



**HAL**  
open science

# Exemples de systèmes dynamiques : comptage en mesure infinie, enlacement sur le tore et échanges d'intervalles affines

Adrien Boulanger

► **To cite this version:**

Adrien Boulanger. Exemples de systèmes dynamiques : comptage en mesure infinie, enlacement sur le tore et échanges d'intervalles affines. Théorie spectrale [math.SP]. Sorbonne Université, 2018. Français. NNT : 2018SORUS250 . tel-02475873

**HAL Id: tel-02475873**

**<https://theses.hal.science/tel-02475873>**

Submitted on 12 Feb 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie



École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

# THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

**Adrien BOULANGER**

---

## **Exemples de systèmes dynamiques : comptage en mesure infinie, enlacement sur le tore et échanges d'intervalles affines**

---

dirigée par Gilles COURTOIS et Françoise DAL'BO

Soutenue le 3 juillet 2018 devant le jury composé de :

M. Nicolas BERGERON	Sorbonne Université	examineur
M. Alexander BUFETOV	Université d'Aix-Marseille	examineur
M. Gilles CARRON	Université de Nantes	examineur
M. Gilles COURTOIS	Sorbonne Université	directeur
M <sup>me</sup> Françoise DAL'BO	Université de Rennes 1	directrice
M. Pierre DEHORNOY	Université Grenoble Alpes	examineur
M. Sébastien GOUËZEL	Université de Nantes	rapporteur

Institut de mathématiques de Jussieu-  
Paris Rive gauche. UMR 7586.  
Boîte courrier 247  
4 place Jussieu  
75 252 Paris Cedex 05

Université Pierre et Marie Curie.  
École doctorale de sciences  
mathématiques de Paris centre.  
Boîte courrier 290  
4 place Jussieu  
75 252 Paris Cedex 05

*À mon père,*



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale.</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Mouvement Brownien et problème de comptage.</b>	<b>15</b>
2.1	Premières définitions et état de l'art . . . . .	15
2.2	Introduction à l'approche Brownienne pour le comptage et énoncés des résultats. . . . .	24
2.2.1	De l'équidistribution des sphères au comptage. . . . .	24
2.2.2	L'approche brownienne . . . . .	26
2.2.3	Une introduction au noyau de la chaleur dans $\mathbb{H}^3$ . . . . .	29
2.2.4	Divergence, récurrence. . . . .	32
2.2.5	Les $\mathbb{Z}$ -revêtements de variétés compactes ; une interprétation probabiliste du comptage. . . . .	35
2.2.6	Présentation détaillée des résultats. . . . .	39
2.3	Noyau de la chaleur et fonction orbitale . . . . .	44
2.3.1	Démonstration du théorème de comparaison 2.2.27 . . . . .	45
2.3.2	Démonstration du théorème de la borne supérieure 1.0.5, 2.2.29. . . . .	55
2.3.3	Démonstration du théorème comptage-chaleur 1.0.7, renforcé 2.2.32 . . . . .	59
2.4	Estimées du noyau de la chaleur en grand temps. . . . .	61
2.4.1	Le cas des revêtements nilpotents de variétés hyperboliques compactes. . . . .	61
2.4.2	Les demi-cylindres hyperboliques. . . . .	66
<b>3</b>	<b>Enlacement et théorie spectrale.</b>	<b>75</b>
3.1	Autour de l'enlacement. . . . .	75
3.1.1	L'enlacement . . . . .	75
3.1.2	Sections d'un champ de vecteurs . . . . .	82
3.1.3	Les formes d'enlacement. . . . .	90
3.2	L'enlacement et l'opérateur laplacien . . . . .	93
3.2.1	Noyau de Green . . . . .	93
3.2.2	Une forme d'enlacement venant de la métrique . . . . .	94

3.2.3	Comportement de la forme d'enlacement sous l'action d'une isométrie.	95
3.3	Une formule spectrale pour l'enlacement . . . . .	96
3.3.1	Le noyau de la chaleur sur les formes différentielles . . . . .	97
3.3.2	Les courbes diffuses . . . . .	97
3.3.3	Les séries approximantes . . . . .	99
3.4	Application : enlacement des géodésiques sur le tore $\mathbb{T}^3$ . . . . .	102
3.4.1	Énoncé du théorème principal. . . . .	102
3.4.2	Théorie spectrale des formes différentielles du 3-tore . . . . .	104
3.4.3	Calcul des séries approximantes 3.3.11. . . . .	106
3.4.4	Une famille de fonctions qui converge uniformément. . . . .	111
3.4.5	Le cas particulier du flot géodésique du tore $\mathbb{T}^2$ . . . . .	112
<b>4</b>	<b>La géométrie des échanges d'intervalles affines.</b>	<b>115</b>
4.1	Introduction. . . . .	115
4.1.1	Les échanges d'intervalles . . . . .	115
4.1.2	Les surfaces de translations. . . . .	118
4.1.3	Un exemple d'échange d'intervalles affine . . . . .	121
<b>5</b>	<b>Perspectives.</b>	<b>155</b>
5.1	Géométrie hyperbolique. . . . .	155
5.1.1	La décroissance grossière d'une certaine fonction. . . . .	155
5.1.2	Les variétés topologiquement sages. . . . .	156
5.1.3	Généralisations du théorème 2.2.27 . . . . .	157
5.1.4	Opérateurs de transferts. . . . .	158
5.2	L'enlacement. . . . .	158
5.2.1	Étude du lieu singulier de la forme $d\theta$ . . . . .	158
5.2.2	Les sections de Birkhoff du flot géodésique sur le tore $\mathbb{T}^3$ . . . . .	159
5.2.3	Première valeur propre du laplacien sur les formes : cas particulier de $\mathbb{S}^3$ . . . . .	160
5.3	Échanges d'intervalles affines. . . . .	164
5.3.1	Les espaces de modules. En collaboration avec Selim Ghazouani. . .	164
5.3.2	Le flot géodésique des surfaces affines . . . . .	165

# Chapitre 1

## Introduction générale.

Cette introduction générale a pour but d'énoncer les principaux résultats de la thèse et d'en guider la lecture. Chacun des chapitres de cette thèse comporte une introduction détaillée du domaine de recherche correspondant.

### **Partie I : Une approche des problèmes de comptage par le mouvement Brownien.**

Cette partie est centrée sur l'étude de la fonction orbitale

$$N_{\Gamma}(x, y, \rho) = \# \{ \gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma \cdot y) < \rho \}$$

associée aux groupes discrets d'isométries agissant sur  $\mathbb{H}^3$ , que l'on dira Kleinien. Le comportement de cette fonction dépend fortement du taux de croissance exponentiel  $\delta_{\Gamma}$  de  $\Gamma$  ainsi que des propriétés d'une mesure  $\mu$  sur le fibré unitaire tangent de la variété hyperbolique  $\mathbb{H}^3 / \Gamma$  : la mesure de Bowen-Margulis-Sullivan. T. Roblin montre, lorsque cette mesure est finie, qu'il existe  $C > 0$  tel que

$$N_{\Gamma}(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} C e^{\delta_{\Gamma} \rho} ,$$

de plus, si la mesure est infinie

$$\frac{N_{\Gamma}(x, y, \rho)}{e^{\delta_{\Gamma} \rho}} \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 .$$

Les seuls exemples étudiés jusqu'à présent dans ce contexte sont dûs à M. Pollicott et R. Sharp qui, en utilisant le formalisme thermodynamique, obtiennent un équivalent en  $C \rho^{-\frac{d}{2}} e^{2\rho}$  dans le cadre des groupes Kleiniens associés aux  $\mathbb{Z}^d$ -revêtements de variétés compactes. La démonstration, dont on donne une heuristique probabiliste en 2.2.5, repose sur une propriété de mélange forte du flot géodésique sur la variété compacte sous-jacente.



Le but de notre travail est de développer une approche par le mouvement brownien pour atteindre de nouveaux exemples en mesure infinie, en particulier sans nécessité de quotient compact. On renvoie à la section 2.2 pour une présentation précise de la méthode. Les exemples d'intérêt de ce manuscrit étant de type convergent, on énoncera les théorèmes qui suivent dans ce contexte. Les versions complètes des énoncés se trouvent dans les sous-sections 2.2.6 et 2.4.1.

Une première classe d'exemples concerne les variétés isométriques à l'infini au graphe de Cayley d'un groupe nilpotent, comprenant donc le cas précédent des revêtements abéliens. La mesure de Bowen-Margulis-Sullivan est infinie dans ce cas car elle s'identifie à la mesure de Liouville (voir la remarque 2.4.4). La majoration du théorème ci-dessous n'est pas optimale, mais donne une borne supérieure non triviale.

**Théorème 1.0.1.** Soit  $\Gamma$  le groupe Kleinien associé à une variété isométrique à l'infini au graphe de Cayley d'un groupe nilpotent finiment engendré  $N$  qui n'est pas  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}^2$ , alors pour tout  $x, y \in \mathbb{H}^3$  :

- il existe une constante  $C_+$  telle que pour  $\rho$  assez grand on a

$$\frac{N_\Gamma(x, y, \rho)}{e^{2\rho}} \leq C_+ \frac{\sqrt{\rho}}{\text{vol}(B(\sqrt{\rho}))} ;$$

- il existe deux constantes  $C, c > 0$  telles que pour  $\rho$  assez grand on a

$$\frac{c}{\text{vol}(B(\sqrt{\rho}))} \leq \int_\rho^{+\infty} N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} dt \leq \frac{C}{\text{vol}(B(\sqrt{\rho}))} ,$$

où  $\text{vol}(B(x, \sqrt{\rho}))$  est le volume de n'importe quelle boule du graphe de Cayley de rayon  $\sqrt{\rho}$ .

Nous donnons la définition d'isométries à l'infini dans la sous-section 2.4.1, ainsi que la démonstration de ce théorème. Un premier exemple d'un tel groupe est donné par le groupe Kleinien associé à un revêtement nilpotent d'une variété hyperbolique compacte. Nous avons des énoncés analogues pour le cas de  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}^2$  mais, pour ne pas alourdir cette introduction, nous les repoussons à la sous-section 2.4.1.

Les estimées de la fonction orbitale ne sont pas aussi précises que celles obtenues par M. Pollicott et R. Sharp mais peuvent être améliorées sous une hypothèse supplémentaire (voir 2.2.36).

**Corollaire 1.0.2.** Soit  $\Gamma$  le groupe Kleinien associé à une variété isométrique à l'infini au graphe de Cayley d'un groupe nilpotent  $N$  finiment engendré qui ne soit pas  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{Z}^2$ . S'il

existe  $x, y \in \mathbb{H}^3$  tels que la fonction

$$\rho \mapsto e^{-2\rho} N_\Gamma(x, y, \rho)$$

soit encadrée par deux fonctions décroissantes, alors il existe deux constantes  $C, c > 0$  telles que pour  $\rho$  assez grand on a :

$$\frac{c e^{2\rho}}{\text{vol}(B(\sqrt{\rho}))} \leq N_\Gamma(x, y, \rho) \leq \frac{C e^{2\rho}}{\text{vol}(B(\sqrt{\rho}))} .$$

On ne connaît pas de fonctions orbitales ne satisfaisant pas la condition ci-dessus, elle semble cependant difficile à vérifier en général. Dans le cas des revêtements abéliens on sait que la fonction orbitale est asymptotiquement décroissante par le théorème de R. Sharp et M. Pollicott. Le théorème ci-dessus donne alors une interprétation du terme polynomial comme le taux de croissance des boules dans la variété  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ . On pourrait s'attendre à un équivalent dans le cas où le groupe  $\Gamma$  serait le groupe Kleinien d'un revêtement nilpotent d'une sous variété hyperbolique compacte.

La deuxième classe de variétés hyperboliques de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan infinie que l'on étudie ici est un cas particulier de variété topologiquement sage, c'est-à-dire homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord. Donnons-en une description succincte. Soit  $S$  une surface hyperbolique compacte. Un célèbre théorème de L. Bers nous garantit que l'on peut paramétrer les représentations quasi-Fuschiennes d'un groupe de surface, c'est-à-dire dont l'ensemble limite est homéomorphe à un cercle, par deux copies de l'espace de Teichmüller de la surface  $S$ . On se donne ensuite un difféomorphisme  $\Phi$  pseudo-Anosov de  $S$  et on considère la suite des variétés quasi-Fuschiennes données dans les coordonnées de Bers par  $(S, \Phi^n(S))$ . Le théorème de la double limite de Thurston garantit que cette suite de variétés converge vers une variété hyperbolique  $M_{(S, \Phi)}$ . On appelle les variétés limites des demi-cylindres, nous reviendrons sur leurs géométries dans la section 2.4.2.

**Théorème 1.0.3.** Soit  $\Gamma$  le groupe Kleinien associé à un demi-cylindre, alors pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{H}^3$  il existe une constante  $C(x, y)$  telle que

$$N_\Gamma(x, y, \rho) \leq C(x, y) \frac{e^{2\rho}}{\rho} .$$

On peut signaler ici que ces variétés ne sont quasi-isométriques à aucun graphe de Cayley de groupe, et ne peuvent donc pas en particulier revêtir de quotient compact. On discute dans la sous-section 5.1.2 un comportement possible de la fonction orbitale des variétés topologiquement sages.

Notre approche repose sur l'étude des estimées en grand temps du noyau de la chaleur. L'idée est que dans l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$ , le mouvement Brownien a tendance à se comporter comme le flot géodésique. On verra quantitativement comment dans la sous-section 2.2.3. D'un autre côté, un théorème de Margulis fait le lien entre le comportement de la fonction orbitale et les probabilités de premiers retours du flot géodésique sur la variété  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ . Il est donc naturel d'essayer de tisser un lien entre les probabilités de premier retour du mouvement Brownien, c'est-à-dire des estimées en grand temps du noyau de la chaleur, et la fonction orbitale. La section 2.3 est entièrement dédiée à cette étude.

Par des méthodes différentes des nôtres, D. Sullivan montre dans [54, corollaire 2.18] que la divergence ou la convergence de la série de Poincaré dépend de la récurrence ou la transience du mouvement Brownien sur la variété quotient  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ . Le théorème suivant peut être vu comme une version quantitative de ce résultat dans le cas particulier où  $\delta_\Gamma = 2$ . On note  $p_\Gamma(x, y, t)$  le noyau de la chaleur de la variété hyperbolique  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ .

**Théorème 1.0.4** (Croissance des séries de Poincaré). Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien tel qu'il existe  $\alpha > 1$ ,  $x, y \in \mathbb{H}^3$  et deux constantes  $C, c$  telles que

$$\frac{c}{t^\alpha} \leq p_\Gamma(x, y, t) \leq \frac{C}{t^\alpha}$$

alors il existe deux constantes  $c_2, C_2 > 0$  telle que

$$\frac{c_2}{t^{\alpha-1}} \leq \sum_{\{\gamma \in \Gamma \mid d(x, \gamma \cdot y) \geq t\}} e^{-2d(x, \gamma \cdot y)} \leq \frac{C_2}{t^{\alpha-1}}.$$

Nous n'avons énoncé ce théorème que dans le cas  $\alpha > 1$  par souci de clarté, des formules similaires sont aussi disponibles pour les valeurs de  $\alpha \in [0, 1]$ , voir 2.2.6.

Remarquons que l'hypothèse sur la croissance polynomiale du noyau de la chaleur implique que  $\delta_\Gamma = 2$ .

Une méthode différente et indépendante de la preuve du théorème 1.0.4 précédent donne également une majoration de la fonction orbitale par le noyau de la chaleur. La preuve sera faite en 2.3.2.

**Théorème 1.0.5** (de la borne supérieure). Il existe une constante  $C_+$  telle que pour tout groupe Kleinien  $\Gamma$  et tout  $x, y \in \mathbb{H}^3$  on a

$$\frac{N_\Gamma(x, y, t)}{e^{2t}} \leq C_+ \sqrt{t} p_\Gamma \left( x, y, \frac{t}{2} \right). \quad (1.0.6)$$

Le théorème suivant s'appuie quant à lui sur les deux théorèmes précédents. La preuve sera faite en 2.3.3

**Théorème 1.0.7** (comptage-chaleur). Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien tel qu'il existe  $\alpha > 1$ ,  $x, y \in \mathbb{H}^3$  et deux constantes  $C, c$  telles que

$$\frac{c}{t^\alpha} \leq p_\Gamma(x, y, t) \leq \frac{C}{t^\alpha}$$

alors il existe deux constantes  $c_2, C_2 > 0$  telle que

$$\frac{c_2}{s^{\alpha-1}} \leq \int_s^{+\infty} N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} dt \leq \frac{C_2}{s^{\alpha-1}}. \quad (1.0.8)$$

Le comportement du mouvement Brownien sur les revêtements nilpotents de variétés compactes est bien compris depuis les travaux de Varopoulos, voir section 2.4.1. Le théorème 1.0.1 s'appuie sur ces résultats. L'analyse du noyau de la chaleur dans le cas des demi-cylindres est plus fine et sera faite en section 2.4.2.

## Partie II : Une approche de l'enlacement par la théorie spectrale et ses applications aux géodésiques du tore $\mathbb{T}^3$ .

Étant donné une variété  $M$  compacte de dimension 3, nous nous intéressons dans cette partie à l'enlacement  $\text{lk}(\Gamma, \Upsilon)$  entre deux familles finies quelconques  $\Gamma = (\gamma_i)_{i \in I}$  et  $\Upsilon = (v_j)_{j \in J}$  de courbes orientées disjointes de  $M$  bordant chacune une surface. Dans le cas où la variété ambiante  $M$  est une sphère d'homologie, ces nombres d'enlacement ont une interaction forte avec l'existence de sections de Birkhoff pour les flots de champs de vecteurs. En effet, un théorème de D. Fried garantit que si une collection d'orbites périodiques d'un flot Anosov enlacent toutes les autres orbites périodiques avec les mêmes signes, alors elles bordent une section de Birkhoff.

Un cas particulièrement étudié est celui des flots géodésiques sur les fibrés unitaires tangents des surfaces. On peut citer ici les travaux de P. Dehornoy qui montrent que cette propriété est satisfaite sur toute les fibrés unitaires tangents des orbifolds de type  $(p, q, r)$ .

À l'inverse, dans le cadre du flot géodésique sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , P. Dehornoy calcule l'enlacement d'orbites périodiques - lorsque ce nombre est bien défini - en construisant des sections de Birkhoff.

La motivation principale de notre travail est de généraliser le travail de P. Dehornoy à toutes les géodésiques du tore  $\mathbb{T}^3$ . La méthode repose sur la théorie spectrale des formes différentielles pour le calcul des nombres d'enlacement et s'appuie sur un résultat de T. Vogel. Il construit [58], dans la lignée de De Rham, une forme d'enlacement intégrable sur une variété Riemannienne compacte mettant en jeu le noyau de l'opérateur de Green agissant

sur les 1-formes différentielles. Par l'utilisation du noyau de la chaleur et la décomposition dans une base orthonormée du noyau de Green, on donne une formule spectrale pour l'enlacement de deux multi-courbes.

**Théorème 1.0.9.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte et  $\Gamma, \Upsilon$  deux multi-courbes disjointes homologiquement triviales de  $M$ , on a :

$$\text{lk}(\Gamma, \Upsilon) = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda_k t} \int_{\Gamma} \eta_k \int_{\Upsilon} * \left( \frac{d\eta_k}{\lambda_k} \right), \quad (1.0.10)$$

où  $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une base orthonormée  $L^2$ -orthogonale aux formes harmoniques des 1-formes propres du laplacien et  $(\lambda_k)$  les valeurs propres associées.

On reviendra plus précisément sur les objets impliqués dans la formule ci-dessus dans la section 3.2. La section 3.3 est dédiée à la démonstration d'une version un peu renforcée de ce théorème. Une fois cette formule établie, on peut espérer en tirer quelque chose pour les 3-variétés dont la théorie spectrale est bien connue, par exemple le 3-tore plat  $\mathbb{T}^3 := \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ . Un premier corollaire au théorème 1.0.9 est une formule donnant l'enlacement de toutes les multi-courbes constituées de géodésiques fermées du tore  $\mathbb{T}^3$ . Nous explicitons et prouvons cette formule dans la section 3.4. Cette formule se spécifie comme suit dans le cas de collections de multi-géodésiques qui venaient des orbites périodiques du flot géodésique sur le 2-tore plat.

**Corollaire 1.0.11.** Soit  $\Gamma = (\gamma^i)_{i \in I}$  et  $\Upsilon = (v^j)_{j \in J}$  deux multi-géodésiques de  $\mathbb{T}^2$ . Vues comme orbites périodiques du flot géodésique dans le fibré unitaire tangent du 2-tore, elles s'enlacent selon la formule suivante :

$$\text{lk}(\Gamma, \Upsilon) = \sum_{i \in I, j \in J} i(\gamma^i, v^j) \frac{1 - \frac{\theta_{i,j}}{\pi}}{2},$$

où  $\theta_{i,j}$  est l'unique détermination dans  $[0, 2\pi[$  de l'angle orienté  $\theta$  fait à l'intersection des deux courbes (voir figure ci-dessous) alors que  $i(\gamma^i, v^j)$  est l'intersection algébrique des courbes  $\gamma^i$  et  $v^j$  sur la base, le 2-tore.

Cette formule met en avant le lien que le nombre d'intersection des géodésiques sur le tore  $\mathbb{T}^2$  entretient avec le nombre d'enlacement de ces mêmes géodésiques vu dans le tore  $\mathbb{T}^3$ . Tous les termes de la somme sont positifs, et strictement positifs dès lors que l'intersection est non triviale. On retrouve en particulier que, lorsque la multi-courbe  $\Gamma$  est composée d'au moins trois géodésiques, l'enlacement avec toute collection d'orbites périodiques homologiquement triviales est strictement positif.

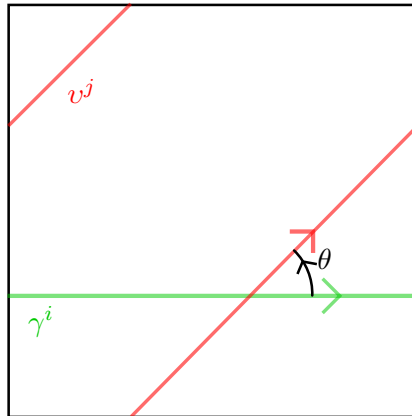


FIGURE 1.1 – Ici les deux courbes ne s’intersectent qu’en un point. L’angle orienté  $\theta$  défini ci-dessus est représenté en noir.

### Partie III : Dynamique d’une famille à un paramètre d’échanges d’intervalles affines.

Cette partie porte sur l’étude des échanges d’intervalles affines dans le cas particulier d’une famille  $(F_t)$  définie par  $F_t = F \circ \text{rot}_t$  où  $\text{rot}_t$  est la rotation

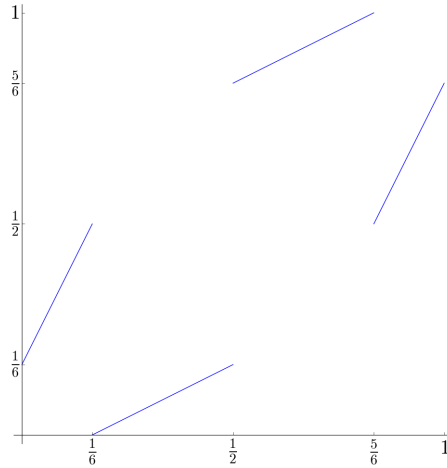
$$\text{rot}_t(x) = x + t \pmod{1}$$

et  $F$  est une transformation bijective affine par morceaux du cercle.

Dans le cas où  $F_t = \text{rot}_t$ , son comportement est bien connu : si  $t$  est rationnel,  $F_t$  est complètement périodique, à l’opposé si  $t$  est irrationnel la mesure de Lebesgue est l’unique mesure invariante. Ce résultat a été généralisé par [32] au cas où  $F$  est une translation par morceaux bijective : pour presque tout  $t$ , la transformation  $F_t$  est uniquement ergodique. Une question naturelle est alors de se demander quels types de résultats on peut espérer quand l’application  $F$  n’est plus une translation par morceaux mais une application affine par morceaux.

Dans notre travail "Cascades in the dynamics of affine interval exchange transformations", écrit en commun avec Selim Ghazouani et Charles Fougerson, nous traitons un cas particulier où l’application  $F$  est donnée explicitement.

Notre théorème principal peut alors se formuler comme ci-dessous.

FIGURE 1.2 – Le graphe de l'échange d'intervalles affine  $F$ .

**Théorème 1.0.12.** Il existe une partition du cercle en 4 ensembles  $(A,B,C,D)$  telle que

- $A$  est ouvert de mesure pleine, et pour tout  $t \in A$ ,  $F_t$  est dynamiquement triviale ;
- $B$  est un Cantor de mesure nulle, et pour tout  $t \in B$ , l'ensemble  $\omega$ -limite de tout point s'accumule sur un cantor ;
- $C$  est un cantor de mesure nul, et pour tout  $t \in C$ ,  $F_t$  n'est pas dynamiquement triviale et conjecturalement minimale ;
- $D$  est dénombrable, et pour tout  $t \in D$ ,  $F_t$  est complètement périodique.

Notre méthode repose sur l'introduction d'une surface de dilatation, analogue aux surfaces de translations dans ce contexte,  $\Sigma$ , dite disco surface, munie d'un gros groupe d'automorphismes et donnant donc naissance à un gros groupe de Veech. On étudie alors les feuilletages naturellement définis sur  $\Sigma$  pour lesquels la famille de transformations  $F_t$  s'interprète en termes d'applications de premier retour sur une transversale ; elles partagent donc certaines propriétés dynamiques avec celles des feuilletages. Nous étudions le comportement de ces feuilletages par la méthode dite d'induction de Rauzy-Veech que nous adaptons au cas affine. Cette approche met en jeu l'action du groupe de Veech sur la droite projective réelle et ses relations avec la dynamique topologique des feuilletages directionnels.

Une conséquence de cette étude est une description complète du groupe de Veech de la disco surface.

**Théorème 1.0.13.** Le groupe de Veech de la disco surface est engendré par les trois matrices suivantes de  $SL_2(\mathbb{R})$  :

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

## Chapitre 2

# Mouvement Brownien et problème de comptage.

### 2.1 Premières définitions et état de l'art

Avant même d'entrer dans le sujet je voudrais insister sur l'existence du livre [4] de Martine Babillot au sujet des problèmes de comptage qui offre un panorama complet des résultats autour du sujet.

Soit  $X$  un espace métrique et  $\Gamma$  un groupe agissant proprement discontinument par isométries sur  $X$ . Une question naturelle consiste à estimer la croissance du nombre de points de l'orbite  $\Gamma \cdot y$  dans une boule  $B(x, \rho)$  centrée en  $x$  de rayon  $\rho$  lorsque  $\rho$  tend vers l'infini.

**Définition 2.1.1.** La **fonction orbitale** du groupe  $\Gamma$ , notée  $N_\Gamma(x, y, \rho)$ , est définie comme suit :

$$N_\Gamma(x, y, \rho) := \#\{\gamma \in \Gamma, d(x, \gamma \cdot y) < \rho\} \quad (2.1.2)$$

où  $x$  et  $y$  sont deux points de  $X$ .

La première occurrence d'une telle étude remonte à Gauss, qui étudia le comportement de la fonction orbitale associée à l'action du sous groupe  $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ . Gauss montra :

$$|N_{\mathbb{Z}^2}(0, 0, \rho) - \pi\rho^2| \leq 2\pi\rho,$$

ce qui implique l'équivalent suivant de la fonction orbitale

$$N_{\mathbb{Z}^2}(0, 0, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} \pi\rho^2.$$

Détaillons un peu son raisonnement.



Le problème est en fait de dénombrer les points de  $\mathbb{R}^2$  à coordonnées entières dans le disque  $B(0, \rho)$  de centre 0 et de rayon  $\rho$ . Remarquons qu'autour de tout point  $(n, m) \in \mathbb{Z}^2 \cap B(0, \rho)$  on peut trouver un carré de côté unité dont le point  $(m, n)$  est le centre, comme représenté sur la figure ci-dessous.

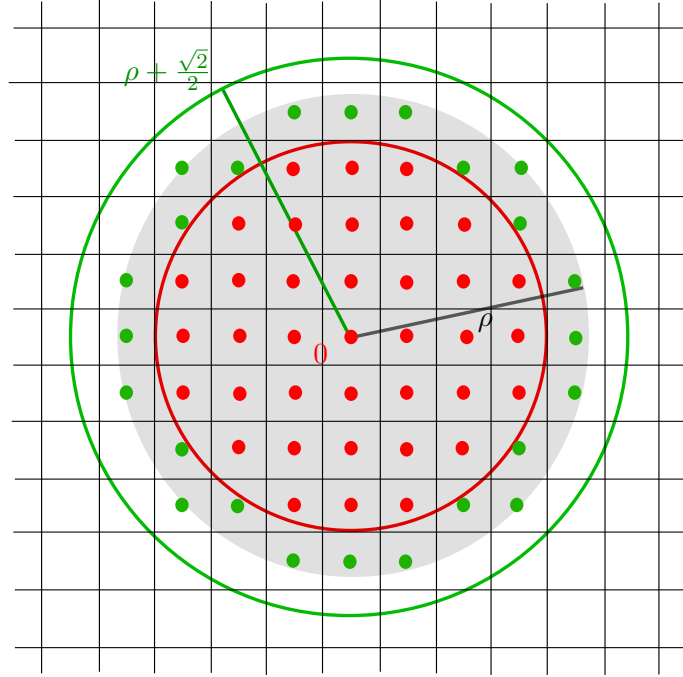


FIGURE 2.1 – En gris la boule de centre 0 et de rayon  $\rho$ . Les points de l'orbite de 0 contenus dans cette boule sont coloriés en fonction qu'ils sont ou pas dans l'anneau de rayon  $\rho \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , la grille représente les translatsés d'un domaine fondamental contenant le point 0.

L'union des carrés centrés en des points de  $\mathbb{Z}^2 \cap B(0, \rho)$  est inclus dans un disque de centre 0 de rayon  $\rho + \frac{\sqrt{2}}{2}$  et contient un disque de centre 0 et de rayon  $\rho - \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Tout ces carrés étant disjoints et d'aire unité, on obtient par comparaison des volumes

$$\pi \left( \rho - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \leq N_{\mathbb{Z}^2}(0, 0, \rho) \leq \pi \left( \rho + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 .$$

Cela implique en développant les termes carrés dans les inéquations précédentes que pour  $\rho$  assez grand on a

$$|N_{\mathbb{Z}^2}(0, 0, \rho) - \pi \rho^2| \leq 2\pi \rho .$$

La preuve de l'énoncé de Gauss est donc élémentaire et n'utilise finalement que la croissance quadratique du volume des disques de  $\mathbb{R}^2$ . L'argument précédent pourrait être réutilisé pour estimer la fonction orbitale de l'action de  $\mathbb{Z}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ , la croissance des boules de  $\mathbb{R}^n$  étant encore polynomiale. Cette croissance polynomiale n'est plus vérifiée dans des espaces hyperboliques, voyons à quoi ce même raisonnement aboutit. Considérons à la

place de l'action de  $\mathbb{Z}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  un groupe  $\Gamma$  discret d'isométries de  $\mathbb{H}^2$  agissant de manière cocompacte. On se donne un point base  $o$ , analogue à l'origine de  $\mathbb{R}^2$ , et un domaine fondamental  $\mathcal{D}_o$  pour cette action contenant  $o$ , ce domaine fondamental jouant le rôle analogue au carré unité contenant l'origine de  $\mathbb{R}^2$ . Par cocompacité de l'action, le domaine fondamental  $\mathcal{D}_o$  est de diamètre fini que l'on notera  $C$ . On reprend ensuite exactement l'argument de Gauss. En notant  $\mathcal{B}_\Gamma(o, \rho) := \{\gamma \in \Gamma, \gamma \cdot o \in B(o, \rho)\}$  on a

$$B(o, \rho - C) \subset \bigcup_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(o, \rho)} \gamma \cdot \mathcal{D}_o \subset B(o, \rho + C) .$$

Ce qui donne, en passant au volume :

$$\text{vol}(B(o, \rho - C)) \leq \text{vol}(\mathcal{D}_o) \cdot N_\Gamma(o, o, \rho) \leq \text{vol}(B(o, \rho + C)) .$$

Rappelons la croissance du volume des disques de  $\mathbb{H}^2$ ,

$$\text{vol}(B(o, \rho)) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} \pi e^\rho .$$

La méthode proposée par Gauss ne donne donc pas mieux que l'existence de deux constantes strictement positives  $C_-$  et  $C_+$  telles que

$$C_- e^\rho \leq N_\Gamma(o, o, \rho) \leq C_+ e^\rho .$$

Bien que l'on n'ait pas d'équivalent pour la fonction orbitale, remarquons que l'on a quand même montré que la fonction orbitale admet un taux de croissance exponentielle pour les groupes agissant de façon cocompacte sur  $\mathbb{H}^2$  :

$$\frac{\ln(N_\Gamma(x, y, \rho))}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} 1$$

On peut en fait toujours définir le taux de croissance d'un groupe discret d'isométries comme suit.

**Définition 2.1.3.** Soit  $\Gamma$  un groupe agissant proprement discontinu d'isométries agissant sur un espace métrique  $X$ . On appelle **exposant critique**, que l'on notera  $\delta_\Gamma$ , la limite supérieure

$$\delta_\Gamma := \limsup_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\ln(N_\Gamma(x, y, \rho))}{\rho} .$$

L'inégalité triangulaire nous garantit que cette limite ne dépend pas des points  $x, y \in X$ . L'exposant critique est donc un invariant de l'action.

Revenons aux estimations de la fonction orbitale pour un groupe cocompacte. La preuve géométrique ne donne pas d'équivalent explicite pour celle-ci, mais rien n'empêche *a priori*

d'espérer mieux. On pourrait par exemple conjecturer que

$$N_\Gamma(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} Ce^\rho \quad (2.1.4)$$

Huber[29] le premier montra par des méthodes spectrales l'asymptotique précédente dans le cas des groupes d'isométries agissant de manière cocompacte sur  $\mathbb{H}^2$ . Ce résultat a par la suite été largement généralisé, en partie par l'utilisation de méthodes plus dynamiques dont l'idée remonte à la thèse de Margulis. Le point clé de ces méthodes est la construction de mesures finies **mélangeantes pour le flot géodésique**. La construction de telles mesures qui va suivre ne suit pas l'approche initiale de Margulis, mais celle de Sullivan [53], dont le point de départ est l'existence de densité conforme introduite par Patterson dans [44]. Énonçons-en la définition dans le cas particulier des espaces hyperboliques  $\mathbb{H}^n$ .

**Définition 2.1.5.** Soit  $\delta > 0$ , une  $(\Gamma, \delta)$ -**densité conforme** est une famille de mesures  $(\mu_x)_{x \in \mathbb{H}^n}$  sur le bord  $\partial\mathbb{H}^n = \mathbb{S}^{n-1}$  de  $\mathbb{H}^n$  de masse finie vérifiant les deux axiomes suivants

$$\begin{cases} d\mu_x(\zeta) &= e^{-\delta\beta_\zeta(x,y)} d\mu_y(\zeta) \\ \gamma_*(\mu_x) &= \mu_{\gamma \cdot x} \end{cases}$$

où l'on a noté par  $\beta_\zeta(x, y)$  les fonctions de Busemann. On appellera  $\delta$  l'**exposant** de la densité conforme  $\mu$ .

Rappelons ici que l'on définit les fonctions de Busemann par

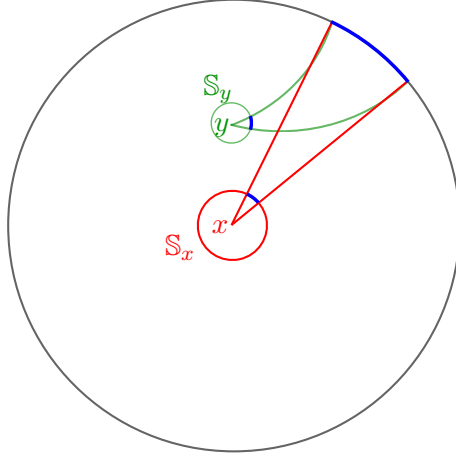
$$\beta_\zeta(x, y) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( t - d(x, \zeta_y(t)) \right),$$

où  $\zeta_x(t)$  est le point de la géodésique issue du point  $x$  pointé vers  $\zeta$  au temps  $t$ .

La première densité conforme à la laquelle on peut penser est la famille des mesures rondes, que l'on notera  $(\lambda_x)_{x \in \mathbb{H}^n}$ , sur les sphères unitaires tangentes  $(\mathbb{S}_x)_{x \in \mathbb{H}^n}$  que l'on a poussées sur le bord à l'infini par le flot géodésique, voir la figure ci-dessous.

Ici le bord de  $\mathbb{H}^2$  (le cercle noir) a été identifié avec la sphère unitaire  $\mathbb{S}_x$  tangente en  $x$  (le cercle rouge). La poussée à l'infini de la mesure ronde  $\lambda_x$  sur  $\mathbb{S}_x$  par le flot géodésique donne alors naissance à la mesure de Lebesgue sur le cercle noir. Si l'on pousse la mesure ronde cette fois depuis le point  $y$  on va obtenir une autre mesure sur le bord. Cette nouvelle mesure est à densité par rapport à Lebesgue, et cette densité est exactement donnée par les fonctions de Busemann, c'est-à-dire  $d\lambda_x(\zeta) = e^{-\beta_\zeta(x,y)} d\lambda_y(\zeta)$ .

On peut lire ce dessin comme une façon canonique d'identifier les fibres du fibré unitaire tangent en passant par le bord à l'infini. On appellera dorénavant  $(\lambda_x)_{x \in \mathbb{H}^n}$  la famille des **mesures visuelles** cette densité conforme, d'exposant  $n - 1$ .



Cette densité conforme est très spéciale car elle vérifie les deux équations pré-cédentes pour n'importe quelle isométrie de  $\mathbb{H}^n$ . De plus, on a prouvé au passage que tout groupe  $\Gamma$  d'isométries de  $\mathbb{H}^n$  admet une densité conforme d'exposant  $n - 1$ .

En plus d'en introduire la définition, Patterson montre que tout groupe  $\Gamma$  discret d'isométries de  $\mathbb{H}^n$  admet en fait une densité conforme d'exposant  $\delta_\Gamma$ . Précisons ici que les objets de la construction font encore sens dans la généralité des espaces  $CAT(-1)$ . Bien que nous énoncerons certains théorèmes dans cette généralité, nous ne définirons pas ces espaces pour lesquels nous renvoyons au mémoire de T. Roblin [49]. Contentons nous de savoir que cette classe d'espaces métriques contient les variétés riemanniennes complètes connexes simplement connexes de courbure sectionnelle uniformément majorée par  $-1$ .

L'existence même de  $\delta_\Gamma$ -densité conforme prouvée par Patterson a au moins deux corollaires importants pour ce qui est des problèmes de comptage. Le premier est dû à D. Sullivan en corollaire à son célèbre **lemme de l'ombre**, dont l'énoncé suit la définition suivante.

**Définition 2.1.6.** On définit l'**ombre** d'une boule de rayon  $r$  centrée en  $y \in \mathbb{H}^n$  vue depuis  $x \in \mathbb{H}^n$  comme

$$\mathcal{O}_r(x, y) := \{ \zeta \in \mathbb{S}^{n-1} , \exists t \in \mathbb{R}^+ , \zeta_x(t) \in B(y, r) \} .$$

La terminologie nous vient du fait que l'ensemble dont nous mesurons la masse peut se voir comme l'ombre à l'infini d'une boule de  $\mathbb{H}^n$ .

**Lemme 2.1.7** (de l'ombre, Sullivan [52]). Soit  $\Gamma$  un groupe non élémentaire d'isométrie agissant discrètement sur  $\mathbb{H}^n$ . Soit  $\mu = (\mu_x)_{x \in \mathbb{H}^n}$  une  $(\delta - \Gamma)$ -densité conforme. Pour tout  $x \in \mathbb{H}^n$  il existe  $r_0$  et  $C > 0$  tel que pour tout  $r > r_0$  et pour tout  $\gamma \in \Gamma$  on a

$$\frac{1}{C} e^{\delta r} e^{-\delta d(x, \gamma \cdot x)} e^{\delta r} \leq \mu_x(\mathcal{O}_r(x, \gamma \cdot x)) \leq C e^{\delta r} e^{-\delta d(x, \gamma \cdot x)} .$$

Le lemme de l'ombre est fondamental, Sullivan en déduit le théorème suivant.

**Théorème 2.1.8** (Sullivan [52]). Soit  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries non élémentaire d'un espace  $CAT(-1)$ . Si  $\Gamma$  admet une  $\delta$ -densité conforme alors :

$$N_{\Gamma}(x, y, \rho) \leq C_+(x, y) e^{\delta\rho} .$$

Ce qui, par définition de l'exposant critique implique  $\delta_{\Gamma} \leq \delta$ . Sullivan obtient aussi une minoration dans le contexte de la définition suivante.

**Définition 2.1.9.** On dira d'un sous groupe discret  $\Gamma$  d'isométries de  $\mathbb{H}^n$  qu'il agit de manière **convexe cocompacte** s'il existe une partie convexe de  $\mathbb{H}^n$ ,  $\Gamma$ -invariante, telle que son quotient par  $\Gamma$  soit compacte.

Dans ce cas, on pourra revenir à [52] pour une preuve, on a aussi

$$C_-(x, y) e^{\delta_{\Gamma}\rho} \leq N_{\Gamma}(x, y, \rho) .$$

En premier exemple d'un groupe convexe on peut penser à un groupe de Schottky.

Le deuxième corollaire à l'existence de densités conformes est dû à T. Roblin.

**Théorème 2.1.10** (Roblin [48]). Pour tout groupe d'isométries discret non élémentaire agissant sur des espaces  $CAT(-1)$  on a

$$\frac{\ln(N_{\Gamma}(x, y, \rho))}{\rho} \xrightarrow{\rho \rightarrow +\infty} \delta_{\Gamma} .$$

Revenons aux estimées fines de la fonction orbitale. Le théorème suivant est dû à Margulis, il généralise celui de Selberg de deux manières : au cas de la courbure variable et sans considérations pour la dimension.

**Théorème 2.1.11** (Margulis [37]). Soit  $\Gamma$  la représentation du groupe fondamental d'une variété riemannienne  $M$  compacte courbée strictement négativement dans les isométries de son revêtement universel, alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$N_{\Gamma}(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} C e^{\delta_{\Gamma}\rho} .$$

La preuve de ce théorème se base sur le **mélange** du flot géodésique sur le fibré unitaire tangent de la variété  $M$  relativement à une certaine mesure **de masse finie**, dite de Bowen-Margulis-Sullivan. Montrons comment construire une telle mesure grâce à une  $\delta_{\Gamma}$ -densité conforme, toujours dans la cas particulier de  $\mathbb{H}^n$ . On va construire sur  $U\mathbb{H}^n$  une mesure invariante par le flot géodésique  $g_t$  et par l'action du groupe  $\Gamma$  en utilisant les **coordonnées de Hopf**. Ces coordonnées donnent un paramétrage du fibré unitaire

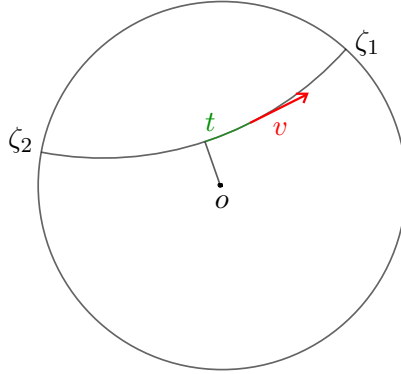


FIGURE 2.2 – Le vecteur  $v$  en rouge dans le dessin ci-dessus est complètement déterminé par la donnée d'un 2-uplet de points  $(\zeta_1, \zeta_2)$  du bord de  $\mathbb{H}^2$  et de la longueur  $t \in \mathbb{R}$  en vert.

tangent de  $\mathbb{H}^n$  par l'ensemble  $(\mathbb{S}^{n-1} \times_{\Delta} \mathbb{S}^{n-1}) \times \mathbb{R}$ , voir la figure 2.2.

Une première remarque est que, dans de telles coordonnées, le flot géodésique agit comme une translation sur le facteur  $\mathbb{R}$ . Considérons maintenant une  $\delta_{\Gamma}$ -densité conforme construite par Patterson. La densité, dans les coordonnées de Hopf, d'un candidat potentiel à être une mesure de Bowen-Margulis-Sullivan pourrait être de la forme

$$\frac{d\mu_o(\zeta_1) \otimes d\mu_o(\zeta_2)}{f(\zeta_1, \zeta_2)} \otimes dt .$$

Une telle mesure est par construction invariante par le flot géodésique. On a de plus un degré de liberté au niveau du choix de la fonction  $f$ . Un simple calcul avec

$$f(\zeta_1, \zeta_2) := e^{-\delta_{\Gamma} d\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_o}$$

on obtient une mesure  $\Gamma$  invariante, où  $\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_o$  désigne le produit de Gromov des deux points de bord  $\zeta_1, \zeta_2$  relativement au point  $o$ . Elle descend donc au quotient, c'est ce que l'on appellera une mesure de Bowen-Margulis-Sullivan. Notons que tous les objets intervenant dans cette construction sont encore bien définis dans la généralité des espaces  $CAT(-1)$ , *c.f.* Roblin [49].

Comme vu précédemment, dans le cas de  $\mathbb{H}^n$ , la famille des mesures visuelles est toujours une densité conforme d'exposant  $n - 1$ , indépendamment du groupe  $\Gamma$ . Par ce qui précède lui est donc associé une mesure invariante ; c'est la mesure de Liouville  $\mathcal{L}$  que l'on retrouve par ce procédé. Si  $\delta_{\Gamma} = n - 1$  alors  $\mathcal{L}$  est aussi une mesure de Bowen-Margulis-Sullivan, par exemple si  $\Gamma$  agit de façon convexe cocompacte sur  $\mathbb{H}^n$ . Dans ce dernier cas la mesure est finie, et la question du mélange devient alors naturelle.

**Théorème 2.1.12** (Anosov [1]). Soit  $\Gamma$  un groupe agissant proprement discontinument de manière cocompacte sur  $\mathbb{H}^n$  alors pour toute paire de fonctions  $f, h$  du fibré unitaire tangent  $UM_\Gamma$  de  $M_\Gamma := \mathbb{H}^n / \Gamma$  de carré Liouville-intégrable on a :

$$\int_{UM_\Gamma} h \cdot f \circ g_t \, d\mathcal{L} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mathcal{L}(UM_\Gamma)} \int_{UM_\Gamma} h \, d\mathcal{L} \int_{UM_\Gamma} f \, d\mathcal{L} .$$

Dans la section suivante nous reviendrons en détail sur comment un simple corollaire du mélange, l'équidistribution des sphères, implique le corollaire suivant.

**Corollaire 2.1.13.** Soit  $\Gamma$  un groupe agissant proprement discontinument de manière cocompacte sur  $\mathbb{H}^n$ , alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$N_\Gamma(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} C e^{(n-1)\rho} .$$

La formule du mélange ci-dessus ne fait pas appel à l'hypothèse de compacité. On peut alors se demander si l'équivalent ci-dessus subsiste sous l'hypothèse d'être de mesure de Bowen-Sullivan-Margulis finie. La réponse est apportée par T. Roblin sous une hypothèse de non-arithméticité du spectre des longueurs que nous n'énoncerons pas. Cette hypothèse est satisfaite dans de nombreux cas, par exemple si le groupe  $\Gamma$  est un groupe d'isométries agissant sur  $\mathbb{H}^n$ .

**Théorème 2.1.14** (T. Roblin, théorème 4.1.1 page 56 [49]). Soit  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries d'un espace  $CAT(-1)$  admettant une mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie dont le spectre des longueurs n'est pas arithmétique, alors il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$N_\Gamma(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} C e^{\delta_\Gamma \rho} .$$

En corollaire de ses travaux T. Roblin montre aussi le théorème suivant, toujours sous l'hypothèse de non-arithméticité du spectre des longueurs.

**Théorème 2.1.15** (T. Roblin, théorème 4.1.2 page 57 [49]). Soit  $\Gamma$  un groupe d'isométries agissant de façon proprement discontinue sur  $\mathbb{H}^n$  n'admettant pas de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie, alors

$$N_\Gamma(x, y, \rho) = o(e^{\delta_\Gamma \rho}) .$$

Une question naturelle est alors d'expliciter ce petit  $o$  dans le cas où l'action n'admet pas de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie. M. Pollicott et R. Sharp explicitent alors ce petit  $o$  dans le cas des revêtements abéliens de variétés hyperboliques compactes.

**Théorème 2.1.16** (Sharp Pollicott [46]). Soit  $\Gamma_0$  un groupe discret d'isométries agissant de manière cocompacte sur  $\mathbb{H}^n$  et  $\Gamma \triangleleft \Gamma_0$  un sous groupe normal de  $\Gamma_0$  tel que  $\Gamma_0 / \Gamma \sim \mathbb{Z}^d$ .

Alors il existe une constante  $C$  telle que

$$N_{\Gamma}(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} C \frac{e^{(n-1)\rho}}{\rho^{d/2}} .$$

Nous reviendrons dans la section 2.2.5 sur la forme du terme correctif.

Signalons également un résultat dû à P. Vidotto [57] qui construit, cette fois en courbure variable, un exemple de variété n'admettant pas de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie mais toujours "encodable". c'est-à-dire dont on peut ramener l'étude du flot géodésique à un sous shift de type fini. P. Vidotto obtient aussi un équivalent de la fonction orbitale dans ce cas.



## 2.2 Introduction à l'approche Brownienne pour le comptage et énoncés des résultats.

Afin de motiver la section suivante, on consacra celle-ci entièrement à l'intuition de l'approche par le mouvement Brownien. On en profitera par ailleurs pour donner la plupart des définitions essentielles à l'approche. On commencera par rappeler l'argument de Margulis qui en est l'origine. Cet argument fait le lien entre les théorèmes de mélange du flot géodésique et les estimations de la fonction orbitale à travers le théorème **d'équidistribution des sphères**. Le mélange, par définition même, a pour but d'estimer quantitativement la décorrélation d'observables assez régulières d'un système dynamique. Une propriété de mélange peut donc être interprétée comme une émanation du **caractère aléatoire** du système dynamique. On n'a pas, à l'heure actuelle, de propriétés de mélange du flot géodésique assez forte en mesure infinie pour obtenir des estimées de la fonction orbitale. Pour pallier ce manque de mélange, ou bien ce manque d'indépendance quantitative, on utilisera en mesure infinie le **mouvement brownien, aléatoire par nature** à la place du flot géodésique. Nous l'introduirons à travers le **noyau de la chaleur**, dont on verra, à la lumière du théorème d'équidistribution des sphères, qu'il nous faudra en estimer les valeurs diagonales en grand temps. Dans la sous-section 2.2.3 nous expliquerons heuristiquement en quoi le mouvement Brownien est lié à la fonction orbitale. Comme le montrent les théorèmes 2.1.11 et 2.1.14, cette dernière est fortement liée à la dynamique du flot géodésique qui n'est finalement pas si différente de celle du mouvement Brownien. En pratique, cela se traduira par un lemme des **grandes déviations pour le drift** qui, en courbure négative constante, établit quantitativement que la distribution spatiale du mouvement Brownien est proche de celle du flot géodésique.

### 2.2.1 De l'équidistribution des sphères au comptage.

Soit  $\Gamma$  un groupe d'isométries agissant proprement discontinûment sur  $\mathbb{H}^n$ . On notera  $M_\Gamma := M/\Gamma$  la variété hyperbolique quotient et  $UM_\Gamma$  son fibré unitaire tangent qui vient avec la fibration riemannienne suivante

$$(\mathbb{S}_x, \lambda_x) \longrightarrow (UM_\Gamma, \mathcal{L}) \xrightarrow{\pi} (M_\Gamma, \mu) .$$

Dans les parenthèses, à la droite des ensembles, sont notées les mesures naturelles qui leurs sont associées : la mesure ronde  $\lambda_x$  sur la sphère unitaire tangente en  $x$ , la mesure  $\mu$  sur  $M_\Gamma$  venant de la métrique hyperbolique et la mesure de Liouville  $\mathcal{L}$  sur le fibré unitaire tangent qui se désintègre localement relativement à  $\mu$  et  $\lambda_x$ . On notera  $g_t$  le flot géodésique. Le théorème de mélange 2.1.12 a pour corollaire le théorème suivant, dit d'équidistribution des sphères. On renvoie à [4, page 53] pour une preuve de ce fait.

**Théorème 2.2.1** (Margulis [37]). Soit  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries de  $\mathbb{H}^n$  agissant de

## 2.2. INTRODUCTION À L'APPROCHE BROWNIENNE POUR LE COMPTAGE ET ÉNONCÉS DES RÉ

manière cocompacte. Pour toute fonction  $f \in L^2(M_\Gamma)$  et tout point  $x \in M_\Gamma$  on a

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_x} f(\pi(g_t(v))) d\lambda_x(v) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu(M_\Gamma)} \int_{M_\Gamma} f d\mu . \quad (2.2.2)$$

Montrons comment du théorème d'équidistribution des sphères Margulis déduit un équivalent de la fonction orbitale.

**Démonstration :** [équidistribution des sphères  $\Rightarrow$  équivalent de la fonction orbitale]

Pour alléger les notations, on fixe  $n = 3$  pour ce qui est de cette démonstration. On notera avec des tildes les objets de la variété  $M_\Gamma$  tirés en arrière sur le revêtement universel  $\mathbb{H}^3$ . Par exemple si  $x \in M_\Gamma$ , on notera  $\tilde{x}$  un relevé arbitraire de  $x$  dans  $\mathbb{H}^3$ . La lecture au revêtement universel du terme de gauche de la formule 2.2.2 donne l'identité

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_{\tilde{x}}} \tilde{f}(\tilde{\pi}(\tilde{g}_t(\tilde{v}))) d\lambda_{\tilde{x}}(v) = \frac{1}{\mu(\mathbb{S}(\tilde{x}, t))} \int_{\mathbb{S}(\tilde{x}, t)} \tilde{f} d\tilde{\mu} ,$$

où  $\mathbb{S}(\tilde{x}, t)$  désigne la sphère centrée en  $\tilde{x} \in \mathbb{H}^3$  de rayon  $t$ . Le volume d'une telle sphère est équivalente à  $\pi e^{2t}$  quand  $t \rightarrow +\infty$  on obtient en appliquant le théorème d'équidistribution des sphères

$$\frac{1}{\pi e^{2t}} \int_{\mathbb{S}(\tilde{x}, t)} \tilde{f} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu(M_\Gamma)} \int_{M_\Gamma} f d\mu .$$

On va se servir de cette formule en y injectant pour fonction  $f$  la fonction indicatrice  $\mathbb{1}_{B(y, \epsilon)}$  d'une boule de rayon  $\epsilon < r_{inj}$  centrée en un point  $y \in M_\Gamma$ , où  $r_{inj}$  est le rayon d'injectivité de  $M_\Gamma$ . On peut alors réécrire l'équation ci-dessus comme

$$\int_{\mathbb{S}(\tilde{x}, t)} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{B(\gamma \cdot \tilde{y}, \epsilon)} d\tilde{\mu} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{\pi e^{2t}}{\mu(M_\Gamma)} \mu(B(y, \epsilon)) . \quad (2.2.3)$$

D'un autre côté, toutes les paires de boules de l'orbite  $\Gamma \cdot B(\tilde{y}, \epsilon)$  étant disjointes, on a pour tout  $\epsilon > 0$  et  $\rho$  assez grand :

$$N_\Gamma(\tilde{x}, \tilde{y}, \rho - \epsilon) \leq \frac{1}{\mu(B(y, \epsilon))} \int_{B(\tilde{x}, \rho)} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{B(\gamma \cdot \tilde{y}, \epsilon)} d\tilde{\mu} \leq N_\Gamma(\tilde{x}, \tilde{y}, \rho + \epsilon) .$$

Désintégrons maintenant le volume d'une boule de centre  $\tilde{x}$  et de rayon  $\rho$  sur les sphères centrées en  $\tilde{x}$  de rayon  $t$  pour obtenir

$$\int_{B(\tilde{x}, \rho)} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{B(\gamma \cdot \tilde{y}, \epsilon)} d\tilde{\mu} = \int_0^\rho \left( \int_{\mathbb{S}(\tilde{x}, t)} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{B(\gamma \cdot \tilde{y}, \epsilon)} \right) dt .$$

En particulier en injectant l'équivalent trouvé dans (2.2.3) dans le membre de droite ci-dessus on a

$$\frac{1}{\mu(B(y, \epsilon))} \int_{B(\tilde{x}, \rho)} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{B(\gamma \cdot \tilde{y}, \epsilon)} d\tilde{\mu} \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi e^{2\rho}}{2\mu(M_\Gamma)} .$$

Et donc, pour tout  $\epsilon > 0$  on a pour  $\rho$  assez grand,

$$\frac{\pi e^{2\rho - \epsilon}}{2\mu(M_\Gamma)} \leq N_\Gamma(\tilde{x}, \tilde{y}, \rho) \leq \frac{\pi e^{2\rho + \epsilon}}{2\mu(M_\Gamma)} .$$

Ce qui équivaut à

$$N_\Gamma(\tilde{x}, \tilde{y}, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi e^{2\rho}}{2\mu(M_\Gamma)} ,$$

ce qui achève la démonstration. ■

Revenons rapidement sur cette preuve. Remarquons que nous n'avons pas besoin de savoir exactement la convergence

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_x} f(\pi(g_t(v))) d\lambda_x(v) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu(M_\Gamma)} \int_{M_\Gamma} f$$

pour appliquer l'argumentaire. En effet, si l'on savait trouver une fonction explicite  $\phi(t)$ , par exemple une fraction rationnelle en  $\sqrt{t}$ , telle que

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_x} f(\pi(g_t(v))) d\lambda_x(v) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \phi(t) \tag{2.2.4}$$

le même raisonnement donnerait

$$N_\Gamma(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} C \int_0^\rho \phi(t) e^{2t} dt .$$

Cet argument n'a donc pas besoin de mesure de Bowen-Margulis finie pour être utilisé. Cependant sans théorème de mélange il est difficile de trouver un équivalent explicite de l'intégrale du membre de gauche de l'équation (2.2.4), c'est pour contourner cette difficulté que l'on introduit le mouvement Brownien.

### 2.2.2 L'approche brownienne

Introduisons le mouvement Brownien informellement en présentant chaque protagoniste nécessaire à sa définition (dans la partie de droite du tableau) comme étant l'analogie "flot géodésique" (partie de gauche du tableau).

—  $UM$  l'ensemble des géodésiques paramétrées  $\rightsquigarrow$

## 2.2. INTRODUCTION À L'APPROCHE BROWNIENNE POUR LE COMPTAGE ET ÉNONCÉS DES RÉ

- $\Omega$  L'ensemble des chemins continus  $\omega : \mathbb{R} \rightarrow M$
- $\pi$  la projection de  $UM$  sur  $M$ ;  $\pi(v) = v(0) \iff B$  la projection sur  $M$ ;  $B(\omega) = \omega(0)$
- $\mathbb{S}_x$  les géodésiques issues de  $x$ ;  $\pi(v) = x \iff \Omega_x$  Les chemins continus issus de  $x$ ;  $B(\omega) = x$
- $g_t$  le flot géodésique;  $g_t(v) = v(\cdot + t) \iff \sigma_t$  l'action du shift sur les chemins;  $\sigma_t(\omega) := \omega(\cdot + t)$

Le plus délicat à interpréter est l'analogie de la mesure de Liouville que l'on va mettre sur cet espace de chemins  $\Omega$  : **la mesure de Wiener**, notée  $\mathbb{P}$ . On n'aura en fait pas besoin d'explicitier cette mesure complètement, le point étant qu'elle peut être construite à travers le noyau **le noyau de la chaleur**. Poursuivons notre analogie de façon informelle. Commençons par préciser que la mesure de Wiener se "désintègre" de façon similaire à la mesure de Liouville

$$(\Omega_x, \mathbb{P}_x) \longrightarrow (\Omega, \mathbb{P}) \xrightarrow{B} (M, \mu) ,$$

de sorte que la mesure de Wiener  $\mathbb{P}$  peut se déduire d'une mesure  $\mathbb{P}_x$  sur l'espace  $\Omega_x$  qui, dans notre analogie, jouera le rôle de la mesure ronde  $\lambda_x$  de la fibre unitaire tangente en  $x$ . Soit donc  $f$  une observable, c'est-à-dire une fonction dans  $L^2(M_\Gamma)$ , on a la correspondance :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_x} f(\pi(g_t(v))) d\lambda_x(v) \iff \mathbb{E}_x [f(B(\sigma_t(\omega)))]$$

C'est ici que l'on quitte le monde de la dynamique pour pénétrer celui de l'analyse.

**Le noyau de la chaleur.** Pour une introduction à l'analyse du noyau de la chaleur on pourra se reporter à [16] et [24]. Dans ce qui suit  $M$  est une variété Riemannienne complète à courbure minorée par une constante uniforme. On notera  $dy$  la mesure riemannienne associée. On définit le **noyau de la chaleur**  $p_M(x, y, t)$  comme la solution fondamentale de l'équation aux dérivées partielles de la chaleur.

C'est-à-dire, en notant  $\Delta$  l'opérateur Laplacien, que la solution au problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \Delta_x u_t(x, t) + \partial_t u(x, t) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad (2.2.5)$$

est donnée par la formule

$$u(x, t) = \int_M p_M(x, y, t) u_0(y) d\mu(y)$$

dès lors que la donnée initiale  $u_0$  est choisie continue et bornée.

**Remarque 2.2.6.** Si l'on enlève l'hypothèse sur la courbure il n'y a pas forcément unicité de la solution fondamentale. La question d'unicité ne se pose donc pas dans notre cas, car nous travaillons avec des variétés hyperboliques. On renvoie à [14, théorème 4 page 188] et [24, section 8.4.1] pour plus de détails.

D'un point de vue formel, le noyau de la chaleur est le noyau de l'opérateur  $e^{-t\Delta}$ , qui à une condition initiale  $u_0$  associe la solution du problème de Cauchy ci-dessus au temps  $t$ . L'opérateur  $e^{-t\Delta}$  peut être pensé comme flot au temps  $t$  du champ de vecteurs donné par le Laplacien sur un certain espace de fonctions, si bien que l'on a la propriété de semi-groupe suivante :

$$e^{-t\Delta} \circ e^{-s\Delta} = e^{-(s+t)\Delta} .$$

Cette identité se traduit sur les noyaux associés aux opérateurs  $e^{-t\Delta}$  et  $e^{-s\Delta}$  par la relation intégrale :

$$p_M(x, y, t + s) = \int_M p_M(x, z, t) p_M(z, y, s) d\mu(z) .$$

Cette relation est cruciale. Elle met en évidence le caractère aléatoire d'un processus stochastique  $B_t$  à valeur dans  $M$  qui admettrait le noyau de la chaleur  $p_M(x, z, t)$  comme densité. C'est-à-dire qui vérifierait

$$p_M(x, y, t) d\mu(y) = (B_t)_* \mathbb{P}_x .$$

Comme annoncé à la section précédente, ce processus est en fait donné par la variable aléatoire :

$$\begin{aligned} \Omega_x &\rightarrow M \\ \omega &\mapsto B(\sigma_t(\omega)) = \omega(t) . \end{aligned}$$

Le noyau de la chaleur s'interprète donc comme la densité de probabilité sur l'ensemble des chemins issus du point  $x$  associés à la variable aléatoire "position au temps  $t$ ". On peut aussi dire que c'est la **distribution spatiale** des chemins continus issus du point  $x$  au temps  $t$ . Étant donné un ensemble  $E \subset M$  on a

$$\mathbb{P}_x [B(\sigma_t(\omega)) \in E] = \int_E p_M(x, y, t) d\mu(y) .$$

On reviendra dans la sous-section suivante sur cette probabilité dans le cas de  $\mathbb{H}^3$ . On peut généraliser la formule ci-dessus en se donnant une observable  $f \in L^2(M)$  comme

$$\mathbb{E}_x [f(B(\sigma_t(\omega)))] = \int_M f(y) p_M(x, y, t) d\mu(y) .$$

Revenons au théorème d'équidistribution, dont on rappelle qu'il donne la limite de la quantité clé dans le cas où la variété est compacte

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{S}_x} f(\pi(g_t(v))) d\lambda_x(v) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\mu(M_\Gamma)} \int_{M_\Gamma} f d\mu ,$$

d'où l'on tire *in fine* un équivalent de la fonction orbitale. Par analogie, il nous faudra donc estimer en grand temps la quantité suivante

$$\int_M f(y) p_M(x, y, t) d\mu(y) ,$$

en particulier estimer l'asymptotique de  $p_M(x, y, t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  ce qui fait l'objet de la dernière section de ce chapitre.

### 2.2.3 Une introduction au noyau de la chaleur dans $\mathbb{H}^3$

Pour tout le reste de chapitre  $\Gamma$  désignera un **groupe Kleinien**, c'est-à-dire un groupe d'isométries agissant proprement discontinûment sur  $\mathbb{H}^3$ .

Pour finir de se laisser convaincre par l'approche il faut encore faire le lien avec la fonction orbitale. Le lien précis sera fait dans la section 3, mais se basera en grande partie sur le lemme des grandes déviations dont la preuve conclut cette sous-section. Commençons par dire que pour ce qui est de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  on a une formule relativement simple pour le noyau de la chaleur.

**Théorème 2.2.7** (voir [25]). Pour tout  $x, y \in \mathbb{H}^3$  à distance  $\rho$  et  $t > 0$  on a

$$p_{\mathbb{H}^3}(x, y, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \frac{\rho}{\sinh(\rho)} e^{-t - \frac{\rho^2}{4t}} , \quad (2.2.8)$$

On a aussi une formule explicite pour le noyau de la chaleur pour  $\mathbb{H}^2$ , mais elle est plus compliquée. En combinant cela avec la remarquable formule de récurrence ci-dessous, dont on pourra consulter [25] pour une preuve,

$$p_{\mathbb{H}^{n+2}}(\rho, t) = -\frac{e^{-nt}}{2\pi \sinh(\rho)} \partial_\rho p_{\mathbb{H}^n}(\rho, t) . \quad (2.2.9)$$

on déduit que le noyau de la chaleur admet une description explicite en toute dimension. Cependant, pour ne pas alourdir ce manuscrit, on se contera d'examiner le cas  $n = 3$ . **On abrégera dorénavant par  $p_3$**  le noyau de la chaleur sur  $\mathbb{H}^3$ , précédemment noté  $p_{\mathbb{H}^3}$ .

Le lemme suivant est fondamental. Il établit quantitativement à quel point sont similaires le flot géodésique et le mouvement Brownien sur les espaces hyperboliques. C'est le point

clé pour mettre en relation le comportement en grand temps du noyau de la chaleur et la fonction orbitale. Pour  $0 \leq r \leq R$  on note par  $\mathcal{A}(x, R, r)$  l'anneau centré en  $x$  dans  $\mathbb{H}^3$  de petit rayon  $R - r$  et de grand rayon  $R + r$ .

**Lemme 2.2.10.** Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{H}^3$  et pour toute fonction  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que  $\sqrt{t} \leq g(t) \leq 2t$  on a

$$\mathbb{P}_x [B_t(\omega) \notin \mathcal{A}(x, 2t, g(t))] \leq C e^{\left(-\frac{g(t)}{\sqrt{t}}\right)^2}$$

Ce lemme montre donc que le mouvement Brownien issu du point  $x$  se concentre en grand temps sur un anneau centré en  $x$  de petit rayon  $2t - \sqrt{t}$  et de grand rayon  $2t + \sqrt{t}$ . Cela est à mettre en parallèle avec le fait que la distribution spatiale du flot géodésique issu du point  $x$  au temps  $2t$  est simplement la mesure ronde sur la sphère de centre  $x$  et de rayon  $2t$ . D'un point de vue plus probabiliste le lemme précédent peut être vu comme un théorème des grandes déviations du mouvement brownien, relativement à la variable aléatoire "distance au point  $x$ ".

**Démonstration :** Par définition même de  $\mathbb{P}_x$ , on a

$$\mathbb{P}_x [B_t(\omega) \notin \mathcal{A}(x, 2t, g(t))] = \int_{\mathbb{H}^3 \setminus \mathcal{A}(x, 2t, g(t))} p_3(x, y, t) d\mu(y) .$$

En désintégrant la forme volume du membre de droite le long des sphères centrées en  $x$  et en rappelant que le noyau de la chaleur est radial on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x [B_t(\omega) \notin \mathcal{A}(x, 2t, g(t))] &\leq \int_0^{2t-g(t)} p_3(\rho, t) \text{vol}(\mathbb{S}_x(\rho)) d\rho \\ &+ \int_{2t+g(t)}^{\infty} p_3(\rho, t) \text{vol}(\mathbb{S}_x(\rho)) d\rho . \end{aligned}$$

Rappelons la majoration suivante du volume hyperbolique des sphères en dimension 3 :

$$\text{vol}(\mathbb{S}_x(\rho)) \leq \pi e^{2\rho} .$$

Le majorant  $\pi e^{2\rho}$  étant par ailleurs un équivalent de la fonction  $\rho \rightarrow \text{vol}(\mathbb{S}_x(\rho))$ . Majorons alors les deux intégrales ci-dessus. La formule (2.2.8) donne

$$\int_0^{2t-g(t)} p_3(\rho, t) \text{vol}(\mathbb{S}_x(\rho)) d\rho \leq \int_0^{2t-g(t)} \frac{\pi e^{2\rho}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \frac{\rho}{\sinh(\rho)} e^{-t-\frac{\rho^2}{4t}} d\rho .$$

## 2.2. INTRODUCTION À L'APPROCHE BROWNIENNE POUR LE COMPTAGE ET ÉNONCÉS DES RÉ

Pour  $\rho \leq 1$  l'intégrande est un  $O(e^{-t})$ , on peut alors se contenter de majorer l'intégrale

$$\int_1^{2t-g(t)} \frac{\pi e^{2\rho}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \frac{\rho}{\sinh(\rho)} e^{-t-\frac{\rho^2}{4t}} d\rho .$$

Pour  $\rho \geq 1$  on a  $\frac{\rho}{\sinh(\rho)} \leq 4 \rho e^{-\rho}$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} \int_1^{2t-g(t)} \frac{\pi e^{2\rho}}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \frac{\rho}{\sinh(\rho)} e^{-t-\frac{\rho^2}{4t}} d\rho &\leq \int_1^{2t-g(t)} \frac{\rho}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} e^{-t-\frac{\rho^2}{4t}+\rho} d\rho \\ &\leq \int_0^{2t-g(t)} \frac{\rho}{2\sqrt{\pi t^{\frac{3}{2}}}} e^{-t-\frac{\rho^2}{4t}+\rho} d\rho =: \mathcal{I}_g(t) . \end{aligned}$$

On factorise alors  $-t - \frac{\rho^2}{4t} + \rho$  en  $-\left(\frac{\rho-2t}{2\sqrt{t}}\right)^2$  puis on effectue le changement de variables  $u := \frac{\rho-2t}{2\sqrt{t}}$  qui donne

$$\mathcal{I}_g(t) \leq 2 \int_{-\sqrt{t}}^{-\frac{g(t)}{2\sqrt{t}}} \frac{\sqrt{t}u + t}{\sqrt{\pi t}} e^{-u^2} du$$

En reprenant exactement le calcul on montre de la même façon que

$$\int_{2t+g(t)}^{\infty} p_3(\rho, t) \text{vol}(\mathbb{S}_x(\rho)) d\rho \leq 2 \int_{\frac{g(t)}{2\sqrt{t}}}^{\infty} \frac{\sqrt{t}u + t}{\sqrt{\pi t}} e^{-u^2} du .$$

En découpant l'intégrale de droite au point  $\sqrt{t}$  et en remarquant que la fonction  $u \mapsto u e^{-u^2}$  est impaire, on a

$$\mathbb{P}_x [B_t(\omega) \notin \mathcal{A}(x, 2t, g(t))] \leq \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{g(t)}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-u^2} du + O(e^{-t}) .$$

On conclut en utilisant la majoration classique de la gaussienne :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x [B_t(\omega) \notin \mathcal{A}(x, 2t, g(t))] &\leq \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi} g(t)} e^{-\left(\frac{g(t)}{2\sqrt{t}}\right)^2} + O(e^{-t}) \\ &\leq C e^{-\left(\frac{g(t)}{2\sqrt{t}}\right)^2} , \end{aligned}$$

pour une certaine constante  $C > 0$  dès lors que  $2t \geq g(t) \geq \sqrt{t}$ . ■



### 2.2.4 Divergence, récurrence.

Avant d'entrer dans les résultats à proprement parler, nous allons avoir besoin de la notion de convergence et de divergence d'un groupe d'isométries agissant sur un espace  $CAT(-1)$ .

**Définition 2.2.11.** Soit  $\Gamma$  un groupe discret d'isométries d'un espace  $CAT(-1)$  d'exposant critique  $\delta_\Gamma$ . Le groupe  $\Gamma$  est dit **divergent** si la série suivante, dite de **Poincaré**, diverge

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\delta_\Gamma d(x, \gamma \cdot y)} .$$

Dans le cas contraire le groupe est dit **convergent**.

Essayons de comprendre ce que veut nous dire cette série dans le cas d'un groupe  $\Gamma$  discret d'isométries de  $\mathbb{H}^n$  d'exposant critique  $n - 1$ . Dans ce cas, cette série contrôle le taux de récurrence du flot géodésique  $g_t$  sur le fibré unitaire tangent  $UM_\Gamma$  relativement à la mesure de Liouville.

**Définition 2.2.12.** Soit  $\Phi_t$  un flot sur une variété  $M$  muni d'une mesure  $m$ , alors si pour tout  $m$ -presque tout point  $x \in M$

- il existe un voisinage  $U$  de  $x$  tel que

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_U(\Phi_t(x)) dt < +\infty$$

le flot est dit **complètement dissipatif**

- pour tout voisinage  $U$  de  $x$  on a

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_U(\Phi_t(x)) dt = +\infty$$

le flot est dit **complètement conservatif**.

La définition précédente est fortement liée à la série de Poincaré comme l'atteste la proposition suivante.

**Proposition 2.2.13** (voir [49] théorème 1.7). Soit  $\Gamma$  un groupe convergent d'isométries de  $\mathbb{H}^n$  d'exposant critique  $n - 1$ , alors le flot géodésique sur  $UM_\Gamma$  est complètement dissipatif pour la mesure de Liouville.

Rappelons que la mesure de Liouville se désintègre dans les fibres comme la mesure ronde  $\lambda_x$  sur la sphère unitaire tangente  $\mathbb{S}_x$ , si bien que l'énoncé suivant est strictement plus fort que ce qui précède.

**Proposition 2.2.14.** Soit  $\Gamma$  un groupe convergent d'isométries de  $\mathbb{H}^n$  d'exposant critique  $n - 1$ , alors pour tout  $r > 0$ , tout  $x \in M$  et  $\lambda_x$ -presque tout  $v \in \mathbb{S}_x$

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\pi^{-1}(B(y,r))}(\Phi_t(v)) dt < +\infty$$

**Démonstration :** [de la proposition 2.2.14] Introduisons une sorte de fonction de renouvellement pour ce flot, on fixe  $x, y \in M_\Gamma$  et  $r > 0$  et l'on pose

$$\kappa(s) := \int_{\mathbb{S}_x} \left[ \int_0^s \mathbb{1}_{B(y,r)}(\pi \circ g_t(v)) dt \right] d\lambda_x(v) .$$

On va relier cette intégrale double aux sommes partielles de la série de Poincaré de la même façon qu'on reliait la fonction orbitale à l'équidistribution des sphères : on remonte cette intégrale au revêtement universel pour avoir

$$\begin{aligned} \kappa(s) &:= \int_{\mathbb{S}_{\tilde{x}}} \left[ \int_0^s \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{B(\gamma \cdot \tilde{y}, r)}(\pi \circ g_t(v)) dt \right] d\lambda_{\tilde{x}}(v) \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_{\mathbb{S}_{\tilde{x}}} \left[ \int_0^s \mathbb{1}_{B(\gamma \cdot \tilde{y}, r)}(\pi \circ g_t(v)) dt \right] d\lambda_{\tilde{x}}(v) . \end{aligned}$$

Pour  $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{H}^n$ ,  $\rho > 0$ , on définit

$$\mathcal{B}_\Gamma(\tilde{x}, \tilde{y}, \rho) := \{ \gamma \in \Gamma , d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{y}) \leq \rho \} .$$

Si l'on fixe  $\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(\tilde{x}, \tilde{y}, s+r)$  on remarque qu'il existe une constante  $C(r) > 0$  telle que

$$\int_{\mathbb{S}_{\tilde{x}}} \int_0^s \mathbb{1}_{B(\gamma \cdot \tilde{y}, r)}(\pi \circ g_t(v)) dt d\lambda_{\tilde{x}}(v) \leq C(r) e^{-(n-1)d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{y})} . \quad (2.2.15)$$

D'un autre côté si  $\gamma \notin \mathcal{B}_\Gamma(\tilde{x}, \tilde{y}, s+r)$  on a également

$$\int_{\mathbb{S}_{\tilde{x}}} \int_0^s \mathbb{1}_{B(\gamma \cdot \tilde{y}, r)}(\pi \circ g_t(v)) dt d\lambda_{\tilde{x}}(v) = 0 ,$$

si bien que pour tout  $r > 0$  :

$$\kappa(s) \leq C(r) \sum_{\mathcal{B}_\Gamma(\tilde{x}, \tilde{y}, s+r)} e^{-(n-1)d(\tilde{x}, \gamma \cdot \tilde{y})} . \quad (2.2.16)$$

Ce qui implique, sous l'hypothèse que le groupe est **convergent**, que pour tout  $r > 0$ ,  $x \in M$  et  $\lambda_x$ -presque tout  $v \in \mathbb{S}_x$  on a

$$\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{B(\gamma \cdot y, r)}(\pi \circ g_t(v)) dt < +\infty, \quad (2.2.17)$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

**Remarque 2.2.18.** Dans le raisonnement précédent on a pas vraiment utilisé le fait que la mesure soit la mesure de Liouville. Elle ne sert en fait que pour la majoration (2.2.15) qui reste vraie si l'on avait choisi une mesure de Bowen-Margulis-Sullivan par le lemme de l'ombre.

Le théorème suivant vient renforcer la discussion précédente entre la divergence de la série de Poincaré et le caractère conservatif du flot géodésique de deux manières : en y apportant une "réciproque" et en étendant la généralité aux espaces  $CAT(-1)$ .

**Proposition 2.2.19** (voir [49] théorème 1.7). Soit  $\mu$  une  $(\delta_\Gamma, \Gamma)$ -densité con-forme et  $m$  sa mesure de Bowen-Margulis-Sullivan associée. Alors le flot géo-désique est complètement conservatif relativement à  $m$  si et seulement si  $\Gamma$  est divergent, c'est-à-dire

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-\delta_\Gamma d(x, \gamma \cdot y)} = +\infty.$$

Dans ce cas, il existe une unique  $(\Gamma, \delta_\Gamma)$ -densité conforme modulo multiplication par un scalaire.

**Digression : le lemme de Borel-Cantelli et la notion de divergence.** L'équivalence entre la divergence d'un groupe  $\Gamma$  et la récurrence du flot géodésique sur le quotient  $\mathbb{H}^n / \Gamma$  est d'autant plus étonnante à la lumière de la la preuve de la proposition 2.2.14. En effet, comme nous le verrons, le point clé réside dans l'utilisation d'une version continue du lemme de Borel-Cantelli qui donnait (2.2.17). Rappelons l'énoncé de ce dernier.

On se donne un espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{P})$  et une famille d'ensembles mesurables  $(A_i)_{i \in I}$  munie d'une mesure sur les indices, notée  $\nu$ . Le lemme de Borel Cantelli peut alors se mettre sous la forme d'un simple théorème de Fubini :

$$\int_I \int_\Omega \mathbf{1}_{A_i}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) d\nu(i) < +\infty \implies \mathbb{P} \text{ presque sûrement } \int_I \mathbf{1}_{A_i}(\omega) d\nu(i) < +\infty.$$

On retrouve l'énoncé classique du lemme en prenant pour  $I$  un ensemble dénom-brable et  $\nu$  sa mesure de comptage. Dans la discussion précédente on avait montré que le membre

## 2.2. INTRODUCTION À L'APPROCHE BROWNIENNE POUR LE COMPTAGE ET ÉNONCÉS DES RÉ

de gauche était fini pour  $\Omega = \mathbb{S}_x$  muni de la mesure ronde  $\lambda_x$  et pour  $I = \mathbb{R}$  muni de la mesure de Lebesgue avec

$$A_i := \{v \in \mathbb{S}_x, \pi \circ g_i(v) \in B(y, r)\}$$

Ce lemme admet en effet une "réciproque" sous l'hypothèse que les événements  $(A_i)_{i \in I}$  soient **indépendants** :

$$\int_I \int_{\Omega} \mathbb{1}_{A_i}(\omega) d\mathbb{P}(\omega) d\nu(i) = +\infty \implies \mathbb{P} \text{ presque sûrement } \int_I \mathbb{1}_{A_i}(\omega) d\nu(i) = +\infty$$

Cette "réciproque" incite à un certain point de vue sur la proposition 2.2.19. En effet, si l'on se retourne sur l'équation (2.2.16), on constate que l'on aurait pu en minorer le membre de droite, de la même façon, par une somme partielle de la série de Poincaré. Si bien que la divergence du groupe  $\Gamma$  donne alors

$$\int_0^{+\infty} \left[ \int_{\mathbb{S}_x} \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathbb{1}_{B(y,r)}(\pi \circ g_t(v)) d\lambda_x(v) \right] dt = +\infty$$

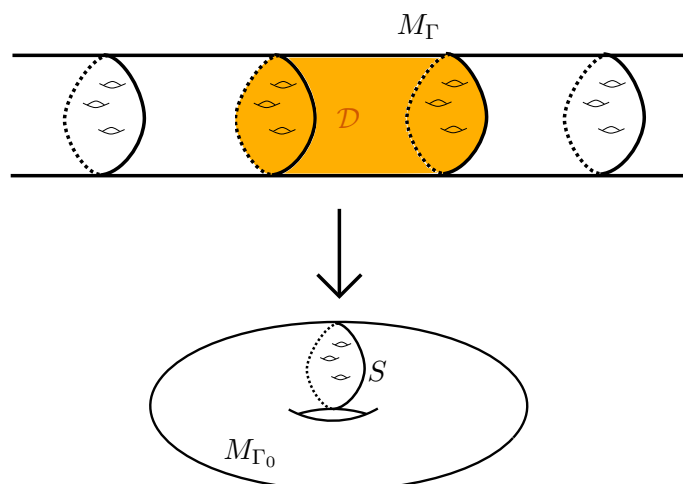
Si l'on suppose les ensembles  $(A_t)_{t \in I} := \{\pi \circ g_t(v) \in B(y, r)\}$  **indépendants**, la divergence de la série de Poincaré impliquerait alors que le caractère complètement conservatif du flot géodésique d'après le lemme de Borel Cantelli. Ces ensembles ne sont évidemment pas indépendants : un flot est déterministe, au sens où l'on sait théoriquement où sera la trajectoire au temps  $s + t$  si l'on savait où elle était au temps  $s$ . Cependant, le flot géodésique est suffisamment chaotique/aléatoire pour vérifier une sorte de réciproque au lemme de Borel-Cantelli. On pourra consulter [49, page 20] pour l'utilisation d'une version relaxée de ce lemme dans un contexte similaire.

### 2.2.5 Les $\mathbb{Z}$ -revêtements de variétés compactes ; une interprétation probabiliste du comptage.

Donnons nous un énoncé du théorème 2.1.16 dans le cas particulier qui suit.

**Théorème 2.2.20.** Soit  $\Gamma_0$  un groupe discret d'isométries agissant de manière cocompacte sur  $\mathbb{H}^3$  telle que la variété  $M_{\Gamma_0}$  fibre sur le cercle. En notant  $\Gamma \triangleleft \Gamma_0$  le sous groupe normal associé au groupe fondamental de la fibre il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$N_{\Gamma}(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C e^{2\rho}}{\sqrt{\rho}}$$



Le résultat même de ce théorème implique que le groupe  $\Gamma$  est d'exposant critique 2 mais aussi qu'il n'admet aucune mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finies. En effet, dans le cas contraire, l'équivalent de la fonction orbitale serait donné par le théorème 2.1.14, ce qui contredit l'énoncé ci-dessus. Mais alors, et c'est tout le problème qui concerne ce chapitre, comment R. Sharp et M. Pollicott déduisent-ils l'équivalent précédent de la fonction orbitale ?

Les auteurs ramènent *in fine* l'étude de la fonction orbitale du groupe  $\Gamma$  à une propriété forte de mélange du flot géodésique sur la **variété compacte**  $M_{\Gamma_0}$ . Voyons comment à la lumière de l'argument de Margulis.

Rappelons que celui-ci peut être vu comme une machine qui à un équivalent  $f_\Gamma(t)$  (dont il faut aussi montrer qu'il ne dépend pas de l'ensemble  $E$ ) de l'intégrale

$$f_\Gamma(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\text{vol}(E)} \int_{\mathbb{S}_x} \mathbf{1}_E(\pi \circ g_t(v)) d\lambda_x(v) , \quad (2.2.21)$$

renvoie l'équivalent suivant de la fonction orbitale

$$N_\Gamma(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^\rho f_\Gamma(t) e^{2t} dt . \quad (2.2.22)$$

Le but ici est donc de montrer que dans le cas du  $\mathbb{Z}$ -revêtement donné par le groupe fondamental  $\Gamma$  de la fibre  $S$  d'une variété compacte qui fibre sur le cercle on a

$$f_\Gamma(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{t}} . \quad (2.2.23)$$

En effet, dans ce cas, la formule 2.2.22 donne :

$$N_{\Gamma}(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} C \frac{e^{2\rho}}{\sqrt{\rho}} .$$

Pour se faire une idée de l'équivalent (2.2.23) on va en fait prendre pour  $E$  un domaine fondamental  $\mathcal{D}$  pour l'action de  $\Gamma_0 / \Gamma \sim \mathbb{Z}$  sur la variété  $M_{\Gamma}$  contenant le point  $x$ , comme sur la figure 2.2.5. L'avantage de ce sous ensemble est que l'on va pouvoir caractériser le fait qu'une géodésique partant de  $x \in \mathcal{D}$  y revienne en temps  $t$  grâce à la classe de cohomologie suivante définie sur la **variété compacte**  $M_{\Gamma_0}$  :

$$\begin{aligned} \omega & : H^1(M_{\Gamma_0}, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z} \\ [\gamma] & \mapsto i(S, \gamma) \end{aligned}$$

où  $[\gamma]$  est la classe de  $\gamma$  dans le premier groupe d'homologie et  $i$  le produit d'intersection. On notera  $\pi(g_{[0,t]}(v))$  la courbe projetée dans  $M_{\Gamma_0}$  de la trajectoire du vecteur  $v$  sous l'action du flot géodésique entre les temps 0 et  $t$ , voir la figure 2.3. On a alors

$$\{v \in \mathbb{S}_x \mid \pi \circ g_t(v) \in \mathcal{D}\} = \{v \in \mathbb{S}_{\pi(x)} \mid i(S, \pi(g_{[0,t]}(v))) = 0\} .$$

où l'ensemble de droite est vu comme un sous ensemble du fibré unitaire tangent  $UM_{\Gamma_0}$  de la variété compacte.

Pour obtenir une fonction  $f_{\Gamma}$  explicite dans l'équation 2.2.21 on va écrire le membre de droite de cette même équation comme la probabilité qu'une somme de variables aléatoires soit égale à 0.

$$\lambda_x \left( \sum_{k \leq t} X_k = 0 \right) = \int_{\mathbb{S}_x} \mathbb{1}_{\mathcal{D}}(\pi \circ g_k(v)) d\lambda_x(v) .$$

Ces variables aléatoires  $X_k$  vont en fait venir de l'intersection avec la surface  $S$ . On utilise la linéarité de l'intersection pour écrire

$$i(S, \pi(g_{[0,t]}(v))) = \sum_{k \leq t} i(S, \pi(g_{[k,k+1]}(v))) .$$

On commence à voir apparaître la somme. En effet, en posant

$$X_0(v) := i(S, \pi(g_{[0,1]}(v))) ,$$

on peut réécrire la quantité d'intersection précédente comme une somme de variables aléatoires

$$i(S, \pi(g_{[0,t]}(v))) = \sum_{k \leq t} X_k(v) .$$

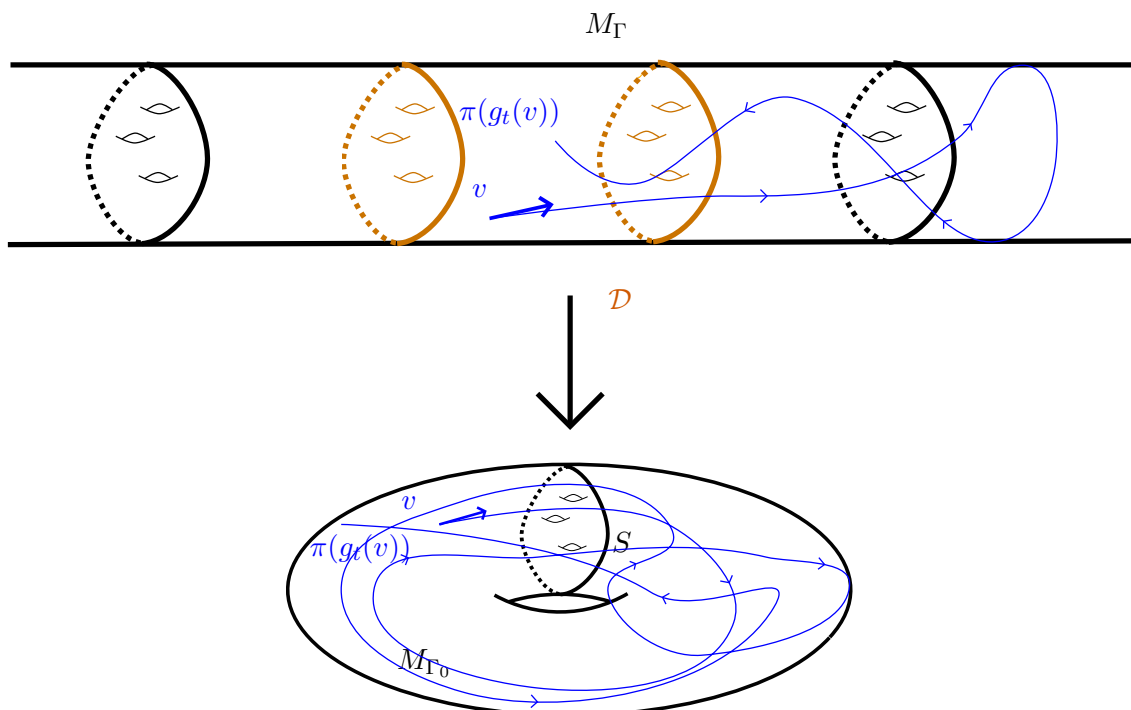


FIGURE 2.3 – La géodésique bleue de  $M_\Gamma$  revient dans le domaine fondamental  $\mathcal{D}$  si et seulement son image dans  $M_{\Gamma_0}$  n'intersecte algébriquement pas la surface  $S$ .

où

$$X_k = X_0 \circ g_k ,$$

ce qui est l'écriture recherchée.

Supposons que l'on ait une propriété de mélange assez forte du flot géodésique  $g$  sur  $M_{\Gamma_0}$  pour pouvoir considérer les variables  $X_k$  **deux à deux indépendantes**. La somme  $\sum_{k \leq t} X_k$  se comporterait alors comme une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  (disons centrée, pour tricher un peu plus encore) et l'on aurait alors par un calcul type théorème local limite

$$\lambda_x \left( \sum_{k \leq t} X_k = 0 \right) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{\sqrt{t}} .$$

ce qui finit de justifier (un peu) le terme correctif  $1/\sqrt{t}$ .

Il n'est pas possible de montrer un théorème local limite sous la simple hypothèse de mélange, il faut au moins que le **mélange soit exponentiel**, ce qui n'est pas non plus suffisant. En effet pour avoir un théorème local limite en général il nous faut aussi vérifier

une hypothèse de **non-arithméticité**. On peut penser à la marche aléatoire canonique associé au graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}$  pour se convaincre de la nécessité de l'hypothèse : la probabilité de premier retour pour les temps impairs est nulle.

### 2.2.6 Présentation détaillée des résultats.

A partir de maintenant nous nous concentrons sur l'étude des **groupes Kleinien**, c'est-à-dire des groupes d'isométries de  $\mathbb{H}^3$  agissant de manière proprement discontinus.

Les fonctions suivantes, à la lumière de la discussion autour du théorème 2.2.19, mesurent en fait le taux de récurrence du flot géodésique. rappelons que l'on avait défini l'ensemble  $\mathcal{B}_\Gamma(x, y, \rho) \subset \Gamma$  comme  $\{\gamma \in \Gamma, d(x, \gamma \cdot y) < \rho\}$ .

**Définition 2.2.24.** Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien d'exposant critique 2. On définit les **séries de Poincaré tronquées** comme suit.

$$\mathcal{T}_\Gamma(x, y, s) := \begin{cases} \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, s)} e^{-2d(x, \gamma \cdot y)} & \text{si } \Gamma \text{ est divergent} \\ \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \mathcal{B}_\Gamma(x, y, s)} e^{-2d(x, \gamma \cdot y)} & \text{si } \Gamma \text{ est convergent} \end{cases}$$

Le caractère complètement dissipatif ou conservatif admet une notion analogue pour le mouvement Brownien.

**Définition 2.2.25.** On dira de la variété hyperbolique  $M_\Gamma$  qu'elle est **transiente** si il existe  $x, y \in M_\Gamma$  tels que

$$\int_1^{+\infty} p_{M_\Gamma}(x, y, t) dt < +\infty,$$

dans le cas contraire on dira qu'elle est **récurrente**. De plus, si  $M_\Gamma$  est transiente alors l'intégrale ci-dessus est finie pour toutes paires de points  $x$  et  $y$ .

Toujours par analogie avec le flot géodésique, on introduit les fonctions suivantes.

**Définition 2.2.26.** On appelle **fonctions de renouvellements**, que l'on notera  $\mathcal{R}_\Gamma(x, y, s)$  les intégrales suivantes

$$\mathcal{R}_\Gamma(x, y, s) := \begin{cases} \int_1^s p_{M_\Gamma}(x, y, t) dt & \text{si } M_\Gamma \text{ est récurrente} \\ \int_s^{+\infty} p_{M_\Gamma}(x, y, t) dt & \text{si } M_\Gamma \text{ est transiente} \end{cases}$$

Notre premier théorème fait le lien entre la croissance des deux types de fonctions précédemment définies.



**Théorème 2.2.27** (de comparaison). Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien d'exposant critique 2 et  $x, y \in \mathbb{H}^3$ . Il existe deux constantes  $C >$  et  $c > 0$  et une fonction  $g(s) = o(s)$  telle que pour  $s$  assez grand on ait

$$c\mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s) \leq \mathcal{R}_\Gamma(x, y, s) \leq C \begin{cases} \mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s + g(s)) & \text{si } \Gamma \text{ est divergent} \\ \mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s - g(s)) & \text{si } \Gamma \text{ est convergent} \end{cases}$$

Dans le cas où l'on a un comportement polynomial du noyau de la chaleur, le théorème ci-dessous prend la forme du théorème de croissance des séries de Poincaré 1.0.4.

**Corollaire 2.2.28.** Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien tel qu'il existe  $\alpha \geq 0$  et  $x, y \in \mathbb{H}^3$  tels que  $p_\Gamma(x, y, t) \asymp t^{-\alpha}$ . Alors on a

$$\mathcal{T}_\Gamma(x, y, s) \asymp \begin{cases} s^{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(s) & \text{si } \alpha = 1 . \end{cases}$$

Remarquons que l'hypothèse sur la croissance polynomiale du noyau de la chaleur implique que  $\delta_\Gamma = 2$ .

Revenons aux estimées de la fonction orbitale. Une approche assez directe de la stratégie adoptée donnera le théorème de la borne supérieure, que l'on rappelle ici :

**Théorème 2.2.29.** Il existe une constante  $C_+$  tel que pour tout groupe kleinien  $\Gamma$  et tout  $x, y \in \mathbb{H}^3$  on a

$$\frac{N_\Gamma(t, x, y)}{e^{2t}} \leq C_+ \sqrt{t} p_{M_\Gamma} \left( x, y, \frac{t}{2} \right) \quad (2.2.30)$$

Remarquons tout de suite que ce théorème n'est pas optimal, en effet le terme  $\sqrt{t}$  du terme de droite de l'équation ci-dessus est déjà superflu pour une action cocompacte. Ce théorème donne cependant une borne supérieure non triviale dès lors que l'on a une majoration en grand temps du noyau de la chaleur en  $o(\sqrt{t})$ .

**Remarque 2.2.31.** On peut se demander ce que donne l'équation 2.2.30 au niveau du taux de croissance exponentielle de la fonction  $\Gamma$ . En passant au logarithme et en divisant par  $t$  on obtient :

$$\delta_\Gamma - 2 \leq \frac{\lambda_1(M_\Gamma)}{2} .$$

Mais l'on sait par un théorème de Sullivan que  $\lambda_1(M_\Gamma) = \delta_\Gamma(2 - \delta_\Gamma)$ , ce qui donne

$$\delta_\Gamma \leq 2 ,$$

en particulier dès que  $\delta_\Gamma < 2$  la majoration précédente n'est déjà pas optimale au niveau des taux de croissance exponentielle.

## 2.2. INTRODUCTION À L'APPROCHE BROWNIENNE POUR LE COMPTAGE ET ÉNONCÉS DES RÉ

Le théorème suivant est un corollaire des théorèmes 2.2.29 et 2.2.28. Il donne des estimées en moyenne de la fonction orbitale.

**Théorème 2.2.32** (comptage-chaueur). Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien et  $x, y \in \mathbb{H}^3$  tels qu'il existe  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  et deux constantes  $C, c$  telles que

$$c t^{-\alpha} \leq p_{M_\Gamma}(x, y, t) \leq C t^{-\alpha}$$

alors il existe deux constantes  $c_2, C_2 > 0$  telles que

— si  $\alpha < 1$  alors  $\Gamma$  est divergent, de plus

$$c_2 s^{-\alpha+1} \leq \int_0^s N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} dt \leq C_2 s^{-\alpha+1} \quad (2.2.33)$$

— si  $\alpha = 1$  alors  $\Gamma$  est divergent, de plus

$$c_2 \ln(s) \leq \int_0^s N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} dt \leq C_2 \ln(s) \quad (2.2.34)$$

— si  $\alpha > 1$  alors  $\Gamma$  est convergent, de plus

$$c_2 s^{-\alpha+1} \leq \int_s^{+\infty} N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} dt \leq C_2 s^{-\alpha+1} \quad (2.2.35)$$

Ce théorème fait un lien direct entre estimée en grand temps de la fonction orbitale et comportement du noyau de la chaleur sous l'hypothèse que ce dernier soit à croissance polynomiale. Nous reviendrons dans la dernière section 2.4 sur ses applications.

Il a aussi l'avantage de mettre en valeur que l'utilisation d'un théorème Taubérien simple, voir par exemple [7, théorème 1.7.2 page 39] donne alors la proposition suivante.

**Corollaire 2.2.36.** Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien tel qu'il existe  $x, y \in \mathbb{H}^3$ ,  $\alpha > 1$  et deux constantes  $C > 0$  et  $c > 0$  telles que

1.

$$c t^{-\alpha} \leq p_\Gamma(x, y, t) \leq C t^{-\alpha} ;$$

2. Il existe une fonction  $g$  décroissante et deux constantes  $c_1, C_1 > 0$  telle que

$$c_1 g(t) \leq N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} \leq C_1 g(t) ,$$

alors il existe deux constantes  $C_2 > 0$  et  $c_2 > 0$  telles que

$$c_2 \frac{e^{2t}}{t^\alpha} \leq N_\Gamma(x, y, t) \leq C_2 \frac{e^{2t}}{t^\alpha}$$

**Démonstration :** Pour encadrer  $t \mapsto N_\Gamma(x, y, t)e^{-2t}$  on va encadrer la fonction  $g$ . En intégrant l'encadrement de  $g$  par  $t \mapsto N_\Gamma(x, y, t)e^{-2t}$  et en utilisant le théorème 2.2.32, on voit qu'il suffit de montrer que si  $g$  est une fonction décroissante telle que

$$cs^{-\alpha+1} \leq \int_s^{+\infty} g \leq Cs^{-\alpha+1},$$

alors  $g(s) \asymp s^{-\alpha}$ .

**La borne supérieure.** Soit  $M > 0$  tel qu'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  telle que  $g(t_n) > Mt_n^{-\alpha}$ . Par décroissance de  $g$ , on a pour tout  $n$  :

$$\int_{t_n/2}^{t_n} g(t)dt \geq \frac{t_n}{2} g(t_n) \geq \frac{M}{2} t_n^{-\alpha+1} .$$

D'un autre côté, on a également que :

$$\int_{\frac{t_n}{2}}^{t_n} g(t)dt \leq \int_{\frac{t_n}{2}}^{\infty} g(t)dt \leq C(\alpha) t_n^{-\alpha+1} ,$$

d'où :

$$\frac{M}{2} \leq C ,$$

ce qui montre l'existence d'une constante  $C_3$  telle que  $g(s) \leq C_3 s^{-\alpha}$ .

**La borne inférieure.** Soit  $\epsilon > 0$  tel qu'il existe une suite  $t_n \rightarrow +\infty$  telle que  $g(t_n) < \epsilon t_n^{-\alpha}$ . Soit maintenant  $\kappa > 1$ , que l'on déterminera plus tard. Par décroissance de  $g$ , on a pour tout  $n$  :

$$\int_{t_n}^{\kappa t_n} g(t)dt \leq (\kappa - 1)t_n g(t_n) \leq \epsilon(\kappa - 1)t_n^{-\alpha+1} .$$

D'un autre côté, on a également que :

$$\int_{t_n}^{\kappa t_n} g(t)dt = \int_{t_n}^{\infty} g(t)dt - \int_{\kappa t_n}^{\infty} g(t)dt ,$$

## 2.2. INTRODUCTION À L'APPROCHE BROWNIENNE POUR LE COMPTAGE ET ÉNONCÉS DES RÉ

et donc

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{\kappa t_n} g(t) dt &\geq ct_n^{-\alpha+1} - C(\kappa t_n)^{-\alpha+1} \\ &\geq (c - C\kappa^{-\alpha+1})t_n^{-\alpha+1} . \end{aligned}$$

Soit  $\kappa$  tel que  $(c - C\kappa^{-\alpha+1}) \geq c/2$ , alors :

$$\epsilon(\kappa - 1) \geq c/2 ,$$

ce qui montre l'existence d'une constante  $c_3$  telle que  $g(s) \geq c_3 s^{-\alpha}$ . ■

**Remarque 2.2.37.** La preuve donnée ci-dessus s'adapte si  $\alpha < 1$ , mais curieusement pas si  $\alpha = 1$ .

Cette question de décroissance devient donc intéressante pour obtenir des estimées plus fines de la fonction orbitale. On reviendra sur les interactions possibles que cette question entretient avec un énoncé plus combinatoire dans la sous-section 5.1.1.

### 2.3 Noyau de la chaleur et fonction orbitale

Étant donné un groupe Kleinien, on peut se demander comment sont liés les noyaux de la chaleur sur  $\mathbb{H}^3$  et sur la variété quotient  $M_\Gamma := \mathbb{H}^3 / \Gamma$ . Un réflexe naturel est d'essayer de moyenner  $p_3$  selon le groupe  $\Gamma$  pour obtenir un noyau  $\Gamma$ -invariant qui descend en une fonction au quotient, par exemple :

$$p_\Gamma(x, y, t) := \sum_{\gamma \in \Gamma} p_3(x, \gamma \cdot y, t) . \quad (2.3.1)$$

Pour vérifier que le candidat est bien solution du problème il nous faut montrer que la fonction est bien définie, c'est-à-dire que la somme converge et ses valeurs ne dépendent ni d'un choix de point dans la  $\Gamma$ -orbite de  $x$  ni d'un choix dans celle de  $y$ . La  $\Gamma$  équivariance nous vient de la définition même du noyau de la chaleur. Plus précisément, comme les isométries commutent à l'opérateur laplacien, elles commutent aussi au semi-groupe  $e^{-t\Delta}$  dont le noyau est le noyau de la chaleur. Cela se traduit par le fait que pour toute fonction  $u_0$  la solution au temps  $t$  du problème de Cauchy de condition initiale  $u_0 \circ \gamma$  est donné par la fonction  $u((\gamma \cdot), t)$ . Au niveau des noyaux cela se traduit par la relation

$$p_3(x, \gamma^{-1} \cdot y, t) = p_3(\gamma \cdot x, y, t) .$$

En particulier, la construction même venant d'une moyenne sur  $\Gamma$ , le fait que pour tout  $\gamma \in \Gamma$  on ait  $p_\Gamma(x, \gamma \cdot y, t) = p_\Gamma(x, y, t)$  donne la même relation sur l'autre facteur :  $p_\Gamma(\gamma \cdot x, y, t) = p_\Gamma(x, y, t)$ . Pour la convergence de cette série, on se reporte une fois de plus à la formule explicite du noyau de la chaleur dans  $\mathbb{H}^3$  (voir théorème 2.2.7 ci-dessous), qui garantit une décroissance spatiale super-exponentielle du noyau de la chaleur. On peut alors vérifier que la fonction obtenue est bien solution de problème de Cauchy (2.2.5). Sous certaines hypothèses de complétudes toujours satisfaites pour les variétés hyperboliques complètes, voir 2.4.2, on a en fait l'unicité de la solution, ce qui donne  $p_\Gamma = p_{M_\Gamma}$ .

Introduisons/rappelons les notations suivantes.

- Soient  $X$  un ensemble quelconque et  $f, g : X \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  deux fonctions. Si il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in X$  il existe  $t_x \in \mathbb{R}$ , tel que pour tout  $t \geq t_x$  on a  $f(x, t) \leq C g(x, t)$ , on notera  $f \prec g$ .
- Si l'on a simultanément  $f \prec g$  et  $g \prec f$ , on notera  $g \asymp f$ . On comprendra cette notion comme une version assouplie de l'équivalence de  $f$  et  $g$  à  $x$  fixé en grand temps.
- On notera  $\mathcal{B}_\Gamma(x, y, \rho)$  le sous ensemble de  $\Gamma$  constitué des éléments qui déplacent le point  $y$  à distance inférieure à  $\rho$  du point  $x$ .

— On notera  $\mathcal{A}_\Gamma(x, y, \rho_1, \rho_2)$  le sous ensemble de  $\Gamma$

$$\{\gamma \in \Gamma, \rho_1 \leq d(x, \gamma \cdot y) < \rho_2\} .$$

### 2.3.1 Démonstration du théorème de comparaison 2.2.27

Rappelons l'énoncé de ce théorème.

**Théorème 2.3.2.** Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien d'exposant critique 2, alors il existe deux constantes  $c, C$  et une fonction  $g(s) = o(s)$  telle que pour  $s$  assez grand on ait

$$c\mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s) \leq \mathcal{R}_\Gamma(x, y, s) \leq C \begin{cases} \mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s + g(s)) & \text{si } \Gamma \text{ est divergent} \\ \mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s - g(s)) & \text{si } \Gamma \text{ est convergent} \end{cases}$$

Il est bon de rappeler que dans le théorème ci-dessus les définitions de la fonction de renouvellement  $\mathcal{R}$  ainsi que la série de Poincaré tronquée  $\mathcal{T}$  dépendent de la divergence ou de la convergence du groupe  $\Gamma$ .

On aura besoin dans la dernière sous-section de ce chapitre de la spécification suivante du théorème dans le cas où l'on a des estimées polynomiales du noyau de la chaleur.

**Corollaire 2.3.3.** Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien tel qu'il existe  $\alpha \geq 0$  tel que  $p_\Gamma(x, y, t) \asymp t^{-\alpha}$ . Alors on a

$$\mathcal{T}_\Gamma(x, y, s) \asymp \begin{cases} s^{-\alpha+1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(s) & \text{si } \alpha = 1 . \end{cases}$$

**Démonstration :** [ 2.3.2  $\implies$  2.3.3 ] Soit  $\alpha \neq 1$ , l'hypothèse faite sur le noyau de la chaleur implique, en intégrant sur les temps, que

$$\mathcal{R}_\Gamma\left(x, y, \frac{s}{2}\right) \asymp s^{-\alpha+1} .$$

On utilise ensuite le théorème 2.3.2 pour avoir

$$c\mathcal{R}_\Gamma(x, y, s) \leq \mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s + o(s)) \leq C\mathcal{R}_\Gamma\left(x, y, \frac{s}{2} + o(s)\right) ,$$

et donc, comme  $g(s) = o(s)$ , on a bien

$$\mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s + o(s)) \asymp s^{-\alpha+1} ,$$

ce qui implique

$$\mathcal{T}_\Gamma(x, y, s) \asymp s^{-\alpha+1} .$$

La démonstration est en tout point similaire pour le cas  $\alpha = 1$ . ■

**Plan de la démonstration du théorème 2.3.2.** La preuve est technique comme annoncé. Elle repose elle aussi en trois étapes. On commencera par une preuve dans le **cas divergent**, en admettant pour la clarté de l'exposition la **version stochastique du lemme de l'ombre**. On fera ensuite la démonstration de ce lemme, on conclura en l'adaptant au cas **convergent**.

### Démonstration du théorème 2.3.2 cas divergent

Donnons nous les étapes principales de la démonstration avant de faire la preuve rigoureuse.

L'idée est que la fonction

$$\Phi(s, \rho) := (s, \rho) \mapsto e^{2\rho} \int_1^s p_3(\rho, t) dt$$

se comporte comme la fonction indicatrice  $\mathbb{1}_{[0, 2s]}(\rho)$ . On reprenant la définition de la fonction de renouvellement

$$\mathcal{R}_\Gamma(x, y, s) := \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_1^s p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt$$

on aurait alors

$$\mathcal{R}_\Gamma(x, y, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-2d(x, \gamma \cdot y)} \mathbb{1}_{[0, 2s]}(d(x, \gamma \cdot y)) ,$$

On retrouve alors la définition de série de Poincaré tronquée  $\mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s)$ . Une fonction ressemble à la fonction indicatrice d'un ensemble  $A$  si elle est presque constante sur  $A$  et petite en dehors. On verra en corollaire du lemme des grandes déviations 2.2.10 que la fonction  $\Phi(s, \rho)$  est petite en dehors de  $[0, 2s]$ . D'un autre côté le fait qu'elle soit presque constante sur l'intervalle  $[0, 2s]$  repose sur le lemme suivant dont la démonstration est repoussée en fin de sous-section.

**Lemme 2.3.4.** Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $b > a \geq 1$  on ait

$$\int_a^b e^{2\rho} p_3(\rho, t) dt \leq C ,$$

de plus il existe une constante  $c > 0$  telle que si  $b - a \geq \frac{\sqrt{a}}{2}$  et  $\rho \in [2a, 2b]$  on a

$$c \leq \int_a^b e^{2\rho} p_3(\rho, t) dt . \quad (2.3.5)$$

Commençons par prouver que le lemme 2.3.4 ci-dessus implique le théorème 2.3.2, dans le

cas divergent comme annoncé.

**Démonstration :** [lemme 2.3.4  $\Rightarrow$  théorème 2.3.2, cas d'un groupe divergent]

On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\Gamma(x, y, s) &:= \int_1^s p_\Gamma(x, y, t) dt = \int_1^s \sum_{\gamma \in \Gamma} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_1^s p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \\
&= \sum_{\gamma \in \Gamma} e^{-2d(x, \gamma \cdot y)} \int_1^s e^{2d(x, \gamma \cdot y)} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \\
&\geq \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s)} e^{-2d(x, \gamma \cdot y)} \int_1^s e^{2d(x, \gamma \cdot y)} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt
\end{aligned}$$

On applique le lemme 2.3.4 avec les données  $b = s$  et  $a = 1$  ; pour tout  $\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s)$  on a

$$c \leq \int_1^s e^{2d(x, \gamma \cdot y)} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \leq C .$$

En particulier,

$$\mathcal{R}_\Gamma(x, y, s) \geq c \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s)} e^{-2d(x, \gamma \cdot y)} = c \mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s)$$

On a donc déjà un peu mieux que ce que demandé dans la minoration du théorème 2.3.2 ; ici la fonction  $g(s)$  peut-être prise identiquement nulle. En particulier que si le groupe est divergent la fonction de renouvellement diverge quand  $s \rightarrow +\infty$ . Pour la majoration on coupe la somme en deux selon une fonction  $g(s)$  que l'on déterminera plus tard.

$$\begin{aligned}
\int_1^s p_\Gamma(x, y, t) dt - \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s+g(s))} \int_1^s p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \\
= \sum_{\gamma \notin \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s+g(s))} \int_1^s p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt .
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Puis nous allons montrer que l'on peut trouver une fonction  $g(s) = o(s)$  tel que le membre de droite de l'équation ci-dessus soit négligeable devant la fonction de renouvellement, on va même montrer qu'elle est bornée ici, pour obtenir

$$\int_1^s p_\Gamma(x, y, t) dt \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s+g(s))} \int_1^s p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt . \tag{2.3.7}$$



Ce qui en utilisant la majoration donné par le lemme 2.3.4 donne

$$\int_1^s p_\Gamma(x, y, t) dt \leq C \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s + g(s))} e^{-2d(x, \gamma \cdot y)} = C \mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s + g(s)) ,$$

ce qui achèvera la démonstration. Reste donc à montrer le lemme suivant pour lequel on utilisera celui des grandes déviations 2.2.10.

**Lemme 2.3.8.** Pour tout groupe Kleinien  $\Gamma$  d'exposant critique 2 et divergent il existe une fonction  $g(s) = o(s)$  telle que

$$\sum_{\gamma \notin \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s + g(s))} \int_1^s p_3(x, \gamma \cdot y, t) = o \left( \int_1^s p_\Gamma(x, y, t) dt \right)$$

Comme annoncé précédemment on va montrer que l'on peut trouver  $g$  tel que le membre de droite soit borné. Si l'on a écrit ce lemme sous la forme ci-dessus c'est que l'énoncé est plus proche de ce qu'il deviendra dans le cas convergent.

L'action du groupe étant discrète, il existe  $\eta > 0$  tel que toutes les boules  $\Gamma \cdot B(y, \eta)$  sont disjointes. Dans chacune de ces boules indexées par l'ensemble  $\Gamma$ , on va en prendre une autre de rayon  $\eta/2$ , noté  $B(\gamma)$ , telle que pour tout  $z \in B(\gamma)$  on ait  $d(x, \gamma \cdot y) \geq d(x, z)$ .

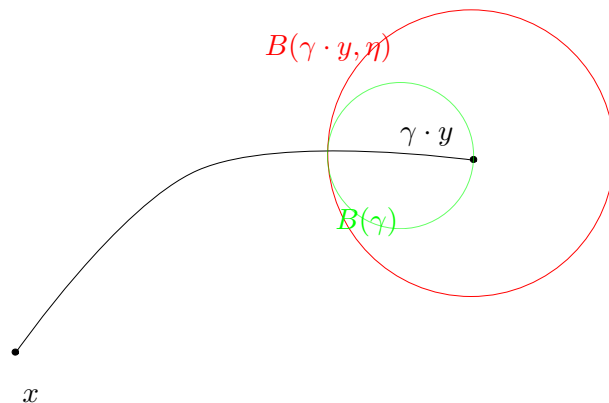


FIGURE 2.4 – La courbe noire représente l'unique géodésique de  $x$  vers  $\gamma \cdot y$ . On choisit alors pour centre de la boule  $B(\Gamma)$  le point milieu de l'intersection de cette géodésique avec la boule  $B(\gamma \cdot y, \eta)$  et son centre  $\gamma \cdot y$ .

L'expression du noyau de la chaleur  $p_3$  donnée par le théorème 2.2.7 montre que la fonction  $\rho \mapsto p_3(\rho, t)$  est décroissante, ce qui implique que  $\rho \mapsto \int_0^s p_3(\rho, t) dt$  l'est aussi. On a donc,

en notant  $\mu$  la mesure venant de la métrique hyperbolique :

$$\int_1^s p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \leq \frac{1}{\text{vol}(B(\gamma))} \int_{B(\gamma)} \int_1^s p_3(x, z, t) dt d\mu(z) .$$

En sommant on obtient

$$\sum_{\gamma \notin \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s+g(s))} \int_1^s p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \prec \sum_{\gamma \notin \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s+g(s))} \int_{B(\gamma)} \int_1^s p_3(x, z, t) dt d\mu(z) ,$$

Quitte a remplacer  $g$  par  $g + \eta$  et sachant que les boules étant disjointes et toute contenues dans l'ensemble des  $z \in \mathbb{H}^3$  tels que  $d(x, z) > 2s + g(s)$  on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \notin \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s+g(s))} \int_1^s p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt &\prec \int_{\{z, d(x, z) \geq 2s+g(s)\}} \int_1^s p_3(x, z, t) dt d\mu(z) \\ &\prec \int_{2s+g(s)}^{+\infty} e^{2\rho} \int_1^s p_3(\rho, t) dt d\rho , \\ &\prec \int_1^s \int_{2s+g(s)}^{+\infty} e^{2\rho} p_3(\rho, t) d\rho dt . \end{aligned}$$

On utilise ici le lemme des grandes déviations 2.2.10, qui en particulier donne que pour tout  $t \in [0, s]$  et  $\rho > 2s + g(s)$  on a

$$\int_{2s+g(s)}^{+\infty} e^{2\rho} p_3(\rho, t) d\rho \prec e^{-\left(\frac{2s+g(s)-2t}{2\sqrt{s}}\right)^2} \prec e^{-\left(\frac{g(s)}{2\sqrt{s}}\right)^2}$$

et donc

$$\sum_{\gamma \notin \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s+g(s))} \int_1^s p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \prec s e^{-\left(\frac{g(s)}{2\sqrt{s}}\right)^2} .$$

On peut donc prendre, par exemple, pour fonction  $g(s)$  la fonction  $\left(s \mapsto s^{\frac{3}{4}}\right) = o(s)$  qui garantit que le membre de droite tends vers 0 quand  $s \rightarrow +\infty$ . Ce terme est en particulier borné, le membre de droite de l'équation (2.3.6) est alors négligeable et on obtient bien (2.3.7), ce qu'il fallait démontrer.  $\blacksquare$

**Démonstration du lemme 2.3.4.** Rappelons la formule explicite donnée par le théorème 2.2.7 pour le noyau de la chaleur de l'espace hyperbolique de dimension 3.

$$p_3(\rho, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \frac{\rho}{\sinh \rho} e^{-t - \frac{\rho^2}{4t}} .$$

En multipliant des deux côtés  $e^{2\rho}$  et en intégrant sur la variable  $t$  on obtient

$$\mathcal{I}(\rho, s) := \int_a^b e^{2\rho} p_3(\rho, t) dt = \int_a^b \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \frac{\rho}{\sinh \rho} e^{-t - \frac{\rho^2}{4t} + 2\rho} dt .$$

La première partie du lemme est toujours vraie pour les  $\rho$  petit, et la deuxième partie demandait  $\rho \geq 2a \geq 2$  on fait donc l'approximation suivante :

$$\frac{\rho}{\sinh \rho} e^{-t - \frac{\rho^2}{4t} + 2\rho} \asymp \rho e^{-t - \frac{\rho^2}{4t} + \rho} ,$$

et donc

$$\mathcal{I}(\rho, s) \asymp \int_a^b \frac{\rho}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\left(\frac{\rho}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)^2} dt . \quad (2.3.9)$$

En effectuant le changement de variable  $u(t) := \frac{\rho}{2\sqrt{t}}$  dans l'intégrale de droite on a

$$\int_a^b \frac{\rho}{t^{\frac{3}{2}}} e^{-\left(\frac{\rho}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)^2} dt \asymp \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{b}}}^{\frac{\rho}{2\sqrt{a}}} e^{-(u - \frac{\rho}{2u})^2} du .$$

On fait maintenant le changement de variables  $w(u) := u - \frac{\rho}{2u}$  d'inverse  $u(w) = \frac{1}{2} \left( w + \sqrt{w^2 + 2\rho} \right)$  :

$$\int_{\frac{\rho}{2\sqrt{b}}}^{\frac{\rho}{2\sqrt{a}}} e^{-(u - \frac{\rho}{2u})^2} du \asymp \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{b}} - \sqrt{b}}^{\frac{\rho}{2\sqrt{a}} - \sqrt{a}} \left( 1 + \frac{w}{\sqrt{w^2 + 2\rho}} \right) e^{-w^2} dw ,$$

Mais on a aussi  $1 \leq \left( 1 + \frac{w}{\sqrt{w^2 + 2\rho}} \right) \leq 2$  uniformément en  $\rho$  et donc :

$$\int_{\frac{\rho}{2\sqrt{b}} - \sqrt{b}}^{\frac{\rho}{2\sqrt{a}} - \sqrt{a}} \left( \frac{w}{\sqrt{w^2 + 2\rho}} + 1 \right) e^{-w^2} dw \asymp \int_{\frac{\rho}{2\sqrt{b}} - \sqrt{b}}^{\frac{\rho}{2\sqrt{a}} - \sqrt{a}} e^{-w^2} dw .$$

La première partie du lemme, la borne supérieure, suit alors directement de l'écriture ci-dessus en majorant l'intégrale ci dessus par  $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du$ . Pour ce qui est de la borne inférieure rappelons que l'on a  $b > a \geq 1$  et  $b - a \geq \sqrt{b}$ , en particulier si  $\rho \in [2a, 2b]$  on a

$$\begin{cases} 0 \in [\frac{\rho}{2\sqrt{b}} - \sqrt{b}, \frac{\rho}{2\sqrt{a}} - \sqrt{a}] \\ \text{longueur} \left( [\frac{\rho}{2\sqrt{b}} - \sqrt{b}, \frac{\rho}{2\sqrt{a}} - \sqrt{a}] \right) \geq 1 , \end{cases}$$

et donc l'existence d'une constante  $c$  telle que

$$c \leq \int_a^b e^{2\rho} p_3(\rho, t) dt ,$$

ce qui est le résultat attendu. ■

### Le cas convergent

La preuve du cas convergent est similaire à celle du cas divergent, sauf en ce qui concerne l'analogie dans le cas convergent du lemme 2.3.8 qui demandera plus de travail. Reprenons donc la preuve précédente étape par étape dans le cas convergent.

**Démonstration :** [cas d'un groupe **convergent**] On reprend exactement les mêmes étapes que dans le cas divergent. Dans ce cas la fonction de renouvellement  $\mathcal{R}_\Gamma(x, y, s)$  s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\Gamma(x, y, s) &:= \int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt = \int_s^{+\infty} \sum_{\gamma \in \Gamma} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \\ &= \sum_{\gamma \in \Gamma} \int_s^{+\infty} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \\ &\geq \sum_{\gamma \notin \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s)} e^{-2d(x, \gamma \cdot y)} \int_s^{+\infty} e^{2d(x, \gamma \cdot y)} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \end{aligned}$$

On applique le lemme 2.3.4 avec les données  $a = s$  et  $b \rightarrow +\infty$  pour avoir que pour tout  $\gamma \notin \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s)$

$$c \leq \int_s^{+\infty} e^{2d(x, \gamma \cdot y)} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \leq C .$$

En particulier,

$$\mathcal{R}_\Gamma(x, y, s) \geq c \sum_{\gamma \notin \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s)} e^{-2d(x, \gamma \cdot y)} = c \mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s) ,$$

ce qui donne la minoration de la même façon que dans le cas divergent. Comme dans le cas divergent, on découpe l'intégrale définition de la fonction de renouvellement grâce à une fonction  $g$  à déterminer.

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt - \sum_{\gamma \notin \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s-g(s))} \int_s^{+\infty} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \\ = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s-g(s))} \int_s^{+\infty} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt . \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Puis on montre l'analogie dans le cas convergent du lemme 2.3.8 :

**Lemme 2.3.11.** Pour tout groupe Kleinien d'exposant critique 2 **convergent** il existe

une fonction  $g(s) = o(s)$  telle que

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s - g(s))} \int_s^{+\infty} p_3(x, \gamma \cdot y, t) = o \left( \int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt \right) .$$

Qui donne bien, en revenant à l'équation 2.3.10 :

$$\int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s - g(s))} \int_s^{+\infty} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt .$$

En utilisant la majoration du lemme 2.3.4 avec  $a = s - g(s)$  et  $b = \infty$  on a l'existence d'une constante  $C$  telle que

$$\int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt \leq C \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s - g(s))} e^{-2d(x, \gamma \cdot y)} = C \mathcal{T}_\Gamma(x, y, 2s - g(s)) .$$

L'unique différence avec la preuve dans le cas divergent est donc la preuve du lemme 2.3.11.

■

**Démonstration :**[Lemme 2.3.11] Rappelons qu'il nous faut montrer qu'il existe une fonction  $g = o(s)$  telle que

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s - g(s))} \int_s^{+\infty} p_3(x, \gamma \cdot y, t) = o \left( \int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt \right) .$$

On reprend les mêmes arguments que ceux utilisées en 2.3.8 au début de la preuve :

En utilisant l'équation (2.2.9) on montre de la même façon que la fonction  $\rho \mapsto \int_s^{+\infty} p_3(\rho, t) dt$  est décroissante, on peut donc réutiliser les boules  $B(\gamma)$  introduites dans le lemme 2.3.8 pour avoir

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s - g(s))} \int_s^{+\infty} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \prec \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s - g(s))} \int_{B(\gamma)} \int_s^{+\infty} p_3(x, z, t) dt d\mu(z) ,$$

Les boules  $B(\gamma)$  sont cette fois contenues dans  $B(x, 2s - g(s))$  et donc

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s - g(s))} \int_s^{+\infty} p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt &\prec \int_1^{2s - g(s)} e^{2\rho} \int_s^{+\infty} p_3(\rho, t) dt d\rho , \\ &\prec \int_s^{+\infty} \int_1^{2s - g(s)} e^{2\rho} p_3(\rho, t) d\rho dt . \end{aligned}$$

On rappelle encore une fois le lemme des grandes déviations 2.2.10, qui donne encore pour tout  $t > s$

$$\int_1^{2s-g(s)} e^{2\rho} p_3(\rho, t) d\rho \prec e^{-\left(\frac{2s-g(s)-2t}{2\sqrt{s}}\right)^2},$$

et donc

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s-g(s))} \int_s^\infty p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \prec \int_s^{+\infty} e^{-\left(\frac{2s-g(s)-2t}{2\sqrt{s}}\right)^2} dt.$$

On ne peut pas majorer comme dans le cas convergent ici car le domaine d'intégration est infini. Plus finement, on effectue le changement de variable  $u := \frac{-2s+g(s)+2t}{2\sqrt{s}}$  pour avoir

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s-g(s))} \int_s^\infty p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \prec \int_{\frac{g(s)}{2\sqrt{s}}}^{+\infty} e^{-u^2} \sqrt{s} du.$$

On utilise ensuite la majoration classique de la gaussienne pour avoir

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s-g(s))} \int_s^\infty p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \prec g(s) e^{-\left(\frac{g(s)}{2\sqrt{s}}\right)^2}.$$

Rappelons que l'on cherche une fonction  $g = o(s)$ , on peut donc supposer  $g(s) \leq s$ . Et donc

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{B}_\Gamma(x, y, 2s-g(s))} \int_s^\infty p_3(x, \gamma \cdot y, t) dt \prec s e^{-\left(\frac{g(s)}{2\sqrt{s}}\right)^2}.$$

Le lemme suivant conclut alors la démonstration du lemme 2.3.11. ■

**Lemme 2.3.12.** Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien d'exposant critique 2, il existe une fonction  $g(s) = o(s)$  telle que

$$s e^{-\left(\frac{g(s)}{2\sqrt{s}}\right)^2} = o\left(\int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt\right). \quad (2.3.13)$$

**Démonstration :** [du lemme 2.3.12] En divisant par  $s$ , en passant au  $\ln$ , et en redivisant par  $s$  on montre que l'équation 2.3.13 est impliquée par la suivante :

$$\left(\frac{g(s)}{s}\right)^2 = o\left(\frac{-1}{s} \ln\left(\frac{1}{s} \int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt\right)\right).$$

Supposons alors que l'on sache

$$h(s) := \frac{-1}{s} \ln\left(\frac{1}{s} \int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt\right) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$$

alors, n'importe quelle fonction  $g$  qui satisfait simultanément  $g = o(s)$  et  $\frac{g}{s} = o(h)$  convien-

drait pour conclure. Faisons en notre nouvel objectif. Remarquons pour commencer que

$$\left[ h_2(s) := \frac{-1}{s} \ln \left( \int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt \right) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0 \right] \iff h(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$$

Montrons donc que  $h_2(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$ . Pour cela nous allons utiliser l'hypothèse  $\delta_\Gamma = 2$  et l'implication :

$$\delta_\Gamma = 2 \implies \left[ \frac{-1}{t} \ln \left( \int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \right]. \quad (2.3.14)$$

Pour cela on utilise la célèbre relation liant le bas du spectre à l'exposant critique due à Sullivan.

**Théorème** ([54]). Si  $\Gamma$  est un groupe Kleinien, en notant  $\lambda_\Gamma$  la première valeur propre associée au laplacien de  $M_\Gamma$ , on a

$$\delta_\Gamma = 2 \iff \lambda_\Gamma = 0.$$

**Remarque 2.3.15.** On aurait pu démontrer cette équivalence "à la main" en utilisant une fois encore la forme explicite du noyau de la chaleur et grâce à l'écriture intégrale 2.3.21 que l'on montrera dans la section suivante.

La première valeur propre du Laplacien et le noyau de la chaleur sont liés par la relation suivante

$$\frac{\ln(p_\Gamma(x, y, t))}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \lambda_\Gamma.$$

Dans notre cas, on a en particulier que pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$p_\Gamma(x, y, t) \succ e^{-\epsilon t}.$$

On intègre alors les deux membres de l'équation ci-dessus en se rappelant que l'intégrale de gauche est convergente

$$1 \succ \int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt \succ e^{-\epsilon s}.$$

Pour conclure on applique la fonction  $\ln$  on divise par  $s$  puis on applique l'opérateur  $\liminf$ , ce qui donne pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$0 \geq \liminf \frac{1}{s} \ln \left( \int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt \right) \geq -\epsilon.$$

Finalement on a bien

$$\frac{-1}{s} \ln \left( \int_s^{+\infty} p_\Gamma(x, y, t) dt \right) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 ,$$

ce qui était l'expression recherchée.

Résumons. L'hypothèse sur l'exposant critique garantit l'équation ci-dessus qui elle même garantit le lemme clé 2.3.11 selon lequel le membre de droite de l'équation (2.3.10) est négligeable devant l'un des termes de gauche. Ce qui conclut car dans ce cas les deux membres de gauche sont équivalents. ■

### 2.3.2 Démonstration du théorème de la borne supérieure 1.0.5, 2.2.29.

Rappelons l'énoncé du théorème en question.

**Théorème 2.3.16.** Il existe une constante  $C_+ > 0$  telle que pour tout groupe kleinien  $\Gamma$  on a

$$\frac{N_\Gamma(x, y, t)}{e^{2t}} \leq C_+ \sqrt{t} p_\Gamma \left( x, y, \frac{t}{2} \right) \quad (2.3.17)$$

Précisons ici que la preuve de ce théorème est indépendante de celle du théorème 2.3.2.

Cette borne n'est pas optimale, le facteur  $\sqrt{t}$  est déjà superflu dans le cas où le groupe  $\Gamma$  agit de manière cocompacte. Il donne cependant des estimées de la fonction orbitale non triviales dès lors que  $\delta_\Gamma = 2$ .

On commencera par montrer le lemme suivant. Rappelons que l'on avait noté  $\mathcal{A}_\Gamma(x, y, a, b)$  l'ensemble  $\{ \gamma \in \Gamma , a \leq d(x, \gamma \cdot y) < b \}$

**Lemme 2.3.18.** Soit  $X$  un espace métrique,  $x, y$  deux points de  $X$  et  $\Gamma$  un sous groupe des difféomorphismes de  $X$  tel que l'orbite  $\Gamma \cdot y$  est discrète. On se donne  $b > a \geq 0$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Alors on a

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{A}_\Gamma(x, y, a, b)} f(d(x, \gamma \cdot y)) = N_\Gamma(x, y, b) f(b) - N_\Gamma(x, y, a) f(a) - \int_{[a, b]} N_\Gamma(x, y, \rho) f'(\rho) d\rho .$$

Ce lemme consiste en une intégration par partie après avoir regroupé les termes de la somme de gauche en paquets ayant la même valeur. On définit donc la mesure de comptage suivante pour tout sous ensemble  $I$  de  $\mathbb{R}$

$$\nu_\Gamma(x, y, \rho)(\mathcal{I}) := \#\{ \gamma \in \Gamma , d(x, \gamma \cdot y) \in \mathcal{I} \} .$$



En écrivant formellement la somme de gauche comme

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{A}_\Gamma(x, y, a, b)} f(d(x, \gamma \cdot y)) = \int_{\mathbb{R}_+} f(\rho) d\nu_\Gamma(x, y, \rho)$$

On voudrait faire une intégration par partie en dérivant la fonction  $f$  et en intégrant la mesure  $\nu$ . Ce qui suit a pour but de rendre la discussion précédente rigoureuse.

**Démonstration du lemme 2.3.18 :** On se donne  $n \in \mathbb{N}^*$  puis l'on découpe l'intervalle  $[a, b]$  en  $n$  intervalles de même longueur. Soit donc  $x_k := a + k \frac{b-a}{n}$ , on a

$$\mathcal{A}_\Gamma(x, y, a, b) = \bigcup_{1 \leq k \leq n} \mathcal{A}_\Gamma(x, y, x_{k-1}, x_k)$$

ce qui donne :

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{A}_\Gamma(x, y, a, b)} f(d(x, \gamma \cdot y)) = \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_{\gamma \in \mathcal{A}_\Gamma(x, y, x_{k-1}, x_k)} f(d(x, \gamma \cdot y)) .$$

La fonction  $f$  étant continue on a

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{A}_\Gamma(x, y, a, b)} f(d(x, \gamma \cdot y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq k \leq n-1} \sharp \mathcal{A}_\Gamma(x, y, x_{k-1}, x_k) f(x_k) .$$

On va alors travailler avec la somme de droite à  $n$  fixé. Plus précisément, on va effectuer une intégration par partie discrète puis faire tendre le pas vers 0 en faisant tendre  $n$  vers l'infini pour reconnaître une somme de Riemann. On intègre la suite  $\sharp \mathcal{A}_\Gamma(x, y, x_{k-1}, x_k)$  par la suite  $N_\Gamma(x, y, x_k)$  et on dérive la suite  $f(x_k)$  pour obtenir

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq n} \sharp \mathcal{A}_\Gamma(x, y, x_{k-1}, x_k) f(x_k) = \\ [N_\Gamma(x, y, \rho) f(\rho)]_a^b - \sum_{1 \leq k \leq n-1} N_\Gamma(x, y, x_k) [f(x_k) - f(x_{k+1})] . \end{aligned}$$

Il nous suffit alors pour avoir le résultat d'écrire le membre de droite comme une somme de Riemann pour faire apparaître l'intégrale désirée. Pour cela on écrit la somme du membre de droite de l'équation ci-dessus comme

$$\frac{b-a}{n} \sum_{1 \leq k \leq n-1} N_\Gamma(x, y, x_k) \left( \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{\frac{b-a}{n}} \right) .$$

La fonction  $f$  étant lisse sur  $[a, b]$  on peut alors remplacer les parenthèses

$$\left( \frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{\frac{b-a}{n}} \right)$$

par la fonction  $f'(x_k)$ . De telle sorte que la question se ramène finalement à savoir si

$$\int_{[0, R]} N_{\Gamma}(x, y, \rho) f'(\rho) d\rho$$

est bien limite des sommes de Riemann de la fonction

$$\rho \mapsto N_{\Gamma}(x, y, \rho) f'(\rho) ,$$

ce qui est effectivement le cas ici, car, l'orbite du point  $y$  étant discrète, cette fonction est continue par morceaux. ■

Montrons grâce au lemme 2.3.18 la formule intégrale suivante pour le noyau de la chaleur :

**Corollaire 2.3.19.** Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien alors on a :

$$p_{\Gamma}(x, y, t) = - \int_{\mathbb{R}_+} N_{\Gamma}(x, y, \rho) \partial_{\rho} p_3(\rho, t) d\rho \quad (2.3.20)$$

**Démonstration :** On applique le lemme 2.3.18 avec les données

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \rho &\mapsto p_3(\rho, t) , \end{aligned}$$

$a = 0$ , et  $b \rightarrow +\infty$  pour obtenir

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} p_3(x, \gamma \cdot y, t) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( N_{\Gamma}(x, y, b) p_3(b, t) - \int_{[0, b]} N_{\Gamma}(x, y, \rho) \partial_{\rho} p_3(\rho, t) d\rho \right) .$$

On reconnaît alors le membre de gauche comme étant  $p_{\Gamma}(x, y, t)$ . La décroissance spatiale super exponentielle du noyau de la chaleur donne

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} N_{\Gamma}(x, y, b) p_3(b, t) = 0 ,$$

donc

$$p_{\Gamma}(x, y, t) = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{[0, b]} N_{\Gamma}(x, y, \rho) \partial_{\rho} p_3(\rho, t) d\rho . \quad (2.3.21)$$

On utilise alors la formule de récurrence (2.2.9) pour constater que la fonction

$$-N_{\Gamma}(x, y, \rho) \partial_{\rho} p_3(\rho, t) \geq 0 ,$$

est positive. On peut donc se passer de la limite et écrire

$$p_{\Gamma}(x, y, t) = - \int_{\mathbb{R}_+} N_{\Gamma}(x, y, \rho) \partial_{\rho} p_3(\rho, t) d\rho \quad (2.3.22)$$

Ce qui est le résultat annoncé. ■

On conclut en utilisant la formule explicite du noyau de la chaleur dans  $\mathbb{H}^3$  pour obtenir la borne supérieure 2.3.16.

**Démonstration du théorème 2.2.29 :** Toujours par positivité de la fonction intégrée, on peut minorer l'intégrale ci-dessus par

$$p_{\Gamma}(x, y, t) \geq \int_{[2t, 2t+1]} N(x, y, \rho) [-\partial_{\rho} p_3(\rho, t)] d\rho .$$

Montrons alors qu'il existe une constante  $C_3 > 0$  telle que pour tout  $\rho \in [2t, 2t + 1]$  on a

$$[-\partial_{\rho} p_3](\rho, t) \geq \frac{C_3}{\sqrt{t}} e^{-4t} . \quad (2.3.23)$$

Pour cela on rappelle la formule donnée par le théorème 2.2.7,

$$p_3(\rho, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \frac{\rho}{\sinh(\rho)} e^{-t - \frac{\rho^2}{4t}}$$

pour déduire la formule suivante

$$\begin{aligned} \partial_{\rho} p_3(\rho, t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{\sinh(\rho)} - \frac{\rho \cosh(\rho)}{\sinh(\rho)^2} - \frac{\rho^2}{2t \sinh(\rho)} \right) e^{-t - \frac{\rho^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} \left( 1 - \frac{\rho \cosh(\rho)}{\sinh(\rho)} - \frac{\rho^2}{2t} \right) \frac{e^{-t - \frac{\rho^2}{4t}}}{\sinh(\rho)} . \end{aligned}$$

De laquelle il est devenu clair qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $\rho \in [2t - 1, 2t]$  on ait

$$-\partial_{\rho} p_3(\rho, t) \geq \frac{C}{(4\pi t)^{\frac{3}{2}}} e^{-2t} \left( 2t + \frac{4t^2}{2t} \right) e^{-t - \frac{4t^2}{4t}}$$

$$\geq \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}} e^{-4t} .$$

La formule (2.3.23) donne alors

$$p_{\Gamma}(x, y, t) \geq \frac{C e^{-4t}}{\sqrt{t}} \int_{[2t, 2t+1]} N_{\Gamma}(x, y, \rho) d\rho .$$

La fonction  $\rho \mapsto N_{\Gamma}(x, y, \rho)$  étant croissante, on a

$$p_{\Gamma}(x, y, t) \geq \frac{C e^{-4t}}{\sqrt{t}} N_{\Gamma}(x, y, 2t)$$

On change maintenant  $t$  en  $t/2$  dans l'équation ci-dessus pour obtenir la formule (2.3.17) du théorème 2.3.16, ce qui conclut. ■

### 2.3.3 Démonstration du théorème comptage-chaueur 1.0.7, renforcé 2.2.32

Le théorème suivant est la pierre angulaire permettant d'obtenir des estimées de la fonction orbitale grâce à l'étude en grands temps du noyau de la chaleur.

**Théorème 2.3.24.** S'il existe  $x, y \in \mathbb{H}^3$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$  tels que

$$p_{\Gamma}(x, y, t) \asymp t^{-\alpha}$$

Alors on a

— si  $\alpha \leq 1$  alors  $\Gamma$  est divergent et

$$\int_0^s N_{\Gamma}(x, y, t) e^{-2t} dt \asymp \begin{cases} s^{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ \ln(s) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.3.25)$$

— si  $\alpha > 1$  alors  $\Gamma$  est convergent et

$$\int_s^{+\infty} N_{\Gamma}(x, y, t) e^{-2t} dt \asymp s^{1-\alpha} \quad (2.3.26)$$

La démonstration repose sur le corollaire 2.3.3 du théorème 2.3.2, le théorème 2.3.16 et le lemme 2.3.18 montré en première partie de la section précédente.

**Démonstration** [2.3.18 + 2.3.3 + 2.3.16  $\Rightarrow$  2.3.24 ]

Notons par  $\mathcal{P}_\Gamma(x, y, a, b)$ , avec  $b > a \geq 0$ , la somme

$$\mathcal{P}_\Gamma(x, y, a, b) := \sum_{\gamma \in A_\Gamma(x, y, a, b)} e^{2d(x, \gamma \cdot y)} .$$

On applique le lemme 2.3.18 à  $f := \rho \mapsto e^{-2\rho}$  pour avoir

$$\mathcal{P}_\Gamma(x, y, a, b) = \frac{N_\Gamma(x, y, b)}{e^{2b}} - \frac{N_\Gamma(x, y, a)}{e^{2a}} + 2 \int_{[a, b]} N_\Gamma(x, y, \rho) e^{-2\rho} d\rho \quad (2.3.27)$$

On injecte alors dans l'équation (2.3.27)  $a = 0$  et  $b = s$  ce qui donne

$$\left| \mathcal{P}_\Gamma(x, y, 0, s) - 2 \int_{[0, s]} N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} dt \right| \leq 1 + \frac{N_\Gamma(x, y, s)}{e^{2s}} \quad (2.3.28)$$

Nous distinguons maintenant les cas. Supposons que

$$p_\Gamma(x, y, t) \asymp t^{-\alpha} ,$$

avec  $\alpha < 1$ . On fait alors appel à la version divergente du corollaire 2.3.3 et au théorème 2.3.2 qui donne que

$$\mathcal{P}_\Gamma(x, y, 0, s) \asymp s^{1-\alpha}$$

En particulier, cette fois en faisant appel au théorème 2.3.16, on a

$$\begin{aligned} 1 + \frac{N_\Gamma(x, y, s)}{e^{2s}} &\leq 1 + s^{\frac{1}{2}-\alpha} \\ &= o(s^{1-\alpha}) \\ &= o(\mathcal{P}_\Gamma(x, y, 0, s)) . \end{aligned}$$

Les deux termes de gauche de l'équation 2.3.28 sont donc équivalents :

$$\mathcal{P}_\Gamma(x, y, 0, s) \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \int_{[0, s]} N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} dt .$$

En particulier en rappelant le corollaire 2.3.3 on a bien que

$$\int_{[0, s]} N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} dt \asymp s^{1-\alpha} .$$

On traite ensuite le cas  $\alpha = 1$  de la même façon en remplaçant  $s^{1-\alpha}$  par  $\ln(s)$  et le cas  $\alpha > 1$  en utilisant la formule (2.3.27) avec  $a = s$  et  $b \rightarrow +\infty$ . ■

## 2.4 Estimées du noyau de la chaleur en grand temps.

Cette section est consacrée à l'analyse du noyau de la chaleur en grand temps sur deux classes d'exemples de variétés hyperboliques de volume infini.

Le cadre dans la suite duquel nous nous placerons est celui des **espaces métriques mesurés**. Cette généralité nous est indispensable car nous auront besoin de travailler avec des graphes de Cayley de groupes ainsi qu'avec des variétés riemanniennes mesurées.

**Définition 2.4.1.** Un **espace métrique mesuré**, que l'on notera  $(M, d, \mu)$ , est un espace métrique  $(M, d)$  muni d'une mesure  $\mu$  localement finie.

On note  $V(x, r)$  le volume de la boule de centre  $x \in M$  et de rayon  $r$ .

### 2.4.1 Le cas des revêtements nilpotents de variétés hyperboliques compactes.

#### Construction de revêtements nilpotents de variétés hyperboliques compactes.

L'existence d'un revêtement nilpotent d'une 3-variété hyperbolique compacte est difficile. Une façon de construire, implicitement, de tels exemples est de trouver des 3-variétés hyperboliques compactes  $M_{\Gamma_0}$  dont le groupe fondamental  $\Gamma_0$  surjecte sur un groupe libre de rang arbitrairement grand. L'idée étant qu'un groupe  $N$  finiment engendré se présente comme un quotient du groupe libre. En effet, en notant  $S = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  un système de générateurs pour le groupe  $N$ , on a naturellement un morphisme surjectif

$$\mathbb{F}_n \twoheadrightarrow N$$

où l'on a écrit  $\mathbb{F}_n$  comme librement engendré par les symboles  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Le morphisme précédent est défini en envoyant les symboles  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  sur les générateurs du groupe  $N$ . Cette flèche est bien définie car le groupe libre n'a pas de relations non triviales, et surjective par construction.

Étant donné un groupe nilpotent finiment engendré, le groupe de Heisenberg discret par exemple, on peut alors l'écrire comme l'image du groupe libre par un certain morphisme. Si de plus, on savait qu'il existe un groupe fondamental  $\Gamma_0$  d'une 3-variété hyperbolique se surjectant sur un groupe libre de rang  $n$  on aurait

$$\Gamma_0 \twoheadrightarrow \mathbb{F}_n \twoheadrightarrow N ,$$

qui induit la suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma_0 \rightarrow N \rightarrow 0 .$$

Le groupe  $\Gamma$ , en tant que sous groupe normal de  $\Gamma_0$ , induit alors un revêtement galoisien  $M_\Gamma$  de la variété  $M_{\Gamma_0}$  dont le groupe de revêtement est exactement  $N$ .

L'existence de telles surjections sur le groupe libre vient avec le théorème difficile suivant. On renvoie à [5, théorème 5.1] et aux références associées pour plus de détails.

**Théorème.** Soit  $\Gamma_0$  un groupe fondamental de trois-variété hyperbolique compacte et  $n > 0$ , alors, virtuellement,  $\Gamma_0$  surjecte sur  $\mathbb{F}_n$ .

Le théorème n'est pas exactement énoncé comme ceci, mais donne l'existence d'une surjection sur un groupe libre de rang  $\geq 2$ . Ceci implique l'énoncé ci-dessus car tout groupe libre de rang  $k \geq 2$  surjecte sur un groupe libre de rang 2 et pour tout  $n$  le groupe libre  $\mathbb{F}_2$  contient un sous groupe libre d'indice fini de rang  $n$ . On obtient alors l'énoncé ci-dessus on prenant la pré-image de ce groupe libre de rang  $n$  par le morphisme  $\Gamma_0 \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2$ .

Ce théorème donne bien plus que l'existence de revêtements nilpotents galoisiens de 3-variétés hyperboliques compactes. En effet, le même argument que celui présenté précédemment donne, combiné au théorème ci-dessus, que tout groupe finiment engendré peut être réalisé comme le groupe de revêtement d'une certaine variété hyperbolique compacte.

### Le doublement du volume et l'inégalité de Poincaré

La propriété suivante va jouer un rôle clé dans les estimées en grand temps du noyau de la chaleur.

**Définition 2.4.2.** On dira d'un espace mesuré  $(M, g, \mu)$  qu'il admet la **propriété de doublement du volume** s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout point  $x \in M$  pour tout rayon  $r > 0$  on a

$$V(x, 2r) \leq C V(x, r)$$

Le premier exemple à avoir en tête est probablement celui des espaces euclidiens. Le volume de la boule  $B(x, r)$  ne dépend pas du point  $x$  et croît polynomialement, ce qui implique la condition de doublement du volume. Le théorème suivant va jouer le rôle principal de cette sous-section. Il fait le lien entre le comportement du noyau de la chaleur en grand temps et la géométrie asymptotique de la variété sous-jacente.

**Théorème 2.4.3** (Grigor'Yan [26]). Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète, les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

- La propriété de doublement du volume et **l'inégalité de Poincaré suivante**.

Il existe  $k, P > 0$  tel que pour tout point  $x \in M$ , tout  $r > 0$  et toute fonction Lipschitz  $f$

$$\int_{B(x,r)} |f - \tilde{f}|^2 d\mu \leq P r^2 \int_{B(x,kr)} |\nabla f|^2 d\mu ,$$

où  $\tilde{f}$  est la moyenne de  $f$  sur la boule  $B(x, r)$ .

— L'encadrement suivant du noyau de la chaleur

$$\frac{c_1}{\text{vol } B(x, \sqrt{t})} e^{-C_1 \frac{d(x,y)^2}{t}} \leq p_\Gamma(x, y, t) \leq \frac{C_2}{\text{vol } B(x, \sqrt{t})} e^{-c_2 \frac{d(x,y)^2}{t}} .$$

— Une inégalité de Harnack parabolique.

Nous ne définirons pas l'inégalité de Harnack parabolique, nous ne l'avons ajoutée ici que par souci d'exhaustivité : elle ne nous sera pas utile pour la suite.

**Remarque 2.4.4.** Précisons quand même que l'inégalité de Harnack parabolique est une version forte de l'inégalité de Harnack classique. En particulier les variétés l'admettant ne possèdent pas de fonction harmoniques positives non constantes. D'un autre côté pour les variétés hyperboliques, on sait que les densités conformes - et donc les mesures de Bowen-Margulis-Sullivan - sont en bijections avec les fonctions harmoniques positives. Une variété hyperbolique satisfaisant les conditions équivalentes ci-dessus possède donc une unique mesure de Bowen-Margulis-Sullivan : la mesure de Liouville.

Les méthodes utilisées pour la preuve de ce théorème ont été introduites par Varopoulos. On pourra consulter les livres [55], [24] pour plus de détails.

L'avantage de la formulation du théorème précédent est que les hypothèses "inégalité de Poincaré" et "doublement du volume" sont invariantes par certaine transformation préservant les propriétés des espaces métriques à grande échelle : les isométries à l'infini.

**Définition 2.4.5** (Kanaï [30]). Soit  $(M_1, d_1, \mu_1)$  et  $(M_2, d_2, \mu_2)$  deux espaces métriques mesurés. On dira d'une application  $f : M_1 \rightarrow M_2$  que c'est une **isométrie à l'infini** si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. il existe  $\epsilon > 0$  tel que le  $\epsilon$ -voisinage de  $f(M_1)$  soit égale à  $M_2$ .
2. il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $x \in M_1$  on ait

$$C^{-1}V(x, 1) \leq V(f(x), 1) \leq CV(x, 1)$$

3. Il existe  $a, b$  tel que pour tout  $x, y \in M_1$  on ait

$$a^{-1} d_1(x, y) - b \leq d_2(f(x), f(y)) \leq a d_1(x, y) + b$$



Ces applications ont été définies par Kanaï [30] qui les introduisit pour renforcer la notion de pseudo-isométrie afin d'en faire une relation d'équivalence. L'énoncé qui suit correspond à l'invariance par isométrie à l'infini des propriétés du théorème 2.4.3.

**Théorème 2.4.6** (Couhlon Saloff-Coste [15]). La propriété de doublement du volume et l'inégalité de Poincaré sont invariantes par isométrie à l'infini.

La prochaine section a pour but d'utiliser un théorème de Milnor sur la croissance polynomiale des groupes nilpotents pour en déduire les estimées du noyau de la chaleur sur les revêtement nilpotent de variété compacte grâce au théorème 2.4.3.

### Application aux revêtements nilpotents.

Pour cette sous-section les espaces métriques considérés sont des variétés riemanniennes munies du volume venant de la métrique et des graphes de valence finie. Ces derniers viennent naturellement avec une distance, celle induite par la structure de graphe, et une mesure, la mesure de comptage.

Soit  $\Gamma$  un groupe finiment engendré et  $S$  un système de générateur. On notera  $\Gamma_S$  le graphe de Cayley associé au système de générateur  $S$ . On notera  $d$  la distance sur cet espace induite par la structure de graphe. Il est bien connu que deux systèmes de générateurs donnent deux espaces quasi-isométriques, en particulier le taux de croissance du volume des boules d'un tel groupe peut-être défini indépendamment du système de générateurs.

Un groupe  $\Gamma$  agissant toujours transitivement sur tous ses graphes de Cayley, le volume d'une boule dans ce graphe ne dépend donc pas du point où cette dernière est centrée. On note alors  $V(r)$  le volume d'une boule de rayon  $r$ . Milnor est le premier à remarquer les liens entre la géométrie des graphes de Cayley et certaines propriétés algébriques du groupe sous-jacent. Par exemple que la croissance du volume des boules des groupes virtuellement nilpotents est au plus polynomiale. Ce résultat a ensuite été affiné par le théorème suivant, qui implique en particulier la propriété de doublement du volume.

**Théorème 2.4.7** (voir [43]). Le graphe de Cayley d'un groupe nilpotent est à croissance polynomiale. C'est-à-dire qu'il existe une constante  $\alpha \in \mathbb{N}$  telle que  $V(r) \asymp r^\alpha$ .

On ne peut pas ici ne pas citer le théorème suivant, dû à Gromov, qui fait l'équivalence entre ces deux propriétés.

**Théorème 2.4.8** (Gromov [27]). Le graphe de Cayley d'un groupe finiment engendré est à croissance polynomiale si et seulement si ce groupe est virtuellement nilpotent.

On appellera alors **croissance d'un groupe nilpotent** le taux de croissance polynomiale du volume de n'importe quelle boule.

Dans le cas des graphes de Cayley de groupes, l'inégalité de Poincaré du théorème 2.4.3 est impliquée par la propriété de doublement du volume. Ce fait nous vient de l'inégalité de Poincaré à l'échelle suivante dont la preuve est dû à Kleiner.

**Théorème 2.4.9** (Kleiner [33]). Soit  $(X, d)$  un graphe de Cayley d'un groupe finiment engendré. Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in X$  tout  $r > 0$  et toute fonction  $f$  Lipschitz on ait

$$\int_{B(x,r)} |f - \tilde{f}|^2 d\mu \leq C r^2 \frac{V(2r)}{V(r)} \int_{B(x,3r)} |\nabla f|^2 d\mu ,$$

où  $\tilde{f}$  est la moyenne de  $f$  sur la boule  $B(x, r)$ .

Le théorème de Kleiner admet le corollaire immédiat suivant :

**Corollaire 2.4.10.** Le graphe de Cayley d'un groupe nilpotent satisfait la propriété de doublement du volume et l'inégalité de Poincaré 2.4.3.

Ces deux propriétés étant invariantes par isométrie à l'infini, elles sont satisfaites pour les revêtements nilpotents de variétés co-compactes, mais aussi pour toutes les variétés qui leur sont isométriques à l'infini. On peut alors appliquer le théorème 2.4.3 pour obtenir le

**Théorème 2.4.11** (Varopoulos, voir [55]). Soit  $M$  une variété riemannienne quasi-isométrique à l'infini au graphe de Cayley d'un groupe nilpotent  $N$  de croissance  $\alpha$ , alors il existe deux constantes  $C, c > 0$  telles que pour tout  $x$  et  $y$  et  $t > 0$  :

$$\frac{c}{t^{\frac{\alpha}{2}}} \leq p_M(x, y, t) \leq \frac{C}{t^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Précisons que la preuve initiale de Varopoulos de ce théorème ne repose pas sur l'inégalité de Poincaré et le doublement du volume.

On est maintenant dans le cadre des hypothèses du théorème 2.3.24, c'est-à-dire que l'on a un contrôle polynomial du noyau de la chaleur :

**Théorème 2.4.12.** Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien tel que  $M_\Gamma$  est isométrique à l'infini au graphe de Cayley d'un groupe nilpotent  $N$  de croissance  $\alpha$ , alors il existe une constante  $C_+ > 0$  tel que pour tout groupe kleinien  $\Gamma$  on a

$$\frac{N_\Gamma(x, y, t)}{e^{2t}} \leq C_+ t^{-\frac{\alpha+1}{2}}$$

— si  $\alpha < 2$  alors  $\Gamma$  est divergent, de plus

$$\int_0^s N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} dt \asymp s^{-\frac{\alpha}{2}+1}$$

— si  $\alpha = 2$  alors  $\Gamma$  est divergent, de plus

$$\int_0^s N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} dt \asymp \ln(s)$$

— si  $\alpha > 2$  alors  $\Gamma$  est convergent, de plus

$$\int_s^{+\infty} N_\Gamma(x, y, t) e^{-2t} dt \asymp s^{-\frac{\alpha}{2}+1} .$$

Théorème qui s'applique donc en particulier au cas des revêtements nilpotents de variétés riemanniennes compactes.

### 2.4.2 Les demi-cylindres hyperboliques.

Cette sous-section a pour but l'étude de la fonction orbitale d'une famille naturelle de variétés hyperboliques qui ne sont ni de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie, ni des revêtements de variétés compactes.

La construction de ces variétés est complexe, elle utilise toute la technologie développée par Thurston pour le théorème d'hyperbolisation que nous ne pouvons pas introduire ici. Nous nous contenterons de l'énoncé suivant, corollaire des travaux de Thurston, Otal et McMullen :

**Théorème 2.4.13** (McMullen [40] théorème 3.12 page 55). Il existe une famille de variétés hyperboliques de dimension trois à deux bouts ; l'un des ces bouts est quasi-isométrique à  $\mathbb{R}_+$ , on l'appellera dégénéré et on le notera  $E$ , le second est géométriquement fini (mais n'est pas un cusp) et on le notera  $\mathcal{V}$ . On appelle ces variétés des **demi-cylindres** hyperboliques.

On notera alors  $K$  un compact déconnectant un demi-cylindre, c'est-à-dire tel que

$$M \setminus K = \mathcal{V} \sqcup E .$$

On reviendra plus tard sur la notion de finitude géométrique.

Historiquement, Sullivan les étudia dans [36, page 127] pour démontrer qu'il existe des variétés hyperboliques dont le groupe Kleinien correspondant est finiment engendré et d'exposant critique 2 mais dont la mesure de Lebesgue de l'ensemble limite est nulle. Cette question est liée à la conjecture, maintenant théorème, d'Ahlfors qui propose la dichotomie suivante :

**Théorème.** Soit  $\Gamma$  un groupe Kleinien finiment engendré alors soit son ensemble limite est toute la sphère soit il est de mesure de Lebesgue nulle.

Le résultat de Sullivan montrait que ces variétés vérifient la conjecture d'Ahlfors. De plus, cela donnait un contre exemple à un renforcement possible de la conjecture d'Ahlfors, vraie en dimension 2, qui dirait qu'un groupe Kleinien finiment engendré admet soit la sphère comme ensemble limite, soit est d'exposant critique strictement plus petit que 2. Toutes les preuves reposent sur le théorème suivant :

**Théorème 2.4.14** (Sullivan [36] page 127). Il existe une fonction harmonique positive non constante à croissance linéaire dans le bout dégénéré sur tout demi-cylindre. De plus, cette fonction est unique si l'on prescrit sa valeur limite (bien définie) dans le bout géométriquement fini. On appelle cette fonction la **fonction harmonique de Sullivan**.

L'intuition derrière ce théorème est que le bout dégénéré d'un demi-cylindre ressemble à  $\mathbb{R}_+$ , espace pour lequel on sait les fonctions harmoniques être à croissance linéaire. Ce travail a par la suite été complété et généralisé par Bishop et Jones dans [8].

### Variété riemanniennes mesurée et mouvement Brownien conditionné.

Le but de cette section est d'isoler une condition nécessaire et suffisante pour obtenir une majoration des valeurs diagonales du noyau de la chaleur pour les demi-cylindres. Pour cela on va se placer dans la généralité des **variétés riemanniennes mesurées**, c'est-à-dire des espaces métriques mesurés obtenus en considérant pour espace métrique une variété riemannienne  $(M, g)$  et pour mesure  $\mu := \sigma \mu_g$  où  $\sigma$  est une fonction lisse strictement positive et  $\mu_g$  la mesure riemannienne associée à la métrique  $g$ . On note  $(M, g, \sigma)$  cet espace métrique mesuré.

Avec un tel espace vient un opérateur naturel, généralisant le laplacien sur les variétés riemanniennes.

**Définition 2.4.15.** Soit  $(M, g, \sigma)$  une variété riemannienne mesurée, on appelle le  **$\sigma$ -Laplacien**, noté  $\Delta_\sigma$ , l'opérateur défini sur les fonctions lisses par

$$\Phi \mapsto -\sigma^{-1} \operatorname{div}(\sigma \nabla \Phi)$$

De la même façon que pour le Laplacien usuel cet opérateur est générateur d'un semi-groupe d'opérateurs à noyaux  $e^{-t\Delta_\sigma}$ , sous certaines hypothèses de complétude que l'on énoncera plus loin. On appelle  **$\sigma$ -noyaux**, que l'on note  $p_M^\sigma(x, y, t)$ . Intuitivement ces noyaux correspondent à la distribution spatiale d'un mouvement Brownien conditionné selon la mesure  $\sigma$ . Ces noyaux sont également solution au problème de Cauchy suivant, similaire à 2.2.5.

Pour toute condition initiale lisse  $u_0$  continue et bornée la fonction

$$u_t(x) := \int_M p_M^\sigma(x, y, t) u_0(y) d\mu(y)$$

est solution de l'équation différentielle

$$\Delta_\sigma u_t + \partial_t u_t = 0$$

avec la condition

$$u_t \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} u_0$$

uniformément sur tout compact.

L'unicité d'une telle solution n'est cependant pas automatique. Dans le cas où l'on a unicité on dira que la variété mesurée est **stochastiquement complète**, le théorème suivant vient apporter un critère de nature géométrie à grande échelle pour garantir cette propriété. On notera encore  $V(x, r)$  le volume pour la mesure à poids  $\mu = \sigma\mu_g$  d'une boule centrée en  $x$  de rayon  $r$ .

**Théorème 2.4.16** (Grigor'Yan [24] théorème 11.8). Soit  $(M, g, \sigma)$  une variété mesurée. S'il existe un point  $x$  tel que

$$\int_1^{+\infty} \frac{r}{\ln V(x, r)} dr = +\infty$$

alors  $(M, g, \sigma)$  est stochastiquement complète.

Remarquons que ce théorème donne une preuve du caractère stochastiquement complet des variétés hyperboliques, la croissance du volume étant au plus exponentielle.

### Le demi-cylindre conditionné.

On ne va pas étudier directement le noyau de la chaleur des demi-cylindres hyperboliques mais celui associé au mouvement Brownien conditionné par la fonction harmonique de Sullivan.

Soit donc  $M$  un demi-cylindre hyperbolique et  $h$  la fonction harmonique de Sullivan. On appelle la variété mesurée  $(M, g, h^2)$  un **demi-cylindre de Sullivan**. Rappelons que la fonction harmonique de Sullivan tend vers la constante 1 dans le bout géométriquement fini  $\mathcal{V}$  et est à croissance linéaire dans le bout géométriquement infini. En particulier on a

1. La variété mesurée  $(\mathcal{V}, g, h^2)$  est isométrique à l'infini à  $(\mathcal{V}, g)$ .
2. La variété mesurée  $(E, g, h^2)$  est isométrique à l'infini à  $(\mathbb{R}_+, dx^2, x^2)$

Notons donc que la croissance du volume des boules des demi-cylindres mesurés est au plus exponentielle dans le bout géométriquement fini et polynomiale dans le bout géométriquement infini, donc au plus exponentielle. On peut alors utiliser le critère 2.4.16 et obtenir le

**Lemme 2.4.17.** Les demi-cylindres de Sullivan sont stochastiquement complets.

La proposition suivante fait le lien entre les  $h^2$ -noyaux associés à la fonction harmonique de Sullivan et les noyaux de la chaleur sur les demi-cylindres. On verra dans la sous-section suivante qu'il est plus facile d'estimer le comportement en grand temps des  $\sigma$ -noyaux.

**Proposition 2.4.18.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne stochastiquement complète et  $h$  une fonction harmonique strictement positive. Si la variété  $(M, g, h^2)$  est aussi stochastiquement complète alors :

$$p_{M_\Gamma}^{h^2}(x, y, t) = \frac{p_\Gamma(x, y, t)}{h(y)h(x)} .$$

**Démonstration :** La variété étant stochastiquement complète il suffit de montrer que le membre de droite ci-dessus satisfait le problème de Cauchy. Commençons par montrer qu'il est solution de l'équation de la chaleur à poids : on gèle la variable  $x$ , on pose  $p_\Gamma(x, y, t) = p_t(y)$  et on vérifie que la fonction suivante

$$\varphi_t := y \mapsto \frac{p_t(y)}{h(y)}$$

est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta_{h^2}\varphi_t + \partial_t\varphi_t = 0 .$$

On part du membre de gauche :

$$\begin{aligned} -\Delta_{h^2}\varphi_t &:= \frac{1}{h^2} \operatorname{div}(h^2\nabla\varphi_t) \\ &= \frac{1}{h^2} \operatorname{div}\left(h^2\nabla\left(\frac{p_t}{h}\right)\right) \\ &= \frac{1}{h^2} \operatorname{div}(h\nabla p_t - p_t\nabla h) \\ &= \frac{1}{h^2} (\nabla h \cdot \nabla p_t - h\Delta p_t - \nabla p_t \cdot \nabla h + p_t\Delta h) . \end{aligned}$$

Mais la fonction  $h$  est harmonique et  $p_t$  est solution de  $\Delta p_t = -\partial_t p_t$  on a donc :

$$\begin{aligned} -\Delta_{h^2}\varphi_t &= \frac{1}{h^2} h\partial_t p_t \\ &= \frac{1}{h} \partial_t p_t \\ &= \partial_t \left(\frac{p_t}{h}\right) = \partial_t \varphi_t . \end{aligned}$$

Pour conclure, il nous faut montrer que pour toutes fonctions continues et bornées  $f$  on a

$$\int_M \varphi_t(x, y) f(y) d\mu(y) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(x) .$$

Pour cela, on va utiliser le fait que l'on savait que le noyau de la chaleur vérifie cette propriété. On part du membre de gauche :

$$\begin{aligned} \int_M \varphi_t(x, y) f(y) d\mu(y) &= \int_M \frac{p_\Gamma(x, y, t)}{h(y)h(x)} f(y)h^2(y) d\mu_g(y) \\ &= \frac{1}{h(x)} \int_M p_\Gamma(x, y, t) f(y)h(y) d\mu_g(y) \end{aligned}$$

Mais  $p_\Gamma(x, y, t)$  est solution du problème de Cauchy sur la variété  $(M, g)$  et donc

$$\int_M p_\Gamma(x, y, t) f(y)h(y) d\mu_g(y) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f(x) h(x)$$

uniformément, ce qui conclut. ■

En particulier les valeurs diagonales de ces deux noyaux ont le même comportement en grand temps.

### Une inégalité de Sobolev

Le théorème suivant est la clé des estimations en grand temps du  $h^2$ -noyau.

**Théorème 2.4.19.** voir [24, corollaire 14.23 page 383] Soit  $(M, g, \sigma)$  une variété riemannienne mesurée et  $n > 2$ . Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- L'inégalité de Sobolev suivante. Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute fonction  $u$  telle que  $u$  et  $|\nabla u|$  soient de carré intégrable on a :

$$\left( \int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \int_M |\nabla u|^2 d\mu$$

- Il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $x \in M$  et tout  $t > 0$  on a

$$p_M^\sigma(x, x, t) \leq C t^{-\frac{n}{2}}$$

**Remarque 2.4.20.** La condition  $n > 2$  peut paraître un peu artificielle. On a en fait un énoncé général en remplaçant l'inégalité de Sobolev ci-dessus par une inégalité de Nash. On peut consulter la même référence que celle du théorème ci-dessus pour plus de détails.

Le lemme suivant est la clé pour obtenir des estimées en grand temps du noyau de la chaleur.

**Lemme 2.4.21.** Soit  $M$  un demi cylindre et  $h$  la fonction harmonique de Sullivan. La variété riemannienne mesurée  $(M, g, h^2)$  vérifie une inégalité de Sobolev pour  $n = 3$ .

Nous consacrons la prochaine sous-section à sa preuve, mais avant, démontrons le corollaire suivant :

**Corollaire 2.4.22.** Soit  $\Gamma$  la représentation du groupe fondamental d'un demi-cylindre  $M_\Gamma$  dans les isométries hyperboliques de  $\mathbb{H}^3$ , alors pour tout  $x \in M_\Gamma$  on a :

$$N_\Gamma(x, x, \rho) = O\left(\frac{e^{2\rho}}{\rho}\right)$$

**Démonstration :** Le lemme précédent 2.4.21 combiné au théorème 2.4.19 donne qu'il existe une constante telle que pour tout  $x \in M_\Gamma$  on a

$$p_{M_\Gamma}^{h^2}(x, x, t) \leq C t^{-\frac{3}{2}}.$$

D'un autre côté, la proposition 2.4.18 donne aussi que pour tout  $x, y \in M_\Gamma$  :

$$p_{M_\Gamma}^{h^2}(x, y, t) = \frac{p_\Gamma(x, y, t)}{h(x)h(y)},$$

et donc

$$\frac{p_\Gamma(x, x, t)}{h(x)h(x)} \leq C t^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.4.23)$$

On appelle ensuite le théorème de la borne supérieure 2.2.29 pour l'existence d'une constante  $C_+ > 0$  telle que pour tout  $t$  assez grand on a

$$\frac{N_\Gamma(x, y, \rho)}{e^{2\rho}} \leq C_+ \sqrt{\rho} p_\Gamma\left(x, y, \frac{\rho}{2}\right) \leq \frac{C_2}{\rho}$$

et donc :

$$N_\Gamma(x, x, \rho) = O\left(\frac{e^{2\rho}}{\rho}\right)$$

ce qui conclut. ■

**Remarque 2.4.24.** L'équation 2.4.23 est intéressante. En effet, si l'on considère une suite de point  $x_n$  sortant de tout compact du demi-cylindre en restant dans le bout dégénéré on peut s'attendre, à  $t$  fixé, à ce que

$$p_\Gamma(x_n, x_n, t) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

car ce bout ressemble asymptotiquement à  $\mathbb{R}$ . L'équation 2.4.23 impose alors

$$\sqrt{t} \prec_n h(x_n)$$



Mais la croissance de  $h$  étant linéaire, on a alors

$$\sqrt{t} \prec d(x_n, K)$$

ce qui donne une condition spatiale nécessaire, à  $t$  fixé, pour avoir

$$p_\Gamma(x, x, t) \asymp \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

C'est assez naturel si l'on se rappelle que sur  $\mathbb{R}$  le mouvement Brownien reste à peu près dans une boule de rayon  $\sqrt{t}$ .

### Preuve de l'inégalité de Sobolev 2.4.21.

Les arguments présentés ci-dessous nous ont été suggérés par Gilles Carron.

Nous allons montrer cette inégalité de Sobolev indépendamment sur les deux bouts  $E$  et  $\mathcal{V}$  du demi-cylindre  $M_\Gamma$ . En en déduira l'inégalité globale sur la variété  $M_\Gamma$  en utilisant le

**Théorème 2.4.25** ([13] théorème 2.5). Soit  $(M, g, \sigma)$  une variété complète mesurée de volume infini. S'il existe un compact  $K$  tel qu'on ait l'inégalité de Sobolev du lemme 2.4.21 sur la variété  $M \setminus K$ , alors la même inégalité est vérifiée pour la variété  $(M, g, \sigma)$ .

Ce théorème n'est pas énoncé dans le cas des variétés riemanniennes mesurées, mais la preuve dans ce cas est identique.

**Le bout géométriquement fini.** Commençons par le bout  $\mathcal{V}$ . Rappelons que la fonction  $\sigma$  tend vers 1 dans ce bout, si bien que l'espace mesuré  $(\mathcal{V}, g, \sigma)$  est isométrique à l'infini à la variété hyperbolique  $(\mathcal{V}, g)$ . On sait également que les inégalités de Sobolev sont invariantes par isométries à l'infini, voir [15, théorème 7.1], on peut donc vérifier cette inégalité sur  $(\mathcal{V}, g)$ . On va pour cela faire appel à la

**Proposition 2.4.26** ((50) page 210 de [28]). Soit  $(M, g)$  une variété hyperbolique de dimension  $n > 2$  avec rayon d'injectivité minorée alors pour toute fonction  $u$  telle que  $u$  et  $|\nabla u|$  soient de carré intégrable on a :

$$\left( \int_M |u|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_g \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \left( \int_M |\nabla u|^2 d\mu_g + \int_M |u|^2 d\mu_g \right)$$

Nous pourrions conclure s'il existe une constante  $C_2$  telle que l'inégalité suivante est vérifiée pour toute fonction  $u$  de carrée intégrable :

$$\int_M |u|^2 d\mu_g \leq C_2 \int_M |\nabla u|^2 d\mu_g.$$

Cette inégalité est satisfaite dès lors que le bas du spectre de  $\mathcal{V}$  est strictement positif. Pour montrer que c'est le cas du bout  $\mathcal{V}$ , on va utiliser le lemme suivant.

**Lemme 2.4.27** (théorème 2.2 [54]). Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne telle qu'il existe une fonction  $f > 0$  et une constante  $c > 0$  telles que

$$\Delta f = cf$$

alors le bas du spectre est plus grand que  $c$ .

Pour les bouts géométriquement finis on a une description précise de la métrique, on pourra consulter [45, page 72].

**Théorème 2.4.28.** Soit  $\mathcal{V}$  un bout géométriquement fini. Alors il existe une surface riemannienne  $(S, g)$  telle que  $\mathcal{V}$  est quasi-isométrique à l'espace métrique produit tordu

$$((S \times \mathbb{R}_+), e^{2t}g + dt^2) .$$

La propriété que la première valeur propre d'une variété soit nulle est invariante par quasi-isométrie, il suffit donc de montrer que  $((S \times \mathbb{R}_+), e^{2t}g + dt^2)$  a sa première valeur propre non nulle. Cela découle du lemme suivant :

**Lemme.** La fonction

$$\begin{aligned} f : S \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{R}_{>0} \\ (p, t) &\mapsto e^{-t} \end{aligned}$$

vérifie  $\Delta f = f$ .

**Démonstration :** On note  $M = S \times \mathbb{R}_+$ . Soit  $x \in S$  et  $\partial_1, \partial_2$  deux champs de vecteurs sur un voisinage de  $x$  formant une base orthonormée de  $TS$  sur ce même voisinage. On peut se convaincre de l'existence de tels champs de vecteurs par l'utilisation d'un procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Soit maintenant  $p = (x, t) \in M$ . La structure produit nous garantit alors que les vecteurs de la famille  $(\partial_1, \partial_2, \partial_t)$  sont deux à deux orthogonaux sur  $T_p M$ . On note alors  $\nu_1$  et  $\nu_2$  les formes (définies localement) duales au deux premiers champs de vecteurs.

Rappelons que  $\Delta = - * d * d$  sur les fonctions en dimension 3 (voir chapitre 2 section 3 pour plus de détails).

On a  $df = -e^{-t}dt$ , mais par définition de l'étoile de Hodge on a aussi

$$*dt = e^{2t}\nu_1 \wedge \nu_2$$

et donc

$$\begin{aligned} *df &= -e^t \nu_1 \wedge \nu_2 \\ &= -d * df = -e^t dt \wedge \nu_1 \wedge \nu_2 \end{aligned}$$

car  $d\nu_1 \wedge \nu_2 = \nu_1 \wedge d\nu_2 = 0$ . Et donc

$$\begin{aligned} \Delta f &= e^t * (dt \wedge \nu_1 \wedge \nu_2) \\ &= e^t \cdot e^{-2t} \\ &= f, \end{aligned}$$

ce qui conclut. ■

**Le bout dégénéré.** Montrons maintenant l'inégalité de Sobolev dans le bout dégénéré. Celle-ci repose sur le fait que l'on sait les inégalités de Sobolev 2.4.19 être satisfaites pour les espaces euclidiens de dimension  $n$ , voir [28, théorème 5.3.1 page 204]. L'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  satisfait l'inégalité de Sobolev 2.4.19 pour  $n = 3$ , en particulier toute les fonctions radiales de  $\mathbb{R}^3$  satisfont cette inégalité. Le volume des sphères de  $\mathbb{R}^3$  étant en  $r^2$ , l'inégalité de Sobolev implique alors que toutes fonctions

$$\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfont

$$\left( \int_M |\phi|^6(x) x^2 dx \right)^{\frac{1}{3}} \leq C \int_M |\nabla \phi|^2 x^2 dx .$$

Ce qui équivaut à dire que l'espace métrique mesuré  $(\mathbb{R}_+, dx^2, x^2)$  vérifie l'inégalité de Sobolev 2.4.19 pour  $n = 3$ . On rappelle alors que l'espace  $(E, g, h^2)$  est isométrique à l'infini à  $(\mathbb{R}_+, dx^2, x^2)$  et que les inégalités de Sobolev sont invariantes par isométries à l'infini pour obtenir le résultat annoncé.

## Chapitre 3

# Enlacement et théorie spectrale.

### 3.1 Autour de l'enlacement.

Dans tout ce qui suit  $M$  sera une 3-variété différentielle orientée. On appelle **courbe** de  $M$  le plongement orienté d'un cercle dans  $M$ . On dira d'une collection finie de courbes disjointes que c'est une **multi-courbe**. Si une multi-courbe borde une surface orientée de  $M$  on dira qu'elle est homologiquement triviale.

#### 3.1.1 L'enlacement

La définition suivante est au cœur de ce chapitre.

**Définition 3.1.1.** Soit  $\Gamma, \Upsilon$  deux multi-courbes homologiquement triviales et  $S_\Gamma$  une surface dont le bord est  $\Gamma$  en position transverse avec  $\Upsilon$ . On définit l'**enlacement** des deux multi-courbes disjointes  $\Gamma$  et  $\Upsilon$ , que l'on notera  $\text{lk}(\Gamma, \Upsilon)$ , comme l'intersection algébrique de  $S_\Gamma$  avec  $\Upsilon$  :

$$\text{lk}(\Gamma, \Upsilon) := i(S_\Gamma, \Upsilon) .$$

Voir figure 3.1.

Il n'est pas immédiat que ce nombre soit bien défini : il nous faut vérifier que le membre de droite ne dépend pas du choix de la surface orientée  $S_\Gamma$ . Soit donc deux telles surfaces  $S_1$  et  $S_2$ , on a alors

$$i(S_1, \Upsilon) - i(S_2, \Upsilon) = i(S_1 \cup -S_2, \Upsilon) ,$$

où  $-S_2$  représente la surface  $S_2$  munie de l'orientation opposée. La surface  $S_1 \cup -S_2$  n'a par construction pas de bord et définit donc une classe d'homologie dans  $M$ . On conclut en rappelant que la multi-courbe  $\Upsilon$  est elle aussi d'homologie triviale, en particulier elle intersecte toute classe d'homologie de  $M$  trivialement, ce qui rend la définition consistante.

La première occurrence de la notion d'enlacement remonte aux travaux de Gauss autour de l'électromagnétisme, voir [47]. Ce dernier remarque que le courant électrique parcourant

un fil fermé  $\gamma$  donne naissance à un champ magnétique, pour nous une forme différentielle  $\omega_\gamma$ , qui, intégrée sur toute courbe  $v$  donne un nombre ne dépendant pas de la classe d'homologie de  $v$  dans le complémentaire de  $\gamma$ . Ce dernier point traduit le fait que la forme  $\omega_\gamma$  est fermée dans le complémentaire de  $\gamma$ .

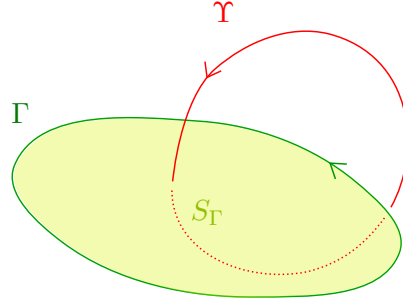


FIGURE 3.1 – Les deux collections  $\Gamma$  et  $\Upsilon$  sont chacune réduites à une unique courbe. Leur enlacement est  $\pm 1$ , dépendant de l'orientation globale.

Gauss va plus loin dans son étude. Dans  $\mathbb{R}^3$ , il donne de plus une formule explicite pour la forme différentielle  $\omega_\gamma$ . Soit  $X$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  qui n'appartient pas à la courbe  $\gamma$ , on a alors :

$$(\omega_\gamma)_x(X) = \frac{1}{4\pi} \int_{[0,2\pi]} \det \left( \gamma'(s), X(x), \frac{\gamma(s) - x}{\|\gamma(s) - x\|^3} \right) ds, \quad (3.1.2)$$

où  $\gamma(s)$  est n'importe quel paramétrage compatible avec l'orientation de la courbe  $\gamma$  et  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ . Si bien que l'on aurait pu, comme le faisait Gauss, prendre pour définition de l'enlacement de deux courbes  $\gamma$  et  $v$  dans  $\mathbb{R}^3$  l'intégrale double suivante :

$$\text{lk}(\gamma, v) := \int_v \omega_\gamma = \frac{1}{4\pi} \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,2\pi]} \det \left( \gamma'(s), v'(t), \frac{\gamma(s) - v(t)}{\|\gamma(s) - v(t)\|^3} \right) ds dt. \quad (3.1.3)$$

Revenons à l'équation (3.1.2) définissant la forme différentielle  $\omega_\gamma$  dans le cas particulier où la courbe  $\gamma$  serait un fil rectiligne infiniment long, voir figure 3.2. Un calcul dans les coordonnées cylindriques naturellement associées à la courbe rectiligne  $\gamma$  donne que  $\omega_\gamma = \frac{d\theta}{2\pi}$ .

C'est assez rassurant : quand on calcule l'intégrale de la 1-forme  $d\theta$  contre n'importe quelle courbe  $v$  on récupère le nombre de tours que fait la courbe  $v$  autour de la courbe  $\gamma$ . Rappelons que la forme  $\omega_\gamma$  est une 1-forme fermée sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma$ , le théorème de Frobenius nous assure alors que la distribution de plans définie par son noyau est intégrable. Dans le cas de notre fil rectiligne, le feuilletage induit est donné par les demi-plans d'équation  $\theta = cst$ , qui admettent tous la courbe  $\gamma$  pour bord, voir la figure 3.2.

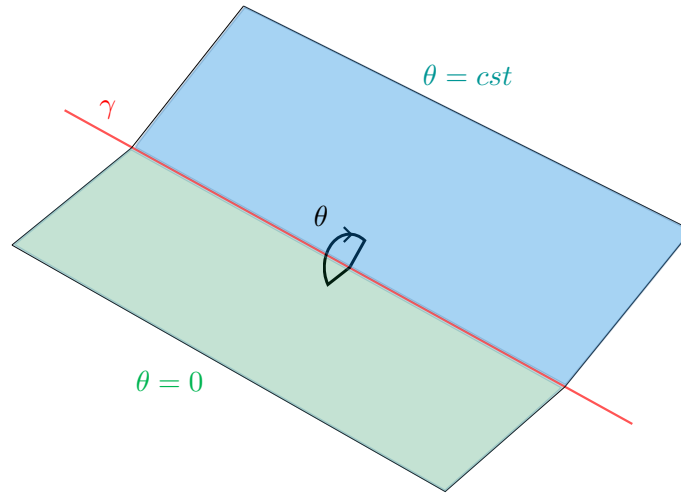


FIGURE 3.2 – En rouge le fil rectiligne  $\gamma$ , que l'on pourrait voir comme la reliure d'un livre ouvert dont les demi-plans  $\theta = cst$  constitueraient les pages.

Si l'on pense à ces demi-plans comme à des primitives (au sens des courants) de la courbe  $\gamma$ , il devient naturel d'identifier la forme  $\frac{d\theta}{2\pi}$  à une primitive de la courbe  $\gamma$ . Pour s'en convaincre montrons l'identité suivante dans l'espace des courants

$$d\left(\frac{d\theta}{2\pi}\right) = \int_{\gamma},$$

c'est-à-dire que pour toute forme 1-différentielle  $\beta$  lisse à support compact on a.

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\theta}{2\pi} \wedge d\beta = \int_{\gamma} \beta.$$

On part du membre de gauche, que l'on réécrit grâce à la formule de la co-aire comme

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{d\theta}{2\pi} \wedge d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\{\theta=t\}} d\beta dt.$$

La formule de Stokes combinée avec la remarque que  $\partial\{\theta=t\} = \gamma$  donne alors

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\{\theta=t\}} d\beta dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \int_{\gamma} \beta dt = \int_{\gamma} \beta.$$

On verra, lors de l'introduction des formes d'enlacement, que cette remarque est fondamentale pour généraliser la formule de Gauss à d'autres 3-variétés que  $\mathbb{R}^3$ .

Revenons justement à la formule (3.1.3) pour lui donner une interprétation plus topolo-

gique. Aux deux paramétrages  $\gamma(s)$  et  $v(t)$  on peut associer une application du tore  $\mathbb{T}^2$  dans  $\mathbb{S}^2$  défini par :

$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{S}^2 \\ (s, t) &\mapsto \frac{\gamma(s)-v(t)}{\|\gamma(s)-v(t)\|} . \end{aligned}$$

On va commencer par relier **la moitié du degré topologique** de cette application à l'enlacement tel qu'il est défini par les théoriciens des nœuds, c'est-à-dire à l'aide d'un **diagramme d'entrelacs**. Donnons nous une direction  $\zeta \in \mathbb{S}^2$  de  $\mathbb{R}^3$  telle que les intersections des courbes  $\gamma$  et  $v$  projetées dans le plan orthogonal à  $\zeta$  soient transverses. Du point de vue de notre application  $\Phi$ , cela traduit que la valeur  $\zeta$  est régulière. Remarquons également que les pré-images de cette valeur régulière correspondent exactement aux intersections des courbes  $\gamma$  et  $v$  projetées dans ce plan. Par définition du degré on a :

$$\deg \Phi = \sum_{y \in \Phi^{-1}(\{\zeta\})} \operatorname{sgn}(\det((d\Phi)_y)) . \quad (3.1.4)$$

Le degré de cette application est donc une somme de  $\pm 1$  qui porte sur les croisements des courbes  $\gamma$  et  $v$  projetées dans le diagramme d'entrelacs associé à la direction  $\zeta$ . On appellera ce nombre **l'enlacement combinatoire** des courbes  $\gamma$  et  $v$ . Montrons comment relier cet enlacement combinatoire avec la formule de Gauss en utilisant une interprétation cohomologique du degré.

**Remarque 3.1.5.** En utilisant la formule explicite donnée par  $\Phi$ , on pourrait montrer que l'enlacement combinatoire correspond à l'enlacement tel qu'il est défini par les théoriciens des nœuds.

Donnons nous un représentant de la classe fondamentale de  $\mathbb{S}^2$ , c'est-à-dire une forme volume  $\alpha$  d'intégrale unité. En utilisant la formule de Stokes on peut montrer que l'intégrale

$$\int_{\mathbb{T}^2} \Phi^*(\alpha)$$

ne dépend pas du représentant  $\alpha$  choisi. En particulier on peut considérer une suite de formes volumes qui tend vers une masse de Dirac sur une valeur régulière : on retrouve alors à la limite la somme donnée par l'équation (3.1.4). L'avantage de la formulation cohomologique est qu'elle ne fait pas appel à un choix sur la valeur régulière. Ce n'est pas étonnant si l'on regarde une forme volume lisse comme une somme convexe de masses de Dirac à densité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Ce que l'on obtient est une moyenne des enlacements des pré-images. Du point de vue de la mesure de Lebesgue, cette fonction est constante. Ce qui montre que pour toute forme volume lisse  $\alpha$  d'intégrale unité on a :

$$\deg \Phi = \int_{\mathbb{T}^2} \Phi^*(\alpha) .$$

Un choix canonique d'un représentant  $\alpha$  de la classe fondamentale de la 2-sphère est la forme volume nous venant de la métrique ronde, pour laquelle le membre de gauche de l'équation ci-dessus redonne alors la formule de Gauss (3.1.3). On a donc fait le rapprochement entre la notion d'enlacement combinatoire et la formule de Gauss. Il nous reste encore à faire le lien entre la définition initialement proposée, pour cela nous allons faire appel aux propagateurs introduit par C. Lescop.

On va changer de point de vue en décrivant différemment l'enlacement combinatoire. Pour commencer on va se placer sur la sphère  $\mathbb{S}^3$ , que l'on va voir comme la compactification d'Alexandrov de  $\mathbb{R}^3$ ; c'est-à-dire  $\mathbb{R}^3 \cup \infty$ . Soit donc  $\gamma$  et  $\nu$  deux courbes de  $\mathbb{R}^3$  que l'on injecte dans  $\mathbb{S}^3$ , et  $\zeta$  une valeur régulière pour l'application  $\Phi$ , dont l'on peut, quitte à appliquer une rotation, dire que c'est la direction donnée par la troisième coordonnée de  $\mathbb{R}^3$  notée  $z$ . On note  $\varphi_t$  le flot du champ de vecteurs  $\partial_z$ . On plonge alors dans  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$  l'ensemble  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^3$  comme ceci :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}_+ &\rightarrow \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \\ (x, t) &\mapsto (x, \varphi_t(x)) . \end{aligned}$$

Notons  $\partial^{-1}\Delta$  l'image de  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{R}_+$  par l'application ci-dessus. Si l'on devait le décrire par une phrase on dirait que c'est l'ensemble de points dans le produit  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$  dont on peut dire, quand on les regarde dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ , que le second est au dessus du premier. En particulier la quantité suivante

$$i(\partial^{-1}\Delta, \gamma \times \nu)$$

est bien donnée par une somme de signes  $\pm 1$  portant sur les "points de  $\gamma$  au dessus de  $\nu$  ou de  $\nu$  au dessus de  $\gamma$ ", ou, pour le dire autrement, une somme de  $\pm 1$  portant sur les croisements dans le diagramme d'entrelacs associé à la direction horizontale. On peut alors vérifier que les signes obtenus sont cohérents avec ceux de la somme (3.1.4) définissant l'enlacement combinatoire. On rappelle aussi que l'on avait déjà identifié ce nombre à la moitié du degré de l'application  $\Phi$  pour obtenir :

$$\frac{1}{2} \deg \Phi = i(\partial^{-1}\Delta, \gamma \times \nu) .$$

Revenons sur l'ensemble  $\partial^{-1}\Delta$ , c'est une variété de dimension 4 dont le bord est

$$\partial(\partial^{-1}\Delta) = \{(x, x) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3\} \cup \{\mathbb{S}^3 \times \infty\} .$$

En notant  $\Delta$  la diagonale de  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ , on peut donc réécrire

$$\partial(\partial^{-1}\Delta) = \Delta \cup \{\mathbb{S}^3 \times \infty\} ,$$



autrement dit  $\partial^{-1}\Delta$  est une primitive de la diagonale modulo un cycle de type  $(0, 3)$ . Intersectons  $\partial^{-1}\Delta$  avec le produit de nos deux courbes  $\gamma$  et  $v$  dans la variété  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$  :

$$\begin{aligned} i((\partial^{-1}\Delta), (\gamma \times v)) &= i((\partial^{-1}\Delta), \partial(S_\gamma \times v)) \\ &= i(\partial(\partial^{-1}\Delta), S_\gamma \times v) \\ &= i(\Delta \cup (\infty \times \mathbb{S}^3), S_\gamma \times v) \\ &= i(\Delta, S_\gamma \times v) + i((\infty \times \mathbb{S}^3), S_\gamma \times v) . \end{aligned}$$

Le cycle  $\infty \times \mathbb{S}^3$  est un cycle de type  $(0, 3)$ , son intersection avec le  $(2, 1)$ -cycle  $S_\gamma \times v$  est triviale, si bien que

$$\begin{aligned} i(\partial^{-1}\Delta, \gamma \times v) &= i(\Delta, S_\gamma \times v) \\ &= i(S_\gamma, v) \\ &= \text{lk}(\gamma, v) . \end{aligned}$$

Résumons : nous avons identifié l'enlacement de deux courbes à l'intersection du produit de ces courbes avec cette sorte de primitive de la diagonale. Nous avons aussi vu que ce nombre d'intersection est égal à l'enlacement combinatoire nous venant des diagrammes d'entrelacs, lui même identifié à l'enlacement donné par la formule de Gauss par des considérations générales sur le degré.

Après avoir fait le tour des différentes définitions de l'enlacement on peut se demander à quoi cette notion peut-elle bien servir. Parmi ses diverses applications, on pourra citer les travaux de H. Hopf sur le troisième groupe d'homotopie de la sphère, voir [9, section 18] et [2, chapitre 3]. Exposons rapidement comment celui-ci identifie ce groupe à  $\mathbb{Z}$  grâce à la notion d'enlacement. Soit donc une fonction lisse  $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ . On se donne deux valeurs régulières  $a$  et  $b$  de l'application  $f$ , dont les pré-images sont deux courbes disjointes  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$ . On associe alors à un élément  $\pi_3(\mathbb{S}^2)$  un nombre entier, l'enlacement dans  $\mathbb{S}^3$  des cercles  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$ . Hopf montre que cette application est bien définie, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas des valeurs régulières choisies, qu'elle est invariante sous homotopie de  $f$ , que c'est un morphisme de groupe, et qu'elle est bijective.

La **fibration de Hopf** est certainement le représentant le plus célèbre d'une classe de  $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ . Pour la décrire il nous faut savoir que le groupe de Lie  $\text{SO}(3)$  s'identifie d'une part à  $\mathbb{RP}^3$  et d'autre part au fibré unitaire tangent de la sphère  $\mathbb{S}^2$ . L'espace  $\mathbb{RP}^3$  étant le quotient de la sphère  $\mathbb{S}^3$  par l'application antipodie on a donc une suite d'applications

$$\mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{RP}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

qui définit bien une fibration

$$\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$$

dont la figure 3.3 représente trois des fibres dans le modèle de  $\mathbb{S}^3$  donné par la compactification d'Alexandrov de  $\mathbb{R}^3$ .

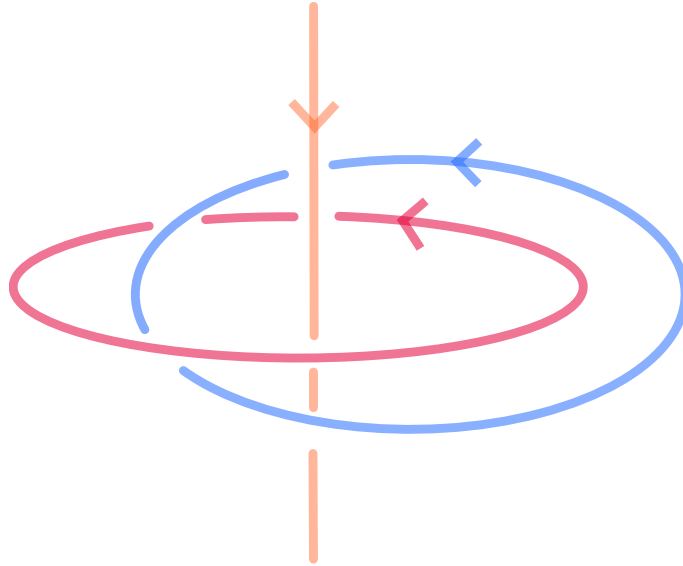


FIGURE 3.3 – La courbe orange est la fibre qui passe par le point  $\infty$ . On voit ici que les trois fibres s'enlacent deux à deux avec le signe  $\pm$ , le signe étant fonction de l'orientation globale de  $\mathbb{S}^3$ .

Revenons sur les travaux de Hopf d'un point de vue cohomologique. Nous allons donner une formule intégrale pour l'enlacement générique des deux courbes pré-images  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$  par l'application  $f$ . La discussion qui suit pourrait être mise en parallèle avec celle autour du degré, plus particulièrement avec la formulation intégrale du degré dont nous nous sommes servis pour retrouver la formule de Gauss (3.1.3). En effet, on pourrait penser à la courbe  $\gamma_a$  comme la limite des pré-images par l'application  $f$  d'une suite de formes volumes  $(\alpha_n)$  qui tendrait vers une masse de Dirac en  $a$  dans  $\mathbb{S}^2$ . La suite  $(f^*(\alpha_n))$  est une suite de 2-formes différentielles dont le support se localise autour de la courbe  $\gamma_a$  et peut être comprise comme une sorte de Poincaré dual à la courbe  $\gamma_a$ , l'analogue cohomologique de la courbe  $\gamma_a$ . Rappelons qu'elles sont obtenues comme tirées en arrière de formes fermées mais, puisque  $\mathbb{S}^3$  n'a pas d'homologie, elles sont exactes. On pourrait alors penser cette suite de primitives  $d^{-1}(\alpha_n)$  comme les objets duaux d'une certaine surface, ou d'un certain feuilletage, dont le bord serait la courbe  $\gamma_a$ .

Donnons nous maintenant  $\alpha$  un représentant de la classe fondamentale de  $\mathbb{S}^2$  et notons  $\beta$  la tirée en arrière  $f^*(\alpha)$  de la forme  $\alpha$  par l'application  $f$ . De la même manière que pour

le degré on peut montrer que la formule

$$\mathcal{H}(f) := \int_{\mathbb{S}^3} \beta \wedge d^{-1}(\beta)$$

ne dépend pas du représentant  $\alpha$ . A la lumière de la discussion précédente, cette formule doit être comprise comme une sorte d'enlacement moyen. En effet le produit extérieur  $\wedge$  s'interprète comme la version cohomologique de l'intersection. On peut donc relire la formule ci-dessus comme l'intersection entre la 2-forme  $\beta$ , pensée comme l'objet dual d'une famille de pré-images distribuées selon la forme  $\alpha$ , contre l'une de ses primitives  $d^{-1}\beta$ , que l'on voudrait penser comme une moyenne de surfaces dont le bord serait les fibres dans le support de  $\alpha$ .

Muni de ce point de vue la formule suivante, valide pour  $a$  et  $b$  génériques, ne devrait pas surprendre :

$$\text{lk}(\gamma_a, \gamma_b) := \int_{\mathbb{S}^3} \beta \wedge d^{-1}(\beta) . \quad (3.1.6)$$

Revenons sur la fibration de Hopf avec un point de vue plus dynamique. Rappelons que celle-ci est définie grâce au fibré unitaire tangent  $US^2$  de la sphère qui nous vient comme un fibré principal. En effet, le cercle agit sur  $S^2$  par la rotation dans les fibres :

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^1 \times US^2 &\rightarrow US^2 \\ (\theta, v) &\mapsto \text{rot}_\theta(v) . \end{aligned}$$

On peut alors relever cette action à la sphère  $\mathbb{S}^3$ . Cette action est engendrée par un champ de vecteurs de  $\mathbb{S}^3$ , **le champ de Hopf** que l'on notera  $X_h$ , dont toutes les orbites sont périodiques de même période. On peut alors dire que l'enlacement de deux orbites quelconques de ce champ de vecteurs est constant ; cette remarque a toute son importance pour ce qui suit, mais avant de révéler pourquoi arrêtons nous un instant sur deux notions de sections d'un système dynamique.

### 3.1.2 Sections d'un champ de vecteurs

Une construction simple de champ de vecteurs consiste à se donner une surface  $S$  et l'un de ses difféomorphismes  $\varphi$ , puis à considérer le champ de vecteurs correspondant à la coordonnée "verticale" de la suspension

$$M_\varphi := [0, 1] \times S / (0, x) \sim (1, \varphi(x)) .$$

Un champ de vecteurs venant de la construction précédente sera appelé un **flot suspendu**. Les flots suspendus sont moralement plus "simples" : leur comportement dynamique est

partiellement encodé par l'action du difféomorphisme  $\varphi$  sur la surface  $S$ . On s'est donc ramené à l'étude d'une dynamique continue en dimension trois à une dynamique discrète en dimension deux. A ce titre il devient intéressant d'essayer de comprendre sous quelles conditions un champ de vecteurs peut s'écrire comme un flot suspendu. L'objet clé associé à un flot suspendu est donné par la définition suivante.

**Définition 3.1.7.** Soit  $M$  une variété différentielle et  $X$  un champ de vecteurs sur  $M$ . On dira d'une sous variété  $S \hookrightarrow M$  que c'est une **section globale** si

- toute trajectoire du champ de vecteurs  $X$  rencontre infiniment souvent la surface  $S$  dans le passé et dans le futur.
- Le champ de vecteurs  $X$  est en position transverse à  $S$ .

Par exemple n'importe quel flot linéaire sur le tore admet une section globale. Un flot admettant une section globale est, modulo un reparamétrage des temps, un flot suspendu. En effet, dans le contexte de la définition ci-dessus on peut définir une application de premier retour sur la surface  $S$  qui va jouer le rôle du difféomorphisme  $\varphi$  introduit plus haut.

**Remarque 3.1.8.** Bien qu'un reparamétrage en temps préserve l'ergodicité ou la minimalité d'un système dynamique, certaines propriétés, comme le mélange, ne le sont pas.

Remarquons qu'une section globale  $S$  est, modulo un changement d'orientation globale, une surface qui intersecte toutes les orbites périodiques **positivement**. La section suivante a pour but d'élargir la notion d'intersection d'une surface avec une trajectoire fermée, une orbite périodique, aux trajectoires non fermées.

### Cycles asymptotiques.

La preuve que l'on donnera du théorème 3.1.10 est une légère variante de celle présentée dans [51].

Soit une variété  $M$  compacte (possiblement à bord) et  $X$  un champ de vecteurs (tangent au bord de  $M$ , si bord il y a). On dira d'une mesure sur  $M$  qu'elle est  $X$ -invariante si c'est une mesure invariant par le flot  $\varphi_t^X$  du champ de vecteurs  $X$  et l'on notera  $\mathcal{M}_X$  l'ensemble des mesures de probabilités  $X$ -invariantes sur  $M$ .

**Définition 3.1.9** (Schwartzmann). On appelle **le cycle asymptotique** associé à la mesure  $\mu \in \mathcal{M}_X$ , noté  $\mathcal{C}_\mu$ , la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\mu &: H_{DR}^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto \int_M i_X(\omega) d\mu \end{aligned} \cdot$$

L'application

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &: \mathcal{M}_X \rightarrow H_1(M, \mathbb{R}) \\ \mu &\mapsto \mathcal{C}_\mu . \end{aligned}$$

sera appelée l'application cycle asymptotique.

L'exemple clé est la mesure associée à une orbite périodique  $\gamma$  de période  $t_\gamma$ . La mesure invariante associée est alors donnée par :

$$f \mapsto \frac{1}{t_\gamma} \int_0^{t_\gamma} f(\varphi_t^X(x_0)) dt$$

où  $x_0$  est n'importe quel point de l'orbite périodique  $\gamma$ . Si bien que le cycle asymptotique  $\mathcal{C}_\gamma$  est de la forme

$$\omega \mapsto \frac{1}{t_\gamma} \int_0^{t_\gamma} i_X(\omega)(\varphi_t^X(x_0)) dt ,$$

ce que l'on peut réécrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_\gamma} \int_0^{t_\gamma} i_X(\omega)(x(t)) dt &= \frac{1}{t_\gamma} \int_0^{t_\gamma} \omega(X(\varphi_t^X(x_0))) dt \\ &= \frac{1}{t_\gamma} \int_\gamma \omega . \end{aligned}$$

Dans ce cadre  $\mathcal{C}_\gamma$  s'interprète donc comme le courant d'intégration sur l'orbite périodique  $\gamma$ , modulo la période.

On peut interpréter de la même manière la définition de cycle asymptotique pour une mesure ergodique. En effet, le théorème ergodique de Birkhoff nous garantit que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in M$  :

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T i_X(\omega)(\varphi_t^X(x)) dt = \int_M i_X(\omega) d\mu =: \mathcal{C}_\mu(\omega) .$$

Comme précédemment, à  $T$  fixé, on peut alors réécrire l'intégrale du membre de gauche comme

$$\frac{1}{T} \int_0^T i_X(\omega)(\varphi_t^X(x)) dt = \frac{1}{T} \int_{\gamma_T(x)} \omega ,$$

où  $\gamma_T(x)$  est la courbe intégrale entre les temps 0 et  $T$  du champ  $X$  tirée d'un point  $x$   $\mu$ -générique.

Revenons aux flots suspendus pour lesquels la dualité de Poincaré nous permet encore une

autre lecture des identités ci-dessus. Donnons nous une forme différentielle  $\omega_S$  duale de la section globale  $S$ , c'est-à-dire qui vérifie que pour toute courbe  $\gamma$  :

$$\int_{\gamma} \omega_S = i(S, \gamma) .$$

On voudrait alors dire que pour toute mesure ergodique  $\mu$   $X$ -invariante on a :

$$C_{\mu}(\omega_S) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{i(\gamma_T(x), S)}{T} ,$$

de plus,  $S$  intersectant toutes les orbites du champ de vecteurs  $X$ , on pourrait alors espérer que pour toute mesure  $\mu \in \mathcal{M}_X$  on ait :

$$C_{\mu}(\omega_S) > 0 .$$

**Théorème 3.1.10.** Soit  $M$  une variété compacte (possiblement à bord) et  $X$  un champ de vecteurs (tangent au bord dans ce cas), si l'ensemble  $\mathcal{C}(\mathcal{M}_X)$  ne contient pas zéro alors le champ de vecteurs  $X$  admet une section globale, en particulier la variété  $M$  fibre sur le cercle.

**Démonstration :** L'ensemble  $\mathcal{M}_X$  est un convexe de l'ensemble des mesures et l'application cycle asymptotique étant linéaire, l'ensemble  $\mathcal{C}(\mathcal{M}_X) \subset H_1(M, \mathbb{R})$ , est donc également convexe. Si ce convexe ne contient pas 0 on peut alors trouver un élément dans  $(H_1(M, \mathbb{R}))^* = H_{DR}^1(M, \mathbb{R})$ , une forme différentielle  $\omega$ , qui sépare 0 et  $\mathcal{C}(\mathcal{M}_X)$ , c'est-à-dire telle que pour toute mesure  $X$ -invariante  $\mu$  on ait :

$$\int_M i_X \omega \, d\mu > 0 . \tag{3.1.11}$$

Remarquons au passage que l'on peut choisir par continuité la forme différentielle  $\omega$  à coefficients rationnels, c'est-à-dire une 1-forme qui intégrée sur les courbes fermées donne des nombres rationnels. L'exemple typique d'une telle forme étant la forme duale d'une surface, dans ce cas ces intégrales correspondent à un nombre d'intersection, et donc à un entier.

L'idée est maintenant de moyennner la forme différentielle  $\omega$  le long des trajectoires du champ de vecteurs  $X$  pour trouver une autre forme fermée  $\omega$  ponctuellement positive sur  $X$ . On cherche donc un  $T$  grand tel que la forme différentielle

$$\omega_T := \frac{1}{T} \int_0^T (\varphi_t^X)^* \omega$$

vérifie

$$i_X \omega_T > 0 .$$

Remarquons que  $\omega_T$  est cohomologue à  $\omega$ , en particulier fermée et à coefficients rationnels. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe une suite de temps  $T_n \rightarrow +\infty$  telle qu'il existe un point  $x_n \in M$  telle que

$$(i_X \omega_{T_n})(x) = \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} i_X(\omega)(\varphi_t^X(x_n)) dt \leq 0$$

Ce que l'on peut traduire par le fait que la suite de mesures  $(\mu_n)$  définie par les fonctionnelles

$$f \mapsto \frac{1}{T_n} \int_0^{T_n} f(\varphi_t^X(x_n)) dt$$

prennent des valeurs négatives ou nulles évaluées sur la fonction  $i_X \omega$ . Les mesures  $\mu_n$  étant des mesures de probabilités, par compacité de  $M$  et donc compacité faible \* de l'espace des mesures de probabilités, on peut extraire une sous suite  $\tilde{\mu}_n$  qui tend faiblement vers une certaine mesure  $\mu_\infty$  telle que pour toute fonction  $f$  on ait

$$\tilde{\mu}_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mu_\infty(f) .$$

Par construction la mesure  $\mu_\infty$  est  $X$ -invariante et vérifie :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mu_\infty}(i_X(\omega)) &:= \mu_\infty(i_X \omega) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_n(i_X \omega) \leq 0 , \end{aligned}$$

ce qui vient contredire (3.1.11). On conclut avec un joli argument de Tischler qui nous garantit que notre forme différentielle  $\omega_T$  nous vient de la différentielle d'une fibration sur le cercle.

**Proposition 3.1.12.** Soit  $\omega$  une 1-forme différentielle fermée non dégénérée à coefficients entiers sur  $M$ , alors il existe une submersion  $f_\omega : M \rightarrow \mathbb{S}^1$  telle que  $df_\omega = \omega$ . En particulier  $M$  fibre sur le cercle.

**Démonstration :** On fixe  $x_0$  un point base de  $M$ . Le fait que la forme  $\omega$  soit une classe entière nous dit que la quantité

$$\int_\gamma \omega \pmod{\mathbb{Z}}$$

où  $\gamma$  est un chemin dont les extrémités sont  $x_0$  et  $x$  ne dépend pas de  $\gamma$ . On définit alors la fonction

$$\begin{aligned} f_\omega : M &\rightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\mapsto \int_{x_0}^x \omega \pmod{\mathbb{Z}} . \end{aligned}$$

Cette application est une submersion car  $df_\omega = \omega$  qui est non dégénérée. Elle définit bien une fibration sur le cercle. ■

Revenons sur la 1-forme différentielle  $\omega_T$  en rappelant qu'elle était à coefficients rationnels. Quitte à la multiplier par un entier on peut alors supposer qu'elle est à coefficients entiers. On utilise le lemme précédent pour obtenir une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{S}^1$  dont la différentielle est un multiple de  $\omega_T$  dont toutes les lignes de niveaux  $S_\theta := f^{-1}(\theta)$ ,  $\theta \in \mathbb{S}^1$  sont des sections globales. ■

### Les sections de Birkhoff

L'existence d'une section globale est une propriété forte : on a *in fine* ramené l'étude d'un flot en dimension 3 à l'étude d'un difféomorphisme correspondant à l'application de premier retour sur la section globale. Cette propriété forte a un coût fort. En effet, comme on vient de le voir, cela implique déjà une propriété topologique forte sur la variété ambiante : celle-ci fibre sur le cercle. Par exemple, on ne peut pas espérer que le champ de Hopf admette une section globale (ni aucun champ de vecteurs sur la 3-sphère par ailleurs) car le premier groupe d'homologie de  $\mathbb{S}^3$  est trivial, ce qui est une obstruction à fibrer sur le cercle. En revanche il est bien connu que toute variété de dimension 3 admet une décomposition en livre ouvert.

**Définition 3.1.13.** Une **décomposition en livre ouvert** est la donnée d'une multi-courbe  $\Gamma$ , la reliure du livre ouvert, et d'une submersion  $f : M \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{S}^1$  telle que pour tout  $\theta \in \mathbb{S}^1$  on ait  $\partial(f^{-1}(\theta)) = \Gamma$ . Les surfaces  $f^{-1}(\theta)$  sont appelées les pages du livre ouvert.

Pour un exemple, on peut revenir sur la décomposition en livre ouvert de  $\mathbb{R}^3$  donné par le noyau de la forme d'enlacement de Gauss 3.1.3. Cette décomposition livre ouvert de  $\mathbb{R}^3$  "passe" à la compactification d'Alexandrov et donne alors aussi une décomposition en livre ouvert de  $\mathbb{S}^3$  : la reliure est donnée par un grand cercle (correspondant à la compactification de la droite rectiligne) et les pages sont des disques (la compactification des demi-plans). Une question naturelle est de se demander quels analogues des sections globales peut-on imaginer coller à un livre ouvert ?

**Définition 3.1.14.** Soit  $M$  une variété,  $X$  un champ de vecteurs et  $\Gamma$  une multi-courbe constituée d'orbites périodiques. Une **section de Birkhoff** est la donnée d'une surface  $S_\Gamma \hookrightarrow M$  telle que

- $\partial S_\Gamma = \Gamma$
- toute trajectoire du champ  $X$ , à l'exception des orbites périodiques de la multi-courbe  $\Gamma$ , intersecte infiniment souvent la surface  $S_\Gamma$  dans le passé et dans le futur.
- Le champ  $X$  est en position transverse à  $S_\Gamma \setminus \Gamma$ .



On pourrait aussi dire que c'est une section globale à bord, dont le dit-bord serait constitué d'une collection d'orbites périodiques. Illustrons, une fois encore à l'aide la fibration de Hopf, cette notion grâce à la figure 3.4.

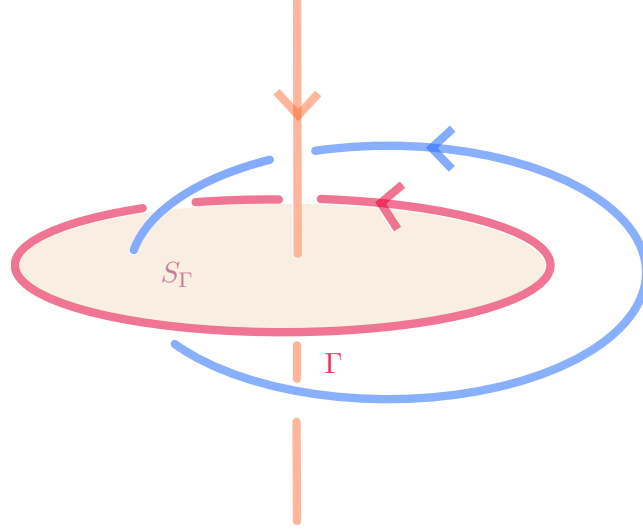


FIGURE 3.4 – Ici  $\Gamma$  n'est constituée que d'une orbite périodique du champ de Hopf. Le disque  $S_\Gamma$  est une section de Birkhoff pour le champ de Hopf.

Pour ce qui suit on considère un champ de vecteurs  $X$  sur  $\mathbb{S}^3$ . De la même façon que pour un flot suspendu, l'existence d'une section de Birkhoff garantit que l'enlacement de la multi-courbe  $\Gamma$  avec n'importe quelle orbite périodique est toujours positif. L'enlacement étant défini comme l'intersection avec une surface dont le bord est  $\Gamma$ , on voudrait définir l'enlacement asymptotique comme l'intersection d'un cycle asymptotique du champ  $X$ , restreint à la variété  $\mathbb{S}^3 \setminus \Gamma$ , avec une surface  $S_\Gamma$  dont le bord serait  $\Gamma$ .

Pour rendre cette construction précise on doit considérer un champ de vecteurs  $X$  de classe  $C^1$ . Sous cette hypothèse de régularité, D. Fried montre dans [21, page 367] que l'on peut éclater, relativement au fibré normal, toutes les courbes  $\gamma_i \in \Gamma$  en des tores de sorte que le champ de vecteurs  $X$  s'étende en un champ de vecteurs  $X_\Gamma$  sur la variété compacte à bord torique  $\mathbb{S}_\Gamma^3$  résultant de l'éclatement. L'intérieur de la variété  $\mathbb{S}_\Gamma^3$  est canoniquement identifié à  $\mathbb{S}^3 \setminus \Gamma$ . Les champs de vecteurs  $X$  et  $X_\Gamma$  définis sur ces deux variétés ouvertes sont images l'un de l'autre par cette identification. En particulier toute mesure  $X$ -invariante  $\mu$  qui ne charge pas la multi-courbe  $\Gamma$  définit bien une mesure  $X_\Gamma$ -invariante  $\tilde{\mu}$ .

**Définition 3.1.15.** Soit  $X$  un champ de vecteurs de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{S}^3$  et  $\Gamma$  une multi-courbe constituée d'orbites périodiques du champ de vecteurs  $X$ . Pour toute mesure  $X$ -invariante  $\mu$ , qui ne charge pas  $\Gamma$ , on définit l'enlacement asymptotique de  $\mu$  avec  $\Gamma$  par

$$\text{lk}(\Gamma, \mu) := \mathcal{C}_{\tilde{\mu}}(\omega_\Gamma)$$

où  $\omega_\Gamma$  est la forme différentielle duale de la classe d'homologie relative dans  $\mathbb{S}_\Gamma^3$  donnée par la surface  $S_\Gamma$ .

On s'est donc ramené au cadre d'une variété compacte : on est pas loin de pouvoir appliquer le théorème 3.1.10. Il ne nous faut cependant pas négliger que le champ de vecteurs résultant de l'éclatement a été étendu aux composantes toriques de bord, et donne donc naissance à de nouvelles trajectoires.

On définit alors l'auto-enlacement d'une courbe  $\gamma_i \in \Gamma$  avec la multi-courbe  $\Gamma$  comme l'enlacement asymptotique avec la multi-courbe  $\Gamma$  de la trajectoire issue d'un point  $x$  de la composante de bord torique correspondant à  $\gamma_i$ . On peut alors montrer que ce nombre ne dépend pas du point  $x$ . En effet, modulo  $\mathbb{Z}$ , ce nombre s'écrit comme le nombre de rotation associé à l'application de premier retour sur l'éclaté d'un point (un cercle) du champ de vecteur  $X_\Gamma$  restreint à la composante torique en question. On obtient donc une nouvelle collection de nombres, indexée par les composantes de bord, c'est-à-dire les courbes  $\gamma_i$ , que l'on aurait envie d'appeler le vecteur d'auto-enlacement de la multi-courbe  $\Gamma$ .

**Remarque 3.1.16.**

- La notion d'auto-enlacement n'est pas bien définie topologiquement.
- Les cycles asymptotiques associés au champ de vecteurs  $X_\Gamma$  correspondent à des éléments de l'homologie absolue de la variété à bord  $\mathbb{S}_\Gamma^3$ , dont l'espace dual est constitué des 2-cycles relatifs au bord : des surfaces à bord portées par sur les tores résultants de l'éclatement des courbes  $\gamma_i$ .

On a maintenant défini tous les objets nécessaires à l'utilisation du théorème 3.1.10, on peut alors espérer un analogue au théorème 3.1.10 dans le cadre des sections de Birkhoff.

**Théorème 3.1.17.** Fried [21, Section 5] Soit  $X$  un champ de vecteurs sur la sphère  $\mathbb{S}^3$  et  $\Gamma$  une multi-courbe composée d'orbites périodiques. Alors  $\Gamma$  borde une section de Birkhoff si et seulement si pour toute mesure  $X$ -invariante  $\mu$  on a  $\text{lk}(\Gamma, \mu) \neq 0$ .

Remarquons que pour définir l'enlacement nous n'avons pas eu besoin de se placer sur la sphère  $\mathbb{S}^3$ , n'importe quelle sphère d'homologie convient. Il est important de faire cette remarque ici car c'est dans ce contexte qu'apparaît une grande classe de flots : les flots géodésiques sur les fibrés unitaires tangents des orbifolds associés aux groupes de triangles  $(p, q, r)$ . Ces flots sont particulièrement intéressants car ce sont des flots Anosov. Dans ce cas, les mesures invariantes ergodiques peuvent être approximées (au sens faible) par des mesures portées par des orbites périodiques. Ceci nous permet afin d'appliquer le théorème 3.1.17 de vérifier que  $\text{lk}(\Gamma, \mu) > 0$  pour les seules mesures portées par les orbites périodiques : le problème est redevenu complètement topologique. C'est dans ce contexte que le résultat d'E. Ghys [23] prend son sens : il montre que toutes les orbites périodiques du fibré unitaire tangent de la surface modulaire, ou bien la surface  $(2, 3, \infty)$  pour reprendre

les notations précédentes, s'enlacent positivement modulo changement d'orientation globale. Ceci n'implique cependant pas l'existence de sections de Birkhoff car cette 3-variété n'est pas compacte. Ce résultat a été largement généralisé aux fibrés unitaires tangents des orbifolds  $(p, q, r)$  par P. Dehornoy dans [18]. En particulier, lorsque ceux-ci sont compacts, toutes les orbites périodiques du flot géodésique bordent une section de Birkhoff.

### 3.1.3 Les formes d'enlacement.

Revenons encore une fois sur la formule de Gauss (3.1.3). Celle-ci suggère l'existence d'un objet universel qui, intégré contre un couple de courbes homologiquement triviales, renvoie leur nombre l'enlacement.

**Définition 3.1.18** (Chapitre 3 [2]). Une forme d'enlacement  $\Omega$  est une  $(1,1)$ -forme différentielle définie sur  $M \times M \setminus D$ , où  $D$  est la diagonale de  $M \times M$ , satisfaisant :

$$\text{lk}(\Gamma, \Upsilon) = \int_{\Gamma} \int_{\Upsilon} \Omega ,$$

pour toutes multi-courbes  $\Gamma$  et  $\Upsilon$  homologiquement triviales.

On reviendra plus loin sur ces formes d'enlacement et la définition précise d'une  $(1,1)$ -forme, on pourra dans un premier temps y penser comme une 2-forme différentielle. Cette formule met également en valeur le caractère bilinéaire de l'enlacement. De plus pour toute paire de multi-courbes  $\Upsilon = \bigcup_{i \in I} v^i$  et  $\Gamma = \bigcup_{j \in J} \gamma^j$  on a :

$$\text{lk}(\Gamma, \Upsilon) = \int_{\Gamma \times \Upsilon} \Omega = \int_{\bigcup_{\gamma_i \times \cup v_j} \Omega} = \sum_{i \in I, j \in J} \int_{\gamma_i \times v_j} \Omega ,$$

sans avoir eu besoin d'exiger des courbes  $\gamma_i$  ou  $v_j$  d'être individuellement homologiquement triviales.

La notion de forme d'enlacement a été initialement introduite par Arnold pour donner une interprétation dynamique de l'**hélicité** d'un champ de vecteurs. L'hélicité a été introduite dans [59] et [42] pour minorer certaines énergies associées aux champ de vecteurs. Elle prend son sens dans le contexte général d'un champ de vecteurs  $X$  préservant une forme volume  $\mu$  dont le cycle asymptotique associé est trivial. Cette dernière hypothèse nous garantit que la 2-forme différentielle  $i_X \mu$  est exacte, c'est-à-dire qu'il existe une 1-forme différentielle  $\alpha$  telle que  $d\alpha = i_X \mu$ . Cette hypothèse est satisfaite dans de nombreux cas ; par exemple si la variété  $M$  est une sphère d'homologie, ou bien si  $X$  est le flot de Reeb

associée à une structure de contact. On pose alors :

$$\mathcal{H}(X) := \int_M \alpha \wedge d\alpha .$$

On peut vérifier en utilisant la formule de Stokes que la quantité ci-dessus ne dépend pas du choix de la primitive  $\alpha$ . Cette formule est à mettre en relation avec 3.1.6 nous venant de l'invariant de Hopf, et donc avec l'enlacement. L'idée d'Arnold, dans l'esprit de [41], pour faire ce lien est d'interpréter l'hélicité comme un enlacement asymptotique : on se donne deux points  $x, y \in M$  dont on considère les deux trajectoires du champ de vecteurs  $X$  aux temps  $t$  et  $s$ , on les referme, on en calcule l'enlacement, puis on divise par le produit  $ts$ . Il faut alors montrer que cette quantité admet une limite presque sûrement quand  $t, s \rightarrow +\infty$  ; c'est ici, entre autre, qu'Arnold fait appel à l'existence de forme d'enlacement, on obtient alors une fonction  $\text{lk}(x, y)$ . Ce nombre est par la suite identifié à l'hélicité, encore une fois grâce aux propriétés des formes d'enlacement, en faisant la moyenne relativement à la mesure  $\mu \times \mu$  de la fonction  $\text{lk}(x, y)$ . On pourra consulter [2] et [58] pour plus de détails.

L'hélicité jouit de propriétés intéressantes. Pour n'en décrire qu'une discutons un théorème de Baader et Marché [3]. Élargissons la construction d'Arnold à d'autres invariants d'entrelacs. Au final, Arnold affecte un nombre à un champ de vecteurs grâce à la donnée d'un invariant d'entrelacs. Ce nombre est construit comme la moyenne de cet invariant calculé sur une paires de trajectoires de ce champ de vecteurs de plus en plus longues, asymptotiques. Rien n'empêche donc *a priori* la construction pour un autre invariant d'entrelacs qui ne serait pas l'enlacement. Qu'obtient-on alors ? Ce théorème de Baader et Marché garantit que si l'on considère un invariant de nœud de "type fini", l'invariant asymptotique associé au champ de vecteurs  $X$  est une fonction de l'hélicité. C'est d'autant plus surprenant que, conjecturalement, on peut toujours faire la différence entre deux nœuds quelconques grâce à un invariant de type fini. Notons que ces travaux prennent leurs sources dans ceux de Ghys et Gambaudo [22].

Arnold avait déjà remarqué que l'on pouvait construire une forme d'enlacement intégrable sur toutes les variétés compactes. Ceci a été précisé par la suite par un théorème de T. Vogel qui donne une construction d'une telle forme grâce au choix d'une métrique en lien avec les travaux de De Rham [17, section 28]. On note  $g^1(x, y)$  le noyau de l'opérateur inverse (l'opérateur de Green) du laplacien agissant sur les 1-formes différentielles.

**Théorème 3.1.19.** [17, page 148], [58, théorème 3], [2, chapitre 3] Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte, la  $(1, 1)$ -forme différentielle

$$\Omega(x, y) = *_y d_y g^1(x, y)$$

est une forme d'enlacement

Bien que ce théorème donne une construction de forme d'enlacement grâce à une métrique il est en pratique compliqué d'en déduire une formule aussi explicite que celle de Gauss. Il n'y a finalement que relativement peu d'exemples explicites de formes d'enlacement. Citons en trois, la première est celle de Gauss et les deux autres ont été trouvées par [19] dans les cas de la sphères  $\mathbb{S}^3$  et de l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^3$  en explicitant "une solution fondamentale des équations de Maxwell", c'est-à-dire en explicitant le noyau de Green ci-dessus.

## 3.2 L'enlacement et l'opérateur laplacien

### 3.2.1 Noyau de Green

Rappelons les définitions et les propriétés importantes. Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte de dimension  $p$ . On notera

- $\mu_g$  la forme volume associée à la métrique riemannienne  $g$ .
- $\Omega^*(M) = \bigoplus_{0 \leq k \leq p} \Omega^k(M)$  l'espace des formes différentielles lisses, partitionné par les espaces  $\Omega^k(M)$  des formes différentielles de degré  $k$ .
- $*$  l'opérateur de Hodge, ou étoile de Hodge, dont on rappelle ici qu'il satisfait l'identité

$$** = (-1)^{k(p-k)} \quad (3.2.1)$$

Remarquons ici que l'on a abusé les notations en omettant de préciser le degré  $k$  des formes différentielles sur lesquelles les opérateurs agissent.

- $d$  la différentielle extérieure, qui agit sur  $\Omega^*(M)$ .

L'opérateur de Hodge est construit pour munir l'espace  $\Omega^k(M)$  d'un produit scalaire :

$$\langle \alpha \cdot \beta \rangle = \int_M \alpha \wedge * \beta .$$

Pour ce produit scalaire l'opérateur  $d$  a un adjoint, que l'on notera  $\delta$ , vérifiant donc par définition l'identité :

$$\langle d\alpha \cdot \beta \rangle = \langle \alpha \cdot \delta\beta \rangle .$$

Un simple calcul, impliquant la formule de Stokes et la définition de l'étoile de Hodge, montre que

$$\delta = (-1)^{p(k+1)+1} * d* \quad (3.2.2)$$

On a maintenant tout le nécessaire pour construire l'opérateur de Hodge de Rham, qui généralise le laplacien agissant sur les fonctions aux formes différentielles de tout degré.

**Définition 3.2.3.** Le laplacien de Hodge de Rham,  $\Delta \curvearrowright \Omega^*(M)$  est défini par

$$\Delta = d\delta + \delta d .$$

Remarquons qu'il stabilise tous les espaces de formes différentielles  $\Omega^k(M)$  et qu'il est auto-adjoint pour le produit scalaire défini plus haut. On notera alors  $\Delta^k$  sa restriction à l'espace des  $k$ -formes différentielles.

Une forme différentielle  $\alpha$  est dite harmonique si elle appartient au noyau de l'opérateur

laplacien, c'est-à-dire si  $\Delta\alpha = 0$ . On notera par  $\mathcal{H}^k$  l'espace des  $k$ -formes différentielles harmoniques. Cet espace est identifié par un théorème de Hodge au  $k$ -ième groupe d'homologie de la variété  $M$ ; l'opérateur  $\Delta^k$  n'est donc généralement pas injectif et en particulier pas inversible. En revanche rien n'interdit qu'il le soit sur l'orthogonal de son noyau. Notons donc  $\pi_{\mathcal{H}^k}$  le projecteur orthogonal sur l'espace  $\mathcal{H}^k$  des formes harmoniques de degré  $k$  associé au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Définition 3.2.4.** Un **opérateur de Green**, que l'on notera  $G^k$ , est un opérateur qui satisfait l'équation suivante sur l'espace des formes différentielles lisses.

$$G^k \circ \Delta^k = \Delta^k \circ G^k = Id - \pi_{\mathcal{H}^k} \quad (3.2.5)$$

Un tel opérateur existe toujours sur une variété compacte, on pourra consulter [17, section 3].

**Remarque 3.2.6.** Il y a une légère ambiguïté dans la définition de  $G^k$ , qui est uniquement défini modulo sa restriction à l'espace des formes harmoniques  $\mathcal{H}^k$ . **Dans tout ce qui suivra on supposera que  $G(\mathcal{H}^k) = \{0\}$ .**

Étant donné  $\omega \in \Lambda^k(TM)$  on notera préférablement  $\omega_x$  l'élément de  $\Lambda^k(T_xM)$  correspondant, bien que l'on pourra aussi le noter  $\omega(x)$  pour clarifier les notations quand cela semble nécessaire.

Les opérateurs de Green sont **des opérateurs à noyau**, c'est-à-dire qu'il existe une famille lisse d'endomorphismes  $g^k(x, y) : \Lambda^k(T_xM) \rightarrow \Lambda^k(T_yM)$ , indexée par  $M \times M \setminus \text{Diag}$  telle que pour toute forme différentielle  $\alpha$  lisse de degré  $k$  on ait

$$G^k(\alpha)_y = \int_M g^k(x, y)(\alpha_x) d\mu_g(x) . \quad (3.2.7)$$

Comme annoncé dans l'introduction c'est le noyau de Green associé aux 1-formes différentielles qui va jouer le rôle clé dans la construction de formes d'enlacement. Dans ce cas, le noyau de Green est une famille d'endomorphismes  $g^1(x, y) : T_x^*M \rightarrow T_y^*M$ , ce qui va nous permettre de l'intégrer sur une paire de courbe.

### 3.2.2 Une forme d'enlacement venant de la métrique

Rappelons le théorème de Vogel-De Rham, qui à une métrique  $g$  associe une forme d'enlacement.

**Théorème 3.2.8.** [17, page 148], [58, Theorem 3] Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne fermée, la  $(1, 1)$ -forme différentielle

$$\Omega(x, y) = *_y d_y g^1(x, y)$$

est une forme d'enlacement.

Les notations ci-dessus peuvent paraître un peu ambiguës, en particulier quel sens donner à l'image par  $*_y d_y$  d'une famille d'endomorphismes  $g(x, y) : T_x^* M \rightarrow T_y^* M$  et comment intégrer un tel objet sur un couple de courbes. Pour le premier point il faut en fait penser à  $\Omega$  comme le noyau de l'opérateur  $\alpha \mapsto *dG^1(\alpha)$  qui envoie bien les 1-formes différentielles dans elles mêmes. Pour en définir l'intégrale sur un couple de courbes on va user d'un peu de dualité. Notons  $\sharp$  l'endomorphisme musical qui à un élément d'un espace vectoriel euclidien associe sa forme linéaire duale. On définit alors l'intégrale du noyau précédent par

$$\int_{\gamma} \int_v *_y d_y g^1(x, y) = \int_{\gamma} * d \int_v g^1((\cdot)^{\sharp}, y)$$

L'analyse locale du noyau de Green faite par De Rham dans [17, section 28] nous permet de vérifier que la forme d'enlacement donnée par le théorème 3.2.8 est intégrable. Cette dernière remarque avait déjà été faite par Arnold dans [2, 4.B] pour relier l'hélicité d'un champ de vecteurs à l'enlacement asymptotique de ses trajectoires. Cette propriété nous sera utile dans la section suivante.

### 3.2.3 Comportement de la forme d'enlacement sous l'action d'une isométrie.

Cette forme d'enlacement venant de la métrique, il est naturel de se demander comment celle-ci se comporte sous l'action d'une isométrie  $\Phi$ . Les isométries commutent avec la différentielle extérieure, mais aussi avec l'étoile de Hodge et donc avec toute les opérateurs construit depuis ces deux-ci, en particulier avec le Laplacien et son inverse l'opérateur de Green. Ces relations de commutation se lisent alors au niveau du noyau  $g^1(x, y)$  par la formule suivante,

$$(\Phi_1)_* g^1(x, y) = (\Phi_2)^* g^1(x, y) .$$

où l'on a noté  $\Phi_1$  (*resp.*  $\Phi_2$ ) l'action de  $\Phi$  sur le premier facteur (*resp.* sur le deuxième facteur) du produit  $M \times M$ . En particulier l'action diagonale de  $\Phi$  sur le produit  $M \times M \setminus \text{Diag}$  préserve le noyau de Green et donc la forme d'enlacement. On aura besoin de cette remarque pour simplifier un peu les calculs de la partie 3.4.1, nous la résumons donc dans le lemme suivant.

**Lemme 3.2.9.** Soit  $\gamma$  et  $v$  deux courbes (pas nécessairement homologiquement triviales) et  $\Phi$  est une isométrie de  $(M, g)$  alors

$$\int_{\gamma} \int_v *_y d_y g^1 = \int_{\Phi^{-1}(\gamma)} \int_{\Phi^{-1}(v)} *_y d_y g^1$$



### 3.3 Une formule spectrale pour l'enlacement

Rappelons que l'opérateur laplacien est par construction auto-adjoint pour le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Il est bien connu que les opérateurs auto-adjoints sont diagonalisables en dimension finie ; c'est encore vrai pour le laplacien de Hodge de Rham lorsque la variété ambiante est compacte.

**Théorème 3.3.1** (voir [50] théorème 1.30). Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte, alors il existe

- Une suite  $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Omega^1(M)^{\mathbb{N}}$  de formes différentielles normées, c'est-à-dire  $\langle \eta_n, \eta_n \rangle = 1$ , et une suite de nombres réels strictement positifs  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tels que

$$\Delta \eta_n = \lambda_n \eta_n \quad .$$

- De plus, on a la convergence suivante dans l'espace des formes de carrés intégrables

$$\alpha = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle \eta_n, \alpha \rangle \eta_n \quad .$$

Formellement, on aurait envie d'écrire le noyau de Green dans une base orthonormée constituée de formes propres orthogonales aux formes harmoniques :

$$g^1(x, y) := \sum \frac{\eta_n(x) \otimes \eta_n(y)}{\lambda_n} \quad .$$

Ce qui donnerait

$$\Omega(x, y) = *_y d_y g^1(x, y) := \sum \eta_n(x) \otimes *d \left( \frac{\eta_n(y)}{\lambda_n} \right) \quad .$$

Dans le même esprit, en intégrant sur un couple de courbes  $\gamma$  et  $v$  homologiquement triviales on obtiendrait :

$$\text{lk}(\gamma, v) = \sum \int_{\gamma} \eta_n \int_v * \left( \frac{d\eta_n}{\lambda_n} \right) \quad .$$

Cependant la série à droite ne converge pas *a priori*. En effet, les courants d'intégration ne sont pas de carrés intégrables et ne peuvent donc pas être décomposés en somme de leur série de Fourier. On va alors régulariser ces courants d'intégration grâce au noyau de la chaleur, ce qui explique la présence du terme  $e^{-\lambda_n t}$  de la formule 1.0.10, pour pouvoir utiliser la formule de Plancherel et retrouver le théorème 1.0.9 dont on donne une version renforcée de l'énoncé ci-dessous :

**Théorème 3.3.2.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte et  $\Omega = *_y d_y g^1$  sa forme d'enlacement, alors on a

$$\int_{\gamma} \int_v \Omega = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda_k t} \int_{\gamma} \eta_k \int_v * \left( \frac{d\eta_k}{\lambda_k} \right). \quad (3.3.3)$$

où  $\gamma$  et  $v$  sont deux courbes de  $M$ , avec la convention  $\frac{d\eta_k}{\lambda_k} = 0$  si  $\Delta\eta_k = 0$ .

### 3.3.1 Le noyau de la chaleur sur les formes différentielles

La définition suivante est cruciale pour la régularisation.

**Définition 3.3.4.** Soit  $\eta$  une 1-forme différentielle continue et bornée. Le problème de Cauchy suivant, d'inconnue  $(\eta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ,

$$\begin{cases} \Delta\eta_t = -\partial_t \eta_t \\ \eta_0 = \eta \end{cases} \quad (3.3.5)$$

admet une solution unique. On notera alors  $e^{-t\Delta^1}$  l'opérateur de la chaleur qui à  $\eta$  associe  $\eta_t$ , la solution au temps  $t$  du problème de Cauchy ci-dessus. Le **noyau de la chaleur**, noté  $p_t^1$  est le noyau associé à l'opérateur de la chaleur qui vérifie

$$(\eta_t)_y = \int_M p_t^1(x, y) (\eta_x) d\mu_g(x).$$

De plus, on a

$$e^{-t\Delta^1}(\eta) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \eta$$

pour la topologie de la convergence uniforme.

En particulier si  $U$  et  $V$  sont deux fermés disjoints de  $M$  on a

$$p_t^1(x, y) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

uniformément sur  $U \times V$ .

Ce noyau de la chaleur existe toujours sur les variétés riemanniennes compactes, voir par exemple [6, section 2.3]. Le noyau de la chaleur a la propriété intéressante d'être lisse pour tout  $t > 0$ , contrairement au noyau de Green et donc de la forme d'enlacement.

### 3.3.2 Les courbes diffuses

Soit  $\gamma$  une courbe de  $M$ . On notera  $L^1(\Omega^1(M))$  les 1-formes différentielles intégrables, c'est-à-dire dont la norme est sommable sur  $M$  relativement à la mesure induite par la

métrique.

**Définition 3.3.6.** On appellera **courbe diffuse** de  $\gamma$ , notée  $e^{-t\Delta^1}(\gamma)$ , la famille, indexée par  $t > 0$ , composée des formes linéaires

$$\begin{aligned} e^{-t\Delta^1}(\gamma) &: L^1(\Omega^1(M)) \rightarrow \mathbb{R} \\ \beta &\mapsto \int_{\gamma} e^{-t\Delta^1}(\beta) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

dont les noyaux sont les formes différentielles lisses

$$\gamma_t(y) := \int_{\gamma} p_t((\cdot)^\sharp, y) ,$$

c'est-à-dire que pour toute 1-forme  $\beta$  lisse

$$\left( e^{-t\Delta^1}(\gamma) \right) (\beta) = \langle \gamma_t \cdot \beta \rangle . \quad (3.3.8)$$

Il n'est pas complètement évident que la forme linéaire qui définit la courbe diffuse de  $\gamma$  est bien donnée le produit scalaire contre la forme différentielle  $\gamma_t$ ; il faut utiliser le caractère auto-adjoint du laplacien et l'identité suivante, valide pour tout champ de vecteurs  $X$  et toute forme différentielle  $\alpha$  :

$$i_X(\alpha) = g(X^\sharp, \alpha) .$$

Ce qui combiné donne

$$i_X(y)(p_t^1(x, y)\beta_x) = g\left(\beta_y \cdot \left(p_t(x, y)(X_x^\sharp)\right)\right) ,$$

qui donne l'équation (3.3.8) en intégrant.

Ce processus de diffusion associe, par dualité, à chaque  $t > 0$  une forme différentielle  $\gamma_t$  qui approxime d'autant mieux le courant d'intégration  $\gamma$  que  $t$  est petit. Cette définition vient avec le lemme suivant précisant la phrase précédente. Avant de l'énoncer précisons que ce n'est qu'un corollaire de la convergence uniforme sur les compacts de  $M \times M \setminus \text{Diag}$  vers 0 du noyau de la chaleur quand  $t \rightarrow 0$ .

**Lemme 3.3.9.** Pour tout  $\beta \in L^1(\Omega^1(M))$  continu sur un voisinage  $U$  de la courbe  $\gamma$  on a

$$e^{-t\Delta^1}(\gamma)(\beta) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \int_{\gamma} \beta$$

**Démonstration :** Nous avons pris soin de prendre  $\beta$  intégrable, donc, comme le noyau

de la chaleur converge uniformément vers 0 en dehors de la diagonale, on a :

$$\left| e^{-t\Delta^1}(\gamma)(\beta) - \int_{\gamma} \int_U p_t^1(x, y)(\beta_x) d\mu_g(x) \right| \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 .$$

La forme différentielle  $\beta$  étant continue et bornée sur  $U$ , par la définition même du noyau de la chaleur on a

$$\int_U p_t^1(x, y)(\beta_x) d\mu_g(x) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \beta_y$$

uniformément. On peut alors permuter les intégrales et la limite ci-dessus pour obtenir :

$$\int_{\gamma} \int_U p_t^1(x, y)(\beta_x) d\mu_g(x) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \int_{\gamma} \beta ,$$

ce qui était le résultat attendu. ■

On se donne maintenant  $v$  une courbe disjointe de la courbe  $\gamma$ . Rappelons que la 1-forme différentielle

$$(\omega_v)_y := \int_v \Omega((\cdot)^\sharp, y)$$

est intégrable et continue sur  $M \setminus v$ , où  $\Omega = *_1 d_1 g^1$  est la forme d'enlacement associée à la métrique. Le lemme 3.3.9 donne alors le

**Corollaire 3.3.10.** Pour toute paire de courbes  $\gamma$  et  $v$  de  $M$  on a,

$$e^{-t\Delta^1}(\gamma)(\omega_v) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \int_{\gamma} \int_v \Omega .$$

Le but est maintenant d'identifier, à  $t > 0$  fixé, le membre de gauche de l'équation ci-dessus avec la série apparaissant dans l'équation (3.3.3) puis de faire tendre le paramètre  $t$  vers 0 pour obtenir la formule désirée.

### 3.3.3 Les séries approximantes

Montrons donc que pour  $t > 0$  on a :

$$e^{-t\Delta^1}(\gamma)(\omega_v) = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda_k t} \int_{\gamma} \eta_k \int_v * \left( \frac{d\eta_k}{\lambda_k} \right) . \quad (3.3.11)$$

**Démonstration :** L'avantage d'avoir diffusé les courants d'intégration est de permettre d'exprimer la formule ci-dessus sous la forme d'un produit scalaire entre deux 1-formes lisses. On utilisera ensuite la formule de Plancherel, une extension aux espaces de Hilbert

du théorème de Pythagore, pour écrire ce produit scalaire dans une base orthonormée.

On commence par utiliser la propriété de semi-groupe de l'opérateur  $e^{-t\Delta}$  :

$$\int_{\gamma} e^{-t\Delta^1}(\omega_v) = \int_{\gamma} e^{-\frac{t}{2}\Delta^1} \left( e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\omega_v) \right) .$$

Par définition du noyau de la chaleur on peut aussi écrire :

$$\int_{\gamma} e^{-t\Delta^1}(\omega_v) = \int_{\gamma} \left[ \int_M p_{\frac{t}{2}}^1(x, \cdot) \left( e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\omega_v)_x \right) d\mu_g(x) \right] .$$

Comme annoncé, on va réécrire le membre de droite comme un produit scalaire en rappelant la relation (3.3.8) avec les données  $\beta = e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\omega_v)$  et  $X = \gamma'(s)$ , ce qui donne :

$$\int_{\gamma} e^{-t\Delta^1}(\omega_v) = \left\langle \gamma_{\frac{t}{2}} \cdot \left( e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\omega_v) \right) \right\rangle .$$

Les deux formes différentielles du produit scalaire ci-dessus étant lisses, on va utiliser le théorème de Plancherel et écrire ce produit scalaire dans une base orthonormée :

$$e^{-t\Delta^1}(\gamma)(\omega_v) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left\langle \gamma_{\frac{t}{2}} \cdot \eta_k \right\rangle \left\langle e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\omega_v) \cdot \eta_k \right\rangle \quad (3.3.12)$$

Il nous suffit alors de prouver les deux identités ci-dessous. Elles identifient chacun des termes de la série ci-dessus avec ceux apparaissant dans la série 3.3.3.

$$e^{-\frac{\lambda_k t}{2}} \int_{\gamma} \eta_k = \left\langle \gamma_{\frac{t}{2}} \cdot \eta_k \right\rangle \quad (3.3.13)$$

$$\frac{e^{-\frac{\lambda_k t}{2}}}{\lambda_k} \int_v * d\eta_k = \left\langle e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\omega_v) \cdot \eta_k \right\rangle \quad (3.3.14)$$

Commençons par (3.3.13). En reprenant la définition même de la courbe diffuse  $\gamma_t$  on a

$$\left\langle \gamma_{\frac{t}{2}} \cdot \eta_k \right\rangle = \int_{\gamma} e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\eta_k) ,$$

et donc,  $\eta_k$  étant une forme propre de valeur propre  $\lambda_k$  :

$$\left\langle \gamma_{\frac{t}{2}} \cdot \eta_k \right\rangle = e^{-\frac{t}{2}\lambda_k} \int_{\gamma} \eta_k . \quad (3.3.15)$$

Montrons maintenant (3.3.14), en partant également du membre de droite :

$$\left\langle e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\omega_\nu) \cdot \eta_k \right\rangle .$$

La forme  $\omega_\nu$  étant intégrable, on peut utiliser le caractère auto-adjoint de l'opérateur  $e^{-\frac{t}{2}\Delta}$  :

$$\left\langle e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\omega_\nu) \cdot \eta_k \right\rangle = \left\langle \omega_\nu \cdot e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\eta_k) \right\rangle .$$

La forme  $\eta_k$  est encore propre, toujours de valeur propre  $\lambda_k$ , on a donc

$$e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\eta_k) = e^{-\frac{t}{2}\lambda_k}\eta_k ,$$

d'où

$$\left\langle e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\omega_\nu) \cdot \eta_k \right\rangle = e^{-\lambda_k \frac{t}{2}} \langle \omega_\nu \cdot \eta_k \rangle .$$

La forme d'enlacement  $\Omega$  étant intégrable on peut alors écrire

$$\langle \omega_\nu \cdot \eta_k \rangle = \int_\nu \left[ \int_M \Omega(x, \cdot)(\eta_k)_x d\mu_g(x) \right] ,$$

et donc, par construction :

$$\begin{aligned} \int_M \Omega(x, \cdot)(\eta_k)_x d\mu_g(x) &= *d \int_M g(x, y)(\eta_k)_x d\mu_g(x) \\ &= *d(G(\eta_k)) . \end{aligned}$$

L'opérateur  $G$  commute avec la différentielle  $d$ ; en particulier tous les termes de cette série comprenant une forme fermée  $\eta_k$  s'annulent et donc, en rappelant la convention  $\frac{1}{\lambda_k} d\eta_k = 0$  dans le cas où  $\eta_k$  est fermée, on peut alors écrire

$$*dG(\eta_k) = \frac{*d\eta_k}{\lambda_k} .$$

Finalement :

$$\langle \omega_\nu \cdot \eta_k \rangle = \int_\nu * \left( \frac{d\eta_k}{\lambda_k} \right) ,$$

ce qui donne

$$\left\langle e^{-\frac{t}{2}\Delta^1}(\omega_\nu) \cdot \eta_k \right\rangle = e^{-\frac{t}{2}\lambda_k} \int_\nu * \left( \frac{d\eta_k}{\lambda_k} \right) , \quad (3.3.16)$$

le résultat attendu. ■

### 3.4 Application : enlacement des géodésiques sur le tore $\mathbb{T}^3$

Cette section est consacrée à l'utilisation du théorème 3.3.2 démontré dans la section précédente dans le cas de multi-géodésiques d'un tore plat de dimension 3. En effet dans ce cas, la théorie spectrale est complètement explicite, nous la rappellerons dans la sous-section 3.4.2, ce qui laisse espérer une expression explicite de la série suivante à  $t > 0$  fixé :

$$\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda_k t} \int_{\gamma} \eta_k \int_v * \left( \frac{d\eta_k}{\lambda_k} \right). \quad (3.4.1)$$

Après avoir obtenu une expression de cette formule, on fera tendre le paramètre  $t \rightarrow 0$  tout en rappelant le théorème 3.3.2, ce dernier garantissant que nous avons effectivement calculé l'enlacement.

#### 3.4.1 Énoncé du théorème principal.

On identifie  $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$  au sous espace des translations de  $\mathbb{R}^3$  par l'image du morphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^3 &\rightarrow \{\text{translations de } \mathbb{R}^3\} \\ p &\mapsto v + p : . \end{aligned}$$

On notera  $\mathbb{T}^3$  le tore plat correspondant au quotient  $\mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ . On appelle **multi-géodésiques** une multi-courbe constituée de géodésiques pour la métrique plate. Le but de cette section est de calculer l'enlacement de deux paires de multi-géodésiques de ce tore.

Commençons par fixer les notations. On paramètre les géodésiques de  $\mathbb{T}^3$  comme suit.

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^3 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1 t + u_1 \\ \gamma_2 t + u_2 \\ \gamma_3 t + u_3 \end{pmatrix} \pmod{\mathbb{Z}^3} \end{array} \right. \quad (3.4.2)$$

où  $u = \gamma(0) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{T}^3$  sera appelé l'**origine** de  $\gamma$ . Notons que l'orientation des courbes

images est donnée par le paramétrage. Le vecteur  $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}\mathbb{T}^3$  peut aussi être vu comme un élément de l'algèbre de Lie de  $\mathbb{T}^3$ , canoniquement identifié à  $\mathbb{R}^3$ , si bien que l'on peut écrire  $\gamma'(t)$  comme

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 .$$

Le vecteur  $\gamma'(t)$  ne dépend donc ni de  $t$  ni du point origine de la courbe. A chaque géodé-

sique de  $\mathbb{T}^3$  est alors associé un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  tel que la courbe  $\gamma$  est fermée si et seulement si le vecteur  $\gamma'(t)$  appartient à  $\mathbb{Z}^3$ . Remarquons que dans ce cas n'importe quel point  $u \in \text{Im}(\gamma)$  peut être choisi comme origine.

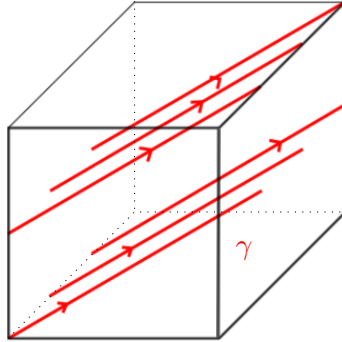


FIGURE 3.5 – Le cube est indentifié à  $\mathbb{T}^3$  en recollant les faces opposées grâce à des translations. La courbe rouge  $\gamma$  admet pour vecteur dérivée  $\gamma' = (2, 2, 3)$ . Cette courbe étant fermée, on peut choisir n'importe lequel de ses points comme origine. Par exemple  $0_{\mathbb{R}^3}$  ici.

Le groupe fondamental du tore étant abélien, on a au final indentifié canoniquement  $\mathbb{Z}^3 \subset \mathbb{R}^3$  au premier groupe d'homologie de  $\mathbb{T}^3$  à coefficients entiers.

On peut alors vérifier que le vecteur  $\gamma' \in \mathbb{Z}^3$  est le vecteur correspondant à la classe d'homologie  $[\gamma]$ . On notera alors  $[\gamma]$  le vecteur  $\gamma'$  pour mettre en valeur la saveur topologique de ce vecteur. De cela sort la condition suivante, nécessaire et suffisante afin qu'une multi-géodésique  $\Gamma = (\gamma^i)_{i \in I}$  soit homologiquement triviale :

$$\sum_{i \in I} [\gamma^i] = 0_{\mathbb{R}^3} .$$

Nous allons avoir besoin de la construction suivante.

Étant donné deux vecteurs  $u, v \in \mathbb{Z}^3$ , on définit un nouveau vecteur  $\beta^{u,v} \in \mathbb{Z}^3$  par les conditions suivantes :

- si  $u$  et  $v$  sont parallèle on pose  $\beta^{u,v} = (1, 0, 0)$  **par convention**.
- $\beta^{u,v} \in \text{vect}(u, v)^\perp$
- $\det(u, v, \beta^{u,v}) > 0$
- la norme euclidienne  $\|\beta^{u,v}\|$  de  $\beta^{u,v}$  est minimale pour les deux premières propriétés.

Étant donné deux géodésiques  $\gamma$  et  $v$ , on notera par abus  $\beta^{\gamma,v}$  le vecteur  $\beta^{[\gamma],[v]}$ . Nous avons maintenant tout le nécessaire pour énoncer le

**Théorème 3.4.3.** Soit  $\Gamma = (\gamma^i)_{i \in I}$  et  $\Upsilon = (v^j)_{j \in J}$  deux multi-géodésiques homologue-



ment triviales du tore  $\mathbb{T}^3$ , elles s'enlacent alors selon la formule :

$$\text{lk}(\Gamma, \Upsilon) = \sum_{i \in I, j \in J} \det \left( [\gamma^i], [v^j], \frac{\beta^{i,j}}{\|\beta^{i,j}\|} \right) \frac{1 - 2\{(u^{i,j} \cdot \beta^{i,j})\}}{2\|\beta^{i,j}\|} \quad (3.4.4)$$

où  $u^{i,j} = \gamma^i(0) - v^j(0)$  est la différence de deux points origines et  $\{\alpha\}$  l'unique représentant dans  $[0, 1)$  du nombre réel  $\alpha$  modulo  $\mathbb{Z}$ .

**Remarque 3.4.5.**

- On aurait pu définir  $\beta^{i,j}$  comme étant n'importe quel vecteur non nul dans le cas où les deux géodésiques  $\gamma_i$  et  $v_j$  sont parallèles. En effet, dans ce cas, les termes correspondants de la somme (3.4.4) s'annulent et donc ne compte pas pour l'enlacement.
- On peut définir l'enlacement dans le cadre d'une variété de dimension  $n$ , dès lors qu'on prend soin de considérer deux sous variétés disjointes homologiquement triviales de dimension  $p$  et  $q$  telles que  $p + q = n - 1$ . Notre méthode pourrait être généralisée aux tores plats en toute dimension.
- A priori, la formule (3.4.4) dépend des choix de paramétrage. Nous clarifierons ce point au cours de la preuve à travers la remarque 3.4.21.

### 3.4.2 Théorie spectrale des formes différentielles du 3-tore

Commençons par introduire quelques notations.

- On notera par un indice inférieur les coordonnées d'un vecteur et par un indice supérieur l'appartenance de ce vecteur à une famille. Par exemple,  $\gamma_i^j$  denote la  $i$ -ième coordonnée du  $j$ -ième vecteur d'une famille de vecteurs  $(\gamma^j)_{j \in J}$ .
- Étant donné un vecteur

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

on notera par  $v^*$  la forme linéaire  $v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$ . Celle-ci étant invariante par translation elle descend en une forme différentielle bien définie sur le 3-tore.

**On notera encore  $v^*$  la forme harmonique  $v_1 dx_1 + v_2 dx_2 + v_3 dx_3$  du tore  $\mathbb{T}^3$  venant de la forme linéaire précédente.**

- Le produit scalaire de deux vecteurs  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}^3$  sera noté  $(a \cdot b)$  et la norme euclidienne associée sera notée  $\|\cdot\|$ .
- Le produit vectoriel de deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$  sera noté  $\wedge$ .

**La théorie spectrale du tore  $\mathbb{T}^3$ .** Décrivons la théorie spectrale des 1-formes différentielles du tore  $\mathbb{T}^3$  à l'aide des données suivantes.

- un vecteur  $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^3$
- une base orthonormée  $(v^1, v^2, v^3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .
- une fonction  $f \in \{\cos, \sin\}$

Remarquons ici que l'on a le choix de la base orthonormée, on s'en servira pour les calculs de la section suivante.

**Lemme 3.4.6.** La forme différentielle

$$\eta(x) = \sqrt{2}f(2\pi(\mathbf{k} \cdot x))(v^i)^* \quad (3.4.7)$$

est une forme propre du laplacien agissant sur les 1-formes de  $\mathbb{T}^3$  de valeur propre  $\lambda = (2\pi\|\mathbf{k}\|)^2$ .

**Démonstration.** Commençons par montrer que ces formes sont de norme  $L^2$  unité.

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{L^2} &:= \int_{\mathbb{T}^3} \eta \wedge *\eta \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} 2f^2(2\pi(\mathbf{k} \cdot x))(v^i)^* \wedge *(v^i)^* \\ &= \int_{\mathbb{T}^3} 2f^2(2\pi(\mathbf{k} \cdot x))d\text{vol} = 1 \end{aligned}$$

car  $f^2 = \frac{1 \pm f(2\cdot)}{2}$ .

Par définition du laplacien, afin de montrer que cette forme différentielle est bien un vecteur propre on doit montrer que :

$$\Delta\eta = (d\delta + \delta d)\eta$$

Comme  $\delta = -*d*$  sur les 1-formes en dimension 3, on a :

$$d\delta\eta = d(-*d*)\eta = -\sqrt{2}(d*d)(f(2\pi(\mathbf{k} \cdot x))*(v^i)^*). \quad (3.4.8)$$

Par définition de l'étoile de Hodge on peut écrire  $*(v^i)^* = (v^j)^* \wedge (v^t)^*$  où  $(i, j, t)$  est une permutation circulaire de  $(1, 2, 3)$ , donc

$$d\delta\eta = -\sqrt{2}d*d(f(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) \wedge (v^j)^* \wedge (v^t)^*) . \quad (3.4.9)$$

On obtient donc

$$d\delta\eta = -\sqrt{2}(d*)(2\pi k_i f'(2\pi(\mathbf{k} \cdot x))((v^i)^* \wedge (v^j)^* \wedge (v^t)^*))$$

$$\begin{aligned}
&= -2\sqrt{2}\pi k_i d(f'(2\pi(\mathbf{k} \cdot x))) \\
&= -2\sqrt{2}\pi k_i df'(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) \\
&= -4\sqrt{2}\pi^2 (k_i^2 f''(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) dx_i + k_i k_j f''(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) dx_j + k_i k_t f''(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) dx_t) .
\end{aligned}$$

Le calcul du terme  $\delta d\eta$  est similaire et donne

$$\begin{aligned}
\delta d\eta &= -4\sqrt{2}\pi^2 (k_j^2 f''(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) dx_i + k_t^2 f''(2\pi(\mathbf{k} \cdot x))) \\
&\quad + 4\sqrt{2}\pi^2 (k_i k_j f''(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) dx_j - k_i k_t f''(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) dx_t) .
\end{aligned}$$

En sommant on obtient :

$$\Delta\eta = -4\sqrt{2}\pi^2 (k_i^2 f''(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) dx_i + k_j^2 f''(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) dx_i + k_t^2 f''(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) dx_i) .$$

comme  $f'' = -f$  on a

$$\Delta\eta = 4\pi^2 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \eta ,$$

ce qui est le résultat attendu. ■

Pour utiliser le théorème 3.3.2 nous avons besoin d'une base de formes propres. Si l'on fixe une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$ , la famille issue de tous les vecteurs  $\mathbf{k}$  et des fonction cos et sin forme une partie génératrice de l'espaces des 1-formes différentielles de carré intégrable. Pour le voir, on décompose en série de Fourier les fonctions coefficients d'une forme différentielle  $\omega$  que l'on aurait écrite comme

$$\omega(x, y, z) = f_1(x, y, z) \cdot (v^1)^* + f_2(x, y, z) \cdot (v^2)^* + f_3(x, y, z) \cdot (v^3)^* .$$

De plus, cette famille est en fait libre modulo les relations triviales  $\cos(-\mathbf{k} \cdot x) = \cos(\mathbf{k} \cdot x)$  et  $\sin(-\mathbf{k} \cdot x) = -\sin(\mathbf{k} \cdot x)$ .

### 3.4.3 Calcul des séries approximantes 3.3.11.

Rappelons que l'on avait paramétré les deux géodésiques  $\gamma$  et  $v$  comme ceci :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}^3 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1 t + u_1 \\ \gamma_2 t + u_2 \\ \gamma_3 t + u_3 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} v : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}^3 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} v_1 t + \mu_1 \\ v_2 t + \mu_2 \\ v_3 t + \mu_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

où  $\gamma_i, v_j \in \mathbb{Z}$  et  $\mu_j, u_j \in [0, 1]$ .

Commençons par remarquer que l'on peut supposer  $u = 0$ . En effet, la translation de  $\mathbb{R}^3$

$$\tau_u := x \rightarrow x + u ,$$

définit une isométrie du 3-tore  $\mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ , en appliquant alors le corollaire 3.2.9, on obtient :

$$\int_{\gamma} \int_v \Omega = \int_{\tau^{-1}(\gamma)} \int_{\tau^{-1}(v)} \Omega ,$$

où maintenant  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  appartient bien à la géodésique  $\tau^{-1}(\gamma)$ . Pour ne pas alourdir les notations nous continuerons de noter par  $\mu$  la nouvelle origine (qui devrait être  $\mu(\gamma, v) = \mu - u$ ) de la courbe  $v$  translatée.

On a vu dans la section 3.4.7 que l'on pouvait construire une famille génératrice, indexée par un vecteur à coordonnées entières et une fonction (un cos ou un sin), de 1-forme propre à un choix près d'une base orthonormées de  $\mathbb{R}^3$ . Afin de faciliter le calcul des termes de la série 3.3.3 nous allons faire un choix de base orthonormée adaptée à la géodésique  $\gamma$  : le premier vecteur correspondra alors à  $v^1 = \frac{[\gamma]}{\|[\gamma]\|}$ . On complète ensuite arbitrairement en une base orthonormée :

$$\left( \left( v^1 = \frac{[\gamma]}{\|[\gamma]\|} \right), v^2, v^3 \right) .$$

Le membre de droite de l'équation 3.3.11 est :

$$\sum_{k \geq 0} \frac{e^{-\lambda_k s}}{\lambda_k} \int_{\gamma} \eta_k \int_v * \left( \frac{d\eta_k}{\lambda_k} \right) . \quad (3.4.10)$$

Calculons les termes de cette série séparément, nous les sommerons dans la section suivante. Ces termes sont des produits de deux intégrales,

$$\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \left( \int_{\gamma} * d\eta \right) \left( \int_v \eta \right) , \quad (3.4.11)$$

que nous calculerons également indépendamment.

Commençons par l'intégrale qui ne fait pas intervenir l'opérateur  $*d$ . Soit donc  $\eta$  une forme propre, on a

$$\int_{\gamma} \eta = \int_{[0,1]} \sqrt{2} f(2\pi \mathbf{k} \cdot \gamma(t)) (v^i)^*([\gamma]) dt , \quad (3.4.12)$$

où  $f \in \{\cos, \sin\}$  et  $\mathbf{k}$  est un vecteur de  $\mathbb{Z}^3$ . L'intégrale ci-dessus est nulle dès lors que  $f$  est un sinus car la courbe  $\gamma$  passe par 0 :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \eta &= \int_{[0,1]} \sqrt{2} \sin(2\pi \mathbf{k} \cdot \gamma(t)) (v^i)^*([\gamma]) dt \\ &= C_1 \int_{[0,1]} \sin(2\pi C_2 t) dt = 0 \end{aligned}$$

car  $C_2 \in \mathbb{Z}$ . **On peut donc supposer dans la suite que la fonction  $f$  est un cosinus.** On poursuit le calcul en ne considérant plus que la famille de forme propre donnée par :

$$\eta_{\mathbf{k},i} = \sqrt{2} \cos(2\pi(\mathbf{k} \cdot x)) (v^i)^*$$

où  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$  et  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Ce qui donne en reprenant l'équation (3.4.12) :

$$\int_{\gamma} \eta_{\mathbf{k},i} = \int_{t=0}^1 \cos(2\pi t(\mathbf{k} \cdot [\gamma])) (v^i)^*([\gamma]) dt$$

où  $(v^i)^*([\gamma]) = ([\gamma] \cdot v^i) = \|[ \gamma ]\| \delta_{i,1}$ .

L'intégrale ci-dessus est donc nulle dès lors que

- $(\mathbf{k} \cdot [\gamma]) \neq 0$
- $i \neq 1$

De plus, dans les cas où cette intégrale est non nulle la fonction  $t \mapsto \cos(2\pi(\mathbf{k} \cdot [\gamma])t)$  est constante, on a alors :

$$\int_{\gamma} \eta_{\mathbf{k},i} = \sqrt{2} \|[ \gamma ]\| . \quad (3.4.13)$$

Les formes différentielles donnant un terme non nul dans la série (3.4.10) sont donc de la forme

$$\eta_{\mathbf{k},1} = \sqrt{2} \cos(2\pi \mathbf{k} \cdot x) \left( \frac{[\gamma]}{\|[ \gamma ]\|} \right)^*$$

pour  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$  avec  $\mathbf{k} \cdot [\gamma] = 0$ . De plus, dans ce cas, leurs valeurs sont données par (3.4.13).

**On notera dorénavant  $\eta_{\mathbf{k},1}$  par  $\eta_{\mathbf{k}}$ .** On passe maintenant au calcul du second terme du produit, c'est-à-dire :

$$\int_v^* d\eta_{\mathbf{k}} ,$$

en commençant par le calcul de  $*d\eta_{\mathbf{k}}$ .

$$\begin{aligned} *d\eta_{\mathbf{k}} &= *d\left(\sqrt{2}\cos(2\pi(x \cdot \mathbf{k}))(v^1)^*\right) \\ &= -2\sqrt{2}\pi \sin(2\pi(x \cdot \mathbf{k})) * (k_1 dx_1 \wedge (v^1)^* + k_2 dx_2 \wedge (v^1)^* + k_3 dx_3 \wedge (v^1)^*) \\ &= -2\sqrt{2}\pi \sin(2\pi(x \cdot \mathbf{k}))(\mathbf{k} \wedge v^1)^* . \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_v *d\eta_{\mathbf{k}} &= \int_{t=0}^1 -2\sqrt{2}\pi \sin(2\pi t([v] \cdot \mathbf{k}) + 2\pi(\mu \cdot \mathbf{k})) (\mathbf{k} \wedge v^1)^*([v]) dt \\ &= -2\sqrt{2}\pi \det\left(\frac{[\gamma]}{\|[\gamma]\|}, [v], \mathbf{k}\right) \int_0^1 \sin(2\pi t([v] \cdot \mathbf{k}) + 2\pi(\mu \cdot \mathbf{k})) dt . \end{aligned}$$

Cette intégrale est nulle dès lors que l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- Les vecteurs  $[\gamma]$  et  $[v]$  sont proportionnels.
- $(\mathbf{k} \cdot [v]) \neq 0$ .

De plus, si l'intégrale  $\int_v *d\eta_{\mathbf{k}}$  n'est pas nulle, on a :

$$\int_v *d\eta_{\mathbf{k}} = -2\sqrt{2}\pi \det\left(\frac{[\gamma]}{\|[\gamma]\|}, [v], \mathbf{k}\right) \sin(2\pi(\mu \cdot \mathbf{k})) . \quad (3.4.14)$$

En combinant (3.4.13) et (3.4.14) on obtient :

$$\int_{\gamma} \eta_{\mathbf{k}} \int_v *d\eta_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 4\pi \det([\gamma], [v], \mathbf{k}) \sin(2\pi(\mu \cdot \mathbf{k})) & \text{si } \mathbf{k} \in \text{Span}([\gamma], [v])^{\perp} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.4.15)$$

Ceci invite à caractériser les éléments de  $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$  dans l'ensemble  $\text{Span}([\gamma], [v])^{\perp}$ .

**Lemme 3.4.16.** Soit  $b_1$  et  $b_2$  deux vecteurs non parallèles de  $\mathbb{Z}^3$  alors le groupe

$$G := \text{Span}(b_1, b_2)^{\perp} \cap \mathbb{Z}^3 \quad (3.4.17)$$

est un sous groupe discret de  $\mathbb{R}$ , en particulier cyclique. On notera  $\pm\beta$  ses deux générateurs possibles.

**Démonstration :** en tant qu'ensemble, il n'est pas réduit à  $\{0\}$  car  $b_1 \wedge b_2$  appartient bien à  $\mathbb{Z}^3$  en restant orthogonal à  $b_1$  et  $b_2$ . En tant qu'intersection de  $\mathbb{Z}^3$  avec la droite vectorielle  $\mathbb{R} \cdot b_1 \wedge b_2$  c'est un sous groupes de  $\mathbb{R}$ . Mais 0 est isolé dans ce groupe car  $\mathbb{Z}^3$  est discret, c'est donc un groupe cyclique. ■

On applique maintenant le lemme précédent au couple  $([\gamma], [v])$  pour obtenir la description suivante des  $\mathbf{k}$  donnant un terme non nul de la série 3.3.3 :

$$\text{Span}([\gamma], [v])^\perp \cap \mathbb{Z}^3 = \{k \beta, k \in \mathbb{Z}\}. \quad (3.4.18)$$

Parmi les deux générateurs possibles, on choisit  $\beta$  tel que la famille  $([\gamma], [v], \beta)$  soit positivement orientée.

Les seuls termes de la série (3.4.10) ne s'annulant pas sont associés aux formes différentielles

$$\eta_k := \eta_{(k\beta)} = \sqrt{2} \cos((k\beta) \cdot x) \left( \frac{[\gamma]}{\|[\gamma]\|} \right)^*,$$

et dans ce cas on a :

$$\int_{\gamma} \eta_k \int_v * d\eta_k = -4\pi k \det([\gamma], [v], \beta) \sin(2\pi k(\mu \cdot \beta)). \quad (3.4.19)$$

Rappelons aussi que les formes  $\eta_k$  et  $\eta_{-k}$  sont proportionnelles. Pour avoir une famille libre il nous faut donc faire un choix sur le signe des entiers  $k$  : nous les choisirons positifs. La série 3.3.3 devient alors :

$$- \sum_{k>0} \frac{e^{-(2\pi\|\beta\|)^2 n^2 t}}{\pi k \|\beta\|} \det\left([\gamma], [v], \frac{\beta}{\|\beta\|}\right) \sin(2\pi k(\mu \cdot \beta)). \quad (3.4.20)$$

**Remarque 3.4.21.** Nous avons fait remarquer, Cf 3.4.5, juste après avoir énoncé le théorème 3.4.3 que la la formule 3.4.20 n'était pas indépendante des choix. En effet, le terme  $\sin(2\pi k(\mu \cdot \beta))$  dépend *a priori* d'un choix de paramétrage, plus précisément  $\mu$  dépend d'un choix d'origine de la géodésique  $v$ . Vérifions que  $k(\mu \cdot \beta)$  ne dépend pas de  $\mu$  modulo  $\mathbb{Z}$ . Soit donc  $\mu_2 \in v$  une autre origine pour la courbe  $v$ , par définition il existe  $t \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{Z}^3$  tels que

$$\mu_2 - \mu = t[v] + \alpha$$

et donc,

$$(\mu_2 \cdot \beta) = (\mu_2 - \mu + \mu \cdot \beta) = (\mu \cdot \beta) + (\alpha \cdot \beta)$$

car  $\beta \in [v]^\perp$ . On conclut en réduisant la formule ci-dessus modulo  $\mathbb{Z}$  pour avoir

$$(\mu_2 \cdot \beta) = (\mu \cdot \beta) \pmod{\mathbb{Z}}$$

car  $(\alpha \cdot \beta) \in \mathbb{Z}$ .

### 3.4.4 Une famille de fonctions qui converge uniformément.

Examinons maintenant la série (3.4.20) plus en détail. Si nous étions autorisés à faire tendre  $t \rightarrow 0$  dans chacun des termes de la série on obtiendrait à la limite :

$$-C \sum_{k>0} \frac{1}{k} \sin(2\pi kx)$$

avec  $C = \frac{1}{\pi \|\beta\|} \det \left( [\gamma], [v], \frac{\beta}{\|\beta\|} \right)$  et  $x = (\mu \cdot \beta)$ .

On reconnaîtrait alors la série de Fourier associée à la fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\pi}{2}(1 - 2x) & \text{sur } (0, 1) \end{cases} \quad (3.4.22)$$

étendue à  $\mathbb{R}$  par parité et 1-périodicité. On obtiendrait alors

$$\int_{\gamma} \int_v \Omega = \frac{1}{2\|\beta\|} \det \left( [\gamma], [v], \frac{\beta}{\|\beta\|} \right) (1 - 2(\mu \cdot \beta)) , \quad (3.4.23)$$

ce qui démontrerait le théorème 3.4.3. Justifions donc la convergence terme à terme de la série (3.4.20) grâce au lemme suivant.

**Lemme 3.4.24.** Soit  $a_k(t)$  et  $b_k(t)$  deux suites de fonctions définies sur l'intervalle  $I$  contenant 0 telles que

1.  $\left( \sum_{k \leq n} a_k(t) \right)_{n \in \mathbb{N}}$  est uniformément bornée en  $n$
2. la suite de fonction  $b_k(t)$  est décroissante en  $t, k$  et tend uniformément (en la variable  $k$ ) vers 0.

alors la série de fonctions  $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k(t) b_k(t)$  converge uniformément sur  $I$ .

La preuve consiste à faire une intégration par partie discrète.

Voyons comment se servir de ce lemme dans notre cas. Posons  $a_k(t) = \sin(2\pi kx)$  et  $b_k(t) = \frac{e^{-atk^2}}{k}$ , il est alors facile de vérifier les hypothèses du lemme pour  $I = [0, +\infty]$  pour tout  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $x > 0$ . De ce lemme, on déduit que la série de fonctions

$$\sum_{k>0} \frac{e^{-atk^2}}{k} \sin(2\pi kx)$$

converge uniformément sur  $]0, +\infty]$ . On est donc autorisé à permuter limite et somme dans



la série 3.4.20 pour obtenir :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k > 0} \frac{e^{-atk^2}}{k} \sin(2\pi kx) &= \sum_{k > 0} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{-atk^2}}{k} \sin(2\pi kx) \\ &= \sum_{k > 0} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé.

### 3.4.5 Le cas particulier du flot géodésique du tore $\mathbb{T}^2$

Comme discuté dans notre première section, des collections particulièrement intéressantes de multi-courbes fermées viennent des systèmes dynamiques. Celui qui nous occupera ici est le flot géodésique du 2-tore  $\mathbb{T}^2$ , pour lequel on verra que le théorème 3.4.3 se spécifie bien dans ce contexte.

Commençons par remarquer que le tore  $\mathbb{T}^3$  est naturellement identifié au fibré unitaire tangent  $U\mathbb{T}^2$  du 2-tore  $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ . En effet, en tant que groupe de Lie, le fibré unitaire tangent du tore est trivial. Une trivialisatation possible revient à fixer une direction de  $\mathbb{R}^2$  en constatant qu'elle est invariante par translation. Cela définit alors une "direction" au quotient, sur le tore, depuis laquelle on peut repérer les angles et donc paramétrer le fibré unitaire tangent.

$$\begin{aligned} U\mathbb{T}^2 &\rightarrow \mathbb{T}^3 \\ u &\mapsto ((x, y), \theta) \end{aligned}$$

Le point  $(x, y) \in \mathbb{T}^2$  est le point base du vecteur  $u$  et  $\theta$  l'angle que forme ce vecteur avec l'axe des  $x$ . Avec le fibré unitaire tangent d'une variété vient toujours un flot, le flot géodésique. Dans le cas du tore plat  $\mathbb{T}^2$ , on peut complètement expliciter le flot géodésique dans les cartes de la trivialisatation proposée ci-dessus :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_t : \quad \mathbb{T}^3 \rightarrow \mathbb{T}^3 \\ \quad \quad (x, y, \theta) \mapsto (x + t \cos \theta, y + t \sin \theta, \theta) . \end{array} \right. \quad (3.4.25)$$

Notons que les orbites sont canoniquement orientées par le flot lui-même, ces dernières sont de plus naturellement paramétrées par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^3 \\ \quad \quad t \mapsto (x + t \cos \theta, y + t \sin \theta, \theta) . \end{array} \right. \quad (3.4.26)$$

En particulier ce sont des géodésiques pour la métrique plate sur le tore  $\mathbb{T}^3$ .

**Remarque 3.4.27.** Le fait que ces trajectoires soient encore des géodésiques est un fait général : c'est toujours vrai dès lors que l'on met la métrique de Sasaki sur le fibré unitaire

tangent. Dans notre cas il s'avère simplement que cette métrique est aussi la métrique plate sur le tore  $\mathbb{T}^3$ .

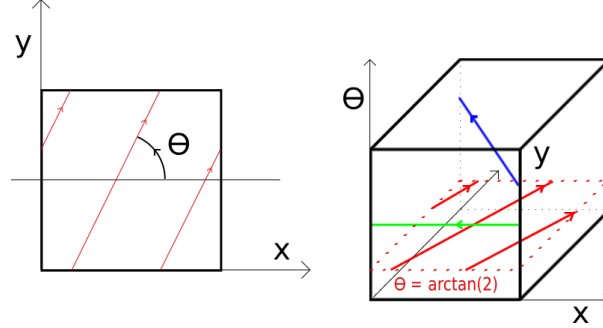


FIGURE 3.6 – La courbe rouge représente une géodésique fermée de  $\mathbb{T}^2$ . Cette courbe se relève canoniquement au fibré unitaire tangent par la courbe rouge ci-à-droite, dont on peut remarquer qu'elle reste dans la sous variété d'équation  $\theta = \arctan(2)$ . Les courbes vertes et bleues représentent les relevés de deux autres géodésiques.

Le théorème 3.3.2 se spécifie alors en le

**Corollaire 3.4.28.** Soit  $\Gamma = (\gamma^i)_{i \in I}$  et  $\Upsilon = (v^j)_{j \in J}$  deux multi-géodésiques homologiquement triviales de  $\mathbb{T}^2$ , les relevés de ces géodésiques dans le fibré unitaire tangent s'enlacent alors selon la formule

$$\text{lk}(\Gamma, \Upsilon) = \sum_{i,j} i(\gamma^i, v^j) \frac{1 - \theta_{i,j}}{2\pi},$$

où  $\theta_{i,j}$  est l'unique détermination dans  $[0, 2\pi[$  de l'angle entre les deux courbes  $\theta_i - \theta_j$ , et  $i(\gamma^i, v^j)$  est l'intersection algébrique des courbes  $\gamma^i$  et  $v^j$  sur la base, le 2-tore.

**Démonstration :** Comme remarqué précédemment les orbites de ce flot restent dans les feuilles  $\theta = \text{cst}$ , les vecteurs  $[\gamma^i]$  et  $[v^j]$  appartiennent donc à  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Le vecteur  $\beta^{i,j}$  défini dans notre théorème 3.4.3 devient

$$\beta^{i,j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

pour tout les couples  $(i, j)$ , le signe étant fonction de l'ordre d'arrivé des courbes  $\gamma_i$  et  $v_j$ . En particulier on a  $\|\beta^{i,j}\| = 1$ . De plus, le déterminant  $\det([\gamma^i], [v^j], \beta^{i,j})$  devient  $\det_{\mathbb{R}^2}([\gamma_i], [v_j])$ , ce qui correspond au nombre d'intersection des courbes  $\gamma^i$  et  $v^j$  vues comme des courbes du 2-tore. La quantité  $(\beta^{i,j} \cdot \mu^{i,j})$  devient la différence entre les angles, *i.e.*

$$(\pi - (\mu^{i,j} \cdot \beta^{i,j})) = (\pi - (\theta_{i,j})),$$

ce qui conclut. ■



## Chapitre 4

# La géométrie des échanges d'intervalles affines.

### 4.1 Introduction.

Cette partie de ma thèse est dédiée à l'étude dynamique d'une famille d'échanges d'intervalles affines. Ce travail a donné naissance à l'article "Cascades in the dynamics of affine interval exchange transformations", accepté pour publication par le journal "Ergodic Theory and Dynamical Systems", que l'on a joint au manuscrit. La courte introduction qui suit a pour but de faciliter la lecture de l'article en illustrant certaines des idées/constructions qui nous ont été utiles dans le cas simple, mais déjà non trivial, des rotations du cercle.

#### 4.1.1 Les échanges d'intervalles

**Définition 4.1.1.** Un **échange d'intervalles** est une translation par morceaux bijective du cercle  $\mathbb{S}^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .

Ces applications préservent la mesure de Lebesgue  $\mu$  du cercle et induisent donc des systèmes dynamiques mesurés. Le premier échange d'intervalles auquel on peut penser est une **rotation du cercle** ;

$$\begin{aligned} r_t &: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \\ [x] &\mapsto [x + t] . \end{aligned}$$

La terminologie "échange d'intervalles" nous vient de la description suivante d'un échange d'intervalle. On peut toujours restreindre un échange d'intervalles  $\varphi$  à l'intervalle  $[0, 1[$ , que l'on notera  $\tilde{\varphi}$ . On peut alors se représenter le graphe de cette application à travers un "échange d'intervalle", comme illustré ci-dessous dans le cas d'une rotation de paramètre  $t$ .

On appellera le **nombre d'intervalles** d'un échange d'intervalles le nombre d'intervalles dans apparaissant dans la représentation échange d'intervalles correspondant à la figure de

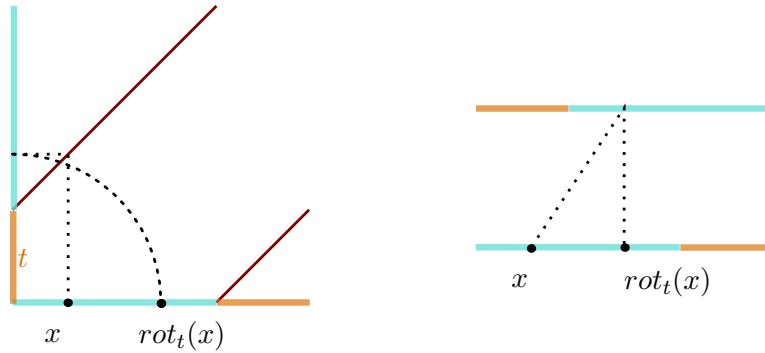


FIGURE 4.1 – Sur la figure de gauche, le graphe de la restriction d’une rotation de paramètre  $t$  du cercle à l’intervalle  $[0, 1]$ . Sur la figure de droite, sa représentation "échange d’intervalle" composée de deux intervalles dans ce cas. Les couleurs indiquent les identifications des intervalles du bas avec ceux du hauts. Pour trouver l’image d’un point  $x \in [0, 1]$ , vu comme un point du segment en bas, on projette du haut vers le bas le point correspondant de l’intervalle du haut. La figure de gauche montre le mouvement analogue au niveau du graphe.

droite de 4.1. On peut par exemple vérifier que les rotations sont exactement les échanges d’intervalles à deux intervalles.

D’un point de vue dynamique, le cas des rotations du cercle est bien connu.

**Théorème 4.1.2.**

- Soit  $t \in \mathbb{Q}$ , on écrit alors  $t = p/q$  où  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux, alors le système dynamique généré par  $r_t$  est complètement périodique de période  $q$ . C’est-à-dire que  $r_t^q = \text{Id}$ .
- Si  $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  la mesure de Lebesgue est l’unique mesure ergodique : le système dynamique est uniquement ergodique.

La démonstration du premier point est élémentaire alors que celle du second point est plus subtile. Pour montrer l’ergodicité de la mesure de Lebesgue, on peut montrer que les fonctions invariantes par  $r_t$  de carrés intégrables sur le cercle ont tous leurs coefficients de Fourier nuls, excepté peut être le premier. Elles sont donc constantes.

Dans le cas des rotations du cercle tout est explicite. En revanche, il est très rare de pouvoir décrire le comportement dynamique d’un échange d’intervalles en particulier. Une autre approche consiste à les étudier en famille. Une première famille généralisant les rotations consiste à partir d’un échange d’intervalles  $F$ , et d’étudier la famille obtenue en précomposant  $F$  par les rotations du cercle. Cela donne naissance à une famille paramétrée par le cercle d’échanges d’intervalles  $(F_t := F \circ \text{rot}_t)_{t \in \mathbb{S}^1}$ , cercle qui vient avec sa topologie et une mesure canonique : la mesure de Lebesgue  $\mu$ .

Le théorème 4.1.2 implique en particulier que  $\mu$ -presque toute rotation du cercle est uniquement ergodique, ou qu'il existe un ensemble dense de rotations complètement périodiques. Une question naturelle est de se demander si l'on peut généraliser le théorème 4.1.2 à la famille  $F_t$ ? Une partie de la réponse est contenue dans le

**Théorème 4.1.3** ([32]). Pour  $\mu$ -presque tout  $t \in \mathbb{S}^1$ , l'échange d'intervalles  $F_t$  est uniquement ergodique.

Une autre famille, peut-être encore plus naturelle, est celle constituée de tous les échanges d'intervalles à  $n$  intervalles. En effet, on peut décrire l'espace des échanges d'intervalles par les trois paramètres suivant :

- le nombre d'intervalles  $n$  ;
- une permutation de ces intervalles, correspondant à leur ordre d'arrivée, voir figure 4.1 ;
- Les longueurs  $(\lambda_i)_{i \in n}$  de chacun de ces  $n$  intervalles.

Si l'on fixe le nombre d'intervalles et la permutation, on obtient un espace d'échanges d'intervalles paramétré par les longueurs des intervalles (toutes plus petites que 1) vérifiant l'équation :

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 .$$

On a donc un simplexe de dimension  $n$ , qui vient naturellement avec la mesure de Lebesgue sur les faces. C'est dans ce contexte que l'énoncé suivant prend son sens.

**Théorème 4.1.4** (Masur [39], Veech [56]). Presque tout échange d'intervalles (irréductible) est uniquement ergodique.

Un échange d'intervalles est irréductible si l'on ne peut pas le décomposer en échanges d'intervalles plus petits, ce qui est une obstruction évidente à l'unique ergodicité. C'est une condition qui ne porte que sur le nombre d'intervalles et la permutation.

Notons que, dans ce cas, l'unique ergodicité implique la minimalité, c'est-à-dire que toutes les orbites sont denses, car la mesure de Lebesgue charge les ouverts. Le fait que presque tout échange d'intervalles est minimal avait déjà été démontré par Kean dans un court article [31].

Les démonstrations données par Masur et Veech du théorème 4.1.4 reposent toutes les deux sur un procédé de renormalisation. Le procédé utilisé par Veech est l'**induction de Rauzy-Veech**, que nous adaptons à certaines transformations affines dans notre article. Pour ce qui est de l'approche de Masur, nous renvoyons aux "perspectives" concernant

cette section.

Précisons néanmoins que la démonstration est de nature géométrique. Les objets clés qui lui sont associés sont les surfaces de translations.

#### 4.1.2 Les surfaces de translations.

**Définition 4.1.5.** Une **surface de translation** est une surface topologique  $\Sigma$ , épointée d'un sous ensemble fini  $S \subset \Sigma$  dont les éléments sont appelés **singularités**, et d'un atlas  $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  sur  $\Sigma \setminus S$  tel que :

- les changements de cartes sont des restrictions des translations du plan,

$$\{z \mapsto z + b \mid b \in \mathbb{R}^2\};$$

- tout point de  $S$  a un voisinage isométrique à la structure euclidienne d'un cône d'angle multiple de  $2\pi$ .

Un premier exemple d'une telle surface est le tore plat  $\mathbb{T}^2 := \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ . En tant que quotient de  $\mathbb{R}^2$  par un groupe discret de translations, cette surface vient naturellement avec un atlas de translation et ne possède pas de singularités.

**Remarque 4.1.6.** Une structure de translation sur une surface  $\Sigma$  induit une métrique plate sur  $\Sigma \setminus S$ . Le théorème de Gauss-Bonnet garantit que si la surface est compacte et n'a pas de singularité, alors c'est un tore.

Avec une structure de translation sur  $\Sigma$  est associée une famille de feuilletages orientés mesurés indexés par le cercle : les **feuilletages directionnels**. Considérons les feuilletages du plan par droites, que l'on peut paramétrer par l'angle  $\theta$  entre les droites qui le composent et un axe de référence, par exemple l'axe des abscisses. Notons les  $\mathcal{D}_\theta$ . Ces feuilletages peuvent être vus comme le noyau d'une forme fermée du plan,  $\sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy$ , et sont donc à ce titre automatiquement mesurés. Remarquons également que le feuilletage  $\mathcal{D}_\theta$  est invariant par translations (ainsi que la forme fermée), donc, du point de vue de la structure de translation, ils sont invariants par changement de carte. Chaque  $\mathcal{D}_\theta$  définit alors globalement un feuilletage orienté mesuré sur  $\Sigma$  : les feuilletages directionnels, que l'on notera  $(\mathcal{F}_\theta)_{\theta \in \mathbb{S}^1}$ .

Dans le cas du tore, dès lors que  $\theta \neq 0$ , la courbe  $\gamma$  (voir figure 4.2) définit une section globale de  $\mathcal{F}_\theta$ . De plus, l'application de premier retour  $\Phi_\theta$  sur cette section est une rotation  $r_t$ ,  $t$  vérifiant :

$$\frac{1}{t} = \tan(\theta) .$$

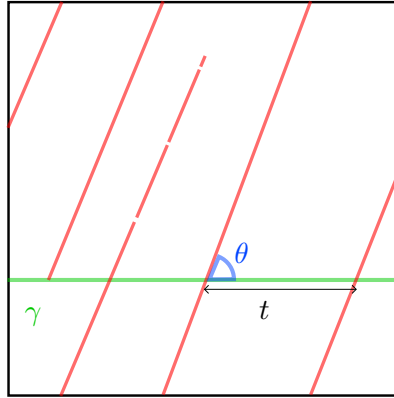


FIGURE 4.2 – En rouge, un morceau de feuille du feuilletage  $\mathcal{F}_\theta$  sur le tore  $\mathbb{T}^2$ . En vert, la section globale  $\gamma$  dont l’application de premier retour est donnée par une rotation de paramètre  $t$ .

**Remarque 4.1.7.** Cette propriété est plus générale. Étant donné un feuilletage orienté et mesuré, les applications de premier retour sur une transversale au feuilletage sont toujours données par des translations par morceau, relativement à la mesure transverse.

Toutes les directions  $\theta$  telles que  $\tan(\theta)^{-1} \in \mathbb{Z}$  donnent les mêmes applications de premier retour. En particulier, les feuilletages correspondant à ces directions partagent une grande partie de leurs propriétés dynamiques, comme la minimalité ou la périodicité.

Ce changement de point de vue, passer de l’étude des rotations du cercle à celle des feuilletages directionnelles, a l’avantage d’encoder le tout dans un même objet : une structure de translation. Les symétries d’une surface de translation vont alors conjuguer certains de ces feuilletages directionnels, pour lesquels les applications de premier retour auront alors des comportements similaires.

**Définition 4.1.8.** Soit  $\Sigma$  une surface de translation. On appellera un difféo-morphisme  $\Phi$  de cette surface un **automorphisme** de  $\Sigma$  si sa restriction aux cartes de l’atlas de translation est une application affine de  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

où  $A \in \text{GL}_2^+(\mathbb{R})$  et  $B$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ .

Les changements de cartes étant des translations, le morphisme  $\rho$  qui à un automorphisme associe sa partie linéaire, c’est-à-dire la matrice  $A$ , est bien défini. Remarquons qu’une application affine de  $\mathbb{R}^2$  envoie le feuilletage  $\mathcal{D}_\theta$  sur le feuilletage  $\mathcal{D}_{A[\theta]}$ , où  $A[\theta]$  est la direction image de  $\theta$  par l’action projective associée à l’application linéaire  $A$ . La matrice  $A$



ne dépendant pas des cartes, la remarque précédente s'étend globalement sur la surface  $\Sigma$  : un automorphisme  $\phi$  conjugue les deux feuilletages directionnels  $\mathcal{F}_\theta$  et  $\mathcal{F}_{\rho(\phi)[\theta]}$ , où  $\rho(\phi)[\theta]$  est la direction image par la matrice  $\rho(\phi)$  de la direction  $\theta$ , ou, pour le dire autrement, l'image de  $\theta$  par l'action projective de  $\rho(\phi)$  sur le cercle. Illustrons, encore une fois dans le cas du tore  $\mathbb{T}^2$ , la discussion précédente.

On peut en effet dans ce cas donner des constructions explicites d'automorphismes. Toute matrice  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  envoie le réseau  $\mathbb{Z}^2$  sur lui même et induit donc, en tant qu'application linéaire, un automorphisme  $\tilde{A}$  du tore  $\mathbb{T}^2$ . Examinons alors à travers la figure 4.3 l'image du feuilletage vertical par l'automorphisme  $\tilde{\Gamma}$ , où

$$\Gamma := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

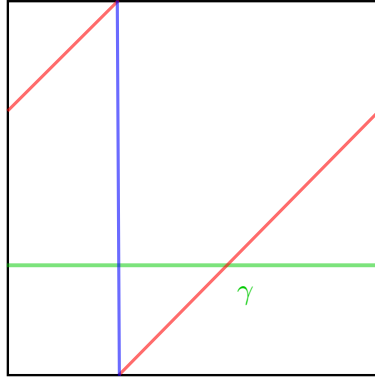


FIGURE 4.3 – En bleu l'une des feuilles du feuilletage vertical, en rouge une feuille de son image par  $\tilde{\Gamma}$  : une feuille du feuilletage de direction  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

L'automorphisme  $\tilde{\Gamma}$  conjugue bien les feuilletages directionnels correspondant aux directions  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , dont les applications de premier retour relativement à la section globale  $\gamma$  étaient identiques, en particulier toutes deux sont complètement périodiques.

**Remarque 4.1.9.**

- On peut montrer que les automorphismes  $\tilde{A}$ ,  $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sont exactement les automorphismes du tore  $\mathbb{T}^2$ .
- En tant qu'élément du mapping class group, l'automorphisme  $\tilde{\Gamma}$  correspond au twist de Dehn le long de la courbe  $\gamma$ .

On retrouve ainsi la première partie du théorème 4.1.2. En effet, l'orbite de la direction  $\frac{\pi}{2}$  sous l'action projective du groupe  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  correspond bien aux directions dont les applications de premier retour sur  $\gamma$  des feuilletages associés sont les rotations rationnelles.

Voyons, toujours dans le cas particulier du tore, comment traiter géométriquement une partie des comportements dynamiques restants.

Donnons nous une matrice  $A$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$  dont les valeurs propres  $\lambda$  et  $\lambda^{-1}$  sont des réels positifs distincts, que l'on dira alors hyperbolique. L'automorphisme induit par  $A$  sur le tore  $\mathbb{T}^2$  laisse invariant les deux feuilletages correspondant aux directions propres de la matrice  $A$ , l'un est contracté alors que l'autre est dilaté. En tant que difféomorphisme du tore  $\mathbb{T}^2$  c'est donc un difféomorphisme pseudo-Anosov, pour lequel on a le théorème général suivant :

**Théorème 4.1.10** ([10], voir aussi [20] page 253). Soit  $\Sigma$  une surface compacte. Les feuilletages stables et instables d'un difféomorphisme pseudo-Anosov sont uniquement ergodiques, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'une unique mesure transverse invariante.

Dans le cas particulier du tore, ce théorème prouve que tous les feuilletages correspondants aux directions propres des matrices hyperboliques de  $SL_2(\mathbb{Z})$  sont des feuilletages uniquement ergodiques. En particulier, les applications de premier retour sur la transversale  $\gamma$  de ces feuilletages, des rotations du cercle, le sont également.

Remarquons qu'on est encore loin d'avoir prouvé le théorème 4.1.2, après tout il n'a été traité qu'un nombre dénombrable de feuilletages : ceux correspondant aux directions propres des matrices hyperboliques de  $SL_2(\mathbb{Z})$  et ceux dans la  $SL_2(\mathbb{Z})$ -orbite de la direction verticale.

### 4.1.3 Un exemple d'échange d'intervalles affine

**Définition 4.1.11.** On appelle **échange d'intervalles affine** une application bijective et affine par morceaux du cercle dans lui même.

Levitt a montré dans [34] que les échanges d'intervalles affines ont des comportements dynamiques aussi variés que possible : complètement périodiques, minimaux ou, et c'est en quoi ils sont vraiment différents des échanges d'intervalles, admettant des ensemble minimaux de type Cantor. Dans ce dernier cas, on peut en fait montrer que l'échange d'intervalles affine est semi-conjugué à un échange d'intervalles minimal. Camelier-Gutierrez ([12]) ont construit de telles conjugaisons, travail poursuivi par Bressaud-Hubert-Maas([11]) et achevé par Marmi-Moussa-Yoccoz([38]) qui ont montré que presque tout échange d'intervalles peut être semi-conjugué à un échange d'intervalles affine qui admet un Cantor minimal. A ma connaissance, il n'a pas été fait d'étude en famille des échanges d'intervalles affines. C'est tout le but de notre article que de l'initier, à travers un théorème du type 4.1.3 dans un cas particulier.

Une première différence avec le cas des échanges d'intervalles est que l'on n'a pas toujours de mesures invariantes à densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On peut se convaincre de l'absence de telles mesures par l'existence de **points fixes attractifs**. Ces points fixes ont dans leurs voisinages une partie de l'ensemble errant, ce qui explique l'absence de mesures invariantes dans la classe de celle de Lebesgue.

Les questions portant sur la dynamique des échanges d'intervalles affines seront de nature **topologiques**. Minimalité, minimaux exceptionnels, orbites périodiques...

Ces mêmes orbites attractives sont aussi la source d'un comportement en famille vraiment différent de leurs cousins non affines car l'ensemble des échanges d'intervalles qui admettent de telles orbites est ouvert. Cette stabilité nous amène à penser que, si l'on avait un comportement en famille générique, il serait que presque tout échange d'intervalles admet une orbite périodique attractive.

La notion suivante, introduite par I. Lioussé (voir [35]), renforce la stabilité évoquée dans la discussion précédente.

**Définition 4.1.12.** On dit d'un échange d'intervalle affine  $F$  qu'il est **dynamiquement trivial** s'il existe un couple de points  $x^+, x^- \in \mathbb{S}^1$  d'ordre  $p, q \in \mathbb{N}$  tel que

- $(F^p)'(x^+) < 1$
- $(F^q)'(x^-) > 1$
- L'orbite de tout point qui n'appartient pas à celle de  $x^-$  s'accumule sur l'orbite de  $x^+$ .

Venons en à l'exemple traité dans notre article dont le graphe est donné par la figure suivante 4.4.

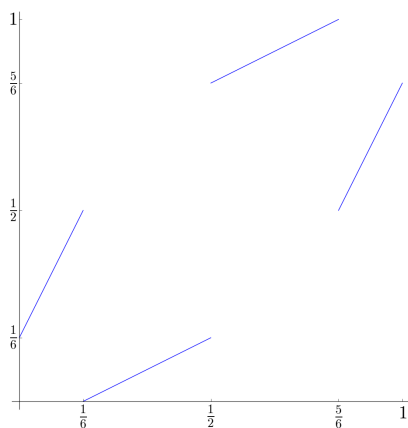


FIGURE 4.4 – Le graphe de  $F$ .

Cette application a la propriété que  $x \in \mathbb{S}^1$ ,  $F^2(x) = x$  ce qui n'en fait certainement pas la plus intéressante d'un point de vue dynamique. La famille que l'on a étudiée,  $(F_t)_{t \in \mathbb{S}^1}$  paramétrée par le cercle  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , est définie par

$$F_t = F \circ \text{rot}_t ,$$

dans le même esprit que le théorème 4.1.3.

Notre théorème principal s'énonce alors comme suit.

**Théorème 4.1.13.** Il existe une partition du cercle en 4 ensembles  $(A,B,C,D)$  telle que

- $A$  est ouvert de mesure pleine et pour tout  $t \in A$ ,  $F_t$  est dynamiquement triviale.
- $B$  est un Cantor de mesure nulle et pour tout  $t \in B$ , l' $\omega$ -limite de tout point est un Cantor.
- $C$  est un Cantor de mesure nulle, et pour tout  $t \in C$ ,  $F_t$  n'est pas dynamiquement triviale et conjecturalement minimale.
- $D$  est dénombrable et pour tout  $t \in D$ ,  $F_t$  est complètement périodique.

Notre théorème peut être vu comme un renforcement du résultat d'I. Lioussse dans le cas particulier de cette famille à un paramètre. En effet elle a montré que le comportement dynamiquement trivial était **topologiquement générique** : notre théorème vient ajouter à cette généricité topologique une généricité mesurée.

On ne peut ici que remarquer les différences flagrantes avec le théorème 4.1.3. Dans le cas du théorème 4.1.3, la généricité de l'unique ergodicité impliquait la généricité de la minimalité, l'unique mesure invariante étant la mesure de Lebesgue. La présence de minimaux exceptionnels est aussi à noter. Les ensembles  $D$  et  $C$  sont plus naturels du point de vue des échanges d'intervalles. L'ensemble  $D$  correspond, comme dans le cas du tore, à l'orbite d'un groupe dénombrable.

# CASCADES IN THE DYNAMICS OF AFFINE INTERVAL EXCHANGE TRANSFORMATIONS

ADRIEN BOULANGER, CHARLES FOUGERON, AND SELIM GHAZOUANI

ABSTRACT. We describe in this article the dynamics of a 1-parameter family of affine interval exchange transformations. This amounts to studying the directional foliations of a particular dilatation surface introduced in [DFG], the *Disco surface*. We show that this family displays various dynamical behaviours: it is generically *dynamically trivial* but for a Cantor set of parameters the leaves of the foliations accumulate to a (transversely) Cantor set. This study is achieved through the analysis of the dynamics of the Veech group of this surface combined a modified version of Rauzy induction in the context of affine interval exchange transformations.

## 1. INTRODUCTION.

An *affine interval exchange transformation* (or AIET) is a piecewise continuous bijection of the interval  $[0, 1]$  which is affine restricted to its intervals of continuity. It has been known since the work of Levitt ([Lev82]) that AIETs can display as complicated a topological behaviour as dimension one allows: it can either be asymptotically periodic, minimal or (and this is the surprising part) have an invariant quasi-minimal Cantor set. In the latter case, the AIET would still be semi-conjugated to a minimal *linear* interval exchange transformation. In the spirit of generalising the theory of circle diffeomorphisms to piecewise continuous bijection of the interval, Camelier-Gutierrez ([CG97]) begun a study of the regularity of the conjugacy between affine and linear IET, pursued by Cobo ([Cob02]), Bressaud-Hubert-Maas([BHM10]) and concluded by Marmi-Moussa-Yoccoz([MMY10]) who proved that almost every linear IET can be semi-conjugated to an AIET with an invariant Cantor set, in sharp contrast with Denjoy theorem in the case of sufficiently regular diffeomorphisms of the circle.

The goal of this article is to initiate a systematic study of the generic dynamical behaviour in parameter families of AIETs. The standard result in the theory of circle diffeomorphisms is a theorem by Herman (see [Her77]) predicting that for any (sufficiently regular) one-parameter family of circle diffeomorphisms, the set of minimal parameters has non-zero Lebesgue measure. On the other hand, it was known since the seminal work of Peixoto (see [Pei59], [Pei62]) that asymptotically periodic behaviour is *topologically generic* for flows on closed surfaces<sup>1</sup>, and a

---

<sup>1</sup>Generalised interval exchange transformations, of which AIETs are particular cases, should be thought of as first return maps of flows on higher genus surfaces

refinement of this theorem was proved by Liousse ([Lio95]) for transversally affine foliations in the case of higher genus surfaces. We present in this article a one parameter family of AIETs whose generic behaviour (in the measure theoretic sense) contrasts with the case of circle diffeomorphisms and Herman's theorem.

We consider the map  $F : D \rightarrow D$ , where  $D = [0, 1[$ , defined the following way:

$$\begin{aligned} \text{if } x \in \left[0, \frac{1}{6}\right[ & \text{ then } F(x) = 2x + \frac{1}{6} \\ \text{if } x \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right[ & \text{ then } F(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\right) \\ \text{if } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right[ & \text{ then } F(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \\ \text{if } x \in \left[\frac{5}{6}, 1\right[ & \text{ then } F(x) = 2\left(x - \frac{5}{6}\right) + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

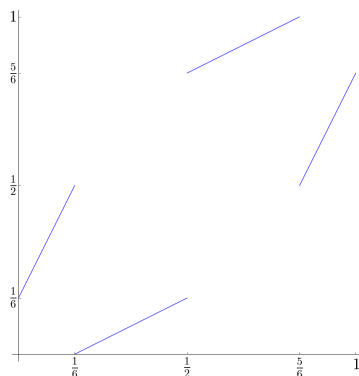


FIGURE 1. The graph of  $F$ .

The map  $F$  is an *affine interval exchange transformation* (AIET) and one easily verifies that for all  $x \in D$ ,  $F^2(x) = x$ . Its dynamical behaviour is therefore as simple as can be. Composing given maps by a family of linear rotations is a simple way to produce families of maps of the interval. Thus we consider the family  $(F_t)_{t \in S^1}$ , parametrised by  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  defined by

$$F_t = F \circ r_t$$

where  $r_t : [0, 1[ \rightarrow [0, 1[$  is the translation by  $t$  modulo 1.

The following definition is of crucial importance for what follows. It was introduced by Liousse in [Lio95] who proved that this dynamical behaviour is topologically generic for transversally affine foliations on surfaces.

Recall that the orbit of a point  $x$  under a map  $f$  is the set  $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$  and its  $\omega$ -limit is the set of accumulation points of the sequence  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Definition 1.** We say that  $F_t$  is dynamically trivial if there exists two periodic points  $x^+, x^- \in D$  of orders  $p, q \in \mathbb{N}$  such that

- $(F_t^p)'(x^+) < 1$
- $(F_t^q)'(x^-) > 1$
- for all  $z \in D$  which is not in the orbit of  $x^-$ , the  $\omega$ -limit of  $z$  is equal to  $\mathcal{O}(x^+)$  the orbit of  $x^+$ .

It means that the map  $F_t$  has two periodic orbits, one of which attracting all the other orbits but the other periodic orbit which is repulsive. The following picture is the product of a numerical experiment representing periodic orbits in the family  $(F_t)$  and their bifurcations.

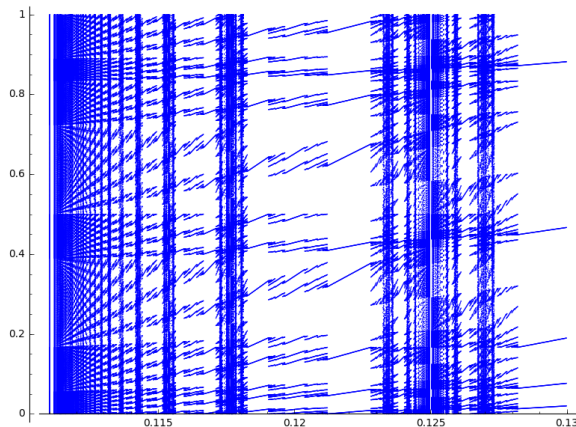


FIGURE 2. The  $\omega$ -limit of a random point for  $F_t$ , for  $0.11 \leq t \leq 0.13$ . Parameters with periodic orbits are open and dense, and can accumulate to seemingly minimal parameters.

This article aims at highlighting that this one-parameter family of AIETs displays rich and various dynamical behaviours. The analysis developed in it, using tools borrowed from the theory of geometric structures on surfaces, leads to the following theorems.

**Theorem 2.** *For Lebesgue-almost all  $t \in S^1$ ,  $F_t$  is dynamically trivial.*

Our theorem is somewhat a strengthening of Lioussé’s theorem for this 1-parameter family of AIETs and a counterexample to Herman’s in higher genus. Indeed, we prove that this genericity is also of measure theoretical nature. It is also worth pointing out that a lot of parameters in this family correspond to attracting *exceptional minimal sets* (*i.e.* which are homeomorphic to a Cantor set).

**Theorem 3.** *For all  $t$  in a Cantor set of parameters in  $S^1$  there exists a Cantor set  $\mathcal{C}_t \subset D$  such that for all  $x \in D$ , the  $F_t$   $\omega$ -limit of  $x$  is equal to  $\mathcal{C}_t$ .*



The remaining parameters form a Cantor set denoted by  $\Lambda_\Gamma \subset S^1$ . This notation is borrowed from Fuchsian group theory as we will indeed see that this Cantor set is the limit set of a subgroup  $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . For parameters in  $\Lambda_\Gamma$ , we have,

**Theorem 4.** *Let  $\mathcal{H}$  be the set of points in  $\Lambda_\Gamma$  which are not fixed by a parabolic element of  $\Gamma$ . Then*

- for  $\theta \in \mathcal{H}$ , the foliation is not dynamically trivial;
- for  $\theta \in \Lambda_\Gamma \setminus \mathcal{H}$  the foliation is totally periodic.

The foliations corresponding to directions in  $\mathcal{H}$  are also not totally periodic. Extensive computer experiments give evidences that these foliations are minimal.

**Outline of the paper.** Sections 2 and 3 are devoted to recalling geometric basics about dilatation surfaces and to the study of the hidden symmetries of the family  $(F_t)$  using this geometric perspective. Section 4 is mostly independent of the rest of the article. Therein we explain how to generalise the renormalisation procedure known as Rauzy-Veech induction to the context of piecewise contracting maps of the interval. This analysis allows the understanding of the dynamical behaviour of  $F_t$  for sufficiently many parameters so that we can rely on the aforementioned symmetries to reach almost every parameter, which we explain in Section 6.

*The discosurface.* The first step of the proof consists in associating to the family  $(F_t)_{t \in S^1}$  a dilatation surface which we denote by  $\Sigma$  obtained by the gluing represented in Picture 3.

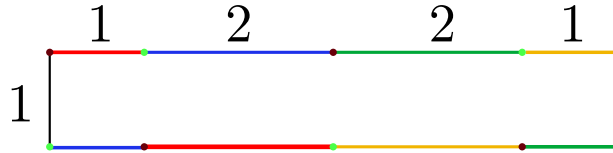


FIGURE 3. The surface  $\Sigma$ .

As a dilatation surface  $\Sigma$  is naturally endowed with a family of foliations which we call directional foliations. For definitions of both dilatation surfaces and these foliations we refer to Section 2.1. Our family of AIETs  $(F_t)_{t \in [0,1[}$  and these foliations are linked by the fact that the directional foliation in direction  $\theta$  admits  $F_t$  as their first return map on a cross-section, for  $t = \frac{6}{\tan \theta}$ . In particular they share the same dynamical properties hence the study of the family  $F_t$  reduces to the study of the directional foliations of  $\Sigma$ .

*The Veech group of  $\Sigma$ .* The major outcome of this change of point of view is the appearance of hidden symmetries. Indeed, the surface  $\Sigma$  has non-trivial group of affine symmetries, *i.e.* a non-trivial group of diffeomorphisms given in charts as an element of the affine group  $\text{GL}(2, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^2$  of  $\mathbb{R}^2$ . All this material is defined in Section 2.2. Such a group of affine diffeomorphisms admits a natural representation in  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ; we call the image of this representation the Veech group

that we denote by  $\mathbf{V}_\Sigma$ . This new group naturally acts on the set of directions of  $\mathbb{R}^2$ . The directions  $\theta$  which are  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ -equivalent through  $\mathbf{V}_\Sigma$  correspond to two foliations which are conjugated thus sharing the same dynamical behaviour. This remark will allow us to considerably reduce the number of parameters  $\theta$  (equivalently  $t$ ) that we need to analyse.

Using a standard construction of affine diffeomorphisms using flat cylinder decompositions recalled in Subsection 2.2.1, we show that the group  $\mathbf{V}_\Sigma$  is discrete and contains the following group

$$\Gamma = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

The matrix  $-\mathrm{Id}$  belonging to  $\mathbf{V}_\Sigma$  it is natural to project  $\Gamma$  to  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . We will hereafter make the slight abuse of notation to denote the image of  $\Gamma$  by this projection  $\Gamma$  as well. This group is a Schottky group of rank 2. The study of this action is performed in Section 3 and leads to the following.

- There is a Cantor set  $\Lambda_\Gamma \subset \mathbb{RP}^1$  of measure zero on which  $\Gamma$  acts minimally ( $\Lambda_\Gamma$  is the limit set of  $\Gamma$ ).
- The action of  $\Gamma$  on  $\Omega_\Gamma = \mathbb{RP}^1 \setminus \Lambda_\Gamma$  is properly discontinuous and the quotient is homeomorphic to a circle ( $\Omega_\Gamma$  is the discontinuity set of  $\Gamma$ ). It allows us to identify a "small" fundamental domain  $I \subset \mathbb{RP}^1$  such that the description of the dynamics of foliations in directions  $\theta \in I$  implies the description for every parameter in  $\Omega_\Gamma$  (which is an open set of full measure).

Note that the Cantor set  $\Lambda_\Gamma$  has nothing to do with the one described in Theorem 3. The latter is a subset of  $\Omega_\Gamma$ .

*Affine Rauzy-Veech induction.* The study of the directional foliations for  $\theta \in I$  reduces to the understanding of the dynamics of piecewise contracting affine 2-intervals maps. To perform the dynamical study of these applications we adapt in this 2-contracting intervals setting a well known re-normalisation procedure, the Rauzy-Veech induction. The outcome of this method may be summarised as follows:

- there is a Cantor set of measure zero of parameters  $\theta \in \Omega_\Gamma$  for which the associated foliation accumulates to a set which is locally a product of a Cantor set with an interval ;
- other directions in  $\Omega_\Gamma$  are dynamically trivial.

A remarkable corollary of the understanding of the dynamics of the directions in  $I$  is the complete description of  $\mathbf{V}_\Sigma$ :

**Theorem 5.** *The Veech group of  $\Sigma$  is exactly  $\Gamma$ .*

The proof is a rather straightforward corollary of the dynamical description. We prove that the limit set of  $\mathbf{V}_\Sigma$  is actually the same as the one of  $\Gamma$ , and conclude using some elementary geometric arguments to prove that these groups are equal.

**Acknowledgements.** We are grateful to Bertrand Deroin for his encouragements and the interest he has shown in our work. We are also very thankful to Pascal Hubert for having kindly answered the very many questions we asked him, to Vincent Delecroix, to Nicolas Tholozan for interesting discussions around the proof of Theorem 34 and to Matt Bainbridge.

## 2. DILATATION SURFACES AND THEIR VEECH GROUPS.

We introduce in this section geometric objects which will play a role in this paper. This includes the definition of a dilatation surface, their associated foliations as well as their Veech groups, the construction of the Disco surface and how it is linked to our family of AIETs. We also compute explicitly two elements of the Veech group of the Disco surface.

### 2.1. Dilatation surfaces and their foliations.

**Definition 6.** A *dilatation surface* is a surface  $\Sigma$  together with a finite set  $S \subset \Sigma$  and an atlas  $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  on  $\Sigma \setminus S$  whose charts  $\varphi_i$  take values in  $\mathbb{C}$  such that

- the transition maps are locally restriction of elements of  $\text{Aff}_{\mathbb{R}_+^*}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a \in \mathbb{R}, a > 0, b \in \mathbb{C}\}$ ;
- each point of  $S$  has a punctured neighbourhood which is affinely equivalent to the  $k$ -sheets covering of  $\mathbb{C}^*$ .

We call an element of the set  $S$  a *singularity* of the dilatation surface  $\Sigma$ .

This definition is rather formal, and the picture one has to have in mind is that a dilatation surface is what one gets when you take a union of Euclidean polygons and glue together pairs of oriented parallel sides along the unique complex affine transformation that sends one to the other.

2.1.1. *The Disco surface.* The surface we are about to define will be the main object of interest of this text. It is the surface obtained after proceeding to the gluing below:

We call the resulting surface 'Disco' surface. In the following  $\Sigma$  will denote this particular surface. This is a genus 2 dilatation surface which has two singular points of angle  $4\pi$ . They correspond to the vertices of the polygon drawn in Figure 5. Green (light) ones project onto one singular point and brown (dark) ones project onto the other.

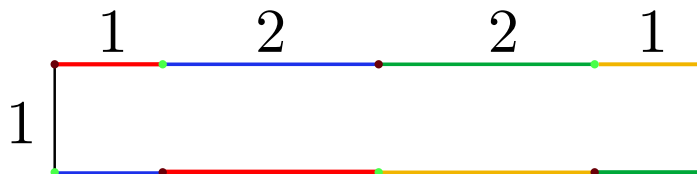


FIGURE 4. The surface  $\Sigma$ . Each side of the same color is identified with the corresponding one by the unique complex affine map of the form  $z \mapsto az + b$  with  $a > 0$ .

2.1.2. *Foliations and saddle connections.* Together with a dilatation surface comes a natural family of foliations. Fix an angle  $\theta \in S^1$  and consider the trivial foliation of  $\mathbb{C}$  by straight lines directed by  $\theta$ . This foliation being invariant by the action of  $\text{Aff}_{\mathbb{R}^+}^*(\mathbb{C})$ , it is well defined on  $\Sigma \setminus S$  and extends at points of  $S$  to a singular foliation on  $\Sigma$  such that its singular type at a point of  $S$  is saddle-like. We denote this family of foliations by  $(\mathcal{F}_\theta)_{\theta \in S^1}$ .

A *saddle connection* on  $\Sigma$  is a singular leave that goes from a singular point to another. The set of saddle connections of a dilatation surface is countable hence so is the set of directions having saddle connections.

In the case of the Disco surface, one can easily draw these foliations on its polygonal model : they correspond to the restriction of the directional foliations of  $\mathbb{R}^2$  to the polygon. One can check that the horizontal curve on the picture below is actually a cross-section for every foliation  $\mathcal{F}_\theta$  with  $\theta \neq 0$ .

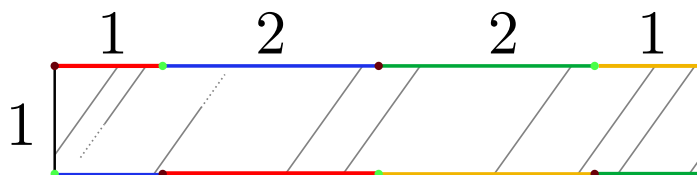


FIGURE 5. The surface  $\Sigma$  and a leaf of a directional foliation.

The first return map  $\varphi_\theta$  of the foliation  $\mathcal{F}_\theta$  with respect to this cross-section satisfies :

$$\varphi_\theta = F_t \quad \text{with} \quad t = \frac{6}{\tan \theta} .$$

2.2. **The Veech group of a dilatation surface.** Let  $\Sigma$  be a dilatation surface and  $g \in \text{Diff}^+(\Sigma)$  an *affine diffeomorphism* of  $\Sigma$ , namely a diffeomorphism which reads in dilatation coordinates as an element of the affine group  $\text{GL}^+(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$

of  $\mathbb{R}^2$  with the standard identification  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$  (more explicitly, a map of the form

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$$

where  $A \in \mathrm{GL}_+(2, \mathbb{R})$  and  $B$  is a vector of  $\mathbb{R}^2$ ). We denote by  $\mathrm{Affine}(\Sigma)$  the subgroup of  $\mathrm{Diff}^+(\Sigma)$  of affine diffeomorphisms. The linear part in coordinates of an element of  $\mathrm{Affine}(\Sigma)$  is well defined up to multiplication by a constant  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . This gives rise to a well-defined morphism:

$$\rho : \mathrm{Affine}(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$$

which to an affine diffeomorphism associates its *normalised* linear part. We call this morphism the *Fuchsian representation*.

**Remark 7.** *It is important to understand that the fact that the image of  $\rho$  lies in  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  is somewhat artificial and that the space it naturally lies in is  $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})/\mathbb{R}_+^*$ . In particular, when an element of the Veech group is looked at in charts, there is no reason the determinant of its derivative should be equal to 1, however natural the charts are.*

**Definition 8.** The image of the Fuchsian representation  $\rho(\mathrm{Affine}(\Sigma))$  is called the *Veech group* of  $\Sigma$  and is denoted by  $\mathbf{V}_\Sigma$ . The Veech group naturally acts on the circle  $\mathbb{S}^1$ , we will refer hereafter to this action as the **projective action** of the Veech group.

The key point is that such an affine diffeomorphism  $g$  maps the  $\theta$ -directional foliation onto the foliation associated to the direction  $\rho(g)(\theta)$ , in particular these two foliations are conjugated and therefore have the same dynamical behaviour. This allows us to reduce the amount of directional foliations to study to the set of parameters corresponding to the quotient of the circle  $S^1$  by the projective action of the Veech group.

2.2.1. *About the Veech group of  $\Sigma$ .* This subsection is devoted to computing two elements of the Veech group. We utilise a method which is standard for translation surfaces, which consists in decomposing  $\Sigma$  into flat cylinders of commensurable moduli and to let the multi-twist associated act affinely on each cylinder as a parabolic element.

**Flat cylinders.** A *flat cylinder* is the dilatation surface you get when gluing two opposite sides of a rectangle. The *height* of the cylinder is the length of the sides glued together and its *width* is the length of the non-glued sides, that is the boundary components of the resulting cylinder. Of course, only the ratio of these two quantities is actually a well-defined invariant of the flat cylinder, seen as a dilatation surface. More precisely, we define

$$m = \frac{\text{width}}{\text{height}}$$

and call this quantity the *modulus* of the associated flat cylinder.

If  $C$  is a cylinder of modulus  $m$ , there is an element of  $f \in \text{Affine}(C)$  which has the following properties:

- $f$  is the identity on  $\partial C$ ;
- $f$  acts as a unique Dehn twist of  $C$ ;
- the matrix associated to  $f$  is  $\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , if  $\partial C$  is assumed to be in the horizontal direction.

**Decomposition in flat cylinders and parabolic elements of the Veech group.** We say a dilatation surface  $\Sigma$  has a *decomposition in flat cylinders* in a given direction (say the horizontal one) if there exists a finite number of saddle connections in this direction whose complement in  $\Sigma$  is a union of flat cylinders. If additionally the flat cylinders have commensurable moduli, the Veech group of  $\Sigma$  contains the matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & m' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

where  $m'$  is the smallest common multiple of all the moduli of the cylinders appearing in the cylinder decomposition. If the decomposition is in an another direction  $\theta$ , the Veech group actually contains the conjugate of this matrix by a rotation of angle  $\theta$ . Moreover, an affine diffeomorphism realising this matrix is a Dehn twist along the multi-curve made of all the simple closed curves associated to each of the cylinders of the decomposition.

**Calculation of elements of the Veech group of  $\Sigma$ .** The above paragraph allows us to bring to light two parabolic elements in  $\mathbf{V}_\Sigma$ . Indeed,  $\Sigma$  has two cylinder decompositions in the horizontal and vertical direction.

- The decomposition in the horizontal direction has one cylinder of modulus 6, represented Figure 6 below.

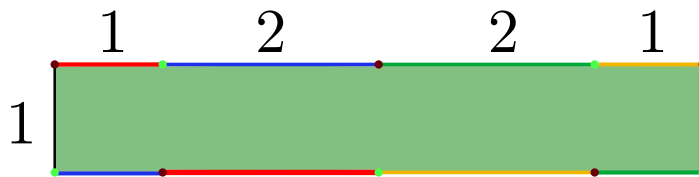


FIGURE 6. Cylinder decomposition in the horizontal direction.

Applying the discussion of the last paragraph gives, we get that the matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  belongs to  $\mathbf{V}_\Sigma$ .

- The decomposition in the vertical direction has two cylinders, both of modulus  $\frac{3}{2}$ , represented in Figure 7 below.

Again, we get that the matrix  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$  belongs to  $\mathbf{V}_\Sigma$ .

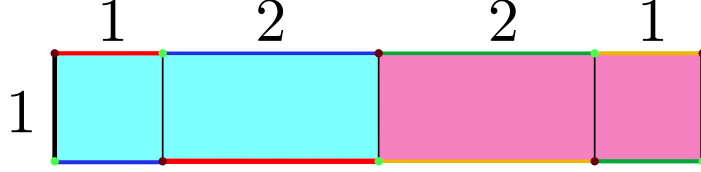


FIGURE 7. Cylinder decomposition in the vertical direction.

Finally notice that both the polygon and the gluing pattern we used to build  $\Sigma$  is invariant by the rotation of angle  $\pi$ , which implies that the matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

is realised by an involution in  $\text{Affine}(\Sigma)$ . Putting all the pieces together we get,

**Proposition 9.** *The group*

$$\left\langle A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, -\text{Id} \right\rangle$$

is a subgroup of  $\mathbf{V}_\Sigma$ .

### 3. THE HYPERBOLIC GEOMETRY OF $\Gamma$

**3.1. The subgroup  $\Gamma$ .** We computed in Section 2 three elements  $A$ ,  $B$  and  $-\text{Id}$  of the Veech group of  $\Sigma$ . The presence of the matrix  $-\text{Id}$  in  $\mathbf{V}_\Sigma$  indicates that directional foliations on the surface  $\Sigma$  are invariant by reversing orientation. This motivates the study of the Veech group action on  $\mathbb{RP}^1 := S^1 /_{-\text{Id}}$  instead of  $S^1$ .

We will often identify  $\mathbb{RP}^1$  to the interval  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  by using projective coordinates:

$$\begin{aligned} \mathbb{RP}^1 &\rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \left[ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] &\mapsto \arctan\left(\frac{x}{y}\right) \end{aligned}$$

At the level of the Veech group it means projecting it to  $\text{PSL}_2(\mathbb{R})$  by the canonical projection  $\pi$ . Let us denote by  $\Gamma \subset \pi(\mathbf{V}_\Sigma) \subset \text{PSL}_2(\mathbb{R})$  the group generated by the two elements:

$$\Gamma := \left\langle A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

We will study the group  $\Gamma$  as a Fuchsian group, that is a **discrete** group of isometries of the real hyperbolic plane  $\mathbb{H}^2$ . For the action of a Fuchsian group  $\Phi$  on  $\mathbb{RP}^1$ , there are two invariant subsets which we will distinguish:

- one called its *limit set* on which  $\Phi$  acts minimally and that we will denote by  $\Lambda_\Phi \subset \mathbb{RP}^1$ ;

- the complement of  $\Lambda_\Phi$  which is called its *discontinuity set*, on which  $\Phi$  acts properly and discontinuously and which we will denote by  $\Omega_\Phi$ .

We will give precise definitions in Section 3.3. In restriction to the discontinuity set, one can form the quotient by the action of the group. The topological space  $\Omega_\Phi / \Phi$  is a manifold of dimension one: a collection of real lines and circles.

We will show in Proposition 17 that for the group  $\Gamma$  this set is a single circle, and therefore a fundamental domain  $I$  for the action of the group  $\Gamma$  can be taken to be a single interval (we will make it explicit:  $I = [\arctan(\frac{1}{4}), \arctan(1)] \subset [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] [\simeq \mathbb{RP}^1]$ ). The dynamic of the directional foliations in the directions  $\theta$  belonging to the interior of the interval  $I$  will be studied in Section 4.

**Remark 10.** *We will prove in Section 6 that the group  $\Gamma$  is actually equal to the full Veech group of the surface  $\Sigma$ .*

**3.2. The action of the group  $\Gamma$  on  $\mathbb{H}$ .** Two hyperbolic isometries  $A, B \in \text{Isom}_+(\mathbb{H}^2)$  are said to be in **Schottky position** if the following condition holds:

There exists four disjoint domains  $D_i, 1 \leq i \leq 4$  which satisfy

$$A(D_1^c) = D_2 \quad B(D_3^c) = D_4$$

where  $D_i^c$  denotes the complementary set of  $D_i$ .

A group generated by two elements in Schottky position is also called a **Schottky group**. Figure 8 illustrates this situation.

**Proposition 11.** *The group  $\Gamma$  is Schottky. Moreover the surface  $M_\Gamma$  is a three punctured sphere with two cusps and one end of infinite volume.*

*Proof.* Viewed in the upper half plane model of  $\mathbb{H}^2$  the action is easily shown to be Schottky. In fact the action of  $A$  (resp.  $B$ ) becomes  $z \mapsto z + 6$  (resp.  $z \mapsto \frac{z}{\frac{3z}{2} + 1}$ ). The two matrices are parabolic and fix  $\infty$  and 0 respectively. Moreover, we observe that  $A(-3) = 3$  and  $B(-1) = 2$ . Figure 8 below shows that the two matrices  $A$  and  $B$  are in Schottky position with associated domains  $D_i$  for  $1 \leq i \leq 4$ .

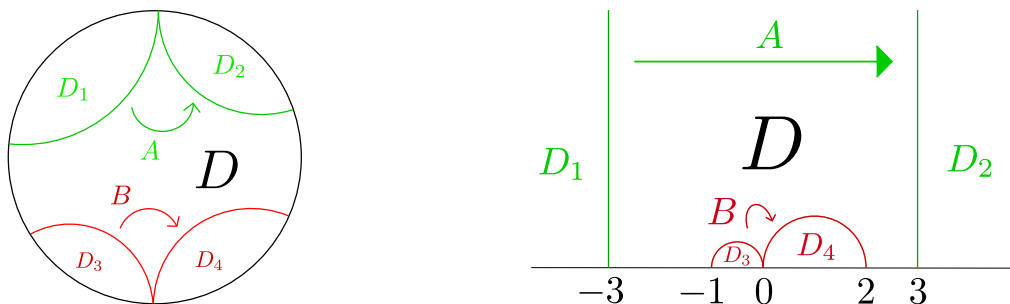


FIGURE 8. A fundamental domain for the action of the group  $\Gamma$  acting on the hyperbolic plane.



The domain  $D$  of Figure 8 is a fundamental domain for the action of  $\Gamma$ . The isometry  $A$  identifies the two green (light) boundaries of  $D$  together and  $B$  the two red (dark) ones. The quotient surface is homeomorphic to a three punctured sphere.  $\square$

**3.3. The limit set and the discontinuity set.** The following notion will play a key role in our analysis of the affine dynamics of the surface  $\Sigma$ :

**Definition 12.** The **limit set**  $\Lambda_\Phi \subset S^1$  of a Fuchsian group  $\Phi$  is the set of accumulation points in  $\mathbb{D} \cup S^1$  of any orbit  $\Phi \cdot \{z_0\}$ ,  $z_0 \in \mathbb{D}$  where  $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$  is the disk model for the hyperbolic plane  $\mathbb{H}^2$ .

The complementary set of the limit set is the good tool to understand the infinite volume part of such a surface.

**Definition 13.** The complementary set  $\Omega_\Phi := S^1 \setminus \Lambda_\Phi$  is by definition the **set of discontinuity** of the action of  $\Gamma$  on the circle.

The group  $\Phi$  acts properly and discontinuously on the set of discontinuity. One can thus form the quotient space  $\Omega_\Phi / \Phi$  which is a manifold of dimension one : a collection of circles and real lines. These sets are very well understood for Schottky groups thanks to the ping-pong Lemma, for further details and developments see [Dal11] chapter 4.

**Proposition 14** (ping-pong lemma). *A Schottky group  $\Phi$  is freely generated by any two elements in Schottky position. Moreover*

- *if the quotient surface  $\mathbb{H}^2 / \Phi$  is of finite volume, the limit set is the full circle;*
- *otherwise, the limit set is homomorphic to a Cantor set.*

**Remark 15.** *The third item case is the one of interest of this article.*

The following theorem will be used in 6 to prove our main Theorem 2

**Theorem 16** (Ahlfors, [Ahl66]). *A finitely generated Fuchsian group satisfies the following alternative:*

- (1) *either its limit set is the full circle  $S^1$  ;*
- (2) *or its limit set is of zero Lebesgues measure*

In our setting, it is clear that the limit set is not the full circle, thus the theorem implies that the limit set of  $\Gamma$  is of zero Lebesgue measure.

**3.4. The action on the discontinuity set and the fundamental interval.** The following proposition is the ultimate goal of this section.

**Proposition 17.** *The quotient space*

$$\Omega_\Gamma / \Gamma$$

*is a circle. A fundamental domain for the action of  $\Gamma$  on  $\Omega_\Gamma$  corresponds to the interval of slopes  $I = [\arctan(\frac{1}{4}), \arctan(1)]$ .*

Foliations defined by slopes which belong to this precise interval will be studied in section 4. To prove this proposition we will use the associated hyperbolic surface  $M_\Gamma$  and link its geometrical and topological properties to the action of the group  $\Gamma$  on the circle.

The definition of the limit set itself implies that it is invariant by the Fuchsian group. One can therefore seek a geometric interpretation of such a set on the quotient surface. We will consider the smallest convex set (for the hyperbolic metric) which contains all the geodesics which start and end in the limit set  $\Lambda_\Gamma$ . We denote it by  $C(\Lambda_\Gamma)$ . Because the group  $\Gamma$  is a group of isometries it preserves  $C(\Lambda_\Gamma)$ .

**Definition 18.** The **convex core** of a hyperbolic surface  $M_\Gamma$ , denoted by  $C(M_\Gamma)$  is defined as:

$$C(M_\Gamma) := C(\Lambda_\Gamma) / \Gamma$$

As a quotient of a  $\Gamma$ -invariant subset of  $\mathbb{H}^2$ ,  $C(M_\Gamma)$  is a subset of the surface  $M_\Gamma$ . The convex core of a Fuchsian group is a surface with geodesic boundary, moreover if the group is finitely generated the convex core has to be of finite volume. As a remark, a Fuchsian group is a lattice if and only if we have the equality  $C(M_\Gamma) = M_\Gamma$ . In the special case of the Schottky group  $\Gamma$  the convex core is a surface whose boundary is a single closed geodesic as it is shown on Figure 9. For a finitely generated group we will see that we have a one to one correspondence between connected components of the boundary of the convex core and connected component of the quotient of the discontinuity set by the group.

The following lemma is the precise formulation of what we discussed above

**Lemma 19.** *Let  $\Gamma$  a finitely generated Fuchsian group. Any connected component  $I_0$  of the discontinuity set  $\Omega_\Gamma$  is stabilised by a cyclic group generated by a hyperbolic isometry  $\gamma_0$ . Moreover  $\partial I_0$  is composed of the two fixed points of the isometry  $\gamma_0$ .*

We will keep notations introduced with Figure 9. We start by showing that for any choice of a lift  $\tilde{c}$  in the universal cover of a geodesic  $c$  in the boundary of the convex core one can associate an isometry verifying the properties of Lemma 19. Let  $c$  be a closed geodesic consisting of a connected component of the boundary of the convex core of  $M_\Gamma$ . One can choose a lift  $\tilde{c}$  of such a geodesic in the universal cover, the geodesic  $\tilde{c}$  is the axis of some hyperbolic isometry  $\Phi$ , whose fixed points are precisely the intersection of  $\tilde{c}$  with the circle. As an element of the boundary of  $C(M_\Gamma)$  it cuts the surface  $M_\Gamma$  into two pieces:  $C(M_\Gamma)$  and an end  $E$ . One can check that this isometry  $\Phi$  is exactly the stabiliser of the connected component  $E_0$  of  $p^{-1}(E)$  whose boundary is the geodesic  $\tilde{c}$ . Therefore such an isometry stabilises the connected component of the discontinuity set given by the endpoints of the geodesic  $\tilde{c}$ . We have shown that given a boundary component of  $C(M_\Gamma)$  one can associate an element (in fact a conjugacy class) of the group  $\Gamma$  which stabilises a

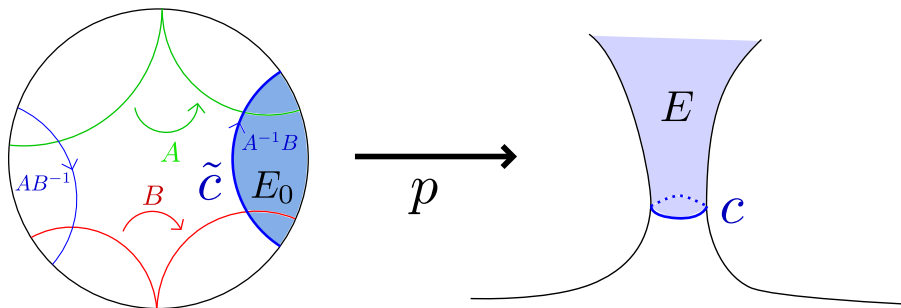


FIGURE 9. The closed geodesic  $c$  cuts the surface  $M_\Gamma$  into two pieces. The colored part is the only infinite volume end and its complementary is the convex core. The choice of a lift  $\tilde{c}$  of the geodesic  $c$  made on the picture allows us to describe the isometry which translate along  $\tilde{c}$  in terms of the generators of the group  $\Gamma$ . Indeed the pairing of the edges of the fundamental domain given by the action of the group  $\Gamma$  shows that the geodesic  $\tilde{c}$  is the translation axes of the matrix  $A^{-1}B$ .

connected component of  $\Omega_\Gamma$ . We will not show how to associate a geodesic in the boundary of the convex core to a connected component of the discontinuity set.

**Remark 20.** *We want to put the emphasis on the fact the assumption that the group is finitely generated will be used here. The key point is the geometric finiteness theorem [Kat92, Theorem 4.6.1] which asserts that any finitely generated group is also **geometrically finite**. It means that the action of such a group admits a polygonal fundamental domain with finitely many edges. It is not difficult to exhibit from such a fundamental domain the desired geodesic by looking at the pairing induced by the group, as it is done in Figure 9 for our Schottky group.*

**Corollary 21.** *Connected components of  $\Omega_\Gamma / \Gamma$  are in one to one correspondence with infinite volume ends of the surface  $\mathbb{H}^2 / \Gamma$ .*

We now have all the material needed to prove Proposition 17.

*Proof of Proposition 17.* Because the surface  $\mathbb{H}^2 / \Gamma$  has only one end of infinite volume Corollary 21 gives immediately that  $\Omega_\Gamma / \Gamma$  is a single circle. Proof of the second part of Proposition 17 consists in a simple matrix computation. Figure 9 gives explicitly the elements of the group  $\Gamma$  which stabilise a connected component of the discontinuity set. We then have to prove:

$$\left[ AB^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

where  $[X]$  is the projective class of the vector  $X$ . The computation is easy:

$$\begin{aligned}
 AB^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -8 & 6 \\ -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

4. GENERIC DIRECTIONS AND RAUZY INDUCTION.

The boundary of  $\mathbb{H}$  is canonically identified with  $\mathbb{RP}^1$  through the natural embedding  $\mathbb{H} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ . Recall that the action of  $\text{PGL}(2, \mathbb{C})$  by Möbius transformations on  $\mathbb{C}$  is induced by matrix multiplication on  $\mathbb{CP}^1$  after identification with  $\mathbb{C}$  by the dilatation chart  $z \rightarrow [z : 1]$ . Thus the action of matrices of the Veech group on the set of directions corresponds to the action of these matrices as homographies on the boundary of  $\mathbb{H}$ .



FIGURE 10. Attractive leaf on the left, repulsive on the right

We notice straight away that for directions  $[t : 1]$  with  $t$  between 1 and 2, there is an obvious attractive leaf of dilatation parameter  $1/2$  (see Figure 10). There is also a repulsive closed leaf in this direction. This will always be the case since  $-\text{Id}$  is in the Veech group, sending attractive closed leaves to repulsive closed leaves. In the following we will describe dynamics of the directional foliation for  $t$  between 2 and 4. According to Section 2.2.1 the interval of direction  $[1, 4]$  is a fundamental domain for the action of  $\Gamma$  on  $\Omega_\Gamma$  its discontinuity set. Moreover this discontinuity set has full Lebesgue measure in the set of directions thus understanding the dynamical behaviour of a typical direction therefore amounts to understanding it for  $t \in [1, 4]$ . Further discussion on what happens in other directions will be done in the next section.



FIGURE 11. The stable subsurface.

**4.1. Reduction to an AI.** The directions for  $t \in [2, 4]$  have an appreciable property; they correspond to the directions of a subsurface invariant under the (oriented) foliation represented in Figure 11. Every leaf in the given angular set of directions that enters the subsurface will stay trapped in it thereafter. We therefore seek attractive closed leaves in this subset. To do so, take a horizontal interval joining the boundary components of this invariant subsurface and consider the first return map on it. It has a specific form (close to an affine interval exchange) which we will study in this section.

In the following, we use the notation AI to talk of a piecewise affine injection on an interval. For any  $m, n \in \mathbb{N}$ , let  $\mathcal{I}(m, n)$  be the set of AIs defined on  $[0, 1]$  with two intervals on which it is affine and such that the image of the left interval is an interval of its length divided by  $2^n$  which rightmost point is 1, and that the image of its right interval is an interval of its length divided by  $2^m$  which leftmost point is 0 (see Figure 12 for such an AI defined on  $[0, 1]$ ). When representing an AI, we will color the intervals on which it is affine in different colors, and represent a second interval on which we color the image of each interval with the corresponding color; this will be sufficient to characterise the map. The geometric representation motivates the fact that we call the former and latter sets of intervals the *top* and *bottom intervals*.

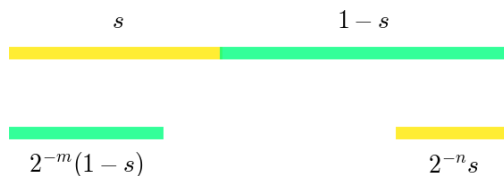


FIGURE 12. Geometric representation of an element of  $\mathcal{I}(m, n)$

Note that the cross-sections defined on the subsurface of Figure 11 are in  $\mathcal{I}(1, 1)$ . We will study the dynamical behaviour of this family of AI.

**4.2. Rauzy-Veech induction.** Let  $T$  be an AI and  $D$  be its interval of definition. The first return map on a subinterval  $D' \subset D$ ,  $T' : D' \rightarrow D'$  is defined for every  $x \in D'$ , as

$$T'(x) = T^{n_0}(x) \text{ where } n_0 = \inf\{n \geq 1 \mid \mathcal{T}(\alpha)^n(x) \in D'\}$$

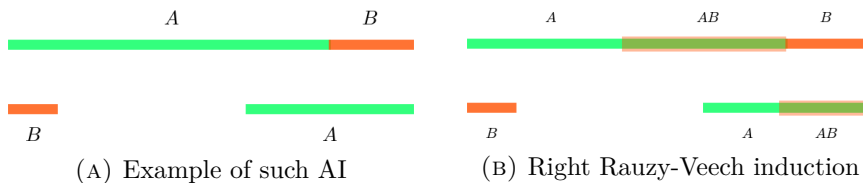
Since we have no information on the recurrence properties of an AI this first return map is a priori not defined on an arbitrary sub-interval. Nonetheless generalizing a wonderful algorithm of Rauzy [Rau79] for IETs, we get a family of subinterval on which this first return map is well defined. Associating to an AI its first return map on this well-chosen smaller interval will be called the Rauzy-Veech induction.

The general idea in the choice of this interval is to consider the smallest of the top and bottom intervals at one end of  $D$  (left or right) the interval of definition. We then consider the first return map on  $D$  minus this interval.

In the following we describe explicitly the induction for the simple family  $\mathcal{I}(m, n)$ . A general and rigorous definition of Rauzy-Veech induction in the more general context of both AIs and AIETs is certainly possible with a lot of interesting questions emerging but is beyond the scope of this article.

Assume now that  $T$  is an element of  $\mathcal{I}(m, n)$ , let  $A, B \subset D$  be the left and right top intervals of  $T$ , and  $\lambda_A, \lambda_B$  their length. Several distinct cases can happen,

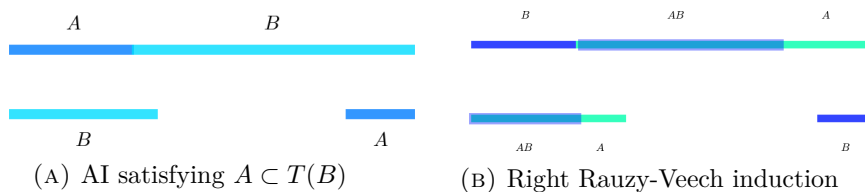
- (1) (a)  $B \subsetneq T(A)$  *i.e.*  $\lambda_B < 2^{-n}\lambda_A$ .



We consider the first return map on  $D' = D - B$ .  $T^{-1}(B)$  of length  $2^n\lambda_B$  has no direct image by  $T$  in  $D'$  but  $T(B) \subset D'$ . Thus for the first return map, this interval will be sent directly to  $T(B)$  dividing its length by  $2^{n+m}$ . We call this a right Rauzy-Veech induction of our AI. The new AI is in  $\mathcal{I}(m + n, n)$ , and its length vector  $(\lambda'_A, \lambda'_B)$  satisfies

$$\begin{pmatrix} \lambda'_A \\ \lambda'_B \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2^n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}}^{R_{m,n}} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix}$$

- (b) If  $A \subsetneq T(B)$  *i.e.*  $2^{-m}\lambda_B > \lambda_A$ .



In this case, the right Rauzy-Veech induction is not well-defined therefore we consider the first return map on  $D' = D - A$  which we call the left Rauzy-Veech induction of our AI. We obtain a new AI in

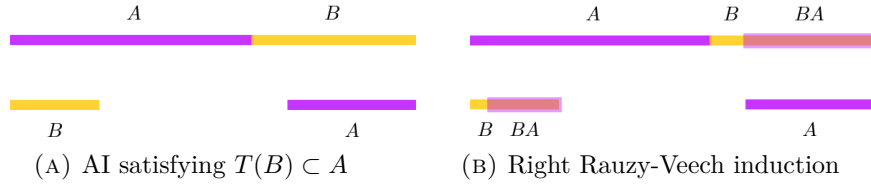
$\mathcal{I}(m, n + m)$  and its length vector  $(\lambda'_A, \lambda'_B)$  satisfies,

$$\begin{pmatrix} \lambda'_A \\ \lambda'_B \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2^m & 0 \\ -2^m & 1 \end{pmatrix}}^{L_{m,n}} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix}$$

Note that the two subcases presented above are mutually exclusive since the considered maps are strictly contracting.

- (2)  $T(A) \subset B$  i.e.  $\lambda_B \geq 2^{-n}\lambda_A$  and  $T(B) \subset A$  i.e.  $2^{-m}\lambda_B \leq \lambda_A$ .

We consider the first return map on the subinterval  $D' = D - T(A)$ . Then  $A$  has no direct image by  $T$  in  $D'$  but  $T^2(A) \subset T(B) \subset D'$ . Thus in the first return map, this interval will be sent directly to  $T^2(A)$  dividing its length by  $2^{n+m}$ .



Then  $T^2(A) \subset A$  thus the induced map has an attractive fixed point of derivative  $2^{-n-m}$ .

**Remark 22.** *The set of length for which we apply left or right Rauzy-Veech induction in the above trichotomy is exactly the set on which lengths  $\lambda'_A$  and  $\lambda'_B$  implied by the above formulas are both positive.*

More precisely,  $0 \leq \lambda_B \leq 2^{-n}\lambda_A \iff R_{m,n} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix} \geq 0$ ,

and  $0 \leq 2^{-m}\lambda_B \leq \lambda_A \iff L_{m,n} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix} \geq 0$ .

*This will be useful later on to describe the set of parameters which corresponds to the sequence of induction moves we apply.*

**The algorithm.** We define in what follows an algorithm based on Rauzy induction that will allow us to determine if an element of  $\mathcal{I}(1, 1)$  has an attractive periodic orbit; and if so the length of its periodic orbit (or equivalently the dilatation coefficient of the associated leaf in  $\Sigma$ ).

The algorithm goes the following way:

The entry is an element of  $\mathcal{I}(m, n)$ ,

- (1) If the entry is in case (1), perform in case (a) the right Rauzy induction  $R$  or in case (b) the left Rauzy induction  $L$  to obtain an element of  $\mathcal{I}(m + n, n)$  or  $\mathcal{I}(m, n + m)$  respectively. Repeat the loop with this new element.
- (2) If it is in case (2), it means that the first return map on a well chosen interval has a periodic attractive point of derivative  $2^{-m-n}$ . The algorithm stops.

Alongside the procedure comes a sequence of symbols  $R$  and  $L$  keeping track of whether we have performed the Rauzy induction on the left or on the right at the  $n^{\text{th}}$  stage. This sequence is finite if and only if the algorithm described above finishes. An interesting phenomenon will happen for AI for which the induction never stops, and will be described latter.

**4.3. Directions with attractive closed leaf.** In the directions of Figure 11 corresponding to parameters in  $[2, 4]$  in projective coordinates, we consider the first return map of the directional foliation on the interval given by the two length 1 horizontal interval at the bottom of the rectangle. We have chosen directions such that the first return map is well defined although it is not bijective, and it belongs to  $\mathcal{I}(1, 1)$ . The ratio of the two top intervals' length will vary smoothly between 0 and  $\infty$  depending on the direction we choose. We parametrise this family of AI by  $s \in I := [0, 1]$ , where  $(s, 1 - s)$  is the length vector of the element of  $\mathcal{I}(1, 1)$  we get. The purpose of this section is to characterise the subspace  $H \subset I$  for which the above algorithm stops, in particular they correspond to AI with a periodic orbit. The case of  $I - H$  will be settled in the next subsection.

We describe for any finite word in the alphabet  $\{L, R\}$ ,  $w = w_1 \dots w_{l-1}$ , the subset of parameters  $H(w) \subset H \subset I$  for which the algorithm stops after the sequence  $w$  of Rauzy-Veech induction moves.

We associate to  $w$  the sequences  $n_1 = 1, \dots, n_l$ ,  $m_1 = 1, \dots, m_l$  and  $M_1 = Id, \dots, M_l$  defined by the recursive properties,

$$m_{i+1} = \begin{cases} m_i & \text{if } w_i = L \\ n_i + m_i & \text{if } w_i = R \end{cases}, \quad n_{i+1} = \begin{cases} n_i + m_i & \text{if } w_i = L \\ n_i & \text{if } w_i = R \end{cases},$$

$$M_{i+1} = \begin{cases} L_{m_i, n_i} \cdot M_i & \text{if } w_i = L \\ R_{m_i, n_i} \cdot M_i & \text{if } w_i = R \end{cases}$$

Let  $s \in I$  such that we can apply Rauzy-Veech inductions corresponding to  $w$  to the element of  $\mathcal{I}(1, 1)$  of lengths  $(s, 1 - s)$ . The induced AI after all the steps of



the induction is in  $\mathcal{I}(m_l, n_l)$  and its length vector is

$$M_l \cdot \begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ 1-s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-b)s+b \\ (c-d)s+d \end{pmatrix}$$

Following Remark 22, the property of  $s$  being such that we can apply all the Rauzy-Veech inductions corresponding to  $w$  to the initial AI in  $\mathcal{I}(1, 1)$  is equivalent to  $(a-b)s+b \geq 0$  and  $(c-d)s+d \geq 0$ . An induction on  $M_i$  shows that it is an integer matrix with  $a, d \geq 0$ ,  $b, c \leq 0$ , hence  $s \in \left[ \frac{-b}{a-b}, \frac{d}{d-c} \right] =: I(w)$ .  $H(w)$  will be the central subinterval of  $I(w)$  for which the induced AI in  $\mathcal{I}(m_l, n_l)$  is in case (2).

Consider the sets

$$H_k := \bigcup_{|w| \leq k} H(w) \quad \text{and} \quad H = \bigcup_k H_k.$$

Notice that  $H$  has the same construction as the complement of the Cantor triadic set; each  $H_k$  is constructed from  $H_{k-1}$  by adding an interval in the interior of each interval which is a connected component of  $I - \bigcup_{j < k} H_j$ .

The rest of the subsection aims now at proving the following lemma,

**Lemma 23.**  *$H \subset I$  has full Lebesgue measure.*

As a preliminary we need the following Lemma which will be used later on in the proof.

**Lemma 24.** *For any word  $w$  in  $\{R, L\}$ , if  $M(w) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , we have,*

$$2^{-1} \leq x = \frac{a-b}{d-c} \leq 2$$

*Proof.* The proof goes by induction on the length of  $w$ . Let us assume that  $2^{-1} \leq \frac{a-b}{d-c} \leq 2$  for some  $w$ . We denote by

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = R_{m,n} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2^m c & b - 2^m d \\ 2^m c & 2^m d \end{pmatrix}$$

Thus  $\frac{a'-b'}{d'-c'} = 2^{-n} \frac{a-b}{d-c} + 1$  from which the inequality follows.

$$\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = L_{m,n} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^m a & 2^m b \\ c - 2^m a & d - 2^m b \end{pmatrix}$$

The inequality is similar to the previous one. □

*Proof of Lemma 23.* We will prove in the following that for any non-empty word  $w$ ,

$$(25) \quad \frac{|H(w)|}{|I(w)|} \geq \delta$$

for some  $\delta > 0$ . Thus at each step  $k$ ,  $H_k$  is at least a  $\delta$ -proportion larger in Lebesgue measure than  $H_{k-1}$ . This implies the Lemma because

$$\lambda(H) \geq \lambda(H_k) \geq 1 - (1 - \delta)^k \text{ for any } k$$

We now show Inequality 25. Let  $w$  be any finite word in the alphabet  $\{L, R\}$ . For convenience we normalise the interval  $I(w)$  for such that it is  $[0, 1]$ . We denote by  $(\lambda_A(s), \lambda_B(s))$  the length vector of the AI induced by the sequence  $w$  of Rauzy-Veech inductions. These two lengths are linear functions of  $s$ ,  $\lambda_A$  is zero at the left end of the interval and  $\lambda_B$  is zero at the right end. As a consequence, these two functions have the form  $\lambda_A(s) = \alpha s$  and  $\lambda_B(s) = \beta(1 - s)$  for  $s \in [0, 1]$ , where  $\alpha$  and  $\beta$  are the maximal values of  $\lambda_A$  and  $\lambda_B$  respectively equal to according to the previous computations

$$\alpha = (a - b) \frac{d}{d - c} + b = \frac{ad - bd + bd - bc}{d - c} = \frac{\det(M_l)}{d - c}$$

and

$$\beta = (c - d) \frac{-b}{a - b} + d = \frac{-bc + bd + da - db}{a - b} = \frac{\det(M_r)}{a - b}$$

We see that  $\lambda_A(s) = 2^{-m} \lambda_B(s) \iff 2^m \alpha s = \beta(1 - s) \iff s = \frac{\beta}{2^m \alpha + \beta}$  and similarly  $\lambda_B(s) = 2^{-n} \lambda_A(s) \iff 2^n \beta(1 - s) = \alpha s \iff s = \frac{2^n \beta}{\alpha + 2^n \beta}$ . Hence

$$\lambda_A(s) \leq 2^{-m} \lambda_B(s) \iff s \in \left[0, \frac{\beta}{2^m \alpha + \beta}\right]$$

and

$$\lambda_B(s) \leq 2^{-n} \lambda_A(s) \iff s \in \left[\frac{\beta}{2^{-n} \alpha + \beta}, 1\right]$$

thus

$$H(w) = \left[\frac{\beta}{2^m \alpha + \beta}, \frac{\beta}{2^{-n} \alpha + \beta}\right].$$

If we denote by  $x = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a-b}{d-c}$ ,

$$\frac{|H(w)|}{|I(w)|} = \frac{1}{1 + 2^{-n}x} - \frac{1}{1 + 2^m x}$$

Lemma 24 implies directly that

$$\frac{|H(w)|}{|I(w)|} \geq \frac{1}{1 + 2^{-n+1}} - \frac{1}{1 + 2^{m-1}}$$

Hence for  $w$  not empty, either  $n \geq 2$  or  $m \geq 2$  thus either

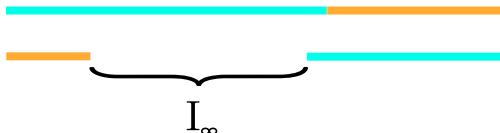
$$\frac{|H(w)|}{|I(w)|} \geq \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ or } \frac{|H(w)|}{|I(w)|} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

□

**4.4. AI with infinite Rauzy-Veech induction.** We focus in this subsection on what happens for AIs on which we apply Rauzy-Veech induction infinitely many times. First, remark that if we apply the induction on the same side infinitely many times, the length of the top interval of the corresponding side on the induced AI is multiplied each time by a positive power of 2, therefore it goes to infinity. Yet the total length of the subinterval is bounded by 1 the length of the definition interval from which we started the induction. Thus the length of the interval has to be zero; this corresponds to the case where there is an attractive saddle connection, considered as a part of the cases treated above since we chose to take  $H(w)$  closed.

In consequence, for an AI  $T$  with parameter in  $I - H$ , we apply Rauzy-Veech induction infinitely many times, and the sequence of inductions we apply is not constant after a finite number of steps. Now let as above  $D$  be the interval of definition of the given AI, and  $A, B \subset D$  be its two intervals of continuity. Remark that the induction keeps the right end of  $T(B)$  and the left end of  $T(A)$  unchanged. Moreover the induction divides the length of one of the bottom interval (depending on which Rauzy-Veech induction we apply) by at least two because we iterate maps whose dilatation factor is at most  $\frac{1}{2}$ . In turn if we consider  $I_n$  to be the open subinterval of  $D$  on which we consider the first return map after the  $n$ -th induction, the limit of these nested intervals is

$$I_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = D - T(A) \cup T(B)$$



By definition, this interval is disjoint from  $T(D)$ , and therefore

$$\forall x \in D \text{ and } n \in \mathbb{N}^*, T^n(x) \notin I_\infty$$

Moreover, our definition of Rauzy-Veech induction implies that any point outside of the subinterval on which we consider the first return will end up in this subinterval in finite time. Thus

$$\forall x \in D \text{ and } n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} \text{ such that } T^k(x) \in I_n$$

Since we consider here only Rauzy-Veech induction procedure containing both infinitely right and left steps, we have that the orbit of any point of  $D$  accumulates on  $\partial I_\infty$ .

Let  $\Omega$  be the complement of all the images of  $I_\infty$  namely

$$\Omega := D - \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n I_\infty$$

The measure of  $I_\infty$  is  $1/2$ , taking the image by  $T$  divides the measure of any interval by two. Moreover, any two iterated images of this set are disjoint since  $I_\infty$  is disjoint of the image set of the injective application  $T$ , hence the measure of  $\Omega$  is  $1/2 \cdot (1 + 1/2 + 1/2^2 + \dots) = 1$ . As we remarked, the orbit of any point of  $D$  accumulates to  $\partial I_\infty$  and thus to any image of it, hence to any point of  $\partial\Omega$ . As  $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n I_\infty$  has full measure,  $\Omega$  has zero Lebesgue measure and thus has empty interior. To conclude,  $\Omega$  is the limit set of any orbit of  $T$ .

Now  $\Omega$  is closed set with empty interior. Moreover, if we take a point in  $\Omega$ , any of its neighborhood contains some image of the interval  $I_\infty$  since  $\Omega$  has zero measure, and thus its boundary. Hence no point is isolated, and  $\Omega$  is a Cantor set. Which leads to the following proposition,

**Proposition 26.** *In the space of directions  $[1, 4]$  there is a set  $\mathcal{H}$  (which is the union of the set  $H$  constructed in this section union  $]1, 2[$ ) whose complement  $A \cup B$  is a Cantor set of zero measure which satisfies*

- $\forall \theta \in \mathcal{H}$  the foliation  $\mathcal{F}_\theta$  is attracted by an attracting leaf;
- $A$  is countable, and  $\forall \theta \in A$  the foliation  $\mathcal{F}_\theta$  is attracted by a saddle connexion;
- $B$  is not countable, and  $\forall \theta \in B$  the foliation  $\mathcal{F}_\theta$  concentrates on a stable Cantor set.

## 5. TOPOLOGICAL TYPE OF THE ELEMENTS OF THE VEECH GROUP

**5.1. Thurston's theorem on multi-twists.** We recall in this subsection a theorem of Thurston allowing the understanding of the topological type of the elements of a subgroup of  $\text{MCG}(\Sigma)$  generated by a couple of multi-twists. Let  $\alpha$  and  $\beta$  be two multi-curve on  $\Sigma$ . We say that

- $\alpha$  and  $\beta$  are *tight* if they intersect transversally and if their intersection number is minimal in their isotopy class;
- $\alpha$  and  $\beta$  fill up  $\Sigma$  if  $\Sigma \setminus (\alpha \cup \beta)$  is a union of cells.

Denote by  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  and  $\beta_1, \dots, \beta_l$  the components of  $\alpha$  and  $\beta$  respectively. We form the  $k \times l$  matrix  $N = (i(\alpha_i, \beta_j))_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l}$ . One easily checks that  $\alpha \cup \beta$  is connected if and only if a power of  $N^t N$  is positive. Under this assumption,  $N^t N$  has a unique positive eigenvector  $V$  of eigenvalue  $\mu > 0$ . We also denote by  $T_\alpha$  (resp.  $T_\beta$ ) the Dehn twist along  $\alpha$  (resp. along  $\beta$ ).

**Theorem 27** (Theorem 7 of [Thu88]). *Let  $\alpha$  and  $\beta$  two multi-curves which are tight and which fill up  $\Sigma$ , and assume that  $\alpha \cup \beta$  is connected. Denote by  $G(\alpha, \beta)$  the subgroup of  $\text{MCG}(\Sigma)$  generated by  $T_\alpha$  and  $T_\beta$ . There is a representation  $\rho : G(\alpha, \beta) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  defined by*

$$\rho(T_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \mu^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ and } \rho(T_\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mu^{\frac{1}{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

such that  $g$  is of finite order, reducible or pseudo-Anosov according to whether  $\rho(g)$  is elliptic, parabolic or pseudo-Anosov.

5.2. **The case of  $\Sigma$ .** We want to use Thurston's theorem to prove the

**Theorem 28.** *For all  $f \in \text{Affine}(\Sigma)$ ,  $f$  is of finite order, reducible or pseudo-Anosov according to whether its image by the Fuchsian representation in  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  is elliptic, parabolic or hyperbolic.*

In Subsection 2.2.1, we exhibited two elements of the Veech's group  $\mathbf{V}_\Sigma$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  and  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$ , as the images by the Fuchsian representation  $\rho_1$  corresponding to the Dehn twists along the curves  $\alpha$  and  $\beta$  drawn in Figure 16 :

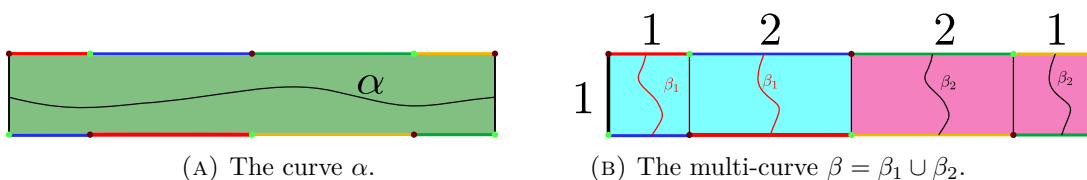


FIGURE 16. Definition of  $\alpha$  and  $\beta$

One checks that:

- $\alpha \cup \beta$  is connected;
- $\alpha$  and  $\beta$  are tight since they can both be realized as geodesics of  $\Sigma$ ;
- $\alpha$  and  $\beta$  are filling up  $\Sigma$ .

With an appropriate choice of orientation for  $\alpha$  and  $\beta$ , we have that  $i(\alpha, \beta_1) = i(\alpha, \beta_2) = 2$ . The intersection matrix associated is therefore  $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  and  $N^t N = (8)$ . The parameter  $\mu$  is then equal to 8 and  $\sqrt{\mu} = 2\sqrt{2}$ . We are left with two representations

$$\rho_1, \rho_2 : G(\alpha, \beta) \longrightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

- (1)  $\rho_1$  is the restriction of the Fuchsian representation to  $G(\alpha, \beta) < \text{Affine}(\Sigma)$  composed with the projection onto  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .
- (2)  $\rho_2$  is the representation given by Thurston's theorem.

By definition of these two representations,  $\rho_1$  maps  $T_\alpha$  to  $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  and  $\rho_2$  maps it to  $\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; and  $\rho_1$  maps  $T_\beta$  to  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$  and  $\rho_2$  maps it to  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 29.** *For all  $g \in G(\alpha, \beta)$ ,  $\rho_1(g)$  and  $\rho_2(g)$  have same type.*

*Proof.*

- $\rho_1$  and  $\rho_2$  are faithful;
- $\rho_1$  and  $\rho_2$  are Schottky subgroups of  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  of infinite covolume;
- $\rho_1$  and  $\rho_2$  send  $T_\alpha$  and  $T_\beta$  to two parabolic elements;

As a consequence of these three facts, the quotient of  $\mathbb{H}$  by the respective actions of  $G(\alpha, \beta)$  through  $\rho_1$  and  $\rho_2$  respectively are both a sphere  $S$  with two cusps and a funnel. No element of  $\rho_1(G(\alpha, \beta))$  or  $\rho_2(G(\alpha, \beta))$  is elliptic, and the image of  $g \in G(\alpha, \beta)$  is parabolic in  $\rho_1(G(\alpha, \beta))$  or  $\rho_2(G(\alpha, \beta))$  if and only if the corresponding element in  $\pi_1(S)$  is in the free homotopy class of a simple closed curve circling a cusp. Which proves the proposition.  $\square$

There is little needed to complete the topological description of the elements of the Veech group of  $\Sigma$ . Indeed, Proposition 29 above together with Thurston's theorem ensures that the topological type of  $g \in G(\alpha, \beta) \subset \mathrm{Affine}(\Sigma)$  is determined by (the projection to  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  of) its image by the Fuchsian representation (namely  $g$  has finite order if  $\rho_1(g)$  is elliptic,  $g$  is reducible if  $\rho_1(g)$  is parabolic and pseudo-Anosov if  $\rho_1(g)$  is hyperbolic).

The group  $G(\alpha, \beta)$  has index 2 in  $\mathbf{V}_\Sigma$ . The involution  $i \in \mathrm{Affine}(\Sigma)$  acting as  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  preserves the multi-curves  $\alpha$  and  $\beta$  and therefore commutes to the whole  $G(\alpha, \beta)$ . In particular, any element of  $\mathbf{V}_\Sigma$  writes  $g \cdot i$  with  $g \in G(\alpha, \beta)$ . The type of  $g \cdot i$  is the same as the type of  $g$  and this completes the classification.

## 6. THE GLOBAL PICTURE.

Gathering all materials developed in the previous sections, we prove here the main theorems announced in the introduction.

**Proposition 30.** *Assume that the foliation  $\mathcal{F}_\theta$  of  $\Sigma$  has a closed attracting leaf  $F^+$ . Then it has a unique repulsing leaf  $F^-$  and any leaf which is different from  $F^-$  and regular accumulates on  $F^+$ .*

This proposition ensures that in all the cases where we have already found an attracting leaf, the dynamics of the foliation is as simple as can be.

*Proof.* The proof consists in exhibiting the symmetry given by the element  $-\mathrm{Id}$  of the Veech group in this case. If the foliation given by the direction  $\theta$  has an attractive hyperbolic leaf then, from the dynamical study performed in previous sections, one can suppose, up to applying an element of the Veech group, that such a direction lies in  $\mathcal{H}$ . Therefore, any point  $p \notin F^+$  in the stable subsurface (see Figure 11) has to satisfy both the following:

- in positive time, the trajectory remains in the stable subsurface and is attracted to the closed leaf  $F^+$ ;
- in negative time, it escapes the stable subsurface at some point.

The first item is basically what we proved in Subsection 4.3. The second one is proved by arguing on the  $\omega$ -limit of a point  $p$ , but for the foliation endowed with the reverse orientation. This set being invariant in both positive and negative time it has to be the closed leaf  $F^+$  since it is the unique invariant set in the stable surface, see Subsection 4.3. This implies  $p \in F^+$ , which concludes.

Therefore, in negative time, the point must visit the other stable subsurface corresponding to the colors red and yellow of Figure 11, since the disco surface is the disjoint union of both these subsurfaces. This subsurface is stable for negative times, the point is therefore trapped in it. One can finally check that the dynamical study performed in Section 4.3 applies in the same way in this context, exchanging only the colors blue and green for red and yellow. In negative time, the point  $p$  is then going to be attracted to the yellow red analogous leaf  $F^-$ , which is repulsive if seen as a leaf of the oriented foliation.  $\square$

We say that a direction having such a dynamical behavior is *dynamically trivial*.

**Corollary 31.** *The directions in  $\Lambda_\Gamma$  are not dynamically trivial.*

*Proof.* The set of directions fixed by a hyperbolic element of  $\Gamma$  is dense in  $\Lambda_\Gamma$ . Such a direction cannot be dynamically trivial, for otherwise the associated collection of closed leaves would be globally fixed by the corresponding element of  $\text{Affine}(\Sigma)$ , which can not occur since, according to Theorem 28, such an element is a pseudo-Anosov diffeomorphism. On the other hand, Proposition 30 shows that the set of dynamically trivial directions is the same as the set of directions admitting an attractive leaf, in particular both sets are open since the last one is. We conclude using the density in  $\Lambda_\Gamma$  of the set of directions being not dynamically trivial: fixed points of hyperbolic matrices of  $\Gamma$ .  $\square$

**Theorem 32.** *The set of dynamically trivial directions in  $S^1$  is open and has full measure.*

*Proof.* Recall that the definition of  $\Gamma$  and  $\mathbf{V}_\Sigma$  are given in Sections 2.2.1 and 3.1. Since  $-\text{Id}$  belongs to the Veech group of  $\Sigma$ , the foliations  $\mathcal{F}_\theta$  and  $\mathcal{F}_{-\theta}$  have the same dynamical behaviour. We will therefore consider parameters  $\theta$  in  $\mathbb{RP}^1$  instead of in  $S^1$ . We denote then by  $\mathcal{T} \subset \mathbb{RP}^1$  the set of dynamically trivial directions in  $\mathcal{T}$ . We have proved in Section 4 that the intersection of  $\mathcal{T}$  and  $J = \{[1 : t] \mid t \in [1, 4]\} \subset \mathbb{RP}^1$  is the complement of a Cantor set and that  $\mathcal{T} \cap J$  has full measure.

Also  $J$  is a fundamental domain (see Proposition 11) for the action of  $\Gamma$  on  $\Omega_\Gamma$  the discontinuity set of  $\Gamma$ . Since  $\Gamma < \mathbf{V}_\Sigma$ , two directions in  $\mathbb{RP}^1$  in the same orbit for the action of  $\theta$  induce conjugated foliations on  $\Sigma$  and therefore have same dynamical behaviour. This implies that  $\mathcal{T} \cap \Omega_\Gamma$  is open and has full measure in  $\Omega_\Gamma$ . Since  $\Omega_\Gamma$  has itself full measure in  $\mathbb{RP}^1$ ,  $\mathcal{T}$  has full measure in  $\mathbb{RP}^1$ . The fact that it is open is a consequence of the stability of dynamically trivial foliations for the  $\mathcal{C}^\infty$  topology, see [Lio95] for instance.  $\square$

Relying on a similar argument exploiting in a straightforward manner the action of the Veech group and the depiction of the dynamics made in Section 4, we get

**Theorem 33.** *There exists a Cantor set  $\mathcal{K} \subset S^1$  such that for all  $\theta \in \mathcal{K}$ , the foliation  $\mathcal{F}_\theta$  accumulates to a set which is locally the product of a Cantor set with an interval. Such a set always have zero Lebesgue measure.*

We believe it is worth pointing out that the method we used to find these 'Cantor like' directions is essentially different compared to the one used in [CG97], [BHM10] and [MMY10]. Indeed they are proper attracting set in the sense that they have an open neighbourhood in  $\Sigma$  which is pushed by the flow strictly within itself after a certain time.

These results allows us to give a complete description of  $\Gamma$ .

**Theorem 34.** *The Veech group of  $\Sigma$  is exactly  $\Gamma$ .*

*Proof.* We divide the proof into four steps:

- (1) proving that any element in  $\mathbf{V}_\Sigma$  preserves  $\Lambda_\Gamma$ ;
- (2) proving that  $\Gamma$  has finite index in  $\mathbf{V}_\Sigma$ ;
- (3) proving that the group  $\Gamma$  is normal in  $\mathbf{V}_\Sigma$ ;
- (4) concluding.

(1) Let us prove the first point. Because of the description of the dynamics of the directional foliations we have achieved, one can show the limit set of the Veech group is the same as the limit set of  $\Gamma$ . If not, there must be a point of  $\Lambda_{\mathbf{V}_\Sigma}$  in the fundamental interval  $I$ . But since the group  $\mathbf{V}_\Sigma$  is non elementary it implies that we have to find in  $I$  infinitely many copies of a fundamental domain for the action of  $\Gamma$  on the discontinuity set. In particular infinitely many disjoint intervals corresponding to directions where the foliation has an attracting leaf of dilatation parameter 2. But by the study performed in the above section the only sub-interval of  $I$  having this property is  $]1, 2[$ .

(2) The second point follows from the fact that the projection

$$\Gamma \backslash \mathbb{H} \longrightarrow \mathbf{V}_\Sigma \backslash \mathbb{H}$$

induces an isometric orbifold covering

$$C(\Gamma \backslash \mathbb{H}) \longrightarrow C(\mathbf{V}_\Sigma \backslash \mathbb{H}).$$

Since  $C(\Gamma \backslash \mathbb{H})$  has finite volume (see Section 3.2) and because

$$[\Gamma : \mathbf{V}_\Sigma] = \frac{\text{vol}(C(\Gamma \backslash \mathbb{H}))}{\text{vol}(C(\mathbf{V}_\Sigma \backslash \mathbb{H}))}$$

, this ratio must be finite and hence  $\Gamma$  has finite index in  $\mathbf{V}_\Sigma$ .

(3) Remark that  $\Gamma$  is generated by two parabolic elements  $A$  and  $B$  and that these define the only two conjugacy class in  $\Gamma$  of parabolic elements. We are going to prove that any element  $g \in \mathbf{V}_\Sigma$  normalise both  $A$  and  $B$ . Since  $\Gamma$  has



finite index in  $\mathbf{V}_\Sigma$ , there exists  $n \geq 1$  such that  $(gAg^{-1})^n \in \Gamma$ . There are but two classes of conjugacy of parabolic elements in  $\Gamma$  which are the ones of  $A$  and  $B$ . If  $n \geq 2$ , this implies that  $\mathbf{V}_\Sigma$  contains a strict divisor of  $A$ , which would make the limit set of  $\mathbf{V}_\Sigma$  larger than  $\Lambda_\Gamma$  (consider the eigenvalues of the matrix  $AB^{-1}$  which determine points in the boundary on the limit set, see Lemma 19). Therefore  $gAg^{-1}$  belongs to  $\Gamma$ . A similar argument shows that  $gBg^{-1} \in \Gamma$  and since  $A$  and  $B$  generate  $\Gamma$ ,  $g$  normalises  $\Gamma$ . Hence  $\Gamma$  is normal in  $\mathbf{V}_\Sigma$ .

(4) Any  $g \in \mathbf{V}_\Sigma$  thus acts on the convex core  $C(\Gamma \backslash \mathbb{H})$  of the surface  $C(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ . In particular it has to preserve the boundary of  $C(\Gamma \backslash \mathbb{H})$ , which is a single geodesic by Proposition 17. At the universal cover it means that  $g$  has to fix a lift of the geodesic  $c$ , thus the isometry  $g$  permutes two fixed points of a hyperbolic element  $h$  of  $\Gamma$ . Two situations can occur:

- $g$  is an elliptic element. His action on  $\Gamma \backslash \mathbb{H}$  cannot permute the two cusps because they correspond to two essentially different cylinder decompositions on  $\Sigma$ . It therefore fixes the two cusps and hence must be trivial.
- $g$  is hyperbolic and fixes the two fixed points of  $h$ . Moreover, by Lemma 19, it acts on the fundamental interval  $I$  and as we discussed above such an action has to be trivial because of our study of the associated directional foliations, the translation length of  $g$  is then the same than  $h$ . But  $g$  is fully determined by its fixed points and its translation length, which shows that  $g = h$  and thus  $g \in \Gamma$ .

Any element of  $\mathbf{V}_\Sigma$  therefore belongs to  $\Gamma$  and the theorem is proven.  $\square$

**Remark 35.** *This theorem implies that the completely periodic directions correspond to the orbit by the Veech group of the horizontal and vertical directions, since any parabolic element is conjugated to the Dehn twist in one of these two directions. This is the set we denoted by  $\mathcal{H}$  in Theorem 4.*

## REFERENCES

- [Ahl66] Lars V. Ahlfors. Fundamental polyhedrons and limit point sets of Kleinian groups. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 55:251–254, 1966.
- [BHM10] Xavier Bressaud, Pascal Hubert, and Alejandro Maass. Persistence of wandering intervals in self-similar affine interval exchange transformations. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 30(3):665–686, 2010.
- [CG97] Ricardo Camelier and Carlos Gutierrez. Affine interval exchange transformations with wandering intervals. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(6):1315–1338, 1997.
- [Cob02] Milton Cobo. Piece-wise affine maps conjugate to interval exchanges. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 22(2):375–407, 2002.
- [Dal11] Françoise Dal’Bo. *Geodesic and horocyclic trajectories*. Universitext. Springer-Verlag London, 1 edition, 2011.
- [DFG] Eduard Duryev, Carlos Fougeron, and Selim Ghazouani. Affine surfaces and their veech groups. *arXiv preprint*, <https://arxiv.org/abs/1609.02130>.
- [Her77] Michael-Robert Herman. Mesure de Lebesgue et nombre de rotation. pages 271–293. *Lecture Notes in Math.*, Vol 597, 1977.
- [Kat92] Svetlana Katok. *Fuchsian groups*. Chicago lectures in mathematics series. University of Chicago Press, 1 edition, 1992.

- [Lev82] Gilbert Levitt. Feuilletages des surfaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 32(2):x, 179–217, 1982.
- [Lio95] Isabelle Liousse. Dynamique générique des feuilletages transversalement affines des surfaces. *Bull. Soc. Math. France*, 123(4):493–516, 1995.
- [MMY10] S. Marmi, P. Moussa, and J.-C. Yoccoz. Affine interval exchange maps with a wandering interval. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 100(3):639–669, 2010.
- [Pei59] M. M. Peixoto. On structural stability. *Ann. of Math. (2)*, 69:199–222, 1959.
- [Pei62] M. M. Peixoto. Structural stability on two-dimensional manifolds. *Topology*, 1:101–120, 1962.
- [Rau79] Gérard Rauzy. Échanges d’intervalles et transformations induites. *Acta Arith.*, 34(4):315–328, 1979.
- [Thu88] William P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 19(2):417–431, 1988.



# Chapitre 5

## Perspectives.

### 5.1 Géométrie hyperbolique.

#### 5.1.1 La décroissance grossière d'une certaine fonction.

Comme remarqué précédemment la décroissance asymptotique de la fonction

$$f_\Gamma := \rho \mapsto N_\Gamma(x, y, \rho)e^{-2\rho}$$

donne l'encadrement suivant de la fonction orbitale

$$c \frac{e^{2\rho}}{\rho^\alpha} \leq N_\Gamma(x, y, \rho) \leq C \frac{e^{2\rho}}{\rho^\alpha}$$

sous l'hypothèse d'un contrôle polynomial du noyau de la chaleur. Cette question de décroissance est donc intéressante du point de vue des problèmes de comptage. Pour le même encadrement que celui proposé ci-dessus, on peut relaxer en fait l'hypothèse d'asymptotique décroissance de la fonction  $f_\Gamma$  par une décroissance grossière :

**Définition 5.1.1.** Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est grossièrement décroissante s'il existe  $t_0 \in \mathbb{R}$  et  $C > 0$  tel que pour tout  $t > t_0$  on ait

$$\sup_{s \geq t} f(s) \leq C f(t)$$

Cette notion, plus souple, se prête mieux à une approche combinatoire. Une réponse positive à la question suivante implique la décroissance grossière de la fonction  $f_\Gamma$ .

**Question :** On se donne un groupe discret d'isométries de  $\mathbb{H}^n$ , un point  $x \in \mathbb{H}^n$  et deux nombres positifs  $R_2 > R_1 > 0$ . On peut se demander quel est le nombre minimum  $N$  de boules de rayons  $R_1$  centrées en des points de l'orbite  $\Gamma \cdot x$  qu'il faut pour couvrir l'orbite

de  $x$  dans la boule de centre  $x$  et de rayon  $R_2$  :

$$N := \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \exists \gamma_1 \dots \gamma_n \in \Gamma \text{ tels que } \Gamma \cdot x \cap B(x, R_2) \subset \bigcup_{\gamma_1 \dots \gamma_n} B(\gamma_i \cdot x, R_1)\}$$

La condition de décroissance de la fonction  $f_\Gamma$  est alors satisfaite dès lors que l'on a l'existence d'une constante  $C > 0$  et d'un rayon  $R_0 > 0$  telle que pour tout  $R_2 > R_1 \geq R_0$  on ai

$$N \leq C \frac{\text{vol}(B(x, R_2))}{\text{vol}(B(x, R_1))} .$$

En effet, par construction on a

$$N_\Gamma(x, x, R_2) \leq N \times N_\Gamma(x, x, R_1) ,$$

et donc

$$\frac{N_\Gamma(x, x, R_2)}{\text{vol}(B(x, R_2))} \leq C \frac{N_\Gamma(x, x, R_1)}{\text{vol}(B(x, R_1))} ,$$

ce qui conclut, car le volume des boules dans  $\mathbb{H}^3$  est de l'ordre de  $e^{2R}$

### 5.1.2 Les variétés topologiquement sages.

Les demi-cylindres de Sullivan sont des cas particuliers de variétés topologiquement sages qui ne sont pas de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie, et donc pour lesquelles on ne peut pas utiliser le théorème 2.1.14 de Thomas Roblin. Les outils développés dans la section 2.4 pour l'analyse du noyau de la chaleur sur les demi-cylindres pourraient être adaptés aux variétés topologiquement sages sous l'hypothèse de rayon d'injectivité minoré. Soit donc  $\Gamma$  un groupe Kleinien finiment engendré tel que le rayon d'injectivité de  $M_\Gamma$  soit strictement positif et qui ne soit pas de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie. Deux cas se présentent alors.

1. Soit l'ensemble limite de  $M_\Gamma$  n'est pas toute la sphère.
2. Soit l'ensemble limite de  $M_\Gamma$  est toute la sphère  $\mathbb{S}^3$ , dans ce cas tout les bouts sont dégénérés.

Dans le cas (1) les auteurs de [8] montrent l'existence d'une fonction harmonique positive, à croissance linéaire, dans chacun des bouts dégénérés de la variété. La méthode développée dans la section 2.4 semblerait donc pouvoir s'adapter dans ce cas, modulo une connaissance de la géométrie asymptotique des bouts de la variété  $M_\Gamma$ . Cette connaissance nous serait alors apportée par les travaux de Minsky, Brock et Canary qui généralisent le résultat de McMullen 2.4.13 au sens suivant.

Soit  $K$  un cœur compact de la variété  $M_\Gamma$ , c'est-à-dire une variété compacte à bord de  $M_\Gamma$  telle que  $M_\Gamma \setminus K$  soit l'union finie des bouts de la variété  $M_\Gamma$ . Notons alors  $E$  l'un de ses

bouts dégénérés, topologiquement un produit  $S \times \mathbb{R}_+$ . Le bout  $E$  est déterminé par, d'après le théorème des laminations terminales, une lamination sur la surface  $S$ . D'après un théorème de Thurston, une telle lamination correspond aussi à un élément du bord de l'espace des modules de la surface  $S$  et définit alors une direction pour le flot de Teichmüller. Il semblerait que le bout  $E$  soit asymptotiquement bi-Lipshitz au fibré en surface au dessus de cette géodésique de l'espace de Teichmüller. En particulier, si la lamination est le point fixe d'un difféomorphisme pseudo-Anosov, la géodésique de Teichmüller est asymptotiquement donnée par l'axe de cet élément pseudo-Anosov, et donc asymptotiquement périodique. Le bout correspondant serait alors isométrique à l'infini à  $(\mathbb{R}_+, dx^2)$  et on pourrait conclure de la même façon.

Le cas (2), toujours sous l'hypothèse "rayon d'injectivité minoré", se traiterait de la même façon en utilisant directement un résultat de Grigor'Yan qui donne le comportement précis du noyau de la chaleur pour une variété à nombre fini de bouts tous isométriques à l'infini à des espaces euclidiens.

Au vu de ces résultats on propose la dichotomie suivante pour les variétés topologiquement sages à rayon d'injectivité minoré qui ne sont pas de mesure de Bowen-Margulis-Sullivan finie :

1. Soit l'ensemble limite est la sphère  $\mathbb{S}^2$  alors il existe une constante  $C > 0$  qui ne dépend que de la métrique sur  $M_\Gamma$  telle que

$$N_\Gamma(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} C \frac{e^{2\rho}}{\sqrt{\rho}} ;$$

2. sinon pour tout  $x, y \in \mathbb{H}^3$  il existe une constante  $C(x, y)$  telle que

$$N_\Gamma(x, y, \rho) \underset{\rho \rightarrow +\infty}{\sim} C(x, y) \frac{e^{2\rho}}{\rho^{\frac{3}{2}}} .$$

### 5.1.3 Généralisations du théorème 2.2.27

Une question naturelle est de comprendre quelles sont les hypothèses dont on peut espérer se débarrasser pour ce qui est du théorème clé 2.2.27.

Le premier pas pourrait être d'enlever l'hypothèse sur la dimension. Rappelons que l'équation (2.2.9) donne une formule générale pour le noyau de la chaleur sur  $\mathbb{H}^n$ , une première approche pourrait être d'essayer de refaire les calculs avec ces nouvelles formules. Une autre approche serait de se passer complètement des formules pour le noyau de la chaleur dans le cas hyperbolique en "théorisant" les deux lemmes clés 2.2.10 et 2.3.4 par un théorème des grandes déviations pour le mouvement Brownien sur les espaces homogènes.

Cette seconde approche, en plus d'être plus élégante, semble indispensable pour toutes les généralisations qui suivent.

La deuxième étape consisterait à enlever l'hypothèse  $\delta_\Gamma = 2$  dans le théorème. Une idée naturelle consiste à considérer non plus le mouvement Brownien classique mais celui drifté par la fonction propre du Laplacien correspondant à la plus petite valeur propre. Une première étape serait de traiter les revêtements nilpotents de variétés convexes-cocompactes par l'utilisation d'une fonction harmonique positive de plus petite valeur propre, comme en section 2.4.2. En effet, en considérant ce processus, nous conditionnons le mouvement Brownien à sortir dans l'ensemble limite, et donc à ne pas visiter (sous l'hypothèse  $\delta_\Gamma > \frac{n-1}{2}$ ) les bouts de volume à croissances exponentielles.

Une dernière généralisation possible serait d'essayer d'adapter l'argument en courbure variable. La partie analytique subsiste dans ce contexte mais le lien avec la fonction orbitale est beaucoup moins clair, le noyau de la chaleur perdant son homogénéité et en particulier son caractère radial.

#### 5.1.4 Opérateurs de transferts.

Pour obtenir le théorème 2.1.16 R. Sharp et M. Pollicott encodent le flot géodésique sur le revêtement abélien  $M_\Gamma$  par un sous shift de type fini. Par des techniques devenues maintenant classiques, ils miment alors la preuve d'un théorème local limite en remplaçant les variables aléatoires par les opérateurs de transferts associés au flot géodésique pour obtenir le résultat.

D'un autre côté, Varopolous vient avec une autre méthode géométrique généralisant le théorème local limite pour les marches aléatoires au cas des revêtements nilpotents. Il est alors naturel d'essayer d'adapter cette nouvelle méthode aux opérateurs de transferts.

Un corollaire de cette approche pourrait être un équivalent pour la fonction orbitale dans le cas des revêtements nilpotents.

## 5.2 L'enlacement.

### 5.2.1 Étude du lieu singulier de la forme $d\theta$ .

Comme vu dans la section 3.1, la forme différentielle obtenue en intégrant contre une droite infinie la forme d'enlacement de Gauss est la forme  $d\theta$  dans les coordonnées cylindriques

naturelles associées à la droite. Si l'on pense à  $\mathbb{R}^3$  comme à un modèle local d'une variété riemannienne  $M$  de dimension 3, on peut espérer que pour toutes multi-courbes  $\Gamma \hookrightarrow M$  la forme différentielle  $\omega_\Gamma$  soit, au voisinage de  $\Gamma$ , de la forme  $d\theta$  dans les coordonnées cylindriques associées au fibré normal de la multi-courbe  $\Gamma$ .

Une stratégie pour prouver ce théorème pourrait être de reprendre la construction De Rham du noyau de Green par l'utilisation de **paramétrix**. L'idée est de construire le noyau de Green sur une variété riemannienne en propageant le noyau de Green associé à l'espace euclidien de même dimension au voisinage de la diagonale. On construit alors avec ce nouveau noyau, par un procédé itératif, les termes d'une série qui sommée donne le noyau de Green de la variété  $M$ .

Un premier corollaire à cette approche pourrait être une généralisation du théorème 3.1.19 à certaines variétés non compactes.

### 5.2.2 Les sections de Birkhoff du flot géodésique sur le tore $\mathbb{T}^3$

On voudrait utiliser le théorème 3.1.10 pour prouver l'existence de sections de Birkhoff du flot géodésique du tore  $\mathbb{T}^2$ . Notons alors  $X$  le flot correspondant sur le tore  $\mathbb{T}^3$  et  $\Gamma$  une multi-géodésique homologiquement triviale. Pour appliquer ce théorème il nous faut vérifier que toute les mesures ergodiques enlacent positivement la multi-géodésique  $\Gamma$ . Dans le cas du flot géodésique du tore  $\mathbb{T}^2$  on a une description complète des mesures ergodiques invariantes. Si l'on note par  $\theta$  l'angle fait par une géodésique avec l'axe des abscisse on a :

- si un point générique de la mesure appartient à la feuille  $\theta = Cst$  avec  $\tan(\theta)$  rationnel alors cette mesure est portée par une orbite périodique.
- si un point générique de la mesure appartient à une feuille  $\tan(\theta)$  avec  $\tan(\theta)$  irrationnel, alors cette mesure est la mesure de Lebesgue sur la feuille  $\theta = Cst$ .

Le théorème 1.0.11 donne déjà que toute les mesures invariantes associés au champ de vecteurs  $X$  portée par des orbites périodiques s'enlacent positivement, dès lors que  $\Gamma$  contient au moins trois multi-courbes. La preuve de ce théorème s'adapte en fait au cas où la mesure est la mesure de Lebesgue.

On ne peut pas cependant appliquer le théorème 3.1.17 en l'état car le tore  $\mathbb{T}^3$  n'est pas une sphère d'homologie. On pourrait cependant reprendre la preuve du théorème 3.1.10 si l'on pouvait définir la forme  $\omega_\Gamma$  sur la variété résultante de l'éclatement de D.Fried, ce qui serait un corollaire du lemme  $d\theta$  énoncé plus haut.



### 5.2.3 Première valeur propre du laplacien sur les formes : cas particulier de $\mathbb{S}^3$ .

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne compacte, pas forcément connexe. Le principe du maximum nous dit que la dimension de l'espace vectoriel des fonctions harmoniques est donnée par le nombre de composantes connexes. Si l'on veut ajouter une nouvelle fonction harmonique à la variété  $(M, g)$ , il faut la déconnecter. Pour déconnecter une variété on peut lui enlever une sous variété  $S$  d'homologie nulle, on note alors  $M \setminus S = M_1 \sqcup M_2$ . On pourrait quantifier le coût de cette chirurgie par

$$h(S) := \frac{\mu_g(S)}{\min(\text{vol}_g(M_1), \text{vol}_g(M_2))} .$$

On aurait alors envie de dire que la chirurgie de moindre coût correspondrait à

$$h := \inf h(S)$$

où l'inf est pris sur toutes les sous-variétés  $S$  qui déconnectent la variété  $M$ . Cheeger montre alors que

$$\lambda_1 \geq \frac{h^2}{4} .$$

Avec cette valeur propre vient une fonction propre que l'on aurait envie de penser duale à la surface  $S$ .

Aucune inégalité de Cheeger n'est connue pour les 1-formes co-exactes ou bien, de manière équivalente, pour les 2-formes exactes. Un premier cas à étudier pourrait être celui d'une sphère riemannienne  $(\mathbb{S}^3, g)$ . Construisons un candidat à être un minorant de la première valeur propre du laplacien à la manière de Cheeger. Pour toute courbe  $\gamma$  de  $\mathbb{S}^3$  on note  $A_g(\gamma)$  l'aire de la surface minimale dont le bord est  $\gamma$  et  $l_g(\gamma)$  la longueur de  $\gamma$ . On pose ensuite

$$h_1 := \inf_{\gamma \rightarrow \mathbb{S}^3} \frac{l_g(\gamma)}{A_g(\gamma)}$$

On pourrait alors espérer montrer que

$$\lambda_1^1 \geq \frac{h_1^2}{4}$$

où  $\lambda_1^1$  est la première valeur propre de du laplacien agissant sur les formes différentielles.

**Heuristique de preuve :** l'esprit de ce qui suit est de penser les 2-formes propres exactes sur  $\mathbb{S}^3$  comme des Poincaré duales de certaines courbes homologiquement triviales. Ces courbes seraient données par certaines lignes de flots du champ de vecteurs dual à la 1-

forme coexacte Hodge duale de notre 2-forme fermée. Ces champs de vecteurs sont, par définition, à divergence nulle. Les flots associés préservent donc la mesure Riemannienne  $\mu_g$  sur  $(\mathbb{S}^3, g)$ , ce qui met à disposition les outils de la théorie ergodique.

On notera  $\lambda^2$  la première valeur propre du laplacien de Hodge de Rham agissant sur les 2-formes exactes de la sphère  $\mathbb{S}^3$ . Soit  $\beta$  la 2-forme propre associée à cette plus petite valeur propre et  $\alpha = *\beta$  sa 1-forme Hodge-dual co-exacte, de valeur propre  $\lambda^2$ . Supposons pour simplifier que  $\alpha$  soit unique, alors elle serait aussi valeur propre de l'opérateur rotationnel :

$$*d\alpha = \lambda\alpha ,$$

dont l'inverse est, par construction, donnée par la forme d'enlacement. On a donc :

$$\Omega(\alpha) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

On peut alors écrire

$$|\lambda| = \frac{\|\alpha\|_{L^1}}{\|\Omega(\alpha)\|_{L^1}} . \quad (5.2.1)$$

L'idée est ici d'utiliser la théorie ergodique pour donner une minoration de  $\|\alpha\|$ , ainsi qu'une majoration de  $\|\Omega(\alpha)\|$ , par des quantités géométriques associées à une certaine courbe  $\gamma$  dont la forme différentielle  $\alpha$  serait duale.

On note  $X$  le champ de vecteurs dual à  $\alpha$ , de divergence nulle. Le flot de ce champ de vecteurs préserve la mesure  $\mu_g$ . On note  $\mathcal{M}_X^{erg}$  l'ensemble des mesures de probabilités  $X$ -invariante ergodiques. Un théorème classique nous assure alors que  $\mu_g$  peut se décomposer selon  $\mathcal{M}_X^{erg}$ , c'est-à-dire qu'il existe une probabilité  $\zeta$  sur  $\mathcal{M}_X^{erg}$  telle que :

$$\mu_g = \int_{\mathcal{M}_X^{erg}} \nu \, d\zeta(\nu) .$$

On pose alors, pour tout  $\nu \in \mathcal{M}_X^{erg}$  :

$$\omega_\nu := \int_M i_X \Omega \, d\nu .$$

Où  $\Omega$  est la forme d'enlacement associé à la métrique  $g$ . On notera encore  $\Omega$  l'opérateur associé, que l'on appelle opérateur d'enlacement. En rappelant que pour toute 1-forme  $\beta$  on a

$$i_X(\beta) = *(\alpha \wedge *\beta)$$

on a bien que  $\omega_{\mu_g} = \Omega(\alpha)$ , par construction de  $\Omega$ .

Soit  $Y = \frac{X}{|X|}$  le champ de vecteurs  $X$  renormalisé. L'identité  $i_Y(\alpha) = |\alpha|$  implique que

$$\|\alpha\|_{L^1} = \int_M i_Y(\alpha) d\mu_g$$

et

$$\|\Omega(\alpha)\|_{L^1} = \int_M i_Y \omega_{\mu_g} d\mu_g$$

Supposons maintenant qu'il existe  $\nu \in \mathcal{M}_X^{erg}$  tel que

$$\|\alpha\|_{L^1} \geq \int_M i_Y(\alpha) d\nu \quad (5.2.2)$$

et

$$\int_M i_Y \omega_{\mu_g} d\mu_g \leq \int_M i_Y \omega_\nu d\mu_g \quad (5.2.3)$$

(Cette étape est automatique si l'on sait  $\mu_g$  être  $X$ -ergodique). On peut alors majorer le second membre de l'équation ci-dessus par :

$$\int_M i_Y \omega_\nu d\mu_g \leq \|\omega_\nu\|_{L^1} .$$

On approxime ensuite la mesure  $\nu$  par des orbites au temps  $T_n$  du flot que l'on aurait refermés par de petits chemins, à la Arnold, pour obtenir une suite de courbes  $\gamma_n$  telles que :

$$\|\omega_\nu\|_{L^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \|\omega_{\gamma_n}\|_{L^1}$$

et

$$\|\alpha\|_{L^1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{T_n} \int_{\gamma_n} \frac{\alpha}{|\alpha|} .$$

Le membre de droite correspond à la longueur de la courbe  $\gamma_n$ , si bien que :

$$\frac{1}{T_n} l_g(\gamma_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\alpha\|_{L^1} .$$

En revenant à (5.2.1) on a alors :

$$|\lambda| \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_g(\gamma_n)}{\|\omega_{\gamma_n}\|_{L^1}} ,$$

en particulier :

$$|\lambda| \geq \inf_{\gamma \in \mathbb{S}^3} \frac{l_g(\gamma)}{\|\omega_\gamma\|_{L^1}} .$$

Supposons maintenant qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour toute courbe fermée  $\gamma$  dans  $\mathbb{S}^3$  on ait :

$$\|\omega_\gamma\|_{L^1} \leq CA_g(\gamma) \quad (5.2.4)$$

où  $A_g(\Gamma)$  est la surface d'aire minimale de  $\mathbb{S}^3$  dont  $\gamma$  est le bord. On aurait alors :

$$|\lambda| \geq \inf_{\gamma \in \mathbb{S}^3} C \frac{l_g(\gamma)}{A_g(\gamma)} .$$

**Fin de l'heuristique.** Cette stratégie de preuve présente de nombreux problèmes : l'existence d'une mesure  $\nu$  telle que (5.2.2) et (5.2.3) soient vérifiées simultanément, le fait que la forme  $\omega_\nu$  soit intégrable, et l'inégalité (5.2.4) notamment.

La discussion précédente motive cependant plusieurs questions plus abordables. Dont la première pourrait être :

**Question :** Soit  $g$  une métrique sur la sphère  $\mathbb{S}^3$ , est-ce-que

$$\inf_{\gamma \in \mathbb{S}^3} \frac{l_g(\gamma)}{A_g(\gamma)} = 0 ?$$

Revenons sur (5.2.4). Comme vu dans l'introduction, la forme  $\omega_\gamma$  est une forme harmonique sur le complémentaire sur  $\gamma$ , qui est aussi une classe entière. La formule de la co-aire donne alors directement que

$$\|\omega_\gamma\|_{L^1} \geq A_g(\gamma) ,$$

ce que l'on cherche donc est une inégalité dans l'autre sens. Un premier problème pourrait être alors de se donner une variété riemannienne  $(M, g)$  telle que  $H^2(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . On se donne ensuite la 1-forme différentielle harmonique  $\omega_g$  Poincaré duale à un générateur  $\Sigma$  de ce groupe, c'est-à-dire qui vérifie que pour toute courbe  $\gamma$  fermée :

$$\int_\gamma \omega_g = i(\Sigma, \gamma) .$$

De la même façon que précédemment, on a déjà

$$\|\omega_g\|_{L^1} \geq A_g(\Sigma) ,$$

où  $A_g(\Sigma)$  est l'infimum des aires prise sur les surface  $S$  cohomologue à  $\Sigma$ . On aurait alors envie de la majoration.

**Question :** Soit  $M$  une variété compacte telle que  $H^2(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ . Soit  $\mathcal{M}$  l'espace des

métrique sur une  $M$  à courbure sectionnelle majorée par  $b$  et minorée par  $a$ . Existe-t-il une constante  $C > 0$  telle que pour toute métrique  $g \in \mathcal{M}$  on ait

$$\|\omega_g\|_{L^1} \leq CA_g(\Sigma) ?$$

Des calculs préliminaires semblent indiquer qu'une hypothèse sur la courbure est nécessaire.

### 5.3 Échanges d'intervalles affines.

#### 5.3.1 Les espaces de modules. En collaboration avec Selim Ghazouani.

L'ensemble des structures de dilatation avec directions marquées sur une surface topologique  $S$  vient, à la manière de l'espace des modules des surfaces de translations, avec une action de  $SL_2(\mathbb{R})$ . En particulier avec l'action du groupe diagonal : le flot de Teichmüller. Masur dans [39] fait le lien entre la dynamique du flot de Teichmüller et le comportement des feuilletages directionnels : si l'orbite du flot de Teichmüller est récurrente dans l'espace de modules, alors le feuilletage directionnel correspondant est uniquement ergodique. Une question naturelle est de se demander si un tel résultat persiste pour l'espace des modules des structures non plus de translation mais de dilatation. Le théorème suivant correspond à un travail en cours avec Selim Ghazouani.

**Théorème.** Soit  $\mathcal{D}$  l'espace des structures affines sur le tore avec un bord totalement géodésique et un point marqué alors

- Il existe un sous ensemble dense de  $\mathcal{D}$  telle que la  $SL_2(\mathbb{R})$ -orbite de tout points de cet ensemble est dense.
- Aucune orbite du flot de Teichmüller n'est récurrente.

L'existence d'une action de  $SL_2(\mathbb{R})$  admettant des orbites denses mais sans orbites récurrentes pour le flot de Teichmüller est surprenante. La preuve repose sur une paramétrisation de  $\mathcal{D}$  et l'étude des feuilletages horizontaux grâce à l'induction de Rauzy-Veech adaptée dans le cas affine dans notre article.

On peut alors recoller sur leurs bords deux de ces tores pour obtenir une surface de genre 2. Les surfaces de genres 2 obtenues par un tel procédé sont appelées les surfaces à 2 chambres. Un projet à cours terme serait de traiter le cas de ces surfaces puis de traiter le cas général des surfaces de genre 2.

Une réponse à la question suivante est la motivation principale de notre travail.

**Question :** Soit  $S$  une surface topologique à  $p$  points marqués et  $\mathcal{D}$  l'espace des structures de dilatations sur  $S$ . A t-on : pour presque toutes structures de dilatations sur  $S$  et presque toutes directions que le feuilletage associé est dynamiquement trivial ?

### 5.3.2 Le flot géodésique des surfaces affines

Si l'on se donne une surface dont les changements de cartes ne sont plus à valeur dans le groupe affine réel mais dans  $GL_2(\mathbb{R})$  on ne peut alors plus définir de feuilletage horizontal, mais on peut cependant définir un flot sur le fibré unitaire tangent de cette surface. Cela donne des exemples de flots explicites en dimension 3 qu'il serait intéressant d'étudier.



# Bibliographie

- [1] D. V. Anosov. Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature. *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, 90 :209, 1967.
- [2] Vladimir I. Arnold and Boris A. Khesin. *Topological methods in hydrodynamics*, volume 125 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [3] Sebastian Baader and Julien Marché. Asymptotic Vassiliev invariants for vector fields. *Bull. Soc. Math. France*, 140(4) :569–582 (2013), 2012.
- [4] Martine Babillot, Renato Feres, and Abdelghani Zeghib. *Rigidité, groupe fondamental et dynamique*, volume 13 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2002. With the collaboration of Emmanuel Breuillard, Edited by Patrick Foulon.
- [5] Nicolas Bergeron. Toute variété de dimension 3 compacte et asphérique est virtuellement haken [d’après ian agol et daniel t. wise]. *Séminaire Bourbaki*, 66ème année, 2013-2014, no 1078, 2014.
- [6] Nicole Berline, Ezra Getzler, and Michèle Vergne. *Heat kernels and Dirac operators*. Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Corrected reprint of the 1992 original.
- [7] N. H. Bingham, C. M. Goldie, and J. L. Teugels. *Regular Variation*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1987.
- [8] Christopher J. Bishop and Peter W. Jones. The law of the iterated logarithm for Kleinian groups. In *Lipa’s legacy (New York, 1995)*, volume 211 of *Contemp. Math.*, pages 17–50. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [9] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [10] Rufus Bowen and Brian Marcus. Unique ergodicity for horocycle foliations. *Israel Journal of Mathematics*, 26(1) :43–67, Mar 1977.
- [11] Xavier Bressaud, Pascal Hubert, and Alejandro Maass. Persistence of wandering intervals in self-similar affine interval exchange transformations. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 30(3) :665–686, 2010.



- [12] Ricardo Camelier and Carlos Gutierrez. Affine interval exchange transformations with wandering intervals. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(6) :1315–1338, 1997.
- [13] Gilles Carron. Une suite exacte en  $L^2$ -cohomologie. *Duke Math. J.*, 95(2) :343–372, 1998.
- [14] Isaac Chavel. *Eigenvalues in Riemannian geometry*. Pure and applied mathematics 115. Academic Press, 2 edition, 1984.
- [15] Thierry Coulhon and Laurent Saloff-Coste. Variétés riemanniennes isométriques à l’infini. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 11(3) :687–726, 1995.
- [16] E. B. Davies. *Heat kernels and spectral theory*, volume 92 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [17] Georges de Rham. *Differentiable manifolds*, volume 266 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984. Forms, currents, harmonic forms, Translated from the French by F. R. Smith, With an introduction by S. S. Chern.
- [18] Pierre Dehornoy. Which geodesic flows are left-handed? *Groups Geom. Dyn.*, 11(4) :1347–1376, 2017.
- [19] Dennis DeTurck and Herman Gluck. Linking, twisting, writing, and helicity on the 2-sphere and in hyperbolic 3-space. *J. Differential Geom.*, 94(1) :87–128, 05 2013.
- [20] Albert Fathi, François Laudenbach, and Valentin Poénaru. *Thurston’s work on surfaces*, volume 48 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012. Translated from the 1979 French original by Djun M. Kim and Dan Margalit.
- [21] David Fried. The geometry of cross sections to flows. *Topology*, 21(4) :353 – 371, 1982.
- [22] Jean-Marc Gambaudo and Étienne Ghys. Signature asymptotique d’un champ de vecteurs en dimension 3. *Duke Math. J.*, 106(1) :41–79, 2001.
- [23] Étienne Ghys. Knots and dynamics. In *International Congress of Mathematicians. Vol. I*, pages 247–277. Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.
- [24] Alexander Grigor’yan. *Heat kernel and analysis on manifolds*, volume 47 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.
- [25] Alexander Grigor’yan and Masakazu Noguchi. The heat kernel on hyperbolic space. *Bull. London Math. Soc.*, 30(6) :643–650, 1998.
- [26] Alexander Grigor’yan and Laurent Saloff-Coste. Stability results for Harnack inequalities. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 55(3) :825–890, 2005.
- [27] Mikhael Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (53) :53–73, 1981.

- [28] E. Hebey. *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*. Fondations (Paris, 1996). Diderot, 1997.
- [29] Heinz Huber. Zur analytischen Theorie hyperbolischen Raumformen und Bewegungsgruppen. *Math. Ann.*, 138 :1–26, 1959.
- [30] Masahiko Kanai. Rough isometries, and combinatorial approximations of geometries of noncompact Riemannian manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, 37(3) :391–413, 1985.
- [31] Michael Keane. Interval exchange transformations. *Mathematische Zeitschrift*, 141 :25–32, 1975.
- [32] Steven Kerckhoff, Howard Masur, and John Smillie. Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials. *Annals of Mathematics*, 124(2) :293–311, 1986.
- [33] Bruce Kleiner. A new proof of Gromov's theorem on groups of polynomial growth. *J. Amer. Math. Soc.*, 23(3) :815–829, 2010.
- [34] Gilbert Levitt. Feuilletages des surfaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 32(2) :x, 179–217, 1982.
- [35] Isabelle Liousse. Dynamique générique des feuilletages transversalement affines des surfaces. *Bull. Soc. Math. France*, 123(4) :493–516, 1995.
- [36] E. Looijenga, D. Siersma, and F. Takens. *Geometry Symposium Utrecht 1980 : Proceedings of a Symposium Held at the University of Utrecht, The Netherlands, August 27-29, 1980*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [37] G. A. Margulis. Certain applications of ergodic theory to the investigation of manifolds of negative curvature. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 3(4) :89–90, 1969.
- [38] S. Marmi, P. Moussa, and J.-C. Yoccoz. Affine interval exchange maps with a wandering interval. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 100(3) :639–669, 2010.
- [39] Howard Masur. Interval exchange transformations and measured foliations. *Annals of Mathematics*, 115(1) :169–200, 1982.
- [40] Curtis T. McMullen. *Renormalization and 3-manifolds which fiber over the circle*, volume 142 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
- [41] H. K. Moffatt. The degree of knottedness of tangled vortex lines. *Journal of Fluid Mechanics*, 35(1) :117–129, 1969.
- [42] Jean-Jacques Moreau. Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 252 :2810–2812, 1961.
- [43] Pierre Pansu. Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 3(3) :415–445, 1983.
- [44] S. J. Patterson. The limit set of a Fuchsian group. *Acta Math.*, 136(3-4) :241–273, 1976.

- [45] Peter A. Perry. The laplace operator on a hyperbolic manifold. ii. eisenstein series and the scattering matrix. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 398 :67–91, 1989.
- [46] Mark Pollicott and Richard Sharp. Orbit counting for some discrete groups acting on simply connected manifolds with negative curvature. *Invent. Math.*, 117(2) :275–302, 1994.
- [47] RENZO L. RICCA and BERNARDO NIPOTI. Gauss; linking number revisited. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 20(10) :1325–1343, 2011.
- [48] Thomas Roblin. Sur la fonction orbitale des groupes discrets en courbure négative. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 52(1) :145–151, 2002.
- [49] Thomas Roblin. Ergodicité et équidistribution en courbure négative. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (95) :vi+96, 2003.
- [50] Steven Rosenberg. *Laplacian on Riemannian manifold*. London Mathematical Society Student Texts 31. Cambridge University Press, 1997.
- [51] Sol Schwartzman. Asymptotic cycles. *Annals of Mathematics*, 66(2) :270–284, 1957.
- [52] Dennis Sullivan. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (50) :171–202, 1979.
- [53] Dennis Sullivan. Entropy, Hausdorff measures old and new, and limit sets of geometrically finite Kleinian groups. *Acta Math.*, 153(3-4) :259–277, 1984.
- [54] Dennis Sullivan. Related aspects of positivity in Riemannian geometry. *J. Differential Geom.*, 25(3) :327–351, 1987.
- [55] N. Th. Varopoulos, L. Saloff-Coste, and T. Coulhon. *Analysis and geometry on groups*, volume 100 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [56] William A. Veech. Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *Annals of Mathematics*, 115(2) :201–242, 1982.
- [57] Pierre Vidotto. Géométrie ergodique et fonctions de comptage en mesure infinie. *thèse de doctorat*.
- [58] Thomas Vogel. On the asymptotic linking number. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(7) :2289–2297, 2003.
- [59] L. Woltjer. A theorem on force-free magnetic fields. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 44 :489–491, 1958.