



HAL
open science

Etude expérimentale de la turbulence intégrable en eau peu profonde

Ivan Redor

► **To cite this version:**

Ivan Redor. Etude expérimentale de la turbulence intégrable en eau peu profonde. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Grenoble Alpes, 2019. Français. NNT : 2019GREAI077 . tel-02475663

HAL Id: tel-02475663

<https://theses.hal.science/tel-02475663>

Submitted on 12 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Mécanique des fluides, Energétique, Procédés**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Ivan REDOR

Thèse dirigée par **Nicolas MORDANT, Professeur, UGA**,
codirigée par **Éric BARTHELEMY, Professeur, Grenoble INP** et
coencadrée par **Hervé MICHALLET, Chargé de recherche CNRS**

préparée au sein du **Laboratoire des Ecoulements
Géophysiques et Industriels**
dans l'**École Doctorale I-MEP2 – Ingénierie – Matériaux,
Mécanique, Environnement, Energétique, Procédés,
Production**

Étude expérimentale de la turbulence intégrable en eau peu profonde

Thèse soutenue publiquement le « **19 septembre 2019** »,
devant le jury composé de :

Monsieur Éric BARTHELEMY

Professeur, Grenoble INP, Codirecteur

Monsieur Michel BENOIT

Professeur, Ecole Centrale de Marseille, Président

Monsieur Thierry DAUXOIS

Directeur de recherche CNRS, ENS de Lyon, Rapporteur

Monsieur Hervé MICHALLET

Chargé de recherche, CNRS, Coencadrant

Monsieur Nicolas MORDANT

Professeur, Université Grenoble Alpes, Directeur

Monsieur Miguel ONORATO

Professeur, Università di Torino, Examineur

Monsieur Stéphane RANDOUX

Professeur, Université de Lille, Rapporteur



Remerciements

Ce mémoire de thèse n'aurait pas vu le jour sans la contribution de multiples personnes que je tiens ici à remercier.

En premier lieu, un grand merci à mes directeurs de thèse, Éric Barthélémy, Hervé Michallet et Nicolas Mordant. Leur confiance, leur goût du travail et leur curiosité scientifique ont été les principaux moteurs de ces travaux. Ils ont permis le dépassement des embûches qui ont jonché le déroulement de cette thèse. Pour n'en citer que deux, le bris des vitres du canal et l'abandon du sujet initial, l'étude de la turbulence faible, auraient pu sans eux sonner le glas de mes travaux. Leur soutien à ma double vie de guide scientifique m'a permis de donner le meilleur de moi-même et de dépasser mes doutes pendant ces 4 années de marathon. Merci aussi à Jean Paul Thibault pour avoir organisé la rencontre avec ce triptyque détonnant.

Il m'importe aussi de remercier les membres du jury, messieurs Thierry Dauxois, Michel Benoit, Stéphane Randoux et Miguel Onorato pour l'intérêt qu'ils ont apporté à mon travail et pour l'intéressante discussion qui a découlé de leurs observations. Merci également à Gennady El, Stéphane Randoux et Miguel Onorato pour m'avoir initié avec enthousiasme aux problématiques de la turbulence intégrable.

Je remercie Stéphane Pioz-Marchand, Stéphane Mercier et Jean Marc Barnoud pour la bonne humeur et le précieux savoir-faire technique qu'ils ont mis au service du montage de mon expérience. Merci également à Gabriel Moreau, Cyrille Bonamy et Olivier De-Marchi pour leur assistance dans mes déboires informatiques.

Merci aux doctorants qui ont mis de la légèreté dans ces années : Nick, Antoine, Enzo, Vincent, Thibaud, Tim, Lucas, Yves, Miguel, Yin... Un merci particulier à Samuel pour nos escalades et nos nombreux cafés des premières années. Et à Roumaïssa pour nos fous rires de bureau et pour avoir placé haut la barre de la persévérance et de l'engagement.

J'aimerais également exprimer ma gratitude à celles et ceux qui dans la sphère personnelle ont été un soutien important. Mes colocataires, Micka, Lisa, Xav, Yulia, Marjo, Pamp, Janina, Jo et Timo ; les compagnons d'aventures alpines Coco, Arthur, Steph, Marie-Anne, Quentin, Teddy, Lucas, Guillaume, Rom, Sam, Vinch ; et d'aventures moins alpines Maylis, Julien Gwyddyon, Sarah, Arnaud et Camille. Un merci particulier à Steph pour le rituel de la bière hebdomadaire qui a redonné de la pétillance aux heures les plus moroses.

Merci enfin à mes parents et à mes sœurs pour leur soutien et les havres de paix qu'ils ont su m'offrir. Notamment à Célia pour m'avoir nourri avec constance tous les mercredi midi et pour avoir mis au monde le jeune Axel, qui depuis son arrivé rayonne la joie et de l'émerveillement.

Résumé

L'objectif de ce mémoire est d'apporter une contribution expérimentale à la description statistique des régimes turbulents d'ondes de surface de gravité 1D en eau peu profonde, afin d'identifier les mécanismes régissant leurs évolutions. Notre étude s'appuie sur de nombreuses expériences menées dans le canal à houle 1D du LEGI, long de 34 m. On mesure l'élévation de surface libre sur 14 m de ce canal à l'aide d'un enregistrement vidéo au travers de ses parois vitrées. Les caméras opèrent à 20 images par seconde et la résolution spatiale est proche de 1mm/pix. En supposant les non-linéarités faibles et en négligeant la dissipation et l'injection d'énergie, de tels systèmes sont décrits par des équations intégrables (KdV et Kaup-Boussinesq). L'énergie se répartit alors sur des solitons, des ondes aux propriétés de quasi-particules qui se propagent sans modification de forme ou de vitesse et interagissent élastiquement. Dans les systèmes réels, la dissipation et l'injection d'énergie nécessaire pour établir un régime turbulent stationnaire sont antagonistes avec le concept de conservation d'une infinité de quantités physiques, au cœur de l'intégrabilité. La question à laquelle ce mémoire cherchera à répondre est : "Que reste-t-il des propriétés de la turbulence intégrable dans cette configuration?". On verra en particulier comment se caractérisent les régimes stationnaires turbulents de nos expériences en termes de moments statistiques, de densité spectrale d'énergie et de distribution de solitons. On comparera ces résultats aux prédictions de la théorie des gaz de solitons grâce à la méthode de la Periodic Inverse Scattering Transform.

Mots clés : eau peu profonde, solitons, turbulence intégrable, gaz de solitons, IST, PIST, KdV, Kaup-Boussinesq, Serre.

Abstract

This work is an experimental contribution to the statistical description of turbulent system of 1D surface gravity waves in shallow water, in order to identify the mechanisms governing the motion. Our study is based on numerous experiments conducted in a 34 m long wave flume. The free surface vertical displacement is measured along the flume by imaging through the lateral glass walls over 14 m in length. The cameras are operated at 20 frames/s and the spatial resolution is close to 1 mm/pix. Assuming weak non-linearities and neglecting dissipation and energy injection, such systems are described by integrable equations (KdV and Kaup-Boussinesq). The energy is then distributed on solitons, waves behaving as quasi-particles which propagate without changing their form or speed and interact elastically. In real systems, the dissipation and the injections of energy necessary to establish a stationary turbulent regime is at odds with strictly conserved physical quantities, which is at the core of integrability. The question this work aims to answer is thus : "What remains of integrable turbulence properties in this configuration?". We will see how our experimental turbulent stationary regimes are characterized in terms of statistical moments, power spectral density and soliton distributions. These results will be compared to the predictions of soliton gas theory using the Periodic Inverse Scattering Transform method.

Key words : shallow water, solitons, integrable turbulence, soliton gas, IST, PIST, KdV, Kaup-Boussinesq, Serre.

Plan

Remerciements	3
Résumé	5
Plan	7
Introduction	9
I Théorie et état de l'art	13
1 Théorie des ondes de gravité en eau peu profonde	15
2 A propos de l'intégrabilité	21
2.1 Introduction	22
2.2 KdV, une équation intégrable	22
2.3 Intégrabilité et interaction élastique	24
2.4 Notion de « contenu solitonique » et <i>Inverse Scattering Transform</i>	29
3 Turbulence intégrable en eau peu profonde	37
3.1 Introduction	38
3.2 Le gaz de solitons	38
3.3 Turbulence intégrable en eau peu profonde	40
3.4 Effets de taille finie	48
II Dispositif expérimental et méthode	53
4 Dispositif et méthodes expérimentales	55
4.1 Dispositif général	56
4.2 Technique de mesure	57
4.3 Exemples de traitements typiques	60

5	Méthode d'inversion des données de diffusion	67
5.1	Introduction	68
5.2	De l'équation de Korteweg-de Vries à un problème aux valeurs propres	69
5.3	La DST sur la ligne infinie	71
5.4	La DST pour une condition périodique	73
5.5	Mise en forme numérique de la PIST	77
5.6	Tests de la PIST	87
5.7	Décompte des solitons grâce à l'IST et à la PIST	98
5.8	Conclusion	106
III	Régime d'eau peu profonde : turbulence quasi-intégrable ?	107
6	Validité du cadre intégrable	109
6.1	Introduction	110
6.2	Dissipation d'un soliton	111
6.3	Interaction faible	116
6.4	Interaction forte	125
6.5	Conclusion	135
7	Génération d'un gaz de solitons	137
7.1	Introduction	138
7.2	Le phénomène de la fission	138
7.3	Décomposition théorique d'un sinus en solitons	140
7.4	Mesures et comparaison à la théorie	156
7.5	Un état stationnaire turbulent solitonique	164
7.6	Conclusion	170
8	Turbulence solitonique	173
8.1	Introduction	174
8.2	A propos de l'analyse de séries temporelles à l'aide de la PIST	176
8.3	Régime transitoire et établissement de la turbulence solitonique	184
8.4	Moments statistiques et distributions de solitons	207
8.5	Mécanisme de dissipation	220
8.6	Conclusion	229
	Conclusions et perspectives	231
	Nomenclature	239
	Bibliographie	239

Introduction

Les travaux présentés dans ce mémoire portent sur les ondes de gravité 1D à la surface de l'eau. Cette situation se rapproche du cas de la houle océanique qui se propage de manière quasi-unidirectionnelle. Cette dernière possède des particularités fondamentales assez singulières. Suivant les situations, l'énergie peut cascader vers les petites ou les grandes échelles et dans certains cas, les vagues peuvent évoluer en solitons.

Notre travail se focalisera sur les configurations où la longueur des ondes est grande par rapport à la profondeur d'eau. Dans la nature, c'est typiquement le cas de l'onde de marée ou de la houle dans une mer littorale. Nous chercherons à étudier expérimentalement ces systèmes d'ondes non-linéaires lorsqu'ils deviennent turbulents, c'est-à-dire, lorsque l'évolution de la surface libre devient chaotique. L'objectif de ce mémoire est d'apporter une contribution à la description statistique de ces régimes afin d'identifier les mécanismes régissant leurs évolutions. Notre étude s'appuiera sur de nombreuses expériences menées dans le canal à houle 1D du LEGI. Long de 33.73 m, ses parois entièrement vitrées nous ont permis de développer une mesure vidéo de l'élévation de surface libre sur 14 m de longueur. Une fréquence d'acquisition de 20 images par seconde et des pixels correspondants environ à $1 \times 1 \text{ mm}^2$ dans l'espace physique nous ont donné la résolution nécessaire pour étudier finement et de manière originale ces régimes turbulents.

Si l'on fait abstraction de la dissipation et que l'on se cantonne à une faible non-linéarité, l'évolution en eau peu profonde est décrite par les équations intégrables de Korteweg-De Vries et de Kaup-Boussinesq qui ont la propriété de conserver une infinité de quantités. L'évolution non-linéaire dans ces configurations est propice à la formation de solitons. Il s'agit d'ondes possédant des propriétés de quasi-particules. Elles sont localisées, se propagent sans modification de forme ou de vitesse et interagissent élastiquement. Par analogie avec ce caractère de quasi-particule, on appelle gaz de solitons un système constitué uniquement de solitons. Cet objet physique a été le sujet de nombreuses études théoriques et numériques depuis le papier fondateur de Zakharov [65] qui en a donné une description par une équation cinétique. Ces travaux ont débouchés en 2009 sur la formulation d'une théorie de la turbulence intégrable [66] qui généralise le problème aux systèmes intégrables dont tous les modes ne sont pas des solitons. On qualifie ces systèmes de turbulents au sens où la forte excitation et le nombre important de degrés de liberté provoquent un comportement chaotique de la surface libre. Ils sont intégrables au sens où les interactions entre modes non-linéaires se font sans transferts d'énergie. Ainsi, la répartition de l'énergie entre ces modes est une constante de l'évolution. Cette dualité entre comportement stochastique et invariabilité de la décomposition en modes non-linéaires fait de ces systèmes des objets fascinants.

Le concept de soliton, et par extension celui de la turbulence intégrable, permettent la compréhension de nombreux systèmes physiques qui partagent une base mathématique commune. De manière remarquable, l'équation de KdV ne décrit pas uniquement la propagation des ondes de surfaces en eau peu profonde. Elle s'applique à bien d'autres systèmes, aussi différents que les ondes de pressions dans un écoulement diphasique et les ondes acoustiques dans un plasma froid. D'autres équations intégrables telles que l'équation de NLS qui décrit, par exemple, la propagation des ondes dans les fibres optiques, élargissent encore le champ d'application de cette théorie. Expérimentalement, la pertinence du cadre de la turbulence intégrable a été récemment illustrée par des travaux dans les fibres optiques [57], [51]. On peut également citer les travaux de Lowman et El [36] qui ont permis de visualiser un gaz de solitons régi par l'équation de KdV dans une conduite de fluide visqueux (<https://www.youtube.com/watch?v=XkfqVdzDfBs>). Concernant les régimes d'eau peu profonde, aucune étude expérimentale en laboratoire n'a été menée. Il semble cependant que la physique des gaz de solitons décrive certaines configurations océaniques. En travaillant sur des mesures réalisées par Long et Resio [35] par vents forts dans la baie de Currituck Sound en Caroline du Nord (profondeur de 2.63 m), Costa et al. [10] ont montré que l'énergie présente à basse fréquence sur leurs spectres de Fourier pouvait s'interpréter comme un gaz dense de solitons.

L'étude expérimentale de la turbulence intégrable en laboratoire se heurte à certaines difficultés. La dissipation oblige à forcer en continu si l'on souhaite pouvoir étudier un état de turbulence établie. Le forçage, la dissipation, ainsi que la cohabitation avec des ondes dispersives de longueur d'onde trop courtes pour être considérées comme évoluant en eau peu profonde nous éloignent du cadre théorique de la turbulence intégrable. On parlera alors de turbulence solitonique. La question sur laquelle nous nous pencherons à travers ce mémoire est la suivante : que reste-t-il des propriétés de la turbulence intégrable dans notre configuration ? Comment se caractérisent les régimes stationnaires turbulents de nos expériences en termes de distribution de probabilités d'élévation de surface libre, de moments statistiques, de densité spectrale d'énergie et de distribution de solitons ? Est-il possible de générer en laboratoire un régime s'approchant du gaz de solitons ?

La première partie de ce mémoire sera dédiée à une étude bibliographique. Au chapitre 1, on verra rapidement les principaux développements de la théorie des ondes de gravité en eau peu profonde. Au chapitre 2, on discutera la signification et les conséquences de l'intégrabilité de l'équation de KdV. On introduira notamment la méthode d'inversion des données de diffusion qui en découle et permet d'identifier les modes non-linéaires d'un système. Enfin, au chapitre 3, on dressera l'état de l'art en matière de turbulence intégrable en eau peu profonde.

Dans une seconde partie, on présentera le dispositif expérimental et les méthodes utilisées. Ainsi, au chapitre 4, on décrira le canal à houle dans lequel ont été conduites nos expériences ainsi que la méthode de mesure que nous avons développée. Au chapitre 5, on présentera dans le détail la méthode de l'inversion des données de diffusion (ou *Inverse Scattering Transform*) ainsi que son implémentation numérique dans le cas périodique.

Dans une troisième partie, on exposera les résultats de nos expériences. Cette dernière partie débutera avec le chapitre 6, où on discutera de la validité du cadre intégrable en considérant les cas de l'amortissement d'un unique soliton ainsi que celui de l'interaction de 2 solitons et en les comparant à la solution analytique des équations de Kaup-Boussinesq. Au chapitre 7, on décrira la méthode utilisée pour générer des régimes dense en solitons à partir d'un forçage monochromatique. On verra que ces régimes peuvent évoluer vers des états de turbulence soli-

tonique. Au chapitre 8, on étudiera ces régimes de turbulence solitonique à l'aide d'une étude paramétrique. Dans un premier temps, on cherchera à comprendre les mécanismes conduisant à un état stationnaire chaotique en dépit du forçage monochromatique. Dans un second temps, on cherchera à établir des liens entre distributions de solitons, moments statistiques et densité spectrale d'énergie et à comparer nos états de turbulence solitoniques à ceux de la littérature. Dans un dernier temps, on cherchera à comprendre les mécanismes de dissipation à l'œuvre dans ces régimes.

— Partie I —

Théorie et état de l'art

— Chapitre 1 —

Théorie des ondes de gravité en eau peu profonde

Introduction

Nous allons dans la suite de ce mémoire nous intéresser aux régimes turbulents d'ondes de surface en eau peu profonde. Ces régimes sont propices à l'existence de structures cohérentes qui se propagent en conservant leur forme et leur vitesse : les ondes solitaires (ou solitons).

Dans ce chapitre, nous retracerons les grandes étapes du développement de la théorie de l'eau peu profonde, de l'observation de la première onde solitaire par Russell, à l'obtention des équations de Serre. Cela nous permettra d'introduire successivement les équations avec lesquelles nous serons amenés à travailler par la suite.

Ce chapitre est largement inspiré des thèses de Georges Seabra Santos [54] et André Temperville [58] que l'on pourra consulter pour une bibliographie plus exhaustive ainsi qu'un développement détaillé de l'obtention des différents systèmes d'équations évoqués.

Théorie des ondes en eau peu profonde

L'histoire commence en 1833 lorsque John Scott Russell, lors d'une promenade à cheval le long d'un canal aux alentours d'Édimbourg, fut le témoin d'un phénomène "étrange et beau". Lorsqu'une péniche s'arrêta brusquement dans un canal, il s'étonna de la formation d'une vague qu'il décrivit de la façon suivante : « La masse d'eau [...] prenant la forme d'une grande élévation solitaire, d'un paquet d'eau rond à la forme douce et bien défini qui continua sa course dans le canal, apparemment sans changement de forme ou diminution de sa vitesse ». Cette observation était en forte contradiction avec les théories de l'époque (Airy et Stokes). Il fut le premier à proposer une étude scientifique de ce type d'onde constitué d'une seule bosse et suffisamment stable pour se propager pendant de longues distances sans altération de forme ou de vitesse. Ses conclusions furent que la vitesse d'une telle onde solitaire d'amplitude a par une profondeur h pouvait s'écrire

$$c = \sqrt{gh\left(1 + \frac{a}{h}\right)} \quad (1.1)$$

et que seules des intumescences initiales positives étaient à même de les engendrer [53].

En 1845, Airy proposa une première théorie des ondes longues [2]. Cette dernière n'admettait pas de solution de type onde permanente et s'avéra donc incapable de représenter le phénomène décrit par Russell. C'est en 1871 que Boussinesq [3], prenant en compte les accélérations verticales des particules dans le fluide, parvint le premier à modéliser ces ondes à l'aide du système d'équations suivant :

$$\eta_t + hu_x + (u\eta)_x = 0 \quad (1.2)$$

$$u_t + uu_x + g\eta_x + \frac{h}{3}\eta_{xxt} = 0 \quad (1.3)$$

Avec u la composante de vitesse horizontale (suivant x), g l'accélération de la pesanteur et η l'élévation de la surface libre par rapport au niveau moyen. Ce système d'équations permet de décrire des ondes se propageant dans les 2 directions et son utilisation est encore courante aujourd'hui. Il admet une solution d'onde solitaire de la forme $\eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3a}{4h}}\frac{1}{h}(x - ct)\right)$ (qui se propage à la vitesse $c = \sqrt{gh\left(1 + \frac{a}{h}\right)}$ identifiée par Russell).

En considérant que les ondes se propagent dans une unique direction Korteweg et de Vries, obtinrent en 1895 [31] une équation qui s'est révélée d'une importance fondamentale pour l'ensemble de la science du non-linéaire :

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \frac{3c_0 \eta_x^2}{4h} + c_0 h^2 \eta_{xxx} = 0 \quad (1.4)$$

où $c_0 = \sqrt{gh}$ est la vitesse des ondes longues en eau peu profonde.

Cette équation admet comme solution la famille des ondes cnoïdales définie à l'aide de la fonction elliptique de Jacobi : "cn". Il s'agit d'une fonction à un paramètre m qu'on appelle le module de l'onde. Lorsque celui-ci vaut 0, cn se réduit à la fonction cos, quand il tend vers 1, cn tend vers la fonction sech. Ces ondes s'écrivent :

$$\eta(x, t) = \eta_{creux} + H \operatorname{cn}^2 \left(\frac{K(m)}{\pi} [k(x - ct)] \middle| m \right) \quad (1.5)$$

où H est la hauteur de l'onde crête à creux, k le nombre d'onde, et où la vitesse de l'onde c , le module m et l'élévation des creux η_{creux} s'écrivent respectivement :

$$c = \sqrt{gh} \left[1 + \frac{H}{mh} \left(1 - \frac{1}{2}m - \frac{3}{2} \frac{E(m)}{K(m)} \right) \right] \quad (1.6)$$

$$mK^2(m) = \frac{3\pi^2(H/2)}{2k^2h^3} \quad (1.7)$$

$$\eta_{creux} = \frac{H}{m} \left(1 - m - \frac{E(m)}{K(m)} \right) \quad (1.8)$$

avec K et E les integrales elliptiques de la première et de la deuxième espèce. Lorsque le module de l'onde tend vers 1, on retrouve l'onde l'onde solitaire de Boussinesq (la célérité étant donnée par $c = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{a}{2h} \right)$).

En adoptant le changement de variable approprié, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$\eta_t + \left(\frac{a}{h} \right) \eta \eta_x + \left(\frac{h}{L} \right)^2 \eta_{xxx} = 0 \quad (1.9)$$

Où L correspond à une extension spatiale caractéristique de l'onde. Cette formulation met en exergue l'influence des paramètres $\left(\frac{a}{h} \right)$ et $\left(\frac{h}{L} \right)^2$ sur l'importance que prennent le terme non-linéaire $\eta \eta_x$ et le terme dispersif η_{xxx} .

Il est intéressant de remarquer que la structure d'onde solitaire doit son existence et sa stabilité à l'équilibre des termes non-linéaire et dispersif. Ainsi, si l'on considère une intumescence à laquelle on appliquerait uniquement les effets non-linéaires de KDV (qui se réduit alors à l'équation de Burger), on assisterait à une 'concentration' de l'intumescence accompagnée par une hausse de son amplitude qui finirait par conduire à une catastrophe de gradient (figure 1.1). A l'inverse, la même intumescence soumise aux seuls effets dispersifs évoluerait en un paquet d'ondes étalé (figure 1.2). Cet équilibre est stable : une intumescence 'trop large' (L grand) verra ces termes non-linéaires augmenter conduisant à une concentration de celle-ci. Une intumescence trop étroite verra son terme dispersif augmenter conduisant à un étalement de celle-ci. C'est cette propriété qui conduit à la formation spontanée d'onde solitaire dès que les non-linéarités sont suffisantes et qui conduit à leur stabilité.

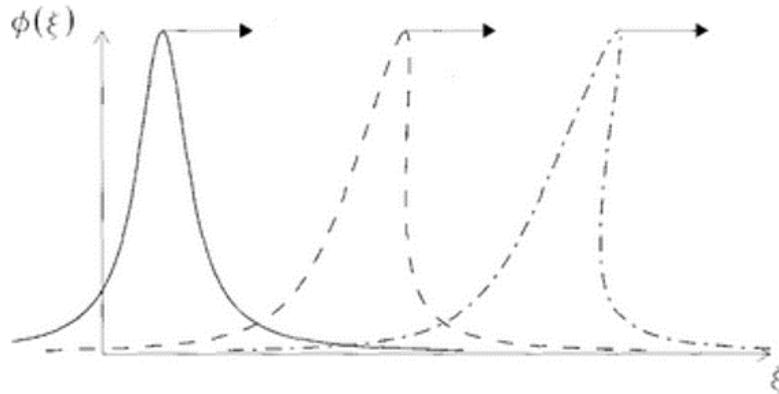


FIGURE 1.1: évolution d'un pulse soumis à l'équation de Burger, figure extraite de [12].

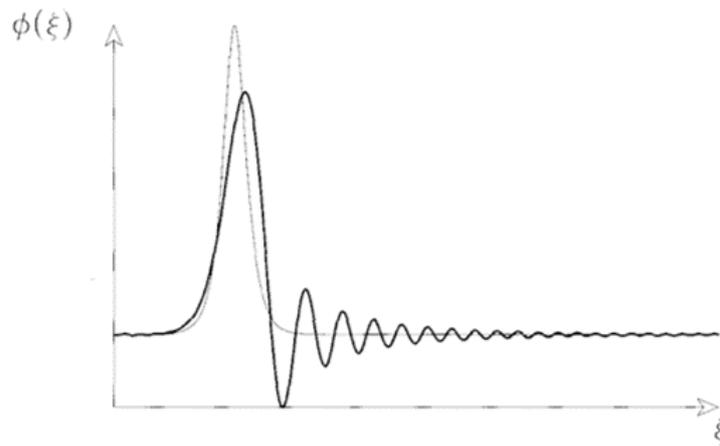


FIGURE 1.2: évolution d'un pulse soumis uniquement au terme dispersif , figure extraite de [12].

En 1953, Ursell [62] révéla à partir de ce constat que les différentes théories des ondes longues (aux résultats paradoxaux) avaient des domaines de validités différents qui dépendaient du rapport de ces paramètres exprimé par le nombre d'Ursell : $U = \frac{aL^2}{h^3}$.

Pour $U \ll 1$, les effets dispersifs prédominent et la théorie de Jeffrey et Jeffrey [29] peut être appliquée.

Pour $U \gg 1$, les effets non-linéaires dominent et on peut appliquer la théorie d'Airy.

Pour $U = o(1)$, les 2 effets s'équilibrent et le système d'équations retenu doit les prendre en compte tout les 2. On observe alors la formation d'ondes cnoïdales et de leur cas limite : l'onde solitaire. La formation de cette dernière résulte de l'équilibre entre ces deux termes.

Les équations de KdV et Boussinesq parviennent à décrire l'ensemble de ces domaines.

Ces 2 équations font l'hypothèse que la courbure des ondes est faible ($\frac{a}{h} \ll 1$) qui vient s'ajouter à l'hypothèse de l'eau peu profonde ($\frac{h}{L} \ll 1$).

En 1953, Serre [55], dérivait un système d'équations qui prenait en compte les effets de courbure des lignes de courants en ne négligeant pas certains produits de dérivées comme avait pu le faire

Boussinesq. Il parvint ainsi à s'affranchir de l'hypothèse de faible courbure et obtint une solution d'onde solitaire valable aux grandes amplitudes : $\eta(x, t) = a \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{\frac{3a}{4h(1+a/h)}} \frac{1}{h} (x - ct) \right)$ (avec $c = \sqrt{gh(1 + \frac{a}{h})}$ sa vitesse de propagation). Ce système d'équations a la forme suivante dans le cas où le fond est considéré horizontal :

$$\eta_t + hu_x + (u\eta)_x = 0 \quad (1.10)$$

$$u_t + uu_x + g\eta_x = \frac{2}{3}\Gamma\eta_x + \frac{1}{3}(h + \eta)\Gamma_x \quad (1.11)$$

$$\Gamma(x, t) = (h + \eta)(u_{xt} + uu_{xx} - u_x^2) \quad (1.12)$$

Le terme Γ représentant l'accélération verticale des particules à la surface du fluide.

Sous une forme légèrement différente, il permet de prendre en compte des variations de la profondeur. Cela en fait un candidat sérieux pour la modélisation de nombreux écoulements réels.

Nous verrons dans le chapitre suivant que la raison pour laquelle l'équation de KdV a fait couler plus d'encre que celle de Serre, pourtant plus précise (bidirectionnelle, profondeur variable, description des ondes à fortes courbures), est son intégrabilité. Ce concept, au cœur de ce travail, sera introduit au chapitre suivant.

— Chapitre 2 —

A propos de l'intégrabilité

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons voir que l'équation de KdV possède la propriété de conserver une infinité de quantités ce qui fait d'elle une équation intégrable. Cela se traduit en pratique par une répartition, qui ne varie pas dans le temps, de son énergie sur des modes non-linéaires quasi-périodiques. On peut ainsi connaître tout les modes du système à partir de l'état initial par une méthode nommée *Inverse Scattering Transform* (IST) ou inversion des données de diffusion. Dans une première partie, on discutera les propriétés des systèmes intégrables. Dans une seconde, on verra que l'intégrabilité se traduit en pratique par des interactions élastiques entre solitons. Enfin, on présentera la méthode de l'inverse scattering transform.

2.2 KdV, une équation intégrable

2.2.1 De l'onde solitaire au soliton

En 1965, l'onde solitaire est remise au goût du jour par Zabusky et Kruskal [64] qui la font intervenir dans la résolution d'un problème posé 10 années auparavant par Fermi, Pasta et Ulam [22] lors de la première expérience numérique de tous les temps.

Ces derniers cherchaient à étudier la façon dont un cristal évolue vers l'équilibre thermique en le modélisant par une chaîne de particules liées par un potentiel quadratique et une faible interaction non-linéaire. Ils s'attendaient en injectant l'énergie sur un seul mode du système à exciter progressivement les autres modes jusqu'à atteindre une équipartition de l'énergie entre ceux-ci. Le début de l'expérience se passa conformément à leurs attentes, de nombreux modes étant successivement excités. À leur surprise, au terme de 157 périodes du fondamental, 97% de cette énergie revint dans le premier mode, reformant la condition initiale.

Zabusky et Kruskal parvinrent, en simplifiant le problème, à modéliser l'évolution de ce système à l'aide de KdV. Ils observèrent la dynamique illustrée par la figure 2.1. On assiste d'abord à un raidissement du mode fondamental (ligne en tirets noirs) qui provoque la fission du sinus initial en ondes solitaires (ligne continue). L'interaction entre ces ondes conduit alors à reformer le sinus initial qui fissionne à nouveau et ainsi de suite de manière récurrente (voir diagramme spatio temporel).

L'énergie du système se répartit ainsi entre différents modes non-linéaires du système qu'ils baptisèrent "soliton" en référence à leur comportement de quasi-particule. En effet, au cours de l'évolution, chaque mode conserve sa vitesse (trajectoire linéaire) et sa forme. Les interactions entre modes ne provoquent qu'un déphasage de ces trajectoires ainsi qu'une altération momentanée de la surface.

Une série de lois de conservation (les invariants de Kruskal) fut établie pour l'équation de KdV ce qui permet de mieux comprendre comment chaque mode non-linéaire est conservé par le système. L'existence de cette infinité de quantités conservées permet de classer l'équation de KdV comme faisant parti des systèmes intégrables auxquels nous allons dédier le prochain paragraphe.

2.2.2 Histoire et propriétés des systèmes intégrables

Novikov a en 1992 [38] résumé en une dizaine de pages dont nous recommandons la lecture les principaux développements mathématiques et physiques concernant les systèmes intégrables. Nous allons ici retracer les grandes lignes de cet exposé.

Commençons par définir le concept d'invariant. Soit un système y dont l'état se définit par n degrés de libertés $y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]$ qui évoluent chacun en fonction des autres selon

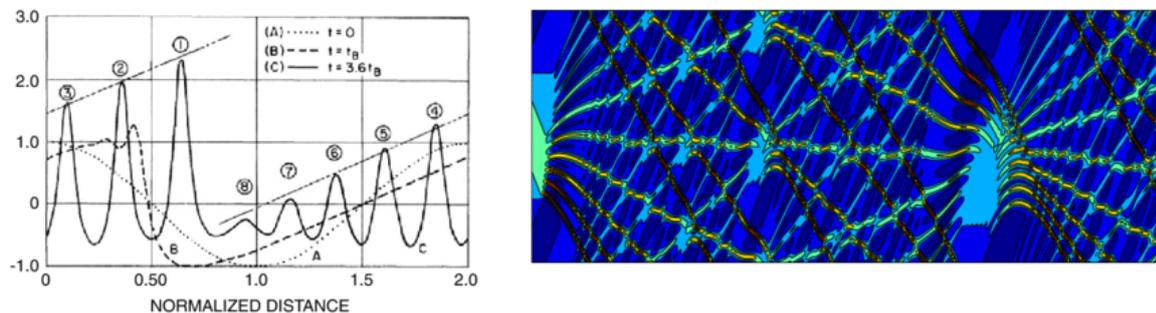


FIGURE 2.1: Gauche : 8 solitons émergent visuellement du sinus initial de Zabusky et Kruskal. Droite : diagramme spatio-temporel de la même expérience, l'espace est sur l'axe des ordonnées et le temps sur l'axe des abscisses. Figure tirée de [64].

$\frac{dy_j}{dt} = f_j(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t))$. On peut définir un invariant comme une fonction $F(y)$ tel qu'on ait toujours $dF(y(t))/dt = 0$. Si le système se comporte de manière aléatoire, le mouvement ne possédera aucun invariant. Si un système possède un groupe de symétries, il possédera des invariants (autant que de générateurs dans le groupe de symétries). Par exemple, le principe que les lois de la physique ne varient en fonction d'aucun mouvement dans l'espace (translation dans le temps, rotation et translation dans l'espace) est traduit par les invariants : énergie, quantité de mouvement et moment cinétique.

Un système est réputé intégrable s'il a suffisamment d'invariants comparativement à son nombre de degrés de liberté pour que sa dynamique soit déductible de son état initial. Pour le problème du mouvement de n masses dans l'espace, c'est le cas pour $n = 1$ et $n = 2$ et ne l'est plus pour $n > 2$. Il a même été démontré (entre autres par Poincaré) que le problème à 3 corps n'admet pas d'autres symétries que celles que l'on vient de citer.

La particularité d'un système intégrable est que son évolution peut être décrite par des fonctions quasi-périodiques. À ce stade du développement, on peut résumer le problème de l'intégrabilité par : "S'il n'y a pas de symétrie, il n'y a pas d'invariant". Au 19ème siècle, certains systèmes furent identifiés comme faisant exception à cette règle (car possédant des invariants en l'absence de symétrie évidente). On peut citer les travaux de Jacobi, Neuman, Weierstrass, Clebsch, Kovalevski... Ce dernier dut faire appel à la théorie des surfaces de Riemann qui auront, on le verra, un rôle à jouer par la suite. Ces systèmes n'ayant à cette époque pas d'influence sérieuse sur le développement de la physique, ils furent temporairement oubliés.

Suite aux travaux de Fermi Pasta et Ulam et de Zabusky et Kruskal, il devint clair que KdV pouvait décrire approximativement l'évolution d'ondes dans divers milieux sous l'hypothèse de l'existence de non-linéarité et de dispersion et tant que la dissipation restait négligeable. Les solitons correspondent aux fonctions quasi-périodiques qui décrivent le mouvement dans le cas intégrable (ils sont en fait un cas particulier d'une famille plus générale de solutions de KdV, les ondes cnoïdales, définies à l'aide de la fonction elliptique de Jacobi cn).

Utilisant certains résultats de la mécanique quantique, Gardner, Greene, Kruskal et Miura en 1967 [23] développèrent la méthode de l'inversion des données de diffusion ou inverse scattering transform (IST). Cette méthode permet d'obtenir l'ensemble des solutions d'un système intégrable. Elle est d'une importance fondamentale puisqu'elle permet d'identifier tous les modes d'un système et nous la décrirons en détails plus loin. Ces travaux permirent à Lax [33] d'identifier le système de symétrie intrinsèque qui justifie la présence d'une infinité d'invariants. En particulier, cela permit de formuler une condition algébrique qui, si elle est vérifiée par une équation,

implique que cette dernière soit intégrable.

D'autres équations intégrables "à solitons" ne tardèrent pas à être découvertes : l'équation de Shrödinger non-linéaire, l'équation de Sine Gordon, etc.. Pour les mathématiciens, ces systèmes intégrables, présentant une infinité de degrés de liberté, sont un bel objet d'étude. En particulier leurs liens avec des comportements chaotiques. Pour le physicien, elles sont une clé de compréhension de bon nombre de problèmes dans les sciences du non-linéaire. On les retrouve notamment dans les plasmas, la dynamique de l'ADN, les systèmes magnétique. En effet, si une équation permet l'existence de soliton, il est très probable qu'une forte excitation du système conduira à leur apparition. Cette propriété de formation spontanée doublée de la grande stabilité de ces structures face aux perturbations en font une clé de voûte de la physique non-linéaire.

2.3 Intégrabilité et interaction élastique

Nous avons vu que dans un système gouverné par KdV, l'énergie se répartissait sur des modes non-linéaires qui pouvaient être des solitons et que cette répartition était entièrement définie par les conditions initiales du système. Cela suppose que ces modes conservent leur énergie au cours de l'évolution et en particulier au cours de leurs interactions. On dit alors que ces interactions sont élastiques.

Dans cette section, on décrira ce mécanisme d'interaction entre solitons, dans un premier temps dans le cadre idéalisé des équations intégrables, puis dans le cadre d'ondes plus fortement non-linéaires en s'intéressant aux solutions des équation de Serre (1.10-1.12). On verra que dans ce dernier cas, l'interaction n'est pas parfaitement élastique et qu'on observe l'émission de radiations.

2.3.1 Le cas intégrable : interaction élastique

On considérera d'abord l'interaction de 2 solitons se propageant dans la même direction (décrite par KdV) puis celle de 2 solitons se propageant dans des sens opposés (décrit par le système d'équations de Kaup-Boussinesq).

Interaction de dépassement décrite par KdV

La vitesse de propagation des solitons est fonction de leurs amplitudes (voir chapitre précédent). Ainsi, un grand soliton finira toujours par rattraper un petit ce qui mènera à une interaction localisée entre les 2 modes qui se sépareront au terme de celle-ci et retrouveront leur caractéristique initiale (vitesses et forme). Au temps long, l'impact de l'interaction se trouve limité à un déphasage de chacun des solitons, le plus grand se trouvant en avance et le plus petit en retard relativement aux positions qu'ils auraient occupés en l'absence d'interaction. Ce déphasage est fonction de la masse des solitons. En effet, le système étant conservatif, la masse déphasée vers l'avant est égale à celle déphasée vers l'arrière. Il faut comprendre que le plus petit des 2 solitons sera "plus retardé" que le grand ne sera "avancé".

Pendant l'interaction elle-même, on observe une dynamique qui varie en fonction du rapport d'amplitude de ces 2 solitons $r = A_1/A_2$. 3 cas de figure ont été identifiés par Lax en 1968 [32] et sont représentés sur la figure 2.2 :

- Si $1 < r < (3 + \sqrt{5})/2$, les solitons inter-changent leur rôle sans se traverser en formant un profil bimodal symétrique au cœur de l'interaction.
- Si $3 < r$, le grand soliton absorbe et réémet le petit en formant un profil uni-modal au cœur

de l'interaction.

- Si $(3 + \sqrt{5})/2 < r < 3$, on observe un état intermédiaire, le profil forme d'abord une structure uni-modal avant de former une structure bi-modal symétrique au coeur de l'interaction. Ces interactions seront dans la suite qualifiées de "fortes".

N. K. Lowman, M. A. Hoefer, and G. A. El

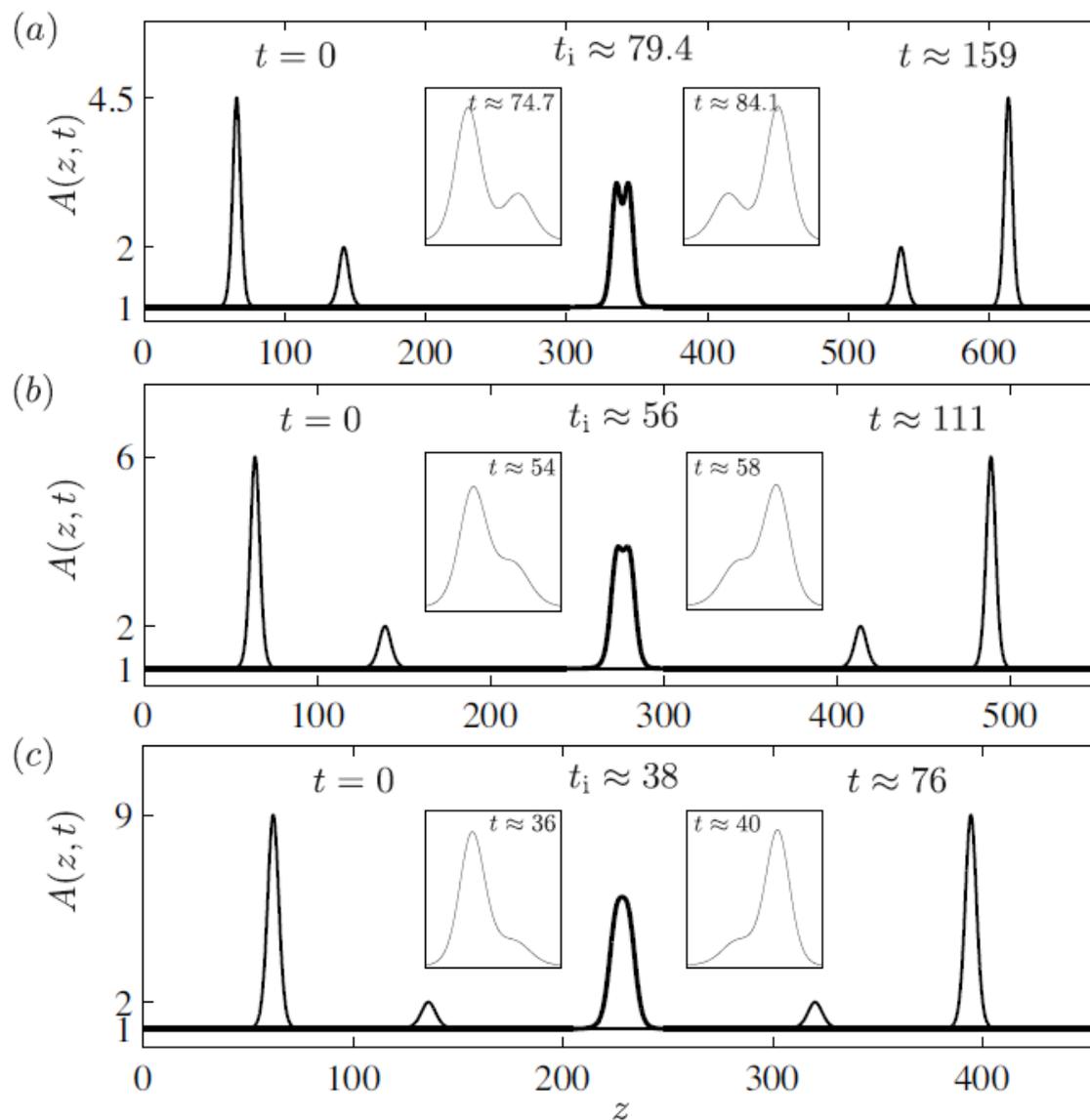


FIGURE 2.2: représentation des 3 types d'interactions par ratio d'amplitude croissante, issu de [36]. L'axe des abscisses correspond à l'espace et les inserts à la solution juste avant et après l'interaction.

Interaction bidirectionnelle décrite par les équations de Kaup-Boussinesq

L'équation de KdV se limite au problème unidirectionnel. Si l'on s'intéresse au cas d'une houle 1D bidirectionnelle, il faut considérer les équations de Kaup-Boussinesq dont une solution multi-solitons a été obtenue par Jin E. Zhang and Yishen Li dans [67].

$$\begin{aligned} \eta_t + [(1 + \eta)u]_x &= -\frac{1}{3}u_{xxx} \\ u_t + uu_x + \eta_x &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

C'est à notre connaissance la seule équation intégrable décrivant physiquement l'interaction frontale de 2 solitons. L'équation de Boussinesq, ne décrit pas correctement l'interaction. En effet, elle prévoit une amplitude maximale lors de l'interaction qui est inférieure à la somme des amplitudes des 2 solitons interagissant ce qui viole le principe de conservation de l'énergie ([67], section V).

Cette équation est équivalente à celle de KdV au niveau de la vitesse d'un soliton unique et lui attribue une masse comparable bien que légèrement inférieure. En outre, elle donne bien les interactions élastiques tant dans le cas de l'interaction faible que forte.

L'interaction de 2 solitons se propageant dans des directions opposées est plus localisée que celui de l'interaction forte. Les 2 solitons forment progressivement une forme uni-modale très piquée dont l'élévation est supérieure à la somme des amplitudes des 2 solitons. Au cœur de l'interaction, la vitesse des 2 solitons est, en effet, réduite. Pour conserver l'énergie, une conversion est effectuée vers l'énergie potentielle de la structure ce qui provoque une élévation totale supérieure à la somme des 2 amplitudes initiales des solitons. Les 2 solitons se séparent alors rapidement et se trouvent tout deux légèrement en retard relativement à la position qu'ils auraient eu en l'absence d'interaction.

Ces interactions seront dans la suite qualifiées de "faibles". On notera par ailleurs que pour des arguments de symétrie, l'interaction d'un soliton avec un mur vertical et la collision frontale avec un soliton jumeau se traite de manière similaire.

2.3.2 Le cas non-intégrables : interaction inélastiques

Les équations de KdV et de Kaup-Boussinesq ne sont valables que pour des ondes de faible courbure. En effet, elles négligent l'accélération verticale des particules (voir chapitre précédent). Dans le cas de non-linéarités plus fortes, il est nécessaire de la prendre en compte. Pour ce faire, on emploie l'équation à soliton non-intégrable de Serre.

Ces interactions ont été étudiées, notamment, par Seabra Santos et l'on retrouve dans sa thèse [54] de nombreuses comparaisons entre expériences numériques et mesures dans un canal à houle qui justifient de la validité de cette équation. Ses travaux mettent en évidence que plus la non-linéarité (ie. l'amplitude des solitons relativement à la profondeur) est forte, moins les interactions sont élastiques. On constate notamment l'émission d'une onde dispersive dans le cas de l'interaction faible qui induit une perte d'énergie des solitons (figure 2.3). Dès lors, il conviendrait de préférer le terme 'vague solitaire' à celui de soliton qui fait référence à une quasi-particule et est indissociable de l'élasticité des interactions.

2.3.3 Conclusion

En eau peu profonde, un équilibre entre les effets dispersif et non-linéaire mène à la formation de solitons. Dans le cas où l'hypothèse de faible non-linéarité est vérifiée, ces derniers se comportent comme des quasi-particules et interagissent élastiquement à travers des déphasages

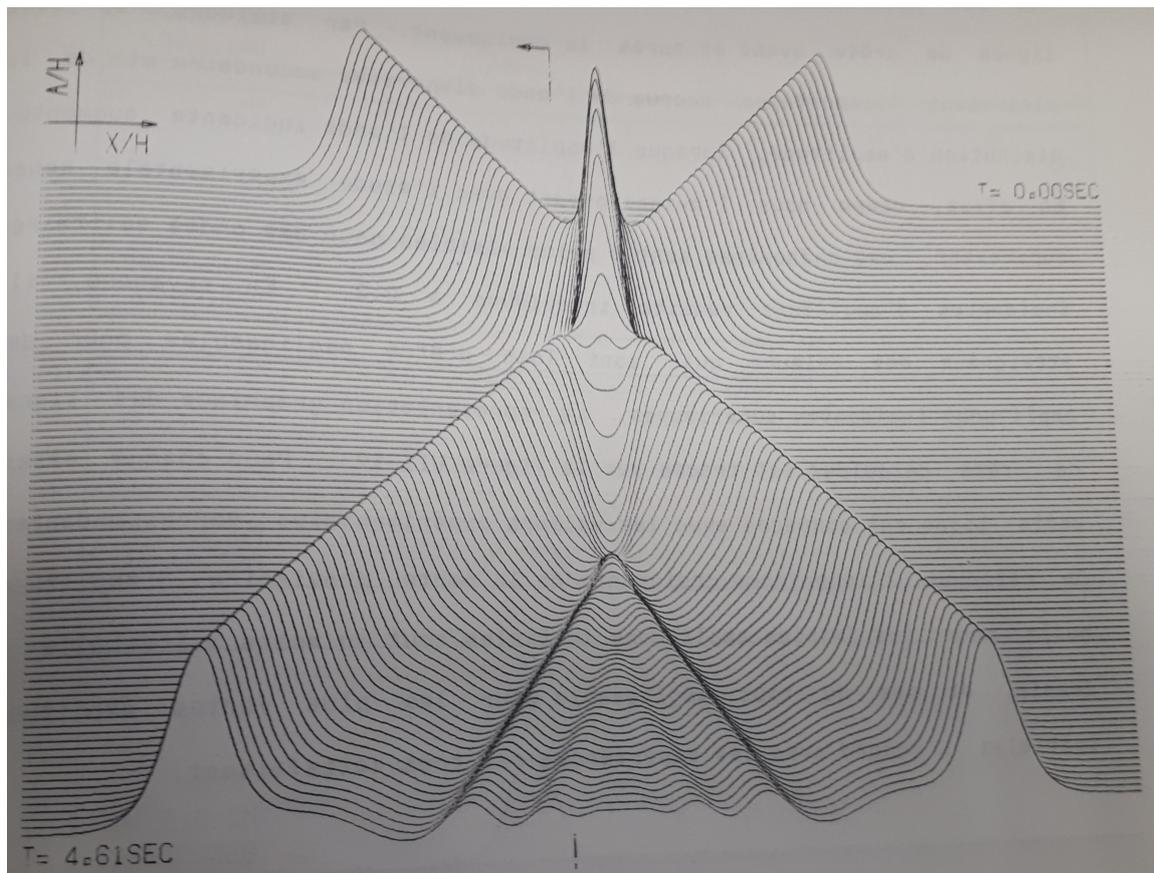


FIGURE 2.3: Diagramme en cascade de l'élévation de surface à l'interaction faible entre 2 solitons de $A = 11.1$ cm par $h = 20.1$ cm émettant une radiation à la collision. Figure tirée de [54].

mutuels. Lorsque l'on sort de cette hypothèse, les termes d'ordres supérieurs ne sont plus négligeables. La formation d'un résidu radiatif vient s'ajouter à ce déphasage et entraîne une perte d'énergie des solitons.

Afin de faire le lien entre ces 2 situations, on peut citer l'excellent article de Craig et al. [11] qui compare des résultats numériques et expérimentaux dans de nombreuses configurations d'interactions. En considérant l'équation d'Euler complète, il met en évidence numériquement qu'un résidu radiatif est toujours créé par l'interaction et s'accompagne d'une perte d'énergie de 0.5 à 2 pourcents des solitons dans le cas de l'interaction faible et de 0.05 à 0.2 pourcents dans le cas de l'interaction forte ce qui le rend difficile voir impossible à mesurer expérimentalement. La figure 2.4 tiré de cet article permet de visualiser au temps long l'évolution du résidu et sa séparation du soliton.

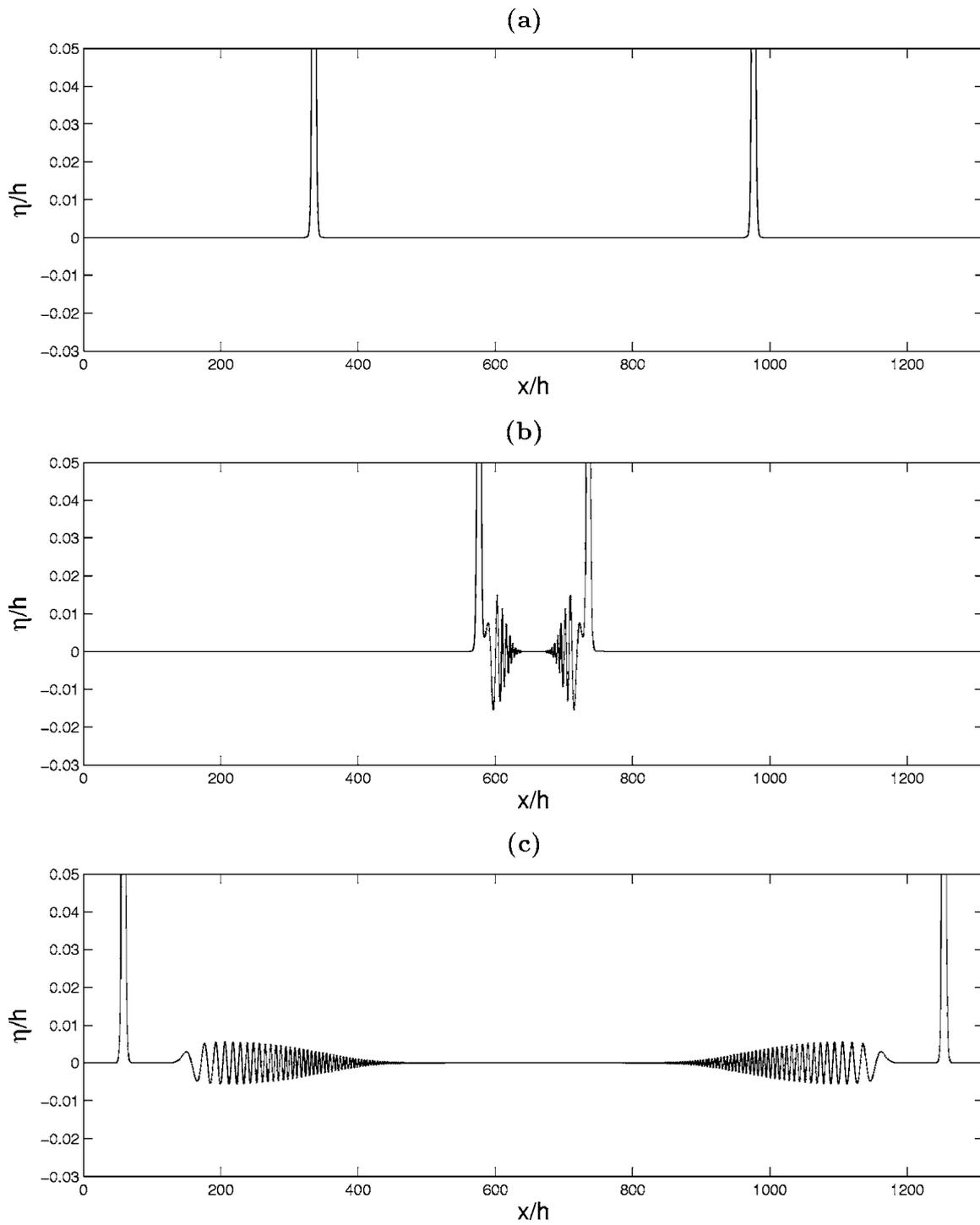


FIGURE 2.4: Collision de 2 solitons d'amplitude $S/h=0.4$ avant (a), peu après (b) et bien après (c) la collision.

2.4 Notion de « contenu solitonique » et *Inverse Scattering Transform*

Nous venons de le voir, l'évolution non-linéaire en eau peu profonde donne facilement lieu à l'émergence de modes localisés et stables : les solitons. Dans le but d'étudier les régimes turbulents, il paraît souhaitable de quantifier la répartition de l'énergie entre ces structures cohérentes et les autres modes du système (ondes cnoïdales, ondes sinusoïdales) ainsi que sa variation dans le temps.

En utilisant les propriétés de systèmes intégrables, Gardner Greene Kruskal et Miura ont développé une méthode qui permet d'identifier tout les modes du système à partir d'une condition initiale [23] : la méthode de l'inversion des données de diffusion ou inverse scattering transform (IST). Cet outil fut initialement pensé pour décrire l'évolution gouvernée par KdV d'un potentiel fini sur une ligne infini. Il fut par la suite adapté à de nombreuses autres configurations. Nous nous intéresserons notamment au cas de KdV dans une boîte périodique développé par Osborne et coauteurs : la Periodic Inverse Scattering Transform (PIST).

Ce dernier démontra que les modes cnoïdaux (dont les solitons) sont les modes normaux d'une équation non-linéaire au même titre que les modes de Fourier sont ceux d'une équation linéaire en montrant que la limite linéaire de la PIST était la transformée de Fourier [48].

Dans cette partie, on s'attachera à illustrer le fonctionnement de cette analyse de Fourier non-linéaire afin d'expliquer dans les grandes lignes comment elle permet d'identifier les modes d'un système intégrable. On développera en détail cette dernière au chapitre 4. Si le lecteur souhaite développer une connaissance plus fine des rouages de cette machine, on le renverra au livre d'Osborne [48].

Dans un premier temps, on présentera cette méthode dans le cadre de l'évolution d'une condition initiale sur une ligne infinie. Dans un second temps, on considérera l'évolution dans le cadre de conditions limites périodiques. Enfin, on comparera ces méthodes en considérant leur application sur le cas historique de l'investigation du contenu solitonique d'une condition initiale sinusoïdale.

2.4.1 *Inverse Scattering Transform* sur la ligne infinie (IST)

Le principe de l'inverse scattering transform est le suivant. Il s'agit de résoudre le problème aux valeurs propres (1.4) associé à l'équation de KdV (1.2) sur la ligne infinie pour un potentiel initial $\eta(x, t_0)$ donné.

$$\eta_t + c_0\eta_x + \alpha m_x + \beta\eta_{xxx} = 0 \quad (2.2)$$

$$\text{avec } -\infty < x < \infty \quad , \quad \alpha = 3c_0/2h \quad , \quad \beta = c_0h^2/6 \quad , \quad c_0 = \sqrt{gh} \quad (2.3)$$

$$\psi_{xx} + [\lambda\eta(x, 0) + \kappa^2] \psi(x) = 0 \quad \text{avec } \lambda = \alpha/6\beta \quad (2.4)$$

À partir des valeurs propres obtenues λ , on peut construire le spectre de l'IST de la série temporelle étudiée. Les valeurs propres négatives correspondent à des solutions localisées spatialement : les solitons. Les valeurs propres positives correspondent à des fonctions d'onde plane qui forment un spectre continu. On peut montrer que pour un champ de vagues aux très faibles non-linéarités, ce spectre est équivalent à celui de Fourier. Le spectre complet de l'IST se compose donc d'un spectre discret défini par l'amplitude, la phase et le nombre de solitons et d'un continuum dont le spectre est défini par une amplitude associé à un nombre d'onde $b(k)$.

On peut intuitivement l'appréhender comme une prédiction de l'évolution à l'infini d'une condition initiale en une suite ordonnée de solitons et une queue radiative (figure 2.5)

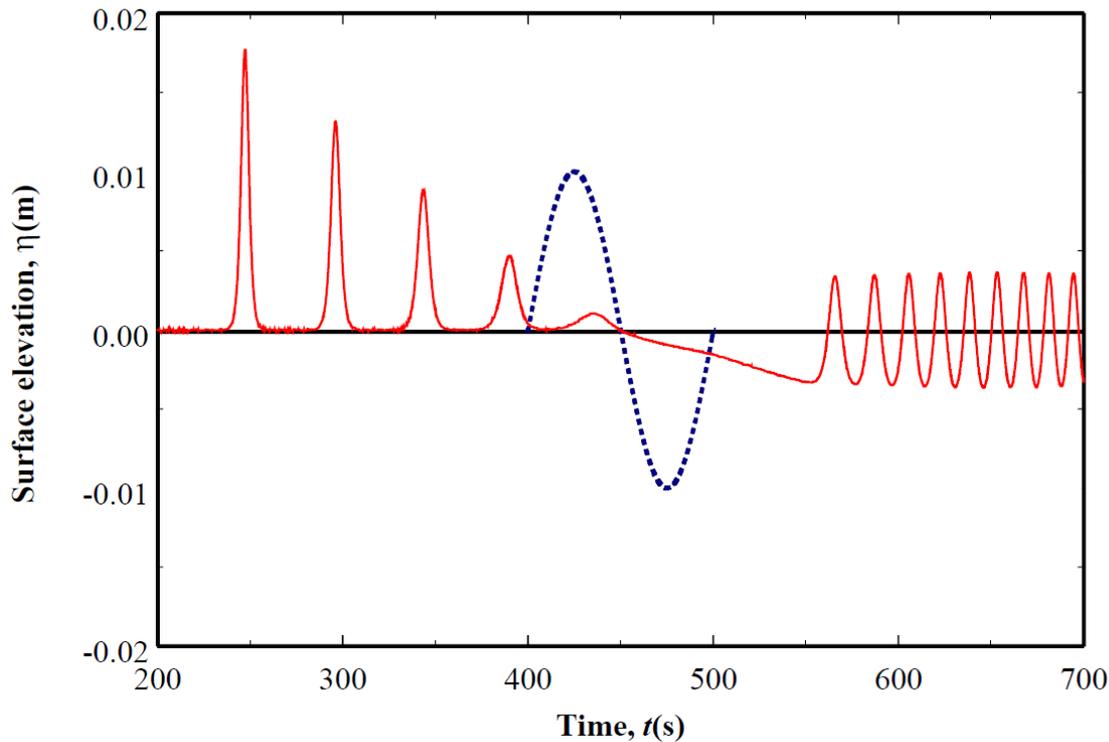


FIGURE 2.5: Evolution d'une condition initiale (en bleu) en un train de soliton et une queue radiative (en rouge), issu de [25].

La puissance de cette décomposition réside dans le fait que chaque mode est individuellement une solution physique du système. Quand la description d'un soliton demande une infinité de mode de Fourier, elle correspond à un unique mode de l'IST. Pour décrire l'interaction forte de 2 solitons, la décomposition en mode de fourrier varie fortement avec le temps. À l'inverse, et malgré la modification importante de la surface libre, la décomposition de l'IST est une constante du mouvement (hormis la phase). Ces caractéristiques en font un outil de choix pour l'analyse de séries temporelles et la modélisation de systèmes intégrables. Cette méthode a été employée dans l'étude de nombreux problèmes non-linéaires. Une des premières applications expérimentales concernant les problématiques océaniques fut la détection de solitons dans les ondes internes de la mer d'Andaman [43]. On peut également citer les travaux de Hammack et Segur [28] qui vérifièrent expérimentalement ces prédictions en laboratoire.

2.4.2 Periodic Inverse Scattering Transform (PIST)

L'IST a été par la suite adaptée à une condition limite périodique en lieu et place de celle de la ligne infinie. Cette condition présente les avantages suivants :

- Elle est cohérente avec les hypothèses d'ergodicité et de stationnarité que l'on fait souvent dans l'analyse de données expérimentales.
- Son espace des solutions est plus riche que celui de l'IST ligne. Il admet comme modes l'ensemble

des solutions cnoïdales (figure 2.6) et non uniquement ces cas extrêmes (la radiation pour un module nul et le soliton pour un module de 1). Si l'on considère une condition initiale de type onde cnoïdale de module 0.5, l'IST ligne nous donnera sa décomposition en un continuum d'ondes planes qui prendra son sens physique à l'infini tandis que la PIST n'aura besoin que d'un mode qui décrira bien la physique observée.

-Dans le cadre de l'analyse d'une série temporelle avec l'IST, on doit renseigner un niveau de référence au-dessus duquel se propagent les solitons. Ce niveau est a priori différent du niveau moyen de la série (considérons par exemple une série temporelle constituée uniquement de solitons. On comprend bien que ceux-ci se propagent sur un niveau de référence situé à leur pied et non sur le niveau moyen supérieur au niveau de référence du fait de la masse des solitons). La PIST permet de calculer le module des modes d'un système sans faire d'hypothèse sur le niveau auquel ils se propagent. Ce niveau de référence est particulièrement important puisque de celui-ci découle la vitesse de propagation ainsi que la mesure de l'amplitude des solitons. Cela rend l'analyse par la PIST plus commode.

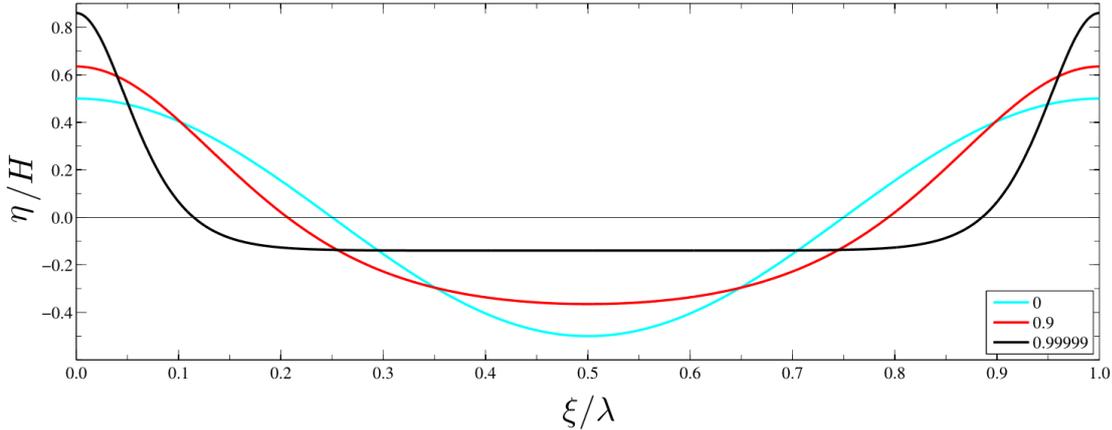


FIGURE 2.6: Onde cnoïdale en fonction du module.

Osborne et ses coauteurs ont conçu 2 stratégies afin de calculer le spectre de la PIST. Elles font chacune appel à une base différente de fonctions pour exprimer les modes non-linéaires présents dans le système. La première fait appel au calcul de fonctions hyperelliptiques. Le spectre qu'elle retourne est constitué de modes dont la forme prend en compte les interactions non-linéaires et qu'il suffit de sommer linéairement pour retrouver l'évolution de la surface libre. On obtient typiquement la représentation spectrale de la figure 2.7. La lecture à faire est la suivante. Le diagramme de Floquet permet de définir des bandes pour lesquels la trace de la matrice de monodromie n'appartient pas à l'intervalle -2 et 2. Chacune de ces bandes correspond à un mode du système et borne un espace pour la fonction hyperelliptique correspondante. Ces fonctions n'ont pas une forme physique, car elle tient compte des interactions mais leur somme linéaire reconstruit la surface libre. Pour chaque mode hyperelliptique, les relations suivantes permettent de calculer l'amplitude et le module du mode cnoïdale associé à partir des E_j qui borne chaque bande. En particulier E_{ref} (ici E_5) correspond au niveau de référence spectrale. Il s'agit de la bande du dernier mode considéré comme solitonique sur le critère perfectible que son module est supérieur à $m = 0.99$.

$$m_j = \frac{E_{2j+1} - E_{2j}}{E_{2j+1} - E_{2j-1}}, \quad 1 \leq j \leq N \quad (2.5)$$

$$A_j = \begin{cases} \frac{2}{\lambda} (E_{\text{ref}} - E_{2j}), & \text{for solitons;} \\ \frac{1}{2\lambda} (E_{2j+1} - E_{2j}), & \text{otherwise (radiation)} \end{cases} \quad (2.6)$$

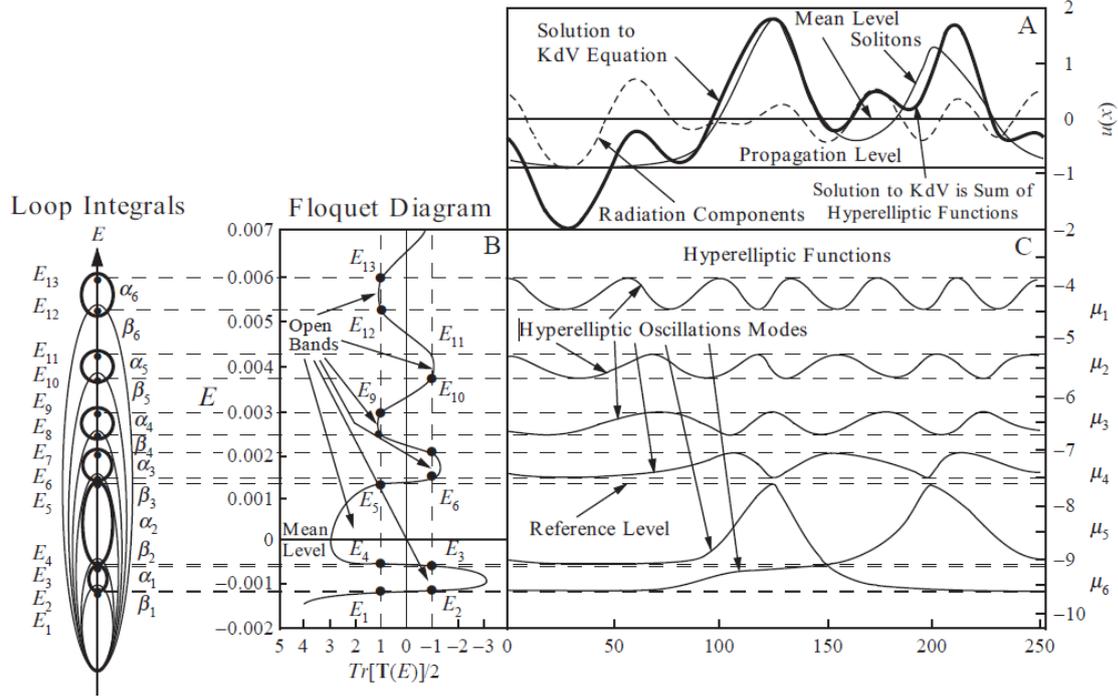


FIGURE 2.7: Spectre PIST dans sa représentation hyperelliptique tiré de [45].

La seconde fait appel aux fonctions Thêta et retourne un spectre composé des modes du système (ondes cnoïdales) séparément de leurs interactions non-linéaires. Pour reconstruire la surface, il faut donc ajouter un terme d'interaction non-linéaire entre ces modes calculé séparément. La complexité de calcul accru de cette dernière méthode offre le confort de pouvoir considérer l'interaction entre chaque mode indépendamment et de pouvoir filtrer de manière très libre une partie du signal. Elle permet également d'accéder directement aux modes physiques du système.

On obtient typiquement une décomposition en modes tel que sur la figure 2.8.

2.4.3 Le problème du niveau de référence

La décomposition exacte du sinus étudié par Zabusky et Kruskal en solitons (figure 2.1) a fait couler beaucoup d'encre. Cela est dû à la difficulté de discriminer un soliton d'un mode moins non-linéaire et à la possibilité que certains petits solitons soient dissimulés par les autres.

En 1986, Osborne et Bermascio [42] se livrent à la comparaison de l'IST ligne et de la PIST sur ce problème fondateur. Ils en profitent pour introduire le concept de « niveau de référence » sur lequel se propageraient les solitons et qui serait différent du niveau moyen. En substance, cet

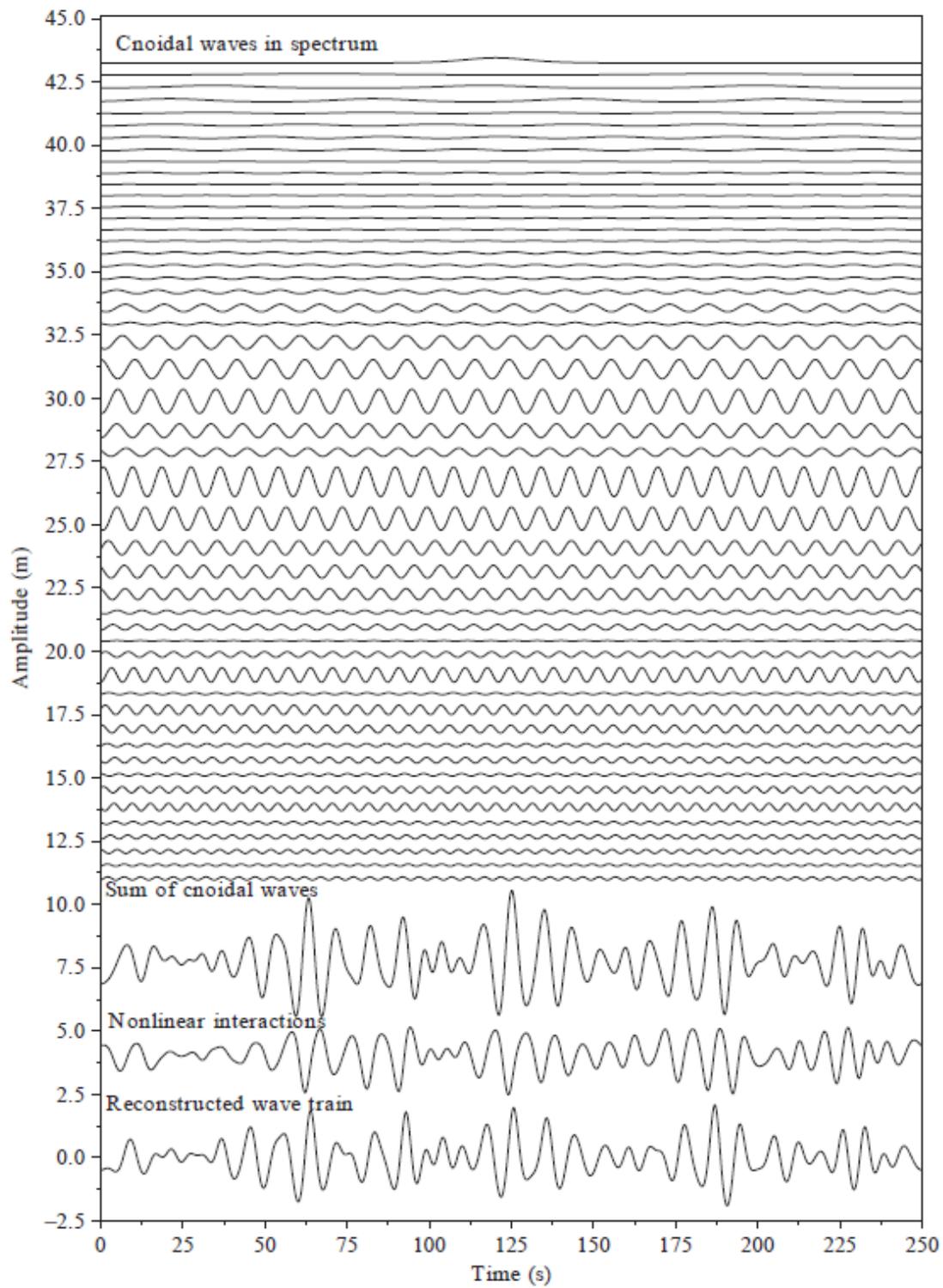


FIGURE 2.8: Reconstruction des modes non-linéaires à l'aide des fonctions Thétas. Figure tirée de [46]

article établit que la PIST décrit admirablement bien le problème : le nombre et l'amplitude des solitons sont similaires à l'observation de Zabusky et Kruskal, et le phénomène de récurrence a lieu à des temps très comparables. Cela prouve une bonne gestion des déphasages et des vitesses de propagation par le modèle issu de la PIST. Il établit en revanche que l'IST ligne montre ses limites en ne détectant que 7 solitons sur les 9 existants (figure 2.9) malgré un niveau de référence pris à l'identique. Cela revient à dire que les 2 derniers modes de la PIST ayant des modules $1 > m > 0.99$ sont analysés comme faisant partie du continuum par l'IST ligne. Cette dernière a un seuil de détection plus binaire que la PIST (soliton ou queue radiative versus module variant entre 0 et 1).

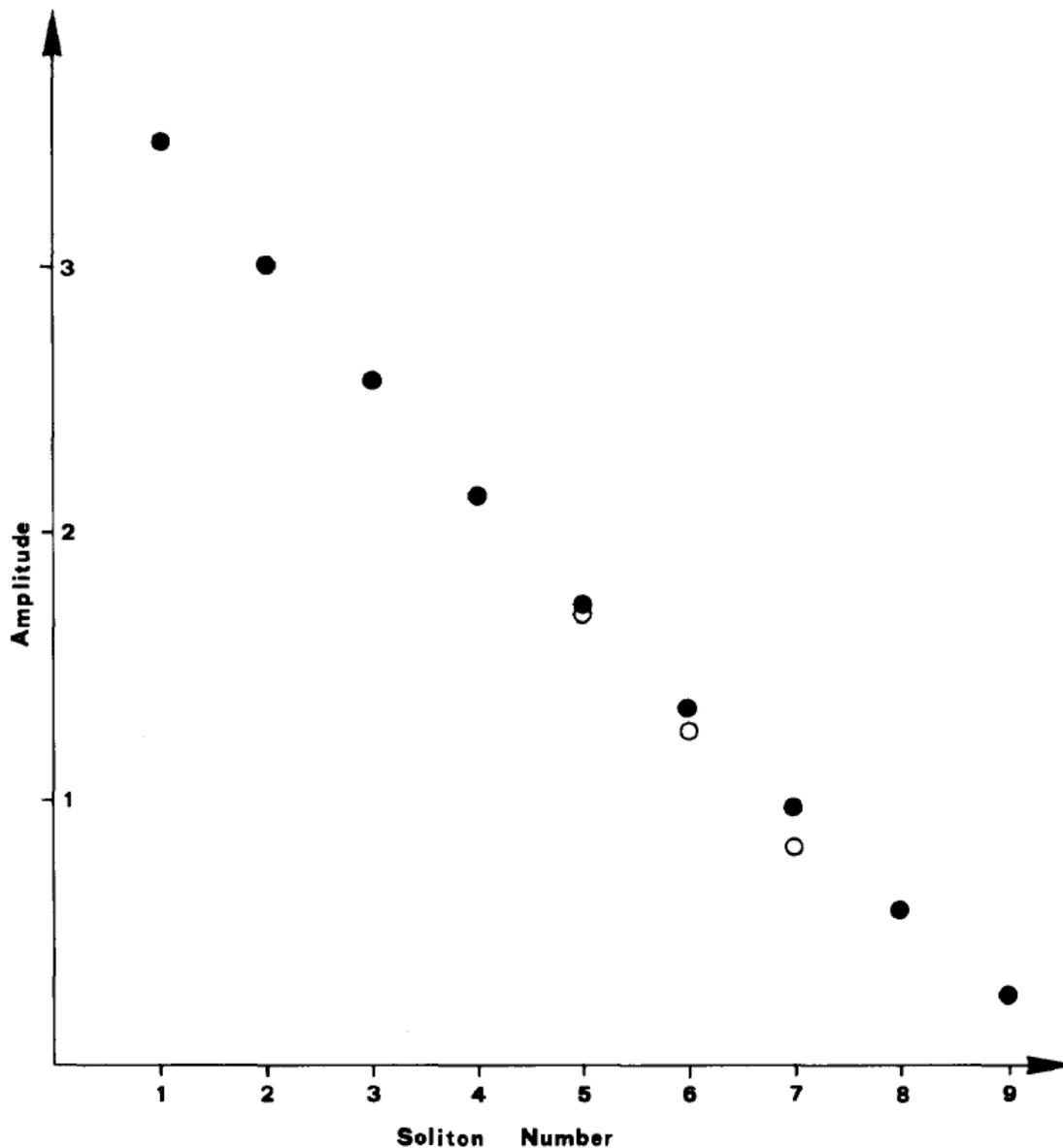


FIGURE 2.9: Amplitudes des solitons contenus par le sinus de Zabusky et Kruskal d'après la PIST (en noir) et d'après l'IST ligne (en blanc). Figure tirée de [42].

Les travaux de Salupere et Engelbrecht [19] reprennent un peu plus tard le problème en faisant varier le nombre d’Ursell du sinus initial et mettent en évidence le fait que le niveau de référence dans l’IST ligne n’est pas constant au long de l’évolution à l’aide de comparaison IST/ simulation numérique. Cela donne lieu à l’apparition de ‘solitons fantomatiques’. Christov en 2012 [7] associe ces fantômes au mode du spectre intermédiaire (ondes cnoïdales de module $0.9 > m > 0.3$). Il établit également que le niveau de référence est une fonction du paramètre de dispersion (équivalent au nombre d’Ursell) et évolue de façon non-monotone avec lui. Ce comportement non-monotone du niveau de référence est une surprise et nécessite une étude.

En 2016 Trillo et coauteurs [60] apportent une contribution expérimentale à la résolution de ce problème. Ils observent dans un canal long de 110 m la décomposition d’un forçage monochromatique. Les grandes dimensions de ce bassin leur permettent d’explorer de nombreux paramètres de dispersion. Ils observent pour la première fois expérimentalement le phénomène de récurrence de la fission. Ils mettent également en évidence une relation entre dispersion et nombre de solitons obtenus. Cette relation est démontrée dans le papier de Deng et al. [13] en utilisant la méthode WKB qui en substance permet d’établir le diagramme de Floquet en fonction du paramètre de dispersion quand il tend vers 0. On obtient ainsi une estimation du nombre et de l’amplitude des solitons en fonction du nombre d’Ursell dans cette limite qui est cohérente avec l’expérience (figure 2.10).

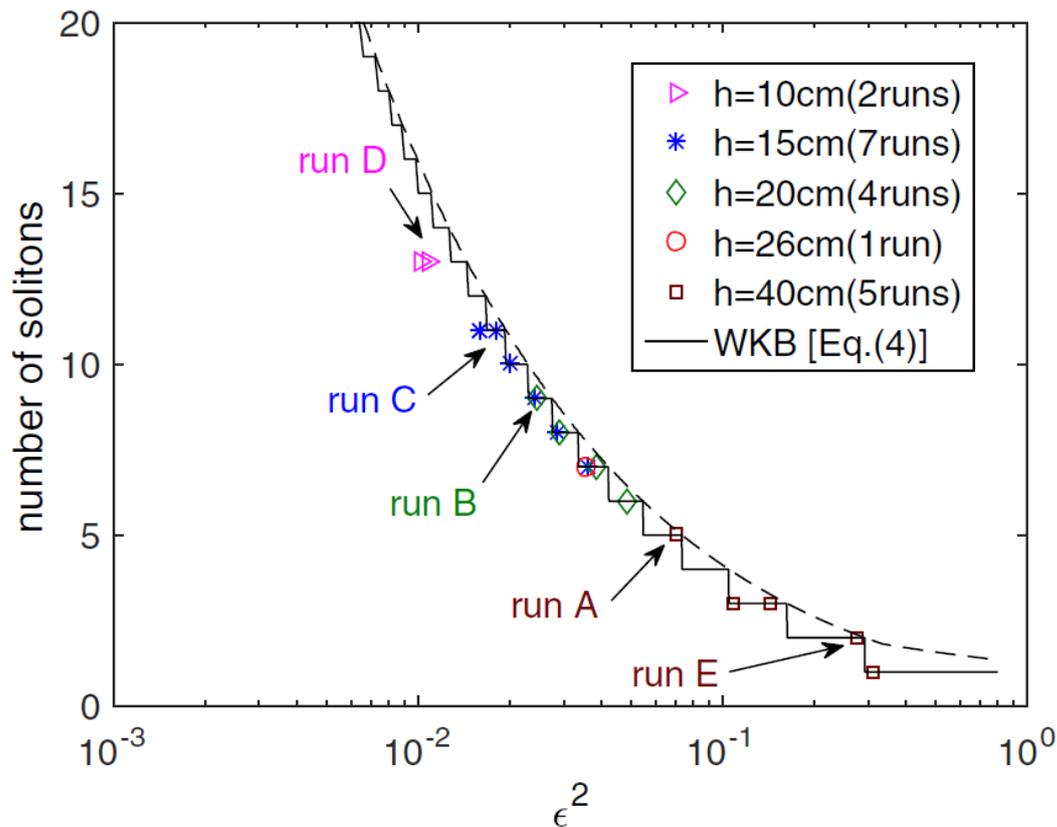


FIGURE 2.10: Nombre de solitons en fonction de la petitesse de la dispersion $\epsilon^2 = (2\omega^2 h^2 / 3gn_0)$. Figure tirée de [7] .

Une validation du niveau de référence est menée en comparant les vitesses des solitons mesurés à leur vitesse théorique (fonction du niveau de référence et de l'amplitude). Cela vient corroborer le choix fait par Osborne du niveau de référence pour la PIST à partir du module somme toute arbitraire de 0.99.

2.4.4 Conclusion

La méthode d'inverse scattering est un outil d'analyse puissant. Il permet d'obtenir un spectre non-linéaire d'un système dont l'amplitude des modes est indépendante du temps si le système est intégrable. En ce sens, ces modes sont reconnus comme les modes "physiques" du système. Cela permet une compréhension fine du système étudié et le distingue de l'analyse linéaire.

En étudiant l'évolution de ces modes dans l'espace et le temps, elle permet de trancher la question de l'intégrabilité d'un système et d'étudier les perturbations à celle-ci causés par notamment des effets de taille finie, de dissipation ou de cohabitation avec des modes non-régis par la théorie de l'eau peu profonde.

On peut cependant lui faire le reproche de la complexité calculatoire sous-jacente et d'un manque de rigueur sur la définition du niveau de référence qui permet de différencier un mode non-linéaire d'un soliton.

— Chapitre 3 —

Turbulence intégrable en eau peu
profonde

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter l'état de l'art en matière de turbulence intégrable en eau peu profonde. La turbulence intégrable fait référence à des systèmes décrits par des équations intégrables et qui se comportent de manière chaotique si bien qu'ils nécessitent une description statistique. Il s'agit d'un sujet d'étude relativement neuf dont l'article fondateur a été écrit par Zakharov en 2009 [66].

On commencera l'exposé en présentant les travaux numériques et théoriques portant sur les gaz de solitons. Ces systèmes correspondent à un cas particulier de la turbulence intégrable où tout les modes du système sont des solitons. Ils tirent leur nom des propriétés de quasi-particules de ces derniers. On considérera ensuite les travaux portant sur des systèmes strictement intégrables qui ne font pas l'hypothèse que tout les modes sont solitoniques et qui cherchent à décrire l'évolution statistique d'une condition initiale aléatoire. Dans un troisième temps, on s'intéressera aux systèmes réels gouvernés par une dynamique quasi-intégrable en considérant les différents travaux expérimentaux sur les régimes solitoniques en eau peu profonde. Dans la dernière section de cet état de l'art, on se préoccupera de certaines limites de la description de notre système par la dynamique intégrable occasionné par des effets de taille finie.

3.2 Le gaz de solitons

Le premier à théoriser l'évolution d'un système aux nombreux degrés de liberté composé uniquement de solitons fut Zakharov [65]. En 1971, il établit l'équation cinétique d'un gaz 'rare' de solitons en utilisant le formalisme de l'IST. Par rare, il faut comprendre que les solitons sont suffisamment peu nombreux relativement à la dimension du système pour que leurs temps d'interactions soient courts relativement au reste de leurs évolutions.

Cette étude fut par la suite généralisée par les travaux d'El à des gaz de solitons de densité arbitraire [16] [17] ce qui permit de décrire des systèmes où les solitons sont en interaction permanente. Le résultat principal de ce travail est l'expression analytique de la vitesse moyenne d'un soliton en fonction de la distribution de solitons dans le gaz dans lequel il évolue. L'idée étant que du fait des interactions, un soliton en moyenne plus grand que les autres sera accéléré et inversement.

Les prédictions de cette équation cinétique furent validées numériquement par une comparaison avec une simulation DNS de l'évolution KdV en 2016 par F. Carbone¹, D. Dutykh² et G. A. El³ [4]. Ils s'intéressèrent notamment au cas d'un grand soliton traversant un gaz uniforme de petits solitons et au cas d'un gaz de grands solitons rattrapant un gaz de petits solitons.

La notion de densité critique fut introduite, toujours par El, en 2016([18]). Elle fixe la densité maximale de solitons d'un système. Une compréhension intuitive de ce concept peut être donnée par la réflexion suivante concernant la distance minimale entre les centres de masses de 2 solitons. Lors d'une interaction forte entre 2 solitons d'amplitude comparable, se forme une structure bimodale symétrique. Les 2 solitons ne peuvent pas être plus proches que la distance entre les 2 sommets de cette structure. Plus la différence d'amplitude est grande, plus cette distance minimale entre les centres de masse des 2 solitons est courte. Cette réflexion amène à la conclusion qu'un gaz de solitons comportant des individus de tailles variées pourra être plus dense qu'un gaz de solitons de même taille. El établit également une formule permettant de calculer la moyenne et la variance de l'élévation de la surface libre pour un régime de gaz de solitons à partir de sa distribution de solitons. Les autres moments n'étant pas conservés par le mouvement, ils restent inaccessibles analytiquement.

La skewness (coefficient d'asymétrie) et la kurtosis (coefficient d'aplatissement) sont des quantités d'intérêt, car elles renseignent sur la forme de la distribution de probabilité d'élévation de surface libre du régime (on conservera les anglicismes pour leurs compacités). Afin de mieux comprendre l'évolution de ces moments d'ordre supérieur, Pelinovsky a conduit une série d'expérience numérique. Il s'est d'abord intéressé à l'interaction entre 2 solitons en tant que brique élémentaire du gaz de solitons [50]. Il constata alors que l'interaction forte engendrait une diminution des moments d'ordre 3 et 4 et que ce phénomène était quantifiable en fonction du rapport d'amplitude entre les 2 solitons. (figure 3.1)

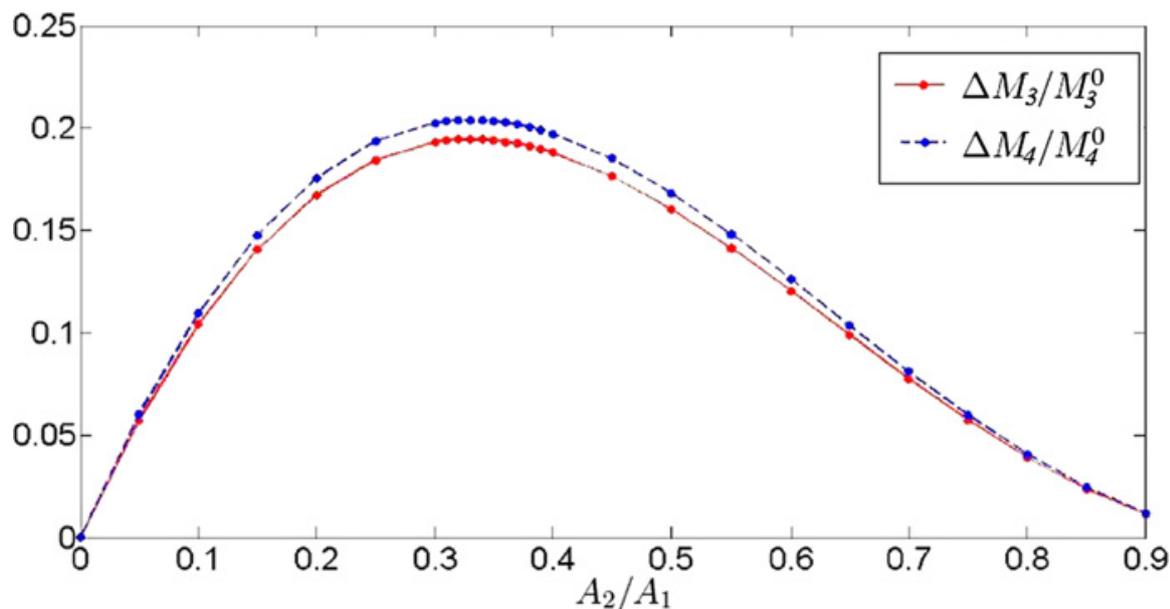


FIGURE 3.1: Diminution relative maximale des moments d'ordre 3 et 4 au cours d'une interaction forte entre 2 solitons en fonction de leur rapport d'amplitude.

Il s'est ensuite intéressé avec Dutykh à l'évolution d'un peigne de solitons d'amplitudes aléatoirement choisies dans une gamme donnée pour diverses densités et nombre d'Ursell [15]. Ils constatèrent que les moments d'ordre 3 et 4 étaient très légèrement diminués au tout début de l'évolution puis restaient quasi-stationnaires témoignant de la capacité des solitons à conserver leurs caractéristiques. Ils établirent également que les moments finaux étaient d'autant plus grands que le nombre d'Ursell du système l'était.

Cas particulier de la turbulence intégrable, le gaz de solitons est un objet fascinant. On peut notamment le relier à des problématiques océaniques comme nous le verrons plus bas. S'il a été au centre de récent développement, il reste un objet mystérieux, notamment lorsque l'on se rapproche de la densité critique. Bien que l'on soit capable de générer proprement un soliton en laboratoire, la génération d'un gaz de solitons pur est problématique. En effet, le recul du batteur engendre une composante radiative. Dans des systèmes de conduite fluide visqueuse régies par KdV [36] on se rapproche beaucoup de ce cadre théorique. On recommande la visualisation de la vidéo suivante qui illustre le phénomène <https://www.youtube.com/watch?v=eNLHmYHX9dA>.

3.3 Turbulence intégrable en eau peu profonde

3.3.1 Théorie

En 1999 El, Gurevich et Zybkin [27] considèrent l'évolution d'une condition initiale apériodique régie par KdV. Les résultats observés furent très différents de ceux obtenus par Zakusky et Kruskal dans un cas périodique. La condition initiale oscillant à grande échelle fissionne en solitons similairement au problème de ZK, mais l'apériodicité conduit au mélange aléatoire des phases de ces solitons donnant au système un caractère stochastique et interdisant le phénomène de récurrence. Ces travaux, associés aux avancées sur le gaz dense de solitons relatés plus haut, débouchèrent en 2009 sur l'établissement du cadre théorique de la turbulence intégrable par Zakharov [66]. L'idée derrière cette théorie est d'apporter une description statistique aux systèmes stochastique régis par une équation intégrable et conservant donc une infinité de quantités. Le gaz de solitons dont nous avons parlé plus haut est le cas limite de cette théorie où tous les modes sont localisés. Cette théorie est jeune et de nombreux points sont à explorer quant aux caractéristiques statistiques des champs de vagues dans de tels régimes. Dans la suite de cette section, on présentera d'abord les études numériques menés dans ce cadre puis on s'intéressera aux observations dans les systèmes réels et notamment océaniques (et donc non strictement intégrable puisque soumis, notamment, à des forces dissipatives).

3.3.2 Expérience numérique

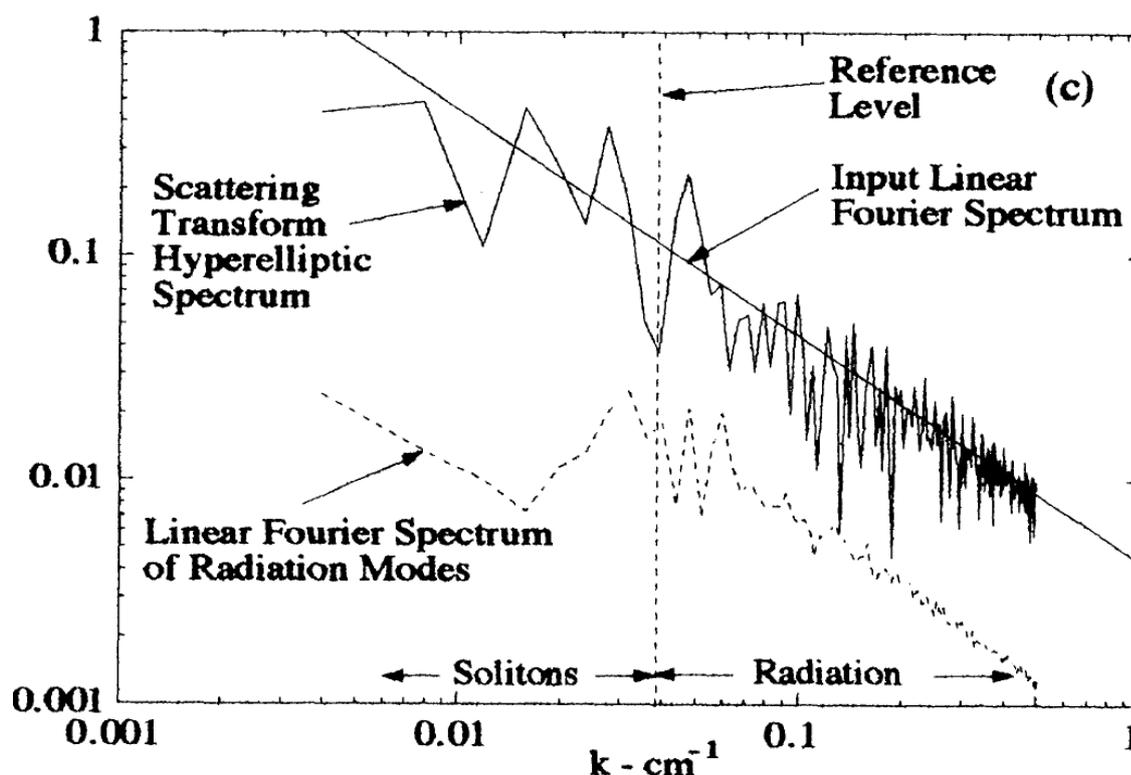


FIGURE 3.2: Spectre initial de Fourier et Spectre PIST au temps long tiré de [40].

Les premières expériences numériques visant à étudier des régimes aléatoires régis par l'équa-

tion de KdV furent menés par Osborne en 93 [40]. Il définit une condition initiale à partir d'un spectre de Fourier en k suivant une loi de puissance (ici -2) puis en calcul la décomposition en modes non-linéaires grâce à la PIST. Il tire ensuite aléatoirement les phases de ces modes. Il observe alors que le spectre des radiations à haute fréquence conserve la pente de -2 initiale tandis que les modes de fréquences inférieures à un niveau de référence donnée se désolidarisent de cette tendance (figure 3.2). En laissant évoluer ce système, les solitons finissent par se séparer et être visibles à l'œil. Cette expérience met en évidence la pertinence de la description des basses fréquences comme un gaz de solitons. On peut regretter que ne soit pas fourni le spectre de Fourier complet en fin d'évolution et le manque de commentaire sur une éventuelle convergence de celui-ci au temps long.

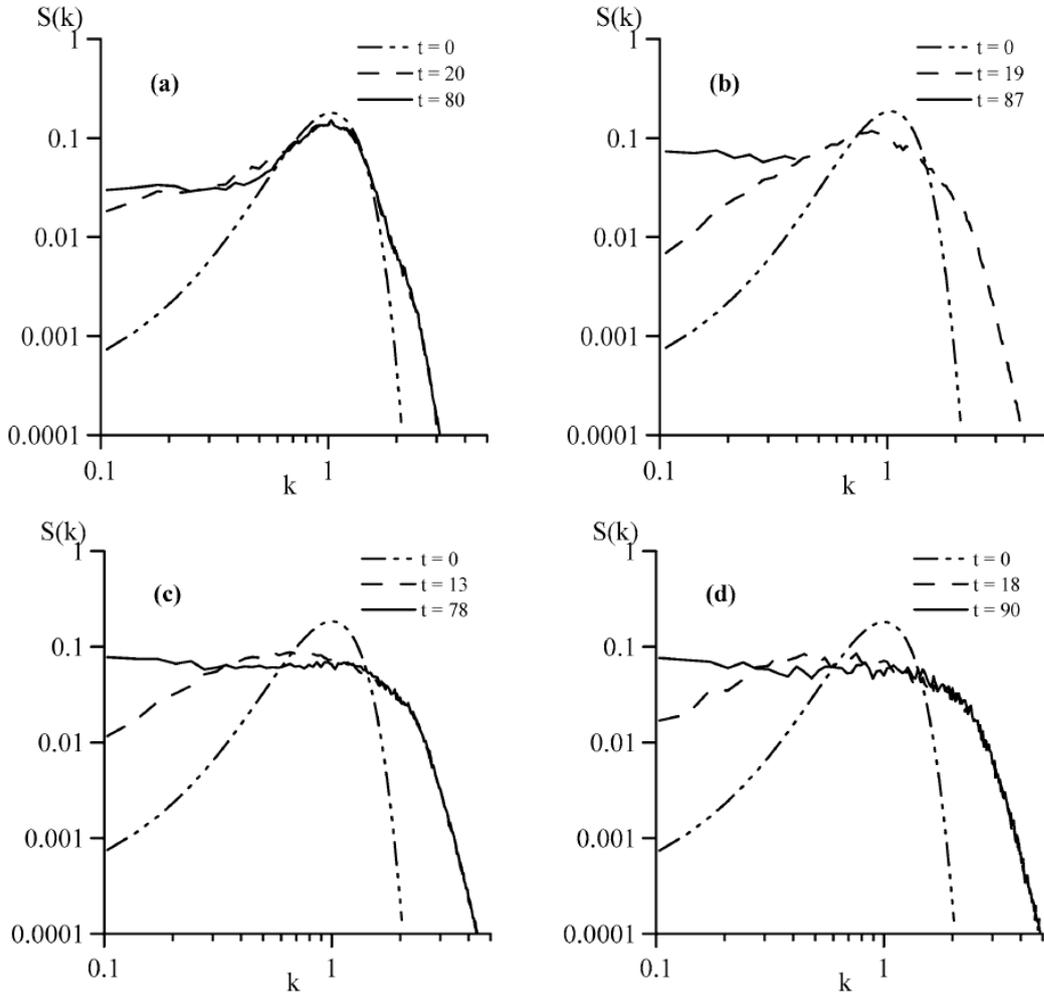


FIGURE 3.3: Evolution du spectre initial pour différents nombre d'Ursell (a) 0.2, (b) 0.5, (c) 0.7, (d) 0.95. Figure tirée de [49].

En 2005, Pelinovsky et Sergeeva [49] s'intéressèrent à l'évolution d'un champ de vague initiale dont les 256 composantes de Fourier sont tirées aléatoirement afin de construire un spectre de forme gaussienne. Il est alors constaté que le spectre et les moments d'ordre 3 et 4 convergent vers un état stationnaire fonction du nombre d'Ursell initial (défini à partir de la longueur ca-

ractéristique associée au maximum d'énergie sur le spectre, et de la hauteur significative des vagues). Notamment plus les non-linéarités sont grandes, plus le spectre converge vers une distribution uniforme de l'énergie sur les basses fréquences (figure 3.3) et plus le champ de vague est asymétrique (skewness et kurtosis croissent).

3.3.3 Mesures dans l'océan et le laboratoire

Les études de régimes aléatoires décrits par KdV dans l'océan ou en laboratoire ne sont pas nombreuses. Plusieurs difficultés se présentent à l'expérimentateur. Dans les systèmes naturels, il faut être capable de filtrer les composantes du spectre qui ne sont pas régis par KdV pour pouvoir appliquer la PIST et conduire l'analyse sur un champ de vagues supposé unidirectionnel et stationnaire. Dans le laboratoire, la difficulté vient de la création d'un champ de vagues aléatoires. Pour ce faire, il doit pouvoir évoluer suffisamment longtemps pour s'affranchir des conditions de génération ce qui, si on s'intéresse à KdV, nécessite des infrastructures très grandes. Les principaux contributeurs sont encore Osborne et ses coauteurs qui par leur maîtrise de la PIST peuvent conduire une analyse assez fine.

Mer adriatique, Ursell = 0.1, système dominé par des ondes cnoïdales peu non-linéaires :

Dans le chapitre 28 de son livre [46], Osborne décrit des travaux réalisés entre 1988 et 1998 en collaboration avec L.Cavaleri. Il présente les résultats de l'analyse de Fourier non-linéaire (ou PIST) d'un champ de vague unidirectionnel dans la mer adriatique par 16.5 m de profondeur à 20 km de Venise. La hauteur significative est de 2.5 m et le pic d'énergie du système se situe entre 0.1 et 0.12 Hz. Cela correspond à un nombre d'Ursell typique égale à 0.1 : les non-linéarités du système sont donc faibles. KdV est valable jusqu'à 0.14 Hz, après quoi l'on quitte le domaine de l'eau peu profonde et donc de la turbulence intégrable.

Le spectre de la PIST est découpée en plusieurs sous-régions. L'implémentation de la PIST à l'aide des fonctions Thétas permet alors de reconstruire chaque mode (figure 2.8), ou le signal correspondant à chaque zone spectrale (figure 3.4) ainsi que les termes d'interactions entre ces sous-régions. Osborne montre que ces interactions sont faibles(figure 3.4) . En revanche, au sein du domaine spectrale correspondant aux modes solitoniques, les interactions sont fortes et conduisent comme attendu à une réduction de l'amplitude du champ de vagues (de part le mécanisme d'interaction forte). Il est également remarqué que les phases ne semblent pas aléatoires dans les basses fréquences sans que l'analyse soit poussée plus loin.

Donnée de Duck Pier, Caroline du nord, Ursell=0.82, système dominé par des solitons :

Dans le chapitre 30 de son livre[47], Osborne discute des données collectées par Long et Resio en 2007 en Caroline du Nord [35]. Le champ de vagues mesuré est unidirectionnel, se propage à une profondeur de 7.87 m avec une hauteur de vague significative de 2.4 m et un pic spectral d'énergie à 0.066 Hz.

Le spectre de la PIST révèle alors que la plupart de l'énergie se répartit entre des modes solitoniques ($m > 0.99$) qui occupent toutes les basses fréquences. Le plateau d'énergie à basses fréquences est interprété comme un gaz de solitons dont les phases sont aléatoires (figure 3.5).

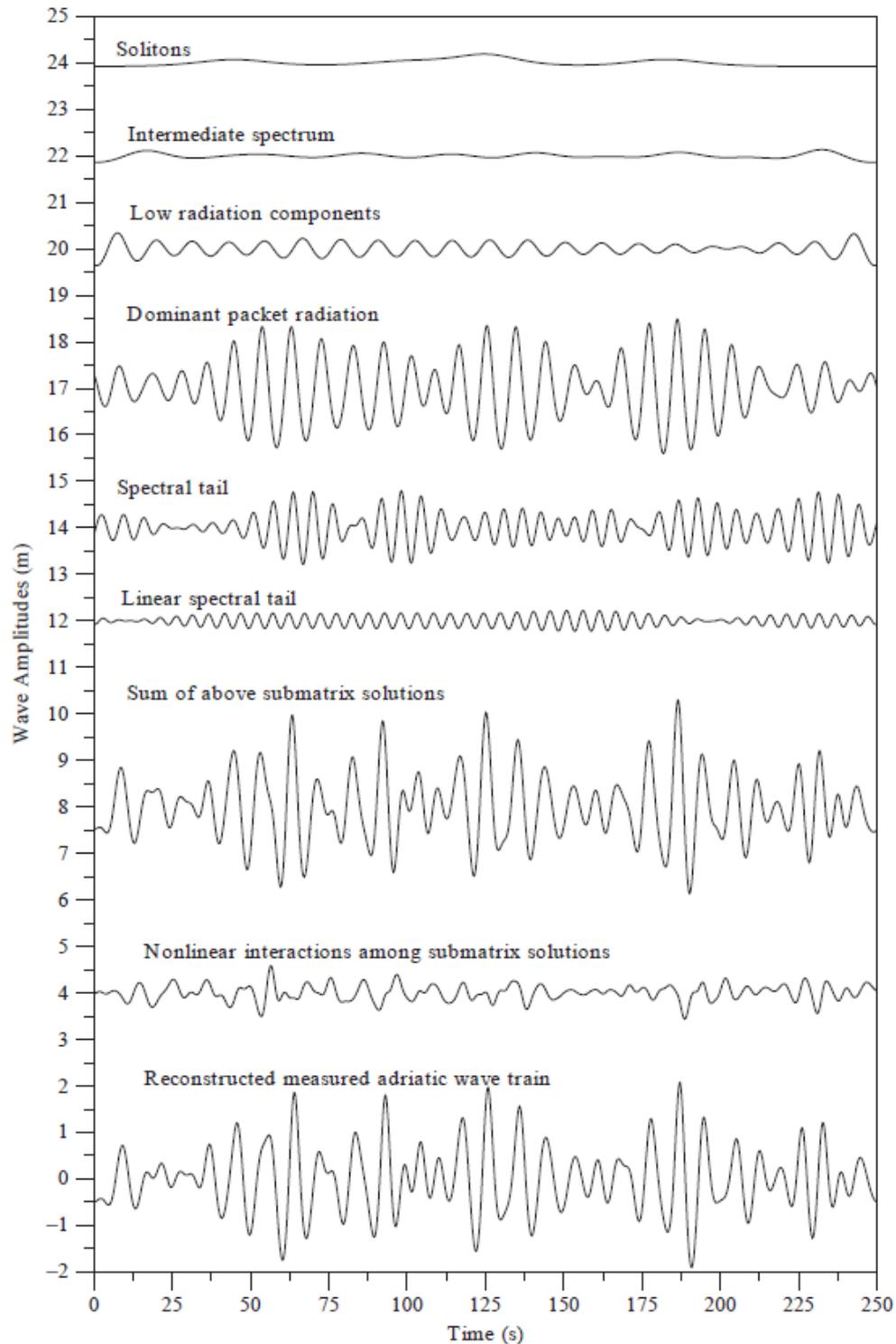


FIGURE 3.4: Reconstruction des trains d'ondes correspondant aux différents domaines spectraux. Le domaine des solitons correspond par exemple aux modes de modules importants situés aux très basses fréquences. Le terme d'interaction non-linéaire est le terme qu'il faut ajouter aux autres contributions pour que la somme totale reconstruise le champ de vagues.

Figure tirée de [46].

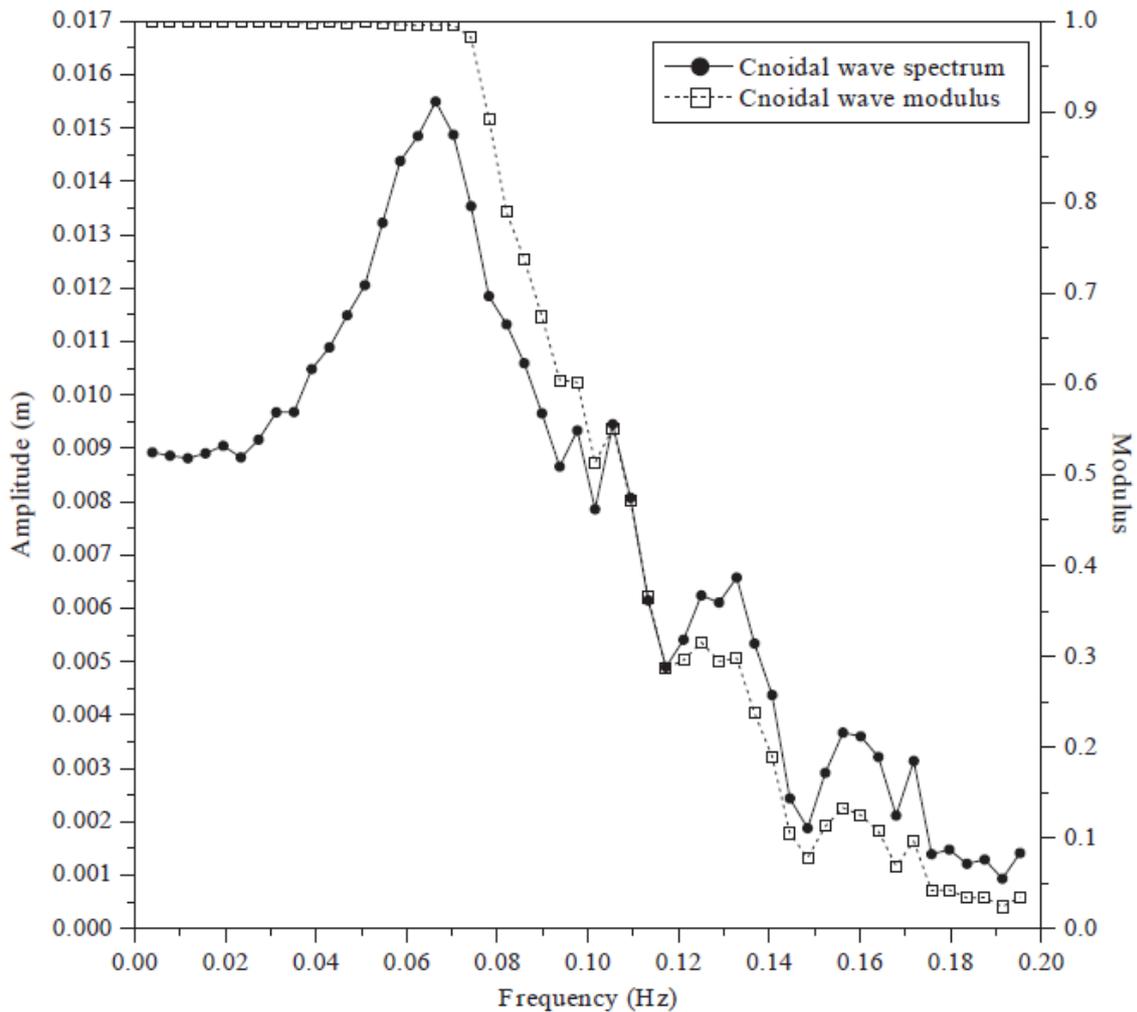


FIGURE 3.5: Spectre PIST d'un champ de vagues par une profondeur de 7.87 m avec une hauteur de vague significative de 2.4 m et un pic spectral d'énergie à 0.066 Hz. Les modes de modules supérieurs à 0.99 sont interprétés comme des solitons. Figure tirée de[47].

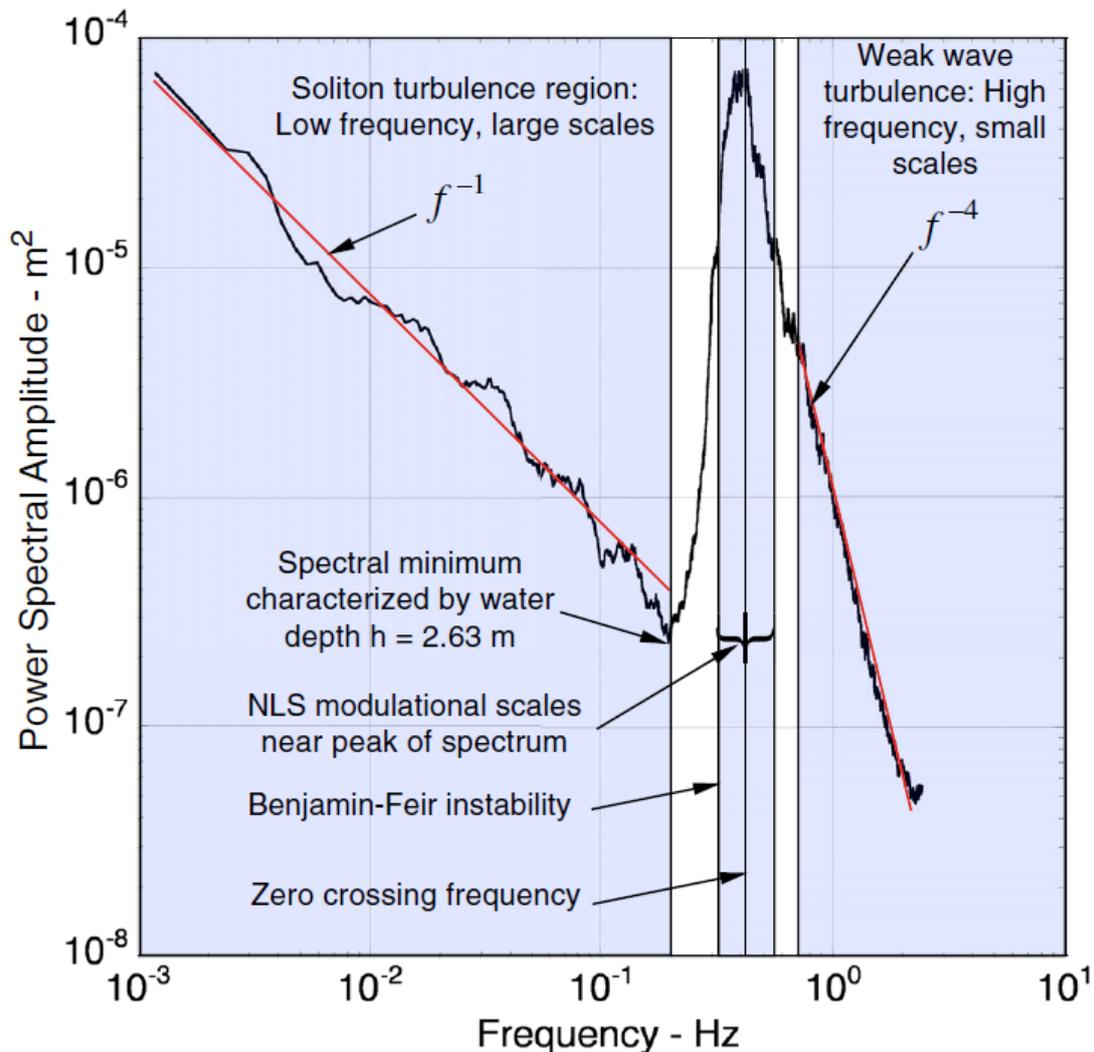


FIGURE 3.6: Spectre de Fourier, les domaines de validité de KdV et NLS sont bien délimités. Figure tirée de [10].

Donnée de Currituck Sound, caroline du nord, gas de soliton pure :

Dans un article paru en 2014, Costa et al analyse un champ de vagues de hauteur significative 0.52 m se propageant à une profondeur de 2.63 m [10]. Les observations ont eu lieu pendant une tempête occasionnant des ondes très longues pendant une grande durée. Cela a permis le développement du gas de solitons sur un large domaine fréquentiel. Ce régime est particulier au sens où l'ensemble des modes appartenant au domaine de validité de KdV ont été identifiés comme des solitons par la PIST. Ce régime peut ainsi être interprété comme un gas de solitons. La signature de ce régime est une loi de puissance en -1 en fréquence sur la densité spectrale d'énergie (figure 3.6) qui a été observée pour chacune des 14 séries temporelles, durant la tempête, considérées dans l'article. Cette pente est à associer à la distribution de solitons suivante (figure 3.7). On observe une forte densité de « petits » solitons de laquelle se détachent quelques grands solitons.

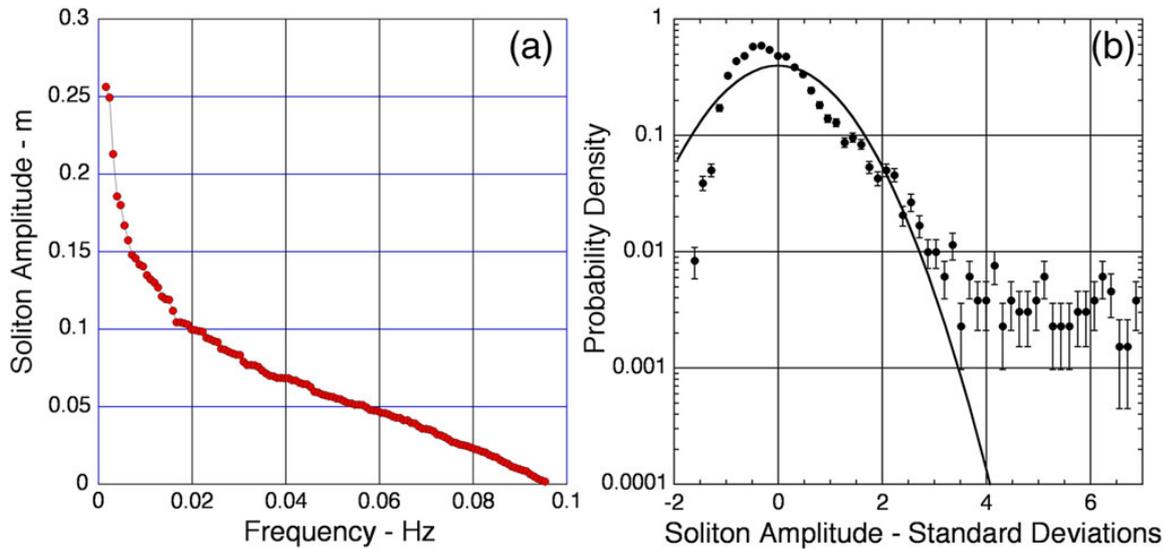


FIGURE 3.7: Amplitudes des modes solitoniques en fonction de leurs fréquences (a) et distribution de probabilité des amplitudes de solitons (b) relatif à un état de turbulence solitonique. Figure tirée de[10].

Gaz de solitons généré par le vent en laboratoire :

Giovanangeli et coauteurs [25] se sont intéressés au contenu solitonique d'une houle générée par le vent dans un canal de 8.65 m par une profondeur de 1 cm ce qui permet d'étendre le domaine fréquentiel de KdV jusqu'à 10Hz. Leur méthode d'analyse est basée sur le décompte des solitons contenus dans chaque intumescence du signal à partir d'un niveau de référence pris au niveau moyen. Ils dégagent les observations suivantes :

- Le spectre de Fourier comporte un plateau d'énergie aux fréquences basses (figure 3.8).
- La distribution de solitons est invariante au cours du temps à une position donnée.
- La distribution de solitons varie fortement suivant si la mesure est réalisée à 1 ou 3 m de la génération.

3.3.4 Bilan

En conclusion de cette revue bibliographique concernant les états de turbulence intégrable en eau peu profonde, on peut tirer les tendances suivantes concernant leur description statistique :

Le spectre de Fourier La pente de -1 (en fréquence) observée par Costa et al. semble indiquée que pour certaines distributions de solitons un régime stationnaire solitonique peut être caractérisé par une loi de puissance dans l'espace de Fourier. Ce résultat surprenant n'a été observé qu'une fois et il caractérise probablement plus la configuration dans laquelle les auteurs se trouvaient que les gaz de solitons en général. Il reste à établir si cette loi de puissance est liée à un mécanisme de génération à la pureté du gaz (pas de spectre intermédiaire), à la densité du gaz ou encore à la distribution de solitons (quelques solitons très étroits et énergétiques occasionnant un pic à basse fréquence?).

La répartition uniforme de l'énergie sur les basses fréquences observée par de nombreux auteurs nous semble caractéristiques des régimes de turbulence intégrable. Elle est de plus cohérente

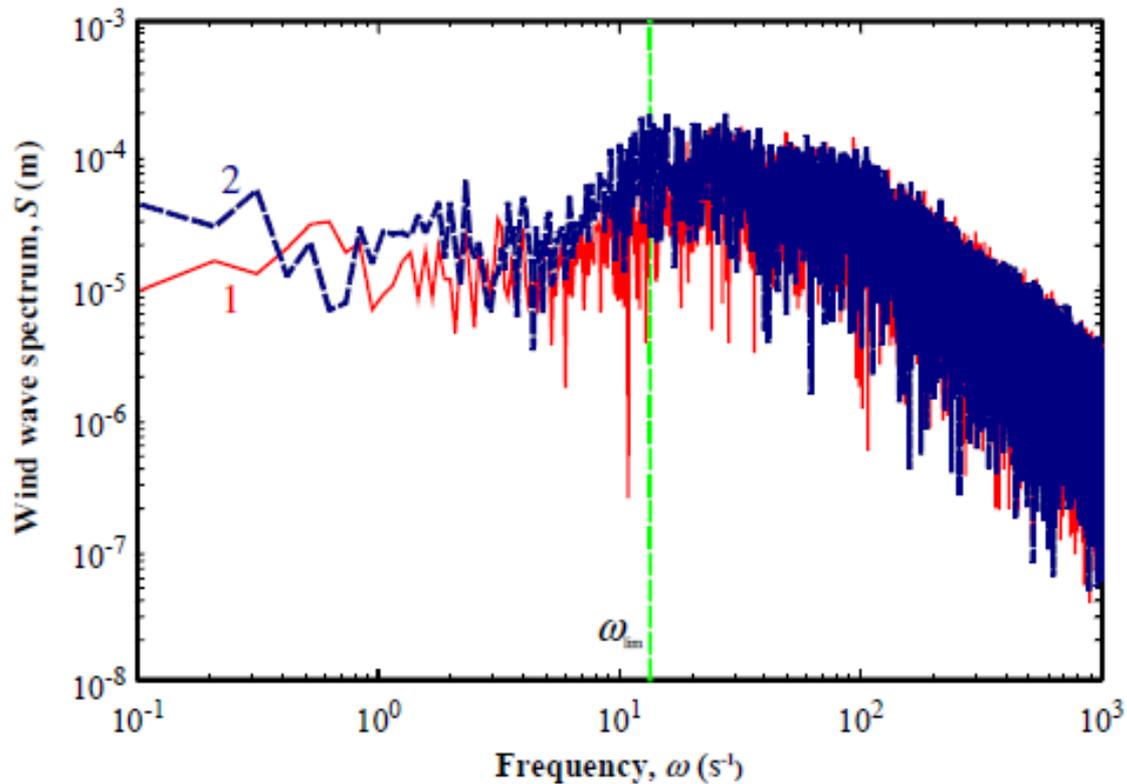


FIGURE 3.8: Spectre de Fourier issu de [25], la courbe rouge correspond à l'analyse du signal à 1 m de la génération, la courbe bleue au signal à 3 m. En vert est noté la limite du domaine de KdV.

avec les spectres, plats à basse fréquence, que l'on peut obtenir en traitant une série temporelle comportant un soliton seul ou une superposition linéaire de solitons.

Les moments d'ordre 3 et 4 Les auteurs s'intéressant aux moments statistiques dans leurs expériences (numériques) mentionnent que les valeurs des moments d'ordre 3 et 4 croissent avec le nombre d'Ursell caractéristique du régime étudié : plus les non-linéarités sont fortes, plus le champ de vagues devient asymétrique. On peut également noter qu'au terme d'un régime transitoire, ces moments ne varient plus. Par ailleurs, les interactions entre solitons réduisent théoriquement la valeur de ces moments mais cet effet ne semble pas prépondérant dans les régimes étudiés [4] (densité solitonique peu importante).

3.4 Effets de taille finie

L'étude des régimes intégrables en laboratoire est complexifiée par les biais induits par le forçage et la dissipation. Un autre biais s'ajoute à cela pour les expériences en canal que nous allons mener : les effets de taille finie. Une étude intéressante a été menée par Ezersky et al [20] [21] sur les effets de résonance engendrés par la génération monochromatique d'une onde en eau peu profonde dans un canal qui autorise une réflexion parfaite à la paroi.

3.4.1 Résonateur à solitons

Dans un canal de 10 m et par une profondeur de 0.26 m, une excitation monochromatique à basse fréquence proche d'un mode du canal conduit à l'observation de plusieurs régimes décrit par les diagrammes spatio-temporel et le diagramme de phase présentés aux figures 3.9 et 3.10. Illustration est faite de l'obtention de plusieurs régimes multi-stables d'ondes non-linéaires dans le résonateur. Une réflexion est conduite sur l'entretien de ces solitons par un transfert d'énergie d'un mode long à un soliton à partir de la séparation d'échelle qui permet au soliton de percevoir l'onde comme un courant. C'est la seule référence à notre connaissance traitant d'un transfert d'énergie à un soliton par une onde. L'existence de ce transfert ne peut pas être décrit dans le cadre intégrable.

3.4.2 Modulation d'amplitude

Dans un canal de 15 m et par une profondeur de 0.17 m, une excitation monochromatique conduit à l'observation de plusieurs régimes :

- la propagation de l'onde d'amplitude constante
- la modulation régulière ou chaotique de l'amplitude de l'onde
- la modulation d'amplitude conduisant au déferlement

Dans une discussion impliquant des spectres spatio-temporels obtenus par simulation numériques, les auteurs défendent le fait que ces régimes de modulations sont gouvernés par des interactions à 3 ondes quasi-résonantes obtenue pour une non linéarité suffisante et à certaines fréquences d'excitation. Les ondes considérées sont alors cnoïdales et les modèles utilisés généralement pour la modulation d'onde quasi sinusoïdale ne tiennent plus.

À l'aide de simulation numérique il est prouvé que lorsque l'onde réfléchie a une vitesse supérieure à celle des ondes longues (ie. sa fréquence est décalée positivement par les non-linéarités) elle entre en résonance avec des perturbations d'ondes longues. Si ces ondes longues sont proches des modes du canal, les perturbations grandissent et la modulation a lieu grâce à une fuite exponentielle de l'énergie vers ces modes par de nombreuses interactions triadiques. Les figures 3.11 et 3.12 illustrent la dynamique du transfert observé à l'aide d'une série temporelle et de l'évolution de la densité spectrale d'énergie.

3.4.3 Conclusion

Les expériences menées par Ezersky et coauteurs montrent que dans le cas d'un résonateur, on peut sortir du cadre de la dynamique intégrable et observer des transferts d'énergie entre ondes qui conduisent dans leurs papier de 2009 à la modulation d'amplitude d'une onde monochromatique par interaction triadique via les modes du canal et dans leurs papier de 2006 à l'entretien des solitons via une compensation de la dissipation par un transfert d'énergie d'un mode long du canal vers un soliton.

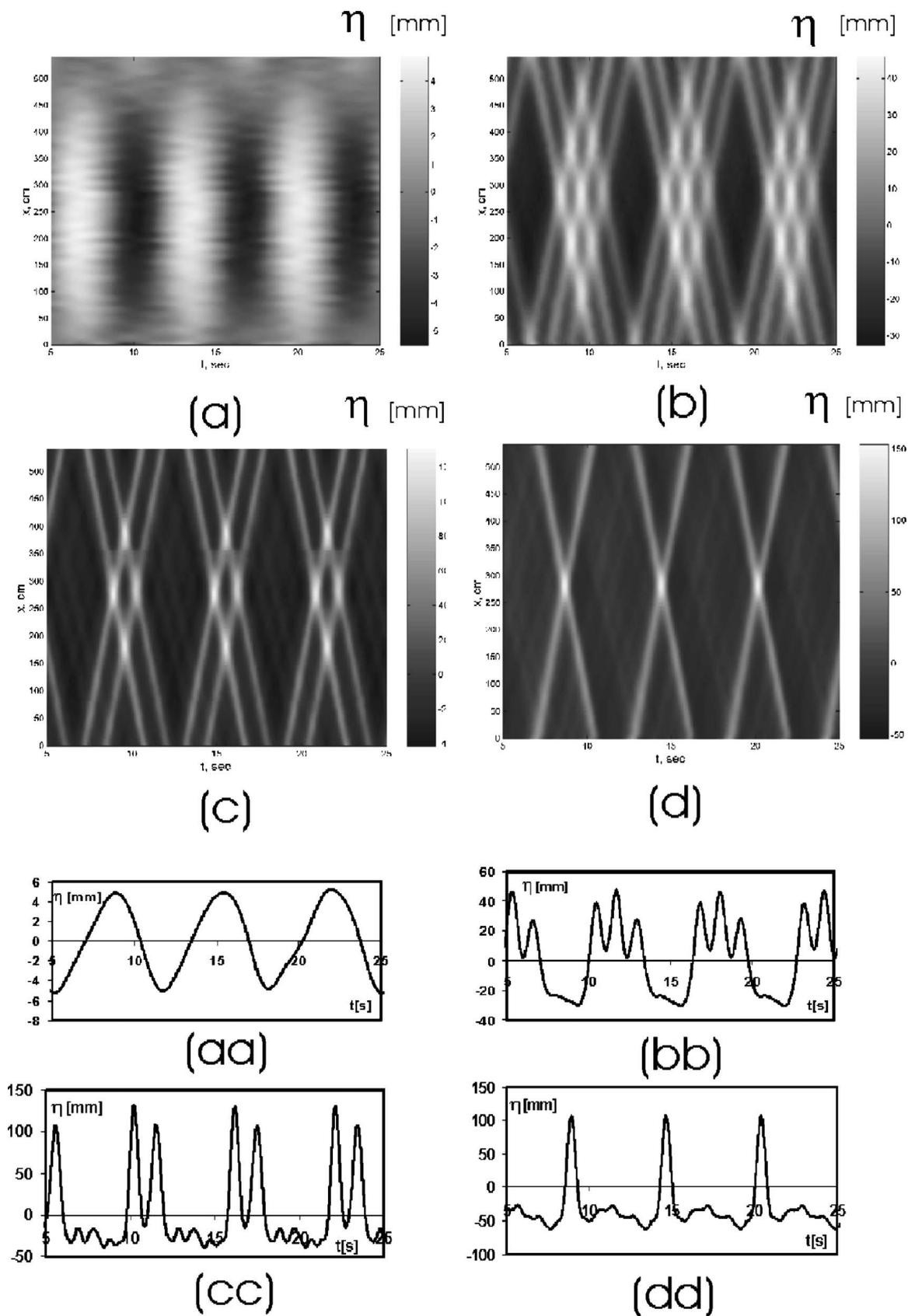


FIGURE 3.9: Diagramme spatio-temporel pour différents paramètres de forçage, ext représentant l'extension du batteur et f sa fréquence : (a) $ext=2.3$ cm $f=0.151$ Hz, (b) $ext=8.2$ cm $f=0.158$ Hz, (c) $ext=8.2$ cm $f=0.17$ Hz, (d) $ext=8.2$ cm $f=0.177$ Hz, et séries temporelles correspondantes prises au milieu du canal (aa,bb,cc,dd). Figure tirée de [20].

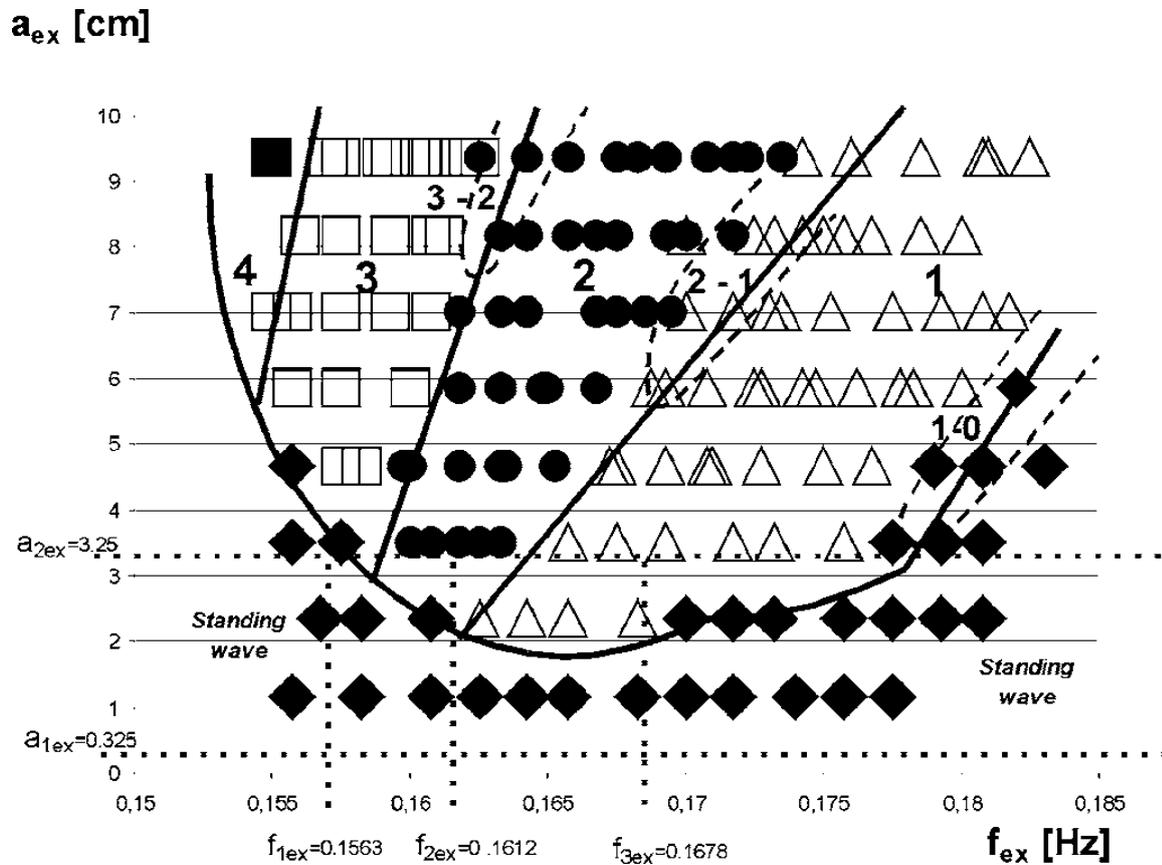


FIGURE 3.10: Diagramme des phases délimitant en fonction de la fréquence et de l'amplitude du forçage le nombre de solitons résonnants. Figure tirée de [20]

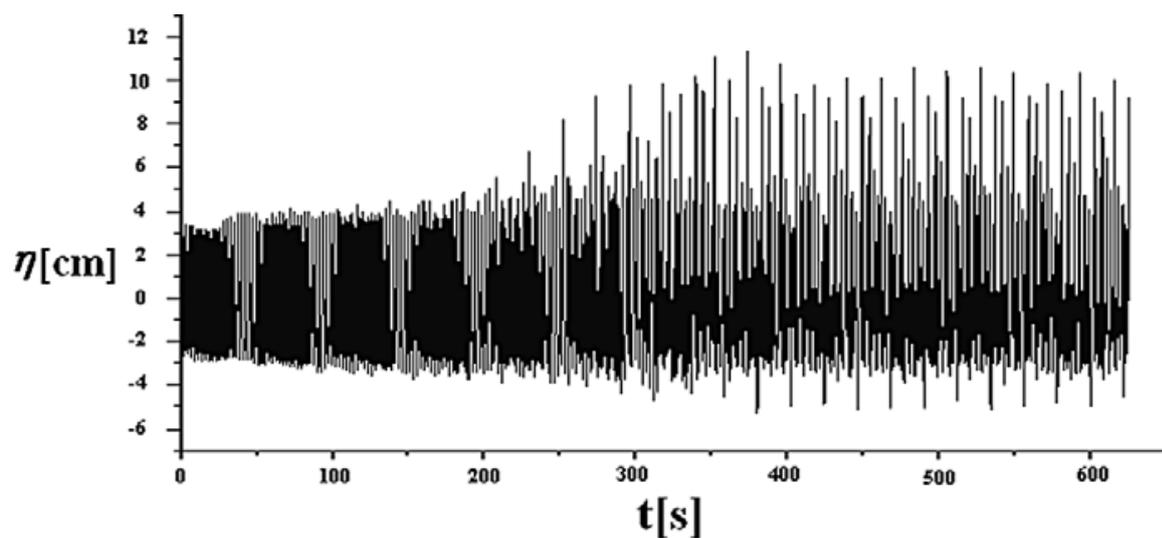


FIGURE 3.11: Naissance de la modulation d'amplitude pour $f = 0,4113$ Hz. Figure tirée de [21]

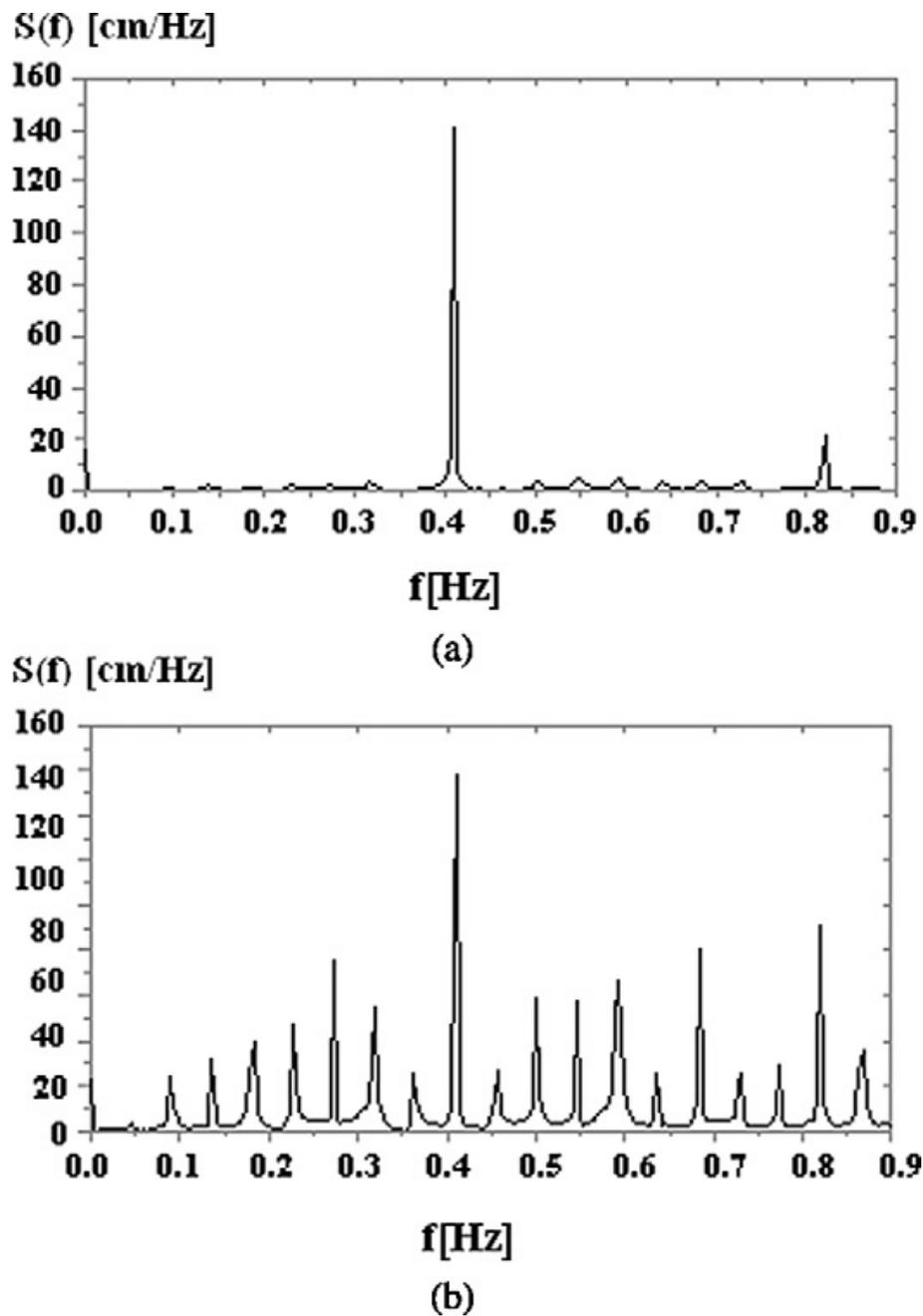


FIGURE 3.12: Densité spectrale d'énergie avant (a) et après (b) l'apparition de la modulation.
Figure tirée de [21]

— Partie II —

Dispositif expérimental et méthode

— Chapitre 4 —

Dispositif et méthodes expérimentales

4.1 Dispositif général

4.1.1 Canal à houle 1D du LEGI

Les expériences conduites dans cette étude ont été réalisées dans le canal à houle 1D du LEGI. Il s'agit d'un canal large de 55 cm, haut de 130 cm et, dans notre configuration, long de 33.73 m. Les parois verticales sont faites de plaques de verre de 2 cm d'épaisseur et de 2 mètres de long qui autorisent une mesure vidéo de l'évolution de la surface libre. Ces sections de 2 mètres sont maintenues entre elles par des poteaux larges de 8 cm (figure 4.1).

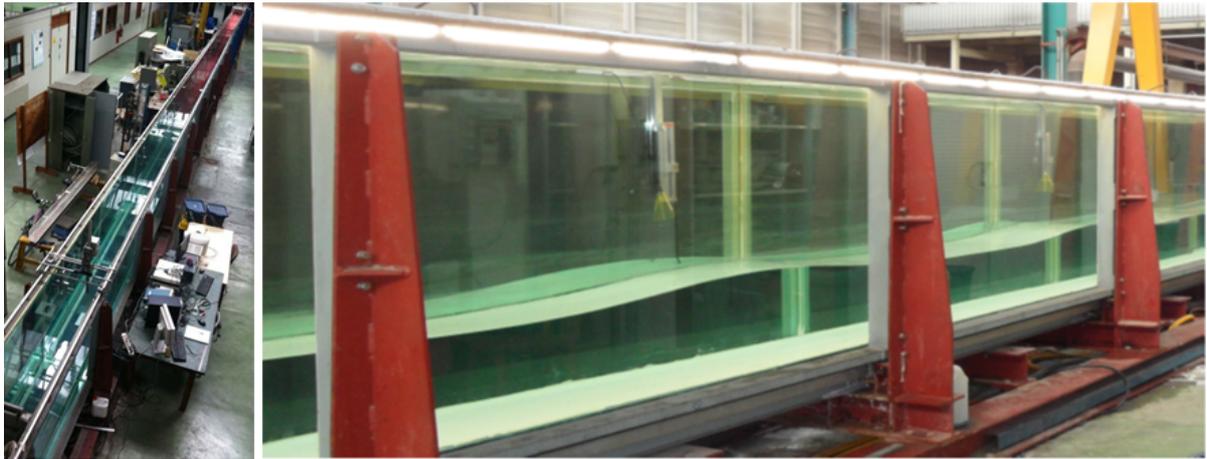


FIGURE 4.1: Photos du canal à houle de dessus et de face.

Les travaux précédents avaient conduit à l'installation d'une plage en fin de canal. Nous avons donc entièrement refait les fonds afin de nous assurer de l'horizontalité de ceux-ci. Une mesure effectuée à l'aide d'une sonde ultra-son nous a permis d'estimer que les variations verticales de niveau étaient dans une fourchette de 0.5 cm sur l'ensemble de sa longueur (figure 4.2). Les pics correspondent à des réglettes de PVC jointant les plaques formant le fond du canal.

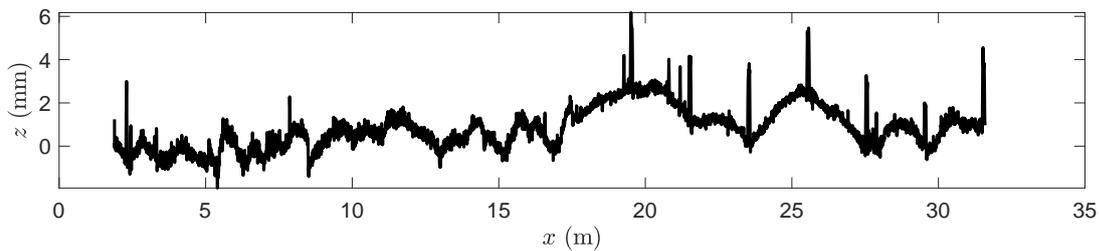


FIGURE 4.2: Mesure par sonde ultrasonore de l'élévation du fond du canal en fonction de la distance au batteur.

4.1.2 Batteur

La génération de la houle est assurée à l'aide d'un batteur de type piston capable d'osciller autour de sa position de repos de ± 30 cm. Ce dernier est mis en mouvement par un vérin

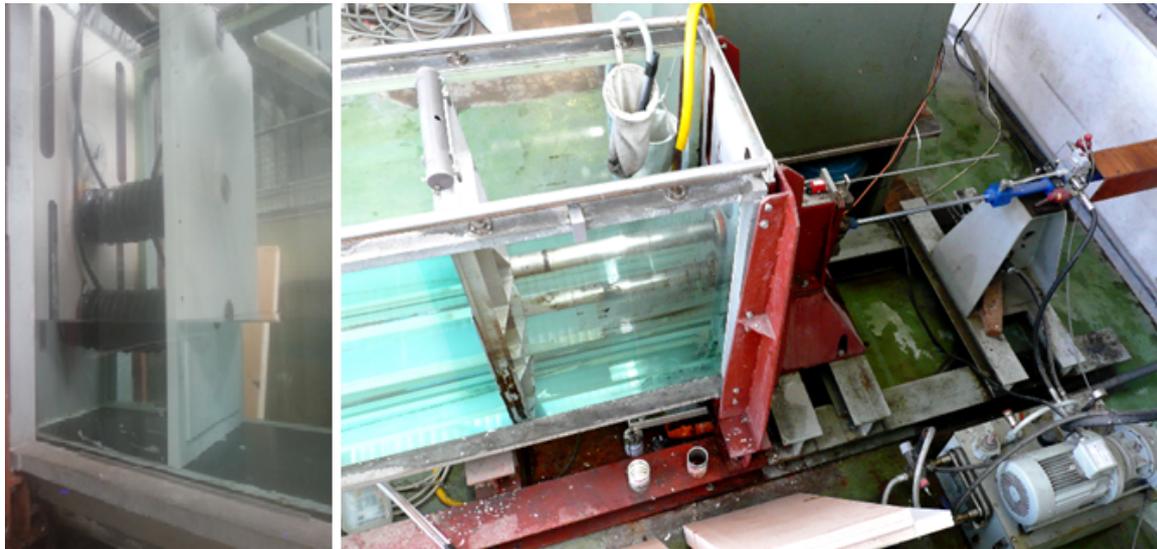


FIGURE 4.3: Photos du batteur de dessus et de profil.

hydraulique comme on peut le voir sur la figure 4.3. On peut imposer à ce batteur n'importe quelle loi de déplacement. Dans notre travail on utilisera surtout des forçages sinusoïdaux.

4.2 Technique de mesure

Afin de pouvoir étudier de manière fine les couplages forts et faibles entre ondes et d'effectuer des comparaisons avancées entre théories et expériences, nous avons développé un système de mesure résolue en temps et en espace des déplacements de la surface libre. Nous avons disposé 7 caméras le long du canal permettant d'enregistrer l'évolution sur 14 m de long (les pixels correspondent environ à $1 \times 1 \text{ mm}^2$ dans l'espace physique). Ce dispositif est représenté sur le schéma de la figure 4.4 et la photo de la figure 4.5.

4.2.1 Caméra et système d'enregistrement

Le matériel que nous avons utilisé pour nos enregistrements vidéos a été développé à notre demande par l'entreprise R&D Vision. Les caméras ont les caractéristiques suivantes :

- une dynamique de 8 bits
- une résolution maximum de l'image 1936 x 1216 pixels
- des pixels de 5,86 microns
- une cadence maximum de 160 images/s
- un temps d'obturation minimum de $19 \mu\text{s}$

Elles sont reliées à la station d'enregistrement par des cables USB3 permettant un important débit d'images par seconde. Le système est vendu pour fonctionner à 100 images par seconde. Dans notre étude, nous avons travaillé à 20 images par seconde. Le système d'enregistrement possède les caractéristiques suivantes :

- un débit maximum de 1.2 Go/s
- une stabilité inférieure à 100 ns

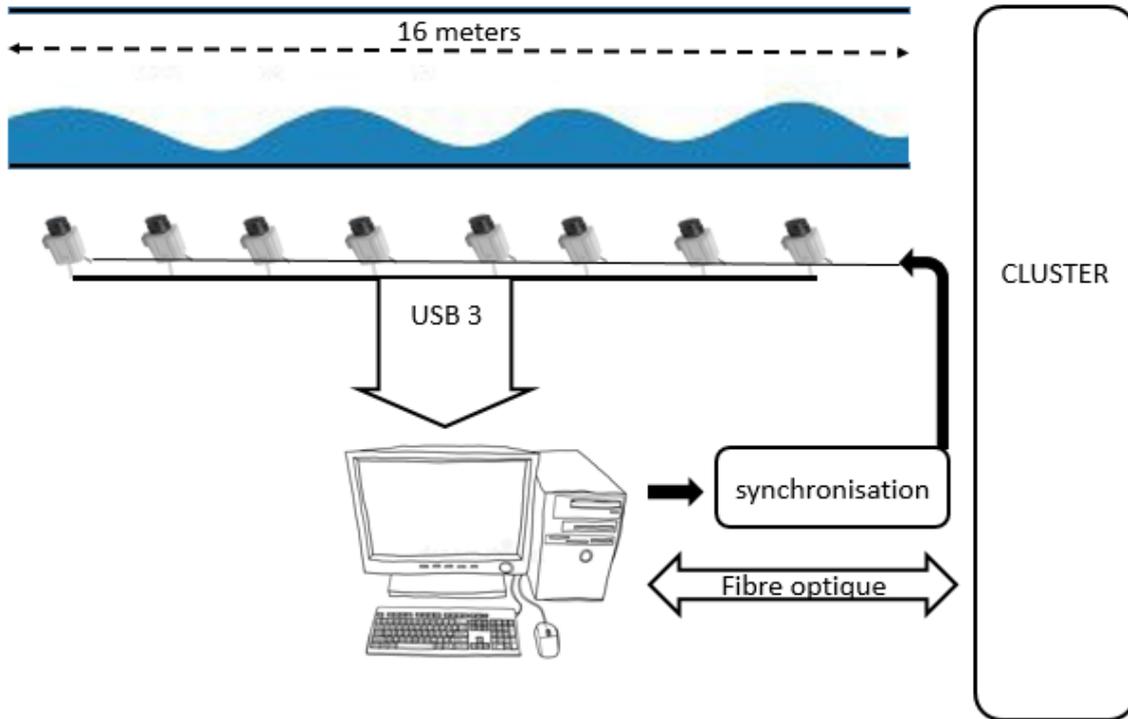


FIGURE 4.4: Schéma du dispositif de mesure. Chaque caméra est placée à 2 m du canal et enregistre l'évolution sur 2 mètres de long. Les images (1920×450 pixels) sont enregistrées en continu sur la station d'enregistrement à l'aide de câble USB3. Les caméras sont synchronisées, chaque image est capturée sur un front montant délivré par un générateur de délais à une fréquence de 20 Hz.

- une capacité totale de 16 To d'enregistrement continu

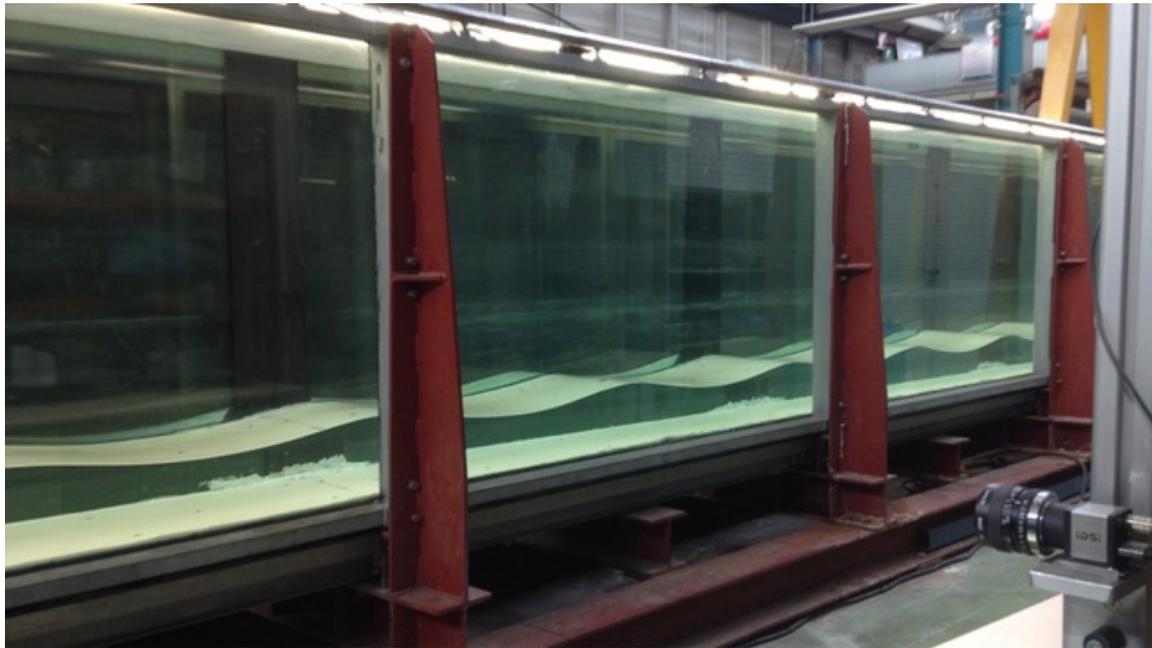


FIGURE 4.5: Photo du dispositif. Chaque caméra enregistre l'évolution entre 2 poteaux.

4.2.2 Méthode de mesure

On dispose un éclairage sur le toit transparent du canal qui permet au fond blanc de se réfracter sur la surface libre. Cette dernière se détache alors sur le fond noir disposé sur la vitre opposée à la caméra (cf figure 4.5). On crée ainsi un contraste important au niveau du contact du ménisque de la surface libre sur la vitre. On détecte ce dernier en traitant chaque image suivant le protocole suivant illustré sur la figure 4.6 :

- (a) Pour chaque colonne de pixel, on détecte le pixel pour lequel le gradient de niveau de gris est maximal, on obtient ainsi une première courbe en escalier (en bleu sur la figure).
- (b) On sélectionne une bande de 5 pixels autour de cette première détection.
- (c) À l'aide d'une interpolation polynomiale sur les différences de niveau de gris, on identifie la position du gradient maximal à l'intérieur du pixel. On obtient ainsi une mesure à une précision subpixel.

Une fois cette mesure subpixel obtenue, on effectue une calibration de Tsai [61] (modèle de camera point) afin de compenser les effets importants de distorsion occasionnés par le grand-angle des caméras (champs de 2 m de large à 2 m de distance). Pour ce faire, on photographie une mire de calibration (un quadrillage noir sur fond blanc) dont les dimensions sont connues. On identifie à l'aide du logiciel UVmat développé au LEGI les positions en pixels des intersections des lignes du quadrillage, puis connaissant ses dimensions réelles, on identifie la transformation permettant de passer des coordonnées en pixels à des coordonnées en mètres. On obtient ainsi une précision submillimétrique sur les déplacements de surface libre.

Afin de reconstruire ce déplacement sur l'ensemble du champ des caméras, on peut choisir de ne conserver qu'un point tous les 8 cm sur l'ensemble du champ des 7 caméras de façon à ne pas être gêné par les poteaux de largeur 8 cm. Si une précision supérieure est nécessaire, on peut

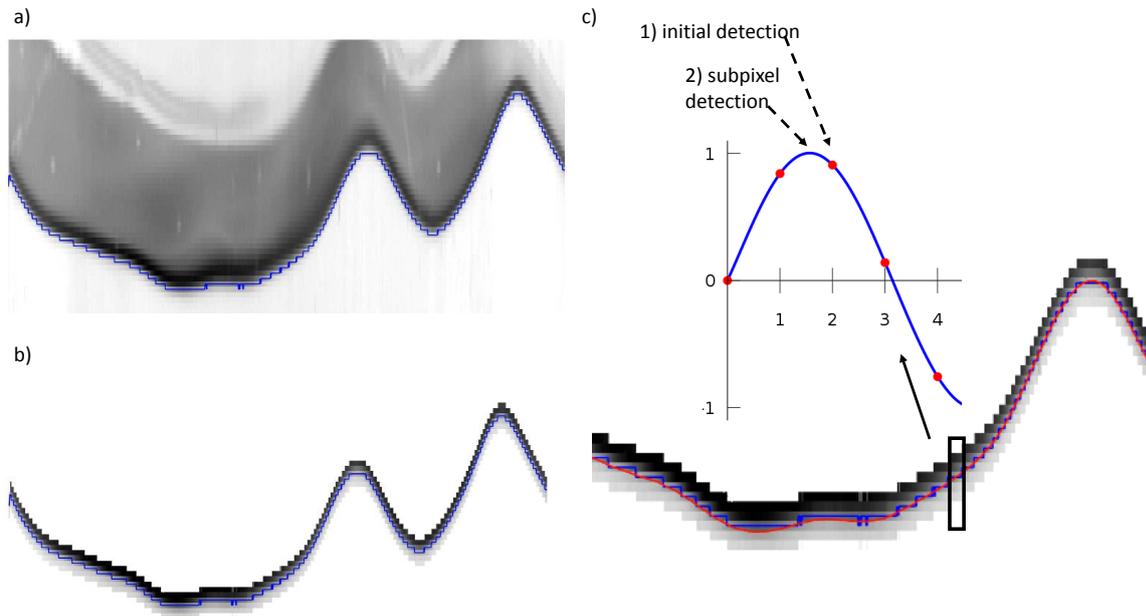


FIGURE 4.6: Les étapes du traitement subpixel (cf. texte).

conserver un point tous les millimètres et se limiter à des échelles inférieures à 1.92 m. Sinon il faut effectuer une interpolation pour reconstruire le signal là où les poteaux obstruent la vision de la surface libre.

Le lecteur intéressé par la technique de détection subpixel pourra consulter les travaux de Weinfurtner et al. [63].

4.3 Exemples de traitements typiques

Nous allons dans cette section illustrer la précision de la mesure et les possibilités offertes par une mesure bien résolue en temps et en espace. Dans une première partie, on s'intéressera au cas de l'interaction face à face de deux vagues solitaires. Cet exemple nous permettra d'introduire le spectre (k, ω) obtenu par une transformée de Fourier en espace et en temps du diagramme spatio-temporel. On verra également qu'il est possible de filtrer les ondes se propageant dans une seule direction. Dans un second temps, on s'intéressera à la mesure des déformations de surface libres engendrées par la chute d'une goutte d'eau à l'extrémité du canal. Cet exemple permettra d'illustrer la puissance du traitement subpixel pour identifier des ondes de faibles amplitudes. Il permettra également de discuter la trace spectrale des ondes ne se propageant pas dans l'axe du canal.

4.3.1 Filtrage directionnel : l'interaction faible de solitons

Nous allons nous intéresser au cas de l'interaction faible de deux ondes solitaires. Il s'agit de l'interaction de deux ondes solitaires se propageant en sens contraire. Pour ce faire, on recule lentement le batteur au minimum de sa course puis on attend 90 s afin de s'assurer du retour

au calme plat. Par 2 avancées successives calibrées à l'aide de la loi de déplacement décrite dans [26], on génère une vague solitaire, puis une deuxième lorsque la première se réfléchit sur la paroi en fin de canal. On est alors capable d'observer l'interaction faible de ces deux structures. On représente sur la figure 4.7a le diagramme spatio-temporel associé à cette expérience. Ce dernier est construit en concaténant les mesures de l'élévation de la surface libre réalisées à chaque instant par l'ensemble des caméras. L'axe des ordonnées représente l'éloignement au batteur tandis que l'axe des abscisses représente le temps.

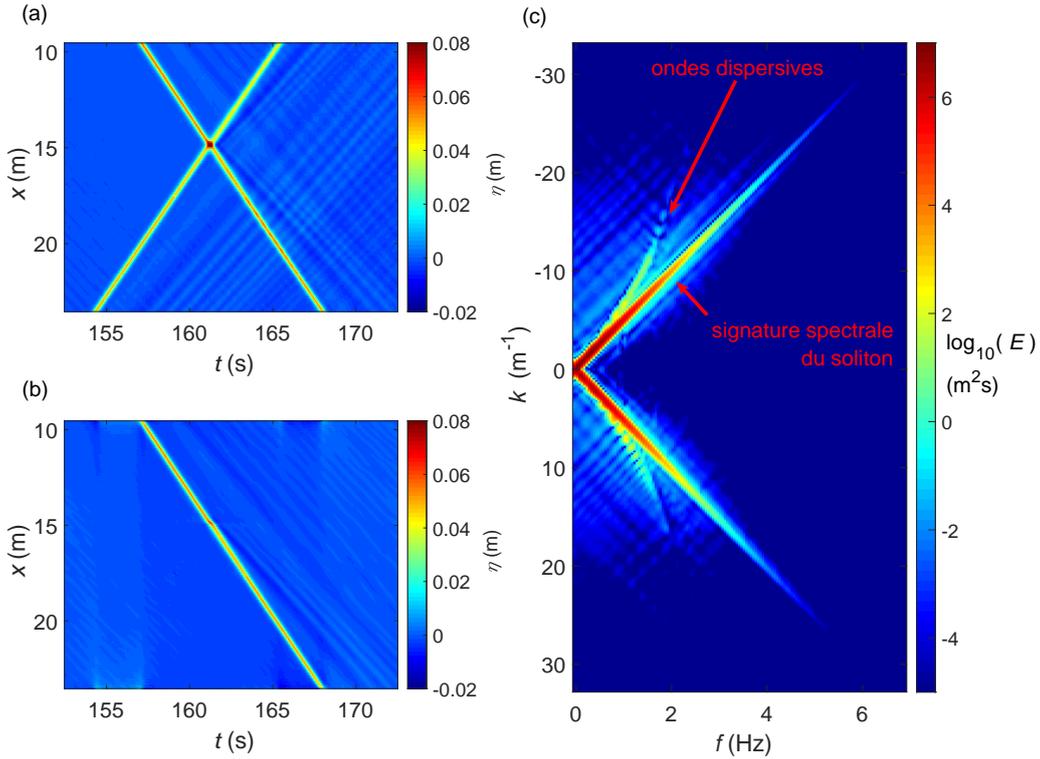


FIGURE 4.7: (a) Diagramme spatio-temporel retraçant l'élévation de la surface libre, sur les 14 m de canal instrumenté, au cours de l'interaction faible de 2 ondes solitaires ($h = 12$ cm). (b) Diagramme spatio-temporel du signal filtré directionnellement afin de ne garder que les ondes s'éloignant du batteur. (c) Spectre (k, f) obtenu en pratiquant la transformée de Fourier en temps et en espace du signal complet. On distingue la signature d'ondes dispersives et de solitons (voir texte).

À l'interaction, l'élévation de surface libre est légèrement supérieure à la somme de l'amplitude des 2 ondes solitaires. Cette interaction est localisée et les 2 ondes retrouvent rapidement leur identité. On observe également la génération d'une onde dispersive à l'interaction.

En prenant la transformée de Fourier en temps et en espace d'un tel signal, on obtient le spectre :

$$E(k, \omega) = \left| \iint \eta(\mathbf{x}, \mathbf{t}) e^{i(\mathbf{kx} - \omega \mathbf{t})} d\mathbf{x} d\mathbf{t} \right|^2 \quad (4.1)$$

L'intégrale dans cette équation est en réalité une source discrète du fait de l'échantillonnage temporel et spatial. On représente ce spectre (en remplaçant ω par $f = \omega/2\pi$) sur la figure 4.7c. Il correspond à une carte spectrale de l'énergie. En ordonnée, on retrouve le nombre d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ et en abscisse la fréquence de chaque mode de Fourier identifié dans le diagramme spatio-temporel. L'échelle de couleur représente l'énergie associée à chaque mode. La relation entre nombre d'onde et fréquence des modes de Fourier qui concentrent l'énergie est éloquent quant à la nature des modes physiques présents dans le canal.

Les modes de Fourier correspondants aux ondes dispersives doivent vérifier la relation de dispersion.

$$2\pi f = \sqrt{gk \tanh(kh)} \quad (4.2)$$

À l'inverse, une onde solitaire se décompose en une infinité de modes de Fourier qui se propagent à la même vitesse c dépendant de l'amplitude a de l'onde solitaire et de la profondeur h selon la relation (1.1).

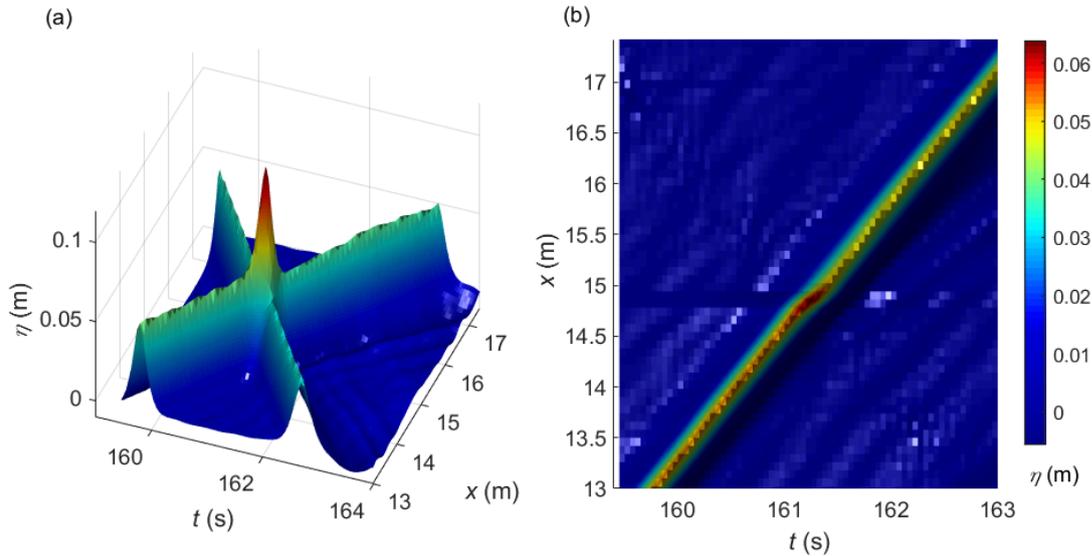


FIGURE 4.8: (a) Vue 3D du même signal qu'à la figure 4.7a. (b) Zone de la figure 4.7b correspondant à l'interaction. On observe la surélévation à l'interaction (a) ainsi que le déphasage occasionné (b).

On peut donc écrire pour chacun de ces modes $c = \frac{\lambda}{T}$ ce qui donne une relation linéaire entre fréquence et nombre d'ondes $k = \frac{2\pi f}{c}$.

Les nombres d'ondes permettent de discriminer les ondes se propageant du batteur vers la paroi ($k < 0$) et celles revenant de la paroi vers le batteur ($k > 0$). On peut reconstruire le diagramme spatio-temporel à l'aide de la transformée de Fourier inverse en ne conservant que les fréquences positives et les nombres d'ondes négatifs. On conserve dans ce cas uniquement les ondes s'éloignant du batteur (figure 4.7b). Sur ce diagramme spatio-temporel filtré directionnellement, on retrouve le second soliton du diagramme 4.7a ainsi qu'une partie de l'onde radiative générée à l'interaction. On distingue également une légère surélévation à l'interaction. Cette dernière correspond au fait que l'interaction des 2 ondes solitaires n'est pas une simple superposition linéaire alors que notre décomposition l'est. Au cours de l'interaction, la vitesse

de ces ondes décroît puis revient à sa valeur initiale en fin d'interaction. On observe alors un transfert de l'énergie cinétique vers l'énergie potentielle qui entraîne une surélévation (discuté par exemple dans la section V de [67]).

La théorie prédit pour ce type d'interaction un léger déphasage de chacune des ondes solitaires. En agrandissant la vue 3 D des diagrammes 4.7a et 4.7b que l'on représente sur la figure 4.8, on peut distinguer cette légère translation de la trajectoire du soliton (de l'ordre de -4 cm).

4.3.2 Précision subpixel et mesure d'ondes transverses : l'expérience de la goutte d'eau

On va chercher dans cette section à détecter des ondes de très faibles amplitudes. Pour ce faire, on perce légèrement le bouchon d'une bouteille que l'on place horizontalement, au-dessus du canal au niveau du batteur. Le lent goutte à goutte qui en résulte tiendra lieu de génération.

À chaque impact de goutte dans le canal, on génère un train d'ondes gravito-capillaires de très faible amplitude qui se propage dans toutes les directions. Les ondes ont une structure 2D complexe du fait de la génération d'ondes circulaires à l'impact et des réflexions multiples sur les parois. La déformation de la surface libre dans le champ des caméras (10 m plus loin) est alors inférieure au mm.

On montre sur la figure 4.9a un diagramme spatio-temporel correspondant à une portion de 10 secondes du signal enregistré par une des caméras (1.92 m de champ). On représente en 4.9b la série temporelle associée à la position $x = 1$ m du diagramme précédent. On est capable de mesurer des déplacements de l'ordre du dixième de millimètre dont la fréquence caractéristique est de l'ordre de 3 Hz. Pour se convaincre que ces déplacements correspondent bien à des ondes à la surface de l'eau, on représente en 4.9c le spectre (k, f) du régime obtenu à l'aide des 7 caméras.

Une part importante de l'énergie se répartit sur la relation de dispersion 4.2 que l'on trace en tirets blancs. Cela prouve que l'on observe bien des ondes de surface. Comme on s'y attendait, une part importante de l'énergie se situe au voisinage de 3 Hz.

L'énergie se répartit également sur d'autres lignes que l'on trace en tirets mixtes. Il s'agit des ondes se propageant transversalement à la direction du canal. En conséquence, les nombres d'ondes "vus" par notre caméra correspondent à une projection des nombres d'ondes réels dans l'axe de la vitre. Par exemple, une onde se propageant exactement perpendiculairement au canal aura ainsi un nombre d'onde de 0 correspondant à une longueur d'onde infinie.

Ces ondes transverses sont la combinaison des modes orthogonaux du canal et d'ondes se propageant dans le sens du canal. En effet, les ondes transverses peuvent facilement faire plusieurs allers-retours dans la largeur du canal et donc interférer. Le vecteur d'onde transverse est discret et s'écrit en fonction de la largeur L du canal.

$$k_y = \frac{\pi n}{L} \quad n \in \mathbb{N} \quad (4.3)$$

Il se forme donc, par une combinaison avec les ondes longitudinales se propageant dans le canal (de nombre d'onde k_x), des ondes obéissant aux n relations de dispersion suivantes :

$$2\pi f = \left(g \left(k_x^2 + \frac{\pi n^2}{L} \right)^{1/2} \tanh \left(\left(k_x^2 + \frac{\pi n^2}{L} \right)^{1/2} h \right) \right)^{1/2} \quad (4.4)$$

Le cas $n = 0$ correspond aux modes purement longitudinaux et les cas $n > 0$ à une combinaison du mode transverse n et de propagation longitudinale. Chacune des lignes est ainsi associée à un

de ces modes. La première d'entre elles coupe l'axe $k = 0$ en $f = 1.2$ Hz qui correspond à une longueur d'onde de 1.1 m. Il s'agit du premier mode transverse (la largeur du canal étant de 55 cm). La seconde coupe cet axe en $f=1.68$ Hz qui correspond à une longueur d'onde 55 cm. Il s'agit du second mode du canal, etc.

Enfin, l'énergie présente au-delà de 3 Hz pour les k positifs est due au repliement spectral. En effet, on a utilisé pour obtenir ce spectre un diagramme spatio-temporel avec un pas en espace de 8 cm afin de ne pas avoir à reconstruire l'information derrière les poteaux. Cela donne une résolution maximum de $k_{max} = \frac{2\pi}{2d_x} = 39.2 \text{ m}^{-1}$ et l'énergie présente pour des valeurs de k supérieures à ce seuil est repliée sur les k positifs.

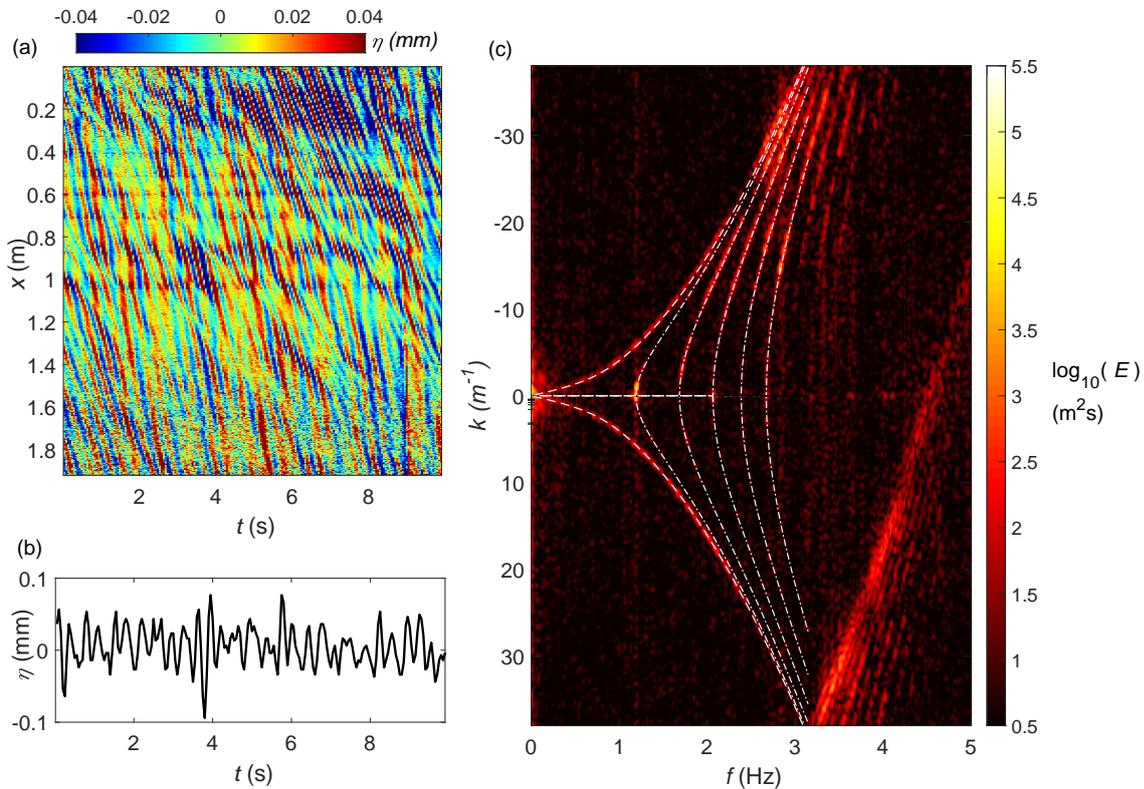


FIGURE 4.9: (a) Diagramme spatio-temporel obtenu pour 1 seule caméra. On a en x un point tout les mm sur 1.92 m et en t un point toutes les 0.05 s pendant 10 s. (b) Série temporelle extraite du diagramme précédent à $x = 1$ m. (c) Spectre (k, f) du régime, obtenu en utilisant les 7 caméras. On trace en tirets la relation de dispersion et en tirets mixtes les relations de dispersion des ondes obtenues par combinaison avec les modes transverse (voir texte).

4.3.3 Bilan sur la mesure

La mesure vidéo développée pour notre étude offre une résolution en temps et en espace qui permet d'analyser finement les déplacements de surface libre y compris dans le cas où ces derniers sont de très faibles amplitudes. À travers une analyse spectrale en espace-temps, on peut identifier la nature des modes présents dans nos régimes et étudier leurs éventuelles interactions.

Ce dispositif nous autorise également à filtrer les ondes suivant la direction dans laquelle elles se propagent ce qui se révélera déterminant dans nos analyses.

Malgré les bons résultats donnés par la mesure, quelques incertitudes subsistent quant à la précision de la mesure des ondes de grandes amplitudes. Il est probable que des effets de retournement du ménisque nuisent à la précision de l'estimation du déplacement vertical. Une estimation quantitative est délicate car elle dépend fortement de l'état de surface de la vitre et de la contamination de la surface de l'eau.

— Chapitre 5 —

Méthode d'inversion des données de diffusion

5.1 Introduction

La méthode d'inversion des données de diffusion ou *Inverse Scattering Transform* est une méthode mathématique qui peut se comprendre comme une généralisation de l'analyse de Fourier. Le principe de l'analyse de Fourier est de décomposer un signal en modes sinusoïdaux que l'on peut ensuite faire évoluer séparément pour reconstruire une solution à tout instant par une superposition linéaire. On schématise ces étapes sur la figure 5.1.

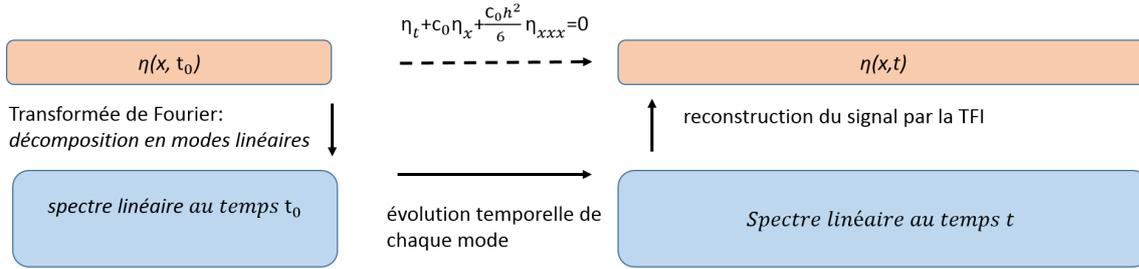


FIGURE 5.1: schéma de principe de la transformée de Fourier (TF).

Les modes sinusoïdaux ne sont cependant des modes du système que pour des ondes linéaires. Cela n'est vérifié que dans la limite des très faibles amplitudes (théorie d'Airy). Lorsque l'évolution est non-linéaire, la décomposition en modes de Fourier n'est plus une constante de l'évolution. Il n'est donc plus possible de construire une solution à tout instant en faisant évoluer séparément chacun des modes d'une décomposition initiale. Dans la limite des faibles non-linéarités le spectre de Fourier reste un puissant outil d'analyse permettant d'observer les déviations de la théorie linéaire, par exemple les transferts d'énergie entre modes sinusoïdaux.

En s'éloignant davantage du cas linéaire, il existe des cas de figure où les ondes observées s'éloignent suffisamment d'un sinus pour qu'il devienne légitime de questionner le sens de cette décomposition. Considérons par exemple l'interaction forte de 2 solitons en eau peu profonde. Dans l'espace de Fourier, chaque soliton se décompose en une infinité de modes sinusoïdaux. Physiquement, 2 modes devraient suffire à décrire le système. De plus, au cours de la dite interaction, cette décomposition évolue en permanence. On peut donc souhaiter l'existence d'une décomposition mathématique en modes 'non-linéaires' qui correspondraient aux modes physiques. Dans le cas où le système est décrit par une équation intégrable, cette méthode existe : c'est l'Inverse Scattering Transform. On en résume les étapes sur la figure 5.2. L'analogie avec la transformée de Fourier est frappante.

La beauté de cette méthode est qu'elle permet de résoudre une équation non-linéaire par une série de 3 étapes linéaires. La première consiste à obtenir le spectre "non-linéaire". Il s'agit de la Direct Scattering Transform (DST). La seconde consiste à faire évoluer chaque mode non-linéaire indépendamment en (x, t) . Enfin, on reconstruit le signal à l'instant t : c'est l'Inverse Scattering Transform (IST). Cette méthode a été déclinée, depuis son invention en 1974 par Gardner, Greene, Kruskal et Miura [24], à l'étude de nombreux systèmes intégrables. On se propose ici de décrire son application à l'équation de Korteweg-de-Vries qui régit l'évolution des ondes faiblement non-linéaires en eau peu profonde. Le problème se pose différemment suivant que l'on considère des conditions frontières périodiques ou l'évolution d'un potentiel sur une ligne infinie. On présentera les grandes étapes mathématiques de cette technique dans les 2 cas. Dans un

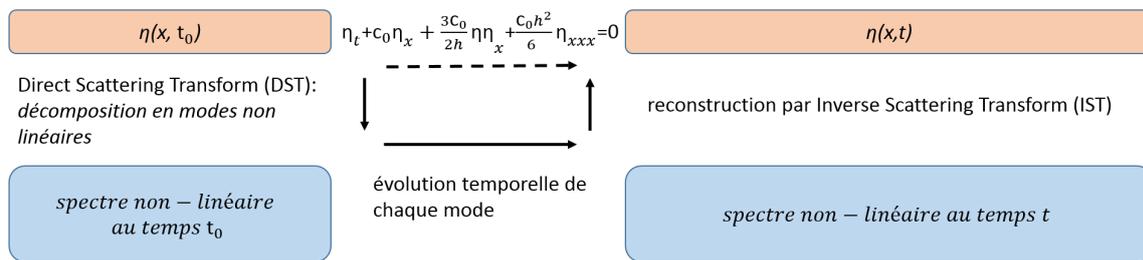


FIGURE 5.2: Schéma de principe de l'Inverse Scattering Transform (IST).

deuxième temps, on détaillera l'algorithme du cas périodique dont on illustrera le déploiement sur quelques signaux types. Enfin, on discutera et comparera l'emploi de ces méthodes pour obtenir la distribution de solitons présents dans une série temporelle. On concentrera ici nos efforts sur le problème de la DST qui consiste à extraire le spectre non-linéaire d'une série temporelle ou spatiale plutôt que sur les problèmes d'évolution et d'inversion des données de diffusion.

5.2 De l'équation de Korteweg-de Vries à un problème aux valeurs propres

On considère la déformée "initiale" la surface libre $\eta(x, t_0)$ à l'instant t_0 ou bien la condition frontière $\eta(x_0, t)$ à la position x_0 dont on souhaite connaître la décomposition en modes non-linéaires.

L'évolution de la déformée de la surface libre dans le temps est donc régie par l'équation dimensionnelle de KdV telle que présentée au chapitre 1 et qui s'écrit :

$$\partial_t \eta + c_0 \partial_x \eta + \frac{3c_0}{2h} \eta \partial_x \eta + \frac{h^2 c_0}{6} \partial_{xxx} \eta = 0 \quad (5.1)$$

où h est la profondeur d'eau au repos, $c_0 = \sqrt{gh}$ la vitesse des ondes en eau peu profonde et $\eta(x, t)$ le déplacement de la surface libre. Cette équation (5.1) décrit évidemment des ondes qui se propagent dans la direction des x positifs.

Pour traiter des problèmes à conditions frontières plutôt qu'initiales l'équation (5.1) doit être retravaillée. Les approximations qui président à cette équation sont, de faibles non linéarités et une faible dispersion, c'est à dire les 2 derniers termes plus faibles que les 2 premiers. Dans l'équation (5.1) on voit que si les non-linéarités sont faibles et que les courbures le sont aussi (faible dispersion) alors on a une équation d'onde linéaire :

$$\partial_t \eta + c_0 \partial_x \eta \simeq 0 \quad (5.2)$$

et donc on peut à l'ordre dominant écrire :

$$\partial_x \eta \simeq -\frac{1}{c_0} \partial_t \eta \quad (5.3)$$

$$\partial_{xxx} \eta \simeq -\frac{1}{c_0^3} \partial_t \eta \quad (5.4)$$

ce qui permet de transformer l'équation (5.1) en

$$\partial_t \eta + c_0 \partial_x \eta - \frac{3}{2} \frac{1}{h} \eta \partial_t \eta - \frac{1}{6} \frac{h^2}{c_0^2} \partial_{ttt} \eta = 0 \quad (5.5)$$

Mathématiquement la forme des 2 équations (5.1) et (5.5) est identique. Pour comprendre et utiliser la théorie de l'IST nous utiliserons la forme dite canonique de KdV qui s'écrit,

$$\partial_t u - 6u \partial_x u + \partial_{xxx} u = 0 \quad (5.6)$$

Pour passer des formes (5.1) et (5.5) à (5.6), il faut effectuer un changement de variables et de fonction.

- pour les problèmes à condition initiale c'est-à-dire pour (5.1) on opère avec

$$x \rightarrow x - c_0 t \quad (5.7)$$

$$t \rightarrow \frac{h^2 c_0}{6} t \quad (5.8)$$

$$\eta \rightarrow \frac{2}{3} h^3 u \quad (5.9)$$

- pour les problèmes à condition frontière c'est-à-dire pour (5.5) on opère avec

$$t \rightarrow t - \frac{x}{c_0} \quad (5.10)$$

$$x \rightarrow \frac{h^2}{6 c_0^3} x \quad (5.11)$$

$$\eta \rightarrow -\frac{2}{3} \frac{h^3}{c_0^2} u \quad (5.12)$$

Il y a une relation très forte entre l'équation de KdV et la théorie spectrale de l'opérateur de Schrödinger,

$$\mathcal{L} = -\partial_{xx} + u \quad (5.13)$$

comme découvert en 1967 par [23]. La première étape de la résolution de ce problème non-linéaire consiste à associer à (5.6) une paire de Lax. Il s'agit de 2 opérateurs multiplicatifs dont \mathcal{L} et un autre \mathcal{P} que l'on doit définir et qui agissent dans un espace de Hilbert différent de l'espace fonctionnel tel que l'équation (5.6) puisse s'écrire comme la relation d'opérateurs :

$$\mathcal{L}_t + \mathcal{L} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L} = 0 \quad (5.14)$$

avec \mathcal{L} auto-adjoint. Pour rappel, si $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire de l'espace de Hilbert H , le fait que \mathcal{L} soit auto-adjoint signifie que :

$$\langle \phi | \mathcal{L} \psi \rangle = \langle \mathcal{L} \phi | \psi \rangle \quad (5.15)$$

On peut alors montrer que s'il existe E et une fonction $\phi(x, t)$ du problème aux valeurs propres suivant

$$\mathcal{L} \phi = E \phi \quad (5.16)$$

alors les valeurs propres E de l'opérateur de Schrödinger \mathcal{L} sont indépendantes du temps

$$\partial_t E = 0 \quad (5.17)$$

et l'évolution temporelle de ϕ est fonction de P de sorte que

$$\partial_t \phi = \mathcal{P} \phi \quad (5.18)$$

Pour l'équation de KdV sous forme canonique (5.6), la paire de Lax est donc [1] :

$$\mathcal{L} = -\partial_{xx} + u \quad (5.19)$$

$$\mathcal{P} = 4\partial_{xxx} - 6u\partial_x - 3\partial_x u \quad (5.20)$$

La DST consiste à trouver les valeurs et fonctions propres de \mathcal{L} à $t = 0$. Chacune de ces valeurs propres correspond à un mode du système. On en compte autant que le système a de degrés de liberté et on les obtient en résolvant (5.16) :

$$\partial_x^2 \phi + [u(x, 0) - \lambda] \phi(x) = 0 \quad (5.21)$$

Ainsi, pour chaque condition initiale $u(x, 0)$ il existe un ensemble de valeurs propres λ et de fonctions propres associées ϕ . Elles suffisent à décrire les modes physiques du système et nous allons voir dans la suite que leur interprétation dépend des conditions aux frontières considérées.

Les propriétés de \mathcal{L} et \mathcal{P} permettent de faire évoluer les fonctions d'onde ϕ et de reconstruire le signal pour tout (x, t) et de résoudre le problème de l'IST. Une description compacte et pédagogique de cette méthode est proposée au chapitre 7 de [12]. Une description plus exhaustive est donnée dans l'ouvrage de Drazin [14].

5.3 La DST sur la ligne infinie

On considère une condition initiale $u_0(x) = u(x, t = 0)$ localisée (à support compact) sur une ligne infinie et on cherche les fonctions et valeurs propres qui lui sont associées par le problème (5.21). La condition initiale u_0 étant localisée, on peut définir 2 types d'état :

- les états liés correspondent à des modes localisés (la limite de ϕ à l'infini vaut 0). Ils forment le spectre discret du problème et correspondent aux solitons. Il s'agit des modes associés à une valeur propre négative telle que

$$E_m = -\kappa_m^2 \quad (5.22)$$

La fonction propre associée ϕ_m est normalisable et l'on peut la choisir de norme unité. Comme u_0 est localisée, pour un x suffisamment grand (5.21) se réduit à :

$$\frac{d\phi_m}{dx^2} - \kappa_m^2 \phi_m(x) = 0 \quad (5.23)$$

Cela donne à l'infini le comportement asymptotique :

$$\phi_m \approx e^{(-\kappa_m x)} \quad (5.24)$$

Le comportement à l'infini de chaque mode lié peut être caractérisé par :

$$C_m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi_m(x) \exp(\kappa_m x) \quad (5.25)$$

Le coefficient C_m sera utile dans le calcul de l'intégrale de Gel'fand-Levitan-Marchenko qui est au cœur du problème d'inversion des données de diffusion.

- les états du continuum correspondent à des fonctions propres ayant un comportement d'onde plane à l'infini. Ces modes sont ceux qui possèdent une valeur propre positive et leurs fonctions propres ne sont pas normalisables puisqu'elles oscillent à l'infini. Pour les états du continuum, on a donc :

$$E = k^2 \quad (5.26)$$

avec en $+\infty$

$$\phi = \exp(-ikx) + R(k) \exp(ikx) \quad (5.27)$$

et en $-\infty$

$$\phi = T(k) \exp(-ikx) \quad (5.28)$$

avec, pour garantir la conservation de l'énergie, l'égalité suivante entre les coefficients de transmission et de réflexion

$$|R^2| + |T^2| = 1 \quad (5.29)$$

Le résultat final de la théorie de l'inverse scattering transform est qu'il suffit de connaître λ , $R(k)$ et C pour construire $u(x, t)$ à l'aide de l'équation intégrale de Gel'fand-Levitan-Marchenko (IST) :

$$u(x) = \frac{dK(x, x)}{dx} \quad (5.30)$$

où K est défini par :

$$K(x, y) + B(x + y) + \int_x^\infty B(z + y)K(x, z) dz = 0 \quad (5.31)$$

et B par :

$$B(\epsilon) = \sum_{m=1}^N C_m^2(t) \exp(-k\epsilon^2) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty R(k, t) \exp(ik\epsilon) dk \quad (5.32)$$

On notera que cette intégrale n'est que rarement calculable, mais l'est systématiquement pour toutes solutions ne comprenant que des solitons. Dans ce repère bougeant à c_0 les solutions type onde plane voyagent dans l'autre direction ce qui complexifie le calcul : $R \neq 0$.

Par la suite, on ne cherchera pas à reconstruire le signal par cette méthode, mais seulement à analyser le spectre (DST). Le problème est donc relativement simple. Il suffit de résoudre numériquement le problème aux valeurs propres (5.21). L'équation 1D (5.21) est discrétisée sur une maille régulière telle que $\phi_i = \phi(i \Delta x) = \phi(x_i)$ avec $i = 1, \dots, N$. Le premier terme de (5.21) sera discrétisé par une différence finie centrée. Ce qui conduit à

$$\frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i}{\Delta x^2} + [u_i - \lambda] \phi_i = 0 \quad (5.33)$$

on note $u_i = u(x_i, t = 0)$. Un réarrangement permet de formuler un problème aux valeurs propres matriciel,

$$\phi_{i+1} + (-2 + \Delta x^2 u_i) \phi_i + \phi_{i-1} = \Delta x^2 \lambda \phi_i \quad (5.34)$$

C'est une équation implicite pour ϕ_i . On lui adjoint les conditions suivantes :

$$\phi_1 = 0 \quad (5.35)$$

$$\phi_N = 0 \quad (5.36)$$

L'écriture matricielle est :

$$\mathcal{A} \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_i \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_2 & 1 & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & 1 & a_{N-1} \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

$$a_i = -2 + \Delta x^2 u_i \quad (5.39)$$

La matrice que l'on note \mathcal{A} est tridiagonale et $\Lambda = \Delta x^2 \lambda$. Ce type de système se résout très facilement.

Dans le problème aux valeurs propres (5.37) "sortent" autant de valeurs propres que la dimension du système. Il y a un tri à faire. Celui-ci se fait sur la base des propriétés suivantes :

- les solitons correspondent aux valeurs propres négatives (voir ci-dessus) ;
- la plus grande valeur propre, en valeur absolue, doit être inférieure au maximum des valeurs positives de la condition initiale $u_0(x)$.

5.4 La DST pour une condition périodique

On considère ici une condition initiale périodique pour (5.6) c'est à dire telle que,

$$u(x, t = 0) = u(x + L, t = 0) \quad (5.40)$$

Cette situation est notablement plus complexe théoriquement que le cas précédent. Les livres de [39; 1] et les notes de cours de Boris Dubrovin (https://people.sissa.it/~dubrovin/bd_courses.html) constituent des synthèses exhaustives de la DST pour conditions périodiques. Des synthèses opérationnelles sont explicitées dans [7]. Afin de faciliter le parallèle entre ce paragraphe et ce qu'en a écrit Osborne [41], un des pionniers de l'utilisation pratique de la DST périodique, on part de l'équation (5.21) écrite comme,

$$\partial_x^2 \phi + [\lambda \eta(x, 0) + k^2] \phi(x) = 0 \quad \text{pour } x \in [x_0, x_0 + L] \quad (5.41)$$

avec $k^2 = E$. Le paramètre λ se détermine suivant l'alternative suivante,

- pour une DST à condition initiale : $\lambda = \frac{3}{2h^3}$ (analyse de série spatiale)
- pour une DST à condition “limite” : $\lambda = \frac{3c_0^2}{2h^3}$ (analyse de série temporelle)

La DST sur la ligne infinie décrite précédemment, qui consistait à définir chaque mode par son comportement à l’infini, est ici caduque. Chaque mode propre appartient à la famille des ondes cnoïdales et se définit par un module, une amplitude et une longueur d’onde. L’équation différentielle (5.41) est aussi appelée équation de Hill [6]. Elle a une grande importance dans la théorie de la mécanique quantique.

Afin d’obtenir le spectre de (5.41) associé à une condition initiale périodique, il faut faire appel à la théorie de Floquet pour les systèmes d’équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants périodiques dont on résumera ici les principaux concepts en référant le lecteur à [37; 6] pour plus de détails. La théorie des fonctions complexes entières sur surface de Riemann est aussi un ingrédient indispensable pour la reconstruction des solutions par IST et en particulier pour les formuler en termes de fonctions hyper-elliptiques [39; 1].

L’équation linéaire (5.41) se met sous la forme matricielle suivante :

$$\partial_x \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

$$A(x, E) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(x) & 0 \end{bmatrix} \quad (5.43)$$

$$q(x, E) = \lambda \eta(x, 0) + E \quad (5.44)$$

où évidemment par (5.40), $q(x)$ est L -périodique et où le point représente la dérivée par rapport à x . Soit $\phi(x)$ une solution de l’équation différentielle du second ordre (5.41) alors la conjuguée ϕ^* est aussi une solution qui de plus est linéairement indépendante de ϕ . On peut donc construire une **matrice fondamentale** $\Phi(x)$ dont les colonnes sont constituées de 2 solutions indépendantes. Cela donne :

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \phi & \phi^* \\ \dot{\phi} & \dot{\phi}^* \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

On va choisir de “normaliser” cette matrice solution par sa valeur en un x_0 de la façon suivante :

$$\Phi(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i k & -i k \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

Le déterminant de $\Phi(x)$, solution de (5.42), est indépendant de x . Cela est une conséquence du théorème de Liouville,

$$\det \Phi(x) = \det \Phi(x_0) e^{\int_{x_0}^x \text{tr} A(s) ds} \quad (5.47)$$

où $\text{tr} A = 0$ dans le cas de (5.42) ce qui donne bien,

$$\det \Phi(x) = \det \Phi(x_0) = -2 i k \quad (5.48)$$

Le principe de superposition nous dit que toute autre matrice solution $S(x)$ du système différentiel linéaire n’est autre qu’une combinaison linéaire des solutions fondamentales et donc qu’il existe une matrice C , **constante et inversible**, telle $S(x) = C \Phi(x)$

Puisque la matrice A est L -périodique, $\Phi(x + L)$ est également une matrice solution. Alors il existe une matrice M inversible telle que,

$$\Phi(x + L) = M \Phi(x) \quad (5.49)$$

M est appelée **matrice de monodromie**, c'est la matrice de transfert de la matrice solution en x à la matrice solution en $x + L$. Le théorème de Floquet [6] nous indique par ailleurs que,

$$\Phi(x + L) = \Phi(x) \Phi^{-1}(x_0) \Phi(x_0 + L) \quad (5.50)$$

en combinant (5.49) et (5.50) on en déduit que,

$$\Phi^{-1}(x) M \Phi(x) = \Phi^{-1}(x_0) \Phi(x_0 + L) \quad (5.51)$$

dit autrement que M est similaire à $\Phi^{-1}(x_0) \Phi(x_0 + L)$. Ces 2 matrices ont donc les mêmes valeurs propres. Ce qui montre au passage que toutes matrices de monodromie ont le même ensemble de valeurs propres [6]. Cette propriété est extrêmement importante. Elle indique que quel que soit la manière de construire une matrice de monodromie celle-ci aura les mêmes valeurs propres que toutes les autres.

A partir de (5.45) et (5.52) on voit que $\Phi^{-1}(x_0) \Phi(x_0 + L)$ et M sont de la forme

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

où $a = a_R + i a_I$ et $b = b_R + i b_I$ sont des nombres complexes. Puisque le déterminant de $\Phi(x)$ est invariant avec x alors par (5.49) le déterminant de M doit être tel que

$$\det M = |a|^2 - |b|^2 = 1 \quad (5.53)$$

Les valeurs propres σ de M sont les zéros de

$$\sigma^2 - 2 a_R \sigma + 1 = 0 \quad (5.54)$$

avec évidemment $a_R = \frac{1}{2} \text{tr} M$. Cette demi-trace est appelée discriminant de Floquet et les σ les multiplicateurs de Floquet. On peut dire que :

1. si $|a_R| > 1$ alors les 2 valeurs propres sont réelles et il y a une valeur propre $\sigma > 1$. Par conséquent les fonctions propres solutions de (5.41) ne sont pas bornées en x .
2. si $|a_R| \leq 1$ alors les 2 valeurs propres sont complexes conjuguées avec $|\sigma| = 1$. Les fonctions propres solutions de (5.41) sont bornées en x .
3. si $|a_R| = 1$ alors les 2 valeurs propres sont réelles et $\sigma = \pm 1$.

Ces dernières conclusions permettent de définir le **spectre principal** associé au problème (5.41) à partir du calcul de la trace de la matrice de monodromie en fonction de E . Le spectre principal est défini par la série de nombres réels E_j avec $1 \leq j < 2N + 1$ (N étant le nombre de degrés de liberté du système) tel que :

$$|a_R(E_j)| = 1 \quad (5.55)$$

Le calcul de cette trace divise l'axe réel E des valeurs propres en bandes, où $|a_R(E_j)| \leq 1$ est vérifiée, et "gaps" où $|a_R(E_j)| \leq 1$ n'est pas vérifiée. Ces bandes et "gaps" sont donc séparés par une série de valeurs E_j telles que $\text{tr}(M(E_j)) = \pm 2$ (voir figure 5.3). On sait par (5.17) que ce spectre ne varie pas avec le "temps" t .

Le **spectre auxiliaire** est la série de nombres réels μ_j avec $1 \leq j < N$ tels que

$$a_I(\mu_j) + b_I(\mu_j) = 0 \quad (5.56)$$

Ce qui veut dire que, compte tenu de (5.53), on a :

$$a_R^2(\mu_j) = 1 + b_R^2 > 1 \quad (5.57)$$

et donc que le spectre auxiliaire est situé dans les “gaps”.

On définit aussi les signes σ_j du spectre par

$$\sigma_j = \text{sgn}(b_R) \quad (5.58)$$

Il définit le module, l’amplitude et la longueur d’onde de chaque mode. Le **module** pour chaque mode j est défini par [42] :

$$m(E_j) = \frac{E_{2j+1} - E_{2j}}{E_{2j+1} - E_{2j-1}} \quad (5.59)$$

Le module m_j permet de classer les modes en différentes catégories. Si $m > 0.990$ on considérera que le mode s’apparente à un soliton. Le choix de 0.990 est arbitraire, mais est conforté par des simulations de [42] illustrant que le comportement d’un tel mode est très proche de celui d’un soliton en termes de vitesse de propagation et de dynamique d’interaction avec d’autres modes. Si $m \ll 1$ on est physiquement en présence d’une onde dispersive ou radiation. Pour une condition initiale de très faible amplitude, on aura uniquement des modes radiatifs et on peut démontrer que la PIST tend vers la transformée de Fourier (une onde cnoïdale de module nul se réduisant à une onde sinusoïdale). Il existe une troisième catégorie généralement qualifiée de spectre intermédiaire qui désigne les modes de module compris entre ces 2 catégories.

Afin de définir l’amplitude des solitons, il est nécessaire de définir le **niveau de référence** sur lequel ils se propagent et qui est différent du niveau moyen. Le niveau de référence se définit à partir de [42] :

$$E_{ref} = E_{2p+1} \quad (5.60)$$

où p est le dernier mode ayant un module $m(E_p) \geq 0.990$. On obtient alors :

$$h_{ref} = -\frac{E_{ref}}{\lambda} \quad (5.61)$$

On peut ainsi définir l’amplitude de ces modes solitoniques comme [42] :

$$a_j = \frac{2}{\lambda} (E_{ref} - E_{2j}) \quad (5.62)$$

Pour les autres modes, c’est-à-dire qui s’apparentent à des ondes dispersives et cnoïdales, on définit l’amplitude a_d [42] comme :

$$a_d = \frac{1}{2\lambda} (E_{2j+1} - E_{2j}) \quad (5.63)$$

et un nombre d’onde associé par

$$k_d = 2\pi \frac{d}{L} \quad (5.64)$$

Cette approche est éprouvée mais la théorie reste incomplète au sens où le niveau de référence est fixé par un choix arbitraire. Ainsi deux modes quasi-identiques de module 0.9910 et 0.9890 seront analysés de manière très différente. En particulier, cela impactera le nombre de solitons trouvé ainsi que la position du niveau de référence et donc l’amplitude de tous les autres solitons.

On utilisera par la suite beaucoup les informations portées par le spectre principal. Le spectre auxiliaire porte l'information de la phase de chaque mode et revêt son importance si l'on cherche à reconstruire le signal à partir du spectre. Il indique la forme du mode en fonction des interactions qu'il encourt. Ce spectre auxiliaire varie avec x et les $\mu_j(x)$ sont des fonctions hyper-elliptiques assez difficiles à obtenir. Des approches numériques existent cependant et une fois les spectres déterminés, étant donné qu'ils tiennent déjà compte des interactions avec les autres modes, on peut reconstruire la solution $\eta(x, t)$ par la somme suivante :

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\lambda} \left(2 \sum_{j=1}^N \mu_j(x, t) - \sum_{j=1}^{2N+1} E_j \right) \quad (5.65)$$

La figure 5.3 [48] synthétise l'ensemble des propriétés de la DST et de l'IST. A partir d'une série temporelle ou spatiale (a) on cherche la trace de la matrice de monodromie associée (a) qui est une constante de l'évolution. Les E_j tels que $\text{tr}(M(E_j)) = \pm 2$ découpent l'axe des E en bandes et "gaps" et définissent les modules et amplitudes des différents modes présents dans le système. C'est le spectre principal. Les fonctions hyper-elliptiques $\mu_j(x, 0)$ sont calculées à partir des variations du coefficient $M_{12}(x, E)$ de la matrice de monodromie. Elles sont bornées par les bandes du spectre principal. Ces fonctions hyper-elliptiques tiennent compte des interactions et leur forme n'est physique que dans les cas simples où ces interactions sont négligeables (5.17). On peut ensuite reconstruire le signal en sommant les $\mu_j(x, 0)$ à l'aide de l'équation (5.65).

On peut noter qu'il existe une approche alternative aux fonctions hyper-elliptiques. Il s'agit des fonctions Theta [39; 1]. Cette approche permet de calculer séparément chaque mode, dont on accède à la forme physique, et ses interactions avec chacun des autres modes. On somme ensuite linéairement les modes et les termes d'interactions. Cette technique pourrait permettre de définir des filtres sur certaines parties du spectre et d'estimer l'importance des interactions entre chaque mode mais est associée à une approche mathématique plus complexe.

5.5 Mise en forme numérique de la PIST

Dans ce paragraphe, on décrira brièvement l'algorithme mis en place pour mener à bien la DST et PIST. Essentiellement, nous reprenons la méthode décrite par Osborne [41]. L'objectif de cet algorithme est de calculer le spectre principal à partir d'une série temporelle donnée en calculant la matrice de monodromie qui lui est associée puis en cherchant les E_j qui satisfont à la relation (5.55).

Considérons donc une série temporelle $\eta(x_0, t)$ de durée T mesurée à une abscisse x_0 comportant N échantillons donc à un pas de temps $\Delta t = \frac{T}{N}$. Le fait de choisir une série temporelle plutôt que spatiale (voir section 5.2) implique seulement de redéfinir λ comme $-c^2 \frac{3}{2h^3}$. A des fins de comparaison avec la littérature on choisira pour illustrer nos propos un sinus d'amplitude 1.281 cm, de longueur d'onde 3 m se propageant par une profondeur de 5 cm. Ce sinus, une fois adimensionné, est celui considéré par Zabusky et Kruskal [64] qui les premiers proposèrent une décomposition en modes solitoniques. Ce sont également les paramètres utilisés par Osborne dans ses articles de 1986 [42] et de 1994 [41]. On utilisera cet exemple pour valider notre code.

La première étape consiste à choisir la gamme des valeurs propres E dans laquelle nous mènerons la recherche du spectre principal. On peut démontrer [41] que si la série temporelle est composée de N points, alors il existe $N/2$ modes qui composent cette série. On peut borner le domaine des E sur lequel se répartissent ces modes. Ainsi, on a E_{max} qui dépend de la fréquence

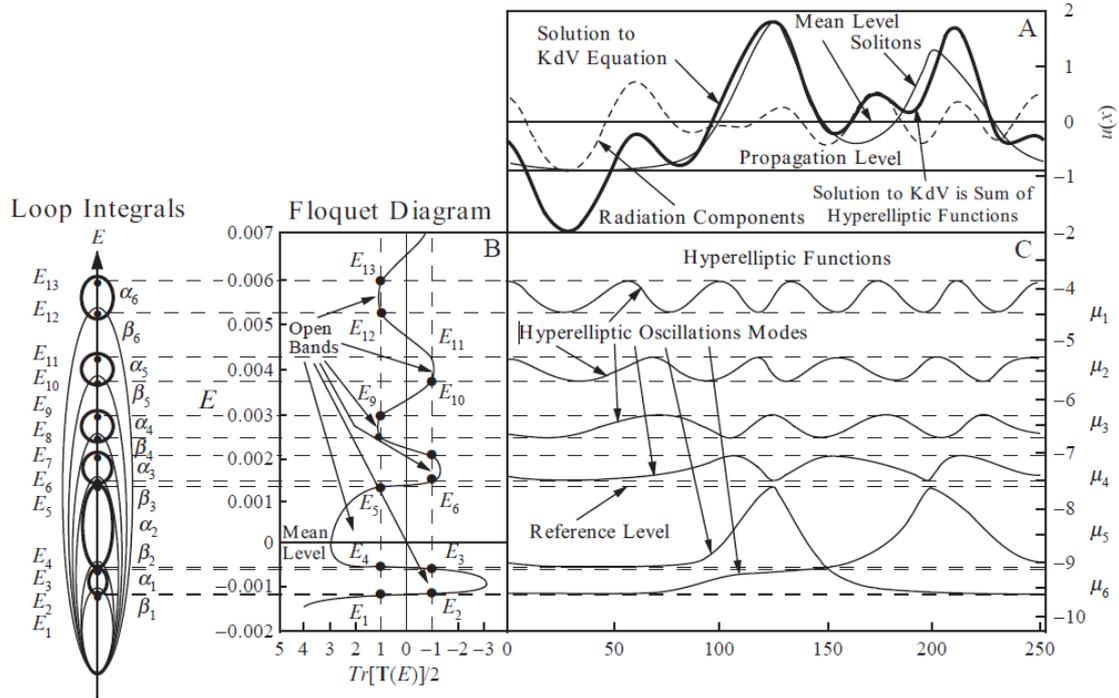


FIGURE 5.3: Représentation spectrale typique d'une série spatiale solution de l'équation de KdV (tiré de [48]). (A) : une solution de KdV ; (B) : la trace de la matrice de monodromie comme une fonction de $E = k^2$. Elle possède 6 bandes qui correspondent à 6 degrés de liberté dans le spectre. Les 2 premiers modes (en dessous du niveau de référence) sont des solitons. Les autres sont des ondes cnoïdales de module inférieur à 0.99 ; (C) : les 6 fonctions hyperelliptiques correspondant à chaque mode. La superposition avec (5.65) de ces modes donne la solution exacte à KdV montrée en (A). Afin de pouvoir représenter l'ensemble de la trace de la matrice de monodromie, celle-ci est tracée linéairement entre -2 et 2 . En dehors de cette bande, on trace son logarithme.

d'échantillonnage [42] comme suit :

$$E_{max} = E_{Nyquist} = (k_{Nyquist}/2)^2 = (\pi/\Delta t)^2 \quad (5.66)$$

La valeur minimale E_{min} est indexée sur l'amplitude maximale de la série temporelle considérée. C'est cette amplitude maximale qui délimite le plus grand soliton qu'on puisse avoir dans la série. On rappelle que cette amplitude est définie par rapport au niveau de référence comme : $a_k = \frac{2}{\lambda}(E_{ref} - E_{2j})$. Ainsi le plus petit E_j du spectre, souvent négatif, ne peut être plus petit que [42] :

$$E_{min} = -\lambda(\eta_{max} - \eta_{mean}) \quad (5.67)$$

Dans nos applications, on cherche à déterminer la distribution de solitons présents dans une série temporelle. On est donc principalement intéressé par les modes dont le module m est supérieur à 0.99. On limitera donc le plus souvent notre recherche à la gamme :

$$[-\lambda(\eta_{max} - \eta_{mean}); 2\lambda(\eta_{min} - \eta_{mean})] \quad (5.68)$$

On verra que la partition initiale de cette gamme influe peu sur le résultat final puisqu'elle est redéfinie par la suite pour encadrer au mieux les points d'intérêt. Par défaut, on choisira un pas sur la ligne des valeurs propres à $\Delta E = \frac{E_{max} - E_{min}}{200}$

La seconde étape consiste à calculer la matrice de monodromie M pour chacun des E de notre partition. Cela est mené à bien en utilisant la méthode développée par Osborne [41]. L'idée principale est d'effectuer un développement de Taylor des fonctions propres afin d'exprimer $\Phi(t + \Delta t)$ en fonction de $\Phi(t)$ puis de proche en proche d'exprimer $\Phi(t_0 + T)$ (T la longueur de la série temporelle) en fonction de $\Phi(t_0)$. Cette approche repose sur l'écriture (5.42) en système différentiel du 1er ordre de l'équation de Schrödinger dont le vecteur solution est,

$$\begin{bmatrix} \Phi(t, E) \\ \Phi_t(t, E) \end{bmatrix} = \exp \left\{ \int_{t_0}^t A(s) ds \right\} \begin{bmatrix} \Phi(t_0, E) \\ \Phi_t(t_0, E) \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Pour le potentiel $\lambda\eta$ découpé en N partitions et numériquement constant par morceaux on a,

$$\begin{bmatrix} \Phi(t_n + \Delta t, E) \\ \Phi_t(t_n + \Delta t, E) \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \Phi(t_n, E) \\ \Phi_t(t_n, E) \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

$$T(t_n) = \exp \{ A(t_n) \Delta t \} \quad (5.71)$$

La matrice $T(t_n)$ translate les fonctions propres de t_n à $t_n + \Delta t$. Compte tenu de la forme de la matrice A , le calcul de son exponentielle donne la matrice T :

$$T(t_n, E) = \begin{bmatrix} \cos(\kappa\Delta t) & \frac{1}{\kappa} \sin(\kappa\Delta t) \\ \kappa \sin(\kappa\Delta t) & \cos(\kappa\Delta t) \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

$$\kappa = \sqrt{q(t_n, E)} \quad (5.73)$$

et on obtient alors $M(E, t_0)$ comme un produit de matrices $T(t_n)$ pour chaque pas de temps :

$$M = \prod_{n=N-1}^0 T(t_n, E) \quad (5.74)$$

On remarquera l'ordre du produit matriciel.

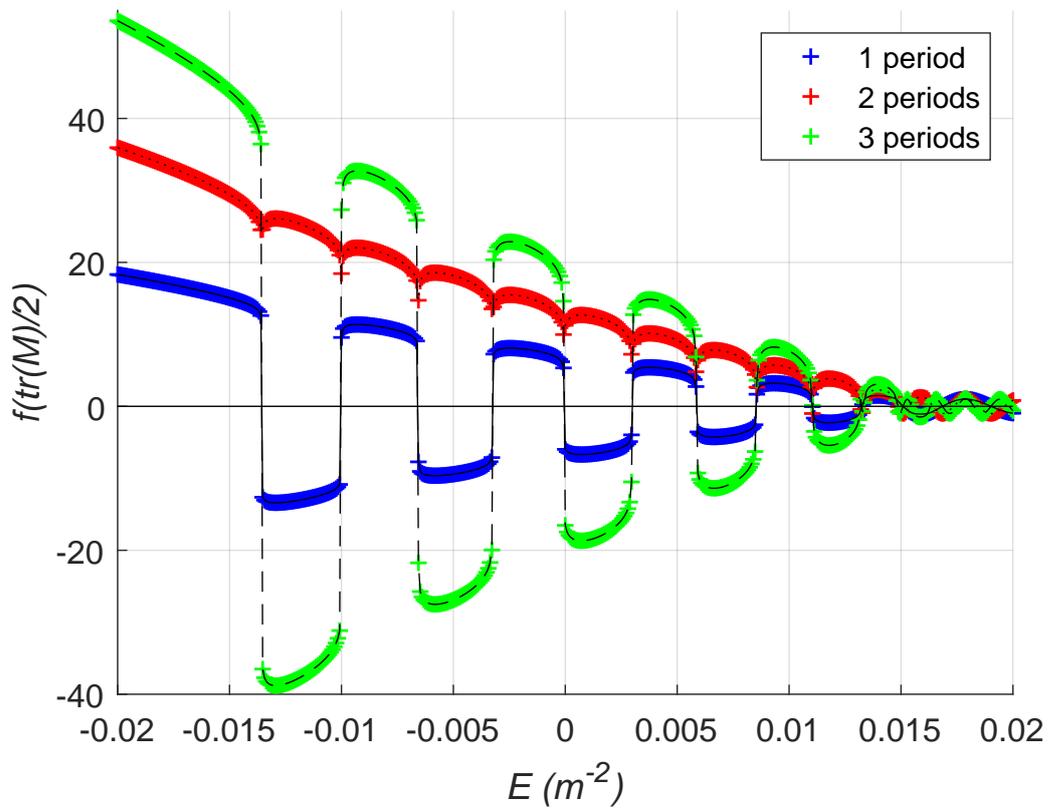


FIGURE 5.4: Trace de la matrice de monodromie $M(x_0, E)$ associée à une série contenant 1, 2 et 3 périodes d'un sinus de longueur d'onde 300 cm et d'amplitude 1.281cm se propageant par 5 cm de fond. On trace $\frac{\text{tr}(M)}{2}$ de façon linéaire entre -1 et 1 et de manière logarithmique en dehors de cet intervalle de façon à pouvoir représenter l'ensemble du signal aisément.

La troisième étape est de trouver tous les E_j tel que $\text{tr}(M(E_j, t_0)) = \pm 2$. Cela est d'autant plus difficile que ceux-ci sont proches. Une série temporelle comportant 2 solitons identiques possède 4 E_j au même endroit ce qui rend la recherche compliquée. Afin d'illustrer cela, on montre sur la figure 5.4 la trace de la matrice de monodromie associée à 1, 2 ou 3 périodes du sinus défini plus haut. Partant du principe que le contenu solitonique de chaque période est identique, on sait que si la trace de la matrice de monodromie associée à un signal d'une période passe par zéro une fois entre E_i et $E_i + \Delta E$, la trace de la matrice de monodromie associée à 2 périodes passera 2 fois par zéro dans ce même intervalle et 3 fois pour la trace associée à une série temporelle constituée de 3 périodes. On constate qu'il n'est pas possible de distinguer les 2 passages par 0 pour le signal à 2 périodes pas plus que les 3 passages par 0 pour celui à 3 périodes. On touche là toute la difficulté de détection des zéros de la matrice de monodromie. Si on analyse une série temporelle sans indice préalable sur le contenu solitonique, il est complexe de choisir une partition des E qui garantissent de n'avoir qu'un zéro sur $[E_i; E_i + \Delta E]$.

Osborne [41; 48] propose une méthode que nous ne sommes pas parvenu à mettre en place pour réussir à encadrer chaque E_j séparément. Nous avons donc développé une méthode analogue. L'idée est de définir une fonction $S(E)$ qui compte le nombre de modes à trouver entre E_{min} et E . Cette fonction permet de déterminer combien de 0 la trace de la matrice de monodromie possède dans l'intervalle $[E; E + \Delta E]$ puis de raffiner la recherche si plusieurs modes se trouvent confondus dans le même intervalle jusqu'à obtenir un encadrement de chaque valeur propre indépendamment. La construction de cette fonction repose sur la variation de M en fonction de x .

On représente sur la figure 5.5 les variations des coefficients et de la trace de M en fonction de x et de E pour un état initial correspondant à 3 périodes de notre sinus de référence. La première observation est de constater la remarquable invariance de la trace de M en fonction de x . C'est cette invariance qui implique l'invariance du spectre principal (E_j tel que $\frac{\text{tr}(M(E_j))}{2} = \pm 1$). Les coefficients M_{11} et M_{22} varient en revanche en fonction de x . Osborne [41] observe que le nombre de fois que $M_{11}(E)$ change de signe entre x_0 et $x_0 + L$ correspond au nombre de modes entre E_{min} et E . Sur la figure on semble confirmer ce comportement jusqu'à un certain point (probablement le début du domaine radiatif, au voisinage de $E = 0.015$) où M_{11} semble arrêter de varier selon x . Cette divergence de résultat nous a empêchés d'appliquer la méthode d'Osborne, nous poussant à développer la méthode suivante.

On part du principe que si 2 modes sont identiques ce qui est le cas le plus défavorable alors ils ne sont pas confondus sur l'axe des t dans la série initiale. En effet, s'ils étaient confondus, se propageant à la même vitesse, ils formeraient un même mode. Fort de ce raisonnement, après avoir calculé la trace de la matrice de monodromie entre t_0 et $t_0 + T$, on calcule la trace de la matrice de transfert des fonctions propres entre $t_0 + dt$ et $t_0 + T$ défini à partir de (5.74) comme,

$$\prod_{n=N-1}^1 T(t_n, E) \quad (5.75)$$

qui n'est autre qu'une matrice de monodromie du signal considéré comme de période $T - dt$. Cela permet de déterminer si certains modes ne sont plus présents dans la série temporelle amputée de son premier point. Cette éventuelle disparition de mode correspond à la disparition d'un changement de signe de la trace. En effet rappelons que chaque passage à zéro de la trace correspond à un mode comme illustré sur la figure 5.3. On réitère entre $t_0 + 2dt$ et $t_0 + T$ avec

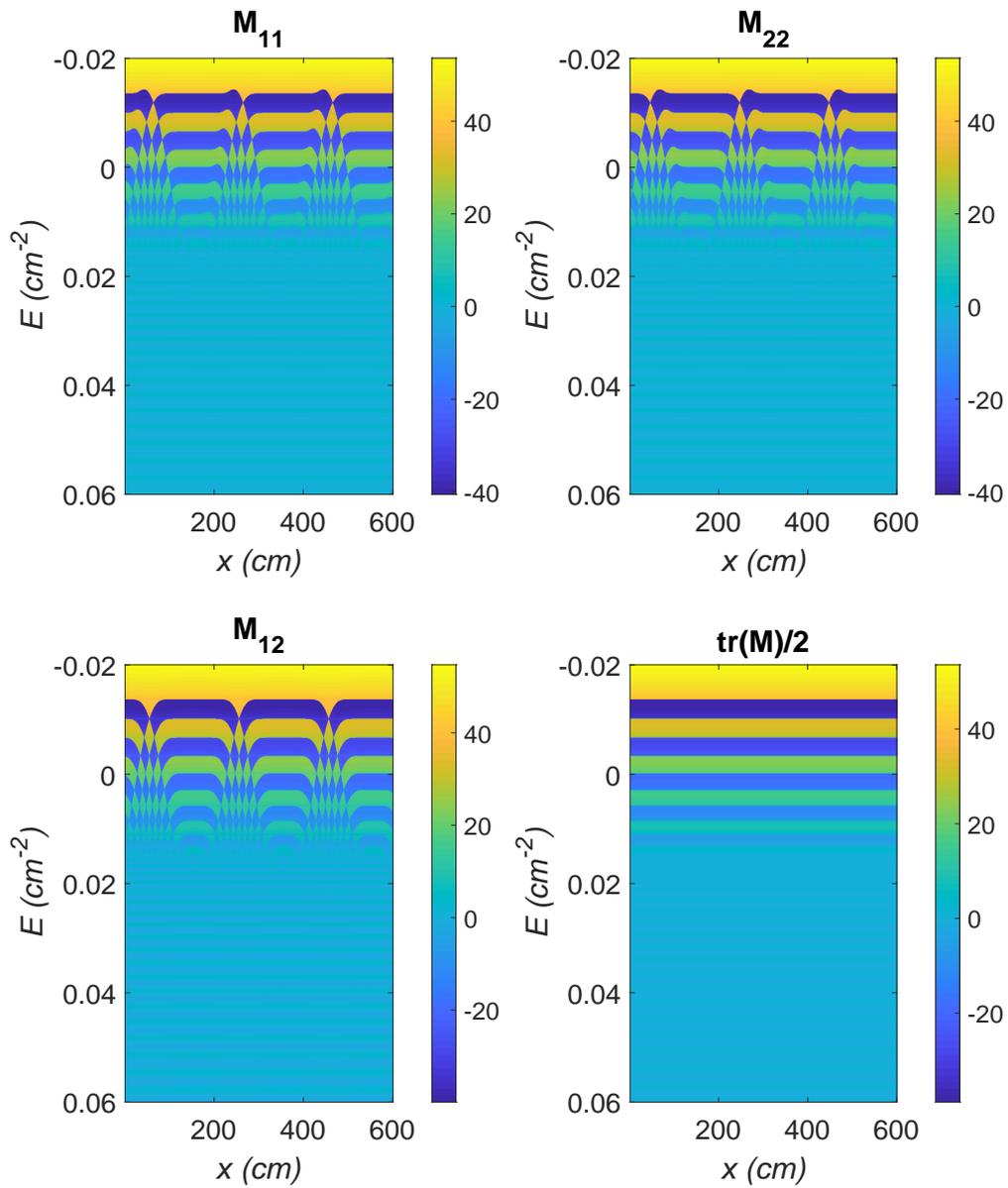


FIGURE 5.5: Variations spatiales des différents coefficients et de la trace de la matrice de monodromie associée à 3 périodes du sinus précédent. On constate notamment l'invariance de la trace avec x . Les échelles de couleurs correspondent au logarithme de la valeur absolue des coefficients.

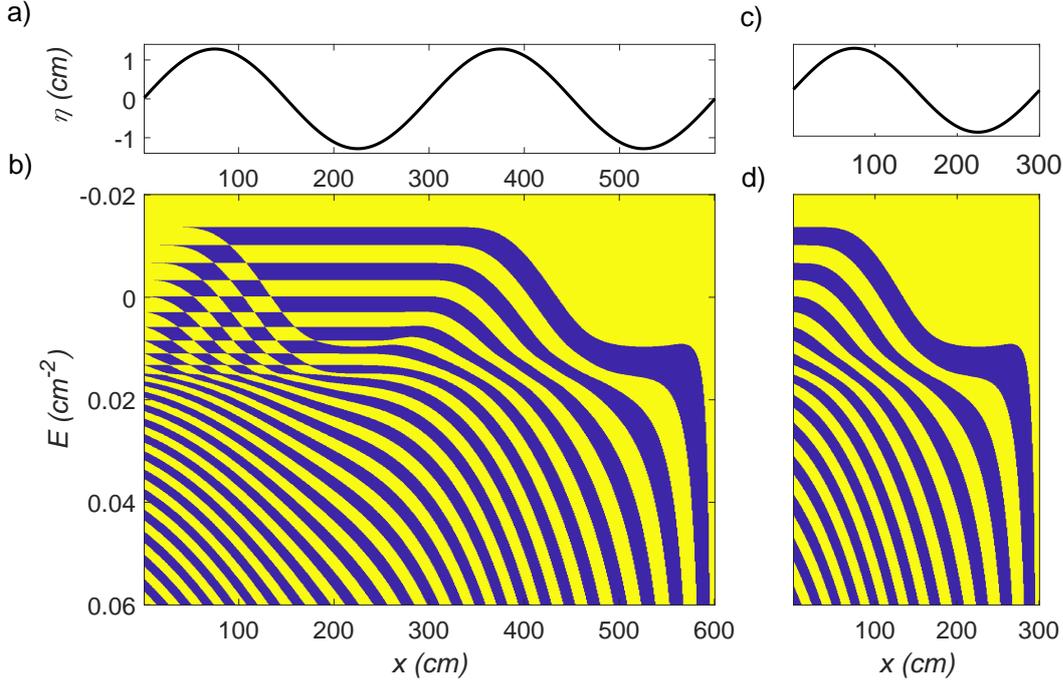


FIGURE 5.6: Signe de la trace des matrices M_S en fonction de x et de E (cf. texte) correspondant aux conditions initiales montrées au-dessus.

la trace de,

$$\prod_{n=N-1}^2 T(t_n, E) \quad (5.76)$$

et ainsi de suite jusqu'à calculer la trace de la matrice de transfert entre $T + t_0 - dt$ et $t_0 + T$.

On définit M_S , fonction des 2 variables E et T , qui vaut la trace de la matrice de transfert associée à η entre t et $t_0 + T$ c'est à dire à une série temporelle considérée comme de période $T - (t - t_0)$. En observant l'évolution de $M_S(E, t)$ avec t , on peut décompter le nombre de modes qu'il reste dans la série à compter d'un t donné. En particulier, on peut décompter le nombre de modes entre E_{min} et E en comptant le nombre de fois où $M_S(E)$ change de signe entre t_0 et $t_0 + T$.

La figure 5.6 illustre le comportement de $M_S(x, E)$ pour des conditions initiales de 1 et 2 périodes du sinus de référence. Le nombre de fois où M_S change de signe, pour un E donné, correspond au nombre de modes à chercher entre E_{min} et E . La comparaison entre (b) et (d) met en évidence qu'il n'est ainsi pas possible de manquer une valeur propre même dans le cas où deux d'entre elles seraient très proches sur l'axe des E . Par exemple, en $E = -0.013$, qui correspond au plus grand soliton contenu dans chaque période, on observe en (b) 2 changements de signes à l'abscisse temporelle des maximums de la série temporelle et en (d) un seul.

On peut définir de manière analogue à Osborne [41] la fonction S qui compte le nombre de fois que $M_S(E, x)$ change de signe entre x_0 et $x_0 + L$ (ou entre t_0 et $t_0 + T$).

$$S(x_n, E) = \sum_{i=0}^n \frac{|\text{sgn}(M_s(x_{i+1}, E)) - \text{sgn}(M_s(x_i, E))|}{2} \quad (5.77)$$

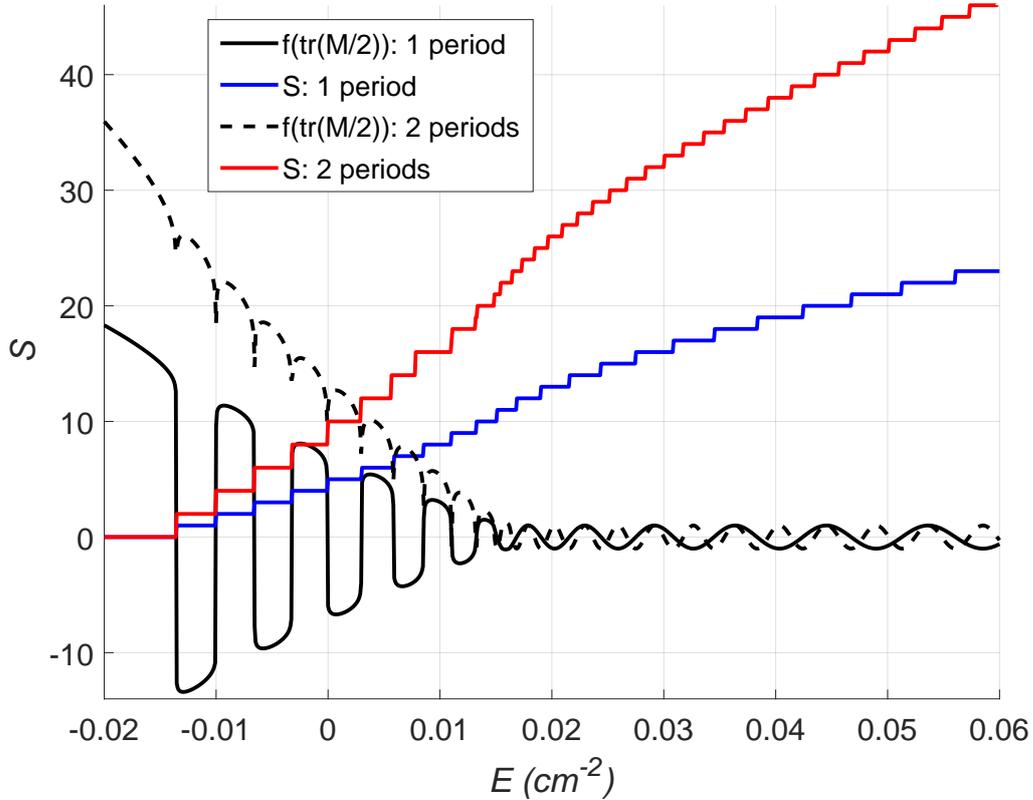


FIGURE 5.7: Trace de la matrice de monodromie pour une (trait plein) ou deux (tirets) périodes du sinus précédent. Respectivement en bleu et rouge, sont tracées les fonctions S correspondantes.

Cette fonction S décompte le nombre de modes entre E_{min} et E , on la trace pour les 2 conditions précédentes sur la figure 5.7. On voit que les fonctions S se comportent bien en s'incrémentant aux endroits où l'on s'attendait à trouver les E_k tel que $f(\text{tr}(M(E_k)/2)) = 0$. On observe que la fonction S correspondant à 2 périodes du sinus s'incrémente de 2 lorsque sa jumelle s'incrémente de 1. On observe également que ces incréments sont corrélés avec les changements de signe de la trace de M . Elle permet également de s'assurer que l'on trouve 2 modes quasi-identiques pour une condition initiale dupliée.

La quatrième et dernière étape consiste à encadrer chaque E_j à la précision numérique souhaitée. On choisit ici 10^{-12} s^{-2} . Ce niveau de précision est nécessaire afin d'être précis sur le module de chaque mode qui résulte de différences. On utilise la même stratégie que Osborne [41] en recherchant d'abord les E_k tels $\text{tr}(M(E_k)/2) = 0$. Cela fait, on cherche les μ_j tel que $M_{12}(\mu_j) = 0$ en utilisant la propriété qu'on doit avoir un μ_j entre chaque E_k . Enfin, on cherche les E_j qui forment le spectre principal comme les solutions à $\text{tr}(M(E_j)/2) = \pm 1$ en utilisant la propriété qu'il existe un E_j tel que $\text{tr}(M(E_j)/2) = 1$ et un autre tel que $\text{tr}(M(E_j)/2) = -1$ entre chaque μ_j . On finit donc par obtenir l'ensemble des E_j avec la certitude de n'en avoir manqué aucun (figure 5.8). Cela nous permet grâce aux formules (5.59) et (5.62) à (5.64) de déterminer le spectre de la PIST (figure 5.9) qui est décrit par le module, l'amplitude et la fréquence correspondant à chaque mode.

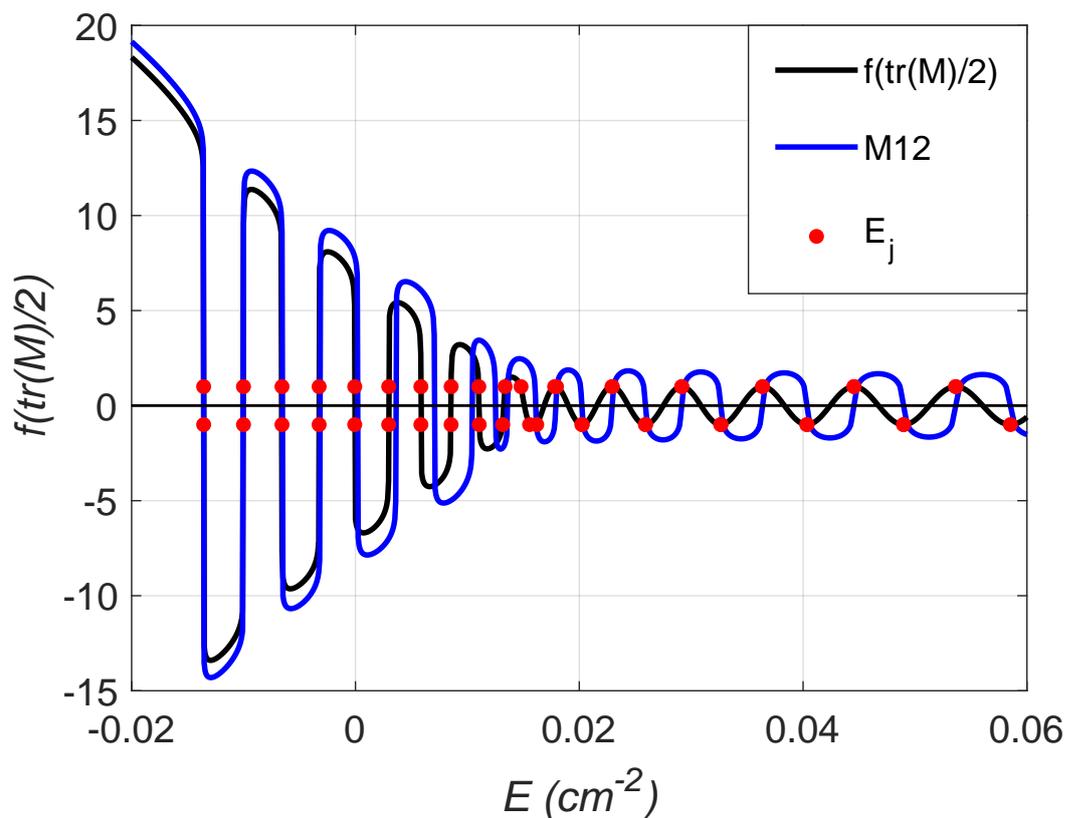


FIGURE 5.8: Spectre principal E_j tel que $\frac{\text{tr}(M(E_j))}{2} = \pm 1$ qui composent le spectre principal. La trace ne variant pas dans le temps ou l'espace, ces E_j sont des constantes de l'évolution. Les μ_j correspondent aux points tels que $M_{12}(\mu_j) = 0$. Leurs positions évoluent avec le temps dans les bandes où la trace de la matrice de monodromie sort de l'intervalle $[-2, 2]$. Les $\mu_j(x)$ sont des fonctions hyperelliptiques. Elles forment le spectre auxiliaire et portent l'information de la phase de chaque mode.

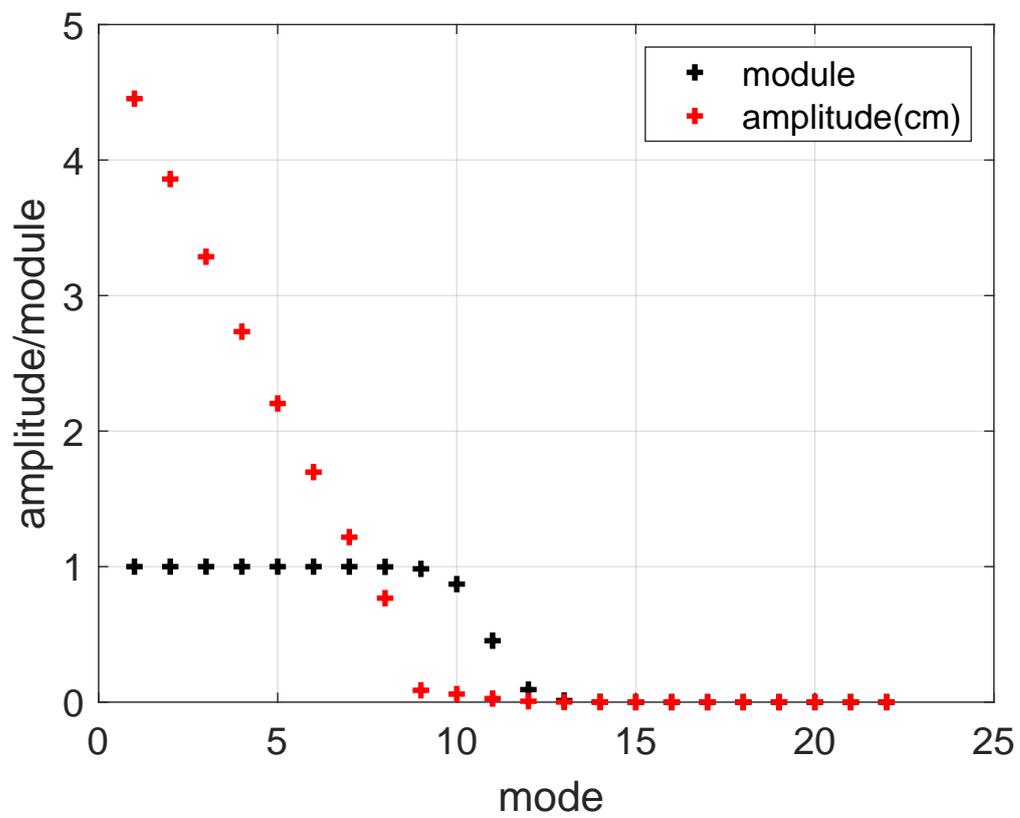


FIGURE 5.9: Amplitudes et le modules de chaque mode solitonique ou dispersif trouvé par la DST correspondant à la figure 5.8.

5.6 Tests de la PIST

Cette section a pour objectif de tester le fonctionnement de la DST/PIST dans plusieurs cas de figure afin d'en comprendre les mécanismes. Le premier cas test est celui du soliton seul et est illustré par la figure 5.10. Sur cette figure, on trouve la trace de la matrice de monodromie (b) associée à la série temporelle (a). Chaque passage à zéro de cette fonction correspond à un degré de liberté. Ceux-ci sont divisés en 2 catégories par le niveau de référence spectrale E_{ref} indiqué en pointillés noirs qui indique le dernier mode de module $m > 0.990$. On peut retrouver le niveau de référence sur lequel se propagent les solitons par la formule (5.61). Sans surprise, ce niveau est à zéro. En noir on a tracé la fonction de comptage S définie plus haut. On observe que celle-ci s'incrémente de 1 à chaque fois que la trace passe par zéro. Cette fonction est obtenue en cumulant les changements de signe de la matrice M_S dont on affiche le signe en (c). On rappelle que $M_S(E, t)$ fait référence à la valeur de la trace de la matrice de monodromie en E associée à une série temporelle qui est une portion prise de t à $t_0 + T$ de celle initialement considérée entre t_0 et $t_0 + T$. Ici, on voit qu'on n'a un changement de signe pour un E inférieur à $E_{ref} = 0$ que jusqu'à $t = 7$ s qui correspond à l'abscisse temporelle du soliton. Enfin en (d) on affiche le spectre de la PIST. Le module et l'amplitude de chaque mode sont calculés grâce aux E_j de (b). Le spectre compte ici un unique mode solitonique d'amplitude 1.03 cm ce qui correspond à notre série temporelle. Les modes radiatifs ont des amplitudes négligeables. Cette information se retrouve en (b) où l'on constate que les E_{2j} et E_{2j+1} tendent à être confondus.

La figure 5.11 permet de mieux illustrer le concept de niveau de référence en comparant les résultats de l'analyse DST de la série temporelle précédente à une série analogue centrée sur sa moyenne. On constate que les traces des matrices de monodromie sont similaires à un décalage près sur l'axe des E . Le niveaux de référence spectrale (ici $E_{ref} = E_3$) se trouve décalé. En utilisant la relation (1.45), on peut tracer en (c) le niveau de référence et constater qu'il est au pied du soliton.

Le second cas test est celui de l'interaction forte de 2 solitons. Sur les figures 5.12, 5.13 et 5.14 on réalise la DST à 3 instants d'une interaction forte entre 2 solitons. On constate en (b) que les traces des matrices de monodromie de ces 3 séries temporelles sont identiques. Deux passages à zéros de cette fonction à gauche de E_{ref} attestent de la présence de 2 solitons. On constate que l'amplitude et le module de chacun de ces modes sont identiques à chacun des 3 instants ce qui nous rassure sur la pertinence physique des modes de la DST. Enfin, la comparaison des matrices M_S permet de constater le renseignement que cette matrice apporte sur l'abscisse temporelle des modes. En se plaçant à $E = -15\text{s}^{-2}$ et à $E = -5\text{s}^{-2}$ on constate que le changement de signe correspondant à l'abscisse du grand soliton a lieu après puis avant celui correspondant au petit soliton.

Les figures 5.15 et 5.16 permettent de comprendre comment l'algorithme réagit en présence de 2 solitons d'amplitudes identiques. En $E_s = -5.395$, la fonction $M_S(E_s, t)$ passe de 0 à 2 changements de signe attestant de la présence de 2 solitons identiques. La fonction S est donc incrémentée de 2 entre $E_S - \Delta E$ et E_S . L'algorithme va opérer des divisions successives de cet intervalle jusqu'à trouver un encadrement de chacun des passages à zéros à la précision numérique voulue (ici 10^{-12}s^{-2}). On trace en (b) le zoom de ces passages à zéros. Dans le premier cas l'espacement entre les solitons correspond à la longueur de la demi série temporelle $\frac{T}{2}$. On constate que les E_2 et E_3 tendent à être confondus. Cela explique que sur le spectre (d) on trouve un mode 1 de module faible et d'amplitude nulle tandis que le second correspond à une fonction hyper-elliptique de fréquence double et de module 1. Dans le second cas, cette périodicité n'existe pas et E_2 et E_3 sont différents. On a donc les 2 premiers modes de modules

1 et d'amplitudes 1.03 cm. Cet exemple comparatif est opportun pour souligner une difficulté inhérente au comptage des solitons à partir du spectre de la DST. En effet, si l'on compte le mode 2 de la figure 5.15 comme 2 solitons à cause de sa fréquence double, alors le spectre de la figure 5.16 devrait compter 3 solitons ce qui est démenti par la série temporelle. La juste manière de compter les solitons est de compter un soliton pour chaque mode avant le niveau de référence. En effet, la fréquence indiquée dans le spectre de la DST est celle de la fonction hyper-elliptique μ_j associée au mode j . Cette fonction prend en compte les interactions entre modes. Elle n'a la forme d'un mode physique que dans la limite où ces interactions sont négligeables.

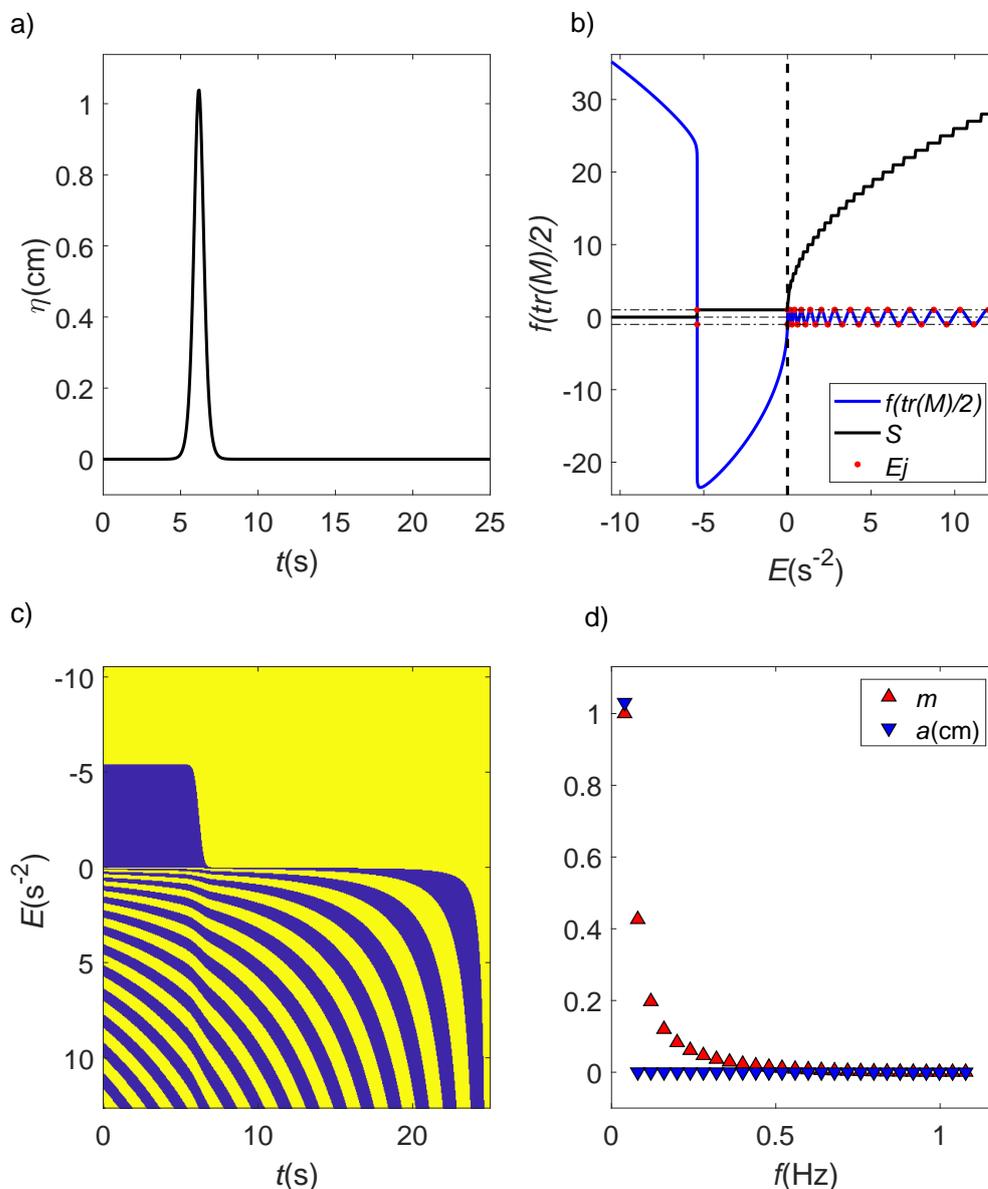


FIGURE 5.10: Etapes de la PIST pour une série temporelle contenant 1 soliton d'amplitude 1.04 cm par une profondeur de 11.4 cm (a). On montre (c) la matrice $\text{sign}(M_S)$ associée à cette série. Le premier changement de signe se trouve à $E = -5.39$. Pour cette valeur, on observe un seul changement de signe sur l'axe des abscisses à $t = 6$ s (qui correspond à l'abscisse temporelle du soliton en (a)). Cette information se retrouve en (b) où on montre l'évolution de la trace de la matrice de monodromie en fonction de E et la fonction S . On constate que la fonction S s'incrmente de 1 à $E = -5.39$ s^{-2} puis à chaque fois que la trace change de signe permettant de prévoir la localisation des E_j tels que $M(E_j) = \pm 1$. En (d) on affiche le module et l'amplitude de chaque mode calculés à partir de ces E_j . On trouve 1 seul soliton d'amplitude 1.04 cm puis un grand nombre d'autres modes de modules inférieurs et d'amplitudes quasi-nulles information que l'on retrouve dans des E_{2j} presque confondu aux E_{2j+1} en (b)). On marque le niveau de référence par une ligne pointillée noire en (b) correspondant au dernier mode de module $m > 0.99$ ou soliton. Sans surprise, il est ici à 0

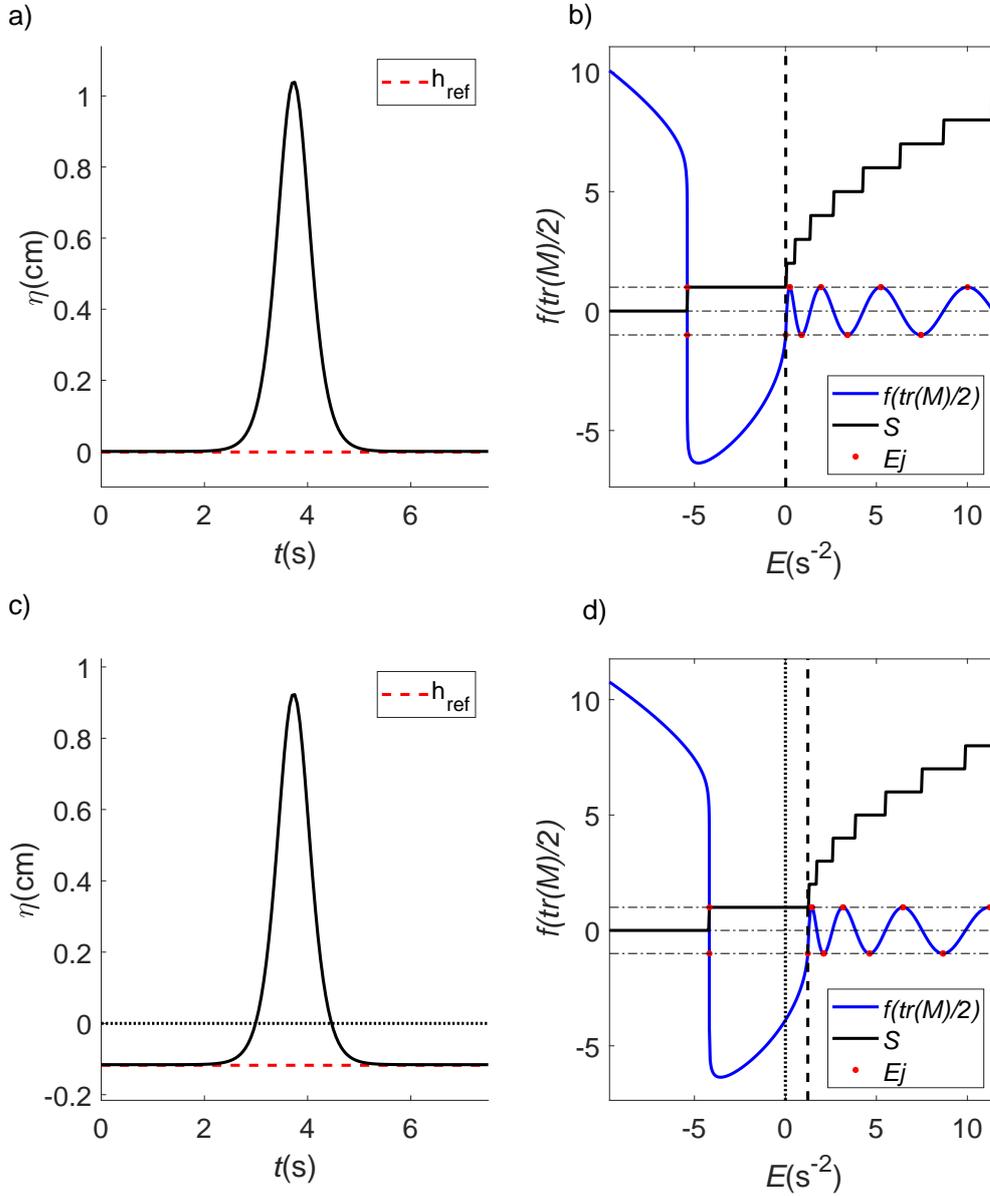


FIGURE 5.11: Influence du changement du niveau zéro d'une série temporelle sur la trace de la matrice. Ici en prenant le niveau 0 au pied du soliton (a), le niveau de référence (dernier E_{2j+1} correspondant à un module $m_j > 0.99$) se trouve à $E = 0$ (b). Si au contraire on prend comme niveau 0 le niveau moyen de la série temporelle (c) le niveau de référence est décalé de $-\lambda E$ (d). La trace conserve la même forme d'un cas à l'autre à ce décalage près. C'est cet argument qui a poussé Osborne à définir ainsi le niveau de référence sur lequel se propagent les solitons

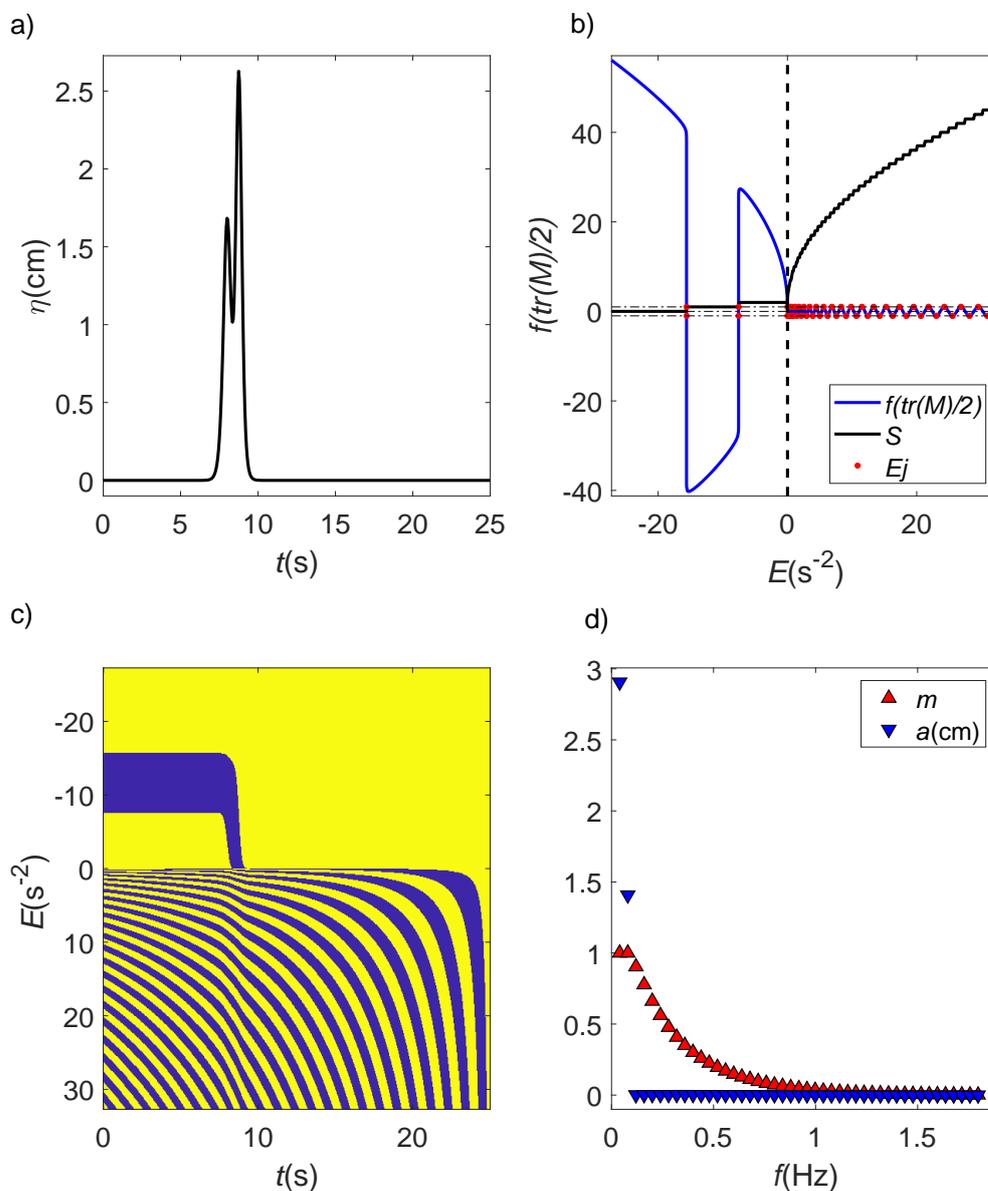


FIGURE 5.12: PIST pour une série temporelle (a) contenant 2 solitons au début d'une interaction forte. Elle est à comparer aux deux suivantes. En (b) on constate que la trace de la matrice de monodromie passe 2 fois par zéro avant le niveau de référence ce qui correspond aux 2 modes solitoniques que l'on retrouve en (d). La matrice $\text{sign}(M_S)$ (c) nous renseigne sur la construction de la fonction S . On peut notamment vérifier que les changements de signes à des E inférieurs à E_{ref} correspondent aux abscisses temporelles des solitons.

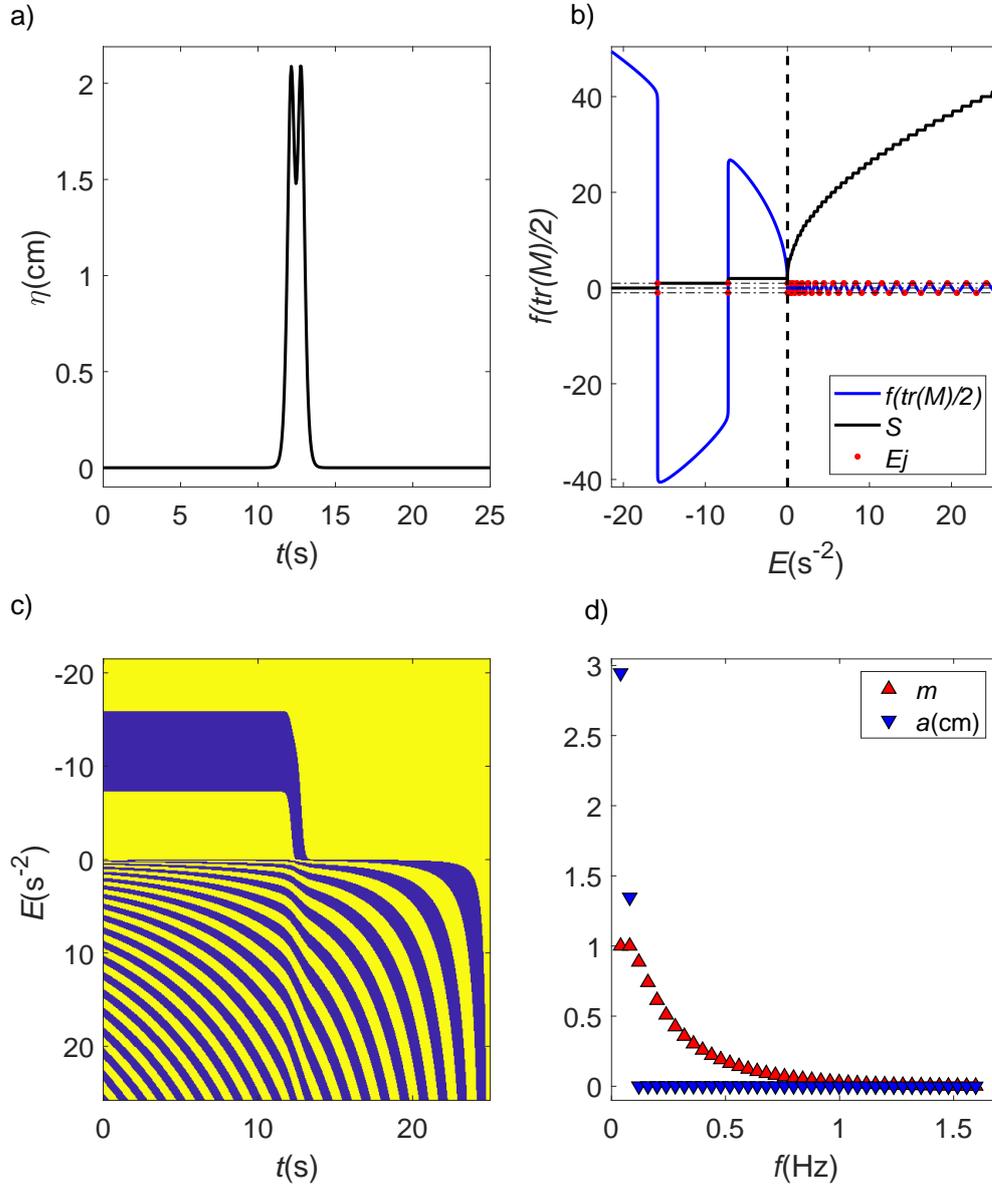


FIGURE 5.13: PIST pour une série temporelle (a) contenant 2 solitons au milieu d'une interaction forte. Elle est à comparer aux deux suivantes. En (b) on constate que la trace de la matrice de monodromie passe 2 fois par zéros avant le niveau de référence ce qui correspond aux 2 modes solitoniques que l'on retrouve en (d). La matrice $sign(M_S)$ (c) nous renseigne sur la construction de la fonction S . On peut notamment vérifier que les changements de signes à des E inférieurs à E_{ref} correspondent aux abscisses temporelles des solitons.

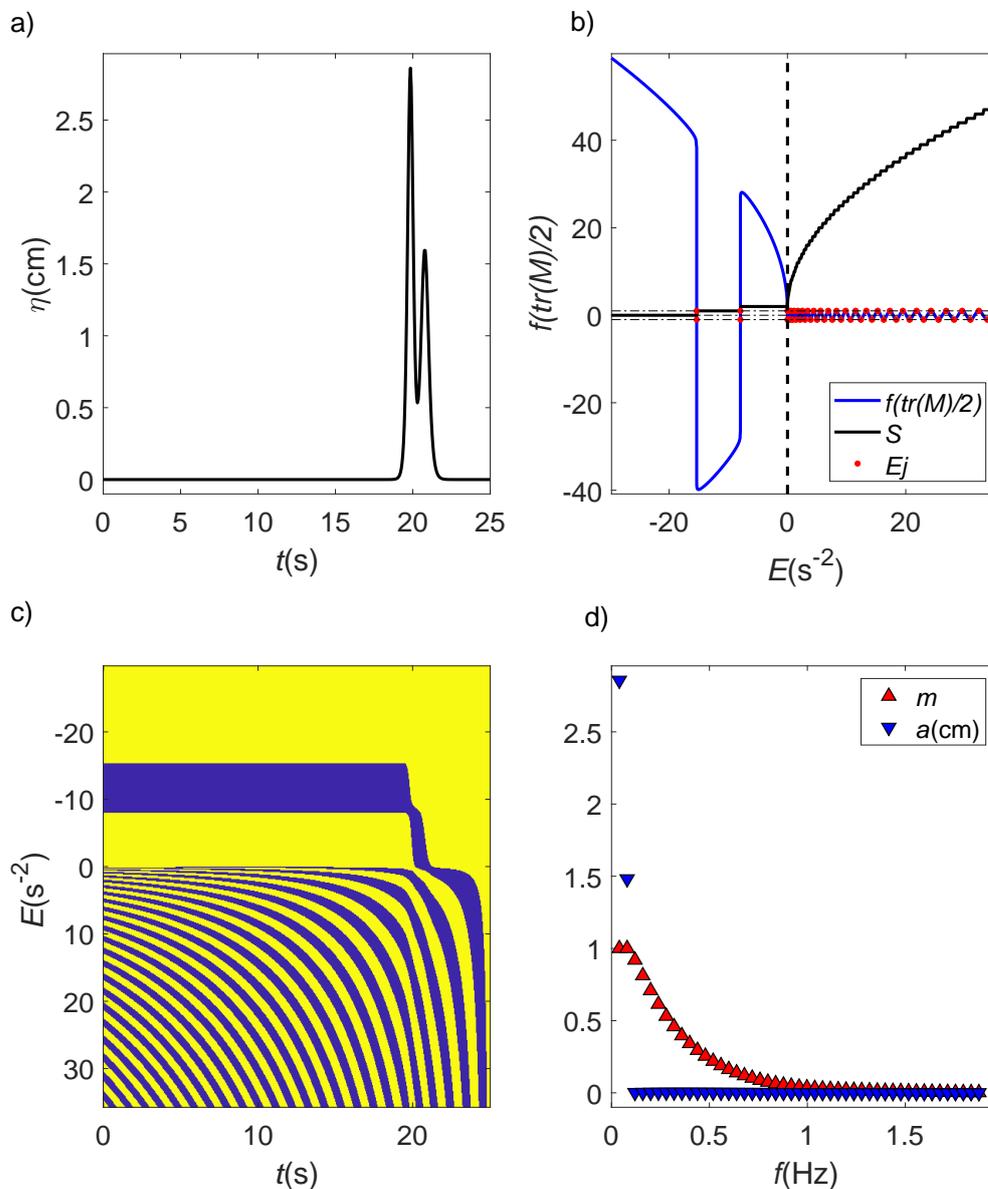


FIGURE 5.14: Cette figure illustre le mécanisme de la PIST pour une série temporelle (a) contenant 2 solitons à la fin d'une interaction forte. Elle est à comparer aux deux suivantes. En (b) on constate que la trace de la matrice de monodromie passe 2 fois par zéros avant le niveau de référence ce qui correspond aux 2 modes solitoniques que l'on retrouve en (d). La matrice $\text{sign}(M_S)$ (c) nous renseigne sur la construction de la fonction S . On peut notamment vérifier que les changements de signes à des E inférieurs à E_{ref} correspondent aux abscisses temporelles des solitons.

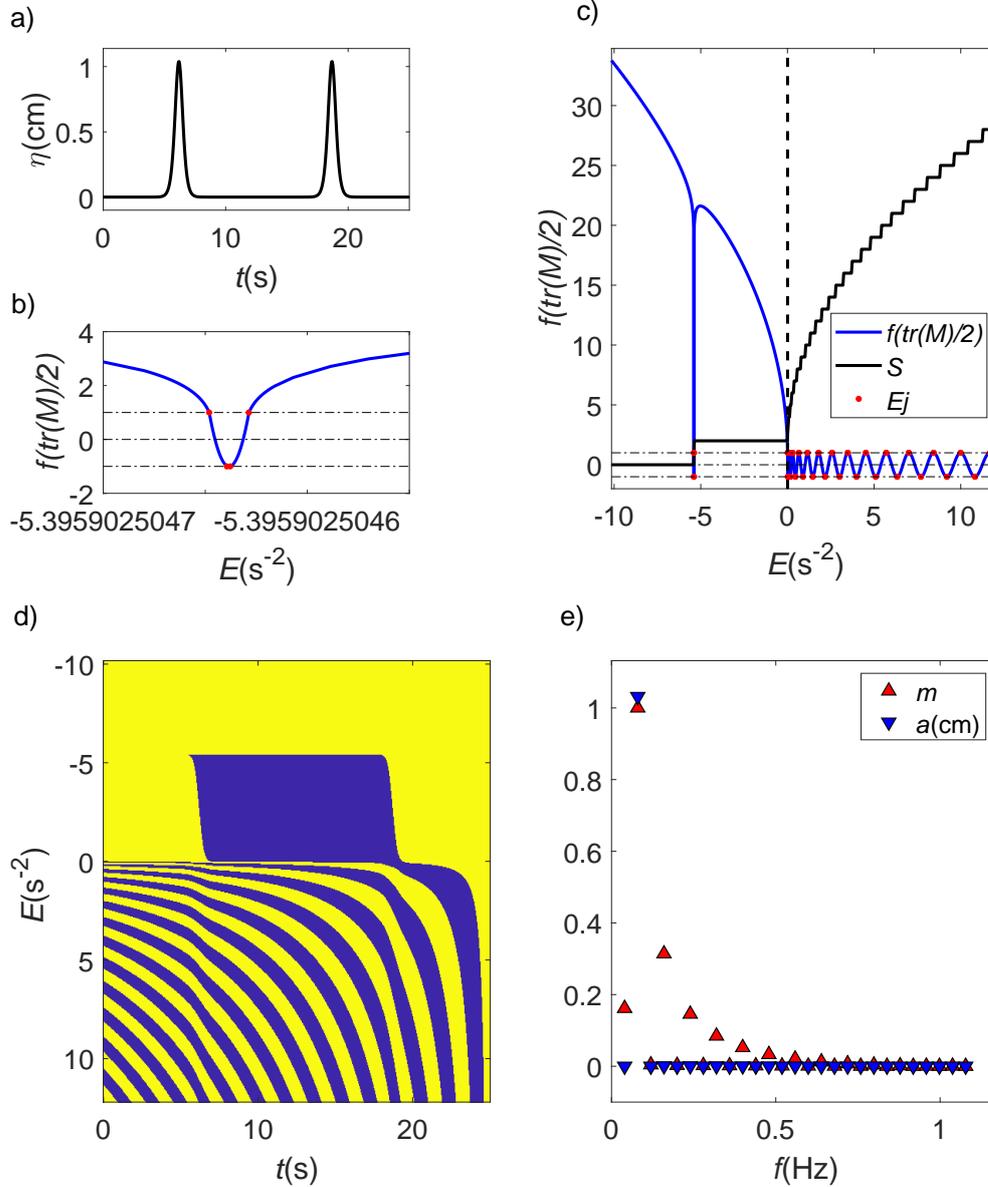


FIGURE 5.15: Cette figure illustre le mécanisme de la PIST pour une série temporelle contenant 2 solitons d'amplitude égale, à $T/2$ secondes l'un de l'autre (a). L'analyse montre que la PIST trouve alors un seul mode d'amplitude significative qui correspond à un mode cnoïdale de fréquence égale à $\frac{2}{T}$ et de module 1 (e). On montre (d) la matrice $\text{sign}(M_S)$ associée à cette série qui montre un changement de signe à l'abscisse temporelle de chaque soliton en (a). Cette information se retrouve en (c) qui montre l'évolution de la trace de la matrice de monodromie en fonction de E et la fonction S . On constate que la fonction S s'incrémente de 2 pour signifier que 2 modes quasi-identiques existent. Le zoom (b) permet de constater que E_2 et E_3 sont quasi-identiques impliquant un module du premier mode qui tend vers 0 et un calcul de son amplitude avec la formule (1.35)

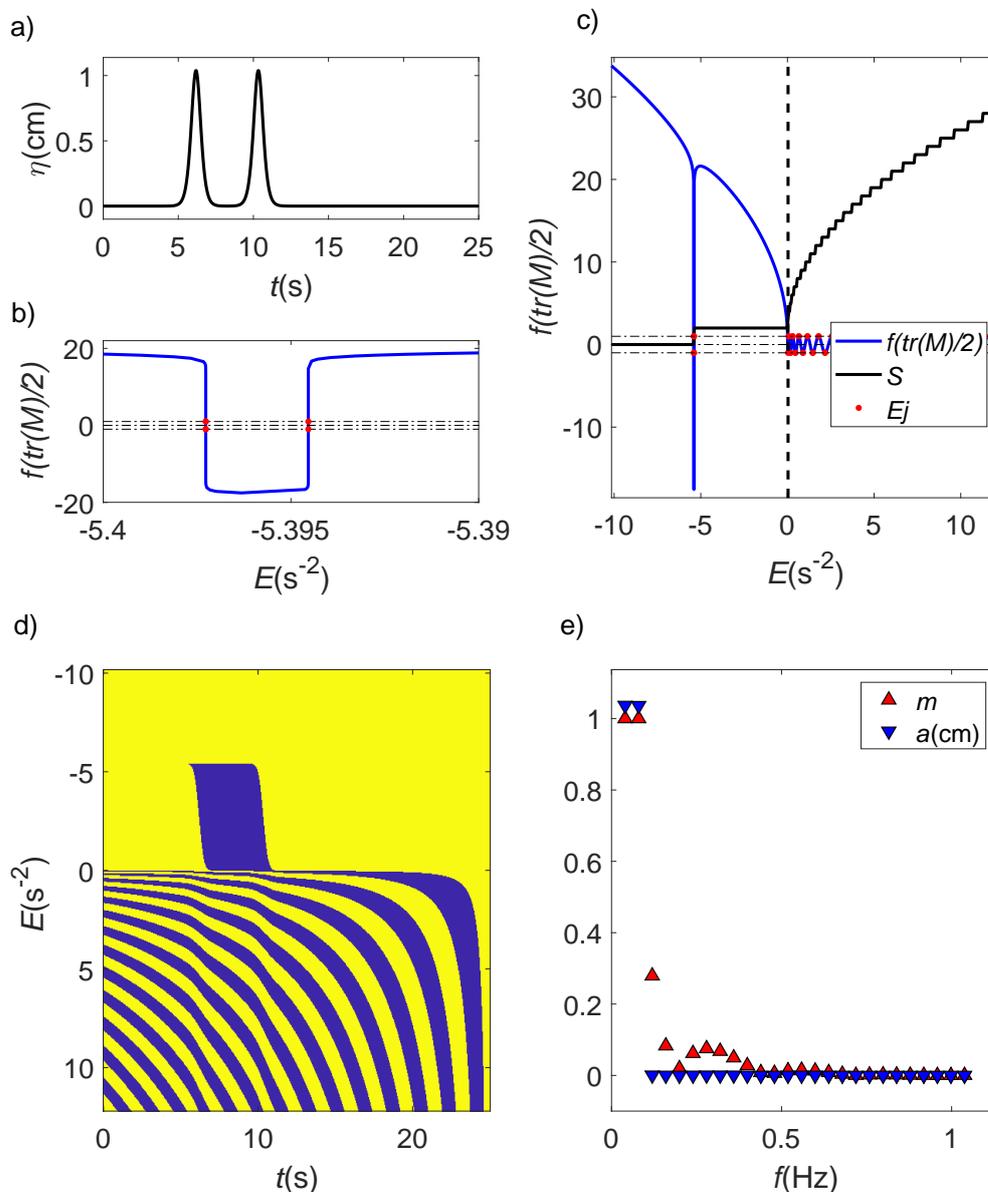


FIGURE 5.16: Cette figure illustre le mécanisme de la PIST pour une série temporelle contenant 2 solitons d'amplitude égale. Contrairement au cas précédent, on n'a plus de périodicité temporelle (a). L'analyse montre que la PIST trouve alors 2 modes d'amplitudes significatives et de module 1 (e). On montre (d) la matrice $sign(M_S)$ associée à cette série qui montre un changement de signe à l'abscisse temporelle de chaque soliton en (a). Cette information se retrouve sur l'encart (c) qui montre l'évolution de la trace de la matrice de monodromie en fonction de E et la fonction S . On constate que la fonction S s'incrémente de 2 pour signifier que 2 modes quasi-identiques existent. Le zoom (b) permet de constater que $E_3 - E_1 \gg E_2 - E_1$ impliquant un module du premier mode qui tend vers 1 et un calcul de son amplitude avec la formule (1.35). Ainsi pour un même contenu solitonique la lecture du spectre PIST doit être différente.

La figure 5.17 illustre les reconstructions des fonctions hyper-elliptiques μ des modes principaux des 4 signaux de manière analogue à celle de la figure 5.3 afin de saisir ce concept. Dans le cas du soliton seul(a) on obtient une fonction μ qui une fois redimensionnée est identique au mode physique visible dans la série temporelle. Dans le cas d'une série temporelle contenant 2 solitons (b), cela n'est plus le cas. La première fonction μ_1 est majorée par la bande suivante réservée à la fonction μ_2 et ainsi de suite. Il est graphiquement limpide de constater que la fréquence de μ_2 est le double de μ_1 et que la fréquence de μ_3 est le triple. Cela ne doit pas faire perdre de vue que les 2 premiers modes 'physiques' sont des solitons pour lesquels ce concept de fréquence n'est pas pertinent. Cette analyse est encore plus frappante dans le cas de la décomposition d'un sinus en nombreux solitons. En (c), on analyse un sinus de période 10 secondes et d'amplitude 5 cm par 12 cm de profondeur. On constate que la fréquence des fonctions μ_j est un multiple de j en dépit du caractère solitonique de chaque mode. Si l'on considère 2 périodes de ce même sinus par une profondeur de 120 cm, la non-linéarité est considérablement réduite. On n'observe plus de mode solitonique (d). Les interactions étant plus faibles, la forme physique des modes est davantage reconnaissable et on reconnaît ici assez clairement un mode cnoïdale de la fréquence de l'onde initiale ainsi qu'une onde libre de fréquence double. Ce résultat semble cohérent avec l'évolution physique d'une telle condition initiale.

Considérons désormais le cas d'une onde sinusoïdale de période 10 secondes et d'amplitude 1.5 cm. Cette onde aura un contenu solitonique variable suivant qu'elle se propage à différentes profondeurs. Les figures 5.18, 5.19 et 5.20 correspondent respectivement à l'analyse d'une période ce signal par des profondeurs de 12 , 120 et 1000 cm. Dans le premier cas on observe une fission en 9 solitons dont les amplitudes suivent une décroissance linéaire similaire à celle observée par Zabusky et Kruskal [64]. L'amplitude des modes non-solitoniques est faible et le niveau de référence est en conséquence bas.

Par 120 cm de fond on trouve 2 modes non-linéaires qui ne sont pas de solitons ($m < 0.99$) . Comme on l'a souligné plus haut en analysant les fonctions μ sur la figure 5.17, la PIST détecte que cette condition initiale sinusoïdale évoluera en un mode cnoïdale de fréquence égale à celle du sinus étudié et une onde libre de fréquence double.

Enfin par une profondeur encore plus importante. Le spectre de la PIST ne compte qu'un seul mode de module presque nul (mode sinusoïdale). Dans cette limite la PIST tend vers l'analyse de Fourier. Le rapport 2 entre l'amplitude du sinus initiale et celle du mode hyperelliptique se retrouve dans la formule (1.37) qui permet de reconstituer la série initiale. Ces 3 cas illustrent la pertinence physique de la PIST par rapport par exemple à l'analyse de Fourier.

La dernière vérification que nous souhaitons mener consiste à considérer plusieurs périodes d'un même signal afin de vérifier qu'on obtient un multiple du contenu solitonique et une conservation du contenu radiatif. Les figures 5.21 et 5.22 illustrent l'analyse PIST de 6 périodes du signal précédent à des profondeurs de 12 et 120 cm. Dans le premier cas, l'analyse est perturbée par la limite imposée par la résolution numérique de 10^{-12} . Au terme du processus de division successive permettant d'encadrer les différents passages à zéro de la trace de la matrice de monodromie, chacun des 4 premiers intervalles $[E_k, E_k + 10^{-12}]$ contient encore 6 zéros. Il est donc impossible de déterminer les modules des 5 premiers modes de chaque paquet. En considérant que ces modes sont des solitons, on peut cependant calculer leurs amplitudes. En (b), on fait un zoom sur les E_j correspondant au 6ème paquet de modes quasi-identiques. On constate un comportement analogue à celui de la figure 5.15. Les 5 premiers modes ont un module nul tandis que le dernier possède un module de 1. A nouveau, pour le décompte des solitons, il conviendra de considérer chaque mode comme un soliton. On constate que l'on n'a pas exactement 6 fois les modes présents dans une seule période. En effet le mode 10 du cas de la période simple possédait

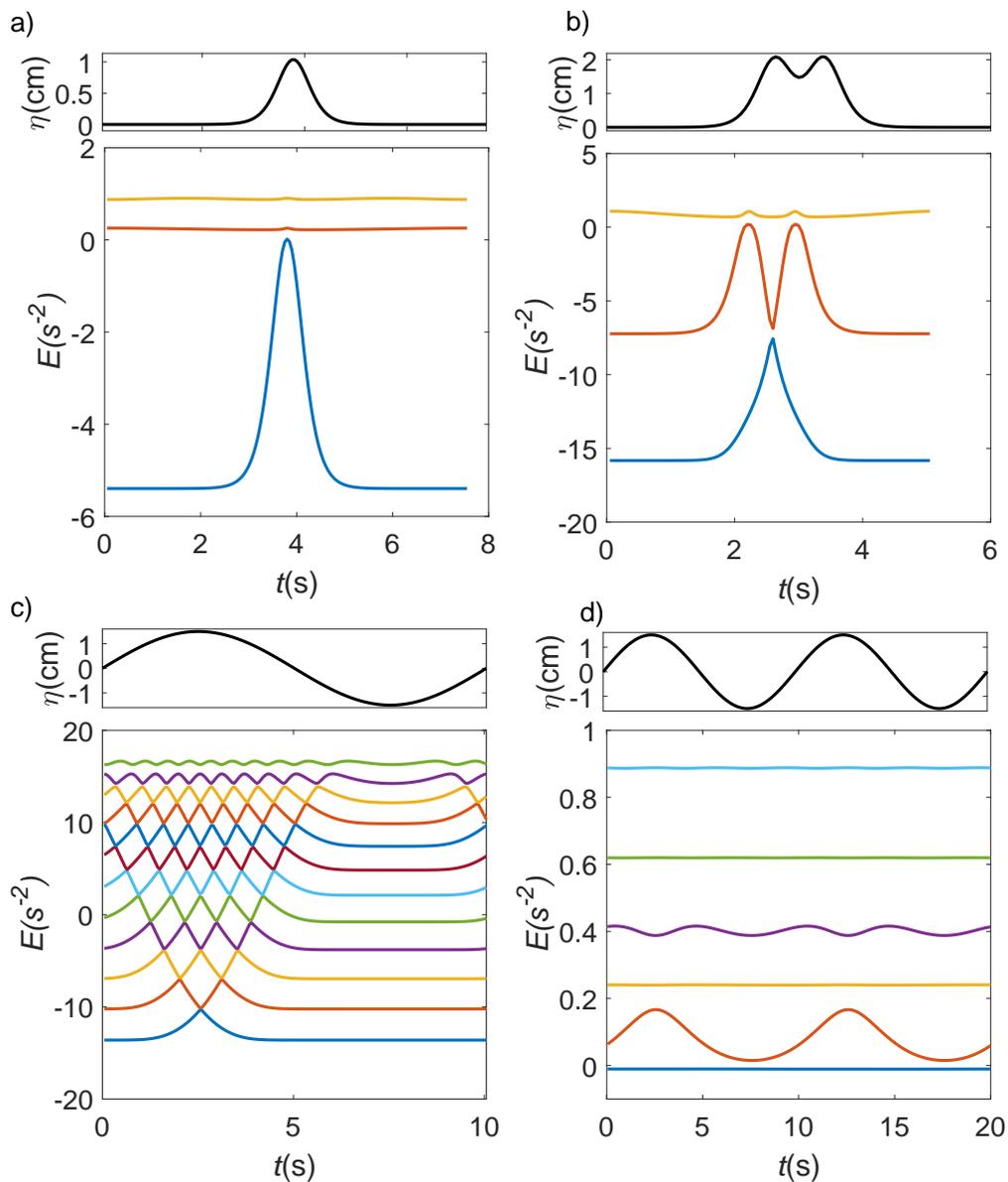


FIGURE 5.17: Reconstructions des fonctions hyperelliptiques μ_j (en couleur) correspondants aux modes principaux de différentes séries temporelles (en noir) : (a) un soliton seul ; (b) 2 solitons en interactions forte ; (c) une période d'un sinus d'amplitude 1.5 cm, de période 10 s, se propageant par 12 cm de profondeur ; (d) 2 périodes de ce même sinus par une profondeur de 120 cm.

un module de 0.98. Ici il est passé à 0.993. Cette légère différence occasionne un décalage du niveau de référence vers le bas ainsi qu'une augmentation induite de l'amplitude de chacun des solitons. C'est la limite de cette définition binaire du niveau de référence qui ne prend pas en compte l'impact d'un mode cnoïdale de module 0.98 dans son calcul. Une nouvelle définition serait souhaitable qui prendrait en compte l'impact de chaque mode en fonction de son module et de son amplitude.

Le cas moins non-linéaire par une profondeur de 120 cm a lui aussi tendance à surestimer la non-linéarité des modes considérés (module de (0.97, 0.38) au lieu de (0.80, 0.12)). En revanche, le nombre de modes d'amplitude significative est conservé et leurs amplitudes sont quasi-identiques.

Cette différence de non-linéarité suivant la taille de la série temporelle est troublante.

5.7 Décompte des solitons grâce à l'IST et à la PIST

Dans la suite de notre travail, on sera essentiellement intéressé par le contenu solitonique de nos séries temporelles. Nous allons discuter ici brièvement le passage du spectre PIST au nombre de solitons présents dans une série temporelle et vérifier la robustesse de nos calculs en utilisant l'IST ligne.

Une fois le spectre de la PIST obtenu, on définit le niveau de référence à partir du dernier mode solitonique de module $m > 0.990$. Chaque mode de fréquence inférieure à celle de ce dernier mode est alors considéré comme un soliton dont l'amplitude est calculée à partir de ce niveau de référence. Ce système est pertinent (figure 5.11) en l'absence de spectre intermédiaire (mode de module important mais < 0.990) dont les modes participent probablement à baisser le niveau de référence et donc à augmenter l'amplitude des solitons. En effet, une variation de module 0.990 à 0.9899 change substantiellement le résultat de l'analyse en modifiant le niveau de référence et donc l'amplitude de tous les solitons. On ne peut pas se débarrasser de ce critère binaire qui correspond au paradoxe de chercher à déterminer un nombre de solitons qui par essence ne sont pas des solutions du problème périodique.

L'IST sur la ligne infinie ne souffre pas du même inconvénient puisqu'elle décompose le signal rigoureusement en solitons et ondes de radiation. Elle nécessite en revanche que le niveau de référence soit connu pour être implémentée. Cela pose un problème pour l'analyse. Afin de palier cet inconvénient on peut recourir à deux stratégies.

La première consiste à soustraire le niveau de référence obtenu par la PIST à la série temporelle initiale avant de la traiter par l'IST ligne. Osborne [42] a illustré le lien existant entre les 2 méthodes[42]. Il obtient des distributions solitoniques très comparables avec les 2 méthodes. Se livrer à cet exercice présente également l'avantage de vérifier que l'algorithme de la PIST n'a pas oublié de valeurs propres.

La seconde consiste à utiliser le fait que la différence entre le niveau moyen d'une série temporelle et le niveau de référence sur lequel se propagent les solitons doit correspondre au volume d'eau "piégé" dans les solitons, les autres modes étant supposés centrés sur la moyenne. On peut utiliser la méthode suivante :

- on considère une série temporelle centrée sur sa moyenne
- on la traite par l'IST ligne une première fois
- si on ne trouve pas de soliton, le test est fini, la série ne compte que des modes radiatifs
- si on trouve un contenu solitonique on calcule le volume d'eau présent dans les solitons
- on soustrait ce volume d'eau au volume de contrôle (défini par le niveau moyen et la longueur de la série considérée) afin d'obtenir un nouveau niveau de référence

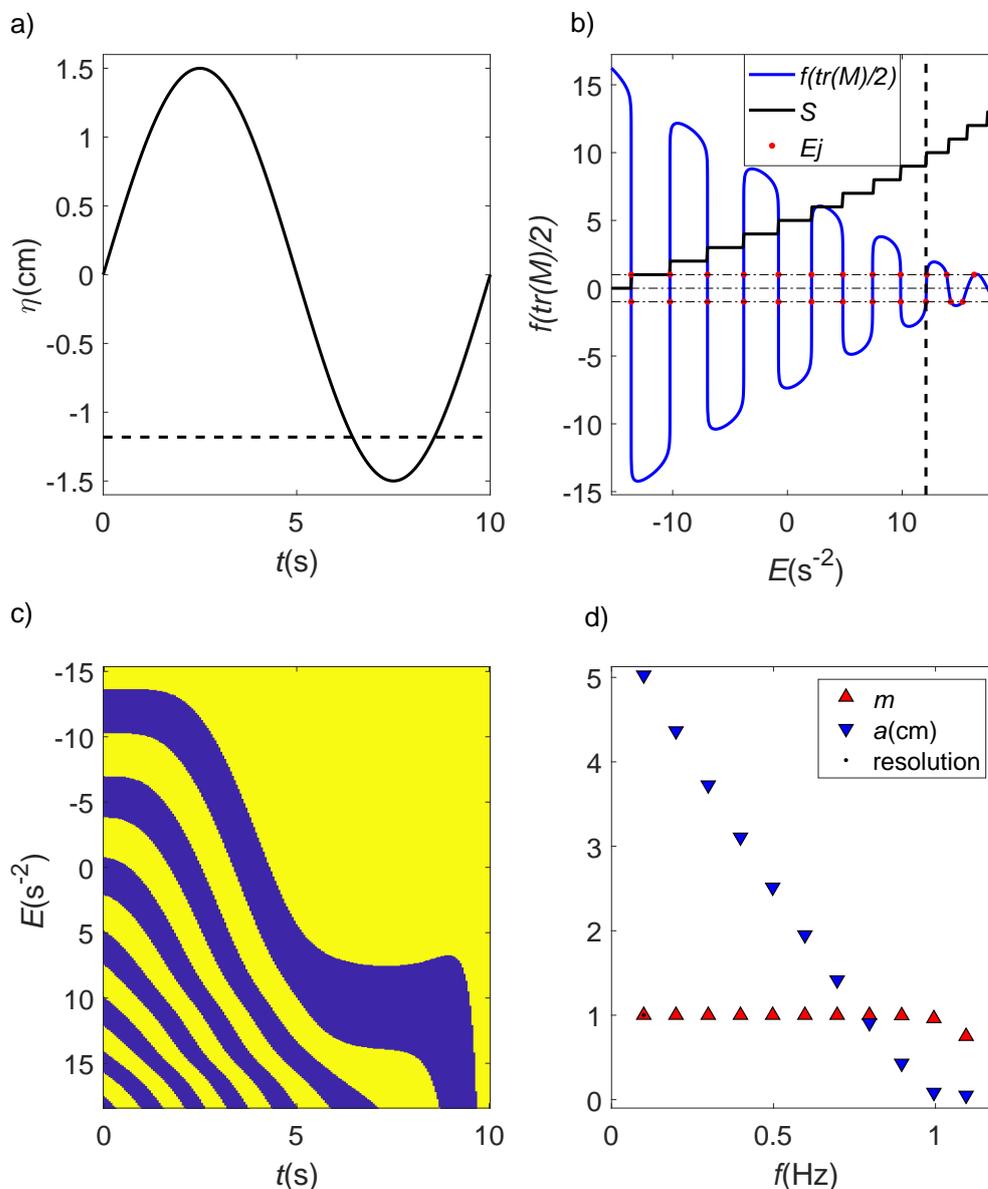


FIGURE 5.18: Cette figure illustre le mécanisme de la PIST pour une série temporelle contenant un sinus de période 10 s et d'amplitude 1.5 cm à une profondeur de 12 cm (a). On montre (c) la matrice $\text{sign}(M_S)$ associée à cette série qui par analogie avec les figures précédentes trahit la présence de nombreux solitons. Cette information se retrouve sur l'encart (b) qui montre l'évolution de la trace de la matrice de monodromie en fonction de E et la fonction S . On constate que la fonction S s'incrémente de 1 à chaque fois que la trace change de signe permettant de prévoir la localisation des E_j tels que $M(E_j) = \pm 1$. Par ailleurs en (d) on affiche le module et l'amplitude de chaque mode calculé à partir de ces E_j . On trouve ici 9 modes solitoniques d'amplitude linéairement décroissante. Les modes non solitoniques ont une amplitude faible. On marque le niveau de référence par une ligne pointillée noir en (b) correspondant au dernier mode de module $m > 0.99$ ou soliton. Sans surprise, le contenu étant essentiellement solitonique, il est ici très inférieur au niveau moyen

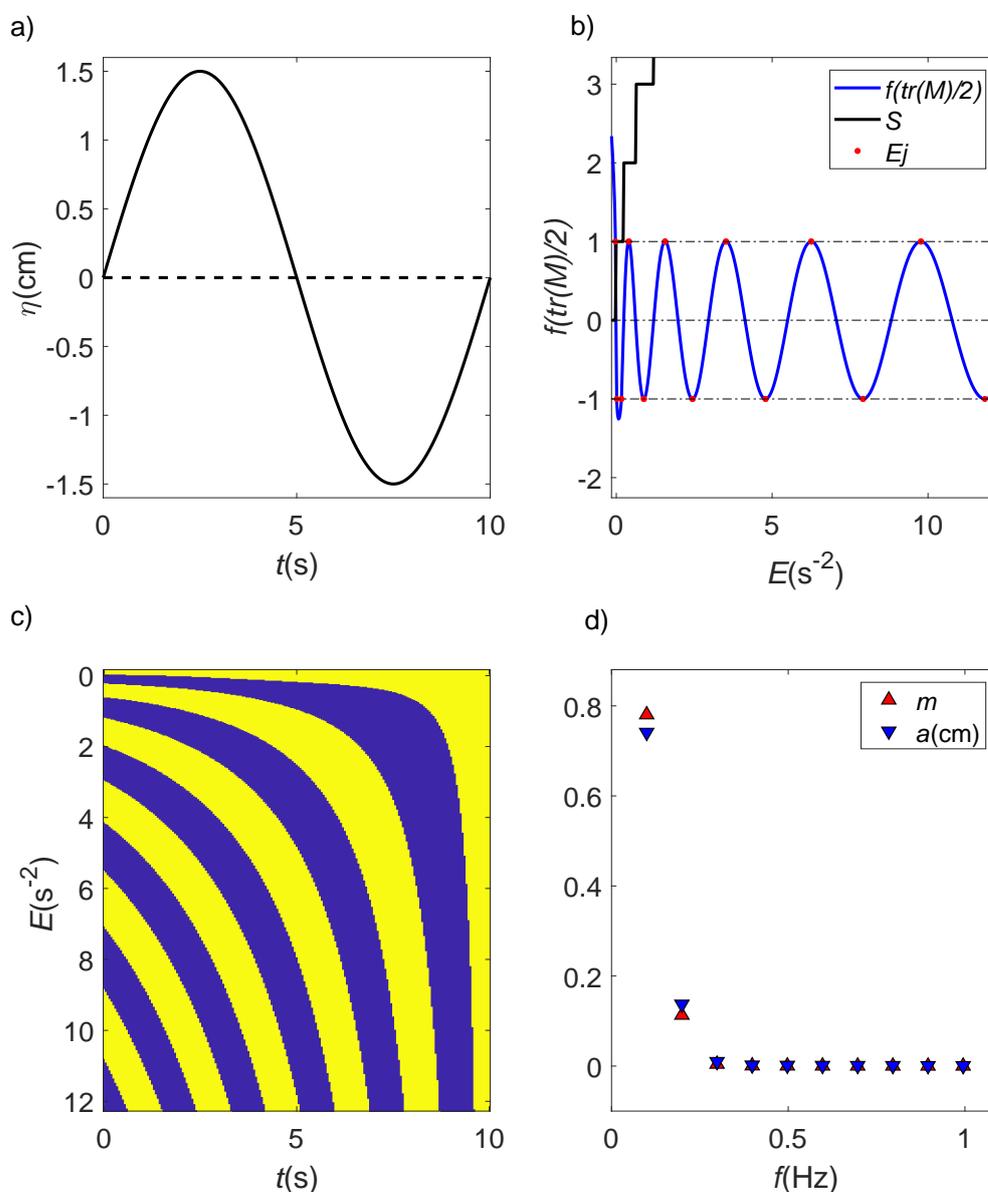


FIGURE 5.19: Cette figure illustre le mécanisme de la PIST pour une série temporelle contenant un sinus de période 10 s et d'amplitude 1.5 cm à une profondeur de 120 cm (a). On montre (c) la matrice $\text{sign}(M_S)$ associée à cette série. Sur l'encart (b), on montre l'évolution de la trace de la matrice de monodromie en fonction de E et la fonction S . Par ailleurs en (d) on affiche le module et l'amplitude de chaque mode calculé à partir de ces E_j . Aucun mode n'est ici solitonique, le plus grand module vaut 0.97 et correspond à une onde cnoïdale. Ce cas illustre la limite de cette définition binaire du niveau de référence. Pour une profondeur très légèrement inférieur à celle considérée, on trouverait un mode de module 0.99 qui serait interprété comme soliton et le niveau de référence ferait un bon quantique vers le bas.

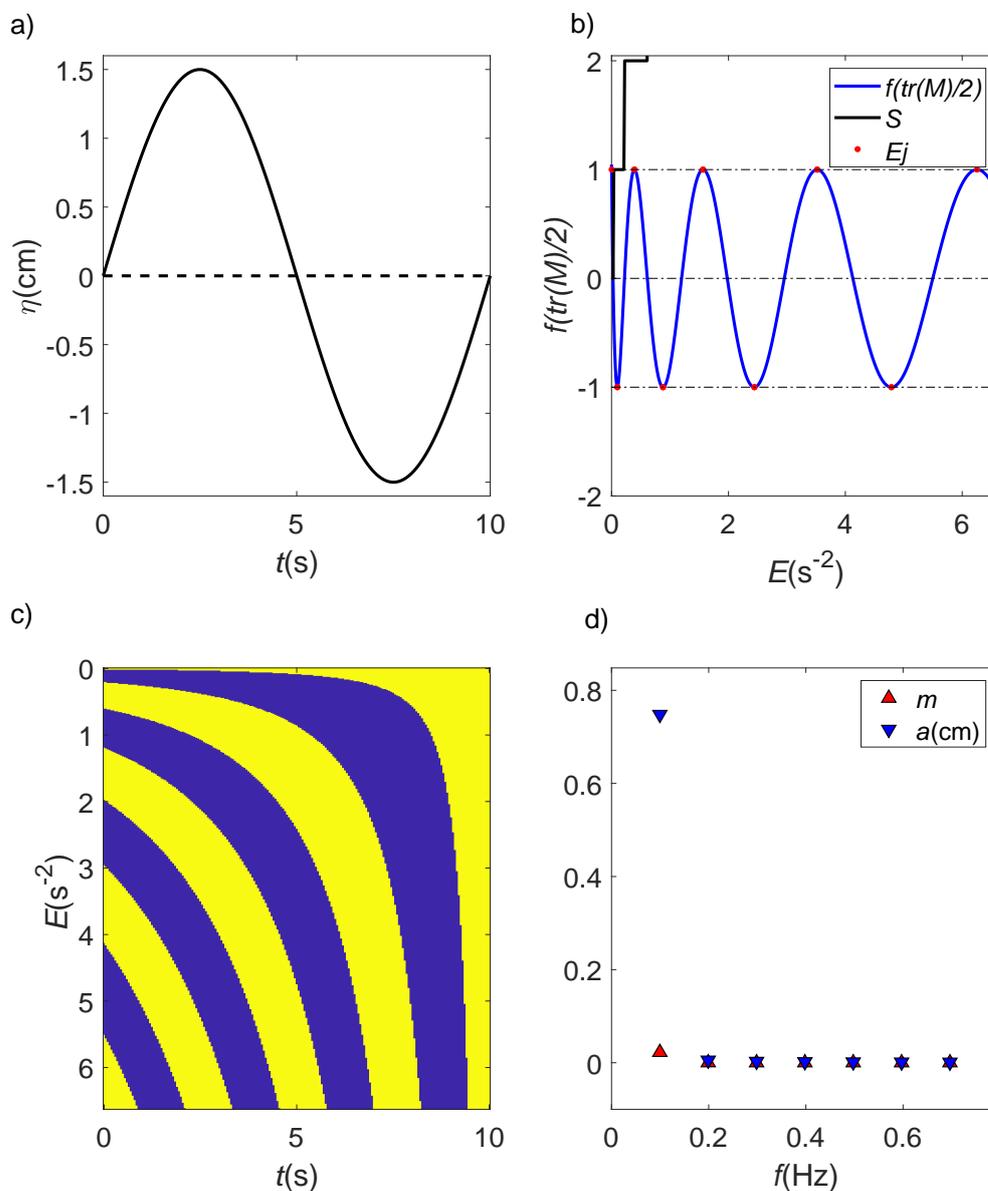


FIGURE 5.20: Cette figure illustre le mécanisme de la PIST pour une série temporelle contenant un sinus de période 10 s et d'amplitude 1.5 cm à une profondeur de 1000 cm (a). Cette onde est très faiblement non-linéaire). On constate que le spectre de la PIST tend vers celui de Fourier en trouvant un seul mode de fréquence égale à $\frac{1}{T}$. La reconstruction du signal par l'équation (1.37) indique explicitement que l'amplitude du mode de Fourier est égale au double de celle de la fonction hyperelliptique μ

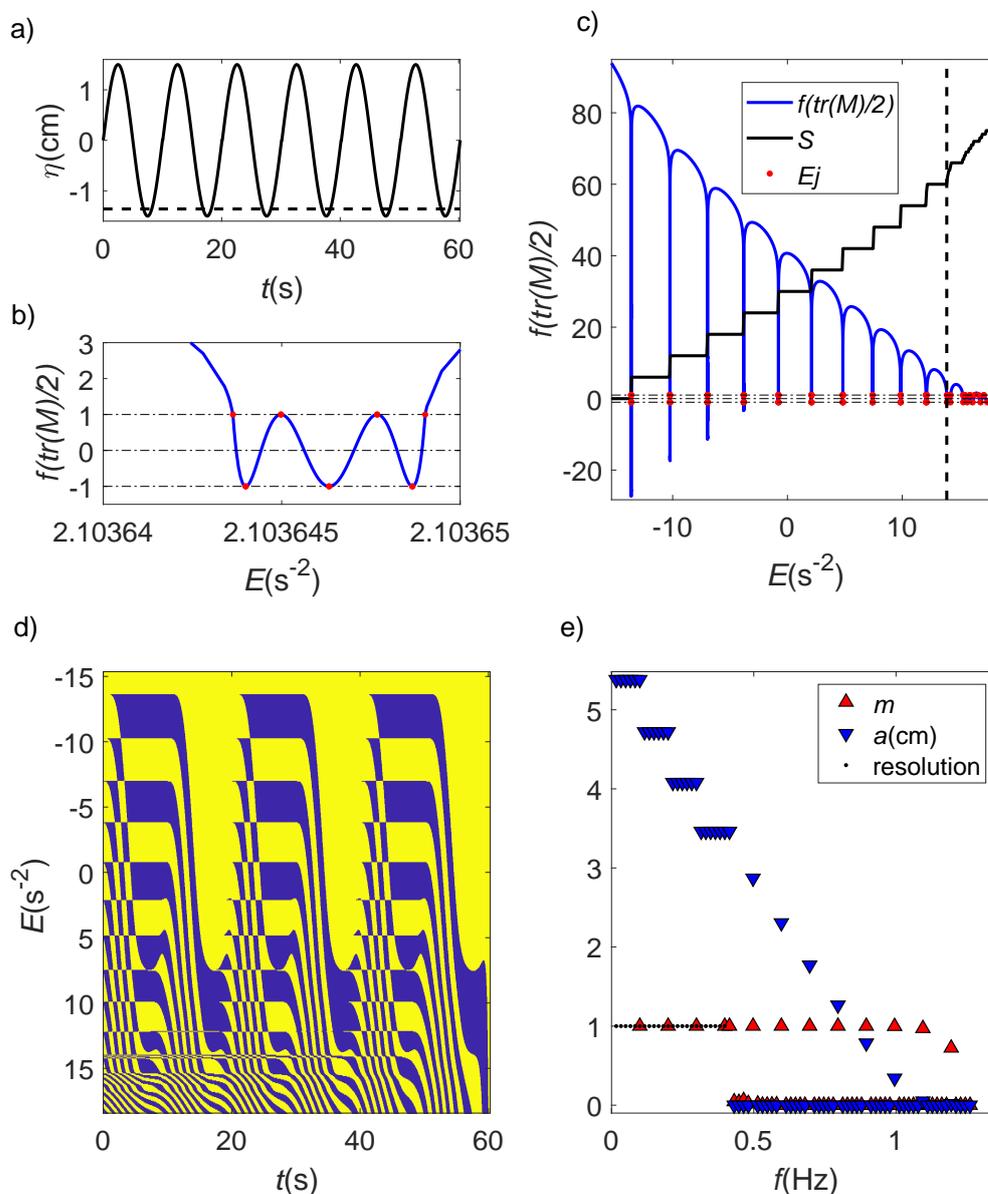


FIGURE 5.21: Cette figure illustre le mécanisme de la PIST pour une série temporelle contenant 6 périodes d'un sinus de période 10 s et d'amplitude 1.5 cm à une profondeur de 12 cm (a). on montre (c) la matrice $\text{sign}(M_S)$ associée à cette série qui par analogie avec les figures précédentes trahi la présence de nombreux solitons. Cette information se retrouve sur l'encart (b) qui montre l'évolution de la trace de la matrice de monodromie en fonction de E et la fonction S . On constate que la fonction S s'incrémente d'abord de 6 en 6 trahissant la présence de 6 solitons identiques puis dans le domaine radiatif de 1 en 1. Par ailleurs, en (d) on affiche le module et l'amplitude de chaque mode calculé à partir de ces E_j . On trouve ici 60 modes solitoniques. Les modes non-solitoniques ont une amplitude faible. On marque le niveau de référence par une ligne pointillée noire en (b) correspondant au dernier mode de module $m > 0.99$ ou soliton. Sans surprise, le contenu étant essentiellement solitonique, il est ici très inférieur au niveau moyen. En (e), on indique en noir les modes pour lesquels la résolution numérique était insuffisante pour évaluer le module. On leur attribue par défaut un module de 1.

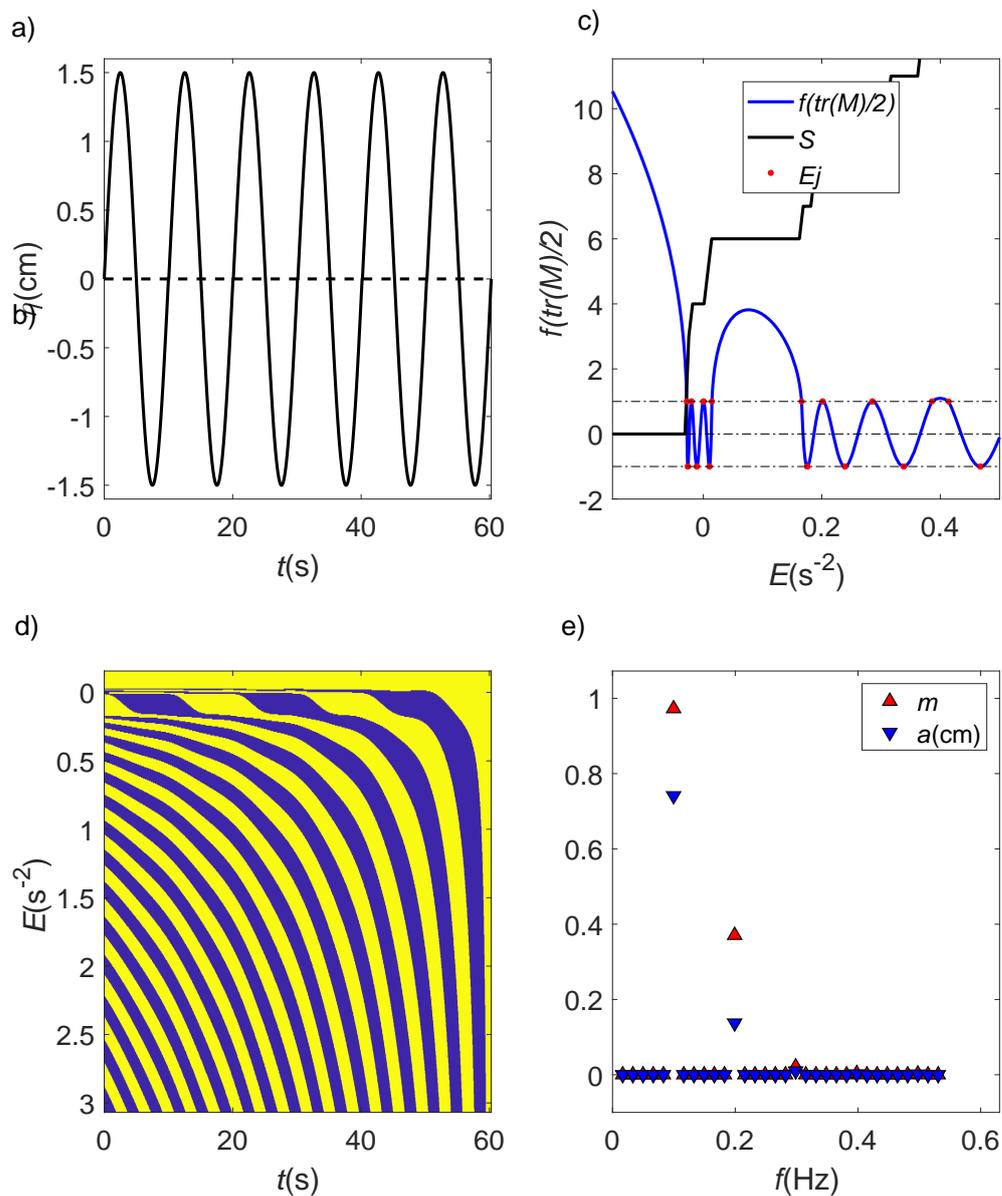


FIGURE 5.22: Cette figure illustre le mécanisme de la PIST pour une série temporelle contenant un sinus de période 10 s et d'amplitude 1.5 cm à une profondeur de 120 cm (a). L'analyse permet de mettre en évidence 2 modes cnoïdaux très similaires à ceux de la figure 5.19

- on relance l'IST à partir de ce nouveau niveau de référence
- on opère ainsi par récurrence jusqu'à avoir convergé vers un niveau de référence dont la différence avec le niveau moyen correspond au volume solitonique

Aucune démonstration théorique de la convergence d'une telle méthode n'a été entreprise, mais dans les nombreux cas testés elle est toujours atteinte. La pertinence physique du résultat obtenu n'est pas non plus démontrée, mais elle résiste au cas tests de séries temporelles ne contenant que des solitons. Cette méthode possède l'indéniable avantage de la simplicité relativement à la PIST.

On montre sur la figure 5.23 la comparaison entre les 3 méthodes en analysant 3 séries temporelles tirées des cas tests précédents : celle du centre de l'interaction de 2 solitons, le sinus de période 10s par 12cm de profondeur et 6 périodes de ce même sinus.

Sur les tracés la ligne rouge est le niveau de référence obtenu grâce à la PIST. En bleu, on vérifie que ce niveau correspond bien à la différence entre le niveau moyen et le volume contenu dans la distribution complète de soliton obtenu par l'IST ligne. En vert, on trace le niveau de référence vers lequel a convergé notre méthode d'IST ligne par itération. Dans le cas de l'interaction de 2 solitons les 3 méthodes trouvent les mêmes résultats. Dans le cas du sinus, la méthode IST par itération converge vers un niveau de référence plus faible que celui trouvé par la PIST. Tout se passe comme si cette méthode plaçait son niveau de détection de solitons à un module supérieur à 0.99. On pourrait donc discuter le choix de ce critère à la hausse. Cela étant dit, les tests numériques d'Osborne [42] sur le comportement des modes de modules > 0.99 justifie qu'on puisse les assimiler à des solitons. La différence entre ces niveaux de référence font que les amplitudes des différents modes sont sensiblement différents. Les différences d'amplitudes observées sont à nuancer en considérant plutôt que l'amplitude, l'altitude a du sommet des solitons. Cette altitude conditionne la vitesse C_{sol} des solitons indépendamment du niveau de référence. En effet la vitesse des solitons Boussinesq serait :

$$C_{sol} = \sqrt{g(h + h_{ref})} \sqrt{1 + \frac{a}{(h + h_{ref})}} = \sqrt{g(a + h + h_{ref})} \quad (5.78)$$

On conclura que la méthode d'IST par itération donne une bonne première estimation du contenu solitonique d'une série temporelle. Par ailleurs, les méthodes de PIST et d'IST prises au même niveau de références sont en accord parfait pour les plus grands solitons. L'IST ligne tend à sous-estimer légèrement l'amplitude des petits solitons. On constate en analysant une série temporelle plus longue que cette divergence ne vaut que pour la première période de la série. L'accord devient ensuite très bon. Enfin, quel que soit la méthode, on constate en comparant les niveaux de référence en (b) et (c) que le contenu solitonique est plus important si l'on considère une série longue qu'une série courte. On proposera au chapitre 7 une interprétation de ce phénomène ainsi qu'une méthode pour le limiter.

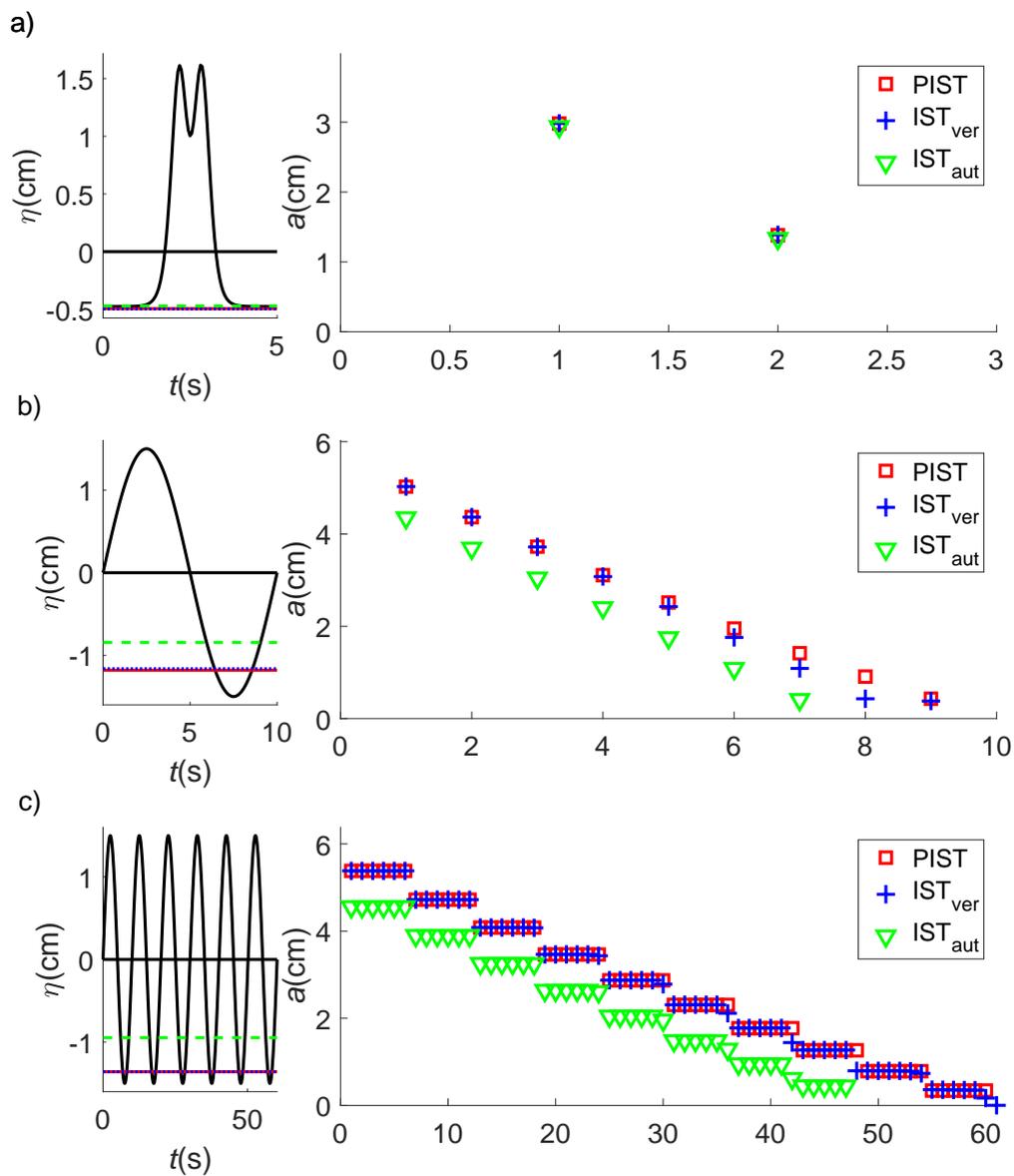


FIGURE 5.23: Comparaison de la distribution de solitons. Résultats par la PIST (rouge), IST au niveau de référence obtenu par la PIST (en bleu), résultat obtenu par l'IST ligne sans hypothèse sur le niveau de référence (vert). Différentes condition initiales : (a) interaction forte de 2 solitons ; (b) une période de sinusoïde ; (d) 6 périodes de sinusoïde. On utilise le même code couleur pour représenter le niveau de référence correspondant à chaque méthode sur le graphe des séries temporelles.

5.8 Conclusion

Les méthodes de l'IST et de la PIST tirent partie des propriétés des systèmes intégrables afin d'identifier les modes non-linéaires qui les composent, dans notre cas des ondes cnoïdales. Elles sont en ce sens une généralisation de la méthode de la transformée de Fourier.

Au cours de ce chapitre, on a pu voir que leurs constructions mathématiques reposaient sur l'identification de la paire de Lax associé à KdV afin de ramener la résolution d'un système non-linéaire à un problème aux valeurs propres. Dans le cas périodique, l'identification de ces valeurs propres repose sur le calcul de la trace de la matrice de monodromie du système et en particulier des valeurs spectrales pour lesquelles cette trace vaut ± 2 . On a pu voir que la recherche numérique de ces valeurs pouvait se révéler difficile lorsque plusieurs modes semblables coexistaient, mais qu'une méthodologie adaptée permettait de circonvenir le problème.

L'utilisation de la PIST afin d'identifier des modes localisés d'un système, comme nous nous apprêtons à le faire, pose néanmoins un problème. En effet, les modes identifiés par cet outil sont des modes périodiques : les ondes cnoïdales. Il est donc nécessaire de fixer arbitrairement un seuil au-delà duquel un mode cnoïdal est suffisamment localisé pour être interprété comme un soliton. On verra dans nos développements que la détermination arbitraire de ce seuil peut poser des problèmes, notamment s'il existe de nombreux modes dans le spectre intermédiaire.

Malgré cette réserve, les tests auxquels nous nous sommes livrés nous ont convaincu de l'efficacité et de la pertinence de cet outil, au cœur de la compréhension des systèmes intégrables.

Partie III

Régime d'eau peu profonde :
turbulence quasi-intégrable ?

— Chapitre 6 —

Validité du cadre intégrable

6.1 Introduction

La question générale à laquelle cherche à répondre ce mémoire est : est-il possible de décrire statistiquement des régimes turbulents en eau peu profonde à l'aide de la théorie de la turbulence intégrable? Expérimentalement, un état stationnaire suffisamment énergétique pour être turbulent implique des termes non-négligeables de dissipation et d'injection d'énergie. L'existence de ces 2 termes s'oppose au concept fondateur de l'intégrabilité : la conservation d'une infinité de quantités. Dans ce chapitre, on cherchera à estimer l'intégrabilité de notre système en effectuant des comparaisons avec les solutions des équations de Kaup-Boussinesq telles qu'elles sont décrites dans [67].

Dans une première partie, on quantifiera l'impact de la dissipation sur les propriétés d'un soliton. On s'attachera notamment à quantifier dans quel mesure ce dernier conserve son profil et sa vitesse théorique au cours de l'amortissement.

Dans une seconde partie, on s'intéressera à vérifier l'élasticité des interactions entre solitons. Il s'agira de s'assurer que l'interaction entre 2 solitons ne donne pas lieu à un transfert ou à une perte d'énergie qui s'ajouterait à celle imputable à la seule dissipation. On présentera le cas de l'interaction faible de 2 solitons (sens de propagation opposés) et de l'interaction forte (sens de propagation identiques). On considérera des solitons de diverses amplitudes afin d'apprécier l'écart à la solution théorique lorsque l'hypothèse de faible non-linéarité des équations intégrables est brisée. Un résultat secondaire de ce travail est de fournir un ordre de grandeur des déphasages subis par un soliton durant une interaction. L'ensemble des expériences présentées dans ce chapitre ont été faites à une profondeur de $h = 12$ cm.

6.2 Dissipation d'un soliton

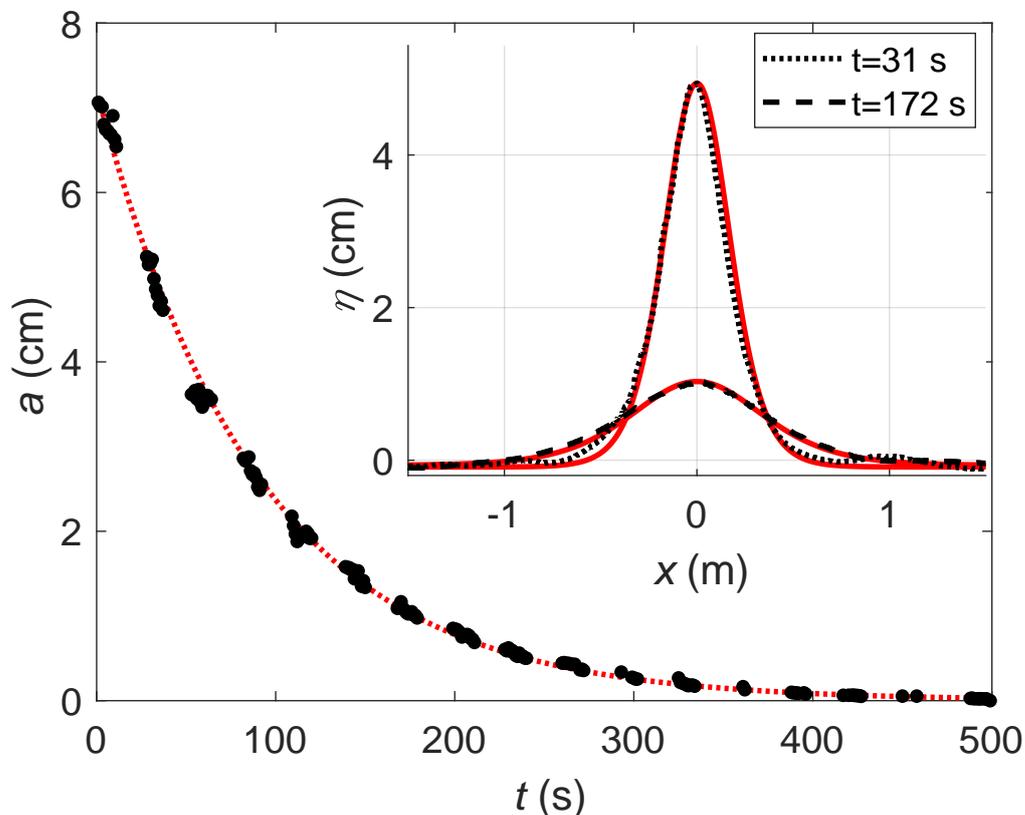


FIGURE 6.1: Décroissance de l'amplitude a d'un soliton au cours du temps alors qu'il se propage dans le canal en étant réfléchi aux extrémités ($h = 12$ cm). Les mesures ne sont possibles que dans le champ de caméras. La courbe pointillée représente une décroissance exponentielle de temps caractéristique 90 s ajustée à nos données. Insert : comparaisons de profils de surface libre mesurés à 2 instants (en noir) avec les solutions théoriques de Kaup-Boussinesq correspondantes (en rouge).

En appliquant à notre batteur une loi de déplacement adéquate décrite dans [26], il est possible de générer un soliton en limitant la génération d'ondes dispersives parasites. On peut alors étudier sa dissipation.

L'expérience décrite ici consiste à générer un soliton de 7.2 cm par une profondeur de 12 cm et à filmer son évolution jusqu'au retour au calme. La figure 6.1 illustre l'évolution de l'amplitude de ce soliton au fil du temps. Les points de mesure (en noir) correspondent au moment où le soliton est dans le champ des caméras (d'abord à l'aller, puis au retour, etc.). En première approximation, l'amplitude du soliton suit une loi de décroissance exponentielle tracée en rouge.

Keulegan dans ses travaux de 1948 [30] propose pour une onde solitaire la loi de décroissance ci-dessous qui modélise l'effet de la viscosité dans les couches limites laminares aux murs et au fond du canal :

$$\left(\frac{a}{h}\right)^{-1/4} - \left(\frac{a_0}{h}\right)^{-1/4} = K \frac{x}{h} \quad (6.1)$$

Avec K un nombre adimensionnel qui s'écrit :

$$K = \frac{1}{12} \left(1 + 2 \frac{h}{L} \right) \sqrt{\frac{\nu}{g^{1/2} h^{3/2}}} \quad (6.2)$$

Et où h est la profondeur d'eau, a l'amplitude de l'onde solitaire à la position x , a_0 cette amplitude à la position initiale, ν la viscosité cinématique de l'eau, g l'accélération de la pesanteur et L la largeur du canal.

Le comportement physique modélisé par cette équation est que plus le soliton s'allonge, moins la dissipation de ce dernier est rapide. Or, un soliton s'allonge avec la diminution de son amplitude. On a donc une dissipation de moins en moins efficace. On compare sur la figure 6.2 la décroissance prédite par Keulegan à nos mesures. L'accord entre mesures et prédictions théoriques est bon. Ces dernières finissent néanmoins par sous-estimer l'amortissement de l'onde solitaire (pour des temps d'évolutions supérieurs à 100 s). Les causes potentielles de cette mésestimation sont multiples. On peut citer la perte d'énergie engendrée par les réflexions multiples ainsi que les irrégularités du fond de notre canal. Il faut également souligner que la prédiction de Keulegan est sensible au choix de la viscosité de l'eau qui dépend de la température (cela étant dit, d'autres choix de viscosité n'améliore pas l'accord).

Nous allons maintenant nous intéresser à la conservation de la forme et de la vitesse du soliton au cours de cet amortissement visqueux. Sur la figure 6.3 on compare la forme du soliton à la solution théorique de Kaup-Boussinesq pour des amplitudes de 4 à 0.2 mm. On observe des divergences de formes de plus en plus significatives qui commencent à une amplitude de 1.5 mm. Le soliton s'étale alors moins vite qu'il ne s'amortit.

Sur la figure 6.4, on trace la trajectoire spatio-temporelle mesurée du soliton en faisant correspondre la distance parcourue depuis la génération au batteur en ordonnée avec le temps écoulé en abscisse. On se placera dans un référentiel de vitesse c_0 afin de limiter les dimensions de la figure. On compare cette trajectoire à une trajectoire théorique. Cette dernière est calculée en estimant à chaque pas de temps la vitesse $c(t)$ du soliton à partir de l'amplitude $a(t)$ prédite par Keulegan.

$$c(t) = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{a(t)}{2h} \right) \quad (6.3)$$

Le bon accord entre ces 2 trajectoires illustre que le soliton se propage à sa vitesse théorique tout au long de son évolution.

En conclusion de cette section, on peut dire que les solitons s'amortissent à cause de l'effet de la viscosité dans les couches limites en conservant leurs propriétés (forme et vitesse théorique) jusqu'à une amplitude de 1.5 mm. On peut garder en tête l'ordre de grandeur suivant : l'amplitude d'un soliton est à peu près divisée par 2 en un aller retour dans le canal (67 m) par une profondeur de 12 cm (à laquelle se dérouleront la plupart de nos travaux).

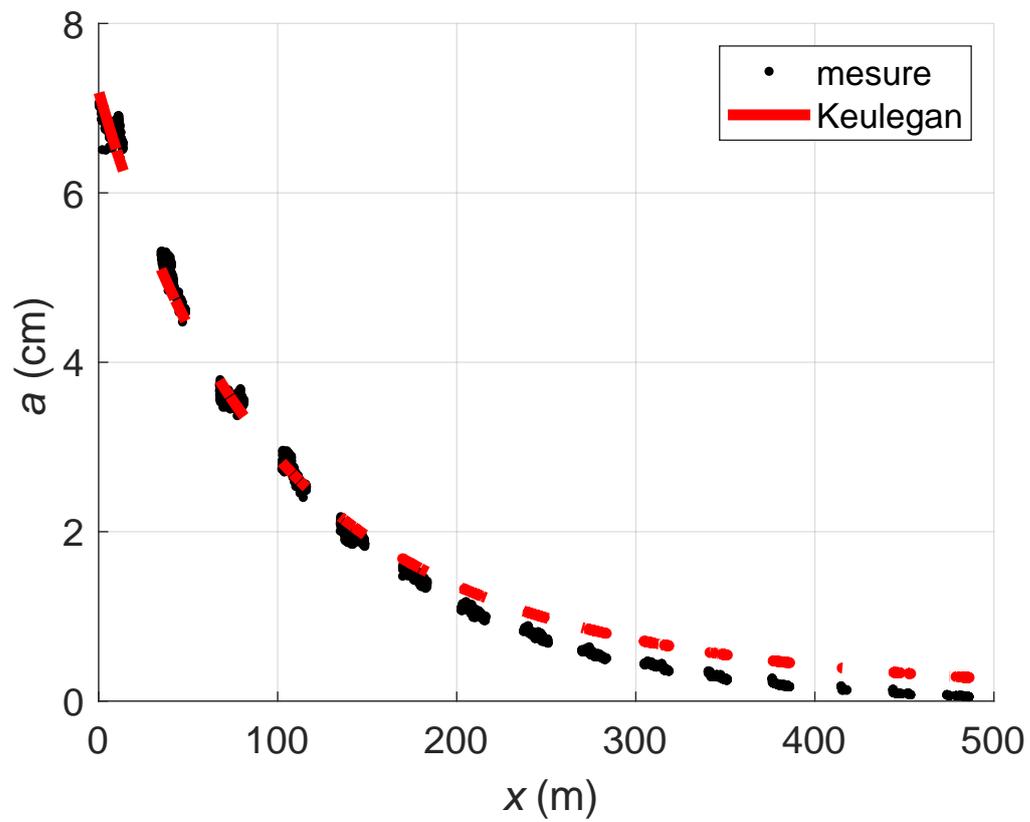


FIGURE 6.2: Comparaison de la mesure (en noire) de l'amortissement d'un soliton d'amplitude initiale 7,2 cm par une profondeur de 12 cm en fonction de la distance parcourue par ce dernier, à la prédiction de l'amortissement visqueux de Keulegan prise pour une viscosité de 1.01×10^{-6} m^2/s (rouge)

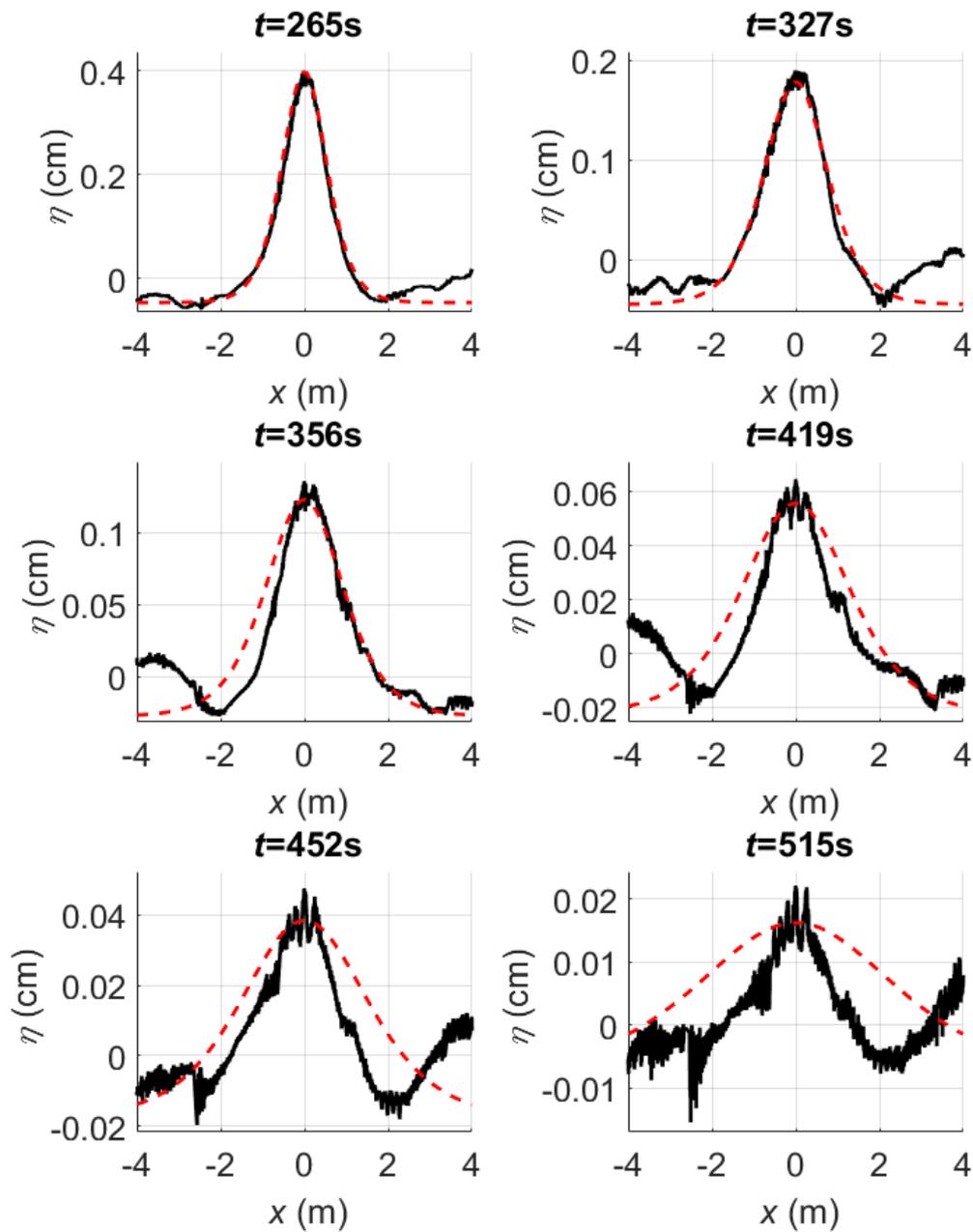


FIGURE 6.3: Mesure spatiale du soliton à différents instants de sa décroissance comparée à la solution analytique de Kaup-Boussinesq (en rouge).

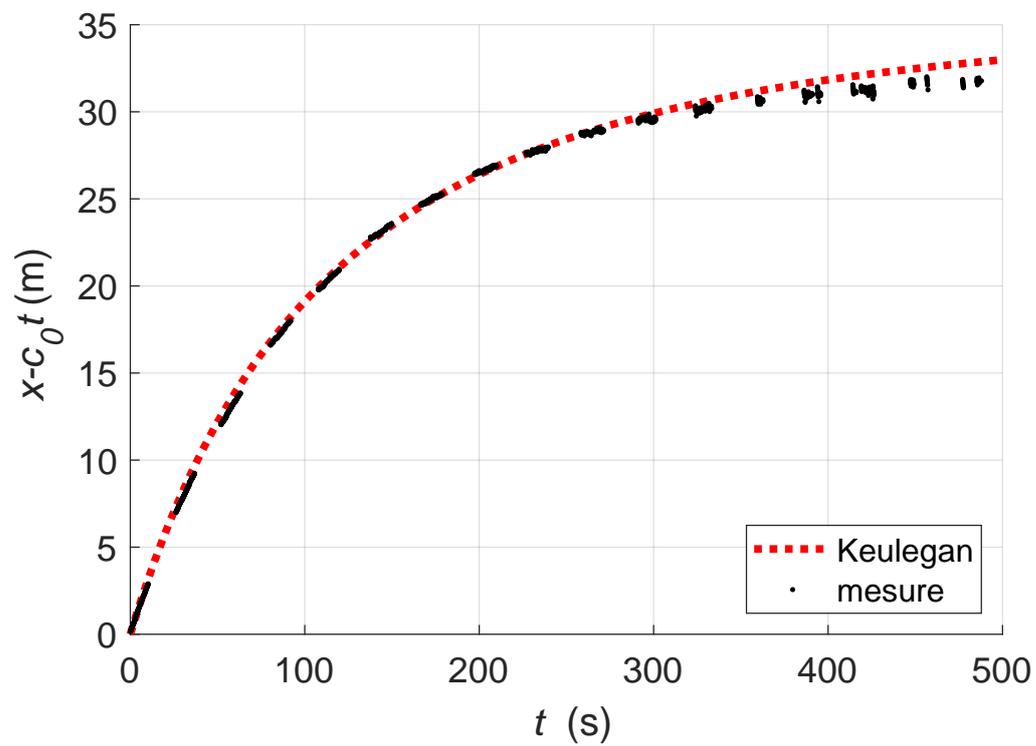


FIGURE 6.4: Trajectoire spatio-temporelle du soliton obtenue en faisant correspondre la distance parcourue depuis la génération au batteur en ordonnée avec le temps écoulé en abscisse. On se place dans un référentiel de vitesse c_0 . On compare la mesure (en noire) à la trajectoire théorique (en rouge).

6.3 Interaction faible

Dans cette section nous allons discuter de l'interaction de 2 solitons lorsqu'ils se rencontrent frontalement. Ce type d'interaction est dite "faible" par opposition à l'interaction forte de 2 solitons se propageant dans la même direction qui engendre des déphasages plus grands. Nous l'avons vu plus haut, si les non-linéarités (indexées sur le ratio de l'amplitude et de la profondeur) sont suffisamment faibles, l'interaction est élastique et théoriquement décrite par les équations de Kaup-Boussinesq. En revanche si l'on sort de cette gamme on s'attend à observer la génération d'une onde dispersive à l'interaction et une perte d'énergie associée. Nous tenterons dans cette partie de quantifier l'adéquation entre la solution de Kaup-Boussinesq décrite dans [67] et nos mesures et notamment de quantifier la qualité de l'estimation du déphasage occasionné.

L'exercice est difficile car les déphasages que l'on cherche à mesurer sont faibles (de l'ordre de la racine de l'amplitude du soliton). Parmi les difficultés expérimentales on citera :

- la dissipation, qui modifie la vitesse du soliton avant et après l'interaction. Plus on s'éloigne de l'interaction plus le biais sur le déphasage est important
- l'incertitude sur la profondeur d'eau, qui dans notre expérience varie dans une fourchette de 5 mm sur les 33.73 m du canal et peut également occasionner des différences de vitesses notables
- la difficulté à localiser la position exacte du sommet des solitons : les solitons de petite amplitude étant très allongés le sommet du soliton est assez plat
- la résolution temporelle de 0.05 s, qui est limitante par rapport à la résolution spatiale de l'ordre du millimètre et induit une erreur sur la position exacte du centre de l'interaction

Nos expériences ont été menées de la manière suivante. Un premier soliton était généré puis, alors qu'il se réfléchissait contre la paroi au bout du canal, un second soliton était à son tour généré sans que le batteur n'ait de mouvement de recul afin encore une fois de limiter la génération d'ondes parasites. Les expériences ont été réalisées par 12 cm de profondeur.

6.3.1 Le cas des solitons faiblement non-linéaires

On fait interagir frontalement 2 solitons d'amplitude de l'ordre de 1 cm. La dynamique générale de l'interaction est illustrée sur la figure 6.5 par un tracé en cascade de l'évolution de la surface libre dans le champ des caméras. A titre comparatif, on trace en-dessous la solution analytique correspondante. On constate à première vue une bonne adéquation qualitative entre les 2.

La figure 6.6 compare plus finement cette mesure à la solution de Kaup-Boussinesq. Cette solution a été construite en extrapolant l'amplitude des solitons au moment de l'interaction à partir des lois de dissipation décrites plus tôt. On peut en effet mesurer précisément l'amplitude lorsque les solitons sont bien séparés à l'entrée et à la sortie du champ des caméras et en déduire les valeurs à l'interaction. Le moment et la localisation du centre de l'interaction ont été choisis au point auquel l'amplitude est maximale. On fait ici une erreur de plus ou moins 0.025 s à cause de notre résolution temporelle. En rouge sont représentées 3 séries spatiales précédant l'interaction, en bleu la série au centre de l'interaction et en vert 4 séries après l'interaction. La solution analytique décrit bien les phénomènes observés. En particulier l'amplitude maximale est correctement prédite et le déphasage proche de l'interaction également. En s'éloignant du centre de l'interaction, l'amplitude des solitons n'est plus exactement celle prise en compte par la solution théorique ce qui modifie leurs vitesses et semble augmenter le déphasage entre la

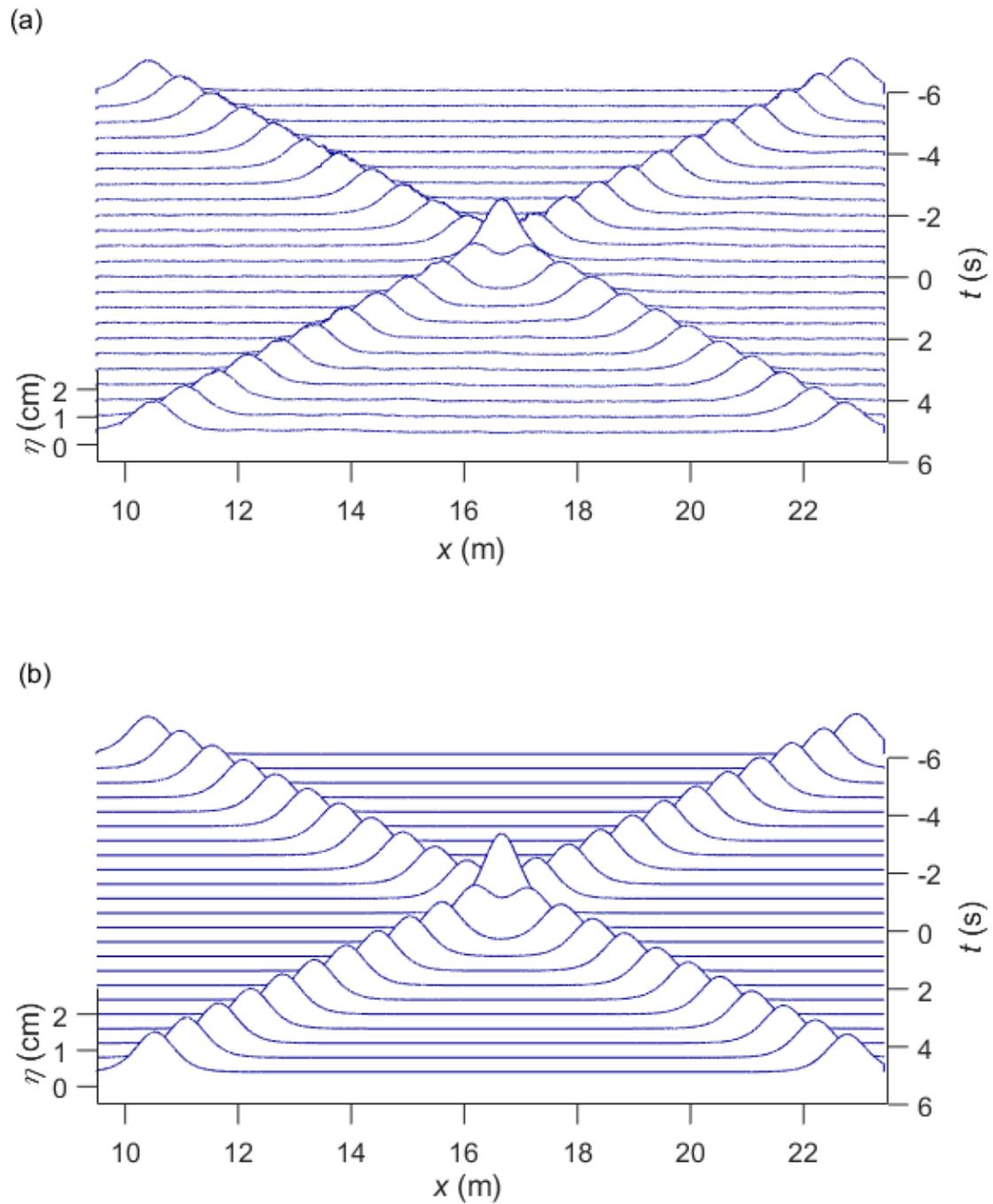


FIGURE 6.5: (a) tracé en cascade de l'évolution de la surface libre dans le champ des caméras pendant l'interaction de 2 soliton d'amplitude $\simeq 1$ cm (b) solution analytique de Kaup-Boussinesq [67]

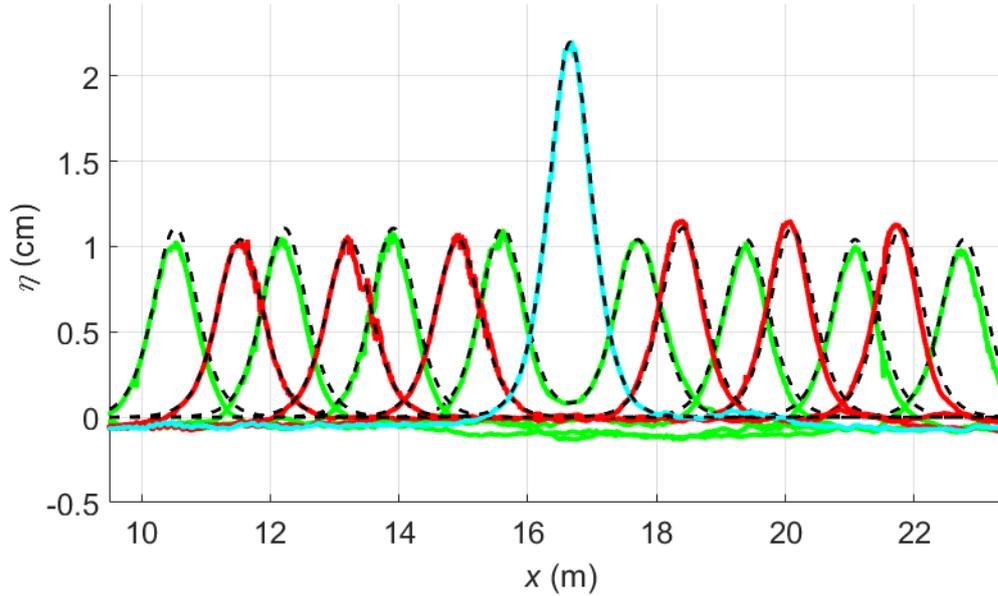


FIGURE 6.6: Profil spatial de l'interaction faible de 2 solitons d'environ 1 cm à différents instants. En rouge, 3 profils à 3 instants précédant l'interaction. En cyan, le profil spatial à l'instant central de l'interaction et en vert 4 profils à des instants ultérieurs à l'interaction. En pointillé noir est représentée la solution analytique de Kaup-Boussinesq [67] à chaque instant.

solution et la mesure. A 5 secondes de l'interaction, un soliton aura été amorti de 6% ce qui engendre une diminution de vitesse. Il est raisonnable de dire que la dynamique de l'interaction est bien décrite par l'équation de Kaup-Boussinesq.

Afin d'être plus quantitatif, on trace sur la figure 6.7a, l'évolution de l'amplitude des 2 solitons que l'on compare à la solution théorique en noir. En 6.7c, on représente l'écart relatif de l'amplitude mesurée a à l'amplitude théorique a_{kb} : $\frac{a-a_{kb}}{a_{kb}}$. On trace en tirets noirs l'erreur attendue de par l'amortissement visqueux (non-pris en compte par la solution théorique) de part et d'autre du centre de l'interaction (6% en 5 secondes). On constate que la solution théorique prédit bien les variations d'amplitude.

On trace sur la figure 6.7b l'évolution des trajectoires en espace-temps des 2 solitons (proche du centre de l'interaction) que l'on compare à la solution théorique en noir. La production de cette comparaison est rendue possible par la résolution spatio-temporelle de la mesure. On constate que la prédiction théorique de la trajectoire correspond à nos mesures. On cherche ensuite à déterminer la validité de la prévision du déphasage subit par chaque soliton au terme de l'interaction, ici respectivement 20 mm et 19 mm ou 0.0226 s et 0.0215 s pour les solitons bleu et rouge. Il est difficile de les mesurer avec notre fréquence d'acquisition de 20 Hz. C'est d'autant plus vrai que le sommet des solitons de cette amplitude est relativement plat, introduisant une autre source d'imprécision quant à sa localisation. Afin d'illustrer cela, on trace en 6.7d, l'écart à chaque instant entre la position mesurée du sommet du soliton x et sa position théorique x_{kb} . On normalise cet écart par la valeur du déphasage théorique. L'étalement du nuage de points obtenu (sur 2 ordres de grandeurs du déphasage que l'on cherche à mesurer) montre notre incapacité à conclure sur la validité de la prédiction pour une valeur aussi faible de déphasage.

En conclusion, dans cette gamme d'amplitude, la solution de Kaup-Boussinesq décrit presque

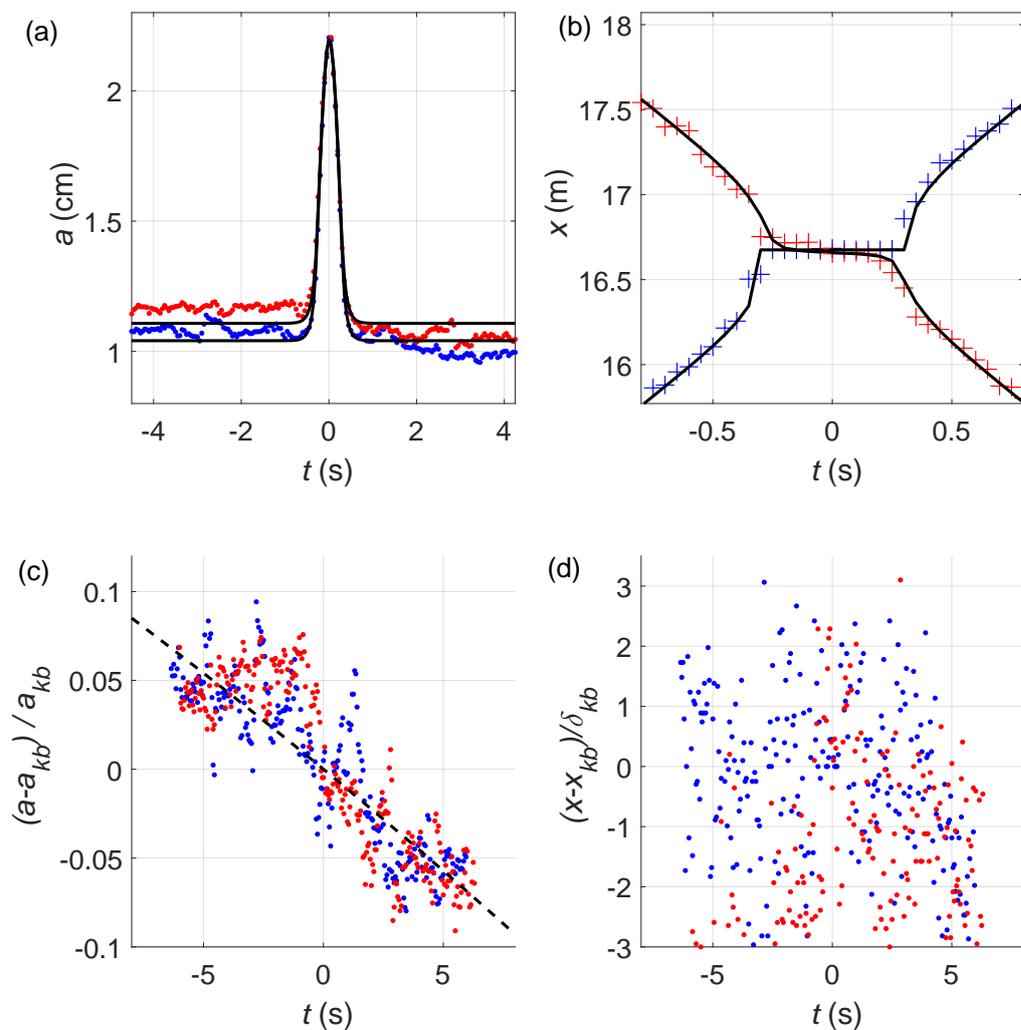


FIGURE 6.7: Interaction faible : (a) évolution de l'amplitude des 2 solitons (rouge et bleu) au cours de l'interaction (solution théorique de KB en noir) ; (b) zoom sur la trajectoire spatio-temporelle des solitons (rouge et bleu) proche du centre de l'interaction ; (c) différence relative de l'amplitude mesurée à celle de la solution analytique $(a - a_{kb})/a_{kb}$, on trace en tirets noirs l'erreur attendue de par l'amortissement visqueux (6% en 5 secondes) ; (d) écart entre la position du soliton mesurée, x , et celle prédite, x_{kb} , normalisée par le déphasage prédit par la solution analytique pour chaque soliton : $\delta_1 = 20$ mm (soliton bleu) et $\delta_2 = 19$ mm (soliton rouge).

parfaitement l'évolution de l'amplitude du soliton ce qui confirme l'élasticité de l'interaction. Au niveau du déphasage induit par celle-ci, une erreur de l'ordre de 100% est possible mais difficile à mesurer avec certitude étant donné l'erreur de mesure sur la localisation du sommet des solitons.

6.3.2 Le cas des solitons fortement non-linéaires

On fait interagir frontalement 2 solitons d'amplitude de l'ordre de 5 cm. La dynamique générale de l'interaction est illustrée sur la figure 6.8 par un tracé en cascade de l'évolution de la surface libre dans le champ des caméras. A titre comparatif, on trace en-dessous la solution analytique correspondante. On remarque que contrairement à l'expérience précédente une onde dispersive de faible amplitude est générée à l'interaction.

La figure 6.9 compare cette mesure à la solution de Kaup-Boussinesq de la même manière que la figure 6.6. On observe que la solution analytique décrit qualitativement les phénomènes observés. Les déphasages occasionnés par l'interaction semblent cohérents. Cependant, l'amplitude maximale au centre de l'interaction est sous-estimée de presque 1 cm et la génération d'une onde à l'interaction n'est pas prédite. La présence de cette dernière prouve que l'interaction n'est pas élastique.

Afin d'être plus quantitatif, on trace sur la figure 6.10a, l'évolution de l'amplitude des 2 solitons que l'on compare à la solution théorique en noir. En 6.10c, on représente l'écart relatif de l'amplitude mesurée a à l'amplitude théorique $a_{kb} : \frac{a-a_{kb}}{a_{kb}}$. On trace en tirets noirs l'erreur attendue de par l'amortissement visqueux (non-pris en compte par la solution théorique) de part et d'autre du centre de l'interaction (6% en 5 secondes). On mesure une différence de 12% au cœur de l'interaction qui illustre l'erreur faite par la solution théorique pour des courbures importantes. Le signal après l'interaction est bruité, pour le soliton bleu par l'interaction avec l'onde radiative émise par la réflexion du soliton rouge à l'extrémité du canal. Pour le soliton rouge, on constate une perte d'amplitude supérieure à celle prédite par l'amortissement visqueux qu'on associe à la production de l'onde dispersive.

On trace sur la figure 6.10b l'évolution des trajectoires en espace-temps des 2 solitons (au voisinage du centre de l'interaction) que l'on compare à la solution théorique en noir. On observe que les solitons sont accélérés relativement à cette dernière, puis ralentis dans le temps où les 2 sommets fusionnent pour n'en former qu'un. Ces erreurs de vitesses (soliton plus lent au centre de l'interaction) sont à mettre en miroir des erreurs en amplitudes (sous estimations de la solution analytique) et trahissent un transfert de l'énergie cinétique vers l'énergie potentielle plus marqué dans l'expérience que dans la solution théorique. On cherche ensuite à déterminer la validité de la prévision du déphasage subit par chaque soliton au terme de l'interaction, ici respectivement 37 mm et 35 mm pour les solitons bleu et rouge. On trace en 6.10d, l'écart à chaque instant entre la position mesurée du sommet du soliton x et sa position théorique x_{kb} . On normalise cet écart par la valeur du déphasage théorique. Très proche du centre de l'interaction, on retrouve les écarts importants visualisés en 6.10b. L'étalement du nuage de points obtenu est moins marqué que précédemment (le sommet des solitons est mieux marqué et le déphasage que l'on cherche à mesurer est plus grand). Il nous empêche tout de même de conclure sur l'erreur faite par l'estimation théorique. En omettant les points les plus proches de l'interaction, on peut néanmoins estimer que cette erreur est inférieure à 50%.

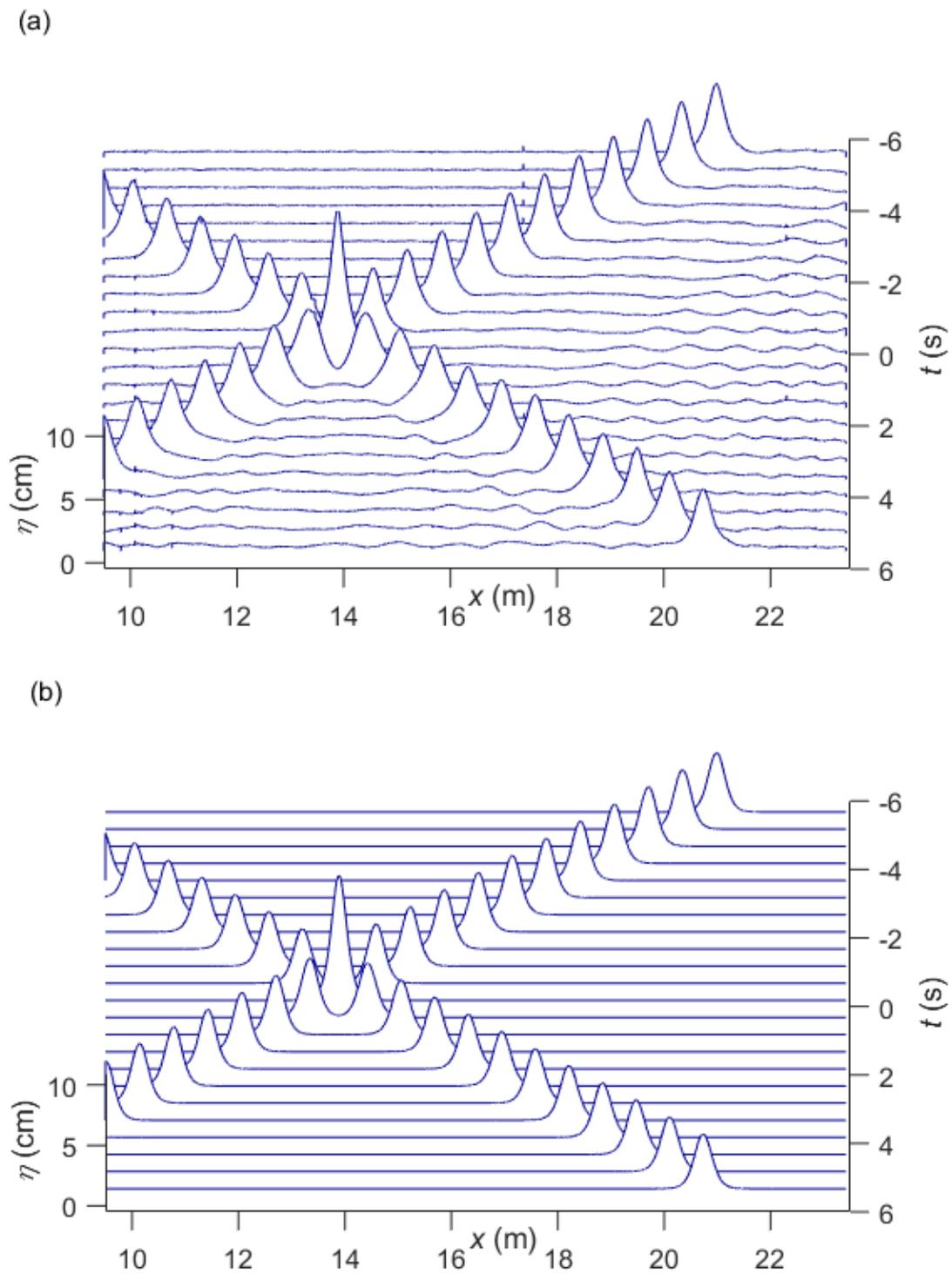


FIGURE 6.8: (a) tracé en cascade de l'évolution de la surface libre dans le champ des caméras pendant l'interaction de 2 soliton de environ 5 cm (b) solution analytique de Kaup-Boussinesq correspondante.

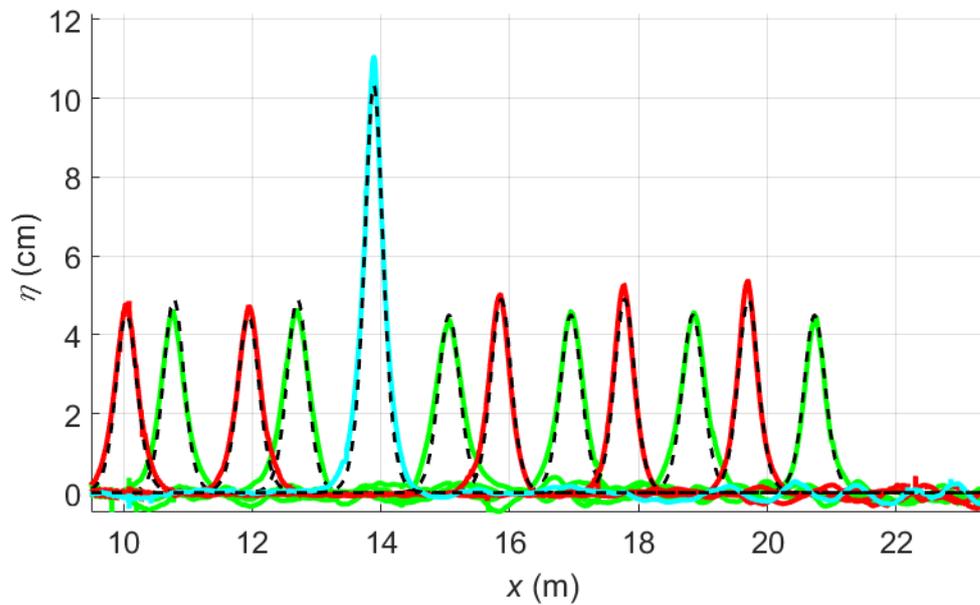


FIGURE 6.9: Mesure spatiale de l'interaction frontale de 2 solitons d'environ 5 cm d'amplitude à différents moments. En rouge, 3 profils à 3 instants précédant l'interaction. En cyan, le profil à l'instant centrale de l'interaction et en vert 4 profils à des instants suivant l'interaction. En tirets noirs est représentée la solution analytique de Kaup-Boussinesq à chaque instant.

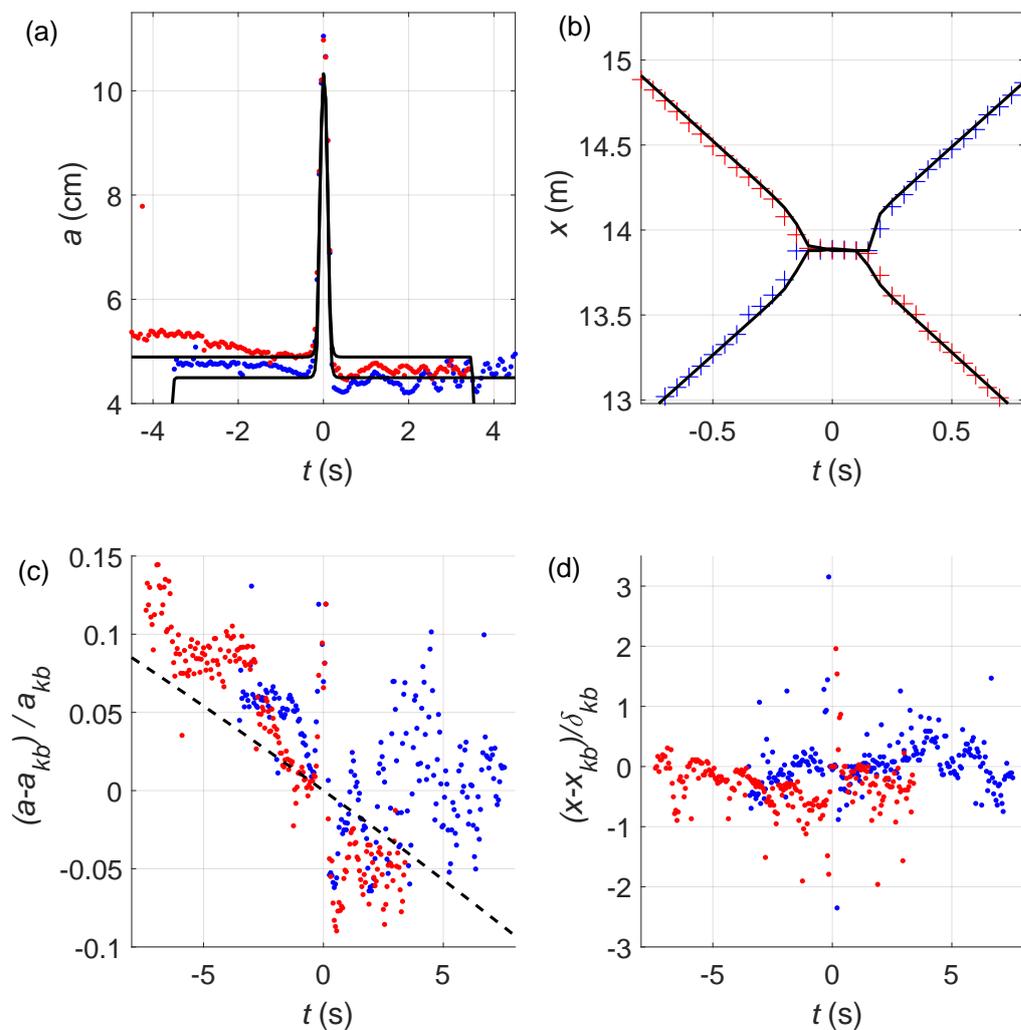


FIGURE 6.10: (a) évolution de l'amplitude des 2 solitons (rouge et bleu) au cours de l'interaction (solution théorique de KB en noir) (b) zoom sur la trajectoire spatio-temporelle des solitons (rouge et bleu) proche du centre de l'interaction (c) différence relative de l'amplitude mesurée à celle de la solution analytique $(a - a_{kb})/a_{kb}$, on trace en tirets noirs l'erreur attendue de par l'amortissement visqueux (6% en 5 secondes) (d) écart entre la position du soliton mesurée, x , et celle prédite, x_{kb} , normalisée par le déphasage prédit par la solution analytique pour chaque soliton : $\delta_1 = 37$ mm (soliton bleu) et $\delta_2 = 35$ mm (soliton rouge)

6.3.3 Bilan

Pour de faibles non-linéarités on a bien une interaction élastique entre les solitons sans modification de leurs amplitudes. La dynamique est bien décrite par la solution théorique de Kaup-Boussinesq. Le déphasage occasionné par l'interaction est difficile à mesurer précisément et empêche de déduire une approximation de l'erreur éventuelle commise par le modèle.

Lorsque l'on considère des solitons plus fortement non-linéaires, on constate que la solution intégrable ne décrit plus parfaitement l'interaction. Elle sous-estime l'amplitude maximale à l'interaction (ici de 12 %) et néglige une perte d'énergie due à l'émission d'une onde dispersive qui atteste de la non élasticité. L'erreur faite sur l'estimation du déphasage par la solution théorique est difficile à mesurer. On peut cependant l'estimer inférieur à 50%.

6.4 Interaction forte

Dans cette section nous allons analyser l'interaction forte de 2 solitons : lorsqu'un grand soliton en dépasse un plus petit. Ici encore, si les non-linéarités sont suffisamment faibles, l'interaction est élastique et décrite théoriquement par les équations de Kaup-Boussinesq. En revanche si l'on sort de cette gamme on s'attend à ne plus observer la même physique. Nous tenterons dans cette partie de quantifier l'adéquation entre les équations de Kaup-Boussinesq et nos mesures et notamment de quantifier la qualité de l'estimation du déphasage occasionné. L'exercice est moins difficile que précédemment car les déphasages que l'on cherche à mesurer sont plus importants.

Cependant, les temps d'interactions sont longs et la dissipation est un biais moins négligeable que précédemment. Il est difficile de parler du déphasage global causé par l'interaction. En effet les vitesses des solitons étant différentes en début et en fin d'interaction, les trajectoires associées ne sont plus parallèles. Dès lors la notion de distance entre ces trajectoires a un sens limité. On se cantonnera donc à commenter l'écart entre mesure et prévision analytique.

Nos expériences ont été menées de la manière suivante. Un premier soliton était généré puis, quelques secondes plus tard, un second soliton était à son tour généré sans que le batteur n'ait de mouvement de recul afin de limiter les ondes parasites. Les expériences ont été réalisées par 12 cm de profondeur.

6.4.1 Le cas des solitons faiblement non-linéaires

On génère un soliton de 36 mm peu après un soliton de 18 mm. La dynamique générale de l'interaction est illustrée sur la figure 6.11 par un tracé en cascade de l'évolution de la surface libre dans le champ des caméras. On fait de même pour la solution analytique correspondante. L'accord qualitatif entre la solution analytique et la mesure est bon. On retrouve bien le grand soliton qui dépasse le premier en passant par la formation d'une structure bimodale symétrique au centre de l'interaction. On remarque que les solitons sont suivis à quelques mètres d'intervalle par une queue dispersive liée à l'imperfection de la génération. On remarque également que les solitons ne sont parfaitement séparés ni à l'entrée ni à la sortie du champ des caméras : la distance d'interaction est supérieure au champ de nos caméras.

La figure 6.12 compare cette mesure à la solution de Kaup-Boussinesq de la même manière que la figure 6.6. La solution analytique décrit bien les phénomènes observés, les déphasages occasionnés par l'interaction semblent cohérents et l'amplitude du creux central de la structure symétrique est reproduite avec une erreur faible.

Afin d'être plus quantitatif, on trace sur la figure 6.13a, l'évolution de l'amplitude des 2 solitons que l'on compare à la solution théorique en noir. En 6.13c, on représente l'écart relatif de l'amplitude mesurée a à l'amplitude théorique a_{kb} : $\frac{a-a_{kb}}{a_{kb}}$. On trace en tirets noirs l'erreur attendue de par l'amortissement visqueux (non-pris en compte par la solution théorique) de part et d'autre du centre de l'interaction (6% en 5 secondes). On observe que seul le soliton de traîne semble être sujet à la dissipation qui explique par ailleurs assez précisément sa perte d'amplitude. Il alimente le soliton de tête, compensant pour lui les effets de la dissipation jusqu'à ce que ce dernier se sépare de la structure bi-modale. On peut aussi écrire que la dissipation affecte le petit soliton à partir du centre de l'interaction et le grand soliton avant celui-ci. L'effet de la dissipation subie par la structure bimodale est inférieur à la somme des effets qu'auraient subis les solitons seuls. Cela s'explique sûrement par le fait que la longueur caractéristique de l'ensemble est inférieure à la somme des longueurs caractéristiques des 2 solitons.

On trace sur la figure 6.13b l'évolution des trajectoires en espace-temps des 2 solitons (proche

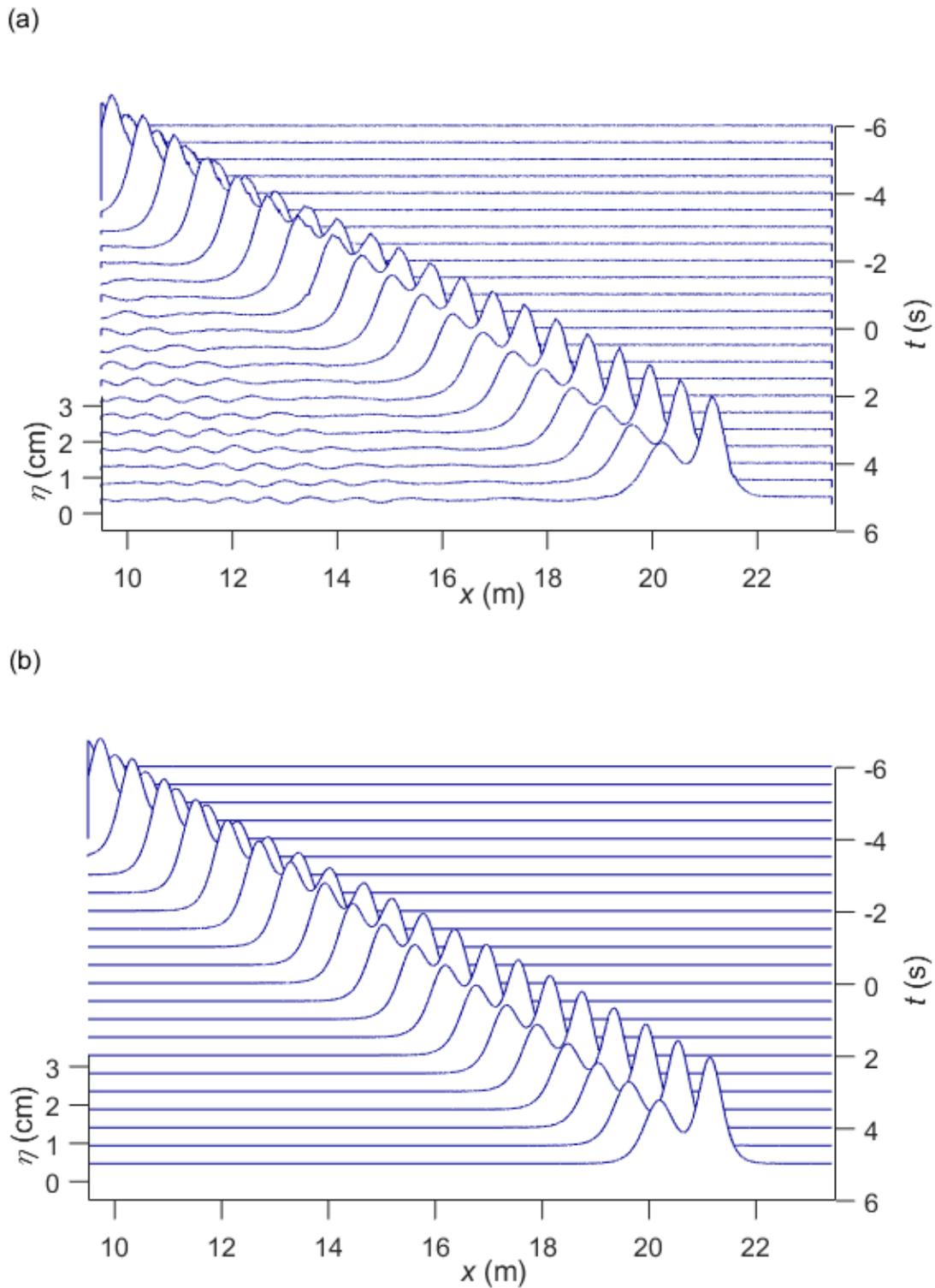


FIGURE 6.11: (a) tracé en cascade de l'évolution de la surface libre dans le champ des caméras pendant l'interaction forte de 2 solitons d'amplitude 3 et 1.5 cm (b) solution analytique de Kaup-Boussinesq correspondante.

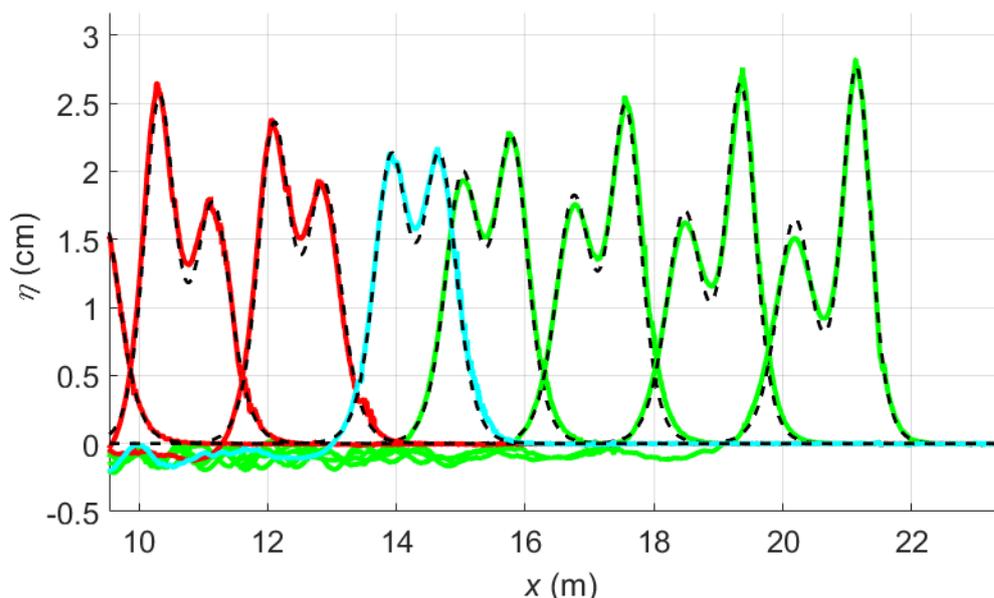


FIGURE 6.12: Mesure spatiale de l'interaction forte de 2 solitons d'amplitude 3 et 1.5 cm à différents instants. En rouge, 2 profils à 2 instants précédant l'interaction. En cyan, le profil à l'instant central de l'interaction et en vert 4 profils à des instants suivant l'interaction. En tirets noirs est représentée la solution analytique de Kaup-Boussinesq à chaque instant.

du centre de l'interaction) que l'on compare à la solution théorique en noir. Le déphasage au centre de l'interaction (soit l'écart entre les sommets de la structure bi-modale) est bien prédit par la solution théorique. On trace en 6.13d, l'écart à chaque instant entre la position mesurée du sommet du soliton x et sa position théorique x_{kb} . On normalise cet écart par les valeurs de déphasage théorique (503 mm et 677 mm). L'écart entre la mesure et la solution analytique au cours de l'interaction ne dépasse jamais 10% du déphasage théorique (soit environ 5 cm). Cela étant, l'évolution de ce déphasage est assez mystérieuse et ne semble pas s'expliquer comme un impact de la dissipation. Les solitons sont tous deux légèrement plus lents que la solution analytique ne le prédit au début de l'interaction (l'écart est négatif et s'accroît) puis plus rapide (l'écart se réduit puis les solitons de l'expérience prennent de l'avance). Leurs vitesses diminuent ensuite jusqu'à ce que la solution analytique soit de nouveau en avance. Cet effet de ralentissement/accélération/ralentissement par rapport à la prédiction a lieu en respectant l'écart entre les solitons prédit analytiquement. Il est inexplicable mais son impact est limité. En comparant les erreurs de déphasages en début et en fin d'interaction on constate que l'erreur commise par la solution théorique sur le déphasage globale reste faible.

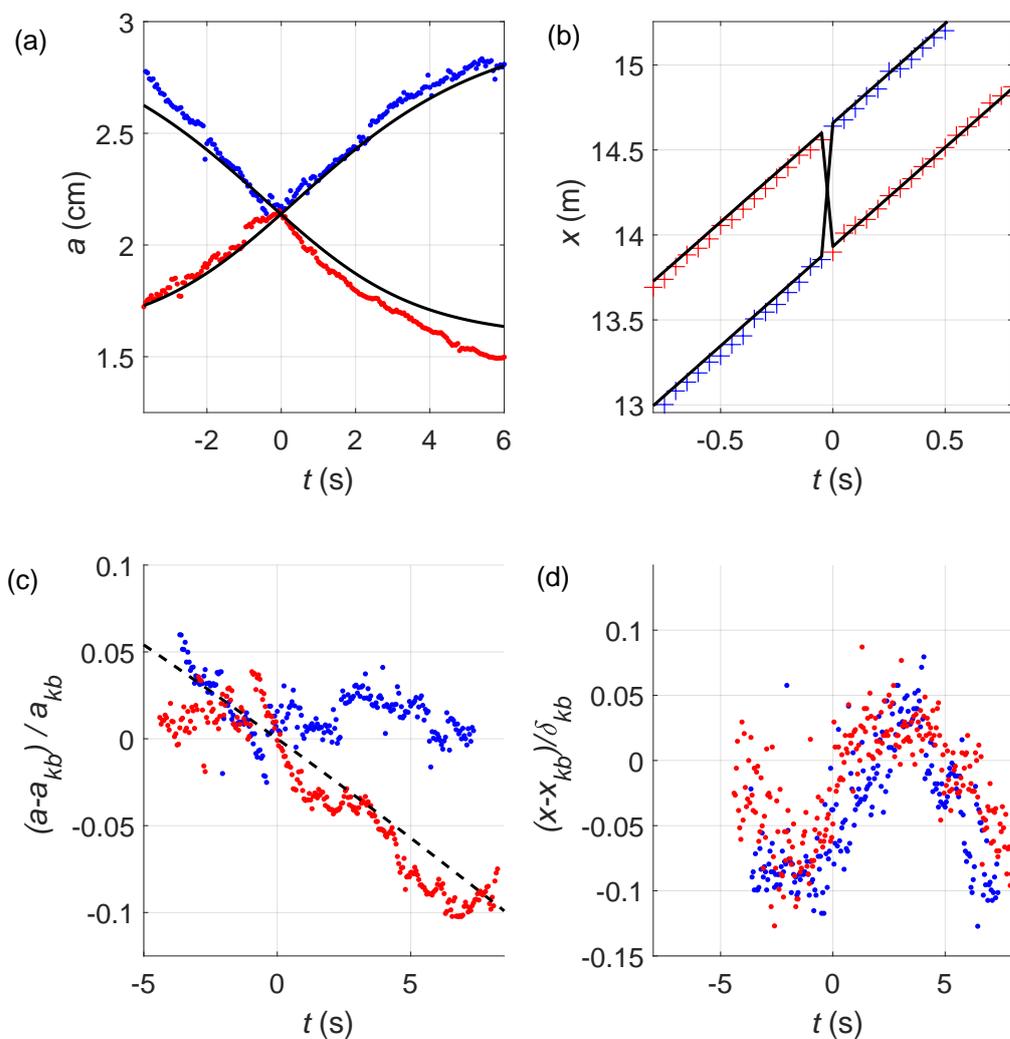


FIGURE 6.13: (a) évolution de l'amplitude des 2 solitons (rouge et bleu) au cours de l'interaction (solution théorique de KB en noir) (b) zoom sur la trajectoire spatio-temporelle des solitons (rouge et bleu) proche du centre de l'interaction (c) différence relative de l'amplitude mesurée à celle de la solution analytique $(a - a_{kb})/a_{kb}$, on trace en tirets noirs l'erreur attendue de par l'amortissement visqueux (6% en 5 secondes) (d) écart entre la position du soliton mesurée, x , et celle prédite, x_{kb} , normalisée par le déphasage prédit par la solution analytique pour chaque soliton : $\delta_1 = 503$ mm (soliton bleu) et $\delta_2 = 677$ mm (soliton rouge)

6.4.2 Le cas des solitons fortement non-linéaires

On génère un soliton de 36 mm suivi d'un soliton de 72 mm. La dynamique générale de l'interaction est illustrée sur la figure 6.14 par un tracé en cascade de l'évolution de la surface libre dans le champ des caméras. A titre comparatif, on trace aussi la solution analytique correspondante. Celle-ci décrit qualitativement les phénomènes observés. On retrouve bien le grand soliton qui dépasse le premier en passant par la formation d'une structure symétrique au centre de l'interaction. On remarque que les solitons sont suivis à quelques mètres d'intervalles par une queue dispersive liée à l'imperfection de la génération. On remarque également que l'interaction est plus courte que précédemment et "tient" dans le champ des caméras. Plus les solitons sont grands, plus le temps d'interaction est court.

La figure 6.15 compare cette mesure à la solution de Kaup-Boussinesq de la même manière que la figure 6.6. La solution analytique ne décrit pas précisément les phénomènes observés, la structure bimodale du centre de l'interaction est plus large et plus creuse que la prédiction analytique ce qui conduit à des erreurs sur le déphasage. De plus les solitons de l'expérience se séparent moins vite que prédit.

Afin d'être plus quantitatif, on trace sur la figure 6.16a, l'évolution de l'amplitude des 2 solitons que l'on compare à la solution théorique en noir. En 6.16c, on représente l'écart relatif de l'amplitude mesurée a à l'amplitude théorique a_{kb} : $\frac{a-a_{kb}}{a_{kb}}$. On trace en tirets noirs l'erreur attendue de par l'amortissement visqueux (non-pris en compte par la solution théorique) de part et d'autre du centre de l'interaction (6% en 5 secondes). On observe que seul le soliton de traîne assume la dissipation pour la structure bimodale. On observe également un transfert d'énergie tout au long de l'interaction du grand vers le petit soliton. Ce transfert est illustré par les variations inverses des erreurs d'amplitude pour les 2 solitons. En fin d'interaction cet effet a complètement compensé la dissipation du petit soliton qui quitte le champs des caméras avec la même amplitude qu'en entrant dans celui-ci.

On trace sur la figure 6.16b l'évolution des trajectoires en espace-temps des 2 solitons (proche du centre de l'interaction) que l'on compare à la solution théorique en noir. Le déphasage au centre de l'interaction (soit l'écart entre les sommets de la structure bi-modale) est sous estimée par la solution théorique. On trace en 6.16d, l'écart à chaque instant entre la position mesurée du sommet du soliton x et sa position théorique x_{kb} . On normalise cet écart par les valeurs de déphasage théorique (503 mm et 677 mm). La forte non-linéarité altère ici aussi le mécanisme de l'interaction. On constate que le déphasage au centre de l'interaction est sous-estimé de 50 % pour le grand soliton et de 35 % pour le petit. Pendant toute la durée de l'interaction le petit soliton va plus vite que prédit et le grand soliton plus doucement ce qui corrobore la thèse du transfert d'énergie de l'un à l'autre. Cela a également pour effet de compenser l'erreur de déphasage centrale. En effet, si on somme les déphasages en début en fin d'interaction on obtient que la solution analytique surestime le déphasage global de l'interaction de 5 à 10 %. Cela se vérifie bien sur la figure 6.15 où la structure bi-modale est plus étroite en début et en fin d'interaction que la prédiction et plus large au centre de l'interaction.

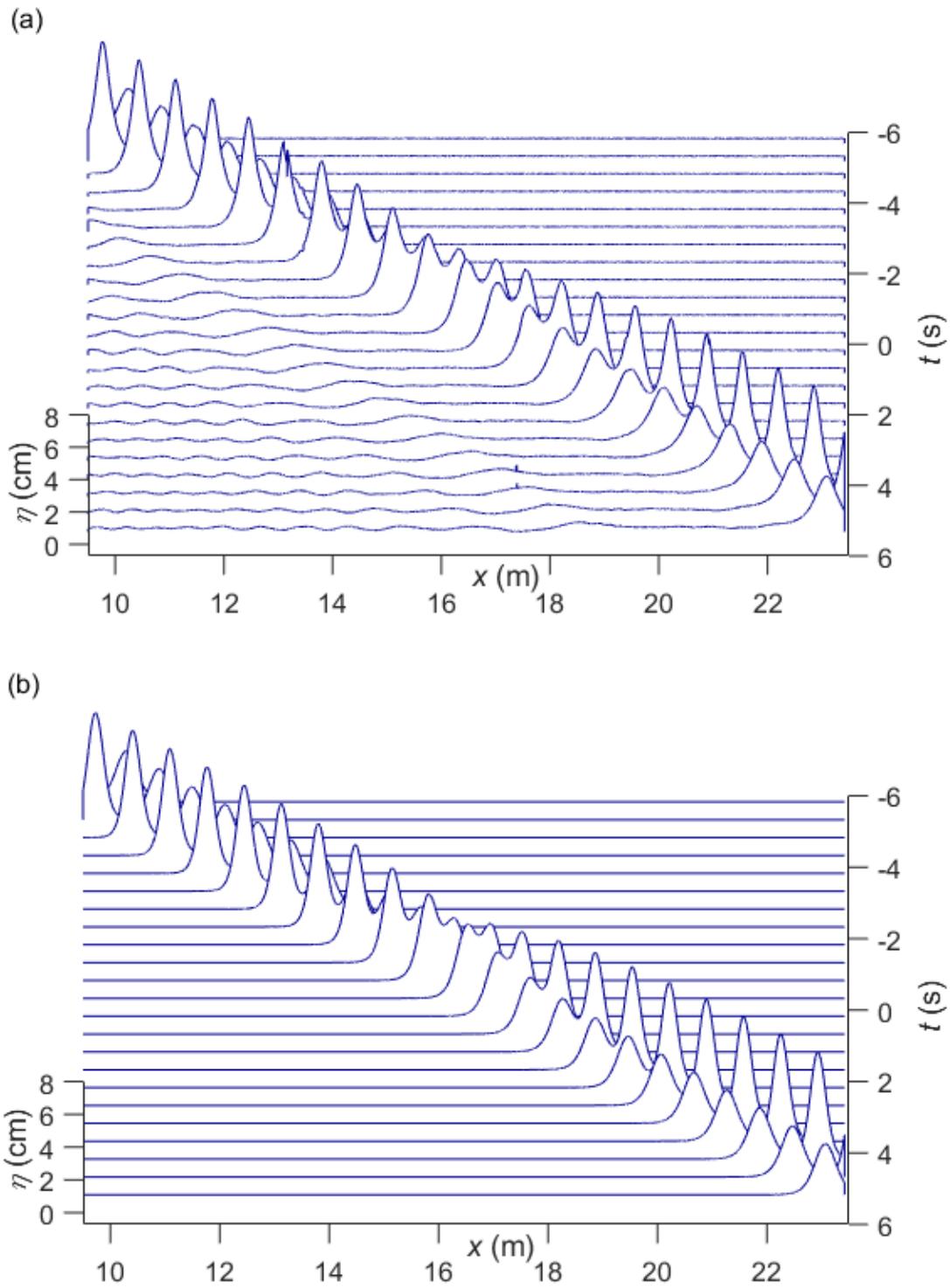


FIGURE 6.14: (a) tracé en cascade de l'évolution de la surface libre dans le champ des caméras pendant l'interaction forte de 2 solitons de 7.2 et 3.6 cm (b) solution analytique de Kaup-Boussinesq correspondante.

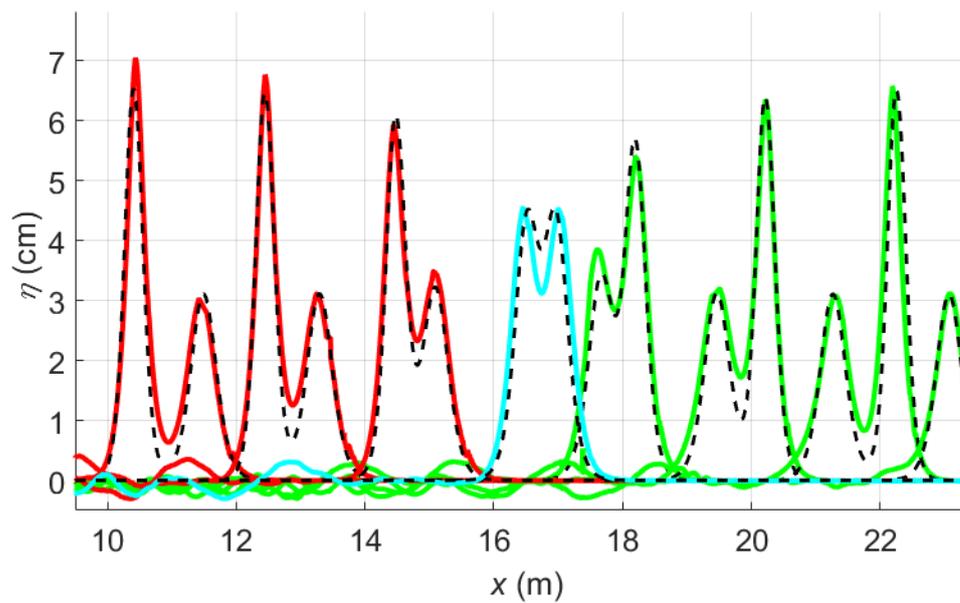


FIGURE 6.15: Mesure spatiale de l'interaction forte de 2 solitons de 7.2 et 3.6 cm à différents instants. En rouge, 3 profils à 3 instants précédant l'interaction. En cyan, le profil à l'instant central de l'interaction et en vert 4 profil à des instants suivant l'interaction. En tirets noir est représenté la solution analytique de Kaup-Boussinesq à chaque instant.

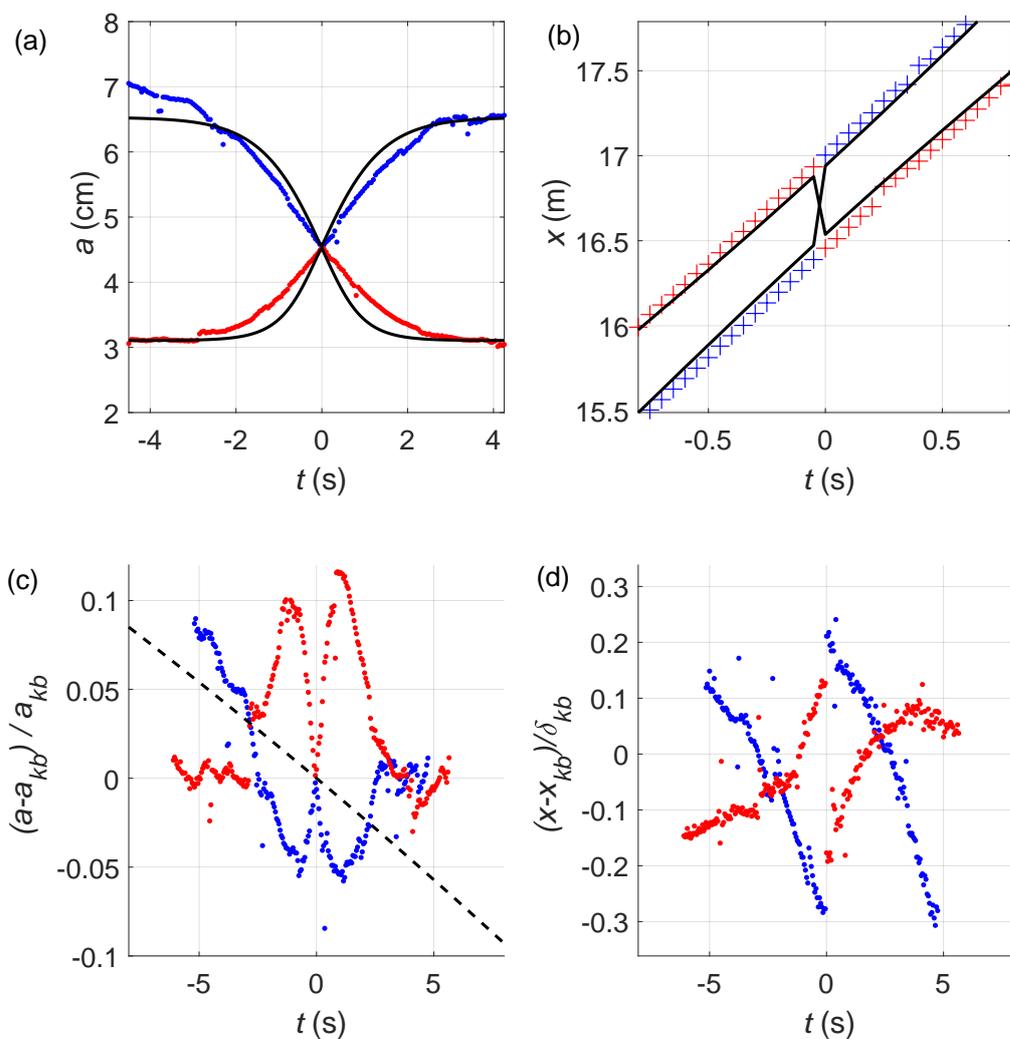


FIGURE 6.16: (a) évolution de l'amplitude des 2 solitons (rouge et bleu) au cours de l'interaction (solution théorique de KB en noir) (b) zoom sur la trajectoire spatio-temporelle des solitons (rouge et bleu) proche du centre de l'interaction (c) différence relative de l'amplitude mesurée à celle de la solution analytique $(a - a_{kb})/a_{kb}$, on trace en tirets noirs l'erreur attendue de par l'amortissement visqueux (6% en 5 secondes) (d) écart entre la position du soliton mesurée, x , et celle prédite, x_{kb} , normalisée par le déphasage prédit par la solution analytique pour chaque soliton : $\delta_1 = 303$ mm (soliton bleu) et $\delta_2 = 457$ mm (soliton rouge)

6.4.3 Le cas très faiblement non-linéaire

Considérons désormais les interactions de solitons très faiblement non-linéaires. Ici on considère un soliton de 7.2 mm poursuivant un soliton de 3.6 mm, soit un rapport 10 d'amplitude avec le cas précédent. La longueur des solitons est plus grande et la différence de vitesse entre les deux est bien plus faible. La figure 6.17 montre une série temporelle à 10 m du batteur. On voit que le grand soliton met un aller-retour à dépasser le petit soliton. La dissipation poursuivant son travail de sape, on constate une réduction de l'écart de vitesse entre les solitons. Les solitons ne se séparent jamais et la structure bimodale évolue en un ressaut ondulant. Par ailleurs, on peut constater de manière spectaculaire que, tant que son amplitude est supérieure, seul le soliton de traîne se dissipe.

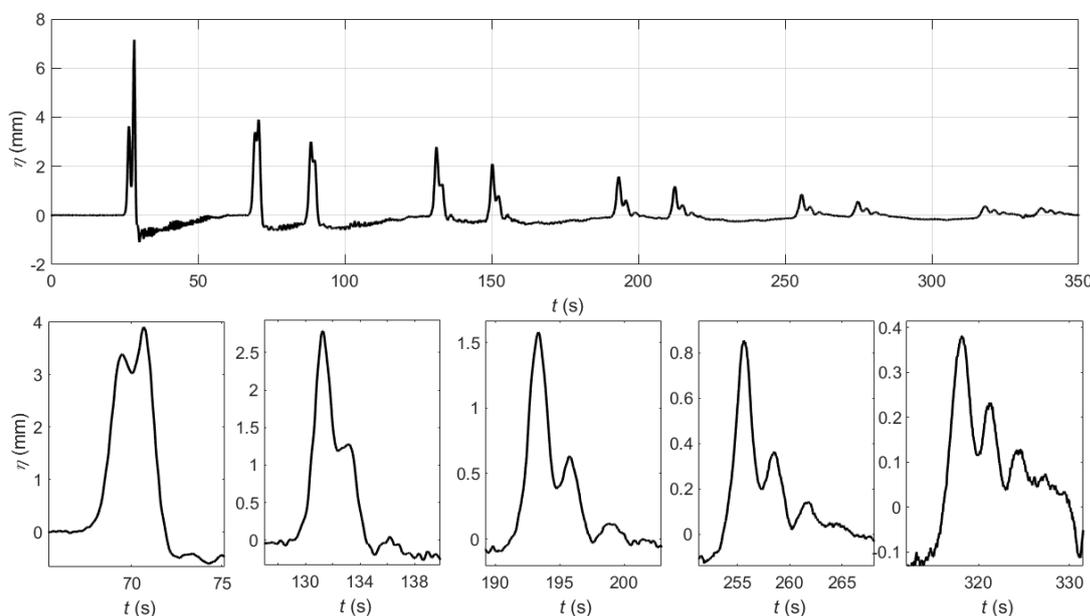


FIGURE 6.17: Série temporelle à 10 m du batteur illustrant l'interaction forte de 2 solitons d'amplitude 7.2 mm et 3.6 mm. On présente des agrandissements de cette série temporelle afin de suivre l'évolution de la structure bi-modale.

6.4.4 Bilan

L'interaction forte se déroulant sur un temps plus long, la dissipation joue un rôle plus fort que précédemment et il est difficile de l'isoler pour conclure sur l'élasticité parfaite des interactions. On distingue 3 cas :

- dans le cas des fortes non-linéarités, un double gain en amplitude et en vitesse du petit soliton en miroir de la perte subie par le grand semble trahir un transfert d'énergie. Celui-ci est attesté par la compensation de la dissipation pour le plus petit soliton sur la durée globale de l'interaction ;
- dans le cas des faibles non-linéarités, l'erreur sur les amplitudes est bien expliquée par la dissipation qui s'applique symétriquement sur chacun des solitons ce qui donne confiance en l'élasticité de l'interaction ;

- dans le cas de soliton de très petite amplitude, le temps d'interaction grandit et la dissipation devient prépondérante sur la dynamique. Les solitons voient leurs vitesses tendre vers c_0 ce qui les rend incapables de se séparer. L'évolution de la structure bi-modale ainsi figée est fortement impactée par la dissipation ;

En conclusion, on peut dire que dans une certaine gamme d'amplitudes une forme d'élasticité de l'interaction est conservée dans la mesure où la dissipation s'applique équitablement aux 2 solitons pendant l'interaction. Cette gamme est cependant plus petite que dans le cas des interactions faibles puisqu'elle est bornée du côté des petites amplitudes par la durée s'allongeant des interactions qui conduit à ce que l'évolution de la structure bi-modale soit plus dictée par la dissipation que par la dynamique intégrable. On peut également noter que les solitons se dissipent moins vite durant l'interaction que s'ils avaient été séparés. Cela peut s'expliquer par le fait que la longueur caractéristique de la structure formée pendant l'interaction est inférieure à la somme des longueurs caractéristiques des 2 solitons.

6.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre, on a vu que la dissipation ne pouvait être négligée que sur des échelles de temps courtes. En effet, en considérant une profondeur de 12 cm, un soliton voit son amplitude approximativement réduite de moitié toutes les 69 s (\sim un aller-retour dans le canal). Cet amortissement est adiabatique au sens où nous n'observons pas de transfert d'énergie à d'autres modes. Malgré cet amortissement visqueux, le soliton conserve sa vitesse et son profil théorique jusqu'à une amplitude de 2 mm. Dans cette limite, on a, à chaque instant, un excellent accord avec la solution théorique de Kaup-Boussinesq.

L'élasticité des interactions faibles est fortement dépendante de l'amplitude des solitons considérés. La solution théorique décrit très bien l'interaction de 2 solitons de faible amplitude. Dans cette limite l'interaction est élastique. Lorsque l'on brise l'hypothèse de faible non-linéarité, l'accord à la solution théorique est moins bon. En particulier, on observe la formation d'une onde radiative à l'interaction qui illustre la non-élasticité de celle-ci. On peut trouver une discussion de ce phénomène dans [54].

La comparaison des interactions fortes à leurs solutions théoriques s'est révélée des plus intéressantes. En effet, se déroulant sur des temps plus long, la dissipation vient perturber leurs dynamiques. On a pu mettre en évidence un transfert d'énergie du grand soliton vers le petit dans le cas fortement non-linéaire qui est en contradiction avec le cadre intégrable. Dans le cas faiblement non-linéaire ce transfert n'existe pas et l'interaction est en ce sens quasi-élastique. La comparaison avec la solution théorique met en évidence que seul le soliton de traîne se dissipe et que cette dissipation, probablement indexée sur la longueur de la structure bi-modale formée par les 2 solitons, est moins efficace qu'elle ne le serait sur les 2 solitons séparés. Il serait intéressant de poursuivre les travaux en ce sens afin de pouvoir prédire théoriquement l'amplitude des solitons qui émergent de ces interactions lentes. En particulier, si on considère le problème d'un gaz de solitons dissipatif, l'évolution de la distribution de solitons sera-t-elle impactée par une dissipation plus efficace pour les petits solitons (ou les grands) ?

La comparaison fine des déphasages expérimentaux et théoriques s'est révélée être un exercice difficile, complexifié par les changements de vitesse des solitons (dû à l'amortissement) et la résolution temporelle de nos mesures. Afin de donner un ordre de grandeur des valeurs qu'ils peuvent prendre dans nos expériences, on représente sur les figures 6.19 (pour l'interaction forte) et 6.18 (pour l'interaction faible), les valeurs de déphasage correspondant à l'interaction d'un premier soliton d'amplitude a_g donnée en abscisse avec un second soliton dont l'amplitude a_p est une fraction de celle du premier (définie par la couleur de la courbe). On représente en ligne interrompue le déphasage du plus grand soliton et en ligne continue le déphasage du plus petit.

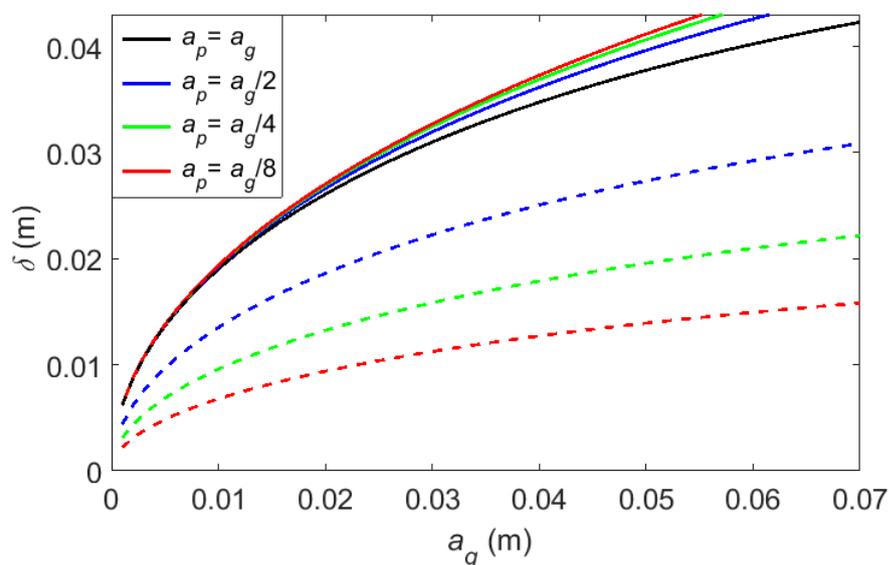


FIGURE 6.18: Valeur absolue du déphasage δ prédit par la solution analytique (KB) par 12 cm de profondeur lors de l'interaction faible de 2 solitons d'amplitude a_g et a_p en fonction de l'amplitude du plus grand a_g . Chaque couleur correspond à un rapport d'amplitude entre les 2 solitons interagissant. En ligne continue on affiche le déphasage du petit soliton, en ligne pointillée celui du grand

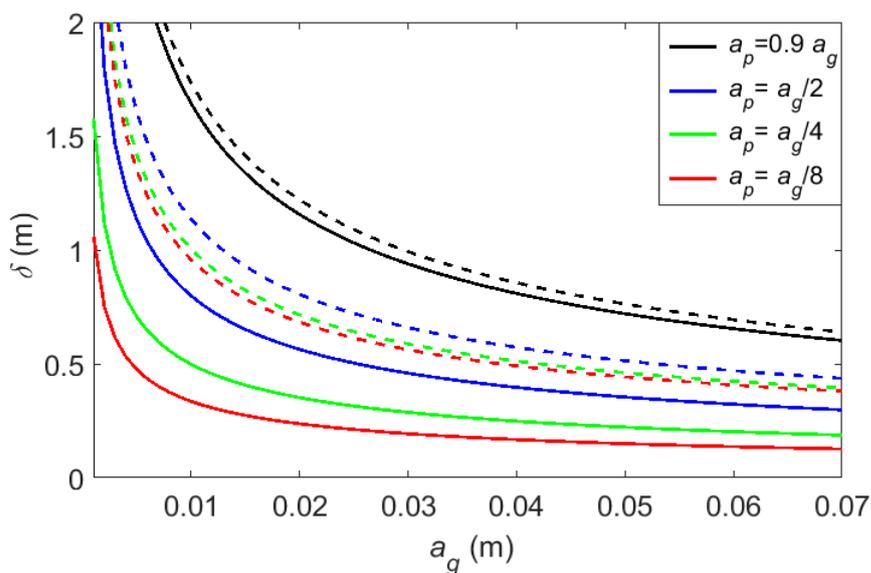


FIGURE 6.19: Valeur absolue du déphasage δ prédit par la solution analytique (KB) par 12 cm de profondeur lors de l'interaction forte de 2 solitons d'amplitude a_g et a_p en fonction de l'amplitude du plus grand a_g . Chaque couleur correspond à un rapport d'amplitude entre les 2 solitons interagissant. En ligne continue on affiche le déphasage du petit soliton (qui est négatif), en ligne pointillée celui du grand (qui est positif)

— Chapitre 7 —

Génération d'un gaz de solitons

7.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter notre objet d'étude, le gaz de soliton, et notamment les moyens mis en œuvre pour le générer expérimentalement.

Afin d'obtenir un état de turbulence solitonique, il convient de générer le plus grand nombre de solitons possible. Les générer séparément serait peu efficace. On choisit donc de les injecter sous une forme plus dense, par paquets. On verra que l'équilibre entre termes non-linéaires et dispersifs conduit, en eau peu profonde, une intumescence à se décomposer en un nombre plus ou moins grand de solitons. Dans un premier temps, on décrira donc ce mécanisme : la fission. Dans un second temps, on verra qu'en choisissant un forçage sinusoïdal, il est possible de prédire le contenu solitonique injecté dans le canal grâce à la PIST (Periodic Inverse Scattering Transform). En particulier, on discutera l'impact du nombre d'Ursell du forçage sur la distribution de solitons obtenue. On comparera ensuite nos mesures aux prédictions théoriques développées précédemment afin d'en discuter la pertinence. Enfin, on décrira dans les grandes lignes l'état stationnaire turbulent et solitonique auquel on aboutit.

Ce chapitre permettra au lecteur de se familiariser avec l'objet que nous étudions et de mettre en avant les questions importantes qu'il soulève. Ces questions seront par la suite traitées en détails dans le chapitre suivant que ce soit en termes de caractérisation statistique de l'état stationnaire solitonique ou en termes de mécanismes induisant le chaos.

7.2 Le phénomène de la fission

En eau peu profonde, une intumescence évoluera différemment suivant son nombre d'Ursell. On ne peut à ce sujet que recommander la lecture de l'excellente thèse de Fernando J. Seabra Santos [54] qui délimite les domaines de validité des différentes théories des ondes en fonction de celui-ci :

$$U = \frac{3AL^2}{16\pi^2 h^3} \quad (7.1)$$

où A , L et h représentent une amplitude, une longueur et une profondeur caractéristique.

Considérons une condition initiale sinusoïdale dont le nombre d'Ursell est grand devant l'unité. L'évolution de cette dernière sera décrite par les équations de Saint-Venant. Ces dernières prédisent que le front de l'onde va se raidir : le point le plus haut de chaque période va se déplacer plus vite que le point le plus bas. Cette dissymétrie rendra impossible de caractériser l'onde par un seul nombre d'Ursell. L'arrière de l'onde verra son Ursell grandir avec l'avancée du sommet de l'onde puisque sa longueur grandit. Inversement, l'avant de l'onde verra son Ursell diminuer avec sa longueur caractéristique. Or en eau peu profonde, les équations de Saint-Venant ne sont valables que si le nombre d'Ursell est supérieur à 10 avec la définition 7.1. Seabra Santos montre que ce seuil est franchi pour la partie avant de l'onde lorsque celle-ci a avancé d'une fraction de sa longueur d'onde :

$$\frac{x}{\Lambda} \simeq 0.1 \frac{h}{a_{sin}} \quad (7.2)$$

avec Λ la longueur de l'onde sinusoïdale, a son amplitude et h la profondeur.

On a alors un front d'onde suffisamment raide pour que la dispersion ne soit plus négligeable et vienne régulariser la catastrophe de gradient (raidissement excessif du front). On observe alors la formation d'une ondulation qui dégénère en un train de solitons (figure 7.1).

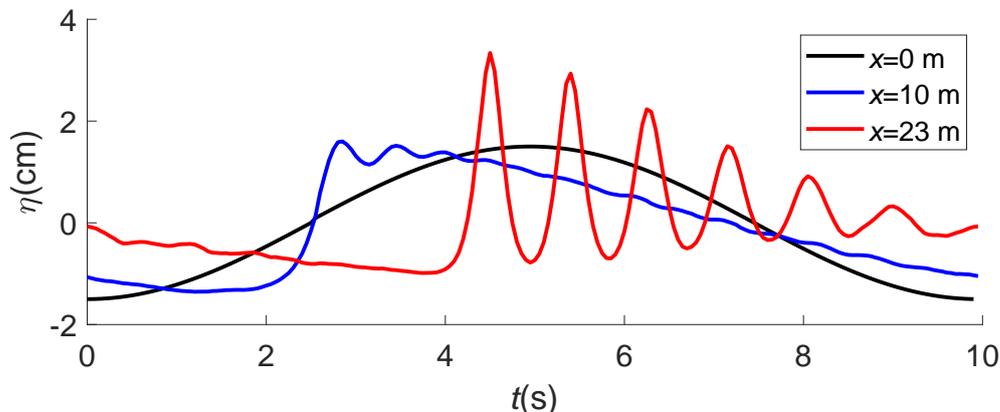


FIGURE 7.1: Mesure de l'évolution de l'élévation de surface libre à 10 et 23 m pour la génération d'une condition initiale sinusoidale de période 10 s et d'amplitude 1.5 cm par une profondeur de 11.5 cm (Ursell= 19.4). On observe d'abord le raidissement du front d'onde régi par les équations de Saint-Venant (entre 0 et 8 m) et la régularisation de cette catastrophe de gradient par la dispersion. Le sinus initial évolue alors en train de solitons.

Ce phénomène n'est pas sans rappeler celui des ondes de Favre observées dans les ressauts hydrauliques. Un ressaut hydraulique désigne, pour un écoulement stationnaire, la transition entre deux niveaux constants d'eau. Lorsque la différence de niveau est grande, il est caractérisé par un rouleau de déferlement. Lorsque cette différence est plus ténue, on observe le développement d'un train d'ondes : les ondes de Favre ou *undular bore*. On représente ce phénomène sur la figure 7.2.

Ce phénomène et celui de la fission sont tout deux des régularisation d'une non-linéarité excessive par la dispersion. On verra plus loin que certaines relations établies pour les ondes de Favre sont pertinentes au début de la fission. En particulier en ce qui concerne la périodicité initiale du train de soliton.

Une de ces relations nous est donnée par Lemoine qui constata en 1948 [34] que l'onde de Favre était stationnaire dans le référentiel du ressaut. Il en déduisit une expression pour la longueur d'onde de la première ondulation en égalisant les vitesses de propagation. Un bilan d'énergie lui permit ensuite de déduire une expression de l'amplitude de la première ondulation.

$$\frac{L_w}{h_2} \tanh\left(2\pi \frac{h_2}{L_w}\right) = \pi \frac{h_1}{h_2} \left(1 + \frac{h_1}{h_2}\right) \quad (7.3)$$

$$\frac{a_w}{h_2} = \left(\frac{h_2 - h_1}{h_2}\right) \left(\frac{h_2 - h_1}{h_1}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{2kh_2}{\sinh(2kh_2)}\right)^{-1/2} \quad (7.4)$$

Plus tard, en 1993, Chanson ([5]) observa au terme de nombreux essais pour différents ressauts en canal une loi de décroissance en puissance concernant la longueur d'onde de la i^{eme} ondulation de Favre en fonction de la première tel que :

$$L_{wi} = L_w^{-0.2} \quad (7.5)$$

Dans le but de générer un grand nombre de solitons, nous allons tirer parti de cette évolution spontanée en train de solitons sous l'effet de l'équilibre entre dispersion et non-linéarité. L'idée

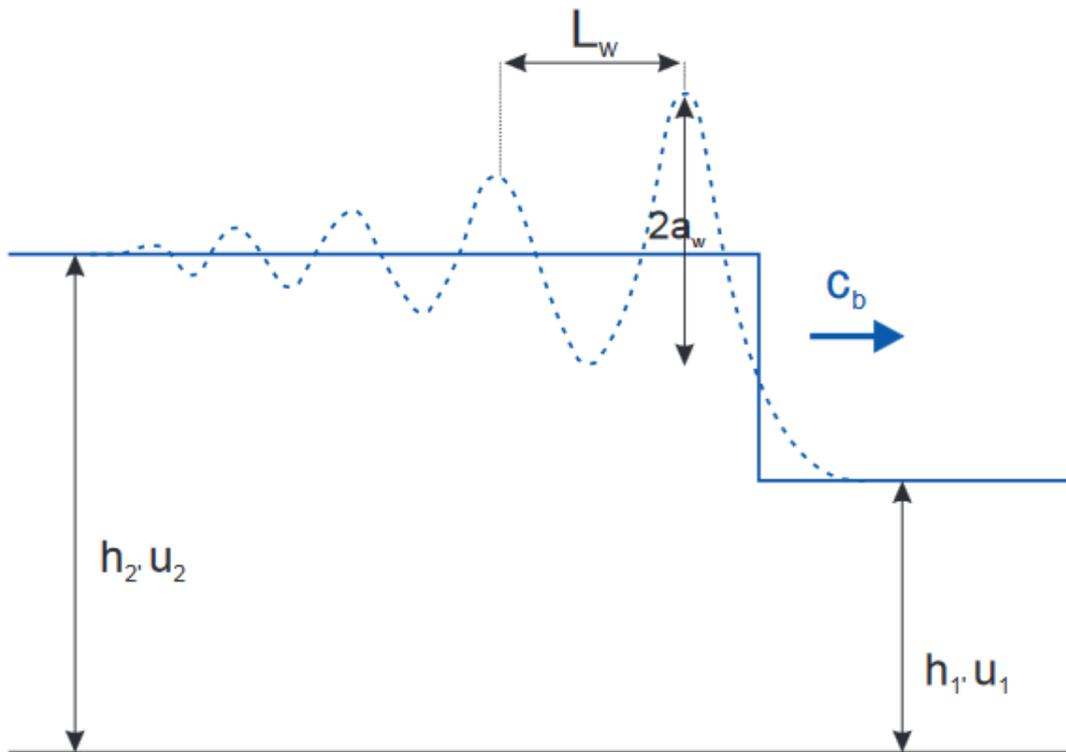


FIGURE 7.2: schéma d'un ressaut hydraulique et de l'onde de Favre engendrée. Cette figure est tirée de la thèse de Marion Tissier [59]

est que générer 2 solitons séparément demanderait une excursion du batteur supérieure à celle nécessaire à la génération de 2 solitons en train d'interagir. Cela est d'autant plus vrai que le nombre de solitons est important. Pour générer nos gaz de solitons, nous avons choisi d'adopter un forçage sinusoïdal. Ce dernier présente l'intérêt d'avoir été étudié abondamment dans la littérature ce qui nous fournira des points de comparaisons et un meilleur contrôle de ce que nous injectons dans le canal.

Nous allons voir dans la section suivante qu'en choisissant un forçage sinusoïdal, il est possible de prédire le contenu solitonique injecté dans le canal grâce à la PIST (Periodic Inverse Scattering Transform).

7.3 Décomposition théorique d'un sinus en solitons

Une façon d'aborder le problème de la décomposition d'une condition initiale d'élévation de surface libre sinusoïdale en un train de solitons consiste à considérer ces derniers comme les modes fondamentaux du système. C'est-à-dire reconnaître qu'ils sont déjà présents lorsque la surface forme une sinusoïde et que cette dernière résulte de l'interaction non-linéaire entre ces modes. La fission se compare alors à l'étape terminale d'une interaction forte (cf. chapitre précédent) impliquant de multiples modes.

Il existe une méthode mathématique permettant d'extraire les modes solitoniques qui com-

posent un état de surface libre. Il s'agit de la méthode d'inversion des données de diffusion, ou *Inverse Scattering Transform* (IST). Le lecteur trouvera au chapitre 3 les détails de ses fondations mathématiques et de son implémentation. Nous allons dans cette section l'appliquer afin de mettre en évidence les paramètres déterminant le contenu solitonique d'une condition initiale sinusoïdale. Dans une première partie on constatera que le nombre d'Ursell du forçage suffit à prévoir la distribution de solitons. Dans une seconde partie, on discutera des limites de cette méthode concernant la prédiction précise des amplitudes de ces derniers.

7.3.1 Le nombre d'Ursell au cœur du problème

Le nombre d'Ursell est un nombre adimensionnel important. Nous avons vu au chapitre 1 qu'il mesure le rapport entre les termes dispersif et non-linéaire de KdV dont l'équilibre est la condition *sine qua non* de l'existence des solitons. On va voir dans cette section qu'il suffit à définir le nombre, les amplitudes, et le niveau de référence sur lequel vont se propager les solitons issus d'une condition initiale sinusoïdale. On utilisera la définition suivante pour le nombre d'Ursell :

$$U = \frac{3a}{4k^2h^3} = \frac{3ac_0^2T^2}{16\pi^2h^3} \quad (7.6)$$

Le nombre d'Ursell fait intervenir l'amplitude a , le nombre d'onde k (ou la période T) et la profondeur h . Ainsi des ondes différentes peuvent avoir le même nombre d'Ursell. Considérons 4 conditions initiales de nombre d'Ursell équivalent définies par :

condition	a (cm)	f (Hz)	h (cm)	Ursell
sinus 1	1.5	0.3	12	2.157
sinus 2	3	0.21	24	2.157
sinus 3	0.75	0.21	12	2.157
sinus 4	1.5	0.15	24	2.157

On représente sur la figure 7.3 les traces des matrices de monodromie et le spectre non-linéaire associés à chacune de ces conditions par la PIST.

Afin de fluidifier la lecture, on rappelle quelques résultats du chapitre 3. La trace de la matrice de monodromie associée à une condition initiale renseigne sur les modes physiques qui composent cette dernière. L'espace est ainsi divisé en bandes où cette trace est comprise ou non entre -2 et 2. Ces bandes sont délimitées par les E_j tels que $tr(M(E_j)) = \pm 2$. Chaque bande où la trace sort de l'intervalle $[-2; 2]$ correspond à un mode cnoïdal défini par son module :

$$m = \frac{E_{2j+1} - E_{2j}}{E_{2j+1} - E_{2j-1}} \quad (7.7)$$

Lorsque ce module est supérieur à 0.99, le mode est dit solitonique et son amplitude vaut :

$$a_j = 2 \frac{E_{ref} - E_{2j}}{\lambda} \quad (7.8)$$

Tout les modes solitoniques se propagent sur un niveau de référence inférieur au niveau moyen. Ce niveau de référence s'obtient à partir de $E_{ref} = E_{2j+1}$ correspondant au dernier mode solitonique j :

$$h_{ref} = \frac{-E_{ref}}{\lambda} \quad (7.9)$$

Pour rappel λ est le paramètre qui permet d'adimensionner l'équation d'élevation de surface libre en eau peu profonde pour obtenir la forme canonique de KdV. On le retrouve dans l'expression du problème aux valeurs propres qui est au cœur de la PIST (cf. chapitre 3) :

$$\phi_{xx} + (\lambda\eta(x, 0) + E)\phi(x) = 0 \quad (7.10)$$

On constate sur la figure 7.3 que les 4 traces des matrices de monodromie ont une forme semblable, permettant d'identifier 2 solitons. Elles se réduisent en fait à une même fonction pour peu qu'on normalise l'axe des E tel que :

$$E_{norm} = \frac{E}{E_{min}} \quad (7.11)$$

$$E_{min} = -\lambda(\eta_{max} - \eta_{mean}) = \frac{3c_0^2}{2h^3} a_{sin} = \frac{3g}{2} \frac{a_{sin}}{h^2} \quad (7.12)$$

Le module de chaque mode est ainsi déterminé uniquement par le nombre d'Ursell. En effet, la dilatation de l'axe des E affecte de manière équivalente le numérateur et le dénominateur de la définition 7.7 de celui-ci.

Les amplitudes des modes et le niveau de référence dépendent explicitement de λ . En revanche, leur rapport est indépendant de ce paramètre. En particulier, le ratio $\frac{E_{ref}}{E_{min}}$ ne dépend que du nombre d'Ursell ce qui implique que $\frac{h_{ref}}{a_{sin}}$ également. Il en va de même pour l'amplitude relative de chaque solitons $\frac{a_{sol}}{a_{sin}}$. Ainsi, la décomposition en modes de nos 4 sinus par la PIST correspond à un unique problème (figure 7.3 i et j).

Le nombre d'Ursell et l'amplitude d'un sinus suffisent à prédire la composition du train de solitons qui résultera de son évolution KdV. On se propose dans la suite de décrire graphiquement cette évolution pour n'importe quelles conditions d'élevation de surface libre sinusoidale. Les figures 7.4, 7.5 et 7.6 décrivent pleinement le problème adimensionnel.

On représente sur la figure 7.4 le nombre de solitons et le rapport du niveau de référence sur l'amplitude du sinus $\frac{h_{ref}}{a_{sin}}$ en fonction du nombre d'Ursell d'une condition initiale sinusoidale. Ces courbes ont été réalisées en effectuant l'analyse PIST sur des sinus de fréquences de 0.01 à 1 Hz, d'amplitude de 0.025 à 3 cm par des profondeurs de 12 et 40 cm.

La variation du nombre de solitons est en accord avec les résultats de l'analyse asymptotique menée par Trillo et al. [60]. La variation du niveau de référence peut sembler plus surprenante.

On peut proposer la phénoménologie suivante. À chaque fois qu'on dépasse le seuil de création d'un nouveau soliton, on prélève le volume d'eau contenu dans ce nouveau soliton au volume de contrôle de la boîte périodique. En conséquence, le niveau sur lequel ils se propagent diminue.

À nombre de solitons équivalent, on observe une décroissance du niveau de référence avec le Ursell. Elle correspond à une croissance du volume de contrôle supérieur à celle du volume piégé dans les solitons. Pour fixer les idées, on peut écrire à une profondeur donnée que le nombre d'Ursell croît avec la longueur d'onde du sinus. On a alors le volume de contrôle $V_c = \Lambda h$ qui augmente avec le nombre d'Ursell. Le graphe établit que cette variation compense toujours l'éventuelle augmentation du volume des solitons avec le Ursell.

Les figures 7.5 et 7.6 s'intéressent plus quantitativement aux produits de la fission. Elles ont été obtenues à partir de l'analyse PIST de 2 séries de conditions initiales basées sur un sinus de période 10 s et d'amplitude 1.5 cm à une profondeur de 10 cm. La première fait varier l'amplitude de cette condition entre 0.025 et 1.5 cm. La seconde fait varier la profondeur entre 10 et 1000 cm. En adimensionnant les résultats de l'analyse, on obtient les résultats suivants.

La figure 7.5 représente l'évolution de la trace de la matrice de monodromie en fonction du nombre d'Ursell. Pour un nombre d'Ursell sensiblement inférieur à 1, l'ensemble des E_j tels que $\text{tr}(M(E_j)) = \pm 2$ sont positifs et correspondent à des modes radiatifs. Avec l'augmentation du Ursell, une part de plus en plus significative du spectre devient négative. À chaque fois que le module d'un mode excède 0.99 le niveau de référence E_{ref} est diminué en conséquence de manière discontinue (tirets noirs sur fond blanc). On constate l'augmentation continue du module de chaque mode avec le nombre d'Ursell. Celui-ci vaut zéro lorsque E_{2j} est confondu avec E_{2j+1} et tend vers 1 quand E_{2j} tends vers E_{2j-1} (les E_j étant représentés par des traits noirs continus).

Ce comportement permet de déduire les valeurs des modules et des amplitudes normalisées de chaque mode en fonction du nombre d'Ursell que l'on représente sur la figure 7.6. Ces amplitudes subissent des discontinuités doubles à celles subies par le niveau de référence. En effet quand le mode $j + 1$ passe du module 0.989 au module 0.99, il devient un soliton. Le niveau de référence est alors diminué de :

$$\Delta_{h_{ref}} = \frac{-E_{2(j+1)+1}}{\lambda} - \frac{-E_{2j+1}}{\lambda} = \frac{E_{2j+1} - E_{2(j+1)+1}}{\lambda} \quad (7.13)$$

alors que l'amplitude des modes solitoniques l'est de :

$$\Delta_{a_i} = 2 \frac{E_{2(j+1)+1} - E_{2i}}{\lambda} - 2 \frac{E_{2j+1} - E_{2i}}{\lambda} = 2 \frac{E_{2(j+1)+1} - E_{2j+1}}{\lambda} \quad (7.14)$$

Il en résulte que l'élévation maximale des solitons $a_i + h_{ref}$ (représentée sur la figure 7.6) subit des discontinuités dont on peut questionner le sens physique. Il est, en effet, discutable qu'une même condition de surface considérée à des profondeurs h_1 et h_2 tel que $h_1 + dh = h_2$ avec dh infiniment petit mais suffisant pour faire basculer un mode j de $m_j = 0.989$ à $m_j = 0.99$ donne lieu à 2 décompositions en modes résolument différentes au sens où les amplitudes de tout les solitons se trouvent modifiées de manière importante. Afin de comprendre plus finement ce problème, nous allons dans la section suivante questionner l'interprétation des fonctions hyper-elliptiques en contenu solitonique ainsi que la définition du niveau de référence qui en découle.

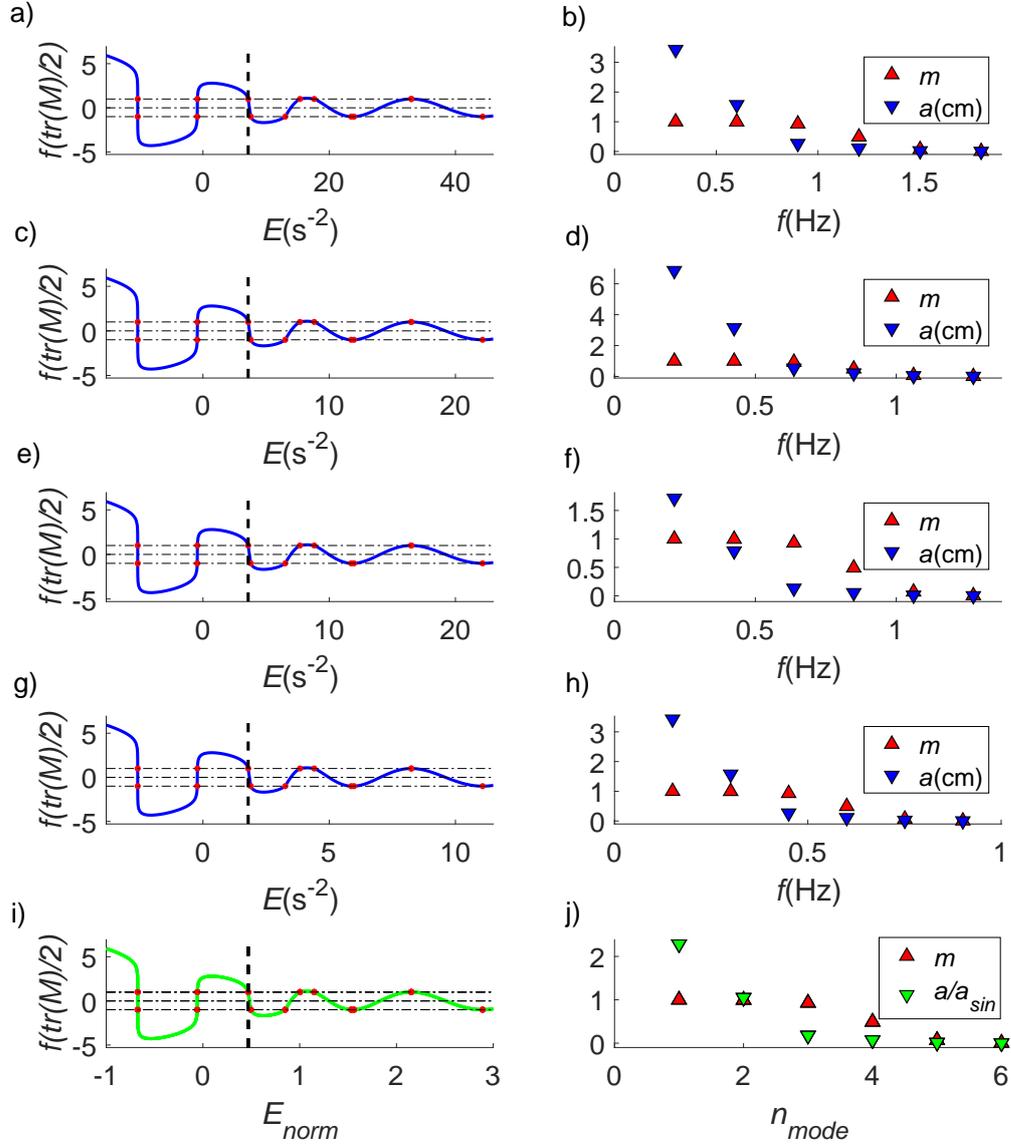


FIGURE 7.3: Comparaison des spectres et des traces des matrices de monodromie obtenus par la PIST pour 4 conditions initiales sinusoïdales de nombre d'Ursell $U = 2.157$, définies par :
 (a,b) $a_{sin}=1.5$ cm, $h=12$ cm, $f=0.3$ Hz ; (c,d) $a_{sin}=3$ cm, $h=24$ cm, $f=0.210$ Hz ; (e,f) $a_{sin}=0.75$ cm, $h=12$ cm, $f=0.21$ Hz ; (g,h) $a_{sin}=1.5$ cm, $h=24$ cm, $f=0.15$ Hz. On constate que le nombre d'Ursell caractérise bien le problème. Si on normalise l'axe des E par $E_{min} = \frac{3g}{2} \frac{a_{sin}}{h^2}$ et les amplitudes des modes par celle du sinus considéré, on obtient que toutes ces conditions se réduisent à un même problème (i,j). On indique par des tirets noirs le niveau de référence spectrale E_{ref} qui identifie le dernier mode solitonique (vérifiant $m > 0.99$).

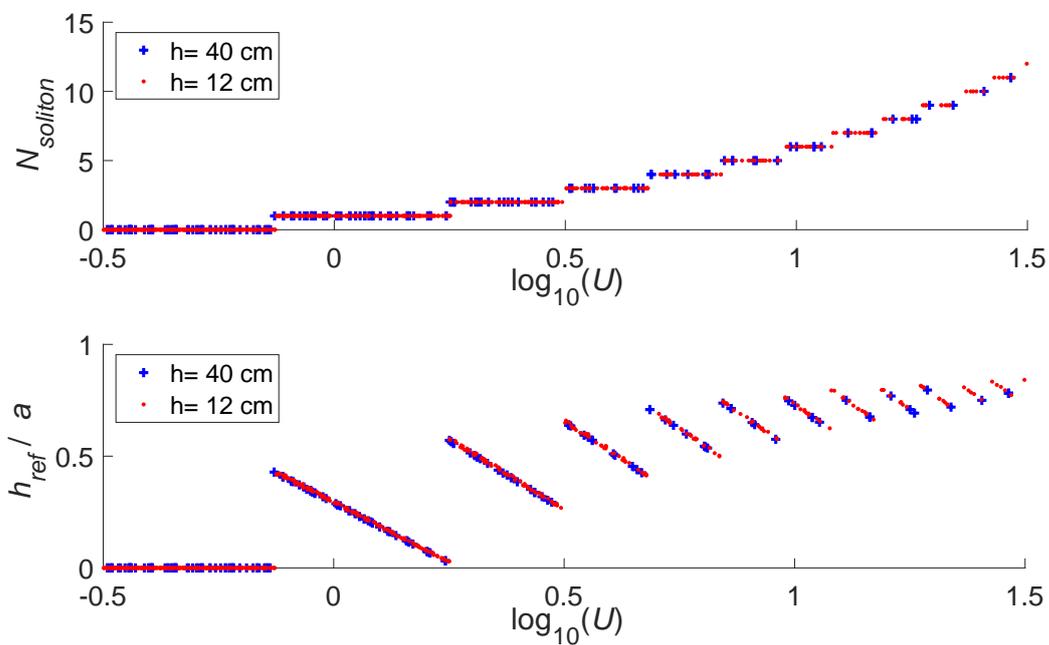


FIGURE 7.4: (a) nombre de solitons issus de la fission d'une condition de surface sinusoïdale en fonction de son nombre d'Ursell U ; (b) valeur absolue du niveau de référence, normalisée par l'amplitude du sinus initial. Les points de ces figures ont été obtenus en effectuant l'analyse PIST de sinus de fréquences de 0.01 à 1 Hz et d'amplitudes de 0.025 à 3 cm par des profondeurs de 12 et 40 cm

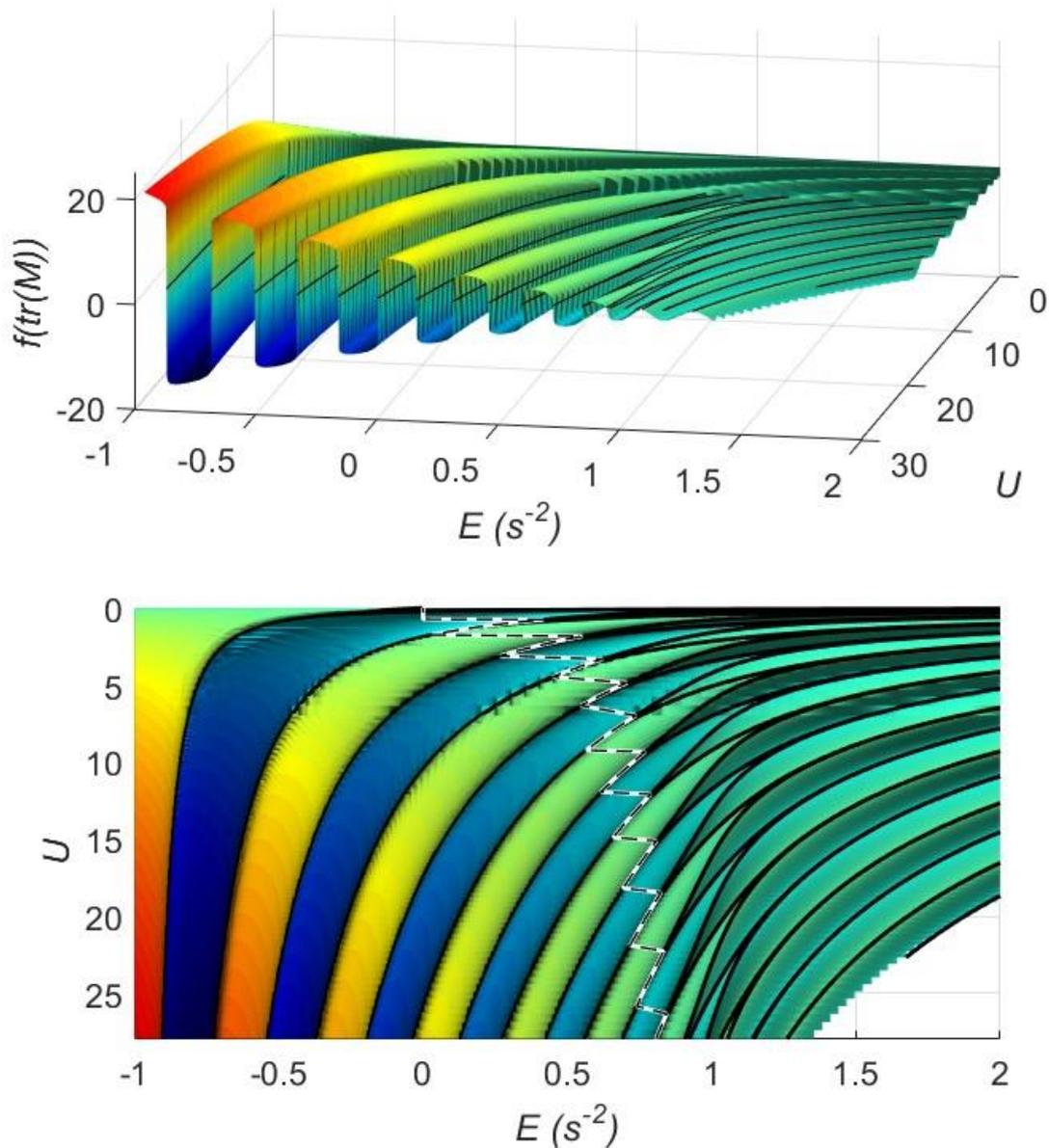


FIGURE 7.5: Évolution de la trace normalisée de la matrice de monodromie correspondant à condition initiale sinusoïdale en fonction de son nombre d'Ursell. En particulier, à chaque fois que le module d'un mode excède 0.99 le niveau de référence E_{ref} est diminué en conséquence de manière discontinue (tirets noirs sur fond blanc). On constate l'augmentation continue du module de chaque mode avec le nombre d'Ursell. Celui-ci vaut zéro lorsque E_{2j} est confondu avec E_{2j+1} et tend vers 1 quand E_{2j} tend vers E_{2j-1} (Les E_j étant représenté par des traits noirs continus).

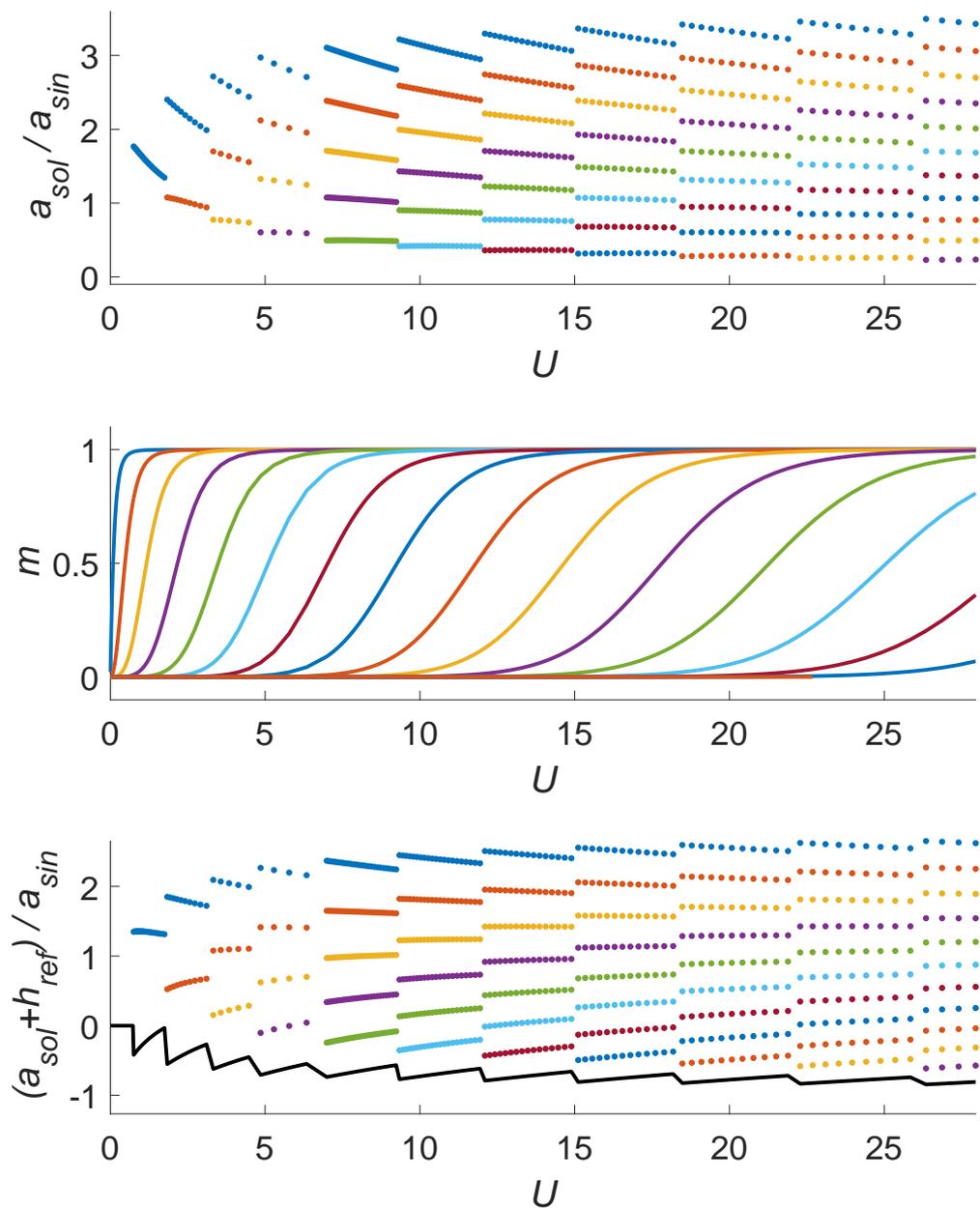


FIGURE 7.6: (a) Amplitudes des différents modes solitoniques ($m > 0.99$) qui composent une condition d'élévation de surface sinusoïdale en fonction de son nombre d'Ursell ; (b) Modules des différents modes qui composent une condition d'élévation de surface sinusoïdale en fonction de son nombre d'Ursell ; (c) Élévation de leur sommet avec (en noir) le niveau de référence.

7.3.2 Fonctions hyperelliptiques et contenu solitonique

L'analyse PIST du problème de la fission en soliton d'une condition initiale a mis en évidence une incohérence de l'analyse PIST. Deux conditions de surface très similaires peuvent en effet mener à des décompositions en modes solitoniques très différentes. Nous allons dans cette partie montrer les limites de l'interprétation des fonctions hyperelliptiques en solitons.

Pour illustrer notre propos, on considérera la décomposition en fonctions hyperelliptiques d'un sinus d'amplitude 1.5 cm et de période 10 s à diverses profondeurs. On reconstruira ensuite indépendamment chaque mode afin de questionner le concept de contenu solitonique.

Choisissons dans un premier temps une profondeur de 120 cm correspondant à un nombre d'Ursell de : 0.194. La figure 7.7a représente la fonction hyperelliptique μ_1 correspondant au premier mode obtenu par la PIST. Celle-ci est bornée par les valeurs $E_2 = 0.0145 \text{ s}^{-2}$ et $E_3 = 0.166 \text{ s}^{-2}$ qui vérifient $\text{tr}(M(E_j)) = \pm 2$ et délimitent la bande de ce mode. On reconstruit sur la figure 7.7b le mode dans l'espace réel grâce à la relation suivante :

$$\eta(x, t) = \frac{1}{\lambda} \left(2 \sum_{j=1}^N \mu_j(x, t) - \sum_{j=1}^{2N+1} E_j \right) \quad (7.15)$$

Elle permet d'obtenir le mode M_1 comme :

$$M_1(0, t) = \frac{1}{\lambda} (2\mu_1(x, t) - E_1 - E_2 - E_3) \quad (7.16)$$

On constate que ce mode, M_1 , correspond à une onde cnoïdale de module 0.78 et de moyenne nulle. On peut écrire $E_2 \leq \mu_1(x, t) \leq E_3$. On obtient :

$$\min(M_1) = \frac{1}{\lambda} (-E_1 + E_2 - E_3) \quad (7.17)$$

En réduisant progressivement la profondeur, on augmente le nombre d'Ursell associé à notre condition initiale de surface libre. D'après la figure 7.6, le module de M_1 tendra alors vers 1. On aura donc E_2 qui tendra vers E_1 . La relation précédente permet donc de retrouver la définition du niveau de référence :

$$\min(M_1) = \frac{-E_3}{\lambda} = h_{ref} \quad (7.18)$$

Sur la figure 7.8, on constate cette égalité entre niveaux de référence et minimum du mode 1 lorsque son module tend vers 1. Au-delà du seuil $m = 0.99$, la méthode développée par Osborne consiste à considérer ce mode comme un soliton se propageant sur son niveau minimum plutôt qu'une onde cnoïdale de module important se propageant sur son niveau moyen. Ce choix est appuyé par des simulations numériques réalisées par Osborne en 1986 qui ont permis d'établir que ces 2 façons de considérer le même mode étaient équivalentes en terme de vitesse de propagation du mode et de dynamique d'interaction.

On peut remarquer sur la figure 7.8 que lorsque le module du premier mode approche 0.99, la moyenne de celui-ci n'est plus nulle. Ce constat est un argument en faveur de la vision 'soliton'. Il révèle que la PIST ne peut plus donner un mode périodique et physique (les ondes cnoïdales ont un niveau moyen nul). En d'autres termes, la longueur de la boîte est trop petite pour qu'un mode périodique puisse décrire la physique observée. On pourrait d'ailleurs imaginer un critère de déviance par rapport à cette moyenne nulle plutôt qu'un seuil sur le module pour qualifier un mode de soliton. On ne se livrera pas à l'exercice, car il demande de calculer les fonction hyperelliptiques de chaque mode systématiquement ce qui rallonge considérablement le temps

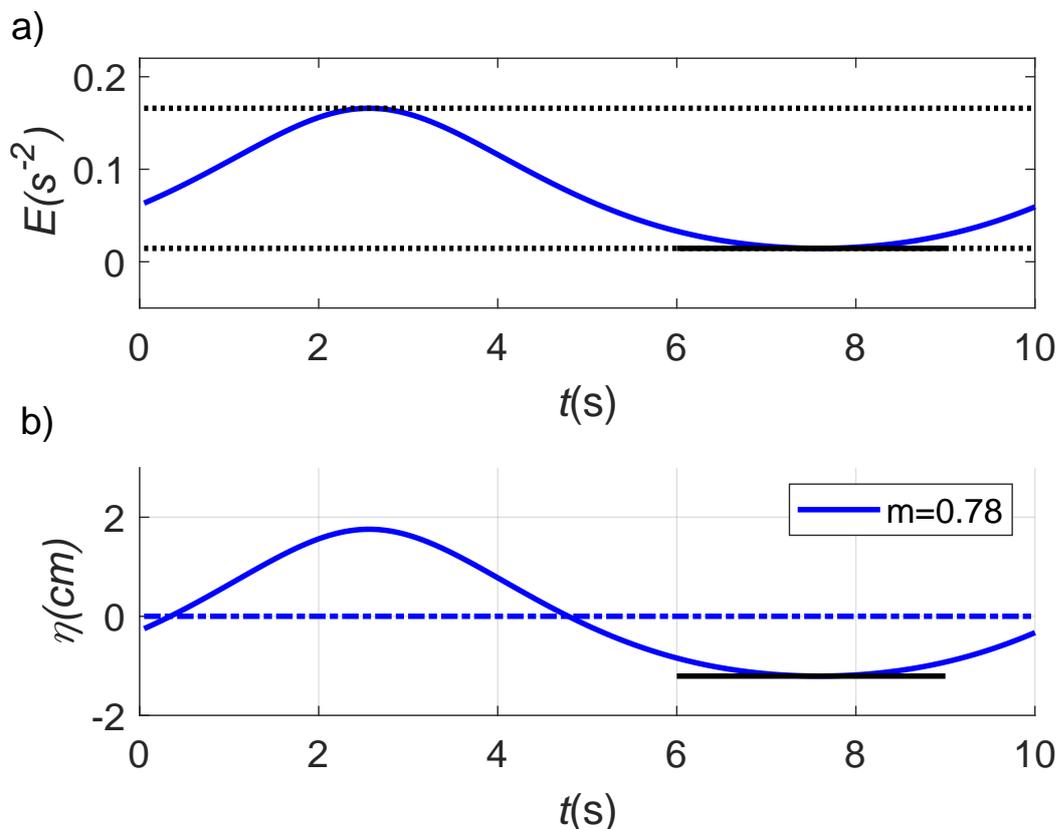


FIGURE 7.7: On représente en (a) la fonction hyperelliptique μ_1 correspondant au premier mode obtenu par la PIST d'un sinus d'amplitude 1.5 cm de période 10 s se propageant par une profondeur de 120 cm. Celle-ci est bornée par les valeurs $E_2 = 0.0145$ et $E_3 = 0.166$ qui vérifient $\text{tr}(M(E_j)) = \pm 1$ et délimitent la bande ouverte. On reconstruit en (b) le mode dans l'espace réel. On constate que ce mode correspond à une onde cnoïdale de module 0.78 et de moyenne nulle. On trace en noir la valeur plancher de ce mode : $\min(M_1) = \frac{1}{\lambda}(-E_1 + E_2 - E_3)$

de calcul. La moyenne du second mode devient-elle négative de manière à compenser la hausse de celle du premier mode. On a ainsi l'impression que le second mode se propage sur un niveau inférieur au niveau moyen. Les modes de faible module (radiation) conservent eux une moyenne nulle.

La transition entre une série contenant un soliton et une série contenant un mode cnoïdal suit donc le déroulement suivant. Lorsqu'un mode acquiert un module trop important, la PIST ne parvient pas à lui associer un mode cnoïdal physique et donc de moyenne nulle. Il devient alors raisonnable de le qualifier de soliton. On associe à ce soliton le minimum de ce mode, $\frac{-E_3}{\lambda}$ comme le niveau sur lequel il se propage. Le seuil de $m = 0.99$ tient lieu de limite de non-linéarité excessive. À $m = 0.989$ on dira que le mode est une onde cnoïdale de hauteur crête à creux :

$$H = 2 \frac{E_3 - E_2}{2\lambda} = \frac{E_3 - E_2}{\lambda} \quad (7.19)$$

Pour $m = 0.99$ on parlera d'un soliton d'amplitude :

$$a = \frac{E_{ref} - E_2}{\lambda} = \frac{E_3 - E_2}{\lambda} \quad (7.20)$$

Ainsi, l'énergie du mode 1 ne souffre pas de discontinuité au passage du seuil $m=0.99$. Les autres modes ne sont nullement affectés par cette transition.

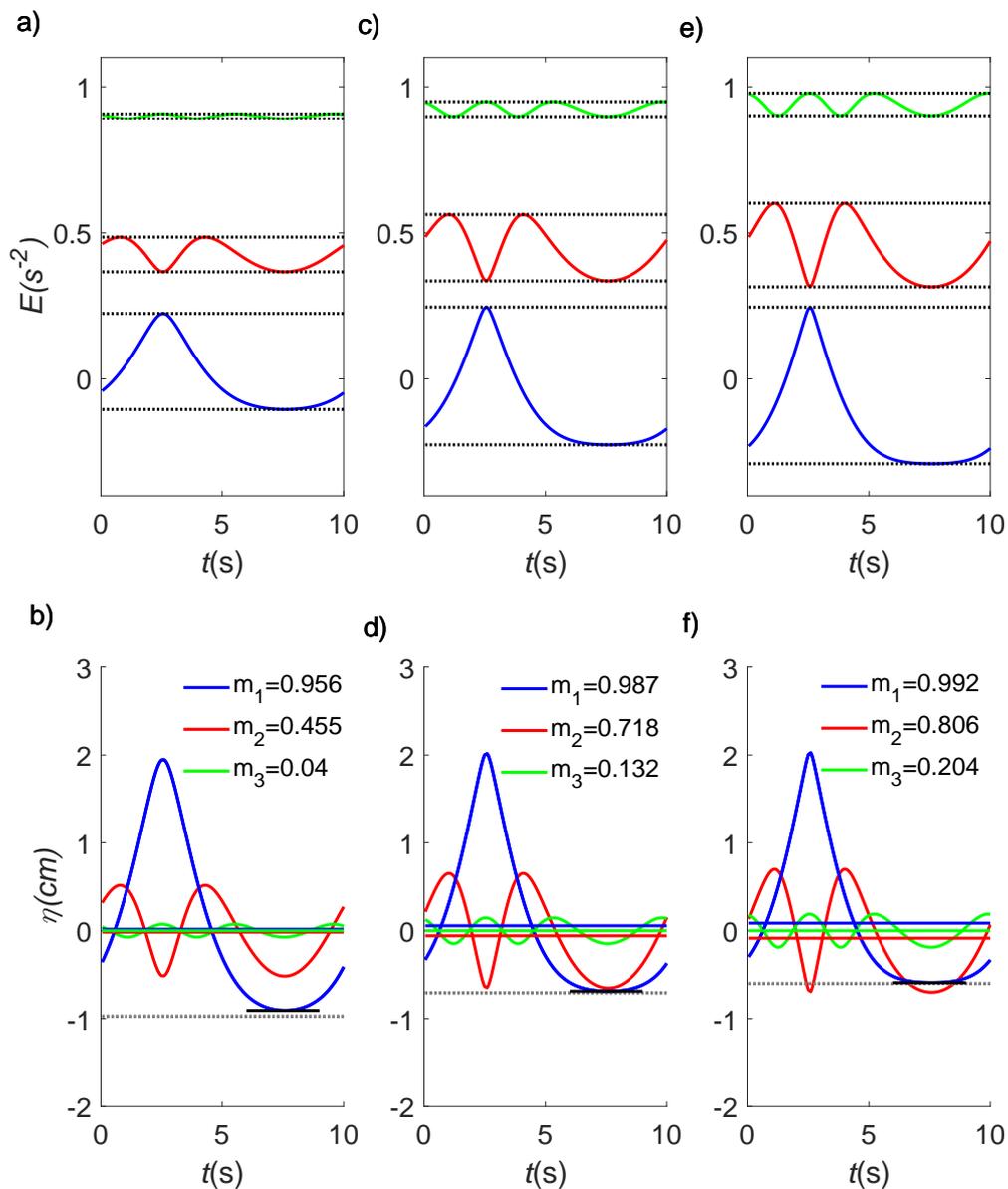


FIGURE 7.8: On représente en (a,c,e) les fonctions hyperelliptiques correspondant aux premiers modes obtenus par la PIST d'un sinus d'amplitude 1.5 cm de période 10 s se propageant par une profondeur de 80, 65 et 60 cm. Les bandes contenant chaque μ_j sont délimitées par E_{2j} et E_{2j+1} . On reconstruit en (b,d,f) chacun de ces modes dans l'espace réel. On constate que lorsque le module du premier mode tend vers 1, sa moyenne n'est plus nulle ce qui prouve qu'il n'est plus possible de le décrire par un mode périodique qui correspondrait au mode cnoïdal physique (de moyenne nulle). Il devient alors légitime de le considérer comme un soliton se propageant sur le minimum du mode M_1 . On trace en noir ce minimum et en pointillé le niveau $\frac{-E_3}{\lambda}$ afin de constater l'adéquation entre les 2 lorsque m_1 tend vers 1.

On va désormais considérer notre série temporelle à des profondeurs inférieures afin de vérifier si cette continuité est respectée lorsqu'un second mode vient à passer le seuil $m_2 = 0.99$.

On peut dans un premier temps étendre le raisonnement précédent quant à l'égalité entre niveau de référence et minimum des modes solitoniques. Considérons une série dont les 2 premiers modes ont des modules de 0.99 et les suivants des modules faibles. On peut reconstruire le contenu solitonique comme la somme des 2 premiers modes :

$$M_1(x_0, t) + M_2(x_0, t) = \frac{1}{\lambda}(2\mu_1(x_0, t) - E_1 - E_2 - E_3) + \frac{1}{\lambda}(2\mu_2(x_0, t) - E_4 - E_5) \quad (7.21)$$

On a $\min(\mu_1) = E_2$ et $\min(\mu_2) = E_4$ ce qui donne un niveau plancher pour cette somme égale à :

$$\min(M_1(x_0, t) + M_2(x_0, t)) = \frac{1}{\lambda}(-E_1 + E_2 - E_3 + E_4 - E_5) \quad (7.22)$$

Comme les modules sont proches de 1, E_1 tend vers E_2 et E_3 tend vers E_4 . On obtient donc finalement :

$$\min(M_1(x_0, t) + M_2(x_0, t)) = \frac{-E_5}{\lambda} \quad (7.23)$$

On retrouve ici encore la définition du niveau de référence. Les amplitudes des 2 modes sont alors données par :

$$a_1 = \frac{E_{ref} - E_2}{\lambda} = \frac{E_5 - E_2}{\lambda} \quad (7.24)$$

$$a_2 = \frac{E_{ref} - E_4}{\lambda} = \frac{E_5 - E_4}{\lambda} \quad (7.25)$$

Si maintenant on considère le même cas par une profondeur plus grande d'un dh très petit mais suffisant pour avoir $m_1 = 0.99$ et $m_2 = 0.989$. On peut alors écrire :

$$a_1 = \frac{E_{ref} - E_2}{\lambda} = \frac{E_3 - E_2}{\lambda} \quad (7.26)$$

$$H_2 = 2 \frac{E_5 - E_4}{2\lambda} = \frac{E_5 - E_4}{\lambda} \quad (7.27)$$

Si on a bien une continuité dans l'amplitude du second mode, celle du premier mode évolue de manière très discontinue. Il est étrange de considérer qu'une variation infiniment faible de la profondeur puisse entraîner une variation forte de l'énergie d'un mode. C'est d'autant plus gênant que le module seuil de $m_s = 0.99$ a été choisi arbitrairement. Un choix très proche de $m_s = 0.989$ pourrait aboutir de manière troublante à une décomposition sensiblement différente.

Cette ambiguïté vient du fait que dès qu'il existe plusieurs modes solitoniques, l'information relative à un de ces modes est portée par l'ensemble des fonctions μ correspondant à des modes de module importants comme l'illustre la figure 7.9 tirée de [44]. Dans notre analyse on néglige le rôle des fonctions μ correspondant à des modes de module inférieur à 0.99. Cela conduit à des discontinuité lorsque ce seuil est franchi par un nouveau mode. La question à se poser est donc, peut-on prendre en compte de manière progressive la participation à la définition du niveau de référence des modes de module important mais inférieur au module seuil de 0.99 afin d'assurer une continuité de la décomposition en modes solitoniques ?

Nous ne sommes pas parvenus dans les temps à résoudre ce problème. On se propose néanmoins d'illustrer comment il se pose. On représente sur la figure 7.10 la décomposition proposée

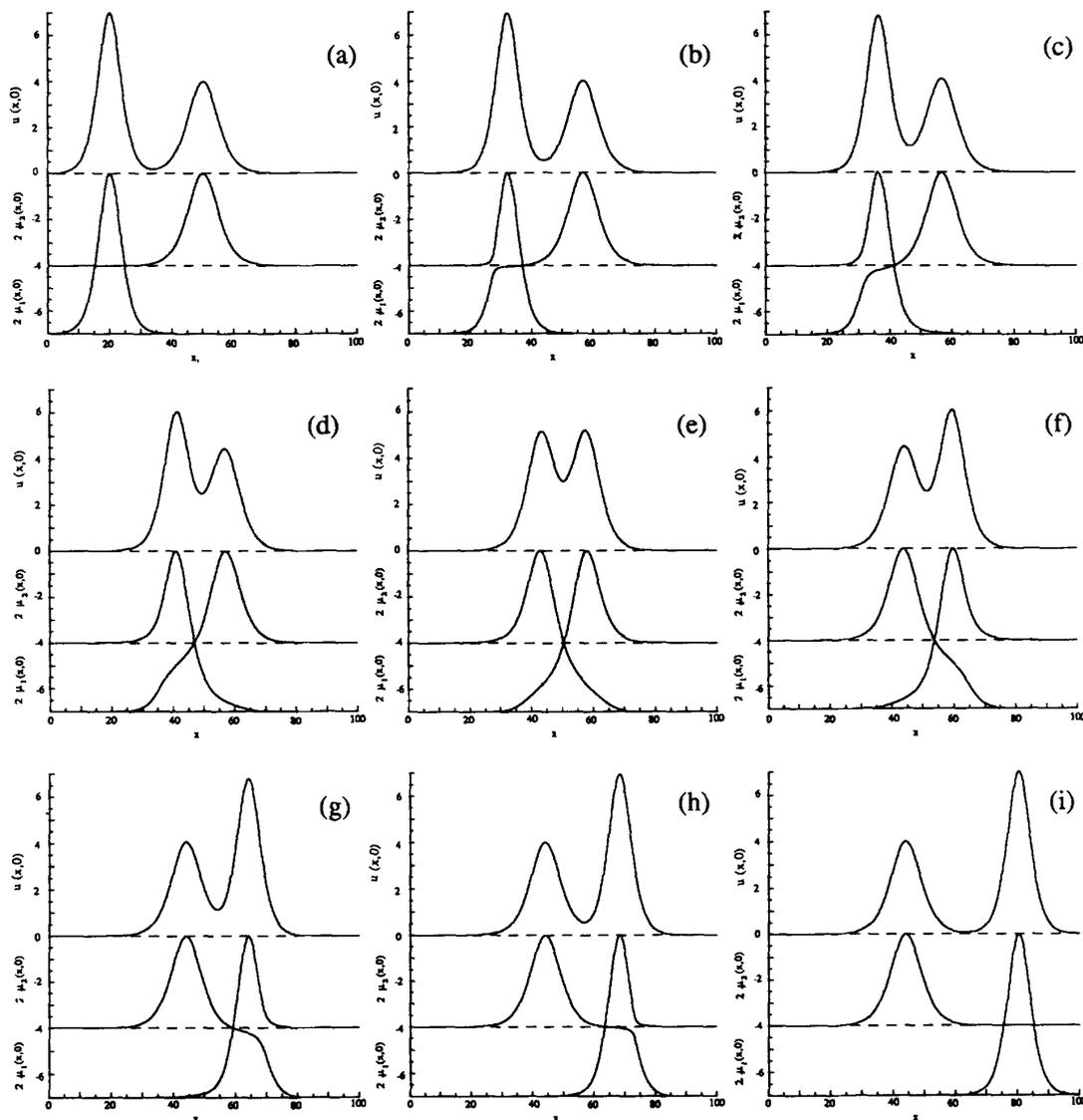


FIGURE 7.9: Cette figure tirée de [44] montre l'évolution des fonctions hyperelliptiques lors de l'interaction forte de 2 solitons. Pour chaque sous figure, la courbe la plus haute correspond à la série temporel et les 2 suivantes aux 2 premières fonctions hyperelliptiques obtenues par la PIST en lesquelles elle se décompose. On voit nettement en (a) et (i), lorsque les solitons sont séparés, que le mode physique correspondant au grand soliton est décrit à la fois par μ_1 et μ_2

par la PIST lorsque le nombre d'Ursell devient suffisant pour faire émerger un second soliton du sinus précédemment étudié. On pourrait imaginer de définir différemment le niveau de référence afin d'assurer une continuité de l'amplitude du premier mode. Sur la figure 7.10, le minimum du second mode semble être un candidat recevable pour un niveau de référence "intermédiaire". Il permettrait en effet de vérifier la continuité énergétique du mode 1 au passage de m_2 à 0.99. Cette définition poserait cependant d'autres problèmes. En particulier on ne pourrait plus écrire que la différence entre le niveau moyen et le niveau sur lequel se propage les solitons est égale au volume d'eau piégé dans les solitons puisque la naissance du second soliton n'occasionnerait pas de changement du niveau de référence.

Nous sommes face au paradoxe suivant : il est impossible de concilier les conditions suivantes :

- (1) La différence entre le niveau moyen et le niveau sur lequel se propage les solitons est égale au volume d'eau piégé dans les solitons
- (2) Les solitons se propagent tous sur un même niveau de référence
- (3) L'énergie d'un mode évolue de manière continue avec la non-linéarité d'une série temporelle (indiquée par le nombre d'Ursell)

En effet, si l'on a (1), lorsqu'un mode passe le seuil de $m = 0.99$, il occasionne forcément une baisse brutale du niveau de référence et donc une hausse de l'amplitude des autres modes et de leurs énergies. Dans le même temps, lui-même conserve la sienne induisant un déséquilibre. Par la force des choses, on se contentera donc de souligner ce paradoxe qui rend imprécise la définition de l'amplitude des solitons prédites par la PIST en présence de spectre intermédiaire. On peut noter que si erreur il y a, elle est à la baisse : la PIST surévaluant peut-être le niveau de référence.

Dans cette section, on a montré qu'un forçage sinusoïdal permettait d'injecter une série de trains de solitons dans notre canal dont la composition dépendait uniquement de son amplitude et de son nombre d'Ursell. Nous allons dans la suite mettre cette prédiction à l'épreuve de l'expérience. En particulier on cherchera à déterminer l'impact de la définition pathologique du niveau de référence.

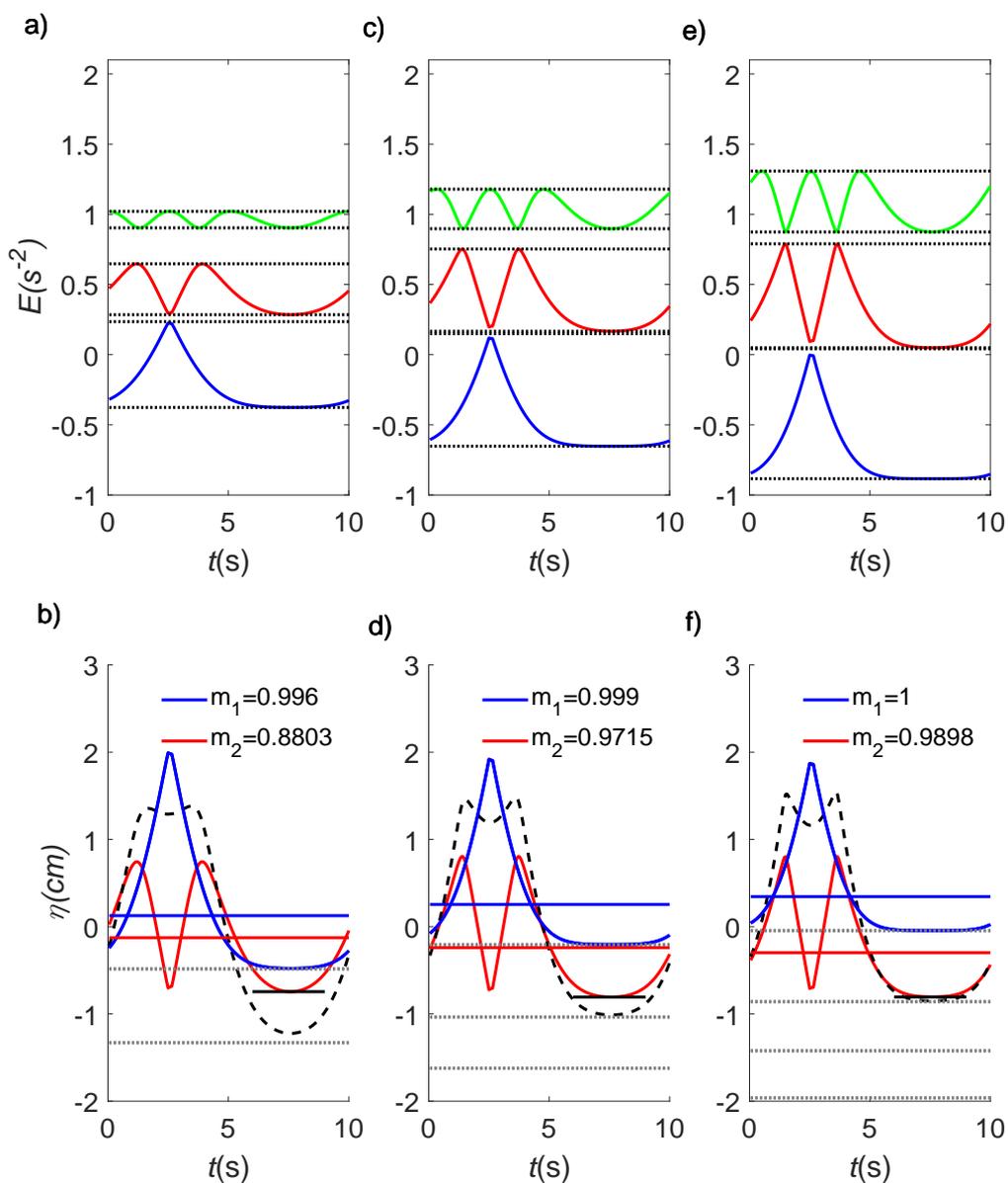


FIGURE 7.10: On représente en (a,c,e) les fonctions hyperelliptiques correspondant aux premiers modes obtenus par la PIST d'un sinus d'amplitude 1.5 cm de période 10 s se propageant par une profondeur de 55, 45 et 40 cm. Les bandes contenant chaque μ_j sont délimitées par E_{2j} et E_{2j+1} . On reconstruit en (b,d,f) les 2 premiers de ces modes ainsi que leur somme (tirets noirs) dans l'espace réel. On constate que lorsque le module du second mode tend vers 1, le niveau plancher de la somme des 2 modes coïncide avec $-\frac{E_5}{\lambda}$, le nouveau niveau de référence. L'amplitude du premier mode fait alors un bond qui n'est pas pertinent physiquement. On considère d'un coup qu'il est décrit par la somme des μ_1 et μ_2 et non par μ_1 seule (e). Si on considérait le minimum du mode 2 (trait noir) comme le niveau de référence on pallierait à ce problème en rendant cette participation de μ_2 progressive.

7.4 Mesures et comparaison à la théorie

Nous avons dans les parties précédentes présenté le phénomène de la fission ainsi que la puissance et les limites de la PIST dans l'estimation du contenu solitonique. Nous allons dans cette section nous intéresser aux mesures que nous avons faites de ce phénomène afin de mettre à l'épreuve les prédictions théoriques. L'objectif de cette section est de vérifier la pertinence d'un outil comme la PIST et de constater que notre système est bien gouverné par des modes solitoniques. Notre étude se focalisera sur le régime transitoire qui voit les premières périodes du forçage sinusoïdal évoluer en trains de solitons.

On montre sur la figure 7.11 les différentes évolutions observées pour quelques nombres d'Ursell (19.4, 2.15 et 0.40). Pour 0.40, les termes non-linéaires restent inférieurs aux termes dispersifs et on ne constate pas de catastrophe de gradient ni, donc, de fission en solitons de notre sinusoïde. Pour Ursell=2.15, lorsque l'onde sinusoïdale arrive dans le champ des caméras, chaque période a déjà évolué en 3 solitons. Pour Ursell=19.4, la fission a lieu dans le champ des caméras et on assiste à la régularisation de la catastrophe de gradient.

Le batteur part d'une position de repos centrale. Une mise en route progressive le contraint à effectuer un premier court recul puis une première extension moitié moins grande que les suivantes. À la suite de celle-ci, le mouvement du batteur est parfaitement périodique. Dès la seconde poussée, on constate que le train de soliton se propage sur un niveau inférieur au niveau moyen.

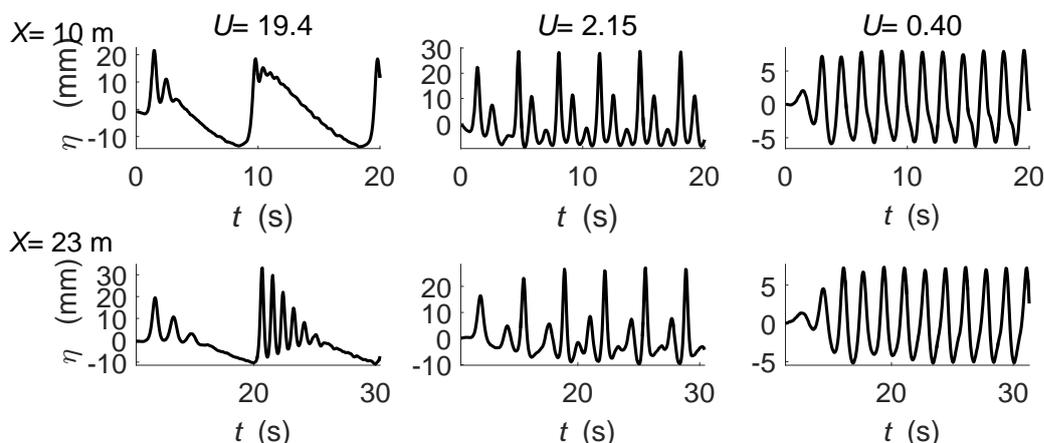


FIGURE 7.11: Série temporelles à 10 et 23 m pour 3 nombres d'Ursell différents. Pour un Ursell de 19.4 (avec $T = 10$ s) on observe à 10 m le début de la régulation de la catastrophe de gradient et 13 m plus loin on peut déjà décompter 6 excitations non-linéaires pour la seconde période. Pour un Ursell de 2.15 (avec $T = 3.3$ s), on constate que chaque période a déjà fissionné en 3 solitons à 10 m tandis qu'à 23 m le grand soliton de chaque période a dépassé le plus petit de la période précédente. Pour Ursell=0.4 (avec $T = 1.66$ s), on ne constate pas de fission. On constate conformément à la section précédente que le nombre de solitons issus de la fission croit avec le nombre d'Ursell.

Considérons plus en détails le cas du forçage à 0.1 Hz et 1.5 cm d'amplitude correspondant à un nombre d'Ursell de 19.4. Les figures 7.12 et 7.13 représentent l'évolution de la surface libre dans le temps et dans l'espace.

On constate que la première période évolue en un train de trois solitons bien séparés et dont

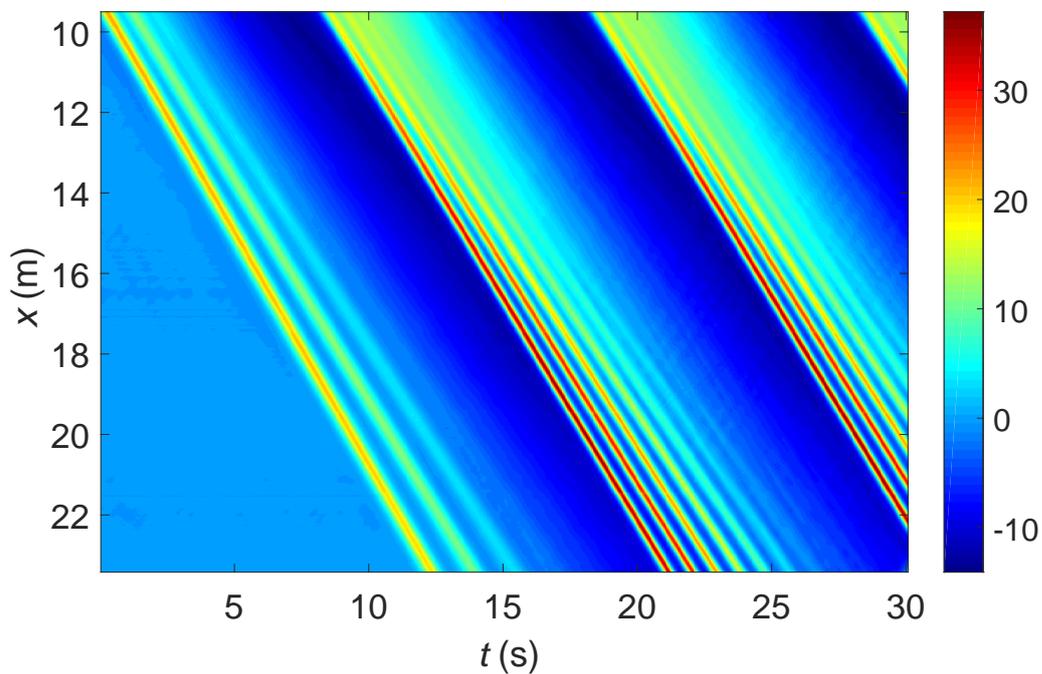


FIGURE 7.12: diagramme spatiotemporel de l'évolution

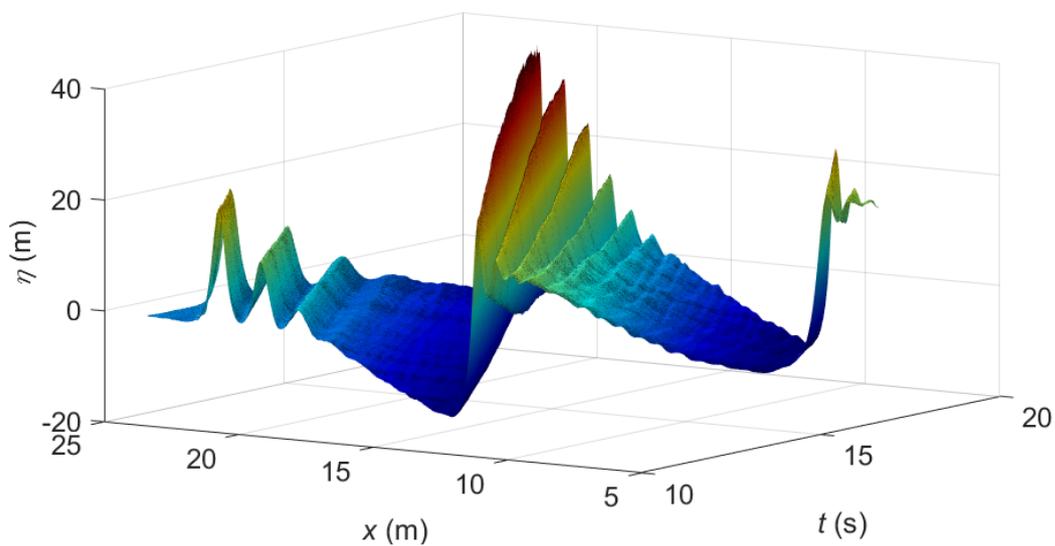


FIGURE 7.13: equivalent 3D de la figure 7.12

les amplitudes sont stables. La fission se met en place plus lentement pour la seconde période dont le nombre d'Ursell est supérieur (puisque la longueur d'onde est double). On voit les solitons émerger un à un et leurs amplitudes croître jusqu'à un plateau en sortie du champ des caméras. Afin de préciser nos impressions, on trace sur la figure 7.14 les trajectoires spatio-temporelles ainsi que l'évolution de l'amplitude de chacun des solitons naissant. On constate une évolution

rapide (de l'ordre de la période) vers un plateau d'amplitude pour chaque soliton. On constate également des vitesses constantes pour chaque soliton à priori dès le début de la fission. Cette vitesse ne semble donc pas être corrélée à l'amplitude pendant la phase où celle-ci varie. Afin de s'en assurer, on trace sur la figure 7.15 les trajectoires des solitons du second train dans le référentiel bougeant à c_0 . On constate de manière remarquable que les solitons évoluent à une vitesse constante dès leur désolidarisation du sinus initiale. On remarque également que seuls 2 solitons ont une vitesse supérieure à $c_0 = \sqrt{gh_{moy}}$. Si toutes les crêtes sont des solitons, c'est la preuve que les dits solitons ne se propagent pas sur un niveau de référence égal au niveau moyen.

La remarquable linéarité des trajectoires permet de mesurer précisément la vitesse de chaque intumescence. Sur la figure 7.16, on trace pour chacune dans l'ordre de passage :

- en bleu la vitesse calculée à partir de la trajectoire ;
- en rouge la vitesse théorique obtenue à partir de l'élévation maximale de chaque intumescence grâce à l'approximation (indépendante du niveau de référence) ci-dessous :

$$V_{soliton} = \sqrt{gh} \left(1 + \frac{a}{2h}\right) \simeq \sqrt{gh} \sqrt{1 + \frac{a}{h}} \quad (7.28)$$

On écrit alors la profondeur h à laquelle se propage les solitons en fonction de h_{ref} , son écart (négatif) au niveau moyen tel qu'il est défini par la PIST : $h = h_{moy} + h_{ref}$, et l'amplitude a de ces derniers comme la différence entre l'élévation de leurs crêtes $\eta_{max} + h_{moy}$ et leur niveau de propagation : $a = \eta_{max} - h_{ref}$. Cela donne :

$$V_{soliton} = \sqrt{g(h_{moy} + h_{ref})} \sqrt{1 + \frac{\eta_{max} - h_{ref}}{(h_{moy} + h_{ref})}} = \sqrt{g(\eta_{max} + h_{moy})} \quad (7.29)$$

On peut ainsi se passer de l'estimation du niveau de référence pour calculer la vitesse d'un soliton car $\eta_{max} + h_{moy}$ mesure le niveau des crêtes. On observe que :

- la mesure de la vitesse du premier soliton grâce à sa trajectoire est la seule à être cohérente avec celle tirée du calcul à partir de son amplitude ;
- les vitesses du second train sont inférieures de 8 cm.s^{-1} à leurs vitesses théoriques.

La différence entre vitesse théorique et vitesse mesurée vient du fait que la formule utilisée n'est valable que dans le cas d'un soliton se propageant au-dessus du niveau au repos (problème de la ligne infinie où l'on suppose que le potentiel est nul à l'infini). Dans le cas périodique, le problème se pose différemment. Afin de compenser le flux de masse engendré par les solitons, il faut imaginer que ceux-ci se propagent sur un courant adverse.

À l'inverse du cas de la ligne infinie où la vitesse fluide est nulle devant le soliton (puisqu'il se propage sur le niveau de repos $\eta = 0$), le cas périodique nous fait considérer un niveau de référence inférieur au niveau moyen. La vitesse du fluide n'est alors pas nulle. On montre sur la figure 7.17 la vitesse fluide attendue dans ces conditions à partir d'une simulation numérique réalisée avec le code Serre 1D développé par Rodrigo Cienfuegos (voir [8] et [9]). On constate sur cette figure que le fluide devant le premier soliton a une vitesse qui lui est opposée. Au premier ordre, on a une vitesse du fluide, $V_{fluide} = \frac{\eta}{h} c_0$. Ainsi, les solitons se propagent contre un courant qui dépend de h_{ref} dans le problème périodique $V_{courant} = \frac{h_{ref}}{h} c_0$.

Osborne a établi en 1986 [42], que la vitesse d'un soliton d'amplitude a se propageant à h_{ref} (≤ 0) sous le niveau moyen h_{moy} s'écrit :

$$V_{soliton} = \sqrt{gh_{moy}} \left(1 + \frac{a}{2h_{moy}} + \frac{3}{2h_{moy}} h_{ref}\right) \quad (7.30)$$

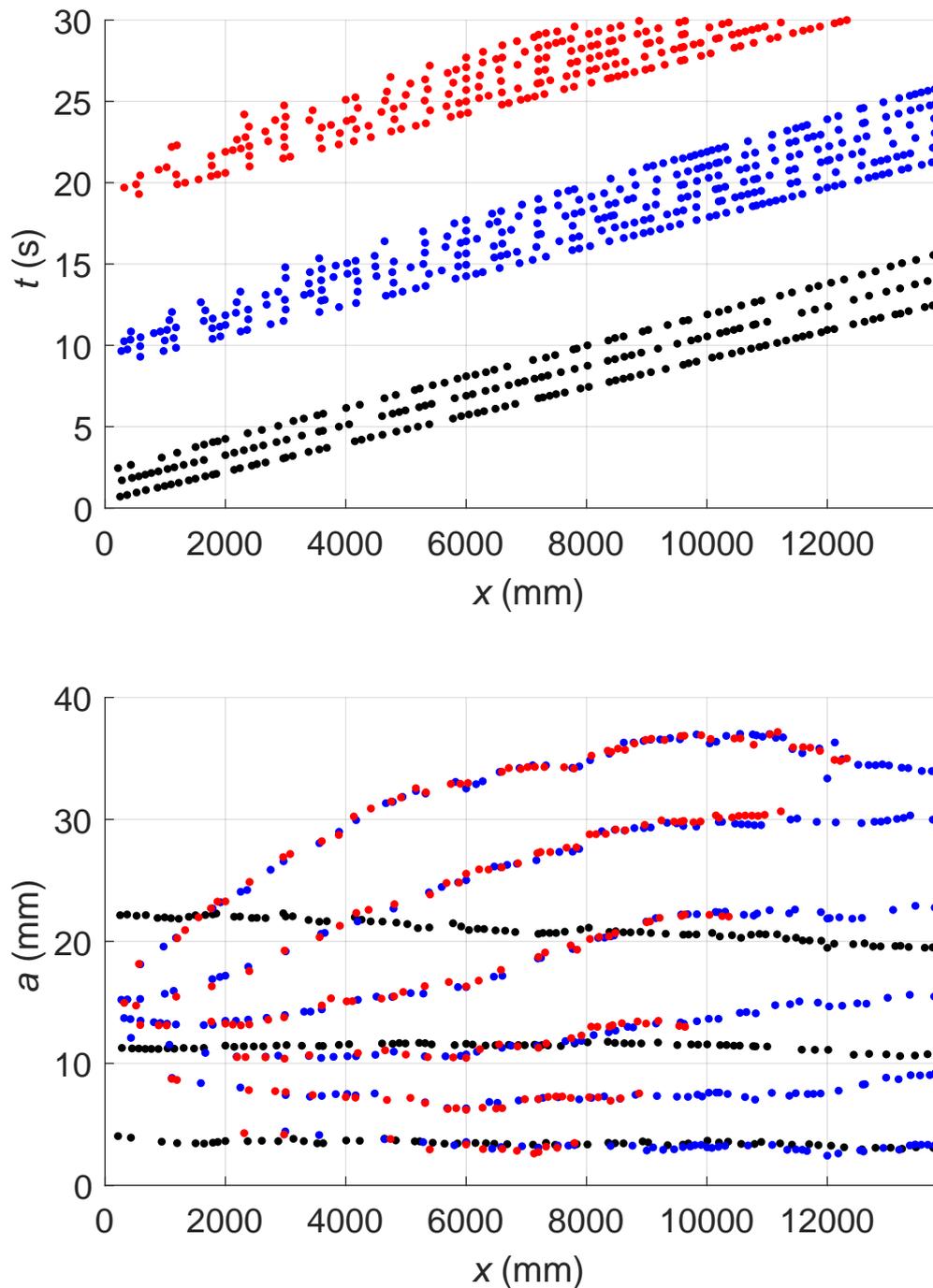


FIGURE 7.14: Fission d'un sinus initial tel que : $a_{sin} = 1.5$ cm, $h = 11.5$ cm, $T = 10$ s, $U = 19.4$. (a) Trajectoire des lignes de crêtes dans l'espace et le temps. Chaque couleur correspond à un train de solitons issu d'une période différente. On constate que les différentes intumescences semblent avoir une vitesse constante et de ce fait conservent la périodicité initiale. (b) Amplitude des lignes de crêtes. Les solitons du premier train ont des amplitudes stables et sont bien séparés. Les 2 trains suivants ont une évolution rigoureusement identique. On confirme que les lignes de crêtes sont issues de $a_0 = 1.5$ cm, l'amplitude du sinus initial puis évoluent vers un plateau stable en sortie du champ des caméras.

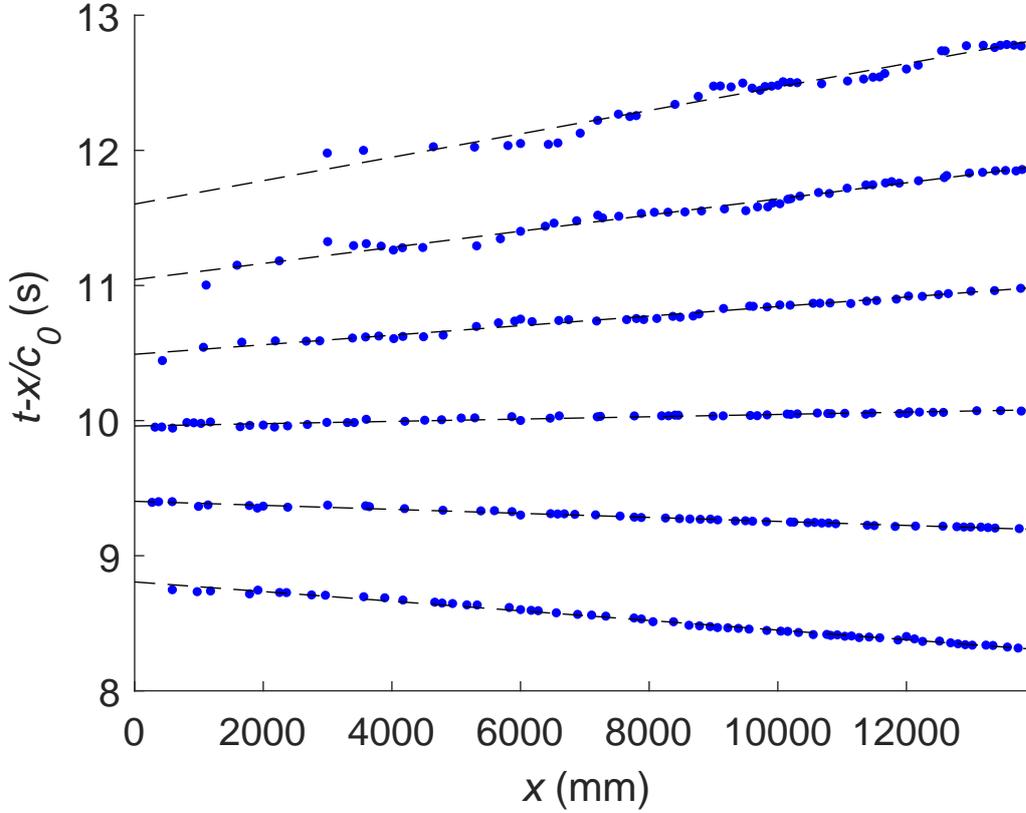


FIGURE 7.15: Trajectoire des solitons du second train dans le référentiel de vitesse $c_0 = \sqrt{gh}$.

La vitesse de chaque soliton est remarquablement constante dès le début de la fission et décorrélée de la croissance de l'amplitude. Si chaque intumescence est un soliton alors ceux-ci se propagent nécessairement à un niveau inférieur au niveau moyen (pour avoir $V_{soliton} > c_0$).

$$a_{sin} = 1.5 \text{ cm}, h = 111.5 \text{ cm}, T = 10 \text{ s}, U = 19.4$$

Cette formule met en relief l'importance du niveau de référence. Il est nécessaire de mener l'analyse PIST pour accéder à celui-ci.

On procède donc à l'analyse PIST d'une période au batteur, à 10 m et à 23 m. Les résultats de cette analyse sont représentés sur la figure 7.19. Détaillons d'abord ces résultats avant de revenir sur les vitesses des solitons. On constate que le module de tous les modes visibles dans nos séries temporelles (1 à 6) est largement supérieur à 0.99 ce qui nous permet de les définir comme des solitons. On constate une différence importante de décomposition entre la série temporelle à 10 m et celle à 23 m. Celle-ci s'explique en partie par le passage du mode 9 d'un module de 0.9904 à 0.9853. On représente par des triangles vides les amplitudes qu'on aurait obtenues en choisissant un seuil solitonique à $m = 0.985$ au lieu de 0.99. Ces dernières semblent plus cohérentes avec notre série temporelle sans que l'écart ne soit grand devant les amplitudes que l'on cherche à mesurer. Si l'on fait abstraction de cette imperfection de la définition du niveau de référence, la PIST fait montre de sa puissance. Malgré une élévation de surface libre très différente pour les 3 séries temporelles, les 3 spectres obtenus sont très similaires et les amplitudes des solitons proches de nos mesures avec comme attendu une tendance à sous estimer un peu.

On montre sur la figure 7.18 les vitesses de phases obtenues grâce à la formule 7.30 en prenant

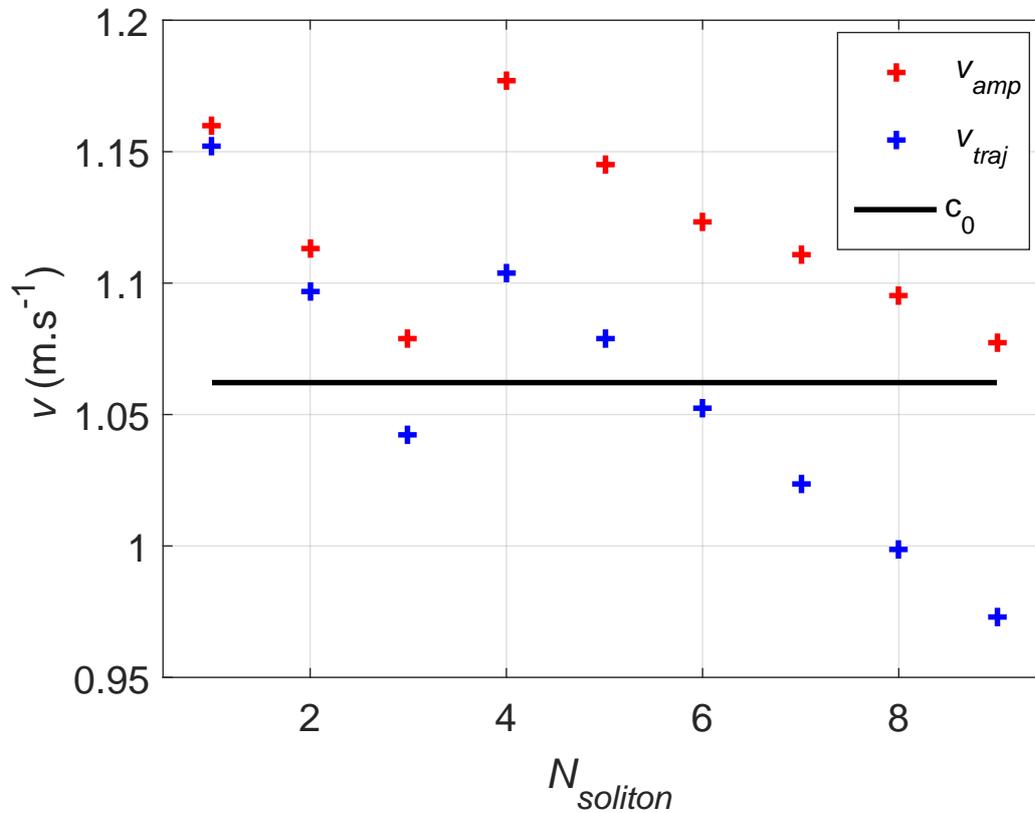


FIGURE 7.16: On trace pour chaque soliton (les 3 premiers correspondent au premier train, les 6 suivants au second train) : en bleu la vitesse déduite de la trajectoire de chaque soliton, en rouge la vitesse calculée à partir de l'amplitude en sortie du champ des caméras. On trace en outre $c_0 = \sqrt{gh}$ (en noir)

le niveau de référence obtenue successivement à -0.93 et - 1.11 cm. On constate que considérer un seuil solitonique à $m=0.985$ est ici aussi plus pertinent. Nos mesures confirment que la définition du niveau de référence est perfectible. Elles rassurent cependant quant à l'ordre de grandeur de l'erreur.

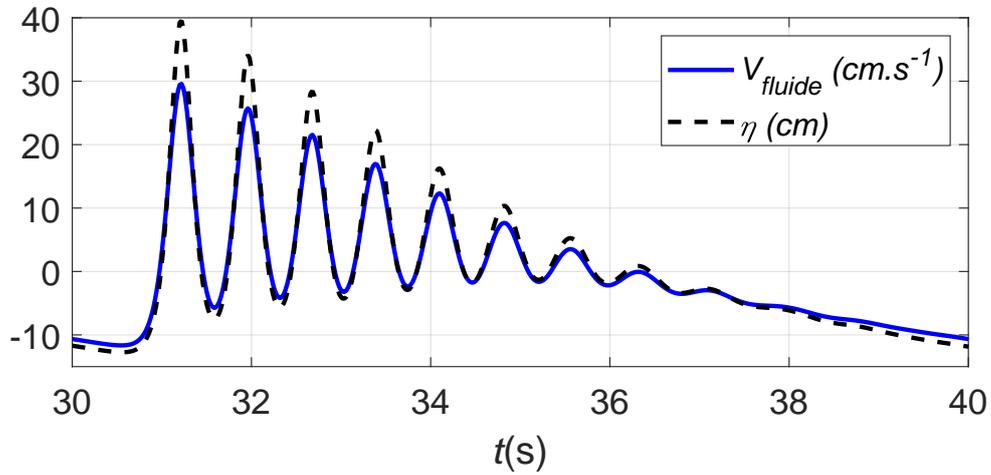


FIGURE 7.17: Vitesse fluïde et élévation de surface libre au milieu du canal (16.85 m) en fonction du temps pour la fission d'une condition de surface sinusoïdale d'amplitude 1.5 cm, de période 10 s et par une profondeur de 11.5 cm ($U = 19.4$). Ces résultats sont obtenus grâce à une simulation réalisée sur le code Serre 1D décrit dans [8] et [9]

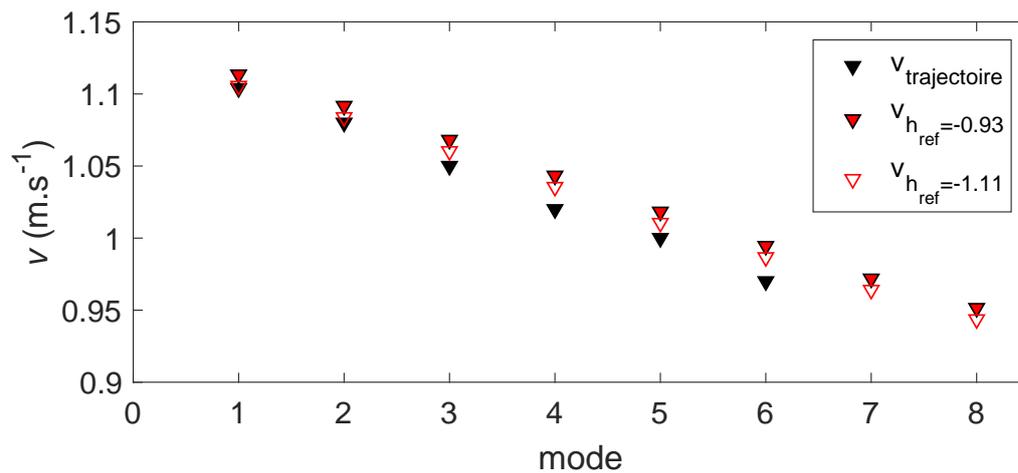


FIGURE 7.18: Vitesse des différents modes obtenue par la mesure des trajectoires, l'analyse PIST de la série à 23 m avec un seuil solitonique à $m = 0.99$ puis $m = 0.985$.

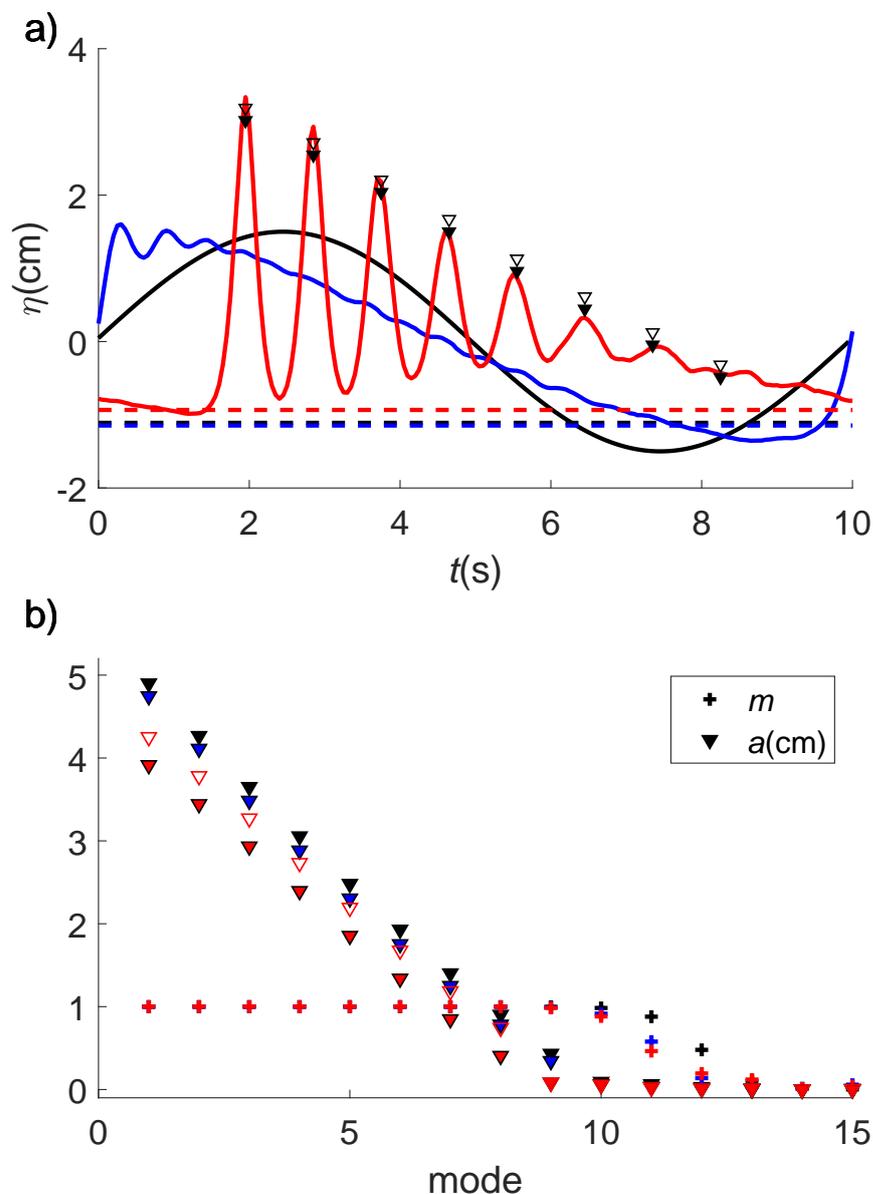


FIGURE 7.19: Résultat de l'analyse PIST (b) de 3 séries temporelles de durée égale à la période du sinus initial (a) en plusieurs points de son évolution. En noir, la consigne donnée au batteur, en bleu une période prise à 10 m en entrée du champ des caméras et en rouge une période à 23 m en sortie du champ des caméras. (b) L'analyse PIST, malgré des états de surfaces très différents, trouve des spectres similaires. La différence minimale entre les séries 1 et 2 s'explique par la dissipation. La différence entre les séries 2 et 3 est sensiblement plus grande. Cela est dû au fait que le module du mode 9 passe de 0.9904 à 0.9853 ce qui déclenche l'effet de discontinuité décrit dans la section précédente. On représente par des triangles vides les amplitudes qu'on aurait obtenues en considérant le seuil de détection des solitons à $m=0.985$ au lieu de 0.99. On compare en (a) les amplitudes obtenues pour les 2 seuils à la série temporelle.

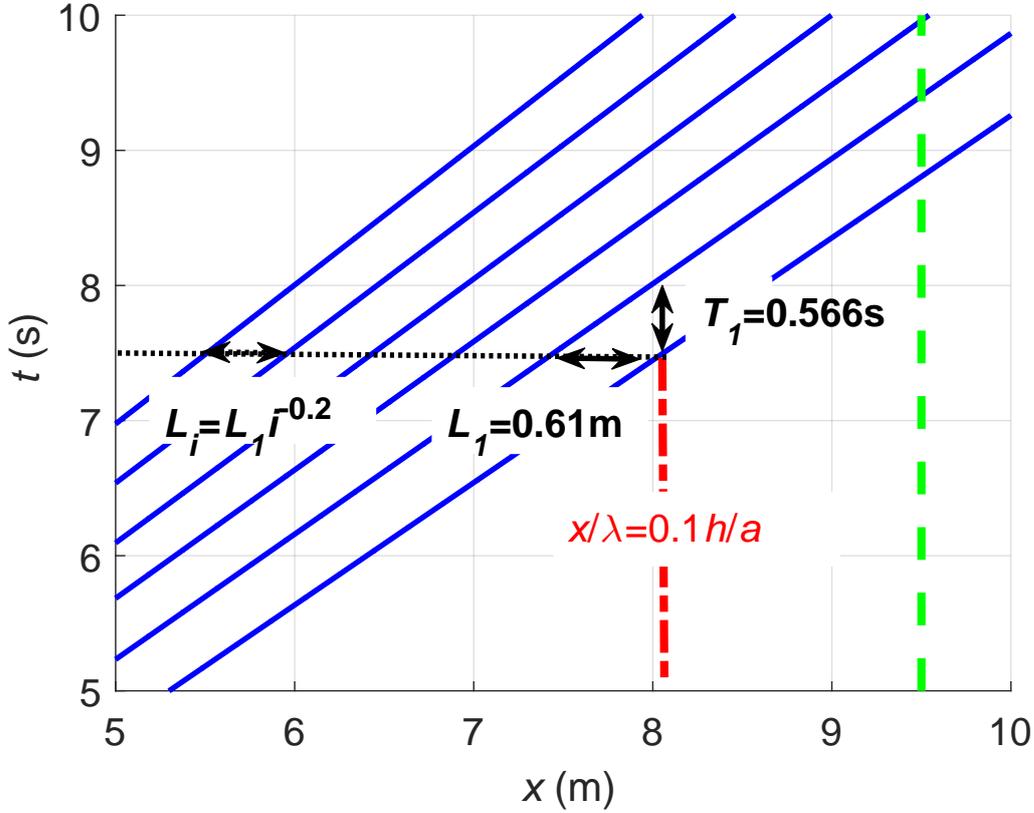


FIGURE 7.20: Comparaison des trajectoires étendues des solitons avec la physique des ressauts au début de la fission. Les formules de la section précédentes (7.3 et 7.5) décrivent bien les phénomènes observés

Réfléchir ce problème sous la forme de soliton faisant face à un courant adverse rend la comparaison avec le ressaut hydraulique pertinente. On conclura donc notre analyse du phénomène en comparant le début de la fission aux estimations issues de la physique des ressauts décrite dans la première section (figure 7.20).

Pour ce faire, on prolonge les trajectoires de nos solitons jusqu'à $x = 8$ m, soit à la limite de validité des hypothèses de l'équation de Barré de saint Venant qui marque le début de la fission. En assimilant notre sinus initial à un ressaut infini (avec $h_1 = h_{moy} + h_{ref}$ et $h_2 = h_{moy} + a_{sin}$), on obtient avec la formule (7.3) une longueur caractérisant la première ondulation de 0.6 m. Cette longueur correspond à la distance estimée (en prolongeant les trajectoires) entre les sommets des 2 premiers solitons. En sus, la relation qui lie cette longueur à celle séparant les oscillations suivantes (7.5) est également exacte (erreur de l'ordre du pourcent).

7.5 Un état stationnaire turbulent solitonique

Nous venons de voir que des ondes suffisamment longues dégénéraient en train de solitons et que le contenu solitonique de celui-ci était bien décrit par la PIST à une petite erreur près quant au niveau de référence.

Ces trains de solitons vont se réfléchir contre la paroi clôturant le canal et revenir vers le batteur générant, ce faisant, de nombreuses interactions faibles. Ils se réfléchiront ensuite contre le batteur ce qui conduira à une série d'interactions fortes avec les trains de solitons nouvellement générés.

Au bout d'un certain nombre d'aller-retours, les moments statistiques deviennent indépendants du temps et on atteint un état stationnaire : le gaz de solitons. Si l'on se cantonne au cas monodirectionnel, cet objet est décrit par une théorie cinétique initiée par Zakharov en 1971 ([65]) pour les gaz rares et étendue par El aux gaz de toutes densités ([17]). Elle renseigne principalement sur la vitesse des solitons relativement à la distribution de solitons qui composent le gaz. De par les déphasages dus aux interactions, les plus grands solitons de la distribution se voient accélérés et les plus petits ralentis. Il est également possible de calculer la variance et la moyenne de l'élévation de surface libre à partir de la densité de solitons. Pour le cas bidirectionnel, aucune théorie n'existe à notre connaissance. Dans cette section, nous allons présenter dans les grandes lignes l'état stationnaire auquel nous aboutissons afin d'introduire le chapitre suivant.

On montre sur la figure 7.21 le diagramme spatio-temporel d'élévation de surface libre correspondant au régime transitoire du cas étudié à la section précédente. On souligne la trajectoire de quelques solitons dont on compare la vitesse mesurée à partir de la trajectoire à la vitesse qu'aurait un soliton de cette amplitude en l'absence de courant adverse.

Les 3 premiers points correspondent aux solitons verts qui se propagent du batteur vers le mur. L'énergie du système grandissant jusqu'à ce que le premier train de solitons soit complètement dissipé et qu'on atteigne un équilibre entre termes de dissipation et de forçage, on constate que ces amplitudes croissent avec le temps.

La différence entre vitesse mesurée et calculée grâce à l'amplitude représente le courant adverse et reste sensiblement du même ordre de grandeur. Les différences peuvent s'expliquer comme un effet des déphasages ou une variation légère du niveau de référence due à l'accroissement de la non-linéarité du système pendant le transitoire.

Les 4 points suivants représentent les solitons bleus qui se propagent du mur vers le batteur. Le premier d'entre eux se propage sur le niveau moyen et on constate un bon accord entre la prédiction théoriques et la mesure de sa vitesse. Pour les autres, la dissipation ayant fait son œuvre, on constate les mêmes phénomènes que pour les solitons verts pour des vitesses et des amplitudes réduites.

Le gaz de solitons représenté sur la figure 7.21 ne devient pas, à proprement parler, chaotique. La périodicité du forçage $T = 10$ s est encore bien visible au terme de plusieurs aller-retours dans le canal en dépit du nombre croissant de solitons présents. On reviendra sur les causes de cela dans les chapitres suivants mais on peut d'ores et déjà pointer le rapport peu favorable entre la longueur d'onde du forçage et la longueur d'un aller retour dans le canal ($1/6$). Nous allons dans la suite considérer un cas plus favorable au chaos.

On montre sur les figures 7.22 et 7.23 la description d'un état stationnaire solitonique et chaotique. Il a été obtenu pour un forçage sinusoïdal de 1.5 cm d'amplitude à 0.6 Hz par 12 cm de profondeur. Ce forçage est moins non-linéaire que le précédent et on ne génère qu'un seul soliton par période de 1.6 secondes.

Sur le diagramme spatio-temporel d'élévation de surface libre de la figure 7.22 on constate que toute périodicité initiale a été perdue. Il est possible de filtrer le signal afin de ne conserver que les ondes se propageant du batteur vers le mur. La méthode est décrite au chapitre 4. Elle consiste à appliquer une transformée de Fourier en temps et en espace au signal et à reconstruire ce dernier à l'aide de la transformée inverse en ne conservant que les fréquences et les nombres

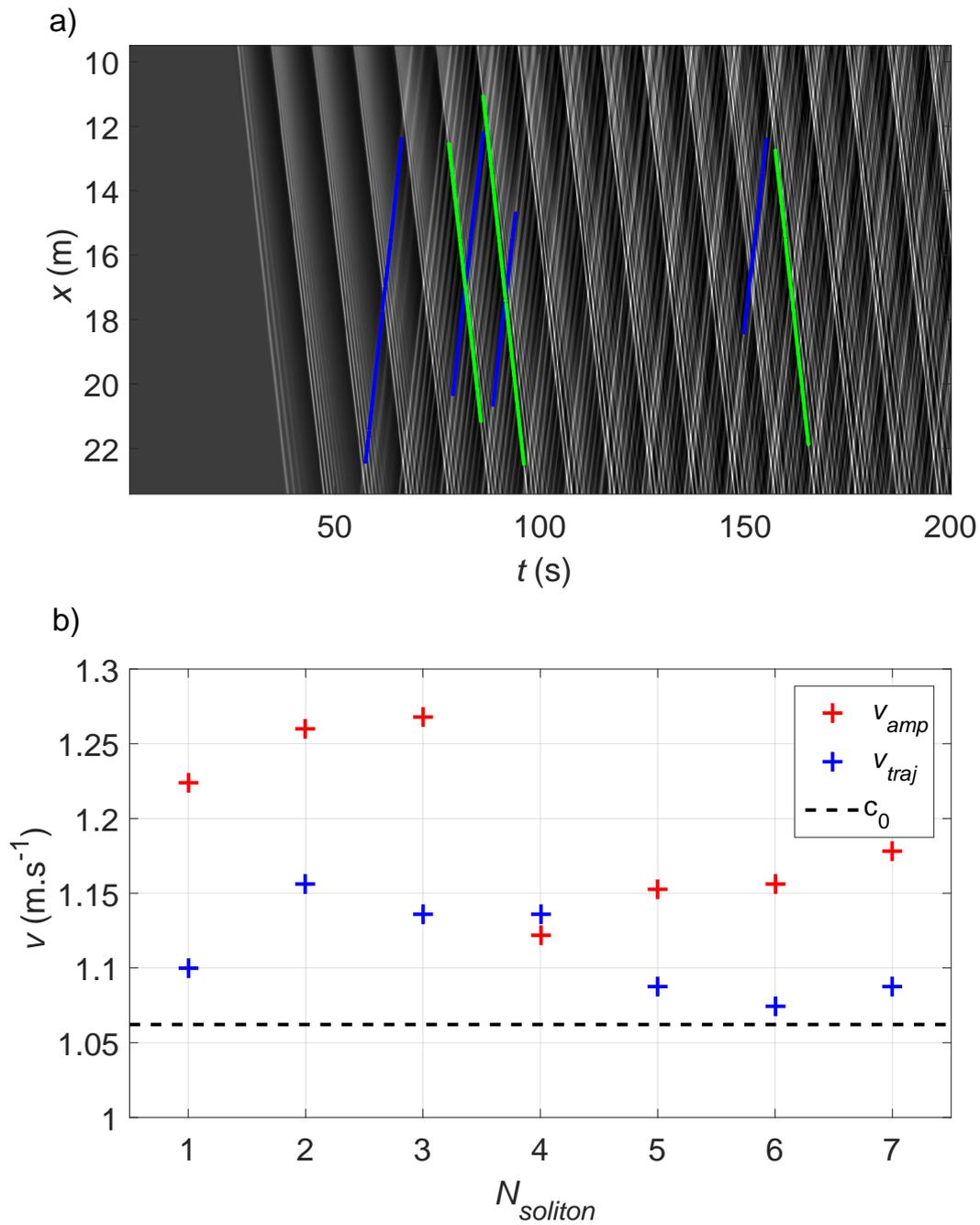


FIGURE 7.21: (a) Diagramme spatio-temporel d'élévation de surface libre dans le champ des caméras pendant le régime transitoire. (b) Vitesses des solitons surlignés en vert et bleus en (a). Les 3 premiers points correspondent aux solitons verts se propageant du batteur vers le mur, les 4 suivants aux solitons bleus qui reviennent vers le batteur dans l'ordre chronologique. En rouge, on calcule la vitesse à partir de l'altitude du point haut du soliton. En bleu, on la mesure grâce à sa trajectoire. Figure tirée de [52].

d'ondes positifs. On met alors en évidence de nombreuses interactions fortes qui jouent sans doute un rôle important dans la désorganisation du forçage.

En se livrant à une analyse spectrale de Fourier, on peut construire le spectre $E(k, \omega)$ (figure 7.23 (a)). On constate que la plupart de l'énergie se trouve alors sur la droite 'bb' ($\omega = c_0 k$) qui représente les modes de Fourier qui composent les solitons. À une moindre échelle, de l'énergie est présente sur la relation de dispersion $\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)}$ (aa) et sur les relations de dispersion des modes transverses du canal (cc). On discute les causes de l'apparition de ces modes ainsi que leurs relations de dispersion au chapitre 4.

On peut également construire la densité spectrale d'énergie en fréquence (figure 7.23 (b)). On constate la répartition de l'énergie sur un plateau couvrant les basses fréquences ce qui atteste d'une répartition de l'énergie aléatoire. Elle est à comparer au spectre obtenu dans ([10]) à partir de mesure in situ qui se comportent en ω^{-1} et aux simulations de Pelinovsky ([49]). Ce dernier, simulant l'évolution KdV d'un tirage aléatoire de 256 composantes de Fourier dans une boîte périodique, observe également la répartition de l'énergie sur un plateau aux basses fréquences. On observe une faible trace du forçage à 0.6 Hz pour les ondes se propageant du batteur vers le mur. Cette trace est complètement invisible sur le spectre des ondes se propageant dans l'autre direction.

Enfin, on montre sur la figure 7.24 la distribution de solitons obtenue grâce à la PIST pour plusieurs séries temporelles tirées du diagramme de la figure 7.22. On constate que la distribution de solitons évolue fortement avec x . Nous reviendrons sur ce point au chapitre suivant en discutant l'effet de la dissipation.

Nous avons dans ce dernier paragraphe souligné les principales caractéristiques des régimes turbulents solitoniques tels que nous sommes capables de les produire en laboratoire. La plus impressionnante de celles-ci est la désorganisation complète du forçage entraînant la perte de sa périodicité. L'énergie se répartie alors de manière uniforme sur l'ensemble des fréquences correspondant au domaine de validité de KdV. Le fait qu'un tel phénomène s'observe également dans des simulations de régime purement intégrable illustre que le cadre de la turbulence intégrable est, au moins partiellement, pertinent pour décrire les systèmes physiques en dépit d'une dissipation qui n'est pas négligeable. Cela est probablement due au fait que l'intégrabilité s'exprime sur des échelles de temps courtes (interaction quasi-élastique et conservation du profil solitonique) tandis que la dissipation devient significative sur des temps plus long.

De nombreuses questions se posent quant aux rôles des déphasages occasionnés par les interactions fortes et faibles et celui de la taille de la boîte dans ce processus de désorganisation. Le rôle de la distribution de solitons mérite également d'être étudié au travers d'une étude paramétrique. En particulier son lien avec le spectre de Fourier et la fonction de distribution de probabilité d'élévation de surface libre. On pourra notamment essayer de vérifier la prédiction théorique de la variance dans le cas monodirectionnel.

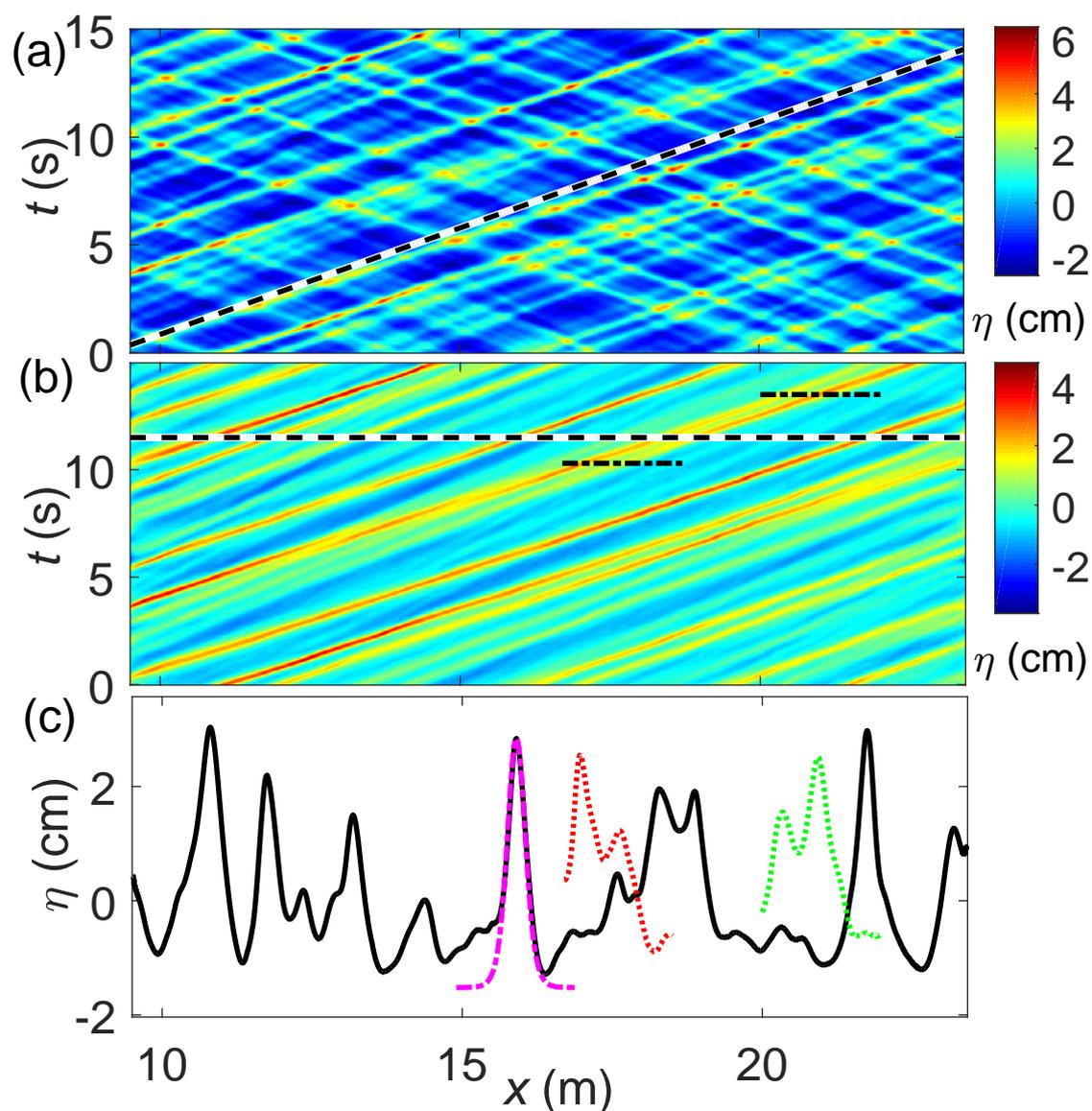


FIGURE 7.22: (a) Représentation spatio-temporelle du gaz soliton. L'échelle horizontale est la même pour toutes les sous-figures. Des solitons allant dans les deux sens sont visibles. On repère de nombreuses collisions frontales. La ligne pointillée est la célérité $c_r = \sqrt{gh_{ref}}$ avec h_{ref} le niveau sur lequel se propagent les solitons. (b) Représentation des ondes voyageant du batter vers le mur obtenue en filtrant le signal. (c) Extraction du profil d'élévation de la surface correspondant aux pointillés dans (b) à $t = 11.5$ s. Magenta : ajustement d'une solution soliton à une impulsion isolée. La ligne pointillée horizontale est le niveau de référence correspondant h_{ref} . Rouge : l'altitude de la surface à $t = 10.3$ s correspondant à la ligne pointillée de (b). Vert : Rouge : l'altitude de la surface à $t = 13.5$ s correspondant à la ligne pointillée de (b). Ces deux courbes correspondent aux états pré et post interaction forte qui se produit à $t = 11.5$ s et $X = 19$ m. Figure tirée de [52].

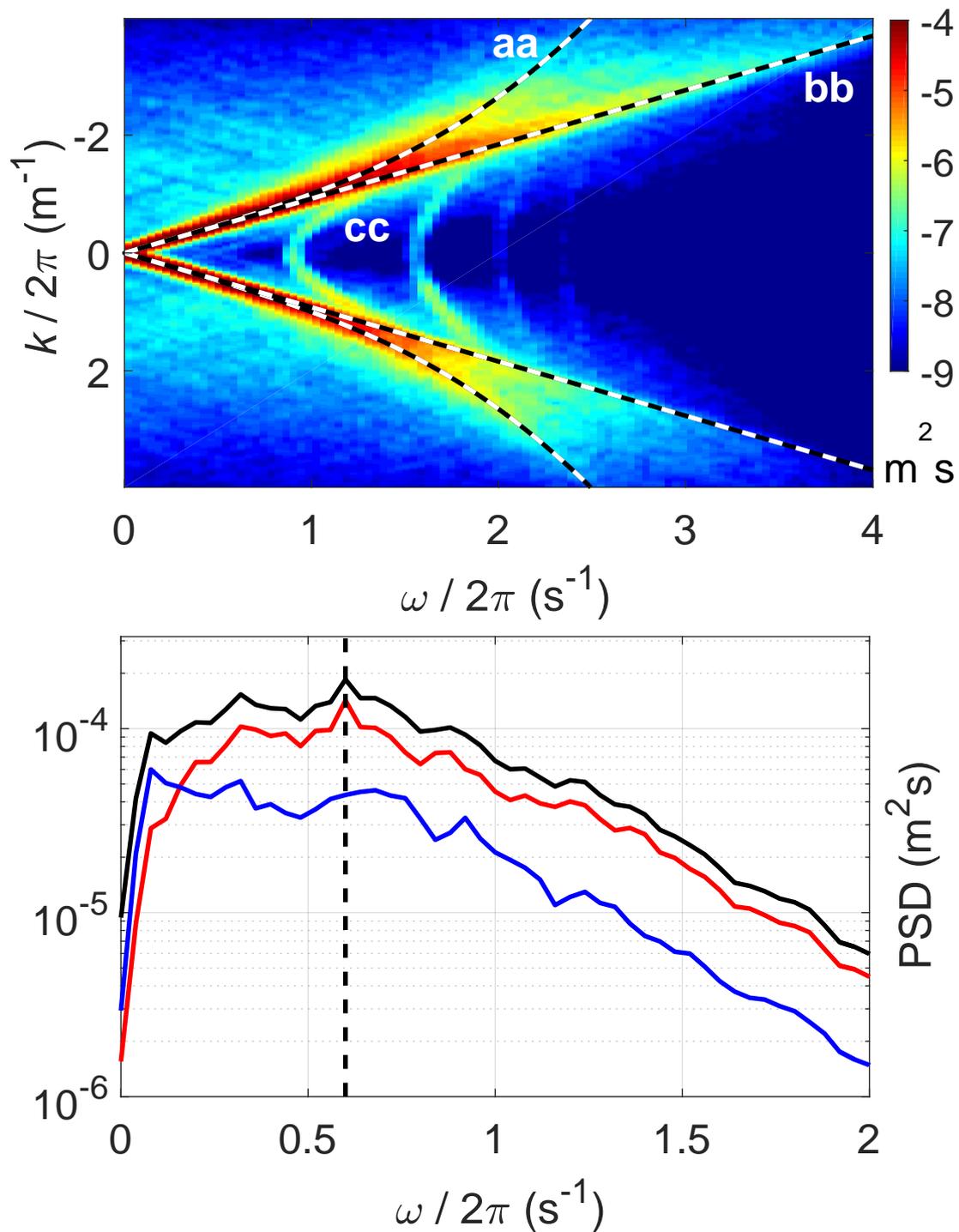


FIGURE 7.23: (a) spectre (ω, k) du gaz soliton. "aa" est la relation de dispersion des ondes linéaires $\omega = \sqrt{gk \tanh(kh)}$. "bb" est la relation $\omega = c_0 k$ qui correspond aux modes de Fourier qui composent les solitons. "cc" montre la partie du spectre liée aux ondes transversales. (b) Spectre en fréquence de l'élévation de surface libre dans le champs des caméras. La ligne noire représente le signal complet. Les lignes rouges et bleues le signal se propageant à droite et à gauche, respectivement. La ligne pointillée verticale correspond à la fréquence de forçage 0.6 Hz.

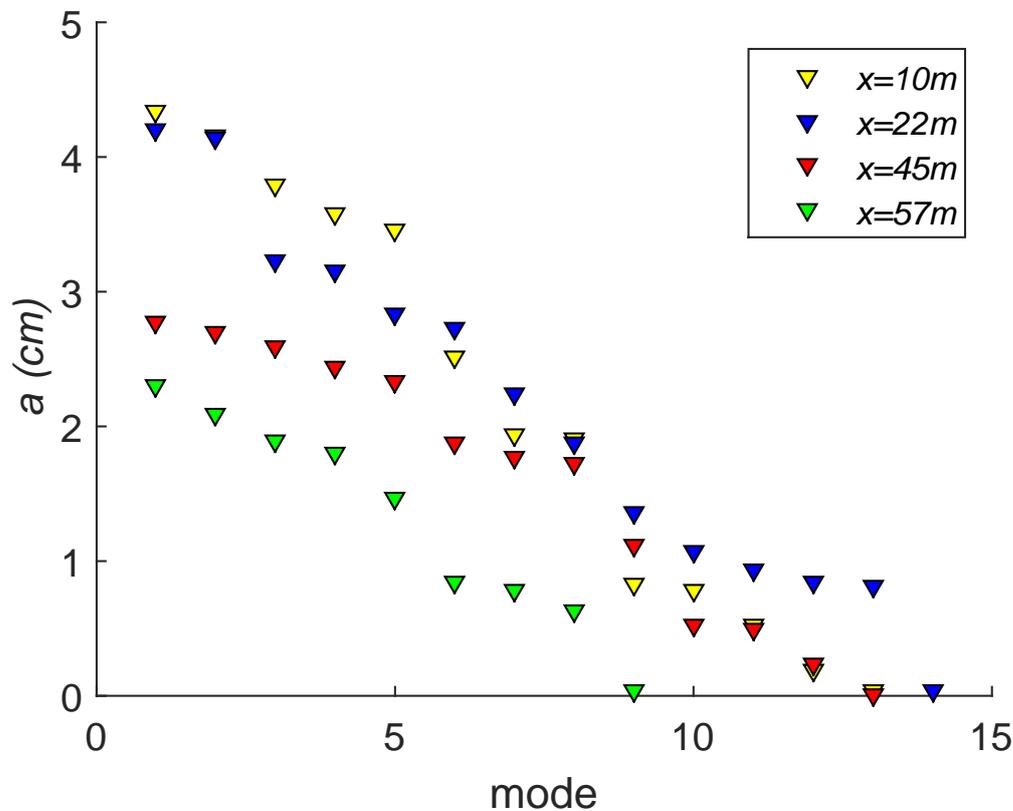


FIGURE 7.24: Distribution solitonique obtenue par l'analyse PIST de séries temporelles de 15 s à $x = 10$ et 22 m dans un sens puis dans l'autre (ce qui correspond à $x = 45$ et 57 m). Ces séries sont tirées du diagramme spatio-temporel de la figure 7.22.

7.6 Conclusion

Ce chapitre a permis de voir comment l'équilibre des effets non-linéaires et dispersifs gouverne l'évolution de la surface libre en eau peu profonde. On a notamment pu se convaincre qu'il est pertinent de considérer les modes physiques d'un tel système, si il est suffisamment non-linéaire, comme des solitons se propageant face à un courant adverse.

Ces derniers ont pu être identifiés grâce à leur signature spectrale dans l'espace de Fourier, à la mesure de leur vitesse et aux résultats de la PIST.

En étudiant le cas du forçage sinusoïdal, on a pu quantifier la distribution de solitons que l'on injectait dans le canal en fonction du nombre d'Ursell. On a également mis en exergue les limites de la PIST quant à l'estimation du niveau de référence sur lequel se propage les solitons et conséquemment de l'amplitude de ces derniers.

Enfin, dans la dernière partie on s'est attaché à montrer que le gaz de solitons obtenu pouvait rester organisé ou devenir chaotique avec dans ce dernier cas une répartition aléatoire de l'énergie sur les basses fréquences qui, par une comparaison à la littérature, indique que le cadre de la turbulence intégrable est pertinent pour décrire nos régimes.

Dans les chapitres suivants, on réalisera une étude paramétrique afin de caractériser l'état stationnaire obtenu. On cherchera en particulier à comprendre le lien entre distribution de soli-

tons, moments statistiques et spectre de Fourier. On cherchera également à déterminer pourquoi certains régimes deviennent, ou non, chaotiques en fonction de la distribution de solitons injectée au batteur.

— Chapitre 8 —

Turbulence solitonique

8.1 Introduction

Au chapitre précédent, on a vu que l'évolution d'un forçage sinusoïdal en eau peu profonde pouvait mener à un état de turbulence solitonique au sens où l'essentiel de l'énergie se répartit sur des modes localisés identifiés comme des solitons par la PIST et où l'évolution de la surface libre semble suffisamment chaotique pour requérir une description statistique.

Dans ce chapitre, on s'intéressera à l'étude de ces régimes de turbulence solitonique. On cherchera notamment à estimer à quel point ils peuvent être décrits dans le cadre de la turbulence intégrable et plus spécifiquement dans le cadre de la théorie des gaz de solitons. Nous allons dans cette introduction lister les questions que ces objets soulèvent et proposer des éléments de réponse avant de les développer dans le corps du chapitre.

La première question est celle de la désorganisation du forçage qui permet à la turbulence solitonique de s'établir. Comme on l'a vu au chapitre 2, l'évolution intégrable dans une boîte périodique d'une condition initiale sinusoïdale donne lieu à une répartition de l'énergie sur des modes cnoïdaux et, au bout d'un certain temps, à un phénomène de récurrence où la condition initiale est reconstruite (expériences numériques de Fermi, Pasta et Ulam [22] puis de Zabusky et Kruskal [64], expériences en canal de Trillo et al. [60]). Cette dynamique surprenante, qui a attiré l'attention sur les systèmes intégrables, ne se retrouve pas dans nos régimes où l'on observe une répartition uniforme de l'énergie sur l'ensemble des basses fréquences.

On verra que cela n'est pas antagoniste avec un comportement intégrable dans la mesure où cette répartition uniforme n'est pas liée à une équi-partition de l'énergie entre modes (thermalisation), mais au mélange des phases de ces modes qui conduit à une répartition aléatoire de l'énergie dans le système. Ce phénomène a été théorisé par Gurevich, Zybkin et El [27] qui, s'intéressant à l'évolution d'une condition initiale aperiodique et oscillante à grande échelle, avaient constaté une désorganisation des grandes oscillations en de petites oscillations chaotiques due à un phénomène de mélange des phases et qualifié ce comportement de turbulence solitonique.

On s'intéressera donc à l'évolution de l'organisation de nos trains de solitons afin d'établir que le chaos observé résulte d'une dynamique intégrable (mélange de phases) catalysée par un défaut de périodicité des premiers trains de solitons.

On verra également le rôle que peuvent jouer, dans cette désorganisation, les phénomènes de transferts d'énergie (dynamique non-intégrable) décrits par Ezersky et al. [20] [21] entre modes propres longs du canal et modes localisés.

La seconde question est celle de la description statistique de l'état stationnaire turbulent. On cherchera à comparer nos densités spectrales d'énergie et nos distributions de probabilité d'élévation de surface libre expérimentales à celles de la littérature. On verra que les valeurs de nos moments statistiques se comparent bien à celles des expériences numériques de Pelinovsky [49] qui dans des conditions comparables aux nôtres observe également une répartition uniforme de l'énergie sur les basses fréquences. Cette comparaison nous rassurera sur le caractère intégrable de la dynamique observée. Tout comme dans les expériences numériques de Dutykh et Pelinovsky [15] mettant en jeu des gaz peu denses de solitons, on obtiendra des distributions de probabilité d'élévation de surface libre quasi-stationnaires dont skewness (coefficient d'asymétrie) et kurtosis (coefficient d'aplatissement) grandissent avec le nombre d'Ursell.

On verra également que l'on ne retrouve pas le comportement en ω^{-1} de la densité spectrale d'énergie mesurée dans l'océan par Costa et al. [10] dans un régime qualifié de turbulence solitonique. Nos régimes les plus chaotiques étant au contraire caractérisés par une répartition

uniforme de l'énergie sur les basses fréquences.

On cherchera également à comparer nos régimes à la théorie des gaz de solitons développée par Zakharov [65] pour les gaz rares et généralisée par El [17] aux gaz denses. Ces théories reposent sur une équation cinétique qui permet de calculer la vitesse moyenne d'un soliton en fonction de son amplitude par rapport à la distribution des autres amplitudes. L'idée est que les solitons les plus grands de la distribution seront accélérés par les interactions (déphasage positif) tandis que les plus petits seront ralentis. Sur ce point, la comparaison expérimentale est difficile car les vitesses des solitons varient du fait de leurs dissipations. De plus, il est difficile d'extraire une trajectoire de soliton du chaos d'interaction faible et forte pour effectuer une comparaison précise à la théorie.

En revanche, cette théorie permet de déduire la moyenne et la variance de l'élévation de surface libre à partir de la distribution de solitons [18]. En effet, ces 2 quantités sont conservées par le mouvement. On peut également, de manière moins rigoureuse, estimer les valeurs des moments d'ordre 3 et 4. Bien que ces valeurs ne soient pas conservées par le mouvement, des travaux numériques ont montré qu'elles ne variaient que légèrement dans le temps [15]. Nos comparaisons à ces valeurs théoriques calculées à partir des distributions de solitons obtenues grâce à la PIST, permettront de discuter l'adéquation entre gaz de solitons idéal et expérimental. En particulier on discutera l'impact de la présence de modes non-solitoniques dans nos expériences.

La troisième question est celle de l'étude des mécanismes de dissipation. Un système est classiquement défini comme turbulent lorsqu'il est dans un état très excité, loin de son équilibre thermodynamique, et qu'il comporte un grand nombre de degrés de liberté. Cela implique généralement une dissipation intensive de l'énergie, la plupart du temps au travers de transferts d'énergie des échelles d'injection de l'énergie vers les échelles de dissipation.

On cherchera à quantifier l'impact de la dissipation sur nos régimes et en particulier sur l'évolution des distributions de solitons. On comparera cette évolution avec les résultats présentés au chapitre 6 afin de mettre en évidence l'impact de la dissipation visqueuse [30] et la génération de modes radiatifs par un léger défaut d'inélasticité des interactions [11].

8.2 A propos de l'analyse de séries temporelles à l'aide de la PIST

Dans la suite de ce chapitre, nous allons employer la PIST afin de connaître les distributions de solitons des différents régimes. Il est bon de fixer d'abord les limites de cet outil et en particulier de reconnaître la difficulté à définir une limite entre modes solitoniques et modes radiatifs qui ne soit pas arbitraire.

Nous avons vu au chapitre 5 que la méthode de la PIST permet de décomposer une série temporelle en modes cnoïdaux et qu'au-delà d'un certain module, un mode cnoïdal est suffisamment localisé pour s'interpréter comme un soliton. Au chapitre précédent, on a mis en évidence une limite de cette méthode. Définir le niveau de référence sur lequel se propagent les solitons comme le "pied" du dernier mode de module supérieur à 0.99 conduit à des discontinuités notables de l'évolution de l'amplitude de ces modes pour, par exemple, une variation très faible de profondeur.

Nous allons ici discuter une autre ambiguïté posée par cette définition du niveau de référence. Dans un premier temps, on verra que suivant la longueur de la série temporelle qui est analysée, les mêmes modes localisés se voient attribuer un module différent ce qui fait varier de manière importante le niveau de référence. Dans un second temps, on étudiera l'influence, toujours sur le module d'un mode localisé, de la présence d'autres modes solitoniques. Enfin, on mettra ces observations en perspective afin de définir au mieux le niveau de référence pour la suite du chapitre.

8.2.1 Influence de la longueur de la "boîte" sur la distribution solitonique

On s'accordera à dire qu'un mode solitonique devrait être considéré tel quel indépendamment de la longueur de la série temporelle à laquelle il appartient. C'est-à-dire que, si la PIST "trouve" un soliton dans une série temporelle de 10 secondes, on s'attend à ce qu'elle retrouve ce même mode dans une série de 20 secondes contenant la première.

Nous allons ici voir ce qu'il en est en considérant le contenu solitonique d'une série temporelle de 2 minutes d'abord dans son intégralité puis comme la somme du contenu solitonique de séries d'environ 15 secondes (on sectionne la série initiale au $\eta = 0$ le plus proche).

On montre sur la figure 8.1 que la distribution de solitons obtenue en considérant une série temporelle de 2 minutes compte 180 solitons contre 120 pour la distribution obtenue en séquencant l'analyse sur huit séries temporelles adjacente de 15 secondes. Comme on peut le voir en comparant les traces des matrices de monodromies 8.1e et 8.1c, le dernier mode de module > 0.99 est détecté bien plus loin dans le spectre pour la série de 120 s (tirets noirs). La trace de la matrice de monodromie prend également des valeurs bien plus importantes ce qui suggère que les modules des modes de cette série sont supérieurs à ceux des séries de 15 s. Il en découle que les niveaux de référence (représentés sur la figure 8.1d) diffèrent grandement. Cette variation explique les différences d'amplitudes entre les 2 distributions de solitons obtenues. En particulier, le niveau de référence obtenu dans le premier cas est de 2 fois inférieur au minimum de la série temporelle ce qui semble loin de son sens physique.

On peut calculer la vitesse du soliton le plus rapide ($a = 7.2$ cm) à partir d'un niveau de référence aussi bas grâce à la formule ci-dessous.

$$V_{sol} = \sqrt{gh_{moy}} \left(1 + \frac{a}{2h_{moy}} + \frac{3}{2h_{moy}} h_{ref} \right) \quad (8.1)$$

On trouve alors une vitesse de 108.9 cm/s. En comparant cette dernière aux trajectoires obtenues sur le diagramme spatio-temporel, on trouve de nombreux solitons de vitesse supérieure à cette

valeur. On en conclut que considérer une série temporelle trop longue conduit à une erreur sur la définition du niveau de référence.

Comparativement, considérer des séries temporelles de 15 secondes donne des niveaux de référence plus crédibles. On constate en revanche une fluctuation de celui-ci de l'ordre de 20%. Afin de décrire statistiquement la distribution de solitons d'un régime, il faut donc considérer des séries suffisamment longue pour que le niveau de référence (dépendant de la concentration et de la taille des solitons) ne varie plus.

Avant toute chose, il convient d'étudier plus en détail l'influence de la longueur de la série temporelle sur le module des modes qu'elle contient.

Lien entre module et nombre d'Ursell

Le module et le nombre d'Ursell associé à un mode cnoïdal sont deux nombres qui renseignent sur la non-linéarité de ce dernier. Il existe une relation entre ces 2 paramètres explicitée dans l'ouvrage d'Osborne [48]. On peut écrire pour le module :

$$m K^2(m) = \frac{3\pi^2}{2k^2 h^3} a \quad (8.2)$$

où k est le nombre d'onde et K est une fonction elliptique de Jacobi : l'intégrale elliptique de première espèce. Si l'on définit le nombre d'Ursell d'un mode comme :

$$U = \frac{3a}{4k^2 h^3} \quad (8.3)$$

on obtient aisément la relation :

$$m K^2(m) = 2\pi^2 U \quad (8.4)$$

Comme on travaille ici avec des séries temporelles, on utilisera la définition suivante pour le nombre d'Ursell :

$$U = \frac{3ac_0^2 T^2}{16\pi^2 h^3} \quad (8.5)$$

L'analyse PIST donne le module et l'amplitude de chaque mode. La profondeur et l'amplitude du soliton étant connue, on peut calculer pour chaque mode solitonique un nombre d'Ursell en prenant T égal à la durée de la série temporelle à laquelle il appartient.

Sur la figure 8.2, on compare l'analyse PIST de 2 séries temporelles de longueur différente contenant un même soliton de 1.04 cm. On obtient un module considérablement plus important pour la série temporelle la plus longue. Cela correspond à l'augmentation du nombre d'Ursell conséquemment à celle de la période T du mode. On constate que la relation 8.4 (pointillé noir) est parfaitement respectée.

La mise en exergue de ce phénomène condamne l'usage du module 0.99 comme seuil solitonique puisque le module d'un mode est fonction de la longueur T de la boîte. Il faut donc adjoindre à ce module seuil une longueur de série temporelle. Par exemple, on a pu voir au chapitre précédent que le seuil de $m = 0.99$ identifiait de manière raisonnable les modes solitoniques dans une série temporelle de 10 secondes. Pour une série de 30 secondes, on peut extrapoler à l'aide de la relation entre module et nombre d'Ursell une nouvelle valeur seuil de $m=0.9999999999$.

Ce raisonnement ne vaut, bien sûr, que si cette relation entre nombre d'Ursell et module est toujours valable. Nous allons discuter cette question dans la section suivante.

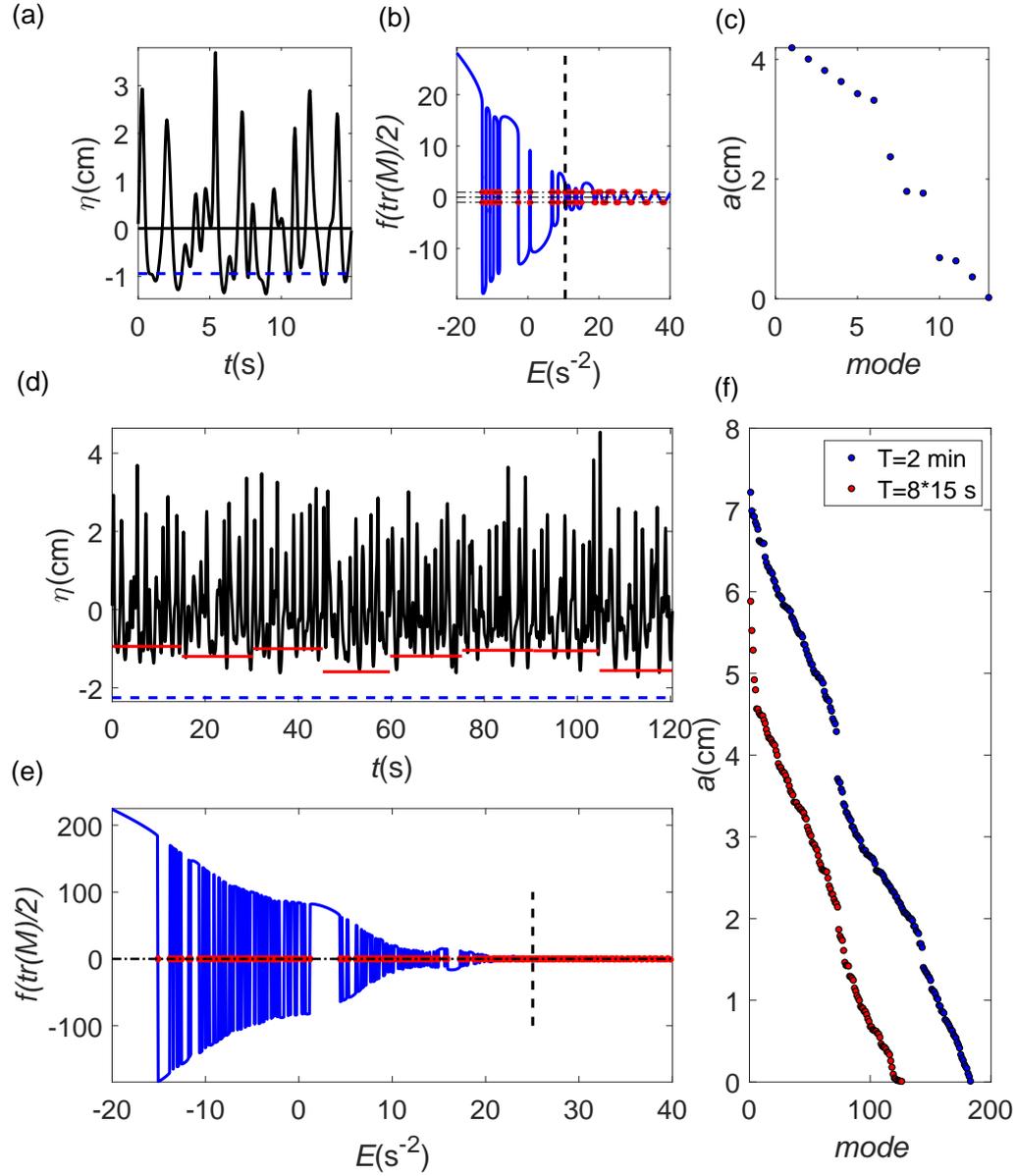


FIGURE 8.1: (a) Série temporelle de 15 s de la houle se propageant du batteur vers le mur mesurée à 10 m du batteur et h_{ref} (en bleu). (b) Trace de la matrice de monodromie associée (bleu) et niveau de référence spectrale E_{ref} (tirets noirs) marquant la séparation entre modes solitoniques et radiatifs ($m=0.99$). (c) Amplitudes des modes solitoniques correspondants. (d) Série temporelle de 120 secondes. En rouge, h_{ref} pour un découpage en séries de 15 s et en bleu pour une seule série de 120 s. (e) Trace de la matrice de monodromie associée à la série de 120 s (en bleu) et E_{ref} (en tirets noirs). (f) Comparaison des amplitudes de solitons obtenues pour une série de 120 s (bleu) ou son découpage en 8 séries de 15 s (rouge).

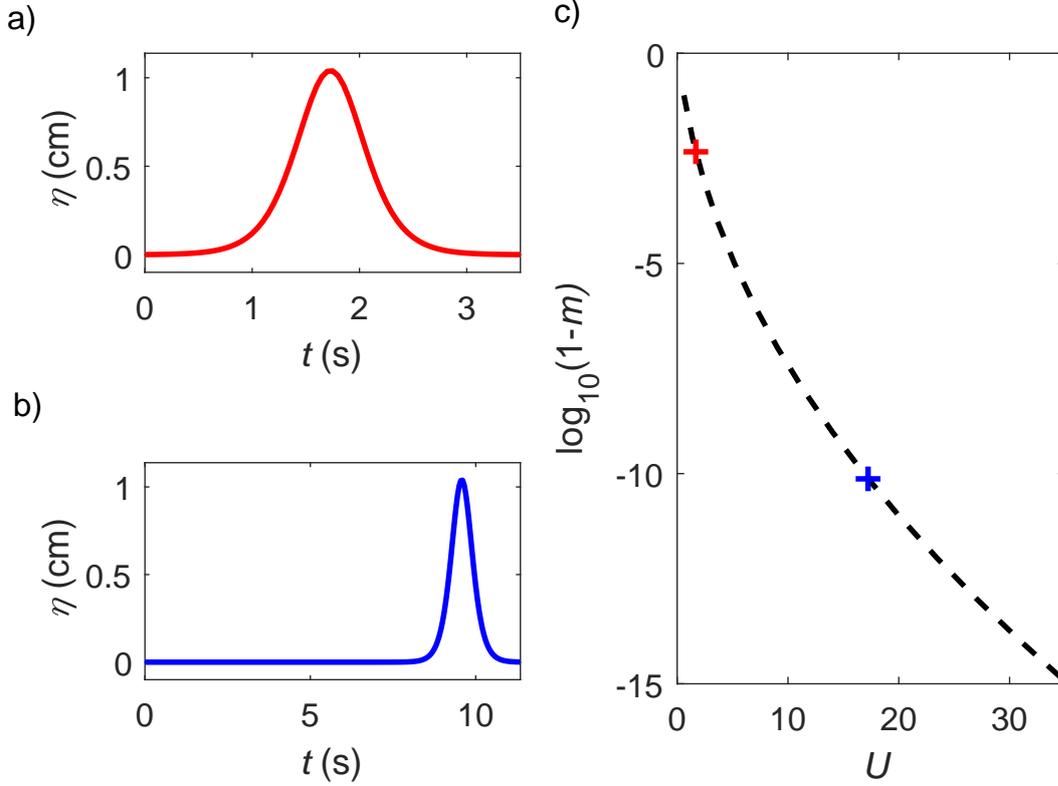


FIGURE 8.2: (c) Comparaison du rapport entre le nombre d'Ursell et le module obtenu par la PIST d'un même soliton de 1.04 cm considéré dans une série temporelle de 3 s (a) ou 11 s (b).

Les modules étant très proches de 1, on trace $\log_{10}(1-m)$. La relation théorique (8.4) est tracée en tirets noirs. $h=12$ cm.

Impact de la densité solitonique

On a pu voir dans les chapitres précédents que le module d'un mode était défini comme

$$m = \frac{E_{2j+1} - E_{2j}}{E_{2j+1} - E_{2j-1}} \quad (8.6)$$

où les E_j sont définis comme les valeurs successives pour lesquelles la trace de la matrice de monodromie vaut $\text{tr}(M(E_j)) = \pm 2$.

Cette définition met en lumière l'impact, sur le module d'un mode, de la présence d'un autre mode. En effet, si l'on considère un soliton seul se propageant sur le niveau $h_{ref} = 0$, on aura $E_{2j+1} = 0$. Si l'on rajoute un second soliton dans la série temporelle, E_{2j+1} s'en trouvera modifié et en conséquence le module du premier mode localisé sera artificiellement diminué sans que son nombre d'Ursell ne le soit. On pourrait penser qu'il suffit de calculer le module à partir du niveau de référence E_{ref} pour compenser cet effet, on verra dans la suite que c'est insuffisant. Ce constat met en exergue la complexité d'associer à une fonction hyperelliptique un mode solitonique dès que plusieurs solitons sont impliqués et complexifie encore le calcul d'un seuil $m = m_s$ à partir duquel un mode serait un soliton.

Pour illustrer ce phénomène, on montre sur les figures 8.3 et 8.4 le nombre d'Ursell et le module associé aux modes de séries temporelles contenant 2 solitons comparativement à la relation qu'ils devraient respecter. On indique en rouge les résultats obtenus avec le module défini classiquement et en bleu avec un module défini à partir du niveau de référence comme $m = \frac{E_{ref} - E_{2j}}{E_{ref} - E_{2j-1}}$ pour tenter de s'affranchir de l'influence du second mode sur le premier.

On constate que, malgré la réduction de l'erreur due à cette précaution, la relation entre module et nombre d'Ursell se réduit à une estimation qualitative dès que plus d'un mode solitonique est impliqué. Cet effet est d'autant plus visible que la différence d'amplitude entre les 2 solitons est faible.

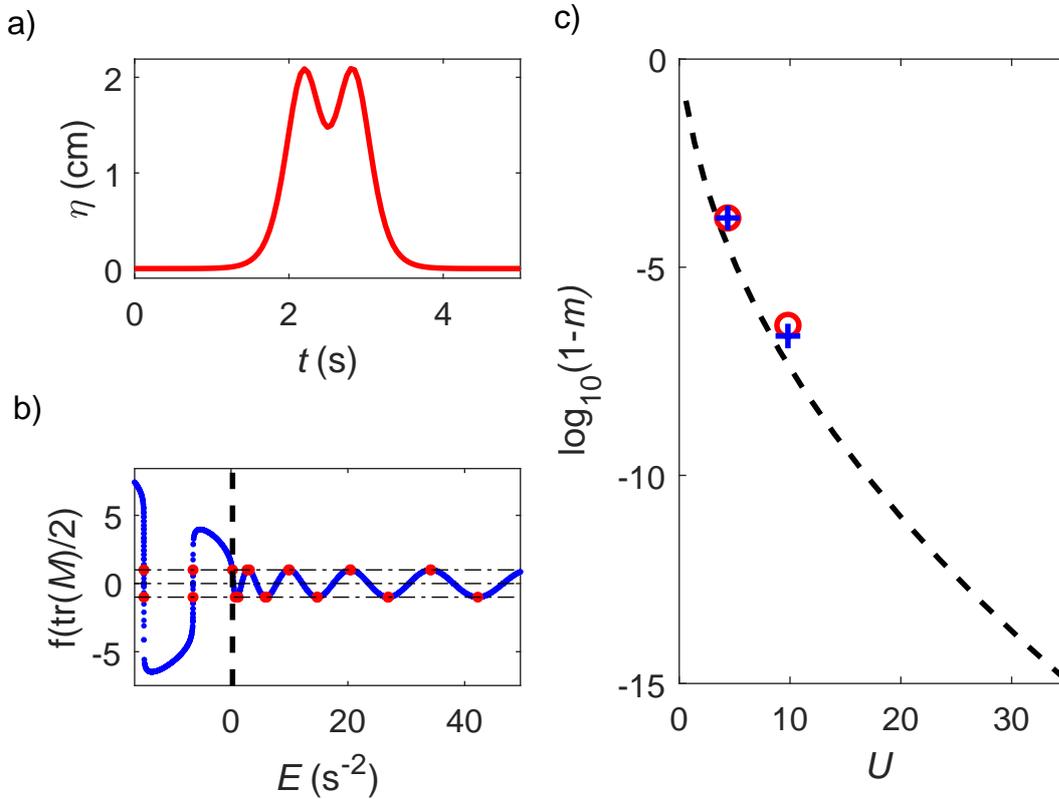


FIGURE 8.3: (c) Comparaison du rapport entre le nombre d'Ursell et le module obtenu par la PIST de 2 solitons en interaction forte représentés en (a) avec la relation théorique 8.4 (pointillé noir). Les ronds rouges correspondent à un module calculé avec $m = \frac{E_{2j+1} - E_{2j}}{E_{2j+1} - E_{2j-1}}$ tandis que les croix bleues utilisent $m = \frac{E_{ref} - E_{2j}}{E_{ref} - E_{2j-1}}$. (b) Trace de la matrice de monodromie associée à (a) avec en rouge les solutions E_j tel que $\text{tr}(M(E_j))/2 = \pm 1$.

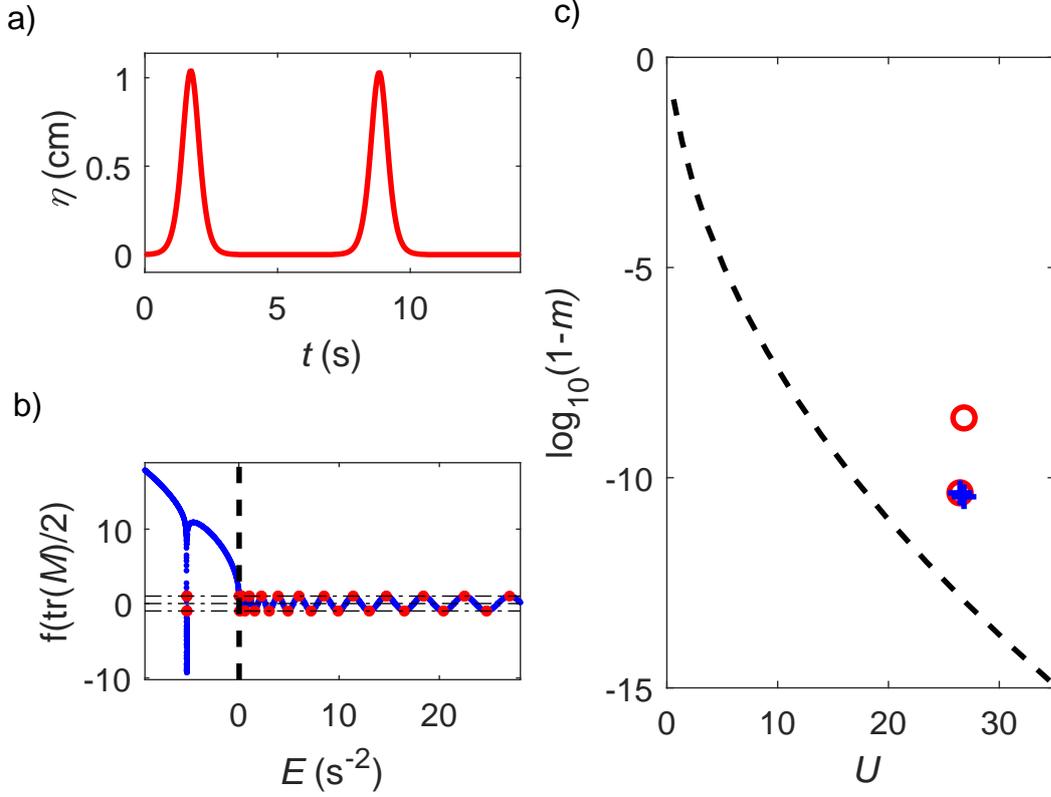


FIGURE 8.4: (c) Comparaison du rapport entre le nombre d'Ursell et le module obtenu par la PIST de 2 solitons presque identiques représentés en (a) avec la relation théorique 8.4 (pointillé noir). Les ronds rouges correspondent à un module calculé avec $m = \frac{E_{2j+1} - E_{2j}}{E_{2j+1} - E_{2j-1}}$ tandis que les croix bleues utilisent $m = \frac{E_{ref} - E_{2j}}{E_{ref} - E_{2j-1}}$. (b) Trace de la matrice de monodromie associée à (a) avec en rouge les solutions E_j tel que $\text{tr}(M(E_j))/2 = \pm 1$

Protocole pour estimer les distributions de solitons

On cherche à connaître les modes qui composent nos systèmes. Ces systèmes étant bien décrits sur des échelles de temps courtes par des équations intégrables comme KdV ou Kaup-Boussinesq, l'outil consacré pour mener à bien notre étude est l'inverse scattering transform (IST). Cette méthode peut être utilisée avec 2 types de conditions aux limites (cf. chapitre 3) :

- on peut considérer des conditions de potentiel nul à l'infini et utiliser l'IST ligne qui a l'avantage de posséder de "vraies" solutions localisées. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle suppose que les solitons se propagent sur le niveau au repos. Pour traiter nos données, il conviendrait de fixer artificiellement un niveau de référence inférieur au niveau au repos. Le choix arbitraire de ce niveau rend l'analyse difficile, d'autant plus que cela conduit à négliger le courant de reflux (cf. chapitre précédent) et à faire des erreurs sur la vitesse des solitons ;
- on peut également considérer des conditions de "boîte" périodique. Les modes du système

sont alors des ondes cnoïdales et ne sont donc pas, à proprement parler, des modes localisés. On peut cependant estimer qu'un mode de module élevé se comporte comme un soliton puisque la limite de l'onde cnoïdale lorsque le module tend vers 1 est l'onde solitaire. On a vu que la longueur de la série temporelle et la présence d'autres modes d'amplitudes comparables pouvait affecter grandement la valeur de ce module ce qui rend complexe la définition du seuil au-delà duquel un mode peut être interprété comme localisé.

Dans le premier cas, le choix du niveau de référence impacte la distribution de solitons obtenue, dans le second cas le choix de la longueur de la boîte pose les mêmes problèmes. Nous allons tenter de limiter le biais induit par ce choix de longueur de boîte.

Le constat des 2 paragraphes précédents est qu'il est possible de s'affranchir de l'influence de la longueur de la boîte en associant un temps caractéristique au module seuil. Cependant, l'influence des modes sur leurs modules respectifs reste difficile à prendre en compte. Elle est moins importante pour la définition du seuil au sens où pour ce mode on a $E_{ref} = E_{2j+1}$ mais reste source d'erreur.

On a vu au chapitre 6 que par 12 cm de profondeur, un soliton conservait son identité jusqu'à une amplitude de 2 mm. On définira donc cette intumescence comme le mode solitonique le moins non-linéaire et le plus étalé. Ce soliton s'étale sur environ 6 secondes (figure 6 du chapitre 4). Au sens de la PIST, il passe le seuil $m = 0.99$ pour une série temporelle de longueur supérieur à 6.185 s. On associera donc la durée de $T_{seuil} = 6.185$ secondes au seuil de $m_s = 0.99$. On peut donc écrire qu'un mode est un soliton si son module m et la longueur de la série temporelle T vérifie :

$$\frac{m K(m)^2}{T^2} > \frac{m_s K(m_s)^2}{T_{seuil}^2} \quad (8.7)$$

Dans la suite de ce chapitre, on utilisera cette définition du seuil solitonique. On s'appliquera à représenter les traces des matrices de monodromies afin de comparer qualitativement les résultats de la PIST sans le biais du choix du niveau de référence.

Discussion de Costa 2014

On conclura cette section préliminaire par un retour sur la distribution de solitons obtenue par Costa et al. [10] lors de leurs mesures in situ dans l'océan en Caroline du Nord. On montre sur la figure 8.6 la distribution de solitons obtenue à partir de la PIST effectué sur la série temporelle rouge de la figure 8.5. On observe que les 2 plus grands solitons de la série semblent bien séparés des autres. La distribution de solitons leur attribue une amplitude de 25 cm de qui mettrait le niveau de référence à -10 cm, soit 2 fois plus bas que le minimum de la série temporelle.

Par analogie avec le développement que l'on vient de mener, on peut penser que le fait de considérer le niveau de référence à $m=0.99$ a conduit à une surestimation de ce dernier. Si l'on estime que le niveau de référence réel se situe plutôt entre 0 et -4 cm, les solitons de moins de 6 cm se trouvent amputés de la distribution. Avec cette interprétation, de nombreux modes deviennent non-solitoniques. Cela remet en cause l'interprétation du comportement en ω^{-1} des densités spectrales d'énergie observé par les auteurs comme un signature du gaz de solitons "pur".

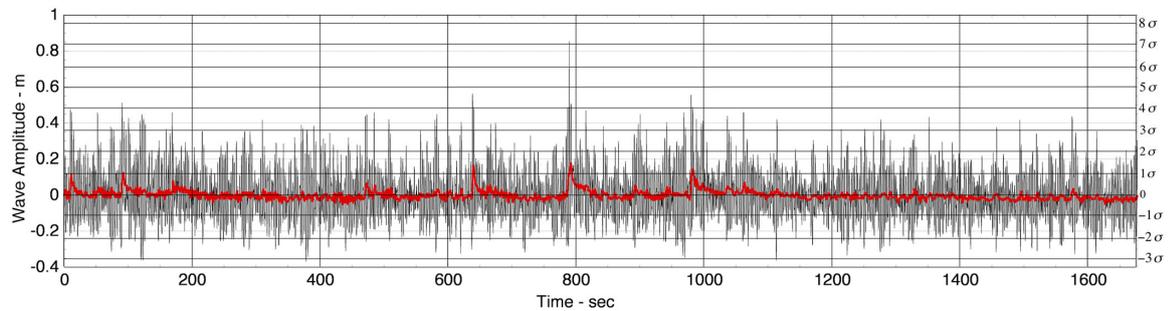


FIGURE 8.5: Série temporelle issue de 8.6, mesurée lors d'une tempête le 4 février 2002 en Caroline du Nord. Les modes radiatifs sont filtrés afin de ne laisser que les modes solitoniques (en rouge). $h = 2.63$ m

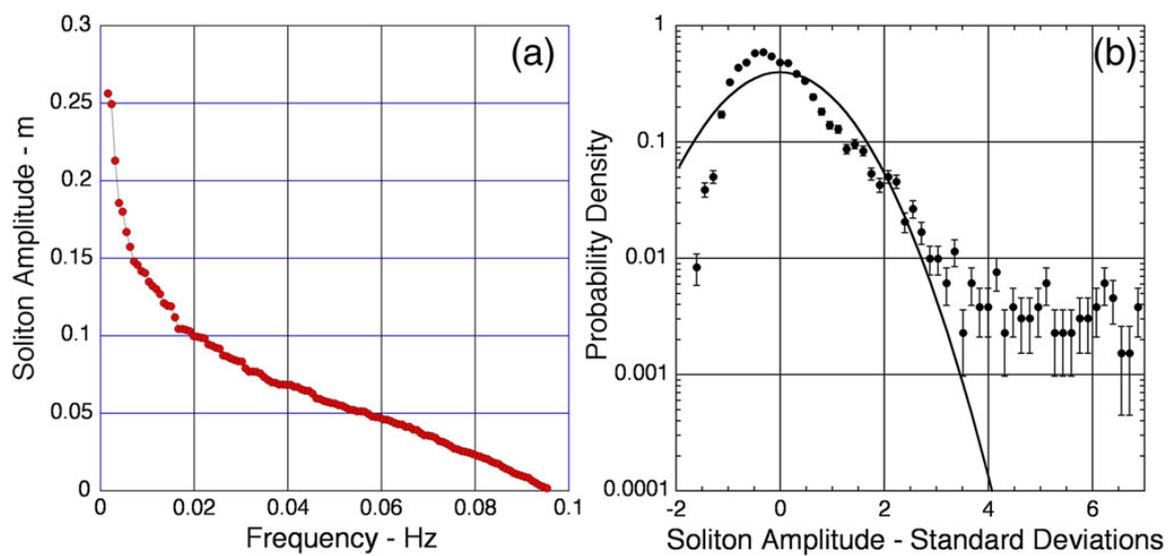


FIGURE 8.6: Spectre de la PIST (a) et histogramme des amplitudes de solitons (b) correspondant à la série temporelle rouge de la figure 8.5, issue de 8.6.

8.3 Régime transitoire et établissement de la turbulence solitonique

Nous allons dans cette section discuter le régime transitoire durant lequel s'établit, ou non, la turbulence solitonique. Cette discussion s'appuiera sur une étude paramétrique qui fera varier la profondeur d'eau dans le canal ainsi que l'amplitude et la fréquence du forçage monochromatique. On s'intéressera en particulier aux mécanismes de désorganisation de la périodicité initiale des trains de solitons issus de la fission du forçage sinusoïdal.

Dans un premier temps, on verra que les premiers solitons générés évoluent différemment des autres du fait qu'ils se propagent sur le niveau moyen. Cette désorganisation des premiers trains, sous réserve de dépasser une certaine magnitude, va catalyser la désorganisation de l'ensemble du régime par un phénomène de mélange de phases.

Dans un second temps, on verra que lorsque le $\frac{a}{h}$ du régime est faible, les différences de vitesses entre solitons le sont également. La désorganisation des premiers trains est alors trop peu importante pour se généraliser. La périodicité étant dans ce cas conservée, on peut dans certains cas transférer de l'énergie par interaction quasi-résonante à 3 ondes aux modes longs du canal et désorganiser le forçage au terme d'une dynamique lente. Bien qu'on aboutisse à des régimes solitoniques, ce mécanisme de désorganisation implique des transferts d'énergie entre modes et est donc résolument non intégrable.

Enfin si le paramètre non-linéaire $\frac{a}{h}$ est trop faible, l'interaction quasi-résonante à 3 ondes est interdite et on conserve un régime qui reste périodique dans l'état stationnaire.

On résumera notre étude paramétrique dans un diagramme de phases en fonction de l'occurrence de ces phénomènes afin de discuter la pertinence du nombre d'Ursell et du rapport $\frac{a}{h}$ comme nombre adimensionnel caractérisant la désorganisation de l'état stationnaire. Enfin, on verra grâce à la PIST que les régimes de turbulence solitonique font intervenir des solitons d'amplitudes (et donc de vitesse) diverses. Ces différences de vitesse les empêchent d'être en phase et stabilisent l'état chaotique.

8.3.1 Périodicité initiale : 3 cas de figures

Comme l'ont montré les travaux de Zabusky et Kruskal et confirmé les expériences de Trillo, un forçage sinusoïdal entraîne la répartition de l'énergie sur un nombre restreint de modes non-linéaires qui conservent cette énergie. Cela donne lieu à un comportement quasi-périodique du système avec, au terme d'un temps de récurrence (long), une re-formation de la condition initiale.

Durant le premier aller-retour des ondes dans le canal, on observe cette dynamique. Chaque période de sinus fissionne en un même train de solitons. Les solitons s'organisent en peignes de période identique au forçage et dont la vitesse de propagation dépend de l'amplitude. On peut souligner certains comportements typiques en fonction du nombre d'Ursell du forçage.

Ursell < 1 : mode cnoïdal et harmoniques libres

Si la non-linéarité est insuffisante à produire une catastrophe de gradient régularisée en train de solitons, le forçage sinusoïdal évoluera en un mode cnoïdal et une série d'harmoniques libres. On montre sur la figure 8.7b le profil des premiers trains d'ondes lorsqu'il reviennent dans le champ des caméras après la réflexion (obtenu par filtrage directionnel). On observe uniquement le mode cnoïdal. En effet, ce dernier se propage plus vite que son harmonique libre et l'a distancé.

Sur la figure 8.7a, on montre au même instant le profil des ondes se propageant du batteur vers le mur. On observe alors l'interaction du mode cnoïdale avec le premier harmonique libre dont la signature sont les crêtes secondaires.

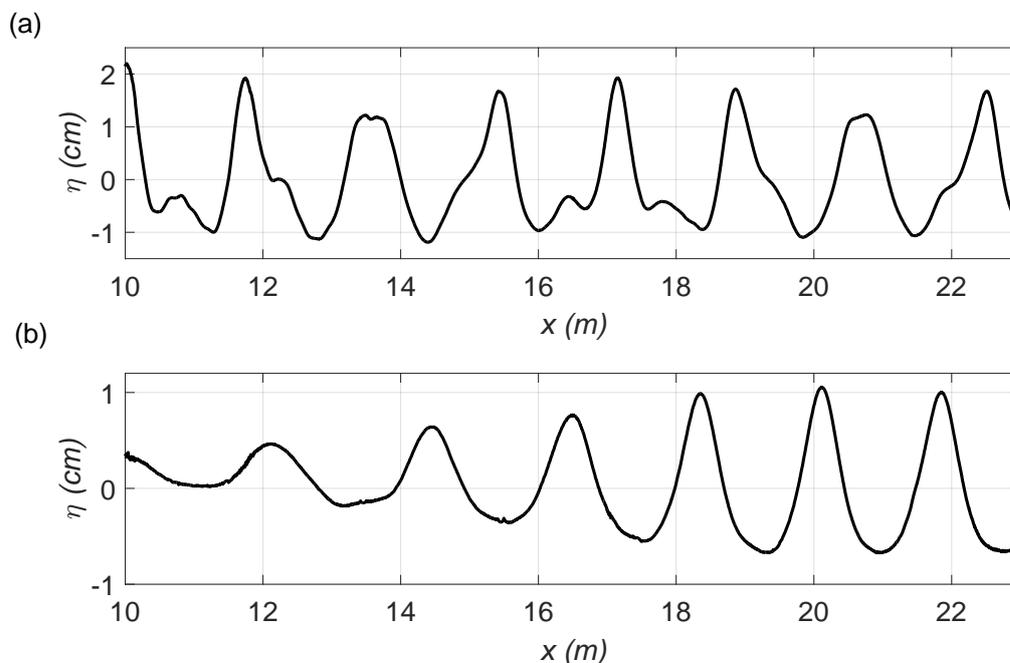


FIGURE 8.7: Profil des ondes à l'instant où le premier train d'ondes, réfléchi à la paroi, repasse devant les caméras pour un forçage monochromatique à 0.6 Hz de 3 cm de hauteur crête à creux. Le signal est filtré pour différencier les ondes se propageant du batteur vers le mur (a) et du mur vers le batteur (b). $h = 12$ cm.

Ursell > 1 : train de solitons

Si la non-linéarité est suffisante, chaque période du forçage évoluera en un même train de solitons (cf. chapitre précédent). À l'exception des premiers solitons qui se propagent sur un niveau différent, l'organisation reste donc périodique. On montre sur les figures 8.8 et 8.9 que les trains de solitons conservent une périodicité en dépit des interactions fortes (solitons se dépassant) ou faibles (solitons se rencontrant face à face). Ici, le train de solitons comporte 3 solitons d'amplitudes décroissantes. Les solitons de mêmes amplitudes voyageant à la même vitesse, il se forme 3 peignes de solitons. Tant que ces peignes restent parfaits, on peut considérer que les modes du système sont 3 modes cnoïdaux de modules importants et de fréquence égale à celle du forçage ou préférer l'interprétation en peigne de solitons.

Chacun des modes localisés de ce peigne subit exactement les mêmes interactions fortes. Le déphasage occasionné par celles-ci ne désorganise donc pas chacun des peignes (en revanche, il occasionne évidemment des déphasages entre peignes). Les interactions faibles peuvent quant à elle jouer un rôle déstabilisant pendant ce transitoire. Sur le trajet retour, du mur au batteur, les solitons feront exactement le même nombre d'interactions faibles. En revanche sur le premier

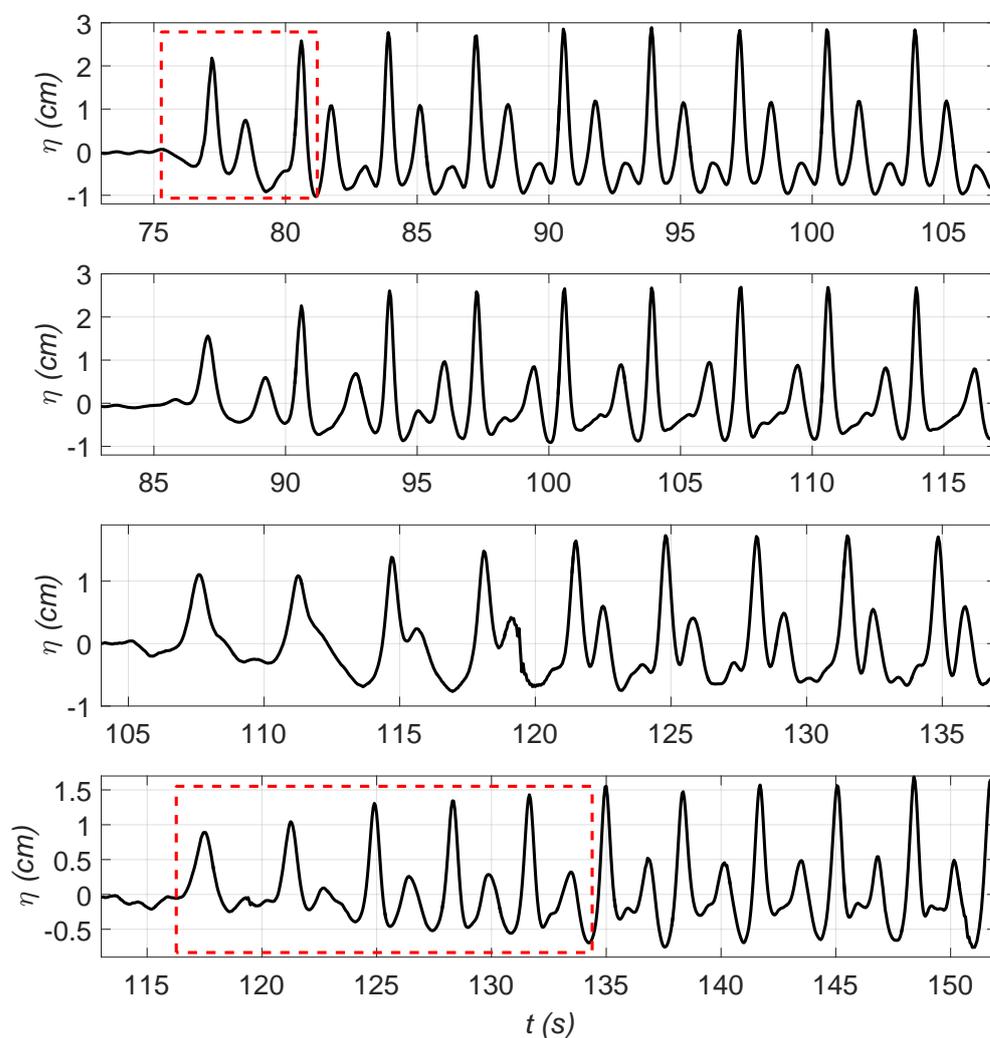


FIGURE 8.8: Série temporelles correspondant aux premiers trains d'ondes pour un forçage monochromatique à 0.3Hz, de 3 cm de hauteur crête à creux, par une profondeur de 12 cm. On montre le signal obtenu par filtrage directionnel à 10 m (a), 23 m (b), 44.5 m (c) et 57,5 m (d) du batteur (la houle se propageant du mur vers le batteur à partir de 33.73 m). Les abscisses temporelles correspondent à celles de la figure 8.9.

voyage du batteur au mur, le premier train ne fera aucune interaction faible, le second train interagira avec le premier, le troisième avec les 2 premiers, le quatrième avec les 3 premiers, etc. Ainsi, un léger déphasage peut s'opérer progressivement.

On a vu au chapitre 6 que le déphasage occasionné par l'interaction faible est limité (pour l'interaction de 2 solitons de 3 cm par 12 cm de profondeur on s'attend à 4 cm de déphasage qui se compare ici à une longueur d'onde de 3.60 m). Si chaque soliton du peigne subit 4 cm de déphasage de plus que le précédent, on retrouve un peigne périodique de longueur d'onde

augmentée de 4 cm ce qui ne constitue pas une désorganisation majeure.

Ces déphasages ont un effet de désorganisation des peignes de solitons de même amplitude uniquement durant le premier aller retour. Après quoi, si le régime reste périodique, on retrouve la situation où chaque soliton d'un peigne subit les mêmes interactions que le suivant.

On constate également l'allongement d'un régime transitoire entre le niveau au repos et l'organisation strictement périodique avec la distance au batteur. Cela peut s'observer en suivant, sur la figure 8.8, l'amplitude du plus grand soliton de chaque train. A 10 m du batteur, seul les deux plus grands solitons du premier train ont une amplitude différente des autres (voir cadre rouge sur 8.8a), alors qu'à 57.5m (8.8d), les 5 premiers grands solitons ont une amplitude croissante (voir cadre rouge sur 8.8b). Cela témoigne du changement de niveau de référence ressenti par les solitons alors qu'ils se hissent du niveau de référence initial à -0.8 cm au niveau moyen à 0 cm.

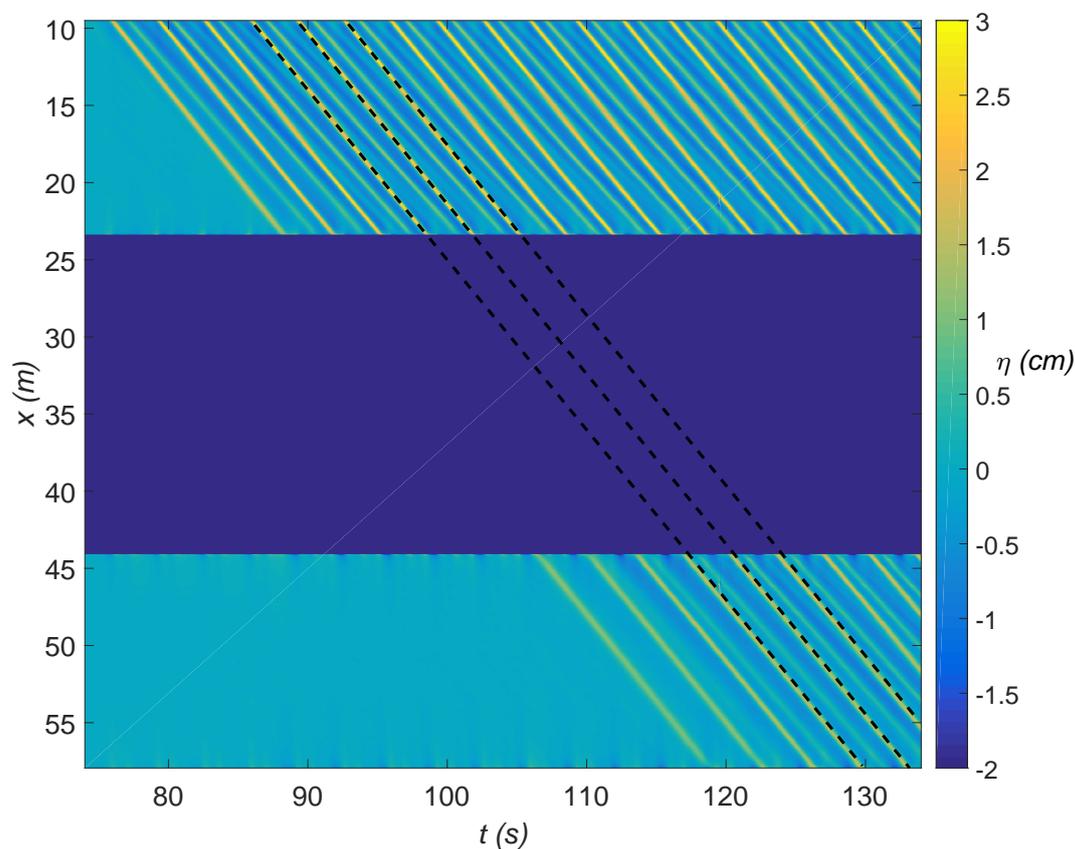


FIGURE 8.9: Diagramme spatio-temporel correspondant aux premiers trains d'ondes pour un forçage monochromatique à 0.3 Hz, de 3 cm de hauteur crête à creux. On a "déplié" le canal pour faire apparaître la houle se propageant du mur ($x=33.73$ m) au batteur ($x=67.46$ m) dans la continuité de celle se propageant du batteur vers le mur. On prolonge (tiret noir) les trajectoires du peigne de solitons d'amplitude 3 cm à l'aller pour illustrer la conservation de la périodicité au retour. $x = 0$ m, position du batteur ; $x = 33.73$ m, position de la paroi. $h = 12$ cm.

Longueur d'onde grande devant la longueur du canal

Lorsque l'on force à 0.1 Hz, la longueur de l'onde sinusoïdale initiale est de 10.6 m ($h = 11.5$ cm) est si grande que le plus grand soliton du train n'a pas le temps d'effectuer d'interaction forte significative lors de son premier aller-retour dans le canal. Il rattrape uniquement les plus petits solitons du train précédent. On montre sur la figure 8.10 un diagramme spatio-temporel illustrant ce comportement. On prolonge les trajectoires des solitons du premier train afin de mettre en évidence qu'en plus de la fréquence associée aux peignes de solitons (0.1Hz), une seconde fréquence caractéristique (diminuant avec l'éloignement au batteur) rend compte de la divergence des différents solitons d'un train. Il est difficile dans ces régimes de parvenir à s'affranchir complètement de la périodicité initiale étant donné le nombre restreint de périodes parcourues par les solitons avant de revenir au batteur.

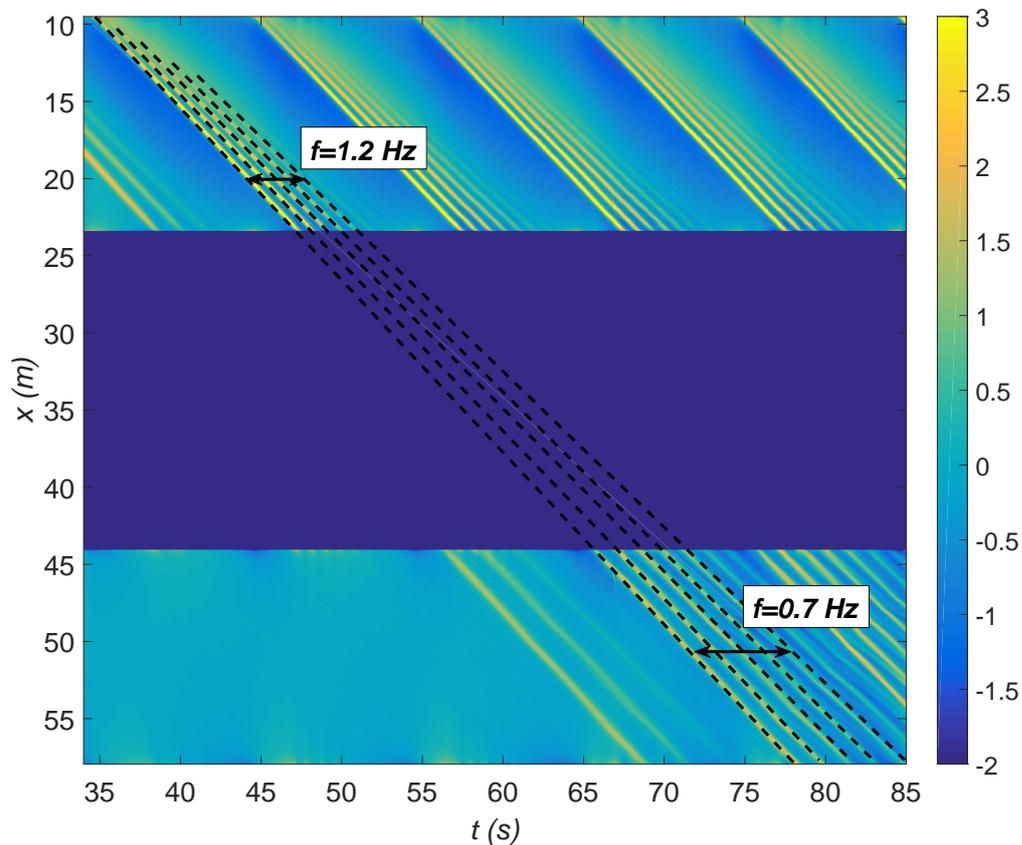


FIGURE 8.10: Diagramme spatio-temporel correspondant aux premiers trains d'ondes pour un forçage monochromatique à 0.1 Hz, de 3 cm de hauteur crête à creux. On a "déplié" le canal pour faire apparaître la houle se propageant du mur ($x = 33.73$ m) au batteur ($x = 67.46$ m) dans la continuité de celle se propageant du batteur vers le murs. On prolonge (tirets noirs) les trajectoires du second train de solitons à l'aller. $h = 12$ cm.

Bilan

Quel que soit le cas de figure, au terme du premier aller-retour, l'organisation des solitons dans le canal reste périodique (malgré l'effet, minime, des interactions faibles). On constate l'agrandissement du régime transitoire en tête de série temporelle témoignant du changement de niveau de référence subit par les solitons. On verra dans la suite le rôle de catalyseur de ce transitoire dans la désorganisation des régimes solitoniques.

8.3.2 Effet de Synchronisation au batteur

On peut schématiser l'interaction au batteur comme la superposition du train d'ondes incident, qui se réfléchit sur la paroi du batteur, et du train d'ondes nouvellement généré. La synchronisation de ces 2 trains d'ondes donne lieu à des effets d'amortissement (lorsque les houles sont en opposition de phase) ou d'amplification (lorsque les 2 houles sont en phases).

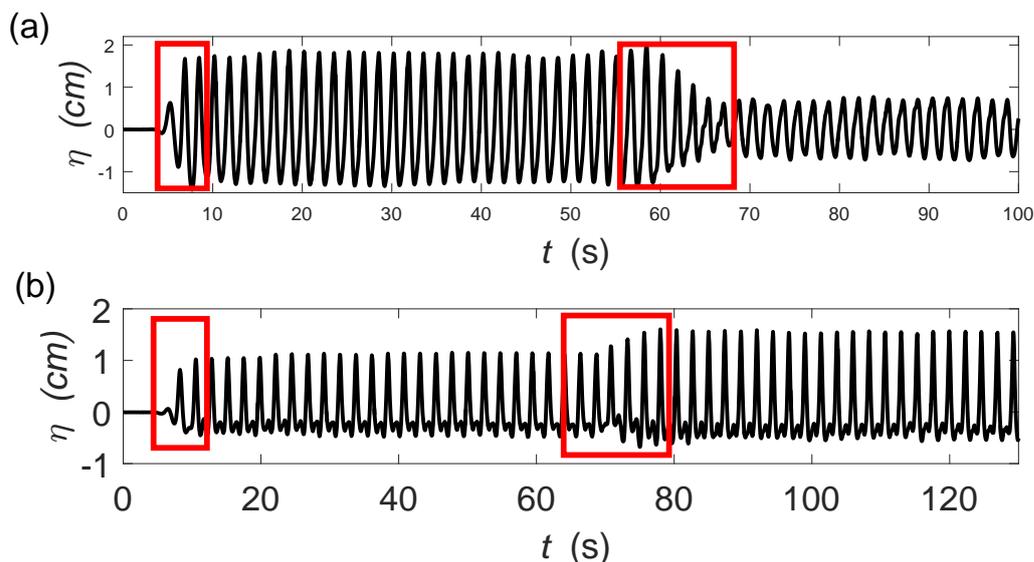


FIGURE 8.11: Séries temporelles à 10 m du batteur de la houle se propageant du batteur vers le mur pour 2 forçages différents. (a) La houle nouvellement générée au batteur est en opposition de phase avec le peigne de solitons. (b) La houle nouvellement générée au batteur est en phase avec le peigne de solitons.

La figure 8.11 illustre ce comportement en dépeignant pour chaque cas de figure, une série temporelle à 10 m du batteur filtrée dans la direction du batteur vers le mur. Après un premier régime transitoire (premier cadre rouge), la houle s'organise de façon périodique pendant environ 60 secondes. Cela correspond au temps nécessaire au premiers trains pour parcourir les 67 m de canal jusqu'à revenir à 10 m du batteur. On observe un second régime transitoire (deuxième cadre rouge) suivi à nouveau d'une organisation périodique.

Si la houle incidente est en phase (en opposition de phase) avec la houle nouvellement générée, on observe une amplification ou un amortissement du train périodique. Chacun des solitons de ce peigne subit le même effet d'amortissement (ou d'amplification) puisqu'ils se superposent avec la même phase à la houle nouvellement générée. En effet la période du peigne de solitons est la même que celle du forçage.

Les solitons du transitoire ne se propageant pas à la même vitesse, leur synchronisation avec la nouvelle houle est différente et leur amortissement/amplification aussi. On crée ainsi une rupture dans la périodicité du signal. On verra que cette dernière peut jouer le rôle de catalyseur dans la création d'un régime chaotique. On peut pressentir ce rôle en constatant l'allongement du régime transitoire en un aller-retour marqué par un cadre rouge sur la figure 8.11 et sur la figure 8.8d.

8.3.3 Catalyse du chaos

De l'analyse précédente, il ressort que la synchronisation entre houle incidente et mouvement du batteur est importante. Le premier train de solitons se propage à une vitesse différente des autres. Sa superposition avec la houle nouvellement générée donne donc lieu à l'émergence d'un train de solitons différent du reste du signal. Nous allons voir dans cette section que si le $\frac{a}{h}$ du régime est suffisant, cette désorganisation locale va se diffuser à l'ensemble du signal. En effet, ce nombre conditionne les différences de vitesses entre solitons d'amplitudes différentes. Pour un $\frac{a}{h}$ suffisant, les solitons du régime transitoire, dits catalyseurs, auront l'occasion d'interagir avec leurs voisins en les dépassant ou en se faisant dépasser. Ces interactions donneront lieu à des déphasages. De retour au batteur, ces solitons ayant interagi avec le train de solitons "catalyseurs", ne seront plus synchronisés à la houle nouvelle de la même manière que ceux qui ne l'auront pas fait. Ce phénomène conduit à la diffusion de la zone désorganisée jusqu'à la généralisation de celle-ci à l'ensemble du canal.

Afin d'illustrer ce phénomène, on représente sur la figure 8.12 les séries temporelles à 10 m du batteur de la houle se propageant du batteur vers le mur pour 3 forçages de fréquence 0.3 Hz, par 12 cm de profondeur et de hauteur crête à creux 1 cm (a), 2 cm (b) et 3 cm .

Pour $H = 1$ cm (8.12a), on observe peu, puis plus, de régime transitoire entre les peignes périodiques. Après 400 s la différence de phase entre la houle incidente et la houle nouvellement générée ne varie plus ce qui met fin à la variation de l'amplification/amortissement à chaque aller-retour. A ce $\frac{a}{h}$, le premier train de solitons ne va pas significativement plus vite que les autres. L'irrégularité reste donc localisée et on atteint un régime établi organisé périodiquement.

Pour $H = 2$ cm (8.12b), on observe que le régime transitoire entre les zones organisées en peigne de solitons périodique, grandit à chaque aller-retour. On encadre en rouge cette zone transitoire une fois sur 2 sur la série temporelle (afin de ne pas surcharger la figure). La diversité d'amplitudes des solitons dans le système ne cesse de croître jusqu'à ce que chaque soliton ait une amplitude différente de ses voisins. La vitesse de propagation étant indexée sur l'amplitude, chaque soliton a alors sa phase propre (chaos).

Pour $H = 3$ cm(8.12c), on observe le même phénomène à une vitesse accrue. Le régime se désorganise en quelques aller-retours.

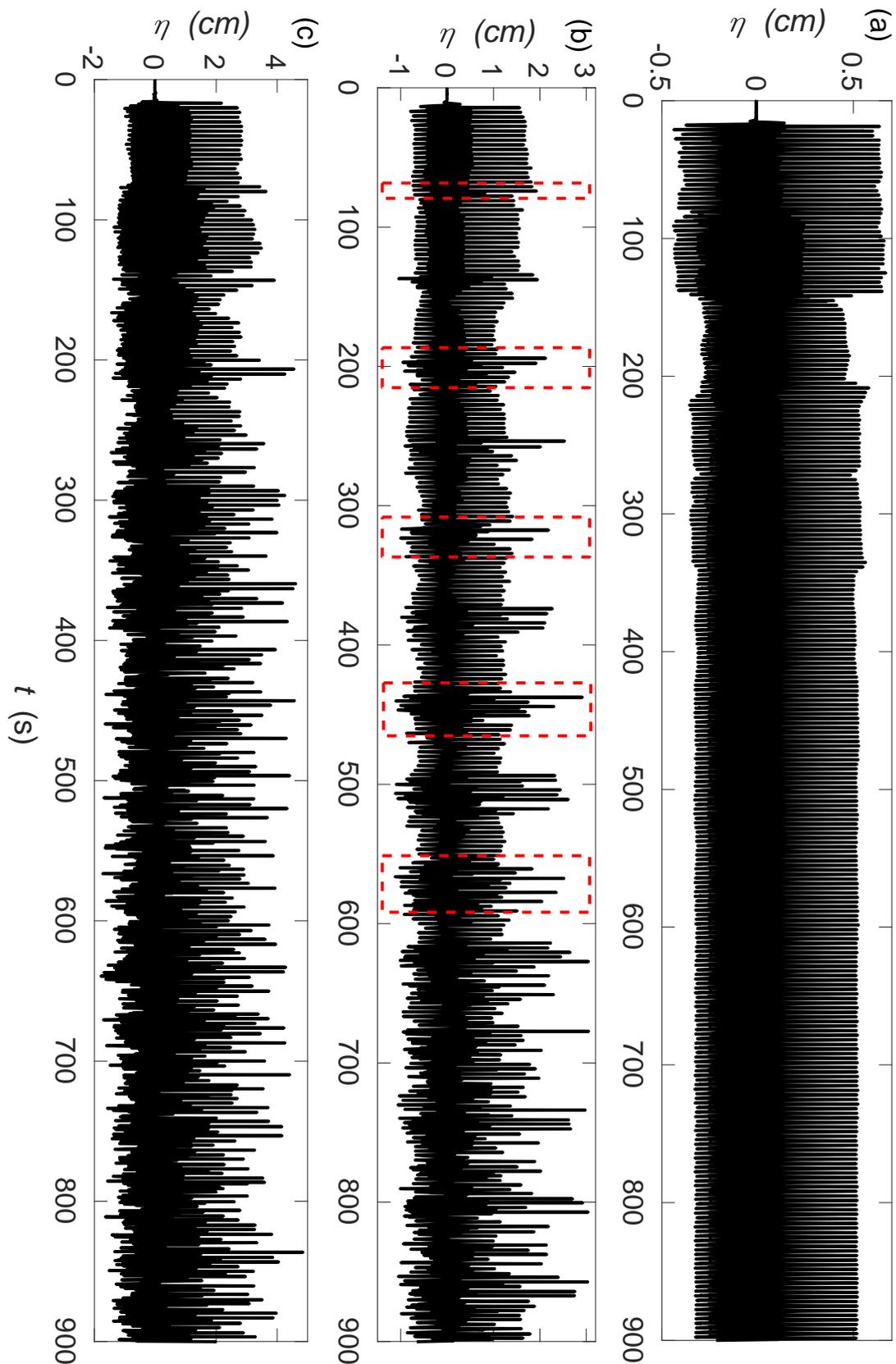


FIGURE 8.12: Séries temporelles à $x = 10$ m du batteur de la houle se propageant du batteur vers le mur pour 3 forçages à 0.3 Hz, par 12 cm de profondeur, de hauteur crête à creux 1 cm (a), 2 cm (b) et 3 (c) cm.

8.3.4 Répartition uniforme de l'énergie sur les basses fréquences

Ainsi, pour un $\frac{a}{h}$ suffisant, on désorganisera rapidement la périodicité des trains de solitons. Dans le régime stationnaire, on conserve une influence de la périodicité du forçage au sens où l'on génère encore des solitons, périodiquement, à chaque avancée du batteur. Cependant, les amplitudes de ces derniers étant devenues irrégulières, cette périodicité disparaît en quelques périodes du fait de la différence des vitesses de propagation induites par les différences d'amplitudes.

Sur la figure 8.13, on montre les densités spectrales d'énergie à 10 m (a) et à 23 m (b), pour la houle se propageant du batteur au mur (bleu), et du mur au batteur (rouge) dans le régime stationnaire pour un forçage de 0.3 Hz et de 3 cm de hauteur crête à creux par 12 cm de profondeur. Avec la distance au batteur, on s'affranchit de la périodicité qu'il induit. On constate une répartition uniforme de l'énergie sur les basses fréquences attestant du caractère aléatoire de l'organisation des solitons. Afin d'illustrer ce chaos de solitons, on montre sur la figure 8.14 un diagramme spatio-temporel correspondant à cet état de turbulence solitonique.

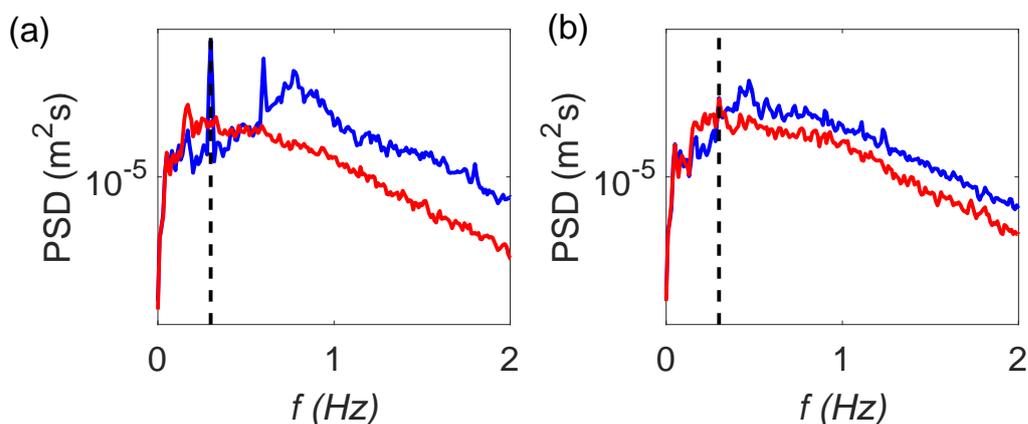


FIGURE 8.13: Densités spectrales d'énergie obtenue dans le régime stationnaire pour un forçage de 0.3 Hz et de 3 cm de hauteur crête à creux par 12 cm de profondeur, à 10 m (a) à l'aller (en bleu) et au retour (en rouge), puis à 23 m (b) à l'aller (en bleu) et au retour (en rouge). On indique en noir la fréquence du forçage.

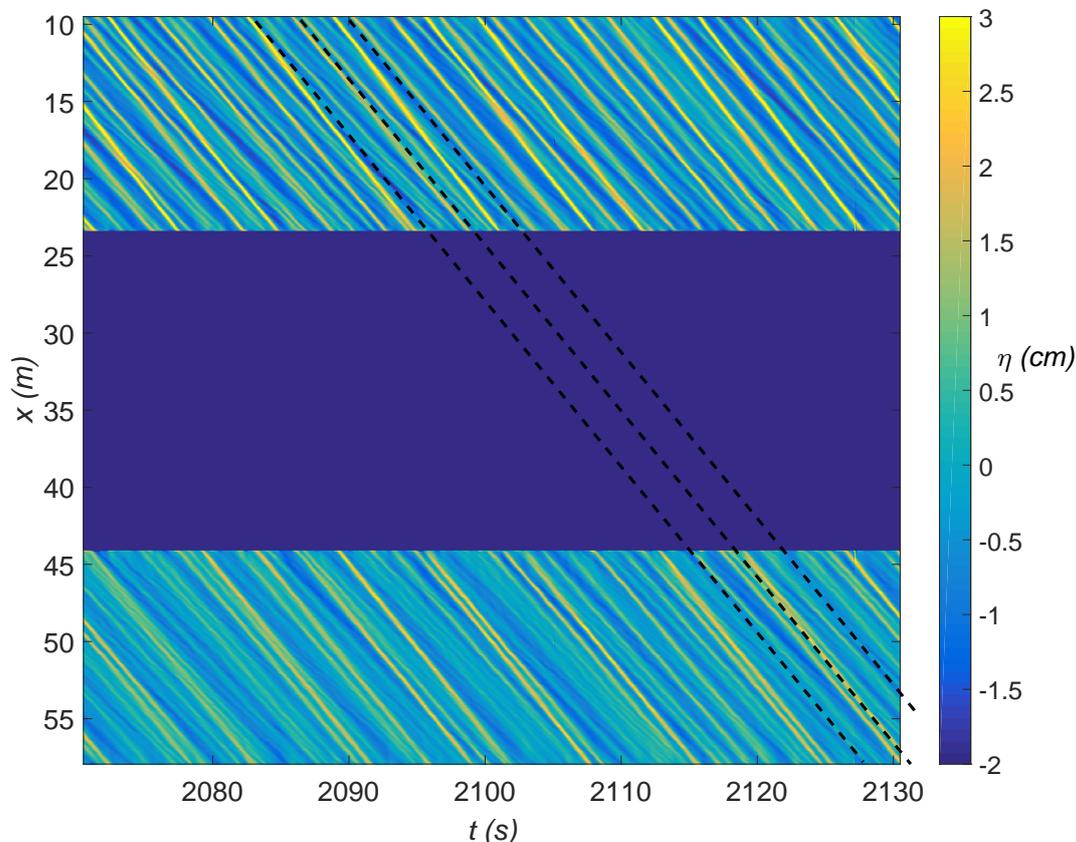


FIGURE 8.14: Diagramme spatio-temporel dans le régime stationnaire pour un forçage monochromatique à 0.3 Hz de 3 cm de hauteur crête à creux par 12 cm de profondeur. On a "déplié" le canal pour faire apparaître la houle se propageant du mur ($x = 33.73$ m) au batteur ($x = 67.46$ m) dans la continuité de celle se propageant du batteur vers le mur. On représente en tirets noirs les trajectoires du peigne de solitons initial de la figure 8.9 pour illustrer la désorganisation du forçage.

8.3.5 Désorganisation lente par transfert d'énergie

Dans le cas où la catalyse du chaos par mélange des phases n'opère pas ($\frac{a}{h}$ insuffisant), l'organisation périodique des peignes de solitons résiste à l'interaction avec les ondes engendrées au batteur. La persistance de cette périodicité permet un transfert d'énergie par interaction quasi-résonante à 3 ondes. En effet, dans les régimes d'eau peu profonde la relation de dispersion liant k et ω est presque linéaire. Cela autorise les échanges d'énergie entre des ondes 1, 2 et 3 tel que $k_1 + k_2 = k_3$ et $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$ dès qu'un certain seuil de non-linéarité est dépassé. Comme le décrit Ezersky [21], une petite perturbation sur un des modes propres du canal suffit à initier le transfert. Il est d'autant plus aisé que la fréquence du forçage est proche de celle d'un des modes propres du canal. On considèrera dans la suite un cas proche de celui de la partie précédente qui semblait avoir atteint un état stationnaire restant organisé périodiquement (série (a) de la figure 8.12). On choisit : $H = 0.8$ cm, $h = 20$ cm et $f = 0.2915$ Hz.

Excitation des modes propres du canal

On montre sur la figure 8.15d, un spectrogramme de l'évolution de ce régime réalisé avec une fenêtre glissante de 100 secondes. On observe que les modes propres du canal $f_1 \simeq 0.0208$ Hz, $f_3 \simeq 0.0624$ Hz, $f_4 \simeq 0.083$ Hz, $f_7 \simeq 0.145$ Hz, et $f_{11} \simeq 0.228$ Hz sont excités tour à tour. Les fréquences indiquées sont celles des modes propres linéaires du canal par 20 cm de profondeur. Ces modes sont en fait non-linéaires. Pour les mêmes longueurs d'ondes (fixées par la dimension du canal), les fréquences, réelles, des modes non-linéaires sont légèrement supérieures aux linéaires car ces modes se propagent plus vite. Ainsi, la fréquence de forçage $f = 0.2915$ Hz est très proche de la fréquence non-linéaire du mode 14 du canal (dont la fréquence linéaire est $f_{14} = 0.2912$ Hz). Le spectrogramme 8.15d met en évidence qu'on excite ces modes successivement par les interactions quasi-résonantes :

$$f_7 + f_7 = f_{14} \quad \text{et} \quad f_3 + f_{11} = f_{14} \quad (8.8)$$

puis

$$f_4 + f_3 = f_7 \quad \text{et} \quad f_4 + f_7 = f_{11} \quad (8.9)$$

ce qui permet d'exciter le premier mode par

$$f_1 + f_3 = f_4 \quad (8.10)$$

On montre l'évolution des modes 1 (8.15c), 4 (8.15b) et 7 (8.15a) du canal obtenue par filtre passe bande. On observe que les modes 4 et 7 croissent de manière quasi-exponentielle au début de l'évolution. Lorsque le mode 1 est finalement excité, la dynamique se complexifie.

Nous verrons dans la section suivante que les modes longs du canal transfèrent de l'énergie à des modes localisés très non-linéaires ce qui énergise tout le spectre (via des harmoniques liés). La lenteur de la dynamique est impressionnante. L'excitation de la seiche du canal (mode propre 1) semble catalyser le phénomène.

Transfert des modes du canal vers des modes localisés

Après 2000 secondes d'évolution, on commence à exciter le mode de seiche du canal $f_1 = 0.0208$ Hz. Celui-ci est suffisamment long pour être considéré comme un courant par un soliton. On observe alors un transfert d'énergie du mode long vers le mode localisé par un mécanisme mis en évidence dans [20].

La figure 8.16 illustre l'évolution à l'aide d'une série temporelle de ce régime, agrandie dans 3 zones d'intérêt :

- à $t = 500$ s (8.16 b), le régime semble avoir atteint un équilibre, on observe une houle périodique avec quelques harmoniques ;
- à $t = 2500$ s (8.16 c), on excite un mode localisé. On peut analyser le phénomène comme un transfert du mode de seiche vers un soliton tant que celui-ci est en phase. Lorsque celui-ci ne l'est plus, il est amorti (décroissance observée à $t = 2600$ s). On peut également interpréter le soliton comme le mode de seiche lui-même qui deviendrait très cnoïdal. Cela expliquerait que le soliton n'accélère pas aussi significativement qu'attendu avec la croissance de son amplitude ;
- à $t = 5000$ s (8.16 d), on atteint un régime stationnaire. Plusieurs structures localisées ont émergé. Cela laisse supposer que d'autres modes longs que le mode de seiche transfèrent de l'énergie à des solitons ou deviennent très cnoïdaux (suivant la grille de lecture retenue). Dans

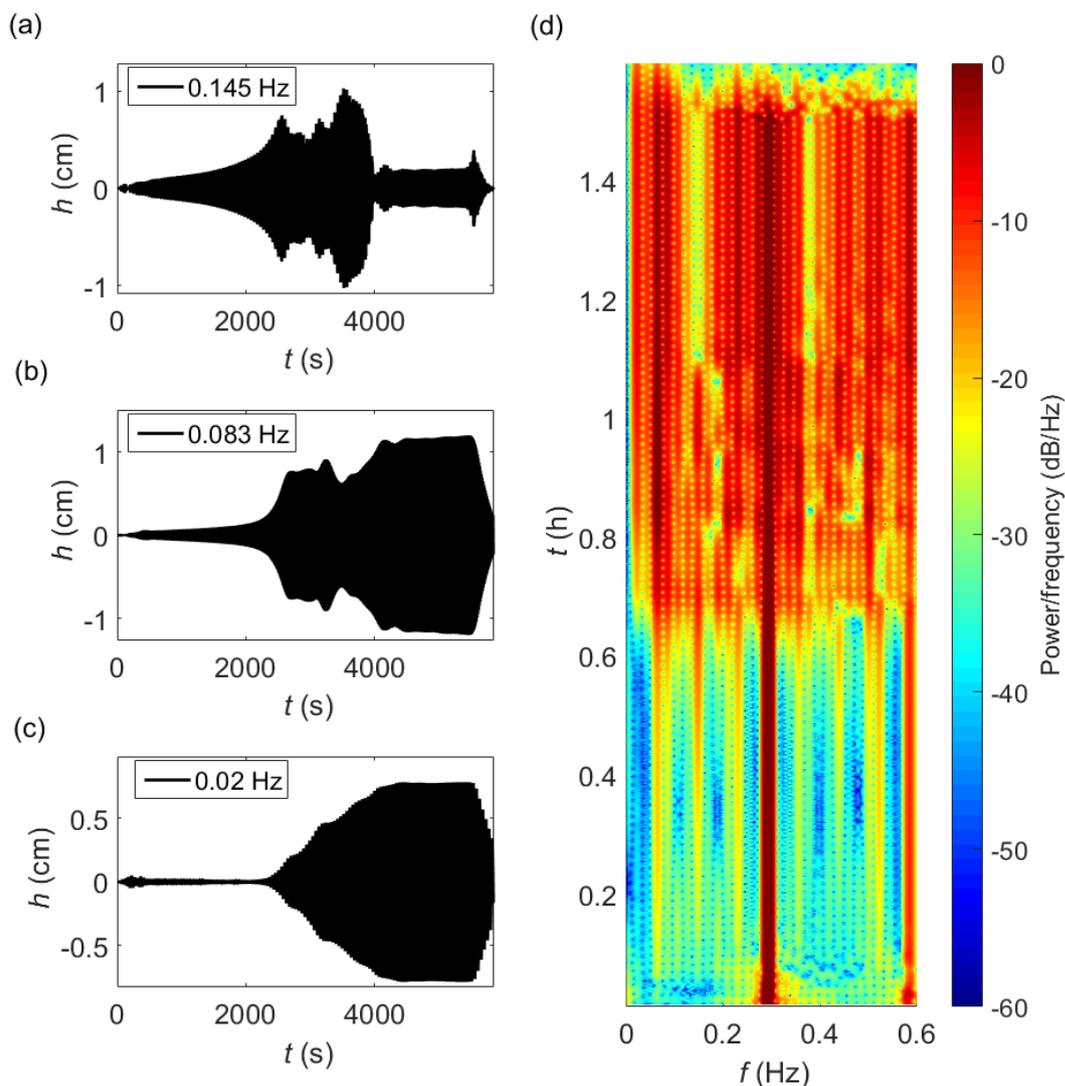


FIGURE 8.15: (d) Spectrogramme obtenu pour un forçage de 0.2915 Hz par 20 cm de profondeur et 0.8 cm de hauteur crête à creux avec une fenêtre glissante de 100 s. (a), (b), (c), Évolution de certains modes propres du canal de fréquence $f_7 = 0.145$ Hz, $f_4 = 0.083$ Hz et $f_1 = 0.0208$ Hz obtenues par filtre passe-bande.

l'état stationnaire, le régime est étonnamment périodique, comme si les solitons étaient "verrouillés" sur les modes propres du canal.

Afin de mettre en évidence l'évolution du contenu solitonique de ce régime, on utilise la PIST sur 48 s (une période de seiche) à 500, 2500 et 5000 secondes. On montre sur la figure 8.17 les matrices de monodromie et les distributions de solitons obtenues.

L'analyse de la PIST en phase avec le mécanisme décrit plus haut. On observe que la première série compte 14 solitons d'amplitudes comparables (1 par période du forçage). Pour la seconde série, un mode a clairement pris l'ascendant sur les autres. Enfin dans le régime stationnaire (c), on obtient une distribution de solitons d'amplitudes variées. L'évolution drastique de la

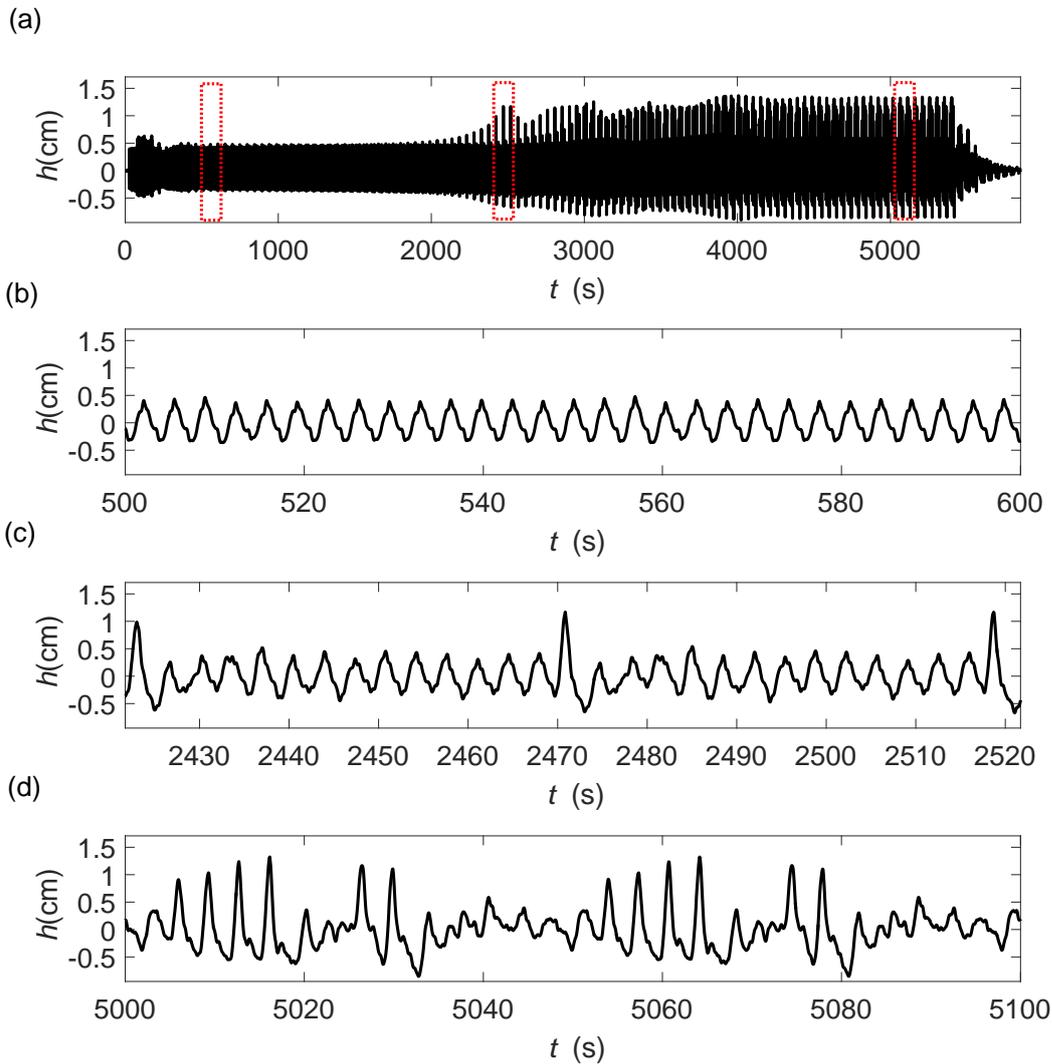


FIGURE 8.16: (a) Série temporelle obtenue pour un forçage de $f = 0.2915$ Hz par 20 cm de profondeur et 0.8 cm de hauteur crête à creux correspondant au signal se propageant du batteur vers le mur pris à 10 m du batteur. (b), (c), (d), Agrandissements des zones encadrées en rouge en (a).

répartition de l'énergie entre les modes identifiés par la PIST met en évidence la non-intégrabilité de ce phénomène.

Par ailleurs, on observe sur la figure 8.16a que la croissance des modes localisés semble s'arrêter net à une certaine amplitude. Il est probable qu'à ce moment le mode localisé, accélérant, ne soit plus suffisamment en phase avec le mode long pour autoriser le transfert. Au terme de l'évolution on atteint un régime strictement périodique ce qui interpelle. Les solitons identifiés par la PIST devraient se déplacer à des vitesses différentes et désorganiser le motif.

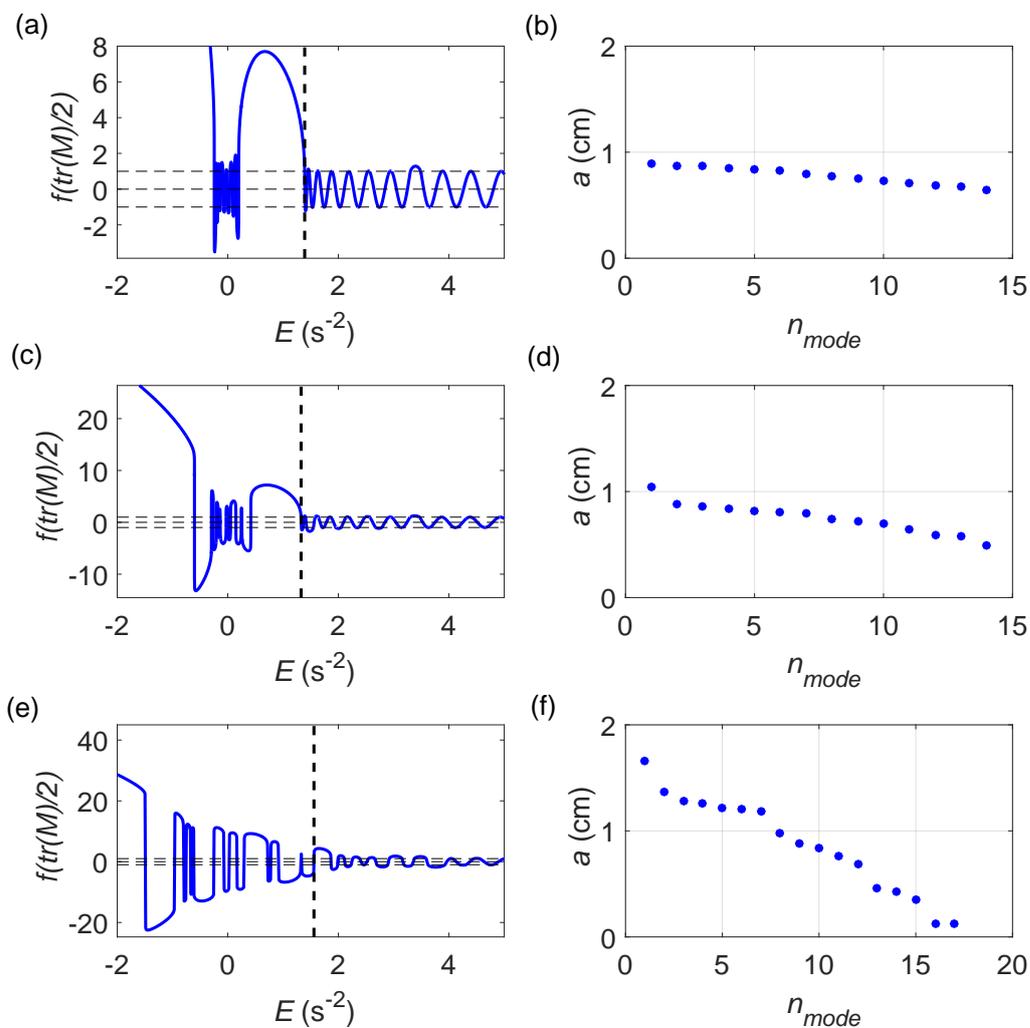


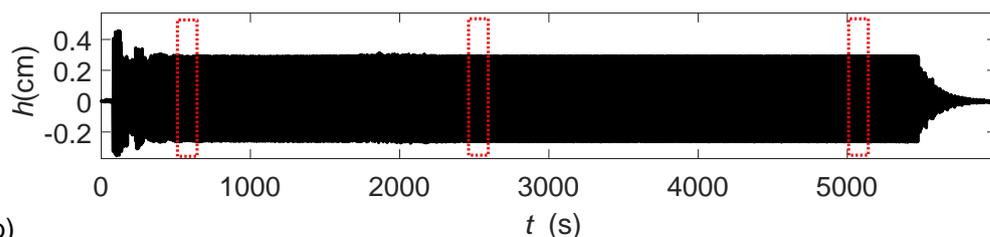
FIGURE 8.17: Résultats de l'analyse PIST des séries temporelles (b), (c) et (d) de la figure 8.16 sur une période de seiche (48 s). À gauche les traces des matrices de monodromie et à droite les amplitudes des modes solitoniques.

Sensibilité à la condition de résonance

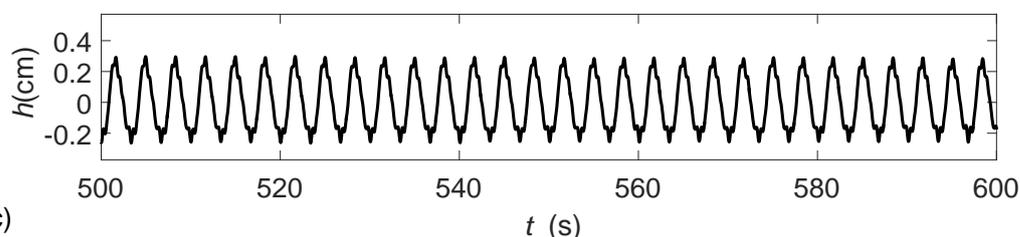
Le phénomène mis en évidence au paragraphe précédent est très sensible aux paramètres du forçage. Afin d'illustrer cela, on montre sur la figure 8.18 l'évolution obtenue à une fréquence

légèrement différente (0.2995 au lieu de 0.2915 Hz). Le train d'onde obtenu ne rentre pas en résonance avec les modes propres du canal et reste donc stable au temps long. Comparativement à la figure 8.16, on constate qu'aucun transfert d'énergie n'a lieu, ni vers des modes du canal (pas de modulation) ni vers des modes solitoniques.

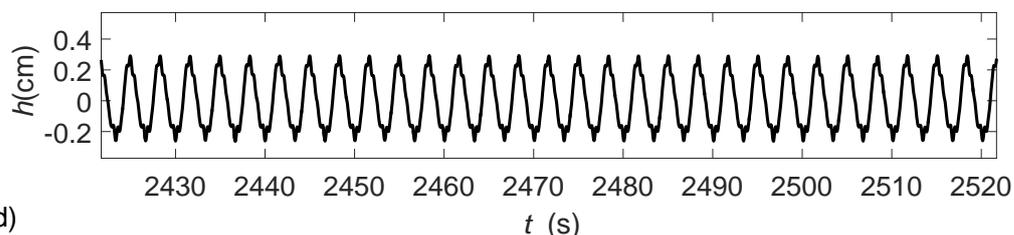
(a)



(b)



(c)



(d)

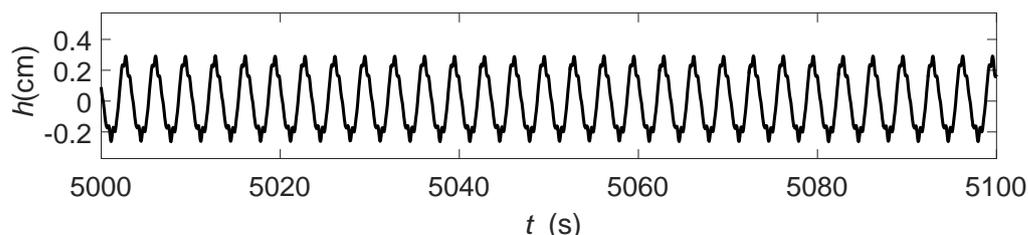


FIGURE 8.18: (a) Série temporelle obtenue pour un forçage de 0.2995 Hz par 20 cm de profondeur et 0.8 cm de hauteur crête à creux correspondant au signal se propageant du batteur vers le mur pris à 10 m du batteur. (b), (c), (d), Agrandissements des zones encadrées en rouge en (a).

Considérons désormais l'impact de l'amplitude en étudiant un régime défini par les paramètres $f = 0.2915$ Hz, $h = 20$ cm, et $H = 2$ cm. On montre sur la figure 8.19 une série temporelle de ce régime, agrandie dans 3 zones d'intérêt. Comparativement aux cas précédents, la désorganisation est rapide ce qui indique que les transferts d'énergie par interaction résonnante (lents) ne sont pas les seules sources de désorganisation. On s'attend en effet pour ce $\frac{a}{h}$ à observer le mélange

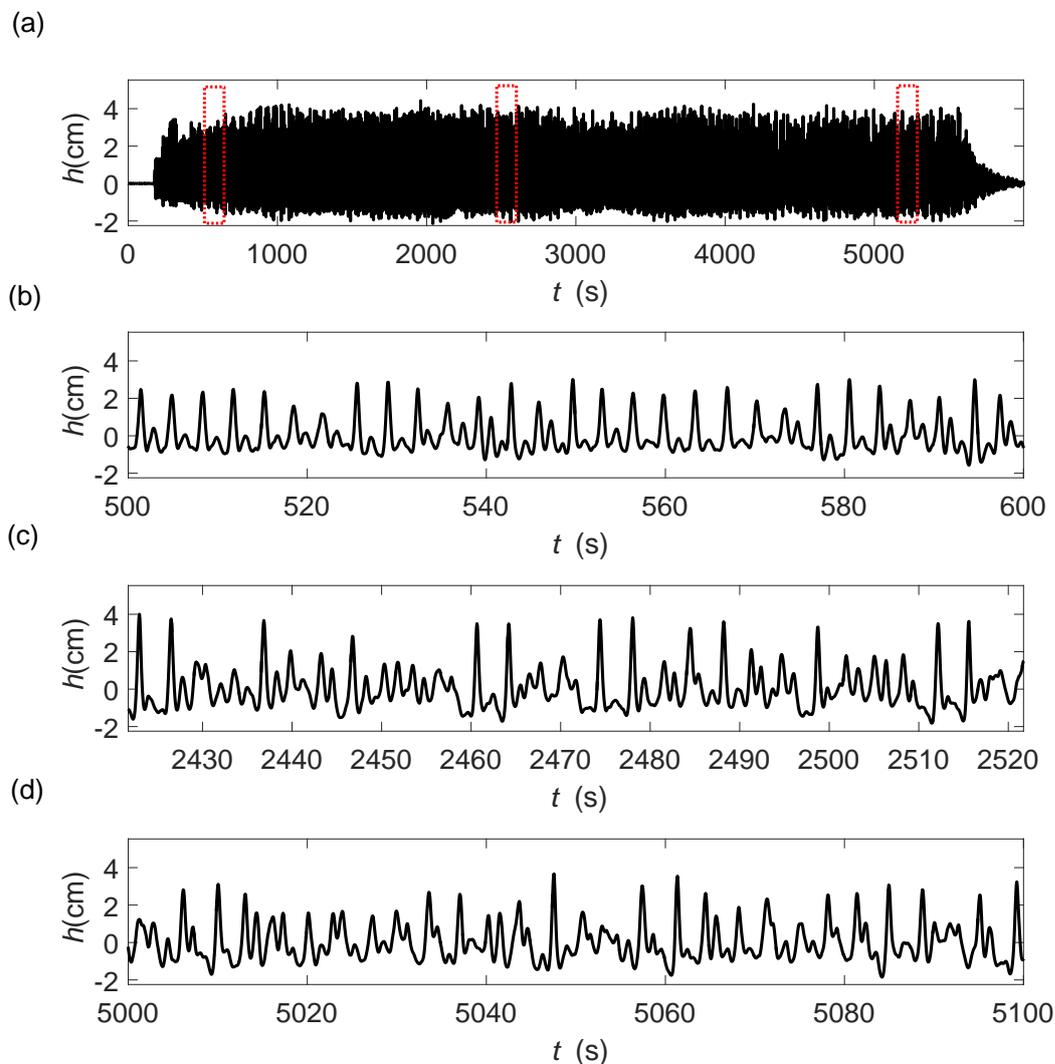


FIGURE 8.19: (a) Série temporelle obtenue pour un forçage de $f = 0.2915$ Hz par 20 cm de profondeur et 2 cm de hauteur crête à creux correspondant au signal se propageant du batteur vers le mur pris à 10 m du batteur. (b), (c), (d), Agrandissements des zones encadrées en rouge en (a).

des phases décrit plus haut. On constate cependant visuellement que les trains de solitons sont modulés par des modes de basses fréquences. Le spectrogramme de ce régime représenté sur la

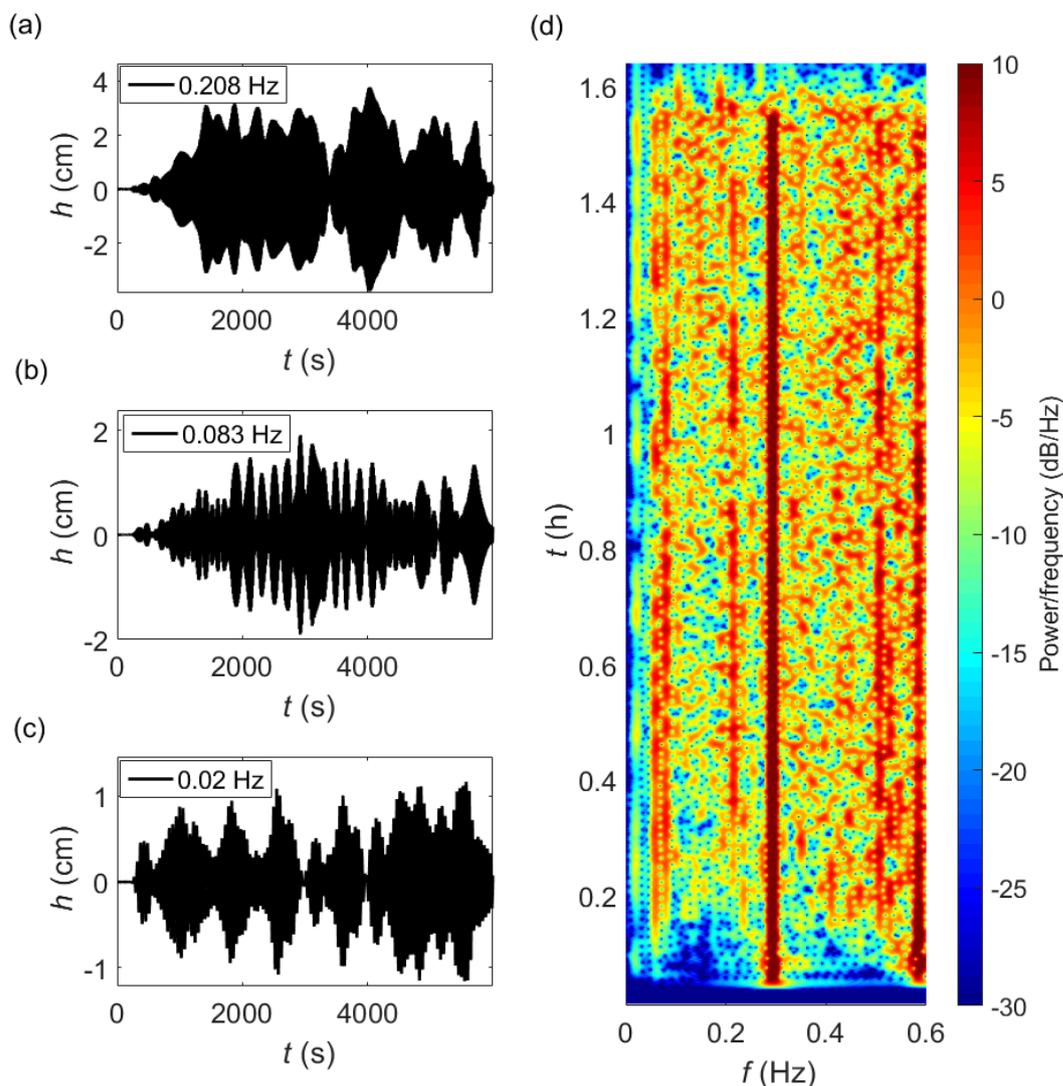


FIGURE 8.20: (d) Spectrogram obtenu pour un forçage de $f = 0.2915$ Hz par 20 cm de profondeur et 2 cm de hauteur crête à creux avec une fenêtre glissante de 100 s. (a), (b), (c), Évolution de certains modes du canal de fréquence $f_{10} = 0.208$ Hz, $f_4 = 0.083$ Hz et $f_1 = 0.0208$ Hz obtenus par filtre passe-bande.

figure 8.20d confirme cela. Les modes du canal 1, 3, 4 et 10 sont excités par $f_4 + f_{10} = f_{14}$ et $f_1 + f_3 = f_4$. L'évolution de ces modes, représentée sur la figure 8.20 en a, b et c, est très modulée. Cela semble indiquer l'intermittence des transferts résonnants. On peut faire l'hypothèse que les transferts d'énergie sont fréquemment interrompus à cause du mélange des phases qui désorganise la périodicité et rompt les conditions de résonance.

8.3.6 Bilan et diagramme de phase sur l'espace des paramètres

Diagramme de phase

Au terme de cette partie, on aura compris que le paramètre de non-linéarité $\frac{a}{h}$ joue un rôle important quant à la désorganisation de la périodicité du forçage, que ce soit en autorisant les interactions quasi-résonantes à 3 ondes et le transfert vers les modes du canal ou en déterminant le mélange efficace des phases qui conduit à la désynchronisation des trains de solitons vis à vis du batteur et précipite le chaos.

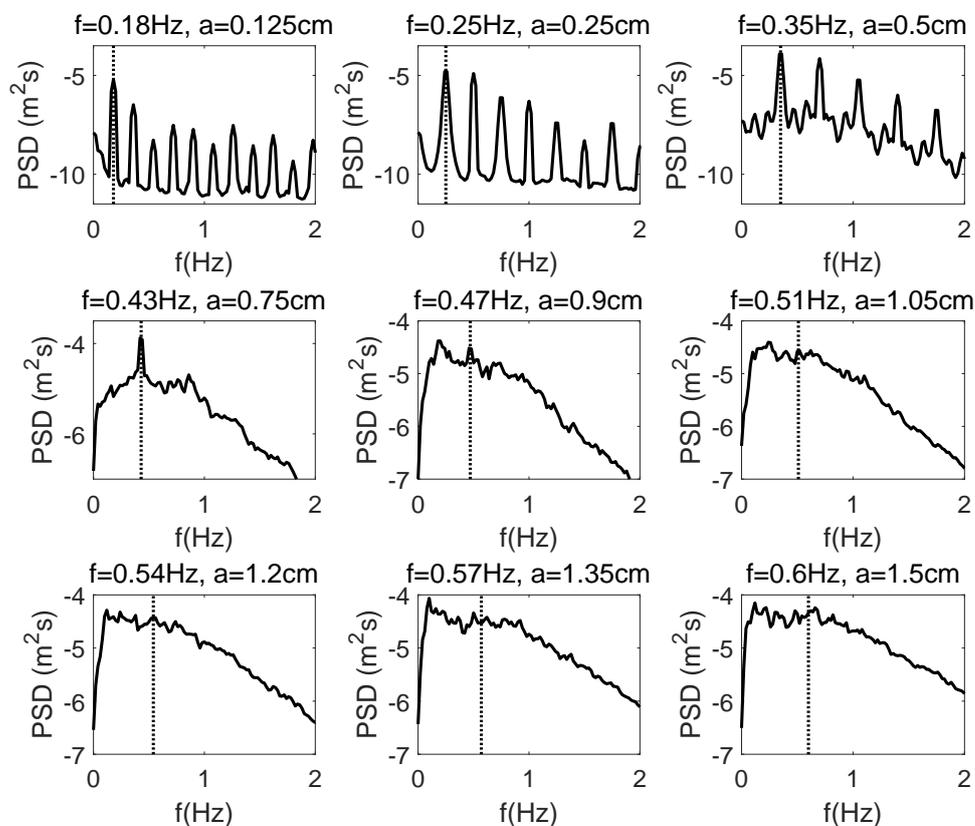


FIGURE 8.21: Densité spectrale d'énergie obtenue pour divers forçages ayant un nombre d'Ursell identique $U = 0.53$ à une profondeur de 12 cm pour les vagues se propageant du mur vers le batteur (afin de laisser le temps au forçage de se désorganiser s'il y a lieu). On indique en pointillé la fréquence de forçage.

Sur la figure 8.21, on représente les densités spectrales d'énergie de 9 régimes de même nombre d'Ursell pour un $\frac{a}{h}$ croissant. Les densités spectrales sont calculées dans l'état stationnaire pour le champ de vague se propageant du mur vers le batteur. En (a) et (b), le rapport $\frac{a}{h}$ est faible (< 0.03), aucune désorganisation du régime solitonique n'a lieu et le spectre est donc très piqué. En (c), le spectre indique que l'on excite les modes du canal, le rapport $\frac{a}{h}$ ($= 0.043$) devient suffisant pour autoriser les interactions quasi-résonnantes. Par la suite de (d) à (i) le mélange

des phases devient de plus en plus efficace avec la croissance du rapport $\frac{a}{h}$ conduisant à une répartition uniforme de l'énergie sur les fréquences correspondant au domaine de validité de l'eau peu profonde.

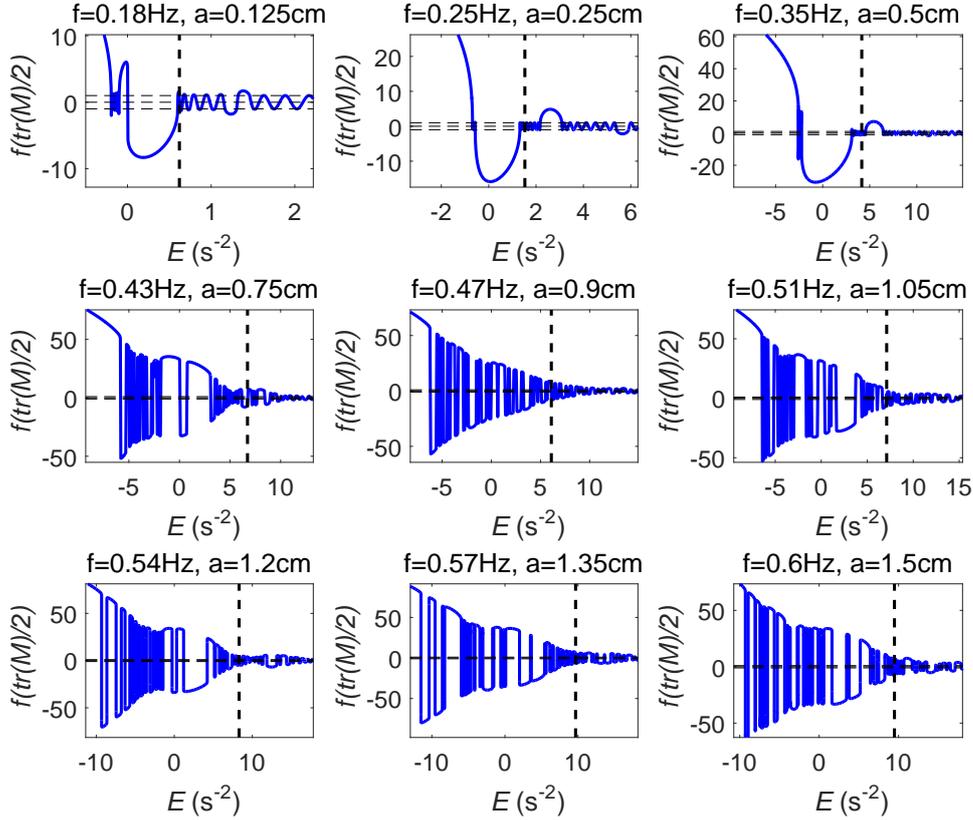


FIGURE 8.22: Trace la matrice de monodromie associée à une série temporelle de 60 secondes prise à 40 m du batteur dans chacun des régimes de la figure 8.21. Ces régimes sont obtenus pour divers forçages ayant un nombre d'Ursell identique à une profondeur de 12 cm.

On peut mettre en regard ces spectres aux traces des matrices de monodromie (figure 8.22) et distribution de solitons (figure 8.23) obtenues grâce à l'analyse PIST d'une série temporelle de 60 secondes prise à 40 m du batteur dans chacun des régimes de la figure 8.21. On constate que les régimes dont l'organisation est chaotique sont ceux qui offrent une grande diversité d'amplitude de modes solitoniques. À l'inverse, les régimes qui conservent leur structure de peigne affichent des amplitudes de solitons regroupées par paquet (chaque paquet correspondant aux modes d'un peigne, en phase les uns avec les autres puisque se propageant à la même vitesse).

En outre, on retrouve dans ces distributions la trace du forçage. A ce nombre d'Ursell, on s'attend à générer 1 soliton par période. Pour $f = 0.18$ Hz, on a $60 \times 0.18 = 11$ grands solitons (8.23a). Pour $f = 0.6$ Hz on a $60 \times 0.6 = 36$ solitons (8.23). Dans ce cas, on observe dans la distribution une rupture au 36^{me} mode qui correspond à la différenciation entre le 1^{er} soliton de chaque train et les éventuels seconds générés lors d'une bonne synchronisation entre houle incidente et mouvement du batteur.

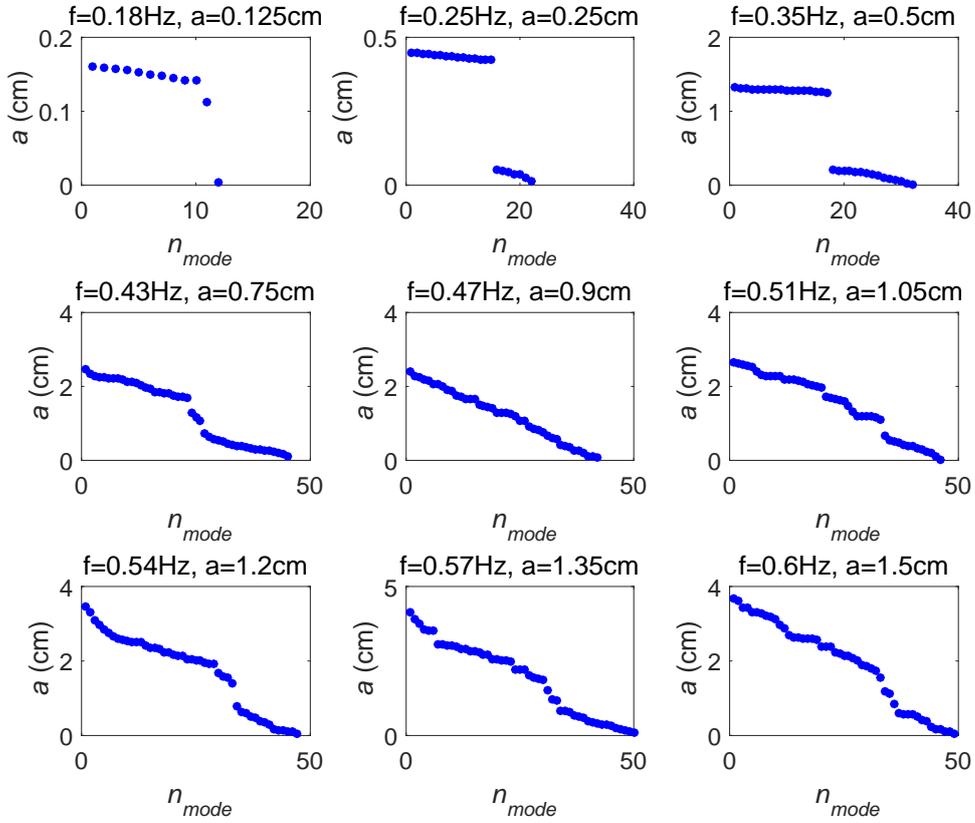


FIGURE 8.23: Distributions de solitons associées aux trace de matrice de monodromie de la figure 8.22.

On montre sur le diagramme des phases de la figure 8.24 que cette organisation des régimes solitoniques en fonction de leur $\frac{a}{h}$ se retrouve sur l'ensemble de l'espace des paramètres avec des limites claires en termes de nombre d'Ursell et de $\frac{a}{h}$.

Pour ce faire, on définit un indice de mélange qui quantifie à quel point le pic d'énergie à la fréquence du forçage est supérieur à la moyenne de l'énergie présente sur les basses fréquences :

$$I_m = \log_{10} \left(\frac{E_{forçage}}{E_{moy}} \right) \quad (8.11)$$

Plus cet indice est faible plus l'énergie est équi-répartie sur l'ensemble des basses fréquences. Afin d'illustrer la pertinence du choix de ces nombres adimensionnels, on indique par le diamètre du symbole la profondeur correspondant à chaque régime (10, 12, 16 ou 20 cm). Les divergences de comportement entre deux régimes de même Ursell et $\frac{a}{h}$ sont à imputées au phénomène de mise en résonance des modes du canal qui ne se produisent pas aux mêmes fréquences en fonction de la profondeur. On observe qu'en dessous d'un nombre d'Ursell limite ($U \simeq 0.2$), le forçage ne se désorganise pas, en effet, le phénomène de fission ne se produit pas. On pourrait s'attendre à ce que cette limite se situe plus près de $U = 1$ qui marque la limite à partir de laquelle un

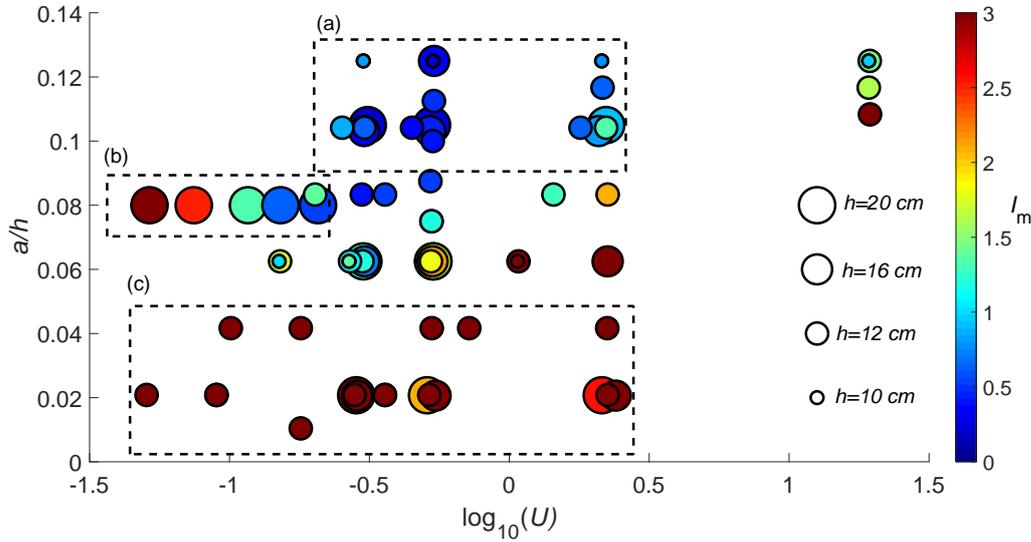


FIGURE 8.24: Diagramme de phase de la désorganisation des régimes stationnaire en fonction des paramètres $\frac{a}{h}$ et nombre d'Ursell. La couleur indique un rapport entre le pic d'énergie à la fréquence de forçage et l'énergie moyenne présente dans les basses fréquences (cf. texte).

intumescence se décompose en soliton. Il faut prendre en compte que le nombre d'Ursell considéré est celui du forçage et non celui des ondes dans le canal. L'encadré (b) représente cette transition vers le domaine de l'eau insuffisamment peu profonde pour permettre aux solitons d'exister.

En dessous de $\frac{a}{h} = 0.05$, les différences de vitesses entre solitons sont trop faibles pour que le phénomène de mélange des phases puisse désorganiser le forçage, c'est ce qu'on observe dans l'encadré (c).

Pour un $\frac{a}{h}$ et un nombre d'Ursell suffisant, le forçage se désorganise et on observe que cette désorganisation est d'autant plus efficace que le $\frac{a}{h}$ est grand (différence de vitesse entre modes plus importante) et la longueur caractéristique petite (du fait du rapport de la longueur du train de solitons à la longueur du canal). Pour les régimes de l'encadré (a), l'énergie est répartie uniformément sur les basses fréquences. Il est alors justifié de qualifier ces régimes de "turbulence solitonique".

On montre sur la figure 8.25 les comparaisons de trois régimes de même Ursell et $\frac{a}{h}$ pris pour 3 profondeurs différentes (12, 20 et 16 cm) pour 3 situations typiques :

- mélange des phases pour $U = 0.31$, $\frac{a}{h} = 0.105$, $I_m \simeq 0.07$
- transfert résonnant pour $U = 0.52$, $\frac{a}{h} = 0.0625$, $I_m \simeq 0.70$
- peigne périodique pour $U = 0.28$, $\frac{a}{h} = 0.021$, $I_m \simeq 2.4$

Nous obtenons dans les 3 cas un excellent accord phénoménologique.

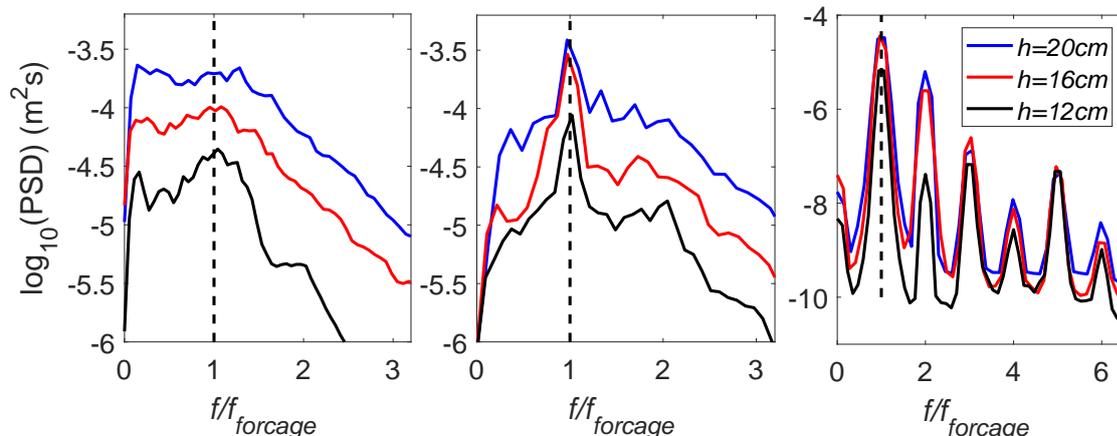


FIGURE 8.25: Densité spectrale d'énergie obtenue pour des profondeurs différentes pour des régimes de nombre d'Ursell et de $\frac{a}{h}$ identiques. L'axe des fréquences a été normalisé par la fréquence de forçage. (a) $U = 0.31$, $\frac{a}{h} = 0.105$. (b) $U = 0.52$, $\frac{a}{h} = 0.0625$. (c) $U = 0.28$, $\frac{a}{h} = 0.021$. Pour $h = 20$ cm, on a : (a) $I_m = 0.07$, (b) $I_m = 0.70$, (c) $I_m = 2.4$

Bilan concernant la désorganisation des régimes solitoniques

Nous allons dans ce paragraphe remettre en perspective nos analyses par rapport au concept de turbulence intégrable et aux observations de gaz de solitons dans l'océan.

Nous avons vu dans cette section que deux mécanismes intervenaient dans la désorganisation de nos régimes solitoniques : le mélange des phases et le transfert d'énergie aux modes long du canal par interaction quasi-résonnante. Au travers d'une étude paramétrique à diverses profondeurs, on a vu que ces phénomènes étaient conditionnés par le nombre d'Ursell (qui détermine la répartition de l'énergie sur des modes solitoniques) et le rapport $\frac{a}{h}$ qui détermine l'efficacité du mélange des phases et la possibilité d'interaction quasi-résonnante. Ce dernier mécanisme, mettant en jeu des transferts d'énergie, ne relève pas d'une dynamique intégrable qui stipule que chaque mode conserve son énergie au cours de l'évolution et n'interagit avec les autres qu'au travers d'un déphasage.

Lorsque le $\frac{a}{h}$ est suffisant, les premiers trains de solitons se propagent à une vitesse significativement différente des autres trains. Leur interaction au batteur se fait alors avec une phase différente qui conduit, par un phénomène d'amplification/amortissement altéré, à la création de modes solitoniques d'amplitudes diverses. L'interaction de ces solitons avec ceux des trains organisés est une nouvelle source de déphasage ce qui fait croître la zone de désordre jusqu'à ce que le régime soit complètement désordonné. Cette perte de périodicité vient interdire les transferts résonnants et on se retrouve dans une situation proche du cadre de la turbulence intégrable. En effet, on peut considérer que l'impact des termes de forçages est limité à une zone proche du batteur et que les termes de dissipation n'ont d'influence qu'au temps long.

Les modes solitoniques ayant des amplitudes variées, ils se propagent à des vitesses différentes ce qui interdit au régime de s'organiser par un phénomène de mélange permanent des phases (amplifié par les déphasages dus aux interactions entre modes). On peut rapprocher cette dynamique de celle des travaux menés en 1999 par Gurevitch et al. [27]. Ils avaient montré qu'une condition initiale apériodique oscillant à grande échelle, évoluait par KdV en des oscillations stochastiques à

plus petite échelle qu'ils avaient identifié comme un état de turbulence solitonique dû au mélange des phases. Le caractère stochastique de ces régimes est démontré par une répartition aléatoire de l'énergie sur les basses fréquences. Cet effet avait été observé dans des expériences numériques strictement intégrables en 2006 par Pelinovsky [49]. Cela vient renforcer l'idée que le concept de turbulence intégrable puisse décrire des systèmes physiques et en particulier le nôtre bien qu'il n'intègre, ni injection, ni dissipation d'énergie.

L'observation de turbulence solitonique dans l'environnement contrôlé du laboratoire est nouvelle. Elle permet de porter un nouveau regard sur les observations de Costa et al. de régimes similaires dans l'océan. Le résultat mis en avant par leur travail était une pente caractéristique de -1 en ω sur leur spectre d'énergie présentée comme potentiellement caractéristique des gaz denses de solitons. N'ayant jamais observé cette pente dans nos régimes, notre sentiment est qu'elle n'est pas typique des états de turbulence solitoniques mais plutôt du mécanisme de génération qui conditionne leur organisation et la distribution des amplitudes de leurs modes. On pourrait par exemple concevoir qu'elle témoigne d'un couplage fort avec les paquets d'ondes de plus hautes fréquences (souligné du reste par les auteurs). Elle pourrait également être la signature d'une distribution de solitons où quelques très grands solitons très espacés concentrent l'énergie aux très basses fréquences.

Cette première partie a mis en lumière les mécanismes permettant l'obtention de régimes de turbulence solitonique qui semblent phénoménologiquement proche d'un état de turbulence intégrable. Afin de quantifier cette proximité, on s'intéressera dans la partie suivante aux liens entre distribution de solitons et moments statistiques. On cherchera à comparer nos résultats expérimentaux aux résultats obtenus dans des expériences numériques ainsi qu'à ceux proposés par la théorie des gaz de solitons lorsque c'est possible.

8.4 Moments statistiques et distributions de solitons

Nous avons vu à la section précédente les mécanismes du régime transitoire qui mènent plus ou moins rapidement à un état stationnaire, désorganisé ou non. Dans cette section, on cherchera à caractériser ces états stationnaires par leur distribution de solitons ainsi que par leurs moments statistiques (notamment leurs kurtosis et leurs skewness qui renseignent sur la forme de la distribution de l'élévation de la surface libre).

On se livrera ensuite à une comparaison aux expériences numériques de la littérature. On verra que nos valeurs se comparent à celles des expériences numériques de Pelinovsky quant à l'évolution d'une condition initiale aléatoire sans une boîte périodique [49] à des nombres de Ursell similaires. On constatera également que, tout comme dans les expériences numériques de Dutykh et Pelinovsky [15] pour des gaz de solitons de faible densité, on obtient des distributions de probabilité d'élévation de surface libre quasi-stationnaires dont skewness et kurtosis croissent avec le nombre d'Ursell.

Enfin, on comparera nos valeurs à celle de la théorie des gaz de solitons. La variance et la moyenne correspondent à des invariants de KdV. Il est donc possible de dériver exactement leurs valeurs à partir d'une distribution de solitons. On verra que la variance de nos régimes est sous-estimée par les valeurs théoriques. Il est probable que cela soit dû à la participation des modes non-solitoniques de nos régimes.

Pour kurtosis et de skewness la situation est plus complexe. Pelinovsky a démontré une diminution de ces moments à l'interaction de l'ordre de 20% illustrant leur variabilité. Dans le cas du gaz rare, il est cependant possible d'estimer skewness et kurtosis à partir de la distribution d'amplitude des solitons en considérant que les interactions n'entrent pas en ligne de compte. On verra que nos valeurs sont sensiblement inférieures à ces estimations ce qui correspond à l'impact des interactions entre solitons.

Dans un dernier temps, on saisira l'opportunité de discuter le choix du niveau de référence (et donc des distributions de solitons) pour maximiser l'accord entre moments statistiques expérimentaux et théoriques. On verra que l'on peut borner ce choix dans un intervalle si l'on veut conserver le sens physique de l'analyse.

On utilisera les définitions suivantes pour kurtosis K et skewness S , calculés pour n échantillons de la mesure d'élévation de surface libre η_i et $\bar{\eta}$ leur moyenne :

$$S = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})^3}{\left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})^2} \right)^{3/2}} \quad (8.12)$$

$$K = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})^2 \right)^2} \quad (8.13)$$

8.4.1 Moments statistiques et filtrage directionnel

Nous allons dans un premier temps comparer les moments statistiques obtenus en séparant, ou non, les ondes allant dans un sens et dans l'autre. Prenons le cas de l'état stationnaire atteint pour un forçage à 0.6 Hz de 3 cm de hauteur crête à creux par 12 cm de profondeur. La figure 8.26 montre la distribution de l'élévation de surface libre en considérant le champ complet (en noir), les vagues se propageant du batteur vers le mur (en rouge) et celles se propageant du mur vers le batteur (en bleu). Cela permet d'observer l'évolution de la distribution avec la dissipation.

On constate que tous les moments statistiques diminuent entre l'aller et le retour.

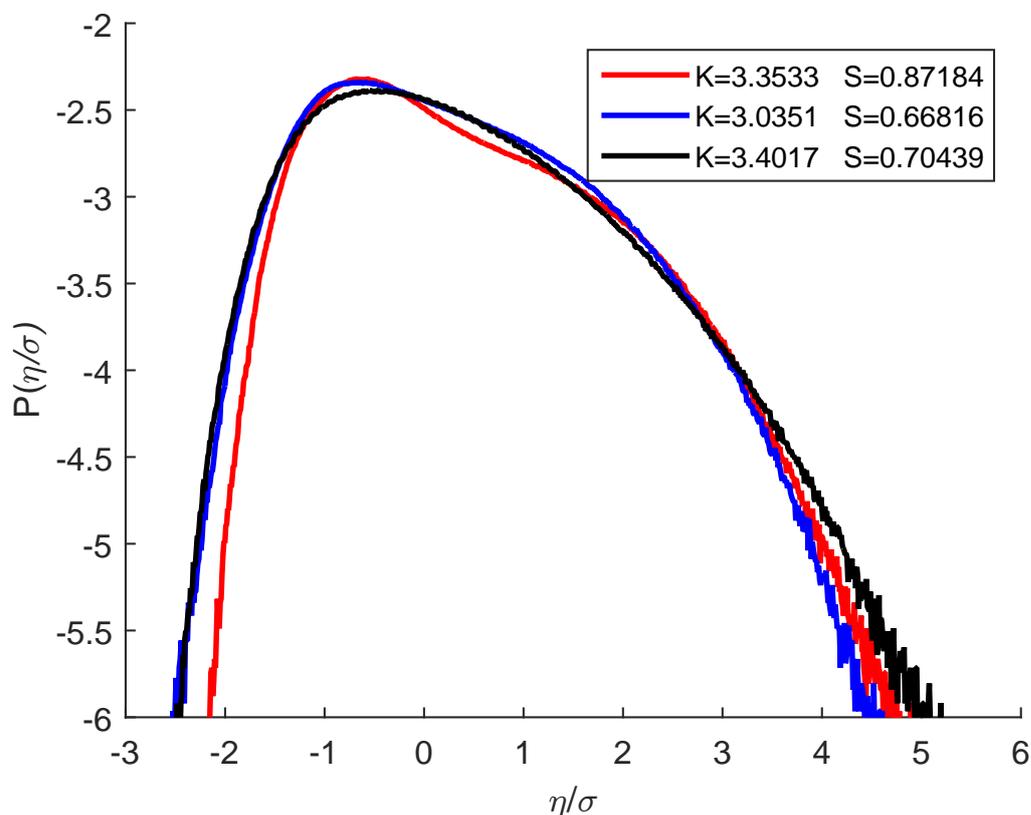


FIGURE 8.26: Distribution de probabilité d'élévation de surface libre pour le champ complet (noir), filtré du batteur vers le mur (rouge) ou du mur vers le batteur (bleu).

On peut comparer nos valeurs à celles obtenues numériquement par Pelinovsky. Ce dernier génère une condition initiale en tirant aléatoirement 256 composantes de Fourier qu'il laisse évoluer dans une boîte périodique régie par KdV. Il définit spectralement le nombre d'Ursell à partir de la hauteur de vague significative et de la longueur caractéristique associée au pic d'énergie du spectre initial. Pour un nombre d'Ursell de 0.95, il obtient les valeurs $S = 0.8$ et $K = 3.45$. En utilisant la même définition du nombre d'Ursell, on obtient $S = 0.87$ et $K = 3.35$ pour un Ursell de 0.93 correspondant au champ de vague se propageant du batteur vers le mur. Statistiquement, la forme du champ de vague semble donc bien décrite par l'équation de KdV. On a vu plus haut que l'accord était également bon concernant les densités spectrales d'énergies.

Il semble que, la dissipation agissant sur des échelles de temps longues et l'injection d'énergie n'impactant qu'une zone proche du batteur, notre système soit bien décrit par des équations intégrables.

Cet accord semble également montrer que l'essentiel de la dynamique est mono-directionnelle. Cela nous rassure quant à la légitimité du filtrage directionnel (décrit au chapitre 4) nécessaire pour se livrer à la PIST.

8.4.2 Diagramme de phase

Dans cette section, nous allons identifier les tendances principales de la distribution de probabilité d'élévation de surface libre en fonction des paramètres de forçage. On comparera ces tendances expérimentales aux résultats des expériences numériques de la littérature. On reprend sur les figures ci-dessous le diagramme de phases présenté plus haut en indiquant par un code couleur la variance (8.27), skewness (8.28) et kurtosis (8.29) de chacun des régimes en lieu et place de l'indice de mélange. On considérera le champ de vague se propageant du mur vers le batteur afin de s'affranchir au mieux de la périodicité qu'il induit, notamment pour les forçages à basses fréquences. On ne représente ici que les régimes à $h = 12\text{cm}$.

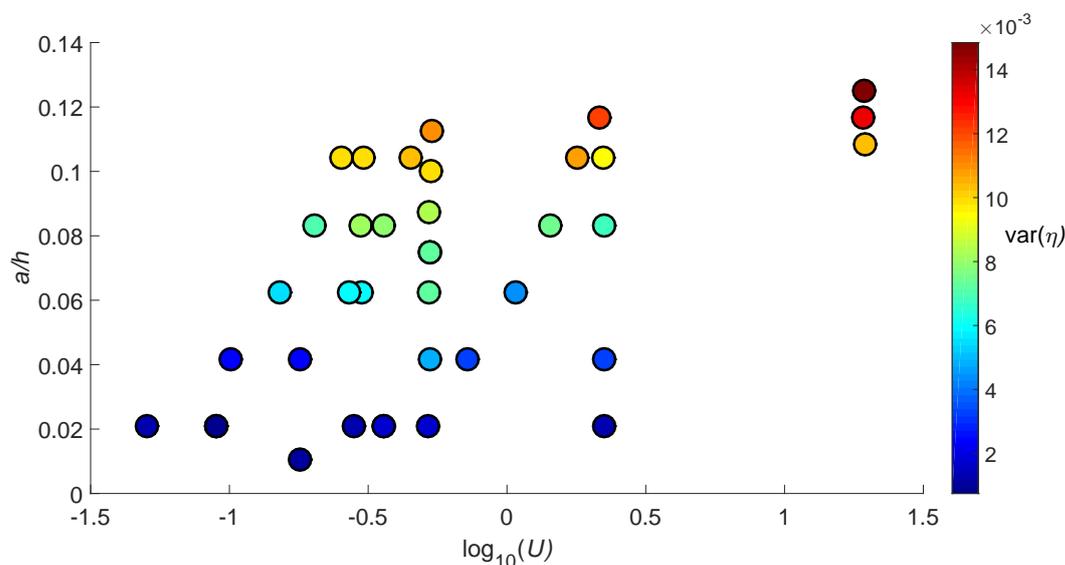


FIGURE 8.27: Diagramme de phases de la variance pour les différents régimes stationnaires obtenus à 12 cm de profondeur en fonction du nombre d'Ursell et du paramètre $\frac{a}{h}$. On constate que la variance croît avec $\frac{a}{h}$ et est peu sensible au nombre d'Ursell.

On constate que la variance semble dépendre principalement du rapport $\frac{a}{h}$: plus l'amplitude du forçage est forte plus les variations de la surface libre sont fortes. Elle grandit également, de manière moins marquée, avec le nombre d'Ursell. Les rôles s'inversent pour kurtosis et skewness qui sont principalement déterminées par le nombre d'Ursell du régime. Plus les termes non-linéaires l'emportent sur les termes dispersifs, plus ces moments statistiques sont importants. Cela témoigne du fait, qu'à $\frac{a}{h}$ constant, on génère des solitons de tailles supérieure pour un nombre d'Ursell plus grand (cf. figure 6 chapitre 4). L'augmentation de kurtosis qui mesure la probabilité d'événement extrême est donc logique. En augmentant le nombre d'Ursell, on augmente également le module des modes issus de la fission. Il est donc logique que skewness croissent aussi. Cette augmentation de kurtosis et de skewness du champ de vagues avec le nombre d'Ursell est en accord avec les travaux numériques de Pelinovsky [49] et de Dutykh [15]. La première de ces références traite de l'évolution d'une condition de surface aléatoire pour divers nombres d'Ursell initiaux. La seconde considère l'évolution d'un tirage aléatoire de solitons, dans une gamme d'amplitudes donnée, et initialement répartis à intervalle constant dans un domaine périodique.

Le peu de variation de ces moments avec le $\frac{a}{h}$ est surprenant. À Ursell constant, on génère

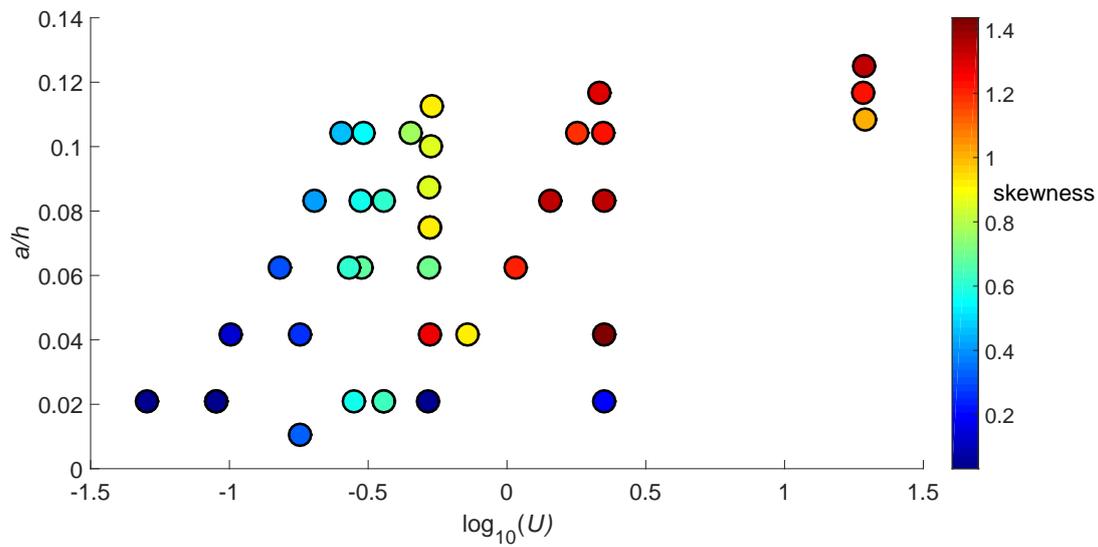


FIGURE 8.28: Diagramme de phases de skewness pour les différents régimes stationnaires atteints à 12 cm de profondeur en fonction du nombre d'Ursell et du paramètre $\frac{a}{h}$. On constate que skewness est, contrairement à la variance, sensible au nombre d'Ursell. En particulier, pour un $\frac{a}{h}$ donné, kurtosis croît avec le nombre d'Ursell.

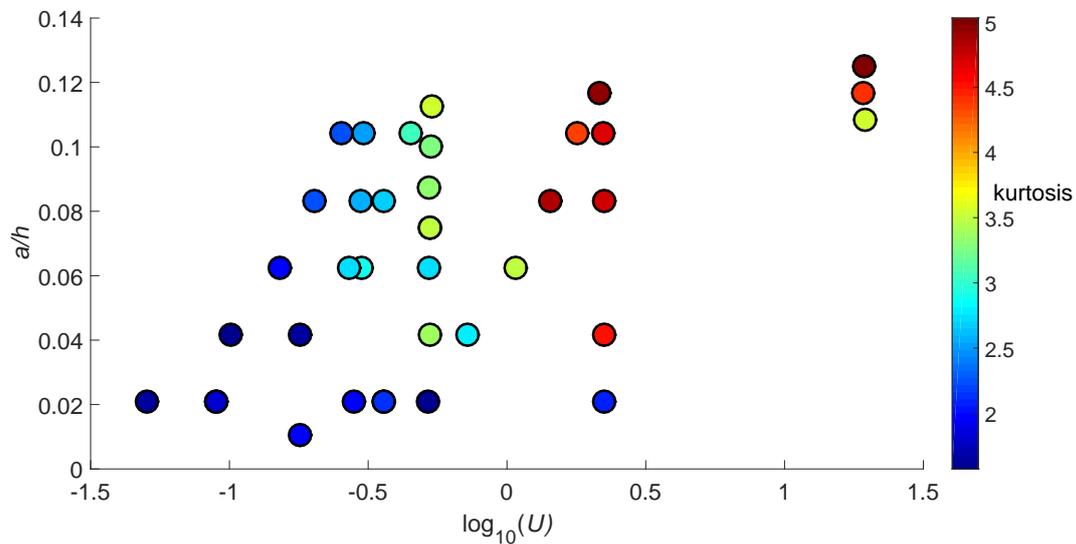


FIGURE 8.29: Diagramme de phases de kurtosis pour les différents régimes stationnaires obtenus à 12 cm de profondeur en fonction du nombre d'Ursell et du paramètre $\frac{a}{h}$. On constate que kurtosis évolue similairement à skewness (figure 8.28).

un nombre de solitons fixe par période de forçage. Or, plus le $\frac{a}{h}$ est grand plus cette période est petite (pour U constant). On génère donc des solitons plus proches, qui se déplacent plus vite (vitesse proportionnelle à l'amplitude). On aurait donc pu s'attendre à ressentir un impact du nombre d'interactions logiquement accru dans ces régimes (indice de mélange fort). Cet effet ne

semble pas exister et seule la distribution relative des solitons semble jouer un rôle. Nous allons dans la suite discuter ce lien entre la distribution de solitons et la forme de la distribution de probabilité d'élévation de surface libre.

8.4.3 Distribution de solitons et distribution de probabilité d'élévation de surface libre

Dans cette section, on s'intéressera à la comparaison des distributions de probabilité d'élévation de surface libre aux distributions de solitons obtenus par la PIST pour une sélection de régimes iconiques.

On compare, sur la figure 8.30, les distributions solitoniques et les distributions de probabilité d'élévation de surface libre obtenues pour 3 régimes de fréquence $f = 0.1$ Hz (rouge), $f = 0.3$ Hz (vert) et $f = 0.6$ Hz (bleu) pour une hauteur crête à creux de 3 cm et une profondeur de 12 cm. En (a) et (b), on représente les PDF de ces régimes respectivement à l'aller et au retour tandis que de (c) à (f) on montre les traces des matrices de monodromie ainsi que les amplitudes des modes solitoniques associées à une série temporelle de 60 s prise à 44 m du batteur.

On constate que pour un $\frac{a}{h}$ donné, augmenter le nombre d'Ursell augmente l'amplitude maximale des solitons du régime. Cela confirme les résultats du chapitre précédent. Le nombre de modes solitoniques total est également augmenté. Une raison potentielle pour cela est qu'on injecte plus de solitons par unité de temps à fort Ursell. La PIST prédit 1 mode solitonique par période à $f = 0.6$ Hz contre 9 à $f = 0.1$ Hz (respectivement 0.6 solitons par secondes contre 0.9). Cela a pour effet d'augmenter kurtosis et skewness des distributions de hauteur de vagues. Les 3 distributions gardent une forme similaire qui se retrouve dans tout nos régimes de turbulence solitonique.

On compare sur la figure 8.31 les distributions solitoniques et les distributions de probabilité d'élévation de surface libre obtenues pour 3 régimes de fréquence $f=0.3$ Hz à une profondeur de 12 cm pour des hauteurs crête à creux de $H = 2$ cm (rouge), $H = 1.5$ cm (vert) et $H = 1$ cm (bleu). En (a), (b) et (c) on représente dans l'ordre les PDF à l'aller (rouge) et au retour (bleu) de ces conditions. De (d) à (g) on montre les traces des matrices de monodromie ainsi que les amplitudes des modes solitoniques pour une série temporelle de 60 s prise à 44 m du batteur. Pour $H=2$ cm, on obtient une forme de PDF et une distribution de solitons similaire à celles observées plus haut pour des régimes solitonique désorganisés.

Dans les régimes plus organisés (b) et (c), on obtient des distributions de solitons qui évoquent les organisations en peignes de solitons de même amplitudes. Cela change la forme des distributions de probabilité d'élévation de surface libre. Les valeurs intermédiaires deviennent plus probables que dans le cas chaotique. Skewness diminue mais reste importante, témoignant de la non-linéarité des modes. Les queues de distribution sont moins marquées ce qui témoigne d'un nombre moins important de valeurs extrêmes encore une fois cohérent avec l'organisation en peigne ou aucun soliton n'est notablement plus grand que les autres.

À nouveau, on peut préciser que ces formes de distribution de probabilité d'élévation de surface libre sont très typiques de ces distributions de solitons et se retrouvent dans l'ensemble de l'espace paramétrique étudié. On peut également souligner la probable inexactitude des distributions de solitons affichées à cause du choix du niveau de référence un peu arbitraire. La tendance (peigne versus diversité des amplitudes) et le fait que des valeurs propres négatives sont toujours présentes (attestant que certains modes sont bien des solitons) sont en revanche des constats solides.

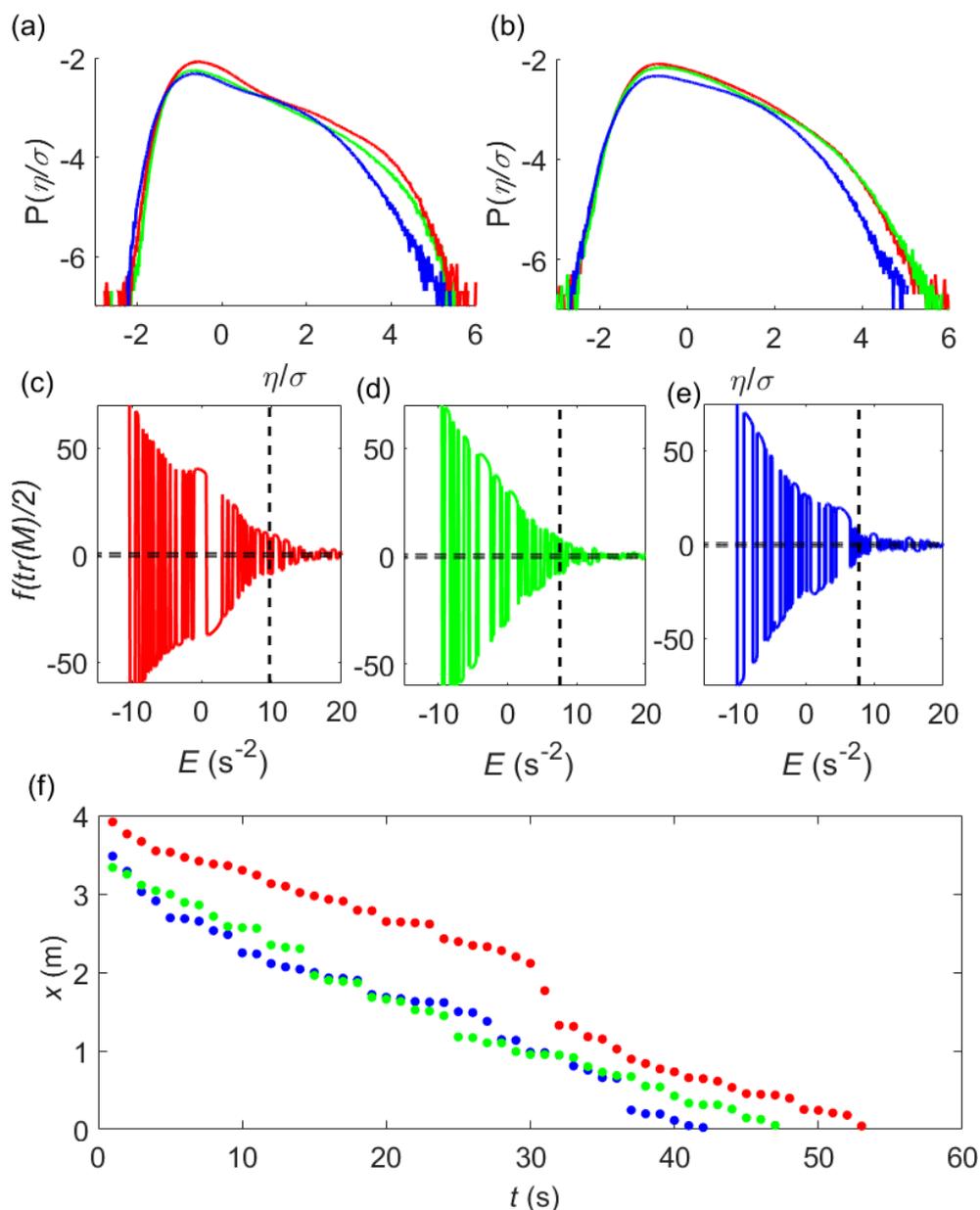


FIGURE 8.30: On compare ici les distributions solitonique et les distributions d'élévation de surface libre obtenues pour les 3 régimes $f = 0.1$ Hz (rouge), $f = 0.3$ Hz (vert) et $f = 0.6$ Hz (bleu) pour une hauteur crête à creux de 3 cm et une profondeur de 12 cm. En (a) et (b), on représente les PDF respectivement à l'aller et au retour tandis que de (c) à (f) on montre les traces des matrices de monodromie ainsi que les amplitudes des modes solitoniques pour une série temporelle de 60 s prise à 44 m du batteur. On constate que pour un $\frac{a}{h}$ donné, augmenter le nombre d'Ursell augmente le nombre de solitons ainsi que leurs amplitudes. Cela a pour effet d'augmenter kurtosis et skewness des distributions de hauteur de vagues. Les 3 distributions gardent tout de même une forme similaire

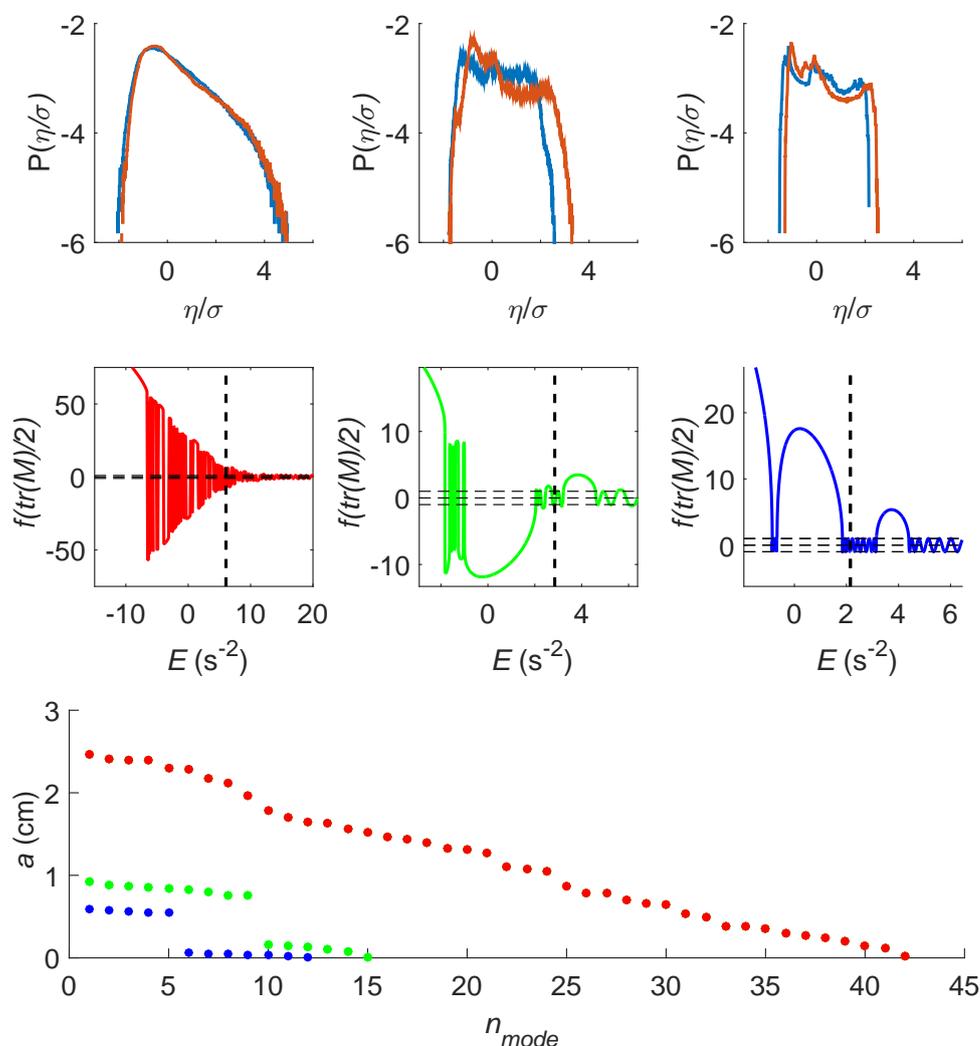


FIGURE 8.31: On compare ici les distributions solitonique et les distributions d'élévation de surface libre obtenues pour les 3 régimes $H = 2.0$ cm (rouge), $H = 1.5$ cm (vert) et $H = 1.0$ cm (bleu) pour une fréquence de 0.3Hz et une profondeur de 12 cm. En (a), (b) et (c), on représente dans l'ordre les distributions de probabilité d'élévation de surface libre à l'aller (rouge) et au retour (bleu) de ces conditions. De (d) à (f), on montre les traces des matrices de monodromie ainsi que les amplitudes des modes solitoniques pour une série temporelle de 60 s prise à 44 m du batteur. Pour $H = 2$ cm, on obtient une forme de PDF et une distribution de solitons similaire à celle observée plus haut pour des régimes solitoniques désorganisés. Dans les régimes plus organisés, on obtient des distributions de solitons qui évoque les structures en peigne de solitons de mêmes amplitudes. Cela change la forme des PDF. Skewness diminue, mais reste importante, témoignant de la non-linéarité des modes. On dénombre moins de valeurs extrêmes.

8.4.4 Comparaison à la théorie des gaz de solitons

Dans cette section, nous allons comparer les moments statistiques expérimentaux aux moments théoriques obtenus à l'aide des distributions de solitons. La variance et la moyenne correspondent à des invariants de KdV. Leurs valeurs sont donc conservées au cours de l'évolution. Il est possible d'obtenir leur valeur exacte à partir des distributions de solitons [18] et ce y compris pour des gaz denses. Kurtosis et skewness ne correspondent pas à des invariants de KdV et Pelinovsky a établi qu'il pouvait varier à hauteur de 20% au cœur de l'interaction forte. On ne peut qu'estimer leur valeur en considérant un état fictif où les solitons de la distribution seraient séparés à partir de la distribution d'amplitude des solitons en considérant que les interactions n'entrent pas en ligne de compte. De telles estimations ont été utilisées pour comparer la théorie aux simulations numériques de Dutykh dans le cas de gaz à faible densité et se sont montrées pertinentes.

Les formules permettant de calculer les moments statistiques à partir des distributions de solitons que nous utilisons sont explicitées dans la thèse de Shurgalina [56] et nous renvoyons le lecteur intéressé par plus de détails à sa lecture.

Ces formules (voir ci-dessous) sont obtenues à partir de la forme adimensionnelle de KdV. Elles correspondent au cas où tous les modes sont solitoniques et où ils se propagent sur le niveau $u = 0$ (inférieur à u_{moy} . Il convient pour obtenir des valeurs correspondant au champ de vague physique de redimensionner les amplitudes des solitons à l'aide, dans le cas de l'analyse d'une série temporelle, du paramètre $\lambda = \frac{3c_0^2}{2h^3}$.

On prendra, T la durée de la série temporelle considérée, A l'amplitude des solitons de la distribution, N_s le nombre de solitons, $\rho = \frac{N_s}{T}$ la densité de soliton). On a :

$$\bar{u} = \langle u(0, t) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N_s} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} u_i(t) dt = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^{N_s} 2\sqrt{\frac{A_i}{2}} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \text{sech}^2(y - y_{i0}) dy = 4\rho \langle \sqrt{\frac{A}{2}} \rangle \quad (8.14)$$

Vérifions le sens de cette formule. On considère le cas d'un unique soliton d'amplitude a se propageant par une profondeur h (dans le repère du laboratoire). On a alors $A = a\lambda (= a \times \frac{3c_0^2}{2h^3})$, ce qui donne :

$$\langle u(0, t) \rangle = \frac{4}{T} \sqrt{\frac{a\lambda}{2}} \quad (8.15)$$

et dimensionnellement

$$\langle \eta(0, t) \rangle = \frac{\langle u(0, t) \rangle}{\lambda} = \frac{1}{T} \frac{4}{\lambda} \sqrt{\frac{a\lambda}{2}} = \quad (8.16)$$

$$\langle \eta(0, t) \rangle = \frac{4}{T} \sqrt{\frac{a}{2\lambda}} = \frac{1}{2c_0 T} \left(\sqrt{\frac{4ah^3}{3}} \right) \quad (8.17)$$

On retrouve bien $\sqrt{\frac{4ah^3}{3}}$ qui correspond au volume d'eau contenu dans un soliton. La moyenne de la série temporelle se situe à la moitié du volume d'eau piégé dans le soliton divisé par la longueur de la série considérée.

On peut de la même manière obtenir les expressions suivantes pour les moments d'ordre supérieur :

$$V = \langle [u(0, t) - \langle u(0, t) \rangle]^2 \rangle = \frac{8}{3\sqrt{2}} \rho \langle A^{3/2} \rangle - 8\rho^2 \langle A \rangle \quad (8.18)$$

$$S = \frac{\langle [u(0, t) - \langle u(0, t) \rangle]^3 \rangle}{\sigma^3} = \frac{16\sqrt{2}\rho \langle A^{5/2} \rangle}{15\sigma^3} - \frac{16\rho^2 \langle A^2 \rangle}{\sigma^3} + \frac{32\sqrt{2}\rho^3 \langle A^{3/2} \rangle}{\sigma^3} \quad (8.19)$$

$$K = \frac{\langle [u(0, t) - \langle u(0, t) \rangle]^4 \rangle}{\sigma^4} = \frac{32\sqrt{2}\rho \langle A^{7/2} \rangle}{35\sigma^4} - \frac{256\rho^2 \langle A^3 \rangle}{15\sigma^4} + \frac{64\sqrt{2}\rho^3 \langle A^{5/2} \rangle}{\sigma^4} - \frac{192\rho^4 \langle A^2 \rangle}{\sigma^4} \quad (8.20)$$

On montre dans le tableau 8.1 la comparaison entre valeurs théoriques et expérimentales pour les 6 régimes étudiés au paragraphe précédent.

La variance de nos régimes est sous-estimée par les valeurs théoriques. Il est probable que cela soit dû à la participation des modes non-solitoniques de nos régimes. En effet, nos séries temporelles d'élévation de surface libre montre qu'une partie du signal est inférieure au niveau de référence sur lequel se propage les solitons. Cette participation n'est pas prise en compte par les formules théoriques. Si on force artificiellement cette partie du signal à être égale au niveau de référence, on réduit de moitié l'écart entre prévision théorique et valeur expérimentale. Le reste à gagner étant sûrement imputable à la partie positive des modes radiatifs. Une comparaison plus exhaustive demanderait de reconstruire les séries temporelle en filtrant les modes radiatifs.

Kurtosis et skewness sont moins impactés par la non prise en compte des modes radiatifs. On a tendance à surestimer la valeur de ces moments ce à quoi nous nous attendions en négligeant l'impact des interactions fortes quasi-omniprésentes dans ces régimes. L'accord semble d'autant meilleur que le nombre d'Ursell est grand. On peut probablement attribuer cela à une moindre existence des composantes non-solitoniques dans ces régimes (le niveau de référence est plus bas relativement à l'amplitude du forçage). Ainsi pour un forçage de 0.1 Hz et 3 cm d'amplitude crête à creux, on obtient une skewness théorique de 1.03 pour une mesure à 0.88 et une kurtosis de 3.58 contre 3.54. Les écarts très importants constatés pour les régimes à $f = 0.3$ Hz pour $H = 1.5$ et 1 cm s'expliquent de la même manière. Un regard aux traces des matrices de monodromie de ces régimes sur la figure 8.31 suffit à constater que des modes non-solitoniques importants existent.

Une autre raison à ces écarts pourrait être une mésestimation du niveau de référence. Nous répondrons à cette question dans le prochain paragraphe.

f (Hz)	a(cm)	$V_{th}(cm^2)$	V(cm)	S_{th}	S	K_{th}	K	ρ
0.1	3	0.52	0.85	1.03	0.88	3.58	3.54	0.88
0.3	3	0.29	0.53	1.30	0.89	5.40	3.65	0.78
0.6	3	0.22	0.51	0.95	0.68	3.62	3.30	0.72
0.3	2	0.16	0.29	1.32	1.02	4.86	4.06	0.70
0.3	1.5	0.04	0.07	0.85	0.32	3.13	2.2	0.43
0.3	1	0.0143	0.041	2.15	0.49	7.84	2.31	0.17

Tableau 8.1: Moments statistiques théoriques et expérimentaux

8.4.5 Un critère pour le niveau de référence ?

En forçant artificiellement le niveau de référence successivement aux valeurs $E_{ref} = E_{2j+1}$, pour $j = 1$ à N (où les E_j sont les valeurs vérifiant $\text{tr}(M(E_j)) = \pm 2$ et N le nombres de modes

dans le système), on obtient une série de distributions de solitons associées dont on peut déduire des valeurs de moments statistiques à comparer à nos mesures. On se propose de faire cet exercice dans ce paragraphe afin d'établir si un autre choix de niveau de référence donnerait une adéquation plus probante avec la théorie.

On se livre à l'analyse PIST d'une série temporelle de 60 secondes issue du régime stationnaire du forçage à 0.6Hz à 3 cm de hauteur crête à creux par 12 cm de profondeur. On obtient la trace de la matrice de monodromie que l'on montre sur la figure 8.32 en (a). À l'aide des formules de la section précédente, on calcule les moments statistiques associées aux distributions de solitons correspondant à chaque choix de $E_{ref} = E_{2j+1}$ possible (où les E_j sont les valeurs vérifiant $tr(M(E_j)) = \pm 1$). On trace ces évolutions de (b) à (e). On les compare aux valeurs des moments calculés à partir de la série temporelle (trait noir continu). On indique également la valeur du niveau de référence donnés par la PIST (tirets noirs).

En (b), on compare donc en rouge la masse des solitons et en noir le niveau de référence. On sait que ce dernier s'obtient en retranchant le volume d'eau contenu dans les solitons au volume de contrôle. Il en ressort qu'il existe un niveau de référence minimal en deçà duquel cet équilibre des masses n'est pas respecté. Si l'on considère par exemple que le niveau de référence spectrale est $E_{ref} = 0$ on obtient un $h_{ref} = \frac{-E_{ref}}{\lambda} = 0$ ce qui n'est pas physique puisque le volume d'eau piégé dans les solitons doit être retiré du niveau moyen $\eta_{moy} = 0$. Il se trouve que le niveau de référence renvoyé par la PIST (grâce au critère de module) coïncide avec ce niveau minimum.

En (c), on compare la variance de la série temporelle (noir) à celle obtenue pour divers choix de E_{ref} . On constate qu'il existe cette fois-ci une borne supérieure pour un choix physique du niveau de référence. En effet, la variance doit être positive. Or, pour $E_{ref} > 22$, les formules renvoient une variance négative. Cela correspond à la limite de densité critique établit par El en 2016. On ne peut pas faire tenir autant de solitons que l'on veut dans une boîte de longueur finie. Nous reviendront là dessus à la section suivante.

Outre ces bornes positives et négatives, on ne peut pas parler de critère décisif quant au choix du niveau de référence. Un accord correct entre théorie et mesures est obtenu pour une gamme relativement large de E_{ref} . On constate que le niveau de référence choisit par la PIST est dans cette gamme.

8.4.6 Lien entre kurtosis et skewness

Ce paragraphe a pour objectif de présenter le lien entre kurtosis et skewness que nous ne sommes pas parvenus à expliquer. On a constaté que les moments d'ordre 3 et 4 varient de manière très similaire dans nos expériences. Les travaux de Pelinovsky ont révélé que leur variation au cours de l'interaction forte est également quasi-identique (figures 8.33 et 8.34).

On montre sur la figure 8.35 que dans tous les régimes étudiés, il existe une dépendance quasi-linéaire entre kurtosis et skewness quelle que soit la direction de propagation considérée et la profondeur. Cette dépendance linéaire est d'autant plus prononcée que le mélange des phases est efficace. Cette relation linéaire varie un peu entre l'aller et le retour. Ce lien n'avait pas été mis en exergue auparavant à ma connaissance et doit être lié à une relation entre les invariants de KdV d'ordre 2,3 et 4.

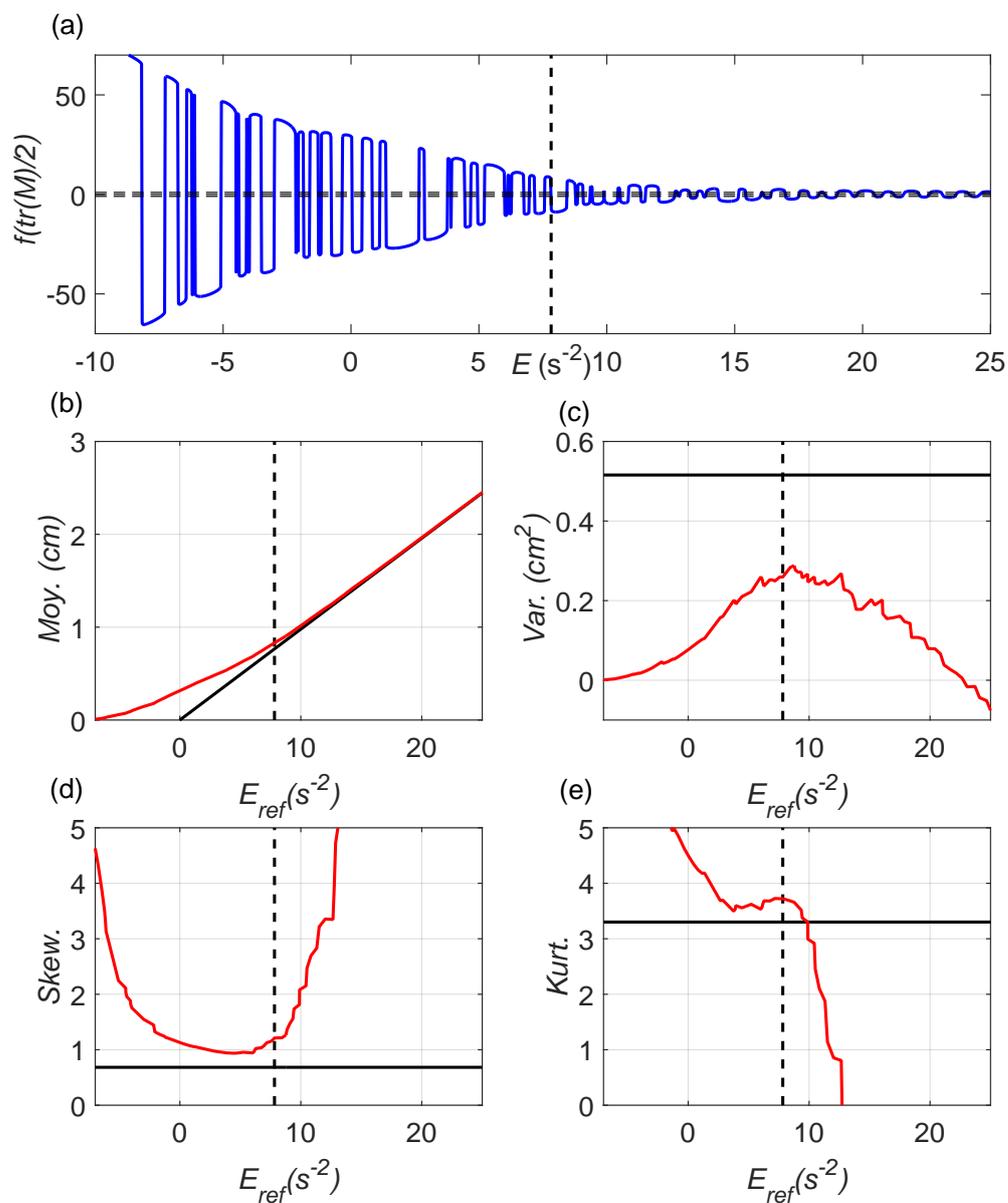


FIGURE 8.32: (a) Trace de la matrice de monodromie d'une série temporelle de 60 secondes issue du régime stationnaire du forçage à 0.6 Hz de 3 cm de hauteur crête à creux par 12 cm de profondeur. A l'aide des formules de la section précédente, on calcule les moments statistiques associés aux distributions de solitons correspondant à chaque E_{ref} possible. On trace ces évolutions de (b) à (e). On les compare aux valeurs des moments calculés à partir de la série temporelle (trait noir continu). On indique également la valeur du niveau de référence donnés par la PIST (tirets noirs).

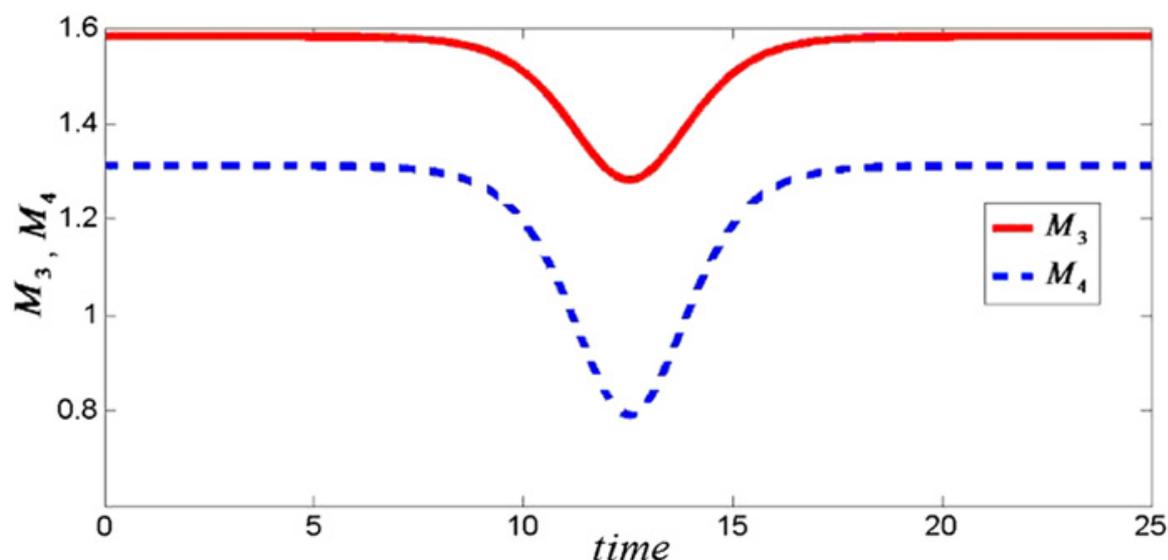


FIGURE 8.33: Dépendance temporelle des moments d'ordre 3 et 4 au cours de l'interaction de 2 solitons d'amplitude $A_1 = 1$, $A_2 = 0.3$.

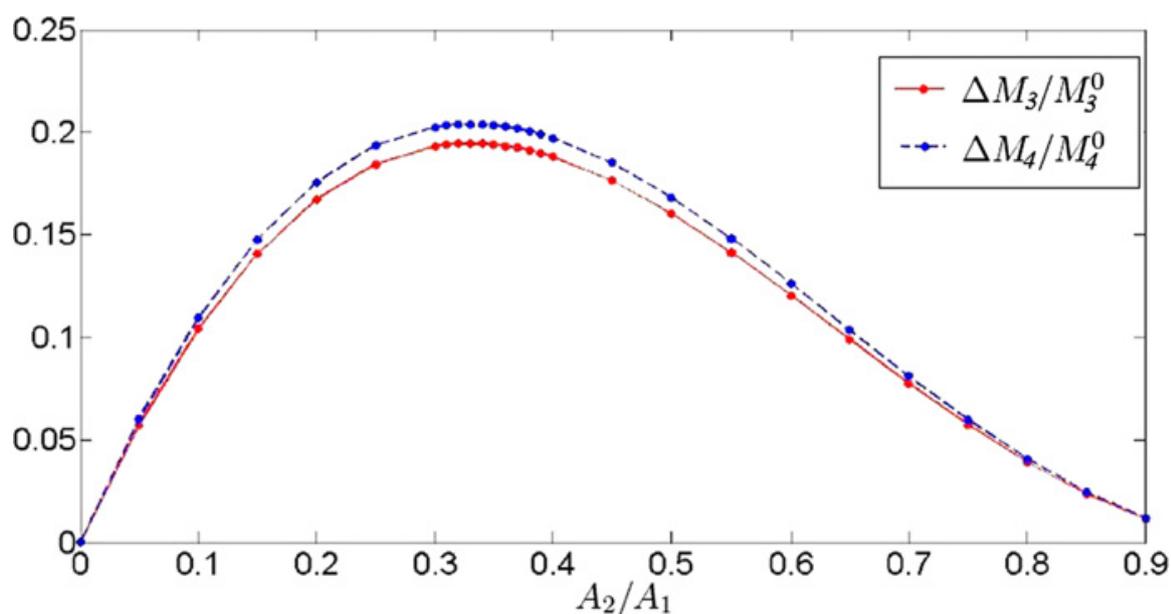


FIGURE 8.34: Dépendance de la variation relative $\delta M_i/M_i^0$ des moments d'ordre 3 et 4 lors de l'interaction en fonction du ratio d'amplitude des 2 solitons A_2/A_1 .

8.4.7 Bilan

Dans cette section, on a pu voir que la distribution de solitons conditionne fortement la forme de la distribution de probabilité de l'élévation de la surface libre. Les comparaisons aux estimations des moments statistiques données par la théorie des gaz de solitons ont permis de mettre en évidence un accord qualitatif entre nos expériences et la théorie. Cet accord est d'autant meilleur que le nombre d'Ursell du régime est important. Cela laisse penser que la mésestimation

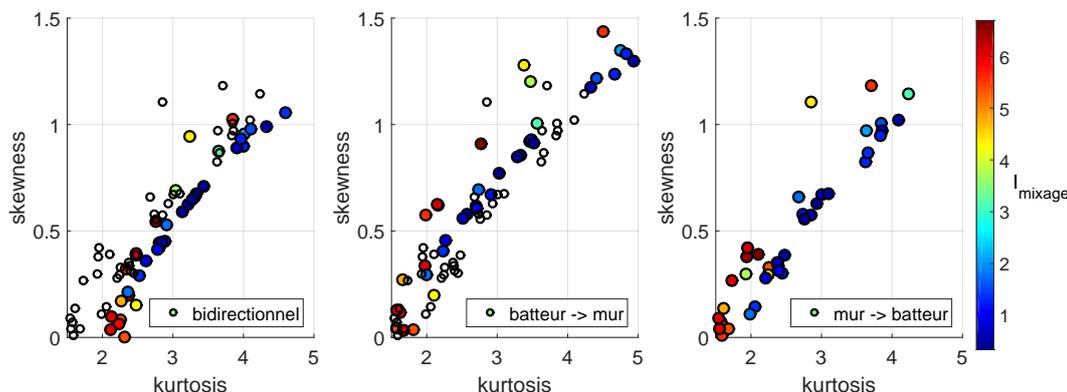


FIGURE 8.35: Relation entre skewness et kurtosis des états stationnaires solitoniques, pour la houle bidirectionnelle (a), la houle se propageant du batteur vers le mur (b) et du mur vers le batteur (c). On indique l'indice de mélange du régime en couleur (cf. figure 8.24). À des fins de comparaison, on reproduit avec des cercles vides les points de (c) en (a) et (b). On constate une dépendance linéaire entre skewness et kurtosis dans les 3 cas, d'autant plus prononcée que le mélange des phases est efficace. Cette relation linéaire varie un peu avec la distance au batteur.

est due à la présence des modes non-solitoniques. Cette explication est d'autant plus pertinente que l'on obtient un excellent accord entre nos expériences et les valeurs obtenus lors d'expériences numériques sur des régimes comparables par Pelinovsky. On peut donc dire qu'il est plus exact de qualifier nos régimes de turbulence intégrable que de gaz de solitons au sens où tous les modes présents ne sont pas des solitons. Comme résultat annexe de cette partie, on a également obtenu un encadrement du niveau de référence physique en posant que la variance devait rester positive et que le niveau de référence ne pouvait pas être supérieur au niveau moyen retranché du volume d'eau piégés dans la distribution de solitons.

Ce travail est à poursuivre. Les distributions de solitons mériteraient d'être obtenues sur des temps plus longs pour avoir une valeur statistique plus solide. Une comparaison à la théorie des gaz de solitons mériterait d'être effectuée une fois les modes non-solitoniques filtrés de nos séries temporelles afin de constater si un meilleur accord est obtenu ou si les modes non-solitoniques continuent à influencer la distribution de probabilité d'élévation de surface libre. Enfin, le lien entre moments statistiques d'ordre 3 et 4, skewness et kurtosis, mériterait d'être explicité.

Les mécanismes de fission en solitons, d'interaction quasi-élastique et de mélange des phases qui gouvernent l'évolution et la forme de la distribution de probabilité d'élévation de surface libre sont très cohérents avec le cadre de la turbulence intégrable. On pourrait s'étonner de ne pas observer des divergences plus grandes étant donné l'efficacité de la dissipation. Dans la section suivante, on s'intéressera aux mécanismes de dissipation et à leurs impacts sur la distribution de solitons.

8.5 Mécanisme de dissipation

On qualifie généralement de turbulent des systèmes très énergétiques, loin de leur équilibre thermodynamique et qui comportent un grand nombre de degrés de liberté. Cela implique généralement une dissipation intensive de l'énergie, la plupart du temps impliquant des transferts d'énergie de l'échelle d'injection vers l'échelle de dissipation. Le cadre de la turbulence intégrable reposant sur la conservation d'une infinité de quantités, il ne peut donc décrire que de façon partielle les systèmes réels. La compréhension des régimes de turbulence solitonique réels passe donc par l'étude de la dissipation.

Nous allons dans cette section nous intéresser à ce mécanisme en étudiant d'abord dans le régime stationnaire l'évolution statistique du régime avec la distance au batteur qui est notre source d'énergie. Dans un second temps, on étudiera le régime transitoire lorsque l'on coupe la génération et que plus rien ne vient compenser la dissipation.

On verra que le mécanisme dominant dans nos régimes turbulent est celui de la dissipation visqueuse théorisé par Keulegan pour les ondes solitaires [30] et que, à l'ordre 1, chaque mode semble s'amortir indépendamment des autres. Le transfert à des modes radiatifs par un léger défaut d'inélasticité des interactions est visible mais reste trop faible pour être facilement quantifiable.

On discutera également la densification du gaz de solitons au cours de son amortissement lié au fait que les solitons s'élargissent en diminuant leurs tailles. Enfin, on verra comme au chapitre 1 que chaque mode conserve son identité jusqu'à ce que son amplitude devienne de l'ordre du millimètre.

8.5.1 Dans le régime stationnaire

Niveau de référence et variance

On va voir dans cette partie que le contenu solitonique s'atténue avec la distance au batteur. Du batteur jusqu'à sa prochaine interaction avec le batteur, chaque soliton se dissipe. On montre sur la figure 8.36 l'évolution d'une portion de série temporelle dans l'espace. Pour ce faire, on déplace une fenêtre de 60 secondes à la vitesse c_0 dans le diagramme spatio-temporel. Les plus grands solitons vont légèrement plus vite que la boîte tandis que les plus petits vont légèrement plus lentement ce qui permet à quelques-uns d'entre eux d'entrer et de sortir de la boîte. La plupart du contenu solitonique est néanmoins conservé et on peut étudier son évolution.

On trace sur la figure 8.37 l'évolution de la variance en fonction de la distance au batteur ainsi que l'évolution du niveau de référence obtenu grâce à la PIST pour chacune des série temporelles de la figure 8.36. Ces deux indicateurs diminuent en valeur absolue en s'éloignant du batteur. Cela témoigne d'une diminution de la masse de solitons dans le canal.

L'état stationnaire est donc propice à une première analyse du phénomène dissipatif. On peut également noter que si le régime est stationnaire, il n'est pas homogène spatialement. Pour cette raison, utiliser la PIST sur une série spatiale est questionable dans notre cas.

On rappelle :

$$h_{ref} = 4\rho\left\langle\sqrt{\frac{A}{2}}\right\rangle \quad (8.21)$$

$$\sigma^2 = \frac{8}{3\sqrt{2}}\rho\langle A^{3/2}\rangle - 8\rho^2\langle A\rangle = \frac{8}{3\sqrt{2}}\rho\langle A^{3/2}\rangle - h_{ref}^2 \quad (8.22)$$

Il n'est donc pas étonnant de voir que le niveau de référence et la variance diminuent quand les solitons de la distribution s'amortissent.

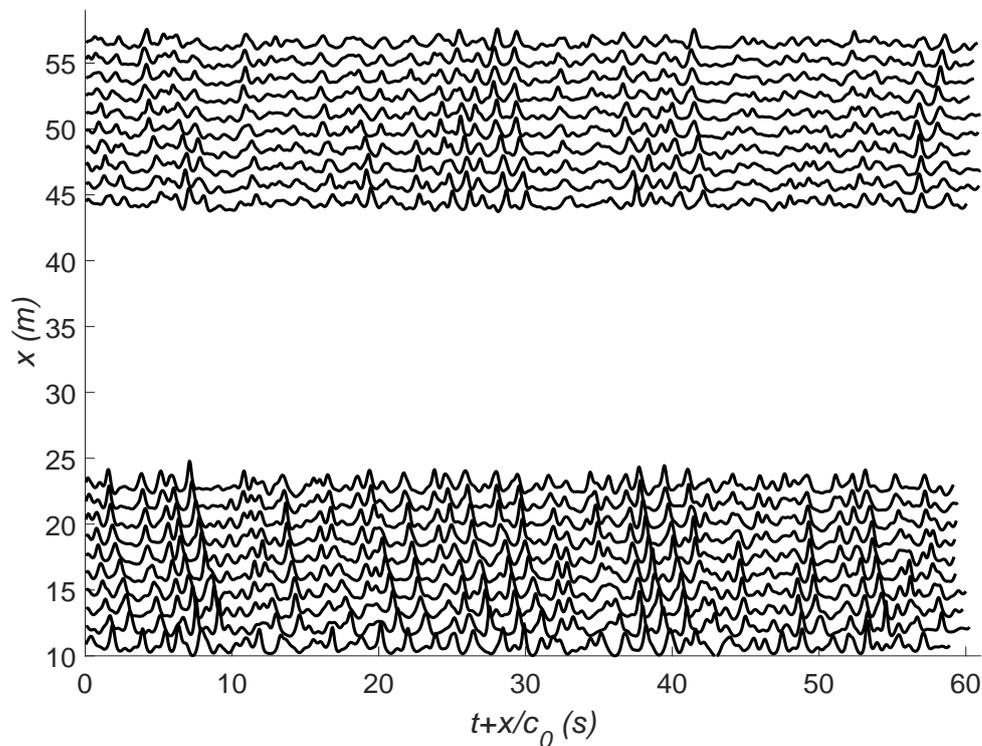


FIGURE 8.36: Evolution d'une portion de série temporelle dans l'espace. On trace à différentes distances du batteur la série temporelle contenue dans une boîte de 60 s qui avance à la vitesse c_0 . Les plus grands solitons vont légèrement plus vite que la boîte tandis que les plus petits vont légèrement plus lentement ce qui permet à quelques-uns d'entre eux d'entrer et de sortir de celle-ci. La plupart du contenu solitonique est néanmoins conservé et on peut étudier son évolution.

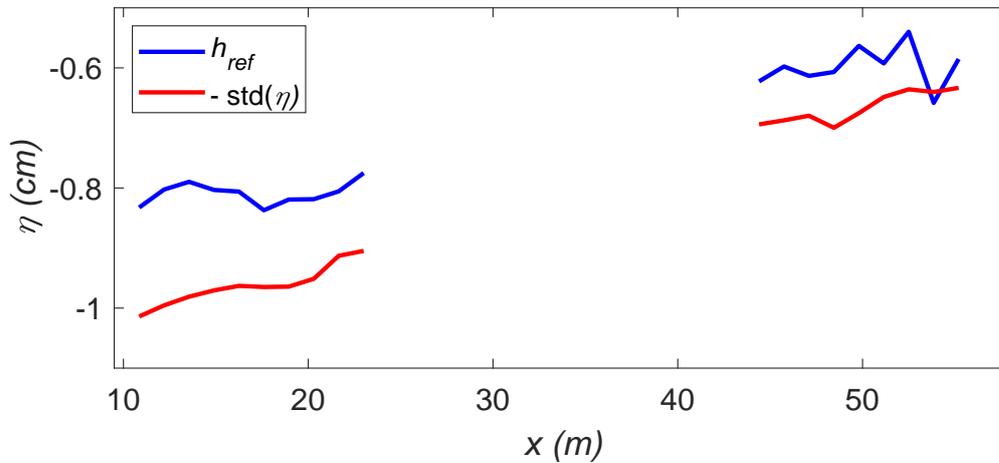


FIGURE 8.37: Évolution du niveau de référence (en bleu) obtenu en faisant la PIST des séries temporelles tracées sur la figure 8.36. On le compare à l'écart type de la série temporelle (rouge). Ces 2 indicateurs sont conservés par la dynamique strictement intégrable et découle tout deux directement de la distribution de solitons dans la théorie des gaz de solitons. On observe que ces 2 indicateurs diminuent tous deux en valeur absolue sous l'influence de la dissipation.

Transfert radiatif et dissipation de Keulegan

Nous allons dans ce paragraphe nous intéresser à l'évolution des distributions de solitons relativement à la distance du batteur dans le régime stationnaire. On représente sur la figure 8.38 les distributions obtenues à 12, 23, 44 et 55 m de ce dernier dans les séries temporelles correspondantes de la figure 8.36. En outre, on représente par des tirets l'évolution de la distribution à 12 m en supposant que seule la dissipation de visqueuse soit à l'œuvre sur chacun des modes. Les plus grands solitons de chaque distribution semblent suivre cette atténuation visqueuse. Pour les plus petits solitons, il apparaît qu'ils se dissipent plus efficacement que prévus. Le candidat le plus sérieux pour expliquer cette sous-estimation de la dissipation de l'énergie solitonique globale est un défaut de l'élasticité des interactions. On l'a vu au chapitre 4, si 2 solitons qui interagissent ont des amplitudes trop importantes relativement à la profondeur, on brise l'hypothèse de faible non-linéarité de KdV et Kaup-Boussinesq. On a alors l'émission d'une radiation à l'interaction. Cela étant dit, cela n'explique pas que les plus petits solitons soient plus touchés que les grands, l'inverse aurait même été attendu. Peut-être dans le cas de l'interaction de solitons de taille inégales, l'énergie du clapotis est-elle prélevé en majorité au plus petit des solitons ? L'étude de l'interaction faible de solitons de tailles résolument différentes serait en ce sens intéressante. On peut également "accuser" le temps plus grand passé dans le canal du fait du courant adverse présent dans le cas périodiques et des interactions qui tendent à déphaser vers l'arrière les modes les plus petits, leur rajoutant de la distance à parcourir.

On constate également que 6 modes perdent leurs "status" de solitons en 43 m de propagation. Comme on a pu le voir au chapitre 4, lorsque des solitons de l'ordre du mm interagissent, la dissipation modifie la forme de la structure bi-modale formée de manière rapide par rapport au temps d'interaction. Cela conduit à la perte de l'identité de ces modes.

Il est difficile de mesurer précisément les transferts radiatifs et en particulier de les dissocier

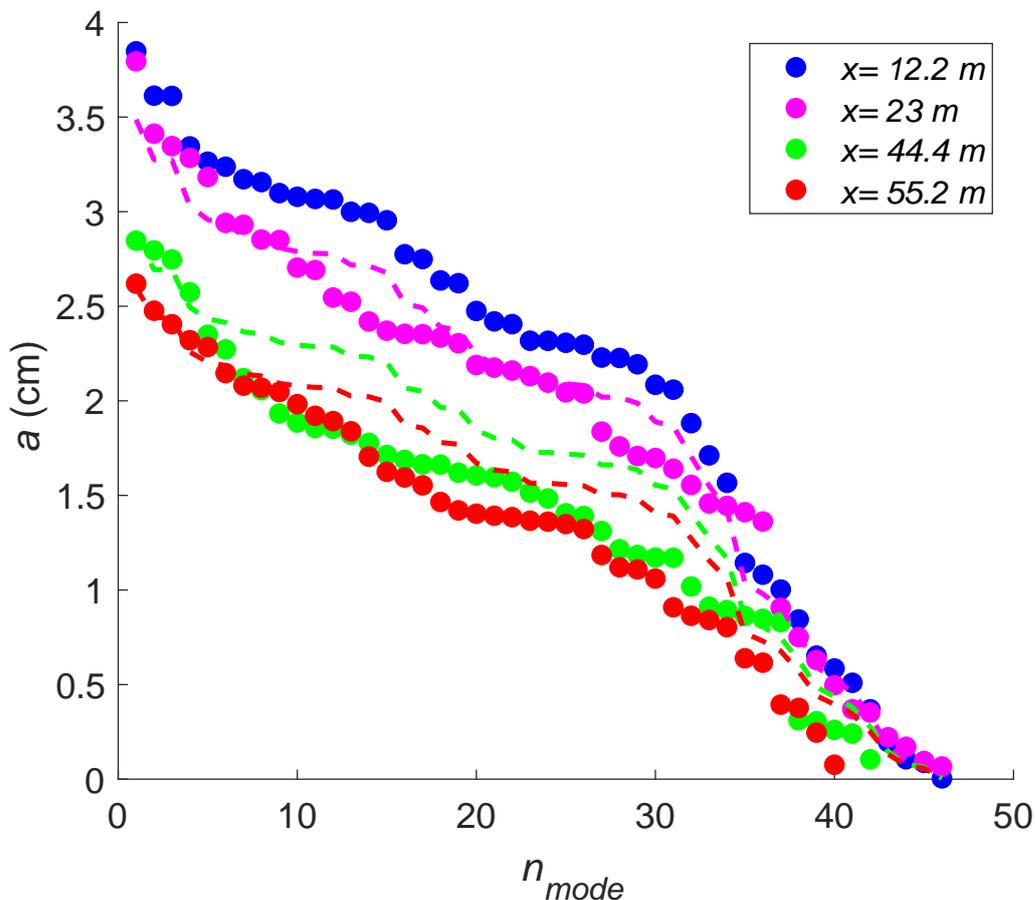


FIGURE 8.38: Evolution des amplitudes des modes solitoniques au cours de la propagation dans le canal. On trace en cercle plein les amplitudes à 12, 23, 44 et 55 m du batteur et en tirets l'amortissement théorique de la distribution à 12.2 m déduit par les formules de Keulegan (cf. chapitre 4) pour les autres localisations. On constate que les prévisions de Keulegan sont correctes pour les solitons les plus grands puis sous-estiment l'amortissement pour les autres modes. Peut-être est-ce dû au temps plus grand passé dans le canal du fait du courant adverse présent dans le cas périodique et des interactions qui tendent à déphaser vers l'arrière les modes les plus petits, leur rajoutant de la distance à parcourir. Par ailleurs on constate que 6 modes perdent leur statut de solitons en 43 m de propagation (47 solitons à 12.2 m et 41 à 55.2 m).

de modes radiatifs générés au batteur. Cela étant dit, on observe tout de même sur les spectres ($k\omega$) (figure 7.23), un transfert d'énergie à des modes radiatifs qui témoigne de ce phénomène.

En conclusion, on peut dire que les transferts radiatifs sont observés dans nos régimes et qu'il crée un flux de l'énergie vers les petites échelles où elle est dissipée. Cependant, dans notre configuration, ce mécanisme reste marginal et le plus gros de l'énergie est dissipé par les couches limites visqueuses sur les parois et au fond du canal.

Densification du gaz

La dissipation de chacun des modes solitoniques conduit chacun d'entre eux à s'étaler. On a alors tendance à "densifier" le gaz. Cette densification ne s'entend pas au sens où l'on augmente le nombre de solitons dans notre boîte de 60 secondes, mais au sens où l'on se rapproche d'une densité critique qui diminue avec l'amplitude des solitons. Cette densité critique a été défini en par El en 2016 en posant que la variance d'un gaz de solitons devait évidemment être positive ce qui contraignait la valeur de la densité dans la formule suivante :

$$\sigma^2 = \frac{8}{3\sqrt{2}}\rho\langle A^{3/2} \rangle - 8\rho^2\langle A \rangle > 0 \quad (8.23)$$

$$8\rho\left(\frac{\langle A^{3/2} \rangle}{3\sqrt{2}} - \rho\langle A \rangle\right) > 0 \quad (8.24)$$

$$\frac{\langle A^{3/2} \rangle}{\langle A \rangle 3\sqrt{2}} > \rho \quad (8.25)$$

avec comme précédemment $A = a\lambda (= a \times \frac{3c^2}{2h^3})$

Physiquement, cette notion correspond au fait qu'il est impossible de rapprocher 2 solitons l'un de l'autre au-delà d'une certaine limite. En particulier, si l'on considère l'interaction forte de 2 solitons, on assistera au cœur de l'interaction à la formation d'une structure bi-modale symétrique. Il est impossible que 2 solitons soit plus proche que la distance qui sépare ces 2 maximums.

Notre canal n'est pas assez long pour voir comment cette contrainte de densité vient changer la dynamique du régime dans l'état stationnaire. On peut cependant observer la "densification".

On constate dans l'état stationnaire une contraction de la partie solitonique du spectre principal (les E_j) de la DST au cours de la propagation. Cette partie du spectre est bornée par E_1 et E_{ref} qui diminuent tout deux en valeurs absolue au cours de la propagation. Cette dynamique est illustrée par la figure 8.39 qui représente les traces des matrices de monodromies associées aux distributions de la figure 8.38. Les valeurs propres (intersections de la trace avec les axes -1 et 1) correspondant à des modes solitoniques se rapprochent les unes des autres. Le niveau de référence spectrale diminue ainsi que la norme de la valeur propre correspondant au plus grand soliton de la distribution tandis que le nombre de modes reste sensiblement le même. On montre dans le tableau 8.2 les valeurs de densités et de densités critiques associées à ces positions.

x (m)	12.2	23	44.4	55.2
ρ	0.77	0.77	0.7	0.66
ρ_{crit}	1.21	1.15	1.03	0.97

Tableau 8.2: Densités et densités critiques associées aux distributions de solitons de la figure 8.38.

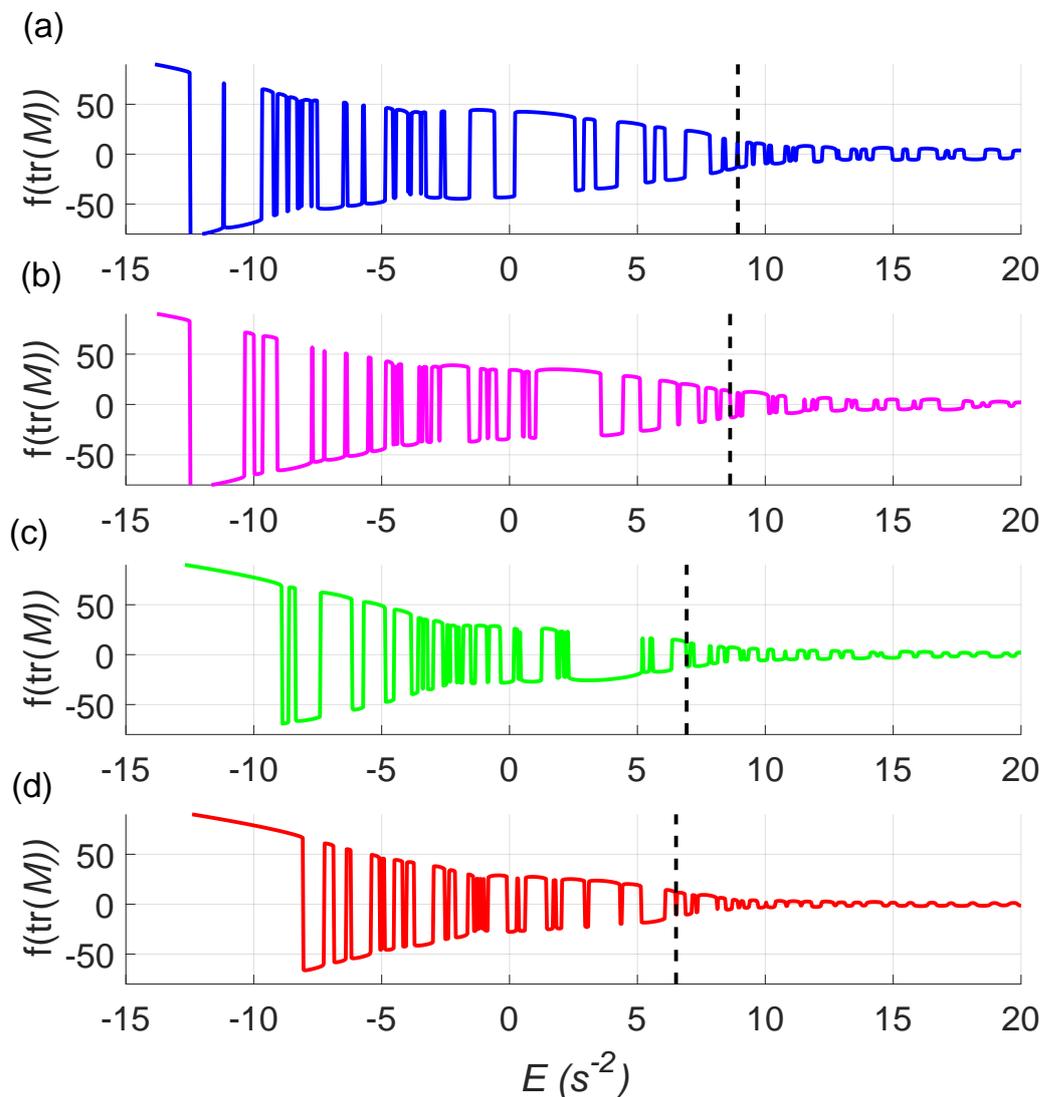


FIGURE 8.39: On représente les traces des matrices de monodromie associés aux distributions de solitons de la figure 8.38. On constate que le nombre de modes solitoniques se condense dans un espace spectral de plus en plus réduit du fait de l'amortissement des solitons et de la remontée du niveau de référence. En d'autres termes, le gaz devient plus dense. Cela est lié au fait qu'en s'atténuant, les solitons deviennent plus larges alors que leur nombre ne diminue que peu.

8.5.2 Dans le régime transitoire

Lorsque l'on coupe la génération, rien ne vient plus compenser la dissipation. Dans cette section, nous allons étudier l'évolution de la distribution de solitons au cours du retour au calme du régime. Pour ce faire, on se placera à 10 m du batteur puis on étudiera successivement des sections de 62s de la série temporelle de la houle se propageant du batteur vers le mur. Ce temps correspond au temps d'un aller-retour dans le canal à la vitesse c_0 . Ainsi, on aura, à peu de chose près, dans la première série temporelle des solitons ayant effectué un aller-retour dans le canal,

puis 2 dans la seconde, etc.

On montre sur les figures 8.40 et 8.41 l'évolution de la série temporelle puis les traces des matrices de monodromie ainsi que les distributions de solitons associées à chaque section.

On montre également dans le tableau 8.3 l'évolution de la densité solitonique et de la densité critique dans la phase de déclin. Pendant les 2 premiers aller-retours, on constate que la dissipation mène à une réduction progressive du nombre et de l'amplitude des solitons dans la continuité de celle observée dans le régime stationnaire (120 premières secondes). Assez vite, la PIST n'identifie plus qu'une poignée de modes solitoniques qu'on identifie mal sur les séries temporelles. Ces modes pourraient correspondre au contenu solitonique des modes longs du canal et notamment à celui de la seiche qui, si elle ne s'amortissait pas aussi vite, fissionnerait.

Il semble que l'analyse de la PIST touche ici ces limites :

- le niveau de référence spectrale ne peut pas être supérieur à zéro et usuellement, tout mode à gauche de celui-ci est considéré solitonique. Ici certains modes ayant une valeur propre négative ont un module trop faible pour être qualifiés de soliton (on va jusqu'à $m=0.78$ dans la série temporelle la plus amortie). Leur valeur propre négative interdit de les considérer comme des radiations. C'est une impasse conceptuelle.
- Cette impasse est confirmée par le dépassement de la densité critique ce qui est physiquement impossible si l'on s'en tient à une image de modes solitoniques.
- Enfin, les éventuels solitons se propageant peu ou prou à la même vitesse que les modes longs que l'on observe sur les séries temporelles, ils ne "voient" pas tous le même niveau de référence ce qui fait perdre de son sens à l'analyse PIST.

On peut donc conclure qu'au cours de l'amortissement, les modes perdent leur caractère solitonique, la dissipation rompant l'équilibre entre dispersion et non-linéarité. De plus, à ces amplitudes, les différences de vitesses entre modes sont très faibles et les temps d'interactions fortes ne sont plus négligeables par rapport au temps dissipatif. La PIST n'est alors plus le bon outil pour appréhender la répartition de l'énergie dans le système.

Aller/retour	1	2	3	4	5	6
ρ	0.5	0.19	0.15	0.11	0.065	0.065
ρ_{crit}	0.9	0.6	0.31	0.0420	0.009	0.0051

Tableau 8.3: Densités et densités critiques associées aux séries temporelles de la figure 8.40. Chaque série correspond environ à un aller-retour dans le canal suite à l'arrêt de la génération.

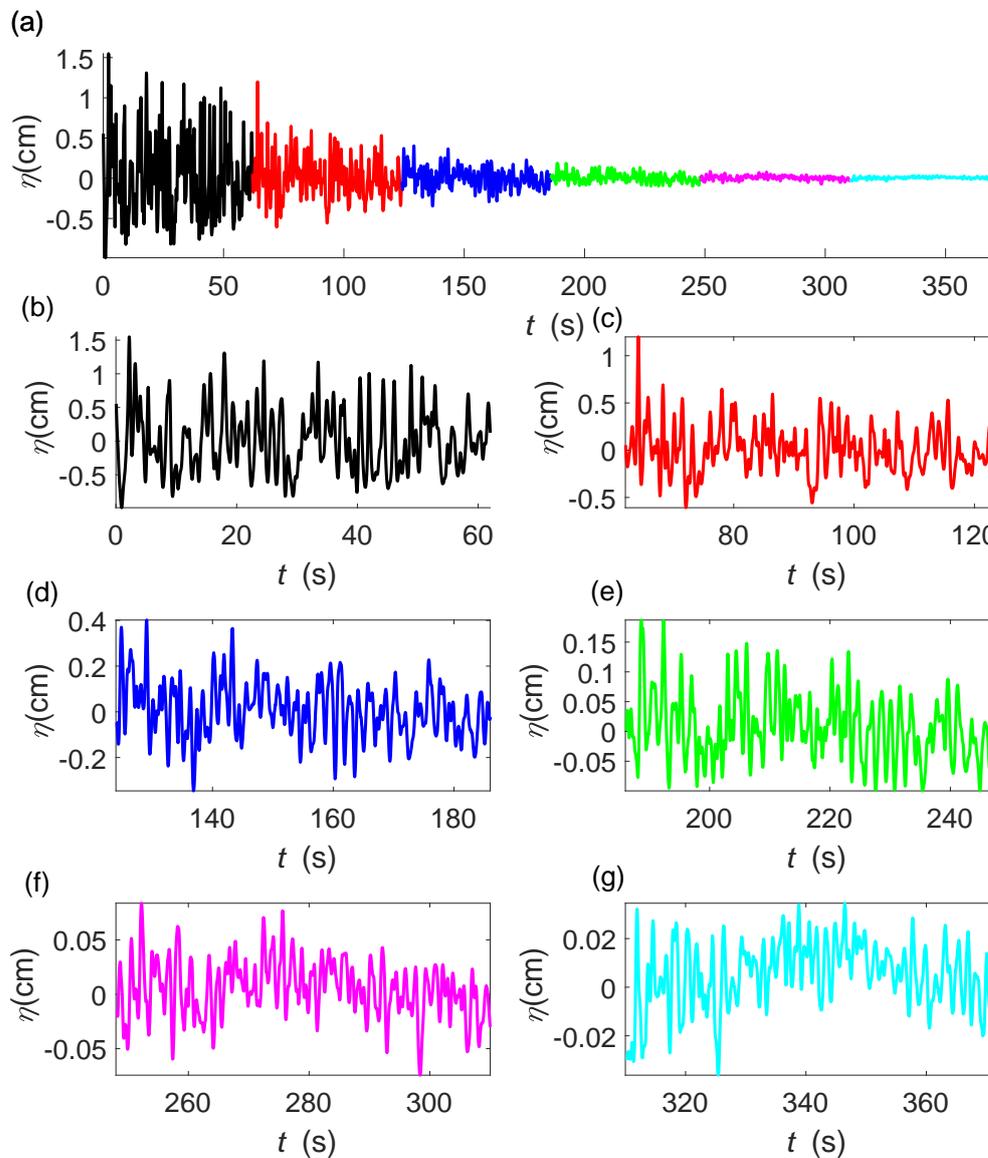


FIGURE 8.40: Série temporelle suite à l'arrêt de la génération mesurée à 10 m du batteur et filtrée pour montrer uniquement la houle du batteur vers le mur. Le code couleur sert à identifier les sections dont on fait l'analyse PIST à la figure 8.41. Les séries temporelles comptent $\frac{L_{canal}}{c_0} = 62s$. Elles correspondent donc approximativement au même contenu solitonique ayant effectué un aller-retour dans le canal. Plus la dissipation fait son œuvre, plus les modes longs du canal deviennent prépondérants et plus il devient discutable de considérer que tous les solitons se propagent sur un même niveau de référence

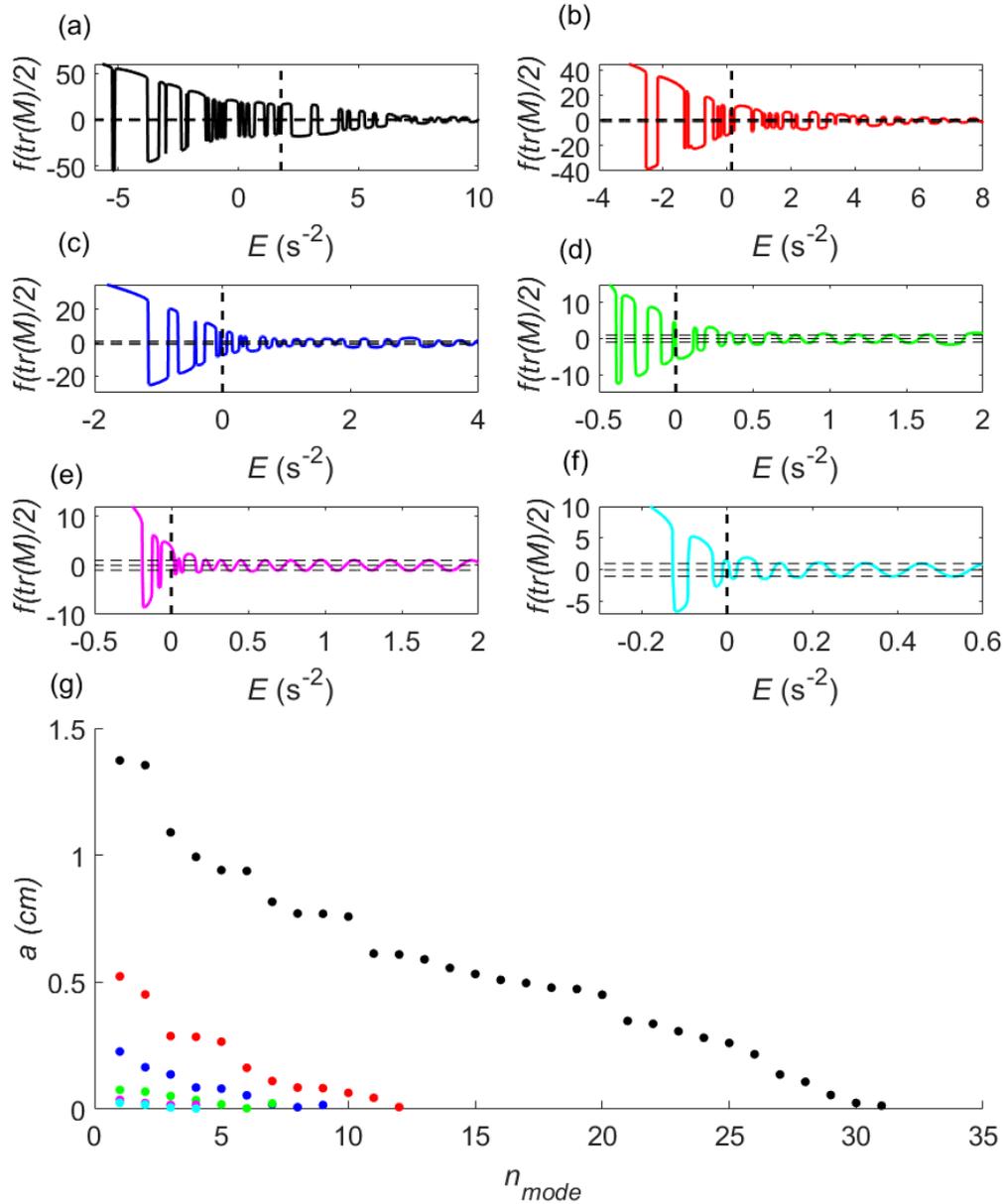


FIGURE 8.41: Traces des matrices de monodromie (de (a) à (f)) et distributions de solitons (g) associées aux séries temporelles de la figure 8.40. Le contenu solitonique est drastiquement réduit à chaque aller-retour. Dès le 3ème (124 secondes après l'arrêt de la génération (c)), les solitons ont une masse négligeable et on peut considérer qu'ils se propagent sur le niveau moyen. On identifie mal ces solitons sur les séries temporelles. Il est probable qu'il s'agisse des solitons qui émergeraient de la fission des modes longs du canal si ces derniers ne se dissipaient pas plus vite qu'ils ne fissionnent.

8.6 Conclusion

L'ensemble des analyses effectuées dans ce chapitre a permis une meilleure compréhension de la nature de la turbulence solitonique en eau peu profonde. En particulier, le cadre de la turbulence intégrable s'est révélé décrire une large part de la dynamique observée. Faisons ici le bilan des résultats de ce chapitre

On s'est attaché à montrer que le comportement chaotique des régimes solitoniques était à imputer au phénomène de mélange des phases. Un défaut de périodicité des premiers trains de solitons introduit dans le système une diversité importante d'amplitudes pour les modes solitoniques. Cela se produit au travers des mécanismes d'amortissement et d'amplification observés au batteur qui sont fortement dépendants de la phase des modes incidents par rapport à celle de la houle nouvellement générée. Ces modes ayant une vitesse de propagation indexée sur le ratio de leurs amplitudes à la profondeur, ils se déphasent rapidement les uns des autres. Les déphasages dus aux interactions fortes et faibles viennent encore accélérer cette mécanique. On obtient alors une répartition uniforme de l'énergie sur les basses fréquences qui n'est pas due à une thermalisation de l'énergie sur les différents modes mais à un comportement chaotique de ces derniers.

Le caractère intégrable de la dynamique est confirmé par la comparaison aux travaux numériques de Pelinovsky qui constate également cette répartition uniforme de l'énergie sur les basses fréquences pour des conditions initiales comparables aux nôtres évoluant de manière strictement intégrable. La comparaison est d'autant plus probante que l'on obtient des moments statistiques très similaires aux siens dans l'état stationnaire. La comparaison à la théorie des gaz de solitons semble prometteuse principalement pour les régimes où les modes non-solitoniques sont très peu énergétiques. Il est probable qu'elle soit pertinente une fois ces modes filtrés de nos séries temporelles, mais ce travail reste à effectuer.

L'étude du mécanisme de dissipation a établi que le transfert d'énergie à des modes radiatifs, bien que visible, était marginal. À l'ordre 1 la dissipation visqueuse de chacun des modes, indépendamment les uns des autres, donne les bons ordres de grandeur de l'évolution de l'amplitude des solitons. Il a également été mis en lumière qu'au cours de la dissipation, la densité du gaz tendait vers la densité critique ce qui, à terme, lui fait perdre sa nature de gaz de solitons. Ce mécanisme mériterait d'être mieux étudié numériquement en s'affranchissant de l'émergence du mode de seiche du canal.

De manière générale, le ratio $\frac{a}{h}$ de nos régimes s'est révélé déterminant. Il conditionne la magnitude des différences de vitesses entre solitons et donc le mélange efficace des phases. Il conditionne également la séparation d'échelle entre le temps dissipatif, la durée d'une interaction forte et la durée d'un aller-retour dans le canal. Il doit donc être au-delà d'un certain seuil pour permettre l'observation de la turbulence solitonique.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Le travail réalisé dans ce mémoire avait pour objectif d'apporter des éléments expérimentaux afin de déterminer si la théorie de la turbulence intégrable pouvait décrire la dynamique 1D des ondes de gravités. Cette interrogation était légitimée par l'antagonisme manifeste entre la conservation d'une infinité de quantités physiques (au cœur de la notion d'intégrabilité) et la présence de dissipation et d'injection d'énergie (nécessaire à l'existence d'un état turbulent stationnaire dans un système réel). Nous allons ici dresser le bilan de notre étude.

On a pu établir que les équations intégrables de Kaup-Boussinesq et Korteweg-de Vries décrivaient bien la dynamique de notre système sur des échelles de temps courtes en comparant nos mesures d'élévation de surface libre aux solutions théoriques afin de vérifier l'élasticité des interactions entre solitons ainsi que l'amortissement adiabatique de ces derniers. Nos travaux ont montré que ces équations étaient valides pour des amplitudes de soliton modérées. En effet, pour des solitons trop fortement non-linéaires, les interactions deviennent inélastiques et pour des solitons trop faiblement non-linéaires, on ne vérifie plus la séparation d'échelle entre temps dissipatif et temps d'interaction.

On a ensuite montré qu'il était possible de générer des états de turbulence solitonique proches du gaz de solitons à l'aide d'un forçage monochromatique ce qui constitue le résultat le plus marquant de notre étude. Cela nous a permis de vérifier la pertinence de l'utilisation de la PIST pour identifier les modes solitoniques d'un système en mesurant les amplitudes et les vitesses des solitons issus de la fission d'une onde sinusoïdale. On a également pu mener une réflexion sur les limites de cet outil qui ne permet pas d'identifier clairement le niveau de référence sur lequel se propagent les solitons ce qui conduit à des imprécisions sur l'estimation de leurs amplitudes et de leur nombre.

Enfin, on s'est livré à une étude paramétrique afin de caractériser les régimes de turbulence solitonique. Une étude du régime transitoire nous a permis d'identifier les mécanismes de mélange de phases et de transfert résonant qui permettent d'établir un régime turbulent. Une étude du régime stationnaire nous a permis de comparer favorablement nos régimes de turbulence solitonique aux régimes de turbulence intégrable de la littérature. On a notamment pu retrouver des densités spectrales d'énergie et des moments statistiques comparables. L'accord avec la théorie des gaz de solitons s'est révélé moins bon, notamment dans l'estimation de la variance des séries temporelles à partir des distributions de solitons. Dans la mesure où les modes radiatifs générés

par le recul du batteur et les collisions légèrement inélastique ne sont pas pris en compte par la théorie, cela n'est pas une surprise et l'étude mériterait d'être reprise une fois ces modes filtrés. On a tout de même pu constater une bonne estimation des moments statistiques d'ordre 3 et 4 par la théorie. Ces derniers sont, en effet, peu impactés par la présence de mode radiatifs.

De ces constats, on peut conclure que l'échelle de temps courte sur laquelle opèrent les mécanismes de la turbulence intégrable assure que la dynamique ne soit pas perturbée significativement par la dissipation. La répartition de l'énergie sur des modes solitoniques qui interagissent quasi-élastiquement est un phénomène bien présent dans nos expériences et bien décrit dans le cadre de la turbulence intégrable. On a pu estimer que dans ces régimes turbulents, la dissipation visqueuse de chaque soliton, indépendamment, était le mécanisme principal conduisant à l'amortissement du régime. On a également vu qu'au cours de cet amortissement, un gaz de solitons se densifiait à cause de l'étalement des solitons avec la diminution de leurs amplitudes et que cela conduisait à terme le régime à perdre son caractère de gaz de solitons.

Il ressort de notre étude que le cadre de la théorie de la turbulence intégrable décrit raisonnablement bien les régimes turbulents d'ondes de surface 1D en eau peu profonde, et ce, malgré des hypothèses très partiellement vérifiées. Cela pose de nombreuses questions qui sont autant de directions dans lesquelles poursuivre notre étude.

Perspectives

Nous allons dans cette section discuter des perspectives qu'ouvrent ce travail. Dans un premier temps, on discutera de la validation d'un modèle numérique décrivant nos expériences. Cet outil ouvre en effet le champ des possibles quant aux investigations qu'il est possible de mener. Dans un second temps, on présentera brièvement les pistes de travail pour améliorer l'utilisation de la PIST comme outil de comptage des solitons. Enfin, on donnera des pistes de réflexion pour répondre aux questions qui se posent au terme de notre étude.

Validation d'un modèle numérique

La plupart des résultats que l'on a présentés (répartition uniforme de l'énergie sur les basses fréquences, transfert résonant aux modes du canal, ordre de grandeur des moments statistiques) ont été retrouvés par des expériences numériques simulant l'évolution de la surface libre dans le canal avec les équations de Serre 1D. Ce code, initialement développé par Cienfuegos [8],[8], a été adapté par Hervé Michallet à notre objet d'étude. Les équations de Serre décrivent l'évolution en eau peu profonde sans faire l'hypothèse de faible non-linéarité qui mène aux équations de KdV et Kaup-Boussinesq et sont donc très pertinentes pour capturer l'ensemble de la dynamique.

Ces simulations ont par exemple permis de vérifier que la dissipation ne jouait pas un rôle clé au sens où la dynamique reste sensiblement la même en annulant ce terme (pour un nombre d'Ursell suffisamment grand).

Elles ont également permis de comparer le cas monodirectionnel au cas bidirectionnel en comparant un canal périodique où les ondes qui sortent à la paroi sont réinjectées au batteur (monodirectionnel), à un canal où la houle se réfléchit à la paroi (bidirectionnel). Cette comparaison est illustrée par la figure 8.42 qui compare ces deux cas de figures pour un forçage sinusoïdal d'amplitude $a = 1.5$ cm, de fréquence $f = 0.6$ Hz par une profondeur de 12 cm qui correspond au régime présenté dans [52]. On constate sur les spectres (k, ω) que dans le cas bidirectionnel, l'énergie des modes radiatifs est plus importante que dans le cas monodirectionnel où ils sont

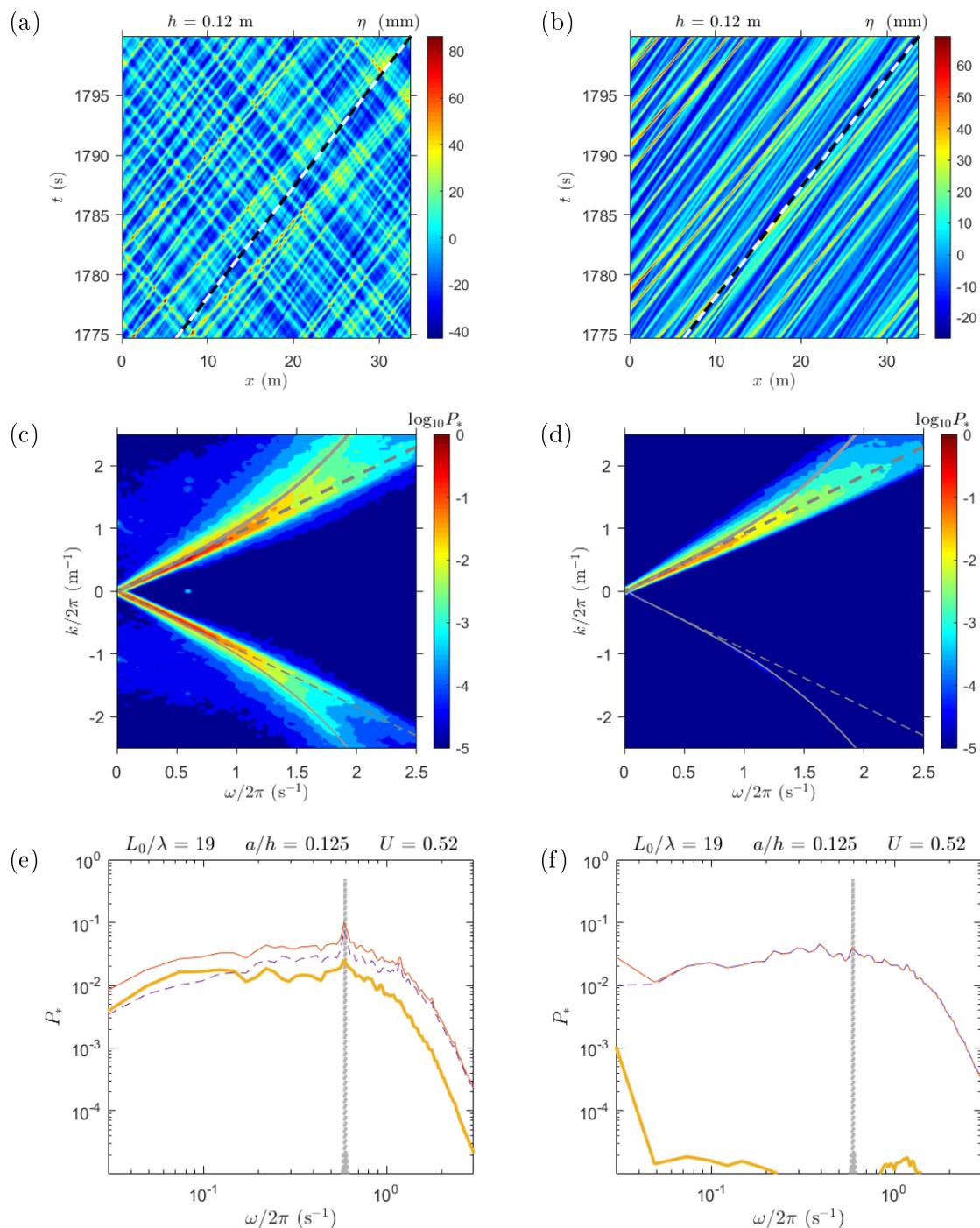


FIGURE 8.42: Simulations Serr1D de type canal avec réflexion au mur (a,c,e) et de type ‘canal en boucle’ (b,d,f) pour $h = 0.12$ m, $a = 1.5$ cm et $f = 0.6$ Hz soit $U = 0.53$ et $a/h = 0.125$
 (a,b) : élévation de surface libre $\eta(x, t)$ (la ligne droite brisée indique la célérité des ondes longues linéaires c_0). (c,d) : spectre spatio-temporel (trait plein pour la relation de dispersion, tirets pour c_0). (e,f) : spectre en fréquence (condition de forçage en pointillés gris, spectre total en trait fin, ondes se propageant depuis le batteur en tirets, vers le batteur en trait gras).

presque absents. Cela met en évidence la génération d'ondes dispersives lors des interactions faibles. En revanche, les deux densités spectrales d'énergie affichent une répartition uniforme de l'énergie sur les basses fréquences attestant que les mécanismes de désorganisation ne sont pas liés au caractère bidirectionnel du gaz de solitons.

La condition limite choisie pour représenter le batteur dans ces simulations est celle d'une paroi fixe (pas de changement de taille du domaine de calcul), où on laisse sortir la houle incidente en réinjectant la somme de cette houle et du sinus de la commande. Le bon accord phénoménologique semble affirmer que les éventuels amortissements ou amplifications de modes, dus à l'interaction entre solitons et parois mobiles, sont faibles et que la superposition de la houle incidente à la houle nouvellement générée suffit à décrire le phénomène.

Cet outil numérique, dont la pertinence physique est validée par l'accord avec nos expériences, rend possible de nombreuses comparaisons entre système intégrable et système réel. Il est clair qu'un tel modèle permet de s'affranchir des contraintes expérimentales telles que la limitation sur l'excursion du batteur ou encore la longueur finie du canal.

PIST

L'étude de la turbulence intégrable telle que nous avons pu la mener repose en grande partie sur l'usage de la PIST pour obtenir les distributions de solitons. On a pu voir que cet outil était perfectible.

Si la définition d'un seuil au-delà duquel un mode est suffisamment localisé pour être considéré comme un soliton est inhérente au choix des conditions aux limites périodiques, une meilleure définition du niveau de référence nous paraît nécessaire pour analyser finement des séries temporelles longues et où le spectre intermédiaire est important. On a pu mettre en évidence au chapitre 6 que cette définition devrait prendre en compte la participation des modes de ce spectre intermédiaire (modes de modules importants, mais non-solitoniques). En effet, leur influence sur le niveau sur lequel se propagent les solitons doit être prise en compte progressivement et non à partir d'un seuil arbitraire.

Afin de définir le seuil au-delà duquel un mode est un soliton, il peut être souhaitable de travailler avec des algorithmes utilisant les fonctions thétas en lieu et place des fonctions hyperelliptiques pour mener à bien la PIST. En effet, ces dernières permettent la reconstruction indépendante de chacun des modes "physiques" indépendamment. Ces reconstructions permettront sans doute de choisir plus facilement une limite entre modes solitoniques et modes cnoïdaux. La complexité supérieure de l'implémentation de ces algorithmes nous a paru trop chronophage pour les mettre en œuvre durant cette thèse.

Appliquer la PIST directement aux équations de Kaup-Boussinesq permettrait de se débarrasser du biais induit par le filtrage directionnel. Cela permettrait également d'élaborer une théorie des gaz de solitons bidirectionnelle. La comparaison avec les expériences serait cependant complexifiée par le caractère dissipatif de nos régimes. En effet, les solitons ne se propagent a priori pas sur le même niveau de référence à l'aller et au retour à une position donnée ce qui poserait certainement des problèmes.

Expérience à réaliser

Ce travail laisse de nombreuses questions en suspens et on listera dans cette section les suites souhaitables à lui donner.

Problématiques océaniques

Nous avons dans ce mémoire montré que la théorie de la turbulence intégrable pouvait décrire les régimes turbulents d'ondes de surface 1D en eau peu profonde. Dans l'océan, de nombreuses échelles cohabitent ce qui rend le système plus complexe. Il serait intéressant d'étudier les éventuels couplages entre les ondes longues que peuvent décrire l'équation de KdV et les ondes courtes. Le lien entre paquets d'ondes courtes et solitons de KdV que suggèrent [10] mérite en particulier d'être investigué. Il est également important d'établir s'il est possible de filtrer les modes solitoniques des modes intermédiaires et radiatifs afin d'obtenir un système décrit par la théorie des gaz de solitons ou si au contraire les couplages entre ces différents domaines spectraux sont trop forts pour que la théorie puisse s'appliquer si le gaz de soliton n'est pas pure.

Transferts résonants et solitons

Nous avons mis en évidence qu'à travers des interactions résonantes, il était possible de transférer de l'énergie vers les modes longs du canal. Au terme d'une lente dynamique, l'énergie était alors concentrée sur des modes localisés. Numériquement, il devient possible de s'affranchir de ces effets de taille finie. En limitant l'effet de la dissipation, on peut se demander s'il est possible d'observer une cascade d'énergie inverse par interaction résonante et si celle-ci sera suffisamment efficace pour que les modes les plus longs deviennent assez non-linéaires pour fissionner, concentrant ainsi l'énergie sur des modes localisés ?

Mécanisme de dissipation

Nos travaux sur la dissipation ont montré que dans les régimes turbulents, les petits solitons ont tendance, relativement à la prévision de leur amortissement visqueux, à se dissiper plus vite que les grands. Il serait intéressant de confirmer cette tendance et de l'expliquer. On peut notamment se demander si l'énergie de l'onde dispersive générée lors de l'interaction faible de 2 solitons de tailles différentes est davantage prélevée sur l'énergie du plus petit soliton.

Il serait également intéressant d'étudier numériquement la densification d'un gaz dans les situations de relaxation après l'arrêt du forçage afin de déterminer comment le système se comporte à l'approche de la densité critique.

Interaction solitonique

La mécanique déterministe de l'interaction faible de 2 solitons se propageant à des niveaux de référence différents reste également à étudier. Les déphasages sont-ils exactement les mêmes que dans le cas où les 2 solitons se propagent sur un même niveau de référence ? Quel rôle jouent les courants adverses ? La réponse à ces questions sera certainement difficile à obtenir du fait de la présence de nombreux solitons qui viendront complexifier les mesures.

Profondeur variable

Dans nos travaux nous avons utilisé principalement des forçages monochromatiques. Il nous semble intéressant de considérer le cas d'une houle générée au large, en eau profonde, qui entre dans le domaine de l'eau peu profonde afin d'estimer dans quelle condition elle évolue en un gaz de soliton. Les équations de Serres permettant de prendre en compte une profondeur variable, un premier travail numérique dans cette direction semble indiqué. Il pourrait être poursuivi en aménageant une marche dans le canal une fois les régimes intéressants identifiés.

Transition vers l'eau profonde

L'étude de la transition entre régimes d'eau profonde et régime de turbulence solitonique est également prometteuse. On montre 5 séries temporelles sur la figure 8.43 qui illustrent la complexité de cette transition. Chacune d'entre elles correspond à 100 s de l'état stationnaire d'un forçage où la profondeur est de 20 cm tandis que la hauteur crête à creux est de 3 cm. Pour un nombre d'Ursell décroissant, on constate que l'on passe d'un régime solitonique très asymétrique ($|\eta_{min}| < |\eta_{max}|$) et chaotique à un régime presque sinusoïdale ($|\eta_{min}| = |\eta_{max}|$) pour $f = 1.2$ Hz en passant par des régimes intermédiaires qui font intervenir des solitons et les modes long du canal.

Pour des ondes plus courtes encore, l'évolution est gouvernée par l'équation de NLS qui est également une équation intégrable à solitons. Est-il possible de mener dans notre canal, à l'aide du filtrage directionnel, les mêmes analyses que pour les gaz de solitons régis par KdV ?

Vers une théorie générale de la turbulence d'onde 1D

Le cadre de la théorie de la turbulence intégrable s'est révélé pertinent pour décrire certains régimes turbulents d'ondes de surface 1D en eau peu profonde. La formation de modes radiatifs via les interactions faibles ainsi que les interactions résonnantes ont cependant montré son incapacité à décrire le système de manière complète.

Une théorie générale de la turbulence d'ondes de surface 1D capable de prendre en compte à la fois les structures cohérentes telles que les solitons de KdV et de NLS et les interactions résonnantes conduisant au cascades d'énergie directe et inverse prédites par la théorie de la turbulence faible, reste à élaborer. En ce sens, l'étude des couplages entre les domaines de l'eau profonde et de l'eau peu profonde se révélera sans doute un sujet d'étude passionnant.

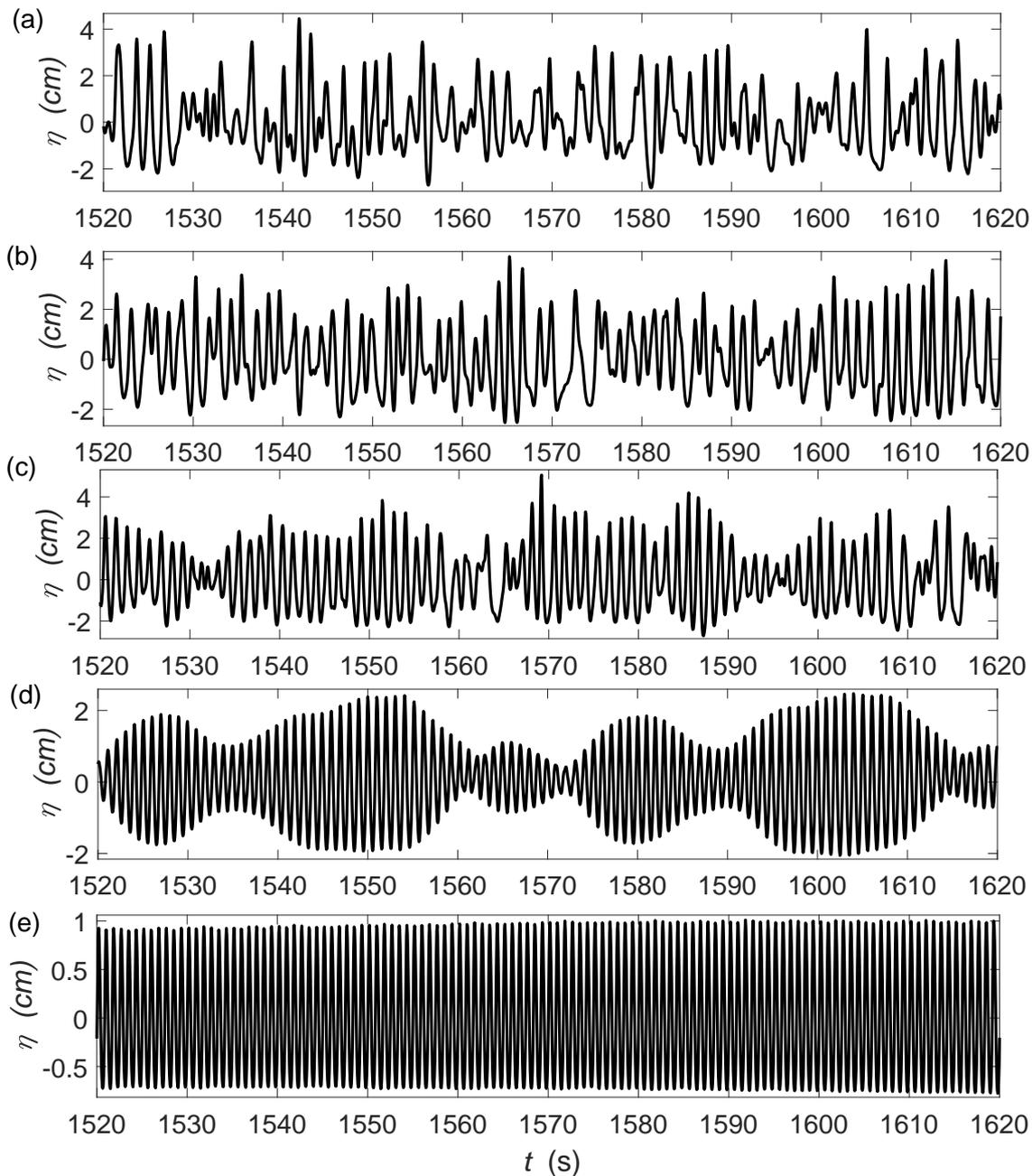


FIGURE 8.43: Séries temporelles au terme de 1500 s d'évolution, filtrées directionnellement pour ne garder que les ondes se propageant du batteur vers le mur à 10 m de ce dernier. La profondeur est de 20 cm tandis que la hauteur crête à creux est de 3 cm. On prend successivement $f = 0.6$ Hz, $U = 0.20$ (a), $f = 0.7$ Hz, $U = 0.14$ (b), $f = 0.8$ Hz, $U = 0.11$ (c), $f = 1$ Hz, $U = 0.07$ (d), $f = 1.2$ Hz, $U = 0.05$ (e).

Bibliographie

- [1] ABLOWITZ, M., AND SEGUR, H. Solitons and the inverse scattering transform, vol. 4. Siam, 1981.
- [2] AIRY, G. B., 1845 : Tides and waves. Encyclopedia metropolitana, 241–396.
- [3] BOUSSINESQ, J. Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. Journal de mathématiques pures et appliquées (1872), 55–108.
- [4] CARBONE, F., DUTYKH, D., AND EL, G. Macroscopic dynamics of incoherent soliton ensembles : Soliton gas kinetics and direct numerical modelling. EPL (Europhysics Letters) **113**, 3 (2016), 30003.
- [5] CHANSON, H. Characteristics of undular hydraulic jumps. Tech. rep., 1993.
- [6] CHICONE, C. Ordinary differential equations with applications, vol. 34. Springer Science & Business Media, 2006.
- [7] CHRISTOV, I. C. Hidden solitons in the zabusky–kruskal experiment : Analysis using the periodic, inverse scattering transform. Mathematics and Computers in Simulation **82**, 6 (2012), 1069–1078.
- [8] CIENFUEGOS, R., BARTHÉLEMY, E., AND BONNETON, P. A fourth order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive Boussinesq-type equations. Part I : model development and analysis. International Journal for Numerical Methods in Fluids **51**, 11 (2006), 1217–1253.
- [9] CIENFUEGOS, R., BARTHÉLEMY, E., AND BONNETON, P. A fourth-order compact finite volume scheme for fully nonlinear and weakly dispersive boussinesq-type equations. Part ii : boundary conditions and validation. International Journal for Numerical Methods in Fluids **53**, 9 (2007), 1423–1455.
- [10] COSTA, A., OSBORNE, A. R., RESIO, D. T., ALESSIO, S., CHRIVÌ, E., SAGGESE, E., BELLOMO, K., AND LONG, C. E. Soliton turbulence in shallow water ocean surface waves. Physical review letters **113**, 10 (2014), 108501.

- [11] CRAIG, W., GUYENNE, P., HAMMACK, J., HENDERSON, D., AND SULEM, C. Solitary water wave interactions. Physics of Fluids 18, 5 (2006), 057106.
- [12] DAUXOIS, T., AND PEYRARD, M. Physics of solitons. Cambridge University Press, 2006.
- [13] DENG, G., BIONDINI, G., AND TRILLO, S. Small dispersion limit of the korteweg–de vries equation with periodic initial conditions and analytical description of the zabusky–kruskal experiment. Physica D : Nonlinear Phenomena 333 (2016), 137–147.
- [14] DRAZIN, P. G., AND JOHNSON, R. S. Solitons : an introduction, vol. 2. Cambridge university press, 1989.
- [15] DUTYKH, D., AND PELINOVSKY, E. Numerical simulation of a solitonic gas in kdv and kdv–bbm equations. Physics Letters A 378, 42 (2014), 3102–3110.
- [16] EL, G. The thermodynamic limit of the whitham equations. Physics Letters A 311, 4-5 (2003), 374–383.
- [17] EL, G., AND KAMCHATNOV, A. Kinetic equation for a dense soliton gas. Physical review letters 95, 20 (2005), 204101.
- [18] EL, G. A. Critical density of a soliton gas. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 26, 2 (2016), 023105.
- [19] ENGELBRECHT, J., AND SALUPERE, A. On the problem of periodicity and hidden solitons for the kdv model. Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science 15, 1 (2005), 015114.
- [20] EZERSKY, A., POLUKHINA, O., BROSSARD, J., MARIN, F., AND MUTABAZI, I. Spatio-temporal properties of solitons excited on the surface of shallow water in a hydrodynamic resonator. Physics of Fluids 18, 6 (2006), 067104.
- [21] EZERSKY, A., SLUNYAEV, A., MOUAZÉ, D., AND CHOKCHAI, W. Occurrence of standing surface gravity waves modulation in shallow water. European Journal of Mechanics-B/Fluids 28, 4 (2009), 521–531.
- [22] FERMI, E., PASTA, J., AND ULAM, S. Studies of the nonlinear problems, i. los alamos report la-1940, 1955. later published in collected papers of enrico fermi, ed. e. segre, vol. ii, 1965.
- [23] GARDNER, C. S., GREENE, J. M., KRUSKAL, M. D., AND MIURA, R. M. Method for solving the korteweg-devries equation. Physical review letters 19, 19 (1967), 1095.
- [24] GARDNER, C. S., GREENE, J. M., KRUSKAL, M. D., AND MIURA, R. M. Korteweg-devries equation and generalizations. vi. methods for exact solution. Communications on pure and applied mathematics 27, 1 (1974), 97–133.
- [25] GIOVANANGELI, J.-P., KHARIF, C., AND STEPANYANTS, Y. Soliton spectra of random water waves in shallow basins. Mathematical Modelling of Natural Phenomena 13, 4 (2018), 40.
- [26] GUIZIE, K., AND BARTHÉLEMY, E. Accuracy of solitary wave generation by a piston wave maker. Journal of Hydraulic Research 40, 3 (2002), 321–331.

- [27] GUREVICH, A., ZYBKIN, K., ET AL. Development of stochastic oscillations in a one-dimensional dynamical system described by the korteweg-de vries equation. Journal of Experimental and Theoretical Physics 88, 1 (1999), 182–195.
- [28] HAMMACK, J. L., AND SEGUR, H. The korteweg-de vries equation and water waves. part 2. comparison with experiments. Journal of Fluid mechanics 65, 2 (1974), 289–314.
- [29] JEFFREYS, H., AND JEFFREYS, B. Methods of mathematical physics. Cambridge university press, 1999.
- [30] KEULEGAN, G. H. Gradual damping of solitary waves. J. Res. Natl. Bur. Stand 40, 6 (1948), 487–498.
- [31] KORTEWEG, D. J., AND DE VRIES, G. Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 39, 240 (1895), 422–443.
- [32] LAX, P. Pd lax, commun. pure appl. math. 21, 467 (1968). Commun. Pure Appl. Math. 21 (1968), 467.
- [33] LAX, P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves. Communications on pure and applied mathematics 21, 5 (1968), 467–490.
- [34] LEMOINE, R. Sur les ondes positives de translation dans les canaux et sur les ressauts ondulés de faible amplitude. La Houille Blanche, 2 (1948).
- [35] LONG, C. E., AND RESIO, D. T. Wind wave spectral observations in currituck sound, north carolina. Journal of Geophysical Research : Oceans 112, C5 (2007).
- [36] LOWMAN, N. K., HOEFER, M. A., AND EL, G. A. Interactions of large amplitude solitary waves in viscous fluid conduits. Journal of Fluid Mechanics 750 (2014), 372–384.
- [37] MAGNUS, W., AND WINKLER, S. Hill’s equation. Courier Corporation, 2013.
- [38] NOVIKOV, S. Integrability in mathematics and theoretical physics : solitons. The Mathematical Intelligencer 14, 4 (1992), 13–21.
- [39] NOVIKOV, S., MANAKOV, S., PITAEVSKII, L., AND ZAKHAROV, V. Theory of solitons. The inverse scattering method. Plenum Publishing Corporation, 1984.
- [40] OSBORNE, A. Behavior of solitons in random-function solutions of the periodic korteweg-de vries equation. Physical review letters 71, 19 (1993), 3115.
- [41] OSBORNE, A. Automatic algorithm for the numerical inverse scattering transform of the korteweg-de vries equation. Mathematics and computers in simulation 37, 4-5 (1994), 431–450.
- [42] OSBORNE, A., AND BERGAMASCO, L. The solitons of zabusky and kruskal revisited : perspective in terms of the periodic spectral transform. Physica D : Nonlinear Phenomena 18, 1-3 (1986), 26–46.
- [43] OSBORNE, A., AND BURCH, T. Internal solitons in the andaman sea. Science 208, 4443 (1980), 451–460.

- [44] OSBORNE, A., AND SEGRE, E. Numerical solutions of the korteweg-de vries equation using the periodic scattering transform μ -representation. Physica D : Nonlinear Phenomena **44**, 3 (1990), 575–604.
- [45] OSBORNE, A. R. 17 - automatic algorithm for the spectral eigenvalue problem for the kdv equation. In Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform, A. R. Osborne, Ed., vol. 97 of International Geophysics. Academic Press, 2010, pp. 423 – 450.
- [46] OSBORNE, A. R. 28 - nonlinear fourier analysis and filtering of ocean waves. In Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform, A. R. Osborne, Ed., vol. 97 of International Geophysics. Academic Press, 2010, pp. 713 – 744.
- [47] OSBORNE, A. R. 30 - nonlinearity in duck pier data. In Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform, A. R. Osborne, Ed., vol. 97 of International Geophysics. Academic Press, 2010, pp. 779 – 794.
- [48] OSBORNE, A. R. Chapter 15 - schottky uniformization. In Nonlinear Ocean Waves and the Inverse Scattering Transform, A. R. Osborne, Ed., vol. 97 of International Geophysics. Academic Press, 2010, pp. 353 – 382.
- [49] PELINOVSKY, E., AND SERGEEVA, A. Numerical modeling of the kdv random wave field. European Journal of Mechanics-B/Fluids **25**, 4 (2006), 425–434.
- [50] PELINOVSKY, E. N., SHURGALINA, E., SERGEEVA, A., TALIPOVA, T. G., EL, G., AND GRIMSHAW, R. H. Two-soliton interaction as an elementary act of soliton turbulence in integrable systems. Physics Letters A **377**, 3-4 (2013), 272–275.
- [51] RANDOUX, S., WALCZAK, P., ONORATO, M., AND SURET, P. Intermittency in integrable turbulence. Phys. Rev. Lett. **113** (Sep 2014), 113902.
- [52] REDOR, I., BARTHÉLEMY, E., MICHALLET, H., ONORATO, M., AND MORDANT, N. Experimental evidence of a hydrodynamic soliton gas. Physical Review Letters **122**, 21 (2019), 214502.
- [53] SCOTT-RUSSELL, J. Report on waves. In Proc. Roy. Soc. Edinburgh (1844), vol. 319.
- [54] SEABRA SANTOS, F. J. Contribution à l'étude des ondes de gravité bidimensionnelles en eau peu profonde. PhD thesis, 1985.
- [55] SERRE, F. Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. La Houille Blanche, 6 (1953), 830–872.
- [56] SHURGALINA, E. Dynamique de champs de vagues irréguliers en zone côtière. PhD thesis, Ecole centrale de Marseille, 2015.
- [57] SURET, P., PICOZZI, A., AND RANDOUX, S. Wave turbulence in integrable systems : nonlinear propagation of incoherent optical waves in single-mode fibers. Optics express **19**, 18 (2011), 17852–17863.
- [58] TEMPERVILLE, A. Contribution à la théorie des ondes de gravité en eau peu profonde. PhD thesis, 1985.

-
- [59] TISSIER, M. Etude numérique de la transformation des vagues en zone littorale, de la zone de levée aux zones de surf et de jet de rive. PhD thesis, Bordeaux 1, 2011.
- [60] TRILLO, S., DENG, G., BIONDINI, G., KLEIN, M., CLAUSS, G., CHABCHOUB, A., AND ONORATO, M. Experimental observation and theoretical description of multisoliton fission in shallow water. Physical review letters **117**, 14 (2016), 144102.
- [61] TSAI, R. A versatile camera calibration technique for high-accuracy 3d machine vision metrology using off-the-shelf tv cameras and lenses. IEEE Journal on Robotics and Automation **3**, 4 (1987), 323–344.
- [62] URSELL, F. The long-wave paradox in the theory of gravity waves. In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society (1953), vol. 49, Cambridge University Press, pp. 685–694.
- [63] WEINFURTNER, S., TEDFORD, E. W., PENRICE, M. C. J., UNRUH, W. G., AND LAWRENCE, G. A. Measurement of stimulated hawking emission in an analogue system. Phys. Rev. Lett. **106** (Jan 2011), 021302.
- [64] ZABUSKY, N. J., AND KRUSKAL, M. D. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. Physical review letters **15**, 6 (1965), 240.
- [65] ZAKHAROV, V. Kinetic equation for solitons. Sov. Phys. JETP **33**, 3 (1971), 538–540.
- [66] ZAKHAROV, V. E. Turbulence in integrable systems. Studies in Applied Mathematics **122**, 3 (2009), 219–234.
- [67] ZHANG, J. E., AND LI, Y. Bidirectional solitons on water. Physical Review E **67**, 1 (2003), 016306.

