.2.1 (p.91), qu'une analyse de sensibilité peut aussi être réalisée en calculant les indices de Sobol à partir des coefficients du polynôme chaos [76].

Dans la prochaine section, on détaille deux moyens de calculer les coefficients α_j quand une relation fonctionnelle de la forme $Y = f(X)$ est connue : la projection de Galerkin et la régression linéaire. Ensuite, on explique pourquoi aucune des deux procédures ne peut être appliquée dans le cadre du problème qui nous intéresse et on propose une nouvelle méthode.

4.3 Calcul des coefficients des polynômes chaos

4.3.1 Relation fonctionnelle $Y = f(X)$ disponible

La projection de Galerkin

Soit une surface de réponse $\tilde{Y}(X)$ de la forme (4.15), avec $\{\Psi_j(X)\}_{0 \leq j \leq n}$ une famille de polynômes orthonormés, qui modélise le système $Y = f(X)$. L'expression de f n'a pas besoin d'être connue explicitement. On peut se représenter f comme une boîte noire représentant notre modèle de telle sorte que pour une valeur d'entrée x_i donnée la réponse du système $y_i = f(x_i)$ est valide. Pour calculer les coefficients α_j de (4.15), on opère de la manière suivante :

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{j=0}^n \alpha_j \Psi_j(X) \\ f(X)\Psi_i(X) &= \sum_{j=0}^n \alpha_j \Psi_i(X)\Psi_j(X) \\ \mathbb{E}(f(X)\Psi_i(X)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^n \alpha_j \Psi_i(X)\Psi_j(X)\right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

D'après la linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(f(X)\Psi_i(X)) = \sum_{j=0}^n \alpha_j \mathbb{E}(\Psi_i(X)\Psi_j(X)).$$

Ensuite, en utilisant l'orthonormalité des polynômes $\Psi_j(X)$, i.e. $\langle \Psi_i(X), \Psi_j(X) \rangle = \mathbb{E}(\Psi_i(X)\Psi_j(X)) = \delta_{ij}$, on obtient

$$\alpha_i = \mathbb{E}(f(X)\Psi_i(X)) = \int_I f(x)\Psi_i(x)p(x)dx. \tag{4.19}$$

avec $p(x)$ la densité de probabilité de X .

Cette procédure est connue comme étant la projection de Galerkin dans la communauté déterministe et elle a aussi une connexion forte avec la technique de la moyenne du carré linéaire utilisée dans la communauté statistique (le calcul du minimum de $\mathbb{E}[(f(X) - \sum_{j=0}^n \alpha_j \Psi_j(X))^2]$). La prochaine étape est l'évaluation de l'intégrale ci-dessus, en utilisant les points connus de la fonction f . Quand le problème contient un nombre faible de variables aléatoires d'entrée, les règles de quadrature de Gauss sont généralement utilisées [26]. Elles prennent la forme (pour une seule variable)

$$\int_I h(x)p(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n_q} \omega_k h(x_k), \quad (4.20)$$

pour une quelconque fonction h intégrable sur I . La construction des règles de quadrature est habituellement réalisée en tandem avec la construction des polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids $p(x)$ [22]. On note que les points et poids sont tels que la formule (4.20) est exacte quand h est un polynôme de degré inférieur ou égal à $2n_q - 1$. En combinant (4.19) et (4.20), on obtient l'expression pour le calcul des coefficients du polynôme chaos suivante :

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{n_q} \omega_k f(x_k) \Psi_i(x_k). \quad (4.21)$$

Bien que la procédure expliquée ici a été bien décrite dans la littérature, il était important de restituer ses éléments principaux avant de souligner que le calcul des α_i nécessite l'évaluation des $f(x_k)$ aux points spécifiés x_k .

La régression linéaire

La seconde méthode la plus populaire pour calculer les coefficients α_j de (4.15) consiste à résoudre l'équation grâce à la méthode des moindres carrés. Pour cela, une collection de N valeurs de réponse $f(x_k)$ est calculée pour les valeurs d'entrée x_k . Les coefficients du polynôme chaos sont recherchés comme le minimum de la fonction $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^N \left(f(x_k) - \sum_{j=0}^n \alpha_j \Psi_j(x_k) \right)^2.$$

On montre que la solution $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0^{min}, \dots, \alpha_n^{min})^T$ de ce problème est

$$\boldsymbol{\alpha} = (M^T M)^{-1} M^T \mathbf{f}, \quad (4.22)$$

où $\mathbf{f} = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$ et M est une matrice $N \times (n+1)$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} \Psi_0(x_1) & \cdots & \Psi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_0(x_N) & \cdots & \Psi_n(x_N) \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

Une condition nécessaire pour que le minimum d'une fonction $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ soit atteint pour un point $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0^{min}, \dots, \alpha_n^{min})^T$ est que la dérivée de g en ce point soit nulle.

$$g(\boldsymbol{\alpha}) = \min_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}} \left(\sum_{k=1}^N \left(f(x_k) - \sum_{j=0}^n \alpha_j \Psi_j(x_k) \right)^2 \right)$$

implique donc que pour tout j tel que $0 \leq j \leq n$,

$$\frac{dg}{d\alpha_j}(\boldsymbol{\alpha}) = 0$$

$$-2 \sum_{k=1}^N f(x_k) \Psi_j(x_k) + 2 \sum_{k=1}^N \left(\Psi_j(x_k) \sum_{i=0}^n \alpha_i^{min} \Psi_i(x_k) \right) = 0.$$

Le résultat ci-dessus est équivalent, en écriture matricielle, à

$$-M^T \mathbf{f} + M^T M \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}_{(n+1),1}$$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} \Psi_0(x_1) & \cdots & \Psi_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_0(x_N) & \cdots & \Psi_n(x_N) \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{f} = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T.$$

On retrouve ainsi le résultat (4.22). □

Le sur-échantillonnage (i.e. $N > n + 1$) est habituellement préféré, ce qui donne un système $M\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}$ sur-déterminé (qui contient plus d'équations que de valeurs à déterminer), dont la solution des moindres carrés est donnée par (4.22). En règle générale, on choisit $N = 2(n + 1)$ (voir [69]).

Ici encore, on met en évidence le fait que la procédure de régression permet d'identifier les coefficients α_j qui sont liés au calcul du système de sortie $f(x_k)$ pour une valeur d'entrée x_k spécifiée. Toutes les autres méthodes trouvées dans la littérature pour le calcul des coefficients d'un polynôme chaos sont elles aussi appliquées seulement dans le cas où une relation entrée/sortie est connue. Comme ce n'est pas le cas pour le problème qui se pose ici, on utilise une nouvelle procédure proposée dans la section suivante.

4.3.2 Relation fonctionnelle $Y = f(X)$ non disponible

Le problème à résoudre ici est maintenant de modéliser un échantillon (y_1, \dots, y_{N_Y}) de N_Y variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées comme suit :

$$Y = \sum_{j=0}^n \alpha_j \Psi_j(X), \quad (4.23)$$

où X est une variable aléatoire de loi de probabilité connue. Une telle représentation d'un échantillon donne la même information que la densité de probabilité de Y le ferait, et dans les deux cas il faut estimer des paramètres. Dans le cas de la densité de probabilité, on suppose que celle de Y est de la forme d'une densité de probabilité connue et ensuite on estime ses paramètres en utilisant un estimateur du maximum de vraisemblance, par exemple [81]. Quand on utilise le développement en polynômes chaos, aucune des techniques vues précédemment ne peut être utilisée pour calculer les coefficients du polynôme chaos. Un problème d'optimisation est alors développé. Dans les deux cas, les quantités macroscopiques (espérance, variance, ...) sont ensuite faciles à calculer. Toutefois, on pense qu'une représentation sous la forme (4.23) peut offrir des bénéfices significatifs pour caractériser un échantillon. Premièrement, cela donne une grande liberté de choix lorsqu'il n'y a pas de densité de probabilité standard présentant une forme convenable pour l'échantillon à étudier. Ensuite, il est facile de générer un nouvel échantillon pour la variable Y à partir d'un échantillon de X avec la formule (4.23).

Afin d'introduire notre méthode, on considère un échantillon (x_1, \dots, x_{N_X}) de N_X variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ayant la même densité de probabilité que X . Un tel échantillon peut facilement être généré numériquement avec un générateur de nombres pseudo-aléatoires standard. Soit (z_1, \dots, z_{N_X}) un échantillon de taille N_X tel que pour $k = 1, \dots, N_X$ on a

$$z_k = \sum_{j=0}^n \alpha_j \Psi_j(x_k).$$

On note \widetilde{F}_Y la fonction de répartition empirique construite à partir de l'échantillon de départ (y_1, \dots, y_{N_Y}) , et $\widetilde{F}_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)}$ celle construite à partir de l'échantillon (z_1, \dots, z_{N_X}) pour un ensemble de coefficients $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ donné. On a une subdivision uniforme $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ de l'intervalle $[0, 1]$ telle que pour tout $0 \leq l \leq r - 1$, $t_{l+1} - t_l = 1/n$. Finalement, on définit la fonction c (considérée comme une «fonction coût» plus tard) comme suit :

$$\begin{aligned}
c & : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} \\
(\alpha_0, \dots, \alpha_n) & \mapsto \sum_{l=0}^r \left| \tilde{F}_Y^{-1}(t_l) - \tilde{F}_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)}^{-1}(t_l) \right|,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

où \tilde{F}^{-1} représente la fonction réciproque de la fonction de répartition \tilde{F} . Pour un échantillon de taille N , elle peut être définie comme une fonction $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $y \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^{-1}(y) & = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} / \tilde{F}(x) \geq y \right\} \\
& = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} / \left(\frac{\text{nombre d'éléments} \leq x}{N} \right) \geq y \right\} \\
& = \inf \left\{ x \in \mathbb{R} / (\text{nombre d'éléments} \leq x) \geq Ny \right\}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

avec $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.

La fonction inf dans la définition de la fonction de répartition réciproque nous assure que dans le cas de multiples observations identiques dans l'échantillon, $x = \tilde{F}^{-1}(y)$ est définie comme la plus petite valeur de x telle que $\tilde{F}(x) \geq y$.

Ensuite, les coefficients du développement en polynômes chaos (4.23) sont la solution du problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\begin{cases} \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \underset{\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}}{\operatorname{argmin}}(c(\alpha)) \\ \alpha_0 = \mathbb{E}(Y) \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 = \widetilde{\operatorname{Var}}(Y) \end{cases}, \tag{4.26}$$

où $\mathbb{E}(Y)$ et $\widetilde{\operatorname{Var}}(Y)$ sont l'espérance et la variance empiriques calculées à partir de l'échantillon (y_1, \dots, y_{N_Y}) comme suit :

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{N_Y} \sum_{k=1}^{N_Y} y_k \quad \widetilde{\operatorname{Var}}(Y) = \frac{1}{N_Y} \sum_{k=1}^{N_Y} (y_k - \mathbb{E}(Y))^2.$$

Les contraintes sur les coefficients $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ sont déterminées grâce aux résultats (4.16) et (4.17).

Remarques.

- *Le problème d'optimisation est construit pour qu'aux $(r + 1)$ points $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ de l'intervalle $[0, 1]$, la fonction de répartition réciproque de la variable aléatoire Y coïncide avec celle de la représentation en polynôme chaos $\sum_{j=0}^n \alpha_j \Psi_j(X)$ de Y . Les deux contraintes améliorent grandement la robustesse du problème d'optimisation. Elles imposent que la moyenne et la variance empiriques de l'échantillon (y_1, \dots, y_{N_Y}) soient exactement la moyenne et la variance du développement en polynômes chaos.*
- *Nous avons choisi de faire coïncider les fonctions de répartition réciproques des deux échantillons au lieu des fonctions de répartition surtout pour des raisons d'implémentation et d'efficacité. Les expériences numériques utilisant la fonction de répartition au lieu de la fonction réciproque donnent des résultats similaires.*
- *La fonction coût (4.24) à minimiser dépend d'une norme L^1 . D'autres normes pourraient être utilisées (comme la norme L^2 par exemple), toutefois on a trouvé que la norme L^1 donnait constamment des résultats plus robustes pour le problème d'optimisation.*

4.4 Les résultats numériques

4.4.1 Test de Kolmogorov-Smirnov

Avant de passer aux exemples numériques, on décrit brièvement le test de Kolmogorov-Smirnov (KS) qui est choisi pour évaluer la qualité de la représentation avec les polynômes chaos de l'échantillon. Ce test mesure la divergence entre la fonction de répartition empirique venant de l'échantillon expérimental (notée \tilde{F}_Y) et la fonction de répartition du développement en polynôme chaos (notée $\tilde{F}_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)}$). Typiquement, le critère KS est basé sur une norme L^∞ (on considère le point le plus mauvais de divergence entre \tilde{F}_Y et $\tilde{F}_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)}$) et prend la forme [6]

$$KS = \sup_{x \in I} \left(\tilde{F}_Y(x) - \tilde{F}_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)}(x) \right), \quad (4.27)$$

où I est le support des distributions comparées. Lorsque KS dépasse un certain seuil, on rejette l'hypothèse selon laquelle l'échantillon suit la loi dont la fonction de répartition est $\tilde{F}_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)}$. Le seuil est déterminé à partir de la taille de l'échantillon expérimental et d'un niveau de confiance choisi.

Ce test peut aussi être utilisé pour comparer deux échantillons, et dans ce cas, la fonction de répartition exacte doit être remplacée par la fonction de répartition estimée.

4.4.2 Données provenant d'une fonction polynomiale

Comme première expérience numérique pour tester la nouvelle méthode (section 4.3.2 p.50), on considère une base de polynômes orthonormés d'Hermite $\{\Psi_0, \dots, \Psi_4\}$ de degré 4 et on définit la variable aléatoire Y par :

$$Y = \Psi_0(X) + \frac{1}{2}\Psi_1(X) + \frac{1}{4}\Psi_2(X) + \frac{1}{8}\Psi_3(X) + \frac{1}{16}\Psi_4(X), \quad (4.28)$$

où X est une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite. Les polynômes de la base sont orthogonaux par rapport à la fonction de densité $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ et leur expression dans la base canonique orthonormée est rappelée dans le tableau suivant :

Ψ_0	1
Ψ_1	X
Ψ_2	$\frac{1}{\sqrt{2}}(-1 + X^2)$
Ψ_3	$\frac{1}{\sqrt{6}}(-3X + X^3)$
Ψ_4	$\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2} - X^2 + \frac{1}{6}X^4\right)$

TABLE 4.1 – Polynôme d'Hermite

On génère ce qui sera considéré comme un échantillon expérimental de Y , qui, dans ce cas, est généré numériquement avec des nombres pseudo-aléatoires de X et en utilisant la formule (4.28). Notre procédure numérique est testée pour trois tailles différentes de l'échantillon expérimental, $N_Y = 500, 2000, 8000$. La nouvelle méthode numérique décrite dans la section 4.3.2 (p.50), utilisée pour représenter la variable aléatoire Y sous la forme d'un développement en polynômes chaos, requiert la génération d'un échantillon de X de taille N_X . La robustesse de la méthode devrait être testée par rapport à la génération de cet échantillon, avec l'échantillon de X , et par conséquent les résultats des coefficients $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ sont donnés sous la forme d'intervalles de confiance à 95% pour la moyenne. Ici on prend $N_X = 10^5$ et $r = 3000$, où $(r + 1)$ est le nombre de points où la fonction de répartition réciproque de Y coïncide avec le développement en polynômes chaos (voir équation (4.24) p.51). Le tableau 4.2 montre les résultats pour les valeurs croissantes de N_Y avec les valeurs exactes des coefficients. On voit que lorsque la taille de l'échantillon expérimental Y augmente, les intervalles de confiances deviennent plus étroits autour des valeurs exactes du développement en polynômes chaos.

$\alpha \setminus N_Y$	$N_Y = 500$	$N_Y = 2000$	$N_Y = 8000$	Coefficients exacts
α_0	[0.9477; 1.0477]	[0.9743; 1.0246]	[0.9849; 1.0143]	1
α_1	[0.4193; 0.5546]	[0.4575; 0.5343]	[0.4805; 0.5193]	0.5
α_2	[0.1332; 0.3503]	[0.1950; 0.2921]	[0.2256; 0.2728]	0.25
α_3	[0.0381; 0.1771]	[0.0833; 0.1552]	[0.1074; 0.1405]	0.125
α_4	[-0.0263; 0.1475]	[0.0213; 0.0924]	[0.0437; 0.0803]	0.0625

TABLE 4.2 – Les intervalles de confiance pour les moyennes des coefficients du polynôme chaos : exemple polynomial

Cela est confirmé par le test KS dont les valeurs moyennes trouvées sont 0.0263, 0.0133 et 0.0080 pour des tailles allant de $N_Y = 500$ à $N_Y = 8000$ de l'échantillon de Y . Ces résultats montrent que lorsque l'on augmente la taille de l'échantillon expérimental, sa fonction de répartition $\tilde{F}_Y(x)$ converge vers la fonction de répartition du développement en polynômes chaos.

Les figures 4.1 et 4.2 ci-dessous représentent, pour $N_Y = 2000$, la densité de probabilité et la fonction de répartition exactes de la variable Y donnée par l'équation (4.28). Elles sont comparées à celles de l'échantillon expérimental et de la représentation en polynômes chaos réalisée avec notre méthode. Pour cette dernière, les coefficients de la décomposition en polynômes chaos choisis sont égaux à la moyenne empirique calculée à partir de l'ensemble des valeurs trouvées pour chaque simulation. Ils correspondent aussi aux valeurs centrales des intervalles de confiance ci-dessus, pour $N_Y = 2000$. On peut voir dans ces figures la bonne adéquation des trois courbes. La densité de probabilité de notre représentation en polynômes chaos a tendance à être plus proche de celle de l'échantillon que la densité exacte.

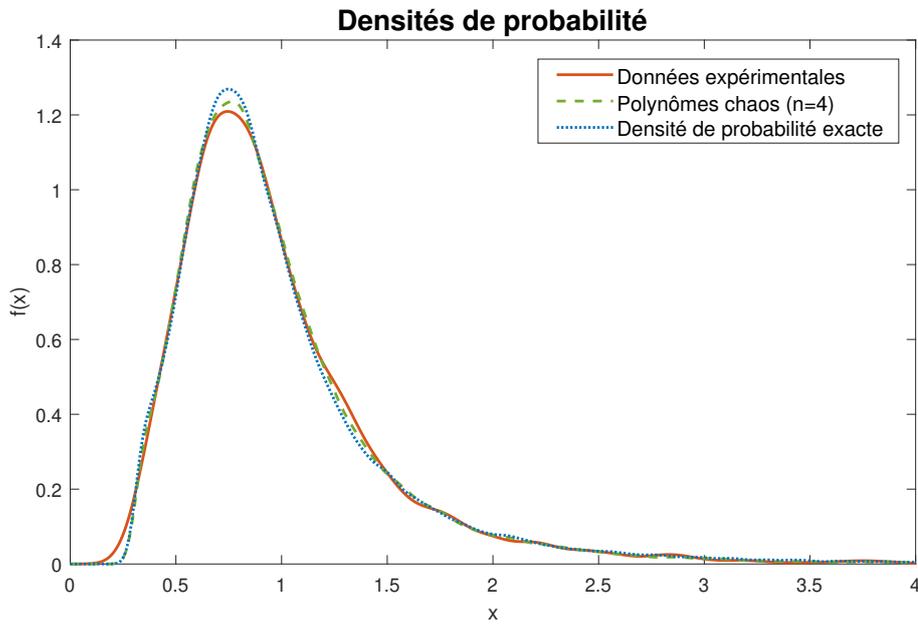


FIGURE 4.1 – Densités de probabilité pour l'exemple polynomial ($N_Y = 2000$)

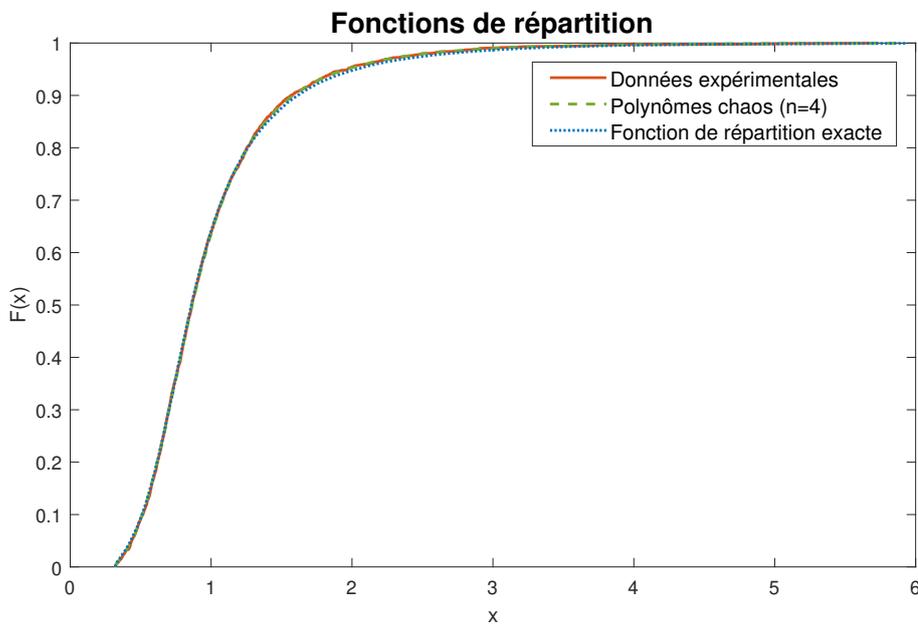


FIGURE 4.2 – Fonctions de répartition pour l'exemple polynomial ($N_Y = 2000$)

4.4.3 Données provenant d'une fonction non-polynomiale

Comme second exemple, on considère une fonction non-polynomiale de la forme :

$$Y = e^{0.5X}, \quad (4.29)$$

où X est une variable aléatoire gaussienne centrée et réduite. Dans ce cas, ce n'est pas possible d'avoir une représentation exacte de la variable aléatoire Y sous la forme d'un polynôme. Au lieu de cela, une approximation de Y sous la forme d'un développement en polynômes chaos peut être donnée grâce à la projection de Galerkin sur une base d'Hermite (section 4.3.1 p.47). Les coefficients du polynôme chaos obtenus avec la projection (équation (4.19) p.47) seront appelés «coefficients de Galerkin». L'échantillon expérimental de taille N_Y est celui obtenu à partir de la variable Y en générant un échantillon de taille N_Y pour la variable aléatoire X et en utilisant la formule (4.29). On note que la variable Y définie par la relation (4.29) suit une loi log-normale. Tous les paramètres N_X, N_Y et r ont les mêmes valeurs que dans l'exemple précédent. Dans cet exemple, rien n'assure que les coefficients de Galerkin sont dans l'intervalle de confiance. En effet, une régression linéaire aurait par exemple donné un ensemble de référence pour les coefficients du polynôme chaos différent. Toutefois, on remarque dans la table ci-dessous que plus la taille de l'échantillon augmente et plus les bornes des intervalles de confiance se rapprochent des coefficients de Galerkin.

$\alpha \setminus N_Y$	$N_Y = 500$	$N_Y = 2000$	$N_Y = 8000$	Coefficients de Galerkin
α_0	[1.0768; 1.1896]	[1.1011; 1.1631]	[1.1174; 1.1467]	1.1331
α_1	[0.5073; 0.6273]	[0.5347; 0.5964]	[0.5516; 0.5816]	0.5666
α_2	[0.1393; 0.2575]	[0.1673; 0.2262]	[0.1839; 0.2169]	0.2003
α_3	[0.0076; 0.0973]	[0.0293; 0.0765]	[0.0415; 0.0699]	0.0577
α_4	[-0.0355; 0.0580]	[-0.0113; 0.0321]	[0.0003; 0.0261]	0.0139

TABLE 4.3 – Les intervalles de confiance pour les moyennes des coefficients du polynôme chaos : exemple exponentiel

Ce résultat est aussi confirmé par le test KS dont les valeurs moyennes sont 0.0233, 0.0119 et 0.0070, pour des tailles allant de $N_Y = 500$ à $N_Y = 8000$ de l'échantillon de Y .

Les figures 4.3 et 4.4 ci-dessous montrent, pour $N_Y = 2000$, les densités de probabilité et les fonctions de répartition de l'échantillon expérimental et de la représentation en polynômes chaos réalisée avec la nouvelle méthode. Elles sont comparées à la densité

et à la fonction de répartition exactes de $Y = e^{0.5X}$. Dans cet exemple aussi, ces figures montrent la bonne convergence de notre représentation en polynômes chaos de l'échantillon. On note que la densité et la fonction de répartition de Y ne coïncident pas exactement avec celles de son développement en polynômes chaos, à cause de l'erreur de troncature provenant de l'approximation de la fonction exponentielle par un polynôme de degré 4.

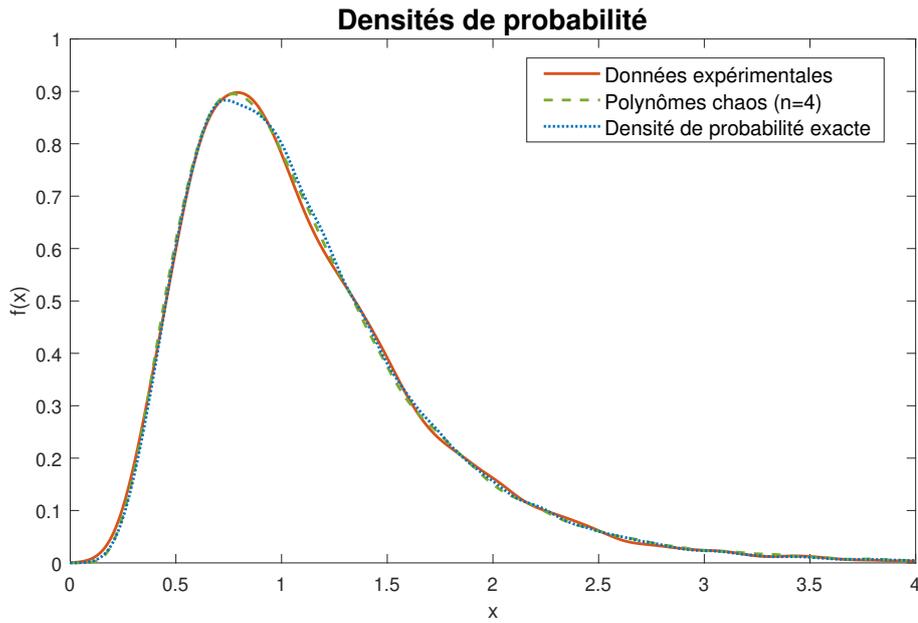


FIGURE 4.3 – Densités de probabilité pour l'exemple de la fonction exponentielle ($N_Y = 2000$)

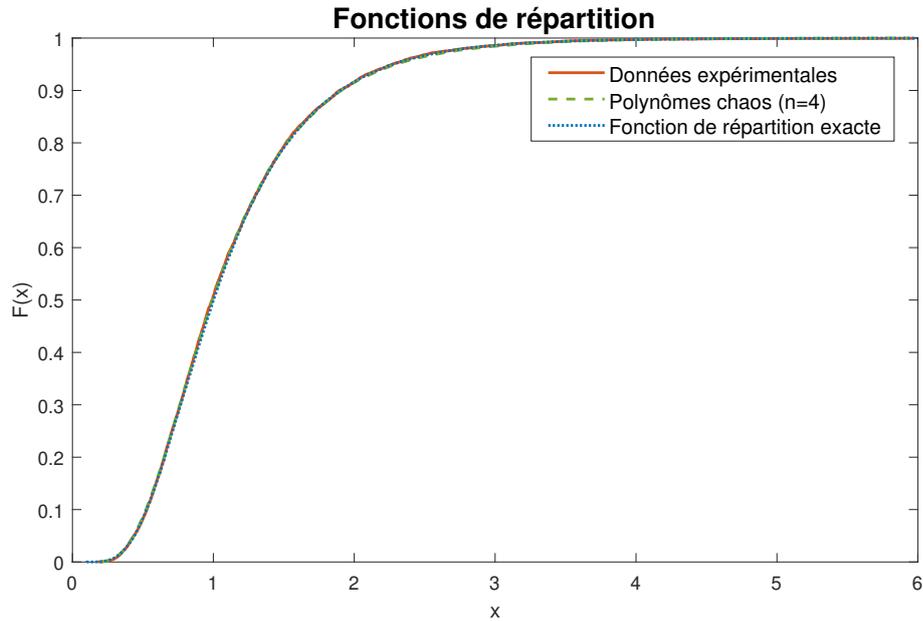


FIGURE 4.4 – Fonctions de répartition pour l'exemple de la fonction exponentielle ($N_Y = 2000$)

4.4.4 Données expérimentales

Après avoir testé et validé la procédure numérique pour des échantillons de distributions connues, on passe maintenant au cas du véritable échantillon expérimental. Pour rappel, l'échantillon d'intérêt provient de l'explosion de trois cylindres sous l'effet d'une forte pression interne. Après avoir collecté les fragments, ceux-ci sont pesés individuellement et nous nous intéressons ensuite à la modélisation de la masse de ces fragments en une variable aléatoire Y de la forme (4.23) (voir page 50). Comme la forme exacte de la distribution de Y n'est évidemment pas connue, on compare nos résultats avec ce qui est habituellement utilisé dans la littérature (voir par exemple les références [28, 47]), i.e. en modélisant l'échantillon avec une distribution de Weibull à deux paramètres de fonction de densité :

$$p(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \quad x > 0. \quad (4.30)$$

Les deux paramètres (k, λ) sont estimés en utilisant la technique de l'estimation par maximum de vraisemblance [81]. On note que pour $k = 1$, la loi de Weibull peut être réduite à une loi exponentielle. Cette observation nous conduit à choisir les polynômes de Laguerre comme base de polynômes chaos, puisqu'ils sont ortho-

gonaux par rapport à une distribution exponentielle (de densité $p(x) = e^{-x}$ pour $x \in [0, +\infty]$). L'expression de ces polynômes est donnée dans le tableau 4.4.

Ψ_0	1
Ψ_1	$-1 + X$
Ψ_2	$1 - 2X + \frac{1}{2}X^2$
Ψ_3	$-1 + 3X - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{6}X^3$
Ψ_4	$1 - 4X + 3X^2 - \frac{2}{3}X^3 + \frac{1}{24}X^4$

TABLE 4.4 – Les polynômes de Laguerre

Remarque.

Nous avons aussi réalisé la construction et l'utilisation d'une base de polynômes chaos orthogonaux par rapport à la distribution de Weibull correspondante (voir section 4.2 p.36), mais ceux-ci ne donnent pas de meilleurs résultats.

Ensuite, on applique la procédure numérique décrite dans la section 4.3 avec $N_Y = 778$, $N_X = 10^5$ et $r = 400$ dans l'ordre de calcul des coefficients de la représentation en polynômes chaos de notre échantillon. Les résultats sont donnés dans le tableau 4.5. Le premier coefficient α_0 n'est pas donné sous la forme d'un intervalle de confiance puisqu'il est égal à la moyenne empirique de l'échantillon expérimental, d'après le problème d'optimisation sous contraintes.

α	
α_0	1.1423
α_1	[1.8739; 1.8743]
α_2	[0.2504; 0.2542]
α_3	[-0.3446; -0.3347]
α_4	[0.1674; 0.1749]

TABLE 4.5 – Les intervalles de confiance pour les moyennes des coefficients du polynôme chaos : exemple expérimental

Dans ce cas, les coefficients du polynôme chaos ne peuvent être comparés avec la solution exacte, toutefois les intervalles de confiance sont suffisamment étroits pour démontrer la robustesse et la convergence de la méthode proposée. En utilisant la technique de l'estimation par maximum de vraisemblance, on trouve que les paramètres de la distribution de Weibull (4.30) qui ajustent le mieux l'échantillon sont égaux à $(\lambda, k) = (0.6483, 0.5372)$.

La figure 4.5 ci-dessous montre la densité de probabilité estimée à partir des données expérimentales avec celle de la loi de Weibull et celle de notre représentation en polynômes chaos. On voit clairement que la loi de Weibull échoue dans la mise en évidence de caractéristiques importantes des données expérimentales. En particulier, le maximum de la densité de probabilité ne peut pas être modélisé proprement car, avec les paramètres optimaux de la loi de Weibull, c'est une fonction strictement décroissante. La représentation avec les polynômes chaos met en évidence cette caractéristique. On représente aussi la fonction de répartition pour les trois cas dans la figure 4.6. Même si les différences sont moins flagrantes ici, il est clair que la fonction de répartition provenant de la représentation en polynômes chaos est celle qui coïncide le mieux avec la fonction de répartition de l'échantillon expérimental. Pour ce dernier exemple, la valeur du test KS est plus élevée d'environ 50% pour la loi de Weibull (0.0930) que pour la représentation avec les polynômes chaos (0.0615).

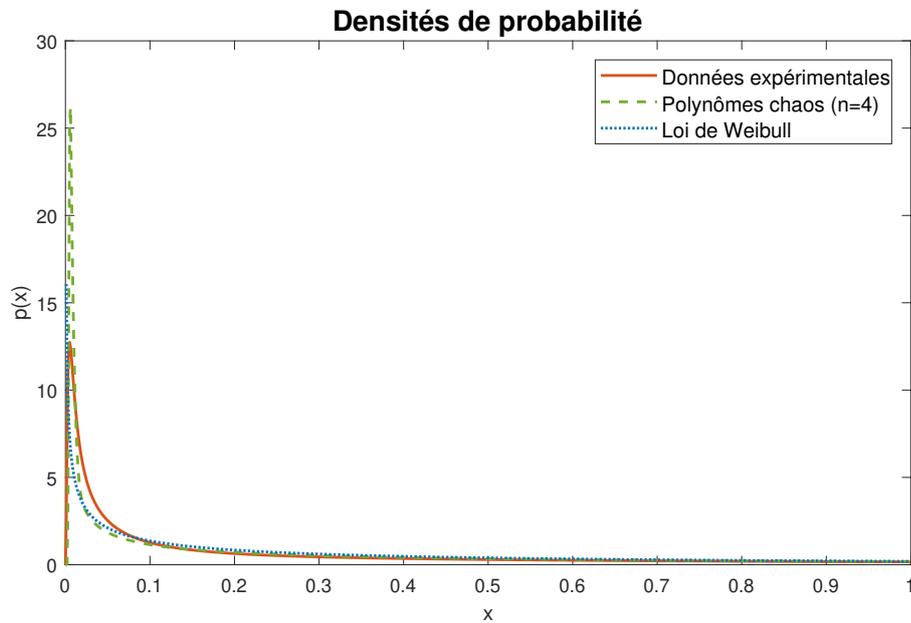


FIGURE 4.5 – Densités de probabilité pour l'exemple sur nos données expérimentales ($N_Y = 2000$)

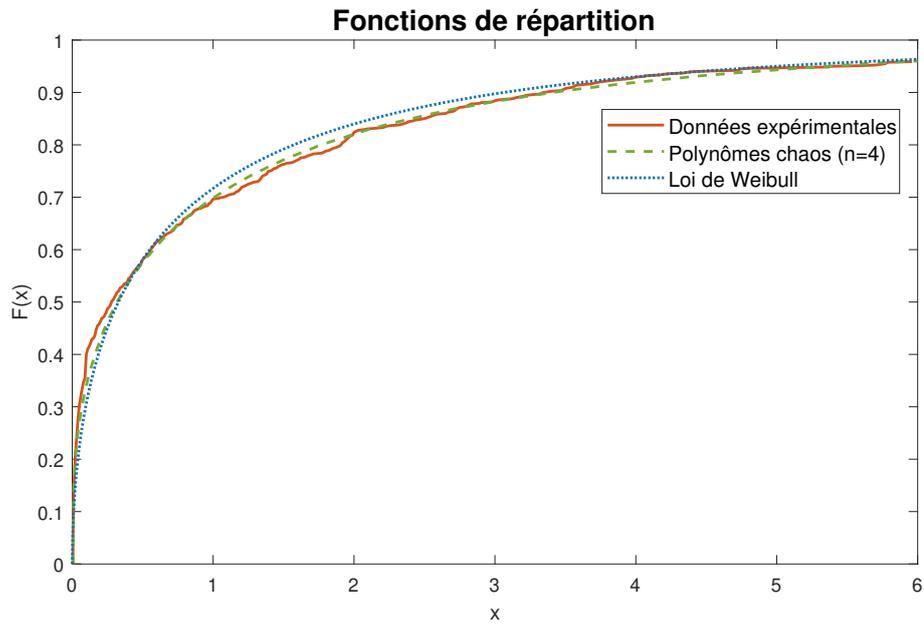


FIGURE 4.6 – Fonctions de répartition pour l'exemple sur nos données expérimentales ($N_Y = 2000$)

Processus stochastiques

Au début de cette étude sur la distribution en masses des éclats, des méthodes classiques ont été appliquées, notamment la représentation de la fonction densité de l'échantillon expérimental avec celle d'une loi de probabilité connue (loi de Weibull). Ces méthodes n'ont pas donné satisfaction. C'est une représentation sur une base de polynômes chaos qui nous a permis de représenter de manière fidèle l'échantillon expérimental [23]. Le problème avec l'utilisation de ces deux méthodes, c'est que l'on ne prend pas en compte le fait que la masse d'un éclat est toujours liée à celles des autres éclats produits par l'explosion de la charge. En effet, chaque masse est considérée comme la réalisation d'une variable aléatoire indépendante. Finalement, la solution est de considérer l'ensemble des masses obtenues lors de l'explosion comme une réalisation d'un processus aléatoire.

Nous allons donc voir dans la suite ce qu'est précisément un processus stochastique, puis son application pour la représentation en masses des éclats.

5.1 Définition

Un processus stochastique $X = (X_s)_{s \in S}$ est une famille de variables aléatoires indexée par un ensemble S . L'ensemble S représente en général le temps et est égal à \mathbb{R} ou \mathbb{R}^+ .

Il existe deux types de processus :

- les processus discrets, dont l'ensemble S est dénombrable (par exemple, $S \subset \mathbb{Z}$);
- les processus continus, avec S un ensemble continu (par exemple, $S = \mathbb{R}$).

Si S est un ensemble fini, alors le processus X est un vecteur aléatoire. C'est une suite de variables aléatoires, ou une série chronologique, si $S = \mathbb{N}$.

Un processus dépend donc de deux paramètres :

- l'index s : pour s fixé, $\omega \in \Omega \mapsto X_s(\omega)$ est une variable aléatoire sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$;
- l'aléatoire $\omega \in \Omega$: pour ω fixé, $s \in S \mapsto X_s(\omega)$ est une fonction que l'on appelle la trajectoire du processus. Cette trajectoire correspond alors à une réalisation du processus X .

Sur la figure ci-dessous, on a l'exemple de trois trajectoires, pour un même processus, représentées chacune par une courbe. Pour s_1 fixé, on a alors trois réalisations de la variable aléatoire X_{s_1} qui se trouvent sur l'abscisse s_1 .

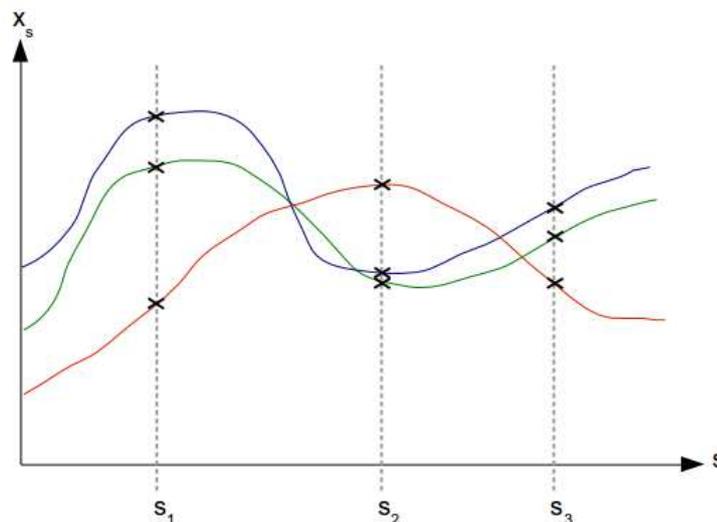


FIGURE 5.1 – Trois réalisations d'un même processus stochastique

La loi d'un processus stochastique $X = (X_s)_{s \in S}$ est entièrement caractérisée par ses lois fini-dimensionnelles $\{\mathcal{L}(X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) : s_1, \dots, s_n \in S, n \in \mathbb{N}^*\}$. Ce sont les lois des différents vecteurs aléatoires formés par des variables qui appartiennent au processus. Par exemple, un processus X dont l'ensemble d'indexation est $S = \{1, 2, 3\}$ est caractérisé par les lois fini-dimensionnelles

$$\mathcal{L}(X_1), \mathcal{L}(X_2), \mathcal{L}(X_3), \mathcal{L}(X_1, X_2), \mathcal{L}(X_1, X_3), \mathcal{L}(X_2, X_3) \text{ et } \mathcal{L}(X_1, X_2, X_3).$$

La corrélation entre des variables aléatoires est alors représentée par la loi du vecteur aléatoire formé grâce à ces dernières.

Enfin, les processus stochastiques peuvent avoir différentes propriétés découlant de ces lois. Quelques unes sont données ici, que l'on retrouvera dans les exemples de processus présentés dans la section suivante.

Propriétés 5.1. *Différentes propriétés de processus stochastiques :*

- Un processus $X = (X_s)_{s \in S}$ est stationnaire si pour tout $h \in S$, le processus $(X_{s+h})_{s \in S}$ a la même loi que $(X_s)_{s \in S}$. Autrement dit, pour tout $h \in S$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(t_1, \dots, t_n) \in S^n$, $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ a la même loi que $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$.
- Un processus X est à accroissements indépendants si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$, les variables aléatoires $X_{s_1}, X_{s_2} - X_{s_1}, \dots, X_{s_n} - X_{s_{n-1}}$ sont indépendantes.
- Un processus X est dit gaussien si toutes ses lois fini-dimensionnelles sont gaussiennes, i.e. si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_n \in S$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire $a_1 X_{s_1} + \dots + a_n X_{s_n}$ suit une loi gaussienne.

Nous verrons dans la suite que le choix qui a été finalement fait est de modéliser la distribution en masses des éclats par un processus stochastique. La représentation des corrélations entre variables nous permet de prendre en compte le lien qui existe entre la masse d'un éclat et celles des autres éclats produits lors d'une explosion. Une des propriétés qui sera utilisée est celle des accroissements indépendants. Elle est indispensable pour l'analyse de sensibilité qui doit être réalisée sur le processus considéré (voir section 6.2.1 p.91).

5.2 Exemples de processus

Il existe divers exemples académiques de processus stochastiques. Nous en présentons ici un certain nombre, qui pourront être utilisés dans la suite.

L'exemple le plus simple que nous définissons ici est le processus de Poisson. Il permet le comptage du nombre d'occurrences d'un événement. Par exemple, dans un problème de «file d'attente», il caractérise le nombre de personnes arrivées devant un guichet avant un instant t .

Définition 5.1. *Processus de Poisson :*

On note $(N_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ le processus tel que pour t fixé, N_t représente le nombre d'événements survenus dans l'intervalle $[0, t]$. Ce processus est dit de Poisson s'il est :

- sans mémoire : les événements passés n'influencent pas sur les futurs, i.e.

$$\forall t, h \text{ et } k \in \mathbb{R}^+, N_{t+h} - N_t \text{ et } N_t - N_{t-k} \text{ sont indépendants}$$

— homogène dans le temps : la probabilité qu'un événement survienne à tout instant est constante, i.e. la loi de $N_{t+h} - N_t$, qui représente le nombre d'événements survenus dans l'intervalle $[t, t+h]$, est la même que celle de N_h .

Le deuxième exemple est le processus de Wiener, que nous utiliserons dans la suite. Il permet en physique de modéliser le mouvement Brownien qui correspond au mouvement aléatoire d'une particule dans un fluide [43]. Sa définition mathématique est donnée ci-dessous :

Définition 5.2. *Processus gaussien :*

Un processus $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est gaussien si pour tout entier k et tous réels $0 \leq t_1 < \dots < t_k$, les variables $\mathbf{X} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ suivent une loi normale jointe égale à [30] :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k |\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)^T} \quad (5.1)$$

avec les espérances $\mu = (\mathbb{E}(X_{t_1}), \dots, \mathbb{E}(X_{t_k}))$ et la matrice de covariance $\Sigma = (\text{Cov}(X_{t_i}, X_{t_j}))_{(i,j) \in \{1, \dots, k\}}$.
 $|\Sigma|$ correspond au déterminant de la matrice Σ .

Définition 5.3. *Processus de Wiener (ou mouvement Brownien) :*

Un processus de Wiener $W = (W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus gaussien tel que, pour tous réels positifs t et s ,

$$\mathbb{E}(W_t) = 0 \quad \text{et} \quad \text{Cov}(W_t, W_s) = \min(s, t).$$

De plus, ses trajectoires sont presque sûrement (p.s) continues. Autrement dit, pour tout $\omega \in \Omega$, la fonction $t \rightarrow W_t(\omega)$ est p.s continue, i.e.

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \mathbb{P} \left(\lim_{t \rightarrow a} W_t(\omega) = W_a(\omega) \right) = 1.$$

Un processus de Wiener (W_t) pris à l'instant t satisfait certaines propriétés, dont les suivantes :

Propriétés 5.2. *Propriétés des processus de Wiener :*

1. $W_0 = 0$ avec une probabilité de 1, puisque $\mathbb{E}(W_0) = 0$ et $\text{Var}(W_0) = \text{Cov}(W_0, W_0) = 0$ par définition ;

2. Pour tout $t \geq 0$, $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ car $\mathbb{E}(W_t) = 0$ et $\text{Var}(W_t) = \text{Cov}(W_t, W_t) = \min(t, t) = t$;
3. Pour tout $0 \leq s < t$, la variable aléatoire $W_t - W_s$ est normalement distribuée avec une moyenne de 0 et une variance

$$\text{Var}(W_t - W_s) = \text{Cov}(W_t, W_t) + \text{Cov}(W_s, W_s) - 2\text{Cov}(W_t, W_s) = t - s,$$

ce qui équivaut à $W_t - W_s \sim \sqrt{t - s}\mathcal{N}(0, 1)$;

4. Pour tout $0 \leq s < t < u < v$, les variables $W_t - W_s$ et $W_v - W_u$ sont indépendantes. En effet, on a

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_t - W_s, W_v - W_u) &= \mathbb{E}((W_t - W_s)(W_v - W_u)) \\ &\quad - \mathbb{E}(W_t - W_s)\mathbb{E}(W_v - W_u) \\ &= \mathbb{E}(W_t W_v) - \mathbb{E}(W_t W_u) \\ &\quad - \mathbb{E}(W_s W_v) + \mathbb{E}(W_s W_u) \\ &= t - t - s + s \\ &= 0 \end{aligned}$$

et, d'après la définition d'un processus gaussien, $W_t - W_s$ et $W_v - W_u$ forment un vecteur gaussien, or deux variables d'un vecteur gaussien de covariance nulle sont indépendantes. Par définition, le processus W est donc un processus à accroissements indépendants.

On souhaite réaliser une simulation de ce processus. Pour cela, on le discrétise.

Soit un réel $T > 0$ et un entier $N > 0$, on pose $\delta t = \frac{T}{N}$ et on note W_{t_j} la variable du processus W avec $t_j = j\delta t$.

D'après la condition 1, $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$. De plus, pour $j = 1, 2, \dots, N$ on note dW_{t_j} tel que $W_{t_j} = W_{t_{j-1}} + dW_{t_j}$. Les dW_{t_j} sont, d'après la condition 3, des variables aléatoires indépendantes de loi de probabilité $\sqrt{\delta t}\mathcal{N}(0, 1)$. Il est donc facile de générer des valeurs pour ces variables.

Pour obtenir les réalisations w_{t_j} des différentes variables W_{t_j} , on prend la valeur initiale $w_0 = 0$ puis on génère N valeurs dw_{t_j} avec la loi $\sqrt{\delta t}\mathcal{N}(0, 1)$. On a ainsi $w_{t_j} = w_{t_{j-1}} + dw_{t_j}$ pour $j = 1, 2, \dots, N$.

La figure 5.2 représente la simulation d'une trajectoire d'un processus de Wiener sur l'intervalle $[0, 1]$, avec $N = 500$ [33].

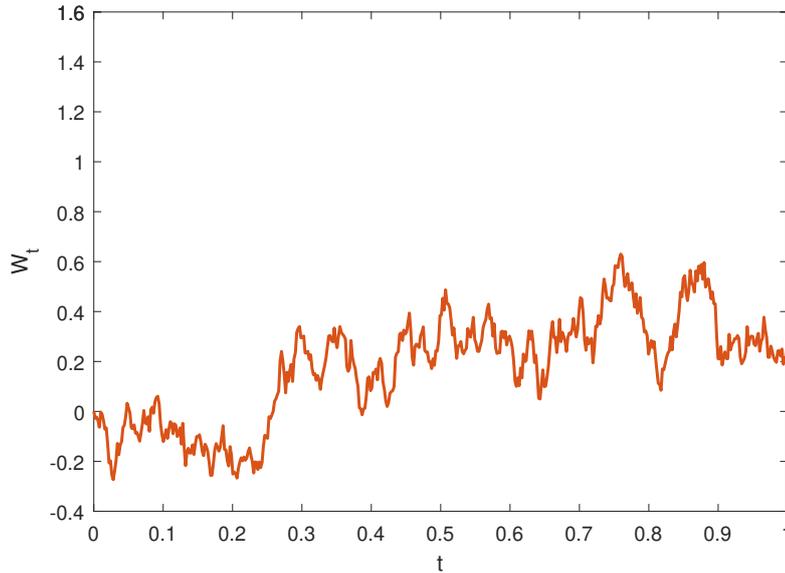


FIGURE 5.2 – Trajectoire discrétisée d'un mouvement Brownien

Il existe différents processus définis à partir du mouvement Brownien, dont ceux que nous verrons par la suite et qui sont présentés ci-dessous [43, 37].

Définition 5.4. *Pont Brownien :*

Un pont Brownien est un processus $U = (U_t)_{t \in [0, T]}$ gaussien et à trajectoires p.s continues tel que $U_0 = a$ et $U_T = b$, avec a et b des constantes. Ses lois fini-dimensionnelles sont gaussiennes et telles que, pour tous réels t et s compris dans $[0, T]$,

$$\mathbb{E}(U_t) = a + (b - a) \frac{t}{T} \quad \text{et} \quad \text{Cov}(U_t, U_s) = \min(s, t) - \frac{st}{T}.$$

Proposition 5.1.

Un pont Brownien $U = (U_t)_{t \in [0, T]}$, tel que $U_0 = a$ et $U_T = b$, peut être défini à partir d'un processus de Wiener W par

$$\forall t \in [0, T], U_t = a + W_t - \frac{t}{T} W_T + (b - a) \frac{t}{T}.$$

Démonstration.

Soient $(t, s) \in [0, T]^2$, b une constante telle que $U_T = b$ et W un processus de Wiener, la variable aléatoire $U_t = a + W_t - \frac{t}{T}W_T + (b - a)\frac{t}{T}$ suit alors une loi normale. En effet, on a la somme

$$\begin{aligned} U_t &= a - \frac{t}{T}(W_T - W_t) - \frac{t}{T}W_t + W_t + (b - a)\frac{t}{T} \\ &= a - \frac{t}{T}(W_T - W_t) + (1 - \frac{t}{T})(W_t - W_0) + (b - a)\frac{t}{T}, \end{aligned}$$

avec $W_T - W_t$ et $W_t - W_0$ deux variables normales qui sont indépendantes, car le processus W est à accroissements indépendants (voir propriétés 5.2 p.65).

Les paramètres de U_t sont les suivants :

$$\mathbb{E}(U_t) = a + \mathbb{E}(W_t) - \frac{t}{T}\mathbb{E}(W_T) + (b - a)\frac{t}{T} = a + (b - a)\frac{t}{T}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U_t, U_s) &= \text{Cov}(W_t - \frac{t}{T}W_T, W_s - \frac{s}{T}W_T) \\ &= \text{Cov}(W_t, W_s) - \frac{s}{T}\text{Cov}(W_t, W_T) - \frac{t}{T}\text{Cov}(W_T, W_s) \\ &\quad + \frac{ts}{T^2}\text{Cov}(W_T, W_T) \\ &= \min(t, s) - \frac{st}{T} - \frac{ts}{T} + \frac{ts}{T} \\ &= \min(t, s) - \frac{st}{T}. \end{aligned}$$

□

Proposition 5.2.

Un pont Brownien $U = (U_t)_{t \in [0, T]}$, tel que $U_0 = a$ et $U_T = b$, peut être défini comme l'unique solution de l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$\begin{cases} dU_t = \frac{b - U_t}{T - t}dt + dW_t, & 0 \leq t < T \\ U_0 = a \end{cases} \quad (5.2)$$

de solution

$$U_t = a + (b - a)\frac{t}{T} + (T - t) \int_0^t \frac{dW_s}{T - s}, \quad (5.3)$$

avec $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien.

Démonstration.

On montre que le processus $U = (U_t)_{t \in [0, T]}$ défini en (5.3) est un pont Brownien.

Soit $(s, t) \in [0, T]^2$ tel que $s \leq t$,

les lois fini-dimensionnelles du processus U sont gaussiennes, car $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus gaussien à accroissements indépendants. On calcule les paramètres $\mathbb{E}(U_t)$ et $\text{Cov}(U_t, U_s)$ de ce processus.

$$\mathbb{E}(U_t) = \mathbb{E} \left(a + (b - a) \frac{t}{T} + (T - t) \int_0^t \frac{dW_s}{T - s} \right).$$

D'après la linéarité de l'espérance, et le fait que le processus de Wiener (W_t) est gaussien, on obtient

$$\mathbb{E}(U_t) = a + (b - a) \frac{t}{T}.$$

Ensuite, par définition, les termes de la matrice de covariance du processus U sont égaux à

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U_t, U_s) &= \text{Cov} \left((T - t) \int_0^t \frac{dW_u}{T - u}, (T - s) \int_0^s \frac{dW_u}{T - u} \right) \\ &= (T - t)(T - s) \mathbb{E} \left(\int_0^t \frac{dW_u}{T - u} \int_0^s \frac{dW_u}{T - u} \right). \end{aligned}$$

Comme $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus gaussien, on a ainsi

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U_t, U_s) &= (T - t)(T - s) \mathbb{E} \left(\int_0^t \int_0^s \frac{dW_{u'}}{T - u'} \frac{dW_u}{T - u} \right) \\ &= (T - t)(T - s) \mathbb{E} \left(\int_0^{\min(t, s)} \frac{du}{(T - u)^2} \right) \\ &= (T - t)(T - s) \int_0^s \frac{1}{(T - u)^2} du \\ &= s - \frac{st}{T} \\ &= \min(t, s) - \frac{st}{T}. \end{aligned}$$

□

Comme pour le mouvement Brownien, le pont Brownien doit être discrétisé pour obtenir une simulation comme celle représentée dans la figure ci-dessous.

Soit un réel $T > 0$ et un entier $N > 0$, on pose $\delta t = \frac{T}{N}$ et on note U_{t_j} la variable du pont Brownien U avec, pour $j = 0, \dots, N$, $t_j = j\delta t$.

On écrit le schéma d'Euler-Maruyama [33] de l'EDS (5.2) ainsi

$$\begin{cases} U_{t_{j+1}} - U_{t_j} = \frac{b - U_{t_j}}{T - t_j}(t_{j+1} - t_j) + W_{t_{j+1}} - W_{t_j}, & \forall j = 0, \dots, N - 1 \\ U_0 = a \end{cases} \quad (5.4)$$

Pour obtenir les réalisations u_{t_j} des différentes variables U_{t_j} , on commence donc par prendre la valeur initiale $u_0 = a$ puis on génère les N valeurs w_{t_j} d'un processus de Wiener, comme on a l'a vu précédemment. Ensuite, il ne reste plus qu'à utiliser la formule ci-dessus pour calculer les u_{t_j} .

La figure 5.3 représente la simulation d'une trajectoire d'un pont Brownien U sur l'intervalle $[0, 1]$, avec $N = 500$. Il a pour paramètres $U_0 = a = 1$ et $U_1 = b = 1$.

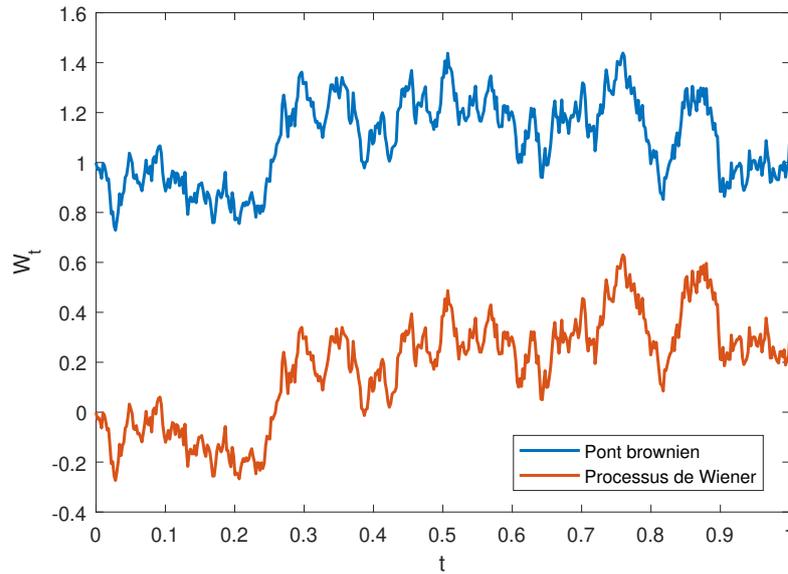


FIGURE 5.3 – Trajectoires discrétisées d'un pont Brownien et du processus de Wiener utilisé pour sa construction

Définition 5.5. *Processus d'Ornstein-Uhlenbeck :*

Un processus d'Ornstein-Uhlenbeck généralisé $V = (V_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est défini comme l'unique solution de l'équation

$$V_t = abt - a \int_0^t V_s ds + \sigma W_t + V_0, \quad (5.5)$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme

$$dV_t = a(b - V_t)dt + \sigma dW_t \quad (5.6)$$

avec V_0 donnée pour condition initiale.

La solution de cette équation est

$$V_t = e^{-ta}(V_0 - b) + b + \int_0^t e^{-(t-s)a} \sigma dW_s \quad (5.7)$$

avec a et σ constantes et $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien.

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck standard est tel que $b = 0$. Il est solution de l'équation dite de Langevin.

Proposition 5.3.

Un processus d'Ornstein-Uhlenbeck $V = (V_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ est un processus gaussien, si V_0 est constante ou si V_0 est une variable gaussienne indépendante du processus de Wiener présent dans (5.7). Les variables de V sont telles que pour tous réels positifs s et t ,

$$\mathbb{E}(V_t) = e^{-ta}(\mathbb{E}(V_0) - b) + b$$

et

$$\text{Cov}(V_t, V_s) = e^{-(s+t)a} \left(\text{Var}(V_0) + \int_0^{\min(s,t)} e^{2au} \sigma^2 du \right).$$

Démonstration.

Dans un premier temps, on peut facilement montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, V_t définie en (5.7) est gaussienne. On démontre ensuite, pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^+$ tel que $s \leq t$, les résultats suivants.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(V_t) &= \mathbb{E}\left(e^{-ta}(V_0 - b) + b + \int_0^t e^{-(t-s)a}\sigma dW_s\right) \\ &= e^{-ta}\mathbb{E}(V_0) - e^{-ta}b + b + \mathbb{E}\left(e^{-ta}\sigma \int_0^t e^{sa}\sigma dW_s\right)\end{aligned}$$

et d'après la linéarité de l'espérance et le fait que W_t , pris à l'instant t , suit une loi gaussienne centrée,

$$\mathbb{E}(V_t) = e^{-ta}(\mathbb{E}(V_0) - b) + b.$$

Enfin,

$$\text{Cov}(V_t, V_s) = \text{Cov}\left(e^{-ta}V_0 + \int_0^t e^{-(t-u)a}\sigma dW_u, e^{-sa}V_0 + \int_0^s e^{-(s-u)a}\sigma dW_u\right).$$

D'après la bilinéarité de la covariance, la condition initiale étant supposée constante ou indépendante de tout processus W_t pris à l'instant t , on obtient

$$\text{Cov}(V_t, V_s) = e^{-(s+t)a} \left(\text{Var}(V_0) + \sigma^2 \text{Cov}\left(\int_0^t e^{ua}dW_u, \int_0^s e^{ua}dW_u\right) \right).$$

Ensuite, d'après la définition de la covariance et le fait que le processus W_t pris à un instant t soit centré,

$$\begin{aligned}\text{Cov}(V_t, V_s) &= e^{-(s+t)a}\text{Var}(V_0) \\ &\quad + e^{-(s+t)a}\sigma^2\mathbb{E}\left(\int_0^t e^{ua}dW_u \int_0^s e^{ua}dW_u\right).\end{aligned}$$

Pour finir, $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ étant un processus gaussien à accroissements indépendants, on trouve

$$\begin{aligned}\text{Cov}(V_t, V_s) &= e^{-(s+t)a}\text{Var}(V_0) \\ &\quad + e^{-(s+t)a}\sigma^2\mathbb{E}\left(\int_0^t \int_0^s e^{ua}dW_u e^{u'a}dW_{u'}\right) \\ &= e^{-(s+t)a}\text{Var}(V_0) + e^{-(s+t)a}\sigma^2 \int_0^{\min(s,t)} e^{2ua} du \\ &= e^{-(s+t)a} \left(\text{Var}(V_0) + \int_0^{\min(s,t)} e^{2au} \sigma^2 du \right).\end{aligned}$$

□

La simulation de ce dernier processus se fait de la même manière que celle du pont Brownien.

Soit un réel $T > 0$ et un entier $N > 0$, on pose $\delta t = \frac{T}{N}$ et on note V_{t_j} la variable du processus d'Ornstein-Uhlenbeck V avec, pour $j = 0, \dots, N$, $t_j = j\delta t$.

On écrit le schéma d'Euler-Maruyama de l'équation (5.6) ainsi

$$\begin{cases} V_{t_{j+1}} - V_{t_j} &= a(b - V_{t_j})(t_{j+1} - t_j) + \sigma(W_{t_{j+1}} - W_{t_j}), \quad \forall j = 0, \dots, N - 1 \\ V_0 &\text{donnée} \end{cases} \quad (5.8)$$

Pour obtenir les réalisations v_{t_j} des différentes variables V_{t_j} , on commence par générer la valeur initiale v_0 en utilisant la loi de probabilité choisie. Ensuite, on génère les N valeurs w_{t_j} d'un processus de Wiener, comme on a l'a vu précédemment, et on utilise la formule ci-dessus pour calculer les v_{t_j} .

La figure 5.4 représente la simulation d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck V sur l'intervalle $[0, 1]$, avec $N = 500$. Il a pour paramètres $V_0 = a = b = \sigma = 1$.

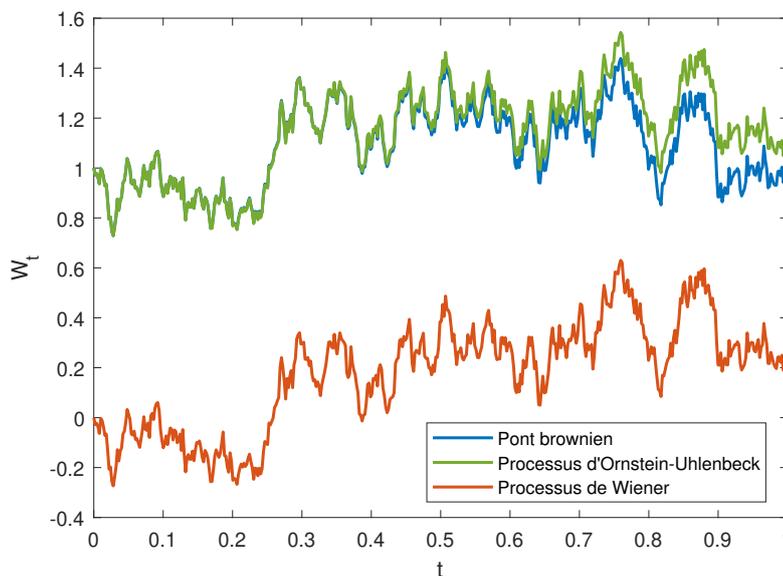


FIGURE 5.4 – Trajectoires discrétisées du processus d'Ornstein-Uhlenbeck et du pont Brownien, avec celle du processus de Wiener utilisé pour leur construction

Nous allons voir à présent comment les processus stochastiques peuvent être utilisés pour représenter les masses des éclats et avoir ainsi une estimation de leur distribution.

5.3 Représentation des masses des éclats

Pour la représentation en masses des éclats à l'aide des processus stochastiques, on considère la charge du modèle pseudo-3D. On sait que la génération d'un éclat sur une partie de la charge est liée à celle des autres éclats positionnés sur d'autres parties. L'ensemble des positions des éclats sur la charge nous sert alors ici pour indexer le processus utilisé. On considère donc un processus $(M_s)_{s \in S}$ avec pour s fixé, M_s la variable aléatoire représentant la masse d'un éclat positionné en s sur la charge.

Dans le modèle pseudo-3D, la charge est représentée par un cylindre divisé en plusieurs anneaux sur lesquels sont générés les éclats (voir section 3.3 p.29). Pour déterminer la position d'un éclat sur le cylindre, on utilise un axe de positions créé à partir des périmètres des anneaux qui sont dépliés et mis bout à bout (voir figure 5.5 ci-dessous).

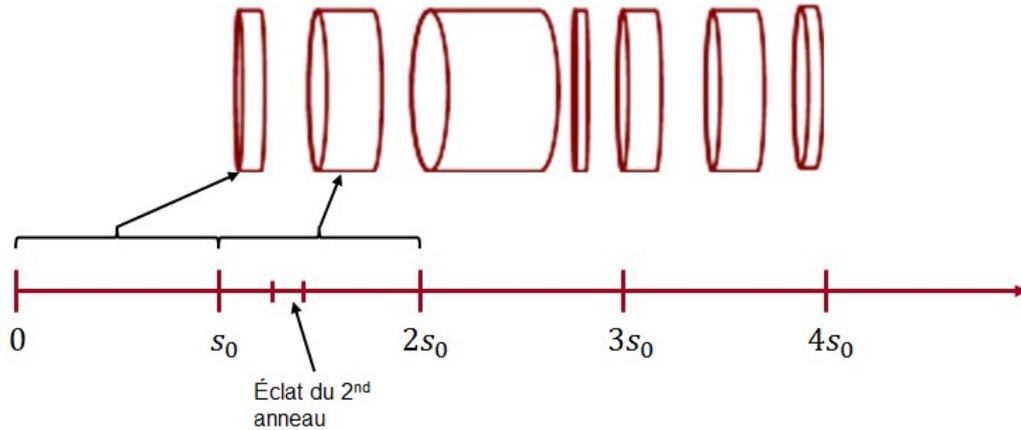


FIGURE 5.5 – Modélisation des anneaux du modèle pseudo-3D pour l'utilisation des processus ($s_0 =$ périmètre de l'anneau)

Ainsi, on a un processus $(M_s)_{s \in S}$ pour lequel on peut obtenir plusieurs trajectoires grâce à l'utilisation du modèle pseudo-3D. Chaque trajectoire représente alors la déflagration d'une charge. Les différents points de la trajectoire sont les masses obtenues pour des éclats dont les positions sur le cylindre correspondent à leur abscisse sur la représentation graphique. Lorsque l'on a obtenu la déflagration de trois corps de bombes, comme cela est représenté dans la figure 5.6, on a alors trois trajectoires. En abscisse s_1 , les points de ces trois trajectoires sont les trois réalisations de la variable aléatoire M_{s_1} pour la masse d'un éclat positionné en s_1 sur la charge.

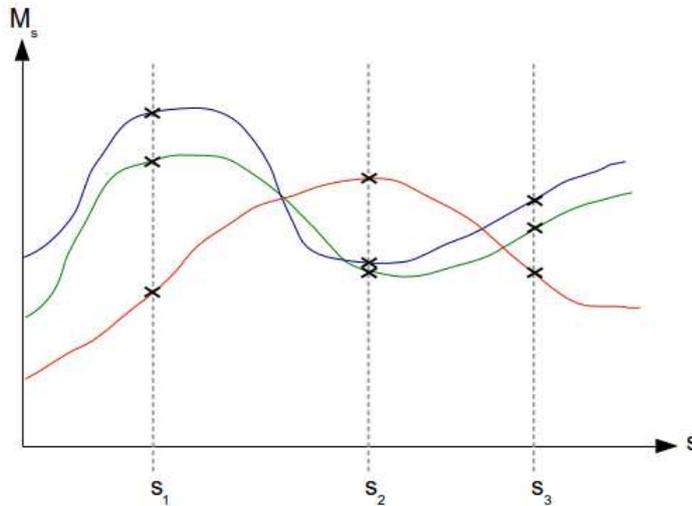


FIGURE 5.6 – Trois réalisations du processus $(M_s)_{s \in S}$ qui correspondent à la détonation de trois corps de bombe

Dans la suite de l'étude, on verra que toutes les caractéristiques d'un éclat peuvent être représentées par des processus, pas seulement leur masse (section 6.2.3 p.105). L'une de ces caractéristiques, qui est celle que nous allons voir dans la suite, est sa portée. La portée d'un éclat dépend de celle des autres éclats puisqu'elle est fonction de sa masse, elle-même liée à celle des autres éclats. C'est cette corrélation entre les portées des différents éclats qui nous impose l'utilisation des processus pour sa prise en compte dans la modélisation de cette portée.

L'analyse réalisée durant nos travaux sur la portée d'un éclat consiste à évaluer l'influence de différents paramètres impliqués dans le vol des éclats. Cette évaluation peut être réalisée en utilisant des indices de sensibilité appelés indices de Sobol. Ces indices ont la particularité de devoir être appliqués uniquement sur des variables aléatoires. Le défi ici est alors de les adapter au cas des processus stochastiques. Cette transformation des indices de Sobol et les résultats obtenus sur l'étude de la portée sont présentés dans la partie suivante.

Indices de Sobol appliqués aux processus à accroissements indépendants

Lors de l'explosion d'une charge, une multitude d'éclats sont formés de différentes tailles et masses. Chaque éclat peut être caractérisé par les données suivantes :

- L'angle d'éjection initial ;
- La vitesse de départ ;
- La vitesse limite.

Les valeurs de ces paramètres varient aléatoirement d'un éclat à un autre. Comme on le voit dans la suite, ils ont un impact, notamment sur la portée de l'éclat (voir section 6.2.3 p.105). Pour étudier la propagation de l'incertitude liée à ces variables sur cette portée, plusieurs méthodes existantes peuvent être utilisées : les simulations de Monte-Carlo [29], l'analyse des intervalles [54], le développement en séries de Taylor [58], et bien d'autres [32, 39, 10]. Ici, nous avons réalisé une analyse de sensibilité. Cela nous permet d'identifier les paramètres d'entrée dont l'incertitude a le plus d'influence sur la variabilité du paramètre de sortie qu'est la portée. On distingue deux catégories d'indices :

- les indices locaux, qui permettent de mesurer le comportement de la fonction g au voisinage d'un point $X \in \mathbb{R}^p$ vers un point particulier $Y \in \mathbb{R}$ en sortie.
- les indices globaux, qui eux permettent d'analyser la propagation des incertitudes de l'entrée X qui transforment l'ensemble du domaine de définition D_X en un domaine de définition de la sortie D_Y .

Parmi les indices de la première catégorie, le plus utilisé est le gradient, ou les dérivées partielles, des quantités en sortie par rapport à une valeur d'entrée. On étudie

ainsi la variabilité au voisinage de quelques points d'entrée. Une revue détaillée des techniques de cette catégorie est réalisée dans le papier de Zhou et al [90].

L'analyse que nous réalisons est globale. Nous appliquons les indices de sensibilité dits de Sobol [71] au processus aléatoire qui modélise la portée des éclats (voir chapitre précédent). Ces indices, basés sur la variance, ont beaucoup intéressé la communauté mathématique et celle de l'ingénierie durant les vingt dernières années [3, 63, 79]. D'autres indices globaux existent, comme les valeurs de Shapley, et ont été comparés à ceux de Sobol [59, 60, 66].

Comme ces indices ne peuvent être appliqués que sur des variables aléatoires, nous les adaptons ici aux processus stochastiques. Ce travail a donné lieu à un article [24]. On considère, pour l'instant, que ces processus $Y = (Y_t)_{t \in T}$, avec T un ensemble quelconque, sont à accroissements indépendants. Ils sont de la forme $Y = f(X^1, \dots, X^d)$, avec (X^1, \dots, X^d) des processus stochastiques.

Nous allons donc, dans un premier temps, présenter les indices de Sobol. Nous verrons ensuite comment les appliquer sur des processus aléatoires. Enfin, nous étudierons l'application de ces indices sur l'étude de l'influence des différents paramètres sur la portée d'un éclat.

6.1 Indices de Sobol pour des variables aléatoires

Les indices de sensibilité de Sobol sont utilisés lorsque l'on considère le modèle suivant :

$$Y = g(X) = g(X_1, \dots, X_p) \tag{6.1}$$

avec $X \in D_X \subset \mathbb{R}^p$ le vecteur aléatoire d'entrée et $Y \in D_Y \subset \mathbb{R}$ la variable de sortie (voir figure 6.1). Les variables d'entrée X_i , avec $i = 1, \dots, p$, sont indépendantes, c'est-à-dire que la valeur de l'une des variables n'est influencée par aucune des valeurs des autres.

La fonction g de ce modèle peut ne pas être connue explicitement.

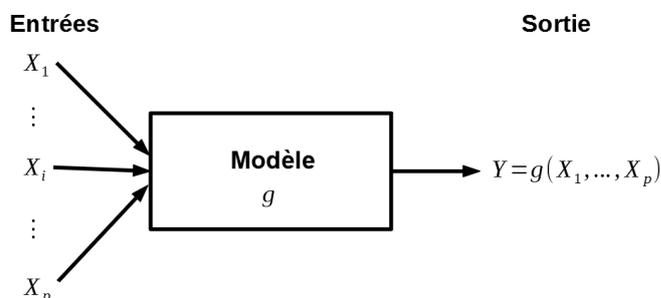


FIGURE 6.1 – Modèle mathématique des indices de Sobol

Pour un tel modèle, il y a $2^p - 1$ indices, un pour chaque variable et chaque interaction de variables. Ces indices font partie de la catégorie des indices globaux, puisqu'ils représentent la proportion de la variance expliquée par la ou les variables d'entrée concernées. Ils nous permettent de mesurer l'influence des incertitudes de la ou des variables d'entrée sur la variable de sortie Y . Plus précisément, ils peuvent nous donner des informations sur :

- les variables d'entrée qui génèrent le plus de variabilité sur la variable de sortie Y ;
- les variables qui ont peu d'influence sur la sortie Y ;
- les interactions entre variables d'entrée qui ont un impact sur la sortie Y .

Finalement, grâce aux résultats obtenus sur ces indices, on aura entre autres la possibilité de réduire la variabilité sur les variables d'entrée qui ont le plus d'influence sur la sortie Y (i.e. les variables avec un indice de Sobol élevé, proche de 1).

Pour le calcul des indices de Sobol, nous utilisons les formules conditionnelles pour le cas continu suivantes :

- L'espérance (ou la moyenne) de Y sachant que l'on a la variable X telle que $X = x$:

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \int y f_{Y|X=x}(y) dy = \int y \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} dy \quad (6.2)$$

- La variance de Y sachant que $X = x$:

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y|X = x) &= \mathbb{E}(((Y|X = x) - \mathbb{E}(Y|X = x))^2) \\ &= \mathbb{E}(Y^2|X = x) - \mathbb{E}(Y|X = x)^2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Les fonctions f_X , $f_{Y|X=x}$ et $f_{X,Y}$ sont des fonctions de densité. Par définition, pour toutes variables X et Y dont les valeurs prises sont réelles, ces fonctions vérifient :

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= \int_{-\infty}^x f_X(s) ds = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(s, t) dt ds, \\ P(Y \leq y|X = x) &= \int_{-\infty}^y f_{Y|X=x}(t) dt \\ \text{et } P(X \leq x \cap Y \leq y) &= \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f_{X,Y}(s, t) dt ds. \end{aligned} \quad (6.4)$$

De même, concernant l'espérance d'une variable, nous avons le théorème suivant :

Théorème 6.1. *Espérance totale :*

Soient deux variables X et Y , continues ou discrètes, telles que $\mathbb{E}(|Y|) < +\infty$, alors l'espérance de Y vérifie :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)). \quad (6.5)$$

Démonstration. (Cas continu)

Soient X et Y deux variables aléatoires, de densités respectives $f_X : \Omega_X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_Y : \Omega_Y \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

Soient leur densité jointe $f_{X,Y} : \Omega_X, \Omega_Y \rightarrow \mathbb{R}$ et la densité conditionnelle $f_{Y|X=x} : \Omega_Y \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \Omega_X$.

Soit $x \in \Omega_X$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) &= \mathbb{E} \left(\int_{\Omega_Y} y f_{Y|X=x}(y) dy \right) \\ &= \int_{\Omega_X} \left(\int_{\Omega_Y} y f_{Y|X=x}(y) dy \right) f_X(x) dx \end{aligned}$$

d'après la formule de l'espérance d'une fonction de la variable X . Ensuite, d'après les équations (6.4), on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) &= \int_{\Omega_X} \left(\int_{\Omega_Y} y f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{\Omega_Y} y \left(\int_{\Omega_X} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{\Omega_Y} y f_Y(y) dy \\ &= \mathbb{E}(Y). \end{aligned}$$

La formule du théorème 6.1 est ainsi démontrée. □

Avec ce théorème et les formules (6.4) données ci-dessus, on peut facilement vérifier la formule de la variance totale [82] :

Théorème 6.2. *Variance totale :*

Pour toutes variables aléatoires X et Y , la variance de Y vérifie :

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}(\text{Var}(Y|X)) + \text{Var}(\mathbb{E}(Y|X)). \quad (6.6)$$

Grâce à la formule (6.6), on remarque que la variance $\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X))$ augmente avec l'influence de X . En effet, si X a une forte influence sur Y , elle en a une aussi sur sa variance. En fixant X , on a alors la variance de $Y|X$ qui est en moyenne plus faible que celle de Y . Et plus cette influence augmente, plus l'espérance $\mathbb{E}(\text{Var}(Y|X))$ diminue. D'après la formule (6.6), on a ainsi la variance $\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X))$ qui augmente avec la diminution de $\mathbb{E}(\text{Var}(Y|X))$. C'est justement cette variance qui est utilisée dans le calcul des indices de Sobol dits de premier ordre, dont la formule est la suivante :

$$S_i = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_i))}{\text{Var}(Y)} \text{ pour } i = 1, \dots, p. \quad (6.7)$$

Cet indice de premier ordre nous donne donc une évaluation de l'influence d'une variable d'entrée X_i sur la variable de sortie Y . L'indice S_i , compris entre 0 et 1, est élevé lorsque l'influence de X_i est grande.

Exemple 3. *Formules des indices de Sobol de premier ordre pour le modèle $Y = g(X_1, X_2)$.*

Par exemple dans le cas où $Y = X_1X_2$, avec les variables d'entrée indépendantes et de lois gaussiennes $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, on a

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \mathbb{E}(X_1^2 X_2^2) - \mathbb{E}(X_1 X_2)^2 \\ &= \mathbb{E}(X_1^2) \mathbb{E}(X_2^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 \mathbb{E}(X_2)^2 \\ &= \sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \mu_2^2 + \sigma_2^2 \mu_1^2 \end{aligned}$$

et les variances des espérances conditionnelles utilisées pour le calcul des indices sont égales à

$$\begin{aligned} \text{Var}(E(Y|X_1)) &= \text{Var}(\mathbb{E}(X_1 X_2 | X_1)) = \text{Var}(X_1 \mathbb{E}(X_2)) \\ &= \text{Var}(\mu_2 X_1) = \mu_2^2 \text{Var}(X_1) \\ &= \mu_2^2 \sigma_1^2 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_2)) = \mu_1^2 \sigma_2^2.$$

On obtient alors :

— *La mesure de la sensibilité de Y par rapport aux incertitudes sur X_1 égale à :*

$$S_1 = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_1))}{\text{Var}(Y)} = \frac{\mu_2^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \mu_2^2 + \sigma_2^2 \mu_1^2}$$

— Par symétrie, la mesure de la sensibilité de Y par rapport aux incertitudes sur X_2 est égale à :

$$S_2 = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_2))}{\text{Var}(Y)} = \frac{\mu_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^2 \mu_2^2 + \sigma_2^2 \mu_1^2}.$$

Ensuite, il existe des indices de Sobol d'ordres supérieurs, qui évaluent l'importance des effets conjugués de plusieurs variables d'entrée sur la variable de sortie. On retrouve leur expression à partir d'une décomposition de la variance, de la même façon que pour les indices de premier ordre. Cette décomposition de la variance repose sur la décomposition de Hoeffding-Sobol d'une fonction [70]. Celle-ci est généralement présentée avec des variables d'entrée de loi $\mathcal{U}([0, 1])$, mais elle est aussi vraie dans le cas général [20, 80].

Notation.

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \subseteq \{1, \dots, p\}$ signifie que \mathbf{u} et \mathbf{v} sont deux ensembles dont les valeurs sont comprises dans l'ensemble $\{1, \dots, p\}$ des entiers de 1 à p . Ces ensembles peuvent être égaux à $\{1, \dots, p\}$, ce qui ne serait pas le cas si on avait $\mathbf{u}, \mathbf{v} \subset \{1, \dots, p\}$. L'ensemble noté $\mathbf{u} \setminus \mathbf{v}$ l'ensemble \mathbf{u} privé des valeurs de \mathbf{v} .

Lemme 6.1. *Décomposition de Hoeffding-Sobol : Soit une fonction $g : I = I_1 \times \dots \times I_p \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, de carré intégrable par rapport à la fonction de densité jointe $f : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ de p variables (X_1, \dots, X_p) i.e.*

$$\int_{\mathbb{R}^p} g^2(x) f(x) dx < \infty. \quad (6.8)$$

On suppose que ces variables sont indépendantes.

On a alors g qui admet une unique décomposition de la forme :

$$\begin{aligned} y &= g(x_1, \dots, x_p) \\ &= h_0 + \sum_{i=1,2,\dots,p} h_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} h_{i,j}(x_i, x_j) + \dots + h_{1,\dots,p}(x_1, \dots, x_p) \end{aligned} \quad (6.9)$$

avec h_0 constant et pour tout $k = 1, \dots, s$,

$$\int h_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) f_{X_{i_k}}(x_{i_k}) dx_{i_k} = 0, \quad (6.10)$$

$f_{X_{i_k}}$ étant la fonction densité de X_{i_k} .

Pour tout $u \subseteq \{1, \dots, p\}$, les fonctions $h_{\mathbf{u}}$ sont égales à :

$$h_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}}) = \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}) - \sum_{\mathbf{v} \subset \mathbf{u}} h_{\mathbf{v}}(X_{\mathbf{v}}) = \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}) + \sum_{\mathbf{v} \subset \mathbf{u}} (-1)^{|\mathbf{u}|-|\mathbf{v}|} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{v}}). \quad (6.11)$$

Démonstration.

Soit une fonction $g : I = I_1 \times \dots \times I_p \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de carré intégrable par rapport à la fonction de densité jointe de p variables indépendantes (X_1, \dots, X_p) .

On suppose que l'on a une décomposition de g de la forme (6.9), dont les fonctions $h_{\mathbf{u}}$ ($\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}$) suivent la condition (6.10).

On a alors, pour tout $\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}) &= \mathbb{E} \left(h_0 + \sum_{i=1}^p h_i(X_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq p} h_{i,j}(X_i, X_j) + \dots + h_{1,\dots,p}(X_1, \dots, X_p) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{v} \not\subseteq \mathbf{u}} \mathbb{E}(h_{\mathbf{v}}(X_{\mathbf{v}})) + \sum_{\mathbf{v} \subseteq \mathbf{u}} h_{\mathbf{v}}(X_{\mathbf{v}}) \\ &= \sum_{\mathbf{v} \not\subseteq \mathbf{u}} \int h_{\mathbf{v}}(x_{\mathbf{v}}) f_{X_{\mathbf{w}}}(x_{\mathbf{w}}) dx_{\mathbf{w}} + \sum_{\mathbf{v} \subseteq \mathbf{u}} h_{\mathbf{v}}(X_{\mathbf{v}}) \end{aligned}$$

avec $f_{X_{\mathbf{w}}}$ la densité jointe des X_i , pour $i \in \mathbf{w} = \{1, \dots, p\} \setminus \mathbf{u}$. Ensuite, d'après l'indépendance des variables X_i , on a

$$\mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}) = \sum_{\mathbf{v} \not\subseteq \mathbf{u}} \int h_{\mathbf{v}}(x_{\mathbf{v}}) \prod_{i \in \mathbf{w}} f_{X_i}(x_i) dx_{\mathbf{w}} + \sum_{\mathbf{v} \subseteq \mathbf{u}} h_{\mathbf{v}}(X_{\mathbf{v}})$$

qui, d'après l'équation (6.10), peut être simplifié en

$$\mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}) = \sum_{\mathbf{v} \subseteq \mathbf{u}} h_{\mathbf{v}}(X_{\mathbf{v}}).$$

Ainsi, pour tout $\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}$, on a l'unique décomposition

$$h_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}}) = \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}) - \sum_{\mathbf{v} \subset \mathbf{u}} h_{\mathbf{v}}(X_{\mathbf{v}}).$$

Il nous reste à prouver que $k_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}}) = \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}) + \sum_{\mathbf{v} \subset \mathbf{u}} (-1)^{|\mathbf{u}|-|\mathbf{v}|} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{v}})$ est égal à $h_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}})$.

On commence par montrer que $k_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}})$ respecte la condition (6.10). On note que, d'après l'équation (6.4) p.78 et l'indépendance des variables X_i , on a pour tout $\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}$,

$$\int \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}})f_{X_i}(x_i)dx_i = \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}\setminus\{i\}}).$$

Soient $\mathbf{s} = \{1, \dots, p\}$, $\mathbf{u} \subseteq \mathbf{s}$ et $i \in \mathbf{u}$,

$$\begin{aligned} \int k_{\mathbf{u}}(x_{\mathbf{u}})f_{X_i}(x_i)dx_i &= \int \left(\mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}) + \sum_{\mathbf{v} \subset \mathbf{u}} (-1)^{|\mathbf{u}|-|\mathbf{v}|} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{v}}) \right) f_{X_i}(x_i)dx_i \\ &= \int \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}})f_{X_i}(x_i)dx_i \\ &\quad + \sum_{\mathbf{v} \subset \mathbf{u}} (-1)^{|\mathbf{u}|-|\mathbf{v}|} \int \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{v}})f_{X_i}(x_i)dx_i \\ &= \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}\setminus\{i\}}) + \sum_{\mathbf{v} \subset \mathbf{u}} (-1)^{|\mathbf{u}|-|\mathbf{v}|} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{v}\setminus\{i\}}) \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{v} \subset \mathbf{u} \\ i \notin \mathbf{v}}} (-1)^{|\mathbf{u}|-|\mathbf{v}|} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{v}}) + \sum_{\substack{\mathbf{v} \subset \mathbf{u} \\ i \in \mathbf{v}}} (-1)^{|\mathbf{u}|-|\mathbf{v}\setminus\{i\}|-1} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{v}\setminus\{i\}}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On montre enfin que les $k_{\mathbf{u}}(x_{\mathbf{u}})$ vérifient l'équation (6.9). On utilise ici le fait qu'il y a $2^{|\mathbf{u}|}$ sous-ensembles dans un ensemble \mathbf{u} , avec $|\mathbf{u}|$ le nombre d'éléments de \mathbf{u} , dont $2^{|\mathbf{u}|-1}$ avec un nombre d'éléments pair. On a aussi pour tout $\mathbf{v} \subset \{1, \dots, p\}$, $2^{p-|\mathbf{v}|}$ sous-ensembles $\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}$ tels que $\mathbf{v} \subseteq \mathbf{u}$, donc $2^{p-|\mathbf{v}|-1}$ d'entre-eux sont tels que $|\mathbf{u}\setminus\mathbf{v}|$ est pair.

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}} k_{\mathbf{u}}(x_{\mathbf{u}}) &= \sum_{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}} \left(\mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}) + \sum_{\mathbf{v} \subset \mathbf{u}} (-1)^{|\mathbf{u}|-|\mathbf{v}|} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{v}}) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}) + \sum_{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}} \sum_{\mathbf{v} \subset \mathbf{u}} (-1)^{|\mathbf{u}\setminus\mathbf{v}|} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{v}}) \\ &= \sum_{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}) \\ &\quad + \sum_{\mathbf{v} \subset \{1, \dots, p\}} ((2^{p-|\mathbf{v}|-1} - 1) \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{v}}) - 2^{p-|\mathbf{v}|-1} \mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{v}})) \\ &= \mathbb{E}(Y|X_{\{1, \dots, p\}}) = y. \end{aligned}$$

La fonction g définie dans le lemme peut donc être décomposée en une somme des différentes fonctions $k_{\mathbf{u}}$, qui respectent les conditions données. Comme les fonctions de la décomposition de Hoeffding-Sobol sont uniques, on a bien prouvé le résultat (6.11). \square

On déduit des conditions (6.10) et de l'indépendance des variables X_i ($i \in \{1, \dots, p\}$) que les fonctions $h_{\mathbf{u}}$ (avec $\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}$) sont orthogonales :

$$\int h_{\mathbf{u}}(x_{\mathbf{u}})h_{\mathbf{v}}(x_{\mathbf{v}})f(x)dx = 0, \quad (6.12)$$

si $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, avec $\mathbf{u}, \mathbf{v} \subseteq \{1, \dots, p\}$.

Les variables d'entrées X_i étant indépendantes, en utilisant la décomposition de Hoeffding-Sobol on obtient la décomposition de la variance :

$$\text{Var}(Y) = \sum_{\substack{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\} \\ \mathbf{u} \neq \emptyset}} \text{Var}(h_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}})). \quad (6.13)$$

Grâce aux équations (6.13) et (6.11), on obtient les formules des différents indices de Sobol d'ordres supérieurs à 1 :

$$\begin{aligned} S_{i,j} &= \frac{\text{Var}(h_{i,j}(X_i, X_j))}{\text{Var}(Y)} = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_i, X_j))}{\text{Var}(Y)} - S_i - S_j \\ S_{i,j,k} &= \frac{\text{Var}(h_{i,j,k}(X_i, X_j, X_k))}{\text{Var}(Y)} = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_i, X_j, X_k))}{\text{Var}(Y)} \\ &\quad - S_i - S_j - S_k - S_{i,j} - S_{i,k} - S_{j,k} \\ &\dots \\ S_{1,\dots,p} &= \frac{\text{Var}(h_{1,\dots,p}(X_1, \dots, X_p))}{\text{Var}(Y)} = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_1, \dots, X_p))}{\text{Var}(Y)} \\ &\quad - \sum_{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}} S_{\mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Exemple 4. *Décomposition de la variance et indices de Sobol d'ordres ≥ 1 pour le modèle $Y = g(X_1, X_2, X_3) = X_1X_2X_3$. Les variables X_1, X_2 et X_3 indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, \dots, 3$.*

— *Décomposition de la variance :*

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \text{Var}(g(X_1, X_2, X_3)) \\ &= \text{Var}(h_1(X_1)) + \text{Var}(h_2(X_2)) + \text{Var}(h_3(X_3)) \\ &\quad + \text{Var}(h_{1,2}(X_1, X_2)) + \text{Var}(h_{1,3}(X_1, X_3)) \\ &\quad + \text{Var}(h_{2,3}(X_2, X_3)) + \text{Var}(h_{1,2,3}(X_1, X_2, X_3)). \end{aligned}$$

Pour tout $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned}
h_0 &= \mathbb{E}(Y) = \mu_1\mu_2\mu_3 \\
h_i(X_i) &= \mathbb{E}(Y|X_i) - h_0 = \mu_j\mu_k X_i - \mu_1\mu_2\mu_3 \\
h_{i,j}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}(Y|X_i, X_j) - h_i(X_i) - h_j(X_j) - h_0 \\
&= \mu_k X_i X_j - \mu_k(\mu_j X_i + \mu_i X_j) + \mu_1\mu_2\mu_3 \\
h_{1,2,3}(X_1, X_2, X_3) &= \mathbb{E}(Y|X_1, X_2, X_3) - h_{1,2}(X_1, X_2) - h_{1,3}(X_1, X_3) \\
&\quad - h_{2,3}(X_2, X_3) - h_1(X_1) - h_2(X_2) - h_3(X_3) - h_0 \\
&= X_1 X_2 X_3 - \mu_3 X_1 X_2 - \mu_1 X_2 X_3 - \mu_2 X_1 X_3 \\
&\quad + \mu_2 \mu_3 X_1 + \mu_1 \mu_3 X_2 + \mu_1 \mu_2 X_3 - \mu_1 \mu_2 \mu_3
\end{aligned}$$

— Indices de Sobol : Dans le cas du modèle étudié dans cet exemple, pour tout $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, on a les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y) &= \mathbb{E}((X_1 X_2 X_3)^2) - \mathbb{E}(X_1 X_2 X_3)^2 \\
&= \mathbb{E}(X_1^2) \mathbb{E}(X_2^2) \mathbb{E}(X_3^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 \mathbb{E}(X_2)^2 \mathbb{E}(X_3)^2 \\
&= (\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2)(\sigma_3^2 + \mu_3^2) - \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2 \\
\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_1, X_2, X_3)) &= \text{Var}(X_1 X_2 X_3) = \text{Var}(Y) \\
\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_i, X_j)) &= \text{Var}(X_i X_j \mathbb{E}(X_k)) \\
&= \mathbb{E}(X_k)^2 (\mathbb{E}(X_i^2) \mathbb{E}(X_j^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 \mathbb{E}(X_j)^2) \\
&= \mu_k^2 ((\sigma_i^2 + \mu_i^2)(\sigma_j^2 + \mu_j^2) - \mu_i^2 \mu_j^2) \\
\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_i)) &= \text{Var}(X_i \mathbb{E}(X_j X_k)) = \mathbb{E}(X_j X_k)^2 \text{Var}(X_i) \\
&= \mu_j^2 \mu_k^2 \sigma_i^2.
\end{aligned}$$

On obtient alors :

— Les mesures sur la sensibilité de Y par rapport aux incertitudes sur chacune des variables d'entrée (les effets des variables liés à leurs interactions avec les autres variables ne sont pas pris en compte) :

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{\text{Var}(h_1(X_1))}{\text{Var}(Y)} = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_1))}{\text{Var}(Y)} \\
&= \frac{\mu_2^2 \mu_3^2 \sigma_1^2}{(\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2)(\sigma_3^2 + \mu_3^2) - \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_2 &= \frac{\text{Var}(h_2(X_2))}{\text{Var}(Y)} = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_2))}{\text{Var}(Y)} \\
 &= \frac{\mu_1^2 \mu_3^2 \sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2)(\sigma_3^2 + \mu_3^2) - \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2} \\
 S_3 &= \frac{\text{Var}(h_3(X_2))}{\text{Var}(Y)} = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_3))}{\text{Var}(Y)} \\
 &= \frac{\mu_1^2 \mu_2^2 \sigma_3^2}{(\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2)(\sigma_3^2 + \mu_3^2) - \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2}
 \end{aligned}$$

- *Les mesures sur la sensibilité de Y par rapport aux incertitudes sur l'interaction entre deux variables d'entrée (les effets des variables prises seules, et ceux des interactions avec la troisième variable, ne sont pas pris en compte) :*

$$\begin{aligned}
 S_{1,2} &= \frac{\text{Var}(h_{1,2}(X_1, X_2))}{\text{Var}(Y)} = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_1, X_2))}{\text{Var}(Y)} - S_1 - S_2 \\
 &= \frac{\mu_3^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2)(\sigma_3^2 + \mu_3^2) - \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2} \\
 S_{1,3} &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_1, X_3))}{\text{Var}(Y)} - S_1 - S_3 \\
 &= \frac{\mu_2^2 \sigma_1^2 \sigma_3^2}{(\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2)(\sigma_3^2 + \mu_3^2) - \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2} \\
 S_{2,3} &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_2, X_3))}{\text{Var}(Y)} - S_2 - S_3 \\
 &= \frac{\mu_1^2 \sigma_2^2 \sigma_3^2}{(\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2)(\sigma_3^2 + \mu_3^2) - \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2}
 \end{aligned}$$

- *La mesure sur la sensibilité de Y par rapport aux incertitudes sur l'interaction entre les trois variables d'entrée (les effets des interactions entre deux variables, et ceux des variables prises seules, ne sont pas pris en compte) :*

$$\begin{aligned}
S_{1,2,3} &= \frac{\text{Var}(h_{1,2,3}(X_1, X_2, X_3))}{\text{Var}(Y)} \\
&= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_1, X_2, X_3))}{\text{Var}(Y)} - S_1 - S_2 - S_3 - S_{1,2} - S_{1,3} - S_{2,3} \\
&= 1 - \frac{\mu_3^2 \sigma_1^2 (\sigma_2^2 + \mu_2^2) + \mu_1^2 \sigma_2^2 (\sigma_3^2 + \mu_3^2) + \mu_2^2 \sigma_3^2 (\sigma_1^2 + \mu_1^2)}{(\sigma_1^2 + \mu_1^2)(\sigma_2^2 + \mu_2^2)(\sigma_3^2 + \mu_3^2) - \mu_1^2 \mu_2^2 \mu_3^2}.
\end{aligned}$$

Exemple 5. *Décomposition de la variance et indices de Sobol d'ordres ≥ 1 pour le modèle $Y_t = f(t, B_t, W_t, L_t) = e^{B_t} + W_t^2 e^{L_t} + B_t^2 L_t$. Y_t est un processus stochastique, pris à l'instant t , qui dépend des processus B_t , W_t et L_t , pris au même instant, de trois mouvements Browniens indépendants (voir section 5.2 p.64).*

Les calculs réalisés pour cet exemple sont détaillés dans l'annexe A.1.

— *Décomposition de la variance :*

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y_t) &= \text{Var}(h_0 + h_1(B_t) + h_2(W_t) + h_3(L_t) + h_{1,2}(B_t, W_t) \\
&\quad + h_{1,3}(B_t, L_t) + h_{2,3}(W_t, L_t) + h_{1,2,3}(B_t, W_t, L_t)) \\
&= \text{Var}(h_1(B_t)) + \text{Var}(h_2(W_t)) + \text{Var}(h_3(L_t)) \\
&\quad + \text{Var}(h_{1,2}(B_t, W_t)) + \text{Var}(h_{1,3}(B_t, L_t)) + \text{Var}(h_{2,3}(W_t, L_t)) \\
&\quad + \text{Var}(h_{1,2,3}(B_t, W_t, L_t)).
\end{aligned}$$

D'après l'équation (6.11), les fonctions de cette décomposition sont égales à

$$\begin{aligned}
h_0 &= \mathbb{E}(Y_t) = (1+t)e^{t/2}, \\
h_1(B_t) &= \mathbb{E}(Y_t|B_t) - h_0 = e^{B_t} + te^{t/2} - (1+t)e^{t/2} = e^{B_t} - e^{t/2}, \\
h_2(W_t) &= \mathbb{E}(Y_t|W_t) - h_0 = e^{t/2}W_t^2 + e^{t/2} - (1+t)e^{t/2} \\
&= e^{t/2}W_t^2 - te^{t/2}, \\
h_3(L_t) &= \mathbb{E}(Y_t|L_t) - h_0 = e^{t/2} + tL_t + te^{L_t} - (1+t)e^{t/2} \\
&= t(L_t + e^{L_t} - e^{t/2})
\end{aligned}$$

pour celles ne dépendant que d'un seul processus au maximum. Les dernières fonctions de la décomposition sont

$$\begin{aligned}
 h_{1,2}(B_t, W_t) &= \mathbb{E}(Y_t|B_t, W_t) - \mathbb{E}(Y_t|B_t) - \mathbb{E}(Y_t|W_t) + \mathbb{E}(Y_t) \\
 &= e^{B_t} + W_t^2 e^{t/2} - e^{B_t} - t e^{t/2} - e^{t/2} - e^{t/2} W_t^2 \\
 &\quad + (1+t)e^{t/2} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{1,3}(B_t, L_t) &= \mathbb{E}(Y_t|B_t, L_t) - \mathbb{E}(Y_t|B_t) - \mathbb{E}(Y_t|L_t) + \mathbb{E}(Y_t) \\
 &= e^{B_t} + t e^{L_t} + B_t^2 L_t - e^{B_t} - t e^{t/2} - e^{t/2} - t L_t - t e^{L_t} \\
 &\quad + (1+t)e^{t/2} \\
 &= (B_t^2 - t)L_t,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{2,3}(W_t, L_t) &= \mathbb{E}(Y_t|W_t, L_t) - \mathbb{E}(Y_t|W_t) - \mathbb{E}(Y_t|L_t) + \mathbb{E}(Y_t) \\
 &= e^{t/2} + W_t^2 e^{L_t} + t L_t - e^{t/2} - e^{t/2} W_t^2 - e^{t/2} - t L_t \\
 &\quad - t e^{L_t} + (1+t)e^{t/2} \\
 &= (W_t^2 - t)e^{L_t} + (t - W_t^2)e^{t/2}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 h_{1,2,3}(B_t, W_t, L_t) &= \mathbb{E}(Y_t|B_t, W_t, L_t) - \mathbb{E}(Y_t|B_t, W_t) - \mathbb{E}(Y_t|B_t, L_t) \\
 &\quad - \mathbb{E}(Y_t|W_t, L_t) + \mathbb{E}(Y_t|B_t) + \mathbb{E}(Y_t|W_t) + \mathbb{E}(Y_t|L_t) \\
 &\quad - \mathbb{E}(Y_t) \\
 &= Y_t - 2(t+2)e^{t/2} - (W_t^2 + 2t)e^{L_t} - 3e^{B_t} \\
 &\quad - (B_t^2 + 2t)L_t \\
 &= (e^{B_t} + W_t^2 e^{L_t} + B_t^2 L_t) - 2(t+2)e^{t/2} - (W_t^2 + 2t)e^{L_t} \\
 &\quad - 3e^{B_t} - (B_t^2 + 2t)L_t \\
 &= -2(t+2)e^{t/2} - 2t(L_t + e^{L_t}) - 2e^{B_t}
 \end{aligned}$$

— Indices de Sobol d'ordres ≥ 1 :

$$\begin{aligned}
S_{B_t} &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|B_t))}{\text{Var}(Y_t)} = \frac{e^t(e^t - 1)}{(1 + 3t^2)e^{2t} + 3t^3 + 2t^3e^{t/2} - (t^2 + 1)e^t} \\
S_{W_t} &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|W_t))}{\text{Var}(Y_t)} = \frac{2t^2e^t}{(1 + 3t^2)e^{2t} + 3t^3 + 2t^3e^{t/2} - (t^2 + 1)e^t} \\
S_{L_t} &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|L_t))}{\text{Var}(Y_t)} = \frac{t^3(2e^{t/2} + 1) + t^2e^t(e^t - 1)}{(1 + 3t^2)e^{2t} + 3t^3 + 2t^3e^{t/2} - (t^2 + 1)e^t} \\
S_{B_t, W_t} &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|B_t, W_t))}{\text{Var}(Y_t)} - S_{B_t} - S_{W_t} \\
&= \frac{e^{2t} + e^t(2t^2 - 1) - e^t(e^t - 1) - 2t^2e^t}{(1 + 3t^2)e^{2t} + 3t^3 + 2t^3e^{t/2} - (t^2 + 1)e^t} = 0 \\
S_{B_t, L_t} &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|B_t, L_t))}{\text{Var}(Y_t)} - S_{B_t} - S_{L_t} \\
&= \frac{(1 + t^2)(e^{2t} - e^t) + t^3(3 + 2e^{t/2}) - e^t(e^t - 1) - t^3(2e^{t/2} + 1)}{(1 + 3t^2)e^{2t} + 3t^3 + 2t^3e^{t/2} - (t^2 + 1)e^t} \\
&\quad - \frac{t^2e^t(e^t - 1)}{2t^3} \\
&= \frac{(1 + 3t^2)e^{2t} + 3t^3 + 2t^3e^{t/2} - (t^2 + 1)e^t}{(1 + 3t^2)e^{2t} + 3t^3 + 2t^3e^{t/2} - (t^2 + 1)e^t} \\
S_{L_t, W_t} &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|L_t, W_t))}{\text{Var}(Y_t)} - S_{L_t} - S_{W_t} \\
&= \frac{3t^2e^{2t} + 2t^3e^{t/2} + t^3 - t^2e^t - t^3(2e^{t/2} + 1) - t^2e^t(e^t - 1) - 2t^2e^t}{(1 + 3t^2)e^{2t} + 3t^3 + 2t^3e^{t/2} - (t^2 + 1)e^t} \\
&= \frac{2t^2e^t(e^t - 1)}{(1 + 3t^2)e^{2t} + 3t^3 + 2t^3e^{t/2} - (t^2 + 1)e^t}.
\end{aligned}$$

Dans cet exemple, le processus L_t , pris à l'instant t , est celui qui a le plus d'influence sur le processus de sortie Y_t pour $t > 0.64$. On peut observer cela, comme l'influence des deux autres processus en fonction de l'instant t , sur la figure 6.2 ci-dessous. De plus, l'indice de second ordre le plus élevé est S_{L_t, W_t} .

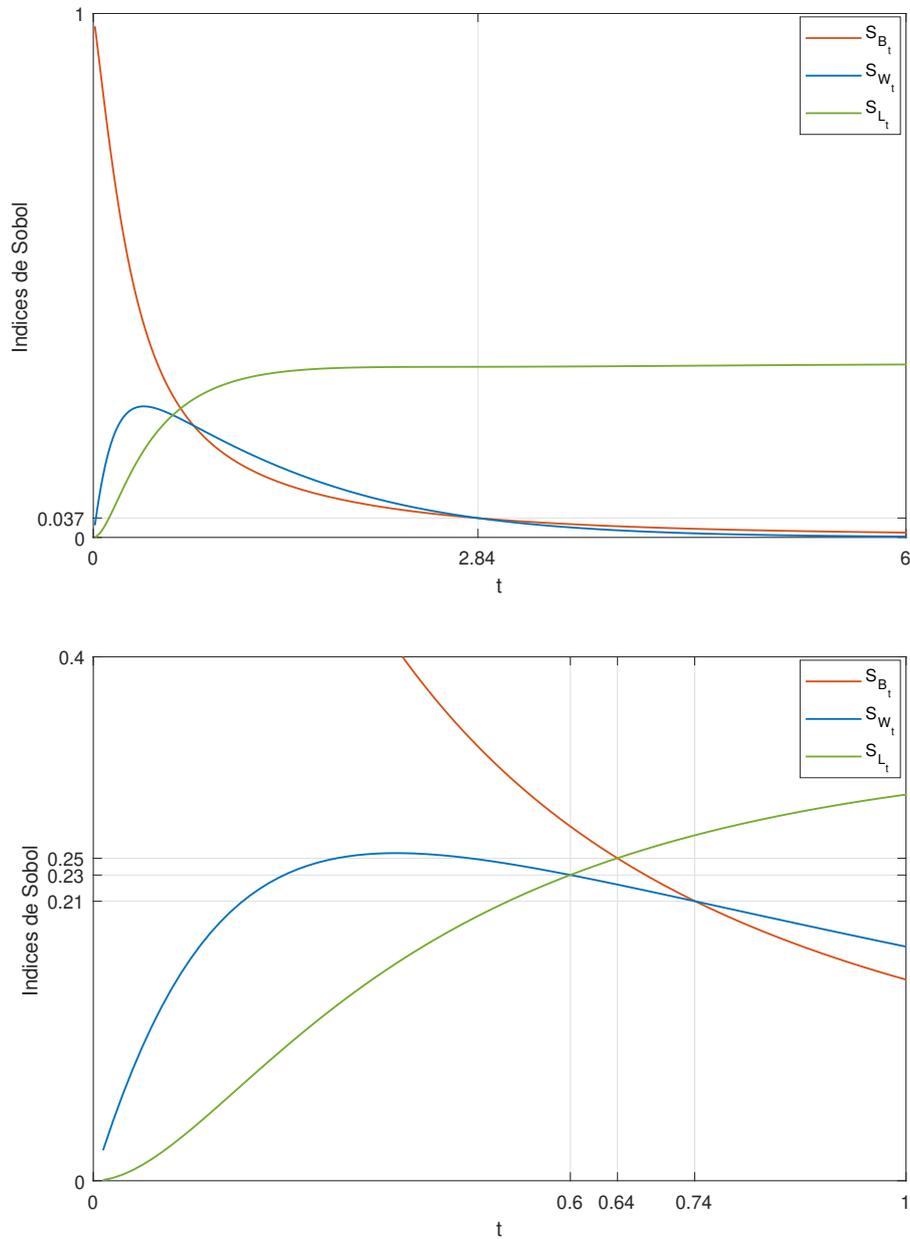


FIGURE 6.2 – Indices de Sobol du premier ordre pour le modèle $Y_t = f(t, B_t, W_t, L_t)$, en fonction de l'instant t

Remarque.

Pour t fixé, B_t , W_t et L_t peuvent être considérés comme des variables aléatoires et le problème se traite de la même manière que si l'on avait affaire à des variables

aléatoires. Dans la section suivante, on s'intéresse à $Y_t - Y_s$ et ceci nécessitera un traitement spécial.

A partir des différents indices de Sobol dont on vient de voir le calcul, on peut obtenir d'autres indices dits totaux [34]. Ces derniers permettent d'évaluer pour la variable de sortie Y sa sensibilité totale à une variable d'entrée X_i , c'est-à-dire sa sensibilité à la variable seule ainsi qu'à ses interactions avec les autres variables d'entrée. Par exemple, si Y est fonction de trois variables (X_1, X_2, X_3) , l'indice de sensibilité total pour la variable X_1 est égal à

$$S_{T_1} = S_1 + S_{1,2} + S_{1,3} + S_{1,2,3}. \quad (6.15)$$

6.2 Indices de Sobol pour des processus

Nous avons vu précédemment que nous devons utiliser des processus pour modéliser la distribution en masses des éclats. Cela permet de prendre en compte les liens entre les différents éclats. Il en va de même pour toute autre variable, autre que la masse, qui concerne ces éclats. Lorsque l'on s'intéresse à l'influence de certains paramètres sur le processus d'intérêt, on ne peut pas utiliser les indices de Sobol sur un processus, pris à un instant t , sans perdre de l'information. En effet, on oublie ainsi de considérer le lien entre les différents instants d'un processus. On doit donc apporter d'importantes modifications pour obtenir l'information souhaitée sur l'influence des entrées.

Les processus considérés, dans un premier temps, sont à accroissements indépendants. Les modifications sont donc réalisées en s'appuyant sur cette caractéristique. On suppose que l'on a un modèle de la forme $Y_t = f(X_t^1, \dots, X_t^d)$, avec (X_t^1, \dots, X_t^d) d processus stochastiques indépendants, et on considère la sortie $Y_t - Y_s$ au lieu de Y_t . On revient alors à un modèle comportant des variables aléatoires indépendantes, comme les processus considérés sont à accroissements indépendants. Cela nous permet de réaliser notre analyse de sensibilité comme précédemment sur les variables.

6.2.1 Application des indices de Sobol au processus aléatoire

On considère un processus $Y = (Y_s)_{s \in S}$, dont l'ensemble S peut représenter les positions des éclats sur le cylindre étudié (voir section 5.3 p.74). On suppose ici que Y est fonction de d processus à accroissements indépendants notés $X^i = (X_s^i)_{s \in S}$, avec $i = 1, \dots, d$. Ces derniers sont indépendants entre eux.

On souhaite étudier la sensibilité de Y par rapport à ses processus d'entrée X^i . Pour cela, on peut considérer, pour tout $s \in S$, la variable

$$Y_s = g(\mathbf{X}_s) \tag{6.16}$$

représentée par une fonction $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ avec $(\mathbf{X}_s) = (X_s^1, \dots, X_s^d)$ les d processus indépendants. Cette indépendance nous permet d'appliquer les indices de Sobol (section 6.1 p.77). Le problème avec cette méthode est qu'une propriété très importante des processus stochastiques n'est pas prise en compte. Il s'agit du fait que pour $(s, t) \in S^2$, avec $s < t$, deux composantes W_s et W_t d'un même processus sont dépendantes. Pour que l'effet de cette dépendance soit pris en compte dans l'indice de sensibilité, on préfère utiliser la différence entre deux composantes d'un processus. On s'intéresse donc ici à la variable aléatoire suivante :

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } t > s \geq 0, Y_t - Y_s &= g(\mathbf{X}_t) - g(\mathbf{X}_s) \\ &= G(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_s) \end{aligned} \tag{6.17}$$

avec une fonction $G : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$ dont les arguments sont dépendants, d'après la définition d'un processus stochastique.

On souhaite appliquer les indices de Sobol à cette variable $Y_t - Y_s$. Pour cela, il faut que $Y_t - Y_s$ soit exprimée en fonction de variables d'entrée indépendantes. Pour tout $(s, t) \in S^2$ et tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on introduit la notation suivante :

$$\Delta_s^t X^i = X_t^i - X_s^i \tag{6.18}$$

avec $X_0^i = 0$. Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et pour tout s, t, s', t' tels que $0 < s < t \leq s' < t'$, les variables $\Delta_s^t X^i$ et $\Delta_{s'}^{t'} X^i$ sont indépendantes. Cette indépendance vient de la définition d'un processus à accroissements indépendants. On peut alors réécrire l'expression de $Y_t - Y_s$ en fonction de ces variables indépendantes. Soit $\Delta_s^t \mathbf{X} = (\Delta_s^t X^1, \dots, \Delta_s^t X^d)$, $Y_t - Y_s$ s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} Y_t - Y_s &= G(\mathbf{X}_t, \mathbf{X}_s) \\ &= G(\Delta_s^t \mathbf{X} + \mathbf{X}_s, \mathbf{X}_s) \\ &= G(\Delta_s^t \mathbf{X} + \Delta_0^s \mathbf{X}, \Delta_0^s \mathbf{X}) \\ &= H(\Delta_s^t \mathbf{X}, \Delta_0^s \mathbf{X}) \\ &= H(\mathbf{Z}). \end{aligned} \tag{6.19}$$

avec la fonction $H : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}$, et $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_{2d})$ un vecteur de variables aléatoires indépendantes défini, pour des valeurs fixées $(s, t) \in S^2$ et pour tout $i \in \{1, \dots, 2d\}$, par

$$Z_i = \begin{cases} \Delta_s^t X^i & \text{pour } i = 1, \dots, d \\ \Delta_0^s X^{i-d} & \text{pour } i = d + 1, \dots, 2d \end{cases} \tag{6.20}$$

On se ramène ainsi au cadre mathématique classique des indices de Sobol pour les variables aléatoires indépendantes en entrée. On suppose que la fonction $H(\mathbf{Z})$ est de carré intégrable, pour pouvoir réaliser la décomposition de Sobol (lemme 6.1 p.81) et ainsi obtenir les indices de sensibilité.

On note que, dans le cas de l'étude des processus, les indices de Sobol sont maintenant fonctions des deux variables (s, t) . Pour $i = 1, \dots, d$, ceux du premier ordre sont égaux à

$$\begin{aligned}
 S_i(s, t) &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | Z_i))}{\text{Var}(Y_t - Y_s)} \\
 &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | \Delta_s^t X^i))}{\text{Var}(Y_t - Y_s)} \\
 &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | X_t^i - X_s^i))}{\text{Var}(Y_t - Y_s)}.
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

L'indice $S_i(s, t)$ est interprété de la façon suivante : on considère deux points s et t de la trajectoire d'un processus, et $S_i(s, t)$ représente l'influence de l'accroissement $\Delta_s^t X^i = X_t^i - X_s^i$ entre ces deux points du processus d'entrée X^i sur l'accroissement $\Delta_s^t Y = Y_t - Y_s$ entre ces deux mêmes points de Y . Cette interprétation est illustrée sur la figure 6.3. Elle représente, à droite, la trajectoire d'un processus d'entrée $(X_s^i)_{s \in S}$ et, à gauche, celle du processus $(Y_s)_{s \in S}$ correspondant. Pour deux points $(s, t) \in S^2$, on observe sur ces trajectoires les différences $\Delta_s^t X^i$ et $\Delta_s^t Y$.

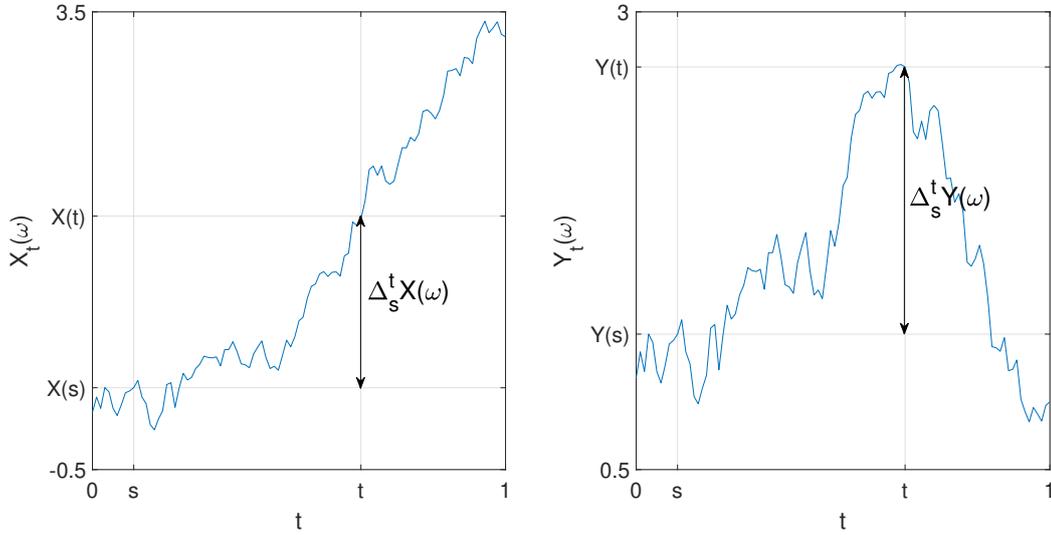


FIGURE 6.3 – Trajectoire d'un processus d'entrée $(X_s^i)_{s \in S}$ et celle du processus $(Y_s)_{s \in S}$ correspondant.

La formule (6.21) correspond seulement aux indices de Sobol des d premières variables de \mathbf{Z} . Les d dernières ne seront pas étudiées, puisqu'elles ne servent qu'à décorréler les vecteurs X_t et X_s (voir équation (6.17)). Elles peuvent tout de même être utiles pour le calcul des indices de Sobol totaux (équation (6.15) p.91) dont la formule est la suivante :

$$S_{T_i}(s, t) = \sum_{\substack{k=1 \\ (i_1, \dots, i_k) \in J_i^k}}^{2d} S_{i_1, \dots, i_k}(s, t) \quad (6.22)$$

avec J_i^k l'ensemble des (i_1, \dots, i_k) avec $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d$ et un des composants égal à i .

Pour le calcul de ces indices de Sobol, on utilise la méthode présentée par B. Sudret en 2008 [76], qui consiste en l'utilisation d'une base de polynômes chaos. On commence par réaliser une décomposition en polynômes chaos de la fonction $Y_t - Y_s$ de carré intégrable (voir équation (4.11) p.43) :

$$Y_t - Y_s = H(\mathbf{Z}) = H(Z_1, \dots, Z_{2d}) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \Psi_j(\mathbf{Z}) \quad (6.23)$$

avec $\{\Psi_j(\mathbf{Z})\}_{j \geq 0}$ une base multidimensionnelle orthonormale suivant la densité f de \mathbf{Z} (voir section 4.2 p.36). Sans perte conséquente sur la précision des calculs, on peut

ne garder que les $P_d^p + 1$ polynômes de degrés inférieurs à un entier p dans l'équation (6.23) :

$$Y_t - Y_s = \sum_{j=0}^{P_d^p} \beta_j \Psi_j(\mathbf{Z}). \quad (6.24)$$

Par construction, la base $\{\Psi_j(\mathbf{Z})\}_{j \geq 0}$ vérifie :

1. Pour tout $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{2d}$,

$$\Psi_0(\mathbf{Z}) = 1 \quad (6.25)$$

2. A chaque $j \in \mathbb{N}$ correspond un multi-index $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}) \in \{0, 1, \dots, n\}^{2d}$ tel que

$$\Psi_j(\mathbf{Z}) = \Psi_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}}(\mathbf{Z}) = \Psi_{\alpha_1}^1(Z_1) \dots \Psi_{\alpha_{2d}}^{2d}(Z_{2d}) \quad (6.26)$$

avec pour tout $(k, i) \in \{1, \dots, 2d\}^2$, $\Psi_0^k(Z_k) = 1$, $\Psi_{\alpha_i}^k$ qui est un polynôme de degré α_i , et $\{\Psi_{\alpha_i}^k\}_{\alpha_i \geq 0}$ qui forme une base uni-dimensionnelle de polynômes orthogonaux par rapport à la densité f_k de Z_k , i.e.

$$\begin{aligned} \forall (l, m) \in \{0, \dots, n\}^2 \text{ avec } l \neq m, \int (\Psi_l^k(z_k))^2 f_k(z_k) dz_k &= 1, \\ \int \Psi_l^k(z_k) \Psi_m^k(z_k) f_k(z_k) dz_k &= 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

D'après la formule (6.26), on peut alors réécrire l'équation (6.24) ainsi :

$$Y_t - Y_s = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}) \in \{0, \dots, n\}^{2d}} \beta_{\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}} \Psi_{\alpha_1}^1(Z_1) \dots \Psi_{\alpha_{2d}}^{2d}(Z_{2d}), \quad (6.28)$$

avec un nombre $P_d^p + 1$ de $(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}) \in \{0, \dots, n\}^{2d}$ tels que $\sum_{i=1}^{2d} \alpha_i \leq p$.

Les calculs des indices de Sobol sont alors réalisés à partir de l'équation ci-dessus. Dans un premier temps, l'espérance et la variance peuvent tout de même être simplement calculés à partir de l'équation (6.24) et de la condition d'orthogonalité (6.27) de la base $\{\Psi_j(\mathbf{Z})\}_{j \geq 0}$:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y_t - Y_s) &= \sum_{j=0}^{P_d^P} \beta_j \mathbb{E}(\Psi_j(\mathbf{Z})) \\
 &= \sum_{j=0}^{P_d^P} \left(\beta_j \int_{\mathbb{R}^{2d}} 1 \times \Psi_j(z) f(z) dz \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{P_d^P} \left(\beta_j \int_{\mathbb{R}^{2d}} \Psi_0(z) \Psi_j(z) f(z) dz \right) \\
 &= \beta_0
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}((Y_t - Y_s)^2) &= \mathbb{E} \left(\left(\sum_{j=0}^{P_d^P} \beta_j \Psi_j(Z) \right)^2 \right) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \left(\sum_{j=0}^{P_d^P} \beta_j \Psi_j(z) \right)^2 f(z) dz \\
 &= \sum_{j=0}^{P_d^P} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \beta_j^2 \Psi_j^2(z) f(z) dz \\
 &= \sum_{j=0}^{P_d^P} \beta_j^2
 \end{aligned} \tag{6.30}$$

ce qui nous donne

$$\text{Var}(Y_t - Y_s) = \mathbb{E}((Y_t - Y_s)^2) - (\mathbb{E}(Y_t - Y_s))^2 = \sum_{j=1}^{P_d^P} \beta_j^2. \tag{6.31}$$

Les indices de Sobol du premier ordre (6.21) peuvent ensuite être exprimés en fonction de coefficients de la décomposition en polynômes chaos (6.28). Il ne reste plus qu'à calculer l'espérance conditionnelle suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y_t - Y_s | Z_i) &= \sum_{j=(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}) \in \{0, \dots, n\}^{2d}} \beta_j \Psi_{\alpha_i}^i(Z_i) \mathbb{E} \left(\prod_{\substack{k \leq 2d \\ k \neq i}} \Psi_{\alpha_k}^k(Z_k) \right) \\
&= \sum_{j=(\alpha_1, \dots, \alpha_{2d}) \in \{0, \dots, n\}^{2d}} \beta_j \Psi_{\alpha_i}^i(Z_i) \\
&\quad \times \prod_{\substack{k \leq 2d \\ k \neq i}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1 \times \Psi_{\alpha_k}^k(z_k) f_k(z_k) dz_k \right) \\
&= \sum_{\alpha_i=0}^n \beta_{0, \dots, \alpha_i, \dots, 0} \Psi_{\alpha_i}^i(Z_i)
\end{aligned} \tag{6.32}$$

ce qui donne la variance

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | Z_i)) &= \sum_{\alpha_i=0}^n \beta_{0, \dots, \alpha_i, \dots, 0}^2 \text{Var}(\Psi_{\alpha_i}^i(Z_i)) \\
&= \sum_{\alpha_i=1}^n \beta_{0, \dots, \alpha_i, \dots, 0}^2
\end{aligned} \tag{6.33}$$

d'après l'équation (6.27).

On a alors l'indice de Sobol pour l'accroissement $Z_i = X_t^i - X_s^i$ égal à

$$S_i(s, t) = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | Z_i))}{\text{Var}(Y_t - Y_s)} = \frac{\sum_{\alpha_i=1}^n \beta_{0, \dots, \alpha_i, \dots, 0}^2}{\sum_{j=1}^{P_d^P} \beta_j^2}. \tag{6.34}$$

De la même manière, on peut montrer que les indices de Sobol d'ordre supérieur à 1 s'expriment aussi en fonction de coefficients de la décomposition en polynômes chaos de $Y_t - Y_s$.

Exemple 6. *Calcul des indices de Sobol avec les coefficients d'une décomposition en polynômes chaos sur un exemple académique. Les résultats obtenus pourront être comparés à la solution exacte.*

On considère, pour un processus $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$, le modèle mathématique suivant (connu comme la fonction d'Ishigami [41]) :

$$\begin{aligned}
Y_t &= g(B_t, M_t, Z_t) \\
&= a \sin^2(M_t) + (1 + bZ_t^4) \sin(B_t)
\end{aligned} \tag{6.35}$$

avec a et b constantes et (B_t) , (M_t) et (Z_t) trois processus stochastiques indépendants définis par

$$M_t = e^t(K_t - 1) = \int_0^t e^s dL_s \quad Z_t = \frac{O_t - 1}{T - t} = \int_0^t \frac{1}{T - u} dW_u \quad (6.36)$$

avec (B_t) , (L_t) et (W_t) trois mouvements Browniens (ou processus de Wiener) indépendants et T un paramètre positif. (K_t) est un processus de Ornstein-Uhlenbeck et (O_t) un pont Brownien (voir section 5.2 p.64). Ils sont tous les trois gaussiens et leurs accroissements sont indépendants.

Pour calculer les indices de Sobol du processus Y , comme vu précédemment, on a

$$\begin{aligned} Y_t - Y_s &= g(B_t, M_t, Z_t) - g(B_s, M_s, Z_s) \\ &= g((B_t - B_s) + B_s, (M_t - M_s) + M_s, (Z_t - Z_s) + Z_s) \\ &\quad - g(B_s, M_s, Z_s) \\ &= H(B_t - B_s, M_t - M_s, Z_t - Z_s, B_s - B_0, M_s - M_0, Z_s - Z_0) \end{aligned} \quad (6.37)$$

avec $H : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= a \sin^2(x_2 + x_5) \\ &\quad + (1 + b(x_3 + x_6)^4) \sin(x_1 + x_4) \\ &\quad - a \sin^2(x_5) - (1 + b(x_6)^4) \sin(x_4) \end{aligned} \quad (6.38)$$

Cette fonction est ensuite projetée sur une base de polynômes chaos pour calculer les indices de Sobol avec les coefficients de la décomposition. Les polynômes d'Hermite sont utilisés pour construire la base multivariée (voir section 4.2 p.36). Ils sont orthogonaux, suivant un produit scalaire, avec une densité gaussienne de moyennes nulles et de variances

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= t - s & \sigma_4^2 &= s \\ \sigma_2^2 &= \frac{e^{2t} - e^{2s}}{2} & \sigma_5^2 &= \frac{e^{2s} - 1}{2} \\ \sigma_3^2 &= \frac{t - s}{(T - t)(T - s)} & \sigma_6^2 &= \frac{s}{T(T - s)}. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Pour cet exemple académique, on peut aussi obtenir les valeurs exactes des indices de Sobol en utilisant les formules suivantes (pour $t \neq s$) :

$$\begin{aligned}
S_1(s, t) &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | B_t - B_s))}{\text{Var}(Y_t - Y_s)} \\
S_2(s, t) &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | M_t - M_s))}{\text{Var}(Y_t - Y_s)} \\
S_3(s, t) &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | Z_t - Z_s))}{\text{Var}(Y_t - Y_s)}
\end{aligned} \tag{6.40}$$

pour les indices de premier ordre, et

$$\begin{aligned}
S_{12}(s, t) &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | B_t - B_s, M_t - M_s))}{\text{Var}(Y_t - Y_s)} - S_1(s, t) - S_2(s, t) \\
S_{13}(s, t) &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | B_t - B_s, Z_t - Z_s))}{\text{Var}(Y_t - Y_s)} - S_1(s, t) - S_3(s, t) \\
S_{23}(s, t) &= \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | M_t - M_s, Z_t - Z_s))}{\text{Var}(Y_t - Y_s)} - S_2(s, t) - S_3(s, t)
\end{aligned} \tag{6.41}$$

pour ceux de second ordre. Les expressions exactes des quantités apparaissant dans les équations (6.40) et (6.41) sont données dans l'annexe A.2.

Pour les simulations numériques, les paramètres de la formule (6.35) de Y_t sont pris égaux à : $a = 7$ et $b = 0.1$. La base multivariée de polynômes d'Hermite, sur laquelle est projetée la fonction (6.38), est de degré 12.

Les figures 6.4 et 6.5 montrent les indices de premier ordre et la figure 6.6 celui de second ordre, pour la solution exacte à droite et la solution numérique à gauche. Il n'y a pas de représentation pour les autres indices car ils sont nuls.

On remarque sur ces figures qu'une base de polynômes multivariés de degré 12 suffit, comme les indices exacts et leur approximation coïncident bien. On note qu'il n'est pas nécessaire d'avoir un haut degré de précision sur les indices de Sobol car l'information qui nous intéresse est leur importance relative. En terme d'interprétation, on voit que l'importance d'une entrée $\Delta_s^t X^i$ sur la sortie $\Delta_s^t Y$ dépend fortement de la valeur $|s - t|$. Par exemple, avec S_2 et S_{13} , on voit que les processus stochastiques d'entrée associés à ces indices n'ont pas d'influence sur la sortie pour $s \approx t$, avec $s \neq 0$ et $t \neq 0$. Par contre, pour $s \approx t \approx 0$, S_1 nous permet de constater que $B_t - B_s$ a une forte influence sur la sortie $\Delta_s^t Y$.

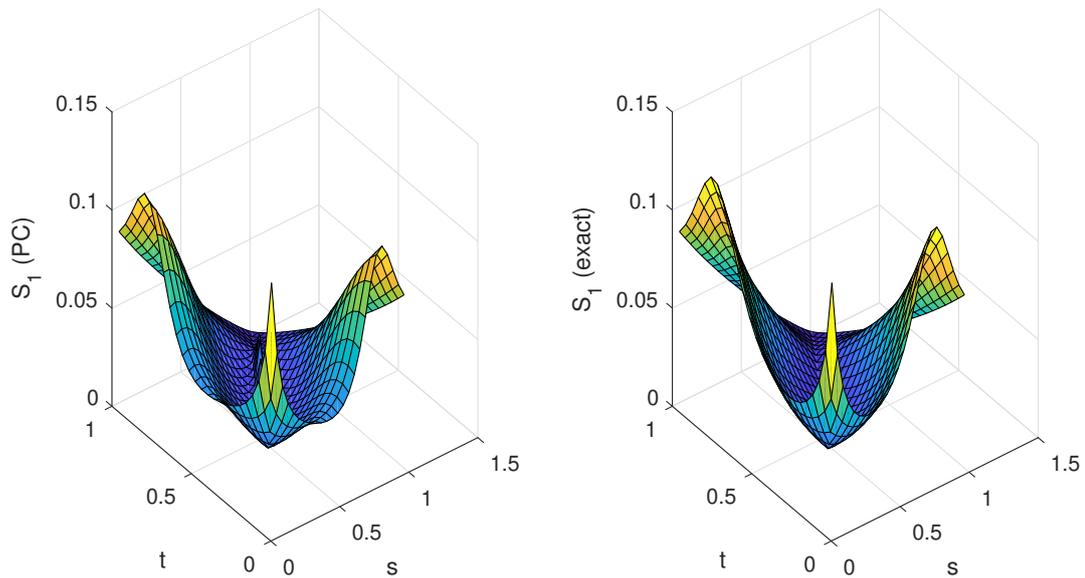


FIGURE 6.4 – Indice du premier ordre S_1 calculé grâce au développement en polynômes chaos (à gauche) et sa solution exacte (à droite).

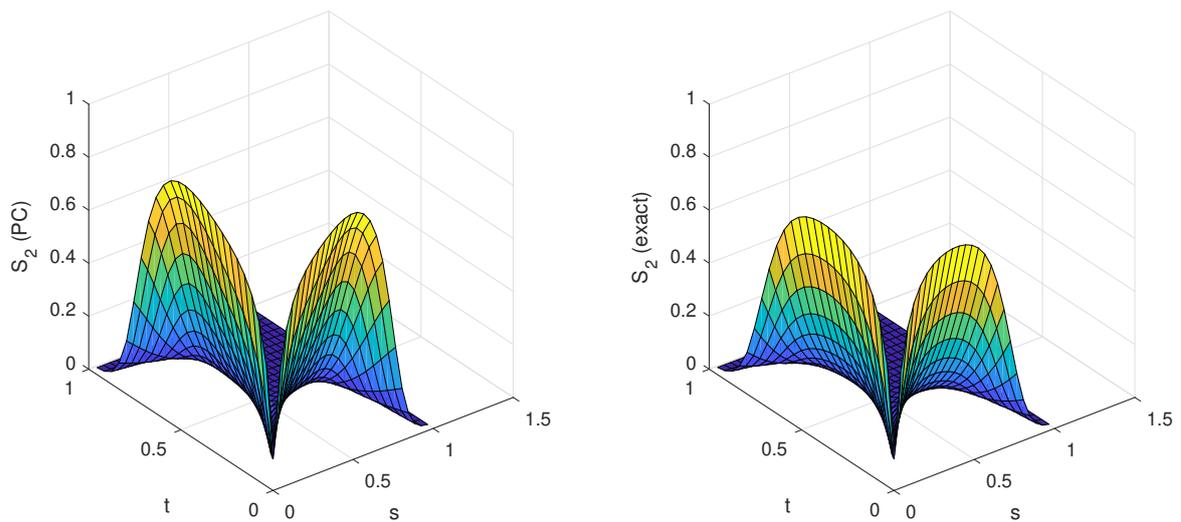


FIGURE 6.5 – Indice du premier ordre S_2 calculé grâce au développement en polynômes chaos (à gauche) et sa solution exacte (à droite).

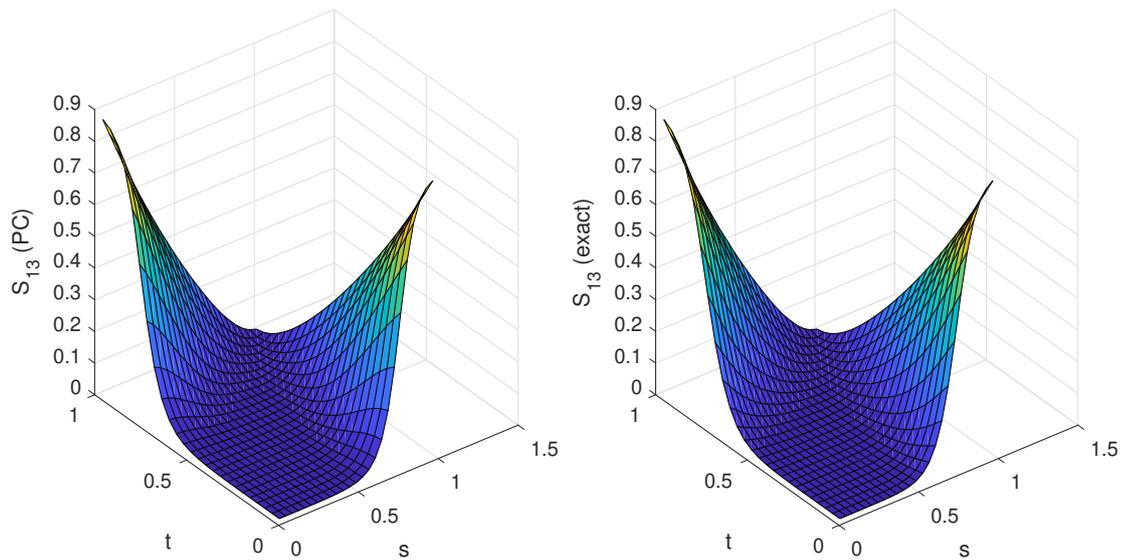


FIGURE 6.6 – Indice du second ordre S_{13} calculé grâce au développement en polynômes chaos (à gauche) et sa solution exacte (à droite).

6.2.2 Équation de la balistique

Grâce à l'adaptation des indices de Sobol aux processus stochastiques, vue précédemment, nous pouvons maintenant avoir plus d'informations sur les paramètres entrant en jeu dans l'explosion d'une bombe à fragmentation. Notamment, nous pouvons étudier leur influence sur la portée des éclats. Pour cela, on étudie ici l'équation de la balistique, c'est-à-dire la trajectoire déterministe d'un projectile sujet à la résistance de l'air. Cette dernière est modélisée par une force proportionnelle au carré de la vitesse.

On note m la masse du corps en mouvement soumis à une force de frottement qui correspond à la résistance de l'air. On suppose que cette force est égale à

$$F_d(v) = \lambda v^n \quad (n \geq 2) \tag{6.42}$$

avec v la vitesse du corps et λ un paramètre déterminé à partir de la masse volumique de l'air ρ et de la forme du corps. On utilise aussi, dans la suite, la vitesse v_0 et l'angle d'éjection α_0 initiaux. Le coefficient n sera, dans notre étude, fixé à 2.

On peut montrer que dans un système de coordonnées local de Frénet (\mathbf{N}, \mathbf{T}) , la vitesse v est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{d\alpha} = \tan \alpha + \frac{F_d(v)}{mg \cos \alpha}. \quad (6.43)$$

avec g la constante gravitationnelle. Cette équation est l'équation fondamentale de la balistique, dite aussi «équation de l'hodographe» [19]. Elle nous permet d'étudier la portée d'un éclat positionné sur le cylindre, que l'on note D (voir figure 6.7).

Le repère de Frénet est formé des vecteurs (\mathbf{N}, \mathbf{T}) . \mathbf{T} est un vecteur unitaire tangent à la courbe en un point M , et faisant un angle α avec la droite passant par ce point qui est parallèle à l'axe $(0x)$. \mathbf{N} est le vecteur perpendiculaire à \mathbf{T} , orienté vers le centre de la courbure (voir figure 6.7). C'est un repère dit mobile, car le point M représentant le projectile est en mouvement.

Dans ce repère, la vitesse $v = \frac{ds}{dt}$, avec ds une portion de longueur élémentaire de la trajectoire, est portée par la tangente \mathbf{T} . Le rayon de courbure en M est $r = -\frac{ds}{d\alpha}$. L'accélération, notée \vec{a} , se décompose sur \mathbf{T} et \mathbf{N} , et a pour coordonnées :

$$\begin{cases} a_{\mathbf{N}} &= \frac{v^2}{r} = -v \frac{d\alpha}{dt} \\ a_{\mathbf{T}} &= \frac{dv}{dt}. \end{cases} \quad (6.44)$$

La résistance de l'air $\mathbf{F}_d(v)$ est opposée à la vitesse donc sa composante en \mathbf{N} est nulle et celle en \mathbf{T} est $-F_d(v)$. L'accélération \vec{g} de la pesanteur, dans le repère de Frénet, a pour coordonnées :

$$\begin{cases} g_{\mathbf{N}} &= g \cos \alpha \\ g_{\mathbf{T}} &= -g \sin \alpha. \end{cases} \quad (6.45)$$

D'après le principe fondamental de la dynamique (la deuxième loi de Newton), $m\vec{a} = m\vec{g} + \mathbf{F}_d(v)$. On obtient alors les équations du mouvement :

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} &= -mg \sin \alpha - F_d(v) \\ v \frac{d\alpha}{dt} &= -g \cos \alpha. \end{cases} \quad (6.46)$$

En faisant le rapport des deux équations ci-dessus, on retrouve l'équation fondamentale de la balistique (6.43) qui nous intéresse.

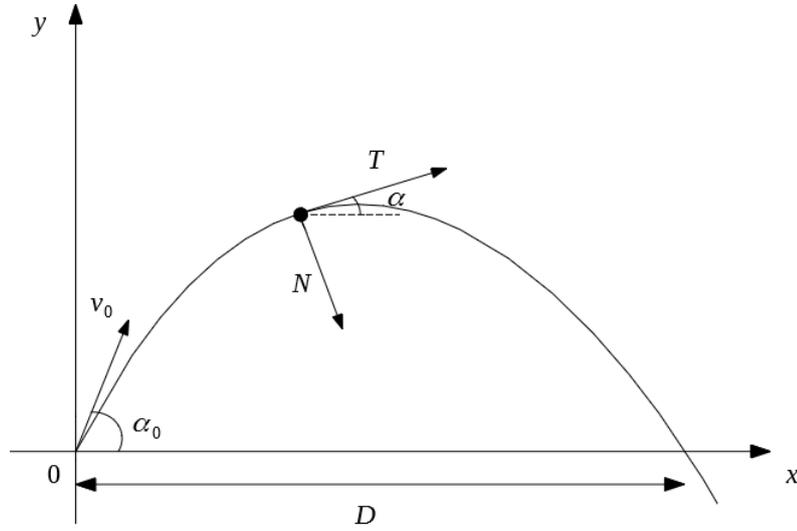


FIGURE 6.7 – Système de coordonnées local de Frénet et Trajectoire du projectile

On s'aperçoit que dans le cas où $F_d(v) = \lambda v^n$, on peut résoudre cette équation en la ramenant à une équation linéaire grâce au changement de variable : $1/v^n = pq$, avec p et q deux fonctions de α [75]. Le résultat obtenu est le suivant :

$$\frac{1}{v^n} = -\frac{n\lambda \cos^n(\alpha)}{mg} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{1}{\cos^{n+1}(u)} du + \frac{\cos^n(\alpha)}{v_0^n \cos^n(\alpha_0)}. \quad (6.47)$$

Si $n = 2$, on obtient l'expression du carré de la vitesse :

$$v^2(\alpha) = \frac{v_0^2 \cos^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha) \left(1 - \left(\frac{v_0}{v_{lim}} \right)^2 \cos^2(\alpha_0) \left[\ln\left(\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \frac{\sin(u)}{\cos^2(u)} \right]_{\alpha_0}^{\alpha} \right)} \quad (6.48)$$

où v_{lim} est la vitesse limite de chute, dépendant de la masse de l'éclat, définie par :

$$v_{lim} = \lim_{\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2}} v = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}, \quad (6.49)$$

avec α qui doit tendre vers $-\frac{\pi}{2}$ après un temps suffisamment long.

La position du projectile peut ensuite être exprimée en fonction de $v^2(\alpha)$. Ses coordonnées cartésiennes sont obtenues à partir des équations

$$\begin{cases} dx = ds \cos(\alpha) = v(\alpha) \cos(\alpha) dt \\ dy = ds \sin(\alpha) = v(\alpha) \sin(\alpha) dt. \end{cases} \quad (6.50)$$

On a ainsi, grâce à la seconde équation du mouvement (6.46),

$$\begin{cases} dx = -\frac{1}{g} v^2(\alpha) d\alpha \\ dy = -\frac{1}{g} v^2(\alpha) \tan(\alpha) d\alpha. \end{cases} \quad (6.51)$$

Après intégration, on a les positions cartésiennes, exprimées en fonction de l'angle α , suivantes :

$$\begin{cases} x(\alpha) = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2(u) du + x_0 \\ y(\alpha) = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2(u) \tan(u) du + y_0 \end{cases} \quad (6.52)$$

où (x_0, y_0) est la position initiale de l'objet.

Grâce aux positions du projectile (6.52), on peut maintenant calculer sa portée, le paramètre qui nous intéresse. Elle est donnée par la distance horizontale $D = x(\alpha_s)$, avec α_s l'angle tel que $y(\alpha_s) = 0$ (voir figure 6.7).

Cet angle α_s est déterminé en résolvant l'équation non linéaire $y(\alpha_s) = 0$, avec l'algorithme de Newton qui donne la formule suivante :

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{y(\alpha_k)}{y'(\alpha_k)} = \alpha_k - \frac{\int_{\alpha_0}^{\alpha_k} v^2(u) \tan(u) du}{v^2(\alpha_k) \tan(\alpha_k)} \quad (6.53)$$

avec $\alpha_s = -\alpha_0$ comme valeur d'initialisation de la relation de récurrence.

L'intégrale dans la formule précédente est évaluée en utilisant la règle de quadrature de Fejer [21].

Dans la partie suivante, nous étudieront l'influence de trois paramètres d'entrée de la portée. Ils seront considérés comme des processus stochastiques et une analyse de sensibilité sera appliquée (section 6.2.1 p.91).

6.2.3 Calcul des indices de Sobol pour la portée d'un éclat

Comme on peut le remarquer dans la partie précédente, la portée d'un éclat dépend de trois paramètres : l'angle d'éjection initial, la vitesse initiale et la vitesse limite (la vitesse limite dépend elle-même de la masse de l'éclat). Elle est donc exprimée en fonction de ces paramètres. De plus, ces derniers sont considérés comme des processus, ce qui implique que la portée est aussi un processus. Cela nous permet de prendre en compte le fait que deux éclats sur une charge (un cylindre du modèle pseudo-3D) sont liés (voir chapitre 5 p.62). Ce qui nous intéresse ici concernant la portée d'un éclat, c'est l'impact sur celle-ci des trois paramètres utilisés. Pour cela, on applique alors les indices de Sobol sur le processus de la portée de la même manière que dans la section 6.2.1. Pour commencer, on considère alors la différence entre deux composantes de ce processus. On s'intéresse donc ici à l'expression suivante :

$$\text{Pour tout } s > t \geq 0, D_s - D_t = F(\alpha_s, V_s^0, V_s^{lim}) - F(\alpha_t, V_t^0, V_t^{lim}) \quad (6.54)$$

où s et t représentent les positions sur le cylindre de deux éclats.

Les processus d'entrée indépendants utilisés sont les suivants :

- $(\alpha_s)_{s \in S}$ l'angle d'éjection initial ;
- $(V_s^0)_{s \in S}$ la vitesse initiale ;
- $(V_s^{lim})_{s \in S} = \left(\sqrt{\frac{M_s g}{\lambda}} \right)_{s \in S}$ la vitesse limite.

Ces processus sont ici des processus de Wiener (voir section 5.1 p.62) et sont à accroissements indépendants. Ils vérifient les caractéristiques suivantes :

- Moyenne :

$$\begin{aligned} m_\alpha &= 20^\circ \\ m_{V^0} &= 300 \text{ m.s}^{-1} \\ m_{V^{lim}} &= 800 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned} \quad (6.55)$$

- Ecart-type :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha(s, t) &= \sqrt{0.03(t - s)} \\ \sigma_{V^0}(s, t) &= \sqrt{40(t - s)} \\ \sigma_{V^{lim}}(s, t) &= \sqrt{4000(t - s)} \end{aligned} \quad (6.56)$$

Le choix de tels processus a été réalisé en tenant compte de deux contraintes. La première est d'utiliser des processus à accroissement indépendant, d'où le choix des

processus de Wiener. La deuxième est d'essayer de coller aux données du modèle pseudo-3D pour le choix des moyennes et des variances des processus d'entrée. Pour traiter la différence $D_s - D_t$, on la transforme pour avoir des paramètres d'entrée indépendants, ainsi on obtient :

$$\begin{aligned}
 D_s - D_t &= F(\alpha_s, V_s^0, V_s^{lim}) - F(\alpha_t, V_t^0, V_t^{lim}) \\
 &= F(\alpha_s - \alpha_t + \alpha_t, V_s^0 - V_t^0 + V_t^0, V_s^{lim} - V_t^{lim} + V_t^{lim}) - F(\alpha_t, V_t^0, V_t^{lim}) \\
 &= G(\alpha_s - \alpha_t, V_s^0 - V_t^0, V_s^{lim} - V_t^{lim}, \alpha_t, V_t^0, V_t^{lim}) \\
 &= G(X_1, \dots, X_6).
 \end{aligned} \tag{6.57}$$

avec les trois premières variables utilisées en entrée qui cette fois-ci sont indépendantes, puisque les processus utilisés sont à accroissements indépendants. Ensuite, pour le calcul des indices, on fait une décomposition en polynômes chaos de $D_s - D_t$ ([22] et [76]) :

$$D_s - D_t = G(X_1, \dots, X_6) = \sum_{i,j,k,l,m,n} \beta_{i,j,k,l,m,n} \Psi_{1,i}(X_1) \dots \Psi_{6,n}(X_6). \tag{6.58}$$

avec pour $p = 1, \dots, 6$ les $\Psi_{p,1}, \dots, \Psi_{p,N}$ orthogonaux et $\Psi_{p,1} = 1$. On n'utilise qu'une approximation de l'équation (6.58) ci-dessus, en ne gardant que les termes dont les polynômes sont de degré inférieur ou égal à 12. Il ne reste plus qu'à calculer les différents indices de Sobol exprimés en fonction des coefficients de la décomposition en polynômes chaos, comme on peut le vérifier dans la section 6.2.1. On obtient alors les résultats analysés ci-dessous.

6.2.4 Analyse des résultats

Les indices de Sobol sont utilisés ici pour vérifier l'influence des paramètres d'entrée sur la portée des éclats d'un cylindre. Les paramètres d'entrée et la portée sont représentés par des processus (voir section précédente). Dans notre cas, l'indice de Sobol est calculé pour la différence entre deux composantes d'un processus d'entrée. Ces dernières représentent un des paramètres d'entrée pour deux éclats. Il permet de vérifier, en fonction des positions des deux éclats sur le cylindre, l'influence de la différence entre les deux composantes du processus d'entrée sur la différence entre les deux portées (voir la section 6.2.1 page 91). Dans les figures ci-dessous, les valeurs des différents indices sont représentées sur l'axe z et les coordonnées (s, t) représentent les positions de deux éclats sur le cylindre (ces coordonnées sont normées). Ce travail constitue une première approche pour l'étude des indices de Sobol dans le cadre des processus à accroissements indépendants. Pour une modélisation plus réaliste, la même étude pourra être réalisée en utilisant des processus à accroissements non indépendants.

La figure 6.8 représente les différentes valeurs obtenues pour l'indice de Sobol du paramètre α de la portée. On a donc, pour s et t fixés, z égal à l'indice de Sobol qui donne l'influence de $\alpha_s - \alpha_t$ sur $D_s - D_t$. La valeur d'un indice de Sobol étant comprise dans l'intervalle $[0, 1]$, on peut conclure, d'après la figure, que l'influence du paramètre α sur la portée d'un éclat est importante. De plus, on remarque que l'indice de Sobol pour la variable $\alpha_s - \alpha_t$ augmente lorsque s ou t diminuent. Cela signifie que plus la position d'un éclat sur le cylindre est proche de 0 (la base du cylindre), plus la différence de portée entre celui-ci et un autre éclat du cylindre est influencée par la différence qui existe entre leurs angles d'éjection. On note aussi que pour une position fixée s et deux positions k_1 et k_2 telles que $k_1 \neq k_2$, $S_1(s, k_1) = S_1(s, k_2)$ et $S_1(k_1, s) = S_1(k_2, s)$ si et seulement si $k_1, k_2 \geq s$. Donc, l'influence du paramètre α sur la différence entre les portées de deux éclats ne dépend que de la position de l'éclat le plus proche de la base du cylindre.

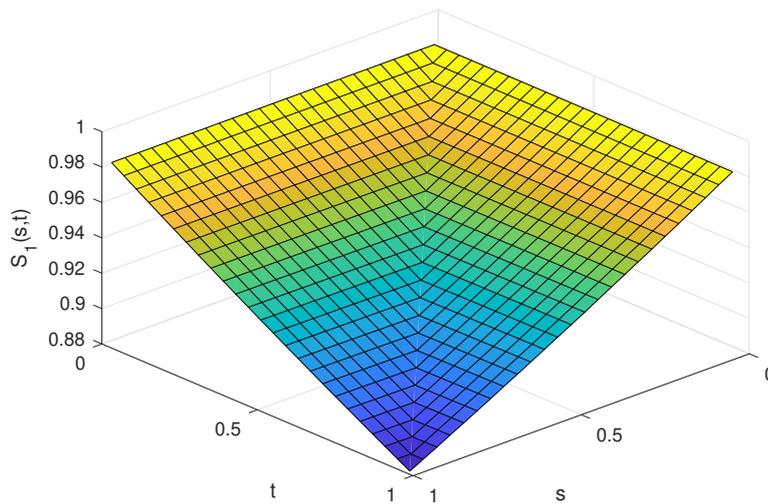


FIGURE 6.8 – Indice de Sobol de premier ordre S_1

Contrairement au cas du paramètre α , les deux figures 6.9 et 6.10 nous permettent de constater le peu d'influence sur la portée de la vitesse initiale V_0 et de la vitesse limite V_{lim} . On observe tout de même pour la vitesse initiale, sur la figure 6.9, une augmentation de cet indice lorsque s et t diminuent. Donc, plus les positions de deux éclats sur le cylindre sont proches de 0 (la base du cylindre), plus la différence de portée entre ces deux éclats est influencée par la différence qui existe entre leurs vitesses initiales. Pour la vitesse limite, on observe sur la figure 6.10 une augmentation de cet indice lorsque s ou t augmentent. Donc, plus la position d'un éclat sur le cylindre est proche de 1 (le bout du cylindre), plus la différence de portée entre celui-ci et un autre éclat du cylindre est influencée par la différence qui existe entre

leurs vitesses limites (ou leurs masses). L'indice de Sobol est aussi un peu plus élevé pour des éclats dont les positions sont éloignées sur le cylindre, puisque pour un éclat de position donnée on remarque une augmentation de l'indice de Sobol lorsque la position du second éclat se rapproche de 0.

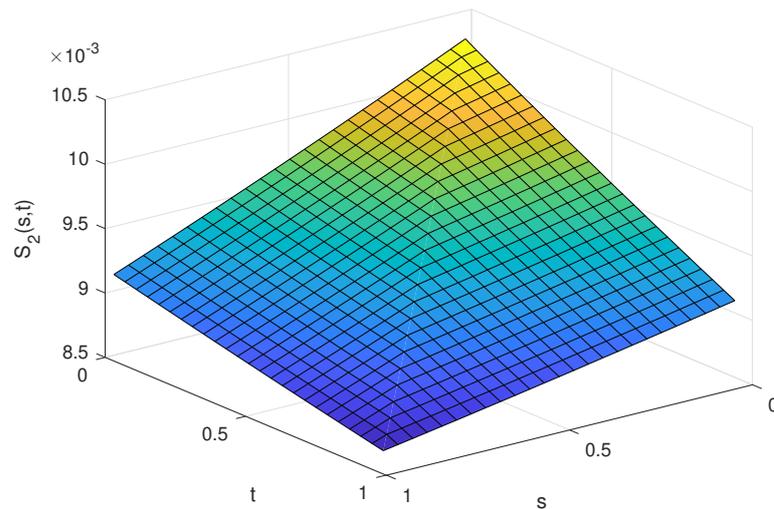


FIGURE 6.9 – Indice de Sobol de premier ordre S_2

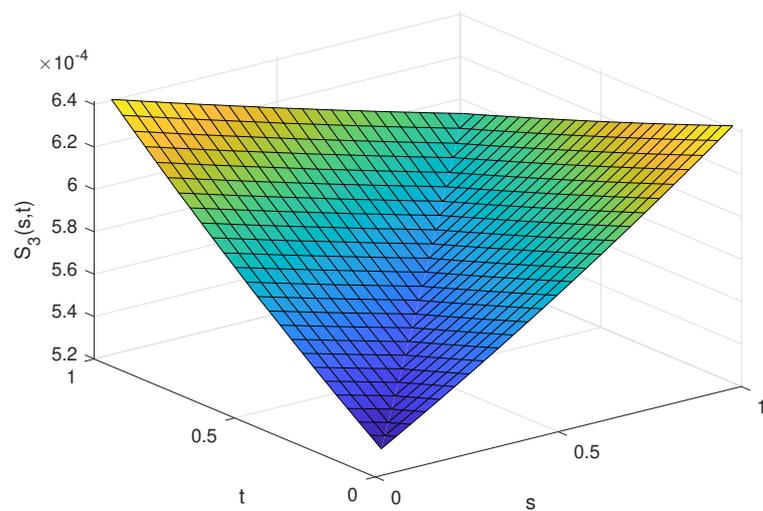


FIGURE 6.10 – Indice de Sobol de premier ordre S_3

Les trois prochains graphiques représentent eux les résultats obtenus pour le calcul des indices de Sobol de second ordre. Comme on peut le voir, on peut aussi négliger l'influence des interactions entre les variables prises deux à deux, en particulier lorsque l'angle d'éjection n'est pas pris en compte. Pour les trois graphiques suivants, on remarque aussi une légère augmentation de l'indice de Sobol lorsque la différence entre s et t augmente. L'indice tend vers 0 lorsque $s - t$ tend vers 0 aussi. Les interactions entre deux paramètres d'entrée ont donc une influence sur la portée qui est plus importante pour des éclats éloignés sur le cylindre.

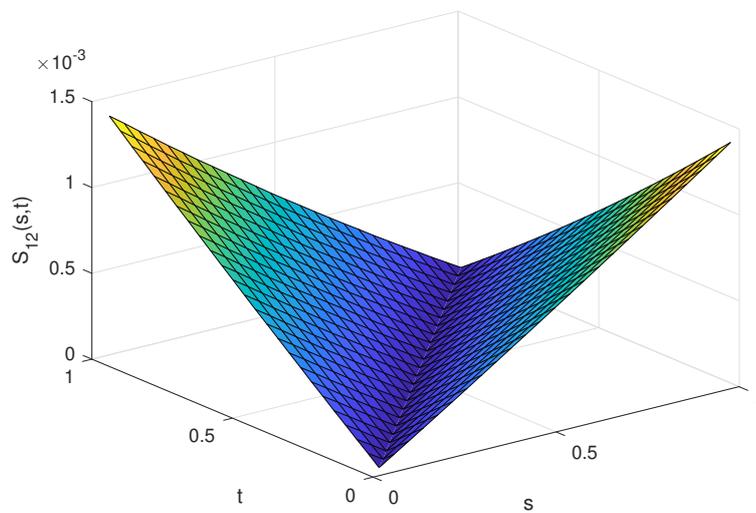


FIGURE 6.11 – Indice de Sobol de second ordre S_{12}

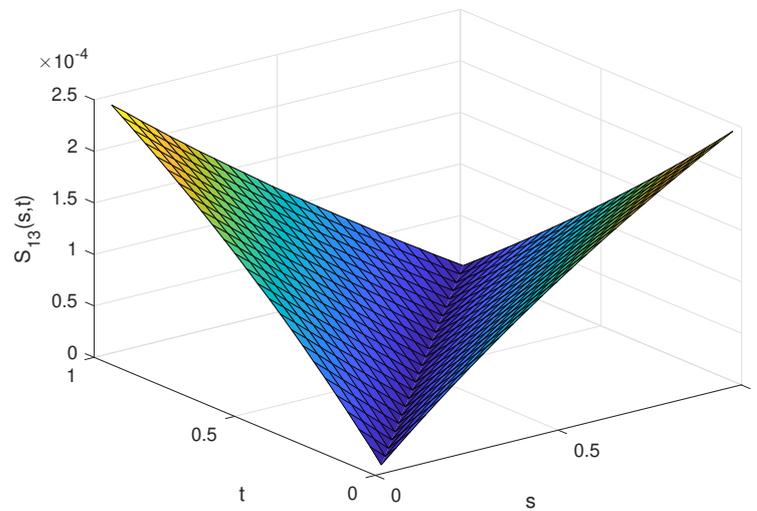


FIGURE 6.12 – Indice de Sobol de second ordre S_{13}

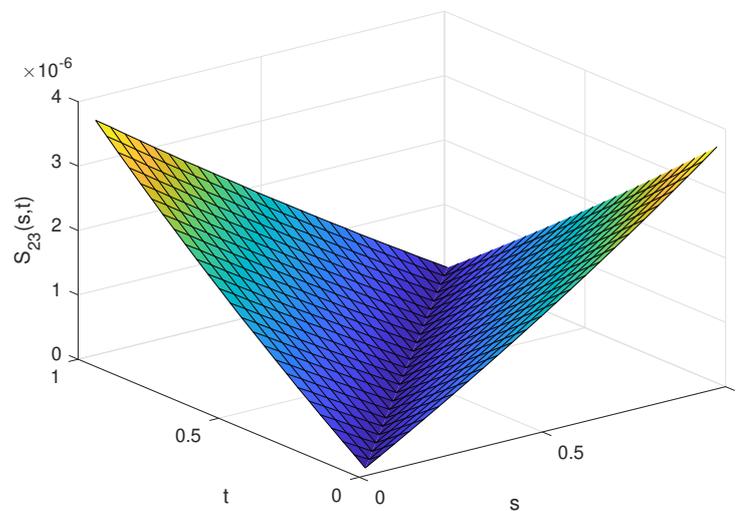


FIGURE 6.13 – Indice de Sobol de second ordre S_{23}

Enfin, on remarque dans la figure 6.14 ci-dessous que l'influence de l'interaction entre les trois paramètres (qui ne prend pas en compte les interactions entre deux paramètres) est un peu plus importante que celle de l'interaction entre deux paramètres. Par contre, elle est nulle lorsqu'un des deux éclats est à la base du cylindre. Elle augmente lorsque s et/ou t augmentent. Pour cet indice-ci, on a aussi pour

une position s fixée, S_{123} égal à la même valeur pour chaque position t supérieure à s .

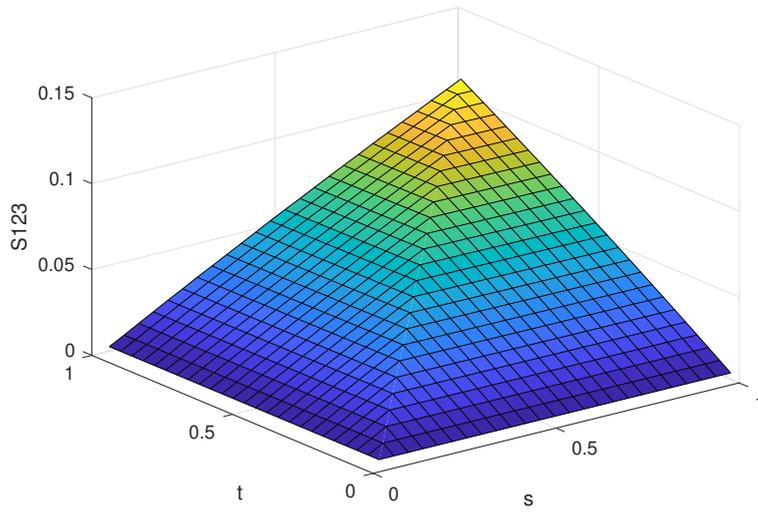


FIGURE 6.14 – Indice de Sobol du troisième ordre S_{123}

Indices de Sobol appliqués à des processus à accroissements non indépendants

Précédemment, nous avons appliqué les indices de sensibilité des variables aléatoires au cas des processus stochastiques. Ils permettent de mesurer la sensibilité du processus de sortie Y d'un modèle

$$Y = f(X_1, \dots, X_p) \text{ (avec } p \in \mathbb{N}^*),$$

aux processus d'entrées (X_1, \dots, X_p) et à leurs interactions.

Ces indices ne peuvent être utilisés que pour des processus d'entrée à accroissements indépendants. Le souci d'une telle contrainte est que, dans la réalité, l'hypothèse d'indépendance est peu vérifiée. Nous devons donc chercher des indices de sensibilité pouvant être appliqués sur des variables non indépendantes. Des travaux ont été déjà réalisés sur ce sujet dont nous faisons l'état de l'art ci-dessous.

La dépendance des variables est un problème récurrent dans le domaine de la probabilité, en particulier pour l'analyse de sensibilité. Dans le cas d'une analyse globale, les indices de Sobol basés sur une décomposition de la variance sont généralement utilisés. Pour un modèle

$$Y = f(X_1, \dots, X_p), \tag{7.1}$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$, il y a $2^p - 1$ indices de Sobol qui permettent de mesurer l'influence des variables aléatoires d'entrées (X_1, \dots, X_p) et de leurs interactions sur la variable de sortie Y . Par exemple, pour $p = 3$, on a les trois indices de premier ordre qui

donnent l'influence de chaque variable d'entrée sans prendre en compte leurs interactions. Puis on a les indices $S_{1,2}$, $S_{1,3}$, $S_{2,3}$ et $S_{1,2,3}$ qui donnent l'influence de leurs interactions. La somme de tous ces indices doit être égale à 1. Le problème est que lorsque les variables d'entrée sont dépendantes, certaines variables peuvent avoir un impact sur un indice qui ne les concerne pas (ex : X_2 peut avoir un effet sur S_1). La somme des indices peut alors ne pas être égale à 1. On ne peut pas réaliser une décomposition de la variance comme dans le cas indépendant [56].

Pour traiter le cas de la dépendance, en 1995, McKay [52] a commencé à écrire sur le sujet. Il applique sa méthode d'estimation des indices de sensibilité du premier ordre pour les variables indépendantes au cas des variables non indépendantes. Cette dépendance est seulement prise en compte dans l'échantillon des variables d'entrée, en utilisant les méthodes de Iman et Conover [38], ou de Stein [73]. Le problème est que pour une variable d'entrée donnée, les autres variables ont tout de même un impact sur la valeur de son indice de sensibilité supposé évaluer seulement l'influence de cette variable sur celle de sortie.

En 1998, Bedford [4] orthogonalise les variables d'entrée avec le procédé de Gram-Schmidt [64], avant d'appliquer la décomposition de la variance vue au chapitre précédent. Cette méthode a deux défauts :

- cette décomposition n'est pas unique, puisqu'elle dépend de l'ordre dans lequel les variables d'entrée sont intégrées dans le procédé d'orthogonalisation ;
- les variables orthogonalisées ne correspondent plus à celles de départ et peuvent même être construites à partir de plusieurs d'entre elles.

Ensuite, Tarantola et Saltelli [68] ont réalisés plusieurs travaux sur le sujet. Ils réalisent une analyse de sensibilité différente selon le but recherché. Ils énumèrent quatre problèmes auxquels on pourrait répondre grâce à cette analyse :

1. trouver la variable d'entrée à fixer pour obtenir la meilleure réduction de l'incertitude sur la sortie ;
2. trouver la ou les variables qui n'ont pas d'influence sur la variable de sortie ;
3. trouver le plus petit groupe de variables que l'on doit fixer pour avoir la réduction de l'incertitude sur la sortie souhaitée ;
4. trouver les variables les plus impliquées dans les réalisations de la variable de sortie dans une région donnée.

Pour le premier problème, les indices de Sobol de premier ordre peuvent être appliqués pour des variables d'entrée non indépendantes, même si plusieurs variables peuvent avoir un impact sur leur valeur.

Pour le deuxième cas, même sans la dépendance des variables d'entrée, il est toujours possible de décomposer la variance de la sortie Y en deux termes : $\mathbb{E}(\text{Var}(Y|X_{-j}))$ et $\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_{-j}))$. j appartient à l'ensemble des indices des variables d'entrée et X_{-j} correspond à l'ensemble des variables d'entrée privé de X_j . Le premier terme nous donne l'indice de Sobol total S_{T_j} dont la valeur, si elle est faible, montre le peu d'influence de X_j sur Y . A noter que lorsque les variables d'entrée ne sont pas indépendantes, nous ne pouvons pas utiliser la formule des indices de Sobol totaux (6.15) (voir p.91).

Et pour le troisième cas, on utilise une procédure empirique. On suppose que l'on souhaite une réduction égale à V_r de la variance de la sortie. Pour cela, on utilise les variances $V_{\mathbf{u}}^c = \text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}))$, avec \mathbf{u} un sous-ensemble des indices des entrées, qui interviennent dans le calcul des indices de Sobol pour des variables indépendantes (voir lemme 6.1 p.81). On commence par choisir la variable X_j ayant la variance V_j^c la plus élevée. Si $V_j^c < V_r$, on continue en choisissant une autre variable X_i dont la variance $V_{j,i}^c$ est la plus forte. Si l'on a toujours $V_{j,i}^c < V_r$, on continue de la même façon à choisir d'autres variables jusqu'à ce que $V_{\mathbf{v}}^c \geq V_r$, avec \mathbf{v} l'ensemble des indices des variables choisies.

Cette méthode a malheureusement une limite. Borgonovo a montré, avec un exemple, que la variance ne peut pas à elle seule caractériser l'incertitude sur le modèle [7].

Jacques [42] s'est intéressé lui au cas du modèle

$$Y = f(X_1, \dots, X_p) \tag{7.2}$$

où il suppose qu'il y a des groupes de variables corrélées. Les variables d'un même groupe sont corrélées entre elles mais indépendantes des autres variables. Ainsi, il a pu étudié les indices de sensibilité de ces différents groupes, sans qu'un indice ait un impact sur un autre. Avant cela, il a réalisé une décomposition de la variance, à partir de la décomposition de Sobol d'une fonction. Il a commencé par le cas où deux variables d'entrées sont dépendantes. Cette décomposition est obtenue à partir de la proposition suivante :

Proposition 7.1. *Soit le modèle $Y = f(X_1, \dots, X_p)$ à p variables d'entrée. On suppose (X_3, \dots, X_p) indépendantes deux à deux, et X_1 (respectivement X_2) indépendante de X_j pour tout $j = 3, \dots, p$. Les deux variables X_1 et X_2 peuvent être dépendantes. La variance de Y se décompose alors en :*

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^p \tilde{V}_i + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \tilde{V}_{ij} + \dots + \tilde{V}_{1\dots p} + V_{12}^{*(p)},$$

où :

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_i &= \text{Var}(f_i(X_i)), \\
\tilde{V}_{ij} &= \text{Var}(f_{i,j}(X_i, X_j)), \\
\tilde{V}_{ijk} &= \text{Var}(f_{i,j,k}(X_i, X_j, X_k)), \\
&\dots \\
V_{12}^{*(p)} &= 2 \sum_{s \in S} (\mathbb{E}[f_{1,s} f_{2,s}] + \mathbb{E}[f_{1,s} f_{1,2,s}] + \mathbb{E}[f_{2,s} f_{1,2,s}])
\end{aligned}$$

avec $S = \{I, I \subseteq \{\emptyset\} \cup \{3, \dots, p\}\}$, la notation f_{i_1, \dots, i_r} désignant la fonction $f_{i_1, \dots, i_r}(X_{i_1}, \dots, X_{i_r})$, définie suivant le modèle :

$$\begin{aligned}
f_0 &= \mathbb{E}[Y], \\
f_i(X_i) &= \mathbb{E}[Y|X_i] - f_0, \\
f_{i,j}(X_i, X_j) &= \mathbb{E}[Y|X_i, X_j] - f_i(X_i) - f_j(X_j) - f_0, \\
f_{i,j,k}(X_i, X_j, X_k) &= \mathbb{E}[Y|X_i, X_j, X_k] - f_{i,j}(X_i, X_j) - f_{i,k}(X_i, X_k) - f_{j,k}(X_j, X_k) \\
&\quad - f_i(X_i) - f_j(X_j) - f_k(X_k) - f_0, \\
&\dots
\end{aligned}$$

On obtient ainsi un nouvel indice

$$S_{12}^* = \frac{V_{12}^{*(p)}}{\text{Var}(Y)}$$

pour la sensibilité de Y par rapport à la corrélation entre deux variables d'entrée. Le problème est qu'il n'exprime pas correctement cette sensibilité. Jacques a montré cela avec l'exemple d'un modèle simple à trois variables d'entrée ci-dessous.

Exemple 7. Indices de sensibilité du modèle $Y = X_1 + X_2 + X_3$, dont seulement deux variables sont dépendantes, avec

$$(X_1, X_2, X_3) \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 & 0 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \right).$$

La variance de Y est

$$\begin{aligned}
\text{Var}(Y) &= \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \text{Var}(X_3) + 2 \sum_{\{i,j\} \subset \{1,2,3\}} \text{Cov}(X_i, X_j) \\
&= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2.
\end{aligned}$$

D'après la proposition 7.1 ci-dessus, cette variance se décompose en

$$\text{Var}(Y) = \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2 + \tilde{V}_3 + \tilde{V}_{12} + \tilde{V}_{13} + \tilde{V}_{23} + \tilde{V}_{123} + V_{12}^{*(3)}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 &= \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_1] - \mathbb{E}[Y]) = \text{Var}(\mathbb{E}[X_2|X_1] + X_1) \\ &= \text{Var}\left(\mu_2 + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2}(X_1 - \mu_1) + X_1\right) = (\sigma_1 + \rho\sigma_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2 &= \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_2] - \mathbb{E}[Y]) = \text{Var}(\mathbb{E}[X_1|X_2] + X_2) \\ &= \text{Var}\left(\mu_1 + \frac{\rho\sigma_2\sigma_1}{\sigma_2^2}(X_2 - \mu_2) + X_2\right) = (\sigma_2 + \rho\sigma_1)^2 \end{aligned}$$

$$\tilde{V}_3 = \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_3] - \mathbb{E}[Y]) = \text{Var}(X_3) = \sigma_3^2$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{12} &= \text{Var}(\mathbb{E}[Y|X_1, X_2] - \mathbb{E}[Y|X_1] - \mathbb{E}[Y|X_2] + \mathbb{E}[Y]) \\ &= \text{Var}(\mathbb{E}[X_2|X_1] + \mathbb{E}[X_1|X_2]) \\ &= \text{Var}\left(\mu_2 + \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2}(X_1 - \mu_1) + \mu_1 + \frac{\rho\sigma_2\sigma_1}{\sigma_2^2}(X_2 - \mu_2)\right) \\ &= \rho^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2) \end{aligned}$$

$$\tilde{V}_{13} = \tilde{V}_{23} = \tilde{V}_{123} = 0$$

$$\begin{aligned} V_{12}^{*(3)} &= \text{Var}(Y) - \tilde{V}_1 - \tilde{V}_2 - \tilde{V}_3 - \tilde{V}_{12} - \tilde{V}_{13} - \tilde{V}_{23} - \tilde{V}_{123} \\ &= -2\rho(\sigma_1\sigma_2 + \rho^2\sigma_1\sigma_2 + \rho(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)) \end{aligned}$$

Dans cet exemple, on voit donc bien les différents problèmes de cette décomposition de la variance. On remarque que la corrélation entre deux variables a un impact sur la plupart des indices de sensibilité et pas seulement sur $V_{12}^{*(3)}$, comme par exemple sur \tilde{V}_1 . On ne peut donc pas isoler l'effet de la corrélation sur Y . De plus, le comportement de S_{12}^* n'est pas compréhensible. Lorsque l'on a $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, on voit qu'il est quasiment nul pour une corrélation variant de 0 à 1 et qu'il décroît lorsque la corrélation croît positivement (S_{12}^* peut être négatif comme $V_{12}^{*(p)}$ exprime une corrélation). On constate enfin que l'indice S_{12} croît avec la corrélation, ce qui signifie que l'influence de l'interaction entre X_1 et X_2 sur la variance de Y augmente avec ρ , or il n'y a pas d'interaction entre X_1 et X_2 dans ce modèle.

En 2007, Xu et Gertner [88] ont choisi d'étendre la technique FAST [53, 67] (Fourier Amplitude Sensitivity Test) aux modèles avec des variables d'entrée non indépendantes. Cette technique est appliquée au modèle (7.1). Elle consiste à estimer la fonction f grâce à une somme de Fourier à partir de laquelle on obtient une décomposition de la variance. Des indices de sensibilités sont ensuite calculés comme

dans la méthode de Sobol. Le problème de cette méthode est que la corrélation entre les variables d'entrée peut encore avoir un effet sur les valeurs des indices de sensibilité.

En 2008, Xu et Gertner [89] ont proposé une méthode basée sur une régression appliquée à la fonction (7.1). Elle permet de décomposer la variance partielle V_i de la variable de sortie Y expliquée par une variable d'entrée X_i en

$$V_i = V_i^U + V_i^C,$$

avec V_i^U la variance partielle de Y ne prenant pas en compte les corrélations entre X_i et les autres variables d'entrée, et V_i^C celle provenant de ces corrélations. Pour une variable X_i , on utilise alors les trois indices de sensibilité construits à partir des variances partielles ci-dessus :

$$S_i^U = \frac{V_i^U}{\text{Var}(Y)},$$

$$S_i^C = \frac{V_i^C}{\text{Var}(Y)},$$

et

$$S_i = S_i^U + S_i^C.$$

Ils donnent respectivement les contributions corrélée, non corrélée et totale de X_i à la variance de Y . Cela permet de mettre en évidence les variables qui ont un effet lié seulement à leur corrélation avec d'autres variables d'entrée. Malheureusement, leur méthode ne peut être utilisée que si la relation entre la sortie et les paramètres d'entrée est approximativement linéaire.

Ensuite Li et al. [49] ont construit une méthode pouvant être appliquée à des modèles plus généraux. Elle consiste à décomposer la variance de la variable de sortie Y en une somme de covariances. La décomposition de Sobol, pour le cas indépendant, correspond à un cas particulier de cette nouvelle méthode. Pour réaliser cette décomposition, on suppose que l'on peut approximer la fonction y (du modèle (7.1)) ainsi :

$$y = f_0 + \sum_{u \subseteq \{1, \dots, p\}} f_{\mathbf{u}}(x_{\mathbf{u}}) + \epsilon$$

avec l'erreur $\epsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ décorrélée des fonctions $f_{\mathbf{u}}$.

La variance de Y est alors égale à

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= \sum_{\substack{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\} \\ \mathbf{u} \neq \emptyset}} \text{Cov}(f_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}}), Y) + \sigma^2 \\ &= \sum_{\substack{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\} \\ \mathbf{u} \neq \emptyset}} \left[\text{Var}(f_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}})) + \text{Cov} \left(f_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}}), \sum_{\mathbf{v} \neq \mathbf{u}} f_{\mathbf{v}}(X_{\mathbf{v}}) \right) \right] + \sigma^2 \end{aligned}$$

avec σ^2 supposée négligeable. Semblablement à la méthode de Xu et Gertner [89], on a ainsi les trois indices de sensibilité pour chaque $X_{\mathbf{u}}$, avec

$$V_{\mathbf{u}}^U = \text{Var}(f_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}}))$$

et

$$V_{\mathbf{u}}^C = \text{Cov} \left(f_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}}), \sum_{\mathbf{v} \neq \mathbf{u}} f_{\mathbf{v}}(X_{\mathbf{v}}) \right).$$

$X_{\mathbf{u}}$ correspond au vecteur formé des variables X_i telles que $i \in \mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}$. Pour le calcul des fonctions $f_{\mathbf{u}}$, on utilise la méthode RS-HDMM (Regularized Random-Sampling High Dimensional Model Representation) [48].

Mara et al. [50] ont aussi construit une méthode généralisant celle de Xu et Gertner à des modèles non linéaires. Ils font l'hypothèse que seulement les moments conditionnels de premier ordre caractérisent les dépendances entre les variables d'entrée. Par exemple, la dépendance entre deux variables X_i et X_j (avec $i, j \in \{1, \dots, p\}$) est seulement caractérisée par $\mathbb{E}(X_i|X_j)$. Les dépendances entre deux variables sont alors monotones et homoscédastiques (de variance uniforme). En faisant cette hypothèse, ils décorrélent les variables d'entrées, à partir d'un échantillon de ces variables, avec la méthode de Gram-Schmidt. Ils réalisent ensuite une décomposition de la variance de Sobol, comme pour la méthode de Bedford. Pour le calcul des différents indices de sensibilité, la méthode RS-HDMM de Li et al. ou une décomposition en polynômes chaos peuvent être utilisées. Le problème ici est que l'ensemble de variables d'entrées orthogonales n'est pas unique, il dépend de l'ordre des variables fixé dans l'ensemble avant de réaliser la décorrélation. Il faut donc calculer les indices de sensibilité pour chaque cas possible. C'est grâce à ces différents calculs que l'on peut obtenir les indices utilisés par Xu et Gertner. Un second problème est que la procédure utilisée pour rendre les variables d'entrée indépendantes ne fonctionne pas toujours, en particulier quand elles ne sont pas gaussiennes. Une alternative à cette méthode existe, la transformation de Nataf [55], mais la transformation obtenue est plus complexe.

Borgonovo et al. [8] ont proposé une nouvelle méthode d'analyse. L'idée, introduite auparavant par Park et Ahn [61], est de mesurer la distance δ_i entre la densité de la variable de sortie Y et celle de Y conditionnellement à la variable d'entrée X_i considérée. Si X_i n'a aucune influence sur Y , alors $\delta_i = 0$. On peut aussi obtenir un indice $\delta_{\mathbf{u}}$ mesurant l'influence d'un groupe de variables $X_{\mathbf{u}}$, avec $\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}$ (voir équation (7.1)), sur la sortie Y en utilisant la densité de Y conditionnée par $X_{\mathbf{u}}$. L'indice $\delta_{\{1, \dots, p\}}$ est alors égal à 1. Le problème est que, lorsque deux variables d'entrée X_i et X_j sont dépendantes, on ne peut pas savoir comment X_j impacte la distribution de Y conditionnée par X_i .

Kucherenko et al. [45] réutilisent les indices d'ordres supérieurs ou égaux à 1 et les indices totaux basés sur la simple décomposition de la variance totale. Comme pour les indices de Sobol, pour $\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}$, on a l'indice de sensibilité

$$S_{\mathbf{u}} = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_{\mathbf{u}}))}{\text{Var}(Y)}$$

mais cette fois-ci, cet indice est estimé avec la méthode de Monte-Carlo en utilisant la loi jointe des entrées X_i ($i \in \{1, \dots, p\}$). L'étape difficile de la procédure est la génération de l'échantillon des entrées, utilisé dans la méthode de Monte-Carlo, avec les copules.

Chastaing et al. [12, 13] donnent une généralisation des indices de Sobol. Ils s'appuient sur la décomposition orthogonale hiérarchique d'une fonction introduite par Hooker et Stone [35, 74]. Une nouvelle décomposition hiérarchique d'une fonction est donnée. Elle est unique, selon les hypothèses sur les entrées présentées dans le théorème ci-dessous.

Notation.

On note $(H_{\mathbf{u}})_{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}}$ les sous-espaces de $L^2(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p), P_{\mathbf{X}})$ qui correspondent aux fonctions qui dépendent seulement de $X_{\mathbf{u}}$. H_{\emptyset} , identique à H_{\emptyset}^0 , est alors l'ensemble des constantes. Les sous-espaces $H_{\mathbf{u}}^0$, avec $\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}/\emptyset$, sont définis par

$$H_{\mathbf{u}}^0 = \{h_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}}) \in H_{\mathbf{u}}, \langle h_{\mathbf{u}}, h_{\mathbf{v}} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \subset \mathbf{u}, \forall h_{\mathbf{v}} \in H_{\mathbf{v}}^0\}.$$

Théorème 7.1.

Soit une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^p, \mathcal{B}(\mathbb{R}^p), P_{\mathbf{X}})$, avec $P_{\mathbf{X}}$ la distribution du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p) \in \mathbb{R}^p$ ($p \geq 1$).

On suppose que :

$$\exists 0 < M \leq 1, \forall \mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}, p_{\mathbf{X}} \geq M \cdot p_{X_{\mathbf{u}}} p_{X_{-\mathbf{u}}}, \quad (7.3)$$

avec $-\mathbf{u}$ l'ensemble complémentaire de \mathbf{u} dans $\{1, \dots, p\}$ et les densités marginales de $X_{\mathbf{u}}$ et $X_{-\mathbf{u}}$ notées $p_{X_{\mathbf{u}}}$ et $p_{X_{-\mathbf{u}}}$.

Il existe alors des fonctions $f_{\emptyset}, f_1, \dots, f_{1, \dots, p} \in H_{\emptyset}, H_1^0, \dots, H_{1, \dots, p}^0$ telles que

$$f(\mathbf{X}) = f_{\emptyset} + \sum_i f_i(X_i) + \sum_{i,j} f_{i,j}(X_i, X_j) + \dots + f_{1, \dots, p}(\mathbf{X}) = \sum_{\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}} f_{\mathbf{u}}(X_{\mathbf{u}}).$$

Cette décomposition est unique.

Le problème de cette nouvelle décomposition est que la condition (7.3) ne peut pas toujours être satisfaite. Elle ne l'est pas pour un vecteur gaussien \mathbf{X} avec des corrélations non nulles. De plus, l'interprétation des indices obtenus est plus complexe puisqu'ils peuvent prendre des valeurs négatives. En effet, lorsqu'une variable n'a aucune influence sur la sortie, elle a un indice nul qui est plus élevé que celui de variables qui ont une influence négative.

Rahman [66] utilise un autre indice de sensibilité qui ne provient pas de la décomposition de la variance : l'indice « η -sensitivity». Celui-ci est défini à partir de la « η -divergence» qui décrit la différence entre deux mesures de probabilité.

Définition 7.1. η -divergence

Soit (Ω, \mathcal{F}) un espace mesurable, avec \mathcal{F} une σ -algèbre des sous-ensembles de Ω . Les cardinaux de Ω et \mathcal{F} sont tels que $|\Omega| > 1$ et $|\mathcal{F}| > 2$.

Soit μ une mesure σ -finie de (Ω, \mathcal{F}) et \mathcal{P} l'ensemble des mesures de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) absolument continues par rapport à μ . Deux mesures de probabilité $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ ont pour dérivées de Radon-Nikodym $dP_1/d\mu$ et $dP_2/d\mu$, par rapport à la mesure μ telle que $P_1 \ll \mu$ et $P_2 \ll \mu$.

Soit $\eta : [0; +\infty[\rightarrow]-\infty; +\infty[$ une fonction à valeurs réelles étendue, qui est

1. continue sur $[0; +\infty[$ et à valeur finie sur $]0; +\infty[$;
2. convexe sur $[0; +\infty[$, c'est-à-dire que pour tout $t_1, t_2 \in [0; +\infty[$ et $\lambda \in [0; 1]$, $\eta(\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \leq \lambda \eta(t_1) + (1 - \lambda)\eta(t_2)$ (les fonctions convexes de la forme $c_1 + c_2 t$ avec $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sont exclues);
3. strictement convexe pour $t = 1$, c'est-à-dire que pour tout $t_1, t_2 \in [0; +\infty[\setminus \{1\}$ et pour tout $\lambda \in]0; 1[$ tels que $\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2 = 1$, $\eta(1) < \lambda \eta(t_1) + (1 - \lambda)\eta(t_2)$;
4. telle que $\eta(1) = 0$.

La « η -divergence», décrivant la différence entre deux mesures de probabilité P_1 et P_2 , est égale à

$$D_\eta(P_1 \parallel P_2) = \int_{\Omega} \eta \left(\frac{dP_1/d\mu}{dP_2/d\mu} \right) \frac{dP_2}{d\mu} d\mu.$$

Dans le cas où les mesures de probabilité sont strictement continues, en prenant $\Omega = \mathbb{R}$ et μ comme mesure de Lebesgue, $dP_1/d\mu$ et $dP_2/d\mu$ sont simplement les densités de probabilité que l'on note $f_1(\mu)$ et $f_2(\mu)$. La « η -divergence» est alors égale à

$$D_\eta(P_1 \parallel P_2) = \int_{\mathbb{R}} \eta \left(\frac{f_1(\mu)}{f_2(\mu)} \right) f_2(\mu) d\mu. \quad (7.4)$$

Cette η -divergence respecte un certain nombre de propriétés énumérées par l'auteur. Il remarque aussi que plusieurs mesures de divergence connues sont des « η -divergences», comme les divergences χ^2 de Pearson et de Neyman. Il existe donc différents indices « η -sensitivity», dont celui de Borgonovo vu précédemment.

A partir de l'équation (7.4), on définit, pour tout $\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}$, l'indice « η -sensitivity» suivant :

$$\begin{aligned} H_{\mathbf{u},\eta} &= \mathbb{E}_{X_{\mathbf{u}}} (D_\eta(P_Y \parallel P_{Y|X_{\mathbf{u}}})) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\mathbf{u}}} D_\eta(P_Y \parallel P_{Y|X_{\mathbf{u}}}) f_{X_{\mathbf{u}}}(x_{\mathbf{u}}) dx_{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

avec Y et $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_p)$ la variable de sortie et le vecteur d'entrée du modèle (7.1), $f_{X_{\mathbf{u}}}$ la densité de probabilité marginale du vecteur aléatoire $X_{\mathbf{u}}$, et avec P_Y et $P_{Y|X_{\mathbf{u}}}$ les mesures de probabilité de Y et $Y|X_{\mathbf{u}}$. Ces nouveaux indices, eux, ne prennent pas de valeurs négatives. La plus petite valeur qu'ils peuvent prendre est 0, mais suivant la fonction η choisie, la plus grande valeur peut être infinie. Plus leur valeur diminue, et plus la différence entre les probabilités de Y et $Y|X_{\mathbf{u}}$ est faible, donc moins $X_{\mathbf{u}}$ a de l'influence sur Y .

Enfin, Owen et Prieur [60] ont repris l'idée de Song et al. [72], en utilisant les valeurs de Shapley pour étudier le modèle (7.1) dans la cas de la dépendance des entrées. Le point positif de cette méthode est qu'elle n'a pas les inconvénients de la précédente. Ces valeurs sont aussi moins longues à calculer. Les valeurs de Shapley sont initialement utilisées en théorie des jeux, pour répartir les gains d'une équipe équitablement entre ses membres. Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, la valeur de Shapley d'une variable d'entrée X_i est donnée par

$$\phi_i = \frac{1}{p} \sum_{\mathbf{u} \subseteq -\{i\}} \binom{p-1}{|\mathbf{u}|}^{-1} (val(\mathbf{u} \cup \{i\}) - val(\mathbf{u})),$$

avec pour tout ensemble $\mathbf{u} \subseteq \{1, \dots, p\}$,

$$val(\mathbf{u}) = \text{Var}(\mathbb{E}(f(\mathbf{X})|X_{\mathbf{u}})).$$

Pour toutes les variables d'entrée, cette valeur ne peut pas être négative. Sa formule est simplifiée pour des variables d'entrée indépendantes. Les auteurs ont constaté les bonnes propriétés de ces indices de sensibilité. Entre autres, lorsque deux variables d'entrée ont la même influence sur Y , leurs indices sont égaux. Le problème est que ces indices sont très difficiles à calculer, en dehors de cas spéciaux comme ceux présentés dans l'article. Un de ces cas est présenté ci-dessous.

Exemple 8. *Valeur de Shapley de la variable X_1 du modèle $Y = f(\mathbf{X}) = f(X_1, X_2)$, avec X_1 et X_2 deux variables binaires, défini par*

p	X_1	X_2	Y
p_0	0	0	y_0
p_1	1	0	y_1
p_2	0	1	y_2

On a, par exemple, $p_0 = \mathbb{P}(\mathbf{X} = (0, 0)) = \mathbb{P}(Y = y_0)$. Les trois probabilités de ce modèle sont telles que $p_0 + p_1 + p_2 = 1$. On suppose que $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$ pour que la fonction f ait bien deux variables d'entrée.

D'après le tableau ci-dessus, on a l'espérance et la variance de Y égales à $\mu = \mathbb{E}(Y) = p_0 y_0 + p_1 y_1 + p_2 y_2$ et $\sigma^2 = \text{Var}(Y) = p_0 y_0^2 + p_1 y_1^2 + p_2 y_2^2 - \mu^2$.

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} val(\{1\}) &= \text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_1)) \\ &= \text{Var}\left(\mathbb{1}_{\{X_1=0\}} \left(\frac{p_0}{p_0+p_2} y_0 + \frac{p_2}{p_0+p_2} y_2\right) + (1 - \mathbb{1}_{\{X_1=0\}}) y_1\right) \\ &= \left(\frac{p_0}{p_0+p_2} y_0 + \frac{p_2}{p_0+p_2} y_2 - y_1\right)^2 (p_0+p_2)(1 - (p_0+p_2)) \\ &= \frac{(\mu - y_1)^2}{1 - p_1} p_1. \end{aligned}$$

De la même manière, on trouve

$$val(\{2\}) = \frac{(\mu - y_2)^2}{1 - p_2} p_2.$$

Et enfin, on obtient facilement les valeurs $val(\emptyset) = \text{Var}(\mathbb{E}(Y)) = 0$ et $val(\{1, 2\}) = \text{Var}(\mathbb{E}(Y|X_1, X_2)) = \sigma^2$.

On note $\bar{y}_1 = (y_1 - y_0)$ et $\bar{y}_2 = (y_2 - y_0)$.

La valeur de Shapley de la variable X_1 est égale à

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}(val(\{1\}) - val(\emptyset) + val(\{1, 2\}) - val(2)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \frac{(\mu - y_1)^2}{1 - p_1} p_1 - \frac{(\mu - y_2)^2}{1 - p_2} p_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \frac{(p_2 \bar{y}_2 - (1 - p_1) \bar{y}_1)^2}{1 - p_1} p_1 - \frac{(p_1 \bar{y}_1 - (1 - p_2) \bar{y}_2)^2}{1 - p_2} p_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \frac{p_1(1 - p_1)(1 - p_1 - p_2) \bar{y}_1^2 - p_2(1 - p_2)(1 - p_1 - p_2) \bar{y}_2^2}{(1 - p_1)(1 - p_2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sigma^2 + p_0 \frac{p_1(1 - p_1) \bar{y}_1^2 - p_2(1 - p_2) \bar{y}_2^2}{(1 - p_1)(1 - p_2)} \right). \end{aligned}$$

On remarque que pour $p_0 = 0$, X_1 explique la moitié de la variance de Y d'après cet indice. Cela vient de la bijection entre X_1 et X_2 avec $X_1 + X_2 = 1$.

De plus, si l'on suppose que $\bar{y}_1 = \bar{y}_2$, avec par exemple $y_1 = y_2 = 1$ et $y_0 = 0$, la variable qui a le plus d'influence sur Y est celle qui a la plus grande variance. En effet, X_1 est la plus influente si $p_1(1 - p_1) > p_2(1 - p_2)$ et cela équivaut à $p_1 > p_2$, car par définition $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

Conclusion

L'analyse de la fragmentation d'une charge militaire est un sujet de recherche très important pour les forces armées. La caractérisation de la gerbe d'éclats générée par la détonation de la charge est nécessaire pour prévoir les effets militaires et maîtriser son emploi. En particulier, il convient à avoir une meilleure évaluation de la probabilité d'atteinte à une distance donnée. L'efficacité de la charge peut en être déduite, ainsi que l'évaluation des risques de dommages collatéraux. Pour pouvoir répondre à cette problématique, la masse d'un éclat étant un paramètre très influant sur sa portée, une analyse statistique des masses d'éclats a été réalisée durant cette thèse.

Dans un premier temps, le problème du manque de données a été soulevé. En effet, nous avons à notre disposition des résultats provenant de seulement trois expériences. L'estimation d'un nombre total d'éclats, qui est aussi désirée, est donc impossible puisqu'elle ne peut être basée que sur trois données. De plus, les résultats de ces expériences sont partiels, comme tous les éclats ne peuvent être récupérés. Pour remédier à cela, un modèle mécanique, générant des masses d'éclats, a pu être utilisé. Ce modèle ne donne malheureusement pas encore de résultats suffisamment corrects en ce qui concerne l'explosion de la charge étudiée. Nous l'avons alors modifié, en s'appuyant sur les résultats expérimentaux, pour qu'il soit valable sur le plan statistique.

Cette modification finie, nous avons pu passer à l'étape de l'analyse. Pour commencer, c'est une analyse classique de la densité massique qui a été réalisée. Nous avons notamment recherché une loi de densité connue pouvant correspondre à celle de notre échantillon, mais aucune n'a donné de résultats satisfaisants.

Les méthodes classiques n'étant pas efficaces dans ce cas, nous avons ensuite mis au point une méthode basée sur les polynômes chaos. Ces derniers nous permettent d'avoir plus de choix de modélisation. De plus, cette méthode donne l'expression

d'une variable aléatoire, qui modélise le phénomène, à partir de laquelle il est très facile de générer un échantillon de données. Cette nouvelle méthode consiste à considérer la masse d'un éclat comme une variable aléatoire représentée dans une base de polynômes. Nous avons ainsi pu obtenir un résultat plus intéressant que ceux des méthodes précédentes.

L'utilisation d'une telle méthode comporte toutefois une limite pour le cas particulier de cette étude. La masse d'un éclat est ici considérée comme une variable aléatoire, indépendamment des masses des autres éclats. Le problème est que les masses des éclats d'une même charge sont forcément liées. Il est donc préférable de modéliser les éclats d'une charge par un processus stochastique, i.e. par une famille de variables indexées. Pour cela, nous avons choisi comme ensemble d'indexation celui des positions des éclats sur la charge. Elles sont obtenues grâce à un modèle numérique que nous avons développé.

C'est avec ces processus que l'on a ensuite modélisé la portée d'un éclat. Cette dernière est une fonction de plusieurs paramètres eux-mêmes modélisés par des processus, dont la vitesse limite de chute qui dépend de la masse. Pour commencer, on a souhaité étudier l'influence de ces paramètres sur la portée. Les indices de sensibilité dits de Sobol, qui nous donnent une information sur l'influence globale des paramètres et de leurs différentes interactions, sont ceux choisis pour cette étude. Ces indices, comme pour les autres méthodes existantes, ne peuvent être appliqués qu'à des variables aléatoires. On pourrait donc les utiliser indépendamment pour chaque instant d'un processus, qui dans notre exemple correspond à une position sur la charge. Le problème avec cette solution est que l'on ne tient pas compte des liens entre les différents instants. On a alors choisi d'appliquer ces indices à la différence entre les portées de deux éclats de la charge. L'indice de sensibilité, par exemple pour un paramètre de la portée, est finalement interprété comme l'influence de la différence entre deux instants du processus correspondant à ce paramètre sur la différence entre les deux mêmes instants du processus de la portée.

Dans la suite, des améliorations pourront encore être apportées à l'analyse statistique effectuée. Le modèle «pseudo-3D» peut être modifié pour avoir des données dont la distribution se rapproche plus de celle des données expérimentales. Le travail réalisé jusqu'à présent sur la portée d'un éclat doit aussi être approfondi. Pour l'instant, nous n'avons utilisé que des indices de sensibilité appliqués à des variables indépendantes. Nous avons donc dû faire l'hypothèse que les processus d'entrée sont à accroissements indépendants, ce qui n'est bien sûr pas le cas dans la réalité. C'est dans le but de supprimer cette hypothèse qu'une recherche a été réalisée sur les méthodes existantes d'analyse de sensibilité pour des variables d'entrée dépendantes. Enfin, pour améliorer les résultats de cette étude, d'autres paramètres liés à la réalité physique du phénomène pourront être pris en compte, notamment dans l'équation de la balistique.

Enfin, le travail réalisé durant cette thèse peut être utile dans le domaine de la balistique, mais aussi dans d'autres domaines. Le modèle statistique « pseudo-3D », créé en raison du nombre faible d'éclats, nous fournit enfin des données pour pallier le manque de données expérimentales. L'analyse statistique des masses des éclats peut ainsi être améliorée, en partie en établissant un lien entre la distribution en nombres et celle en masses des éclats. Pour cela, les coefficients utilisés dans l'expression du processus stochastique modélisant la masse d'un éclat peuvent être exprimés en fonction du nombre total d'éclats. La méthode utilisant les polynômes chaos, mise au point en début de thèse, constitue aussi un nouveau moyen pour modéliser la distribution d'un échantillon de données quelconque.

Exemples d'application des indices de Sobol

A.1 Indices de Sobol pour des variables aléatoires

Nous détaillons ici les calculs des espérances conditionnelles et des variances utilisées dans l'exemple 5 p.87. La variable pour laquelle sont réalisés ces calculs est la suivante :

$$Y_t = e^{B_t} + W_t^2 e^{L_t} + B_t^2 L_t$$

avec $t \in \mathbb{R}^+$ fixé et B_t , W_t et L_t trois mouvements Browniens indépendants pris à l'instant t (voir section 5.2 p.64).

Dans la suite, on utilise l'espérance $\mathbb{E}(e^{\alpha X_t})$ (avec α un entier naturel et X_t un mouvement Brownien pris à l'instant t) égale à :

$$\mathbb{E}(e^{\alpha X_t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha x} \frac{e^{-\frac{x^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2 - 2t\alpha x}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{(x-t\alpha)^2 - t^2\alpha^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dx = e^{\alpha^2 t/2}.$$

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(e^{B_t} + W_t^2 e^{L_t} + B_t^2 L_t)$$

est égale, par indépendance des variables aléatoires, à

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t) &= \mathbb{E}(e^{B_t}) + \mathbb{E}(W_t^2)\mathbb{E}(e^{L_t}) + \mathbb{E}(B_t^2)\mathbb{E}(L_t) \\ &= e^{t/2} + \min(t, t)e^{t/2} = (1 + t)e^{t/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y_t^2) &= \mathbb{E}(e^{2B_t} + W_t^4 e^{2L_t} + B_t^4 L_t^2 + 2W_t^2 e^{L_t} e^{B_t} + 2B_t^2 L_t e^{B_t} + 2W_t^2 e^{L_t} B_t^2 L_t) \\
 &= \mathbb{E}(e^{2B_t}) + \mathbb{E}(W_t^4) \mathbb{E}(e^{2L_t}) + \mathbb{E}(B_t^4) \mathbb{E}(L_t^2) + 2\mathbb{E}(W_t^2) \mathbb{E}(e^{L_t}) \mathbb{E}(e^{B_t}) \\
 &\quad + 2\mathbb{E}(B_t^2 e^{B_t}) \mathbb{E}(L_t) + 2\mathbb{E}(W_t^2) \mathbb{E}(e^{L_t} L_t) \mathbb{E}(B_t^2) \\
 &= e^{2t} + 3t^2 e^{2t} + 3t^2 t + 2te^{t/2} e^{t/2} + 2tte^{t/2} t \\
 &= e^{2t}(1 + 3t^2) + 3t^3 + 2te^t + 2t^3 e^{t/2}
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(Y_t) &= \mathbb{E}(Y_t^2) - \mathbb{E}^2(Y_t) \\
 &= e^{2t}(1 + 3t^2) + 3t^3 + 2te^t + 2t^3 e^{t/2} - (1 + 2t + t^2)e^t \\
 &= e^{2t}(1 + 3t^2) + 3t^3 - (1 + t^2)e^t + 2t^3 e^{t/2}.
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y_t|B_t) = e^{B_t} + \mathbb{E}(W_t^2) \mathbb{E}(e^{L_t}) + B_t^2 \mathbb{E}(L_t) = e^{B_t} + te^{t/2}$$

donc

$$\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|B_t)) = \text{Var}(e^{B_t}) = \mathbb{E}(e^{2B_t}) - \mathbb{E}^2(e^{B_t}) = e^{2t} - e^t = e^t(e^t - 1).$$

$$\mathbb{E}(Y_t|W_t) = \mathbb{E}(e^{B_t}) + W_t^2 \mathbb{E}(e^{L_t}) + \mathbb{E}(B_t^2) \mathbb{E}(L_t) = e^{t/2} + W_t^2 e^{t/2}$$

donc

$$\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|W_t)) = e^t \text{Var}(W_t^2) = e^t (\mathbb{E}(W_t^4) - \mathbb{E}^2(W_t^2)) = e^t (3t^2 - t^2) = 2t^2 e^t.$$

$$\mathbb{E}(Y_t|L_t) = \mathbb{E}(e^{B_t}) + \mathbb{E}(W_t^2) e^{L_t} + \mathbb{E}(B_t^2) L_t = e^{t/2} + te^{L_t} + tL_t$$

donc

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|L_t)) &= t^2 \text{Var}(e^{L_t} + L_t) \\
 &= t^2 (\mathbb{E}(e^{2L_t} + 2L_t e^{L_t} + L_t^2) - \mathbb{E}^2(e^{L_t} + L_t)) \\
 &= t^2 (e^{2t} + 2te^{t/2} + t - e^t) \\
 &= t^3 (2e^{t/2} + 1) + t^2 e^t (e^t - 1).
 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y_t|B_t, W_t) = e^{B_t} + W_t^2 \mathbb{E}(e^{L_t}) + B_t^2 \mathbb{E}(L_t) = e^{B_t} + W_t^2 e^{t/2}$$

donc, les variables B_t et W_t étant indépendantes,

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|B_t, W_t)) &= \text{Var}(e^{B_t}) + e^t \text{Var}(W_t^2) \\
&= \mathbb{E}(e^{2B_t}) - \mathbb{E}^2(e^{B_t}) + e^t(\mathbb{E}(W_t^4) - \mathbb{E}^2(W_t^2)) \\
&= e^{2t} - e^t + e^t(3t^2 - t^2) \\
&= e^{2t} + e^t(2t^2 - 1).
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y_t|B_t, L_t) = e^{B_t} + \mathbb{E}(W_t^2)e^{L_t} + B_t^2 L_t = e^{B_t} + te^{L_t} + B_t^2 L_t,$$

$$\mathbb{E}(e^{B_t} + te^{L_t} + B_t^2 L_t) = \mathbb{E}(e^{B_t}) + t\mathbb{E}(e^{L_t}) + \mathbb{E}(B_t^2)\mathbb{E}(L_t) = (1+t)e^{t/2}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((e^{B_t} + te^{L_t} + B_t^2 L_t)^2) &= \mathbb{E}(e^{2B_t} + t^2 e^{2L_t} + B_t^4 L_t^2 + 2e^{B_t} te^{L_t} + 2e^{B_t} B_t^2 L_t \\
&\quad + 2te^{L_t} B_t^2 L_t) \\
&= e^{2t} + t^2 e^{2t} + 3t^2 t + 2e^{t/2} te^{t/2} + 2tt^2 e^{t/2} \\
&= e^{2t}(1+t^2) + 3t^3 + 2te^t + 2t^3 e^{t/2}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|B_t, L_t)) &= e^{2t}(1+t^2) + 3t^3 + 2te^t + 2t^3 e^{t/2} - ((1+t)e^{t/2})^2 \\
&= (1+t^2)e^{2t} + t^3(3+2e^{t/2}) - (1+t^2)e^t.
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(Y_t|L_t, W_t) = \mathbb{E}(e^{B_t}) + W_t^2 e^{L_t} + \mathbb{E}(B_t^2)L_t = e^{t/2} + W_t^2 e^{L_t} + tL_t,$$

$$\mathbb{E}(W_t^2 e^{L_t} + tL_t) = te^{t/2}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((W_t^2 e^{L_t} + tL_t)^2) &= \mathbb{E}(W_t^4 e^{2L_t} + 2W_t^2 e^{L_t} tL_t + t^2 L_t^2) \\
&= 3t^2 e^{2t} + 2tt^2 e^{t/2} + t^2 t \\
&= 3t^2 e^{2t} + 2t^3 e^{t/2} + t^3
\end{aligned}$$

donc

$$\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t|L_t, W_t)) = \text{Var}(W_t^2 e^{L_t} + tL_t) = 3t^2 e^{2t} + 2t^3 e^{t/2} + t^3 - t^2 e^t.$$

A.2 Indices de Sobol pour des processus

Nous donnons ici les détails sur les expressions apparaissant dans les équations (6.40) et (6.41) (p.99), dans lesquelles on a

$$\forall t \in [0, T], Y_t = a \sin^2(M_t) + (1 + bZ_t^4) \sin(B_t)$$

avec a et b constantes et (B_t) , (M_t) et (Z_t) trois processus stochastiques indépendants (définition de ces processus p.98).

On commence par le dénominateur de ces expressions. On a

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t - Y_s) &= \text{Var}(Y_t) + \text{Var}(Y_s) - 2(\mathbb{E}(Y_t - Y_s) - \mathbb{E}(Y_t)\mathbb{E}(Y_s)) \\ &= \mathbb{E}(Y_t^2) - (\mathbb{E}(Y_t))^2 + \mathbb{E}(Y_s^2) - (\mathbb{E}(Y_s))^2 - 2[\mathbb{E}(Y_t Y_s) \\ &\quad - \mathbb{E}(Y_t)\mathbb{E}(Y_s)]. \end{aligned}$$

Dans l'expression de la variance $\text{Var}(Y_t - Y_s)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t) &= \mathbb{E}(a \sin^2(M_t) + (1 + bZ_t^4) \sin(B_t)) \\ &= a\mathbb{E}(\sin^2(M_t)) + (1 + b\mathbb{E}(Z_t^4))\mathbb{E}(\sin(B_t)) \end{aligned}$$

d'après l'indépendance des trois processus. Ensuite, $\mathbb{E}(\sin(B_t)) = 0$ car $\sin(x) = \sin(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t) &= a\mathbb{E}(\sin^2(M_t)) \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(x) \frac{e^{-\frac{x^2}{2(e^{2t}-1)/2}}}{\sqrt{2\pi(e^{2t}-1)/2}} dx \end{aligned}$$

d'après la proposition 5.3 (p.71) pour la loi de M_t . Enfin, en utilisant la formule d'Euler pour la fonction sinus, et le fait que l'intégrale d'une densité de probabilité sur son ensemble de définition est égale à 1, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t) &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix} + e^{-2ix} - 2}{-4} \frac{e^{-\frac{x^2}{2(e^{2t}-1)/2}}}{\sqrt{2\pi(e^{2t}-1)/2}} dx \\ &= \frac{a}{2} (1 - e^{1-e^{2t}}). \end{aligned}$$

Pour le calcul de la variance $\text{Var}(Y_t - Y_s)$, on a aussi l'espérance

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = a^2\mathbb{E}(\sin^4(M_t)) + (1 + 2b\mathbb{E}(Z_t^4) + b^2\mathbb{E}(Z_t^8))\mathbb{E}(\sin^2(B_t)).$$

On calcule $\mathbb{E}(\sin^4(M_t))$ comme ci-dessus pour $\mathbb{E}(\sin^2(M_t))$. Et, d'après la définition 5.3 (p.65) pour la loi de B_t ,

$$\mathbb{E}(Y_t^2) = \frac{a^2}{2} \left(\frac{e^{4(1-e^{2t})} + 3}{4} - e^{1-e^{2t}} \right) + (1 + 2b\mathbb{E}(Z_t^4) + b^2\mathbb{E}(Z_t^8)) \frac{(1 - e^{-2t})}{2}.$$

Enfin, d'après la définition 5.4 (p.67) pour la loi de Z_t ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t^2) &= a^2 \frac{3 - 4e^{1-e^{2t}} + e^{4(1-e^{2t})}}{8} \\ &+ \left(1 + 6b \left(\frac{t}{T(T-t)} \right)^2 + 105b^2 \left(\frac{t}{T(T-t)} \right)^4 \right) \frac{1 - e^{-2t}}{2}. \end{aligned}$$

La dernière espérance utilisée dans la formule de la variance $\text{Var}(Y_t - Y_s)$ est

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_t Y_s) &= \left[1 + 3b \left(\frac{s}{T(T-s)} \right)^2 + 3b \left(\frac{t}{T(T-t)} \right)^2 + b^2 \left(\frac{s}{T(T-s)} \right)^2 \right. \\ &\left. \left(9 \left(\frac{t-s}{(T-t)(T-s)} \right)^2 + 90 \frac{t-s}{(T-t)(T-s)} \times \frac{s}{T(T-s)} \right. \right. \\ &\left. \left. + 105 \left(\frac{s}{T(T-s)} \right)^2 \right) \right] e^{-\frac{1}{2}(t-s)} \frac{1 - e^{-2s}}{2} \\ &+ a^2 \left(\frac{1 - e^{e^{2s}-e^{2t}}}{2} \times \frac{1 - e^{4(1-e^{2s})}}{8} \right. \\ &\left. + \frac{1 + e^{e^{2s}-e^{2t}}}{2} \times \frac{3 - 4e^{(1-e^{2s})} + e^{4(1-e^{2s})}}{8} \right), \end{aligned}$$

calculée à partir de la densité de la loi jointe (voir équation (5.1) p.65).

Pour le numérateur des indices de premier ordre (équations (6.40)), on a

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | Z_t - Z_s)) &= 0, \\ \text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | B_t - B_s)) &= e^{-s} \frac{1 - e^{-2(t-s)}}{2} \left(1 + 3b \left(\frac{t}{T(T-t)} \right)^2 \right)^2, \\ \text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | M_t - M_s)) &= \frac{a^2}{8} e^{2(1-e^{2s})} \left(3 - 4e^{e^{2s}-e^{2t}} + e^{4(e^{2s}-e^{2t})} \right) - (\mathbb{E}(Y_t - Y_s))^2. \end{aligned}$$

Et finalement, pour le numérateur des indices de second ordre (équations (6.41)), on a

$$\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | B_t - B_s, M_t - M_s)) = 0,$$

$$\text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | M_t - M_s, Z_t - Z_s)) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbb{E}(Y_t - Y_s | B_t - B_s, Z_t - Z_s)) &= e^{-s} \left(\frac{1 - e^{-2(t-s)}}{2} \right) \left[1 + 105b^2 \left(\frac{t-s}{(T-t)(T-s)} \right)^4 \right. \\ &+ 9b^2 \left(\frac{s}{T(T-s)} \right)^4 \\ &+ 36b^2 \left(\frac{s}{T(T-s)} \right)^3 \left(\frac{t-s}{(T-t)(T-s)} \right) \\ &+ 126b^2 \left(\frac{s}{T(T-s)} \right)^2 \left(\frac{t-s}{(T-t)(T-s)} \right)^2 \\ &+ 180b^2 \left(\frac{s}{T(T-s)} \right) \left(\frac{t-s}{(T-t)(T-s)} \right)^3 \\ &+ 6b \left(\frac{s}{T(T-s)} \right)^2 + 6b \left(\frac{t-s}{(T-t)(T-s)} \right)^2 \\ &\left. + 12b \left(\frac{s}{T(T-s)} \right) \left(\frac{t-s}{(T-t)(T-s)} \right) \right]. \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] ABRAHAM, S., RAISEE, M., GHORBANIASL, G., CONTINO, F., AND LACOR, C. A robust and efficient stepwise regression method for building sparse polynomial chaos expansions. *Journal of Computational Physics* 332 (2017), 461 – 474.
- [2] AHLFELD, R., BELKOUCHI, B., AND MONTOMOLI, F. Samba : sparse approximation of moment-based arbitrary polynomial chaos. *Journal of Computational Physics* 320 (2016), 1–16.
- [3] ALETI, A., TRUBIANI, C., VAN HOORN, A., AND JAMSHIDI, P. An efficient method for uncertainty propagation in robust software performance estimation. *Journal of Systems and Software* 138 (2018), 222 – 235.
- [4] BEDFORD, T. Sensitivity indices for (tree-)dependent variables. In *International Symposium on Sensitivity Analysis of Model Output, Venise (Italie)* (1998).
- [5] BLATMAN, G., SUDRET, B., AND BERVEILLER, M. Quasi random numbers in stochastic finite element analysis. *Mécanique & Industries* 8, 3 (2007), 289 – 297.
- [6] BONNINI, S., CORAIN, L., MAROZZI, M., AND SALMASO, L. *Nonparametric Hypothesis Testing : Rank and Permutation Methods with Applications in R*. Wiley series in probability and statistics. Wiley, 2014.
- [7] BORGONOVO, E. Measuring Uncertainty Importance : Investigation and Comparison of Alternative Approaches. *Risk Analysis* 26, 5 (2006), 1349 – 1361.
- [8] BORGONOVO, E. A new uncertainty importance measure. *Reliability Engineering & System Safety* 92, 6 (2007), 771 – 784.
- [9] BOURAHLA, N. *Résistance des matériaux de base*. Le Groupement Economique de Controle Technique de la Construction, 2005.
- [10] CACUCI, D. G., AND IONESCU-BUJOR, M. A comparative review of sensitivity and uncertainty analysis of large-scale systems, II : Statistical methods. *Nuclear Science and Engineering* 147, 3 (2004), 204–217.

-
- [11] CAGAN OZEN, H., AND BAL, G. Dynamical polynomial chaos expansions and long time evolution of differential equations with random forcing. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 4, 1 (2016), 609–635.
- [12] CHASTAING, G., GAMBOA, F., AND PRIEUR, C. Generalized Hoeffding-Sobol Decomposition for Dependent Variables - Application to Sensitivity Analysis. *Electronic journal of statistics* 6 (2012), 2420–2448.
- [13] CHASTAING, G., GAMBOA, F., AND PRIEUR, C. Generalized sobol sensitivity indices for dependent variables : numerical methods. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 85, 7 (2015), 1306–1333.
- [14] CHAUVIÈRE, C., HESTHAVEN, J. S., AND LURATI, L. Computational modeling of uncertainty in time-domain electromagnetics. *SIAM J. Sci. Comput.* 28, 2 (2006), 751–775.
- [15] CHORIN, A. J. Hermite expansions in Monte-Carlo computation. *Journal of Computational Physics* 8 (1971), 472–482.
- [16] DAVIS, P. J., AND RABINOWITZ, P. Chapter 2 - approximate integration over a finite interval. In *Methods of Numerical Integration (Second Edition)*, P. J. Davis and P. Rabinowitz, Eds., second edition ed. Academic Press, 1984, pp. 51 – 198.
- [17] DEBUSSCHERE, B. Intrusive polynomial chaos methods for forward uncertainty propagation. In *Handbook of Uncertainty Quantification*, R. Ghanem, D. Higdon, and H. Owhadi, Eds. Springer International Publishing, Cham, 2016, pp. 1–20.
- [18] DEMAN, G., KONAKLI, K., SUDRET, B., KERROU, J., PERROCHET, P., AND BENABDERRAHMANE, H. Using sparse polynomial Chaos expansions for the global sensitivity analysis of groundwater lifetime expectancy in a multi-layered hydrogeological model. *Reliability Engineering & System Safety* 147 (2016), 156 – 169.
- [19] DRACH, J. L'équation différentielle de la balistique extérieure et son intégration par quadratures. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure* 37, 3 (1920), 1–94.
- [20] EFRON, B., AND STEIN, C. The jackknife estimate of variance. *The Annals of Statistics* 9, 3 (1981), 586–596.
- [21] FEJÉR, L. On the infinite sequences arising in the theories of harmonic analysis, of interpolation, and of mechanical quadratures. *Bulletin of the American Mathematical Society* 39, 8 (08 1933), 521–534.
- [22] GAUTSCHI, W. *Orthogonal Polynomials : Computation and Approximation*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2004.

-
- [23] GAYRARD, E., CHAUVIÈRE, C., DJELLOUT, H., AND BONNET, P. Modeling experimental data with polynomials chaos. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* (2018), 1–13.
- [24] GAYRARD, E., CHAUVIÈRE, C., HACÈNE DJELLOUT, P. B., AND ZAPPA, D. P. Global sensitivity analysis for stochastic processes with independent increments. *soumis* (2019).
- [25] GHANEM, R. G., AND SPANOS, P. D. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer-Verlag, New-York, 1991.
- [26] GOLUB, G. H., AND WELSCH, J. H. Calculation of Gauss quadrature rules. *Mathematics of Computation* 23, 106 (1969), 221 – 230.
- [27] GOTTLIEB, D., AND ORSZAG, S. *Numerical Analysis of Spectral Methods : Theory and Applications*. No. 26 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1977.
- [28] GRADY, D. *Fragmentation of Rings and Shells : The Legacy of N.F. Mott*. Shock Wave and High Pressure Phenomena. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [29] GRANGER, M., AND HENRION, M. Comparative analysis of uncertainty propagation methods for robust engineering design. In *Uncertainty : A Guide to Dealing with Uncertainty in Quantitative Risk and Policy Analysis*. USA : Cambridge University Press, 1993.
- [30] GUT, A. *An Intermediate Course in Probability*. Springer Texts in Statistics. Springer New York, 2009.
- [31] HART, J., AND GREMAUD, P. A. An approximation theoretic perspective of Sobol’ indices with dependent variables. *International Journal for Uncertainty Quantification* 8, 6 (2018), 483 – 493.
- [32] HELTON, J., JOHNSON, J., SALLABERRY, C., AND STORLIE, C. Survey of sampling-based methods for uncertainty and sensitivity analysis. *Reliability Engineering & System Safety* 91, 10-11 (2006), 1175 – 1209.
- [33] HIGHAM, D. J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM Review* 43, 3 (2001), 525–546.
- [34] HOMMA, T., AND SALTELLI, A. Importance measures in global sensitivity analysis of nonlinear models. *Reliability Engineering & System Safety* 52, 1 (1996), 1 – 17.
- [35] HOOKER, G. Generalized functional anova diagnostics for high-dimensional functions of dependent variables. *Journal of Computational and Graphical Statistics* 16, 3 (2007), 709–732.
- [36] HOSDER, S., WALTERS, R., AND PEREZ, R. A non-intrusive polynomial chaos method for uncertainty propagation in cfd simulations. *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 891* (2006), 1–19.

-
- [37] IKEDA, N., AND WATANABE, S. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Kodansha scientific books. North-Holland, 1989.
- [38] IMAN, R. L., AND CONOVER, W. J. A distribution-free approach to inducing rank correlation among input variables. *Communications in Statistics - Simulation and Computation* 11, 3 (1982), 311–334.
- [39] IONESCU-BUJOR, M., AND CACUCI, D. A comparative review of sensitivity and uncertainty analysis of large-scale systems, I : Deterministic methods. *Nuclear Science and Engineering* 147, 3 (2004), 189–203.
- [40] IOOSS, B., AND LEMAÎTRE, P. A review on global sensitivity analysis methods. In *Uncertainty Management in Simulation-Optimization of Complex Systems : Algorithms and Applications*. Springer US, Boston, MA, 2015, pp. 101–122.
- [41] ISHIGAMI, T., AND HOMMA, T. An importance quantification technique in uncertainty analysis for computer models. In *First International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis* (1990), pp. 398 – 403.
- [42] JACQUES, J. *Contributions à l'analyse de sensibilité et à l'analyse discriminante généralisée*. PhD thesis, Université Grenoble 1, 2005.
- [43] KARATZAS, I., AND SHREVE, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1991.
- [44] KEWLANI, G., CRAWFORD, J., AND IAGNEMMA, K. A polynomial Chaos approach to the analysis of vehicle dynamics under uncertainty. *Vehicle System Dynamics* 50 (05 2012), 749–774.
- [45] KUCHERENKO, S., TARANTOLA, S., AND ANNONI, P. Estimation of global sensitivity indices for models with dependent variables. *Computer Physics Communications* 183, 4 (2012), 937 – 946.
- [46] LE MAÎTRE, O. P., REAGAN, M. T., NAJM, H. N., GHANEM, R. G., AND KNIO, O. M. A stochastic projection method for fluid flow. II. Random process. *Journal of Computational Physics* 181, 1 (2002), 9 – 44.
- [47] LEVY, S., MOLINARI, J.-F., VICARI, I., AND DAVISON, A. Dynamic fragmentation of a ring : Predictable fragment mass distributions. *Physical Review* 82, 6 (2010), 066105–1–066105–6.
- [48] LI, G., RABITZ, H., HU, J., CHEN, Z., AND JU, Y. Regularized random-sampling high dimensional model representation (RS-HDMR). *Journal of Mathematical Chemistry* 43, 3 (2008), 1207 – 1232.
- [49] LI, G., RABITZ, H., YELVINGTON, P. E., OLUWOLE, O. O., BACON, F., KOLB, C. E., AND SCHOENDORF, J. Global sensitivity analysis for systems with independent and/or correlated inputs. *The Journal of Physical Chemistry A* 114, 19 (2010), 6022 – 6032.
- [50] MARA, T. A., AND TARANTOLA, S. Variance-based sensitivity indices for models with dependent inputs. *Reliability Engineering & System Safety* 107 (2012), 115 – 121.

-
- [51] MATTHIES, H. G., AND KEESE, A. Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 194, 12 - 16 (2005), 1295 – 1331.
- [52] MCKAY, M. Evaluating prediction uncertainty. Technical Report NUREG/CR-6311, US Nuclear Regulatory Commission and Los Alamos National Laboratory, 1995.
- [53] MCRAE, G. J., TILDEN, J. W., AND SEINFELD, J. H. Global sensitivity analysis—a computational implementation of the Fourier Amplitude Sensitivity Test (FAST). *Computers & Chemical Engineering* 6, 1 (1982), 15 – 25.
- [54] MOORE, R. *Methods and Applications of Interval Analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1979.
- [55] NATAF, A. Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences* 255 (1962), 42–43.
- [56] OAKLEY, J. E., AND O'HAGAN, A. Probabilistic sensitivity analysis of complex models : a Bayesian approach. *Journal of the Royal Statistical Society : Series B (Statistical Methodology)* 66, 3 (2004), 751–769.
- [57] OLADYSHKIN, S., AND NOWAK, W. Data-driven uncertainty quantification using the arbitrary polynomial chaos expansion. *Reliability Engineering and System Safety* 106 (2012), 179–190.
- [58] OUAZINE, S., AND ABBAS, K. A functional approximation for retrieval queues with two way communication. *Annals of Operations Research* 247, 1 (2016), 211 – 227.
- [59] OWEN, A. B. Sobol' Indices and Shapley Value. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 2, 1 (2014), 245–251.
- [60] OWEN, A. B., AND PRIEUR, C. On Shapley value for measuring importance of dependent inputs. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 51, 1 (2017), 986–1002.
- [61] PARK, C. K., AND AHN, K.-I. A new approach for measuring uncertainty importance and distributional sensitivity in probabilistic safety assessment. *Reliability Engineering & System Safety* 46, 3 (1994), 253 – 261.
- [62] PETTERSON, M. P., IACCARINO, G., AND NORDSTRÖM, J. *Polynomial Chaos Methods for Hyperbolic Partial Differential Equations : Numerical techniques for fluid dynamics problems in the presence of uncertainties*. Mathematical Engineering. Springer, Cham, 2015.
- [63] PRIEUR, C., AND TARANTOLA, S. Variance-based sensitivity analysis : Theory and estimation algorithms. In *Handbook of Uncertainty Quantification*. Springer International Publishing, Cham, 2017, pp. 1217–1239.

-
- [64] QUARTERONI, A. M., SACCO, R., AND SALERI, F. *Méthodes numériques pour le calcul scientifique : Programmes en MATLAB*. Springer Science, 2000.
- [65] RAHMAN, S. Extended Polynomial Dimensional Decomposition for Arbitrary Probability Distributions. *Journal of Engineering Mechanics* 135, 12 (2009), 1439–1451.
- [66] RAHMAN, S. The f -sensitivity index. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification* 4, 1 (2016), 130–162.
- [67] SALTELLI, A., CHAN, K., AND SCOTT, E. *Sensitivity Analysis*. Wiley, 2009.
- [68] SALTELLI, A., TARANTOLA, S., CAMPOLONGO, F., AND RATTO, M. *Sensitivity Analysis in Practice : A Guide to Assessing Scientific Models*. Wiley, 2004.
- [69] SEPAHVAND, K., MARBURG, S., AND HARDTKE, H. Uncertainty quantification in stochastic systems using polynomial chaos expansion. *International Journal of Applied Mechanics* 2, 2 (2010), 305–353.
- [70] SOBOL, I. M. Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computational Experiment* 1 (1993), 407–414.
- [71] SOBOL, I. M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation* 55, 1 (2001), 271 – 280. The Second IMACS Seminar on Monte Carlo Methods.
- [72] SONG, E., NELSON, B., AND STAUM, J. Shapley effects for global sensitivity analysis : theory and computation. *SIAM-ASA Journal on Uncertainty Quantification* 4, 1 (2016), 1060–1083.
- [73] STEIN, M. Large sample properties of simulations using latin hypercube sampling. *Technometrics* 29, 2 (1987), 143–151.
- [74] STONE, C. J. The use of polynomial splines and their tensor products in multivariate function estimation. *The Annals of Statistics* 22, 1 (1994), 118–171.
- [75] STURM, C. *Cours d'analyse de l'École polytechnique. Tome 2*. Mallet-Bachelier, Paris, seconde édition, 1864.
- [76] SUDRET, B. Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering and System Safety* 93, 7 (2008), 964 – 979.
- [77] SUDRET, B., AND MAI, C. Computing derivative-based global sensitivity measures using polynomial Chaos expansions. *Reliability Engineering and System Safety* 134 (05 2015), 241 – 250.
- [78] SZEGÖ, G. *Orthogonal Polynomials*, fourth ed., vol. XXIII of *American Mathematical Society, R.I.* American Mathematical Society, Colloquium Publications, 1975.

-
- [79] TATANG, M. A., PAN, W., PRINN, R. G., AND MCRAE, G. J. An efficient method for parametric uncertainty analysis of numerical geophysical model. *Journal of Geophysical Research* 102 (1997), 21925–21932.
- [80] VAART, A. W. v. D. *Asymptotic Statistics*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [81] WASSERMAN, L. *All of Statistics : A Concise Course in Statistical Inference*. Springer Texts in Statistics. Springer-Verlag New-York, 2004.
- [82] WEISS, N., HOLMES, P., AND HARDY, M. *A Course in Probability*. Pearson Addison Wesley, 2006.
- [83] WIENER, N. The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics* 60, 4 (1938), 897–936.
- [84] WINKLER, R. L. Uncertainty in probabilistic risk assessment. *Reliability Engineering & System Safety* 54, 2 - 3 (1996), 127 – 132.
- [85] XIU, D. Efficient collocational approach for parametric uncertainty analysis. *Communications in Computational Physics* 2, 2 (2007), 293–309.
- [86] XIU, D., AND KARNIADAKIS, G. E. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing* 24, 2 (2002), 619–644.
- [87] XIU, D., AND KARNIADAKIS, G. E. Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of Computational Physics* 187, 1 (2003), 137 – 167.
- [88] XU, C., AND GERTNER, G. Extending a global sensitivity analysis technique to models with correlated parameters. *Computational Statistics and Data Analysis* 51, 12 (2007), 5579–5590.
- [89] XU, C., AND GERTNER, G. Uncertainty and sensitivity analysis for models with correlated parameters. *Reliability Engineering & System Safety* 93 (2008), 1563–1573.
- [90] ZHOU, X., AND LIN, H. Local sensitivity analysis. In *Encyclopedia of GIS*, S. Shekhar and H. Xiong, Eds. Springer US, Boston, MA, 2008.

Résumé. Durant cette thèse, une méthode d'analyse statistique sur la gerbe d'éclats d'une bombe, en particulier sur leurs masses, a été mise au point. Nous avons à disposition trois échantillons partiels de données expérimentales et un modèle mécanique simulant l'explosion d'un anneau. Dans un premier temps, un modèle statistique a été créé à partir du modèle mécanique fourni, pour générer des données pouvant être similaires à celles d'une expérience. Après cela, la distribution des masses a pu être étudiée. Les méthodes d'analyse classiques ne donnant pas de résultats suffisamment précis, une nouvelle méthode a été mise au point. Elle consiste à représenter la masse par une variable aléatoire construite à partir d'une base de polynômes chaos. Cette méthode donne de bons résultats mais ne permet pas de prendre en compte le lien entre les éclats d'une même charge. Il a donc été décidé ensuite de modéliser la masse par un processus stochastique, et non par une variable aléatoire. La portée des éclats, qui dépend en partie de la masse, a elle aussi été modélisée par un processus. Pour finir, une analyse de sensibilité a été effectuée sur cette portée avec les indices de Sobol. Ces derniers s'appliquant aux variables aléatoires, nous les avons adaptés aux processus stochastiques de manière à prendre en compte les liens entre les éclats. Dans la suite, les résultats de cette dernière analyse pourront être améliorés. Notamment, grâce à des indices présentés en dernière partie qui seraient adaptés aux variables dépendantes, et permettraient l'utilisation de processus stochastiques à accroissements non indépendants.

Mots-clés : Polynômes chaos, processus stochastiques, analyse de sensibilité, indices de Sobol.

Abstract. During this thesis, a method of statistical analysis on sheaf of bomb fragments, in particular on their masses, has been developed. Three samples of incomplete experimental data and a mechanical model which simulate the explosion of a ring were available. First, a statistical model based on the mechanical model has been designed, to generate data similar to those of an experience. Then, the distribution of the masses has been studied. The classical methods of analysis being not accurate enough, a new method has been developed. It consists in representing the mass by a random variable built from a basis of chaos polynomials. This method gives good results however it doesn't allow to take into account the link between shivers. Therefore, we decided to model the masses by a stochastic process, and not a random variable. The range of fragments, which depends of the masses, has also been modeled by a process. Last, a sensibility analysis has been carried out on this range with Sobol indices. Since these indices are applied to random variables, it was necessary to adapt them to stochastic process in a way that take into account the links between the fragments. In the last part, it is shown how the results of this analysis could be improved. Specifically, the indices presented in the last part are adapted to dependent variables and therefore, they could be suitable to processes with non independent increases.

Keywords : Chaos polynomials, stochastic process, sensibility analysis, Sobol indices.