



HAL
open science

Simulation numérique des phénomènes d'écoulement et de transport de masse en milieu poreux

Loïc Dijoux

► **To cite this version:**

Loïc Dijoux. Simulation numérique des phénomènes d'écoulement et de transport de masse en milieu poreux. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de la Réunion, 2019. Français. NNT : 2019LARE0033 . tel-02468117

HAL Id: tel-02468117

<https://theses.hal.science/tel-02468117>

Submitted on 5 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université de La Réunion



UFR SHE - Sciences de l'Homme et de l' Environnement ED STS - École doctorale "Sciences, Technologies et Santé"

Simulation numérique des phénomènes d'écoulement et de transport de masse en milieu poreux

Thèse

présentée et soutenue publiquement par

Loïc DIJOUX

pour l'obtention du grade de Docteur

Spécialité : Mécanique des fluides

Composition du jury :

Directeurs de thèse :	Alain BASTIDE	Université de La Réunion
	Vincent FONTAINE	Université de La Réunion
Rapporteurs :	Philippe ACKERER	Université de Strasbourg
	Hussein HOTEIT	Kaust University
Examineurs :	Khalid ADDI	Université de La Réunion
	Kamal EL OMARI	Université de Pau et des Pays de l'Adour

La Réunion, Décembre 2019



Résumé

Cette thèse est consacrée à la résolution numérique de l'écoulement et du transport de masse en milieu poreux hétérogène et anisotrope par les méthodes Hybrides de Galerkin Discontinues (HDG). Ces nouvelles méthodes présentent de nombreux avantages : en effet, elles sont éligibles à la condensation statique, elles permettent un traitement efficace et robuste des termes de convection, de l'anisotropie ou de l'hétérogénéité et elles utilisent globalement moins d'inconnue que certaines méthodes $H(\text{div})$ -conformes. Nous présenterons dans ce travail une variante HDG multiplicative et une autre projective pour le problème d'écoulement. L'originalité de ces variantes repose sur l'utilisation couplée (i) de fonctions de forme de Raviart–Thomas pour l'approximation du champ des vitesses de Darcy et (ii) d'opérateur de projection spécifique dans la définition des termes de stabilisation. Cette combinaison judicieuse permet de garantir une convergence sub-optimale de la variable d'état sans post-traitement et une reconstruction $H(\text{div})$ -conforme simplifiée de la variable duale. De nombreuses expériences numériques sont alors présentées afin d'étudier la robustesse, la stabilité et la convergence de la méthode pour une large gamme de variation du nombre de Peclet.

Mots-clés : Milieu poreux, écoulement, transport de masse, méthodes hybrides de Galerkin discontinues, fonctions de stabilisation, technique de post-traitement.

Abstract

This thesis focuses on the numerical modelling of flow and mass transport in heterogeneous and anisotropic porous media by Hybrid Discontinuous Galerkin (HDG) methods. The new class of HDG methods has many advantages. They are eligible for the static condensation technique, allow an efficient and robust treatment of convection terms, anisotropy or heterogeneity, and use fewer degrees of freedom than standard $H(\text{div})$ -conforming methods. In this work, we will present a multiplicative HDG variant and a projective HDG variant for the flow problem. The originality of our variant is based on the coupled use of (i) Raviart-Thomas shape functions for approximating the Darcy velocity field and (ii) a specific projection operator in the definition of the stabilization functions. This sophisticated combination ensures a sub-optimal convergence of the state variable without any post-processing and a simplified $H(\text{div})$ -conforming reconstruction of the dual variable. Numerous numerical experiments are then presented to study the robustness, stability and convergence of the proposed method for a wide range of Peclet's number.

Keywords : Porous media, flow, mass transport, hybrid discontinuous Galerkin methods, stabilization functions, post-processing techniques.

Remerciements

Je tiens à exprimer mes remerciements à mon encadrant de thèse, Monsieur Vincent FONTAINE, sans qui je n'aurais pas pu réaliser cette thèse. Il a su être présent et patient envers moi durant ces trois années malgré les moments difficiles.

Mes remerciements vont ensuite à mon directeur de thèse, Monsieur Alain BASTIDE. Il a su m'apporter un soutien précieux aux différentes étapes importantes de ma thèse.

Je remercie également mes collègues doctorants qui ont apporté leur joie et leur bonne humeur aux différents moments de cette aventure de trois années.

Merci également à Laetitia ADELARD qui m'a un jour proposé de m'engager dans une formation scientifique sur le campus du Tampon, qui m'a présenté à mon actuel encadrant de thèse dans le cadre d'un stage de Master et qui, par conséquent, a été celle qui m'a orienté vers cette thèse.

Je remercie tout spécialement ma famille qui m'a soutenu et encouragé tout au long de mes études. Je les remercie d'avoir cru en moi et de m'avoir permis de réaliser ce long parcours.

Enfin, d'une façon toute particulière, je tiens à remercier celle qui m'a apporté son soutien, sa patience et son amour, ma femme, Elodie DIJOUX. Merci de m'avoir aidé à être persévérant et à m'améliorer chaque jour.

Table des matières

1	Introduction générale	1
1.1	Cadre Général	1
1.2	Verrous scientifiques	2
1.3	Plan du manuscrit	3
2	Physique des transferts de masse en milieu poreux	5
2.1	Introduction	6
2.2	Le milieu poreux	7
2.3	Hydrodynamique en milieux poreux	9
2.3.1	Description à l'échelle microscopique	9
2.3.2	Description à l'échelle macroscopique	10
2.4	Transport de soluté	13
2.4.1	La convection	13
2.4.2	La dispersion	13
2.4.3	Adsorption linéaire instantanée	14
2.4.4	L'équation de convection–dispersion–réaction	15
2.5	Modèle générique de loi de conservation	16
2.5.1	Modèle mathématique générique à l'état stationnaire	16
2.5.2	Conditions aux limites	17
2.5.3	Continuité du flux et conservation de la masse	18
2.5.4	Méthodes de résolution numérique	19
2.6	Conclusion	22
3	Les méthodes mixtes de Galerkin	25
3.1	Introduction	25

3.2	Quelques notations utiles	27
3.2.1	La partition du domaine	27
3.2.2	Opérateurs traces	28
3.2.3	Espaces polynomiaux discrets	28
3.3	Les éléments finis mixtes $H(\text{div})$ -conformes	29
3.3.1	Formulation faible continue et discrète	29
3.3.2	Le système linéaire et les principales difficultés	31
3.3.3	Passage à l'élément de référence	33
3.4	Les éléments finis discontinus de Galerkin	36
3.4.1	Description générale de la méthode	36
3.4.2	Méthode LDG	38
3.4.3	Convergence du flux et expression complète des traces	40
3.5	Conclusion	41
4	Les méthodes mixtes hybrides de Galerkin	43
4.1	Introduction	44
4.2	Description générale de la méthode	44
4.3	Implémentation du solveur local	47
4.4	Formulation globale	48
4.5	Influence du facteur de stabilisation sur les expressions des traces	51
4.6	Post-processing	52
4.6.1	Post-processing du flux	52
4.6.2	Post-processing de la variable d'état	52
4.7	Exemples numériques	53
4.7.1	Diffusion isotrope	53
4.7.2	Diffusion anisotrope	55
4.8	Proposition : sur-stabilisation de la méthode H-RT	56
4.9	Évaluation de la méthode H-RT ^m dans le cadre de l'équation de diffusion/dispersion-convection	58
4.10	Conclusion	63
5	A projective hybridizable discontinuous Galerkin mixed method for second-order diffusion problems	65

5.1	Introduction	65
5.2	Conclusion	81
6	Conclusion générale et perspectives	83
6.1	Résumé succinct des chapitres	84
6.2	Perspectives	85
A	Fonctions d'interpolation à ordre élevé	87
A.1	Élément de référence	87
A.1.1	Fonctions de bord	88
A.1.2	Fonctions scalaires dans l'élément de référence	89
A.1.3	Fonctions vectorielles d'interpolation pour la méthode HdG	90
A.1.4	Fonctions vectorielles d'interpolation pour les méthodes H-RT, H-RT ^m et H-RT ^p	90
A.1.5	Remarques	91

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 Cadre Général

L'objet de ces travaux de thèse concerne la résolution numérique de l'équation d'advection-diffusion-réaction (ADR) par la classe des méthodes de Galerkin Discontinues Hybrides (HDG). Cette équation trouve des applications dans divers domaines des sciences et de l'ingénierie [30, 44, 22, 63] et permet de modéliser, entre autres, les transferts thermiques [14, 67], les écoulements de fluides [27, 12] ou encore le transport de polluant dans un milieu poreux [13, 37]. Ces deux derniers phénomènes physiques, souvent rattachés à des problématiques environnementales, sont ceux qui ont le plus inspiré les travaux présentés dans ce manuscrit de thèse. Ils permettent d'explicitier divers mécanismes physiques liés soit à la dégradation des ressources en eau potable due à la présence d'un environnement urbain non assaini [68] ou à la contamination marine des nappes phréatiques côtières [73].

Bien que les Équations aux Dérivées Partielles (EDPs) régissant l'écoulement d'un fluide ou le transport de masse en milieu poreux soient connues depuis de nombreuses années [13, 12, 27], la détermination de solutions analytiques à ces EDPs reste, à ce jour, une difficulté théorique insurmontable (à part pour quelques cas d'étude très simples). Aussi, afin de répondre à cet objectif, le recours à la simulation numérique, bien qu'incomplète, apparaît alors comme une alternative raisonnable permettant malgré tout, d'affiner notre compréhension des processus physiques mis en jeu [18]. De plus, cette approche permet de s'affranchir des contraintes (i) spatiale (l'étendue du domaine d'étude) et (ii) temporelle (la prédiction à long terme) des modèles étudiés. Cependant, la simulation numérique des

transferts couplés de masse et d'énergie sur de grandes échelles de temps et d'espace soulève de nombreuses difficultés d'ordre numérique voir informatique, nécessitant *à priori* une réflexion sur le choix et la conception de méthodes de discrétisation appropriées. Le travail présenté dans ce manuscrit s'inscrit dans cette perspective et vise à présenter une nouvelle classe de méthode de discrétisation performante pour la simulation numérique des écoulements et du transport de polluant en milieu poreux saturé.

1.2 Verrous scientifiques

Les équations qui régissent ces transferts de masse dans les milieux poreux sont généralement l'expression de *lois de conservation* sous une forme locale. Elles établissent une relation mathématique entre la variation temporelle de la masse de fluide étudiée et sa variation spatiale. Ainsi, cette grandeur doit se conserver globalement sur l'ensemble du domaine d'étude mais aussi localement sur toute sous-partie de celui-ci (d'où la terminologie employée). Les méthodes de discrétisation employées pour résoudre ces lois de conservation sont tributaires de leur nature mathématique (voir [69, 66, 58]). A titre d'exemple, l'équation qui régit le transport de soluté dans les couches souterraines est une équation du type ADR faisant intervenir un terme de diffusion-dispersion, un terme de convection et un terme de réaction. Selon la prédominance du terme de diffusion par rapport au terme de convection dans une ou plusieurs directions de l'espace, cette équation peut être elliptique (tenseurs de diffusion symétrique et défini positif) ou tendre à être hyperbolique (l'une des valeurs propres du tenseur de diffusion tend à être nulle). Les principales difficultés sont alors liées aux tenseurs de diffusion semi définis ou tendant à l'être (ce dernier devant être inversible). Cet aspect constitue le point central des présents travaux de thèse et sera étudié à travers différents exemples numériques.

Les équations elliptiques et hyperboliques présentent des caractéristiques mathématiques fondamentalement différentes. De nombreux articles scientifiques proposent alors des méthodes permettant de résoudre soit l'une, soit l'autre, soit ces deux types d'équation simultanément (voir [44, 30, 60]). Ces équations peuvent être rencontrées dans un même cas d'étude suite à une forte hétérogénéité du milieu étudié (diffusion pure et convection pure à l'interface de deux domaines d'étude) ou lorsque l'écoulement est fortement anisotrope (variation des propriétés de diffusion selon les différentes directions de l'espace). C'est pour ces raisons que

les méthodes de résolution numérique doivent pouvoir représenter simultanément ces deux types d'équation tout en restant stables et en conservant des ordres de convergence optimaux. Cette particularité constitue alors l'un des verrous scientifiques de ces travaux de thèse.

Une autre difficulté d'ordre purement numérique et constituant la principale critique communément faite aux méthodes d'approximation numérique, est le temps de calcul nécessaire à l'obtention d'une solution approchée optimale d'un problème donné (voir [50, 20, 72]). Cette contrainte dépend de plusieurs paramètres, propres à chaque méthode de discrétisation. Un des défis majeurs de ce travail sera alors de proposer une méthode de résolution numérique offrant le meilleur compromis en termes de temps de calcul mais aussi de précision.

1.3 Plan du manuscrit

Ce manuscrit de thèse se décline en quatre principaux chapitres, le dernier étant un article de recherche publié chez *Elsevier* dans le journal international *Applied Mathematical Modelling (A2M)*.

Le **premier chapitre** pose le cadre physique général de notre étude, à savoir celui des transferts de masse en milieu poreux. Pour cela, nous commencerons par rappeler brièvement quelques définitions élémentaires relatives à la notion de milieu poreux, telles que la porosité ou encore la perméabilité. Nous établirons par la suite les équations aux dérivées partielles qui régissent l'hydrodynamique d'une nappe d'eau souterraine et le transport de matière dissoute en zone saturée. Nous rappellerons succinctement quelques propriétés importantes de ces systèmes de lois de conservation, comme par exemple la conservation à l'échelle locale et globale des grandeurs ou encore la continuité des flux.

Dans le **deuxième chapitre**, les méthodes d'éléments finis mixtes $H(\text{div})$ -conformes et d'éléments finis mixtes discontinus de Galerkin (dG) seront exposées dans le cadre de l'équation de diffusion. La première utilise une approximation $\mathcal{H}(\text{div})$ de la variable duale, permettant d'assurer la continuité de la composante normale de cette variable dans un domaine Ω [59, 16]. De plus, elle offre une précision équivalente des variables primale et duale. Néanmoins, cette formulation soulève de nombreuses difficultés liées au système à résoudre (structure point selle, matrice indéfinie). La méthode mixte dG permet,

quant à elle, de contourner ces difficultés en relaxant la contrainte de continuité sur la variable duale (approximation polynomiale par morceau) et en introduisant le concept de trace.

Le troisième chapitre mettra en avant la technique d'hybridation, appliquée aux éléments finis mixtes et aux éléments finis mixtes discontinus dans le cadre de la diffusion-convection-réaction. Elle permet de relaxer la contrainte de continuité de la composante normale du champ des vitesses en imposant une condition de transmission. La notion de solveur local alors introduite permet d'éliminer les inconnues de la variable d'état et du champ des vitesses, en les exprimant à travers une nouvelle variable appelée "trace de la variable d'état". La technique d'hybridation a le grand mérite d'éviter la problématique du point-selle tout en conservant des ordres de convergence optimaux sur le champ des vitesses et la variable d'état. Une série d'exemples numériques permettra alors d'évaluer cette méthode en termes d'ordre de convergence et de temps de calcul. Par la suite, une nouvelle méthode de résolution numérique sera mise en avant. Elle répondra aux difficultés liées à la prise en compte de l'anisotropie par les méthodes mixtes hybrides et améliorera la qualité de l'approximation obtenue par les méthodes hybrides discontinues.

La suite de ce manuscrit de thèse sera composée d'un article scientifique publié dans la revue "Applied Mathematical Modeling". Une nouvelle variante des méthodes d'éléments finis hybrides mixtes sera ainsi présentée dans **le quatrième chapitre**. Elle sera fondée sur une forme projective de la fonction de stabilisation introduite pour la résolution des problèmes elliptiques [44]. Des exemples numériques permettront alors de justifier les différentes orientations prises lors de l'élaboration de cette nouvelle variante.

Ce manuscrit de thèse se conclura par une brève analyse du travail effectué durant ces trois années de thèse. Différentes perspectives seront alors mises en avant.

Chapitre 2

Physique des transferts de masse en milieu poreux

Sommaire

2.1	Introduction	6
2.2	Le milieu poreux	7
2.3	Hydrodynamique en milieux poreux	9
2.3.1	Description à l'échelle microscopique	9
2.3.2	Description à l'échelle macroscopique	10
2.4	Transport de soluté	13
2.4.1	La convection	13
2.4.2	La dispersion	13
2.4.3	Adsorption linéaire instantanée	14
2.4.4	L'équation de convection–dispersion–réaction	15
2.5	Modèle générique de loi de conservation	16
2.5.1	Modèle mathématique générique à l'état stationnaire	16
2.5.2	Conditions aux limites	17
2.5.3	Continuité du flux et conservation de la masse	18
2.5.4	Méthodes de résolution numérique	19
2.6	Conclusion	22

2.1 Introduction

Les transferts de masse en milieu poreux interviennent dans différents domaines de la physique tels que l'hydrogéologie, l'exploitation des sources de pétrole ou bien l'exploitation des sources de gaz (voir [12]). Aussi, ces différents domaines peuvent être résumés par l'étude des transferts de masse au sein des aquifères. Ces derniers sont définis comme étant des formations géologiques pouvant contenir de l'eau et permettre son écoulement. Ils sont présents sous deux formes différentes [12] :

- l'aquifère poreux : le stockage et l'écoulement des eaux sont assurés par les pores des roches,
- l'aquifère fissuré : le stockage et l'écoulement des eaux sont assurés par les fissures et failles présentes dans les roches.

L'écoulement dans ces deux types d'aquifère, lorsqu'ils sont saturés en eau, peut être modélisé à travers les équations de Darcy et de conservation de la masse afin de décrire l'évolution des masses d'eau sous différentes conditions de pression. Ce cas fera l'objet d'une étude plus étendue dans la suite de ce chapitre.

Plusieurs phénomènes physico-chimiques peuvent aussi avoir lieu dans l'aquifère. Le transport de matière dissoute par l'eau circulant en son sein en fait partie. Aussi, un exemple concret de ce phénomène est le biseau salé. Il intervient dans les aquifères phréatiques ou confinés côtiers et résulte d'un contact direct entre l'eau douce stockée dans l'aquifère et l'eau salée provenant de la mer. Sous l'effet d'un contraste de masse volumique, l'eau salée étant plus lourde que l'eau douce, une zone de mélange se crée et sépare ainsi ces deux entités (voir [13]). Un schéma simplifié de ce phénomène est présenté à la figure 2.1.

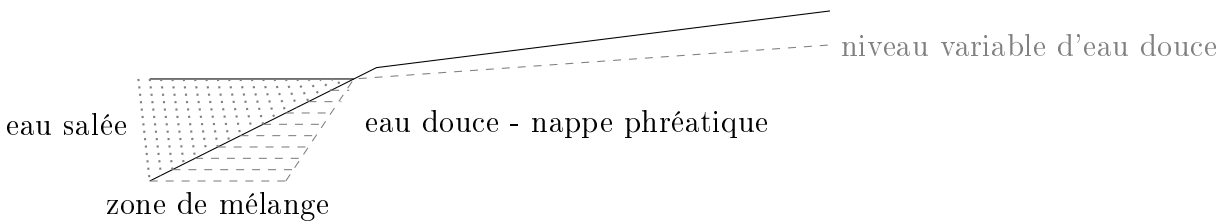


FIGURE 2.1 – Schéma simplifié du biseau salé

Le phénomène de biseau salé (ou d'intrusion saline) est un facteur limitant important dans l'exploitation des nappes phréatiques côtières, notamment à l'île de la Réunion (voir [37]). En effet, l'épaisseur de la zone de mélange dépendant d'un cycle naturel lié aux évène-

ments climatiques (voir [13, 73]), peut aussi être influencée par le pompage d'eau douce dans l'aquifère (voir [37]).

Bien que l'existence du biseau salé ne fasse aucun doute, l'évolution dans le temps de celui-ci reste difficile à quantifier et à prévoir. Les approches hydrodynamiques (voir [39]), géophysiques (ex : sondage électrique [37]) ou géochimiques (voir [37]) permettent de rendre compte de la configuration du biseau salé à l'instant même où les mesures ont été effectuées. Cependant, afin de prévoir son évolution dans le temps, l'approche numérique par modélisation hydrodynamique paraît être la plus appropriée et permet d'envisager différents scénarii. Elle permet aussi de prendre en compte plus aisément les hétérogénéités présentes dans la composition de l'aquifère (voir [37]).

Ce chapitre propose donc de décrire succinctement l'ensemble des phénomènes physiques évoqués précédemment. Ils seront dans un premier temps décrits au cas par cas et seront par la suite étudiés sous une forme mathématique généralisée offrant plus de souplesse dans leurs représentations. L'approche numérique étant privilégiée dans les études présentées dans ce manuscrit de thèse, elle sera ainsi décrite et développée afin de justifier des orientations méthodologiques prises.

La première et la plus importante des définitions, servant de base au travail ici présenté, est celle du milieu poreux.

2.2 Le milieu poreux

Un milieu poreux est constitué d'un volume de vide et d'une matrice solide. La matrice solide représente l'ensemble de la matière solide formant un squelette autour des volumes de vide appelés *pores*. Ces volumes de vide ont la capacité de contenir un fluide et peuvent, selon leurs configurations, permettre son écoulement. Une représentation par micro-tomographie à rayon X d'un milieu poreux est donnée à la figure (2.2).

Le milieu poreux peut être représenté à différentes échelles définies par différents volumes élémentaires représentatifs (VER) de sols étudiés. Deux catégories d'échelles existent alors, à savoir l'échelle microscopique (visible à l'aide d'un microscope) et l'échelle macroscopique (visible à l'oeil nu). Une grandeur fortement dépendante de l'échelle de représentation du milieu poreux est la porosité. Elle est définie comme étant le rapport du volume total de vide (U_v) sur le volume total de milieu poreux (U_b) (voir [12] pages 19-20) :

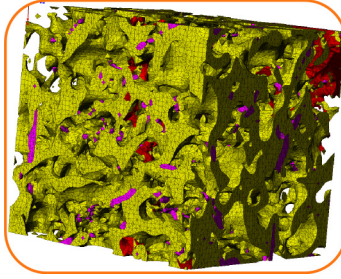


FIGURE 2.2 – Micro-structure d'un matériau obtenue par micro-tomographie à rayon X (http://imechanica.org/files/images/composite_scanfe.png)

$$\phi = \frac{U_v}{U_b} = \frac{U_b - U_s}{U_b} \quad (2.1)$$

où U_s représente le volume de solide. Généralement, la porosité est un coefficient borné entre 0 et 1. La figure 2.3 représente les variations de porosité en fonction de l'échelle de modélisation choisie. Cette figure montre que la porosité n'est représentative du milieu poreux qu'à l'échelle

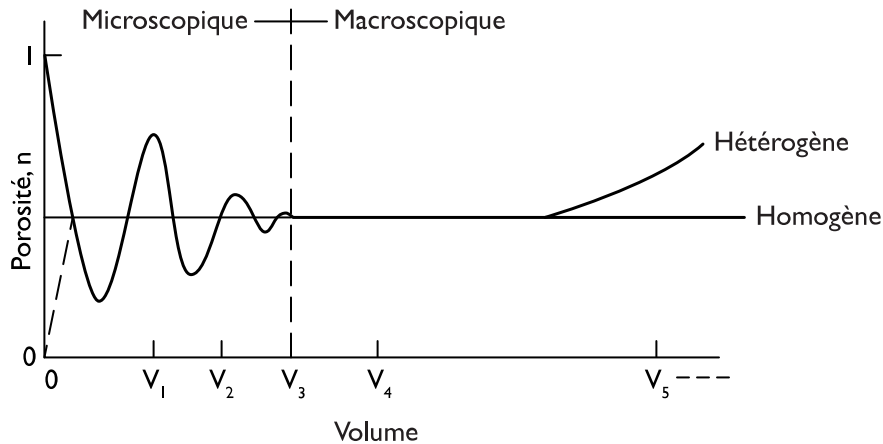


FIGURE 2.3 – porosité et VER (source : http://hydrogeologistswithoutborders.org/wordpress/wp-content/uploads/Figure_2.26_fr.svg)

macroscopique. En effet, la répartition des pores à l'intérieur de la matrice solide pouvant être fortement hétérogène à l'échelle microscopique, le VER doit alors être assez grand pour représenter de façon uniforme la répartition des pores présents dans le milieu poreux et assez petit pour ne pas effacer les hétérogénéités du milieu étudié à grande échelle (ex : à l'échelle de l'aquifère).

Le plus populaire exemple de milieu poreux est le sable avec une porosité comprise entre 0,25 et 0,40. Une liste de la porosité de quelques matériaux est présentée ci-dessous :

Matériau	Porosité ϕ
Sable et gravier	0,25 à 0,40
Sable fin	0,30 à 0,35
Argile	0,40 à 0,50
Craie	0,10 à 0,40

TABLE 2.1 – Porosité de quelques matériaux (<http://eduterre.ens-lyon.fr/nappe/html/scenarii/TP#section-1>)

Comme évoqué dans l’introduction de ce chapitre, un milieu poreux est capable de contenir un fluide et de permettre son écoulement. L’échelle de modélisation joue ainsi un rôle important dans la représentation mathématique de cet écoulement.

2.3 Hydrodynamique en milieux poreux

2.3.1 Description à l’échelle microscopique

La modélisation de l’écoulement d’un fluide à l’échelle microscopique nécessite de connaître précisément la géométrie des pores. A cette échelle de description, l’écoulement est régi par l’équation de Navier–Stokes et l’équation de conservation de la masse :

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{v} + \nabla \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v}) &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{F}, \\ \partial_t(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= f,\end{aligned}\tag{2.2}$$

où ∂_t désigne l’opérateur dérivée partielle par rapport au temps, $\vec{v}[L \cdot T^{-1}]$ le vecteur vitesse, $p[M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}]$ la pression, $\rho[M \cdot L^{-3}]$ la masse volumique, $\vec{F}[L \cdot T^{-2}]$ la force volumique, $f[M \cdot L^{-3} \cdot T^{-1}]$ le débit massique par unité de volume et $\nu[M \cdot L^2 \cdot T^{-1}]$ la viscosité cinématique. Une schématisation de l’écoulement dans un milieu poreux à l’échelle microscopique est donnée à la figure (2.4).

La résolution de ces équations soulève des difficultés d’ordre mathématique et numérique liées au caractère non-linéaire du terme inertiel $\nabla \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v})$ (voir [32]). Cependant, afin de contourner cette difficulté, plusieurs auteurs [51, 46, 1] font l’hypothèse de faibles vitesses d’écoulement (faible nombre de Reynolds), à savoir :

$$\text{Re} \ll 1,\tag{2.3}$$

où Re désigne le nombre de Reynolds. Le terme inertiel $\nabla \cdot (\vec{v} \otimes \vec{v})$ devient alors négligeable

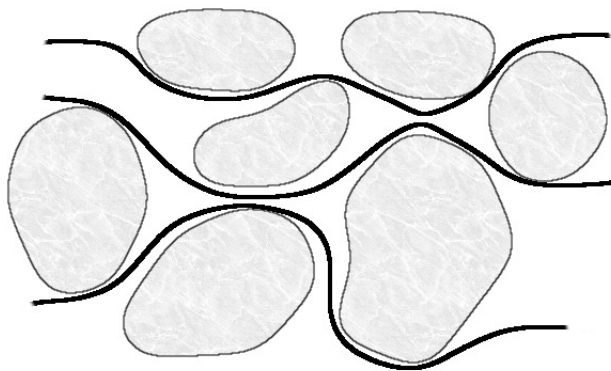


FIGURE 2.4 – Schéma représentant un écoulement en milieu poreux du point de vue microscopique

et le problème à résoudre peut se réduire au problème de Stokes :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{F}, \\ \partial_t(\rho) + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= f. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Bien que cela reste théoriquement possible, une telle approche n'est pas envisageable d'un point de vue pratique car elle nécessiterait de connaître avec précision la géométrie des pores sur l'ensemble du domaine d'étude : à titre d'exemple, l'étendue spatiale d'un bassin versant peut atteindre plusieurs km². A cela, des difficultés d'ordre informatique se posent quant à la nécessité d'utiliser des maillages fins définis à l'échelle du pore demandant de fait des ressources informatiques considérables en terme de stockage mémoire (voir [32]). C'est pour toutes ces raisons que l'approche microscopique n'est pas envisagée pour la simulation des écoulements en milieu poreux.

Aussi, afin d'apporter une réponse adaptée à l'ensemble des contraintes énoncées précédemment, les modèles macroscopiques sont généralement privilégiés pour la simulation des écoulements en milieu poreux. Elle propose de décrire des processus de transfert à travers de nouvelles équations définies à une échelle physique accessible.

2.3.2 Description à l'échelle macroscopique

Une relation décrivant parfaitement le passage à l'approche macroscopique est la loi de Darcy [27]. Elle exprime une relation de proportionnalité entre le gradient de pression et les pertes de charges. Le domaine de validité de cette loi est établi pour des écoulements laminaires à faible nombre de Reynolds (voir [38]). Aussi, la valeur critique de ce nombre

est généralement comprise entre 1 et 10 (voir [58]) pour les milieux poreux. La loi de Darcy généralisée couplée à l'équation de conservation de la masse se présente alors sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= -\frac{1}{\mu} \bar{k} \left[\vec{\nabla} p + \rho g \vec{e}_z \right], \\ \frac{s}{g} \partial_t p + \nabla \cdot (\rho \vec{\sigma}) &= f, \end{aligned} \quad (2.5)$$

mettant en jeu les grandeurs macroscopiques suivantes :

- $\vec{\sigma}$ la vitesse de Darcy [$L \cdot T^{-1}$],
- p la pression macroscopique [$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-2}$],
- \bar{k} le tenseur de perméabilité [L^2],
- ρ la masse volumique [$M \cdot L^{-3}$],
- μ la porosité [$M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$],
- g l'accélération de la gravité [$L \cdot T^{-2}$],
- f le terme source [$M \cdot T^{-1} \cdot L^{-3}$].

Le terme s représente quant à lui l'emmagasinement spécifique. Il permet de décrire à la fois la compressibilité du fluide et celle du milieu poreux. Ainsi, il peut être décrit de la façon suivante :

$$s = g [\phi \partial_p \rho + \rho \partial_p \phi]. \quad (2.6)$$

L'emmagasinement spécifique exprime la capacité du milieu à libérer du fluide sous l'effet d'une variation de pression.

En hydrogéologie, il est commode d'exprimer la pression macroscopique en fonction de la hauteur piézométrique $h[L]$ à l'aide de la relation suivante :

$$\rho g h = p + \rho g z. \quad (2.7)$$

Il est alors possible d'en déduire l'expression du gradient hydraulique :

$$\rho g \vec{\nabla} h = \vec{\nabla} p + \rho g \vec{e}_z, \quad (2.8)$$

où $\vec{e}_z = (0, 0, 1)$ désigne un vecteur unitaire, et celle de la dérivée temporelle :

$$g h \partial_t \rho + \rho g \partial_t h = \partial_t p + g z \partial_t \rho. \quad (2.9)$$

La dérivée temporelle de la pression macroscopique peut donc s'écrire de la façon suivante :

$$\partial_t p = g(h - z)\partial_t \rho + \rho g \partial_t h. \quad (2.10)$$

Lorsque la masse volumique est indépendante de la température de l'eau et de la masse de soluté, les variations dans le temps de cette quantité peuvent être négligées et l'expression (2.10) devient :

$$\partial_t p = \rho g \partial_t h. \quad (2.11)$$

Ainsi, le système d'équation (2.5) peut s'écrire de la façon suivante pour les fluides incompressibles :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= -\frac{\rho g}{\mu} \bar{k} \vec{\nabla} h, \\ s \partial_t h + \nabla \cdot \vec{\sigma} &= \frac{f}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Finalement, il est commode d'introduire la notion de conductivité hydraulique $\bar{K}[L \cdot T^{-1}]$ dans le système d'équations (2.14), à savoir :

$$\bar{K} = \frac{\rho g}{\mu} \bar{k}. \quad (2.13)$$

A titre d'exemple, les mesures des coefficients de conductivité hydraulique de l'eau souterraine varient entre $1m \cdot s^{-1}$ et $10^{-3}m \cdot s^{-1}$ pour des graviers fins à grossiers et de $10^{-10}m \cdot s^{-1}$ à $10^{-14}m \cdot s^{-1}$ pour des roches cristallines peu fracturées (voir [36]). Le modèle (2.14) devient alors :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= -\bar{K} \vec{\nabla} h, \\ s \partial_t h + \nabla \cdot \vec{\sigma} &= \frac{f}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Il est possible de faire une hypothèse supplémentaire se traduisant par l'incompressibilité du milieu poreux. Le modèle décrivant alors l'écoulement d'un fluide incompressible en milieu poreux incompressible s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= -\bar{K} \vec{\nabla} h, \\ \nabla \cdot \vec{\sigma} &= \frac{f}{\rho}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

En conclusion, il est possible d'affirmer que l'approche macroscopique se différencie de l'approche microscopique par le fait que les grandeurs recherchées traduisent un comporte-

ment moyen du fluide étudié dans un VER (voir [48]) de matière poreuse et non pas un comportement local lié à la géométrie des pores au sens de la mécanique des fluides. La connaissance de la géométrie des pores n'est alors pas nécessaire et la dimension des mailles utilisées n'est pas contrainte aux dimensions de ces mêmes pores. Les ressources informatiques nécessaires à la résolution numérique de ce type de modèle mathématique sont par conséquent moindres.

2.4 Transport de soluté

Le transport de soluté a lieu dans les écoulements en milieux poreux lorsque le fluide entraîne dans son mouvement des quantités de matières sous forme dissoute. Ce phénomène peut être rencontré lors de la dispersion de polluants dans les sols [40] mais aussi dans l'infiltration d'eau salée dans les nappes phréatiques côtières [57, 39].

La description du transport de soluté en milieu poreux s'articule autour de trois mécanismes : la convection-réaction, la dispersion et l'interaction entre la fraction mobile et la fraction immobile du milieu.

2.4.1 La convection

Le mécanisme de convection en milieu poreux représente l'entraînement dans le mouvement du fluide d'une espèce chimique dissoute (voir [61, 43]). Ainsi, le flux convectif Q_c de soluté traversant une unité de surface de milieu poreux s'exprime à travers la relation suivante :

$$Q_c = \vec{\sigma} \cdot \vec{n}c, \quad (2.16)$$

où $\vec{\sigma}$ désigne la vitesse de Darcy, \vec{n} la normale à l'unité de surface de milieu poreux et $c[M \cdot L^{-3}]$ la concentration de soluté.

2.4.2 La dispersion

Le phénomène de dispersion apparaît lorsqu'il existe une différence de concentration de soluté entre deux points différents d'un fluide dans un milieu poreux. Ce phénomène prend place sous l'action de la diffusion moléculaire et de la dispersion cinématique :

- la diffusion moléculaire : les concentrations ont tendances à s'homogénéiser sous l'effet d'une agitation thermique des particules de la solution,
- la dispersion cinématique : elle apparaît lorsqu'il y a une hétérogénéité du champ des vitesses dans le VER considéré.

Le flux de dispersion Q_d est généralement formulé à travers une loi analogue à la loi de Fick (voir [43]) :

$$Q_d = - \left(\bar{\bar{D}} \vec{\nabla} c \right) \cdot \vec{n}. \quad (2.17)$$

Le tenseur de dispersion–diffusion $\bar{\bar{D}}$ peut alors être décrit en fonction de la diffusion cinématique et de la dispersion moléculaire :

$$\bar{\bar{D}} = \bar{\bar{D}}_c + \bar{\bar{D}}_m. \quad (2.18)$$

Le tenseur de dispersion cinématique $\bar{\bar{D}}_c$ peut être décrit à travers l'expression suivante (voir [57]) :

$$\bar{\bar{D}}_c = (\lambda_L - \lambda_T) \frac{\vec{\sigma} \otimes \vec{\sigma}}{\|\vec{\sigma}\|} + \lambda_T \|\vec{\sigma}\| \bar{\bar{I}} \quad (2.19)$$

où $\bar{\bar{I}}$ désigne la matrice identité. Le tenseur diagonal de diffusion moléculaire est quant à lui décrit comme suivant (voir [57]) :

$$\bar{\bar{D}}_m = \phi D_m \bar{\bar{I}} \quad (2.20)$$

avec $D_m [L^2 \cdot T^{-1}]$ le coefficient de diffusion du soluté, $\lambda_L [L]$ et $\lambda_T [L]$ sont respectivement les coefficients de dispersivité longitudinale et transversale.

2.4.3 Adsorption linéaire instantanée

A l'échelle microscopique, le soluté transporté par un fluide circulant à l'intérieur d'un milieu poreux peut se fixer à la matrice solide à travers divers phénomènes physicochimiques. Ce phénomène est appelé "sorption" (voir [43]). De plus, selon l'arrangement des réseaux formés par les pores du milieu poreux, certaines particules peuvent être filtrées et ainsi restées captives de ce milieu (voir [43]). A l'échelle macroscopique, la porosité et la perméabilité exerceront alors une influence sur la répartition de soluté. Ainsi, il existe une fraction mobile

de soluté transportée par le fluide et une fraction immobile de soluté prise au piège dans le milieu poreux. L'interaction entre ces deux fractions est globalement représentée par une fonction paramétrique de la forme $F = f(c)$. Cette fonction met en relation la concentration de soluté c de la fraction mobile et la concentration massique F de la fraction immobile.

Plusieurs relations concernant $f(c)$ sont données dans la littérature (voir [43]). Celle retenue dans ces travaux de thèse est la suivante :

$$F = K_d c, \quad (2.21)$$

où $K_d[L^3 \cdot M^{-1}]$ est un coefficient de distribution. Cette relation décrit le phénomène linéaire et instantané d'adsorption. Elle reste donc en cohérence avec les hypothèses formulées précédemment sur la description de l'écoulement (énergie cinétique négligeable).

2.4.4 L'équation de convection–dispersion–réaction

Comme vue précédemment, le transport de soluté en milieu poreux dépend d'un certain nombre de caractéristiques liées à l'écoulement et aux propriétés physicochimiques du soluté. La combinaison de ces phénomènes est alors appelée "équation généralisée de la dispersion" (voir [43]) :

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{D}} \vec{\nabla} c) - \nabla \cdot (\vec{\sigma} c) = \varepsilon_c \partial_t c + (1 - \varepsilon_c) \rho_s \partial_t F, \quad (2.22)$$

où ε_c désigne la porosité cinématique du milieu poreux définie comme le rapport du volume de la fraction mobile au volume total du VER et ρ_s la masse volumique de la fraction immobile. En tenant compte de l'expression de F donnée par la relation (2.21), l'équation (2.22) devient :

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{D}} \vec{\nabla} c) - \nabla \cdot (\vec{\sigma} c) = \varepsilon_c \partial_t c + (1 - \varepsilon_c) \rho_s K_d \partial_t c, \quad (2.23)$$

soit :

$$\nabla \cdot (\bar{\bar{D}} \vec{\nabla} c) - \nabla \cdot (\vec{\sigma} c) = \varepsilon_c R \partial_t c, \quad (2.24)$$

où :

$$R = 1 + \frac{(1 - \varepsilon_c)\rho_s K_d}{\varepsilon_c}. \quad (2.25)$$

L'équation généralisée de la dispersion est alors une loi de conservation mettant en relation des phénomènes physicochimiques liés à la dispersion et à la convection.

Pour la suite de ce manuscrit de thèse, on ajoute le phénomène de dégradation d'ordre 1 représenté par le coefficient $\mu[T^{-1}]$. Ainsi, l'équation globale de convection-dispersion-réaction prend la forme suivante :

$$\varepsilon_c R \partial_t c - \nabla \cdot (\bar{D} \vec{\nabla} c) + \nabla \cdot (\vec{\sigma} c) + \mu c = 0, \quad (2.26)$$

2.5 Modèle générique de loi de conservation

2.5.1 Modèle mathématique générique à l'état stationnaire

Les modèles physiques du transport de masse en milieu poreux ont été identifiés précédemment. A l'état stationnaire, Ils peuvent être écrits sous une forme générique appelée équation de diffusion-convection-réaction :

$$\nabla \cdot (-\bar{\alpha} \vec{\nabla} u + \vec{\beta} u) + \mu u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.27)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ désigne le domaine d'étude, $\bar{\alpha}$ le tenseur de diffusion, $\vec{\beta}$ le champ des vitesses, μ le coefficient de réaction, u la variable d'état et f le terme source/puits. Dans ce manuscrit de thèse, il ne sera étudié que les problèmes stationnaires. La relation entre les différents termes de l'équation (2.27) et les équations vues précédemment est donné dans le Tableau 2.2. Les composantes matricielles et vectorielles de l'équation (2.27) doivent traduire les

Modèle générique	Écoulement	Transport de soluté
$-\bar{\alpha} \vec{\nabla} u$	$-\bar{K} \vec{\nabla} h$	$-\bar{D} \vec{\nabla} c$
$\vec{\beta} u$	0	$\vec{\sigma} c$
μu	0	μc
f	$\frac{f}{\rho}$	0

TABLE 2.2 – Relation entre les modèles d'écoulement et de transport

propriétés mathématiques générales attachées aux termes présentés dans le Tableau 2.2.

Premièrement, afin de garantir l'inversibilité du tenseur de diffusion, $\bar{\alpha}$ est considéré comme étant défini positif, c'est-à-dire :

$$\vec{\xi}^t \bar{\alpha} \vec{\xi} > 0 \quad \forall \vec{\xi} \in \mathbb{R}^{d^*} \quad (2.28)$$

Deuxièmement, dans le cas du transport de soluté, le champ $\vec{\beta}$ est associé à l'écoulement du fluide. Il a la particularité d'être à composante normale continue en tout point du domaine Ω et, selon le contexte, peut être assimilé à la vitesse de Darcy.

Dans le cas du transport de soluté, il est alors commode d'exprimer le problème (2.27) en fonction de la variable d'état et du champ des vitesses qui peuvent aussi être appelées variables primale et duale respectivement. L'idée est de transformer l'équation du second ordre (2.27) en un système d'équation du premier ordre en introduisant la variable $\vec{\sigma}$ désignant le flux total. L'équation (2.27) peut alors s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} \vec{\sigma} = -\bar{\alpha} \vec{\nabla} u + \vec{\beta} u & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \vec{\sigma} + \mu u = f & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.29)$$

Ce système d'équation est appelé formulation duale ou mixte du problème (2.27) et elle est utilisée par la méthode des éléments finis mixtes, des volumes finis et des éléments finis mixtes discontinus de Galerkin. Cette formulation permet d'approcher simultanément les variables u et $\vec{\sigma}$ du problème posé.

La présence du terme $\nabla \cdot \vec{\sigma}$ dans le problème (2.29) impose une certaine régularité du champ des vitesses, à savoir la continuité de la composante du flux aux arrêtes des éléments du maillage. Nous reviendrons plus en détail sur cette propriété fondamentale du champ $\vec{\sigma}$ dans une autre section de ce chapitre.

2.5.2 Conditions aux limites

Les problèmes (2.27) et (2.29) doivent être associés à des conditions imposées aux limites du domaine d'étude. Ces conditions consistent à imposer de façon explicite les valeurs de u et de $\vec{\sigma}$ sur $\partial\Omega$. Ces valeurs sont alors désignées par le terme de conditions aux limites. Parmi les plus utilisées, nous retrouvons :

- les conditions de Dirichlet : la valeur de la variable d'état u , à savoir g_D , est imposée à la frontière $\Gamma_D \in \partial\Omega$,

— les conditions de Neumann : la valeur de la composante normale du flux $\vec{\sigma}$, à savoir g_N , est imposée à la frontière $\Gamma_N \in \partial\Omega$.

Ainsi, dans la suite de ce manuscrit, il ne sera pris en compte que les frontières Γ_D et Γ_N telles que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

2.5.3 Continuité du flux et conservation de la masse

Une propriété importante de l'équation de continuité est représentée à travers la continuité de la composante normale du flux sur la partition \mathcal{T}_h du domaine Ω . Afin de démontrer cette propriété, considérons l'intégration de la divergence du flux sur le domaine Ω et sur la partition \mathcal{T}_h :

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{\sigma} dx = \int_{\mathcal{T}_h} \nabla \cdot \vec{\sigma} dx. \quad (2.30)$$

Lorsque le théorème du flux divergence est utilisé sur l'équation (2.30) afin de traduire un principe de conservation du flux, l'expression mathématique de celle-ci est la suivante :

$$\int_{\partial\Omega} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS = \sum_{A \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial A} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS. \quad (2.31)$$

Le côté gauche de l'équation (2.31) est exprimée sur les frontières du domaine Ω alors que le côté droit de cette équation est exprimée sur l'ensemble des frontières des éléments A de la partition \mathcal{T}_h du domaine Ω . Deux catégories de frontières appartenant aux éléments $A \in \mathcal{T}_h$ peuvent alors être distinguées. La première concerne les éléments situés aux limites de la partition \mathcal{T}_h telle que $\partial A \in \partial\Omega$. La deuxième est quant à elle constituée des éléments situés à l'intérieur de la partition \mathcal{T}_h . Les frontières de ces éléments appartiennent à l'ensemble \mathcal{E}_h^0 désignant l'ensemble des frontières intérieures de la partition \mathcal{T}_h . Ces deux catégories de frontière induisent alors l'expression suivante de l'équation (2.31) :

$$\int_{\partial\Omega} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial\Omega} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} dS + \int_{\mathcal{E}_h^0} [[\vec{\sigma}]] dS, \quad (2.32)$$

où,

$$[[\vec{\sigma}]] = \vec{\sigma}^+ \cdot \vec{n}^+ + \vec{\sigma}^- \cdot \vec{n}^-, \quad (2.33)$$

désigne l'opérateur "saut". Comme son nom l'indique, cet opérateur permet d'exprimer la discontinuité du flux normal (si elle existe) sur une frontière commune à deux éléments A^+ et A^- de la partition \mathcal{T}_h .

Il est maintenant naturel de simplifier l'équation (2.34) et de faire ainsi apparaître la condition de régularité que doivent respecter les méthodes de discrétisation :

$$\int_{\mathcal{E}_h^0} [[\vec{\sigma}]] dS = 0. \quad (2.34)$$

Le moyen le plus simple de respecter cette condition de régularité est alors d'imposer la continuité de la composante normale du flux entre chaque élément $A \in \mathcal{T}_h$ au travers du saut :

$$[[\vec{\sigma}]] = 0 \quad (2.35)$$

Cette condition de continuité revêt un caractère particulièrement important pour les travaux présentés dans ce manuscrit de thèse. Elle jouera ainsi un grand rôle dans le choix des méthodes de résolution numérique qui seront employées par la suite.

2.5.4 Méthodes de résolution numérique

Les méthodes de résolution numérique sont souvent employées pour rechercher des solutions approchées des équations aux dérivées partielles (EDP) et peuvent être appliquées à une grande variété de problèmes physiques. Chaque méthode utilise un formalisme mathématique qui lui est propre. Il existe à ce jour dans la littérature une grande variété de méthode de résolution numérique et le choix de la méthode la plus adaptée est souvent tributaire du problème traité. Afin de choisir celle qui correspondra le mieux à la résolution du problème (2.29), il est important de rappeler les différentes exigences auxquelles celle-ci devra répondre, à savoir :

- la conservation locale de la masse,
- la continuité de la composante normale du champ $\vec{\sigma}$ entre chaque élément du domaine d'étude,
- la prise en compte des tenseurs anisotropes et discontinus,
- la représentation des géométries complexes.

Bon nombre de méthodes existantes permettent de respecter certaines de ces exigences. Les plus connues sont les volumes finis (VF), les différences finies (DF) et les éléments finis (EF). Les méthodes d'éléments finis mixtes (EFM) et mixtes hybrides discontinues (HDG) font cependant l'objet d'un intérêt croissant.

Méthode des différences finies

La méthode des différences finies s'appuie sur la formulation primale du problème (2.27) et offre une approximation nodale de la solution recherchée. L'idée de cette méthode consiste à approximer les dérivées partielles par des schémas aux différences issus du développement en séries de Taylor de la fonction recherchée au voisinage d'un point (aussi appelé nœud). A titre d'exemple, la dérivée première par rapport à x peut s'écrire de la façon suivante :

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + \delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x_i) + \mathcal{O}(\delta x^2),$$

soit :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x} + \mathcal{O}(\delta x),$$

où $\mathcal{O}(\delta x)$ représente l'erreur d'approximation. Ces schémas nécessitent d'utiliser des grilles régulières de l'espace, ce qui peut être un facteur limitant dans la représentation des géométries complexes (voir [71, 2, 49]).

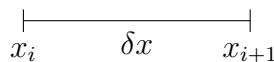


FIGURE 2.5 – exemple de grille en différences finies 1D

Méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est certainement la méthode la plus utilisée dans le domaine industriel. Elle consiste à approcher le système d'équation (2.29) en intégrant l'équation de conservation de la masse sur des volumes de contrôle. Cette méthode garantit naturellement la continuité du flux et la conservation locale de la masse (voir [33]). La pertinence de cette approche repose cependant sur la qualité de l'approximation des flux aux interfaces. Différentes formulations de ces flux ont été proposées au travers des approches TPFA (Two Point

Flux Approximation) et MPFA (Multi Point Flux Approximation) (voir [35, 62, 75]).

Cependant, la méthode des volumes finis appartient à la famille des méthodes de bas degrés : la variable d'état est approchée par une constante par maille. Ainsi, seul le raffinement en espace est possible. L'idée à consiste à augmenter le nombre d'élément dans le domaine d'étude en diminuant la taille de ces derniers. Cette méthode permet de diminuer l'erreur d'approximation commise sur les variables recherchées.

Cette méthode n'est cependant pas le seul moyen d'agir sur l'erreur d'approximation. Par exemple, la méthode des éléments finis permet d'utiliser en plus, le raffinement polynomial.

Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis consiste à intégrer l'équation (2.27) sur des volumes élémentaires et de définir une approximation continue et polynomiale de la solution recherchée [7, 28, 41]. Elle prend appuie sur une formulation faible du problème (2.27), à savoir :

Trouver $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_{\partial\Omega} (-\bar{\alpha}\vec{\nabla}u + \vec{\beta}u)v \cdot \vec{n}dS - \int_{\Omega} (-\bar{\alpha}\vec{\nabla}u + \vec{\beta}u) \cdot \vec{\nabla}vdx + \int_{\Omega} \mu uvdx = \int_{\Omega} fvdx \quad \forall v \in \mathcal{H}^1(\Omega). \quad (2.36)$$

Cette formulation peut être exprimée sur une partition \mathcal{T}_h du domaine Ω . Ainsi, en définissant un espace de fonction polynomiale $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{H}^1(\mathcal{T}_h)$, la formulation discrète du problème (2.36) devient :

Trouver $u_h \in \mathcal{V}_h$ tel que :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{T}_h \in \partial\Omega} (-\bar{\alpha}\vec{\nabla}u_h + \vec{\beta}u_h)v_h \cdot \vec{n}dS - \sum_{A \in \mathcal{T}_h} \int_A (-\bar{\alpha}\vec{\nabla}u_h + \vec{\beta}u_h) \cdot \vec{\nabla}v_h dx + \sum_{A \in \mathcal{T}_h} \int_A \mu u_h v_h dx \\ = \sum_{A \in \mathcal{T}_h} \int_A f v_h dx \quad \forall v_h \in \mathcal{P}^k(A), \end{aligned} \quad (2.37)$$

La formulation faible discrète (2.37) fait apparaître deux caractéristiques importantes de la méthode des éléments finis. Premièrement, les caractéristiques polynomiales des fonctions u_h et v_h permettent d'envisager le raffinement polynomial en augmentant l'ordre de l'approximation. Deuxièmement, le raffinement en espace est aussi possible en augmentant le nombre d'élément $A \in \mathcal{T}_h$. On dit alors que la méthode des éléments finis est h -adaptative

et p -adaptative.

La méthode des éléments finis présente cependant certaines difficultés dans la construction de la variable duale $\vec{\sigma}$. En effet, cette dernière est obtenue par différentiation de la variable primale entraînant de fait une réduction de la convergence de la variable $\vec{\sigma}_h$. De plus, la variable construite n'est pas à composante normale continue ($\vec{\sigma} \notin \mathcal{H}(\text{div}, \mathcal{T}_h)$), il est donc nécessaire d'avoir recours à des techniques de post-processing afin de la rendre $H(\text{div})$ -conforme [31].

Méthodes retenues

Selon la nature du problème traité, la méthode de discrétisation retenue doit offrir à la fois une approximation optimale de la variable primale mais également de la variable duale. A titre d'exemple, le champ des vitesses de Darcy (variable duale du problème de l'écoulement) est utilisé comme variable de couplage dans le processus du transport de soluté. C'est la raison pour laquelle nous privilégierons par la suite des méthodes de discrétisation de type mixte. Plus particulièrement, nous nous focaliserons sur la méthode des éléments finis mixtes $H(\text{div})$ -conforme et discontinus de galerkin. Ces méthodes combinent à la fois les avantages des éléments finis classiques (raffinement polynomial) et respectent les propriétés importantes de conservation (champs à composantes normales continues, conservation locale de la masse, etc ...).

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, les modèles de la physique représentant l'écoulement et le transport de soluté en milieu poreux ont été introduits. Ces modèles possèdent des caractéristiques différentes (diffusion/dispersion, anisotropie) et peuvent même être couplés l'un à l'autre (couplage écoulement-transport). Nous avons vu qu'il est cependant possible de synthétiser toutes ces informations à travers le modèle générique de diffusion-convection-réaction. Ainsi, la réflexion menée sur la résolution numérique des problèmes d'écoulement et de transport de masse en milieu poreux peut se réduire à l'étude de cette équation. Afin de mener à bien cette étude, deux méthodes de résolution numérique ont été mises en avant. Ces méthodes sont les éléments finis mixtes $H(\text{div})$ -conforme et les éléments finis mixtes discontinus de Galerkin. L'objet du chapitre suivant est donc de décrire le fonctionnement de ces méthodes

et de mettre en avant leurs forces et leurs faiblesses.

Chapitre 3

Les méthodes mixtes de Galerkin

Sommaire

3.1	Introduction	25
3.2	Quelques notations utiles	27
3.2.1	La partition du domaine	27
3.2.2	Opérateurs traces	28
3.2.3	Espaces polynomiaux discrets	28
3.3	Les éléments finis mixtes $H(\text{div})$-conformes	29
3.3.1	Formulation faible continue et discrète	29
3.3.2	Le système linéaire et les principales difficultés	31
3.3.3	Passage à l'élément de référence	33
3.4	Les éléments finis discontinus de Galerkin	36
3.4.1	Description générale de la méthode	36
3.4.2	Méthode LDG	38
3.4.3	Convergence du flux et expression complète des traces	40
3.5	Conclusion	41

3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à une présentation succincte de deux familles de méthodes d'éléments finis mixtes de Galerkin : (i) les méthodes $H(\text{div})$ -conformes (MFE) et (ii) les méthodes Discontinus de Galerkin (MDG). La méthode MFE a été employée pour la première fois pour la

résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) elliptiques (transport de Darcy ou de Stokes [59, 16]) alors que la seconde a été initialement introduite (sous sa forme primale) par [60] pour la résolution de l'équation de transport de neutron (transport advectif [15, 52]). Bien que ces deux formalismes soit relativement proches, les méthodes discontinues se distinguent des méthodes conformes notamment par le fait que les conditions de régularité des variables discrètes soient complètement relaxées : on utilise désormais des approximations polynomiales par morceaux de ces variables. Ainsi, les MDG apparaissent naturellement mieux adaptées à la modélisation de processus physiques de type hyperbolique caractérisés généralement par des fronts de discontinuité. Quant à la modélisation de processus physiques de type elliptique, les méthodes conformes suffisaient amplement car elles garantissaient une convergence optimale des variables discrètes. A la fin des années 90, la communauté scientifique était partagée entre d'un côté, les méthodes conformes optimales pour la modélisation de processus physiques elliptiques et de l'autre, les méthodes discontinues idéales pour la modélisation de processus hyperboliques. La technique de séparation d'opérateur en est l'illustration parfaite de ce clivage. Bien qu'efficace, cette technique présente cependant un inconvénient majeur à savoir qu'elle manipule un nombre important de degrés de liberté la rendant particulièrement coûteuse. Une petite partie de la communauté scientifique décidèrent alors d'explorer une nouvelle direction visant à étendre le formalisme mixte discontinu aux opérateurs elliptiques. Nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux pionniers de [9] et de [25] qui proposèrent pour la première fois une méthode mixte de Galerkin totalement discontinue pour traiter le problème de Navier-Stokes en compressible et le problème d'Advection–Diffusion–Réaction. Au cours des années qui suivirent, nombre d'auteurs ont activement contribué au développement théorique, numérique et informatique des méthodes (mixtes) discontinues dans divers domaines des sciences et de l'ingénierie. C'est dans ce cadre d'étude que nous présenterons le formalisme de ces deux familles de méthode. Pour cela, considérons le problème de diffusion hétérogène et anisotrope (sous sa forme mixte), défini sur un domaine de l'espace $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$, pour des conditions aux limites de type Dirichlet non-homogène :

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^{-1}\vec{\sigma} = -\vec{\nabla}u & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \vec{\sigma} = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g_D & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\bar{\alpha}$ désigne un tenseur de diffusion que nous supposons symétrique et défini positif, u la variable d'état, $\vec{\sigma}$ le champ des vitesses, f un terme source et g_D une condition aux limites de Dirichlet. Nous n'envisageons ici que des conditions aux limites de Dirichlet afin de simplifier la présentation de ces méthodes. Néanmoins, des conditions de Neumann ou de Robin se traiteront tout aussi simplement. Pour ces conditions, le problème physique (3.1) impose une certaine régularité des variables $\vec{\sigma}$ et u : le flux doit être un champ vectoriel à composante normale continue ($\vec{\sigma} \in \mathcal{H}(\text{div}, \Omega)$) et la variable d'état u doit être un champ scalaire continue sur le domaine d'étude ($u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$).

Ce chapitre a pour objectif de décrire le fonctionnement général des méthodes (i) et (ii) et d'énumérer les principaux avantages et inconvénients de ces deux formalismes. En préalable, nous définirons à la section 3.2 quelques notations générales et communes à ces méthodes. Par la suite, la section 3.3, sera consacrée à la description des MFE et la suivante, à celle des MDG et des ses variantes.

3.2 Quelques notations utiles

3.2.1 La partition du domaine

Les méthodes mixtes de Galerkin s'appuient généralement sur une formulation variationnelle du problème initial (3.1) définie sur une partition du domaine Ω que nous notons \mathcal{T}_h . Dans la pratique, un élément A de \mathcal{T}_h désigne soit un triangle ou un quadrangle si $d = 2$ ou alors un tétraèdre ou un hexaèdre si $d = 3$ et nous noterons h_A le diamètre de cet élément. Par la suite, $\partial\mathcal{T}_h = \{\partial A, \forall A \in \mathcal{T}_h\}$ désigne l'ensemble des frontières des éléments. Nous définissons également l'ensemble des facettes intérieures de la partition \mathcal{T}_h par \mathcal{E}_h^0 i.e., $e \in \mathcal{E}_h^0$ si il existe A_1 et A_2 appartenant à la partition \mathcal{T}_h vérifiant $e = \partial A_1 \cap \partial A_2$. De la même façon, nous notons \mathcal{E}_h^∂ l'ensemble des facettes à la frontière $\partial\Omega$ i.e., $e \in \mathcal{E}_h^\partial$ si il existe A appartenant à la partition \mathcal{T}_h vérifiant $e = \partial A \cap \partial\Omega$. L'ensemble des facettes de la partition est alors noté $\mathcal{E}_h := \mathcal{E}_h^0 \cup \mathcal{E}_h^\partial$.

Dans la suite, pour tout domaine polyédrique $D \subset \mathbb{R}^d$ de frontière ∂D , nous notons $(\cdot, \cdot)_D$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial D}$ le produit scalaire usuel dans $\mathcal{L}^2(D)$ et dans $\mathcal{L}^2(\partial D)$, respectivement. Nous rappelons que $\mathcal{L}^2(D)$ (resp. $\mathcal{L}^2(\partial D)$) désigne l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommables sur D (resp. ∂D) et nous noterons $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^2(D)}$ la norme associée. Nous introduisons également

quelques notions compactes associées au produit scalaire de $\mathcal{L}^2(\mathcal{T}_h)$:

$$(\cdot, \cdot)_{\mathcal{T}_h} = \sum_{A \in \mathcal{T}_h} (\cdot, \cdot)_A, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \sum_{\partial A \in \partial \mathcal{T}_h} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial A}, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial A} = \sum_{e \in \partial A} \langle \cdot, \cdot \rangle_e.$$

3.2.2 Opérateurs traces

Le formalisme général des méthodes mixtes discontinues de Galerkin (MDG) introduit naturellement les opérateurs de trace définis aux interfaces du maillage. Pour cela, considérons une fonction vectorielle $\vec{\varphi}$ et une fonction scalaire v admettant toutes deux une trace (éventuellement à deux valeurs) sur l'ensemble des faces \mathcal{E}_h . Nous définissons alors les opérateurs saut et moyenne pondérée des quantités $\vec{\varphi}$ et v pour $0 \leq w \leq 1$ par :

$$\begin{aligned} \text{si } e \in \mathcal{E}_h^0 : \quad & \llbracket \vec{\varphi} \rrbracket = \vec{\varphi}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{\varphi}_2 \cdot \vec{n}_2, & \llbracket v \rrbracket &= v_1 \vec{n}_1 + v_2 \vec{n}_2, \\ & \{\vec{\varphi}\}_w = w \vec{\varphi}_1 + (1-w) \vec{\varphi}_2, & \{v\}_w &= w v_1 + (1-w) v_2, \\ \text{si } e \in \mathcal{E}_h^\partial : \quad & \llbracket \vec{\varphi} \rrbracket = \vec{\varphi} \cdot \vec{n}, & \llbracket v \rrbracket &= v \vec{n}, \\ & \{\vec{\varphi}\}_w = \vec{\varphi}, & \{v\}_w &= v, \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dans le cas particulier où $w = \frac{1}{2}$, nous retrouvons la définition classique de l'opérateur moyenne et nous omettrons l'indice w de sa définition. Il peut être intéressant de souligner que pour cette définition de l'opérateur, le saut d'une fonction scalaire donne une quantité vectorielle alors que le saut d'une fonction vectorielle donne une quantité scalaire. À partir des définitions données précédemment, nous pouvons aisément établir les relations suivantes :

$$\text{si } e \in \mathcal{E}_h^0 : \llbracket \vec{\varphi} v \rrbracket = \llbracket \vec{\varphi} \rrbracket \{v\} + \{\vec{\varphi}\} \cdot \llbracket v \rrbracket, \tag{3.3}$$

$$\text{si } e \in \mathcal{E}_h^\partial : \llbracket \vec{\varphi} v \rrbracket = v \vec{\varphi} \cdot \vec{n}. \tag{3.4}$$

3.2.3 Espaces polynomiaux discrets

Soit $D \subset \mathbb{R}^d$, alors on note $\mathcal{P}^p(D)$ l'espace des polynômes de degré total inférieur ou égal à p avec $p \geq 0$ sur D . Aussi, nous noterons $\mathcal{Q}(D)$ et $\mathcal{W}(D)$ les espaces d'approximation de la variable d'état et du flux respectivement.

Il est maintenant nécessaire de définir les espaces d'approximation discrets qui nous seront utiles dans la suite de ce chapitre :

$$\mathcal{W}_h = \{\vec{w}_h \in \mathcal{X}(\mathcal{T}_h) : \vec{w}_h|_A \in \mathcal{W}(A) \quad \forall A \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.5)$$

$$\mathcal{Q}_h = \{q_h \in \mathcal{L}^2(\mathcal{T}_h) : q_h|_A \in \mathcal{Q}(A) \quad \forall A \in \mathcal{T}_h\}, \quad (3.6)$$

où $\mathcal{X}(\mathcal{T}_h)$ désigne un espace que nous définirons ultérieurement. Ces espaces d'approximation polynomiaux nous donnent la possibilité de définir les grandeurs approchées $\vec{\sigma}_h$ du flux $\vec{\sigma}$ et u_h de u telles que :

$$\begin{cases} u_h = \sum_{i=1}^{N_u} u_i q_i & \forall q_i \in \mathcal{Q}_h \\ \vec{\sigma}_h = \sum_{i=1}^{N_\sigma} \sigma_i \vec{w}_i & \forall \vec{w}_i \in \mathcal{W}_h \end{cases} \quad (3.7)$$

où $N_u = \dim(\mathcal{Q}_h)$ et $N_\sigma = \dim(\mathcal{W}_h)$ désignent les dimensions des espaces respectifs, u_i et σ_i les degrés de liberté de la variable d'état et du flux respectivement, q_i et \vec{w}_i des fonctions tests.

3.3 Les éléments finis mixtes $H(\text{div})$ -conformes

3.3.1 Formulation faible continue et discrète

La méthode des éléments finis mixtes s'appuie sur une écriture variationnelle du problème initiale (3.1). La démarche consiste à projeter (au sens du produit scalaire de $\mathcal{L}^2(\Omega)$) le système d'équations (3.1) sur des fonctions tests (\vec{w}, q) convenablement choisies. Dans le cadre des méthodes de Galerkin, la projection est généralement effectuée sur des fonctions tests définissant les espaces fonctionnels associés aux variables $(\vec{\sigma}, u)$. On préconise généralement les approximations suivantes :

$$u \in \mathcal{L}^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \vec{\sigma} \in \mathcal{H}(\text{div}, \Omega),$$

où $\mathcal{H}(\text{div}, \Omega)$ désigne l'espace de Hilbert des fonctions vectorielles de $[\mathcal{L}^2(\Omega)]^d$ dont la divergence est encore dans $\mathcal{L}^2(\Omega)$:

$$\mathcal{H}(\text{div}, \Omega) = \{\vec{\sigma} \in [\mathcal{L}^2(\Omega)]^d ; \nabla \cdot \vec{\sigma} \in \mathcal{L}^2(\Omega)\}, \quad (3.8)$$

muni de la norme suivante (voir [59]) :

$$\|\vec{\sigma}\|_{\mathcal{H}(\text{div},\Omega)} = \left(\|\vec{\sigma}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \vec{\sigma}\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.9)$$

L'intérêt de cette approximation réside dans le choix judicieux proposé pour la variable $\vec{\sigma}$. Les éléments de cet espace sont à composante normale continue garantissant de fait la continuité des flux. De plus, la transformation de Green permet d'assouplir les contraintes de régularité de la variable scalaire u . La formulation faible du problème (3.1) s'écrit donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{\sigma}, u) \in \mathcal{H}(\text{div}, \Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(\vec{\sigma}, \vec{w}) - b(u, \vec{w}) = -h(\vec{w}) \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{H}(\text{div}, \Omega), \\ b(\vec{\sigma}, q) = f(q) \quad \forall q \in \mathcal{L}^2(\Omega), \end{array} \right. \quad (3.10)$$

où les formes bilinéaires et linéaires sont données par :

$$\begin{aligned} a(\vec{\sigma}, \vec{w}) &= (\bar{\alpha}^{-1} \vec{\sigma}, \vec{w})_{\Omega}, \\ b(u, \vec{w}) &= (u, \nabla \cdot \vec{w})_{\Omega}, \\ h(\vec{w}) &= \langle g_D, \vec{w} \cdot \vec{n} \rangle_{\partial\Omega}, \\ f(q) &= (f, q)_{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Le cadre théorique permettant d'étudier le caractère bien-posé (l'existence et l'unicité de la solution) du problème (3.10) est celui proposé par le Théorème Brezzi-Nécas-Babuska (BNB). Bien que ces points ne soient pas abordés rigoureusement dans ce manuscrit (aussi nous renvoyons le lecteur intéressé aux ouvrages [31], [16]), le caractère bien-posé des problèmes de type point-selle (3.10) est conditionné par une condition dite inf-sup qui est toujours satisfaite lorsque la forme bilinéaire est coercive,

$$\exists \beta > 0, \quad \inf_{q \in \mathcal{L}^2(\Omega)} \sup_{\vec{\sigma} \in \mathcal{H}(\text{div}, \Omega)} \frac{b(\vec{\sigma}, q)}{\|\vec{\sigma}\|_{\mathcal{H}(\text{div}, \Omega)} \|q\|_{\mathcal{L}^2(\Omega)}} \geq \beta. \quad (3.12)$$

Dans ce cas, on peut montrer que la solution du problème variationnel (3.10) existe, qu'elle est unique et qu'elle vérifie le problème initial (3.1). C'est à partir de cette formulation variationnelle que se construit la formulation discrète qui est à la base des méthodes $\mathcal{H}(\text{div})$ -conformes. En effet, dans ce cadre spécifique, les espaces d'approximation doivent être construits de façon à respecter les inclusions suivantes : $\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}$ et $\mathcal{Q}_h \subset \mathcal{Q}$. Ainsi, la formulation discrète

du problème $\mathcal{H}(\text{div})$ -conformes (3.10) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{\sigma}_h, u_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h \text{ tel que :} \\ a(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h) - b(u_h, \vec{w}_h) = -h(\vec{w}_h) \quad \forall \vec{w} \in \mathcal{W}_h, \\ b(q_h, \vec{\sigma}_h) = f(q_h) \quad \forall q \in \mathcal{Q}_h. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Cependant, il apparait que la condition inf-sup (3.12) garantissant le caractère bien posé du problème (2.10) n'est pas automatiquement transférée à l'échelle discrète. Cette condition inf-sup discrète impose des précautions et des restrictions quant au choix des espaces d'approximation utilisés pour les variables discrètes u_h et $\vec{\sigma}_h$. Ainsi à l'échelle discrète, ces espaces doivent alors vérifier une condition de compatibilité (voir [16], page 138) :

$$\nabla \cdot \mathcal{W}_h = \mathcal{Q}_h. \quad (3.14)$$

Cette condition lie ces espaces d'approximation garantissant que ces derniers ne peuvent être choisis arbitrairement et indépendamment l'un de l'autre. D'où, l'existence d'éléments finis mixtes dits compatibles. Parmi les plus connus et les plus employés, nous citerons ceux de Raviart–Thomas ([59]), Brezzi–Douglas–Marini([16]), etc. C'est dans ce cadre, que nous étudierons la méthode des MFE $H(\text{div})$ -conformes.

3.3.2 Le système linéaire et les principales difficultés

On s'intéresse désormais à la version matricielle du problème discret (3.13). Soient $A \in \mathbb{R}^{N_\sigma, N_\sigma}$ et $B \in \mathbb{R}^{N_\sigma, N_u}$ les matrices ayant pour définitions $A_{ij} = a(\vec{w}_j, \vec{w}_i)$ et $B_{ij} = b(q_j, \vec{w}_i)$. De plus, nous avons $H \in \mathbb{R}^{N_\sigma}$ et $F \in \mathbb{R}^{N_u}$ ayant pour définitions $H_j = h(\vec{w}_j)$ et $F_j = f(q_j)$. Ainsi, l'équation matricielle associée au système (3.13) aboutit à un système linéaire de type point-selle :

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{B}^t & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Sigma}_h \\ \vec{U}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{H} \\ \vec{F} \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

où $\vec{\Sigma}_h$ et \vec{U}_h désignent les vecteurs \mathbb{R}^{N_σ} et \mathbb{R}^{N_u} contenant les degrés de liberté des variables $\vec{\sigma}_h$ et u_h respectivement. Il apparaît clairement que la matrice globale de l'équation matricielle (3.15) est symétrique et semi-définie et que le problème à résoudre est de type point-selle. Ainsi, l'existence et l'unicité de la solution de ce système dépendent des propriétés mathé-

matiques des formes bilinéaires énoncées précédemment (voir [16]).

L'inconvénient majeur de la formulation mixte réside d'une part dans l'accroissement significatif du nombre total d'inconnus ($N_\sigma + N_u$) et par conséquent de la taille importante du système linéaire à résoudre. Ce nombre est directement lié à l'ordre polynomiale des fonctions de forme définissant les espaces \mathcal{W}_h et \mathcal{Q}_h et que la complexité du schéma de discrétisation croît indubitablement avec l'ordre d'approximation. De plus, la structure point-selle du système (3.15) rend impossible l'utilisation de solveurs itératifs ou directs classiques (matrice semi-définie).

Une alternative intéressante consisterait à éliminer une des deux inconnues, préférablement le vecteur de plus grande taille, à savoir $\vec{\Sigma}_h$:

$$\vec{\Sigma}_h = \bar{A}^{-1} \bar{B} \vec{U}_h - \bar{A}^{-1} \vec{H}. \quad (3.16)$$

En substituant (3.16) dans la deuxième équation, il est alors possible d'exprimer (3.15) à l'aide des seules inconnues de u_h :

$$\bar{S} \vec{U}_h = \vec{F} + \bar{B} \bar{A}^{-1} \vec{H}, \quad (3.17)$$

où $\bar{S} = \bar{B}^t \bar{A}^{-1} \bar{B}$ désigne une matrice qui est clairement symétrique et définie positive. Cette dernière propriété essentielle est assurée grâce à la condition inf – sup discrète qui garantit que la matrice \bar{B} du système (3.15) est de rang maximal (e.g. $\ker \bar{B} = 0$). Ainsi, la construction du complément de Schur \bar{S} nécessite de pouvoir calculer explicitement la matrice \bar{A}^{-1} et une des difficultés majeures vient du fait que la matrice \bar{A} n'a pas une structure bloc-diagonale rendant cette opération particulièrement onéreuse. Les difficultés de cette opération tiennent au fait que le champ des fonctions de l'espace \mathcal{W}_h sont à composante normale continue aux interfaces du maillage et, que leur support compact est porté par les deux mailles adjacentes à ces interfaces. Ainsi, l'évaluation de la forme bilinéaire $a(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)$ rend compte de l'interaction des éléments entre eux et fait apparaître des termes non nuls de façon disparate dans la matrice \bar{A} . La matrice \bar{A} n'est donc pas inversible par bloc et, de ce fait, il est coûteux d'éliminer $\vec{\Sigma}_h$ localement. D'autres techniques existent dans la littérature pour résoudre le système linéaire issu de la discrétisation par la méthode des éléments finis mixtes $H(\text{div})$ -conformes. La technique dite de compressibilité artificielle (voir [16, 31]) consiste à introduire une perturbation ϵ à l'intérieur du système linéaire permettant d'éliminer l'inconnue U_h et

de résoudre un système linéaire défini à l'aide des seules inconnues du flux Σ_h . Bien que cette technique soit relativement simple à mettre en œuvre numériquement, elle présente cependant un inconvénient majeur puisqu'elle viole dorénavant l'hypothèse d'incompressibilité du fluide. De plus, le conditionnement global de la matrice à résoudre se dégrade à mesure que le coefficient ϵ décroît rendant la technique de compressibilité artificielle peut attractive.

3.3.3 Passage à l'élément de référence

Le passage par un élément de référence est souvent utilisé dans les méthodes d'éléments finis de Galerkin (voir [6, 64, 42]) et présente plusieurs avantages. Premièrement, il permet de s'affranchir de la génération d'une base polynomiale par élément $A \in \mathcal{T}_h$. Deuxièmement, il facilite grandement l'implémentation de la méthode d'approximation numérique car c'est sur cet élément que se fera l'ensemble des calculs nécessaires. Il existe alors un lien entre l'élément de référence et tout autre élément $A \in \mathcal{T}_h$. Ce lien est matérialisé par une application linéaire $\vec{f}_A : \hat{A} \mapsto A$, avec \hat{A} l'élément de référence. L'élément que nous avons choisi pour nos travaux est le triangle rectangle unitaire. Une représentation schématique en est donnée à la figure 3.1.

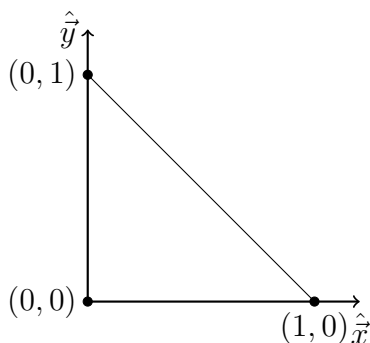


FIGURE 3.1 – Élément de référence triangulaire

Le choix de l'élément de référence n'a aucun impact sur les propriétés mathématiques générales des bases d'éléments finis mixtes. Cependant, la forme locale des fonctions d'interpolations et leurs nombre ne seront pas les mêmes selon l'élément choisie. Afin de relier l'élément de référence à tout élément $A \in \mathcal{T}_h$, il existe une fonction de passage qui est une transformation géométrique mettant en relation les coordonnées des deux entités. Une représentation schématique est donnée à la figure 3.2.

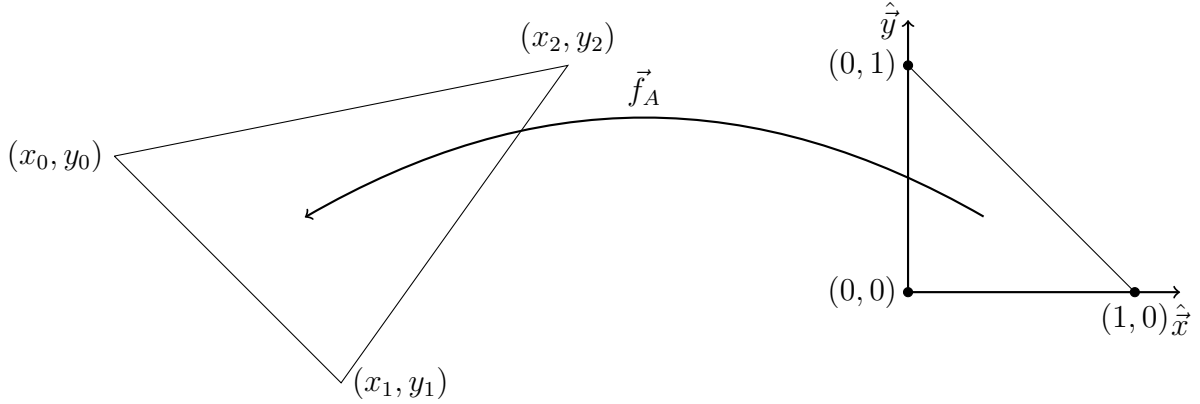


FIGURE 3.2 – Transformation de l'élément de référence \hat{A} vers un élément quelconque $A \in \mathcal{T}_h$

Dans le cadre du passage d'un triangle unitaire vers un triangle quelconque, la fonction de transformation \vec{f}_A est la suivante :

$$\vec{f}_A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Xa & Xb \\ Ya & Yb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} Xa &= x_1 - x_0, \\ Xb &= x_2 - x_0, \\ Ya &= y_1 - y_0, \\ Yb &= y_2 - y_0. \end{aligned}$$

Un des éléments essentiels à la description des intégrales dans l'élément de référence est la matrice Jacobienne de la transformation \vec{f}_A . Elle est définie par le gradient de cette transformation :

$$\hat{\nabla} \vec{f}_A = \bar{J}_A = \begin{bmatrix} Xa & Xb \\ Ya & Yb \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

On note DJ_A le déterminant de la Jacobienne. La fonction de transformation ayant été introduite, il est maintenant possible de définir la relation permettant de relier le flux de l'élément physique à celui de l'élément de référence. Nous effectuons ainsi une différence entre les quantités vectorielles et scalaires afin de préserver les propriétés des espaces d'origine.

L'expression d'une fonction vectorielle de l'élément physique dans l'élément de référence est donnée par la *transformation de Piola* :

$$\vec{w}_h \leftrightarrow \widehat{w}_h : \vec{w}_h = DJ_A^{-1} \bar{J}_A \widehat{w}_h \circ f_A^{-1}. \quad (3.20)$$

Cette relation implique pour les intégrales suivantes que :

$$(\nabla \cdot \vec{w}_h, q_h)_A = \left(\widehat{\nabla} \cdot \widehat{w}_h, \widehat{q}_h \right)_{\widehat{A}}, \quad \langle \vec{w}_h \cdot \vec{n}, \mu_h \rangle_{\partial A} = \langle \widehat{w}_h \cdot \widehat{\vec{n}}, \widehat{\mu}_h \rangle_{\partial \widehat{A}}, \quad (3.21)$$

avec $\widehat{\vec{n}} = \frac{1}{|\widehat{e}|} DJ_A \bar{J}_A^{-1} \vec{n}$. Cette transformation n'est appliquée que dans le cadre des éléments finis mixtes. En effet, la *transformation de Piola* est appliquée à $\vec{\sigma}_h$ et \vec{w}_h car elle permet de préserver la continuité de la composante normale des fonctions vectorielles entre chaque élément $A \in \mathcal{T}_h$. Pour l'intégration des quantités scalaires nous avons :

$$(u, v)_A = (\widehat{u}, \widehat{v} DJ_A)_{\widehat{A}}. \quad (3.22)$$

Base de Raviart–Thomas sur l'élément de référence

Les fonctions de Raviart–Thomas sont des vecteurs polynomiaux de la forme suivante :

$$\mathcal{RT}^p(A) := (\mathcal{P}^p(A))^d + \vec{X} \mathcal{P}^p(A),$$

où $\vec{X} = \sum_{i=1}^d x_i \vec{e}_i$ avec \vec{e}_i les vecteurs unitaires décrivant la base canonique et $p \geq 0$. Ainsi, dans le cadre d'élément triangulaire, le nombre local de degré de liberté sera égal à $n_{RT} = (p+1)(p+3)$ dont ceux définis sur la frontière ∂A , à savoir $n_{RT}^* = 3(p+1)$. Les fonctions d'interpolation sont quant à elles construites sur l'élément de référence de la façon suivante quand $n_{RT} \geq n_{RT}^*$:

$$\begin{cases} \langle \widehat{w}_i \cdot \widehat{\vec{n}}_{\widehat{e}}, \widehat{\mu}_j \rangle_{\widehat{e}} = \delta_{ij} & \forall \widehat{\mu}_j \in \mathcal{P}^p(\widehat{e}), \\ \left(\widehat{w}_i, \widehat{P}_l \right)_{\widehat{A}} = \delta_{il} & \forall \widehat{P}_l \in (\mathcal{P}^{p-1}(\widehat{A}))^d, \end{cases} \quad (3.23)$$

où $(i, j) \leq (n_{RT}, n_{RT}^*)$, $n_{RT}^* < l \leq n_{RT}$, \widehat{e} désigne une facette de l'élément \widehat{A} et δ_{ij} , appelé symbole de Kronecker, défini de tel sorte que :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (3.24)$$

Les vecteurs de Raviart–Thomas sont construits de telle sorte que :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{w}_h \in \mathcal{P}^p(A) \\ \vec{w}_h \cdot \vec{n} \in \mathcal{P}^p(e) \end{cases} \quad (3.25)$$

La condition de compatibilité $\nabla \cdot \mathcal{W}_h = \mathcal{Q}_h$ est respectée et le problème (3.13) respecte donc bien la condition de compatibilité de BNB [32] assurant alors le fait qu’il soit bien posé pour $\vec{\sigma}_h \in \mathcal{RT}_h^p(A)$.

3.4 Les éléments finis discontinus de Galerkin

3.4.1 Description générale de la méthode

La méthode des éléments finis mixtes discontinus de Galerkin (MDG) a été introduite pour la première fois par [9] dans le cadre du problème de Navier–Stokes compressible. Dans l’année qui suivit, [25] proposaient la méthode Local Discontinuous Galerkin (LDG) pour le problème d’advection-diffusion scalaire. Le point de départ de ces deux méthodes était une ré-écriture du problème initial sous la forme d’un système d’EDP du premier ordre. Contrairement aux méthodes $H(\text{div})$ -conformes, l’idée novatrice des MDG était justement de relaxer cette contrainte de régularité de la variable duale (voir [4, 29, 8, 74, 5]). Cependant, afin d’assurer cette continuité nécessaire aux problèmes de diffusion, les MDG introduisent naturellement la notion de trace (voir schéma 3.3) du flux et de la variable d’état aux interfaces du maillage. Ces traces joueront un rôle central dans le développement de cette

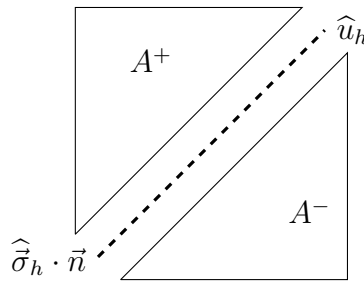


FIGURE 3.3 – Représentation des traces \hat{u}_h et $\hat{\sigma}_h \cdot \vec{n}$ entre deux éléments A^+ et A^-

classe de méthode. En effet, les méthodes MDG se distinguent les unes des autres selon les expressions proposées de ces quantités.

Cette discontinuité du flux $\vec{\sigma}_h$ permet d'alléger les contraintes sur le choix des fonctions de base nécessaires à sa description. Par conséquent, la contrainte $\mathcal{X}(\mathcal{T}_h) = \mathcal{H}(\text{div}, \mathcal{T}_h)$ n'est plus nécessaire et devient simplement $\mathcal{X}(\mathcal{T}_h) = [\mathcal{L}^2(\mathcal{T}_h)]^d$. Ce choix a plusieurs conséquences sur les propriétés du flux $\vec{\sigma}_h$. Premièrement, il ne dispose plus de support sur deux éléments adjacents. Il est uniquement défini élément par élément et permet de simplifier la résolution du système linéaire global. Nous donnerons plus de détails sur cette propriété mathématique dans la suite de ce chapitre. Deuxièmement, il est possible d'exprimer les traces en fonction des variables des éléments adjacents afin d'apporter de la stabilité et de la consistance à la méthode d'approximation. Pour ce faire, plusieurs possibilités sont répertoriées dans la littérature pour la description des traces dans le cadre des équations de diffusion (voir tableau 3.1). Grâce aux nouvelles propriétés de $\vec{\sigma}_h$, la formulation faible discrète du problème de

Méthode	\hat{u}_h	$\hat{\vec{\sigma}}_h$
Bassi–Rebay [9]	$\{u_h\}$	$\{\vec{\sigma}_h\}$
Baumann–Oden [11]	$\{u_h\} + f(\llbracket u_h \rrbracket)$	$\{\vec{\nabla} u_h\}$
IP [29]	$\{u_h\}$	$\{\vec{\nabla} u_h\} - \vec{f}_j(\llbracket u_h \rrbracket)$
Bassi et al. [10]	$\{u_h\}$	$\{\vec{\nabla} u_h\} - \vec{f}_r(\llbracket u_h \rrbracket)$
Brezzi et al. [17]	$\{u_h\}$	$\{\vec{\sigma}_h\} - \vec{f}_r(\llbracket u_h \rrbracket)$
LdG [19]	$\{u_h\} - \vec{c} \cdot \llbracket u_h \rrbracket$	$\{\vec{\sigma}_h\} + \vec{c} \cdot \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket - \vec{f}_j(\llbracket u_h \rrbracket)$

TABLE 3.1 – Différentes méthodes d'éléments finis mixtes discontinus de Galerkin pour le problème de diffusion

diffusion peut alors s'exprimer sur chaque élément $A \in \mathcal{T}_h$ de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\bar{\alpha}^{-1} \vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)_A - (u_h, \nabla \cdot \vec{w}_h)_A + \langle \hat{u}_h, \vec{w}_h \cdot \vec{n} \rangle_{\partial A} = 0 \quad \forall \vec{w}_h \in (\mathcal{P}^p(A))^d, \\ \langle \hat{\vec{\sigma}}_h \cdot \vec{n}, q_h \rangle_{\partial A} - (\vec{\sigma}_h, \vec{\nabla} q_h)_A = (f, q_h)_A \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}(A). \end{array} \right. \quad (3.26)$$

En sommant (3.26) sur l'ensemble des éléments $A \in \mathcal{T}_h$ et en utilisant les relations (3.3) et (3.4), nous pouvons écrire la formulation faible discrète globale MDG du problème de diffusion :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{\sigma}_h, u_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h \text{ tel que :} \\ (\bar{\alpha}^{-1} \vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h} - (u_h, \nabla \cdot \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \hat{u}_h, \llbracket \vec{w}_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^0} = -\langle g_D, \vec{w}_h \cdot \vec{n} \rangle_{\mathcal{E}_h^{\partial}}, \quad \forall \vec{w}_h \in \mathcal{W}_h \\ \langle \hat{\vec{\sigma}}_h, \llbracket q_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^0} - (\vec{\sigma}_h, \vec{\nabla} q_h)_{\mathcal{T}_h} = (f, q_h)_{\mathcal{T}_h}. \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h \end{array} \right. \quad (3.27)$$

A ce stade de notre exposé, la mise en place du système (3.27) s'appuie sur quelques propriétés

mathématiques de ces nouvelles inconnues. En effet, les traces doivent être consistantes aux interfaces : généralement, elles s'expriment à l'aide des inconnues du problème, à savoir $\vec{\sigma}_h$ et u_h . Diverses expressions de ces traces ont été proposées dans la littérature (voir [4]). Par la suite nous nous focaliserons sur la méthode LDG telle que proposée par [25].

3.4.2 Méthode LDG

Nous rappelons les expressions des traces proposées par la méthode LDG :

$$\begin{bmatrix} \widehat{\vec{\sigma}}_h \\ \widehat{u}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\vec{\sigma}_h\} \\ \{u_h\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_{11} & -\vec{c}_{12} \\ \vec{c}_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \llbracket u_h \rrbracket \\ \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

En remplaçant ces expressions dans la formulation faible discrète globale (3.27) nous obtenons :

$$\begin{cases} (\bar{\alpha}^{-1}\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h} - (u_h, \nabla \cdot \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \{u_h\} + \vec{c}_{12} \cdot \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket \vec{w}_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^0} = -\langle g_D, \vec{w}_h \cdot \vec{n} \rangle_{\mathcal{E}_h^{\partial}} & \forall \vec{w}_h \in \mathcal{W}_h, \\ \langle \{\vec{\sigma}_h\} - \vec{c}_{12} \cdot \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket, \llbracket q_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h} - \left(\vec{\sigma}_h, \vec{\nabla} q_h \right)_{\mathcal{T}_h} - \langle c_{11} \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket q_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h} = (f, q_h)_{\mathcal{T}_h} & \forall q_h \in \mathcal{Q}_h. \end{cases} \quad (3.29)$$

Il est possible de simplifier cette formulation afin de représenter au mieux le système linéaire lié à la méthode des LdG. Pour ce faire, nous considérons la relation suivante (voir [4]) :

$$(\nabla \cdot \vec{\sigma}_h, q_h)_{\mathcal{T}_h} - \langle \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket, \{q_h\} \rangle_{\mathcal{E}_h} = \langle \{\vec{\sigma}_h\}, \llbracket q_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^0} - \left(\vec{\sigma}_h, \vec{\nabla} q_h \right)_{\mathcal{T}_h}, \quad (3.30)$$

et l'intégrons à la formulation (3.29). La formulation faible discrète globale devient alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\vec{\sigma}_h, u_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h \text{ tel que :} \\ (\bar{\alpha}^{-1}\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h} - (u_h, \nabla \cdot \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \{u_h\} + \vec{c}_{12} \cdot \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket \vec{w}_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^0} = -\langle g_D, \vec{w}_h \cdot \vec{n} \rangle_{\mathcal{E}_h^{\partial}} & \forall \vec{w}_h \in \mathcal{W}_h, \\ (\nabla \cdot \vec{\sigma}_h, q_h)_{\mathcal{T}_h} - \langle \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket, \{q_h\} + \vec{c}_{12} \cdot \llbracket q_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^0} - \langle c_{11} \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket q_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h} = (f, q_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle c_{11} g_D, q_h \rangle_{\mathcal{E}_h^{\partial}} & \forall q_h \in \mathcal{Q}_h. \end{cases} \quad (3.31)$$

Le choix de l'expression des traces fait par la méthode LDG permet non seulement de retrouver la symétrie du problème de diffusion mais aussi de résoudre un système linéaire défini-positif. De plus, il met en interaction au plus 10 éléments entre eux à travers les termes de sauts et de moyennes. Le stencil des LdG est présenté à la figure 3.4.

Afin d'illustrer les affirmations faites précédemment, nous définissons les formes bilinéaires

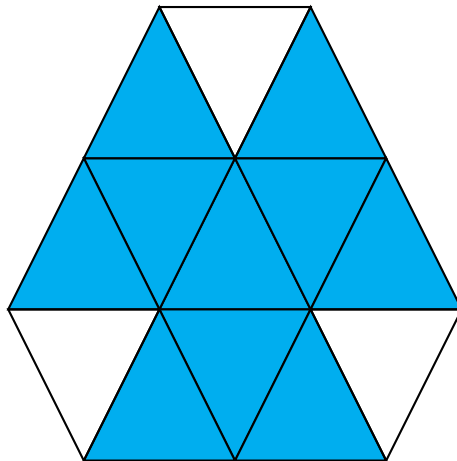


FIGURE 3.4 – Représentation schématique du stencil des LDG

et linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
 a(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h) &:= (\bar{\alpha}^{-1} \vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h}, \\
 b(u_h, \vec{w}_h) &:= (u_h, \nabla \cdot \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h} - \langle \{u_h\} + \vec{c}_{12} \cdot \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket \vec{w}_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^o}, \\
 c(u_h, q_h) &:= -\langle c_{11} \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket q_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h}, \\
 f(u_h, q_h) &:= (f, q_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle c_{11} g_D, q_h \rangle_{\mathcal{E}_h^o}, \\
 h(\vec{w}_h) &:= \langle g_D, \vec{w}_h \cdot \vec{n} \rangle_{\mathcal{E}_h^o}.
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

Il devient alors possible d'écrire (3.31) en fonction des formes bilinéaires et linéaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{\sigma}_h, u_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h \text{ tel que :} \\ a(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h) - b(u_h, \vec{w}_h) = -h(\vec{w}_h), \\ b(q_h, \vec{\sigma}_h) + c(u_h, q_h) = f(q_h). \end{array} \right. \tag{3.33}$$

Le système linéaire associé est alors le suivant :

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{B}^t & \bar{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Sigma}_h \\ \vec{U}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{H} \\ \vec{F} \end{bmatrix} \tag{3.34}$$

Le système linéaire (3.39) est différent de celui des MFE sur plusieurs points. Premièrement, la différence fondamentale entre les MDG et MFE réside dans la forme de la matrice \bar{A} . Cette dernière est désormais bloc-diagonale et, de ce fait, inversible localement par bloc. Il est alors possible d'éliminer le vecteur de plus grande taille et de résoudre un système linéaire défini

à l'aide de la seule inconnue U_h :

$$\left[\bar{B}^t \bar{A}^{-1} \bar{B} + \bar{C} \right] U_h = \bar{B}^t \bar{A}^{-1} \bar{H} + \bar{F}, \quad (3.35)$$

où $\left[\bar{B}^t \bar{A}^{-1} \bar{B} + \bar{C} \right]$ est une matrice symétrique et définie positive. Une fois le système en U_h résolu, on reconstruit localement et à posteriori le champ $\vec{\Sigma}_h$. Des techniques de post-traitement peuvent être envisagées afin de construire une nouvelle variable $\vec{\sigma}_h^*$ qui soit $H(\text{div})$ -conforme (voir [53]).

Concernant les ordres de convergence de $\vec{\sigma}_h$ et de u_h , une étude d'erreur à priori a été faite par [4]. En conclusion de cette étude, la variable d'état doit théoriquement converger à l'ordre $p + 1$ dans la norme $\mathcal{L}^2(\Omega)$ et à l'ordre p dans la norme $\mathcal{H}^1(\Omega)$ pour le problème de diffusion hétérogène. Cependant, le flux obtenu en post-traitement ne converge qu'à l'ordre p dans la norme $\mathcal{L}^2(\Omega)$. Cette dernière est donc mise à défaut par rapport aux méthodes MFE dans l'évaluation de $\vec{\sigma}_h$. La réponse à cette carence est cependant en partie apportée par Bernardo Cockburn en 2000 dans [19]. Les auteurs y expliquent que la réduction de la vitesse de convergence de la variable $\vec{\sigma}_h$ de la méthode LDG est due au fait que l'approximation de la trace de u_h est en réalité incomplète et qu'il faudrait considérer en plus le saut du flux dans son expression. Nous proposons d'analyser dans la prochaine section les conséquences de l'introduction de ce terme supplémentaire.

3.4.3 Convergence du flux et expression complète des traces

La méthode LDG utilise une expression incomplète de la trace \hat{u}_h (voir [19]). En effet, l'expression des traces est en réalité la suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{\vec{\sigma}}_h \\ \hat{u}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\vec{\sigma}_h\} \\ \{u_h\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_{11} & -\vec{c}_{12} \\ \vec{c}_{12} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \llbracket u_h \rrbracket \\ \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

L'introduction de ce terme supplémentaire $c_{22} > 0$ modifie fondamentalement l'expression générale de la forme bilinéaire $a_h(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)$ que nous noterons dorénavant $a_h^*(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)$ et qui est définie par :

$$a^*(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h) := a(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h) + \langle c_{22} \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket, \llbracket \vec{w}_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^0}. \quad (3.37)$$

La nouvelle formulation faible discrète globale devient donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{\sigma}_h, u_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h \text{ telles que :} \\ a^*(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h) - b(u_h, \vec{w}_h) = -h(\vec{w}_h), \\ b(q_h, \vec{\sigma}_h) + c(u_h, q_h) = f(q_h), \end{array} \right. \quad (3.38)$$

et le système linéaire associé :

$$\begin{bmatrix} \bar{\bar{A}}^* & -\bar{\bar{B}} \\ \bar{\bar{B}}^t & \bar{\bar{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Sigma}_h \\ \vec{U}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\vec{H} \\ \vec{F} \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

L'introduction de ce terme supplémentaire a permis d'améliorer l'ordre de convergence du flux à $p + 1$. Cependant, elle introduit des dépendances supplémentaires dans $a^*(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)$ qui modifieront la structure bloc-diagonale de la matrice $\bar{\bar{A}}$ rendant la technique de condensation statique obsolète (inversion locale impossible) et présentant les mêmes inconvénients que pour les méthodes MFE. La prise en compte de l'expression complète des traces a certes permis de restaurer la convergence optimale des variables $\vec{\sigma}_h$ et u_h mais au prix de difficultés supplémentaires sur le système à résoudre. Dans le but d'apporter une réponse cohérente aux difficultés rencontrées par les méthodes MFE et LDG, la technique d'hybridation a alors été introduite (voir [53, 16, 26, 24]). Cette technique sera expliquée en détail dans les chapitres suivants.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux classes de méthode d'éléments finis mixtes de Galerkin pour le problème de diffusion hétérogène et anisotrope. La première est la méthode des éléments finis mixtes $H(\text{div})$ -conformes offrant une approximation optimale des variables discrètes du problème. Cependant, cette méthode conduit généralement à un système linéaire de type point-selle dont la résolution numérique est très délicate. La méthode de Schur permettrait de réduire la taille importante du système linéaire en éliminant le vecteur inconnu de plus grande taille $\vec{\Sigma}_h$. Le succès d'une telle réduction réside dans notre capacité à pouvoir calculer explicitement l'inverse de la matrice de masse $\bar{\bar{A}}$. Nombre d'auteurs ont travaillé activement dans cette direction visant à rendre la matrice de masse localement inversible. L'al-

ternative proposée par les méthodes discontinues de Galerkin consiste justement à contourner cette difficulté en relaxant les conditions de régularité de la variable duale (approximation polynomiale par morceau). Grâce aux nouvelles propriétés de ces espaces d'approximation et aux choix spécifiques des traces, la variante LDG conduit naturellement à un système linéaire où la matrice de masse $\bar{\bar{A}}$ est diagonale par bloc permettant d'éliminer localement et rapidement les inconnues de la variable duale. Cette méthode reste valable pour des ordres polynomiaux quelconques mais elle conduit malheureusement à des approximations numériques des variables discrètes de moindre qualité (convergence sub-optimale de $\vec{\sigma}_h$). Ainsi, il apparaît clairement que ces deux familles de méthode de Galerkin apportent des réponses plus ou moins adaptées au problème de diffusion : les méthodes $H(\text{div})$ -conformes fournissent des approximations numériques optimales des variables discrètes du problème posé au prix de grandes difficultés concernant le système linéaire à résoudre. Les méthodes discontinues permettent de contourner cette difficulté liée au système linéaire mais elles aboutissent généralement à des approximations numériques plus pauvres de ces variables. Toutefois, une question essentielle se pose : est-il possible de contourner ces difficultés intrinsèquement liées à ces deux formalismes distincts ? C'est à cette question que nous tenterons de répondre dans le prochain chapitre en changeant radicalement de paradigme. Nous présenterons la voie proposée par [53], à savoir la technique d'hybridisation, permettant de régler définitivement et simultanément ces difficultés tant du point de vue des méthodes $H(\text{div})$ -conformes que de celui des méthodes discontinues de Galerkin.

Chapitre 4

Les méthodes mixtes hybrides de Galerkin

Sommaire

4.1	Introduction	44
4.2	Description générale de la méthode	44
4.3	Implémentation du solveur local	47
4.4	Formulation globale	48
4.5	Influence du facteur de stabilisation sur les expressions des traces	51
4.6	Post-processing	52
4.6.1	Post-processing du flux	52
4.6.2	Post-processing de la variable d'état	52
4.7	Exemples numériques	53
4.7.1	Diffusion isotrope	53
4.7.2	Diffusion anisotrope	55
4.8	Proposition : sur-stabilisation de la méthode H-RT	56
4.9	Évaluation de la méthode H-RT^m dans le cadre de l'équation de diffusion/dispersion-convection	58
4.10	Conclusion	63

4.1 Introduction

La technique d'hybridation décrite dans [16] consiste à casser les propriétés de continuité des fonctions de base décrivant le flux et de l'imposer explicitement à travers une équation supplémentaire. Pour ce faire, elle introduit une nouvelle inconnue, appelée "trace" de la variable d'état, sur les arêtes des éléments d'une partition \mathcal{T}_h d'un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$ (voir [63, 54, 55]).

La technique d'hybridation a permis de créer un socle commun aux éléments finis mixtes et discontinus de Galerkin. Elle offre la possibilité de réduire la dimension du système linéaire global aux seules inconnues de la trace de la variable d'état (voir [23]). Ainsi, la méthodologie de résolution numérique des problèmes de diffusion apportée par la technique d'hybridation permet de répondre aux difficultés rencontrées par les MFE et les LDG.

Les méthodes Hybrides présentent alors un grand intérêt dans la résolution numérique des problèmes de diffusion car elles permettent de s'affranchir des difficultés liées à la résolution des problèmes de type point selle ou des matrices globales non bloc-diagonales. De ce fait, ces méthodes ont connues un grand succès dans divers domaines de la recherche (voir [45, 21, 65, 34, 3, 70, 47]). Ce chapitre a donc pour but de décrire le fonctionnement et l'implémentation des méthodes Hybrides. Il permet aussi de donner au lecteur une vision concrète des possibilités offertes par cette technique à travers des exemples numériques témoignant de la stabilité et de la convergence de celles-ci. Le lien existant entre les MFE et les LDG sera aussi mis en exergue.

Ce chapitre est organisé comme suivant. Premièrement, nous donnons une description générale des méthodes Hybrides dans le cadre de l'équation de diffusion. Cette méthode sera ensuite évaluée dans le cadre de bases mixtes et dans celui de bases discontinues. Des exemples numériques illustreront alors les propriétés mathématiques de ces méthodes.

4.2 Description générale de la méthode

Nous rappelons l'expression de la formulation duale du problème de diffusion :

$$\begin{cases} \bar{\alpha}^{-1} \vec{\sigma} = -\vec{\nabla} u & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \vec{\sigma} = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g_D & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

où $\bar{\alpha}$ désigne un tenseur de diffusion que nous supposons symétrique et défini positif, u la variable d'état, $\vec{\sigma}$ le champ des vitesses, f un terme source et g_D une condition aux limites de type Dirichlet. La technique d'hybridation est, dans un premier temps, décrite par une formulation faible locale du problème (4.1) pour $\mathcal{X}(\Omega) = [\mathcal{L}^2(\Omega)]^d$:

$$\begin{cases} (\bar{\alpha}^{-1} \vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)_A - (u_h, \nabla \cdot \vec{w}_h)_A + \langle \hat{u}_h, \vec{w}_h \cdot \vec{n} \rangle_{\partial A} = 0 & \forall \vec{w}_h \in \mathcal{W}(A), \\ \langle \hat{\vec{\sigma}}_h \cdot \vec{n}, q_h \rangle_{\partial A} - (\vec{\sigma}_h, \vec{\nabla} q_h)_A = (f, q_h)_A & \forall q_h \in \mathcal{Q}(A). \end{cases} \quad (4.2)$$

La formulation (4.2) est exprimée sur un élément quelconque $A \in \mathcal{T}_h$ et fait apparaître les inconnues $\vec{\sigma}_h \in \mathcal{W}_h$, $u_h \in \mathcal{Q}_h$, $\hat{u}_h \in \mathcal{M}_h$ et $\hat{\vec{\sigma}}_h$ où \mathcal{M}_h désigne l'espace des traces telle que :

$$\mathcal{M}_h = \mathcal{M}_h^0 + \mathcal{M}_h^\partial \quad (4.3)$$

avec le sous-espace de \mathcal{M}_h , à savoir \mathcal{M}_h^0 exprimé sur les facettes intérieures $e \in \mathcal{E}_h^0$ par :

$$\mathcal{M}_h^0 = \{\mu_h \in \mathcal{L}^2(\mathcal{E}_h^0) : \mu_h|_e \in \mathcal{M}(e) \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^0\}, \quad (4.4)$$

et le deuxième sous-espace de \mathcal{M}_h , \mathcal{M}_h^∂ exprimé sur les facettes de bord $e \in \mathcal{E}_h^\partial$ par :

$$\mathcal{M}_h^\partial = \{\mu_h \in \mathcal{L}^2(\mathcal{E}_h^\partial) : \mu_h|_e \in \mathcal{M}(e) \quad \forall e \in \mathcal{E}_h^\partial\}. \quad (4.5)$$

En éléments finis Hybrides, $\vec{\sigma}_h$ et u_h sont discontinues sur \mathcal{T}_h alors que \hat{u}_h et $\hat{\vec{\sigma}}_h$ sont continues sur \mathcal{E}_h . De plus, la trace \hat{u}_h s'exprime sous la forme d'une fonction décrite par :

$$\hat{u}_h = \begin{cases} \lambda_h = \sum_{i=1}^{N_\lambda} \lambda_i \mu_i & \text{dans } \mathcal{M}_h^0 \\ P g_D & \text{dans } \mathcal{M}_h^\partial \end{cases} \quad (4.6)$$

où N_λ désigne l'ensemble des degrés de liberté de $\lambda_h \in \mathcal{M}_h^0$, μ_i l'ensemble des fonctions d'interpolation de $\mu_h \in \mathcal{M}_h^0$ et $P g_D$ la projection de la condition de Dirichlet g_D dans \mathcal{M}_h^∂ .

Le système d'équations (4.2) ne peut être résolu tel qu'il est défini. En effet, des hypothèses supplémentaires doivent être définies afin d'obtenir un nombre équivalent d'équations et

d'inconnues. La première des hypothèses réside dans la description de la trace du flux $\vec{\sigma}_h$, à savoir $\widehat{\vec{\sigma}}_h$. Cette trace peut alors s'exprimer de la façon suivante :

$$\widehat{\vec{\sigma}}_h = \vec{\sigma}_h + \vec{g}(\tau, u_h, \widehat{u}_h), \quad (4.7)$$

où $\vec{g}(\tau, u_h, \widehat{u}_h)$ désigne une fonction linéaire de stabilisation dépendante d'un facteur de stabilisation $\tau \geq 0$. La définition donnée à cette fonction de stabilisation permet de différencier les méthodes d'éléments finis hybrides entre elles. Ainsi, nous pouvons retrouver dans la littérature diverses fonctions de stabilisation proposées en fonction des espaces d'approximation utilisés pour la description du flux et de la variable d'état. Le tableau 4.1 présente diverses fonctions de stabilisation pour les méthodes Hybride Raviart–Thomas (H-RT), Hybride Brezzi–Douglas–Marini (H-BDM), Hybride discontinues de Galerkin (HdG) et la version projective de la méthode Hybride discontinue de Galerkin (HdG^p).

Méthode	$\vec{g}(\tau, u_h, \widehat{u}_h)$	$\mathcal{W}(A)$	$\mathcal{Q}(A)$	$\mathcal{M}(e)$
H-RT[16]	$\vec{0}$	$[\mathcal{P}^p(A)]^d + \vec{x}\mathcal{P}^p(A)$	$\mathcal{P}^p(A)$	$\mathcal{P}^p(e)$
H-BDM[16]	$\vec{0}$	$[\mathcal{P}^p(A)]^d$	$\mathcal{P}^{p-1}(A)$	$\mathcal{P}^p(e)$
HdG[53]	$\tau(u_h - \widehat{u}_h)\vec{n}$	$[\mathcal{P}^p(A)]^d$	$\mathcal{P}^p(A)$	$\mathcal{P}^p(e)$
HdG ^p [44]	$\tau(Pu_h - \widehat{u}_h)\vec{n}$	$[\mathcal{P}^p(A)]^d$	$\mathcal{P}^{p+1}(A)$	$\mathcal{P}^p(e)$

TABLE 4.1 – Différentes méthodes hybrides

où Pu_h désigne la projection de u_h dans l'espace des traces \mathcal{M}_h . Dans ce chapitre, seules les méthodes H-RT et HdG seront étudiées. De ce fait, la fonction de stabilisation peut se résumer à l'expression suivante :

$$\vec{g}(\tau, u_h, \widehat{u}_h) = \tau(u_h - \widehat{u}_h)\vec{n} \quad (4.8)$$

pour un choix approprié de τ . Ainsi, en introduisant la relation (4.8) dans le système (4.2) nous obtenons :

$$\begin{cases} (\bar{\alpha}^{-1}\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)_A - (u_h, \nabla \cdot \vec{w}_h)_A + \langle \widehat{u}_h, \vec{w}_h \cdot \vec{n} \rangle_{\partial A} = 0 & \forall \vec{w}_h \in \mathcal{W}(A), \\ (\nabla \cdot \vec{\sigma}_h, q_h)_A + \langle \tau u_h, q_h \rangle_{\partial A} - \langle \tau \lambda_h, q_h \rangle_{\partial A} = (f, q_h)_A & \forall q_h \in \mathcal{Q}(A). \end{cases} \quad (4.9)$$

Le système (4.9) est appelé solveur local.

A cette étape du développement de la technique d'hybridation, le problème de diffusion (4.9) présente toujours un nombre trop important de degré de liberté. L'avantage offert par

les méthodes hybrides réside dans le fait qu'il est possible d'exprimer localement les inconnues de $\vec{\sigma}_h$ et u_h en fonction de celles de \widehat{u}_h uniquement.

4.3 Implémentation du solveur local

Le solveur local peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{cases} a_h^A(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h) - b_h^A(u_h, \vec{w}_h) + c_h^A(\widehat{u}_h, \vec{w}_h) = 0 & \forall \vec{w}_h \in \mathcal{W}(A), \\ b_h^A(q_h, \vec{\sigma}_h) + d_h^A(u_h, q_h) - e_h^A(\widehat{u}_h, q_h) = f_h^A(q_h) & \forall q_h \in \mathcal{Q}(A), \end{cases} \quad (4.10)$$

où les formes bilinéaires et linéaires sont définies par :

$$a_h^A(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h) = (\bar{\alpha}^{-1} \vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)_A, \quad (4.11)$$

$$b_h^A(u_h, \vec{w}_h) = (u_h, \nabla \cdot \vec{w}_h)_A, \quad (4.12)$$

$$c_h^A(\widehat{u}_h, \vec{w}_h) = \langle \widehat{u}_h, \vec{w}_h \cdot \vec{n} \rangle_{\partial A}, \quad (4.13)$$

$$d_h^A(u_h, q_h) = \langle \tau u_h, q_h \rangle_{\partial A}, \quad (4.14)$$

$$e_h^A(\widehat{u}_h, q_h) = \langle \tau \widehat{u}_h, q_h \rangle_{\partial A}, \quad (4.15)$$

$$f_h^A(q_h) = (f, q_h)_A. \quad (4.16)$$

Nous pouvons alors décrire le système matriciel issu du système (4.10) à travers les tenseurs $A_{ij} = a_h^A(\vec{w}_j, \vec{w}_i)$, $B_{ij} = b_h^A(q_j, \vec{w}_i)$, $C_{ij} = c_h^A(\mu_j, \vec{w}_i)$, $D_{ij} = d_h^A(q_j, q_i)$, $E_{ij} = e_h^A(\mu_j, q_i)$ et $F_i = f_h^A(q_i)$ par l'équation suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{B}^t & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Sigma}_h \\ \vec{U}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C} \\ -\bar{E} \end{bmatrix} \vec{\Lambda}_h = \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{F} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

où $(\vec{\Sigma}_h, \vec{U}_h, \vec{\Lambda}_h)$ sont les inconnues de $(\vec{\sigma}_h, u_h, \widehat{u}_h)$. La matrice de masse peut être soit définie positive, soit semi-définie selon le choix du facteur de stabilisation. Ainsi, pour les méthodes H-RT et H-BDM le tenseur \bar{D} sera nul alors que pour les HdG et HdG^p il sera strictement positif.

Dans un cadre général, il est possible d'exprimer localement les inconnues de $\vec{\sigma}_h$ et u_h en fonction de celles de λ_h par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} \vec{\Sigma}_h \\ \vec{U}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B} \\ \bar{B}^t & \bar{D} \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{F} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{C} \\ -\bar{E} \end{bmatrix} \vec{\Lambda}_h \right) \quad (4.18)$$

La technique d'hybridation permet ainsi d'exprimer les systèmes linéaires locaux uniquement en fonction des inconnues de \hat{u}_h . Pour pouvoir passer d'un problème exprimé localement à un problème exprimé sur l'ensemble des mailles de la partition \mathcal{T}_h , il est nécessaire d'introduire une équation supplémentaire. Cette équation est alors celle qui nous permettra d'imposer la continuité de la composante normale du flux $\hat{\sigma}_h$ et qui donnera naissance à un système linéaire global exprimé en fonction des inconnues de \hat{u}_h uniquement.

4.4 Formulation globale

L'expression de la continuité de la composante normale du flux $\hat{\sigma}_h$ doit être définie sur l'ensemble des facettes $e \in \mathcal{E}_h^0$. Pour ce faire, nous imposons la condition suivante :

$$\langle \llbracket \hat{\sigma}_h \rrbracket, \mu_h \rangle_{\mathcal{E}_h^0} = 0 \quad \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h^0. \quad (4.19)$$

En introduisant la description (4.7) de la trace du flux dans l'équation (4.19), nous obtenons :

$$\langle \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket, \mu_h \rangle_{\mathcal{E}_h^0} + \langle \llbracket \tau \vec{n} u_h \rrbracket, \mu_h \rangle_{\mathcal{E}_h^0} - \langle \llbracket \tau \vec{n} \lambda_h \rrbracket, \mu_h \rangle_{\mathcal{E}_h^0} = 0 \quad \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h^0. \quad (4.20)$$

L'équation (4.20) fait intervenir des termes de saut sur la trace λ_h . Grâce aux propriétés de continuité de cette variable et à travers la relation suivante :

$$\llbracket \tau \vec{n} \lambda_h \rrbracket = \llbracket \tau \vec{n} \rrbracket \{ \lambda_h \} + \{ \tau \vec{n} \} \cdot \llbracket \lambda_h \rrbracket, \quad (4.21)$$

il devient alors possible de simplifier l'équation (4.20) et de la présenter sous la forme suivante :

$$\langle \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket, \mu_h \rangle_{\mathcal{E}_h^0} + \langle \llbracket \tau \vec{n} u_h \rrbracket, \mu_h \rangle_{\mathcal{E}_h^0} - \langle \llbracket \tau \vec{n} \rrbracket \lambda_h, \mu_h \rangle_{\mathcal{E}_h^0} = 0 \quad \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h^0. \quad (4.22)$$

Ainsi, en sommant (4.9) sur l'ensemble des éléments $A \in \mathcal{T}_h$ et en incluant l'équation de continuité (4.22), la formulation faible discrète globale du problème de diffusion peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{\sigma}_h, u_h, \lambda_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{M}_h^0 \text{ telles que :} \\ (\bar{\alpha}^{-1} \vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h} - (u_h, \nabla \cdot \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \lambda_h, \llbracket \vec{w}_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^0} = -\langle P g_D, \vec{w}_h \cdot \vec{n} \rangle_{\mathcal{E}_h^\partial} \quad \forall \vec{w}_h \in \mathcal{W}_h, \\ (\nabla \cdot \vec{\sigma}_h, q_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \tau u_h, q_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} - \langle \lambda_h, \llbracket \tau \vec{n} q_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^0} = (f, q_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle P g_D, \tau q_h \rangle_{\mathcal{E}_h^\partial} \quad \forall q_h \in \mathcal{Q}_h, \\ \langle \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket, \mu_h \rangle_{\mathcal{E}_h^0} + \langle \llbracket \tau \vec{n} u_h \rrbracket, \mu_h \rangle_{\mathcal{E}_h^0} - \langle \llbracket \tau \vec{n} \rrbracket \lambda_h, \mu_h \rangle_{\mathcal{E}_h^0} = 0 \quad \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h^0. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Comme nous l'avons énoncé précédemment, la formulation (4.23) du problème de diffusion est réductible aux seules inconnues de λ_h . Afin de le démontrer, nous exprimons la formulation (4.23) sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{\sigma}_h, u_h, \lambda_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{M}_h^0 \text{ telles que :} \\ a_h(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h) - b_h(u_h, \vec{w}_h) + c_h(\lambda_h, \vec{w}_h) = h_h(\vec{w}_h) \\ b_h(q_h, \vec{\sigma}_h) + d_h(u_h, q_h) - e_h(\lambda_h, q_h) = f_h(q_h) \\ c_h(\mu_h, \vec{\sigma}_h) + e_h(\mu_h, u_h) - g_h(\lambda_h, \mu_h) = 0 \end{array} \right. \quad (4.24)$$

où les formes bilinéaires et linéaires sont décrites par :

$$a_h(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h) = (\bar{\alpha}^{-1} \vec{\sigma}_h, \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h}, \quad (4.25)$$

$$b_h(u_h, \vec{w}_h) = (u_h, \nabla \cdot \vec{w}_h)_{\mathcal{T}_h}, \quad (4.26)$$

$$c_h(\lambda_h, \vec{w}_h) = \langle \lambda_h, \llbracket \vec{w}_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^0}, \quad (4.27)$$

$$d_h(u_h, q_h) = \langle \tau u_h, q_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h}, \quad (4.28)$$

$$e_h(\lambda_h, q_h) = \langle \lambda_h, \llbracket \tau \vec{n} q_h \rrbracket \rangle_{\mathcal{E}_h^0}, \quad (4.29)$$

$$g_h(\lambda_h, \mu_h) = \langle \llbracket \tau \vec{n} \rrbracket \lambda_h, \mu_h \rangle_{\mathcal{E}_h^0}, \quad (4.30)$$

$$h_h(\vec{w}_h) = \langle P g_D, \vec{w}_h \cdot \vec{n} \rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}, \quad (4.31)$$

$$f_h(q_h) = (f, q_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle P g_D, \tau q_h \rangle_{\mathcal{E}_h^\partial}. \quad (4.32)$$

Les formes bilinéaires définissant les deux premières équations du système (4.24) peuvent être obtenues par assemblage des matrices locales (voir la section 4.3). Ainsi, le système linéaire (4.24) peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle avec les tenseurs $A_{ij} = a_h(\vec{w}_j, \vec{w}_i)$, $B_{ij} = b_h(q_j, \vec{w}_i)$, $C_{ij} = c_h(\mu_j, \vec{w}_i)$, $d_h(q_j, q_i)$, $E_{ij} = e_h(\mu_j, q_i)$, $G_{ij} = g_h(\mu_j, \mu_i)$, $H_i = h_h(\vec{w}_i)$ et

$F_i = f_h(q_i)$. Cette équation s'exprime alors sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B} & \bar{C} \\ \bar{B}^t & \bar{D} & -\bar{E} \\ \bar{C}^t & \bar{E}^t & -\bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Sigma}_h \\ \vec{U}_h \\ \vec{\Lambda}_h^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{H} \\ \vec{F} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

où $(\vec{\Sigma}_h, \vec{U}_h, \vec{\Lambda}_h^0)$ représentent les inconnues de $(\vec{\sigma}_h, u_h, \lambda_h)$. La symétrie de l'équation matricielle (4.33) est ici acquise. Cependant, la problématique de point selle peut intervenir dans le cadre des méthodes H-RT et H-BDM pour lesquelles les tenseurs \bar{D} , \bar{E} et \bar{G} sont nuls. Bien que cette configuration soit une réalité, elle n'ajoute aucune difficulté à la résolution du système (4.33) car le tenseur \bar{A} est bloc-diagonal indépendamment de la méthode employée et, comme nous l'avons vue dans la section 4.3, les inconnues $\vec{\Sigma}_h$ et \vec{U}_h peuvent être décrites en fonction des inconnues $\vec{\Lambda}_h^0$ par les relations suivantes :

$$\vec{U}_h = \left[\bar{B}^t \bar{A}^{-1} \bar{B} + \bar{D} \right]^{-1} \left(\vec{F} - \bar{B}^t \bar{A}^{-1} \vec{H} + \left[\bar{B}^t \bar{A}^{-1} \bar{C} + \bar{E} \right] \vec{\Lambda}_h \right) \quad (4.34)$$

$$\vec{\Sigma}_h = \bar{A}^{-1} \left(\bar{B} \vec{U}_h - \bar{C} \vec{\Lambda}_h^0 + \vec{H} \right) \quad (4.35)$$

Ainsi, le système linéaire final à résoudre peut se réduire à une expression de la forme :

$$\bar{M} \vec{\Lambda}_h^0 = \vec{L} \quad (4.36)$$

où \bar{M} est une matrice de dimension $N_\lambda \times N_\lambda$ et \vec{L} est un vecteur de dimension N_λ .

La technique d'hybridation élimine ainsi un grand nombre de difficultés présentes à la fois dans les MFE et les LDG. En effet, le système linéaire final à résoudre est réduit et la problématique de point-selle n'est plus vue comme une difficulté. De plus, elle permet de conserver des ordres de convergence optimaux pour les approximations du flux et de la variable d'état. Des exemples numériques seront proposés dans la suite de ce travail afin d'étayer nos remarques.

La technique d'hybridation impose cependant une reconstruction du flux $\vec{\sigma}_h$ dans $\mathcal{H}(\text{div}, \Omega)$ afin de recouvrer les propriétés de continuité du problème de départ.

4.5 Influence du facteur de stabilisation sur les expressions des traces

La présence d'un facteur de stabilisation $\tau > 0$ crée une relation particulière entre les traces $(\lambda_h, \widehat{\sigma}_h)$ et leurs voisins directs $(u_h^\pm, \vec{\sigma}_h^\pm)$ sur une facette $e \in \mathcal{E}_h^0$. Cette relation a été décrite dans [53] afin de créer un lien entre les méthodes LDG et HdG. Elle a le mérite de montrer simplement l'influence des différentes expressions de τ sur le comportement global des traces. Ainsi, à partir de l'expression de la continuité de la composante normale du flux $\widehat{\sigma}_h$, à savoir :

$$\llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket + \tau^+(u_h^+ - \lambda_h) + \tau^-(u_h^- - \lambda_h) = 0, \quad (4.37)$$

les expressions des traces λ_h et $\widehat{\sigma}_h$ deviennent :

$$\lambda_h = \frac{\tau^+}{\tau^+ + \tau^-} u_h^+ + \frac{\tau^-}{\tau^+ + \tau^-} u_h^- + \frac{1}{\tau^+ + \tau^-} \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket, \quad (4.38)$$

$$\widehat{\sigma}_h = \frac{\tau^-}{\tau^+ + \tau^-} \vec{\sigma}_h^+ + \frac{\tau^+}{\tau^+ + \tau^-} \vec{\sigma}_h^- + \frac{\tau^+ \tau^-}{\tau^+ + \tau^-} \llbracket u_h \rrbracket. \quad (4.39)$$

Les expressions (4.38) et (4.39) représentent les formes complètes des traces rencontrées dans le cadre des méthodes LDG.

Dans ce chapitre nous choisirons $\tau^\pm = [\bar{n}^t \bar{\alpha} \bar{n}]^\pm$. Ce choix particulier permet de pondérer les expressions des traces en fonction des caractéristiques physiques du milieu étudié. Ainsi, les comportements des solutions u_h et $\vec{\sigma}_h$ s'adapteront aux différentes configurations du tenseur de conductivité $\bar{\alpha}$. Lorsque ce tenseur devient fortement anisotrope, c'est-à-dire lorsque τ^- ou τ^+ tendent l'un ou l'autre vers zéros, les expressions des traces deviennent alors :

$$\begin{cases} \lim_{\tau^- \rightarrow 0} (\lambda_h) &= u_h^+ + \frac{1}{\tau^+} \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket, \\ \lim_{\tau^- \rightarrow 0} (\widehat{\sigma}_h) &= \vec{\sigma}_h^-, \end{cases} \quad (4.40)$$

ou bien :

$$\begin{cases} \lim_{\tau^+ \rightarrow 0} (\lambda_h) &= u_h^- + \frac{1}{\tau^-} \llbracket \vec{\sigma}_h \rrbracket, \\ \lim_{\tau^+ \rightarrow 0} (\widehat{\sigma}_h) &= \vec{\sigma}_h^+, \end{cases} \quad (4.41)$$

Dans ce cas particulier, les expressions des traces tendent vers un schéma "up-wind" habi-

tuellement utilisé pour la résolution des problèmes hyperboliques.

4.6 Post-processing

4.6.1 Post-processing du flux

Le flux $\vec{\sigma}_h$ obtenu par la technique d'hybridation est discontinu sur \mathcal{T}_h . Seule la trace $\widehat{\vec{\sigma}}_h$ est continue et respecte donc les propriétés mathématiques du problème de départ. Afin d'obtenir un flux continu, la technique de post-processing introduit une nouvelle variable $\vec{\sigma}_h^*|_A \in \mathcal{RT}^p(A)$. Cette variable est déterminée par une série d'opérations locales formalisées par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \langle \vec{\sigma}_h^* \cdot \vec{n}, \mu_h \rangle_{\partial A} = \langle \widehat{\vec{\sigma}}_h \cdot \vec{n}, \mu_h \rangle_{\partial A} & \forall \mu_h \in \mathcal{M}_h, \\ \left(\vec{\sigma}_h^*, \vec{P}_h \right)_A = \left(\vec{\sigma}_h, \vec{P}_h \right)_A & \forall \vec{P}_h \in [\mathcal{P}^{p-1}(A)]^d. \end{cases} \quad (4.42)$$

Il est alors évident que $\vec{\sigma}_h^* \in \mathcal{H}(\text{div}, \mathcal{T}_h)$ et qu'il correspond au flux de diffusion défini par le problème de départ.

4.6.2 Post-processing de la variable d'état

Dans le cadre du problème de diffusion, il peut être judicieux d'appliquer une technique de post-processing sur la variable d'état u_h afin d'améliorer ses propriétés de convergence. Pour ce faire, nous nommons la variable de post-processing $u_h^*|_A \in \mathcal{P}^{p+1}(A)$ et imposons les conditions suivantes (voir [30]) :

$$\begin{cases} \left(\bar{\alpha}^{-1} \vec{\sigma}_h, \vec{\nabla} q_h^* \right)_A = - \left(\vec{\nabla} u_h^*, \vec{\nabla} q_h^* \right)_A & \forall q_h^* \in \mathcal{P}^{p+1}(A), \\ \left(u_h^*, 1 \right)_A = \left(u_h, 1 \right)_A. \end{cases} \quad (4.43)$$

Cette technique de post-processing prend l'avantage de la super convergence du flux $\vec{\sigma}_h$ afin d'améliorer la vitesse de convergence de u_h . Ainsi, la nouvelle variable u_h^* doit converger à l'ordre $p + 2$.

4.7 Exemples numériques

4.7.1 Diffusion isotrope

Dans cette section, seules les méthodes HdG et H-RT seront évaluées numériquement. Pour ce faire, nous considérons la solution analytique $u(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$ définie sur le domaine $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ et possédant des conditions aux limites de type Dirichlet homogènes. Le tenseur de conductivité $\bar{\alpha}$ est considéré égal au tenseur identité et le terme source $f(x, y)$ est défini de telle sorte que :

$$-\Delta u = f \quad (4.44)$$

Nous définissons h le diamètre de cercle circonscrit contenant l'élément $A \in \mathcal{T}_h$. De plus, le maillage sera uniquement constitué de triangles rectangles. La figure 4.1 représente la solution numérique obtenue par la méthode H-RT pour $h^{-1} = 64$ et $p = 2$.

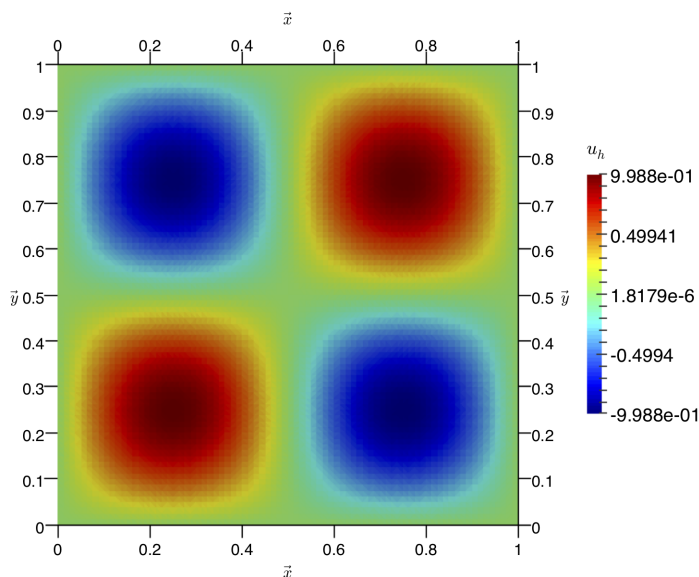


FIGURE 4.1 – Solution numérique u_h obtenue par la méthode H-RT pour $h^{-1} = 64$ et $p = 2$

Afin d'évaluer la vitesse de convergence des méthodes HdG et H-RT, nous définissons la norme $\|\cdot\|_0 = \left(\sum_{A \in \mathcal{T}_h} \int_A (\cdot)^2 dA \right)^{\frac{1}{2}}$ et, par conséquent, l'erreur d'approximation de u_h par $\|u - u_h\|_0$ et de σ_h par $\|\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_h\|_0$. De plus, nous évaluons les erreurs engendrées par les variables issues du post-processing par les normes $\|u - u_h^*\|_0$ et $\|\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_h^*\|_0$. Ainsi, le tableau 4.2 décrit l'historique de convergence des méthodes HdG et H-RT pour $0 \leq p \leq 2$

et $8 \leq h^{-1} \leq 64$.

	p	h^{-1}	$\ u - u_h\ _0$	Ordre	$\ \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_h\ _0$	Ordre	$\ u - u_h^*\ _0$	Ordre	$\ \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_h^*\ _0$	Ordre
HdG	0	8	$6,75 \cdot 10^{-1}$	–	$1,30 \cdot 10^{-0}$	–	$6,63 \cdot 10^{-1}$	–	$1,01 \cdot 10^{-0}$	–
		16	$3,48 \cdot 10^{-1}$	0,96	$6,51 \cdot 10^{-1}$	1,00	$3,41 \cdot 10^{-1}$	0,96	$5,06 \cdot 10^{-1}$	1,00
		32	$1,76 \cdot 10^{-1}$	0,98	$3,30 \cdot 10^{-1}$	0,98	$1,73 \cdot 10^{-1}$	0,98	$2,52 \cdot 10^{-1}$	1,01
		64	$8,87 \cdot 10^{-2}$	0,99	$1,66 \cdot 10^{-1}$	0,99	$8,72 \cdot 10^{-2}$	0,99	$1,26 \cdot 10^{-1}$	1,00
	1	8	$9,38 \cdot 10^{-2}$	–	$1,98 \cdot 10^{-1}$	–	$3,38 \cdot 10^{-3}$	–	$1,16 \cdot 10^{-1}$	–
		16	$2,43 \cdot 10^{-2}$	1,95	$5,11 \cdot 10^{-2}$	1,95	$4,21 \cdot 10^{-4}$	3,00	$2,92 \cdot 10^{-2}$	1,99
		32	$6,04 \cdot 10^{-3}$	2,01	$1,25 \cdot 10^{-2}$	2,03	$5,15 \cdot 10^{-5}$	3,03	$7,17 \cdot 10^{-3}$	2,03
		64	$1,50 \cdot 10^{-3}$	2,01	$3,08 \cdot 10^{-3}$	2,02	$6,33 \cdot 10^{-6}$	3,02	$1,77 \cdot 10^{-3}$	2,02
	2	8	$9,31 \cdot 10^{-3}$	–	$2,09 \cdot 10^{-2}$	–	$2,80 \cdot 10^{-4}$	–	$9,83 \cdot 10^{-3}$	–
		16	$1,17 \cdot 10^{-3}$	2,99	$2,62 \cdot 10^{-3}$	3,00	$1,76 \cdot 10^{-5}$	3,99	$1,21 \cdot 10^{-3}$	3,02
		32	$1,52 \cdot 10^{-4}$	2,94	$3,39 \cdot 10^{-4}$	2,95	$1,15 \cdot 10^{-6}$	3,94	$1,55 \cdot 10^{-4}$	2,96
		64	$1,93 \cdot 10^{-5}$	2,98	$4,32 \cdot 10^{-5}$	2,97	$7,91 \cdot 10^{-8}$	3,86	$2,26 \cdot 10^{-5}$	2,78
H-RT	0	8	$1,30 \cdot 10^{-1}$	–	$1,01 \cdot 10^{-0}$	–	$3,11 \cdot 10^{-2}$	–		
		16	$6,65 \cdot 10^{-2}$	0,97	$5,05 \cdot 10^{-1}$	1,00	$7,79 \cdot 10^{-3}$	2,00		
		32	$3,29 \cdot 10^{-2}$	1,01	$2,52 \cdot 10^{-1}$	1,00	$1,95 \cdot 10^{-3}$	2,00		
		64	$1,63 \cdot 10^{-2}$	1,01	$1,26 \cdot 10^{-1}$	1,00	$4,90 \cdot 10^{-4}$	1,99		
	1	8	$1,90 \cdot 10^{-2}$	–	$1,13 \cdot 10^{-1}$	–	$3,15 \cdot 10^{-3}$	–		
		16	$4,76 \cdot 10^{-3}$	2,00	$2,86 \cdot 10^{-2}$	1,98	$3,99 \cdot 10^{-4}$	2,98		
		32	$1,23 \cdot 10^{-3}$	1,95	$7,02 \cdot 10^{-3}$	2,03	$4,86 \cdot 10^{-5}$	3,04		
		64	$3,13 \cdot 10^{-4}$	1,97	$1,74 \cdot 10^{-3}$	2,01	$5,98 \cdot 10^{-6}$	3,02		
	2	8	$2,18 \cdot 10^{-3}$	–	$9,54 \cdot 10^{-3}$	–	$2,80 \cdot 10^{-4}$	–		
		16	$2,85 \cdot 10^{-4}$	2,93	$1,17 \cdot 10^{-3}$	3,03	$1,76 \cdot 10^{-5}$	3,99		
		32	$3,48 \cdot 10^{-5}$	3,03	$1,51 \cdot 10^{-4}$	2,95	$1,14 \cdot 10^{-6}$	3,95		
		64	$4,28 \cdot 10^{-6}$	3,02	$1,92 \cdot 10^{-5}$	2,97	$7,33 \cdot 10^{-8}$	3,96		

TABLE 4.2 – Historique de convergence du problème de diffusion isotrope en milieu homogène pour les méthodes H-RT et HdG

Les ordres de convergence annoncés dans la description théorique des méthodes hybrides sont ici respectés. La technique d'hybridation permet ainsi de concurrencer les méthodes mixtes et discontinues en simplifiant l'implémentation et la résolution numérique des problèmes de diffusion tout en conservant une vitesse de convergence optimale.

Il convient cependant de comparer les méthodes HdG et H-RT entre elles. Dans un cadre générale, les deux méthodes sont équivalentes en terme de vitesse de convergence. Cependant, la méthode H-RT présente une précision supérieure à celle de la méthode HdG à maillage égal. Cette caractéristique vient du fait que la construction polynomiale du flux σ_h est plus riche dans la première méthode que dans la seconde. Cette richesse implique cependant des tailles de systèmes linéaires locaux plus importantes et impose d'avoir un critère de comparaison supplémentaire afin d'avoir une vision précise du coût de fonctionnement des méthodes H-RT et HdG.

Une comparaison du temps CPU (temps de calculs) à l'erreur d'approximation de u_h pour les méthodes H-RT et HdG est présentée à la figure 4.2. La précision supplémentaire apportée par la méthode H-RT fait d'elle la méthode la plus rapide dans des conditions de simulation similaires au cas test ici présenté. Le grand nombre de degré de liberté généré par

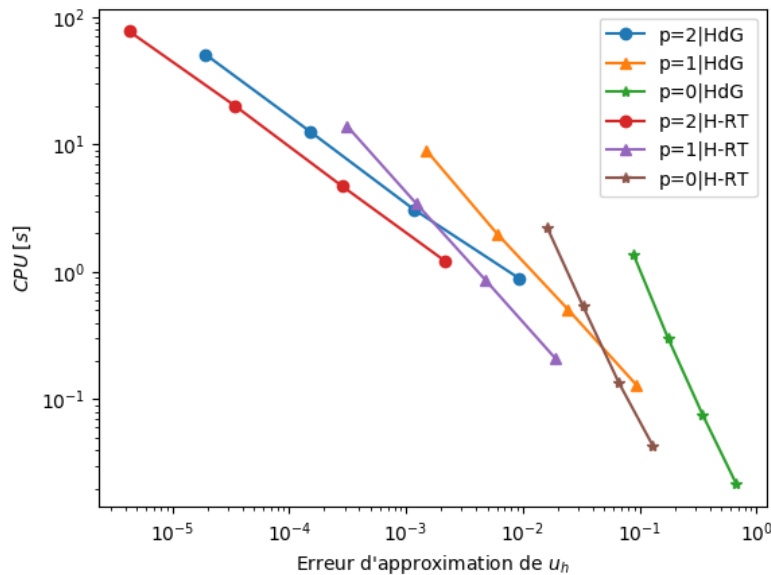


FIGURE 4.2 – Évaluation du temps de calcul pour les méthodes HdG et H-RT

l'espace d'approximation du flux $\vec{\sigma}_h$ ne joue donc pas un rôle prépondérant sur la rapidité de résolution numérique de cette méthode.

4.7.2 Diffusion anisotrope

Les conditions de simulation rencontrées dans le cas test précédent étaient favorables à la validation des ordres de convergence énoncés par la théorie. Afin de décrire le comportement des méthodes HdG et H-RT dans des conditions plus difficiles, nous avons choisi de les évaluer dans différentes configurations d'anisotropie. Ainsi, le tenseur de conductivité se présente sous la forme suivante :

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad 10^{-6} \leq \delta \leq 10^{-2} \quad (4.45)$$

où δ est un coefficient positif faisant varier l'anisotropie du tenseur $\bar{\alpha}$. Les résultats obtenus sont présentés à la figure 4.3.

Il apparaît clairement que l'anisotropie exerce une forte influence sur l'approximation u_h dans le cadre de la méthode H-RT. La méthode HdG quant à elle reste insensible et conserve les propriétés de convergence et de précision rencontrées dans les problèmes isotropes. Cette

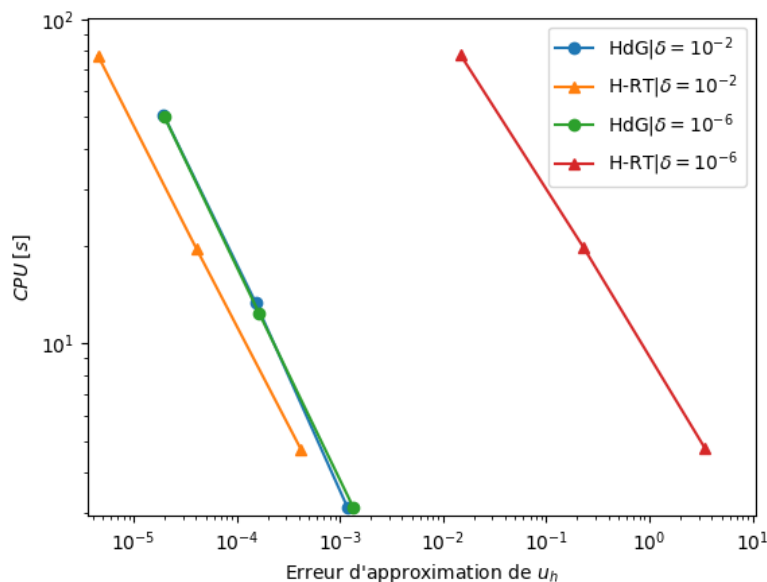


FIGURE 4.3 – évaluation du temps de calcul pour les méthodes HdG et H-RT avec $p = 2$

dernière gagne ainsi en vitesse de calcul lorsque l'anisotropie est croissante. Cet avantage est obtenu par l'introduction du facteur de stabilisation $\tau > 0$ permettant ainsi au flux $\widehat{\sigma}_h$ de s'adapter aux caractéristiques physiques du milieu étudié.

4.8 Proposition : sur-stabilisation de la méthode H-RT

Nous avons montré précédemment que les performances de la méthode H-RT pouvaient être fortement dégradées par l'anisotropie du tenseur de conductivité $\bar{\alpha}$. Afin d'améliorer le comportement de u_h dans des situations d'anisotropie extrême, nous proposons d'utiliser la fonction de stabilisation de la méthode HdG dans la méthode H-RT. Ainsi, la nouvelle méthode hybride est décrite comme suivante : La nouvelle méthode H-RT^m peut être vue

Méthode	$\vec{g}(\tau, u_h, \widehat{u}_h)$	$\mathcal{W}(A)$	$\mathcal{Q}(A)$	$\mathcal{M}(e)$
H-RT ^m	$\tau(u_h - \widehat{u}_h)\vec{n}$	$[\mathcal{P}^p(A)]^d + \vec{x}\mathcal{P}^p(A)$	$\mathcal{P}^p(A)$	$\mathcal{P}^p(e)$

comme un enrichissement de l'espace d'approximation du flux proposé par la méthode HdG. Le principal objectif est alors d'améliorer la qualité de l'approximation de u_h donnée par la méthode HdG et de stabiliser celle proposée par la méthode H-RT.

Afin de valider la méthode H-RT^m, nous l'évaluons sur l'exemple numérique proposé dans

la sous-section 4.7.1. L'historique de convergence est alors le suivant :

	p	h^{-1}	$\ u - u_h\ _0$	Ordre	$\ \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_h\ _0$	Ordre	$\ u - u_h^*\ _0$	Ordre	$\ \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_h^*\ _0$	Ordre
H-RT ^m	0	8	$1,34 \cdot 10^{-1}$	–	$1,05 \cdot 10^{-0}$	–	$4,31 \cdot 10^{-2}$	–	$1,01 \cdot 10^{-0}$	–
		16	$6,81 \cdot 10^{-2}$	0,98	$5,24 \cdot 10^{-1}$	1,00	$1,66 \cdot 10^{-2}$	1,38	$5,06 \cdot 10^{-1}$	1,00
		32	$3,36 \cdot 10^{-2}$	1,02	$2,60 \cdot 10^{-1}$	1,01	$7,12 \cdot 10^{-3}$	1,22	$2,53 \cdot 10^{-1}$	1,00
		64	$1,66 \cdot 10^{-2}$	1,02	$1,29 \cdot 10^{-1}$	1,01	$3,30 \cdot 10^{-3}$	1,11	$1,26 \cdot 10^{-1}$	1,01
	1	8	$1,90 \cdot 10^{-2}$	–	$1,20 \cdot 10^{-1}$	–	$3,44 \cdot 10^{-3}$	–	$1,16 \cdot 10^{-1}$	–
		16	$4,77 \cdot 10^{-3}$	1,99	$3,00 \cdot 10^{-2}$	2,00	$4,32 \cdot 10^{-4}$	2,99	$2,92 \cdot 10^{-2}$	1,99
		32	$1,23 \cdot 10^{-3}$	1,95	$7,32 \cdot 10^{-3}$	2,03	$5,32 \cdot 10^{-5}$	3,02	$7,19 \cdot 10^{-3}$	2,02
		64	$3,13 \cdot 10^{-4}$	1,97	$1,81 \cdot 10^{-3}$	2,02	$6,57 \cdot 10^{-6}$	3,02	$1,78 \cdot 10^{-3}$	2,01
	2	8	$2,18 \cdot 10^{-3}$	–	$1,06 \cdot 10^{-2}$	–	$2,80 \cdot 10^{-4}$	–	$9,81 \cdot 10^{-3}$	–
		16	$2,85 \cdot 10^{-4}$	2,93	$1,29 \cdot 10^{-3}$	3,04	$1,76 \cdot 10^{-5}$	3,99	$1,21 \cdot 10^{-3}$	3,02
		32	$3,48 \cdot 10^{-5}$	3,03	$1,62 \cdot 10^{-4}$	2,99	$1,15 \cdot 10^{-6}$	3,94	$1,56 \cdot 10^{-4}$	2,95
		64	$4,28 \cdot 10^{-6}$	3,02	$2,04 \cdot 10^{-5}$	2,99	$7,34 \cdot 10^{-8}$	3,97	$1,98 \cdot 10^{-5}$	2,98

TABLE 4.3 – Historique de convergence du problème de diffusion isotrope en milieu homogène pour la méthode H-RT^m

Les variables u_h , $\bar{\sigma}_h$ et $\bar{\sigma}_h^*$ convergent à l'ordre $p+1$ alors que la variable u_h^* issue du post-processing converge à l'ordre $p+2$ à l'exception de l'ordre 0. Les propriétés de convergence de la méthode H-RT^m sont similaires à celles de la méthode H-RT à l'exception de la variable u_h^* à l'ordre 0. Cette nouvelle méthode est alors plus rapide que la méthode HdG pour la simulation des problèmes de diffusion isotrope en milieu homogène.

Il est maintenant nécessaire de l'évaluer dans des conditions d'anisotropie extrême afin d'étudier au mieux le comportement de la solution u_h . Pour ce faire, nous avons représenté la solution numérique u_h obtenue par la méthode H-RT^m, dans les conditions de simulation rencontrées dans la sous-section 4.7.2, sur la figure 4.4. Cette figure vient compléter les

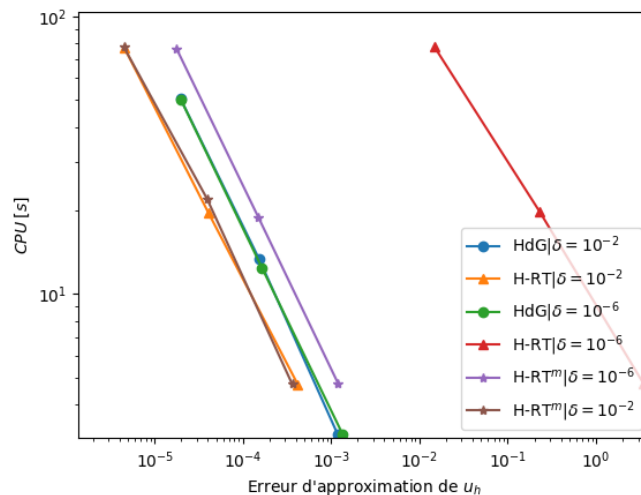


FIGURE 4.4 – Évaluation du temps de calcul pour les méthodes HdG, H-RT et H-RT^m avec $p = 2$

résultats obtenus par les méthodes HdG et H-RT.

Le gain engendré par la sur-stabilisation de la méthode H-RT est significatif. Les variations de précision numérique dues à la présence d'anisotropie ont été grandement réduites. Cependant, dans le cas où $\delta = 10^{-6}$ et pour une précision fixée, la méthode H-RT^m reste plus lente que la méthode HdG. Cela s'explique par le fait que les dimensions des espaces décrivant le flux $\vec{\sigma}_h$ ne sont pas les mêmes. En effet, $\dim(\mathcal{W}_h^{HdG}) < \dim(\mathcal{W}_h^{H-RT^m})$. Les dimensions des systèmes linéaires locaux de la méthode H-RT^m sont alors plus importantes.

La méthode H-RT^m permet d'agrandir le champ des possibilités des bases mixtes. Dans la section suivante, nous évaluerons celle-ci dans le cadre de l'équation de diffusion-convection.

4.9 Évaluation de la méthode H-RT^m dans le cadre de l'équation de diffusion/dispersion-convection

L'évaluation de la méthode H-RT^m se fera dans cette section au travers du flux de diffusion-convection. La formulation faible discrète globale de l'équation de diffusion-convection est donc la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\vec{\sigma}_h, u_h, \lambda_h) \in \mathcal{W}_h \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{M}_h^0 \text{ telles que :} \\ a_h(\vec{\sigma}_h, \vec{w}_h) - b_h^*(u_h, \vec{w}_h) + c_h(\lambda_h, \vec{w}_h) = h_h(\vec{w}_h) \\ b_h(q_h, \vec{\sigma}_h) + d_h(u_h, q_h) - e_h(\lambda_h, q_h) = f_h(q_h) \\ c_h(\mu_h, \vec{\sigma}_h) + e_h(\mu_h, u_h) - g_h(\lambda_h, \mu_h) = 0 \end{array} \right. \quad (4.46)$$

où la forme bilinéaire $b_h^*(u_h, \vec{w}_h)$ est exprimée sous la forme suivante :

$$b_h^*(u_h, \vec{w}_h) = \left(u_h, \nabla \cdot \vec{w}_h + \bar{\alpha}^{-1} \bar{\beta} \cdot \vec{w}_h \right)_{\mathcal{T}_h}. \quad (4.47)$$

Le système linéaire global (4.33) devient alors :

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{B}^* & \bar{C} \\ \bar{B}^t & \bar{D} & -\bar{E} \\ \bar{C}^t & \bar{E}^t & -\bar{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\Sigma}_h \\ \vec{U}_h \\ \vec{\Lambda}_h^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{H} \\ \vec{F} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

où le tenseur $B_{ij}^* = b_h^*(q_j, \vec{w}_i)$. Le nouveau système linéaire (4.48) est alors non-symétrique. Usuellement, les bases mixtes ne sont pas utilisées pour la résolution du transport convectif.

Cependant, l'introduction de la fonction de stabilisation permet une plus grande souplesse d'utilisation de ces bases. Afin de prendre en compte convenablement les particularités mathématiques du transport convectif, nous proposons une nouvelle expression du facteur de stabilisation, à savoir :

$$\tau = \vec{n}^t \bar{\alpha} \vec{n} + \max(-\vec{\beta} \cdot \vec{n}, 0). \quad (4.49)$$

Le schéma numérique ainsi utilisé dans la partie convective de τ est nommé schéma "upwind". Il permet d'adapter les expressions des traces au sens de $\vec{\beta} \cdot \vec{n}$.

Afin d'évaluer les propriétés de convergence de la méthode H-RT^m dans le cadre des problèmes de diffusion-convection, nous considérons le domaine $\Omega = (0, 1) \times (0, \frac{1}{3})$ et la solution analytique suivante :

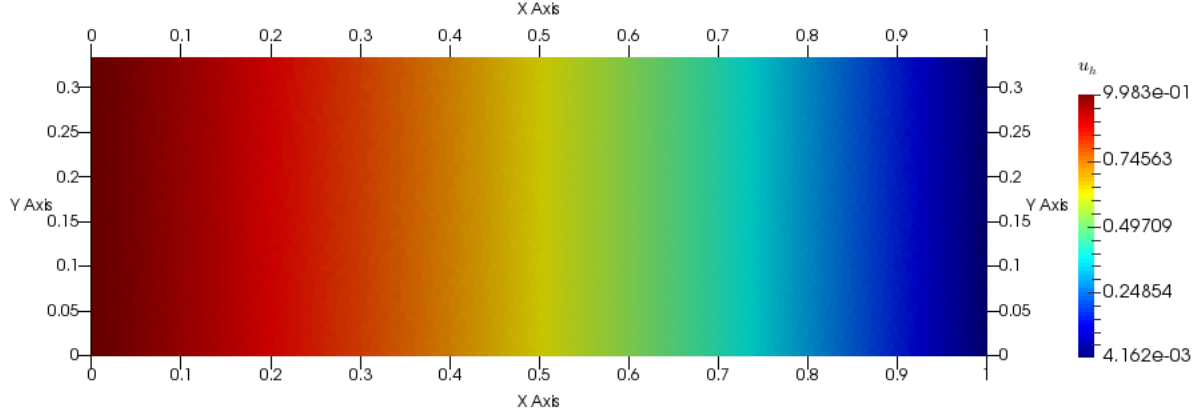
$$u(x, y) = \frac{e^{\frac{\beta_1}{\delta} x} - 1}{1 - e^{\frac{\beta_1}{\delta}}} + 1 \quad \text{sur } \Omega. \quad (4.50)$$

où β_1 et δ sont des constantes décrivant les tenseurs de conductivité $\bar{\alpha}$ et de vitesse $\vec{\beta}$ telles que :

$$\bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.51)$$

Dans une première étude, nous fixons $\delta = 1$ et $\beta_1 = 1$. De plus, le terme source $f(x, y) = 0$ et les conditions aux limites de type Dirichlet sont déterminées de telle sorte qu'elles respectent la solution analytique (4.50).

Les résultats numériques de u_h sont présentés à la figure 4.5 et l'historique de convergence est décrit au tableau 4.4. Le tableau 4.4 montre que les ordres de convergence sont conservés pour les problèmes de diffusion-convection. De plus, il confirme qu'il est possible d'utiliser des bases mixtes pour la résolution du transport convectif.

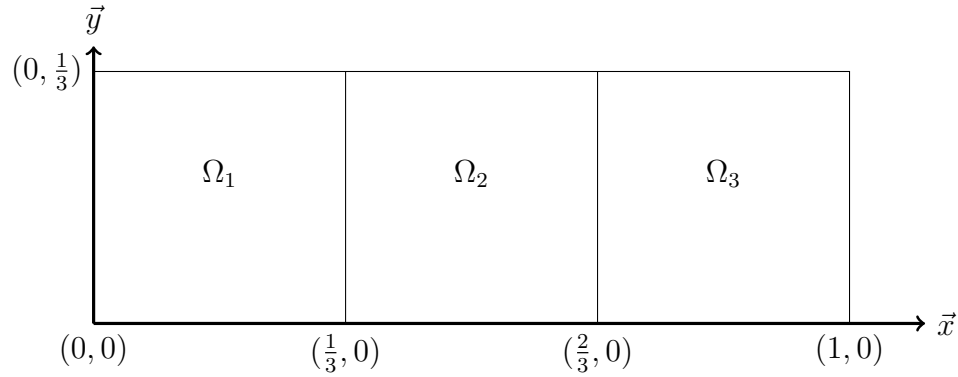
FIGURE 4.5 – Résultat numérique u_h pour $p = 0$, $\delta = 1$ et $\beta_1 = 1$

	p	h^{-1}	$\ u - u_h\ _0$	Ordre	$\ \bar{\sigma} - \bar{\sigma}_h^*\ _0$	Ordre
H-RT ^m	0	8	$1,60 \cdot 10^{-2}$	–	$3,37 \cdot 10^{-2}$	–
		16	$8,01 \cdot 10^{-3}$	1,00	$1,70 \cdot 10^{-2}$	0,99
		32	$4,37 \cdot 10^{-3}$	0,87	$9,34 \cdot 10^{-3}$	0,86
		64	$2,19 \cdot 10^{-3}$	1,00	$4,71 \cdot 10^{-3}$	0,99
	1	8	$2,14 \cdot 10^{-4}$	–	$2,45 \cdot 10^{-4}$	–
		16	$5,35 \cdot 10^{-5}$	2,00	$6,74 \cdot 10^{-5}$	1,86
		32	$1,59 \cdot 10^{-5}$	1,75	$2,01 \cdot 10^{-5}$	1,74
		64	$3,98 \cdot 10^{-6}$	2,00	$5,23 \cdot 10^{-6}$	1,94
	2	8	$1,96 \cdot 10^{-6}$	–	$2,12 \cdot 10^{-6}$	–
		16	$2,45 \cdot 10^{-7}$	3,00	$3,04 \cdot 10^{-7}$	2,80
		32	$3,98 \cdot 10^{-8}$	2,62	$4,99 \cdot 10^{-8}$	2,61
		64	$4,97 \cdot 10^{-9}$	3,00	$6,46 \cdot 10^{-9}$	2,95

TABLE 4.4 – Historique de convergence du problème de diffusion-convection isotrope en milieu homogène pour la méthode H-RT^m

Jusqu'à présent, nous n'avons résolu que des problèmes en milieu homogène. Il est alors nécessaire d'évaluer la méthode H-RT^m en milieu fortement hétérogène et anisotrope. Pour ce faire, nous divisons le domaine Ω en trois sous-domaines $\Omega_1 = (0, \frac{1}{3}) \times (0, \frac{1}{3})$, $\Omega_2 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \times (0, \frac{1}{3})$ et $\Omega_3 = (\frac{2}{3}, 1) \times (0, \frac{1}{3})$ tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$. Le domaine Ω est schématisé à la figure 4.6. Dans cet exemple, la solution analytique est plus complexe et est définie comme suivante :

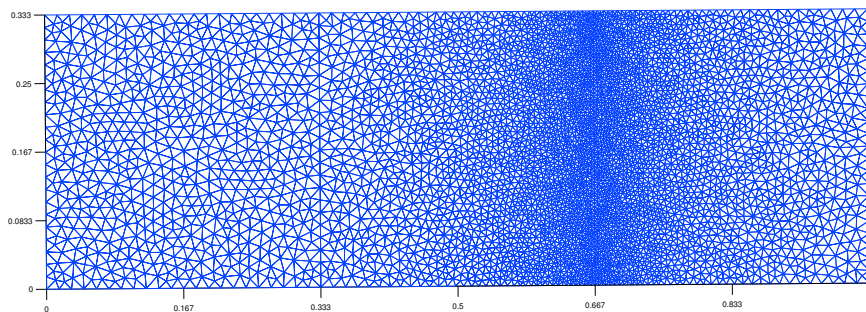
$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{\left(e^{1/3} \frac{3x\delta - \delta + 1}{\delta} - e^{1/3} \frac{2+\delta}{\delta} \right)}{\left(e^{-1/3} \frac{-1+\delta}{\delta} - e^{1/3} \frac{2+\delta}{\delta} \right)} & \text{dans } \Omega_1 \\ \frac{\left(e^{\frac{x}{\delta}} - e^{1/3} \frac{2+\delta}{\delta} \right)}{\left(e^{-1/3} \frac{-1+\delta}{\delta} - e^{1/3} \frac{2+\delta}{\delta} \right)} & \text{dans } \Omega_2 \\ \frac{\left(e^{1/3} \frac{3x\delta - 2\delta + 2}{\delta} - e^{1/3} \frac{2+\delta}{\delta} \right)}{\left(e^{-1/3} \frac{-1+\delta}{\delta} - e^{1/3} \frac{2+\delta}{\delta} \right)} & \text{dans } \Omega_3 \end{cases} \quad (4.52)$$


 FIGURE 4.6 – Domaine Ω pour le cas test de diffusion-convection

impliquant les expressions suivantes des tenseurs de conductivité et de vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } (x, y) \in \Omega_1 \text{ ou } \Omega_3 \\ \bar{\alpha} = \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{si } (x, y) \in \Omega_2 \end{array} \right. \quad (4.53)$$

Le coefficient δ permet de faire varier à la fois l'hétérogénéité et l'anisotropie du problème de diffusion/dispersion-convection ici présenté. Ainsi, à partir du maillage représenté à la figure 4.7, les résultats numériques pour $\delta = 10^{-3}$ et $p = 0$ sont présentés à la figure 4.8 et à la figure 4.9 sur une coupe du domaine Ω en $y = \frac{1}{6}$.


 FIGURE 4.7 – Représentation du maillage du domaine Ω pour $h^{-1} = 64$ dans l'ensemble du domaine Ω à l'exception de l'axe vertical en $x = 0.667$ où $h^{-1} = 230$

La solution numérique obtenue avec la méthode H-RT^m respecte bien la solution analy-

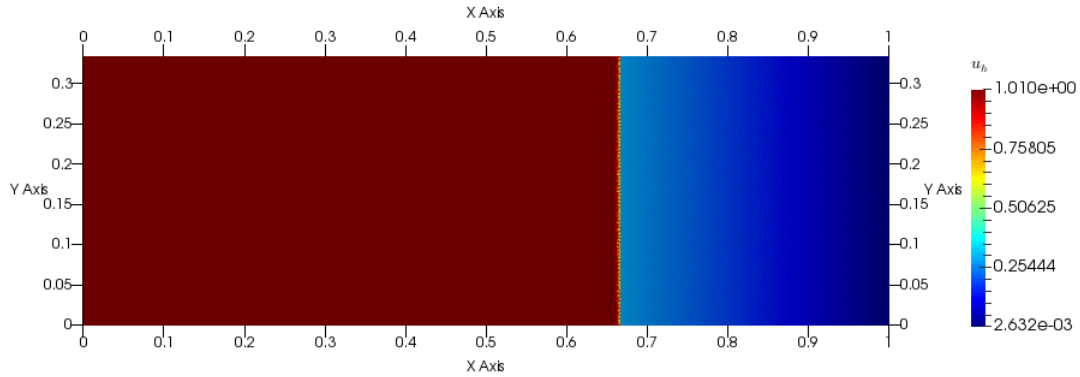


FIGURE 4.8 – Résultat numérique u_h pour $p = 0$, $\delta = 10^{-3}$ et $\beta_1 = 1$

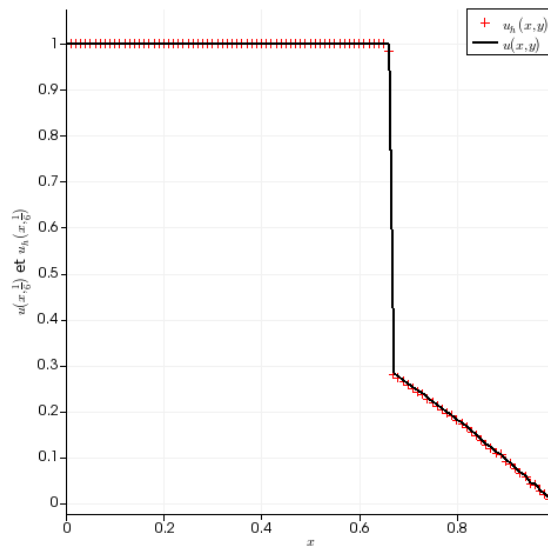


FIGURE 4.9 – Résultats numériques sur une coupe du domaine Ω en $y = \frac{1}{6}$ pour $\delta = 10^{-3}$ et $p = 0$

tique (4.52) avec une erreur d'approximation sur u_h de $6,59 \cdot 10^{-3}$ pour $p = 0$ et un nombre d'élément égal à 10192. De plus, aucune oscillation n'est perçue dans le présent cas test. L'introduction du facteur de stabilisation permet ainsi aux bases mixtes d'être utilisées dans le cas de problèmes hyperboliques sans pour autant être affectées par l'hétérogénéité ou l'anisotropie du milieu étudié.

4.10 Conclusion

Les méthodes hybrides ont permis de contourner certaines difficultés de résolution numérique inhérentes aux méthodes MFE et LDG. De plus, elles ont rendu possible l'unification de ces différentes approches dans un formalisme mathématique unique. C'est essentiellement grâce à ce formalisme mathématique que la méthode H-RT^m a pu voir le jour. Elle apporte une réponse positive aux difficultés numériques rencontrées dans la méthode H-RT et permet d'améliorer la précision de la méthode HdG dans des situations usuelles pour les problèmes de diffusion. L'influence du choix du facteur de stabilisation n'a cependant pas été étudiée dans ce chapitre et nous renvoyons le lecteur aux articles de références (voir [24]) pour de plus amples informations. Ce chapitre a ainsi permis d'introduire une nouvelle méthode de résolution numérique répondant aux carences des méthodes existantes autant dans les problèmes de diffusion que dans ceux de diffusion-convection.

Chapitre 5

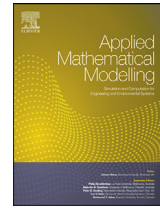
A projective hybridizable discontinuous Galerkin mixed method for second-order diffusion problems

5.1 Introduction

Les méthodes hybrides discontinues ont fait l'objet d'un développement soutenu des années 2000 à nos jours. Plus récemment (voir [44, 56]), une fonction de stabilisation se fondant sur la projection de la variable u_h dans l'espace des traces a été introduite dans le but d'intégrer la technique de post-processing au processus de résolution numérique du problème de diffusion.

Ainsi, afin d'étendre la technique de sur-stabilisation de la méthode H-RT à cette nouvelle fonction de stabilisation, ce chapitre introduit une nouvelle méthode de résolution numérique, appelée *projective Hybridizable Raviart-Thomas* (H-RT^p), à travers un article scientifique accepté dans la revue Applied Mathematical Modeling (AMM).

Cette nouvelle méthode de résolution numérique permet ainsi de porter la vitesse de convergence de la variable u_h à l'ordre $p+2$ pour $p \geq 0$. La méthode H-RT^p est alors évaluée dans des situations de diffusion en milieu homogène et isotrope ainsi qu'en milieu fortement hétérogène et anisotrope. Cette méthode est alors comparée aux méthodes H-RT et HdG (H-LdG) classiques.



A projective hybridizable discontinuous Galerkin mixed method for second-order diffusion problems

Loic Dijoux^a, Vincent Fontaine^{a,*}, Thierry Alex Mara^b

^a Laboratoire Piment, Université de La Réunion, France

^b Joint Research Centre, European Commission, Ispra, VA, Italy

ARTICLE INFO

Article history:

Received 30 October 2017

Revised 19 May 2019

Accepted 29 May 2019

Available online 3 June 2019

Keywords:

Hybridizable discontinuous Galerkin
Projective-based stabilization function
Higher-order Raviart–Thomas space
Simplified postprocessing
 h and p refinements

ABSTRACT

In this paper, we present a hybridizable discontinuous Galerkin (HDG) mixed method for second-order diffusion problems using a projective stabilization function and broken Raviart–Thomas functions to approximate the dual variable. The proposed HDG mixed method is inspired by the primal HDG scheme with reduced stabilization suggested by Lehrenfeld and Schöberl in 2010, and the standard hybridized version of the Raviart–Thomas (H-RT) method. Indeed, we use the *broken* Raviart–Thomas space of degree $k \geq 0$ for the flux, a piecewise polynomial of degree $k + 1$ for the potential, and a piecewise polynomial of degree k for its numerical trace. This unconventional polynomial combination is made possible by the projective *Lehrenfeld–Schöberl* (LS) stabilization function. Its introduction and the use of Raviart–Thomas spaces will have beneficial effects: no postprocessing is required to improve the accuracy of the potential u_h , and a straightforward flux reconstruction is sufficient to obtain a $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming flux variable. The convergence and accuracy of our method are investigated through numerical experiments in two-dimensional space by using h and p refinement strategies. An optimal convergence order $(k + 1)$ for the $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming flux and superconvergence $(k + 2)$ for the potential is observed. Comparative tests with the classical H-RT and the well-known hybridizable local discontinuous Galerkin (H-LDG) mixed methods are also performed and exposed in terms of CPU time.

© 2019 Elsevier Inc. All rights reserved.

1. Introduction

Consider the second-order diffusion model problem:

$$\nabla \cdot (-\boldsymbol{\kappa}^{-1} \nabla u) = f \quad \text{in } \Omega, \quad (1a)$$

$$u = g \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (1b)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ is a bounded polyhedral domain ($d \geq 2$) with boundary $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$. The boldface fonts are used throughout this paper to characterize any vector-valued or matrix-valued functions. To ensure that the problem (1) is well posed, the following assumptions are assumed to be satisfied: $\boldsymbol{\kappa} \in [L^\infty(\Omega)]^{d,d}$ is a matrix-valued function that is symmetric and positive definite in Ω , $f \in L^2(\Omega)$, and $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ is a prescribed Dirichlet boundary condition. System (1) can be used to model, for

* Corresponding author.

E-mail addresses: loic.dijoux@univ-reunion.fr (L. Dijoux), vincent.fontaine@univ-reunion.fr (V. Fontaine), thierry.mara@jrc.ec.europa.eu (T.A. Mara).

instance, the groundwater flow in porous media in which the potential u represents the pressure head, f a sink/source term and κ^{-1} the permeability tensor [1]. In this physical framework, it is convenient to introduce the Darcy velocity σ (i.e., the flux) as a supplementary unknown such that the problem (1) can be rewritten as a first-order system:

$$\kappa\sigma = -\nabla u \quad \text{in } \Omega, \quad (2a)$$

$$\nabla \cdot \sigma = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2b)$$

$$u = g \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (2c)$$

The $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming mixed finite element (MFE) methods are very widely used for solving the system (2) (see, e.g., [[1–3], and the references therein]). Several successful combinations of compatible polynomial interpolation functions for the flux $\sigma \in \mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$ and the potential $u \in L^2(\Omega)$ satisfying the discrete *inf-sup* condition have been proposed in the literature (e.g., the Raviart–Thomas (**RT**) [3] and the Brezzi–Douglas–Marini (**BDM**) [2] families). These formulations provide numerical solutions (σ_h, u_h) with optimal convergence in L^2 and continuous normal components for σ_h at the interelement boundaries [1,2,4]. However, MFE methods lead to a saddle-point problem with large coupled degrees of freedom, which is quite challenging and time-consuming to solve (see, e.g., [2,5], and the references therein).

To circumvent these issues, mixed methods using the nonconforming Galerkin finite elements have been extensively studied over the last two decades for stationary diffusion problems (see, e.g., [6], and the references therein). The term *nonconforming* means that no regularity assumptions are made on the discrete variables. These methods were developed within the general framework of the discontinuous Galerkin (DG) formalism and consider a combination of completely discontinuous approximation spaces for both the flux and potential [7]. Among the DG methods, the local discontinuous Galerkin (LDG) method is of particular interest due to its local conservation properties and its flexibility in handling adaptive *hp* refinement. In contrast to the standard MFE methods, the discrete flux variable σ_h can be easily eliminated locally, thus reducing the linear system to only the primal variable u_h unknowns. However, relative to standard $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming MFE methods, the LDG method provides a less accurate approximation of discrete variables (u_h, σ_h) . According to Corkburn et al. [8], this lack of robustness occurs because the numerical trace \hat{u}_h is expressed solely in terms of u_h , independent of σ_h .

In response to these drawbacks, the *hybridization technique* has been introduced in [9,10] using Lagrange multipliers and static condensation, in addition to reducing the global coupled linear system to only unknowns located on the skeleton of the mesh [11]. This condition is achieved by introducing a new discrete single-valued variable \hat{u}_h that is merely the so-called *numerical trace* of the potential defined at the element boundaries [10]. This technique allows one to establish *local solvers* in each element with \hat{u}_h playing the role of the Dirichlet boundary conditions. Therefore, the interior unknowns (σ_h, u_h) can be easily eliminated by static condensation from the set of algebraic equations that are now expressed in terms of Lagrange multipliers \hat{u}_h only. The problem is then closed, and the global algebraic linear system is assembled by imposing *transmission conditions* throughout the Lagrange multipliers. The hybridizable discontinuous Galerkin (HDG) formalism, introduced first by Cockburn et al. in [10], represents a unified framework that includes the well-established hybridized version of mixed finite element (H-MFE) methods by using a null-stabilization function [2,3,9], the hybridizable LDG (H-LDG) methods by using a multiplicative stabilization function [8,10–12], and the recently developed primal hybrid higher-order (HHO) methods by using a projective stabilization function [13–16]. All of these hybrid methods are established by suitably choosing the stabilization function and subsequently the local approximation spaces in addition to the postprocessing step. Note that the HDG formalism has several advantageous features and is well suited for parallel computing. Since its introduction, HDG methods have benefited from intensive research and development (see, e.g., [[11,12,16,17], and the references therein]) and have been applied to a large class of physical problems [18–22].

The starting point for the present method is the primal HDG method with reduced stabilization initially designed by Lehrenfeld and Schöberl in [18] (see, e.g., [12,17,23]). In all standard HDG methods, piecewise polynomials of equal degree are used for approximations of the state variable and its trace to provide optimal convergences. The motivation of the reduced stabilization function is that it uses a suitable L^2 -projection operator, allowing for the consideration of polynomials of higher degree for the approximation of the potential to obtain a better estimated discrete variable. The projective HDG mixed method that we develop in this paper can be considered as an inspired variation of the primal HDG scheme with reduced stabilization and the standard hybridized version of the Raviart–Thomas mixed finite element (H-RT) method. Thus, on each simplex A of the mesh, the higher-order Raviart–Thomas space $\mathbf{RT}_k(A)$ with $k \geq 0$ for the flux σ_h is used, a piecewise polynomial of degree $k+1$ for the potential u_h and a piecewise polynomial of degree k for its numerical trace \hat{u}_h on ∂A . From another perspective, the proposed method can also be considered as a *penalized* variant of the H-RT method by adding the reduced (LS) stabilization function in the definition of the normal trace of the flux on the mesh skeleton. As a result, the proposed method fundamentally differs from the standard H-RT formulation and indeed belongs to the general class of HDG mixed methods: it is close to the primal HDG scheme developed in [17,18] but recast here in a mixed format and using Raviart–Thomas basis functions for the approximation of the dual variable. Thus, the introduction of the LS stabilization function and the use of Raviart–Thomas functions will have beneficial effects: no postprocessing is required to improve the accuracy of the potential u_h since it converges naturally at the order $k+2$, and a straightforward flux reconstruction is sufficient to obtain a $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming variable σ_h^* converging at the order $k+1$. Note also that the approach presented here can be extended to any other compatible mixed finite element such as those proposed by the authors in [2] (e.g., BDM or BDFM spaces) and to any other stabilization function (e.g., multiplicative-type).

The rest of this paper is organized as follows. In Section 2, we describe the general formalism of HDG mixed methods, define the local solvers and the global problem and present the static condensation from an algebraic viewpoint. In Section 3, we review the selected existing stabilization functions and provide details concerning the postprocessing of σ_h and u_h . In Section 4, we describe our projective HDG method; in particular, we review the LS stabilization function, define the local approximation spaces and describe the simplified postprocessing to estimate the flux. In Section 5, numerical experiments are investigated using h - and p -refinement strategies, and comparisons with both the H-RT and H-LDG mixed methods are exposed in terms of CPU time. Finally, we end with concluding remarks and perspectives.

2. Hybridizable discontinuous Galerkin methods

2.1. Notations

Let us now introduce the notation that will be used throughout this paper. We denote by $\Omega_h := \{A\}$ (the mesh) a triangulation of the domain Ω into affine-mapped simplexes (triangles if $d = 2$, and tetrahedron if $d = 3$) and by $\partial\Omega_h := \{\partial A\}$. Let $\mathcal{E}_h^a = \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_h^b$ (the mesh skeleton) be the set of all facets (edges if $d = 2$, and faces if $d = 3$) of Ω_h , where \mathcal{E}_h^i and \mathcal{E}_h^b denote the set of interior and boundary facets, respectively. We say that \mathcal{F} is an interior facet $\mathcal{F} \in \mathcal{E}_h^i$ if there exist A_1 and A_2 in Ω_h such that $\mathcal{F} = A_1 \cap A_2$. Furthermore, we assume that the $(d - 1)$ -Lebesgue measure of \mathcal{F} is not null. For all $A \in \Omega_h$ and $\mathcal{F} \in \mathcal{E}_h^a$, $|A|$ and $|\mathcal{F}|$ represent the measure of A and \mathcal{F} , respectively. We set $h_A := \text{diam}(A)$ and $h := \max_{A \in \Omega_h} (h_A)$, i.e., the maximal element diameter. Hereafter, for any domain $D \subset \mathbb{R}^d$, we denote by $(\cdot, \cdot)_D$ and by $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial D}$ the standard L^2 -inner products in $L^2(D)$ and $L^2(\partial D)$, respectively. Let us introduce the following notations associated with the weak formulation:

$$(\cdot, \cdot)_{\Omega_h} := \sum_{A \in \Omega_h} (\cdot, \cdot)_A, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega_h} := \sum_{A \in \Omega_h} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial A} \quad \text{and} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}_h^s} := \sum_{\mathcal{F} \in \mathcal{E}_h^s} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}}, \tag{3}$$

where the index $s = \{a, i, b\}$. Let $\mathcal{P}_k^d(D)$ denote the space of polynomial functions of degree not exceeding $k \geq 0$ on D , and let $\mathcal{P}_k^d(D) := [\mathcal{P}_k^d(D)]^d$. Similarly, we set $\mathbf{L}^2(\Omega_h) := [L^2(\Omega_h)]^d$. Let us now introduce the *jump* $\llbracket \cdot \rrbracket$ and *weighted average* $\{\cdot\}_\omega$ trace operators defined on interior facets as follows:

$$\llbracket \mathbf{v} \rrbracket := \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 + \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{n}_2, \tag{4}$$

$$\{\varphi\}_\omega := \omega_1 \varphi_1 + \omega_2 \varphi_2, \tag{5}$$

for all $(\mathbf{v}, \varphi) \in \mathbf{L}^2(\Omega_h) \times L^2(\Omega_h)$, where the vector of weights $\omega := (\omega_1, \omega_2)$ is such that $\omega_1 + \omega_2 = 1$. Similarly, we introduce the complement of ω denoted $\bar{\omega}$ defined as follows:

$$\bar{\omega} := \mathbf{1} - \omega = (\omega_2, \omega_1). \tag{6}$$

If $\omega = (1/2, 1/2)$, we then recover the classical average operator; we omit the subscript ω in its definition. For the HDG discretization, two types of finite element spaces are required. The first type for σ_h and u_h is defined inside the elements:

$$\mathcal{V}_h := \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega_h) : \mathbf{v}|_A \in \mathcal{V}(A), \quad \forall A \in \Omega_h\}, \tag{7}$$

$$\mathcal{Q}_h := \{q \in L^2(\Omega_h) : q|_A \in \mathcal{Q}(A), \quad \forall A \in \Omega_h\}, \tag{8}$$

and the second type for the trace function \hat{u}_h is defined on the mesh skeleton:

$$\Lambda_h^g := \{\mu \in L^2(\mathcal{E}_h^a) : \mu|_{\mathcal{F}} \in \Lambda(\mathcal{F}) \quad \forall \mathcal{F} \in \mathcal{E}_h^i \quad \text{and} \quad \mu|_{\mathcal{F}} = \Pi_h g \quad \forall \mathcal{F} \in \mathcal{E}_h^b\}, \tag{9}$$

where Π_h denotes the L^2 -projection onto $\Lambda(\mathcal{F})$. Following (9), the numerical trace of the potential is defined as follows:

$$\hat{u}_h = \begin{cases} \lambda_h & \text{on } \mathcal{E}_h^i, \\ \Pi_h g & \text{on } \mathcal{E}_h^b, \end{cases} \tag{10}$$

where $\lambda_h \in \Lambda_h^0$ denotes the Lagrange multipliers. For convenience, let us introduce the local space associated with the degrees of freedom of \hat{u}_h on the boundary of the element A ,

$$\Lambda(\partial A) := \{\mu \in L^2(\partial A) : \mu|_{\mathcal{F}} \in \Lambda(\mathcal{F}) \quad \forall \mathcal{F} \subset \partial A\}. \tag{11}$$

Furthermore, we assume for the moment that $\mathcal{V}(A)$, $\mathcal{Q}(A)$ and $\Lambda(\partial A)$ are the suitably chosen local approximation spaces of finite dimensions that we define precisely below.

2.2. Local solvers & Global problem

The HDG methods provide an approximation of (σ_h, u_h) in terms of solutions of a local Dirichlet boundary value problem on each element of the mesh, which are then patched together by *transmission conditions* across interelement boundaries. In other words, for all $A \in \Omega_h$, we assume that we know the numerical trace of the potential \hat{u}_h on ∂A , and we initially determine (σ_h, u_h) in terms of (\hat{u}_h, f) by solving the local problem:

$$\begin{aligned} (\kappa \sigma_h, \mathbf{v}_h)_A - (u_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_A + \langle \hat{u}_h, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial A} &= 0, \\ -(\sigma_h, \nabla q_h)_A + \langle \hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}, q_h \rangle_{\partial A} &= (f, q_h)_A, \end{aligned} \tag{12}$$

for all $(q_h, \mathbf{v}_h) \in \mathcal{Q}(A) \times \mathcal{V}(A)$. Here, the numerical trace $\hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n}$ represents an approximation of $\sigma \cdot \mathbf{n}$ over ∂A , and we assume that this trace is consistent and depends linearly on σ_h, u_h and \hat{u}_h . Following [12], we then assume that the trace has the following simple form:

$$\hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n} := \sigma_h \cdot \mathbf{n} + \tau(u_h - \hat{u}_h) \quad \text{on } \partial A, \tag{13}$$

where τ is a linear local stabilization function that we describe below. In practice, its choice is quite delicate since it can strongly affect the stability and accuracy of the HDG method. Inserting (13) into (12), the weak form of the local problem in each element $A \in \Omega_h$ is found to be as follows: for any given $\hat{u}_h \in \Lambda(\partial A)$, find $(u_h, \sigma_h) \in \mathcal{Q}(A) \times \mathcal{V}(A)$ such that

$$\begin{aligned} (\kappa \sigma_h, \mathbf{v}_h)_A - (u_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_A + \langle \hat{u}_h, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial A} &= 0, \\ (\nabla \cdot \sigma_h, q_h)_A + \langle \tau(u_h - \hat{u}_h), q_h \rangle_{\partial A} &= (f, q_h)_A, \end{aligned} \tag{14}$$

for all $(q_h, \mathbf{v}_h) \in \mathcal{Q}(A) \times \mathcal{V}(A)$. Note that the local problem (14) can be solved in an element-by-element fashion to derive the variables (u_h, σ_h) solely in terms of (\hat{u}_h, f) : this key step corresponds to the static condensation technique. The global problem is then closed by weakly imposing the *transmission conditions*, i.e., the single-valuedness of the normal component of the discrete variable $\hat{\sigma}_h$ on each interior facet of the mesh as follows: find $\hat{u}_h \in \Lambda_h^g$ such that

$$\langle \sigma_h \cdot \mathbf{n} + \tau(u_h - \hat{u}_h), \mu_h \rangle_{\partial \Omega_h} = 0, \tag{15}$$

for all $\mu_h \in \Lambda_h^0$, where σ_h and u_h are solutions of the local problem (14). Substituting the solutions of (14) into (15), we obtain the global linear system that involves only the numerical trace \hat{u}_h . This step completes the presentation of the HDG methods. All hybrid methods referenced in the literature, such as hybridized Brezzi–Douglas–Marini (H-BDM) or H-RT methods [2,9], H-LDG methods [8,10,24] or, more recently, HHO methods [14–16], are established by properly choosing the stabilization function τ and subsequently the local spaces $\mathcal{V}(A)$, $\mathcal{Q}(A)$ and $\Lambda(\mathcal{F})$ in addition to the postprocessing step. Before describing some of these choices, let us briefly review the well-known technique of *static condensation* used to reduce the stiffness matrix of the HDG methods.

2.3. Static condensation

Note that the HDG method just described above consists of seeking an approximation $(u_h, \sigma_h, \hat{u}_h) \in \mathcal{Q}_h \times \mathcal{V}_h \times \Lambda_h^g$ satisfying the equations

$$\begin{cases} \mathbf{a}(\sigma_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(u_h, \mathbf{v}_h) - \mathbf{c}(\hat{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0, \\ \mathbf{b}(q_h, \sigma_h) + \mathbf{d}_\tau(u_h, q_h) - \mathbf{r}_\tau(\hat{u}_h, q_h) = (f, q_h)_{\Omega_h}, \\ \mathbf{c}(\mu_h, \sigma_h) + \mathbf{r}_\tau(\mu_h, u_h) + \mathbf{s}_\tau(\hat{u}_h, \lambda_h) = 0, \end{cases} \tag{16}$$

for all $(q_h, \mathbf{v}_h, \mu_h) \in \mathcal{Q}_h \times \mathcal{V}_h \times \Lambda_h^0$. Notably, the bilinear functionals used in (16) can be decomposed into two classes: those that are independent of the stabilization function τ such as

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\sigma_h, \mathbf{v}_h) &:= -(\kappa \sigma_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega_h}, \\ \mathbf{b}(u_h, \mathbf{v}_h) &:= (u_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_{\Omega_h}, \\ \mathbf{c}(\hat{u}_h, \mathbf{v}_h) &:= \langle \hat{u}_h, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial \Omega_h}, \end{aligned}$$

and those depending on it:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_\tau(u_h, q_h) &:= \langle \tau(u_h), q_h \rangle_{\partial \Omega_h}, \\ \mathbf{r}_\tau(\hat{u}_h, q_h) &:= \langle \tau(\hat{u}_h), q_h \rangle_{\partial \Omega_h}, \\ \mathbf{s}_\tau(\mu_h, \hat{u}_h) &:= -\langle \tau(\hat{u}_h), \mu_h \rangle_{\partial \Omega_h}. \end{aligned}$$

Hence, the corresponding algebraic system can be written as follows:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}^t & -\mathcal{C}^t \\ \mathcal{B} & \mathcal{D}_\tau & -\mathcal{R}_\tau^t \\ \mathcal{C} & \mathcal{R}_\tau & \mathcal{S}_\tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Sigma_h \\ \mathbf{U}_h \\ \hat{\mathbf{U}}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{G} \\ \mathcal{F} \\ \mathcal{H} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

where Σ_h , U_h and \hat{U}_h are vectors of degrees of freedom associated with the discrete variables σ_h , u_h and λ_h , respectively. To eliminate (σ_h, u_h) locally, we introduce the corresponding vector of interior degrees of freedom $\tilde{\Sigma}_h^t = [\Sigma_h^t, U_h^t]$. Then, the linear system (17) can be rewritten in a compact form:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{A}} & -\tilde{\mathcal{B}}^t \\ \tilde{\mathcal{B}} & \mathcal{S}_\tau \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\Sigma}_h \\ \hat{U}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{F}} \\ \mathcal{H} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

where $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{B}}$ and $\tilde{\mathcal{F}}$ are defined as follows:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}^t \\ \mathcal{B} & \mathcal{D}_\tau \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{B}}^t = \begin{bmatrix} \mathcal{C}^t \\ \mathcal{R}_\tau^t \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad \tilde{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \mathcal{G} \\ \mathcal{F} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

The associated matrix $\tilde{\mathcal{A}}$ has a block-diagonal structure due to the discontinuous nature of \mathcal{V}_h and \mathcal{Q}_h , and its inverse can be easily computed by using a Cholesky factorization. Thus, the elimination of $\tilde{\Sigma}_h$ follows immediately, and we obtain a single matrix equation only for the multipliers \hat{U}_h ,

$$\mathbb{A} \hat{U}_h = \tilde{\mathcal{H}}, \tag{20}$$

where \mathbb{A} is a symmetric positive definite matrix and $\tilde{\mathcal{H}}$, the corresponding right-hand side, is given by

$$\mathbb{A} = \mathcal{S}_\tau + \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \tilde{\mathcal{B}}^t \quad \text{and} \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\mathcal{A}}^{-1} \tilde{\mathcal{F}}. \tag{21}$$

Once the solution \hat{u}_h is obtained, the discrete interior variables (σ_h, u_h) can be computed by solving the local problem (14) on each element of the mesh. This step completes the reduction technique by *static condensation* of the HDG methods. It is clear that the choice of local spaces $\mathcal{V}(A)$, $\mathcal{Q}(A)$ and $\Lambda(\mathcal{F})$ has a direct impact on the dimension of the local solvers and of the global problem (20). For instance, the size of \mathbb{A} is directly proportional to the dimension of $\Lambda(\mathcal{F})$. However, no assumptions have been made about local spaces nor on the stabilization function τ used to characterize the HDG method. This point is discussed in detail in the next section.

3. Stabilization functions and postprocessing techniques

3.1. Local stabilization functions

The choice of the stabilization function remains an open question. Several formulations have been proposed in the literature, some more intuitive [9,10], and others more sophisticated [15,16,18], but all of them initially assume that τ is a linear, nonnegative function and that the local spaces $\mathcal{Q}(A)$ and $\mathcal{V}(A)$ cannot be chosen arbitrarily and must satisfy inclusion constraints. A remarkable feature of these properties is that HDG methods can be well-defined completely independently of the choice of the local approximation space $\Lambda(\partial A)$, but in practice, it will be assumed to be sufficiently rich. As suggested by Cockburn in [12], “the role of τ is to transform the discrepancy between u_h and \hat{u}_h on ∂A into an energy” to enhance the stability of HDG methods and to ensure that the local problem (14) and, hence, the global problem (16) are well-defined. We then focus on two well-known variants that we describe in detail below.

3.1.1. Null stabilization

In the simplest form of the *null-stabilization function*, we suppose that

$$\tau^n(u_h - \hat{u}_h) := 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega_h. \tag{22}$$

Assuming (22), the bilinear functionals \mathbf{d}_τ , \mathbf{r}_τ and \mathbf{s}_τ become nulls, and the HDG formulation (17) consists of seeking an approximation $(u_h, \sigma_h, \hat{u}_h) \in \mathcal{Q}_h \times \mathcal{V}_h \times \Lambda_h^g$ satisfying the equations

$$\begin{cases} (\kappa \sigma_h, \mathbf{v}_h)_{\Omega_h} - (u_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)_{\Omega_h} + \langle \hat{u}_h, \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial\Omega_h} = 0, \\ (\nabla \cdot \sigma_h, q_h)_{\Omega_h} = (f, q_h), \\ (\sigma_h \cdot \mathbf{n}, \mu_h)_{\partial\Omega_h} = 0, \end{cases} \tag{23}$$

for all $(q_h, \mathbf{v}_h, \mu_h) \in \mathcal{Q}_h \times \mathcal{V}_h \times \Lambda_h^0$. This simplified formulation is typically considered in the so-called hybridized version of mixed finite element methods [1,2]. In this case, the choice of appropriate finite dimensional spaces \mathcal{Q}_h , \mathcal{V}_h and Λ_h is not evident, but *stability conditions* provide many successful combinations of them such as the **RT** and **BDM** families [2,3]. Hence, the local problems (14) as well as the global problem (23) are well-defined without any stabilization procedure. The expected convergence rates of u_h and σ_h for the H-RT_k and H-BDM_k methods are summarized in Table 2.

3.1.2. Multiplicative stabilization

The *multiplicative-stabilization function* was suggested first by Cockburn et al. [10] to establish the original H-LDG method, namely,

$$\tau^m(u_h - \hat{u}_h) := \tau_\mathcal{F} \cdot (u_h - \hat{u}_h) \quad \text{on} \quad \partial\Omega_h, \tag{24}$$

Table 1
Admissible polynomial spaces $\mathcal{V}(A)$, $\mathcal{Q}(A)$ and $\Lambda(\mathcal{F})$ for the H-LDG method with $k \geq 1$.

H-LDG	$\mathcal{V}(A)$	$\mathcal{Q}(A)$	$\Lambda(\mathcal{F})$
Variant 1.	$\mathcal{P}_{k-1}^d(A)$	$\mathcal{P}_k^d(A)$	$\mathcal{P}_k^{d-1}(\mathcal{F})$
Variant 2.	$\mathcal{P}_k^d(A)$	$\mathcal{P}_k^d(A)$	$\mathcal{P}_k^{d-1}(\mathcal{F})$
Variant 3.	$\mathcal{P}_k^d(A)$	$\mathcal{P}_{k-1}^d(A)$	$\mathcal{P}_k^{d-1}(\mathcal{F})$

Table 2
Comparison of various hybrid mixed methods using the same local approximation space $\Lambda(\mathcal{F}) := \mathcal{P}_k^{d-1}(\mathcal{F})$. These methods are defined by their local approximation spaces $\mathcal{Q}(A)$ and $\mathcal{V}(A)$ and the stabilization function τ^n , τ^m or τ^{LS} . The columns u_h , σ_h , u_h^* and σ_h^* indicate the expected convergence rate of $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega_h)}$, $\|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega_h)}$, $\|u - u_h^*\|_{L^2(\Omega_h)}$ and $\|\sigma - \sigma_h^*\|_{L^2(\Omega_h)}$, respectively.

Method	Degree	$\mathcal{V}(A)$	$\mathcal{Q}(A)$	τ	u_h	σ_h	u_h^*	σ_h^*
H-RT _k	$k \geq 0$	$\mathcal{P}_k^d(A) \oplus \mathcal{XP}_k^d(A)$	$\mathcal{P}_k^d(A)$	τ^n	$k+1$	$k+1$	$k+2$	–
H-BDM _k	$k \geq 2$	$\mathcal{P}_k^d(A)$	$\mathcal{P}_{k-1}^d(A)$	τ^n	k	$k+1$	$k+2$	–
H-LDG _k	$k \geq 1$	$\mathcal{P}_k^d(A)$	$\mathcal{P}_k^d(A)$	τ^m	$k+1$	$k+1$	$k+2$	$k+1$
H-LDG _k ^{LS}	$k \geq 0$	$\mathcal{P}_k^d(A) \oplus \mathcal{XP}_k^d(A)$	$\mathcal{P}_{k+1}^d(A)$	τ^{LS}	$k+2$	$k+1$	–	$k+1$

Table 3
The first and second columns indicate the dimension of local spaces $\mathcal{V}(A)$ and $\mathcal{Q}(A)$, respectively. The dimension of the local solver is equal to the sum of these two quantities. The third and fourth columns indicate the size of the local matrix to compute the postprocessed variables u_h^* and σ_h^* , respectively.

Method	dim $\mathcal{V}(A)$	dim $\mathcal{Q}(A)$	u_h^*	σ_h^*
H-RT _k	$(k+1)(k+3)$	$(k+1)(k+2)/2$	$(k+2)(k+3)/2$	–
H-LDG _k	$(k+1)(k+2)$	$(k+1)(k+2)/2$	$(k+2)(k+3)/2$	$(k+1)(k+3)$
H-LDG _k ^{LS}	$(k+1)(k+3)$	$(k+2)(k+3)/2$	–	$3k+3$

Table 4
Total number of interior Lagrange multipliers, i.e., dimension of the stiffness matrix \mathbb{A} , as a function of the mesh refinement n and the polynomial degree k of the hybrid method on regular meshes.

$k \setminus n$	4	8	16	32	64
0	40	176	736	3008	12,160
1	80	352	1472	6016	24,320
2	120	528	2208	9024	36,480
3	160	704	2944	12,032	48,640

where $\tau_{\mathcal{F}}$ is a strictly positive constant. By imposing transmission conditions $[[\hat{\sigma}_h]] = 0$ on interior facets $\mathcal{F} \in \mathcal{E}_h^i$, we obtain an explicit expression of the numerical traces $(\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h)$ in terms of (u_h, σ_h) :

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_h \\ \hat{\sigma}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{u_h\}_{\omega} \\ \{\sigma_h\}_{\bar{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{\mathcal{F}} \\ \beta_{\mathcal{F}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [[u_h]] \\ [[\sigma_h]] \end{bmatrix} \tag{25}$$

where ω , $\alpha_{\mathcal{F}}$ and $\beta_{\mathcal{F}}$ are positive constants defined as follows:

$$\omega = \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 + \tau_2}, \frac{\tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \right), \quad \alpha_{\mathcal{F}} = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2} \quad \text{and} \quad \beta_{\mathcal{F}} = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2}. \tag{26}$$

Here, τ_1 and τ_2 represent the stabilization parameters associated with the common facet \mathcal{F} adjacent to A_1 and A_2 , respectively. Let us specify that the H-LDG method cannot be considered as an LDG method since the parameter $\alpha_{\mathcal{F}}$ is not null for any finite value of $\tau_{1,2}$. In this case, the local spaces $\mathcal{Q}(A)$, $\mathcal{V}(A)$ and $\Lambda(\partial A)$ must satisfy the following inclusion constraints:

$$\nabla \mathcal{Q}(A) \subset \mathcal{V}(A), \quad \mathcal{Q}(A)|_{\partial A} \subset \Lambda(\partial A) \quad \text{and} \quad \mathcal{V}(A) \cdot \mathbf{n}|_{\partial A} \subset \Lambda(\partial A). \tag{27}$$

Several combinations of admissible local spaces have been studied in the literature [10], as summarized in Table 1. Previous reports have concluded that both discrete variables converge optimally $(k+1)$ in L^2 assuming that u_h and σ_h are approximated locally by polynomials of degree k (cf. Table 1, Variant 2) and that $\tau_{\mathcal{F}}$ is taken to be of order one (cf. Table 2, line 3).

Table 5

Localization of degrees of freedom of the local approximation spaces $\mathcal{V}(A)$, $\mathcal{Q}(A)$ and $\Lambda(\mathcal{F})$ used by the H-LDG $_k^{LS}$ method for different polynomial orders $k = 0, \dots, 3$. Here, A is a triangle ($d = 2$), and \mathcal{F} is an edge of ∂A . For the local space $\mathcal{V}(A) = \mathbf{RT}_k(A)$, the arrows indicate the value of the normal component ($3(k + 1)$ -normal basis functions), and the double dots indicate the value of both components ($k(k + 1)$ -interior basis functions).

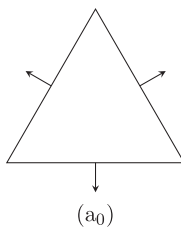
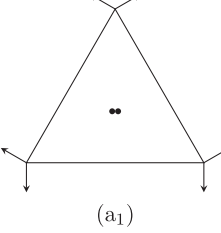
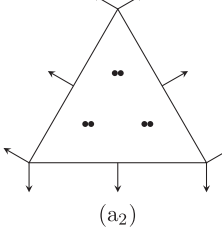
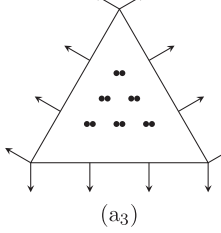
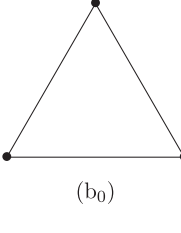
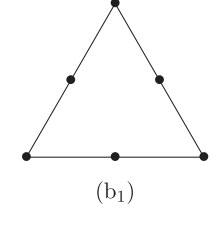
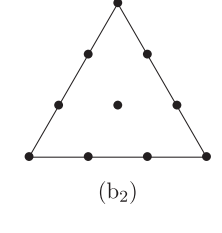
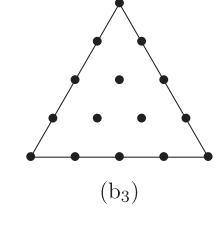
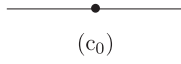
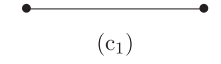
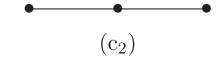
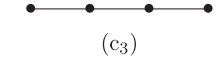
H-LDG $_k^{LS}$ method	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$\mathcal{V}(A) := \mathbf{RT}_k(A)$				
$\mathcal{Q}(A) := \mathcal{P}_{k+1}^d(A)$				
$\Lambda(\mathcal{F}) := \mathcal{P}_k^{d-1}(\mathcal{F})$				

Table 6

Test A – Homogeneous and isotropic test case on regular meshes.

k	n	H-LDG $_k^{LS}$				H-RT $_k$				H-LDG $_k$			
		e_{u_h}	ECR	$e_{\sigma_h^*}$	ECR	e_{u_h}	ECR	e_{σ_h}	ECR	e_{u_h}	ECR	e_{σ_h}	ECR
0	4	2.10E-1	–	1.99E-0	–	1.27E-1	–	1.96E-0	–	1.27E-1	–	1.97E-0	–
	8	4.41E-2	2.25	1.01E-0	0.98	3.11E-2	2.03	1.01E-0	0.96	6.63E-1	0.94	1.01E-0	0.96
	16	9.83E-3	2.16	5.06E-1	1.00	7.79E-3	2.00	5.05E-1	1.00	3.41E-1	0.96	5.06E-1	1.00
	32	2.38E-3	2.04	2.52E-1	1.00	1.95E-3	2.00	2.52E-1	1.00	1.73E-1	0.98	2.52E-1	1.01
	64	5.95E-4	2.00	1.26E-1	1.00	4.90E-4	2.00	1.26E-1	1.00	8.72E-2	0.99	1.26E-1	1.00
1	4	3.64E-2	–	4.31E-1	–	2.27E-2	–	4.13E-1	–	2.67E-2	–	4.24E-1	–
	8	3.09E-3	3.56	1.14E-1	1.92	3.15E-3	2.85	1.13E-1	1.87	3.38E-3	2.98	1.16E-1	1.87
	16	3.38E-4	3.19	2.87E-2	1.99	3.99E-4	2.98	2.86E-2	1.98	4.21E-4	3.00	2.92E-2	1.99
	32	3.96E-5	3.09	7.04E-3	2.01	4.86E-5	3.04	7.02E-3	2.02	5.15E-5	3.03	7.17E-3	2.03
	64	4.80E-6	3.04	1.74E-3	2.00	5.98E-6	3.02	1.74E-3	2.01	6.33E-6	3.02	1.77E-3	2.02
2	4	4.59E-3	–	8.65E-2	–	5.21E-3	–	8.58E-2	–	5.26E-3	–	8.75E-2	–
	8	2.35E-4	4.29	9.62E-3	3.17	2.80E-4	4.22	9.54E-3	3.17	2.80E-4	4.23	9.83E-3	3.15
	16	1.29E-5	4.18	1.18E-3	3.03	1.76E-5	4.00	1.17E-3	3.03	1.76E-5	3.99	1.21E-3	3.02
	32	7.99E-7	4.01	1.51E-4	2.97	1.14E-6	3.95	1.51E-4	2.96	1.15E-6	3.94	1.55E-4	2.96
	64	5.08E-8	3.98	1.92E-5	2.98	7.33E-8	3.96	1.92E-5	2.98	7.36E-8	3.97	2.01E-5	2.95

3.2. Postprocessing techniques

Until 1985, *hybridization* was considered only as an implementation trick to overcome the saddle-point problem that arise in MFE methods. However, Arnold and Brezzi established in [4] that the additional information \hat{u}_h defined on the mesh skeleton can be exploited to locally construct a new approximated variable u_h^* converging faster than u_h in L^2 . We end this section by showing how to postprocess both interior variables (u_h, σ_h) in conjunction with their numerical traces ($\hat{u}_h, \hat{\sigma}_h$) to obtain (i) a better approximation of the potential u_h^* that converges one order higher than u_h and (ii) a $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming variable σ_h^* that ensures the continuity of its normal across interelement boundaries.

3.2.1. Postprocessing of the flux variable

We now show how to postprocess σ_h and $\hat{\sigma}_h$ to obtain an optimal convergent approximation of σ , denoted σ_h^* and belonging to $\mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$. On each simplex $A \in \Omega_h$, we initially assume that the velocity $\sigma_h \cdot \mathbf{n} \in \mathcal{P}_k^{d-1}(\partial A)$, and we define the variable σ_h^* as the only element of the local Raviart–Thomas space $\mathbf{RT}_k(A) := \mathcal{P}_k^d(A) \oplus \mathbf{x}\mathcal{P}_k^d(A)$ verifying that, for any $k \geq 0$, then

$$\langle (\sigma_h^* - \hat{\sigma}_h) \cdot \mathbf{n}, \mu_h \rangle_{\partial A} = 0 \quad \forall \mu_h \in \mathcal{P}_k^{d-1}(\partial A), \quad (28a)$$

$$(\sigma_h^* - \sigma_h, \xi_h)_A = 0 \quad \forall \xi_h \in \mathcal{P}_{k-1}^d(A). \quad (28b)$$

We specify that (28a) and (28b) are simply an L^2 -projection of the discrete variable σ_h and its trace $\hat{\sigma}_h$ onto the interior and normal basis functions of $\mathbf{RT}_k(A)$, respectively. Note that for $k = 0$, the orthogonal projection (28b) is empty.

3.2.2. Postprocessing of the scalar variable

Here, we show how to obtain the postprocessed variable u_h^* . To this aim, we assume that the potential is approximated by a polynomial of degree at most k in A , i.e., $u_h \in \mathcal{P}_k^d(A)$. For all $A \in \Omega_h$, find $u_h^* \in \mathcal{P}_{k+1}^d(A)$ such that

$$(\nabla u_h^*, \nabla q_h)_A = -(\kappa \sigma_h^*, \nabla q_h)_A, \quad (29a)$$

$$(u_h^*, 1)_A = (u_h, 1)_A, \quad (29b)$$

for all $q_h \in \mathcal{P}_{k+1}^d(A)$. The *closure condition* (29b) is an additional solution constraint that fixes the mean value of u_h^* on A . The postprocessing technique used here relies on the superconvergence of the average value of the potential u_h and is a slight modification of the postprocessing introduced in [8], which consists of using the $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming variable σ_h^* instead of σ_h .

4. Projective HDG mixed method using Raviart–Thomas elements

To our knowledge, only two well-established primal formulations referenced in the literature belong to the subclass of the projective HDG methods: first, the HDG method with reduced stabilization proposed initially by Lehrenfeld in his thesis [18] (see, e.g., [12,17,23]), and second, the novel HHO method proposed by Di Pietro and Ern [16,25]. The error analysis of the HDG method with reduced stabilization was carried out by Oikawa in 2015 [17], who established the optimal convergence of the potential for general polyhedral elements. Recently, Cockburn and coworkers established bridges between the HHO method and the general framework of HDG methods in [15] (see, e.g., [14,16]): they identify the numerical traces of the (primal) HHO method in the general HDG mixed format and establish that both the local approximation spaces and the stabilization function suggested by Di Pietro and Ern are novel and distinctive choices that enrich the family of HDG methods. More precisely, the stabilization functions as used by both projective HDG methods rely on specific L^2 -projection operators, allowing for the consideration of polynomials of a higher degree for the approximation of the potential. Recently, Lederer et al. proposed in a series of original papers [26,27] a new discretization method for incompressible flow problems based on a $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming BDM finite element space and a HDG method. The key idea is to relax the $\mathbf{H}(\text{div})$ -conformity constraint so only reduced unknowns are involved by imposing transmission conditions. The projective HDG mixed method that we develop in this paper can be considered an inspired variation of primal HDG method with reduced stabilization described above and the traditional H-RT method. Before describing our projective mixed variant, let us review some definitions concerning the reduced stabilization function introduced in [17,18,23].

4.1. The Lehrenfeld–Schöberl stabilization function

As mentioned above, Lehrenfeld and Schöberl observed that (i) the size of the stiffness matrix is directly proportional to the dimension of the local space $\Lambda(\mathcal{F})$ and that (ii) the quality of the discrete variables u_h and σ_h relies on polynomials used to build them. They improve the convergence of interior variables, without increasing the size of the final system (20), by simply modifying the multiplicative stabilization function τ^m (24) as follows:

$$\tau^{\text{LS}}(u_h - \hat{u}_h) := \tau_{\mathcal{F}} \cdot (\pi_{\Lambda_h}(u_h) - \hat{u}_h) \quad \text{on} \quad \partial\Omega_h, \quad (30)$$

where π_{Λ_h} is the L^2 -projection operator onto Λ_h . Following (30), the discrete variable u_h can now be approximated in a larger space $\mathcal{Q}(A)$. However, as suggested by the authors, the enrichment is limited and conditioned by the following inclusion constraints:

$$\nabla \mathcal{Q}(A) \subset \mathcal{V}(A), \quad \pi_{\Lambda_h}(\mathcal{Q}(A))|_{\partial A} \subset \Lambda(\partial A) \quad \text{and} \quad \mathcal{V}(A) \cdot \mathbf{n}|_{\partial A} \subset \Lambda(\partial A). \quad (31)$$

Assuming that $\Lambda(\partial A)$ and $\mathcal{V}(A)$ are the set of polynomials of degree k , the authors conclude that $\mathcal{Q}(A)$ can be composed of a polynomial of at most degree $k + 1$. Then, assuming that the stabilization parameter $\tau_{\mathcal{F}}$ in (30) is taken to be of order $1/h$, they observe that the discrete variable u_h converges with order $k + 2$ in the L^2 -norm without any postprocessing [17,18]. There is a price to pay in return for using the (projective) LS stabilization function. Indeed, by increasing the polynomial

degree of the scalar variable u_h (only one degree higher), the *static condensation* clearly becomes heavier due to the larger number of degrees of freedom per element (cf., e.g., Table 5). However, this trick avoids any postprocessing of the scalar variable u_h (29).

4.2. Local approximation spaces

As indicated above, the proposed HDG mixed method can be considered as a penalized variant of the H-RT method by adding the reduced (LS) stabilization function in the definition of the normal trace of the flux on the mesh skeleton. A characteristic feature of the standard H-MFE methods is that their discrete solutions coincide with those of the original $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming MFE methods [9,10]. This equivalence rests on two key ingredients: (i) the choice of the null-stabilization function τ^n which amounts to forcing the flux residual $R_{\partial A}^\sigma := (\hat{\sigma}_h - \sigma_h) \cdot \mathbf{n}$ to be zero and (ii) the choice of the local approximation spaces as indicated in Table 2. The proposed H-LDG^{LS} method is obtained by modifying each of these two points. First, we relax the residual constraint (i.e., $R_{\partial A}^\sigma \neq 0$) by replacing τ^n by the projective stabilization function τ^{LS} (30); second, we adapt the polynomial combination of the discrete variables to respect the inclusion constraints (31). Consequently, the H-LDG^{LS} method differs fundamentally from the standard H-RT method, as it introduces additional stabilization terms and uses a different polynomial combination set for approximating discrete variables. To complete our presentation, we select (i) the smaller admissible space $\Lambda(\partial A)$ to minimize the size of the stiffness matrix \mathbb{A} in (20) and (ii) the larger space $\mathcal{Q}(A)$ to optimize the expected convergence rate of u_h . We then define the H-LDG_k^{LS} mixed method by choosing the trace of the flux and local polynomial spaces as follows:

$$\hat{\sigma}_h \cdot \mathbf{n} := \sigma_h \cdot \mathbf{n} + \tau_{\mathcal{F}} \cdot (\pi_{\Lambda_h}(u_h) - \hat{u}_h) \quad \text{on } \mathcal{F} \in \partial A, \tag{32}$$

$$\mathcal{V}(A) := \mathbf{RT}_k(A), \quad \mathcal{Q}(A) := \mathcal{P}_{k+1}^d(A) \quad \text{and} \quad \Lambda(\partial A) := \mathcal{P}_{k-1}^{d-1}(\partial A), \tag{33}$$

for all $A \in \Omega_h$. It can be easily checked that the chosen local spaces (33) with respect to the normal trace definition (32) verify all inclusion constraints (31). We have illustrated in Table 5 the various local approximation spaces, i.e., $\mathcal{V}(A)$, $\mathcal{Q}(A)$ and $\Lambda(\partial A)$, used to construct the H-LDG_k^{LS} method by specifying the location of their corresponding degrees of freedom. Thus, the resulting method inherits attractive properties due to the introduction of the reduced stabilization function and the use of Raviart-Thomas functions to approximate the flux variable: the postprocess of the potential is now disabled and the flux reconstruction is simplified, as we will see below.

4.3. Simplified postprocess of the flux

The key idea of this simplified postprocessing procedure relies on properties of local basis functions \mathbf{v}_h that span the Raviart-Thomas element $\mathbf{RT}_k(A)$. Let us recall that a unisolvent finite element $\mathbf{RT}_k(A)$ can be derived by fixing (i) the moments of the normal component up to order k on facets and (ii) the interior moments up to order $k - 1$ [2]. As a result, the set of basis functions can be divided into two categories: first, the subset of *normal basis functions*, denoted \mathbf{v}_h^∂ , having nonvanishing normal traces on ∂A that are L^2 -orthogonal to any polynomial $\xi_h \in \mathcal{P}_{k-1}^d(A)$ and, second, the subset of *interior basis functions*, denoted \mathbf{v}_h^i , having vanishing normal traces on the boundary ∂A . Due to these last two properties, we will be able to guarantee the existence and uniqueness of the simplistic flux reconstruction. As explained in the previous section, the postprocess procedure (28) used to construct σ_h^* relies on the L^2 -orthogonal projection of the discrete variable σ_h and its trace $\hat{\sigma}_h$ onto basis functions that span $\mathbf{RT}_k(A)$. Hence, assuming that both σ_h and σ_h^* belong to the same local space $\mathbf{RT}_k(A)$ and using the L^2 -orthogonality property of functions \mathbf{v}_h^∂ and ξ_h , the second equation (28b) reduces to

$$(\sigma_h^{*,i}, \xi_h)_A = (\sigma_h^i, \xi_h)_A \quad \forall \xi_h \in \mathcal{P}_{k-1}^d(A), \tag{34}$$

where $\sigma_h^{*,i}$ and σ_h^i denote the restriction of σ_h^* and σ_h to the *interior basis functions*, respectively. Thus, the projection operation (34) consists of substituting the interior nodal values of σ_h^* by those of σ_h . In other words, if we denote by Σ_A^* and Σ_A the local vector of degrees of freedom of σ_h^* and σ_h , respectively, we then deduce easily from (34) that

$$\Sigma_A^* = \begin{pmatrix} \Sigma_A^{*,\partial} \\ \Sigma_A^i \end{pmatrix}, \tag{35}$$

where $\Sigma_A^{*,\partial}$ and Σ_A^i correspond to the restriction of Σ_A^* and Σ_A to the *normal* and *interior basis functions* of $\mathbf{RT}_k(A)$, respectively. Similarly, by using that interior basis functions \mathbf{v}_h^i have no normal trace on ∂A , the first equation (28a) reduces to the following equation:

$$\langle \sigma_h^{*,\partial} \cdot \mathbf{n}, \mu_h \rangle_{\partial A} = \langle \sigma_h^\partial \cdot \mathbf{n}, \mu_h \rangle_{\partial A} + \langle \tau_{\mathcal{F}} \cdot (\pi_{\Lambda_h}(u_h) - \hat{u}_h), \mu_h \rangle_{\partial A} \quad \forall \mu_h \in \mathcal{P}_k^{d-1}(\partial A). \tag{36}$$

The corresponding matrix equation (36) is smaller than (28) since its dimension is equal here to the number of normal basis functions per element (cf., e.g., Tables 3 and 5). Note, however, that this simplified flux reconstruction requires computing beforehand the projection of the potential $\pi_{\Lambda_h}(u_h)$ onto $\Lambda(\partial A)$. This step can easily be done by means of the quadrature formula in the two-dimensional case [17,23].

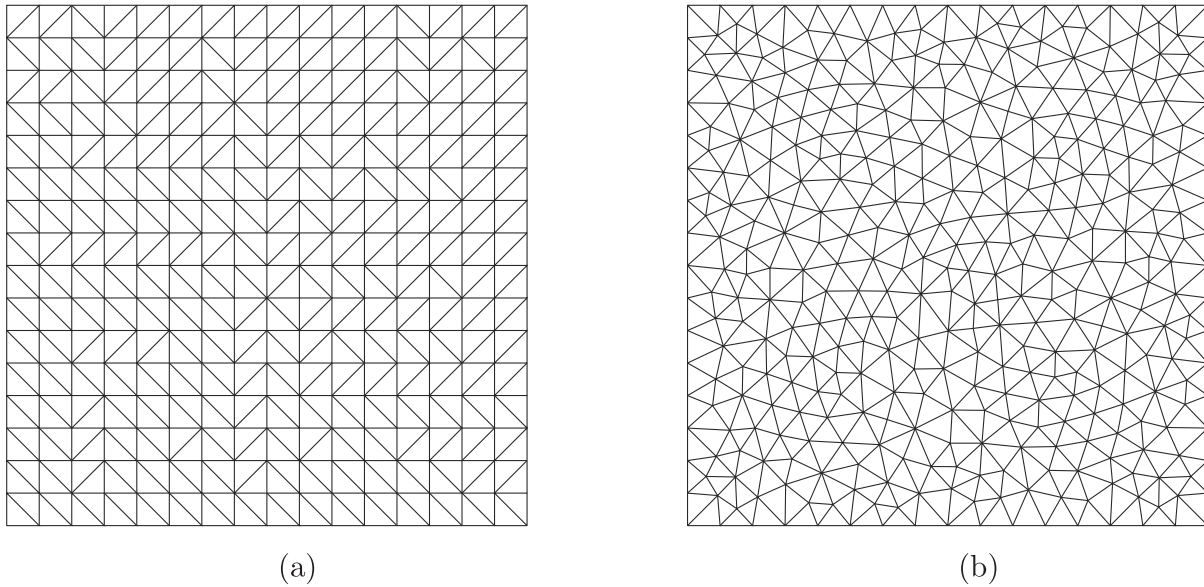


Fig. 1. Regular mesh (a) and irregular mesh (b) for $n = 16$.

5. Numerical experiments

The performance of the novel H-LDG $_k^{\text{LS}}$ method is now investigated for the following three numerical examples in two-dimensional space in terms of convergence, accuracy, stability and efficiency. In particular, we compare the projective H-LDG $_k^{\text{LS}}$ variant with the standard H-RT $_k$ method without any stabilization and the well-established H-LDG $_k$ method using a multiplicative stabilization function. For our experiments, we focused on three hybrid mixed methods, each using distinctive stabilization functions. These methods are all implemented in a single FORTRAN 2003 program, and a direct solver using an unsymmetric-pattern multifrontal method and direct sparse LU factorization (UMFPACK) is considered for solving the associated linear system [28]. In the rest of this paper, we focus only on the *best* approximated variables, i.e., (u_h, σ_h^*) for the H-LDG $_k^{\text{LS}}$ method, (u_h^*, σ_h) for the H-RT $_k$ method and (u_h^*, σ_h^*) for the H-LDG $_k$ method, and on the CPU time required to obtain them: let us presume that the CPU time does not take into account the time required to read mesh files and write output files. The numerical errors and corresponding estimated convergence rates (ECRs) are computed in the usual L^2 -norm. In particular, we denote by e_{u_h} and e_{σ_h} ($e_{u_h^*}$ and $e_{\sigma_h^*}$), the L^2 -error of discrete variables u_h and σ_h (postprocessed variables u_h^* and σ_h^*),

$$e_{u_h} = \|u - u_h\|_{L^2(\Omega_h)} \quad \text{and} \quad e_{\sigma_h} = \|\sigma - \sigma_h\|_{L^2(\Omega_h)}, \quad (37)$$

and similarly for $e_{u_h^*}$ and $e_{\sigma_h^*}$, respectively. We consider two types of triangular meshes (structured/unstructured) in these experiments, as illustrated in Fig. 1, and standard h - and p -refinement strategies are used to compute the discrete solutions and numerical errors over the entire domain. For instance, regular meshes are obtained by discretizing the unit domain Ω with uniform squares of length $h = 1/n$ for $n = \{4, 8, 16, 32, 64\}$, which are then divided into two triangles, as depicted in Fig. 1.a. The mesh refinement is then characterized by n . However, let us presume here that for a given mesh and for any fixed value of k , these three variants have a global matrix equation (20) of identical size and sparsity structure (cf. Table 4). It should also be noted that the computational effort to calculate postprocessing variables is generally negligible due to parallelization strategies, but in our case, all these calculations are done sequentially. The source term and Dirichlet boundary conditions are taken such that the proposed analytical solution is exact.

5.1. Test A – Homogeneous isotropic flow

The first test case considered here is used to evaluate the performance of hybrid mixed methods in the simplest possible setting, i.e., *Poisson's equation*. We then consider the homogeneous Dirichlet boundary value problem corresponding to the exact solution $u(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$ in the unit domain $\Omega = (0, 1)^2$. Here, the material is assumed to be the homogeneous and isotropic $\kappa = \mathbf{I}_2$, where \mathbf{I}_d denotes the $d \times d$ identity matrix. A history of convergence of the H-LDG $_k^{\text{LS}}$, H-RT $_k$ and H-LDG $_k$ methods is summarized in Table 6 for regular meshes ($n = 4, \dots, 64$) and different polynomial degrees ($k = 0, 1, 2$).

We emphasize here that we do not report in the Table 6 the history of convergence of selected discrete variables; however, we analyze below their behaviour. For all degrees of approximation k , we note that the discrete variables u_h and σ_h both converge optimally with order $k + 1$ for the H-RT $_k$ method, whereas the postprocessed variable u_h^* converges with order $k + 2$ in the L^2 -norm. Similar results are obtained for the H-LDG $_k$ method except for the lowest degree ($k = 0$), where

Table 7
Test B – Heterogeneous and smooth anisotropic test case on regular meshes.

k	n	H-LDG _k ^{LS}				H-RT _k				H-LDG _k			
		e _{u_h}	ECR	e _{σ_h[*]}	ECR	e _{u_h}	ECR	e _{σ_h}	ECR	e _{u_h}	ECR	e _{σ_h[*]}	ECR
0	4	6.77E-2	–	1.80E-0	–	4.55E-2	–	1.77E-0	–	3.36E-1	–	1.85E-0	–
	8	1.54E-2	2.14	8.99E-1	1.00	1.41E-2	1.69	8.95E-0	0.98	1.72E-1	0.97	9.10E-1	1.02
	16	3.95E-3	1.96	4.46E-1	1.01	3.83E-3	1.88	4.45E-1	1.00	8.67E-2	0.99	4.49E-1	1.02
	32	1.00E-3	1.98	2.21E-1	1.01	9.82E-4	1.96	2.21E-1	1.00	4.36E-2	0.99	2.23E-1	1.01
	64	2.51E-4	2.00	1.10E-1	1.00	2.48E-4	1.99	1.10E-1	1.00	2.19E-2	0.99	1.10E-1	1.01
1	4	6.01E-3	–	2.27E-1	–	5.54E-3	–	2.25E-1	–	5.08E-3	–	2.12E-1	–
	8	7.34E-4	3.03	5.83E-2	1.96	7.82E-4	2.82	5.82E-2	1.95	6.60E-4	2.94	5.67E-2	1.90
	16	8.90E-5	3.04	1.46E-2	2.00	9.75E-5	3.00	1.46E-2	2.00	8.24E-5	3.00	1.43E-2	1.99
	32	1.09E-5	3.03	3.62E-3	2.01	1.21E-5	2.96	3.62E-3	2.01	1.03E-5	3.00	3.62E-3	1.98
	64	1.37E-6	3.00	9.10E-4	2.00	1.52E-6	3.04	9.11E-4	1.99	1.30E-6	2.99	9.07E-4	2.00
2	4	4.60E-4	–	2.31E-2	–	3.65E-4	–	2.30E-2	–	4.28E-4	–	2.12E-2	–
	8	2.27E-5	4.34	2.90E-3	2.99	2.32E-5	3.98	2.90E-3	2.99	2.86E-5	3.90	3.19E-3	3.02
	16	1.38E-6	4.04	3.58E-4	3.02	1.52E-6	3.94	3.58E-4	3.02	1.77E-6	4.01	3.95E-4	3.01
	32	8.72E-8	3.99	4.60E-5	2.96	9.72E-8	3.97	4.61E-5	2.96	1.11E-7	3.99	4.94E-5	3.00
	64	5.48E-9	4.00	5.74E-6	3.00	6.15E-9	3.99	5.75E-6	3.00	6.94E-9	4.00	6.17E-6	3.00

u_h^* converges only with order $k + 1$, as is the case for u_h . These results are in accordance with the theoretical estimates of convergence rates given by Brezzi *et al.* in [2] for mixed methods and by Cockburn *et al.* in [10] for HDG methods. Concerning the H-LDG_k^{LS} method and for all degrees of approximation k , we observe that the scalar variable u_h converges (without any postprocessing) with order $k + 2$, including the particular case $k = 0$ and that both σ_h and σ_h^* converge with optimal order $k + 1$. The substantial gain in accuracy induced by the postprocessing technique is clearly illustrated here; however, the discrete variable u_h of the H-LDG_k^{LS} method has a slightly smaller error than the postprocessed scalar variable u_h^* of both H-RT_k and H-LDG_k methods (cf. Table 6). To complete our analysis, we also include comparisons in terms of the CPU time, which corresponds here to the simulation time needed to obtain the discrete variables referenced in Table 6 for each method. Despite the fact that all hybrid methods are built according to a unified principle, each of these three variants uses different local assemblies and local techniques to reconstruct the discrete variables as indicated in Table 3. To achieve this aim, we plot in Fig. 2 the errors in u and in σ as a function of the CPU time. For a wide range of degree of approximation k , we observe that both the H-LDG_k^{LS} and H-LDG_k methods yield very similar results with a slight advantage for the projective variant and that they outperform the standard H-RT_k method, which clearly requires more CPU time (see, for instance, Fig. 2-a_{1,2} and 2-b_{0,1,2}). The situation is somewhat different for the lowest degree ($k = 0$), and in this latter case only, we observe that the numerical approximation of the scalar variable of both the H-LDG₀^{LS} and H-RT₀ methods outperforms that of the H-LDG₀ method; this result arises mainly because the H-LDG₀ method converges only with order one (cf. Fig. 2-a₀). This experiment also illustrates the benefits of using higher-degree approximations. For instance, we can achieve better accuracy with the H-LDG_k^{LS} method (with approximately half the CPU time) with a square approximation ($k = 2$) in a coarser mesh ($n = 8$) than with a constant approximation ($k = 0$) in the finest mesh ($n = 64$).

5.2. Test B – Heterogeneous anisotropic flow

The second test case is used to analyze the behaviour of hybrid methods in the context of heterogeneity and anisotropy of the material. To this aim, we consider the Dirichlet problem corresponding to the exact solution $u(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y)$ on the domain $\Omega \in (0, 1)^2$. Here, we assume that the diffusion tensor is given by

$$\kappa^{-1} = \begin{bmatrix} e^{x+y} & 0 \\ 0 & e^{x-y} \end{bmatrix}, \tag{38}$$

which corresponds to a heterogeneous and smooth anisotropic medium, where the magnitude of diffusion coefficients along each principal direction x and y , respectively, vary continuously at each point of the domain; here, the strongest anisotropic ratio is approximately e^2 . This test case is inspired from Samii *et al.* [29]. A history of convergence is presented in Table 7 for a wide range of polynomial degrees $0 \leq k \leq 2$ and for irregular meshes ($n = 4, \dots, 64$).

All conclusions established in the previous experiment (Test A – Homogeneous isotropic flow) are also observed here despite the presence of heterogeneity and anisotropy.

5.3. Test C – Homogeneous anisotropic flow

The last experiment was mentioned in [30] as causing some numerical locking problems for a large class of numerical methods. Then, the exact solution is taken to be

$$u(x, y) = \sin(2\pi x)e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}y},$$

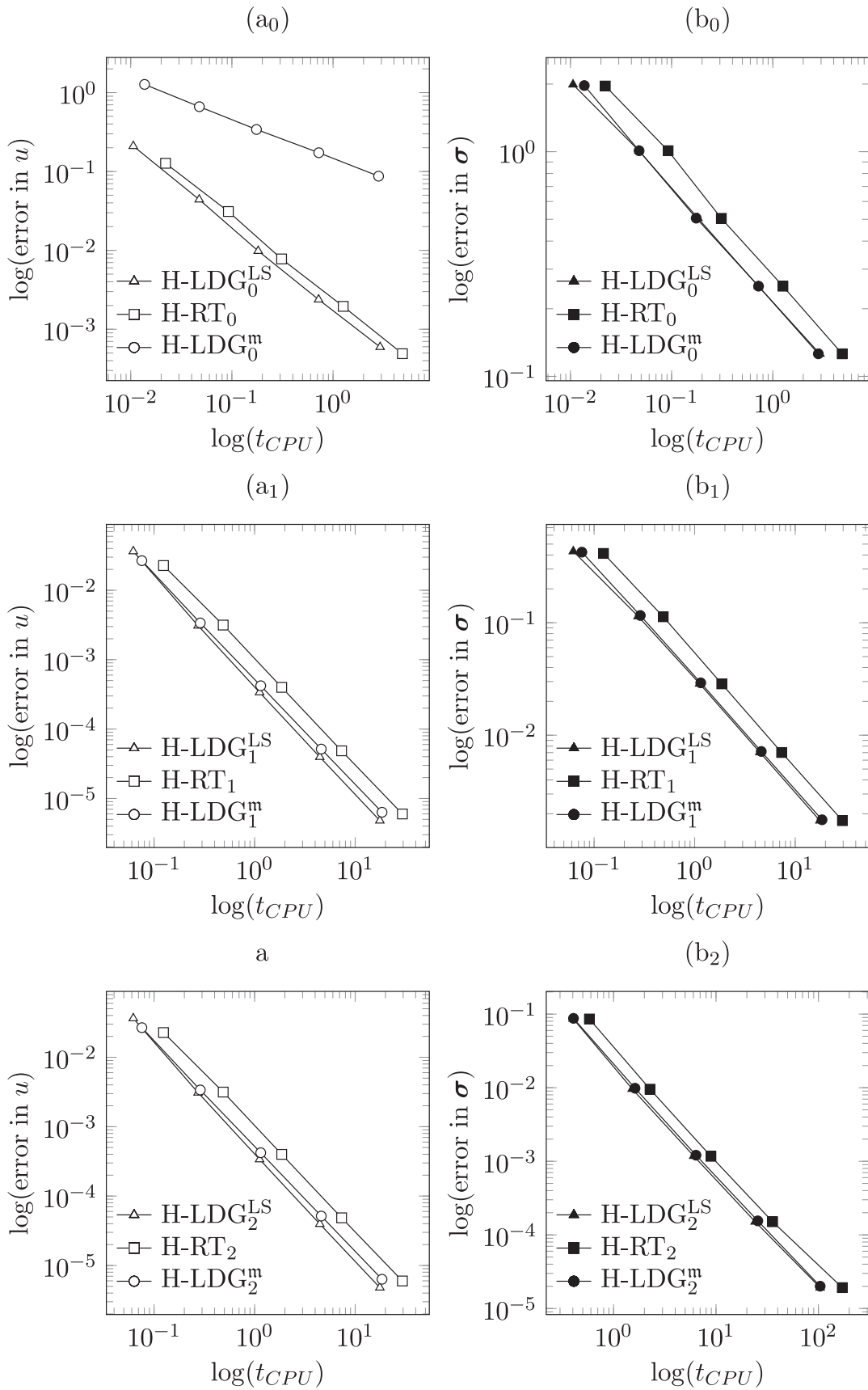


Fig. 2. Test A – History of convergence of the discrete variables for the $H-LDG_k^{LS}$ ($\Delta : e_{u_h}$ and $\blacktriangle : e_{\sigma_h}$), the $H-RT_k$ ($\square : e_{u_h}$ and $\blacksquare : e_{\sigma_h}$) and the $H-LDG_k^m$ ($\circ : e_{u_h}$ and $\bullet : e_{\sigma_h}$) methods as a function of the CPU time t_{CPU} for different polynomial degrees $0 \leq k \leq 2$ on regular meshes.

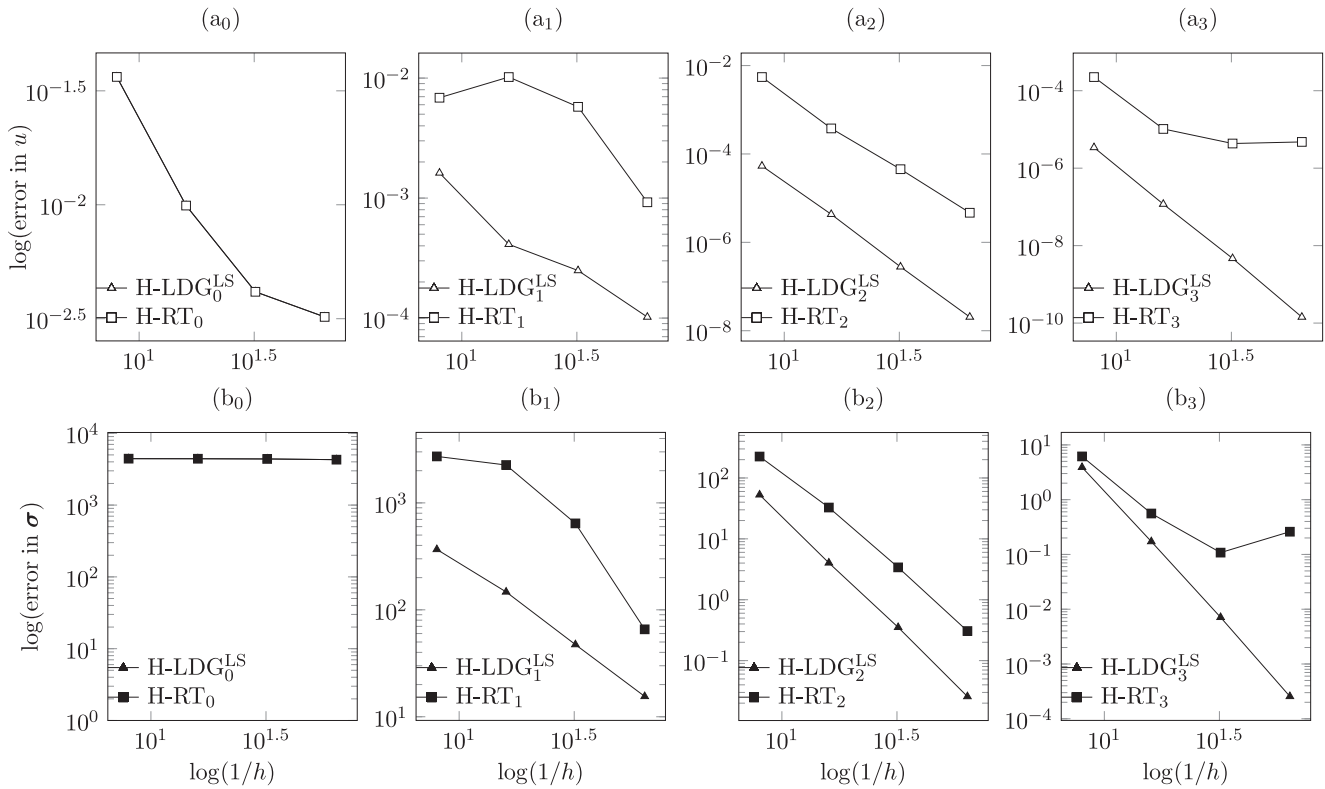


Fig. 3. Test C – History of convergence of the discrete variables for the $H-LDG_k^{LS}$ (Δ : e_{u_n} and \blacktriangle : e_{σ_n}) and the $H-RT_k$ (\square : e_{u_n} and \blacksquare : e_{σ_n}) methods as a function of the mesh size $1/h$ for different polynomial orders $0 \leq k \leq 3$ on irregular meshes.

and the permeability tensor is assumed to be equal to

$$\kappa^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Here, the locking parameter δ is assumed to be the sufficiently large $\delta = 10^6$, and the stabilization parameter is chosen to be of order one, that is, $\tau = \mathcal{O}(1)$. In the last example, we wish to illustrate the benefits of using a stabilization function. Thus, we focus only on the $H-LDG_k^{LS}$ method using the LS stabilization function and the standard $H-RT_k$ method without any stabilization. As indicated above, for any fixed values of k and n , we observe that the projective $H-LDG_k^{LS}$ variant requires less CPU time than the standard $H-RT_k$ method in this latter example as well. A history of convergence is plotted in Figure 3 for different polynomial degrees ($k = 0, \dots, 3$) on irregular meshes ($n = 8, \dots, 64$). For the lowest degree ($k = 0$), we observe that both the $H-LDG_0^{LS}$ and $H-RT_0$ methods yield similar results and that the use of the stabilization function provides no significant improvements (cf. Fig. 3-a₀ and 3-b₀): the velocity error does not converge, and the estimated convergence rate (ECR) of the potential decreases significantly as the mesh is refined.

We clearly observe a numerical locking phenomena for both the $H-LDG_0^{LS}$ and $H-RT_0$ methods. The situation is somewhat different for higher-degree approximations ($k \geq 1$), for which the gap is now more significant. As shown in Fig. 3, the numerical errors computed by the $H-LDG_k^{LS}$ method differ significantly and are more accurate by several orders of magnitude than those given by the $H-RT_k$ method (cf., e.g., Fig. 3-a_{1,2} and 3-b_{1,2}). In particular (for $k = 3$), we clearly observe problematic numerical locking for the $H-RT_3$ method only (cf. Fig. 3-a₃ and 3-b₃). Note that this is not the case for the $H-LDG_3^{LS}$ method and that the computed errors decrease as expected, i.e., $k + 2$ for the potential and $k + 1$ for the flux. Therefore, we conclude that the projective $H-LDG_k^{LS}$ variant outperforms the standard $H-RT_k$ method, particularly in highly anisotropic porous media. In the latter case, we highlight the beneficial role of using a stabilization function to restore the convergence of the method in severe physical situations. Let us point out that any other HDG methods using a non-null stabilization function will also be able to treat this rough case.

6. Conclusion & perspectives

We have proposed in the present paper, a projective hybridizable discontinuous Galerkin mixed method for second-order diffusion problems using a projective stabilization function and broken Raviart–Thomas functions to approximate the dual variable. The $H-LDG_k^{LS}$ method is clearly inspired by the primal HDG scheme with reduced stabilization suggested by Lehrenfeld and Schöberl in 2010, and the standard $H-RT$ method. Indeed, the higher-order Raviart–Thomas space $\mathbf{RT}_k(A)$

with $k \geq 0$ for the flux σ_h is used, a piecewise polynomial of degree $k + 1$ for the potential u_h and a piecewise polynomial of degree k for its numerical trace \hat{u}_h on ∂A . This unconventional polynomial combination is made possible by relaxing the flux residual constraint i.e., $R_{\partial A}^\sigma := \tau^{\text{LS}}(u_h - \hat{u}_h)$. Thus, the resulting method inherits attractive properties: no postprocessing is required to improve the accuracy of the potential u_h , and a straightforward flux reconstruction is sufficient to obtain a $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming flux variable σ_h^* . Extensive numerical experiments have been performed to prove the accuracy of the H-LDG $_k^{\text{LS}}$ method, and as expected, an optimal convergence order $(k + 1)$ for σ_h^* and superconvergence $(k + 2)$ for u_h are observed. In addition, comparative tests with the classical H-RT and the well-known hybridizable local discontinuous Galerkin (H-LDG) mixed methods are also performed and exposed in terms of mesh and polynomial refinements, and CPU time.

The key idea explored in this paper is that standard H-MFE mixed methods are also amenable to stabilization strategies within the general framework of HDG methods. From our viewpoint, this is a promising direction to explore, as the resulting method inherits all benefits of the original methods. Notably, the resulting method developed in this paper for second-order diffusion problems is not limited to only the Raviart–Thomas finite element and the (projective) LS stabilization function but can be easily extended to any other class of problems, (broken) $\mathbf{H}(\text{div})$ -conforming finite elements and stabilization functions. Accordingly, an extension to more general advection-diffusion-reaction problems (with nonnegative characteristic form) will be considered in a forthcoming paper.

Acknowledgments

By convention, the names of the authors are listed in alphabetical order. The corresponding author thanks Pr. Philippe Ackerer and Dr. Marwan Fahs in particular for their invitation and fruitful discussions on (projective) hybrid methods during his visit at the LHyGeS of Strasbourg in May 2018. Finally, the authors thank the anonymous referees for their insightful suggestions leading to a better presentation of this material.

References

- [1] G. Chavent, J. Jaffre, *Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation*, Vol. 17, Elsevier Science Publishers B. V., 1986.
- [2] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1991.
- [3] P. Raviart, J. Thomas, A mixed finite element method for second order elliptic problems, *Mathematical Aspects of Finite Element Method*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 606, Springer-Verlag, 1977, pp. 292–315.
- [4] D. Arnold, F. Brezzi, Mixed and nonconforming finite element methods: implementation, postprocessing and error estimates, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 19 (1), 1985, pp. 7–32.
- [5] V. Fontaine, A. Younes, Computational issues of hybrid and multipoint mixed methods for groundwater flow in anisotropic media, *Comput. Geosci.* 14 (1) (2010) 171–181.
- [6] D. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L. Marini, Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 39 (5) (2002) 1749–1779.
- [7] R.M. Kirby, S.J. Sherwin, B. Cockburn, To cg or to HDG: A comparative study, *J. Sci. Comput.* 51 (1) (2012) 183–212.
- [8] B. Cockburn, W. Qiu, K. Shi, Conditions for superconvergence of HDG methods for second-order elliptic problems, *Math. Comput.* 81 (279) (2012) 1327–1353.
- [9] B. Cockburn, J. Gopalakrishnan, A characterization of hybridized mixed methods for second order elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 42 (1) (2004) 283–301.
- [10] B. Cockburn, J. Gopalakrishnan, R. Lazarov, Unified hybridization of discontinuous Galerkin, mixed, and continuous Galerkin methods for second order elliptic problems, *SIAM J. Numer. Anal.* 47 (2) (2009) 1319–1365.
- [11] B. Cockburn, B. Dong, J. Guzmán, A superconvergent LDG-hybridizable Galerkin method for second-order elliptic problems, *Math. Comput.* 77 (264) (2008) 1887–1916.
- [12] B. Cockburn, *Static Condensation, Hybridization, and the Devising of the HDG Methods*, Springer International Publishing, Cham, (2016), pp. 129–177.
- [13] D. Boffi, D. Di Pietro, Unified formulation and analysis of mixed and primal discontinuous skeletal methods on polytopal meshes, *ESAIM: M2AN* 52 (1) (2018) 1–28, doi:10.1051/m2an/2017036.
- [14] D. Di Pietro, J. Droniou, G. Manzini, Discontinuous skeletal gradient discretisation methods on polytopal meshes, *J. Comput. Phys.* 355 (2018) 397–425.
- [15] B. Cockburn, D. Di Pietro, A. Ern, Bridging the hybrid high-order and hybridizable discontinuous Galerkin methods, *ESAIM: M2AN* 50 (3) (2016) 635–650.
- [16] D. Di Pietro, A. Ern, S. Lemaire, A Review of Hybrid High-Order Methods: Formulations, Computational Aspects, Comparison with Other Methods, Springer International Publishing, Cham, (2016), pp. 205–236.
- [17] I. Oikawa, A hybridized discontinuous Galerkin method with reduced stabilization, *J. Sci. Comput.* 65 (1) (2015) 327–340.
- [18] C. Lehrenfeld, Hybrid Discontinuous Galerkin methods for incompressible flow problems, Diploma thesis, Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 2010 Ph.D. thesis.
- [19] N. Nguyen, J. Peraire, B. Cockburn, A hybridizable discontinuous Galerkin method for stokes flow, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 199 (912) (2010) 582–597.
- [20] N. Nguyen, J. Peraire, B. Cockburn, An implicit high-order hybridizable discontinuous Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations, *J. Comput. Phys.* 230 (4) (2011) 1147–1170.
- [21] W. Qiu, K. Shi, An HDG method for convection diffusion equation, *J. Sci. Comput.* 66 (1) (2016) 346–357.
- [22] S. Rhebergen, G. N. Wells, A hybridizable discontinuous Galerkin method for the Navier-Stokes equations with pointwise divergence-free velocity field, *J. Sci. Comput.* 76 (3) (2018) 1484–1501, doi:10.1007/s10915-018-0671-4.
- [23] C. Lehrenfeld, J. Schöberl, High order exactly divergence-free hybrid discontinuous Galerkin methods for unsteady incompressible flows, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 307 (2016) 339–361, doi:10.1016/j.cma.2016.04.025.
- [24] N. Nguyen, J. Peraire, B. Cockburn, An implicit high-order hybridizable discontinuous Galerkin method for linear convection-diffusion equations, *J. Comput. Phys.* 228 (9) (2009) 3232–3254.
- [25] D. Di Pietro, A. Ern, Hybrid High-Order methods for variable diffusion problems on general meshes, *Comptes Rendus Mathématique* 353 (2014) 31–34.
- [26] P.L. Lederer, C. Lehrenfeld, J. Schöberl, Hybrid discontinuous Galerkin methods with relaxed $\mathbf{H}(\text{div})$ -conformity for incompressible flows. part i, *SIAM J. Numer. Anal.* 56 (2018) 2070–2094, doi:10.1137/17M1138078.
- [27] P.L. Lederer, C. Lehrenfeld, J. Schöberl, Hybrid discontinuous Galerkin methods with relaxed $\mathbf{H}(\text{div})$ -conformity for incompressible flows. part ii, *ESAIM: M2AN* (2018), doi:10.1051/m2an/2018054.

- [28] T.A. Davis, *Direct Methods for Sparse Linear Systems (Fundamentals of Algorithms)*, Society for Industrial and Applied Mathematic, 2006.
- [29] A. Samii, C. Michoski, C. Dawson, A parallel and adaptive hybridized discontinuous Galerkin method for anisotropic nonhomogeneous diffusion, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 304 (2016) 118–139.
- [30] R. Herbin, F. Hubert, Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids, in: *Finite Volumes for Complex Applications V*, Wiley, France, 2008, pp. 659–692.

5.2 Conclusion

L'introduction de la méthode H-RT^p a permis d'intégrer la technique de post-processing directement au processus de résolution numérique. De plus, tout comme la méthode H-RT^m, l'utilisation d'une fonction de stabilisation dans la méthode H-RT a permis de réduire significativement la sensibilité de cette dernière à l'anisotropie du tenseur de conductivité $\bar{\alpha}$ (ici nommé $\bar{\kappa}^{-1}$). La nouvelle méthode H-RT^p bénéficie quant à elle de la super-convergence à l'ordre $p+2$ de la variable u_h à l'ordre 0, alors que les méthodes H-RT^m et HdG convergent toutes deux à l'ordre $p+1$ pour cette même variable et ce même ordre.

L'utilisation de la méthode H-RT^p pour la résolution numérique des problèmes de diffusion présente alors un intérêt certain ; Premièrement grâce à sa faible sensibilité à l'anisotropie et deuxièmement, en raison de ses propriétés de convergence.

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

L'écoulement et le transport de masse en milieu poreux sont des processus physiques importants dans notre compréhension des mécanismes de pollution environnementale et dont la simulation numérique nécessite la mise en place de méthodes de discrétisation adaptées. Ce mémoire de thèse s'intéresse justement à ces aspects et traite de la résolution numérique spatiale de l'écoulement et du transport de masse en milieu poreux saturé. Afin de prendre en compte l'hétérogénéité structurelle du sol naturel ainsi que les directions préférentielles d'écoulement, le coefficient de diffusion est alors représenté par une matrice (symétrique définie positive) dont l'amplitude peut varier de manière significative à l'intérieur ou dans une direction du domaine. Le transport de masse est, quant à lui, représenté par une équation de type diffusion-convection-réaction. L'introduction du terme de convection soulève des difficultés mathématique et numérique supplémentaire liés à la prédominance du mécanisme de convection par rapport à celui de la diffusion (nombre de Péclet). Parmi le large éventail de méthodes de discrétisation mises à notre disposition, nous nous sommes focalisés sur une nouvelle classe de méthodes non-conformes (DG) permettant de traiter aussi efficacement les opérateurs de diffusion que les opérateurs de convection. Les méthodes hybrides de Galerkin Discontinues (HDG) ont été introduite pour la première fois au début des années 2010 et présentent de nombreux avantages : elles sont flexibles, localement conservatives, éligibles à la condensation statique et au raffinement polynomial et spatial et elles traitent naturellement l'hétérogénéité et l'anisotropie du milieu poreux. Ces méthodes garantissent une approximation optimale des variables discrètes. De plus, des techniques de post-traitement peuvent être utilisées afin d'améliorer les propriétés générales de régularité et de convergence des nouvelles variables ainsi reconstruites.

Vous trouverez ci-après un bref récapitulatif des thèmes abordés et des résultats obtenus dans les principaux chapitres de ce manuscrit de thèse :

6.1 Résumé succinct des chapitres

- **Chapitre 2** : Dans ce chapitre, nous définissons le cadre général de notre étude qui n'est autre que celui de l'écoulement et du transfert de masse en milieu poreux. Nous y rappelons quelques notions et définitions élémentaires telle que la porosité ou encore la perméabilité. Nous établissons ensuite les équations aux dérivées partielles régissant (i) l'écoulement et (ii) le transport de masse. Nous soulevons les difficultés générales liées à la résolution numérique de ces processus physiques. Nous définissons enfin le modèle générale employé dans la suite du manuscrit ainsi que les conditions aux limites employées.
- **Chapitre 3** : Dans ce chapitre, nous présentons deux célèbres classes de méthode mixte pour la discrétisation des équations de diffusion à savoir les méthodes $H(\text{div})$ -conformes et enfin les méthodes de Galerkin discontinues. Nous commençons par décrire le formalisme variationnelle des méthodes $H(\text{div})$ -conformes, à étudier le caractère bien-posé du problème discret (via la condition inf-sup discrète), et nous établissons enfin le système algébrique associé. Bien que ces méthodes offrent une approximation optimale des variables (primale et duale) discrètes, elles soulèvent néanmoins des difficultés majeures quant à la résolution du système linéaire associée (structure point-selle, nombre important de degrés de liberté) directement liées aux propriétés de régularité du champ des vitesses. Une idée naturelle avancée par les méthodes de Galerkin discontinues était justement de relaxer ces contraintes en privilégiant l'utilisation de variables polynomiales discontinues par morceaux. Ce nouveau formalisme introduit naturellement le concept de trace aux interfaces du maillage et selon la définition empruntée, il conduit aux diverses méthodes DG proposées dans la littérature durant ces vingt dernières années. Plus particulièrement, nous nous sommes focalisés sur l'une des premières méthodes mixtes DG à savoir la variante LDG (Local Discontinuous Galerkin). Cette variante conduit à un système linéaire de plus petite taille défini à l'aide des seules inconnues associées à la variable primale. Un post-traitement adapté permet de reconstruire le champ des vitesses localement afin d'obtenir une

nouvelle variable $H(\text{div})$ -conforme. Cependant, malgré tous ces avantages, la variante LDG conduit généralement à des approximations du champ des vitesses qui sont de moins bonnes qualités que celles obtenues par une méthode $H(\text{div})$ -conforme (à ordre polynomial équivalent). Ce constat s'explique surtout par le fait que la trace de la variable d'état doit impérativement s'exprimer indépendamment du flux. Ainsi, ce qui constitue le tour de force de la méthode LDG apparaît comme étant, à la fois, son point faible.

- **Chapitre 4** : Ce chapitre est l'un des plus importants de ce manuscrit. Il a eu pour objet de présenter les méthodes hybrides mixtes et/ou discontinues et de les évaluer à travers quelques cas tests numériques. Ceux-là ont permis de délimiter le champ des possibilités de chaque méthode et de les comparer entre elles. Les résultats avancés dans ce chapitre ont non seulement permis d'exprimer l'importance que pouvait avoir le facteur de stabilisation introduit par les HDG, mais aussi la souplesse qu'il apportait dans le choix des bases d'approximation polynomiale. D'une façon plus importante, ce chapitre a permis l'introduction d'une nouvelle méthode de résolution numérique appelée $H\text{-RT}^m$ qui s'appuie sur les avantages offerts par les méthodes $H\text{-RT}$ et HDG.
- **Chapitre 5** : Dans ce chapitre, nous utilisons l'opérateur de projection de la variable d'état afin d'améliorer les éléments de post-processing inclus dans les méthodes de résolution numérique présentées dans les chapitres précédents. Ces améliorations proviennent de la littérature et plus particulièrement d'une méthode qui permet d'inclure le post-processing de la variable d'état directement dans la formulation faible discrète. Il a été montré dans ce chapitre que cette technique a un intérêt certain dans la représentation des phénomènes elliptiques. Ce travail de recherche a d'ailleurs fait l'objet d'un article qui a été publié dans la revue *Applied Mathematical Modelling* au début de l'année 2019.

6.2 Perspectives

Différentes pistes sont envisageables pour poursuivre, approfondir et valoriser les travaux de recherche déjà entamés.

Parmi les plus importantes, nous citerons les points suivants :

1. A court terme, il serait pertinent de valoriser sous la forme d'un article revue, l'en-

semble des travaux réalisés au chapitre 4.

2. Dans ce chapitre, nous avons montré comment adapter certaines méthodes mixtes hybrides (par exemple, celles utilisant des fonctions de base de Raviart-Thomas pour l'approximation du champ des vitesses) afin de traiter efficacement le problème de convection-diffusion-réaction. Il apparaît clairement que le formalisme HDG (telle que présenté) appartient à la famille des $\bar{\alpha}^{-1}$ -méthodes et qu'il s'appuie sur une inversion directe du tenseur de diffusion. Ce dernier, bien qu'efficace, ne convient donc pas pour traiter les problèmes de diffusion évanescence (diffusion nulle dans une sous-partie du domaine). Une idée intéressante à explorer serait de proposer une première variante dite « étendue » introduisant le gradient de la variable d'état comme une inconnue supplémentaire, afin de résoudre ce type de problème.
3. Un dernier point intéressant consisterait à étendre le formalisme HDG présenté dans ce mémoire afin de résoudre les équations de la mécanique des fluides (Stokes et Navier-Stokes).

Annexe A

Fonctions d'interpolation à ordre élevé

Le but de cette annexe est de rappeler la procédure de construction des fonctions d'interpolation sur un triangle rectangle. Les fonctions d'interpolation pour $0 \leq p \leq 2$ seront alors décrites.

A.1 Élément de référence

L'ensemble des fonctions décrites dans cette annexe est construit sur un élément de référence et l'élément utilisé tout au long de ce manuscrit de thèse est le triangle. Ainsi, l'élément de référence associé au triangle sera de triangle rectangle unité schématisé à la figure A.1.

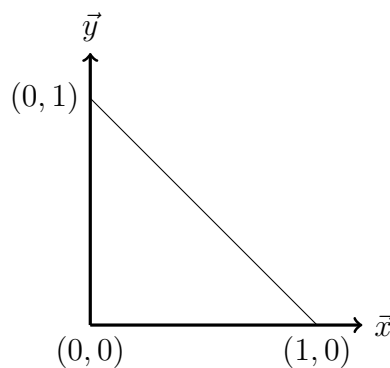


FIGURE A.1 – Triangle rectangle de référence \hat{A}

Les fonctions d'interpolation aux frontières de l'élément de référence ne seront exprimées que sur la droite $[0,1]$. En effet, moyennant une transformation de la droite d'origine au segment $[0,1]$, il suffit à décrire l'ensemble des fonctions d'interpolation définies sur l'ensemble

des frontières de l'élément de référence.

A.1.1 Fonctions de bord

Les fonctions de bord sont nommées $\mu_i(x_j) \in [0, 1]$ et sont déterminées par la condition suivante :

$$\mu_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq N_\lambda, \forall 1 \leq j \leq N_\lambda, \quad (\text{A.1})$$

où les x_j désignent des points appartenant au segment $[0, 1]$, $N_\lambda = p + 1$ le nombre de degré de liberté et δ_{ij} le symbole de Kronecker défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Ainsi, à partir de la forme générale d'un polynôme d'ordre 2 :

$$\mu(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2. \quad (\text{A.3})$$

nous donnons les valeurs des coefficients a_0 , a_1 , a_2 et a_3 , dans le tableau A.1, associés aux différents ordres polynomiaux $0 \leq p \leq 2$ et aux degrés de liberté correspondants.

p	Degrés de liberté	a_0	a_1	a_2
0	1	1	0	0
1	1	1	-1	0
	2	0	1	0
2	1	1	-3	2
	2	0	4	-4
	3	0	-1	2

TABLE A.1 – Coefficients des fonctions d'interpolation $\mu_i(x)$ pour $p \leq 2$

Ces valeurs ont été obtenues pour une partition :

$$x_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } p = 0 \\ \frac{j-1}{p} & \text{si } p > 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.1.2 Fonctions scalaires dans l'élément de référence

Les fonctions scalaires définies à l'intérieur du triangle rectangle unité sont nommées $q_i(x_j, y_j)$ et sont déterminées par la relation suivante :

$$q_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq \frac{(p+1)(p+2)}{2}, \quad \forall 1 \leq j \leq \frac{(p+1)(p+2)}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Le positionnement des degrés de liberté pour $0 \leq p \leq 2$ est quant à lui décrit à la figure A.2.

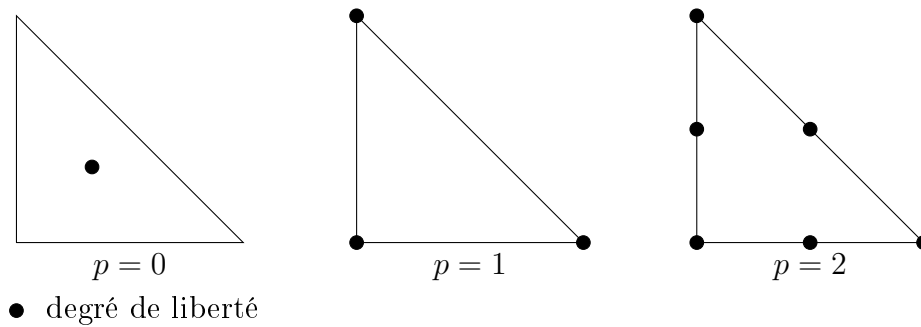


FIGURE A.2 – Positionnement des degrés de liberté de $q_i(x_j, y_j)$

Ainsi, à partir de la forme générale d'un polynôme d'ordre 2 :

$$q(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 \quad (\text{A.6})$$

nous donnons les valeurs des coefficients a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 et a_5 , dans le tableau A.2, associés aux différents ordres polynomiaux $0 \leq p \leq 2$ et aux degrés de liberté correspondants.

p	Degrés de liberté	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
0	1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	-1	-1	0	0	0
	2	0	1	0	0	0	0
	3	0	0	1	0	0	0
2	1	1	-3	-3	2	4	2
	2	0	4	0	-4	-4	0
	3	0	-1	0	2	0	0
	4	0	0	0	0	4	0
	5	0	0	-1	0	0	2
	6	0	0	4	0	-4	-4

TABLE A.2 – Coefficients des fonctions d'interpolation $q_i(x, y)$ pour $p \leq 2$

A.1.3 Fonctions vectorielles d'interpolation pour la méthode HdG

Les fonctions d'interpolation décrivant le flux $\vec{\sigma}_h$ dans le cadre de la méthode HdG peuvent être définies à partir des fonctions scalaires rencontrées à la sous-section précédente. Nous rappelons alors la forme polynomiale générale des vecteurs \vec{w}_i :

$$\vec{w}_i = \left[\mathcal{P}^p(\hat{A}) \right]^d \quad 1 \leq i \leq (p+1)(p+2). \quad (\text{A.7})$$

En désignant par $N_u = \frac{(p+1)(p+2)}{2}$ le nombre de degrés de liberté des fonctions scalaires décrites dans la sous-section précédente, les vecteurs \vec{w}_i peuvent alors être décrits comme suivants :

$$\vec{w}_i(x, y) = \begin{cases} \begin{bmatrix} q_i(x, y) \\ 0 \end{bmatrix} & \text{si } 1 \leq i \leq N_u \\ \begin{bmatrix} 0 \\ q_i(x, y) \end{bmatrix} & \text{si } (N_u + 1) \leq i \leq 2N_u \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

Ainsi le nombre de degrés de liberté associé aux fonctions d'interpolation du flux décrit par la méthode HdG est toujours $N_\sigma = 2N_u$.

A.1.4 Fonctions vectorielles d'interpolation pour les méthodes H-RT, H-RT^m et H-RT^p

Les fonctions d'interpolation pour les méthodes H-RT, H-RT^m et H-RT^p sont issues de la base de Raviart–Thomas définie par :

$$\mathcal{RT}^p(\hat{A}) \equiv \left[\mathcal{P}^p(\hat{A}) \right]^d + x^d \mathcal{P}^p(\hat{A}). \quad (\text{A.9})$$

Ainsi, le nombre de degrés de liberté des fonctions $\vec{w}_i \in \mathcal{RT}^p(\hat{A})$ sur un triangle est $N_\sigma = (p+1)(p+3)$. Le positionnement des degrés de liberté est quant à lui schématisé à la figure A.3 pour $0 \leq p \leq 2$.

Le positionnement des degrés de liberté intérieurs ne sont pas représentatifs du positionnement réel de ceux-ci. Nous définissons alors la condition permettant de déterminer les expressions des fonctions \vec{w}_i par :

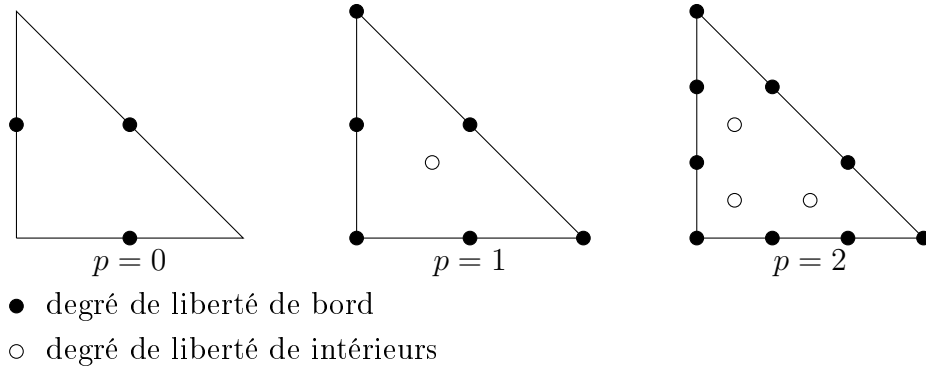


FIGURE A.3 – Positionnement des degrés de liberté de $\vec{w}_i(x_j, y_j)$

$$\begin{cases} \langle \vec{w}_i \cdot \vec{n}_{\hat{e}}, \mu_j \rangle_{\hat{e}} = \delta_{ij} \quad \forall \mu_j \in \mathcal{P}^p(\hat{e}) \quad \forall (i, j) \leq (N_\lambda, N_\lambda), \\ \left(\vec{w}_k, \vec{\nabla} q_l \right)_{\hat{A}} = \delta_{kl} \quad \forall q_l \in \mathcal{P}^p(\hat{A}) \quad \forall (k, l) > (N_\lambda, N_\lambda), \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

où \hat{e} représente l'ensemble des arêtes de bord de l'élément de référence, μ_j et q_l les fonctions rencontrées aux sous-sections A.1.1 et A.1.2 respectivement.

Il est maintenant nécessaire de donner les expressions générales des fonctions $\vec{w}_i(x_j, y_j)$ pour $0 \leq p \leq 2$:

$$\vec{w}_i(x, y) = \begin{cases} \begin{bmatrix} a_0 + c_0x \\ b_0 + c_0y \end{bmatrix} & \text{si } p = 0, \\ \begin{bmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + c_0x^2 + c_1xy \\ b_0 + b_1x + b_2y + c_0xy + c_1y^2 \end{bmatrix} & \text{si } p = 1, \\ \begin{bmatrix} a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + c_0x^3 + c_1x^2y + c_2xy^2 \\ b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + c_0x^2y + c_1xy^2 + c_2y^3 \end{bmatrix} & \text{si } p = 2. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Les valeurs des coefficients $\{a_i\}_{i=1..15}$ sont alors données au tableau A.3.

A.1.5 Remarques

Dans cette annexe, nous n'avons décrit que les fonctions d'interpolation pour $0 \leq p \leq 2$ car elles sont celles qui ont été utilisées dans les différents exemples numériques proposés

p	DDL	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	c_0	c_1	c_2
0	1	0	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	3	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	6	0	0	0	0	-4	6	12	0	0	0	-8	-8	0
	2	0	-4	0	0	0	0	2	-2	-6	0	0	0	8	0	0
	3	0	-4	0	0	0	0	0	0	-2	0	0	0	8	0	0
	4	0	-2	0	0	0	0	0	0	-4	0	0	0	0	8	0
	5	2	-2	-6	0	0	0	0	0	-4	0	0	0	0	8	0
	6	-4	12	6	0	0	0	0	0	6	0	0	0	-8	-8	0
	7	0	16	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	-16	-8	0
	8	0	8	0	0	0	0	0	0	16	0	0	0	-8	-16	0
2	1	0	18	0	-60	-60	0	-9	36	54	-30	-120	-90	45	90	45
	2	0	$-\frac{21}{4}$	0	$\frac{105}{4}$	0	0	$\frac{3}{2}$	-15	$\frac{9}{4}$	15	$\frac{75}{2}$	-15	$-\frac{45}{2}$	$-\frac{45}{2}$	$\frac{45}{4}$
	3	0	9	0	-45	0	0	-3	24	3	-30	-30	0	45	0	0
	4	0	9	0	-45	0	0	0	0	3	0	-30	0	45	0	0
	5	0	0	6	$-\frac{75}{4}$	$-\frac{45}{2}$	0	0	0	6	0	$-\frac{45}{2}$	$-\frac{75}{4}$	$\frac{45}{4}$	45	$\frac{45}{4}$
	6	0	3	0	0	-30	0	0	0	9	0	0	-45	0	0	45
	7	-3	3	24	0	-30	-30	0	0	9	0	0	-45	0	0	45
	8	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	-15	-15	$\frac{75}{2}$	15	0	0	$-\frac{21}{4}$	0	0	$\frac{105}{4}$	$\frac{45}{4}$	$-\frac{45}{2}$	$-\frac{45}{2}$
	9	-9	54	36	-90	-120	-30	0	0	18	0	-60	-60	45	90	45
	10	0	-15	0	60	30	0	0	0	-45	0	120	45	-45	-90	0
	11	0	$\frac{45}{4}$	0	$-\frac{135}{4}$	-15	0	0	0	$\frac{15}{4}$	0	$-\frac{45}{2}$	$-\frac{75}{2}$	$\frac{45}{2}$	$\frac{45}{2}$	$\frac{135}{4}$
	12	0	0	0	45	-30	0	0	0	0	0	30	-45	-45	0	45
	13	0	30	0	-30	-60	0	0	0	-30	0	60	30	0	0	0
	14	0	0	0	$\frac{45}{2}$	$\frac{15}{2}$	0	0	0	0	0	$\frac{75}{2}$	$-\frac{135}{4}$	$-\frac{45}{4}$	-45	$\frac{135}{4}$
	15	0	$\frac{15}{4}$	0	$\frac{15}{2}$	$-\frac{105}{2}$	0	0	0	$\frac{45}{4}$	0	15	$-\frac{315}{4}$	$-\frac{45}{4}$	$\frac{45}{2}$	$\frac{135}{2}$

TABLE A.3 – Coefficients des fonctions d'interpolation $\vec{w}_i(x, y)$ pour $p \leq 2$ (DDL= Degrés De Liberté)

dans ce manuscrit de thèse. Cependant, les formules permettant de construire ces fonctions ont été écrites pour $p \geq 0$. Il est alors possible au lecteur de les étendre à l'ordre souhaité.

Bibliographie

- [1] N. Ahmed and D. K. Sunada. Nonlinear flow in porous media. *journal of the Hydraulics Division*, 95(6) :1847–1858, 1969.
- [2] R. Alford, K. Kelly, and D. M. Boore. Accuracy of finite-difference modeling of the acoustic wave equation. *Geophysics*, 39(6) :834–842, 1974.
- [3] A. Alipour, S. Wulfinghoff, H. R. Bayat, S. Reese, and B. Svendsen. The concept of control points in hybrid discontinuous galerkin methods—application to geometrically nonlinear crystal plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 114(5) :557–579, 2018.
- [4] D. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. Marini. Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 39(5) :1749–1779, Jan. 2002.
- [5] D. N. Arnold. An interior penalty finite element method with discontinuous elements. *SIAM journal on numerical analysis*, 19(4) :742–760, 1982.
- [6] D. N. Arnold, D. P. Boffi, and R. S. Falk. Quadrilateral h (div) finite elements. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(6) :2429–2451, 2005.
- [7] I. Babuška. The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20(3) :179–192, 1973.
- [8] G. A. Baker. Finite element methods for elliptic equations using nonconforming elements. *Mathematics of Computation*, 31(137) :45–59, 1977.
- [9] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible navier–stokes equations. *Journal of computational physics*, 131(2) :267–279, 1997.
- [10] F. Bassi, S. Rebay, G. Mariotti, S. Pedinotti, and M. Savini. A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows. In

- Proceedings of the 2nd European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics*, pages 99–109. Antwerpen, Belgium, 1997.
- [11] C. E. Baumann and J. T. Oden. A discontinuous hp finite element method for convection—diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 175(3-4) :311–341, 1999.
- [12] J. Bear. *Dynamics of fluids in porous media*. Dover publications, 1972.
- [13] J. Bear. *Seawater intrusion into coastal aquifers*. Jhon wiley and sons,Ltd, 2006.
- [14] T. L. Bergman, F. P. Incropera, A. S. Lavine, and D. P. DeWitt. *Introduction to heat transfer*. John Wiley & Sons, 2011.
- [15] F. Brezzi and D. Arnold. Mixed and nonconforming finite element methods :implementation,postprocessing and error estimates. *Modélisation mathématique et analyse numérique*, 19(1) :7–32, 1985.
- [16] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag New York, 1991.
- [17] F. Brezzi, G. Manzini, D. Marini, P. Pietra, and A. Russo. Discontinuous galerkin approximations for elliptic problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 16(4) :365–378, 2000.
- [18] BRGM. Hydrogéologie de la réunion, informations générales. Technical report, BRGM, 2006.
- [19] P. Castillo, B. Cockburn, I. Perugia, and D. Schötzau. An a priori error analysis of the local discontinuous galerkin method for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(5) :1676–1706, 2000.
- [20] J. R. Cavalcanti, M. Dumbser, D. da Motta-Marques, and C. R. F. Junior. A conservative finite volume scheme with time-accurate local time stepping for scalar transport on unstructured grids. *Advances in water resources*, 86 :217–230, 2015.
- [21] B. Cockburn, D. A. Di Pietro, and A. Ern. Bridging the hybrid high-order and hybridizable discontinuous galerkin methods. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 50(3) :635–650, 2016.
- [22] B. Cockburn, B. Dong, and J. Guzmán. A superconvergent ldg-hybridizable galerkin method for second-order elliptic problems. *Mathematics of Computation*, 77(264) :1887–1916, 2008.

- [23] B. Cockburn, J. Gopalakrishnan, and R. Lazarov. Unified hybridization of discontinuous galerkin, mixed, and continuous galerkin methods for second order elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(2) :1319–1365, 2009.
- [24] B. Cockburn, W. Qiu, and K. Shi. Conditions for superconvergence of hdg methods for second-order elliptic problems. *Mathematics of Computation*, 81(279) :1327–1353, 2012.
- [25] B. Cockburn and C.-W. Shu. The local discontinuous galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 35(6) :2440–2463, 1998.
- [26] C. Cockburn, B. Dong, and J. Guzmán. A superconvergent ldg-hybridizable galerkin method for second-order elliptic problems. *Mathematics of Computation*, 2008.
- [27] H. Darcy. *Les Fontaines publiques de la ville de Dijon*. 1856.
- [28] J. Donea, S. Giuliani, and J.-P. Halleux. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 33(1-3) :689–723, 1982.
- [29] J. Douglas and T. Dupont. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic galerkin methods. In *Computing methods in applied sciences*, pages 207–216. Springer, 1976.
- [30] H. Egger and J. Schoeberl. A mixed-hybrid-discontinuous galerkin finite element method for convection-diffusion problems. *IMA J. Numer. Anal*, 2009.
- [31] A. Ern. *Aide-mémoire des éléments finis*. Dunod, 2005.
- [32] A. Ern and J.-L. Guermond. *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*, volume 36. Springer Science & Business Media, 2002.
- [33] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Finite volume methods.
- [34] P. Fernandez, N. C. Nguyen, and J. Peraire. The hybridized discontinuous galerkin method for implicit large-eddy simulation of transitional turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 336 :308–329, 2017.
- [35] V. Fontaine. *Quelques méthodes numériques robustes pour les modèles de transfert diffusif en milieu poreux*. PhD thesis, 2008. Thèse de doctorat dirigée par Boyer, Harry et Younes, Anis Mécanique des fluides La Réunion 2008.
- [36] R. A. Freeze. Grounxdwater. 1979.

- [37] N. Frissant, C. René-Corail, J. Bonnier, and Y. De La Torre. Le phénomène d'intrusion saline à la réunion : état des connaissances et synthèse des données disponibles. Technical report, Rapport BRGM/RP-54330-FR, 64pp, 2005.
- [38] C. G and T. CL. Régimes d'écoulement en milieu poreux et limite de la loi de darcy. *La Houille Blanche*, 2 :141–148, 1967.
- [39] J. H. H. Cooper. A hypothesis concerning the dynamic balance of fresh water and salt water in a coastal aquifer. *JOURNAL OF GEOPHYSICAL RESEARCH*, 64(4), 1959.
- [40] H. Hoteit. *Simulation d'écoulements et de transports de polluants en milieu poreux : application à la modélisation de la sûreté des dépôts de déchets radioactifs*. PhD thesis, Rennes 1, 2002.
- [41] T. J. Hughes, W. K. Liu, and T. K. Zimmermann. Lagrangian-eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 29(3) :329–349, 1981.
- [42] M. G. Larson and A. Målqvist. A posteriori error estimates for mixed finite element approximations of elliptic problems. *Numerische Mathematik*, 108(3) :487–500, 2008.
- [43] E. Ledoux. Modèles mathématiques en hydrogéologie. *Cours-Centre d'Informatique Géologique, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris*, 2003.
- [44] C. Lehrenfeld. *Hybrid discontinuous galerkin methods for solving incompressible flow problems*. PhD thesis, RWTH Aachen University, 2010.
- [45] C. Lehrenfeld and J. Schöberl. High order exactly divergence-free hybrid discontinuous galerkin methods for unsteady incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 307 :339–361, 2016.
- [46] R. Lemaitre and P. Adler. Fractal porous media iv : three-dimensional stokes flow through random media and regular fractals. *Transport in Porous Media*, 5(4) :325–340, 1990.
- [47] L. Li, S. Lanteri, N. A. Mortensen, and M. Wubs. A hybridizable discontinuous galerkin method for solving nonlocal optical response models. *Computer Physics Communications*, 219 :99–107, 2017.
- [48] G. d. Marsily. *Hydrogéologie quantitative*. page 215 p. : ill. ; 24 cm, 1981.

- [49] M. M. Meerschaert and C. Tadjeran. Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 172(1) :65–77, 2004.
- [50] J. Moortgat, M. A. Amooie, and M. R. Soltanian. Implicit finite volume and discontinuous galerkin methods for multicomponent flow in unstructured 3d fractured porous media. *Advances in water resources*, 96 :389–404, 2016.
- [51] M. Mu and J. Xu. A two-grid method of a mixed stokes–darcy model for coupling fluid flow with porous media flow. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(5) :1801–1813, 2007.
- [52] J. C. Nedelec. A new family of mixed finite elements in r3. *Numerische Mathematik*, 50(1) :57–81, 1986.
- [53] N. C. Nguyen, J. Peraire, and B. Cockburn. An implicit high-order hybridizable discontinuous Galerkin method for linear convection–diffusion equations. *Journal of Computational Physics*, 228(9) :3232–3254, May 2009.
- [54] N. C. Nguyen, J. Peraire, and B. Cockburn. A hybridizable discontinuous galerkin method for stokes flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9–12) :582–597, 2010.
- [55] N. C. Nguyen, J. Peraire, and B. Cockburn. An implicit high-order hybridizable discontinuous galerkin method for the incompressible navier-stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 230(4) :1147–1170, Feb. 2011.
- [56] I. Oikawa. A hybridized discontinuous galerkin method with reduced stabilization. *Journal of Scientific Computing*, 65(1) :327–340, 2015.
- [57] T. J. Povich, C. N. Dawson, M. W. Farthing, and C. E. Kees. Finite element methods for variable density flow and solute transport. *Computational Geosciences*, 17(3) :529–549, Jun 2013.
- [58] G. Piaux. *Simulation numérique des écoulements aux échelles microscopique et mésoscopique dans le procédé RTM*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011.
- [59] P. A. Raviart and J. M. Thomas. *A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems*, pages 292–315. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1977.

- [60] W. Reed and T. Hill. Triangular mesh method for the neutron transport equation. *Proceedings of the American Nuclear Society*, 1973.
- [61] J. Rubin. Transport of reacting solutes in porous media : Relation between mathematical nature of problem formulation and chemical nature of reactions. *Water resources research*, 19(5) :1231–1252, 1983.
- [62] T. H. Sandve, I. Berre, and J. M. Nordbotten. An efficient multi-point flux approximation method for discrete fracture–matrix simulations. *Journal of Computational Physics*, 231(9) :3784–3800, 2012.
- [63] A. D. SANTOS, C. FARIA, and A. LOULA. A stabilized hybrid discontinuous galerkin method for nearly incompressible linear elasticity problem. *Tendencias em Matematica Aplicada e Computacional*, 18(1) :467–477, 2017.
- [64] J. Shen et al. Mixed finite element methods on distorted rectangular grids. *Technical Report ISC*, pages 94–13, 1994.
- [65] M. Stanglmeier, N. Nguyen, J. Peraire, and B. Cockburn. An explicit hybridizable discontinuous galerkin method for the acoustic wave equation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 300 :748–769, 2016.
- [66] C. Steefel, C. Appelo, B. Arora, D. Jacques, T. Kalbacher, O. Kolditz, V. Lagneau, P. Lichtner, K. U. Mayer, J. Meeussen, et al. Reactive transport codes for subsurface environmental simulation. *Computational Geosciences*, 19(3) :445–478, 2015.
- [67] J. Taine and J.-P. Petit. Transferts thermiques. *Sciences Sup. Paris, dunod edition*, 2003.
- [68] A. Tandia, E. Diop, and C. Gaye. Pollution par les nitrates des nappes phréatiques sous environnement semi-urbain non assaini : Exemple de la nappe de yeumbeul, sénégal. *Journal of African earth sciences*, 29(4) :809–822, 1999.
- [69] A. F. Tompson and L. W. Gelhar. Numerical simulation of solute transport in three-dimensional, randomly heterogeneous porous media. *Water Resources Research*, 26(10) :2541–2562, 1990.
- [70] F. Vidal-Codina, N. C. Nguyen, S.-H. Oh, and J. Peraire. A hybridizable discontinuous galerkin method for computing nonlocal electromagnetic effects in three-dimensional metallic nanostructures. *Journal of Computational Physics*, 355 :548–565, 2018.

- [71] J. Virieux. Sh-wave propagation in heterogeneous media : Velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 49(11) :1933–1942, 1984.
- [72] Q. Wang, Y.-X. Ren, and W. Li. Compact high order finite volume method on unstructured grids ii : Extension to two-dimensional euler equations. *Journal of Computational Physics*, 314 :883–908, 2016.
- [73] A. D. Werner and C. T. Simmons. Impact of sea-level rise on sea water intrusion in coastal aquifers. *Groundwater*, 47(2) :197–204, 2009.
- [74] M. F. Wheeler. An elliptic collocation-finite element method with interior penalties. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 15(1) :152–161, 1978.
- [75] M. Wolff, B. Flemisch, R. Helmig, and I. Aavatsmark. Treatment of tensorial relative permeabilities with multipoint flux approximation. *International Journal of Numerical Analysis & Modeling*, 9(3), 2012.

Liste des tableaux

2.1	Porosité de quelques matériaux (http://eduterre.ens-lyon.fr/nappe/html/scenarii/TP#section-1)	9
2.2	Relation entre les modèles d'écoulement et de transport	16
3.1	Différentes méthodes d'éléments finis mixtes discontinus de Galerkin pour le problème de diffusion	37
4.1	Différentes méthodes hybrides	46
4.2	Historique de convergence du problème de diffusion isotrope en milieu homogène pour les méthodes H-RT et HdG	54
4.3	Historique de convergence du problème de diffusion isotrope en milieu homogène pour la méthode H-RT ^m	57
4.4	Historique de convergence du problème de diffusion-convection isotrope en milieu homogène pour la méthode H-RT ^m	60
A.1	Coefficients des fonctions d'interpolation $\mu_i(x)$ pour $p \leq 2$	88
A.2	Coefficients des fonctions d'interpolation $q_i(x, y)$ pour $p \leq 2$	89
A.3	Coefficients des fonctions d'interpolation $\vec{w}_i(x, y)$ pour $p \leq 2$ (DDL= Degrés De Liberté)	92

Table des figures

2.1	Schéma simplifié du biseau salé	6
2.2	Micro-structure d'un matériau obtenue par micro-tomographie à rayon X (http://imechanica.org/files/images/composite_scanfe.png)	8
2.3	porosité et VER (source : http://hydrogeologistswithoutborders.org/wordpress/wp-content/uploads/Figure_2.26_fr.svg)	8
2.4	Schéma représentant un écoulement en milieu poreux du point de vue microscopique	10
2.5	exemple de grille en différences finies 1D	20
3.1	Élément de référence triangulaire	33
3.2	Transformation de l'élément de référence \hat{A} vers un élément quelconque $A \in \mathcal{T}_h$	34
3.3	Représentation des traces \hat{u}_h et $\hat{\sigma}_h \cdot \vec{n}$ entre deux éléments A^+ et A^-	36
3.4	Représentation schématique du stencil des LDG	39
4.1	Solution numérique u_h obtenue par la méthode H-RT pour $h^{-1} = 64$ et $p = 2$	53
4.2	Évaluation du temps de calcul pour les méthodes HdG et H-RT	55
4.3	évaluation du temps de calcul pour les méthodes HdG et H-RT avec $p = 2$	56
4.4	Évaluation du temps de calcul pour les méthodes HdG, H-RT et H-RT ^m avec $p = 2$	57
4.5	Résultat numérique u_h pour $p = 0$, $\delta = 1$ et $\beta_1 = 1$	60
4.6	Domaine Ω pour le cas test de diffusion-convection	61
4.7	Représentation du maillage du domaine Ω pour $h^{-1} = 64$ dans l'ensemble du domaine Ω à l'exception de l'axe vertical en $x = 0.667$ où $h^{-1} = 230$	61
4.8	Résultat numérique u_h pour $p = 0$, $\delta = 10^{-3}$ et $\beta_1 = 1$	62

4.9	Résultats numériques sur une coupe du domaine Ω en $y = \frac{1}{6}$ pour $\delta = 10^{-3}$ et $p = 0$	62
A.1	Triangle rectangle de référence \hat{A}	87
A.2	Positionnement des degrés de liberté de $q_i(x_j, y_j)$	89
A.3	Positionnement des degrés de liberté de $\vec{w}_i(x_j, y_j)$	91

LETTRE D'ENGAGEMENT DE NON-PLAGIAT

Je, soussigné(e) **DIJOUX Loïc** en ma qualité de doctorant(e) de l'Université de La Réunion, déclare être conscient(e) que le plagiat est un acte délictueux passible de sanctions disciplinaires. Aussi, dans le respect de la propriété intellectuelle et du droit d'auteur, je m'engage à systématiquement citer mes sources, quelle qu'en soit la forme (textes, images, audiovisuel, internet), dans le cadre de la rédaction de ma thèse et de toute autre production scientifique, sachant que l'établissement est susceptible de soumettre le texte de ma thèse à un logiciel anti-plagiat.

Fait à Saint-Denis le : 16/10/2018

Signature :



Extrait du Règlement intérieur de l'Université de La Réunion
(validé par le Conseil d'Administration en date du 11 décembre 2014)

Article 9. Protection de la propriété intellectuelle – Faux et usage de faux, contrefaçon, plagiat

L'utilisation des ressources informatiques de l'Université implique le respect de ses droits de propriété intellectuelle ainsi que ceux de ses partenaires et plus généralement, de tous tiers titulaires de ces droits.

En conséquence, chaque utilisateur doit :

- utiliser les logiciels dans les conditions de licences souscrites ;
- ne pas reproduire, copier, diffuser, modifier ou utiliser des logiciels, bases de données, pages Web, textes, images, photographies ou autres créations protégées par le droit d'auteur ou un droit privatif, sans avoir obtenu préalablement l'autorisation des titulaires de ces droits.

La contrefaçon et le faux

Conformément aux dispositions du code de la propriété intellectuelle, toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle d'une œuvre de l'esprit faite sans le consentement de son auteur est illicite et constitue un délit pénal.

L'article 444-1 du code pénal dispose : « Constitue un faux toute altération frauduleuse de la vérité, de nature à causer un préjudice et accomplie par quelque moyen que ce soit, dans un écrit ou tout autre support d'expression de la pensée qui a pour objet ou qui peut avoir pour effet d'établir la preuve d'un droit ou d'un fait ayant des conséquences juridiques ».

L'article L335_3 du code de la propriété intellectuelle précise que : « Est également un délit de contrefaçon toute reproduction, représentation ou diffusion, par quelque moyen que ce soit, d'une œuvre de l'esprit en violation des droits de l'auteur, tels qu'ils sont définis et réglementés par la loi. Est également un délit de contrefaçon la violation de l'un des droits de l'auteur d'un logiciel (...) ».

Le plagiat est constitué par la copie, totale ou partielle d'un travail réalisé par autrui, lorsque la source empruntée n'est pas citée, quel que soit le moyen utilisé. Le plagiat constitue une violation du droit d'auteur (au sens des articles L 335-2 et L 335-3 du code de la propriété intellectuelle). Il peut être assimilé à un délit de contrefaçon. C'est aussi une faute disciplinaire, susceptible d'entraîner une sanction.

Les sources et les références utilisées dans le cadre des travaux (préparations, devoirs, mémoires, thèses, rapports de stage...) doivent être clairement citées. Des citations intégrales peuvent figurer dans les documents rendus, si elles sont assorties de leur référence (nom d'auteur, publication, date, éditeur...) et identifiées comme telles par des guillemets ou des italiques.

Les délits de contrefaçon, de plagiat et d'usage de faux peuvent donner lieu à une sanction disciplinaire indépendante de la mise en œuvre de poursuites pénales.