



**HAL**  
open science

# Attracteurs d'ondes internes de gravité : des résonances en cascade : une approche expérimentale des régimes linéaire et non linéaire

Géraldine Davis

► **To cite this version:**

Géraldine Davis. Attracteurs d'ondes internes de gravité : des résonances en cascade : une approche expérimentale des régimes linéaire et non linéaire. Physique [physics]. Université de Lyon, 2019. Français. NNT : 2019LYSE1147 . tel-02463462

**HAL Id: tel-02463462**

**<https://theses.hal.science/tel-02463462>**

Submitted on 1 Feb 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2019LYSE1147

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**  
opérée au sein de  
**l'Université Claude Bernard Lyon 1 École Doctorale ED52**  
**Physique et Astrophysique Spécialité de doctorat : Physique**

Soutenue publiquement le 01/10/2019, par :  
**Géraldine Davis**

---

Attracteurs d'ondes internes de gravité : des résonances en cascade.  
*Une approche expérimentale des régimes linéaire et non linéaire.*

---

Devant le jury composé de :

Mme Anne-Laure DALIBARD  
M. Thierry DAUXOIS  
Mme Bérengère DUBRULLE  
M. Eric FALCON  
M. Sylvain JOUBAUD  
M. Nicolas MORDANT

Professeure  
Directeur de recherche  
Directrice de recherche  
Directeur de recherche  
Maître de conférences  
Professeur

Examinatrice  
Directeur de thèse  
Présidente  
Rapporteur  
Co-directeur de thèse  
Rapporteur



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Les ondes internes de gravité</b>	<b>5</b>
1.1 Présentation . . . . .	5
1.1.1 Description du phénomène . . . . .	5
1.1.2 Ondes internes en géophysique . . . . .	7
1.2 Description théorique . . . . .	15
1.2.1 Approximation de Boussinesq . . . . .	15
1.2.2 Approximation linéaire. . . . .	18
1.2.3 Attracteur d'ondes internes . . . . .	23
1.2.4 Régime faiblement non linéaire . . . . .	27
1.3 Au laboratoire . . . . .	32
1.3.1 Dispositif expérimental. . . . .	32
1.3.2 Méthodes d'analyse des données expérimentales. . . . .	37
1.3.3 Mesure de liens de phases . . . . .	40
1.3.4 En pratique . . . . .	42
<b>2 Bilan énergétique</b>	<b>45</b>
2.1 Introduction . . . . .	45
2.2 Experimental set-up . . . . .	47
2.3 Model . . . . .	50
2.3.1 Energy budget . . . . .	50
2.3.2 Estimation of the different terms from experimental measurements . . . . .	52
2.4 Results . . . . .	60
2.4.1 Linear regime . . . . .	60
2.4.2 Weakly nonlinear regime . . . . .	61
2.4.3 Three dimensional tank . . . . .	65
2.5 Conclusions . . . . .	65

<b>3</b>	<b>Réponse impulsionnelle</b>	<b>69</b>
3.1	Introduction . . . . .	69
3.2	Visualisation des modes . . . . .	72
3.2.1	Protocole . . . . .	72
3.2.2	Visualisation des modes . . . . .	74
3.2.3	Conclusion . . . . .	79
3.3	Mesure de l'énergie injectée dans chaque mode . . . . .	80
3.3.1	Modélisation. . . . .	81
3.3.2	Méthode d'analyse . . . . .	83
3.3.3	Résultats . . . . .	85
3.4	Comparaison avec des mesures stationnaires . . . . .	87
3.4.1	Étude en régime stationnaire . . . . .	87
3.4.2	Comparaison des deux méthodes . . . . .	88
3.4.3	Conclusion . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Attracteur en régime non linéaire</b>	<b>93</b>
4.1	Introduction . . . . .	93
4.2	Expériences à amplitude fixée . . . . .	94
4.2.1	Spectre fréquentiel . . . . .	95
4.2.2	Structure spatiale des ondes secondaires . . . . .	102
4.2.3	Densité d'énergie et relation de dispersion . . . . .	109
4.3	Expérience à amplitude lentement croissante . . . . .	110
4.3.1	Spectres fréquentsiels . . . . .	111
4.3.2	Spectres spatiaux . . . . .	114
4.3.3	Densité d'énergie et relation de dispersion . . . . .	121
4.3.4	Estimation du temps non linéaire. . . . .	123
4.4	A la recherche du régime faiblement non linéaire. . . . .	124
4.4.1	Premières observations . . . . .	124
4.4.2	Spectre temporel quantifié . . . . .	125
4.4.3	Hystérésis / stabilité du spectre . . . . .	126
4.4.4	Lien de phase entre les ondes . . . . .	129
4.4.5	Vers une explication de la quantification . . . . .	132
	<b>Conclusion</b>	<b>139</b>
<b>A</b>	<b>Utilisation de la sonde conductimétrique</b>	<b>143</b>
A.1	Modélisation. . . . .	144
A.1.1	Évolution avec la température . . . . .	144
A.1.2	Évolution avec la salinité . . . . .	145
A.2	Traitement des données issues d'une mesure . . . . .	146
<b>B</b>	<b>Forme du générateur</b>	<b>148</b>

<b>C</b>	<b>Synthétique schlieren, démonstration</b>	<b>150</b>
<b>D</b>	<b>Dérive de Stokes</b>	<b>152</b>
	D.1 Problématique . . . . .	152
	D.2 Démonstration . . . . .	152
<b>E</b>	<b>Incertitudes PIV</b>	<b>154</b>
<b>F</b>	<b>Filtrage glissant</b>	<b>155</b>
	F.1 Problématique . . . . .	155
	F.2 Démonstration . . . . .	155
	F.3 Conclusion . . . . .	156
<b>G</b>	<b>Réponse impulsionnelle : d'autres exemples du champ de vitesse filtré</b>	<b>157</b>
<b>H</b>	<b>Réponse impulsionnelle : démonstration de l'équation (3.12)</b>	<b>158</b>
	H.1 Problématique . . . . .	158
	H.2 Démonstration . . . . .	158
	H.3 Discussion. . . . .	160
<b>I</b>	<b>Réponse impulsionnelle : temps d'atténuation visqueuse</b>	<b>161</b>



# Introduction

En raison des variations de température et de salinité, la densité de l'océan n'est pas homogène. Sous l'effet de la gravité, l'eau s'organise alors naturellement en présentant ses parties les plus denses sous les plus légères. On obtient ainsi un profil de densité qui augmente progressivement avec la profondeur. La densité de l'atmosphère présente elle aussi une telle structure, dite *stratifiée*. Si une action extérieure vient perturber légèrement cet arrangement, le fluide se mettra spontanément à osciller autour de cette configuration de repos. Ces oscillations, qui se propagent de proche en proche, sont appelées *ondes internes de gravité*. On peut parfois apercevoir la trace de ces ondes lorsque, générées par la rencontre d'un vent et d'une montagne, elles imprègnent les nuages de leurs marques périodiques : ils forment alors, comme montré par exemple à la figure 1.4 page 11, de longues bandes parallèles. Dans l'océan, ces ondes sont principalement générées par les masses d'eau déplacées par les marées au-dessus des reliefs sous-marins. Les ondes internes peuvent ensuite se propager sur des milliers de kilomètres sans affecter l'atmosphère ou l'océan. En effet, telle une tranquille série de vagues à la surface de l'eau, le passage d'une onde interne laisse en général le fluide inchangé. Sont-elles alors vouées à se propager calmement sans autre incidence que de donner forme à de jolis nuages ?

Non, car il existe certains mécanismes au travers desquels elles peuvent influencer sur leur environnement : elles peuvent en effet lui céder une partie de leur quantité de mouvement, ce qui génère un courant, ou une part de leur énergie mécanique. Une partie de cette énergie mécanique peut alors *mélanger* le fluide, qui se retrouve un peu moins stratifié qu'avant le passage de l'onde. Les ondes internes sont alors intimement liées au problème du *mélange océanique*. Dans l'océan, des mesures *in situ* de profil de densité ont révélé que l'effet des eaux de surface, légères car chauffées par le soleil et au contact de l'atmosphère, se perçoit sur une profondeur bien plus importante que celle prédite par la diffusion de la chaleur ou du sel. Ainsi, il semblerait qu'une force mystérieuse vienne brasser régulièrement les profondeurs de l'océan, faisant se mélanger des eaux normalement trop éloignées pour pouvoir communiquer. Comment les ondes internes participent-elles à ce mélange ?



Comme souvent en physique des ondes, des phénomènes complexes et intéressants émergent lorsque l'amplitude des oscillations est augmentée. Une grosse vague à la surface de l'eau peut par exemple se briser. De même, une onde interne peut *déferler*. Un autre phénomène – moins intuitif – peut intervenir. Imaginons par exemple jeter deux petits cailloux dans un étang. Le motif qui apparaît à sa surface est alors la superposition des deux jeux d'anneaux issus de chacun des impacts. Imaginons maintenant – par la pensée – rejouer exactement la même scène, mais en jetant les cailloux plus fort. On constaterait alors peut être que les vaguelettes créées ne seraient pas simplement un peu plus hautes. Il est en effet possible que les deux systèmes d'anneaux, qui précédemment se croisaient sans se voir, interagissent et créent un motif de vagues plus riche que leur simple superposition. Le système serait devenu *non linéaire*. De même, la rencontre de deux ondes internes est susceptible de générer une troisième oscillation, qui présentera éventuellement des variations spatiales plus rapides que ses voisines. Par interactions successives, le champ d'ondes peut ainsi s'enrichir de fluctuations de plus en plus abruptes, jusqu'à rendre la diffusion du sel et de la chaleur efficaces : le fluide se retrouve alors en partie mélangé. Dans l'océan, la richesse des échelles temporelles et spatiales observées suggère que de multiples interactions non linéaires entre ondes de gravité ont lieu.

Le but de cette thèse est d'étudier ce régime non linéaire des ondes internes. Pour cela, nous optons pour une *démarche expérimentale*. Nous allons reproduire des ondes internes en laboratoire, sous des conditions certes éloignées des conditions naturelles, mais en revanche très bien contrôlées. Pour obtenir des amplitudes d'oscillation suffisantes, nous utilisons une propriété remarquable des ondes internes : lorsqu'elles sont générées dans une cuve à la géométrie soigneusement choisie, elles se concentrent au cours du temps sur une trajectoire limite, qui devient le siège de mouvements de grande magnitude. Cette trajectoire limite, appelée *attracteur*, est alors susceptible de se déstabiliser et de créer, *via* une cascade d'interactions non linéaires, un champ d'onde très complexe. Au cours de ces trois ans de thèse, j'ai amélioré la compréhension des attracteurs d'ondes internes de gravité, tant dans leur régime linéaire que dans leur régime non linéaire. Le présent manuscrit, qui présente les méthodes employées ainsi que les résultats obtenus, s'articule autour de quatre chapitres.

1. Le premier expose plus en détail la nature des ondes internes. Il développe très brièvement leur lien avec les écoulements géophysiques. Une modélisation mathématique plus précise est ensuite présentée. Nous exposons finalement le dispositif expérimental employé ainsi que les outils numériques nous permettant d'analyser les données issues des expériences.
2. Le deuxième chapitre reproduit un article soumis à *Journal of Fluid Mechanics*, qui présente une étude complète du bilan énergétique d'expériences d'attracteurs. Une méthode permettant de mesurer l'énergie injectée dans les ondes est présentée, ainsi que des outils permettant d'inférer les différentes sources de dissipation

visqueuse, dans le volume et dans les couches limites. L'application de ces outils aux expériences est en accord quantitatif avec la conservation de l'énergie. Nous mettons aussi en évidence le rôle des ondes secondaires dans la dissipation totale. Par ailleurs, nous observons que la puissance injectée par le générateur d'ondes est supérieure à celle que l'on obtiendrait dans une cuve sans attracteur. Nous observons donc une *résonance*.

3. Le troisième chapitre propose une méthode pour explorer simultanément *toutes* les résonances de la cuve, en la soumettant à une brève perturbation. L'écoulement exhibe alors spontanément des attracteurs, qui étaient jusqu'ici observés uniquement sous un forçage oscillatoire. Nous proposons ensuite une modélisation linéaire permettant de relier l'évolution temporelle de la densité d'énergie observée à la densité de puissance reçue par le système lors de l'impulsion. Cette méthode est en accord avec les expériences conduites en régime stationnaire. Elle permet donc d'explorer quantitativement une géométrie donnée en un temps restreint.
4. Le quatrième chapitre explore le régime non linéaire des attracteurs. Nous y étudions les spectres spatiaux et fréquentiels des ondes secondaires, dans lesquels la signature d'interactions triadiques est observée. Une expérience longue, conduite en augmentant progressivement l'amplitude du forçage, permet d'observer des spectres limites. Si les spectres temporels sont encore très piqués, les spectres spatiaux peuvent être ajustés par une loi de puissance, outil très régulièrement utilisé en turbulence et turbulence d'ondes pour caractériser différents régimes. Par ailleurs, nous proposons une explication à l'existence de deux régimes non linéaires distincts.



## 1.1 Présentation

Les ondes internes sont des mouvements oscillatoires intervenant naturellement dans les fluides stratifiés, c'est-à-dire les fluides dont la densité augmente dans la direction de la force de gravité. Les océans, certains lacs et l'atmosphère étant stratifiés, ces ondes se propagent dans ces milieux. Nous verrons dans un premier temps le mécanisme à l'origine de ces ondes avant d'expliquer leur importance géophysique.

### 1.1.1 Description du phénomène

Dans un fluide de densité inhomogène, la force de gravité tend à amener le fluide le plus dense en dessous. A l'équilibre, les surfaces d'égale densité, appelées *isopycnes*<sup>1</sup>, sont horizontales. Une perturbation de ces surfaces induira une force de flottabilité qui tendra à les ramener à l'horizontale. Mais ce faisant, le fluide acquiert de l'énergie cinétique et –au lieu de s'arrêter à son état d'équilibre – il se met à osciller. Ces oscillations constituent les ondes internes. Ce phénomène ressemble beaucoup aux ondes de surface de gravité, qui ont lieu au niveau d'une stratification discontinue, comme par exemple à l'interface eau / air. Pour les distinguer, les ondes se propageant dans les fluides stratifiés sont qualifiées d'*internes*. Si le moteur des ondes internes est strictement identique à celui des ondes de surface de gravité, le fait qu'elles se propagent à trois dimensions leur confère des propriétés très différentes.

#### Mécanisme

Considérons un fluide stratifié, statique, de densité  $\rho_0(z)$ . Ce fluide est par exemple de l'eau de plus en plus salée au fur et à mesure que la profondeur augmente. Pour montrer la nature des oscillations propres à un tel milieu – c'est-à-dire les ondes internes – isolons par la pensée une particule de fluide. Malgré son poids qui l'attire vers le bas, elle est immobile. On en déduit que le fluide environnant exerce sur la particule une force dirigée vers le haut, et qui compense exactement son poids. Il s'agit de la bien connue *puissance d'Archimède*, présente aussi dans les fluides de densité homogène, et qui est due au gradient de pression dans le fluide environnant. Imaginons maintenant que nous élevons cette particule. Son poids reste inchangé, car sa concentration en sel n'a pas le temps de s'équilibrer avec le fluide environnant. Par contre, le fluide environnant est moins dense. La poussée d'Archimède locale, qui était capable d'équilibrer le poids

<sup>1</sup> Le suffixe *pycne* provient de *puknótes* qui signifie "densité" en grec.

d'une particule plus légère, n'est alors pas suffisante pour maintenir notre particule à sa nouvelle altitude. Elle commence donc à chuter. L'élan acquis au cours de sa chute lui fait dépasser son altitude d'origine. Elle se retrouve alors plongée dans un fluide plus dense, dans lequel la poussée d'Archimède était capable de compenser le poids d'une particule plus lourde, ce qui fait la remonter. À nouveau, son élan l'entraîne au delà de sa position d'équilibre. En l'absence de dissipation, ce cycle peut durer indéfiniment.

### Pulsation de flottabilité

Pour connaître la fréquence de ces oscillations, écrivons le bilan des forces subies par la particule. Notons  $z_0$  son altitude initiale (lorsqu'elle est à l'équilibre). Sa densité vaut donc  $\rho_0(z_0)$ . Dans toute la suite de ce manuscrit, **la direction  $z$  désigne la verticale ascendante**. Le poids s'exprime alors par  $\mathbf{P} = -\rho_0(z_0)\delta V g \mathbf{e}_z$ , où  $\delta V$  est le volume de la particule ; et la poussée d'Archimède,  $\mathbf{\Pi} = \rho_0(z)\delta V g \mathbf{e}_z$ . On note que la poussée d'Archimède ne compense le poids qu'en  $z = z_0$ . En posant  $h \equiv z - z_0$ , le principe fondamental de la dynamique projeté selon la verticale s'écrit

$$\rho_0(z_0)\ddot{h} = (\rho_0(z) - \rho_0(z_0))g. \quad (1.1)$$

On suppose ensuite que l'amplitude des mouvements de la particule est petite (c'est-à-dire qu'elle s'éloigne peu de sa position d'équilibre). On a donc au premier ordre  $\rho_0(z) \simeq \rho_0(z_0) + h \left. \frac{d\rho_0}{dz} \right|_{z=z_0}$ . L'altitude de la particule suit alors une équation d'oscillateur harmonique

$$\ddot{h} + N^2(z_0)h = 0, \quad (1.2)$$

de pulsation

$$N(z_0) \equiv \sqrt{-\frac{g}{\rho_0(z_0)} \frac{d\rho_0}{dz}}. \quad (1.3)$$

Comme le fluide est initialement au repos,  $\rho_0$  est une fonction décroissante de  $z$  et  $N$  est bien réel. Cette pulsation, caractéristique du milieu stratifié, s'appelle pulsation de *flottabilité* ou encore de *Brunt-Väisälä*.

### Relation de dispersion

Cette pulsation caractérise les mouvements verticaux d'une particule de fluide. Imaginons pouvoir maintenir le mouvement de la particule selon un axe incliné par rapport à la verticale. On peut par exemple visualiser une particule en forme d'anneau, couissant sans frottement autour d'une tige inclinée. La projection du principe de la

dynamique sur cet axe fait disparaître la force exercée par la tige sur la particule et donne

$$\ddot{h} + (N \sin \theta)^2 h = 0, \quad (1.4)$$

où  $\theta$  est défini comme l'angle entre l'axe du mouvement et l'horizontale<sup>1</sup>. Nous voyons donc que si l'on force le mouvement dans une direction non verticale, il existe toujours des oscillations mais de fréquences plus faibles, un mouvement quasi horizontal étant associé à une fréquence quasi nulle. Cette relation, liant la pulsation  $\omega$  et l'angle  $\theta$  du mouvement par rapport à l'horizontale,

$$\omega = N \sin \theta, \quad (1.5)$$

constitue la *relation de dispersion* des ondes internes. Elle sera établie plus rigoureusement<sup>2</sup> dans la prochaine section, où nous donnerons les autres caractéristiques de ces ondes.

Les fluides géophysiques, observés dans le référentiel terrestre, sont aussi soumis aux forces dérivant de la rotation de la terre. La force de Coriolis, notamment, transforme la relation de dispersion obtenue ici en

$$\omega^2 = N^2 \sin^2 \theta + f^2 \cos^2 \theta, \quad (1.6)$$

où  $f = 2\Omega \sin \phi$  est la fréquence de Coriolis, proportionnelle à la fréquence de rotation terrestre  $\Omega$  et au sinus de la latitude  $\phi$ . Les ondes suivant cette relation de dispersion sont appelées ondes internes gravito-inertielles. Néanmoins, l'influence de la rotation est souvent moins forte que celle de la stratification. Dans l'océan par exemple, le rapport  $N/f$  vaut typiquement 10 ou plus [108]. Dans cette thèse, nous négligeons complètement les effets de la rotation terrestre, et nous abrègerons par *ondes internes* les ondes internes de gravité.

### 1.1.2 Ondes internes en géophysique

En présence de gravité, un fluide inhomogène se stratifie naturellement. On en trouve donc plusieurs sur terre.

<sup>1</sup> Notons que certains auteurs définissent  $\theta$  comme l'angle du mouvement par rapport à la verticale. La relation de dispersion 1.5 devient alors  $\omega = N \cos \theta$ .

<sup>2</sup> En effet, nous n'avons pas considéré ici la rétroaction de la particule sur le fluide environnant. Or, par incompressibilité, les particules de fluide adjacentes sont "poussées" par la particule étudiée. C'est donc le fluide en entier dont il faut modéliser le mouvement. Il faut alors utiliser des fonctions continues de l'espace, dont les évolutions seront régies par des équations aux dérivées partielles.

## Les milieux stratifiés géophysiques

L'**océan** est de densité inhomogène car il présente des variations de concentration en sel et en température. Des mesures *in situ* sont réalisées par exemple au moyen de sondes conductimétriques (pour la salinité) et de thermistances (pour la température), plongées verticalement dans l'océan. On acquiert alors des profils desquels on peut déduire, via une équation d'état, le profil de densité. La figure 1.1 montre un tel exemple de mesure, réalisé à 40°N dans l'océan pacifique et extrait de [44]. Sur cette figure, on distingue plusieurs zones. La première est la couche située juste sous la surface. Elle interagit fortement avec l'atmosphère et est appelée *couche homogène*. Elle est séparée de la zone abyssale par la pycnocline, située à 100 m de profondeur environ, dans laquelle la pulsation de flottabilité est de l'ordre de  $10^{-2}$  rad/s. Dans les abysses, cette pulsation est plus basse et vaut  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  rad/s.

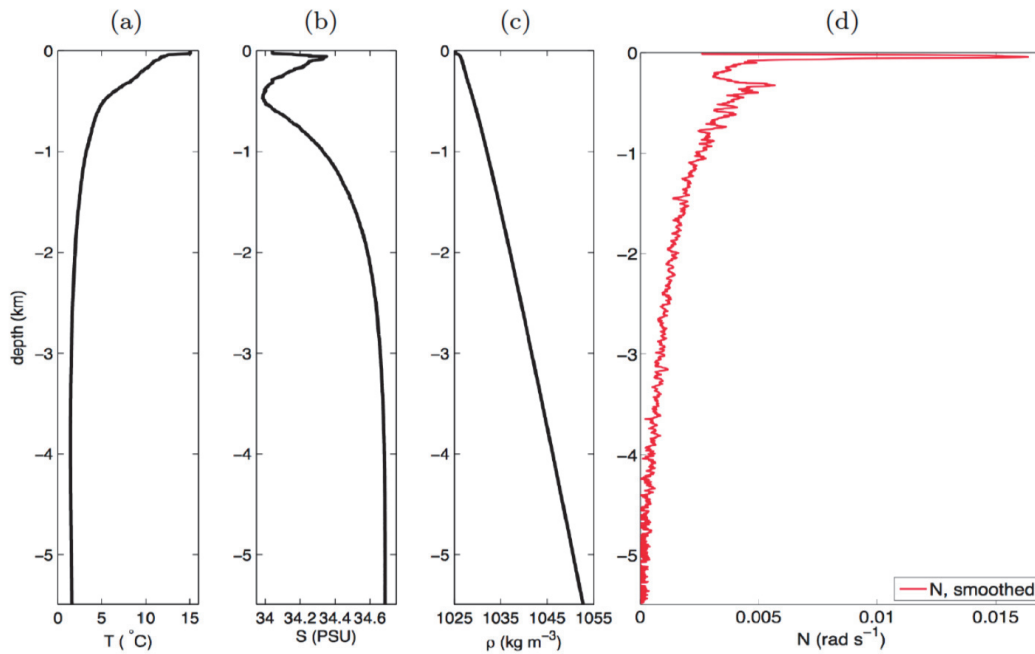


FIG. 1.1 Mesure *in situ* de profils verticaux de température (a) et de salinité (b). Densité (c), et pulsation de flottabilité  $N$  définie par (1.3) (d) calculées à partir de ces mesures. Données extraites de [44], et réalisées à 40° N dans l'océan pacifique.

L'**atmosphère** est elle aussi stratifiée. Le mécanisme des ondes internes dans un fluide compressible – comme l'atmosphère – diffère légèrement du phénomène exposé en début de cette section. En effet, si on imagine élever par la pensée une particule de fluide, elle ne gardera pas la même densité<sup>1</sup>. Aussi, faut-il prendre en compte cette extension naturelle avant de pouvoir déterminer si la particule va chuter ou non. Pour cela, on utilise le concept de densité potentielle, qui permet de comparer la densité de la particule à la densité du fluide environnant en les rapportant toutes deux, de

<sup>1</sup> On l'observe très facilement en emportant un paquet de chips en montagne.

façon adiabatique<sup>1</sup>, à une altitude de référence. La figure 1.2 présente des profils de température et de pulsation de flottabilité. Chaque courbe à été calculée en moyennant 80 profils acquis dans différentes stations radio-sonde couvrant le territoire des États-Unis. On distingue nettement un changement de comportement à  $z \simeq 12$  km. Cette altitude repère la tropopause, séparant la troposphère – qui constitue la couche en contact avec le sol, la plus active convectivement et où se situe les nuages – de la stratosphère, qui n’abrite pas de mouvements convectifs. En effet, la stratosphère est, comme son nom l’indique, fortement stratifiée et est donc beaucoup moins sujette à la convection. La pulsation de flottabilité y est de l’ordre de  $10^{-2}$  rad/s.

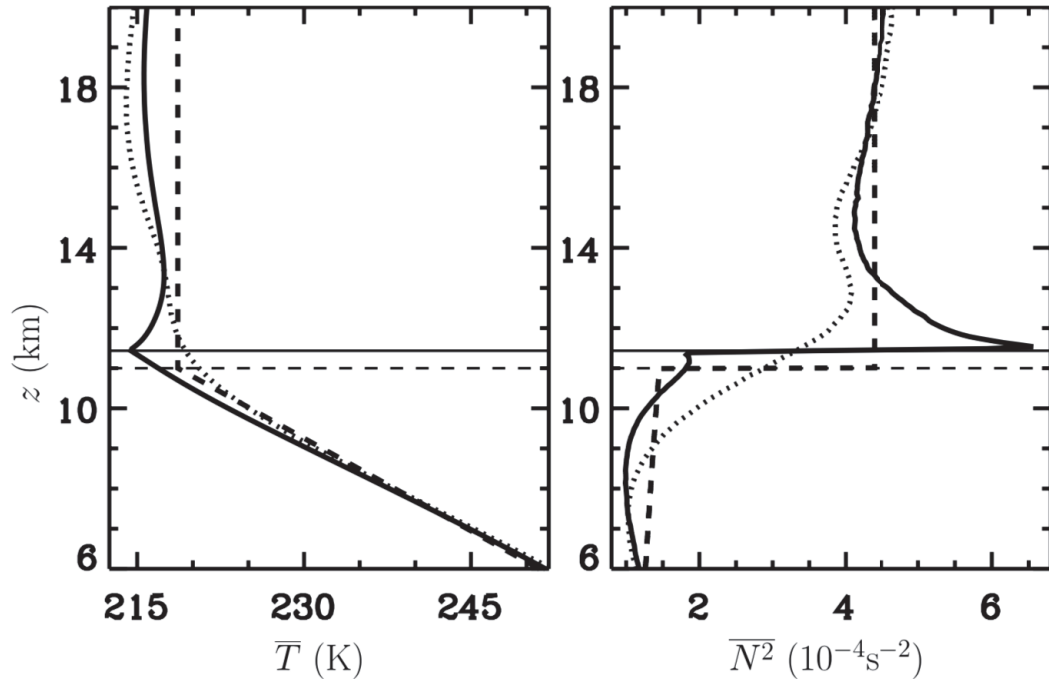


FIG. 1.2 Profils de température (à gauche) et de pulsation de flottabilité (à droite) dans la troposphère et le début de la stratosphère, calculés par différents moyennages d’un ensemble de 80 profils acquis dans différentes stations radio-sonde couvrant le territoire États-unien. Figure extraite de [12].

**Les lacs** présentent aussi une structure interne complexe permettant dans certains cas la propagation d’ondes internes. La figure 1.3, extraite de [53], montre l’exemple du lac Baïkal. La température potentielle notée  $\theta$ , qui est tracée en fonction de la profondeur, joue un rôle similaire à celui de la densité. On a en effet  $N = \sqrt{(g/\theta)\partial_z\theta}$ . On constate donc qu’à 200 m de profondeur le lac est stablement stratifié et peut donc héberger des ondes internes. Les lacs présentent des comportements très variés en fonction de leur environnement. On retiendra simplement que tout comme dans l’océan (voir la suite de cette section), les ondes internes dans les lacs participent à leur mélange [53, 14].

<sup>1</sup> C’est-à-dire qu’on néglige à nouveau les phénomènes, lents, de diffusion.



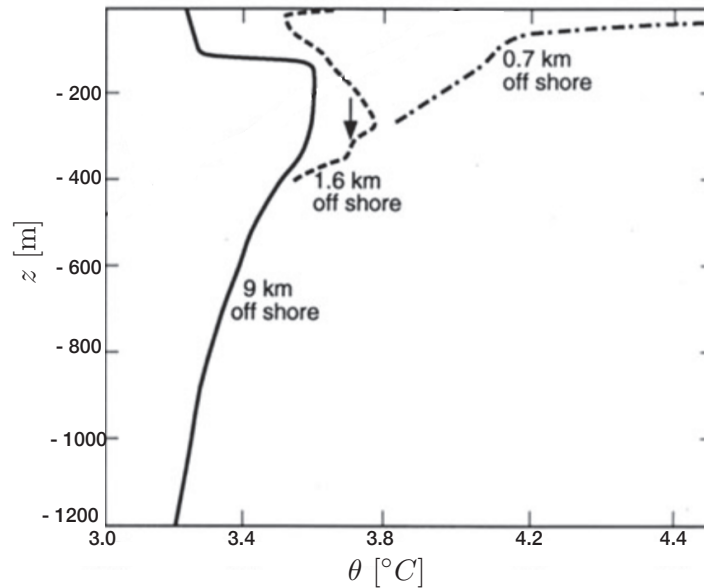


FIG. 1.3 Profondeur en fonction de la température potentielle, mesurée dans le lac Baïkal. Figure extraite de [53].

### Génération des ondes internes

Les ondes internes sont générées par plusieurs mécanismes. Le principal implique un courant horizontal passant au dessus d'une topographie. Si l'énergie cinétique du courant est suffisante, c'est-à-dire si le nombre de Froude

$$Fr \equiv \frac{U}{Nh'} \quad (1.7)$$

est supérieur à 1, le courant remonte le long de l'obstacle puis oscille autour de sa position d'origine après son passage. Avec  $h \sim 1$  km et  $N \sim 10^{-2}$  rad/s, il faut que le courant ait une vitesse d'au moins 40 km/h (22 nœuds) pour générer des ondes. Les ondes ainsi générées sont appelées ondes orographiques ou *lee waves* en anglais.

On trouve de telles ondes orographiques dans l'atmosphère [84], où elles sont recherchées par les pilotes de planeurs qui peuvent alors profiter du courant ascendant tout en étant légèrement éloignés de la montagne<sup>1</sup>. Ces ondes orographiques sont parfois visibles par la présence de nuages striés : en effet, si l'air initial est suffisamment humide, la vapeur d'eau est susceptible de se condenser lorsque l'onde amène le fluide plus en altitude. Il en résulte un motif de même périodicité que l'onde, comme montré sur la figure 1.4.

<sup>1</sup> En Août 2008, deux pilotes de planeur associés au projet *Perlan*[1] ont atteint une altitude de 15 400 km au sud de l'Argentine en "surfant" une onde interne générée par la Cordillère des Andes !

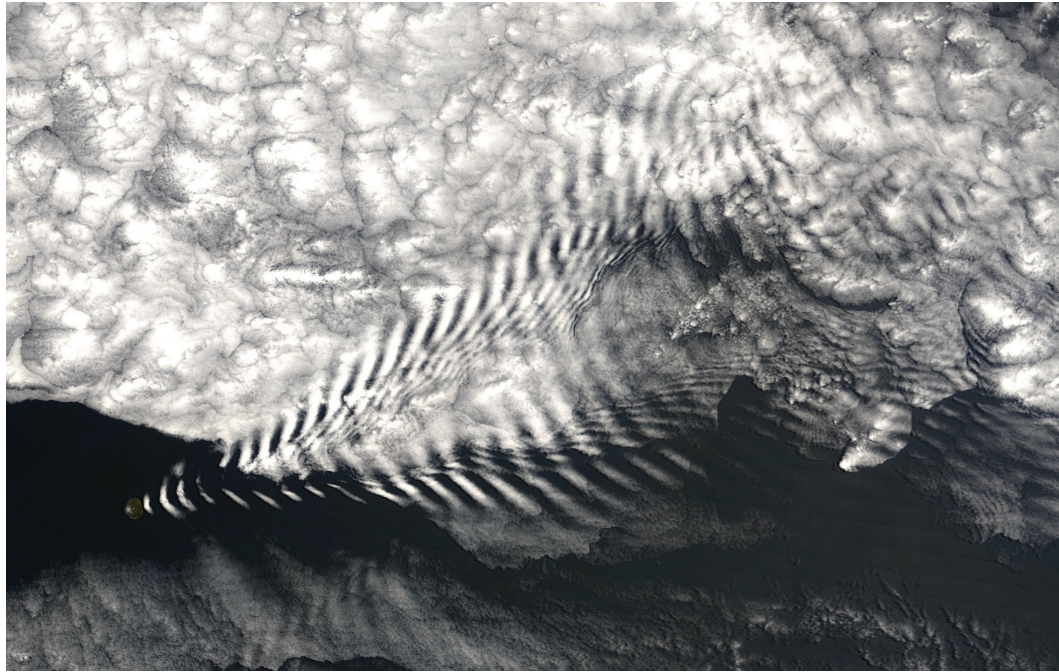


FIG. 1.4 Nuages marquant la présence d'une onde interne orographique derrière l'île d'Amsterdam dans l'océan Indien. Crédit : NASA.

Dans l'océan, les courants océaniques au dessus de la topographie sous marine créent aussi des ondes internes. Elles sont aussi surtout générées par un courant oscillant particulier : les marées [82]. Les ondes internes créées par ce mécanisme sont alors appelées marées internes.

Le deuxième mécanisme de génération d'ondes internes ressemble à celui évoqué dans la première section 1.1 de ce chapitre, où l'on a imaginé les pycnoclines perturbées par rapport à leur état d'équilibre. Une telle perturbation peut être introduite dans la stratosphère par des fluctuations de la tropopause, elles mêmes dues aux mouvements convectifs présents dans la troposphère [41]. Des ondes internes océaniques peuvent elles êtres générées par l'effet de tempête créant de fortes variations de pression à la surface de l'eau [82].

### Importance des ondes internes

Ces dernières décennies ont vu croître l'intérêt porté par la communauté scientifique aux ondes internes. En atteste la croissance de la courbe présentée à la figure 1.5, représentant le nombre de publications scientifiques contenant les mots clefs "*internal waves ocean*" divisé par le nombre de celles contenant simplement le mot "*ocean*" (moyennes sur 10 ans obtenues *via* le moteur de recherche Google Scholar<sup>®</sup>). Aujourd'hui, 16% des articles concernant l'océan, toutes disciplines confondues, évoquent les ondes internes !

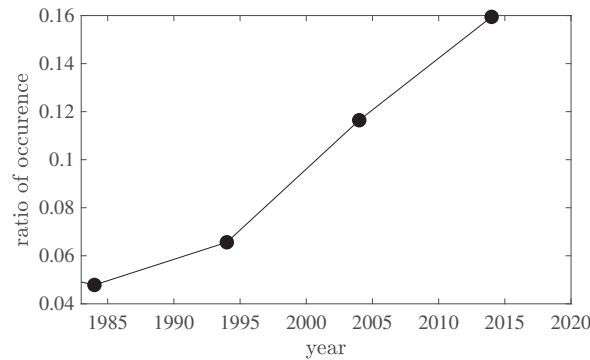


FIG. 1.5 Nombre de publications scientifiques contenant les mots clefs “*internal waves ocean*”, divisé par le nombre de celles contenant le mot “*ocean*” seul. Chaque point est une moyenne sur 10 ans obtenue *via* le moteur de recherche Google Scholar<sup>®</sup>.

D’où vient cet intérêt marqué pour ces ondes ? La description naïve présentée à la section précédente laisse pourtant entendre que l’échange permanent entre énergie cinétique et énergie potentielle qui accompagne leur propagation n’a *a priori* rien d’irréversible : on imagine qu’une onde interne laisse le milieu stratifié inchangé après son passage. Et en effet, les échelles caractéristiques des ondes internes générées dans la nature (supérieures à la centaine de mètres) sont trop grandes pour rendre efficaces les phénomènes irréversibles de diffusion moléculaire et de viscosité. Aussi, une onde interne peut se propager sur des milliers de kilomètres sans être perturbée ni perturber le milieu traversé. Néanmoins, il existe certains phénomènes susceptibles de réduire cette échelle caractéristique de variation de l’onde, qui rendent alors possible l’interaction de l’onde avec son milieu environnant, *via* la viscosité ou la diffusion. Les ondes internes sont alors susceptibles de transporter efficacement énergie et quantité de mouvement entre leur lieu de génération et le lieu où un tel phénomène intervient, lieux qui peuvent être très éloignés.

**Transport de quantité de mouvement** Lorsque la viscosité joue, l’onde est susceptible de déposer de la quantité de mouvement dans un écoulement moyen. C’est ce qu’on appelle du *streaming*, introduit initialement dans le contexte des ondes acoustiques [66]. Expérimentalement, la génération d’un écoulement moyen par des ondes internes de gravité a été observée [13] dans des expériences conduites dans une cuve de taille métrique, emplies d’eau stratifiée en sel. Dans l’atmosphère, le phénomène de QBO (pour *quasi biennial oscillation*), qui consiste en un fort vent zonal<sup>1</sup> dans la stratosphère et dont la direction change tous les deux ans environ, est alimenté par des ondes internes qui interagissent avec l’écoulement moyen [6]. Le dépôt de cette quantité de mouvement par effet visqueux est rendu possible par l’effet Doppler, qui vient modifier la direction de propagation des ondes quand celles-ci rencontrent les vents zonaux. La présence d’une paroi peut aussi produire de petites échelles et augmenter

<sup>1</sup> C’est-à-dire Est-Ouest

les effets visqueux. On parle alors de *boundary streaming*, récemment étudié dans le cas des ondes internes [95]. Ce phénomène a été observé expérimentalement [52], et étudié notamment pour son impact sur le transport de sédiments dans les fonds marins.

**Transport d'énergie** Lorsque la diffusion moléculaire entre en jeu, les ondes internes peuvent convertir de façon irréversible leur énergie mécanique en énergie potentielle de pesanteur du milieu environnant. Il existe plusieurs possibilités pour réduire les échelles de variation du champ et amener la diffusion de l'agent stratifiant. La première ressemble à ce qu'on observe et entend sur un rivage de bord de mer. En effet, comme une onde à la surface de l'eau, une onde interne est susceptible de déferler. Ce déferlement provoque un brassage local du fluide qui se retrouve alors moins stratifié qu'avant le passage de l'onde<sup>1</sup>. Un tel déferlement se produit spontanément si l'amplitude de l'onde est trop importante. Le déferlement d'onde interne dans le haut de la troposphère est responsable de certaines turbulences atmosphérique [36], dites *d'air clair* car aucun signe visible ne les indique au pilote d'avion. Notons qu'à cause du phénomène de croissance anélastique<sup>2</sup> [105], toute onde interne dans la stratosphère se propageant vers le haut finira par déferler. Dans l'océan, une onde peut déferler lorsqu'elle rencontre une variation de topographie, comme un plateau continental ou une montagne sous-marine [106].

Le deuxième mécanisme, en lien direct avec les travaux conduits lors de cette thèse, est la déstabilisation d'une onde interne, *via* une instabilité résonnante triadique (voir section 1.2.4), qui génère deux nouvelles ondes internes de fréquences différentes et potentiellement d'échelles spatiales inférieures. Une succession – ou *cascade* – de ces instabilités pouvant permettre d'atteindre *in fine* les échelles dissipatives. Des marques de cette interaction triadique ont en effet été relevées en contexte océanique [71, 3, 2].

**Mélange océanique** Dans l'océan, la génération d'écoulement moyen par les ondes internes est moins étudié que dans l'atmosphère, où les courants sont plus forts et où l'interaction ondes internes / écoulement moyen est parfois capitale pour expliquer ces derniers (par exemple la QBO). L'une des autres grandes différences entre l'atmosphère et l'océan est que ce dernier est très isolé des radiations solaires, qui ne pénètrent que sur les premières centaines de mètres. *A contrario*, l'atmosphère interagit de façon radiative avec le soleil et la Terre (notamment l'ozone dans l'infra-rouge), ce qui a pour effet de restaurer rapidement son profil de stratification [100]. Dans l'océan, il n'existe aucun phénomène aussi direct pouvant expliquer la stratification

---

<sup>1</sup> Notons qu'au cours du déferlement, l'onde dépose aussi sa quantité de mouvement et génère donc un écoulement moyen.

<sup>2</sup> Cette croissance est due à la diminution avec l'altitude de la densité du fluide. La conservation de la quantité de mouvement – produit de la densité par l'amplitude de la vitesse – implique alors la croissance de cette dernière.

observée. En effet, l'apport continu d'eaux froides et salées dans les profondeurs des grandes latitudes [107] devrait conduire à un océan entièrement rempli de cette eau dense, hormis proche de la surface qui est chauffée par le soleil. Si les abysses et la surface ne communiquent que *via* la diffusion thermique (resp. moléculaire), la taille caractéristique de la variation de la densité en surface devrait être de l'ordre du mètre (resp. du centimètre !). Or on observe une échelle typique de variation beaucoup plus grande, de l'ordre du kilomètre (voir figure 1.1). Dans un célèbre article, *Abyssal recipe* [81], Munk invoque alors l'existence d'une diffusivité turbulente, qu'il quantifie pour prédire le bon profil de densité :  $\kappa_T \sim 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$  (soit trois ordres de grandeur plus grande que la diffusivité thermique). Si il n'y a pas d'accord unanime quant à l'origine physique de cette diffusivité, la mesure par Polzin *et al.* [92] de la diffusivité turbulente dans le bassin brésilien a conduit à considérer les ondes internes, déjà proposées par Munk, comme de sérieuses candidates. En effet, comme représenté à la figure 1.6, on constate que la diffusivité turbulente est plus grande au dessus des fonds marins "rugueux" (partie droite de la figure). Or nous savons que ces rugosités génèrent à cause des marées et des courants océaniques des ondes internes. Ces ondes sont alors une source d'énergie mécanique, susceptible, *via* les mécanismes cités plus haut, de mélanger l'océan.

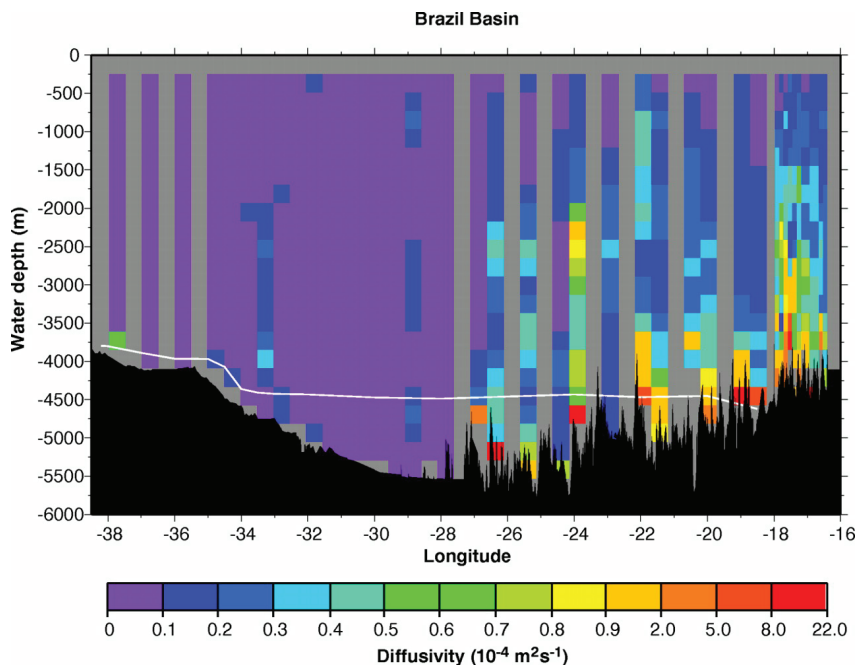


FIG. 1.6 Coefficient de diffusivité turbulente mesuré dans le bassin Brésilien. Figure extraite de [92].

La dynamique à grande échelle de l'océan et de l'atmosphère est donc largement impactée par l'existence des ondes internes. La compréhension de l'évolution aux temps longs de cette dynamique est notamment réalisée au moyen de modèles de circulation générale simulés sur super-ordinateur. Comme les échelles spatiales des ondes in-

ternes sont en partie inférieures à la résolution de ces simulations, il faut *paramétriser* leurs conséquences manuellement. Schriber *et al.* ont montré [97] que ces modèles étaient très sensibles aux différentes paramétrisations des ondes internes, paramétrisations qu'il faut donc ajuster le plus finement possible (on pourra consulter [72] pour connaître l'état de l'art de la paramétrisation des ondes internes dans les modèles océaniques). L'amélioration de cette paramétrisation nécessite en amont une meilleure compréhension des mécanismes de génération, de propagation, et d'interaction des ondes internes de gravité avec leur environnement.

C'est dans ce contexte très général que cette thèse s'inscrit. Néanmoins, si le régime non linéaire des ondes internes est souvent motivé par son lien avec le mélange océanique, la rétroaction des ondes sur la stratification induit une dynamique complexe. Nous prenons parti dans cette thèse d'étudier expérimentalement les régimes linéaires et non linéaires des ondes internes **sans leur couplage avec le mélange**. De plus, nous nous placerons dans le cas plus simple bidimensionnel. Nous pensons en effet que même si la transcription aux situations naturelles n'est alors pas évidente, une meilleure compréhension des phénomènes fondamentaux est l'une des approches essentielles à la compréhension des phénomènes naturels complexes.

Dans la prochaine section, une description théorique plus poussée des ondes internes est exposée. Nous expliquerons ensuite le dispositif expérimental utilisé au cours de cette thèse.

## 1.2 Description théorique

### 1.2.1 Approximation de Boussinesq

Les mouvements d'un fluide suivent l'équation de Navier-Stokes

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \eta \Delta \mathbf{u}, \quad (1.8)$$

où  $\rho$  est la densité du fluide,  $\mathbf{u}$  sa vitesse,  $\eta$  sa viscosité dynamique,  $P$  la pression et  $\mathbf{g}$  le champ de gravité. Dans l'océan,  $\rho$  est susceptible de s'écarter de la valeur de référence  $\rho_r = 1000 \text{ kg/m}^3$  à cause des inhomogénéités de température, de salinité et de pression. Plus précisément, la densité suit une équation d'état de la forme

$$\rho \simeq \rho_r \left( 1 - \beta_T (T - T_0) + \beta_S (S - S_0) + \frac{P - P_0}{\rho_r c_s^2} \right), \quad (1.9)$$

avec le coefficient de dilatation thermique  $\beta_T \sim 2 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ , le coefficient de contraction haline<sup>1</sup>  $\beta_S \sim 1 \cdot 10^{-3} \text{ psu}^{-1}$  et la vitesse du son  $c_s \sim 1500 \text{ m/s}$  (voir la table 1.2 dans [105] pour les valeurs exactes des coefficients). L'ordre de grandeur des varia-

<sup>1</sup> 1 psu correspond à 1 g de sel dans 1 kg d'eau.

tions maximales de température vaut  $\Delta T \sim 20$  K, de la salinité  $\Delta S \sim 5$  psu et de la pression  $\Delta P = \rho_r g H \sim 4 \cdot 10^7$  Pa, ce qui conduit à des variations de densité au plus de l'ordre de  $\Delta\rho/\rho_r \sim 2\%$ . Nous allons donc considérer que la densité du fluide varie peu autour de la densité de référence

$$\rho = \rho_r + \delta\rho, \quad (1.10)$$

$$\text{avec } \delta\rho \ll \rho_r. \quad (1.11)$$

De même on définit  $\delta P$  l'écart de la pression à  $P_r$  qui correspond au fluide statique de densité  $\rho_r$

$$P = P_r + \delta P \quad (1.12)$$

$$\frac{dP_r}{dz} \equiv -\rho_r g. \quad (1.13)$$

On réécrit alors (1.8)

$$(\rho_r + \delta\rho) (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \delta\rho \mathbf{g} - \nabla \delta P + \eta \Delta \mathbf{u}. \quad (1.14)$$

L'approximation de Boussinesq consiste à négliger les variations de  $\rho$  autour de  $\rho_r$  partout sauf dans le terme de gravité. On obtient alors

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\delta\rho}{\rho_r} \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_r} \nabla \delta P + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (1.15)$$

où  $\nu \equiv \eta/\rho_r$  est la viscosité cinématique du fluide de référence. On définit la flottabilité

$$b \equiv -\frac{\delta\rho}{\rho_r} g, \quad (1.16)$$

qui est fonction des différents agents stratifiants présents (température, salinité, pression), au travers de l'équation d'état du fluide (1.9). Dans le cas des expériences réalisées dans cette thèse, l'agent stratifiant est le sel NaCl (les fluctuations de densité dues au sel sont de l'ordre de  $\delta\rho_S \sim 60$  kg/m<sup>3</sup>, bien plus importante que celles dues à la température  $\delta\rho_T \sim 0.4$  kg/m<sup>3</sup> (correspondant à des fluctuations de 2°C) ou à la pression  $\delta\rho_P \sim 4 \cdot 10^{-3}$  kg/m<sup>3</sup>). On suppose donc

$$b = -\frac{1}{\rho_r} \beta_S (S - S_0) g. \quad (1.17)$$

La concentration en sel  $S$  suit une équation d'advection-diffusion. La flottabilité se conserve donc elle aussi selon une telle équation

$$\partial_t b + \nabla \cdot (b \mathbf{u}) = \kappa_b \Delta b, \quad (1.18)$$

où le coefficient de diffusion  $\kappa_b$  est relié à celui de l'agent stratifiant noté  $\kappa_S$  :  $\kappa_b \equiv \kappa_S \beta_S g / \rho_r$ .

**Changement de variables** Nous allons nous placer dans le contexte océanique, où nous négligerons la compressibilité de l'eau. On a donc conservation du volume de chaque particule de fluide, c'est-à-dire

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.19)$$

Comme par ailleurs la diffusion moléculaire du sel est très lente, nous allons dans toute la suite de cette thèse négliger le terme proportionnel à  $\kappa_b$ . On a donc la flottabilité qui se conserve selon

$$\partial_t b + (\mathbf{u} \cdot \nabla) b = 0. \quad (1.20)$$

Ceci permet de définir un unique état statique de référence, en considérant le réarrangement  $b_0(z)$  du champ de flottabilité tel que  $\forall z, db_0/dz > 0$ . L'état associé,  $\{b_0, \rho_0, P_0, u_0 = 0\}$  est alors la solution de référence par rapport à laquelle on définit toutes les variables :  $b = b_0 + b'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $P = P_0 + P'$  et  $u = 0 + u'$ . **Afin d'alléger les notations, nous noterons dans la suite de cette thèse les grandeurs fluctuantes sans le prime.** On aboutit alors au système suivant, que nous appellerons *équations de Boussinesq*

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = b \mathbf{e}_z - \frac{1}{\rho_r} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (1.21)$$

$$\partial_t b + (\mathbf{u} \cdot \nabla) b = -w N^2(z) \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.23)$$

où  $P$ ,  $b$  et  $u$  sont définies par rapport au fluide dans son état au repos ; et où l'on a défini la pulsation locale de flottabilité  $N(z) \equiv db_0/dz = \sqrt{-g/\rho_r \partial_z \rho_0}$ , qui ne dépend que de la stratification de référence. Dans l'océan, cette stratification n'est pas linéaire (voir figure 1.1) et  $N$  est donc une fonction de  $z$ . Néanmoins, si l'échelle typique de variation de  $P'$ ,  $b'$  et  $u'$  est petite devant l'échelle de variation de  $d_z b_0$ , on peut supposer localement une évolution linéaire de  $b_0$  avec l'altitude et donc  $N$  constant. C'est ce que nous ferons dans la suite de cette thèse, tant dans les calculs que dans les expériences, où nous préparerons le fluide dans un état initial linéairement stratifié<sup>1</sup> (voir 1.3).

**Système 2 dimensions 2 composantes** On constate que le problème n'est en général pas invariant par rotation car la direction verticale  $z$  est fixée par la gravité. Néanmoins, les directions horizontales  $x$  et  $y$  jouent des rôles symétriques. Pour simplifier le problème, on peut alors soit le supposer axisymétrique (démarche adoptée par

<sup>1</sup> Nous appelons ici *linéairement stratifié* un fluide dont la densité varie linéairement avec l'altitude. Certains auteurs désigneraient ce fluide de *homogènement stratifié*.



Samuel Boury, en thèse dans l'équipe), soit bidimensionnel. Nous allons opter pour cette deuxième option, et considérer le problème simplifié à deux dimensions d'espace et deux composantes de vitesses :  $\mathbf{r} = (x, z)$  et  $\mathbf{u} = (u, 0, w)$ . L'incompressibilité du fluide implique alors que l'on peut définir la fonction courant  $\varphi$  telle que  $u = \partial_z \varphi$  et  $w = -\partial_x \varphi$ . L'évolution de l'état du système est alors régie par les deux équations

$$\partial_t \Delta \varphi + \partial_x b = -J(\Delta \varphi, \varphi) + \nu \Delta^2 \varphi \quad (1.24)$$

$$\partial_t b - N^2 \partial_x \varphi = -J(b, \varphi), \quad (1.25)$$

où  $J$  désigne le jacobien :  $J(f, g) \equiv \partial_x f \partial_z g - \partial_z f \partial_x g$ .

### 1.2.2 Approximation linéaire

Dans la limite d'une perturbation de petite amplitude, les termes quadratiques de (1.24) et (1.25) disparaissent devant les termes linéaires. Dans ce régime linéaire, on montre, en dérivant (1.24) par rapport au temps et (1.25) par rapport à  $x$ , que la fonction courant suit alors l'équation d'onde

$$\partial_{tt} \Delta \varphi + N^2 \partial_{xx} \varphi = \nu \partial_t \Delta (\Delta \varphi). \quad (1.26)$$

La flottabilité se déduit de  $\varphi$  par

$$\partial_t b - N^2 \partial_x \varphi = 0. \quad (1.27)$$

Les équations (1.26) et (1.27) forment le système d'équations régissant l'évolution linéaire d'ondes internes 2D dans un liquide linéairement stratifié de manière stable.

#### Relation de dispersion

Négligeons tout d'abord l'influence de la viscosité. En insérant l'*ansatz* usuel pour une onde plane  $\varphi = \varphi_0 e^{-i(\omega t - (k_x x + k_z z))}$  on obtient la relation de dispersion, déjà envisagée au paragraphe 1.1.1,

$$\omega^2 = N^2 \frac{k_x^2}{k_x^2 + k_z^2} = N^2 \sin^2 \theta \quad (1.28)$$

où  $\theta$  est l'angle formé par le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  avec la verticale. Notons que la vitesse du fluide vaut  $\mathbf{u} = (k_z, -k_x) \varphi$ . Elle est donc perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ .  $\theta$  est donc à la fois l'angle entre  $\mathbf{k}$  et la verticale, et l'angle entre  $\mathbf{u}$  et l'horizontale (comme défini au paragraphe 1.1.1). Pour indiquer que la pulsation  $\omega$  et le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  d'une onde satisfont la relation de dispersion, on indiquera parfois  $\omega = \omega^L(\mathbf{k})$ , où l'exposant  $L$  indique *Linéaire*.

Cette relation de dispersion exhibe plusieurs propriétés remarquables. On constate tout d'abord qu'il existe une fréquence de coupure,  $N$ , au delà de laquelle l'équation (1.28) n'admet aucune solution  $\theta$ . Dans le problème linéaire il n'existe donc pas de structure propagative oscillant à une fréquence supérieure à  $N$ . Par ailleurs, la deuxième égalité montre que la fréquence ne dépend du vecteur d'onde qu'au travers de sa direction, et non de sa norme. Une modification de l'échelle typique de variation de l'onde n'affecte alors nullement sa fréquence de propagation, ce qui est extrêmement inhabituel. Cette assertion est bien sûr remise en question dans le cas visqueux, car la viscosité atténue davantage les petites échelles et brise cette invariance par homothétie. Sans négliger l'influence de la viscosité, on montre que la relation de dispersion s'écrit

$$\omega = \pm N \sqrt{\frac{k_x^2}{k^2} - \frac{\nu^2 k^4}{4N^2}} + i \frac{\nu k^2}{2}. \quad (1.29)$$

La partie imaginaire positive de la fréquence indique une atténuation exponentielle de l'onde. Notons que nos expériences sont peu sensibles à la modification de la partie réelle de  $\omega$ . En effet, les échelles typiques de variation des champs sont rarement plus petites que  $\lambda \sim 2$  cm, échelle qui induit un écart de fréquence de seulement 0.5% par rapport au cas non visqueux (en prenant  $\omega/N \sim 0.5$  et  $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s). Aussi, nous ne tiendrons pas compte de cette correction dans la suite.

### Vitesses de phase et de groupe

Ainsi, un objet oscillant à la fréquence  $\omega$  est susceptible de générer des ondes dans les quatre directions  $\theta$  solutions de (1.28). La figure 1.7, obtenue expérimentalement par E. Ermanuyk, montre les quatre faisceaux en effet générés par un cylindre oscillant dans de l'eau linéairement stratifiée. Les faisceaux présentent une échelle typique provenant non pas de la fréquence d'oscillation de l'objet mais de sa taille. On devine sur cette figure une autre propriété remarquable des ondes internes. On imagine que le mouvement se propage de proche en proche en s'éloignant du cylindre lui ayant donné naissance, c'est-à-dire qu'on devine que la *vitesse de groupe* est le long des faisceaux, telle qu'indiquée par les flèches blanches. La vitesse de phase, indiquée par les flèches noires, est par définition parallèle au vecteur d'onde. Or pour chaque faisceau ces deux directions semblent *perpendiculaires* !

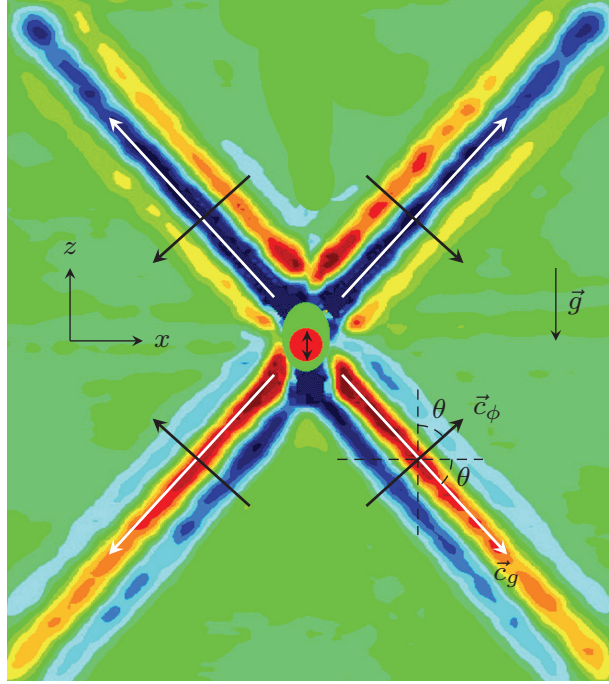


FIG. 1.7 Visualisation des quatre faisceaux provoqués par l'oscillation monochromatique d'un cylindre dans de l'eau stratifiée. Les flèches noires indiquent les vitesses de phase (alignées avec  $\mathbf{u}_k \equiv \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$ ), et les blanches les vitesses de groupe (alignées avec  $\mathbf{u}_{\perp k}$ , défini par  $\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_{\perp k} = 0$  et  $\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_z$  de signe opposé et  $\mathbf{u}_{\perp k} \cdot \mathbf{e}_z$ ). Figure extraite de [19], réalisée par E. Ermanuyk.

En effet, en utilisant (1.28) on montre que la vitesse de phase, définie<sup>1</sup> par  $\mathbf{c}_\varphi \equiv (\omega/|\mathbf{k}|^2)\mathbf{k}$ ; et la vitesse de groupe définie par  $\mathbf{c}_g \equiv \nabla_{\mathbf{k}}\omega$  sont égales à

$$\mathbf{c}_\varphi = N \frac{k_x}{k^3} \mathbf{k} \quad (1.30)$$

$$\mathbf{c}_g = \text{sign}(k_x) N \frac{k_z}{k^3} (k_z \mathbf{e}_x - k_x \mathbf{e}_z) \quad (1.31)$$

et sont donc bien perpendiculaires ( $\text{sign}(k_x) = 1$  si  $k_x > 0$  et  $-1$  sinon). En définissant  $\mathbf{u}_k$  le vecteur unitaire porté par  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{u}_{\perp k}$  le vecteur unitaire perpendiculaire à  $\mathbf{k}$  tel que  $\mathbf{u}_{\perp k} \cdot \mathbf{e}_z$  et  $\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{e}_z$  soient de signes opposés, on a

$$\mathbf{c}_\varphi = \frac{N}{k} \sin \theta \mathbf{u}_k \quad (1.32)$$

$$\mathbf{c}_g = \frac{N}{k} \cos \theta \mathbf{u}_{\perp k}. \quad (1.33)$$

On voit ainsi clairement qu'à pulsation (et donc angle  $\theta$ ) fixée, les vitesses de groupe et de phase grandissent linéairement avec la longueur d'onde.

<sup>1</sup> La vitesse de phase du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  est par définition la vitesse à laquelle se déplace un motif de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Comme ce motif est infini, elle est définie de façon non-univoque par le produit-scalaire  $\omega(\mathbf{k}) = \mathbf{v}_\varphi(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}$ . Pour compléter la définition, nous ajoutons la condition couramment employée  $\mathbf{v}_\varphi(\mathbf{k}) \parallel \mathbf{k}$ , qui conduit à  $\mathbf{v}_\varphi(\mathbf{k}) \equiv (\omega(\mathbf{k})/k) \mathbf{u}_k$ .

## Énergie

L'écoulement dispose de deux réservoirs d'énergie accessibles : son énergie cinétique et son énergie potentielle. On définit la première par

$$E_c \equiv \frac{1}{2} \int dV (u^2 + w^2), \quad (1.34)$$

et la deuxième par

$$E_p \equiv \frac{1}{2N^2} \int dV b^2. \quad (1.35)$$

La première définition découle de l'approximation de Boussinesq, dans laquelle on néglige les fluctuations de densité devant le terme inertiel. Cette définition correspond alors à l'énergie cinétique totale du fluide divisée par la densité de référence  $\rho_r$ . La définition 1.35 de  $E_p$  est elle aussi compatible avec la définition usuelle de l'énergie potentielle. En effet, en utilisant la définition 1.16 de la fluctuation de flottabilité  $b$  on a

$$E_p = \frac{1}{2N^2} \int dV \left( \frac{\rho - \rho_0}{\rho_r} g \right)^2 \quad (1.36)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{g}{N\rho_r} \right)^2 \left( \int \rho^2 - \int \rho\rho_0 + \int \rho_0^2 \right). \quad (1.37)$$

Le dernier terme de cette somme ne varie pas dans le temps et peut donc être omis. Le premier terme aussi, car en négligeant la diffusion on assure que  $\rho$  suit une équation d'advection  $D_t\rho = 0$  ce qui assure, en l'absence de flux au travers des bords du domaine, la conservation de toutes les intégrales de la forme  $\int dV f(\rho)$  où  $f$  est une fonction quelconque. Ne reste plus que le deuxième terme, qui devient, en utilisant  $\rho_0(z) = -\rho_r N^2 z/g + c^{nst}$ ,

$$E_p = \frac{1}{\rho_r} \int dV \rho g z + c^{nst}, \quad (1.38)$$

où l'on reconnaît bien l'énergie potentielle usuelle divisée par  $\rho_r$ . On note aussi que le caractère quadratique de l'énergie potentielle est intimement lié à la linéarité de la stratification ;  $N(z)$  non constant donnant une forme non quadratique (c'est-à-dire non harmonique) à l'énergie potentielle.

## Réflexion des ondes internes

Les expériences conduites lors de cette thèse ont été réalisées en milieu fini. Les ondes évoluent dans une enceinte fermée et sont donc susceptibles de se réfléchir contre les parois. De même, les ondes internes océaniques sont susceptibles d'interagir avec le plancher océanique. Étudions plus précisément ces réflexions, en considérant une

onde de la forme  $\varphi_i = \varphi_i^0 e^{-i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})}$  incidente sur une paroi plane définie par son vecteur normal unitaire  $\mathbf{e}_n$ . On note  $\mathbf{e}_t$  le vecteur normal tangent, comme indiqué sur le schéma de la figure 1.8. Sur la paroi, l'impénétrabilité assure que la vitesse est tangentielle et donc que la fonction d'onde est constante. Nous la prendrons égale à zéro. L'onde réfléchie doit permettre de satisfaire cette condition aux limites  $\varphi(\mathbf{r}, t) = 0, \forall (\mathbf{r} \in \text{paroi}, t)$ . On en déduit les contraintes usuelles

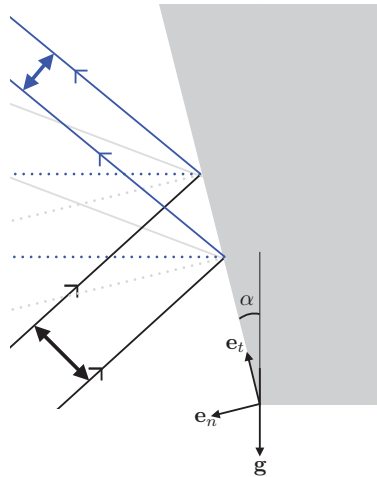
$$\varphi_r = \varphi_r^0 e^{-i(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} \quad (1.39)$$

avec

$$\omega_r = \omega_i \quad (1.40)$$

$$\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{e}_t = \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{e}_t \quad (1.41)$$

Pour des ondes usuelles, la conservation de la fréquence au cours de la réflexion implique la conservation de la longueur d'onde. On aboutit alors à une réflexion dite *spéculaire*, comme représentée en gris clair sur le schéma de la figure 1.8, où le faisceau réfléchi conserve l'angle par rapport à  $\mathbf{e}_n$ . Mais ici, la conservation de  $\omega$  implique la conservation de l'angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale.



**FIG. 1.8** Schéma de la réflexion d'un faisceau d'ondes internes sur une paroi plane quelconque, inclinée d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale. Le faisceau incident est représenté en noir, et le faisceau réfléchi en bleu. Les lignes grises indiquent une réflexion spéculaire obtenue pour des ondes telles que  $\omega = f(|\mathbf{k}|)$  comme les ondes acoustiques ou optiques. En effet, les traitillés gris indiquent la normale à la surface, alors que les traitillés bleus marquent l'horizontale. Les doubles flèches indiquent une échelle perpendiculaire du faisceau, comme sa taille ou la longueur d'onde.

Si la paroi n'est ni horizontale ni verticale le faisceau voit alors sa longueur d'onde changer, par *focalisation* ou *défocalisation* en fonction de l'angle d'incidence (le schéma

de la figure 1.8 correspond à une focalisation). On montre à partir des conditions (1.40) et (1.41) que le rapport entre les normes des vecteurs d'onde réfléchi et incident s'écrit

$$\frac{k_r}{k_i} = \left| \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos(\theta + \alpha)} \right| \equiv \gamma, \quad (1.42)$$

ce qui définit le paramètre de focalisation  $\gamma$ . Dans le cas d'une focalisation,  $\gamma > 1$  et pour une défocalisation,  $\gamma < 1$ .

De manière générale, n'importe quelle échelle spatiale dans la direction perpendiculaire au faisceau se voit divisée par  $\gamma$  après la réflexion. Par exemple, la largeur typique du faisceau s'amincit d'un facteur  $\gamma$  lors d'une focalisation. Si on néglige toute forme de dissipation, on a alors la densité volumique d'énergie qui change d'un facteur  $\gamma^2$ . En effet, le flux incident d'énergie vaut  $\phi_i = c_{g_i} L_i e_i$ , où  $e_i$  est la densité d'énergie du faisceau incident,  $L_i$  sa largeur et  $c_{g_i}$  sa vitesse de groupe. Par conservation de l'énergie, ce flux est égal au flux sortant  $\phi_r = c_{g_r} L_r e_r$ . Comme  $L_r = L_i/\gamma$  et que par ailleurs  $c_g \propto 1/\lambda$  avec  $\lambda_r = \lambda_i/\gamma$ , on a bien

$$e_r = \gamma^2 e_i. \quad (1.43)$$

Dans cette thèse nous avons exploité cette propriété remarquable de *focalisation* des ondes internes afin d'en étudier le régime non linéaire. En effet, plus l'amplitude des ondes augmente plus l'influence des termes non linéaires de (1.24) et (1.25) se fait sentir. Pour cela, nous avons utilisé une géométrie fermée particulière permettant de faire converger l'onde, par réflexions successives, sur un cycle limite appelé attracteur. La forte densité d'énergie présente sur l'attracteur le rend alors sensible aux non linéarités.

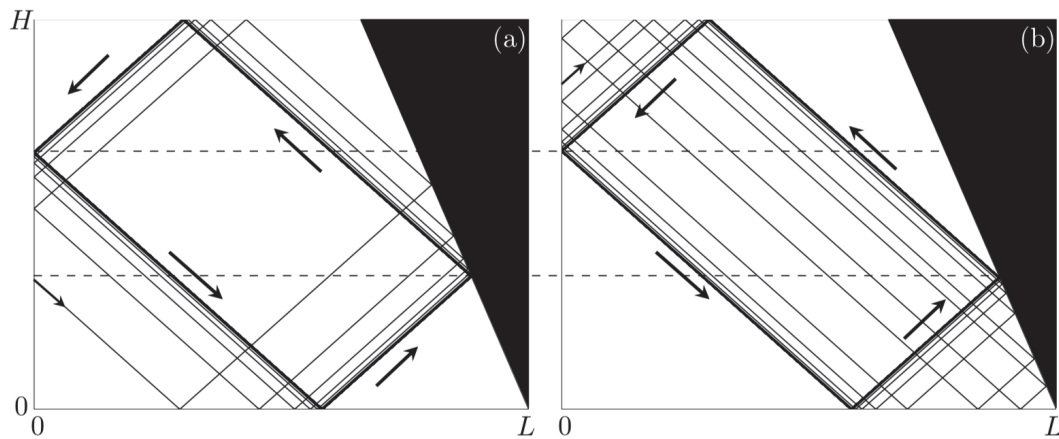
### 1.2.3 Attracteur d'ondes internes

Les attracteurs d'ondes internes ont été mentionnés pour la première fois en 1995 par Maas & Lam [69]. Quelques années plus tard, Maas *et al.* [70] observaient le premier attracteur expérimental d'ondes internes. De nombreuses expériences ont suivi [73, 51, 50, 22, 10], ainsi que des simulations numériques [45, 49, 56, 21], et de nouveaux outils théoriques [68, 61]. La forte densité locale d'énergie sur l'attracteur le rend susceptible de se déstabiliser par interaction triadique résonnante (voir 1.2.4), ce qui a été étudié expérimentalement dans notre équipe [98, 30]. La généralisation à trois dimensions a aussi été explorée dans l'équipe [91]. Il a été montré que dans des situations génériques, la dynamique à 3D tendait vers une dynamique à 2D, justifiant ainsi l'étude de la dynamique d'attracteurs bidimensionnels.

Nous allons brièvement exposer ici les attracteurs présents dans une géométrie 2D trapézoïdale, qui est celle que nous avons utilisée expérimentalement au cours de

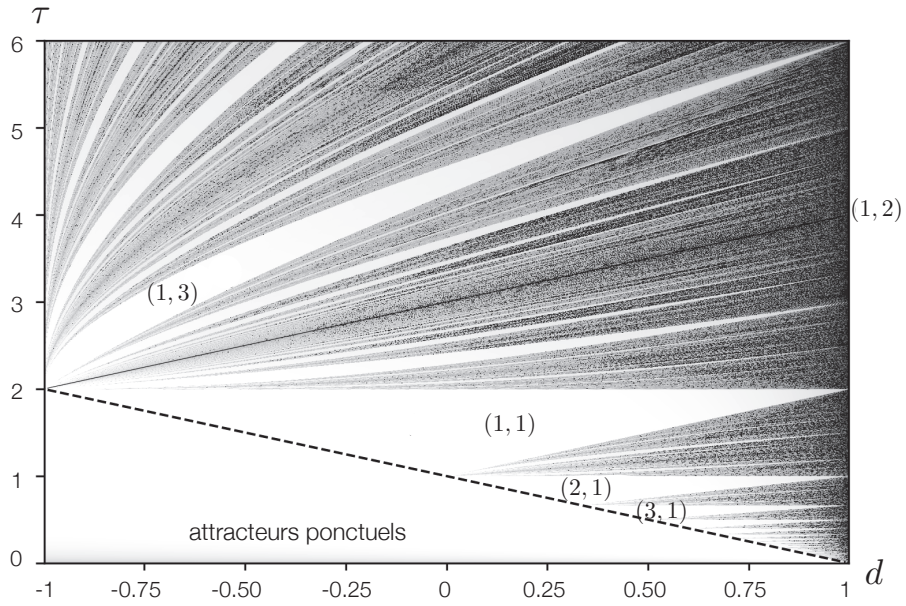
cette thèse. Un outil utile pour l'étude des attracteurs est le tracé de rayon, où par *rayon* on désigne une caractéristique de la fonction courant, solution de l'équation d'onde (1.26) dans laquelle on néglige la viscosité. On montre que ces caractéristiques sont parallèles à la vitesse de groupe, c'est-à-dire qu'elles forment des portions de droite d'angle  $\pm\theta$  par rapport à l'horizontale. Une fois la fréquence fixée, un rayon est donc défini par un point (usuellement pris au bord gauche du domaine, là où l'on émet les ondes) et une direction (vers le haut, ou vers le bas).

La figure 1.9 montre un tel tracé, pour deux rayons différents correspondant à la même fréquence. On constate non seulement que chacun des deux rayons converge vers une trajectoire limite – de forme parallélépipédique – mais en plus que cette trajectoire limite est commune. On peut montrer dans ce cas que quelles que soient la position et la direction initiales d'un rayon, il converge vers cette même trajectoire, appelée attracteur.



**FIG. 1.9** Deux tracés de rayons dans la même géométrie et pour la même fréquence. Les petites flèches à gauche indiquent le point de départ et la direction initiale des rayons, et les grandes flèches indiquent le sens de parcours de la trajectoire limite obtenue. Les traitillés horizontaux sont des guides pour les yeux afin de vérifier que ces deux trajectoires limites sont bien identiques. Figure extraite de [19].

Pour quantifier la force d'attraction d'un attracteur, Maas *et al.* ont employé le concept d'exposant de Lyapunov [69], qui caractérise la vitesse de convergence de deux trajectoires initialement très proches. Un exposant de Lyapunov négatif correspond à une convergence exponentielle, alors qu'un exposant positif décrit un comportement chaotique. Dans [70], les auteurs montrent que pour la géométrie trapézoïdale, toutes les fréquences sont associées à un exposant négatif ou nul. La figure 1.10 montre la valeur de cet exposant pour différentes dimensions de cuve et différentes fréquences.



**FIG. 1.10** Diagramme  $(d, \tau)$  extrait de [70].  $d \equiv 1 - (2H/L) \tan \alpha$  encode les dimensions de la cuve et  $\tau \equiv (2H/L) \sqrt{(N/\omega)^2 - 1}$  la fréquence de l'excitation. L'échelle des gris représente la valeur de l'opposé de l'exposant de Lyapunov, en échelle logarithmique. Les zones claires correspondent à des régions pour lesquelles l'exposant de Lyapunov est fortement négatif, donc à une convergence rapide des rayons. Les régions plus foncées correspondent à des valeurs plus proches de zéro, donc à des attracteurs faiblement attractifs.

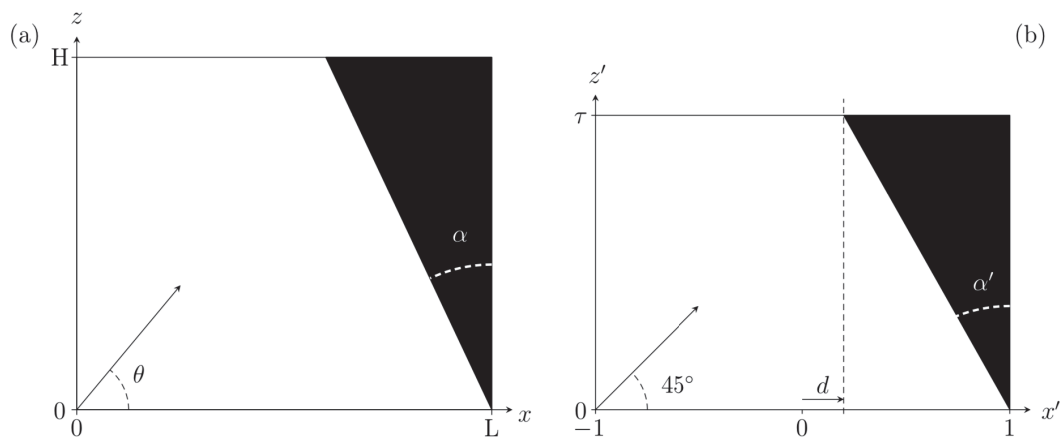
Cette figure peut surprendre, car la géométrie de la cuve est définie par deux nombres – l'angle  $\alpha$  et le rapport d'aspect hauteur sur largeur  $H/L$  (dans le modèle non visqueux le système est invariant par homothétie) – et la fréquence considérée constitue un troisième paramètre. Pourtant, la figure 1.10 montre l'exposant de Lyapunov en fonction de deux paramètres seulement, notés  $d$  et  $\tau$ . En effet, les auteurs ont montré que le problème était en fait entièrement caractérisé par seulement deux paramètres car le changement de variable

$$x \rightarrow \frac{2x}{L} - 1 \quad (1.44)$$

$$z \rightarrow \frac{2z}{L} \sqrt{(N/\omega)^2 - 1} \quad (1.45)$$

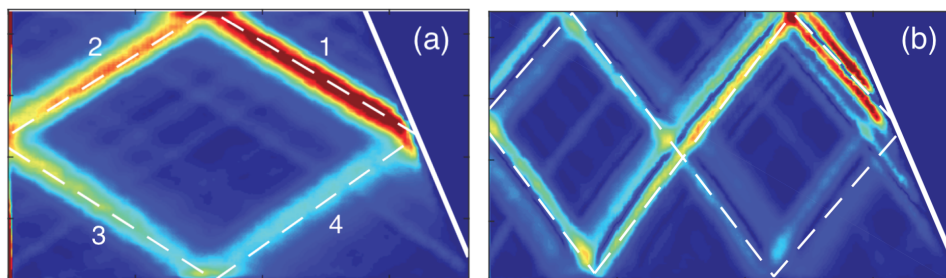
implique que l'angle  $\theta$  des rayons devient fixé :  $\theta \rightarrow 45^\circ$  ; ce qui retire une variable au problème. Comme montré à la figure 1.11, les auteurs choisissent ensuite de caractériser la géométrie obtenue après ce changement de variables par sa nouvelle hauteur  $\tau \equiv (2H/L) \sqrt{(N/\omega)^2 - 1}$ , et la distance  $d \equiv 1 - (2H/L) \tan \alpha$  séparant le milieu de la cuve de l'extrémité haute de la pente.





**FIG. 1.11** (a) Configuration expérimentale, caractérisée par les trois nombres  $H/L$ ,  $\theta$  et  $\alpha$ . (b) Géométrie du problème après le changement de variable (1.45).  $\tau$  est la nouvelle hauteur et  $d$  la nouvelle distance entre  $x = 0$  et la position haute de la pente.  $\theta$  vaut alors  $45^\circ$ . L'angle  $\alpha'$  de la pente est alors entièrement déterminé par  $d$  et  $\tau$ .

Revenons à la figure 1.10. Les zones claires correspondent à des exposants de Lyapunov très négatifs, donc à des attracteurs très attractifs. On en distingue plusieurs, labellisées par deux nombres. Le premier correspond au nombre de réflexions contre la surface, et le deuxième au nombre de réflexions contre la pente. La figure 1.12 montre par exemple un attracteur (1, 1) et un attracteur (2, 1). Par ailleurs, nous introduisons sur cette figure la convention utilisée pour numéroté les 4 branches de l'attracteur (1, 1). La branche 1 correspond à la branche la plus énergétique, donc celle suivant la réflexion focalisante contre la pente. Les autres branches sont numérotées selon la direction de propagation de l'énergie (anti-horaire).



**FIG. 1.12** Attracteur (1, 1) (a) et (2, 1) (b). Figure extraite de [90]. On a indiqué par des chiffres sur la figure (a) le nom donné aux 4 branches de l'attracteur (la numérotation commence après la réflexion focalisante).

Il est particulièrement important de noter que ces zones claires de la figure 1.10 sont *continues*. En effet, si les zones entre les langues claires montrent une structure très complexe les zones des attracteurs  $(n, m)$  sont chacune continues, ce qui permet d'obtenir expérimentalement sans trop de difficultés les attracteurs correspondants.

Ainsi, les attracteurs peuvent être vu comme un outil pratique pour l'étude expérimentale du régime non linéaire des ondes internes. Mais par ailleurs, des travaux affirment qu'il est très probable que des attracteurs existent sur Terre. Ainsi, Tang et Peacock [102] ont exploré la possibilité d'attracteurs dans un fluide non uniformément stratifié. Ils ont montré que par exemple le détroit de Luçon (situé entre Taiwan et les Philippines) présente une topographie à deux crêtes – semblable à celle explorée expérimentalement par Echeverri *et al.* [35] – susceptible d'héberger des attracteurs. Guo et Holmes-Cerfon ont plus récemment étudié analytiquement et numériquement la présence d'attracteurs au dessus d'une géométrie 2D aléatoire [46]. En choisissant des valeurs typiques, ces auteurs arrivent à la conclusion qu'il existe environ 10 attracteurs tous les 1000 kilomètres. Ces travaux, adjoints de ceux de Pillet [91] démontrant que l'existence d'un attracteur à deux dimensions peut mener au piégeage des ondes à trois dimensions, sont des indicateurs prometteurs quand à l'existence d'attracteurs dans la nature.

#### 1.2.4 Régime faiblement non linéaire

Les équations (1.24) et (1.25) contiennent des termes non linéaires. Quelles en sont les conséquences ?

Si on considère une onde plane  $\{\varphi = \varphi_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, b = b_0 e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}\}$ , on a  $J(\Delta\varphi, \varphi) = 0$  et  $J(b, \varphi) = 0$ . Ainsi, les ondes planes sont solutions du problème non linéaire. On peut même montrer [101] que tout faisceau monochromatique d'ondes parallèles est solution du problème non linéaire. En effet, si on considère les coordonnées  $\xi, \eta$  où  $\xi$  est le long du faisceau et  $\eta$  est perpendiculaire, le terme non linéaire se réécrit  $J(\varphi, b) = \partial_\xi \varphi \partial_\eta b - \partial_\xi b \partial_\eta \varphi$ . Si le faisceau est invariant selon la direction longitudinale  $\xi$  on a alors  $J(\varphi, b) = 0$ . Ainsi, le faisceau solution du problème linéaire est aussi solution du problème non linéaire. Néanmoins, ce n'est pas parce qu'un faisceau d'onde est solution du problème non linéaire qu'il en est une solution stable. Dans le cas des ondes internes, un faisceau est en effet susceptible de se déstabiliser par instabilité résonnante triadique (TRI), par laquelle une onde primaire cède de l'énergie à deux ondes secondaires qui émergent à partir du bruit.

Cette instabilité a d'abord été observée par Davis et Acrivos [33] et Hasselman [47] en 1967, dans le cas d'une interface entre deux fluides de densité différentes. McEwan est le premier à étudier de telles interactions dans un liquide linéairement stratifié [75, 76, 77]. Il observe par ombroscopie la déstabilisation dans une cuve rectangulaire d'une onde stationnaire générée par une paroi mobile (similaire au générateur utilisé dans cette thèse). Ces expériences sont reprises plus tard par Benielli et Sommeria [11], qui génèrent l'onde primaire par un forçage en volume, en faisant vibrer la cuve entière. Ces expériences exhibent la présence d'un seuil à l'instabilité. En parallèle, des simulations numériques conduites par Bouruet-Aubertot *et al.* [18] permettent

de mesurer les taux de croissance et les vecteurs d'onde des ondes secondaires. La conception d'un nouveau générateur [78] a permis dans l'équipe de contrôler finement l'onde primaire et de pouvoir investiguer expérimentalement plus précisément le phénomène. Joubaud *et al.* ont ainsi pu mesurer expérimentalement les vecteurs d'ondes des ondes secondaires ainsi que leur taux de croissance, dans le cas d'un mode vertical [55]. Bourget *et al.* ont poursuivi l'étude en étudiant la déstabilisation d'un faisceau [16]. Enfin, l'effet stabilisant de la largeur finie du faisceau a été mis en évidence [16] et expliqué théoriquement [17, 57]. Si l'instabilité triadique a déjà été observée dans des attracteurs [98, 22, 56], les taux de croissance n'ont à notre connaissance pas encore été établis théoriquement.

### Interaction triadique

L'instabilité triadique est un cas particulier d'interaction triadique, qui consiste en une interaction permettant l'échange d'énergie entre trois composantes différentes du champ, appelées *ondes*, chacune étant solution du problème linéaire<sup>1</sup>. En effet, si les non linéarités sont suffisamment faibles, la notion d'onde est encore pertinente pour décrire le champ. La forme des termes non linéaires imposent certaines conditions dite de *résonance* nécessaires à cette interaction.

**Conditions de résonance** On cherche la solution de (1.24) et (1.25) sous la forme d'une somme d'ondes planes, chacune solution du problème linéaire, et d'amplitudes lentement variables

$$\varphi = \sum_j \Psi_j(t) e^{-i(\omega_j t - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})} + c.c. \quad (1.46)$$

$$b = \sum_j R_j(t) e^{-i(\omega_j t - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})} + c.c. \quad (1.47)$$

où  $j$  est un entier<sup>2</sup> et les  $\omega_j$  sont tels que  $\omega_j = N|\sin \theta_{\mathbf{k}_j}|$ . En effet, dans toute la suite de cette thèse, **on définira les ondes avec une pulsation positive**, le vecteur d'onde appartenant lui au plan  $\mathbb{R}^2$  complet<sup>3</sup>. On obtient alors

$$\sum_j \left[ -k_j^2 (\dot{\Psi}_j - i\omega_j \Psi_j) + ik_{xj} R_j - \nu k_j^4 \Psi_j \right] e^{-i(\omega_j t - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})} + c.c. = -J(\Delta\varphi, \varphi) \quad (1.48)$$

$$\sum_j \left[ \dot{R}_j - i\omega_j R_j - iN^2 k_{xj} \Psi_j \right] e^{-i(\omega_j t - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})} + c.c. = -J(b, \varphi). \quad (1.49)$$

<sup>1</sup> On étend parfois cette définition aux échanges d'énergie entre 3 oscillations dont deux seulement sont solutions linéaires, voir le paragraphe *interaction non résonnantes* ci-dessous.

<sup>2</sup> Nous supposons en effet par simplicité un ensemble discret d'ondes. Néanmoins, la condition de résonance établie dans ce paragraphe ne dépend pas de ce caractère discret.

<sup>3</sup> Cette convention est autorisée par la symétrie hermitienne  $a(-\omega, -\mathbf{k}) = a^*(\omega, \mathbf{k})$  où  $a$  est le champ de flottabilité, de fonction courant, ... qui est *réel*.

Les termes de gauche représentent l'évolution linéaire de la dynamique, où chaque onde est découplée de ses voisines. En effet, en l'absence des termes de droite et en négligeant la viscosité, ce système conduit à  $\dot{\psi} = \dot{R} = 0$  car on a choisi les  $\omega_j$  sur la relation de dispersion. Ce système linéaire est forcé par les termes non linéaires de droite, qui amènent les amplitudes des ondes à varier par échange d'énergie. En notant de façon formelle  $e^{(j)} \equiv e^{-i(\omega_j t - \mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r})}$ , on a chacun des termes de gauche qui est proportionnel à  $e^{\pm(j)}$ , et chacun des termes de droite à  $e^{\pm(j_1) \pm (j_2)}$  (les signes “-” provenant des complexes conjugués). Pour que l'onde  $(j_0)$  voit son amplitude varier, il faut donc qu'il existe  $(j_1, j_2)$  tel que

$$\omega_{j_0} \pm \omega_{j_1} \pm \omega_{j_2} = 0 \quad (1.50)$$

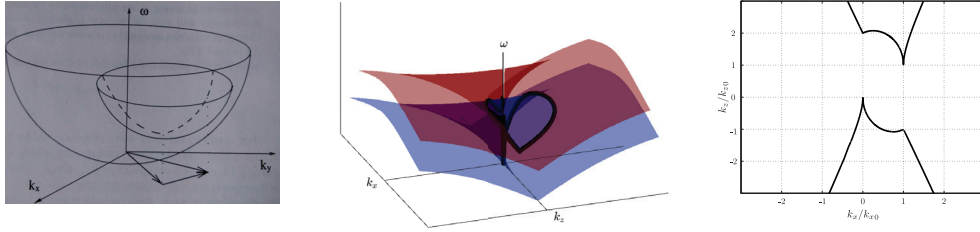
$$\mathbf{k}_{j_0} \pm \mathbf{k}_{j_1} \pm \mathbf{k}_{j_2} = 0. \quad (1.51)$$

Ces deux relations, avec les trois relations  $\omega = \omega^L(\mathbf{k})$ , constituent les *conditions de résonance*. On voit qu'elles font intervenir trois ondes : on parle d'interaction *triadique*.

**Interactions non résonnantes** Si l'on se fixe deux ondes au hasard, définies par leurs vecteurs d'onde  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ , il est infiniment peu probable que l'une des quatre ondes de vecteur d'onde  $\pm \mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$  et de fréquence  $\pm \omega_2 \pm \omega_1$  satisfasse exactement la relation de dispersion. Néanmoins, nous verrons au chapitre 4 qu'expérimentalement nous voyons le signe de telles interactions. Car cette troisième onde, si elle n'est pas solution du problème linéaire, peut exister dans le cadre non linéaire. Nous appellerons cette onde *onde liée*, car son existence est conditionnée par la présence d'autres ondes, et l'interaction lui donnant naissance une interaction *non résonnante*. Si l'on ne se fixe qu'une seule des trois ondes en interaction, le système constitué des conditions de résonance admet-il des solutions ?

**Lieu des résonances** Soit une onde *primaire* de vecteur d'onde  $\mathbf{k}_0$  fixé. On se demande quels sont les couples d'ondes  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  susceptibles d'interagir de façon résonnante avec cette onde primaire. Le système constitué de (1.50), (1.51) et des trois conditions sur les couples  $(\omega, \mathbf{k})$  est un système à 6 équations et 7 inconnues. Aussi, si l'ensemble des solutions n'est pas vide, il est de dimension 1. Pour déterminer cet ensemble, on peut adopter la démarche visuelle usuellement employée pour les autres systèmes d'ondes en interaction non linéaire (ondes de surface, ondes dans les plaques vibrées), qui consiste à regarder l'intersection de deux surfaces.

La figure 1.13(a) montre ce raisonnement dans le cas d'une relation de dispersion de la forme  $\omega = k^2$ . La première surface, centrée en  $(k_x = 0, k_z = 0)$ , correspond aux ondes  $(\mathbf{k}_1, \omega_1)$ . La deuxième surface est obtenue en traçant les points de coordonnées  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1^0 + \mathbf{k}_2, \omega = \omega_1^0 + \omega_2$ , où  $(\mathbf{k}_1^0, \omega_1^0)$  est un point arbitraire choisi sur la première surface et  $(\mathbf{k}_2, \omega_2)$  est tel que  $\omega_2 = (k_2)^2$ .



**FIG. 1.13** Méthode graphique pour déterminer le lieux des résonances à trois ondes. (a) Dans le cas d'une relation de dispersion  $\omega = k^\alpha$  (extraite de [85]). (b) Pour les ondes internes. La surface bleue est constituée des points tels que  $\omega = \sin \theta_k$ , et la rouge des points tels que  $\omega - \omega_1^0 = \sin \theta_{k-k_1^0}$ , où  $(\omega_1^0, \mathbf{k}_1^0)$  est un point arbitrairement choisi sur la surface bleue. (c) Couples  $(k_{x1}, k_{z1})$  pour lesquels on a l'interaction résonnante  $(1) + (2) = (0)$ .

Les points de l'intersection, tracée en traitillées, sont alors solutions du système

$$\omega_1 = \omega^L(\mathbf{k}_1), \quad \omega_2 = \omega^L(\mathbf{k}_2), \quad \omega_3 = \omega^L(\mathbf{k}_3) \quad (1.52)$$

$$\omega_1^0 + \omega_2 = \omega_3 \quad (1.53)$$

$$\mathbf{k}_1^0 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3. \quad (1.54)$$

La figure 1.13(b) montre ce même raisonnement pour les ondes internes bidimensionnelles étudiées dans cette thèse. La relation de dispersion étant plus complexe, le lieu de l'intersection, indiqué par un trait noir, est moins facile à visualiser. En pratique, on n'utilise donc pas cette représentation. De plus, cette illustration permet de déduire  $(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)$  tel que  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3$  à partir de  $\mathbf{k}_1$ , alors que dans le cas de l'instabilité triadique on cherche  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$  étant donné  $\mathbf{k}_3$ . En effet, Hasselman a démontré qu'une onde se déstabilise toujours en donnant naissance à deux fréquences plus basses [47]. Ainsi, l'onde (3) constitue l'onde primaire de propriétés  $(\mathbf{k}_3, \omega_3)$  connues, et l'on cherche  $\mathbf{k}_1$  et  $\mathbf{k}_2$ . Pour indiquer que l'onde notée jusqu'ici (3) est l'onde primaire, on la note souvent (0). On représente alors la projection dans le plan  $(k_x, k_z)$  de l'intersection de deux surfaces différentes de celles représentées à la figure 1.13, mais l'esprit de la méthode reste le même. On obtient alors la courbe représentée à la figure 1.13(c).

**Différents types d'interaction** Comme les ondes internes interagissent par triades, on peut distinguer deux types d'interaction. Une de type  $(0) \rightarrow (1) + (2)$ , qui est une *instabilité*; et une de type<sup>1</sup>  $(1) \pm (2) \rightarrow (3)$ , qui nécessite donc la présence initiale de deux ondes. On peut montrer à partir de 1.25, 1.24 (voir par exemple [15]) que l'instabilité  $(0) \rightarrow (1) + (2)$  présente un seuil, et correspond à une croissance exponentielle des ondes secondaires (1) et (2); alors que le deuxième type  $(1) \pm (2) \rightarrow (3)$  correspond à une croissance linéaire de l'onde (3), sans seuil.

<sup>1</sup> Qui n'est pas désignée comme *instabilité* car la superposition des ondes (1) et (2) n'est pas une solution du problème linéaire.

## Turbulence d'onde

L'instabilité triadique permet donc de générer deux ondes secondaires à partir d'une onde primaire. Si ces ondes secondaires sont assez énergétiques, elles sont susceptibles de se déstabiliser elles mêmes, créant de nouvelles ondes. On peut ainsi imaginer, par interactions successives, peupler un continuum d'ondes en interaction. Un tel régime correspond à celui de la turbulence d'onde, où le champ est décrit par une superposition d'ondes (c'est-à-dire de composantes satisfaisant le système linéaire) qui s'échangent, sur des temps longs, de l'énergie. Comme en turbulence 3D, l'énergie est injectée à grande échelle et est transmise de proche en proche dans l'espace des échelle jusqu'à une échelle dissipative. La conservation de ce flux  $\epsilon$  à travers les échelles implique que le spectre d'énergie suit une loi de puissance, appelée spectre de Zakharov, de la forme

$$E_{\mathbf{k}} \propto \epsilon^{1/(n-1)} k^{-r}, \quad (1.55)$$

où  $r > 1$  et  $n$  est le nombre d'ondes par interaction ( $n = 3$  pour des interactions triadiques comme ici). On pourra consulter [85] pour plus d'informations sur la turbulence d'ondes, et notamment pour les prédictions théoriques des différents spectres attendus en fonction du type d'ondes en interaction. Or, Garret et Munk [42, 43] ont montré que les différentes mesures de vitesse et de densité réalisées *in situ* dans les océans pouvaient, sous l'hypothèse d'ondes internes très horizontales (*i.e.* avec  $k_x \ll k_z$ ) être synthétisée en un spectre unique exposé sous la forme

$$E_{k_x, k_z} = \frac{2fNE k_z/k_z^*}{\pi(1 + k_z/k_z^*)^{5/2}(N^2k_x^2 + f^2k_z^2)}, \quad (1.56)$$

où  $f$  est la fréquence de Coriolis (voir 1.1.1). Par changement de variables, et en supposant  $\omega \gg f$ , ce spectre implique

$$E_{\omega} \propto \omega^{-2} \quad (1.57)$$

Dès lors, l'existence d'un phénomène sous-jacent expliquant cette invariabilité a été recherchée. Sous cette même hypothèse d'ondes "se propageant verticalement", Lvov et Tabak ont obtenu théoriquement un spectre très proche de celui de Garrett & Munk [67]. Néanmoins, la nature particulière de la relation de dispersion des ondes internes rend à notre connaissance plus délicate l'application du formalisme de turbulence d'ondes dans le cas général. Si la turbulence d'onde a été explorée expérimentalement dans différents systèmes, comme les ondes de surface de gravité [25], gravito-capillaires [38, 8], dans des ondes internes d'inertie [109], dans des plaques élastiques [80] ou dans des plasmas [34], à notre connaissance peu d'expériences en laboratoire étudient la turbulence d'ondes internes de gravité.

## 1.3 Au laboratoire

### 1.3.1 Dispositif expérimental

Sauf exception, les expériences présentées dans cette thèse ont été réalisées au moyen du dispositif expérimental présenté à la figure 1.14. La cuve, de dimension  $H = 920$  mm,  $L = 1750$  mm et  $W = 170$  mm, est associée à une paroi coulissante inclinée d'un angle  $\alpha$  réglable par rapport à la verticale. Avant de réaliser une expérience, on remplit la cuve sans cette pente avec de l'eau linéairement stablement stratifiée en sel, en utilisant la méthode dite *des deux bacs* (voir par exemple [15]). Un remplissage dure typiquement 4 h. On coulisce ensuite la pente vers le bas, suffisamment lentement pour ne pas mélanger le fluide.

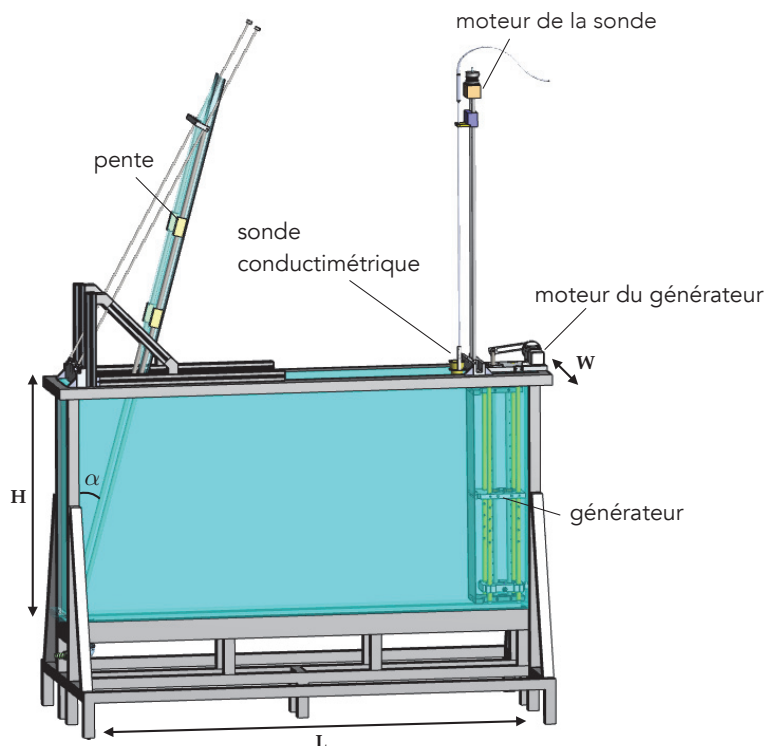


FIG. 1.14 Schéma du dispositif expérimental. La pente peut coulisser le long de l'axe incliné par rapport à la verticale d'un angle  $\alpha$  réglable. Le générateur, en face, consiste en une plaque flexible maintenue verticale à ces deux extrémités. Un moteur translate de façon antisymétrique ces deux extrémités. La sonde conductimétrique permet de mesurer la stratification du fluide au repos

La stratification initiale est ensuite mesurée au moyen d'une sonde conductimétrique MSCTI, translattée le long de la verticale au moyen d'un moteur pas-à-pas. La descente dure environ 5 minutes. Avant chaque expérience, cette sonde est préalablement calibrée au moyen d'un densimètre Anton-Paar DMA 35. Les détails concernant l'utilisation et la calibration de la sonde conductimétrique sont donnés en annexe A. La figure 1.15 donne un exemple de profil de densité mesuré. Typiquement, le haut de la

cuve est occupée par de l'eau douce et le bas par de l'eau de densité  $1.060 \text{ kg/m}^3$ , ce qui donne une pulsation de flottabilité autour de  $0.7 \text{ rad/s}$ .

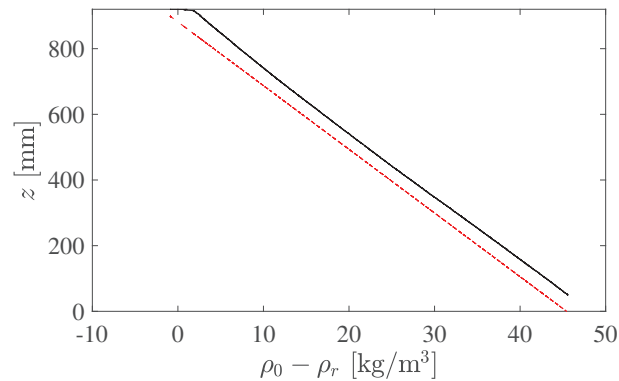


FIG. 1.15 Exemple de profil de densité mesuré à l'aide de la sonde conductimétrique (en noir). En rouge est tracé un ajustement linéaire.

Une fois la cuve ainsi préparée, on génère les ondes au moyen d'un générateur positionné en face de la pente (voir figure 1.14). Il est constitué d'une plaque souple verticale, fixe en son milieu et dont les extrémités haute et basse sont libres de translater horizontalement, de façon anti-symétrique. Cette translation est actionnée par un moteur pas à pas dont le mouvement de rotation est converti en translation au moyen d'un système de type bielle-manivelle. Ce dispositif a été amélioré en cours de thèse, en remplaçant le système bielle-manivelle par un translateur sur tige filetée réalisée par Marc Moulin. Timothée Jamin a amélioré le contrôle du moteur, en permettant d'envoyer n'importe quelle consigne de déplacement *via* Matlab<sup>®</sup>.

**Champ de vitesse généré par le générateur** L'annexe B montre que la plaque du générateur a une forme très proche d'un mode 1. Aussi, lorsqu'on la translate selon un mouvement monochromatique, sa vitesse est décrite par

$$u_g(z, t) = a_0 \omega \cos(\omega t) \cos(z\pi/H), \quad (1.58)$$

où  $a_0$  est l'amplitude du déplacement des extrémités de la plaque.

Peut-on déduire de la vitesse de la plaque oscillante celle du fluide à son contact ? Mercier et al. ont caractérisé un générateur d'onde similaire [79] (il est constitué de plaquettes horizontales oscillant dans leur plan). Ils ont montré que la structure du champ généré était très proche de celui prédit par une transmission de la vitesse horizontale du générateur au fluide (et avec la vitesse verticale déduite par la théorie linéaire des ondes internes), à un facteur multiplicatif près. Ce facteur, compris entre 0 et 1, est un facteur d'efficacité. Il est de l'ordre de 0.7 pour  $\omega/N \simeq 0.5$ . Malheureusement, la même étude expérimentale dans la gamme des fréquences utilisées dans cette thèse est impossible, car le temps pour atteindre le régime stationnaire – quelques



périodes d'excitation donc quelques dizaines de secondes – est supérieur au temps de retour de l'onde  $2L/c_g \simeq 17$  s. Le signal ne s'interprète alors plus comme le seul champ créé par le générateur mais comme une superposition d'ondes, rendant bien plus délicate la déduction d'une efficacité du générateur. En l'absence d'information, nous allons donc supposer que le générateur employé est d'efficacité 1, et donc qu'il génère, en l'absence de rebond et de viscosité, un écoulement de la forme

$$u(x, z, t) = a_0 \omega_0 \cos(mz) \cos(\omega_0 t - \ell x) \quad (1.59)$$

$$w(x, z, t) = -a_0 \omega_0 \frac{\ell}{m} \sin(mz) \sin(\omega_0 t - \ell x). \quad (1.60)$$

L'écoulement résultant de l'excitation par le générateur est observé au moyen de deux méthodes : le schlieren synthétique, qui donne accès au champ de gradient de densité, et la PIV qui donne accès au champ de vitesse.

### Le schlieren synthétique

Cette méthode, développée par Dalziel, Graham et Sutherland [28], repose sur la propriété des rayons lumineux d'être déviés par les gradients d'indice ainsi que sur la variation de l'indice optique de l'eau avec sa concentration en sel. Ainsi, si l'on observe une scène à travers une cuve remplie d'eau plus ou moins salée, ce que l'on voit dépend des gradients de salinité de l'eau en tout point dans la cuve. Si l'on suppose que l'indice optique de l'eau ainsi que sa densité ne dépendent que de sa concentration en sel (*i.e.* qu'on a un effet négligeable de la température) on a une relation univoque entre indice optique et densité. On peut alors, sous certaines hypothèses, déduire de l'observation d'un motif connu à travers la cuve le champ de gradients de densité dans le fluide.

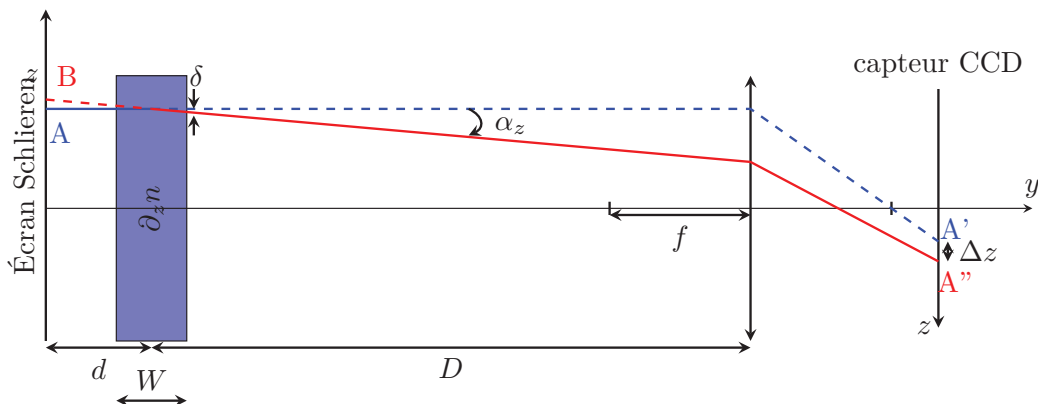


FIG. 1.16 Schéma de fonctionnement de la visualisation de gradient de densité par la méthode du Schlieren synthétique.

Plus précisément, considérons le montage de la figure 1.16, dans lequel un “écran de Schlieren”, sur lequel est imprimé un mouchetis, est observé au travers de la cuve au

moyen d'une caméra. Nous allons nous intéresser à la position de l'image d'un élément particulier du mouchetis, noté  $A$  sur la figure, sur l'écran CCD de la caméra. Si la cuve est remplie d'eau pure, alors ce motif est observé sur le pixel noté  $A'$  de la caméra.  $A'$  est simplement le conjugué de  $A$  par le système optique<sup>1</sup>. Supposons maintenant que l'eau de la cuve présente des gradients de concentration en sel. Les rayons sont alors défléchis par ces gradients et l'élément  $A$  n'est plus observé en  $A'$  mais en  $A''$ . On montre que ce déplacement  $\mathbf{A}'\mathbf{A}'' = (\Delta p_x, \Delta p_z)$  – en pixels – est relié aux gradients de densité dans la cuve

$$\partial_i \rho = r \Delta p_i \frac{n}{Wf} \frac{d\rho}{dn} \frac{d+D-f}{d} \equiv \beta \Delta p_i, \quad (1.61)$$

avec  $r$  la taille physique d'un pixel,  $\beta \equiv r \frac{n}{Wf} \frac{d\rho}{dn} \frac{d+D-f}{d}$ ,  $i = x, z$  et  $d\rho/dn = 4.1 \text{ kg/m}^3$ . L'annexe C explicite et vérifie les hypothèses employées pour la démonstration. En pratique, on compare chaque image à une image de référence obtenue sans onde mais avec la stratification initiale. Le déplacement observé est noté  $\Delta p'_i$ . On a alors

$$\partial_i \rho(t) = \partial_i \rho_0 + \beta (\Delta p_i(t) - \Delta p_i(0)) \equiv \partial_i \rho_0 + \beta \Delta p'_i(t), \quad (1.62)$$

où  $\rho$  désigne ici la densité totale du fluide  $\rho = \rho_0(z) + \rho'$ .

Le champ de déplacement  $\Delta p_i$  du motif est obtenu grâce à un algorithme de corrélation d'image, présentés au paragraphe 1.3.1. Le motif dont on cherche le déplacement est facilement repérable d'une image à l'autre, aussi cette méthode est très robuste et ne nécessite pas de précaution particulière, hormis la stabilité de la caméra au cours de l'expérience. On prendra aussi soin d'échantillonner suffisamment le signal, en acquérant au moins une dizaine de points par période d'excitation. Par ailleurs, notons que cette méthode fournit une quantité intégrée le long de la direction  $y$ . La bi-dimensionnalité de l'écoulement est alors importante pour pouvoir interpréter facilement les résultats.

### Vélocimétrie d'image de particules (PIV)

La technique de PIV –pour *Particle Image Velocimetry*– permet de mesurer le champ de vitesse dans un fluide. Elle consiste à incorporer dans le fluide de petites particules dont on suit le mouvement, supposé identique à celui du fluide environnant.

Lors des expériences présentées dans cette thèse, nous avons utilisé des particules de verre creuse (pour diminuer leur masse) recouverte d'une couche d'argent (pour améliorer leur réflectivité) de diamètre moyen  $d \approx 10 \mu\text{m}$  et de densité  $1.4 \text{ kg/m}^3$ . Malgré l'écart entre leur densité et celle du fluide ( $\rho_{\text{fluide}} \in [1 : 1.10] \text{ kg/m}^3$ ) leur faible taille les fait sédimenter lentement : il faut attendre quelques heures pour que les

<sup>1</sup> Le système optique est constitué de l'objectif, des deux plaques de la cuve et de l'eau.

particules de taille moyenne tombent au fond de la cuve<sup>1</sup>. Par ailleurs, leur dispersion de taille permet de les déposer en début de journée en haut de la cuve et d'avoir, au bout de 3 ou 4 h, un ensemencement suffisamment homogène<sup>2</sup>. Ces particules sont éclairées par une nappe laser créée grâce à une lentille cylindrique. On suit leur mouvement en comparant deux images prises successivement par la caméra à l'aide d'un algorithme de corrélation d'image.

Cette méthode donne donc un champ de vitesse mesuré de la forme  $\mathbf{u}^M(x, z, t)$ , où  $x$ ,  $z$  et  $t$  sont définis sur une grille. Il semble alors tout à fait naturel d'interpréter ce champ de vitesse comme un échantillonnage du champ de vitesse  $\mathbf{u}(x, z, t)$  eulérien du fluide, car les variables dont dépendent ces deux champs sont de même nature. C'est ce que nous ferons dans cette thèse. Néanmoins, il est important de noter que le processus de mesure par PIV est intrinsèquement *Lagrangien*, car l'on *suit* des traceurs. Nous verrons lors du chapitre 4 que nous détectons expérimentalement des conséquences de cette nature Lagrangienne. Le lecteur intéressé pourra consulter l'annexe D qui en développe les premiers termes.

Par ailleurs, l'annexe E recense les principales sources d'incertitudes de la PIV.

### Algorithme de corrélation d'image

Que ce soit avec la méthode de schlieren synthétique ou de PIV, on cherche à mesurer un champ de déplacement entre deux images. Une première méthode consiste à suivre chaque élément individuellement. C'est ce qu'on appelle le "particule tracking", qui donne accès à des champs lagrangiens. Néanmoins, cette méthode est numériquement coûteuse (si on veut une bonne résolution) et n'est pas adaptée aux particules de PIV car elles sont susceptibles de sortir du plan d'observation d'une image à l'autre. Pour palier ce problème, on cherche à suivre non pas des éléments définis mais de petites régions de l'espace. Ces régions sont de forme rectangulaire, de taille suffisamment grosse pour contenir assez de particules qui subsistent entre les deux images, mais suffisamment petites devant l'échelle de variation du champ de déplacement. Dans la pratique, on choisit la taille de ces régions de sorte qu'elles contiennent environ une quinzaine de particules.

L'algorithme cherche ensuite dans la deuxième image la région de l'espace qui ressemble le plus à la région choisie dans la première image. Pour cela, il calcule la fonction de corrélation locale (*i.e.* en se concentrant sur une zone autour de la région considérée) entre les deux images. Le vecteur déplacement est alors donné par l'abs-

<sup>1</sup> L'équilibre entre les forces de gravité et la force de friction de Stokes donne une vitesse  $v_{sed} = 2\Delta\rho g(d/2)^2/(9\eta) \simeq 8 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$  pour  $d \simeq 10 \mu\text{m}$ , ce qui correspond à une sédimentation en 3 h pour tomber au fond de la cuve.

<sup>2</sup> Le fabricant indique  $d \in [2; 20] \mu\text{m}$  et donc le temps de sédimentation varie de moins d'une heure à 80 heures.

cisse du maximum de la corrélation. Dans la pratique, nous avons utilisé le logiciel UVMAT développé par J. Sommeria.

### 1.3.2 Méthodes d'analyse des données expérimentales

Les champs de vitesse ou de gradient de densité sont ensuite analysés au moyen de divers outils numériques que nous présentons ici.

#### Les différentes densités d'énergie

**Définitions** Au cours de cette thèse, nous avons cherché à quantifier la quantité d'énergie portée par certaines fréquences ou certains vecteurs d'onde. Pour cela, posons  $s(x, z, t)$  le signal mesuré, défini pour  $t \in [0 : T]$ ,  $x \in [0 : L_x]$  et  $z \in [0 : L_z]$ .  $s$  est le champ de vitesse horizontal ou vertical dans le cas d'une expérience observée par PIV, ou le champ de gradient de densité horizontal ou vertical dans le cas d'une expérience en Schlieren Synthétique. On définit alors l'énergie de ce signal par

$$E = \frac{1}{T} \frac{1}{L_x L_z} \int dx dz dt (s(x, z, t))^2. \quad (1.63)$$

Cette définition, pas tout à fait compatible avec la définition physique d'une énergie<sup>1</sup>, a été choisie car elle est symétrique par rapport aux variables d'espace et de temps. On utilise ensuite le théorème de Plancherel - qui assure la conservation de la norme  $L^2$  par la transformée de Fourier – pour définir les différentes densités d'énergie. Cette procédure s'inspire de travaux antérieurs (voir par exemple [109]). La table 1.1 recense les définitions des différentes densités d'énergie construite à partir de  $E$ . Dans cette thèse, chaque expérience donne lieu à l'acquisition de deux signaux ( $u$  et  $v$  ou  $\partial_x \rho$  et  $\partial_z \rho$ ), dont nous sommes alors les contributions.

Dénomination	Définition	Dimension
Densité spectrale / spectre	$E_{\omega} \equiv \frac{1}{L_x L_z} \frac{1}{T} \int dx dz  s(x, z, \omega) ^2$	$[s]^2 \cdot T$
Densité spatiale	$E_{k_x, k_z} \equiv \frac{1}{L_x L_z} \frac{1}{T} \int dt  s(k_x, k_z, t) ^2$	$[s]^2 \cdot L^2$
Densité spatio-temporelle	$E_{k_x, k_z, \omega} \equiv \frac{1}{L_x L_z} \frac{1}{T}  s(k_x, k_z, \omega) ^2$	$[s]^2 \cdot L^2 \cdot T$
Densité dans l'espace de $(\theta, \omega)$	$E_{\theta, \omega} \equiv \frac{1}{L_x L_z} \frac{1}{T} \int dk k  s(k, \theta, \omega) ^2$	$[s]^2 \cdot \cdot T$

**TAB. 1.1** Définitions des différentes densités d'énergie. Nous avons gardé la même notation pour la fonction  $s$  et sa transformée de Fourier. La dénomination utilisée dans cette thèse, parfois abusive, est indiquée dans la première colonne.

<sup>1</sup> Dans le cas où  $s$  est une vitesse,  $E$  est homogène à une densité massique d'énergie.

Notons tout de même que dans la plupart des cas, l'on *compare* des densités d'énergie entre elles. Les facteurs de normalisation ne sont alors pas importants, c'est pourquoi ils ont parfois été omis dans les résultats.

**Évolution dans le temps de  $E_\omega$**  Dans de longues expériences, on peut chercher à voir l'évolution dans le temps du spectre  $E_\omega$ . Pour cela on utilise la représentation temps-fréquence (ou spectrogramme) défini par

$$s(\omega, t) = \left\langle \left| \int s(x, z, t') h(t - t') e^{i\omega t'} dt' \right|^2 \right\rangle_{x,z}, \quad (1.64)$$

où  $h$  est une fenêtre qui vaut zéro partout sauf dans un voisinage de  $t$  de largeur  $\Delta t_s$ . Dans cette thèse, nous avons utilisé une fenêtre *de Hamming*. Cette représentation est accompagnée d'une incertitude intrinsèque de type inégalité d'Heisenberg : plus la fenêtre est longue mieux les fréquences sont résolues mais moins le temps l'est, et *vice versa*.

## Filtrage

On peut aussi chercher à visualiser les composantes spatiales responsables d'une oscillations à une fréquence donnée.

**Filtrage classique** Pour cela on peut tout simplement appliquer un filtrage de Fourier : on multiplie la transformée de Fourier de  $s$  en chaque point  $(x, z)$  par un filtre passe-bande centré sur  $\pm\omega_0$ , avec  $\omega_0$  la fréquence d'intérêt, avant d'en prendre la transformée de Fourier inverse. Comme le filtre est symétrique le champ filtré est réel. A noter que si le filtre est *strict* c'est-à-dire qu'il vaut zéro partout sauf pour un couple  $(-\omega_0, +\omega_0)$  donné, alors le champ filtré sera une pure oscillation : il ne présentera pas de variation d'amplitude avec le temps. Par contre si le filtre possède une largeur  $\delta f$  finie, alors le champ filtré pourra présenter des variations en amplitude sur un temps caractéristique  $\tau = 1/\delta f$ . Il est en fait strictement équivalent d'effectuer un filtrage de Fourier strict *glissant* et un filtrage de Fourier sur le signal total avec un filtre de largeur finie (voir annexe F pour la démonstration).

**Filtrage de Hilbert** Dans le cadre des ondes internes, il existe 4 familles de structures pouvant osciller à la fréquence  $\omega$ , qui correspondent chacune à l'une des quatre solutions  $\theta$  de  $\omega = \pm N \sin \theta$  (voir les quatre faisceaux de la figure 1.7). Comment distinguer ces quatre familles ? Comme ce qui les différencie est la direction de leur vecteur d'onde, on peut penser à filtrer dans l'espace des  $\mathbf{k}$ , et ne garder à chaque instant donné que les composantes de  $s(k_x, k_z, t)$  dans un *cadran* choisi, par exemple  $k_x \geq 0, k_z \leq 0$  si on cherche les structures se propageant vers la droite et vers le bas. Mais à un instant donné, le champ présente une symétrie  $+\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$ , et on ne peut donc distinguer que deux cas :  $\theta = \text{asin}(\omega/N) [\pi]$  et  $\theta = -\text{asin}(\omega/N) [\pi]$ . En effet, pour définir *le sens* du vecteur d'onde il faut pouvoir voir le motif *se déplacer*, et donc

considérer le signal  $s(x, z, t)$  au cours du temps. Une première procédure consiste alors à calculer la transformée de Fourier à 3 dimensions  $s(k_x, k_z, \omega)$  du signal. On peut ensuite isoler le cadran d'intérêt et éventuellement une fréquence d'intérêt en multipliant par un filtre, avant de prendre la transformée de Fourier inverse. Cette procédure est néanmoins coûteuse numériquement, car elle nécessite le calcul de la transformée de Fourier du signal à 3 dimensions et son inverse.

Le filtrage *de Hilbert*, dont l'application pour les ondes internes a été développée par Mercier *et al.* [78], permet de contourner astucieusement ce problème en brisant la symétrie  $+\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$ . Nous expliquons ici brièvement l'esprit de cette méthode. On calcule d'abord la transformée de Fourier temporelle de  $s(x, z, t)$  en chaque point. On applique ensuite un filtre *de Hilbert* c'est-à-dire que l'on met à zéro toutes les composantes de fréquences négatives. On peut éventuellement filtrer en plus autour d'une fréquence d'intérêt, avant de revenir dans l'espace direct par transformée de Fourier inverse. On calcule ensuite *aux instants choisis* la transformée de Fourier 2D du champ obtenu après la première étape. Ce champ est complexe, on perd donc la symétrie  $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$ , et on peut alors filtrer aisément pour ne garder que le cadran voulu.

La table 1.2 estime le coût numérique de ces deux méthodes. Pour simplifier, on a noté  $n$  le nombre de points du vecteur temps, égal au nombre de point du vecteur des  $x$  ainsi que des  $z$ . Dans ce tableau,  $j$  désigne le nombre de champs donnés en sortie du filtrage de Hilbert, c'est-à-dire le nombre d'instants pour lesquels on effectue le filtrage spatial. On constate avec ce tableau que pour  $j \ll n$ , ce qui est très souvent le cas expérimentalement où on a typiquement  $j \sim 10, n \sim 100 - 1000$ , le filtrage de Hilbert est effectivement la méthode la plus efficace : elle est environ 3 fois plus rapide que la méthode de filtrage classique. Sans surprise, on constate que lorsque  $j = n$  les estimations des coûts numériques des deux méthodes sont strictement égales.

Classique		de Hilbert	
TF <sub>3</sub>	$3n^2 \times (n \ln n)$	TF <sub>1</sub>	$n^2 \times (n \ln n)$
<i>multiplication</i>	$1 \times n^3$	<i>multiplication</i>	$n^2 \times n$
TF <sub>3</sub> <sup>-1</sup>	$3n^2 \times (n \ln n)$	TF <sub>1</sub> <sup>-1</sup>	$n^2 \times (n \ln n)$
		TF <sub>2</sub>	$2nj \times (n \ln n)$
		<i>multiplication</i>	$n^2 \times j$
		TF <sub>2</sub> <sup>-1</sup>	$2nj \times (n \ln n)$
total	$\sim 6n^3 \ln n$	total ( $j \ll n$ )	$\sim 2n^3 \ln n$

**TAB. 1.2** Calcul du coût numérique d'un filtrage classique et d'un filtrage de Hilbert, permettant de filtrer un cadran particulier des vecteurs d'onde.  $n$  est le nombre de point en temps, en  $x$  et en  $z$ .  $j$  est le nombre de champs donnés en sortie du filtrage de Hilbert.

### 1.3.3 Mesure de liens de phases

Il existe plusieurs moyen d'explorer expérimentalement les interactions triadiques. La première – la plus naturelle – consiste à rechercher dans le signal les signes des conditions de résonance sur les fréquences et sur les nombres d'onde. Elle se base donc sur le calcul de transformées de Fourier temporelles ou spatiales exposées au début de cette section. La deuxième, employée par exemple dans [39] ou [9], se base sur les liens de phases qu'engendre une telle interaction. En effet, à cause des multiples interactions, les phases des ondes fluctuent et peuvent donc de façon générale être considérées comme des variables aléatoires de distribution plate. Mais si trois ondes interagissent, leurs phases respectives sont alors déterminées par les équations (1.24) et (1.25). Nous allons chercher à détecter dans les données cette corrélation dans les phases, afin d'en déduire la présence d'une interaction triadique. Nous allons voir que la quantité d'intérêt est *la bicohérence*, dont nous allons affiner la définition au cours de cette section.

#### Bispectre

Imaginons que l'on soupçonne les ondes (1) et (2) d'interagir selon  $(1) + (2) \rightarrow (3)$ . On calcule alors la covariance entre  $A \equiv S(\omega_1)S(\omega_2)$  et  $B \equiv S(\omega_1 + \omega_2)$ , définie par  $\mathbb{E}[AB^*]$ . Ici,  $S$  et donc  $A$  et  $B$  sont des variables aléatoires et  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance mathématique.  $S$  est un signal décrivant l'état du système, comme l'un des deux champs de vitesse ou de gradient de densité.  $S$  dépend à la fois de la position et du temps, mais pour l'instant nous allons supposer une position  $(x, z)$  fixe. Pour estimer cette espérance nous allons utiliser un signal issu d'une expérience en régime stationnaire. Les quantités mesurées, fluctuantes, sont supposées statistiquement stationnaires et on peut alors approcher l'espérance mathématique par la moyenne empirique, prise au cours du temps. L'échantillon statistique sur lequel est pris la moyenne est alors donné par l'ensemble des signaux  $\{s_t(\omega)\}_t$ , où l'indice  $t$  indique que l'on a fenêtré le signal autour de  $t$  avant de calculer la transformée de Fourier. Par continuité, nous savons que  $s_t(\omega)$  ne peut pas varier sur des temps beaucoup plus rapides que la taille  $\Delta t_s$  de la fenêtre temporelle employée. Aussi, pour réduire la quantité de calculs, on utilise comme échantillon statistique  $\{s_{t_i}(\omega)\}_{t_i}$  où les  $t_i$  n'explorent pas tous les instants mais varient par incrément de  $\Delta t_s/2$  (on parle d'un *overlap* de 50% car deux signaux consécutifs se chevauchent "à moitié"). Le module de cette covariance est appelée *bispectre*

$$\text{bispectre}(\omega_1, \omega_2) \equiv \left| \langle s(\omega_1, t)s(\omega_2, t)s^*(\omega_3, t) \rangle_t \right|. \quad (1.65)$$

Prenons un exemple. Supposons que l'on ait  $S(\omega_1)S(\omega_2) = S_1S_2$ , avec  $\mathbb{E}[S_1] = s_1$  et  $\mathbb{E}[S_2] = s_2$ , et  $S(\omega_1 + \omega_2) = S_3e^{i\phi}$ , où  $\mathbb{E}[S_3] = s_3$ . On voit alors que

- $\phi = c^{nste} \Rightarrow \text{bispectre}(\omega_1, \omega_2) = |s_1s_2s_3^*|$

- $\phi$  complètement aléatoire<sup>1</sup>  $\Rightarrow$  bispectre( $\omega_1, \omega_2$ ) = 0

Une valeur non nulle du bispectre indique donc que la phase relative entre  $S(\omega_1)S(\omega_2)$  et  $S(\omega_1 + \omega_2)$  n'est pas complètement aléatoire, et donc que ces ondes interagissent. Néanmoins, une forte valeur de bispectre reflète à la fois une phase non aléatoire et une forte valeur des amplitudes  $s_1, s_2$  et  $s_3$ .

### Bicohérence

Pour lever cette indétermination, il faut retirer l'influence des amplitudes. On utilise alors la *bicohérence*, quantité positive définie par

$$\text{bic}^2(\omega_1, \omega_2) \equiv \frac{|\langle s(\omega_1, t)s(\omega_2, t)s^*(\omega_1 + \omega_2, t) \rangle_t|^2}{\langle |s(\omega_1)s(\omega_2)|^2 \rangle_t \langle |s(\omega_1 + \omega_2)|^2 \rangle_t}. \quad (1.66)$$

Cette normalisation, qui n'est pas partagée par tous les auteurs, est néanmoins naturelle car elle implique<sup>2</sup>

$$0 \leq \text{bic}(\omega_1, \omega_2) \leq 1. \quad (1.67)$$

Pour reprendre l'exemple précédent, on voit qu'on a alors

- $\phi = c^{nste} \Rightarrow \text{bic}(\omega_1, \omega_2) = 1$
- $\phi$  complètement aléatoire  $\Rightarrow \text{bic}(\omega_1, \omega_2) = 0$ .

On dispose alors d'un bon indicateur pour sonder l'aspect déterministe ou aléatoire de la phase relative entre trois ondes, en un point  $(x, z)$  donné.

**Espace de définition** Comme énoncé plus haut (voir 1.2.4), pour éviter la redondance due au caractère réel des signaux analysés, nous ne considérons que les fréquences positives. Aussi, la bicohérence ne devrait être définie que pour  $\omega_1 \geq 0, \omega_2 \geq 0$ . Néanmoins, on pourrait envisager d'étendre son espace de définition par un demi-plan,  $\omega_1 \in \mathbb{R}, \omega_2 \geq 0$  par exemple, afin de déceler d'autres types d'interactions triadiques comme (1) – (2)  $\rightarrow$  (3). Dans la pratique, nous avons constaté qu'étendre l'espace de définition apporte peu d'informations. En effet, à cause de la symétrie hermitienne, on a

$$\text{bic}(\omega_1, -\omega_2) \equiv \frac{\langle |s(\omega_2)s(\omega_1 - \omega_2)|^2 \rangle_t \langle |s(\omega_1)|^2 \rangle_t}{\langle |s(\omega_1)s(\omega_2)|^2 \rangle_t \langle |s(\omega_1 - \omega_2)|^2 \rangle_t} \text{bic}(\omega_2, \omega_1 - \omega_2) \quad (1.68)$$

$$\simeq \text{bic}(\omega_2, \omega_1 - \omega_2). \quad (1.69)$$

<sup>1</sup> C'est-à-dire de distribution plate sur  $[0; 2\pi]$  et non corrélée à  $S_1, S_2$  ou  $S_3$ .

<sup>2</sup> En effet, la bicohérence peut être interprétée à l'aide du produit scalaire complexe entre les vecteurs  $\mathbf{x}_a \equiv \{s_i(\omega_1)s_i(\omega_2)\}_i$  et  $\mathbf{x}_b \equiv \{s_i(\omega_1 + \omega_2)\}_i$  :  $\text{bic}(\omega_1, \omega_2) = |\mathbf{x}_a \cdot \mathbf{x}_b| / (\|\mathbf{x}_a\| \|\mathbf{x}_b\|)$ . L'inégalité de Cauchy-Schwartz assure alors  $\text{bic}(\omega_1, \omega_2) \leq 1$ .



**Moyenne sur l'espace** Expérimentalement, on dispose d'un champ complet, c'est-à-dire fonction de la position. Il serait alors dommage de n'exploiter qu'une partie de cette information en ne calculant la bicohérence qu'en un point  $(x, z)$  donné. Une première approche consiste simplement à moyenner la bicohérence sur la position

$$\text{bic} \leftarrow \langle \text{bic} \rangle_{x,z}. \quad (1.70)$$

Néanmoins, il existe une autre méthode – plus stratégique – d'incorporer l'information découlant des différentes positions, comme cela est réalisé par exemple dans [9]. Elle consiste à remplacer dans l'expression (1.66) la moyenne sur le temps par une moyenne sur le temps *et l'espace*. Cette idée peut surprendre, car si la stationnarité du système assure que la moyenne sur le temps permet bien d'approcher l'espérance mathématique, le système n'est pas du tout homogène ! Il n'y a donc aucune raison pour que la moyenne sur l'espace donne une meilleure estimation de l'espérance. Nous définirons néanmoins la bicohérence avec cette moyenne sur l'espace. En effet, le signal à la fréquence  $\omega$  n'est pas homogène, il a même *a priori* une structure ondulatoire de type  $s(\omega) \simeq \tilde{s}e^{-ik \cdot r}$ . Si l'on suppose cette forme pour toutes les fréquences on a alors

$$\langle s(\omega_1)s(\omega_2)s^*(\omega_1 + \omega_2) \rangle_{x,z} \propto \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3), \quad (1.71)$$

où  $\mathbf{k}_3$  est le nombre d'onde de la structure spatiale oscillant à  $\omega_1 + \omega_2$ . C'est-à-dire qu'en moyennant sur l'espace on impose aussi implicitement la condition de résonance sur les vecteurs d'onde ! On retiendra donc la définition suivante de la bicohérence

$$\text{bic}^2(\omega_1, \omega_2) \equiv \frac{|\langle s(\omega_1, t)s(\omega_2, t)s^*(\omega_1 + \omega_2, t) \rangle_{t,x,z}|^2}{\langle |s(\omega_1)|^2 \rangle_{t,x,z} \langle |s(\omega_1 + \omega_2)|^2 \rangle_{t,x,z}}. \quad (1.72)$$

### 1.3.4 En pratique

**Transformée de Fourier Discrète et filtrage strict** Toutes les transformées de Fourier sont estimées en utilisant l'algorithme de *FFT* de Matlab<sup>®</sup>, qui donne la transformée de Fourier discrète (DFT) du signal. On a en effet  $\text{TF}[s] \simeq \frac{T}{n} \text{DFT}[s]$ , où  $T$  est la longueur du signal et  $n$  est le nombre de points utilisés. Ainsi, la densité spatio-temporelle

$$E_{k_x, k_z, \omega} \equiv \frac{1}{L_x L_z} \frac{1}{T} |s(k_x, k_z, \omega)|^2 \quad (1.73)$$

est estimée par

$$E_{k_x, k_z, \omega} \simeq \frac{L_x L_z T}{n_x^2 n_z^2 n_t^2} |\text{DFT}_3[s](k_x, k_z, \omega)|^2. \quad (1.74)$$

On trouve souvent dans la littérature ou sur internet qu'il faut utiliser le facteur  $1/n$ . Mais ce facteur permet non pas d'estimer la transformée de Fourier à partir de la DFT mais de calculer le champ dans l'espace direct, c'est-à-dire d'estimer la transformée de Fourier inverse à partir d'une DFT. Si par exemple on mesure  $\tilde{s}(\omega_0)$  comme valeur de la DFT en  $\omega = \omega_0$ , on peut reconstituer le champ associé à cette fréquence par  $s(t) = 2\text{Re}[\tilde{s}(\omega_0)] \cos(\omega_0 t)/n$ , où  $\text{Re}[\cdot]$  désigne la partie réelle. Cette méthode permet donc d'obtenir rapidement l'allure spatiale de la structure oscillant à une fréquence donnée, en traçant  $s(x, z) = 2\text{Re}[\tilde{s}(x, z, \omega_0)]/n$ . C'est ce que nous appelons *filtrage strict*.

**Fenêtrage** La durée finie du signal donne lieu à un élargissement des pics des spectres  $E_\omega$ . Pour mieux contrôler la forme de cet élargissement, on peut préalablement fenêtrer le signal, c'est-à-dire le multiplier par une fonction continue qui vaut 0 aux bords. C'est ce qui est par exemple fait dans le calcul du spectrogramme.

**Padding** La résolution en fréquence obtenue vaut  $\delta f = 1/T$ . Pour interpoler le signal sur un ensemble de fréquences plus dense on peut utiliser du *padding*, c'est-à-dire que l'on rajoute des données synthétiques valant zéros au début et à la fin du signal. Cela augmente la longueur du signal et donc la résolution en fréquence. Néanmoins, cette procédure ne rajoute pas de réelle information, et peut être vue comme une méthode d'interpolation (efficace car de faible coût numérique grâce à l'implémentation de la DFT par la FFT).



Le chapitre qui suit reproduit un article [32] soumis à *Journal of Fluid Mechanics* le 15 Mars 2019, et de nouveau, après révisions, le 3 Juillet 2019.

## Energy budget in internal wave attractor experiments

Géraldine Davis, Thierry Dauxois, Timothée Jamin and Sylvain Joubaud

*The current paper presents an experimental study of the energy budget of a two-dimensional internal wave attractor in a trapezoidal domain filled with uniformly stratified fluid. The injected energy flux and the dissipation rate are simultaneously measured from a two-dimensional, two components, experimental velocity field. The pressure perturbation field needed to quantify the injected energy is determined from the linear inviscid theory. The dissipation rate in the bulk of the domain is directly computed from the measurements, while the energy sink occurring in the boundary layers are estimated using the theoretical expression of the velocity field in the boundary layers, derived recently by Beckebanze et al. (J. Fluid Mech. 841, 614 (2018)). In the linear regime, we show that the energy budget is closed, in the steady-state and also in the transient regime, by taking into account the bulk dissipation and, more important, the dissipation in the boundary layers without any adjustable parameters. The dependence of the different sources on the thickness of the experimental set-up is also discussed. In the nonlinear regime, the analysis is extended by estimating the dissipation due to the secondary waves generated by triadic resonant instabilities showing the importance of the energy transfer from large scales to small scales. The method tested here on internal wave attractors can be generalized straightforwardly to any quasi two-dimensional stratified flow.*

### 2.1 Introduction

In fluid mechanics, energy budgets provide useful insights on the mechanisms at play in the energy cascade, the transfer from the large scale of energy injection to the small scales where dissipation is taking place. In geophysical and astrophysical systems, this is of paramount importance to understand the role played by internal gravity waves,

generated through different mechanisms at large scale, in the induced mixing of the fluid occurring at small scales [81, 82, 54, 5, 100].

Recently, there has been a lot of interest in the determination of the injected energy flux into the internal wave field which requires the simultaneous measurement of both velocity and pressure fields. Direct calculations can be rather straightforwardly performed in numerical simulations, since both fields are computed [62, 74, 94]. This is usually much more complicated in laboratory experiments and even more in field measurements where one can have at best the information on a one dimensional line [106]. Different methods have been however proposed depending on the experimental techniques used to visualize the internal waves. [64] require only the velocity field measured using the particle image velocimetry technique (PIV). Density perturbations obtained with the synthetic Schlieren technique can lead to the estimation of the energy flux for linear [27, 4] or nonlinear stratifications [65]. Finally, [83] present the method to compute the energy flux from ocean observations.

The counterpart of the energy sources is the energy sinks. In the ocean, it has been observed that the loss of energy can occur very far from the energy sources. Even if some energy is lost during propagation, some dissipation occurs near topographies indicating that what is happening near boundaries clearly matters in the global energy budget [87]. Indeed, small streamwise undulations of a bottom topography may have an effect on the structure of the viscous boundary layer [89] and can induce a decay of internal tides in the ocean [24]. In laboratory experiments, the propagation of an internal wave beam is affected by viscous damping as initially studied by [103] or through instabilities of internal wave beams [31]. It has been also recently shown that viscous boundary layers can induce strong mean flow due to streaming [52, 95].

In a recent paper, [10] investigate the role of the boundary layers on the resulting spectrum of an internal wave field attractor. The latter for stratified fluids or inertial wave attractors for rotating fluids are a very interesting scenario for energy transfer since energy is linearly transferred through smaller scales due to the focusing on a sloping topography [29]. Depending on the geometry of the domain, multiple reflections can lead to a concentration of wave energy on a closed loop, the so-called internal wave attractor [69, 70]. In the presence of dissipation, the width of the attractor beam is set by the competition between geometric focusing and viscous broadening [96, 88, 45, 51]. [10] model the different dissipation processes and, in particular, take into account the part due to viscous boundary layers. They finally describe with a very good agreement the spectrum of linear internal wave attractors obtained in previous laboratory experiments [51, 21]. Furthermore, high concentration of energy make attractors prone to different instabilities [68]. Several experiments have recently shown the scenario of instability that can occur in internal wave attractors [98, 20, 22] which involves in particular the triadic resonance instability [31]. The effect of these

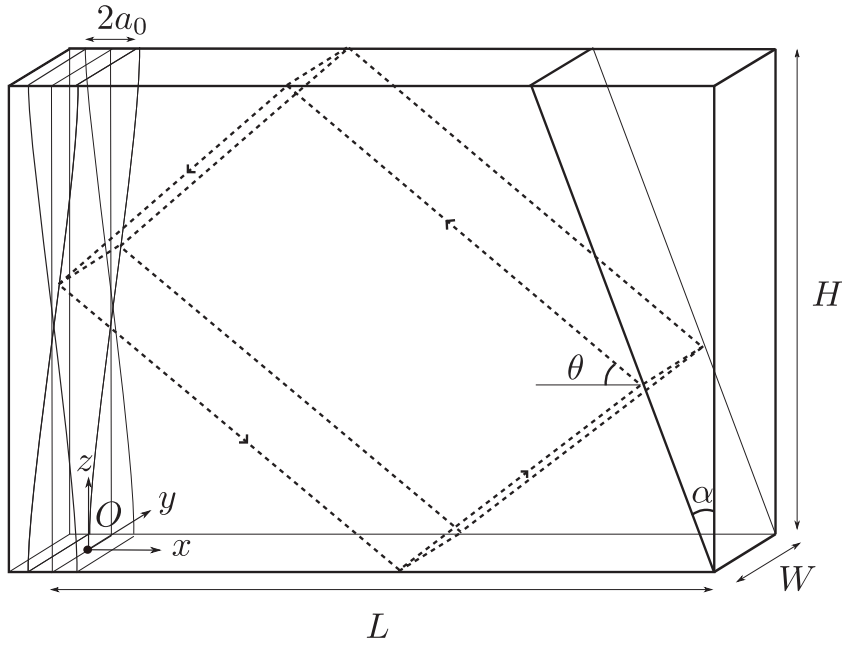
nonlinearities on the dissipation rate for the attractor has been studied numerically by [56].

In the present paper, we consider experimentally the complete energy budget for an internal wave attractor in a trapezoidal geometry. Measuring the velocity field only in the bulk (i.e. outside the boundary layers), we carefully show how to quantify the injected power and the energy sink. Both the internal shear layer and the boundary layers are taken into account. We analyse the complete energy budget in two linear scenarios but also in a nonlinear scenario involving a cascade of triadic resonance instabilities.

The paper is organized as follows. Once the experimental set-up used in the laboratory has been described in § 2.2, we introduce in § 2.3 the corresponding energy budget model. The injection energy flux and the different terms involved in the dissipation rate are then presented. In § 2.4, we first carefully measure and analyse the energy balance in a linear case. In a second stage, when considering nonlinear regimes, we demonstrate that secondary waves emerging in the energy cascade have a non negligible part of the total dissipation. The importance of the dissipation in the boundary layers is then discussed using a linear internal wave attractor in a different experimental set-up. We finally conclude in § 2.5 and draw some perspectives.

## 2.2 Experimental set-up

As shown in figure 2.1, a rectangular tank of size  $L \times W \times H = 2000 \times 170 \times 1000 \text{ mm}^3$  is filled with a fluid linearly stratified with salt and for which density varies from 1.06 kg/L at the bottom to 1.00 kg/L at the surface. The origin  $O$  and the coordinates  $x, y$  (horizontal) and  $z$  (vertical) are defined in the figure 2.1. The buoyancy frequency, defined as  $N = \sqrt{-(g/\rho_r)d\rho_0(z)/dz}$  in which  $\rho_0(z)$  is the density stratification at rest and  $\rho_r$  is the averaged density of the stratified region, is chosen at  $0.68 \pm 0.02 \text{ rad/s}$ . A sloping wall, tilted by an angle  $\alpha$  with respect to the vertical, delimits a trapezoidal fluid domain of length  $L = 1720 \text{ mm}$  (measured along the bottom) and depth  $H = 920 \text{ mm}$ . The system is forced by an internal wave generator (left wall) of the same height  $H$  made of a flexible membrane pivoting around an axis at mid-height. The top and bottom ends remain vertical and are oscillating at the frequency  $\omega_0$  with an amplitude  $a_0$ . These two parameters can be tuned appropriately by a simple electro-mechanic device. The frequency is chosen constant throughout all experiments described here while different amplitudes are used but kept constant during each of them. The position of the flexible membrane can thus be given with a very good agreement by  $a_0 \sin(\omega_0 t) \cos(\pi z/H)$ , where  $z$  is the vertical coordinate taken from the bottom of the tank. Due to the shape of the generator, the vertical component of the induced wavevector is given by  $m = 2\pi/\lambda_z = 2\pi/(2H)$  while the horizontal one,  $\ell = 2\pi\omega_0/(N\lambda_z\sqrt{1 - (\omega_0/N)^2})$ , is obtained using the dispersion

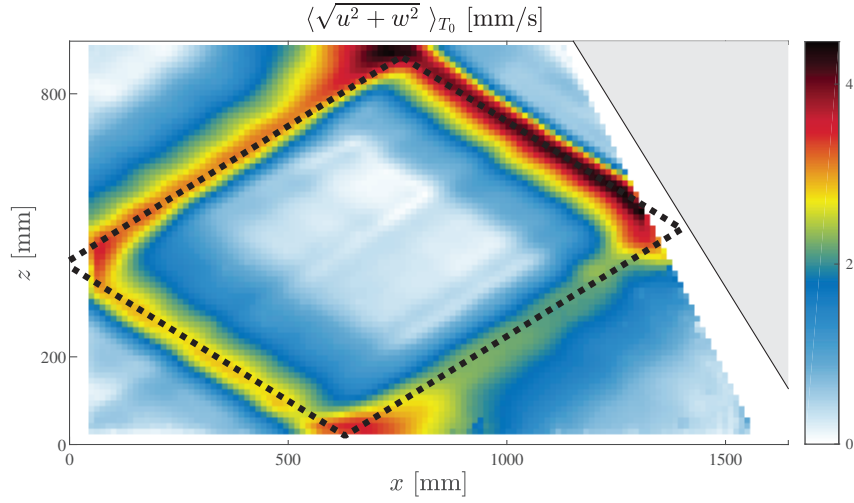


**FIG. 2.1** Schematic view in perspective of the experimental setup. A sloping wall, inclined at an angle  $\alpha$  with respect to the vertical, is put inside an immobile tank delimiting a trapezoidal fluid domain of length  $L = 1720$  mm (measured along the bottom), depth  $H = 920$  mm and thickness  $W = 170$  mm. A flexible membrane is oscillating around an axis located at mid-height, producing an horizontal velocity field  $a_0 \sin(\omega_0 t) \cos(\pi z/H)$ . Black dotted lines show an internal wave billiard geometric prediction of an attractor of frequency  $\omega_0$ . The angle  $\theta$  of the first branch (top right) is given by the dispersion relation  $\omega_0 = N \sin \theta$ . The origin  $O$  is taken at the bottom left part of the fluid domain, at mid-width.

relation  $\omega_0 = N\ell/\sqrt{\ell^2 + m^2} = N \sin \theta$ , with  $\theta$  the angle between the wavevector and the vertical. Note that this angle is also equal to the angle between the rays and the horizontal as displayed in figure 2.1, where *rays* are energy propagation path. The typical wavelength of the injected wave-field  $2H\sqrt{1 - (\omega_0/N)^2}$  is of the order of 1500 mm.

The experimental setup has been designed such that the wave-field is quasi-bidimensional. This means that the transverse velocity field  $v$  can be considered null and that the horizontal and vertical components of the velocity field, denoted  $u$  and  $w$ , do not depend on the transverse direction  $y$ , except in the boundary layers. This property has been experimentally and numerically verified for the linear and weakly nonlinear regime in [21].

The velocity field  $(u, w)$  measured in the vertical mid-plane ( $y = 0$ ) is then monitored as a function of spatial coordinates and time, using the standard PIV technique. The flow is indeed seeded with  $10\text{-}\mu\text{m}$  silver-coated hollow glass spheres of density  $1.4 \text{ kg/m}^3$ , and illuminated by a 532-nm 2W-continuous laser shaped into a vertical sheet. The cross-correlation algorithm [40] is performed by analyzing windows of typical size  $31 \times 31$  pixels with 20% overlap. The final mesh size is approximately 1 cm.



**FIG. 2.2** Spatial evolution within the tank of the amplitude of the velocity field  $\langle \sqrt{u^2 + w^2} \rangle_{T_0}$ , averaged over 10 forcing periods  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  around  $t = 50 T_0$ . The theoretically expected attractor for this geometry is depicted with the dashed line. The parameters of the experiment are  $a_0 = 2$  mm,  $\omega_0/N = 0.52$ ,  $N = 0.68 \pm 0.02$  rad/s and  $\alpha = 29.5^\circ$ . Note that the shadow of the slope modifies the illumination of the laser sheet and therefore hinders the measurement of the velocity field in the region very close to the slope : this is why a mask (in white in the figure) with an angle different from the slope angle has been chosen to avoid ambiguous measurements in this region.

Figure 2.2 presents a typical experimental measurement of the amplitude of the velocity field measured in the steady state and within the linear regime. One clearly sees that the velocity field is focused around the infinitely thin inviscid theoretical attractor, depicted by the dashed line, with counterclockwise energy propagation. Note that the PIV images show a different pattern from the ones obtained using synthetic Schlieren [98, 21]. Indeed, this last technique, being sensible to the gradient of the density, emphasizes the small scales. As one is interested in the energy budget, the PIV technique is more appropriate as we will consider the viscous dissipation, which depends only on the velocity field.

The finite width  $\lambda$  of the attractor (approximately 100 mm) is the result of the equilibrium between focusing after reflection on the slope and the viscous spreading. The amplitude, which is at least five times larger than the wave-maker velocity  $a_0\omega_0$ , attains its maximum just after the focalization on the inclined slope : this is the start of the first branch of the attractor. The amplitude gradually decreases along the attractor to end in the fourth branch, of small amplitude and with a rather large width. After reflection on the slope, the fourth branch is focalized again and one recovers the first branch, thin and with a large amplitude. The dissipation along the attractor is precisely balanced by the focalization and one gets a stable limit cycle, the internal wave attractor.



Now that the experimental set-up has been presented in detail, we will carefully discuss the different contributions involved in the energy budget of internal wave attractors experiments.

## 2.3 Model

### 2.3.1 Energy budget

Let us consider an incompressible, nonrotating, stratified fluid in Cartesian coordinates  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ , where  $\mathbf{e}_z$  is the direction opposite to gravity. In the framework of the Boussinesq approximation, the equations of motion can be written as

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_r} \nabla P + b \mathbf{e}_z + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2.1)$$

$$\partial_t b + \mathbf{u} \cdot \nabla b = -\omega N^2, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

in which  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  is the fluid velocity field,  $\rho_r$  the average density over the stratified region,  $P$  the pressure variation with respect to the hydrostatic equilibrium pressure,  $b = g(\rho_0 - \rho)/\rho_r$  the perturbed buoyancy field,  $N$  the buoyancy frequency and  $\nu$  the kinematic viscosity.

In (2.2), we have neglected the molecular diffusivity, which would imply a term  $D\nabla^2 b$  with  $D$  the diffusion coefficient of the stratifying element. As we discussed, laboratory experiments use salt as stratification agent, so  $D \simeq 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$  which corresponds to the Schmidt number  $\nu/D \sim 10^3$ . Therefore this term can be neglected with respect to the viscous term appearing in (2.1).

Let us recall how it is possible to establish the energy budget of this system as a balance between the injected power and the dissipation rate (see for example [60]). Multiplying (2.1) with  $\mathbf{u}$  and integrating over  $V$ , the whole volume of the tank (bounded by the surface  $S$ ) and using (2.2), one gets

$$\partial_t \int_V dV \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{1}{N^2} \frac{b^2}{2} \right) = -\frac{1}{\rho_r} \int_V dV \mathbf{u} \cdot \nabla P - \int_V dV \mathbf{u} \cdot \nabla \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + \frac{1}{N^2} \frac{b^2}{2} \right) + \nu \int_V dV \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.4)$$

where  $\int_V$  and  $\partial_t$  have been commuted. Indeed, the length of the tank varies only by  $\Delta L/L \sim 0.1\%$ , with a typical time of variation  $t_L = T_0$ . We will see in figure 2.7 in § 2.4 that the integrand increases from zero to its final value on a typical time  $t_e \sim 10 T_0$ , such that  $\Delta L/(L t_L) \ll 1/t_e$ . The variations of the frontiers of  $V$  are thus sufficiently small and slow to be neglected.

The left-hand-side is the variation of the total energy  $E_{\text{tot}}$  that corresponds to the sum of the kinetic and potential energies within the fluid. Note that the latter is defined with respect to the reference stratification which is supposed fixed, no mixing being taken into account.

Let us show that the right-hand-side corresponds to the sum of the energy injection rate and the viscous dissipation rate. We will first focus on the monochromatic case, before considering the polychromatic one in § 2.4.2. First of all, we turn the volume integral into a surface integral, keeping in mind that in an incompressible flow the velocity field satisfies the continuity equation  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ . Denoting  $d\mathbf{S}$  the element of surface which normal is oriented out of the fluid, the first term can therefore be rewritten as

$$-\int_V dV \mathbf{u} \cdot \nabla P = \int_V dV P \nabla \cdot \mathbf{u} - \oint_S P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.5)$$

$$= -\int_{S_g} P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}, \quad (2.6)$$

using the property that the component of the velocity normal to the surface  $S$  vanishes everywhere except on  $S_g$ , the surface of the wave generator where the flexible membrane injects energy in the tank.

In the same way, the second term of the right-hand-side of (2.4) is equal to the energy flux at the boundaries of the domain. Using similar arguments, only the surface of the generator has to be considered. Both quantities  $\mathbf{u}^2 \mathbf{u}$  and  $b^2 \mathbf{u}$  thus vanish when averaged over the forcing period  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , as they are odd power of a trigonometric function. The second term of the right-hand-side of (2.4) is thus equal to zero.

Turning again the volume integral into a surface integral, the last term on the right-hand-side of (2.4) yields

$$\nu \int_V dV \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} = -\nu \int_V dV |\nabla \mathbf{u}|^2 + \nu \oint_S u_i \partial_j u_i dS_j. \quad (2.7)$$

The last term vanishes when considering fixed solid boundaries (right slope and bottom) using the no-slip and no-penetration conditions. It vanishes also at the surface, due to the free-slip condition and because there is no normal variation of the normal velocity, even in the presence of small surface waves. For the remaining boundary - the generator -, the velocity field corresponds essentially to a mode-1 induced by the generator itself. Both quantities  $u \partial_x u$  and  $w \partial_x w$  have thus a vanishing average on the forcing period  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  while  $v = 0$ .

Equation (2.4) is thus rewritten as the energy budget within the tank

$$\partial_t e_{\text{tot}} = p_{\text{inj}} - p_{\text{diss}}, \quad (2.8)$$

which relates, per unit mass, the time variation of the total energy  $e_{\text{tot}} \equiv E_{\text{tot}}/V$  with the injected power

$$p_{\text{inj}} \equiv -\frac{1}{\rho_r V} \int_{S_g} P \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.9)$$

and the dissipation rate

$$p_{\text{diss}} \equiv \frac{\nu}{V} \int_V dV |\nabla \mathbf{u}|^2. \quad (2.10)$$

For convenience, it is useful to introduce the local density of dissipation rate  $\epsilon \equiv \nu |\nabla \mathbf{u}|^2$ . A temporal average over an integer number of forcing periods  $T_0$  will be considered. The method to determine the time-averaged values of the total energy, the injected power and the dissipated rate requires only the velocity field data and will be presented in the following section.

### 2.3.2 Estimation of the different terms from experimental measurements

#### Total energy

Unlike rotating inertial waves where no potential energy can be defined, equipartition of energy between kinetic and potential subparts can be defined for internal waves. The time variation of the total energy can thus be safely obtained from PIV that gives accurate measurements of the velocity components :  $\langle e_{\text{tot}} \rangle_{T_0} = \int_V dV \langle \mathbf{u}^2 \rangle_{T_0} / V$ .

The velocity field has been shown to be bidimensional (*i.e.* only two components invariant in the  $y$ -direction) except in the boundary layers, of typical width  $d = \sqrt{\nu/\omega_0} \sim 1 \text{ mm}$  [21]. So their total volume,  $2dA + dLW$  (where  $L$  is the perimeter of the vertical trapezoidal section of the domain,  $A$  its area and  $W$  the width of the experimental tank) represents only 1% of the total volume of the tank. The measured value of the total energy will thus be computed as  $\langle e_{\text{tot}} \rangle_{T_0} = \int_A dx dz \langle \mathbf{u}^2 \rangle_{T_0} / A$ , where  $\mathbf{u}$  is measured in the mid vertical plane only.

Because of some experimental issues near boundaries, the measured area is a bit smaller than the total area of the trapezoidal domain. However since this difference is small we assume that the sampled area is representative enough so that our measure of the average energy density is correct.

#### Injected power

As the generator is everywhere almost vertical, one can safely approximate (2.9) by

$$p_{\text{inj}} \simeq \frac{1}{\rho_r A} \int_z P u \, dz. \quad (2.11)$$

The determination of the injected power requires therefore the simultaneous measurement of the horizontal velocity field and the pressure near the wavemaker on the

left boundary of the tank ( $x = 0$ ). This kind of generator forces a purely propagating mode-1 with an amplitude  $u_0$  slightly lower than  $a_0\omega_0$  depending on the efficiency of the wave maker (see [79]),

$$u^{\text{M1}}(x, z, t) = u_0 \cos(mz) \cos(\omega_0 t - \ell x). \quad (2.12)$$

Using the incompressibility equation and assuming that the flow is two-dimensional, one can straightforwardly get the vertical component,

$$w^{\text{M1}}(x, z, t) = -u_0 \frac{\ell}{m} \sin(mz) \sin(\omega_0 t - \ell x), \quad (2.13)$$

induced in the fluid by the generator. The associated pressure field can be deduced by projection of the linear inviscid version of (2.1) on the  $x$ -axis, followed by a straightforward integration

$$P^{\text{M1}}(x, z, t) = \rho_r u_0 \frac{\omega_0}{\ell} \cos(mz) \cos(\omega_0 t - \ell x), \quad (2.14)$$

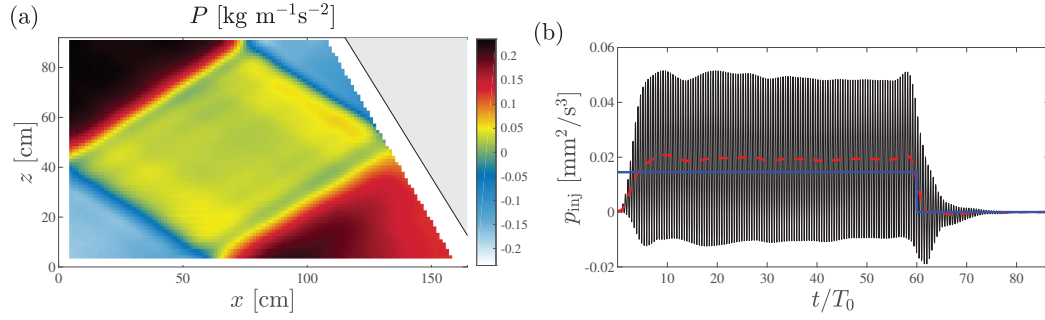
in which the constant of integration is set to zero since  $P$  accounts only for the pressure variation with respect to the hydrostatic equilibrium pressure. The time-averaged theoretically injected power can then be computed as

$$\langle p_{\text{inj}}^{\text{M1}} \rangle_{T_0} = u_0^2 N \frac{H^2}{4\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{N}\right)^2} \frac{1}{A}. \quad (2.15)$$

This theoretical development is valid for a pure propagating mode-1. However, such approximation may be questioned in the presence of the slope, since the size of the closed domain has been chosen to get strong reflected beams, which is required to the formation of the attractor. Some feedback on the forced wave-field from its reflection on the slope is then expected.

To go beyond, it is possible to use the PIV measurements to compute both the pressure and horizontal velocity appearing in (2.11). Indeed, if the PIV technique gives directly the horizontal velocity field, the pressure field can be obtained from  $u$  and  $w$  as follows. Since the width of the attractor  $\lambda$ , which is the typical length of variation of the velocity field in the transverse direction of the branch, is much larger than  $d$ , we use the linear and inviscid approximation of (2.1) and (2.2) to get the experimental pressure gradient, which is then integrated using the Matlab<sup>®</sup> code *intgrad2*, available on [www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/](http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/). The unknown constant of integration necessary for this last step is not important since mass conservation implies  $\int_{S_\phi} u \, dydz = 0$ , leading to a vanishing contribution to the injected power. Thus we arbitrarily choose  $\langle P \rangle_A = 0$ .

An example of the computed pressure field is presented in figure 2.3(a). The pressure field is different from the pure mode-1 pattern (2.14) : this will have some conse-



**FIG. 2.3** (a) Pressure field  $P$ , computed via an integration of the experimental velocity fields  $u$  and  $w$ . The unimportant constant of integration is arbitrarily chosen to have a zero average pressure field. The pattern is computed about  $50 T_0$  after the generator was started. (b) Evolution in time of the injected power computed at  $x_0 = 5$  cm. The oscillating black curve corresponds to the instantaneous measurement, while the red dashed curve is the associated local mean. The generator is switched on at  $t = 0$  while turned off at  $t = 60 T_0$ . The thick blue line corresponds to the theoretical injected power (2.15) expected for a pure mode 1, i.e. neglecting the reflection on the slope. Experimental parameters are those given in the caption of figure 2.2.

quences on the estimation of the injected power. Because of the integration, the pressure field emphasizes the large scale motion contrary to the density gradient or velocity fields that show the attractor (see for example figure 2.2).

Figure 2.3(b) shows the time evolution of the injected power  $p_{inj}$  (solid black line) for a typical experiment in the linear regime. For visualisation purposes, this flux of energy is measured at  $x_0 \simeq 5$  cm, as will be discussed in § 2.4.1.  $p_{inj}$  is oscillating with a mean value (dashed line) that first increases until reaching its stationary value. As soon as the generator is turned off, it decreases towards zero. One notes that the measured value is above  $\langle p_{inj}^{M1} \rangle_{T_0}$  (thick blue line), i.e. the theoretical injected power (2.15) expected for a pure mode 1 neglecting the finite size of the domain due to the reflection on the slope.

### Disentangling the different contributions for the dissipative terms

As already mentioned, the two-dimensional PIV measurements give access to the velocity field in the middle plane  $y = 0$  and can be extended to the volume except in the boundary layers. In the remainder of the paper, this is named the bulk part. Since the thickness of the boundary layers is very small, the velocity gradient may be strong in these regions and the associated dissipative term cannot be neglected. It is therefore convenient to distinguish several different contributions as follows

$$p_{diss} = \frac{1}{V} \int_V dV \nu |\nabla \mathbf{u}|^2 \quad (2.16)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{V} \int_{V_{bulk}} dV \nu \underbrace{|\nabla \mathbf{u}|^2}_{\epsilon_{bulk}}}_{p_{bulk}} + \underbrace{\frac{1}{V} \int_{V_{BL,\perp}} dV \nu \underbrace{|\nabla \mathbf{u}|^2}_{\epsilon_{\perp}}}_{p_{\perp}} + \underbrace{\frac{1}{V} \int_{V_{BL,\parallel}} dV \nu \underbrace{|\nabla \mathbf{u}|^2}_{\epsilon_{\parallel}}}_{p_{\parallel}}. \quad (2.17)$$

This definition disentangles the bulk dissipation (denoted with the index *bulk* and that one can expect to measure accurately), from the contributions of the boundary layers close to the walls. Among the last ones, we distinguish the dissipation in the boundary layers along the longitudinal walls (parallel to the measurement plane and therefore perpendicular to  $y$ , denoted with the index  $\parallel$ ), from the dissipation in the boundary layers perpendicular to the attractor plane (denoted with the index  $\perp$ ). Let us discuss these three different terms successively.

In the bulk, the transverse velocity  $v$  is equal to zero and the velocity components  $u$  and  $w$  do not depend on  $y$ . The contribution of the bulk can thus be computed rather straightforwardly from the measurements of the velocity field shown in figure 2.2 using the formula

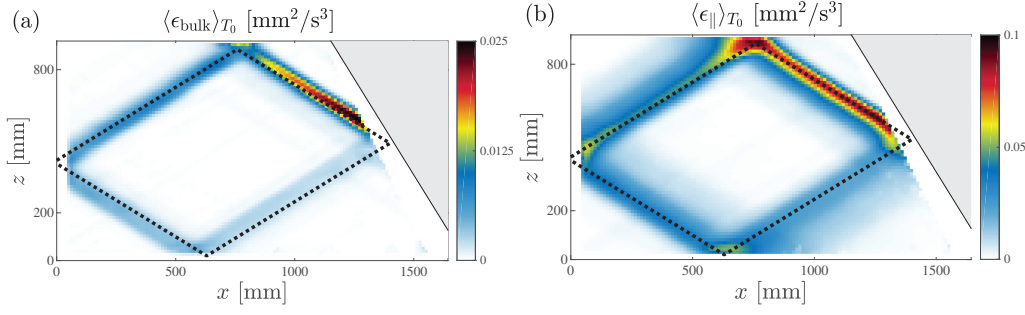
$$\epsilon_{\text{bulk}} = \nu |\nabla \mathbf{u}|^2 = \nu (\partial_x u)^2 + \nu (\partial_z u)^2 + \nu (\partial_x w)^2 + \nu (\partial_z w)^2. \quad (2.18)$$

Figure 2.4(a) presents the spatial dependence of this quantity in the mid-plane averaged over  $10 T_0$ . As expected, its amplitude is particularly important along the first branch of the attractor, that is located just after the reflection on the slope where the focusing takes place, and then decreases along the attractor. The mean of this quantity on the whole domain leads to  $p_{\text{bulk}}$ , the energy dissipation rate due to the bulk.

It is much more difficult to directly estimate the dissipation in the boundary layers. Indeed, since their thickness are very small compared to the size of the tank (around 1%), it is very hard to measure the velocity in the boundary layers as accurate as in the bulk. A method to evaluate the velocity using the velocity measured in the mid-plane ( $y = 0$ ) will then be presented for the two types of boundary layers, parallel to the lateral walls (§ 2.3.2) and perpendicular to the attractor plane (§ 2.3.2). In both cases, theoretical developments recently reported by [10] will be used and adapted. For the sake of brevity and clarity, only the main ingredients of their results will be recalled. Notice that linear equations will be used in the two following sections as the Reynolds number is small in viscous boundary layers. [21] showed that the experimental velocity field in the parallel boundary layers is compatible with the theoretical description.

### The dissipation in the longitudinal boundary layers $\epsilon_{\parallel}$

Close to both longitudinal vertical walls, the largest contribution to the viscous term  $\nu^2 \mathbf{u}$  comes from the gradients in the  $y$ -direction. Indeed, experimental measurements show that variations in the  $xz$ -plane are typically on the centimeter length scale, that is significantly larger than the millimeter length scale that appears in the viscous boun-



**FIG. 2.4** (a) Dissipation rate field within the bulk of the fluid,  $\langle \epsilon_{\text{bulk}}(x, z) \rangle_{T_0}$ , measured in the mid-plane. (b) Dissipation rate field in the longitudinal boundary layers,  $\langle \epsilon_{\parallel} \rangle_{T_0}$ , averaged along the transverse direction. In both panels, the field has been averaged over 10 forcing periods  $T_0$  around  $t = 50 T_0$  and the theoretically expected attractor for this geometry is depicted with the dashed line. Experimental parameters are those given in the caption of figure 2.2.

dary layer. The evolution of the velocity (2.1) and buoyancy fields (2.2) can thus be simplified as

$$\partial_t u = -\frac{\partial_x P}{\rho_r} + \nu \partial_{yy} u, \quad (2.19)$$

$$\partial_t w = -\frac{\partial_z P}{\rho_r} + b + \nu \partial_{yy} w, \quad (2.20)$$

$$\partial_t b = -w N^2. \quad (2.21)$$

The transverse velocity  $v$  does not vanish any more but its contribution to the dissipation rate remains very small [10]. Let us consider a monochromatic internal wave  $a = \text{Re} [ \underline{a} e^{-i\omega_0 t} ]$  at the frequency  $\omega_0$  in which  $a$  stands for  $u, w, b$  or  $P$ . The case of polychromatic signals will be discussed in § 2.4.2. Introducing the angle  $\theta$  defined through the dispersion relation  $\omega_0^2 = N^2 \sin^2 \theta$ , (2.21) can be rewritten as  $\underline{b} = -i\omega_0 \underline{w} / \sin^2 \theta$ . Equations (2.19) and (2.20) can then be simplified as

$$-i\omega_0 \underline{u} = -\partial_x \underline{P} / \rho_r + \nu \partial_{yy} \underline{u}, \quad (2.22)$$

$$i\omega_0 \cot^2 \theta \underline{w} = -\partial_z \underline{P} / \rho_r + \nu \partial_{yy} \underline{w}, \quad (2.23)$$

that have to be solved with the no-slip boundary conditions  $\underline{u}(y = \pm W/2) = \underline{w}(y = \pm W/2) = 0$ , while  $\underline{u}(y = 0)$  and  $\underline{w}(y = 0)$  can be measured at the center of the tank with the PIV measurements described above. One finally gets

$$\underline{u}(y) = \left( 1 - \frac{\cosh [i^{1/2} y / d]}{\cosh [i^{1/2} W / (2d)]} \right) \underline{u}(y = 0), \quad (2.24)$$

$$\underline{w}(y) = \left( 1 - \frac{\cosh [i^{-1/2} \cot \theta y / d]}{\cosh [i^{-1/2} \cot \theta W / (2d)]} \right) \underline{w}(y = 0), \quad (2.25)$$

in which we use  $d = \sqrt{\nu / \omega_0}$ , the thickness of the boundary layers.

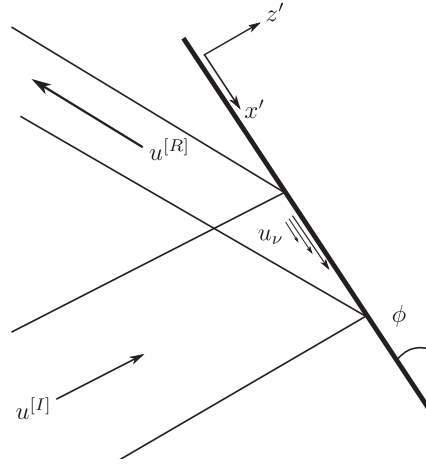
The dissipation within the longitudinal boundary layers is thus obtained by performing successively the following operations : a time Fourier transform of the wave field in the mid-plane  $\mathbf{u}(x, y = 0, z, t)$ , a band-pass filtering in the Fourier space around the forcing frequency  $\omega_0$ , multiplication by the theoretically derived expressions (2.24) and (2.25) with respect to the  $y$ -coordinate to get  $\partial_y \underline{\mathbf{u}}(x, y, z)$ . The real part of the inverse Fourier transform is then taken to generate the signal  $\partial_y \mathbf{u}(x, y, z)$ . The value of  $\epsilon_{\parallel} = \nu [(\partial_y u)^2 + (\partial_y w)^2]$  at any point of the domain is then computed and the integration over the whole domain leads to the value of the energy dissipation rate  $p_{\parallel} = \int \epsilon_{\parallel} dV/V$  due to the parallel boundary layers. The  $y$ -averaged value  $\langle \epsilon_{\parallel} \rangle_{y, T_0} = (1/W) \int_{-W/2}^{+W/2} dy \langle \epsilon_{\parallel} \rangle_{T_0}$  is displayed in figure 2.4(b) for all points of the domain. Here again, the dissipation is larger along the first branch of the attractor and then decreases along the skeleton of the attractor. By comparing figures 2.4(a) and (b), one realizes that this boundary layer dissipation is much larger than the bulk dissipation. This difference is by a factor of 10 when averaged over the entire domain. Indeed the  $y$ -averaged dissipation of the bulk is of the order of  $\nu (U/\lambda)^2$ , while the  $y$ -averaged of the longitudinal boundary layer dissipation is of the order  $\nu (2d/W) (U/d)^2$ . One can then estimate the ratio of the two types of dissipation  $\langle \epsilon_{\text{bulk}} \rangle_{y, T_0} / \langle \epsilon_{\parallel} \rangle_{y, T_0} \sim Wd/\lambda^2 \sim 10\%$ , a value in good agreement with the measured ratio.

### The dissipation in the transversal boundary layers $\epsilon_{\perp}$

The second dissipation term in the boundary layers,  $\epsilon_{\perp}$ , corresponds to the boundary layers perpendicular to the attractor plane, and, more precisely, where a reflection of the internal wave beam occurs. For the present experimental setup, three walls have to be considered while, due to the free slip boundary condition, the reflexion at the top surface is not a source of dissipation. Note that no linear coupling between internal and surface waves can occur due to the low frequency which leads to a surface wavelength much larger than the size of the set-up. We have therefore  $p_{\perp} = p_{\perp}^{[1]} + p_{\perp}^{[3]} + p_{\perp}^{[4]}$  where  $j = 1$  stands for the boundary layer along the slope,  $j = 3$  close to the generator and  $j = 4$  near the bottom of the tank. We will develop the method to estimate the dissipation term associated with a reflection on a wall inclined at an arbitrarily angle  $\phi$ , that will stand for  $\alpha$ ,  $\pi$  or  $-\pi/2$  respectively for  $j = 1, 3, 4$ .

Considering the reflection on a boundary in the inviscid case, the velocity field corresponds to the sum of the incident beam  $\mathbf{u}^{[I]}$  and the inviscid reflected beam  $\mathbf{u}^{[R]}$ . It has to fulfill the no-penetration condition and is therefore parallel to the boundary along the wall (free-slip condition). As depicted in figure 2.5, we define in the real case the viscous contribution  $\mathbf{u}_{\nu} = u_{\nu} \mathbf{e}_x + w_{\nu} \mathbf{e}_z$  ensuring that the velocity field vanishes along the wall (no-slip condition), yielding the complete velocity field  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{[I]} + \mathbf{u}^{[R]} + \mathbf{u}_{\nu}$ . Thus  $\mathbf{u}_{\nu}$ , that has to compensate the inviscid free-slip velocity field, is mainly on the  $\mathbf{e}_{x'}$  direction and may therefore be written as  $\mathbf{u}_{\nu} = u'_{\nu} \mathbf{e}_{x'}$  in the tilted coordinate system





**FIG. 2.5** Schematic of a reflection : the incident beam with velocity  $\mathbf{u}^{[I]}$  get bounced on a boundary inclined by an angle  $\phi$  with respect to the vertical, leading to the reflected beam with velocity  $\mathbf{u}^{[R]}$ . The no slip condition induces a viscous velocity field  $\mathbf{u}_v$  that counter balances at the boundary the inviscid velocity field  $\mathbf{u}^{[I]} + \mathbf{u}^{[R]}$ . Its exponential decrease as a function of the distance from the boundary is schematically represented. Note the introduction of the wall-oriented coordinate system in which  $x'$  is the distance along the wall and  $z'$  is the distance normal to the wall.

$(x', z')$  shown in figure 2.5, with  $\lim_{z' \rightarrow -\infty} u'_v = 0$ . As shown in [10], this is valid at leading order in  $d/\lambda$  – equal to 1% in our experiment.

In a boundary layer, the dominant part of the viscous term is given by the direction perpendicular to the wall ( $z'$ ), and one has  $\nabla^2 \mathbf{u} \approx \nabla^2 \mathbf{u}_v \approx \nu \partial_{z'z'}^2 \mathbf{u}_v$ , as  $d \ll \lambda$ . The associated dissipation is thus  $\langle p_{\perp}^{[j]} \rangle_{T_0} = \left\langle \int_j dx' dz' [\partial_{z'} u'_v(x')]^2 \right\rangle_{T_0} / A$ . The viscous velocity, pressure and buoyancy field  $(u'_v, p_v, b_v)$  are solutions of the system

$$\partial_t u'_v = -\partial_{x'} p_v - b_v \cos \phi + \nu \partial_{z'z'}^2 u'_v \quad (2.26)$$

$$0 = -\partial_{z'} p_v + b_v \sin \phi \quad (2.27)$$

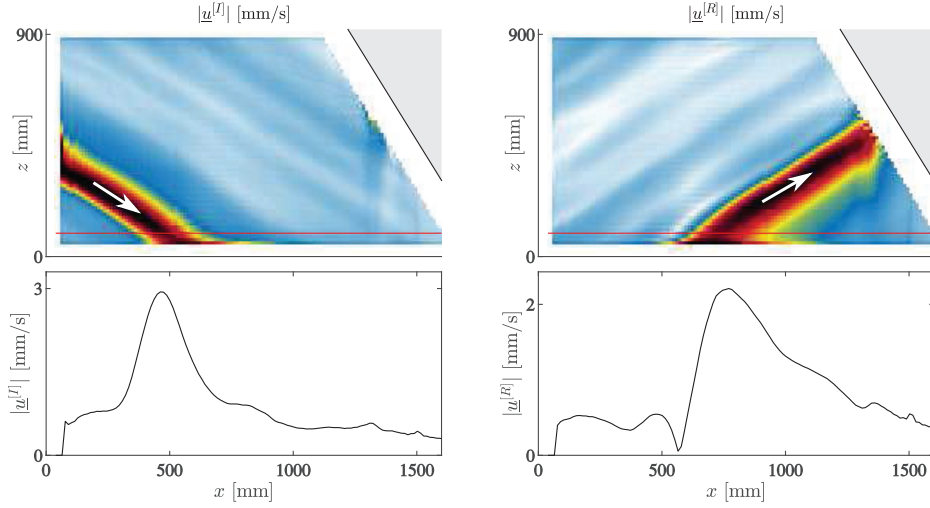
$$\partial_t b_v = N^2 u'_v \cos \phi, \quad (2.28)$$

where we used  $w_v = -u'_v \cos \phi$  (since  $\mathbf{u}_v$  is parallel to  $\mathbf{e}_{x'}$ ). Equation (2.27) leads to  $p_v \sim d b_v$ , thus the term  $\partial_{x'} p_v$  in (2.26) can be neglected at zeroth order in  $d/\lambda$ .

As in the previous subsection, taking the ansatz  $a = \text{Re} [\underline{a} e^{-i\omega_0 t}]$ , (2.28) leads to  $\underline{b}_v = i\omega_0 \underline{u}'_v \cos \phi / \sin^2 \theta$ . Using (2.26), we finally get

$$i \underline{u}'_v = (d/\mu)^2 \partial_{z'z'}^2 \underline{u}'_v, \quad (2.29)$$

by introducing the geometrical factor  $\mu = (\cos^2 \phi / \sin^2 \theta - 1)^{1/2}$  and  $d$  the thickness of the boundary layer which is again equal to  $\sqrt{\nu / \omega_0}$ . As this equation has to be solved



**FIG. 2.6** Incident (left panels) and reflected (right panels) velocity amplitudes (top panels) along the direction of the bottom boundary, obtained at  $t = 50 T_0$  thanks to Hilbert filtering. The bottom panels correspond to the horizontal cut at the altitude  $z = 100$  mm shown in the top panels by the red horizontal lines. Experimental parameters are those given in the caption of figure 2.2.

with the boundary conditions  $\lim_{z' \rightarrow -\infty} \underline{u}'_v = 0$  and  $\underline{u}'_v(x', z' = 0) = -\underline{u}_0(x')$ , where  $u'_0(x')$  is the inviscid along-wall velocity field, the solution reads

$$\underline{u}'_v(x', z') = \begin{cases} -\underline{u}'_0(x') \exp\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \mu_j z' / d\right), & \text{for } \phi = \alpha, 0 \ (j = 1, 3), \\ -\underline{u}'_0(x') \exp\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} z' / d\right), & \text{for } \phi = \pi/2 \ (j = 4). \end{cases} \quad (2.30)$$

After some calculations, one gets

$$\langle p_{\perp}^{[j]} \rangle_{T_0} = \frac{\nu \sqrt{2} |\mu_j|}{4Ad} \int dx' |\underline{u}'_0(x')|^2. \quad (2.31)$$

The amplitude of the inviscid along-wall velocity field  $u'_0(x')$  is required to proceed and compute the integral (2.31). As  $u'_v$  vanishes outside from the boundary layer, the PIV measurements give a good estimate of the inviscid velocity field. Furthermore, rather than measuring  $u'_0(x')$  directly on the PIV field by zooming on the region as close as possible to the wall, we use the relation  $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{[I]} + \mathbf{u}^{[R]}$ , where  $\mathbf{u}^{[I]}$  and  $\mathbf{u}^{[R]}$  do not depend strongly on  $z'$  along the rays which allows us to measure them where we want in the region next to the wall. To get  $\mathbf{u}^{[I]}$  and  $\mathbf{u}^{[R]}$ , we use the Hilbert transform [78] that allows one to distinguish the different branches of the attractor by restricting to internal waves propagating in a given direction. Because of experimental errors,  $\mathbf{u}^{[I]} + \mathbf{u}^{[R]}$  is not perfectly parallel to the wall but this is solved by computing its projection

$$u'_0 = (\mathbf{u}^{[I]} + \mathbf{u}^{[R]}) \cdot \mathbf{e}_{x'} = (u^{[I]} + u^{[R]}) \sin \phi - (w^{[I]} + w^{[R]}) \cos \phi. \quad (2.32)$$

For visualisation purpose,  $\mathbf{u}^{[I]}$  and  $\mathbf{u}^{[R]}$  are experimentally evaluated at a small but finite distance from the boundary,  $z' = 100$  mm. Because of this, one has to shift both functions so that their maxima coincide as it is the case on the wall  $z' = 0$ . Figure 2.6 shows an example of the incident and reflected beams, in the case of the bottom reflection. From this profile, one can compute  $\langle p_{\perp} \rangle_{T_0} = \langle p_{\perp}^{[1]} \rangle_{T_0} + \langle p_{\perp}^{[3]} \rangle_{T_0} + \langle p_{\perp}^{[4]} \rangle_{T_0}$  using (2.31). As we will see in next section, this sum is of the same order of magnitude of the dissipation in the bulk and is ten times smaller than the dissipation taking place in the parallel boundary layers. This result is expected since the volume of the parallel boundary layers is much larger due to the small width of the tank. Varying  $W$  clearly changes the importance of the parallel boundary layers compared to the perpendicular ones, as will be shown in § 2.4.3.

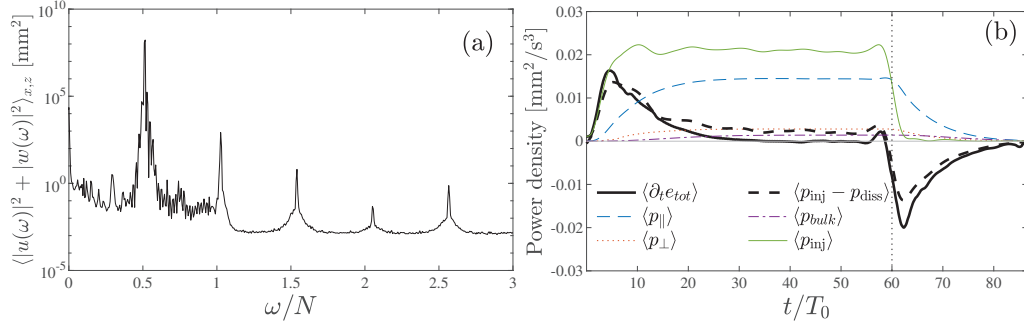
We will now apply these methods to measure the different terms in the energy budget for the attractors in several regimes.

## 2.4 Results

### 2.4.1 Linear regime

To validate the quantitative estimation of the different terms of the energy balance, a complete analysis is performed for an attractor in the linear regime. This is done with a small forcing amplitude ( $a_0 = 2$  mm) using the following experimental scenario. The stratified fluid being initially at rest, the wave maker is turned on at  $t = 0$ . After few forcing periods  $T_0$ , the injected energy rate becomes stationary as anticipated in figure 2.3(b). Finally, after  $60 T_0$ , the generator is turned off to observe the decay of the attractor. The power spectrum of the velocity field is displayed in figure 2.7(a). We see that most of the energy is located near the forcing frequency  $\omega_0/N = 0.52$  : the signal is then filtered around the forcing frequency to remove the external noise which could increase the errors in the estimation of the dissipative terms.

Figure 2.7(b) presents the time evolution of the different terms involved in the energy balance : the injected energy  $p_{\text{inj}}$  and the three contributions of dissipation  $p_{\text{bulk}}$ ,  $p_{\perp}$  and  $p_{\parallel}$ . As mentioned in § 2.3.2,  $p_{\text{inj}}$  is computed at  $x_0 \simeq 5$  cm and therefore the dissipation occurring near the generator should not be taken into account. For this reason, we omit  $p_{\perp}^{[3]}$  and correct  $p_{\text{bulk}}$  and  $p_{\parallel}$  accordingly. We see that the variations of the total energy are very well given by the difference of the injected power with the three dissipative terms. After approximately 30 periods, a steady state has been reached. Without any adjustable parameters, the difference between the estimated dissipation and injected power is then less than 10%, showing therefore a good agreement within experimental errors. As emphasized by figure 2.7(b), this good agreement holds also in non-stationary situations, when one turns on or off the generator. Indeed, both curves have similar variations just after the switching times  $t = 0$  and  $60 T_0$ , due to the



**FIG. 2.7** Linear regime. For both figures, experimental parameters are those given in the caption of figure 2.2 with a forcing amplitude  $a_0 = 2$  mm. (a) Power spectrum as a function of the frequency normalized by the buoyancy frequency  $N$  (averaged over the area  $A$  and in logarithmic scale). Only waves with frequencies below this threshold value are propagating, but one clearly sees several harmonics. (b) Evolution in time of the derivative of the total energy, the injected power and the different dissipative terms. The velocity field has been filtered around the forcing frequency  $\omega_0$  before computing these quantities. Oscillations at  $\omega_0$  have then been removed using a moving average based on their extrema. The generator has been switched on at  $t = 0$  while turned off at  $t = 60 T_0$ , as emphasized by the vertical dotted line.

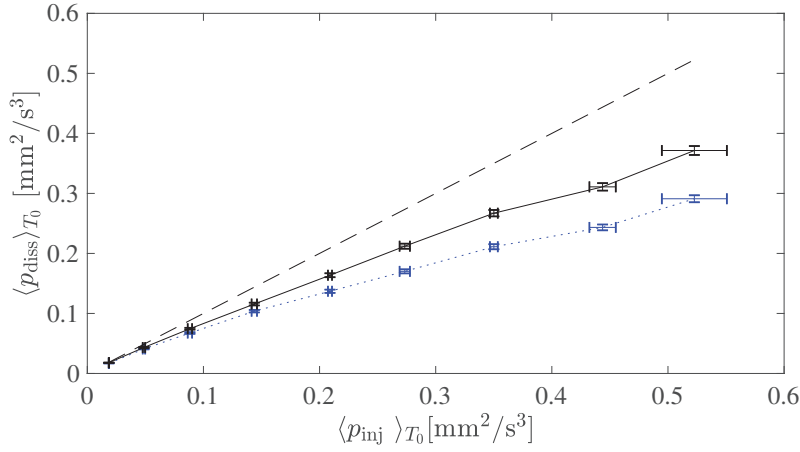
changes in injected power. Notice that the fluctuations appearing on both curves just before  $t = 60 T_0$  are due to the applied frequency filter, thus limiting sharp changes in the signals.

Similar experiments have been realized with larger amplitudes and therefore larger injected power. For each experiment, the signal is filtered around the forcing frequency  $\omega_0$  and the dissipation, measured in the steady-state, is plotted as a function of the injected power in figure 2.8 (dotted line). The agreement is excellent at low amplitude but the deviation between the dissipation at  $\omega_0$  and the injected power increases when considering larger amplitudes. This is expected since nonlinear effects can no longer be neglected : one has to consider other frequencies as discussed in the next-subsection.

## 2.4.2 Weakly nonlinear regime

By increasing the amplitude of the forcing, with values from 2 to 10 mm, the nonlinear regime is reached. As underlined by [20], the setup could model at large amplitude a cascade of triadic interactions transferring energy to different frequencies and smaller scales. For all amplitudes, a stationary state, defined as the absence of time-variation of the total energy, is observed meaning that the injected power is balanced by the dissipation.

We compute the different terms of (2.8) as we did in the linear case. The injected power is computed exactly in the same way, with a prior filtering of the velocity field at the forcing frequency. Indeed, since the generator oscillates exactly at  $\omega_0$ , one has  $p_{inj}(\omega \neq \omega_0) = 0$  as verified experimentally. Some non linear corrections to the estimation of the pressure gradient have been computed and appeared to be very small

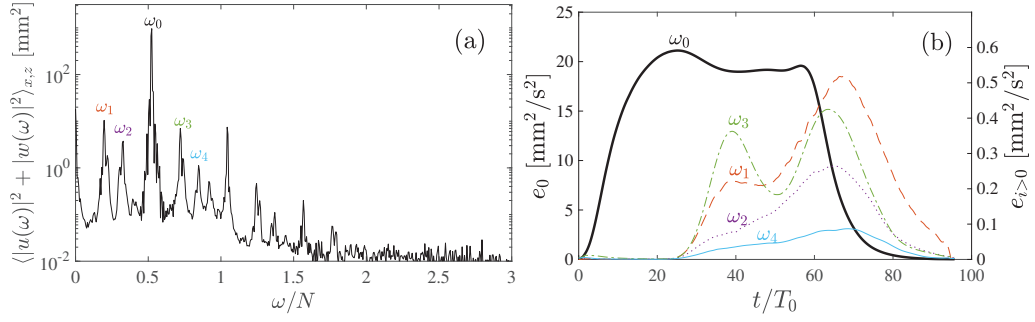


**FIG. 2.8** Full dissipation as a function of the measured injected power in the stationary regime. The blue dotted line corresponds to the velocity field filtered around the excitation frequency  $\omega_0$ . The black line takes into account all frequencies below the buoyancy frequency  $N$ . The  $x$ -axis error bars are computed through the fluctuations of  $\langle p_{\text{inj}} \rangle_{T_0}$  in time, while  $y$ -axis error bars come from the uncertainty of the PIV measurement of velocity field. The dashed line corresponds to the expected relation  $\langle p_{\text{inj}} \rangle_{T_0} = \langle p_{\text{diss}} \rangle_{T_0}$ .

(less than 1%). They are therefore neglected in the following. To evaluate the parallel dissipation  $p_{\parallel}$ , a similar method than the one described in § 2.3.2 is used. To do so, we assume that the linear approximation used to obtain the velocity field in the boundary layer is still valid. Equations (2.24) and (2.25) are therefore multiplied by the time Fourier transform of the velocity field, low-pass filtered with a cut-off frequency equal to the buoyancy frequency  $N$ . The real part of the inverse time Fourier transform of the obtained signal is finally used to get the value of  $\partial_y \mathbf{u}(x, z, t)$  and  $p_{\parallel}$  in the boundary layers for all waves with frequency smaller than  $N$  present in the domain.

As we showed that  $p_{\perp} \simeq 0.1 p_{\parallel}$ , we neglect the perpendicular dissipation due to the secondary waves, and we will consider  $p_{\perp} \simeq p_{\perp}(\omega_0)$ . On the contrary, as secondary waves usually present smaller length scales, one cannot *a priori* neglect their contribution to the bulk dissipation, which is measured here by computing (2.18) with only a band-pass filter to remove noise above the buoyancy frequency.

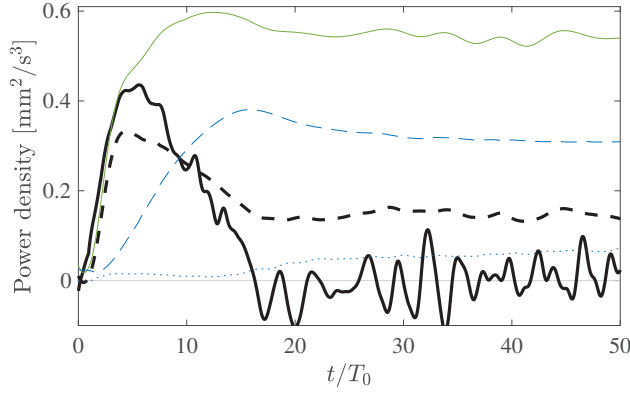
The black line of figure 2.8 shows, in the stationary regime, the dissipation measured in this way as a function of the injected power. The agreement with the expected relation  $\langle p_{\text{inj}} \rangle = \langle p_{\text{diss}} \rangle_{T_0}$  represented by a dashed line has been significantly improved with respect to the one obtained when considering only the dissipation at  $\omega_0$ . For very large amplitudes, the dissipation associated with the forcing  $\omega_0$  represents only half of the injected power. Moreover, we have quantitatively shown that the secondary waves forced by successive triadic interactions represent around 16% of the injected power in the strongest nonlinear regime.



**FIG. 2.9** Weakly nonlinear regime. (a) Power spectrum as a function of the frequency normalized by the buoyancy frequency  $N$  (averaged over the area  $A$  and in logarithmic scale). Experimental parameters are those given in the caption of figure 2.2 except  $a_0 = 5$  mm. The five main frequencies have been labelled  $\omega_i$  with  $i = 0$  to 4. (b) Evolution of the energy of the five main components of the velocity field. Note the difference in the energetic scale between  $e_0$  the energy of the forcing frequency  $\omega_0$  on the left  $y$ -axis and, on the right, the other ones  $e_i$  with  $i > 0$  for each  $\omega_i$ . The generator is switched on at  $t = 0$  while turned off at  $t = 60 T_0$ .

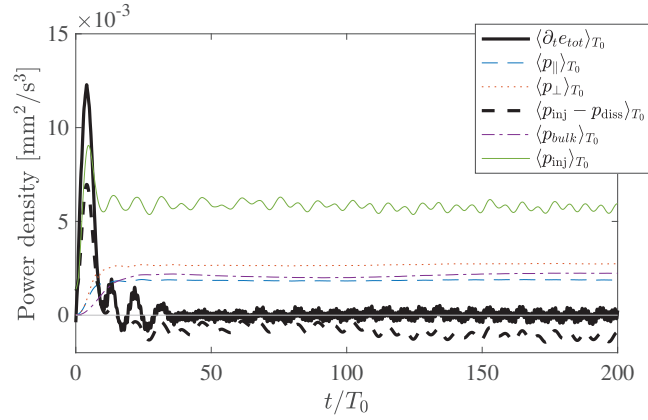
To go into more details, we will describe the time evolution of the different terms of the energy balance in the nonlinear regime. A typical power spectrum, for an intermediate forcing amplitude  $a_0 = 5$  mm and an injected power of  $1.9 \times 10^{-2} \text{ mm}^2/\text{s}^3$ , is shown in figure 2.9(a). While the wave-field is strongly dominated by the forcing frequency  $\omega_0$ , one clearly sees several other peaks. With this tool, one can investigate the exchange of energy between the different components of the velocity field. Figure 2.9(b) shows the evolution of the energies of the five most important components identified in figure 2.9(a). After the generator has been turned on at  $t = 0$ , the energy of the primary wave  $\omega_0$  increases. Then, approximately 25 periods later (that corresponds to the typical time scale for the appearance of the TRI), some energy loss of the primary wave is observed while the energy of the secondary waves increases indicating an energy transfer. Some of them present some decrease of energy, which seems to show a complex interaction between the secondary-waves. As can be seen in figure 2.8, the dissipation due to the primary wave slightly underestimates the injected power. For this weakly nonlinear case, the energy of the secondary waves is very small, and so is their dissipation. Even if it is of the same order of magnitudes than error bars, it seems that their presence explain the difference between the injected power and the dissipation due to the forcing frequency.

To confirm this hypothesis, we look into more details to the case with the largest amplitude  $a = 10$  mm, which corresponds to a stronger nonlinear regime with a rich multi-peak spectrum. Figure 2.10 displays the time evolution of the different terms involved in the energy balance in which we have separated the dissipative part at the forcing frequency and the part due to the secondary waves. The agreement is very good at the beginning of the experiment just after switching on the generator. At about  $20 T_0$ , a stationary state is reached where the time derivative of the total energy  $\partial_t e_{\text{tot}}$  vanishes with some oscillations. At  $15 T_0$ , the dissipation due to the forcing frequency



**FIG. 2.10** Nonlinear regime. Evolution in time of the derivative of the total energy  $\partial_t e_{\text{tot}}$  (thick black line), the injected power  $p_{\text{inj}}$  (green solid line), the dissipation associated with the forcing frequency  $p_{\text{diss}}(\omega_0)$  (thin blue dashed line), the dissipation associated with other frequencies smaller than  $N$ ,  $p_{\text{diss}}(\omega < N, \omega \neq \omega_0)$  (blue dotted line) and finally the difference  $p_{\text{inj}} - p_{\text{diss}}$  (thick black dashed line). Experimental parameters are those given in the caption of figure 2.2 except  $a_0 = 10$  mm.

decreases and is substituted by dissipation due to secondary waves. The latter finally reaches 16% of the injected power. It is important to note that the bulk dissipation for secondary waves constitutes 30% of total secondary-waves dissipation and is therefore much more important than for the primary wave, in which  $p_{\text{bulk}}(\omega_0) \approx 10\% p_{\text{diss}}(\omega_0)$ . This result is expected since the typical length scales for the secondary waves are smaller. Even though the estimation of the dissipation due to the forcing frequency and the secondary waves gives an interesting estimation of the injected energy within the system, figures 2.8 and 2.10 show that the part of the dissipation not taken into account represents a quarter of the total dissipation. It is more important when nonlinearities are stronger. Different hypothesis may be given to explain this missing part in the dissipation. (i) In our model, we did not take into account frequencies larger than  $N$  for all dissipation nor polychromaticity in the boundary layers when we estimated the perpendicular dissipation. The reflection at the free surface may also be the origin of some dissipation, since the boundary conditions is in reality between no slip and free slip due to surface contamination [26]. (ii) The average over the forcing period  $T_0$  of some terms in (2.4) is not vanishing anymore in such a polychromatic case. (iii) The bulk dissipation may be underestimated. Indeed, the smallest scale we have access to is given by the resolution of the PIV measurements. Due to nonlinearities, some energy may be transferred to scales smaller than 10 mm and is not measured. (iv) Motions or dependence in the  $y$ -direction are not taken into account. Secondary waves are assumed here to keep the two-dimensional geometry, which is not certain. (v) We see in figure 2.7 that some energy goes into a mean flow generated in the boundary layers [52]. While the associated dissipation in the bulk is taken into account, its counterpart in the boundary layers is not. (vi) Finally, part of the energy may be taken to increase the potential energy of the fluid, which is related to a homogenisation of the density through mixing.



**FIG. 2.11** Evolution of the derivative of total energy, injected power and the different dissipative terms in time, for a linear experiment with forcing amplitude  $a_0 = 5$  mm in the 3D tank. Note the  $10^{-3}$  factor on the  $y$ -axis. The field had been filtered around the forcing frequency before computing these quantities.

### 2.4.3 Three dimensional tank

As already underlined, the geometry of the domain has an effect on the importance of the different dissipative terms. Indeed, neglecting the feedback of the dissipation on the attractor, the bulk part as well as the perpendicular part depend linearly on the thickness of the tank, while the parallel part is independent of  $W$ . To investigate a regime where dissipation is less dominated by the dissipation due to lateral walls, i.e. with a relatively lower  $p_{\parallel}$ , we ran an experiment in a linear regime in a different tank of size  $L \times W \times H = 570 \times 800 \times 320$  mm<sup>3</sup> with a comparable slope of  $\alpha = 29^\circ$ ; the wave maker is 150 mm wide. As shown in [91] in which the details of the experimental set-up is given, the hypothesis of the two-dimensionality of the flow still holds in this tank within the linear and stationary regime. Note that the perpendicular dissipation  $p_{\perp}^{[3]}$  on the left has now to be taken into account since the wave maker does not occupy the total width of the tank. As shown in figure 2.11, we found that in this case the three dissipation rates are more comparable in magnitude, since  $W$  is now 5 times larger while  $L$  and  $H$  are both about 3 times smaller. The agreement between the measured quantities and the theory is again very good both in the non stationary and the stationary regimes.

## 2.5 Conclusions

The goal of the work presented in this paper was to investigate the energy budget of a two-dimensional internal wave attractor using experiments. In the linear regime, we have shown that it is possible to simultaneously measure the energy flux injected into the system and the dissipation rate using 2D-2C PIV measurements. The pressure field, usually not accessible in laboratory or field measurements, is computed



from the velocity field and gives access to the injected power  $p_{inj}$ . The dissipation is disentangled into three different terms following the work of [10] : the bulk part is directly calculated from the velocity field, while the parallel and perpendicular parts due to the dissipation in the boundary layers, in the lateral walls and at the reflection of the internal wave beam, are quantified using a linear modeling of the boundary layer. We have shown that this procedure captures without any adjustable parameters the complete energy balance in the stationary state as well as in the transient regime.

Moreover, two different experimental setups have been used to quantify the importance of the parallel dissipation compared to the bulk dissipation. The ratio depends on the distance between the lateral walls and on the thickness of the boundary layers compared with the typical wavelength of the internal waves within the attractor. Using similar scaling arguments, the ratio between the bulk and the perpendicular dissipations depends on the thickness of the boundary layers and the typical size of the regions where a reflection occurs, which is close to the perimeter of the domain compared with the typical wavelength of the internal waves within the attractor.

Finally, we have shown that our analysis developed for the linear case is still valid in the nonlinear regime. Even if we cannot completely capture the total dissipation in the tank, we have quantified that the secondary waves generated through triadic resonant interactions have clearly a non negligible part in the dissipation rate. As the difference between dissipation and variation of energy of a given component of the wave field gives access to its energy input, the analysis presented here could be part of the investigation of nonlinear energy transfers between different waves. It is also important to emphasize that the method tested here on internal wave attractors can be generalized straightforwardly to any quasi two-dimensional stratified flow.

## Résumé

Dans ce chapitre, nous avons étudié le bilan énergétique d'attracteurs d'ondes internes de gravité dans une géométrie quasi 2D.

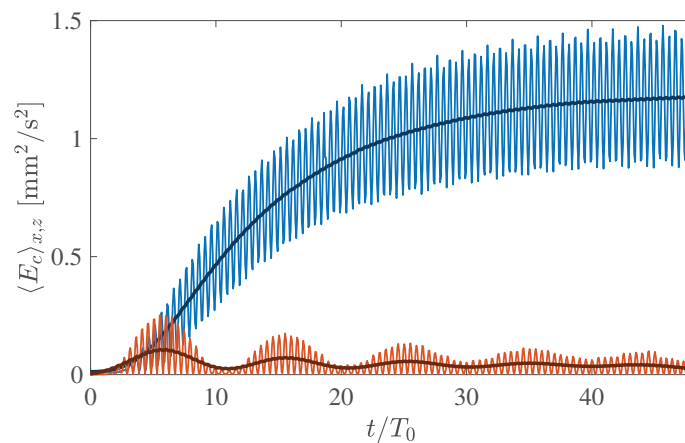
- Nous avons proposé une méthode permettant, à partir du champ de vitesse mesuré dans un plan vertical au centre de la cuve, d'estimer le champ de pression dans le fluide et donc la puissance injectée par le générateur, ainsi que la dissipation visqueuse en volume et dans les couches limites. Cette dernière dissipation est calculée en extrapolant le champ de vitesse dans les couches limites, *via* les travaux de Beckenbanze *et al.* [10]. Cette méthode est en principe généralisable à tous les écoulements stratifiés quasi 2D.
- Nous avons mesuré ces différents termes dans une série d'expériences réalisées dans une même géométrie et avec la même fréquence d'excitation, et en explorant différentes amplitudes de forçage. En régime linéaire, nous fermons le bilan d'énergie à 10% près.
- Il est apparu qu'en régime linéaire, la dissipation dans les couches limites représente 90% de la dissipation totale. Pour les ondes secondaires, qui apparaissent dans le régime non linéaire et qui présentent de plus petites échelles, elle ne représente plus que 70% de leur dissipation totale. Par ailleurs, ces ondes secondaires dissipent jusqu'à 16% de la puissance totale injectée.



# Réponse impulsionnelle

## 3.1 Introduction

La présence d'attracteurs est souvent associée à une énergie cinétique importante. La figure 3.1 compare par exemple l'évolution de l'énergie cinétique mesurée lors d'un forçage stationnaire avec  $a_0 = 1$  mm,  $\omega/N = 0.60$  et  $N = 0.77$  rad/s, dans deux géométries différentes. La courbe rouge correspond à une cuve rectangulaire de hauteur  $H = 920$  mm et de largeur  $L = 1120$  mm telle que la fréquence de forçage ne corresponde pas à l'une des fréquences propres de la cavité  $\omega_{(n,m)} = N(n/L)/\sqrt{(n/L)^2 + (m/H)^2}$ ; la courbe bleue a été mesurée dans les mêmes conditions expérimentales, mais avec la présence de la pente inclinée d'un angle  $\alpha = 21.2^\circ$  par rapport à la verticale, la largeur légèrement modifiée  $L = 1340$  mm et la fréquence du forçage  $\omega/N = 0.60$  sont choisies pour correspondre à un attracteur (1, 1). On constate que l'énergie cinétique finale de l'attracteur est 36 fois plus grande !



**FIG. 3.1** Évolution de l'énergie cinétique moyenne. En bleu : dans une expérience avec attracteur, obtenu avec  $\alpha = 21.2^\circ$ ,  $L = 1120$  mm,  $H = 920$  mm,  $\omega/N = 0.60$  rad/s et  $N = 0.77$  rad/s. et En rouge : dans une expérience réalisée dans une cuve de géométrie rectangulaire, de mêmes paramètres expérimentaux mais avec  $L = 1120$  mm.  $\omega/N = 0.60$  ne correspond alors pas à une fréquence propre de la cavité. Les courbes foncées sont des moyennes sur la période.

Cette observation peut être éclairée par les travaux de Jouve et Ogilvie [56] qui ont étudié le bilan énergétique d'attracteurs d'ondes d'inertie - très analogues aux attracteurs d'ondes internes de gravité- au moyen de simulations numériques, dans une géométrie bidimensionnelle. Le fluide initialement au repos est forcé par une force volumique monochromatique. La puissance injectée et la dissipation visqueuse sont mesurées au cours de la formation de l'attracteur. Les auteurs ont d'une part mis

en évidence une propriété remarquable pour un système linéaire : lorsque le nombre d'Eckman (la viscosité) tend vers 0, la dissipation en régime stationnaire tend vers une valeur limite, non nulle. En effet, comme pour un fluide en écoulement turbulent, la structure spatiale de l'attracteur permet toujours d'atteindre les échelles dissipatives, et ce quelque soit la valeur de la viscosité. Ces travaux montrent par ailleurs que ce processus est plus lent que la saturation de la puissance injectée. En effet, la dissipation sature après environ 14 périodes alors que la puissance injectée semble atteindre sa valeur stationnaire au bout de seulement 4 périodes (voir figure 3.2 qui reproduit la figure 8 de leur article). Ce retard de la dissipation permet à l'énergie injectée de s'accumuler lors du régime transitoire : le système atteint par conséquent le régime stationnaire avec une grande énergie.

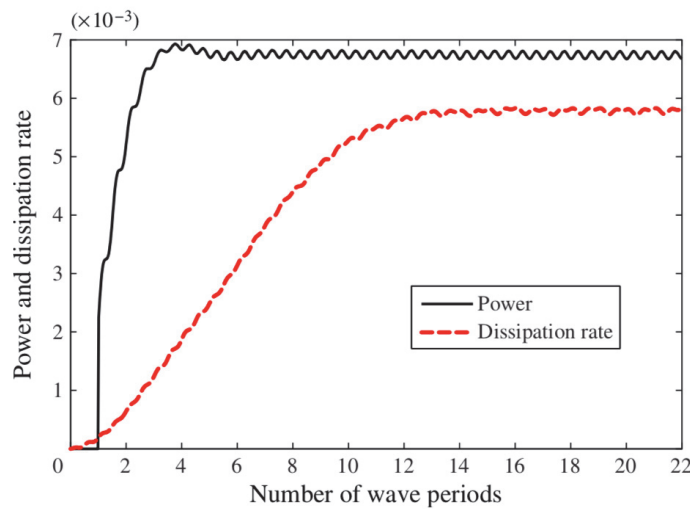
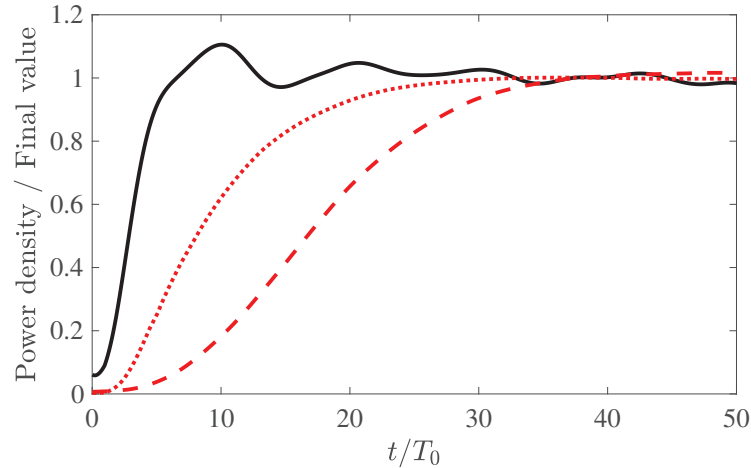


FIG. 3.2 Puissance injectée en noir et puissance dissipée en traitillés rouge, mesurées dans une simulation numérique réalisée par Jouve *et al.* (figure 8 de [56]). L'écart entre les deux valeurs stationnaires provient des couches d'Eckman mal résolues numériquement.

Les outils développés au chapitre précédent, permettant de mesurer expérimentalement les taux d'injection d'énergie et de dissipation visqueuse, rendent possible la même analyse dans les expériences d'attracteurs d'ondes internes de gravité présentées dans cette thèse. La figure 3.3 trace l'évolution de la puissance injectée en noir et de la dissipation en rouge mesurées dans le cas de l'attracteur obtenu expérimentalement avec  $H = 920$  mm,  $L = 1720$  mm,  $\alpha = 29.5^\circ$ ,  $\omega/N = 0.52$ ,  $N = 0.67$  et  $a_0 = 2$  mm. Les taux d'injection d'énergie et de dissipation ont été normalisés par leurs valeurs stationnaires. On a séparé le taux de dissipation en deux contributions : en traitillé la dissipation en volume due aux petites échelles développées par l'attracteur et en pointillés celle résultant des couches visqueuses proches des parois latérales et perpendiculaires. On constate que la dissipation en volume est effectivement "en retard" par rapport à la puissance injectée, avec le même facteur environ 3 entre le temps caractéristique de la dissipation en volume  $\tau_{bulk} \sim 30 T_0$  et celui de la puissance

injecté  $\tau_p \sim 10 T_0$ . La dissipation dans les couches visqueuses est elle beaucoup plus rapide  $\tau \sim 15 T_0$ . Or nous avons montré au chapitre précédent que la dissipation globale dans les expériences réalisées dans cette cuve est dominée par cette deuxième dissipation. Si ce n'est pas grâce au retard de la dissipation, à quoi est due la grande énergie des attracteurs ?



**FIG. 3.3** Puissance injectée en noir et puissance dissipée en rouge, mesurées dans une expérience d'attracteur d'ondes internes. Les paramètres de l'expérience sont  $a_0 = 2$  mm,  $\omega_0/N = 0.52$ ,  $N = 0.67$  rad/s et  $\alpha = 29.5^\circ$ . La courbe rouge en traitillés correspond à la dissipation proche des parois parallèles à l'attracteur et la courbe en pointillés correspond à la dissipation en volume. Les trois grandeurs ont été normalisées par leurs valeurs stationnaires.

Le chapitre précédent peut nous éclairer sur cette question. On a en effet mesuré une puissance injectée par le générateur au moins 1.5 fois plus importante que si la cuve était infiniment longue. Ainsi, l'énergie importante du système avec attracteur semble provenir d'une adéquation de la source à la géométrie du système, adéquation qui augmente la quantité d'énergie extraite à la source par le fluide et donc l'énergie qu'il atteint en régime stationnaire. Cette propriété d'adéquation entre source et système pour certaines fréquences *de résonance* est observée dans de nombreux oscillateurs : un circuit RLC série par exemple, forcé par une tension sinusoïdale, présente une intensité plus importante lorsque la fréquence de la source est adaptée à la fréquence propre de l'oscillateur. L'énergie transmise de la source de tension au circuit électrique est alors maximale. Ainsi, on peut sonder les fréquences de résonance en repérant en régime stationnaire les fréquences d'excitation qui maximisent le transfert d'énergie entre source et système ; mais il faut alors autant d'expériences que de fréquences interrogées.

Un autre moyen classique de sonder les modes résonnants d'un système linéaire est de le soumettre à une perturbation brusque. Par exemple un pic de tension en entrée de l'oscillateur RLC fera osciller spontanément l'intensité à la fréquence propre du système. Le diapason est un autre exemple plus courant : frappé contre une table, il

donne à entendre le  $la$  à 440 Hz correspondant à son premier mode propre. Ainsi le contenu spectral de la réponse à une impulsion peut renseigner sur les fréquences des modes résonnants du système linéaire.

Nous avons pu mesurer au chapitre précédent un transfert d'énergie important en régime stationnaire pour une excitation à une fréquence correspondant à un attracteur (1, 1). S'inspirant des oscillateurs linéaires usuels on peut se poser les questions suivantes : Est-ce que le fluide, si on le soumet à une perturbation brusque, exhibera spontanément des fréquences particulières ? Correspondront-elles à des fréquences donnant en régime stationnaire des attracteurs ? Si oui, peut-on mesurer l'énergie injectée dans chacun de ces modes et la comparer aux résultats obtenus en régime stationnaire ? Les deux sections suivantes tentent de répondre à ces questions. Une partie des expériences présentées ici a été réalisée par Julie Deleuze, en stage de troisième année de licence dans l'équipe, encadrée par Timothée Jamin, post-doctorant. Je les remercie tous les deux.

## 3.2 Visualisation des modes

### 3.2.1 Protocole

Une première question se pose : quelle *impulsion* choisir pour notre système ? Pour un système sans variable d'espace comme un circuit RLC l'impulsion consiste par exemple en une variation temporelle brusque de la tension à l'entrée du circuit. En effet, cette entrée peut être interprétée *via* sa transformée de Fourier comme une somme infinie de toutes les fréquences. Les fréquences proches de la fréquence de résonance de l'oscillateur vont effectivement transmettre de l'énergie au système, alors que les autres auront une contribution négligeable. Aussi, les fréquences présentes dans le signal de sortie (l'intensité dans le circuit) renseigneront sur les fréquences propres du système. Mais pour un système avec au moins une dimension spatiale, l'*impulsion* permettant de sonder tous les modes propres est moins évidente. En effet, chaque mode propre possède une structure spatiale particulière. La structure spatiale de l'impulsion se décompose alors sur les différents modes sans les exciter équitablement : par exemple si l'on pince une corde de guitare de longueur  $L$  à une distance  $L/5$  de l'une de ses extrémités, on n'entendra pas les harmoniques de longueurs d'onde  $\lambda_n = n(2L)/5$ , car leurs structures spatiales présentent un nœud là où l'impulsion a favorisé un ventre. De même, le diapason a été conçu pour qu'on excite facilement le mode propre résonnant à  $440 \text{ s}^{-1}$  et peu les autres. Dans notre cas, quelle structure spatiale permettrait d'exciter *tous les attracteurs à la fois* ? Pour répondre à cette question, on s'inspire du régime stationnaire, où le générateur oscille à amplitude et fréquence constantes. On a alors constaté qu'en choisissant correctement la fréquence du générateur on peut *a priori*

exciter n'importe quel attracteur donné<sup>1</sup>. La structure spatiale de notre générateur semble donc compatible avec tous les modes du système. L'impulsion sera donc réalisée par ce même générateur qui, au lieu d'osciller à fréquence constante, sera déplacé soudainement.

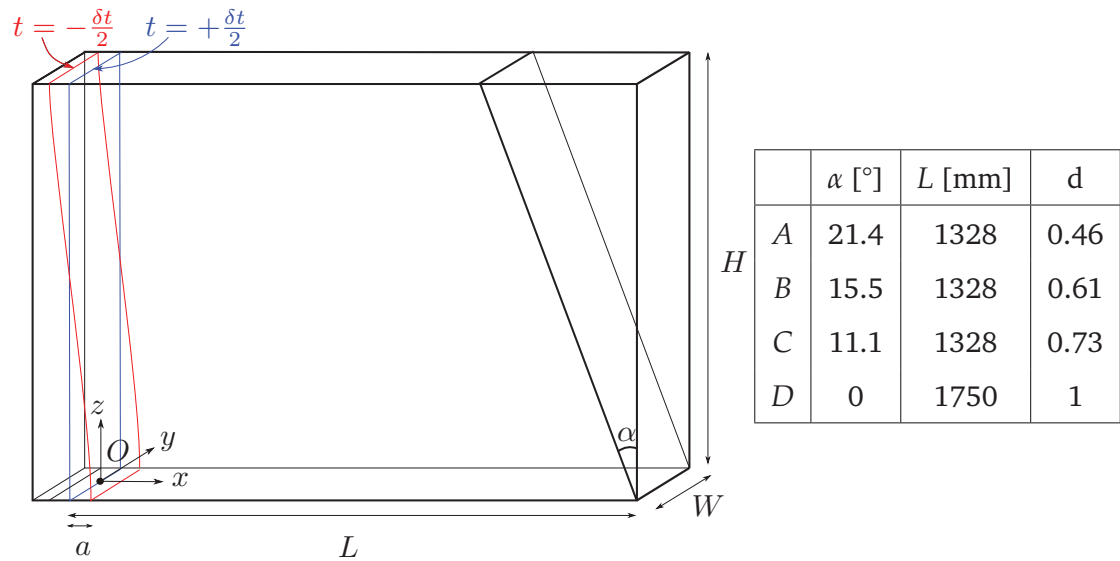
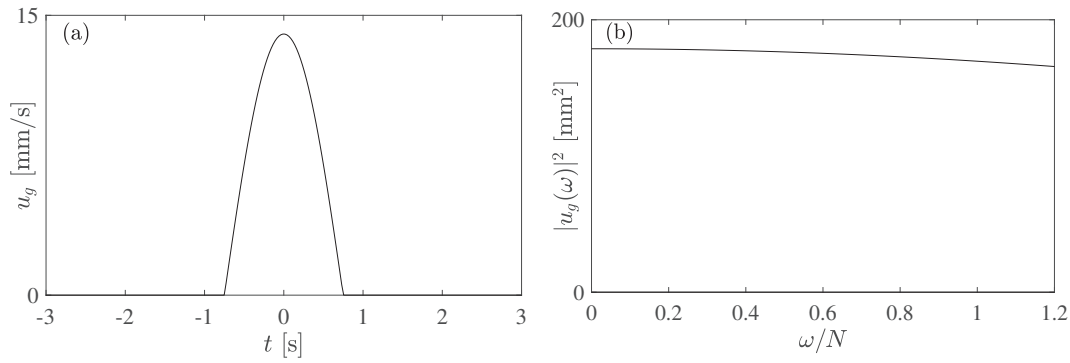


FIG. 3.4 Dispositif expérimental, identique à celui du chapitre précédent sauf dans le contrôle du générateur, qui est initialement incliné par rapport à la verticale puis qui revient en position verticale en  $\delta t = 1.5$  s. Le tableau indique la géométrie de la cuve pour les quatre expériences présentées dans ce chapitre. La hauteur  $H = 920$  mm et la pulsation de flottabilité  $N = 0.70$  rad/s sont communs aux quatre expériences. Le paramètre  $d$  est défini par  $d = 1 - 2H \tan \alpha / L$ .

Plus précisément, après avoir rempli la cuve avec de l'eau stratifiée stablement par du sel, on positionne lentement le générateur en une position inclinée par rapport à la verticale comme schématisé en figure 3.4. On attend une dizaine de minutes pour s'assurer que le fluide est au repos puis le générateur est rapidement déplacé jusqu'à la position verticale. La cuve dans laquelle évolue ensuite le fluide n'a donc qu'une seule paroi inclinée, formée par la pente. La figure 3.5(a) montre la consigne de vitesse de l'extrémité haute du générateur, qui consiste en un demi-cosinus, qui correspond à un déplacement de 14 mm en  $\delta t = 1.5$  s. La figure 3.5(b) présente la transformée de Fourier de cette vitesse. Comme l'impulsion est très brève  $\delta t \ll 1/N$ , le spectre est assez plat entre  $\omega = 0$  et  $\omega = N$ . On excite donc potentiellement tous les attracteurs. Le mouvement en déclin du fluide est mesuré par PIV. La caméra utilisée est de haute résolution 7920 x 6004 pixels, permettant de détecter des vitesses de très faible amplitude  $v \sim 0.1$  mm/s, avec deux images par seconde. Nous avons mesuré cette *réponse impulsionnelle* dans quatre géométries différentes, explicitées à la figure 3.4.

<sup>1</sup> Bien sûr certains sont en pratique plus difficiles à observer que d'autres par exemple car leur longueur importante augmente l'atténuation visqueuse.

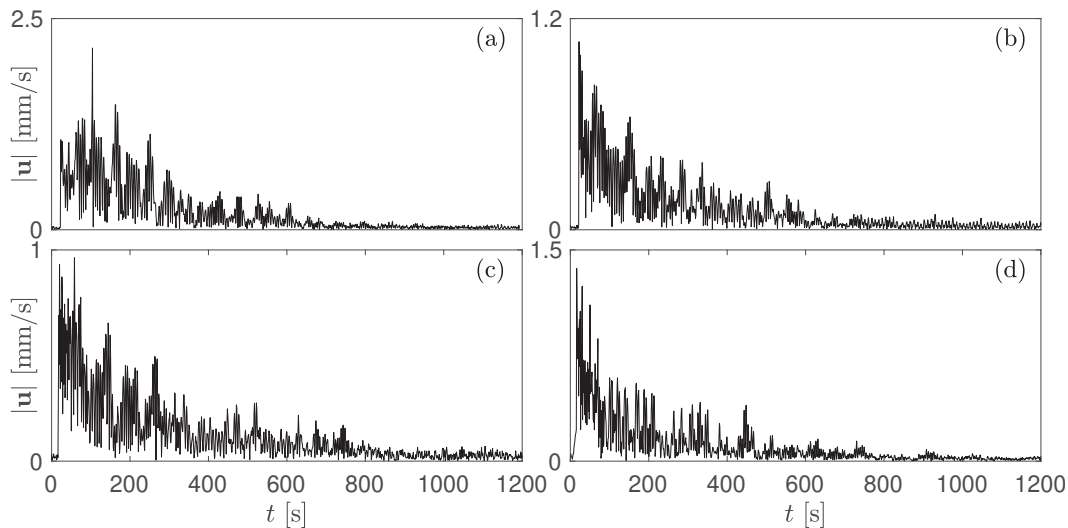




**FIG. 3.5** (a) Consigne de vitesse utilisée pour le point haut en  $z = H$  du générateur. Cette consigne consiste en un demi cosinus dont la période vaut  $T_g = 3$  s, et qui correspond à un déplacement du générateur de  $a = 14$  mm. La durée du pulse vaut donc  $\delta t = T_g/2 = 1.5$  s. (b) Module carré de la transformée de Fourier de cette vitesse.

### 3.2.2 Visualisation des modes

Le signal de vitesse mesuré en  $(x_0, z_0) = (H/2, L/2)$  est montré en figure 3.6 pour les quatre géométries. Les quatre signaux sont similaires : après le brusque mouvement du générateur, le fluide initialement au repos est mis en mouvement. Il s'arrête ensuite après environ 600 s, ce qui correspond à environ 70 périodes de flottabilité  $T_N \equiv 2\pi/N$ . La figure 3.7 présente le champ de vitesse à trois instants différents (a) et (b) en  $t = 17$  s, (c) et (d) en  $t = 200$  s et (e) et (f) en  $t = 400$  s, dans le cas de la géométrie C. On voit qu'au fur et à mesure que le temps avance, le champ présente des échelles de plus en plus petites. Cette observation pourrait être expliquée par la présence d'ondes internes qui subissent des réflexions successives sur la pente. Cette intuition sera validée par la suite.



**FIG. 3.6** Norme de la vitesse mesurée au point  $(x_0, z_0) = (H/2, L/2)$ , pour les quatre géométries A (a), B (b), C (c) et D (d).

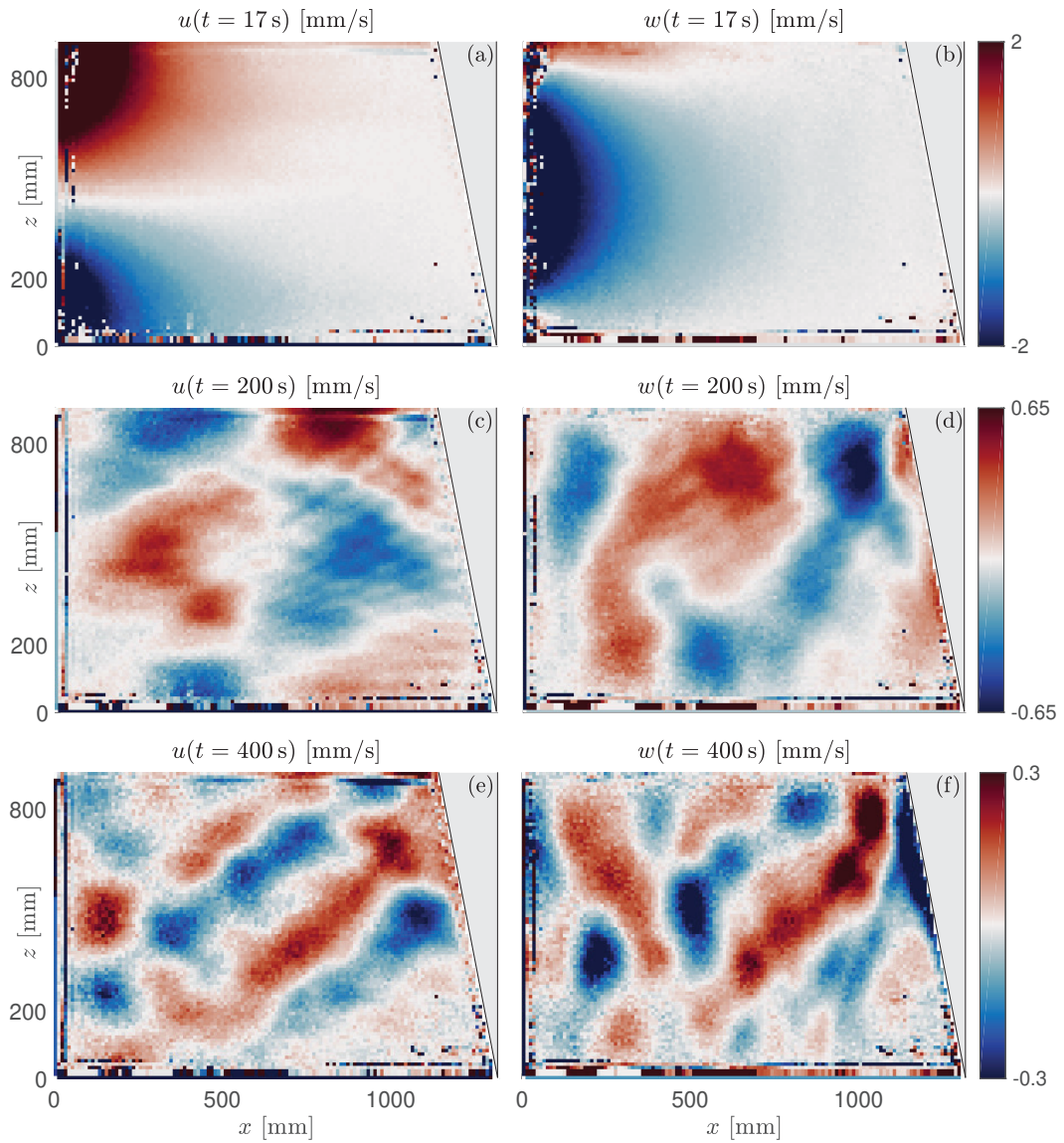
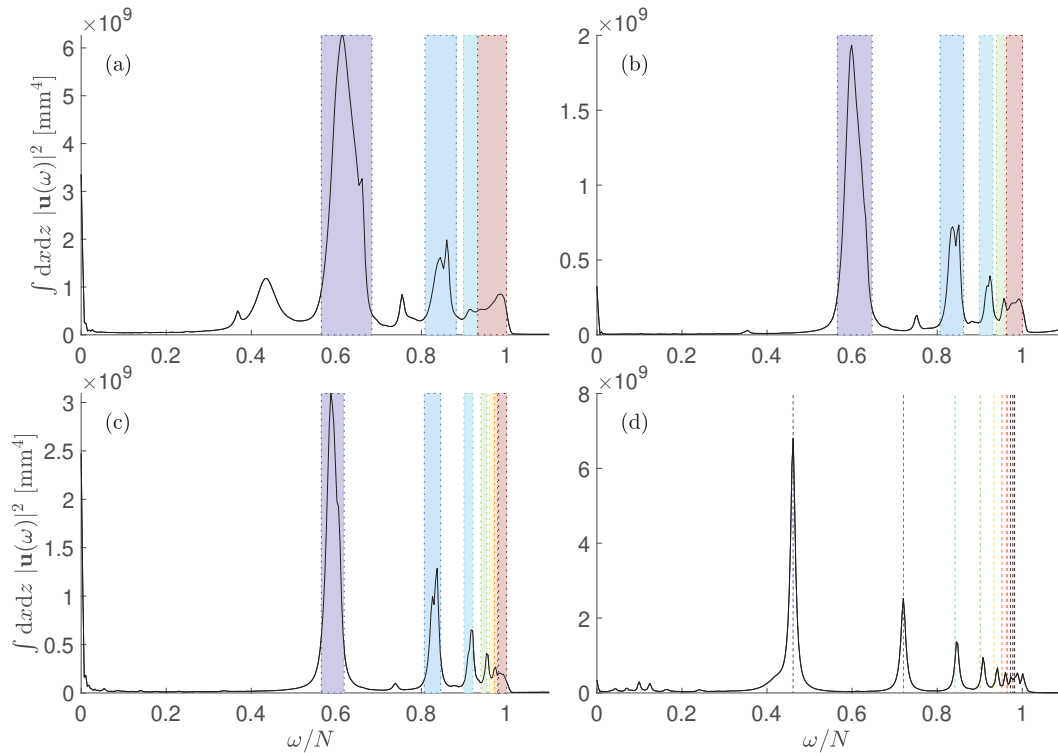


FIG. 3.7 Champ de vitesse horizontal (première colonne) et vertical (deuxième colonne) pour la géométrie C en trois instants différents : (a) et (b) en  $t = 17$  s, (c) et (d) en  $t = 200$  s et (e) et (f) en  $t = 400$  s.

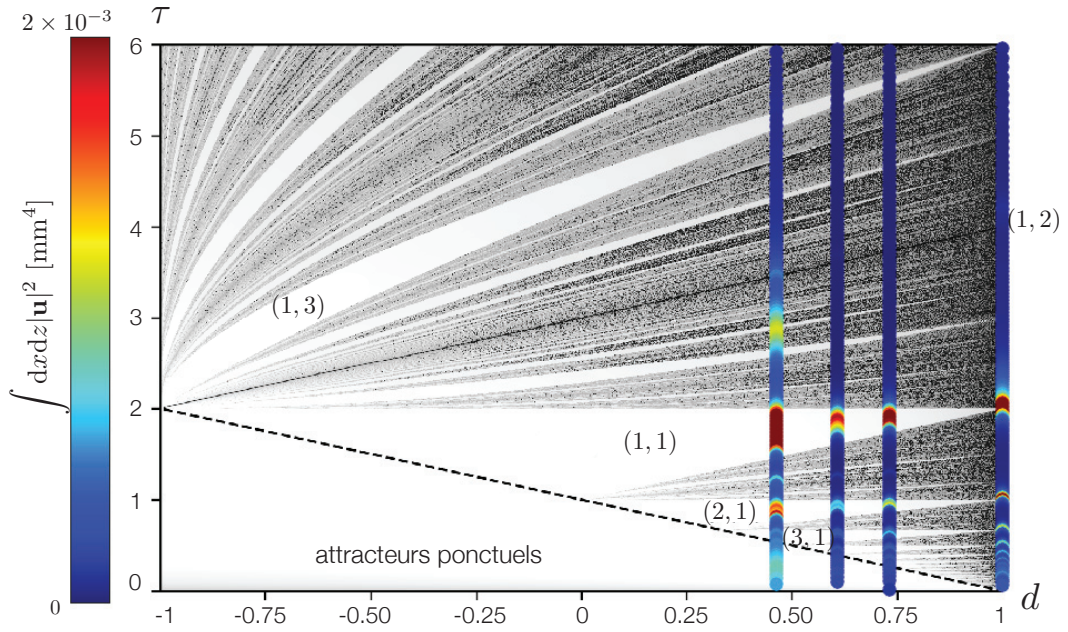
A partir du champ de vitesse total, on calcule dans chaque cas le spectre de puissance, tracé en figure 3.8. Ces spectres ont été calculés sur une aire légèrement plus petite que l'aire totale afin de limiter l'influence du bruit, plus important sur les bords ; et sur toute la durée de l'expérience, soit sur une fenêtre temporelle de taille  $1400 \text{ s} \approx 150 T_N$ . Les régions colorées correspondent aux fréquences théoriques des attracteurs. La couleur indique le type d'attracteur comme mentionné dans la légende. On constate que la densité d'énergie cinétique est effectivement plus importante sur ces domaines de fréquences, et ce quelque soit la géométrie de la cuve.



**FIG. 3.8** Spectre de puissance calculé à partir des champs  $u(x, z, t)$  et  $w(x, z, t)$ , avec  $t \in [0 : 1200]$  s et  $(x, z)$  appartenant à une zone légèrement plus petite que la surface latérale de la cuve (pour des problèmes de visualisation), pour les géométries  $A$  (a),  $B$  (b),  $C$  (c) et  $D$  (d). Les bandes de couleur correspondent aux fréquences théoriques donnant un attracteur en régime stationnaire. Violet : attracteurs (1,1). Bleu foncé : attracteurs (2,1). Bleu clair : attracteurs (3,1). Vert : attracteurs (4,1). Jaune : attracteur (5,1). Orange : attracteur (6,1). Rouge : attracteurs ponctuels. Le dernier graphique correspond à la cuve rectangulaire, où les fréquences de résonance théoriques forment un ensemble discret.

La figure 3.9 synthétise les résultats obtenus en superposant au diagramme  $(d, \tau)$  (voir chp. 1) des points dont la couleur varie avec l'amplitude du spectre, pour les quatre géométries étudiées. On rappelle que  $d = 1 - \tan \alpha (2H)/L$  correspond à la géométrie de la cuve et  $\tau = (2H)/L\sqrt{(N/\omega)^2 - 1}$  renseigne sur la fréquence du forçage. Une unique expérience de *réponse impulsionnelle* permet donc de sonder tous les couples  $(d_0, \tau)$ , où  $d_0$  est fixé et  $\tau$  est limité uniquement par la fréquence d'acquisition et le spectre de l'impulsion. Chacune des quatre expériences conduites correspond donc à une colonne entière de points. On voit sur cette figure que dans presque tous les cas les fréquences de forte énergie (points rouges) et les fréquences d'attracteurs (zones grises claires) coïncident. Avant de nous intéresser aux écarts entre le diagramme  $(d, \tau)$  et les résultats expérimentaux présentés ici ; assurons nous que les fortes densités d'énergie sont effectivement associées à des attracteurs.

Pour cela, on s'intéresse aux structures spatiales présentes dans le champ, en filtrant le champ de vitesse de chaque pixel à une fréquence d'intérêt. La figure 3.10(a) montre par exemple le champ filtré à la fréquence  $\omega/N = 0.605$ , qui correspond en régime



**Fig. 3.9** En gris : exposant de Lyapounov calculé par [70] en fonction des deux paramètres  $d = 1 - \tan \alpha (2H)/L$  et  $\tau = (2H)/L\sqrt{(N/\omega)^2 - 1}$ . En couleur : valeur du spectre de puissance, calculé comme dans la figure 3.8. Chacune des quatre colonnes de points correspond à une seule expérience.

stationnaire à un attracteur (1, 1) tracé en traitillés. Le champ de vitesse reproduit effectivement la forme de cet attracteur théorique. Ainsi, l'énergie importante du signal à cette fréquence est effectivement portée par une structure spatiale correspondant à l'attracteur (1, 1) : nous avons bien réussi à exciter ce mode par le brusque mouvement du générateur. On retrouve cet accord entre champ filtré et structure spatiale attendue pour les autres attracteurs. Nous avons reporté dans l'annexe G plusieurs autres champs de vitesse obtenus par filtrage. Par ailleurs, la figure 3.10(b), qui montre la densité d'énergie  $E_{\theta, \omega}$  dans l'espace de  $(\theta, \omega)$  normalisée par le spectre de puissance  $E_{\omega}$  (cf. sec. 1.3.2 pour la définition de cette quantité), valide l'idée que le champ de vitesse peut bien être interprété comme une superposition d'ondes internes, car cette densité se concentre très nettement autour de leur relation de dispersion tracée en traitillés.

Sur les figures 3.8 et 3.9, on note quelques écarts entre le diagramme  $(d, \tau)$  et les résultats expérimentaux. Ces écarts peuvent être expliqués par plusieurs phénomènes décrits ci-dessous.

**Mode de ballottement** La cuve que nous utilisons n'est pas fermée à la surface (afin de pouvoir aisément changer l'angle  $\alpha$ ), aussi on observe très nettement le premier mode de ballottement. En effet, on constate expérimentalement que pour les géométries B, C et D ce mode oscille à  $\omega > N$  mais pour la géométrie A il oscille à  $\omega/N \simeq 0.44$ , ce qui correspond à  $\tau \simeq 2.8$ . La figure 3.11, qui montre le champ

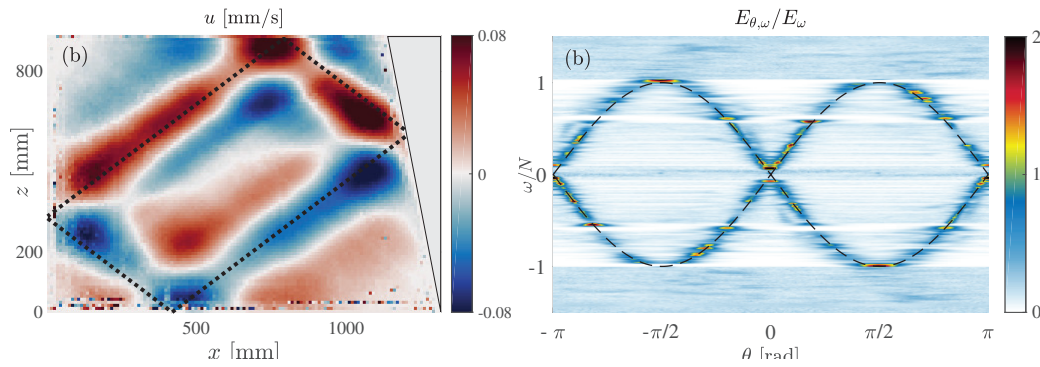


FIG. 3.10 (a) Champ de vitesse horizontal filtré à la fréquence  $\omega/N = 0.605$  dans la géométrie C. On a pour cela utilisé le champ de vitesse entre  $t_1 = 200$  s et  $t_2 = 600$  s. (b) Densité d'énergie dans l'espace des  $(\theta, \omega)$ , normalisée par la densité d'énergie à  $\omega$ . La relation de dispersion des ondes internes  $\omega = \pm N \sin \theta$  est tracée en traitillés.

de vitesse filtré à cette fréquence dans la géométrie A, valide cette interprétation et explique la forte réponse du système en  $d \simeq 0.47$ ,  $\tau \simeq 2.8$  visible sur la figure 3.9.

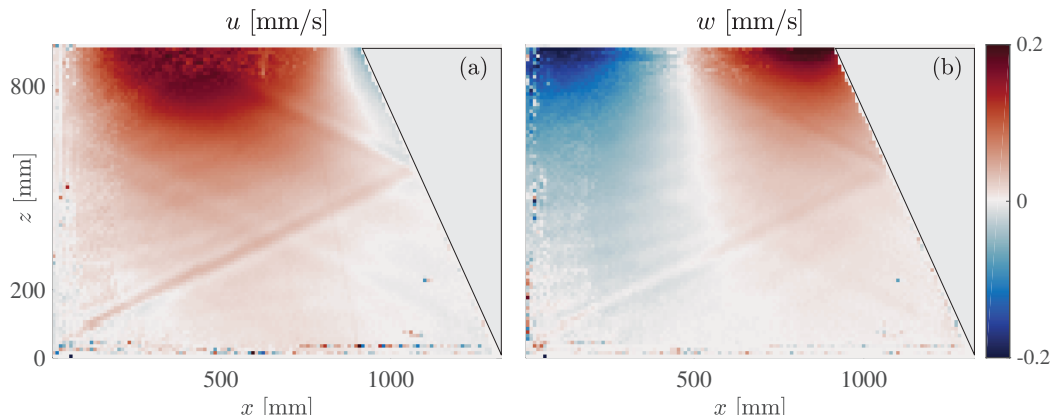


FIG. 3.11 Champ de vitesse de l'expérience A, filtré à la fréquence  $\omega/N \simeq 0.44$  correspondant au premier mode de ballottage, (a) horizontal et (b) vertical.

**Élargissement des résonances par viscosité** Le deuxième phénomène est la viscosité. En effet le diagramme  $(d, \tau)$  est obtenu dans le cadre d'une théorie non visqueuse des ondes internes, alors que notre système expérimental est dissipatif. A cause de cette atténuation visqueuse, une fréquence proche d'une fréquence de résonance présentera elle aussi - même si dans une moindre mesure - une forte densité d'énergie. Cela est particulièrement visible dans la géométrie D où la théorie non visqueuse prédit des résonances sur des fréquences discrètes là où l'on observe expérimentalement des pics d'une largeur finie. Ce comportement est classiquement observé dans les systèmes linéaires résonnants dissipatifs. Typiquement, on a la largeur relative de la résonance observée qui vaut  $\delta\omega/\omega_0 \simeq 1/Q$  où  $Q = \omega_0\tau$  est le facteur de qualité lié au temps d'amortissement  $\tau$ . En mesurant la largeur à mi-hauteur des pics de la réponse impulsionnelle dans la cuve rectangulaire (figure 3.8(d)), on trouve des temps caractéristiques d'atténuation variant de 100 s pour le premier pic à 190 s pour le cinquième. L'ordre de grandeur de ces temps caractéristiques est en accord avec les mesures d'at-

ténuation visqueuse effectuée au chapitre précédent. Cette remarque s'applique pour toutes les fréquences adjacentes à une zone d'attracteur dans les figures 3.8(a), (b) et (c).

**Générateur non idéal** *A contrario*, certaines fréquences correspondent dans le diagramme  $(d, \tau)$  à un attracteur mais ne présentent pas de forte densité d'énergie expérimentalement. Par exemple, les zones des attracteurs (1, 3) et (2, 3) ne sont pas observées dans ces expériences. Une première idée permettant d'expliquer cette absence de réponse est la viscosité : ces attracteurs sont de périmètres trop importants et sont donc trop atténués par viscosité pour être visibles. Néanmoins, le fait que nous ayons réussi à visualiser des attracteurs (1, 5), qui sont de longueur supérieure, fragilise cette explication. Cette absence de réponse pour ces basses fréquences est probablement lié au générateur utilisé. En effet, Ermanyuk *et al.* ont montré dans [37] qu'un objet oscillant horizontalement dans un fluide linéairement stratifié ne fournit pas la même puissance au fluide selon sa fréquence d'oscillation, cette puissance tendant vers zéro lorsque  $\omega \rightarrow 0$ . Aussi, il est probable que le générateur placé verticalement ne soit pas optimal pour exciter les attracteurs où  $\omega/N$  est trop petit.

### 3.2.3 Conclusion

Ces premiers résultats viennent donc valider l'intuition développée en introduction : on peut effectivement accéder expérimentalement aux modes résonnants du système étudié ici (du moins ceux avec  $\omega/N \gtrsim 0.1$ ) en le soumettant à une perturbation brusque, car le système oscille alors spontanément aux fréquences correspondant aux attracteurs.

L'énergie transmise de la source au système au cours de l'impulsion semble donc importante pour ces fréquences. Pouvons nous relier ce transfert d'énergie à celui observé lorsque le générateur oscille de façon monochromatique en régime stationnaire ? On a par exemple obtenu  $p_{inj} \simeq 1.5 p_{inj}^{M1}$  dans les expériences présentées au chapitre précédent, où  $p_{inj}^{M1}$  est une puissance théorique de référence calculée en supposant un générateur idéal et avec  $L \rightarrow \infty$ . Est-ce que, en calculant l'énergie injectée à la même fréquence lors d'un déplacement brusque du générateur, on mesurera aussi une énergie 1.5 fois plus grande que si la cuve était infiniment longue et le générateur idéal ? On pourrait alors caractériser *quantitativement* une géométrie donnée en réalisant une seule expérience de *réponse impulsionnelle*, au lieu d'une série d'expériences en régime stationnaire. Pour répondre à cette question, nous allons tenter de mesurer la densité d'énergie injectée à chaque fréquence lors du mouvement brusque du batteur.

**Remarque** Les fréquences des attracteurs sont définies par la *géométrie* de la cuve, et pourtant la vitesse de groupe des ondes internes est trop faible pour imaginer qu'elles aient eu le temps de se réfléchir contre les parois au cours des quelques secondes de l'impulsion. La vitesse de groupe de l'onde oscillant à  $\omega/N \simeq 0.6$  (qui correspond dans

la géométrie  $B$  à un attracteur  $(1, 1)$ ) vaut par exemple une dizaine de centimètres par seconde. Cette contradiction apparente est levée en invoquant le fait que l'eau, sous les sollicitations étudiées ici, est incompressible (toutes les vitesses sont très inférieures à la vitesse du son  $c_s \simeq 1500$  m/s). Le mouvement de chaque particule de fluide est alors fonction du mouvement de toutes les autres, et la force que le batteur exerce au cours de l'impulsion dépend alors de la géométrie entière de la cuve.

### 3.3 Mesure de l'énergie injectée dans chaque mode

Le fluide étant initialement au repos, l'énergie de chacun des modes observée après l'impulsion provient nécessairement de cette dernière. Il nous suffit donc de mesurer l'énergie de chaque mode juste après, à  $t = +\delta t/2$ , pour connaître l'énergie transférée. Chaque mode possède une structure spatiale avec une direction particulière inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale<sup>1</sup>. On peut donc utiliser l'angle  $\theta$  pour paramétrer l'ensemble des modes. La quantité d'énergie portée par une structure spatiale d'angle  $\theta$  donnera l'énergie du mode  $\theta$ . Pour calculer cette énergie, on réalise à chaque instant une transformée de Fourier spatiale, donnant la densité d'énergie dans l'espace des nombres d'onde  $\mathbf{k}$  à l'instant  $t$ . Un changement de variable  $(k_x, k_z, t) \rightarrow (k, \theta, t)$  suivi d'une intégration sur tous les modules  $k$  du nombre d'onde donne  $E_\theta(t)$ , la densité d'énergie dans l'espace des  $\theta$  et donc la densité d'énergie des modes.

Cette procédure simple en théorie est en pratique difficile à appliquer. En effet,  $E(\mathbf{k})$  est très mal résolu pour  $\mathbf{k}$  correspondant à des échelles de l'ordre de grandeur de la taille de la cuve. Or nous cherchons à connaître l'énergie des modes juste après l'impulsion, quand l'écoulement présente justement la grande échelle du générateur. À cause de ce problème, nous nous tournons vers une autre signature des modes pour déterminer leur énergie initiale et donc l'énergie qui leur a été transmise par la source : leur fréquence d'oscillation.

En effet, chaque mode oscille à la fréquence propre  $\omega = N \sin \theta$ . Il suffit donc de mesurer l'énergie initiale portée par la fréquence  $\omega$  pour connaître l'énergie transférée au mode correspondant. Cette procédure soulève néanmoins un autre problème : comment mesurer la densité d'énergie  $E_\omega$  portée par la fréquence  $\omega$  à un instant donné ? Car la définition de  $E_\omega$  fait intervenir la transformée de Fourier du champ de vitesse, qui nécessite donc un signal d'une certaine durée. Or l'énergie du mode oscillant à  $\omega$  peut avoir changée entre le début du signal et sa fin. En pratique, on voit sur la figure 3.6 que le signal s'atténue au bout d'environ une centaine de secondes. Il faudrait donc calculer la transformée de Fourier sur une durée petite devant ce temps d'atténuation. Or la calculer sur une fenêtre temporelle de taille  $T = 50$  s donnerait une résolution en fréquence  $\delta f = 1/T = 0.02$  s<sup>-1</sup>, ce qui n'est pas très satisfaisant

<sup>1</sup> Modulo son sinus,  $\theta$  représente ici les quatre solutions de  $\omega/N = \pm \sin \theta$ .

au regard des fréquences que l'on cherche à discerner : la région des fréquences correspondant à l'attracteur (1, 1) est par exemple large d'environ  $0.02 \text{ s}^{-1}$ . Afin de dépasser cette difficulté, nous allons établir un premier modèle simple prenant en compte l'atténuation visqueuse. Ce modèle très simple va nous permettre, en ajustant les données expérimentales, une première estimation de la densité d'énergie injectée à chaque fréquence, et donc une première comparaison entre ces résultats et ceux obtenus dans des expériences réalisées en régime stationnaire. Les développements qui suivent ne sont pas à interpréter comme une modélisation rigoureuse mais comme une démonstration de principe.

### 3.3.1 Modélisation

On utilise l'équation bilan (2.8) dérivée au chapitre précédent, mais dans sa forme extensive. En effet, comme nous étudions plusieurs géométries de cuve, le volume n'est plus un paramètre fixe. En notant par une majuscule les quantités extensives  $E_{tot} \equiv A e_{tot}$ ,  $P_{inj}(t) \equiv A p_{inj}(t)$  et  $P_{diss}(t) \equiv A p_{diss}(t)$  (où  $A$  est la surface du trapèze de la cuve) on a

$$\frac{dE_{tot}(t)}{dt} = P_{inj}(t) - P_{diss}(t). \quad (3.1)$$

Nous allons par ailleurs faire plusieurs hypothèses simplificatrices.

- 1 La première concerne la forme de la dissipation. Nous avons vu au chapitre précédent qu'elle est dominée par la dissipation contre les parois latérales qui prend alors la forme  $P_{diss} = -E_{tot}/\tau$  avec  $\tau \sim 100 \text{ s}$ .
- 2 La seconde hypothèse concerne ce temps caractéristique de dissipation : on suppose que  $\tau \gg \delta t$ , c'est-à-dire que pendant la seconde où le générateur est en mouvement et injecte de l'énergie le système ne dissipe pas encore. Cette deuxième hypothèse est tout à fait raisonnable au vu des ordres de grandeurs  $\tau \sim 100 \text{ s}$ ,  $\delta t \sim 1 \text{ s}$ .
- 3 Enfin, nous supposons l'écoulement en régime linéaire.

En utilisant la deuxième hypothèse,  $P_{diss}(t) = 0$  au cours de l'impulsion, on montre que  $E_{tot}(t = +\delta t/2) = E_g$  où  $E_g$  est l'énergie transmise par la source au système au cours de l'impulsion

$$E_g \equiv \int_{-\delta t/2}^{+\delta t/2} dt P_{inj}(t). \quad (3.2)$$

Pour  $t > \delta t/2$ ,  $P_{inj}(t) = 0$  car le générateur ne bouge plus et la modélisation par atténuation exponentielle de la dissipation visqueuse (première hypothèse) donne

$$\forall t > \delta t/2, E_{tot}(t) = E_g \exp(-t/\tau). \quad (3.3)$$



Dans cette égalité,  $E_{tot}(t)$  peut être estimée expérimentalement et  $E_g$  est la quantité d'intérêt. Plus précisément, c'est le contenu spectral de  $E_g$  que nous cherchons à estimer

$$E_g = \int_{-\infty}^{+\infty} dt P_{inj}(t) \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{\rho_r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int dz P(0, z, \omega) u_g^*(z, \omega), \quad (3.5)$$

où  $P$  désigne la pression. La première égalité provient de  $P_{inj}(t) = 0$  avant et après l'impulsion, et la deuxième provient de la définition (2.9) de  $p_{inj}$  et de l'égalité de Plancherel. On note  $\phi(\omega)$  la partie réelle de la densité de  $E_g$  dans l'espace des fréquences

$$\phi(\omega) \equiv \frac{1}{\rho_r} \text{Re} \left[ \int dz P(0, z, \omega) u_g^*(z, \omega) \right]. \quad (3.6)$$

En effet, comme  $u$  et  $P$  sont réels la partie imaginaire de  $\int dz P(0, z, \omega) u_g^*(z, \omega)$  disparaît dans  $E_g$  par intégration sur  $\omega$ . Nous cherchons alors à réécrire (3.3) sous sa forme spectrale, afin de pouvoir faire apparaître  $\phi(\omega)$  et la relier à une quantité mesurable. Pour faire apparaître une forme spectrale de  $E_{tot}(t)$ , nous allons à nouveau utiliser le théorème de Plancherel. Il faut pour cela considérer une moyenne glissante de l'énergie définie par

$$\bar{E}_T(t) \equiv \frac{1}{T} \int dt' \int dx dz \frac{1}{2} \left( \mathbf{u}_{t,T}^2(t') + b_{t,T}^2(t')/N^2 \right) \quad (3.7)$$

où la notation  $g_{t,T}$  signifie que la fonction  $g$  a été multipliée par une fenêtre, qui vaut zéro partout sauf dans un voisinage de largeur  $T$  centré en  $t$ . La fenêtre est par exemple la fonction porte, ou la fonction de hanning. On peut alors à nouveau appliquer le théorème de Plancherel et faire apparaître le contenu spectral

$$\bar{E}_T(t) \equiv \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int dx dz \frac{1}{2} \left( |\mathbf{u}_{t,T}(\omega)|^2 + |b_{t,T}(\omega)|^2/N^2 \right). \quad (3.8)$$

On suppose comme précédemment équipartition entre énergie cinétique et énergie potentielle

$$\bar{E}_T(t) \equiv \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int dx dz |\mathbf{u}_{t,T}(\omega)|^2. \quad (3.9)$$

Il est par ailleurs aisé de déduire de l'évolution de  $E_{tot}$  donnée par (3.3) l'évolution de  $\bar{E}_T$

$$\bar{E}_T(t) = \frac{E_g}{T} f_\tau(t, T), \quad (3.10)$$

où  $f_\tau(t, T)$  est une fonction de  $t$  et  $T$  paramétrisée par  $\tau$ , homogène à un temps et qui dépend de la forme particulière de la fenêtre choisie (la figure 3.12(a) montre par exemple l'évolution de  $f_\tau(t, T)$ , avec la fonction porte et  $\tau = 130$  s). En introduisant

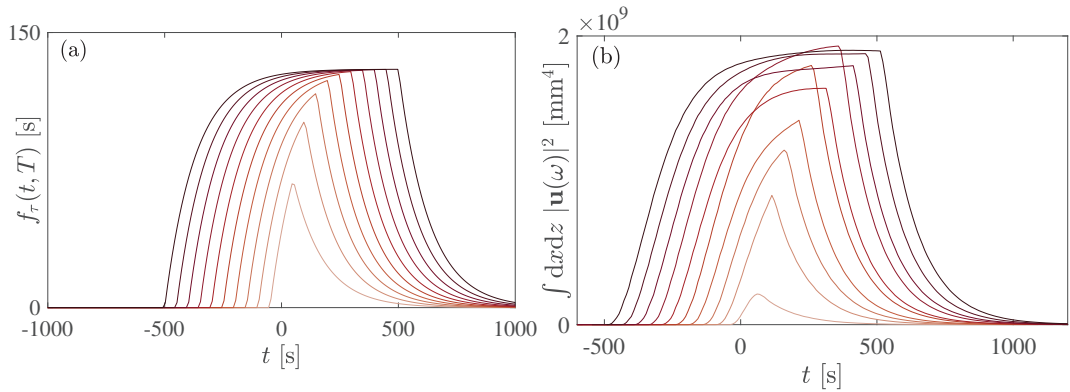
les décompositions spectrales (3.5) et (3.9) de  $E_g$  et de  $\bar{E}_T$  dans (3.10) on obtient finalement

$$\int \phi(\omega) d\omega = \frac{1}{f_\tau(t, T)} \int dx dz |\mathbf{u}_{t, T}(\omega)|^2 d\omega. \quad (3.11)$$

La forme intégrale de cette égalité n'est pas suffisante pour déduire de l'observation du champ de vitesse  $\mathbf{u}$  la densité de puissance injectée par le générateur  $\phi(\omega)$ . Pour palier ce manque, nous pouvons, comme expliqué à l'annexe H, exploiter la linéarité du système pour obtenir

$$\phi(\omega) = \frac{1}{f_\tau(t, T)} \int dx dz |\mathbf{u}_{t, T}(\omega)|^2. \quad (3.12)$$

Le domaine de validité de cette égalité (3.12), abordé dans cette même annexe (H), reste incertain. Néanmoins, nous allons tout de même – par pragmatisme – l'employer dans la suite de ce chapitre afin de calculer  $\phi(\omega)$  à partir du champ de vitesse  $\mathbf{u}$  mesuré par PIV. Selon le modèle exposé ici, la fonction  $f_\tau(t, T)$  devrait compenser exactement la dépendance en  $T$  et en  $t$  de  $\int dx dz |\mathbf{u}_{t, T}(\omega)|^2$  et permettre alors de mesurer  $\phi(\omega)$  sans ambiguïté.



**Fig. 3.12** (a) Évolution de  $f_\tau(t, T)$  avec le temps pour différentes valeurs de  $T$ . La courbe rouge clair correspond à  $T = 100$  s et la rouge foncé à  $T = 1000$  s (b) Évolution de  $\int dx dz |\mathbf{u}_{t, T}(\omega)|^2$ , pour  $\omega/N = 0.605$ , mesuré expérimentalement dans la géométrie C pour différentes tailles de fenêtre  $T$ . Les couleurs codent de la même façon la valeur de  $T$ .

### 3.3.2 Méthode d'analyse

En pratique, nous avons choisi comme fenêtre la fonction porte, par simplicité. On peut alors expliciter la fonction  $f_\tau(t, T)$  qui apparaît dans (3.12)

$$f_\tau(t, T) = 0 \quad \text{pour } t < -T/2 \quad (3.13a)$$

$$= \tau(1 - e^{-(t+T/2)/\tau}) \quad \text{pour } -T/2 < t < T/2 \quad (3.13b)$$

$$= 2\tau \sinh(T/(2\tau)) \exp(-t/\tau) \quad \text{pour } t > T/2. \quad (3.13c)$$

Cette fonction est tracée en figure 3.12(a) pour différentes valeurs de  $T$ , allant de  $T = 100$  s en rouge clair à  $T = 1000$  s en rouge foncé, et avec  $\tau = 130$  s.

Afin de mesurer  $\phi(\omega)$  via l'équation (3.12), on calcule pour chaque  $\omega$  et plusieurs largeurs de fenêtre  $T$  l'évolution de  $\int dx dz |\mathbf{u}_{t,T}(\omega)|^2$  avec le temps  $t$ . Pour cela, on se restreint à nouveau à une zone légèrement plus petite que l'aire totale de la cuve, pour limiter l'influence du bruit. Un exemple d'évolution de cette quantité avec  $t$  pour différentes tailles de fenêtre  $T$  est donné en figure 3.12(b). Les couleurs codent à nouveau la valeur de  $T$ . Guidés par (3.12), on ajuste ensuite chacune de ces courbes par  $a f_{\tau}(t, T)$ , où  $T$  est fixé et  $a$  et  $\tau$  sont les paramètres libres que l'on ajuste sur les données.

**Remarque** Afin d'aboutir à l'expression (3.12) très simple de  $\phi$ , nous avons supposé que ce temps de dissipation  $\tau$  était indépendant de  $\omega$ . Mais physiquement nous savons que ce n'est pas le cas, les modes ayant des taux de dissipation légèrement différents et pouvant varier au cours du temps. C'est pourquoi nous n'avons pas cherché à imposer une valeur unique au paramètre  $\tau$  lors des ajustements.

L'ajustement de  $a$  sur les données fournit alors une estimation de  $\phi$ . Dans la pratique, on a réalisé l'ajustement séparément sur la phase de croissance et la phase de décroissance de  $\int dx dz |\mathbf{u}_{t,T}(\omega)|^2$ . En effet, la forme de la dissipation visqueuse évolue légèrement, car la part de dissipation en volume augmente au cours du temps. Ainsi, chaque courbe de la figure 3.12(b) donne accès à deux estimations du couple  $(\tau(\omega), \phi(\omega))$ , l'une obtenue en ajustant la phase de croissance et l'autre la phase de décroissance.

La figure 3.13 montre toutes les estimations de  $\phi(\omega)$  obtenues à partir des ajustements réalisés sur les 10 courbes de la figure 3.12(b). L'abscisse correspond à la durée  $T$  de la porte utilisée pour le calcul de la transformée de Fourier. La courbe en trait plein a été obtenue en ajustant les parties croissantes de  $\int dx dz |\mathbf{u}_{t,T}(\omega)|^2$  et celle en traitillés les parties décroissantes. Selon notre modèle, ces deux courbes devraient être constantes et égales. On comprend que les valeurs obtenues pour  $T < 500$  s varient en fonction de  $T$  car elles correspondent à une résolution en fréquence  $\delta f = 1/T > 0.002$ , intervalle sur lequel la réponse du système varie beaucoup. Nous n'allons donc pas exploiter les estimations de  $\phi(\omega)$  obtenues dans ces cas là. Les valeurs obtenues pour  $500 < T < 1000$  restent encore un peu dispersées - notamment entre la phase de croissance et de décroissance, néanmoins nous allons voir dans la section suivante que cette méthode fournit des résultats très intéressants.

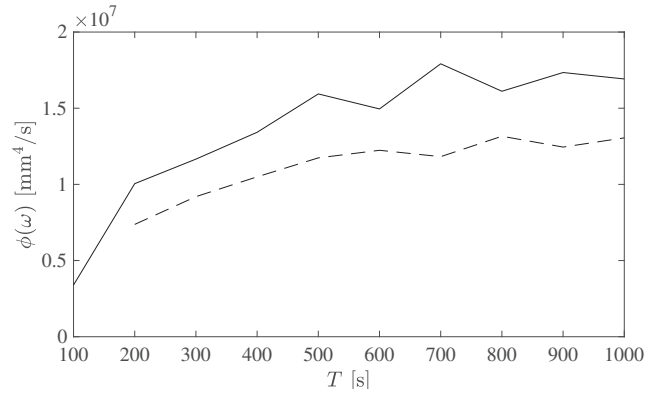


FIG. 3.13  $\phi(\omega = 0.605N)$  obtenu par l'ajustement des courbes de la figure 3.12(b) par la forme théorique de 3.12(a), via l'équation (3.12). La courbe en trait plein à été obtenue en ajustant les parties croissantes de  $\int dx dz |\mathbf{u}_{t,T}(\omega)|^2$  et celle en traitillés les parties décroissantes.

### 3.3.3 Résultats

Cette méthode permet donc pour chaque fréquence  $\omega$  de construire plusieurs estimation de  $\phi(\omega)$ . Nous avons tracé à la figure 3.14, pour les quatre géométries étudiées, les valeurs moyennes de ces estimations, obtenues pour  $500 \text{ s} \leq T \leq 1000 \text{ s}$ . Les barres d'erreur correspondent à leurs écarts types.

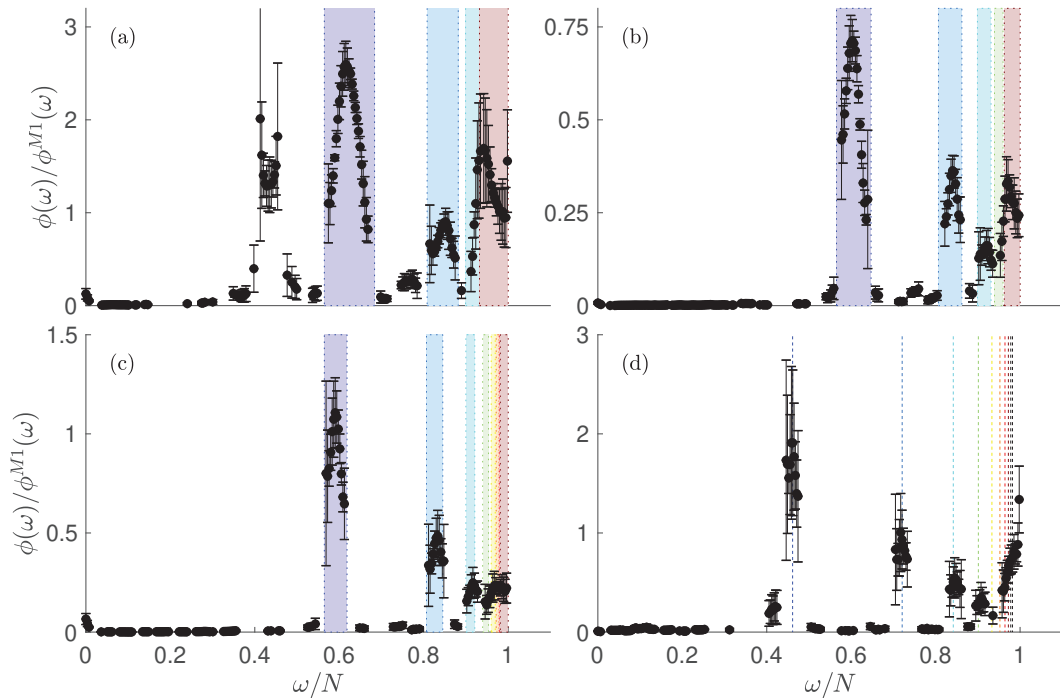


FIG. 3.14 Flux mesuré  $\phi$  normalisé par le flux théorique  $\phi^{M1}$  obtenu pour un générateur idéal avec une cuve infiniment longue, pour les quatre géométries. Comme dans la figure 3.8, les zones colorées correspondent à des fréquences théoriques donnant des attracteurs en régime stationnaire. Le même code couleur a été utilisé, Violet : attracteurs (1,1). Bleu foncé : (2,1). Bleu clair : (3,1). Vert : (4,1). Jaune : (5,1). Orange : (6,1). Rouge : attracteurs ponctuels.

Plus précisément, on a tracé en ordonnée  $\phi(\omega)$  normalisée par la valeur théorique  $\phi^{M1}(\omega)$  attendue dans le cas d'un générateur d'efficacité de 100% et d'une cuve infiniment longue dans la direction  $x$ . L'équivalent dans l'espace direct de cette quantité a été calculé au chapitre précédent. Nous décrivons ici brièvement la démonstration dans l'espace de Fourier, car il est facile pour une erreur de se glisser lors de la transposition. Sous ces hypothèses, la transformée de Fourier du champ de vitesse horizontale s'écrit

$$u^{M1}(\omega) = u_g(\omega) \cos(k_z z) e^{ik_x x}, \quad (3.14)$$

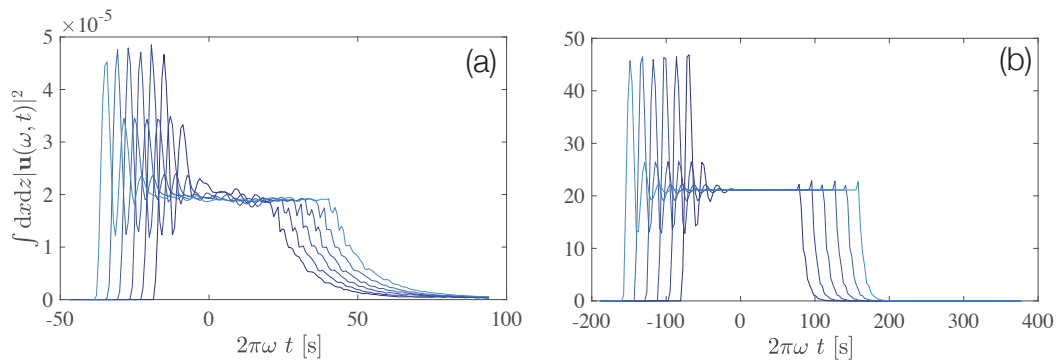
où  $k_x = k_z N \sqrt{1 - (\omega_0/N)^2} / \omega_0$  est déterminé par la relation de dispersion. En utilisant l'équation de Boussinesq linéaire non visqueuse projetée selon  $\mathbf{e}_x$  (1.21), on en déduit que cette vitesse horizontale correspond à une pression de transformée de Fourier

$$P^{M1}(\omega) = \omega \rho_r \frac{u_g(\omega)}{k_x} \cos(k_z z) e^{ik_x x}, \quad (3.15)$$

ce qui donne

$$\phi^{M1}(\omega) = |u_g(\omega)|^2 N \frac{H^2}{2\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{N}\right)^2}. \quad (3.16)$$

Les régions colorées correspondent à nouveau aux fréquences pour lesquelles on attend un attracteur. On observe effectivement un fort transfert énergétique de la source au système pour ces fréquences. Ces graphes ressemblent beaucoup à ceux de la figure 3.9, mais en plus bruité. Rappelons néanmoins qu'à *contrario* de la densité d'énergie tracée dans cette dernière figure, la mesure de  $\phi(\omega)$  permet ici de comparer *quantitativement* la réponse du système à une impulsion à celle obtenue par un forçage stationnaire, ce que nous ferons dans la prochaine sous-section. Ces courbes constituent donc un résultat important.



**FIG. 3.15** (a) Densité d'énergie glissante  $\int dx dz |\mathbf{u}_{t,T}(\omega)|^2$  pour une fréquence  $\omega$  pour laquelle le modèle présenté ici ne donne pas un accord satisfaisant. (b) Densité d'énergie glissante dans le cas d'un circuit RLC modèle, pour  $\omega/\omega_0 \approx 0.75$  où  $\omega_0$  est la fréquence propre de l'oscillateur.

Les fréquences pour lesquelles aucune estimation de  $\phi$  n'a été tracée correspondent aux fréquences où l'ajustement par une fonction proportionnelle à  $f_\tau(t, T)$  était trop peu convaincant. Un exemple d'évolution de  $\int dx dz |\mathbf{u}_{t,T}(\omega)|^2$  pour une telle fréquence est donné en figure 3.15(a). On a tracé en regard l'évolution de la densité d'énergie d'un circuit RLC, après une impulsion en tension, à une fréquence proche mais pas égale à sa fréquence de résonance. La ressemblance entre ces signaux laisse à penser qu'une modélisation plus fine du problème expliquant ce comportement est très probablement possible. Néanmoins, nous n'avons pas exploré davantage cette piste par manque de temps.

Les ajustements effectués donnent aussi accès aux temps de dissipation  $\tau(\omega)$ . Cette donnée n'est pas au centre de notre problématique, aussi les résultats correspondants sont donnés dans l'annexe I.

## 3.4 Comparaison avec des mesures stationnaires

Est-ce que les résultats de la figure 3.14 sont compatibles avec ceux obtenus en régimes stationnaires, c'est-à-dire lorsque le générateur oscille à amplitude et fréquence constantes ?

### 3.4.1 Étude en régime stationnaire

Pour répondre à cette question nous avons tout d'abord étudié, pour une géométrie et fréquence de forçage fixées, l'évolution avec l'amplitude du générateur de la valeur stationnaire de la puissance injectée. La figure 3.16 montre cette évolution dans le cas d'un attracteur (1, 1), en fonction de la puissance théorique  $\langle p_{inj}^{M1} \rangle_{T_0}$ . Les points bleus correspondent aux mesures expérimentales, réalisées sur les neuf expériences étudiées au chapitre 2 (obtenues avec  $H = 920$  mm,  $L = 1700$  mm,  $\alpha = 29.5^\circ$ ,  $N = 0.67$  rad/s et  $\omega_0/N = 0.52$ ). La droite noire en traitillés correspond à  $\langle p_{inj} \rangle_{T_0} = \langle p_{inj}^{M1} \rangle_{T_0}$ . On constate que les points expérimentaux sont très nettement au dessus de cette droite : la fréquence du forçage étant en adéquation avec la géométrie du système, l'énergie transmise est plus importante que dans un mode 1. La droite rouge correspond à un ajustement linéaire des six premiers points. Après  $\langle p_{inj}^{M1} \rangle_{T_0} \simeq 0.12$  mm<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>, les points expérimentaux sont légèrement en deçà de cet ajustement, probablement car ils correspondent à des régimes non linéaires où la structure de l'attracteur est déformée (voir chapitre 4), ce qui modifie la structure du champ de pression et donc la puissance transmise par la source à l'écoulement.

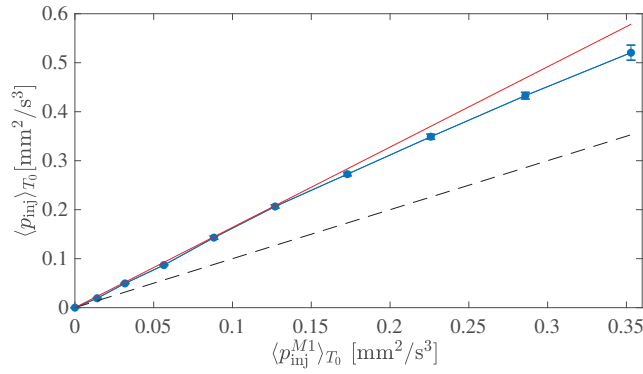


FIG. 3.16  $\langle p_{inj} \rangle_{T_0}$  en fonction de  $\langle p_{inj}^{M1} \rangle_{T_0}$ , pour 9 expériences d'attracteur (1, 1) avec  $H = 920$  mm,  $L = 1700$  mm,  $\alpha = 29.5^\circ$ ,  $N = 0.67$  rad/s et  $\omega_0/N = 0.52$ . L'amplitude  $a_0$  du générateur appartient à  $[2 : 12]$  mm (le premier point (0, 0) a été ajouté sans conduire d'expérience).

Le coefficient directeur de l'ajustement linéaire vaut 1.6. Est-ce que cette valeur correspond au rapport  $\phi(\omega_0)/\phi^{M1}(\omega_0)$  que l'on mesurerait via une réponse impulsionnelle ? Autrement dit, est-ce que les deux méthodes – celle basée sur des régimes stationnaires et celle basée sur une réponse impulsionnelle – fournissent les mêmes résultats ?

### 3.4.2 Comparaison des deux méthodes

Pour répondre à cette question, nous avons réalisé une série d'expériences dans une géométrie fixée. Nous avons tout d'abord mesuré la réponse du système à une impulsion, de laquelle nous avons déduit la courbe  $\phi(\omega)/\phi^{M1}(\omega)$  selon la méthode présentée dans ce chapitre. Nous avons ensuite réalisé plusieurs expériences à fréquence de forçage fixée. L'amplitude du mouvement du générateur a été choisie à  $a_0 = 1$  mm pour éviter les effets non linéaires. Nous avons alors déduit des puissances injectées stationnaires dans chacune de ces mesures une seconde estimation de

$$\frac{\phi(\omega_0)}{\phi^{M1}(\omega_0)} = \frac{\langle p_{inj} \rangle_{T_0}}{\langle p_{inj}^{M1} \rangle_{T_0}}, \quad (3.17)$$

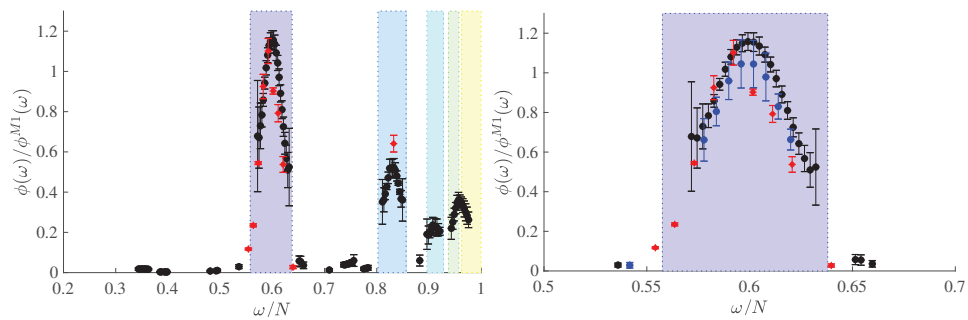
où  $\omega_0$  appartient à l'ensemble des fréquences sondées.

Les valeurs de  $\phi(\omega)/\phi^{M1}(\omega)$  déduites de la réponse impulsionnelle sont tracées en noir à la figure 3.17(a). Pour des raisons techniques<sup>1</sup>, nous n'avons pas pu explorer toutes les fréquences en régime stationnaire. Nous avons alors choisi d'explorer la gamme des attracteurs (1, 1), ainsi que des fréquences proches ; nous avons aussi sondé une fréquence correspondant à un attracteur (2, 1). Les résultats obtenus sont indiqués en rouge. Au vu de la simplicité de la modélisation de la réponse impulsion-

<sup>1</sup> Les particules de PIV sédimentent lentement, aussi nous pouvons réaliser des expériences pendant environ 6h consécutives. Une mesure, en régime stationnaire ou de réponse impulsionnelle, prend environ 30 minutes. On peut donc réaliser une douzaines d'expériences consécutives seulement.

nelle, l'accord *quantitatif* entre les deux méthodes est remarquable. On note tout de même un léger écart pour  $\omega/N \in [0.6; 0.65]$ , comme cela est davantage visible sur la figure 3.17(b), qui représente un agrandissement de la zone des attracteurs (1, 1). Plusieurs pistes permettent d'expliquer cet écart.

**Évolution de la stratification** Tout d'abord, il est possible que la stratification ait vieilli au cours de la journée. Pour tester cette hypothèse, nous avons réalisé une deuxième réponse impulsionnelle à la fin de la journée d'expérience. Les points bleus de la figure 3.17(b) correspondent à cette deuxième réponse impulsionnelle. On constate qu'ils sont légèrement en dessous des points noirs, ce qui explique une partie de l'écart entre les résultats issus des mesures stationnaires et ceux issus de la première réponse impulsionnelle.



**FIG. 3.17** (a)  $\phi(\omega)/\phi^{M1}(\omega)$  mesurée *via* une réponse impulsionnelle (en noir) et par des études en régime stationnaires (en rouge). (b) Agrandissement de la zone attracteur (1, 1). Les points bleus correspondent à une deuxième expérience de réponse impulsionnelle réalisée après les régimes stationnaires.

**Forme de l'impulsion** Par ailleurs, on constate que le désaccord entre les estimations de  $\phi(\omega)/\phi^{M1}(\omega)$  issues des régimes stationnaires (en rouge sur la figure 3.17) et de la réponse impulsionnelle (en noir) est très *asymétrique* autour de  $\omega/N \simeq 0.6$ . Cette asymétrie pourrait provenir de l'asymétrie de l'impulsion, qui, comme indiqué sur la figure 3.4, translate le haut du batteur vers le fluide et en écarte le bas. Selon notre modèle, la quantité d'énergie portée par chaque mode est définie au cours des 3 s de l'impulsion. Il se peut donc que la position du batteur, qui change légèrement la géométrie de la cuve (la largeur  $L$  est variée de 1% environ), ait une influence. On pourrait réaliser des réponses impulsionnelles en variant la forme de l'impulsion pour quantifier son effet.

**Attracteur pas si linéaire ?** Il existe une autre piste pour expliquer les écarts de la figure 3.17(b). En effet, les valeurs  $\langle p_{inj} \rangle_{T_0}$  obtenues à la figure 3.16 sont en fait assez dispersées autour de l'ajustement linéaire, comme le montre la figure 3.18 qui représente pour ces mêmes expériences l'évolution avec l'amplitude de forçage de  $\langle p_{inj} \rangle_{T_0} / \langle p_{inj}^{M1} \rangle_{T_0}$ .



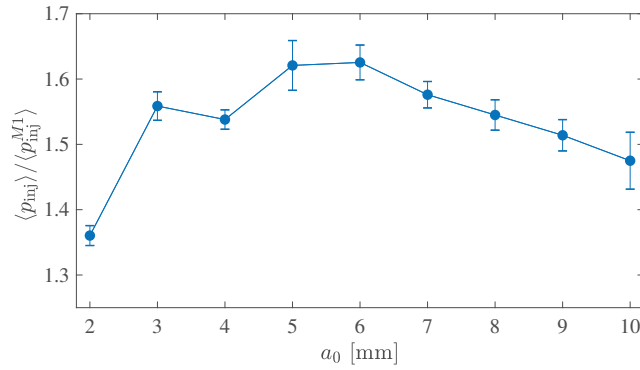


FIG. 3.18 Évolution de  $\langle p_{inj} \rangle_{T_0} / \langle p_{inj}^{M1} \rangle_{T_0}$  avec l'amplitude de forçage  $a_0$ . Les paramètres de ces expériences sont donnés dans la légende de la figure 3.16. Les barres d'erreur correspondent aux fluctuations temporelles de  $\langle p_{inj} \rangle_{T_0}$ .

Il est possible que les variations de la figure 3.18 soient issues d'un bruit de mesure incontrôlé. Les points rouges de la figure 3.17 seraient alors entachés d'une erreur plus grande que celle indiquée par les barres d'erreurs (qui correspondent aux fluctuations temporelles de la puissance injectée). *A contrario*, si la tendance est réelle, alors la modélisation de type *réponse linéaire* utilisée implicitement ici, dans laquelle la puissance transmise du générateur à l'écoulement est proportionnelle à  $|u_g(\omega)|^2$  (et donc à  $\langle p_{inj}^{M1} \rangle_{T_0}$ ), ne serait pas complètement validée. Notons que les résultats présentés à la figure 3.18 ne sont pas aberrants : en effet, la présence d'un écoulement moyen ainsi que d'harmoniques laisse envisageable un comportement pas tout à fait linéaire, même aux faibles amplitudes de forçage. Par ailleurs, la décroissance de  $\langle p_{inj} \rangle_{T_0} / \langle p_{inj}^{M1} \rangle_{T_0}$  observée pour  $a_0 \geq 6$  mm est compatible avec la déstructuration de l'attracteur observée dans les régimes non linéaires. Cette deuxième partie de la courbe permettrait donc de retrouver le résultat très intéressant obtenu *via* des simulations numériques par Jouve et Ogilvie [56] dans le cas d'attracteurs d'ondes d'inertie : à forçage fixé, un attracteur dissipe davantage s'il est en régime linéaire.

Quelque soit son interprétation, la figure 3.18 indique que

- soit la méthode de mesure de  $p_{inj}$  en régime stationnaire n'est pas aussi contrôlée qu'on le croit,
- soit la modélisation linéaire utilisée ici pour interpréter les résultats de réponse impulsionnelle n'est pas tout à fait valable,

chaque point pouvant être à l'origine des écarts de la figure 3.17.

### 3.4.3 Conclusion

Les analyses de réponse impulsionnelle ont donc permis non seulement de détecter les modes résonnants du système étudié mais aussi de quantifier leur réponse à une excitation monochromatique. Cette méthode peut aussi être employée numériquement.

Dans l'équipe, Timothée Jamin utilise le logiciel Basilisk [93] pour étudier certains comportements des ondes internes. Il a réussi à reproduire les expériences de réponse impulsionnelle présentées dans ce chapitre. On pourrait alors imaginer utiliser les outils présentés ici pour sonder numériquement une géométrie issue de mesures *in situ* de topographie sous-marine, afin de déterminer si elle est susceptible de générer des attracteurs d'ondes internes, et si oui, lesquels.

## Résumé

Lors de ce chapitre, nous avons exploré la réponse à une impulsion du système constitué d'un liquide stablement stratifié dans une cuve quasi 2D de géométrie trapézoïdale, connu pour présenter en régime stationnaire des *attracteurs*.

- Nous avons tout d'abord observé, dans plusieurs géométries, qu'après l'impulsion le système exhibe spontanément des attracteurs. En effet, la densité d'énergie est plus importante pour les fréquences correspondantes, et la structure spatiale portant ces oscillations ressemble aux structures obtenues en régime stationnaire.
- Nous avons ensuite développé une modélisation linéaire permettant de déduire, à partir de l'évolution temporelle de la densité d'énergie cinétique, la densité de puissance reçue par le système lors de l'impulsion. Nous avons mesuré expérimentalement cette densité de puissance dans différentes géométries.
- Nous avons finalement comparé ces observations avec celles réalisées en régime stationnaire. Les deux méthodes, pourtant très différentes, fournissent les mêmes résultats. Ainsi, une expérience de réponse impulsionnelle permet d'explorer quantitativement une géométrie donnée en un temps restreint, ce qui pourrait être employé pour sonder des géométries naturelles complexes.
- Enfin, ces deux méthodes démontrent que l'énergie importante des attracteurs est en partie due au transfert optimisé entre la source d'énergie et l'écoulement. Par ailleurs, il semblerait que cette optimisation décroisse légèrement lorsque le système devient non linéaire, ce qui a été observé numériquement par Jouve *et al.* [56] dans le cas d'attracteurs d'ondes d'inertie. À forçage donné, l'énergie transférée de la source à l'attracteur serait plus importante si celui-ci est en régime linéaire.



# Attracteur en régime non linéaire

## 4.1 Introduction

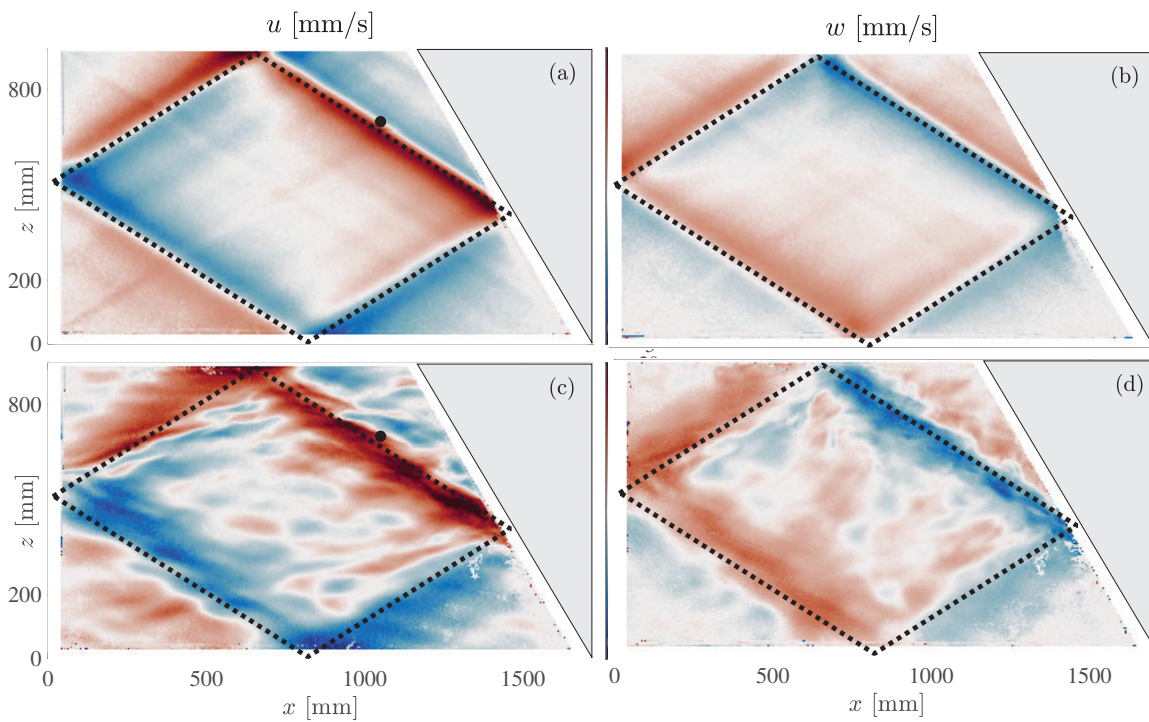
Lorsque l'amplitude d'une onde interne devient trop importante, elle est susceptible de se déstabiliser par interaction triadique. De nouvelles fréquences émergent alors et l'écoulement présente une structure spatiale différente. L'attracteur d'onde interne, en focalisant l'énergie dans une petite région de l'espace, favorise cette instabilité. La première observation expérimentale de la déstabilisation d'un attracteur a été reportée par Scolan *et al.* [98]. Cette instabilité est dite locale, car les ondes secondaires sont générées au niveau de la branche 1 de l'attracteur, et ne semblent pas sentir la géométrie particulière de la cuve. Plus tard, Brouzet *et al.* [22] étudient l'influence de la forme de l'attracteur initial sur la nature de l'instabilité. Ils reportent une expérience conduite dans un attracteur *peu concentré* (c'est à dire de forme allongée, comme celui apparaissant sur la figure G.1(e) de l'annexe G), donnant naissance à une instabilité dite *globale* : les ondes secondaires générées occupent tout l'espace et présentent une structure quasi stationnaire, c'est-à-dire avec des minima d'énergie très prononcés. Cette instabilité est alors présentée comme un cas intermédiaire entre l'instabilité locale observée dans un attracteur concentré [98] et l'instabilité d'un mode stationnaire dans une cuve rectangulaire reportée par McEwan dans [75]. Comme l'attracteur peu concentré présente lui même une structure quasi stationnaire, les auteurs avancent que c'est cette propriété de l'onde primaire qui rend les ondes secondaires quasi stationnaires.

Au cours de ce chapitre, nous allons étudier des attracteurs (1,1) en régime non linéaire, et notamment revenir sur ces idées. Nous allons aussi compléter la caractérisation du régime dit linéaire, qui s'avère ne pas mériter pleinement son nom. Pour cela, nous avons réalisé des expériences dans la grande cuve de dimension  $2000 \times 170 \times 1000 \text{ mm}^3$  avec le générateur oscillant à fréquence fixe, et avec une amplitude fixe ou lentement variable. La configuration expérimentale choisie correspond toujours à un attracteur (1,1). En fonction de l'amplitude imposée au batteur, on explore les différents régimes. L'écoulement est observé grâce à un dispositif PIV qui donne le champ de vitesse dans le plan vertical médian ou un dispositif de Schlieren Synthétique (SS) qui donne le champ de gradient de densité par rapport à la densité initiale, comme présenté au chapitre 1. Par ailleurs, nous avons aussi effectué certaines analyses sur des champs issus de simulations numériques 2D-2C (réalisées grâce au

logiciel Basilisk [93]) dans une géométrie similaire mais plus petite ( $448 \times 308 \text{ mm}^2$ ) pour des raisons de coûts numériques.

## 4.2 Expériences à amplitude fixée

Étudions tout d'abord le cas où l'amplitude de forçage est fixée. Les figures 4.1(a) et 4.1(b) montrent un exemple de champ de vitesse horizontal et vertical dans le cas où l'amplitude de forçage est suffisamment faible pour que le système reste dans le cadre linéaire. L'amplitude de forçage vaut  $a_0 = 2 \text{ mm}$ , et on a  $H = 920 \text{ mm}$ ,  $L = 1700 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 29.5^\circ$ ,  $\omega_0/N \simeq 0.53$  et  $N = 0.7 \text{ rad/s}$ . On distingue nettement que le champ de vitesse est important dans le voisinage de la prédiction théorique de l'attracteur tracée en traitillés. Ces champs de vitesse ont été obtenus après 50 périodes de forçage, le système est donc en régime stationnaire (voir figure 4.2(a) qui montre la vitesse horizontale obtenue en  $(x_0, z_0) = (1050 \text{ mm}, 700 \text{ mm})$  : la dissipation visqueuse au sein de l'attracteur et dans les couches visqueuses compense alors exactement l'énergie injectée par le générateur, et la largeur de l'attracteur est finie.



**FIG. 4.1** Champ de vitesse horizontal (a et c) et vertical (b et d) obtenu après 50 périodes de forçage à amplitude constante. La première ligne correspond à une amplitude de forçage  $a_0 = 2 \text{ mm}$  et la deuxième à  $a_0 = 9 \text{ mm}$ . Les autres paramètres  $H = 920 \text{ mm}$ ,  $L = 172 \text{ mm}$ ,  $\alpha = 29.5^\circ$ ,  $\omega_0/N = 0.53$  et  $N = 0.70 \text{ rad/s}$  sont les mêmes pour les deux expériences. Le signal de vitesse horizontale présenté sur la figure 4.2 a été mesuré au niveau du point noir  $(x_0, z_0) = (1050 \text{ mm}, 700 \text{ mm})$  indiqué en (a) et (c).

Si l'amplitude de forçage est plus grande, la structure spatiale du champ de vitesse est très différente. Les figures 4.1(c) et 4.1(d) montrent le champ de vitesse horizontal et

vertical mesurés dans la même configuration expérimentale mais avec une amplitude de forçage  $a_0 = 9$  mm, après 50 périodes de forçage. Un motif spatial complexe se superpose à l'attracteur, encore visible. Cette complexification se retrouve aussi sur le signal de vitesse horizontale en  $(x_0, z_0)$ , montré dans la figure 4.2(b). Au début de l'expérience ce signal oscille à la même fréquence que le forçage, mais à partir de  $t \approx 10 T_0$  il montre une structure temporelle plus complexe, qui correspond à un enrichissement du spectre temporel.

Nous allons caractériser plus précisément ces observations à l'aide des outils d'analyse présentés à la section 1.3.2.

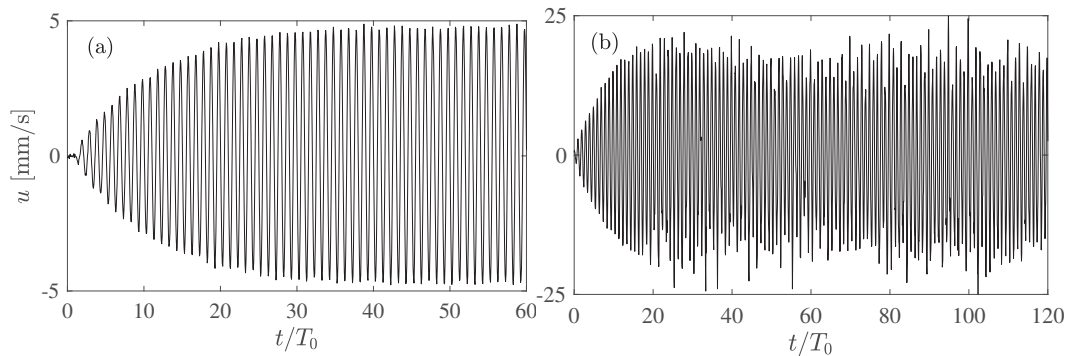


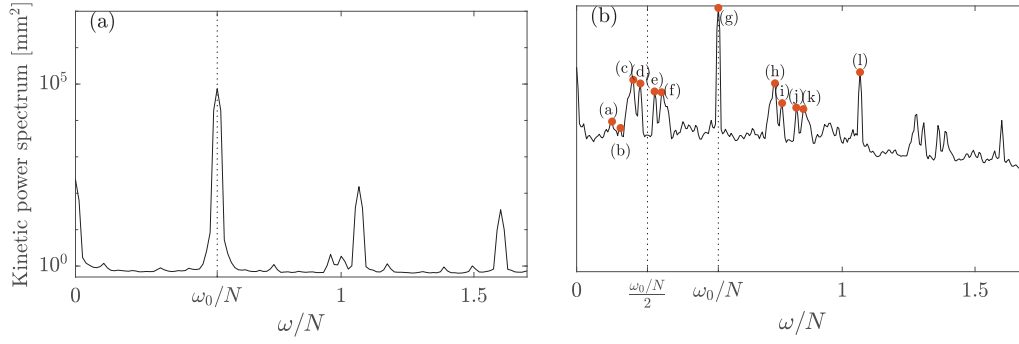
FIG. 4.2 Vitesse horizontale au point  $(x_0, z_0) = (1050 \text{ mm}, 700 \text{ mm})$  indiqué par un point noir sur les figures 4.1(a) et (c), pour les expériences linéaire (a) et non linéaire (b). Les paramètres expérimentaux sont ceux de la figure 4.1.

#### 4.2.1 Spectre fréquentiel

La figure 4.2 montre que, dans le cas linéaire, le signal de vitesse semble pouvoir être décrit par un signal oscillant à la fréquence du forçage multiplié par une enveloppe variant lentement dans le temps. Le temps caractéristique d'évolution de l'enveloppe vaut environ  $10 T_0$ . *A contrario*, le signal obtenu dans le régime non linéaire ne peut pas être simplement modélisé par une oscillation monochromatique d'amplitude lentement variable. Afin de connaître plus précisément le contenu spectral de ces signaux, on effectue une transformée de Fourier des signaux de vitesse horizontale et verticale, dont la somme des modules carrés est ensuite moyennée sur l'espace

$$E_\omega = \langle |u(\omega)|^2 + |w(\omega)|^2 \rangle_{x,z}. \quad (4.1)$$

Les figures 4.3(a) et 4.3(b) montrent le spectre de puissance obtenu respectivement dans les cas linéaire et non linéaire. La transformée de Fourier a été réalisée dans le régime stationnaire *i.e.*  $t \geq 25 T_0$ . Comme la deuxième expérience a duré plus longtemps, la résolution en fréquence est meilleure ( $\delta f = 1.5 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$  pour l'expérience (a) et  $\delta f = 5.9 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  pour la (b)). À chaque fois, les signaux ont été préalablement fenêtrés par une fonction de Hanning.



**FIG. 4.3** Spectres de puissance des expériences linéaire (a) et non linéaire (b). Les paramètres expérimentaux sont ceux de la figure 4.1. Les points rouges dans le spectre (b) indiquent des fréquences particulières, labellisées par des lettres.

Dans le cas linéaire, on observe très nettement un pic à  $\omega_0/N \simeq 0.53$  correspondant à la fréquence d'excitation. On aperçoit aussi des pics à  $\omega = n\omega_0$ , avec  $n = 0, 2$  et  $3$ . Nous allons ici étudier les structures correspondant à ces fréquences.

**Étude de l'écoulement moyen** L'attracteur, même si de très faible amplitude, crée en effet un écoulement moyen. Cet écoulement est en fait la somme de plusieurs contributions. La première provient de la dérive de Stokes, mise en évidence par ce dernier en 1880 dans les cas des ondes de surface [99]. De manière générale, un écoulement monochromatique

$$\mathbf{u}_0(x, z) \exp(-i\omega_0 t) + \mathbf{u}_0^*(x, z) \exp(i\omega_0 t) \quad (4.2)$$

produit pour un traceur passif un déplacement moyen de vitesse

$$\mathbf{u}_s = -2/\omega_0 \operatorname{Im} [(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0^*], \quad (4.3)$$

dont la démonstration est brièvement rappelée en Annexe D. Comme expliqué dans cette annexe et le chapitre 1, la mesure par PIV donne une moyenne *lagrangienne* du champ de vitesse, et elle contient donc ce terme de dérive. Les figures 4.4(a et b) montrent le champ de vitesse  $\mathbf{u}_s$  théorique calculé à partir de l'équation (4.3). Nous avons mesuré  $\mathbf{u}_0$  par transformée de Fourier du champ expérimental. Plus précisément, pour prendre en compte la largeur du pic autour de  $\omega_0$ , nous avons utilisé

$$\mathbf{u}_0(x, z) = \mathbf{u}(x, z, \omega_0) \times \Delta\omega, \quad (4.4)$$

où  $\mathbf{u}(x, z, \omega_0)$  est la transformée de Fourier de  $\mathbf{u}$  prise en  $\omega_0$ , et  $\Delta\omega$  est tel que l'aire de la densité d'énergie au niveau du pic à  $\omega_0$  soit égale à  $\Delta\omega \times E_\omega(\omega_0)$  :

$$\Delta\omega \equiv \frac{\left\langle \int_{\omega_0} d\omega (|u(\omega)|^2 + |w(\omega)|^2) \right\rangle_{x,z}}{\langle |u(\omega_0)|^2 + |w(\omega_0)|^2 \rangle_{x,z}}. \quad (4.5)$$

le symbole  $\int_{\omega_0}$  indique que l'on intègre la densité d'énergie au voisinage de  $\omega_0$ . On reconnaît dans le champ moyen mesuré (c et d) les structures de la prédiction théorique, notamment celles proches des rebonds, ainsi que celles perpendiculaires aux branches de l'attracteur. Néanmoins, ces structures semblent être d'amplitude légèrement moins importante expérimentalement que théoriquement. Pour cette raison, nous avons tracé dans les figures (e) et (f) la différence entre le champ expérimental et 70% du champ théorique (4.3). Ce facteur de 70% a été ajusté pour minimiser la différence obtenue. Ces figures (e) et (f) montrent qu'en effet, au moins une partie de l'écoulement moyen expérimental provient de la dérive de Stokes.

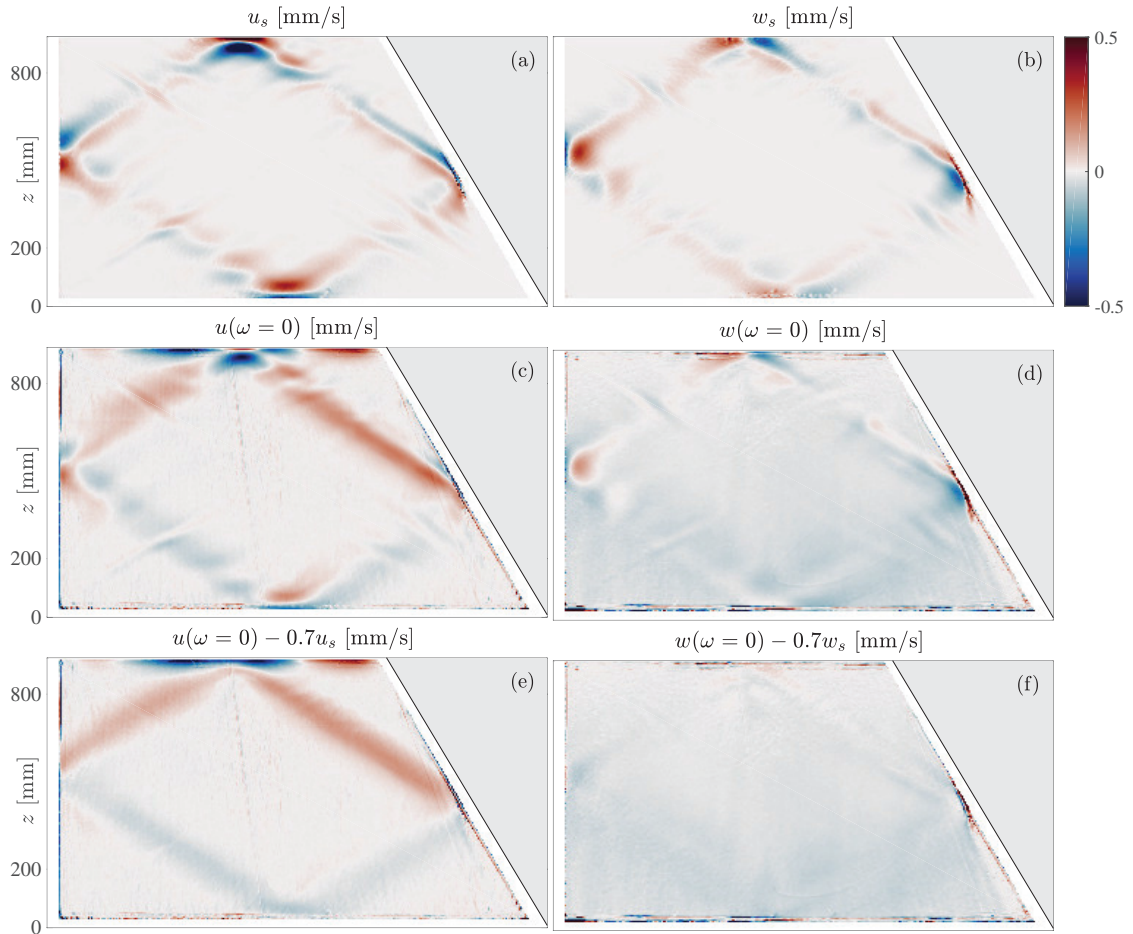


FIG. 4.4 Dérive de Stokes théorique (a et b). Écoulement moyen mesuré (c et d) dans l'expérience linéaire (voir figure 4.3(a) pour les paramètres de l'expérience). Différence entre le champ mesuré et 70% de la prédiction théorique (e et f).

Il reste néanmoins des structures dans les figures (e) et (f). Ainsi, cette dérive n'est pas l'unique phénomène dont découle l'écoulement moyen observé. En effet, on note sur la figure 4.4(f) la présence d'une vitesse verticale négative sur l'ensemble de la cuve. Elle correspond à la sédimentation des particules. Puisque l'expérience a été conduite environ 4 h après leur dépôt à la surface, les particules se trouvant au moment de l'acquisition en bas de la cuve ont donc une vitesse moyenne  $v_{sed} \sim H/(4h) \simeq 0.07$  mm/s, en accord avec l'ordre de grandeur du champ mesuré. La deuxième différence est une



forte vitesse horizontale le long de l'attracteur. Cet écoulement horizontal est lié à du *boundary streaming*. Le *streaming*, de manière générale, réfère à un phénomène provenant du terme  $\langle \mathbf{u}_0 \nabla \mathbf{u}_0 \rangle_t$  – où  $\mathbf{u}_0$  est à nouveau l'amplitude complexe du champ oscillant – par lequel l'onde cède de la quantité de mouvement à l'écoulement de fond. Ce phénomène est d'autant plus important que les ondes présentent des variations spatiales importantes. Il est donc prépondérant dans les couches limites où le champ évolue sur des échelles typique  $\delta \sim 1$  mm (cf. §2.3.2). On peut démontrer que l'écoulement moyen ainsi créé est horizontal et dans la direction de la vitesse de groupe du faisceau. Par recirculation, il apparaît alors au centre de la cuve un écoulement moyen dont la direction est opposée à la vitesse du courant moyen dans les couches limites, et donc opposé à la vitesse de groupe selon  $x$  de l'attracteur. Cet effet de *boundary streaming* a récemment été exploré pour les ondes internes, tant théoriquement et numériquement [95] qu'expérimentalement [52]. Ces derniers auteurs proposent un ordre de grandeur (Eq. (4.12) de leur article) de l'écoulement moyen  $u_{BS}$  induit au centre de la cuve par un faisceau d'onde monochromatique d'amplitude  $u_0$ , de longueur d'onde  $\lambda_0$  et de fréquence  $\omega_0$

$$u_{BS} \simeq -\frac{\pi}{4} \frac{\omega_0}{N} \left( 1 + \frac{\omega_0}{N} \right) \frac{u_0^2}{\lambda_0 \omega_0}. \quad (4.6)$$

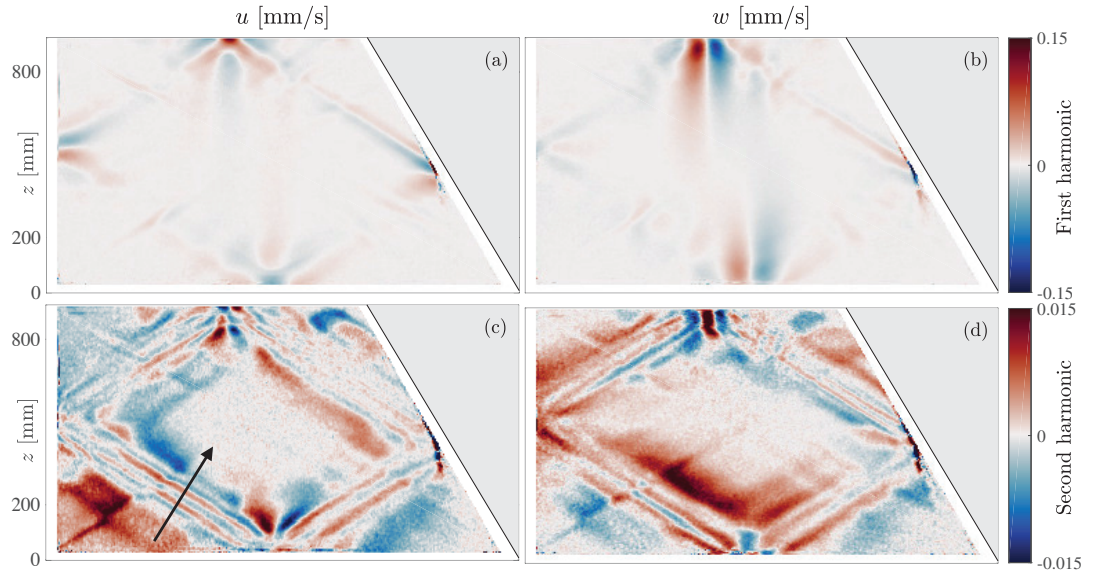
Avec  $u_0 \simeq 5$  mm/s,  $\omega_0 = 0.37$  rad/s,  $\omega_0/N \simeq 0.53$  et  $\lambda_0 \simeq 200$  mm on trouve  $u_{BS} \sim 0.2$  mm/s, en bon accord avec l'ordre de grandeur expérimentalement mesuré  $u_{BS} \sim 0.1$  mm/s. L'écart n'est pas surprenant car l'attracteur ne correspond pas à un faisceau de longueur d'onde bien définie. Ainsi, l'écoulement moyen observé résulte à la fois d'un artefact dû à la nature lagrangienne de la mesure (dérive de Stokes) et à la fois d'une interaction "onde/écoulement moyen" dans les couches limites parallèles à l'attracteur (*boundary streaming*).

**Étude des harmoniques** On note aussi sur les spectres 4.3(a) des pics en  $n\omega_0/N$  avec  $n = 2, 3$  correspondant aux première et deuxième harmoniques de la fréquence de forçage. La figure 4.5 montre le champ de vitesse correspondant. On distingue sur ces figures des traces au niveau de l'attracteur, ainsi que des structures au niveau des rebonds du faisceau, notamment à la surface et au niveau du fond de la cuve. Nous allons chercher à expliquer qualitativement la présence de ces structures.

Les structures proches de la surface s'interprètent par l'interaction non linéaire de l'onde primaire avec elle même. En effet, au niveau d'un rebond, l'onde primaire est composée de deux faisceaux, susceptibles d'interagir. On a alors  $a_{\text{tot}} = a_i + a_r$ , où  $a$  désigne  $u$ ,  $w$  ou  $b$ . En posant  $(k_x^0, k_z^0)$  le vecteur d'onde typique du faisceau incident, et en considérant une paroi horizontale, on a

$$a_i \propto e^{-i(\omega_0 t - (k_x^0 x + k_z^0 z))} + c.c. \quad (4.7)$$

$$a_r \propto e^{-i(\omega_0 t - (k_x^0 x - k_z^0 z))} + c.c. \quad (4.8)$$



**FIG. 4.5** Champs de vitesse horizontale (a et c) et verticale (b et d) obtenus en filtrant le champ de vitesse de l'expérience linéaire à  $\omega = 2\omega_0$  (a et b) et  $\omega = 3\omega_0$  (c et d). Les paramètres de l'expérience sont ceux de la figure 4.1(a). La flèche noire sur la figure (c) schématise l'abscisse curviligne utilisée pour construire la figure 4.6.

Les termes non linéaires sont alors susceptibles de créer une oscillation proportionnelle au produit d'un  $a_i$  avec un  $a_r$ , produit qui contient le terme

$$a_{NL} \propto e^{-i(2\omega_0 t - 2k_x^0 x)} + c.c. \quad (4.9)$$

qui correspond à une oscillation de fréquence double et de vecteur d'onde de norme  $2k_x^0$  parallèle à la paroi. On observe très bien cette structure au niveau de la surface sur les figures 4.5(b) et (d), et dans une moindre mesure au niveau du rebond contre le fond de la cuve. Nous verrons à la figure 4.7(c), qui trace le champ de vitesse horizontale de l'onde à  $2\omega_0$  légèrement modifié que cette structure est aussi nettement visible pour la vitesse horizontale du premier harmonique. Dans la région proche de l'interface, on mesure dans (d) une longueur d'onde  $\lambda_3 \simeq 100$  mm, qui correspond effectivement à environ  $2/3$  de la longueur d'onde  $\lambda_2 \simeq 140$  mm observée au même niveau dans (b).

Les structures au niveau de l'attracteur s'expliquent de deux manières différentes. La première est à nouveau l'interaction non linéaire du faisceau à  $\omega_0$  avec lui-même. Si l'on est loin d'une zone de rebond, les champs  $a = u, w$  ou  $b$  de l'onde primaire s'écrivent

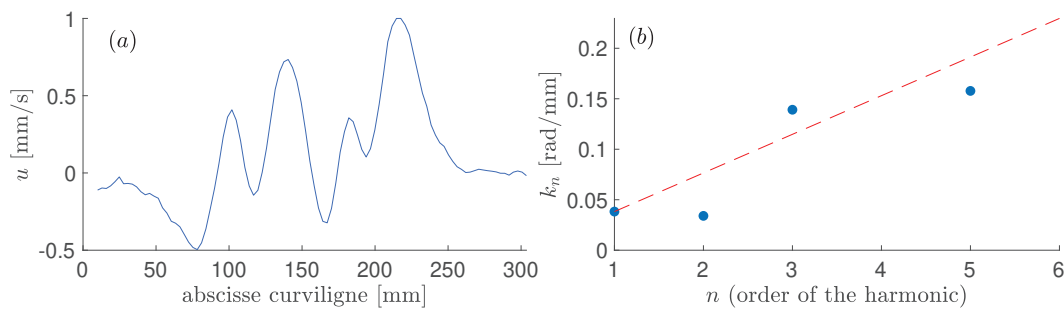
$$a_{\text{tot}} \propto e^{-i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})} + c.c. \quad (4.10)$$

L'interaction non linéaire de ces champs avec eux-mêmes est susceptible de créer une oscillation proportionnelle à leur produit, qui contient entre autre le terme

$$a_{NL} \propto e^{-i(2\omega_0 t - 2\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})} + c.c. \quad (4.11)$$

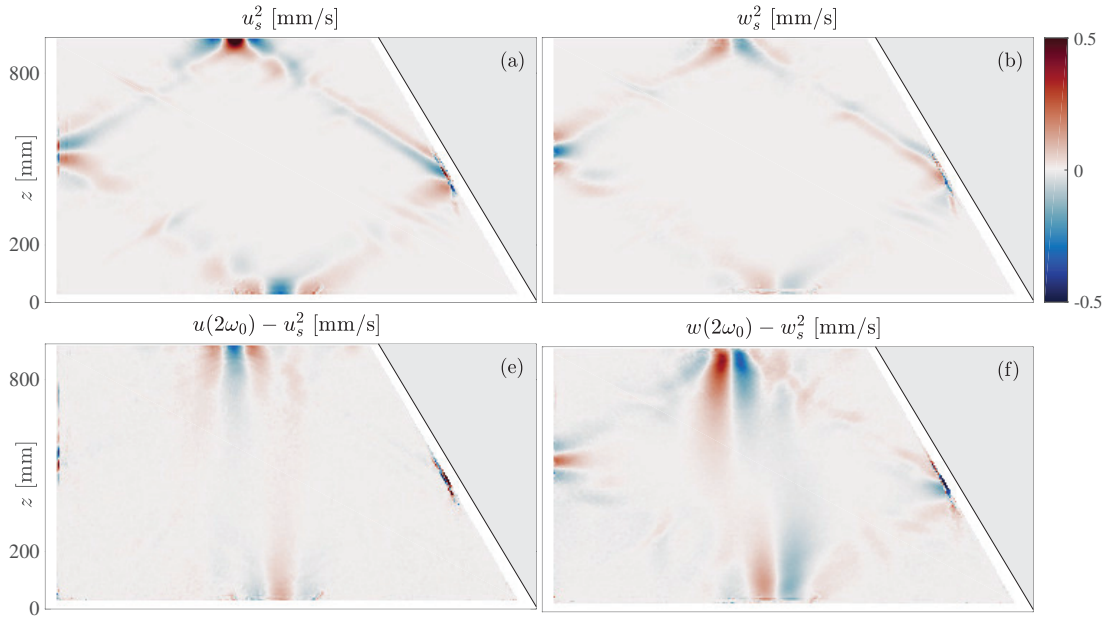
ayant une fréquence et un vecteur d'onde deux fois plus grands que ceux de l'onde primaire. Cette harmonique ainsi créée est ensuite susceptible d'interagir à nouveau avec l'onde primaire, ce qui crée par le même mécanisme une oscillation à  $(3\omega_0, 3\mathbf{k}_0)$ , et ainsi de suite.

Cette interprétation semble compatible avec ce que l'on observe au niveau des branches de l'attracteur pour l'harmonique  $n = 3$ . En effet on observe de nombreuses oscillations spatiales dans les directions transverses aux branches de l'attracteur. On observe le même phénomène pour l'harmonique  $n = 5$ , comme montré en figure 4.6(a) dans laquelle un profil de vitesse horizontale de cette harmonique, pris sur la branche 3 de l'attracteur, est tracé en fonction de l'abscisse curviligne le long de la direction transverse à la branche. On voit nettement des oscillations, dont on peut mesurer la longueur d'onde  $\lambda_5 \approx 40$  mm. Nous avons répété cette procédure pour toutes les harmoniques, entre  $n = 1$  et  $n = 5$ , et avons tracé à la figure 4.6(b) l'évolution de la norme du vecteur d'onde ainsi mesuré en fonction du rang de l'harmonique. La relation attendue par ce mécanisme  $k_n = nk_0$  est tracée en traitillés rouges. L'harmonique  $n = 4$  ne présentait pas d'oscillations assez claires pour permettre la mesure d'une longueur d'onde et n'apparaît donc pas dans la figure. On constate que les structures des harmoniques  $n = 3$  et  $n = 5$  semblent compatibles avec cette interprétation.



**FIG. 4.6** (a) Profil de vitesse horizontale de l'harmonique de rang 5, en fonction de l'abscisse curviligne le long de la direction transverse à la branche 3 de l'attracteur. Cette abscisse est schématisée par la flèche noire sur la figure 4.5(c). (b) Norme du vecteur d'onde mesuré au niveau de la branche 3 de l'attracteur sur les champs de vitesse horizontaux filtrés à  $n\omega_0$ , avec  $n = 1, 2, 3$  et 5. La ligne rouge traitillée correspond à la relation attendue pour une interaction de l'onde primaire avec elle-même  $k_n = nk_1$ .

Si l'accord est raisonnable pour les harmoniques  $n = 3$  et  $n = 5$ , l'harmonique  $n = 2$  présente une oscillation spatiale de même échelle typique que l'onde primaire. Sa présence n'est donc pas explicable par l'interaction de l'attracteur avec lui-même. Les structures au niveau de l'attracteur de cette harmonique s'interprètent en fait par un tout autre mécanisme.



**FIG. 4.7** (a et b) Champ de vitesse horizontal et vertical du champ théorique  $\mathbf{u}_s^2$ , oscillant à  $2\omega_0$ , et dû à la mesure lagrangienne du champ de vitesse. (c et d) différence entre le champ mesuré à  $2\omega_0$  (qui est tracé aux figure 4.5(a et b)) et la prédiction théorique  $\mathbf{u}_s^2$ .

Car mesurer une moyenne lagrangienne du champ de vitesse implique non seulement la mesure d'un écoulement de fréquence nulle (voir § 4.2.1), mais aussi d'harmoniques de rangs plus élevés. Le calcul à l'ordre 2 de l'annexe D exhibe ainsi la présence d'une harmonique  $\mathbf{u}_s^2$  oscillant à  $2\omega_0$

$$\mathbf{u}_s^2 = -\frac{1}{\omega_0} \text{Re} [\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_0 e^{-2i\omega_0 t}]. \quad (4.12)$$

La figure 4.7(a et b) présente ce champ de vitesse théorique (où  $\mathbf{u}_0$  a été mesuré expérimentalement comme au paragraphe 4.2.1) ainsi que la différence (c et d) entre le champ expérimental des figures 4.5(a) et (b) et la prédiction théorique  $\mathbf{u}_s^2$ . L'accord, notamment pour le champ de vitesse horizontal, est remarquable ; les structures verticales qui restent au niveau de l'interface et du fond de la cuve étant expliquées par l'interaction du faisceau au niveau d'un rebond (voir début de ce paragraphe).

Ainsi, les harmoniques résultent à la fois de la nature lagrangienne de la mesure (harmonique  $n = 2$  "de Stokes") et à la fois d'une interaction non linéaire de l'attracteur avec lui-même. Malgré la présence de ces harmoniques et de l'écoulement moyen caractérisés ici, nous appelons ce régime de faible amplitude *régime linéaire*, par opposition au *régime non linéaire* de la figure 4.3(b).

**Spectre non linéaire** En effet, *a contrario* du cas linéaire où l'on constate uniquement des pics en  $\omega/N = n\omega_0/N$ , le spectre de puissance présenté à la figure 4.3(b) obtenu dans le régime non linéaire est beaucoup plus riche. On aperçoit en effet de nouveaux pics ainsi qu' un continuum de fréquences pour  $\omega \lesssim N$ , en plus des fré-

quences  $n\omega_0/N$ . On note que le pic à la fréquence d'excitation est plus fin car la fenêtre temporelle ayant servi au calcul de la transformée de Fourier est plus longue (ce qui a été rendu possible par la durée plus longue de l'expérience, voir figure 4.2).

On note la présence de pics positionnés symétriquement autour de  $\omega_0/2$  : les pics (c) et (f) correspondent ainsi à des fréquences dont la somme donne la fréquence de forçage  $\omega_0$ , de même pour les pics (d) et (e). Ces relations entre fréquences sont potentiellement le signe d'interactions triadiques (voir §1.2.4). Par ailleurs, on pourrait interpréter la présence de  $\omega_c$  et  $\omega_d$  par l'interaction  $\omega_k - \omega_0 = \omega_c$  et  $\omega_j - \omega_d = \omega_0$ . Mais on a aussi  $\omega_c + \omega_k = 2\omega_0$ , et  $\omega_d + \omega_j = 2\omega_0$ . Ainsi, la présence de l'harmonique à  $2\omega_0$  rend plus délicate l'interprétation du spectre de puissance, car plusieurs interactions triadiques distinctes sont possibles pour expliquer la présence d'une même fréquence.

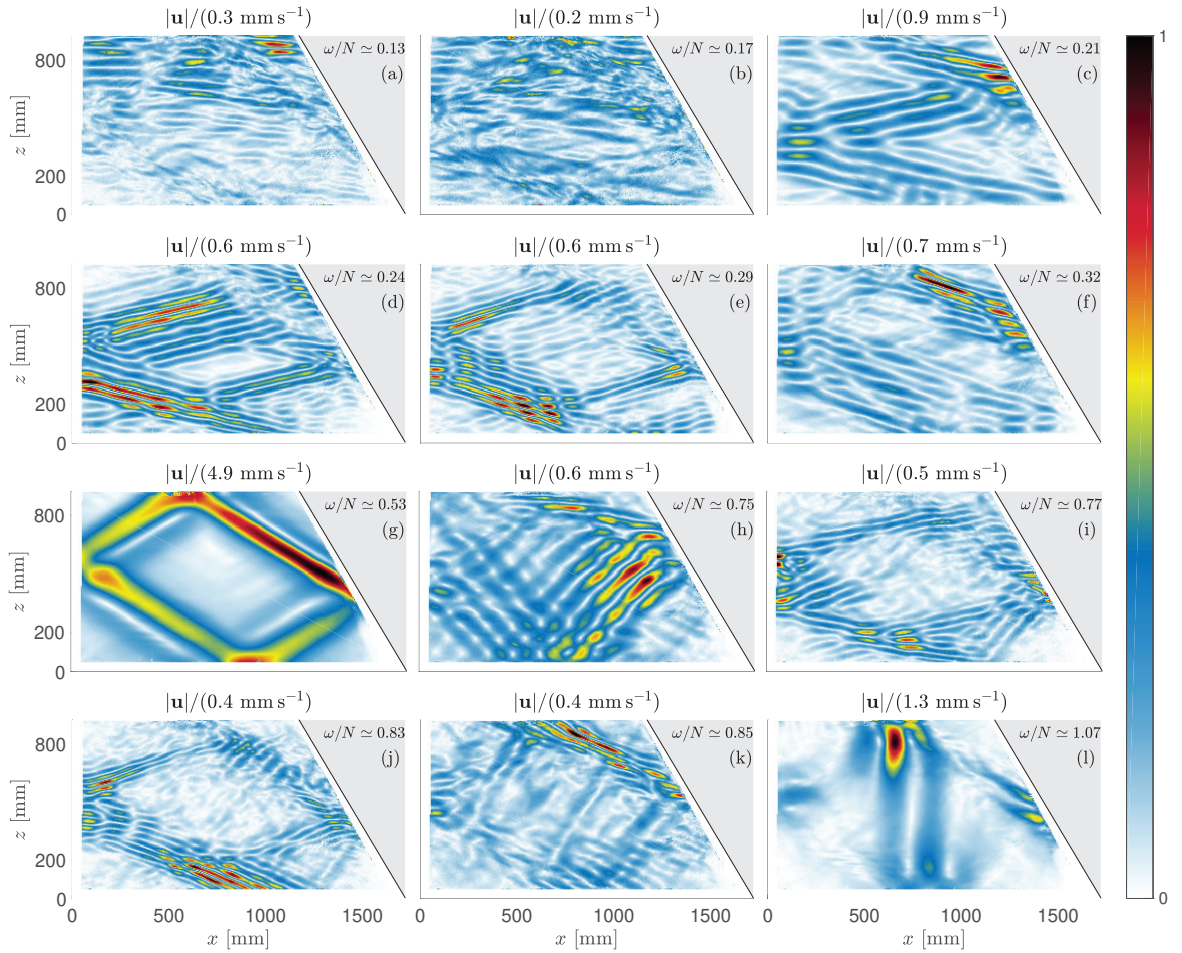
La seule donnée du spectre temporel n'est donc pas suffisante pour interpréter complètement le champ de vitesse. Dans la prochaine section, nous allons étudier les structures spatiales associées à chacune des fréquences indiquées dans la figure 4.3(b).

#### 4.2.2 Structure spatiale des ondes secondaires

On accède à la structure spatiale du champ portant l'oscillation à une fréquence donnée en effectuant en chaque point  $(x, z)$  un filtrage temporel, de type passe-bande, à la fréquence considérée. La figure 4.8 montre par exemple le champ de norme des vitesses des 12 fréquences indiquées par une lettre de (a) à (l) dans la figure 4.3(b). Par simplicité, nous avons choisi un filtre valant 0 partout sauf en la fréquence considérée.

La fréquence (g) correspond à l'attracteur. On remarque, en comparant ce champ à celui obtenu dans le cas linéaire de la figure 4.1(a) que l'attracteur est plus large que dans le cas linéaire. Or la largeur de l'attracteur en régime linéaire est indépendante de l'amplitude de forçage. Cet élargissement provient donc des non linéarités, qui, en extrayant de l'énergie à l'onde primaire, diminuent la distance parcourue par le faisceau formant l'attracteur. Ce dernier subit alors moins de réflexions focalisantes contre la pente, ce qui diminue l'apparition des petites échelles. Ce phénomène a été observé et quantifié dans le cas d'un attracteur d'onde d'inertie [23], et sera à nouveau discuté à la section 4.3.

Les structures oscillant aux fréquences secondaires sont de formes très variées. Certaines (comme (d), (e), (i), (j) ou (k) ) présentent des échelles  $\lambda \sim 50$  mm plus petites que celle de l'attracteur alors que d'autres présentent des échelles comparables, comme (h) où  $\lambda \sim 150$  mm. Certaines, comme l'onde (b), ont une structure spatiale complexe, avec plusieurs échelles caractéristiques. Dans tous les cas, ces structures occupent un volume non négligeable de la cuve. Comme elles sont créées *a priori* sur l'attracteur



**FIG. 4.8** Champ des normes de la vitesse obtenu en filtrant le champ de vitesse de l'expérience non linéaire aux fréquences indiquées en rouge dans la figure 4.3(b). Chaque champ a été adimensionné par une amplitude typique du champ de vitesse indiquée en titre. Les labels, de (a) à (l), permettent d'identifier les fréquences au moyen de la figure 4.3(b).

où la densité d'énergie est la plus importante, cet étalement semble indiquer qu'elles quittent leur lieu de création et sont donc bien propagatives.

Pour confirmer cette intuition, on peut vérifier que les structures oscillant à chacune de ces fréquences correspondent à des vecteurs d'onde  $\mathbf{k}$  solutions de la relation de dispersion  $\omega = N \sin \theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre  $\mathbf{k}$  et la verticale. On calcule donc  $E_{k_x, k_z, \omega} \equiv |u(k_x, k_z, \omega)|^2 + |w(k_x, k_z, \omega)|^2$ , à  $\omega$  fixé, en utilisant tout d'abord (comme expliqué à la section 1.3.2) un filtrage de Hilbert en temps, ce qui permet de distinguer  $\mathbf{k}$  de  $-\mathbf{k}$ . On effectue ensuite une transformée de Fourier spatiale du champ complexe obtenu (sans fenêtrer les champs par une fonction de Hanning, afin de ne pas pénaliser les structures spatiales présentes uniquement sur le bord du domaine). Pour augmenter la résolution apparente en  $\mathbf{k}$ , nous avons utilisé du *padding*. La figure 4.9 montre pour chacune des fréquences labellisées dans le spectre de la figure 4.3(b) la valeur de  $E_{k_x, k_z, \omega}$  normalisée par son maximum sur  $k_x, k_z$ . Sur chaque figure, la relation de dispersion des ondes internes est indiquée en traitillés. On voit très nettement que la

densité d'énergie se concentre sur cette relation de dispersion, et ce même pour des fréquences correspondant à une faible densité d'énergie totale, comme dans le cas des fréquences labellisées (a) et (b). Les structures oscillant à ces fréquences sont donc solutions du problème linéaire : ce sont des ondes. Étudions ces spectres spatiaux plus précisément.

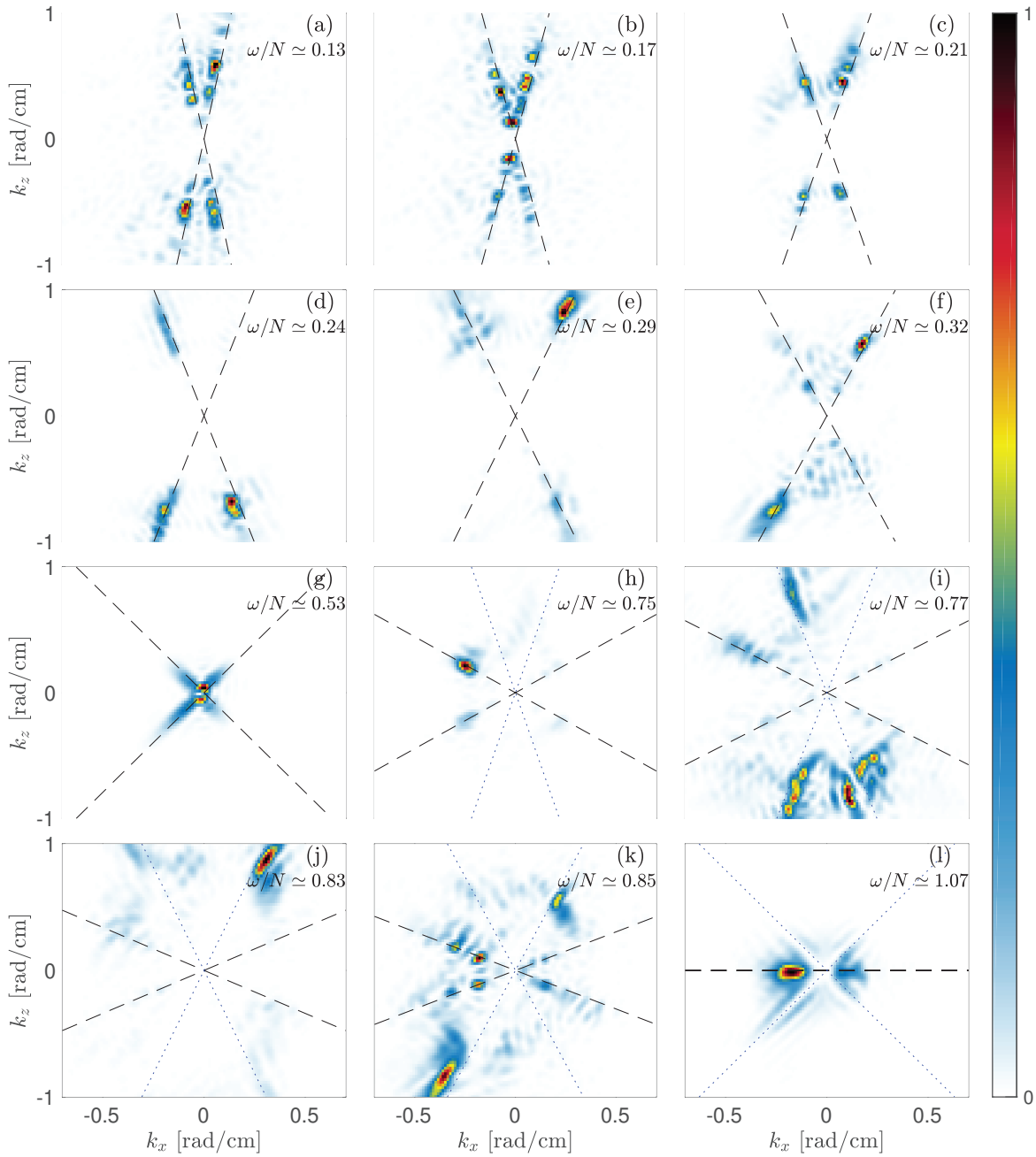


FIG. 4.9  $E_{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{k}, \omega) / \max_{\mathbf{k}} [E_{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{k}, \omega)]$  à  $\omega$  fixé. La fréquence choisie pour chaque graphe est indiquée par un point rouge dans la figure 4.3(b) et correspond au label indiqué en haut à droite. Les droites traitillées correspondent à la relation de dispersion  $\omega = N \sin \theta$ , et les droites pointillées à  $\omega = \omega_0 + N \sin \theta$ .

**Effet Doppler** Pour les ondes (a), ..., (f), on observe une densité importante autour de la relation de dispersion, matérialisée par les traitillés. Néanmoins, les maxima de la densité semblent en fait être légèrement à côté de cette relation. Cet écart, particulièrement visible pour l'onde (a) par exemple, s'explique par effet Doppler. En effet, nous avons vu que, même dans ce que nous appelons le régime linéaire, un écoulement moyen  $\mathbf{u}_{MF}$  est créé (voir § 4.2.1). Or, par composition des vitesses, un motif de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , en présence d'un écoulement moyen  $\mathbf{u}_{MF}$  uniforme, a une vitesse apparente

$$\mathbf{v}_\varphi(\mathbf{k}) = \mathbf{v}_\varphi^L(\mathbf{k}) + \mathbf{u}_{MF}, \quad (4.13)$$

où  $\mathbf{v}_\varphi^L(\mathbf{k})$  est la vitesse de phase prévue par la relation de dispersion. En utilisant la définition de la vitesse de phase  $\mathbf{v}_\varphi(\mathbf{k}) \equiv \omega(\mathbf{k})/k \mathbf{e}_k$  ainsi que la prédiction pour les ondes internes  $\mathbf{v}_\varphi^L(\mathbf{k}) = N \sin \theta(\mathbf{k})/k \mathbf{e}_k$  (voir §1.2.2), on obtient, en multipliant (4.13) par  $\mathbf{k}$

$$\omega(\mathbf{k}) = N \sin \theta(\mathbf{k}) + \mathbf{u}_{MF} \cdot \mathbf{k}. \quad (4.14)$$

Ainsi, la fréquence d'oscillation du motif  $\mathbf{k}$ , mesurée dans le référentiel du laboratoire, est augmentée de  $\mathbf{u}_{MF} \cdot \mathbf{k}$  par rapport à la théorie linéaire en l'absence d'écoulement moyen. Si dans les expériences présentées ici le courant moyen n'est pas uniforme (voir figure 4.4(e)), nous allons tout de même utiliser (4.14), afin de vérifier si cette interprétation est cohérente avec les observations. Comme l'écoulement moyen est principalement selon la direction  $x$ , on a

$$u_{MF_x} k_x = N [\sin \theta(\cdot) - \sin \theta], \quad (4.15)$$

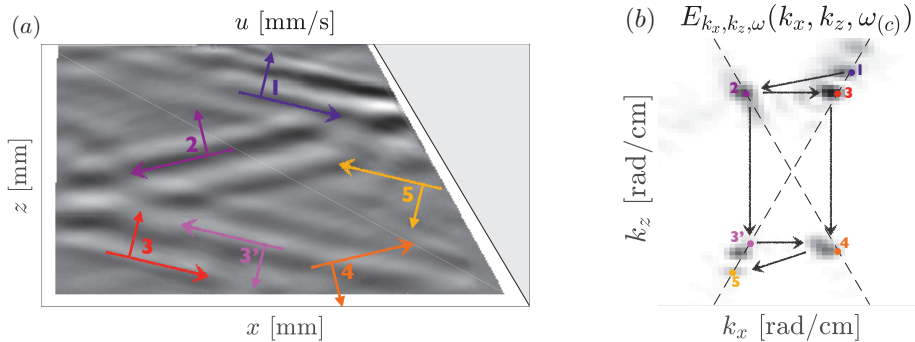
où  $\theta$  désigne l'angle entre  $\mathbf{k}$  et la verticale et  $\theta(\cdot)$  désigne l'angle associé à la fréquence mesurée  $\omega$  (celui des droites traitillées des figures 4.9).

Revenons à l'onde (a). Tous les maxima de sa densité sont légèrement décalés vers les  $k_x$  inférieurs. Pouvons nous expliquer le sens de cet effet par un effet Doppler ? Considérons tout d'abord le demi-plan  $k_x > 0$ . Le lieu du maximum de la densité forme un angle  $\theta$  avec la verticale *plus petit* que celui prévu par la relation de dispersion  $\theta(\cdot)$ . On en déduit donc que  $u_{MF_x} k_x > 0$  et donc que  $u_{MF_x} > 0$ . Pour le demi-plan  $k_x < 0$ , on a au contraire  $\theta > \theta(\cdot)$ , ce qui implique  $u_{MF_x} k_x > 0$  et donc à nouveau  $u_{MF_x} > 0$ . Ces observations sont cohérentes avec la localisation de l'onde (a), présente surtout dans la partie haute de la cuve, là où l'écoulement moyen est en effet dirigé vers la droite (voir figure 4.4(e) qui montre la structure de l'écoulement moyen horizontal duquel on a retiré la dérive de Stokes). Plus quantitativement, le maximum de la densité de l'onde (a), de fréquence  $\omega = 0.133$  se trouve en  $(k_x, k_z) = (0.066, 0.557)$  rad/s. On obtient alors  $u_{0_x} \simeq 1.5$  mm/s, valeur dont l'ordre de grandeur est en accord avec celui du champ de vitesse moyen mesuré. Si nous n'avons pas effectué cette



analyse pour toutes les fréquences de la figure 4.9, nous retiendrons tout de même que l'effet Doppler est un bon candidat pour expliquer les légers écarts à la relation de dispersion, écarts que nous n'étudierons donc pas davantage.

**Réflexions sur les parois** Par ailleurs, on observe sur la plupart des spectres spatiaux que plusieurs branches de la relation de dispersion sont peuplées. En effet, les réflexions contre les parois verticales ou horizontales changent la direction de leur vecteur d'onde, et une réflexion contre la pente change à la fois leur direction et leur norme, par focalisation ou défocalisation.



**FIG. 4.10** Champ de vitesse horizontale (a) et densité spatiale d'énergie (b) de l'onde à  $\omega/N \simeq 0.21$  (onde (c)). Chaque vecteur d'onde indiqué dans (b) correspond à un faisceau dont la direction de la vitesse de groupe est indiquée par une longue flèche dans (a). Les petites flèches correspondent aux directions des vecteurs d'onde.

Prenons l'exemple de l'onde (c). En s'appuyant à la fois sur le champ filtré (figure 4.10(a)) et sur la densité spatiale d'énergie (figure 4.10(b)), on peut essayer d'en imaginer l'histoire. Elle débute par le vecteur d'onde  $(k_x^1, k_z^1)$ , qui correspond à un faisceau se propageant vers la droite et vers le bas, car  $k_z > 0$  et donc  $\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{e}_z < 0$ . Arrivé sur la pente, ce faisceau est défocalisé et donne le vecteur d'onde  $\mathbf{k}^2 = \gamma^{-1}(\omega)(-k_x^1, k_z^1)$ . Une réflexion contre le générateur puis contre le fond de la cuve le transforme successivement en  $\mathbf{k}^3$  puis  $\mathbf{k}^4$  (le faisceau correspondant est peu visible). Le faisceau est ensuite focalisée sur la pente et donne  $\mathbf{k}^5$ . Si le rayon portant  $\mathbf{k}^2$  est suffisamment bas, alors il est aussi réfléchi par le fond de la cuve et donne  $\mathbf{k}^{3'}$ , qui donne alors  $\mathbf{k}^4$  par réflexion contre le générateur. Étant donné l'incertitude expérimentale, les mesures quantitatives des vecteurs d'onde<sup>1</sup> sont en bon accord avec les liens prévus par cette chronologie. On pourrait imaginer proposer une telle chronologie pour chacune des ondes secondaires de la figure 4.9.

Par ailleurs, la présence des parois semble favoriser certains vecteurs d'onde par interférence constructive. Par exemple, le vecteur d'onde correspondant au maximum de la densité spatiale de l'onde (a) vaut  $(k_x, k_z)$  où  $k_x \simeq 2\pi/L_x^e$ , avec  $L_x^e \simeq 1380$  mm, qui

<sup>1</sup> On a mesuré ces vecteurs d'onde en projetant les lieux des maxima locaux de la densité d'énergie sur la relation de dispersion, afin s'affranchir de l'effet Doppler.

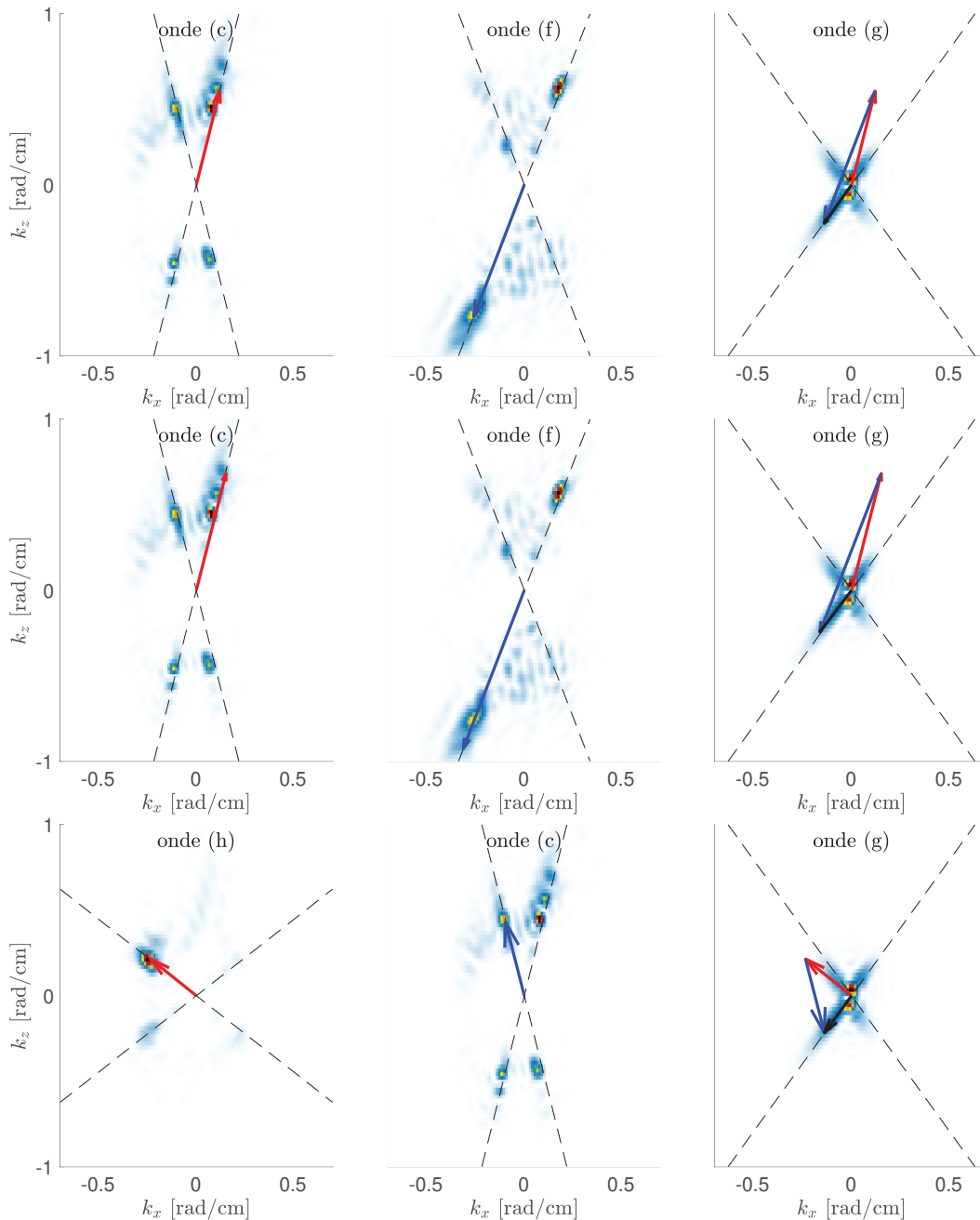
est compatible avec la dimension de la boîte  $L_x(z) = [1170 ; 1700]$  mm. On note aussi la présence d'un pic en  $-(k_x, k_z)$ , nécessaire à l'existence d'une onde stationnaire, ainsi que trois demi-longueurs d'onde horizontales visibles sur la figure 4.8(a). L'existence de telles structures quasi stationnaires sera mentionnée à nouveau dans la section 4.3.2).

S'il est difficile d'affirmer de façon certaine la chronologie des différents rebonds des ondes secondaires, il est clair à ce stade que la géométrie fermée de la cuve ainsi que la présence de la pente permet à chaque onde de présenter une structure spatiale complexe, associée à plusieurs vecteurs d'onde. La géométrie particulière de cette expérience fournit donc un grand nombre de possibilités d'interaction entre ondes.

**Interactions triadiques résonnantes** Les différentes ondes sont susceptibles d'interagir *via* des interactions triadiques résonnantes (cf §1.2.4). On peut chercher la marque de ces interactions dans les spectres spatiaux, en cherchant au sein de triades potentielles (c'est-à-dire celles qui vérifient la condition de résonance sur les fréquences  $\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 = 0$ ) la marque de la résonance sur les nombres d'onde  $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 = 0$ . Nous avons par exemple cherché les ondes pouvant interagir avec l'onde (c). D'après la relation sur les fréquences, les triades potentielles contenant l'onde (c) sont  $(c) + (f) - (g) = 0$ ,  $(h) - (c) - (g) = 0$  et  $(l) - (c) - (k) = 0$ . Si cette dernière triade n'est pas compatible avec les spectres spatiaux mesurés, les deux premières le sont. La figure 4.11 reporte ainsi les scénarios compatibles avec les données expérimentales faisant intervenir l'onde (c). La première ligne correspond au scénario  $(c) + (f) - (g) = 0$ . On voit que le vecteur d'onde appelé  $\mathbf{k}^1$  dans la figure 4.10 interagit avec l'un des pics de l'onde (f) et avec la branche 1 de l'attracteur. Ces relations  $\omega_{(c)} + \omega_{(f)} - \omega_{(g)} = 0$  et  $\mathbf{k}_{(c)} + \mathbf{k}_{(f)} - \mathbf{k}_{(g)} = 0$  indiquent que ces trois ondes interagissent. Comme l'onde (g) correspond à l'onde primaire, dans laquelle est injectée l'énergie, il est très probable que cette interaction correspond à la déstabilisation de (g) en (c) et (f). Les ondes (c), (f) et (g) peuvent aussi interagir *via* d'autres nombres d'onde, comme le montre la deuxième ligne de la figure 4.11. En effet, on a pour trois nombres d'onde quelconques  $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 \Rightarrow \beta\mathbf{k}_1 + \beta\mathbf{k}_2 = \beta\mathbf{k}_3$ , où  $\beta$  est un réel. Comme nous avons vu qu'à cause de la pente les spectres spatiaux présentent plusieurs pics sur une même branche il existe alors plusieurs mécanismes d'interaction triadique possibles pour une même triade. La troisième ligne correspond à l'interaction de (c) avec (h) et (g), avec  $\omega_{(h)} - \omega_{(c)} - \omega_{(g)} = 0$  et  $\mathbf{k}_{(h)} - \mathbf{k}_{(c)} - \mathbf{k}_{(g)} = 0$ .

Par la même analyse, on peut exhiber d'autres triades, telles que  $(d) + (e) - (g) = 0$  ou  $(f) + (h) - (l) = 0$ .

**Ondes liées** On constate que certaines fréquences, (i), (j) et (k), présentent aussi une forte densité d'énergie clairement en dehors de la relation de dispersion. Cette forte densité correspond à des structures dont la fréquence d'oscillation ne correspond pas à la fréquence prévue par la relation de dispersion. Elles ne sont donc pas solutions du problème linéaire. On les appelle *ondes liées*, car leur existence est conditionnée



**FIG. 4.11** Triades faisant intervenir l'onde (c). Première et deuxième ligne :  $(c) + (f) - (g) = 0$ , troisième ligne  $(h) - (c) - (g) = 0$ . Chaque graphe reporte la densité spatiale de l'onde considérée exposée à la figure 4.9. La flèche rouge indique le vecteur d'onde du premier membre de la triade, la flèche bleue du second et la noire du troisième. Sur la première et deuxième ligne, on a  $\mathbf{k}_c + \mathbf{k}_f = \mathbf{k}_g$ . Sur la troisième on a  $\mathbf{k}_h - \mathbf{k}_c = \mathbf{k}_g$ .

par la présence d'autres ondes. Nous pouvons interpréter la présence de ces ondes par interaction triadique *non résonnante*. Prenons par exemple l'onde (i). On constate que sa densité spatiale ressemble à celle de l'onde oscillant à  $\omega_{(i)} - \omega_{(g)} = \omega_{(d)}$ . Cette ressemblance est indiquée par les lignes pointillées dans le figure 4.9(i) qui correspondent aux quatre solutions  $\theta$  de  $\omega_{(i)} = N \sin \theta + \omega_{(g)}$  c'est-à-dire de  $\omega_{(d)} =$

$N \sin \theta$ . Cette ressemblance provient de l'interaction de l'onde à  $\omega_{(d)}$  avec l'attracteur  $\omega_{(g)}$ . En effet, comme  $\mathbf{k}_{(g)}$  est petit devant  $\mathbf{k}_{(d)}$ , on a  $\mathbf{k}_{(d)} + \mathbf{k}_{(g)} \simeq \mathbf{k}_{(d)}$ . La figure 4.12 illustre cette interprétation. Comme l'onde (i) résultante de cette interaction n'est pas solution du problème linéaire, on qualifie cette interaction triadique de *non résonnante*. On peut interpréter de même la présence de l'onde (j) par interaction entre l'attracteur et l'onde (e) ; ainsi qu'une partie de l'onde (k) par l'interaction entre l'attracteur et l'onde (f).

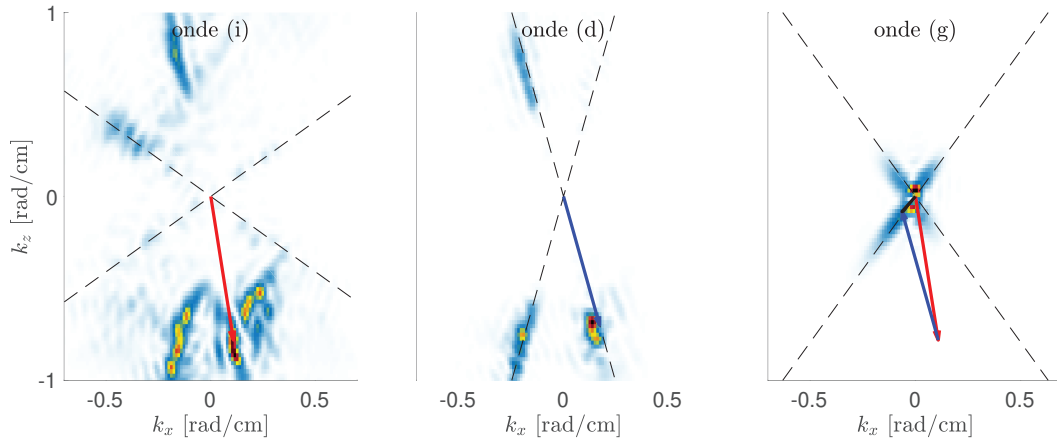


FIG. 4.12 Densité spatiale d'énergie des ondes (i), (d) et (g). Cette dernière correspond à l'attracteur. Les flèches illustrent les vecteurs d'onde en interaction :  $\mathbf{k}_{(i)} - \mathbf{k}_{(d)} = \mathbf{k}_{(g)}$ .

### 4.2.3 Densité d'énergie et relation de dispersion

De façon générale, on peut sonder l'accord entre les structures spatiales oscillant à une fréquence  $\omega$  quelconque et la relation de dispersion en calculant la densité d'énergie  $E_{\theta, \omega}$  dans l'espace des fréquences  $\omega$  et des directions  $\theta$  (cf. sec.1.3.2 pour la définition de cette quantité). La figure 4.13 montre que cette densité se concentre effectivement le long de la relation de dispersion des ondes internes  $\omega = \pm N \sin \theta$ . Sur cette figure, nous avons normalisé la densité ligne par ligne pour faire apparaître de façon équivalente toutes les fréquences. On note aussi que la densité d'énergie peut être importante en dehors de la relation de dispersion, notamment sur les courbes  $\omega = \pm \omega_0 \pm N \sin \theta$  indiquée en pointillée. Comme expliqué précédemment, ces structures proviennent des ondes liées, créées par interaction non résonnante entre l'onde primaire et l'onde secondaire de fréquence  $\omega(\theta)$ . On a aussi tracé sur la figure 4.13(a) cette même quantité mesurée dans l'expérience linéaire, sur laquelle on note uniquement les structures provenant de l'attracteur. On constate notamment que les fréquences proches de  $\omega_0$  sont associées à une structure spatiale de même angle  $\theta$  que l'attracteur.

En étudiant ces deux expériences, nous avons donc pu comparer le système expérimental d'attracteur dans le régime linéaire et dans le régime non linéaire. Nous avons en particulier expliqué la présence en régime linéaire d'un écoulement moyen et d'har-

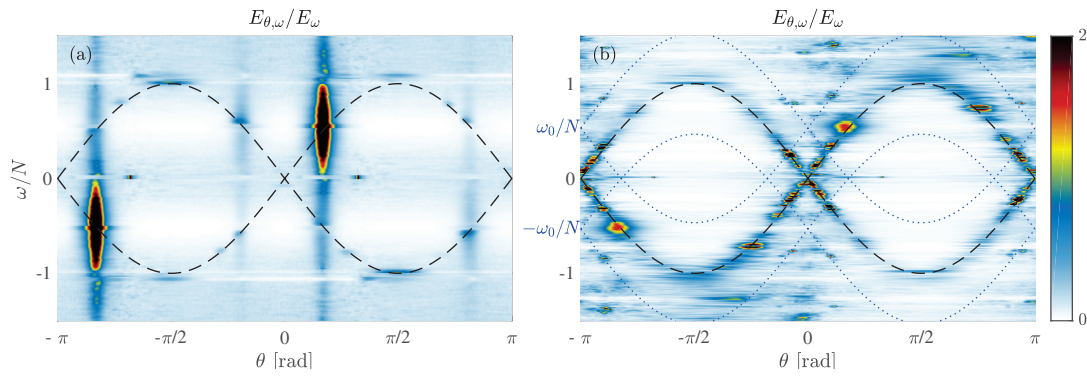


FIG. 4.13 Densité d'énergie  $E_{\theta,\omega}$  normalisée par le spectre de puissance  $E_\omega$ , de l'expérience linéaire (a) et non linéaire (b). Les paramètres des expériences sont ceux de la figure 4.3(b). Les courbes traitillées correspondent à la relation de dispersion  $\omega = \pm N \sin \theta$ . Les courbes pointillées à  $\omega = \pm\omega_0 \pm N \sin \theta$ .

moniques, issus de la nature *lagrangienne* de la mesure de vitesse par PIV (dérive de Stokes et harmonique  $n = 2$ ) ainsi que de l'interaction non résonnante de l'attracteur avec lui même (*boundary streaming* et harmoniques). *A contrario*, nous avons observé dans le régime non linéaire la signature d'interactions triadiques *résonnantes*, susceptibles d'amener en plus des harmoniques et d'ondes liées la présence d'un continuum d'ondes internes de gravité. Ces ondes présentent de plus petites échelles que l'onde primaire et sont donc un pas vers une éventuelle cascade d'énergie, pouvant mener en contexte océanique à du mélange. Afin d'étudier l'évolution du système entre ces deux régimes, et possiblement dans des régimes plus fortement non linéaires, nous avons effectué une expérience où l'amplitude de forçage varie lentement au cours de l'expérience.

### 4.3 Expérience à amplitude lentement croissante

Cette procédure est inspirée des travaux de Touzé *et al.* [104], dans lesquels une plaque mince est excitée par une force monochromatique d'amplitude croissante. Après un premier régime linéaire, où seule la fréquence de forçage et ses harmoniques sont présentes, le spectre fréquentiel s'enrichit.

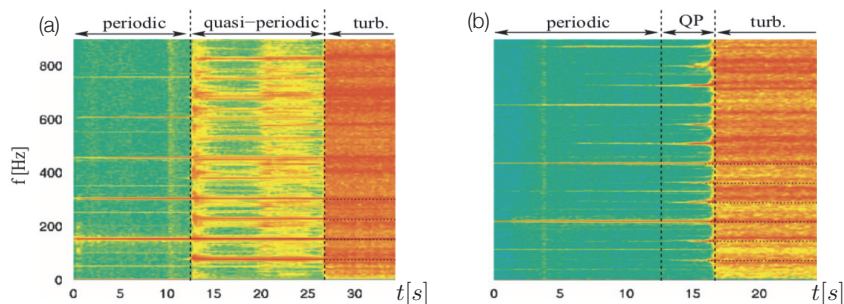


FIG. 4.14 Spectrogramme obtenu dans deux expériences de plaques minces vibrées. La première (a) correspondant à une excitation à  $151 \text{ s}^{-1}$  et la seconde (b) à  $290 \text{ s}^{-1}$ . Figure reproduite de [104].

Selon les auteurs, cet enrichissement présente deux seuils, comme montré à la figure 4.14 qui reproduit la figure 1 de leur article. Le premier sépare le régime périodique initial d'un régime quasi-périodique, où le spectre présente des fréquences discrètes ; et le second sépare ce régime d'un régime de turbulence d'onde, dans lequel le spectre de puissance est continu. Les expériences présentées à la figure 4.14 ont duré environ 5000 périodes d'excitation. Notre dispositif expérimental présente lui un temps caractéristique d'oscillation *beaucoup* plus long  $T_0 \sim 15$  s, et reproduire la même expérience requerrait alors environ une journée de forçage. Malheureusement, cette durée est hors d'atteinte dans le dispositif actuel, car les particules PIV sédimentent en quelques heures. Aussi, l'expérience que nous avons réalisée a duré *seulement*  $3\text{h} \simeq 750 T_0$ , durant lesquelles l'amplitude de forçage a été augmentée de  $a_0 = 2$  mm en début d'expérience à  $a_0 = 12$  mm à sa fin. Cette expérience reste néanmoins longue et difficile à visualiser à cause de la sédimentation des particules. Nous avons donc choisi une géométrie plus étroite avec  $L = 1328$  mm afin d'améliorer l'illumination des particules PIV par la nappe laser. Par ailleurs, les paramètres choisis pour l'ensemble de cette partie sont  $H = 920$  mm,  $\alpha = 21.4^\circ$ ,  $\omega_0/N = 0.62$  et  $N \simeq 0.70$  rad/s. De plus, comme l'amplitude typique du champ de vitesse évolue au cours de l'expérience, nous avons dû ajuster l'incrément de temps séparant deux prises d'image par la caméra, de 500 ms au début de l'expérience à 67 ms à la fin, pour que le déplacement mesuré par l'algorithme de PIV soit toujours d'environ quelques pixels.

Malgré ces difficultés expérimentales, nous avons pu mesurer un champ de vitesse de bonne qualité, comme le montre la figure 4.15 qui présente le champ de vitesse à trois instants différents : au début à  $t \simeq 50 T_0$  lorsque le système évolue encore linéairement (a et b), au milieu à  $t \simeq 325 T_0$  (c et d) et à la fin à  $t \simeq 600 T_0$  (e et f). Ces deux derniers instants correspondent au régime non linéaire. Du bruit de mesure est présent sur les bords du domaine ; néanmoins, on distingue très nettement sur les graphes (a) et (b) l'attracteur tracé en traitillés - dont les branches 2 et 4 sont relativement proches - et sur les figures (c) et (d) de nouvelles structures spatiales qui semblent se complexifier encore d'avantage sur les figures (e) et (f).

### 4.3.1 Spectres fréquentiels

Afin d'observer l'évolution du spectre fréquentiel dans le temps, nous utilisons la représentation temps-fréquence ou *spectrogramme* (voir sec. 1.3.2). La figure 4.16(a) montre le spectrogramme du champ de vitesse moyenné sur une zone spatiale assez petite pour des raisons de coûts numériques et pour limiter l'influence du bruit très présent sur les bords de la cuve. Cette zone est indiquée par un carré rouge sur la figure 4.15(a). Nous avons vérifié en déplaçant cette zone que la structure du spectrogramme dépend très peu de son choix. Pour calculer le temps-fréquence, nous avons utilisé une fenêtre temporelle glissante de largeur  $\Delta t_s = 80 T_0$ . Sur la figure 4.16(b)

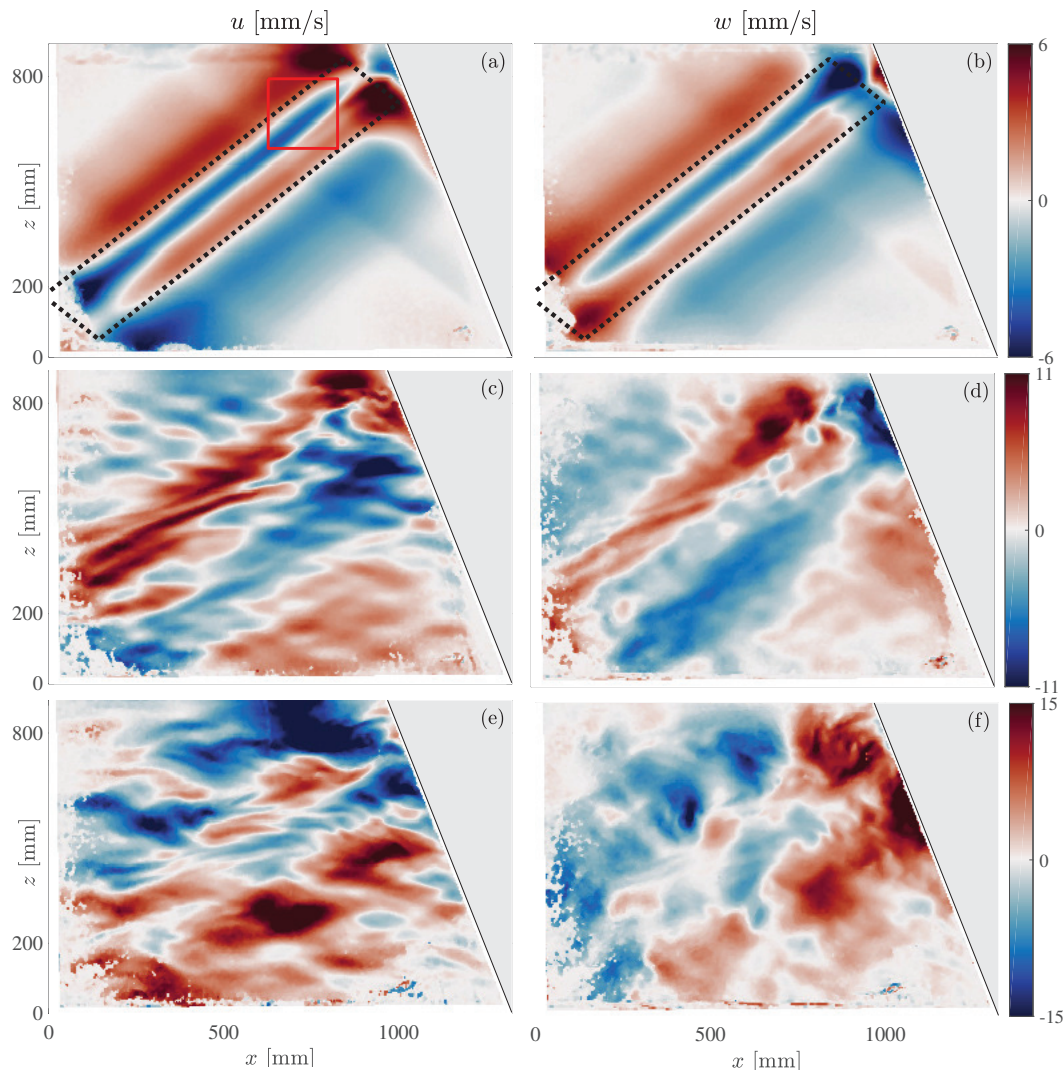


FIG. 4.15 Champs de vitesse horizontal (a, c et e) et vertical (b, d et f) obtenus dans une expérience où l'amplitude du générateur est augmentée petit à petit de  $a_0 = 2$  mm en début d'expérience à  $a_0 = 12$  mm après  $750 T_0$ . La première ligne (a et b) correspond à  $t \simeq 50 T_0$  et  $a_0 \simeq 2.5$  mm, la deuxième (c et d) à  $t \simeq 325 T_0$  et  $a_0 \simeq 5.3$  mm et la troisième (e et f) à  $t \simeq 600 T_0$  et  $a_0 \simeq 8$  mm. Les paramètres de l'expérience sont  $L = 1380$  mm,  $H = 920$  mm,  $\alpha = 21.4^\circ$ ,  $\omega_0/N = 0.62$  et  $N \simeq 0.70$  rad/s.

est tracée en rouge l'évolution de l'amplitude de forçage et en bleu le signal de vitesse horizontale mesuré au centre de la zone étudiée.

Au tout début du spectrogramme, en  $t = \Delta t_s/2 = 40 T_0$ , seules les fréquences  $n\omega_0$  sont visibles, comme sur le spectre de l'expérience linéaire de la figure 4.3(a) ; mais très vite de nouvelles fréquences apparaissent. Le spectre s'enrichit ensuite à mesure que l'amplitude de forçage est augmentée, et ce de façon plutôt continue, sans qu'aucun seuil particulier n'apparaisse contrairement à ce qui a été observé dans [104]. Même si la densité d'énergie n'est pas nulle pour  $\omega > N$ , en raison de la présence d'ondes liées, cette augmentation est plus importante pour les fréquences inférieures à  $N$ .

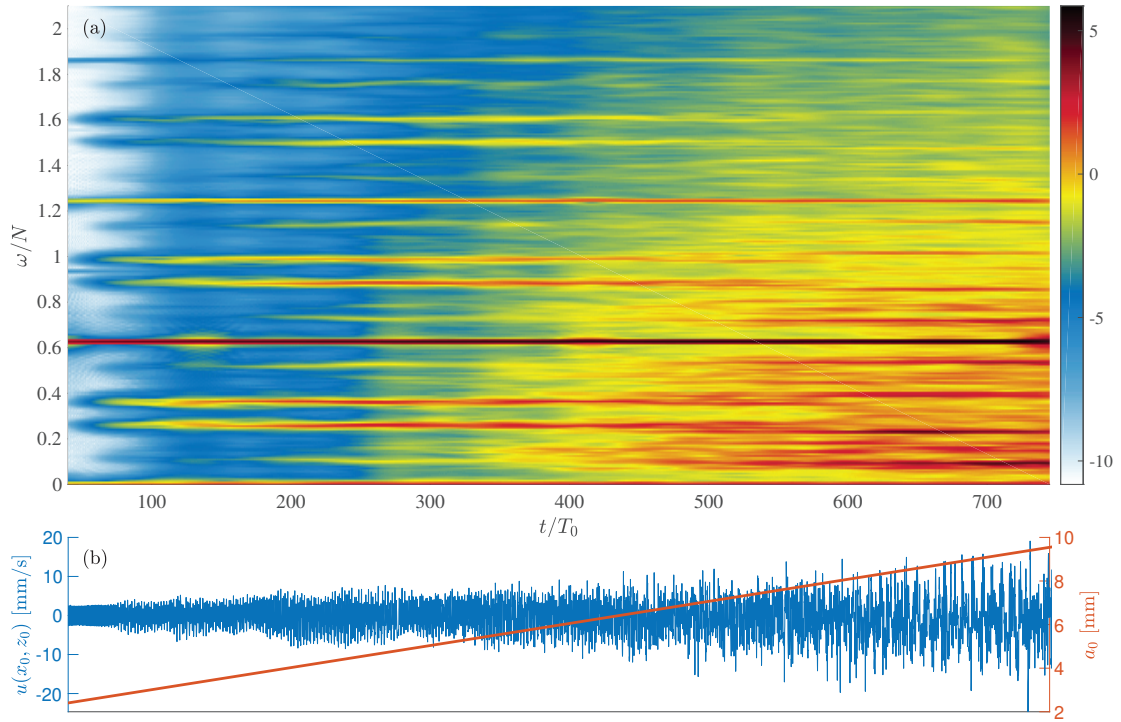
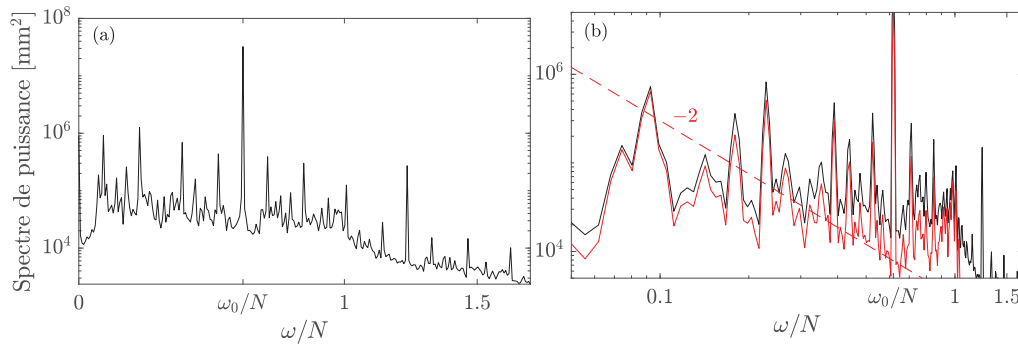


FIG. 4.16 (a) Temps-fréquence en échelle logarithmique du champ de vitesse de la zone encadrée en rouge sur la figure 4.15(a). Les paramètres sont indiqués dans la légende de cette même figure. La fenêtre temporelle utilisée a une largeur  $80 T_0$ . (b) La courbe rouge indique l'amplitude du générateur, qui a été progressivement augmentée de  $a_0 = 2$  mm en  $t = 0$  à  $a_0 = 12$  mm à  $t = 780 T_0$ . La courbe bleue montre  $u(x_0, z_0, t)$  pour  $(x_0, z_0)$  au centre de la zone étudiée (voir carré rouge sur la figure 4.15(a)).

Cela est encore plus visible sur la figure 4.17, qui montre le spectre de puissance obtenu pour  $t \in [500; 600] T_0$ , avec l'axe des fréquences en échelle linéaire (a) ou logarithmique (b). Si des pics d'intensité importante sont encore présents - notamment à  $\omega_0$  - on note la présence d'un continuum de fréquences. Afin d'étudier ce continuum, et de le confronter notamment au spectre de Garrett & Munk [42, 43],  $E_w \sim \omega^{-2}$ , nous avons tracé en rouge sur la figure (b) le spectre obtenu en retirant du champ de vitesse les structures en dehors de la relation de dispersion, c'est-à-dire que l'on a enlevé la contribution des ondes liées. Pour cela, nous avons appliqué un filtre dans l'espace de Fourier  $(k_x, k_z, \omega)$  qui met à zéro toutes les valeurs obtenues en  $(k_x, k_z, \omega)$  avec  $\omega$  éloignée de plus de  $N/15$  de la fréquence attendue par la relation de dispersion. La valeur de ce seuil ne change pas significativement la forme du spectre obtenu. Nous avons également indiqué par une ligne en traitillés la loi de puissance attendue de coefficient  $-2$ . À cause de la présence des pics et de la faible gamme des fréquences explorées, il est délicat de confirmer ou infirmer la validité de cette loi de puissance pour nos expériences. Néanmoins, il semblerait que les fréquences comprises entre  $\omega_0/3$  et  $\omega_0$  suivent relativement bien cette loi, alors que le spectre pour  $\omega \in [\omega_0; N]$  n'est pas en bon accord, contrairement à ce qui a été observé par Le Reun *et. al.* dans



une étude numérique sur les ondes inertielles [63] où le spectre en  $E_\omega \sim \omega^{-2}$  était visible pour  $\omega_0 \leq \omega \leq N$ .



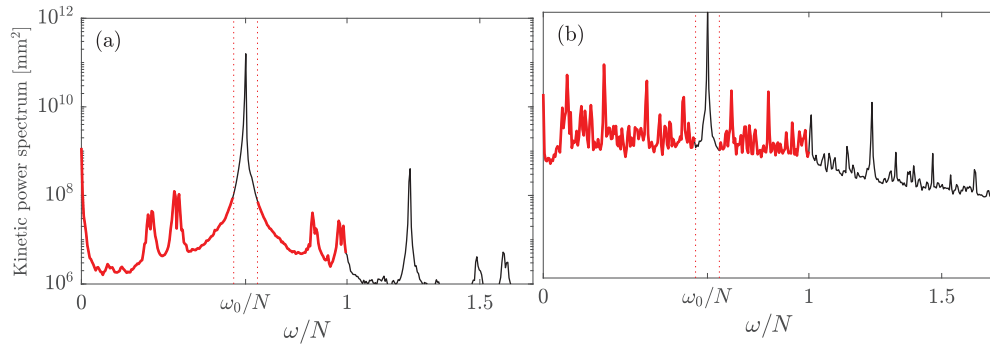
**FIG. 4.17** Spectre de puissance de l'expérience de la figure 4.16, en échelle logarithmique, calculé pour  $t \in [500; 600] T_0$ . (a) Axe des fréquences en échelle linéaire. (b) Axe des fréquences en échelle logarithmique. Les courbes noires correspondent au spectre du champ de vitesse complet. La courbe rouge a été obtenue après filtrage du champ autour de la relation de dispersion. La ligne en traitillé correspond à la loi de puissance d'exposant  $-2$ .

### 4.3.2 Spectres spatiaux

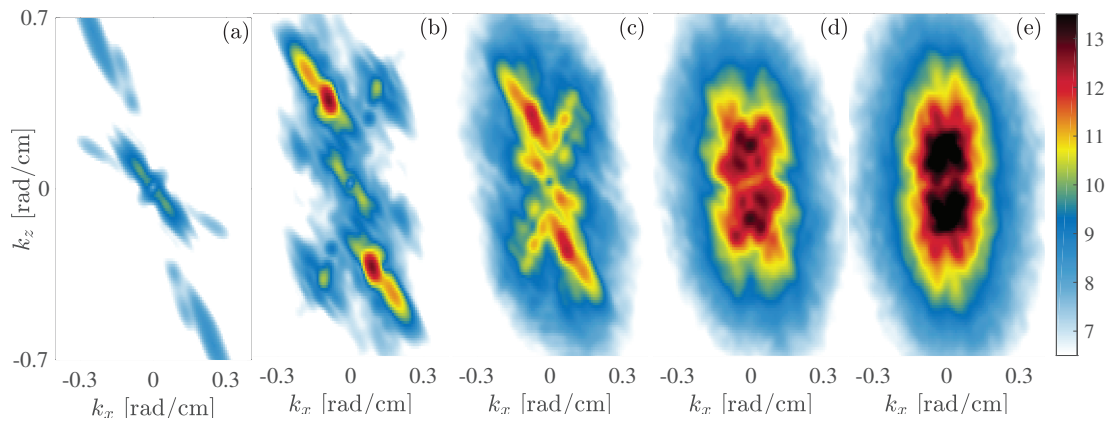
Afin d'étudier la structure spatiale du champ de vitesse, nous avons calculé la densité d'énergie dans l'espace des vecteurs d'onde  $(k_x, k_z)$ . Comme la structure spatiale de l'attracteur est déjà relativement complexe, nous avons filtré au préalable le champ de vitesse pour ne garder que les oscillations à  $\omega \leq N$  avec  $\omega \notin [\omega_0 - \delta\omega; \omega_0 + \delta\omega]$  et  $\delta\omega = 0.005 \text{ s}^{-1}$ . On espère ainsi que les structures spatiales observées dans la densité  $E_{k_x, k_z}$  ne proviennent pas directement de l'attracteur. Cette procédure est illustrée par la figure 4.18, qui montre deux exemples de spectre calculé avant (courbe fine noire) et après (courbe épaisse rouge) ce filtrage. Dans le spectre (a), qui a été calculé au début de l'expérience (comme le spectre spatial de la figure 4.19(a)), on constate que le pic à la fréquence d'excitation  $\omega_0/N \simeq 0.62$  est trop large pour pouvoir être entièrement filtré. Cette largeur, intrinsèque au calcul de la transformée de Fourier sur un signal borné dans le temps, est inévitable. Au contraire, le spectre (b), calculé à la fin de l'expérience (comme le spectre spatial de la figure 4.19(e)), présente un continuum de fréquences qui rend négligeable l'influence de la largeur du pic à  $\omega_0$ .

La figure 4.19 montre la densité d'énergie dans l'espace des  $\mathbf{k}$  du champ ainsi filtré en différents instants. Plus précisément, chaque figure de 4.19(a) correspond à la moyenne temporelle prise sur  $35 T_0$  de  $E_{k_x, k_z}(k_x, k_z, t)$  autour de  $t = 120 T_0$  (a),  $t = 260 T_0$  (b),  $t = 400 T_0$  (c),  $t = 535 T_0$  (d) et  $t = 670 T_0$  (e). Sur la figure 4.19(a), on voit encore comme annoncé la marque de l'attracteur, matérialisée par la tâche centrale.

Néanmoins au fur et à mesure que des non linéarités apparaissent ce reliquat est comparativement de moins en moins important. En effet, à cette signature de l'attracteur s'ajoute très vite de nouveaux vecteurs d'onde, et ce dès la figure (a). Leur norme est



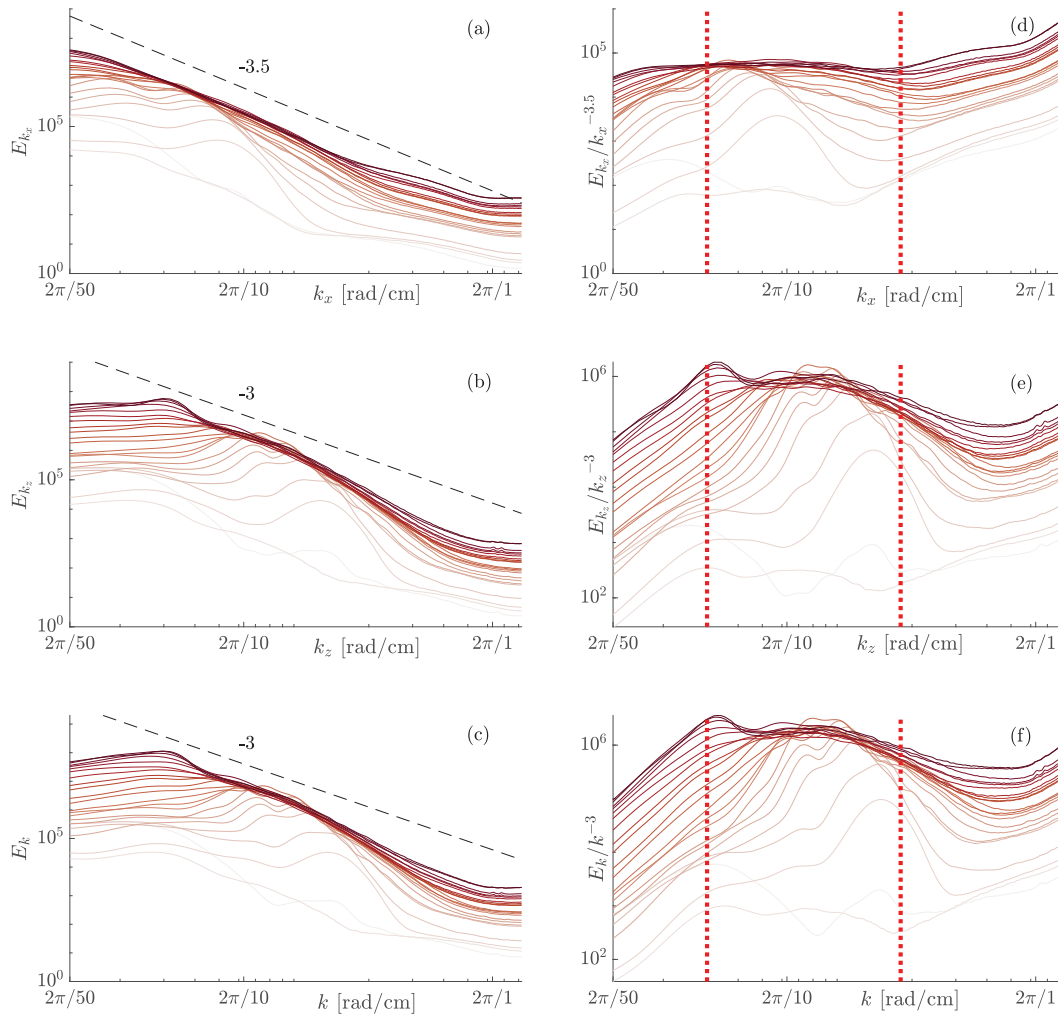
**FIG. 4.18** Spectre du signal brut (en trait fin noir) et du signal filtré (en trait épais rouge) pour  $t \simeq 120 T_0$  (a) et  $t \simeq 670 T_0$  (b).



**FIG. 4.19** Densité d'énergie  $E_{k_x, k_z}(k_x, k_z, t)$  moyennée sur  $35 T_0$  en 5 instants différents de l'expérience de la figure 4.15. On a préalablement filtré le champ de vitesse pour retirer la contribution de l'attracteur (voir figure 4.18). (a) moyenne prise autour de  $t = 120 T_0$ , (b)  $t = 260 T_0$ , (c)  $t = 400 T_0$ , (d)  $t = 535 T_0$ , (e)  $t = 670 T_0$ .

plus importante, en accord avec les champs filtrés de la figure 4.8 où l'on voit que les ondes secondaires présentent souvent de petites échelles  $\lambda \sim 50$  mm. Au fur et à mesure que l'amplitude de forçage est augmentée, la densité  $E_{\mathbf{k}}$  s'enrichit, passant d'une densité relativement piquée pour les figures (a) et (b) à une densité plus continue sur la figure (e).

Cette observation est encore plus visible sur les densités d'énergie *intégrées*. La figure 4.20 montre l'évolution de la densité d'énergie intégrée sur  $k_z$ , notée  $E_{k_x}$ ; et intégrée sur  $k_x$ , notée  $E_{k_z}$ . Un changement de variable  $(k_x, k_z) \rightarrow (k, \theta)$  permet de définir la densité  $E_k$ , tracée à la figure 4.20. Pour chaque graphe, les courbes rose clair ont été calculées au début de l'expérience lorsque  $a_0 = 2$  mm et les rouge foncé à la fin de l'expérience lorsque  $a_0 = 12$  mm. Nous allons dans un premier temps nous intéresser à l'évolution temporelle des spectres, puis étudier les spectres limites obtenus à la fin de l'expérience.



**FIG. 4.20** (à gauche) Densité d'énergie  $E_{k_x}$ ,  $E_{k_z}$  et  $E_k$  issues du champ de vitesse de l'expérience de la figure 4.15, où  $a_0 = 2$  mm au début de l'expérience et  $a_0 = 12$  mm à la fin. Sur chaque figure, chaque courbe est une moyenne sur  $35 T_0$ . Les courbes roses claires ont été calculées au début de l'expérience lorsque  $a_0 = 2$  mm et les rouge foncé à la fin de l'expérience lorsque  $a_0 = 12$  mm. Les couleurs intermédiaires correspondent à des amplitudes intermédiaires. Un ajustement en loi de puissance est tracé en traitillés, dont l'exposant est indiqué. Les figures de droite présentent les densités normalisées par la loi de puissance proposée.

**Étude de la transition** Entre la densité (b) et la densité (d) de la figure 4.19, les pics se resserrent vers des valeurs plus faibles des vecteurs d'onde. Cela est encore plus net sur les spectres intégrés des figures 4.20, où l'on distingue nettement un maximum local se déplacer des grands vecteurs d'onde pour les faibles amplitudes de forçage (courbes en rose clair) aux petits vecteurs d'onde pour les amplitudes de forçage plus grandes (courbes en rouge). On observe très bien ce processus en regardant l'évolution sur un temps long du champ de vitesse filtré à une fréquence donnée. La figure 4.21 montre par exemple l'évolution dans le temps du champ de vitesse horizontal filtré à la fréquence  $\omega/N \simeq 0.36$ . Au début, le champ est intense uniquement sur la partie haute de la cuve (a), et présente un motif de longueur d'onde  $\lambda \simeq 50$  mm. Cette onde provient donc d'une interaction non linéaire *locale*, observée par exemple dans [98].

Puis, par rebonds successifs, le faisceau remplit toute la cuve (b). On constate que ce phénomène est accompagné par une augmentation progressive de la longueur d'onde, qui atteint sur les figures (c) et (d) environ 130 mm.

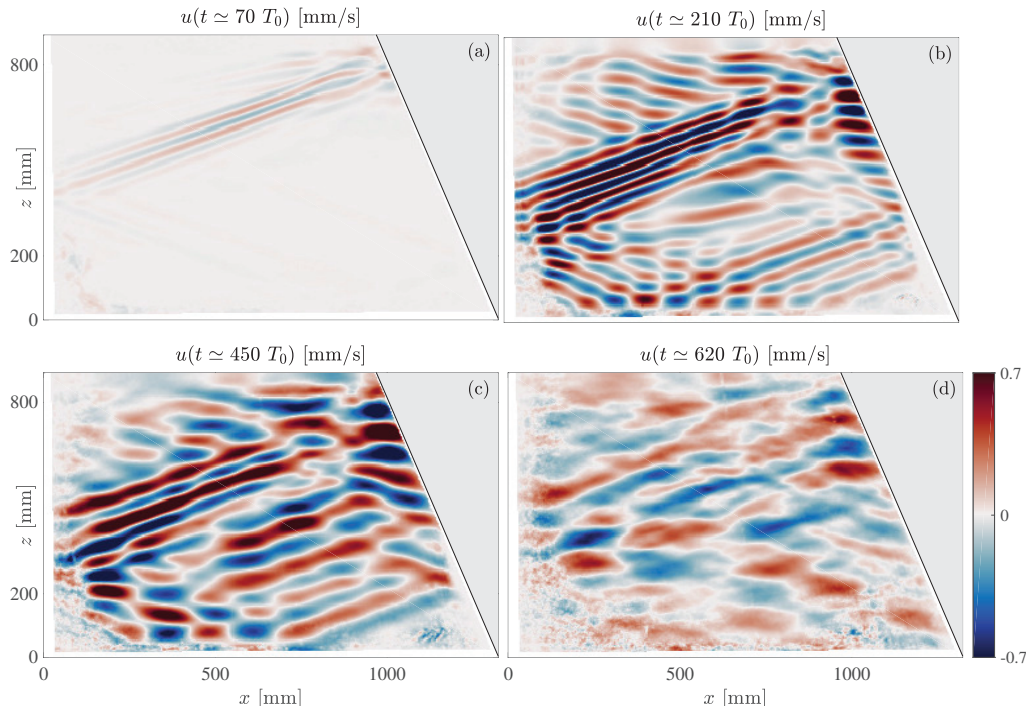


FIG. 4.21 Champ de vitesse horizontale, filtré à la fréquence  $\omega/N \simeq 0.36$ , en différents instants indiqués en titre.

Nous avons effectué cette analyse pour différentes fréquences. De manière générale, on observe l'agrandissement de la longueur d'onde au cours du temps, c'est-à-dire lorsque l'amplitude augmente. Par ailleurs, ce phénomène s'accompagne éventuellement de la présence d'une onde quasi-stationnaire, déjà reportée dans [22] et comme nous l'avons déjà évoqué pour l'onde (a) des figures 4.8 et 4.9. Néanmoins, cette structure quasi stationnaire est provisoire et évolue vers une structure propagative. La figure 4.22(a) montre par exemple le coefficient d'onde stationnaire  $R \equiv (E_{max} - E_{min}) / (E_{max} + E_{min})$  pour l'onde oscillant à  $\omega/N \simeq 0.25$ . Ici  $E_{max}$  désigne le maximum de l'énergie cinétique sur une période et  $E_{min}$  sont minimum. On a  $R = 0$  pour une onde purement propagative et  $R = 1$  pour une onde stationnaire. On constate qu'après un régime propagatif, cette onde passe par des phases plutôt propagatives et d'autres plutôt stationnaires, sans que l'on puisse dégager une tendance particulière. La figure 4.22(b) montre un exemple de structure quasi-stationnaire, obtenu à  $t \simeq 480 T_0$ .

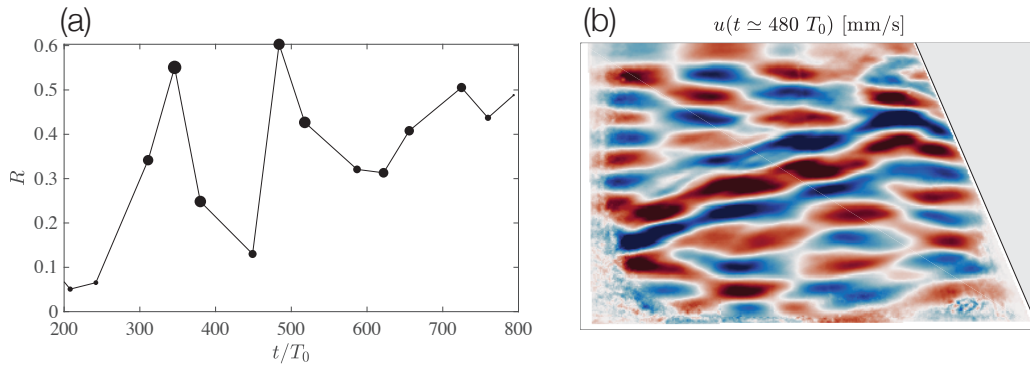


FIG. 4.22  $\omega/N \simeq 0.25$ . (a) Coefficient d'onde stationnaire  $R$ . (b) Champ de vitesse horizontale à  $t \simeq 480 T_0$ .

S'il est délicat de conclure sur une éventuelle tendance systématique vers des structures quasi-stationnaires pour les ondes secondaires, il semblerait que les ondes secondaires générées au début de l'expérience (donc à faible amplitude de forçage) le soient par des interactions *locales* et que au fur et à mesure que l'amplitude de forçage augmente les ondes emplissent toute la cuve et présentent de plus grandes longueurs d'onde. Ce phénomène s'accompagnant parfois par la présence ponctuelle de structures quasi-stationnaires. On peut expliquer qualitativement ces phénomènes comme suit. Au début, l'attracteur est suffisamment concentré pour présenter une faible longueur d'onde. Comme la longueur d'onde est petite, les ondes secondaires générées par non linéarité sont aussi de petites longueurs d'onde. Leur vitesse de groupe  $c_g = N \cos \theta / k$  est donc lente et comme de plus l'amplitude de forçage est faible, elles n'explorent pas toute la cuve (cf. figure 4.21 (a)). On a donc une non linéarité *locale* c'est-à-dire création d'ondes secondaires qui ne sentent pas les bords de la cuve car circonscrites à une région donnée, en l'occurrence la branche 2 pour l'onde à  $\omega/N \simeq 0.36$ . Au fur et à mesure que l'amplitude de forçage est augmentée, les non linéarités extraient de plus en plus d'énergie à l'onde primaire. Comme évoqué plus haut ainsi que dans [23], le faisceau à  $\omega_0$  parcourt alors une plus faible distance et est donc moins focalisé par rebonds successifs contre la pente. Il en résulte une longueur d'onde de l'attracteur plus grande. Cette onde primaire de plus grande longueur d'onde génère par non linéarités des ondes secondaires de plus grandes longueurs d'onde elles aussi. Ces ondes secondaires présentent alors une vitesse de groupe plus importante. De plus, elles sont plus énergétiques car l'amplitude de forçage est plus importante. Ces deux caractéristiques leurs permettent d'emplir progressivement toute la cuve. Leur vitesse de groupe et leur temps d'amortissement leur permettant de traverser plusieurs fois la cuve, on observe des interférences au sein de chaque onde secondaire, faisant apparaître ponctuellement des structures quasi-stationnaires.

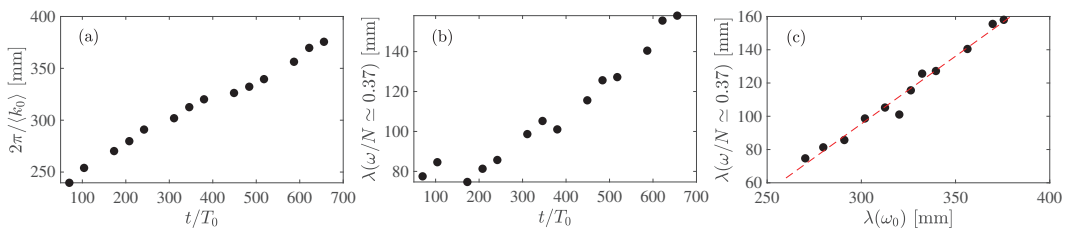
La figure 4.23 présente des mesures quantitatives venant appuyer ce scénario. La figure 4.23(a) présente la longueur d'onde de la branche 2 de l'attracteur au cours

du temps. On a défini cette longueur d'onde comme celle associée au vecteur d'onde moyen, pondéré par la densité d'énergie  $E_{\mathbf{k}}$

$$\lambda_0 \equiv 2\pi / \langle k_0 \rangle \quad (4.16)$$

$$\langle k_0 \rangle \equiv \frac{\int d\mathbf{k} |\mathbf{k}| E_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})}{\int d\mathbf{k} E_{\mathbf{k}}(\mathbf{k})}. \quad (4.17)$$

On voit très nettement une augmentation de cette longueur, d'environ 50% entre le début et la fin de l'expérience, passant de  $\lambda_0 \simeq 250$  mm à  $\lambda_0 \simeq 380$  mm. Cette augmentation de la longueur d'onde primaire est effectivement corrélée à une augmentation des longueurs d'onde secondaires, comme le montre la figure 4.23(b), qui présente l'évolution de la longueur d'onde de l'onde secondaire  $\omega/N \simeq 0.36$ . Cette onde voit sa longueur d'onde doubler entre le début et la fin de l'expérience. Comme la vitesse de groupe évolue proportionnellement à la longueur d'onde, elle est elle aussi doublée, passant de 8 mm/s à 16 mm/s. On peut alors estimer la distance parcourue durant un temps caractéristique de dissipation. Nous avons vu au chapitre 2 que ce temps est de l'ordre de  $\tau_{diss} \sim 150$  s. La distance parcourue durant ce temps passe alors de 1 m à 2 m, permettant au faisceau d'interférer avec lui même et de présenter éventuellement une structure quasi-stationnaire. La figure (c) présente l'évolution de  $\lambda$  en fonction de  $\lambda_0$ . La courbe traitillée est un ajustement linéaire qui vient quantifier la tendance de cette évolution. Nous avons effectué cette analyse pour plusieurs fréquences secondaires, et avons toujours trouvé un coefficient directeur  $p$  autour de la valeur 1, comme indiqué dans la table 4.1. Ce paragraphe permet donc de proposer une explication des observations reportées dans [22] : plus le système est non linéaire, moins l'attracteur est fin et plus les longueurs d'onde secondaires sont grandes, donc plus elles remplissent tout l'espace disponible et ressemblent par moment à des ondes stationnaires. Par ailleurs, un attracteur peu concentré favoriserait cet effet car il présente une longueur d'onde plus importante. La quasi stationnarité de l'attracteur ne serait alors pas le paramètre pertinent pour expliquer la quasi stationnarité des ondes secondaires, comme cela avait été suggéré par les auteurs.



**Fig. 4.23** Évolution de la longueur d'onde typique de l'attracteur (a) et de l'onde secondaire à  $\omega/N = 0.37$  (b) en fonction du temps. (c) Évolution de la longueur d'onde de l'onde à  $\omega/N = 0.37$  en fonction de la longueur d'onde de l'attracteur. La droite en traitillés rouges correspond à un ajustement linéaire.

$\omega/N$	0.0981	0.16	0.25	0.37	0.88	0.98
$p$	1.0	0.5	1.0	0.8	1.0	1.5

**TAB. 4.1** Coefficient directeur  $p$  de l'ajustement  $\lambda(\omega) = p\lambda_0 + d$ , en fonction de  $\omega$ . Un exemple d'un tel ajustement est donné à la figure 4.23(c).

**Étude des spectres limites** Les spectres de la figure 4.20 semblent converger vers des spectres limites, qui présentent une structure continue, c'est-à-dire sans maximum local, et qui ne dépendent plus de l'amplitude du forçage (courbes rouge foncé). On peut chercher à ajuster ces spectres limites par une loi de puissance. Les lois de puissance s'ajustant le mieux aux données sont indiquées en traitillés, ainsi que l'exposant correspondant. En traçant les densités  $E_{k_x}$ ,  $E_{k_z}$  et  $E_k$  divisées par la loi de puissance, les figures 4.20(d), (e) et (f) montrent le domaine de validité de ces ajustements, indiqué par les traitillés verticaux. On voit qu'ils conviennent pour  $k_x, k_z, k \in [2\pi/20; 2\pi/4]$  rad/cm.

On peut essayer de comparer les exposants des lois de puissance des spectres finaux aux prédictions théoriques de la turbulence d'onde. Une analyse dimensionnelle [85] donne  $E_k \sim k^\delta$ , où l'exposant  $\delta$  est fonction de différents paramètres du problème  $\delta = D - 6 + 2q + (5 - D - 3q)/(n - 1)$  avec  $D$  la dimension de l'espace,  $n$  le nombre d'ondes en interaction et  $q$  donné par la relation de dispersion  $\omega \sim k^q$ . Dans les expériences présentées ici,  $D = 2$  car la cuve est mince et le système invariant selon  $y$ , et comme les ondes internes interagissent par interactions triadiques on a  $n = 3$ . Il est par contre difficile d'écrire la relation de dispersion,  $\omega = Nk_x/k$ , sous la forme  $\omega \sim k^q$ . Une hypothèse supplémentaire doit alors être ajoutée. Si on suppose l'isotropie, on a  $k_x \sim k_z \sim k$ . Ce qui donne  $q = 0$  et  $\delta = -5/2$ . Si au contraire on suppose que les ondes sont quasi horizontales (*i.e.* avec  $k_x \ll k_z$ ) on a alors  $q = -1$  et  $\delta = -3$  [85]. Cette hypothèse d'horizontalité des ondes ne semble pas absurde pour nos expériences au regard de la figure 4.19(e), qui montre que pour les grands vecteurs d'onde la densité d'énergie n'est en effet importante que pour  $k_z \gg k_x$ .

Nos données expérimentales semblent donc confirmer l'exposant  $-3$ . Néanmoins, plusieurs hypothèses utilisées lors de son établissement théorique ne sont pas pleinement vérifiées ici. Premièrement, nous verrons à la section 4.3.4 que le temps non linéaire n'est pas bien séparé du temps linéaire, puisqu'on a  $\tau_{NL} \sim 4T_L$  où  $T_L$  est le temps linéaire de l'onde (sa période). De plus, la loi de puissance théorique est dérivée dans le cas d'une *zone inertielle*, c'est-à-dire pour une gamme de vecteurs d'onde dans laquelle l'énergie est transférée de proche en proche, sans perte. Certes cette assertion n'est en pratique qu'exceptionnellement vérifiée, mais une séparation entre l'échelle d'injection de l'énergie et l'échelle dissipative suffit généralement pour retrouver les résultats théoriques. Or nous avons vu au chapitre 2 que la dissipation du système étudié ici est dominée par l'atténuation dans les couches visqueuses et non par la

dissipation en volume par les petites échelles de l'écoulement. Les vecteurs d'onde sont alors tous affectés par l'atténuation visqueuse et il est donc difficile d'exhiber une "échelle dissipative".

Si l'application des concepts théoriques de la turbulence d'onde aux expériences présentées ici ne semble pas triviale, nous allons voir que l'on peut tout de même décrire, dans une certaine mesure, le champ de vitesse comme une superposition d'ondes linéaires.

### 4.3.3 Densité d'énergie et relation de dispersion

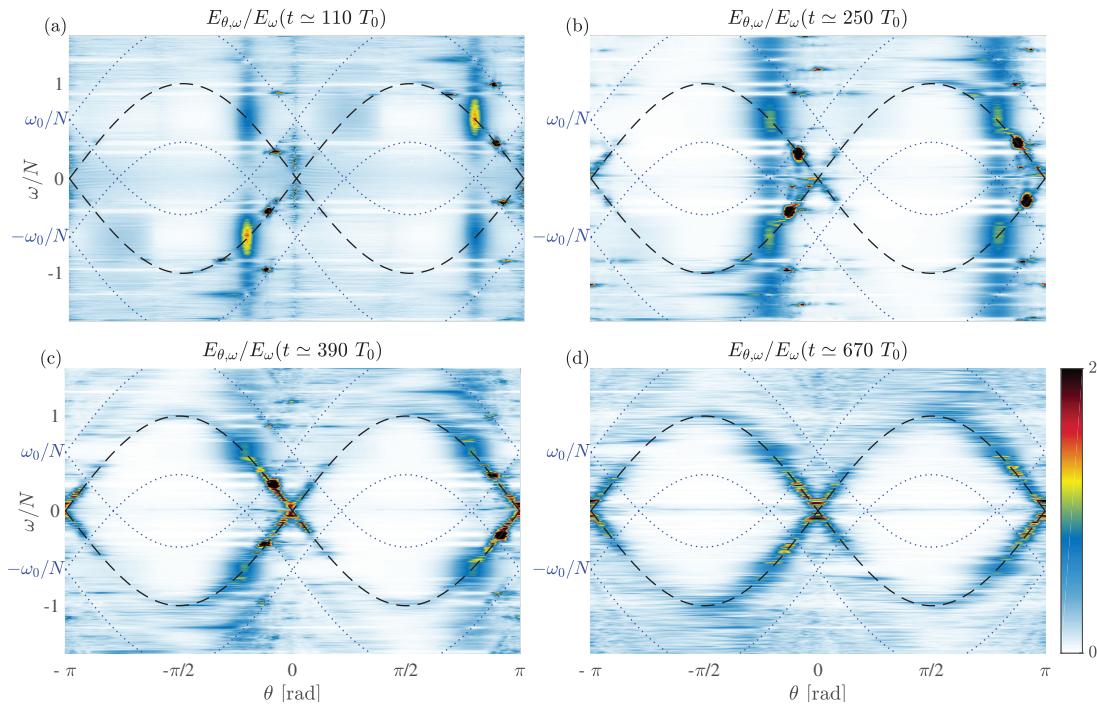
Comme dans le cas de l'expérience non linéaire de la figure 4.13, on peut tracer la densité d'énergie  $E_{\theta,\omega}$  au cours de l'expérience. Cela est fait à la figure 4.24, où chaque figure a été calculée sur une fenêtre temporelle de  $80 T_0$ . Sur les figures (a) et (b), on voit très nettement des bandes verticales autour de  $\omega_0/N = 0.53$  : les fréquences proches de la fréquence de forçage correspondent donc à une structure spatiale de même angle  $\theta$  que le forçage. Cette observation rejoint la remarque faite à la figure 4.19(a), où malgré un filtrage du champ à  $\omega \neq \omega_0$ , on voit toujours la trace de l'attracteur. Sur la figure 4.24(c), cette bande verticale s'infléchit et commence à suivre la relation de dispersion : les structures oscillant à  $\omega$  proche de  $\omega_0$  ne sont plus des traces laissées par l'attracteur mais bien des ondes avec leur propres structures spatiales. Par ailleurs, on voit très nettement sur la figure (b) deux ondes filles apparaître sous la forme de tâches noires très localisées sur la relation de dispersion. Ces ondes secondaires sont en fait visibles dès la figure (a), car la fenêtre d'analyse temporelle est large. Au fur et à mesure que l'amplitude  $a_0$  est augmentée, l'empreinte de ces ondes secondaires est de moins en moins concentrée sur la relation de dispersion. Les figures (a), (b), et dans une moindre mesure (c), montrent aussi la présence des ondes liées en dehors de la relation de dispersion ; mais au fur et à mesure que l'amplitude de forçage augmente, elles sont de moins en moins présentes et la région autour de la relation de dispersion se peuple de plus en plus pour atteindre sur la figure (d) un peuplement presque homogène.

Cet outil permet de distinguer la part d'énergie de l'écoulement associée à des ondes. On peut alors construire la figure 4.25, qui distingue l'énergie portée par la fréquence d'excitation  $\omega_0$ , l'énergie portée par le reste des ondes, l'énergie du courant moyen et l'énergie du reste de l'écoulement. Plus précisément, on a calculé

$$\int_{D_\omega D_\theta} E_{\theta,\omega} d\theta d\omega \quad (4.18)$$

où  $E_{\theta,\omega}$  a été obtenu en sommant les contributions des vecteurs d'ondes de direction  $\theta$  et de norme  $k \in [2\pi/30 ; 2\pi/3]$  rad/cm, et où le domaine d'intégration est choisi en fonction de l'énergie que l'on cherche à calculer. Pour le courant moyen, on a





**FIG. 4.24** Densité d'énergie  $E_{\theta, \omega}$  normalisée par le spectre de puissance  $E_{\omega}$ , pour l'expérience de la figure 4.16. Chaque figure résulte de l'analyse du champ de vitesse sur une durée de  $80 T_0$ . Moyenne prise autour de  $t \simeq 110 T_0$  (a),  $t \simeq 250 T_0$  (b),  $t \simeq 390 T_0$  (c),  $t \simeq 670 T_0$  (d). La relation de dispersion des ondes internes  $\omega = \pm N \sin \theta$  a été tracée en traitillés, et la relation  $\omega = \pm \omega_0 \pm N \sin \theta$  en pointillés bleus.

intégré sur les fréquences inférieures à un dixième de la fréquence de flottabilité, et sur tous les angles. Pour l'énergie portée par la fréquence d'excitation, on a intégré les fréquences distantes au plus de 10% de  $\omega_0$ , et sur tous les angles. Pour la part des autres ondes, on a intégré sur un ruban centré sur la relation de dispersion et haut de deux dixièmes de la fréquence de flottabilité. Les valeurs des énergies ainsi calculées dépendent de ces seuils, mais la tendance reste la même. On constate sur cette figure que l'écoulement moyen reste négligeable comparé aux autres composantes du champ. En effet, le dispositif expérimental permet d'injecter de l'énergie sous la forme d'ondes, sans générer directement d'écoulement moyen (celui observé est créé indirectement, par les ondes). Par ailleurs, on constate que l'énergie portée par la fréquence d'excitation semble converger vers une valeur limite. La part des ondes oscillant à  $\omega \neq \omega_0$  augmente de plus en plus, passant de 0 à 25% de l'énergie totale ; alors que la part portée par la fréquence d'excitation passe de presque 100% à moins de 50%. Par contre, avec ces valeurs de seuil, on a autant d'énergie sur la relation de dispersion qu'à côté. En effet, les non linéarités élargissent le peuplement de la relation de dispersion.

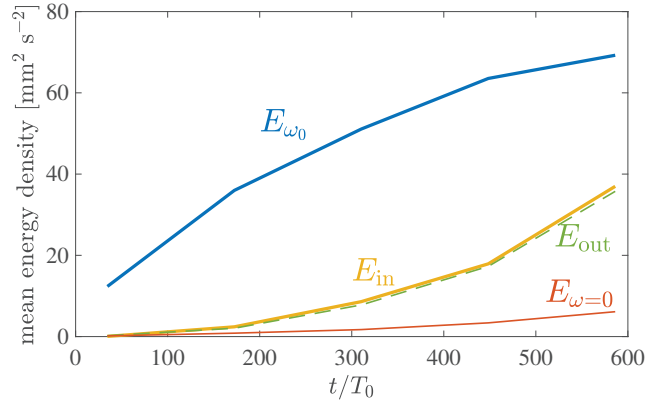


FIG. 4.25 Évolution des énergies portées par la fréquence d'excitation (en bleu), par les autres ondes (en jaune), par l'écoulement moyen (en rouge) et par le reste de l'écoulement (en vert). Les paramètres de l'expérience sont ceux de la figure 4.15.

#### 4.3.4 Estimation du temps non linéaire

La largeur de la densité d'énergie autour de la relation de dispersion est reliée au temps non linéaire. L'élargissement de la relation par les non linéarités a été observé dans le cas des ondes d'inertie [110]. Plus précisément, les auteurs définissent le temps non linéaire  $\tau_{NL}$  du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  par l'inverse de la largeur à mi-hauteur du pic de  $E_{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{k}, \omega)$  autour de la fréquence prévue par la relation de dispersion. La figure 4.26(a) montre un exemple de mesure de  $\tau_{NL}$  calculé à la fin de l'expérience de la figure 4.16, pour un vecteur d'onde quelconque  $(k_x, k_z) = (-0.27, 0.66)$  rad/s. Le spectre de puissance correspondant à ce nombre d'onde présente deux pics, aux fréquences  $\omega = \pm 0.40 N$ , compatible avec la valeur  $\omega^L(\mathbf{k}) = 0.37 N$  attendue *via* la relation de dispersion<sup>1</sup>. En rouge est tracée la courbe de tendance, dont la largeur à mi-hauteur des pics vaut environ  $\delta\omega \simeq 0.18 N$  et  $\delta\omega \simeq 0.27 N$ , ce qui correspond respectivement à  $\tau_{NL} \simeq 2 T_L$  et  $\tau_{NL} \simeq 1 T_L$ , où  $T_L = 2\pi/\omega$  est la période de l'onde.

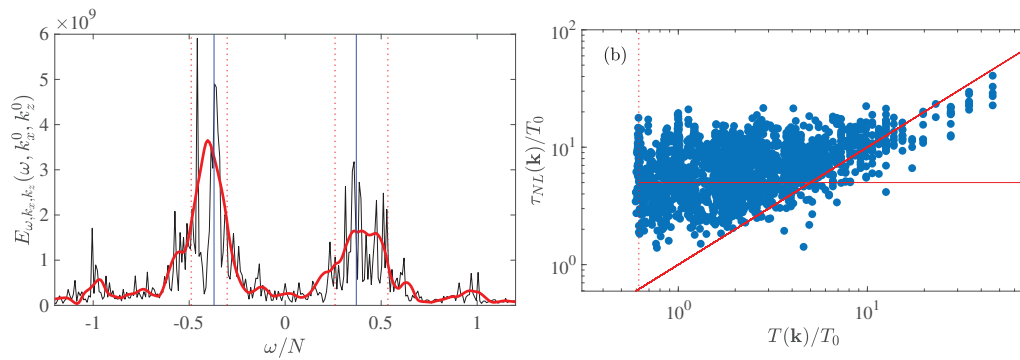
On peut répéter cette procédure pour tous les vecteurs d'onde et construire la figure 4.26(b), sur laquelle on a reporté tous les couples  $(\tau_{NL}(\mathbf{k}), T_L(\mathbf{k}))$  normalisés par la période du forçage  $T_0$  et en échelle logarithmique. Nous avons pour cela considéré uniquement les couples dont le maximum de  $E_{\mathbf{k},\omega}(\mathbf{k}_0, \omega)$  était obtenu entre  $\omega^L(\mathbf{k}) - \delta\omega$  et  $\omega^L(\mathbf{k}) + \delta\omega$ . La ligne verticale rouge en pointillés repère la pulsation de flottabilité  $N$ , et les lignes rouges en traits pleins correspondent à  $\tau_{NL} = 4 T_0$  (ligne horizontale) et  $\tau_{NL} = T_L$  (ligne diagonale). On constate que pour les fréquences comprises entre  $2\pi/(5 T_0)$  et  $N$  (*i.e.*  $T/T_0 \in [0.5; 5]$ ), le temps non linéaire suit la ligne rouge horizontale : il est approximativement constant et vaut environ  $4 T_0$ , ce qui correspond à  $\tau_{NL}/T_L \simeq 10$  pour l'onde oscillant à  $N$  et  $\tau_{NL}/T_L \simeq 1$  pour l'onde

<sup>1</sup> En effet, on a  $\omega^L(\mathbf{k} + \delta\mathbf{k}) = 0.41 N$  avec  $\delta\mathbf{k} = 0.025$  rad/s la résolution en vecteur d'onde.

oscillant à  $2\pi/(5T_0)$ . Les couples  $(\tau_{NL}, T_L)$  suivent ensuite approximativement, pour les très faibles fréquences ( $\omega \leq 2\pi/(5T_0)$ ), la loi  $\tau_{NL}/T_L = 1$ .

Comme le régime de la turbulence d'onde nécessite  $\tau_{NL} \gg T_L$ , il semblerait que les paramètres expérimentaux conduisent à un régime non linéaire plus fort que celui exploré par cette théorie. Afin d'explorer un régime de *faible non linéarité*, il faudrait donc réduire l'intensité du champ de vitesse, en réduisant l'amplitude de forçage  $a_0$ . Mais l'on constate sur les figures 4.16 et 4.19(a), (b), (c) et (d) que les spectres spatiaux et temporels ne sont alors pas continûment peuplés.

Ces spectres ont été observés pour une amplitude de forçage constante ou croissante. Peut être que forcer le système à une forte amplitude et la réduire ensuite permettrait d'atteindre le régime faiblement non linéaire de la turbulence d'onde ? Nous explorons cette idée dans la section suivante.



**FIG. 4.26** (a) Exemple de mesure du temps non linéaire  $\tau_{NL}$  associé au vecteur d'onde  $(k_x^0, k_z^0) = (-0.15, 0.63)$  rad/s. La courbe noire correspond à la mesure de  $E_{\omega, k_x, k_z}(\omega, k_x^0, k_z^0)$ , la courbe rouge est une courbe de tendance. Les lignes verticales rouges en pointillés indique la largeur à mi-hauteur des deux pics, et les lignes verticales bleues indique la fréquence attendue par la relation de dispersion. Les paramètres de l'expérience sont les mêmes que ceux indiqués dans la figure 4.17. (b) Évolution du temps non linéaire  $\tau_{NL}/T_0$  avec le temps linéaire  $T/T_0$ . La droite rouge horizontale correspond à  $\tau_{NL} = 4T_0$ , la diagonale à  $\tau_{NL} = T$ .

## 4.4 A la recherche du régime faiblement non linéaire

### 4.4.1 Premières observations

Afin de répondre à cette question, nous avons effectué une expérience durant laquelle l'amplitude de forçage est augmentée lentement - comme dans l'expérience de la figure 4.16 - puis diminuée de façon symétrique. Par simplicité expérimentale, cette expérience est observée par Schlieren Synthétique. La géométrie de la cuve ( $H = 920$  mm,  $L = 1700$  mm,  $\alpha = 29.5^\circ$ ) est la même que celle utilisée à la section 4.2. Par ailleurs, on a  $\omega/N \simeq 0.53$  et  $N = 0.70$  rad/s.

La figure 4.27 présente le spectrogramme moyenné sur une zone spatiale comparable à celle indiquée à la figure 4.15. La moitié gauche de la figure (*i.e.* pour  $t \leq 800 T_0$ ) correspond à l'augmentation progressive de l'amplitude de forçage, indiquée par la courbe rouge en bas du temps-fréquence, et ressemble dans sa structure au spectrogramme tracé en figure 4.16. La seconde moitié du temps fréquence est plus surprenante. En effet, on constate que lors de la décroissance de  $a_0$ , les fréquences ne disparaissent pas dans un ordre symétrique à leur ordre d'apparition : le système présente une hystérésis. Par ailleurs, le spectre tend dans cette seconde partie de l'expérience à s'organiser en fréquences équidistantes les unes des autres. Par exemple en  $t = 1200 T_0$  on voit nettement que le spectrogramme présente une densité d'énergie importante au niveau des fréquences  $\omega_j = j\omega_0/5$ , avec  $j = [1 : 10]$ . On appellera ce phénomène *quantification*. Pouvons nous comprendre ce phénomène ?

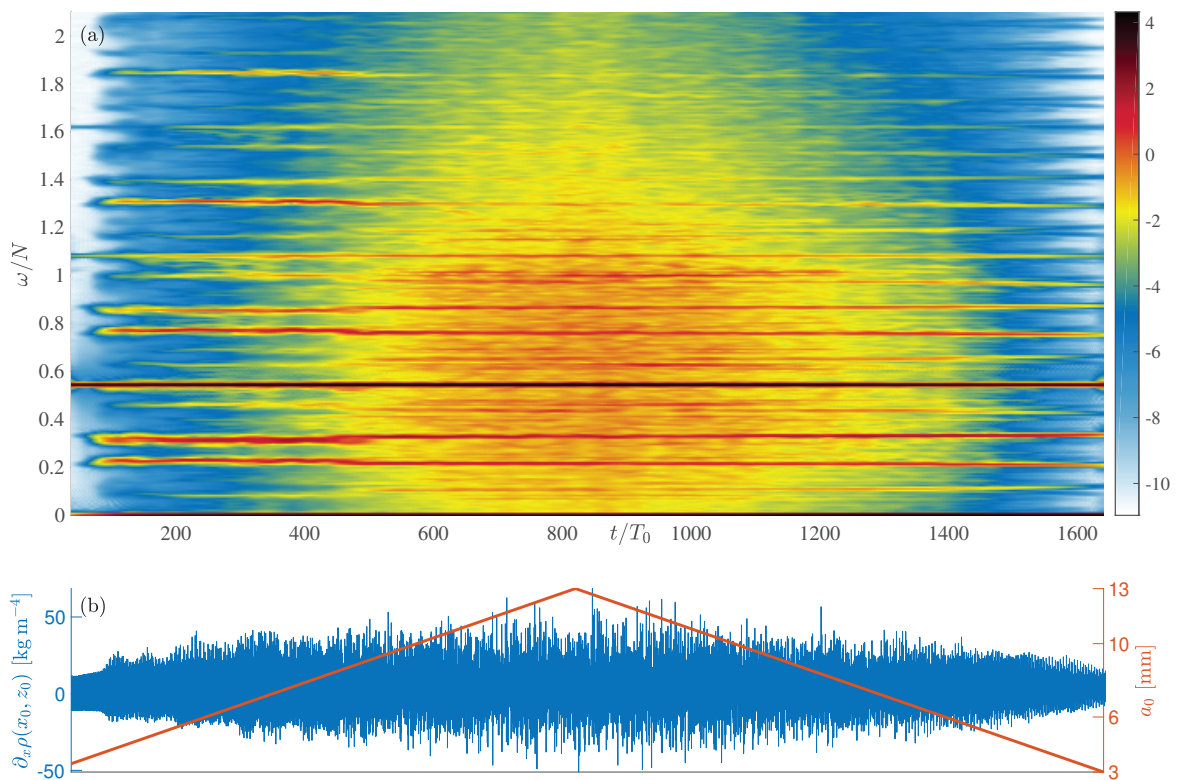


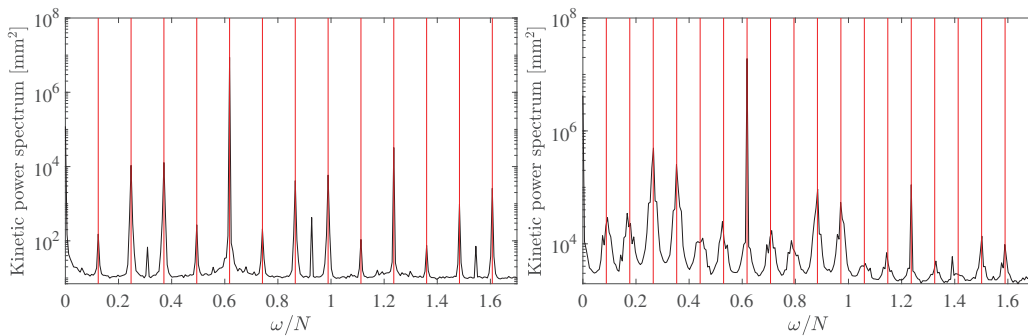
FIG. 4.27 (a) Diagramme temps-fréquence calculé sur une zone spatiale similaire à la zone encadrée en rouge dans la figure 4.15(a). (b) La courbe rouge indique l'amplitude du générateur, progressivement augmentée de  $a_0 = 3$  mm en  $t = 0$  à  $a_0 = 13$  mm à  $t = 800 T_0$ , puis diminuée à la même vitesse. La courbe bleue présente  $\partial_x \rho(x_0, z_0, t)$  pour  $(x_0, z_0)$  sur la branche 1 de l'attracteur. Les paramètres de l'expérience sont  $H = 920$  mm,  $L = 1700$  mm,  $\alpha = 29.5^\circ$ ,  $\omega/N \simeq 0.53$  et  $N = 0.70$  rad/s.

#### 4.4.2 Spectre temporel quantifié

Cette tendance du spectre de puissance à présenter une valeur importante uniquement pour les fréquences  $\omega_j$  telles que  $\omega_j = j\omega_0/n$  a été observée dans de nombreuses

expériences à amplitude de forçage intermédiaire, avec  $n$  valant selon les expériences 3, 5, 7, 11, ou 13.

La figure 4.28 présente deux exemples. La figure 4.28(a) correspond à un spectre mesuré sur un signal de durée  $100 T_0$  après  $200 T_0$  de forçage à  $a_0 = 3$  mm, avec  $H = 920$  mm,  $L = 1328$  mm,  $\alpha = 15.8^\circ$ ,  $\omega/N \simeq 0.62$  et  $N = 0.70$  rad/s. On constate que les pics sont localisés sur les fréquences  $\omega_j = j\omega_0/5$ , comme montré par les lignes rouges verticales. D'autres pics sont visibles à  $j\omega_0/2$ . Ils proviennent à la fois de la présence d'une onde de ballottement (voir par exemple figure 3.11 du chapitre 3) à la fréquence  $\omega \simeq 1.5 \omega_0$  et, à la fois, d'un repliement du spectre autour de la moitié de la fréquence d'acquisition. On a en effet  $f_e/2 = 0.5 \text{ s}^{-1} \simeq (7+1/4)f_0$ . Le repliement d'une harmonique  $(7+n)\omega_0$  produit donc un pic à  $\omega_e/2 - (\omega - \omega_e/2) = (7-n+1/2)\omega_0$ . L'analyse des structures spatiales associées à chacun de ces pics parasites confirme ces deux interprétations, qui ne seront donc pas développées davantage. La figure 4.28(b) a été obtenue avec les mêmes paramètres expérimentaux mais pour une amplitude de forçage plus grande  $a_0 = 5$  mm. Le spectre a été mesuré sur un signal de durée  $100 T_0$  après  $170 T_0$  de forçage. On voit de nouveaux un spectre *quantifié*, mais cette fois-ci les fréquences présentes sont de la forme  $\omega_j = j\omega_0/7$ .



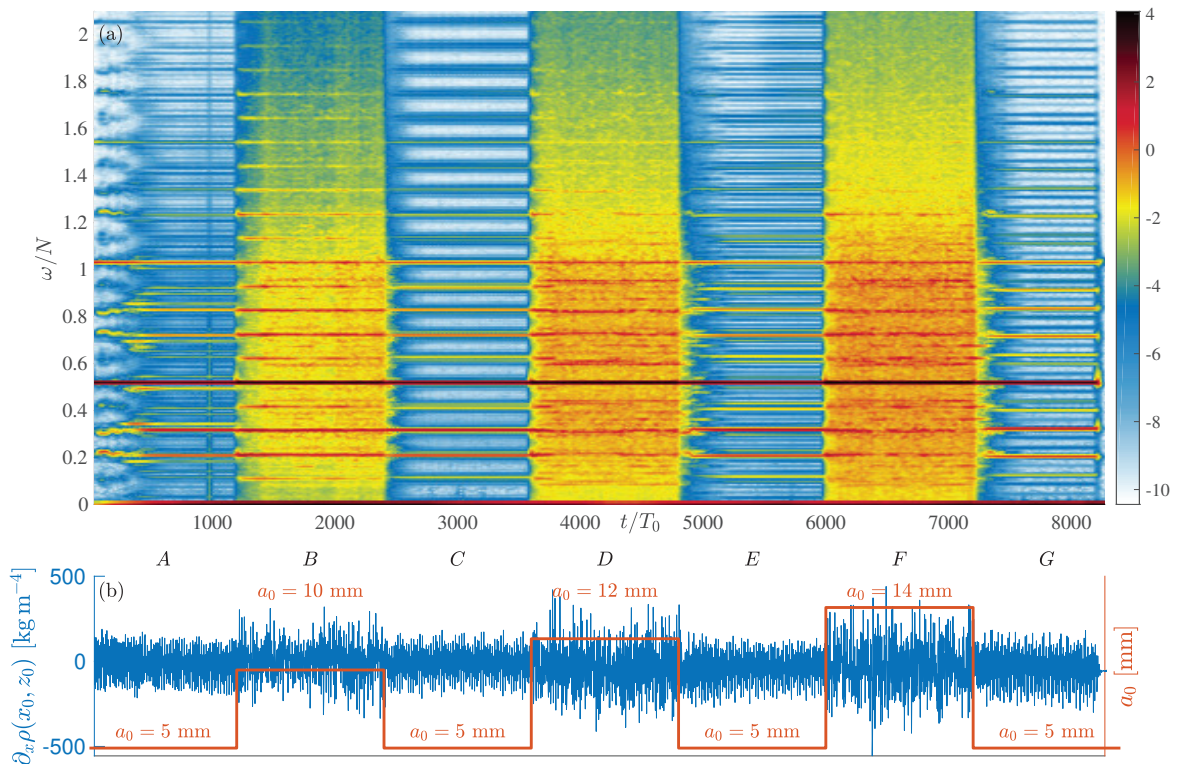
**FIG. 4.28** (a) Spectre de puissance mesuré sur un signal de durée  $100 T_0$  après  $200T_0$  de forçage à  $a_0 = 3$  mm, avec  $H = 920$  mm,  $L = 13280$  mm,  $\alpha = 15.8^\circ$ ,  $\omega/N \simeq 0.62$  et  $N = 0.70$  rad/s. Les lignes verticales indiquent les fréquences  $j\omega_0/5$ . (b) Spectre de puissance mesuré sur un signal de durée  $100 T_0$  après  $170T_0$  de forçage à  $a_0 = 5$  mm, avec les mêmes paramètres expérimentaux que (a). Les lignes verticales indiquent les fréquences  $j\omega_0/7$ .

#### 4.4.3 Hystérésis / stabilité du spectre

Afin d'étudier de façon plus systématique cette hystérésis, nous avons réalisé une expérience très longue – 42h – où l'amplitude de forçage a été modifiée toutes les 6h, avec  $a_0 = 5, 10, 5, 12, 5, 14$  puis 5 mm. Les autres paramètres sont  $H = 920$  mm,  $L = 1700$  mm,  $\alpha = 29.5^\circ$ ,  $\omega/N \simeq 0.53$  et  $N = 0.68$  rad/s. Cette expérience a été également observée par Schlieren Synthétique, et sur une zone spatiale restreinte au niveau de la branche 1 de l'attracteur. La durée de 6h de chaque étape d'amplitude constante a été choisie pour être très grande devant les temps caractéristiques connus du système,

à savoir la période des ondes  $T \sim 10$  s, le temps dissipatif  $\tau_d \sim 10 T_0 \simeq 100$  s, et le temps non linéaire  $\tau_{NL} \sim 50$  s. Malgré cette précaution, on constate que le système ne retrouve pas le même état au cours des 4 phases où l'amplitude de forçage est égale à 5 mm.

En effet, on voit sur le spectrogramme de la figure 4.29 que les phases A, C, E et G, où  $a_0 = 5$  mm, ne sont pas identiques ; ainsi que sur les figures 4.30(b), (c), (d) et (e) qui montrent les spectres calculés sur chacune de ces phases. Nous avons ajusté le début des fenêtres temporelles utilisées afin de ne pas prendre en compte le régime transitoire au début de chaque phase. Les lignes verticales rouges indiquent les fréquences  $\omega_j = j\omega_0/5$  sur les graphes (a) et (b),  $\omega_j = j\omega_0/23$  sur le graphe (c) et  $\omega_j = j\omega_0/13$  sur le graphe (d). Le graphe en bas de la figure 4.29 montre l'évolution de l'amplitude de forçage ainsi que le signal mesuré en un point  $(x_0, z_0)$  de l'attracteur.



**FIG. 4.29** (a) Diagramme temps-fréquence du champ de gradient de densité moyenné sur une zone spatiale similaire à celle encadrée en rouge sur la figure 4.15(a). La fenêtre temporelle est large de  $80 T_0$ . Les paramètres de l'expérience sont  $H = 920$  mm,  $L = 1700$  mm,  $\alpha = 29.5^\circ$ ,  $\omega/N \simeq 0.53$  et  $N = 0.68$  rad/s. (b) La courbe rouge indique l'amplitude du générateur, qui a été changée toute les 6h : 5, 10, 5, 12, 5, 14 puis 5 mm. La courbe bleue correspond à  $\partial_x \rho(x_0, z_0, t)$  pour  $(x_0, z_0)$  sur la branche 1 de l'attracteur.

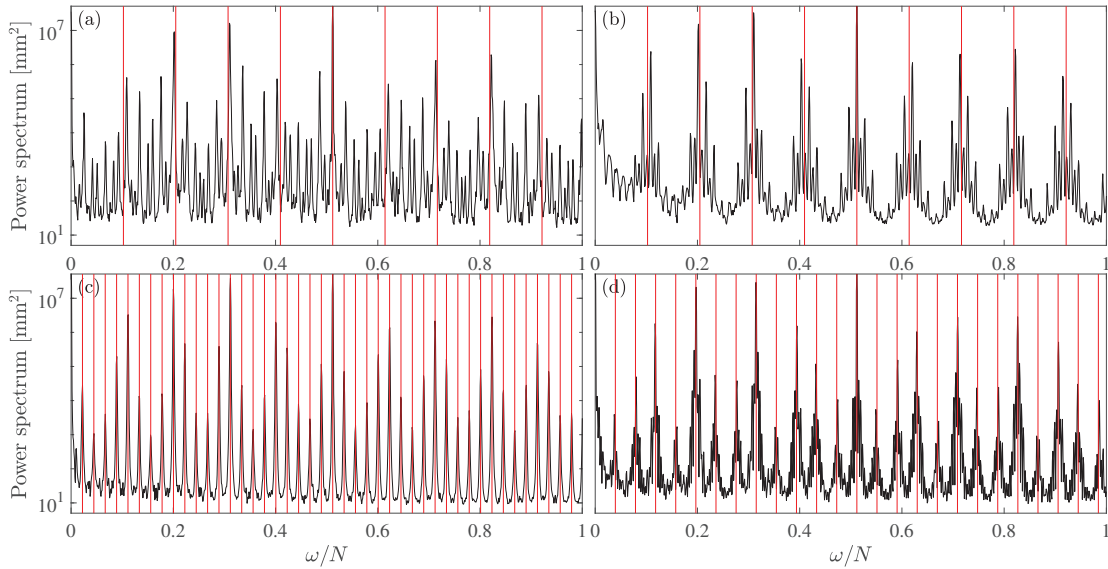
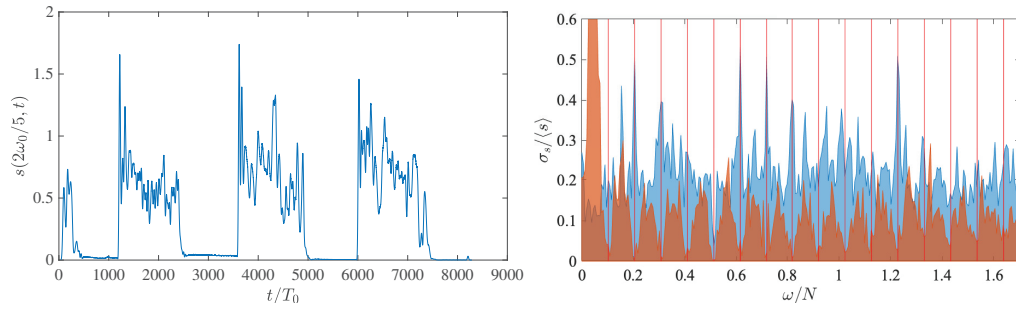


FIG. 4.30 Spectres calculés durant les phases  $A$  (a),  $C$  (b),  $E$  (c) et  $G$  (d), sur des fenêtres débutant  $400 T_0$  après le changement d'amplitude et durant  $550 T_0$ . Les lignes verticales rouges marquent respectivement les fréquences  $j\omega_0/5$ ,  $j\omega_0/5$ ,  $j\omega_0/23$  et  $j\omega_0/13$ .

Si chaque phase présente un spectre de puissance différent, il est marquant de constater sur le temps-fréquence 4.29 que chacun de ces spectres se stabilise vers un spectre extrêmement constant dans le temps, ce qui est très différent de ce qui est observé pour les phases à grande amplitude  $B$ ,  $D$  et  $F$ . La figure 4.31(a) montre par exemple l'évolution dans le temps de  $s(2\omega_0/5, t)$ . On distingue très nettement les phases à grande amplitude, où le signal varie beaucoup au cours du temps, des phases où  $a_0 = 5$  mm, où le signal est non seulement plus faible mais surtout moins fluctuant. Pour mieux quantifier ce comportement, on s'intéresse à l'écart type normalisé du spectrogramme. Plus précisément, on calcule en chaque point  $(t, \omega)$  la quantité

$$V(t, \omega) = \frac{\sigma_t(s)}{\langle s \rangle_t} \quad (4.19)$$

où la moyenne  $\langle s \rangle_t$  et l'écart type  $\sigma_t(s)$  sont pris sur les différentes valeurs du spectrogramme prises en  $\omega$  et  $t' \in t \pm \Delta t_V/2$ .  $V(t, \omega)$  est grande si la valeur du spectrogramme en  $(t, \omega)$  varie beaucoup au cours du temps, et petite si au contraire le spectrogramme est stable. La calculer nécessite des signaux très longs, car pour calculer  $V$  via (4.19) il faut que  $\Delta t_V$  soit grand devant  $\Delta t_s$ , afin d'avoir suffisamment de statistiques. Or  $\Delta t_s$ , utilisé pour calculer le spectrogramme, doit elle-même être grande devant les périodes des ondes considérées. Pour éviter l'influence des régimes transitoires, nous avons pris  $\Delta t_V = 480 T_0 = 6\Delta t_s$ . La condition  $\Delta t_V \gg \Delta t_s$  n'est donc pas tout à fait remplie et  $V(t, \omega)$  n'a pas complètement convergé. Néanmoins, on observe des résultats qualitatifs très intéressants.



**Fig. 4.31** (a) Évolution dans le temps de la valeur du spectrogramme pour  $\omega = 2\omega_0/5$ . (b) Écart type normalisé  $V(t, \omega)$  comme défini en (4.19), en rouge à  $t = 3000 T_0$  (phase C) et en bleu à  $t = 4250 T_0$  (phase D). L'aire sous les courbes a été colorée afin d'améliorer leur visibilité.

La figure 4.31(b) montre  $V(\omega, t)$  en fonction de  $\omega$  pour deux instants  $t$  différents : en bleu, pour  $t = 4250 T_0$  (donc dans la phase D) et en rouge pour  $t = 3000 T_0$  (donc dans la phase C). On voit que la courbe rouge présente des minima très nets pour les fréquences  $\omega_j = j\omega_0/5$ , indiquées par des lignes rouges verticales. Au niveau de ces fréquences, on a  $\sigma_t(s)/\langle s \rangle_t \leq 3\%$ . Le régime correspondant semble donc être un régime extrêmement *stable*. Au contraire, les valeurs de la courbe bleue sont beaucoup plus importantes, et ce pour toutes les fréquences. On pourrait donc qualifier ce régime de *stochastique*.

#### 4.4.4 Lien de phase entre les ondes

On a donc constaté que lors de ces phases *quantifiées*, les amplitudes des ondes ne sont pas aléatoires. Qu'en est-il de leurs phases ? Pour explorer cette question, on utilise la bicohérence  $B$  et la tricorrélation  $T$ , dont on rappelle ici la définition

$$T^2(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \frac{|\langle s(\omega_1)s(\omega_2)S^*(\omega_3) \rangle|^2}{\langle |s(\omega_1)s(\omega_2)|^2 \rangle \langle |s(\omega_3)|^2 \rangle}, \quad T \geq 0 \quad (4.20)$$

$$B(\omega_1, \omega_2) = T(\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2), \quad (4.21)$$

où  $s(\omega)$  est la transformée de Fourier locale du signal et  $\langle \cdot \rangle$  est une moyenne sur le temps et sur l'espace.

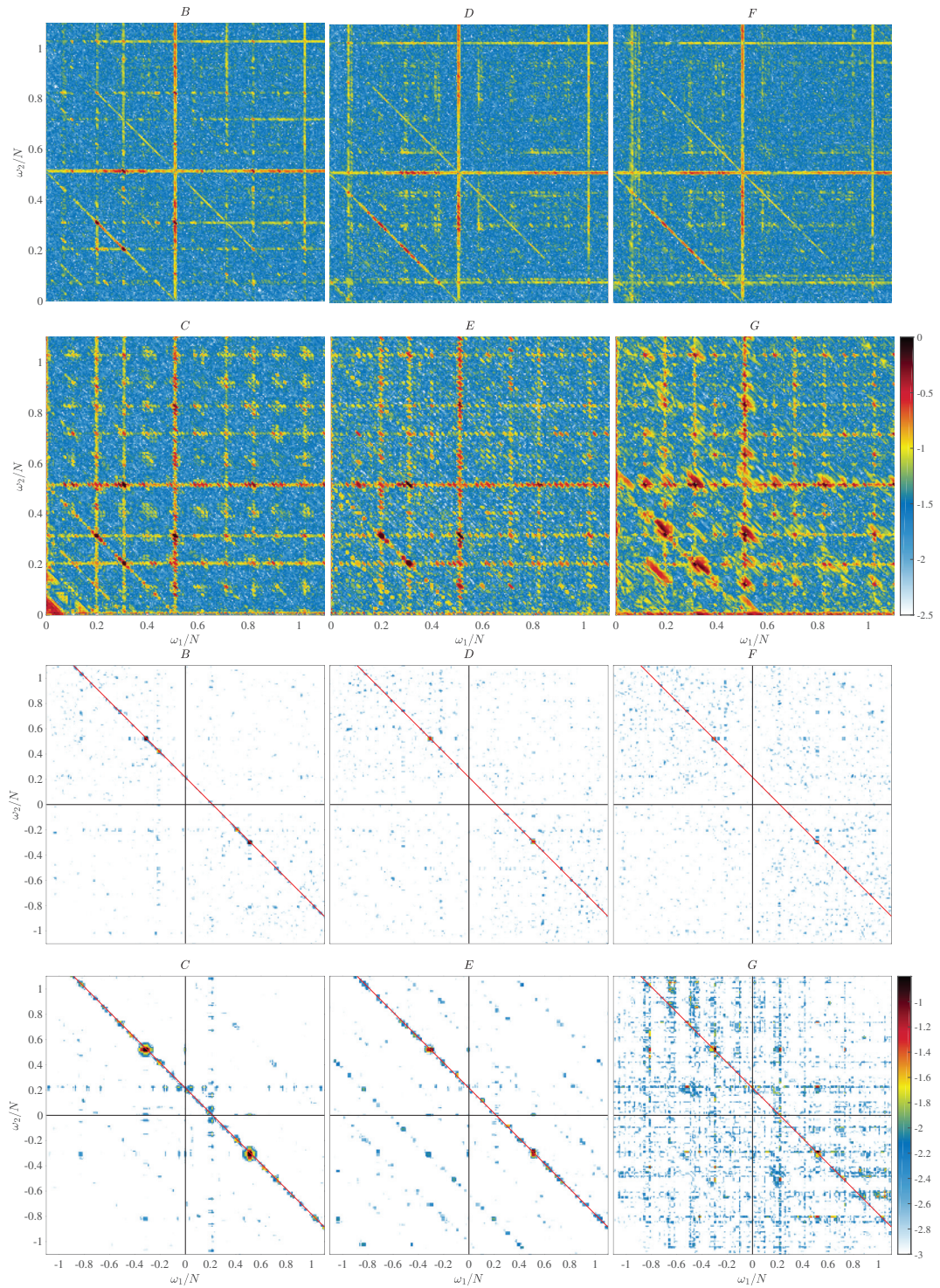
**Bicohérence** Les six premiers graphes de la figure 4.32 montre les bicohérences, en échelle  $\log_{10}$ , calculées sur des durées d'amplitude constante. Chaque transformée de Fourier  $s(\omega)$  a été calculée sur un signal de durée  $2048 \text{ s} \approx 114 T_0$ . Chaque graphe a été obtenu en utilisant une fenêtre de largeur  $1000 T_0$  débutant  $200 T_0$  après le changement d'amplitude. La bicohérence obtenue dans le régime A est très empreinte du régime transitoire, tout comme celle calculée lors de la phase G. Pour cette raison nous n'avons tracé que cette dernière.



La première ligne correspondent aux phases  $B$ ,  $D$  et  $F$  durant lesquelles l'amplitude de forçage est importante. On constate qu'elles présentent des structures similaires. On aperçoit premièrement une ligne diagonale à  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ , signe des interactions triadiques entre l'onde primaire et les couples  $(\omega_1, \omega_2)$  tel que  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_0$ . Une deuxième ligne diagonale est visible, correspondant à  $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_0$ . Ces deux lignes diagonales indiquent que l'onde primaire et sa première harmonique sont chacune en interaction triadique importante avec un continuum de fréquences. On note ponctuellement d'autres lignes diagonales, comme la portion de droite  $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_0/5$  sur la figure de la phase  $B$ . On note aussi la présence de lignes verticale et horizontale correspondant respectivement à  $\omega_1 = \omega_0$  et  $\omega_2 = \omega_0$ . La première correspond à une triade  $\omega_0, \omega_2, \omega_0 + \omega_2$  avec  $\omega_2$  quelconque. On reconnaît le mécanisme de création des ondes liées (voir § 4.2.2) par lequel l'onde primaire interagit de façon non résonnante avec une onde secondaire pour créer une onde liée de fréquence  $\omega > \omega_0$ . La ligne horizontale indique de même de telles interactions.

La deuxième ligne correspond aux phases  $C$ ,  $E$  et  $G$  durant lesquelles l'amplitude de forçage vaut  $a_0 = 5$  mm. La structure quantifiée du spectre, visible à la figure 4.28, se traduit par une bicohérence *en pointillé* : on distingue en effet en plus des structures présentes sur les graphes  $B$ ,  $D$  et  $F$  déjà discutées une multitude de petits pics. Cette caractéristique est particulièrement visible sur le graphe de la phase  $E$ , dont le spectre présente une quantification extrêmement nette en  $\omega_0/23$  (voir figure 4.28(c)).

**Tricorrélation** Si ces figures de bicohérence indiquent des interactions à 3 ondes, elles ne démontrent pas qu'il n'existe pas d'interaction à  $n > 3$  ondes. Pour éclaircir cette possibilité, on calcule la tricorrélation, qui ne présuppose pas  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Les troisième et quatrième lignes de la figure 4.32 présentent les tricorrélations, calculées sur les mêmes signaux que les bicohérences de la figure 4.32 et pour  $\omega_3 = 2\omega_0/5$ . En rouge est tracée la relation  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ , qui correspond à une interaction entre les ondes (1), (2) et (3). On trouve en effet les pics principaux sur cette droite, indiquant que les interactions à trois ondes semblent être le mécanisme principal.



**FIG. 4.32** Les six premiers graphes (plutôt bleus) présentent la bicohérence en échelle  $\log_{10}$  des 6 dernières phases de l'expérience de la figure 4.29. Les six derniers graphes (plutôt blancs) présentent la tricorrélation  $T(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  en échelle  $\log_{10}$  de ces mêmes 6 phases, avec  $\omega_3 = 2\omega_0/5$ . La ligne rouge oblique indique  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ . Chacun des douze graphes a été obtenu en utilisant le signal sur une fenêtre durant  $1000 T_0$  et débutant  $200 T_0$  après le changement d'amplitude.

#### 4.4.5 Vers une explication de la quantification

Une hypothèse naturelle pour expliquer la *quantification* observée est que les fréquences particulières ressortant dans le signal sont des fréquences de *résonance* de la cuve. Le système ressemblerait alors aux systèmes décrits par la *turbulence d'onde discrète* apparaissant dans les travaux de Kartashova [58]. C'est d'ailleurs ce qui est suggéré par Brouzet *et al.* [22] pour expliquer la présence des ondes secondaires de fréquences très stables et présentant une structure quasi stationnaire. Néanmoins, nous avons sondé expérimentalement les fréquences de résonance de la cuve par réponse impulsionnelle (voir chapitre 3), et la fonction de réponse ainsi obtenue ne présente pas du tout cette structure *quantifiée*. Par ailleurs, nous observons une quantification pour des valeurs de  $\omega_0/N$  et des géométries de cuves variées, et à chaque fois, les valeurs des fréquences qui ressortent sont en lien avec  $\omega_0$  et non avec la géométrie de la cuve. Aussi, cette interprétation seule n'est pas satisfaisante.

##### Une cascade d'interactions triadiques

Timothée Jamin, en post-doctorat dans l'équipe, a utilisé le logiciel Basilisk [93] pour simuler des écoulements 2D proches des expériences et ainsi explorer le phénomène. Grâce à ses simulations et à de nombreuses discussions, nous avons abouti à la conclusion suivante : en général, les fréquences ne *s'ajustent* pas pour former un spectre quantifié. Au contraire, la quantification serait un phénomène émergent naturellement par interactions triadiques successives. En effet, l'ensemble des fréquences présentes découle dans ces cas-là entièrement des ondes  $\omega_1$  et  $\omega_2$  générées par l'instabilité de l'onde primaire  $(0) \rightarrow (1) + (2)$ . Si l'on oublie les conditions de résonance faisant intervenir les vecteurs d'ondes, ces deux ondes sont susceptibles d'engendrer par interactions triadiques successives, de type  $(a) \pm (b) \rightarrow (c)$ , l'ensemble des fréquences de la forme  $\omega_{(p,m)} = p\omega_1 + m\omega_2$ , où  $p$  et  $m$  sont des entiers relatifs<sup>1</sup>. En effet, la condition de résonance sur les vecteurs d'onde ne semble pas très contraignante ; d'une part car la géométrie de la cuve enrichit considérablement les structures spatiales de chaque onde (voir § 4.2.2) – ce qui facilite l'obtention des conditions de résonance – et d'autre part car nous avons constaté la présence d'ondes liées créées par interactions non résonnantes<sup>2</sup> (voir § 4.2.2). Et comme, *a contrario* de l'instabilité triadique, les interactions de ce type ne présentent pas de seuil, il n'est pas absurde de considérer que l'ensemble des ondes  $\omega_{(p,m)} = p\omega_1 + m\omega_2$  est généré. Est ce que cet ensemble de fréquences est *quantifié* ? Dans une certaine mesure, oui. Car tout nombre réel peut être approximé par un rationnel. On pourrait même compléter : tout nombre réel entre 0 et 1 peut s'approcher par un rationnel *au dénominateur*

<sup>1</sup> En effet, l'onde  $\omega_1$  peut générer en interagissant avec elle-même l'ensemble de ses harmoniques de forme  $n\omega_1$ , et de même pour  $\omega_2$ . Les interactions entre ces deux groupes d'harmoniques donnent l'ensemble mentionné.

<sup>2</sup> Les simulations numériques montrent qu'il existe aussi des interactions *quasi résonnantes* où  $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 \pm \mathbf{k}_3 \approx 0$  et avec (3) sur la relation de dispersion.

raisonnable. En effet, la figure 4.33 montre la probabilité que l'écart entre un réel pris au hasard entre 0 et 1 et le rationnel de la forme  $k/n$  avec  $k \in [0 : n]$  et  $n \in [1 : 30]$  le plus proche soit inférieure à  $d$ . Dans plus de 95% des cas, le réel se situe à moins de 0.01 d'un rationnel de cette forme. Supposons alors maintenant que  $\omega_1/\omega_0 = k/n$ , avec  $k$  et  $n$  sans dénominateur commun. On a alors  $\omega_2 = (1 - k)/n$  et l'ensemble des fréquences générées par interactions triadiques sont les fréquences de la forme  $\omega_{(p,m)} = (pk + m(1 - k))/n$ . Cet ensemble est en fait l'ensemble des fréquences  $\omega_j = j\omega/n$ , c'est à dire qu'il présente une structure *quantifiée*. Notons que dans les faits, l'onde mère, qui est très énergétique, participe aussi à ces interactions triadiques successives (comme on le devine sur les bicohérences de la figure 4.32). Néanmoins, comme on a  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ , l'ensemble des ondes générées reste inchangé.

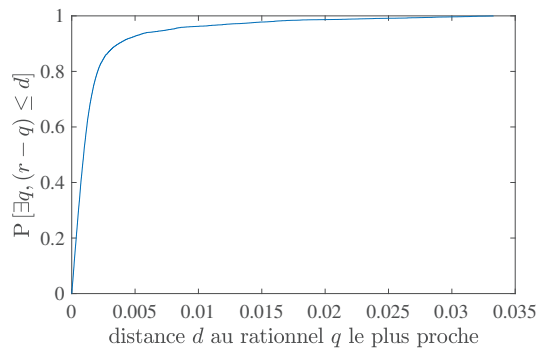
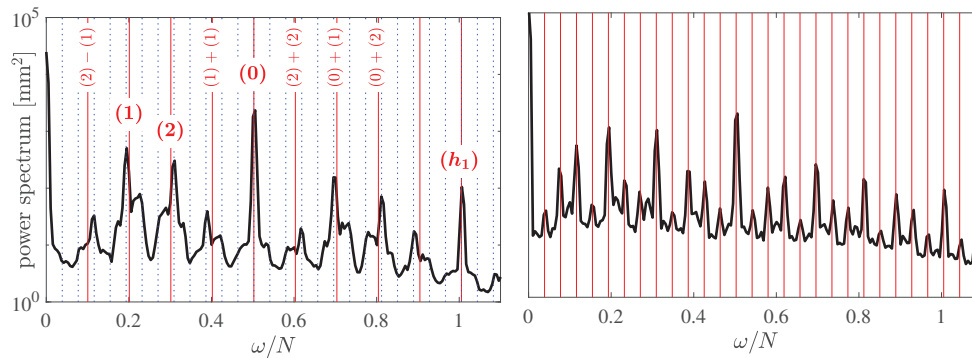


FIG. 4.33 Probabilité pour un réel  $r$  pris au hasard entre 0 et 1 d'être à une distance inférieure à  $d$  du rationnel  $q$  le plus proche de la forme  $q = k/n$ , avec  $k \in [0 : n]$  et  $n \in [1 : 30]$ . Cette probabilité a été estimée numériquement.

Cette interprétation de la quantification est très bien illustrée par la figure 4.34, qui montre l'évolution du spectre d'une expérience d'attracteur  $(1, 1)$  réalisée avec  $H = 920$  mm,  $L = 1720$  mm,  $\alpha = 29.5^\circ$ ,  $\omega/N = 0.503$  et  $N = 0.75$  rad/s. Le spectre (a), calculé en début d'expérience pour  $t \in [10; 110] T_0$ , est quantifié en  $1/5^e$ , comme indiqué par les lignes verticales rouges. On a indiqué au dessus des pics leurs provenances possibles. (0) désigne l'onde primaire,  $(h_1)$  sa première harmonique, et (1) et (2) sont les deux ondes générées par l'instabilité de (0). Après  $300 T_0$  de forçage, le spectre présente une structure plus complexe, comme le montre la figure 4.34(b), où les lignes verticales rouges indiquent une quantification en  $1/13^e$ . Cette quantification était en fait visible dès le début de l'expérience, comme indiqué par les lignes bleues pointillées sur le spectre (a). Mais comme les interactions se font de manière successive, on ne distingue pas de suite toutes les fréquences  $j\omega_0/13$  et on pense à une quantification en  $1/5^e$ . Si notre résolution était suffisante, on pourrait imaginer en attendant assez longtemps découvrir une quantification encore plus grande. Cette idée est d'ailleurs en accord avec les spectres de la figure 4.30, calculés sur des fenêtres temporelles longues de  $550 T_0$ , et qui montrent une structure très

complexe. Ainsi, la quantification apparaîtrait naturellement, et ce sans *ajustement* des fréquences en cours d'évolution.



**FIG. 4.34** Spectres de puissance calculée à partir de PIV pour une expérience réalisée avec  $H = 920$  mm,  $L = 1720$  mm,  $\alpha = 29.5^\circ$ ,  $\omega/N = 0.503$  et  $N = 0.75$  rad/s. (a) Calculé pour  $t \in [10; 110] T_0$ . Les lignes verticales rouges en traits plein indiquent les fréquences  $\omega_j = j\omega_0/5$ . Les lignes verticales bleues traitillées indiquent les fréquences  $\omega_j = j\omega_0/13$ . Les étiquettes rouges en gras indiquent le nom donné à certaines ondes. Les étiquettes rouges verticales indiquent un exemple de provenance possible de l'onde considérée. (b) Calculé pour  $t \in [250; 350] T_0$ . Les lignes verticales rouges en traits plein indiquent les fréquences  $\omega_j = j\omega_0/13$ .

### Une sélection encore incomprise

Ce raisonnement permet donc, à partir de la donnée des valeurs de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  issue de l'instabilité de l'onde primaire, de déterminer l'ensemble des fréquences possiblement générées par interactions triadiques successives. Néanmoins, le processus de sélection de ces ondes "initiales" reste incertain. Si les taux d'instabilités ont été établis dans le cas d'un faisceau monochromatique [17, 57], il n'existe pas à notre connaissance de prédiction théorique de ces taux de croissance dans un attracteur. Par ailleurs, on constate expérimentalement que des effets non élucidés viennent complexifier la sélection des ondes secondaires. Tout d'abord, on observe souvent une modulation de leurs fréquences sur des périodes grandes devant celle de l'onde primaire, visible par exemple au début du spectrogramme présenté à la figure 4.29 pour  $t \in [40; 300] T_0$ . Cette modulation, que l'on observe aussi numériquement, est pour l'instant incomprise. Par ailleurs, on observe que certaines fréquences semblent parfois *privilegiées*. Par exemple, l'évolution du spectre de l'expérience de la figure 4.28(a), représentée à la figure 4.35, montre une sélectivité préférentielle des fréquences  $\omega_1 \simeq 2\omega_0/5$ ,  $\omega_2 \simeq 3\omega_0/5$ . En effet, la courbe rouge en trait épais, calculée pour  $t \in [100; 200] T_0$ , montre clairement que les pics des fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$  générées par l'instabilité de l'onde primaire sont larges. Ces pics sont proches de  $2\omega_0/5$  et  $3\omega_0/5$ , mais pas centrés sur ces valeurs. *A contrario*, le spectre noir en trait fin, calculé pour  $t \in [200; 300] T_0$ , est lui très piqué sur les valeurs  $j\omega_0/5$  (à l'imprécision des mesures près) et présente une quantification très nette. Dans une moindre mesure, on avait aussi constaté dans le spectrogramme de la figure 4.27 une tendance des ondes à se maintenir

aux valeurs  $2\omega_0/5$ ,  $3\omega_0/5$ . D'où provient cette sélectivité des ondes générées par l'instabilité ? Il est possible que le mécanisme de sélection soit basé sur l'existence de mode quasi résonnants de la cuve, comme supposé dans [22]. L'un de ces modes quasi-résonnants, ou deux, seraient alors de fréquence environ égale à  $2\omega_0/5$  ou  $3\omega_0/5$ . Notons néanmoins que les expériences des figures 4.28(a) et 4.29 ont été conduites dans des géométries différentes ! *A contrario*, on pourrait imaginer que la présence des ondes générées par les interactions du type  $(1) \pm (2) \rightarrow (3)$  favorise dans ces deux cas la sélection des ondes  $2\omega_0/5$ ,  $3\omega_0/5$ . Si cette dernière idée est attirante, le mécanisme sous-jacent reste inconnu.

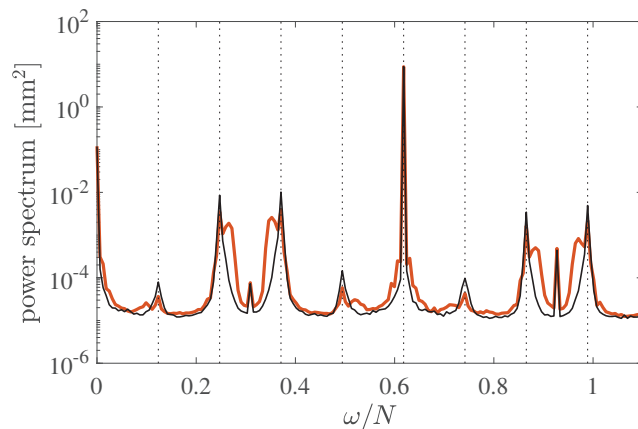


FIG. 4.35 En rouge : spectre de puissance calculé pour  $t \in [100; 200] T_0$ . En noir : spectre de puissance calculé pour  $t \in [200; 300] T_0$ . Les paramètres de l'expérience sont les mêmes que ceux de la figure 4.28(a).

### Conditions nécessaires

Si la quantification *approchée* apparaît de façon naturelle, pourquoi ne l'observe-t-on pas systématiquement ? Nous pouvons invoquer plusieurs raisons à cela. Premièrement, si l'énergie injectée est trop importante, les ondes secondaires deviennent elles-mêmes instables, ce qui génère alors par TRI des fréquences *a priori* non quantifiées. C'est probablement le cas lors des phases B, D et F de la figure 4.29. Par ailleurs, nous avons deviné ici que la quantification provient d'interactions entre ondes du type  $(1) \pm (2) \rightarrow (3)$ . Il faut donc que les faisceaux des ondes (1) et (2) se recouvrent, ce qui est d'autant plus probable qu'elles occupent tout l'espace disponible. Or nous avons établi à la section 4.3.2 que cela est d'autant plus vrai que leurs longueurs d'onde sont grandes. Aussi, la présence d'un attracteur peu concentré ou d'une forte non linéarité, augmentant la longueur caractéristique de variations dans l'attracteur  $\lambda_0$ , favorisera cet effet (voir figure 4.23 qui montre que l'augmentation de  $\lambda_0$  implique l'augmentation des longueurs d'onde des ondes secondaires). Bien sûr, il ne faut pas que la non linéarité soit trop importante, car alors le système bascule dans le régime

très fluctuant des phases B, D et F de la figure 4.29, supposée riche en instabilités triadiques.

## Conclusion

Pour résumer cette section, nous avons donc distingué deux régimes non linéaires. L'un, apparaissant pour de faibles amplitudes de forçage, est dominé par des interactions triadiques de type  $(1) \pm (2) \rightarrow (3)$  (en plus de la première instabilité de l'onde mère) et conduit à un spectre d'apparence *quantifiée*, c'est à dire où les fréquences présentes sont équidistantes. L'autre régime non linéaire, probablement siège de multiples instabilités triadiques, est obtenu pour des amplitudes de forçage plus importantes et présente un spectre continu (même si certaines fréquences semblent toujours équidistantes). Par ailleurs, nous avons observé que les spectres issus du premier régime peuvent être très stables dans le temps, alors que ceux issus du deuxième sont d'apparence stochastique. La compréhension de ces caractéristiques, ainsi que des transitions entre les deux régimes, restent ouverte.

## Résumé

Lors de ce chapitre, nous avons exploré des attracteurs en régime linéaire et non linéaire.

- Nous avons amélioré notre compréhension du régime à faible amplitude de forçage – dit linéaire – en exhibant et quantifiant les mécanismes donnant lieu à un écoulement moyen ainsi qu'à des harmoniques de la fréquence de forçage.
- En comparaison, le régime non linéaire est apparu plus riche, les spectres temporels et spatiaux portant la marque de conditions de résonance d'interactions résonnantes entre ondes. La géométrie fermée de la cuve ainsi que la présence de la pente complexifient les structures spatiales des ondes, favorisant ces interactions. Des ondes liées sont aussi présentes, générées par des interactions triadiques non résonnantes.
- Une expérience à amplitude de forçage lentement croissante a ensuite été présentée. Les spectres spatiaux et temporels présentent d'abord une structure discrète, puis deviennent petit à petit continus.
  - Nous avons étudié les spectres limites obtenus. Si les spectres temporels sont encore très piqués, la densité spatiale  $E_k$  peut être interprétée comme une loi de puissance  $E_k \sim k^{-3.8}$ , ce qui constitue la première mesure expérimentale d'une loi de puissance pour des ondes internes de gravité en interaction non linéaire.
  - Par ailleurs, les longueurs d'onde des ondes secondaires augmentent au fur et à mesure que l'amplitude du forçage grandit, et présentent parfois une structure quasi-stationnaire déjà reportée par Brouzet *et al.* dans [22]. Nous expliquons cette observation par l'augmentation, due aux non linéarités, de la longueur d'onde de l'attracteur. Cette explication peut s'appliquer au cas de l'attracteur peu concentré de [22], qui présente dès le début une grande longueur d'onde. Ainsi, la structure quasi stationnaire des ondes secondaires ne serait pas directement liée à la quasi stationnarité de l'attracteur leur donnant naissance.
- Nous avons distingué deux types de régime non linéaire. Le régime dit *quantifié*, qui présente des ondes dont les fréquences sont toutes équidistantes et dont les amplitudes sont très stables dans le temps. Ce régime résulte de multiples interactions entre ondes du type  $(1) \pm (2) \rightarrow (3)$ . *A contrario*, le régime stochastique présente un continuum de fréquences dont les amplitudes varient au cours du temps. Il est probablement le siège de plusieurs instabilités triadiques.





# Conclusion

Au cours de cette thèse, nous avons approfondi notre compréhension des régimes linéaire et non linéaire des attracteurs d'ondes internes, au moyen d'expériences réalisées dans une cuve trapézoïdale quasi bidimensionnelle.

Nous avons tout d'abord étudié leur bilan énergétique.

1. Nous avons proposé une méthode permettant de mesurer la puissance injectée dans l'écoulement par le générateur d'onde, ainsi que d'inférer les différentes dissipations visqueuses ayant lieu en volume et dans les couches limites. L'application de ces outils à des mesures réalisées dans des attracteurs sous différentes amplitudes de forçage donne des résultats en accord quantitatif avec la conservation de l'énergie, tant en régime stationnaire qu'en régime transitoire. Notons que cette méthode est généralisable pour tout écoulement stratifié quasi-bidimensionnel.
2. En appliquant ces outils aux différentes composantes du champ, nous avons quantifié la part de dissipation portée par les ondes secondaires générées par non linéarité. Dans les régimes explorés, jusqu'à un sixième de la dissipation provient de ces ondes secondaires.
3. Il est apparu en analysant ces expériences que la puissance injectée par le générateur était environ 50% plus importante que celle que l'on peut calculer dans le cas d'un mode -1, mode attendu dans une cuve infiniment longue. Par ailleurs, cette optimisation du transfert énergétique entre source et système (propriété classique d'une *résonance*) semble décroître lorsque l'attracteur est en régime non linéaire.

Nous avons ensuite exploité cette propriété de résonance pour observer la réponse du système à une impulsion.

1. Nous avons tout d'abord observé, dans plusieurs géométries, que le système exhibe spontanément des attracteurs. La densité d'énergie est plus importante pour les fréquences correspondantes, et la structure spatiale portant ces oscillations ressemble aux structures obtenues en régime stationnaire.
2. Une modélisation linéaire minimale nous a permis de relier l'évolution temporelle de la densité d'énergie cinétique à la densité de puissance reçue par le système lors de l'impulsion. Une expérience de réponse impulsionnelle suivie de plusieurs

régimes stationnaires à fréquence de forçage fixée a permis de valider cette méthode. Ainsi, une seule expérience de réponse impulsionnelle permet d'explorer quantitativement une géométrie donnée en un temps restreint.

Nous avons ensuite exploré le régime non linéaire des attracteurs.

1. Nous avons étudié les spectres spatiaux des ondes secondaires, que la géométrie fermée de la cuve ainsi que la présence de la pente contribuent à enrichir. La marque d'interactions triadiques résonnantes a été observée dans ces spectres spatiaux, ainsi que dans les spectres temporels. Nous avons aussi exhibé la présence d'ondes liées, ainsi que les interactions non résonnantes leur ayant donné naissance.
2. Inspirés par Touzé *et al.* [104], nous avons ensuite étudié une expérience où l'amplitude de forçage est augmentée progressivement.
  - Nous avons d'une part étudié les spectres limites fréquentiels et spatiaux. Si les spectres fréquentiels sont encore très piqués, les spectres spatiaux peuvent être ajustés par une loi de puissance. Ces courbes constituent donc les premières mesures de spectres d'ondes internes de gravité en interaction non linéaire.
  - D'autre part, nous proposons un scénario permettant d'expliquer la structure quasi stationnaire observée pour les ondes secondaires, reliée précédemment à la quasi stationnarité de l'attracteur leur ayant donné naissance [22]. Elle proviendrait de la grande longueur d'onde de l'attracteur, longueur d'onde qui augmente si l'attracteur est peu concentré, ou si les non linéarités sont trop importantes.
3. Nous avons finalement exhibé deux régimes non linéaires distincts. Le premier présente des ondes dont les fréquences sont équidistantes et les amplitudes très stables dans le temps, alors que le deuxième présente un continuum de fréquences dont les amplitudes, en comparaison, fluctuent beaucoup. Le premier régime, mis à part l'instabilité première de l'attracteur, serait dominé par les interactions triadiques du type  $(1) \pm (2) \rightarrow (3)$ , alors que le deuxième régime contiendrait de multiples instabilités triadiques.

## Perspectives

Ces travaux pourraient se poursuivre dans plusieurs directions.

Les outils permettant de quantifier le bilan énergétique pourraient être employés pour étudier davantage les attracteurs.

1. On pourrait approfondir l'étude de la puissance injectée en régime stationnaire. Est-ce que, comme ce qui a été observé pour une série d'expériences ainsi que dans les simulations numériques de Jouve et Ogilvie [56], la puissance injectée (et donc la dissipation) est plus faible lorsque, à forçage donné, l'attracteur est en régime

non linéaire ? Par ailleurs, existe-t-il un couplage entre l'attracteur et l'écoulement moyen rendant la puissance injectée légèrement non linéaire, et ce même à faible amplitude de forçage ?

2. Nous avons aperçu, aux grandes amplitudes de forçage, la trace d'une saturation de l'énergie portée par l'attracteur. Pouvons-nous caractériser davantage cette saturation ?

Par ailleurs, ces outils permettent de mesurer la dissipation subie par chaque onde, ainsi que la variation temporelle de son énergie. La somme de ces deux quantités donne alors le flux d'énergie reçue par l'onde.

3. Il serait très intéressant de pouvoir séparer les différentes contributions de cet apport. On pourrait alors déceler le parcours suivi par l'énergie initialement injectée dans l'attracteur et peindre ainsi un tableau précis des différentes interactions non linéaires. La bidimensionnalité de l'écoulement et la bonne résolution de la mesure du champ de vitesse rendent en effet envisageables des mesures de  $[(\mathbf{u}_1 \cdot \nabla) \mathbf{u}_2] \cdot \mathbf{u}_3$ , où les  $\mathbf{u}_i$  sont des ondes susceptibles d'être en interaction.

De manière générale, nous pouvons adopter deux positions distinctes pour poursuivre l'étude du régime non linéaire des ondes internes de gravité.

4. La première consiste à essayer de modifier notre système expérimental afin de le rendre plus apte à valider ou infirmer les prédictions théoriques issues de la turbulence d'onde.
  - Dans ce but, il faudrait tout d'abord réduire l'amplitude des pics visibles dans les spectres fréquentiels. Pour cela, on peut employer un forçage aléatoire, comme cela est couramment fait dans des expériences de turbulence d'ondes [38, 80]. Des tests préliminaires montrent que les spectres obtenus sont en effet plus continus.
  - Par ailleurs, si l'on espère mesurer une loi de puissance pour le spectre d'énergie entre la fréquence d'injection et la fréquence de flottabilité, il faudrait alors séparer au maximum les deux échelles de temps, par exemple en étudiant l'instabilité d'un attracteur beaucoup plus horizontal.
5. La deuxième attitude consiste à conserver le système expérimental tel quel et à chercher à améliorer sa compréhension, notamment celle des deux régimes non linéaires exposés. Existe-il des exemples de mêmes régimes pour d'autres types d'ondes ? Pouvons nous par exemple établir un lien avec les régimes quasi périodique et turbulent de Touzé *et al.* [104] ? À faible non linéarité, on n'observe pas toujours de régime quantifié stable, notamment parce que les ondes issues de l'instabilité de l'attracteur sont modulées en fréquences. D'où vient cette modulation et pourquoi s'arrête-t-elle parfois ? Est-ce quand les ondes secondaires correspondent à des modes quasi-résonnants de la cuve ? Ou bien est-ce que cette stabilisation est liée aux multiples interactions triadiques présentes dans le système ? L'étude *via*

des simulations numériques, qui reproduisent cette modulation ainsi que les deux régimes non linéaires, semble être une piste prometteuse.

Enfin, nous avons démontré qu'une géométrie bidimensionnelle pouvait être sondée rapidement par réponse impulsionnelle, faisant apparaître de façon spectaculaire les différents attracteurs.

6. Il faudrait alors travailler sur la transposition de cette méthode à une géométrie 3D, correspondant davantage aux situations naturelles, notamment en déterminant quel forçage choisir. Et est-ce que, d'un point de vue numérique, son implémentation apporte un avantage face aux techniques existantes fondées sur le tracé de rayons [86] ? Si oui, alors cette méthode pourrait s'avérer très utile pour explorer de potentiels attracteurs dans des relevés topographiques océaniques.

## Utilisation de la sonde conductimétrique

Nous cherchons à mesurer la densité du fluide lorsqu'il est au repos, qui n'est fonction que de l'altitude  $z$ . Comme nous utilisons du sel pour augmenter la densité de l'eau, nous pouvons mesurer la conductivité du fluide qui est l'image de la concentration en sel et donc de la densité de l'eau. Malheureusement, la conductivité est aussi fonction de la température du fluide (car elle dépend fortement de la viscosité du fluide), et la densité de l'eau dépend elle aussi de la température (car le liquide se dilate). Nous devons donc mesurer la température en plus de la conductivité. Nous utilisons pour cela la sonde MSCI qui donne accès à deux tensions  $V_\sigma$  et  $V_T$  respectivement images de la conductivité du fluide et de la température. Comme  $V_\sigma$  est proportionnelle à la conductivité, nous appellerons abusivement cette tension "conductivité". La figure A.1(a) montre une photographie de la sonde MSCI utilisée. On distingue à l'arrière la thermistance et à l'avant les quatre petites billes noires à l'extrémité des quatre électrodes constituant la sonde conductimétrique. Ces électrodes sont très fragiles, et s'endommagent facilement. La figure A.1(b) montre un exemple de sonde en mauvais état, qui ne présente plus que deux billes.

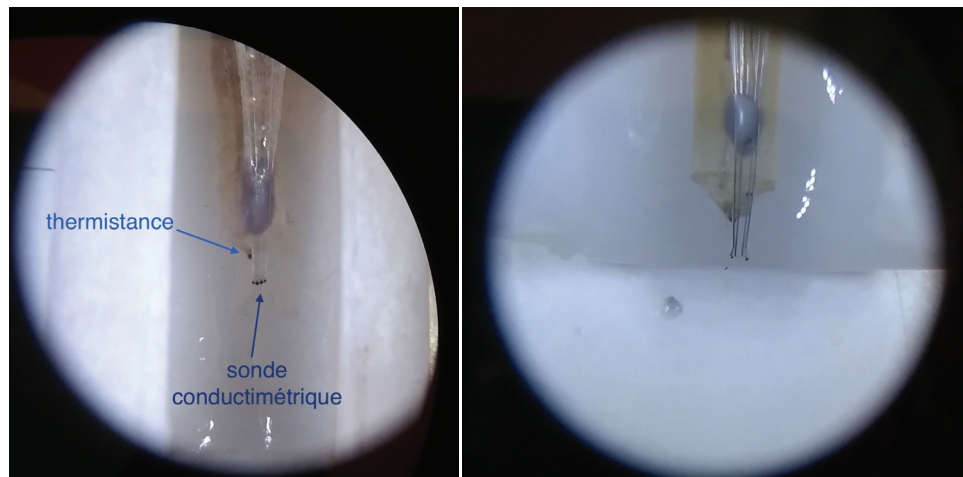


FIG. A.1 Extrémités de sonde MSCI. (a) En bon état. On distingue la thermistance à l'arrière et les quatre billes de la sonde conductimétrique. (b) En mauvais état, on n'observe que deux billes.

## A.1 Modélisation

Afin de déduire la densité des deux grandeurs mesurées  $V_\sigma$  et  $V_T$ , nous avons besoin de modéliser l'évolution de ces trois quantités avec la température et la salinité. Les paramètres intervenant dans la modélisation seront ensuite déterminés par calibration ou connus *via* la littérature. Une discussion avec Louis Gostiaux a permis de mettre au clair une partie de la modélisation présentée ici, je l'en remercie.

### A.1.1 Évolution avec la température

**Tension de la thermistance** La conductivité de la thermistance – constituée d'un semi-conducteur – augmente exponentiellement avec la température. Le constructeur indique que la température peut se déduire de la tension à ses bornes (image de sa résistivité) par

$$T = \frac{m}{\ln(V_T(T) - V_{\text{off}}) - b}. \quad (\text{A.1})$$

Les coefficients  $m$ ,  $V_{\text{off}}$  et  $b$  sont donnés par une calibration, qui peut être réalisée par le fabricant ou bien par l'utilisateur. Dans le cas de la sonde utilisée lors de cette thèse, le fabricant indique  $m = 3.323 \times 10^3$ ,  $V_{\text{off}} = -5.0224$  et  $b = -9.928$ . La température est alors donnée en Kelvins.

**Conductivité** L'évolution de la conductivité avec la température est usuellement modélisée par un développement d'ordre 1

$$V_\sigma(c, T) = V_\sigma(c, T_0) + \frac{\partial V_\sigma}{\partial T}(T - T_0), \quad (\text{A.2})$$

avec le coefficient  $\frac{\partial V_\sigma}{\partial T}$  qui grandit linéairement avec la salinité de l'eau. En négligeant les termes d'ordre 2, on a donc

$$V_\sigma(c, T) = V_\sigma(c, T_0) (1 + a_{T_0}(T - T_0)). \quad (\text{A.3})$$

On pourra consulter [48], qui donne plusieurs exemples de mesure de  $a_{T_0}$ . Les auteurs indiquent que la valeur  $a_{25^\circ\text{C}} = 0.0187 \text{ K}^{-1}$  semble être une bonne estimation du coefficient. Dans l'équipe, nous avons choisi la température de référence  $T^0 = 20^\circ\text{C}$ , qui correspond davantage aux conditions expérimentales. On peut aisément établir à partir de (A.3) la valeur de  $a_{T_0'}$  pour  $T_0'$  arbitraire :  $a_{T_0'} = a_{T_0} / (1 + a_{T_0}(T_0' - T_0))$ . On a alors  $a_{20^\circ\text{C}} = 0.204 \text{ K}^{-1}$ . Néanmoins, ce coefficient varie en fonction de la composition exacte du fluide. Aussi on peut chercher à mesurer expérimentalement sa valeur pour les solutions d'eau salée utilisées dans cette thèse. Pour cela, on prépare un échantillon avec  $\rho(t = 0) = 1.03 \text{ kg/m}^3$  et  $T(t = 0) = 40^\circ\text{C}$  (grandeurs mesurées à l'aide d'un densimètre Anton PAAR 35), qu'on couvre d'un film de paraffine pour

limiter l'évaporation et en laissant un passage pour la sonde MSCI. Les tensions images de la conductivité et de la température sont mesurées en continu, au fur et à mesure que le liquide se refroidit. On déduit aisément de (A.1) la température. La figure A.2(a) montre l'évolution de la conductivité (en rouge) et de la température (en bleu) pour un tel échantillon, préparé avec  $\rho(t = 0) = 1.03 \text{ kg/m}^3$  et  $T(t = 0) = 40 \text{ }^\circ\text{C}$ . On constate sur la figure A.2(b), qui montre l'évolution de la conductivité en fonction de la température, que pour  $T < 35 \text{ }^\circ\text{C}$ <sup>1</sup>, la conductivité évolue effectivement linéairement avec la température, comme l'atteste l'ajustement linéaire indiqué en rouge. En divisant le coefficient directeur de cet ajustement par  $V_\sigma(T = 20^\circ\text{C})$  on mesure  $a_{20^\circ\text{C}} = 0.203 \text{ K}^{-1}$ , en excellent accord avec la littérature.

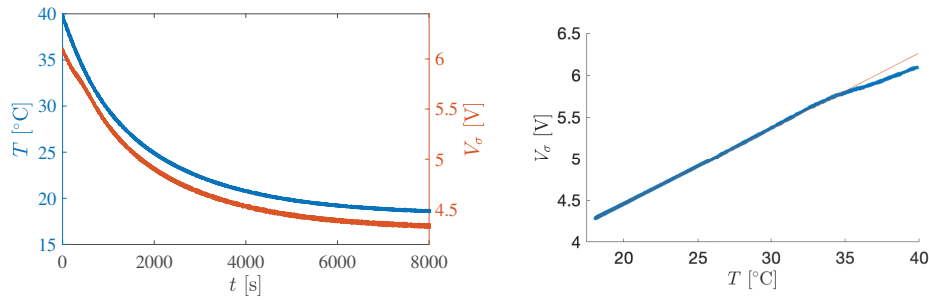


FIG. A.2 (a) Évolution de la conductivité (en rouge) et de la température (en bleu) pour un échantillon d'eau salée se refroidissant lentement. (b) Évolution de la conductivité en fonction de la température pour le même échantillon.

**Densité** L'évolution de la densité de l'eau avec la température provient de sa dilatation thermique. On la modélise par

$$\rho(c, T) = \rho(c, T_0) (1 - \beta_T (T - T_0) + \beta_T^* (T - T_0)^2), \quad (\text{A.4})$$

avec  $\beta_T \simeq 1.67 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$  et  $\beta_T^* \simeq 1.00 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-2}$  (voir table 1.2 de [105]). Les écarts de température restent en pratique suffisamment faibles pour négliger le terme quadratique.

### A.1.2 Évolution avec la salinité

La dépendance de la conductivité avec la salinité est donnée par la loi empirique de Kohlrausch [59]

$$V_\sigma(c, T_0) = V_\sigma(0, T_0) + \kappa(T_0) \sqrt{c} \quad (\text{A.5})$$

<sup>1</sup> Durant cette première phase, il est probable que de la convection invalide la mesure : le fluide n'étant alors pas assez homogène pour que la mesure de température et de conductivité se fasse au même point.



(voir par exemple [7]), et celle de la densité est modélisée par un développement linéaire

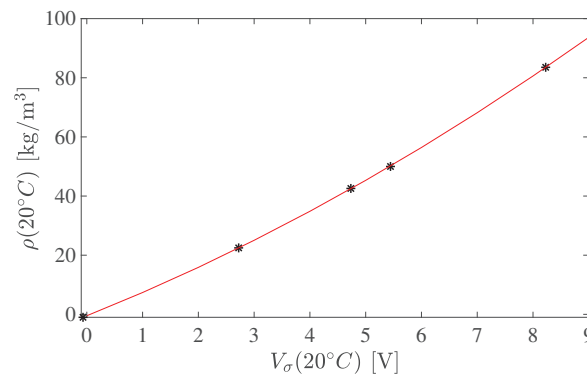
$$\rho(c, T_0) = \rho(0, T_0) + \alpha(T_0)c. \quad (\text{A.6})$$

On utilise alors (A.5) pour remplacer  $c$  et obtenir

$$\rho(c, T_0) = \rho(0, T_0) + f_{T_0}(V_\sigma(c, T_0)), \quad (\text{A.7})$$

où  $f_{T_0}$  est une fonction polynomiale d'ordre 2. La densité de l'eau pure à 20°C est connue et vaut  $\rho(0, T_0) = 0.998 \text{ kg/m}^3$ . La grandeur  $V_\sigma$  est une tension image de la conductivité, mais avec un coefficient qui dépend beaucoup de l'état de surface des électrodes, et qui varie donc d'une expérience à l'autre. Pour cette raison, on détermine les coefficients de la fonction  $f_{T_0}$  avant chaque expérience, car ils varient d'un jour à l'autre.

**Protocole de calibration** En pratique, on prépare environ 5 échantillons de salinité différentes pour lesquels on mesure  $V_\sigma$  d'une part et  $\rho$  et  $T$  à l'aide d'un densimètre d'autre part. À l'aide des équations (A.3) et (A.4), on en déduit respectivement la conductivité et la densité que chaque échantillon aurait eu s'il avait été à la température  $T_0$ . On dispose alors d'environ 5 couples  $x, y$  tels que  $f_{T_0}(x) = y$ , ce qui permet par ajustement de caractériser raisonnablement la fonction quadratique  $f_{T_0}$ . La figure A.3 montre un exemple de calibration.



**FIG. A.3** Exemple de calibration. Les cinq points ont été obtenus en mesurant la tension image de la conductivité  $V_\sigma$  par la sonde MSCI, ainsi que la température et la densité par le densimètre Anton PAAR 35. La courbe rouge est un ajustement quadratique et donne la fonction  $f_{20^\circ}$ .

## A.2 Traitement des données issues d'une mesure

À l'aide d'un moteur pas à pas translatant la sonde dans le fluide à vitesse constante connue on mesure  $V_\sigma(z)$  et  $V_T(z)$ . L'équation (A.1) donne alors directement accès à  $T(z)$ . On peut ensuite utiliser (A.3) pour en déduire la conductivité  $V_\sigma^{T=T_0}(z)$  qu'aurait

eu le fluide s'il avait été à la température de référence  $T_0$ . Comme la fonction  $f_{T_0}$  est connue par calibration préalable on en déduit alors la densité  $\rho^{T=T_0}(z)$  qu'aurait eu le fluide s'il avait été à  $T_0$  puis, grâce à (A.4) et à la mesure de la température, on en déduit la densité réelle du fluide  $\rho(z)$ .

## Forme du générateur

**Forme du générateur** Déterminons le profil  $x(z)$  de la plaque du générateur, lorsque les extrémités sont translattées de  $\pm a$ . Le système de fixation maintient la plaque parfaitement verticale en haut et en bas. On a donc une “poutre” encastrée aux deux extrémités. Les déformations de la plaque étant faibles ( $a \sim 1 \text{ mm} \ll H \sim 1 \text{ m}$ ), nous pouvons supposer la déformation élastique. Le profil  $x(z)$  de la plaque correspond alors à un polynôme d'ordre 3

$$x(z) = a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \quad (\text{B.1})$$

où les coefficients  $a_i$  sont fixés par les conditions aux limites

$$x(0) = a, \quad x'(0) = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$x(H) = -a, \quad x'(H) = 0. \quad (\text{B.3})$$

On obtient alors comme profil de la plaque

$$x(z) = \frac{a}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{H}{2} \right)^{-3} (3H/2 - z) z^2 \right). \quad (\text{B.4})$$

On a tracé cette expression analytique en bleu sur la figure B.1(a), ainsi que la fonction  $x_{M1}(z) = a \cos(z\pi/H)$ , qui correspond à un demi-mode 1, en traitillés rouges. On constate que les deux fonctions sont quasiment indiscernables. La figure B.1(b) montre la décomposition en série de Fourier de l'expression (B.4), qui se concentre très nettement sur le mode  $n = 1$ , moins de 0.02% de l'énergie étant contenue sur les autres modes. Aussi, nous supposerons par la suite que la plaque du générateur a une forme sinusoïdale

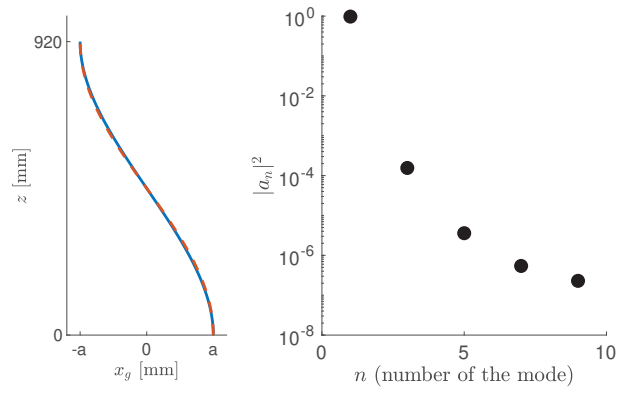
$$x_g(z, t) = a(t) \cos(z\pi/H). \quad (\text{B.5})$$

Dans la plupart des cas, la consigne du moteur correspond à une translation monochromatique

$$a(t) = a_0 \sin(\omega t), \quad (\text{B.6})$$

ce qui correspond à une vitesse horizontale du batteur

$$u_g(z, t) = a_0 \omega \cos(\omega t) \cos(z\pi/H). \quad (\text{B.7})$$



**FIG. B.1** (a) Expression analytique (B.4) de la forme du générateur déduite de la théorie élastique (en bleu) et demi mode 1 de même amplitude (en traitillés rouges). (b) Module au carré des coefficients de la décomposition en série de Fourier de l'expression (B.4), en échelle semi-logarithmique.

# Synthétique schlieren, démonstration

Le but de ce paragraphe est de relier ce déplacement  $\mathbf{A}'\mathbf{A}'' = (\Delta x, \Delta z)$  perçu sur la caméra aux gradients d'indice dans la cuve. On se référera à la figure 1.16 pour la définition des quantités. Considérons le rayon issu de  $A$  initialement horizontal. La déflexion qu'il subit tout au long de sa traversée est donné par l'équation de l'eikonale

$$\frac{d}{ds} \left( n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n, \quad (\text{C.1})$$

où  $\mathbf{r}(s)$  donne la position du rayon paramétré par l'indice curviligne  $s$ , et  $n$  est l'indice optique local de l'eau. Faisons plusieurs hypothèses :

- 1) L'écoulement est bidimensionnel : le champ d'indice optique  $n$  est donc invariant selon  $y$ .
- 2) Les gradients d'indice sont faibles et induisent de petites déviations du rayon lumineux. Plus précisément, avec  $\delta$  l'ordre de grandeur du décalage transverse du rayon en sortie de cuve, on suppose  $\delta \ll \lambda$ , où  $\lambda$  est l'échelle typique de variation transverse du champ d'indice, ainsi que  $\delta \ll W$ .

Ces hypothèses seront vérifiées *a posteriori*. On a donc  $n$  et  $\nabla n$  constants le long du rayon. De plus, la deuxième hypothèse donne  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \simeq dy^2$ . L'équation (C.1) se simplifie alors en

$$r_i''(y) = \frac{\partial_i n}{n} \quad (\text{C.2})$$

où  $i = x, z$  et  $y = 0$  est choisi sur le côté "écran de Schlieren" de la cuve. En tenant compte de l'horizontalité du rayon en début de parcours, cette équation s'intègre aisément

$$r_i(y) = \frac{1}{2} \frac{\partial_i n}{n} y^2. \quad (\text{C.3})$$

Une fois sortie de la cuve, le rayon coïncide donc avec un rayon rectiligne formant un angle  $\alpha_i \simeq \tan \alpha_i = \frac{\partial_i n}{n} W$  dans les directions  $i = x$  et  $i = z$ , et passant par le point  $(0, 0, W/2)$ . Le rayon semble donc provenir non pas du point  $A$  mais du point noté  $B$  sur la figure 1.16. On a donc  $A''$  –la nouvelle position de l'image de l'élément  $A$ – qui

est donné par l'image de  $B$  par le système optique sans gradients<sup>1</sup>. La position de cette image est facilement obtenue en utilisant la relation de conjugaison de l'objectif et on trouve finalement que l'élément du motif a été décalé sur l'écran CCD des quantités

$$\Delta r_i = \alpha_i f \frac{d}{d + D - f} \quad (\text{C.4})$$

dans les directions  $i = x$  et  $i = z$ . Par ailleurs, étant donné les faibles variations de concentration en sel, on peut supposer que l'indice optique et la densité varie linéairement en fonction de la salinité, avec  $\frac{dn}{d\rho} = 4.1 \text{ kg/m}^3$ , où  $\rho$  est la densité totale du fluide. On a alors pour  $i = x, z$  :

$$\alpha_i = \frac{W}{n} \frac{dn}{d\rho} \partial_i \rho. \quad (\text{C.5})$$

Finalement, le déplacement en pixel sur l'écran CCD de la caméra  $\Delta p_i$  permet de remonter au champ de gradient de densité

$$\partial_i \rho = r \Delta p_i \frac{n}{Wf} \frac{d\rho}{dn} \frac{d + D - f}{d} \equiv \beta \Delta p_i$$

avec  $r$  la taille physique d'un pixel,  $\beta \equiv r \frac{n}{Wf} \frac{d\rho}{dn} \frac{d + D - f}{d}$  et  $i = x, z$ .

### Vérification des hypothèses

- 1) La bidimensionalité en volume de l'écoulement a été étudiée dans [21]. Dans cet article, les auteurs démontrent aussi que l'influence des couches limites visqueuses sur le déplacement du motif de schlieren synthétique est très faible (voir figure 10 de leur article [21]).
- 2) On mesure typiquement des gradients de densité de l'ordre de  $\partial_i \rho \sim 20 \text{ kg/m}^4$ , ce qui induit un décalage transverse d'un rayon en sortie de cuve  $\delta = W^2 \partial_i n / (2n) \simeq 50 \mu\text{m}$ , valeur effectivement très faible devant  $W = 17 \text{ cm}$  et devant l'échelle typique de variation du champ  $\lambda \sim 5 \text{ cm}$ .

<sup>1</sup> On pourrait penser qu'il faudrait construire un deuxième rayon issu de  $A$  pour pouvoir définir  $A''$  par leur intersection. Néanmoins, on ne change pas la mise au point de la caméra (c'est-à-dire que le plan d'observation est inchangé) et on observe expérimentalement que le stigmatisme est préservé. Ainsi, la donnée d'un seul rayon est suffisante pour définir  $A''$ .

# Dérive de Stokes

## D.1 Problématique

La PIV mesure la moyenne *Lagrangienne* du champ de vitesse, qui diffère intrinsèquement de sa moyenne *Eulérienne*. En effet, la première est prise le long de la trajectoire d'un traceur. Imaginons que l'on ait une seule particule par boîte de corrélation de l'algorithme.<sup>1</sup> La PIV mesure alors  $\delta\mathbf{X}/\delta t$  où le déplacement  $\delta\mathbf{X}$  de la particule est donné par

$$\delta\mathbf{X} = \int_t^{t+\delta t} \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) dt \quad (\text{D.1})$$

et  $\delta t$  est l'incrément de temps séparant la prise des deux images par la caméra. Quelle que soit la valeur de cet incrément, cette vitesse est en général différente de la vitesse eulérienne, ou même de sa moyenne

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \int_t^{t+\delta t} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{x}+\delta\mathbf{X}} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt d\mathbf{x}. \quad (\text{D.2})$$

Afin de calculer les premiers termes de cette différence, nous allons estimer la trajectoire d'un traceur dans un écoulement monochromatique.

## D.2 Démonstration

On suppose donc un champ eulérien oscillant de la forme

$$\mathbf{u}(x, t) = \mathbf{u}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{u}_0^* e^{i\omega t}, \quad (\text{D.3})$$

où  $\mathbf{u}_0$  est une fonction complexe de l'espace. La trajectoire  $\mathbf{X}(t)$  d'une particule positionnée en  $x$  à  $t = 0$  est solution de l'équation

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{u}_0 e^{i\omega t} + \mathbf{u}_0^* e^{-i\omega t}. \quad (\text{D.4})$$

Cette équation n'est pas directement intégrable car  $\mathbf{u}_0$  est une fonction de  $\mathbf{X}$ . À l'ordre 0, on a  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{x}$ . Au premier ordre, on a donc

$$\frac{d\mathbf{X}_1}{dt} = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}_0) e^{i\omega t} + \mathbf{u}_0^*(\mathbf{X}_0) e^{-i\omega t}. \quad (\text{D.5})$$

<sup>1</sup> Ce dispositif serait peu robuste expérimentalement mais reste possible théoriquement, et il simplifie l'analyse.

qui s'intègre alors aisément en

$$\mathbf{X}_1(t) = \mathbf{x} + \frac{-1}{i\omega} (\mathbf{u}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{u}_0^* e^{i\omega t}). \quad (\text{D.6})$$

On peut ensuite utiliser cette prédiction du premier ordre pour déduire l'expression de  $X(t)$  au deuxième ordre

$$\frac{d\mathbf{X}_2}{dt} = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}_1) e^{i\omega t} + \mathbf{u}_0(\mathbf{X}_1)^* e^{-i\omega t} \quad (\text{D.7})$$

$$\text{où } \mathbf{u}_0(\mathbf{X}_1) \simeq \mathbf{u}_0(\mathbf{X}_0) + \nabla \mathbf{u}_0 \cdot (\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0) \quad (\text{D.8})$$

qui s'intègre alors en

$$\mathbf{X}_2(t) = \mathbf{X}_1(t) + \frac{-1}{i\omega} ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0^* - (\mathbf{u}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{u}_0) t \quad (\text{D.9})$$

$$+ \frac{1}{2(i\omega)^2} ((\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 e^{-2i\omega t} + (\mathbf{u}_0^* \cdot \nabla) \mathbf{u}_0^* e^{2i\omega t}). \quad (\text{D.10})$$

On reconnaît un terme de dérive – c'est à dire une translation proportionnelle au temps – de vitesse

$$\mathbf{u}_s = -\frac{2}{\omega} \text{Im} \{(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0^*\}, \quad (\text{D.11})$$

ainsi qu'un terme oscillant à  $2\omega$ , correspondant à la vitesse

$$\mathbf{u}_s^2 = \frac{2i}{\omega} \text{Im} \{(\mathbf{u}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}_0 e^{-2i\omega t}\}. \quad (\text{D.12})$$

Un développement aux ordres supérieurs ferait intervenir des oscillations aux autres fréquences harmoniques  $n\omega$ . Comme nous n'en avons pas vu la trace dans nos données, nous ne développons pas davantage le calcul.



## Incertitudes PIV

**Sur la valeur de la vitesse, due à la sédimentation.** Les expériences sont réalisées au plus tôt 4 h après la dépose des particules. Celles qui restent ont donc une vitesse de sédimentation  $\delta_v^{sed} < \frac{100 \text{ cm}}{4.3600 \text{ s}} \simeq 7.10^{-3} \text{ cm/s}$ , ce qui donne, en considérant la vitesse typique observée dans une expérience  $v \simeq 1 \text{ cm/s}$ , une erreur relative de  $\frac{\delta_v^{sed}}{v} < 0,7 \%$ .

**Sur la valeur de la vitesse, due à la distorsion des rayons lumineux par les gradients d'indice.** Comme expliqué à la section précédente, les ondes, en changeant localement les gradients de salinité et donc d'indice optique de l'eau, déforment les rayons lumineux. Notons  $\Delta_{PIV}$  le décalage en pixels observé sur la caméra d'un groupe de particules dû aux gradients d'indice. Pour estimer  $\Delta_{PIV}$  on peut utiliser les résultats de la section précédente avec  $d \rightarrow d' \equiv \frac{W}{2}$ ,  $D \rightarrow D' \equiv D - \frac{W}{4}$  et  $\alpha \rightarrow \alpha' \equiv \frac{W'}{n} \frac{dn}{d\rho} \partial_i \rho = \alpha/2$  (car le motif que l'on observe se situe au milieu de la cuve) ce qui donne :

$$\Delta_{PIV} = \alpha' f \frac{d'}{d' + D' - f} = \alpha/2 f \frac{W/2}{D + \frac{W}{4} - f}$$

Pour estimer cette quantité, on peut la comparer aux décalages usuellement observés quand on utilise la technique du schlieren synthétique  $\Delta_{SS} = \alpha f \frac{d}{d+D-f} \simeq 3 \text{ pix}$ . On a donc

$$\Delta_{PIV}^{max} = \Delta_{SS} \frac{W/2}{D + W/4 - f} \frac{d + D - f}{d} \simeq 0.6 \text{ pix.}$$

Ce décalage correspond à celui observé entre une image sans onde et une image quelconque avec onde, alors que le décalage qui nous intéresse est celui entre deux images successives. Soit  $T$  la période des ondes et  $\delta t$  la durée entre deux images. On a alors  $\delta \Delta_{PIV} \sim \frac{\delta t}{T} \Delta_{PIV}^{max}$  et donc  $\delta_v \sim 4.10^{-2} \text{ pix/s}$ . Comme les vitesses typiquement observées sont de l'ordre de  $v \simeq 1 \text{ cm/s} \simeq 24 \text{ pix/s}$ , on a une erreur relative de l'ordre de  $\frac{\delta_v}{v} \sim 0.2 \%$ .

**Sur la résolution spatiale, due à la distorsion des rayons lumineux par les gradients d'indice.** La distorsion des rayons engendre aussi la mauvaise localisation du champ de vitesse : on assigne la valeur de  $v(x, z)$  non pas à  $(x, z)$  mais à  $(x', z')$ . La distance entre ces deux pixels a été estimée à  $\delta \sim 0.6 \text{ pix}$ , ce qui correspond à un écart de  $250 \mu\text{m}$ .

# Filtrage glissant

## F.1 Problématique

Il est courant qu'expérimentalement nous ayons besoin de suivre l'évolution dans le temps de la structure spatiale oscillant à une fréquence donnée. Pour cela, on peut penser à deux méthodes :

- La première consiste à effectuer un filtrage à cette fréquence, sur une fenêtre temporelle restreinte, puis à faire coulisser cette fenêtre.
- La deuxième consiste à effectuer un filtrage de largeur non nulle autour de la fréquence d'intérêt, sur le signal complet.

Ces deux méthodes sont en fait équivalentes.

## F.2 Démonstration

En effet, en une position  $(x, z)$  donnée, le résultat de la première procédure s'exprime par

$$s_1(t) = \int dt' s(t') g_1(|t - t'|) \left( e^{i\omega_0(t'-t)} + e^{-i\omega_0(t'-t)} \right) \quad (\text{F.1})$$

où  $g$  est une fonction de fenêtrage donnée (fonction porte, de Hanning, *e.t.c*), qui est donc paire et réelle. Le résultat de la deuxième procédure s'écrit, lui,

$$s_2(t) = \text{TF}^{-1} [s(\omega) f_{\omega_0}(\omega)] \quad (\text{F.2})$$

$$= \int dt' s(t') \int d\omega f_{\omega_0}(\omega) e^{-i\omega(t'-t)} \quad (\text{F.3})$$

où  $f_{\omega_0}$  est le filtre centré en  $\pm\omega_0$ . On reconnaît l'expression de sa transformée de Fourier inverse exprimée en  $t - t'$ , qui oscille principalement à  $\pm\omega_0$

$$\int d\omega f_{\omega_0}(\omega) e^{-i\omega(t'-t)} = f_{\omega_0}(t - t') \quad (\text{F.4})$$

$$= g_2(t - t') \left( e^{-i\omega_0(t-t')} + e^{+i\omega_0(t-t')} \right) \quad (\text{F.5})$$

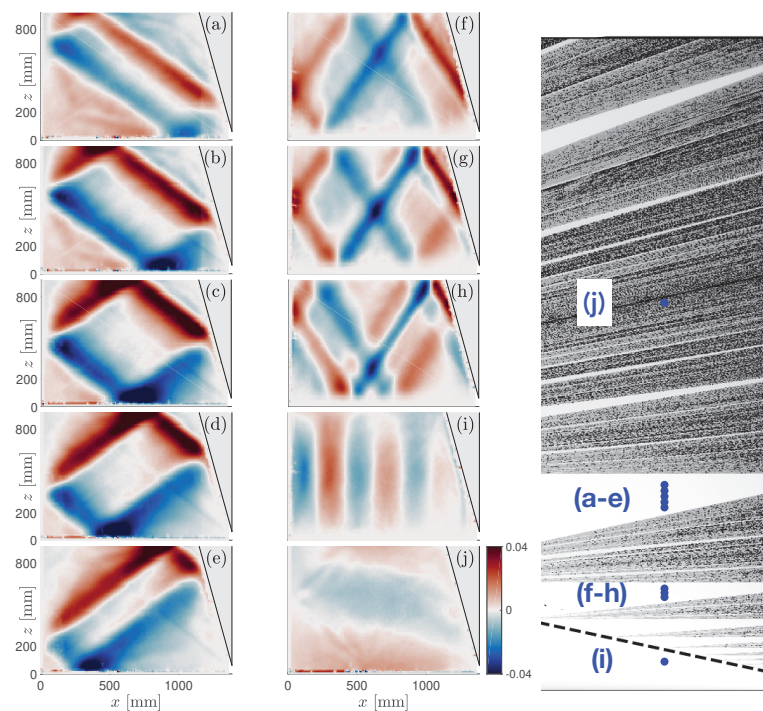
où  $g_2$  est une fonction paire car  $f_{\omega_0}(\omega)$  est réelle, et est réelle car  $f_{\omega_0}(\omega)$  est paire. En insérant cette expression dans (F.3), on reconnaît alors l'expression de  $s_1(t)$ , avec pour fenêtre  $g_1$  la transformée de Fourier inverse du filtre  $f_{\omega_0}$  divisée par  $(e^{-i\omega_0 t} + e^{+i\omega_0 t})$ .

## F.3 Conclusion

Ces deux méthodes sont donc strictement équivalentes. Dans la pratique, la deuxième procédure est la plus simple. Néanmoins, elle nécessite de charger le signal  $s(t)$  sur une grande durée. Si l'expérience à analyser est très longue, cette procédure est parfois impossible, et on lui préférera la première méthode.

# Réponse impulsionnelle : d'autres exemples du champ de vitesse filtré

Nous reportons ici des champs de vitesse obtenus en filtrant le champ de vitesse expérimental issu d'une réponse impulsionnelle, de géométrie  $H = 920$  mm,  $L = 1340$  mm et  $\alpha = 15.7^\circ$ . Le filtrage a été réalisé en calculant  $\text{Re}[\mathbf{u}(\omega)]$ , où la transformée de Fourier a été calculée sur toute la durée de l'expérience. On distingue nettement sur les figures G.1(a-e) la différence de forme entre les différents attracteurs (1, 1), de même pour les attracteurs (2, 1) présentés aux figure G.1(f-h). La figure G.1(h) expose un attracteur ponctuel, et la figure G.1(i) le mode de seiche, labellisé par (2, 1) dans le diagramme  $(d, \tau)$ .



**FIG. G.1** (a-e) Champ de vitesse horizontal obtenu en filtrant  $\mathbf{u}$  à différentes fréquences dans la zone des attracteurs (1, 1).  $\omega/N = 0.583$  (a), 0.594 (b), 0.605 (c), 0.616 (d) et 0.627 (e). (f-h) Champ de vitesse vertical obtenu en filtrant à différentes fréquences dans la zone des attracteurs (2, 1).  $\omega/N = 0.819$  (f), 0.830 (g) et 0.841 (h). (i) Champ de vitesse vertical obtenu en filtrant à la fréquence  $\omega/N = 0.979$ . (j) Champ de vitesse horizontal obtenu en filtrant à  $\omega/N = 0.357$ . La figure de gauche est une découpe du diagramme  $(d, \tau)$  (figure 3.9).

# Réponse impulsionnelle : démonstration de l'équation (3.12)

## H.1 Problématique

Le chapitre 3 se propose de mesurer quantitativement la densité de puissance  $\phi(\omega)$  injectée à l'écoulement par le batteur lorsque celui-ci est animé d'un mouvement brusque. Une modélisation simpliste présentée à la section 3.3.1 permet d'aboutir à l'équation (3.11) que l'on rappelle ici

$$\int \phi(\omega) d\omega = \frac{1}{f_\tau(t, T)} \int dx dz |\mathbf{u}_{t, T}(\omega)|^2 d\omega. \quad (\text{H.1})$$

Le but de cette annexe est d'établir l'égalité des intégrandes de (H.1).

## H.2 Démonstration

Le système constitué du liquide dans la cuve trapézoïdale associé à la plaque du générateur d'onde est un système invariant dans le temps<sup>1</sup> et que l'on peut supposer linéaire. Par ailleurs, son comportement est entièrement gouverné par la vitesse imposée du point haut de la plaque  $u_g(z = H, t)$  que l'on notera simplement  $u_g(t)$ . Les grandeurs de sortie, comme le champ de pression et de vitesse, s'expriment alors à l'aide de fonctions de transfert

$$\exists H_p(x, z, \omega), \quad P(x, z, \omega) = H_p(x, z, \omega)u_g(\omega), \quad (\text{H.2})$$

$$\exists \mathbf{H}_u(x, z, \omega), \quad \mathbf{u}(x, z, \omega) = \mathbf{H}_u(x, z, \omega)u_g(\omega). \quad (\text{H.3})$$

De l'existence de  $H_p$  on déduit directement pour  $\phi(\omega)$  (définie à l'équation (3.6))

$$\exists H_\phi(\omega), \quad \phi(\omega) = H_\phi(\omega)|u_g(\omega)|^2, \quad (\text{H.4})$$

<sup>1</sup> Comme dans le reste de ce manuscrit, on néglige l'influence du mélange.

où la fonction de transfert  $H_\phi$  se calcule aisément par intégration sur la verticale de  $H_p$ . Par ailleurs, on déduit de l'existence de la fonction de transfert  $\mathbf{H}_u$  que

$$\mathbf{u}_{t,T}(x, z, \omega) = \mathbf{H}_u(x, z, \omega) u_g(\omega) * F_{t,T}(\omega), \quad (\text{H.5})$$

où  $*$  désigne le produit de convolution et  $F_{t,T}(\omega)$  est la transformée de Fourier de la fenêtre employée dans  $\mathbf{u}_{t,T}$ . Or, si  $F_{t,T}(\omega)$  est très piquée comparée aux variations typiques de  $e(\omega)$  – c'est à dire que <sup>1</sup>  $T \gg \delta t$  – on peut considérer  $F_{t,T}(\omega) \propto \delta(\omega)$  et

$$\exists \mathbf{H}_{u,t,T}(x, z, \omega), \mathbf{u}_{t,T}(x, z, \omega) = \mathbf{H}_{u,t,T}(x, z, \omega) u_g(\omega). \quad (\text{H.6})$$

Ainsi, l'hypothèse de linéarité permettrait de réécrire l'égalité (3.11)

$$\int H_\phi(\omega) |u_g(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{f_\tau(t, T)} \int dx dz |\mathbf{H}_{u,t,T}|^2 |u_g(\omega)|^2 d\omega, \quad (\text{H.7})$$

pour des largeurs de fenêtre  $T$  grandes devant la durée de l'impulsion. Supposons cette égalité vérifiée  $\forall u_g(t)$ . On aurait alors

$$H_\phi(\omega) = \frac{1}{f_\tau(t, T)} \int dx dz |\mathbf{H}_{u,t,T}|^2 \quad (\text{H.8})$$

et donc

$$\phi(\omega) = \frac{1}{f_\tau(t, T)} \int dx dz |\mathbf{u}_{t,T}(\omega)|^2. \quad (\text{H.9})$$

Néanmoins, l'égalité (H.7) a été établie sous l'hypothèse d'une durée d'impulsion  $\delta t$  petite devant le temps de dissipation  $\tau$  (il s'agit de la première hypothèse de la section (3.3.1)). Les fonctions  $u_g(t)$  satisfaisant cette relation ont des transformées de Fourier "lisses" à l'échelle de  $1/\tau$ . On imagine alors que la validité de (H.7) pour cet ensemble de fonctions, implique une version lissée à l'échelle  $1/\tau$  de (H.9). C'est-à-dire que l'expression (H.9) ne donnerait en fait accès qu'à  $\tilde{\phi} \equiv \phi(\omega) * K(\omega)$ , ou la fonction  $K$  a une largeur typique  $1/\tau$ . On ne pourra donc pas accéder aux détails de  $\phi(\omega)$  sur des incréments de fréquences plus petits que  $1/\tau$ .

<sup>1</sup> On utilise ici l'argument qualitatif couramment employé : si une fonction  $f(t)$  a pour plus petite échelle de variation  $\delta t$  et pour plus grande échelle de variation  $\Delta T$  (son support dans le cas d'une fonction compacte) alors sa transformée de Fourier présentera une rugosité au plus à l'échelle  $\delta\omega \sim 1/\Delta t$  et décroîtra sur une échelle  $\Delta\omega \sim 1/\delta t$ . Ici, la plus grande échelle de variation de  $e(t)$  est la durée de l'impulsion  $\delta t$  donc  $e(\omega)$  présente des variations sur des incréments de fréquence de l'ordre de  $\delta\omega \sim 1/\delta t$ . De même, la  $F_{t,T}(\omega)$  présente des variations sur des incréments  $\sim 1/T$ .

## H.3 Discussion

Cette démonstration est par endroit très qualitative. Les deux points sensibles sont l'existence d'une fonction de transfert pour la version fenêtrée du champ de vitesse, supposée valide dans la limite  $T \gg \delta t$  ; et le passage de (H.8) à (H.9), qui donnerait en fait accès à une version lissée à l'échelle  $1/\tau$  de  $\phi(\omega)$  <sup>1</sup>.

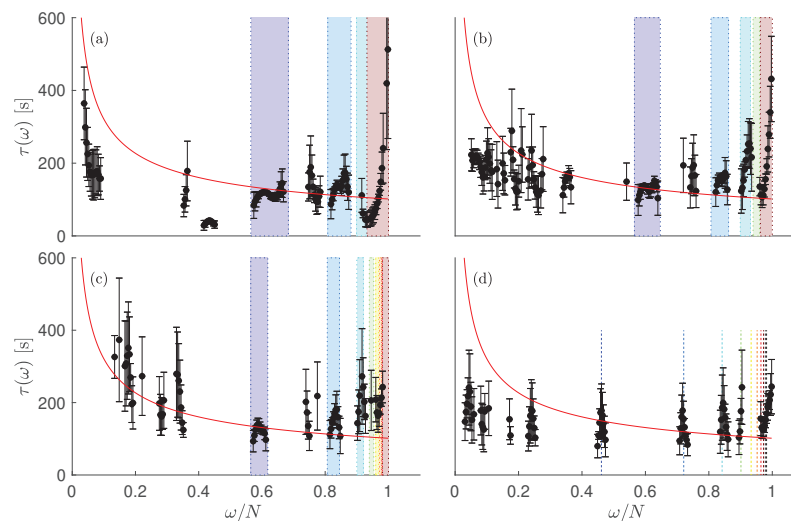
La validité de (H.9) reste incertaine. Néanmoins, encouragés par le bon accord entre ce modèle et les résultats expérimentaux, nous avons tout de même utilisé cette équation pour déduire du champ de vitesse  $\mathbf{u}$  la densité de puissance injectée à l'écoulement  $\phi(\omega)$ . On imagine qu'une modélisation théorique rigoureuse s'appuierait sur un autre développement que celui présenté ici, qui – rappelons le, s'appuie sur l'hypothèse très forte  $P_{\text{diss}} = -E_{\text{tot}}/\tau$ .

---

<sup>1</sup> Ce dernier point pourrait être dans les faits peu contraignant, car si l'on s'inspire des systèmes linéaires usuels, la réponse du système semble justement toujours lisse à l'échelle de l'inverse du temps de dissipation (voir la discussion du § 3.2.2 sur la viscosité élargissant la réponse autour des fréquences de résonance).

# Réponse impulsionnelle : temps d'atténuation visqueuse

Les ajustements effectués à la section 3.3.3 donnent aussi accès aux temps de dissipation  $\tau(\omega)$ . Si cette donnée n'est pas au centre de notre problématique, nous pouvons vérifier que l'on n'obtient pas de valeurs aberrantes. On a tracé à la figure I.1 les moyennes et écarts-types de ces temps de dissipation  $\tau(\omega)$ . L'ordre de grandeur obtenu pour une dissipation dominée par les parois latérales  $\tau = W/(2\sqrt{\omega\nu})$  a été tracé en rouge. Les résultats expérimentaux n'en sont pas trop éloignés, hormis dans la gamme des attracteurs ponctuels (zone rouge), où l'on constate une nette croissance de  $\tau$  avec  $\omega/N$ . En effet, ces attracteurs correspondent à des trajectoires qui finissent en  $t = \infty$  dans le coin en bas à droite de la cuve, et ce d'autant plus "lentement" que  $\omega \rightarrow N$ . L'augmentation de  $\tau(\omega)$  lorsque  $\omega \rightarrow N$  n'est donc pas surprenante.



**FIG. I.1** Temps d'atténuation  $\tau$  mesuré par ajustement des données sur le modèle pour les quatre géométries. Comme dans la figure 3.8, les zones colorées correspondent à des fréquences théoriques donnant des attracteurs en régime stationnaire. Le même code couleur a été utilisé. En rouge est tracé l'ordre de grandeur théorique obtenu si la dissipation est dominée par les parois latérales  $\tau = W/(2\sqrt{\omega\nu})$ .



# Bibliographie

- [1] URL : <http://perlanproject.org/> (visité le 30/05/2019).
- [2] MH ALFORD. “Observations of parametric subharmonic instability of the diurnal internal tide in the South China Sea”. In : *Geophysical Research Letters* 35.15 (2008).
- [3] MH ALFORD et al. “Internal waves across the Pacific”. In : *Geophysical Research Letters* 34.24 (2007).
- [4] Michael R ALLSHOUSE et al. “Internal wave pressure, velocity, and energy flux from density perturbations”. In : *Physical Review Fluids* 1.1 (2016), p. 014301.
- [5] Quentin ANDRÉ, Stéphane MATHIS et Adrian J BARKER. “Layered semi-convection and tides in giant planet interiors-II. Tidal dissipation”. In : *arXiv preprint arXiv :1902.04848* (2019).
- [6] D. G. ANDREWS et M. E. MCINTYRE. “Planetary Waves in Horizontal and Vertical Shear : The Generalized Eliassen-Palm Relation and the Mean Zonal Acceleration”. In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 33.11 (1976), p. 2031-2048.
- [7] J. ATKINS De Paula. *Chimie Physique*. De Boeck, 2015.
- [8] Quentin AUBOURG et Nicolas MORDANT. “Investigation of resonances in gravity-capillary wave turbulence”. In : *Physical Review Fluids* 1.2 (2016), p. 023701.
- [9] Quentin AUBOURG et Nicolas MORDANT. “Nonlocal Resonances in Weak Turbulence of Gravity-Capillary Waves”. In : *Phys. Rev. Lett.* 114 (14 2015), p. 144501.
- [10] F BECKEBANZE et al. “Damping of quasi-two-dimensional internal wave attractors by rigid-wall friction”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 841 (2018), p. 614-635.
- [11] Dominique BENIELLI et Joel SOMMERIA. “Excitation and breaking of internal gravity waves by parametric instability”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 374 (1998), p. 117-144.
- [12] Thomas BIRNER. “Fine-scale structure of the extratropical tropopause region”. In : *Journal of Geophysical Research : Atmospheres* 111.D4 (2006).
- [13] Guilhem BORDES et al. “Experimental observation of a strong mean flow induced by internal gravity waves”. In : *Physics of Fluids* 24.8 (2012), p. 086602.

- [14] Damien BOUFFARD et Alfred WÜEST. “Convection in Lakes”. In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 51.1 (2019), p. 189-215.
- [15] Baptiste BOURGET. “Ondes internes, de l’instabilité au mélange. Approche expérimentale”. Thèse de doctorat dirigée par Odier, Philippe Physique Lyon, École normale supérieure 2014. Thèse de doct. 2014.
- [16] Baptiste BOURGET et al. “Experimental study of parametric subharmonic instability for internal plane waves”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 723 (2013), p. 1-20.
- [17] Baptiste BOURGET et al. “Finite-size effects in parametric subharmonic instability”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 759 (2014), p. 739-750.
- [18] Pascale BOURUET-AUBERTOT, J SOMMERIA et C STAQUET. “Breaking of standing internal gravity waves through two-dimensional instabilities”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 285 (1995), p. 265-301.
- [19] Christophe BROUZET. “Internal wave attractors : from geometrical focusing to non-linear energy cascade and mixing”. Thèse de doctorat dirigée par Dauxois, Thierry Physique Lyon 2016. Thèse de doct. 2016.
- [20] Christophe BROUZET et al. “Energy cascade in internal-wave attractors”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 113.4 (2016), p. 44001.
- [21] Christophe BROUZET et al. “Internal wave attractors examined using laboratory experiments and 3D numerical simulations”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 793 (2016), p. 109-131.
- [22] Christophe BROUZET et al. “Internal wave attractors : different scenarios of instability”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 811 (2017), p. 544-568.
- [23] Maxime BRUNET, Thierry DAUXOIS et Pierre-Philippe CORTET. “Linear and nonlinear regimes of an inertial wave attractor”. In : *Phys. Rev. Fluids* 4 (3 2019), p. 034801.
- [24] Oliver BÜHLER et Miranda HOLMES-CERFON. “Decay of an internal tide due to random topography in the ocean”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 678 (2011), p. 271-293.
- [25] Antoine CAMPAGNE et al. “Identifying four-wave-resonant interactions in a surface gravity wave turbulence experiment”. In : *Phys. Rev. Fluids* 4 (7 juil. 2019), p. 074801.
- [26] Antoine CAMPAGNE et al. “Impact of dissipation on the energy spectrum of experimental turbulence of gravity surface waves”. In : *Physical Review Fluids* 3.4 (2018), p. 044801.
- [27] Heather A CLARK et Bruce R SUTHERLAND. “Generation, propagation, and breaking of an internal wave beam”. In : *Physics of Fluids* 22.7 (2010), p. 076601.

- [28] SB DALZIEL, Graham O HUGHES et Bruce R SUTHERLAND. “Whole-field density measurements by ‘synthetic schlieren’”. In : *Experiments in fluids* 28.4 (2000), p. 322-335.
- [29] Thierry DAUXOIS et WR YOUNG. “Near-critical reflection of internal waves”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 390 (1999), p. 271-295.
- [30] Thierry DAUXOIS et al. “Energy cascade in internal wave attractors”. In : *Procedia IUTAM* 20 (2017), p. 120-127.
- [31] Thierry DAUXOIS et al. “Instabilities of internal gravity wave beams”. In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 50 (2018), p. 131-156.
- [32] Géraldine DAVIS et al. “Energy budget in internal wave attractor experiments”. In : (2019). Soumis à *Journal of Fluid Mechanics* (Mars 2019).
- [33] Russ E DAVIS et Andreas ACRIVOS. “The stability of oscillatory internal waves”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 30.4 (1967), p. 723-736.
- [34] DJ DRAKE et al. “Alfvén wave collisions, the fundamental building block of plasma turbulence. IV. Laboratory experiment”. In : *Physics of Plasmas* 20.7 (2013), p. 072901.
- [35] P ECHEVERRI et al. “Tidally generated internal-wave attractors between double ridges”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 669 (2011), p. 354-374.
- [36] Andrew D ELVIDGE et al. “Moving towards a wave-resolved approach to forecasting mountain wave induced clear air turbulence”. In : *Meteorological Applications* 24.3 (2017), p. 540-550.
- [37] EV ERMANYUK. “The use of impulse response functions for evaluation of added mass and damping coefficient of a circular cylinder oscillating in linearly stratified fluid”. In : *Experiments in fluids* 28.2 (2000), p. 152-159.
- [38] Eric FALCON, Claude LAROCHE et Stéphan FAUVE. “Observation of gravity-capillary wave turbulence”. In : *Physical review letters* 98.9 (2007), p. 094503.
- [39] Benjamin FAVIER et al. “Generation and maintenance of bulk turbulence by libration-driven elliptical instability”. In : *Physics of Fluids* 27.6 (2015), p. 066601.
- [40] A FINCHAM et G DELERCE. “Advanced optimization of correlation imaging velocimetry algorithms”. In : *Experiments in Fluids* 29.1 (2000), S013-S022.
- [41] David C FRITTS et Gregory D NASTROM. “Sources of mesoscale variability of gravity waves. Part II : Frontal, convective, and jet stream excitation”. In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 49.2 (1992), p. 111-127.
- [42] Christopher GARRETT et Walter MUNK. “Space-time scales of internal waves”. In : *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics* 3.1 (1972), p. 225-264.
- [43] Christopher GARRETT et Walter MUNK. “Space-time scales of internal waves : A progress report”. In : *Journal of Geophysical Research* 80.3 (1975), p. 291-297.

- [44] T GERKEMA et JTF ZIMMERMAN. “An introduction to internal waves”. In : *Lecture Notes, Royal NIOZ, Texel 207* (2008).
- [45] Nicolas GRISOUARD, Chantal STAQUET et Ivane PAIRAUD. “Numerical simulation of a two-dimensional internal wave attractor”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 614 (2008), p. 1-14.
- [46] Yuan GUO et Miranda HOLMES-CERFON. “Internal wave attractors over random, small-amplitude topography”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 787 (2016), p. 148-174.
- [47] K HASSELMANN. “A criterion for nonlinear wave stability”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 30.4 (1967), p. 737-739.
- [48] Masaki HAYASHI. “Temperature-electrical conductivity relation of water for environmental monitoring and geophysical data inversion”. In : *Environmental monitoring and assessment* 96.1-3 (2004), p. 119-128.
- [49] Jeroen HAZEWINKEL, Nicolas GRISOUARD et Stuart B DALZIEL. “Comparison of laboratory and numerically observed scalar fields of an internal wave attractor”. In : *European Journal of Mechanics-B/Fluids* 30.1 (2011), p. 51-56.
- [50] Jeroen HAZEWINKEL et al. “Observations on the robustness of internal wave attractors to perturbations”. In : *Physics of Fluids* 22.10 (2010), p. 107102.
- [51] Jeroen HAZEWINKEL et al. “Observations on the wavenumber spectrum and evolution of an internal wave attractor”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 598 (2008), p. 373-382.
- [52] E HORNE et al. “Particle transport induced by internal wave beam streaming in lateral boundary layers”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 870 (2019), p. 848-869.
- [53] Dieter M IMBODEN et Alfred WÜEST. “Mixing mechanisms in lakes”. In : *Physics and chemistry of lakes*. Springer, 1995, p. 83-138.
- [54] GN IVEY, KB WINTERS et JR KOSEFF. “Density stratification, turbulence, but how much mixing ?” In : *Annu. Rev. Fluid Mech.* 40 (2008), p. 169-184.
- [55] Sylvain JOUBAUD et al. “Experimental parametric subharmonic instability in stratified fluids”. In : *Physics of Fluids* 24.4 (2012), p. 041703.
- [56] L. JOUVE et G. OGILVIE. “Direct numerical simulations of an inertial wave attractor in linear and nonlinear regimes”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 745 (2014), p. 223-250.
- [57] Hussain H KARIMI et TR AKYLAS. “Parametric subharmonic instability of internal waves : locally confined beams versus monochromatic wavetrains”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 757 (2014), p. 381-402.
- [58] Elena KARTASHOVA. “Discrete wave turbulence”. In : *EPL (Europhysics Letters)* 87.4 (2009), p. 44001.

- [59] F. KOHLRAUSCH. "Ueber Thermoelektricität, Wärme und Elektrizitätsleitung". ger. In : *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen* 1874 (1874), p. 65-86.
- [60] PK KUNDU et IM COHEN. "Fluid Mechanics, Academic Press". In : *Philadelphia, Pennsylvania* (1990).
- [61] Frans-Peter A LAM et Leo RM MAAS. "Internal wave focusing revisited ; a reanalysis and new theoretical links". In : *Fluid Dynamics Research* 40.2 (2008), p. 95.
- [62] Kevin G LAMB. "Nonlinear interaction among internal wave beams generated by tidal flow over supercritical topography". In : *Geophysical Research Letters* 31.9 (2004).
- [63] Thomas LE REUN, Benjamin FAVIER et Michael LE BARS. "Parametric instability and wave turbulence driven by tidal excitation of internal waves". In : *Journal of Fluid Mechanics* 840 (2018), p. 498-529.
- [64] Frank M LEE et al. "Experimental determination of radiated internal wave power without pressure field data". In : *Physics of Fluids* 26.4 (2014), p. 046606.
- [65] Frank M LEE et al. "Internal wave energy flux from density perturbations in nonlinear stratifications". In : *Journal of Fluid Mechanics* 856 (2018), p. 898-920.
- [66] James LIGHTHILL. "Acoustic streaming". In : *Journal of sound and vibration* 61.3 (1978), p. 391-418.
- [67] Yuri V LVOV et Esteban G TABAK. "Hamiltonian formalism and the Garrett-Munk spectrum of internal waves in the ocean". In : *Physical review letters* 87.16 (2001), p. 168501.
- [68] Leo RM MAAS. "Wave attractors : linear yet nonlinear". In : *International Journal of Bifurcation and Chaos* 15.09 (2005), p. 2757-2782.
- [69] Leo RM MAAS et Frans-Peter A LAM. "Geometric focusing of internal waves". In : *Journal of Fluid Mechanics* 300 (1995), p. 1-41.
- [70] Leo RM MAAS et al. "Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid". In : *Nature* 388.6642 (1997), p. 557.
- [71] JA MACKINNON et KB WINTERS. "Subtropical catastrophe : Significant loss of low-mode tidal energy at 28.9°". In : *Geophysical Research Letters* 32.15 (2005).
- [72] Jennifer A MACKINNON et al. "Climate process team on internal wave-driven ocean mixing". In : *Bulletin of the American Meteorological Society* 98.11 (2017), p. 2429-2454.
- [73] Astrid MM MANDERS et Leo RM MAAS. "Observations of inertial waves in a rectangular basin with one sloping boundary". In : *Journal of Fluid Mechanics* 493 (2003), p. 59-88.

- [74] Manikandan MATHUR et Thomas PEACOCK. “Internal wave beam propagation in non-uniform stratifications”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 639 (2009), p. 133-152.
- [75] AD McEWAN. “Degeneration of resonantly-excited standing internal gravity waves”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 50.3 (1971), p. 431-448.
- [76] AD McEWAN, DW MANDER et RK SMITH. “Forced resonant second-order interaction between damped internal waves”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 55.4 (1972), p. 589-608.
- [77] AD McEWAN et RA PLUMB. “Off-resonant amplification of finite internal wave packets”. In : *Dynamics of atmospheres and oceans* 2.1 (1977), p. 83-105.
- [78] Matthieu J. MERCIER, Nicolas B. GARNIER et Thierry DAUXOIS. “Reflection and diffraction of internal waves analyzed with the Hilbert transform”. In : *Physics of Fluids* 20.8 (2008), p. 086601.
- [79] Matthieu J MERCIER et al. “New wave generation”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 657 (2010), p. 308-334.
- [80] Nicolas MORDANT. “Are there waves in elastic wave turbulence ?” In : *Physical review letters* 100.23 (2008), p. 234505.
- [81] Walter H MUNK. “Abyssal recipes”. In : *Deep Sea Research and Oceanographic Abstracts*. T. 13. 4. Elsevier. 1966, p. 707-730.
- [82] Walter MUNK et Carl WUNSCH. “Abyssal recipes II : Energetics of tidal and wind mixing”. In : *Deep Sea Research Part I : Oceanographic Research Papers* 45.12 (1998), p. 1977-2010.
- [83] Jonathan D NASH, Matthew H ALFORD et Eric KUNZE. “Estimating internal wave energy fluxes in the ocean”. In : *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology* 22.10 (2005), p. 1551-1570.
- [84] Gregory D NASTROM et David C FRITTS. “Sources of mesoscale variability of gravity waves. Part I : Topographic excitation”. In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 49.2 (1992), p. 101-110.
- [85] Sergey NAZARENKO. *Wave turbulence*. T. 825. Springer Science & Business Media, 2011.
- [86] Robert H NAZARIAN et Sonya LEGG. “Internal wave scattering in continental slope canyons, part 1 : Theory and development of a ray tracing algorithm”. In : *Ocean Modelling* 118 (2017), p. 1-15.
- [87] Maxim NIKURASHIN et Raffaele FERRARI. “Radiation and dissipation of internal waves generated by geostrophic motions impinging on small-scale topography : Application to the Southern Ocean”. In : *Journal of physical oceanography* 40.9 (2010), p. 2025-2042.
- [88] Gordon I OGILVIE. “Wave attractors and the asymptotic dissipation rate of tidal disturbances”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 543 (2005), p. 19-44.

- [89] Pierre-Yves PASSAGGIA, Patrice MEUNIER et Stéphane LE DIZÈS. “Response of a stratified boundary layer on a tilted wall to surface undulations”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 751 (2014), p. 663-684.
- [90] Grimaud PILLET. “Attracteurs d’ondes internes à trois dimensions : analyse par tracés de rayons et étude expérimentale”. Thèse de doctorat dirigée par Dauxois, Thierry Physique Lyon 2018. Thèse de doct. 2018.
- [91] Grimaud PILLET et al. “Internal wave attractors in three-dimensional geometries : trapping by oblique reflection”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 845 (2018), p. 203-225.
- [92] KL POLZIN et al. “Spatial variability of turbulent mixing in the abyssal ocean”. In : *Science* 276.5309 (1997), p. 93-96.
- [93] Stéphane POPINET. “A quadtree-adaptive multigrid solver for the Serre–Green–Naghdi equations”. In : *Journal of Computational Physics* 302 (2015), p. 336-358.
- [94] Narsimha R RAPAKA, Bishakhdatta GAYEN et Sutanu SARKAR. “Tidal conversion and turbulence at a model ridge : direct and large eddy simulations”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 715 (2013), p. 181-209.
- [95] Antoine RENAUD et Antoine VENAILLE. “Boundary streaming by internal waves”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 858 (2019), p. 71-90.
- [96] M RIEUTORD, Bertrand GEORGEOT et L VALDETTARO. “Inertial waves in a rotating spherical shell : attractors and asymptotic spectrum”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 435 (2001), p. 103-144.
- [97] Sebastian SCHIRBER et al. “The quasi-biennial oscillation in a warmer climate : Sensitivity to different gravity wave parameterizations”. In : *Climate Dynamics* 45.3-4 (2015), p. 825-836.
- [98] Hélène SCOLAN, Eugeny ERMANYUK et Thierry DAUXOIS. “Nonlinear fate of internal wave attractors”. In : *Physical review letters* 110.23 (2013), p. 234501.
- [99] George STOKES. *Mathematical and physical papers*. T. 1. 1880, p. 297.
- [100] Bruce R SUTHERLAND et al. “Recent progress in modeling imbalance in the atmosphere and ocean”. In : *Physical Review Fluids* 4.1 (2019), p. 010501.
- [101] Ali TABAEI, TR AKYLAS et Kevin G LAMB. “Nonlinear effects in reflecting and colliding internal wave beams”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 526 (2005), p. 217-243.
- [102] Wenbo TANG et Thomas PEACOCK. “Lagrangian coherent structures and internal wave attractors”. In : *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 20.1 (2010), p. 017508.
- [103] NH THOMAS et TN STEVENSON. “An internal wave in a viscous ocean stratified by both salt and heat”. In : *Journal of Fluid Mechanics* 61.2 (1973), p. 301-304.

- [104] Cyril TOUZÉ, Stefan BILBAO et Olivier CADOT. “Transition scenario to turbulence in thin vibrating plates”. In : *Journal of Sound and Vibration* 331 (jan. 2012), p. 412-433.
- [105] Geoffrey K. VALLIS. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge, 2016.
- [106] Hans VAN HAREN, Andrea CIMATORIBUS et Louis GOSTIAUX. “Where large deep-ocean waves break”. In : *Geophysical Research Letters* 42.7 (2015), p. 2351-2357.
- [107] Bruce A WARREN. “Deep circulation of the world ocean”. In : *Evolution of physical oceanography* (1981), p. 6-41.
- [108] Carl WUNSCH et Raffaele FERRARI. “Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans”. In : *Annu. Rev. Fluid Mech.* 36 (2004), p. 281-314.
- [109] Ehud YAROM et Eran SHARON. “Experimental observation of steady inertial wave turbulence in deep rotating flows”. In : *Nature Physics* 10.7 (2014), p. 510.
- [110] Ehud YAROM, Yuval VARDI et Eran SHARON. “Experimental quantification of inverse energy cascade in deep rotating turbulence”. In : *Physics of Fluids* 25.8 (2013), p. 085105.