HAL
open science

Sur les l-blocs de niveau zéro des groupes p-adiques

Thomas Lanard

To cite this version:

Thomas Lanard. Sur les l-blocs de niveau zéro des groupes p-adiques. Théorie des groupes [math.GR]. Sorbonne Université, 2019. Français. NNT : 2019SORUS084 . tel-02467815

HAL Id: tel-02467815

https://theses.hal.science/tel-02467815v1

Submitted on 5 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sorbonne Université

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Thomas Lanard

Sur les ℓ-blocs de niveau zéro des groupes p-adiques

---

dirigée par Jean-François Dat

Soutenue le 28 janvier 2019 devant le jury composé de :

Mme Ramla Abdellatif	Université de Picardie Jules Verne	examinatrice
Mme Anne-Marie Aubert	Sorbonne Université	examinatrice
M. Jean-François Dat	Sorbonne Université	directeur
M. David Helm	Imperial College London	examinateur
M. Alberto Minguez	University of Vienna	examinateur
M. Vincent Sécherre	Université de Versailles Saint-Quentin	rapporteur
M. Shaun Stevens	University of East Anglia	rapporteur
Mme Marie-France Vignéras	Sorbonne Université	examinatrice

Institut de mathématiques de Jussieu-Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Sorbonne Université, Campus Pierre et Marie Curie.
École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Résumé

Soit G un groupe p-adique se déployant sur une extension non-ramifiée. Nous décomposons $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$, la catégorie abélienne des représentations lisses de G de niveau 0 à coefficients dans $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$, en un produit de sous-catégories. Ces dernières sont construites à partir de systèmes d'idempotents sur l'immeuble de Bruhat-Tits et de la théorie de Deligne-Lusztig. Une première décomposition est obtenue à partir des paramètres inertiels à valeurs dans le dual de Langlands. Nous étudions ensuite la plus fine décomposition de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ que l'on puisse obtenir par cette méthode. Nous en donnons deux descriptions, une première du côté du groupe à la Deligne-Lusztig, puis une deuxième du côté dual à la Langlands. Nous prouvons plusieurs propriétés fondamentales comme la compatibilité à l'induction et la restriction parabolique ou à la correspondance de Langlands locale. Les facteurs de cette décomposition ne sont pas des blocs, mais on montre comment les regrouper pour obtenir les blocs "stables". Certains de ces résultats corroborent une conjecture énoncée par Dat dans [Dat17]. Nous montrons également que toutes ces catégories sont équivalentes à des catégories obtenues à partir de systèmes de coefficients sur l'immeuble. Enfin, nous obtenons la décomposition en ℓ-blocs dans certains cas particuliers.

Mots-clés

Représentations, Correspondance de Langlands locale, Groupes p-adiques, ℓ-blocs, Immeuble de Bruhat-Tits, Deligne-Lusztig.

Abstract

Let G be a p-adic group that splits over an unramified extension. We decompose $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$, the abelian category of smooth level 0 representations of G with coefficients in $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ or $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$, into a product of subcategories. These categories are constructed via systems of idempotents on the Bruhat-Tits building and Deligne-Lusztig theory. A first decomposition is indexed by inertial Langlands parameters. We study the finest decomposition of $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ that can be obtained by this method. We give two descriptions of it, a first one on the group side à la Deligne-Lusztig, and a second one on the dual side à la Langlands. We prove several fundamental properties, like for example the compatibility to parabolic induction and restriction or the compatibility to the local Langlands correspondence. The factors of this decomposition are not blocks, but we show how to group them to obtain "stable" blocks. Some of these results support a conjecture given by Dat in [Dat17]. We also show that these categories are equivalent to categories obtained by systems of coefficient on the Bruhat-Tits building. Finally, we get ℓ-blocks decompositions in some particular cases.

Keywords

Representations, Local Langlands correspondence, p-adic groups, ℓ-blocks, Bruhat-Tits building, Deligne-Lusztig.

Table des matières

Introduction **9**
La catégorie des représentations lisses . . . 9
Décompositions en blocs connues . . . 9
Le théorème de décomposition de Bernstein . . . 10
Blocs de Vignéras-Helm . . . 11
La correspondance de Langlands locale . . . 12
La correspondance de Langlands locale . . . 12
Les paramètres inertiels . . . 13
Les blocs stables . . . 14
La théorie de Deligne-Lusztig . . . 15
Résultats de cette thèse . . . 16
Décomposition inertielle . . . 16
Décompositions grâce aux paires $(\mathbf{S}, \theta)$ . . . 18
Interprétation duale de la décomposition associée à $\sim_\infty$ . . . 19
Interprétation duale de la décomposition associée à $\sim_r$ . . . 20
Interprétation duale de la décomposition associée à $\sim_e$ . . . 21
Systèmes de coefficients . . . 22
Vers des ℓ-blocs . . . 23

Notations **25**

Liste des symboles **27**

1 Décomposition inertielle **31**
1.1 Système cohérent d'idempotents . . . 32
1.2 Construction d'idempotents . . . 34
1.2.1 Théorie de Deligne-Lusztig . . . 35
1.2.2 Construction d'idempotents sur l'immeuble . . . 35
1.2.3 Systèmes 0-cohérents de classes de conjugaison . . . 36
1.3 Paramètres de l'inertie modérés . . . 38
1.3.1 Classes de conjugaison dans $\mathbf{G}^*$ . . . 39
1.3.2 Classes de conjugaison dans les quotients réductifs des groupes parahoriques . . . 40
1.3.3 Classes de conjugaison dans un groupe fini . . . 42
1.3.4 Systèmes 0-cohérents de classes de conjugaison associés aux paramètres de l'inertie modérés . . . 42
1.4 Propriétés de $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ . . . 45

1.4.1 Lien entre les décompositions sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 45
1.4.2 Représentations irréductibles de $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\Lambda}(G)$ 46
1.4.3 Condition de relevance 47
1.4.4 Compatibilité à l'induction et à la restriction parabolique 50
1.4.5 Compatibilité à la correspondance de Langlands 54

2 Décomposition minimale **61**
2.1 Systèmes cohérents minimaux 65
2.1.1 Systèmes 0-cohérents minimaux 65
2.1.2 Clôture transitive 66
2.1.3 Compatibilité à l'induction et à la restriction parabolique pour les systèmes cohérents 67
2.2 Décomposition grâce aux paires $(\mathbf{S}, \theta)$ 68
2.2.1 Définition de $\mathscr{P}_\Lambda$ et construction de $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{S}^c_\Lambda$ 69
2.2.2 Inclusion dans un système minimal 70
2.2.3 Paires minimales 73
2.2.4 Relations d'équivalence sur $\mathscr{P}_\Lambda$ 76
2.2.5 Caractérisation des systèmes de classes de conjugaison 0-cohérents minimaux dans $\mathscr{P}_\Lambda$ 78
2.3 La relation d'équivalence $\sim_r$ 82
2.3.1 Interprétation sur G^* 83
2.3.2 Classes de conjugaison rationnelles 85
2.3.3 Réinterprétation de la relation d'équivalence $\sim_r$ 86
2.3.4 Interprétation en termes duaux 88
2.3.5 Lien entre $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 92
2.3.6 Compatibilité à l'induction et à la restriction parabolique 92
2.3.7 Équivalence inertielle sur les paramètres de Weil 93
2.3.8 Condition de relevance 95
2.3.9 Classes de conjugaison rationnelles pour les groupes classiques 96
2.3.10 Compatibilité à la correspondance de Langlands locale 99
2.4 La relation d'équivalence $\sim_e$ 101
2.4.1 Paramétrisation des classes de $\sim_e$-équivalence dans une classe de $\sim_r$-équivalence 102
2.4.2 Les groupes $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$ 104
2.4.3 Le cas quasi-déployé 105
2.4.4 Décomposition pour une forme intérieure pure 108
2.4.5 Lien entre $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ 111
2.4.6 Compatibilité à l'induction et à la restriction parabolique 111
2.4.7 Compatibilité à la construction de DeBacker-Reeder 113

3 Systèmes de coefficients **115**
3.1 Systèmes de coefficients 115
3.2 Chemins tendus 116
3.3 Les applications locales 117
3.4 Équivalence de catégories 123

4 Towards ℓ-blocks **125**
4.1 Blocks over $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ . . . 126
4.2 d-cuspidality . . . 127
4.2.1 Unipotent ℓ-blocks for finite reductive groups . . . 127
4.2.2 d-cuspidality for classical groups . . . 128
4.2.3 d-1-series . . . 129
4.3 Unipotent ℓ-blocks . . . 131
4.4 Some decompositions . . . 133
4.4.1 q of order 1 mod ℓ . . . 133
4.4.2 $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ and q of order $2n$ mod ℓ . . . 133
4.4.3 Sp_4 . . . 134
4.4.4 Sp_6 . . . 135
4.4.5 Sp_8 . . . 137
4.4.6 SL_n . . . 138

Annexe **139**
A Rappels sur le groupe dual . . . 139
B Rappels sur le Frobenius . . . 140
C Cohomologie des groupes p-adiques . . . 141
D Quelques isomorphismes sur les tores et leurs duaux . . . 144

Introduction

La catégorie des représentations lisses

Soit F un corps p-adique (c'est-à-dire un corps local non archimédien de caractéristique nulle et de caractéristique résiduelle p) et notons k son corps résiduel. Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F et notons $G := \mathbf{G}(F)$. On désigne généralement G par un groupe p-adique. Le groupe G est un groupe topologique localement profini, c'est-à-dire que G est localement compact et totalement discontinu ou de façon équivalente que G est séparé et l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts forme un système fondamental de voisinages de l'unité.

Soit Λ un anneau commutatif.

Définition. *On appelle représentation de G à coefficients dans Λ la donnée d'un Λ-module V muni d'une action $\pi : G \to \mathrm{GL}_\Lambda(V)$ de G.*

Une représentation (π, V) est dite lisse si pour tout $v \in V$, le stabilisateur de v dans G est ouvert.

On notera $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ la catégorie abélienne des représentations lisses de G à coefficients dans Λ (les morphismes sont les applications Λ-linéaires G-équivariantes).

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des catégories abéliennes pleines de $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$, on écrit $\mathrm{Rep}_\Lambda(G) = \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ lorsque

1. Pour tout $V \in \mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ il existe $V_B \in \mathcal{B}$ et $V_C \in \mathcal{C}$ tels que $V = V_B \oplus V_C$.
2. Pour tout $X \in \mathcal{B}$ et $Y \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$.

On dit que $\mathcal{B}$ est indécomposable si $\mathcal{B}$ n'est pas produit de deux sous-catégories abéliennes pleines non triviales.

Définition. *Un bloc de $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ est un sous-catégorie abélienne pleine indécomposable.*

Une décomposition de $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ en blocs ramène donc l'étude de cette catégorie à l'étude de ses blocs.

Soit ℓ un nombre premier différent de p. Dans cette thèse, on posera $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. L'objectif est d'étudier la catégorie $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$, et plus particulièrement $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ la sous-catégorie pleine de niveau zéro, que l'on définira ultérieurement dans la section 1.2.3. Pour cela nous en fournirons plusieurs décompositions remarquables. Comme nous le verrons dans la section suivante le cas $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est assez bien connu, et donc le cas réellement intéressant est $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$.

Décompositions en blocs connues

Commençons par rappeler des décompositions en blocs connues.

Le théorème de décomposition de Bernstein

Le cas $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (ou de façon équivalente $\Lambda = \mathbb{C}$) est bien connu, puisque le théorème de décomposition de Bernstein nous fournit une description en blocs de $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$. Rappelons ici cet énoncé.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M et de radical unipotent U. Nous pouvons alors définir une paire de foncteurs adjoints, appelés foncteurs d'induction et de restriction parabolique

$$i_P^G : \mathrm{Rep}_\Lambda(M) \to \mathrm{Rep}_\Lambda(G),\ r_P^G : \mathrm{Rep}_\Lambda(G) \to \mathrm{Rep}_\Lambda(M),$$

de la façon suivante.

Notons δ_P le module de P. Pour toute représentation lisse (τ, E) de M, on définit alors

$$i_P^G(\tau, E) = \mathrm{Ind}_P^G(\tau \otimes \delta_P^{-1/2}, E).$$

Pour la restriction parabolique, prenons (π, V) une représentation lisse de G. Nous pouvons voir (π, V) comme une représentation de P par restriction. Comme M normalise U, M agit sur V_U, l'espace des coinvariants, défini par $V_U = V/V(U)$, où $V(U)$ est le sous-espace de V engendré par les $\pi(u) \cdot v - v$, avec $u \in U$ et $v \in V$. On note cette action π_U. Le foncteur de restriction parabolique est alors défini par

$$r_P^G(\pi, V) = (\pi_U \otimes \delta_P^{1/2}, V_U).$$

Le foncteur i_P^G est l'adjoint à gauche de r_P^G.

Définition. *Une représentation (π, V) est dite cuspidale si pour tout sous-groupe parabolique propre $P = MU$ de G, $r_P^G(\pi, V)$ est nul.*

On appelle alors donnée cuspidale un couple (M, ρ) où M est un Levi de G et ρ est une représentation cuspidale irréductible de M. Deux données cuspidales (M_1, ρ_1) et (M_2, ρ_2) sont dites associées s'il existe g tel que $gM_1g^{-1} = M_2$ et $\rho_2 \simeq \rho_1^g$.

Définition ([Vig96] II.2.4)**.** *Soit V une représentation irréductible de G. Il existe $P = MU$ un sous-groupe parabolique de G et W une représentation cuspidale irréductible de M tels que $V \subseteq i_P^G(W)$. L'ensemble des données cuspidales (M, W) vérifiant cette propriété est appelé le support cuspidal de V.*

Proposition ([Vig96] II.2.20)**.** *Soit V une représentation irréductible de G. Alors le support cuspidal de V forme une unique classe de conjugaison.*

Nous pouvons également définir une autre relation d'équivalence sur les données cuspidales. Deux données cuspidales (M_1, ρ_1) et (M_2, ρ_2) sont dites inertiellement équivalentes s'il existe un $g \in G$ et un caractère non-ramifié ω de M_2 tels que $gM_1g^{-1} = M_2$ et $\rho_2 \simeq \rho_1^g \otimes \omega$. On note $[M, \rho]_G$ la classe d'équivalence inertielle de (M, ρ) et $\mathcal{B}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence.

Théorème ([Ber84] 2.10, 2.13)**.** *La catégorie $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ admet la décomposition*

$$\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{\mathfrak{s} \in \mathcal{B}(G)} \mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G),$$

où $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ *est la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ *dont tous les sous-quotients irréductibles ont pour support inertiel* $\mathfrak{s}$.

De plus les catégories $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{s}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ *sont des blocs.*

Blocs de Vignéras-Helm

Le cas $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$ est quant à lui assez peu connu. Pour $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, Vignéras a obtenu dans [Vig98] une décomposition de la catégorie $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F))$ en blocs (voir aussi les travaux de Sécherre et Stevens [SS16]). Celle-ci a permis par la suite à Helm [Hel16] d'obtenir une décomposition de $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F))$.

Définition. *Une représentation irréductible* (π, V) *est dite supercuspidale si* V *n'est pas sous-quotient d'une induite parabolique propre.*

Lorsque $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, la notion de supercuspidalité est la même que la notion de cuspidalité, cependant elles peuvent différer lorsque $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{F}}_\ell$.

Comme précédemment on appelle donnée supercuspidale un couple (M, ρ) où M est un Levi de G et ρ est une représentation supercuspidale irréductible de M, et on définit les relations d'association et d'inertie.

Définition ([Vig96] II.2.6)**.** *Soit* V *une représentation irréductible de* G*. Il existe* $P = MU$ *un sous-groupe parabolique de* G *et* W *une représentation supercuspidale irréductible de* M *tels que* V *est un sous-quotient de* $i_P^G(W)$*. L'ensemble des données supercuspidales* (M, W) *vérifiant cette propriété est appelé le support supercuspidal de* V*.*

Théorème ([Vig98] V.4)**.** *Si* $\boldsymbol{G} = \mathrm{GL}_n$ *et* V *est une représentation irréductible de* $\mathrm{GL}_n(F)$ *à coefficients dans* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ *alors le support supercuspidal de* V *forme une unique classe de conjugaison.*

Ce résultat n'est pas vrai en général, un contre exemple dans Sp_8 sur un corps fini a été trouvé par Dudas dans [Dud18] puis a été relevé sur un corps p-adique par Dat dans [Dat18b].

Définition ([Hel16])**.** *Soit* $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F))$ *un objet simple.*

- *Si* ℓ *annule* Π*, on appelle support supercuspidal inertiel mod* ℓ *de* Π *la classe d'inertie du support supercuspidal de* Π*.*
- *Si* ℓ *est inversible sur* Π*, on appelle support supercuspidal inertiel mod* ℓ *de* Π *la classe d'inertie de l'ensemble des* (M, π) *apparaissant dans le support supercuspidal d'une paire* (M', π')*, avec* M' *un Levi* G *contenant* M *et* π' *une représentation irréductible cuspidale de* M' *sur* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*, obtenue par réduction modulo* ℓ *d'une paire cuspidale* $(M', \tilde{\pi}')$ *inertiellement équivalente au support cuspidal de* Π*.*

Théorème ([Hel16] Théorème 9.8)**.** *Nous avons une décomposition*

$$\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F)) = \prod_{[L,\pi]} \mathrm{Rep}^{[L,\pi]}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F)),$$

où le produit est pris sur les classes d'équivalence inertielles de paires (L, π) *avec* L *un Levi de* $\mathrm{GL}_n(F)$ *et* π *une représentation supercupidale irréductible de* L *sur* $\overline{\mathbb{F}}_\ell$*, et* $\mathrm{Rep}^{[L,\pi]}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F))$

est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F))$ *des objets dont tous les sous-quotients irréductibles ont un support supercuspidal inertiel mod* ℓ *donné par* (L, π).

De plus, les catégories $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^{[L,\pi]}(\mathrm{GL}_n(F))$ *sont des blocs.*

Nous noterons que les décompositions de Bernstein et de Vignéras-Helm utilisent de façon cruciale "l'unicité du support supercuspidal". Cependant, cette dernière n'est pas vraie en général, nous devons donc utiliser une autre méthode pour décomposer $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$. Dans le cas du niveau 0, Dat propose (voir [Dat18a]) une nouvelle construction des blocs de $\mathrm{GL}_n(F)$ en utilisant la théorie de Deligne-Lusztig et des systèmes d'idempotents sur l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple (comme dans l'article de Meyer et Solleveld [MS10]). Nous nous appuierons donc sur cette méthode et la généraliserons au cas où $\mathbf{G}$ se déploie sur une extension non-ramifiée de F.

La correspondance de Langlands locale

La correspondance de Langlands locale (conjecturale en général) prédit une correspondance entre les représentations irréductibles de G et des "L-morphismes admissibles" du groupe de Weil-Deligne à valeurs dans ${}^L\mathbf{G}$, le dual de Langlands de G. Ainsi en regroupant les représentations irréductibles de G grâce à des critères portant sur leur paramètre de Langlands, nous devrions pouvoir obtenir des décompositions de $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$. Nous expliquons ici, quelques résultats que nous pouvons espérer.

La correspondance de Langlands locale

Supposons que $\mathbf{G}$ se déploie sur F^{nr}, l'extension non-ramifée maximale de F. Notons $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $\mathcal{G}_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ le groupe de Galois absolu de F, W_F le groupe de Weil absolu de F et I_F le sous-groupe d'inertie. Le groupe $\Gamma := \mathcal{G}_F/I_F$ est topologiquement engendré par un élément Frob dont l'inverse induit l'automorphisme $x \mapsto x^q$ sur $\overline{k}$. Ainsi $F^{nr} = \overline{F}^{I_F}$ et $F = (F^{nr})^{\mathrm{Frob}}$. L'action de $\mathcal{G}_F$ sur $\mathbf{G}$ donne une action de Γ sur $\mathbf{G}(F^{nr})$, complètement déterminée par un automorphisme $\mathsf{F} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{G}(F^{nr}))$ donné par l'action de Frob. On a alors $G = \mathbf{G}(F^{nr})^{\mathsf{F}}$.

Notons $\widehat{\mathbf{G}}$ le groupe dual de $\mathbf{G}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Soit $\mathbf{T}$ un F-tore maximal F^{nr}-déployé et notons $X^*(\mathbf{T})$ le groupe des caractères de $\mathbf{T}$ et $X_*(\mathbf{T})$ les co-caractères. Fixons également un épinglage $(\mathbf{G}, \mathbf{B}, \mathbf{T}, \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$. Si $\gamma \in \mathcal{G}_F$, alors il existe $g \in \mathbf{G}(F^{nr})$ tel que $\mathrm{Ad}(g)(\gamma\mathbf{B}) = \mathbf{B}$ et $\mathrm{Ad}(g)(\gamma\mathbf{T}) = \mathbf{T}$, ce qui nous permet de définir un morphisme $\mathcal{G}_F \to \mathrm{Aut}(X^*(\mathbf{T}), \Delta, X_*(\mathbf{T}), \Delta^\vee)$. Comme I_F agit trivialement cette action se factorise à travers Γ et notons ϑ l'automorphisme induit par F. La dualité entre $X_*(\mathbf{T})$ et $X^*(\mathbf{T})$ permet d'associer de façon naturelle à ϑ un automorphisme $\widehat{\vartheta} \in \mathrm{Aut}(X_*(\mathbf{T}), \Delta^\vee, X^*(\mathbf{T}), \Delta)$. Le choix d'un épinglage $(\widehat{\mathbf{G}}, \widehat{\mathbf{B}}, \widehat{\mathbf{T}}, \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$ de $\widehat{\mathbf{G}}$ où $\widehat{\mathbf{B}}$ est un Borel contenant $\widehat{\mathbf{T}}$ permet d'obtenir un automorphisme $\widehat{\vartheta} \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbf{G}})$.

On note $W_F' = W_F \ltimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ le groupe de Weil-Deligne.

Définition. *Un morphisme* $\varphi : W_F' \to {}^L\boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) := \widehat{\boldsymbol{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rtimes \langle\widehat{\vartheta}\rangle$ *est dit admissible si*

1. *Le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} W'_F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & {}^L\boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \arrow[d] \\ \langle Frob \rangle \arrow[r] & \langle \widehat{\vartheta} \rangle \end{tikzcd}$$

2. *φ est continue, $\varphi(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est unipotent dans $\widehat{\boldsymbol{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$, et φ envoie W_F sur des éléments semi-simples de ${}^L\boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (un élément de ${}^L\boldsymbol{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est semi-simple si sa projection dans $\widehat{\boldsymbol{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rtimes \langle \widehat{\vartheta} \rangle / n\langle \widehat{\vartheta} \rangle$ est semi-simple, où n est l'ordre de $\widehat{\vartheta}$).*

On note alors $\Phi({}^L\mathbf{G})$ l'ensemble des morphismes admissibles $\varphi : W'_F \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ modulo les automorphismes intérieurs par des éléments de $\widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. La correspondance de Langlands locale prédit une application à fibres finies

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) & \longrightarrow & \Phi({}^L\mathbf{G}) \\ \pi & \longmapsto & \varphi_\pi \end{array}.$$

La correspondance de Langlands locale est connue dans plusieurs cas dont :
— les tores (prouvé par Langlands lui-même),
— les représentations unipotentes des groupes p-adiques adjoints ([Lus84], [Lus02]),
— les groupes classiques ([HT01] [Hen00] [Art13] [Mok15] [KMSW14]).

Les paramètres inertiels

La correspondance de Langlands devrait être compatible à l'induction parabolique dans le sens suivant : si π est un sous-quotient irréductible d'une représentation induite $i_P^G(\sigma)$ alors $\varphi_{\pi|W_F} \sim \iota \circ \varphi_{\sigma|W_F}$, où $\iota : {}^L\mathbf{M} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ est un plongement dual à $\mathbf{M} \hookrightarrow \mathbf{G}$. En particulier, si π et π' sont deux représentations irréductibles dans le même bloc de Bernstein, alors on devrait avoir $\varphi_{\pi|I_F} \sim \varphi_{\pi'|I_F}$. Ceci induit donc une décomposition

$$\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{\phi \in \Phi(I_F, {}^L\mathbf{G})} \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$$

où $\Phi(I_F, {}^L\mathbf{G})$ désigne l'ensemble des classes de $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison des morphismes continus $I_F \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (où $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est muni de la topologie discrète) qui admettent une extension à un L-morphisme de $\Phi({}^L\mathbf{G})$.

Dans le cas de GL_n (où l'on a bien la correspondance de Langlands locale ainsi que sa compatibilité à l'induction parabolique) les facteurs $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F))$ sont des blocs et la décomposition précédente est une réécriture du théorème de décomposition de Bernstein.

De façon analogue, nous pouvons réinterpréter la décomposition en blocs de Vignéras-Helm de la façon suivante,

$$\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F)) = \prod_{\phi \in \Phi(I_F^{(\ell)}, {}^L\mathbf{G})} \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{GL}_n(F))$$

où $I_F^{(\ell)}$ est le sous-groupe fermé maximal de I_F de pro-ordre premier à ℓ et $\Phi(I_F^{(\ell)}, {}^L\mathbf{G})$

désigne l'ensemble des classes de $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison des morphismes continus $I_F^{(\ell)} \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ qui admettent une extension à un L-morphisme de $\Phi({}^L\mathbf{G})$.

Remarque. Dans cette thèse, nous nous intéressons à la catégorie de niveau 0. Cela devrait se traduire de la façon suivante en terme de paramètres de Langlands. Soit π une représentation irréductible, alors $\pi \in \mathrm{Rep}^0_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ si et seulement si φ_π est modéré, c'est-à-dire que φ_π est trivial sur l'inertie sauvage.

Les blocs stables

Le théorème de décomposition de Bernstein fournit une partition des irréductibles $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \sqcup_{\mathfrak{s}\in\mathcal{B}(G)} \mathrm{Irr}_{\mathfrak{s}}(G)$. En supposant vraie la correspondance de Langlands locale, on obtient une autre partition $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \sqcup_{\varphi\in\Phi({}^L\mathbf{G})}\Pi_\varphi$, où Π_φ est le L-paquet associé au paramètre φ. Haines introduit dans [Hai14] la notion de "centre de Bernstein stable" qui permet de comparer ces deux décompositions.

Commençons par rappeler la notion de parabolique standard et de Levi standard de ${}^L\mathbf{G}$, définis dans [Bor79] paragraphes 3.3 et 3.4. Fixons des données $\widehat{\mathbf{T}}_0 \subseteq \widehat{\mathbf{B}}_0 \subseteq \widehat{\mathbf{G}}$, composées d'un tore maximal et d'un Borel, stables sous l'action du groupe de Galois. On dit alors qu'un sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$ de ${}^L\mathbf{G}$ est standard si $\mathcal{P} \supseteq {}^L\mathbf{B}_0$. Sa composante neutre $\mathcal{P}^\circ := \mathcal{P} \cap \widehat{\mathbf{G}}$ est alors un sous-groupe parabolique standard de $\widehat{\mathbf{G}}$ contenant $\widehat{\mathbf{B}}_0$ et on a $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\circ \rtimes W_F$. Soit $\mathcal{M}^\circ$ l'unique Levi de $\mathcal{P}^\circ$ contenant $\widehat{\mathbf{T}}_0$. Alors $\mathcal{M} := N_{\mathcal{P}}(\mathcal{M}^\circ)$ est un sous-groupe de Levi de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{M} = \mathcal{M}^\circ \rtimes W_F$. Les sous-groupes de Levi de ${}^L\mathbf{G}$ construits de cette manière sont appelés standards. Tout sous-groupe de Levi de ${}^L\mathbf{G}$ est $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugué à un Levi standard, et pour $\mathcal{M}$ un Levi standard de ${}^L\mathbf{G}$, on note $\{\mathcal{M}\}$ l'ensemble des sous-groupes de Levi standards qui sont $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugués à $\mathcal{M}$.

Soit $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}$ un morphisme admissible. L'image de φ est alors contenue dans un Levi minimal de ${}^L\mathbf{G}$, bien défini à conjugaison par un élément de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)^\circ$, où $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)$ désigne le centralisateur de $\varphi(W_F)$ dans $\widehat{\mathbf{G}}$ (voir [Bor79] proposition 3.6). Notons $(\varphi)_{\widehat{\mathbf{G}}}$ la classe de $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison de φ. Alors φ donne lieu à une unique classe de Levi standards $\{\mathcal{M}_\varphi\}$ telle qu'il existe $\varphi^+ \in (\varphi)_{\widehat{\mathbf{G}}}$ dont l'image est contenue minimalement dans $\mathcal{M}_\varphi$, pour un $\mathcal{M}_\varphi$ dans cette classe.

Définition ([Hai14] définition 5.3.3)**.** *Soient $\varphi_1, \varphi_2 : W_F \to {}^L\boldsymbol{G}$ deux paramètres admissibles. On dit que φ_1 et φ_2 sont inertiellement équivalents si*

1. $\{\mathcal{M}_{\varphi_1}\} = \{\mathcal{M}_{\varphi_2}\}$
2. *il existe $\mathcal{M} \in \{\mathcal{M}_{\varphi_1}\}$, $\varphi_1^+ \in (\varphi_1)_{\widehat{\boldsymbol{G}}}$ et $\varphi_2^+ \in (\varphi_2)_{\widehat{\boldsymbol{G}}}$ dont les images sont minimalement contenues dans $\mathcal{M}$, et $z \in H^1(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, (Z(\mathcal{M}^\circ)^{I_F})^\circ)$ vérifiant*

$$(z\varphi_1^+)_{\mathcal{M}^\circ} = (\varphi_2^+)_{\mathcal{M}^\circ}$$

Soit $\mathfrak{i}$ la classe d'inertie d'un paramètre de Weil. On définit un paquet inertiel par

$$\Pi_{\mathfrak{i}}^+ := \bigsqcup_{\substack{\varphi'\in\Phi({}^L\mathbf{G}) \\ \varphi'_{|W_F}\in\mathfrak{i}}} \Pi_{\varphi'}(G).$$

Supposons que l'on ait la correspondance de Langlands locale pour G ainsi que ses sous-groupes de Levi, la compatibilité à l'induction parabolique et à certains isomorphismes (voir [Hai14] définition 5.2.1 pour plus de détails). Alors on peut définir une application $\mathcal{L}_i$ qui à une classe d'inertie de données cuspidales $\mathfrak{s} = [L, \sigma] \in \mathcal{B}(G)$ associe $\mathcal{L}_i(\mathfrak{s})$ la classe d'inertie du paramètre de Weil $\varphi_{\sigma|W_F}$. Les paquets inertiels permettent de comparer les décompositions $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \sqcup_{\mathfrak{s}\in\mathcal{B}(G)} \mathrm{Irr}_{\mathfrak{s}}(G) = \sqcup_{\varphi'\in\Phi({}^L\mathbf{G})}\Pi_{\varphi'}$:

Théorème ([Mou16] théorème 2.9)**.** *Soient G un groupe classique déployé et $\mathfrak{i}$ une classe d'inertie de paramètres de Weil. Alors*

$$\Pi_{\mathfrak{i}}^{+}(G) = \bigsqcup_{\substack{\mathfrak{s}\in\mathcal{B}(G)\\ \mathcal{L}_i(\mathfrak{s})=\mathfrak{i}}} \mathrm{Irr}_{\mathfrak{s}}(G)$$

Notons $\mathcal{B}^{st}$ l'ensemble des paramètres $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}$ à équivalence inertielle près. Nous avons alors pour G un groupe classique déployé la décomposition :

$$\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{[\varphi]\in\mathcal{B}^{st}} \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{[\varphi]}(G).$$

On appelle alors les catégories $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{[\varphi]}(G)$ des "blocs stables", car elles correspondent à des idempotents primitifs du centre de Bernstein stable.

La théorie de Deligne-Lusztig

Pour obtenir des décompositions entières en p-adique, inspirons nous de ce que l'on sait faire pour les groupes finis. En particulier, lorsque G est un groupe réductif fini, la théorie de Deligne-Lusztig permet d'obtenir une décomposition de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathsf{G}]$. Cette décomposition vérifie de nombreuses propriétés très intéressantes, et en particulier nous savons regrouper les facteurs pour obtenir une décomposition de $\overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{G}]$. Dans le cas du niveau zéro, nous avons des liens entre les représentations des groupes p-adiques et des groupes finis. Nous utiliserons ces derniers pour mimer la décomposition de Deligne-Lusztig en p-adique.

Dans cette section les groupes algébriques considérés seront sur k.

Définition. *On appelle idempotent central dans $\Lambda[\mathsf{G}]$ un idempotent dans le centre de $\Lambda[\mathsf{G}]$. Un idempotent central primitif est un idempotent central qui ne peut pas s'exprimer comme la somme de deux idempotents centraux orthogonaux.*

Une décomposition $\Lambda[\mathsf{G}] = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ de $\Lambda[\mathsf{G}]$ en somme directe d'idéaux bilatères correspond à une écriture $1 = e_1 + \cdots + e_n$ de 1 en somme d'idempotents centraux orthogonaux. Cette correspondance est donnée par $B_i = e_i\Lambda[\mathsf{G}]$. Les idéaux indécomposables de cette décomposition sont appelés des blocs et correspondent à des idempotents centraux primitifs.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif défini sur k. Soit $\mathbf{P}$ un sous-groupe parabolique de radical unipotent $\mathbf{U}$ et supposons que $\mathbf{P}$ contienne un Levi F-stable $\mathbf{L}$. On associe alors à ces données la variété de Deligne-Lusztig $Y_{\mathbf{P}}$ définie par

$$Y_{\mathbf{P}} = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U}, g^{-1}\mathsf{F}(g) \in \mathbf{U}\mathsf{F}(\mathbf{U})\}.$$

C'est une variété définie sur $\overline{k}$ avec une action à gauche de $\mathsf{G} := \mathbf{G}^{\mathsf{F}}$ donnée par $(\gamma, g\mathbf{U}) \mapsto \gamma g\mathbf{U}$ et une action à droite de $\mathsf{L} := \mathbf{L}^{\mathsf{F}}$ donnée par $(g\mathbf{U}, \delta) \mapsto g\delta\mathbf{U}$. Les méthodes de cohomologie étale permettent alors de définir l'induction et la restriction de Deligne-Lusztig :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\mathsf{L}) \longrightarrow \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\mathsf{G}),$$
$$^*\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}} : \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\mathsf{G}) \longrightarrow \mathbb{Z}\,\mathrm{Irr}(\mathsf{L}).$$

Notons que lorsque $\mathbf{P}$ est aussi F-stable, nous retrouvons l'induction et la restriction de Harish-Chandra.

Si $\mathbf{T}$ un tore sur k, $\mathbf{B}$ est un Borel contenant $\mathbf{T}$ et $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{\mathsf{F}})$, nous pouvons considérer $\mathcal{R}_{\mathbf{T}\subset\mathbf{B}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ qui nous donne un sous-ensemble de $\mathrm{Irr}(\mathsf{G})$. Cependant si $(\mathbf{T}', \theta')$ est une autre paire comme ci-dessus, les ensembles obtenus ne sont pas disjoints. Il faut donc regrouper les paires $(\mathbf{T}, \theta)$. Pour cela, nous rappelons dans l'annexe D qu'il existe une bijection entre les classes de conjugaison rationnelles de paires $(\mathbf{T}, \theta)$ et les classes de conjugaison rationnelles de paires $(\mathbf{T}^*, s)$, où $\mathbf{T}^*$ est un tore F^*-stable dans $\mathbf{G}^*$, le dual de $\mathbf{G}$ sur k, et $s \in (\mathbf{T}^*)^{\mathsf{F}^*}$.

Nous pouvons maintenant définir les séries de Deligne-Lusztig. Soit s une classe de conjugaison semi-simple dans $\mathsf{G}^* := (\mathbf{G}^*)^{\mathsf{F}}$. Une représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathsf{G})$ appartient à la série rationnelle attachée à s si π apparait dans $\mathcal{R}_{\mathbf{T}\subset\mathbf{B}}^{\mathbf{G}}(\theta)$ où $(\mathbf{T}, \theta)$ est une paire en dualité avec $(\mathbf{T}^*, t)$ avec t dans la classe de conjugaison rationnelle de s, et $\mathbf{B}$ est un Borel contenant $\mathbf{T}$. On note alors $\mathcal{E}(\mathsf{G}, s)$ l'ensemble des telles séries rationnelles qui nous donne une partition de $\mathrm{Irr}(\mathsf{G})$:

$$\mathrm{Irr}(\mathsf{G}) = \bigsqcup_{s\in\mathsf{G}^*_{ss}} \mathcal{E}(\mathsf{G}, s).$$

Notons $e_{s,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathsf{G}} \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathsf{G}]$ l'idempotent central sélectionnant $\mathcal{E}(\mathsf{G}, s)$. On a alors $1 = \sum_s e_{s,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathsf{G}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathsf{G}]$. Nous pouvons alors regrouper les idempotents précédents de la façon suivante pour obtenir des idempotents dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{G}]$.

Proposition ([BR03] théorème A' et remarque 11.3)**.** *Si s se compose d'éléments ℓ-réguliers, alors nous avons un idempotent $e_{s,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^{\mathsf{G}} = \sum_{s'\backsim_\ell s} e_{s',\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathsf{G}} \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{G}]$, où $s' \backsim_\ell s$ signifie que s est la partie ℓ-régulière de s'.*

Résultats de cette thèse

On suppose que $\mathbf{G}$ est déployé sur l'extension non-ramifiée maximale de F, c'est-à-dire que $\mathbf{G}$ est une forme intérieure d'un groupe non-ramifié.

Décomposition inertielle

Grâce à la notion de systèmes cohérents d'idempotents sur l'immeuble de Bruhat-Tits de G, nous montrons dans le chapitre 1, en niveau zéro, la décomposition indéxée par des paramètres inertiels annoncée précédemment. Nous démontrons également certaines propriétés vérifiées par ses facteurs directs.

Notons I_F^Λ le sous-groupe fermé maximal de I_F de pro-ordre inversible dans Λ et $\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ le sous-ensemble de $\Phi(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ des paramètres modérés, c'est-à-dire triviaux

sur l'inertie sauvage. Nous montrons dans les sections 1.4 et 1.3 le théorème suivant.

Théorème. *Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F et déployé sur une extension non-ramifiée de F. Alors la catégorie de niveau 0 se décompose en*

$$\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G) = \prod_{\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})} \mathrm{Rep}^\phi_\Lambda(G).$$

De plus, les catégories $\mathrm{Rep}^\phi_\Lambda(G)$ vérifient les propriétés suivantes :

1. *Lien entre $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$: Soit $\phi \in \Phi_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\boldsymbol{G})$, alors*

$$\mathrm{Rep}^\phi_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G) \cap \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{\phi'} \mathrm{Rep}^{\phi'}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$$

   où le produit est pris sur les $\phi' \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ tels que $\phi'_{|I_F^{(\ell)}} \sim \phi$.

2. *Représentations irréductibles de $\mathrm{Rep}^\phi_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$: Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$. Alors $\pi \in \mathrm{Rep}^\phi_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ si et seulement s'il existe $\boldsymbol{T}$ un tore maximal non-ramifié de $\boldsymbol{G}$, $\phi_{\boldsymbol{T}} \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{T})$ et x un sommet de l'immeuble de G (sur F) qui est dans l'appartement de $\boldsymbol{T}$ (sur F^{nr}) tels que*

   (a) $\langle \pi^{G_x^+}, \mathcal{R}^{\overline{\mathbf{G}}_x}_{\overline{\mathbf{T}}_x}(\theta_{\boldsymbol{T}})\rangle \neq 0$

   (b) $\iota \circ \phi_{\boldsymbol{T}} \sim \phi$

   où ι est un plongement $\iota : {}^L\boldsymbol{T} \hookrightarrow {}^L\boldsymbol{G}$, G_x° est le sous-groupe parahorique en x, G_x^+ son pro-p-radical, $\overline{\mathbf{G}}_x \simeq G_x^\circ/G_x^+$ le quotient réductif, $\overline{\mathbf{T}}_x$ est le tore induit par $\boldsymbol{T}$ sur $\overline{\mathbf{G}}_x$, $\mathcal{R}^{\overline{\mathbf{G}}_x}_{\overline{\mathbf{T}}_x}$ est l'induction de Deligne-Lusztig et $\theta_{\boldsymbol{T}}$ est le caractère de niveau 0 de $\boldsymbol{T}^{\mathsf{F}}$ correspondant à $\phi_{\boldsymbol{T}}$ via la correspondance de Langlands pour les tores restreinte à l'inertie.

   (Notons que l'on obtient également une description de $\mathrm{Rep}^\phi_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G) \cap \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ grâce au (1).)

3. *Compatibilité à l'induction et à la restriction parabolique : Soient $\boldsymbol{P}$ un sous-groupe parabolique de $\boldsymbol{G}$ ayant pour facteur de Levi $\boldsymbol{M}$ et $\iota : {}^L\boldsymbol{M} \hookrightarrow {}^L\boldsymbol{G}$ un plongement.*

   (a) Soit $\phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{M})$, alors $i_P^G(\mathrm{Rep}^{\phi_M}_\Lambda(M)) \subseteq \mathrm{Rep}^{\iota\circ\phi_M}_\Lambda(G)$, où i_P^G désigne l'induction parabolique.

   (b) Soit $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$, alors $r_P^G(\mathrm{Rep}^\phi_\Lambda(G)) \subseteq \prod_{\phi_M} \mathrm{Rep}^{\phi_M}_\Lambda(M)$, où r_P^G désigne la restriction parabolique et le produit est pris sur les $\phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{M})$ tels que $\iota \circ \phi_M \sim \phi$.

   (c) Soit $\phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{M})$. Posons $\phi = \iota \circ \phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$ et notons $C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi)$ le centralisateur dans $\widehat{\boldsymbol{G}}$ de l'image de ϕ. Alors si $C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi) \subseteq \iota(\widehat{\boldsymbol{M}})$ le foncteur i_P^G réalise une équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}^{\phi_M}_\Lambda(M)$ et $\mathrm{Rep}^\phi_\Lambda(G)$.

Cette décomposition ressemble à celle de Deligne-Lusztig. En effet nous montrons qu'il y a une bijection entre $\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}$, où $\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda}$ désigne l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples d'ordre inversible dans Λ. Nous expliquerons davantage le lien avec Deligne-Lusztig dans la suite.

Notons que cette décomposition est indexée par des paramètres à la Langlands mais est construite indépendamment de la correspondance de Langlands locale. Elle est vraie en particulier pour n'importe quel groupe $\mathbf{G}$ qui se déploie sur une extension non-ramifiée de F, même si la correspondance de Langlands locale n'est pas connue pour ce groupe. Lorsque G est un groupe classique non-ramifié, c'est-à-dire GL_n, Sp_{2n}, SO_{2n+1}, SO_{2n}, SO^*_{2n} (groupe spécial orthogonal quasi-déployé associé à une extension quadratique non-ramifiée F'/F) ou $\mathrm{U}_n(F'/F)$, et $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ alors on a la correspondance de Langlands locale, et on peut vérifier la compatibilité à cette dernière de la décomposition précédente. La section 1.4.5 démontre le théorème suivant.

Théorème. *Supposons que $\boldsymbol{G}$ est un groupe classique non-ramifié, $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $p \neq 2$. On obtient alors également les propriétés suivantes :*

1. *Compatibilité à la correspondance de Langlands : Soient $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ une représentation irréductible de niveau 0 et $\phi \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$. Notons φ_π le paramètre de Langlands associé à π via la correspondance de Langlands locale pour les groupes classiques ([HT01] [Hen00] [Art13] [Mok15] [KMSW14]). Alors*

$$\pi \in \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) \Leftrightarrow \varphi_{\pi|I_F} \sim \phi.$$

2. *Blocs stables : Soit $\phi \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ tel que $C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi)$ soit connexe. Alors $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ est un "bloc stable" (c'est-à-dire, correspond à un idempotent primitif du centre de Bernstein stable au sens de Haines [Hai14]).*

Néanmoins la décomposition $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G) = \prod_{\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})} \mathrm{Rep}^\phi_\Lambda(G)$ n'est en général pas la décomposition en blocs, ni même la décomposition la plus fine que puisse donner la méthode. Dans le chapitre 2, nous explicitons cette décomposition la plus fine, et nous en donnons deux interprétations, une première du côté du groupe à la Deligne-Lusztig grâce à des paires $(\mathbf{S}, \theta)$ (que l'on définit ci-dessous) puis une deuxième du côté dual à la Langlands.

Décompositions grâce aux paires $(\mathbf{S}, \theta)$

Définissons $\mathscr{P}_\Lambda = \{(\mathbf{S}, \theta)\}$ comme l'ensemble des paires $(\mathbf{S}, \theta)$, où $\mathbf{S}$ est un F-tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$ et $\theta : {}^0\mathbf{S}(F)/\mathbf{S}(F)^+ \to \overline{\mathbb{Q}}^*_\ell$ est un caractère d'ordre inversible dans Λ (${}^0\mathbf{S}(F)$ est le sous-groupe borné maximal de $\mathbf{S}(F)$ et $\mathbf{S}(F)^+$ est son pro-p radical).

Nous définissons sur $\mathscr{P}_\Lambda$ trois relations d'équivalence $\sim_\infty$, $\sim_r$ et $\sim_e$ de la façon suivante. On a $(\mathbf{S}, \theta) \sim_\infty (\mathbf{S}', \theta')$ s'il existe $g \in \mathbf{G}(F^{nr})$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que ${}^g\mathbf{S}(F_m) = \mathbf{S}'(F_m)$ et $g(\theta \circ N_{F_m/F}) = \theta' \circ N_{F_m/F}$ (où F_m est l'extension non-ramifiée de degré m de F et $N_{F_m/F}$ est la norme). On définit $\sim_r$ (resp. $\sim_e$) en rajoutant de plus la condition $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ (resp. et $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^a(\mathbf{S}, \theta)$) (où $N^a(\mathbf{S}, \theta) \subseteq N^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ sont certains sous-groupes du normalisateur de $\mathbf{S}$ définis en 2.2.4). Notons que $\sim_e \Rightarrow \sim_r \Rightarrow \sim_\infty$.

Soit $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$, notons $\mathrm{Rep}^{(\mathbf{S},\theta)}_\Lambda(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ des objets dont chacun des sous-quotients irréductibles π vérifie qu'il existe $(\mathbf{S}', \theta') \sim_e (\mathbf{S}, \theta)$ et σ une facette F-stable de l'appartement de $\mathbf{S}'$ tels que $\langle {}^*\mathcal{R}^{\overline{\mathbf{G}}_\sigma}_{\mathbf{S}'}(\pi^{G^+_\sigma}), \theta' \rangle_{\mathsf{S}'_\Lambda} \neq 0$, où G^+_σ est le pro-p radical du sous-groupe parahorique de G en σ et S'_Λ est le sous-groupe maximal de S' d'ordre inversible dans Λ. Notons que $\mathrm{Rep}^{(\mathbf{S},\theta)}_\Lambda(G)$ ne dépend que de la $\sim_e$-classe d'équivalence de $(\mathbf{S}, \theta)$.

On obtient alors le théorème suivant, démontré dans la section 2.2,

Théorème. *Les catégories* $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S},\theta)}(G)$ *sont non nulles et fournissent une décomposition*

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{[\boldsymbol{S},\theta]_e \in \mathscr{P}_\Lambda/\sim_e} \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S},\theta)}(G).$$

Remarque. 1. $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ est "minimale pour la méthode utilisée", c'est-à-dire en utilisant Deligne-Lusztig et des systèmes d'idempotents. Cependant, ce n'est pas un bloc en général.

2. Lorsque $G = \mathrm{GL}_n(F)$ nous avons $\sim_e = \sim_r = \sim_\infty$ et $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ est un bloc.

Notons que si $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}_\Lambda$ plus faible que $\sim_e$ (en particulier $\sim_r$ et $\sim_\infty$) alors en regroupant les catégories $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ selon la $\sim$-équivalence, nous obtenons une décomposition de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$. Comme dans la théorie de Deligne-Lusztig, nous pouvons associer à une paire $(\mathbf{S},\theta)$ une classe de conjugaison semi-simple dans le dual sur k, le corps résiduel de F, et nous montrons au paragraphe 2.3.1 qu'on obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \arrow[d] \\
\mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[r, hook] & (\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}
\end{tikzcd}$$

où $\mathbf{G}^*$ désigne le dual de $\mathbf{G}$ sur k, $\mathsf{G}^* = \mathbf{G}^*(k)$ et la notation $(\cdot)_{ss,\Lambda}$ désigne l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples d'ordre inversible dans Λ. Notons que lorsque le groupe $\mathbf{G}$ est quasi-déployé, les injections horizontales sont des bijections. Ce diagramme nous fournit en particulier des décompositions de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$ indexées par $(\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}$ et $\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ dont nous énoncerons les propriétés dans la section suivante. Pour étudier la relation de $\sim_e$-équivalence, nous ne pouvons pas rester du côté des groupes finis et nous aurons besoin de rajouter des données cohomologiques provenant du groupe p-adique.

Interprétation duale de la décomposition associée à $\sim_\infty$

La relation $\sim_\infty$ permet de retrouver la décomposition inertielle précédente. Construisons à partir de $(\mathbf{S},\theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$ un paramètre inertiel $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$. Notons $\tilde{\theta}$ un caractère de $\mathbf{S}(F)$ qui relève θ et $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{S}$ le paramètre de Langlands associé à $\tilde{\theta}$ via la correspondance de Langlands locale pour les tores. Choisissons ι un plongement (non-canonique) $\iota : {}^L\mathbf{S} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ qui nous permet d'obtenir un paramètre de Langlands pour $\mathbf{G}$: $\iota \circ \varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}$. On pose alors $\phi := (\iota \circ \varphi)_{|I_F^\Lambda}$ ce qui nous donne une application $\mathscr{P}_\Lambda \to \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$. Nous démontrons dans la partie 2.3 que cette application induit une injection

$$\mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \hookrightarrow \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}),$$

d'image les paramètres "relevants", donnant à son tour une décomposition

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})} \mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G).$$

Nous retrouvons de cette manière la décomposition inertielle précédente. Étudions alors plus en détail les relations $\sim_r$ et $\sim_e$ qui raffineront cette dernière.

Interprétation duale de la décomposition associée à $\sim_r$

Introduisons l'ensemble $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ des paramètres inertiels "augmentés". Soit $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$. Notons $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ le centralisateur de $\phi(I_F^\Lambda)$ dans $\widehat{\mathbf{G}}$ qui est un groupe réductif, possiblement non connexe. Par définition ϕ peut s'étendre en un paramètre $\varphi : W_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$ qui permet de définir $\widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi) := C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)\varphi(W_F)$, un sous-groupe de ${}^L\mathbf{G}$ indépendant du choix de φ. Notons maintenant $\pi_0(\phi) := \pi_0(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi))$ et $\widetilde{\pi}_0(\phi) := \widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)/C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$. On obtient alors une suite exacte scindée

$$0 \longrightarrow \pi_0(\phi) \longrightarrow \widetilde{\pi}_0(\phi) \longrightarrow \langle\widehat{\vartheta}\rangle \longrightarrow 0.$$

Appelons $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ l'ensemble des couples (ϕ, σ) à $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison près, où $\phi : I_F^\Lambda \to {}^L\mathbf{G}$ est un paramètre inertiel modéré et $\sigma : \langle\widehat{\vartheta}\rangle \to \widetilde{\pi}_0(\phi)$ est une section à la suite exacte précédente.

Avec les mêmes notations que dans la section précédente, on construit une application $\mathscr{P}_\Lambda \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ en envoyant $(\mathbf{S}, \theta)$ sur (ϕ, σ) où $\phi := (\iota \circ \varphi)_{|I_F^\Lambda}$ et $\sigma(\widehat{\vartheta}) := (\iota \circ \varphi)(\mathrm{Frob})$. Nous démontrons alors dans la partie 2.3 le théorème suivant.

Théorème. *L'application $\mathscr{P}_\Lambda \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$ induit une injection*

$$\mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \hookrightarrow \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$$

dont l'image est le sous-ensemble des paramètres "relevants" (en particulier elle est bijective lorsque $\boldsymbol{G}$ est quasi-déployé). La décomposition obtenue

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{(\phi,\sigma)\in\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})} \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma)}(G)$$

possède les propriétés suivantes

1. *Elle est compatible à l'induction et la restriction parabolique (voir le théorème 2.3.6.2 pour un énoncé plus précis).*
2. *Compatibilité entre les décompositions sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$:*

$$\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^{(\phi,\sigma)}(G) \cap \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{(\phi',\sigma')} \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{(\phi',\sigma')}(G)$$

où le produit est pris sur les $(\phi', \sigma') \in \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ s'envoyant sur (ϕ, σ) par l'application naturelle $\widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G}) \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\boldsymbol{G})$ (obtenue en restreignant à $I_F^{(\ell)}$, voir section 2.3.5 pour plus de détails).

Par ailleurs l'application qui à φ associe $\phi = \varphi_{|I_F^\Lambda}$ et $\sigma(\widehat{\vartheta}) = \varphi(\mathrm{Frob})$ induit une bijection $\mathcal{B}_{m,\Lambda}^{st} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$ (voir section 2.3.7), où $\mathcal{B}_{m,\Lambda}^{st}$ désigne l'ensemble des paramètres modérés $\varphi : W_F \to {}^L\boldsymbol{G}$ à équivalence inertielle près (comme dans [Hai14] définition 5.3.3, voir aussi section 2.3.7). Nous avons alors une nouvelle interprétation de la décomposition précédente

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{(\phi,\sigma)\in\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})} \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma)}(G) = \prod_{[\varphi]\in\mathcal{B}_{m,\Lambda}^{st}} \mathrm{Rep}_\Lambda^{[\varphi]}(G).$$

De même que précédemment, cette décomposition est construite indépendamment de la correspondance de Langlands locale. Il est alors souhaitable de vérifier la compatibilité à cette dernière. Nous montrons alors dans la partie 2.3 le théorème suivant.

Théorème. *Soit G un groupe classique non-ramifié, $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $p \neq 2$.*

1. *Alors la décomposition $\mathrm{Rep}^0_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{[\varphi]\in\mathcal{B}^{st}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}} \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ est compatible à la correspondance de Langlands locale. C'est-à-dire que si π est une représentation irréductible, alors $\pi \in \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ si et seulement si $\varphi_{\pi|W_F} \in [\varphi]$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π.*
2. *Cette décomposition est la décomposition de $\mathrm{Rep}^0_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ en "blocs stables". C'est-à-dire que ces facteurs correspondent à des idempotents primitifs du centre de Bernstein stable.*

Remarquons que le lien avec les classes de conjugaisons semi-simples est donné par un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[d] & \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}) \arrow[d] \\ (\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}} \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}) \end{tikzcd} .$$

Interprétation duale de la décomposition associée à $\sim_e$

Pour paramétrer $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_e$ nous avons besoin de rajouter des données cohomologiques. Nous ne le faisons que pour les formes intérieures pures des groupes non-ramifiés. Supposons donc que $\mathbf{G}$ est non-ramifié (c'est-à-dire on rajoute l'hypothèse quasi-déployé). Soit $\omega \in H^1(F, \mathbf{G})$, à qui correspond $\mathbf{G}_\omega$, une forme intérieure pure de $\mathbf{G}$. À partir de $(\phi, \sigma) \in \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$, nous construisons dans la section 2.4.2, $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$ un groupe réductif non-ramifié, possiblement non-connexe (lorsque $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ est connexe, $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$ est un groupe dual à $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ dont la F-structure est définie grâce à l'action $W_F \to \mathrm{Out}(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi))$ de conjugaison par $\varphi(w)$ où $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}$ relève ϕ). Nous construisons également une application

$$h_{\phi,\sigma} : \tilde{H}^1(F, \mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}) \longrightarrow H^1(F, \mathbf{G})$$

où $\tilde{H}^1(F, \mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}) := Im[H^1(F, \mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}) \to H^1(F, \mathbf{G}_{\phi,\sigma})]$. La partie 2.4 nous donne alors le théorème suivant.

Théorème. *Nous avons une bijection (qui dépend du choix d'un sommet hyperspécial dans l'immeuble de Bruhat-Tits de G)*

$$\mathcal{C}^r(\phi, \sigma, G_\omega)/\sim_e \xrightarrow{\sim} h^{-1}_{\phi,\sigma}(\omega),$$

où $\mathcal{C}^r(\phi, \sigma, G_\omega)$ est la classe de $\sim_r$-équivalence image réciproque de (ϕ, σ) par l'injection $\mathscr{P}_\Lambda(G_\omega)/\sim_r \hookrightarrow \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$. Celle-ci nous fournit une décomposition

$$\mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma)}_\Lambda(G_\omega) = \prod_{\alpha\in h^{-1}_{\phi,\sigma}(\omega)} \mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma,\alpha)}_\Lambda(G_\omega).$$

De plus

1. *Cette décomposition est compatible à l'induction et la restriction parabolique.*
2. *Nous avons*

$$\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^{(\phi,\sigma,\alpha)}(G_\omega) \cap \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G_\omega) = \prod_{(\phi',\sigma',\alpha')} \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{(\phi',\sigma',\alpha')}(G_\omega)$$

où le produit est pris sur les $(\phi',\sigma') \in \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ *s'envoyant sur* (ϕ,σ) *par* $\widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G}) \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\boldsymbol{G})$ *et* $\alpha' \in h_{\phi,\sigma}^{-1}(\omega)$ *s'envoyant sur* α *par l'application naturelle* $\tilde{H}^1(F, \boldsymbol{G}^\circ_{\phi',\sigma'}) \to \tilde{H}^1(F, \boldsymbol{G}^\circ_{\phi,\sigma})$ *(obtenue à partir de* $\mathrm{Irr}[\pi_0(Z(C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi')^\circ)^{\sigma'(\widehat{\vartheta})})] \to \mathrm{Irr}[\pi_0(Z(C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi)^\circ)^{\sigma(\widehat{\vartheta})})]$ *et de l'isomorphisme de Kottwitz).*

Remarque. 1. Cette décomposition est la plus fine que l'on puisse obtenir avec des systèmes d'idempotents et la théorie de Deligne-Lusztig.

2. Elle démontre, dans le cas du niveau zéro, une conjecture énoncée par Dat dans [Dat17].
3. Lorsque $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ est connexe, nous nous attendons à une équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,1,\alpha)}(G_\omega)$ et $\mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi}((G_{\phi,1})_\alpha)$.

Lorsque $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, nous nous attendons à une compatibilité de ce théorème à la correspondance de Langlands locale enrichie (à un paramètre de Langlands enrichi (φ,η) où $\eta \in \mathrm{Irr}(\pi_0(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)))$, on associe un α en restreignant η à $\pi_0(Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\sigma(\widehat{\vartheta})})$ et en utilisant l'isomorphisme de Kottwitz). Nous le vérifions partiellement pour φ un paramètre de Langlands modéré elliptique en position générale (elliptique signifie que l'image de φ n'est pas contenue dans un sous-groupe de Levi propre de ${}^L\mathbf{G}$ et en position générale que le centralisateur de $\varphi(I_F)$ dans $\widehat{\mathbf{G}}$ est un tore) et la correspondance de Langlands locale de DeBacker-Reeder ([DR09]).

Malgré le fait que ces sous-catégories soient minimales pour la méthode utilisée, elles ne sont pas des blocs. En effet la représentation supercuspidale Θ_{10} de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Q}_p)$, induite depuis l'inflation à $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}_p)$ de la représentation cuspidale unipotente θ_{10} de $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_p)$, est dans $\mathrm{Rep}_\Lambda^1(G)$, le facteur direct associé au paramètre inertiel trivial, qui ne se décompose pas davantage.

Dans cette thèse, nous nous limitons à l'étude de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$ la catégorie de niveau 0. On peut cependant espérer que les travaux menés sur la théorie des types permettront d'en déduire des résultats sur $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$. En effet Chinello montre dans [Chi17] que l'on a une équivalence de catégories entre chaque bloc de $\mathrm{Rep}_\Lambda(\mathrm{GL}_n(F))$ et un bloc de niveau 0 de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G')$ où G' est un groupe de la forme $G' = \prod_{i=1}^r \mathrm{GL}_{n_i}(D_i)$ avec pour $i \in \{1,\cdots,r\}$, n_i un entier et D_i une algèbre à division centrale de dimension finie sur un corps p-adique. Des travaux en cours de Stevens et Kurinczuk tentent d'étendre ces résultats à un G plus général.

Systèmes de coefficients sur l'immeuble

Dans cette section G est un groupe p-adique quelconque. Toutes les catégories dans cette thèse sont construites à partir de systèmes d'idempotents cohérents sur BT, l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple de G, comme introduit dans [MS10]. À un tel système, nous pouvons associer une sous-catégorie de Serre de $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$. La stratégie de démonstration

de ce fait dans [MS10] repose sur l'étude d'un complexe de chaînes associé à un système de coefficients obtenu à partir du système d'idempotents.

Soit R un anneau commutatif dans lequel p est inversible. On appelle Γ un système de coefficients sur BT à coefficients dans R un foncteur contravariant de la catégorie $(\mathrm{BT}, \leq)$ vers la catégorie des R-modules, c'est-à-dire, c'est la donnée de R-modules $(V_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ et de R-morphismes $\varphi_\tau^\sigma : V_\sigma \to V_\tau$ si τ est une facette de σ, soumis aux conditions : $\varphi_\sigma^\sigma = id$, et $\varphi_\omega^\tau \circ \varphi_\tau^\sigma = \varphi_\omega^\sigma$. Nous pouvons associer à Γ un complexe de chaînes cellulaire gradué $C_*(\mathrm{BT}, \Gamma) = \bigoplus_{\sigma\in\mathrm{BT}} V_\sigma$ (voir la section 3.1 pour plus de détails et la définition de la différentielle). L'homologie de $C_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$ est alors notée $H_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$.

Soit $e = (e_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ un système d'idempotents de $\mathcal{H}_R(G)$, l'algèbre de Hecke à coefficients dans R, vérifiant des conditions de cohérence comme dans [MS10] (voir aussi la définition 1.1.0.1). On suppose de plus que si x est un sommet de σ alors $e_\sigma \in \mathcal{H}_R(G_x)$, où G_x est le fixateur de x dans G. Notons $\mathrm{Rep}_R^e(G)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}_R(G)$ des objets V tels que $V = \sum_{x\in\mathrm{BT}_0} e_x V$, où BT_0 désigne les sommets de BT.

Un e-système de coefficients est alors un système de coefficients G-équivariant tel que $\varphi_x^\sigma : V_\sigma \to V_x$ induise un isomorphisme $V_\sigma \xrightarrow{\sim} e_\sigma(V_x)$. On note $\mathrm{Coef}_e(G, R)$ la catégorie des e-systèmes de coefficients.

Soit V une R-représentation lisse de G. On peut alors lui associer $\Gamma(V)$ un e-système de coefficients en posant $V_\sigma = e_\sigma(V)$. Nous généralisons alors dans le chapitre 3, un résultat démontré dans [Wan17] pour GL_n, au cas d'un groupe p-adique.

Théorème. *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_R^e(G) & \to & \mathrm{Coef}_e(G, R) \\ V & \mapsto & \Gamma(V) \end{array}$$

admet un quasi-inverse $\Gamma \mapsto H_0(\mathrm{BT}, \Gamma)$*, donc induit une équivalence de catégories.*

Remarque. Les catégories précédentes $(\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G), \mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi}(G), \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma)}(G), \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma,\alpha)}(G))$ sont construites à partir de systèmes d'idempotents cohérents et sont donc équivalentes à une catégorie de systèmes de coefficients par le théorème précédent.

Vers des ℓ-blocs

Les décompositions obtenues précédemment ne sont malheureusement pas des décompositions en blocs. Dans le dernier chapitre de cette thèse, le chapitre 4, nous tentons d'obtenir des blocs à partir de systèmes cohérents d'idempotents. Nous nous intéressons à quelques exemples et en particulier à la catégorie unipotente.

Appelons, comme dans [Lat17], types non-raffinés de niveau zéro les couples (σ, π), où $\sigma \in \mathrm{BT}$ et π est une représentation cuspidale irréductible de $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$. Notons $\mathcal{T}(G)$ l'ensemble des types non-raffinés de niveau zéro, à G-conjugaison près. Nous obtenons dans la section 4.1 la proposition suivante

Proposition. *Nous avons la décomposition suivante*

$$\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^0(G) = \prod_{\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(G)} \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathfrak{t}}(G).$$

Si G est de plus semisimple et simplement connexe, alors la catégorie $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\mathfrak{t}}(G)$ *est un bloc.*

Pour obtenir des décompositions en ℓ-blocs nous avons besoin de rajouter des hypothèses sur ℓ. Nous dirons que ℓ est grand pour G, si ℓ est un nombre premier qui ne divise pas q et tel que pour tout $x \in \mathrm{BT}_0$ soit ℓ ne divise pas $|\overline{\mathsf{G}}_x|$, soit ℓ divise $|\overline{\mathsf{G}}_x|$ mais ne divise pas $|W_x\langle\phi\rangle|$, où ϕ et l'automorphisme de la donnée radicielle de $\overline{\mathsf{G}}_x$ induit par le Frobenius F. Nous obtenons, dans le chapitre 4, les décompositions en ℓ-blocs, pour ℓ grand, des catégories suivantes

1. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$, pour G semisimple et simplement connexe et $\ell | q-1$.
2. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{SL}_n(F))$.
3. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_{2n}(F))$, pour $\ell | q^n+1$.
4. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_4(F))$.
5. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_6(F))$.
6. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_8(F))$.

Notons que quand $G = \mathrm{SL}_n(F)$ ou $G = \mathrm{Sp}_{2n}(F)$ l'hypothèse ℓ grand est équivalente à $\ell > n$.

Notations

Soit F un corps p-adique et k son corps résiduel. Notons $q = |k|$. On fixe une clôture algébrique $\overline{F}$ de F et on note F^{nr} l'extension non-ramifiée maximale de F dans $\overline{F}$. On appellera $\mathfrak{o}_F$ (resp. $\mathfrak{o}_{F^{nr}}$) l'anneau des entiers de F (resp. F^{nr}). Notons également $\overline{k}$ le corps résiduel de F^{nr} qui est alors une clôture algébrique de k.

On adopte les conventions d'écriture suivantes. Nous désignerons par $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F que l'on identifiera avec $\mathbf{G}(\overline{F})$ et l'on notera $G := \mathbf{G}(F)$ et $G^{nr} := \mathbf{G}(F^{nr})$. On appellera $\widehat{\mathbf{G}}$ son groupe dual sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Pour les groupes réductifs connexes sur k, nous utiliserons la police d'écriture G et l'on identifiera G avec $\mathsf{G}(\overline{k})$ et de même on note $\mathsf{G} := \mathsf{G}(k)$. Le groupe dual de $\mathbf{G}$ sur k sera noté G^*.

On notera $\mathcal{G}_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ le groupe de Galois absolu de F, W_F le groupe de Weil absolu de F et I_F le sous-groupe d'inertie. Le groupe dual de Langlands ${}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est défini par ${}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) := \widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \rtimes \langle\widehat{\vartheta}\rangle$, où $\widehat{\vartheta} \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbf{G}})$ est l'automorphisme induit par l'action d'un Frobenius inverse, comme expliqué dans l'introduction, page 12.

On prend ℓ un nombre premier différent de p, et on pose $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. On note $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ la catégorie abélienne des représentations lisses de G à coefficients dans Λ et $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ la sous-catégorie pleine des représentations de niveau 0.

Si H désigne l'ensemble des points d'un groupe algébrique à valeur dans un corps alors H_{ss} désigne l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples dans H. On notera également $H_{ss,\Lambda}$ les éléments de H_{ss} d'ordre inversible dans Λ.

On fixe dans toute cette thèse un système compatible de racines de l'unité $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'} \xrightarrow{\sim} k^\times$ et $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Z}}_\ell^\times$.

Dans la suite $\mathbf{G}$ désignera un groupe réductif connexe défini sur F.

Liste des symboles

$\mathcal{A}(\mathbf{S}, F)$ appartement associé à $\mathbf{S}$ dans BT. 40

$\mathcal{A}_{(\mathbf{S},\theta)}$ appartement associé à $(\mathbf{S}, \theta)$. 78

$\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda}$ ensemble des paramètres de Weil modérés à équivalence inertiel près. 94

BT immeuble de Bruhat-Tits semi-simple associé à G. 33

BT_0 sommets de BT. 33

$\mathscr{C}_\Lambda$ ensemble des couples (σ, s). 65

$C_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$ complexe de chaînes cellulaire sur BT à coefficients Γ. 116

$\mathrm{Coef}_e(G, R)$ catégorie des e-systèmes de coefficients. 116

e système d'idempotents. 33

$e^{s,\Lambda}_\sigma$ idempotent. 36

e^+_σ idempotent associé à G^+_σ. 33

$\mathcal{E}(\mathbf{G}, s)$ série de Deligne-Lusztig. 35

F corps p-adique. 25

$\overline{F}$ clôture algébrique de F. 25

F^{nr} extension non-ramifiée maximale de F dans $\overline{F}$. 25

F Frobenius. 140

$\mathbf{G}$ groupe réductif connexe défini sur F. 25

G F points de $\mathbf{G}$. 25

G^{nr} F^{nr} points de $\mathbf{G}$. 25

G groupe réductif connexe défini sur k. 25

G k points de G. 25

$\widehat{\mathsf{G}}$ groupe dual de $\mathbf{G}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. 25

${}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ groupe dual de Langlands. 25

G^* groupe dual de $\mathbf{G}$ sur k. 25

$\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$ groupe réductif associé à (ϕ, σ). 104

$\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ quotient réductif en σ. 36

G_σ fixateur de σ. 33

G°_σ sous-groupe parahorique en σ. 33

G^+_σ pro-p-radical de G°_σ. 33

$\mathbf{G}_\omega$ forme intérieure pure de $\mathbf{G}$ associée à ω. 109

$\mathcal{G}_F$ groupe de Galois absolu de F. 25

$\mathcal{H}_R(G)$ algèbre de Hecke à coefficients dans R. 33

$h_{\phi,\sigma}$ application $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \to H^1(\mathsf{F}, G^{nr})$. 105

$H(\sigma,\tau)$ enveloppe polysimpliciale de σ et τ. 33

$H_*(\mathrm{BT},\Gamma)$ homologie de $C_*(\mathrm{BT},\Gamma)$. 116

$H^1(F,\mathbf{G})$ cohomologie Galoisienne. 141

I_F sous-groupe d'inertie. 25

$I_F^{(\ell)}$ ℓ-inertie. 40

k corps résiduel de F. 25

$\overline{k}$ clôture algébrique de k. 25

ℓ nombre premier différent de p. 25

Λ $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. 25

$N(\mathbf{S},\theta)$ sous-groupe de $N^{nr}(\mathbf{S})$ associé à $(\mathbf{S},\theta)$. 77

$N^\circ(\mathbf{S},\theta)$ sous-groupe de $N(\mathbf{S},\theta)$. 78

$N^a(\mathbf{S},\theta)$ sous-groupe de $N^\circ(\mathbf{S},\theta)$. 78

$\mathfrak{o}_F$ anneau des entiers de F. 25

p caractéristique de k. 25

P_F groupe d'inertie sauvage. 39

$\Phi({}^L\mathbf{G})$ paramètres de Langlands. 13

$\Phi(I_F, {}^L\mathbf{G})$ paramètres de Langlands inertiels. 39

$\Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G})$ paramètres de Langlands inertiels modérés. 39

$\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ ensemble des couples (ϕ,σ) avec ϕ modéré. 89

$\varphi^*_{\sigma,x}$ application entre les duaux des quotient réductifs en σ et x. 36

$\varphi^*_{g,\sigma}$ application entre les duaux des quotient réductifs en σ et $g\sigma$. 37

$\pi_0(\phi)$ groupe des composantes de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$. 89

$\widetilde{\pi}_0(\phi)$ extension de $\langle\widehat{\vartheta}\rangle$ par $\pi_0(\phi)$. 89

$\mathscr{P}_\Lambda$ ensemble des paires $(\mathbf{S},\theta)$. 69

$\mathscr{P}_\Lambda^{\mathbf{min}}$ ensemble des paires $(\mathbf{S},\theta)$ minimales. 74

$\mathscr{P}_\Lambda^*$ ensemble des paires $(\mathbf{S}^*,t)$. 83

q cardinal k. 25

$\mathrm{Rep}_R(G)$ catégorie des représentations lisses de G à coefficients dans R. 33

$\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ sous-catégorie de $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ de niveau 0. 38

$\mathrm{Rep}^{\mathcal{S}}_\Lambda(G)$ sous-catégorie de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ associée à $\mathcal{S}$. 38

$\mathrm{Rep}^{(\mathbf{S},\theta)}_\Lambda(G)$ sous-catégorie de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ associée à $(\mathbf{S},\theta)$. 70

$\mathcal{R}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}$ induction de Deligne-Lusztig. 16

${}^*\mathcal{R}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}$ restriction de Deligne-Lusztig. 16

$\mathcal{S}$ système de classes de conjugaison. 37

$\mathscr{S}_\Lambda$ ensemble des systèmes de classes de conjugaison. 65

$\mathscr{S}_\Lambda^c$ ensemble des systèmes de classes de conjugaison cohérents. 65

$\mathscr{S}_\Lambda^{\mathbf{min}}$ ensemble des systèmes 0-cohérents minimaux. 65

$[x, y]$ plus petit polysimplexe contenant $x \cup y$. 33

H_{ss} classes de conjugaison semi-simples dans H. 25

$H_{ss,\Lambda}$ éléments de H_{ss} d'ordre inversible dans Λ. 25

$\mathscr{T}_\Lambda$ ensemble des triplets $(\sigma, \mathbf{S}, \theta)$. 69

$\mathscr{T}_\Lambda^m$ sous-ensemble de $\mathscr{T}_\Lambda$ des triplets minisotropes. 71

$\mathscr{T}_\Lambda^e$ sous-ensemble de $\mathscr{T}_\Lambda$ des triplets elliptiques. 73

$\mathcal{T}(G)$ ensembles des types non-raffinés de niveau zéro. 126

$\mathcal{T}^1(G)$ sous-ensemble de $\mathcal{T}(G)$ des paires (σ, π) avec π unipotente. 131

$\mathcal{T}_\ell^1(G)$ sous-ensemble de $\mathcal{T}(G)$ des paires (σ, π) avec π ℓ-unipotente. 131

$\widehat{\vartheta}$ automorphisme de $\widehat{\mathbf{G}}$. 12

$\theta\langle m\rangle$ image de θ par $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}$. 77

W groupe de Weyl fini. 39

$\tilde{W}$ groupe de Weyl étendu. 40

W_F groupe de Weil absolu de F. 25

W_{σ_1} sous-groupe de $\tilde{W}$. 40

$\tilde{W}(\mathbf{S}, \theta)$ sous-groupe de $\tilde{W}(\mathbf{S})$ associé à $(\mathbf{S}, \theta)$. 77

$\tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ sous-groupe de $\tilde{W}(\mathbf{S}, \theta)$. 78

$W(\mathbf{S}, \theta)$ sous-groupe de $W(\mathbf{S})$ associé à $(\mathbf{S}, \theta)$. 77

$W^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ sous-groupe de $W(\mathbf{S}, \theta)$. 78

$W^a(\mathbf{S}, \theta)$ sous-groupe de W^a associé à $(\mathbf{S}, \theta)$. 78

$W_\sigma^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ sous-groupe de $W_\sigma(\mathbf{S})$. 79

$X^*(\mathbf{T})$ groupe des caractères de $\mathbf{T}$. 12

$X_*(\mathbf{T})$ groupe des co-caractères de $\mathbf{T}$. 12

$\widetilde{X}_\Lambda$ groupe. 85

$\sim_\infty$ relation d'équivalence sur $\mathscr{P}_\Lambda$. 77

$\sim_r$ relation d'équivalence sur $\mathscr{P}_\Lambda$. 78

$\sim_e$ relation d'équivalence sur $\mathscr{P}_\Lambda$. 78

Chapitre 1

Décomposition inertielle

Introduction

Décomposition inertielle

Dans ce chapitre nous introduisons la notion de système de classes de conjugaison 0-cohérent et expliquons comment fabriquer des sous-catégories de Serre à partir de ces derniers. L'objectif principal est d'obtenir la décomposition inertielle annoncée dans l'introduction et d'en démontrer les principales propriétés. Nous rappelons que I_F^Λ désigne le sous-groupe fermé maximal de I_F de pro-ordre inversible dans Λ et $\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ est l'ensemble des classes de $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison de morphismes continus $I_F^\Lambda \to {}^L\mathbf{G}$, triviaux sur l'inertie sauvage, qui admettent une extension à un L-morphisme de $\Phi({}^L\mathbf{G})$. Nous montrons alors dans les sections 1.4 et 1.3 le théorème suivant.

Théorème. *Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F et déployé sur une extension non-ramifiée de F. Alors la catégorie de niveau 0 se décompose en*

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})} \mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G).$$

De plus, les catégories $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ vérifient les propriétés suivantes :

1. *Lien entre $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$: Soit $\phi \in \Phi_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\boldsymbol{G})$, alors $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^\phi(G) \cap \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{\phi'} \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\phi'}(G)$ où le produit est pris sur les $\phi' \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ tels que $\phi'_{|I_F^{(\ell)}} \sim \phi$.*
2. *Représentations irréductibles de $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^\phi(G)$: Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$. Alors $\pi \in \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^\phi(G)$ si et seulement s'il existe $\boldsymbol{T}$ un tore maximal non-ramifié de $\boldsymbol{G}$, $\phi_{\boldsymbol{T}} \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{T})$ et x un sommet de l'immeuble de G (sur F) qui est dans l'appartement de $\boldsymbol{T}$ (sur F^{nr}) tels que*
   (a) $\langle \pi^{G_x^+}, \mathcal{R}_{\overline{\boldsymbol{T}}_x}^{\overline{\boldsymbol{G}}_x}(\theta_{\boldsymbol{T}})\rangle \neq 0$
   (b) $\iota \circ \phi_{\boldsymbol{T}} \sim \phi$
   où ι est un plongement $\iota : {}^L\boldsymbol{T} \hookrightarrow {}^L\boldsymbol{G}$, G_x° est le sous-groupe parahorique en x, G_x^+ son pro-p-radical, $\overline{G}_x \simeq G_x^\circ/G_x^+$ le quotient réductif, $\overline{\boldsymbol{T}}_x$ est le tore induit par $\boldsymbol{T}$ sur $\overline{G}_x$, $\mathcal{R}_{\overline{\boldsymbol{T}}_x}^{\overline{\boldsymbol{G}}_x}$ est l'induction de Deligne-Lusztig et $\theta_{\boldsymbol{T}}$ est le caractère de niveau 0 de $\boldsymbol{T}^{\mathbf{F}}$ correspondant à $\phi_{\boldsymbol{T}}$ via la correspondance de Langlands pour les tores restreinte à

l'inertie.
(Notons que l'on obtient également une description de $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G) \cap \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ *grâce au* (1)*.)*

3. *Compatibilité à l'induction et à la restriction parabolique : Soient* $\boldsymbol{P}$ *un sous-groupe parabolique de* $\boldsymbol{G}$ *ayant pour facteur de Levi* $\boldsymbol{M}$ *et* $\iota : {}^L\boldsymbol{M} \hookrightarrow {}^L\boldsymbol{G}$ *un plongement.*
   (a) *Soit* $\phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{M})$*, alors* $i_P^G(\mathrm{Rep}^{\phi_M}_\Lambda(M)) \subseteq \mathrm{Rep}^{\iota\circ\phi_M}_\Lambda(G)$*, où* i_P^G *désigne l'induction parabolique.*
   (b) *Soit* $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$*, alors* $r_P^G(\mathrm{Rep}^{\phi}_\Lambda(G)) \subseteq \prod_{\phi_M} \mathrm{Rep}^{\phi_M}_\Lambda(M)$*, où* r_P^G *désigne la restriction parabolique et le produit est pris sur les* $\phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{M})$ *tels que* $\iota \circ \phi_M \sim \phi$*.*
   (c) *Soit* $\phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{M})$*. Posons* $\phi = \iota \circ \phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$ *et notons* $C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi)$ *le centralisateur dans* $\widehat{\boldsymbol{G}}$ *de l'image de* ϕ*. Alors si* $C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi) \subseteq \iota(\widehat{\boldsymbol{M}})$ *le foncteur* i_P^G *réalise une équivalence de catégories entre* $\mathrm{Rep}^{\phi_M}_\Lambda(M)$ *et* $\mathrm{Rep}^{\phi}_\Lambda(G)$*.*

Nous montrons également, dans la section 1.4.5, la compatibilité à la correspondance de Langlands locale dans le cas des groupes classiques non-ramifiés et $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Théorème. *Supposons que* $\boldsymbol{G}$ *est un groupe classique non-ramifié,* $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ *et* $p \neq 2$*. On obtient alors également les propriétés suivantes*

1. *Compatibilité à la correspondance de Langlands : Soient* $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ *une représentation irréductible de niveau 0 et* $\phi \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$*. Notons* φ_π *le paramètre de Langlands associé à* π *via la correspondance de Langlands locale pour les groupes classiques ([HT01] [Hen00] [Art13] [Mok15] [KMSW14]). Alors*

$$\pi \in \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) \Leftrightarrow \varphi_{\pi|I_F} \sim \phi$$

2. *Blocs stables : Soit* $\phi \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ *tel que* $C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi)$ *soit connexe. Alors* $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ *est un "bloc stable" (c'est-à-dire, correspond à un idempotent primitif du centre de Bernstein stable au sens de Haines [Hai14]).*

Plan de ce chapitre

Ce chapitre se compose de 4 parties. La partie 1 rappelle les résultats sur les systèmes cohérents d'idempotents. Dans la seconde partie nous expliquons comment construire des idempotents à partir de la théorie de Deligne-Lusztig. Nous associons aux paramètres de l'inertie modérés des systèmes cohérents dans la troisième partie pour obtenir la décomposition du théorème précédent. La dernière partie a pour but de montrer les propriétés des facteurs directs ainsi obtenus. Les quatre premières propriétés découlent de la construction de ces catégories et la dernière repose sur les travaux de Moeglin [Moe14], Moussaoui [Mou15], Haines [Hai14], Lust et Stevens [LS16].

1.1 Système cohérent d'idempotents

Les diverses décompositions obtenues dans cette thèse sont construites à partir de systèmes cohérents d'idempotents. Cette partie à pour but de rappeler leur définition ainsi que les premières propriétés.

Soit F_1 une extension non-ramifiée de F. On note $\mathrm{BT}(F_1)$ l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple associé à $\mathbf{G}(F_1)$. L'immeuble est un complexe polysimplicial et l'on note $\mathrm{BT}_0(F_1)$ pour l'ensemble des polysimplexes de dimension 0, c'est-à-dire les sommets. Dans la suite on utilisera des lettres latines x,y,$\cdots$ pour parler des sommets et des lettres grecques pour parler des polysimplexes généraux σ,τ, $\cdots$. L'immeuble $\mathrm{BT}(F_1)$ est partiellement ordonné par la relation d'ordre $\sigma \leq \tau$ si σ est une facette de τ. Un ensemble de polysimplexes $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ est dit adjacent s'il existe un polysimplexe σ tel que $\forall i \in 1, \cdots, k$, $\sigma_i \leq \sigma$. Si x et y sont deux sommets adjacents on notera $[x, y]$ le plus petit polysimplexe contenant $x \cup y$. Notons également, pour σ,τ deux polysimplexes, $H(\sigma, \tau)$ l'enveloppe polysimpliciale de σ et τ, c'est-à-dire l'intersection de tous les appartements contenant $\sigma \cup \tau$.

Pour simplifier les notations nous noterons $\mathrm{BT} := \mathrm{BT}(F)$ et $\mathrm{BT}_0 := \mathrm{BT}_0(F)$.

Soit R un anneau commutatif dans lequel p est inversible. On munit G d'une mesure de Haar et on note $\mathcal{H}_R(G)$ l'algèbre de Hecke à coefficients dans R, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions de G dans R localement constantes et à support compact.

1.1.0.1 Définition. On dit qu'un système d'idempotents $e = (e_x)_{x \in \mathrm{BT}_0}$ de $\mathcal{H}_R(G)$ est cohérent si les propriétés suivantes sont satisfaites :

1. $e_x e_y = e_y e_x$ lorsque x et y sont adjacents.
2. $e_x e_z e_y = e_x e_y$ lorsque $z \in H(x, y)$ et z est adjacent à x.
3. $e_{gx} = g e_x g^{-1}$ quel que soit $x \in \mathrm{BT}_0$ et $g \in G$.

Soit $\mathrm{Rep}_R(G)$ la catégorie abélienne des représentations lisses de G à coefficients dans R. Grâce à un résultat de Meyer et Solleveld on a :

1.1.0.2 Théorème ([MS10], Thm 3.1)**.** *Soit $e = (e_x)_{x \in \mathrm{BT}_0}$ un système cohérent d'idempotents, alors la sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}_R^e(G)$ des objets V de $\mathrm{Rep}_R(G)$ tels que $V = \sum_{x \in \mathrm{BT}_0} e_x V$ est une sous-catégorie de Serre.*

Soit $\sigma \in \mathrm{BT}$. Notons G_σ le fixateur de σ. Celui-ci contient un sous-groupe appelé sous-groupe parahorique, que l'on note G_σ°, qui est le "fixateur connexe" de σ. Enfin on note G_σ^+ le pro-p-radical (pro-p-sous-groupe distingué maximal) de G_σ°.

Si x est un sommet de l'immeuble BT alors G_x^+ détermine un idempotent $e_x^+ \in \mathcal{H}_{\mathbb{Z}[1/p]}(G_x)$.

1.1.0.3 Proposition ([MS10], Section 2.2)**.** *Le système d'idempotents $(e_x^+)_{x \in \mathrm{BT}_0}$ est cohérent.*

On a de plus que, pour tout polysimplexe σ, l'idempotent $e_\sigma^+ := \prod_{x \in \sigma} e_x^+$ est l'idempotent associé à G_σ^+.

1.1.0.4 Lemme. *Soient $x, y \in \mathrm{BT}_0$ deux sommets. Alors il existe une suite de sommets $x_0 = x, x_1, \cdots, x_\ell = y$ joignant x à y, telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, l-1\}$, x_{i+1} est adjacent à x_i et $x_{i+1} \in H(x_i, y)$.*

Démonstration. Pour x_1, il suffit de prendre un sommet dans $H(x, y)$ qui est adjacent à x et tel que la distance de x_1 à y est strictement inférieure à celle de x à y. En ré-appliquant ce résultat à x_1 et y on construit x_2 et ainsi de suite pour obtenir le résultat voulu par récurrence. □

1.1.0.5 Définition. On dit qu'un système $(e_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ est 0-cohérent si

1. $e_{gx} = ge_xg^{-1}$ quel que soit $x \in \mathrm{BT}_0$ et $g \in G$.
2. $e_\sigma = e_\sigma^+ e_x = e_x e_\sigma^+$ pour $x \in \mathrm{BT}_0$ et $\sigma \in \mathrm{BT}$ tels que $x \leq \sigma$.

En s'inspirant de [Dat18a] section 3.2.1 on montre :

1.1.0.6 Proposition. *Soit $(e_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ un système d'idempotents 0-cohérent, alors le système d'idempotents $(e_x)_{x\in\mathrm{BT}_0}$ est cohérent.*

On a de plus, pour $x, y \in \mathrm{BT}_0$, $e_x^+ e_y = e_x e_y$.

Démonstration. Il ne reste à vérifier que les conditions 1. et 2. de la définition 1.1.0.1.

Commençons par vérifier la propriété 1. de 1.1.0.1 : Soient x et y deux sommets adjacents et σ le polysimplexe $[x, y]$. On sait déjà que $e_x^+ e_y^+ = e_\sigma^+ = e_\sigma^+ e_\sigma^+$. Ainsi

$$e_x e_y = e_x e_x^+ e_y^+ e_y = e_x e_\sigma^+ e_\sigma^+ e_y = e_\sigma e_\sigma = e_\sigma$$

Ce qui montre la propriété 1. de 1.1.0.1.

Examinons maintenant la propriété 2. de 1.1.0.1 : Soient x,y et z des sommets de BT tels que z soit dans l'enveloppe polysimpliciale de $\{x, y\}$ et z adjacent à x. Par la proposition 1.1.0.3 on sait que $e_x^+ e_y^+ = e_x^+ e_z^+ e_y^+$. Par ce qui précède $e_{[x,z]} = e_x e_z$ et on a

$$e_x e_y = e_x e_x^+ e_y^+ e_y = e_x e_x^+ e_z^+ e_y^+ e_y = e_x e_{[x,z]}^+ e_y = e_{[x,z]} e_y = e_x e_z e_y$$

Le système d'idempotents $(e_x)_{x\in\mathrm{BT}_0}$ est cohérent.

Montrons maintenant que $e_x^+ e_y = e_x e_y$.
Si x et y sont adjacents on obtient que

$$e_x^+ e_y = e_x^+ e_y^+ e_y = e_{[x,y]}^+ e_y = e_{[x,y]} = e_x e_y$$

Dans le cas général choisissons grâce au lemme 1.1.0.4 une suite de sommets $x_0 = x, x_1, \cdots, x_\ell = y$ joignant x à y, telle que pour tout $i \in \{0, \cdots, l-1\}$, x_{i+1} est adjacent à x_i et $x_{i+1} \in H(x_i, y)$. Alors

$$\begin{aligned} e_x^+ e_y &= e_x^+ e_y^+ e_y = e_x^+ e_{x_1}^+ e_y^+ e_y = \cdots = e_x^+ e_{x_1}^+ \cdots e_{x_{l-1}}^+ e_y^+ e_y \\ &= e_x^+ e_{x_1}^+ \cdots e_{x_{l-1}}^+ e_y = e_x^+ e_{x_1}^+ \cdots e_{x_{l-1}} e_y = \cdots = e_x e_{x_1} \cdots e_{x_{l-1}} e_y \\ &= e_x e_{x_1} \cdots e_{x_{l-2}} e_y = \cdots = e_x e_{x_1} e_y = e_x e_y \end{aligned}$$

(La première ligne découle de la propriété 2. de 1.1.0.1 appliquée aux e_x^+. Pour la seconde, on utilise le fait que $e_{x_i}^+ e_{x_{i+1}} = e_{x_i} e_{x_{i+1}}$ car x_i et x_{i+1} sont adjacents. Enfin pour la dernière on applique que $e_{x_i} e_{x_{i+1}} e_y = e_{x_i} e_y$ car x_{i+1} est adjacent à x_i et $x_{i+1} \in H(x_i, y)$.)

Ainsi

$$\forall x, y \in \mathrm{BT}_0, e_x^+ e_y = e_x e_y$$

□

1.2 Construction d'idempotents

Nous expliquons ici comment construire des idempotents sur l'immeuble à partir de la théorie de Deligne-Lusztig ainsi que les conditions qu'ils doivent vérifier pour obtenir un

système cohérent.

1.2.1 Théorie de Deligne-Lusztig

Rappelons brièvement les propriétés des idempotents centraux fabriqués par la théorie de Deligne-Lusztig dont nous aurons besoin dans cette thèse. Les groupes algébriques de cette section seront considérés sur k.

Soient $\mathbf{G}$ un groupe réductif défini sur k et s une classe de conjugaison semi-simple dans $\mathsf{G}^* := (\mathbf{G}^*)^{\mathsf{F}}$. On note $\mathcal{E}(\mathsf{G}, s)$ la série de Deligne-Lusztig associée à s (dont la définition est rappelée dans l'introduction) et $e^{\mathsf{G}}_{s,\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathsf{G}]$ l'idempotent central la sélectionnant.

1.2.1.1 Proposition. *1. ([CE04] théorème 8.23) Nous avons* $1 = \sum_s e^{\mathsf{G}}_{s,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$ *dans* $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\mathsf{G}]$.

2. ([BR03] théorème A' et remarque 11.3) Si s se compose d'éléments ℓ-réguliers, alors nous avons un idempotent $e^{\mathsf{G}}_{s,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} = \sum_{s' \backsim_\ell s} e^{\mathsf{G}}_{s',\overline{\mathbb{Q}}_\ell} \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell[\mathsf{G}]$, *où $s' \backsim_\ell s$ signifie que s est la partie ℓ-régulière de s'.*

Soit $\mathbf{L}$ un Levi F-stable de $\mathbf{G}$ contenu dans un parabolique $\mathbf{P}$. Une classe de conjugaison t dans L^* donne une classe de conjugaison s dans G^*. Ainsi nous avons une application $\varphi_{\mathsf{L}^*,\mathsf{G}^*}$ à fibres finies définie par

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\mathsf{L}^*,\mathsf{G}^*} & : & \mathsf{L}^*_{ss} & \to & \mathsf{G}^*_{ss} \\ & & t & \mapsto & s \end{array}$$

Soit $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$. Construisons alors un idempotent $e^{\mathsf{L}}_{s,\Lambda} := \sum_{t \in \varphi^{-1}_{\mathsf{L}^*,\mathsf{G}^*}(s)} e^{\mathsf{L}}_{t,\Lambda}$.

Dans le cas où $\mathbf{P}$ est lui-même F-stable, on note $\mathbf{U}$ le radical unipotent de $\mathbf{P}$ et $\mathsf{U} = \mathbf{U}^{\mathsf{F}}$. Notons $e_{\mathsf{U}} := \frac{1}{|\mathsf{U}|} \sum_{x \in \mathsf{U}} \mathbb{1}_x$ l'idempotent réalisant la moyenne sur U. Alors on a

1.2.1.2 Proposition ([Dat18a] section 2.1.4)**.**

$$e^{\mathsf{G}}_{s,\Lambda} e_{\mathsf{U}} = e_{\mathsf{U}} e^{\mathsf{L}}_{s,\Lambda} =: e^{\mathsf{P}}_{s,\Lambda}$$

où $e^{\mathsf{P}}_{s,\Lambda}$ est un idempotent central dans $\Lambda[\mathsf{P}]$.

Soient $\mathbf{G}'$ un autre groupe réductif défini sur k et $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ un isomorphisme compatible avec les F-structures. Alors φ induit une bijection (voir annexe A)

$$\varphi^* : \mathsf{G}^*_{ss} \longrightarrow \mathsf{G}'^*_{ss}$$

1.2.1.3 Lemme. *On a*

$$\varphi(e^{\mathsf{G}}_{s,\Lambda}) = e^{\mathsf{G}'}_{\varphi^*(s),\Lambda}$$

Démonstration. Par construction un élément $t \in (\mathbf{T}^*)^{\mathsf{F}}$ appartenant à s est envoyé sur $\varphi^*(t)$ appartenant à $\varphi^*(s)$. Ainsi φ envoie $\mathcal{E}(\mathsf{G}, s)$ sur $\mathcal{E}(\mathsf{G}', \varphi^*(s))$ et on a le résultat. □

1.2.2 Construction d'idempotents sur l'immeuble

Maintenant que l'on sait fabriquer des idempotents sur les groupes finis, il nous faut les relever en des idempotents sur le groupe p-adique. On utilise pour cela le fait que les

sous-groupes parahoriques G_σ° admettent un modèle entier et que le quotient $G_\sigma^\circ/G_\sigma^+$ est alors l'ensemble des points d'un groupe réductif connexe à valeur dans un corps fini.

Soit σ un polysimplexe dans BT. D'après [Tit79] section 3.4 il existe un schéma en groupes affine lisse $\mathcal{G}_\sigma$ défini sur $\mathfrak{o}_F$, unique à isomorphisme près, tel que

1. La fibre générique $\mathcal{G}_{\sigma,F}$ de $\mathcal{G}_\sigma$ est G
2. Pour toute extension galoisienne non-ramifiée F_1 de F, $\mathcal{G}_\sigma(\mathfrak{o}_{F_1})$ est le sous-groupe compact maximal de $\mathbf{G}(F_1)_\sigma$, où σ est identifié avec son image canonique dans $\mathrm{BT}(F_1)$.

L'application de réduction modulo p fournit un morphisme surjectif $G_\sigma = \mathcal{G}_\sigma(\mathfrak{o}_F) \to \tilde{\mathsf{G}}_\sigma := \tilde{\mathbf{G}}_\sigma^{\mathsf{F}}$, où $\tilde{\mathbf{G}}_\sigma$, la fibre spéciale de $\mathcal{G}_\sigma$, est un groupe algébrique défini sur k. On note $\mathcal{G}_\sigma^\circ$ la composante neutre de $\mathcal{G}_\sigma$ et $\tilde{\mathbf{G}}_\sigma^\circ$ celle de $\tilde{\mathbf{G}}_\sigma$. D'après [BT84] section 5.2.6, on a $G_\sigma^\circ = \mathcal{G}_\sigma^\circ(\mathfrak{o}_F)$. D'où un morphisme surjectif $G_\sigma^\circ \to \tilde{\mathsf{G}}_\sigma^\circ$.

Notons $\overline{\mathbf{G}}_\sigma$ le quotient réductif de $\tilde{\mathbf{G}}_\sigma^\circ$. On a donc un morphisme surjectif $G_\sigma^\circ \to \overline{\mathsf{G}}_\sigma$ de noyau G_σ^+, d'où un isomorphisme :

$$G_\sigma^\circ/G_\sigma^+ \xrightarrow{\sim} \overline{\mathsf{G}}_\sigma.$$

Soit $s \in (\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*)_{ss}$ (rappelons que $\overline{\mathsf{G}}_\sigma^* = (\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*)^{\mathsf{F}}$) d'ordre inversible dans Λ, on peut alors tirer en arrière par cet isomorphisme l'idempotent $e_{s,\Lambda}^{\overline{\mathsf{G}}_\sigma}$ en un idempotent $e_\sigma^{s,\Lambda} \in \Lambda[G_\sigma^\circ/G_\sigma^+] \subset \mathcal{H}_\Lambda(G_\sigma)$.

Soit $x \in \mathrm{BT}_0$. Si l'on considère la sous-partie de l'immeuble constituée des polysimplexes τ tels que $x \leq \tau$ alors d'après [Tit79] section 3.5.4, on obtient l'immeuble sphérique ("immeuble des sous-groupes k-paraboliques") de $\overline{\mathsf{G}}_x$.

Soit $\sigma \in \mathrm{BT}$ tel que $x \leq \sigma$. Alors $G_\sigma^\circ \subset G_x^\circ$. On a ainsi un morphisme $G_\sigma^\circ \to G_x^\circ \to \overline{\mathsf{G}}_x$. Notons P_σ l'image de G_σ° dans $\overline{\mathsf{G}}_x$ qui est un sous-groupe parabolique et U_σ son radical unipotent. L'image réciproque de U_σ dans G_σ° est G_σ^+. Ceci fournit donc un isomorphisme $G_\sigma/G_\sigma^+ \simeq \overline{\mathsf{G}}_\sigma \simeq \mathsf{P}_\sigma/\mathsf{U}_\sigma$.

Considérons $\overline{\mathsf{M}}_\sigma^*$ un sous-groupe de Levi de $\overline{\mathsf{G}}_x^*$ relevant $\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*$. Dans la section 1.2.1, nous avons défini une application $\varphi_{\overline{\mathsf{M}}_\sigma^*,\overline{\mathsf{G}}_x^*} : (\overline{\mathsf{M}}_\sigma^*)_{ss} \to (\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss}$. Cette application est indépendante du choix du relèvement de $\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*$ et nous définit donc une application $\varphi_{\sigma,x}^* : (\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*)_{ss} \to (\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss}$. On définit alors pour $s \in (\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss}$ d'ordre inversible dans Λ, l'idempotent $e_\sigma^{s,\Lambda} := \sum_{t \in \varphi_{\sigma,x}^{*-1}(s)} e_\sigma^{t,\Lambda}$.

1.2.2.1 Proposition. *Soient $x \in \mathrm{BT}_0$, $\sigma \in \mathrm{BT}$ tel que $x \leq \sigma$ et $s \in (\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss}$ d'ordre inversible dans Λ. Alors $e_\sigma^+ e_x^{s,\Lambda} = e_x^{s,\Lambda} e_\sigma^+ = e_\sigma^{s,\Lambda}$.*

Démonstration. D'après la proposition 1.2.1.2 on a $e_{s,\Lambda}^{\overline{\mathsf{G}}_x} e_{\mathsf{U}_\sigma} = e_{\mathsf{U}_\sigma} e_{s,\Lambda}^{\overline{\mathsf{G}}_\sigma}$ dans $\Lambda[\overline{\mathsf{G}}_x]$. Lorsque l'on tire en arrière ces idempotents par l'isomorphisme $G_x^\circ/G_x^+ \xrightarrow{\sim} \overline{\mathsf{G}}_x$, on obtient dans $\Lambda[G_x^\circ/G_x^+]$:

$$e_x^{s,\Lambda} e_\sigma^+ = e_\sigma^+ e_\sigma^{s,\Lambda}.$$

Maintenant comme $e_\sigma^+ e_\sigma^{s,\Lambda} = e_\sigma^{s,\Lambda}$ et $e_\sigma^+ e_x^{s,\Lambda} = e_x^{s,\Lambda} e_\sigma^+$ on a le résultat. □

1.2.3 Systèmes 0-cohérents de classes de conjugaison

À partir d'un polysimplexe σ et d'une classe de conjugaison semi-simple s nous savons maintenant construire un idempotent $e_\sigma^{s,\Lambda}$. On décrit alors dans cette partie les conditions

que l'on doit imposer pour que le système d'idempotents formé à partir des $e_\sigma^{s,\Lambda}$ soit un système 0-cohérent.

Soient $g \in G$ et $\sigma \in \mathrm{BT}$, on a $gG_\sigma^\circ g^{-1} = G_{g\sigma}^\circ$ et $gG_\sigma^+ g^{-1} = G_{g\sigma}^+$, d'où $g(G_\sigma^\circ/G_\sigma^+)g^{-1} \simeq G_{g\sigma}^\circ/G_{g\sigma}^+$. D'après [BT84] 4.6.30, la conjugaison par g se prolonge en un isomorphisme du $\mathfrak{o}_F$-schéma en groupes $\mathcal{G}_\sigma^\circ$ sur le $\mathfrak{o}_F$-schéma en groupes $\mathcal{G}_{g\sigma}^\circ$ et donc induit un isomorphisme $\varphi_{g,\sigma} : \overline{\mathsf{G}}_\sigma \xrightarrow{\sim} \overline{\mathsf{G}}_{g\sigma}$. On obtient alors, comme dans l'annexe A, un isomorphisme sur les classes de conjugaison semi-simples des groupes duaux

$$\varphi_{g,\sigma}^* : (\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*)_{ss} \xrightarrow{\sim} (\overline{\mathsf{G}}_{g\sigma}^*)_{ss}.$$

Pour $\sigma \in \mathrm{BT}$, on note

$$(\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*)_{ss,\Lambda} = \{s \in (\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*)_{ss} \text{ tel que } s \text{ soit d'ordre inversible dans } \Lambda\}.$$

1.2.3.1 Définition. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ un système d'ensembles de classes de conjugaison avec $\mathcal{S}_\sigma \subseteq (\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*)_{ss,\Lambda}$. On dit que $\mathcal{S}$ est 0-cohérent si

1. $\varphi_{g,x}^*(\mathcal{S}_x) = \mathcal{S}_{gx}$ quel que soit $x \in \mathrm{BT}_0$ et $g \in G$.
2. $\varphi_{\sigma,x}^{*-1}(\mathcal{S}_x) = S_\sigma$ pour $x \in \mathrm{BT}_0$ et $\sigma \in \mathrm{BT}$ tels que $x \leq \sigma$.

Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ un système 0-cohérent. Soit $\sigma \in \mathrm{BT}$, on définit alors $e_\sigma^{\mathcal{S},\Lambda} = \sum_{s\in\mathcal{S}_\sigma} e_\sigma^{s,\Lambda}$.

1.2.3.2 Proposition. *Le système $(e_\sigma^{\mathcal{S},\Lambda})_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ est 0-cohérent.*

Démonstration. Commençons par vérifier la condition 1. :
Soient $x \in \mathrm{BT}_0$ et $g \in G$. On a la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} G_x^\circ/G_x^+ \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\text{conj par } g"] & \overline{\mathsf{G}}_x \arrow[d, "\varphi_{g,x}"] \\ G_{gx}^\circ/G_{gx}^+ \arrow[r, "\sim"] & \overline{\mathsf{G}}_{gx} \end{tikzcd}$$

Le lemme 1.2.1.3 nous dit que $\varphi_{g,x}(e_{s,\Lambda}^{\overline{\mathsf{G}}_x}) = e_{\varphi_{g,x}^*(s),\Lambda}^{\overline{\mathsf{G}}_{gx}}$. Ainsi

$$ge_x^{\mathcal{S},\Lambda}g^{-1} = \sum_{s\in\mathcal{S}_x} ge_x^{s,\Lambda}g^{-1} = \sum_{s\in\mathcal{S}_x} e_{gx}^{\varphi_{g,x}^*(s),\Lambda} = \sum_{s\in\varphi_{g,x}^*(\mathcal{S}_x)} e_{gx}^{s,\Lambda} = \sum_{s\in\mathcal{S}_{gx}} e_{gx}^{s,\Lambda} = e_{gx}^{\mathcal{S},\Lambda}.$$

Passons maintenant à la condition 2. :
Soient $x \in \mathrm{BT}_0$ et $\sigma \in \mathrm{BT}$ tels que $x \leq \sigma$.

$$e_\sigma^+ e_x^{\mathcal{S},\Lambda} = \sum_{s\in\mathcal{S}_x} e_\sigma^+ e_x^{s,\Lambda}$$

Par la proposition 1.2.2.1 on a $e_\sigma^+ e_x^{s,\Lambda} = \sum_{t\in\varphi_{\sigma,x}^{*-1}(s)} e_\sigma^{t,\Lambda}$. Donc

$$e_\sigma^+ e_x^{\mathcal{S},\Lambda} = \sum_{s\in\mathcal{S}_x} \sum_{t\in\varphi_{\sigma,x}^{*-1}(s)} e_\sigma^{t,\Lambda} = \sum_{t\in\varphi_{\sigma,x}^{*-1}(\mathcal{S}_x)} e_\sigma^{t,\Lambda} = \sum_{t\in\mathcal{S}_\sigma} e_\sigma^{t,\Lambda} = e_\sigma^{\mathcal{S},\Lambda}.$$

□

On note $\mathrm{Rep}_\Lambda(G)$ la catégorie abélienne des représentations lisses de G à coefficients dans Λ. Notons $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ la sous-catégorie des représentations de niveau 0, c'est-à-dire la sous-catégorie découpée par le système d'idempotents $(e_x^+)_{x\in \mathrm{BT}_0}$.

Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ un système 0-cohérent, il définit alors un système $(e_\sigma^{\mathcal{S},\Lambda})_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ 0-cohérent et forme donc, d'après le théorème 1.1.0.2, une catégorie $\mathrm{Rep}^{\mathcal{S}}_\Lambda(G)$.

1.2.3.3 Définition. Soient $\mathcal{S}^1 = (\mathcal{S}^1_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ et $\mathcal{S}^2 = (\mathcal{S}^2_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ deux systèmes de classes de conjugaison. On définit alors $\mathcal{S}^1\cup\mathcal{S}^2 := (\mathcal{S}^1_\sigma\cup\mathcal{S}^2_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ et $\mathcal{S}^1\cap\mathcal{S}^2 := (\mathcal{S}^1_\sigma\cap\mathcal{S}^2_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$. On dit que $\mathcal{S}^2\subseteq\mathcal{S}^1$ si pour tout $\sigma\in\mathrm{BT}$ $\mathcal{S}^2_\sigma\subseteq\mathcal{S}^1_\sigma$. Enfin, si $\mathcal{S}^2\subseteq\mathcal{S}^1$, on note $\mathcal{S}^1\backslash\mathcal{S}^2 := (\mathcal{S}^1_\sigma\backslash\mathcal{S}^2_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$.

1.2.3.4 Lemme. *Soient $\mathcal{S}^1$ et $\mathcal{S}^2$ deux systèmes 0-cohérents tels que $\mathcal{S}^1\cap\mathcal{S}^2=\emptyset$. Alors les catégories $\mathrm{Rep}^{\mathcal{S}^1}_\Lambda(G)$ et $\mathrm{Rep}^{\mathcal{S}^2}_\Lambda(G)$ sont orthogonales.*

Démonstration. Soit V un objet de $\mathrm{Rep}^{\mathcal{S}^1}_\Lambda(G)$. Nous devons montrer que pour tout sommet de l'immeuble x, on a $e_x^{\mathcal{S}^2}V=0$. Fixons un tel x. Par définition $V=\sum_{y\in\mathrm{BT}_0} e_y^{\mathcal{S}^1}V$, donc $e_x^{\mathcal{S}^2}V=\sum_{y\in\mathrm{BT}_0} e_x^{\mathcal{S}^2}e_y^{\mathcal{S}^1}V$. Soit $y\in\mathrm{BT}_0$. Comme $(e_\sigma^{\mathcal{S}^1})_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ est 0-cohérent, on sait par 1.1.0.6 que $e_x^+e_y^{\mathcal{S}^1}=e_x^{\mathcal{S}^1}e_y^{\mathcal{S}^1}$ et on a que

$$e_x^{\mathcal{S}^2}e_y^{\mathcal{S}^1}=e_x^{\mathcal{S}^2}e_x^+e_y^{\mathcal{S}^1}=e_x^{\mathcal{S}^2}e_x^{\mathcal{S}^1}e_y^{\mathcal{S}^1}.$$

Or si s et s' sont deux éléments distincts de $(\overline{\mathsf{G}}^*_x)_{ss}$ d'ordre inversible dans Λ, $e_x^{s,\Lambda}e_x^{s',\Lambda}=0$ donc $e_x^{\mathcal{S}^2}e_x^{\mathcal{S}^1}=0$ et on a le résultat. □

1.2.3.5 Proposition. *Soient $\mathcal{S}^1,\cdots,\mathcal{S}^n$ des systèmes 0-cohérents tels que $\mathcal{S}^i\cap\mathcal{S}^j=\emptyset$ si $i\neq j$ et $\bigcup_{i=1}^n\mathcal{S}^i=((\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss,\Lambda})_{\sigma\in\mathrm{BT}}$. Alors la catégorie de niveau 0 se décompose en*

$$\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)=\prod_{i=1}^n\mathrm{Rep}^{\mathcal{S}^i}_\Lambda(G).$$

Démonstration. D'après le lemme 1.2.3.4 nous savons déjà que les catégories $\mathrm{Rep}^{\mathcal{S}^i}_\Lambda(G)$ sont deux à deux orthogonales. Prenons maintenant V un objet de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$. Par définition, $V=\sum_{x\in\mathrm{BT}_0}e_x^+V$. Fixons un sommet $x\in\mathrm{BT}_0$. D'après 1.2.1.1, on a $e_x^+=\sum_{s\in(\overline{\mathsf{G}}^*_x)_{ss}}e_x^{s,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$. Ainsi $e_x^+=\sum_{i=1}^n e_x^{\mathcal{S}^i}$. On en déduit que

$$V=\sum_{x\in\mathrm{BT}_0}e_x^+V=\sum_{x\in\mathrm{BT}_0}\sum_{i=1}^n e_x^{\mathcal{S}^i}V=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{x\in\mathrm{BT}_0}e_x^{\mathcal{S}^i}V\right).$$

Or $\sum_{x\in\mathrm{BT}_0}e_x^{\mathcal{S}^i}V$ est un objet de $\mathrm{Rep}^{\mathcal{S}^i}_\Lambda(G)$ d'après [MS10] proposition 3.2, d'où le résultat. □

1.3 Paramètres de l'inertie modérés

Dans toute cette section on suppose de plus que $\mathbf{G}$ est F^{nr}-déployé. Cela signifie que $\mathbf{G}$ est une forme intérieure d'un groupe non-ramifié. On souhaite obtenir une décomposition de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ indexée par les paramètres de l'inertie modérés ϕ. Pour cela on construit un procédé permettant d'associer à chaque ϕ un système de classes de conjugaison 0-cohérent.

1.3.1 Classes de conjugaison dans G^*

Commençons par définir les paramètres de l'inertie modérés et montrons que l'on peut décrire ceux-ci en terme de classes de conjugaison semi-simples dans G^*.

Soit I un sous-groupe de W_F. On appelle $\Phi(I, {}^L\mathbf{G})$ l'ensemble des classes de $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison des morphismes continus $I \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (où $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est muni de la topologie discrète) qui admettent une extension à un L-morphisme de $\Phi({}^L\mathbf{G})$. Dans ce qui suit nous allons nous intéresser principalement aux paramètres de Langlands inertiels $\Phi(I_F, {}^L\mathbf{G})$.

1.3.1.1 Définition. Si I contient P_F, l'inertie sauvage, on dit qu'un paramètre $\phi \in \Phi(I, {}^L\mathbf{G})$ est modéré s'il est trivial sur P_F, et on note $\Phi_m(I, {}^L\mathbf{G})$ pour l'ensemble des paramètres de I modérés.

Intéressons nous à $\Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G})$. Comme I_F/P_F est procyclique de pro-ordre premier à p un morphisme continu $I_F/P_F \to \widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ est donné par le choix d'un élément s d'ordre fini premier à p. Nous avons la décomposition $W_F/P_F = (I_F/P_F) \rtimes \langle \mathrm{Frob} \rangle$, où pour $x \in (I_F/P_F)$, $\mathrm{Frob}^{-1} x \, \mathrm{Frob} = x^q$. Un paramètre de Langlands doit envoyer Frob sur $f\widehat{\vartheta}$ où f est un élément semi-simple de $\widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Un tel morphisme s'étend donc à W_F/P_F si $\mathrm{Ad}(f) \circ \widehat{\vartheta} \circ s^q = s$, où $\mathrm{Ad}(f)$ désigne la conjugaison par f. Ainsi à un paramètre inertiel modéré $\phi \in \Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G})$ on peut associer une classe de conjugaison semi-simple dans $\widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ stable sous $\widehat{\vartheta} \circ \psi$ où ψ est l'élévation à la puissance q-ième. On a donc une application $\Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G}) \to ((\widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))_{ss})^{\widehat{\vartheta}\circ\psi}$. Or nous savons que $(\widehat{\mathbf{T}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)/W) \xrightarrow{\sim} (\widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))_{ss}$, où $W := N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ désigne le groupe de Weyl de $\mathbf{T}$, ce qui nous permet de définir l'application $\Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G}) \to (\widehat{\mathbf{T}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)/W)^{\widehat{\vartheta}\circ\psi}$. Réciproquement, prenons un élément de $(\widehat{\mathbf{T}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)/W)^{\widehat{\vartheta}\circ\psi}$. Ceci nous fournit un élément semi-simple s tel que $\widehat{\vartheta} \circ \psi(s) = w \cdot s$, où $w \in W$. Soit f un relèvement de w, qui est alors un élément semi-simple, on a alors $\widehat{\vartheta} \circ \psi(s) = \mathrm{Ad}(f)(s)$, donc on obtient un $\phi \in \Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G})$. Ceci nous montre que l'on a une correspondance

$$\Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G}) \longleftrightarrow (\widehat{\mathbf{T}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)/W)^{\widehat{\vartheta}\circ\psi}.$$

Soit $s \in (\widehat{\mathbf{T}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)/W)^{\widehat{\vartheta}\circ\psi}$, on peut représenter s par $s = (a_1, \cdots, a_n)$, avec $a_i \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ ($\widehat{\mathbf{T}} \simeq \mathbb{G}_m^n$). Soit $k \in \mathbb{N}$, par définition on a $\widehat{\vartheta}^k(s^{p^k}) = s$ dans $(\widehat{\mathbf{T}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)/W)^{\widehat{\vartheta}\circ\psi}$. Comme $\widehat{\vartheta}$ est d'ordre fini, disons N, $s^{p^N} = s$ dans $(\widehat{\mathbf{T}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)/W)^{\widehat{\vartheta}\circ\psi}$. Donc il existe $w \in W$ tel que $(a_1^{p^N}, \cdots, a_n^{p^N}) = w \cdot (a_1, \cdots, a_n)$. Or W est de cardinal fini, donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $(a_1^{p^{kN}}, \cdots, a_n^{p^{kN}}) = (a_1, \cdots, a_n)$. Ainsi $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $a_i^{p^{kN}-1} = 1$. Les a_i sont donc des racines p'-ièmes de l'unité (racines de l'unité d'ordre premier à p).

Notre groupe $\mathbf{G}$ étant F^{nr}-déployé, il possède une forme intérieure non-ramifiée. Cette dernière permet de définir sur G^*, le groupe dual de $\mathbf{G}$ sur $\overline{k}$, une k-structure (et donc un Frobenius F) en choissant un sommet hyperspécial dans l'immeuble. Le choix d'un système compatible de racines de l'unité (que l'on a fixé au début dans les notations) permet d'identifier

$$(\widehat{\mathbf{T}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)/W)^{\widehat{\vartheta}\circ\psi} \longleftrightarrow (\mathsf{T}^*(\overline{k})/W)^{\widehat{\vartheta}\circ\psi}.$$

(Nous rappelons que $\widehat{\mathbf{T}}$ désigne le dual de $\mathbf{T}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et T^* celui sur $\overline{k}$. Ainsi $\widehat{\mathbf{T}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) = X^*(\mathbf{T}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et $\mathsf{T}^*(\overline{k}) = X^*(\mathbf{T}) \otimes \overline{k}^\times$.)

Or l'action de $\widehat{\vartheta} \circ \psi$ sur $\mathsf{T}^*(\overline{k})$ correspond à l'action du Frobenius F (voir annexe B, ici $\widehat{\vartheta} = \tau_X^{-1}$). Ainsi

$$(\mathsf{T}^*(\overline{k})/W)^{\widehat{\vartheta}\circ\psi} = (\mathsf{T}^*(\overline{k})/W)^{\mathsf{F}} \longleftrightarrow (\mathsf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}}.$$

En résumé nous avons montré

1.3.1.2 Proposition. *La discussion précédente nous fournit une identification :*

$$\Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G}) \longleftrightarrow ((\boldsymbol{G}^*(\overline{k}))_{ss})^{\mathsf{F}}.$$

Dans le but d'étudier les représentations à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ nous avons besoin de restreindre $\Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G})$. Introduisons $I_F^{(\ell)} := ker\{I_F \to \mathbb{Z}_\ell(1)\}$ qui est le sous-groupe fermé maximal de I_F de pro-ordre premier à ℓ. Sous l'identification de la proposition 1.3.1.2, $\Phi_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\mathbf{G})$ correspond aux $s \in (\mathbf{G}^*(\overline{k}))_{ss})^{\mathsf{F}}$ d'ordre premier à ℓ.

Pour unifier les notations, notons I_F^Λ qui vaut I_F si $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $I_F^{(\ell)}$ si $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$. On obtient alors

1.3.1.3 Proposition. *L'identification de la proposition 1.3.1.2 se restreint en :*

$$\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G}) \longleftrightarrow \{s \in (\boldsymbol{G}^*(\overline{k}))_{ss})^{\mathsf{F}}, s \text{ d'ordre inversible dans } \Lambda\}.$$

1.3.2 Classes de conjugaison dans les quotients réductifs des groupes parahoriques

Nous venons de voir que l'on pouvait identifier les paramètres de l'inertie modérés avec des classes de conjugaison semi-simples dans $\mathbf{G}^*$. Pour obtenir des systèmes 0-cohérents nous avons besoin de classes de conjugaison dans les quotients réductifs des groupes parahoriques. Nous construisons alors dans cette section un système d'applications compatibles $((\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*)_{ss})^{\mathsf{F}} \to (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}}$, pour $\sigma \in \mathrm{BT}$.

Soit $\mathbf{S}$ un tore déployé maximal, tel que $\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{S}, F)$, où $\mathcal{A}(\mathbf{S}, F)$ est l'appartement associé à $\mathbf{S}$ dans BT. Notons $\mathbf{T}$ un F-tore maximal F^{nr}-déployé contenant $\mathbf{S}$ (qui existe par [BT84] 5.1.12). De plus par [Tit79] 2.6.1 $\mathcal{A}(\mathbf{S}, F) = \mathrm{BT} \cap \mathcal{A}(\mathbf{T}, F^{nr})$. Notons σ_1 l'image canonique de σ dans $\mathrm{BT}(F^{nr})$.

Notons $\tilde{W}$ le groupe de Weyl étendu de $\mathbf{G}(F^{nr})$, $W = N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$, le groupe de Weyl de $\mathbf{G}(F^{nr})$ et W_{σ_1} le groupe engendré par les réflexions des hyperplans contenant σ_1 dans $\mathrm{BT}(F^{nr})$. Nous avons $\tilde{W} = W \ltimes T/{}^\circ T$, où ${}^\circ T$ désigne le sous-groupe borné maximal de T. De plus W_{σ_1} est un sous-groupe de W, on a donc une application $W_{\sigma_1} \to \tilde{W} \to W$. Le noyau du morphisme $\tilde{W} = W \ltimes T/{}^\circ T \to W$ est un groupe sans torsion. Or W_{σ_1} est un groupe fini donc l'application $W_{\sigma_1} \to W$ est injective et nous permet de voir W_{σ_1} comme un sous-groupe de W.

Par [Tit79] 3.4.3, $\mathcal{G}_{\sigma_1}$ est obtenu à partir de $\mathcal{G}_\sigma$ par changement de base. En particulier $\overline{\mathbf{G}}_{\sigma_1} = \overline{\mathbf{G}}_\sigma \times_k \overline{k}$.

Le tore $\mathbf{S}$ (resp. $\mathbf{T}$) se prolonge en un tore de $\mathcal{G}_\sigma$, $\mathcal{S}_\sigma$ (resp. $\mathcal{T}_\sigma$), défini sur $\mathfrak{o}_F$ de fibre générique $\mathcal{S}_{\sigma,k} = S$ (resp. $\mathcal{T}_{\sigma,k} = T$). Notons S_σ (resp T_σ) la fibre spéciale de $\mathcal{S}_\sigma$ (resp $\mathcal{T}_\sigma$). Alors T_σ est un tore maximal de $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ défini sur k. De plus on a que $\mathbf{T}_{\sigma_1} = \mathbf{T}_\sigma \times_k \overline{k}$.

Le groupe des caractères de T_{σ_1}, $X^*(\mathbf{T}_{\sigma_1})$, est canoniquement isomorphe à $X = X^*(\mathbf{T})$, on les identifiera désormais. De plus, par [Tit79] 3.5.1, le groupe de Weyl de $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1}$ associé à T_{σ_1} est W_{σ_1}. L'action de W_{σ_1} sur $X^*(\mathsf{T}_{\sigma_1})$ coïncide avec l'action de l'image de $W_{\sigma_1} \to W$ sur $X^*(\mathbf{T})$.

On obtient alors :

$$((\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma)_{ss})^{\mathsf{F}} \simeq (\mathbf{T}^*_\sigma/W_{\sigma_1})^{\mathsf{F}} \simeq \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}}.$$

Le morphisme $W_{\sigma_1} \to W$ induit

$$\Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \to \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W\Big)^{\mathsf{F}}.$$

Et de même que précédemment, on a un isomorphisme

$$\Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W\Big)^{\mathsf{F}} \simeq (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}}.$$

On vient donc de construire une application

$$\tilde{\psi}_\sigma : ((\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma)_{ss})^{\mathsf{F}} \to (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}}.$$

1.3.2.1 Lemme. *L'application $\tilde{\psi}_\sigma$ est indépendante du choix du tore $\boldsymbol{S}$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{S}'$ un autre tore déployé maximal tel que $\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{S}')$. Nous utiliserons la notation ' pour les éléments se rapportant à $\mathbf{S}'$.

D'après [BT84] 4.6.28, $G^\circ_{\sigma_1}$ permute transitivement les appartements de $\mathrm{BT}(F^{nr})$ contenant σ_1. Ainsi, $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont conjugués par un élément $g \in G^\circ_{\sigma_1}$, c'est-à-dire $\mathbf{T}' = g\mathbf{T}g^{-1}$. Comme $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont deux F-tores, g vérifie que $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N(\mathbf{G}, \mathbf{T})$, le normalisateur de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$. La conjugaison par g, $\mathrm{Ad}(g)$, induit alors un isomorphisme $X \longrightarrow X' := X^*(\mathbf{T}')$. De plus comme elle envoie $\mathcal{A}(\mathbf{T}, F^{nr})$ sur $\mathcal{A}(\mathbf{T}', F^{nr})$ et que les morphismes $W_{\sigma_1} \longrightarrow W$ et $W'_{\sigma_1} \longrightarrow W'$ sont définis à partir des racines, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W_{\sigma_1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & W \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] \\ W'_{\sigma_1} \arrow[r] & W' \end{tikzcd}$$

et donc le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] \\ \Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W'_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r] & \Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W'\Big)^{\mathsf{F}} \end{tikzcd}$$

L'application $G^\circ_{\sigma_1} \to \overline{\mathbf{G}}_\sigma$ envoie g sur un élément que l'on note $\overline{g}$. De plus nous savons que l'action par conjugaison par $\overline{g}$ qui envoie $X_*(\overline{\mathbf{T}}_\sigma)$ sur $X_*(\overline{\mathbf{T}'}_\sigma)$ coïncide avec l'action par conjugaison par g qui envoie X sur X'.

La conjugaison par $\overline{g} \in \overline{\mathbf{G}}_\sigma$ d'un coté et par $g \in \mathbf{G}$ de l'autre, induit les deux diagrammes

commutatifs suivants (lemme A.2) :

$$\begin{tikzcd}
((\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma)_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[d, equal] \\
((\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma)_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] & \Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W'_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} & \Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W'\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] & (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}}
\end{tikzcd}$$

On obtient alors que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
((\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma)_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[d, equal] \\
((\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma)_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] & \Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W'_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r] & \Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W'\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] & (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}}
\end{tikzcd}$$

Ce qui nous montre le résultat. □

1.3.3 Classes de conjugaison dans un groupe fini

La partie précédente nous fournit des classes de conjugaison semi-simples géométriques d'un groupe réductif connexe fini. Nous sommes plus intéressé par des classes de conjugaison rationnelles. On rappelle alors ici le lien entre les deux.

Dans cette sous-section $\mathbf{G}$ désigne un groupe réductif connexe défini sur k. Pour un élément semi-simple $x \in \mathbf{G}$, on note $[x]$ sa classe de conjugaison, $[x] \in \mathbf{G}_{ss}$.

1.3.3.1 Lemme. *Soit $s \in (\boldsymbol{G}_{ss})^{\mathsf{F}}$. Alors il existe $x \in G := \boldsymbol{G}^{\mathsf{F}}$ tel que $s = [x]$.*

Démonstration. $s = [y]$ avec $y \in \mathbf{G}$. La classe de conjugaison s étant F-stable, il existe $g \in \mathbf{G}$ tel que $\mathsf{F}(y) = g^{-1}yg$. L'application de Lang, $Lan : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$ définie par $Lan(g) = g^{-1}\mathsf{F}(g)$ est surjective d'après [CE04] Théorème 7.1. Ainsi, il existe $h \in \mathbf{G}$ tel que $g = h^{-1}\mathsf{F}(h)$. Alors

$$\mathsf{F}(hyh^{-1}) = \mathsf{F}(h)\mathsf{F}(y)\mathsf{F}(h)^{-1} = \mathsf{F}(h)g^{-1}yg\mathsf{F}(h)^{-1} = hyh^{-1}$$

Ainsi $x = hyh^{-1}$ convient. □

1.3.3.2 Corollaire. *L'application $G_{ss} \twoheadrightarrow (\boldsymbol{G}_{ss})^{\mathsf{F}}$ est surjective.*

1.3.4 Systèmes 0-cohérents de classes de conjugaison associés aux paramètres de l'inertie modérés

On met bout à bout les résultats des sous-sections précédentes pour obtenir une application qui à un paramètre inertiel modéré associe un système de classes de conjugaison 0-cohérent.

En composant la proposition 1.3.3.2, l'application $\tilde{\psi}_\sigma$ et la proposition 1.3.1.2, on obtient une application

$$\psi_\sigma : (\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss} \longrightarrow ((\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma)_{ss})^{\mathsf{F}} \xrightarrow{\tilde{\psi}_\sigma} (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}} \xrightarrow{\sim} \Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G}).$$

Soient $\sigma, \omega \in \mathrm{BT}$ tels que $\sigma \leq \omega$. Nous avons vu que $\overline{\mathsf{G}}_\omega$ est un Levi de $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$. Ceci nous donne donc, comme dans la section 1.2.1, une application $\varphi^*_{\omega,\sigma} : (\overline{\mathsf{G}}^*_\omega)_{ss} \to (\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss}$.

1.3.4.1 Lemme. *Soient $\sigma, \omega \in \mathrm{BT}$ tels que $\sigma \leq \omega$. Alors*

$$\psi_\omega = \psi_\sigma \circ \varphi^*_{\omega,\sigma}$$

Démonstration. W_{ω_1} est le groupe engendré par les réflexions des hyperplans contenant ω_1 où ω_1 est l'image canonique de ω dans $\mathrm{BT}(F^{nr})$. Or $\sigma_1 \leq \omega_1$, donc un hyperplan contenant ω_1 contient aussi σ_1 et W_{ω_1} est un sous-groupe de W_{σ_1}. Ainsi le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} W_{\omega_1} \arrow[r] \arrow[d] & W \\ W_{\sigma_1} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

induit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\omega_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r] \arrow[d] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W\Big)^{\mathsf{F}} \\ \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

D'où la commutativité de

$$\begin{tikzcd} (\overline{\mathsf{G}}^*_\omega)_{ss} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*_{\omega,\sigma}"] & ((\overline{\mathbf{G}}^*_\omega)_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\varphi_{\overline{\mathbf{G}}^*_\omega, \overline{\mathbf{G}}^*_\sigma}"] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\omega_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r] \arrow[d] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W\Big)^{\mathsf{F}} \\ (\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss} \arrow[r] & ((\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma)_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et on a le résultat voulu. □

Soient $g \in G$ et $\sigma \in \mathrm{BT}$, nous avons déjà vu (au début de la section 1.2.3) que la conjugaison par g induisait deux applications

$$\varphi^*_{g,\sigma} : (\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss} \longrightarrow (\overline{\mathsf{G}}^*_{g\sigma})_{ss},$$

$$\boldsymbol{\varphi}^*_{g,\sigma} : ((\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma)_{ss})^{\mathsf{F}} \longrightarrow ((\overline{\mathbf{G}}^*_{g\sigma})_{ss})^{\mathsf{F}}.$$

1.3.4.2 Lemme. *Soient $g \in G$ et $\sigma \in \mathrm{BT}$ alors*

$$\psi_\sigma = \psi_{g\sigma} \circ \varphi^*_{g,\sigma}.$$

Démonstration. Soit $\mathbf{S}$ un tore déployé maximal tel que $\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{S})$. Alors si l'on pose $\mathbf{S}' = \mathrm{Ad}(g)(\mathbf{S})$, $\mathbf{S}'$ est un tore déployé maximal tel que $g\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{S}')$. La conjugaison par g induit un isomorphisme de X vers X'. Le lemme A.1 nous donne le diagramme commutatif

suivant :

$$\begin{tikzcd}
((\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma)_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi}^*_{g,\sigma}"] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] \\
((\overline{\mathbf{G}}^*_{g\sigma})_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] & \Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{g\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}}
\end{tikzcd}$$

La conjugaison par g envoie les racines affines pour $\mathbf{S}$ s'annulant sur σ_1 sur les racines affines pour $\mathbf{S}'$ s'annulant sur $g\sigma_1$. On a donc le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
W_{\sigma_1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & W \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] \\
W_{g\sigma_1} \arrow[r] & W'
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
\Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] \\
\Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{g\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r] & \Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W'\Big)^{\mathsf{F}}
\end{tikzcd}$$

Enfin la conjugaison par g étant un isomorphisme intérieur sur G, le diagramme ci-dessous commute (lemme A.2)

$$\begin{tikzcd}
\Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[d, equal] \\
\Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W'\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] & (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}}
\end{tikzcd}$$

Mis bout à bout ces diagrammes donnent la commutativité de

$$\begin{tikzcd}
(\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*_{g,\sigma}"] & ((\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma)_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\boldsymbol{\varphi}^*_{g,\sigma}"] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\mathrm{Ad}(g)"] & (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[d, equal] \\
(\overline{\mathsf{G}}^*_{g\sigma})_{ss} \arrow[r] & ((\overline{\mathbf{G}}^*_{g\sigma})_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] & \Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W_{g\sigma_1}\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r] & \Big((X' \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W'\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[r, "\sim"] & (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}}
\end{tikzcd}$$

ce qui finit la preuve. □

Construisons maintenant un système 0-cohérent de classes de conjugaison.

1.3.4.3 Définition. Soient $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ et $\sigma \in \mathrm{BT}$. On définit le système de classes de conjugaison $\mathcal{S}_\phi = (\mathcal{S}_{\phi,\sigma})_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ par

$$\mathcal{S}_{\phi,\sigma} = \psi_\sigma^{-1}(\phi).$$

1.3.4.4 Proposition. *Soit $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$. Le système $\mathcal{S}_\phi$ est 0-cohérent.*

Démonstration. La condition 1. de 1.2.3.1 est vérifiée par 1.3.4.2 et la condition 2. par 1.3.4.1. □

Ainsi par la proposition 1.2.3.5, si l'on note $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G) := \mathrm{Rep}_\Lambda^{\mathcal{S}_\phi}(G)$, alors

1.3.4.5 Théorème. *Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F et F^{nr}-déployé. Alors la catégorie de niveau 0 se décompose en*

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})} \mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G).$$

Notons que si $\mathbf{G}$ est quasi-déployé alors il est non-ramifié et possède donc un sommet hyperspécial o. Dans ce cas, l'application $\tilde{\psi}_o$ est bijective, donc ψ_o est surjective et $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ est non vide pour tout $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$. Cependant, lorsque $\mathbf{G}$ n'est pas quasi-déployé, les catégories $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ peuvent être vides. Nous devons rajouter une condition de "relevance" pour avoir $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ non vide, ce que nous détaillerons dans la partie 1.4.3.

1.4 Propriétés de $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$

Fixons dans toute cette section un paramètre inertiel modéré $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$. Le but de cette section est d'étudier quelques propriétés vérifiées par $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$. Rappelons qu'à ϕ nous avons associé dans la partie 1.3.4 un système 0-cohérent de classes de conjugaison $\mathcal{S}_\phi$, qui permet de définir $e_\phi = (e_{\phi,x})_{x \in \mathrm{BT}_0}$ un système 0-cohérent d'idempotents défini par $e_{\phi,x} = \sum_{s \in \mathcal{S}_{\phi,x}} e_x^{s,\Lambda}$.

1.4.1 Lien entre les décompositions sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$

Au vu de la construction de $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ il est assez simple de comprendre le lien entre $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ce que nous faisons ici.

Considérons ici que $\phi \in \Phi_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\mathbf{G})$. Soit $x \in \mathrm{BT}_0$ et notons $\mathcal{S}'_{\phi,x}$ l'ensemble des $s' \in (\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss}$ dont s la partie ℓ-régulière de s' est dans $\mathcal{S}_{\phi,x}$. Alors par construction, $e_{\phi,x} = \sum_{s \in \mathcal{S}_{\phi,x}} e_x^{s,\overline{\mathbb{Z}}_\ell} = \sum_{s' \in \mathcal{S}'_{\phi,x}} e_x^{s,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}$. Prenons $s' \in (\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss}$ et nommons $\phi' \in \Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G})$ le paramètre inertiel qui lui est associé, c'est-à-dire $\phi' := \psi_x(s')$. Soit $s \in \mathcal{S}_{\phi,x}$ (donc $\psi_x(s) = \phi$), s est la partie ℓ-régulière de s' si et seulement si $\phi'_{|I_F^{(\ell)}} \sim \phi$. Le lien entre les décompositions sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ est alors clair

1.4.1.1 Proposition. *Soit $\phi \in \Phi_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\boldsymbol{G})$, alors*

$$\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^\phi(G) \cap \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{\phi'} \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\phi'}(G)$$

où le produit est pris sur les $\phi' \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ tels que $\phi'_{|I_F^{(\ell)}} \sim \phi$.

1.4.2 Représentations irréductibles de $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\Lambda}(G)$

Nous souhaitons dans cette partie décrire les représentations irréductibles qui sont dans $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\Lambda}(G)$.

Soit $\mathbf{T}$ un tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$ ($\mathbf{T}$ est un F-tore F^{nr}-déployé maximal de $\mathbf{G}$). Nommons $\mathbf{T}_0$ le tore de référence utilisé pour définir $\widehat{\vartheta}$ et $\widehat{\mathbf{G}}$. Le tore $\mathbf{T}$ étant non-ramifié il existe $g \in G^{nr}$ tel que $T^{nr} = {}^{g}T_0^{nr}$. Dans ce cas $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N(T_0^{nr}, G^{nr})$ et définit un élément $w \in W$. Ainsi ${}^{L}\mathbf{T} \simeq \langle w\widehat{\vartheta}\rangle \ltimes \widehat{\mathbf{T}}_0(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Le choix d'un relèvement $\dot{w} \in N(\widehat{\mathbf{T}}_0, \widehat{\mathbf{G}})$ de w permet alors de définir un plongement ${}^{L}\mathbf{T} \hookrightarrow {}^{L}\mathbf{G}$ par $\widehat{\mathbf{T}}_0(\overline{\mathbb{Q}}_\ell) \subseteq \widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et $w\widehat{\vartheta} \mapsto (\dot{w}, \widehat{\vartheta})$. Ce plongement dépend (même à $\widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$-conjugaison près) du choix du relèvement de w. Il induit cependant une application

$$\iota : \Phi_m(I_F, {}^{L}\mathbf{T}) \to \Phi_m(I_F, {}^{L}\mathbf{G})$$

qui elle est indépendante des choix effectués car les paramètres inertiels sont à valeurs dans $\widehat{\mathbf{T}}_0(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (ou $\widehat{\mathbf{G}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$).

Soit $\phi_{\mathbf{T}} \in \Phi_m(I_F, {}^{L}\mathbf{T})$. Notons $X := X^*(\mathbf{T})$. Nous avons vu dans les sections 1.3.2 et 1.3.1 que l'on a une bijection $\Phi_m(I_F, {}^{L}\mathbf{T}) \simeq (X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^{\times})^{\mathsf{F}}$. Soit $x \in \mathcal{A}(\mathbf{T}, F^{nr}) \cap \mathrm{BT}_0$. Nous savons que l'on a également un isomorphisme $(X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^{\times})^{\mathsf{F}} \simeq (\overline{\mathsf{T}}_x^*)^{\mathsf{F}} \simeq \mathrm{Hom}(\overline{\mathbf{T}}_x^{\mathsf{F}}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times})$. On associe donc à $\phi_{\mathbf{T}}$ de manière bijective un caractère $\theta_{\mathbf{T}} : \overline{\mathbf{T}}_x^{\mathsf{F}} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$, qui se relève en un caractère de niveau 0 : $\theta_{\mathbf{T}} : {}^{0}\mathbf{T}^{\mathsf{F}} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$. L'association qui à $\phi_{\mathbf{T}}$ donne $\theta_{\mathbf{T}}$ est alors la correspondance de Langlands locale pour les tores restreinte à l'inertie.

1.4.2.1 Théorème. *Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$. Alors $\pi \in \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ si et seulement s'il existe $\boldsymbol{T}$ un tore maximal non-ramifié de $\boldsymbol{G}$, $\phi_{\boldsymbol{T}} \in \Phi_m(I_F, {}^{L}\boldsymbol{T})$ et $x \in \mathcal{A}(\boldsymbol{T}, F^{nr}) \cap \mathrm{BT}_0$ tels que $\iota(\phi_{\boldsymbol{T}}) \sim \phi$ et $\langle \pi^{G_x^+}, \mathcal{R}^{\overline{\boldsymbol{G}}_x}_{\overline{\boldsymbol{T}}_x}(\theta_{\boldsymbol{T}})\rangle \neq 0$ (où $\pi^{G_x^+}$ est vue comme une représentation de $\overline{G}_x \simeq G_x^{\circ}/G_x^+$ et $\mathcal{R}^{\overline{\boldsymbol{G}}_x}_{\overline{\boldsymbol{T}}_x}$ désigne l'induction de Deligne-Lusztig).*

Démonstration. Par définition de $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$, comme π est une représentation irréductible, $\pi \in \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ si et seulement s'il existe $x \in \mathrm{BT}_0$ tel que $e_{\phi,x}\pi^{G_x^+} \neq 0$. Soit $x \in \mathrm{BT}_0$, alors par construction $e_{\phi,x}\pi^{G_x^+} \neq 0$ est équivalent à l'existence d'une classe de conjugaison rationnelle semi-simple $s \in \mathcal{S}_{\phi,x}$ telle que $e^{\overline{\mathsf{G}}_x}_{s,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\pi^{G_x^+} \neq 0$. Soit $\overline{\mathsf{T}}_x$ un k-tore maximal de $\overline{\mathsf{G}}_x$ tel que $s \in (\overline{\mathsf{T}}_x^*)^{\mathsf{F}}$. Relevons $\overline{\mathsf{T}}_x$ en $\mathbf{T}$ un tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$. Nous avons que $\Phi_m(I_F, {}^{L}\mathbf{T}) \simeq (X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^{\times})^{\mathsf{F}} \simeq (\overline{\mathsf{T}}_x^*)^{\mathsf{F}}$ et donc s correspond à $\phi_{\mathbf{T}}$ un paramètre inertiel modéré de $\mathbf{T}$. La discussion qui précède le théorème montre que s est également associé au caractère $\theta_{\mathbf{T}} : \overline{\mathbf{T}}_x^{\mathsf{F}} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^{\times}$. La section 1.2.1 nous dit alors que $e^{\overline{\mathsf{G}}_x}_{s,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\pi^{G_x^+} \neq 0$ si et seulement si $\langle \pi^{G_x^+}, \mathcal{R}^{\overline{\mathsf{G}}_x}_{\overline{\mathbf{T}}_x}(\theta_{\mathbf{T}})\rangle \neq 0$.

On vient donc de montrer que $\pi \in \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ si et seulement s'il existe $\mathbf{T}$ un tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$, $x \in \mathcal{A}(\mathbf{T}, F^{nr}) \cap \mathrm{BT}_0$, $\phi_{\mathbf{T}} \in \Phi_m(I_F, {}^{L}\mathbf{T})$ correspondant à $s \in \mathcal{S}_{\phi,x}$ tels que $\langle \pi^{G_x^+}, \mathcal{R}^{\overline{\mathsf{G}}_x}_{\overline{\mathbf{T}}_x}(\theta_{\mathbf{T}})\rangle \neq 0$. Pour achever la preuve du théorème il ne nous reste donc qu'à montrer que $\phi = \iota(\phi_{\mathbf{T}})$. Or cela découle du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{T}^*_x)^{\mathsf{F}} \arrow[r] \arrow[d] & (\overline{\mathsf{G}}^*_x)_{ss} \arrow[d] \\
(X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^{\times})^{\mathsf{F}} \arrow[r] \arrow[d] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^{\times})/W_x\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[d] \\
(X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^{\times})^{\mathsf{F}} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \Big((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^{\times})/W\Big)^{\mathsf{F}} \arrow[d, "\sim"] \\
(\mathbf{T}^*(\overline{k}))^{\mathsf{F}} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & (\mathbf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}} \arrow[d, "\sim"] \\
\Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{T}) \arrow[r, "\iota"] & \Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G})
\end{tikzcd}$$

□

Notons que le théorème précédent n'est énoncé que pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ puisque l'on peut en déduire une description de $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) \cap \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ grâce à la proposition 1.4.1.1. Notons également que pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$, les objets simples de $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ sont

1. Les objets simples de caractéristique 0 qui sont les $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) \cap \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ qui ne sont pas entières.
2. Les objets simples de caractéristique ℓ qui sont les sous-quotients simples des réductions modulo ℓ des $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) \cap \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ qui sont entières (voir le lemme 6.8 de [Dat05], les hypothèses peuvent être supprimées ici car on est en niveau 0).

1.4.3 Condition de relevance

Nous avons noté précédemment que si $\mathbf{G}$ n'est pas quasi-déployé alors les catégories $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\Lambda}(G)$ peuvent être vides. Nous allons montrer dans cette partie que $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\Lambda}(G)$ est non vide si et seulement si ϕ est relevant, au sens suivant

1.4.3.1 Définition. Soit $\phi \in \Phi(I_F^{\Lambda}, {}^L\mathbf{G})$ un paramètre inertiel. On dit que ϕ est relevant s'il existe $\varphi' \in \Phi({}^L\mathbf{G})$ une extension de ϕ à W'_F qui est relevant, c'est-à-dire que si l'image de φ' est contenue dans un Levi de ${}^L\mathbf{G}$ alors ce dernier est relevant (au sens de [Bor79] 3.4).

Soit $\varphi \in \Phi(W_F, {}^L\mathbf{G})$ et posons $\phi := \varphi_{|I_F^{\Lambda}}$. Pour $w \in W_F$, l'action par conjugaison de $\varphi(w)$ normalise $\phi(I_F^{\Lambda})$ donc normalise également $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$, le centralisateur connexe de l'image de ϕ dans $\widehat{\mathbf{G}}$. On définit alors

$$\mathcal{M}_\varphi := C_{{}^L\mathbf{G}}(Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\varphi(W_F),\circ})$$

qui est un Levi de ${}^L\mathbf{G}$ dont la partie connexe est $M_\varphi := C_{\widehat{\mathbf{G}}}(Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\varphi(W_F),\circ})$.

1.4.3.2 Lemme. *Soit $\varphi \in \Phi(W_F, {}^L\boldsymbol{G})$. Alors toute extension $\varphi' \in \Phi({}^L\boldsymbol{G})$ de φ à W'_F se factorise par $\mathcal{M}_\varphi$. De plus il existe un $\varphi' \in \Phi({}^L\boldsymbol{G})$ étendant $\phi := \varphi_{|I_F}$ ne se factorisant par aucun sous Levi propre de $\mathcal{M}_\varphi$.*

Démonstration. Ici, on écrira plutôt W_F' sous la forme $W_F \times \mathrm{SL}_2$. On prendra garde cependant à prendre la bonne "restriction" de $W_F \times \mathrm{SL}_2$ à W_F qui est donnée par le plongement $W_F \hookrightarrow W_F \times \mathrm{SL}_2$, $w \mapsto (w, diag(|w|^{1/2}, |w|^{-1/2}))$. Néanmoins, cela ne fait pas de différence lorsque l'on prend les restrictions à l'inertie.

Prenons $\varphi' \in \Phi({}^L\mathbf{G})$ une extension de φ. Par définition $\mathcal{M}_\varphi$ contient $\varphi(W_F)$. De plus, $\varphi'(\mathrm{SL}_2)$ est contenue dans $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$ donc $\varphi'(\mathrm{SL}_2) \subseteq \mathcal{M}_\varphi$ et par conséquent $\varphi'(W_F') \subseteq \mathcal{M}_\varphi$.

Construisons maintenant un φ' ne se factorisant par aucun sous Levi propre de $\mathcal{M}_\varphi$. Un Levi minimal de $\mathcal{M}_\varphi$ factorisant φ' est obtenu en prenant le centralisateur dans $\mathcal{M}_\varphi$ d'un tore maximal de $C_{M_\varphi}(\varphi')^\circ$. Ainsi pour prouver la propriété demandée, il nous suffit de fabriquer un φ' tel que $C_{M_\varphi}(\varphi')^\circ \subseteq Z(\mathcal{M}_\varphi)$.

Soit $\phi \in \Phi(I_F, {}^L\mathbf{G})$. Prenons φ étendant ϕ tel que l'automorphisme semi-simple θ de conjugaison par $\varphi(\mathrm{Frob})$ préserve un épinglage $(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ, \mathbf{B}, \mathbf{T}, \{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta})$ de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$. On définit $\varphi'_{|W_F} = \varphi$ (ici on considère la restriction naïve de $W_F \times \mathrm{SL}_2$ à W_F) et $\varphi'_{|\mathrm{SL}_2} : \mathrm{SL}_2 \to C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)^\circ$ le morphisme principal de SL_2 à valeur dans $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)^\circ$ associé à l'épinglage choisi. Nous avons alors que $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi')^\circ = C_{C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)^\circ}(\varphi'_{|\mathrm{SL}_2})^\circ = Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)^\circ)^\circ$. Pour achever la preuve il ne reste donc qu'à montrer que $Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)^\circ)^\circ = Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\varphi(W_F),\circ}$. En effet, on aura alors le résultat voulu puisque $C_{M_\varphi}(\varphi')^\circ \subseteq C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi')^\circ = Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\varphi(W_F),\circ} \subseteq Z(\mathcal{M}_\varphi)$.

Notons que $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi) = C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)^\theta$. Pour simplifier les notations on pose $H = C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$. Il nous reste donc à prouver que $Z(H^{\theta,\circ})^\circ = Z(H^\circ)^{\theta,\circ}$. Calculons les centres ici présents. Nous avons que $Z(H^\circ) = \cap_{\alpha\in\Delta} \ker(\alpha)$ et par conséquent $Z(H^\circ)^{\theta,\circ} = ((\cap_{\alpha\in\Delta} \ker(\alpha)) \cap T^{\theta,\circ})^\circ$. Comme θ préserve un épinglage, on a également grâce au théorème 1.8 (v) de [DM94], $Z(H^{\theta,\circ}) = \cap_{\alpha\in\Delta/\theta} \ker(\alpha_{|T^{\theta,\circ}}) = \cap_{\alpha\in\Delta/\theta} \ker(\alpha) \cap T^{\theta,\circ}$, d'où le résultat voulu. □

On appelle tore maximal de ${}^L\mathbf{G}$ un sous-groupe $\mathcal{T}$ de ${}^L\mathbf{G}$ qui se surjecte sur $\langle\widehat{\vartheta}\rangle$ et dont l'intersection $\mathcal{T}^\circ$ avec $\widehat{\mathbf{G}}$ est un tore maximal de $\widehat{\mathbf{G}}$. Pour un tel tore, on notera $\widehat{\mathbf{T}} := \mathcal{T}^\circ$ sa partie connexe. Nous avons la suite exacte suivante : $\widehat{\mathbf{T}} \hookrightarrow \mathcal{T} \twoheadrightarrow \langle\widehat{\vartheta}\rangle$. Le tore $\mathcal{T}$ agit par conjugaison sur $\widehat{\mathbf{T}}$ et donc, on en déduit une action de $\langle\widehat{\vartheta}\rangle$ sur $\widehat{\mathbf{T}}$ qui nous permet de définir une F-structure sur $\mathbf{T}$ le dual de $\widehat{\mathbf{T}}$. On dira qu'un tore maximal $\mathcal{T}$ est relevant si le plongement $\widehat{\mathbf{T}} \hookrightarrow \widehat{\mathbf{G}}$ correspond dualement à un F-plongement $\mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{G}$. Enfin, on dira que $\mathcal{T}$ est elliptique dans ${}^L\mathbf{G}$ si $\mathcal{T}$ n'est contenu dans aucun Levi propre $\mathcal{M}$ de ${}^L\mathbf{G}$ ou de façon équivalente si $Z(\mathcal{T})^\circ = Z({}^L\mathbf{G})^\circ$.

1.4.3.3 Lemme. *Soit $\mathcal{M}$ un Levi de ${}^L\mathbf{G}$.*

1. *Si $\mathcal{M}$ contient $\mathcal{T}$, un tore maximal relevant, alors $\mathcal{M}$ est relevant.*
2. *Si $\mathcal{M}$ est relevant et $\mathcal{T}$ est un tore maximal elliptique de $\mathcal{M}$ alors $\mathcal{T}$ est relevant.*

Démonstration.

1. (Dat) Notons $(\mathcal{M}^\circ)_{ab}$ l'abélianisé de $\mathcal{M}^\circ$ qui est un tore. Le groupe $\mathcal{M}$ agit par conjugaison sur $\mathcal{M}^\circ$ donc sur $(\mathcal{M}^\circ)_{ab}$. Cette action est triviale sur $\mathcal{M}^\circ$ donc nous donne une action de $\langle\widehat{\vartheta}\rangle$ sur $(\mathcal{M}^\circ)_{ab}$. Le plongement $\mathcal{T}^\circ \to \mathcal{M}^\circ$ induit alors un morphisme $\langle\widehat{\vartheta}\rangle$-équivariant $\mathcal{T}^\circ \to (\mathcal{M}^\circ)_{ab}$. On obtient ainsi dualement un F-plongement $\mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{T}$. Si $\mathcal{T}$ est relevant, on peut choisir un plongement $\mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{G}$ rationnel, et alors $C_{\mathbf{G}}(\mathbf{S})$ est un Levi rationnel, dual de $\mathcal{M}$, qui est donc relevant.
2. Le tore $\mathcal{T}$ de $\mathcal{M}$ nous fournit dualement un plongement $\mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{M}_{qd}$, où $\mathbf{M}_{qd}$ est la forme quasi-déployée de $\mathbf{M}$, un F-sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$ dual de $\widehat{\mathbf{M}}$. Comme $\mathcal{T}$ est elliptique, le rang déployé de $\mathbf{T}$ est le même que celui du centre de $\mathbf{M}_{qd}$, et par conséquent $\mathbf{T}$ est elliptique. Ainsi, il se plonge dans toutes les formes intérieures de

$\mathbf{M}_{qd}$ (voir par exemple [Kal16] lemme 3.2.1) donc en particulier dans $\mathbf{M}$ et donc $\mathcal{T}$ est relevant.

□

1.4.3.4 Lemme. *Soit $\varphi \in \Phi(W_F, {}^L\boldsymbol{G})$. Notons $\phi = \varphi_{|I_F}$ et posons $\mathcal{C} := C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ \varphi(W_F)$ qui est un sous-groupe de ${}^L\boldsymbol{G}$. Alors il existe $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$ un sous-tore maximal de $\mathcal{C}$ tel que $Z(\mathcal{T})^\circ = Z(\mathcal{C})^\circ$.*

Démonstration. Notons θ la conjugaison par $\varphi(\mathrm{Frob})$ qui est un automorphisme semi-simple de $C := C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$. Prenons alors $(\widehat{\mathbf{T}}, \widehat{\mathbf{B}})$ une paire de Borel de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$ stable sous θ (existe par [Ste68] théorème 7.5). Nous pouvons écrire $\mathcal{C}$ sous la forme $\mathcal{C} := C \rtimes \langle\theta\rangle$. On forme alors $\mathcal{T} := \widehat{\mathbf{T}} \rtimes \langle\theta\rangle$ qui est un tore maximal de $\mathcal{C}$. Nous allons modifier $\mathcal{T}$ pour le rendre elliptique. Toute section η de la suite exacte $N_C(\widehat{\mathbf{T}}) \hookrightarrow N_{\mathcal{C}}(\widehat{\mathbf{T}}) \twoheadrightarrow \langle\theta\rangle$ (la notation $N_C(\widehat{\mathbf{T}})$ signifie le normalisateur de $\widehat{\mathbf{T}}$ dans C et idem pour $N_{\mathcal{C}}(\widehat{\mathbf{T}})$ avec $\mathcal{C}$) nous permet de définir un tore maximal $\mathcal{T}_\eta$ par $\mathcal{T}_\eta := \widehat{\mathbf{T}} \cdot \eta(\langle\theta\rangle)$. Une section η est donnée par $\eta(\theta) = n_\theta\theta$ où $n_\theta \in N_C(\widehat{\mathbf{T}})$. On prend alors pour n_θ un élément de θ-coxeter, c'est-à-dire un élément du groupe de Weyl formé en prenant un produit de réflexions simples, une pour chaque orbite sous θ. Il découle alors du lemme 7.4 (i) de [Spr74] que le tore que l'on obtient est elliptique, ce qui achève la preuve. □

Rappelons nous que dans la section 1.4.2 nous avons fixé un tore maximal de référence $\mathbf{T}_0$, qui nous a permis d'associer à $\mathbf{T}$, un tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$, un élément $w \in W$, un tore ${}^L\mathbf{T} = \widehat{\mathbf{T}}_0 \rtimes \langle w\widehat{\vartheta}\rangle$ et un plongement $\iota : {}^L\mathbf{T} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ en choisissant un relèvement $\dot{w} \in N(\widehat{\mathbf{T}}_0, \widehat{\mathbf{G}})$ de w.

1.4.3.5 Proposition. *Soit $\phi \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *ϕ est relevant*
2. *Il existe $\boldsymbol{T}$ un tore maximal non-ramifié de $\boldsymbol{G}$ et $\phi_T \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{T})$ tel que $\phi \sim \iota \circ \phi_T$ où $\iota : {}^L\boldsymbol{T} \hookrightarrow {}^L\boldsymbol{G}$*
3. *$\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\phi}(G)$ est non vide*

Démonstration. L'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3) est donnée par le théorème 1.4.2.1. Montrons (1) $\Leftrightarrow$ (2).

Supposons ϕ relevant. Par définition, il existe $\varphi' : W_F' \to {}^L\mathbf{G}$ relevant qui étend ϕ. Notons $\varphi = \varphi'_{|W_F}$. Alors le lemme 1.4.3.2 nous dit que $\mathcal{M}_\varphi$ factorise φ' et est donc un Levi relevant. Le lemme 1.4.3.4 nous fournit $\mathcal{T}$ un tore maximal de $\mathcal{C} := C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ\varphi(W_F)$ tel que $Z(\mathcal{T})^\circ = Z(\mathcal{C})^\circ$. Comme $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{M}_\varphi$ on a également que $\mathcal{T}$ est un tore maximal de $\mathcal{M}_\varphi$. Maintenant $Z(\mathcal{T})^\circ = Z(\mathcal{C})^\circ \subseteq Z(\mathcal{M}_\varphi)^\circ$ et comme $\mathcal{T}$ est un tore maximal de $\mathcal{M}_\varphi$ on a aussi $Z(\mathcal{M}_\varphi)^\circ \subseteq Z(\mathcal{T})^\circ$ et par conséquent $Z(\mathcal{M}_\varphi)^\circ = Z(\mathcal{T})^\circ$, c'est-à-dire que $\mathcal{T}$ est un tore maximal elliptique de $\mathcal{M}_\varphi$. Le lemme 1.4.3.3 (2) nous dit alors que $\mathcal{T}$ est un tore relevant. De plus comme $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{C}$, ce tore factorise ϕ et l'on a (2).

Supposons maintenant qu'il existe $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{G}$ un tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$ et $\phi_T \in \Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{T})$ tel que $\phi \sim \iota \circ \phi_T$. On rappelle que ${}^L\mathbf{T} = \widehat{\mathbf{T}}_0 \rtimes \langle w\widehat{\vartheta}\rangle$. Le paramètre ϕ_T se prolonge en $\varphi_T \in \Phi(W_F, {}^L\mathbf{T})$ et on pose $\varphi = \iota \circ \varphi_T \in \Phi(W_F, {}^L\mathbf{G})$ qui est une extension de ϕ à W_F. Ainsi $Im(\phi) \subseteq \widehat{T}_0$, donc $\widehat{T}_0 \subseteq C_{\widehat{G}}(\phi)^\circ$ et donc $\widehat{T}_0 \subseteq \mathcal{M}_\phi$. Nous avons également que $\dot{w}\vartheta = \varphi(\mathrm{Frob}) \in \mathcal{M}_\phi$. Ainsi $\iota({}^L\mathbf{T}) \subseteq \mathcal{M}_\phi$ et le lemme 1.4.3.3 (1) nous dit alors que $\mathcal{M}_\phi$ est relevant. De plus, le lemme 1.4.3.2 nous construit $\varphi' \in \Phi({}^L\mathbf{G})$ un paramètre étendant ϕ

et tel que $\mathcal{M}_\varphi$ soit un Levi minimal contenant son image. Comme $\mathcal{M}_\varphi$ est relevant, on en déduit que φ' est relevant et donc que ϕ est relevant. □

1.4.3.6 Théorème. *Soit $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$. Alors $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ est non vide si et seulement si ϕ est relevant.*

Démonstration. La proposition 1.4.3.5 nous donne le résultat lorsque $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Pour le cas général, notons que par la proposition 1.4.1.1, $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ est non vide si et seulement s'il existe $\phi' \in \Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G})$ tel que $\phi'_{|I_F^\Lambda} \sim \phi$ et $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ est non vide, si et seulement s'il existe $\phi' \in \Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G})$ relevant prolongeant ϕ, si et seulement si ϕ est relevant. □

1.4.4 Compatibilité à l'induction et à la restriction parabolique

Cette sous-partie à pour but d'étudier le comportement des catégories $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ vis à vis de l'induction et de la restriction parabolique.

Jusqu'à présent, nous avons considéré l'immeuble de Bruhat-Tits semi-simple, puisque celui-ci est muni d'une structure de complexe polysimplicial. Cependant dans cette section, nous souhaitons comparer l'immeuble d'un Levi et celui de G. L'immeuble de Bruhat-Tits "étendu" semble alors plus approprié. Cela ne fait pas une grosse différence. En effet nous traitions la structure polysimpliciale de façon purement combinatoire. De plus, les idempotents $e_{\phi,\sigma}$ auraient très bien pu être définis pour un point quelconque x de l'immeuble, on aurait alors eu que $e_{\phi,x} = e_{\phi,\sigma}$, où σ est le plus petit polysimplexe contenant x. Ainsi, dans cette partie seulement, on utilisera l'immeuble de Bruhat-Tits "étendu", que l'on notera $\mathrm{BT}^e(G)$.

Soit $\mathbf{P}$ un F-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ de quotient de Levi $\mathbf{M}$ défini sur F. Prenons $\mathbf{S}$ un tore déployé maximal de $\mathbf{G}$ contenu dans $\mathbf{P}$ et notons $\mathbf{T}$ son centralisateur dans $\mathbf{G}$. Il existe alors un unique relèvement de $\mathbf{M}$ en un sous-groupe de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$. Notons φ le système de racines de G relativement à S et $\varphi_M \subseteq \varphi$ celui de M. L'appartement $\mathcal{A}_M^e(\mathbf{S}, F)$ de $\mathrm{BT}^e(M)$ relativement à $\mathbf{S}$ est égal à $\mathcal{A}^e := \mathcal{A}^e(\mathbf{S}, F)$ mais en ne gardant que les murs associés aux racines affines dont la partie vectorielle est dans φ_M. Soit $x \in \mathcal{A}$, alors $M_x^\circ = M \cap G_x^\circ$ et $M_x^+ = M \cap G_x^+$ (voir [MP96] section 4.3). Rappelons que l'on a déjà défini $\overline{\mathsf{M}}_x \simeq M_x^\circ / M_x^+$ et posons $\overline{\mathsf{P}}_x$ l'image de $P_x := P \cap G_x^\circ$ dans $\overline{\mathsf{G}}_x$.

1.4.4.1 Lemme. *$\overline{\mathsf{P}}_x$ est un sous-groupe parabolique de $\overline{\mathsf{G}}_x$ de quotient de Levi $\overline{\mathsf{M}}_x$.*

Démonstration. Notons φ_P le sous-ensemble de φ des racines α telles que P soit engendré par T et les U_α, $\alpha \in \varphi_P$. Notons maintenant φ_x (resp. $\varphi_{P,x}$, resp. $\varphi_{M,x}$) les racines affines passant par x et dont la partie vectorielle est dans φ (resp. φ_P, resp. φ_M). Alors φ_x (resp. $\varphi_{P,x}$, resp. $\varphi_{M,x}$) est le système de racine de $\overline{\mathsf{G}}_x$ (resp. $\overline{\mathsf{P}}_x$, resp. $\overline{\mathsf{M}}_x$) relativement à $\mathcal{S}_x$. Choisissons maintenant une forme linéaire $f : X^*(\mathbf{S}) \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi_P = \{\alpha \in \varphi, f(\alpha) \geq 0\}$ et $\varphi_M = \{\alpha \in \varphi, f(\alpha) = 0\}$. Les sous-ensembles $\varphi_{P,x}$ et $\varphi_{M,x}$ vérifient alors $\varphi_{P,x} = \{\alpha \in \varphi_x, f(\alpha) \geq 0\}$ et $\varphi_{M,x} = \{\alpha \in \varphi_x, f(\alpha) = 0\}$, ce qui montre que $\overline{\mathsf{P}}_x$ est bien un parabolique de $\overline{\mathsf{G}}_x$ de quotient de Levi $\overline{\mathsf{M}}_x$. □

Considérons $\widehat{\mathbf{M}}$ un dual de $\mathbf{M}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ muni d'un plongement $\iota : {}^L\mathbf{M} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ (voir [Bor79] section 3.4), qui induit une application $\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{M}) \to \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$.

Commençons par vérifier la compatibilité à la restriction parabolique.

1.4.4.2 Théorème. *Soit $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$. Alors pour tout sous-groupe parabolique $\boldsymbol{P}$ de $\boldsymbol{G}$ ayant pour facteur de Levi $\boldsymbol{M}$, on a*

$$r_P^G(\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)) \subseteq \prod_{\phi_M} \mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi_M}(G)$$

où le produit est pris sur les $\phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{M})$ tels que $\iota \circ \phi_M \sim \phi$ et r_P^G désigne la restriction parabolique.

Démonstration. Soit $V \in \mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$. La restriction parabolique préserve le niveau donc $r_P^G(V) \in \mathrm{Rep}_\Lambda^0(M)$. Il nous suffit donc de montrer que pour $x \in \mathcal{A}_M^e$ et $\phi' \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{M})$ tel que $\iota \circ \phi' \neq \phi$, on a $e_{\phi',x} r_P^G(V) = 0$.

Nous avons $r_P^G(V)^{M_x^+} \simeq r_{\overline{\mathsf{P}}_x}^{\overline{\mathsf{G}}_x}(V^{G_x^+})$ (voir [Dat09] propositions 3.1 et 6.2), donc

$$e_{\phi',x} r_P^G(V)^{M_x^+} \simeq e_{\phi',x} r_{\overline{\mathsf{P}}_x}^{\overline{\mathsf{G}}_x}(V^{G_x^+}) \simeq e_{\phi',x} r_{\overline{\mathsf{P}}_x}^{\overline{\mathsf{G}}_x}(e_{\iota\circ\phi',x}(V^{G_x^+}))$$

(la dernière égalité provient de 1.2.1.2). Or par hypothèse $\iota \circ \phi' \neq \phi$ donc $e_{\iota\circ\phi',x}(V^{G_x^+}) = 0$ d'où le résultat. □

Passons maintenant à l'induction parabolique.

1.4.4.3 Théorème. *Soit $\phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{M})$ et notons $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$ son image par $\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{M}) \to \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$. Alors pour tout sous-groupe parabolique $\boldsymbol{P}$ de $\boldsymbol{G}$ ayant pour facteur de Levi $\boldsymbol{M}$, on a*

$$i_P^G(\mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi_M}(M)) \subseteq \mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$$

où i_P^G désigne l'induction parabolique.

Démonstration. Cela découle du théorème 1.4.4.2 et du fait que r_P^G est adjoint à gauche de i_P^G. □

1.4.4.4 Proposition. *Soit $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$. Alors si ϕ est discret (c'est-à-dire ne se factorise pas par un Levi rationnel propre) toutes les représentations de $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ sont cuspidales et toutes les représentations irréductibles de $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ sont supercuspidales.*

De plus, si $\boldsymbol{G}$ est quasi-déployé, on a la réciproque pour la cuspidalité, c'est-à-dire que ϕ est discret si et seulement si $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ ne contient que des cuspidales.

Démonstration. La cuspidalité découle immédiatement du théorème 1.4.4.2. Pour la supercuspidalité, remarquons que si ϕ est discret, alors le théorème 1.4.4.3 montre qu'une induite n'as pas de composante dans $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ et donc n'a pas de sous-quotient irréductible dans $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$.

Maintenant si $\mathbf{G}$ est quasi-déployé et que ϕ n'est pas discret, alors $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ contient des induites d'après le théorème 1.4.4.3 (nous utilisons l'hypothèse quasi-déployé pour dire que ces facteurs sont non-nuls). □

Si $\mathbf{G}$ n'est pas quasi-déployé l'équivalence peut être fausse, comme le montre l'exemple de $G = D^\times$ où D est une F-algèbre à division de dimension finie. Alors toutes les représentations sont cuspidales, en particulier $\mathrm{Rep}_\Lambda^1(G)$ ne contient que des cuspidales.

Avoir ϕ discret n'est pas une condition nécessaire pour avoir des cuspidales (supercuspidales) dans $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$. En effet, toute cuspidale unipotente se retrouvera dans $\mathrm{Rep}_\Lambda^1(G)$.

Soit $\phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{M})$ et posons $\phi = \iota \circ \phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$. Nous venons de voir que i_P^G réalise un foncteur

$$i_P^G : \mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi_M}(M) \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi}(G).$$

La catégorie $\mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi_M}(M)$ est un facteur direct de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(M)$, on a donc un foncteur e_{ϕ_M} : $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(M) \to \mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi_M}(M)$. Définissons $r_P^{G,\phi_M} := e_{\phi_M} \circ r_P^G$, de sorte que r_P^{G,ϕ_M} soit un foncteur

$$r_P^{G,\phi_M} : \mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi}(G) \longrightarrow \mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi_M}(M).$$

1.4.4.5 Lemme. *Le foncteur r_P^{G,ϕ_M} est adjoint à gauche de i_P^G.*

Démonstration. Soient $V \in \mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi}(G)$ et $W \in \mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi_M}(M)$. Nous savons déjà que r_P^G est adjoint à gauche de i_P^G, donc $Hom(r_P^G(V), W) = Hom(V, i_P^G(W))$. Maintenant $\mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi_M}(M)$ est un facteur direct de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(M)$ de sorte que $Hom(r_P^G(V), W) = Hom(r_P^{G,\phi_M}(V), W)$ et on a le résultat. □

1.4.4.6 Théorème. *Notons $C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi)$ le centralisateur dans $\widehat{\boldsymbol{G}}$ de l'image de ϕ. Alors si $C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi) \subseteq \iota(\widehat{\boldsymbol{M}})$ la paire de foncteurs adjoints (i_P^G, r_P^{G,ϕ_M}) réalise une équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi_M}(M)$ et $\mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi}(G)$.*

Démonstration. Soit $V \in \mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi_M}(M)$. Par adjonction, nous avons une application $r_P^G i_P^G(V) \to V$. Le lemme géométrique nous dit qu'elle est surjective et que son noyau W, admet une filtration dont les composantes du gradué associé sont isomorphes à $(i^M_{M\cap {}^wP} \circ w \circ r^M_{{}^{w^{-1}}P\cap M})(V)$, où w parcourt un ensemble $\mathcal{W}^P$ de représentants particuliers dans G des doubles classes $W_M \backslash W / W_M$ ne contenant pas la classe triviale (W_M est le groupe de Weyl de $\mathbf{M}$). Nous souhaitons montrer que $e_{\phi_M}(W) = 0$.

Prenons donc $w \in \mathcal{W}^P$ et montrons que

$$e_{\phi_M}((i^M_{M\cap {}^wP} \circ w \circ r^M_{{}^{w^{-1}}P\cap M})(V)) = 0.$$

Identifions les paramètres inertiels avec des classes de conjugaison semi-simples F-stables. Ainsi ϕ_M correspond à $s \in (\mathbf{M}^*_{ss})^{\mathsf{F}}$ et on note $\mathrm{Rep}_\Lambda^s(M)$ pour $\mathrm{Rep}_\Lambda^{\phi_M}(M)$. Par le théorème 1.4.4.2

$$r^M_{{}^{w^{-1}}P\cap M}(V) \in \prod_{i=1}^n \mathrm{Rep}_\Lambda^{s_i}({}^{w^{-1}}M \cap M)$$

où $\{s_1, \cdots, s_n\}$ est l'image réciproque de $\{s\}$ par l'application $(({}^{w^{-1}}\mathbf{M} \cap \mathbf{M})^*_{ss})^{\mathsf{F}} \to (\mathbf{M}^*_{ss})^{\mathsf{F}}$. Donc

$$w \circ r^M_{{}^{w^{-1}}P\cap M}(V) \in \prod_{i=1}^n \mathrm{Rep}_\Lambda^{{}^ws_i}(M \cap {}^wM).$$

Enfin par le théorème 1.4.4.3

$$(i^M_{M\cap {}^wP} \circ w \circ r^M_{{}^{w^{-1}}P\cap M})(V) \in \prod_{i=1}^m \mathrm{Rep}_\Lambda^{t_i}(M)$$

où $\{t_1, \cdots, t_m\}$ est l'image de $\{{}^ws_1, \cdots, {}^ws_n\}$ par l'application $((\mathbf{M} \cap {}^w\mathbf{M})^*_{ss})^{\mathsf{F}} \to (\mathbf{M}^*_{ss})^{\mathsf{F}}$.

On veut donc montrer qu'aucun des t_i n'est égal à s. Supposons le contraire et que l'on ait un i tel que $t_i = s$. Par construction, t_i est dans l'une des classes de conjugaison

sur $\mathbf{M}^*$ des ${}^w(s_j)$, donc il existe $g \in \mathbf{M}^*$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$ tels que $t_i = {}^{gw}(s_j)$. De même par construction des s_j, il existe $h \in \mathbf{M}^*$ tel que $s_j = {}^h s$. Donc $s = t_i = {}^{gwh}(s)$ et $gwh \in C_{\mathbf{G}^*}(s) \subseteq \mathbf{M}^*$ (par hypothèse), ce qui est absurde car $w \notin \mathbf{M}^*$. Ceci nous montre que $e_{\phi_M}(W) = 0$ et donc que $r_P^{G,\phi_M} ip(V) \xrightarrow{\sim} V$ est un isomorphisme.

Montrons maintenant que le foncteur r_P^{G,ϕ_M} est conservatif. Ceci nous permettra de conclure grâce au lemme 1.4.4.7 ci-dessous. Comme les catégories considérées sont abéliennes et que r_P^{G,ϕ_M} est exact, il nous suffit de montrer que si $V \neq 0$ alors $r_P^{G,\phi_M}(V) \neq 0$.

Prenons donc $V \in \mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ tel que $V \neq 0$. Il existe $x \in \mathcal{A}^e$ tel que $e_{\phi,x}V \neq 0$. Notons $s \in (\mathbf{M}_{ss}^*)^{\mathsf{F}}$ la classe de conjugaison semi-simple correspondant à ϕ_M. Comme $e_{\phi,x}V \neq 0$, il existe $s_x \in (\overline{\mathbf{M}}_x^*)_{ss}$ dont l'image par $(\overline{\mathbf{M}}_x^*)_{ss}^{\mathsf{F}} \to (\mathbf{M}_{ss}^*)^{\mathsf{F}}$ est s et telle que $e_{s_x,\Lambda}^{\overline{\mathsf{G}}_x} V^{G_x^+} \neq 0$. L'hypothèse $C_{\mathbf{G}^*}(s) \subseteq \mathbf{M}^*$ peut se retraduire, si l'on voit s comme un élément de $\mathbf{T}^*$, de la manière suivante : si $w \in W$ est tel que $ws = s$ alors $w \in W_M$. Or l'application $(\overline{\mathbf{M}}_x^*)_{ss} \to (\mathbf{M}_{ss}^*)$ est définie par $\overline{\mathsf{T}}_x^*/W_{M,x} \to \mathbf{T}^*/W_M$ et comme $W_{M,x} = W_M \cap W_x$ on en déduit que s_x vérifie les mêmes hypothèses que s, c'est-à-dire $C_{\overline{\mathbf{G}}_x^*}(s_x) \subseteq \overline{\mathbf{M}}_x^*$.

Maintenant, nous avons vu dans la preuve du théorème 1.4.4.2 que

$$e_{s_x,\Lambda}^{\overline{\mathsf{M}}_x}(r_P^G(V))^{M_x^+} \simeq e_{s_x,\Lambda}^{\overline{\mathsf{M}}_x} r_{\overline{\mathsf{P}}_x}^{\overline{\mathsf{G}}_x}(e_{s_x,\Lambda}^{\overline{\mathsf{G}}_x}(V^{G_x^+})).$$

En notant $r_{\overline{\mathsf{P}}_x}^{\overline{\mathsf{G}}_x,s_x}$ le foncteur $e_{s_x,\Lambda}^{\overline{\mathsf{M}}_x} r_{\overline{\mathsf{P}}_x}^{\overline{\mathsf{G}}_x}$, on a

$$e_{s_x,\Lambda}^{\overline{\mathsf{M}}_x}(r_P^G(V))^{M_x^+} \simeq r_{\overline{\mathsf{P}}_x}^{\overline{\mathsf{G}}_x,s_x}(e_{s_x,\Lambda}^{\overline{\mathsf{G}}_x}(V^{G_x^+})).$$

Comme $C_{\overline{\mathbf{G}}_x^*}(s_x) \subseteq \overline{\mathbf{M}}_x^*$ le théorème B' de [BR03] nous dit que $r_{\overline{\mathsf{P}}_x}^{\overline{\mathsf{G}}_x,s_x}$ réalise une équivalence de catégories. En particulier il est conservatif et comme $e_{s_x,\Lambda}^{\overline{\mathsf{G}}_x}(V^{G_x^+}) \neq 0$ on a

$$e_{s_x,\Lambda}^{\overline{\mathsf{M}}_x}(r_P^G(V))^{M_x^+} \simeq r_{\overline{\mathsf{P}}_x}^{\overline{\mathsf{G}}_x,s_x}(e_{s_x,\Lambda}^{\overline{\mathsf{G}}_x}(V^{G_x^+})) \neq 0$$

et donc $r_P^{G,\phi_M}(V) \neq 0$ ce qui achève la preuve. □

1.4.4.7 Lemme. *Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux catégories et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur. Si F est conservatif et admet un adjoint à droite (ou à gauche) pleinement fidèle, alors F réalise une équivalence de catégories.*

Démonstration. Soit G un adjoint à droite. Le cas d'un adjoint à gauche se traite de la même manière par dualité. Le foncteur G étant pleinement fidèle, le morphisme $\alpha : FG \to id_{\mathcal{D}}$ est un isomorphisme naturel. Nous devons montrer que $\beta : id_{\mathcal{C}} \to GF$ est également un isomorphisme. Par les axiomes d'adjonctions, la composition

$$F(x) \xrightarrow{F(\beta_x)} FGF(x) \xrightarrow{\alpha_{F(x)}} F(x)$$

est $id_{F(x)}$ pour tout $x \in \mathcal{C}$. Comme α est déjà un isomorphisme, on en déduit que $F(\beta_x)$ est un isomorphisme, et donc que β_x est un isomorphisme puisque F est conservatif. □

1.4.5 Compatibilité à la correspondance de Langlands

Dans cette partie nous prendrons $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. La correspondance de Langlands locale prédit une application à fibres finies $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) \to \Phi({}^L\mathbf{G})$, $\pi \mapsto \varphi_\pi$. Dans des cas où elle est connue, nous souhaitons vérifier que la décomposition du théorème 1.3.4.5 est bien compatible à cette dernière, c'est-à-dire que si $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ est une représentation de niveau 0 alors $\pi \in \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ avec $\varphi_{\pi|I_F} \sim \phi$.

La correspondance de Langlands est connue dans plusieurs cas dont : les tores (prouvé par Langlands lui-même), les représentations unipotentes des groupes p-adiques adjoints ([Lus84], [Lus02]) et les groupes classiques ([HT01] [Hen00] [Art13] [Mok15] [KMSW14]). La compatibilité à la correspondance de Langlands pour les tores est contenue dans le théorème 1.4.2.1. Pour ce qui est des représentations unipotentes, par construction, elle appartiennent toutes à $\mathrm{Rep}^{1}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$. Par conséquent, dans cette section nous examinerons le cas des groupes classiques. Notons que $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$ a déjà été fait dans [Dat18a] section 3.2.6, on se concentrera ici sur les autres cas. Dans le but d'utiliser les résultats de [LS16], nous supposerons de plus que F est de caractéristique résiduelle impaire.

Commençons par expliquer ce que l'on entend par un groupe classique. Soit F' une extension de degré au plus 2 de F et k' son corps résiduel. Notons σ le générateur du groupe de Galois de F'/F et $N_{F'/F} : F'^\times \to F^\times$ l'application norme. Fixons un signe $\varepsilon = \pm 1$ et soit (V, h) un espace F'/F-ε-hermitien non-dégénéré. Dans cette partie $G := U(V)^\circ$ est la composante connexe du groupe des F-points du groupe réductif déterminé par (V, h), c'est-à-dire $U(V) := \{g \in \mathrm{Aut}_{F'}(V), h(gv, gw) = h(v, w) \text{ pour tout } v, w \in V\}$ et $U(V)^\circ := \{g \in U(V), N_{F'/F} det_{F'}(g) = 1\}$.

La correspondance de Langlands pour les groupes classiques (restreinte à W_F) est compatible à l'induction parabolique (voir [Mou15] théorème 4.9). Il en est de même pour $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ d'après la section 1.4.4. Nous pouvons ainsi nous restreindre ici aux représentations irréductibles cuspidales. On pose $\mathcal{A}(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations irréductibles cuspidales de G et $\mathcal{A}_{[0]}(G)$ le sous-ensemble des représentations de niveau 0. Soit ρ une représentation irréductible cuspidale de $\mathrm{GL}_n(F')$. On définit la représentation ρ^σ de $\mathrm{GL}_n(F')$ par $\rho^\sigma(g) = \rho({}^t\sigma(g^{-1}))$, où ${}^tg$ désigne la transposée de g. On dit alors que ρ est auto-duale si $\rho^\sigma \simeq \rho$ et on pose $\mathcal{A}^\sigma_n(F')$ l'ensemble des représentations irréductibles cuspidales auto-duales de $\mathrm{GL}_n(F')$, $\mathcal{A}^\sigma(F') := \cup_{n\geq 1}\mathcal{A}^\sigma_n(F')$ et $\mathcal{A}^\sigma_{[0]}(F')$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}^\sigma(F')$ composé des représentations de niveau 0.

Notons $H = H^- \oplus H^+$ le plan hyperbolique, c'est-à-dire, $H^\pm$ est un F'-espace vectoriel de dimension 1 de base $e_\pm$ et H est muni de la forme h_H donnée par $h_H(\Lambda_- e_- + \Lambda_+ e_+, \mu_- e_- + \mu_+ e_+) = \Lambda_- \sigma(\mu_+) + \varepsilon \Lambda_+ \sigma(\mu_-)$. Pour un entier $n \geq 0$, on pose $V_n := V \oplus nH$ muni de la forme $h_n := h \oplus h_H \oplus \cdots \oplus h_H$ et $G_n := U(V_n)^\circ$. Le stabilisateur dans G_n de la décomposition $V_n = nH^- \oplus V \oplus nH^+$ est un sous-groupe de Levi M_n de G_n et l'on a un isomorphisme $M_n \simeq \mathrm{GL}_n(F') \times G$. Le stabilisateur de nH^- est quand à lui un sous-groupe parabolique P_n de G_n de facteur de Levi M_n. Ainsi si $\rho \in \mathcal{A}^\sigma_n(F')$ et $\pi \in \mathcal{A}(G)$, on peut former $\rho \otimes \pi$ que l'on considère comme une représentation de M_n. Définissons pour $s \in \mathbb{C}$, $I(\rho, \pi, s) := i^{G_n}_{P_n} \rho \mid det(\cdot) \mid^s_{F'} \otimes \pi$.

1.4.5.1 Théorème ([Sil80], théorème 1.6)**.** *Si $I(\rho, \pi, s)$ est réductible pour un certain $s \in \mathbb{R}$ alors il existe un unique réel positif $s_\pi(\rho)$ tel que, $I(\rho, \pi, s)$ est réductible si et seulement si $s = \pm s_\pi(\rho)$.*

Si $I(\rho,\pi,s)$ est irréductible pour tout $s\in\mathbb{R}$, on pose alors $s_\pi(\rho)=0$. Définissons alors l'ensemble de Jordans $Jord(\pi)$ par

$$Jord(\pi):=\{(\rho,m)\in\mathcal{A}^\sigma(F')\times\mathbb{N}^*, 2s_\pi(\rho)-(m+1)\in 2\mathbb{N}\}$$

Rappelons que comme G est un groupe classique on a la correspondance de Langlands locale, $\mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)\to\Phi({}^L\mathbf{G})$, $\pi\mapsto\varphi_\pi$. Jusqu'à présent nos paramètres de Langlands $\varphi\in\Phi({}^L\mathbf{G})$ étaient de la forme $\varphi: W_F'\to{}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ avec $W_F'=W_F\ltimes\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. Dans cette section seulement, on considére une autre version du groupe de Weil-Deligne : $W_F'\simeq W_F\times\mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Ainsi les paramètres de Langlands sont de la forme $\varphi: W_F\times\mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to{}^L\mathbf{G}$. Notons $N_{\widehat{\mathbf{G}}}$ la dimension de l'espace vectoriel sur lequel agit naturellement $\widehat{\mathbf{G}}$. Alors si $\varphi: W_F\times\mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to{}^L\mathbf{G}$ est un paramètre de Langlands, on notera $\tilde{\varphi}: W_{F'}\times\mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)\to\mathrm{GL}_{N_{\widehat{\mathbf{G}}}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ l'application obtenue en restreignant φ à $W_{F'}$ et en la composant avec $\widehat{\mathbf{G}}\hookrightarrow\mathrm{GL}_{N_{\widehat{\mathbf{G}}}}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Il est attendu (et connu au moins dans le cas où $\mathbf{G}$ est quasi-déployé, voir par exemple [Moe14]) que le paramètre $\tilde{\varphi}_\pi$ soit décrit grâce à l'ensemble de Jordan $Jord(\pi)$ de la façon suivante

1.4.5.2 Théorème ([Moe14]). *Si $\mathbf{G}$ est un groupe classique quasi-déployé et $\pi\in\mathcal{A}(G)$, on a*

$$\tilde{\varphi}_\pi=\bigoplus_{(\rho,m)\in Jord(\pi)}\varphi_\rho\otimes st_m$$

où φ_ρ est la représentation irréductible de $W_{F'}$ correspondant à ρ via la correspondance de Langlands locale pour GL_n et st_m est la représentation irréductible m-dimensionnelle de $\mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Le résultat précédent étant connu dans le cas où $\mathbf{G}$ est quasi-déployé et le théorème 1.3.4.5 nécessitant l'hypothèse F^{nr}-déployé, nous nous limiterons ici au cas où $\mathbf{G}$ est un groupe classique non-ramifié, c'est-à-dire un groupe spécial orthogonal impair SO_{2n+1}, un groupe spécial orthogonal pair SO_{2n} (groupe spécial orthogonal déployé) ou SO^*_{2n} (groupe spécial orthogonal quasi-déployé associé à une extension quadratique non-ramifiée F'/F), un groupe symplectique Sp_{2n} ou un groupe unitaire $U_n(F'/F)$ où F' est une extension non-ramifiée de F.

Pour comprendre φ_π nous avons donc besoin de comprendre $Jord(\pi)$ et en particulier $s_\pi(\rho)$. Nous allons pour cela nous appuyer sur les résultats obtenus dans [LS16].

Soit $\pi\in\mathcal{A}_{[0]}(G)$. Il existe alors $x\in\mathrm{BT}_0$ et $s\in(\overline{\mathsf{G}}^*_x)_{ss}$ tels que $e^{\overline{\mathsf{G}}_x}_{s,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\pi^{G^+_x}$. Comme nous sommes dans le cas où $\mathbf{G}$ est un groupe classique, le groupe $\overline{\mathsf{G}}_x$ se décompose en un produit de deux groupes $\overline{\mathsf{G}}_x\simeq\overline{\mathsf{G}}_{x,1}\times\overline{\mathsf{G}}_{x,2}$, où les $\overline{\mathsf{G}}_{x,i}$ sont des groupes classiques (voir par exemple [LS16] section 2). Ainsi s correspond via cet isomorphisme à (s_1,s_2) où $s_i\in(\overline{\mathsf{G}}^*_{x,i})_{ss}$. Soit $P\in k'[X]$ un polynôme unitaire. Désignons par τ le générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(k'/k)$. On définit $P^\tau(X):=\tau(P(0))^{-1}X^{deg(P)}\tau(P)(1/X)$ et on dit que P est auto-dual si $P=P^\tau$. Le polynôme caractéristique P_{s_i} de s_i est alors un polynôme unitaire auto-dual et on l'écrit (comme dans [LS16] section 7) $P_{s_i}(X)=\prod_P P(X)^{a_P^{(i)}}$, où le produit est pris sur l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles auto-duaux sur k' (une telle écriture est possible car la série de Deligne-Lusztig associée à s_i contient une représentation cuspidale et que si P_{s_i} contenait un facteur de la forme $P(X)P^\tau(X)$ avec P irreductible et $P\neq P^\tau$ alors le centralisateur de s_i dans $(\overline{\mathsf{G}}^*_{x,i})_{ss}$ serait contenu dans un Levi rationnel propre).

Soit ρ une représentation irréductible cuspidale auto-duale de niveau zero d'un certain $\mathrm{GL}_n(F')$. Notons $G'=\mathrm{GL}_n(F')$. Comme précédemment nous avons l'existence d'un $y\in$

$\mathrm{BT}_0(\mathbf{G}', F')$ et d'une classe de conjugaison semi-simple $s_\rho \in (\overline{\mathsf{G}'}_y^*)_{ss}$ telle que $e_{s_\rho,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\overline{\mathsf{G}'}_y^*}\rho^{G'^+_y}$. Notons qu'ici $\overline{\mathsf{G}'}_y^* \simeq \mathrm{GL}_n(k')$. Associons de même à s_ρ son polynôme caractéristique Q qui est un polynôme unitaire irréductible auto-dual de degré n.

1.4.5.3 Théorème ([LS16] section 8)**.** *Notons $\rho' \in \mathcal{A}_n^\sigma(F')$ l'unique (à équivalence près) twist non-ramifié (non-équivalent) de ρ qui est auto-dual. Alors pour $\boldsymbol{G}$ un groupe classique non-ramifié, on a*

$$\lfloor s_\pi(\rho)^2 \rfloor + \lfloor s_\pi(\rho')^2 \rfloor = a_Q^{(1)} + a_Q^{(2)}$$

sauf si $\boldsymbol{G} = \mathrm{Sp}_{2n}$ et $Q(X) = X - 1$ où dans ce cas on a

$$\lfloor s_\pi(\rho)^2 \rfloor + \lfloor s_\pi(\rho')^2 \rfloor = a_{(X-1)}^{(1)} + a_{(X-1)}^{(2)} - 1.$$

Les résultats dans [LS16] sont exprimés en termes de polynômes auto-duaux. Nous nous utilisons plutôt des classes de conjugaisons semi-simples. Nous souhaitons donc faire le lien entre les deux.

Soit H un groupe du type GL_n, Sp_{2n}, SO_{2n+1} ou SO_{2n} sur k. On considère son plongement naturel $\mathsf{H} \subseteq \mathrm{GL}_N$ où N est en entier naturel ($N = n$ pour GL_n, $N = 2n+1$ pour SO_{2n+1} et $N = 2n$ pour Sp_{2n} ou SO_{2n}). Soit $s \in \mathsf{H}_{ss}$ une classe de conjugaison semi-simple. Celle-ci donne lieu à une classe de conjugaison semi-simple de GL_N et l'on peut considérer P son polynôme caractéristique.

1.4.5.4 Lemme. *Une classe de conjugaison géométrique semi-simple $s \in \boldsymbol{H}_{ss}$ est caractérisée par son polynôme caractéristique P.*

Démonstration. Traitons $\mathsf{H} = \mathrm{Sp}_{2n}$, les autres cas étant similaires. On a donc $N = 2n$. Soit T le tore déployé de Sp_{2n}, c'est-à-dire $\mathsf{T} = Diag(a_1, \cdots, a_n, a_n^{-1}, \cdots, a_1^{-1})$, $a_i \in \overline{k}$. Nous pouvons supposer que $s \in \mathsf{T}$ et donc écrire $s = (a_1, \cdots, a_{2n})$ avec $a_{n+i} = a_{n-i+1}^{-1}$ pour $1 \leq i \leq n$. Prenons $s' = (b_1, \cdots, b_{2n}) \in \mathsf{T}$ une autre classe de conjugaison semi-simple géométrique de H ayant pour polynôme caractéristique P. Nous souhaitons donc montrer que s et s' sont conjuguées dans H. Comme ce sont deux éléments de T cela est équivalent au fait qu'il existe $w \in W(\mathsf{H})$, le groupe de Weyl de H, tel que $w \cdot s' = s$. Rappelons que $W(\mathsf{H}) \simeq \mathcal{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Comme s et s' ont même polynôme caractéristique, il existe une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_{2n}$ telle que $b_i = a_{\sigma(i)}$. Comme $s \in \mathsf{T}$, $\{a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(2n)}\} = \{a_1^\pm, \cdots, a_n^\pm\}$ (comptés avec multiplicités), donc il existe $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $a_{\sigma(1)} = a_i^\pm$. Posons $\tau(1) = i$. Comme $s' \in \mathsf{T}$, $a_{\sigma(2n)} = b_{2n} = b_1^{-1} = a_{\sigma(1)}^{-1}$, donc $\{a_{\sigma(2)}, \cdots, a_{\sigma(2n-1)}\} = \{a_i^\pm, 1 \leq i \leq n, i \neq \tau(1)\}$. On construit donc par récurrence une permutation $\tau \in \mathcal{S}_n$ telle que $a_{\sigma(i)} = a_{\tau(i)}^\pm$, pour $1 \leq i \leq n$. Dit autrement, on vient de fabriquer un élément $w \in W(\mathsf{H}) \simeq \mathcal{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ tel que $b_i = a_{\sigma(i)} = w \cdot a_i$, donc tel que $s' = w \cdot s$ ce qui achève la preuve. □

Soit $x \in \mathrm{BT}_0$ et $s \in (\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss}$. La classe de conjugaison s correspond comme précédemment à (s_1, s_2), $s_i \in (\overline{\mathsf{G}}_{x,i}^*)_{ss}$ qui ont pour polynômes caractéristiques P_{s_1} et P_{s_2}. Dans la section 1.3.2 on a construit une application $\tilde{\psi}_x : ((\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss})^{\mathsf{F}} \to (\mathsf{G}^*(\overline{k})_{ss})^{\mathsf{F}}$. Nommons $\tilde{s} := \tilde{\psi}_x(s)$ l'image de s par cette application.

1.4.5.5 Lemme. *Notons $P_{\tilde{s}}$ le polynôme caractéristique de $\tilde{s}$ alors on a :*

1. *Si $\boldsymbol{G} \neq \mathrm{Sp}_{2n}$: $P_{\tilde{s}}(X) = P_{s_1}(X)P_{s_2}(X)$*
2. *Si $\boldsymbol{G} = \mathrm{Sp}_{2n}$: $P_{\tilde{s}}(X) = P_{s_1}(X)P_{s_2}(X)/(X-1)$*

Démonstration. Traitons par exemple le cas où $\mathbf{G} = \mathrm{Sp}_{2n}$ est un groupe symplectique. Dans ce cas $\overline{\mathsf{G}}_{x_i} = \mathrm{Sp}_{2n_i}(k)$ (avec $n_1 + n_2 = n$). On a $\mathbf{G}^* = \mathrm{SO}_{2n+1}$ et $\overline{\mathbf{G}}^*_{x_i} = \mathrm{SO}_{2n_i+1}$. Notons $\mathbf{T}^*$ le tore déployé de $\mathbf{G}^*$ et $\mathbf{T}^*_i$ celui de $\overline{\mathbf{G}}^*_{x_i}$. On peut alors considérer que $\tilde{s} \in \mathbf{G}^*$, $s_i \in \mathbf{T}^*_i$ et donc écrire

$$s_i = (1, a_1^{(i)}, \cdots, a_{n_i}^{(i)}, (a_{n_i}^{(i)})^{-1}, \cdots, (a_1^{(i)})^{-1}).$$

On obtient alors que

$$\tilde{s} = (1, a_1^{(1)}, \cdots, a_{n_1}^{(1)}, a_1^{(2)}, \cdots, a_{n_2}^{(2)}, (a_{n_2}^{(2)})^{-1}, \cdots, (a_1^{(2)})^{-1}, (a_{n_1}^{(1)})^{-1}, \cdots, (a_1^{(1)})^{-1})$$

d'où le résultat. On fait de même avec les autres cas. □

1.4.5.6 Théorème. *Supposons que $\boldsymbol{G}$ est un groupe classique non-ramifié et $p \neq 2$. Soient $\pi \in \mathrm{Irr}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ une représentation de niveau 0 et $\phi \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ tel que $\pi \in \mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$. Notons φ_π le paramètre de Langlands associé à π via la correspondance de Langlands locale pour les groupes classiques. Alors $\varphi_{\pi|I_F} \sim \phi$.*

Démonstration. La section 1.4.4 permet de nous ramener au cas où π est cuspidale. Le théorème 1.4.5.2 nous dit alors $\tilde{\varphi}_\pi = \bigoplus_{(\rho,m)\in Jord(\pi)} \varphi_\rho \otimes st_m$ donc $\tilde{\varphi}_{\pi|I_F} = \bigoplus_{(\rho,m)\in Jord(\pi)} m\varphi_{\rho|I_F}$. Comme $\sum_{m,(\rho,m)\in Jord(\pi)} m = \lfloor s_\pi(\rho)^2 \rfloor$ (où $\lfloor\cdot\rfloor$ désigne la partie entière inférieure) on obtient $\tilde{\varphi}_{\pi|I_F} = \bigoplus_{\rho\in\mathcal{A}^\sigma_{[0]}(k)} \lfloor s_\pi(\rho)^2 \rfloor \varphi_{\rho|I_F}$. Notons $[\rho]$ la classe d'inertie de ρ de sorte que $[\rho] \cap \mathcal{A}^\sigma(F') = \{\rho, \rho'\}$. Les deux paramètres de Langlands φ_ρ et $\varphi_{\rho'}$ ont la même restriction à l'inertie donc $\tilde{\varphi}_{\pi|I_F} = \bigoplus_{[\rho]} (\lfloor s_\pi(\rho)^2 \rfloor + \lfloor s_\pi(\rho')^2 \rfloor) \varphi_{\rho|I_F}$. Notons $t \in (\mathbf{G}^*_{ss})^{\mathsf{F}}$ la classe de conjugaison semi-simple associée à $\varphi_{\pi|I_F}$.

Reprenons les notations précédentes, π nous fournit un $x \in \mathrm{BT}_0$ et un $s \in (\overline{\mathsf{G}}^*_x)_{ss}$ correspondant à (s_1, s_2), $s_i \in (\overline{\mathsf{G}}^*_{x,i})_{ss}$. On définit également $\tilde{s} \in (\mathbf{G}^*_{ss})^{\mathsf{F}}$ par $\tilde{s} := \tilde{\psi}_x(s)$. Par définition $\tilde{s}$ est la classe de conjugaison semi-simple F-stable associée à ϕ. Il nous faut donc montrer que $t = \tilde{s}$. Le lemme 1.4.5.4 nous dit qu'il suffit de montrer que $P_t = P_{\tilde{s}}$ où P_t et $P_{\tilde{s}}$ sont les polynômes caractéristiques de t et $\tilde{s}$.

Si $\rho \in \mathcal{A}^\sigma_{[0]}(k)$, on a vu qu'on pouvait lui associer une classe de conjugaison semi-simple s_ρ et l'on note Q son polynôme caractéristique. La compatibilité à Langlands dans le cas $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$, démontré dans [Dat18a] section 3.2.6, montre que Q est bien le polynôme caractéristique de la classe de conjugaison semi-simple F-stable associée à $\varphi_{\rho|I_F}$.

Le théorème 1.4.5.3 et le lemme 1.4.5.5 permettent alors de conclure. Traitons par exemple la cas $\mathbf{G} = \mathrm{Sp}_{2n}$. Nous avons $\tilde{\varphi}_{\pi|I_F} = \bigoplus_{[\rho]} (\lfloor s_\pi(\rho)^2 \rfloor + \lfloor s_\pi(\rho')^2 \rfloor) \varphi_{\rho|I_F}$. Le théorème 1.4.5.3 nous donne alors $\lfloor s_\pi(\rho)^2 \rfloor + \lfloor s_\pi(\rho')^2 \rfloor = a_Q^{(1)} + a_Q^{(2)}$ si $Q(X) \neq X - 1$ et $\lfloor s_\pi(\rho)^2 \rfloor + \lfloor s_\pi(\rho')^2 \rfloor = a_{(X-1)}^{(1)} + a_{(X-1)}^{(2)} - 1$ si $Q(X) = X - 1$. Donc

$$\begin{aligned} P_t(X) &= (X-1)^{(a_{(X-1)}^{(1)} + a_{(X-1)}^{(2)} - 1)} \prod_{Q(X)\neq X-1} Q(X)^{(a_Q^{(1)} + a_Q^{(2)})} \\ &= 1/(X-1) \left(\prod_Q Q^{a_Q^{(1)}} \right) \left(\prod_Q Q^{a_Q^{(2)}} \right) \\ &= 1/(X-1) P_{s_1}(X) P_{s_2}(X) \end{aligned}$$

Le lemme 1.4.5.5 montre alors que $P_t = P_{\tilde{s}}$ qui est le résultat recherché. □

Nous souhaitons montrer que lorsque $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$, le centralisateur de $\phi(I_F)$ dans $\widehat{\mathbf{G}}$, est connexe, alors $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ est un "bloc stable" (comme expliqué dans l'introduction).

Fixons des données $\widehat{\mathbf{T}}_0 \subseteq \widehat{\mathbf{B}}_0 \subseteq \widehat{\mathbf{G}}$, composées d'un tore maximal et d'un Borel, stables sous l'action du groupe de Galois, qui nous permettent de définir la notion de paraboliques standards et de Levis standards de ${}^L\mathbf{G}$, comme dans [Bor79] paragraphes 3.3 et 3.4. Soit $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}$ un morphisme admissible et notons $(\varphi)_{\widehat{\mathbf{G}}}$ sa classe de $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison. Rappelons alors qu'il existe une unique classe de Levi standards $\{\mathcal{M}_\varphi\}$ telle qu'il existe $\varphi^+ \in (\varphi)_{\widehat{\mathbf{G}}}$ dont l'image est contenue minimalement dans $\mathcal{M}_\varphi$, pour un $\mathcal{M}_\varphi$ dans cette classe. Haines définit alors dans [Hai14] la notion d'équivalence inertielle pour les paramètres de Weil.

1.4.5.7 Définition ([Hai14] définition 5.3.3)**.** Soient $\varphi_1, \varphi_2 : W_F \to {}^L\mathbf{G}$ deux paramètres admissibles. On dit que φ_1 et φ_2 sont *inertiellement équivalents* si

1. $\{\mathcal{M}_{\varphi_1}\} = \{\mathcal{M}_{\varphi_2}\}$
2. il existe $\mathcal{M} \in \{\mathcal{M}_{\varphi_1}\}$, $\varphi_1^+ \in (\varphi_1)_{\widehat{\mathbf{G}}}$ et $\varphi_2^+ \in (\varphi_2)_{\widehat{\mathbf{G}}}$ dont les images sont minimalement contenues dans $\mathcal{M}$, et $z \in H^1(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, (Z(\mathcal{M}^\circ)^{I_F})^\circ)$ vérifiant

$$(z\varphi_1^+)_{\mathcal{M}^\circ} = (\varphi_2^+)_{\mathcal{M}^\circ}$$

Nous avons la proposition suivante.

1.4.5.8 Proposition. *Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F. Soit $\phi \in \Phi(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ tel que $C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi)$ est connexe. Alors l'ensemble des $\varphi \in \Phi(W_F, {}^L\boldsymbol{G})$ tels que $\varphi_{|I_F} \sim \phi$ forme une classe d'équivalence inertielle.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que deux paramètres admissibles de W_F inertiellement équivalents ont des restrictions à l'inertie conjuguées. Prenons donc deux paramètres admissibles $\varphi_1, \varphi_2 : W_F \to {}^L\mathbf{G}$ tels que $\varphi_{1|I_F} \sim \varphi_{2|I_F} \sim \phi$ et montrons qu'ils sont inertiellement équivalents. Quitte à conjuguer par $\widehat{\mathbf{G}}$, on peut supposer que $\varphi_{1|I_F} = \varphi_{2|I_F} = \phi$. Fixons $(\widehat{\mathbf{T}}, \widehat{\mathbf{B}})$ une paire constituée d'un tore maximal et d'un Borel de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$.

Comme $\varphi_{1|I_F} = \phi$, pour $w \in W_F$, $\varphi_1(w)$ normalise $\phi(I_F)$ donc normalise également $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$. En faisant agir w par conjugaison par $\varphi_1(w)$ on obtient une action $\mathrm{Ad}_{\varphi_1} : W_F/I_F \to \mathrm{Aut}(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi))$. La conjugaison par $\varphi_1(\mathrm{Frob})$, $\mathrm{Ad}_{\varphi_1}(\mathrm{Frob})$ est donc un automorphisme semi-simple de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$, que l'on notera θ_{φ_1}. Par le théorème 7.5 de [Ste68] il existe une paire $(\mathbf{T}_1, \mathbf{B}_1)$ constituée d'un tore maximal et d'un Borel de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ tous les deux θ_{φ_1}-stables. Quitte à conjuguer φ_1 par un élément de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$, on peut supposer que $(\mathbf{T}_1, \mathbf{B}_1) = (\widehat{\mathbf{T}}, \widehat{\mathbf{B}})$, c'est-à-dire que $\widehat{\mathbf{T}}$ et $\widehat{\mathbf{B}}$ sont θ_{φ_1}-stables. On fait de même pour φ_2 et donc $\widehat{\mathbf{T}}$ et $\widehat{\mathbf{B}}$ sont également θ_{φ_2}-stables.

Posons $\mathcal{M}_{\varphi_1} := C_{{}^L\mathbf{G}}([\widehat{\mathbf{T}}^{\theta_{\varphi_1}}]^\circ)$. Comme $(\widehat{\mathbf{T}}^{\theta_{\varphi_1}})^\circ$ est un tore maximal de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi_1)^\circ$ ([DM94] théorème 1.8 (iii)), $\mathcal{M}_{\varphi_1}$ est un Levi minimal contenant l'image de φ_1 ([Bor79] proposition 3.6). Adoptons les même notations pour φ_2.

Écrivons pour $w \in W_F$, $\varphi_2(w) = \eta(w)\varphi_1(w)$ avec $\eta(w) \in \widehat{\mathbf{G}}$. Alors η est un cocycle à valeurs dans $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ pour l'action Ad_{φ_1}, c'est-à-dire $\eta \in Z^1_{\mathrm{Ad}_{\varphi_1}}(W_F/I_F, C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi))$. Comme la paire $(\widehat{\mathbf{T}}, \widehat{\mathbf{B}})$ est à la fois θ_{φ_1}-stable et θ_{φ_2}-stable, $\eta(\mathrm{Frob})$ est dans le normalisateur dans $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ de la paire $(\widehat{\mathbf{T}}, \widehat{\mathbf{B}})$ qui est égal à $\widehat{\mathbf{T}}$. Puisque $\eta(\mathrm{Frob}) \in \widehat{\mathbf{T}}$, on a en particulier que $\widehat{\mathbf{T}}^{\theta_{\varphi_1}} = \widehat{\mathbf{T}}^{\theta_{\varphi_2}}$ et donc $\mathcal{M}_{\varphi_1} = \mathcal{M}_{\varphi_2}$. Notons maintenant $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{\varphi_1} = \mathcal{M}_{\varphi_2}$.

La suite exacte $1 \to \mathcal{M}^\circ \to \mathcal{M} \to \langle\widehat{\vartheta}\rangle \to 1$ et le choix d'une section permettent de définir une action de $\langle\widehat{\vartheta}\rangle$ sur $\mathcal{M}^\circ$. Par conjugaison, elle induit une action de $\langle\widehat{\vartheta}\rangle$ sur $Z(\mathcal{M}^\circ)$ qui est alors indépendante du choix de la section. On a donc une action canonique de $\langle\widehat{\vartheta}\rangle$ sur $Z(\mathcal{M}^\circ)$.

On aurait pu conjuguer ϕ dès le départ pour avoir $\mathcal{M}$ standard. Il nous suffit donc pour montrer que φ_1 et φ_2 sont inertiellement équivalents de montrer l'existence d'un $z \in H^1(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, (Z(\mathcal{M}^\circ)^{I_F})^\circ)$ tel que $(z\varphi_1)_{\mathcal{M}^\circ} = (\varphi_2)_{\mathcal{M}^\circ}$. Soit $t \in \widehat{\mathbf{T}}$, alors ${}^t\varphi_2 = \eta'\varphi_1$ avec $\eta' = t^{-1}\eta\,\mathrm{Ad}_{\varphi_1}(t)$. Ainsi, pour finir la preuve de la proposition, il nous suffit de montrer qu'il existe $t \in \widehat{\mathbf{T}}$ tel que $t^{-1}\eta(\mathrm{Frob})\theta_{\varphi_1}(t) \in (Z(\mathcal{M}^\circ)^{I_F})^\circ$. Or comme $(\widehat{\mathbf{T}}^{\theta_{\varphi_1}})^\circ \subseteq (Z(\mathcal{M}^\circ)^{I_F})^\circ$ cela découle du lemme 1.4.5.9 ci-dessous. Pour pouvoir appliquer ce dernier, il nous reste à vérifier que θ_{φ_1} induit un automorphisme d'ordre fini sur $X_*(\widehat{\mathbf{T}})$. Par dualité, il suffit de vérifier que θ_{φ_1} a une action d'ordre fini sur le groupe des caractère $X^*(\widehat{\mathbf{T}})$. Pour cela nous allons montrer la finitude de l'action de θ_{φ_1} sur Q, le réseau engendré par les racines, puis sur le centre $Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi))$. Comme le groupe des caractères de $Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi))$ est $X^*(\widehat{\mathbf{T}})/Q$ ([Spr79] 2.15), on en déduit la finitude de l'action sur $X^*(\widehat{\mathbf{T}})$.

L'automorphisme θ_{φ_1} de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ stabilise $\widehat{\mathbf{T}}$, donc agit sur l'ensemble des racines de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ par rapport à $\widehat{\mathbf{T}}$. Cet ensemble étant fini, cette action est également d'ordre fini. Il nous reste à étudier l'action de θ_{φ_1} sur $Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi))$ le centre de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$. D'après [Dat17] lemme 2.1.1, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}$ une extension de ϕ telle que $\varphi(n\mathrm{Frob}) = (1, n\widehat{\vartheta})$. En particulier θ_φ a une action d'ordre fini sur $Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi))$. Or nous avons vu que deux paramètres de W_F qui étendent ϕ diffèrent par un cocycle à valeur dans $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$, donc l'action sur le centre $Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi))$ est indépendante du choix de l'extension de ϕ. Par conséquent θ_{φ_1} a une action d'ordre fini sur le centre et on a le résultat.

□

1.4.5.9 Lemme. *Soient $\boldsymbol{T}$ un tore sur $\mathbb{C}$ et $\theta \in \mathrm{Aut}(\boldsymbol{T})$. On note $X_* := X_*(\boldsymbol{T})$ l'ensemble des co-caractères et on suppose que θ induit un automorphisme d'ordre fini sur X_*. Posons L_θ l'application $L_\theta : \boldsymbol{T} \to \boldsymbol{T}$, $t \mapsto t^{-1}\theta(t)$. Alors $\boldsymbol{T} = L_\theta(\boldsymbol{T}) \cdot (\boldsymbol{T}^\theta)^\circ$.*

Démonstration. Le groupe des co-caractères de $(\mathbf{T}^\theta)^\circ$ vaut $X_*((\mathbf{T}^\theta)^\circ) = X_*^\theta$. On définit $L_\theta^X : X_* \to X_*$ par $L_\theta^X(\lambda) = \lambda - \theta(\lambda)$. Alors $X_*(L_\theta(\mathbf{T})) \supseteq Im(L_\theta^X)$.

Posons $X_{*,\mathbb{Q}} := X_* \otimes \mathbb{Q}$ et de même $L_{\theta,\mathbb{Q}}^X : X_{*,\mathbb{Q}} \to X_{*,\mathbb{Q}}$. Comme θ est d'ordre fini, θ est un endormorphisme semi-simple du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $X_{*,\mathbb{Q}}$. Ainsi, on a la décomposition $X_{*,\mathbb{Q}} = X_{*,\mathbb{Q}}^\theta \oplus Im(L_{\theta,\mathbb{Q}}^X)$. On en déduit que $X_*^\theta + Im(L_\theta^X)$ est d'indice fini dans X_* et donc, comme $\mathbb{C}^*$ est divisible, que l'application $(X_*^\theta \otimes \mathbb{C}^*) \times (Im(L_\theta^X) \otimes \mathbb{C}^*) \to X_* \otimes \mathbb{C}^*$ est surjective. En particulier l'application $(X_*((\mathbf{T}^\theta)^\circ) \otimes \mathbb{C}^*) \times (X_*(L_\theta(\mathbf{T})) \otimes \mathbb{C}^*) \to X_* \otimes \mathbb{C}^*$ est surjective, d'où le résultat. □

Nous pouvons alors montrer le résultat désiré.

1.4.5.10 Théorème. *Soient $\boldsymbol{G}$ un groupe classique non-ramifié, $p \neq 2$ et $\phi \in \Phi_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ un paramètre inertiel modéré. Alors si $C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi)$ est connexe, $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^\phi(G)$ est un "bloc stable" (c'est-à-dire, correspond à un idempotent primitif du centre de Bernstein stable au sens de Haines [Hai14]).*

Démonstration. La proposition 1.4.5.8 montre que si $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ est connexe, alors l'ensemble des $\varphi \in \Phi(W_F, {}^L\mathbf{G})$ tels que $\varphi_{|I_F} \sim \phi$ forme une classe d'équivalence inertielle. De

plus, le théorème 1.4.5.6 montre que la construction de $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ est compatible avec la correspondance de Langlands, d'où le résultat. $\square$

Lorsque $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ n'est pas connexe, $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ est une somme de "blocs stables". Nous expliquerons dans le chapitre suivant comment décomposer naturellement la catégorie $\mathrm{Rep}^{\phi}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ en "blocs stables".

Chapitre 2

Décomposition minimale

Introduction

La décomposition du théorème 1.3.4.5, obtenue dans le chapitre 1, n'est pas la décomposition en blocs, ni même la décomposition la plus fine que l'on puisse obtenir avec notre méthode. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à cette décomposition la plus fine. Nous en donnerons deux interprétations, une première du côté du groupe à la Deligne-Lusztig, puis une deuxième du côté dual à la Langlands.

Interprétation à la Deligne-Lusztig

L'exposition des résultats principaux de ce chapitre faite dans l'introduction, ne reflète pas la méthode de démonstration utilisée. Définissons $\mathscr{P}_\Lambda = \{(\mathbf{S}, \theta)\}$ comme l'ensemble des paires $(\mathbf{S}, \theta)$, où $\mathbf{S}$ est un F-tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$ et $\theta : {}^0\mathbf{S}(F)/\mathbf{S}(F)^+ \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^*$ est un caractère d'ordre inversible dans Λ et trois relations d'équivalences sur $\mathscr{P}_\Lambda$: $\sim_\infty$, $\sim_r$ et $\sim_e$ comme dans l'introduction, page 18. Nous explicitons un procédé qui à une paire $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$ associe un système de classes de conjugaison 0-cohérent et par conséquent une sous-catégorie $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$ (nous vérifierons, à la fin de la section 2.2.5, que la définition de $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ donnée dans l'introduction donne bien la même catégorie). Nous obtenons alors le théorème suivant.

2.0.0.1 Théorème. *Les catégories* $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S},\theta)}(G)$ *vérifient les propriétés suivantes :*

1. $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S},\theta)}(G)$ *est une sous-catégorie de Serre non nulle.*
2. $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S},\theta)}(G) = \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S}',\theta')}(G)$ *ou* $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S},\theta)}(G) \perp \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S}',\theta')}(G)$*, pour* $(\boldsymbol{S}, \theta), (\boldsymbol{S}', \theta') \in \mathscr{P}_\Lambda$.
3. $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S},\theta)}(G) = \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S}',\theta')}(G)$ *si et seulement si* $(\boldsymbol{S}, \theta) \sim_e (\boldsymbol{S}', \theta')$.
4. $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{[\boldsymbol{S},\theta]_e \in \mathscr{P}_\Lambda/\sim_e} \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S},\theta)}(G)$.

Remarque.

1. $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ est "minimale pour la méthode utilisée", c'est-à-dire en utilisant Deligne-Lusztig et des systèmes d'idempotents. Cependant, ce n'est pas un bloc en général.
2. Lorsque $G = \mathrm{GL}_n(F)$ nous avons $\sim_e = \sim_r = \sim_\infty$ et $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ est un bloc.

Ainsi, toute relation d'équivalence sur $\mathscr{P}_\Lambda$ plus faible que $\sim_e$ (en particulier $\sim_r$ et $\sim_\infty$) fournit une décomposition de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ en regroupant les catégories $\mathrm{Rep}^{(\mathbf{S},\theta)}_\Lambda(G)$.

Comme dans la théorie de Deligne-Lusztig, nous pouvons associer à une paire $(\mathbf{S},\theta)$ une classe de conjugaison semi-simple dans G^*, le corps résiduel de F, et nous montrons au paragraphe 2.3.1 qu'on obtient ainsi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \arrow[d] \\ \mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[r, hook] & (\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}} \end{tikzcd} .$$

Notons que lorsque le groupe $\mathbf{G}$ est quasi-déployé, les injections horizontales sont des bijections. Ce diagramme nous fournit en particulier des décompositions de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ indexées par $(\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}$ et $\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ dont nous énoncerons les propriétés dans la section suivante. Pour étudier la relation de $\sim_e$-équivalence, nous ne pouvons pas rester du côté des groupes finis et nous aurons besoin de rajouter des données cohomologiques provenant du groupe p-adique.

Interprétation duale des décompositions associées à $\sim_r$ et $\sim_\infty$

La proposition 1.3.1.3 nous fournit une bijection $\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}$ de sorte que l'injection précédente $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \hookrightarrow (\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}} \xrightarrow{\sim} \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ nous fournit une décomposition

$$\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G) = \prod_{\phi\in\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})} \mathrm{Rep}^\phi_\Lambda(G).$$

Cette décomposition est la même que celle du théorème 1.3.4.5. Ainsi les relations $\sim_r$ et $\sim_e$ raffineront les résultats du chapitre 1.

Commençons par étudier la relation $\sim_r$ et donnons une interprétation duale à $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_r$. Nous "augmentons" l'ensemble $\Phi(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ comme dans l'introduction en définissant l'ensemble $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ des couples (ϕ,σ) à $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison près, où $\phi : I_F^\Lambda \to {}^L\mathbf{G}$ est un paramètre inertiel modéré et $\sigma : \langle\widehat{\vartheta}\rangle \to \widetilde{\pi}_0(\phi)$ est une section à la suite exacte $0 \to \pi_0(\phi) \to \widetilde{\pi}_0(\phi) \to \langle\widehat{\vartheta}\rangle \to 0$. Nous avons également définit une application $\mathscr{P}_\Lambda \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$.

2.0.0.2 Théorème. *L'application $\mathscr{P}_\Lambda \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$ induit une injection*

$$\mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \hookrightarrow \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$$

dont l'image est le sous-ensemble des paramètres "relevants" (en particulier elle est bijective lorsque $\boldsymbol{G}$ est quasi-déployé). La décomposition obtenue

$$\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G) = \prod_{(\phi,\sigma)\in\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})} \mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma)}_\Lambda(G)$$

possède les propriétés suivantes

1. *Elle est compatible à l'induction et la restriction parabolique (voir le théorème 2.3.6.2 pour un énoncé plus précis).*

2. *Compatibilité entre les décompositions sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$:*

$$\mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma)}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G) \cap \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{(\phi',\sigma')} \mathrm{Rep}^{(\phi',\sigma')}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$$

où le produit est pris sur les $(\phi',\sigma') \in \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ s'envoyant sur (ϕ,σ) par l'application naturelle $\widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G}) \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\boldsymbol{G})$ (obtenue en restreignant à $I_F^{(\ell)}$, voir section 2.3.5 pour plus de détails).

Par ailleurs l'application qui à φ associe $\phi = \varphi_{|I_F^\Lambda}$ et $\sigma(\widehat{\vartheta}) = \varphi(Frob)$ induit une bijection $\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$ (voir section 2.3.7), où $\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda}$ désigne l'ensemble des paramètres modérés $\varphi : W_F \to {}^L\boldsymbol{G}$ à équivalence inertielle près (comme dans [Hai14] définition 5.3.3, voir aussi section 2.3.7). Nous avons alors une nouvelle interprétation de la décomposition précédente

$$\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G) = \prod_{(\phi,\sigma)\in\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})} \mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma)}_\Lambda(G) = \prod_{[\varphi]\in\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda}} \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_\Lambda(G).$$

2.0.0.3 Remarque. De façon analogue à la proposition 1.3.1.3, nous avons une bijection $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$.

Comme dans le chapitre précédent, cette décomposition est indexée par des paramètres à la Langlands mais est construite indépendamment de la correspondance de Langlands locale. Il est alors souhaitable de vérifier la compatibilité à cette dernière. Nous montrons alors dans la partie 2.3 le théorème suivant.

2.0.0.4 Théorème. *Soit G un groupe classique non-ramifié, $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $p \neq 2$.*

1. *Alors la décomposition $\mathrm{Rep}^0_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{[\varphi]\in\mathcal{B}^{st}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}} \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ est compatible à la correspondance de Langlands locale. C'est-à-dire que si π est une représentation irréductible, alors $\pi \in \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ si et seulement si $\varphi_{\pi|W_F} \in [\varphi]$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π.*
2. *Cette décomposition est la décomposition de $\mathrm{Rep}^0_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ en "blocs stables". C'est-à-dire que ces facteurs correspondent à des idempotents primitifs du centre de Bernstein stable.*

Interprétation duale de la décomposition associée à $\sim_e$

Pour paramétrer $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_e$ nous avons besoin de rajouter des donnés cohomologiques. Nous ne le faisons que pour les formes intérieures pures des groupes non-ramifiés. Supposons donc que $\mathbf{G}$ est non-ramifié (c'est-à-dire on rajoute l'hypothèse quasi-déployé). Soit $\omega \in H^1(F,\mathbf{G})$, à qui correspond $\mathbf{G}_\omega$, une forme intérieure pure de $\mathbf{G}$. À partir de $(\phi,\sigma) \in \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$, nous construisons dans la section 2.4.2, $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$ un groupe réductif non-ramifié, possiblement non-connexe (lorsque $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ est connexe, $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$ est un groupe dual à $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ dont la F-structure est définie grâce à l'action $W_F \to \mathrm{Out}(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi))$ de conjugaison par $\varphi(w)$ où $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}$ relève ϕ). Nous construisons également une application

$$h_{\phi,\sigma} : \tilde{H}^1(F, \mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}) \longrightarrow H^1(F,\mathbf{G})$$

où $\tilde{H}^1(F, \mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}) := Im[H^1(F, \mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}) \to H^1(F, \mathbf{G}_{\phi,\sigma})]$. La partie 2.4 nous donne alors le théorème suivant.

2.0.0.5 Théorème. *Nous avons une bijection (qui dépend du choix d'un sommet hyperspécial dans l'immeuble de Bruhat-Tits de G)*

$$\mathcal{C}^r(\phi, \sigma, G_\omega)/\sim_e \xrightarrow{\sim} h^{-1}_{\phi,\sigma}(\omega),$$

où $\mathcal{C}^r(\phi, \sigma, G_\omega)$ est la classe de $\sim_r$-équivalence image réciproque de (ϕ, σ) par l'injection $\mathscr{P}_\Lambda(G_\omega)/\sim_r \hookrightarrow \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$. Celle-ci nous fournit une décomposition

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma)}(G_\omega) = \prod_{\alpha \in h^{-1}_{\phi,\sigma}(\omega)} \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma,\alpha)}(G_\omega).$$

De plus

1. *Cette décomposition est compatible à l'induction et la restriction parabolique.*
2. *Nous avons*

$$\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^{(\phi,\sigma,\alpha)}(G_\omega) \cap \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G_\omega) = \prod_{(\phi',\sigma',\alpha')} \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{(\phi',\sigma',\alpha')}(G_\omega),$$

où le produit est pris sur les $(\phi', \sigma') \in \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ s'envoyant sur (ϕ, σ) par $\widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G}) \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\boldsymbol{G})$ et $\alpha' \in h^{-1}_{\phi,\sigma}(\omega)$ s'envoyant sur α par l'application naturelle $\tilde{H}^1(F, \boldsymbol{G}^\circ_{\phi',\sigma'}) \to \tilde{H}^1(F, \boldsymbol{G}^\circ_{\phi,\sigma})$ (obtenue à partir de $\mathrm{Irr}[\pi_0(Z(C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi')^\circ)^{\sigma'(\widehat{\vartheta})})] \to \mathrm{Irr}[\pi_0(Z(C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi)^\circ)^{\sigma(\widehat{\vartheta})})]$ et de l'isomorphisme de Kottwitz).

2.0.0.6 Remarque.
1. Cette décomposition est la plus fine que l'on puisse obtenir avec des systèmes cohérents d'idempotents construits à partir de Deligne-Lusztig.
2. Elle démontre, dans le cas du niveau zéro, une conjecture énoncée par Dat dans [Dat17].

Lorsque $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, nous nous attendons à une compatibilité de ce théorème à la correspondance de Langlands locale enrichie (à un paramètre de Langlands enrichi (φ, η) où $\eta \in \mathrm{Irr}(\pi_0(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)))$, on associe un α en restreignant η à $\pi_0(Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\sigma(\widehat{\vartheta})})$ et en utilisant l'isomorphisme de Kottwitz). Nous le vérifions partiellement pour φ un paramètre de Langlands modéré elliptique en position générale (elliptique signifie que l'image de φ n'est pas contenue dans un sous-groupe de Levi propre de ${}^L\mathbf{G}$ et en position générale que le centralisateur de $\varphi(I_F)$ dans $\widehat{\mathbf{G}}$ est un tore) et la correspondance de Langlands locale de DeBacker-Reeder ([DR09]).

Plan de ce chapitre

La partie 2.1 s'intéresse à la notion de système de classe de conjugaison 0-cohérent minimal (les plus petits systèmes cohérents que l'on puisse construire avec Deligne-Lusztig). Dans la partie 2.2, nous construisons un procédé qui à une paire $(\mathbf{S}, \theta)$ associe un système d'idempotents cohérent minimal et donc une sous-catégorie $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$. Nous caractérisons également la relation d'équivalence sur les paires $(\mathbf{S}, \theta)$ induite par ce procédé. Ceci nous permet d'obtenir les résultats du théorème 2.0.0.1. Nous réinterprétons ces résultats en des

termes duaux à la Langlands dans les parties 2.3 et 2.4. La partie 2.3 a pour but l'obtention des théorèmes 2.0.0.2 et 2.0.0.4. La partie 2.4, quand à elle, se concentre sur le théorème 2.0.0.5.

2.1 Systèmes cohérents minimaux

Nous nous intéressons dans cette section à la notion de système "minimal". Ces-derniers sont les plus petits systèmes constructibles et ils permettent d'obtenir, en les réunissant, tous les systèmes de classes de conjugaison 0-cohérents.

2.1.1 Systèmes 0-cohérents minimaux

On notera

$$\mathscr{S}_\Lambda := \{\text{systèmes de classes de conjugaison } \mathcal{S} = (\mathcal{S}_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}\}$$

et

$$\mathscr{S}_\Lambda^c := \{\mathcal{S} \in \mathscr{S}_\Lambda,\ \text{0-cohérent}\}.$$

Dans cette section, nous construisons une application $\mathscr{S}_\Lambda \to \mathscr{S}_\Lambda^c$, $\mathcal{S} \mapsto \overline{\mathcal{S}}$, de sorte que $\overline{\mathcal{S}}$ soit le plus petit système 0-cohérent contenant $\mathcal{S}$. Cette application nous permettra de construire les systèmes 0-cohérents minimaux en prenant l'image de systèmes minimaux.

Il est aisé de vérifier que si $\mathcal{S}^1$ et $\mathcal{S}^2$ sont deux systèmes de classes de conjugaison 0-cohérents, alors $\mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2$, $\mathcal{S}^1 \cap \mathcal{S}^2$ et $\mathcal{S}^1 \setminus \mathcal{S}^2$ (si $\mathcal{S}^2 \subseteq \mathcal{S}^1$) sont aussi 0-cohérents.

2.1.1.1 Définition. On définit une application $\mathscr{S}_\Lambda \to \mathscr{S}_\Lambda^c$, $\mathcal{S} \mapsto \overline{\mathcal{S}}$, en posant pour $\mathcal{S} \in \mathscr{S}_\Lambda$

$$\overline{\mathcal{S}} := \bigcap_{\substack{\mathcal{T}\in\mathscr{S}_\Lambda^c \\ \mathcal{S}\subseteq\mathcal{T}}} \mathcal{T}.$$

Alors $\overline{\mathcal{S}}$ est le plus petit système 0-cohérent contenant $\mathcal{S}$.

Nous allons construire des systèmes 0-cohérents minimaux. Fixons $\sigma \in \mathrm{BT}$ et $s \in (\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*)_{ss,\Lambda}$. Définissons le système $\mathcal{S}$ de classes de conjugaison par $\mathcal{S}_\sigma = \{s\}$ et $\mathcal{S}_\tau = \emptyset$ si $\tau \neq \sigma$. On pose alors $\mathcal{S}_{(\sigma,s)} := \overline{\mathcal{S}}$.

2.1.1.2 Définition. On appelle $\mathscr{C}_\Lambda$ l'ensemble des couples (σ, s) où $\sigma \in \mathrm{BT}$ et $s \in (\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*)_{ss,\Lambda}$ et on définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathscr{C}_\Lambda$ par $(\sigma, s) \sim (\tau, t)$ si et seulement si $\mathcal{S}_{(\sigma,s)} = \mathcal{S}_{(\tau,t)}$.

On obtient aisément le lemme suivant

2.1.1.3 Lemme. *Soient $\sigma, \tau \in \mathrm{BT}$, et $s \in (\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*)_{ss,\Lambda}$, $t \in (\overline{\mathsf{G}}_\tau^*)_{ss,\Lambda}$. Alors, soit $\mathcal{S}_{(\sigma,s)} = \mathcal{S}_{(\tau,t)}$, soit $\mathcal{S}_{(\sigma,s)} \cap \mathcal{S}_{(\tau,t)} = \emptyset$.*

Exprimé en termes de classes d'équivalence, ce lemme nous dit que $[\sigma, s]$ la classe d'équivalence de la paire (σ, s) est donnée par $[\sigma, s] = \{(\tau, t) \mid t \in \mathcal{S}_{(\sigma,s),\tau}\}$.

Posons $\mathscr{S}_\Lambda^{\min} := \{\mathcal{S}_{(\sigma,s)}, [\sigma, s] \in \mathscr{C}_\Lambda/\sim\}$. L'ensemble $\mathscr{S}_\Lambda^{\min}$ est constitué des ensembles 0-cohérents minimaux et par la proposition 1.2.3.5 on a

2.1.1.4 Proposition. *La catégorie de niveau* 0 *se décompose en*

$$\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G) = \prod_{\mathcal{S}\in\mathscr{S}^{min}_\Lambda} \mathrm{Rep}^{\mathcal{S}}_\Lambda(G).$$

Notons également le fait suivant. Les systèmes minimaux permettent de construire tous les systèmes 0-cohérents. Si $\mathcal{S}$ est un système de classes de conjugaison 0-cohérent alors il existe une partie $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{S}^{\min}_\Lambda$ telle que $\mathcal{S} = \cup_{\mathcal{T}\in\mathscr{I}}\mathcal{T}$.

2.1.2 Clôture transitive

Dans cette section, nous souhaitons comprendre davantage la relation d'équivalence $\sim$. Pour cela nous allons montrer qu'elle peut s'exprimer comme la clôture transitive d'une autre relation que l'on définira.

2.1.2.1 Définition. On dit qu'un système $(e_\sigma)_{\sigma\leq C}$ est C-0-cohérent si

1. $e_{gx} = ge_xg^{-1}$ quel que soit $x \in \mathrm{BT}_0$ et $g \in G$ tels que $x \leq C$ et $gx \leq C$.
2. $e_\sigma = e^+_\sigma e_x = e_x e^+_\sigma$ pour $x \in \mathrm{BT}_0$ et $\sigma \in \mathrm{BT}$ tels que $x \leq \sigma \leq C$.

2.1.2.2 Proposition. *Un système 0-cohérent* $(e_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ *est complètement caractérisé par le système* C*-0-cohérent* $(e_\sigma)_{\sigma\leq C}$.

Démonstration. Soit $(e_\sigma)_{\sigma\leq C}$ un système C-0-cohérent. Soit $\sigma \in \mathrm{BT}$, σ appartient à une chambre C' et G agit transitivement sur l'ensemble des chambres donc il existe $g \in G$ tel que $C' = gC$. Ainsi si l'on note $\sigma_1 := g^{-1}\sigma$, alors $\sigma_1 \leq C$. On définit alors $\tilde{e}_\sigma := ge_{\sigma_1}g^{-1}$. On vérifie aisément que $(\tilde{e}_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ ne dépend pas des choix effectués et est 0-cohérent. □

De manière analogue on peut restreindre les systèmes de classes de conjugaison 0-cohérents à C.

2.1.2.3 Définition. Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_\sigma)_{\sigma\leq C}$ un système d'ensembles de classes de conjugaison avec $\mathcal{S}_\sigma \subseteq (\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss,\Lambda}$. On dit que $\mathcal{S}$ est C-0-cohérent si

1. $\varphi^*_{g,x}(\mathcal{S}_x) = \mathcal{S}_{gx}$ quels que soient $x \in \mathrm{BT}_0$ et $g \in G$ tels que $x \leq C$ et $gx \leq C$.
2. $(\varphi^*_{\sigma,x})^{-1}(\mathcal{S}_x) = \mathcal{S}_\sigma$ pour $x \in \mathrm{BT}_0$ et $\sigma \in \mathrm{BT}$ tels que $x \leq \sigma \leq C$.

Et comme dans la section 2.1.1, on définit des systèmes C-0-cohérents minimaux.

2.1.2.4 Définition. On définit une relation $\sim'$ sur $\mathscr{C}_\Lambda$ par $(\sigma, s) \sim' (\tau, t)$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

1. Il existe $g \in G$ tel que $\tau = g\sigma$ et $t = \varphi^*_{g,\sigma}(s)$.
2. Il existe $x \in \mathrm{BT}_0$ tel que $\sigma \geq x \leq \tau$ et $\varphi^*_{\sigma,x}(s) = \varphi^*_{\tau,x}(t)$.

La relation $\sim'$ est réflexive et symétrique sur $\mathscr{C}_\Lambda$.

2.1.2.5 Proposition. *La relation d'équivalence* $\sim$ *sur* $\mathscr{C}_\Lambda$ *est la clôture transitive de* $\sim'$.

Démonstration. Nous avons déjà que si deux paires sont $\sim'$-équivalentes alors elles sont $\sim$-équivalentes. Prenons donc (σ, s) et (τ, t) tels que $(\sigma, s) \sim (\tau, t)$.

Comme G agit transitivement sur les chambres de BT, on peut supposer que $\sigma, \tau \in C$. Posons $\mathcal{S}^0$ le système de classes de conjugaison sur C définit par $\mathcal{S}^0_\sigma = \{s\}$ et $\mathcal{S}^0_\omega = \emptyset$ si

$\omega \in C$ et $\omega \neq \sigma$. Pour simplifier les notations, on identifiera un système $\mathcal{S}$ de classes de conjugaison avec le sous-ensemble de $\mathscr{C}_\Lambda$ des paires (ω, u) telles que $u \in \mathcal{S}_\omega$ (ainsi on a par exemple $\mathcal{S}^0 = \{(\sigma, s)\}$). On construit alors par récurrence les systèmes $\mathcal{S}^i$, pour $i \geq 1$, par $\mathcal{S}^i := \mathcal{S}^{i-1} \cup \mathcal{T}^i$, où $\mathcal{T}^i$ est l'ensemble des couples $(\omega, u) \in \mathscr{C}_\Lambda$ avec $\omega \in C$ tels qu'il existe $(\lambda, v) \in \mathcal{S}^{i-1}$ vérifiant $(\lambda, v) \sim' (\omega, u)$. Cette suite de systèmes est croissante et comme ils ne sont définis que sur C (donc il n'y a qu'un nombre fini de systèmes possibles), elle est stationnaire à partir d'un certain rang n. Par définition, les éléments de $\mathcal{S}^n$ sont des paires qui sont obtenues par une suite d'au plus n éléments de paires qui sont deux à deux $\sim'$-équivalentes à partir de (σ, s). Nous souhaitons donc montrer que $(\tau, t) \in \mathcal{S}^n$.

Comme $\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^{n+1}$, on a que $\mathcal{T}^{n+1} \subseteq \mathcal{S}^n$. Soit $x \in C$ un sommet et $g \in G$ tel que $gx \in C$. Soit $u \in \mathcal{S}^n_x$, alors comme $(x, u) \sim' (gx, \varphi^*_{g,x}(u))$ on a $(gx, \varphi^*_{g,x}(u)) \in \mathcal{T}^{n+1} \subseteq \mathcal{S}^n$. On vient de montrer que $\varphi^*_{g,x}(\mathcal{S}^n_x) \subseteq \mathcal{S}^n_{gx}$. Le même raisonnement montre que $\varphi^*_{g^{-1},gx}(\mathcal{S}^n_{gx}) \subseteq \mathcal{S}^n_x$ et donc que $\varphi^*_{g,x}(\mathcal{S}^n_x) = \mathcal{S}^n_{gx}$. On montre de façon analogue que $(\varphi^*_{\sigma,x})^{-1}(\mathcal{S}^n_x) = \mathcal{S}^n_\sigma$ et donc que $\mathcal{S}^n$ est C-0-cohérent. Comme $(\sigma, s) \in \mathcal{S}^n$, on a que $\mathcal{S}_{(\sigma,s)} \subseteq \mathcal{S}^n$ (dans cette dernière inclusion on identifie systèmes 0-cohérents et C-0-cohérents grâce à la proposition 2.1.2.2).

Montrons maintenant que $\mathcal{S}^n \subseteq \mathcal{S}_{(\sigma,s)}$. Faisons pour cela une récurrence. On a tout d'abord $\mathcal{S}^0 \subseteq \mathcal{S}_{(\sigma,s)}$. Supposons que $\mathcal{S}^i \subseteq \mathcal{S}_{(\sigma,s)}$. Pour montrer que $\mathcal{S}^{i+1} \subseteq \mathcal{S}_{(\sigma,s)}$, il faut montrer que $\mathcal{T}^{i+1} \subseteq \mathcal{S}_{(\sigma,s)}$. Or si $(\omega, u) \in \mathcal{T}^{i+1}$, alors par définition (ω, u) est $\sim'$-équivalent à un élément de $\mathcal{S}^i$, donc est $\sim$-équivalent à un élément de $\mathcal{S}_{(\sigma,s)}$. Le lemme 2.1.1.3 montre que $(\omega, u) \in \mathcal{S}_{(\sigma,s)}$, d'où le résultat. Ainsi $\mathcal{S}^n \subseteq \mathcal{S}_{(\sigma,s)}$ et donc $\mathcal{S}^n = \mathcal{S}_{(\sigma,s)}$.

Pour conclure, comme $(\sigma, s) \sim (\tau, t)$, par définition $\mathcal{S}_{(\sigma,s)} = \mathcal{S}_{(\tau,t)}$ et donc $(\tau, t) \in \mathcal{S}^n$. $\square$

2.1.3 Compatibilité à l'induction et à la restriction parabolique pour les systèmes cohérents

Étudions une dernière propriété, qui nous servira par la suite, qui est la compatibilité des systèmes cohérents vis à vis de l'induction et de la restriction parabolique.

Comme dans la section 1.4.4, nous allons utiliser dans cette partie $\mathrm{BT}^e(G)$, l'immeuble de Bruhat-Tits "étendu", qui est plus adapté pour traiter les questions d'induction et de restriction. Cela ne change pas vraiment la définition des idempotents puisque l'on traite la structure polysimpliciale de l'immeuble semi-simple de façon combinatoire.

Soit $\mathbf{P}$ un F-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ de quotient de Levi $\mathbf{M}$ défini sur F. Prenons $\mathbf{S}$ un tore déployé maximal de $\mathbf{G}$ contenu dans $\mathbf{P}$ et notons $\mathbf{T}$ son centralisateur dans $\mathbf{G}$. Il existe alors un unique relèvement de $\mathbf{M}$ en un sous-groupe de $\mathbf{G}$ contenant $\mathbf{T}$. Soit $x \in \mathcal{A}^e$, alors comme dans la section 1.4.4, $M^\circ_x = M \cap G^\circ_x$, $M^+_x = M \cap G^+_x$ et $\overline{\mathsf{P}}_x$, l'image de $P_x := P \cap G^\circ_x$ dans $\overline{\mathsf{G}}_x$, est un sous-groupe parabolique de $\overline{\mathsf{G}}_x$ de quotient de Levi $\overline{\mathsf{M}}_x$.

Soit $\mathcal{S} = (\mathcal{S}_x)_{x \in \mathrm{BT}^e_0(M)}$ un système 0-cohérent de classes de conjugaison pour M ($\mathcal{S}_x \subseteq (\overline{\mathsf{M}}^*_x)_{ss,\Lambda}$). Le groupe $\overline{\mathsf{M}}^*_x$ est un Levi de $\overline{\mathsf{G}}^*_x$, on a donc une application naturelle

$$\varphi^x_{M,G} : (\overline{\mathsf{M}}^*_x)_{ss,\Lambda} \to (\overline{\mathsf{G}}^*_x)_{ss,\Lambda}.$$

Posons alors $\varphi_{M,G}(\mathcal{S}) = (\varphi^x_{M,G}(\mathcal{S}_x))_{x \in \mathrm{BT}^e(G)}$, un système de classes de conjugaison pour G, défini par $\varphi^x_{M,G}(\mathcal{S}_x) = \{\varphi^x_{M,G}(s), s \in \mathcal{S}_x\}$ si $x \in \mathrm{BT}^e(M)$ et $\varphi^x_{M,G}(\mathcal{S}_x) = \emptyset$ si $x \notin \mathrm{BT}^e(M)$. On pose alors

$$i^G_M(\mathcal{S}) := \overline{\varphi_{M,G}(\mathcal{S})}$$

la clôture cohérente de $\varphi_{M,G}(\mathcal{S})$.

Soit $\mathscr{S}^c_{M,\Lambda} = \{\mathcal{T}^1, \cdots, \mathcal{T}^m\}$ un ensemble de systèmes de classes de conjugaison 0-cohérents pour M, vérifiant $\mathcal{T}^i \cap \mathcal{T}^j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{T}^i = ((\overline{\mathsf{M}}^*_\sigma)_{ss,\Lambda})_{\sigma\in\mathrm{BT}}$, de sorte que $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(M) = \prod_{\mathcal{T}\in\mathscr{S}^c_{M,\Lambda}} \mathrm{Rep}^{\mathcal{T}}_\Lambda(M)$.

2.1.3.1 Proposition. *Soit $\mathcal{S}$ un système de classes de conjugaison 0-cohérent pour G. Alors*

$$r^G_P(\mathrm{Rep}^{\mathcal{S}}_\Lambda(G)) \subseteq \prod_{\substack{\mathcal{T}\in\mathscr{S}^c_{M,\Lambda} \\ i^G_M(\mathcal{T})\cap\mathcal{S}\neq\emptyset}} \mathrm{Rep}^{\mathcal{T}}_\Lambda(M)$$

où r^G_P désigne la restriction parabolique.

Démonstration. La démonstration est quasiment identique à celle du théorème 1.4.4.2, nous la rappelons ici dans le cadre qui nous intéresse pour le lecteur. Soit $V \in \mathrm{Rep}^{\mathcal{S}}_\Lambda(G)$. La restriction parabolique préserve le niveau donc $r^G_P(V) \in \mathrm{Rep}^0_\Lambda(M)$. Soit $T \in \mathscr{S}^c_{M,\Lambda}$ tel que $i^G_M(\mathcal{T}) \cap \mathcal{S} = \emptyset$. Soient $x \in \mathcal{A}^e_M$ et $t \in \mathcal{T}_x$. Il nous suffit alors de montrer que $e^{\overline{\mathsf{M}}_x}_{t,\Lambda} r^G_P(V)^{M^+_x} = 0$ pour obtenir le résultat voulu.

Nous avons $r^G_P(V)^{M^+_x} \simeq r^{\overline{\mathsf{G}}_x}_{\overline{\mathsf{P}}_x}(V^{G^+_x})$ (voir [Dat09] propositions 3.1 et 6.2), donc

$$e^{\overline{\mathsf{M}}_x}_{t,\Lambda} r^G_P(V)^{M^+_x} \simeq e^{\overline{\mathsf{M}}_x}_{t,\Lambda} r^{\overline{\mathsf{G}}_x}_{\overline{\mathsf{P}}_x}(V^{G^+_x}) \simeq e^{\overline{\mathsf{M}}_x}_{t,\Lambda} r^{\overline{\mathsf{G}}_x}_{\overline{\mathsf{P}}_x}(e^{\overline{\mathsf{G}}_x}_{t,\Lambda}(V^{G^+_x}))$$

(pour la dernière égalité voir [Dat18a] section 2.1.4). Or par définition $t \notin \mathcal{S}_x$ donc $e^{\overline{\mathsf{G}}_x}_{t,\Lambda}(V^{G^+_x}) = 0$ d'où le résultat. □

2.1.3.2 Proposition. *Soit $\mathcal{T}$ un système de classes de conjugaison 0-cohérent pour M. Alors*

$$i^G_P(\mathrm{Rep}^{\mathcal{T}}_\Lambda(M)) \subseteq \mathrm{Rep}^{i^G_M(\mathcal{T})}_\Lambda(G)$$

où i^G_P désigne l'induction parabolique.

Démonstration. Cela découle de la proposition 2.1.3.1 (prendre $\mathcal{S} = {}^c(i^G_M(\mathcal{T}))$ et $\mathscr{S}^c_{M,\Lambda} = \{\mathcal{T}, {}^c\mathcal{T}\}$) et du fait que r^G_P est adjoint à gauche de i^G_P. □

2.2 Décomposition grâce aux paires $(\mathbf{S}, \theta)$

Dans cette section on suppose que le groupe $\mathbf{G}$ se déploie sur F^{nr}. Dans la section 2.1 nous avons construit les systèmes 0-cohérents minimaux. Ces derniers sont construits "localement" en regardant des classes de conjugaison semi-simples sur l'immeuble de Bruhat-Tits. Nous souhaitons dans cette partie trouver un procédé "global" permettant de construire ces sytèmes minimaux. Pour ce faire nous allons introduire un ensemble

$$\mathscr{P}_\Lambda = \{(\mathbf{S}, \theta)\}$$

où $\mathbf{S}$ est un tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$ et $\theta \in X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S})$ est un élément d'ordre inversible dans Λ, et définir une application

$$\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{S}^{\min}_\Lambda.$$

On montre que cette application est surjective, ainsi tout les systèmes minimaux peuvent être construit à partir des paires $(\mathbf{S}, \theta)$. Cependant elle n'est pas injective. On définira donc $\sim_e$, une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}_\Lambda$, telle que l'on ait la bijection

$$\mathscr{P}_\Lambda/\sim_e \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_\Lambda^{\min}.$$

2.2.1 Définition de $\mathscr{P}_\Lambda$ et construction de $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{S}_\Lambda^c$

Nous dirons qu'un tore $\mathbf{S}$ est non-ramifié si $\mathbf{S}$ est un F-tore F^{nr}-déployé maximal de $\mathbf{G}$, ou de façon équivalente, si $\mathbf{S}$ est un F^{nr}-tore déployé maximal de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{S}$ est défini sur F. Pour un tel $\mathbf{S}$, notons $\vartheta_{\mathbf{S}}$ l'automorphisme de $X^*(\mathbf{S})$ induit par l'action du Frobenius inverse et posons $\mathsf{F}_{\mathbf{S}} := \vartheta_{\mathbf{S}} \circ \psi$, où ψ correspond à la multiplication par q.

2.2.1.1 Définition. On définit $\mathscr{P}_\Lambda$ comme l'ensemble des paires $(\mathbf{S}, \theta)$ où $\mathbf{S}$ est un tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$ et $\theta \in X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S})$ est un élément d'ordre inversible dans Λ.

Notons que $X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S})$ est un groupe fini. En effet pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, nous pouvons injecter $X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S})$ dans $X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^m - 1)X^*(\mathbf{S})$ grâce à l'application $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}} : \lambda \mapsto \lambda + \mathsf{F}_{\mathbf{S}}(\lambda) + \cdots + \mathsf{F}_{\mathbf{S}}^{m-1}(\lambda)$ (voir lemme 2.2.4.1). Il suffit alors de prendre m tel que $\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^m = q^m$.

Soit $g \in G$. La conjugaison par g envoie naturellement un élément $\theta \in X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S})$ sur un élément $g\theta \in X^*({}^g\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{{}^g\mathbf{S}} - 1)X^*({}^g\mathbf{S})$. Ceci munit $\mathscr{P}_\Lambda$ d'une action de G et on note $\sim_G$ la relation d'équivalence sur $\mathscr{P}_\Lambda$ induite par la G-conjugaison.

Nous construisons maintenant une application $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{S}_\Lambda$. Pour ce faire nous allons passer par deux intermédiaires $\mathscr{T}_\Lambda = \{(\sigma, \mathsf{S}, \theta)\}$ (que l'on va définir) et $\mathscr{C}_\Lambda$ (défini en 2.1.1.2).

Choisissons Frob, un Frobenius inverse dans $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$. Ce dernier induit un automorphisme $\mathsf{F} \in \mathrm{Aut}(G^{nr})$ qui agit naturellement sur $\mathrm{BT}(F^{nr})$ et tel que $\mathrm{BT} = \mathrm{BT}(F^{nr})^{\mathsf{F}}$.

Soit $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$. Nommons $\mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})$ l'appartement de $\mathrm{BT}(F^{nr})$ associé à $\mathbf{S}$. D'après [DeB06] lemme 2.2.1 (1), $\mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})^{\mathsf{F}}$ est un sous-ensemble de BT convexe, fermé , non-vide et est l'union des facettes de BT qu'il rencontre. Prenons σ une facette de $\mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})^{\mathsf{F}}$ et posons S l'image de $S^{nr} \cap G_\sigma^{\circ,nr}$ dans $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ qui est alors un k-tore maximal. Nous avons une identification naturelle entre $X^*(\mathsf{S})$ et $X := X^*(\mathbf{S})$. L'annexe B montre que l'action de F sur X correspond à l'action de $\mathsf{F}_{\mathbf{S}}$. On a donc une bijection $X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S}) \simeq X/(\mathsf{F} - 1)X$. Notons $\mathrm{Irr}(\mathsf{S}^{\mathsf{F}})$ l'ensemble des caractères linéaires $\mathsf{S}^{\mathsf{F}} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$. Nous avons également une bijection $X/(\mathsf{F} - 1)X \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}(\mathsf{S}^{\mathsf{F}})$ (voir annexe D), de sorte que θ s'identifie à un élément de $\mathrm{Irr}(\mathsf{S}^{\mathsf{F}})$ que l'on note encore θ.

2.2.1.2 Définition. On définit $\mathscr{T}_\Lambda$ comme l'ensemble des triplets $(\sigma, \mathsf{S}, \theta)$ où $\sigma \in \mathrm{BT}$, S est un k-tore maximal de $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ et $\theta \in \mathrm{Irr}(\mathsf{S}^{\mathsf{F}})$ est d'ordre inversible dans Λ.

On vient donc de définir une application

$$\mathscr{P}_\Lambda \to \mathcal{P}(\mathscr{T}_\Lambda)$$

où la notation $\mathcal{P}(\cdot)$ désigne l'ensemble des parties.

On va maintenant définir une application $\mathscr{T}_\Lambda \to \mathscr{C}_\Lambda$. Soit $(\sigma, \mathsf{S}, \theta) \in \mathscr{T}_\Lambda$. Considérons S^* un tore maximal F-stable de $\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*$ en dualité avec S sur k (comme rappelé dans l'annexe D). Rappelons nous que l'on a fixé au début un système compatible de racines de l'unité.

Alors la proposition D.1, montre qu'il y a une bijection entre les classes de $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$-conjugaison de paires $(\mathbf{S},\theta)$ et les classes de $\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma$-conjugaison de paires $(\mathbf{S}^*,s)$. Ainsi à un triplet $(\sigma,\mathbf{S},\theta)$ nous pouvons associer une classe de conjugaison semi-simple $s\in(\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss}$, ce qui nous définit une application

$$\mathscr{T}_\Lambda\to\mathscr{C}_\Lambda.$$

Notons que l'on a une bijection canonique $\mathcal{P}(\mathscr{C}_\Lambda)\xrightarrow{\sim}\mathscr{S}_\Lambda$, $A\mapsto\mathcal{S}_A$, où $\mathcal{S}_{A,\sigma}=\{s,(\sigma,s)\in A\}$. On obtient ainsi

$$\mathscr{P}_\Lambda\to\mathcal{P}(\mathscr{T}_\Lambda)\to\mathcal{P}(\mathscr{C}_\Lambda)\xrightarrow{\sim}\mathscr{S}_\Lambda.$$

En composant avec l'application $\mathscr{S}_\Lambda\to\mathscr{S}^c_\Lambda$ de la partie 2.1.1, on construit l'application voulue

$$\mathscr{P}_\Lambda\to\mathscr{S}^c_\Lambda.$$

Notons que comme les systèmes cohérents sont G-équivariants, cette application passe au quotient pour fournir $\mathscr{P}_\Lambda/{\sim_G}\to\mathscr{S}^c_\Lambda$.

2.2.1.3 Définition. Soit $(\mathbf{S},\theta)\in\mathscr{P}_\Lambda$. On définit alors $\mathrm{Rep}^{(\mathbf{S},\theta)}_\Lambda(G)$ comme la sous-catégorie de Serre de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ découpée par le système cohérent d'idempotents, image de $(\mathbf{S},\theta)$ par $\mathscr{P}_\Lambda\to\mathscr{S}^c_\Lambda$.

2.2.2 Inclusion dans un système minimal

Nous souhaitons démontrer dans cette section que l'application $\mathscr{P}_\Lambda\to\mathscr{S}^c_\Lambda$ de la section 2.2.1 se factorise en $\mathscr{P}_\Lambda\to\mathscr{S}^{\min}_\Lambda$. Pour définir $\mathscr{P}_\Lambda\to\mathscr{S}^c_\Lambda$, nous sommes passés par deux intermédiaires $\mathscr{T}_\Lambda$ et $\mathscr{C}_\Lambda$. Pour montrer le résultat recherché, nous allons devoir étudier plus finement les liens entres les ensembles $\mathscr{P}_\Lambda$, $\mathscr{T}_\Lambda$, $\mathscr{C}_\Lambda$ et $\mathscr{S}^c_\Lambda$. En particulier nous allons définir $\mathscr{T}^m_\Lambda$ un sous-ensemble de $\mathscr{T}_\Lambda$ muni d'une relation d'équivalence $\sim$ et montrer que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}_\Lambda/{\sim_G} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \mathscr{S}^{\min}_\Lambda \\
\mathscr{T}^m_\Lambda/{\sim} \arrow[r] & \mathscr{C}_\Lambda/{\sim} \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}.$$

Commençons par étudier le lien entre $\mathscr{P}_\Lambda$ et $\mathscr{T}_\Lambda$. Nous avons associé à $(\mathbf{S},\theta)\in\mathscr{P}_\Lambda$ un ensemble de triplets $(\sigma,\mathbf{S},\theta)\in\mathscr{T}_\Lambda$. Réciproquement si $(\sigma,\mathbf{S},\theta)\in\mathscr{T}_\Lambda$ et soit $\mathbf{S}$ un tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$ tel que l'image de $S^{nr}\cap G^{\circ,nr}_\sigma$ dans $\overline{\mathbf{G}}_\sigma$ soit $\mathbf{S}$. La bijection $X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)X^*(\mathbf{S})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Irr}(\mathbf{S}^{\mathsf{F}})$ de l'annexe D, identifie θ à un élément $\theta\in X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)X^*(\mathbf{S})$ et on obtient de la sorte une paire $(\mathbf{S},\theta)$ (qui est non-unique).

Le lemme 2.2.2 de [DeB06] (que l'on adapte ici en rajoutant les caractères θ) montre que la classe de G-conjugaison d'une paire $(\mathbf{S},\theta)$, obtenue à partir de $(\sigma,\mathbf{S},\theta)$, est indépendante des choix effectués, de sorte que l'on ait le lemme suivant

2.2.2.1 Lemme. *L'application $\mathscr{T}_\Lambda\longrightarrow\mathscr{P}_\Lambda/{\sim_G}$ est bien définie.*

On va alors introduire une relation d'équivalence sur $\mathscr{T}_\Lambda$ de sorte que l'application précédente devienne une bijection.

Soit $\mathcal{A}$ un appartement de BT. Pour $\Omega\subseteq\mathcal{A}$, on note $A(\mathcal{A},\Omega)$ le plus petit sous-espace affine de $\mathcal{A}$ contenant Ω. Soient $\sigma_1,\sigma_2\in\mathrm{BT}$. On dit que σ_1 et σ_2 sont fortement associées si

pour tout appartement $\mathcal{A}$ contenant σ_1 et σ_2 (ou de façon équivalente pour un appartement $\mathcal{A}$ contenant σ_1 et σ_2) $A(\mathcal{A}, \sigma_1) = A(\mathcal{A}, \sigma_2)$. Alors, si σ_1 et σ_2 sont fortement associées, on a d'après [DeB06] section 3.1 une identification naturelle entre $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1}$ et $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_2}$ que l'on note $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1} \overset{id}{=} \overline{\mathsf{G}}_{\sigma_2}$. Celle-ci est définie grâce à l'application naturelle suivante, où $G_{\sigma_i}^{\circ,nr}$ désigne le parahorique de l'image canonique de σ_i dans $\mathrm{BT}(F^{nr})$,

$$G_{\sigma_1}^{\circ,nr} \cap G_{\sigma_2}^{\circ,nr} \longrightarrow \overline{\mathsf{G}}_{\sigma_i}(\mathsf{F})$$

qui est surjective, de noyau

$$G_{\sigma_1}^{\circ,nr} \cap G_{\sigma_2}^{+,nr} = G_{\sigma_1}^{+,nr} \cap G_{\sigma_2}^{\circ,nr} = G_{\sigma_1}^{+,nr} \cap G_{\sigma_2}^{+,nr}$$

($G_{\sigma_i}^{+,nr}$ est le pro-p-radical de $G_{\sigma_i}^{\circ,nr}$).

Soient $(\sigma, \mathsf{S}, \theta) \in \mathscr{T}_\Lambda$ et $g \in G$. Alors il existe $\mathbf{S}$ un tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$ tel que l'image de $S^{nr} \cap G_\sigma^{\circ,nr}$ dans $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ soit S. Définissons alors ${}^g\mathsf{S}$, un k-tore maximal de $\overline{\mathsf{G}}_{g\sigma}$, par l'image de ${}^gS^{nr} \cap G_{g\sigma}^{\circ,nr}$ dans $\overline{\mathsf{G}}_{g\sigma}$. Le tore ${}^g\mathsf{S}$ correspond également à l'image de S par l'isomorphisme $\varphi_{g,\sigma} : \overline{\mathsf{G}}_\sigma \xrightarrow{\sim} \overline{\mathsf{G}}_{g\sigma}$. On définit également $g\theta$ par $g\theta := \theta \circ \varphi_{g,\sigma}^{-1}$.

2.2.2.2 Définition. Soient $(\sigma_1, \mathsf{S}_1, \theta_1), (\sigma_2, \mathsf{S}_2, \theta_2) \in \mathscr{T}_\Lambda$. On dit que $(\sigma_1, \mathsf{S}_1, \theta_1) \sim (\sigma_2, \mathsf{S}_2, \theta_2)$ si et seulement s'il existe un appartement $\mathcal{A}$ de BT et un $g \in G$ tels que

— $\emptyset \neq A(\mathcal{A}, \sigma_1) = A(\mathcal{A}, g\sigma_2)$
— $\mathsf{S}_1 \overset{id}{=} {}^g\mathsf{S}_2$ dans $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1} \overset{id}{=} \overline{\mathsf{G}}_{g\sigma_2}$
— $\theta_1 \overset{id}{=} g\theta_2$

Le lemme 3.2.2 de [DeB06] (en rajoutant les caractères θ_1 et θ_2) montre que $\sim$ est bien une relation d'équivalence.

2.2.2.3 Définition. Soit $(\sigma, \mathsf{S}, \theta) \in \mathscr{T}_\Lambda$. On dira que $(\sigma, \mathsf{S}, \theta)$ est minisotrope si S est k-minisotrope dans $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ au sens de [DeB06], c'est-à-dire que le tore k-déployé maximal de S coïncide avec le tore k-déployé maximal du centre de $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$. On notera alors $\mathscr{T}_\Lambda^m$ le sous-ensemble de $\mathscr{T}_\Lambda$ des triplets minisotropes.

Notons que si $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$ et si σ est une facette maximale de $\mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})^{\mathsf{F}}$ alors le triplet $(\sigma, \mathsf{S}, \theta)$ associé est minisotrope ([DeB06] lemme 2.2.1 (3)).

2.2.2.4 Proposition. *L'application du lemme 2.2.2.1 passe au quotient et fournit $\mathscr{T}_\Lambda/\sim \longrightarrow \mathscr{P}_\Lambda/\sim_G$. De plus, cette dernière induit une bijection $\mathscr{T}_\Lambda^m/\sim \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}_\Lambda/\sim_G$.*

Démonstration. Le lemme 3.3.3 et le théorème 3.4.1 de [DeB06] montrent le résultat pour les paires (σ, S) à équivalence près (la même que celle définie sur les triplets en prenant des caractères triviaux) et les classes de G-conjugaison de tores maximaux non-ramifiés. Cette démonstration s'adapte, en rajoutant les caractères θ, pour obtenir le résultat voulu. □

Passons maintenant au lien entre $\mathscr{T}_\Lambda$ et $\mathscr{C}_\Lambda$. En particulier pour obtenir le diagramme commutatif annoncé au début de cette section, il nous reste à montrer que l'on a une application $\mathscr{T}_\Lambda^m/\sim \to \mathscr{C}_\Lambda/\sim$.

2.2.2.5 Lemme. *Soient $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{BT}$ deux facettes fortement associées, $x \in \mathrm{BT}_0$ tels que $\sigma_1 \geq x \leq \sigma_2$, et $(\sigma_1, \boldsymbol{S}_1, \theta_1), (\sigma_2, \boldsymbol{S}_2, \theta_2) \in \mathscr{T}_\Lambda$. Notons $t_1 \in (\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1}^*)_{ss}, t_2 \in (\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_2}^*)_{ss}$ les classes de conjugaison rationnelles associées respectivement aux triplets $(\sigma_1, \boldsymbol{S}_1, \theta_1)$ et $(\sigma_2, \boldsymbol{S}_2, \theta_2)$. Supposons que $(\boldsymbol{S}_1, \theta_1) \overset{id}{=} (\boldsymbol{S}_2, \theta_2)$ alors $\varphi_{\sigma_1,x}^*(t_1) = \varphi_{\sigma_2,x}^*(t_2)$.*

Démonstration. Les polysimplexes σ_1, σ_2 et x sont dans un même appartement $\mathcal{A}$ associé à un tore $\mathbf{T}$. Notons T le tore induit par $\mathbf{T}$ sur $\overline{\mathsf{G}}_x$. Comme $\sigma_1 \geq x \leq \sigma_2$, les groupes $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1}$ et $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_2}$ peuvent se relever de façon unique en des Levi M_{σ_1} et M_{σ_2} de $\overline{\mathsf{G}}_x$ contenant T. Comme $A(\mathcal{A}, \sigma_1) = A(\mathcal{A}, \sigma_2)$, les Levis M_{σ_i} ont même système de racines donc sont égaux. Notons U_{σ_i} le radical unipotent du parabolique de $\overline{\mathsf{G}}_x$ image de $G_{\sigma_i}^{\circ,nr}$ par l'application $G_{\sigma_i}^{\circ,nr} \to G_x^{\circ,nr} \to \overline{\mathsf{G}}_x$. L'image de $G_{\sigma_1}^{\circ,nr} \cap G_{\sigma_2}^{\circ,nr}$ par l'application $G_{\sigma_1}^{\circ,nr} \cap G_{\sigma_2}^{\circ,nr} \to G_x^{\circ,nr} \to \overline{\mathsf{G}}_x$ est un sous-groupe algébrique de radical unipotent $\mathsf{U}_{\sigma_1} \cap \mathsf{U}_{\sigma_2}$ et ayant pour facteur de Levi $\mathsf{M}_{\sigma_1} = \mathsf{M}_{\sigma_2}$. Comme id est défini grâce à la surjection $G_{\sigma_1}^{\circ,nr} \cap G_{\sigma_2}^{\circ,nr} \longrightarrow \overline{\mathsf{G}}_{\sigma_i}$, la discussion précédente montre que id correspond à l'égalité entre M_{σ_1} et M_{σ_2}.

Maintenant, les paires (S_1, θ_1) et (S_2, θ_2) induisent des paires $(\mathsf{S}_{1,x}, \theta_{1,x})$ et $(\mathsf{S}_{2,x}, \theta_{2,x})$ avec $\mathsf{S}_{1,x}$ et $\mathsf{S}_{2,x}$ des tores de $\overline{\mathsf{G}}_x$. Si (S_i, θ_i) correspond à la classe de conjugaison semi-simple $t_i \in (\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_i}^*)_{ss}$ alors $(\mathsf{S}_{i,x}, \theta_{i,x})$ correspond à $\varphi_{\sigma_i,x}^*(t_i) \in (\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss}$. L'identification $(\mathsf{S}_1, \theta_1) \overset{id}{=} (\mathsf{S}_2, \theta_2)$ revient à dire que $(\mathsf{S}_{1,x}, \theta_{1,x}) = (\mathsf{S}_{2,x}, \theta_{2,x})$, et donc que $\varphi_{\sigma_1,x}^*(t_1) = \varphi_{\sigma_2,x}^*(t_2)$. □

2.2.2.6 Proposition. *L'application $\mathscr{T}_\Lambda^m \to \mathscr{C}_\Lambda$ passe au quotient et donne $\mathscr{T}_\Lambda^m/\sim \to \mathscr{C}_\Lambda/\sim$.*

Démonstration. Soient $(\sigma_1, \mathsf{S}_1, \theta_1), (\sigma_2, \mathsf{S}_2, \theta_2) \in \mathscr{T}_\Lambda^m$ tels que $(\sigma_1, \mathsf{S}_1, \theta_1) \sim (\sigma_2, \mathsf{S}_2, \theta_2)$. Notons $(\sigma_1, s_1), (\sigma_2, s_2) \in \mathscr{C}_\Lambda$ les images respectives de $(\sigma_1, \mathsf{S}_1, \theta_1), (\sigma_2, \mathsf{S}_2, \theta_2)$ par l'application $\mathscr{T}_\Lambda^m \to \mathscr{C}_\Lambda$. Il s'agit de montrer que $(\sigma_1, s_1) \sim (\sigma_2, s_2)$.

Comme $(\sigma_1, \mathsf{S}_1, \theta_1) \sim (\sigma_2, \mathsf{S}_2, \theta_2)$, il existe un appartement $\mathcal{A}$ de BT et un $g \in G$ tels que

— $\emptyset \neq A(\mathcal{A}, \sigma_1) = A(\mathcal{A}, g\sigma_2)$
— $\mathsf{S}_1 \overset{id}{=} {}^g\mathsf{S}_2$ dans $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1} \overset{id}{=} \overline{\mathsf{G}}_{g\sigma_2}$
— $\theta_1 \overset{id}{=} g\theta_2$

Notons $s_1 \in (\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1}^*)_{ss,\Lambda}$ (resp. $s_2 \in (\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_2}^*)_{ss,\Lambda}$) la classe de conjugaison semi-simple associée à (S_1, θ_1) (resp. à (S_2, θ_2)). Alors $\varphi_{g,\sigma_2}^*(s_2)$ est la classe de conjugaison associée à $({}^g\mathsf{S}_2, g\theta_2)$. Or nous savons que $(\sigma_2, s_2) \sim (g\sigma_2, \varphi_{g,\sigma_2}^*(s_2))$ et donc nous pouvons supposer que $g = 1$.

Les polysimplexes σ_1 et σ_2 sont maximaux dans $A(\mathcal{A}, \sigma_1) = A(\mathcal{A}, \sigma_2)$. Prenons une suite $\tau_1 = \sigma_1, \cdots, \tau_m = \sigma_2$ de polysimplexes maximaux de $A(\mathcal{A}, \sigma_1)$ et une suite de sommets $x_1, \cdots, x_{m-1}$ telle que pour tout $i \in [\![1, m-1]\!]$, $\tau_i \geq x_i \leq \tau_{i+1}$. Pour chaque $i \in [\![1, m]\!]$, τ_i est un polysimplexe maximal de $A(\mathcal{A}, \sigma_1)$. En particulier $A(\mathcal{A}, \sigma_1) = A(\mathcal{A}, \tau_i)$ et donc σ_1 et τ_i sont fortement associés. On a donc une identification naturelle $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1} \overset{id}{=} \overline{\mathsf{G}}_{\tau_i}$ qui nous permet de définir $(\mathsf{S}^{(i)}, \theta^{(i)})$ tel que $(\mathsf{S}^{(i)}, \theta^{(i)}) \overset{id}{=} (\mathsf{S}_1, \theta_1)$. Appelons $t_i \in (\overline{\mathsf{G}}_{\tau_i}^*)_{ss,\Lambda}$ la classe de conjugaison semi-simple associée à $(\mathsf{S}^{(i)}, \theta^{(i)})$.

Fixons un $i \in [\![1, m-1]\!]$. Alors $\tau_i \geq x_i \leq \tau_{i+1}$, $A(\mathcal{A}, \tau_i) = A(\mathcal{A}, \tau_{i+1})$ et $(\mathsf{S}^{(i)}, \theta^{(i)}) \overset{id}{=} (\mathsf{S}^{(i+1)}, \theta^{(i+1)})$ donc par le lemme 2.2.2.5 $\varphi_{\tau_i,x_i}^*(t_i) = \varphi_{\tau_{i+1},x_i}^*(t_{i+1})$. Ceci nous montre que $(\tau_i, t_i) \sim (\tau_{i+1}, t_{i+1})$ et donc que $(\sigma_1, s_1) = (\tau_1, t_1) \sim (\tau_m, t_m) = (\sigma_2, s_2)$ ce qui achève la preuve. □

On peut maintenant regrouper toutes les applications que l'on vient de construire dans cette section pour obtenir les résultats que l'on recherchait.

2.2.2.7 Proposition. *Les applications précédentes rendent le diagramme suivant commu-*

tatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}_\Lambda/\sim_G \arrow[r] & \mathscr{S}_\Lambda^c \\ \mathscr{T}_\Lambda^m/\sim \arrow[r] \arrow[u, "\sim"] & \mathscr{C}_\Lambda/\sim \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

Démonstration. Soit $(\tau, \mathbf{S}_\tau, \theta) \in \mathscr{T}_\Lambda^m$ et $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$ un représentant de la classe de conjugaison qui lui est associée par $\mathscr{T}_\Lambda^m/\sim \to \mathscr{P}_\Lambda/\sim_G$. L'application $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{S}_\Lambda^c$ de la partie 2.2.1 est également définie à partir de $\mathscr{T}_\Lambda \to \mathscr{C}_\Lambda \to \mathscr{S}_\Lambda^c$. Prenons σ une facette de $\mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})^{\mathsf{F}}$ et nommons $(\sigma, \mathbf{S}_\sigma, \theta) \in \mathscr{T}_\Lambda$ le triplet associé. Prenons également τ' une facette maximale de $\mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})^{\mathsf{F}}$ telle que $\sigma \leq \tau'$. Nous avons un triplet $(\tau', \mathbf{S}_{\tau'}, \theta)$ associé à $(\mathbf{S}, \theta)$. Comme τ' est une facette maximale de $\mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})^{\mathsf{F}}$, $(\tau', \mathbf{S}_{\tau'}, \theta) \in \mathscr{T}_\Lambda^m$ ([DeB06] lemme 2.2.1 (3)). De plus, $(\tau', \mathbf{S}_{\tau'}, \theta) \sim (\tau, \mathbf{S}_\tau, \theta)$ et on peut donc supposer que $(\tau', \mathbf{S}_{\tau'}, \theta) = (\tau, \mathbf{S}_\tau, \theta)$. Il s'agit donc de montrer que $(\sigma, \mathbf{S}_\sigma, \theta)$ et $(\tau, \mathbf{S}_\tau, \theta)$ ont même image par $\mathscr{T}_\Lambda \to \mathscr{C}_\Lambda \to \mathscr{S}_\Lambda^c$.

Notons (σ, s_σ) et (τ, s_τ) les images respectives de $(\sigma, \mathbf{S}_\sigma, \theta)$ et $(\tau, \mathbf{S}_\tau, \theta)$ par $\mathscr{T}_\Lambda \to \mathscr{C}_\Lambda$. Comme $\sigma \leq \tau$, le groupe $\overline{\mathbf{G}}_\tau$ peut se relever en un unique Levi de $\overline{\mathbf{G}}_\sigma$ contenant $\mathbf{S}_\sigma$. Ceci nous permet d'identifier $\mathbf{S}_\tau$ à $\mathbf{S}_\sigma$. Donc si $(\mathbf{S}^*, t)$ est une paire duale à $(\mathbf{S}_\tau, \theta)$ elle l'est également pour $(\mathbf{S}_\sigma, \theta)$. On en déduit que $s_\sigma = \varphi_{\tau,\sigma}^*(s_\tau)$. Ainsi $(\sigma, s_\sigma) \sim (\tau, s_\tau)$ et on a le résultat. □

2.2.2.8 Proposition. *L'application $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_G \to \mathscr{S}_\Lambda^c$ se factorise en $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_G \to \mathscr{S}_\Lambda^{min}$.*

Démonstration. Nous savons que l'on a la bijection $\mathscr{C}_\Lambda/\sim \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_\Lambda^{\min}$ (section 2.1.1). Ainsi la proposition 2.2.2.7 montre que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathscr{P}_\Lambda/\sim_G \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \mathscr{S}_\Lambda^{\min} \\ \mathscr{T}_\Lambda^m/\sim \arrow[r] & \mathscr{C}_\Lambda/\sim \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

d'où le résultat. □

En particulier on en déduit le corollaire suivant.

2.2.2.9 Corollaire. *Soient $(\boldsymbol{S}, \theta), (\boldsymbol{S}', \theta') \in \mathscr{P}_\Lambda$. Alors $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S},\theta)}(G) = \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S}',\theta')}(G)$ ou $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S},\theta)}(G) \perp \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S}',\theta')}(G)$.*

2.2.3 Paires minimales

Dans la partie 2.2.2 nous avons montré que l'on a une application $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_G \to \mathscr{S}_\Lambda^{\min}$. Cette dernière est surjective mais n'est pas injective. Nous proposons ici de construire $\mathscr{P}_\Lambda^{\min}$, un sous-ensemble de $\mathscr{P}_\Lambda$, tel que $\mathscr{P}_\Lambda^{\min}/\sim_G \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_\Lambda^{\min}$.

2.2.3.1 Définition. On dira qu'un triplet $(\sigma, \mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{T}_\Lambda$ est elliptique si la classe de conjugaison s associée est elliptique dans $\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*$, au sens où elle ne rencontre aucun sous-groupe de Levi propre, et on note $\mathscr{T}_\Lambda^e$ l'ensemble des triplets $(\sigma, \mathbf{S}, \theta)$ elliptiques.

Notons que si $(\sigma, \mathbf{S}, \theta)$ est elliptique alors $\mathbf{S}$ est k-minisotrope dans $\overline{\mathbf{G}}_\sigma$, d'où les inclusions

$$\mathscr{T}_\Lambda^e \subseteq \mathscr{T}_\Lambda^m \subseteq \mathscr{T}_\Lambda.$$

2.2.3.2 Définition. On dira alors qu'une paire $(\mathbf{S},\theta)\in\mathscr{P}_\Lambda$ est minimale si elle est dans l'image de $\mathscr{T}_\Lambda^e/\sim$, par l'application de la proposition 2.2.2.4. On notera $\mathscr{P}_\Lambda^{\min}$ l'ensemble des paires $(\mathbf{S},\theta)$ minimales.

Avant de passer à la démonstration de la bijection $\mathscr{P}_\Lambda^{\min}/\sim_G \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_\Lambda^{\min}$ décrivons un peu plus précisément l'ensemble $\mathscr{P}_\Lambda^{\min}$. Soit $(\mathbf{S},\theta)\in\mathscr{P}_\Lambda^{\min}$ une paire minimale. Par définition si $\sigma\in\mathcal{A}(\mathbf{S},F^{nr})^{\mathsf{F}}$ est une facette maximale alors le triplet $(\sigma,\mathbf{S},\theta)$ est elliptique. Mais qu'en est-il lorsque σ n'est pas maximal ? Nous allons décrire dans la suite les triplets $(\sigma,\mathbf{S},\theta)$ que l'on peut obtenir à partir d'une paire $(\mathbf{S},\theta)$ minimale.

2.2.3.3 Définition. Soit $(\sigma,\mathbf{S},\theta)\in\mathscr{T}_\Lambda$. Notons $(\sigma,\mathbf{S}^*,t)$ un triplet qui lui est associé (qui est défini à $\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*$-conjugaison près, comme dans la proposition D.1). On dit que $(\sigma,\mathbf{S},\theta)$ est minimal si et seulement si le k-rang de $\mathbf{S}$ est égal à celui de $C_{\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*}(t)$, le centralisateur de t dans $\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*$, c'est-à-dire si $\mathbf{S}^*$ est maximalement déployé dans ce centralisateur.

Soient $\sigma,\tau\in\mathrm{BT}$ tels que $\tau\leq\sigma$. Prenons une classe de $\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*$-conjugaison de paires $(\mathbf{S}^*,t)$, où $\mathbf{S}^*$ est un k-tore maximal de $\overline{\mathbf{G}}_\tau^*$ et $t\in(\mathbf{S}^*)^{\mathsf{F}}$. Le choix d'un relèvement de $\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*$ en un Levi de $\overline{\mathbf{G}}_\tau^*$ permet de relever $\mathbf{S}^*$ en $\mathbf{S}'^*$ un k-tore maximal de $\overline{\mathbf{G}}_\tau^*$ et t en $t'\in(\mathbf{S}'^*)^{\mathsf{F}}$. Cette nouvelle paire $(\mathbf{S}'^*,t')$ est alors définie à $\overline{\mathsf{G}}_\tau^*$-conjugaison près, et on note $\varphi^*_{\sigma,\tau}$ l'application qui à la classe de conjugaison de $(\mathbf{S}^*,t)$ associe celle de $(\mathbf{S}'^*,t')$.

Notons que si s est la classe de conjugaison de t dans $\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*$ alors $\varphi^*_{\sigma,\tau}(s)$ est celle de t'.

2.2.3.4 Lemme. *Soient $\sigma,\tau\in\mathrm{BT}$ tels que $\tau\leq\sigma$ et $(\sigma,\boldsymbol{S},\theta),(\tau,\boldsymbol{S}',\theta')\in\mathscr{T}_\Lambda$ tels que $\varphi^*_{\sigma,\tau}(\boldsymbol{S}^*,t)=(\boldsymbol{S}'^*,t')$, où $(\sigma,\boldsymbol{S}^*,t)$ (resp. $(\tau,\boldsymbol{S}'^*,t')$) est associé à $(\sigma,\boldsymbol{S},\theta)$ (resp. $(\tau,\boldsymbol{S}',\theta')$). Alors*

1. *$(\sigma,\boldsymbol{S},\theta)$ est minimal et $\boldsymbol{S}$ est k-minisotrope dans $\overline{\boldsymbol{G}}_\sigma$ si et seulement si $(\sigma,\boldsymbol{S},\theta)$ est elliptique*
2. *$(\sigma,\boldsymbol{S},\theta)$ est minimal si et seulement si $(\tau,\boldsymbol{S}',\theta')$ est minimal.*

Démonstration. Notons $\mathbf{S}^{*d}$ le sous-tore déployé maximal de $\mathbf{S}^*$.

Commençons par montrer 1. Supposons que $(\sigma,\mathbf{S},\theta)$ est minimal et que $\mathbf{S}$ est k-minisotrope dans $\overline{\mathbf{G}}_\sigma$. Prenons $\mathbf{L}$ un Levi minimal de $\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*$ tel que $t\in\mathbf{L}$, de sorte que t soit elliptique dans $\mathbf{L}$. Comme t est un élément semi-simple, il existe $\mathbf{S}_{\mathbf{L}}$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{L}$ tel que $t\in\mathbf{S}_{\mathbf{L}}$. Appelons $\mathbf{S}_{\mathbf{L}}^d$ sa composante déployée. Comme t est elliptique dans $\mathbf{L}$, $\mathbf{S}_{\mathbf{L}}$ est k-minisotrope dans $\mathbf{L}$ et donc $\mathbf{S}_{\mathbf{L}}^d$ coïncide avec la composante déployée du centre de $\mathbf{L}$. Maintenant $\mathbf{S}$ est k-minisotrope, donc $\mathbf{S}^{*d}$ est la composante déployée de $Z(\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*)$, le centre de $\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*$. Et comme $Z(\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*)\subseteq Z(\mathbf{L})$, on en déduit par maximalité de $\mathbf{S}_{\mathbf{L}}^d$ que $\mathbf{S}^{*d}\subseteq\mathbf{S}_{\mathbf{L}}^d$. Enfin, $\mathbf{S}^{*d}\subseteq\mathbf{S}_{\mathbf{L}}^d\subset C_{\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*}(t)$, et comme $(\sigma,\mathbf{S},\theta)$ est minimal, $\mathbf{S}^{*d}=\mathbf{S}_{\mathbf{L}}^d$ et donc $\mathbf{L}=\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*$.

Réciproquement, supposons t elliptique. Nous savons déjà que $\mathbf{S}$ est k-minisotrope. Il reste à montrer que $\mathbf{S}^{*d}$ est maximal parmi les tores déployés de $C_{\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*}(t)$. Prenons alors $\mathbf{T}^d$ un tore déployé de $C_{\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*}(t)$ contenant $\mathbf{S}^{*d}$. Notons $\mathbf{M}$ le centralisateur de $\mathbf{T}^d$ dans $\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*$ qui est un Levi de $\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*$ contenant t. Comme t est elliptique $\mathbf{M}=\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*$, et comme $\mathbf{S}$ est k-minisotrope, $\mathbf{T}^d=\mathbf{S}^{*d}$.

Démontrons maintenant 2. Commençons par relever $\mathbf{S}^*$ en un tore de $\overline{\mathbf{G}}_\tau^*$, que l'on note encore $\mathbf{S}^*$, de sorte que l'on puisse identifier $(\mathbf{S}'^*,t')$ à $(\mathbf{S}^*,t)$ (après conjugaison). Notons $\mathbf{M}_\sigma$ l'unique relèvement de $\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*$ en un Levi de $\overline{\mathbf{G}}_\tau^*$ contenant $\mathbf{S}^*$.

Il faut alors montrer que S^{*d} est maximal parmi les tores déployés de $C_{\overline{\mathsf{G}}^*_\tau}(t)$ si et seulement s'il l'est parmi ceux de $C_{\mathsf{M}_\sigma}(t)$. Il est clair que si S est maximalement déployé dans $C_{\overline{\mathsf{G}}^*_\tau}(t)$ il l'est aussi dans $C_{\mathsf{M}_\sigma}(t)$.

Supposons donc S^{*d} maximal parmi les tores déployés de $C_{\mathsf{M}_\sigma}(t)$. Notons M le centralisateur de S^{*d} dans M_σ qui est un Lévi de M_σ contenant t. Le tore S^{*d} est alors k-minisotrope dans M et il est maximal parmi les tores déployé de $C_{\mathsf{M}}(t)$ donc par la propriété 1, t est elliptique dans M. Comme S^{*d} est la composante déployée de $Z(\mathsf{M})$, on a également que M est le centralisateur de S^{*d} dans $\overline{\mathsf{G}}^*_\tau$. Prenons T^d un tore déployé de $C_{\overline{\mathsf{G}}^*_\tau}(t)$ contenant S^{*d}. Son centralisateur dans $\overline{\mathsf{G}}^*_\tau$ est un Lévi L contenant t et contenu dans M. Mais comme t est elliptique dans M, $\mathsf{L} = \mathsf{M}$ et $\mathsf{S}^{*d} = \mathsf{T}^d$. □

2.2.3.5 Corollaire. *Soit $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$. Alors $(\mathbf{S}, \theta)$ est minimale si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})^{\mathsf{F}}$ le triplet associé $(\sigma, \boldsymbol{S}, \theta)$ est minimal, si et seulement si pour un $\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})^{\mathsf{F}}$ le triplet $(\sigma, \boldsymbol{S}, \theta)$ est minimal.*

Notons que dans ce cas, si σ est une facette maximale alors $(\sigma, \boldsymbol{S}, \theta)$ est elliptique.

Revenons à la démonstration de $\mathscr{P}^{\min}_\Lambda/{\sim_G} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}^{\min}_\Lambda$. La proposition 2.2.2.8 montre que l'on peut identifier l'application $\mathscr{P}_\Lambda/{\sim_G} \to \mathscr{S}^{\min}_\Lambda$ à $\mathscr{T}^m_\Lambda/{\sim} \to \mathscr{C}_\Lambda/{\sim}$. Il nous suffit donc de montrer que l'on a une bijection $\mathscr{T}^e_\Lambda/{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_\Lambda/{\sim}$.

2.2.3.6 Proposition. *L'application $\mathscr{T}_\Lambda \to \mathscr{C}_\Lambda$ induit une bijection $\mathscr{T}^e_\Lambda/{\sim} \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_\Lambda/{\sim}$.*

Démonstration. Nous savons déjà par la proposition 2.2.2.6 que l'on a une application $\mathscr{T}^m_\Lambda/{\sim} \to \mathscr{C}_\Lambda/{\sim}$ et donc $\mathscr{T}^e_\Lambda/{\sim} \to \mathscr{C}_\Lambda/{\sim}$.

L'application $\mathscr{T}^e_\Lambda/{\sim} \to \mathscr{C}_\Lambda/{\sim}$ est surjective. En effet soit $(\sigma, s) \in \mathscr{C}_\Lambda$. Il existe un polysimplexe maximal $\tau \geq \sigma$ tel que $\varphi^{*-1}_{\tau,\sigma}(s) \neq \emptyset$. Prenons alors $t \in \varphi^{*-1}_{\tau,\sigma}(s)$. La classe de conjugaison t est alors elliptique dans $\overline{\mathsf{G}}^*_\tau$. Il suffit alors de prendre un triplet $(\tau, \mathsf{S}, \theta)$ qui donne (τ, t). Ce dernier est elliptique puisque t est elliptique et il convient car $(\sigma, s) \sim (\tau, t)$.

Il reste à montrer l'injectivité. Soient $(\sigma_1, \mathsf{S}_1, \theta_1), (\sigma_2, \mathsf{S}_2, \theta_2) \in \mathscr{T}^e_\Lambda$ deux triplets auxquels sont associés respectivement $(\sigma_1, s_1), (\sigma_2, s_2) \in \mathscr{C}_\Lambda$. On suppose que $(\sigma_1, s_1) \sim (\sigma_2, s_2)$ et on veut montrer que $(\sigma_1, \mathsf{S}_1, \theta_1) \sim (\sigma_2, \mathsf{S}_2, \theta_2)$. Nous savons par la proposition 2.1.2.5 que $\sim$ est la clôture transitive de $\sim'$, on peut donc supposer que $(\sigma_1, s_1) \sim' (\sigma_2, s_2)$. Prenons un triplet $(\sigma_1, \mathsf{S}^*_1, t_1)$ (resp. $(\sigma_2, \mathsf{S}^*_2, t_2)$) avec $t_1 \in (\mathsf{S}^*_1)^{\mathsf{F}}$ (resp. $t_2 \in (\mathsf{S}^*_2)^{\mathsf{F}}$) en dualité avec $(\sigma_1, \mathsf{S}_1, \theta_1)$ (resp. $(\sigma_2, \mathsf{S}_2, \theta_2)$), tel que t_1 (resp. t_2) a pour classe de conjugaison s_1 (resp. s_2).

Commençons par traiter le cas $\sigma_1 = \sigma_2$ et $s_1 = s_2$. Il existe donc $g \in \overline{\mathsf{G}}^*_{\sigma_1}$ tel que $t_1 = \mathrm{Ad}(g)(t_2)$. Par le lemme 2.2.3.4, S^*_1 et ${}^g\mathsf{S}^*_2$ sont maximalement déployés dans $C_{\overline{\mathsf{G}}^*_{\sigma_1}}(t_1)$, donc quitte à modifier g on peut supposer que $\mathsf{S}^*_1 = {}^g\mathsf{S}^*_2$. On en déduit que les paires (S^*_1, t_1) et (S^*_2, t_2) sont conjuguées sous $\overline{\mathsf{G}}^*_{\sigma_1}$ et donc que les paires (S_1, θ_1) et (S_2, θ_2) sont conjuguées sous $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1}$. On a bien que $(\sigma_1, \mathsf{S}_1, \theta_1) \sim (\sigma_2, \mathsf{S}_2, \theta_2)$.

Revenons au cas général. Comme $(\sigma_1, s_1) \sim' (\sigma_2, s_2)$, deux cas se présentent :

1. Il existe $g \in G$ tel que $g\sigma_2 = \sigma_1$ et $s_1 = \varphi^*_{g,\sigma_2}(s_2)$.

   Alors (S_1, θ_1) et $g(\mathsf{S}_2, \theta_2)$ donnent la même classe de conjugaison dans $(\overline{\mathsf{G}}^*_{\sigma_1})_{ss}$ et par le premier cas $(\sigma_1, \mathsf{S}_1, \theta_1) \sim (\sigma_2, \mathsf{S}_2, \theta_2)$.

2. Il existe $x \in \mathrm{BT}_0$ tel que $\sigma_1 \geq x \leq \sigma_2$ et $\varphi^*_{\sigma_2,x}(s_2) = \varphi^*_{\sigma_1,x}(s_1)$.

   Choisissons un appartement contenant σ_1 et σ_2. Cet appartement est associé à un tore $\mathbf{T}$ et l'on note T le tore induit sur $\overline{\mathsf{G}}_x$ et T^* un dual sur $\overline{\mathsf{G}}^*_x$. Le tore T permet

de relever de façon unique $\overline{\mathbf{G}}_{\sigma_1}$ et $\overline{\mathbf{G}}_{\sigma_2}$ en des sous-groupes de Levi de $\overline{\mathbf{G}}_x$. De même $\mathbf{T}^*$ permet de relever $\overline{\mathbf{G}}^*_{\sigma_1}$ et $\overline{\mathbf{G}}^*_{\sigma_2}$. Ceci nous permet de relever $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ en des tores de $\overline{\mathbf{G}}_x$ et $\mathbf{S}^*_1$, $\mathbf{S}^*_2$ en des tores de $\overline{\mathbf{G}}^*_x$. Dans ce cas, $(\mathbf{S}_1, \theta_1)$ correspond à $(\mathbf{S}^*_1, t_1)$ et $(\mathbf{S}_2, \theta_2)$ à $(\mathbf{S}^*_2, t_2)$ avec t_1 et t_2 conjugués dans $\overline{\mathsf{G}}^*_x$ (t_i est un représentant de la classe de conjugaison $\varphi^*_{\sigma_i,x}(s_i)$). Il existe donc $g^* \in \overline{\mathsf{G}}^*_x$ tel que $t_1 = \mathrm{Ad}(g^*)(t_2)$. Par le lemme 2.2.3.4, $\mathbf{S}^*_1$ et ${}^{g^*}\mathbf{S}^*_2$ sont maximalement déployés dans $C_{\overline{\mathsf{G}}^*_x}(t_1)$. Deux tores maximalement déployés sont conjugués donc quitte à modifier g^* on peut supposer que $\mathbf{S}^*_1 = {}^{g^*}\mathbf{S}^*_2$. Par conséquent les paires $(\mathbf{S}^*_1, t_1)$ et $(\mathbf{S}^*_2, t_2)$ sont conjuguées sous $\overline{\mathsf{G}}^*_x$ donc les paires $(\mathbf{S}_1, \theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2, \theta_2)$ sont conjuguées sous $\overline{\mathsf{G}}_x$.

Il existe $\overline{g} \in \overline{\mathsf{G}}_x$ tel que $(\mathbf{S}_1, \theta_1) = \overline{g}(\mathbf{S}_2, \theta_2)$. Prenons $g \in G^\circ_x$ un relèvement de $\overline{g} \in \overline{\mathsf{G}}_x \simeq G^\circ_x/G^+_x$. Considérons également $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ des tores maximaux non-ramifiés de $\mathbf{G}$ qui relèvent $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$. Alors $\mathbf{S}_1$ et ${}^g\mathbf{S}_2$ ont même image dans $\overline{\mathbf{G}}_x$ donc par [DeB06] lemme 2.2.2, $\mathbf{S}_1$ et ${}^g\mathbf{S}_2$ sont G^+_x-conjugués. Quitte à changer le relèvement de $\overline{g}$ choisi, on peut supposer que $\mathbf{S}_1 = {}^g\mathbf{S}_2$. Le polysimplexe σ_1 est une facette de dimension maximale dans $\mathcal{A}(\mathbf{S}_1, F^{nr})^{\mathsf{F}}$ et $g\sigma_2$ est une facette de dimension maximale dans $\mathcal{A}({}^g\mathbf{S}_2, F^{nr})^{\mathsf{F}} = \mathcal{A}(\mathbf{S}_1, F^{nr})^{\mathsf{F}}$. Prenons $\mathcal{A}$ un appartement contenant σ_1 et $g\sigma_2$. Par [DeB06] lemme 2.2.1 (4) nous avons $A(\mathcal{A}, \sigma_1) = A(\mathcal{A}, g\sigma_2)$. On a bien que $\mathbf{S}_1 \overset{id}{=} {}^g\mathbf{S}_2$. De plus dans $\overline{\mathbf{G}}_x$ on a $\mathbf{S}_1 = {}^{\overline{g}}\mathbf{S}_2$ et $\theta_1 = \overline{g}\theta_2$ donc $\theta_1 \overset{id}{=} g\theta_2$. On a bien $(\sigma_1, \mathbf{S}_1, \theta_1) \sim (\sigma_2, \mathbf{S}_2, \theta_2)$.

□

2.2.3.7 Proposition. *L'application $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{S}^c_\Lambda$ induit une bijection $\mathscr{P}^{min}_\Lambda/{\sim_G} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}^{min}_\Lambda$.*

Démonstration. Les propositions 2.2.2.8 et 2.2.3.6 montrent que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}^{\min}_\Lambda/{\sim_G} \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & \mathscr{S}^{\min}_\Lambda \\
\mathscr{T}^e_\Lambda/{\sim} \arrow[r, "\sim"] & \mathscr{C}_\Lambda/{\sim} \arrow[u, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

d'où le résultat. □

2.2.4 Relations d'équivalence sur $\mathscr{P}_\Lambda$

Nous avons obtenu dans les sections précédentes une application $\mathscr{P}_\Lambda/{\sim_G} \to \mathscr{S}^{\min}_\Lambda$ ainsi que $\mathscr{P}^{\min}_\Lambda$, un sous-ensemble de $\mathscr{P}_\Lambda$, tel que $\mathscr{P}^{\min}_\Lambda/{\sim_G} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}^{\min}_\Lambda$. Cependant, lorsque les paires ne sont pas minimales, nous ne savons pas encore quand elles donnent un même système cohérent. Nous cherchons donc une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}_\Lambda$ qui le caractériserait. Le but de cette partie est d'introduire les relations d'équivalences $\sim_\infty$, $\sim_r$ et $\sim_e$ sur $\mathscr{P}_\Lambda$. Nous verrons par la suite que $\sim_e$ est la relation d'équivalence recherchée qui fournira une bijection $\mathscr{P}_\Lambda/{\sim_e} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}^{\min}_\Lambda$. Les deux autres relations $\sim_\infty$ et $\sim_r$ sont tout de même intéressantes et produiront également des décompositions remarquables de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, alors l'application

$$\begin{array}{rcccc}
\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}} & : & X^*(\mathbf{S}) & \to & X^*(\mathbf{S}) \\
 & & \lambda & \mapsto & \lambda + \mathsf{F}_{\mathbf{S}}(\lambda) + \cdots + \mathsf{F}^{m-1}_{\mathbf{S}}(\lambda)
\end{array}$$

induit une application, que l'on note encore $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}$:

$$\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}} : X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)X^*(\mathbf{S}) \longrightarrow X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^m-1)X^*(\mathbf{S}).$$

On note alors pour $\theta \in X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)X^*(\mathbf{S})$, $\theta\langle m\rangle := \mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}(\theta)$.

2.2.4.1 Lemme. *L'application* $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}$ *induit une bijection*

$$\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}} : X^*(\boldsymbol{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)X^*(\boldsymbol{S}) \xrightarrow{\sim} [X^*(\boldsymbol{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^m-1)X^*(\boldsymbol{S})]^{\mathsf{F}_{\boldsymbol{S}}}.$$

Démonstration. Commençons par l'injectivité. Notons que $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}} = (\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^m-1)/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)$. Comme pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^m - 1$ est injectif, l'application $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}} : X^*(\mathbf{S}) \to X^*(\mathbf{S})$ est injective. Mais alors s'il existe $\theta \in X^*(\mathbf{S})$ et $\lambda \in X^*(\mathbf{S})$ tels que $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}(\lambda) = (\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^m-1)(\theta)$ alors $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}(\lambda) = \mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}((\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)(\theta))$ et donc $\lambda = (\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)(\theta)$.

Passons maintenant à la surjectivité. Nous avons déjà que $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}$ est à valeurs dans $[X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^m-1)X^*(\mathbf{S})]^{\mathsf{F}_{\mathbf{S}}}$. Prenons donc $\lambda \in X^*(\mathbf{S})$ tel qu'il existe θ vérifiant $(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)(\lambda) = (\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^m-1)(\theta)$. Alors $(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)(\lambda) = (\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)(\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}(\theta))$ et par injectivité de $(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}-1)$, $\lambda = \mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}(\theta)$. □

Soient $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_2$ deux tores non-ramifiés et $g \in G^{nr}$. Pour simplifier les écritures nous noterons $\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m}$ pour $(S_1^{nr})^{\mathsf{F}^m} = \mathbf{S}_1(F_m)$, où F_m est l'extension non-ramifiée de degré m de F. Rappelons (voir annexe D) que $X^*(\mathbf{S}_1)/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}_1}^m-1)X^*(\mathbf{S}_1)$ est en bijection avec $\mathrm{Irr}({}^0(\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m})/({}^0\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m})^+)$ (notons que l'on utilise ici le système compatible de racines de l'unité fixé au début de cette thèse). Ainsi si ${}^g(\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m}) = \mathbf{S}_2^{\mathsf{F}^m}$ (ce qui est équivalent à dire que $\mathrm{Ad}(g)$ est défini sur F_m), $\mathrm{Ad}(g)$ induit une bijection $\mathrm{Irr}({}^0(\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m})/({}^0\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m})^+) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}({}^0(\mathbf{S}_2^{\mathsf{F}^m})/({}^0\mathbf{S}_2^{\mathsf{F}^m})^+)$ et donc une bijection $\mathrm{Ad}(g) : X^*(\mathbf{S}_1)/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}_1}^m-1)X^*(\mathbf{S}_1) \xrightarrow{\sim} X^*(\mathbf{S}_2)/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}_2}^m-1)X^*(\mathbf{S}_2)$. On définit alors la relation d'équivalence suivante

2.2.4.2 Définition. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que $(\mathbf{S}_1,\theta_1) \sim_m (\mathbf{S}_2,\theta_2)$ si et seulement s'il existe $g \in G^{nr}$ tel que

1. ${}^g(\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m}) = \mathbf{S}_2^{\mathsf{F}^m}$
2. $g\theta_1\langle m\rangle = \theta_2\langle m\rangle$

On dit que $(\mathbf{S}_1,\theta_1) \sim_\infty (\mathbf{S}_2,\theta_2)$ si et seulement s'il existe un $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\mathbf{S}_1,\theta_1) \sim_m (\mathbf{S}_2,\theta_2)$.

Nous pouvons remarquer qu'il existe un entier d tel que pour tout tore non-ramifié $\mathbf{S}$ de G, $\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^d = \psi^d$ est la multiplication par q^d. Ainsi $\sim_\infty = \sim_d$.

On note $N^{nr}(\mathbf{S})$ le normalisateur de S^{nr} dans G^{nr}. Le groupe de Weyl étendu de S^{nr} dans G^{nr} est le quotient $\tilde{W}(\mathbf{S}) := N^{nr}(\mathbf{S})/{}^0S^{nr}$, où ${}^0S^{nr}$ est le sous-groupe borné maximal de S^{nr}. On note $W^a(\mathbf{S})$, le groupe de Weyl affine, qui est le sous-groupe de $\tilde{W}(\mathbf{S})$ engendré par les réflexions des murs des chambres de $\mathcal{A}(\mathbf{S},F^{nr})$. Le groupe de Weyl $W(\mathbf{S})$ est défini par $W(\mathbf{S}) := N^{nr}(\mathbf{S})/S^{nr}$.

Notons $N(\mathbf{S},\theta) := \{n \in N^{nr}(\mathbf{S}), {}^n(\mathbf{S}^{\mathsf{F}^m}) = \mathbf{S}^{\mathsf{F}^m}$ et $n\theta\langle m\rangle = \theta\langle m\rangle$ pour un $m \in \mathbb{N}^*\}$ qui est un sous-groupe de $N^{nr}(\mathbf{S})$. Définissons aussi $\tilde{W}(\mathbf{S},\theta) := N(\mathbf{S},\theta)/{}^0S^{nr} \leq \tilde{W}(\mathbf{S})$ et $W(\mathbf{S},\theta) := N(\mathbf{S},\theta)/S^{nr} \leq W(\mathbf{S})$.

Considérons un d tel que $\sim_\infty = \sim_d$. En particulier on a $(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^d-1)X^*(\mathbf{S}) = (q^d-1)X^*(\mathbf{S})$. Alors l'application naturelle $\langle\cdot,\cdot\rangle : X_*(\mathbf{S}) \times X^*(\mathbf{S}) \to \mathbb{Z}$ induit une application

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : X_*(\mathbf{S}) \times X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^d-1)X^*(\mathbf{S}) \to \mathbb{Z}/(q^d-1)\mathbb{Z}.$$

Posons $W^\circ(\mathbf{S},\theta)$ le sous-groupe de $W(\mathbf{S},\theta)$ engendré par les s_α où α est une co-racine vérifiant $\langle\alpha,\theta\langle d\rangle\rangle = 0$. Les α tels que $\langle\alpha,\theta\langle d\rangle\rangle = 0$ forment un système de racines F-stable. Une vérification directe est possible, mais on peut également montrer que $W^\circ(\mathbf{S},\theta)$ s'identifie au groupe de Weyl de $C_{\mathbf{G}^*}(t)^\circ$, où $t \in \mathsf{G}^*$, ce que nous ferons plus tard (lemme 2.2.5.2). Notons $\mathcal{A}_{(\mathbf{S},\theta)}$ l'appartement $\mathcal{A}(\mathbf{S},F^{nr})$ mais dont la structure polysimpliciale est déduite de celle de $\mathcal{A}(\mathbf{S},F^{nr})$ en ne gardant que les murs correspondants aux co-racines affines dont la partie vectorielle correspond aux α tels que $\langle\alpha,\theta\langle d\rangle\rangle = 0$. Désignons $W^a(\mathbf{S},\theta)$ le sous-groupe de W^a engendré par les réflexions des murs de $\mathcal{A}_{(\mathbf{S},\theta)}$. Ce dernier est alors un groupe de Weyl affine comme défini dans [Bou81] chapitre VI, §2.

Enfin définissons $N^\circ(\mathbf{S},\theta)$ (resp. $\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)$) le sous-groupe de $N(\mathbf{S},\theta)$ (resp. $\tilde{W}(\mathbf{S},\theta)$) image réciproque de $W^\circ(\mathbf{S},\theta)$ par l'application $N(\mathbf{S},\theta) \twoheadrightarrow W(\mathbf{S},\theta)$ (resp. $\tilde{W}(\mathbf{S},\theta) \twoheadrightarrow W(\mathbf{S},\theta)$). Notons que $W^a(\mathbf{S},\theta)$ est un sous-groupe de $\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)$ et posons $N^a(\mathbf{S},\theta)$ l'image réciproque de $W^a(\mathbf{S},\theta)$ dans $N^\circ(\mathbf{S},\theta)$.

Notons que tous les ensembles définis précédemment sont F-stables.

Notons que si $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ sont $\sim_\infty$-équivalentes, alors il existe g tel que ${}^g(\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m}) = \mathbf{S}_2^{\mathsf{F}^m}$ et $g\theta_1\langle m\rangle = \theta_2\langle m\rangle$ pour un certain m. Comme ${}^gS_1^{nr} = S_2^{nr}$ (par densité de Zariski de $\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m}$), $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^{nr}(\mathbf{S}_1)$. De plus $\theta_1\langle m\rangle$ et $\theta_2\langle m\rangle$ sont F-stables donc $g^{-1}\mathsf{F}(g)\theta_1\langle m\rangle = \theta_1\langle m\rangle$. On en déduit que $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N(\mathbf{S}_1,\theta_1)$. On peut alors raffiner $\sim_\infty$ de la façon suivante.

2.2.4.3 Définition. On dit que $(\mathbf{S}_1,\theta_1) \sim_r (\mathbf{S}_2,\theta_2)$ (resp. $(\mathbf{S}_1,\theta_1) \sim_e (\mathbf{S}_2,\theta_2)$) si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $g \in G^{nr}$ tels que

1. ${}^g(\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m}) = \mathbf{S}_2^{\mathsf{F}^m}$
2. $g\theta_1\langle m\rangle = \theta_2\langle m\rangle$
3. $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^\circ(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ (resp. $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^a(\mathbf{S}_1,\theta_1)$)

Expliquons les notations précédentes. Nous notons $\sim_r$ car cette relation d'équivalence va correspondre à des classes de conjugaison rationnelles. Et $\sim_e$ est notée ainsi car cette relation va caractériser le fait que deux paires $(\mathbf{S},\theta)$ définissent le même système d'idempotents cohérent $e = (e_x)$.

Il faut vérifier que $\sim_r$ et $\sim_e$ sont bien des relations d'équivalence. Cela découle de la remarque suivante. Soit $g \in G^{nr}$ tel que ${}^g(\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m}) = \mathbf{S}_2^{\mathsf{F}^m}$ et $g\theta_1\langle m\rangle = \theta_2\langle m\rangle$. Alors $\mathrm{Ad}(g)$ induit une bijection $\mathrm{Ad}(g) : N(\mathbf{S}_1,\theta_1) \xrightarrow{\sim} N(\mathbf{S}_2,\theta_2)$. Si α est une co-racine telle que $\langle\alpha,\theta_1\langle d\rangle\rangle = 0$ alors $\langle g\cdot\alpha, g\cdot\theta_1\langle d\rangle\rangle = 0$ donc $\mathrm{Ad}(g) : N^\circ(\mathbf{S}_1,\theta_1) \xrightarrow{\sim} N^\circ(\mathbf{S}_2,\theta_2)$. De plus $\mathrm{Ad}(g)$ envoie les murs de l'appartement relatif à $\mathbf{S}_1$ sur les murs de l'appartement relatif à $\mathbf{S}_2$ donc $\mathrm{Ad}(g) : N^a(\mathbf{S}_1,\theta_1) \xrightarrow{\sim} N^a(\mathbf{S}_2,\theta_2)$. Pour conclure, il suffit de remarquer que l'application $x \mapsto gx\mathsf{F}(g)^{-1} = (gxg^{-1})(g\mathsf{F}(g)^{-1})$ induit bien une bijection $N^\circ(\mathbf{S}_1,\theta_1) \xrightarrow{\sim} N^\circ(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ (resp. $N^a(\mathbf{S}_1,\theta_1) \xrightarrow{\sim} N^a(\mathbf{S}_2,\theta_2)$) si $g\mathsf{F}(g)^{-1} \in N^\circ(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ (resp. $g\mathsf{F}(g)^{-1} \in N^a(\mathbf{S}_2,\theta_2)$).

On a alors les liens suivants :

$$\sim_G \Rightarrow \sim_e \Rightarrow \sim_r \Rightarrow \sim_\infty$$

2.2.5 Caractérisation des systèmes de classes de conjugaison 0-cohérents minimaux dans $\mathscr{P}_\Lambda$

Nous souhaitons montrer dans cette section que l'application $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{S}_\Lambda^{\min}$ induit une bijection $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_e \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_\Lambda^{\min}$.

Considérons une paire $(\mathbf{S}, \theta)$ et $\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})^{\mathsf{F}}$. Notons $(\sigma, \mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{T}_\Lambda$ le triplet induit par $(\mathbf{S}, \theta)$. Le groupe des caractères d'un k-tore est aussi muni d'applications $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}$, et celles-ci sont compatibles avec l'identification naturelle $X^*(\mathbf{S}) \simeq X^*(\mathbf{S})$. Nous rappelons que $W_\sigma(\mathbf{S})$ est le sous-groupe de $\tilde{W}(\mathbf{S})$ engendré par les réflexions des murs passant par σ, qui s'identifie au groupe de Weyl de $\overline{\mathbf{G}}_\sigma$ relatif à $\mathbf{S}$. On notera $W_\sigma^\dagger(\mathbf{S})$ le stabilisateur de σ dans $\tilde{W}(\mathbf{S})$. Soit d un entier tel que $\sim_\infty = \sim_d$. On note alors $W_\sigma^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ le sous-groupe de $W_\sigma(\mathbf{S})$ engendré par les s_α tels que $s_\alpha \theta\langle d\rangle = \theta\langle d\rangle$ et $\langle \alpha, \theta\langle d\rangle\rangle = 0$. Le lemme suivant découle de [Bou81], chapitre V, §3, proposition 1.

2.2.5.1 Lemme. *Soient $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$ et $\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})$. Alors $W^a(\boldsymbol{S}, \theta) \cap W_\sigma^\dagger(\boldsymbol{S}) = W_\sigma^\circ(\boldsymbol{S}, \theta)$.*

Rappelons que la classe de $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$-conjugaison de la paire $(\mathbf{S}, \theta)$ correspond à une classe de $\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*$-conjugaison de paires $(\mathbf{S}^*, t)$ (proposition D.1). Fixons $(\mathbf{S}^*, t)$ un représentant de la classe associée à $(\mathbf{S}, \theta)$. Le groupe de Weyl de $\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*$ relatif à $\mathbf{S}^*$ s'identifie au groupe de Weyl $W_\sigma(\mathbf{S})$ de $\overline{\mathbf{G}}_\sigma$ relatif à $\mathbf{S}$.

2.2.5.2 Lemme. *L'isomorphisme entre les groupes de Weyl $W_\sigma(\boldsymbol{S})$ et $W(\boldsymbol{S}^*, \overline{\boldsymbol{G}}_\sigma^*)$ envoie $W_\sigma^\circ(\boldsymbol{S}, \theta)$ sur $W(\boldsymbol{S}^*, C_{\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*}(t)^\circ)$.*

Démonstration. D'après [Car93] théorème 3.5.4, $W(\mathbf{S}^*, C_{\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*}(t)^\circ)$ correspond au sous-groupe de $W_\sigma(\mathbf{S})$ engendré par les s_α où α est une racine (pour $\mathbf{S}^*$) vérifiant $\alpha(t) = 1$.

La bijection reliant θ et t est donnée par la formule $\theta(N_{\mathsf{F}^d/\mathsf{F}}(\alpha(\zeta)) = \kappa(\alpha(t))$ (ici ζ est une racine de l'unité et on a identifié les caractères de $\mathbf{S}^*$ avec les co-caractères de $\mathbf{S}$, voir annexe D pour plus de détails sur la formule et les notations). Or $\theta(N_{\mathsf{F}^d/\mathsf{F}}(x)) = \mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^d/\mathsf{F}}(\theta)(x)$. On a alors $\alpha(t) = 1$ si et seulement si $\langle \alpha, \theta\langle d\rangle\rangle = 0$ d'où le résultat. □

Soit $(\sigma, \mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{T}_\Lambda$. Nous savons que l'on peut associer à ce triplet une classe de conjugaison rationnelle semi-simple $t \in (\overline{\mathsf{G}}_\sigma^*)_{ss,\Lambda}$. On dira alors que deux triplets $(\sigma, \mathbf{S}_1, \theta_1), (\sigma, \mathbf{S}_2, \theta_2)$ dans $\mathscr{T}_\Lambda$ sont rationnellement équivalents si la classe de conjugaison rationnelle associée est la même.

2.2.5.3 Lemme. *Soient $\sigma \in \mathrm{BT}$ et $(\sigma, \boldsymbol{S}_1, \theta_1), (\sigma, \boldsymbol{S}_2, \theta_2) \in \mathscr{T}_\Lambda$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*

1. *$(\sigma, \boldsymbol{S}_1, \theta_1)$ et $(\sigma, \boldsymbol{S}_2, \theta_2)$ sont rationnellement équivalents.*
2. *Il existe $g \in \overline{\boldsymbol{G}}_\sigma$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que $g(\boldsymbol{S}_1^{\mathsf{F}^m}) = \boldsymbol{S}_2^{\mathsf{F}^m}$, $g\theta_1\langle m\rangle = \theta_2\langle m\rangle$ et $g^{-1}\mathsf{F}(g)$ se projette sur $W_\sigma^\circ(\boldsymbol{S}_1, \theta_1)$.*

Démonstration. Notons $(\mathbf{S}_1^*, t_1)$ et $(\mathbf{S}_2^*, t_2)$ des paires associées à $(\mathbf{S}_1, \theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2, \theta_2)$.

Supposons 1. Les triplets $(\sigma, \mathbf{S}_1, \theta_1)$ et $(\sigma, \mathbf{S}_2, \theta_2)$ étant rationnellement équivalents, on a par définition qu'il existe $g^* \in (\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*)^{\mathsf{F}}$ tel que $t_1 = \mathrm{Ad}(g^*)t_2$. Les deux tores $\mathbf{S}_1^*$ et ${}^{g^*}\mathbf{S}_2^*$ contiennent t_1 donc sont conjugués sous $C_{\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*}(t_1)^\circ$. Il existe donc un $h^* \in \overline{\mathbf{G}}_\sigma^*$ tel que $h^*(\mathbf{S}_1^*, t_1) = (\mathbf{S}_2^*, t_2)$ et $w = (h^*)^{-1}\mathsf{F}(h^*) \in W_{t_1}^\circ(\mathbf{S}_1)$. Rappelons que l'on peut voir la correspondance entre les paires $(\mathbf{S}, \theta)$ et les paires $(\mathbf{S}^*, t)$ en fixant une paire de tores de référence en dualité sur k (comme rappelé dans le paragraphe après la proposition D.1). Fixons ici, $\mathbf{S}_1$ et $\mathbf{S}_1^*$. La paire $(\mathbf{S}_2^*, t_2)$ correspond alors à (w, t_1) où $t_1 \in (\mathbf{S}_1^*)^{\mathsf{F}_w}$. Considérons $\tilde{\theta}_1 \in X^*(\mathbf{S}_1)/(w\mathsf{F} - 1)X^*(\mathbf{S}_1)$ l'élément qui correspond à (w, t_1). Prenons également $g \in \overline{\mathbf{G}}_\sigma$ tel que $g^{-1}\mathsf{F}(g)$ relève w. Alors la paire $g(\mathbf{S}_1, \tilde{\theta}_1)$ est une paire en dualité avec $(\mathbf{S}_2^*, t_2)$ et est donc G-conjuguée à $(\mathbf{S}_2, \theta_2)$. Le lemme 2.2.5.2 nous permet d'identifier w à un

élément de $W_\sigma^\circ(\mathbf{S}_1,\theta_1)$. Enfin, pour un m tel que $(w\mathsf{F})^m = \mathsf{F}^m$, en remarquant que $\tilde{\theta}_1$ et θ_1 correspondent tous les deux à t_1, on a que $\tilde{\theta}_1\langle m\rangle = \theta_1\langle m\rangle$, d'où 2.

Supposons dorénavant 2. Nommons $w \in W_\sigma^\circ(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ la projection de $g^{-1}\mathsf{F}(g)$ qui s'identifie à $w \in W_{t_1}^\circ(\mathbf{S}_1)$ par le lemme 2.2.5.2. Posons $(\mathbf{S}_1,\tilde{\theta}_1) = g^{-1}(\mathbf{S}_2,\theta_2)$, où $\tilde{\theta}_1 \in X^*(\mathbf{S}_1)/(w\mathsf{F}-1)X^*(\mathbf{S}_1)$. Alors $\tilde{\theta}_1\langle m\rangle = \theta_1\langle m\rangle$ et donc $\tilde{\theta}_1$ s'envoie sur $t_1 \in (\mathbf{S}_1^*)^{w\mathsf{F}}$. Prenons alors $g^* \in C_{\overline{\mathbf{G}}_\sigma^*}(t_1)^\circ$ tel que $(g^*)^{-1}\mathsf{F}(g^*)$ relève w. La paire $(\mathbf{S}_2^*,t_2)$ est alors G^* conjuguée à $g^*(\mathbf{S}_1^*,t_1)$. Et comme $\mathrm{Ad}(g^*)t_1 = t_1$, t_1 et t_2 sont rationnellement conjugués et on a 1. □

2.2.5.4 Lemme. *Soient $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ deux éléments de $\mathscr{P}_\Lambda$. Supposons qu'il existe $\sigma \in \mathrm{BT}\cap\mathcal{A}(\mathbf{S}_1,F^{nr})\cap\mathcal{A}(\mathbf{S}_2,F^{nr})$. Notons $(\sigma,\boldsymbol{S}_1,\theta_1)$ et $(\sigma,\boldsymbol{S}_2,\theta_2)$ les triplets induits sur $\overline{\boldsymbol{G}}_\sigma$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *$(\sigma,\boldsymbol{S}_1,\theta_1)$ et $(\sigma,\boldsymbol{S}_2,\theta_2)$ sont rationnellement équivalents.*
2. *Il existe $g_\sigma \in G_\sigma^{\circ,nr}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que ${}^{g_\sigma}(\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m}) = \mathbf{S}_2^{\mathsf{F}^m}$, $g_\sigma\theta_1\langle m\rangle = \theta_2\langle m\rangle$ et $g_\sigma^{-1}\mathsf{F}(g_\sigma) \in N^a(\boldsymbol{S}_1,\theta_1)$.*

Démonstration. Par le lemme 2.2.5.3, 1. est équivalent à l'existence d'un $\bar{g}_\sigma \in \overline{\mathbf{G}}_\sigma$ et d'un m tels que ${}^{\bar{g}_\sigma}(\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m}) = \mathbf{S}_2^{\mathsf{F}^m}$, $\bar{g}_\sigma\theta_1\langle m\rangle = \theta_2\langle m\rangle$ et $\bar{g}_\sigma^{-1}\mathsf{F}(\bar{g}_\sigma) \in W_\sigma^\circ(\mathbf{S}_1,\theta_1)$.

Supposons l'existence d'un tel $\bar{g}_\sigma$. On peut alors relever celui-ci en un élément $g_\sigma \in G_\sigma^{\circ,nr}$ tel que ${}^{g_\sigma}(\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m}) = \mathbf{S}_2^{\mathsf{F}^m}$ et $g_\sigma\theta_1\langle m\rangle = \theta_2\langle m\rangle$ (voir le lemme 2.2.2 de [DeB06] pour les tores). Par le lemme 2.2.5.1 $w_\sigma = g_\sigma^{-1}\mathsf{F}(g_\sigma) \in W_\sigma^\circ(\mathbf{S}_1,\theta_1) \subseteq W^a(\mathbf{S}_1,\theta_1)$.

Supposons maintenant 2. Notons $\bar{g}_\sigma$ la réduction de g_σ dans $\overline{\mathbf{G}}_\sigma$. Alors ${}^{\bar{g}_\sigma}\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2$ et $\bar{g}_\sigma\theta_1\langle m\rangle = \theta_2\langle m\rangle$. Et par le lemme 2.2.5.1 w_σ, la projection de $g_\sigma^{-1}\mathsf{F}(g_\sigma)$, vérifie $w_\sigma \in W^a(\mathbf{S}_1,\theta_1)\cap W_\sigma^\dagger(\mathbf{S}_1) = W_\sigma^\circ(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ d'où 1. □

2.2.5.5 Lemme. *Soit $\mathbf{S}$ un tore maximal non-ramifié de $\boldsymbol{G}$, alors il existe $x \in \mathrm{BT}_0\cap\mathcal{A}(\mathbf{S},F^{nr})$.*

Démonstration. D'après [DeB06] Lemme 2.2.1, $\mathcal{A}(\mathbf{S},F^{nr})^{\mathsf{F}}$ est non-vide et est l'union des facettes de BT qui le rencontrent. □

2.2.5.6 Lemme. *Soient $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ deux éléments de $\mathscr{P}_\Lambda$ avec $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ minimale. Supposons que $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ définissent le même système de classes de conjugaison 0-cohérent. Alors, quitte à conjuguer l'une des paires par un élément de G, il existe un sommet $x \in \mathrm{BT}_0$ vérifiant :*

1. *$x \in \mathcal{A}(\mathbf{S}_1,F^{nr})\cap\mathcal{A}(\mathbf{S}_2,F^{nr})$*
2. *$(x,\boldsymbol{S}_1,\theta_1)$ et $(x,\boldsymbol{S}_2,\theta_2)$, les éléments de $\mathscr{T}_\Lambda$ correspondant respectivement à $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$, sont rationnellement équivalents.*

Démonstration. Prenons $x \in \mathrm{BT}_0\cap\mathcal{A}(\mathbf{S}_2,F^{nr})$ par le lemme 2.2.5.5, et considérons le triplet $(x,\mathbf{S}_2,\theta_2) \in \mathscr{T}_\Lambda$ correspondant à $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$. Notons t la classe de conjugaison semi-simple dans $(\overline{\mathbf{G}}_x^*)^{\mathsf{F}}$ associée à $(x,\mathbf{S}_2,\theta_2)$. Soit $\mathbf{S}^*$ un tore maximalement déployé du centralisateur de t de sorte qu'il existe un triplet minimal $(x,\mathbf{S},\theta)$ associé à t. Choisissons $(\mathbf{S},\theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$ correspondant à $(x,\mathbf{S},\theta)$. Les triplets $(x,\mathbf{S},\theta)$ et $(x,\mathbf{S}_2,\theta_2)$ sont rationnellement équivalents par construction, donc $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ et $(\mathbf{S},\theta)$ définissent le même système de classes de conjugaison 0-cohérent. Ainsi, par hypothèse, $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{S},\theta)$ définissent également le même système. Or ces deux paires sont minimales, donc d'après la proposition 2.2.3.7, $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ est G-conjuguée à $(\mathbf{S},\theta)$ ce qui démontre le résultat. □

2.2.5.7 Lemme. *Soient $(\mathbf{S}_1,\theta_1),(\mathbf{S}_2,\theta_2) \in \mathscr{P}_\Lambda$. Alors si $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ définissent le même système de classes de conjugaison 0-cohérent, $(\mathbf{S}_1,\theta_1) \sim_e (\mathbf{S}_2,\theta_2)$.*

Démonstration. Tous les systèmes de classes de conjugaison 0-cohérents sont décrits par une paire minimale par le théorème 2.2.3.7. Ainsi on peut supposer, sans perte de généralité, que $(\mathbf{S}_1, \theta_1)$ est minimale. Le résultat découle alors des lemmes 2.2.5.4 et 2.2.5.6. □

Si $n \in N^{nr}(\mathbf{S})$ alors n induit une action sur $X^*(\mathbf{S})$ et on note $\mathsf{F}_{n,\mathbf{S}} := n\vartheta_{\mathbf{S}} \circ \psi$. Notons que $\mathsf{F}_{n,\mathbf{S}}$ ne dépend que de l'image de n dans $W(\mathbf{S})$.

2.2.5.8 Lemme. *Soient $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$ et $g \in G^{nr}$ tels que $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^\circ(\boldsymbol{S}, \theta)$. Alors il existe $(\mathbf{S}', \theta') \in \mathscr{P}_\Lambda$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tels que ${}^g(\mathbf{S}^{\mathsf{F}^m}) = \mathbf{S}'^{\mathsf{F}^m}$ et $g\theta\langle m\rangle = \theta'\langle m\rangle$.*

Démonstration. Posons $n := g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ et $w \in \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ sa réduction. Soit m tel que $n\theta\langle m\rangle = \theta\langle m\rangle$ et $\mathsf{F}_{\mathbf{S}}^m = \mathsf{F}_{n,\mathbf{S}}^m$. Alors $\theta\langle m\rangle \in \left[X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{n,\mathbf{S}}^m - 1)X^*(\mathbf{S})\right]^{\mathsf{F}_{n,\mathbf{S}}}$ et par le lemme 2.2.4.1 il existe $\tilde{\theta} \in X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{n,\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S})$ tel que $\tilde{\theta}\langle m\rangle = \theta\langle m\rangle$. Définissons $\mathbf{S}' := {}^g\mathbf{S}$ et $\theta' := g\tilde{\theta} \in X^*(\mathbf{S}')/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}'} - 1)X^*(\mathbf{S}')$ de sorte que $\theta'\langle m\rangle = g\theta\langle m\rangle$. □

2.2.5.9 Lemme. *Dans chaque classe de $\sim_e$-équivalence il existe un représentant $(\mathbf{S}, \theta)$ tel que l'appartement $\mathcal{A}_{(\mathbf{S},\theta)}$ contienne une chambre F-stable.*

Démonstration. Soit $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$. Prenons C une chambre de $\mathcal{A}_{(\mathbf{S},\theta)}$. L'automorphisme F agit de façon polysimpliciale sur l'appartement donc $\mathsf{F}(C)$ est encore une chambre. Le groupe $W^a(\mathbf{S}, \theta)$ agit transitivement sur l'ensemble des chambres ([Bou81] Chapitre VI, §2, Proposition 2), donc il existe $w \in W^a(\mathbf{S}, \theta)$ tel que $w\mathsf{F}(C) = C$. En particulier $w \in W^a$ et la proposition C.3 montre alors qu'il existe $g \in G^{nr}$ tel que $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^a(\mathbf{S}, \theta)$ soit un relèvement de w. Prenons $(\mathbf{S}', \theta') \in \mathscr{P}_\Lambda$ comme dans le lemme 2.2.5.8. On a bien, par définition, que $(\mathbf{S}', \theta') \sim_e (\mathbf{S}, \theta)$. Posons $C' := gC$ une chambre de $\mathcal{A}_{(\mathbf{S}',\theta')}$. Comme $w\mathsf{F}(C) = C$, c'est-à-dire $g^{-1}\mathsf{F}(g)\mathsf{F}(C) = C$, on obtient $\mathsf{F}(C') = C'$ d'où le résultat. □

2.2.5.10 Lemme. *Soient $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$ et $g \in G^{nr}$. On suppose que $\mathcal{A}_{(\mathbf{S},\theta)}$ contient C une chambre F-stable et que $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^a(\boldsymbol{S}, \theta)$. Alors il existe $\sigma \in \mathrm{BT} \cap \mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})$ et $h \in N^a(\boldsymbol{S}, \theta)$ tels que $h^{-1}g^{-1}\mathsf{F}(g)\mathsf{F}(h)$ fixe σ.*

Démonstration. Notons $w \in W^a(\mathbf{S}, \theta)$ la réduction de $g^{-1}\mathsf{F}(g)$. Posons $\mathbf{S}' := {}^g\mathbf{S}$. Par le lemme 2.2.5.5 il existe y un point F-stable de $\mathcal{A}(\mathbf{S}', F^{nr})$. Le point $z := g^{-1}y$ est alors un point $w\mathsf{F}$-stable de $\mathcal{A}_{(\mathbf{S},\theta)}$.

Le groupe $W^a(\mathbf{S}, \theta)$ agit transitivement sur les chambres de $\mathcal{A}_{(\mathbf{S},\theta)}$ donc il existe $u \in W^a(\mathbf{S}, \theta)$ tel que $x := u \cdot z \in C$. De l'égalité $w\mathsf{F}(z) = z$ on déduit que $w'\mathsf{F}(x) = x$ avec $w' = uw\mathsf{F}(u)^{-1}$. Posons $h \in N^a(\mathbf{S}, \theta)$ un relèvement de u.

Nommons C' la chambre $w' \cdot C$. Ainsi $x = w'\mathsf{F}(x) \in w'\mathsf{F}(C) = w'C = C'$ et on a aussi $x \in C$ donc il existe $v \in W_x^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ tel que $v \cdot C' = C$ ($W_x^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ agit transitivement sur les chambres de $\mathcal{A}_{(\mathbf{S},\theta)}$ qui contiennent x, [Bou81] Chapitre VI, §2, Proposition 2 et [Bou81] Chapitre V, §3, Proposition 1). Alors $vw' \cdot C = C$ et comme $vw' \in W^a(\mathbf{S}, \theta)$, $vw' = 1$. De plus $x = w'\mathsf{F}(x)$ donc $x = \mathsf{F}(x)$. On prend alors σ le plus petit polysimplexe de $\mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})$ qui contient x. Comme $x = \mathsf{F}(x)$ on a également $\sigma = \mathsf{F}(\sigma)$ et σ convient. □

2.2.5.11 Lemme. *Soient $(\mathbf{S}_1, \theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2, \theta_2)$ deux paires telles que $(\mathbf{S}_1, \theta_1) \sim_e (\mathbf{S}_2, \theta_2)$. Alors $(\mathbf{S}_1, \theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2, \theta_2)$ définissent le même système de classes de conjugaison 0-cohérent.*

Démonstration. D'après le lemme 2.2.5.9 il existe une paire $(\mathbf{S}, \theta)$ telle que $\mathcal{A}_{(\mathbf{S},\theta)}$ contienne une chambre F-stable et $(\mathbf{S}_1, \theta_1) \sim_e (\mathbf{S}_2, \theta_2) \sim_e (\mathbf{S}, \theta)$. Il nous suffit donc de montrer par exemple que $(\mathbf{S}_1, \theta_1)$ et $(\mathbf{S}, \theta)$ définissent le même système de classes de conjugaison

0-cohérent. Prenons $g \in G^{nr}$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que ${}^g(\mathbf{S}^{\mathsf{F}^m}) = \mathbf{S}_1^{\mathsf{F}^m}$, $g\theta\langle m\rangle = \theta_1\langle m\rangle$ et $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^a(\mathbf{S},\theta)$. Par le lemme précédent 2.2.5.10 on peut supposer qu'il existe $\sigma \in \mathrm{BT} \cap \mathcal{A}(\mathbf{S}, F^{nr})$ tel que $g^{-1}\mathsf{F}(g)$ fixe σ. Par le lemme 2.3.1 de [DR09] nous savons que $H^1(\mathsf{F}, G_\sigma^{\circ,nr}) = 1$ donc il existe $g_\sigma \in G_\sigma^{\circ,nr}$ tel que $g^{-1}\mathsf{F}(g) = g_\sigma^{-1}\mathsf{F}(g_\sigma)$ et donc $g_\sigma g^{-1} \in G$. Ainsi, quitte à remplacer $(\mathbf{S},\theta)$ par un de ses G-conjugués on peut supposer que $g = g_\sigma$. On conclut par le lemme 2.2.5.4. □

On déduit alors du lemme 2.2.5.7 et du lemme 2.2.5.11 le théorème suivante

2.2.5.12 Théorème. *L'application $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{S}_\Lambda^{min}$ induit une bijection*

$$\mathscr{P}_\Lambda/\sim_e \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}_\Lambda^{min}.$$

On obtient donc une décomposition de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{[\boldsymbol{S},\theta]_e \in \mathscr{P}_\Lambda/\sim_e} \mathrm{Rep}_\Lambda^{[\boldsymbol{S},\theta]_e}(G),$$

où $\mathrm{Rep}_\Lambda^{[\boldsymbol{S},\theta]_e}(G) = \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\boldsymbol{S},\theta)}(G)$, *pour* $(\boldsymbol{S},\theta)$ *n'importe quel représentant de la classe de* $\sim_e$*-équivalence* $[\boldsymbol{S},\theta]_e$.

Cette décomposition est minimale pour la méthode utilisée.

2.2.5.13 Remarque. Toute relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathscr{P}_\Lambda$ plus faible que $\sim_e$ (en particulier $\sim_\infty$ et $\sim_r$) conduit à une décomposition de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$:

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{\mathcal{C} \in \mathscr{P}_\Lambda/\sim} \mathrm{Rep}_\Lambda^{\mathcal{C}}(G),$$

où $\mathrm{Rep}_\Lambda^{\mathcal{C}}(G) = \prod \mathrm{Rep}_\Lambda^{[\mathbf{S},\theta]_e}(G)$, le produit étant pris sur les classes de $\sim_e$-équivalence $[\mathbf{S},\theta]_e$ telles que $(\mathbf{S},\theta) \in \mathcal{C}$.

Notons également que par construction les objets simples de $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ sont décrits par : $\pi \in \mathrm{Irr}_\Lambda(G) \cap \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\mathbf{S},\theta)}(G)$ si et seulement s'il existe $(\mathbf{S}',\theta') \in \mathscr{P}_\Lambda$ et $\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{S}')^{\mathsf{F}}$ tels que

— $(\mathbf{S}',\theta') \sim_e (\mathbf{S},\theta)$
— $\langle {}^*\mathcal{R}_{\mathbf{S}'}^{\overline{\mathbf{G}}_\sigma}(\pi^{G_\sigma^+}), \theta'\rangle_{\mathsf{S}'_\Lambda} \neq 0$

où S'_Λ est S' si $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ ou le sous-groupe maximal de S' d'ordre premier à ℓ si $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$.

2.3 La relation d'équivalence $\sim_r$

On suppose toujours que $\mathbf{G}$ se déploie sur une extension non-ramifiée de F. Le but de cette section est d'étudier les décompositions produites par $\sim_r$ et $\sim_\infty$, comme expliqué dans la remarque 2.2.5.13 (on traitera la relation $\sim_e$ dans la section suivante).

Le théorème 1.3.4.5 nous donne une décomposition de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$ indexée par $\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$, l'ensemble des paramètres de Langlands inertiels modérés,

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G) = \prod_{\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})} \mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G).$$

Celle ci est obtenue en identifiant $\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ à $(\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}$. Nous procédons de même ici en introduisant un ensemble $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$, et en montrant que l'on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[d] & \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}) \arrow[d] \\
\mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[r, hook] & (\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}} \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})
\end{tikzcd}$$

La décomposition donnée par $\sim_\infty$ est la même que celle du théorème 1.3.4.5 (l'objet principal de cette section est donc $\sim_r$) et $\sim_r$ donne une décomposition plus fine

$$\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G) = \prod_{(\phi,\sigma)\in\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})} \mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma)}_\Lambda(G).$$

Haines définit dans [Hai14] définition 5.3.3, une notion d'équivalence inertielle pour des paramètres $\lambda : W_F \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Nous étendrons cette dernière en une notion de ℓ-équivalence inertielle. On notera $\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda}$ l'ensemble des paramètres de Weil modérés à équivalence inertielle près (ℓ-équivalence inertielle si $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$). On construira une bijection $\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$, permettant de réinterpréter la décomposition précédente en

$$\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G) = \prod_{(\phi,\sigma)\in\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})} \mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma)}_\Lambda(G) = \prod_{[\varphi]\in\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda}} \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_\Lambda(G).$$

Dans le cas où G est un groupe classique non-ramifié, $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $p \neq 2$, cette décomposition est compatible à la correspondance de Langlands locale et est la décomposition de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ en "blocs stables" (c'est-à-dire que ces facteurs correspondent à des idempotents primitifs du centre de Bernstein stable).

2.3.1 Interprétation sur G^*

Dans cette partie, nous allons expliquer le lien entre les $\sim_r$-classes (resp. les $\sim_\infty$-classes, resp. les $\sim_1$-classes) et les classes de conjugaison dans G^*. De façon plus précise, nous introduisons un ensemble $\mathscr{P}^*_\Lambda = \{(\mathsf{S}^*, t)\}$, où S^* est un k-tore maximal de G^* et $t \in (\mathsf{S}^*)^{\mathsf{F}}$ est d'ordre inversible dans Λ ainsi qu'une application $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{P}^*_\Lambda/\sim_{\mathsf{G}^*}$, où $\sim_{\mathsf{G}^*}$ est la conjugaison par G^*. Nous montrerons alors que cette application induit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}_\Lambda/\sim_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[d, hook] \\
\mathscr{P}^*_\Lambda/\sim_{\mathsf{G}^*} \arrow[r] & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \arrow[r] & (\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}
\end{tikzcd}$$

Si G est de plus quasi-déployé, les injections verticales sont alors des bijections.

2.3.1.1 Définition. On note $\mathscr{P}^*_\Lambda$ l'ensemble des paires (S^*, t) où S^* est un k-tore maximal de G^* et $t \in (\mathsf{S}^*)^{\mathsf{F}}$ est d'ordre inversible dans Λ.

Définissons une application $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{P}^*_\Lambda/\sim_{\mathsf{G}^*}$, où $\sim_{\mathsf{G}^*}$ désigne la conjugaison par G^*.

Soit $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$. Prenons S^* un k-tore maximal de G^* dual de $\mathbf{S}$ (la dualité ici signifie que la donnée radicielle de $\mathbf{S}$ munie de l'action du générateur de $\mathrm{Gal}(F^{nr}/F)$

est la duale de celle de S^* munie de l'action du générateur de $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$). Notons que ce dernier est bien défini à G^*-conjugaison près. L'identification $X^*(\mathbf{S}) \simeq X_*(\mathsf{S}^*)$ fournit une bijection $X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S}) \xrightarrow{\sim} X_*(\mathsf{S}^*)/(\mathsf{F} - 1)X_*(\mathsf{S}^*)$. Composée avec la bijection $X_*(\mathsf{S}^*)/(\mathsf{F} - 1)X_*(\mathsf{S}^*) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{S}^*)^{\mathsf{F}}$ de l'annexe D, on obtient la bijection

$$X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S}) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{S}^*)^{\mathsf{F}}.$$

À θ est donc associé un $t \in (\mathsf{S}^*)^{\mathsf{F}}$. La paire (S^*, t) est bien définie à G^*-conjugaison près, et on obtient de la sorte une application

$$\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{P}^*_\Lambda/\sim_{\mathsf{G}^*}.$$

2.3.1.2 Proposition. *L'application $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{P}^*_\Lambda/\sim_{\mathsf{G}^*}$ passe au quotient et induit une injection $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_1 \hookrightarrow \mathscr{P}^*_\Lambda/\sim_{\mathsf{G}^*}$.*

Si G est de plus quasi-déployé, cette injection est alors une bijection.

Démonstration. Pour traiter la classe de $\sim_1$-équivalence, nous allons utiliser les résultats de [DeB06]. Pour cela nous fixons $\mathbf{T}$ un tore non ramifié de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{T}^*$ un k-tore maximal de $\mathbf{G}^*$ en dualité avec $\mathbf{T}$. On note W le groupe de Weyl fini de $\mathbf{T}$.

Notre groupe $\mathbf{G}$ étant déployé sur F^{nr}, nous savons par le lemme 4.3.1 de [DeB06] qu'il y a une injection entre les classes de $\sim_1$-équivalence de tores maximaux non-ramifiés et les classes de F-conjugaison dans W, c'est-à-dire $H^1(\mathsf{F}, W)$ (cette injection est bijective si on suppose de plus G quasi-déployé) . Cette application fonctionne de la manière suivante. Soient $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ deux tores non-ramifiés. Ceux-ci étant non-ramifiés, ils sont conjugués sous G^{nr}. Ainsi, il existe $g \in G^{nr}$ tel que $S^{nr} = {}^gT^{nr}$. Or $\mathsf{F}(S^{nr}) = S^{nr}$ donc cela définit un élément $n := g^{-1}\mathsf{F}(g) \in Z^1(\mathsf{F}, N^{nr})$ où $N^{nr} := N(G^{nr}, T^{nr})$. On obtient $w := nT^{nr} \in Z^1(\mathsf{F}, W)$ dont la classe $[w] \in H^1(\mathsf{F}, W)$ est indépendante du choix de g. Notons également que $(S^{nr})^{\mathsf{F}} = {}^g((T^{nr})^{\mathsf{F}_w})$ où $\mathsf{F}_w := \mathrm{Ad}(n) \circ \mathsf{F}$.

Soit maintenant $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$. Comme ci-dessus, choisissons $g \in G^{nr}$ tel que $S^{nr} = {}^gT^{nr}$ et posons w l'image de $g^{-1}\mathsf{F}(g)$ dans W et $\theta_w = g^{-1}\theta \in X^*(\mathbf{T})/((w\vartheta) \circ \psi - 1)X^*(\mathbf{T})$. Alors la même preuve que le lemme 4.3.1 de [DeB06] en rajoutant les caractères θ montre que la classe de $\sim_1$-équivalence de $(\mathbf{S}, \theta)$ est caractérisée par la classe de F-conjugaison de (w, θ_w).

La bijection $X^*(\mathbf{T})/((w\vartheta) \circ \psi - 1)X^*(\mathbf{T}) \simeq X_*(\mathbf{T}^*)/(\mathsf{F}_w - 1)X_*(\mathbf{T}^*) \simeq (\mathbf{T}^*)^{\mathsf{F}_w}$ (rappelée dans l'annexe D) envoie θ_w sur $t_w \in (\mathbf{T}^*)^{\mathsf{F}_w}$. La classe de F-conjugaison de (w, t_w) est elle même en correspondance avec la classe de conjugaison d'une paire (S^*, t) (cette correspondance est aussi rappelée dans l'annexe D). Notons que S^* est en dualité avec $\mathbf{S}$, et t correspond à θ via la bijection $X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S}) \xrightarrow{\sim} (\mathsf{S}^*)^{\mathsf{F}}$, donc cette classe de conjugaison est bien l'image de $(\mathbf{S}, \theta)$ par l'application $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{P}^*_\Lambda/\sim_{\mathsf{G}^*}$, d'où le résultat. □

Nous avons une application bien définie $\mathscr{P}^*_\Lambda/\sim_{\mathsf{G}^*} \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$, $(\mathsf{S}^*, t) \mapsto t$. Celle-ci induit donc deux applications $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ et $\mathscr{P}_\Lambda \to (\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}$ (en composant avec $\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \to (\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}$).

2.3.1.3 Proposition. *Les applications précédentes passent au quotient pour les relations d'équivalence $\sim_r$ et $\sim_\infty$ et donnent des injections rendant le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}_\Lambda/\sim_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[d, hook] \\
\mathscr{P}^*_\Lambda/\sim_{\mathsf{G}^*} \arrow[r] & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \arrow[r] & (\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}
\end{tikzcd}$$

Si G est de plus quasi-déployé, ces injections sont des bijections.

Démonstration. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Passer de $\sim_1$ à $\sim_m$ revient à changer F en F^m. De plus l'application $\theta \mapsto \theta\langle m\rangle$ correspond au niveau des groupes finis à l'application $t \in (\mathbf{T}^*)^{\mathsf{F}} \mapsto t \in (\mathbf{T}^*)^{\mathsf{F}^m}$ (voir par exemple [DL76] section 5.3). On en déduit (comme dans 2.3.1.2) que l'on a $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_m \hookrightarrow \mathscr{P}^*_\Lambda/\sim_{(\mathbf{G}^*)^{\mathsf{F}^m}}$. En particulier on a que $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \hookrightarrow (\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}$.

Soient $(\mathbf{S},\theta),(\mathbf{S}',\theta') \in \mathscr{P}_\Lambda$. Notons $(\mathbf{S}^*,t)$ et $((\mathbf{S}')^*,t')$ des représentants des images respectives de $(\mathbf{S},\theta)$ et $(\mathbf{S}',\theta')$ par $\mathscr{P}_\Lambda \to \mathscr{P}^*_\Lambda/\sim_{\mathsf{G}^*}$. Alors $(\mathbf{S},\theta)$ et $(\mathbf{S}',\theta')$ sont $\sim_r$-équivalentes si et seulement si elles sont $\sim_\infty$-équivalentes et que le g reliant les deux paires vérifie $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^\circ(\mathbf{S},\theta)$. Par ce qui précède, être $\sim_\infty$-équivalent est équivalent à ce que t et t' soient géométriquement conjugués. Notons w la réduction de $g^{-1}\mathsf{F}(g)$ dans $W^\circ(\mathbf{S},\theta)$. Comme dans le lemme 2.2.5.2, nous savons que $W^\circ(\mathbf{S},\theta)$ correspond au groupe de Weyl de $C_{\mathbf{G}^*}(t)^\circ$. Ainsi $(\mathbf{S},\theta)$ et $(\mathbf{S}',\theta')$ sont $\sim_r$-équivalentes si et seulement si t' est conjugué à t par un élément $g^* \in \mathbf{G}^*$ vérifiant $w = (g^*)^{-1}\mathsf{F}(g^*) \in W^\circ(\mathbf{S},\theta)$ (c'est-à-dire tel que $g^* \in (\mathbf{G}^*)^{\mathsf{F}} C_{\mathbf{G}^*}(t)^\circ$) (une fois le tore $\mathbf{S}$ fixé la dualité fonctionne comme celle sur les groupes finis rappelée après la proposition D.1), si et seulement si t et t' sont rationnellement conjugués. □

2.3.2 Classes de conjugaison rationnelles

La proposition 2.3.1.3 montre que les classes de $\sim_r$-équivalence correspondent à des classes de conjugaison rationnelles. Dans le chapitre 1, pour relier les classes de conjugaison géométriques semi-simples F-stables aux paramètres de l'inertie, nous avons interprété $(\mathbf{G}^*_{ss})^{\mathsf{F}}$ comme $((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W)^{\mathsf{F}}$. Nous souhaitons faire de même ici, mais pour les classes de conjugaison rationnelles. Nous introduisons donc un ensemble $\widetilde{X}_\Lambda$ muni d'une action de W de sorte que l'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_\Lambda/W & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \\ \downarrow & & \downarrow \\ ((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)_\Lambda/W)^{\mathsf{F}} & \xrightarrow{\sim} & (\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}} \end{array}$$

($(X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)_\Lambda$ désigne les éléments de $(X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)$ d'ordre inversible dans Λ).

Soit $s \in \mathbf{T}^* \simeq X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times$, on note W_s le sous-groupe de W formé par les éléments w tels que $w \cdot s = s$, qui correspond au groupe de Weyl de $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ par rapport à $\mathbf{T}^*$, et W_s° le sous-groupe de W engendré par les s_α tels que $\alpha(s) = 1$, qui correspond au groupe de Weyl de $C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ$ par rapport à $\mathbf{T}^*$. Posons

$$\widetilde{X} := \{(s,\bar{w}) \in (X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times) \times (W_s^\circ \backslash W), s = \bar{w} \cdot \mathsf{F}(s)\}$$

et $\widetilde{X}_\Lambda$ le sous-ensemble de $\widetilde{X}$ formé par les $(s,\bar{w})$ avec s d'ordre inversible dans Λ. Le groupe de Weyl W agit sur $\widetilde{X}_\Lambda$ par

$$v \cdot (s,\bar{w}) = (v \cdot s, \overline{vw\mathsf{F}(v)^{-1}}),\ v \in W.$$

Vérifions que $\overline{vw\mathsf{F}(v)^{-1}}$ a bien un sens. Si $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$ dans $W_s^\circ \backslash W$, c'est-à-dire $w_1 = uw_2$ avec $u \in W_s^\circ$, alors $vw_1\mathsf{F}(v)^{-1} = (vuv^{-1})(vw_2\mathsf{F}(v)^{-1})$ et comme $vuv^{-1} \in W^\circ_{v.s}$ on a bien le

résultat voulu.

On va maintenant relier $\widetilde{X}_\Lambda/W$ aux classes de conjugaison rationnelles semi-simples dans G^* d'ordre inversible dans Λ.

Soient $(s,\bar{w}) \in \widetilde{X}_\Lambda$ et $n \in \mathbf{G}^*$ un relèvement de $\bar{w}$. Comme $s = \bar{w}\mathsf{F}(s)$, on a $s = n\mathsf{F}(s)n^{-1}$. Écrivons n sous la forme $n = g^{-1}\mathsf{F}(g)$ (grâce à la surjectivité de l'application de Lang), alors $t := gsg^{-1}$ vérifie $t = \mathsf{F}(t)$. On associe à $(s,\bar{w})$ la classe de conjugaison rationnelle de t.

2.3.2.1 Lemme. *Ce procédé ne dépend pas des choix effectués et définit une application* $\widetilde{X}_\Lambda \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$.

Démonstration. Prenons un autre relèvement $n' = (g')^{-1}\mathsf{F}(g')$ de $\bar{w}$. Alors $n'n^{-1} \in C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ$. Le groupe réductif connexe $C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ$ est $\mathsf{F}_n := \mathrm{Ad}(n) \circ \mathsf{F}$ stable, donc il existe $h \in C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ$ tel que $n'n^{-1} = h^{-1}\mathsf{F}_n(h) = h^{-1}n\mathsf{F}(h)n^{-1}$. Donc $n' = h^{-1}n\mathsf{F}(h) = (gh)^{-1}\mathsf{F}(gh)$. Ainsi $gh(g')^{-1} \in (\mathbf{G}^*)^\mathsf{F}$ et $t' := g's(g')^{-1} = (gh(g')^{-1})^{-1}t(gh(g')^{-1})$ est rationnellement conjugué à t. □

2.3.2.2 Proposition. *Cette application passe au quotient pour fournir une bijection naturelle* $\widetilde{X}_\Lambda/W \xrightarrow{\sim} \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$.

Démonstration. Montrons d'abord qu'elle passe au quotient. Soient $(s,\bar{w}),(s',\bar{w'}) \in \widetilde{X}_\Lambda$ et $v \in W$ tels que $(s,\bar{w}) = v \cdot (s',\bar{w'})$. Soient $n = g^{-1}\mathsf{F}(g)$ un relèvement de $\bar{w}$ et m un relèvement de v. Alors $n' := m^{-1}n\mathsf{F}(m) = (gm)^{-1}\mathsf{F}(gm)$ est un relèvement de $\bar{w}'$. Notons t la classe de conjugaison semi-simple rationnelle associée à $(s,\bar{w})$ et t' celle associée à $(s',\bar{w}')$. Alors t' est la classe de conjugaison rationnelle de $gms'm^{-1}g^{-1} = gsg^{-1}$ donc $t' = t$.

Il reste à vérifier la bijectivité. Construisons la bijection réciproque. Soit $t \in \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$, alors il existe $\mathbf{S}^*$ un tore maximal F-stable de $\mathbf{G}^*$ tel que $t \in (\mathbf{S}^*)^\mathsf{F}$. Prenons $g \in \mathbf{G}^*$ tel que ${}^g\mathbf{S}^* = \mathbf{T}^*$. Alors $g^{-1}\mathsf{F}(g)$ normalise $\mathbf{T}^*$ et on peut former le couple $(s,\bar{w}) = (gtg^{-1}, \overline{g^{-1}\mathsf{F}(g)})$. Ceci nous définit une application $\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \to \widetilde{X}_\Lambda/W$ (elle est indépendante des choix effectués) qui est la réciproque de $\widetilde{X}_\Lambda/W \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$. □

Nous avons une application naturelle $\widetilde{X}_\Lambda/W \to ((X \otimes_\mathbb{Z} \overline{k}^\times)_\Lambda/W)^\mathsf{F}$, $(s,\bar{w}) \mapsto s$ et il est clair au vu de la définition de l'application $\widetilde{X}_\Lambda \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ que l'on a

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X}_\Lambda/W & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \\ \downarrow & & \downarrow \\ ((X \otimes_\mathbb{Z} \overline{k}^\times)_\Lambda/W)^\mathsf{F} & \xrightarrow{\sim} & (\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^\mathsf{F} \end{array}$$

2.3.3 Réinterprétation de la relation d'équivalence $\sim_r$

Dans ce chapitre, nous obtenons des décompositions de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ à partir de relations d'équivalence ($\sim_e$, $\sim_r$ et $\sim_\infty$) sur $\mathscr{P}_\Lambda$. Dans le chapitre 1, la décomposition de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$, indexée par des paramètres inertiels, ne passe pas par les paires $(\mathbf{S},\theta)$. Elle est construite à partir d'une application $\mathscr{C}_\Lambda \to (\mathbf{G}^*_{ss})^\mathsf{F}$ (on rappelle que $\mathscr{C}_\Lambda$ désigne l'ensemble des couples (σ,s) où $\sigma \in \mathrm{BT}$ et $s \in (\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss,\Lambda}$, voir définition 2.1.1.2). La bijection $\mathscr{P}_\Lambda/{\sim_e} \xrightarrow{\sim} \mathscr{S}^{\min}_\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathscr{C}_\Lambda/{\sim}$ (théorème 2.2.5.12) permet de définir sur $\mathscr{C}_\Lambda$ deux relations d'équivalence $\sim_r$ et

$\sim_\infty$ qui correspondent aux relations éponymes sur $\mathscr{P}_\Lambda$. Nous montrons dans cette partie que l'application $\mathscr{C}_\Lambda \to (\mathsf{G}^*_{ss})^{\mathsf{F}}$ du chapitre 1 passe au quotient pour donner une injection $\mathscr{C}_\Lambda/\sim_\infty \hookrightarrow (\mathsf{G}^*_{ss})^{\mathsf{F}}$ (on aura donc une compatibilité entre la décomposition du théorème 1.3.4.5 et celle obtenue ici grâce à $\sim_\infty$). Nous souhaitons également trouver une application plus simple pour les classes de $\sim_r$-équivalence. On construira donc $\mathscr{C}_\Lambda \to \mathsf{G}^*_{ss}$ qui passe au quotient pour $\sim_r$ et donne le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}_\Lambda/\sim_r \arrow[rr, hook] \arrow[dr, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[dd] & & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \arrow[dd] \\
& \mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \arrow[ur, hook] \arrow[dd] & \\
\mathscr{C}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[rr, hook] \arrow[dr, leftrightarrow, "\sim"] & & (\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}} \\
& \mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

Soient $\sigma \in \mathrm{BT}_0$ et $\mathbf{T}$ un tore maximal maximalement déployé tel que $\sigma \in \mathcal{A}(\mathbf{T}, F)$. Rappelons que l'on a une bijection canonique $\widetilde{X}_\Lambda/W \simeq \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ (proposition 2.3.2.2). On a également $\widetilde{X}_\Lambda/W_\sigma \simeq (\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss,\Lambda}$. L'application $W_\sigma \hookrightarrow W$ induit une application $W_\sigma/W^\circ_{\sigma,s} \to W/W^\circ_s$ et donc $\widetilde{X}_\Lambda/W_\sigma \to \widetilde{X}_\Lambda/W$. On obtient de la sorte notre application $(\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss,\Lambda} \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$.

2.3.3.1 Proposition. *L'application précédente est indépendante du choix du tore $\boldsymbol{T}$ et définit une application $\mathscr{C}_\Lambda \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$. Cette dernière passe au quotient pour $\sim_r$ et rend le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}_\Lambda/\sim_r \arrow[rr, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[dr] & & \mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \arrow[dl] \\
& \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $t \in (\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss,\Lambda}$ et notons s son image par $(\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss,\Lambda} \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$. Prenons S^* un k-tore maximal de $(\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss,\Lambda}$ tel que $t \in (\mathsf{S}^*)^{\mathsf{F}}$. Considérons (S, θ) en dualité avec (S^*, t) et que l'on relève en $(\mathbf{S}, \theta)$ où $\mathbf{S}$ est un tore maximal de $\mathbf{G}$. Il est alors clair que la classe de $\sim_r$-équivalence de $(\mathbf{S}, \theta)$ correspond à la classe de $\sim_r$-équivalence de (σ, t) via la bijection $\mathscr{C}_\Lambda/\sim_r \xrightarrow{\sim} \mathscr{P}_\Lambda/\sim_r$. Nous souhaitons donc montrer que s est l'image de $(\mathbf{S}, \theta)$ par l'application $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$.

L'application $(\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss,\Lambda} \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ étant définie à partir des groupes de Weyl, nous allons réinterpréter les résultats grâce à ces derniers. Notons T le tore induit par $\mathbf{T}$ sur $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ et T^* en dualité avec T. Notons $\mathscr{P}^W_\Lambda/\mathsf{F}$ l'ensemble des classes de F-conjugaison de paires (w, θ) où $w \in W$, $\theta \in X/((w\vartheta \circ \psi - 1)X$ et θ est d'ordre inversible dans Λ. Notons de même $\mathscr{P}^{W_\sigma}_\Lambda/\mathsf{F}$ le même ensemble mais avec $w \in W_\sigma$. L'injection $W_\sigma \hookrightarrow W$ permet de définir une application $\mathscr{P}^{W_\sigma}_\Lambda/\mathsf{F} \to \mathscr{P}^W_\Lambda/\mathsf{F}$. Soit $(w_\sigma, \theta_\sigma) \in \mathscr{P}^{W_\sigma}_\Lambda/\mathsf{F}$ correspondant à la classe de $\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma$-conjugaison de la paire (S^*, t) (voir annexe D) et nommons $(w_0, \theta_0) \in \mathscr{P}^W_\Lambda/\mathsf{F}$ l'image de $(w_\sigma, \theta_\sigma)$ par l'application $\mathscr{P}^{W_\sigma}_\Lambda/\mathsf{F} \to \mathscr{P}^W_\Lambda/\mathsf{F}$. La classe de F-conjugaison de la paire (w_0, θ_0)

correspond à la classe de G^*-conjugaison d'une paire (S_0^*, t_0) et il est clair que s est la classe de conjugaison de t_0.

En termes de groupes de Weyl, la proposition 2.3.1.2 peut se réinterpréter en une injection $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_1 \hookrightarrow \mathscr{P}_\Lambda^W/\mathsf{F}$. Grâce à la proposition 2.3.1.3, il nous suffit pour conclure de montrer que la classe de (w_0, θ_0) est l'image de (S, θ) par $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_1 \hookrightarrow \mathscr{P}_\Lambda^W/\mathsf{F}$. Le corollaire 4.3.2 de [DeB06] montre ce résultat mais sans les caractères θ. La même preuve s'adapte aisément en rajoutant les caractères θ, ce qui nous démontre la proposition.

Notons que comme l'application $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ ne dépend pas du choix du tore $\mathbf{T}$, il en est de même pour $(\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma)_{ss,\Lambda} \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$. □

2.3.3.2 Proposition. *L'application $\mathscr{C}_\Lambda \to (\boldsymbol{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}$ (du chapitre 1) passe au quotient pour $\sim_\infty$ et rend le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[rr, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[dr] & & \mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[dl] \\
& (\boldsymbol{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}} &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Le résultat se déduit de la proposition 2.3.3.1 et des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}_\Lambda \arrow[r] \arrow[dr] & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \arrow[d] \\
& (\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}
\end{tikzcd}$$

et (proposition 2.3.1.3)

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{C}_\Lambda \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{C}_\Lambda/\sim_r \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] \arrow[d] & \mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \arrow[d] \\
& \mathscr{C}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[r, leftrightarrow, "\sim"] & \mathscr{P}_\Lambda/\sim_\infty \arrow[r] & (\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}}
\end{tikzcd}$$

□

Il est aisé de voir que l'on a bien le diagramme commutatif annoncé dans l'introduction.

2.3.4 Interprétation en termes duaux

Les classes d'équivalence pour $\sim_\infty$ correspondent aux classes de conjugaison semi-simples géométriques F-stables dans $\mathbf{G}^*$ par la proposition 2.3.1.3. Nous avons interprété ces dernières par des paramètres de Langlands inertielles dans le chapitre 1. On obtient donc une décomposition de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ indéxée par $\Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$, l'ensemble des paramètres inertielles, qui est la même que celle du théorème 1.3.4.5 par la section 2.3.3. Nous souhaitons obtenir de même, une interprétation en des termes duaux pour la relation d'équivalence $\sim_r$. Nous

introduisons pour cela un ensemble $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \arrow[d] \\ \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}) \arrow[r, "\sim"] & (\mathbf{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}} \end{tikzcd}$$

Ainsi, grâce à la proposition 2.3.1.3, les classes de $\sim_r$-équivalence fourniront une décomposition de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ indexée par $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$.

Reprenons les notations de [Dat17]. Étant donné une suite exacte $H \hookrightarrow \widetilde{H} \twoheadrightarrow W$ de groupes topologiques, on note $\Sigma(W, \widetilde{H})$ l'ensemble des sections continues $W \to \widetilde{H}$ qui scindent la suite exacte, et $\overline{\Sigma}(W, \widetilde{H})$ l'ensemble des classes de H-conjugaison dans $\Sigma(W, \widetilde{H})$.

Soit $\phi \in \Phi(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$. On note $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ le centralisateur de $\phi(I_F^\Lambda)$ dans $\widehat{\mathbf{G}}$ qui est un groupe réductif, possiblement non connexe. Par définition ϕ peut s'étendre en un paramètre $\varphi : W_F \longrightarrow {}^L\mathbf{G}$. Alors d'après la section 2.1.1 de [Dat17] le sous-groupe $\widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi) := C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)\varphi(W_F)$ de ${}^L\mathbf{G}$ est indépendant du choix de φ. Notons maintenant $\pi_0(\phi) := \pi_0(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi))$ et $\widetilde{\pi}_0(\phi) := \widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)/C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$ qui donne une suite exacte scindée ([Dat17] section 2.1.4)

$$0 \longrightarrow \pi_0(\phi) \longrightarrow \widetilde{\pi}_0(\phi) \longrightarrow \langle\widehat{\vartheta}\rangle \longrightarrow 0.$$

2.3.4.1 Définition. Notons $\widetilde{\Phi}(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ l'ensemble des couples (ϕ, σ) à $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison près, où $\phi : I_F^\Lambda \to {}^L\mathbf{G}$ est un paramètre inertiel et $\sigma \in \Sigma(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi))$. Appelons également $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ le sous-ensemble de $\widetilde{\Phi}(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ des (ϕ, σ) avec ϕ modéré.

Nous souhaitons établir une bijection canonique entre $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ et $\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ (puisque $\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ correspond à l'ensemble des classes de $\sim_r$-équivalence par la proposition 2.3.1.3).

La section 2.3.2 construit une bijection canonique entre $\mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ et $\widetilde{X}_\Lambda/W$. Il nous suffit donc de construire une bijection $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{X}_\Lambda/W$.

Prenons $(\phi, \sigma) \in \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$. Quitte à conjuguer (ϕ, σ), on peut supposer que $\phi(I_F^\Lambda) \subseteq \widehat{\mathbf{T}}$. Le groupe I_F^Λ/P_F étant procyclique, ϕ est déterminé par l'image d'un générateur. Le système compatible de racines de l'unité, que l'on a fixé au début, nous fournit un tel générateur, ainsi ϕ est déterminé par un élément semi-simple $s \in \widehat{\mathbf{T}}$ d'ordre inversible dans Λ. Comme dans la section 1.3.1, on identifie s à un élément $s \in X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times$ (toujours grâce au même système compatible de racines de l'unité).

2.3.4.2 Lemme. *Soit $f\widehat{\vartheta}^n \in \widetilde{C}_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi)$. Alors il existe $c \in C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi)^\circ$ tel que $cf \in N$, où $N := N(\widehat{\boldsymbol{T}}, \widehat{\boldsymbol{G}})$ est le normalisateur de $\widehat{\boldsymbol{T}}$ dans $\widehat{\boldsymbol{G}}$.*

Démonstration. On a $f\widehat{\vartheta}^n \in N(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ, {}^L\mathbf{G})$ (le normalisateur dans ${}^L\mathbf{G}$ de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$) donc $(f\widehat{\vartheta}^n)\widehat{\mathbf{T}}(f\widehat{\vartheta}^n)^{-1}$ est un tore de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$. Ainsi, il existe $c \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$ tel que $(f\widehat{\vartheta}^n)\widehat{\mathbf{T}}(f\widehat{\vartheta}^n)^{-1} = c^{-1}\widehat{\mathbf{T}}c$. Donc $(cf\widehat{\vartheta}^n)\widehat{\mathbf{T}}(cf\widehat{\vartheta}^n)^{-1} = \widehat{\mathbf{T}}$, et comme $\widehat{\mathbf{T}}$ est $\widehat{\vartheta}$-stable on obtient le résultat. $\square$

La section σ est déterminée par l'image de $\widehat{\vartheta}$. Le lemme 2.3.4.2 nous permet de prendre un relèvement de $\sigma(\widehat{\vartheta})$ de la forme $f\widehat{\vartheta}$ avec $f \in N$. On pose alors $\bar{w}$ l'image de f par l'application $N \to W \to W_s^\circ\backslash W$. Cette application ne dépend pas du choix du relèvement

choisi. En effet si $f'\widehat{\vartheta}$ est un autre relèvement avec $f' \in N$, alors il existe $c \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$ tel que $f' = cf$. Ainsi $c \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ \cap N$ donc f et f' ont même image dans $W_s^\circ \backslash W$.

On vient donc d'associer à (ϕ, σ) avec $\phi(I_F^\Lambda) \subseteq \widehat{\mathbf{T}}$ une paire $(s, \bar{w})$. Pour arriver dans $\widetilde{X}_\Lambda$ il reste à vérifier que $s = \bar{w}\mathsf{F}(s)$. Le Frobenius F sur $\mathbf{T}^*$ correspond à $\widehat{\vartheta} \circ \psi$ sur $\widehat{\mathbf{T}}$. Il faut donc vérifier que $s = \mathrm{Ad}(f) \circ \widehat{\vartheta}(s^q)$. Prenons $\varphi \in \Phi(W_F, {}^L\mathbf{G})$ un relèvement de ϕ. Notons $\varphi(\mathrm{Frob}) = u\widehat{\vartheta}$. Comme $\widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi) = C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)\varphi(W_F)$, on a que u et f diffèrent d'un élément de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ et donc $\mathrm{Ad}(f^{-1})(s) = \mathrm{Ad}(u^{-1})(s)$. Or pour un élément $x \in I_F/P_F$, $\mathrm{Frob}^{-1}x\mathrm{Frob} = x^q$, donc $\varphi(x) = \mathrm{Ad}(u) \circ \widehat{\vartheta}(\varphi(x)^q)$ et on a le résultat souhaité, en prenant pour x le progénérateur de I_F^Λ/P_F choisit plus haut.

Montrons que le procédé précédent définit une application $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}) \to \widetilde{X}_\Lambda/W$.

2.3.4.3 Lemme. *Soient (ϕ, σ) et (ϕ', σ') conjugués sous $\widehat{\boldsymbol{G}}$ avec $\phi(I_F^\Lambda) \subseteq \widehat{\boldsymbol{T}}$ et $\phi'(I_F^\Lambda) \subseteq \widehat{\boldsymbol{T}}$. Nommons $(s, \bar{w})$ et $(s', \bar{w}')$ les éléments de $\widetilde{X}_\Lambda$ leur étant associés respectivement. Alors il existe $v \in W$ tel que $(s, \bar{w}) = v \cdot (s', \bar{w}')$.*

Démonstration. Soit $g \in \widehat{\mathbf{G}}$ tel que $s' = gsg^{-1}$ (ici on voit s,s' comme des éléments de $\widehat{\mathbf{T}}$) et $\sigma' = g\sigma g^{-1}$. Des éléments d'un tore qui sont conjugués le sont sous le groupe de Weyl, donc il existe $v \in W$ tel que $s' = v \cdot s$. Appelons n un relèvement de v dans N. Comme $s' = nsn^{-1} = gsg^{-1}$, $n^{-1}g \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(s)$. Notons $f\widehat{\vartheta}$ (resp. $f'\widehat{\vartheta}$) un relèvement de $\sigma(\widehat{\vartheta})$ (resp. $\sigma'(\widehat{\vartheta})$) avec $f \in N$ (resp. $f' \in N$).

On a donc $f' = cgf\widehat{\vartheta}(g)^{-1}$ avec $c \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi')^\circ$. Soit $c' := gn^{-1} \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi')$ de telle sorte que $f' = cc'nf\widehat{\vartheta}(n)^{-1}\widehat{\vartheta}(c')^{-1}$. Par le lemme 2.3.4.2, il existe $h \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi')^\circ$ et $m \in N$ tel que $c' = hm$. On obtient donc

$$f' = ch[mnf\widehat{\vartheta}(n)^{-1}\widehat{\vartheta}(m)^{-1}]\widehat{\vartheta}(h)^{-1}$$

que l'on peut réécrire en

$$hf'\widehat{\vartheta} = ch[mnf\widehat{\vartheta}(n)^{-1}\widehat{\vartheta}(m)^{-1}]\widehat{\vartheta}.$$

Nous obtenons de la sorte que $[mnf\widehat{\vartheta}(n)^{-1}\widehat{\vartheta}(m)^{-1}]\widehat{\vartheta}$ est un autre relèvement de $\sigma'(\widehat{\vartheta})$ avec $[mnf\widehat{\vartheta}(n)^{-1}\widehat{\vartheta}(m)^{-1}] \in N$. Comme $\bar{w}'$ ne dépend pas du relèvement choisi, en notant v' la réduction de mn dans W, on obtient que $\bar{w}' = \overline{v'w\mathsf{F}(v')^{-1}}$. Remarquons de plus que $m \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi')$ pour obtenir $s' = v' \cdot s$. On a bien $(s', \bar{w}') = v' \cdot (s, \bar{w})$. □

2.3.4.4 Lemme. *Le procédé précédent donne une bijection $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{X}_\Lambda/W$.*

Démonstration. On a construit une application $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G}) \longrightarrow \widetilde{X}_\Lambda/W$. Donnons l'application réciproque. Soit $(s, \bar{w}) \in \widetilde{X}_\Lambda$. Nous savons associer à s un $\phi \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ (voir section 1.3.1). Soit f un relèvement de $\bar{w}$ dans N. Montrons que $f\widehat{\vartheta} \in \widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$. Soit $\varphi \in \Phi(W_F, {}^L\mathbf{G})$ un relèvement de ϕ et notons $\varphi(\mathrm{Frob}) = u\widehat{\vartheta}$. Alors (comme dans la preuve du lemme 2.3.4.2) $s = \mathrm{Ad}(u) \circ \widehat{\vartheta}(s^q)$. Or $s = \bar{w}\mathsf{F}(s)$, donc $s = \mathrm{Ad}(f) \circ \widehat{\vartheta}(s^q)$. On en déduit que $fu^{-1} \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$, puis que $f\widehat{\vartheta} = (fu^{-1})(u\widehat{\vartheta}) \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)\varphi(W_F) = \widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$. On définit alors la section σ en envoyant $\widehat{\vartheta}$ sur l'image de $f\widehat{\vartheta}$ dans $\widetilde{\pi}_0(\phi)$. Comme précédemment cette application passe au quotient et fournit l'application recherchée. □

En combinant le lemme 2.3.4.4 et la proposition 2.3.2.2 on obtient :

2.3.4.5 Proposition. *On a une bijection naturelle*

$$\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G}) \xrightarrow{\sim} \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$$

Remarquons que cette bijection est compatible avec la proposition 1.3.1.3 dans le sens suivant :

2.3.4.6 Proposition. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G}) & \xrightarrow{\sim} & \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G}) & \xrightarrow{\sim} & (\boldsymbol{G}^*_{ss,\Lambda})^{\mathsf{F}} \end{array}$$

où la première flèche verticale est la projection sur la première coordonnée.

On déduit des propositions 2.3.1.3 et 2.3.4.5 la proposition suivante

2.3.4.7 Proposition. *Nous avons une injection* $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \hookrightarrow \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$.

Nous pouvons écrire directement l'application $\mathscr{P}_\Lambda \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ (construite pas les propositions 2.3.1.3 et 2.3.4.5) grâce à la correspondance de Langlands locale pour les tores. En effet prenons $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$ et relevons θ en un caractère $\tilde{\theta}$ de $\mathbf{S}(F)$. Soit $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{S}$ le paramètre de Langlands associé à $\tilde{\theta}$ via la correspondance de Langlands locale pour les tores. Choisissons ι un plongement dual (non-canonique, voir preuve ci-dessous) $\iota : {}^L\mathbf{S} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ qui nous permet d'obtenir un paramètre de Langlands pour $\mathbf{G}$: $\iota \circ \varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}$. On pose alors $\phi := (\iota \circ \varphi)_{|I_F^\Lambda}$ et $\sigma(\widehat{\vartheta}) := (\iota \circ \varphi)(\mathrm{Frob})$.

2.3.4.8 Proposition. *Le procédé précédent définit une application* $\mathscr{P}_\Lambda \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$ *qui est la même que celle construite par les propositions 2.3.1.3 et 2.3.4.5.*

Démonstration. Rappelons comment est construit le plongement ι. À $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{G}$ est associé une classe de $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison $\widehat{\vartheta}$-équivariante de plongements $\hat{\iota} : \widehat{\mathbf{S}} \hookrightarrow \widehat{\mathbf{G}}$. Ainsi il existe $g \in \widehat{\mathbf{G}}$ tel que $\mathrm{Ad}(g) \circ \widehat{\vartheta}\hat{\iota} = \hat{\iota}$ et on peut définir $\iota : {}^L\mathbf{S} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$ par $\widehat{\mathbf{S}} \overset{\hat{\iota}}{\hookrightarrow} \widehat{\mathbf{G}}$ et $\iota(\widehat{\vartheta}_{\widehat{\mathbf{S}}}) = g\widehat{\vartheta}_{\widehat{\mathbf{G}}}$. Montrons alors que l'application $\mathscr{P}_\Lambda \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ est indépendante des choix effectués. Le choix de g est non-canonique mais deux g diffèrent par un élément de $\widehat{\mathbf{S}}$ donc donnent la même section σ (puisque $\widehat{\mathbf{S}} \subseteq C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$). Enfin le procédé est indépendant du choix de $\tilde{\theta}$ puisque deux tels caractères diffèrent par un caractère non-ramifié. Et on obtient de la sorte une application bien définie $\mathscr{P}_\Lambda \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$.

Il reste à vérifier que l'application est bien la même que celle des propositions 2.3.1.3 et 2.3.4.5. Ceci est aisé à faire en utilisant la section 4.3 de [DR09] qui reconstruit la correspondance de Langlands locale pour les tores dans le cas modéré avec une méthode très proche de celle de cette thèse. □

La proposition 2.3.4.7 combinée avec la remarque 2.2.5.13, démontre le théorème suivant.

2.3.4.9 Théorème. *Soit* $\phi : I_F^\Lambda \to {}^L\boldsymbol{G}$ *un paramètre inertiel. La relation d'équivalence* $\sim_r$ *permet de décomposer* $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ *de la façon suivante :*

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G) = \prod_{\sigma \in \overline{\Sigma}(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi))} \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma)}(G)$$

Notons que, si G est quasi-déployé, la proposition 2.3.1.3 donne une bijection, et donc toutes les catégories $\mathrm{Rep}_{\Lambda}^{(\phi,\sigma)}(G)$ sont non nulles. Lorsque G n'est pas quasi-déployé, nous n'avons qu'une injection et donc, les éléments qui ne sont pas dans l'image de cette injection, donnent des catégories nulles. Nous donnerons, dans la section 2.3.8, une condition sur (ϕ,σ) pour déterminer si $\mathrm{Rep}_{\Lambda}^{(\phi,\sigma)}(G)$ est nulle ou non.

2.3.5 Lien entre $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$

Nous souhaitons expliciter dans cette section le lien qui existe entre les catégories construites précédemment sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$.

Soit $(\phi,\sigma)\in\widetilde{\Phi}_m(I_F,{}^L\mathbf{G})$. Définissons alors $\phi'=\phi_{|I_F^{(\ell)}}\in\Phi_m(I_F^{(\ell)},{}^L\mathbf{G})$. Alors $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)\subseteq C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi')$ et donc $\widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)\subseteq\widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi')$. De plus $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ\subseteq C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi')^\circ$, ainsi nous avons un morphisme $\Sigma(\langle\widehat{\vartheta}\rangle,\widetilde{\pi}_0(\phi))\to\Sigma(\langle\widehat{\vartheta}\rangle,\widetilde{\pi}_0(\phi'))$. Notons σ' l'image de σ par ce morphisme. L'application qui à (ϕ,σ) associe (ϕ',σ') est alors une application naturelle $\widetilde{\Phi}_m(I_F,{}^L\mathbf{G})\to\widetilde{\Phi}_m(I_F^{(\ell)},{}^L\mathbf{G})$.

Il est aisé de voir que l'on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\Phi}_m(I_F,{}^L\mathbf{G}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathsf{G}^*_{ss} \arrow[d] \\
\widetilde{\Phi}_m(I_F^{(\ell)},{}^L\mathbf{G}) \arrow[r, "\sim"] & \mathsf{G}^*_{ss,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}
\end{tikzcd},$$

où l'application $\mathsf{G}^*_{ss}\to\mathsf{G}^*_{ss,\overline{\mathbb{Z}}_\ell}$ revient à prendre la partie ℓ-régulière d'une classe de conjugaison semi-simple.

Par construction des catégories $\mathrm{Rep}_{\Lambda}^{(\phi,\sigma)}(G)$, nous avons donc la proposition suivante.

2.3.5.1 Proposition. *Nous avons* $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^{(\phi',\sigma')}(G)\cap\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)=\prod_{(\phi,\sigma)}\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{(\phi,\sigma)}(G)$*, où le produit est pris sur les* $(\phi,\sigma)\in\widetilde{\Phi}_m(I_F,{}^L\boldsymbol{G})$ *s'envoyant sur* (ϕ',σ') *par* $\widetilde{\Phi}_m(I_F,{}^L\boldsymbol{G})\to\widetilde{\Phi}_m(I_F^{(\ell)},{}^L\boldsymbol{G})$.

2.3.6 Compatibilité à l'induction et à la restriction parabolique

Le but de cette section est d'étudier les propriétés de $\mathrm{Rep}_{\Lambda}^{(\phi,\sigma)}(G)$ vis à vis des foncteurs d'induction et de restriction parabolique.

Soit $\mathbf{P}$ un F-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ de quotient de Levi $\mathbf{M}$ défini sur F. Considérons $\widehat{\mathbf{M}}$ un dual de $\mathbf{M}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ muni d'un plongement $\iota:{}^L\mathbf{M}\hookrightarrow{}^L\mathbf{G}$ (voir [Bor79] section 3.4), qui induit une application $\Phi_m(I_F^\Lambda,{}^L\mathbf{M})\to\Phi_m(I_F^\Lambda,{}^L\mathbf{G})$. Soit $\phi_M\in\Phi_m(I_F^\Lambda,{}^L\mathbf{M})$ et notons $\phi:=\iota\circ\phi_M\in\Phi_m(I_F^\Lambda,{}^L\mathbf{G})$. Comme $\iota(\widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{M}}}(\phi_M))\subseteq\widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ et $\iota(C_{\widehat{\mathbf{M}}}(\phi_M))^\circ\subseteq C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$, le plongement ι induit un morphisme $\iota:\widetilde{\pi}_0(\phi_M)\to\widetilde{\pi}_0(\phi)$. En particulier, si $\sigma_M\in\Sigma(\langle\widehat{\vartheta}\rangle,\widetilde{\pi}_0(\phi_M))$ alors $\sigma:=\iota\circ\sigma_M\in\Sigma(\langle\widehat{\vartheta}\rangle,\widetilde{\pi}_0(\phi))$. On obtient de la sorte une application

$$\iota_M^G:\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda,{}^L\mathbf{M})\longrightarrow\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda,{}^L\mathbf{G})$$

qui à (ϕ_M,σ_M) associe (ϕ,σ).

2.3.6.1 Lemme. *Soit $t \in \mathsf{M}^*$ un représentant de la classe de conjugaison rationnelle semi-simple associée à (ϕ_M, σ_M), par 2.3.4.5. Alors la classe de conjugaison associée à (ϕ, σ) est celle de t vu comme un élément de G^*.*

Démonstration. Commençons par conjuguer (ϕ_M, σ_M) pour que ϕ_M soit à image dans $\widehat{\mathbf{T}}$. Prenons $f\widehat{\vartheta}$ un relèvement de $\sigma_M(\widehat{\vartheta})$ avec $f \in N(\widehat{\mathbf{T}}, \widehat{\mathbf{M}})$. Notons $s \in \mathsf{T}^*$ l'élément correspondant à ϕ_M et $\bar{w} \in W_M/W_{M,s}^\circ$ (W_M étant le groupe de Weyl de $\widehat{\mathbf{M}}$ relativement à $\widehat{\mathbf{T}}$) la réduction de f, de sorte que $(s, \bar{w})$ soit un représentant de l'image de (ϕ_M, σ_M) par la bijection $\widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{M}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{X}_\Lambda/W_M$. Alors $\iota(f)\widehat{\vartheta}$ est un relèvement de σ et $\iota(f) \in N(\widehat{\mathbf{T}}, \widehat{\mathbf{G}})$. Donc $(s, \bar{w})$, où l'on voit $\bar{w}$ comme un élément de W/W_s°, est le couple correspondant à (ϕ, σ), d'où le résultat. □

2.3.6.2 Théorème. *Soit $\boldsymbol{P}$ un sous-groupe parabolique de $\boldsymbol{G}$ ayant pour facteur de Levi $\boldsymbol{M}$.*

1. *Soit $(\phi, \sigma) \in \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$. Alors*

$$r_P^G(\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma)}(G)) \subseteq \prod_{\substack{(\phi_M,\sigma_M) \\ \iota_M^G(\phi_M,\sigma_M)=(\phi,\sigma)}} \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi_M,\sigma_M)}(M)$$

   où r_P^G désigne la restriction parabolique.

2. *Soit $(\phi_M, \sigma_M) \in \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{M})$ et notons $(\phi, \sigma) := \iota_M^G(\phi_M, \sigma_M)$. Alors*

$$i_P^G(\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi_M,\sigma_M)}(M)) \subseteq \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma)}(G)$$

   où i_P^G désigne l'induction parabolique.

Démonstration. Cela découle du lemme 2.3.6.1 et des propositions 2.1.3.2, 2.1.3.1. □

2.3.6.3 Théorème. *Si $C_{\widehat{\boldsymbol{G}}}(\phi) \subseteq \iota(\widehat{\boldsymbol{M}})$ le foncteur d'induction parabolique i_P^G réalise une équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi_M,\sigma_M)}(M)$ et $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma)}(G)$.*

Démonstration. Cela découle du théorème 2.3.6.2 et du théorème 1.4.4.6. □

2.3.7 Équivalence inertielle sur les paramètres de Weil

Nous avons obtenu au théorème 2.3.4.9 une décomposition de $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G)$ en rajoutant à ϕ un paramètre σ. Ici, nous allons paramétrer d'une autre manière cette décomposition. À la place de rajouter un paramètre σ à ϕ, on va considérer les relèvements $\lambda \in \Phi(W_F, {}^L\mathbf{G})$ de ϕ et les regrouper grâce à une relation d'équivalence. Pour $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, on va retrouver la relation d'équivalence inertielle introduite par Haines dans [Hai14]. Nous introduirons également une relation de "ℓ-équivalence inertielle", qui imite celle de Haines, pour obtenir le cas $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$. Cette nouvelle interprétation de la décomposition de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$, nous montrera que dans le cas où G est un groupe classique non-ramifié ($p \neq 2$) et $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (cas où l'on a la correspondance de Langlands locale), alors la décomposition du théorème 2.3.4.9 est la décomposition de $\mathrm{Rep}_\Lambda^0(G)$ en "blocs stables".

Commençons par remarquer la chose suivante : nous avons identifié les paramètres de l'inertie modérés $\Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ aux classes de conjugaison géométriques F-stables

dans $\mathbf{G}^*$ et $\Phi_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$ à celles d'ordre premier à ℓ. Maintenant, si l'on considère des paramètres inertiels modérés mais à valeur dans le dual sur $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, $\phi : I_F \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$, la même démonstration montre que l'on peut les identifier aux classes de conjugaison géométriques F-stables dans $\mathbf{G}^*$ d'ordre premier à ℓ. On a une identification naturelle $\Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)) \simeq \Phi_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$.

De même, notons $\widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{F}}_\ell))$ l'ensemble des couples (ϕ, σ), où $\phi \in \Phi_m(I_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{F}}_\ell))$ et $\sigma \in \Sigma(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi))$, à $\widehat{\mathbf{G}}$-conjugaison près. On a également une bijection $\widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)) \simeq \widetilde{\Phi}_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))$.

Haines définit dans [Hai14] définition 5.3.3, une notion d'équivalence inertielle pour des paramètres $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (voir aussi la définition 1.4.5.7). Nous étendons cette dernière en une notion de ℓ-équivalence inertielle pour des paramètres $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ (en gardant les notations de la définition 1.4.5.7).

2.3.7.1 Définition. Soient $\varphi_1, \varphi_2 : W_F \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$ deux paramètres admissibles. On dit que φ_1 et φ_2 sont *ℓ-inertiellement équivalents* si

1. $\{\mathcal{M}_{\varphi_1}\} = \{\mathcal{M}_{\varphi_2}\}$
2. il existe $\mathcal{M} \in \{\mathcal{M}_{\varphi_1}\}$, $\varphi_1^+ \in (\varphi_1)_{\widehat{\mathbf{G}}}$ et $\varphi_2^+ \in (\varphi_2)_{\widehat{\mathbf{G}}}$ dont les images sont minimalement contenues dans $\mathcal{M}$, et $z \in H^1(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, (Z(\mathcal{M}^\circ)^{I_F})^\circ)$ vérifiant

$$(z\varphi_1^+)_{\mathcal{M}^\circ} = (\varphi_2^+)_{\mathcal{M}^\circ}$$

On définit $\mathcal{B}^{st}$ (resp. $\mathcal{B}^{st}_{(\ell)}$) comme l'ensemble des paramètres $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ (resp. $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\mathbb{F}}_\ell)$) à équivalence inertielle près (resp. ℓ-équivalence inertielle près). À l'usuelle, on unifie les notations en posant $\mathcal{B}^{st}_\Lambda$ qui vaut $\mathcal{B}^{st}$ si $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\mathcal{B}^{st}_{(\ell)}$ si $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$. On défini également $\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda}$, le sous-ensemble de $\mathcal{B}^{st}_\Lambda$ des éléments modérés.

Le but de cette section est de construire une bijection naturelle $\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda}))$, où $\overline{\Lambda}$ vaut $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ si $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ si $\Lambda = \overline{\mathbb{Z}}_\ell$.

Commençons par définir une application $\Phi_m(W_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda})) \to \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda}))$. Soit $\varphi : W_F \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda})$. Posons $\phi := \varphi_{|I_F} : I_F \to {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda})$ un paramètre modéré. Il reste à construire une section $\sigma \in \Sigma(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi))$. L'image de φ est contenue dans $\widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$, donc $\varphi : W_F \to \widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$. En composant avec la projection $\widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi) \twoheadrightarrow \widetilde{\pi}_0(\phi)$ on obtient une application $W_F \to \widetilde{\pi}_0(\phi)$. Puisque ϕ est modéré, on a $\varphi(I_F) = \phi(I_F) \subseteq C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$ et cette application passe au quotient et nous fournit $W_F/I_F \to \widetilde{\pi}_0(\phi)$, ou encore une section $\sigma : \langle\widehat{\vartheta}\rangle \to \widetilde{\pi}_0(\phi)$. Dit autrement, la section σ est caractérisée par $\sigma(\widehat{\vartheta}) = \varphi(\mathrm{Frob}) \in \widetilde{\pi}_0(\phi)$. On obtient de la sorte une application $\Phi_m(W_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda})) \to \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda}))$.

2.3.7.2 Lemme. *L'application $\Phi_m(W_F, {}^L\boldsymbol{G}(\overline{\Lambda})) \to \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G}(\overline{\Lambda}))$ est surjective.*

Démonstration. Soit $(\phi, \sigma) \in \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda}))$. Choisissons $\varphi \in \Phi(W_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda}))$ un relèvement de ϕ arbitraire. Notons $\varphi(\mathrm{Frob}) =: f\widehat{\vartheta}$ et considérons $uf\widehat{\vartheta}$, un relèvement de $\sigma(\widehat{\vartheta})$ dans $\widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$, avec $u \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$. Pour $x \in I_F$ comme φ est un morphisme on a $\mathrm{Ad}(f) \circ \widehat{\vartheta}(\phi(x)^q) = \phi(x)$. Ainsi $\mathrm{Ad}(uf) \circ \widehat{\vartheta}(\phi(x)^q) = \phi(x)$ et l'application $\varphi' : W_F = I_F \rtimes \langle\mathrm{Frob}\rangle \to {}^L\mathbf{G}$ définie par $\varphi'(x) = \phi(x)$ pour $x \in I_F$ et $\varphi'(\mathrm{Frob}) = uf\widehat{\vartheta}$ est également un morphisme. Ainsi $\varphi' \in \Phi(W_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda}))$ fournit un antécédent de (ϕ, σ). $\square$

2.3.7.3 Proposition. *L'application* $\Phi_m(W_F, {}^L\boldsymbol{G}(\overline{\Lambda})) \to \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G}(\overline{\Lambda}))$ *passe au quotient et fournit une bijection* $\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G}(\overline{\Lambda}))$.

Démonstration. Commençons par montrer que l'application passe au quotient. Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi_m(W_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda}))$ qui sont inertiellement équivalents. Quitte à les conjuguer, on peut alors supposer qu'il existe un Levi standard $\mathcal{M}$ contenant minimalement l'image de φ_1 et φ_2 et un $z \in H^1(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, Z(\mathcal{M}^\circ)^\circ)$ tel que $\varphi_1 = z\varphi_2$. Notons (ϕ_1, σ_1) (resp. (ϕ_2, σ_2)) l'image de φ_1 (resp. φ_2) par $\Phi_m(W_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda})) \to \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda}))$. Les paramètres φ_1 et φ_2 ont même restriction à I_F donc $\phi_1 = \phi_2$. Notons $\phi := \phi_1 = \phi_2$. Pour $i \in \{1, 2\}$, σ_i est déterminé par l'image de $\varphi_i(\mathrm{Frob}) \in \widetilde{\pi}_0(\phi)$. Mais comme $Z(\mathcal{M}^\circ)^\circ \subseteq C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$, on a $\varphi_1(\mathrm{Frob}) = \varphi_2(\mathrm{Frob})$ dans $\widetilde{\pi}_0(\phi)$ et $\sigma_1 = \sigma_2$ d'où le résultat.

On obtient donc une application $\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda} \to \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda}))$. Celle-ci est surjective d'après le lemme 2.3.7.2. La preuve de l'injectivité est analogue à la preuve de la proposition 1.4.5.8 en remplaçant $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ par $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$. □

Cette bijection nous permet de réinterpréter la décomposition du théorème 2.3.4.9 :

2.3.7.4 Proposition. *On a la décomposition suivante*

$$\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G) = \prod_{[\varphi]\in\mathcal{B}^{st}_{m,\Lambda}} \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_\Lambda(G).$$

Notons que les facteurs $\mathrm{Rep}^{[\varphi]}_\Lambda(G)$ sont construits sans supposer l'existence de la correspondance de Langlands. Dans le cas d'un groupe classique, où la correspondance de Langlands locale est connue, alors ces facteurs sont bien compatibles avec cette dernière (ceci est démontré dans la section 2.3.10). On obtient alors :

2.3.7.5 Théorème. *Soit G un groupe classique non-ramifié, $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $p \neq 2$. Alors la décomposition*

$$\mathrm{Rep}^0_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{[\varphi]\in\mathcal{B}^{st}_m} \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{(\phi,\sigma)\in\widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})} \mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma)}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$$

est la décomposition de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ *en "blocs stables". C'est-à-dire que ces facteurs correspondent à des idempotents primitifs du centre de Bernstein stable.*

2.3.8 Condition de relevance

Nous avons vu que lorsque G est quasi-déployé, les sous-catégories $\mathrm{Rep}^{[\varphi]}_\Lambda(G) = \mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma)}_\Lambda(G)$ sont non vides. Ce n'est plus le cas lorsque l'on retire cette hypothèse. Dans cette partie, nous souhaitons montrer que $\mathrm{Rep}^{[\varphi]}_\Lambda(G)$ est non vide si et seulement si $[\varphi]$ est relevant (dans un sens précisé en dessous).

2.3.8.1 Définition. On dit que $[\varphi]$ est relevant s'il existe $\varphi' \in \Phi({}^L\mathbf{G}(\overline{\Lambda}))$ relevant tel que $\varphi'_{|W_F} \in [\varphi]$.

Les preuves nécéssaires pour démontrer les résultats souhaités de cette partie sont similaires à celles de la partie 1.4.3. Nous nous appuierons donc sur ces dernières, et on ne se concentrera que sur les légères modifications.

2.3.8.2 Lemme. *Soit $\varphi \in \Phi(W_F, {}^L\boldsymbol{G}(\overline{\Lambda}))$. Définissons $\mathcal{M}_\varphi := C_{{}^L\mathbf{G}}(Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\varphi(W_k),\circ})$. Alors toute extension $\varphi' \in \Phi({}^L\boldsymbol{G}(\overline{\Lambda}))$ de φ à W_F' se factorise par $\mathcal{M}_\varphi$. De plus il existe un $\varphi' \in \Phi({}^L\boldsymbol{G}(\overline{\Lambda}))$ ne se factorisant par aucun sous Levi propre de $\mathcal{M}_\varphi$ et tel que $\varphi'_{|W_F} \in [\varphi]$.*

Démonstration. La première partie est montrée dans le lemme 1.4.3.2. Il ne reste qu'à modifier légèrement la preuve de la deuxième partie de ce même lemme pour obtenir le résultat souhaité. Le lemme 1.4.3.2 construit à partir de φ un paramètre φ'. Ce dernier ne se factorise par aucun sous Levi propre de $\mathcal{M}_\varphi$ et vérifie que $\varphi'_{|I_F} \sim \phi := \varphi_{|I_F}$. Pour vérifier que $\varphi'_{|W_F} \in [\varphi]$, il reste à montrer, d'après la section 2.3.7, que $\varphi'(\mathrm{Frob})$ et $\varphi(\mathrm{Frob})$ différent par un élément de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$. Or par définition de φ', $\varphi'(\mathrm{Frob})$ et $\varphi(\mathrm{Frob})$ différent par un élément dans l'image du morphisme principal de SL_2 , $\mathrm{SL}_2 \to C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)^\circ$, d'où le résultat. □

2.3.8.3 Théorème. *La sous-catégorie $\mathrm{Rep}_\Lambda^{[\varphi]}(G)$ est non vide si et seulement si $[\varphi]$ est relevant.*

Démonstration. Soit $t \in \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ une classe de conjugaison semi-simple rationnelle correspondant à $[\varphi]$. Alors $\mathrm{Rep}_\Lambda^{[\varphi]}(G)$ est non vide si et seulement si t est dans l'image de l'application $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \to \mathsf{G}^*_{ss,\Lambda}$ de la proposition 2.3.1.3 si et seulement s'il existe $\mathbf{S}$ un tore non-ramifié de G en dualité avec $\mathbf{S}^*$ tel que $t \in \mathbf{S}^*$. Le reste de la preuve est alors quasiment identique à la preuve de la proposition 1.4.3.5, en utilisant le nouveau lemme 2.3.8.2. □

2.3.9 Classes de conjugaison rationnelles pour les groupes classiques

Le but de cette section est de préparer quelques résultats qui seront nécessaires pour la section 2.3.10, qui vise à montrer la compatibilité de la décomposition associée à $\sim_r$ avec la correspondance de Langlands locale. Par le théorème 1.4.5.6, nous avons déjà la compatibilité pour la relation d'équivalence $\sim_\infty$. La relation d'équivalence $\sim_\infty$ correspond à des classes de conjugaison géométriques dans $\mathbf{G}^*$, alors que $\sim_r$ correspond à des classes de conjugaison rationnelles. Cette partie consiste donc à étudier les classes de conjugaison rationnelles dans une classe de conjugaison géométrique pour un groupe classique non-ramifié. Lorsque G est à centre connexe, il n'y a aucune différence, on s'intéressera donc aux groupes Sp_{2n}, SO_{2n} et SO^*_{2n} (groupe spécial orthogonal quasi-déployé, non-déployé, associé à une extension quadratique non-ramifiée) de duaux respectifs (sur le corps fini) SO_{2n+1}, SO_{2n} et SO^*_{2n}. On ne s'intéressera également qu'au cas $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$.

Prenons $s \in (\mathbf{G}^*_{ss})^{\mathsf{F}}$ une classe de conjugaison géométrique semi-simple F-stable. Celle-ci contient au plus deux classes de conjugaison rationnelles. De plus, elle en contient exactement deux si et seulement si le centralisateur de s n'est pas connexe, ce qui se produit si et seulement si 1 et -1 sont tous les deux valeurs propres de s.

Nous souhaitons identifier les classes de conjugaison rationnelles dans une classe de conjugaison géométrique. Pour cela, nous allons définir une application $\widetilde{X}/W \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans le cas où l'on s'est placé, nous avons $X \simeq \mathbb{Z}^n$ et le groupe de Weyl W s'identifie à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n$, dans le cas où $\mathbf{G}^* = \mathrm{SO}_{2n+1}$ et au noyau de l'application $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes S_n \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $((\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n), \sigma) \mapsto \sum_{i=1}^n \epsilon_i$, lorsque $\mathbf{G}^* = \mathrm{SO}_{2n}$ ou SO^*_{2n}. Nous savons que le Frobenius agit sur X par $\widehat{\vartheta} \circ \psi$ où ψ est l'élévation à la puissance q. Ici $\widehat{\vartheta}$ est trivial pour SO_{2n+1} et SO_{2n}, et est un élément d'ordre deux pour SO^*_{2n}. Pour unifier ces notations on notera $v\mathsf{F}$ le Frobenius, où $v \in W$ est trivial pour SO_{2n+1} et SO_{2n}, et $v = ((0, \cdots, 0, 1), id)$ pour SO^*_{2n}.

Soit (s,w) où $s \in X \otimes \overline{k}^\times$ et $w \in W$. On définit $f(s,w) = \sum_{i\in I_s} \epsilon_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ où $s = (s_1, \cdots, s_n)$, $w = ((\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n), \sigma)$ et $I_s = \{i \in \{1, \cdots, n\}, s_i = -1\}$. Pour simplifier les écritures, on abrégera la notation $w = ((\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n), \sigma)$ en $w = (\epsilon_i, \sigma)$.

Rappelons que l'on note W_s° le groupe de Weyl de $C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ$ comme dans la section 2.3.2.

2.3.9.1 Lemme. *Soit $w' \in W_s^\circ$, alors $f(s,w) = f(s,w'w)$.*

Démonstration. Écrivons $w = (\epsilon_i, \sigma)$ et $w' = (\lambda_i, \tau)$. Notons a_+ (resp. a_-) le nombre de 1 (resp. -1) dans $s = (s_1, \cdots, s_n)$. Alors $C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ \simeq \mathrm{SO}_{2a_++1} \times \mathrm{SO}_{2a_-} \times \prod \mathrm{GL}_{n_i}$ si $\mathbf{G}^* = \mathrm{SO}_{2n+1}$ et $C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ \simeq \mathrm{SO}_{2a_+} \times \mathrm{SO}_{2a_-} \times \prod \mathrm{GL}_{n_i}$ si $\mathbf{G}^* = \mathrm{SO}_{2n}$ ou SO_{2n}^*. En particulier, on a dans tous les cas $\sum_{i\in I_s} \lambda_i = 0$.

Maintenant, $w'w = (\lambda_i, \tau) \cdot (\epsilon_i, \sigma) = (\lambda_i + \epsilon_{\tau^{-1}(i)}, \tau\sigma)$. Notons que $s = w' \cdot s$ de sorte que τ permute I_s. Ainsi, $\sum_{i\in I_s} \lambda_i + \epsilon_{\tau^{-1}(i)} = \sum_{i\in I_s} \lambda_i + \sum_{i\in I_s} \epsilon_{\tau^{-1}(i)} = 0 + \sum_{i\in I_s} \epsilon_i$, d'où le résultat. □

2.3.9.2 Lemme. *Soit $u \in W$, alors $f(s,w) = f(u \cdot s, uwu^{-1})$.*

Démonstration. Notons $w = (\epsilon_i, \sigma)$ et $u = (\lambda_i, \tau)$. Nous avons alors que $I_{u\cdot s} = \tau(I_s)$. Calculons uwu^{-1}. On a $uwu^{-1} = (\lambda_i, \tau)\cdot(\epsilon_i, \sigma)\cdot(\lambda_{\tau(i)}, \tau^{-1}) = (\lambda_i + \epsilon_{\tau^{-1}(i)} + \lambda_{\tau(\sigma^{-1}(\tau^{-1}(i)))}, \tau\sigma\tau^{-1})$. Donc $f(u \cdot s, uwu^{-1}) = \sum_{i\in I_{u\cdot s}} \lambda_i + \epsilon_{\tau^{-1}(i)} + \lambda_{\tau(\sigma^{-1}(\tau^{-1}(i)))} = \sum_{i\in I_{u\cdot s}} \lambda_i + \sum_{i\in I_s} \epsilon_i + \sum_{i\in I_{u\cdot s}} \lambda_i = \sum_{i\in I_s} \epsilon_i = f(s,w)$. □

Soit $(s, \bar{w}) \in \widetilde{X}$ alors avec notre notation $(v\mathsf{F})$ pour le Frobenius nous avons que pour $u \in W$, $u \cdot (s, \bar{w}) = (u \cdot s, uwvu^{-1}v^{-1})$. Ainsi les lemmes 2.3.9.1 et 2.3.9.2 montrent que l'on peut définir une application $\widetilde{X}/W \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, par $(s, \bar{w}) \mapsto f(s, wv)$.

Notons que si le centralisateur de s n'est pas connexe, alors pour $w' \in W_s \setminus W_s^\circ$, les même calculs que pour le lemme 2.3.9.1 montrent que $f(s, w'w) = 1 + f(s,w)$. Ainsi, en notant $(\widetilde{X}/W)_s$ la fibre de s par l'application $\widetilde{X}/W \to ((X \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{k}^\times)/W)^{\mathsf{F}}$, l'application $(\widetilde{X}/W)_s \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une bijection. On notera ainsi $s_{[0]}$ et $s_{[1]}$ les deux classes de conjugaison rationnelles contenues dans la classe de conjugaison géométrique de s, correspondant respectivement aux images réciproques de 0 et 1.

Nous aurons besoin par la suite d'un représentant d'une des classes rationnelles tel que les composantes de $\bar{w}$ sur les ± 1 soient triviales. Soit $w \in W$ tel que $s = wv\mathsf{F}(s)$. Écrivons $w = (\epsilon_i, \sigma)$. Alors σ préserve les ensembles $I_s = \{i \in \{1, \cdots, n\}, s_i = -1\}$ et $I'_s = \{i \in \{1, \cdots, n\}, s_i = 1\}$, ainsi σ s'écrit comme un produit de permutations à supports disjoints $\sigma = \sigma_1 \times \sigma_{-1} \times \tau$, où σ_1 est à support dans I'_s et σ_{-1} à support dans I_s. De plus $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit trivialement sur les 1 et -1 donc si l'on définit ν_i qui vaut 0 si $i \in I_s \cup I'_s$ et ϵ_i sinon et que l'on pose $w' = (\nu_i, \tau) \in W$ on a toujours $s = w'v\mathsf{F}(s)$. Le couple $(s, \bar{w'}) \in \widetilde{X}$ correspond alors à un élément $s_t \in \mathsf{G}^*$. Notons le fait suivant, comme pour tout $i \in I_s$, $\nu_i = 0$ on a que $f(s, w'v) = 1$ si et seulement si v est non trivial et $\tau(n) \in I_s$ si et seulement si v et non trivial et $n \in I_s$. En particulier, même si s_t dépend du choix de w, sa classe de conjugaison est bien définie indépendamment des choix effectués.

Soit $x \in \mathrm{BT}_0$. Dans le cas des groupes classiques nous connaissons la fome des quotients réductifs des sous-groupes parahoriques maximaux. On obtient dans les cas qui nous intéressent ici (voir par exemple [LS16] section 2)

G	$\overline{\mathsf{G}}_x$	$\overline{\mathsf{G}}_x^*$
Sp_{2n}	$\mathrm{Sp}_{2n_1} \times \mathrm{Sp}_{2n_2}$	$\mathrm{SO}_{2n_1+1} \times \mathrm{SO}_{2n_2+1}$
SO_{2n}	$\mathrm{SO}_{2n_1} \times \mathrm{SO}_{2n_2}$	$\mathrm{SO}_{2n_1} \times \mathrm{SO}_{2n_2}$
SO_{2n}^*	$\mathrm{SO}_{2n_1} \times \mathrm{SO}_{2n_2}^*$	$\mathrm{SO}_{2n_1} \times \mathrm{SO}_{2n_2}^*$

Dans chaque cas, le groupe $\overline{\mathsf{G}}_x$ se décompose en un produit de deux groupes classiques que l'on nommera $\overline{\mathsf{G}}_x \simeq \overline{\mathsf{G}}_{x,1} \times \overline{\mathsf{G}}_{x,2}$.

Soit $t \in (\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss}$. La classe de conjugaison t correspond ainsi à (t_1, t_2) où $t_i \in (\overline{\mathsf{G}}_{x,i}^*)_{ss}$. Dans la section 2.3.3 nous avons obtenu la classe de $\sim_r$-équivalence de (x, t) grâce à une application $(\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss} \to (\mathsf{G}^*)_{ss}$. Cette application est obtenue à partir de $\widetilde{X}/W_x \to \widetilde{X}/W$ et est compatible avec l'application $\widetilde{X}/W \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de sorte que l'on ait

2.3.9.3 Lemme. *Si $t = (t_{1,[i]}, t_{2,[j]})$ alors sa classe de $\sim_r$-équivalence est $s_{[i+j]}$, où s correspond à la classe de $\sim_\infty$-équivalence de t.*

Nous avons besoin d'un dernier résultat concernant les représentations cuspidales irréductibles dans une série de Deligne-Lusztig.

2.3.9.4 Lemme. *Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe défini sur k. Soit $s \in \mathsf{G}_{ss}^*$. Alors si $\mathcal{E}(\mathsf{G}, s)$ contient une représentation cuspidale irréductible, $\mathcal{E}((C_{\mathbf{G}^*}(s)^\circ)^{\mathsf{F}}, 1)$ en contient également une.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 1.10 (i) de [CE99] avec $e = 1$. □

Soit $s \in \mathsf{G}^*$. Notons a_- la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre -1. Supposons que $\widetilde{\mathcal{E}}(\mathsf{G}, s)$ contienne une représentation cuspidale irréductible. Alors comme $\widetilde{\mathcal{E}}(\mathsf{G}, s) = \mathcal{E}(\mathsf{G}, s_{[0]}) \sqcup \mathcal{E}(\mathsf{G}, s_{[1]})$, l'une des deux séries $\mathcal{E}(\mathsf{G}, s_{[0]})$, $\mathcal{E}(\mathsf{G}, s_{[1]})$ contient une représentation cuspidale irréductible.

Si $\mathsf{G} \neq \mathrm{SO}_{2n}^*$ ou $\mathsf{G} = \mathrm{SO}_{2n}^*$ et $n \notin I_s$, alors la classe de conjugaison de s_t est $s_{[0]}$. De plus $(C_{\mathbf{G}^*}(s_t)^\circ)^{\mathsf{F}} = \mathrm{SO}_{a_-}(k) \times \mathsf{G}'$ où $\mathbf{G}'$ est un groupe réductif connexe défini sur k, et si l'on prend s_t' un représentant de $s_{[1]}$ alors $(C_{\mathbf{G}^*}(s_t')^\circ)^{\mathsf{F}} = \mathrm{SO}_{a_-}^*(k) \times \mathsf{G}''$. Le lemme 2.3.9.4 nous dit alors que si $\mathcal{E}(\mathsf{G}, s_{[0]})$ (resp. $\mathcal{E}(\mathsf{G}, s_{[1]})$) contient une représentation cuspidale irréductible alors $\mathcal{E}(\mathrm{SO}_{a_-}, 1)$ (resp. $\mathcal{E}(\mathrm{SO}_{a_-}^*, 1)$) en contient également une. Or nous savons que SO_{a_-} (resp. $\mathrm{SO}_{a_-}^*$) contient une cuspidale irréductible unipotente si et seulement s'il existe un entier m_- pair (resp. impair) tel que $a_- = 2m_-^2$ ([Lus84], appendice "Tables of Unipotent Representations").

Maintenant si $\mathsf{G} = \mathrm{SO}_{2n}^*$ et $n \in I_s$, alors la classe de conjugaison de s_t est $s_{[1]}$. Cette fois $(C_{\mathbf{G}^*}(s_t)^\circ)^{\mathsf{F}} = \mathrm{SO}_{a_-}^*(k) \times \mathsf{G}'$ et $(C_{\mathbf{G}^*}(s_t')^\circ)^{\mathsf{F}} = \mathrm{SO}_{a_-}(k) \times \mathsf{G}''$. Et de même, l'une des deux séries $\mathcal{E}(\mathrm{SO}_{a_-}, 1)$, $\mathcal{E}(\mathrm{SO}_{a_-}^*, 1)$ contient une représentation cuspidale irréductible. Par conséquent on a encore que $a_- = 2m_-^2$.

En regroupant les deux discussions précédentes, on vient de démontrer (où l'on note $[m_-]$ la classe d'équivalence de m_- dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

2.3.9.5 Lemme. *Si $\widetilde{\mathcal{E}}(\mathsf{G}, s)$ contienne une représentation cuspidale irréductible alors cette dernière est dans $\mathcal{E}(\mathsf{G}, s_{[m_-]})$.*

2.3.10 Compatibilité à la correspondance de Langlands locale

Nous supposons dans cette partie que G est un groupe classique non-ramifié et $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, de sorte que l'on ait la correspondance de Langlands locale. Nous souhaitons vérifier la compatibilité à la correspondance de Langlands de la décomposition $\mathrm{Rep}^0_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{[\varphi]\in\mathcal{B}^{st}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}} \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$. De façon plus précise, nous souhaitons montrer que si $\pi \in \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ est une représentation irréductible alors $\varphi_{\pi|W_F} \in [\varphi]$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π.

Par le théorème 1.4.5.6, nous avons le résultat pour les paramètres inertiels. Ainsi, le cas où $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)$ est connexe est déjà traité. Par conséquent, il ne reste qu'à traiter le cas où G est à centre non connexe. On supposera donc dans cette partie que G est l'un des groupes $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$, $\mathrm{SO}_{2n}(F)$ ou $\mathrm{SO}^*_{2n}(F)$. Dans le but d'utiliser les résultats de [LS16] pour calculer les paramètres de Langlands, on supposera également que $p \neq 2$.

Nos groupes classiques viennent avec un plongement $\iota : {}^L\mathbf{G} \hookrightarrow {}^L\mathrm{GL}_N$. Pour Sp_{2n} et SO_{2n} de duaux respectifs SO_{2n+1} et SO_{2n} on plonge le SO_N correspondant dans GL_N. Analysons plus précisément $G = \mathrm{SO}^*_{2n}$. Son dual est ${}^L\mathbf{G} = \mathrm{SO}_{2n} \rtimes \langle\widehat{\vartheta}\rangle$, où $\widehat{\vartheta}$ agit sur SO_{2n} par conjugaison par la matrice $\widehat{w}$ ci-dessous

$$\widehat{w} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut alors définir ι par $\iota(M,1) = (M,1)$ et $\iota(1,\widehat{\vartheta}) = (\widehat{w},\widehat{\vartheta})$. Pour résumer, on a

G	${}^L\mathbf{G}$	${}^L\mathrm{GL}_N$
Sp_{2n}	$\mathrm{SO}_{2n+1} \times \langle\widehat{\vartheta}\rangle$	$\mathrm{GL}_{2n+1} \times \langle\widehat{\vartheta}\rangle$
SO_{2n}	$\mathrm{SO}_{2n} \times \langle\widehat{\vartheta}\rangle$	$\mathrm{GL}_{2n} \times \langle\widehat{\vartheta}\rangle$
SO^*_{2n}	$\mathrm{SO}_{2n} \rtimes \langle\widehat{\vartheta}\rangle$	$\mathrm{GL}_{2n} \times \langle\widehat{\vartheta}\rangle$

Soit π une représentation cuspidale irréductible. Notons $\mathcal{A}(F)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles cuspidales auto-duales d'un certain $\mathrm{GL}_m(F)$. Alors pour $\rho \in \mathcal{A}(F)$, il existe au plus un nombre réel positif $s_\pi(\rho)$ tel que l'induite parabolique $i(\rho|det(\cdot)|_F^{s_\pi(\rho)} \otimes \pi)$ soit réductible. On définit alors l'ensemble de Jordan par $Jord(\pi) = \{(\rho,m) \in \mathcal{A}(F) \times \mathbb{N}^*, 2s_\pi(\rho) - (m+1) \in 2\mathbb{N}\}$. Considérons ici la version suivante du groupe de Weil-Deligne : $W'_F \simeq W_F \times \mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. On peut alors retrouver φ_π à partir de l'ensemble de Jordan grâce au théorème suivant

2.3.10.1 Théorème ([Moe14]). *On a*

$$\iota \circ \varphi_\pi = \bigoplus_{(\rho,m)\in Jord(\pi)} \varphi_\rho \otimes st_m$$

où φ_ρ est la représentation irréductible de W_F correspondant à ρ via la correspondance de

Langlands locale pour GL_n *et* st_m *est la représentation irréductible* m*-dimensionnelle de* $\mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$.

Il existe $x \in \mathrm{BT}_0$ et $t \in (\overline{\mathsf{G}}_x^*)_{ss}$ tels que $e_{t,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{\overline{\mathsf{G}}_x} \pi^{G_x^+} \neq 0$. Nous avons vu à la section 2.3.9 que le groupe $\overline{\mathsf{G}}_x$ se décompose en un produit de deux groupes $\overline{\mathsf{G}}_x \simeq \overline{\mathsf{G}}_{x,1} \times \overline{\mathsf{G}}_{x,2}$. Ainsi t correspond via cet isomorphisme à (t_1, t_2) où $t_i \in (\overline{\mathsf{G}}_{x,i}^*)_{ss}$. Nous avons également défini des entiers $a_-^{(1)}$ et $a_-^{(2)}$ correspondant respectivement à la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre -1 pour t_1 et t_2. Comme $\mathcal{E}(\overline{\mathsf{G}}_{x,i}, t_i)$ contient une représentation irréductible cuspidale, il existe des entiers $m_-^{(1)}$ et $m_-^{(2)}$ tels que $a_-^{(i)} = 2(m_-^{(i)})^2$.

Soit s la classe de conjugaison géométrique associée à $\phi = \varphi_{\pi|I_F}$. Supposons que $C_{\mathbf{G}^*}(s)$ n'est pas connexe, alors s contient, d'après la section 2.3.9, deux classes de conjugaison rationnelles $s_{[0]}$ et $s_{[1]}$. La bijection entre G_{ss}^* et $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{st}$ permet de faire correspondre à $s_{[0]}$ et $s_{[1]}$ deux classes d'équivalence de $\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{st}$: $\varphi_{[0]}$ et $\varphi_{[1]}$.

2.3.10.2 Lemme. *On a* $\varphi_{\pi|W_F} \in \varphi_{[m_-^{(1)}+m_-^{(2)}]}$.

Démonstration. Prenons $[\varphi_t] \in \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{st}$ correspondant à s_t. Nous allons examiner quand est-ce que $\varphi_{\pi|W_F} \in [\varphi_t]$. Par construction, nous avons que si $\varphi \in [\varphi_t]$ alors $\varphi_{|I_F} \sim \phi$. Or $\varphi_{\pi|I_F} = \phi$ donc il ne nous reste qu'à examiner l'image de $\varphi_\pi(\mathrm{Frob})$ dans $\widetilde{\pi}_0(\phi)$. On a construit $[\varphi_t]$ à partir d'une paire $(s, \bar{w})$, où $w = (\epsilon_i, \sigma) \in W$ vérifie que $\epsilon_i = 0$ si $s_i = \pm 1$. Notons $\mathbb{1}$ le caractère trivial de $\mathrm{GL}_1(F)$, ω_0 le caractère non-ramifié d'ordre deux et ω_1,ω_2 les caractères ramifiés d'ordre deux ($\omega_2 = \omega_1\omega_0$). Ainsi $\varphi_{\pi|W_F} \in [\varphi_t]$ si et seulement s'il existe $\eta \in C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$ tel que $\eta\varphi_\pi$ ait une composante triviale sur $\mathbb{1}, \omega_0, \omega_1, \omega_2$. Or $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ = \mathrm{SO}_{a_+} \times \mathrm{SO}_{a_-} \times \prod_{i=1}^k \mathrm{GL}_{n_i}$, donc $\varphi_{\pi|W_F} \in [\varphi_t]$ si et seulement si la composante de $\varphi_{\pi|W_F}$ pour $\rho = \mathbb{1}, \omega_0$ est dans SO_{a_+} et celle pour $\rho = \omega_1, \omega_2$ est dans SO_{a_-}. En remarquant que $\varphi_{\pi|W_F}$ est à valeur dans SO_n, on obtient que $\varphi_\pi \in [\varphi_t]$ si et seulement si la composante de $\varphi_{\pi|W_F}$ pour $\rho = \omega_1, \omega_2$ est dans SO_{a_-}.

Nous savons que $\iota \circ \varphi_\pi = \bigoplus_{(\rho,m)\in Jord(\pi)} \varphi_\rho \otimes st_m$ donc

$$\iota \circ \varphi_{\pi|W_F} = \bigoplus_{(\rho,m)\in Jord(\pi)} \varphi_\rho \otimes (\nu^{(1-m)/2} \oplus \cdots \oplus \nu^{(m-1)/2})$$

où ν est trivial sur I_F et $\nu(\mathrm{Frob}) = q$ (lorsque l'on écrit $\varphi_\pi = \bigoplus_{(\rho,m)\in Jord(\pi)} \varphi_\rho \otimes st_m$, la version du groupe de Weil-Deligne considérée est $W_F' = W_F \times \mathrm{SL}_2(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$ et donc la restriction à W_F devient maintenant $\varphi_{\pi|W_F}(w) = \varphi_\pi(w, d_w)$ où $d_w = diag(|w|^{1/2}, |w|^{-1/2})$). Maintenant $\{\pm s_\pi(\omega_1), \pm s_\pi(\omega_2)\} = \{\pm(m_-^{(1)} + m_-^{(2)} + 1), \pm(m_-^{(1)} - m_-^{(2)})\}$ d'après [LS16] section 8, et donc $s_\pi(\omega_1)$ et $s_\pi(\omega_2)$ sont de même parité. En particulier on obtient que la composante de $\iota \circ \varphi_{\pi|W_F}$ pour $\rho = \omega_1, \omega_2$ est dans SO_{a_-} si et seulement si $s_\pi(\omega_1)$ est pair si et seulement si $m_-^{(1)} + m_-^{(2)}$ est pair.

Si $G \neq \mathrm{SO}_{2n}^*$ ou $G = \mathrm{SO}_{2n}^*$ et $n \notin I_s$, alors $[\varphi_t] = \varphi_{[0]}$ et ι ne change pas la composante de φ_π en $\rho = \omega_1, \omega_2$. Donc $\varphi_{\pi|W_F} \in \varphi_{[0]}$ si et seulement si $m_-^{(1)} + m_-^{(2)}$ est pair, d'où le résultat.

Si $G = \mathrm{SO}_{2n}^*$ et $n \in I_s$, alors $[\varphi_t] = \varphi_{[1]}$ et ι multiplie la composante de φ_π en $\rho = \omega_1, \omega_2$ par $\widehat{w}$ (de déterminant -1). Donc $\varphi_{\pi|W_F} \in \varphi_{[1]}$ si et seulement si $m_-^{(1)} + m_-^{(2)}$ est impair, d'où le résultat. $\square$

2.3.10.3 Proposition. *Soit $\pi \in \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ une représentation cuspidale irréductible. Alors $\varphi_{\pi|W_F} \in [\varphi]$.*

Démonstration. On peut supposer le centralisateur non connexe, le cas connexe est donné par le théorème 1.4.5.6.

Soit $\pi \in \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ une représentation cuspidale irréductible. Il existe $x \in \mathrm{BT}_0$ et $t \in (\overline{\mathsf{G}}^*_x)_{ss}$ tels que $e^{\overline{\mathsf{G}}_x}_{t,\overline{\mathbb{Q}}_\ell}\pi^{G^+_x} \neq 0$. La classe t s'écrit (t_1, t_2). Comme $\mathcal{E}(\overline{\mathsf{G}}_{x,i}, t_i)$ contient une représentation irréductible cuspidale, le lemme 2.3.9.5 nous dit que $t_i = t_{[m^{(i)}_-]}$. Notons s la classe de conjugaison rationnelle correspondant à $[\varphi]$, alors le lemme 2.3.9.3 nous dit alors que $s = s_{[m^{(1)}_- + m^{(2)}_-]}$. On conclut alors par le lemme 2.3.10.2 qui nous dit que $\varphi_{\pi|W_F} \in \varphi_{[m^{(1)}_- + m^{(2)}_-]}$. □

2.3.10.4 Théorème. *Soit G un groupe classique non-ramifié, $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et $p \neq 2$. Alors la décomposition $\mathrm{Rep}^0_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{[\varphi]\in\mathcal{B}^{st}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}} \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ est compatible à la correspondance de Langlands locale. C'est-à-dire que si $\pi \in \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ est une représentation irréductible, alors $\varphi_{\pi|W_F} \in [\varphi]$, où φ_π est le paramètre de Langlands associé à π.*

Démonstration. Il existe un Levi M et une représentation irréductible cuspidale τ telle que π soit une sous-représentation de $i^G_P(\tau)$. La proposition 2.3.10.3 nous donne le résultat pour τ. Mais comme la correspondance de Langlands locale pour les groupes classiques est compatible à l'induction parabolique (pour les paramètres de Weil) et qu'il en est de même pour la décomposition $\mathrm{Rep}^0_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{[\varphi]\in\mathcal{B}^{st}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}} \mathrm{Rep}^{[\varphi]}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ par le théorème 2.3.6.2 , on obtient le résultat pour π. □

2.4 La relation d'équivalence $\sim_e$

Nous venons d'étudier les relations d'équivalence $\sim_\infty$ et $\sim_r$ qui nous ont fourni des décompositions de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$. Passons maintenant à l'étude de la dernière relation : $\sim_e$. Nous savons que cette relation permet de construire les systèmes cohérents minimaux et donc d'obtenir la décomposition de $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ la plus fine que l'on puisse obtenir avec notre méthode. Pour paramétrer les classes de $\sim_e$-équivalence, nous allons avoir besoin de rajouter aux paires (ϕ, σ) une certaine donnée cohomologique α. On pourra résumer l'ensemble des correspondances de ce chapitre par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\sim_e \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \sim_r \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \sim_\infty \arrow[d, leftrightarrow] \\
(\phi, \sigma, \alpha) & (\phi, \sigma) & \phi
\end{tikzcd}$$

On suppose toujours que $\mathbf{G}$ se déploie sur une extension non-ramifiée de F. Cependant, à partir de la section 2.4.3, les résultats ne s'appliqueront qu'aux formes intérieures pures des groupes non-ramifiés. On supposera donc, à partir de ce moment, que $\mathbf{G}$ est non-ramifié et on prendra $\omega \in H^1(F, \mathbf{G})$, qui correspond à G_ω, une forme intérieure pure de G. À $(\phi, \sigma) \in \widetilde{\Phi}_m(I^\Lambda_F, {}^L\mathbf{G})$ on associera $\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}$, un groupe réductif connexe non-ramifié sur F, ainsi qu'une application $h_{\phi,\sigma} : \tilde{H}^1(F, \mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}) \to H^1(F, \mathbf{G})$. La décomposition associée à $\sim_e$ s'écrira

alors

$$\mathrm{Rep}_{\Lambda}^{(\phi,\sigma)}(G_\omega) = \prod_{\alpha\in h_{\phi,\sigma}^{-1}(\omega)} \mathrm{Rep}_{\Lambda}^{(\phi,\sigma,\alpha)}(G_\omega).$$

2.4.1 Paramétrisation des classes de $\sim_e$-équivalence dans une classe de $\sim_r$-équivalence

Nous avons décrit dans la section 2.3 les classes de $\sim_r$-équivalence. Pour paramétrer les classes de $\sim_e$-équivalence nous cherchons donc à décrire $[\mathbf{S},\theta]_r/\sim_e$, où $[\mathbf{S},\theta]_r$ est la classe de $\sim_r$ équivalence d'une paire $(\mathbf{S},\theta)\in\mathscr{P}_\Lambda$. De façons plus précise, nous allons construire une bijection $[\mathbf{S},\theta]_r/\sim_e \xrightarrow{\sim} \ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F},\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta))\to H^1(\mathsf{F},\tilde{W}/W^a)]$ (on rappelle la définition de H^1 dans l'annexe C).

Prenons donc $(\mathbf{S},\theta)\in\mathscr{P}_\Lambda$ et notons $[\mathbf{S},\theta]_r$ sa classe de $\sim_r$-équivalence. Définissons $\tilde{H}^1(\mathsf{F},N^\circ(\mathbf{S},\theta))$ l'image de $H^1(\mathsf{F},N^\circ(\mathbf{S},\theta))$ dans $H^1(\mathsf{F},N(\mathbf{S},\theta))$. Remarquons que $\tilde{H}^1(\mathsf{F},N^\circ(\mathbf{S},\theta))$ n'est autre que $Z^1(\mathsf{F},N^\circ(\mathbf{S},\theta))/\sim$, où $n\sim n'$ s'il existe $g\in N(\mathbf{S},\theta)$ tel que $n=gn'\mathsf{F}(g)^{-1}$.

2.4.1.1 Proposition. *On a une bijection*

$$[\boldsymbol{S},\theta]_r/\sim_G \xrightarrow{\sim} \ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F},N^\circ(\boldsymbol{S},\theta))\to H^1(\mathsf{F},G^{nr})].$$

Démonstration. Soit $(\mathbf{S}',\theta')\in[\mathbf{S},\theta]_r$. Alors il existe $g\in G^{nr}$ et $m\in\mathbb{N}^*$ tels que ${}^g(\mathbf{S}^{\mathsf{F}^m})=\mathbf{S}'^{\mathsf{F}^m}$, $g\theta\langle m\rangle=\theta'\langle m\rangle$ et $g^{-1}\mathsf{F}(g)\in N^\circ(\mathbf{S},\theta)$. L'élément $g^{-1}\mathsf{F}(g)$ définit un élément de $\ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F},N^\circ(\mathbf{S},\theta))\to H^1(\mathsf{F},G^{nr})]$. Montrons que cette construction est indépendante du choix de g. Soit g' un autre élément de G^{nr} vérifiant les mêmes conditions que g. Alors $g^{-1}g'\in N(\mathbf{S},\theta)$ et donc $[g^{-1}\mathsf{F}(g)]=[g'^{-1}\mathsf{F}(g')]$ dans $\tilde{H}^1(\mathsf{F},N^\circ(\mathbf{S},\theta))$. La construction précédente ne dépend pas de la classe de G-conjugaison choisie et on obtient une application

$$[\mathbf{S},\theta]_r/\sim_G \to \ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F},N^\circ(\mathbf{S},\theta))\to H^1(\mathsf{F},G^{nr})].$$

Cette application est injective. Prenons $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ deux éléments de $[\mathbf{S},\theta]_r$. Soient $g_1,g_2\in G^{nr}$ associés à $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ et vérifiant que $[g_1^{-1}\mathsf{F}(g_1)]=[g_2^{-1}\mathsf{F}(g_2)]$ dans $\tilde{H}^1(\mathsf{F},N^\circ(\mathbf{S},\theta))$. Il existe alors $h\in N(\mathbf{S},\theta)$ tel que $g_1^{-1}\mathsf{F}(g_1)=hg_2^{-1}\mathsf{F}(g_2)\mathsf{F}(h)^{-1}$. L'élément $g_1hg_2^{-1}$ est donc dans G. Ainsi, quitte à conjuguer $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ par un élément de G, on peut supposer que $g_2=g_1h$. Comme $h\in N(\mathbf{S},\theta)$, $\mathbf{S}_1=\mathbf{S}_2$ et $\theta_1\langle m\rangle=\theta_2\langle m\rangle$. Mais comme l'application $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^m/\mathsf{F}}$ est injective, $\theta_1=\theta_2$.

Elle est également surjective par le lemme 2.2.5.8, d'où le résultat. □

2.4.1.2 Lemme. *L'application $N^{nr}\twoheadrightarrow\tilde{W}$ induit un isomorphisme $H^1(\mathsf{F},N^{nr})\xrightarrow{\sim}H^1(\mathsf{F},\tilde{W})$ (et de même en remplaçant respectivement N^{nr} par $N(\boldsymbol{S},\theta)$, $N^\circ(\boldsymbol{S},\theta)$ et $\tilde{W}$ par $\tilde{W}(\boldsymbol{S},\theta)$, $\tilde{W}^\circ(\boldsymbol{S},\theta)$).*

Démonstration. La preuve est analogue à celle du lemme 2.3.4 de [DR09]. □

Notons $\tilde{H}^1(\mathsf{F},\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta))$ l'image de $H^1(\mathsf{F},\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta))$ dans $H^1(\mathsf{F},\tilde{W}(\mathbf{S},\theta))$.

2.4.1.3 Corollaire. *On a une bijection*

$$[\boldsymbol{S},\theta]_r/\sim_G \xrightarrow{\sim} \ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F},\tilde{W}^\circ(\boldsymbol{S},\theta))\to H^1(\mathsf{F},\tilde{W}/W^a)].$$

Démonstration. D'après la proposition C.3 on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\mathsf{F}, N^\circ(\mathbf{S},\theta)) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, N(\mathbf{S},\theta)) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, N^{nr}) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, G) \\ \downarrow\sim & & \downarrow\sim & & \downarrow\sim & & \downarrow\sim \\ H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}(\mathbf{S},\theta)) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a) \end{array}$$

d'où le résultat par la proposition 2.4.1.1. □

On définit de même $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta))$ comme l'image de $H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta))$ dans $H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta))$.

2.4.1.4 Proposition. *On a une bijection*

$$[\boldsymbol{S},\theta]_r/\sim_e \xrightarrow{\sim} \ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\boldsymbol{S},\theta)/W^a(\boldsymbol{S},\theta)) \to H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)].$$

Et l'application, qui à un élément de $[\boldsymbol{S},\theta]_r$ associe sa classe de $\sim_e$-équivalence, est donnée par l'application naturelle $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\boldsymbol{S},\theta)) \to \tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\boldsymbol{S},\theta)/W^a(\boldsymbol{S},\theta))$.

Démonstration. Commençons par montrer que l'application

$$H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)) \to H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta))$$

est surjective. Notons que si $(\mathbf{S}',\theta')$ est $\sim_r$-équivalente à $(\mathbf{S},\theta)$ (les deux paires étant reliées par un g vérifiant $g^{-1}\mathsf{F}(g) \in N^\circ(\mathbf{S},\theta)$), alors comme dans l'annexe C l'application $x \mapsto gx\mathsf{F}(g)^{-1}$ induit des bijections faisant commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta)) \\ \downarrow\sim & & \downarrow\sim \\ H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}',\theta')) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}',\theta')/W^a(\mathbf{S}',\theta')) \end{array} \qquad (*)$$

Il nous suffit donc de montrer la surjectivité de

$$H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}',\theta')) \to H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}',\theta')/W^a(\mathbf{S}',\theta')).$$

D'après le lemme 2.2.5.9, il existe une paire $(\mathbf{S}',\theta')$ $\sim_r$-équivalente à $(\mathbf{S},\theta)$ telle que $\mathcal{A}_{(\mathbf{S}',\theta')}$ contienne $C_{(\mathbf{S}',\theta')}$ une chambre F-stable. Notons $\Omega_{(\mathbf{S}',\theta')} := \{w \in \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}',\theta'), w \cdot C_{(\mathbf{S}',\theta')} = C_{(\mathbf{S}',\theta')}\}$. L'isomorphisme $\Omega_{(\mathbf{S}',\theta')} \xrightarrow{\sim} \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}',\theta')/W^a(\mathbf{S}',\theta')$ nous fournit alors une section F-équivariante à la suite exacte

$$1 \to W^a(\mathbf{S}',\theta') \to \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}',\theta') \to \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}',\theta')/W^a(\mathbf{S}',\theta') \to 1.$$

En particulier l'application voulue est bien surjective.

En utilisant le corollaire 2.4.1.3, on obtient une surjection

$$[\mathbf{S},\theta]_r/\sim_G \twoheadrightarrow \ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta)) \to H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)].$$

Il nous reste à montrer que cette application passe au quotient pour la $\sim_e$-équivalence et que l'application quotientée est injective. C'est-à-dire, il faut montrer que si $(\mathbf{S}_1,\theta_1), (\mathbf{S}_2,\theta_2) \in$

$[\mathbf{S},\theta]_r$ alors $(\mathbf{S}_1,\theta_1)\sim_e(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ si et seulement si $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ et $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ ont même image dans $\tilde{H}^1(\mathsf{F},\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta))$. Or le diagramme commutatif $(*)$ (appliqué avec $(\mathbf{S}_1,\theta_1)$ à la place de $(\mathbf{S}',\theta')$) permet de nous ramener au cas où $(\mathbf{S}_1,\theta_1)=(\mathbf{S},\theta)$. Supposons donc que $(\mathbf{S}_2,\theta_2)\sim_e(\mathbf{S},\theta)$, il existe alors g reliant les deux paires tel que $g^{-1}\mathsf{F}(g)\in N^a(\mathbf{S},\theta)$ et donc l'image de $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ est triviale dans $\tilde{H}^1(\mathsf{F},\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta))$. Réciproquement, supposons que l'image de $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ est triviale dans $\tilde{H}^1(\mathsf{F},\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta))$ c'est-à-dire que si g relie $(\mathbf{S}_2,\theta_2)$ et $(\mathbf{S},\theta)$, et que $\bar{w}$ est l'image de $g^{-1}\mathsf{F}(g)$ dans $\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta)$ alors $[\bar{w}]=[1]$ dans $\tilde{H}^1(\mathsf{F},\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta))$. Ainsi quitte à multiplier g par un élément de $N(\mathbf{S},\theta)$ on peut supposer que $\bar{w}=1$, c'est-à-dire que $g^{-1}\mathsf{F}(g)\in N^a(\mathbf{S},\theta)$ et donc que $(\mathbf{S}_2,\theta_2)\sim_e(\mathbf{S},\theta)$, ce qui achève la preuve de la proposition. □

Notons que cette proposition dépend du choix d'un point base $(\mathbf{S},\theta)$. Cependant ; si $(\mathbf{S}',\theta')\in\mathscr{P}_\Lambda$ est une autre paire telle que $(\mathbf{S},\theta)\sim_e(\mathbf{S}',\theta')$. Prenons $g\in G^{nr}$ reliant $(\mathbf{S},\theta)$ et $(\mathbf{S}',\theta')$ tel que $g^{-1}\mathsf{F}(g)\in N^a(\mathbf{S},\theta)$, nous avons alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
{[\mathbf{S},\theta]_r/\sim_e} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, equal] & \ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F},\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta))\to H^1(\mathsf{F},\tilde{W}(\mathbf{S})/W^a(\mathbf{S}))] \arrow[d, "x\mapsto gx\mathsf{F}(g)^{-1}"] \\
{[\mathbf{S}',\theta']_r/\sim_e} \arrow[r, "\sim"] & \ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F},\tilde{W}^\circ(\mathbf{S}',\theta')/W^a(\mathbf{S}',\theta'))\to H^1(\mathsf{F},\tilde{W}(\mathbf{S}')/W^a(\mathbf{S}'))]
\end{tikzcd}$$

2.4.2 Les groupes $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$

Dans le but de décrire les classes de $\sim_e$-équivalence en des termes duaux, nous avons besoin d'introduire quelques notations. Dans [Dat17] section 2.1.4, Dat construit un groupe $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$ pour chaque $\phi:I_F^\Lambda\to{}^L\mathbf{G}$ et $\sigma\in\overline{\Sigma}(\langle\widehat{\vartheta}\rangle,\widetilde{\pi}_0(\phi))$. Nous rappelons ici cette construction.

Soit $\phi:I_F^\Lambda\to{}^L\mathbf{G}$ un paramètre inertiel. La conjugaison par n'importe quelle section ensembliste de la suite exacte $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ\hookrightarrow\widetilde{C}_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)\twoheadrightarrow\widetilde{\pi}_0(\phi)$ donne une action "extérieure" bien définie

$$\widetilde{\pi}_0(\phi)\longrightarrow\mathrm{Out}(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ).$$

Appelons alors $\mathbf{G}_\phi^{split,\circ}$ un groupe réductif sur F dual de $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ$. Le choix d'un épinglage de $\mathbf{G}_\phi^{split,\circ}$ nous donne une section $\mathrm{Out}(\mathbf{G}_\phi^{split,\circ})\longrightarrow\mathrm{Aut}(\mathbf{G}_\phi^{split,\circ})$, et donc un morphisme

$$\widetilde{\pi}_0(\phi)\longrightarrow\mathrm{Out}(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)=\mathrm{Out}(\mathbf{G}_\phi^{split,\circ})\longrightarrow\mathrm{Aut}(\mathbf{G}_\phi^{split,\circ}).$$

On peut alors former un F-groupe réductif (non-connexe)

$$\mathbf{G}_\phi^{split}:=\mathbf{G}_\phi^{split,\circ}\rtimes\pi_0(\phi)$$

muni d'une action de $\widetilde{\pi}_0(\phi)$ donnée par

$$\theta:\widetilde{\pi}_0(\phi)\longrightarrow\mathrm{Aut}(\mathbf{G}_\phi^{split})$$

(où $\widetilde{\pi}_0(\phi)$ agit sur $\pi_0(\phi)$ par conjugaison). Alors n'importe quelle section continue $\sigma:\langle\widehat{\vartheta}\rangle\to\widetilde{\pi}_0(\phi)$ nous donne une F-forme $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$ de $\mathbf{G}_\phi^{split}$ telle que l'action de $\langle\widehat{\vartheta}\rangle$ sur $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}(F^{nr})=\mathbf{G}_\phi^{split}(F^{nr})$ soit l'action naturelle twistée par $\theta\circ\sigma$. La composante neutre $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}^\circ$ de $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$

est alors un groupe réductif connexe non-ramifié et l'on a

$$\mathbf{G}_{\phi,\sigma}(F) = \mathbf{G}^{\circ}_{\phi,\sigma}(F) \rtimes \pi_0(\phi)^{\sigma(\widehat{\vartheta})}.$$

Notons également que si $c \in \pi_0(\phi)$, la conjugaison par $(1, c)$ dans $\mathbf{G}^{split}_{\phi}(\overline{F})$ induit un F-isomorphisme $\mathbf{G}_{\phi,\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}_{\phi,\sigma^c}$, de sorte que la classe d'isomorphisme de $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$ sur F ne dépend que de l'image de σ dans $\overline{\Sigma}(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi))$. Nous pouvons remarquer que par construction de $\mathbf{G}^{\circ}_{\phi,\sigma}$ nous avons le lemme suivant

2.4.2.1 Lemme. *Soit $t \in G^*_{ss,\Lambda}$ l'image de (ϕ, σ) par l'application de la proposition 2.3.4.5. Alors la donnée radicielle de $(\boldsymbol{G}^{\circ}_{\phi,\sigma})^*$ munie de l'action du Frobenius est égale à celle de $C_{\boldsymbol{G}^*}(t)^{\circ}$ également munie de l'action du Frobenius.*

On définit l'ensemble $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) := Im[H^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \to H^1(\mathsf{F}, G^{nr}_{\phi,\sigma})]$. Alors $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma})$ n'est autre que $H^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma})$ quotienté par l'action de $\pi_0(\phi)^{\sigma(\widehat{\vartheta})}$. Nous avons besoin d'une application

$$h_{\phi,\sigma} : \tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \to H^1(\mathsf{F}, G^{nr}).$$

Pour cela, rappelons que l'on a l'isomorphisme de Kottwitz :

$$H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}[\pi_0(Z(\widehat{\mathbf{G}})^{\widehat{\vartheta}})] \text{ et } H^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}[\pi_0(Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^{\circ})^{\sigma(\widehat{\vartheta})})].$$

L'inclusion $Z(\widehat{\mathbf{G}})^{\widehat{\vartheta}} \subseteq Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^{\circ})^{\widetilde{\pi}_0(\phi)} \subseteq Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^{\circ})^{\sigma(\widehat{\vartheta})}$ nous fournit alors une application $H^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \to H^1(\mathsf{F}, G^{nr})$. Pour obtenir l'application voulue, il reste à vérifier que cette application est compatible avec l'action de $\pi_0(\phi)^{\sigma(\widehat{\vartheta})}$ ce qui est le cas car

$$Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^{\circ})^{\widetilde{\pi}_0(\phi)} \subseteq Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^{\circ})^{\sigma(\widehat{\vartheta})\pi_0(\phi)^{\sigma(\widehat{\vartheta})}} \subseteq Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^{\circ})^{\sigma(\widehat{\vartheta})}.$$

Définissons également, comme dans [Dat17] section 2.1.4, l'ensemble

$$\overline{\Sigma}(\phi) := \overline{\Sigma}\left(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \mathbf{G}^{split,\circ}_{\phi}(F^{nr}) \rtimes \widetilde{\pi}_0(\phi)\right).$$

La projection $\overline{\Sigma}(\phi) \to \overline{\Sigma}(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi))$ permet alors d'obtenir une partition

$$\begin{aligned}\overline{\Sigma}(\phi) &= \overline{\Sigma}\left(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \mathbf{G}^{split,\circ}_{\phi}(F^{nr}) \rtimes \widetilde{\pi}_0(\phi)\right) \\ &= \bigsqcup_{\sigma \in \overline{\Sigma}(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi))} \tilde{H}^1\left(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \mathbf{G}^{\circ}_{\phi,\sigma}(F^{nr})\right) \\ &= \bigsqcup_{\sigma \in \overline{\Sigma}(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi))} \tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}).\end{aligned}$$

On munit $\overline{\Sigma}(\phi)$ d'une application $\overline{\Sigma}(\phi) \to H^1(\mathsf{F}, G^{nr})$ définie comme le co-produit des applications $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \to H^1(\mathsf{F}, G^{nr})$ précédentes.

2.4.3 Le cas quasi-déployé

On suppose dans cette partie que $\mathbf{G}$ est non-ramifié (c'est-à-dire que l'on suppose en plus que $\mathbf{G}$ est quasi-déployé). Utilisons les groupes $\mathbf{G}_{\phi,\sigma}$ que l'on vient de définir pour

réinterpréter les groupes de cohomologies apparus dans la section 2.4.1 dans le cas où le groupe est non-ramifié.

Prenons une classe de $\sim_r$-équivalence déterminée par un couple (ϕ, σ) ou, de façon équivalente, par une classe de conjugaison rationnelle de t dans G^*. Prenons S^* un tore maximalement déployé dans $C_{\mathbf{G}^*}(t)^\circ$.

Fixons un sommet hyperspécial o dans BT ainsi qu'un isomorphisme entre $\overline{\mathsf{G}}_o^*$ et G^*. Ainsi S^* devient un tore maximal F-stable de $\overline{\mathsf{G}}_o^*$ et nous pouvons choisir S un tore maximal F-stable de $\overline{\mathsf{G}}_o$ en dualité avec S^* sur k. Ce dernier se relève en un tore non-ramifié $\mathbf{S}$ de $\mathbf{G}$. La bijection $(\mathsf{S}^*)^{\mathsf{F}} \xrightarrow{\sim} X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S})$ (voir section 2.2.1) envoie t sur un élément que l'on nomme θ. Nous obtenons de la sorte une paire $(\mathbf{S}, \theta) \in \mathscr{P}_\Lambda$. Notons que cette paire est bien définie à $\sim_e$-équivalence près (une fois le sommet hyperspecial o fixé) puisque toutes les paires obtenues par le procédé précédent induisent un système cohérent minimal qui contient le couple (o, t) (ces systèmes sont donc tous égaux) et sont donc $\sim_e$-équivalentes. Notons également que par construction, $(\mathbf{S}, \theta)$ est un représentant de la $\sim_r$-classe que l'on avait choisie.

2.4.3.1 Lemme. *Il existe un plongement de $\boldsymbol{S}$ dans $\boldsymbol{G}^\circ_{\phi,\sigma}$ qui identifie $\tilde{W}^\circ(\boldsymbol{S}, \theta)$ à $\tilde{W}_{\boldsymbol{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\boldsymbol{S})$ (le groupe de Weyl étendu de $\boldsymbol{G}^\circ_{\phi,\sigma}$ relativement à $\mathbf{S}$ dans F^{nr}) et $W^a(\boldsymbol{S}, \theta)$ à $W^a_{\boldsymbol{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\boldsymbol{S})$, en tant que sous-groupe du groupe des transformations affines de $X_*(\boldsymbol{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Ces identifications sont également compatibles à l'action du Frobenius F.*

Démonstration. Choisissons o' un sommet hyperspécial de $\mathrm{BT}(\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma})$ et un isomorphisme entre $\overline{(\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma})}^*_{o'}$ et $C_{\mathbf{G}^*}(t)^\circ$ (cet isomorphisme existe par le lemme 2.4.2.1). De même que précédemment, grâce à o' nous pouvons obtenir à partir de S^* un tore maximal non-ramifié $\mathbf{S}'$ de $\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}$. L'identification naturelle $X_*(\mathbf{S}') = X^*(\mathbf{S}^*) = X_*(\mathbf{S})$ nous fournit un isomorphisme $\iota : \mathbf{S} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}'$.

Le sommet o' étant hyperspécial, nous avons un isomorphisme

$$\mu_{o'} : \tilde{W}_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\iota(\mathbf{S})) = W_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}, o'}(\iota(\mathbf{S})) \ltimes X_*(\mathbf{S}) \xrightarrow{\sim} W_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\iota(\mathbf{S})) \ltimes X_*(\mathbf{S}).$$

De plus, par définition de l'appartement non-étendu, il existe une unique surjection $\eta_{o'} : X_*(\mathbf{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\iota(\mathbf{S}))$ telle que

— $\eta_{o'}$ est compatible aux actions de $X_*(\iota(\mathbf{S}) \cap \mathcal{D}(\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ (par translation)

— $\eta_{o'}$ est compatible aux actions de $W_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\iota(\mathbf{S})) \ltimes X_*(\mathbf{S}) \simeq \tilde{W}_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\iota(\mathbf{S}))$

— $\eta_{o'}$ envoie 0 sur o'

Alors $\mu_{o'}(W^a_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\iota(\mathbf{S})))$ est le sous-groupe de $W_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\iota(\mathbf{S})) \ltimes X_*(\mathbf{S})$ engendré par les réflexions des murs du système de racine de $\iota(\mathbf{S})$ dans $\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}$ et leurs translatés par $X_*(\mathbf{S})$.

De façon analogue sur $\mathbf{G}$, le sommet o étant hyperspécial, nous obtenons un isomorphisme

$$\mu_o : \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta) = W^\circ_o(\mathbf{S}, \theta) \ltimes X_*(\mathbf{S}) \xrightarrow{\sim} W^\circ(\mathbf{S}, \theta) \ltimes X_*(\mathbf{S})$$

et une unique surjection $\eta_o : X_*(\mathbf{S}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathcal{A}_{(\mathbf{S},\theta)}$ qui soit compatible aux actions de $X_*(\mathbf{S} \cap \mathcal{D}(\mathbf{G})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, de $W^\circ(\mathbf{S}, \theta) \ltimes X_*(\mathbf{S}) \simeq \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ et envoie 0 sur o. De même, $\mu_o(W^a(\mathbf{S}, \theta))$ est le sous-groupe de $W^\circ(\mathbf{S}, \theta) \ltimes X_*(\mathbf{S})$ engendré par les réflexions des murs du système de racine de $\mathbf{S}$ dans $\mathbf{G}$ vérifiant $\langle \alpha, \theta\langle d\rangle\rangle = 0$ et leurs translatés par $X_*(\mathbf{S})$.

Le lemme 2.2.5.2 construit un isomorphisme entre $W^\circ_o(\mathbf{S}, \theta)$ et $W(\mathbf{S}^*, C_{\overline{\mathsf{G}}^*_\sigma}(t)^\circ) \simeq W_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\mathbf{S}')$ et sa preuve montre qu'il préserve également les systèmes de racines. Nous

obtenons donc

$$\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta) \xrightarrow{\sim} \tilde{W}_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\iota(\mathbf{S})).$$

Et la discussion précédente montre que cet isomorphisme préserve les groupes de Weyl affines. De plus le lemme 2.4.2.1 nous indique que l'isomorphisme $W(\mathbf{S}^*, C_{\overline{\mathbf{G}}^*_\sigma}(t)^\circ) \simeq W_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\mathbf{S}')$ est F-équivariant et donc l'isomorphisme $\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta) \simeq \tilde{W}_{\mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}}(\iota(\mathbf{S}))$ l'est aussi. □

Les résultats de l'annexe C nous montrent que l'on a des bijections $H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \simeq H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)$ et $H^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \simeq H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta))$. Notons $X = X_*(\mathbf{S})$ et $\bar{X}(\mathbf{S},\theta) := X/X^a(\mathbf{S},\theta)$ où $X^a(\mathbf{S},\theta) := X \cap W^a(\mathbf{S},\theta)$. Alors on a la commutativité du diagramme (voir l'annexe C pour la définition des flèches verticales)

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Irr}[\pi_0(Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\sigma(\widehat{\vartheta})})] & \longrightarrow & \mathrm{Irr}[\pi_0(Z(\widehat{\mathbf{G}})^{\widehat{\vartheta}})] \\
\downarrow\sim & & \downarrow\sim \\
[\bar{X}(\mathbf{S},\theta)/(1-\vartheta)\bar{X}(\mathbf{S},\theta)]_{\mathrm{tor}} & \longrightarrow & [\bar{X}/(1-\vartheta)\bar{X}]_{\mathrm{tor}} \\
\downarrow\sim & & \downarrow\sim \\
H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta)) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)
\end{array}.$$

(notons que les flèches verticales de gauche utilisent les identifications du lemme 2.4.3.1).

On vient de montrer la commutativité de

$$\begin{array}{ccc}
H^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \\
\downarrow\sim & & \downarrow\sim \\
H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta)/W^a(\mathbf{S},\theta)) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)
\end{array}.$$

En remarquant de plus que $\tilde{W}(\mathbf{S},\theta)/\tilde{W}^\circ(\mathbf{S},\theta) \simeq W(\mathbf{S},\theta)/W^\circ(\mathbf{S},\theta) \simeq \pi_0(C_{\mathbf{G}^*}(t))$, et que les flèches verticales de gauches des précédents diagrammes sont compatibles avec l'action de $\pi_0(\phi)^{\sigma(\widehat{\vartheta})}$ on obtient

2.4.3.2 Proposition. *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) & \xrightarrow{h_{\phi,\sigma}} & H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \\
\downarrow\sim & & \downarrow\sim \\
\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\boldsymbol{S},\theta)/W^a(\boldsymbol{S},\theta)) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)
\end{array}$$

Les propositions 2.4.3.2 et 2.4.1.4 démontrent la proposition suivante

2.4.3.3 Proposition. *Nous avons une bijection*

$$\mathcal{C}^r(\phi,\sigma)/\sim_e \xrightarrow{\sim} \ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \to H^1(\mathsf{F}, G^{nr})],$$

où $\mathcal{C}^r(\phi,\sigma)$ est la classe de $\sim_r$-équivalence image réciproque de (ϕ,σ) par l'injection $\mathscr{P}_\Lambda/\sim_r \hookrightarrow \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$.

On déduit de la proposition 2.4.3.3 et du théorème 2.2.5.12 le théorème suivant

2.4.3.4 Théorème. *Soient $\boldsymbol{G}$ un groupe réductif connexe non-ramifié.*

Soient $\phi : I_F^\Lambda \to {}^L\boldsymbol{G}$ un paramètre inertiel et $\sigma \in \overline{\Sigma}(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi))$. Nous avons la décomposition suivante de la catégorie $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma)}(G)$

$$\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma)}(G) = \prod_\alpha \mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi,\sigma,\alpha)}(G)$$

où le produit est pris sur les $\alpha \in \ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \to H^1(\mathsf{F}, G^{nr})]$. Toutes ces catégories sont construites à partir de systèmes de classes de conjugaison 0-cohérents minimaux.

2.4.3.5 Remarque. La bijection $\mathcal{C}^r(\phi,\sigma)/\sim_e \xrightarrow{\sim} \ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \to H^1(\mathsf{F}, G^{nr})]$ (de la proposition 2.4.3.3) semble canonique, mais ne l'est pas (par conséquent la décomposition du théorème 2.4.3.4 ne l'est pas non plus). Elle dépend du choix du sommet hyperspécial o qui permet de sélectionner un représentant $(\mathbf{S}, \theta)$ de $\mathcal{C}^r(\phi,\sigma)$.

De plus, il n'est pas possible de la rendre canonique. En effet, prenons l'exemple de SL_2 et de la classe de conjugaison rationnelle $\left[\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ dans $\mathrm{PGL}_2(k)$. Cette dernière, plus le choix d'un sommet hyperspécial donne un système de classes de conjugaison cohérent minimal (en mettant des systèmes de conjugaison vide sur les sommets non-conjugués à ce sommet). Comme il y a deux ensembles de sommets hyperspéciaux, non-conjugués entre eux, on obtient deux systèmes minimaux, et il est impossible de les différencier.

Nous nous attendons également à une compatibilité du théorème 2.4.3.4 à la correspondance de Langlands locale enrichie (à un paramètre de Langlands enrichi (φ, η) où $\eta \in \mathrm{Irr}(\pi_0(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)))$, on associe un α en restreignant η à $\pi_0(Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\sigma(\widehat{\vartheta})})$). Cette dernière n'est pas non plus canonique mais dépend du choix d'une donnée de Whittaker.

2.4.4 Décomposition pour une forme intérieure pure

En suivant les idées de Vogan, supposons toujours que $\mathbf{G}$ est non-ramifié et nous allons traiter toutes ses formes intérieures pures.

Soit $u \in Z^1(\mathsf{F}, G^{nr})$. Ce dernier permet de définir un Frobenius twisté $\mathsf{F}_u := \mathrm{Ad}(u) \circ \mathsf{F}$ donnant lieu à une forme intérieure pure $(G^{nr})^{\mathsf{F}_u}$ de G. Pour $g \in G^{nr}$, la conjugaison par g induit un isomorphisme

$$\mathrm{Ad}(g) : (G^{nr})^{\mathsf{F}_u} \longrightarrow (G^{nr})^{\mathsf{F}_{g*u}}$$

où $g * u = gu\mathsf{F}(g)^{-1}$. Ainsi les formes intérieures pures sont paramétrées par les $\omega \in H^1(\mathsf{F}, G^{nr})$, mais à un ω fixé nous n'avons pas de Frobenius twisté canonique associé. Pour remédier à cela nous allons considérer dans cette partie non pas des paires $(\mathbf{S}, \theta)$ mais des triplets $(\mathbf{S}, \theta, u)$ avec $u \in Z^1(\mathsf{F}, G^{nr})$.

Considérons les triplets $(\mathbf{S}, \theta, n)$ où $n \in N(\mathbf{S})$ donne un cocyle dans $Z^1(\mathsf{F}, G^{nr})$, $\mathbf{S}$ est un F^{nr}-tore déployé maximal F_n-stable de $\mathbf{G}$ (on rappelle que $\mathsf{F}_n = \mathrm{Ad}(n) \circ \mathsf{F}$) et $\theta \in X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{n,\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S})$, avec $\mathsf{F}_{n,\mathbf{S}} := w\vartheta_{\mathbf{S}} \circ \psi$, où w est l'image de n dans $W(\mathbf{S})$. Alors dans ce cas, la paire $(\mathbf{S}, \theta)$ est un élément de $\mathscr{P}_\Lambda$ comme dans la section 2.2, mais pour le groupe $(G^{nr})^{\mathsf{F}_n}$. Notons cet ensemble $\mathscr{P}_\Lambda((G^{nr})^{\mathsf{F}_n})$.

Deux triplets $(\mathbf{S}_1, \theta_1, n_1)$ et $(\mathbf{S}_2, \theta_2, n_2)$ sont dit G^{nr}-conjugués s'il existe $g \in G^{nr}$ tel que ${}^g\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}_2$, $g\theta_1 = \theta_2$ et $g{*}n_1 = n_2$. Prenons $(\mathbf{S}, \theta, n)$ un triplet. La paire $(\mathbf{S}, \theta)$ appartient alors à $\mathscr{P}_\Lambda((G^{nr})^{\mathsf{F}_n})$. Nommons ω l'image de n par $Z^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \to H^1(\mathsf{F}, G^{nr})$. Si $m \in Z^1(\mathsf{F}, G^{nr})$ est un autre cocycle d'image ω, alors il existe $g \in G^{nr}$ tel que $g * n = m$. Alors la paire $({}^g\mathbf{S}, g\theta)$ appartient à $\mathscr{P}_\Lambda((G^{nr})^{\mathsf{F}_m})$. Si $g' \in G^{nr}$ est un autre élément tel que $g' * n = m$,

alors $g(g')^{-1} = \mathsf{F}_m(g(g')^{-1})$, de sorte que $(\mathbf{S}, \theta, n)$ définit une paire $(\mathbf{S}_\omega, \theta_\omega) \in \mathscr{P}_\Lambda(G_\omega)$ bien définie à G_ω-conjugaison près, où $\mathbf{G}_\omega$ est une forme intérieure pure de $\mathbf{G}$ associée à ω. Cette application induit une bijection

$$\{(\mathbf{S}, \theta, n)\}/\sim_{G^{nr}} \xrightarrow{\sim} \{(\omega, (\mathbf{S}_\omega, \theta_\omega)), \omega \in H^1(\mathsf{F}, G^{nr}), (\mathbf{S}_\omega, \theta_\omega) \in \mathscr{P}_\Lambda(G_\omega)/\sim_{G_\omega}\}.$$

On peut étendre, de la même façon, la relation d'équivalence $\sim_e$ aux triplets de la manière suivante

2.4.4.1 Définition. Deux triplets $(\mathbf{S}_1, \theta_1, n_1)$ et $(\mathbf{S}_2, \theta_2, n_2)$ sont dit $\sim_r$-équivalents (resp. $\sim_e$-équivalents) si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $g \in G^{nr}$ et $h \in G^{nr}$ tels que

1. $g * n_2 = n_1$
2. ${}^h\mathbf{S}_1^{\mathsf{F}_{n_1}^m} = {}^g\mathbf{S}_2^{\mathsf{F}_{n_2}^m}$
3. $h\theta_1\langle m\rangle = g\theta_2\langle m\rangle$
4. $h^{-1}\mathsf{F}_{n_1}(h) \in N^\circ(\mathbf{S}_1, \theta_1)$ (resp. $h^{-1}\mathsf{F}_{n_1}(h) \in N^a(\mathbf{S}_1, \theta_1)$)

Notons que dans la définition précédente, $\theta_1\langle m\rangle$ est relatif à F_{n_1} et $\theta_2\langle m\rangle$ à F_{n_2}.

Soient $(\mathbf{S}_1, \theta_1, n_1)$ et $(\mathbf{S}_2, \theta_2, n_2)$ deux triplets et notons respectivement $(\mathbf{S}_{1,\omega_1}, \theta_{1,\omega_1}) \in \mathscr{P}_\Lambda(G_{\omega_1})/\sim_{G_{\omega_1}}$ et $(\mathbf{S}_{2,\omega_2}, \theta_{2,\omega_2}) \in \mathscr{P}_\Lambda(G_{\omega_2})/\sim_{G_{\omega_2}}$ les paires associées par l'application précédente. Alors $(\mathbf{S}_1, \theta_1, n_1) \sim_r (\mathbf{S}_2, \theta_2, n_2)$ si et seulement si $\omega_1 = \omega_2$ et $(\mathbf{S}_{1,\omega_1}, \theta_{1,\omega_1}) \sim_r (\mathbf{S}_{2,\omega_2}, \theta_{2,\omega_2})$ (et de même pour $\sim_e$). En effet, fixons par exemple n_1 et prenons $G_{\omega_1} = (G^{nr})^{\mathsf{F}_{n_1}}$. Alors $\omega_1 = \omega_2$ si et seulement s'il existe $g \in G^{nr}$ tel que $g * n_2 = n_1$. Dans ce cas on peut prendre $(\mathbf{S}_{2,\omega_2}, \theta_{2,\omega_2}) = ({}^g\mathbf{S}_2, g\theta_2)$ et $(\mathbf{S}_{1,\omega_1}, \theta_{1,\omega_1}) = (\mathbf{S}_1, \theta_1)$ et la condition pour que ces deux paires soient $\sim_r$-équivalentes (resp. $\sim_e$-équivalentes) est exactement la définition 2.4.4.1. On obtient donc en particulier une bijection

$$\{(\mathbf{S}, \theta, n)\}/\sim_e \xrightarrow{\sim} \{(\omega, (\mathbf{S}_\omega, \theta_\omega)), \omega \in H^1(\mathsf{F}, G^{nr}), (\mathbf{S}_\omega, \theta_\omega) \in \mathscr{P}_\Lambda(G_\omega)/\sim_e\}.$$

Une classe de $\sim_e$-équivalence de triplets $(\mathbf{S}, \theta, n)$ correspond donc à un système d'idempotents cohérent minimal de G_ω.

Considérons un triplet $(\mathbf{S}, \theta, e)$ (e désigne l'élément neutre de G^{nr}) et $n \in N^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ donnant un cocyle dans $Z^1(\mathsf{F}, G^{nr})$. Le tore $\mathbf{S}$ est F-stable et comme $n \in N(\mathbf{S})$ il est également F_n-stable. La preuve du lemme 2.2.5.8 montre qu'il existe $\theta_n \in X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{n,\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S})$ tel que $\theta\langle m\rangle = \theta_n\langle m\rangle$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$. Notons que ce θ_n est unique. En effet, s'il existe $\theta'_n \in X^*(\mathbf{S})/(\mathsf{F}_{n,\mathbf{S}} - 1)X^*(\mathbf{S})$ tel que $\theta\langle m'\rangle = \theta'_n\langle m'\rangle$, alors $\theta_n\langle mm'\rangle = \theta'_n\langle mm'\rangle$ et $\theta_n = \theta'_n$ par injectivité de $\mathrm{Tr}_{\mathsf{F}^{mm'}/\mathsf{F}}$ (lemme 2.2.4.1). On vient donc de construire une application qui à $(\mathbf{S}, \theta, e)$ associe le triplet $(\mathbf{S}, \theta_n, n)$.

Comme $\theta\langle m\rangle = \theta_n\langle m\rangle$, on a en particulier que $\tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta) = \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta_n)$ et $W^a(\mathbf{S}, \theta) = W^a(\mathbf{S}, \theta_n)$. On obtient de la sorte

2.4.4.2 Corollaire. *La multiplication par n^{-1} (à droite) nous donne le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\boldsymbol{S}, \theta)/W^a(\boldsymbol{S}, \theta)) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a) \\
\downarrow{\scriptstyle \times n^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle \times n^{-1}} \\
\tilde{H}^1(\mathsf{F}_n, \tilde{W}^\circ(\boldsymbol{S}, \theta_n)/W^a(\boldsymbol{S}, \theta_n)) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}_n, \tilde{W}/W^a)
\end{array} .$$

Revenons à nos classes d'équivalence pour $\sim_e$. Rappelons que $h_{\phi,\sigma}$ est l'application $h_{\phi,\sigma} : \tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \longrightarrow H^1(\mathsf{F}, G^{nr})$.

2.4.4.3 Proposition. *Soient $\omega \in H^1(F, \boldsymbol{G})$. Nous avons alors une bijection*

$$\mathcal{C}^r(\phi, \sigma, G_\omega)/\sim_e \xrightarrow{\sim} h^{-1}_{\phi,\sigma}(\omega),$$

où $\mathcal{C}^r(\phi, \sigma, G_\omega)$ est la classe de $\sim_r$-équivalence image réciproque de (ϕ, σ) par l'injection $\mathscr{P}_\Lambda(G_\omega)/\sim_r \hookrightarrow \widetilde{\Phi}_m(I_F^\Lambda, {}^L\boldsymbol{G})$.

De plus, cette bijection ne dépend que du choix du sommet hyperspécial o fait en 2.4.3.

Démonstration. Considérons $(\mathbf{S}, \theta)$ une paire construite à partir de (ϕ, σ) et o comme dans la section 2.4.3. La proposition 2.4.3.2 montre que l'on peut identifier $h_{\phi,\sigma}$ à l'application $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)/W^a(\mathbf{S}, \theta)) \to H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)$. On voit donc ω comme un élément de $H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)$ dans l'image de $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)/W^a(\mathbf{S}, \theta))$. Le lemme 2.4.1.2 ainsi que la preuve de la proposition 2.4.1.4 montrent que l'application $H^1(\mathsf{F}, N^\circ(\mathbf{S}, \theta)) \to H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)/W^a(\mathbf{S}, \theta))$ est surjective. En particulier, il existe $n \in N^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ donnant un cocycle de $Z^1(\mathsf{F}, N^\circ(\mathbf{S}, \theta))$ et ayant pour image ω par l'application $Z^1(\mathsf{F}, N^\circ(\mathbf{S}, \theta)) \to \tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)/W^a(\mathbf{S}, \theta)) \to H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)$.

Nous savons alors construire un triplet $(\mathbf{S}, \theta_n, n)$ tel que $\mathcal{C}^r(\phi, \sigma, G_\omega) = [\mathbf{S}, \theta_n, n]_r$ (où $[\mathbf{S}, \theta_n, n]_r$ désigne la classe de $\sim_r$-équivalence de $(\mathbf{S}, \theta_n, n)$). La proposition 2.4.1.4 nous donne une bijection entre $[\mathbf{S}, \theta_n, n]_r/\sim_e$ et $\ker[\tilde{H}^1(\mathsf{F}_n, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta_n)/W^a(\mathbf{S}, \theta_n)) \to H^1(\mathsf{F}_n, \tilde{W}/W^a)]$ et donc par le corollaire 2.4.4.2 une bijection

$$[\mathbf{S}, \theta_n, n]_r/\sim_e \xrightarrow{\sim} h^{-1}_{\phi,\sigma}(\omega).$$

Il nous reste à vérifier que cette bijection est indépendante du choix de n. Prenons $m \in Z^1(\mathsf{F}, N^\circ(\mathbf{S}, \theta))$ un autre relèvement de ω. Nous allons montrer que l'image de $(\mathbf{S}, \theta_m, m)$ par la bijection précédente est l'image de m dans $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)/W^a(\mathbf{S}, \theta))$ ce qui achèvera la preuve. Comme les triplets $(\mathbf{S}, \theta_n, n)$ et $(\mathbf{S}, \theta_m, m)$ sont $\sim_r$-équivalents, il existe $k \in \mathbb{N}^*$, $g \in G^{nr}$ et $h \in G^{nr}$ tels que $g * m = n$, ${}^h(\mathbf{S}^{\mathsf{F}^k_n}) = {}^g\mathbf{S}^{\mathsf{F}^k_m}$, $h\theta_n\langle k\rangle = g\theta_m\langle k\rangle$ et $h^{-1}\mathsf{F}_n(h) \in N^\circ(\mathbf{S}, \theta_n)$. Alors par construction de la bijection $[\mathbf{S}, \theta_n, n]_r/\sim_e \xrightarrow{\sim} h^{-1}_{\phi,\sigma}(\omega)$, l'image de $(\mathbf{S}, \theta_m, m)$ est l'image de $h^{-1}n\mathsf{F}(h)$ dans $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)/W^a(\mathbf{S}, \theta))$. Nous savons qu'il existe $k_n, k_m \in \mathbb{N}^*$ tels que $\theta_n\langle k_n\rangle = \theta\langle k_n\rangle$ et $\theta_m\langle k_m\rangle = \theta\langle k_m\rangle$. Ainsi, il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathsf{F}^{k'}_n = \mathsf{F}^{k'}_m = \mathsf{F}^{k'}$, ${}^h(\mathbf{S}^{\mathsf{F}^{k'}}) = {}^g\mathbf{S}^{\mathsf{F}^{k'}}$ et $h\theta\langle k'\rangle = g\theta\langle k'\rangle$, de sorte que $g^{-1}h \in N(\mathbf{S}, \theta)$. Nous pouvons alors conclure que $h^{-1}n\mathsf{F}(h) = (h^{-1}g)m\mathsf{F}(g^{-1}h)$ et m ont même image dans $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)/W^a(\mathbf{S}, \theta))$. □

On déduit de la proposition 2.4.4.3 précédente et du théorème 2.2.5.12 le théorème suivant.

2.4.4.4 Théorème. *Soient $\boldsymbol{G}$ un groupe réductif connexe non-ramifié et $\omega \in H^1(F, \boldsymbol{G})$. À ω correspond $\boldsymbol{G}_\omega$, une forme intérieure pure de $\boldsymbol{G}$.*

Soient $\phi : I_F^\Lambda \to {}^L\boldsymbol{G}$ un paramètre inertiel et $\sigma \in \overline{\Sigma}(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi))$. Nous avons la décomposition suivante de la catégorie $\mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma)}_\Lambda(G_\omega)$

$$\mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma)}_\Lambda(G_\omega) = \prod_{\alpha \in h^{-1}_{\phi,\sigma}(\omega)} \mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma,\alpha)}_\Lambda(G_\omega).$$

On peut également réinterpréter ce résultat grâce à la section 2.4.2, en une décomposition de $\mathrm{Rep}_\Lambda^\phi(G_\omega)$ *en un produit de sous-catégories indexées par* $\psi_\phi^{-1}(\omega)$*, où* ψ_ϕ *est l'application* $\psi_\phi : \overline{\Sigma}(\phi) \to H^1(F, \boldsymbol{G})$.

De plus toutes ces catégories sont construites à partir de systèmes de classes de conjugaison 0-cohérents minimaux.

Notons que cette décomposition n'est pas canonique mais dépend du choix d'un sommet hyperspécial (voir remarque 2.4.3.5).

2.4.5 Lien entre $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$ et $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$

Explicitons le lien entre les catégories sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ et sur $\overline{\mathbb{Z}}_\ell$.

Soit $(\phi, \sigma) \in \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\mathbf{G})$ et $(\phi', \sigma') \in \widetilde{\Phi}_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\mathbf{G})$ l'image de (ϕ, σ) par l'application $\widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\mathbf{G}) \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\mathbf{G})$ de la section 2.3.5. Alors $Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi')^\circ)^{\sigma'(\widehat{\vartheta})} \subseteq Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\sigma(\widehat{\vartheta})}$ et l'on obtient une application

$$\mathrm{Irr}[\pi_0(Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\sigma(\widehat{\vartheta})})] \to \mathrm{Irr}[\pi_0(Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi')^\circ)^{\sigma'(\widehat{\vartheta})})]$$

induisant une application naturelle $\tilde{H}^1(F, \mathbf{G}^\circ_{\phi,\sigma}) \to \tilde{H}^1(F, \mathbf{G}^\circ_{\phi',\sigma'})$.

Il est alors aisé d'obtenir la proposition suivante.

2.4.5.1 Proposition. *Soit* $\omega \in H^1(F, \boldsymbol{G})$*. Nous avons* $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^{(\phi',\sigma',\alpha')}(G_\omega) \cap \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G_\omega) = \prod_{(\phi,\sigma,\alpha)} \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{(\phi,\sigma,\alpha)}(G_\omega)$*, où le produit est pris sur les* $(\phi, \sigma) \in \widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G})$ *s'envoyant sur* (ϕ', σ') *par* $\widetilde{\Phi}_m(I_F, {}^L\boldsymbol{G}) \to \widetilde{\Phi}_m(I_F^{(\ell)}, {}^L\boldsymbol{G})$ *et* $\alpha \in h_{\phi,\sigma}^{-1}(\omega)$ *s'envoyant sur* α' *par* $\tilde{H}^1(F, \boldsymbol{G}^\circ_{\phi,\sigma}) \to \tilde{H}^1(F, \boldsymbol{G}^\circ_{\phi',\sigma'})$.

2.4.6 Compatibilité à l'induction et à la restriction parabolique

Vérifions ici la compatibilité de la décomposition du théorème 2.4.4.4 aux foncteurs d'induction et de restriction parabolique.

Soit $\mathbf{P}$ un F-sous-groupe parabolique de $\mathbf{G}$ de quotient de Levi $\mathbf{M}$ défini sur F. Considérons $\widehat{\mathbf{M}}$ un dual de $\mathbf{M}$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ muni d'un plongement $\iota : {}^L\mathbf{M} \hookrightarrow {}^L\mathbf{G}$. Soient $\phi_M \in \Phi_m(I_k^\Lambda, {}^L\mathbf{M})$ et $\sigma_M \in \Sigma(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi_M))$. Nous avons vu à la section 2.3.6 que nous pouvions associer à ϕ_M et σ_M le paramètre $\phi := \iota \circ \phi_M \in \Phi_m(I_F^\Lambda, {}^L\mathbf{G})$ et $\sigma := \iota \circ \sigma_M \in \Sigma(\langle\widehat{\vartheta}\rangle, \widetilde{\pi}_0(\phi))$.

Nous avons que $\iota(Z(C_{\widehat{\mathbf{M}}}(\phi_M)^\circ) \supseteq Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)$ donc ι induit une application

$$\mathrm{Irr}[\pi_0(Z(C_{\widehat{\mathbf{M}}}(\phi_M)^\circ)^{\sigma_M(\widehat{\vartheta})})] \to \mathrm{Irr}[\pi_0(Z(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi)^\circ)^{\sigma(\widehat{\vartheta})})].$$

L'isomorphisme de Kottwitz nous définit alors une application

$$\tilde{H}^1(\mathsf{F}, M^{\circ,nr}_{\phi_M,\sigma_M}) \longrightarrow \tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma})$$

qui rend le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}^1(\mathsf{F}, M^{\circ,nr}_{\phi_M,\sigma_M}) & \longrightarrow & \tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(\mathsf{F}, M^{nr}) & \longrightarrow & H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \end{array}.$$

Soit $\omega_M \in H^1(\mathsf{F}, M^{nr})$ et $\omega \in H^1(\mathsf{F}, G^{nr})$ son image par $H^1(\mathsf{F}, M^{nr}) \to H^1(\mathsf{F}, G^{nr})$. Ainsi $\alpha_M \in \psi^{-1}_{(\phi_M,\sigma_M)}(\omega_M)$ est envoyé sur $\alpha \in h^{-1}_{\phi,\sigma}(\omega)$. On notera par la suite ι^G_M, comme dans la section 2.3.6 l'application qui à $(\phi_M, \sigma_M, \alpha_M)$ associe (ϕ, σ, α). Notons que comme ω est l'image de ω_M, alors M_{ω_M} est un Levi de G_ω et l'on a un plongement de $\mathrm{BT}^e(M_{\omega_M})$ dans $\mathrm{BT}^e(G_\omega)$.

Réinterprétons l'application $\alpha_M \to \alpha$ en terme de groupes de Weyl. Nommons $t \in \mathsf{M}^*_{ss,\Lambda}$ la classe de conjugaison semi-simple associée à (ϕ_M, σ_M). Fixons o un sommet hyperspécial de $\mathrm{BT}^e(M)$ donnant un sommet hyperspécial de $\mathrm{BT}^e(G)$ (que l'on nomme encore o). La section 2.4.3 construit alors à partir de (ϕ_M, σ_M) une paire $(\mathbf{S}, \theta)$ où $\mathbf{S}$ est un tore maximal non-ramifié de $\mathbf{M}$. Ce dernier permet de définir les groupes $\tilde{W}^\circ_M(\mathbf{S}, \theta)$,$W^a_M(\mathbf{S}, \theta)$, $\tilde{W}_M$, W^a_M (on rajoute des indices M pour signifier que ces groupes sont définis vis à vis de M). Le tore $\mathbf{S}$ peut également être vu comme un tore maximal non-ramifié de $\mathbf{G}$ et donc définit également les groupes $\tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)$,$W^a(\mathbf{S}, \theta)$, $\tilde{W}$, W^a. Les inclusions $\tilde{W}^\circ_M(\mathbf{S}, \theta) \subseteq \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ et $W^a_M(\mathbf{S}, \theta) \subseteq W^a(\mathbf{S}, \theta)$ permettent de définir une application

$$\tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ_M(\mathbf{S}, \theta)/W^a_M(\mathbf{S}, \theta)) \longrightarrow \tilde{H}^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)/W^a(\mathbf{S}, \theta)).$$

Cette application correspond à $\tilde{H}^1(\mathsf{F}, M^{\circ,nr}_{\phi_M,\sigma_M}) \longrightarrow \tilde{H}^1(\mathsf{F}, G^{\circ,nr}_{\phi,\sigma})$ via la proposition 2.4.3.2.

2.4.6.1 Lemme. *Notons N une forme intérieure pure de M associée à ω_M. Soient x un sommet dans l'immeuble de Bruhat-Tits étendu de N et $s \in (\overline{\mathsf{N}}^*_x)_{ss,\Lambda}$. Nommons $(\phi_M, \sigma_M, \alpha_M)$ les données associées à s. Notons également (ϕ, σ, α) les données associées à s vu comme un élément de $(\overline{\mathsf{G}}^*_x)_{ss,\Lambda}$ (où x est vu ici comme un élément de $\mathrm{BT}^e(G_\omega)$). Alors $(\phi, \sigma, \alpha) = \iota^G_M(\phi_M, \sigma_M, \alpha_M)$.*

Démonstration. Cela découle aisément de la définition de l'application ι^G_M, puisque à s on associe une paire $(\mathbf{S}', \theta')$, avec $\mathbf{S}'$ un tore maximal non-ramifié de N, et lorsque s est vu comme un élément de $(\overline{\mathsf{G}}^*_x)_{ss,\Lambda}$, on peut lui associer la même pair $(\mathbf{S}', \theta')$ mais en voyant cette fois-ci $\mathbf{S}'$ comme un tore maximal non-ramifié de G_ω. □

2.4.6.2 Théorème. *Soit $\boldsymbol{P}$ un sous-groupe parabolique de $\boldsymbol{G}$ ayant pour facteur de Levi $\boldsymbol{M}$.*

1.
$$r^G_P(\mathrm{Rep}^{(\phi,\sigma,\alpha)}_\Lambda(G_\omega)) \subseteq \prod_{\substack{(\phi_M,\sigma_M,\alpha_M) \\ \iota^G_M(\phi_M,\sigma_M,\alpha_M)=(\phi,\sigma,\alpha)}} \mathrm{Rep}^{(\phi_M,\sigma_M,\alpha_M)}_\Lambda(M_{\omega_M})$$

2.
$$i^G_P(\mathrm{Rep}^{(\phi_M,\sigma_M,\alpha_M)}_\Lambda(M_{\omega_M})) \subseteq \mathrm{Rep}^{\iota^G_M(\phi_M,\sigma_M,\alpha_M)}_\Lambda(G_\omega)$$

Démonstration. Cela découle du lemme 2.4.6.1 et des propositions 2.1.3.2, 2.1.3.1. □

2.4.6.3 Théorème. *Si $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi) \subseteq \iota(\widehat{\boldsymbol{M}})$ le foncteur d'induction parabolique i_P^G réalise une équivalence de catégories entre $\mathrm{Rep}_\Lambda^{(\phi_M,\sigma_M,\alpha_M)}(M_{\omega_M})$ et $\mathrm{Rep}_\Lambda^{\iota_M^G(\phi_M,\sigma_M,\alpha_M)}(G_\omega)$.*

Démonstration. Cela découle du théorème 2.4.6.2 et du théorème 1.4.4.6. □

2.4.7 Compatibilité à la construction de DeBacker-Reeder

Soit φ un paramètre de Langlands modéré elliptique et en position général comme dans [DR09] (elliptique signifie que l'image de φ n'est pas contenue dans un sous-groupe de Levi propre de ${}^L\mathbf{G}$ et en position générale que le centralisateur de $\varphi(I_F)$ dans $\widehat{\mathbf{G}}$ est un tore). Soit $\omega \in H^1(F, \mathbf{G})$. L'isomorhisme de Kottwitz permet de définir, comme dans la section 2.4.2, une application $\mathrm{Irr}(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi)) \to H^1(F, \mathbf{G})$ et l'on note $\mathrm{Irr}(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi), \omega)$ la fibre sur ω de cette application. DeBacker et Reeder construisent alors dans [DR09] un L-paquet $\Pi(\varphi, \omega)$ pour G_ω, paramétré par $\mathrm{Irr}(C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\varphi), \omega)$. Nous souhaitons vérifier dans cette partie, que cette construction est compatible à la décomposition du théorème 2.4.4.4.

Fixons o un sommet hyperspécial que l'on choisira identique pour la construction de DeBacker-Reeder et la notre, ainsi que $\mathbf{T}$ un tore maximalement déployé de G.

Rappelons brièvement la construction de DeBacker et Reeder. Quitte à conjuguer φ, on peut supposer que $\varphi(I_F) \subseteq \widehat{\mathbf{T}}$ et que $\varphi(\mathrm{Frob}) = f\widehat{\vartheta}$, avec $f \in N(\widehat{\mathbf{T}})$. Notons w, l'image de f dans W. On peut former à partir de ce φ ([DR09] section 4.3) un caractère χ de niveau zéro de $\mathbf{T}^{\mathsf{F}}$. Soit $\lambda \in X_w$, où X_w est la préimage dans X de $[X/(1-w\vartheta)X]_{\mathrm{tor}}$. L'évaluation sur une uniformisante ϖ, identifie λ à $t_\lambda \in \tilde{W}$, l'opérateur de translation par λ. DeBacker et Reeder construisent alors, dans la section 2.7, $\dot{w} \in N$, $\dot{w}_\lambda \in N$ et $u_\lambda \in Z^1(\mathsf{F}, N)$ tels que $\dot{w}$ relève w, $\dot{w}_\lambda = p_\lambda^{-1}\mathsf{F}_\lambda(p_\lambda)$ et $t_\lambda \dot{w} = \dot{w}_\lambda u_\lambda$, où $\mathsf{F}_\lambda = \mathrm{Ad}(u_\lambda) \circ \mathsf{F}$. On pose $\mathbf{T}_\lambda = {}^{p_\lambda}\mathbf{T}$ et $\chi_\lambda = p_\lambda \chi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{T}_\lambda^{\mathsf{F}_\lambda})$. Grâce à la théorie de Deligne-Lusztig, ils forment à partir de $(\mathbf{T}_\lambda, \chi_\lambda)$ une représentation π_λ de $(G^{nr})^{\mathsf{F}_\lambda}$.

2.4.7.1 Théorème. *La construction de DeBacker-Reeder ([DR09]) est compatible au théorème 2.4.4.4. C'est-à-dire que π_λ appartient à $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}^{(\phi,\sigma,\alpha)}(G_\omega)$ où $\phi = \varphi_{|I_F}$, $\sigma(\widehat{\vartheta}) = \varphi(Frob)$ et α correspond à λ via la bijection $[X/(1-w\vartheta)X]_{tor} \xrightarrow{\sim} H^1(\mathsf{F}_w, T^{nr})$ (voir lemme C.4).*

Démonstration. Dans ce chapitre, à partir de φ nous construisons non pas $(\mathbf{T}, \chi)$ mais une paire $(\mathbf{S}, \theta)$, où $\theta \in \mathrm{Irr}({}^0(\mathbf{S}^{\mathsf{F}})/(\mathbf{S}^{\mathsf{F}})^+)$. Le lien entre les deux est le suivant. Écrivons, comme dans [DR09] section 2.6, $\dot{w} = p_0^{-1}\mathsf{F}(p_0)$, avec $p_0 \in G_o^\circ$. Alors $\mathbf{S} = {}^{p_0}\mathbf{T}$. Comme $p_0\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbf{S}^{\mathsf{F}})$ est de niveau zéro, on le voit comme un caractère de $\mathbf{S}^{\mathsf{F}}/(\mathbf{S}^{\mathsf{F}})^+$, et on a $\theta = (p_0\chi)_{|{}^0(\mathbf{S}^{\mathsf{F}})}$.

Notons qu'avec les hypothèses faites sur φ, on a que $C_{\widehat{\mathbf{G}}}(\phi) = \widehat{\mathbf{T}}$, de sorte que $G_{\phi,\sigma}^\circ = \mathbf{S}^{\mathsf{F}}$. En particulier $\tilde{W}(\mathbf{S}, \theta) = \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta) = X_*(\mathbf{S})$, $W^a(\mathbf{S}, \theta) = 1$ et $N^\circ(\mathbf{S}, \theta) = \mathbf{S}$. L'élément $p_0\lambda p_0^{-1}$ nous donne bien un élément de $H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}^\circ(\mathbf{S}, \theta)/W^a(\mathbf{S}, \theta))$, et on peut appliquer le théorème 2.4.4.4 pour obtenir un système cohérent. Posons $n := p_0 t_\lambda p_0^{-1} \in N^\circ(\mathbf{S}, \theta)$ qui relève $p_0\lambda p_0^{-1}$. La preuve du théorème 2.4.4.4 construit alors le triplet $(\mathbf{S}, \theta_n, n)$. Mais comme $n \in \mathbf{S}$, $\mathsf{F} = \mathsf{F}_n$ sur $\mathbf{S}$ et donc $\theta_n = \theta$. On obtient un triplet $(\mathbf{S}, \theta, n)$ qui donne un

système cohérent. Posons $g := p_\lambda p_0^{-1}$. Alors

$$\begin{aligned} g * n &= gn\mathsf{F}(g)^{-1} = (p_\lambda p_0^{-1})(p_0 t_\lambda p_0^{-1})(\mathsf{F}(p_0 p_\lambda^{-1})) \\ &= p_\lambda t_\lambda \dot{w}\mathsf{F}(p_\lambda)^{-1} = p_\lambda \dot{w}_\lambda u_\lambda \mathsf{F}(p_\lambda)^{-1} \\ &= p_\lambda p_\lambda^{-1}\mathsf{F}_\lambda(p_\lambda)u_\lambda\mathsf{F}(p_\lambda)^{-1} = p_\lambda p_\lambda^{-1}u_\lambda\mathsf{F}(p_\lambda)u_\lambda^{-1}u_\lambda\mathsf{F}(p_\lambda)^{-1} \\ &= u_\lambda \end{aligned}$$

La définition 2.4.4.1 montre (avec $h = 1$) que $(\mathbf{S}, \theta, n) \sim_e ({}^g\mathbf{S}, g\theta, u)$. Or ${}^g\mathbf{S} = {}^{p_\lambda p_0^{-1}}\mathbf{S} = {}^{p_\lambda}\mathbf{T} = \mathbf{T}_\lambda$ et de même $g\theta = (\chi_\lambda)_{|^0(\mathbf{T}_\lambda^{\mathsf{F}_\lambda})}$. Les deux constructions sont donc compatibles. $\square$

Chapitre 3

Systèmes de coefficients

Introduction

Le but de ce chapitre est de généraliser les résultats obtenus dans [Wan17] section 2, à un groupe réductif quelconque.

Dans tout ce chapitre G désigne un groupe p-adique quelconque, nous n'imposons pas qu'il se déploie sur une extension non-ramifiée de F. Soit R un anneau commutatif dans lequel p est inversible. Soit e un système d'idempotents vérifiant que pour tout sommet x et tout polysimplexe σ contenant x on a $e_\sigma \in \mathcal{H}_R(G_x)$. On note $\mathrm{Coef}_e(G, R)$ la catégorie des e-systèmes de coefficients, c'est-à-dire des foncteurs contravariants de la catégorie $(\mathrm{BT}, \leq)$ vers la catégorie des R-modules, G-équivariants tels que pour $x \leq \sigma$ le morphisme de restriction induit un isomorphisme $V_\sigma \xrightarrow{\sim} e_\sigma(V_x)$.

Nous montrons alors le théorème suivant (voir théorème 3.4.0.4).

Théorème. *Nous avons une équivalence de catégorie*

$$\mathrm{Rep}_R^e(G) \simeq \mathrm{Coef}_e(G, R).$$

3.0.0.1 Remarque. Le résultat est démontré dans [Wan17] pour GL_n.

Plan de ce chapitre

Ce chapitre se compose de quatre parties. La première partie vise à rappeler la définition des systèmes de coefficients. Dans la deuxième partie, nous introduisons la notion de chemin tendu entre deux polysimplexes dans l'immeuble. Cette dernière diffère un peu de celle donnée dans [Wan17]. Elle nous permet de définir les applications locales dans la partie 3.3. Ce sont ces dernières qui utilisent des propriétés de GL_n dans [Wan17]. Notre nouvelle définition nous permet d'obtenir les propriétés souhaitées dans le cas d'un groupe réductif quelconque. Enfin, il nous suffit alors d'appliquer les démonstrations de [Wan17] dans la partie 3.4 avec nos nouvelles applications locales pour obtenir le résultat voulu.

3.1 Systèmes de coefficients

Rappelons la définition des systèmes de coefficients.

Soit R un anneau commutatif dans lequel p est inversible. On appelle Γ un système de coefficients sur BT à coefficients dans R un foncteur contravariant de la catégorie $(\mathrm{BT}, \leq)$

vers la catégorie des R-modules. Dit autrement, c'est la donnée de R-modules $(V_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}$ et de R-morphismes $\varphi^\sigma_\tau : V_\sigma \to V_\tau$ si $\tau \leq \sigma$, soumis aux conditions : $\varphi^\sigma_\sigma = id$, et $\varphi^\tau_\omega \circ \varphi^\sigma_\tau = \varphi^\sigma_\omega$ si $\omega \leq \tau \leq \sigma$.

Pour associer un complexe de chaînes cellulaire à Γ, on équipe chaque polysimplexe d'une orientation qui induit une orientation sur chacune des sous-facettes. On définit

$$\epsilon_{\tau\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \leq \sigma \text{ avec des orientations compatibles} \\ -1 & \text{si } \tau \leq \sigma \text{ avec des orientations opposées} \\ 0 & \text{si } \tau \text{ n'est pas une facette de } \sigma \end{cases}$$

Le complexe de chaînes cellulaire $C_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$ sur BT à coefficients Γ est le complexe de chaînes $\mathbb{N}$-gradué

$$C_*(\mathrm{BT}, \Gamma) := \bigoplus_{\sigma\in\mathrm{BT}} V_\sigma$$

avec V_σ en degré $\deg(\sigma)$, muni de la différentielle

$$\delta((v_\sigma)_{\sigma\in\mathrm{BT}}) = \sum_{\tau\in\mathrm{BT}} \epsilon_{\tau\sigma}\varphi^\tau_\sigma(v_\sigma).$$

L'homologie de $C_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$ est alors notée $H_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$.

Un système de coefficients est dit G-équivariant si $\forall g \in G, \forall \sigma \in \mathrm{BT}$ il existe un isomorphisme $\alpha_{g,\sigma} : V_\sigma \to V_{g\sigma}$ compatible avec les φ^σ_τ et tel que $\alpha_{1,\sigma} = id$, $\alpha_{g,h\sigma} \circ \alpha_{h,\sigma} = \alpha_{gh,\sigma}$.

Soit e un système d'idempotents cohérent sur BT. On suppose que e vérifie de plus la condition

$$\text{Pour tout sommet } x \text{ et tout polysimplexe } \sigma \text{ contenant } x \text{ on a } e_\sigma \in \mathcal{H}_R(G_x) \qquad (*)$$

Notons que si Γ est un système de coefficients G-équivariant alors la condition $(*)$ assure que e_σ agit sur V_x. On appelle alors un e-système de coefficients, un système de coefficients G-équivariant tel que pour tout $x \leq \sigma$ le morphisme $\varphi^\sigma_x : V_\sigma \to V_x$ induise un isomorphisme $V_\sigma \xrightarrow{\sim} e_\sigma(V_x)$. On note $\mathrm{Coef}_e(G, R)$ la catégorie des e-systèmes de coefficients.

3.2 Chemins tendus

Définissons maintenant la notion de chemin tendu entre deux polysimplexes de BT. Nous reprenons les notations de la section 1.1, par exemple $H(\sigma, \tau)$ désigne l'enveloppe polysimpliciale de σ et τ, et $[x, y]$ est le plus petit polysimplexe contenant $x \cup y$.

3.2.0.1 Définition. Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$. On appelle chemin tendu de τ à σ une suite de polysimplexes $\tau_0, \cdots, \tau_n \in \mathrm{BT}$ telle que $\tau_0 = \tau$, $\tau_n = \sigma$, $\tau_{i+1} \in H(\tau_i, \sigma)$ et, soit $\tau_i \leq \tau_{i+1}$, soit $\tau_{i+1} \leq \tau_i$.

3.2.0.2 Remarque. Attention, la définition de chemin tendu donnée ici est différente de celle donnée dans [Wan17] (2.2.4). Cependant si $(z_0, \cdots, z_m)$ est un chemin tendu selon [Wan17], alors $(z_0, [z_0, z_1], z_1, [z_1, z_2], \cdots, z_{m-1}, [z_{m-1}, z_m], z_m)$ est un chemin tendu selon notre définition.

3.2.0.3 Lemme. *Soient* $\tau_0, \cdots, \tau_n \in \mathrm{BT}$.

1. *Si* $\tau_0, \cdots, \tau_n$ *est un chemin tendu alors, pour tout* $k \in \{0, \cdots, n\}$, $\tau_k, \cdots, \tau_n$ *est aussi un chemin tendu.*
2. *Soit* $k \in \{0, \cdots, n\}$ *et on suppose que* $\tau_0, \cdots, \tau_k$ *et* $\tau_k, \cdots, \tau_n$ *sont des chemin tendus. Alors* $\tau_0, \cdots, \tau_n$ *est un chemin tendu si et seulement si pour tout* $i \in \{0, \cdots, k\}$, $\tau_k \in H(\tau_i, \tau_n)$.
3. *Soient* $k, l \in \{0, \cdots, n\}$ *avec* $k \leq l$. *Alors si* $\tau_0, \cdots, \tau_n$ *est un chemin tendu et si* $\tau_k, \cdots, \tau_l$ *sont adjacents alors le chemin* $\tau_0, \cdots, \tau_k, [\tau_k, \cdots, \tau_l], \tau_l, \cdots, \tau_n$ *est encore un chemin tendu.*

Démonstration. 1. C'est évident.

2. Supposons que $\tau_0, \cdots, \tau_n$ est un chemin tendu. Alors pour tout i, comme $\tau_{i+1} \in H(\tau_i, \tau_n)$, on a $H(\tau_{i+1}, \tau_n) \subseteq H(\tau_i, \tau_n)$. Ainsi pour tout $i \leq k$, $\tau_k \in H(\tau_i, \tau_n)$.

   Réciproquement supposons que pour tout $i \in \{0, \cdots, k\}$, $\tau_k \in H(\tau_i, \tau_n)$ et montrons que $\tau_0, \cdots, \tau_n$ est un chemin tendu. La seule condition à vérifier et que $\tau_{i+1} \in H(\tau_i, \sigma)$. Ceci est immédiat pour $i \in \{k, n-1\}$ car $\tau_k, \cdots, \tau_n$ est un chemin tendu. Pour $i < k$, $\tau_0, \cdots, \tau_k$ étant un chemin tendu, $\tau_{i+1} \in H(\tau_i, \tau_k)$. Or $\tau_k \in H(\tau_i, \tau_n)$ donc $H(\tau_i, \tau_k) \subseteq H(\tau_i, \tau_n)$ et on a le résultat.
3. Il n'y a qu'a vérifier les conditions d'être un chemin tendu entre $\tau_k, [\tau_k, \cdots, \tau_l]$ et $[\tau_k, \cdots, \tau_l], \tau_l$. Tout d'abord on a $\tau_k \leq [\tau_k, \cdots, \tau_l]$ et $\tau_l \leq [\tau_k, \cdots, \tau_l]$. Comme $\tau_l \leq [\tau_k, \cdots, \tau_l]$, $\tau_l \in H([\tau_k, \cdots, \tau_l], \tau_n)$. Il ne reste à vérifier que $[\tau_k, \cdots, \tau_l] \in H(\tau_k, \tau_n)$, c'est-à-dire que pour tout $i \in \{k, \cdots, l\}$, $\tau_i \in H(\tau_k, \tau_n)$. Or cette condition est vérifiée par 2, ce qui achève la preuve.

□

3.2.0.4 Lemme. *Soient* $\sigma, \tau, \omega \in \mathrm{BT}$ *tels que* $\omega \in H(\sigma, \tau)$. *Alors il existe un chemin tendu* $\tau_0 = \tau, \cdots, \tau_k = \omega$ *de* τ *à* ω *tel que pour tout* i, $\omega \in H(\tau_i, \sigma)$.

En particulier, il existe un chemin tendu $\tau_0 = \tau, \cdots, \tau_k = \omega, \cdots, \tau_n = \sigma$ *de* τ *à* σ *tel que* $\tau_0, \cdots, \tau_k$ *soit un chemin tendu de* τ *à* ω.

Démonstration. La première assertion est le lemme 2.15 de [MS10] et la seconde découle de 2. dans le lemme 3.2.0.3. □

3.3 Les applications locales

La nouvelle définition de chemin tendu, nous permet de redéfinir les applications locales de [Wan17]. Le but principale de cette section sera de montrer que la définition donnée ci-dessous est bien indépendante du choix du chemin tendu effectué.

Soit $\Gamma = (V_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{BT}}$ un e-système de coefficients. Lorsque $x \leq \sigma$, on identifie V_σ à $e_\sigma(V_x)$ via le morphisme φ_x^σ. Pour deux polysimplexes τ, σ tels que $\tau \leq \sigma$, on a $V_\sigma = e_\sigma(V_\tau)$ et on note p_σ^τ le projecteur $V_\tau \twoheadrightarrow e_\sigma(V_\tau) = V_\sigma$.

Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$ tels que $\tau \leq \sigma$. On a alors deux applications

$$p_\sigma^\tau : V_\tau \twoheadrightarrow e_\sigma V_\tau = V_\sigma,$$

$$\varphi_\tau^\sigma : V_\sigma \hookrightarrow V_\tau.$$

On définit alors si $\tau \leq \sigma$ ou $\sigma \leq \tau$

$$\varepsilon_\sigma^\tau : V_\tau \to V_\sigma$$

par $\varepsilon_\sigma^\tau = p_\sigma^\tau$ si $\tau \leq \sigma$ et $\varepsilon_\sigma^\tau = \varphi_\sigma^\tau$ si $\tau \geq \sigma$.

3.3.0.1 Définition. Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$. Prenons $\tau_0 = \tau, \cdots, \tau_n = \sigma$ un chemin tendu reliant τ à σ. On définit alors $\varepsilon_\sigma^\tau : V_\tau \to V_\sigma$ par

$$\varepsilon_\sigma^\tau = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}.$$

3.3.0.2 Remarque. Nous avons mentionné dans la remarque 3.2.0.2 que la définition des chemins tendus dans [Wan17] diffère de celle donnée ici. Si $(z_0, \cdots, z_m)$ est un chemin tendu selon [Wan17], alors la définition de $\varepsilon_{z_m}^{z_0}$ donnée dans [Wan17] section 2.2 est la même que celle donnée ici, si l'on considère le chemin tendu $(z_0, [z_0, z_1], z_1, \cdots, z_{m-1}, [z_{m-1}, z_m], z_m)$.

Le but de ce qui suit est de montrer que cette définition est indépendante du chemin tendu choisi. Nous avons besoin de lemmes préliminaires.

3.3.0.3 Lemme. *Soient $\tau_0, \cdots, \tau_n \in \mathrm{BT}$ des polysimplexes tels que pour tout i on ait $\tau_i \leq \tau_{i+1}$ ou $\tau_{i+1} \leq \tau_i$. On suppose de plus que $\tau_0, \cdots, \tau_n$ sont adjacents. Alors*

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{[\tau_0, \cdots, \tau_n]} \circ \varepsilon_{[\tau_0, \cdots, \tau_n]}^{\tau_0}.$$

Démonstration. Montrons le résultat par récurrence sur n.

Le résultat est clair pour $n = 1$. Prenons donc $\tau_0, \cdots, \tau_n$ comme dans l'énoncé et supposons le résultat vrai au rang $n - 1$. Le chemin $\tau_1, \cdots, \tau_n$ vérifie les conditions de l'énoncé donc par hypothèse de récurrence

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_2}^{\tau_1} = \varepsilon_{\tau_n}^{[\tau_1, \cdots, \tau_n]} \circ \varepsilon_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]}^{\tau_1}$$

donc

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{[\tau_1, \cdots, \tau_n]} \circ \varepsilon_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]}^{\tau_1} \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}.$$

Deux cas se présentent

1. Si $\tau_0 \leq \tau_1$
   Alors $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$ correspond à l'application

   $$V_{\tau_0} \twoheadrightarrow e_{\tau_1}(V_{\tau_0}) = V_{\tau_1} \twoheadrightarrow e_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]}(V_{\tau_1}) = e_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]}(e_{\tau_1}(V_{\tau_0})) = V_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]} \hookrightarrow V_{\tau_n}.$$

   Or $e_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]} e_{\tau_1} = e_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]}$ mais comme $\tau_0 \leq \tau_1$, $[\tau_1, \cdots, \tau_n] = [\tau_0, \cdots, \tau_n]$ et on a le résultat voulu.
2. Si $\tau_0 \geq \tau_1$
   Alors $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$ correspond à l'application

   $$V_{\tau_0} \hookrightarrow e_{\tau_0}(V_{\tau_1}) \twoheadrightarrow e_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]}(e_{\tau_0}(V_{\tau_1})) \hookrightarrow V_{\tau_n}.$$

   Or $e_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]}(e_{\tau_0}(V_{\tau_1})) = e_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]} e_{\tau_0}(V_{\tau_0})$ car $V_{\tau_0} = e_{\tau_0}(V_{\tau_1})$ et $e_{[\tau_1, \cdots, \tau_n]} e_{\tau_0} = e_{[[\tau_1, \cdots, \tau_n], \tau_0]} = e_{[\tau_0, \cdots, \tau_n]}$. Donc les deux premières flèches correspondent à l'application

   $$V_{\tau_0} \twoheadrightarrow e_{[\tau_0, \cdots, \tau_n]}(V_{\tau_0})$$

   et on a le résultat.

□

3.3.0.4 Corollaire. *Soient τ et σ des polysimplexes adjacents. Alors ε_σ^τ ne dépend pas du chemin tendu choisi.*

Démonstration. Soit $\tau_0, \cdots, \tau_n$ un chemin tendu reliant τ à σ. Les polysimplexes τ et σ étant adjacents, $H(\sigma, \tau)$ est l'adhérence de $[\sigma, \tau]$. Le chemin $\tau_0, \cdots, \tau_n$ étant tendu, pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, nous avons $\tau_i \in H(\sigma, \tau)$ et donc $\tau_i \leq [\sigma, \tau]$. Par conséquent les polysimplexes $\tau_0, \cdots, \tau_n$ sont adjacents et $[\tau_0, \cdots, \tau_n] \leq [\sigma, \tau]$. Comme $\sigma, \tau \leq [\tau_0, \cdots, \tau_n]$, on a $[\sigma, \tau] \leq [\tau_0, \cdots, \tau_n]$ et donc $[\tau_0, \cdots, \tau_n] = [\sigma, \tau]$. Le lemme 3.3.0.3, nous dit alors que $\varepsilon_\sigma^\tau = \varepsilon_\sigma^{[\sigma,\tau]} \circ \varepsilon_{[\sigma,\tau]}^\tau$ qui est bien indépendant du chemin choisi. □

3.3.0.5 Lemme. *Soient $\tau_0, \cdots, \tau_n \in$ BT et $k, l \in \{0, \cdots, n\}$ avec $k \leq l$. Supposons que $\tau_0, \cdots, \tau_n$ est un chemin tendu et que $\tau_k, \cdots, \tau_l$ sont adjacents. Alors*

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \varepsilon_{\tau_{l+1}}^{\tau_l} \circ \varepsilon_{\tau_l}^{[\tau_k, \cdots, \tau_l]} \circ \varepsilon_{[\tau_k, \cdots, \tau_l]}^{\tau_k} \circ \varepsilon_{\tau_k}^{\tau_{k-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}.$$

Démonstration. Le lemme 3.2.0.3 3. assure que $\tau_0, \cdots, \tau_k, [\tau_k, \cdots, \tau_l], \tau_l, \cdots, \tau_n$ est bien un chemin tendu. Maintenant

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \varepsilon_{\tau_{l+1}}^{\tau_l} \circ \varepsilon_{\tau_l}^{\tau_{l-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \circ \varepsilon_{\tau_k}^{\tau_{k-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}.$$

Comme $\tau_k, \cdots, \tau_l$ sont adjacents le lemme 3.3.0.3 nous donne

$$\varepsilon_{\tau_l}^{\tau_{l-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} = \varepsilon_{\tau_l}^{[\tau_k, \cdots, \tau_l]} \circ \varepsilon_{[\tau_k, \cdots, \tau_l]}^{\tau_k}.$$

Et on a le résultat voulu. □

3.3.0.6 Définition. Soient $\tau, \sigma \in$ BT. On définit $\rho(\tau, \sigma)$ comme le nombre de polysimplexes dans $H(\tau, \sigma)$.

3.3.0.7 Lemme. *Soient $\tau_0, \cdots, \tau_n$ un chemin tendu et $\omega \in$ BT tels que pour tout i, $\tau_n \in H(\tau_i, \omega)$. Alors il existe un autre chemin tendu $\tau'_0, \cdots, \tau'_m$ tel que*

1. *$\tau'_0 = \tau_0$ et $\tau'_m = \tau_n$*
2. *$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau'_m}^{\tau'_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau'_1}^{\tau'_0}$*
3. *si $\tau'_i > \tau'_{i+1}$ et $i + 1 < m$ alors $\rho(\tau'_{i+1}, \omega) < \rho(\tau'_i, \omega)$*
4. *Pour tout i, $\tau'_m \in H(\tau'_i, \omega)$*

Démonstration. Posons $k_1 = \max\{i > 0 | \tau_0, \cdots, \tau_i$ sont adjacents$\}$ (cet ensemble est non vide car τ_1 et τ_0 sont adjacents). De même si k_i est défini et différent de n, on pose $k_{i+1} = \max\{j > k_i | \tau_{k_i}, \cdots, \tau_j$ sont adjacents$\}$. On vient donc de définir m' entiers, $k_1, \cdots, k_{m'}$ avec $k_{m'} = n$. Posons $k_0 = 0$ et $m = 2m'$.

Définissons pour $i \in \{0, \cdots, m'\}$, $\tau'_{2i} = \tau_{k_i}$, et pour $i \in \{0, \cdots, m' - 1\}$, $\tau'_{2i+1} = [\tau_{k_i}, \cdots, \tau_{k_{i+1}}]$.

Le lemme 3.2.0.3 3. appliqué m' fois assure que $\tau'_0, \cdots, \tau'_m$ est un chemin tendu. Vérifions que ce chemin vérifie les propriétés demandées.

1. Il est clair que $\tau'_0 = \tau_0$ et $\tau'_m = \tau_n$.
2. Le lemme 3.3.0.5 appliqué m' fois nous donne le résultat.

3. On ne peut avoir $\tau'_i > \tau'_{i+1}$ que si $i = 2l+1$ est impair. Il nous suffit donc de montrer que $H(\tau'_{2l+2}, \omega) \subsetneq H(\tau'_{2l+1}, \omega)$.
   Par définition de k_{l+1}, $\tau_{k_{l+1}+1}$ et τ'_{2l+1} ne sont pas adjacents ($\tau_{k_{l+1}+1}$ existe bien car $i+1 < m$ par hypothèse). Prenons $\mathcal{A}$ un appartement contenant $H(\tau_{k_l}, \omega)$. Par hypothèse $\tau_n \in H(\tau_{k_l}, \omega)$ et donc $H(\tau_{k_l}, \tau_n) \subseteq H(\tau_{k_l}, \omega)$. Ainsi $\tau_{k_l}, \cdots, \tau_n \in \mathcal{A}$. Comme $\tau_{k_{l+1}+1}$ et τ'_{2l+1} ne sont pas adjacents, il existe une racine affine a qui sépare $\tau_{k_{l+1}+1}$ et τ'_{2l+1}. Disons par example $a_{|\tau_{k_{l+1}+1}} > 0$ et $a_{|\tau'_{2l+1}} < 0$. Remarquons que $\tau_{k_{l+1}+1} \in H(\tau_{k_{l+1}}, \tau_n) \subseteq H(\tau_{k_{l+1}}, \omega) = H(\tau'_{2l+2}, \omega) \subseteq H(\tau'_{2l+1}, \omega)$. Ainsi si $a_{|\omega} < 0$, comme $\tau_{k_{l+1}+1} \in H(\tau'_{2l+1}, \omega)$ on aurait $a_{|\tau_{k_{l+1}+1}} \leq 0$ ce qui n'est pas. Donc $a_{|\omega} \geq 0$ et a est une racine affine qui sépare τ'_{2l+1} de $H(\tau_{k_{l+1}+1}, \omega)$ et donc $\tau'_{2l+1} \notin H(\tau_{k_{l+1}+1}, \omega)$. Or $\tau_{k_{l+1}+1} \leq \tau_{k_{l+1}}$ ou $\tau_{k_{l+1}+1} \geq \tau_{k_{l+1}}$. Mais on ne peut pas avoir $\tau_{k_{l+1}+1} \leq \tau_{k_{l+1}}$ car sinon $\tau_{k_l}, \cdots, \tau_{k_{l+1}+1}$ seraient adjacents. Donc $\tau_{k_{l+1}+1} \geq \tau_{k_{l+1}}$. Mais alors $H(\tau_{k_{l+1}+1}, \omega) \supseteq H(\tau_{k_{l+1}}, \omega) = H(\tau'_{2l+2}, \omega)$. Donc $\tau'_{2l+1} \notin H(\tau'_{2l+2}, \omega)$ ce qui achève la preuve.
4. On souhaite montrer que pour tout i, $\tau_n \in H(\tau'_i, \omega)$. Si $i = 2l$ est pair le résultat est immédiat puisque $\tau'_{2l} = \tau_{k_l}$. Il nous reste donc le cas $i = 2l+1$ impair, c'est-à-dire que l'on veut montrer que $\tau_n \in H([\tau_{k_l}, \cdots, \tau_{k_{l+1}}], \omega)$. Mais $\tau_{k_l} \leq [\tau_{k_l}, \cdots, \tau_{k_{l+1}}]$ donc $H(\tau_{k_l}, \omega) \subseteq H([\tau_{k_l}, \cdots, \tau_{k_{l+1}}], \omega)$ et $\tau_n \in H([\tau_{k_l}, \cdots, \tau_{k_{l+1}}], \omega)$.

□

3.3.0.8 Lemme. *Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$. Alors il existe un unique polysimplexe maximal $\overline{\tau} \in H(\tau, \sigma)$ avec $\tau \leq \overline{\tau}$. C'est-à-dire qu'un polysimplexe ω satisfait $\omega \in H(\tau, \sigma)$ et $\tau \leq \omega$ si et seulement si $\tau \leq \omega \leq \overline{\tau}$.*

Démonstration. La preuve est identique à celle du lemme 2.9 de [MS10] en remplaçant x par σ. □

3.3.0.9 Lemme. *Soient $\tau, \sigma, \overline{\tau}$ comme dans le lemme 3.3.0.8. Soit $\mathcal{A}$ un appartement contenant $H(\sigma, \tau)$ et a une racine affine. Alors si $a_{|\overline{\tau}} = 0$ on a $a_{|H(\sigma,\tau)} = 0$.*

Démonstration. Supposons que $a_{|\overline{\tau}} = 0$. Notons $H = \ker(a)$ un hyperplan affine de $\mathcal{A}$. Il faut alors montrer que $H(\sigma, \tau) \subseteq H$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $H(\sigma, \tau) \nsubseteq H$. Prenons alors $x \in H(\sigma, \tau) \backslash H$.

Soit $\varphi : [0, 1] \to \mathrm{BT}$ une géodésique entre un point intérieur à $\overline{\tau}$ et x. Comme $\varphi(0) \in H$ s'il existait $t \in]0, 1]$ tel que $\varphi(t) \in H$, on aurait que pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) \in H$ et en particulier que $x \in H$ ce qui n'est pas. Donc $\varphi(]0, 1]) \cap H = \emptyset$. Chaque $\varphi(t)$ appartient à un polysimplexe $\tau(t)$ et l'application $t \mapsto \tau(t)$ est constante par morceaux, on peut donc choisir t_0 le premier réel strictement positif où l'on a un saut. Notons $\omega = \tau(t_0/2)$. On doit avoir $\overline{\tau} \leq \omega$ ou $\omega \leq \overline{\tau}$. Mais $\omega \nsubseteq H$ et $\overline{\tau} \subseteq H$ donc $\overline{\tau} < \omega$. Or $\varphi(t_0/2) \in H(\tau, \sigma)$ donc $\omega \in H(\tau, \sigma)$ ce qui contredit la définition de $\overline{\tau}$. □

3.3.0.10 Lemme. *Soient $\tau, \omega, \sigma \in \mathrm{BT}$ des polysimplexes avec $\omega \in H(\tau, \sigma)$. Prenons comme dans le lemme 3.3.0.8, $\overline{\tau}$ maximal dans $H(\tau, \sigma)$ tel que $\tau \leq \overline{\tau}$ et $\overline{\omega}$ maximal dans $H(\omega, \sigma)$ tel que $\omega \leq \overline{\omega}$. Alors $\overline{\tau} \in H(\tau, \overline{\omega})$.*

Démonstration. Notons $\overline{\tau}'$ le polysimplexe maximal de $H(\tau, \overline{\omega})$ tel que $\tau \leq \overline{\tau}'$. Alors $H(\tau, \overline{\omega}) \subseteq H(\tau, \sigma)$ et donc $\overline{\tau}' \leq \overline{\tau}$.

Supposons que $\overline{\tau}' \neq \overline{\tau}$. Alors $\overline{\tau}'$ est une facette de $\overline{\tau}$ et si l'on prend $\mathcal{A}$ un appartement contenant $H(\tau, \sigma)$ il existe une racine affine a telle que $a_{|\overline{\tau}'} = 0$ et $a_{|\overline{\tau}} > 0$. Comme $a_{|\overline{\tau}'} = 0$

par le lemme 3.3.0.9 $a_{|H(\tau,\overline{\omega})} = 0$ et en particulier $a_{|\tau} = 0$ et $a_{|\overline{\omega}} = 0$. Encore par le lemme 3.3.0.9, comme $a_{|\overline{\omega}} = 0$ on a $a_{|H(\omega,\sigma)} = 0$ et donc $a_{|\sigma} = 0$. On a donc $a_{|\tau} = 0$ et $a_{|\sigma} = 0$ donc $a_{|H(\tau,\sigma)} = 0$. Mais $\overline{\tau} \in H(\tau,\sigma)$ donc $a_{|\overline{\tau}} = 0$ ce qui est absurde. □

3.3.0.11 Lemme. *Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$. Prenons $\overline{\tau}$ maximal dans $H(\tau,\sigma)$ tel que $\tau \leq \overline{\tau}$. Soit $\tau_0 = \tau, \cdots, \tau_n = \sigma$ un chemin tendu reliant τ à σ. Alors $\tau, \overline{\tau}, \tau_0, \cdots, \tau_n$ est encore un chemin tendu et*

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} \circ \varepsilon_{\tau_0}^{\overline{\tau}} \circ \varepsilon_{\overline{\tau}}^{\tau}.$$

Démonstration. Nous avons que $\tau \leq \overline{\tau}$ et donc $H(\tau,\sigma) \subseteq H(\overline{\tau},\sigma)$. Puis comme $\overline{\tau} \in H(\tau,\sigma)$ nous en déduisons que $H(\overline{\tau},\sigma) \subseteq H(\tau,\sigma)$. Par conséquent $H(\tau,\sigma) = H(\overline{\tau},\sigma)$ et $\tau, \overline{\tau}, \tau_0, \cdots, \tau_n$ est bien un chemin tendu.

Démontrons par récurrence sur n, que pour touts polysimplexes σ et τ et pour tout chemin tendu $\tau_0, \cdots, \tau_n$ reliant τ à σ alors $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} \circ \varepsilon_{\tau_0}^{\overline{\tau}} \circ \varepsilon_{\overline{\tau}}^{\tau}$. Le cas $n = 1$ est évident. Supposons donc le résultat vrai au rang $n-1$ et montrons le au rang n.

Notons $\varphi = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$. L'application $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} \circ \varepsilon_{\tau_0}^{\overline{\tau}} \circ \varepsilon_{\overline{\tau}}^{\tau}$ correspond à l'application

$$V_\tau \overset{p_{\overline{\tau}}^{\tau}}{\twoheadrightarrow} V_{\overline{\tau}} \overset{\varphi_{\tau}^{\overline{\tau}}}{\hookrightarrow} V_\tau \overset{\varphi}{\to} V_\sigma.$$

Soit $v \in V_\tau$, nous souhaitons donc montrer que $\varphi(v) = \varphi(e_{\overline{\tau}}(v))$. Le résultat que l'on souhaite démontrer est donc équivalent à dire que si $u \in V_\tau$ est tel que $e_{\overline{\tau}}(u) = 0$ alors $\varphi(u) = 0$.

Posons alors $\psi = \varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_2}^{\tau_1}$. Notons $\overline{\tau_1}$ le polysimplexe maximal de $H(\tau_1,\sigma)$ tel que $\tau_1 \leq \overline{\tau_1}$. Alors par hypothèse de récurrence on sait que si $v \in V_{\tau_1}$ est tel que $e_{\overline{\tau_1}}(v) = 0$, $\psi(v) = 0$. Soit $u \in V_\tau$ tel que $e_{\overline{\tau}}(u) = 0$, comme $\varphi = \psi \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$, il nous suffit de montrer que $e_{\overline{\tau_1}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = 0$. Deux cas se présentent

— $\tau_0 \leq \tau_1$
  $\tau_1 \in H(\tau_0,\sigma)$ et $\tau_0 \in H(\tau_1,\sigma)$ donc $H(\tau_0,\sigma) = H(\tau_1,\sigma)$. Par conséquent $\overline{\tau_1} = \overline{\tau}$. Alors $e_{\overline{\tau_1}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = e_{\overline{\tau}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(e_{\overline{\tau}}u) = 0$.

— $\tau_0 \geq \tau_1$
  Alors $\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varphi_{\tau_1}^{\tau_0} : V_{\tau_0} \hookrightarrow V_{\tau_1}$ et $e_{\overline{\tau_1}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = e_{\overline{\tau_1}} e_\tau(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u))$. Or $\overline{\tau} \in H(\tau,\overline{\tau_1})$ par le lemme 3.3.0.10, donc la proposition 2.2 (e) de [MS10] nous dit que $e_{\overline{\tau_1}} e_\tau = e_{\overline{\tau_1}} e_{\overline{\tau}} e_\tau = e_{\overline{\tau_1}} e_\tau e_{\overline{\tau}}$ et par conséquent $e_{\overline{\tau_1}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = e_{\overline{\tau_1}} e_\tau e_{\overline{\tau}}(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(u)) = e_{\overline{\tau_1}} e_\tau(\varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}(e_{\overline{\tau}}u)) = 0$.

□

Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété que pour tout $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$ tels que $\rho(\tau,\sigma) \leq n$ alors ε_σ^τ ne dépend pas du choix du chemin tendu.

3.3.0.12 Lemme. *Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$ tels que $\rho(\tau,\sigma) > 1$. Soient $\tau_0, \cdots, \tau_n$ et $\tau'_0, \cdots, \tau'_m$ deux chemins tendus reliant τ à σ. On suppose que*

— *$\mathcal{P}(\rho(\tau,\sigma) - 1)$ est vraie*
— *$\rho(\tau_1,\sigma) < \rho(\tau,\sigma)$ et $\rho(\tau'_1,\sigma) < \rho(\tau,\sigma)$*
— *Il existe $\omega \in H(\tau_1,\sigma) \cap H(\tau'_1,\sigma)$*
— *$\rho(\tau,\omega) < \rho(\tau,\sigma)$*
— *$\tau_1 \in H(\tau,\omega)$ et $\tau'_1 \in H(\tau,\omega)$*

Alors

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau'_m}^{\tau'_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau'_1}^{\tau'_0}.$$

Démonstration. $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = (\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_2}^{\tau_1}) \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$. Comme $\rho(\tau_1, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$ et que $\mathcal{P}(\rho(\tau, \sigma) - 1)$ est vraie, $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_2}^{\tau_1} = \varepsilon_{\sigma}^{\tau_1}$ ne dépend pas du chemin tendu choisi. De plus $\omega \in H(\tau_1, \sigma)$ donc d'après le lemme 3.2.0.4 il existe un chemin tendu reliant τ_1 à σ passant par ω tel que les chemins reliant τ_1 à ω et ω à σ soit tendus. Ainsi $\varepsilon_{\sigma}^{\tau_1} = \varepsilon_{\sigma}^{\omega} \circ \varepsilon_{\omega}^{\tau_1}$. On a donc $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\sigma}^{\omega} \circ \varepsilon_{\omega}^{\tau_1} \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0}$. Comme $\rho(\tau, \omega) < \rho(\tau, \sigma)$ et que $\mathcal{P}(\rho(\tau, \sigma) - 1)$ est vraie, $\varepsilon_{\omega}^{\tau}$ ne dépend pas du choix du chemin tendu choisi. En particulier, comme $\tau_1 \in H(\tau, \omega)$, on peut compléter le chemin τ_0, τ_1 en un chemin tendu reliant τ à ω. Le chemin reliant τ_1 à ω est alors lui aussi tendu et il en est de même pour le chemin τ_0, τ_1. Ainsi $\varepsilon_{\omega}^{\tau_1} \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\omega}^{\tau_0}$. On vient donc de montrer que

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\sigma}^{\omega} \circ \varepsilon_{\omega}^{\tau}.$$

Mais les hypothèses sur les chemins $\tau_0, \cdots, \tau_n$ et $\tau'_0, \cdots, \tau'_m$ sont symétriques, on a donc aussi $\varepsilon_{\tau'_m}^{\tau'_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau'_1}^{\tau'_0} = \varepsilon_{\sigma}^{\omega} \circ \varepsilon_{\omega}^{\tau}$. Et finalement

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau'_m}^{\tau'_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau'_1}^{\tau'_0}.$$

□

3.3.0.13 Lemme. *Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$. Prenons $\mathcal{A}$ un appartement contenant $H(\sigma, \tau)$. On suppose qu'il existe une racine affine a telle que $a_{|\tau} > 0$ et $a_{|\sigma} < 0$. Alors si $\omega \in H(\tau, \sigma)$ est un polysimplexe contenant un point intérieur x avec $a(x) = 0$, on a $\rho(\omega, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$ et $\rho(\tau, \omega) < \rho(\tau, \sigma)$.*

Démonstration. La situation étant sysmétrique en τ et σ il nous suffit de montrer que $\rho(\omega, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$. Comme $\omega \in H(\tau, \sigma)$ on a $H(\omega, \sigma) \subseteq H(\tau, \sigma)$ et $\rho(\omega, \sigma) \leq \rho(\tau, \sigma)$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que $H(\omega, \sigma) \subsetneq H(\tau, \sigma)$.

Puisque $a(x) = 0$ et x est un point intérieur à ω on a $a_{|\omega} = 0$. Ainsi $a_{|\omega} \leq 0$, $a_{|\sigma} < 0$ et $a_{|\tau} > 0$ donc a sépare τ de ω et σ et par conséquent $\tau \notin H(\omega, \sigma)$ ce qui achève la preuve. □

3.3.0.14 Proposition. *Soient $\tau, \sigma \in \mathrm{BT}$ alors $\varepsilon_{\sigma}^{\tau}$ ne dépend pas du choix du chemin tendu choisi.*

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur $\rho(\tau, \sigma)$. Le résultat est vrai si $\rho(\tau, \sigma) = 1$. On suppose alors que $\rho(\tau, \sigma) > 1$ et que $\mathcal{P}(\rho(\tau, \sigma) - 1)$ est vraie.

Prenons alors deux chemins tendus $\tau_0, \cdots, \tau_n$ et $\tau'_0, \cdots, \tau'_m$. Le lemme 3.3.0.11 nous permet de supposer que $\tau = \overline{\tau}$ où $\overline{\tau}$ est le polysimplexe maximal de $H(\tau, \sigma)$ tel que $\tau \leq \overline{\tau}$. En appliquant le lemme 3.3.0.7 (avec $\omega = \sigma$) on peut supposer que $\tau_0, \cdots, \tau_n$ et $\tau'_0, \cdots, \tau'_m$ vérifient les conditions énoncées dans ce dernier. De plus quitte à retirer les premiers simplexes s'ils sont égaux, on peut supposer que $\tau_0 \neq \tau_1$ et $\tau'_0 \neq \tau'_1$. En particulier on a que $\rho(\tau_1, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$ et $\rho(\tau'_1, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$. Le cas où τ et σ sont adjacents est réglé par le corollaire 3.3.0.4, on supposera donc pour la suite que τ et σ ne sont pas adjacents.

Soit $\mathcal{A}$ un appartement contenant $H(\tau, \sigma)$. Comme τ et σ sont deux polysimplexes non adjacents, il existe une racine affine a telle que $a_{|\tau} > 0$ et $a_{|\sigma} < 0$. Comme τ est maximal, $\tau_1 < \tau$ et donc $a_{|\tau_1} \geq 0$. On déduit de $a_{|\tau_1} \geq 0$ et $a_{|\sigma} < 0$ qu'il existe $x \in H(\tau_1, \sigma)$ tel que $a(x) = 0$. De même il existe $y \in H(\tau'_1, \sigma)$ tel que $a(y) = 0$. Soit $\varphi : [0, 1] \to \mathrm{BT}$ une géodésique reliant x à y. Comme $x, y \in H(\tau, \sigma)$, $\varphi([0, 1]) \subseteq H(\tau, \sigma)$. Chaque $\varphi(t)$ est un

point intérieur à un certain polysimplexe $\omega(t)$. La fonction $t \mapsto \omega(t)$ est constante par morceaux, prenons alors $0 = t_0 < t_2 < \cdots < t_{2k-2} < t_{2k} = 1$ les instants où il y a un saut de la fonction $\omega(t)$. Choisissons également $t_1, \cdots, t_{2k-1}$ tels que $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{2k-1} < t_{2k}$. Posons $\omega_i = \omega(t_i)$. Alors ω_{2i} et ω_{2i+2} doivent être des facettes de ω_{2i+1} et donc pour tout i on a, soit $\omega_i \leq \omega_{i+1}$, soit $\omega_{i+1} \leq \omega_i$. Maintenant $a(x) = a(y) = 0$ donc pour tout t, $a(\varphi(t)) = 0$. Ainsi ω_i contient un point intérieur $\varphi(t_i)$ tel que $a(\varphi(t_i)) = 0$. Le lemme 3.3.0.13 nous assure que $\rho(\omega_i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$ et $\rho(\tau, \omega_i) < \rho(\tau, \sigma)$. Pour résumer, on vient de construire une suite de polysimplexes $\omega_0, \cdots, \omega_{2k}$ telle que pour tout i, $\omega_i \in H(\tau, \sigma)$, $\rho(\omega_i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$, $\rho(\tau, \omega_i) < \rho(\tau, \sigma)$, $\omega_i \leq \omega_{i+1}$ ou $\omega_{i+1} \leq \omega_i$, $\omega_0 \in H(\tau_1, \sigma)$ et $\omega_{2k} \in H(\tau'_1, \sigma)$.

Soit $i \in \{0, 1, \cdots, 2k\}$. Comme $\omega_i \in H(\tau, \sigma)$ prenons grâce au lemme 3.2.0.4 un chemin tendu $\tau_0^i = \tau, \cdots, \tau_{l_i}^i = \omega_i$ de τ à ω_i tel que pour tout j, $\omega_i \in H(\tau_j^i, \sigma)$. En appliquant le lemme 3.3.0.7 on peut supposer que les τ_j^i vérifient les conditions de ce dernier. On complète le chemin $\tau_0^i, \cdots, \tau_{l_i}^i$ en un chemin tendu $\tau_0^i, \cdots, \tau_{n_i}^i$ reliant τ à σ grâce au lemme 3.2.0.3 2. On suppose également $\tau_0^i \neq \tau_1^i$ quitte à retirer les premiers simplexes s'ils sont égaux. Comme $\tau_0^i = \tau$ est maximal, $\tau_0^i > \tau_1^i$. Si $\tau_1^i \neq \omega_i$ alors la condition 3 du lemme 3.3.0.7 nous dit que $\rho(\tau_1^i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$. Et si $\tau_1^i = \omega_i$ alors par construction de ω_i, $\rho(\tau_1^i, \sigma) = \rho(\omega_i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$. On vient ainsi de construire un chemin tendu $\tau_0^i, \cdots, \tau_{n_i}^i$ reliant τ à σ tel que $\rho(\tau_1^i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$, $\omega_i \in H(\tau_1^i, \sigma)$ et $\tau_1^i < \tau$.

Soit $i \in \{0, 1, \cdots, 2k-1\}$. On a $\omega_i \leq \omega_{i+1}$ ou $\omega_{i+1} \leq \omega_i$. Notons ω le plus petit des deux simplexes de sorte que $\omega \leq \omega_i$ et $\omega \leq \omega_{i+1}$. Alors $\tau_0^i, \cdots, \tau_{n_i}^i$ et $\tau_0^{i+1}, \cdots, \tau_{n_{i+1}}^{i+1}$ vérifient les conditions du lemme 3.3.0.12. En effet, $\rho(\tau_1^i, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$ et $\rho(\tau_1^{i+1}, \sigma) < \rho(\tau, \sigma)$. Comme $\omega_i \in H(\tau_1^i, \sigma)$ et $\omega \leq \omega_i$, on a que $\omega \in H(\tau_1^i, \sigma)$, et de même $\omega \in H(\tau_1^{i+1}, \sigma)$. Puis $\rho(\tau, \omega_i) < \rho(\tau, \sigma)$ et $\rho(\tau, \omega_{i+1}) < \rho(\tau, \sigma)$, par conséquent, comme $\omega = \omega_i$ ou $\omega = \omega_{i+1}$, $\rho(\tau, \omega) < \rho(\tau, \sigma)$. Enfin $\tau_1^i < \tau$ donc $\tau_1^i \in H(\tau, \omega)$ et de même $\tau_1^{i+1} \in H(\tau, \omega)$. Ainsi le lemme 3.3.0.12 nous dit que $\varepsilon_{\tau_{n_i}^i}^{\tau_{n_i-1}^i} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1^i}^{\tau_0^i} = \varepsilon_{\tau_{n_{i+1}}^{i+1}}^{\tau_{n_{i+1}-1}^{i+1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1^{i+1}}^{\tau_0^{i+1}}$. Ceci étant vrai pour tout $i \in \{0, \cdots, 2k-1\}$ on obtient $\varepsilon_{\tau_{n_0}^0}^{\tau_{n_0-1}^0} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1^0}^{\tau_0^0} = \varepsilon_{\tau_{n_{2k}}^{2k}}^{\tau_{n_{2k}-1}^{2k}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1^{2k}}^{\tau_0^{2k}}$.

Les chemins tendus $\tau_0, \cdots, \tau_n$ et $\tau_0^0, \cdots, \tau_{n_0}^0$ vérifient également les conditions de 3.3.0.12 avec $\omega = \omega_0$ donc $\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau_{n_0}^0}^{\tau_{n_0-1}^0} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1^0}^{\tau_0^0}$. Il en est de même avec $\tau'_0, \cdots, \tau'_m$ et $\tau_0^{2k}, \cdots, \tau_{n_{2k}}^{2k}$ en prenant $\omega = \omega_{2k}$ donc $\varepsilon_{\tau'_m}^{\tau'_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau'_1}^{\tau'_0} = \varepsilon_{\tau_{n_{2k}}^{2k}}^{\tau_{n_{2k}-1}^{2k}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1^{2k}}^{\tau_0^{2k}}$. On trouve finalement que

$$\varepsilon_{\tau_n}^{\tau_{n-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau_1}^{\tau_0} = \varepsilon_{\tau'_m}^{\tau'_{m-1}} \circ \cdots \circ \varepsilon_{\tau'_1}^{\tau'_0},$$

ce qui achève la preuve. □

3.4 Équivalence de catégories

Nous pouvons maintenant prouver l'équivalence de catégories qui nous intéresse.

3.4.0.1 Proposition. *Soient* $\tau, \sigma, \omega \in \mathrm{BT}$ *tels que* $\omega \in H(\tau, \sigma)$. *Alors*

$$\varepsilon_\sigma^\tau = \varepsilon_\sigma^\omega \circ \varepsilon_\omega^\tau.$$

Démonstration. La proposition 3.3.0.14 nous dit que ε_σ^τ est indépendant du choix du chemin tendu. Il suffit alors de prendre, grâce au lemme 3.2.0.4, un chemin tendu reliant τ à σ passant par ω tel que les deux chemins de τ à ω et de ω à σ soient tendus. □

3.4.0.2 Remarque. La proposition 3.4.0.1 démontre les lemmes (2.2.8), (2.2.9) et (2.2.10) de [Wan17].

Maintenant que l'on a redéfini ε_σ^τ dans le cas d'un groupe réductif quelconque le reste de la démonstration dans [Wan17] (section 2.3 et 2.4) fonctionne dans ce contexte plus général.

3.4.0.3 Théorème. *Soient e un système d'idempotents cohérent vérifiant la condition $(*)$ et Γ un e-système de coefficients sur* BT. *Alors*

1. *Le complexe de chaîne $C_*(\mathrm{BT}, \Gamma)$ est exacte sauf en degré 0.*
2. *Γ est isomorphe au système de coefficients $(\sigma \mapsto e_\sigma(H_0(\mathrm{BT}, \Gamma)))$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la méthode de démonstration du théorème (2.1.9) de [Wan17] avec la nouvelle définition des applications locales ε_σ^τ. □

Soient e un système d'idempotents et V un RG-module lisse. On définit alors $\Gamma(V)$ un système de coefficients par $V_\sigma := e_\sigma V$ et pour $\tau \leq \sigma$, φ_σ^τ est l'inclusion $V_\sigma \hookrightarrow V_\tau$.

3.4.0.4 Théorème ([Wan17] Corollaire (2.1.11))**.** *Soit e un système d'idempotents cohérent vérifiant la condition $(*)$. Alors le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Rep}_R^e(G) & \to & \mathrm{Coef}_e(G, R) \\ V & \mapsto & \Gamma(V) \end{array}$$

admet un quasi-inverse $\Gamma \mapsto H_0(\mathrm{BT}, \Gamma)$, donc induit une équivalence de catégories.

3.4.0.5 Remarque. Notons que tous les systèmes d'idempotents cohérents construits dans cette thèse vérifient la condition $(*)$.

Chapter 4

Towards ℓ-blocks

Introduction

In chapter 2, we obtained the smallest decomposition of $\mathrm{Rep}^0_\Lambda(G)$ that we can obtain with 0-coherent systems of idempotents and Deligne-Lusztig. Unfortunately, this is not a block decomposition. Indeed, the supercuspidal representation Θ_{10} of $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Q}_p)$, induced from the inflation to $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z}_p)$ of the unipotent cuspidal representation θ_{10} of $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_p)$, is in $\mathrm{Rep}^1_\Lambda(G)$, the direct factor associated with the trivial parameter.

In this chapter, we investigate the block decomposition of $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$. We obtain a full description in some particular cases.

We call, like in [Lat17], unrefined depth zero types the pairs (σ, π), where $\sigma \in \mathrm{BT}$ and π is an irreducible cuspidal representation of $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$. Let $\mathcal{T}(G)$ be the set of unrefined depth zero types, up to G-conjugacy. Then we have the following proposition.

Proposition. *We have the decomposition*

$$\mathrm{Rep}^0_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(G)} \mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G).$$

If G is semisimple and simply connected, the category $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ is a block.

Definition. *We say that ℓ is large for G if, ℓ is a prime number which does not divide q and for every $x \in \mathrm{BT}_0$ either ℓ does not divide $|\overline{\mathsf{G}}_x|$ or ℓ divides $|\overline{\mathsf{G}}_x|$ and does not divide $|W_x\langle\phi\rangle|$, where ϕ is the automorphism of the root datum of $\overline{\mathsf{G}}_x$ induced by the Frobenius F.*

In this chapter, we are going to obtain ℓ-block decompositions in several examples. For now, we are able to get them under the hypothesis that ℓ is large, but this is not optimal, and it should be possible to have weaker hypotheses on ℓ.

If ℓ is large, we obtain the ℓ-block decomposition of

1. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$, for G semisimple and simply connected and $\ell | q-1$.
2. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{SL}_n(F))$.
3. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_{2n}(F))$, for $\ell | q^n+1$.
4. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_4(F))$.

5. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_6(F))$.
6. $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_8(F))$.

Remark. When $G = \mathrm{SL}_n(F)$ or $G = \mathrm{Sp}_{2n}(F)$ the hypothesis ℓ large is equivalent to $\ell > n$.

4.1 Blocks over $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$

In this section $\Lambda = \overline{\mathbb{Q}}_\ell$. We want to define 0-coherent systems of idempotents from unrefined depth zero types, hence subcategories of $\mathrm{Rep}^0_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$. When G is semisimple and simply connected, these categories will be blocks.

We call, like in [Lat17], unrefined depth zero types the pairs (σ, π), where $\sigma \in \mathrm{BT}$ and π is an irreducible cuspidal representation of $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$. Let $\mathcal{T}(G)$ be the set of unrefined depth zero types, up to G-conjugacy.

If G is a connected reductive group over k, then the theory of Harish-Chandra allows us to partition $\mathrm{Irr}(G)$ according to cuspidal support $[\mathsf{M}, \pi]$:

$$\mathrm{Irr}(G) = \bigsqcup \mathrm{Irr}_{(\mathsf{M},\pi)}(G).$$

If $\sigma, \tau \in \mathrm{BT}$ are two polysimplexes with $\tau \leq \sigma$, we can see $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ as a Levi subgroup of $\overline{\mathsf{G}}_\tau$. Now we construct from $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(G)$ a system of idempotents $e_\mathfrak{t}$ in the following way. Let $\tau \in BT$ and define $e^\tau_\mathfrak{t} \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[\overline{\mathsf{G}}_\tau]$ the idempotent that cuts out the union of $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_\sigma,\pi)}(\overline{\mathsf{G}}_\tau)$ for every $(\sigma, \pi) \in \mathfrak{t}$ with $\tau \leq \sigma$. We can then pull pack $e^\tau_\mathfrak{t}$ to an idempotent $e_{\mathfrak{t},\tau} \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G^\circ_\tau)$, giving us $e_\mathfrak{t}$ a system of idempotents.

4.1.0.1 Lemma. *Let $x \in \mathrm{BT}_0$, $\sigma \in \mathrm{BT}$ with $x \leq \sigma$. We have the following properties*

1. $e^+_\sigma = \sum_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(G)} e_{\mathfrak{t},\sigma}$.
2. *For all $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}' \in \mathcal{T}(G)$ with $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{t}'$, $e_{\mathfrak{t},x} e_{\mathfrak{t}',\sigma} = 0$.*

Proof. 1. The partition $\mathrm{Irr}(\overline{\mathsf{G}}_\sigma) = \bigsqcup \mathrm{Irr}_{(\mathsf{M},\pi)}(\overline{\mathsf{G}}_\sigma)$ and the fact that each $\mathrm{Irr}_{(\mathsf{M},\pi)}(\overline{\mathsf{G}}_\sigma)$ can be written as $\mathrm{Irr}_{(\mathsf{M},\pi)}(\overline{\mathsf{G}}_\sigma) = \mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_\tau,\pi)}(\overline{\mathsf{G}}_\sigma)$ for a polysimplex $\tau \geq \sigma$ show the wanted equality.

2. The group $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ is a Levi quotient of a parabolic P_σ of $\overline{\mathsf{G}}_x$, and we call U_σ the unipotent radical of P_σ. We have to prove that $e^x_\mathfrak{t} e_{\mathsf{U}_\sigma} e^\sigma_{\mathfrak{t}'} = 0$ in $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\overline{\mathsf{G}}_x]$, where e_{U_σ} is the idempotent which averages along the group U_σ. But $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\overline{\mathsf{G}}_x] e_{\mathsf{U}_\sigma} e^\sigma_{\mathfrak{t}'}$ is the parabolic induction from $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ to $\overline{\mathsf{G}}_x$ of the module $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[\overline{\mathsf{G}}_\sigma] e^\sigma_{\mathfrak{t}'}$. Since $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{t}'$ no representation in $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_\tau,\pi)}(\overline{\mathsf{G}}_x)$, with $(\tau, \pi) \in \mathfrak{t}$ can be in the induction of a representation in $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_{\tau'},\pi')}(\overline{\mathsf{G}}_\sigma)$ with $(\tau', \pi') \in \mathfrak{t}'$. Hence $e^x_\mathfrak{t} e_{\mathsf{U}_\sigma} e^\sigma_{\mathfrak{t}'} = 0$.

□

4.1.0.2 Proposition. *The system of idempotents $e_\mathfrak{t}$ is 0-coherent.*

Proof. An element $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(G)$ is defined up to G-conjugacy, hence $e_\mathfrak{t}$ is G-equivariant. Let $x \in \mathrm{BT}_0$ and $\sigma \in \mathrm{BT}$ such that $x \leq \sigma$. We have to prove that $e_{\mathfrak{t},\sigma} = e^+_\sigma e_{\mathfrak{t},x}$. By 1. in 4.1.0.1 we have that $e^+_\sigma = \sum_{\mathfrak{t}' \in \mathcal{T}(G)} e_{\mathfrak{t}',\sigma}$. Hence, $e_{\mathfrak{t},x} e^+_\sigma = \sum_{\mathfrak{t}' \in \mathcal{T}(G)} e_{\mathfrak{t},x} e_{\mathfrak{t}',\sigma}$. Now by 2. in 4.1.0.1, we have that if $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{t}'$ then $e_{\mathfrak{t},x} e_{\mathfrak{t}',\sigma} = 0$. So $e_{\mathfrak{t},x} e^+_\sigma = e_{\mathfrak{t},x} e_{\mathfrak{t},\sigma}$. In the same way, $e_{\mathfrak{t},x} e_{\mathfrak{t},\sigma} = e^+_x e_{\mathfrak{t},\sigma}$. So, $e_{\mathfrak{t},x} e^+_\sigma = e_{\mathfrak{t},x} e_{\mathfrak{t},\sigma} = e^+_x e_{\mathfrak{t},\sigma} = e^+_x e^+_\sigma e_{\mathfrak{t},\sigma} = e^+_\sigma e_{\mathfrak{t},\sigma} = e_{\mathfrak{t},\sigma}$. □

Let $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(G)$. We call $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ the category associated with $e_{\mathfrak{t}}$.

4.1.0.3 Proposition. *We have the decomposition*

$$\mathrm{Rep}^{0}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(G)} \mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G).$$

Proof. The proof is similar to the proof of proposition 1.2.3.5 using the properties showed in Lemma 4.1.0.1.

□

4.1.0.4 Theorem. *If G is semisimple and simply connected, the category $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ is a block.*

Proof. When G is semisimple and simply connected, Theorem 4.9 of [Mor99] shows that we have a bijection between $\mathcal{T}(G)$ and level zero Bernstein blocks. We then deduce from the proposition 4.1.0.3 that $\mathrm{Rep}^{0}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(G)} \mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ is the decomposition of $\mathrm{Rep}^{0}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ into Bernstein blocks. □

When ℓ is banal, hence ℓ does not divide $|\overline{\mathsf{G}}_x|$ for all $x \in \mathrm{BT}_0$, each idempotent $e_{\mathfrak{t}}$ is in $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$. We thus have a decomposition

$$\mathrm{Rep}^{0}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G) = \prod_{\mathfrak{t}\in\mathcal{T}(G)} \mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$$

and the following theorem

4.1.0.5 Theorem. *If G is semisimple and simply connected, and ℓ is banal, the category $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ is a ℓ-block.*

4.2 d-cuspidality

4.2.1 Unipotent ℓ-blocks for finite reductive groups

When G is a finite connected reductive group the theory of ℓ-blocks is fairly known. We explain here some of these results.

Let $\mathbf{G}$ be a connected reductive group defined over k. We use the notion of polynomial order P_{G} (like in [BMM93] section 1.A) which is a polynomial such that $|\mathsf{G}| = P_{\mathsf{G}}(q)$. Let $d \geq 1$ be an integer and call Φ_d the corresponding cyclotomic polynomial. We say that $\mathbf{T}$ is a Φ_d-subgroup if $\mathbf{T}$ is a F-stable torus of $\mathbf{G}$ whose polynomial order is a power of Φ_d. We call their centralizers in $\mathbf{G}$ the d-split Levi subgroups of $\mathbf{G}$.

Let $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathsf{G})$. We say that χ is d-cuspidal if and only if ${}^*\mathcal{R}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}\chi = 0$ for every proper d-split Levi subgroup $\mathbf{L}$ and every parabolic $\mathbf{P}$ admitting $\mathbf{L}$ as Levi subgroup.

We call a unipotent d-pair a pair $(\mathbf{L}, \lambda)$ where $\mathbf{L}$ is a d-split Levi and λ is a unipotent character of $\mathbf{L}$. Such a pair is said to be cuspidal if λ is cuspidal. We define an order relation on unipotent d-pairs by $(\mathbf{M}, \mu) \preceq (\mathbf{L}, \lambda)$ if $\mathbf{M}$ is a Levi subgroup of $\mathbf{L}$ and there is a parabolic subgroup $\mathbf{P}$ of $\mathbf{L}$ admitting $\mathbf{M}$ as a Levi such that $\langle \lambda, \mathcal{R}^{\mathbf{L}}_{\mathbf{M}\subset\mathbf{P}}(\mu)\rangle \neq 0$. For $(\mathbf{L}, \lambda)$ a unipotent d-cuspidal pair, let us define $\mathcal{E}(\mathsf{G}, (\mathbf{L}, \lambda))$, the subset of $\mathcal{E}(\mathsf{G}, 1)$ of characters χ such that $(\mathbf{L}, \lambda) \preceq (\mathbf{G}, \chi)$. We call $\mathcal{E}(\mathsf{G}, (\mathbf{L}, \lambda))$ a d-series.

4.2.1.1 Theorem ([BMM93]Theorem 3.2 (1)). *For each d, the sets $\mathcal{E}(\mathsf{G},(\mathbf{L},\lambda))$ (where $(\mathbf{L},\lambda)$ runs over a complete set of representatives of G-conjugacy classes of unipotent d-cuspidal pairs) partition $\mathcal{E}(\mathsf{G},1)$.*

Call ϕ the automorphism of the root datum of G induced by the Frobenius F.

4.2.1.2 Definition ([BMM93] Definition 5.1). *We say that ℓ is large (for G) if ℓ is a prime number which does not divide q, which divides $|\mathsf{G}|$ and which does not divide $|W\langle\phi\rangle|$.*

Note that if ℓ is large for G, then there exists a unique integer d such that Φ_d divides P_{G} and ℓ divides $\Phi_d(q)$ ([BMM93] Proposition 5.2).

Let $\mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\mathsf{G})$ be the set of characters of the abelian group $\mathbf{G}^{\mathsf{F}}/[\mathbf{G},\mathbf{G}]^{\mathsf{F}}$ (considered as characters of G) of order an ℓ-number.

4.2.1.3 Theorem ([BMM93] Theorem 5.24). *Let ℓ be a large prime number and d be the unique integer such that Φ_d divides P_{G} and ℓ divides $\Phi_d(q)$. Let $(\mathbf{L},\lambda)$ be a unipotent d-cuspidal pair of $\mathbf{G}$. Then the set of all irreducible constituents of the virtual characters $\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\theta\lambda)$, where $\theta\in\mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\mathsf{L})$, is the set of all irreducible characters of a ℓ-block of G.*

If $\mathcal{E}(\mathsf{G},(\mathbf{L},\lambda))$ is a d-series, we call $\mathcal{E}_\ell(\mathsf{G},(\mathbf{L},\lambda))\subseteq\mathcal{E}_\ell(\mathsf{G},1)$ set of all irreducible constituents of the virtual characters $\mathcal{R}_{\mathbf{L}\subset\mathbf{P}}^{\mathbf{G}}(\theta\lambda)$, where $\theta\in\mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\mathsf{L})$. If $\mathcal{E}=\sqcup\mathcal{E}(\mathsf{G},(\mathbf{L},\lambda))$ is a union of d-series we define $\mathcal{E}_\ell\subseteq\mathcal{E}_\ell(\mathsf{G},1)$ by $\mathcal{E}_\ell=\sqcup\mathcal{E}_\ell(\mathsf{G},(\mathbf{L},\lambda))$.

4.2.2 d-cuspidality for classical groups

When G is a classical group we have a classification of unipotent characters with the notion of symbols that we recall here. Furthermore, with these symbols, we can find the decomposition into d-series of Theorem 4.2.1.1.

We call a symbol an unordered set $\{S,T\}$ of two subsets $S,T\subseteq\mathbb{N}$. We write such a symbol in the following way

$$\Sigma=\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_a\\ y_1 & \cdots & y_b\end{pmatrix}$$

with $x_1<\cdots<x_a$, $y_1<\cdots<y_b$ and $S=\{x_1,\cdots,x_a\}$, $T=\{y_1,\cdots,y_b\}$. Two symbols are said to be equivalent if they can be transformed into each other by a sequence of steps

$$\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_a\\ y_1 & \cdots & y_b\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & x_1+1 & \cdots & x_a+1\\ 0 & y_1+1 & \cdots & y_b+1\end{pmatrix}$$

or by interchanging the rows.

We define the defect of Σ by $\mathrm{defect}(\Sigma)=|a-b|$ and its rank by

$$\mathrm{rank}(\Sigma)=\sum_{i=1}^{a}x_i+\sum_{i=1}^{b}y_i-\left[\left(\frac{a+b-1}{2}\right)^2\right].$$

These two notions can be defined on the equivalence classes of symbols.

If G is a group of type B_n, C_n, D_n or ${}^2D_n$, Lusztig has shown that the unipotent characters may be parametrized by these symbols (see [Lus77]). The unipotent characters of groups of type B_n or C_n are in bijection with the equivalence classes of symbols of rank

n and odd defect. For the groups of type D_n, the unipotent characters are parametrized by classes of symbols of rank n and defect divisible by 4 (except that if the two rows are identical, two characters correspond to the same symbol). And the unipotent characters of groups of type ${}^2D_n$ are in bijection with symbols of rank n and defect congruent 2 (mod 4).

Let $\{S,T\}$ be a symbol and $d \geq 1$ an integer. If there exists $x \in S$ such that $x+d \notin S$, or $y \in T$ with $y+d \notin T$, then the symbol $\{S \setminus \{x\} \cup \{x+d\}, T\}$ or $\{S, T \setminus \{y\} \cup \{y+d\}\}$, is said to be obtained from $\{S,T\}$ by adding a d-hook. We define the d-core of $\{S,T\}$ as the symbol $\{U,V\}$ without d-hook obtained from $\{S,T\}$ by removing a sequence of d-hooks.

In the same way, if there exists $x \in S$ such that $x+d \notin T$, or $y \in T$ with $y+d \notin S$, then the symbol $\{S \setminus \{x\}, T \cup \{x+d\}\}$ or $\{S \cup \{y+d\}, T \setminus \{y\}\}$, is said to be obtained from $\{S,T\}$ by adding a d-cohook. And we define like previously the d-cocore of $\{S,T\}$.

4.2.2.1 Proposition. *1. If d is odd: Then the d-cuspidal unipotent characters are precisely those where Σ is itself a d-core. Moreover, two characters are in the same d-series if and only if they have the same d-core.*

2. If d is even: Then the d-cuspidal unipotent characters are precisely those where Σ is itself a $d/2$-cocore. Moreover, two characters are in the same d-series if and only if they have the same $d/2$-cocore.

Proof. This is proved in the proof of Theorem 3.2 in [BMM93]. □

4.2.3 d-1-series

In order to construct idempotents in section 4.1, we needed to decompose $\mathrm{Irr}(\mathsf{G})$ into Harish-Chandra series (or with the new notations into 1-series). According to Theorem 4.2.1.3, in order to have ℓ-blocks we need to decompose $\mathrm{Irr}(\mathsf{G})$ into d-series. So we need a way to conciliate these two decompositions.

We call a d-1-set a subset of $\mathrm{Irr}(\mathsf{G})$ which is a union of 1-series and a union of d-series. A d-1-series is then a d-1-set with no non-empty d-1-subset. We thus have a partition of $\mathrm{Irr}(\mathsf{G})$ into d-1-series.

Case d odd. To obtain the d-series we need to take the d-core of the symbols by the proposition 4.2.2.1. We also obtain the 1-series by taking the 1-core. But two symbols which have the same d-core have the same 1-core, so each 1-series is a d-1-series.

4.2.3.1 Proposition. *If d is odd, the d-1-series are the 1-series.*

Case d even. This case is a little bit more complicated because we need to take the $d/2$-cocore for the d-series and the 1-core for the 1-series.

Let Σ be a symbol. We define $\max(\Sigma)$ to be the $\max(\Sigma) := \max(S \cup T)$ where $\{S,T\}$ is the unique symbol equivalent to Σ with $0 \notin S \cap T$.

4.2.3.2 Lemma. *Let $k \geq 1$ and $n \geq 1$ such that $n \geq \frac{k^2-1}{4}$. We have*

$$\max\{\max(\Sigma), \mathrm{defect}(\Sigma) = k, \mathrm{rank}(\Sigma) = n\} = \begin{cases} n - \frac{k^2-4k+3}{4} & \text{if } k \text{ is odd} \\ n - \frac{k^2-4k+4}{4} & \text{if } k \text{ is even} \end{cases}$$

Proof. Every symbol of defect k is obtained from $\Sigma_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & k-1 \\ & & \end{pmatrix}$ by adding 1-hooks. Each 1-hook increases the rank of 1. So in order to get a symbol of rank n, we need to do $m := n - \mathrm{rank}(\Sigma_k)$ 1-hooks. Note that

$$\mathrm{rank}(\Sigma_k) = \frac{(k-1)k}{2} - \left[\left(\frac{k-1}{2}\right)^2\right] = \begin{cases} \frac{k^2-1}{4} & \text{if } k \text{ is odd} \\ \frac{k^2}{4} & \text{if } k \text{ is even} \end{cases}.$$

Remark also, that the hypothesis $n \geq (k^2-1)/4$ is equivalent to $m \geq 0$. Each 1-hook increases the maximum of the coefficients by at most one, so $\max\{\max(\Sigma), \mathrm{defect}(\Sigma) = k\} = k - 1 + m$ (we have equality by adding the 1-hooks on the last coefficient on the top row). □

Let us define an integer $k(\mathsf{G}, d)$ in the following way.

4.2.3.3 Definition. *If G is of type B_n or C_n we define*

$$k(\mathsf{G}, d) = \max\{k \geq 0, k \text{ odd}, (k^2 - 4k + 3)/4 \leq n - d/2\}$$

if it exists and $k(\mathsf{G}, d) = 0$ otherwise.

If G is of type D_n or ${}^2D_n$ then in the same way

$$k(\mathsf{G}, d) = \max\{k \geq 0, k \text{ even}, (k^2 - 4k + 4)/4 \leq n - d/2\}$$

if it exists and $k(\mathsf{G}, d) = 0$ otherwise.

4.2.3.4 Remark. Two symbols are in the same 1-series if and only if they have the same 1-core by Proposition 4.2.2.1. But removing a 1-hook does not change the defect of a symbol. Hence, every symbol in a 1-series have the same defect. Moreover, the 1-core of a symbol is of the form $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & k-1 \\ & & \end{pmatrix}$ where k is the defect of the symbol. Hence, two symbols are in the same 1-series if and only if they have the same defect. And the defect associated to a 1-series is the defect of the cuspidal representation associated to this 1-series.

We have the following partition of $\mathcal{E}(\mathsf{G}, 1)$ into d-1-series.

4.2.3.5 Proposition. *If d is even, the 1-series with defect strictly greater than $k(\mathsf{G}, d)$ are d-1-series, composed uniquely of d-cuspidal representations, and the union of the 1-series with defect lower or equal to $k(\mathsf{G}, d)$ is a d-1-series.*

Proof. Let $k > k(\mathsf{G}, d)$ and a 1-series with defect k. Then by definition of $k(\mathsf{G}, d)$ and with Lemma 4.2.3.2, $d/2$ is strictly greater than every coefficient in every symbol in the 1-series chosen. Hence, this 1-series is composed of d-cuspidal representations, so is a d-1-series.

We also deduce from that, that the union of the 1-series with defect lower or equal to $k(\mathsf{G}, d)$ is a d-1-set. We are left to prove that this is a d-1-series. Let $3 \leq k \leq k(\mathsf{G}, d)$ such that there is a 1-series with defect k. We want to prove that the 1-series with defect k and $k-2$ are in the same d-1-series which will finish the proof. Let $\Sigma_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & k-1 \\ & & \end{pmatrix}$ and $m = n - \mathrm{rank}(\Sigma_k)$ as in the proof of Lemma 4.2.3.2. Then the symbol

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & k-2 & k-1+m \\ & & & \end{pmatrix}$$

has defect k and rank n so is in the 1-series chosen. Now by definition of $k(\mathsf{G}, d)$, $d/2 \leq k-1+m$, we can then remove a $d/2$-cohook from Σ to get

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & k-2 \\ k-1+m-d/2 & & \end{pmatrix}.$$

Let $v \in \{0, \cdots, k-2\}$ such that $v + d/2 \neq k-1+m-d/2$. Then we can add a $d/2$-cohook to Σ' to obtain

$$\Sigma'' = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & v-1 & v+1 & \cdots & k-2 \\ k-1+m-d/2 & v+d/2 & & & & \end{pmatrix}$$

(we possibly have to swap the numbers in the lower row so that they are written in the good order). The symbol Σ'' is a symbol of defect $k-2$ which has the same $d/2$-cocore as Σ. So the 1-series with defect k and $k-2$ are in the same d-1-series and this finish the proof. $\square$

4.3 Unipotent ℓ-blocks

In this section, we explain how to get unipotent ℓ-blocks with unrefined depth zero types.

Call $\mathcal{T}^1(G)$ the subset of $\mathcal{T}(G)$ of pairs (σ, π) with π unipotent and $\mathcal{T}^1_\ell(G)$ the subset of $\mathcal{T}(G)$ of pairs (σ, π) with $\pi \in \mathcal{E}_\ell(\overline{\mathsf{G}}_\sigma, 1)$. We thus have that

$$\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}^1(G)} \mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$$

and

$$\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G) \cap \mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G) = \prod_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}^1_\ell(G)} \mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G).$$

Let T be a subset of $\mathcal{T}^1_\ell(G)$. We can associate to T a system of idempotents e_T by $e_T := \sum_{\mathfrak{t} \in T} e_{\mathfrak{t}}$. We say that T is ℓ-integral if for all $\sigma \in \mathrm{BT}$, $e_{T,\sigma} = \sum_{\mathfrak{t} \in T} e_{\mathfrak{t},\sigma}$ is in $\overline{\mathbb{Z}}_\ell[\overline{\mathsf{G}}_\sigma]$. Thus, if T is ℓ-integral we can form a category $\mathrm{Rep}^T_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$.

If $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(G)$, call $e^{\mathfrak{t}}$ the idempotent in the center of $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ associated to the category $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$. We define also e^T by $e^T = \sum_{\mathfrak{t} \in T} e^{\mathfrak{t}}$.

4.3.0.1 Lemma. *The idempotent e^T is ℓ-integral if and only if T is ℓ-integral.*

Proof. It is clear that if T is ℓ-integral then e^T is ℓ-integral. Let us assume that e^T is ℓ-integral. Every ℓ-integral element in the center acts on smooth functions on G with compact support. In particular, for every $x \in \mathrm{BT}_0$, the function $e^T * e^+_x$ must be ℓ-integral. Let us prove that that for $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}(G)$ we have $e^{\mathfrak{t}} * e^+_x = e_{\mathfrak{t},x}$ which will end the proof.

Consider $V = \mathcal{C}^\infty_c(G, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) e^+_x$. Since $e^+_x = \sum_{\mathfrak{t}' \in \mathcal{T}(G)} e_{\mathfrak{t}',x}$ by lemme 4.1.0.1, we have a decomposition $V = \oplus_{\mathfrak{t}' \in \mathcal{T}(G)} V_{\mathfrak{t}'}$ where $V_{\mathfrak{t}'} = V e_{\mathfrak{t}',x}$. Now, $V_{\mathfrak{t}}$ is an object in $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ so $e^{\mathfrak{t}}$ acts as the identity on it, and if $\mathfrak{t}' \neq \mathfrak{t}$, $V_{\mathfrak{t}'}$ is an object in $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}'}_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(G)$ so is cancelled by $e^{\mathfrak{t}}$ and we have the result. $\square$

4.3.0.2 Proposition. *If G is semisimple and simply connected the partition of $\mathcal{T}^1_\ell(G)$ into minimal ℓ-integral subsets give us the decomposition of $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ into ℓ-blocks.*

Proof. Since G is semisimple and simply connected, Theorem 4.1.0.4 tells us that the idempotents $e^{\mathfrak{t}}$ are primitive idempotents in the center. Thus, each ℓ-block of $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ is associated to a subset $T \subseteq \mathcal{T}^1_\ell(G)$ such that e^T is ℓ-integral. Lemma 4.3.0.1 gives us that T is ℓ-integral. So the ℓ-block decomposition of $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ gives us a partition of $\mathcal{T}^1_\ell(G)$ into ℓ-integral subsets. But if T is ℓ-integral, we can construct a category from T, so these subsets must be minimal and we have the result. □

4.3.0.3 Definition. *We say that ℓ is large for G, if ℓ is a prime number which does not divide q and for every $x \in \mathrm{BT}_0$ either ℓ does not divide $|\overline{\mathsf{G}}_x|$ or ℓ is large for $\overline{\mathsf{G}}_x$.*

Hence if ℓ is large for G, for every $x \in \mathrm{BT}_0$, either ℓ does not divide $|\overline{\mathsf{G}}_x|$ and the idempotents $e^\tau_{\mathfrak{t}}$ are in $\overline{\mathbb{Z}}_\ell[\overline{\mathsf{G}}_x]$ or ℓ is large for $\overline{\mathsf{G}}_x$ and the primitive idempotents of $\overline{\mathbb{Z}}_\ell[\overline{\mathsf{G}}_x]$ are given by Theorem 4.2.1.3.

Let (σ, π) and (τ, π') be two unrefined unipotent depth zero types. For an integer d, we say that (σ, π) and (τ, π') are d-1-linked if there exist $\omega \in \mathrm{BT}$ such that $\omega \leq \sigma$, $\omega \leq \tau$, $\ell \mid |\overline{\mathsf{G}}_\omega|$ and $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_\sigma, \pi)}(\overline{\mathsf{G}}_\omega) \cup \mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_\tau, \pi')}(\overline{\mathsf{G}}_\omega)$ is contained in a d-1-series.

4.3.0.4 Proposition. *Assume that ℓ is large for G and call d the order of q mod ℓ. Let $\mathfrak{t} = [\sigma, \pi], \mathfrak{t}' = [\tau, \pi'] \in \mathcal{T}^1(G)$ with (σ, π) and (τ, π') d-1-linked. Then $\mathfrak{t}$ and $\mathfrak{t}'$ are contained in the same minimal ℓ-integral subset of $\mathcal{T}^1_\ell(G)$.*

Proof. Let T be the minimal ℓ-integral subset of $\mathcal{T}^1_\ell(G)$ containing $\mathfrak{t}$. We want to show that $\mathfrak{t}' \in T$. Since, T is ℓ-integral, $e_{T,\omega} \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell[\overline{\mathsf{G}}_\omega]$ and can be written as a sum of primitive central ℓ-integral idempotents. Since ℓ is large for $\overline{\mathsf{G}}_\omega$, we have a description of them by Theorem 4.2.1.3. In particular, if we call $\mathcal{E}$ the subset of $\mathrm{Irr}(\overline{\mathsf{G}}_\omega)$ cuts out by $e_{T,\omega}$ and $\mathcal{E}^1 := \mathcal{E} \cap \mathcal{E}(\overline{\mathsf{G}}_\omega, 1)$ we have that $\mathcal{E}^1$ is a d-set. By construction of $e_{T,\omega}$, $\mathcal{E}^1$ is also a 1-set so is a d-1-set. Since, $\mathfrak{t} \in T$, $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_\sigma, \pi)}(\overline{\mathsf{G}}_\omega) \subseteq \mathcal{E}^1$. But (σ, π) and (τ, π') are d-1-linked so $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_\tau, \pi')}(\overline{\mathsf{G}}_\omega) \subseteq \mathcal{E}^1$, and $\mathfrak{t}' \in T$. □

4.3.0.5 Proposition. *If ℓ is large for G and T is ℓ-integral then $T \cap \mathcal{T}^1(G) \neq \emptyset$.*

Proof. Let $\sigma \in \mathrm{BT}$ such that $e_{T,\sigma} \neq 0$. Since T is ℓ-integral, $e_{T,\sigma} \in \overline{\mathbb{Z}}_\ell[\overline{\mathsf{G}}_\sigma]$. So $e_{T,\sigma}$ is a sum of primitive central idempotents in $\overline{\mathbb{Z}}_\ell[\overline{\mathsf{G}}_\sigma]$. If ℓ does not divide $|\overline{\mathsf{G}}_\sigma|$, there is no difference between $\mathcal{E}(\overline{\mathsf{G}}_\sigma, 1)$ and $\mathcal{E}_\ell(\overline{\mathsf{G}}_\sigma, 1)$ so we have the result. If ℓ divides $|\overline{\mathsf{G}}_\sigma|$, since ℓ is large for G, we see that ℓ is large for $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ and we have a description of the primitive central idempotents in $\overline{\mathbb{Z}}_\ell[\overline{\mathsf{G}}_\sigma]$ by Theorem 4.2.1.3. In particular, there exists $\pi \in \mathcal{E}(\overline{\mathsf{G}}_\sigma, 1)$ such that $e_{T,\sigma}\pi \neq 0$. There exist a Levi M of $\overline{\mathsf{G}}_\sigma$ and a cuspidal unipotent representation π' such that $\pi \in \mathrm{Irr}_{(M,\pi')}(\overline{\mathsf{G}}_\sigma)$. Thus there exists $\mathfrak{t} \in \mathcal{T}^1(G)$ such that $e_{\mathfrak{t},\sigma}\pi \neq 0$. Moreover, $e_{\mathfrak{t},\sigma}$ acts as the identity on π so $e_{T,\sigma}e_{\mathfrak{t},\sigma} \neq 0$. Now $e_{T,\sigma} = \sum_{\mathfrak{t}' \in T} e_{\mathfrak{t}',\sigma}$, so $e_{T,\sigma}e_{\mathfrak{t},\sigma} = \sum_{\mathfrak{t}' \in T} e_{\mathfrak{t}',\sigma}e_{\mathfrak{t},\sigma}$. Lemma 4.1.0.1 told us that if $\mathfrak{t} \neq \mathfrak{t}'$ then $e_{\mathfrak{t}',\sigma}e_{\mathfrak{t},\sigma} = 0$, thus $\mathfrak{t} \in T$ and we have the result. □

4.3.0.6 Corollary. *If G is semisimple and simply connected, ℓ is large for G and T is a ℓ-integral set such that $T \cap \mathcal{T}^1(G)$ is a singleton, then $\mathrm{Rep}^T_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ is a ℓ-block.*

Proof. Since $T \cap \mathcal{T}^1(G)$ is a singleton, T is minimal by Proposition 4.3.0.5. The category $\mathrm{Rep}^T_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ is then a ℓ-block by Proposition 4.3.0.2. □

4.4 Some decompositions

In this section, we apply the results of Section 4.3 to some examples to get decompositions into ℓ-blocks.

4.4.1 q of order 1 mod ℓ

In this section, we assume that $\ell | q-1$ and is large.

Let $\mathfrak{t} = [\sigma, \pi] \in \mathcal{T}^1(G)$. Define $T_{\mathfrak{t},l}$ by $T_{\mathfrak{t},l} := \{[\sigma, \theta\pi], \theta \in \mathrm{Ab}_\ell \mathrm{Irr}(\overline{\mathsf{G}}_\sigma)\}$. Since $d = 1$, Theorem 4.2.1.3 tells us that $T_{\mathfrak{t},l}$ is ℓ-integral hence define a category $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$. Moreover, when G is semisimple and simply connected, $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ is a ℓ-block by Corollary 4.3.0.6 since $T_{\mathfrak{t},l} \cap \mathcal{T}^1(G) = \{\mathfrak{t}\}$.

4.4.1.1 Proposition. *Assume that ℓ is large and $\ell | q-1$. We have a decomposition*

$$\mathrm{Rep}^{1}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G) = \prod_{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}^1(G)} \mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G).$$

When G is semisimple and simply connected, this is the ℓ-block decomposition of $\mathrm{Rep}^{1}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$.

4.4.2 $G = \mathrm{Sp}_{2n}$ and q of order $2n$ mod ℓ

Let us have a look at Sp_{2n}. Note that $|\mathrm{Sp}_{2n}(k)| = q^{n^2} \prod_{i=1}^{n} (q^{2i} - 1)$. We have already studied $d = 1$. Another extremal example is when q is of maximal order mod ℓ, i.e. q is of order $2n$ mod ℓ. Assume that ℓ is large for $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$. Since Sp_{2n} is split, ϕ is trivial, and $|W| = n!2^n$ so ℓ large is equivalent to $\ell > n$.

Let us start with a few remarks.

If $x \in \mathrm{BT}_0$ then $\overline{\mathsf{G}}_x \simeq \mathrm{Sp}_{2i}(k) \times \mathrm{Sp}_{2j}(k)$ with $i + j = n$. So $\ell || \overline{\mathsf{G}}_x|$ if and only if $\overline{\mathsf{G}}_x \simeq \mathrm{Sp}_{2n}(k)$ if and only if x is hyperspecial.

If (σ, π) and (σ', π') are two G-conjugate unrefined depth zero types such that $x \leq \sigma$ and $x \leq \sigma'$. Let $g \in G$ such that $g(\sigma', \pi) = (\sigma, \pi)$. Then $x \leq \sigma$ and $gx \leq \sigma$. In the Bruhat-Tits building of $\mathrm{Sp}_{2n}(F)$ if two vertices of a same chamber are G-conjugate then they are equal, hence $x = gx$ and $g \in G_x = G_x^\circ$. So, if $\mathfrak{t} = [\sigma, \pi]$, the idempotent $e^x_{\mathfrak{t}}$ is the idempotent that cuts out $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_\sigma, \pi)}(\overline{\mathsf{G}}_x)$.

Let $\mathfrak{t} = [\sigma, \pi] \in \mathcal{T}^1(G)$. Then $\overline{\mathsf{G}}_\sigma \simeq \mathrm{GL}_1(k)^k \times \mathsf{G}_1 \times \mathsf{G}_2$, where G_1, G_2 are classical groups and $\pi \simeq 1^{\otimes k} \otimes \pi_1 \otimes \pi_2$ with π_1 (resp. π_2) a unipotent irreducible cuspidal representation of G_1 (resp. G_2). If π_i is trivial we define $\mathrm{defect}(\pi_i) = 1$. If not, π_i correspond to a symbol Σ like in section 4.2.2 and we define $\mathrm{defect}(\pi_i) = \mathrm{defect}(\Sigma)$. Then, we define $\mathrm{defect}(\mathfrak{t}) := \mathrm{defect}(\pi_1)\,\mathrm{defect}(\pi_2)$.

Now we can construct ℓ-integral systems of idempotents.

Let $\mathfrak{t} = [\sigma, \pi] \in \mathcal{T}^1(G)$ such that $\mathrm{defect}(\mathfrak{t}) > 3$. Let $x \in \mathrm{BT}_0$ such that $e_{\mathfrak{t},x} \neq 0$. If x is not hyperspecial, since ℓ does not divide $|\overline{\mathsf{G}}_x|$, $e_{\mathfrak{t},x}$ is ℓ-integral. If x is hyperspecial, call $\mathcal{E}_x$ the subset of $\mathrm{Irr}(\overline{\mathsf{G}}_x)$ cuts out by $e_{\mathfrak{t},x}$. Since $k(\mathrm{Sp}_{2n}, 2n) = 3$ and $\mathcal{E}_x$ is a 1-series of defect greater than 3, $\mathcal{E}_x$ is a d-1-series. Moreover, $\mathcal{E}_x$ is composed uniquely of d-cuspidal representations by Proposition 4.2.3.5. We can then form $\mathcal{E}_{x,\ell} \subseteq \mathcal{E}_\ell(\overline{\mathsf{G}}_x, 1)$ like in section 4.2.1

such that the corresponding idempotent is ℓ-integral. But we have that $\mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}_{2n}(k)) = 1$, hence $\mathcal{E}_{x,\ell} = \mathcal{E}_x$ and $e_{\mathfrak{t},x}$ is ℓ-integral. The set $\{\mathfrak{t}\}$ is ℓ-integral and we can associate to it a category that we call $\mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$. This category is a ℓ-block.

Let $T_3 := \mathcal{T}^1_\ell(G) \setminus \bigcup_{\substack{\mathfrak{t}\in\mathcal{T}^1(G)\\ \mathrm{defect}(\mathfrak{t})>3}} \{\mathfrak{t}\}$. The set T_3 is ℓ-integral so defines a category $\mathrm{Rep}^{T_3}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$. We want to show that T_3 is minimal. We know that $T_3 \cap \mathcal{T}^1(G) = \{\mathfrak{t} \in \mathcal{T}^1(G), \mathrm{defect}(\mathfrak{t}) \leq 3\}$, hence by Proposition 4.3.0.5 it is enough to prove that all the $\mathfrak{t}$ with $\mathrm{defect}(\mathfrak{t}) \leq 3$ are in the same minimal set. Let $\mathfrak{t} = [\sigma, \pi] \in \mathcal{T}^1(G)$ with $\mathrm{defect}(\mathfrak{t}) \leq 3$ and call $\mathfrak{t}_0 := [C, 1]$ where C is a chamber that contains σ and 1 is the trivial representation of $\overline{\mathsf{G}}_C$. Remark that $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ has a unipotent cuspidal representation if and only if $n = s(s+1)$ and in this case, this representation is unique and has a defect of $2s+1$. Hence, since $\mathrm{defect}(\pi) \leq 3$, either π is trivial or $\overline{\mathsf{G}}_\sigma \simeq \mathrm{Sp}_4(k) \times \mathrm{GL}_1(k)^{n-2}$ and $\pi \simeq \theta_{10} \otimes 1$. In all cases, there exists x hyperspecial, such that $x \leq \sigma$. Since $\mathrm{defect}(\pi) \leq 3$, $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_\sigma,\pi)}(\overline{\mathsf{G}}_x) \cup \mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_C,1)}(\overline{\mathsf{G}}_x)$ is contained in a d-1-series by Proposition 4.2.3.5. Thus, $\mathfrak{t}$ and $\mathfrak{t}_0$ are d-1-linked and Proposition 4.3.0.4 tells us that they are contained in a same minimal set. Hence T_3 is minimal and $\mathrm{Rep}^{T_3}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ is a ℓ-block.

4.4.2.1 Proposition. *Assume that $l > n$ and q is of order $2n$ mod ℓ. Then we have the following decomposition of* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_{2n}(F))$ *into ℓ-blocks*

$$\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_{2n}(F)) = \mathrm{Rep}^{T_3}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_{2n}(F)) \times \prod_{\substack{\mathfrak{t}\in\mathcal{T}^1(G)\\ \mathrm{defect}(\mathfrak{t})>3}} \mathrm{Rep}^{\mathfrak{t}}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_{2n}(F)).$$

4.4.3 Sp_4

In this section $G = \mathrm{Sp}_4(F)$ and $\ell \neq 2$. Note that $\mathcal{T}^1(G) = \{[C,1], [x_1,\pi_1], [x_2,\pi_2]\}$ where C is a chamber, x_1 and x_2 are hyperspecial vertices and π_1 and π_2 are the unique unipotent cuspidal representations in $\overline{\mathsf{G}}_{x_1}$ and $\overline{\mathsf{G}}_{x_2}$. Hence, when q is of order 1 mod ℓ, $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ decomposes into 3 ℓ-blocks and when q is of order 4 mod ℓ, $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ is a ℓ-block. When q is of order 2 mod ℓ, since $k(\mathrm{Sp}_4(k), 2) = 3$ we see that $[C,1]$ and $[x_1,\pi_1]$ are d-1-linked and that $[C,1]$ and $[x_2,\pi_2]$ are also d-1-linked. Thus Proposition 4.3.0.4 tells us that all $\mathcal{T}^1(G)$ is contained in a minimal set which must be $\mathcal{T}^1_\ell(G)$ by Proposition 4.3.0.5. Thus $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(G)$ is a ℓ-block.

4.4.3.1 Proposition. *Assume that $\ell \neq 2$. Then*

1. *If $\ell \nmid (q^2-1)(q^2+1)$ (i.e. ℓ banal),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_4(F))$ *is a product of 3 ℓ-blocks.*
2. *If $\ell \mid q-1$ (i.e. q is of order 1 mod ℓ),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_4(F))$ *is a product of 3 ℓ-blocks.*
3. *If $\ell \mid q+1$ (i.e. q is of order 2 mod ℓ),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_4(F))$ *is a ℓ-block.*
4. *If $\ell \mid q^2+1$ (i.e. q is of order 4 mod ℓ),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_4(F))$ *is a ℓ-block.*

4.4.3.2 Remark. The decomposition of $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_4(F))$ is given by a partition of $\mathcal{T}^1_\ell(G)$. For certain ℓ, the set $\mathcal{T}^1_\ell(G)$ may be complicated. Here we give a description of $\mathcal{T}^1_\ell(G)$ in the different cases of Proposition 4.4.3.1.

1. $\mathcal{T}^1_\ell(G) = \mathcal{T}^1(G) = \{[x_1,\pi_1]\} \sqcup \{[x_2,\pi_2]\} \sqcup \{[C,1]\}$.

2. $\mathcal{T}_\ell^1(G) = \{[x_1, \pi_1]\} \sqcup \{[x_2, \pi_2]\} \sqcup \{[C, \theta], \theta \in \mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\overline{\mathsf{G}}_C)\}$.
3. The elements of $\mathcal{T}_\ell^1(G)$ are the $[\sigma, \pi]$ with
   (a) If $\sigma = C$, $\pi = 1$.
   (b) If $\sigma = x_1$ or x_2, $\pi = \theta_{10}$ or $\pi = \mathcal{R}_{\mathsf{T}_2 \times \mathsf{T}_2}^{\mathrm{Sp}_4(k)}(\theta_1 \otimes \theta_2)$, where T_2 is the torus given by the kernel of the Galois norm $\mathbb{F}_{q^2}^* \to \mathbb{F}_q^*$, θ_1, θ_2 are characters of T_2 of order a power of ℓ and θ_1, θ_2, $\theta_1\theta_2^{-1}$ is non trivial.
   (c) If $\sigma = x$ is the non special vertex of C, $\pi = \mathcal{R}_{\mathsf{T}_2}^{\mathrm{SL}_2(k)}(\theta_1) \otimes \mathcal{R}_{\mathsf{T}_2}^{\mathrm{SL}_2(k)}(\theta_2)$, where θ_1, θ_2 are non-trivial characters of T_2 of order a power of ℓ.
   (d) If $\sigma = [x, x_1]$ or $[x, x_2]$, $\pi = \mathcal{R}_{\mathsf{T}_2 \times \mathrm{GL}_1(k)}^{\mathrm{SL}_2(k) \times \mathrm{GL}_1(k)}(\theta \otimes 1)$, where θ is a non-trivial character of T_2 of order a power of ℓ.
   (e) If $\sigma = [x_1, x_2]$, $\pi = \mathcal{R}_{\mathsf{T}_2}^{\mathrm{GL}_2(k)}(\theta)$, where θ is a non-trivial character of T_2 of order a power of ℓ.
4. The elements of $\mathcal{T}_\ell^1(G)$ are the $[\sigma, \pi]$ with
   (a) If $\sigma = C$, $\pi = 1$.
   (b) If $\sigma = x_1$ or x_2, $\pi = \theta_{10}$ or $\pi = \mathcal{R}_{\mathsf{T}_c}^{\mathrm{Sp}_4(k)}(\theta)$, where T_c is the Coxeter torus of $\mathrm{Sp}_4(k)$ and θ is a non-trivial character of T_c of order a power of ℓ.

4.4.4 Sp_6

In this section $G = \mathrm{Sp}_6(k)$ and $\ell > 3$. Here $\mathcal{T}^1(G)$ is composed of three elements $[C, 1]$ where C is a chamber, $[\sigma_1, \pi_1]$ where $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1} \simeq \mathrm{GL}_1(k) \times \mathrm{Sp}_4(k)$ and $\pi_1 \simeq 1 \otimes \theta_{10}$, and $[\sigma_2, \pi_2]$ where $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_2} \simeq \mathrm{Sp}_4(k) \times \mathrm{GL}_1(k)$ and $\pi_2 \simeq \theta_{10} \otimes 1$ (we can assume that $\sigma_1 \leq C$ and $\sigma_2 \leq C$). We have already studied the case $d = 1$ and $d = 6$. We are left with $d = 2$, $d = 3$ and $d = 4$.

Let us start with $d = 2$. Let x be a hyperspecial vertex such that $x \leq \sigma_1$. Then $k(\overline{\mathsf{G}}_x, 2) = 5$. Thus $[C, 1]$ and $[\sigma_1, \pi_1]$ are d-1-linked by Proposition 4.2.3.5. In the same way, with the other hyperspecial vertex, we see that $[C, 1]$ and $[\sigma_2, \pi_2]$ are d-1-linked. Thus, Propositions 4.3.0.5 and 4.3.0.4 show that $\mathcal{T}_\ell^1(G)$ is minimal, and $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^1(G)$ is a ℓ-block.

If $d = 4$, we have that $k(\mathrm{Sp}_6(k), 4) = 3$. Thus like for $d = 2$, we have that $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^1(G)$ is a ℓ-block.

Now, let us study the case $d = 3$. Let $\mathfrak{t} = [\sigma_1, \pi_1]$. We want to show that $\{\mathfrak{t}\}$ is ℓ-integral. The only vertices $x \in \mathrm{BT}_0$ such that ℓ divides $|\overline{\mathsf{G}}_x|$ are the hyperspecial vertices. So, let x be an hyperspecial vertex, $x \leq \sigma_1$. We want to prove that $e_{\mathfrak{t},x}$ is ℓ-integral. The idempotent $e_{\mathfrak{t},x}$ is the idempotent that cuts out $\mathcal{E} := \mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1}, \pi_1)}(\overline{\mathsf{G}}_x)$. Proposition 4.2.3.1 tells us that $\mathcal{E}$ is a d-1-series. To prove that $e_{\mathfrak{t},x}$ is ℓ-integral we need to prove that $\mathcal{E}_\ell = \mathcal{E}$.

4.4.4.1 Lemma. *The anisotropic tori of* $\mathrm{Sp}_{2n}(k)$ *are of cardinal* $(q^{r_1} + 1) \cdots (q^{r_u} + 1)$ *with* $r_1 + \cdots + r_u = n$.

Proof. We recall that $W = \mathcal{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$. Let $w = (\pi, (\epsilon_i)) \in W$, if

$$\pi = (i_1, \cdots, i_s)(j_1, \cdots, j_t) \cdots (l_1, \cdots, l_v)$$

is the cycle decomposition of π we write

$$w = (i_1, \cdots, i_s)^{\epsilon_{i_1}\cdots\epsilon_{i_s}}(j_1, \cdots, j_t)^{\epsilon_{j_1}\cdots\epsilon_{j_t}} \cdots (l_1, \cdots, l_v)^{\epsilon_{l_1}\cdots\epsilon_{l_v}}.$$

We use the abbreviation $(i_1, \cdots, i_s)^-$ for $(i_1, \cdots, i_s)^{1,\cdots,1,-1}$ and call it a negative cycle.

The anisotropic tori of G correspond to the $w = (1, \cdots, r_1)^-(r_1+1, \cdots, r_1+r_2)^- \cdots (r_1+\cdots+r_{u-1}+1, \cdots, n)^-$ which are a product of negative cycles only (see section 4 of [Vel77]). Let T be a torus associated to such a w. Then the polynomial order of T is the characteristic polynomial of w which is $(X^{r_1}+1)\cdots(X^{r_u}+1)$, where $r_u = n - r_1 - \cdots - r_{u-1}$. Hence, we have $|\mathsf{T}| = (q^{r_1}+1)\cdots(q^{r_u}+1)$. □

4.4.4.2 Lemma. *There exists a unique, up to conjugacy, Φ_3-torus in* $\mathrm{Sp}_6(k)$.

Proof. Let us start by finding the maximal tori T such that $\ell||\mathsf{T}|$. Let T be such a torus. Either T is anisotropic or T is contained in a Levi L. If T is anisotropic, then by Lemma 4.4.4.1, $|\mathsf{T}| = (q^{r_1}+1)\cdots(q^{r_u}+1)$ with $r_1 + \cdots + r_u = n$. But this is not possible since $\ell|q^{r_i}+1$ would imply that $3|2r_i$, so $r_i = 3$ and we cannot have that $\ell|q^3-1$ and $\ell|q^3+1$. Hence, there exists a Levi L such that $\mathsf{T} \subseteq \mathsf{L}$, and we may assume that T is anisotropic in L. The only Levi subgroup L of $\mathrm{Sp}_6(k)$ such $\ell||\mathsf{L}|$ is $\mathrm{GL}_3(k)$. The group $\mathrm{GL}_3(k)$ contains a unique anisotropic torus T_c, which is the Coxeter torus of cardinal q^2+q+1. Thus $\mathsf{T} = \mathsf{T}_c$. And T_c is the unique, up to conjugacy, Φ_3-torus in $\mathrm{Sp}_6(k)$. □

By Lemma 4.4.4.2 there exists a unique, up to conjugacy, Φ_3-torus T_c in $\mathrm{Sp}_6(k)$, hence a unique proper 3-split Levi subgroup. This 3-split Levi subgroup is the centralizer of T_c which is T_c. Thus, there is only one proper unipotent 3-cuspidal pair $(\mathsf{T}_c, 1)$. Proposition 4.2.3.1 tells us that $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1},\pi_1)}(\overline{\mathsf{G}}_x)$ and $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_C,1)}(\overline{\mathsf{G}}_x)$ are d-1-series. As there is only one proper unipotent 3-cuspidal pair, one of these set contains only 3-cuspidal representations. The symbol $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & \end{pmatrix}$ has a defect of 1 so is in $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_C,1)}(\overline{\mathsf{G}}_x)$ but is not 3-cuspidal by Proposition 4.2.2.1. Thus, all the representations in $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1},\pi_1)}(\overline{\mathsf{G}}_x)$ are 3-cuspidal. Since $\mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}_6(k)) = 1$, it follows that $\mathcal{E}_\ell = \mathcal{E}$ and $e_{\mathfrak{t},x}$ is ℓ-integral. The set $\{[\sigma_1, \pi_1]\}$ defines a ℓ-block that we call $\mathrm{Rep}^{[\sigma_1,\pi_1]}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_6(F))$.

We can do exactly the same with $\mathfrak{t} = [\sigma_2, \pi_2]$ to get $\mathrm{Rep}^{[\sigma_2,\pi_2]}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_6(F))$. Now, $T := \mathcal{T}^1_\ell(G) \setminus \{[\sigma_1, \pi_1], [\sigma_2, \pi_2]\}$ is ℓ-integral and minimal by Corollary 4.3.0.6, thus defines a ℓ-block $\mathrm{Rep}^{[C,1]}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_6(F))$.

4.4.4.3 Proposition. *Assume that $\ell > 3$. Then*

1. *If $\ell \nmid (q^2-1)(q^2+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)$ (i.e. ℓ banal),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_6(F))$ *is a product of 3 ℓ-blocks.*
2. *If $\ell \mid q-1$ (i.e. q is of order 1 mod ℓ),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_6(F))$ *is a product of 3 ℓ-blocks.*
3. *If $\ell \mid q+1$ (i.e. q is of order 2 mod ℓ),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_6(F))$ *is a ℓ-block.*
4. *If $\ell \mid q^2+q+1$ (i.e. q is of order 3 mod ℓ),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_6(F))$ *is a product of 3 ℓ-blocks.*
5. *If $\ell \mid q^2+1$ (i.e. q is of order 4 mod ℓ),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_6(F))$ *is a ℓ-block.*
6. *If $\ell \mid q^2-q+1$ (i.e. q is of order 6 mod ℓ),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_6(F))$ *is a ℓ-block.*

4.4.4.4 Remark. In some of these cases we can easily give a description of $\mathcal{T}^1_\ell(G)$.

1. $\mathcal{T}_\ell^1(G) = \mathcal{T}^1(G) = \{[\sigma_1, \pi_1]\} \sqcup \{[\sigma_2, \pi_2]\} \sqcup \{[C, 1]\}$.
2. $\mathcal{T}_\ell^1(G) = \{[\sigma_1, \theta\pi_1], \theta \in \mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1})\} \sqcup \{[\sigma_2, \theta\pi_2], \theta \in \mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_2})\} \sqcup \{[C, \theta], \theta \in \mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\overline{\mathsf{G}}_C)\}$.
4. The decomposition of $\mathcal{T}_\ell^1(G)$ is given by $\{[\sigma_1, \pi_1]\}$, $\{[\sigma_2, \pi_2]\}$ and the set composed of $[C, 1]$ and the $[\sigma, \pi]$ where $\sigma = [x_1, x_2]$, with x_1 and x_2 the two hyperspecial vertices, $\pi = \mathcal{R}_{\mathsf{T}_3}^{\mathrm{GL}_3(k)}(\theta)$, where T_3 is the Coxeter torus of $\mathrm{GL}_3(k)$ and θ is a non-trivial character of T_3 of order a power of ℓ.
6. $\mathcal{T}_\ell^1(G)$ is composed of $[\sigma_1, \pi_1], [\sigma_2, \pi_2], [C, 1]$ and the $[x, \pi]$ with x is an hyperspecial vertex, $\pi = \mathcal{R}_{\mathsf{T}_c}^{\mathrm{Sp}_6(k)}(\theta)$, where T_c is the Coxeter torus of $\mathrm{Sp}_6(k)$ and θ is a non-trivial character of T_c of order a power of ℓ.

4.4.5 Sp_8

In this section $G = \mathrm{Sp}_8(k)$ and $\ell > 3$. The set $\mathcal{T}^1(G)$ is composed of four elements $[C, 1]$ where C is a chamber, $[\sigma_1, \pi_1]$ where $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1} \simeq \mathrm{GL}_1(k) \times \mathrm{GL}_1(k) \times \mathrm{Sp}_4(k)$ and $\pi_1 \simeq 1 \otimes 1 \otimes \theta_{10}$, $[\sigma_2, \pi_2]$ where $\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_2} \simeq \mathrm{Sp}_4(k) \times \mathrm{GL}_1(k) \times \mathrm{GL}_1(k)$ and $\pi_2 \simeq \theta_{10} \otimes 1 \otimes 1$, and $[x, \pi]$, where $\overline{\mathsf{G}}_x \simeq \mathrm{Sp}_4(k) \times \mathrm{Sp}_4(k)$ and $\pi \simeq \theta_{10} \otimes \theta_{10}$ (we can assume that $x \leq \sigma_1 \leq C$ and $x \leq \sigma_2 \leq C$). We have already studied the case $d = 1$ and $d = 8$. We are left with $d = 2$, $d = 3$, $d = 4$ and $d = 6$.

The cases $d = 2$ and $d = 4$ are similar. In each case, $\ell | |\overline{\mathsf{G}}_x|$ and $k(\mathrm{Sp}_4(k), d) = 3$. So by looking at x, we see that $[C, 1]$ and $[\sigma_1, \pi_1]$, $[C, 1]$ and $[\sigma_2, \pi_2]$, $[x, \pi]$ and $[\sigma_1, \pi_1]$, $[x, \pi]$ and $[\sigma_2, \pi_2]$, are d-1-linked. Hence $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^1(\mathrm{Sp}_8(k))$ is a ℓ-block.

If $d = 6$. Then $\ell \nmid |\overline{\mathsf{G}}_x|$, so $\{[x, \pi]\}$ is ℓ-integral and defines a ℓ-block. Now, if we look at $y \in \mathrm{BT}_0$, an hyperspecial vertex such that $y \leq \sigma_1$. Since $k(\mathrm{Sp}_8(k), 6) = 3$, $[C, 1]$ and $[\sigma_1, \pi_1]$ are d-1-linked. The same reasoning apply to the other hyperspecial vertex show that $[C, 1]$ and $[\sigma_2, \pi_2]$ are also d-1-linked. Propositions 4.3.0.4 and 4.3.0.5 show that $T := \mathcal{T}_\ell^1(G) \setminus \{[x, \pi]\}$ is a minimal ℓ-integral set, hence defines a ℓ-block.

We are left with $d = 3$. Since $\ell \nmid |\overline{\mathsf{G}}_x|$, $\{[x, \pi]\}$ is ℓ-integral and defines a ℓ-block.

Let $\mathfrak{t} = [\sigma_1, \pi_1]$. Since $\ell \nmid |\overline{\mathsf{G}}_x|$, $e_{\mathfrak{t},x}$ is ℓ-integral. Let y be the hyperspecial vertex with $y \leq \sigma_1$. Proposition 4.2.3.1 says that $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1}, \pi_1)}(\overline{\mathsf{G}}_y)$ is a d-1-series. The characters in $\mathrm{Irr}_{(\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1}, \pi_1)}(\overline{\mathsf{G}}_y)$ correspond to the symbols of rank 4 and defect 3, i.e. we have $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ & & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & & & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & & & \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & & & \end{pmatrix}$. All these symbols correspond to 3-cuspidal representations by Proposition 4.2.2.1. Hence, since $\mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\mathrm{Sp}_8(k)) = 1$, Theorem 4.2.1.3 tells us that $e_{\mathfrak{t},y}$ is ℓ-integral. Let $z \in \mathrm{BT}_0$, be the last vertex of σ_1 different from x and y. Remark that $\overline{\mathsf{G}}_z \simeq \mathrm{Sp}_2(k) \times \mathrm{Sp}_6(k)$. In Section 4.4.4 we proved that $\mathrm{Irr}_{(\mathrm{GL}_1(k) \times \mathrm{Sp}_4(k), 1 \otimes \theta_{10})}(\mathrm{Sp}_6(k))$ defines a ℓ-integral idempotent. Moreover $\ell \nmid |\mathrm{Sp}_2(k)|$ so $e_{\mathfrak{t},z}$ is ℓ-integral. The set $\{[\sigma_1, \pi_1]\}$ is thus ℓ-integral and defines a ℓ-block $\mathrm{Rep}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}^{[\sigma_1, \pi_1]}(G)$.

In the same way $[\sigma_2, \pi_2]$ defines a ℓ-block. And $T := \mathcal{T}_\ell^1(G) \setminus \{[\sigma_1, \pi_1], [\sigma_2, \pi_2], [x, \pi]\}$ is a ℓ-integral minimal set so defines also a ℓ-block.

4.4.5.1 Proposition. *Assume that $\ell > 3$. Then*

1. *If* $\ell \nmid (q^2-1)(q^2+1)(q^2+q+1)(q^2-q+1)(q^4+1)$ *(i.e.* ℓ *banal),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_8(F))$ *is a product of 4* ℓ*-blocks.*
2. *If* $\ell \mid q-1$ *(i.e.* q *is of order 1 mod* ℓ*),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_8(F))$ *is a product of 4* ℓ*-blocks.*
3. *If* $\ell \mid q+1$ *(i.e.* q *is of order 2 mod* ℓ*),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_8(F))$ *is a* ℓ*-block.*
4. *If* $\ell \mid q^2+q+1$ *(i.e.* q *is of order 3 mod* ℓ*),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_8(F))$ *is a product of 4* ℓ*-blocks.*
5. *If* $\ell \mid q^2+1$ *(i.e.* q *is of order 4 mod* ℓ*),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_8(F))$ *is a* ℓ*-block.*
6. *If* $\ell \mid q^2-q+1$ *(i.e.* q *is of order 6 mod* ℓ*),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_8(F))$ *is a product of 2* ℓ*-blocks.*
7. *If* $\ell \mid q^4+1$ *(i.e.* q *is of order 8 mod* ℓ*),* $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{Sp}_8(F))$ *is a product of 2* ℓ*-blocks.*

4.4.5.2 Remark. We describe $\mathcal{T}^1_\ell(G)$ in some cases

1. $\mathcal{T}^1_\ell(G) = \mathcal{T}^1(G) = \{[\sigma_1,\pi_1]\} \sqcup \{[\sigma_2,\pi_2]\} \sqcup \{[C,1]\} \sqcup \{[x,\pi]\}$.
2. $\mathcal{T}^1_\ell(G) = \{[\sigma_1,\theta\pi_1], \theta \in \mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_1})\} \sqcup \{[\sigma_2,\theta\pi_2], \theta \in \mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\overline{\mathsf{G}}_{\sigma_2})\} \sqcup \{[C,\theta], \theta \in \mathrm{Ab}_\ell\mathrm{Irr}(\overline{\mathsf{G}}_C)\} \sqcup \{[x,\pi]\}$.
7. The decomposition of $\mathcal{T}^1_\ell(G)$ is given by $\{[x,\pi]\}$ and the set composed of $[C,1]$, $[\sigma_1,\pi_1]$, $[\sigma_2,\pi_2]$ and the $[y,\pi]$ where y is an hyperspecial vertex, $\pi = \mathcal{R}^{\mathrm{Sp}_8(k)}_{\mathsf{T}_c}(\theta)$, where T_c is the Coxeter torus of $\mathrm{Sp}_8(k)$ and θ is a non-trivial character of T_c of order a power of ℓ.

4.4.6 SL_n

When $G = \mathrm{SL}_n$, $\mathcal{T}^1(G)$ is composed of only one element, the conjugacy class of $(C,1)$ where C is a chamber. Hence Theorem 4.1.0.4 tells us that $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Q}}_\ell}(\mathrm{SL}_n(F))$ is a $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-block. We have that ℓ is large for SL_n if and only if $\ell > n$. Therefore, if $\ell > n$, by Corollary 4.3.0.6, $\mathrm{Rep}^1_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(\mathrm{SL}_n(F))$ is a ℓ-block.

Annexe

A Rappels sur le groupe dual

Soient Ω un corps algébriquement clos et $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}'$ deux groupes réductifs définis sur Ω. Prenons $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ un isomorphisme. Choisissons $\mathbf{T}$ un tore maximal de $\mathbf{G}$ et notons $\mathbf{T}' = \varphi(\mathbf{T})$ qui est un tore maximal de $\mathbf{G}'$. On associe à $\mathbf{G}$ et $\mathbf{T}$ une donnée radicielle $\phi(\mathbf{G}, \mathbf{T}) = (X, X^\vee, \phi, \phi^\vee)$ où $X = X^*(\mathbf{T})$ est le groupe des caractères de $\mathbf{T}$, $X^\vee = X_*(\mathbf{T})$ est le groupe des co-caractères, ϕ est l'ensemble des racines et $\phi^\vee$ l'ensemble des co-racines. À partir de $\phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ on forme la donnée radicielle duale $\widehat{\phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})}$ définie par $\widehat{\phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})} = (X^\vee, X, \phi^\vee, \phi)$. D'après [Spr79] théorème 2.9 nous savons qu'il existe un groupe réductif $\widehat{\mathbf{G}}$ et un tore $\widehat{\mathbf{T}}$ tel que $\phi(\widehat{\mathbf{G}}, \widehat{\mathbf{T}}) = \widehat{\phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})}$. De façon analogue il existe $\widehat{\mathbf{G}}'$ et $\widehat{\mathbf{T}}'$ tel que $\phi(\widehat{\mathbf{G}}', \widehat{\mathbf{T}}') = \widehat{\phi(\mathbf{G}', \mathbf{T}')}$.

L'isomorphisme $\varphi : \mathbf{G} \to \mathbf{G}'$ induit un isomorphisme $f(\varphi) : \phi(\mathbf{G}', \mathbf{T}') \to \phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$. Nous avons alors aussi l'isogénie ${}^t f(\varphi) : \widehat{\phi(\mathbf{G}', \mathbf{T}')} \to \widehat{\phi(\mathbf{G}, \mathbf{T})}$, c'est-à-dire ${}^t f(\varphi) : \phi(\widehat{\mathbf{G}}', \widehat{\mathbf{T}}') \to \phi(\widehat{\mathbf{G}}, \widehat{\mathbf{T}})$. Le théorème 2.9 de [Spr79] nous dit également qu'il existe un isomorphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathbf{G}}' \to \widehat{\mathbf{G}}$ qui envoie $\widehat{\mathbf{T}}'$ sur $\widehat{\mathbf{T}}$ et tel que $f(\widehat{\varphi}) = {}^t f(\varphi)$. Ce $\widehat{\varphi}$ n'est pas unique et deux tels $\widehat{\varphi}$ diffèrent par un automorphisme $\mathrm{Int}(\hat{t}')$ où $\hat{t}' \in \widehat{\mathbf{T}}'$.

Nous savons que $\widehat{\mathbf{T}} \simeq X_*(\widehat{\mathbf{T}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^\times = X \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^\times$ et de même $\widehat{\mathbf{T}}' \simeq X' \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^\times$. Par définition de $\widehat{\varphi}$, le morphisme $\widehat{\varphi} : \widehat{\mathbf{T}}' \to \widehat{\mathbf{T}}$ est donné par $f(\varphi) \otimes id : X' \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^\times \to X \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^\times$. Nous avons donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
X' \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^\times \arrow[r] \arrow[d, "f(\varphi)\otimes id"] & \widehat{\mathbf{G}}' \arrow[d, "\widehat{\varphi}"] \\
X \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^\times \arrow[r] & \widehat{\mathbf{G}}
\end{tikzcd}$$

$\widehat{\varphi}$ est défini à conjugaison intérieure près, ainsi si l'on passe aux classes de conjugaison celui ci est bien défini. De plus on sait que $\widehat{\mathbf{G}}_{ss} \simeq (\widehat{\mathbf{T}}/W)$ où W est le groupe de Weyl de $\widehat{\mathbf{G}}$ relativement à $\widehat{\mathbf{T}}$. Ainsi on obtient

A.1 Lemme. *Avec les notations précédentes on a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
(X' \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^\times)/W' \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f(\varphi)\otimes id"] & \widehat{G}'_{ss} \arrow[d, "\widehat{\varphi}_{ss}"] \\
(X \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^\times)/W \arrow[r, "\sim"] & \widehat{G}_{ss}
\end{tikzcd}$$

Si maintenant on prend $\mathbf{G}' = \mathbf{G}$ et $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$. Nous pouvons identifier de manière canonique $\widehat{\mathbf{G}}_{ss}$ et $\widehat{\mathbf{G}}'_{ss}$ de la façon suivante. Il existe un $g \in \mathbf{G}$ tel que $\mathbf{T}' = Ad(g)(\mathbf{T})$. L'automorphisme $Ad(g)$ induit donc un isomorphisme f de X' dans X et un isomorphisme canonique

$$f \otimes id : (X' \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^{\times})/W' \longrightarrow (X \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^{\times})/W$$

(comme on a quotienté par le groupe de Weyl, $f \otimes id$ ne dépend pas du choix de g).

Le lemme A.1 nous fournit un isomorphisme canonique $\widehat{f}_{ss}$ entre $\widehat{\mathbf{G}}_{ss}$ et $\widehat{\mathbf{G}}'_{ss}$. Via cette identification, l'automorphisme φ donne lieu à un isomorphisme $\widehat{\varphi}_{ss} \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbf{G}}_{ss})$. Ce dernier est défini par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^{\times})/W \arrow[rr, "\sim"] \arrow[d, "f(\varphi)\otimes id"] & & \widehat{\mathbf{G}}_{ss} \arrow[d, "\widehat{\varphi}_{ss}"] \\
(X' \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^{\times})/W' \arrow[r, "f\otimes id"] & (X \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^{\times})/W \arrow[r, "\sim"] & \widehat{\mathbf{G}}_{ss}
\end{tikzcd}$$

Il correspond donc à l'automorphisme de X : $f \circ f(\varphi)$. Une autre façon de voir les choses est la suivante :

Fixons un épinglage $(\mathbf{G}, \mathbf{B}, \mathbf{T}, \{u_\alpha\}_{\alpha \in \Delta})$. On a alors une suite exacte scindée

$$\{1\} \longrightarrow \mathrm{Int}(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathbf{G}) \longrightarrow \{1\}$$

L'automorphisme $f \circ f(\varphi)$ correspond à l'image de φ par l'application $\mathrm{Aut}(\mathbf{G}) \longrightarrow \mathrm{Out}(\mathbf{G})$. Son image par $\mathrm{Out}(\mathbf{G}) \to \mathrm{Out}(\widehat{\mathbf{G}})$ est ${}^t(f \circ f(\varphi))$. On peut donc prendre pour $\widehat{\varphi}$ l'image de ${}^t(f \circ f(\varphi))$ par $\mathrm{Out}(\widehat{\mathbf{G}}) \to \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbf{G}})$. L'automorphisme $\widehat{\varphi}_{ss}$ recherché est alors l'application induite par $\widehat{\varphi}$ sur les classes de conjugaison semi-simples.

A.2 Lemme. *On a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^{\times})/W \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f(\varphi)\otimes id"] & \widehat{\boldsymbol{G}}_{ss} \arrow[d, "\widehat{\varphi}_{ss}"] \\
(X' \otimes_{\mathbb{Z}} \Omega^{\times})/W \arrow[r, "\sim"] & \widehat{\boldsymbol{G}}_{ss}
\end{tikzcd}$$

où $\widehat{\varphi}$ est l'image de φ par l'application $\mathrm{Aut}(\boldsymbol{G}) \to \mathrm{Out}(\boldsymbol{G}) \to \mathrm{Out}(\widehat{\boldsymbol{G}}) \to \mathrm{Aut}(\widehat{\boldsymbol{G}})$. *En particulier, si $\varphi \in \mathrm{Int}(\boldsymbol{G})$, $\widehat{\varphi}_{ss} = id$.*

B Rappels sur le Frobenius

Soit G un groupe réductif connexe défini sur k. Une structure sur k donne lieu à un endomorphisme de Frobenius noté $\mathsf{F} : \mathsf{G} \to \mathsf{G}$, tel que les k-points de G soient $\mathsf{G} := \mathsf{G}^{\mathsf{F}} = \mathsf{G}(k)$. Celui-ci est défini de la manière suivante :

Le groupe G possède une k-structure si et seulement si son algèbre des fonctions, que l'on note A, vérifie $A = A_0 \otimes_k \overline{k}$ où A_0 est une k-algèbre. L'endomorphisme de Frobenius $\mathsf{F} : \mathsf{G} \to \mathsf{G}$ est alors défini par son co-morphisme $\mathsf{F}^* \in End(A_0 \otimes_k \overline{k})$ qui a $x \otimes \Lambda$ associe $x^q \otimes \Lambda$.

Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ agit également sur $A_0 \otimes_k \overline{k}$ par $x \otimes \Lambda \mapsto x \otimes \Lambda^q$ et donc induit une action que l'on note τ sur G.

Nous avons besoin de comprendre un peu plus en détail comment ces deux actions agissent lorsque $\mathbf{G} = \mathbf{T}$ est un tore défini sur k. Notons $X = X^*(\mathbf{T}) = Hom(\mathbf{T}, \mathbb{G}_m)$ le groupe des caractères de $\mathbf{T}$. On a $X \simeq Hom_{alg-Hopf}(\overline{k}[t, t^{-1}], A)$ et donc τ et F se prolongent en des actions sur X. Notons τ_X l'action de τ induit sur X.

Soit $\alpha \in X$ et calculons $\tau_X \cdot \mathsf{F} \cdot \alpha$.

$$\begin{array}{cccccccc} \tau_X \cdot \mathsf{F} \cdot \alpha & : & \overline{k}[t, t^{-1}] & \xrightarrow{\alpha} & A_0 \otimes_k \overline{k} & \xrightarrow{\mathsf{F}} & A_0 \otimes_k \overline{k} & \xrightarrow{\tau} & A_0 \otimes_k \overline{k} \\ & & & & x \otimes \Lambda & \mapsto & x^q \otimes \Lambda & \mapsto & x^q \otimes \Lambda^q \end{array}$$

On voit donc que $\tau_X \cdot \mathsf{F} \cdot \alpha = \alpha^q$. Notons ψ l'élévation à la puissance q. Comme $\mathbf{T} \simeq Hom(X, \overline{k}^\times)$, ces actions se transfèrent en des actions sur $\mathbf{T}$. A quoi correspond ψ ? Prenons $u : X \to \overline{k}^\times$ alors

$$\begin{array}{cccccc} \psi \cdot u & : & X & \xrightarrow{\psi} & X & \xrightarrow{u} & \overline{k}^\times \\ & & \alpha & \mapsto & \alpha^q & \mapsto & u(\alpha^q) = u(\alpha)^q \end{array}$$

Donc ψ agit comme l'élévation à la puissance q sur $\mathbf{T}$. Finalement on trouve que l'action de F sur $\mathbf{T}$ est donnée par $\mathsf{F} = \tau_X^{-1} \circ \psi$.

C Cohomologie des groupes p-adiques

Rappelons dans cette annexe, quelques éléments sur la cohomologie des groupes p-adiques dont nous avons besoin dans cet article.

Soit U un groupe muni d'un endomorphisme F tel que tout élément est fixé par une puissance de F. Munissons U de la topologie discrète. Alors le groupe $\hat{\mathbb{Z}}$ des entiers profinis, de générateur topologique F, agit continûment sur U et on note

$$H^1(\mathsf{F}, U) := H^1(\hat{\mathbb{Z}}, U)$$

la cohomologie continue de U.

Pour un entier $d \geq 1$ et un $g \in U$ on note $N_d(g) := g\mathsf{F}(g) \cdots \mathsf{F}^{d-1}(g) \in U$. On peut alors voir les cocycles continus comme les éléments de

$$Z^1(\mathsf{F}, U) := \{u \in U | N_d(u) = 1 \text{ pour un certain } d \geq 1\}.$$

Alors $H^1(\mathsf{F}, U)$ est le quotient de $Z^1(\mathsf{F}, U)$ sous la U-action : $g * u = gu\mathsf{F}(g)^{-1}$.

Dans le cas qui nous intéresse d'un groupe réductif connexe $\mathbf{G}$ non-ramifié nous retrouvons la cohomologie Galoisienne. Notons F l'automorphisme de G^{nr} donné par l'action d'un Frobenius inverse. Alors la surjection naturelle $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)/I_F$ induit un isomorphisme

$$H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \simeq H^1(F, \mathbf{G})$$

(voir par exemple [DR09] section 2.2).

Prenons $\mathbf{T}$ un tore maximal F^{nr}-déployé défini sur F et maximalement déployé dans $\mathbf{G}$. L'appartement $\mathcal{A}$ contient une chambre C F-stable car $\mathbf{T}$ est maximalement déployé. Notons alors $N_C^{nr} := \{n \in N^{nr} | n \cdot C = C\}$ et $\Omega_C := \{w \in \tilde{W} | w \cdot C = C\}$. Notons que

Ω_C est l'image de N_C^{nr} dans $\tilde{W}$ et que comme W^a agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres on a un isomorphisme $\Omega_C \xrightarrow{\sim} \tilde{W}/W^a$.

C.1 Proposition ([DR09] Corollaire 2.4.3)**.** *Les applications $N_C^{nr} \twoheadrightarrow \Omega_C$ et $N_C^{nr} \hookrightarrow G^{nr}$ induisent des isomorphismes sur les $H^1(\mathsf{F}, \cdot)$ et donc un isomorphisme*

$$H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \simeq H^1(\mathsf{F}, \Omega_C).$$

L'isomorphisme $\Omega_C \xrightarrow{\sim} \tilde{W}/W^a$ nous donne donc un isomorphisme $H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \simeq H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)$, valable pour l'instant pour un tore maximalement déployé $\mathbf{T}$.

C.2 Lemme. *Le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathsf{F}, N^{nr}) \arrow[r] \arrow[dr] & H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \arrow[d, "\sim"] \\ & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a) \end{tikzcd}$$

où les flèches provenant de $H^1(\mathsf{F}, N^{nr})$ correspondent aux applications $N^{nr} \hookrightarrow G^{nr}$ et $N^{nr} \twoheadrightarrow \tilde{W}/W^a$.

Démonstration. Soit $[n] \in H^1(\mathsf{F}, N^{nr})$, notons w l'image de n dans $\tilde{W}$ et $\bar{w}$ son image dans $\tilde{W}/W^a$. Montrons que l'application $H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \to H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)$ envoie $[n]$ sur $[\bar{w}]$.

1. Il existe $n' \in N^{nr}$ et $x \in C$ tel que $[n] = [n'] \in H^1(\mathsf{F}, N^{nr})$, $\bar{w} = \bar{w}' \in \tilde{W}/W^a$ et $w'\mathsf{F}(x) = x$, où w' l'image de n' dans $\tilde{W}$ et $\bar{w}'$ son image dans $\tilde{W}/W^a$.

L'élément $w \in Z^1(\mathsf{F}, \tilde{W})$, donc il existe un entier d tel que $N_d(w) = 1$. L'automorphisme F étant également d'ordre fini, $w\mathsf{F} \in \tilde{W} \rtimes < \mathsf{F} >$ est d'ordre fini. Il possède donc un point fixe y dans $\mathcal{A}$: $w\mathsf{F}(y) = y$. Ce point y est contenu dans l'adhérence d'une chambre C' de $\mathcal{A}$. Le groupe W^a agissant transitivement sur l'ensemble des chambres, il existe $v \in W^a$ tel que $vC' = C$. Notons $x = v \cdot y \in C$. Comme $w\mathsf{F}(y) = y$ on a $w\mathsf{F}(v^{-1}x) = v^{-1}x$, c'est-à-dire $vw\mathsf{F}(v)^{-1}\mathsf{F}(x) = x$. Posons alors $w' = vw\mathsf{F}(v)^{-1}$ et $n' = \dot{v}n\mathsf{F}(\dot{v})^{-1}$, où $\dot{v}$ est un relèvement de v dans N^{nr}, qui satisfont alors les conditions souhaitées.

2. Il existe un polysimplexe $\sigma \leq C$ et un $v \in W_\sigma$ tels que $w'\mathsf{F}(\sigma) = \sigma$ et $vw' \in \Omega_C$.

L'action de $w'\mathsf{F}$ sur $\mathcal{A}$ préserve la structure simpliciale, donc il existe une unique facette $\sigma \leq C$ contenant y tel que $w'\mathsf{F}(\sigma) = \sigma$. L'adhérence de la chambre $w'C = w'\mathsf{F}(C)$ contient σ tout comme C donc il existe $v \in W_\sigma$ tel que $v(w'C) = C$ (W_σ agit transitivement sur l'ensemble des chambres dont l'adhérence contient σ).

3. Conclusion

Le groupe $W_\sigma \rtimes \mathsf{F}_{n'}$ (où $\mathsf{F}_{n'} = \mathrm{Ad}(n') \circ \mathsf{F}$) étant fini, on a que $v \in Z^1(\mathsf{F}_{n'}, W_\sigma)$. En particulier on a un relèvement $\dot{v}$ de v dans N tel que $\dot{v} \in Z^1(\mathsf{F}_{n'}, G_\sigma^{\circ,nr})$ (un tel relèvement existe car d'après la proposition 3 de [Tit66] il existe $\dot{W}_\sigma \subseteq N$ un sous-groupe fini de N se projetant sur W_σ). Or d'après [DR09] Lemme 2.3.1, $H^1(\mathsf{F}_{n'}, G_\sigma^{\circ,nr})) = 1$ et donc il existe $g \in G_\sigma^{\circ,nr}$ tel que $\dot{v} = g^{-1}\mathsf{F}_{n'}(g)$. Ainsi $\dot{v}n' = g^{-1}n'\mathsf{F}(g)n'^{-1}n' = g^{-1}n'\mathsf{F}(g)$ de sorte que $[n] = [n'] = [\dot{v}n'] \in H^1(\mathsf{F}, G^{nr})$. Maintenant on sait que $\dot{v}n' \in N_C^{nr}$ et par construction de $H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \to H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)$ on sait qu'un co-cycle à valeur dans N_C^{nr} est envoyé sur son image dans $\tilde{W}/W^a$. Or $\dot{v}n'$ a pour image $\bar{w}$ dans $\tilde{W}/W^a$ ce qui achève la preuve. $\square$

Nous souhaitons étendre les résultats précédents à n'importe quel tore non-ramifié.

Soit donc $\mathbf{T}'$ un tore maximal F^{nr}-déployé défini sur F et N', $\tilde{W}'$,W'^a définis comme avant pour $\mathbf{T}'$. Il existe un $g \in G^{nr}$ tel que $T'^{nr} = {}^gT^{nr}$ et on a alors $g\mathsf{F}(g)^{-1} \in N'^{nr}$. Notons que si $n \in N$ alors $gn\mathsf{F}(g)^{-1} = (gng^{-1})(g\mathsf{F}(g)^{-1}) \in N'^{nr}$. De plus cette application, $n \mapsto gn\mathsf{F}(g)^{-1}$, induit une application sur les $Z^1(\mathsf{F}, \cdot)$ et envoie des cocycles cohomologues sur des cocycles cohomologues, donc induit une bijection $H^1(\mathsf{F}, N^{nr}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathsf{F}, N'^{nr})$ de sorte que

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathsf{F}, N^{nr}) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr] & & H^1(\mathsf{F}, N'^{nr}) \arrow[dl] \\ & H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) & \end{tikzcd}$$

commute.

Notons $w' \in \tilde{W}'$ l'image de $g\mathsf{F}(g)^{-1}$ par $N'^{nr} \twoheadrightarrow \tilde{W}'$. Alors $n \mapsto gn\mathsf{F}(g)^{-1}$ induit une application $\tilde{W} \to \tilde{W}'$, $v \mapsto gv\mathsf{F}(g)^{-1} = (gvg^{-1})w$. Cette application passe au quotient et induit une bijection $\tilde{W}/W^a \xrightarrow{\sim} \tilde{W}'/W'^a$, en effet si $v_1 = v_2v^0$ avec $v_1, v_2 \in \tilde{W}$ et $v^0 \in W^a$, $(gv_1g^{-1})w = (gv_2v^0g^{-1})w = [(gv_2g^{-1})w](w^{-1}gv^0g^{-1}w)$ et comme $gv^0g^{-1} \in W'^a$ qui est normal dans $\tilde{W}'$, $(w^{-1}gv^0g^{-1}w) \in W'^a$. Cette application passe aux cocycles continus et induit une bijection

$$H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}'/W'^a)$$

qui est indépendante du choix de g, et on a par construction le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathsf{F}, N^{nr}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & H^1(\mathsf{F}, N'^{nr}) \arrow[d] \\ H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a) \arrow[r, "\sim"] & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}'/W'^a) \end{tikzcd}$$

On vient donc de construire un isomorphisme, valable pour tout tore maximal non-ramifié $\mathbf{T}'$,

$$H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \simeq H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}'/W'^a)$$

qui vérifie grâce au lemme C.2 la proposition suivante

C.3 Proposition. *On a une bijection $H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}'/W'^a)$ rendant le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} H^1(\mathsf{F}, N'^{nr}) \arrow[r] \arrow[dr] & H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \arrow[d, "\sim"] \\ & H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}'/W'^a) \end{tikzcd}$$

Le résultat précédent étant valable pour tout tore non-ramifié, et pour éviter la multiplication des ' dans les formules, on ne suppose plus que $\mathbf{T}$ est maximalement déployé. Expliquons le lien entre l'isomorphisme $H^1(\mathsf{F}, G^{nr}) \simeq H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)$ et l'isomorphisme de Kottwitz. Notons $X = X_*(\mathbf{T})$. L'évaluation en ϖ, un élément de F de valuation 1, permet d'identifier $\lambda \in X$ avec l'opérateur $t_\lambda \in \tilde{W}$ de translation par λ. Notons $X^a := X \cap W^a$ et $\bar{X} := X/X^a$. Alors l'application $X \to \tilde{W}$, $\lambda \mapsto t_\lambda$ induit un isomorphisme $\bar{X} \xrightarrow{\sim} \tilde{W}/W^a$.

C.4 Lemme ([DR09] Corollaire 2.4.2)**.** *On a un isomorphisme*

$$[\bar{X}/(1-\vartheta)\bar{X}]_{tor} \xrightarrow{\sim} H^1(\mathsf{F}, \tilde{W}/W^a)$$

où la notation $[\cdot]_{tor}$ *désigne les éléments de torsion.*

D'après la section 2.5 de [DR09], on peut identifier $\bar{X} = Hom(Z(\widehat{\mathbf{G}}), \mathbb{C}^\times)$ par restriction des caractères. De plus $\bar{X}/(1-\vartheta)\bar{X} = Hom(Z(\widehat{\mathbf{G}})^{\widehat{\vartheta}}, \mathbb{C}^\times)$ et les éléments de $\bar{X}/(1-\vartheta)\bar{X}$ s'annulant sur la composante identité de $Z(\widehat{\mathbf{G}})^{\widehat{\vartheta}}$ sont exactement les éléments de torsion. D'où une identification

$$[\bar{X}/(1-\vartheta)\bar{X}]_{\mathrm{tor}} = \mathrm{Irr}[\pi_0(Z(\widehat{\mathbf{G}})^{\widehat{\vartheta}})].$$

Nous retrouvons la forme usuelle de l'isomorphisme de Kottwitz.

D Quelques isomorphismes sur les tores et leurs duaux

Dans cette section tous les groupes sont définis sur k. Nous rappelons quelques isomorphismes sur les tores sur k qui nous sont utiles dans cet article. Nous suivons pour cela [CE04] section 8.2.

Soit $\mathbf{T}$ un tore sur k et notons $X(\mathbf{T})$ ses caractères et $Y(\mathbf{T})$ ses co-caractères. On fixe un système compatible de racines de l'unité : $\iota : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'} \xrightarrow{\sim} \overline{k}^\times$ et $\iota' : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ et l'on note

$$\kappa = \iota' \circ \iota^{-1} : \overline{k}^\times \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times.$$

Posons également $D = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'}$. L'application ι permet de définir un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} D & \to & \mathbf{T} \\ \eta \otimes a & \mapsto & \eta(\iota(a)) \end{array}$$

Via cet isomorphisme $\mathbf{T}^{\mathsf{F}}$ peut être décrit comme le noyau de l'endomorphisme $\mathsf{F}-1$ de $Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} D$:

$$1 \longrightarrow \mathbf{T}^{\mathsf{F}} \longrightarrow Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} D \xrightarrow{\mathsf{F}-1} Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} D \longrightarrow 1. \tag{1}$$

Le lemme du serpent appliqué à

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & & \\
 & & \mathbf{T}^{\mathsf{F}} \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Y(\mathbf{T}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{F}-1"] & Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'} \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{F}-1"] & Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} D \arrow[r] \arrow[d, "\mathsf{F}-1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y(\mathbf{T}) \arrow[r] \arrow[d] & Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_{p'} \arrow[r] & Y(\mathbf{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} D \arrow[r] & 0 \\
 & Y(\mathbf{T})/(\mathsf{F}-1)Y(\mathbf{T}) \arrow[d] & & & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

donne un isomorphisme entre $\mathbf{T}^{\mathsf{F}}$ et le conoyau de $(\mathsf{F}-1)$ sur $Y(\mathbf{T})$. De façon plus explicite, si d est un entier tel que F^d se déploie, alors en posant $\zeta = \iota(1/(q^d-1))$ on a

$$1 \longrightarrow Y(\mathbf{T}) \xrightarrow{\mathsf{F}-1} Y(\mathbf{T}) \xrightarrow{N_1} \mathbf{T}^{\mathsf{F}} \longrightarrow 1.$$

où $N_1(\eta) = N_{\mathsf{F}^d/\mathsf{F}}(\eta(\zeta))$.

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, D)$ à (1) on obtient également la suite exacte

$$1 \longrightarrow X(\mathbf{T}) \xrightarrow{\mathsf{F}-1} X(\mathbf{T}) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{\mathsf{F}}) \longrightarrow 1$$

où Res est la restriction de $\mathbf{T}$ à $\mathbf{T}^{\mathsf{F}}$ (composée avec κ).

Prenons maintenant $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe sur k et $\mathbf{T}$ un k-tore maximal de $\mathbf{G}$. Nous pouvons alors leur associer une donnée radicielle $(X, Y, \phi, \phi^\vee)$. L'endomorphisme de Frobenius F agit sur l'ensemble des sous-groupes connexes unipotents 1-dimensionnels de $\mathbf{G}$ qui sont normalisés par $\mathbf{T}$ et donc induit une permutation f de ϕ définie par $F(X_\alpha) = X_{f\alpha}$ pour $\alpha \in X$. Nous avons également une action de F sur X et sa transposé, notée $\mathsf{F}^\vee$, agit sur Y. On obtient alors des données

$$\mathsf{F} : X \to X,\ \mathsf{F}^\vee : Y \to Y,\ q : \phi \to \{p^n\}_{n\in\mathbb{N}},\ f : \phi \to \phi$$

$$\mathsf{F}(f\alpha) = q(\alpha)\alpha,\ \mathsf{F}^\vee(\alpha^\vee) = q(\alpha)(f\alpha)^\vee,\ \alpha \in \phi$$

Réciproquement, si $\mathbf{G}$ définit une donnée radicielle $(X, Y, \phi, \phi^\vee)$ alors n'importe quel quadruplet $(\mathsf{F}, \mathsf{F}^\vee, f, q)$ vérifiant les conditions précédentes peut être réalisé par une isogénie $\mathsf{F} : \mathbf{G} \to \mathbf{G}$.

Prenons maintenant $\mathbf{G}^*$ un dual de $\mathbf{G}$ (autour des tores $\mathbf{T}^*$ et $\mathbf{T}$). Alors $(\mathsf{F}^\vee, \mathsf{F}, f^{-1}, q\circ f^{-1})$ définit un quadruplet qui est réalisé par une isogénie $\mathsf{F}^* : \mathbf{G}^* \to \mathbf{G}^*$. Nous dirons alors que $(\mathbf{G}, \mathsf{F})$ et $(\mathbf{G}^*, \mathsf{F}^*)$ sont en dualités sur k.

La discussion précédente montre que l'on a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{T}^*)^{\mathsf{F}^*} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Irr}(\mathbf{T}^{\mathsf{F}}) \\ s & \mapsto & \theta \end{array}$$

où θ et s sont reliés par la relation (quel que soit $\eta \in Y(\mathbf{T}) = X(\mathbf{T}^*)$)

$$\theta(N_{\mathsf{F}^d/\mathsf{F}}(\eta(\zeta))) = \kappa(\eta(s)).$$

Cette bijection est donnée à partir d'un choix des tores $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}^*$ mais peut devenir indépendant du choix du tore de la façon suivante

D.1 Proposition ([CE04] Proposition 8.21)**.** *L'application précédente fournit une bijection entre les classes de $\boldsymbol{G}^{\mathsf{F}}$-conjugaison de paires $(\boldsymbol{T}, \theta)$, où $\theta \in \mathrm{Irr}(\boldsymbol{T}^{\mathsf{F}})$, et les classes de $(\boldsymbol{G}^*)^{\mathsf{F}^*}$-conjugaison de paires $(\boldsymbol{T}^*, s)$, où $s \in (\boldsymbol{T}^*)^{\mathsf{F}^*}$.*

Notons que l'on peut réinterpréter cette bijection de la façon suivante. Fixons $\mathbf{S}$ et $\mathbf{S}^*$ deux tores maximaux F-stables en dualités sur k, qui serviront de tores de référence. Prenons une paire $(\mathbf{T}, \theta)$. Il existe alors $g \in \mathbf{G}$ tel que $\mathbf{T} = {}^g\mathbf{S}$. Comme $\mathbf{T}$ et $\mathbf{S}$ sont F-stables, l'élément $g^{-1}\mathsf{F}g$ normalise $\mathbf{S}$ et l'on note w son image dans W. Définissons également $\theta_w := g^{-1}\theta \in \mathrm{Irr}(\mathbf{S}^{w\mathsf{F}})$. La paire (w, θ_w) est bien définie à F-conjugaison près et sa classe de F-conjugaison caractérise la classe de $\mathbf{G}^{\mathsf{F}}$-conjugaison de $(\mathbf{T}, \theta)$.

Soit $t_w \in (\mathbf{S}^*)^{w\mathsf{F}^*}$ image de θ_w par la bijection $\mathrm{Irr}(\mathbf{S}^{w\mathsf{F}}) \xrightarrow{\sim} (\mathbf{S}^*)^{w\mathsf{F}^*}$. Identifions W au groupe de Weyl de $\mathbf{G}^*$ relatif à $\mathbf{S}^*$. Prenons maintenant $g^* \in \mathbf{G}^*$ tel que $(g^*)^{-1}\mathsf{F}(g^*)$ soit un relèvement de w (g^* existe bien par surjectivité de l'application de Lang). Définissons $(\mathbf{T}^*, s)$ par $(\mathbf{T}^*, s) := ({}^{g^*}\mathbf{S}^*, \mathrm{Ad}(g^*)(t_w))$. Alors la classe de conjugaison de la paire $(\mathbf{T}^*, s)$ est celle en dualité avec la classe de $(\mathbf{T}, \theta)$ comme dans la proposition D.1.

Bibliographie

[Art13] James Arthur, *The endoscopic classification of representations*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 61, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013, Orthogonal and symplectic groups. MR 3135650

[Ber84] J. N. Bernstein, *Le "centre" de Bernstein*, Representations of reductive groups over a local field, Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984, Edited by P. Deligne, pp. 1–32. MR 771671

[BMM93] Michel Broué, Gunter Malle, and Jean Michel, *Generic blocks of finite reductive groups*, Astérisque (1993), no. 212, 7–92, Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis. MR 1235832

[Bor79] A. Borel, *Automorphic L-functions*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 27–61. MR 546608

[Bou81] Nicolas Bourbaki, *éléments de mathématique*, Masson, Paris, 1981, Groupes et algèbres de Lie. Chapitres 4, 5 et 6. [Lie groups and Lie algebras. Chapters 4, 5 and 6]. MR 647314

[BR03] Cédric Bonnafé and Raphaël Rouquier, *Catégories dérivées et variétés de Deligne-Lusztig*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2003), no. 97, 1–59. MR 2010739 (2004i :20079)

[BT84] F. Bruhat and J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. II. Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1984), no. 60, 197–376. MR 756316 (86c :20042)

[Car93] R.W. Carter, *Finite groups of lie type : Conjugacy classes and complex characters*, Wiley Classics Library, Wiley, 1993.

[CE99] Marc Cabanes and Michel Enguehard, *On blocks of finite reductive groups and twisted induction*, Adv. Math. **145** (1999), no. 2, 189–229. MR 1704575

[CE04] ———, *Representation theory of finite reductive groups*, New Mathematical Monographs, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. MR 2057756 (2005g :20067)

[Chi17] G. Chinello, *Blocks of the category of smooth ℓ-modular representations of $GL(n, F)$ and its inner forms : reduction to level*-0, ArXiv e-prints (2017).

[Dat05] J.-F. Dat, *v-tempered representations of p-adic groups. I. l-adic case*, Duke Math. J. **126** (2005), no. 3, 397–469. MR 2120114

[Dat09] Jean-François Dat, *Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques*, J. Inst. Math. Jussieu **8** (2009), no. 2, 261–333. MR 2485794

[Dat17] Jean-François Dat, *A functoriality principle for blocks of p-adic linear groups*, Around Langlands correspondences, Contemp. Math., vol. 691, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, pp. 103–131. MR 3666052

[Dat18a] ———, *Equivalences of tame blocks for p-adic linear groups*, Math. Ann. **371** (2018), no. 1-2, 565–613. MR 3788858

[Dat18b] ———, *Simple subquotients of big parabolically induced representations of p-adic groups*, J. Algebra **510** (2018), 499–507. MR 3828793

[DeB06] Stephen DeBacker, *Parameterizing conjugacy classes of maximal unramified tori via Bruhat-Tits theory*, Michigan Math. J. **54** (2006), no. 1, 157–178. MR 2214792

[DL76] P. Deligne and G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Annals of Mathematics **103** (1976), no. 1, 103–161.

[DM94] François Digne and Jean Michel, *Groupes réductifs non connexes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27** (1994), no. 3, 345–406. MR 1272294

[DR09] Stephen DeBacker and Mark Reeder, *Depth-zero supercuspidal L-packets and their stability*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), no. 3, 795–901. MR 2480618

[Dud18] Olivier Dudas, *Appendix : non-uniqueness of supercuspidal support for finite reductive groups*, J. Algebra **510** (2018), 508–512. MR 3828794

[Hai14] Thomas J. Haines, *The stable Bernstein center and test functions for Shimura varieties*, Automorphic forms and Galois representations. Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 415, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2014, pp. 118–186. MR 3444233

[Hel16] David Helm, *The Bernstein center of the category of smooth $W(k)[\mathrm{GL}_n(F)]$-modules*, Forum Math. Sigma **4** (2016), e11, 98. MR 3508741

[Hen00] Guy Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* $\mathrm{GL}(n)$ *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), no. 2, 439–455. MR 1738446

[HT01] Michael Harris and Richard Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich. MR 1876802

[Kal16] T. Kaletha, *Regular supercuspidal representations*, ArXiv e-prints (2016).

[KMSW14] T. Kaletha, A. Minguez, S. W. Shin, and P.-J. White, *Endoscopic Classification of Representations : Inner Forms of Unitary Groups*, ArXiv e-prints (2014).

[Lat17] Peter Latham, *The unicity of types for depth-zero supercuspidal representations*, Represent. Theory **21** (2017), 590–610. MR 3735454

[LS16] J. Lust and S. Stevens, *On depth zero L-packets for classical groups*, ArXiv e-prints (2016).

[Lus77] G. Lusztig, *Irreducible representations of finite classical groups*, Invent. Math. **43** (1977), no. 2, 125–175. MR 0463275

[Lus84] George Lusztig, *Characters of reductive groups over a finite field*, Annals of Mathematics Studies, vol. 107, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1984. MR 742472

[Lus02] G. Lusztig, *Classification of unipotent representations of simple p-adic groups. II*, Represent. Theory **6** (2002), 243–289. MR 1927955

[Moe14] Colette Moeglin, *Paquets stables des séries discrètes accessibles par endoscopie tordue ; leur paramètre de Langlands*, Automorphic forms and related geometry : assessing the legacy of I. I. Piatetski-Shapiro, Contemp. Math., vol. 614, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014, pp. 295–336. MR 3220932

[Mok15] Chung Pang Mok, *Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **235** (2015), no. 1108, vi+248. MR 3338302

[Mor99] Lawrence Morris, *Level zero* **G**-*types*, Compositio Math. **118** (1999), no. 2, 135–157. MR 1713308

[Mou15] A. Moussaoui, *Centre de Bernstein enrichi pour les groupes classiques*, ArXiv e-prints (2015).

[Mou16] ———, *Proof of the Aubert-Baum-Plymen-Solleveld conjecture for split classical groups*, ArXiv e-prints (2016).

[MP96] Allen Moy and Gopal Prasad, *Jacquet functors and unrefined minimal k-types*, Commentarii Mathematici Helvetici **71** (1996), no. 1, 98–121.

[MS10] Ralf Meyer and Maarten Solleveld, *Resolutions for representations of reductive p-adic groups via their buildings*, J. Reine Angew. Math. **647** (2010), 115–150. MR 2729360 (2011m :22031)

[Sil80] Allan J. Silberger, *Special representations of reductive p-adic groups are not integrable*, Annals of Mathematics **111** (1980), no. 3, 571–587.

[Spr74] T. A. Springer, *Regular elements of finite reflection groups*, Invent. Math. **25** (1974), 159–198. MR 0354894

[Spr79] ———, *Reductive groups*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 3–27. MR 546587

[SS16] Vincent Sécherre and Shaun Stevens, *Block decomposition of the category of ℓ-modular smooth representations of* $\mathrm{GL}_n(\mathrm{F})$ *and its inner forms*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **49** (2016), no. 3, 669–709. MR 3503829

[Ste68] Robert Steinberg, *Endomorphisms of linear algebraic groups*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 80, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968. MR 0230728

[Tit66] J. Tits, *Sur les constantes de structure et le théorème d'existence des algèbres de Lie semi-simples*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1966), no. 31, 21–58. MR 0214638

[Tit79] Jacques Tits, *Reductive groups over local fields*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 29–69. MR 546588 (80h :20064)

[Vel77] F. D. Veldkamp, *Regular elements in anisotropic tori*, 389–424. MR 0463326

[Vig96] Marie-France Vignéras, *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996. MR 1395151

[Vig98] ———, *Induced R-representations of p-adic reductive groups*, Selecta Math. (N.S.) **4** (1998), no. 4, 549–623. MR 1668044

[Wan17] Haoran Wang, *L'espace symétrique de Drinfeld et correspondance de Langlands locale II*, Math. Ann. **369** (2017), no. 3-4, 1081–1130. MR 3713536