HAL
open science

Stabilité d'écoulements de sillages périodiques générés par des ailes battantes

Damien Jallas

To cite this version:

Damien Jallas. Stabilité d'écoulements de sillages périodiques générés par des ailes battantes. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2018. Français. NNT : 2018TOU30322 . tel-02475948

HAL Id: tel-02475948

https://theses.hal.science/tel-02475948v1

Submitted on 12 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le *17/10/2018* **par :**

Damien JALLAS

Stabilité d'écoulements de sillages périodiques générés par des ailes battantes

---

JURY

Franco Auteri	Associate Professor	Rapporteur
Pierre Brancher	Professeur des Universités	Membre du Jury
Christophe Eloy	Professeur des Universités	Rapporteur
David Fabre	Maître de Conférences	Directeur de Thèse
Ramiro Godoy-Diana	Chargé de Recherche	Invité
Olivier Marquet	Maître de Recherche	Encadrant
Laurette Tuckerman	Directrice de Recherche	Présidente du Jury

---

École doctorale et spécialité :
MEGEP : Dynamique des fluides

Unité de Recherche :
Département d'Aérodynamique, Aéroélasticité & Acoustique - ONERA
Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (UMR 5502)

Directeur(s) de Thèse :
David FABRE et *Olivier MARQUET*

Rapporteurs :
Franco AUTERI et *Christophe ELOY*

Table des matières

Remerciements **7**

Introduction générale **9**

1 Outils théoriques et numériques **19**
1.1 Résolution des équations de Navier-Stokes dans un référentiel non-inertiel . 20
1.1.1 Écriture des équations avec de nouvelles coordonnées spatiales . . . 22
1.1.2 Projection des équations dans le référentiel tournant 24
1.1.3 Prise en compte de l'incidence de l'écoulement amont 25
1.1.4 Conséquences et avantages de la méthode 25
1.1.5 Validation de la méthode 25
1.2 Calcul de stabilité linéaire périodique en temps par méthode d'Arnoldi . . 27
1.2.1 Analyse de Floquet : stabilité linéaire d'un problème périodique en temps 28
1.2.2 Méthode d'Arnoldi pour le calcul de valeurs propres 31
1.2.2.1 Méthode d'Arnoldi 31
1.2.2.2 Méthode Block-Arnoldi 33
1.2.3 Calcul de l'évolution temporelle des modes de Floquet 33
1.2.4 Analyse de Floquet pour un problème fluide 34
1.2.5 Analyse de Floquet pour un problème fluide-structure 35
1.2.6 Validation numérique de la méthode d'Arnoldi 36
1.3 Méthodes d'analyse de sillages périodiques en temps 36
1.3.1 Méthodes d'analyses de la périodicité temporelle 37
1.3.1.1 Sections de Poincaré 37
1.3.1.2 Calculs d'écart à la périodicité 39
1.3.2 Méthodes d'analyses des sillages 39
1.3.2.1 Caractérisation de tourbillons 40
1.3.2.1.1 Définition du critère Q 41
1.3.2.1.2 Application du critère Q à un sillage de tourbillons 42
1.3.2.2 Caractérisation de la perturbation de tourbillons 44

2 Méthodes pour la stabilisation d'écoulements stationnaires et périodiques **47**
2.1 Introduction 47
2.1.1 Symétries et principe de Curie 47
2.1.2 Méthodes de recherche de solutions stationnaires 48
2.1.3 Méthodes de recherche de solutions périodiques 51
2.2 Configurations, équations et symétries de l'écoulement 52
2.2.1 Cas d'études 53
2.2.1.1 Aile fixe sans incidence 53
2.2.1.2 Aile battante, incidence moyenne non nulle 54
2.2.1.3 Aile battante, incidence moyenne nulle 55

2.2.2 Opérateurs de pseudo-projection . . . 56
2.2.3 Décomposition d'un écoulement en parties symétriques et antisymétriques . . . 58
2.2.3.1 Définition des opérateurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ . . . 59
2.2.3.1.1 Symétrie de réflexion . . . 59
2.2.3.1.2 Symétrie temporelle . . . 59
2.2.3.1.3 Symétrie spatio-temporelle . . . 59
2.3 Méthode de résolution des composantes symétriques et anti-symétriques . . . 59
2.3.1 Symétrie spatiale dans le référentiel fixe . . . 60
2.3.2 Symétrie spatio-temporelle dans le référentiel mobile . . . 61
2.3.3 Résultats numériques . . . 61
2.3.3.1 Validation pour la symétrie spatiale . . . 61
2.3.3.2 Validation pour la symétrie spatio-temporelle . . . 62
2.3.3.3 Influence du coefficient d'amortissement . . . 63
2.3.3.4 Conclusion sur la première méthode . . . 64
2.4 Méthode d'extraction de la composante anti-symétrique . . . 64
2.4.1 Application à la symétrie spatiale . . . 65
2.4.2 Application à la symétrie temporelle de périodicité . . . 66
2.4.2.1 Principe de la méthode . . . 66
2.4.2.2 Résultats . . . 67
2.4.3 Application à la symétrie spatio-temporelle . . . 67
2.4.4 Conclusion sur la seconde méthode . . . 68
2.5 Conclusion . . . 69

3 Déviation du sillage d'une aile battante 71
3.1 Analyse aux perturbations linéaires et non-linéaires de la déviation du sillage d'une aile battante . . . 71
3.2 Bifurcation imparfaite à petit angle d'incidence . . . 87
3.2.1 Modification de la configuration d'étude . . . 87
3.2.2 Influence de l'angle d'incidence sur la bifurcation du sillage . . . 87
3.3 Compléments et discussions . . . 91
3.3.1 Faibles et fortes fréquences de battement . . . 91
3.3.1.1 Résonance en régime traînant à faibles fréquences de battement . . . 91
3.3.1.2 Saturation de la portance moyenne à fortes fréquences . . . 91
3.3.1.3 Rendement de l'aile battante en régime propulsif . . . 91
3.3.1.4 Influence de l'amplitude de battement . . . 93
3.3.2 Sens de la déviation et signe de la portance . . . 94
3.3.3 Analyse de stabilité du sillage périodique sans aile . . . 95
3.3.4 Modélisation de l'effet du mode linéaire sur le champ de base . . . 96
3.3.4.1 Modélisation du sillage non dévié . . . 97
3.3.4.2 Identification des paramètres du champ de base . . . 98
3.3.4.3 Modélisation du mode linéaire . . . 99
3.3.4.4 Identification des paramètres du mode linéaire . . . 100
3.3.4.5 Lien entre la déviation et l'appariement dipolaire . . . 100
3.4 Conclusions et perspectives . . . 104

4 Dynamique du sillage d'une aile battante à grand angle d'incidence 107
4.1 Influence de l'angle d'incidence sur l'écoulement autour d'une aile fixe . . . 108
4.2 Analyse de la périodicité des solutions de simulations non-linéaires . . . 110
4.2.1 Description des solutions périodiques . . . 111

4.2.2 Description des solutions quasi périodiques 113
4.2.3 Description de solutions à très grandes périodes 115
4.3 Analyse de la bifurcation vers un état $3T$-périodique à $f = 0.1$ 117
4.3.1 Résultats de solutions non-linéaires 117
4.3.2 Calculs de champs de base 119
4.3.3 Analyse de Floquet de la solution T-périodique 120
4.3.4 Analyse de la perturbation non-linéaire 123
4.4 Analyse de la bifurcation subharmonique à $f = 0.15$ 125
4.4.1 Résultats de simulations non-linéaires 126
4.4.2 Calculs de champs de base 128
4.4.3 Analyse de Floquet de la solution T-périodique 130
4.4.4 Analyse de Floquet de la solution $2T$-périodique 132
4.4.5 Analyse de la perturbation non-linéaire 133
4.5 Conclusions et perspectives 134

5 Auto-propulsion, stabilité et bifurcation d'une aile battante symétrique dans un fluide au repos 137
5.1 Introduction 137
5.2 Simulations instationnaires d'une aile battante auto-propulsée 141
5.2.1 Équations non linéaires 142
5.2.2 Symétries du problème 143
5.2.3 Symétries attendues pour les solutions du problème 144
5.2.4 Résultats numériques 146
5.2.4.0.1 Régime non-propulsif (symétrique) 146
5.2.4.0.2 Régime propulsif lent 147
5.2.4.0.3 Régime oscillant 148
5.2.4.0.4 Régime propulsif oscillant 149
5.2.4.0.5 Régime propulsif rapide 150
5.2.4.0.6 Caractère sous-critique des transitions 151
5.3 Stabilité des solutions périodiques du problème d'auto-propulsion 152
5.3.1 Équations linéarisées et analyse de Floquet 152
5.3.2 Solutions périodiques symétriques 155
5.3.3 Résultats de stabilité des solutions périodiques et symétriques . . . 155
5.3.3.1 Résultats pour $\rho = 100$ 155
5.3.3.1.1 Comparaison des résultats linéaires et non linéaires 158
5.3.3.2 Effet du rapport de densité sur les régions d'instabilité . . 159
5.3.3.3 Résultats pour $\rho \to \infty$ 160
5.4 Conclusion 161

Conclusion générale 163

Appendices 167

A Discrétisation spatiale et temporelle des équations continues 169
A.1 Discrétisation spatiale 169
A.2 Discrétisation temporelle 169
A.2.1 Schéma semi-implicite BDF/EXT 169

B Propriétés relatives au changement de référentiel 171

C Propriétés relatives à la méthode de préservation des symétries **173**
C.1 Symétrie spatiale 173
C.2 Symétrie spatio-temporelle 176

D Codes de calcul **179**

Remerciements

Introduction générale

Du drone à l'aile battante

Le siècle du drone : entre progrès et dangers

Ce début de XXIe siècle voit l'émergence du drone, appareil du futur, à la croisée de l'aviation et de l'ordinateur, les symboles du siècle précédent. Qu'il s'agisse du *Predator*, survolant les zones de conflits à très haute altitude (figure 1a), d'un bateau radio-commandé voguant à la surface d'un lac, ou d'un quadrirotor monté d'une GoPro (figure 1b) prenant une vidéo du coucher de soleil à l'horizon, les appareils sans pilotes ont fait leur entrée dans le quotidien de l'humanité. Fruits de décennies de développements, les drones d'aujourd'hui ne servent d'ailleurs probablement que de transition vers les appareils de demain.

(a) (b)

FIGURE 1 – (a) Drone de reconnaissance armé américain MQ-1 Predator. (b) Le X-UFO, un jouet radio-commandé quadrirotor.

Et la vitesse du développement des drones en France conduit fort logiquement à l'inquiétude d'un phénomène incontrôlable. Cette peur a notamment été mise en exergue suite au survol par des drones de plusieurs centrales nucléaires en 2014. Cet évènement a d'ailleurs conduit à l'écriture d'un rapport du gouvernement au parlement français sur l'essor des drones civils en France, publié en octobre 2015 [1]. Cette inquiétude grandissante s'est également traduite par le travail de laboratoires travaillant au développement d'armes anti-drones [2]. Ce n'est donc plus seulement le développement des drones qui est en plein essor mais également tout le secteur qui y est lié, avec la prise de conscience d'un véritable tournant technologique qui nécessite des modifications législatives. C'est dans ce cadre que le Sénat français a récemment adopter une proposition de loi relative au renforcement de la sécurité de l'usage des drones civils [3]. Cette loi a notamment pour effet de rendre obligatoire l'immatriculation des drones à partir d'une masse de $800g$. Cette obligation ne concerne donc pas les drones de plus petites tailles.

Malgré ces inquiétudes, les drones connaissent un fort engouement et font toujours l'objet d'un grand nombre de travaux de recherche.

Micro-drones et bio-mimétisme

Un micro-drone ou MAV (pour micro-air vehicles) est communément défini par une masse maximal de l'ordre du kilogramme et une envergure maximal de l'ordre du décimètre.

Le développement de micro-drones est cependant resté longtemps un problème technologique important. Les techniques de vol utilisées pour des appareils plus gros (voilure fixe ou tournante) ne sont plus guère adaptées à de telles dimensions. D'autre part, les voilures tournantes qui pourraient encore être considérées pour les micro-drones d'au moins quelques centimètres se révèlent très bruyantes et poussent à se tourner vers d'autres alternatives plus discrètes.

La motivation à développer ce type d'appareils se situe dans les nombreuses perspectives et bénéfices qu'ils offrent. En effet, les micro-drones sont pressentis pour de nombreuses applications comme la reconnaissance et surveillance en milieu hostile, la recherche et le sauvetage dans les bâtiments effondrés, en feu, ou suite à des catastrophes naturelles de type tremblements de terre, tsunamis, etc. Des perspectives se dégagent également pour la détection de drogues ou de poisons par les services de contrôle et de douanes.

D'un point de vue prospectif, les micro-drones pourraient également servir de démonstrateur pour des systèmes d'intelligence embarquée, de systèmes multi-senseurs, de démonstrateurs pour des entités autonomes. On pressent aussi leur utilisation pour l'échantillonnage et la mesure de la pollution atmosphérique [4] ou la mesure de l'érosion des sols [5].

Une perspective importante pour les micro-drones consiste dans le développement de systèmes de drones en essaims, potentiellement autonomes, pour la recherche et l'observation mais également pour servir à la pollinisation artificielle [6, 7]. Comme dit précédemment, les drones à ailes battantes présentent une bien plus faible signature acoustique que leurs cousins à voilures tournantes. Il est d'ailleurs envisager d'utiliser cette acoustique directionnelle de faible amplitude [8, 9] pour l'écho-localisation de plusieurs drones membres d'un même essaim.

Sur une ligne différente, l'Agence pour les projets de recherche avancée de défense (DARPA), une unité du département de la Défense des États-Unis a mis en place le projet "Hybrid Insect Micro-Electro-Mechanical Systems". Son objectif est de développer des interfaces insecte-machine en montant des systèmes micro-mécaniques sur des insectes pendant leur phase de métamorphose [10]. Ce projet, censé répondre à des problématiques de surveillance et est le signe que le développement de technologies basées sur le vol des insectes peut prendre de nombreuses formes.

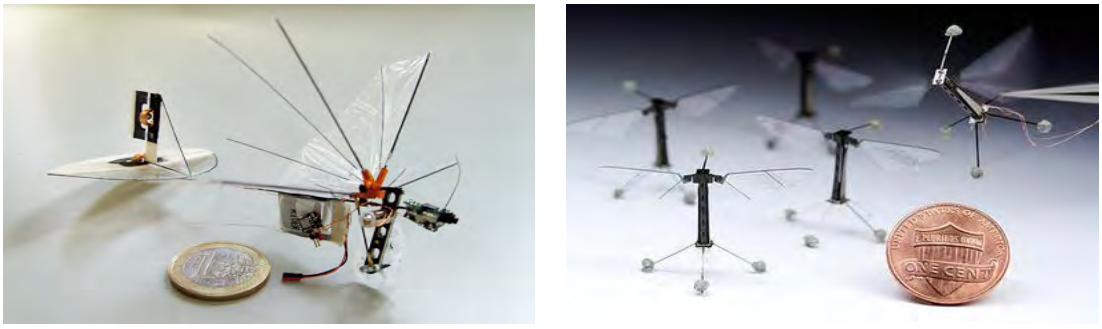
Au travers de ces nombreux projets, il apparaît que la technique de vol la plus adaptée à la taille des micro-drones consiste à reproduire la mécanique de vol des insectes en développant des drones à ailes battantes.

Drones à ailes battantes

Depuis quelques années, plusieurs projets de développements de drones à ailes battantes ont vu le jour.

Parmi eux, on peut citer le projet Delfly [11, 12] qui vise à développer plusieurs micro-drones à ailes battantes équipés de caméras par une approche descendante, c'est-à-dire en construisant des drones de plus en plus petits. Leur plus petit drone, le Delfly Micro montré dans la figure (2a) mesure $10cm$ d'envergure et pèse $3.07g$. Il s'agit du plus petit drone volant contrôlable équipé d'une caméra et d'un vidéo-transmetteur au monde.

On peut également noter le projet Robobee (figure 2b) qui vise à développer une flotte de micro-drones autonomes pour remplir des objectifs de recherche, sauvetage ou



(a) (b)

FIGURE 2 – Micro-drones à ailes battantes : (a) le Delfly Micro, développé à l'Université de Delft et (b) le Robobee, développé à l'Université d'Harvard.

pollinisation artificielle [13]. Un exemplaire de Robobee mesure $3cm$ d'envergure, pèse $80mg$ et ses ailes peuvent battre à 120 battements par minutes.

La supériorité du vol à ailes battantes sur d'autre techniques de vol n'est pour autant pas évidente *a priori*. Pour étudier cette idée, Mueller *et al.* ont comparé les performances de micro-drones à ailes battantes et à ailes fixes [14, 15]. Ils notent que l'utilisation d'ailes flexibles et des cinématiques de vol adéquates peuvent permettre de grandement stabiliser le vol des drones dans des conditions de vol difficiles. D'autre part, c'est le potentiel de manoeuvrabilité qu'offre les ailes battantes qui les rendent quasiment incontournables compte tenu des applications recherchées.

D'un point de vue purement aérodynamique, la mécanique du vol des insectes est encore largement incomprise tant elle regroupe des spécificités parmi les plus difficiles à apprivoiser pour l'esprit humain : le fort côté dynamique, son caractère complètement non linéaire, le couplage fluide/structure, etc.

Plusieurs voies s'ouvrent alors pour favoriser le développement de MAV : de nombreuses études se consacrent au développement de prototypes et simulateurs et à analyser leur fonctionnement pour les rendre viable. Les projets Delfly et Robobee rentrent dans cette catégorie et rassemblent des problématiques complexes et variées parmi lesquelles le bio-mimétisme, le contrôle en temps réel, la miniaturisation et l'actuation ou encore le développement de matériaux intelligents.

Une autre voie plus fondamentale consiste à analyser les mécanismes sous-jacents responsable du vol des insectes. Cette approche permet de découpler plusieurs pans de la physique et repose sur une forte conceptualisation et modélisation des mécanismes en jeu. L'enjeu est d'être capable de prédire le comportement des MAV dès leur conception, en travaillant sur le comportement de systèmes fortement idéalisés.

Aérodynamique des drones : aspects fondamentaux

Dans cette seconde voie, la démarche scientifique consiste dans un premier temps à considérer des situations simplifiées dans le but d'étudier indépendamment l'effet des différents paramètres du problème. Ainsi avant d'étudier des géométries d'ailes réelles on se restreindra à des géométriques « nominales » bi-dimensionnelles, on modélisera la flexibilité/rigidité des ailes par des modèles structurels simples, on dissociera dans un premier temps les problèmes aérodynamiques et acoustiques, etc. Cependant, force est de constater que même en se restreignant à des problèmes simples l'optimisation des performances reste un problème complexe pour lequel beaucoup de points restent incompris.

Un des axes de recherche porte sur les matériaux à utiliser pour les ailes en particulier. Celles-ci doivent être suffisamment rigides pour ne pas se détériorer pendant le vol, et

assurer une bonne durée de vie. Mais elles doivent également être suffisamment souple pour permettre une bonne manoeuvrabilité. Cela impose donc un fort travail sur le choix du matériau, notamment au regard des récents développements sur les matériaux composites. Sauf que la dynamique de vol est fortement liée à la flexibilité des ailes et que le découplage de la dynamique de l'écoulement avec la structure des ailes est loin d'être une évidence.

Et la question de la manoeuvrabilité est primordiale puisqu'il s'agit d'un des objectifs prioritaires des ailes battantes. Il est donc nécessaire de trouver un compromis entre manoeuvrabilité de l'appareil et un contrôle performant.

Symétries et stabilité

Symétries

L'étude des invariances et des symétries se situe à la base de l'analyse physique. Déjà pendant l'Antiquité, on peut citer l'idée d'Anaximandre, rapportée (mais non partagée) par Aristote dans son *Traité du ciel*(II,13) qui expliquait l'immobilité de la Terre par sa position au centre du Cosmos. Selon lui, celle-ci ne peut demeurer qu' « au même endroit à cause de son indifférence » à se déplacer dans une direction plutôt qu'une autre. [16].

Bien que comme Aristote, l'on puisse avoir l'esprit critique sur les conclusions du raisonnement précédent, il illustre une idée mieux connue aujourd'hui comme le « principe de Curie » [17] qui stipule que « *lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits* ». Ce principe constitue une des bases de travail de la cristallographie mais s'applique plus généralement à tous les domaines de la physique, y compris la dynamique des fluides.

De manière analogue au principe de Curie, le théorème de Noether permet d'exprimer qu'il existe une équivalence entre certaines lois de conservation telle que la conservation de l'énergie, et l'invariance du lagrangien d'un système par certaines transformations (dans le cas de l'énergie, invariance par translation temporelle).

La prise en compte de ces deux principes mène à deux idées fondatrices : l'utilisation des invariances d'un problème permet de réduire le nombre de variables aux seules variables pertinentes ; et l'utilisation des symétries permet de réduire la complexité d'un problème, notamment sa taille de résolution.

Dans le domaine de la mécanique des fluides, l'utilisation des invariances et des symétries prend son essor au XIXe siècle avec le début de l'hydrodynamique "théorique". Helmholtz et Kelvin (1871) décrivent l'instabilité de cisaillement de Kelvin-Helmholtz liée à une brisure de symétrie de l'écoulement qui rend celui-ci instationnaire. Peu après, Rayleigh (1895) démontre l'équation qui porte son nom, qui permet d'étudier la stabilité des écoulements non visqueux. Finalement, les travaux de Golubitsky et Stewart [18] permettent d'établir le lien entre la notion de symétrie et la notion de stabilité. Actuellement, les démarches et méthodes numériques de "stabilité" constituent un pan entier de la mécanique des fluides "moderne" au côté de l'expérience et la simulation numérique.

Stabilité en mécanique des fluides

La notion de stabilité constitue constitue ainsi un des piliers de la mécanique des fluides théorique et numérique.

Un des cas de référence les plus classiques, qui a servi à développer et valider une grande partie des concepts associés à la démarche de stabilité, est constitué par l'écoulement autour d'un cylindre bidimensionnel, qui, au fur et à mesure que la vitesse de l'écoulement (mesurée par le nombre de Reynolds) augmente, passe par des états de complexité croissante. Tout d'abord stationnaire à bas Reynolds, cet écoulement subit une

première bifurcation à $Re \approx 47$, menant à un écoulement instationnaire mais périodique en temps, caractérisé par l'apparition d'une allée de tourbillons dite *de von Karman*. Lorsqu'on continue à augmenter le nombre de Reynolds, une deuxième bifurcation se produit à $Re \approx 200$ lorsque l'écoulement devient tridimensionnel. Une série d'autres bifurcations se produit ensuite, conduisant à la perte de la périodicité temporelle, au profit tout d'abord d'une solution quasi-périodique puis d'un régime chaotique.

La première bifurcation peut être analysée par une étude de stabilité linéaire "classique", qui consiste à étudier le comportement de perturbations de faible amplitude par rapport à une solution stationnaire. En pratique la démarche consiste à étudier un écoulement de la forme suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \epsilon \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) e^{\lambda t} \tag{1}$$

Dans cette équation $\mathbf{u}_0$ est le *champ de base*, qui correspond à la solution stationnaire des équations de Navier-Stokes, et les perturbations sont définies sous la forme de *modes propres* $\hat{\mathbf{u}}$ supposés de faible amplitude ($\epsilon \ll 1$) et caractérisés par leur valeur propre λ. Les propriétés de stabilité dépendent du signe de la partie réelle de λ : si $\lambda_r < 0$, toute perturbation par rapport au champ de base décroît, ce dernier est donc dit stable. En revanche si $\lambda_r > 0$, alors la solution va s'éloigner du champ de base, ce dernier est donc dit instable. Dans le cas du cylindre, la perturbation finit par saturer et la solution par converger vers un cycle limite périodique, ce qui définit une bifurcation *de Hopf* .

Pour étudier les bifurcations suivantes apparaissant pour des valeurs de Re autour de 200, l'étude de stabilité linéaire "classique" n'est pas possible et il est nécessaire d'avoir recours à d'autres techniques. Pour étudier la stabilité de problèmes assujettis à une forme de périodicité dans leurs causes ou leurs effets, on peut en particulier utiliser une analyse dite *de Floquet* [19] qui est une généralisation de l'analyse en modes propres introduite ci-dessus. Par exemple, si la solution étudiée est caractérisée par une périodicité en temps, ses propriétés de stabilité peuvent être étudiées en partant d'une décomposition de l'écoulement sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \approx \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t) + \epsilon \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) e^{\lambda t} \tag{2}$$

où $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ est un champ de base supposé périodique en temps (*i.e.* $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t+T) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$), $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ un *mode de Floquet* supposé lui aussi périodique en temps, et λ une valeur propre généralisée. Le critère de stabilité du champ de base périodique s'établit alors comme dans le cas précédent en considérant la partie réelle de λ. Notons que la méthode de Floquet permet de la même manière de considérer des instabilités liées à des brisures de périodicité spatiale [20, 21] et non temporelle.

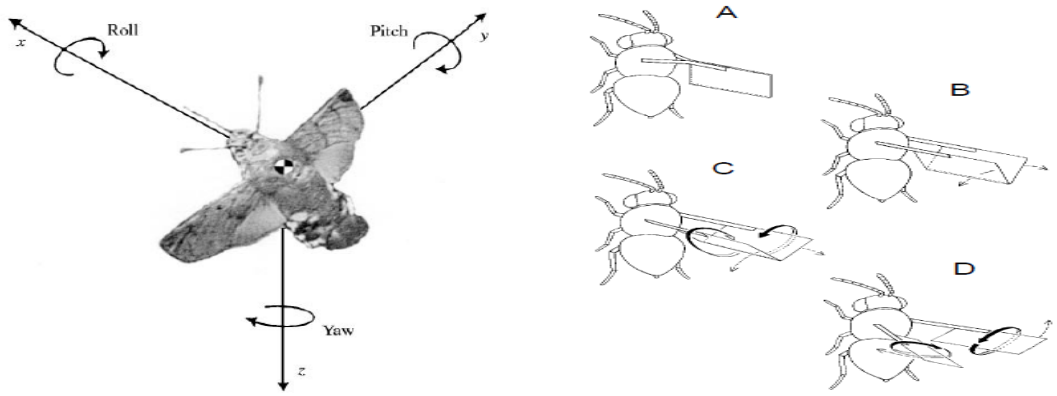
L'étude de la stabilité d'un cylindre en oscillation périodique forcée par Barkley *et al.* [22] constitue aujourd'hui un cas de référence dans le domaine des études de Floquet en mécanique des fluides. Le fait qu'un cylindre en oscillation périodique soit associé à des brisures de symétries a constitué un sujet de recherche pendant de nombreuses années [23, 24, 25]. Les travaux de Barkley *et al.* ont permis d'identifier la déstabilisation de modes de Floquet responsables des brisures de symétries observées.

Au travers de ces considérations, il parait nécessaire de se poser la question de l'étude des écoulements générés par des ailes battantes au travers d'analyses de stabilité de Floquet. On peut entre autre se demander si à partir de ces études, il est possible de mettre au jour des mécanismes influençant leurs performances en vol, positivement ou non.

Etat de l'art

Bio-mimétisme et ailes battantes

L'étude du vol des insectes et les premiers travaux qui traitent de bio-mimétisme ne sont pas nouveaux. Dès 1975, Lighthill analyse les aspects aérodynamiques du vol des animaux [26]. Le classement des animaux en fonction de leur taille, leur masse et leur vitesse permet d'identifier que ceux-ci se déplacent quasiment tous en utilisant un battement rapide de leurs ailes, en dessous d'une certaine taille. Thomas & Taylor étudient également la dynamique de vol des animaux [27, 28]. Leurs travaux pointent du doigt que bien que le vol à ailes battantes semblent *a priori* être singulièrement instable, il ne l'est pas forcément. Ils utilisent des approches quasi-statiques pour analyser la stabilité du vol à ailes battantes, en décrivant les efforts statiques tri-dimensionnels subis par les ailes (figure 3a). Dans certains cas, les auteurs notent qu'il est satisfaisant d'abandonner une certaine stabilité au profit d'une meilleure manoeuvrabilité, notamment pendant la phase d'atterrissage. Pour mieux correspondre au développement de MAV, Sane & Dickinson [29, 30] se sont concentrés sur le vol des insectes, et ont cherché à modéliser leur dynamique de vol à ailes battantes. Contrairement à Thomas & Taylor, ils utilisent une modélisation dynamique de plusieurs mouvements de battement d'ailes. Cette prise en compte de la dynamique leur permet d'améliorer les modèles quasi-statiques existants pour mieux prédire les efforts subis par les ailes pendant le vol. Dudley & Ellington travaillent également sur les mécanismes de vol des insectes et sur les applications que cela implique pour les MAV [31, 32]. Ils filment le vol de bourdons et se servent de leur observations pour reconstruire la cinématique de battement des ailes. Cette reconstruction leur sert alors de base pour analyser les gains en efforts sur des mouvements particuliers comme le mécanisme de "fling" (figure 3b) lors duquel un insecte joint ses ailes avant de les séparer en les ouvrant. Ce mécanisme permet alors de profiter d'un gain de portance important comparé aux limites traditionnelles. Les interactions entre les ailes et les tourbillons qu'elles émettent sont alors identifiées comme centrales dans les gains de performances observés.



(a) (b)

FIGURE 3 – (a) Modélisation statique d'un animal volant [28]. (b) "Fling mechanism" d'une petite guèpe [32].

Sillages de tourbillons d'ailes battantes

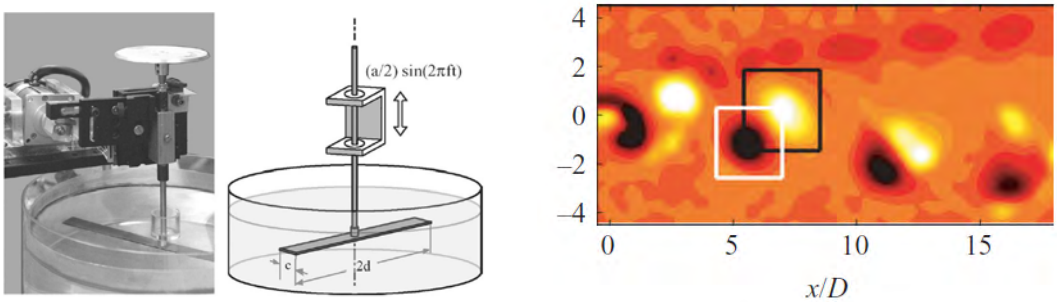
Plusieurs études portent alors sur les liens à établir entre le battement des ailes, la structure du sillage de tourbillons qui est produit et les efforts aérodynamiques qui en résulte. Anderson *et al.* étudient expérimentalement l'efficacité propulsive des ailes battantes [33]. A l'aide d'un système d'aile monté dans une soufflerie en tangage passif, ils

observent jusqu'à 87% d'efficacité propulsive pour les ailes lorsque la formation du sillage est optimale. Par ailleurs, leurs observations les conduisent à conclure qu'une meilleure efficacité est obtenue lorsque le sillage prend la structure d'une allée de von-Karman inversée. Cleaver *et al.* ont conduit de nombreuses études expérimentales [34, 35, 36, 37] et numériques [35] sur des ailes battantes, la dynamique de leur sillages, l'influence de l'angle d'attaque, de la géométrie de l'aile, etc. A l'aide de mesures PIV (Particle Image Velocimetry) et de simulations numériques, ils étudient comme Andro *et al.* [38] le lien entre la portance et le tourbillon de bord d'attaque (LEV pour leading edge vortex). Ils observent alors des pics de portance en résonance avec la fréquence du sillage. Ils observent également des modifications de la périodicité de l'écoulement. Au lieu d'avoir des sillages dont la périodicité est la même que le battement imposé, certains sillages deviennent quasi-périodiques ou apériodiques. Cleaver *et al.* observent également que le sillage propulsif d'une aile battante peut dévier de sa trajectoire. Ils décrivent deux modes possibles suivant si le sillage est dévié vers le haut ou le bas, et montrent que cette déviation est associée à une création de portance moyenne non nulle sur l'aile. Andro & Jacquin conduisent des simulations numériques directes d'une aile battante en incidence[38]. Ces simulations permettent l'analyse et le découplage de la contribution de trois mécanismes aux efforts aérodynamiques : l'aspiration du LEV, la réaction de masse ajoutée et l'interaction lors de la convection du LEV. Ils observent également des états quasi-périodiques pour certaines valeurs d'angle d'incidence et de fréquence de battement, qu'ils estiment liées à des instabilités globales du sillage.

Ailes battantes auto-propulsives

Néanmoins, toutes ces études sont conduites alors que la cinématique de l'aile est imposée. En pratique pour les insectes et les micro-drones, c'est le battement des ailes qui est responsable de la propulsion. Pour étudier quels mécanismes permettent aux ailes battantes de générer leur mouvement d'avance, Vandenberghe *et al.* ont mis au point une expérience ingénieuse [39, 40]. Ils ont introduit dans une cuve circulaire une aile symétrique, montée sur un axe, et subissant un mouvement de pillonement forcé (comme représenté sur la figure 4a). Ils ont alors observé que pour certaine valeurs de fréquence et d'amplitude de battement, l'aile se mettait à tourner dans la cuve, signe à la fois qu'une symétrie était brisée, mais également de l'apparition d'une force de poussée. Comme noté auparavant par Childress [41], les brisures de symétrie associées à un mouvement de battement d'ailes est une stratégie habituelle pour la locomotion animale de vol ou de nage. Par ailleurs, Alben & Shelley ont travaillé à reproduire ce phénomène d'auto-propulsion au travers de simulations numériques bi-dimensionnelles [42]. En travaillant dans une large gamme de fréquence de battement et de densité de l'aile, ils ont de plus identifié un état correspondant à des mouvements de va-et-vient autour d'une position d'équilibre, mais également des états chaotiques de mouvements incohérents. Spagnolie *et al.* ont apporté plus de compréhensions à ce problème en travaillant expérimentalement et numériquement sur une aile libre en tangage en plus de son degré de liberté latéral [43]. Ce degré de liberté supplémentaire de tangage permet de simuler efficacement une flexibilité supplémentaire dans les mouvements de l'aile, tout en gardant un modèle de solide rigide. En plus d'observer les états mentionnés précédemment, ils ont observés des états d'hystérésis ou la direction d'avance dépend de l'historique du mouvement de l'aile. Ils notent également que les pics de vitesse d'avance atteints par l'aile correspondent à des fréquences de battement proches de la fréquence de résonance du système et que le rapport d'aspect de l'aile joue un rôle clé dans la cohérence du mouvement de l'aile. Elston *et al.* ont dans le même temps travaillé à traiter de la stabilité de ce phénomène, notamment à travers des études de Floquet [44, 45]. Leurs analyses montrent l'existence de modes synchrones

et quasi-périodiques qui brisent la symétrie spatiale de l'écoulement. Dernièrement, Deng *et al.* [46] ont montré l'influence du rapport d'aspect sur l'apparition de ces modes et leur effet. Ils ont conduits des simulations avec la possibilité (ou non) pour l'aile de se déplacer dans la direction de propulsion. Leurs résultats montrent que ce degré de liberté supplémentaire peut conduire à la déstabilisation ou au contraire la restabilisation de l'écoulement, en fonction de leur nature (synchrone ou quasi-périodiques) et du rapport d'aspect de l'aile.



(a) (b)

FIGURE 4 – (a) Installation expérimentale axisymétrique menant à l'auto-propulsion de l'aile battante [40]. (b) Visualisation d'un sillage propulsif dévié [47].

Déviation du sillage d'une aile battante

Enfin, lorsqu'une aile qu'elle soit auto-propulsée ou non, se trouve dans un mouvement d'avance, elle génère un sillage qui peut lui aussi briser certaines symétries. A notre connaissance, la première observation expérimentale de sillages asymétriques remonte aux travaux de Bratt [48]. La brisure de symétrie se manifeste par une réorganisation du sillage, l'allée de tourbillons prenant la forme d'une série de dipôles qui se propagent préférentiellement soit vers le bas (comme illustré sur la figure 4*b*), soit vers le haut. Plus tard, Jones *et al.* font également cette observation en étudiant des ailes battantes en mouvement de pillonement [49, 50]. Principalement, leurs travaux portent sur l'analyse de la transition entre sillage traînant et sillage propulsif, également connu sous le nom d'effet Knoller-Betz. Ils observent néanmoins que les deux sens de déviation sont possibles pour les mêmes valeurs de paramètres de contrôle, que ce soit expérimentalement ou numériquement. Cette déviation du sillage est également reproduite par Cleaver *et al.* qui dissocient les deux sens de la déviation en attribuant le choix de cette direction aux conditions initiales [34]. Godoy-Diana *et al.* travaillent à reproduire expérimentalement cette déviation du sillage dans une large gamme de fréquence et d'amplitude de battement [51, 47]. Leurs expériences leur permettent par ailleurs de construire un modèle *a posteriori* qui relie la déviation du sillage à sa structure, plus particulièrement à l'espacement entre les tourbillons et leur circulation. Zheng *et al.* conduisent des simulations numériques [52] permettant de compléter les travaux de Godoy-Diana *et al.*, notamment en développant leur modèle pour prendre en compte à la fois les effets stabilisant et déstabilisant dans le sillage. Calderon *et al.* conduisent des simulations numériques tri-dimensionnelles pour des ailes de longueur finie [53]. Leur étude les conduit à conclure à l'absence de cette déviation du sillage dans ce cas de figure précis. Ils observent en effet que les tourbillons de bout d'aile qui se forment, provoquent une déstructuration du sillage, conduisant à une disparition de la déviation. A ce stade, il est difficile de savoir si la déviation du sillage, observée principalement dans un cadre bi-dimensionnel, peut exister en trois dimensions lorsque l'aile est finie. A ce sujet, les travaux de Deng *et al.* portent sur la transition de la

déviation du sillage bi-dimensionnel à un écoulement tri-dimensionnel lorsque l'aile est de longueur infinie [54]. Ils étudient la stabilité du sillage dévié vis-à-vis de perturbations tri-dimensionnelles qui briseraient l'invariance par translation le long de l'aile. Leurs résultats permettent d'identifier un mode qui devient instable et conduit à un état tri-dimensionnel. La disparition de la déviation pour des ailes flexibles a également été étudiée par Marais *et al.* [55] puis par Zhu *et al.* [56]. Ces derniers ont également montré que des ailes très flexibles pouvaient au contraire enclencher la déviation en renforçant l'intensité des tourbillons émis dans le sillage.

Organisation du manuscrit

Au regard des différentes études parues, plusieurs phénomènes relatifs à la stabilité des sillages périodiques d'ailes battantes retiennent notre attention. Bien qu'ils soient décrits et documentés, les mécanismes responsables de ces phénomènes restent flous. L'objectif du présent manuscrit est donc de montrer que : (i) la déviation du sillage d'une aile battante résulte d'une instabilité linéaire de l'écoulement brisant sa symétrie spatio-temporelle, (ii) l'apparition de sillages quasi-périodiques lorsqu'une aile bat à grand angle d'incidence résulte d'instabilités brisant la périodicité de l'écoulement et (iii) les instabilités brisant la symétrie spatiale pour une aile auto-propulsée mènent à des mouvements d'avance cohérents et incohérents.

Le manuscrit est organisé en cinq chapitres. La chapitre 1 est consacrée à l'introduction des outils théoriques et numériques utilisée au cours de la thèse. En premier lieu, les équations de Navier-Stokes sont traduites dans un référentiel non inertiel, dans le but de permettre une résolution numérique aisée des problèmes traités par la suite. On y décrit également la méthode d'Arnoldi, utilisée pour traiter la stabilité des écoulements de sillages. Enfin, on y détaille la méthodologie utilisée pour décrire et caractériser les solutions de simulations numériques. Le chapitre 2 permet d'introduire plusieurs méthodes originales permettant de calculer des champs de base périodiques instables. Ces méthodes reposent sur l'exploitation des propriétés de symétrie et de périodicité que sont censés vérifier les champs de base.

Les chapitres 3 et 4 sont tous deux consacrés aux études de sillages périodiques. Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la déviation du sillage propulsif produit par une aile battante. On montre que cette déviation résulte d'une bifurcation linéaire de l'écoulement, liée à une brisure de symétrie spatio-temporelle. Le chapitre 4 traite de la stabilité des solutions périodiques d'une aile battante à grand angle d'incidence et faible fréquence de battements. Dans cette gamme de paramètres, plusieurs bifurcations sont observées et les instabilités associées sont identifiées et décrites.

Enfin, le chapitre 5 porte sur l'étude de la stabilité d'une aile battante dans un fluide au repos. On montre également l'effet de l'ajout d'un degré de liberté solide sur la stabilité du problème, et l'influence de la densité de l'aile.

.

Chapitre 1

Outils théoriques et numériques

Lorsqu'on étudie un écoulement de fluides autour d'un corps solide, on pense traditionnellement au point de vue de l'expérimentateur travaillant avec une soufflerie ou un canal hydrodynamique. Dans un tel cas de figure, on a un corps souvent fixe dans le référentiel du laboratoire et un écoulement amont que l'on impose. Pour le numéricien qui cherche à reproduire ces résultats expérimentaux, l'approche la plus intuitive est d'utiliser le même formalisme, à savoir résoudre les équations qui gouvernent le mouvement du fluide, dans le référentiel du laboratoire. Cependant, lorsque le corps solide est en mouvement, soit par un mouvement de corps rigide (qu'il soit passif ou actif), soit parce qu'il se déforme, il devient nécessaire de prendre en compte ces mouvements numériquement.
De très nombreuses méthodes ont été mises au point pour prendre en compte ces interactions entre le fluide et la structure du corps immergé. L'*Immersed Boundary Method* (IBM) [57, 58] permet de résoudre ce type de problème en utilisant une grille cartésienne fixe pour les variables eulériennes fluides et une grille mobile pour les variables lagrangiennes solides. De nombreuses variantes de cette méthode existent, notamment l'*Immersed Interface Method* (IIM) développée par Leveque *et al* [59]. Celle-ci permet notamment d'introduire des conditions d'interfaces plus complexes que celles traditionnellement utilisées dans la méthode IBM (à savoir des conditions de sauts pour la vitesse et la pression). De la même manière, Glowinski *et al.* développent la *Fictitious Domain Method* (FDM) pour résoudre des écoulements avec des particules solides en suspension [60, 61].
On compte également des méthodes dont l'idée centrale est une déformation de la grille de résolution du problème. La méthode *Arbitrary Lagrangian Eulerian* (ALE) [62] consiste ainsi à travailler avec une seule grille qui regroupe le domaine fluide et le domaine solide. Les problèmes fluides et solides sont résolus sur leurs domaines respectifs et deux méthodes sont envisageables pour prendre en compte le déplacement et la déformation du solide : la première méthode consiste à déformer la grille en permanence au fur et à mesure du calcul ; la deuxième méthode consiste à travailler avec une grille de référence et inclure le déplacement local de cette grille dans les inconnues du problème.
Enfin, les travaux de Mougin *et al.* [63, 64] ont consisté à mettre au point des méthodes de changement de référentiel. Les équations fluides sont résolues dans un autre référentiel que celui du laboratoire, choisi en fonction des spécificités du problème. Le référentiel de résolution est lié à la cinématique de la structure solide et est donc souvent non inertiel.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la mise en place de cette dernière méthode. Les équations de Navier-Stokes qui gouvernent le mouvement du fluide sont réécrites dans un référentiel non-inertiel qui bouge avec l'aile. La mise en place de cette méthode est validée par la reproduction de résultats numériques issus de la littérature.

Une part importante de cette thèse est consacrée à l'étude de la stabilité d'écoulements. En particulier, on étudie la dynamique d'écoulements générés par des ailes battantes animées d'une cinématique périodique en temps. Analyser la stabilité de ces systèmes nous conduit donc à utiliser les méthodes d'analyses de stabilité linéaire de Floquet, consacrées aux systèmes dynamiques périodiques. La deuxième partie du chapitre est consacrée à la présentation des analyses de stabilité de Floquet. Par ailleurs, on y détaille également la mise en place de la méthode d'Arnoldi. Cette méthode numérique est utilisée au travers du manuscrit pour résoudre les problèmes de stabilité de Floquet. La mise en place de cette méthode est validée par la reproduction de résultats numériques issus de la littérature.

Les écoulements d'ailes battantes, de par leur caractère instationnaire, mènent à l'existence de solutions dont la périodicité diffère de celle de la cinématique des ailes. Dans le contexte de la stabilité des écoulements d'ailes battantes, il est donc nécessaire de se munir de critères et d'outils pour analyser la périodicité des écoulements tourbillonaires. La troisième et dernière partie de ce chapitre permet d'introduire plusieurs outils théoriques et numériques utilisés pendant la thèse pour caractériser la périodicité des écoulements. On y introduit également des outils utilisés pour analyser la structure tourbillonaire des écoulements d'ailes battantes.

1.1 Résolution des équations de Navier-Stokes dans un référentiel non-inertiel

On peut dans un premier temps préciser quelles sont les caractéristiques du problème que nous allons chercher à résoudre. On étudie ici l'écoulement bi-dimensionnel d'un fluide

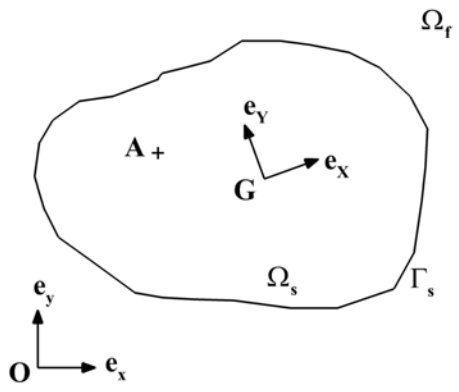


FIGURE 1.1 – Schéma du passage du référentiel absolu au référentiel relatif.

autour d'un objet Ω_s considéré rigide, qui est potentiellement animé de mouvements de corps rigide. Dans l'ensemble de cette thèse, les objets considérés sont des ailes. Les équations de Navier-Stokes qui permettent d'étudier la dynamique du fluide autour de

cette aile se présentent ainsi dans le référentiel du laboratoire, considéré galiléen :

$$\partial_t \boldsymbol{u} = -\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} - \nabla p + Re^{-1}\Delta\boldsymbol{u} \qquad in\ \Omega_f(t) \tag{1.1a}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \qquad in\ \Omega_f(t) \tag{1.1b}$$

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_s(t)) = \boldsymbol{u}_s(t) \qquad on\ \Gamma_s(t) \tag{1.1c}$$

$$(\boldsymbol{u}, p)(t=0) = (\boldsymbol{u}_0, p_0) \qquad in\ \Omega_f(t) \tag{1.1d}$$

où $\boldsymbol{u} = (u, v)^T$ représente le vecteur vitesse dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_l(0, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$, p représente la pression, Re est un nombre de Reynolds, $\Omega_f(t)$ est le domaine fluide autour de l'aile et $\Gamma_s(t)$ est la frontière entre le fluide et le solide. En détail, l'équation (1.1a) gouverne la dynamique du champ de vitesse, l'équation (1.1b) permet d'imposer une divergence nulle de la vitesse, pour résoudre ce problème dans un cadre incompressible. L'équation (1.1c) est la condition limite de continuité du champ de vitesse à la surface de l'aile et l'équation (1.1d) représente les conditions initiales du problème. Un des points importants qui ressort de cette formulation est que l'aile étant mobile, le domaine fluide et la frontière qui sépare le fluide et le solide dépendent tous les deux du temps. Dès lors, il est nécessaire de prendre en compte cette dépendance si on veut résoudre le problème numériquement. Lorsque l'aile est rigide, il est toujours possible de trouver un référentiel dans lequel l'aile est fixe, et la frontière solide dépend uniquement de variables indépendantes du temps. On peut alors introduire deux autres référentiels : le référentiel tournant $\mathcal{R}_t(O, \boldsymbol{e}_X(t), \boldsymbol{e}_Y(t))$ et le référentiel attaché à l'aile en rotation et en translation $\mathcal{R}_a(A, \boldsymbol{e}_X(t), \boldsymbol{e}_Y(t))$ où A est le centre de rotation de l'aile. On note également G le centre de masse de l'aile, différencié de A. En introduisant l'angle de rotation $\theta(t)$ de l'aile, on obtient les relations suivantes entre les vecteurs unitaires des différents référentiels :

$$\begin{array}{lcl} \boldsymbol{e}_X(t) = cos(\theta(t))\boldsymbol{e}_x + sin(\theta(t))\boldsymbol{e}_y & , & \boldsymbol{e}_x = cos(\theta(t))\boldsymbol{e}_X(t) - sin(\theta(t))\boldsymbol{e}_Y(t) \\ \boldsymbol{e}_Y(t) = -sin(\theta(t))\boldsymbol{e}_x + cos(\theta(t))\boldsymbol{e}_y & , & \boldsymbol{e}_y = sin(\theta(t))\boldsymbol{e}_X(t) + cos(\theta(t))\boldsymbol{e}_Y(t) \end{array} \tag{1.2}$$

Puisque les vecteurs unitaires des référentiels $\mathcal{R}_t$ et $\mathcal{R}_a$ dépendent du temps, on peut calculer leurs dérivées temporelles

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_X}{\mathrm{d}t} = \Omega\boldsymbol{e}_Y \quad , \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_Y}{\mathrm{d}t} = -\Omega\boldsymbol{e}_X \quad , \quad \Omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1.3}$$

On considère alors un point M à la surface de l'aile. Dans le référentiel $\mathcal{R}_l$, sa position est donnée par

$$\boldsymbol{OM} = x_M(t)\boldsymbol{e}_x + y_M(t)\boldsymbol{e}_y \tag{1.4a}$$

$$= \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AM} \tag{1.4b}$$

$$= x_A(t)\boldsymbol{e}_x + y_A(t)\boldsymbol{e}_y + (X_M\boldsymbol{e}_X + Y_M\boldsymbol{e}_Y) \tag{1.4c}$$

En utilisant alors les relations (1.2), on obtient

$$\boldsymbol{x}_M(t) - \boldsymbol{x}_A(t) = \boldsymbol{R}(\theta(t))\boldsymbol{X}_M \tag{1.5}$$

où la matrice de rotation $\boldsymbol{R}$ est la suivante

$$\boldsymbol{R}(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

De manière évidente, on a $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$. La matrice de rotation transforme un vecteur défini dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_t$ en un vecteur défini dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_l$.

$$\boldsymbol{X}_M = \boldsymbol{R}^T(\theta(t))\,(\boldsymbol{x}_M(t) - \boldsymbol{x}_A(t)) \tag{1.7}$$

Par ailleurs, cette relation n'est pas seulement valide pour un point à la frontière solide mais pour n'importe quel point dans les domaines fluide et solide.

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{R}^T(\theta(t))\,(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_A(t)) \tag{1.8}$$

Dans le référentiel de l'aile $\mathcal{R}_a$, la position $\boldsymbol{X}_M$ de n'importe quel point à la surface de l'aile ne dépend pas du temps. On peut donc définir de nouvelles grandeurs $(\tilde{\boldsymbol{u}}, \tilde{p}$ qui dépendent des coordonnées spatiales (X, Y) dans le référentiel $\mathcal{R}_a$.

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(X, Y, t) = \boldsymbol{u}(x, y, t) \quad , \quad \tilde{p}(X, Y, t) = p(x, y, t) \tag{1.9}$$

De plus, le vecteur vitesse $\tilde{\boldsymbol{U}} = (\tilde{U}, \tilde{V})$ dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_t$ est relié au vecteur vitesse dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_l$ par la relation suivante

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{R}^T(\theta)\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{1.10}$$

Pour continuer à mettre en place la méthode, nous allons dans un premiers exprimer les équations en fonction des coordonnées spatiales (X, Y) dans le référentiel de l'aile, puis nous allons projeter les équations dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_t$.

1.1.1 Écriture des équations avec de nouvelles coordonnées spatiales

Nous allons donc exprimer les équations en fonction des coordonnées spatiales (X, Y). On peut commencer par l'opération de dérivée temporelle. Pour cela, on considère deux champs scalaires $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ et $\tilde{\psi}(\boldsymbol{X}, t)$ qui dépendent des coordonnées spatiales des référentiels $\mathcal{R}_l$ et $\mathcal{R}_a$ respectivement, tels que $\psi(\boldsymbol{x}, t) = \tilde{\psi}(\boldsymbol{X}, t)$. La dérivée partielle de ψ par rapport au temps peut alors s'écrire

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} + \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} \cdot \tilde{\nabla}\right)\tilde{\psi} \tag{1.11}$$

Pour continuer, on a alors besoin de déterminer la dérivée temporelle des coordonnées spatiales $\boldsymbol{X}$. Pour ce faire, on peut utiliser l'équation (1.8)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{R}^T(\theta(t))\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_A}{\mathrm{d}t} - \Omega\boldsymbol{\Phi}^T(\theta(t))\,(\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{x}_A(t)) \tag{1.12}$$

où la matrice $\boldsymbol{\Phi}$ se déduit de la dérivée temporelle de la matrice de rotation $\boldsymbol{R}$ de telle sorte qu'elle s'écrit

$$\boldsymbol{\Phi}(\theta) = \begin{pmatrix} sin(\theta) & cos(\theta) \\ -cos(\theta) & sin(\theta) \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

En introduisant le vecteur vitesse $\boldsymbol{u}_A = \left(\frac{\mathrm{d}x_A}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y_A}{\mathrm{d}t}\right)^T$ du centre de rotation de l'aile, l'équation (1.12) devient

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = -\boldsymbol{R}^T(\theta)\boldsymbol{u}_A - \Omega\boldsymbol{\Phi}^T(\theta)\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{X} \tag{1.14}$$

En développant le terme de droite de cette équation, on en déduit que

$$\Omega \boldsymbol{\Phi}^T(\theta)\boldsymbol{R}(\theta)\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{X} \tag{1.15}$$

où le vecteur rotation est défini par $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \boldsymbol{e}_z$. De plus, le vecteur vitesse $\boldsymbol{U}_A = (U_A, V_A)^T$ du centre de rotation de l'aile s'écrit dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_t$

$$\boldsymbol{U}_A = \boldsymbol{R}^T(\theta)\boldsymbol{u}_A \tag{1.16}$$

Lorsqu'on incorpore les propriétés (1.15) et (1.16) dans l'équation (1.14), on obtient alors la relation de Varignon [65] qui stipule que

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = -\left(\boldsymbol{U}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{X}\right) \tag{1.17}$$

À ce stade, il est important de noter que tout le développement ci-dessus a été fait en utilisant le centre de rotation A comme point de référence pour le référentiel attaché à l'aile et que ce choix n'est pas anodin. Si l'on essaie de reproduire le même raisonnement avec le centre de masse G comme référence, le vecteur vitesse $\boldsymbol{u}_G$ (et donc aussi $\boldsymbol{U}_G$) dépendrait de Ω. Le point A est le seul point du solide dont le vecteur vitesse est complètement indépendant de la rotation de corps rigide du solide. C'est pour découpler la translation et la rotation du solide qu'on utilise ce point comme référence. L'expression (1.17) traduit l'utilisation d'un torseur cinématique couplant un pivot de centre A et une glissière exprimée au même point. Elle exprime tous les mouvements de corps rigides du solide dans le plan. Cette expression est également connue comme la vitesse de déplacement du maillage dans la formulation ALE. Finalement, on introduit la relation (1.17) dans l'équation (1.11) pour obtenir

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} - \left[\left(\boldsymbol{U}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{X}\right) \cdot \tilde{\nabla}\right] \tilde{\boldsymbol{u}} \tag{1.18}$$

On peut maintenant passer aux opérateurs spatiaux. On reprend les champs scalaires ψ et $\tilde{\psi}$ pour écrire leurs dérivées spatiales au premier ordre

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = cos\left(\theta\right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X} - sin\left(\theta\right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y} \tag{1.19a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = sin\left(\theta\right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X} + cos\left(\theta\right) \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y} \tag{1.19b}$$

De cette façon, on peut directement obtenir l'expression du gradient de pression

$$\nabla p = \boldsymbol{R}(\theta)\tilde{\nabla}\tilde{p} \tag{1.20}$$

L'opération de divergence de la vitesse demeure inchangée par la modification des coordonnées spatiales (preuve en annexe (B))

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{U}} \tag{1.21}$$

De la même manière, l'opérateur Laplacien et le terme d'advection restent eux aussi inchangés par le changement de coordonnées (preuve en annexe (B))

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial Y^2} = \tilde{\Delta}\tilde{\psi} \tag{1.22}$$

et

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} = \left(\tilde{\boldsymbol{U}}\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{1.23}$$

En rassemblant toutes ces modifications, on obtient

$$\partial_t\tilde{\boldsymbol{u}} = -\left(\left(\tilde{\boldsymbol{U}} - (\boldsymbol{U}_A + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{X})\right)\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{R}(\theta)\tilde{\nabla}\tilde{p} + Re^{-1}\tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{1.24a}$$

$$\tilde{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{U}} = 0 \tag{1.24b}$$

Cette formulation n'est pas pratique parce qu'elle mélange le vecteur vitesse dans le référentiel du laboratoire $\tilde{\boldsymbol{u}}$ et dans le référentiel tournant $\tilde{\boldsymbol{U}}$. Sans compter qu'il faut également compter la présence de la matrice de rotation $\boldsymbol{R}$. Pour pallier ce problème, nous allons projeter ces équations dans le référentiel tournant.

1.1.2 Projection des équations dans le référentiel tournant

On peut commencer par considérer la dérivée temporelle du champ de vitesse et noter que

$$\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{R}(\theta)\tilde{\boldsymbol{U}}\right) = \boldsymbol{R}(\theta)\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial t} - \Omega\boldsymbol{\Phi}(\theta)\tilde{\boldsymbol{U}} \tag{1.25}$$

Pour projeter les différents termes de l'équation (1.24) dans le référentiel tournant, il suffit d'appliquer la relation (1.10). Pour la dérivée temporelle, cela donne

$$\boldsymbol{R}^T(\theta)\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{u}}}{\partial t} = \boldsymbol{R}^T(\theta)\boldsymbol{R}(\theta)\frac{\partial\tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial t} - \Omega\boldsymbol{R}^T(\theta)\boldsymbol{\Phi}(\theta)\tilde{\boldsymbol{U}} \tag{1.26a}$$

$$= \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{U}}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}\times\tilde{\boldsymbol{U}} \tag{1.26b}$$

La projection du terme d'advection laisse invariante la vitesse de convection pour donner

$$\boldsymbol{R}^T(\theta)\left(\left(\tilde{\boldsymbol{U}} - (\boldsymbol{U}_A + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{X})\right)\cdot\nabla\right)\tilde{\boldsymbol{u}} = \left(\left(\tilde{\boldsymbol{U}} - (\boldsymbol{U}_A + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{X})\right)\cdot\nabla\right)\tilde{\boldsymbol{U}} \tag{1.27}$$

La projection du gradient de pression permet d'éliminer la présence de la matrice de rotation dans l'équation

$$\boldsymbol{R}^T(\theta)\boldsymbol{R}(\theta)\tilde{\nabla}\tilde{p} = \tilde{\nabla}\tilde{p} \tag{1.28}$$

Enfin, le terme de diffusion devient

$$\boldsymbol{R}^T(\theta)Re^{-1}\tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{u}} = Re^{-1}\tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{U}} \tag{1.29}$$

On peut finalement rassembler toutes ces contributions pour obtenir les équations de Navier-Stokes projetées dans le référentiel tournant

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_t\tilde{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{\Omega}\times\tilde{\boldsymbol{U}} &= -\left(\left(\tilde{\boldsymbol{U}} - (\boldsymbol{U}_A + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{X})\right)\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{\boldsymbol{U}} - \tilde{\nabla}\tilde{p} + Re^{-1}\tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{U}} && (1.30a)\\ \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\boldsymbol{U}} &= 0 && (1.30b)\end{aligned}}$$

Cette fois, il n'apparaît plus que le vecteur vitesse dans le référentiel tournant. On a également éliminé la présence de la matrice de rotation $\boldsymbol{R}$. Les conséquences et avantages de l'utilisation d'une telle formulation sont discutés dans la partie suivante. Dans les autres chapitres du document, cette équation est rappelée et utilisée à plusieurs reprises sous une forme allégée où la vitesse $\tilde{\boldsymbol{U}}$ est notée $\boldsymbol{u}$. Il s'agit bien à chaque fois de la vitesse absolue du fluide exprimée dans le référentiel tournant en fonction des coordonnées spatiales dans

le référentiel de l'aile.

1.1.3 Prise en compte de l'incidence de l'écoulement amont

1.1.4 Conséquences et avantages de la méthode

Plusieurs commentaires peuvent être faits sur cette formulation. On remarque déjà que deux termes apparaissent dans les équations de quantité de mouvement en plus des termes habituels. Le premier est le terme de rotation $\boldsymbol{\Omega} \times \tilde{\boldsymbol{U}}$ qui prend en compte la rotation de l'aile et qui est donc nul quand celle-ci est en translation pure, ce qui serait par exemple le cas d'une aile fixe d'avion dans un écoulement amont uniforme. Ce terme joue le même rôle que le terme d'accélération de Coriolis du fluide que l'on retrouve en calculant la vitesse relative du fluide dans un référentiel relatif. Le second terme est en fait une modification de la vitesse d'advection $\tilde{\boldsymbol{U}} - (\boldsymbol{U}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{X})$, toujours pour prendre en compte le déplacement de l'aile, à la fois avec sa vitesse de translation pure $\boldsymbol{U}_A$ et sa rotation pure autour de A. Ce terme supplémentaire correspond à la vitesse de maillage que l'on retrouve dans les formulations ALE [62]. Avec ces changements, la résolution des équations de Navier-Stokes se fait désormais dans un référentiel non-inertiel. Pour obtenir les champs de vitesse et de pression dans le référentiel, considéré inertiel, du laboratoire, il suffit de projeter les solutions $\tilde{\boldsymbol{U}}$ et $\tilde{p}$ dans le référentiel du laboratoire en utilisant les relations (1.9) et (1.10).
Une conséquence supplémentaire de ce changement de référentiel, qui a pour l'instant été omise est la modification des conditions limites à prendre en compte. Pour les obtenir, il suffit d'appliquer la même procédure en modifiant les coordonnées spatiales, puis en projetant dans le référentiel tournant. Par exemple, si on regarde comment est affectée la condition limite de non-glissement à la surface de l'aile, on a

$$\boldsymbol{u}_s(x, y, t) = \boldsymbol{u}_A + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_A) \tag{1.31a}$$
$$= \boldsymbol{u}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{X} \tag{1.31b}$$
$$= \tilde{\boldsymbol{u}}_s(X, Y, t) \tag{1.31c}$$

Et lorsqu'on projette cette relation dans le référentiel tournant, on obtient à l'aide de la relation (1.16)

$$\tilde{\boldsymbol{U}}_s(X, Y, t) = \boldsymbol{R}^T(\theta)\tilde{\boldsymbol{u}}_s(X, Y, t) = \boldsymbol{U}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{X} \tag{1.32}$$

Enfin, il convient de faire remarquer que le gros avantage de cette formulation est d'avoir désormais un problème à résoudre qui dépend de coordonnées spatiales fixes dans le temps. D'un point de vue numérique, cela veut dire qu'on pourra utiliser un maillage fixe et unique pour résoudre ce problème, et cela, quel que soit le mouvement de corps rigide de l'aile.

1.1.5 Validation de la méthode

La méthode présentée ci-dessus a été validée en reproduisant des résultats issus de la littérature, dans le cas de l'écoulement laminaire généré par un cylindre oscillant dans un fluide initialement au repos [66]. Ce cas a été décrit et étudié expérimentalement par Dütsch *et al.* [67]. L'oscillation périodique du cylindre suit une loi sinusoïdale $x(t) = -Asin(2\pi ft)$, où A et f sont l'amplitude et la fréquence de l'oscillation. Deux nombres non dimensionnels servent de paramètres de contrôle : le nombre de Keulegan-Carpenter KC $= U/fD$ et le nombre de Reynolds Re $= UD/\nu$ où U est la vitesse maximale

du cylindre, D est son diamètre et ν est la viscosité cinématique du fluide. Ci-après sont reproduits des résultats obtenus expérimentalement par Dütsch *et al.* [67] pour $\mathrm{Re} = 100$ et $\mathrm{KC} = 5$. Ces résultats on également été reproduits numériquement par Guilmineau *et al.* [68] à l'aide d'une méthode CPI (Consistent Physical Interpolation), et par Hosseinjani *et al.* [69] à l'aide d'une méthode IBM (Immersed Boundary Method).

Le problème a été résolu sur un maillage circulaire non structuré, centré sur le cylindre mobile, et de diamètre $D_m = 120D$, ce qui correspond à la taille du domaine utilisé par Hosseinjani *et al.* Une condition limite de non-glissement a été imposée à la frontière du cylindre tandis qu'on a imposé une condition de contraintes nulles $\left[-p\boldsymbol{n} + \mathrm{Re}^{-1}(\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\boldsymbol{u}^T)\boldsymbol{n}\right] = 0$ sur les bords extérieurs du domaine. La discrétisation spatiale des équations de Navier-Stokes (1.30) est basée sur une formulation Éléments Finis [70], avec des éléments quadratiques (P2) pour chaque composante de la vitesse $\boldsymbol{u}$ et des éléments linéaires (P1) pour la pression p. La discrétisation spatiale est semi-implicite et du second ordre. La dérivée temporelle est approximée par une backward-differential formula. Les termes linéaires de l'équation (1.30) sont implicites et les termes non linéaires sont traités explicitement à l'aide d'une extrapolation au second ordre. Cette discrétisation semi-implicite conduit à résoudre un problème de Stokes instationnaire à chaque itération, à l'aide d'un algorithme gradient conjugué préconditionné [71, 72]. Cette méthode numérique est implémentée dans le logiciel libre FreeFem++ [70]. Plus de détails sur les discrétisations spatiales et temporelle, ainsi que sur l'algorithme gradient conjugué sont disponibles dans les annexes A. Le maillage, représenté en figure 1.2 est constitué de 44×10^3 triangles, ce qui conduit à avoir 89×10^3 degrés de libertés pour chaque composante de la vitesse et 22×10^3 degrés de libertés pour la pression. La taille des éléments sur le bord du cylindre est de 1.64×10^{-2} puis les éléments sont progressivement agrandis jusqu'aux limites extérieures du domaine. Finalement, la discrétisation temporelle semi-implicite implique une condition de stabilité numérique de Courant-Friedrich-Levy [73]. Le pas de temps est choisi en conséquence et vaut $\Delta t = 5 \times 10^{-4}$.

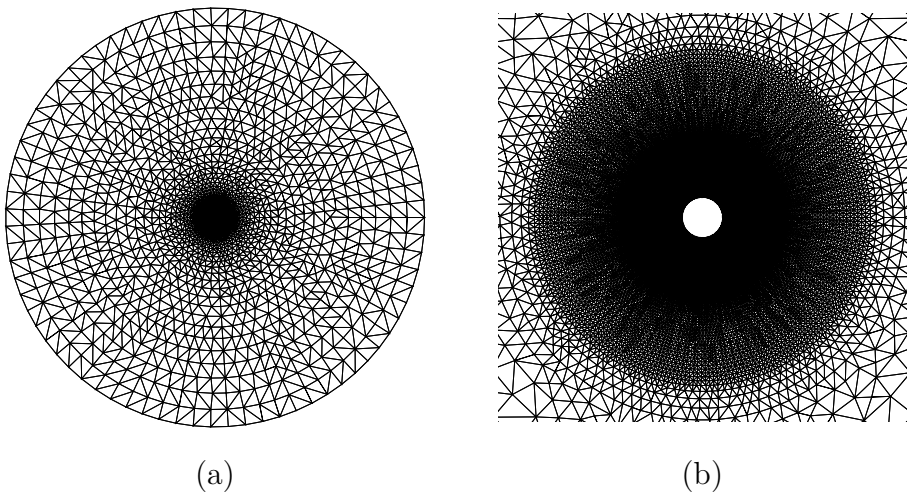


FIGURE 1.2 – (a) Domaine de calcul et maillage utilisés pour la validation de la méthode de résolution dans un référentiel non inertiel. (b) Zoom du maillage autour du cylindre.

Dans la figure 1.3, on représente des lignes de niveau de la pression, qui sont comparées aux résultats numériques de Guilmineau *et al.* à deux instants différents $t = 0$ et $t = 19T/72$ de la période d'oscillation T. On a également pu comparer pour les mêmes paramètres, les lignes de niveaux de vorticité, qui sont représentées dans la figure 1.4. Dans les deux cas (pression et vorticité), les résultats sont remarquablement similaires. De plus,

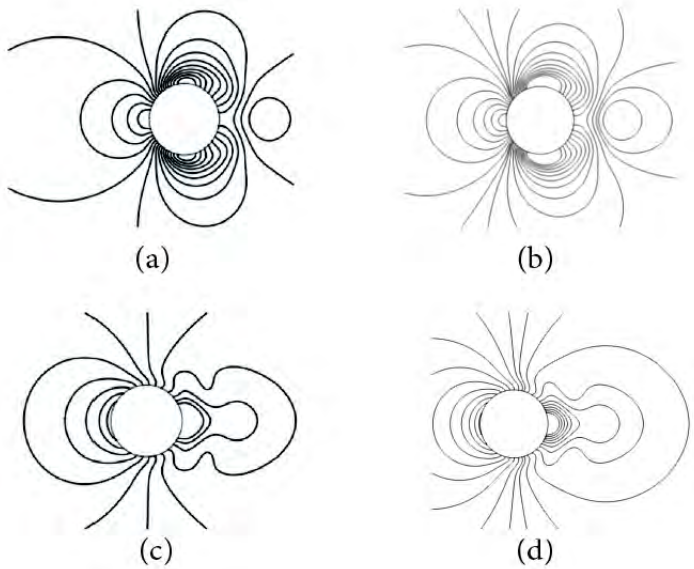


FIGURE 1.3 – Lignes de niveau de pression à deux différents instants t. Guilmineau *et al.* (2002) à $t = 0$ (a) et $t = 19T/72$ (c). Présente méthode à $t = 0$ (b) et $t = 19T/72$ (d).

la figure 1.5 représente la vitesse horizontale u selon la direction transverse y à $x = -0.6D$ pour deux instants différents de la période d'oscillation. Les profils obtenus avec la présente méthode (ligne noire continue) sont en accord avec les résultats expérimentaux de Dütsch *et al.* (carrés noirs) et sont presque parfaitement superposés aux résultats numériques de Hosseinjani *et al.* (ligne bleue pointillée). L'ensemble de ces résultats montre la validité tant qualitative que quantitative de la présente méthode numérique.

1.2 Calcul de stabilité linéaire périodique en temps par méthode d'Arnoldi

Cette partie traite de la méthode théorique et de l'implémentation numérique d'une méthode pour analyser la stabilité linéaire d'un système dynamique autour d'un état périodique en temps. On parle alors d'analyse de stabilité de Floquet. La section 1.2.1 est consacrée à la mise en place du modèle théorique. La section 1.2.2 porte sur l'implémentation numérique de la méthode d'Arnoldi qui a été utilisé dans ces travaux pour procéder aux analyses de Floquet. La méthode Block-Arnoldi, qui permet d'accélérer la convergence du calcul de valeurs propres, est également présentée. Dans la section 1.2.3, on présente les équations qui permettent de déterminer la dynamique complète des modes de Floquet à partir de leurs valeurs instantannées obtenues par la méthode d'Arnoldi. Dans la section 1.2.4, on applique le formalisme présenté dans les sections précédentes pour des analyses de Floquet de problèmes fluides. Dans la section 1.2.5, on étend les équations présentées dans la section précédente à des problèmes présentant un couplage entre la dynamique du fluide et la dynamique de la structure. Enfin, la section 1.2.6 est consacrée à des tests de validation de l'implémentation de la méthode d'Arnoldi sur un problème fluide en se comparant à des résultats publiés.

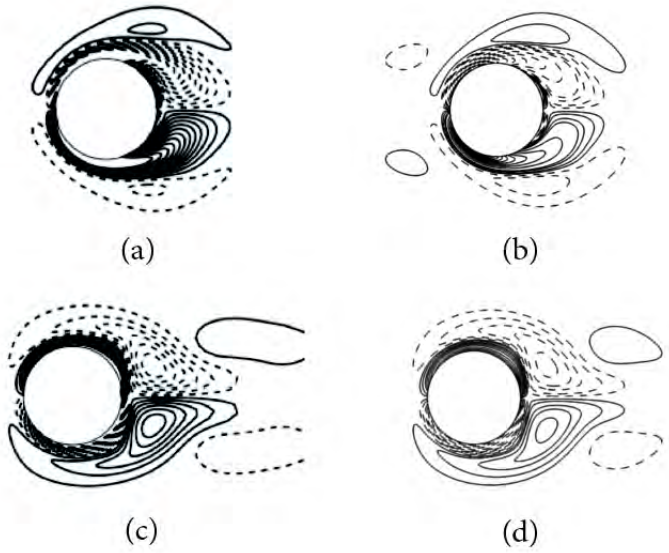


FIGURE 1.4 – Lignes de niveau de vorticité à deux différents instants t. Guilmineau *et al.* (2002) à $t = 0$ (a) et $t = 19T/72$ (c). Présente méthode à $t = 0$ (b) et $t = 19T/72$ (d).

1.2.1 Analyse de Floquet : stabilité linéaire d'un problème périodique en temps

Dans cette partie, on considère un système dynamique gouverné par un groupe d'équations

$$\mathcal{B}\partial_t \boldsymbol{q} = \mathcal{R}(\boldsymbol{q}) \tag{1.33}$$

où $\boldsymbol{q}$ est un vecteur qui regroupe toutes les inconnues du problème dynamique que l'on considère, $\mathcal{B}$ est un opérateur linéaire qui sert à sélectionner les dérivées temporelles et $\mathcal{R}$ est un opérateur regroupant l'ensemble des opérations linéaires et non linéaires influençant la dynamique de $\boldsymbol{q}$. Dans un second temps, on admet qu'il existe une solution périodique en temps, de période T, à ce système d'équations que l'on note $\boldsymbol{Q}$, que l'on appelle par la suite champ de base. Cette solution vérifie donc

$$\forall(\boldsymbol{x}, t) \qquad \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}, t + T) \tag{1.34}$$

où $\boldsymbol{x}$ et t représentent respectivement les variables d'espace et de temps. À ce stade, on peut noter que deux cas de figure existent : la période T peut être imposée, de telle sorte qu'elle intervient dans le système d'équations que vérifie $\boldsymbol{Q}$; ou elle peut naturellement émerger comme la période d'une solution stable du système d'équations. Dans tout le corpus de cette thèse, c'est le premier cas de figure qui est traité. On y traite en effet de la dynamique d'ailes battantes dont on impose la période de battement. Pour autant, le second cas de figure est très classique, tant en mécanique des fluides (l'allée de tourbillons de Bénard von-Kármán par exemple) que dans d'autres branches de la physique.
On s'intéresse ici au développement de perturbations infinitésimales que l'on superpose au champ de base

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{Q}(t) + \varepsilon \boldsymbol{q}'(t) \quad , \quad \varepsilon \ll 1 \tag{1.35}$$

Le vecteur $\boldsymbol{q}'$ représente ces perturbations infinitésimales. On introduit cette décomposition comme solution du problème (1.33) et on néglige les termes non linéaires en $\boldsymbol{q}'$ pour en déduire la dynamique des perturbations infinitésimales à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$

$$\mathcal{B}\partial_t \boldsymbol{q}' = \mathcal{L}(\boldsymbol{Q})\boldsymbol{q}' \tag{1.36}$$

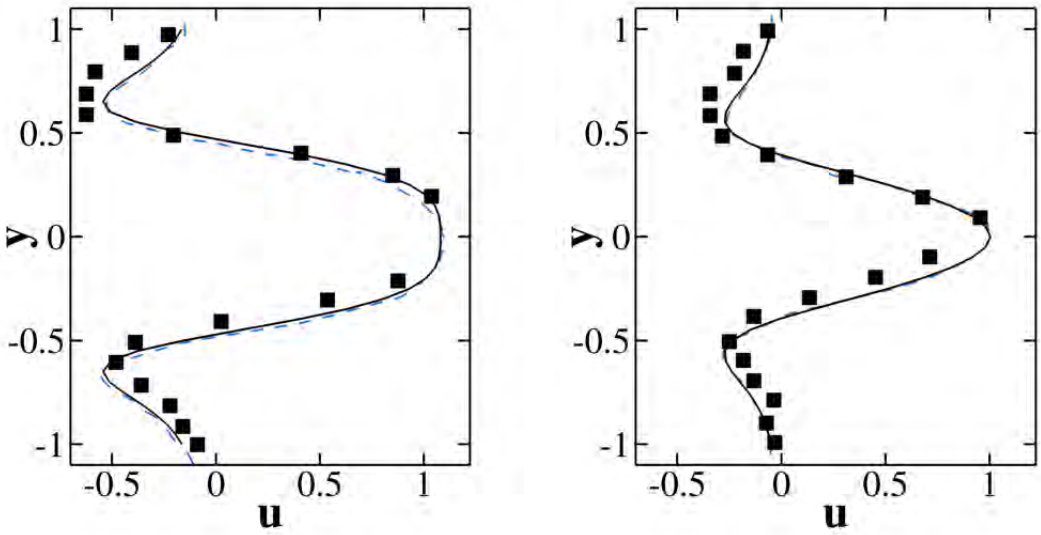


FIGURE 1.5 – Composante horizontale de la vitesse u dans la direction transverse y à $x = -0.6D$, pour deux instants différents de la période de battement T. (a) $t = T/2$; (b) $t = 7T/12$. Dütsch *et al.* (1998) : carrés noirs. Hosseinjani *et al.* (2015) : ligne bleue pointillée. Présente méthode : ligne noire continue.

L'opérateur $\mathcal{L}$ est la linéarisation de l'opérateur $\mathcal{R}$ autour du champ de base $\boldsymbol{Q}$. Par conséquent, ce problème est linéaire en $\boldsymbol{q}'$. Le champ de base $\boldsymbol{Q}$ étant périodique de période T, l'opérateur $\mathcal{L}$ l'est aussi. On peut alors décomposer les perturbations comme une série de fonctions périodiques en temps

$$\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{x}, t) = \sum_k \hat{\boldsymbol{q}}_k(\boldsymbol{x}, t) e^{\lambda_k t} \tag{1.37}$$

où les fonctions complexes et T-périodiques $\hat{\boldsymbol{q}}_k = (\hat{\boldsymbol{u}}_k, \hat{p}_k)^T$ sont appelées les modes de Floquet, et généralisent la notion de vecteur propre pour l'opérateur autonome $\mathcal{L}$. Les nombres complexes λ_k sont appelés exposants de Floquet et généralisent la notion de valeur propre pour l'opérateur $\mathcal{L}$. Leur partie réelle représente le taux d'amplification du mode de Floquet correspondant tandis que leur partie imaginaire représente la fréquence de la porteuse du mode. On peut ainsi noter que les exposants de Floquet sont définis avec une partie imaginaire à 2π près et ne sont donc pas uniques. Ce système correspond donc à une généralisation de l'approche classique qui consiste à considérer une série de modes stationnaires.
On peut considérer que la dynamique à long terme de la perturbation $\boldsymbol{q}'$ est gouvernée par la dynamique du mode (ou des modes) avec le plus grand exposant de Floquet en valeur absolue, que l'on appelle mode dominant. En pratique, on s'intéresse principalement à la stabilité du mode dominant car c'est une condition équivalente à la stabilité du champ de base. L'ordre des modes est arbitraire et par convention, les exposants de Floquet sont classés par ordre décroissant. On a donc $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant ... \geqslant |\lambda_k|$.

On définit par ailleurs les multiplicateurs de Floquet $\mu_k = e^{\lambda_k T}$. Ils correspondent à la croissance temporelle et au déphasage des modes correspondants au bout d'une période T. La stabilité du champ de base $\boldsymbol{Q}$ est déterminée en examinant le spectre des multiplicateurs de Floquet. Un mode de Floquet est stable (respectivement instable) quand son multiplicateur de Floquet est à l'intérieur (respectivement l'extérieur) du cercle unité,

c'est-à-dire quand $|\mu_k| < 1$ (respectivement $|\mu_k| > 1$) dans le plan complexe. Cette propriété est équivalente à dire que l'exposant de Floquet associé λ_k possède une partie réelle positive ou négative. Lorsque le mode de Floquet dominant devient instable, c'est-à-dire que son multiplicateur de Floquet traverse le cercle unité, trois cas, représentés dans la figure (1.6), sont possibles :

— $\mu = +1$: mode réel synchrone
— $\mu = -1$: mode réel subharmonique
— $\mu = e^{\pm i\theta}$: paire de modes complexes conjugués

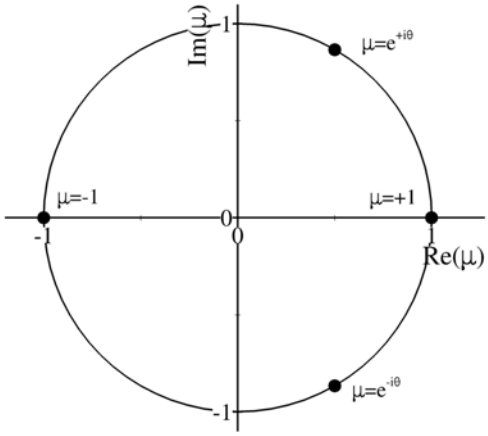


FIGURE 1.6 – Différents cas de figures de la transition stable/instable d'un mode de Floquet.

Dans le premier cas, le mode est réel. L'exposant de Floquet λ_1 est réel et la dynamique de la perturbation devient

$$\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{x}, t) \approx \hat{\boldsymbol{q}}_1(\boldsymbol{x}, t) e^{\lambda_1 t} \tag{1.38}$$

Le mode $\hat{\boldsymbol{q}}_1(\boldsymbol{x}, t)$ est T-périodique par définition et aucune autre fréquence n'est introduite. On parle alors de mode synchrone car la perturbation possède la même périodicité que le champ de base.
Dans le deuxième cas, l'exposant de Floquet est complexe et vaut $\lambda_1 = \lambda_r + i\pi/T$ où λ_r correspond à son taux d'amplification. La perturbation linéaire devient

$$\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{x}, t) \approx \hat{\boldsymbol{q}}_1(\boldsymbol{x}, t) e^{i\pi t/T} e^{\lambda_r t} \tag{1.39}$$

Le mode est toujours T-périodique mais le premier terme exponentiel $e^{i\pi t/T}$ indique que la perturbation change de signe à chaque période. Ce mode est donc associé à un doublement de la période fondamentale et on parle alors de mode subharmonique. Ce cas de figure se produit notamment lorsqu'il y a appareillement de vortex corotatifs [74].
Enfin dans le troisième cas, il y a deux modes dominants qui sont complexes conjugués l'un de l'autre. L'exposant de Floquet est complexe et vaut $\lambda_1 = \lambda_r + \pm i\theta/T$. La perturbation devient

$$\boldsymbol{q}'(\boldsymbol{x}, t) \approx \left[\hat{\boldsymbol{q}}_1(\boldsymbol{x}, t) e^{i\theta t/T} + \hat{\boldsymbol{q}}_1^*(\boldsymbol{x}, t) e^{-i\theta t/T}\right] e^{\lambda_r t} \tag{1.40}$$

La présence de cette paire de modes complexes conjugués introduit une modulation de la perturbation linéaire à la fréquence $\theta/2\pi T$. La nouvelle période de ce mode peut être un multiple entier de la période T mais ne l'est pas dans le cas général. On parle alors de modes quasi-périodiques [75]. Lorsqu'une telle instabilité existe, la solution non linéaire stable du système (1.33) n'est plus T-périodique.

Pour déterminer la stabilité linéaire d'un système dynamique, on cherche donc à déterminer le spectre des multiplicateurs de Floquet de ce système. L'opérateur $\mathcal{L}$ étant

dépendant du temps (puisque le champ de base l'est aussi), on cherche à s'affranchir de cette dépendance. Pour cela, on décide de s'intéresser à la croissance des perturbations sur une période, plutôt que leur croissance instantanée. Pour cela, on construit un propagateur $\mathcal{A}$ sur une période T tel que

$$\boldsymbol{q}'(t_0 + T) = \mathcal{A}\boldsymbol{q}'(t_0) \tag{1.41}$$

Le propagateur $\mathcal{A}$ est l'application de Poincaré linéarisée, associée au champ de base périodique. Celui-ci est obtenu en intégrant entre t_0 et $t_0 + T$ l'équation (1.36). Les valeurs propres de $\mathcal{A}$ sont les multiplicateurs de Floquet μ_k de $\mathcal{L}$ et les vecteurs propres de $\mathcal{A}$ sont les modes de Floquet $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}, t_0)$ de $\mathcal{L}$ à l'instant t_0. Désormais, le problème n'est plus considéré de manière continue par une avance temporelle du système (1.33) mais par une action discrète du propagateur $\mathcal{A}$, par lequel on avance d'une période dans le temps. D'autre part, le propagateur $\mathcal{A}$ intègre la dynamique complète du champ de base périodique. Il ne dépend donc pas du temps. C'est le calcul des valeurs propres et des vecteurs propres de $\mathcal{A}$ qui va permettre d'analyser la stabilité linéaire du système dynamique.

La section suivante décrit l'implémentation numérique de la méthode d'Arnoldi qui a été utilisée dans cette thèse pour calculer le spectre des multiplicateurs de Floquet et les modes de Floquet associés.

1.2.2 Méthode d'Arnoldi pour le calcul de valeurs propres

On introduit dans un premier temps la méthode d'Arnoldi, qui fait partie des méthodes de Krylov pour le calcul de valeurs propres. Dans un second temps, on présente la méthode dite "Block-Arnoldi" qui permet d'améliorer la convergence de la méthode d'Arnoldi en parallélisant le processus numérique. Enfin, dans un troisième temps, on indique comment on retrouve la dynamique complète des modes de Floquet à partir des résultats de la méthode d'Arnoldi.

1.2.2.1 Méthode d'Arnoldi

Dans cette section, on détaille la mise en place théorique et numérique de la méthode d'Arnoldi [76], qui a été utilisée pour calculer des modes de Floquet et les spectres des multiplicateurs de Floquet associés.

Parmi les méthodes classiques pour déterminer le spectre de valeurs propres d'un opérateur matriciel, on peut noter la méthode de la puissance (ou *power method*) [77]. Cette méthode consiste à appliquer un grand nombre de fois l'action du propagateur à partir d'une condition initiale. La solution obtenue au bout de n itérations du propagateur est alors proportionnelle à la condition initiale, et la valeur propre dominante du propagateur à la puissance n. Cette méthode est très simple à mettre en place puisqu'elle n'implique que d'appliquer l'action du propagateur. Par contre, elle ne permet de calculer que la valeur propre dominante du propagateur et aucune autre. Par ailleurs, admettons que le propagateur possède un ensemble λ_p de p valeurs propres à partie réelle décroissante. On a alors $\lambda_1 > \lambda_2 > ...$ La méthode de la puissance converge mal vers λ_1 lorsque $\lambda_1 \gtrsim \lambda_2$. *A fortiori*, si le problème est assujetti à un mode dominant quasi-périodique, ce qui correspond à λ_1 et λ_2 qui sont complexes conjugués, la méthode de la puissance ne peut pas converger.

Une autre méthode classique est la méthode *Shift and Invert* [77, 78]. Cette méthode consiste à choisir une valeur propre cible et à chercher toutes les valeurs propres du propagateur proche de la cible. En pratique, cette méthode est très intéressante pour chercher des modes instables dont on a une idée de la fréquence et permet de ne pas calculer des valeurs propres qui n'ont rien à voir avec le phénomène d'intérêt. Par contre, comme pour la méthode de Newton, cette méthode implique d'avoir une idée de la valeur

propre recherchée. Un autre inconvénient de cette méthode est, comme son nom l'indique, d'avoir recours à une inversion matricielle, alors que la méthode de la puissance n'utilise que des produits matrices-vecteurs. Les étapes d'inversion matricielle sont en général évitées pour les systèmes de grande taille car elles sont coûteuses en temps de calcul.

La méthode d'Arnoldi appliquée à un problème de Floquet reprend les grandes lignes de la méthode de la puissance puisqu'elle consiste à appliquer un grand nombre de fois le propagateur $\mathcal{A}$. Dans ce cadre, le propagateur n'a pas besoin d'être défini. Il suffit d'avoir un algorithme calculant son action sur un vecteur. La méthode d'Arnoldi sert alors à reconstruire une approximation du propagateur $\mathcal{A}$ dans le but de calculer les valeurs propres de cette approximation. Pour p itérations de la méthode, on peut reconstruire une approximation de taille $p \times p$ du propagateur, ce qui donne une approximation de p valeurs propres. Plus le nombre d'itérations est important, meilleure est l'approximation de $\mathcal{A}$ et donc de ses valeurs propres et vecteurs propres.

L'algorithme utilisé pour résoudre ce problème, appelé Arnoldi-Modified Gram-Schmidt [77], se présente comme décrit dans l'algorithme (1).

Algorithm 1 Arnoldi-Modified Gram-Schmidt

```
Choisir un vecteur unitaire v_1
for j = 1..m do
  w_j := A v_j
  for i = 1..j do
    h_ij := (w_j, v_i)
    w_j := w_j − h_ij v_i
  end for
  h_{j+1,j} = ||w_j||_2
  if h_{j+1,j} = 0 then
    stop
  end if
  v_{j+1} = w_j / h_{j+1,j}
end for
```

L'algorithme démarre par le choix d'un vecteur initial unitaire. On procède ensuite à m itérations de l'algorithme de manière à construire une base orthonormale du sous-espace de Krylov $\mathcal{K}_m$ de dimension m, associé au propagateur. À chaque itération j de l'algorithme, on propage le vecteur v_j puis on procède à une orthogonalisation du résultat w_j avec tous les précédents vecteurs calculés. On calcule la norme du nouveau vecteur w_j et on vérifie que celle-ci n'es pas nulle, sinon on arrête l'algorithme. Ce cas de figure se produit si et seulement si on a reconstruit une base complète du sous-espace de Krylov, c'est-à-dire si w_j est intégralement défini dans le sous-espace $\mathcal{K}_{j-1}$. Ceci arrive bien entendu si le rang de $\mathcal{A}$ est m, mais ce cas de figure n'arrive jamais, en pratique. Par contre, cela peut arriver si la norme du vecteur w_j atteint la précision numérique machine. En pratique, il est heureusement probable que cela arrivera bien après que l'algorithme ait reconstruit une approximation satisfaisante de $\mathcal{A}$. Enfin, la dernière étape consiste à normaliser le nouveau vecteur w_j.
Pendant l'algorithme, on calcule la matrice h, qui est une matrice de Hessenberg supérieure, c'est-à-dire une matrice carrée "presque" triangulaire supérieure. Cela s'écrit de la manière suivante

$$\forall (i,j) \quad / \quad i > j+1 \quad : \quad h_{ij} = 0 \tag{1.42}$$

Cette matrice de Hessenberg que l'on reconstruit sert d'approximation à $\mathcal{A}$. Au bout de m itérations de l'algorithme, on obtient une matrice de taille $m \times m$. C'est en calculant

les valeurs propres de cette matrice qu'on obtient une approximation des valeurs propres de $\mathcal{A}$. Plus la matrice de Hessenberg est grande, meilleure est l'approximation. Cette approximation peut se résumer de la manière suivante

$$\mathcal{A}V_m = V_m H_m + w_m e_m^T \tag{1.43}$$

où V_m regroupe tous les vecteurs orthonormés v_j, w_m regroupe tous les vecteurs w_j et le vecteur e_m (qui est inconnu) quantifie l'erreur que l'on commet en approximant $\mathcal{A}$ par H_m.

1.2.2.2 Méthode Block-Arnoldi

À chaque itération de l'algorithme d'Arnoldi, on est capable d'estimer un mode de Floquet supplémentaire, et le multiplicateur de Floquet associé. Pour autant, il faudra plus d'itérations pour faire converger ce résultat, c'est-à-dire que la valeur du mode est indépendante d'une itération à la suivante. Ou numériquement quasi indépendante. Cela peut conduire à procéder à beaucoup plus d'itérations que le nombre de modes de Floquet qui nous intéresse. Pour accélérer la méthode, l'objectif le plus intuitif est de réduire le nombre d'itérations de l'algorithme d'Arnoldi nécessaires à atteindre la convergence. Pour cela, un moyen est d'appliquer le propagateur $\mathcal{A}$ à un bloc de vecteurs, plutôt qu'à un seul. On écrit ainsi une version Block [77] de l'algorithme (1).

Algorithm 2 Block Arnoldi-Modified Gram-Schmidt

```
Choisir une matrice unitaire V_1 de taille n × p
for j = 1..m do
  W_j := A V_j
  for i = 1..j do
    H_ij := V_i^T W_j
    W_j := W_j − V_i H_ij
  end for
  Calculer la décomposition Q-R : W_j = V_{j+1} H_{j+1,j}
end for
```

L'algorithme (2) est complètement analogue à sa version séquentielle (1). On utilise un ensemble de p vecteurs (de tailles n, la matrice $\mathcal{A}$ étant $n \times n$) en parallèle. Cela permet donc de calculer p modes de Floquet à chaque itération de l'algorithme, au lieu d'un seul. Numériquement, cette formulation permet de profiter d'une architecture de l'algorithme sur p processeurs, où chaque processeur procède en parallèle à l'intégration temporelle sur une période du problème, ce qui est équivalent au produit de la matrice $\mathcal{A}$ par un des p vecteurs de la matrice V_j. Pour produire la matrice unitaire V_1 qui permet d'initialiser l'algorithme, il suffit d'avoir procédé auparavant à p itérations de l'algorithme d'Arnoldi (dans sa version séquentielle) pour produire une base de p vecteurs orthonormés.

1.2.3 Calcul de l'évolution temporelle des modes de Floquet

À ce stade, l'application de la méthode d'Arnoldi (et de la méthode Block-Arnoldi) a permis de déterminer une liste de modes de Floquet, et les multiplicateurs de Floquet qui leur sont associés. Cependant, seule une valeur instantanée (à l'instant t_0 choisi pour initialiser la méthode d'Arnoldi) de chaque mode de Floquet a été calculée. Les modes de Floquet étant périodiques, il convient de préciser comment on procède pour déterminer

la dynamique temporelle du mode sur la période T. Pour cela, on commence par injecter la décomposition (1.37) dans l'équation (1.36) ce qui donne

$$\mathcal{B}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_k \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},t)e^{\lambda_k t}\right) = \mathcal{L}(\boldsymbol{Q}(t))\sum_k \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},t)e^{\lambda_k t} \tag{1.44}$$

ce qui, après développement, conduit à

$$\mathcal{B}\sum_k \left[\partial_t \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},t) + \lambda_k \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},t)\right] e^{\lambda_k t} = \sum_k \mathcal{L}(\boldsymbol{Q}(t))\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},t)e^{\lambda_k t} \tag{1.45}$$

Enfin, puisque cette équation doit être vérifiée à chaque instant et indépendamment pour chaque mode, on en déduit les équations qui gouvernent la dynamique de tous les modes propres

$$\forall (k,t) \quad : \quad \mathcal{B}\partial_t \hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},t) = \left[\mathcal{L}(\boldsymbol{Q}(t)) - \lambda_k \mathcal{B}\right]\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x},t) \tag{1.46}$$

Dès lors qu'on a déterminé la valeur d'un mode propre à un instant t_0 donné, ainsi que l'exposant de Floquet λ_k associé, on peut obtenir la dynamique sur une période T du mode. On intègre l'équation (1.46) entre t_0 et $t_0 + T$, en choisissant $\hat{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{x}, t_0)$ comme condition initiale. En définitive, le mode de Floquet est la solution de l'intégration temporelle des équations linéarisées du système dynamique, corrigées d'un facteur multiplicatif λ_k pour compenser la croissance (ou décroissance) instantanée du mode.

1.2.4 Analyse de Floquet pour un problème fluide

Dans les parties précédentes, les analyses de Floquet et leur implémentation numérique ont été présentées pour un système dynamique quelconque. Dans cette partie, on explicite ces systèmes dynamiques dans le cadre des travaux présentés ici, c'est-à-dire pour des écoulements de fluide incompressible autour de structures mobiles. Dans un premier temps, on analyse seulement la stabilité de l'écoulement fluide. Le solide, bien que mobile, a sa cinématique entièrement imposée. L'analyse présentée dans cette partie est utilisée dans les chapitres 3, 4 et 5.

Le vecteur des variables $\boldsymbol{q}$ contient la vitesse du fluide $\boldsymbol{u}$ et la pression dynamique p

$$\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{u}, p)^T \tag{1.47}$$

De cette manière, les opérateurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ du système dynamique 1.33 prennent la forme suivante

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{R}(\boldsymbol{u}, p) = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\Omega_z} \times \boldsymbol{u} - \left[(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_s)\cdot\nabla\right]\boldsymbol{u} - \nabla p + \mathrm{Re}^{-1}\Delta \boldsymbol{u} \\ -\nabla\cdot\boldsymbol{u} \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

On suppose alors qu'il existe une solution périodique $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{U}, P)^T$ de ce système dynamique, à laquelle on superpose des perturbations linéaires

$$\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{U}(t) + \varepsilon \boldsymbol{u}'(t) \quad , \quad p(t) = P(t) + \varepsilon p'(t) \quad , \quad \varepsilon \ll 1 \tag{1.49}$$

Comme précisé, on décide de considérer seulement la stabilité du problème fluide, ce qui conduit à négliger les perturbations potentielles de la vitesse du solide

$$\boldsymbol{u}_s(t) = \boldsymbol{U}_s(t) \qquad , \qquad \boldsymbol{u}_s'(t) = 0 \tag{1.50}$$

Finalement, cela conduit à l'écriture suivante de l'opérateur linéarisé $\mathcal{L}$ des équations de

Navier-Stokes

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{U}) = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\Omega_z} \times \bullet - [(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}_s) \cdot \nabla] \bullet - [\bullet \cdot \nabla] \boldsymbol{U} + \mathrm{Re}^{-1} \Delta \bullet & -\nabla \bullet \\ -\nabla \cdot \bullet & 0 \end{pmatrix} \tag{1.51}$$

Et la condition limite à la surface de l'aile s'écrit

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_s \in \Gamma_s) = 0 \tag{1.52}$$

1.2.5 Analyse de Floquet pour un problème fluide-structure

Dans un second temps, on peut considérer que la vitesse est potentiellement sujette, elle aussi, à des perturbations. Il faut donc prendre en compte ce degré de liberté supplémentaire dans les analyses de stabilité. L'analyse présentée dans cette partie est utilisée dans le chapitre 5.

Les perturbations de la vitesse du solide ne sont plus forcément nulles, ce qui change l'équation (1.50) pour donner

$$\boldsymbol{u}_s(t) = \boldsymbol{U}_s(t) + \varepsilon\, \boldsymbol{u}'_s(t) \quad , \quad \boldsymbol{u}'_s(t) \neq 0 \tag{1.53}$$

Ce cas de figure n'est considéré que pour des solides en translations. La rotation du solide $\boldsymbol{\Omega_z}$ est considérée fixe et nulle, ce qui écarte les modes liés à une perturbation du couple fluide [79]. Pour résoudre ce problème, il faut donc définir une loi d'évolution pour la vitesse perturbative du solide $\boldsymbol{u}'_s$. Le solide est considéré indéformable. On fait l'hypothèse que les rotations solides sont nulles et que seules les translations de solide rigide sont envisagées. En fait la seule rotation du solide permise est celle que l'on impose dans la loi de mouvement de $\boldsymbol{U}_s(t)$. La vitesse de translation du solide $\boldsymbol{u}'_s$ est dès lors égale à la vitesse de translation de son centre de gravité $\boldsymbol{u}'_G$. Celle-ci dépend des forces exercées par les perturbations fluides sur le solide suivant le principale fondamental de la dynamique (ou deuxième loi de Newton)

$$M \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}'_G}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}', p') \tag{1.54}$$

La grandeur M est adimensionnée et tient compte de l'inertie de l'aile. Les efforts $\boldsymbol{F}'$ des perturbations fluides sur le solide sont calculés en intégrant les forces visqueuses et de pression à la surface de l'aile

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{u}', p') = \int_{\Gamma_s(t)} \left[-p'\boldsymbol{n} + \mathrm{Re}^{-1} \left(\nabla \boldsymbol{u}' + {}^T\nabla \boldsymbol{u}' \right) \boldsymbol{n} \right] \mathrm{d}l \tag{1.55}$$

avec $\boldsymbol{n}$ qui indique la normale unitaire pointant vers l'extérieur (côté fluide) de la surface $\Gamma_s(t)$. Ces nouvelles hypothèses conduisent donc à la modification de l'opérateur $\mathcal{L}$ et de la condition limite (1.52) pour donner le système suivant

$$\partial_t \boldsymbol{u}' + ((\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}_s) \cdot \nabla)\, \boldsymbol{u}' + ((\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}'_s) \cdot \nabla)\, \boldsymbol{U} + \nabla p' - \mathrm{Re}^{-1} \Delta \boldsymbol{u}' = 0 \quad in\ \Omega_f(t) \tag{1.56a}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u}' = 0 \quad in\ \Omega_f(t) \tag{1.56b}$$

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x}_s(t) \in \Gamma_s) = \boldsymbol{u}'_s(t) \tag{1.56c}$$

$$M \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}'_s}{\mathrm{d}t} = \int_{\Gamma_s(t)} \left[-p'\boldsymbol{n} + \mathrm{Re}^{-1} \left(\nabla \boldsymbol{u}' + {}^T\nabla \boldsymbol{u}' \right) \boldsymbol{n} \right] \mathrm{d}l = \boldsymbol{F}' \tag{1.56d}$$

On remarque que la connaissance de la vitesse solide est nécessaire pour imposer la condition limite (1.56c). La vitesse solide participe également à la convection à travers le terme $((\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}'_s) \cdot \nabla)\boldsymbol{U}$. Cependant, celle-ci ne peut être être déterminée qu'en calculant les efforts fluides (1.56d), à l'aide de $\boldsymbol{u}$ et p (1.56a-c). On a donc un couplage de la partie fluide et de la partie solide.

1.2.6 Validation numérique de la méthode d'Arnoldi

Pour valider la mise en place de l'analyse de stabilité de Floquet ainsi que son implémentation, on reproduit des résultats numériques obtenus par Elston *et al* [75]. Le cas d'étude est le même que celui utilisé pour valider la résolution des équations de Navier-Stokes dans la section (1.1). Dans leur article, les auteurs étudient l'écoulement bidimensionnel généré par un cylindre de diamètre D, en mouvement dans un fluide incompressible initialement au repos. Plus particulièrement, les auteurs conduisent une analyse de stabilité de Floquet pour étudier la brisure d'une symétrie spatiale par l'écoulement. Le cylindre suit une oscillation périodique en temps de loi $y(t) = A/2sin(2\pi t/T)$ avec A l'amplitude de battement pic à pic et T la période de battement. Deux nombres adimensionnels sont utilisés pour décrire le cas d'étude : le nombre de Keulegan-Carpenter $KC = 2\pi A/D$ qui pilote l'amplitude de battement, et le nombre de Stokes $\beta = D^2/\nu T$, avec ν la viscosité cinématique du fluide. Le nombre de Reynolds est défini par $\mathrm{Re} = KC\beta$. Dans leur publication, Elston *et al.* analysent numériquement ce cas à l'aide d'une méthode spectrale, des éléments quadrilatères et des fonctions de forme de type Gauss-Lobatto-Legendre [44], sur un maillage centré autour du cylindre. Dans notre cas, ce problème a été résolu par la méthode des éléments finis, sur un "demi-maillage" de rayon $40D$ en imposant la condition de symétrie spatiale sur la frontière centrale (voir chapitre (5) pour plus de détails).

	($\beta = 100$,$KC = 3.65$)	($\beta = 40$,$KC = 4.75$)
Elston *et al.*	1.1429	1.1282
Present method	1.1416	1.1270

TABLE 1.1 – Comparaison du module de la valeur propre du mode de Floquet dominant avec les résultats de Elston *et al.* [75]

Le tableau (1.1) rassemble le module de la valeur propre du mode dominant, pour deux couples de (β, KC) issus des travaux de Elston *et al.*, ainsi que les valeurs que nous avons obtenues. Dans les deux cas testés, on obtient des valeurs très proches des leurs, ce qui confirme la bonne implémentation de la méthode d'Arnoldi.

1.3 Méthodes d'analyse de sillages périodiques en temps

La simulation numérique de problèmes fluide-structure pose fatalement la question de savoir comment analyser les résultats obtenus. En particulier, les écoulements simulés découlent systématiquement du battement périodique d'ailes battantes. La périodicité du forçage ne conduit pourtant pas pour autant à la périodicité de la solution. C'est pourquoi il est primordial de définir précisément les méthodes nécessaires à l'analyse de la périodicité des solutions. De la même manière, la dynamique des ailes battantes est génératrice de tourbillons, que l'aile soit auto-propulsée ou qu'elle produise une sillage de tourbillons dans un écoulement amont. Comprendre la dynamique de l'écoulement passe alors par comprendre la dynamique de ces tourbillons. En particulier, il faut être capable de caractériser correctement la taille et la forme de ces tourbillons.

Cette section a donc pour objectif de présenter un état de l'art de quelques méthodes utilisées pour analyser la périodicité des systèmes dynamiques et la structure des écoulements tourbillonaires. Pour ces deux problématiques, le choix d'une méthode en particulier sera mise en avant, au regard des résultats obtenus avec ces méthodes sur les écoulements traités au cours de la thèse.

Les méthodes présentées ici sont utilisées dans les chapitres 3 et 4.

1.3.1 Méthodes d'analyses de la périodicité temporelle

L'ensemble des problèmes traités dans le manuscrit concernent des problèmes instationaires. En particulier, le forçage cinématique des ailes battantes, sous la forme de conditions limites adéquates, est systématiquement périodique en temps. La dynamique non linéaire des écoulements simulés n'est pourtant pas périodique pour autant. Le fait que les écoulements de fluide générés par une cinématique périodique en temps ne soient pas périodiques eux-mêmes est potentiellement révélateur de non-linéarités importantes ou de phénomènes d'instabilité qui peuvent se révéler primordiaux pour optimiser le rendement des ailes battantes. Il apparaît donc nécessaire d'être capable de déterminer la périodicité (ou non-périodicité) des écoulements.

Deux méthodes utilisées pour analyser la périodicité des écoulements, principalement dans le chapitre (4), sont présentées ici : les sections de Poincaré et une mesure quantitative d'écart à la périodicité.

1.3.1.1 Sections de Poincaré

Les sections de Poincaré sont souvent utilisées pour l'analyse d'écoulements périodiques en temps. Par exemple, Blackburn *et al.* [45] se servent des sections de Poincaré dans l'analyse des bifurcations liées à des brisures de symétries dans le cas d'un cylindre infini. Les sections de Poincaré sont également utilisées pour statuer sur la stabilité de systèmes dynamiques qui peuvent être simulés par des méthodes dites de "shooting" [80, 81]. Les sections de Poincaré servent alors à illustrer l'existence d'orbites périodiques stables.

Kashinath *et al.* utilisent également des sections de Poincaré pour résoudre un problème de thermoacoustique avec de nombreuses bifurcations [82]. L'utilisation de sections de Poincaré leur permet entre autres d'identifier, en plus de plusieurs états périodiques, la transition de leur système dynamique vers des états chaotiques.

Soit un système dynamique gouverné par l'équation suivante

$$\partial_t \boldsymbol{x}(t) = \mathcal{R}\boldsymbol{x}(t) \tag{1.57}$$

L'opérateur $\mathcal{R}$ gouverne la dynamique de l'ensemble des variables $\boldsymbol{x}$. Au lieu de considérer une représentation continue en temps de ce problème, celui-ci est est écrit sous une formulation discrète en temps

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathcal{A}(t_0)\boldsymbol{x}_k \quad | \quad \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}(t_0 + kT) \tag{1.58}$$

où la suite $(\boldsymbol{x}_n)$ décrit la suite des variables $\boldsymbol{x}$ à chaque période T, initialisée au temps t_0. L'opérateur $\mathcal{A}$ représente l'application de Poincaré associée à l'opérateur $\mathcal{R}$, qui fait avancer $\boldsymbol{x}_k$ d'une période. La figure (1.7) représente une section de Poincaré associée à cette discrétisation et donc l'effet de l'application $\mathcal{A}$ sur $\boldsymbol{x}$. Lorsque le système dynamique possède une solution périodique de période T, alors la suite (x_n) possède un point fixe. La suite (x_n) converge vers ce point fixe dans le cas où la solution T-périodique associée est stable. Au contraire, lorsque le système dynamique ne possède pas de solution périodique stable mais un solution quasi-périodique, apériodique ou même périodique d'une période

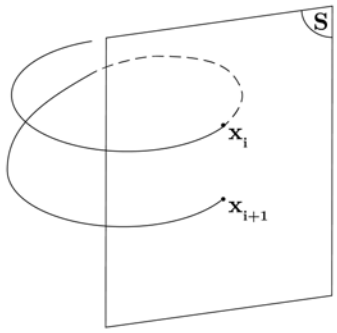


FIGURE 1.7 – Schéma d'une section de Poincaré.

T_2 incommensurable avec T, alors la suite (x_n) n'est pas convergente. Ainsi, regarder l'évolution de (x_n) permet de statuer sur la périodicité de la solution. L'utilisation des sections de Poincaré repose donc à la fois sur une discrétisation temporelle du système dynamique que l'on considère mais également sur le choix d'une période T, en fonction de l'orbite périodique recherchée. En pratique, le tracé de sections de Poincaré prend la

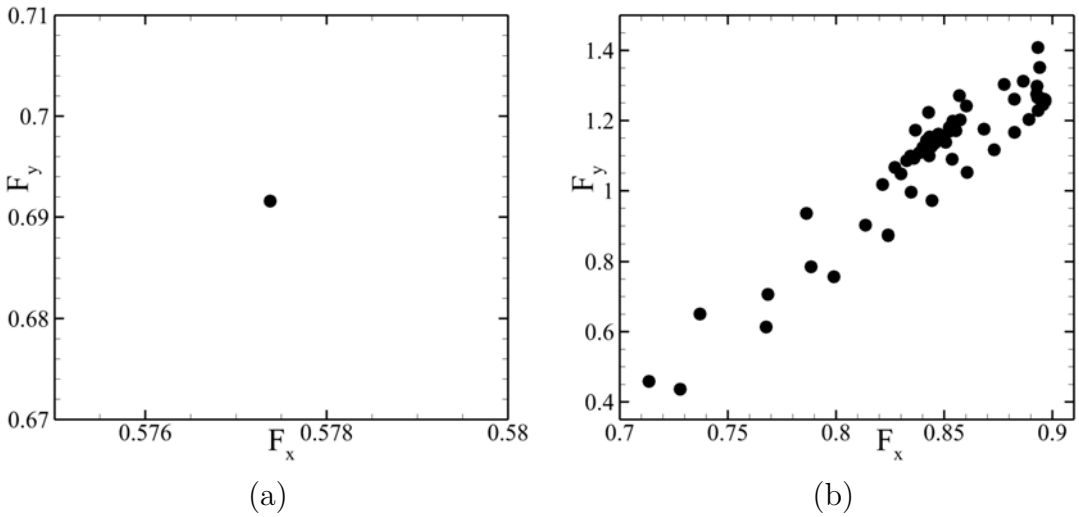


FIGURE 1.8 – Sections de Poincaré pour deux solutions (a) périodique et (b) apériodique.

forme représenté dans la figure (1.8). Dans celle-ci est comparée l'allure d'une section de Poincaré pour une solution périodique (1.8a) à une solution apériodique (1.8b).

Dans chaque cas, c'est la valeur discrète du couple des efforts $(F_x, F_y)(t_0 + kT, k \in \mathbb{N})$ qui est tracée. Lorsque la solution est bien périodique, toutes les valeurs sont superposées en un seul point, dont la valeur dépend du choix de t_0. Lorsque la solution est apériodique, les points ne sont plus superposés et remplissent petit à petit une zone du plan (F_x, F_y). L'évolution transitoire des efforts n'est pas représentée. Par contre, il peut être intéressant de regarder l'état transitoire car on peut y voir apparaître la convergence de la série (x_n). Cela donne alors une bonne indication pour savoir si une solution tend vers un état périodique ou non.

Dans l'exemple proposé ici, aussi bien que dans le reste de la thèse, on choisit les efforts aérodynamiques comme grandeur d'analyse de la périodicité par section de Poincaré. Ce choix est lié à la relation importante qui lie les efforts aux bifurcations dans les écoulements en régime laminaire. L'étude des écoulements autour de corps profilés a montré que les bifurcations liées à des brisures de symétries ont un impact immédiat sur les propriétés des efforts aérodynamiques, ce qui en fait de bonnes grandeurs de contrôle. Pour cette raison,

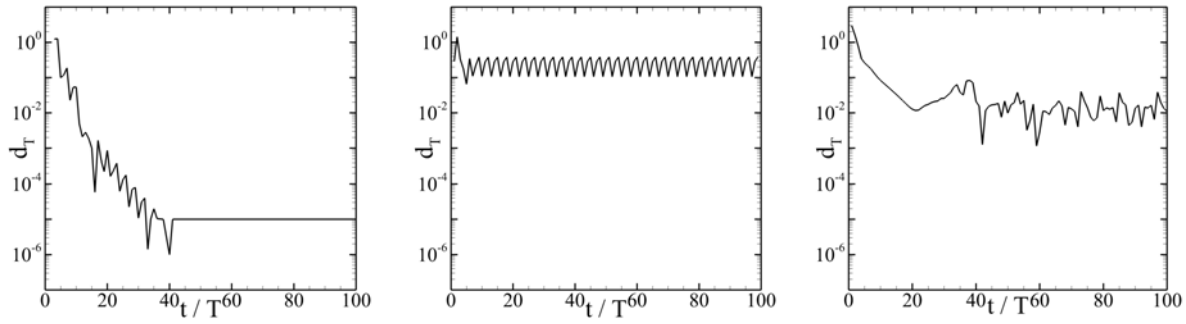
il parait logique de considérer les efforts comme grandeurs de contrôle pour détecter de la même manière des modifications de la périodicité des écoulements.

1.3.1.2 Calculs d'écart à la périodicité

En plus de l'utilisation des sections de Poincaré pour identifier la périodicité des solutions numériques, il est intéressant de définir une mesure quantitative de l'écart à la périodicité. Cet écart est écrit sous la forme d'une distance (géométrique) entre deux mesures des efforts, espacées d'un nombre entier de périodes.

$$d_{kT}(t/T) = \|\boldsymbol{F}(t/T + k) - \boldsymbol{F}(t/T)\| \quad , \quad k \in \mathbb{N}^* \tag{1.59}$$

L'entier strictement positif k sert à régler le nombre de périodes entre deux mesures. Le cas le plus fréquent correspond à $k = 1$, qui permet de mesurer l'écart à la T-périodicité. L'usage d'une mesure locale de la vitesse $\boldsymbol{u}$ de l'écoulement, ou d'une mesure globale intégré sur l'ensemble du domaine de simulation à la place des efforts n'a pas montré de différences dans les résultats. Les efforts ont donc été choisis pour mesurer la distance d_{kT} le plus simplement possible. Dans plusieurs cas de figure, la distance d_{kT} évolue de



(a) (b) (c)

FIGURE 1.9 – Exemples de mesures d'écart à la T-périodicité d_T pour une solution (a) T-périodique, (b) $3T$-périodique et (c) quasi T-périodique.

manière oscillante sur plusieurs ordres de grandeurs. Cela nécessite de définir un critère arbitraire pour décider si une solution est kT-périodique ou non. La figure (1.9) permet de représenter l'évolution de la distance d_T pour trois écoulements respectivement T-périodique, $3T$-périodique et quasi T-périodique. Ce critère de convergence est fixé pour la suite à $d_{kT} < 10^{-4}$ sauf mention contraire.

1.3.2 Méthodes d'analyses des sillages

De nombreuses méthodes existent pour analyser les structures tourbillonnaires. Que ce soit pour décrire un tourbillon isolé ou un ensemble de tourbillons, cela revient à identifier plusieurs caractéristiques parmi lesquelles leur nombre, leur agencement, leur taille, leur forme, leur circulation, etc.

L'analyse de la dynamique des tourbillons passe parfois par une étape de modélisation. Les tourbillons sont modélisés analytiquement pour pouvoir traiter plus simplement leur comportement. De nombreux modèles de tourbillons existent. Parmi ceux-ci figure entre autre la méthode dite de "point-vortex". Dans ce modèle, les tourbillons sont modélisés par des éléments ponctuels de circulation donnée, qui génèrent un champ de vitesse autour d'eux. C'est probablement la modélisation la plus simple que l'on puisse faire d'un tourbillon et en conséquence aussi la moins réaliste. Cette simplicité la rend par ailleurs

incompatible avec une prise en compte de la viscosité. C'est également le cas du modèle de Rankine. Celui-ci consiste à décomposer l'écoulement en deux parties : le tourbillon est un coeur circulaire, de vorticité constante et l'extérieur du tourbillon possède une vorticité nulle. Cette discontinuité du profil de vorticité rend également ce modèle non compatible avec un modèle visqueux du fluide. Enfin, on peut également citer le modèle de Lamb-Oseen [83] qui est plus réaliste et donc complexe. Il consiste à décrire le tourbillon par un profil de vitesse gaussien, solution des équations d'Euler qui le rend, lui, compatible avec un modèle visqueux. Il existe également des modèles de tourbillon *à deux échelles* introduits par Fabre [84]. Ceux-ci se révèlent être particulièrement adaptés à la modélisation de sillages d'avions.

Cette section a pour objectif de mettre en place les méthodes d'analyse des tourbillons utilisées au cours de cette thèse. On utilise en particulier le critère$-Q$, défini ci-après, et on montre sa comptabilité avec les modèles analytiques de tourbillon. Par la suite, les méthodes introduites sont appliquées à des tourbillons de sillage pour mettre en place une méthode d'identification systématique de ceux-ci.

Les méthodes définies dans cette section sont largement utilisées dans les chapitres (3) et (4).

1.3.2.1 Caractérisation de tourbillons

La caractérisation et la modélisation des tourbillons est une problématique primordiale de la dynamique des écoulements tourbillonaires. C'est un problème particulièrement sensible en mécanique des fluides expérimentale. Qu'on soit en soufflerie ou en tunnel hydrodynamique, la caractérisation des sillages de tourbillons constitue un problème ouvert et il n'existe pas de manière unique de procéder. On commence par présenter plusieurs techniques utilisées pour repérer et définir les zones tourbillonaires.

Par définition, un tourbillon se caractérise par une rotation locale de l'écoulement. On considère un écoulement bidimensionnel $\boldsymbol{u} = (u, v)^T$. On note $\underline{\underline{\mathcal{D}}}$ le tenseur des gradients de vitesse, $\underline{\underline{\mathcal{S}}}$ le tenseur des taux de déformations et $\underline{\underline{\Omega}}$ le tenseur vorticité de telle sorte qu'on a $\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{S}_{ij} + \Omega_{ij}$ avec

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad ; \quad \mathcal{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \quad ; \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.60}$$

Pour identifier les zones du fluide dans lequel un tourbillon se trouve, Hunt *et al.* introduisent le critère Q [85]. Ce critère identifie un tourbillon comme une position de l'écoulement où la norme de la vorticité $\underline{\underline{\Omega}}$ est plus importante que celle du taux de déformation $\underline{\underline{\mathcal{S}}}$. Le critère λ_2, introduit par Jeong *et al.* [86] consiste lui à déterminer les valeurs propres du tenseur symétrique $\underline{\underline{\mathcal{S}}}^2 + \underline{\underline{\Omega}}^2$. Les zones tourbillonnaires se trouvent dans les zones où le critère λ_2 est négatif, ce qui correspond à une pression locale minimale. Les centres des tourbillons correspondent aux extrema de λ_2. Pour un écoulement bidimensionel incompressible, on a $Q = -\lambda_2$. Les deux critères sont alors complètement équivalents. Le critère du discriminant, introduit par Chong *et al.* [87] consiste à identifier les zones tourbillonnaires en se basant sur les valeurs propres du tenseur gradient de vitesse $\underline{\underline{\mathcal{D}}}$. Plus récemment, Graftieaux *et al.* [88] ont développé des critères tomographiques qui ne se basent pas sur l'analyse du tenseur gradient de vitesse mais sur la topologie du champ de vitesse, indépendamment de son intensité. On peut également noter la possibilité d'utiliser une décomposition en modes orthogonaux (POD) de l'écoulement. Cette méthode a été introduite par Berkooz *et al.* [89] pour analyser les écoulements turbulents.

Dans la présente étude, il a été fait le choix d'utiliser le critère Q comme méthode pour définir et repérer les tourbillons. Ce critère a été choisi pour sa simplicité d'utilisation et

son efficacité à donner une vision représentative des écoulements considérés. La suite de cette section est consacrée à définir précisément le critère Q, montrer sa compatibilité avec les modèles de tourbillon de Rankine et de Lamb-Oseen et illustrer sa mise en application sur un sillage de tourbillons.

1.3.2.1.1 Définition du critère Q

On rappelle que le critère consiste à définir un champ scalaire Q qui compare localement la vorticité au taux de déformation. Le champ Q s'écrit

$$Q = \frac{1}{2}\left(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - \mathcal{S}_{ij}\mathcal{S}_{ij}\right) \tag{1.61}$$

Ce critère se résume alors de la façon suivante : les tourbillons se trouvent dans les zones de l'écoulement où la valeur locale de Q est strictement positive. Dans un cas bi-dimensionnel comme c'est le cas dans toute notre étude, cette expression peut être simplifiée pour se réduire à

$$Q = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] \tag{1.62}$$

Le critère Q peut être appliqué aux modèles de tourbillon tels que les modèles de Rankine et de Lamb-Oseen pour vérifier leur bonne compatibilité. Dans le modèle de Rankine, le tourbillon de rayon a possède une vorticité ω et une vitesse azimuthale u_θ définies par morceaux

$$\omega(r) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma}{\pi a^2} & r \leqslant a \\ 0 & r \geq a \end{cases} \quad , \quad u_\theta(r) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma r}{2\pi a^2} & r \leqslant a \\ \dfrac{\Gamma}{2\pi r} & r \geq a \end{cases} \tag{1.63}$$

L'application du critère$-Q$ à cette définition du tourbillon donne

$$Q(r) = \frac{u_\theta(r)}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}(r) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma^2}{4\pi a^4} & r \leqslant a \\ -\dfrac{\Gamma^2}{4\pi r^4} & r \geq a \end{cases} \tag{1.64}$$

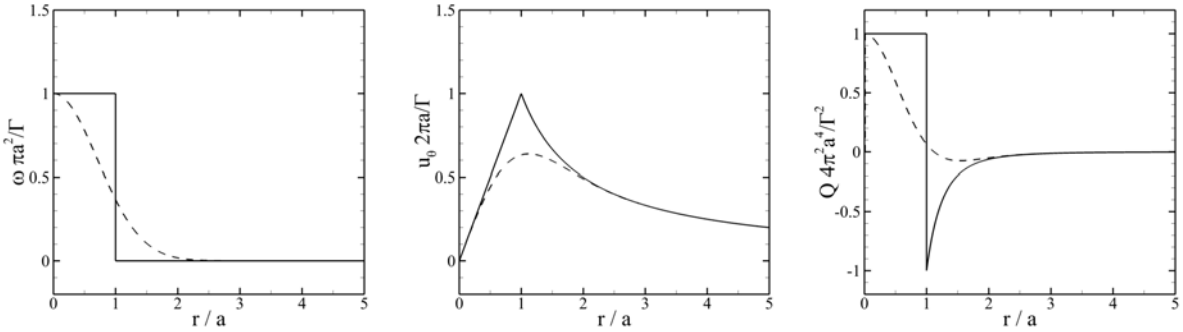
Le champ Q est discontinu à la limite du tourbillon de Rankine. Il a une valeur positive constante à l'intérieur du tourbillon et une valeur négative (croissante en fonction de r) à l'extérieur du tourbillon qui tend vers 0 à l'infini.

Le modèle de Lamb-Oseen est lui un modèle de tourbillon plus réaliste que le modèle de Rankine. Ce modèle est solution des équations d'Euler. Le profil de vorticité n'est plus discontinu mais gaussien. La vorticité et la vitesse azimuthale s'écrivent

$$\omega(r) = \frac{\Gamma r}{\pi a^2} exp(-r^2/a^2) \quad , \quad u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - exp(-r^2/a^2)) \tag{1.65}$$

$$Q(r) = \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^4}\left(1 - exp(-r^2/a^2)\right)\left[exp(-r^2/a^2)\left(1 + 2r^2\right) - 1\right] \tag{1.66}$$

Dans ce modèle, le champ Q passe d'une valeur positive à négative pour $r \approx 1.12a$, ce qui correspond au rayon de vitesse azimuthale maximale. La figure (1.10) regroupe les profils de vorticité ω (1.10a), de vitesse azimuthale u_θ (1.10b) et de critère Q (1.10c)



(a) (b) (c)

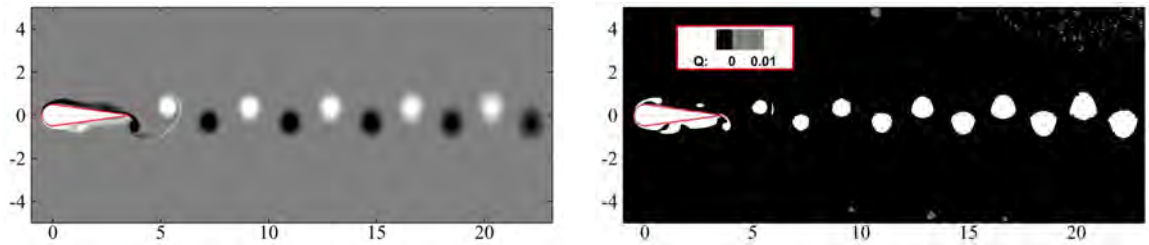
FIGURE 1.10 – Profils (a) de la vorticité ω, (b) de la vitesse azimuthale u_θ et (c) du critère Q. Le trait plein correspond au modèle de Rankine et le trait pointillé au modèle de Lamb-Oseen.

pour les modèles de Rankine (trait plein) et de Lamb-Oseen (trait pointillé). Pour les deux modèles, la compatibilité avec le critère Q est claire. Les deux modèles ont la même valeur de Q au centre du tourbillon et à l'infini. Ils ne diffèrent que par la position qui définit la séparation entre l'intérieur et l'extérieur du tourbillon. La taille du tourbillon est plus grande avec le modèle de Lamb-Oseen, qui présente un modèle continu, donc plus réaliste de la vorticité. Enfin, on notera que toutes ces définitions montrent l'équivalence qu'il existe entre le seuil $Q = 0$ et le seuil de vitesse azimuthale maximale.

1.3.2.1.2 Application du critère Q à un sillage de tourbillons

Maintenant que le critère Q est correctement défini, on peut l'appliquer à un cas réel de sillage de tourbillons. Cette phase d'application sert particulièrement à montrer l'utilisation que l'on va faire de ce critère à travers l'ensemble de l'étude.

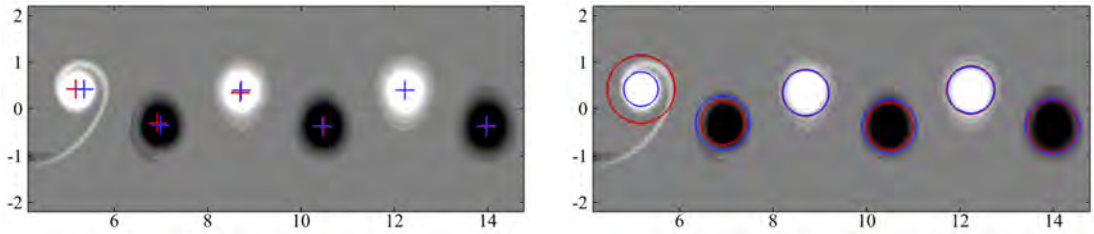
Numériquement, utiliser comme seuil de la présence de tourbillons la valeur théorique $Q_c = 0$ peut poser des problèmes. En effet, la discrétisation spatiale du problème à résoudre peut mener à l'existence de zones sans tourbillons, avec une valeur calculée de Q qui est positive et quasi nulle. Ce phénomène est illustré dans la figure (1.11). La figure (1.11a) représente un instantané de vorticité d'un sillage produit par une aile battante. La figure (1.11b) représente le champ Q associé. Les zones où $Q < 0$ sont en noir, les zones où $0 < Q < 10^{-2}$ sont en gris et les zones où $Q > 10^{-2}$ sont en blanc. Les zones grises ne sont pas des lieux de présence de tourbillons mais des artefacts numériques et leur taille est généralement de l'ordre de grandeur d'un élément du maillage. Ces artefacts numériques sont d'ailleurs fréquents dans les zones lointaines de l'écoulement, où les mailles sont grandes. Pour éviter de définir les zones grises comme des lieux de présence de tourbillons, la valeur seuil $Q_c = 10^{-2}$ est utilisée dans toute la suite de l'étude pour définir la présence de tourbillons. Avec la répartition spatiale de Q, les tourbillons peuvent être identifiés.



(a) (b)

FIGURE 1.11 – Carte de (a) la vorticité et (b) du critère Q. L'aile est en rouge.

Il faut alors être capable de déterminer leur caractéristiques, à savoir la position de leur centre, leur forme et taille et enfin leur circulation.
Pour identifier le centre d'un tourbillon réel, de nombreuses définitions existent. Lorsque le tourbillon est isolé, ces définitions sont en général équivalentes. Elles peuvent cependant avoir une influence non négligeable sur le résultat lorsqu'on se confronte à un tourbillon réel. Le centre d'un tourbillon peut en effet être défini comme un maximum local de vorticité, le barycentre de vorticité ou un minimal local du champ de vitesse. L'utilisation du maximum de vorticité est susceptible de fortes erreurs s'il y a une erreur locale. Au contraire de l'utilisation du barycentre de vorticité comme critère, qui est théoriquement censé gommer d'éventuelles erreurs locales. Par contre, utiliser le barycentre de vorticité incorpore tous les défauts de forme des tourbillons, dès que ceux-ci ne sont pas circulaires. On compare dans la figure (1.12a) les positions de centres de quelques tourbillons, obtenus en utilisant le maximum de vorticité (rouge) et le barycentre (bleu). Les positions obtenues sont pratiquement identiques à l'exception du premier tourbillon (le plus à gauche). Sur ce tourbillon en cours de formation, l'enroulement est incorporé dans le critère du barycentre et décale la position du centre. C'est le seul cas de figure où ces deux critères se sont révélés notablement différents. L'utilisation du minimum local du champ de vitesse comme critère a quant à lui posé de nombreux problèmes dès lors que les tourbillons étaient advectés et n'a donc pas été retenu. Finalement, notre choix s'est porté sur l'utilisation du maximum de vorticité pour repérer la position des centres des tourbillons.



(a) (b)

FIGURE 1.12 – (a) Position des centres des tourbillons en utilisant le maximum de vorticité (rouge) et le barycentre de vorticité (bleu). (b) Taille du tourbillon en utilisant le rayon du cercle circonscrit à la zone $Q > Q_c$ (rouge) et le maximum de vitesse tangentielle (bleu).

Dans la grande majorité des cas, on considère qu'un tourbillon isolé possède une forme circulaire. Nos observations ont montré que l'hypothèse de circularité des tourbillons est valable dans la majorité de nos simulations, à l'exception de la phase de formation des tourbillons. Pour cette raison, nous avons choisi de conserver une modélisation circulaire des tourbillons. Leur identification passe donc par le calcul de leur rayon. Pour définir le rayon d'un tourbillon, il existe là aussi plusieurs définitions, équivalentes si le tourbillon est parfait. En particulier, les modèles de Rankine et de Lamb-Oseen permettent de définir le rayon d'un tourbillon en utilisant le maximum de vitesse azimuthale. D'autre part, la section précédente nous a permis de montrer que théoriquement, ce critère est équivalent à l'utilisation du seuil Q_c, quel que soit le modèle. Les deux options ont donc été testées et sont comparées dans la figure (1.12b). Le cercle rouge est circonscrit à la zone $Q > Q_c$ tandis que le cercle bleu possède un rayon défini par le maximum de vitesse azimuthale, calculé dans les quatre directions cardinales. En dehors du tourbillon en cours de formation où les deux critères semblent respectivement surévaluer et sous-évaluer la taille du tourbillon, ils mènent pratiquement au même résultat quand les tourbillons sont formés. Cela semble confirmer l'équivalence des deux critères. Finalement, c'est la délimitation de la zone $Q > Q_c$ qui a été utilisée, pour sa simplicité d'implémentation.

Dans leur étude de la déviation du sillage d'une aile battante, Godoy-Diana *et al.* [47] calculent la circulation des tourbillons en intégrant la vorticité dans une boite rectangu-

laire centrée autour de leurs tourbillons. Dans notre étude, on utilise l'identification des tourbillons que l'on vient de présenter pour calculer leur circulation

$$\Gamma = \int_{\Sigma} \omega_z(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.67}$$

où Σ traduit la surface du disque-tourbillon. Son centre se situe au maximum de vorticité et il est circonscrit à la zone $Q > Q_c$.

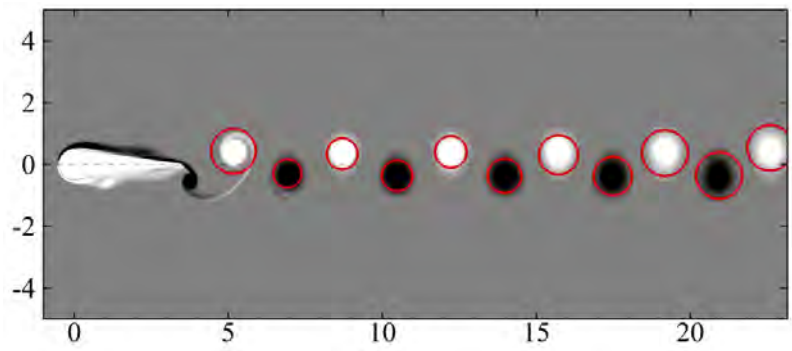


FIGURE 1.13 – Sillage d'une aile battante. Les cercles rouges représentent les tourbillons identifiés dans le sillage.

La figure (1.13) représente le même écoulement instantané que la figure (1.11a) sur lequel ont été superposés la position et la taille des tourbillons identifiés. Le tourbillon en cours d'émission au bord de fuite de l'aile n'est pas identifié. C'est une conséquence des critères numériques utilisés pour identifier et séparer les zones à $Q > Q_c$ en plusieurs tourbillons. Pour cette raison, un tourbillon ne peut être identifié qu'une fois complètement détaché. On note également que le premier tourbillon identifié possède un rayon plus important que son rayon réel, dû à la présence de vorticité qui s'enroule autour de lui. C'est un des inconvénients de la méthode d'identification. Cet effet disparaît heureusement lorsque les tourbillons sont advectés dans le sillage.

1.3.2.2 Caractérisation de la perturbation de tourbillons

Dans cette étude, on traite à la fois d'écoulements tourbillonaires qu'il faut caractériser mais également de problèmes de stabilité. Les écoulements tourbillonaires sont considérés comme des champs de base qui sont soumis à des perturbations linéaires infinitésimales, ce qui pose la question de caractériser quantitativement l'effet de ces perturbations sur les tourbillons de ce champ de base. Le terme de quantification n'est pas utilisé dans un sens absolu, puisque la plupart des perturbations considérées sont linéaires et infinitésimales. Par contre, l'évolution spatiale et spatio-temporelle de la perturbation peut permettre d'identifier des zones et des instants où la perturbation est maximale. La quantification de l'influence des perturbations linéaires est donc relative. Dans cette thèse, on considère seulement des perturbations qui génèrent un déplacement de solide rigide $\boldsymbol{\delta}$ du tourbillon T_i tel que

$$\boldsymbol{\delta} = \frac{1}{\Gamma} \int_{\Sigma} \omega'_z(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{x} \mathrm{d}\boldsymbol{x} \tag{1.68}$$

où ω'_z est la vorticité locale du mode de Floquet et $\boldsymbol{x}$ est la position locale intégrée sur toute la surface Σ du tourbillon de circulation Γ du champ de base. Ce choix est fait en accord avec les perturbations observées. De manière exhaustive, il existe tout une gamme de perturbations que l'on peut qualifier de perturbations de déformation, dont l'effet est de modifier une ou plusieurs des caractéristiques géométriques du tourbillon. On peut

considérer une déformation d'aplatissement : le tourbillon voit sa taille caractéristique augmenter ou diminuer sans modification de sa forme circulaire ou de sa circulation. On peut également parler d'une déformation de pincement : le tourbillon perd sa forme circulaire et prend une forme elliptique. La figure (1.14a) représente une image instantanée

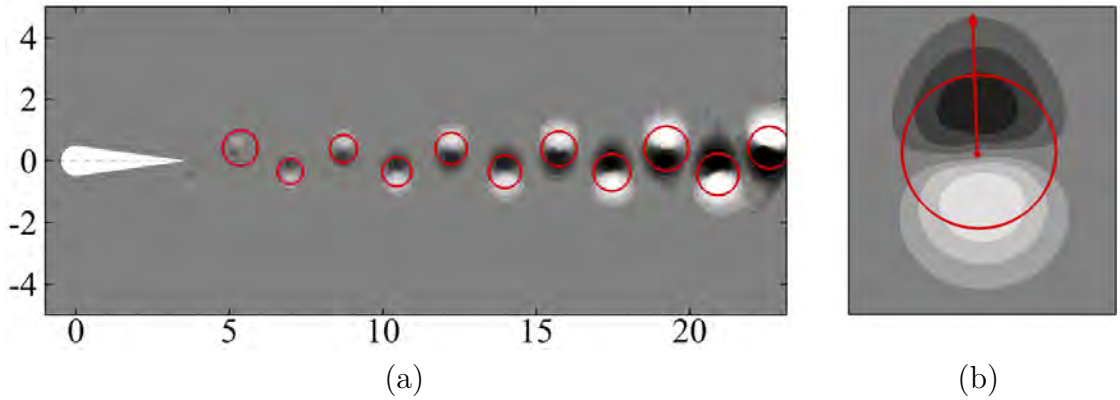


FIGURE 1.14 – (a) Superposition de la vorticité instantanée d'une perturbation linéaire avec les cercles représentant la position des tourbillons du champ de base. (b) Déplacement généré par la perturbation sur le tourbillon.

d'une perturbation linéaire. Plusieurs cercles rouges sont tracés en superposition pour représenter la taille et la position des tourbillons du champ de base qui ont été identifiées à l'aide des outils définis dans la section (1.3.2.1). La figure (1.14b) représente un zoom de la figure (1.14a) sur un des tourbillons. On y a rajouté le déplacement de solide rigide généré par la perturbation sur le tourbillon, calculé en utilisant l'équation (1.68). On précise que la norme du déplacement représenté est arbitraire, et que sa direction tient compte du fait que le tourbillon est positif.

Chapitre 2

Méthodes pour la stabilisation d'écoulements stationnaires et périodiques

2.1 Introduction

2.1.1 Symétries et principe de Curie

Les symétries et les invariances constituent des pierres de base de la modélisation de problèmes physiques. Elles peuvent être utilisées pour simplifier des problèmes complexes en appliquant le principe de Curie qui énonce que *"lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits"*. Ce principe s'illustre aisément en mécanique des fluides en considérant par exemple un cylindre circulaire placé dans un écoulement uniforme à l'amont. Cet écoulement amont étant indépendant du temps (cause), il est légitime de considérer que l'écoulement autour du cylindre (effet) est aussi indépendant du temps. Par ailleurs, comme le cylindre circulaire présente deux symétries de réflexion spatiale, l'une par rapport à l'axe (O, y) et l'autre par rapport à l'axe (O, x), ces symétries géométriques peuvent se retrouver dans l'écoulement. C'est le cas lorsque le nombre de Reynolds, qui caractérise le rapport des effets convectifs sur les effets diffusifs, est très faible ($Re \ll 1$).Sur la figure (2.1a), qui représente l'écoulement dit de Stokes, on observe très clairement que les deux symétries de réflexion de la géométrie se retrouve dans l'écoulement. Plus précisément, l'écoulement est invariant par l'effet de la symétrie de réflexion par rapport à l'axe (O, y) notée s_x et définie par ainsi que par l'effet de la symétrie de réflexion par rapport à l'axe (O, x) notée s_y .

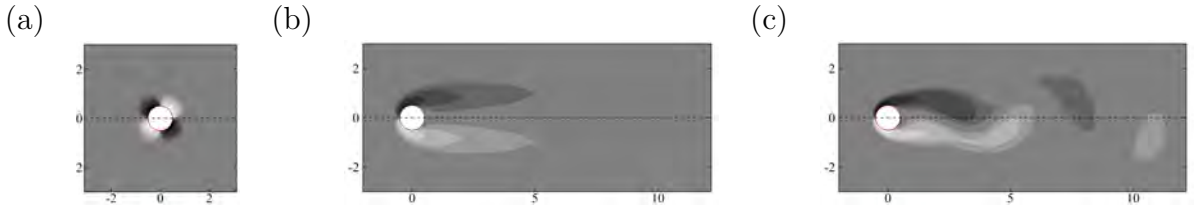


FIGURE 2.1 – Illustration de la problématique des symétries pour l'écoulement autour d'un cylindre : (a) $Re = 0$; (b) $Re = 20$; (c) $Re = 60$.

Lorsque le nombre de Reynolds augmente, par exemple $Re = 20$, on observe dans la figure (2.1b), que l'écoulement ne respecte plus la symétrie de réflexion s_x (ce qui est associé à l'apparition d'une force de résistance, la traînée.) Enfin, lorsqu'on augmente

encore le nombre de Reynolds, par exemple à $Re = 60$, on observe maintenant dans la figure (2.1c), que l'écoulement est instationnaire et que se développe dans le sillage du cylindre une allée de tourbillons qui n'est pas symétrique pas rapport à l'axe (O, x). L'invariance temporelle et la symétrie de réflexion sont donc brisées. L'écoulement est néanmoins caractérisée par deux nouvelles propriétés remarquables. La première est que l'écoulement est devenu T-périodique, ce qui signifie qu'il est invariant par la symétrie de translation temporelle d'une période T (ou d'un nombre entier de périodes T). La deuxième est que l'écoulement possède une symétrie spatio-temporelle, c'est-à-dire que l'écoulement à un instant t_0 est symétrique par rapport à l'axe (O, x) de l'écoulement à l'instant $t_0 + T/2$.

Cet exemple illustre bien que le principe de Curie, s'il n'est pas remis en cause, se complique en présence de bifurcation de l'écoulement. Les symétries et invariances temporelles peuvent se briser au passage d'une bifurcation, de sorte que les éléments de symétries des causes ne se retrouvent pas nécessairement dans les éléments de symétries des *solutions observables*. Cependant, si l'invariance temporelle est effectivement brisée par une solution particulière observée comme celle de la figure (2.1c), le principe d'invariance est préservé en considérant *l'ensemble des solutions observables*. En effet, l'invariance par translation temporelle implique que si $(u, v, p)(x, y, t)$ est une solution observable possible, alors $(u, v, p)(x, y, t + t_\phi)$ est également une solution observable possible, quelque soit le décalage temporel t_ϕ. La translation temporelle n'est donc plus une invariance d'une solution observable mais une invariance de l'ensemble des solutions observables.

Pour le nombre de Reynolds $Re = 60$, on peut toutefois noter que même si celle-ci n'est pas *observable* au sens de Curie, il existe cependant une solution *instable* qui respecte l'invariance temporelle et la symétrie de réflexion. L'identification et l'étude de telles solutions *instables* constitue le point de départ des études de stabilité des écoulements. Ce chapitre est consacré au développement de méthodes numériques permettant de calculer de telles solutions instables, en utilisant les propriétés de symétries ou d'invariance temporelle de ces solutions. Comme le montre la revue ci-dessous, il existe de nombreuses méthodes numériques faciles à implémenter qui permettent de calculer des solutions stationnaires (indépendante du temps) instables. Par contre, les méthodes permettant de calculer des solutions périodiques instables sont moins nombreuses et parfois difficile à implémenter. L'objectif de ce chapitre est de proposer de nouvelles méthodes permettant de calculer des solutions instables d'écoulements périodiques qui présentent ou non certaines propriétés de symétrie.

2.1.2 Méthodes de recherche de solutions stationnaires

Afin d'illustrer les méthodes existantes de calcul de solutions stationnaires, considérons un système dynamique s'écrivant sous la forme

$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathcal{R}(\mathbf{q}) \tag{2.1}$$

où $\mathbf{q}$ est le vecteur d'état, $\mathcal{R}(\mathbf{q})$ est le vecteur résidu et $\mathcal{B}$ est un opérateur qui détermine sur quelles composantes du vecteur $\mathbf{q}$ s'applique la dérivée temporelle.

L'approche la plus naturelle consiste à imposer l'invariance temporelle dans l'espace des solutions que l'on recherche. Si l'on note $\mathbf{Q}$ une solution indépendante du temps, elle doit satisfaire la relation

$$\mathcal{R}(\mathbf{Q}) = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

Il faut donc rechercher un point fixe de l'équation (2.2). Lorsque l'opérateur $\mathcal{R}$ est non-linéaire par rapport au vecteur d'état, on peut utiliser la méthode de Newton-Raphson, qui consiste à rechercher la solution sous la forme $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_g + \delta\mathbf{Q}$, où $\mathbf{Q}_g$ est une approximation connue de la solution et $\delta\mathbf{Q}$ est une correction inconnue qui satisfait l'équation linéaire

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_g)\,\delta\mathbf{Q} = -\mathcal{R}(\mathbf{Q}). \tag{2.3}$$

L'opérateur Jacobien $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_g)$ est obtenu par linéarisation de l'opérateur $\mathcal{R}$ autour de l'état approximé $\mathbf{Q}_g$. En résolvant itérativement cette équation pour les vecteurs états incrémentés par la correction, i.e $\mathbf{Q}_g \leftarrow \mathbf{Q}_g + \delta\mathbf{Q}$, on parvient à converger vers la solution satisfaisant (2.2), sous réserve que la première solution approximée ne soit pas trop "éloignée" de la solution recherchée.

La difficulté de cette méthode réside dans la résolution du système linéaire (2.3), dont la matrice Jacobienne, obtenue après discrétisation spatiale de l'opérateur Jacobien, est de très grande taille dans les problèmes de mécanique des fluides et très mal conditionnée pour des écoulements incompressibles. Une solution pour résoudre ce problème linéaire est d'assembler cette matrice Jacobienne creuse et de l'inverser par une méthode de factorisation directe, grâce à des libraires en libre accès comme MUMPS, SuperLU, PARDISO, etc. Cette solution est robuste mais très coûteuse numériquement car la factorisation de la matrice creuse nécessite beaucoup de mémoire vive.

Pour éviter la factorisation directe de cette matrice creuse, il est possible d'utiliser des méthodes de Krylov (comme l'algorithme GMRES) qui ne repose que sur la multiplication de la matrice Jacobienne avec un vecteur. Néanmoins, la convergence de ces méthodes itératives dépend très fortement du conditionnement de la matrice Jacobienne, qui s'avère être très grand pour les problèmes d'écoulements incompressibles. Des techniques de préconditionnement [77] peuvent être utilisées pour améliorer le conditionnement du problème résolu et ainsi réduire le nombre d'itération nécessaire à la résolution du système linéaire. La recherche d'un préconditioneur optimal pour les équations de Navier-Stokes incompressibles stationnaires est encore un sujet de recherche active [90].

Une autre alternative à la méthode de Newton-Raphson est la méthode de projection récursive (RPM pour Recursive Projection Method) dévelopée par Shroff & Keller [91] qui repose sur une projection de la solution dans l'espace des solutions instables. La méthode de Newton-Raphson est utilisée dans cet espace instable de faible dimension, tandis qu'un algorithme de point-fixe standard est utilisé pour résoudre la solution complémentaire. L'efficacité et la difficulté de cette méthode très générale réside dans la construction de l'espace instable. Pendant le calcul de la solution stationnaire, il faut approximer les valeurs propres dominantes de la matrice Jacobienne, les vecteurs propres associés permettant de construire l'espace instable.

Le second type d'approche pour déterminer des solutions stationnaires instables se base sur la résolution du problème instationnaire (2.1). Comme la plupart des solveurs sont développés pour résoudre ces équations, des méthodes numériques efficaces en temps de calcul ont souvent déjà été implémentées. La méthode "Selective Frequency Damping" (SFD) proposée par Åkervik *et al.*[92] permet de calculer des solutions stationnaires instables des équations de Navier-Stokes incompressibles. L'équation (2.1) est remplacée par le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} &= \mathcal{R}(\mathbf{q}) - \chi\mathbf{B}\left(\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}\right) \\ \bar{\mathbf{q}} &= \mathcal{T}\mathbf{q} \end{aligned} \tag{2.4}$$

où l'opérateur $\mathcal{T}$ est un filtre passe-bas qui extrait la composante basse-fréquence $\bar{\mathbf{q}}$ (aussi appelée solution filtrée) de la solution instantanée $\mathbf{q}$. Un terme d'amortissement, proportionnel à la composante haute-fréquence de la solution $\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}$ est ajouté à l'équation d'évolution (2.4) afin d'amortir cette composante haute-fréquence. Le coefficient d'amortissement χ et la fréquence de coupure du filtre passe-bas doivent être choisi de façon à ce que la solution de cette équation converge vers la solution stationnaire. Cette dernière vérifie bien l'équation d'origine (2.1) car le terme d'amortissement, proportionnel à la composante haute-fréquence, disparaît lorsque la solution stationnaire est atteinte. Différents travaux ont ensuite été publiés pour améliorer l'évaluation du coefficient d'amortissement et de la fréquence de coupure. Jordi *et al.* [93] ont proposé de réaliser des analyses de stabilité autour de solutions "partiellement convergées" grâce à des méthodes d'Arnoldi. La détermination de la valeur propre dominante permet de calculer automatiquement/itérativement le coefficient d'amortissement et la fréquence de coupure du filtre qui stabilise cette valeur propre. Cunha *et al.* [94] ont proposé une méthode d'optimisation des paramètres similaire, où la composante instationnaire est cette fois approximée par la méthode de Décomposition Dynamique (DMD pour Dynamic Mode Decomposition) proposée par Schmid [95]. Récemment, Richez *et al.* [96] se sont servit de la méthode SFD pour le calcul de solutions stationnaires des équations RANS, modélisant des écoulements turbulents. En appliquant cette méthode au cas d'une aile en incidence proche du décrochage, ils ont identifié plusieurs solutions stationnaires, un "élément clé dans l'explication du phénomène d'hystérésis".

La méthode du préconditionneur de Stokes ("Stokes preconditioning") développée par L. S. Tuckerman [97, 98] est à la frontière entre les deux types d'approche mentionnée ci-dessus. En effet, le principe de la méthode est celui d'une méthode stationnaire de Newton-Raphson où le problème linéaire est préconditionné par un opérateur de Stokes instationnaire, ce qui donne son nom à la méthode. Or, la plupart des solveurs instationnaires reposent sur la résolution d'un problème de Stokes instationnaire à chaque pas de temps. L'originalité de ces travaux est d'avoir montré comment un solveur instationnaire peut être modifié (il faut quand même pouvoir le linéariser) et utilisé comme préconditionneur, et ainsi trouver des solutions stationnaires instables. Plus récemment, Beaume [99] a montré comment le pas de temps de ce préconditionneur pouvait été adapté afin d'améliorer la convergence vers la solution stationnaire.

Enfin, lorsque la configuration de l'écoulement considéré comporte des symétries, l'écoulement stationnaire présente lui même des symétries comme indiqué précédemment. Ces symétries peuvent être utilisées pour calculer la solution stationnaire, en restreignant la recherche de solutions à l'espace satisfaisant la symétrie considérée. Prenons comme exemple le cas du cylindre circulaire précédemment évoqué. L'écoulement instationnaire ne satisfait pas la symétrie de réflexion (2.11) pour $Re = 60$, alors que l'écoulement stationnaire satisfait cette symétrie pour $Re = 20$. On peut noter que l'invariance par la symétrie s_x implique que l'écoulement satisfait la condition suivante sur l'axe Ox :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}, v, \frac{\partial p}{\partial y}\right)(x, y = 0, t) = (0, 0, 0) \tag{2.5}$$

Une possibilité, couramment utilisée pour calculer la solution stationnaire instable, consiste donc à résoudre le problème sur un maillage correspondant à un demi-espace et à imposer les conditions de symétrie 2.5 comme *conditions limites*.

Dans la section 2.3 de ce chapitre, on développe une méthode alternative permettant de préserver la symétrie de réflexion de solution stationnaire. Cette méthode est développée sur un problème stationnaire à titre de validation, mais le principal intérêt de cette méthode étant qu'elle permet aussi la recherche de solutions périodiques instables.

2.1.3 Méthodes de recherche de solutions périodiques

Pour les problèmes de grandes dimensions qui nous intéressent, il existe peu de méthodes permettant de calculer les solutions périodiques instables. La méthode de Newton-Picard proposée par Lust *et al.* [100] est inspirée de la méthode RPM (Shroff & Keller (1993)) décrite précédemment pour la recherche de solution stationnaire, mais s'applique à la recherche de solutions périodiques. Considérons une solution T-périodique, notée par la suite $\mathbf{q}_T$, de l'équation d'évolution (2.1). Elle vérifie la relation $\mathbf{q}_T(t_0 + T) = \mathbf{q}_T(t_0)$ pour n'importe quel instant t_0. Cette relation peut être réécrite sous la forme

$$\mathcal{N}_T(\mathbf{q}_T(t_0)) - \mathbf{q}_T(t_0) = 0 \tag{2.6}$$

où l'opérateur $\mathcal{N}_T$ représente l'intégration temporelle de l'équation d'évolution (2.1) de l'instant $t = t_0$ à l'instant $t = t_0 + T$, et $\mathbf{q}_T(t_0)$ est la solution périodique à l'instant t_0. L'équation (2.6) montre que la solution périodique (à un instant donné t_0) est un point fixe de l'opérateur $\mathcal{N}_T - \mathcal{I}$. Par conséquent on peut donc utiliser les algorithmes de recherche de points fixes sur ce problème afin de déterminer des solutions périodiques. Si la méthode de Newton-Raphson n'est pas directement applicable du fait de la grande taille du problème, la méthode de projection récursive (RPM) de Shroff & Keller peut être appliquée au problème (2.6) comme l'ont montré Lust *et al.* [100] pour déterminer des orbites périodiques instables. Cependant, cette méthode est difficile à implémenter, car il faut au cours du calcul approximer les valeurs propres (multiplicateurs de Floquet) de la matrice de monodromie obtenue par linéarisation de l'opérateur $\mathcal{N}_T$ autour d'une solution périodique. Bien que cette méthode soit attractive car très générale, nous ne l'avons pas retenue/implémentée.

Une autre méthode pour calculer des solutions périodiques instables est la méthode d'équilibrage des harmoniques (Harmonic Balance Method). Elle consiste à décomposer la solution périodique sous la forme d'une série de Fourier

$$\mathbf{q}_T = \mathbf{q}_0 + \left(\mathbf{q}_1 e^{\mathrm{i}\omega t} + \mathbf{q}_2 e^{2\mathrm{i}\omega t} + \cdots\right) \tag{2.7}$$

où $\omega = 2\pi/T$ est la pulsation, $\mathbf{q}_0$ représente la solution moyennée en temps, $\mathbf{q}_1$ l'harmonique fondamentale, $\mathbf{q}_2$ la seconde harmonique, etc. En injectant cette solution dans le système d'équation (2.1) et en équilibrant les harmoniques, on obtient un système d'équations non-linéaires couplées, une pour la solution moyennée, une pour la première harmonique, etc. Toutes ces équations étant stationnaires, La variable "temps" n'intervenant plus explicitement dans ces équations, la recherche d'une solution périodique est (à nouveau) transformée en la recherche d'un point fixe d'un système d'équations non linéaires. Il existe plusieurs variantes de la méthode d'équilibrage des harmoniques. L'approche décrite précédemment, purement fréquentielle, a été très récemment appliquée avec succès aux écoulements de sillage autour d'objets fixes. Dans le cas du sillage d'un cylindre, la méthode d'ordre 1 (la série de Fourier est tronquée à l'ordre 1) prédit de manière très satisfaisante la fréquence de la solution périodique, mais surestime l'énergie contenue dans la première harmonique [101, 102], contrairement à la méthode d'ordre 2 [101, 103].

Cependant cette méthode est difficilement généralisable car l'écriture des équations non-linéaires couplées est de plus en plus fastidieuse lorsqu'on augmente le nombre d'harmoniques dans la solution (2.7) recherchée, voire impossible lorsque la non-linéarité de l'opérateur résidu $\mathcal{R}$ n'est pas polynomiale. Pour remédier à cet inconvénient, des variantes de la méthode ont été développées, comme la méthode temps-fréquence (TSM pour Time Spectrum Method) qui, par une transformée de Fourier inverse judicieuse, permet d'écrire le système d'équations dans le domaine temporel. Les inconnues du problème ne sont plus

les harmoniques $\mathbf{q}_i$ mais des solutions instantanées évaluées à des instants également distribués dans la période. Même si les équations sont écrites dans le domaine temporel, le système d'équations à résoudre ne fait pas apparaitre d'opérateur temporel. Comme précédemment il faut donc résoudre un système d'équations non linéaires, stationnaires, de très grande taille. Ce chapitre présente des méthodes de recherche de solutions instables se basant sur la résolution d'équations instationnaires. En s'inspirant de la méthode SFD [92], on propose d'ajouter un terme d'amortissement afin de transformer la solution instable du problème d'origine en une solution stable du problème amorti. Deux types de méthodes sont proposées. Dans le premier type de méthode, le terme d'amortissement est construit en considérant les symétries du problème et plus spécifiquement de la perturbation qui brise la symétrie observée dans la solution périodique stable. Deux formulations de cette méthode sont proposées, la première reposant sur la résolution d'une équation supplémentaire régissant la dynamique de la composante anti-symétrique, la seconde se basant sur l'extraction de cette composante anti-symétrique. Dans un premier temps, ces formulations sont développées et appliquées à la recherche de solutions stationnaires instables, avant de les étendre à la recherche de solutions périodiques instables dans la section (2.3). Le second type de méthode s'applique à des problèmes pour lequel la solution périodique devient instable, non pas suite à la brisure d'une symétrie spatio-temporelle, mais à cause d'une perte de périodicité de l'écoulement. Elle est inspirée des travaux initiaux de Pyragas [104] et des travaux récents de Shaabani-Ardali *et al.* [105] mais est appliquée dans ce chapitre à des problèmes non-autonomes (forcés) pour lesquels la période de la solution est un paramètre connu. La méthode précédente de préservation des symétries n'étant plus applicable, on construit le terme d'amortissement comme proportionnel à l'écart instantané à la solution périodique.

Le chapitre est organisé de la façon suivante. La section 2.2 introduit les équations régissant l'écoulement, les différentes configurations étudiées et les symétries spatiales et spatio-temporelles associées à chacune. Dans les sections 2.3 et 2.4 sont présentées les deux méthodes de stabilisation basées sur l'idée de préserver les symétries ou la périodicité de l'écoulement, ainsi que la validation des deux méthodes et leur comparaison.

2.2 Configurations, équations et symétries de l'écoulement

On étudie l'écoulement autour d'une aile dont la géométrie est représentée sur la figure 2.2. Elle est caractérisée par sa corde c, l'épaisseur D de son bord d'attaque, et peut être en incidence d'un angle α avec la direction de l'écoulement amont qui est uniforme et de vitesse U_∞. L'aile peut être mis en mouvement de rotation périodique autour de l'axe passant par le point O selon la loi sinusoïdale

$$\theta(t) = \alpha + \theta_m sin(2\pi f t) \tag{2.8}$$

où θ_m est l'angle maximal de rotation et $f = 1/T$ est la fréquence de battement. L'écoulement incompressible est caractérisé par le nombre de Reynolds $Re = U_0 D/\nu$ où ν est la viscosité cinématique du fluide. Le champ de vitesse vectoriel $\mathbf{u}$ et le champ de pression p sont, comme toutes les autres grandeurs, adimensionnées en utilisant comme vitesse caractéristique U_0 et comme longueur caractéristique D. Pour les configurations bidimensionnelles qui nous intéressent, le vecteur vitesse s'écrit $\mathbf{u} = (u, v)^T$ où u et v sont les composantes du vecteur vitesse projeté dans le système d'axes $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y)$ attaché à l'aile, tourné d'un angle $(\theta - \alpha)$ par rapport au système d'axes $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ du laboratoire (voir chapitre 1.1).

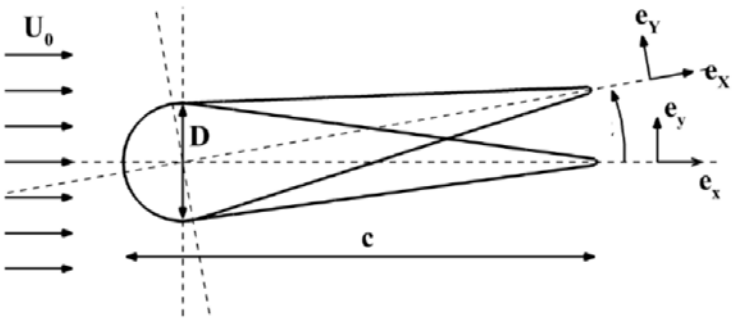


FIGURE 2.2 – Configuration d'une aile en mouvement de tangage périodique à fréquence f autour d'une axe pouvant être incliné d'un angle α avec la direction de l'écoulement amont uniforme.

2.2.1 Cas d'études

On distingue par la suite trois types de mouvement de l'aile.

2.2.1.1 Aile fixe sans incidence

Pour ce premier cas d'étude, l'angle d'incidence est nul ($\alpha = 0$) ainsi que le mouvement de rotation de l'aile ($\theta_m = 0$). Comme les systèmes d'axes $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y)$ et $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ se confondent, u et v représentent les composantes du vecteur vitesse dans ce dernier système d'axe. Le vecteur d'état $\mathbf{q} = (\mathbf{u}, p)^T$ est décrit par la loi d'évolution (2.1) où le vecteur résidu s'écrit

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}) = -\begin{pmatrix} (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p - Re^{-1}\mathbf{\Delta u} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

et représente les équations de Navier-Stokes incompressibles résolues dans le domaine spatial Ω autour de l'aile. Cette configuration se caractérise par une invariance temporelle ainsi qu'une symétrie de réflexion selon l'axe (O, x). Dans ce cas, les *causes* (dans le sens de Curie), c'est à dire la géométrie et les conditions limites sont caractérisée par une invariance temporelle ainsi qu'une invariance par la réflexion s_y par rapport à l'axe (O, x), qu'on peut définir par la transformation géométrique

$$s_y : (x, y) \to (x, -y). \tag{2.10}$$

Du fait que cette symétrie transforme les axes $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ en $(\mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_y)$, l'effet de cette symétrie sur un écoulement défini par $(u, v, p)(x, y)$ est donc définie ainsi :

$$s_y : \quad (u, v, p)(x, y) \quad \longrightarrow \quad (u, -v, p)(x, -y). \tag{2.11}$$

En vertu du principe d'invariance énoncé plus haut, on peut donc s'attendre à l'existence d'une solution d'écoulement qui reste invariante par l'effet de cette symétrie. Cependant une telle solution n'est pas nécessairement observable (au travers d'une expérience physique ou d'une simulation numérique). La figure 2.3 illustre deux cas possibles à l'aide de résultats de simulation numérique. Pour $Re = 100$, la solution observée à l'issue de la simulation est effectivement stationnaire et vérifie la symétrie spatiale s_y, comme représenté sur la figure 2.3(a). En revanche, pour $Re = 255$, le cas qui nous intéresse par la suite, à l'issue de la simulation numérique on observe que la solution est instationnaire et ne satisfait pas cette symétrie, comme représenté sur la figure 2.3(b). La solution stationnaire symétrique existe toutefois toujours pour cette valeur de Re, mais celle-ci est instable et donc non observable directement.

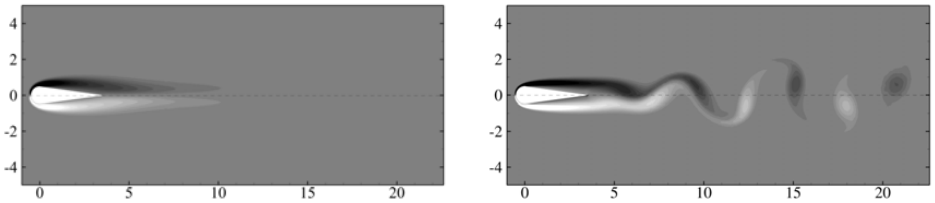


FIGURE 2.3 – Aile fixe sains incidence. Champ de vorticité de (a)la solution stationnaire obtenue pour $Re = 100$ et (b) la solution instationnaire obtenue pour $Re = 255$. Cette dernière ne satisfait pas la symétrie de réflexion.

2.2.1.2 Aile battante, incidence moyenne non nulle

Pour ce second cas d'étude, l'aile est en mouvement de rotation selon la loi sinusoïdale (2.8) autour d'un angle d'incidence non nul ($\alpha \neq 0$). Comme expliqué dans le chapitre (1.1), le résidu des équations de Navier-Stokes incompressibles formulées dans le système d'axe tournant s'écrit

$$\mathcal{R}(\mathbf{q}, \theta(t)) = -\begin{pmatrix} \omega\,(\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}) + [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla]\,\mathbf{u} + \nabla p - Re^{-1}\mathbf{\Delta u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

où $\omega = d\theta/dt$ est la vitesse de rotation de l'aile et $\mathbf{w}$ est la vitesse du maillage définie par

$$\mathbf{w}(\mathbf{X}, t) = (-cos(\theta(t)) - \omega(t)\,Y, sin(\theta(t)) + \omega(t)\,X)^T \tag{2.13}$$

Les équations sont résolues en prenant en compte la condition d'adhérence du fluide à la paroi de l'aile, qui s'écrit $\mathbf{u}(\mathbf{X}_w, t) = \mathbf{w}(\mathbf{X}_w, t)$, où $\mathbf{X}_w$ sont les coordonnées des points de la paroi.

Dans ce second cas, les causes au sens de Curie (la géométrie et les conditions limites) sont caractérisées par une symétrie temporelle de *périodicité*, notée s_T, dont l'effet sur les cordonnées spatiales et temporelles est le suivant :

$$s_T : (x, y, t) \rightarrow (x, y, t - T). \tag{2.14}$$

L'effet de cette symétrie sur un écoulement représenté par $(u, v, p)(x, y, t)$ dans le repère absolu est défini par

$$s_T : \quad (u, v, p)(x, y, t) \longrightarrow (u, v, p)(x, y, t - T). \tag{2.15}$$

Illustrons maintenant la présence ou l'absence de cette symétrie dans la solution du problème, à l'aide de résultats de simulation numérique tirés du chapitre (4). La figure 2.4 illustre deux cas différents rencontrés. Le premier cas représenté correspond aux paramètres $f = 0.1$, $\alpha = 9°$, $\theta_m = 8.8°$ et $Re = 255$. Dans ce cas, la solution observée est effectivement T-périodique. La structure de l'écoulement est identique à un instant t_0 (figure 2.4*a*) et à un instant $t_0 + T$ (figure 2.4*b*). La différence entre ces deux instants (figure 2.4*c*) est exactement nulle. Le second cas illustré correspond aux paramètres $f = 0.1$, $\alpha = 10.5°$, $\theta_m = 8.8°$ et $Re = 255$. Dans ce cas, la structure du sillage aux instants t_0 (figure 2.4*d*) et $t_0 + T$ (figure 2.4*e*) semble, à première vue, identique. Cependant, un examen plus approfondi montre de légères différences dans la structure de l'écoulement (notamment l'intensité et la position des tourbillons situés dans le sillage lointain). La différence entre ces deux instants (figure 2.4*f*) confirme cette différence et prouve que la solution n'est effectivement pas T-périodique. On verra dans le chapitre (4) que pour ce choix de paramètres la solution est en réalité $3T$-périodique, et que d'autres cas sont possibles selon la valeur des paramètres (pseudo-périodique, $2T$-périodique, etc). Dans tous ces cas il existe cependant une solution T-périodique instable, dont le calcul va nécessiter la mise en ouvre de techniques spécifiques.

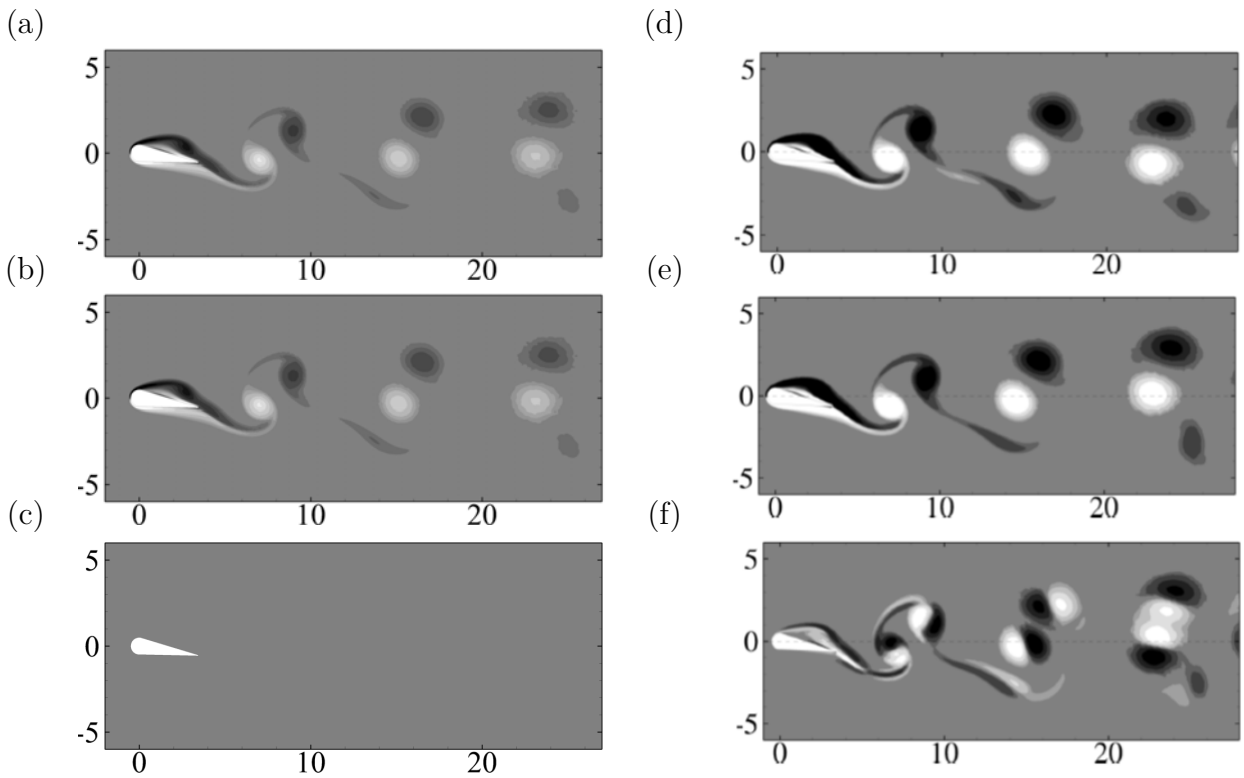


FIGURE 2.4 – Aile battante avec incidence. (a-c) Solution T-périodique obtenue pour $\alpha = 9°$ et $f = 0.1$. (d-f) Solution $3T$-périodique obtenue pour $\alpha = 10.5°$ et $f = 0.1$. Champ de vorticité pour (a,d) $t = t_0$ et (b,e) $t = t_0 + T$. (c,f) Différence entre les champs de vorticité à ces deux instants.

2.2.1.3 Aile battante, incidence moyenne nulle

Pour ce troisième cas d'étude, l'aile est mise en mouvement de rotation selon la loi sinusoïdale (2.8) mais cette fois-ci l'angle d'incidence moyen est nul ($\alpha = 0$). Comme dans le cas précédent, le vecteur d'état $\mathbf{q}$ est régit par l'équation d'évolution (2.1) écrite dans le repère tournant, et donc le vecteur résidu $\mathcal{R}(\mathbf{q})$ est défini par (2.12).

Intéressons nous maintenant aux symétries vérifiées par les causes au sens de Curie (géométrie et conditions limites) du problème. En plus de la symétrie de périodicité temporelle s_T caractérisant le cas précédent, on a maintenant une symétrie supplémentaire du fait que l'incidence moyenne est nulle. Cette nouvelle symétrie correspond au fait que chaque demi-période de battement est l'image par rapport à une symétrie miroir selon l'axe (O, x) de la précédente : l'angle de rotation, en plus d'être une fonction T-périodique, satisfait la relation $\theta(t) = -\theta(t + T/2)$: à l'instant t, il est opposé à l'angle de rotation à la demi-période suivante. Mathématiquement, cette symétrie correspond à la composition d'une translation temporelle d'une demi-période et d'une symétrie de réflexion. On la notera donc $s_y \, o \, s_{T/2}$, en définissant son effet sur les coordonnées spatiales et temporelle ainsi :

$$s_y \, o \, s_{T/2} : \quad (x, y, t) \longrightarrow (x, -y, t - T/2) \tag{2.16}$$

L'effet de cette symétrie sur un écoulement $(u, v, p)(x, y, t)$ est quand à lui défini ainsi :

$$s_y \, o \, s_{T/2} : \quad (u, v, p)(x, y, t) \longrightarrow (u, -v, p)(x, -y, t - T/2) \tag{2.17}$$

Illustrons maintenant la présence ou l'absence de cette symétrie dans la solution du problème, à l'aide de résultats de simulation numérique tirés du chapitre (3). La figure 2.5 illustre deux cas différents rencontrés. Celle-ci illustre la solution obtenue pour un angle

$\theta_m = 8.8°$ et au nombre de Reynolds $Re = 255$ pour deux fréquences de battement. Pour $f = 0.35$, on constate effectivement que les écoulements aux instants t_0 (figure 2.5a) et $t_0 + T/2$ (figure 2.5b) sont symétriques l'un de l'autre. La partie antisymétrique, obtenue par l'application de l'opérateur $\mathcal{A}$, est effectivement nulle (figure 2.5c). La situation est différente pour $f = 0.43$. Dans ce cas, du fait de la déviation du sillage vers le haut, la solution à $t_0+T/2$ (figure 2.5e) n'est plus symétrique de celle à t_0 (figure 2.5d). L'extraction de la partie antisymétrique de la solution (figure 2.5f) confirme que la symétrie spatio-temporelle est effectivement brisée. Dans ce second cas, il existe cependant une solution instable respectant la symétrie spatio-temporelle, dont le calcul va nécessiter la mise en ouvre de techniques spécifiques.

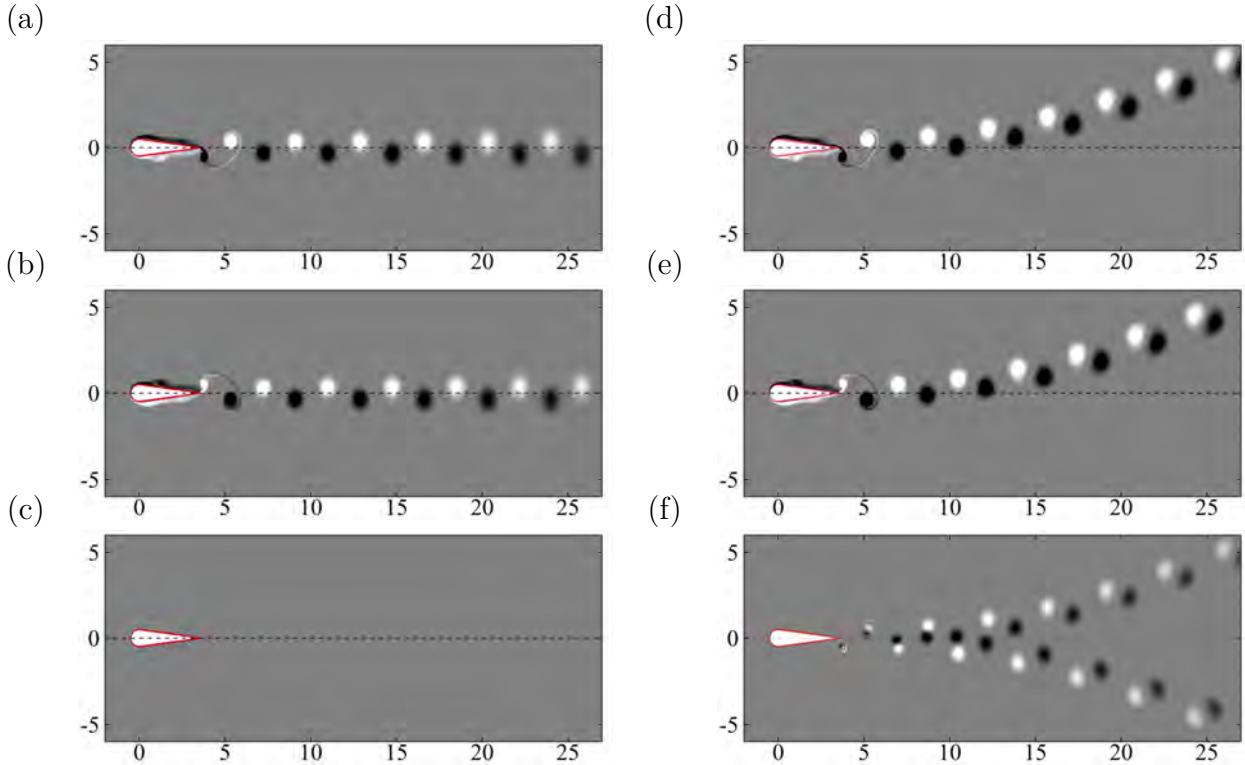


FIGURE 2.5 – Aile battante sans incidence. (a-c) Solution T-périodique obtenue pour $Re = 255$, $\theta_m = 8.8°$ et $f = 0.35$ vérifiant la symétrie spatio-temporelle (2.17). (d-f) Solution T-périodique obtenue pour $Re = 255$, $\theta_m = 8.8°$ et $f = 0.43$ ne satisfaisant pas la symétrie spatio-temporelle (2.17). Champ de vorticité pour (a,d) $t = t_0$ et (b,e) $t = t_0 + T/2$. (c,f) Vorticité de la composante anti-symétrique $\mathbf{u}_a(t)$.

2.2.2 Opérateurs de pseudo-projection

Dans les trois cas considérés précédemment, on a affaire à un problème dont la géométrie et les conditions limites sont caractérisées par une symétrie que l'on notera génériquement $\mathcal{T}$ (respectivement : la symétrie spatiale s_y, la symétrie temporelle s_T, ou bien la symétrie spatio-temporelle $s_y \circ s_{T/2}$), et on a formulé le problème de l'existence de solutions respectant cette symétrie et de la stabilité de telles solutions. Pour formaliser l'étude, Notons $\mathcal{Q}$ l'espace des écoulements incompressibles compatibles avec les conditions limites. On peut ensuite introduire le sous-espace $\mathcal{Q}_s$ des solutions vérifiant la symétrie $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{Q}_s = \{\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad | \quad \mathcal{T}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\} \tag{2.18}$$

On va maintenant introduire l'opérateur $\mathcal{S}$, qu'on appellera le *pseudo-projecteur* sur le sous-espace $\mathcal{Q}_s$, défini de la manière suivante :

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{q} + \mathcal{T}(\mathbf{q})\right] \tag{2.19}$$

Avant d'aller plus loin expliquons l'appellation de *pseudo-projecteur* proposé pour cet opérateur. Notons tout d'abord que si $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}_s$ alors $\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$: cet opérateur laisse bien le sous-espace $\mathcal{Q}_s$ invariant. En revanche en prenant un écoulement $\mathbf{q}$ quelconque, sa pseudo-projection $\mathcal{S}(\mathbf{q})$ n'est pas nécessairement dans le sous-espace $\mathcal{Q}_s$. On peut comprendre ça facilement dans le cas où la symétrie $\mathcal{T}$ est la symétrie temporelle de périodicité : si $\mathbf{q}(t)$ n'est pas une fonction périodique, alors la moyenne entre $\mathbf{q}(t)$ et $\mathbf{q}(t-T)$ n'a aucune raison d'être une fonction périodique. En revanche si $\mathbf{q}$ vérifie la symétrie $\mathcal{T}$ de manière approchée, alors on conçoit que sa pseudo-projection $\mathcal{S}(\mathbf{q})$ puisse approcher encore plus cette symétrie. Par exemple si $\mathbf{q}(t)$ est une fonction périodique à laquelle on a superposé une fluctuation de faible amplitude, sa moyenne avec la période précédente sera vraisemblablement encore plus proche d'une fonction périodique. Le pseudo-projecteur transforme donc un élément "proche de $\mathcal{Q}_s$" en un autre "encore plus proche de $\mathcal{Q}_s$".

De manière plus formelle, rappelons qu'un projecteur est rigoureusement défini par la propriété $\mathcal{S} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}$. Vérifions donc quel est le résultat d'une double application de cet opérateur. Par un calcul élémentaire on trouve

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{S}(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q} + 2\mathcal{T}(\mathbf{q}) + \mathcal{T}^2(\mathbf{q})}{4}. \tag{2.20}$$

La propriété $\mathcal{S} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}$ est donc vérifiée à la condition nécessaire et suffisante que $\mathcal{T}^2(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$. Ceci confirme que l'application $\mathcal{S}$ n'est pas un projecteur si elle considérée comme un endomorphisme de l'espace $\mathcal{Q}$. En revanche, elle l'est si l'on la considère comme un endomorphisme de l'espace $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}^2}$, défini ainsi :

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{T}^2} = \left\{\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad | \quad \mathcal{T}^2(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\right\} \tag{2.21}$$

Précisons la signification de ce nouvel espace pour les 3 cas de symétrie considérés ici. Tout d'abord dans le cas de la symétrie spatiale $\mathcal{T} = s_y$, on vérifie que $\mathcal{T}^2 = \mathcal{I}$. L'espace $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}^2}$ est donc identique à l'espace de départ $\mathcal{Q}$ tout entier, et $\mathcal{S}$ est donc bien un projecteur sur cet espace. Dans le cas de la symétrie temporelle s_T, on a $\mathcal{T}^2 = s_{2T}$: l'espace $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}^2}$ est donc l'espace des écoulements 2T-périodiques. Enfin pour la symétrie spatio-temporelle $s_y \circ s_{T/2}$, on a $\mathcal{T}^2 = s_T$: l'espace $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}^2}$ est donc l'espace des écoulements T-périodiques. Pour la suite, on introduira également le sous-espace $\mathcal{Q}_a$ des écoulements brisant de manière totale la symétrie $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{Q}_a = \{\mathbf{q} \in \mathcal{Q} \quad | \quad \mathcal{T}(\mathbf{q}) = -\mathbf{q}\} \tag{2.22}$$

Introduisons également le *pseudo-projecteur* $\mathcal{A}$, sur le sous-espace $\mathcal{Q}_a$, défini de la manière suivante :

$$\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{q} - \mathcal{T}(\mathbf{q})\right] \tag{2.23}$$

Cet opérateur vérifie des propriétés très similaires à celles de l'opérateur $\mathcal{S}$. On peut montrer en particulier que $\mathcal{A}$ n'est pas un projecteur dans le cas général, mais qu'il l'est si on le considère comme un endomorphisme de l'espace $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}^2}$.

2.2.3 Décomposition d'un écoulement en parties symétriques et antisymétriques

Ces définitions permettent donc maintenant, dans les trois cas de symétrie considérés ici, de définir une décomposition canonique pour tout écoulement $\mathbf{q}$ sous la forme suivante :

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_a, \tag{2.24}$$

où $\mathbf{q}_s$ et $\mathbf{q}_a$, appelés (par abus de langage) les parties symétrique et antisymétrique de $\mathbf{q}$, sont définis ainsi :

$$\mathbf{q}_s = \mathcal{S}(\mathbf{q}) \text{ et } \mathbf{q}_a = \mathcal{A}(\mathbf{q}). \tag{2.25}$$

Cette décomposition a un statut et des propriétés différentes selon l'espace sur lequel on travaille :

— Si l'on suppose que $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{T}^2}$, alors la décomposition (2.24) correspond à une *double projection sur deux sous-espaces orthogonaux*. Pour préciser ces notions, commençons par introduire un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}^2}$, de la manière suivante :

$$\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = \int_{\Omega_T} \left(\iint_{\Omega} [u_1 u_2 + v_1 v_2 + p_1 p_2] \, dxdy \right) dt,$$

où l'intervalle Ω_T est respectivement $[-\infty, \infty]$ (pour le cas de la symétrie s_Y), $[0, 2T]$ (pour le cas de la symétrie s_T), ou $[0, T]$ (pour le cas de la symétrie $s_y \circ s_{T/2}$). On vérifie alors facilement que les sous-espaces $\mathcal{Q}_s$ et $\mathcal{Q}_a$ sont orthogonaux entre eux (si $\mathbf{q}_1 \in \mathcal{Q}_s$ et $\mathbf{q}_2 \in \mathcal{Q}_a$ alors $\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle = 0$). Les opérateurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des "vrais" projecteurs comme vérifié plus haut. Ce sont de plus des *projecteurs orthogonaux* (la propriété d'orthogonalité d'une projection signifie que celui-ci est de plus un opérateur auto-adjoint, c'est à dire $\langle \mathcal{S}(\mathbf{q}_1), \mathbf{q}_2 \rangle = \langle \mathbf{q}_1, \mathcal{S}(\mathbf{q}_2) \rangle$, ce qui se vérifie aisément, de même pour $\mathcal{A}$).
Cette double projection orthogonale implique les propriétés suivantes, dites de *complémentarité* :

$$\mathcal{S}(\mathbf{q}_s) = \mathbf{q}_s \,;\, \mathcal{A}(\mathbf{q}_a) = \mathbf{q}_a \,;\, \mathcal{A}(\mathbf{q}_s) = 0 \,;\, \mathcal{S}(\mathbf{q}_a) = 0. \tag{2.26}$$

— Dans le cas général ($\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$), en revanche, la décomposition (2.24) est bien définie de manière unique , mais celle-ci ne peut pas être considérée comme une double projection sur deux sous-espaces orthogonaux.

Dans la suite on souhaite utiliser cette décomposition pour construire des méthodes de résolution numérique par intégration en temps, dans le cas général ou aucune propriété de symétrie temporelle n'est en général vérifiée par $\mathbf{q}(t)$. Cependant, le but étant d'aboutir à des solutions vérifiant la symétrie, on s'intéressera tout particulièrement à des écoulements de la forme

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_s(t) + \epsilon \, \mathbf{q}'(t) \tag{2.27}$$

où $\mathbf{q}_s \in \mathcal{Q}_s$ est la solution symétrique recherchée, $\epsilon \ll 1$ un petit paramètre, et $\mathbf{q}'(t)$ la perturbation. Cette dernière va en général soit tendre vers zéro (dans le cas stable), soit vers des valeurs arbitrairement grandes (dans le cas instable que l'on cherche à stabiliser). Cette perturbation ne vérifie donc en général aucune propriété de symétrie temporelle et il est faux de supposer que $\mathbf{q}' \in \mathcal{Q}_a$. On verra toutefois par la suite que d'identifier $\epsilon \mathbf{q}'$ avec $\mathbf{q}_a$ permet d'aboutir à des méthodes de résolution numérique équivalentes et préservant les propriétés de stabilité du système dynamique de départ. L'idée sera donc ensuite de modifier ces systèmes pour ajouter un terme d'amortissement, de manière similaire à ce qui est fait dans les méthodes de type SFD discutées plus haut, afin de modifier uniquement les propriétés de stabilité de la solution.

2.2.3.1 Définition des opérateurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$

Nous donnons ici la forme détaillée des opérateurs dans les trois cas de symétrie considérés successivement. L'écoulement est ici défini dans le repère relatif $(U, V, p)(X, Y, t)$ qui est celui dans lequel la résolution numérique est réalisée en pratique.

2.2.3.1.1 Symétrie de réflexion

Les opérateurs de projection $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ associés à la symétrie de réflexion 2.11 sont explicitement définis comme

$$\mathcal{S}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U(X,Y)+U(X,-Y) \\ V(X,Y)-V(X,-Y) \\ p(X,Y)+p(X,-Y) \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U(X,Y)-U(X,-Y) \\ V(X,Y)+V(X,-Y) \\ p(X,Y)-p(X,Y) \end{pmatrix} \tag{2.28}$$

2.2.3.1.2 Symétrie temporelle

Les opérateurs de projection $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ associés à la symétrie de périodicité temporelle 2.15 sont explicitement définis comme

$$\mathcal{S}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U(X,Y,t)+U(X,-Y,t-T) \\ V(X,Y,t)+V(X,-Y,t-T) \\ p(X,Y,t)+p(X,-Y,t-T) \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U(X,Y,t)-U(X,-Y,t-T) \\ V(X,Y,t)-V(X,-Y,t-T) \\ p(X,Y,t)-p(X,-Y,t-T) \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

2.2.3.1.3 Symétrie spatio-temporelle

Les opérateurs de projection $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ associés à la symétrie de réflexion 2.17 sont explicitement définis comme

$$\mathcal{S}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U(X,Y,t)+U(X,-Y,t-T/2) \\ V(X,Y,t)-V(X,-Y,t-T/2) \\ p(X,Y,t)+p(X,-Y,t-T/2) \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} U(X,Y,t)-U(X,-Y,t-T/2) \\ V(X,Y,t)+V(X,-Y,t-T/2) \\ p(X,Y,t)-p(X,-Y,t-T/2) \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Dans la section 2.3 de ce chapitre, on étudie les cas de l'aile fixe et de l'aile battante sans incidence pour lesquelles une solution symétrique de (2.1) est instable vis-à-vis de perturbations anti-symétriques. Ainsi, lorsqu'on décompose la solution comme

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_s(t) + \epsilon\,\mathbf{q}_a(t) \tag{2.31}$$

où $\epsilon \ll 1$, la composante anti-symétrique $\mathbf{q}_a(t)$ devient arbitrairement grande lorsque t tend vers l'infini. Une marche en temps de résolution temporelle de l'équation (2.1) ne permet donc pas de tendre vers la solution symétrique. On propose donc deux méthodes basées sur la stabilisation de cette perturbation anti-symétrique.

2.3 Méthode de résolution des composantes symétriques et anti-symétriques

On suppose que la solution $\mathbf{q}$ peut être décomposée en

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_s + \mathbf{q}_a \tag{2.32}$$

où l'expression explicite des composantes symétriques $\mathbf{q}_s = \mathcal{S}\mathbf{q}$ et anti-symétriques $\mathbf{q}_a = (\mathcal{I} - \mathbf{S})\mathbf{q}$ dépend de l'opérateur de symétrie considérée, comme présentée dans la section précédente. En introduisant cette expression dans l'équation d'évolution et en projetant l'équation sur l'espace des solutions symétriques et anti-symétriques, on obtient formellement le système d'équations couplées

$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}_s}{\partial t} = \mathcal{R}_s(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_a) \tag{2.33}$$

$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial t} = \mathcal{R}_a(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_a) \tag{2.34}$$

où $\mathcal{R}_s$ et $\mathcal{R}_a$ sont les opérateurs symétriques et anti-symétriques, formellement définis par projection du vecteur résidu, comme

$$\mathcal{R}_s(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_a) = \mathcal{S}(\mathcal{R}(\mathbf{q})) \text{ et } \mathcal{R}_a(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_a) = \mathcal{R}(\mathbf{q}) - \mathcal{S}(\mathcal{R}(\mathbf{q})). \tag{2.35}$$

La méthodologie pour obtenir une définition explicite de ces opérateurs est détaillée dans l'annexe C, à la fois pour le cas de la symétrie de réflexion spatiale et pour la symétrie spatio-temporelle. Pour ces deux symétries, l'opérateur anti-symétrique $\mathcal{R}_a$ est un opérateur linéaire par rapport à la composante $\mathbf{q}_a$, de sorte que le système précédent peut-être réécrit

$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}_s}{\partial t} = \mathcal{R}_s(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_a) \tag{2.36}$$

$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial t} = \mathcal{L}_a(\mathbf{q}_s)\mathbf{q}_a \tag{2.37}$$

où l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_a$ est obtenu par linéarisation du résidu autour de la composante symétrique. L'existence d'une solution anti-symétrique non-nulle dépend entièrement de la stabilité de cet opérateur linéaire. Si cet opérateur est stable (au sens stationnaire ou périodique), la composante anti-symétrique $\mathbf{q}_a$ s'annule à temps long et la composante symétrique vérifie l'équation d'évolution d'origine. La méthode consiste à introduire un terme d 'amortissement dans la seconde équation, afin de stabiliser l'opérateur anti-symétrique $\mathcal{L}_a$. Le système d'équations (2.36) est donc remplacé par le système d'équations amorti

$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}_s}{\partial t} = \mathcal{R}_s(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_a) \tag{2.38}$$

$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}_a}{\partial t} = [\mathcal{L}_a(\mathbf{q}_s) - \chi\mathbf{B}]\,\mathbf{q}_a \tag{2.39}$$

où le scalaire réel χ est appelé coefficient d'amortissement et permet d'amortir la composante anti-symétrique. L'amortissement de cette composante est liée à la stabilité de l'opérateur $[\mathcal{L}_a(\mathbf{q}_s) - \chi\mathbf{B}]$, et plus spécifiquement à la valeurs propre dominante $\lambda_0 - \chi$ de cet opérateur, λ_0 étant la valeur propre dominante de $\mathcal{L}_a$. Pour déterminer des solutions symétriques instables ($\Re(\lambda_0) > 0$), il faut choisir une valeur du coefficient d'amortissement $\chi > \Re(\lambda_0)$, de sorte que la partie réelle de la valeur propre dominante de l'opérateur amorti soit négative. La composante anti-symétrique s'annule ainsi pour des temps longs et la solution converge vers la composante symétrique.

2.3.1 Symétrie spatiale dans le référentiel fixe

Dans le repère fixe $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, le vecteur résidu $\mathcal{R}(\mathbf{q})$ est défini par (2.9). Pour le cas d'une symétrie de réflexion dont l'opérateur de projection $\mathcal{S}$ est donnée par (2.28), on montre dans l'annexe C que l'opérateur symétrique s'écrit

$$\mathcal{R}_s(\mathbf{q}_s; \mathbf{q}_a) = -\begin{pmatrix} [\mathbf{u}_s \cdot \nabla]\,\mathbf{u}_s + [\mathbf{u}_a \cdot \nabla]\,\mathbf{u}_a + \nabla p_s - Re^{-1}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_s \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_s \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

tandis que l'opérateur anti-symétrique s'écrit

$$\mathcal{L}_a(\mathbf{q}_s)\mathbf{q}_a = -\begin{pmatrix} [\mathbf{u}_s \cdot \nabla]\,\mathbf{u}_a + [\mathbf{u}_s \cdot \nabla]\,\mathbf{u}_a + \nabla p_a - Re^{-1}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_a \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_a \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

Le terme de convection du vecteur résidu symétrique $\mathcal{R}_s(\mathbf{q}_s;\mathbf{q}_a)$ contient à la fois la convection de la composante symétrique mais également la convection de la composante anti-symétrique. Lorsque cette dernière s'annule, on retrouve bien le vecteur résidu d'origine. En ce qui concerne le terme $\mathcal{L}_a(\mathbf{q}_s)\mathbf{q}_a$, on retrouve les deux termes de convection croisées qui correspondent bien à la linéarisation du problème autour de la composante symétrique.

2.3.2 Symétrie spatio-temporelle dans le référentiel mobile

Dans le repère tournant $(\mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y)$ défini précédemment, le vecteur résidu $\mathcal{R}(\mathbf{q})$ est défini par (2.12). Pour le cas d'une symétrie de réflexion dont l'opérateur de projection $\mathcal{S}$ est donnée par (2.30), on montre dans l'annexe C que l'opérateur symétrique s'écrit

$$\mathcal{R}_s(\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_a) = -\begin{pmatrix} \omega(t)\,(\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_s) + [(\mathbf{u}_s - \mathbf{w}) \cdot \nabla]\,\mathbf{u}_s + [\mathbf{u}_a \cdot \nabla]\,\mathbf{u}_a + \nabla p_s - Re^{-1}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_s \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_s \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

tandis que l'opérateur anti-symétrique s'écrit

$$\mathcal{L}_a(\mathbf{q}_s)\mathbf{q}_a = -\begin{pmatrix} \omega(t)\,(\mathbf{e}_z \times \mathbf{u}_a) + [(\mathbf{u}_s - \mathbf{w}) \cdot \nabla]\,\mathbf{u}_a + [\mathbf{u}_a \cdot \nabla]\,\mathbf{u}_s + \nabla p_a - Re^{-1}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}_a \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_a \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

2.3.3 Résultats numériques

Les résultats numériques présentés ici servent de validation aux méthodes décrites auparavant. Les équations sont résolues en utilisant la discrétisation spatio-temporelle détaillée en annexe (A). Les résultats sont présentés pour un maillage symétrique comptant $42 \cdot 10^3$ triangles, correspondant à respectivement $170 \cdot 10^3$ et $42 \cdot 10^3$ degrés de liberté pour chaque composante de la vitesse fluide et la pression. La discrétisation temporelle semi-implicite implique une condition de stabilité numérique de Courant-Fridriech-Levy [73]. Un pas de temps $\Delta \sim 1 \cdot 10^{-4}$ est choisi en conséquence. La méthode de stabilisation n'est pas sensible à ces paramètres numériques.

2.3.3.1 Validation pour la symétrie spatiale

La méthode de stabilisation est dans un premier temps validée pour l'écoulement stationnaire autour de l'aile fixe. Pour le nombre de Reynolds considéré $Re = 255$, la solution des équations d'évolution sans terme d'amortissement ($\chi = 0$) est une solution périodique, et plus précisément un cycle limite qui apparaît parce que la solution stationnaire est instable. Le champ de vorticité instantané de ce cycle limite est représenté sur la figure 2.6(a). Il ne vérifie pas la symétrie de réflexion qui s'écrit pour le champ de vorticité $\omega_z(x, y, t) = -\omega_z(x, -y, t)$. On applique maintenant la méthode de préservation des symétries introduites précédemment avec comme une valeur du coefficient d'amortissement $\chi = 0.3$. Le champ de vorticité de la solution, représenté sur la figure 2.6(b), satisfait la symétrie de réflexion et est indépendante du temps. L'évolution de la composante anti-symétrique $\mathbf{u}_a$ est tracée dans la figure 2.7 en fonction du nombre de période. On constate qu'on parvient à diminuer la norme de la composante anti-symétrique jusqu'à 10^{-13} ce qui correspond approximativement à un champ au zéro machine en double précision.

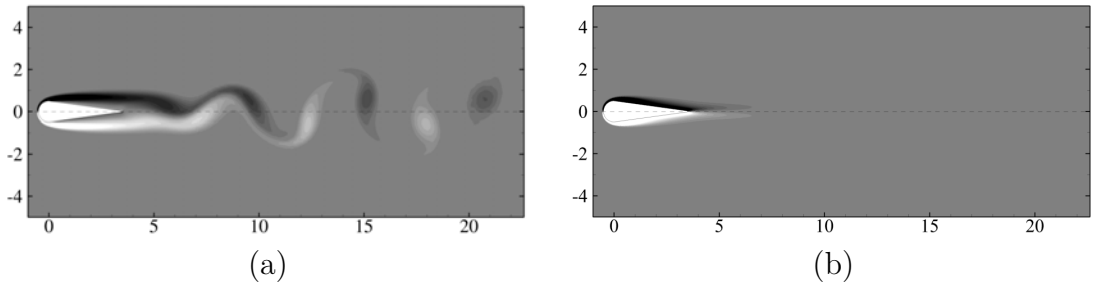


FIGURE 2.6 – Aile fixe. Champ de vorticité de la solution calculée pour $Re = 255$ avec (a) $\chi = 0$ et (b) $\chi = 0.3$. La solution non-amortie est instationnaire alors que la solution amortie est stationnaire.

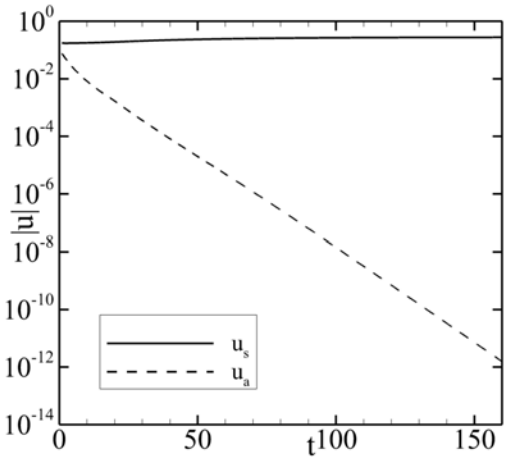


FIGURE 2.7 – Aile fixe- Évolution de la norme L_2 de la composante anti-symétrique en fonction du nombre de période pour $\chi = 0.3$.

2.3.3.2 Validation pour la symétrie spatio-temporelle

La méthode est maintenant validée pour l'écoulement périodique autour de l'aile battante en mouvement de tangage. Le nombre de Reynolds est $Re = 255$ et la fréquence de battement adimensionnée est $f = 0.43$. Cette valeur de la fréquence de battement est choisie car la solution qui se développe dans le sillage est déviée et ne satisfait pas la symétrie spatio-temporelle [66]. Cette solution asymétrique (déjà illustrée sur la figure 2.5$d - f$) est représentée a nouveau sur les figures 2.8$(a - d)$. Les figures 2.8$(a - b)$ représentent le champ de vorticité instantané pour deux instants t_0 et $t_0 + T/2$. La solution est T-périodique mais ne vérifie pas la symétrie spatio-temporelle.

Le champ de vorticité ne satisfait pas la relation de symétrie de réflexion selon l'axe (0x), qui s'écrit pour le champ de vorticité $\omega_z(y, y, t_0) = -\omega_z(x, -y, t_0 + T/2)$. Pour clairement l'identifier, on représente sur la figure 2.8c-d les composantes symétriques et anti-symétriques du champ de vorticité, définies comme

$$\begin{aligned} \omega_s^z(x, y, t_0) &= \omega_z(x, y, t_0) - \omega_z(x, -y, t_0 + T/2) \\ \omega_a^z(x, y, t_0) &= \omega_z(x, y, t_0) + \omega_z(y, -y, t_0 + T/2) \end{aligned} \tag{2.44}$$

La composante anti-symétrique (figure 2.8d) est clairement non-nulle, ses valeurs étant du même ordre de grandeur que celles de la composante symétrique (figure 2.8c).

On applique maintenant la méthode de préservation des symétries introduites précédemment avec pour valeur du coefficient d'amortissement $\chi = 0.3$. La solution à t_0 et $t_0 + T/2$ est représentée sur les figures 2.8(e-f). On constate que la symétrie spatio-temporelle est maintenant retrouvée. Ce point est confirmé en représentant la partie symétrique (figure 2.8g) de la solution, qui est identique à la solution à l'instant t_0 représentée

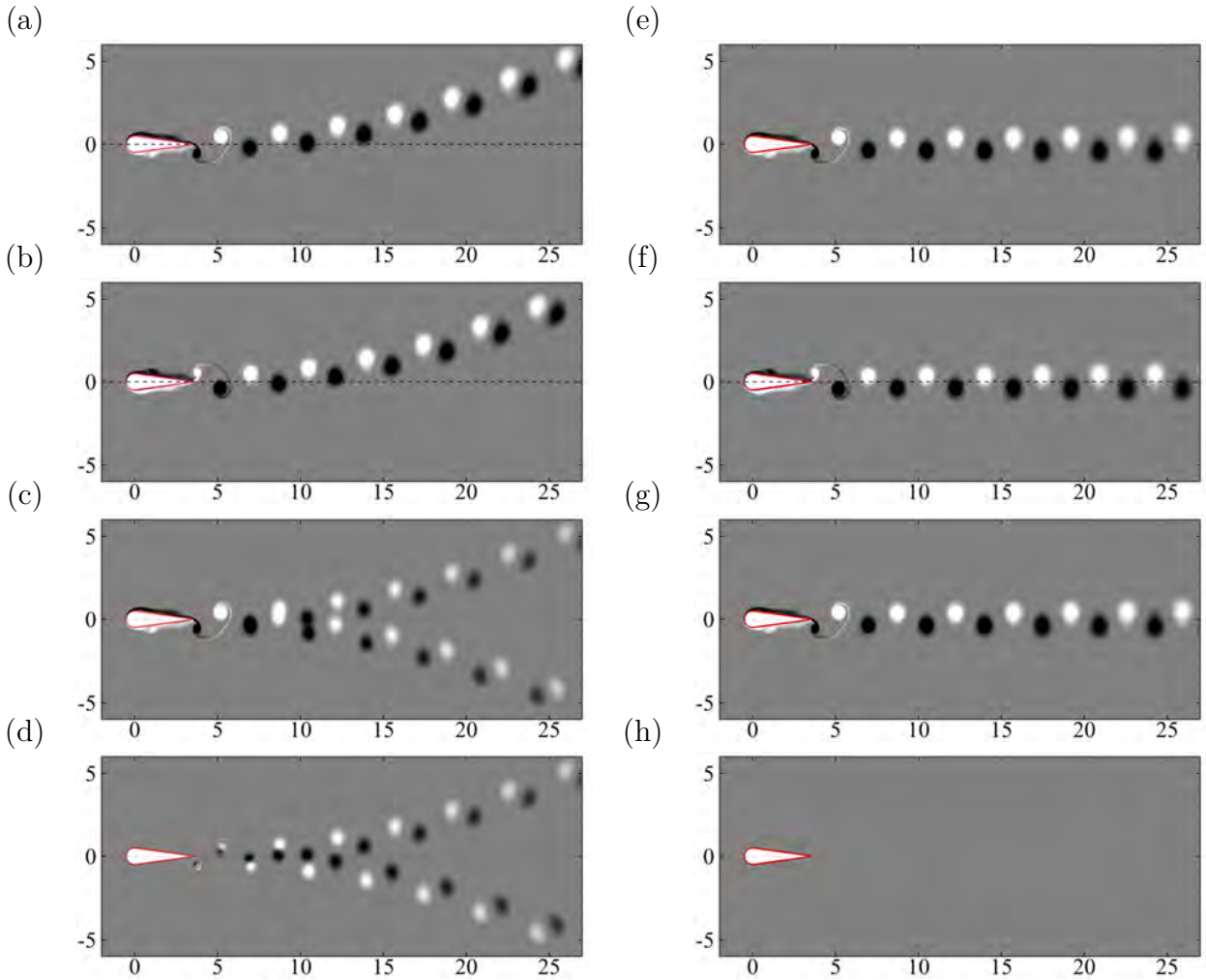


FIGURE 2.8 – Écoulement autour d'une aile battante avec incidence moyenne nulle pour $Re = 255$ et $f = 0.43$. (a-d) Illustration de la structure de la solution non stabilisée ($\chi = 0$) et (e-h) de la solution stabilisée ($\chi = 0.3$). (a,e) Champ de vorticité à t_0, (b,f) à $t_0 + T/2$, (c,g) composante symétrique et (d,h) composante anti-symétrique.

précédemment (*i.e.* $\mathcal{S}(\mathbf{q}) = \mathbf{q}$), ainsi que la partie antisymétrique (figure 2.8h), qui est identiquement nulle (*i.e.* $\mathcal{A}(\mathbf{q}) = \mathbf{0}$). La solution amortie a donc effectivement convergé vers la solution symétrique qui ne présente plus de déviation du sillage.

La figure 2.9 représente la norme L_2 de la composante de vitesse anti-symétrique $\mathbf{u}_a$ en fonction du temps adimensionné par la période de battement,t/T. Les différentes courbes correspondent aux résultats obtenus pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement. Le cas présenté dans la figure 2.8(c-d) correspond à la courbe en hachuré long à $\chi = 0.3$. La norme de la composante anti-symétrique perd cinq ordre de grandeur en quinze périodes de battement ce qui montre l'efficacité de la méthode.

2.3.3.3 Influence du coefficient d'amortissement

L'efficacité de la méthode à amortir la composante anti-symétrique soulève quand même la question de l'influence du coefficient d'amortissement χ.

Si on reprend la figure 2.9, plusieurs valeurs de χ ont été testées. Pour la plus faible valeur testée, $\chi = 0.02$ (courbe pleine) , la composante anti-symétrique ne s'annule pas sur l'intervalle de temps testé et semble converger vers une valeur finie non nulle. En revanche, lorsqu'on augmente le coefficient d'amortissement à $\chi = 0.1$ (courbe hachurée), on observe une décroissance exponentielle de la composante anti-symétrique au bout de

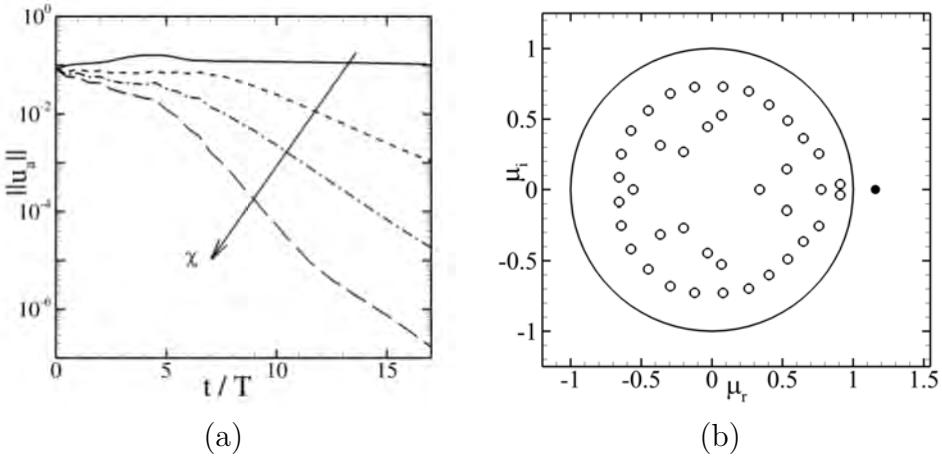


FIGURE 2.9 – (a) Influence du coefficient d'amortissement χ sur l'amortissement de la vitesse anti-symétrique $\mathbf{u}_a$ de l'écoulement [66] pour $\chi = 0.02, 0.1$, 0.2 and 0.3. (b) Spectre des multiplicateurs de Floquet pour la solution périodique symétrique. Le mode instable représenté en cercle noir est réel et vaut $\mu_r = 1.16$.

7.5 périodes de battement. Sur les 17 périodes de battement effectuées dans ce calcul, le résidu d'une valeur initiale de 10^{-1} a atteint la valeur de 10^{-3}. En augmentant encore la valeur du coefficient d'amortissement, on constate, non seulement que la décroissance exponentielle paraît plus tôt (au bout de 5 périodes de battement pour $\chi = 0.3$), mais aussi que la décroissance exponentielle est plus importante. On a ainsi atteint une valeur résiduelle de 10^{-7} au bout de 17 périodes de battement (courbe hachurée long). D'autre part, la figure 2.9(b) représente le spectre des multiplicateurs de Floquet pour la solution périodique symétrique. Un seul mode est instable (représenté en noir), est réel positif, et vaut $\mu_r \approx 1.16$. L'exposant de Floquet réel associé $\lambda_r \approx 0.06$ correspond approximativement à la valeur du coefficient d'amortissement nécessaire pour obtenir une solution purement symétrique.

2.3.3.4 Conclusion sur la première méthode

Cette première méthode de préservation des symétries permet de déterminer des champs stationnaires ou périodiques instables. S'il est intéressante car elle nécessite de comprendre en détail le principe de la méthode de stabilisation de l'opérateur d'évolution, elle peut paraître difficile à mettre en place. En effet, il faut pouvoir implémenter une nouvelle équation d'évolution (celle qui régit l'évolution de la composante anti-symétrique) et ajouter à l'équation d'origine un terme source qui fait apparaître des opérateurs de discrétisation en espace, ce qui peut être une tâche difficile dans des codes de calculs développés depuis des années. L'autre inconvénient de cette méthode est lié au coût de calcul numérique. En effet, plutôt que de résoudre une équation non-linéaire, il faut résoudre deux équations non-linéaires couplées. Le temps de calculs est donc au moins deux fois plus grand que pour le problème initial. Dans la prochaine section, on propose une méthode alternative, plus facile à implémenter et moins coûteuse en temps de calcul.

2.4 Méthode d'extraction de la composante anti-symétrique

Comme dans la méthode précédente, on introduit un terme d'amortissement proportionnel à la composante anti-symétrique $\mathbf{q}_a$ que l'on souhaite amortir. Mais cette fois-ci, ce terme est directement injecté dans l'équation d'évolution (2.1). L'équation amortie s'écrit

alors

$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathcal{R}(\mathbf{q}) - \chi\mathcal{B}\mathbf{q}_a \tag{2.45}$$

sachant que

$$\mathbf{q}_a = \mathcal{A}\mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathcal{S}\mathbf{q} \tag{2.46}$$

On peut noter que cette équation peut s'obtenir directement en faisant la somme des équations d'évolution 2.38 pour $\mathbf{q}_a$ et $\mathbf{q}_s$ à la base de la méthode précédente. Les deux méthodes sont donc mathématiquement équivalentes. La différence essentielle repose cependant dans la manière utilisée pour calculer la composante anti-symétrique. Plutôt que de résoudre explicitement une équation d'évolution pour $\mathbf{q}_a$, on propose ici d'extraire la composante anti-symétrique de la solution a partir des données du calcul, *i.e.* directement a partir de la solution $\mathbf{q}(t)$ à l'instant courant t et (dans le cas ou la symétrie que l'on cherche à préserver est temporelle ou spatio-temporelle) de la solution à un instant précédent (respectivement $\mathbf{q}(t-T)$ ou $\mathbf{q}(t-T/2)$).

L'implémentation numérique de ces opérateurs est détaillée dans les paragraphes suivants pour la symétrie de réflexion, la symétrie temporelle de périodicité et la symétrie spatio-temporelle. Avant cela, il convient de préciser que le terme d'amortissement a systématiquement été explicité dans le schéma de discrétisation temporelle considéré (voir annexe A). Ainsi, si le problème d'origine est résolu avec un schéma d'Euler explicite, la discrétisation temporelle de l'équation amortie s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} &= \mathcal{R}(\mathbf{q}^n) - \chi\mathcal{B}\mathbf{q}_a^n \\ \mathbf{q}_a^n &= \mathcal{A}\mathbf{q}^n \end{aligned} \tag{2.47}$$

2.4.1 Application à la symétrie spatiale

On rappelle que les opérateurs de sélection des composantes symétriques et anti-symétriques 2.28 sont définis de la manière suivante

$$\mathcal{S}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(x,y) + u(x,-y) \\ v(x,y) - v(x,-y) \\ p(x,y) + p(x,-y) \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(x,y) - u(x,-y) \\ v(x,y) + v(x,-y) \\ p(x,y) - p(x,-y) \end{pmatrix}$$

Le calcul de la composante anti-symétrique revient donc à calculer au choix, $\mathcal{A}\mathbf{q}$ ou $\mathbf{q}-\mathcal{S}\mathbf{q}$. Dans la méthode numérique utilisée (méthodes des éléments finis), les variables du vecteur $\mathbf{q}$ discret sont définies en un ensemble de points de l'espace (les nœuds des polynômes de Lagrange dans notre cas). Pour définir discrètement l'opérateur de symétrie $\mathcal{S}$, on a d'abord choisi de construire des maillages symétriques, de sorte que pour tout nœud du maillage NP situé en (x, y) avec $y > 0$, il existe un nœud NM situé en $(x, -y)$. Tous les noeuds du maillage vont donc par paire, sauf les noeuds sur l'axe (O, x) de coordonnées $(x, 0)$. Pour construire de tels maillages,la première étape consiste à construire un demi-maillage "haut" dont tous les noeuds sont situés ont leurs coordonnées $y \geqslant 0$. La deuxième étape consiste à construire le demi-maillage "bas". Enfin, la troisième étape consiste à concaténer ces deux maillages. Le code de calcul permettant de réaliser la deuxième et la troisième étape est disponible dans l'annexe (D). Une fois que le maillage est bien symétrique, il ne reste plus qu'à construire l'opérateur de symétrie $\mathcal{S}$. Le code permettant de réaliser cette opération est lui aussi disponible en annexe (D).

On valide cette méthode sur le cas de l'aile fixe en stabilisant l'écoulement instationnaire à $Re = 255$ vers un écoulement stationnaire qui respecte la symétrie spatiale

2.11. La figure 2.10 représente la norme des composantes symétriques $\mathbf{u}_s$ (trait plein) et anti-symétrique $\mathbf{u}_a$ (trait pointillé) en fonction du temps en prenant un coefficient d'amortissement $\chi = 0.3$. On retrouve bien une convergence exponentielle comme pour la première méthode, avec l'économie d'une équation en moins à résoudre.

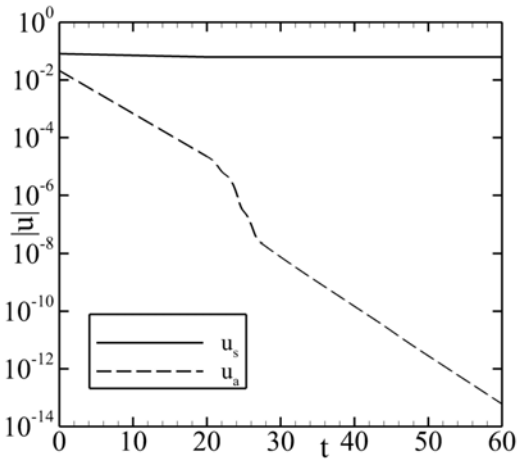


FIGURE 2.10 – Norme de la composante symétrique $\mathbf{u}_s$ (plein) et anti-symétrique $\mathbf{u}_a$ (pointillé) en fonction du temps, en imposant la symétrie spatiale pour une aile fixe. $Re = 255$, $\chi = 0.3$.

2.4.2 Application à la symétrie temporelle de périodicité

2.4.2.1 Principe de la méthode

De façon très similaire à la méthode de préservation basée sur l'extraction (section 2.4), on introduit dans l'équation d'évolution (2.1) un terme d'amortissement

$$\mathcal{B}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathcal{R}(\mathbf{q}) - \chi\mathcal{B}\mathcal{A}\mathbf{q} \tag{2.48}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ s'applique à la solution instantanée $\mathbf{q}(t)$ et extrait l'écart à la solution de la période précédente, soit

$$\mathcal{A}\mathbf{q}(t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(t-T)\right) \tag{2.49}$$

Le terme d'amortissement introduit donc un délai égal à la période T dans l'équation amortie. Le terme d'amortissement a systématiquement été explicité dans le schéma de discrétisation temporelle considéré. Ainsi, si le problème d'origine est résolu avec un schéma d'Euler explicite, la discrétisation temporelle de l'équation amortie avec s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{B}\frac{\mathbf{q}^{n+1} - \mathbf{q}^n}{\Delta t} &= \mathcal{R}(\mathbf{q}^n) - \chi\mathcal{B}\mathcal{A}\mathbf{q}^n \\ \mathcal{A}\mathbf{q}^n &= \mathbf{q}^n - \mathbf{q}^{n-N} \end{aligned} \tag{2.50}$$

où N représente le nombre d'itérations pour effectuer une période. Pour appliquer ce terme d'amortissement à chaque itération temporelle, il est nécessaire de stocker en mémoire toutes les solutions sur une périodes, à savoir $\mathbf{q}_{n-1}, \mathbf{q}_{n-2}, ...\mathbf{q}_{n-N}$. L'implémentation numérique de cette procédure dans notre code est expliquée par l'extrait de programme donné dans la figure 2.11. Cette implémentation est particulièrement simple, elle ne nécessite en effet que quelques lignes de code supplémentaires à ajouter au programme d'intégration temporelle des équations de Navier-Stokes. Bien que l'exemple présenté ici correspond à notre programme en langage *FreeFem++*, la modification de quelques lignes est facilement adaptable à tout code existant quelque soit le langage de programmation.

```
fespace Vh(th,P2); // Finite element space for velocity
int N=1000; // number of iteration per period
int nbperio=4; // number of periods
int imax=N*nbperio; // number iof iterations
real chi=0.2; // Value of the damping coefficient
int it=0;

Vh u1,u2; // current velocity fields
Vh u1a,u2a; // anti-symmetric velocity fields
real[int,int] ustock(Vh.ndof,N),vstock(Vh.ndof,N);
for(int i=0; i<=imax; i++){
    ...
    // Apply the damping term
    if(i>N){
        // Compute the difference between current solution (n) and
            previous solution (n-N)
        u1a[]=ustock(:,it); u1a[]*=-1; u1a[]+=u1[]; u1a[]*=chi;
        u2a[]vstock(:,it); u2a[]*=-1; u2a[]+=u2[]; u2a[]*=chi;
        ...
    }
    // Save the current solution
    ustock(:,it)=u1[]; vstock(:,it)=u2[];
    it=i%N; // Remainder of the eucledian division
    ...
}
```

FIGURE 2.11 – Code FreeFem++ de l'implémentation du terme d'amortissement pour imposer la périodicité de l'écoulement.

2.4.2.2 Résultats

Ici, nous n'avons pas testé plusieurs valeurs du coefficient d'amortissement et avons utilisé pour toutes nos simulations la valeur $\chi = 0.05$ qui est très proche de la valeur optimale identifiée par Shaabani-Ardali *et al.* [105]. On trace dans la figure (2.12) l'évolution temporelle de la norme de $\mathbf{u}(t)$ et de $\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t-T)$ pour cette valeur de χ. Le cas utilisé ici correspond à la solution présentée dans la figure (2.4d-f) dont la solution stable des équations de Navier-Stokes est $3T$-périodique. La mise en place de cette méthode permet de supprimer en une soixantaine de périodes de battements la partie sous-harmonique de la solution. Comme prévu, le terme de forçage tend vers zéro, ce qui permet d'obtenir une solution harmonique du problème initial.

2.4.3 Application à la symétrie spatio-temporelle

Dans le cas de la symétrie spatio-temporelle, on rappelle que les opérateurs de sélection des composantes symétriques et anti-symétriques sont

$$\mathcal{S}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(X,Y,t) + u(X,-Y,t+T/2) \\ v(X,Y,t) - v(X,-Y,t+T/2) \\ p(X,Y,t) + p(X,-Y,t+T/2) \end{pmatrix} \text{ et } \mathcal{A}\mathbf{q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(X,Y,t) - u(X,-Y,t+T/2) \\ v(X,Y,t) + v(X,-Y,t+T/2) \\ p(X,Y,t) - p(X,-Y,t+T/2) \end{pmatrix}$$

De la même manière que pour la symétrie de réflexion spatiale, le maillage est construit

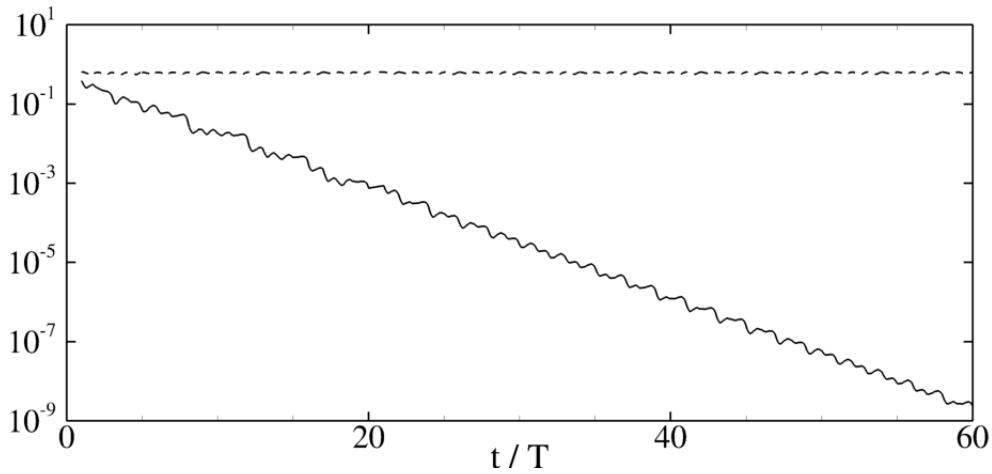


FIGURE 2.12 – Évolution des normes $||\mathbf{u}(t)||$ (trait pointillé) et $||\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t-T)||$ (trait plein) en fonction du temps pour $\chi = 0.05$ à $f = 0.1$ et $\alpha = 10.5°$.

symétrique et l'opérateur $\mathcal{S}$ est de nouveau construit *a priori* sans considérer la translation temporelle d'une demi-période T. Cette translation temporelle est prise en compte au cours du calcul, au moment de l'évaluation des composantes symétriques et anti-symétriques.

L'implémentation de cette méthode pour la symétrie spatio-temporelle est très similaire au cas considéré précédemment et illustré à la figure 2.11. Les deux cas diffèrent sur deux détails. Premièrement les champs de vitesse sont stockées sur seulement une demi-période, soit $N/2$ itérations. Deuxièmement, l'opérateur de symétrie $\mathcal{S}$ impliquant ici une symétrie spatiale, il faut prendre garde lors du calcul des variables `u1a` et `u2a` à bien "renverser" par rapport à l'axe (O, x) les valeurs des champs stockés. Ceci est facilité par le fait que, comme expliqué dans le paragraphe précédent pour le cas de la symétrie spatiale, on utilise en pratique un maillage "symmétrisé" pour lequel à tout noeud du maillage situé du coté $y < 0$ correspond un noeud symétrique situé du coté $y > 0$. En dehors de ces modifications, la méthode reste identique.

La méthode est validée sur le cas présenté auparavant dans la figure (2.5d-f) à $f = 0.43$ et $Re = 255$. En partant de la solution asymétrique convergée, on arrive bien à faire disparaître la composante anti-symétrique dont la norme en fonction du temps est représentée en trait plein dans la figure (2.13). L'évolution de la norme anti-symétrique est à comparer avec celle obtenue dans le même cas mais en utilisant la première méthode introduite dans ce chapitre (trait pointillé). Dans les deux cas, on aura utiliser un coefficient d'amortissement identique $\chi = 0.3$. Au démarrage, les deux méthodes sont assez équivalentes. Rapidement néanmoins, la première méthode amortit plus rapidement la composante anti-symétrique que la seconde. Néanmoins, on arrive quand même à atteindre rapidement (30 périodes de battements) une composante anti-symétrique négligeable (norme de 10^{-6}).

2.4.4 Conclusion sur la seconde méthode

La seconde méthode de stabilisation proposée dans ce paragraphe paraît donc plus satisfaisante que la précédente à bien des égards. On peut tout d'abord rappeler que mathématiquement les deux méthodes sont équivalentes, si bien que les performances (notamment en ce qui concerne le choix du paramètre de stabilisation χ) sont similaires. Cependant, contrairement à la première méthode, la partie antisymétrique est extraite des données du calcul lui-même (*i.e.* la solution $\mathbf{q}(t)$ calculée par le programme) et ne nécessite pas d'introduire de variable supplémentaire. La seule nécessité est de stocker les résultats du calcul sur une période (ou seulement une demi-période) pour pouvoir ré-accéder aux

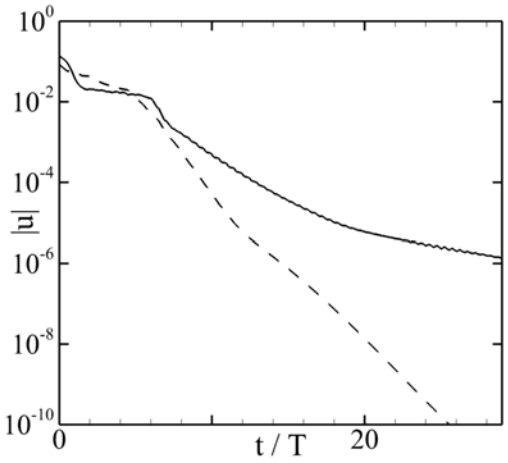


FIGURE 2.13 – Norme de la composante symétrique anti-symétrique $\mathbf{u}_a$ en fonction du temps pour la méthode de résolution des deux composantes (pointillé) et la méthode d'extraction de la composante anti-symétrique (plein). $Re = 255$, $f = 0.43$, $\chi = 0.3$.

instants postérieurs afin de construire explicitement le terme d'amortissement en fonction de la partie antisymétrique. Ce point augmente la taille mémoire nécessaire au programme. Cependant, dans le cas de calculs d'écoulements bidimensionnels comme considéré ici, la taille mémoire nécessaire reste modérée et ne dépasse pas les capacités offertes par les ordinateurs standards actuels. D'autre part, le fait de recalculer la composante anti-symétrique pendant le calcul pour construire le terme d'amortissement revient à imposer en permanence la symétrie, ce qui n'est pas le cas dans la première méthode.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté de nouvelles méthodes permettant de calculer des écoulements devenus instables suite à des bifurcations linéaires. En tirant avantageusement partie des propriétés mathématiques des solutions recherchées, on a construit deux méthodes permettant de calculer des solutions instables avec certaines propriétés de symétries. La première méthode consiste à décomposer les solutions comme la somme d'une composante vérifiant la symétrie désirée (appelée composante symétrique) et une composante qui brise cette même symétrie (appelée composante anti-symétrique). L'injection de cette décomposition dans le système d'équations à résoudre permet d'obtenir une paire de systèmes couplés à résoudre, chacun gouvernant la dynamique d'une des deux composantes. Le système d'équations gouvernant la dynamique de la composante anti-symétrique étant linéaire, on arrive à le stabiliser en rajoutant un terme d'amortissement proportionnel à la composante anti-symétrique. Cette méthode a été appliquée au cas d'une symétrie spatiale de réflexion et d'une symétrie spatio-temporelle, se révélant à chaque fois fonctionnelle à calculer les solutions instables recherchées.

La deuxième méthode consiste elle à directement rajouté le terme d'amortissement au système d'équations initiales. Ce raccourci permet une plus grande facilité d'implémentation et un temps de résolution deux fois moindre, au détriment d'un stockage important de données pendant le calcul. Cette méthode a été appliquée aux mêmes problèmes de validation que pour la première méthode, mais également à l'imposition d'une symétrie temporelle de périodicité.

D'après nos résultats, il paraît clair que la deuxième méthode est une version très améliorée de la première. Outre une difficulté d'implémentation peu importante, elle permet une réduction importante du coût en calcul pour un résultat identique. D'autre

part, le coût supplémentaire en stockage mémoire pour reconstruire la composante anti-symétrique peut être drastiquement réduit en ne sauvegardant que quelques instants par périodes et en reconstruisant le champ par interpolation polynomiale comme proposé par Shaabani-Ardali *et al.*. Nous n'avons pas essayé cette technique qui s'ouvre en perspective pour résoudre le principal inconvénient de la méthode actuelle. Une autre manière de réduire le coût mémoire que nous avons essayé sans succès est d'imposer le terme d'amortissement sur une zone restreinte de l'écoulement, de manière à réduire la dimension des variables stockées.

Enfin, nous n'avons pas présenté l'utilisation de la première méthode pour imposer la symétrie temporelle de périodicité. La justification à cela est que nous n'avons pas encore essayé de le faire, par manque de temps, alors que la seconde méthode était parfaitement efficace. La même procédure que pour les symétries spatiales et spatio-temporelles est néanmoins complètement reproductible pour la symétrie temporelle et il s'agit là d'une perspective à court terme, pour montrer la versatilité de la méthode.

Chapitre 3

Déviation du sillage d'une aile battante

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. La première partie est présentée sous la forme d'un article publié dans le journal *Physical Review E.* en Juin 2017. Cet article est consacré à l'analyse de la déviation du sillage d'une aile battante comme le résultat d'une bifurcation linéaire du sillage non dévié. La méthode de préservation des symétries introduite au chapitre précédent est appliquée au sillage propulsif produit par l'aile pour déterminer le sillage non dévié lorsqu'il est instable. Une analyse de stabilité de Floquet du sillage non dévié est conduite et montre qu'une perturbation linéaire qui se développe dans le sillage est responsable de sa déviation. Par la suite, l'influence des effets non linéaires est traitée, afin de montrer que ceux-ci provoquent une augmentation de la déviation du sillage lorsqu'ils se produisent au moment où les tourbillons sont émis, au bord de fuite de l'aile. La deuxième partie du chapitre introduit un nouveau paramètre au problème traité dans l'article, à savoir l'angle d'incidence que forme l'aile avec l'écoulement amont. La bifurcation de l'écoulement devient alors une bifurcation imparfaite. On analyse en particulier la préférence de l'écoulement à sélectionner un sens de déviation en particulier, du même signe que l'angle d'incidence. Enfin, la troisième partie du chapitre permet d'apporter des compléments à l'étude de ce problème qui n'ont pu être discutés plus en détails dans l'article. Le lien entre le signe de la portance moyenne et la direction de la déviation, bien que rapidement abordé dans l'article, est détaillé. Des résultats de simulations numériques à faibles et fortes fréquences de battement sont présentés. Des analyses de stabilité sont conduites sur le sillage seul, sans l'aile, et montrent que le mode responsable de la déviation est un mode de sillage. Enfin, le champ de base et le mode linéaire sont modélisés par une méthodologie de type "point-vortex". Cette modélisation permet de mettre en évidence que le mode linéaire est non seulement responsable de la déviation mais également de la formation de structures dipolaires dans le sillage.

3.1 Analyse aux perturbations linéaires et non-linéaires de la déviation du sillage d'une aile battante

PHYSICAL REVIEW E **95**, 063111 (2017)

Linear and nonlinear perturbation analysis of the symmetry breaking in time-periodic propulsive wakes

Damien Jallas and Olivier Marquet
ONERA, The French Aerospace Lab, Aerodynamics Aeroelasticity Acoustics Department (DAAA), 8 rue des Vertugadins, 92190 Meudon, France

David Fabre
Université de Toulouse, INPT, UPS-Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT), Allée Camille Soula, 31400 Toulouse, France
(Received 23 January 2017; revised manuscript received 21 April 2017; published 20 June 2017)

The two-dimensional and time-periodic wake flows produced by a pitching foil are investigated numerically for a fixed flapping amplitude. As the flapping frequency is increased, three regimes are identified in the time-marching nonlinear simulations. The first regime is characterized by nondeviated wake flows with zero time-averaged lift. In the second regime, the wake flow is slightly deviated from the streamwise direction and the time-averaged lift is slightly positive or negative. The third regime is characterized by larger deviations of the wake, associated with larger values of both the time-averaged lift and the thrust. The transition from the first to the second regime is examined by performing a Floquet stability analysis of the nondeviated wake. A specific method is introduced to compute the time-periodic, nondeviated wake when it is unstable. It is found that one synchronous antisymmetric mode becomes unstable at the critical frequency where deviation occurs. Investigation of its instantaneous and time-averaged characteristics show that it acts as a displacement mode translating the nondeviated wake away from the streamwise direction. Finally, it is demonstrated that the transition from the second to the third regime is linked to nonlinear effects that amplify both antisymmetric and symmetric perturbations around the foil.

DOI: 10.1103/PhysRevE.95.063111

I. INTRODUCTION

The locomotion of living animals such as fish and birds is a source of inspiration for researchers and engineers designing underwater or aerial vehicles. By mimicking the kinematics of insect wings, they expect that flapping-based micro air vehicles will benefit from the amazing capabilities of insects' flight: vertical take-off, hovering and slow-forward flight, and low-acoustic signature [1–3].

The aerodynamics of an insect's flapping wings is very complex, not only because the kinematics of the wing is highly unsteady and three-dimensional [4,5], but also because the surrounding flow is described by the nonlinear Navier-Stokes equations. Consequently, even when the kinematics of a two-dimensional wing is a purely harmonic two-dimensional pitching or heaving motion, the periodic wake-flow can spontaneously become three-dimensional [6–8]. Various two-dimensional periodic flow-patterns have also been observed in the wake of the wing [9,10], depending on the flapping frequency and amplitude. For small values of amplitude and frequency, the classic Bénard-Von Karman vortex street is observed in the wake and the aerodynamic force exerted on the wing is resistive (drag force). For high values, a reversed Bénard-Von Karman vortex street is observed in the wake and the aerodynamic force exerted on the wing is propulsive (thrust force). For intermediate values, many other wake patterns have been observed experimentally [9,11] and numerically [12] (see Ref. [10] for a detailed classification). The present paper investigates one of the periodic wake flow-patterns, characterized by the mean deviation of the reverse Bénard-Von Karman vortex street from the streamwise direction.

To our knowledge, the first experimental observation of an asymmetric pattern in the wake of pitching wings was made by Bratt [13]. In this case, the wake-flow breaks the spatiotemporal symmetry of the wing kinematics. Later on, Jones *et al.* investigated experimentally [14] and numerically [15] the deviated reverse Bénard-Von Karman vortex street in the wake of a heaving foil. Results of the two-dimensional numerical simulations compare well with experimental results. Interestingly, both upward and downward deviation of the wake have been reported for the same values of flapping frequency and amplitude. The deviation direction was shown to depend on the initial flapping conditions [16,17]. Zheng *et al.* [18] observed that the deviation's direction results from a competition between the first three vortices that are emitted by the foil. The deviation of the propulsive wake behind a pitching wing was investigated experimentally by Godoy-Diana *et al.* [19]. Using only two-dimensional measurements of the velocity field behind the wing, they identified the region of asymmetric wake in the amplitude and frequency parameter space. Later [20], they proposed a criterion based on the relation between the experimentally determined phase velocity of the vortex street and an idealized self-advection velocity of two consecutive counter-rotating vortices in the near-wake. The disappearance of asymmetric wakes for low-flexibility pitching foils was first investigated by Marais *et al.* [21] and then by Zhu *et al.* [22], who also showed that highly flexible pitching foils can instead enhance the deviation. Experimental investigations of the wake deviation behind heaving wings were performed by Cleaver *et al.* [23–25]. Using direct measurements of the aerodynamics forces, they reported that the deviation was associated with high lift production. They also showed the deviation occurs through a supercritical bifurcation by obtaining the same results for increasing or decreasing flapping frequencies without discontinuity.

 ©2017 American Physical Society

It should be noted that symmetry-breaking bifurcations also exist in the related problem of oscillating objects in a quiescent fluid. Experimental [26] and numerical [27,28] observations have shown that bodies of different shape oscillating vertically in a symmetrical way can create a nonsymmetric flow, leading to a nonzero mean horizontal force. If the object is free to move in the horizontal direction, this force can set the object into motion with a nonzero mean velocity in either the left or right direction. For the simplest case of a two-dimensional cylinder, Elston *et al.* [29,30] performed a Floquet stability analysis of the periodic, symmetric flow. They showed that the symmetry-breaking occurring in the flow is effectively due to the onset of a linear mode, which breaks the spatial, left-right mirror symmetry of the base flow.

In the present paper, it is proposed to apply a similar stability approach to explain the deviation of the wake of a flapping foil. Unlike in the case of objects oscillating in a quiescent fluid discussed in the previous paragraph, the symmetry that is broken by the bifurcation is not only spatial but spatiotemporal. Namely, in the nondeviated Bénard-Von Karman vortex street before the bifurcation, the half-period corresponding to a downward stroke is the mirror image of the half-period corresponding to an upward stroke. Thus, a difficulty lies in the computation of this time-periodic base flow in unstable cases. A review of methods to compute unstable base flows highlights several approaches. In the case of spatial symmetries as in the work of Elston *et al.*, one can impose the appropriate boundary conditions on the symmetry axis. However, in the case of spatiotemporal symmetry, the corresponding boundary conditions are unknown. When the base flow is stationary, one can use the selective frequency damping (SFD) method [31] to filter unstable temporal frequencies. None of these approaches is directly applicable to the present case. An innovative method was therefore designed for this purpose. The method is related to the SFD in the sense it is used to damp the component of the time-periodic base flow that breaks the spatiotemporal symmetry.

The objective of the present study is to investigate numerically the deviation of the propulsive wake behind a pitching wing, not only by using two-dimensional unsteady nonlinear simulations, but also by performing linear stability analysis of the time-periodic nondeviated wake flow. Section II describes the flow configuration and results of unsteady nonlinear simulations. They are performed for fixed flapping amplitude and a large range of flapping frequencies, so as to identify nondeviated, weakly deviated, and strongly deviated wake-flow regimes. The linear stability analysis of the propulsive wake flow is presented in Sec. III. Section III A introduces the new "flow symmetry preserving" method used to compute the time-periodic nondeviated flow above the critical frequency. Section III B presents the Floquet stability analysis of the nondeviated wake-flows and details linear results obtained around the critical flapping frequency. Section IV investigates the nonlinear evolution of time-periodic perturbations. A decomposition of the nonlinear perturbation into its spatiotemporal symmetric and antisymmetric components is introduced in this section to understand better the occurrence of strongly deviated wakes for the largest flapping frequencies.

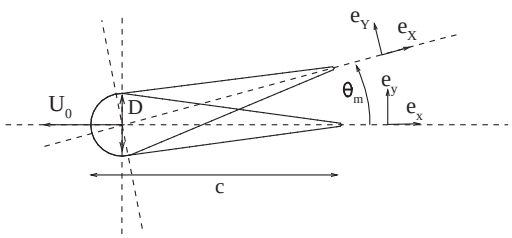


FIG. 1. Sketch of the pitching foil pivoted at the center of the leading edge half-cylinder.

II. UNSTEADY NONLINEAR SIMULATIONS

The flow around a foil immersed in a fluid of viscosity ν with an incoming uniform velocity U_0 is investigated. The geometry of the foil, shown in Fig. 1, is similar to the one used in experimental studies [19,20]. The leading edge of the foil is a half-cylinder of diameter D, its central part has the form of a triangle, which is closed at the trailing edge of the foil by a smaller half-cylinder of diameter d. The ratio of the cylinder diameters is fixed to $D/d = 20$ and the chord-to-diameter aspect ratio is $c/D = 4$. Hereafter, all the variables are made nondimensional using D and U_0 as characteristic length and velocity. As the flow is incompressible, the Reynolds number $\mathrm{Re} = U_0 D/\nu$ is the unique flow control parameter, which is fixed to $\mathrm{Re} = 255$ for the entire study. A periodic pitching motion of the foil is imposed along the z axis located at the center of the large half-cylinder. The imposed flapping rotation follows the sinusoidal law,

$$\theta(t) = \theta_m \sin(2\pi f t), \tag{1}$$

where f is the nondimensional flapping frequency, $T = 1/f$ the flapping period, and θ_m is the maximal rotational angle. The nondimensional (peak-to-peak) flapping amplitude $A = 2(c - D/2)\sin(\theta_m) = 1.07$ is fixed accordingly. In the following, the flapping frequency f will be varied in the range $0 \leqslant f \leqslant 0.5$.

A. Numerical model and method

Following Mougin *et al.* [32], the Navier-Stokes equations are written in a noninertial frame of reference $(\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y)$, depicted in Fig. 1, which rotates at speed $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ around the z axis but does not translate in the laboratory frame of reference $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$. The vector field $\boldsymbol{u} = (u, v)^T$ then represents the flow velocity in written $(\boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y)$ and the incompressible Navier-Stokes equations are written

$$\partial_t \boldsymbol{u} = \mathcal{R}[\boldsymbol{u}, p; \theta(t)], \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0, \tag{2}$$

with a right-hand-side operator defined by

$$\mathcal{R}[\boldsymbol{u}, p; \theta(t)] = -\,\omega(t)\,\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u} - [(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{w}) \cdot \nabla]\boldsymbol{u} - \nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \boldsymbol{u}. \tag{3}$$

Note that the spatial operators are defined with respect to the spatial coordinates $\boldsymbol{X} = (X, Y)$. Compared with the Navier-Stokes equations written in an inertial frame of reference, two additional terms appear in the right-hand side: the rotational acceleration $\omega(t)\,\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{u}$ and a modification of the convective

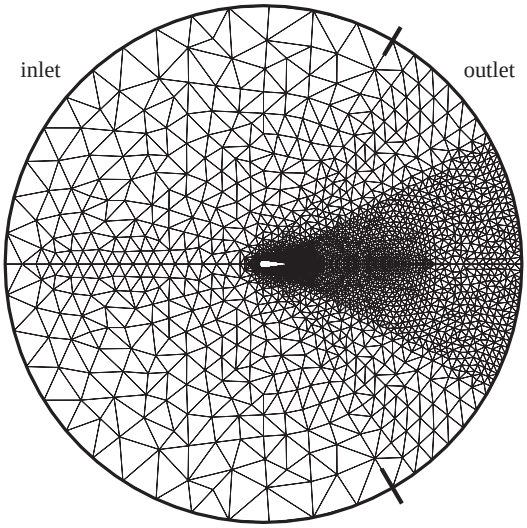


FIG. 2. Computational domain and typical mesh used for the finite-element discretization. The mesh is made of triangles, only one-tenth of them are shown in the figure.

velocity by the velocity vector $\boldsymbol{w}$, which is defined by

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{X},\theta) = -[\cos(\theta)\boldsymbol{e}_X - \sin(\theta)\boldsymbol{e}_Y] + \omega(t)\,\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{X}. \quad (4)$$

The first term accounts for the translational velocity of the foil, written in the rotating frame of reference, while the second term accounts for the angular velocity of the foil. At the surface of the foil, indicated by $\boldsymbol{X}_w$, the flow velocity is equal to the velocity of the foil, i.e.,

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}_w) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{X}_w,\theta). \quad (5)$$

Note that the translational velocity is imposed at the surface of the foil, not at the inlet of the computational domain, since the rotating frame of reference does not translate with the foil. Consequently, the boundary condition $\mathbf{u} = 0$ is imposed at the inlet of the computational domain. The no-stress boundary condition $[-p\mathbf{n} + 1/\mathrm{Re}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)\mathbf{n} = 0]$ is used at the outlet. The inlet and outlet of the computational domain are indicated in Fig. 2.

The spatial discretization of the Navier-Stokes Eqs. (2) and (3) is based on a finite element formulation [33], using quadratic elements (P_2) for the velocity $\boldsymbol{u}$ and linear elements (P_1) for the pressure p. A semi-implicit second-order accurate temporal discretization is used: the temporal derivative is approximated by a backward-differential formulas, the linear term in the right-hand-side of Eq. (3) are implicit, and the nonlinear terms are explicit, using a second-order accurate extrapolation. This semi-implicit discretization yields a non-homogeneous unsteady Stokes problem, which is efficiently solved at each iteration with a preconditioned conjugate gradient algorithm [34,35]. This numerical method, implemented in the noncommercial software FreeFem++ [33], is validated in Appendix A.

The computational domain and mesh used to discretize the Navier-Stokes equations are displayed in Fig. 2. The influence of the size of the computational domain on the numerical results is described in Appendix A. The selected domain is a circle of diameter 60, centered at the leading-edge half-cylinder of the foil. The mesh is composed of 42×10^3 triangles, yielding 170×10^3 degrees of freedom for each component of the velocity and 42×10^3 degrees of freedom for the pressure. A particular attention has been paid to create a symmetric mesh with respect to the x axis, to avoid introducing artificial asymmetries in the flow. The size and spatial distribution of the triangles is adapted to the flow field, leading to a refinement of the mesh around the foil and in its wake. The smallest triangles are located at the trailing-edge of the foil and their size is 7.29×10^{-3}. Recalling that the wake flow rotates periodically around the X axis (while the foil is fixed), the far-wake region is refined accordingly, as shown in Fig. 2. Finally, the semi-implicit time discretization described above implies a Courant-Friedrich-Levy stability condition [36]. The time-step is chosen accordingly, from $\Delta t = 8 \times 10^{-3}$ for $f = 0$ down to $\Delta t = 4 \times 10^{-4}$, corresponding to $\Delta t = T/5000$ for large frequencies above the deviation.

B. Results

Nonlinear simulations are performed for flapping frequencies in the range $0 \leqslant f \leqslant 0.5$. For $f = 0$, the foil is in a fixed position with zero angle of incidence with respect to the incoming uniform flow. The wake flow pattern, computed for $\mathrm{Re} = 255$ but not displayed here, is a classical Bénard-Von Karman vortex street, characterized by a (nondimensional) natural frequency $f_0 = 0.167$.

Let us now investigate the flow pattern obtained when the foil is forced to pitch. Snapshots of the vorticity field, obtained for four flapping frequencies, are displayed in Fig. 3 at times $t = T/4$ (left) and $t = 3T/4$ (right), that correspond to the maximal and minimal angular positions of the foil, respectively. Corresponding movies are available as Supplemental Materials [37]. In these figures, the vorticity is displayed in the laboratory frame of reference $(\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{e}_y)$. The four flapping frequencies used in Fig. 3 correspond to four specific patterns observed in the wake. The flow frequency is always equal to the flapping frequency of the foil.

For the lowest flapping frequency $f = 0.1$ [see Figs. 3(a) and 3(b)], the wake flow pattern is similar to the classical Bénard-Von Karman vortex street obtained without pitching. Negative (black) and positive (white) vortices are alternately shed during the upstroke and downstroke phases of the flapping motion. In the far-wake, the core of negative and positive vortices lies above and under the x axis, respectively. When the flapping frequency is equal to the natural flow frequency, i.e., $f = f_0$, no vortex lock-in behavior is observed. When further increasing the flapping frequency, the spatiotemporal structure of the wake flow changes dramatically.

For the frequency $f = 0.35$ [see Figs. 3(c) and 3(d)], negative and positive vortices of larger magnitude are shed during the upstroke and downstroke phase of the flapping motion. Unlike for the classic Bénard-Von Karman vortex street, the cores of the negative and positive vortices now lie below and above the x axis, respectively. This is the characteristic pattern of the reverse Bénard-Von Karman vortex street [15]. Interestingly, the vorticity fields satisfy the spatiotemporal symmetry $\omega_z(x,y,t) = -\omega_z(x,-y,t + T/2)$, at any position (x,y) downstream of the wing. Around the

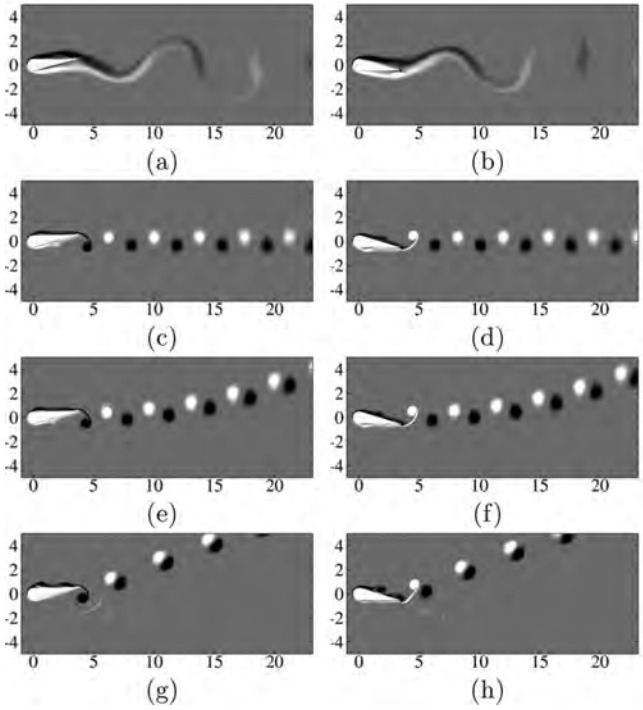


FIG. 3. Instantaneous vorticity fields for the flapping frequency $f = 0.1$ (a, b), $f = 0.35$ (c, d), $f = 0.43$ (e, f), and $f = 0.45$ (g, h) at $t = T/4$ (left) and $t = 3T/4$ (right). Black and white denote negative and positive values, respectively.

wing, this relation is not valid as some positions (x,y) belong to the flow or to the solid depending on the flapping motion. However, when considering the spatial position written in the rotating frame of reference, the spatiotemporal symmetry,

$$(u,v,p)(X,Y,t) = (u,-v,p)(X,-Y,t+T/2),$$
$$\omega_z(X,Y,t) = -\omega_z(X,-Y,t+T/2), \qquad (6)$$

holds for all points (X,Y). This spatiotemporal symmetry breaks when the flapping frequency is increased.

For the frequency $f = 0.43$ shown in Figs. 3(e) and 3(f) the wake exhibits an upward deviation. Positive and negative vortices are still alternately shed from the trailing edge but they are now convected downstream along a direction not aligned with the streamwise axis $y = 0$.

For the frequency $f = 0.45$, the deviation is even more pronounced, as seen in Figs. 3(g) and 3(h). Positive and negative vortices, instead of being arranged in an array of monopolar structures as for lower frequencies, now form an array of dipolar structures [20].

Most of the results presented in this study exhibit an upward deviation. However, the downward deviation is also possible and illustrated in Fig. 4(b) next to the upward deviation in Fig. 4(a). In both cases, the spatiotemporal symmetry Eq. (6) is broken. During our simulations, upward or downward deviations were obtained by starting the pitching of the wing to the top or the bottom, respectively. The selection of the deviation's direction seems to depend on the initial condition but was not investigate in our study. More details can be found on this matter in [16–18].

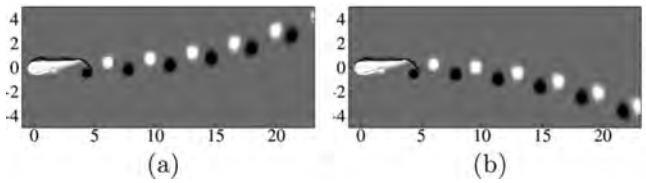


FIG. 4. Instantaneous vorticity fields for $f = 0.43$ at $t = T/4$ showing an upward (a) and downward (b) deviation of the wake. Black and white denote negative and positive values, respectively.

The deviation and antisymmetry of the wake flow can be analyzed further by performing a temporal Fourier decomposition of the periodic vorticity. This decomposition writes

$$\omega_z(\boldsymbol{x},t) = \langle\omega_z\rangle(\boldsymbol{x}) + \sum_{k\geqslant 1}(\omega_z{}^k(\boldsymbol{x})e^{ik2\pi t/T} + \text{c.c.}), \qquad (7)$$

where $\langle\omega_z\rangle$ is the (real) mean vorticity and $\omega_z{}^k$ is the kth (complex) Fourier component. In particular, the real and imaginary parts of the first Fourier component $\omega_z{}^1$ extract the component of the flow which oscillates at the flapping frequency $f = 1/T$. As long as the flow solution remains T-periodic, the Fourier components are easily computed as

$$\omega_z{}^k(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \omega_z(\boldsymbol{x},t)e^{-ik2\pi t/T}\,dt. \qquad (8)$$

Figure 5 displays the mean (left) and first Fourier component (right) of the vorticity field for the flapping frequencies

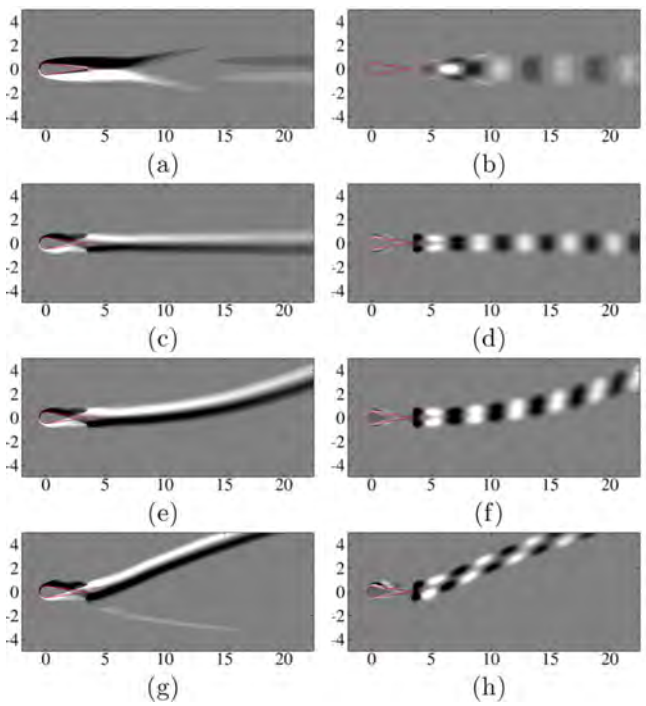


FIG. 5. Vorticity field of the mean flow (left) and the real part of the first Fourier component (right) for the flapping frequency $f = 0.1$ (a, b), $f = 0.35$ (c, d), $f = 0.43$ (e, f), and $f = 0.45$ (g, h). Black and white denote negative and positive values, respectively. The foil at zero incidence is shown in red.

$f = 0.1$ (a, b), $f = 0.35$ (c, d), $f = 0.43$ (e, f), and $f = 0.45$ (g, h). For $f = 0.1$ in Fig. 5(a), the mean vorticity field is antisymmetric with respect to the x axis; i.e., $\langle\omega_z\rangle(x,-y) = -\langle\omega_z\rangle(x,-y)$. Positive and negative values are observed in the lower and upper parts of the wake, respectively. This is typical of dragging wake flow profiles, with a negative upper shear layer and a positive lower shear layer. For $f = 0.35$ in Fig. 5(c), the mean vorticity field remains antisymmetric with respect to the x axis. However, negative and positive values are now observed in the lower and upper parts of the wake, respectively. This is typical of mean jet flow profiles, with a positive upper shear layer and a negative lower shear layer. Around the foil, the signs of the shear layers are opposite: a negative upper shear layer and a positive lower shear layer. The inversion of the sign of the two shear layers occurs around the trailing edge and is characteristic of propulsive flapping bodies [16,38]. For both these frequencies, the vorticity of the first Fourier component in Figs. 5(b) and 5(d) is symmetric with respect to the x axis; i.e., ${\omega_z}^1(x,-y) = {\omega_z}^1(x,-y)$, unlike the mean vorticity. The vorticity of the first Fourier component exhibits its strongest values downstream of the foil.

In the $f = 0.43$ case [Figs. 5(e) and 5(f)], the mean vorticity field is stronger in magnitude and clearly deviated upward. This deviation is also visible on the first Fourier component and on higher-order Fourier components, not shown here. The spatial anti-symmetry of the mean vorticity field as well as the symmetry of the vorticity of the first Fourier components are broken because of this lateral deviation of the wake. It is even more so the case for $f = 0.45$ [Figs. 5(g) and 5(h)].

The deviation of the wake-flow described above impacts the aerodynamic forces exerted on the foil. The instantaneous drag and lift coefficients are defined as $C_x(t) = 2F_x(t)$ and $C_y(t) = 2F_y(t)$, with F_x and F_y the components of the nondimensional aerodynamic force. When the flow satisfies the spatiotemporal symmetry Eq. (6), the drag and lift coefficients satisfy

$$C_x(t + T/2) = C_x(t) \ , \ C_y(t + T/2) = -C_y(t), \qquad (9)$$

i.e., the instantaneous drag coefficients are equal in the upstroke and downstroke phases of the foil, while the instantaneous lift coefficients are of opposite sign. This property is proved in Appendix C.

Figure 6 displays the time-evolution of the system in a $C_x(t)/C_y(t)$ phase diagram. The trajectory is a closed orbit, which is consistent with the fact that the flow is always periodic. Note that the lift coefficient is one order of magnitude larger than the drag coefficient as previously reported [39]. For $f = 0.35$ (solid line) the trajectory has a butterfly shape, symmetric with respect to the $C_y = 0$ axis, implying that the symmetry Eq. (9) is verified. Regarding the $f = 0.43$ case (dashed line), first we notice that during the cycle, both the lift and drag reach larger values. Most importantly, the butterfly shape of the trajectory in the (C_x, C_y) plane is no longer symmetric with respect to the $C_y = 0$ axis, implying that the symmetry Eq. (9) is broken. This symmetry breaking is even more pronounced for the $f = 0.45$ case (dash-dotted line).

Along with the instantaneous values of the lift and drag coefficients, Fig. 6 also displays their values averaged over one cycle. For all three cases displayed, the mean drag coefficient is negative, implying that the flapping foil is in the propulsive regime. The mean lift is strictly zero for $f = 0.35$ and the symmetry relations Eq. (9) are satisfied. On the other hand, for $f = 0.43$ and $f = 0.45$, the spatiotemporal symmetry is broken, resulting in nonzero mean lift. Interestingly, the mean lift is found to be positive (respectively, negative) when the wake is deviated upward (respectively, downward), in agreement with results of previous studies [40–42]. As explained by Cleaver *et al.* [40], the sign of the mean lift is the same as the deviation direction because of a low (mean) pressure region existing on the same side of the foil as the deviation direction. This low-pressure region is induced by vortices detaching from the leading edge and traveling till the trailing edge, as visible on the top of the foil in Fig. 3(g) and 3(h). The pressure lift and drag being two orders of magnitude larger than their respective viscous components, this low-pression region indeed explains why the lift force is oriented on the same side as the wake is deviated.

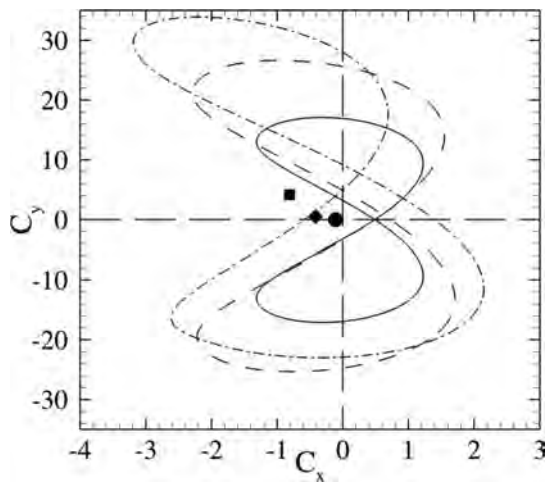


FIG. 6. Instantaneous drag versus lift coefficients over one flapping period for $f = 0.35$ (solid line), $f = 0.43$ (dashed line) and $f = 0.45$ (dash-dotted line). The mean positions of the drag and lift coefficients are indicated by the black circle ($f = 0.35$), diamond ($f = 0.43$), and square ($f = 0.45$).

The evolution of the mean lift and drag coefficients is examined in Fig. 7 as a function of the flapping frequency. Three successive transitions are identified in the range $0.3 \leqslant f \leqslant 0.5$. First there is a transition from a drag regime to a thrust regime, which occurs at $f \sim 0.31$ according to Fig. 7(b). This

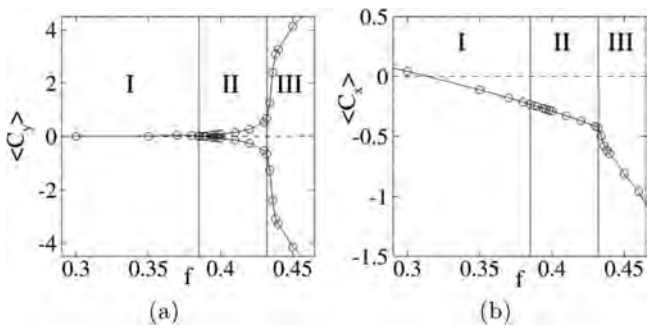


FIG. 7. Mean lift and drag coefficients as a function of the flapping frequency.

first transition was examined in Refs. [14,19] and is not the object of the present paper.

The second transition is the spatiotemporal symmetry-breaking leading to nonzero $\langle C_y \rangle$ occurring for $f \sim 0.39$. This transition separates the regimes I and II in Fig. 7, which correspond to nondeviated wakes and deviated wakes, respectively. As already stated, both upward and downward deviations are equally possible and correspond to positive and negative $\langle C_y \rangle$, respectively. Both cases are displayed in Fig. 7(a), which strongly suggests that the onset of the wake deviation is due to a supercritical bifurcation of the periodic flow. This will be examined in Sec. III by performing a linear Floquet analysis of the symmetric periodic flow.

A third transition is eventually observed in Fig. 7 for $f \gtrsim 0.435$ where the mean lift reaches much higher values and the mean drag experiences a change of slope. This last transition separates the regimes II and III in Fig. 7, the latter corresponding to strongly deviated wakes. This transition will be examined in Sec. IV, where it is argued that it results from nonlinear effects.

III. FLOW BIFURCATION AND DEVIATION

To investigate the deviation of the periodic wake-flow as a bifurcation problem, it is first required to compute the symmetry-preserving *base flow* solution above the bifurcation threshold. A method is introduced in Sec. III A that aims at preserving the spatiotemporal symmetry of the flow field to compute this unstable base flow. The linear stability of this symmetric base flow is then studied in Sec. III B by performing a Floquet stability analysis.

A. Symmetry-preserving method

To present the method, let us first introduce the operator $\mathcal{S}$, which acts on a velocity field $\boldsymbol{u}$ and extracts the component satisfying the spatiotemporal symmetry Eq. (6). This operator is defined by

$$\boldsymbol{u}_s = \mathcal{S}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(x,y,t) + u(x,-y,t-T/2) \\ v(x,y,t) - v(x,-y,t-T/2) \end{pmatrix}, \quad (10)$$

where $\boldsymbol{u}_s$ denotes the symmetric component. Similarly, the antisymmetric component $\boldsymbol{u}_a$ [with respect to the spatiotemporal symmetry Eq. (6)] can be extracted using the operator $\mathcal{A}$ defined by

$$\boldsymbol{u}_a = \mathcal{A}\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(x,y,t) - u(x,-y,t-T/2) \\ v(x,y,t) + v(x,-y,t-T/2) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Then the flow can then be decomposed as

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_s + \boldsymbol{u}_a. \quad (12)$$

Note that the symmetric and antisymmetric components satisfy $\mathcal{S}\boldsymbol{u}_s = \boldsymbol{u}_s; \mathcal{S}\boldsymbol{u}_a = 0; \mathcal{A}\boldsymbol{u}_a = \boldsymbol{u}_a; \mathcal{A}\boldsymbol{u}_s = 0$. Inserting the above decomposition into the Navier-Stokes Eqs. (2), (3), and (5) yields the system of coupled equations governing the dynamics of the symmetric and antisymmetric components,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} &= \mathcal{R}(\boldsymbol{u}_s, p_s; \theta(t)) - (\boldsymbol{u}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_a, \\ \frac{\partial \boldsymbol{u}_a}{\partial t} &= \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_s; \theta(t))\boldsymbol{u}_a, \end{aligned} \quad (13)$$

supplemented with the wall boundary conditions

$$\boldsymbol{u}_s(\boldsymbol{X}_w,t) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{X}_w,\theta(t)), \quad \boldsymbol{u}_a(\boldsymbol{X}_w,t) = \boldsymbol{0}. \quad (14)$$

The nonlinear equation governing the symmetric component is the original equation forced by an additional nonlinear advection term. The antisymmetric component is governed by a linear equation, where the linear operator $\mathcal{L}$ is defined as

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_s;\theta)\boldsymbol{u}_a = &-\left(\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_z\right) \times \boldsymbol{u}_a - ((\boldsymbol{u}_s - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{X},\theta)) \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_a \\ &-(\boldsymbol{u}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_s - \nabla p_a + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \boldsymbol{u}_a, \end{aligned} \quad (15)$$

and is the linearization operator of the right-hand side operator $\mathcal{R}$ around the symmetric velocity component $\boldsymbol{u}_s$. Interestingly, if the antisymmetric component vanishes (i.e., $\boldsymbol{u}_a = 0$), the symmetric component satisfies the original Eq. (2). The symmetry-preserving method consists in driving the antisymmetric component to zero, by adding a damping term to the second Eq. (13). The new system of equations writes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{u}_s}{\partial t} &= \mathcal{R}(\boldsymbol{u}_s, p_s; \theta(t)) - (\boldsymbol{u}_a \cdot \nabla)\boldsymbol{u}_a, \\ \frac{\partial \boldsymbol{u}_a}{\partial t} &= \mathcal{L}(\boldsymbol{u}_s; \theta(t))\boldsymbol{u}_a - \chi \boldsymbol{u}_a, \end{aligned} \quad (16)$$

where χ is a damping parameter. The theoretical choice of this parameter depends on the eigenvalues of largest growth rate of the linear operator $\mathcal{L}$. χ should be chosen so as to stabilize all of these eigenvalues. The eigenvalues of $(\mathcal{L} - \chi\mathcal{I})$ are then all of negative growth rate and the antisymmetric component is driven to zero. In the following, the solution satisfying the spatiotemporal symmetry (also called the base flow) is denoted $\boldsymbol{U}_s$ ($\boldsymbol{U}_a = 0$) and satisfies

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{U}_s}{\partial t} &= \mathcal{R}(\boldsymbol{U}_s, P_s; \theta(t)), \\ \boldsymbol{U}_s(\boldsymbol{X}_w,t) &= \boldsymbol{w}(\boldsymbol{X}_w,\theta(t)). \end{aligned} \quad (17)$$

In practice, the eigenvalues of largest growth rate are not known and a trial-and-error method is used to determine values of the parameter χ. Its effect is discussed in Appendix B.

For the frequency $f = 0.43$, the solution of the original Eqs. (2) and (5) is a deviated wake as seen in Fig. 3. Starting from this solution, the new system of Eqs. (16) is solved with the damping parameter $\chi = 0.3$. As a consequence, the antisymmetric component vanishes, as shown in Fig. 8, where its norm is given as a function of time. Snapshots and first Fourier components of the solution are displayed in Fig. 9. A movie of the nondeviated wake for $f = 0.43$ is available as Supplemental Material [37]. The spatiotemporal symmetry of the solution is clearly visible in the two snapshots of the vorticity separated by $T/2$. The suppression of the deviation is clearly observed on the mean vorticity field and on the first Fourier component.

Using this symmetry-preserving method for several frequencies, the mean drag and lift coefficients of the solutions are computed and shown in Fig. 10 with black circles. Results obtained without the symmetry-preserving method, already shown in Fig. 7, are recalled in the figure with white circles. The left plot displaying $\langle C_y \rangle$ demonstrates that the symmetry-preserving method is efficient to compute a symmetric base

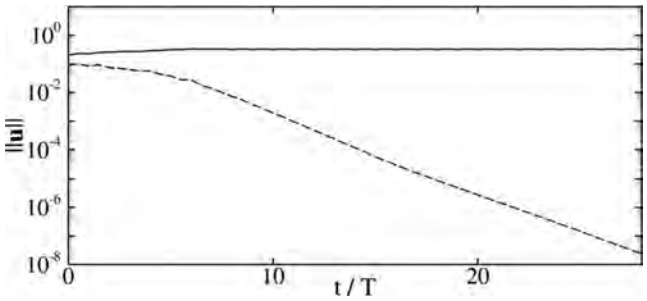


FIG. 8. Evolution of the symmetric (solid) and antisymmetric (dashed) component as a function of time with $\chi = 0.3$ at $f = 0.43$. Simulation is started from converged deviated wake.

flow even in the range $f \gtrsim 0.39$, where it is unstable and cannot be accessed using temporal integration of the starting equations, which only give access to the asymmetric states. The right plot displaying $\langle C_x \rangle$ shows that for $0.39 \lesssim f \lesssim 0.43$ the symmetry-breaking has almost no impact on the drag (the open circles being superposed to the black ones), while it has a strong impact above the transition for $f \gtrsim 0.44$, which will be examined in Sec. IV.

For $f \geqslant 0.39$, three branches of periodic solutions exist: one branch of symmetric (or nondeviated) periodic solutions characterized by zero mean lift and two branches of asymmetric (or deviated) periodic solutions characterized by mean lift of opposite sign. To complete this bifurcation diagram, the stability of the symmetric solutions is addressed in the next paragraph using a Floquet stability analysis.

B. Floquet stability analysis of the nondeviated wake flow

The stability of the time-periodic base flow $\boldsymbol{U}_s$ is determined by investigating the long-term dynamics of infinitesimal perturbations $\boldsymbol{u}'$. The flow field is first decomposed as $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}_s + \varepsilon \boldsymbol{u}'$ with $\varepsilon \ll 1$ and this decomposition is introduced into the Navier-Stokes Eqs. (2). Recalling that the base flow is governed by Eq. (17) and neglecting the quadratic terms in ε, we obtain the equation governing the dynamics of linear

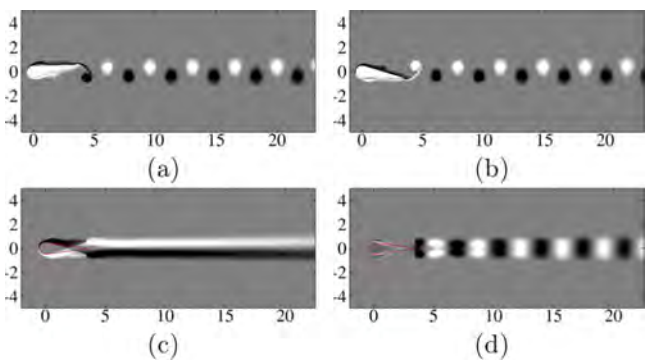


FIG. 9. Vorticity snapshots (top) of the non deviated wake at $f = 0.43$ obtained using $\chi = 0.3$. Vorticity field averaged in time and first temporal Fourier component (bottom). Black and white denote negative and positive values respectively. The foil at zero incidence is shown in red.

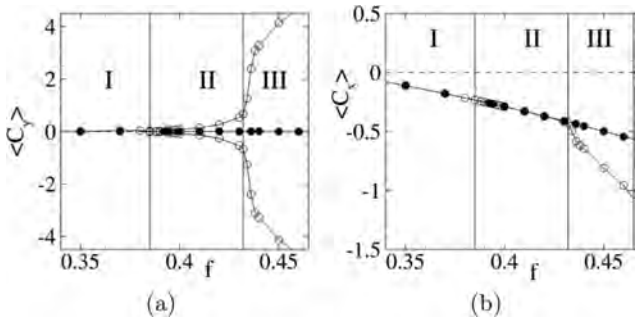


FIG. 10. Mean lift and drag coefficients as functions of the flapping frequency f. ○, asymmetric solutions; •, symmetric solutions.

perturbations

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}'}{\partial t} = \mathcal{L}(\boldsymbol{U}_s)\boldsymbol{u}', \tag{18}$$

with the wall boundary condition $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{X}_w,t) = 0$. Note that symmetric perturbations $\boldsymbol{u}'_s = \mathcal{S}\boldsymbol{u}'$ and antisymmetric perturbations $\boldsymbol{u}'_a = \mathcal{A}\boldsymbol{u}'$ are both solutions of the above equation. The linear operator $\mathcal{L}(\boldsymbol{U}_s)$ is T-periodic because the base flow $\boldsymbol{U}_s$ is T-periodic. Thus, according to Floquet theory [43], any solution of Eq. (18) can be decomposed into the sum

$$\boldsymbol{u}'(\mathbf{x},t) = \sum_k \hat{\boldsymbol{u}}_k(\mathbf{x},t)e^{\lambda_k t}, \tag{19}$$

where $\hat{\boldsymbol{u}}_k$ are T-periodic functions, called the Floquet modes of $\mathcal{L}$, and the complex numbers λ_k are the Floquet exponents. The Floquet multipliers $\mu_k = e^{\lambda_k T}$ correspond to the temporal growth or decay of the Floquet modes over one period T. The stability of the base flow is determined by examining the spectrum of Floquet multipliers. A Floquet mode is stable (respectively, unstable) when the corresponding Floquet multiplier lies inside (respectively, outside) the unit circle $|\mu_k| < 1$ (respectively, $|\mu_k| > 1$) in the complex plane. When one Floquet mode becomes unstable, the time-periodic base flow becomes unstable.

The numerical method used to compute the Floquet modes and multipliers is similar to that used in Refs. [44,45]. The evolution of the linear perturbation $\boldsymbol{u}'$ over one period T is formally rewritten

$$\boldsymbol{u}'(t_0 + T) = \mathcal{P}\boldsymbol{u}'(t_0), \tag{20}$$

where $\mathcal{P}$ is the propagator over one period, also known as the linearized Poincaré map. The action of this propagator on the perturbation $\boldsymbol{u}'(t_0)$ at the arbitrary time t_0 is obtained by integrating the linearized Eq. (18) in time from t_0 to $t_0 + T$. The eigenvalues of the propagator $\mathcal{P}$ are precisely the Floquet multipliers μ_k of $\mathcal{L}$, and the eigenvectors of $\mathcal{P}$ correspond to the Floquet modes $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t_0)$ of $\mathcal{L}$ for the arbitrary time t_0. The time-periodic evolution of the Floquet mode is then determined by temporal integration of Eq. (18) over one period starting with $\hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t_0)$ as the initial condition. The Floquet mode is the solution of this temporal integration, corrected by the multiplicative factor $e^{-\lambda_k t}$ to account for the instantaneous growth or decay. Arnoldi method was used to compute the eigenvalues of largest amplitude [46]. A serial implementation using the modified Gram-Schmidt algorithm

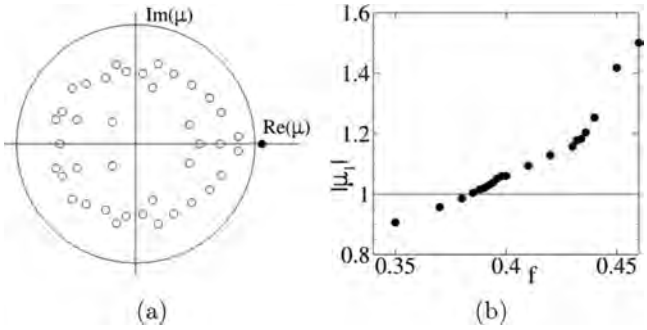


FIG. 11. Spectrum of the Floquet multipliers at $f = 0.4$. The dominant mode's Floquet multiplier, in black, is $\mu_1 \simeq 1.046$ (a). Evolution of Floquet multiplier magnitude $|\mu|$ with the flapping frequency f (b). The line $|\mu| = 1$ corresponds to marginal stability of Floquet modes. The dominant mode is always real.

for the orthogonalization process is used to generate an approximation of n eigenvectors. All computed modes were normalized by their total kinetic energy.

First, results of the stability analysis are shown for the flapping frequency $f = 0.4$. The largest Floquet multipliers are displayed in Fig. 11(a). Most of the eigenvalues are stable, but one eigenvalue marked by the black circle is unstable as it lies outside the unit circle. As this eigenvalue is real ($\mu_1 = 1.046 + 0.0\mathrm{i}$), the Floquet mode is synchronous with the base flow and therefore does not modify its periodicity. The evolution of this eigenvalue with the flapping frequency is shown in Fig. 11(b). The Floquet mode becomes unstable for the critical frequency $f_c \sim 0.385$. This critical frequency is consistent with the observation of wake deviation and the apparition of mean lift in Fig. 7, which define the transition between regimes I and II. For every flapping frequency tested, the leading Floquet mode was found to be real and therefore synchronous with the base flow. No other unstable modes were detected for frequencies below $f = 0.46$.

Figure 12 displays two snapshots of the dominant Floquet mode's vorticity separated by $T/2$. A movie of this mode dynamics is available as Supplemental Material [37]. Vorticity dipoles are emitted at the trailing edge and grow spatially and temporally while convected downstream. Negative vortices (in black) are aligned with the central line, whereas positive vortices (in white) are alternately above and below the negatives ones. It can also be seen that $w_z(X,Y,T/4) = w_z(X,-Y,3T/4)$. This property has been verified for all t over one flapping period and demonstrates that the leading Floquet mode breaks the spatiotemporal symmetry Eq. (6)

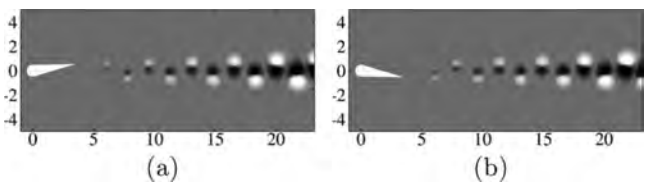


FIG. 12. Vorticity snapshots of the dominant Floquet mode at flapping frequency $f = 0.45$ and time $t = T/4$ (a) and $t = 3T/4$ (b). Black and white denote negative and positive values, respectively.

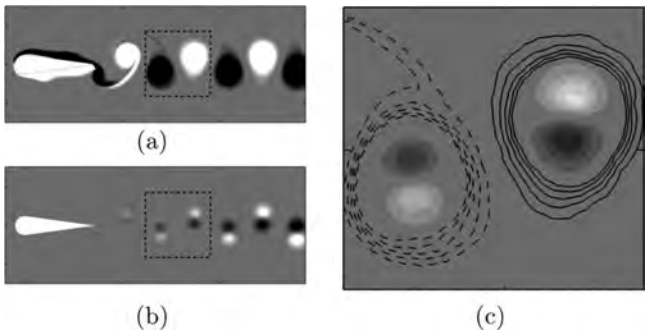


FIG. 13. Vorticity snapshots of (a) the base flow, (b) the Floquet mode, and (c) a zoom of their superimposition at $f = 0.43$ and $t = 0$. Black and white colors [in (a), (b), and (c)], and dotted and continuous lines [in (c)] denote negative and positive values, respectively.

and is therefore of the form $\boldsymbol{u}'_a$. To explain the link between the computed Floquet mode and the deviation of the wake, we provide, in Fig. 13, a snapshot of (a) the base flow, (b) the leading Floquet mode, and (c) their superimposition inside the dotted square (the base flow is represented with isolines and the mode with isocontours). First, a certain synchronization between the two flows can be observed. In the whole wake and at all times, a vortex of the base flow is synchronized with a dipole of the linear mode.

A dipolar perturbation of a monopolar vortex is a classic structure called a displacement mode [47–49]. It is well known that this structure is associated with a displacement of the vorticity centroid. More specifically, consider the negative vorticity monopole located at the left of the dotted square. The corresponding dipole in the Floquet mode has negative vorticity (black) in the upper part and positive vorticity (white) in the lower part. The superposition strengthens the top part of the monopole and weakens its lower part, resulting in a net displacement of the monopole in the upward direction. The same argument can be applied to the positive vorticity monopole located at the right of the dotted square, which is also displaced upward. Thus, the structure of the Floquet mode is able to explain the deviation of the whole wake in the upward direction. Note that as the amplitude of the linear mode is arbitrary, changing its sign leads to the equally probable deviation of the wake in the downward direction.

The structure of the Floquet mode can also be analyzed using temporal Fourier decomposition, just as was done for the flow obtained through nonlinear simulations in Sec. II. Figure 14 displays the mean vorticity (a) and the first

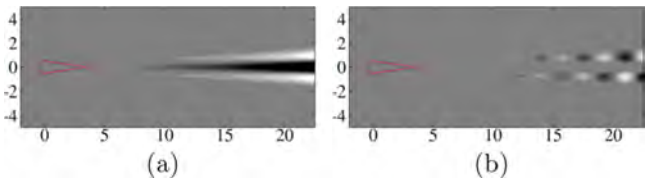


FIG. 14. Vorticity field averaged in time over one period and first temporal Fourier component at $f = 0.43$. Black and white denote negative and positive values, respectively. The foil at zero incidence is shown in red.

Fourier component (b), which are, respectively, symmetric and antisymmetric with respect to the x axis. This is the opposite of the base flow presented in Fig. 9, confirming that the mode does break the symmetry Eq. (6). Three alternate vorticity layers are present in the mean wake, with negative vorticity on the x axis. By superimposing it with the mean wake of the base flow [in Fig. 9(c)], and using the same arguments as for the instantaneous superimposition, the mean wake of the mode will strengthen both the positive upper and negative lower shear layers on their tops and weaken their bottoms. This will result in a deviated jet-like mean wake, like the bottom-left frame of Fig. 5.

IV. NONLINEAR EFFECTS

The linear stability analysis detailed in the previous section explains the onset of the small deviation observed in regime II ($0.385 \leqslant f \leqslant 0.43$). However, it does not provide any explanation for the large deviation, the sudden increase of thrust and lift obtained in regime III ($f \geqslant 0.44$). To better understand the large deviation and corresponding increase of thrust and lift obtained in regime III, the effects of nonlinearity are now analyzed. The nonlinear perturbation is defined as the difference between the asymmetric flow and the symmetric base flow, i.e., $\boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_s$. Linear and nonlinear perturbations are first compared for frequencies $f = 0.43$ and $f = 0.45$, which correspond to regimes II and III, respectively.

For $f = 0.43$, snapshots of the linear and nonlinear perturbations are shown in Figs. 15(a) and 15(c). The linear perturbation is an array of dipolar structures aligned with the x axis and centered in the monopolar structures of the base flow, as described previously. These dipolar structures grow in time, and in space when moving downstream. The spatial growth is quantified by examining Fig. 15(e), which shows the streamwise evolution of the kinetic perturbation energy integrated in y and averaged over one flapping period. The spatial growth of the linear perturbation (dashed line) is quasiexponential. Note that its value depend on the normalization of the Floquet mode (unitary total kinetic energy in our study). In order to be the same order of magnitude as the nonlinear perturbation, the y-integrated kinetic energy of the linear perturbation has been mutliplied by 10^4. Regarding the pattern of the nonlinear perturbation shown in Fig. 15(c), we observe that it is very similar to that of the linear perturbation in the near-wake. The spatial growth of the linear and nonlinear perturbations are also very similar for $x \leqslant 10$ [Fig. 15(e)]. In this region, the effect of nonlinearities is therefore negligible. However, in the far wake (for $x \geqslant 15$), the kinetic energy of the nonlinear perturbation tends toward a constant value, unlike the linear perturbation, which still grows in space. Clearly the effect of nonlinearities is to saturate the spatial growth of the perturbation. This nonlinear saturation comes with a very specific pattern in the far-wake region [see Fig. 15(c)]. Two arrays of vortical structures are now visible. One array of monopolar structures remains aligned with the x axis, while the other is slightly deviated upward. In this far-wake region, the monopolar structures in the nondeviated array are of opposite sign to the monopolar structures of the base flow [compare Fig. 15(c) with Fig. 9]. Therefore, when adding the nonlinear perturbation to the base flow, the array of monopolar structures disappears in the far wake and only the deviated array of dipolar structures remains in the instantaneous solution. As such, a second effect of nonlinearities is to increase the deviation of the wake.

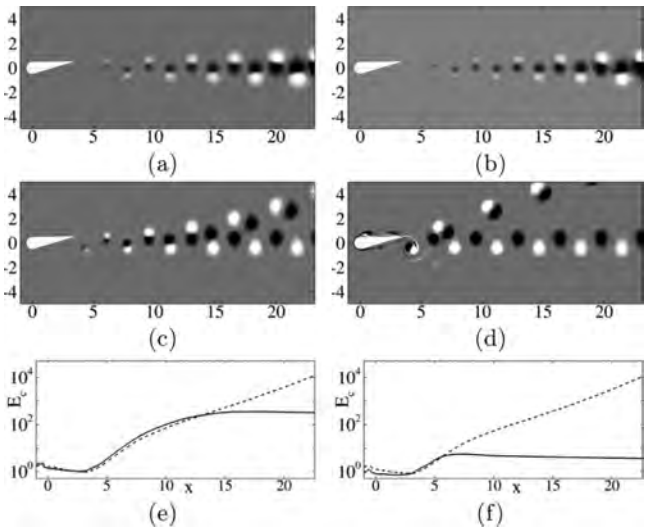


FIG. 15. (a–d) Snapshots of the vorticity field for (a, b) linear and (c, d) nonlinear perturbations at time $t = T/4$ and frequency (a, c) $f = 0.43$ and (b, d) $f = 0.45$. (e, f) y-integrated kinetic energy of the linear (dashed) and nonlinear (solid) perturbations as a function of the streamwise coordinate for (e) $f = 0.43$ and (f) $f = 0.45$.

Let us now examine the nonlinear effects for the larger frequency $f = 0.45$ in regime III, where large deviation and thrust are obtained. Snapshots of the linear and nonlinear perturbations are shown in Figs. 15(b) and 15(d), and the streamwise evolution of the kinetic energy is displayed in Fig. 15(f). The region where the linear and nonlinear spatial growths match, is limited to the very near-wake region. For $x \geqslant 7$, the saturation occurs and the two arrays of vortical structures are visible in the wake. The array of dipolar structures is more deviated than for $f = 0.43$ and the dipolar structure is more pronounced.

When increasing the flapping frequency, nonlinear saturation occurs closer to the wing. This may impact the aerodynamic forces exerted on the wing and explain the increase of thrust observed in regime III. First, we note that a linear antisymmetric perturbation generates a mean lift force but does not create a mean drag and thrust force (see details in Appendix Sec. C). Therefore, the additional thrust observed for $f \geqslant 0.44$ is necessarily associated to symmetric flow components. To better understand how nonlinear terms produce a symmetric flow component, the equations governing the dynamics of the symmetric and antisymmetric components are examined. To that aim, the nonlinear perturbation is decomposed into its symmetric $\boldsymbol{u}''_s$ and antisymmetric $\boldsymbol{u}''_a$ components. They are defined, respectively, by $\mathcal{S}\boldsymbol{u}''_s = \boldsymbol{u}''_s$ and $\mathcal{S}\boldsymbol{u}''_a = 0$. Introducing this decomposition into Eq. (13) yields the following system of coupled nonlinear equations,

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}''_s}{\partial t} = \mathcal{L}(\boldsymbol{U}_s;\theta(t))\boldsymbol{u}''_s - [\boldsymbol{u}''_s \cdot \nabla]\boldsymbol{u}''_s - [\boldsymbol{u}''_a \cdot \nabla]\boldsymbol{u}''_a$$
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}''_a}{\partial t} = \mathcal{L}(\boldsymbol{U}_s;\theta(t))\boldsymbol{u}''_a - [\boldsymbol{u}''_a \cdot \nabla]\boldsymbol{u}''_s - [\boldsymbol{u}''_s \cdot \nabla]\boldsymbol{u}''_a, \quad (21)$$

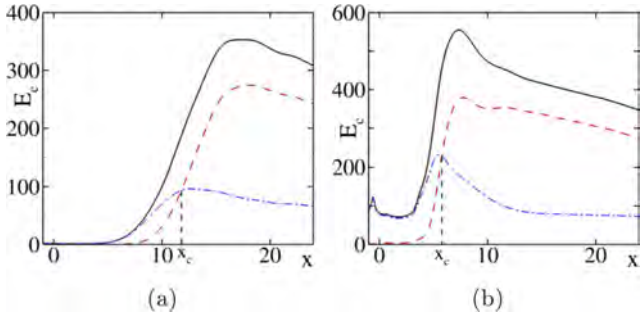


FIG. 16. Evolution of the nonlinear perturbations' mean kinetic energy (integrated in the transverse direction) in the streamwise direction for $f = 0.43$ (a) and $f = 0.45$ (b): $\boldsymbol{u}'$ (black solid), $\boldsymbol{u}'_s$ (red dashed), $\boldsymbol{u}'_a$ (blue dash-dotted).

where the first and second equations govern the nonlinear dynamics of the symmetric and antisymmetric components, respectively. In addition to the linear operator $\mathcal{L}$ around the periodic base solution $\boldsymbol{U}_s$, quadratic nonlinear terms appear in the right-hand sides and couple the two dynamics. In the linear regime, for which all quadratic terms are negligible, the symmetric component decays in time while the antisymmetric component grows in time. For large enough amplitude of the antisymmetric component, its quadratic interaction with itself in the first equation drives the development of a nonzero symmetric component. The existence of such a symmetric component influences in return the antisymmetric dynamics, via the quadratic interactions between $\boldsymbol{u}''_s$ and $\boldsymbol{u}''_a$ in the second equation of Eq. (21).

Let us examine now the spatial evolution of the symmetric and antisymmetric components of the nonlinear perturbation computed for the flapping frequencies $f = 0.43$ (regime II) and $f = 0.45$ (regime III). The mean kinetic energy integrated in the y direction is displayed in Fig. 16 for the nonlinear perturbation (black solid line) and its symmetric (red dashed line) and antisymmetric (blue dash-dotted line) components. Results obtained for $f = 0.43$ and $f = 0.45$ are shown in Figs. 16(a) and 16(b), respectively, and present similar tendencies when progressing downstream. The antisymmetric perturbation is amplified first while the symmetric one is negligible, as can be expected in the linear regime. Then the amplitude of the antisymmetric perturbation saturates while the symmetric one increases. As explained above, the transfer of energy from the antisymmetric component to the symmetric component is ensured by the quadratic interaction of $\boldsymbol{u}''_a$ with itself. For a critical streamwise position x_c, the amplitude of the symmetric perturbation becomes larger than that of the antisymmetric one. Further downstream, the antisymmetric component decreases in amplitude, while the symmetric component continues to increase, then saturates before decreasing. The evolution of the critical position x_c with the flapping frequency is displayed in Fig. 17 in the range $0.4 < f < 0.45$. For $f \leqslant 0.434$ (regime II), x_c decreases linearly with the flapping frequency. For $f \geqslant 0.438$ (regime III), the critical position is constant and almost equal to the position of the trailing edge, shown with the dashed line. The transition from regime II to regime III corresponds to the predominance of the symmetric component of the perturbation in the vicinity of the wing.

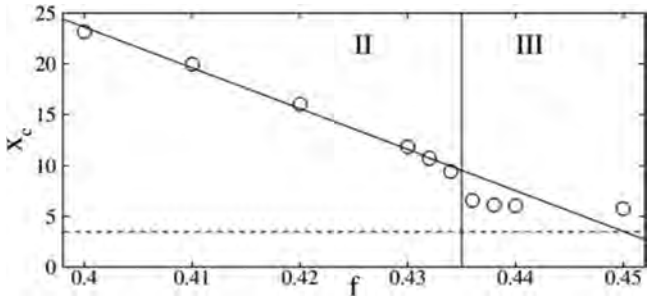


FIG. 17. Evolution of x_c as a function of f. The trailing edge position is indicated with a dashed line.

To explore further the link between aerodynamic forces and symmetries of the nonlinear perturbation, Fig. 18 shows the mean lift and drag induced by the symmetric (red circles) and antisymmetric (blue diamonds) components of the nonlinear perturbation. Let us first remark that the mean lift of the symmetric component is equal to zero [red curve in Fig. 18(a)], while the mean drag of the antisymmetric component is also zero [blue curve in Fig. 18(b)]. These results are inferred from the spatiotemporal symmetry properties in Appendix C, and here, are confirmed numerically. The mean lift induced by the nonlinear perturbation is due only to its antisymmetric component [blue curve in Fig. 18(a)], while the mean drag is due solely to its symmetric component [red curve in Fig. 18(b)]. The transition from regime II to regime III when increasing the flapping frequency is clearly induced by nonlinear effects and can now be explained as follows. When the flapping frequency is increased, the effect of the nonlinear terms is to create a symmetric component with larger and larger amplitudes close to the wing. This symmetric component produces a mean thrust force, which explains the change of slope in the total mean drag seen in Fig. 7(b). Its quadratic interaction with the antisymmetric component also alters the latter and results in a strong mean lift correction. This explains the change of slope in the total mean lift seen in Fig. 7(a) between regimes II and III.

To our knowledge, this is the first time those two distinct deviated regimes are clearly highlighted. Godoy-Diana's work [20] also presented a change of slope in the evolution of the angle of deviation with increasing flapping frequency. However, this change of slope was associated with significant

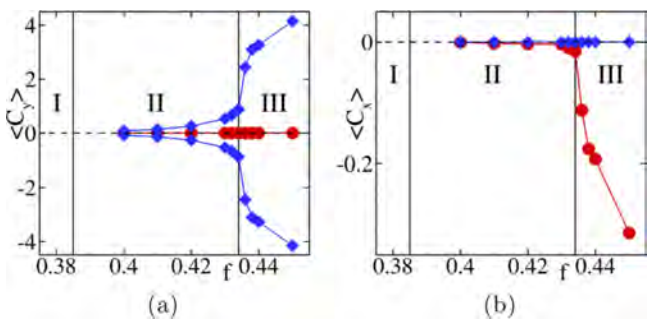


FIG. 18. Mean lift and drag coefficients for the symmetric $\boldsymbol{u}''_s$ (red circles) and antisymmetric $\boldsymbol{u}''_a$ (blue diamonds) components as a function of the flapping frequency f.

error bars, which makes it questionable whether this is the same phenomenon.

Finally, the transition between the two regimes is also related to a change in the wake structure. As can be seen in Figs. 3(g) and 3(h) for $f = 0.45$, successive counter-rotating vortices approach each other in pairs to form dipolar structures. For lower unstable frequencies such as $f = 0.43$, this is much less notable and occurs only far from the foil as seen in Figs. 3(e) and 3(f). This dipolar structure was previously noted by Godoy-Diana *et al.* [20]. They derived a quantitative criterion based on the phase velocity produced by two successive counterrotating vortices to identify the deviation threshold. They showed that the dipolar organization of the wake promotes the deviation, without ruling on any causal relationship. Later, Zheng *et al.* [18] derived a similar model based on the competition between successive phase velocities and attributed the wake deviation to the vortex pairing in the wake. Our study shows the dipolar aggregation develops in the wake, far from the foil in regime II. For increasing flapping frequency, the aggregation is visibly closer to the foil due to nonlinear amplification. The clear aggregation of vortices directly after the trailing edge marks the transition with regime III. These observations imply that the dipolar aggregation, though shown in these studies to be favorable to deviation, does not cause it. It is a secondary effect of the deviation, enhancing it through the nonlinear coupling of symmetric and antisymmetric perturbations. Ultimately, this nonlinear coupling results in a strong increase of the deviation angle, the mean lift and thrust.

V. CONCLUSION

In this paper, we investigated the deviation of the wake behind a flapping foil. A flow symmetry-preserving method was specifically developed to compute the unstable nondeviated wake. This method is based on the decomposition of the governing equations into a set of two equations governing the dynamics of the nondeviated wake and the perturbations evolving around it. Then, the second equation is stabilised to suppress the perturbations that break the spatiotemporal symmetry inherent to the flapping motion. A Floquet stability analysis of the time-periodic nondeviated wake showed the existence of a synchronous antisymmetric mode becoming unstable at the critical flapping frequency where deviation occurs. This Floquet mode is an array of counter-rotating dipoles that act as a succession of displacement modes. Both the instantaneous and the averaged-in-time effects of the mode are to displace the nondeviated wake away from the streamwise direction, resulting in a deviated wake. Finally, nonlinearities are associated with a dipolar aggregation of vortices in the wake. As nonlinear effects develop closer to the foil with increasing flapping frequency, they ultimately occur at the trailing edge, which results in the transition to a third regime with a much stronger deviation of the wake. This third regime is also associated with a strong increase of mean thrust and lift which are associated respectively with symmetric and antisymmetric perturbations around the foil.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially funded by the French Ministry of Defence-Direction Générale de l'Armement.

APPENDIX A: VALIDATION OF THE NONLINEAR CODE AND CONVERGENCE TESTS

Different tests are used in order to validate the present study. First of all, we validate the numerical method by reproducing the case of a laminar flow generated by an oscillating circular cylinder in an initially quiescent fluid. This case was described and studied experimentally by Dütsch *et al.* [50]. The periodic oscillation of the cylinder follows the law $x(t) = -A\sin(2\pi f t)$, where A and f stand for the oscillating amplitude and frequency, respectively. Two nondimensional numbers are used to describe this case: the Keulegan-Carpenter number $KC = U/fD$ and the Reynolds number $\mathrm{Re} = UD/\nu$, where U is the maximum velocity of the cylinder, D is the cylinder diameter, and ν is the fluid kinematic viscosity. We reproduce some results obtained experimentally by Dütsch *et al.* [50] and numerically by Guilmineau *et al.* [51] and Hosseinjani *et al.* [52], at $\mathrm{Re} = 100$ and $KC = 5$.

In Fig. 19 we show vorticity isolines, which are compared to the numerical results of Guilmineau *et al.* at two different moments $t = 0$ and $t = 19T/72$ of the oscillation. The results compare very well.

Additionally, Fig. 20 shows the horizontal velocity u along the transverse direction y at $x = -0.6D$ at two different moments of the oscillating period T. The profiles obtained with the present method (black line) agree well with the experimental results of Dütsch *et al.* (black squares) and are almost perfectly superposed with the numerical results of Hosseinjani *et al.* (blue line). These results show both qualitative and quantitative validity of our numerical method.

In a second time, we show a large enough computational domain has been chosen to ensure good values of the aerodynamic forces. On this study case, we test four different domains, which size is specified by their radius R. The same refinement has been used for the four meshes. Three frequencies, $f = 0.35$, $f = 0.42$, and $f = 0.44$, were tested, corresponding to the three regimes defined in the paper, respectively.

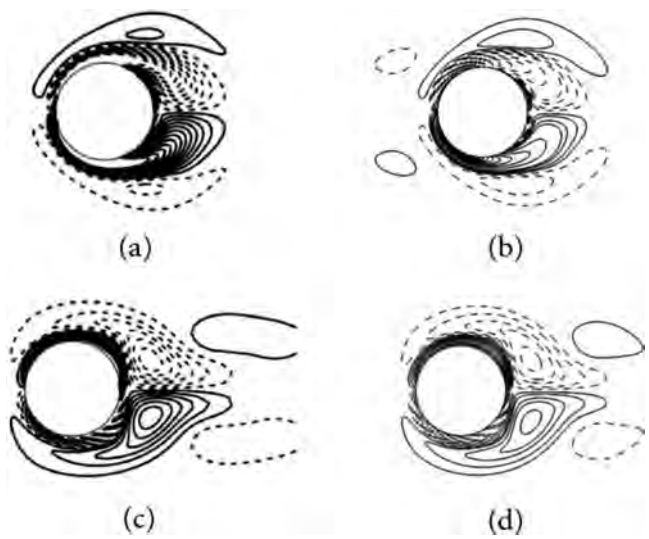


FIG. 19. Vorticity isolines for two different instants t. Guilmineau *et al.* (2002) at $t = 0$ (a) and $t = 19T/72$ (c). Present method at $t = 0$ (b) and $t = 19T/72$ (d).

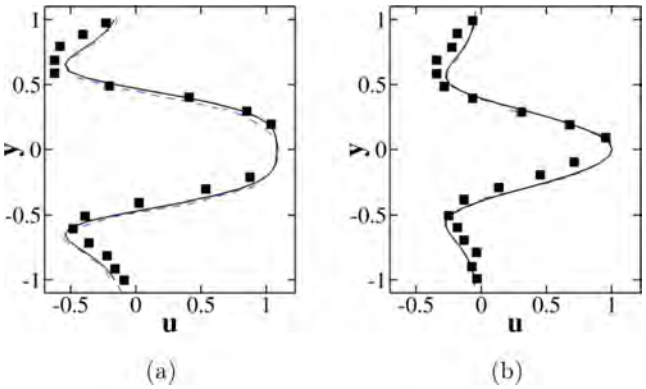


FIG. 20. The x-velocity component in the transverse direction y at $x = -0.6D$ for two different instants t of the flapping period T. (a) $t = T/2$; (b) $t = 7T/12$. Dütsch *et al.* (1998): black squares. Hosseinjani *et al.* (2015): blue dashed line. Present method: black solid line.

In Table I is shown the mean drag coefficient $\langle C_x \rangle$ for each domain and frequency. It is barely not affected by the domain size for $f = 0.35$ and $f = 0.42$. For $f = 0.44$, it changes a little more with 3% relative difference between the smallest and largest domains.

In Table II is shown the mean lift coefficient $\langle C_y \rangle$ for each domain and frequency. For $f = 0.35$ (regime I), the mean lift is zero for every domain, which is consistent with the fact the wake is not deviated. For $f = 0.44$ (regime III), the mean lift is practically independent of the size of the domain for $R > 30$ (0.5% relative difference). For $f = 0.42$ (regime II), the mean lift is more sensitive to the size of the domain with 3% relative difference for the largest domains ($R > 30$). However, this magnitude of error does not affect the distinction between the different regimes. The lift coefficients are not distinguishable when they are superimposed in a $(\langle C_y \rangle, f)$ map as in Fig. 7. For these reasons, we decided to use the mesh of size $R = 30$ since it is large enough to ensure good values of aerodynamic forces and allow us to keep a satisfactory computational cost.

APPENDIX B: CHOICE OF DAMPING COEFFICIENT χ IN THE SYMMETRY PRESERVING METHOD

As explained in Sec. III A, one needs an appropriate choice of damping coefficient in order to stabilise the second equation of system Eq. (16).

Figure 21 displays the time evolution of the antisymmetric component's norm for four values of the damping coefficient. All four simulations have been initialized with the same deviated wake at $f = 0.45$. For $\chi = 0.02$, the norm converges toward T-periodic oscillations (of very small magnitude with respect to its mean magnitude), indicating the antisymmetric component is not damped and the wake remains deviated. For the three other values of χ, and after a small transitory stage, the norm decreases at almost constant speed towards the zero-machine value. As can be observed, convergence speed increases with the value of χ. Tests showed that there is a minimum threshold of the damping coefficient above which the antisymmetric component is suppressed. With this flapping frequency, the threshold is between $\chi = 0.02$ and $\chi = 0.1$. Without the damping term, the linear operator $\mathcal{L}$ governs the antisymmetric component dynamics, which asymptotically will have a nonzero solution, if and only if the real part of its leading eigenvalue is positive. The damping coefficient counteracts this so that if χ is bigger than the leading eigenvalue's real part, the complete linear operator $\mathcal{L} - \chi\mathcal{I}$ will only have stable eigenvalues. Therefore, the only asymptotic solution of the equation will be nil.

TABLE I. Evolution of the mean drag coefficient $\langle C_x \rangle$ for three flapping frequencies f and four domain radius R.

	$f = 0.35$	$f = 0.42$	$f = 0.44$
$R = 20$	−0.114	−0.374	−0.647
$R = 25$	−0.112	−0.371	−0.655
$R = 30$	−0.111	−0.370	−0.665
$R = 35$	−0.110	−0.369	−0.667
$R = 40$	−0.110	−0.369	−0.667

TABLE II. Evolution of the mean lift coefficient $\langle C_y \rangle$ for three flapping frequencies f and four domain radius R.

	$f = 0.35$	$f = 0.42$	$f = 0.44$
$R = 20$	0	0.029	3.246
$R = 25$	0	0.140	3.332
$R = 30$	0	0.225	3.431
$R = 35$	0	0.263	3.447
$R = 40$	0	0.273	3.450

APPENDIX C: SYMMETRY PROPERTIES FOR THE FORCES

In this section, more details are given concerning the determination of the following symmetry properties respected by the aerodynamic forces. For a symmetric flow field $\boldsymbol{u}_s$, which respects the spatiotemporal symmetry property Eq. (6),

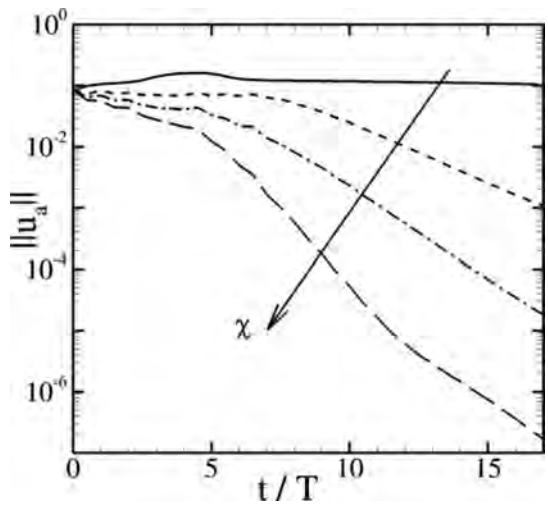


FIG. 21. Norm of the antisymmetric velocity component as a function of time for increasing damping coefficients $\chi = [0.02, 0.1, 0.2, 0.3]$ at flapping frequency $f = 0.45$.

the aerodynamic forces verify the following properties:

$$\begin{aligned} F_x(t-T/2) &= F_x(t) \\ F_y(t-T/2) &= -F_y(t) \\ \langle F_y(t)\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{C1}$$

The first two equations imply that the instantaneous drag forces are equal in the upstroke and downstroke phase of the foil, while the instantaneous lift forces are of opposite sign. The third equation states that the time-averaged lift coefficient is zero.

The same can be done for an antisymmetric flow field $\boldsymbol{u}_a$, which respects the following symmetry properties instead:

$$\begin{aligned} (u_a,v_a,p_a)(X,Y,t) &= (-u_a,v_a,-p_a)(X,-Y,t+T/2), \\ \omega_{za}(X,Y,t) &= \omega_{za}(X,-Y,t+T/2). \end{aligned} \tag{C2}$$

In that case, the aerodynamic forces verify the following properties:

$$\begin{aligned} F_x(t-T/2) &= -F_x(t) \\ F_y(t-T/2) &= F_y(t) \\ \langle F_x(t)\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{C3}$$

This time, the instantaneous lift forces are equal in the upstroke and downstroke phase of the foil, while the instantaneous drag forces are of opposite sign. The time-averaged drag is nil in this case.

In order to show how properties Eqs. (C1) and (C3) are obtained, we will focus on the first property of Eq. (C1): $F_x(t-T/2) = F_x(t)$. The others can be derived using the same method. The aerodynamic forces $\boldsymbol{F}$ exerted by the fluid on the foil are expressed as

$$\boldsymbol{F} = \int_\Gamma -p\boldsymbol{n} + \frac{1}{\mathrm{Re}}[\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^T]\boldsymbol{n}\,d\Gamma, \tag{C4}$$

where Γ is the foil boundary with the fluid, and $\boldsymbol{n} = (n_x,n_y)$ denotes the unit outward normal. We take its horizontal component,

$$F_x = \int_\Gamma -pn_x + \frac{1}{\mathrm{Re}}\big[2\partial_x u\, n_x + (\partial_y u + \partial_x v)n_y\big]\,d\Gamma. \tag{C5}$$

Let us focus on the streamwise pressure forces $F_x^p(t)$; the following reasoning can be applied the same way to the viscous component $F_x^v(t)$:

$$F_x^p(t) = \int_\Gamma -p(x,y,t)\,n_x(x,y,t)\,d\Gamma. \tag{C6}$$

The outward unit normal respects the following symmetry property, as a consequence of the symmetry of the foil with respect to the X axis and its periodic motion,

$$(n_x,n_y)(x,y,t) = (n_x,-n_y)(x,-y,t+T/2). \tag{C7}$$

Let us now assume that the flow field is symmetric. We can introduce Eqs. (6) and (C7) into Eq. (C6),

$$F_x^p(t) = \int_\Gamma -p(x,-y,t-T/2)\,n_x(x,-y,t-T/2)\,d\Gamma. \tag{C8}$$

By introducing a change of variables $z = -y$ into Eq. (C8) and using the fact that the foil is symmetric with respect to the X axis, we find the following spatiotemporal property:

$$F_x^p(t) = F_x^p(t-T/2). \tag{C9}$$

As explained previously, this procedure can be reproduced for the viscous component of the streamwise force and for the transverse force to obtain the spatiotemporal properties in Eq. (C1) for any symmetric flow field $\boldsymbol{u}_s$. Finally, the property of zero time-averaged lift for any $\boldsymbol{u}_s$ is obtained by integrating the second property of Eq. (C1) over one flapping period. The properties for any antisymmetric flow field $\boldsymbol{u}_a$ in Eq. (C3) are obtained in the same way by using the property of antisymmetry Eq. (C2).

[1] J. M. Anderson, K. Streitlien, D. S. Barrett, and M. S. Triantafyllou, Oscillating foils of high propulsive efficiency, J. Fluid Mech. **360**, 41 (1998).

[2] S. P. Sane and M. H. Dickinson, The aerodynamic effects of wing rotation and a revised quasi-steady model of flapping flight, J. Exp. Biol. **205**, 1087 (2002).

[3] D. Lentink, S. R. Jongerius, and N. L. Bradshaw, The scalable design of flapping micro-air vehicles inspired by insect flight, in *Flying Insects and Robots*, edited by D. Floreano, J.-C. Zufferey, M. V. Srinivasan, and C. Ellington (Springer, Berlin, 2009), pp. 185–205.

[4] J. Lighthill, Aerodynamic aspects of animal flight, in *Swimming and Flying in Nature*, edited by T. Y.-T. Wu, C. J. Brokaw, and C. Brennen (Springer, Berlin, 1975), pp. 423–491.

[5] G. K. Taylor and A. L. R. Thomas, Animal flight dynamics ii. Longitudinal stability in flapping flight, J. Theor. Biol. **214**, 351 (2002).

[6] J. S. Leontini, M. C. Thompson, and K. Hourigan, Three-dimensional transition in the wake of a transversely oscillating cylinder, J. Fluid Mech. **577**, 79 (2007).

[7] R. d. S. Gioria, P. J. S. Jabardo, B. S. Carmo, and J. R. Meneghini, Floquet stability analysis of the flow around an oscillating cylinder, J. Fluids Struct. **25**, 676 (2009).

[8] J. Deng and C. P. Caulfield, Three-dimensional transition after wake deflection behind a flapping foil, Phys. Rev. E **91**, 043017 (2015).

[9] M. M. Koochesfahani, Vortical patterns in the wake of an oscillating airfoil, AIAA J. **27**, 1200 (1989).

[10] T. Schnipper, A. Andersen, and T. Bohr, Vortex wakes of a flapping foil, J. Fluid Mech. **633**, 411 (2009).

[11] C. H. K. Williamson and A. Roshko, Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder, J. Fluids Struct. **2**, 355 (1988).

[12] H. Dong, R. Mittal, and F. M. Najjar, Wake topology and hydrodynamic performance of low-aspect-ratio flapping foils, J. Fluid Mech. **566**, 309 (2006).

[13] J. B. Bratt, *Flow Patterns in the Wake of an Oscillating Aerofoil*, 2773 (HM Stationery Office, London, UK, 1953).
[14] K. D. Jones, C. M. Dohring, and M. F. Platzer, Experimental and computational investigation of the knoller-betz effect, AIAA J. **36**, 1240 (1998).
[15] K. Jones, C. Dohring, and M. Platzer, Wake structures behind plunging airfoils: A comparison of numerical and experimental results, *34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* (AIAA, 1996), p. 78.
[16] J. C. S. Lai and M. F. Platzer, Jet characteristics of a plunging airfoil, AIAA J. **37**, 1529 (1999).
[17] K. D. von Ellenrieder and S. Pothos, Piv measurements of the asymmetric wake of a two-dimensional heaving hydrofoil, Exp. Fluids **44**, 733 (2008).
[18] Z. C. Zheng and Z. Wei, Study of mechanisms and factors that influence the formation of vortical wake of a heaving airfoil, Phys. Fluids **24**, 103601 (2012).
[19] R. Godoy-Diana, J.-L. Aider, and José Eduardo Wesfreid, Transitions in the wake of a flapping foil, Phys. Rev. E **77**, 016308 (2008).
[20] R. Godoy-Diana, C. Marais, J.-L. Aider, and José Eduardo Wesfreid, A model for the symmetry breaking of the reverse Bénard-Von Kármán vortex street produced by a flapping foil, J. Fluid Mech. **622**, 23 (2009).
[21] C. Marais, B. Thiria, J. E. Wesfreid, and R. Godoy-Diana, Stabilizing effect of flexibility in the wake of a flapping foil, J. Fluid Mech. **710**, 659 (2012).
[22] X. Zhu, G. He, and X. Zhang, How flexibility affects the wake symmetry properties of a self-propelled plunging foil, J. Fluid Mech. **751**, 164 (2014).
[23] D. J. Cleaver, Z. Wang, and I. Gursul, Vortex mode bifurcation and lift force of a plunging airfoil at low Reynolds numbers, in *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Orlando, Florida*, AIAA Paper 2010-390 (American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA, 2010).
[24] D. J. Cleaver, Z. Wang, and I. Gursul, Bifurcating flows of plunging aerofoils at high strouhal numbers, J. Fluid Mech. **708**, 349 (2012).
[25] D. J. Cleaver, Z. Wang, and I. Gursul, Investigation of high-lift mechanisms for a flat-plate airfoil undergoing small-amplitude plunging oscillations, AIAA J. **51**, 968 (2013).
[26] N. Vandenberghe, S. Childress, and J. Zhang, On unidirectional flight of a free flapping wing, Phys. Fluids **18**, 014102 (2006).
[27] S. Alben and M. Shelley, Coherent locomotion as an attracting state for a free flapping body, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **102**, 11163 (2005).
[28] X. Zhang, S. Ni, S. Wang, and G. He, Effects of geometric shape on the hydrodynamics of a self-propelled flapping foil, Phys. Fluids **21**, 103302 (2009).
[29] J. R. Elston, J. Sheridan, and H. M. Blackburn, Two-dimensional floquet stability analysis of the flow produced by an oscillating circular cylinder in quiescent fluid, European J. Mech. B: Fluids **23**, 99 (2004).
[30] J. R. Elston, H. M. Blackburn, and J. Sheridan, The primary and secondary instabilities of flow generated by an oscillating circular cylinder, J. Fluid Mech. **550**, 359 (2006).
[31] E. Åkervik, L. Brandt, D. S Henningson, Jérôme Hœpffner, O. Marxen, and P. Schlatter, Steady solutions of the Navier-Stokes equations by selective frequency damping, Phys. Fluids **18**, 068102 (2006).
[32] G. Mougin and J. Magnaudet, The generalized kirchhoff equations and their application to the interaction between a rigid body and an arbitrary time-dependent viscous flow, Int. J. Multiphase Flow **28**, 1837 (2002).
[33] F. Hecht, New development in freefem++, J. Numer. Math. **20**, 251 (2012).
[34] J. Cahouet and J.-P. Chabard, Some fast 3D finite element solvers for the generalized stokes problem, Int. J. Numer. Methods Fluids **8**, 869 (1988).
[35] R. Glowinski, Finite element methods for incompressible viscous flow, Handbook Numer. Anal. **9**, 3 (2003).
[36] W. Kress and P. Lötstedt, Time step restrictions using semiexplicit methods for the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Eng. **195**, 4433 (2006).
[37] See Supplemental Material at http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevE.95.063111 for movies of DNS simulations, base flow, and dominant Floquet mode dynamics.
[38] M. L. Yu, H. Hu, and Z. J. Wang, Experimental and numerical investigations on the asymmetric wake vortex structures around an oscillating airfoil, in *50th AIAA Aerospace Sciences Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Nashville, Tennessee*, AIAA Paper 2012-0299 (American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, VA, 2012).
[39] A. Martín-Alcántara, R. Fernandez-Feria, and E. Sanmiguel-Rojas, Vortex flow structures and interactions for the optimum thrust efficiency of a heaving airfoil at different mean angles of attack, Phys. Fluids **27**, 073602 (2015).
[40] D. J. Cleaver, Z. Wang, I. Gursul, and M. R. Visbal, Lift enhancement by means of small-amplitude airfoil oscillations at low Reynolds numbers, AIAA J. **49**, 2018 (2011).
[41] D. E. Calderon, D. J. Cleaver, I. Gursul, and Z. Wang, On the absence of asymmetric wakes for periodically plunging finite wings, Phys. Fluids **26**, 071907 (2014).
[42] J.-E. Emblemsvag, R. Suzuki, and G. Candler, Numerical simulation of flapping micro air vehicles, *32nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit* (AIAA, 2002), p. 3197.
[43] G. Floquet, Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, in *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, Vol. 12 (Gauthier-Villars, quai des Grands-Augustins Paris, 1883), pp. 47–88.
[44] C. K. Mamun and L. S. Tuckerman, Asymmetry and hopf bifurcation in spherical couette flow, Phys. Fluids **7**, 80 (1995).
[45] D. Barkley and R. D. Henderson, Three-dimensional floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder, J. Fluid Mech. **322**, 215 (1996).
[46] Y. Saad, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*, Vol. 158 (Manchester University Press, Manchester, UK, 1992).
[47] S. Leibovich, S. N. Brown, and Y. Patel, Bending waves on inviscid columnar vortices, J. Fluid Mech. **173**, 595 (1986).
[48] D. Fabre, D. Sipp, and L. Jacquin, Kelvin waves and the singular modes of the lamb–oseen vortex, J. Fluid Mech. **551**, 235 (2006).
[49] V. Brion, D. Sipp, and L. Jacquin, Linear dynamics of the lamb-chaplygin dipole in the two-dimensional limit, Phys. Fluids **26**, 064103 (2014).
[50] H. Dütsch, F. Durst, S. Becker, and H. Lienhart, Low-Reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder

at low Keulegan-Carpenter numbers, J. Fluid Mech. **360**, 249 (1998).

[51] E. Guilmineau and P. Queutey, A numerical simulation of vortex shedding from an oscillating circular cylinder, J. Fluids Struct. **16**, 773 (2002).

[52] A. A. Hosseinjani and A. Ashrafizadeh, Numerical simulation of the wake structure and thrust/lift generation of a pitching airfoil at low Reynolds number via an immersed boundary method, J. Aerosp. Technol. Manage. **7**, 3 (2015).

3.2 Bifurcation imparfaite à petit angle d'incidence

Cette section est consacrée à la comparaison des résultats obtenus à petits angles d'incidences α avec le cas à incidence nulle qui est traité en première partie de ce chapitre, dans l'article publié dans Physical Review E [66].

3.2.1 Modification de la configuration d'étude

La même configuration est utilisée pour l'aile que dans l'article en première partie de ce chapitre. L'aile est de corde c et son bord d'attaque est un demi-cylindre de diamètre D. La partie centrale de l'aile a une forme triangulaire fermée au bord de fuite par un demi-cylindre de diamètre d. Le ratio des diamètres est fixé à $D/d = 20$ et le rapport d'aspect de l'aile est fixé à $c/D = 4$. L'aile se trouve dans un fluide de viscosité ν dans un écoulement U_0. Le problème est rendu non dimensionnel en utilisant les grandeurs D et U_0 comme longueur et vitesse de référence. Le nombre de Reynolds est fixé à $Re_D = U_0 D/\nu = 255$. La cinématique de l'aile est gouvernée par une rotation de la forme

$$\theta(t) = \theta_m sin(2\pi f t) \tag{3.1}$$

où f est la fréquence de tangage non dimensionnelle et θ_m est l'angle de rotation maximal. De celle manière, l'amplitude de battement pic-à-pic est fixée à $A = 2(c - D/2)sin(\theta_m) = 1.07$. Le seul changement dans la configuration (représentée dans la figure (3.1)) vient de l'introduction de l'angle d'incidence α entre la direction de l'écoulement amont et l'axe de l'aile à l'instant où $\theta(t) = 0$. Pour résoudre numériquement ce problème, le même système

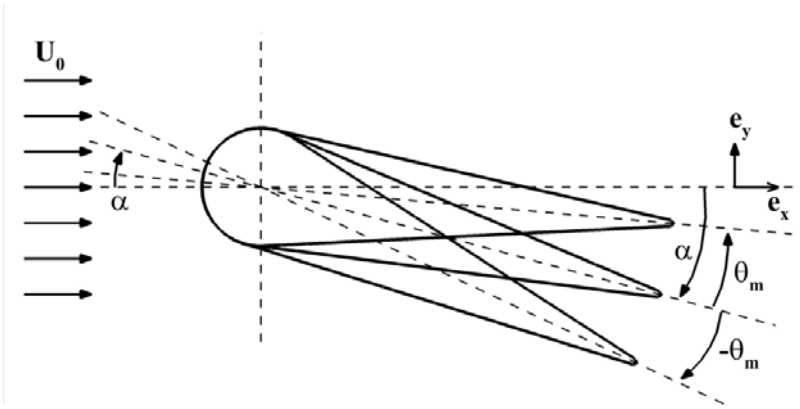


FIGURE 3.1 – Schéma de l'aile battante avec un angle d'incidence α non nul.

d'équations, écrit dans un référentiel non inertiel $(0, \boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y)$ qui tourne avec l'aile, est utilisé. La prise en compte du nouveau paramètre α modifie la vitesse convective des équations de Navier-Stokes qui devient

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{X}, \theta(t), \alpha) = -\left(cos(\theta(t) - \alpha)\boldsymbol{e}_X - sin(\theta(t) - \alpha)\boldsymbol{e}_Y\right) + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{X} \tag{3.2}$$

D'autre part, la vitesse du fluide à la paroi est toujours égale à la vitesse convective. La condition limite imposée à la surface de l'aile est donc modifiée en conséquence pour tenir compte de la valeur de α.

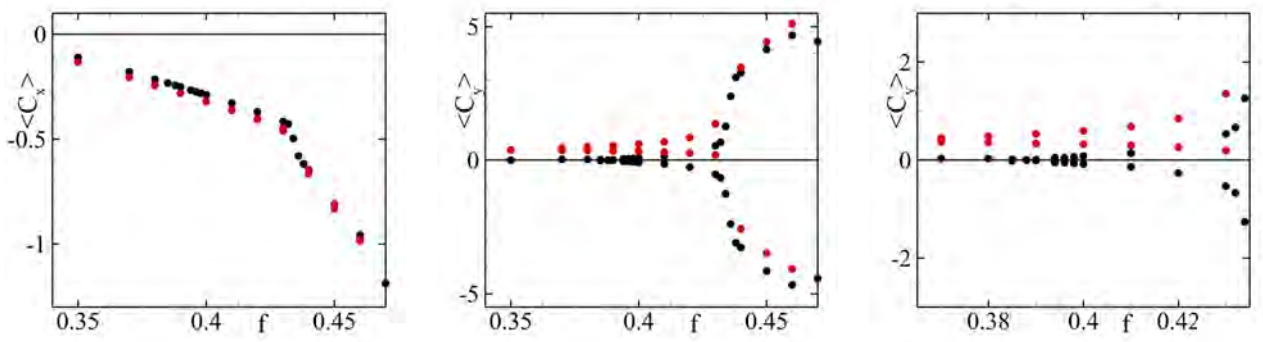
$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}_s) = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{X}_s, \theta(t), \alpha) \tag{3.3}$$

3.2.2 Influence de l'angle d'incidence sur la bifurcation du sillage

Cette section contient les résultats de simulations numériques à petits angles d'incidences α. Plusieurs angles d'incidences entre $\alpha = -5°$ et $\alpha = +5°$ ont été simulé. Seuls

des résultats à $\alpha = 1°$ sont présentés ici. Ces résultats permettent d'illustrer le passage de la bifurcation super-critique observée à $\alpha = 0°$ à une bifurcation imparfaite.

Dans le cas où l'angle d'incidence est nul, on rappelle que l'on observe une bifurcation supercritique de la solution périodique à $f_c \sim 0.385$. A cette fréquence, la symétrie spatio-temporelle est brisée et le sillage de l'aile se met à dévier de l'axe médian de l'aile. Dans un premier temps, on compare dans la figure (3.2) les efforts moyens du fluide sur l'aile, dans les cas $\alpha = 0°$ (cercles noirs) et $\alpha = 1°$ (cercles rouges). La traînée et la portance sont respectivement tracées dans les figures (3.2a) et (3.2b), dont un zoom dans la zone où se produit la bifurcation à $\alpha = 0°$ est présenté dans la figure (3.2c).



(a) (b) (c)

FIGURE 3.2 – Comparaison de (a) la traînée et (b) la portance moyennes entre une aile battante à $\alpha = 0°$ (•) et à $\alpha = 1°$ (•). (c) Zoom de (b) au niveau de la bifurcation.

Par rapport au cas à incidence nulle, la traînée moyenne est légèrement inférieure quand $\alpha = 1°$, en tout cas dans la gamme de fréquence qui correspond au régimes I et II, qui correspondent respectivement au régime avant la bifurcation et après la bifurcation lorsque le sillage est faiblement dévié. La traînée moyenne est quasiment identique pour $f \geqslant 0.43$, qui est la gamme de fréquence du régime III, soit le régime où le sillage est fortement dévié. On s'intéresse maintenant à l'évolution de la portance moyenne. A partir de $f = 0.37$, deux solutions coexistent pour chaque valeur de la fréquence. La première, située sur la branche haute de la figure (3.2b) a le sillage dévié vers le haut, tandis que la seconde, située sur la branche basse de cette même figure a le sillage dévié vers le bas. Pourtant dans les deux cas, la portance moyenne est systématiquement positive pour $f \leqslant 0.43$. Pour de plus grandes fréquences f, les deux branches suivent sensiblement la même évolution que lorsque l'incidence de l'aile est nulle, à savoir une forte augmentation (resp. diminution) de la portance moyenne pour la branche haute (resp. basse).

A ce stade, il convient de préciser que les deux branches n'ont pas été obtenue de la même manière, plus précisément avec des conditions initiales différentes. La branche haute a été obtenue par deux moyens : en initialisant la simulation à partir d'une condition initiale de vitesse uniforme, ou par continuation (par valeur croissante ou décroissante) du paramètre de contrôle, à savoir la fréquence de battement f. Pour obtenir la branche basse, une symétrie spatiale verticale (symétrie par rapport à l'axe $(0, x)$) a été appliquée à une solution instantanée de la branche haute à $f = 0.45$. Cette solution instantanée a ensuite servi de solution initiale à la résolution du même problème, en utilisant pour loi cinématique de l'aile $\theta(t) = -\theta_m sin(2\pi f t)$. C'est-à-dire que l'aile commence à battre vers le bas à partir d'un angle θ nul. L'ensemble des points de la branche basse ont ensuite été obtenus par continuation à valeur décroissante de la fréquence de battement.

Les tentatives pour obtenir la branche basse en considérant directement le battement de l'aile vers le bas à partir d'un champ de vitesse initial uniforme, se sont révélées infructueuses. Les résultats de ces tentatives conduisaient pour chaque fréquence et de manière

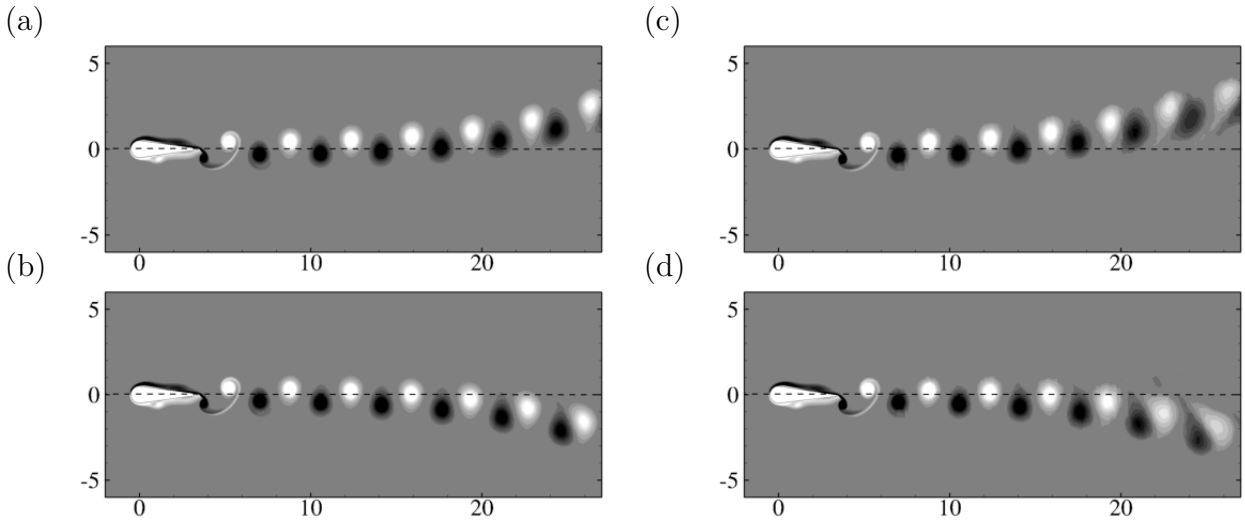
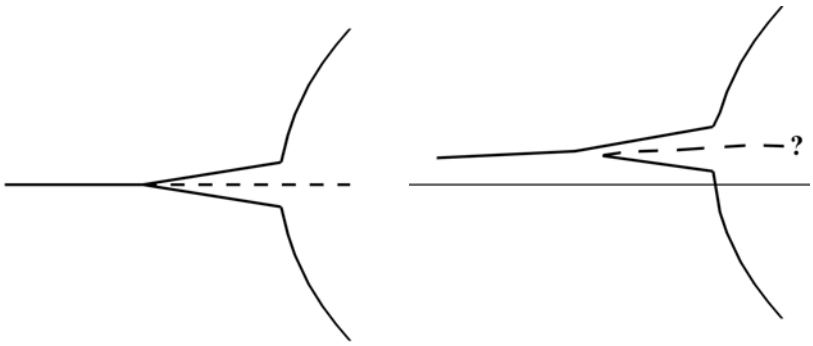


FIGURE 3.3 – Vorticité instantannée à (a,b) $\alpha = 0°$ et (c,d) $\alpha = 1°$ quand le sillage est dévié vers (a,c) le haut et (b,d) le bas à $f = 0.41$.

erratique, tantôt à des solutions de la branche haute, tantôt à des solutions de la branche basse, sans lien apparent avec la fréquence de battement. Ces constatations tendent à suggérer que la branche haute est beaucoup plus attractive lorsque l'angle d'incidence est positif. Inversement, nos observations montrent que la branche basse est plus attractive que la branche haute lorsque l'angle d'incidence est négatif. De tels résultats sont contraires à ceux à angle d'incidence nulle où plusieurs études [50, 106, 107] ont indiqué que la sélection de la direction de la déviation est décidée par les conditions initiales de battement lorsque l'on considère un champ initial uniforme.

Pour revenir aux efforts moyens, un zoom de la portance moyenne dans la gamme $0.37 < f < 0.43$ est représenté dans la figure (3.2c). Pour $\alpha = 1°$, les deux branches sont déplacées vers le haut, c'est-à-dire que la portance moyenne est systématiquement plus élevée, par rapport au cas à incidence nulle. D'autre part, la fréquence critique à partir de laquelle deux solutions différentes stables co-existent à diminué à $f = 0.37$, alors que la bifurcation pour $\alpha = 0°$ se situe à $f \approx 0.385$. Pour identifier les caractéristiques de chaque branche, la fréquence est fixée $f = 0.41$, pour laquelle quatre solutions stables sont possibles (deux à $\alpha = 0°$ et deux à $\alpha = 1°$). Ces solutions sont représentées dans la figure (3.3). Pour chaque valeur de α, deux branches coexistent : la "branche haute" présente un sillage dévié vers le haut, tandis que la "branche basse" présente un sillage dévié vers le bas. Si dans le cas $\alpha = 0°$, les deux branches sont associées à une portance moyenne de valeur opposée, ce n'est plus le cas quand $\alpha = 1°$ où les deux branches ont une portance moyenne positive, même quand le sillage est dévié vers le bas. Dans ce cas pourtant, le sens de la déviation serait plutôt indicateur d'une portance moyenne négative. Cette observation montre que le sens de la déviation du sillage n'est pas directement associé au signe de la portance moyenne lorsque l'angle d'incidence est non nul. Et lorsque le sillage est faiblement dévié comme c'est le cas ici, le signe de la portance moyenne semble être majoritairement dicté par la portance "statique" résultant de l'angle d'incidence de l'aile avec l'écoulement amont et non pas de la déviation du sillage. Enfin, la comparaison entre les deux sillages déviés vers le bas à deux angles d'incidences distincts prouve la distinction à faire entre la structure du sillage et les efforts aérodynamiques. En effet, deux sillages déviés vers le bas sont représentés dans la figure (3.3b,d) à $\alpha = 0°$ et $\alpha = 1°$. Ces deux sillages sont semblables. Pour autant, les portances moyennes qui s'exercent sur l'aile sont alors de signe opposées ($< F_y >= -0.139$ pour $\alpha = 0°$ et $< F_y >= 0.302$ pour

$\alpha = 1°$).



(a) (b)

FIGURE 3.4 – Schéma (a) de la bifurcation à $\alpha = 0°$ et (b) de la bifurcation imparfaite à $\alpha = 1°$.

La figure (3.4) regroupe des schémas de diagrammes de bifurcation à $\alpha = 0°$ (a) et à $\alpha = 1°$ (b). Quand l'incidence est nulle, la bifurcation est supercritique avec deux branches stables correspondant aux sillages déviés vers le haut (branche haute) ou le bas (branche basse), ainsi qu'une branche instable qui correspond à la solution avec un sillage non dévié. Cette dernière correspond donc aux solutions qui respectent la symétrie spatio-temporelle haut/bas. Lorsque l'incidence n'est plus nulle en revanche, les branches hautes et basses sont dissociées. La branche haute est obtenue par continuation croissante du paramètre de contrôle (ici la fréquence de battement), mais pas la branche basse. En revanche, une fois que la branche basse est obtenue, on peut par continuation décroissante du paramètre de contrôle, "sauter" sur la branche centrale avant la bifurcation. La branche centrale instable (après la bifurcation) est indiquée ici avec un point d'interrogation. En effet, s'il est facile de définir un critère analytique pour décrire la branche instable lorsque l'angle d'incidence est nul, il n'existe pas de tel critère lorsque l'angle d'incidence est non nul. Cette branche instable ne respecte pas de symétrie particulière, n'est pas à portance moyenne nulle, etc. En conséquence, on peut arguer que cette branche est censée exister, pour autant, nous ne savons pas à l'heure actuelle comment la déterminer. Ce deuxième diagramme (3.4b) correspond à une bifurcation supercritique imparfaite. Dans le cas d'une valeur négative de l'angle d'incidence, ce diagramme serait probablement inversé, avec un passage continue entre la branche avant la bifurcation et la branche basse. Ces résultats sont conformes à l'étude numérique de Citro *et al.* [108]. Dans leur étude, une sphère est mise en rotation dans la direction transverse à un écoulement incompressible. Sans rotation de la sphère, l'écoulement est soumis à une bifurcation "de fourche" stationnaire, associée à une brisure d'une symétrie planaire de l'écoulement et une portance non nulle. Avec une petite rotation de la sphère (ce qui revient à ajouter un angle d'incidence le cas présent), cette bifurcation devient une bifurcation imparfaite.

Les résultats présentés ici sont concentrés sur l'angle $\alpha = 1°$. la bifurcation imparfaite évolue continuement en fonction de α pour de petites valeurs. Lorsque α devient trop grand (approximativement à partir de 5°), on ne peut plus parler de bifurcation imparfaite tant la dynamique de l'écoulement est éloignée de ce qui se passe à $\alpha = 0°$, que ce soit avant ou après la bifurcation. La dynamique de l'écoulement à grand angle d'incidence est quant à elle étudiée séparément dans le chapitre (4).

3.3 Compléments et discussions

Cette section est consacrée à des compléments et des éléments de discussions relatifs au corps de l'article présenté auparavant. Dans un premier temps, on présente des résultats relatifs à des simulations à faibles et fortes fréquences de battement, loin de la déviation du sillage. En particulier, on analyse l'évolution du rendement de l'aile. Dans un second temps, le lien entre la direction de la déviation du sillage et le signe de la portance moyenne, bien qu'il soit évoqué dans l'article, est explicité quantitativement. Dans un troisième temps, le mode responsable de la déviation est caractérisé comme un mode de sillage. Enfin dans un dernier temps, on introduit une modélisation du sillage de l'aile et du mode responsable de la déviation. En particulier, des arguments liant la déviation du sillage et l'assemblage des tourbillons en dipôles contra-rotatifs sont discutés.

3.3.1 Faibles et fortes fréquences de battement

L'article étant consacré à la déviation du sillage qui ne se produit qu'en régime propulsif, de larges gammes de fréquences avant et après la bifurcation ont été mises de côté mais présentent néanmoins des caractéristiques intéressantes.

3.3.1.1 Résonance en régime traînant à faibles fréquences de battement

Pour des faibles fréquences de battement $f < 0.31$, l'aile est en régime traînant. Son évolution avec la fréquence est représentée en figure (3.5a), de $f = 0$ lorsque l'aile ne bat pas à $f = 0.35$ lorsque l'écoulement est passé en régime propulsif. On rappelle que la fréquence naturelle des allées de tourbillons de Bénard-Von Karman est $f_n = 0.167$, et correspond à cette géométrie de l'aile et ce Reynolds. Un pic de traînée apparaît pour une fréquence $f \approx 0.05$, ce qui correspond environ à un tiers de la fréquence naturelle. A la valeur de la fréquence naturelle même, aucune résonance de la valeur de la traînée moyenne n'est observée pour autant. Cleaver *et al.* observait déjà des pics de la traînée à des valeurs subharmoniques de la fréquence naturelle, même si dans leur cas, cela correspondait plutôt à la moitié de celle-ci [36].

3.3.1.2 Saturation de la portance moyenne à fortes fréquences

Pour de fortes fréquences de battement au delà de la bifurcation, le sillage est fortement dévié. La portance moyenne sature alors avec la fréquence de battement. Cette saturation est représentée dans la figure (3.5b). On a montré précédemment que la portance moyenne est directement reliée à l'angle de déviation du sillage et que la forte augmentation de cette angle de déviation est due aux développements des perturbations non-linéaires dans le sillage. Si la portance moyenne sature, c'est donc probablement lié à une saturation des effets non linéaires à la base de l'augmentation de la déviation. Ainsi pour $f > 0.46$, la portance moyenne est pratiquement constante. Dans cette gamme, la poussée moyenne continue elle à augmenter avec la fréquence de battement.

3.3.1.3 Rendement de l'aile battante en régime propulsif

À la lumière de ces observations sur la traînée et la portance, se pose la question du rendement propulsif de l'aile. Au premier abord, le rendement d'une aile battante peut être simplement défini comme le rapport entre la puissance obtenue et la puissance fournie

$$\eta = \frac{\langle P_{out} \rangle}{\langle P_{in} \rangle} \tag{3.4}$$

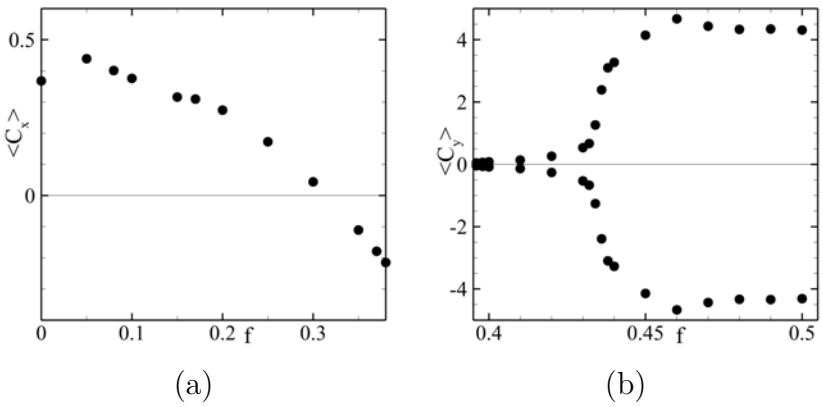


FIGURE 3.5 – (a) Coefficient de traînée moyenne $< C_x >$ en régime traînant. (b) Coefficient de portance moyenne $< C_y >$ après la bifurcation en régime fortement dévié.

Cette définition est par ailleurs problématique lorsque l'on étudie une aile auto-propulsée. Son rendement propulsif est par construction nul pour respecter l'équilibre des efforts aérodynamiques [109]. Dans ce cadre là, plusieurs stratégies existent pour pallier ce problème notamment en essayant de séparer la traînée et la poussée. Bale *et al.* ont par exemple proposé d'évaluer cette séparation en identifiant des mécanismes créateurs de traînée ou de poussée [110]. Une autre manière de procéder est de modifier la définition du rendement tout en essayant de garder une mesure physique et non dimensionnée. C'est le cas de Kern *et al.* qui proposent de définir le rendement de l'aile comme le rapport entre son énergie cinétique et le travail qui lui est fourni [111].

Dans le cas présent, cette problématique ne se pose pas et la définition usuelle du rendement est utilisée. Le rendement de l'aile est calculé en comparant la puissance de la poussée moyenne récupérée et la puissance de la rotation injectée pour mettre en mouvement le fluide autour de l'aile.

$$\eta = \frac{\langle C_x(t) \rangle \, U_0}{\left\langle M_z(t) \dot{\theta}(t) \right\rangle} \tag{3.5}$$

L'évolution du rendement en fonction de la fréquence de battement est tracée dans la figure (3.6). Le rendement est négatif pour $f < 0.31$, puisqu'il s'agit de la limite à laquelle on passe d'un régime traînant à un régime propulsif. Pour $0.31 < f < 0.43$, le rendement augmente de manière constante, alors que le sillage se met à dévier pour $f \approx 0.385$ sans que cela affecte cette tendance. Pour $0.43 < f$, l'écoulement passe dans le régime III (voir l'article [66] au début de ce chapitre) ce qui provoque une brusque augmentation de la croissance du rendement avec la fréquence. Celui-ci atteint un maximum pour $f = 0.46$, comme la portance moyenne, puis décroît pour de plus grandes fréquences. Dans cette gamme, la poussée moyenne continue pourtant à augmenter mais pas assez rapidement au regard de la puissance injectée à travers le mouvement de l'aile. Nos résultats suggèrent ainsi que la transition entre les régimes II et III est intéressante pour optimiser le rendement de l'aile. Il convient par contre de rappeler que la cinématique de l'aile étant ici complètement imposée, il faut vérifier que ce résultat est toujours valable pour une aile auto-propulsée. La saturation du rendement à grandes fréquences de battement avait déjà été identifiée par Anderson *et al.* [33] qui notaient que le rendement maximum est atteint lorsque la poussée est grande, à haute amplitude et fréquence de battement, ce que nos résultats confirme. Enfin, il convient de rappeler que ces résultats sont obtenus à une amplitude de battement fixée, et que la modification de l'amplitude de battement a probablement une incidence importante sur le rendement maximal.

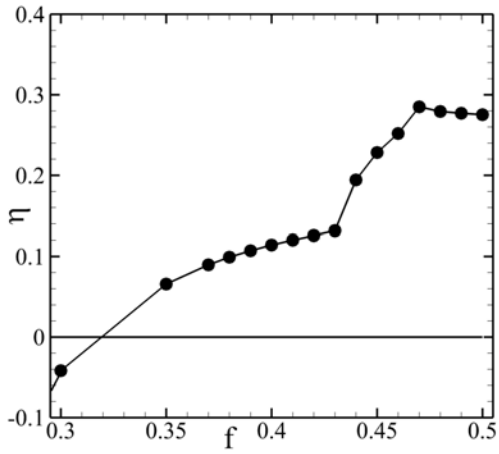


FIGURE 3.6 – Évolution du rendement propulsif η en fonction de la fréquence de battement.

3.3.1.4 Influence de l'amplitude de battement

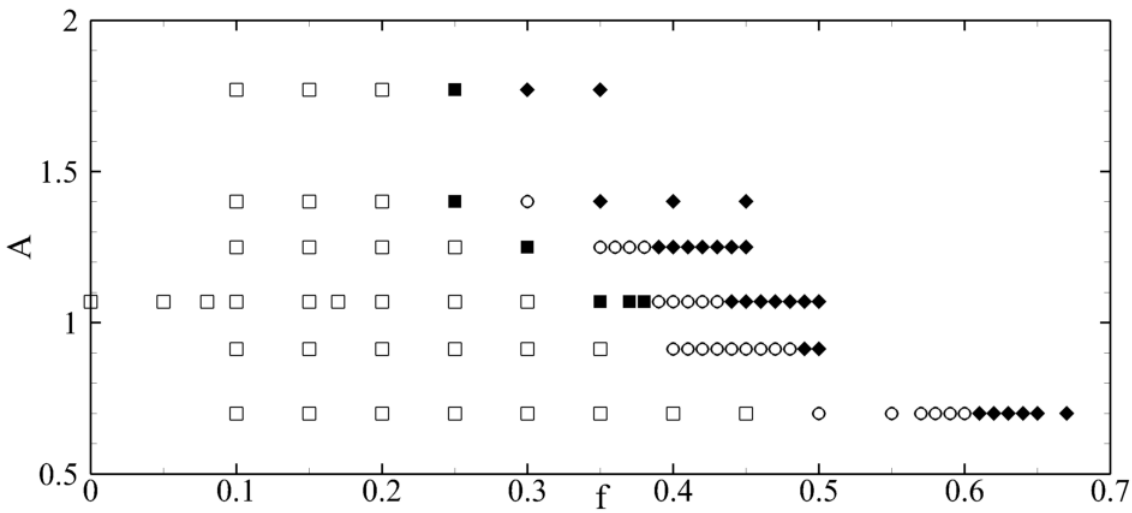


FIGURE 3.7 – Plan amplitude A vs fréquence f de battement. Les points sont étiquetés de la manière suivante : □ : sillage traînant ; ■ : sillage propulsif non dévié ; ○ : sillage propulsif dévié en régime II ; ♦ : sillage propulsif dévié en régime III.

Finalement, seulement une petite partie des simulations effectuées ont été présentées dans auparavant, pour ne pas perdre en clarté. En particulier, des simulations non présentées ont consisté à faire varier l'amplitude de battement et reproduit les diagrammes de classification des sillages présentés par Godoy-Diana *et al.* [51] et Schnipper *et al.* [112]. Dans l'étude de Godoy-Diana, l'aile a la même forme mais un rapport d'aspect légèrement plus important (4.6 : 1 au lieu de 4 : 1) tandis que dans l'étude de Schnipper, l'aile a un rapport d'aspect de 6 : 1 et le nombre de Reynolds prend deux valeurs $Re_D = 220$ et $Re_D = 440$. Le diagramme obtenu dans notre cas est présenté dans la figure (3.7). On constate que le domaine d'existence d'un sillage propulsif non dévié (cercles pleins ■) est assez restreint. C'est conforme aux observations de Deng *et al.* [54] qui notaient que la déviation se produit très rapidement après la transition traînée/poussée. D'autre part, le domaine d'existence du régime II faiblement dévié semble plus restreint à haute qu'à basse amplitude de battement. On peut y voir là la preuve que la transition entre le régime II et le régime III dépend plus fortement de l'amplitude de battement qui est directement

responsable de l'intensité des tourbillons émis, que de la fréquence de battement qui est responsable de l'espacement entre les tourbillons successifs.

3.3.2 Sens de la déviation et signe de la portance

Un point rapidement abordé dans l'article porte sur le lien entre le sens de la déviation et le signe de la portance moyenne. On apporte ici plus de détails à l'explication de cette propriété inhabituelle. Nos simulations ont montré que le sens de la déviation est systématiquement orienté de la même manière que le signe de la portance, c'est-à-dire que le sillage est dévié vers le haut quand la portance moyenne est positive, et inversement. Ce résultat confirme les observations expérimentales faites par Cleaver *et al.* [35] puis par Calderon *et al.* [53]. Pourtant, cette correspondance peut sembler particulièrement contre intuitive, surtout quand on a en tête le cas d'une aile fixe avec un angle d'incidence non nul. Dans ce cas classique, il est reconnu qu'un angle d'incidence positif est responsable (sauf décrochage) d'une portance positive et d'une déviation du sillage vers le bas. C'est donc que le cas traité ici diffère fondamentalement du cas d'une aile fixe. Calderon *et al.* expliquent que la contribution principale à la portance vient du différentiel de pression entre l'extrados et l'intrados et que c'est ce différentiel qui dicte le signe de la portance. Pour vérifier cela, on a extrait la partie visqueuse et la partie due au terme de pression dans les efforts moyens, quand le sillage est dévié. Cette extraction est présentée dans le tableau (3.1). On constate en premier lieu en ce qui concerne la traînée moyenne (la somme des deux termes) que celle-ci est positive, ce qui confirme qu'on est dans un régime propulsif. D'autre part, sa partie visqueuse a un fort effet traînant tandis que toute la propulsion est due à un différentiel de pression favorable. En ce qui concerne la portance moyenne, on retrouve bien les observations de Calderon puisque la partie visqueuse ne représente qu'environ 3% de la portance moyenne totale. Maintenant qu'on a confirmé

	$\langle C_x \rangle_p$	$\langle C_x \rangle_v$	$\langle C_y \rangle_p$	$\langle C_y \rangle_v$
$f = 0.43$	-0.8390	0.4230	0.5185	0.0144
$f = 0.45$	-1.2124	0.4016	4.0410	0.1061

TABLE 3.1 – Composante visqueuse et composante due au terme de pression des efforts moyens dans deux cas déviés.

que la portance moyenne est très majoritairement due à des effets de pression, il faut comprendre pourquoi celle-ci est positive lorsque le sillage est dévié vers le haut. Pour cela, on représente la carte de pression moyenne autour de l'aile dans la figure (3.8) en différenciant le cas non dévié (champ de base) et la cas dévié obtenu par simulation numérique directe. Lorsque le sillage est non dévié, la pression moyenne respecte la symétrie spatiale haut/bas ce qui est consistant avec la portance moyenne qui est nulle. Lorsque le sillage est dévié (ici vers le haut), une forte zone de dépression (en noir) se forme sur l'extrados, donc du même côté que la déviation. Ainsi, le différentiel de pression entre l'extrados et l'intrados tend à créer une portance positive. Dynamiquement, on peut comprendre la présence de cette zone de dépression en observant que de la vorticité se forme au bord d'attaque au cours du battement de l'aile. Cette vorticité remonte l'aile puis se détache au bord de fuite. C'est le passage de cette vorticité le long de l'aile qui semble induire la dépression moyenne que l'on observe sur l'extrados. Quand on en revient à la comparaison entre le cas présent et le cas d'une aile fixe, la principale différence entre ces deux cas repose sur le fait qu'une aile fixe traîne, tandis que l'aile battante est ici dans un régime propulsif. Ainsi, le sillage que l'aile produit est accéléré par rapport à la vitesse à

l'infini. On peut ici parler d'un jet moyen, qui accélère le fluide du côté de la déviation. C'est cette accélération qui provoque une dépression du même côté de l'aile et conduit donc avoir une portance moyenne du même signe que le sens de la déviation.

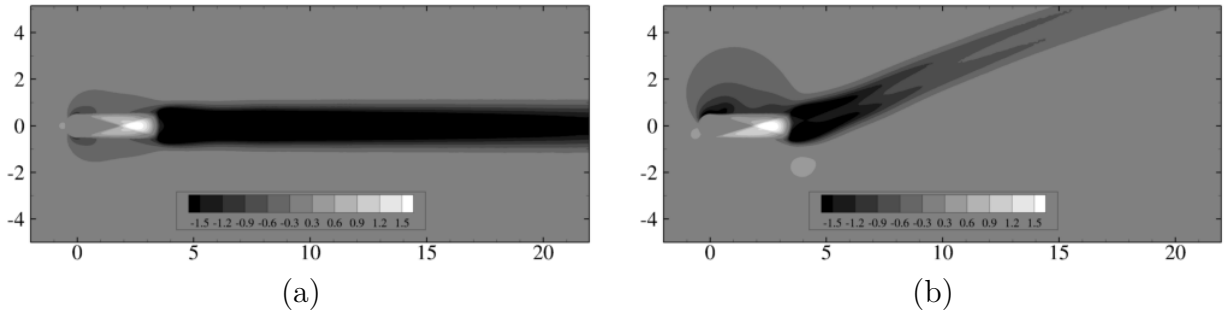


FIGURE 3.8 – Carte de pression moyenne (a) du champ de base et (b) du sillage dévié à $f = 0.45$.

3.3.3 Analyse de stabilité du sillage périodique sans aile

L'analyse de stabilité de Floquet a mis en évidence que le mode responsable de la déviation est constitué de paires de dipôles de vorticité contra-rotative, qui se développent en superposition avec les tourbillons du champ de base, alors que ceux-ci sont advectés dans le sillage. Le mode de Floquet est par ailleurs systématiquement négligeable autour de l'aile. Ces observations semblent indiquer que cette instabilité est une instabilité de sillage, et ne dépend pas de la présence ou non de l'aile. L'aile ne joue alors que le rôle de générateur d'un sillage qui devient instable lorsque les conditions d'espacement et d'intensité des tourbillons y sont propices.

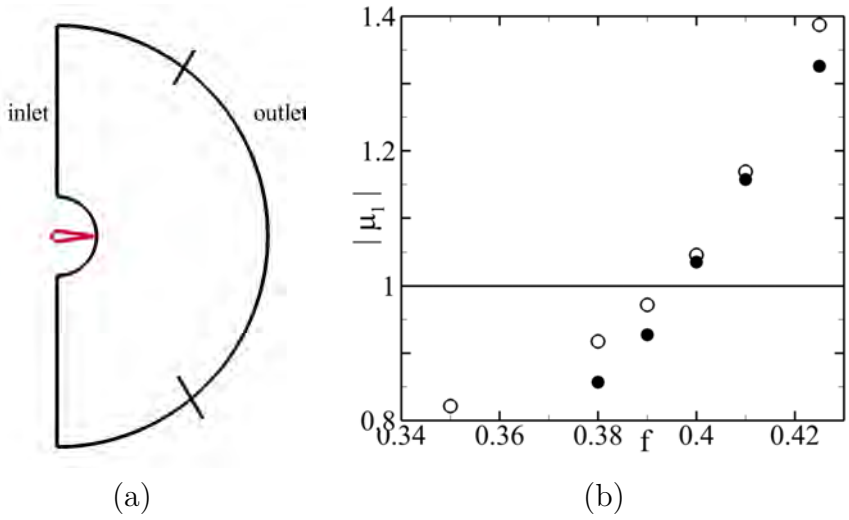


FIGURE 3.9 – (a) Vue schématique du domaine de simulation semi-circulaire pour le calcul de stabilité de Floquet. Le domaine ne contient pas l'aile, indiquée en rouge pour référence. (b) Comparaison des résultats de stabilité linéaire avec (∘) un maillage complet avec l'aile et (•) un maillage semi-circulaire sans l'aile ($A = 0.913$).

Pour confirmer cela, les analyses de Floquet du sillage non dévié ont été reproduites sur des domaine qui ne contiennent pas l'aile. En pratique, le même champ de base est utilisé mais celui-ci est interpolé sur un domaine plus petit, qui ne contient pas l'aile. Un exemple de domaine utilisé est visible dans la figure (3.9a). La figure (3.9b) permet de comparer le

module du mode dominant entre l'analyse conduite sur un domaine circulaire "complet" qui contient l'aile et un domaine semi-circulaire sans l'aile. Des écarts sont visibles entre les deux cas mais la position du seuil ainsi que la structure spatiale du mode dominant (bien que non présentée ici) restent inchangés. Cette analyse a par ailleurs été conduite à partir du champ de base exprimé dans le référentiel non inertiel tournant avec l'aile, mais également dans le référentiel du laboratoire sans que cela n'affecte les résultats. Ceux-ci permettent donc de conclure que l'instabilité responsable de la déviation du sillage est bien un mode de sillage.

3.3.4 Modélisation de l'effet du mode linéaire sur le champ de base

La fin de l'article est consacrée à une discussion sur les causes de la déviation et l'agrégation dipolaire que l'on peut observer lorsque le sillage est fortement dévié. On constate deux phénomènes distincts : la déviation moyenne du sillage et l'assemblage des tourbillons de ce sillage par paires. Nos travaux ont montré que ce premier phénomène résulte d'une brisure de la symétrie spatio-temporelle de l'écoulement par une instabilité linéaire qui provoque cette déviation moyenne [66]. En ce qui concerne l'assemblage par paires des tourbillons, les travaux successifs de Godoy-Diana *et al.* [47] et de Zheng *et al.* [52] ont permis de mettre en évidence que ce phénomène amplifie la déviation moyenne du sillage. Pourtant, il n'est pas encore possible de savoir comment cet appareillage en dipôles se produit ni s'il s'auto-entretient.

Une méthode pour analyser ce phénomène consiste à modéliser le sillage afin de d'établir un lien entre ces deux phénomènes. La modélisation la plus simple possible est de considérer le sillage comme une suite de tourbillons ponctuels (figure 3.10), de caractéristiques données. La modélisation de tourbillons ponctuels n'est pas nouvelle [113, 114] et a été notamment popularisée grâce aux travaux de Saffman [115] et d'Aref [116] sur les allées de tourbillons et les polygones de tourbillons (Vortex Polygons). La stabilité et la dynamique de ces structures est alors étudiée grâce à une description en coordonnées complexes des positions des tourbillons. Les travaux de Godoy-Diana *et al.* [47] utilisent en partie cette méthode dans le sens où elle leur permet de quantifier la vitesse induite par les tourbillons du sillage sur leur plus proche tourbillon voisin. C'est l'étude de cette vitesse induite qui leur permet d'établir que le rapprochement des tourbillons du sillage par paire est favorable à la déviation du sillage. Zheng *et al.* [52] reprennent les mêmes arguments en utilisant cette fois les deux plus proches tourbillons voisins et arrivent à la même conclusion. Un inconvénient notable de cette démarche est qu'elle est effectuée sur le sillage dévié, les auteurs n'ayant alors pas accès au champ de base instable. Par la suite, He *et al.* [117] conduisent une simulation numérique dynamique du sillage modélisé par une suite de tourbillons ponctuels. Les tourbillons sont émis à intervalle régulier de part et d'autre de l'axe médian de l'écoulement et se déplacent sous l'influence de l'écoulement amont uniforme et des vitesses induites par les autres tourbillons du sillage. Ces simulations se révèlent conforme à leur précédents résultats expérimentaux et leur permet d'établir que les deux grandeurs gouvernant la déviation sont le nombre de Strouhal basé sur l'amplitude de battement $St_A = fA/u_0$ et la circulation non dimensionnelle des tourbillons Γ_0/U_0A.

Avant de rentrer en détail dans la modélisation des phénomènes en jeu,il convient de préciser un point de vocabulaire utilisé dans la suite de cette partie. On parle ici d'appariement de dipôles contra-rotatifs, qui est à distinguer du phénomène d'appariement de dipôles co-rotatifs, plus connu sous le terme de "pairing". En effet, le cas de l'appariement de paires de tourbillons co-rotatifs est un mécanisme sous-harmonique qui mène à un doublement de la période caractéristique de l'écoulement (voir [105] par exemple).

En revanche, lorsque l'appariement se produit pour des tourbillons contra-rotatifs, il n'y a pas de modification de la période caractéristique de l'écoulement. C'est ce cas qui est traité dans la suite de cette section et aucun phénomène sous-harmonique n'a été observé. On utilise donc le terme d'appariement sans plus de précisions.

La problématique ici est donc de construire une modélisation pertinente permettant d'analyser le lien entre la déviation du sillage et l'appariement des tourbillons du sillage. Un avantage certain pour construire cette modélisation est la disponibilité des simulations numériques effectuées jusqu'à présent pour modéliser le champ de base comme une suite de tourbillons ponctuels, mais également le mode linéaire responsable de la déviation. Par ailleurs, on considère une modélisation cinématique. L'évolution dynamique du sillage n'est pas considérée. Les objectifs de cette partie se résument donc à

- ➢ construire une modélisation du champ de base et de la perturbation responsable de la déviation
- ➢ identifier les paramètres du modèle à partir des résultats de simulations numériques
- ➢ identifier le lien entre la déviation et la formation de dipôle dans le sillage

3.3.4.1 Modélisation du sillage non dévié

Le sillage non dévié, c'est-à-dire le champ de base est modélisé par une suite de tourbillons ponctuels équidistants, répartis de par et d'autre de la ligne médiane de l'écoulement (3.10). Par convention, le tourbillon T_0 est choisi comme positif. Ainsi, la position

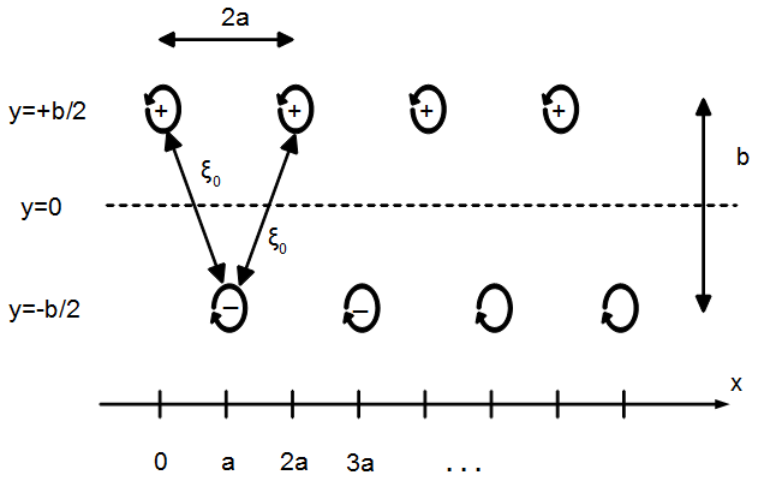


FIGURE 3.10 – Modélisation du sillage du champ de base comme une suite de tourbillons ponctuels équidistants.

initiale (x_{i0},y_{i0}) de chaque tourbillon T_i est

$$x_{i0} = ai \quad , \quad y_{i0} = (-1)^i \frac{b}{2} \quad , \quad i \in \mathbb{N} \tag{3.6}$$

Puisque le modèle est cinématique, le terme de position "initiale" fait référence à la position d'un tourbillon avant de prendre en compte l'influence de la présence des autres tourbillons sur sa position. Puisque l'écoulement est en régime propulsif, les tourbillons positifs sont tous situés au dessus de la ligne médiane, tandis que les tourbillons négatifs sont situés en dessous de la ligne médiane. Ainsi, deux tourbillons co-rotatifs successifs sont initialement séparés d'une distance $2a$, qu'ils soient positifs ou négatifs. La distance courante entre deux tourbillons T_i et T_j est notée $\xi_{i,j}$. Cette distance $\xi_{i,j}$ se déduit à partir des positions des deux tourbillons

$$\xi_{i,j} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} \quad , \quad (i,j) \in \mathbb{N}^2 \tag{3.7}$$

Deux tourbillons contra-rotatifs successifs sont eux initialement séparés d'une distance $\xi_0 = \sqrt{a^2 + b^2}$. Comme pour He *et al.* [117], la suite de tourbillons est semi-infinie et démarre à $x = 0$. Comme dans leur cas, la position $x = 0$ sert de point de référence où sont émis les tourbillons. En effet, dans le cadre de l'allée de tourbillons en aval d'une aile battante, ceux-ci sont toujours émis à la même position. Ceci diffère fondamentalement des modélisations d'allées infinies de tourbillons utilisées par Saffman [115] ou Aref [116]. Enfin, les tourbillons étant ponctuels, ils possèdent chacun une circulation Γ_i.

3.3.4.2 Identification des paramètres du champ de base

Dans un second temps, on peut se servir des études existantes et des simulations numériques conduites dans notre étude pour identifier les paramètres de la modélisation du champ de base, à savoir les paramètres a, b et la circulation Γ_i des tourbillons.

Godoy-Diana *et al.* font l'observation expérimentale que la circulation des tourbillons reste constante dans le sillage [51, 47]. On présente dans la figure (3.11) l'évolution de la circulation des tourbillons du champ de base dans un cas normalement dévié. Que ce soit les tourbillons positifs (rotation dans le sens anti-horaire) ou les tourbillons négatifs (rotation dans le sens horaire), leur circulation est pratiquement constante et opposée. En effet, lorsque les tourbillons sont advectés dans le sillage, ceux-ci sont également diffusés ce qui provoque une augmentation de leur rayon et une diminution de leur maximum de vorticité. Ces deux effets pris ensemble conduisent à une conservation de la circulation. La diminution de la circulation observée à $x \approx 6$ est systématique et prend sa source dans la difficulté de définir correctement la position et la taille des tourbillons au moment où il se détachent de l'aile (voir la section 1.3.2.1 pour plus de détails). Une partie de la vorticité encore attachée à l'aile est intégrée et provoque cet écart. Enfin, les quelques points à faibles circulations sont des artefacts numériques de zones de quelques mailles qui sont considérées comme des tourbillons lors des étapes de post-traitement des données. En définitive, le sillage est modélisé avec une circulation $\Gamma_i = \Gamma_0$, considérée constante.

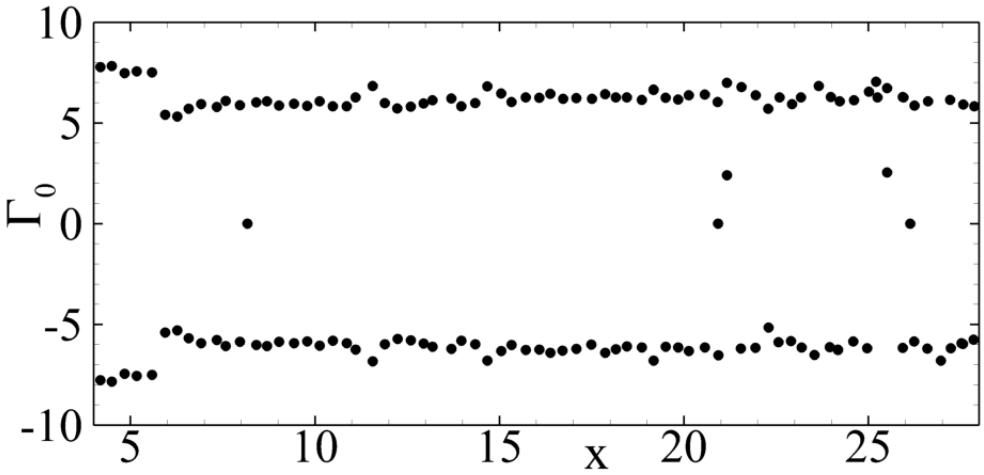
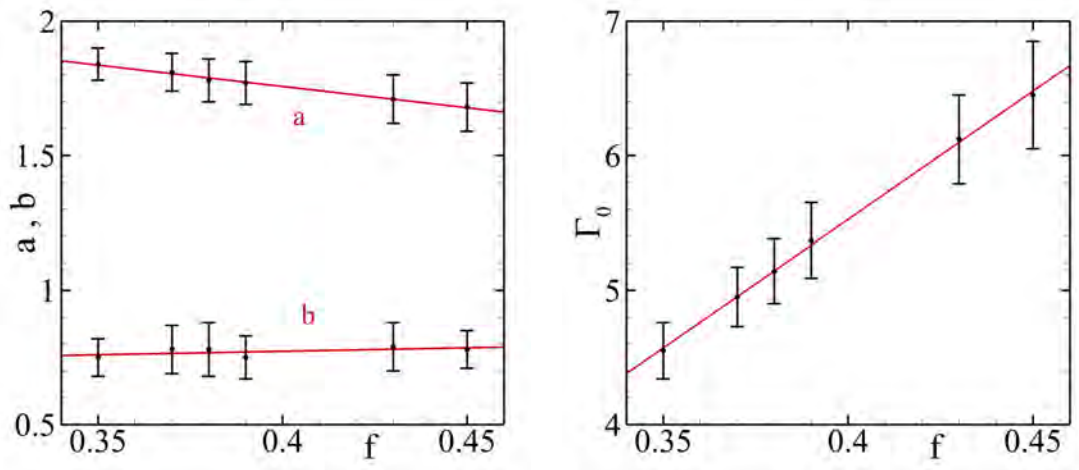


FIGURE 3.11 – Circulation des tourbillons de champ de base en fonction de la position horizontal de leur centre.

La figure (3.12) permet de représenter l'évolution avec la fréquence des paramètres a, b et Γ_0. La distance a semble décroître linéairement avec la fréquence de battement f dans cette gamme. En effet, cela correspond à une diminution du temps entre l'émission de deux tourbillons co-rotatifs successifs. La distance b est elle constante avec f. Par simple analyse dimensionelle, on peut s'attendre à avoir $b \sim A$ et $f \sim U_0/f$.



(a) (b)

FIGURE 3.12 – Évolution (a) des coefficients a et b et (b) de la circulation Γ_0 des tourbillons du sillage du champ de base en fonction de la fréquence de battement f.

3.3.4.3 Modélisation du mode linéaire

Le sillage de tourbillons est maintenant soumis à une perturbation infinitésimale. Cette perturbation peut être modélisée, en reprenant la même procédure que pour le champ de base, en utilisant les données de simulations numériques à notre disposition.

Les observations faites sur le mode linéaire responsable de la déviation montre qu'il est constitué d'une succession de dipôles de vorticité [66]. Chacun de ces dipôles est constitué de deux cellules de vorticités opposées et se superpose à un tourbillon du champ de base. Une perturbation dipolaire d'un tourbillon isolé est une structure classique de l'analyse de stabilité des tourbillons et est appelé mode de déplacement [118, 83, 119]. En effet, le principal effet de cette structure est de déplacer le centroïde du tourbillon perturbé dans la direction passant par les deux centres du dipôle perturbateur. Le sens du déplacement dépend de l'agencement positif-négatif du dipôle. In fine, l'action d'un mode de déplacement peut être modélisé par une translation nette de chaque tourbillon dans une direction donnée.

On modélise le mode linéaire par l'ajout d'un déplacement de chaque tourbillon dans le sillage d'un incrément $\boldsymbol{\delta}_i$

$$\boldsymbol{\delta}_i = \delta_{xi}\boldsymbol{e}_x + \delta_{yi}\boldsymbol{e}_y \qquad , \qquad i \in \mathbb{N} \tag{3.8}$$

De cette manière, les coordonnées des centroïdes de chaque tourbillon deviennent

$$x_i = ai + \delta_{xi} \qquad , \qquad y_i = (-1)^i \frac{b}{2} + \delta_{yi} \qquad , \qquad i \in \mathbb{N} \tag{3.9}$$

Á ce stade, il faut choisir une loi d'évolution pour la perturbation de déplacement $\boldsymbol{\delta}_i$. Pour cela, on analyse quantitativement l'influence du mode linéaire sur le champ de base.

La modélisation suivante est choisie pour les déplacements horizontaux $\delta_x i$ et verticaux $\delta_y i$ générés par le mode linéaire

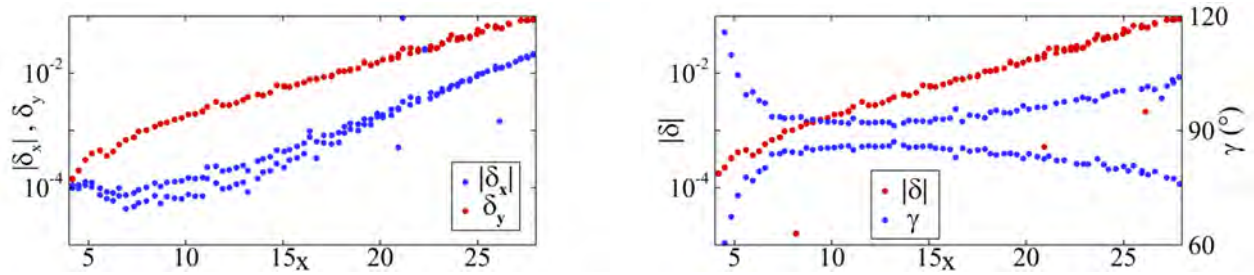
$$\delta_{xi} = (-1)^i \varepsilon_x exp(cx_{i0}) \qquad , \qquad \delta_{yi} = \varepsilon_y exp(cx_{i0}) \qquad , \qquad i \in \mathbb{N} \tag{3.10}$$

Le choix de cette modélisation est dicté par l'observation du mode linéaire et est détaillé dans la section (3.3.4.4) Les deux facteurs ε_x et ε_y sont différenciés de telle sorte que l'on a $\varepsilon_y \approx 10\varepsilon_x$. Le coefficient c est le taux d'accroissement spatial de la perturbation et est considéré constant. Une précision supplémentaire doit être faite avant d'appliquer

cette perturbation au champ de base. La modélisation du mode correspond aux résultats numériques obtenus et donc à une déviation du sillage vers le haut. L'amplitude du mode étant arbitraire, changer son signe permet d'obtenir une modélisation du mode provoquant une déviation du sillage vers le bas.

3.3.4.4 Identification des paramètres du mode linéaire

Pour construire la modélisation du mode linéaire et identifier les différents paramètres de cette modélisation, on s'est servi des résultats de simulation numérique à notre disposition.



(a) (b)

FIGURE 3.13 – Évolution (a) des déplacements infinitésimaux $|\delta_x|$ (•) et δ_y (•) et (b) de leur norme (•) et de l'angle γ que forme le déplacement avec l'horizontal (•) en fonction de la distance aval.

On trace dans la figure (3.13a) l'évolution avec la distance aval de $|\delta_x|$ (○) et δ_y (○), calculés à partir du mode linéaire obtenu pendant les analyses de Floquet. Pour obtenir ces tracés, on aura utilisé les mesures faites sur une période de battement complète. On a bien une croissance spatiale exponentielle de ces grandeurs avec un ordre de grandeur de décalage entre les deux et un taux de croissance spatiale très similaire pour les deux. On insiste bien ici sur le fait que c'est la valeur absolue de δ_x qui est représentée pour plus de clarté, mais que le déplacement horizontal prends alternativement des valeurs positives et négatives. On trace également dans la figure (3.13b) l'évolution de la norme du vecteur déplacement $\boldsymbol{\delta}$ de cette perturbation ainsi que de l'angle γ de ce vecteur dans le référentiel $(\boldsymbol{e}_x), \boldsymbol{e}_y$ défini par

$$\gamma = atan\left(\frac{\delta_y}{\delta_x}\right) \tag{3.11}$$

La norme de la perturbation $|\delta|$ suit la même croissance exponentielle que δ_y qui domine sur δ_x. L'angle γ que forme le déplacement avec l'horizontal évolue très rapidement proche de l'aile ($x \approx 5$). Cette évolution est probablement associée à la naissance du mode dans le sillage. On rappelle en effet que le mode linéaire est négligeable au voisinage de l'aile par rapport à sa valeur dans le sillage. L'angle γ prend par la suite une valeur proche de 90° mais qui s'en éloigne pour des valeurs croissantes de x, par valeurs alternativement supérieures et inférieurs. Cette valeur de γ est bien indicatrice de la prédominance de δ_y sur δ_x.

3.3.4.5 Lien entre la déviation et l'appariement dipolaire

Avec cette modélisation, il est désormais possible de construire un lien entre la déviation du sillage et l'appariement des dipôles. On commence par calculer la distance perturbée entre deux tourbillons consécutifs. En négligeant les termes à l'ordre $O(\varepsilon^2)$,

cette distance devient

$$\xi_{i,i+1} = \xi_0 \left[1 + (-1)^{i+1} e^{aci} \frac{b\varepsilon_y \left(e^{ac} - 1\right) + a\varepsilon_x \left(e^{ac} + 1\right)}{\xi_0^2} \right] + o(\varepsilon_y) \tag{3.12}$$

Il est intéressant de voir que la distance entre deux tourbillons contra-rotatifs successifs augmente ou diminue alternativement, suivant la parité de i. Par définition, on a $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$. Par conséquent, lorsque i est pair, c'est-à-dire que le tourbillon T_i est positif et situé au dessus de la ligne médiane, sa distance avec le tourbillon négatif suivant devient plus petite que ξ_0 sous l'influence de la perturbation. Et inversement lorsque i est impair, le tourbillon T_i est négatif et situé en dessous de la ligne médiane et sa distance avec le tourbillon positif suivant devient plus grande que xi_0. On obtient donc bien un rapprochement des tourbillons contra-rotatifs successifs deux par deux, chaque tourbillon positif se rapprochant du tourbillon négatif qui le précède dans le sillage. Cet écart à la distance initiale ξ_0 croit de manière exponentielle avec la distance à l'aval.

Par ailleurs, cette modélisation conduit à l'apparition du terme $[b\varepsilon_y \left(e^{ac} - 1\right) + a\varepsilon_x \left(e^{ac} + 1\right)]$ qu'il convient de commenter. Comme dit plus haut, la part de rapprochement due au terme en ε_x est probablement négligeable puisque $\varepsilon_x << \varepsilon_y$. Néanmoins, les deux termes jouent le même rôle, à savoir <qu'ils conduisent à un rapprochement des tourbillons deux par deux. Cela signifie que dans la limite des hypothèses faites pour la modélisation du mode, n'importe quel mode respectant les mêmes hypothèses permettrait théoriquement le rapprochement des tourbillons deux par deux. On peut par exemple envisager un mode avec ε_x ou ε_y strictement nul. Cette observation permet de conclure que le mode linéaire, tel qu'il a été modélisé, est non seulement responsable de la déviation mais également du rapprochement des tourbillons du sillage par paires. Ce résultat est assez remarquable puisque jusqu'ici, l'appariement de tourbillons dans le sillage était difficilement quantifiable au niveau de la bifurcation et semblait plutôt être une caractéristique des perturbations non linéaires dans le sillage. C'est d'autant plus intéressant si on prend en compte les observations de [47] et [117] qui attribuaient à l'appariement des tourbillons un rôle moteur dans la déviation du sillage. La modélisation faite ici permet d'ailleurs de s'intéresser plus en détails à ce phénomène.

Le déplacement des tourbillons dans le sillage par le mode linéaire provoque en conséquence une modification des vitesses que ceux-ci induisent sur leurs tourbillons voisins. De manière générale, un tourbillon ponctuel de circulation Γ à la position (x_0, y_0) induit autour de lui un champ de vitesse $\boldsymbol{V}_{ind}$ tel que

$$\forall (x, y) \neq (x_0, y_0) \quad \boldsymbol{V}_{ind} = \frac{\Gamma}{2\pi \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)} \left[(x - x_0)\boldsymbol{e}_y - (y - y_0)\boldsymbol{e}_x\right] \tag{3.13}$$

Lorsque l'on se place dans un cadre discret pour identifier la vitesse induite par un tourbillon sur un autre, on note alors $\boldsymbol{V}_{i,j}$ la vitesse induite par le tourbillon T_i sur le tourbillon T_j, avec $i \neq j$. Cette vitesse induite est donc exprimée à la position (x_j, y_j) du tourbillon T_j. Cette vitesse induite s'écrit alors

$$\forall i \neq j \quad \boldsymbol{V}_{i,j} = \frac{(-1)^i \Gamma_0}{2\pi \xi_{i,j}} \boldsymbol{e}_{i,j} \tag{3.14}$$

avec $\xi_{i,j}$ la distance entre les tourbillons T_i et T_j et $\boldsymbol{e}_{i,j} = (\boldsymbol{e}_{x(i,j)}, \boldsymbol{e}_{y(i,j)})$ le vecteur directeur de la vitesse induite par le tourbillon T_i sur le tourbillon T_j. Ce vecteur directeur de norme unitaire est construit comme perpendiculaire à la droite reliant les deux tourbillons. On a en pratique

$$\boldsymbol{e}_{x(i,j)} = \frac{y_i - y_j}{\xi_{i,j}} \quad , \quad \boldsymbol{e}_{y(i,j)} = \frac{x_j - x_i}{\xi_{i,j}} \tag{3.15}$$

L'ensemble des champs de vitesses induits par tous les tourbillons du sillage viennent s'ajouter à la convection déjà présente de l'ensemble du sillage vers l'aval, à la vitesse U_0. Dans leurs travaux, Godoy-Diana *et al.* comparent la vitesse induite par des couples de tourbillons à la vitesse de convection du sillage. C'est cette comparaison qui sert d'argument pour expliquer que l'appariement des tourbillons est un moteur de la déviation du sillage. Zheng *et al.* reprennent la même comparaison en utilisant cette fois trois tourbillons successifs. Ils estiment en effet que si deux tourbillons successifs T_1 et T_2 induisent ensemble une vitesse qui augmente la déviation, la vitesse induite par les tourbillons successifs T_2 et T_3 ensemble, aura elle tendance à réduire la déviation du sillage. Ils comparent ainsi les vitesses induites par trois tourbillons successifs à la vitesse de convection pour expliquer la déviation. Dans leurs deux études, il est à chaque fois fait l'hypothèse que les vitesses induites par les tourbillons qui ne sont pas les plus proches voisins sont négligeables. Pourtant, le champ induit (3.13) par un tourbillon évolue bien selon l'inverse de la distance à son centre. Cela peut facilement être vérifié à l'aide des simulations numériques du champ de base. Initialement, la distance entre deux tourbillons contra-rotatifs successifs T_i et T_{i+i} est de $\sqrt{b^2+a^2}$. La distance entre deux tourbillons contra-rotatifs T_i et T_{i+3} est elle de $\sqrt{b^2+9a^2}$ et la distance tourbillons contra-rotatifs T_i et T_{i+5} est elle de $\sqrt{b^2+25a^2}$. Les mesures des paramètres a et b permettent de confirmer que

$$\frac{V_{i,i+3}}{V_{i,i+1}} \sim \sqrt{\frac{a^2+b^2}{9a^2+b^2}} \sim \frac{1}{3} \quad , \quad \frac{V_{i,i+5}}{V_{i,i+1}} \sim \sqrt{\frac{a^2+b^2}{25a^2+b^2}} \sim \frac{1}{5} \tag{3.16}$$

Cela confirme bien qu'il faut prendre en compte la vitesse induite par l'ensemble des autres tourbillons du sillage pour évaluer correctement la vitesse induite sur un tourbillon. En définitive, le modèle introduit ici permet d'exprimer analytiquement la somme de toutes les vitesses induites sur un tourbillon T_j de la façon suivante

$$\boldsymbol{V}_{tj} = \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{+\infty} \frac{(-1)^i \Gamma_0}{2\pi\xi_{i,j}} \boldsymbol{e}_{i,j} \tag{3.17}$$

Le problème est donc de savoir quelle est la modification de la vitesse induite qui est provoquée par le déplacement infinitésimal du tourbillon par le mode linéaire. La nouvelle vitesse induite par le tourbillon T_i sur le tourbillon T_i+1 devient

$$\boldsymbol{V}_{i,i+1} \approx \frac{(-1)^i \Gamma_0}{2\pi\xi_0} \left[1 + (-1)^i e^{aci} \frac{b\varepsilon_y \left(e^{ac}-1\right) + a\varepsilon_x \left(e^{ac}+1\right)}{\xi_0^2} \right] \boldsymbol{e}_{i,i+1} \tag{3.18}$$

De manière évidente, la vitesse induite diminue quand la distance augmente. Cependant, cela ne permet pas de déterminer si la modification de la vitesse induite a un effet stabilisant ou déstabilisant. Pour déterminer cela analytiquement, il faudrait écrire toutes les vitesses induites $\boldsymbol{V}_{i,j}$ et regarder comment elles se compensent. Malheureusement, l'ensemble des termes qui constituent l'expression de ces vitesses sont suffisamment complexes pour rendre cette démarche extrêmement laborieuse et inconcluante.

Pour pallier à ce problème, on schématise en figure (3.14) la vitesse induite sur les tourbillons positifs et négatifs du sillage par les tourbillons co-rotatifs proches. Dans le champ de base (3.14a,c), les vitesses induites par les deux tourbillons co-rotatifs voisins se compensent. Il s'agit bien d'un état d'équilibre. Une fois les tourbillons perturbés (3.14b,d), les vitesses induites par le tourbillon précédent (rouge) et suivant (bleu) ne se compensent plus et leur résultante est orienté vers l'extérieur du sillage avec un angle proche de $\pm 90°$ (et d'autant plus proche que la perturbation est infinitésimale). La prise en compte des tourbillons co-rotatifs plus éloignés tend à augmenter cet effet, c'est-à-dire à augmenter la norme de la résultante des vitesses induites et écarter son orientation de la verticale.

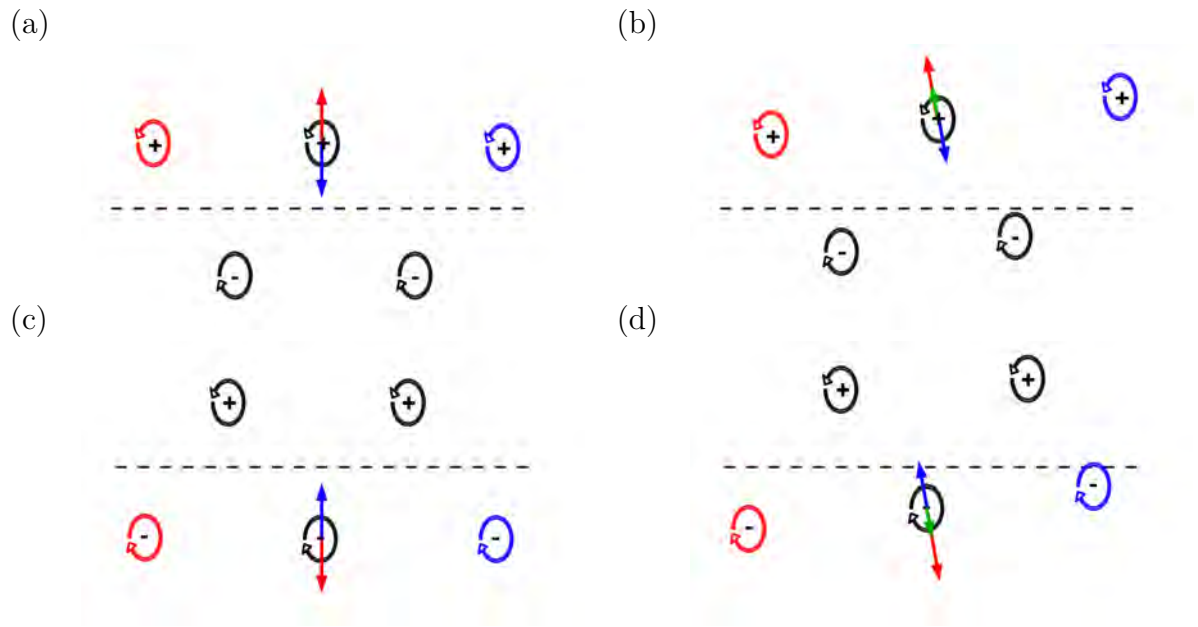


FIGURE 3.14 – Schéma de la modification de la vitesse induite par les tourbillons co-rotatifs proches. (a,b) Tourbillons positifs. (c,d) Tourbillons négatifs. (a,c) Champ de base. (b,d) Champ de base avec déplacement du à la perturbation. Les tourbillons co-rotatifs précédents (rouge) et suivant (bleu) induisent des vitesses dont la résultante est indiquée en vert.

Puisque l'allée de tourbillons est semi-infinie, prendre en compte tous les tourbillons co-rotatifs conduit à ce qu'il ne reste plus que des tourbillons à l'aval du tourbillon courant à considérer. Quand c'est le cas, ces tourbillons co-rotatifs tendent eux à réduire la norme de la résultante des vitesses. De la même manière que pour l'influence des tourbillons co-rotatifs, l'influence des tourbillons contra-rotatifs proches est modélisée dans la figure (3.15). Dans le champ de base (3.15a,c), les vitesses induites par les deux tourbillons voisins ont leur composantes verticales qui se compensent et leurs composantes horizontales qui s'ajoutent. La résultante de ces vitesses (en violet) est orientée horizontalement vers l'aval, traduisant l'état propulsif du sillage. Après l'ajout de la perturbation (3.15b,d), les composantes verticales ne se compensent plus et la résultante des vitesses induites est légèrement orientée vers le haut. Comme pour le cas co-rotatif, la perturbation est infinitésimale ce qui implique que l'angle que forme cette résultante des vitesses induite avec l'horizontal reste tout de même proche de 0°. Enfin, le caractère semi-infini du sillage implique que lorsque tous les tourbillons contra-rotatifs restants sont à l'aval du tourbillon courant, ceux-ci ajoutent tous une vitesse induite orientée vers l'extérieur du sillage (en bleu).

La figure (3.16) permet de faire un résumé des influences de tous les tourbillons. Un couple de tourbillon contra-rotatif successif est représenté. La perturbation dont l'influence indiquée par un vecteur noir a pour effet de déplacer les deux tourbillons vers le haut et de les rapprocher. Le déplacement de ces tourbillons (et des autres tourbillons du sillage) provoque une modification de la vitesse induite par les autres tourbillons du sillage sur eux. La vitesse induite par les tourbillons co-rotatifs passe d'une résultante nulle, à une résultante qui les écarte. Il s'agit donc d'un effet stabilisant. La vitesse induite par les tourbillons co-rotatifs passe d'une résultante purement horizontale à une résultante à composante verticale non nulle, cette dernière ayant une croissance exponentielle avec la position avale. L'effet est donc d'augmenter le caractère propulsif du sillage (donc la poussée) et de rapprocher ces deux tourbillons. C'est donc un effet déstabilisant.

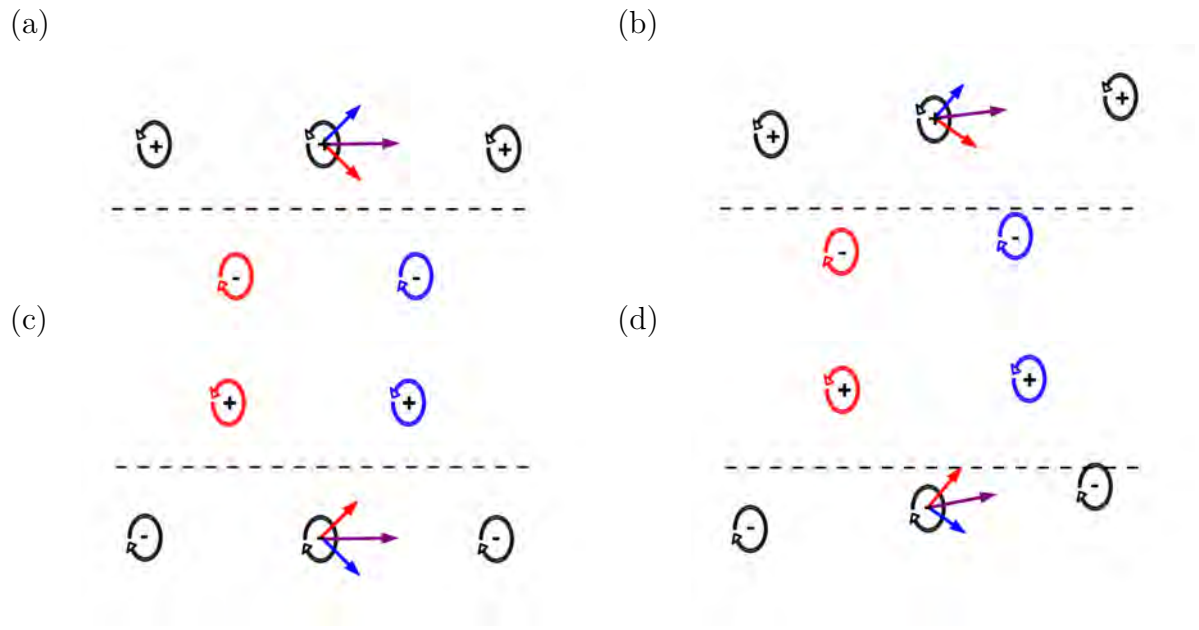


FIGURE 3.15 – Schéma de la modification de la vitesse induite par les tourbillons contra-rotatifs proches. (a,b) Tourbillons positifs. (c,d) Tourbillons négatifs. (a,c) Champ de base. (b,d) Champ de base avec déplacement du à la perturbation. Les tourbillons contra-rotatifs précédents (rouge) et suivant (bleu) induisent des vitesses dont la résultante est indiquée en violet.

On peut supposer l'existence d'une compétition entre ces deux effets et que l'accroissement du couple amplitude/fréquence de battement est responsable de la bifurcation à l'état instable où le sillage dévie de sa trajectoire et les tourbillons forment des dipôles dans le sillage. Cet appariement des tourbillons dans le sillage ne résulte pas uniquement d'effets non linéaires comme on pouvait le penser au premier abord. Il s'agit bien d'un effet secondaire de la perturbation linéaire responsable de la déviation. En définitive, la modélisation introduite ici permet de montrer que le mode linéaire responsable de la déviation est également responsable de l'appariement des tourbillons du sillage, et que ces deux effer, même pris séparément, se renforcent l'un l'autre.

3.4 Conclusions et perspectives

Ce chapitre est consacré à l'étude du phénomène de déviation du sillage d'une aile battante. L'article [66] publié dans *Physical Review E.* et placé au début de ce chapitre est consacré à l'analyse de ce phénomène. La version initiale de la méthode de préservation des symétries détaillée dans le chapitre 2 y est introduite et utilisée afin de déterminer les sillages non déviés instables après la bifurcation. Une analyse de stabilité de Floquet de ce sillage non dévié permet d'identifier l'existence d'un mode synchrone qui devient instable à la fréquence critique de bifurcation. Ce mode de Floquet est constitué d'une succession de dipôles de vorticité qui agissent comme des modes de déplacements sur chaque tourbillon du champ de base. On montre que c'est ce mode, anti-symétrique vis-à-vis de la symétrie spatio-temporelle brisée, qui est responsable de la déviation du sillage. Par la suite, une analyse des perturbations non linéaires montre que lorsque celles-ci se développent au voisinage de l'aile, cela conduit à une forte augmentation de la déviation et de la portance moyenne associée, mais également de la poussée moyenne.

Lorsque l'angle d'incidence de l'aile avec l'écoulement amont est non nul, la bifurcation observée devient une bifurcation imparfaite tant que cet angle d'incidence est suffisam-

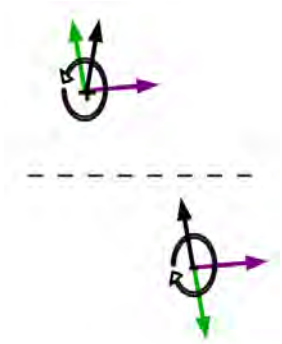


FIGURE 3.16 – Schéma d'une paire de tourbillons avec le déplacement du à la perturbation (noir), la vitesse induite par les tourbillons co-rotatifs (vert) et contra-rotatifs (violet). La longueur des vecteurs est arbitraire.

ment faible. Le sillage dévie préférentiellement vers le haut pour des angles d'incidences positifs, et inversement. La branche instable n'a pas été déterminée dans les travaux présentés ici, mais pourrait éventuellement être identifiée à l'aide de méthodes de suivi de branches. Pour autant, l'intérêt de cette démarche semble faible. En effet, toutes les branches instables observées correspondent à de plus grands efforts moyens et à un meilleur rendement lorsque l'incidence est nulle. On s'attend ainsi à ce que ce soit également le cas lorsque l'angle d'incidence prend de petites valeurs. Comme pour Citro *et al.* [108], il est envisageable de déterminer une équation d'amplitude permettant de modéliser le passage à la bifurcation imparfaite en fonction des différents paramètres de notre problème, à savoir la fréquence et l'amplitude de battement, l'angle d'incidence et le nombre de Reynolds.

Les simulations à faibles fréquences de battement lorsque l'aile est en régime de traînée ont montré que la traînée moyenne est maximale à environ un tiers de la fréquence naturelle de l'allée de tourbillons de Bénard-Von Karman derrière la même aile fixe. Pour autant, aucun phénomène de synchronisation ou de résonance n'a été observé à la fréquence naturelle elle-même.

Les simulations à fortes fréquences de battement, après la bifurcation, montrent une saturation de la portance moyenne mais pas de la poussée moyenne. Un maximum de rendement est ainsi atteint. Il est intéressant de noter que les sillages déviés en régime III, qui présentent de fortes améliorations de la poussée moyenne, la portance moyenne et le rendement sont des écoulements très cohérents. Le sillage est parfaitement organisé et l'aile tire parfaitement partie de cette organisation afin de gagner en performance. Il faut cependant mettre en perspective que cette cohérence reste bi-dimensionelle et disparaît lorsque l'écoulement devient tri-dimensionnel .

Nos résultats ont confirmés les observations expérimentales et numériques de Cleaver *et al.* [35] sur le lien entre le signe de la portance moyenne et la direction de la déviation du sillage. La portance moyenne est ainsi très majoritairement issue d'une différence de pression entre l'extrados et l'intrados. Le sillage produit par l'aile étant accéléré par rapport au reste du fluide, celui-ci provoque une accélération du fluide le long de l'aile du côté de la déviation, accélération à l'origine de ce différentiel de pression.

Des analyses de Floquet conduites uniquement sur le sillage, sans considérer l'aile, ont permis de mettre en évidence que le mode responsable de la déviation est un mode de sillage. Cette observation peut servir de première étape à l'étude de la sensibilité structurelle de sillages propulsifs.

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à une modélisation cinématique du sillage et de la perturbation linéaire qui mène à la déviation. Les tourbillons sont idéalisés sous une forme ponctuelle et la viscosité est négligée. Le mode linéaire est modélisé comme

une suite de déplacements infinitésimaux des tourbillons du sillage, sans modification de leur circulation. Le déplacement des tourbillons par le mode linéaire est responsable d'une modification des vitesses induites entre les tourbillons dans le sillage. Cette modification de la vitesse induite conduit à deux effets contraires : un effet stabilisant résulte des vitesses induites entre les tourbillons co-rotatifs du sillage tandis qu'un effet déstabilisant résulte des vitesses induites entre les tourbillons contra-rotatifs. Ces deux effets finissent éventuellement par mener à l'appariement des tourbillons dans le sillage. Cet appariement va de pair avec la déviation moyenne du sillage et la renforce.

Chapitre 4

Dynamique du sillage d'une aile battante à grand angle d'incidence

Dans le chapitre précédent, on a montré que le sillage d'une aile battante, lorsqu'il dévie de sa trajectoire, est créateur d'une portance moyenne de forte amplitude. En aéronautique, une stratégie classique pour générer de la portance sur des ailes en vol est de modifier leur angle d'incidence avec l'écoulement amont. De nombreuses études ont été conduites pour analyser l'évolution de la portance d'une aile en fonction de son angle d'incidence avec l'écoulement amont. Ces résultats sont utilisés tous les jours pour la conception et le vol des avions, des hélicoptères, des drones, etc.

Une interrogation naturelle est donc de se poser la même question pour un système avec une aile battante. On a vu par ailleurs que lorsque cet angle d'incidence est petit, la déviation du sillage produit par l'aile se produit à travers une bifurcation imparfaite. En revanche, lorsque l'angle d'incidence est plus grand, cette notion de bifurcation imparfaite n'a plus de sens. On peut s'attendre à observer une modification importante de la traînée et de la portance mais également l'apparition de nouveaux phénomènes, comme le décrochage, qu'il soit statique pour des voilures fixes ou dynamique sur les voilures tournantes.

Andro *et al.* [38] s'intéressent dans le cas d'une aile en mouvement de battement vertical (heaving) à découpler la part de trois mécanismes fondamentaux dans les efforts. Ils montrent en particulier que le mécanisme dit d' "added mass reaction" est prépondérant dans la gamme de vol caractéristique des insectes, et donc applicable aux drones de petites tailles (MAV).

L'influence de l'angle d'incidence pour une aile battante a notamment été grandement étudié par Cleaver *et al.* [34, 35, 36, 37, 120, 121]. Leurs études ont majoritairement consisté en des campagnes expérimentales sur des ailes battantes de profil NACA0012 à $Re = 10^4$. Ils ont analysé les interactions entre les tourbillons de bord d'attaque et de fuite pour une aile battante à plusieurs angles d'incidences, amplitudes et fréquences de battement. Ils ont notamment montré que l'on peut se servir de battement pour augmenter significativement la portance et réduire la traînée par rapport à une aile fixe [35]. Leurs études de la transition traînée-poussée a montré que l'augmentation de l'angle d'incidence a tendance à repousser celle-ci pour de plus grandes valeurs de l'amplitude et la fréquence de battement, avec un gain de portance associé [36]. Ils observent alors également des pics de portance à basse fréquence de battement et fort angle d'incidence, qu'ils associent à une résonance avec la fréquence naturelle du vortex shedding. Cet effet en particulier sera détaillée dans le présent chapitre.

Les objectifs de ce chapitre consiste à étudier la dynamique d'une aile battante à grand angle d'incidence pour caractériser son influence sur les efforts. On cherchera par ailleurs à identifier des mécanismes de modification de l'écoulement dans cette gamme d'angle

d'incidence et de déterminer si ces mécanismes peuvent être utilisé pour améliorer les performances de l'aile.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans un premier temps, l'influence de l'angle d'incidence sur l'écoulement autour d'une aile fixe est examiné, ce cas servant de témoin pour la suite. Dans un second temps, on étudie une zoologie complexe de solutions dont la périodicité est analysée. Enfin on s'intéresse plus particulièrement à deux cas : pour une fréquence de battement adimensionée $f = 0.1$, on étudie une bifurcation quasi-périodique de l'écoulement qui conduit à un triplement de la période temporelle du sillage ; et pour une fréquence de battement adimensionée $f = 0.15$, on étudie deux bifurcations successives, une sous-harmonique qui conduit à un doublement de la période temporelle du sillage, suivie d'une bifurcation quasi-périodique qui conduit à une perte de la périodicité du sillage.

4.1 Influence de l'angle d'incidence sur l'écoulement autour d'une aile fixe

Dans un premier temps, on cherche à connaître le comportement de l'aile que l'on utilise lorsqu'elle celle-ci est fixe dans un écoulement amont, en jouant sur la valeur de l'angle d'incidence α. La configuration reprend celle présentée dans la section (3.2.1). On représente dans la figure (4.1) les sillages instantannées pour $\alpha = 1°$ (figure (4.1a)) et $\alpha = 14°$ (figure (4.1b)). Dans les deux cas, le sillage a la structure d'une allée de

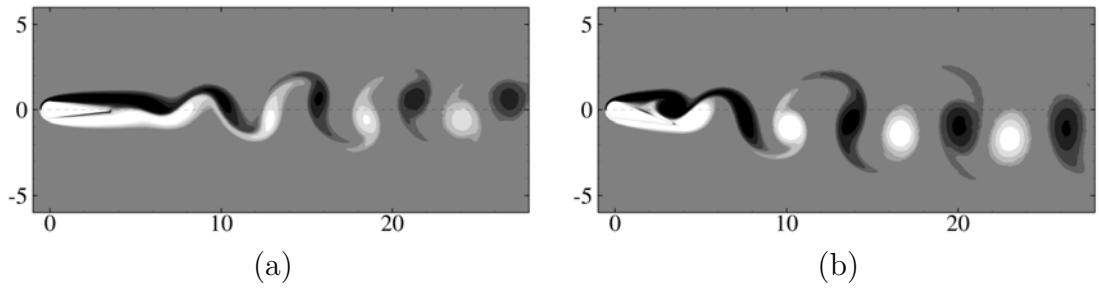


FIGURE 4.1 – Vorticité instantannée pour une aile fixe à (a) un petit angle d'incidence $\alpha = 1°$ et (b) un grand angle d'incidence $\alpha = 14°$.

tourbillons de Bénard-Von Kàrmàn, caractéristique d'un régime de traînée. Comme pour le cas $\alpha = 0$, la solution stationnaire des équations de Navier-Stokes est instable (le Reynolds critique pour cette géométrie d'aile est d'environ 200) et on a systématiquement un écoulement périodique comme solution. On constate par ailleurs un décollement de la couche limite à l'extrados de l'aile dans le cas $\alpha = 14°$. On peut analyser les efforts moyens (en temps) du fluide sur l'aile mais également la dynamique de l'écoulement. Dans la figure (4.2), on représente l'évolution de la traînée moyenne $\langle F_x \rangle$ (figure (4.2a)), de la portance moyenne $\langle F_y \rangle$ (figure (4.2b)) et de la fréquence naturelle f_n du sillage (figure (4.2c)), en fonction de l'angle d'incidence α. La traînée moyenne est pratiquement constante pour les petits angles d'incidence (jusqu'à $\alpha = 4°$) puis augmente linéairement avec α. On peut notamment comprendre cela en notant que lorsqu'on augmente l'angle d'incidence, on augmente également la section apparente de l'aile vue par l'écoulement. Cette section apparente S_{app} dépend de l'angle α de la manière suivante

$$S_{app} = max(D, D/2 + (c - D/2)sin(\alpha)) \tag{4.1}$$

La section apparente de l'aile est donc constante pour des petites valeurs de α et augmente à partir de la valeur $\alpha_{app} \approx 8.21°$.

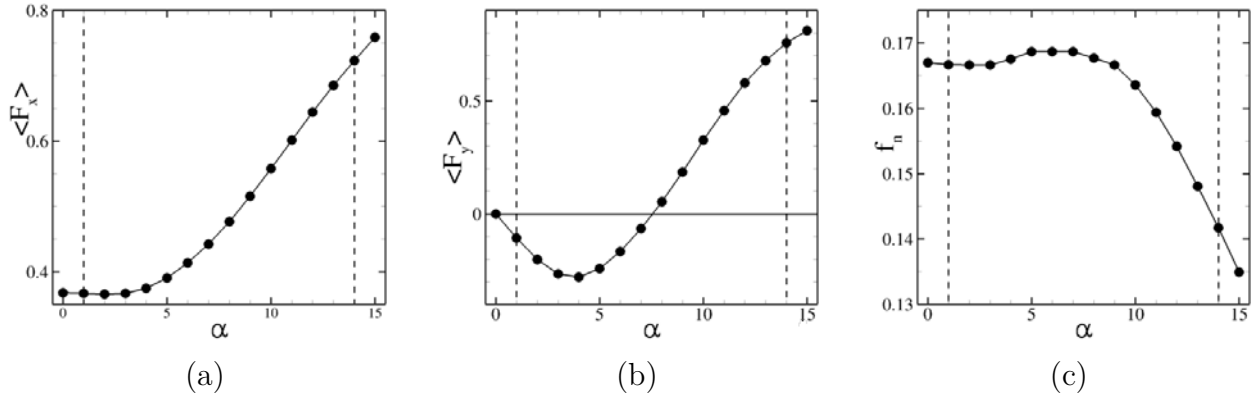


FIGURE 4.2 – (a) Traînée moyenne $\langle F_x \rangle$, (b) portance moyenne $\langle F_y \rangle$ et (c) fréquence naturelle f_n du sillage d'une aile fixe à angle d'incidence α.

La portance moyenne est d'abord nulle pour $\alpha = 0°$, cas dans lequel la symétrie spatio-temporelle haut/bas est respectée (voir chapitre précédent). Lorsqu'on augmente la valeur de α, la portance commence à décroître. On a alors une aile dont l'angle d'incidence est positif, mais dont la portance moyenne est négative. Lorsque cela se produit, le sillage de l'aile est légèrement dévié vers le haut. Elle atteint un minimum pour $\alpha \approx 4°$ puis commence à croître avec α. La portance moyenne redevient positive à partir de $\alpha \approx 7.55°$ et continue de croître jusqu'à $\alpha = 15°$ qui est la valeur maximale de α qui a été simulée. Le sillage de l'aile est alors dévié vers le bas (comme c'est visible dans le cas $\alpha = 14°$ dans la figure (4.1b)). Le moment des efforts M_z suit la même évolution avec α que la portance et n'est donc pas représenté ici.

Ce type d'évolution de la portance moyenne avec l'angle d'incidence, à savoir une décroissance pour de petits angles qui conduit à une portance moyenne négative, suivie d'une croissance pour de plus grands α, est remarquable au premier abord. Ce comportement n'est pourtant pas inconnu puisqu'il a été lié à ce qui est appelé instabilité de galop. Une instabilité de galop est une instabilité dynamique typique des structures élancées lorsqu'elles sont excitées par un écoulement transverse [122]. Cette instabilité conduit la structure à subir des oscillations de grandes amplitudes qui peuvent, dans le cas de grandes structures, les mener à leur ruine. Actuellement, les études traitant de ce phénomène s'intéressent notamment à caractériser les interactions observées entre les instabilités de galop et les vibrations par tourbillons induits (VIV) (voir [123] pour plus de détails). Une condition nécessaire à la mise en place de cette instabilité est que la dérivée négative de la portance soit plus grande que la traînée [124, 125] ce qui s'exprime de la manière suivante :

$$\frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha = 0°) + F_x(\alpha = 0°) < 0 \tag{4.2}$$

Dans notre cas, on obtient $\frac{\mathrm{d}F_y}{\mathrm{d}\alpha}(\alpha = 0°) + F_x(\alpha = 0°) \approx 0.27 > 0$. Il s'avère que la dérivée négative de la portance à $\alpha = 0°$ est compensée par la forte traînée. On en déduit qu'une structure élancée avec la section de l'aile est stable vis-à-vis d'une instabilité de galop, en tout cas pour cette valeur de Reynolds.

Enfin, on calcule la fréquence naturelle f_n des solutions en procédant à une *Fast Fourier Transform* des signaux temporels des efforts. La fréquence naturelle est d'abord pratiquement constante (avec pour valeur 0.167) pour des petits angles α. Elle croit légèrement pour atteindre sa valeur max $f_n = 0.169$ pour $\alpha = 7°$ puis décroît avec α jusqu'à atteindre $f_n = 0.135$ pour $\alpha = 15°$. Il est intéressant de noter que la plage de variation de f_n est assez faible sur l'ensemble de la gamme d'angle d'incidence qui a été simulée. D'autre

part, aucun phénomène de résonance à la fréquence naturelle n'a été observé pour $\alpha = 0°$ mais il n'est pas exclu que cela se produise lorsque l'angle d'incidence est non nul.

Maintenant qu'on a traité le cas d'une aile fixe, on peut étudier le comportement d'une aile battante en faisant varier l'angle d'incidence. Le comportement a petits angles d'incidences a été présenté au chapitre précédent et ne sera donc pas rappelé ici. En revanche, on s'intéresse ici à regarder ce qui se passe à de grands angles d'incidences. Ainsi, plusieurs transitions liées à des modifications de la période temporelle de l'écoulement sont observées. Dans un premier temps, on s'attache à caractériser précisément la période des différentes solutions obtenues. Dans un second, une partie de ces transitions sont analysées comme des bifurcations linéaires au moyen d'analyses de Floquet. En particulier, on traite deux cas : le premier cas consiste en une bifurcation quasi-périodique de la solution périodique conduisant à un triplement de sa période temporelle. Le second cas consiste en deux bifurcations successives : une bifurcation subharmonique liée à un doublement de la période temporelle, suivie d'une bifurcation quasi-périodique qui rend la solution apériodique.

4.2 Analyse de la périodicité des solutions de simulations non-linéaires

Dans cette section, on commence par présenter la zoologie des différentes solutions obtenues en fonction des deux paramètres de contrôle : la fréquence de battement f et l'angle d'incidence α. On distingue trois types de solutions : des solutions périodiques avec une période égale ou proche de la période de battement de l'aile, des solutions quasi-périodiques, et des solutions périodiques mais dont la période caractéristique est très grande par rapport à la période de battement. Dans chacun de ces cas, on applique les outils développés dans la section (1.3.1.1) pour distinguer les différentes solutions.

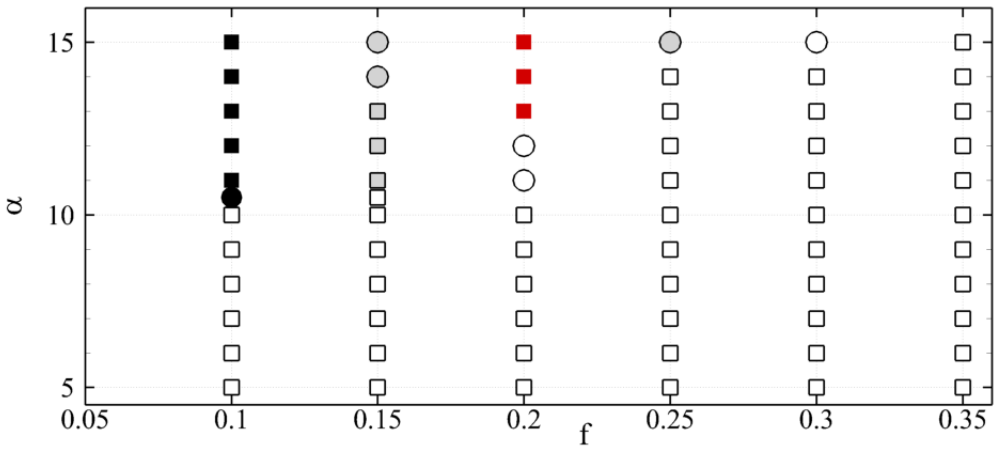


FIGURE 4.3 – Gamme de fréquence de battement f et d'angle d'incidence α. □ : solutions T-périodique. ◯ : solutions quasi T-périodique. ■ : solutions $2T$-périodique. • : solutions quasi $2T$-périodique. . ■ : solutions $3T$-périodique. • : solutions quasi $3T$-périodique. ■ : solutions kT-périodiques avec $k = 11$ pour $\alpha = 15°$, $k = 14$ pour $\alpha = 14°$ et $k = 31$ pour $\alpha = 13°$.

Une visualisation globale de la zoologie des solutions observées est représentée dans la figure (4.3). La gamme d'angle d'incidence est restreinte au domaine $\alpha \in [5° : 15°]$, les plus petits angles d'incidence ayant été traités dans le chapitre précédent. La gamme de fréquence de battement est restreinte $f \in [0.1 : 0.35]$ pour se concentrer sur les basses

fréquences, où de nombreux phénomènes ont été observées. Le cas le plus usuel, qui est d'ailleurs le seul observé et décrit à petit angle d'incidence, est le cas de solutions périodiques dont la période caractéristique est la période de battement (représenté par des carrés blancs). Les sillages sont alors soit de type $2S$, soit de type $P + S$ selon la classification utilisé par Williamson *et al.* [24]. Les carrés gris et noirs représentent des solutions $2T$-périodiques et $3T$-périodiques respectivement. Les carrés rouges représentent des solutions périodiques dont la période est un grand multiple de T. Les ronds blancs, gris et noir représentent les solutions quasi T-périodiques, $2T$-périodiques et $3T$-périodiques respectivement. On peut noter que presque tous les phénomènes de modification de la périodicité de l'écoulement se situent entre $f = 0.1$ et $f = 0.2$, alors que la fréquence naturelle pour une aile fixe à ces angles d'incidence est dans la même gamme $f_n \in [0.13 : 0.17]$, comme montré dans la figure (4.2). Bien qu'il soit fort probable que cela ne soit pas une coïncidence, il est difficile de parler ici de phénomène de résonance, puisque qu'il n'y a pas un pic précis à la fréquence naturelle mais plutôt une plage de fréquences propices à l'apparition de phénomènes dynamiquement marquant. Outre son observation, nous n'avons pas plus d'explications sur cette concordance entre la fréquence naturelle de l'aile fixe et le domaine fréquentiel de battement avec plusieurs transitions. Il est d'ailleurs à noter que bien que l'on observe de nombreux changements de périodicité des solutions, cela ne conduit jamais à une résurgence de la période naturelle de l'aile fixe.

Dans la suite de cette section, on présente donc la classification de ces différentes solutions. Cette classification repose sur l'utilisation de sections de Poincaré et sur le calcul d'une distance caractérisant la périodicité des efforts. On distingue les solutions périodiques, des solutions quasi-périodiques, et des solutions périodiques à grande période.

4.2.1 Description des solutions périodiques

On commence dans cette section par décrire les solutions observées comme étant périodiques. Pour autant la période de ces solutions n'est pas obligatoirement la période de battement de l'aile. Dans la figure (4.4), on représente l'évolution temporelle de la traînée subie par l'aile sur dix périodes battements pour trois fréquences de battements ($f = 0.1$, $f = 0.15$ et $f = 0.25$) à un angle d'incidence $\alpha = 11°$. Les trois fréquences sont représentées par ordre décroissant. Dans le premier cas à $f = 0.25$, le signal observé semble être bien T-périodique. Dans le second cas à $f = 0.15$, un pic sur deux est plus important. Cela laisse penser que le signal est $2T$-périodique. Enfin dans le troisième cas à $f = 0.1$, on observe un motif qui se répète avec trois pics successifs ce qui laisse penser que le signal est $3T$-périodique. Cette observation qualitative du signal n'est cependant pas suffisante pour qualifier précisément cette périodicité. Pour cela, on commence par tracer dans la figure (4.5) la portance en fonction de la traînée pour les mêmes cas. Là encore, le tracé est effectué sur les mêmes dix périodes de battements. A chaque instant $t = t_0 + kT$, $k \in \mathbb{N}$, on représente par un cercle rouge la valeur instantanée des efforts. Dans le cas $f = 0.25$ en figure (4.5a), le signal forme une boucle fermée indicatrice d'un écoulement périodique et tous les cercles rouges sont superposés ce qui confirme que l'écoulement serait T-périodique. Dans le second cas $f = 0.15$ en figure (4.5b), le signal forme deux boucles. Il y a par ailleurs deux positions différentes pour les cercles rouges ce qui confirme que l'écoulement serait $2T$-périodique. Enfin dans le troisième cas $f = 0.1$ en figure (4.5c), il y a un système à trois boucles avec trois cercles rouges distincts. Cela confirme bien que l'écoulement est ici $3T$-périodique. Pour compléter et finir la caractérisation de la périodicité de ces trois solutions, on recourt aux sections de Poincaré introduites dans la section (1.3.1.1). On relève donc les valeurs des efforts à chaque période de forçage que l'on a représenté par des cercles rouges dans la figure (4.5). Leur évolution est représentée

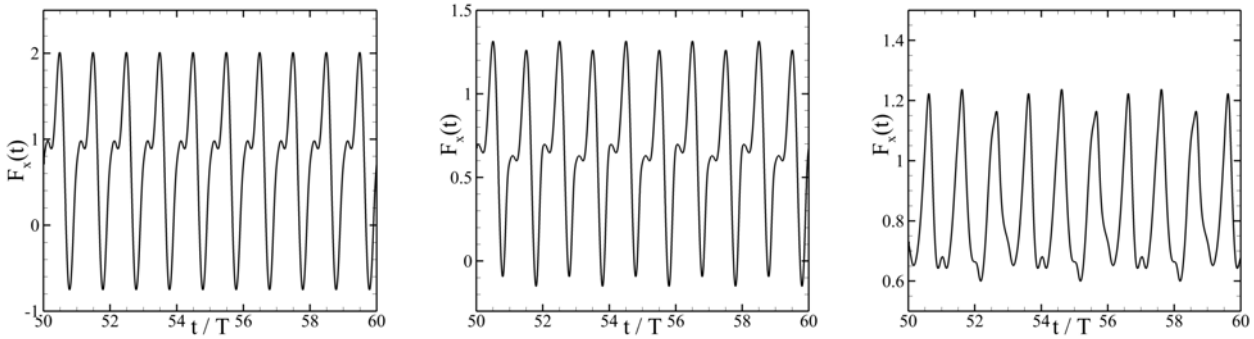


FIGURE 4.4 – Évolution de la traînée en fonction du temps pour une solution (a) T-périodique ($f = 0.25$), (b) $2T$-périodique ($f = 0.15$) et (c) $3T$-périodique ($f = 0.1$) à $\alpha = 11°$.

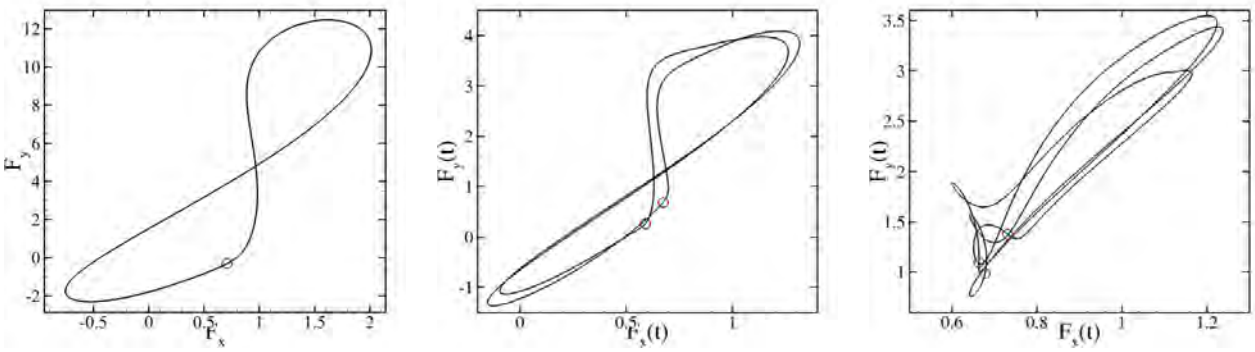


FIGURE 4.5 – Portance vs. traînée instantannée sur dix périodes de battements pour une solution (a) T-périodique ($f = 0.25$), (b) $2T$-périodique ($f = 0.15$) et (c) $3T$-périodique ($f = 0.1$) à $\alpha = 11°$. Le points rouge représente la valeur relevée une fois par période à l'instant $t_0 + kT$ choisi.

dans le plan portance-traînée en figure (4.6). Dans le cas $f = 0.25$ en figure (4.6a), les points noirs correspondent ainsi aux instants $t = t_0 + kT$, $k \in \mathbb{N}$. La valeur périodique des efforts convergent alors vers un attracteur représenté par un cercle plein en suivant la trajectoire indiquée par la flèche. Dans le cas $f = 0.15$ en figure (4.6b), deux courbes sont représentes en rouge et bleu, dont les points correspondent respectivement aux instants $t = t_0 + 2kT$ et $t = t_0 + (2k + 1)T$, $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, chaque courbe représente l'évolution de la valeur des efforts toutes les deux périodes. De la même manière que dans le cas précédent, chaque courbe converge vers un attracteur représenté par deux cercles pleins, bleu et rouge. Des zooms de chaque courbe sont indiqués pour mieux suivre la trajectoire des efforts. Il est à noter qu'avec la même représentation que dans le cas précédent (en ne distinguant pas les deux courbes et en suivant la valeur des efforts à chaque période), on aurait un aller-retour permanent entre les deux courbes bleus et rouges, ce qui rend la visualisation très difficile. Enfin dans le troisième cas $f = 0.1$ en figure (4.6c), il y a cette fois trois courbes de couleur bleu, rouge et vert qui correspondent respectivement aux instants $t = t_0 + 3kT$, $t = t_0 + (3k + 1)T$ et $t = t_0 + (3k + 2)T$, $k \in \mathbb{N}$. Cette fois, chaque courbe représente l'évolution des efforts toutes les trois périodes de battement. De la même manière que précédemment, chaque courbe converge vers un attracteur distinct représenté par un cercle plein. Si on avait représenté l'évolution à chaque période, on verrait un trajectoire triangulaire allant de la courbe bleu, à la rouge puis à la verte et

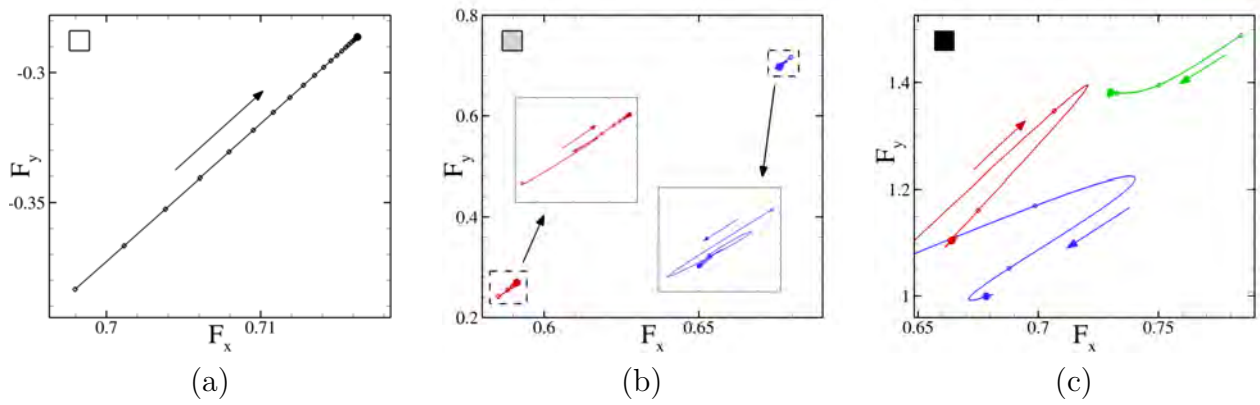


FIGURE 4.6 – Section de Poincaré pour une solution (a) T-périodique ($f = 0.25$), (b) $2T$-périodique ($f = 0.15$) et (c) $3T$-périodique ($f = 0.1$) à $\alpha = 11°$.

ainsi de suite. Dans chacun de ces trois cas, c'est la présence d'un attracteur vers lequel converge chaque courbe qui assure que les solutions présentées ici sont bien périodiques.

Dans la section suivante, des solutions sans attracteurs et que l'on qualifie de quasi-périodiques sont présentées. Un critère quantitatif supplémentaire est utilisé pour distinguer les solutions périodiques des solutions quasi périodiques.

4.2.2 Description des solutions quasi périodiques

Dans cette section, on s'intéresse à des solutions qui ne convergent pas vers un état périodique. Pour illustrer cela, on représente dans la figure (4.7) l'évolution des efforts fluides dans deux cas ($\alpha = 9°$ et $\alpha = 10°$) à la même fréquence de battement $f = 0.2$. Dans chaque cas, on représente la portance en fonction de la traînée sur dix périodes de battements (4.7a,b). Les forme des deux graphes est presque identique. On note cependant que dans le second cas (à $\alpha = 10°$), la courbe d'évolution des efforts est plus "épaisse". Il convient donc de déterminer si cette épaisseur est purement transitoire ou si cela reflète un écart de la solution à la périodicité. Pour déterminer cela, on utilise le critère d'écart à la périodicité d_{kT} défini dans la section (1.3.1.1). Cet écart sert à mesurer quantitativement l'écart entre k périodes successives. Dans le cas $k = 1$, la distance d_T représente donc l'écart des efforts à la périodicité. Au regard des figures (4.7a,b), la distance d_T est la distance entre deux cercles rouges successifs. Prendre une autre valeur de k permet d'évaluer l'écart des efforts à la kT-périodicité. L'évolution temporelle de la distance d_T est représentée dans la figure (4.7c,d) pour les deux cas précédents. Dans le cas $\alpha = 9°$, la distance d_T décroit rapidement, perd plusieurs ordres de grandeurs en quelques périodes. On note que la précision de stockage utilisée pour les efforts fait que le zéro est à 10^{-6}. Pour $\alpha = 10°$ par contre, la distance diminue rapidement puis stagne entre 10^{-1} et 10^{-2}. La norme des efforts est elle plutôt de l'ordre de 10^1. Si cette mesure de la distance stagne, c'est intrinsèquement que la solution associée n'est pas périodique, mais quasi-périodique avec une variation d'une période à une autre de très faible amplitude. On décide de choisir une valeur arbitraire de distance critique égale à 10^{-4}. Si la distance devient plus petite que cette valeur, on considère la solution comme périodique. Au contraire, si la distance ne descend pas en dessous de cette valeur, on qualifie la solution de quasi-périodique. Dans la figure (4.7), on considère donc les deux dernières solutions (b-c) comme quasi-périodiques.

Pour autant, les deux cas que nous venons de présenter forme une situation extrême où la distinction est difficile à faire. Dans la plupart des autres cas rencontrés, la quasi-périodicité de la solution est nettement plus claire, et ne nécessite souvent pas l'utilisation de la distance d_T pour être confirmée. C'est par exemple le cas de la solution présentée dans

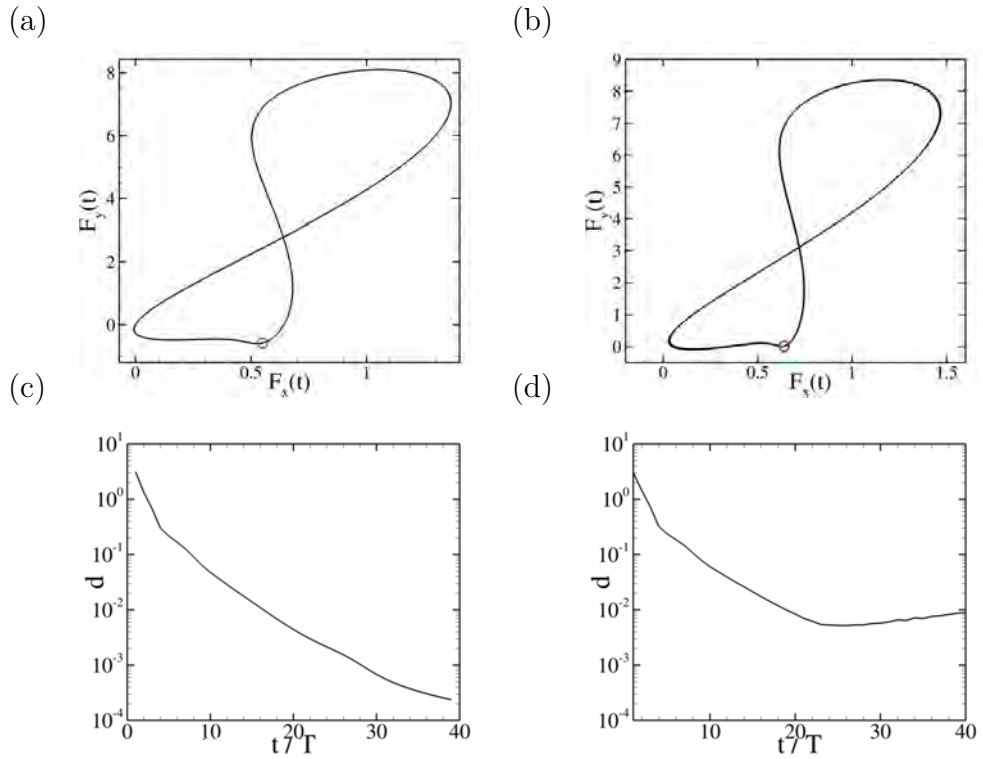


FIGURE 4.7 – (a-b) Portance vs. traînée instantanée. Le points rouge représente la valeur relevée une fois par période à l'instant $t_0 + kT$ choisi. (c-d) Évolution de la distance d_T entre deux solutions instantanées, espacées d'une période T (équation (1.59)) en fonction du nombre de périodes. (a,c) solution T-périodique ($\alpha = 9°$). (b,d) solution quasi T-périodique ($\alpha = 10°$). $f = 0.2$.

la figure (4.8). On y observe un cas quasi-périodique très marqué ($\alpha = 11°$ et $f = 0.2$). Le côté "épais" de la courbe apparaît clairement lorsqu'on trace la portance en fonction de la traînée (4.8a). On procède ensuite à une section de Poincaré de ce cas. Un zoom sur la manière dont évolue la valeur relevée à chaque période en figure (4.8b) montre que l'on semble converger vers un attracteur en s'enroulant autour de lui. Si on zoom une fois de plus dans la figure (4.8c), on se rend compte qu'au lieu de converger vers cet attracteur, la portance et la traînée continuent à évoluer de manière anarchique dans une très petite plage de valeur.

Le cas précédent traitait d'une solution quasi T-périodique. Pour autant, de la même manière que certaines solutions sont kT-périodiques, avec $k \neq 1$, on trouve également des solutions quasi kT-périodiques. C'est le cas de la solution présentée dans la figure (4.9), qui est quasi $2T$-périodique ($\alpha = 14°$ et $f = 0.15$). Dans la figure (4.9a), on a séparé les points à $t = t_0 + 2kT$ (bleu) et les points à $t = t_0 + (2k+1)T$ (rouge). Au lieu d'avoir les points rouges et bleus qui convergent vers deux valeurs uniques et distinctes comme dans le cas $2T$-périodique (4.6b), ils se déplacent de manière discontinue sur une ligne. Les figures (4.9b) et (4.9c) montrent des zooms sur les points bleus et rouges respectivement. Dans chaque cas, les positions pour $k = 1, 2$ et 3 sont indiquées. Avec des simulations numériques sur encore plus de périodes, on devrait avoir deux nappes de points qui se remplissent complètement.

Enfin, la figure (4.3) contenait un cas classé comme quasi-3T périodique ($\alpha = 10.5°$ et $f = 0.1$). Le tracé de la portance en fonction de ma traînée (4.10a) laisse voir une courbe épaisse, dont on déduit que la solution associée n'est pas périodique, mais quasi périodique. On reprend pour la section de Poincaré (4.10b) la même procédure que pour le cas $3T$-périodique (4.6a) à savoir des points bleus, rouges et verts qui correspondent

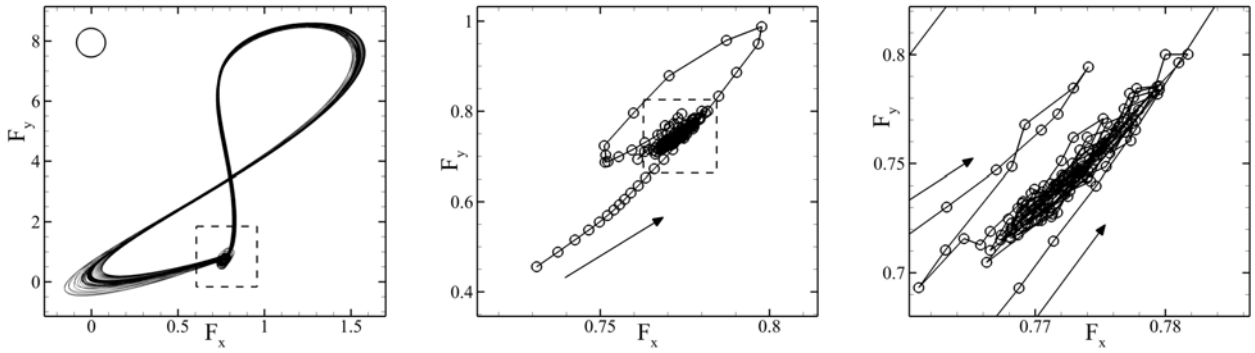


FIGURE 4.8 – Analyse d'une solution *quasi* T-periodique ($\alpha = 11°, f = 0.2$). (a) : Portance vs. traînée instantanée. (b-c) Sections de Poincaré. La figure (b) est un zoom de la figure (a). La figure (c) est un zoom de la figure (b).

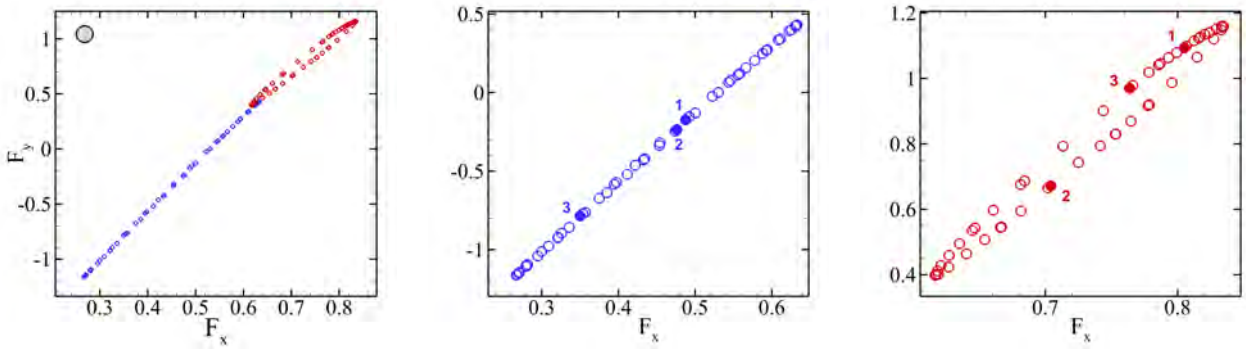
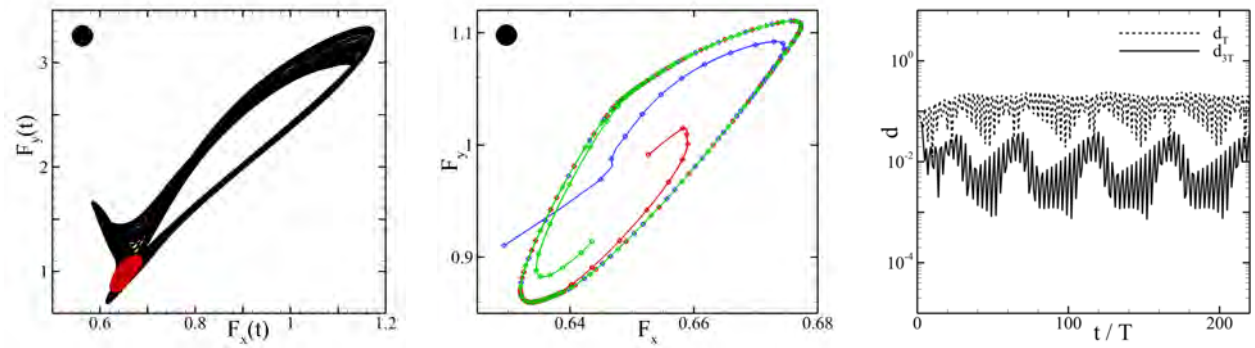


FIGURE 4.9 – Section de Poincaré pour une solution *quasi* $2T$-périodique ($\alpha = 14°, f = 0.15$). Les points bleus et rouges correspondent respectivement aux instants $t = t_0 + 2kT$ et $t = t_0 + (2k+1)T$, $k \in \mathbb{N}$. (b-c) : zoom de la figure (a) pour les instants (b) $t = t_0 + 2kT$ et (c) $t = t_0 + (2k+1)T$. Les positions pour $k = 1, 2$ et 3 sont indiquées dans les figures (b-c).

respectivement aux instants $t = t_0 + 3kT$, $t = t_0 + (3k+1)T$ et $t = t_0 + (3k+2)T$, $k \in \mathbb{N}$. Au lieu de converger vers trois attracteurs comme dans le cas $3T$-périodique, ils forment un tore, ce qui confirme le côté quasi $3T$-périodique. Cette observation est completée par le tracé des distances d_T et d_{3T} (4.10c) où on voit que celles-ci ne convergent jamais mais stagnent avec $d_T \approx 10^{-1}$ et $d_T \approx 10^{-3} - 2.10^{-2}$. Le fait que $d_{3T} > d_T$ est aussi un bon indicateur du caractère quasi $3T$-périodique de cette solution.

4.2.3 Description de solutions à très grandes périodes

En plus des solutions périodiques (qu'elles soient de périodes T, $2T$ ou $3T$) et des solutions quasi périodiques, on a également pu observé d'autres solutions semblant être périodiques mais dont la période caractéristique est beaucoup plus grande que la période de forçage. Ces solutions, bien que périodiques comme celles de la section (4.2.1) sont classées à part pour plusieurs raisons. Déjà, chaque cas avec une périodicité différente n'a été observé que pour un seul jeu de paramètres. Ensuite, bien que la solution semble bien périodique, les critères utilisés jusqu'à présent ne sont pas aussi concluants et laisse place à un doute sur la caractérisation de ces solutions. Enfin, des analyses de stabilité linéaire sont venues confirmées les caractérisations des solutions présentées précédemment. Pour



(a) (b) (c)

FIGURE 4.10 – Analyse d'une solution quasi $3T$-périodique ($\alpha = 10.5°$,$f = 0.1$). (a) Portance vs. traînée instantanée. (b) Section de Poincaré. Les points bleus, rouges et verts correspondent respectivement aux instants $t = t_0 + 3kT$, $t = t_0 + (3k+1)T$ et $t = t_0 + (3k+2)T$, $k \in \mathbb{N}$. (c) Évolution des distances d_T et d_{3T} en fonction du nombre de périodes.

des raisons que nous allons expliquer par la suite, nous n'avons pas pu faire de même pour les solutions avec une très grande période.

Comme montré dans la figure (4.3), trois cas différents avec une très grande période devant la période de battement ont été observés, à chaque fois pour $f = 0.2$. On présente ici l'analyse de la périodicité de deux de ces trois cas dans la figure (4.11). On trace l'évolution temporelle de la traînée (4.11a) pour $\alpha = 15°$ et $f = 0.2$. On voit apparaître un motif qui se reproduit au bout de onze périodes. Le même phénomène se produit également pour $\alpha = 14°$ à la même fréquence f (4.11d). Cependant la période du motif est alors de quatorze périodes. Pour valider cette grande périodicité que l'on identifie, on trace les sections de Poincaré associées (4.11b,e). Les points convergent bien vers 11 et 14 points fixes, tous représentés par des couleurs différentes. On a rajouté des zooms dans le cas $11T$-périodique pour mieux voir la convergence de quelques uns des points fixes. Enfin, on compare la distance d_T (en bleu) avec les distances d_{11T} et d_{14T} (en rouge) dans les figures (4.11c) et (4.11f) respectivement. A chaque fois, on constate que les distances aux grandes périodes sont systématiquement plus faible, mais ne converge pas en deçà du critère arbitraire que l'on avait choisi (à savoir une distance inférieur à 10^{-4}). Malgré cette non convergence des distances, il parait plus probable que celle-ci soit due à une somme d'approximations numériques, plutôt que les solutions soient quasi périodiques avec une variation très lente.

In fine, plusieurs transitions apparaissent et peuvent être étudiées séparément. Par fréquence f croissante, on a :

— une transition à $f = 0.1$ de T-périodique à $3T$-périodique
— deux transitions à $f = 0.15$: de T-périodique à $2T$-périodique puis à quasi $2T$-périodique
— une ou plusieurs transitions de T-périodique à quasi T-périodique puis kT-périodique avec $k >> 1$ pour $f = 0.2$

Dans la suite de ce chapitre, on va étudier ces différentes transitions séparément en montrant qu'elles résultent de bifurcations linéaires de l'état fondamental T-périodique, qui devient instable vis-à-vis de perturbations ayant des structures et des fréquences variables.

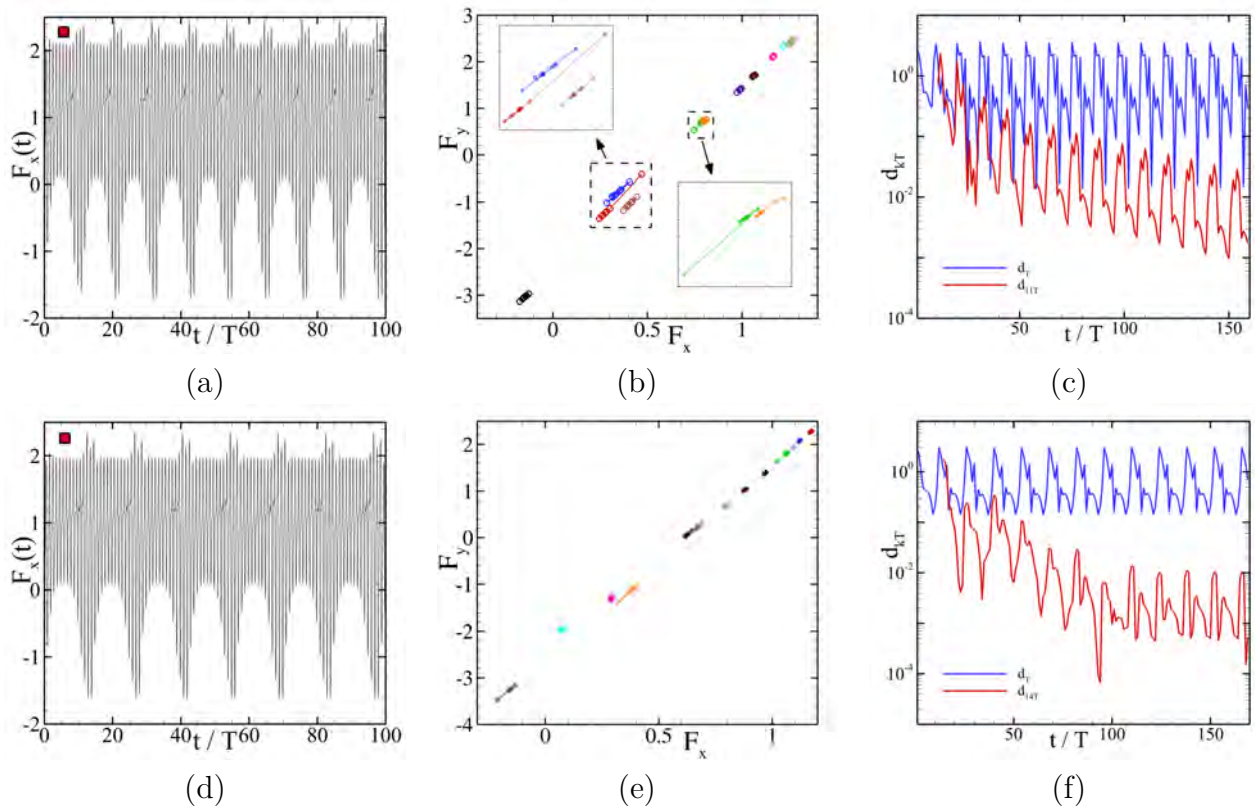


FIGURE 4.11 – (a,d) Traînée en fonction du temps. (b,e) Section de Poincaré. (c,f) Évolution temporelle des distances d_{kT}. (a-c) Solution $11T$-périodique ($\alpha = 15°$,$f = 0.2$). (d-f) Solution $14T$-périodique ($\alpha = 14°$,$f = 0.2$).

4.3 Analyse de la bifurcation vers un état $3T$-périodique à $f = 0.1$

Dans cette section, on se concentre sur l'analyse de la bifurcation observée à $f = 0.1$. La bifurcation n'ayant été observée qu'à cette fréquence particulière, celle-ci est considérée fixe dans toute la suite de cette partie.

4.3.1 Résultats de solutions non-linéaires

Pour des valeurs intermédiaires de l'angle d'incidence $5° \leq \alpha \leq 10°$, l'aile battante produit un sillage T-périodique avec une structure $P + S$ si on reprend la nomenclature utilisée par Williamson & Roshko [24]. A chaque période de battement une paire de tourbillons contra-rotatifs ainsi qu'un tourbillon supplémentaire sont produit. Ce tourbillon supplémentaire a une vorticité négative (sens de rotation horaire). Pour de plus grandes valeurs de α, les solutions de simulations non-linéaires sont $3T$-périodiques. En plus de la fréquence de forçage, l'écoulement et les efforts fluides exhibent une fréquence secondaire à $f/3$. Ce changement de périodicité n'est cependant pas associé à une modification de la structure du sillage qui reste $P+S$. L'évolution temporelle du sillage sur trois périodes est représentée dans la figure (4.12a-d), où une carte de la vorticité instantanée est indiquée une fois par période. Dans chaque instantané, l'aile est alors dans sa position centrale ($\theta(t) = 0°$) en phase ascendante.

Une observation à l'oeil nu des instantanés à $t = t_0$ (4.12a) et $t = t_0 + 3T$ (4.12d) ne permet pas de les distinguer. En revanche, de légères variations peuvent être observées sur les instantanés à $t = t_0 + T$ (4.12b) et $t = t_0 + 2T$ (4.12c). Pour mieux comprendre

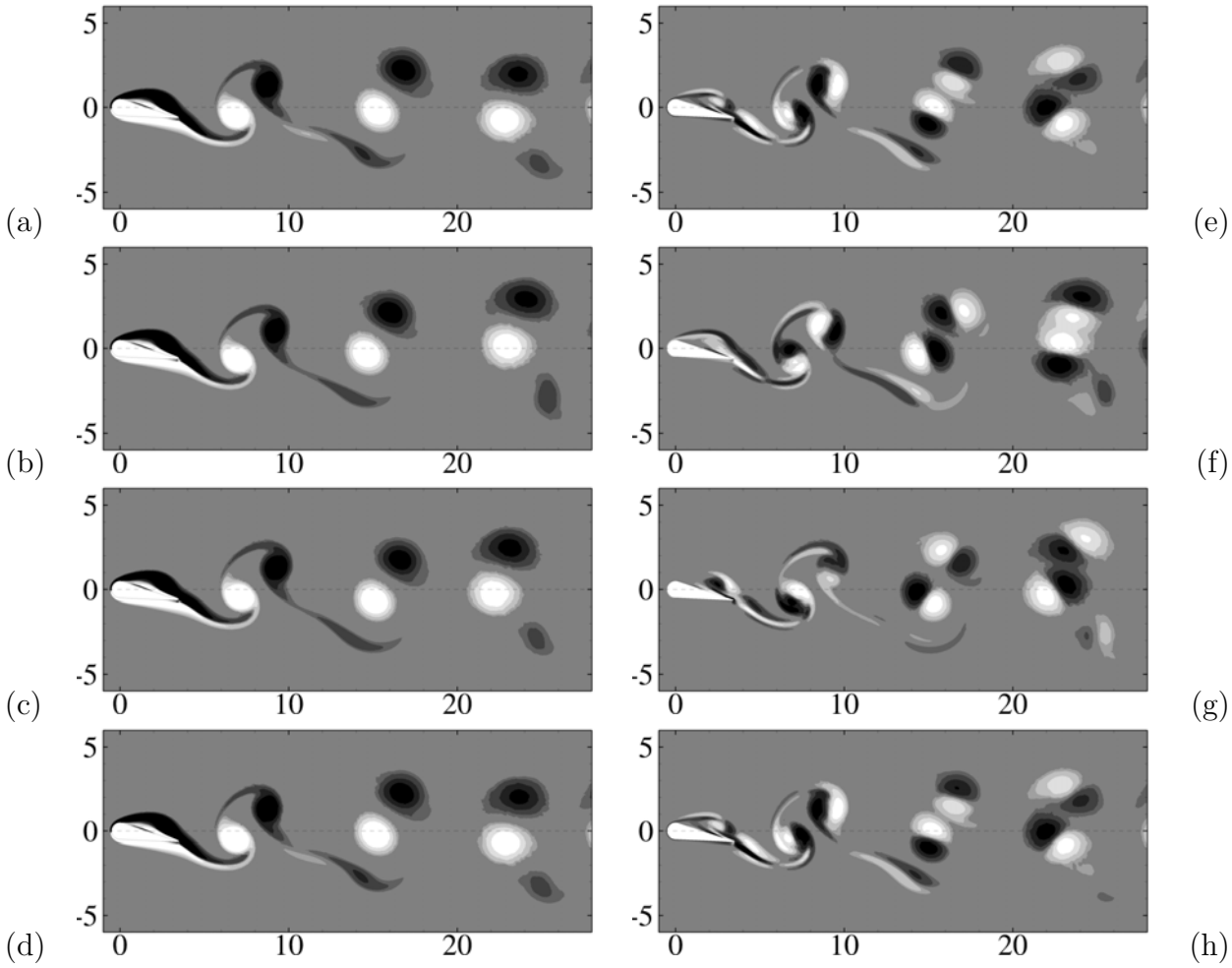


FIGURE 4.12 – (a-d) Vorticité instantanée $\omega_z(t)$ et (e-h) différence de vorticité $\omega_z(t_0) - \omega_z(t_0 - T)$ pour $f = 0.1$ et $\alpha = 10.5°$. (a,e) $t = t_0$, (b,f) $t = t_0 + T$, (c,g) $t = t_0 + 2T$ et (d,h) $t = t_0 + 3T$.

ces variations, on représente dans les figures (4.12e-h) les différences de vorticité entre deux périodes successives. On voit apparaître des structures dipolaires aux positions où se trouvent les tourbillons dans les simulations non-linéaires. De la même manière que dans le chapitre précédent, on peut analyser ces structures dipolaires comme des déplacements de chacun des tourbillons, ou plus précisément comme une translation de leur centroïde [119]. D'une période à l'autre, les tourbillons dans le sillage de l'aile sont donc légèrement déplacés. Les instantanés de différence de vorticité inter-périodique sont également non nuls autour de l'aile. Cela est finalement assez logique, vu que cette transition s'observe également par une modification des efforts subis par l'aile. En revanche, on peut se demander si la transition s'opère en premier lieu dans le sillage, et que cela impacte rétroactivement la dynamique de l'écoulement autour de l'aile, ou si au contraire la transition s'opère en premier lieu autour de l'aile et affecte l'intégralité du sillage par la suite.

Pour analyser cette bifurcation d'une solution T-périodique à une solution $3T$-périodique, on se propose dans un premier temps de déterminer la solution T-périodique lorsque celle-ci est instable, et de la comparer à la solution $3T$-périodique stable. Dans un second temps, on pourra procéder à une analyse de stabilité de Floquet de la solution T-périodique instable pour identifier le mode responsable de la bifurcation.

4.3.2 Calculs de champs de base

Pour calculer la solution T-périodique lorsqu'elle est instable, on utilise la méthode de stabilisation détaillée dans la section 2. Pour rappel, cette méthode analytique permet de forcer la solution des équations de Navier-Stokes à être T-périodique, en ajoutant un terme d'amortissement aux équations, qui va s'annuler lorsque la solution désirée est atteinte.

On représente dans les figures (4.13a-b) des instantanés à $t = t_0$ et $t = t_0 + T$ de la solution $3T$-périodique stable obtenue par les simulations non-linéaires directes. En parallèle, on rajoute dans les figures (4.13c-d) aux mêmes instants la solution T-périodique instable, pour la même valeur de α. On remarque que la structure du sillage est la même et que la stabilisation n'a eu qu'un petit effet sur celle-ci. Cela confirme notre analyse des figures (4.12e-h) où les différences de vorticité entre chaque période laissaient penser que l'aspect $3T$-périodique du sillage ne s'observe que dans de légers décalages des tourbillons d'une période à une autre. Une fois la solution $3T$-périodique stabilisée vers une solution T-périodique, ces décalages disparaissent complètement.

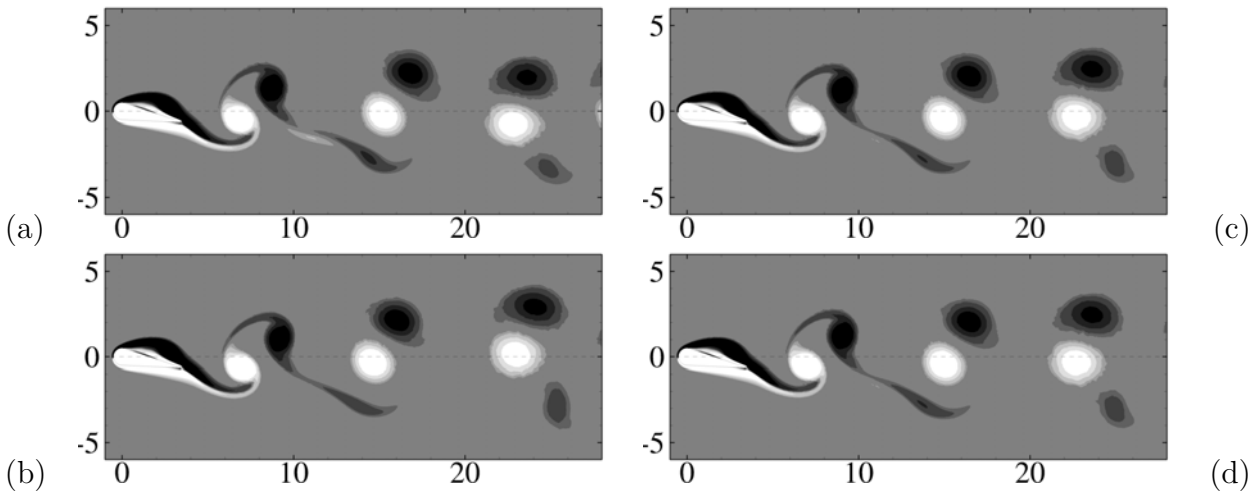
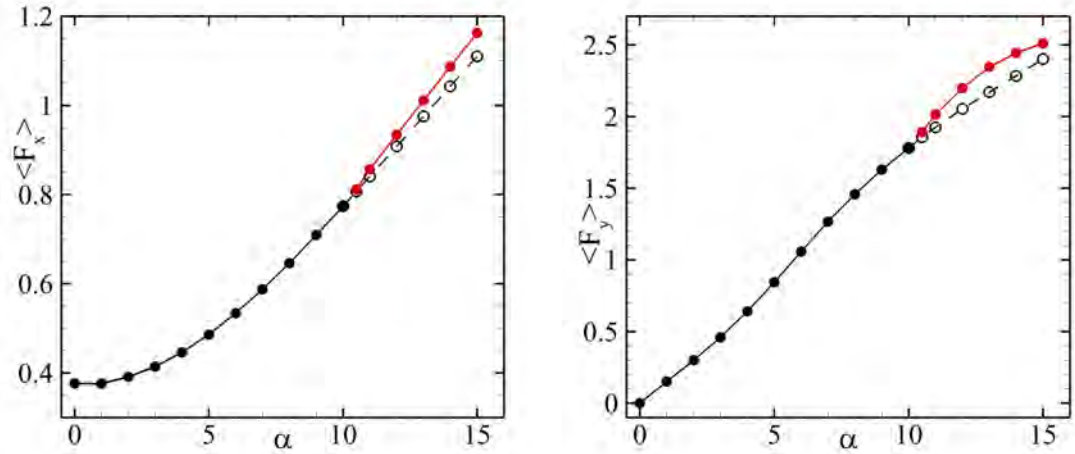


FIGURE 4.13 – Vorticité instantanée de (a,b) la solution $3T$-périodique et de (c,d) la solution stabilisée T-périodique pour (a,c) $t = t_0$ et (b,d) $t = t_0 + T$ pour $f = 0.1$ ($T = 10$) et $\alpha = 10.5°$.

En ce qui concerne les efforts fluides, les signaux temporels deviennent eux aussi T-périodiques et la fréquence secondaire $f/3$ et tous ses multiples n'apparaissent plus dans les Fast Fourier Transform de ces signaux temporels. En conséquence de cela, les efforts moyens en temps sont affectés par ce changement de périodicité. On peut ainsi représenter dans la figure (4.14) l'évolution en fonction de α (toujours pour $f = 0.1$) de la traînée moyenne (4.14a) et de la portance moyenne (4.14b). Les solutions T-périodiques sont indiquées avec des cercles noirs : pleins lorsque la solution est stable, et creux lorsque la solution est instable. Les solutions $3T$-périodiques (qui sont systématiquement stables) sont indiquées en cercles pleins rouges. On voit donc que la transition observée est également liée à une augmentation de la traînée et de la portance moyenne. Elle n'est donc pas souhaitable d'un point de vue performances. Cet aspect performance reste cependant à relativiser au regard du fait qu'on injecte de l'énergie en faisant battre l'aile alors que celle-ci se retrouve in fine dans un régime fortement traînant.

Maintenant qu'une solution T-périodique a été déterminée pour toutes les valeurs de α qui nous intéressent, une analyse de stabilité linéaire de Floquet peut être conduite pour déterminer le ou les modes responsables de la bifurcation observée.

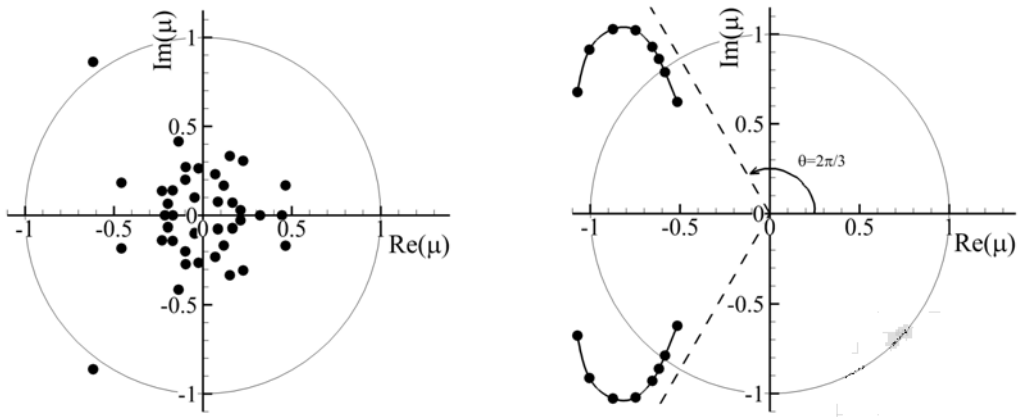


(a) (b)

FIGURE 4.14 – Évolution de la traînée moyenne (a) et de la portance moyenne (b) en fonction de l'angle d'incidence pour $f = 0.1$. Solution T-périodique stable (•), instable (○) et solution $3T$-périodique (•).

4.3.3 Analyse de Floquet de la solution T-périodique

On trace dans la figure (4.15a) le spectre des multiplicateurs de Floquet pour $f = 0.1$ et $\alpha = 11°$. On voit que dans ce cas, un paire de modes complexes conjugués est instable et toutes les autres valeurs propres calculées sont stables. L'évolution de cette paire de modes avec l'angle d'incidence moyen est représenté dans la figure (4.15b). La paire de modes complexes conjugués devient instable pour $10° < \alpha < 10.5°$. Par interpolation, on obtient un multiplicateur de Floquet à la bifurcation qui vaut $\mu \approx (-0.59096, \pm 0.80552) \approx exp(2.20374i)$ à un angle $\alpha \approx 10.15°$. On voit qu'au travers de son évolution, l'argument de ce mode est très proche de $2i\pi/3$, ce qui est représenté dans la figure (4.15b). Ce cas de figure est caractéristique d'un mode avec un argument qui est un multiple irrationnel de π. Ainsi, la déstabilisation du champ de base par cette paire de modes complexes conjugués ne devraient pas mener à un état périodique dont la période est un multiple de la période fondamentale T du champ de base. Linéairement, on devrait obtenir un état quasi-périodique, avec deux fréquences caractéristiques : f et $f_2 \approx f/3$.



(a)$f = 0.1$, $\alpha = 10.5°$ (b) $f = 0.1$

FIGURE 4.15 – (a) Spectre du multiplicateur de Floquet dans un cas instable ($\alpha = 10.5°$ et $f = 0.1$). (b) Valeur propre du mode dominant pour des valeurs croissantes de α à $f = 0.1$.

Pour mieux comprendre ce qui se passe, on compare dans la figure (4.16) la fréquence secondaire des simulations non linéaires (cercles creux) avec l'argument réduit du mode de Floquet dominant (cercles pleins). Les fréquences indiquées sont adimensionnées par la fréquence de battement f. Le cercle creux à $\alpha = 10.15°$ a été ajouté *a posteriori* puisqu'à la bifurcation, la fréquence des simulations non linéaires est par définition égale à la fréquence du mode marginal. Pour de plus grandes valeurs de α, les simulations non linéaires se synchronisent à la fréquence $f/3$ représentée par une ligne continue dans la figure (4.16) tandis que l'argument du mode dominant s'éloigne de cette fréquence. On en déduit que cet accrochage est forcément du à des effets non linéaires.

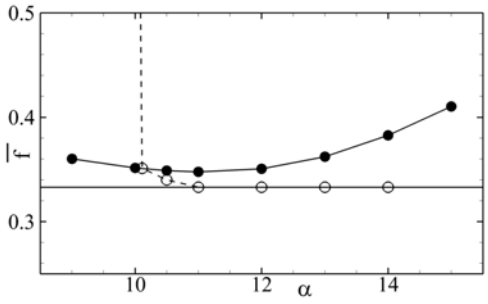


FIGURE 4.16 – Comparaison de la fréquence secondaire de la solution non-linéaire (○) avec l'argument réduit du mode de Floquet (●) en fonction de α. Les fréquences sont adimensionnées par la fréquence de battement f.

On peut désormais s'intéresser à la structure spatiale du mode dominant. On représente ainsi dans la figure (4.17) l'évolution temporelle du mode de Floquet T-périodique, juste après la bifurcation. Celui-ci est constitué de plusieurs dipôles de tourbillons contra-rotatifs, et ressemble étonnamment aux différences de vorticité d'une période à l'autre dans la figure (4.12e-h). En effet, il est surprenant que le mode, que l'on peut traduire par la perturbation instantanée que subit le champ de base, ait la même structure spatiale que la différence entre deux périodes successives. On remarque que ces dipôles de tourbillons sont présents à la position de chacun des tourbillons du champ de base, qu'ils fassent partie des paires de tourbillons contra-rotatifs, ou du tourbillon solitaire émis à chaque période.

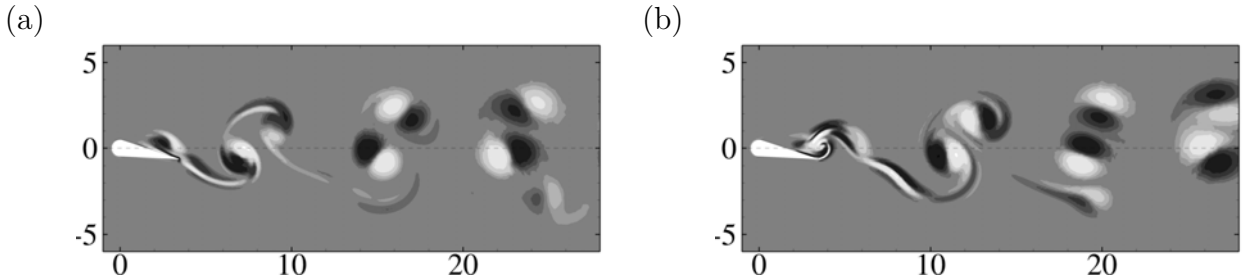


FIGURE 4.17 – Vorticité instantanée de la perturbation linéaire à (a) $t = 0$ et (b) $t = T/2$ pour $f = 0.1$ et $\alpha = 10.5°$.

Pour mieux comprendre l'effet du mode de Floquet sur le champ de base, on suit dans la figure (4.18) le mouvement d'un dipôle de tourbillons contra-rotatifs du champ de base (images du haut). On se place dans un référentiel attaché à ce dipôle dont on représente la structure sur une période de battement, tous les quarts de période. Aux mêmes instants et positions, on représente également la structure du mode de Floquet dominant sur la même figure (images du bas). Chaque tourbillon du champ de base se superpose ainsi à un dipôle de tourbillons contra-rotatifs du mode de Floquet. Comme dans le cas de la

déviation du sillage d'une aile battante [66], on peut analyser cela comme une successions de modes de déplacements qui ont pour effet de déplacer les tourbillons du champ de base. La direction de ce déplacement se détermine qualitativement en additionnant la contribution de la vorticité du champ de base avec la vorticité du mode de Floquet [119]. Une détermination quantitative de cette direction est conduite par la suite. Le déplacement est ainsi représenté pour chaque dipôle par une flèche rouge. Il faut préciser que dans la figure (4.18), la longueur des flèches rouges est arbitraire et n'indique pas l'amplitude du déplacement. Á chaque instant, les deux tourbillons contra-rotatifs du champ de base (positif et négatif) sont déplacés dans une direction sensiblement identique. D'autre part, la direction de déplacement des tourbillons semble tourner au cours du temps, dans le sens horaire. En ce qui concerne le tourbillon "solitaire" du champ de base, on remarque un comportement différent. Celui-ci subit aussi un effet de déplacement mais dont la direction est elle plutôt tourner vers l'amont. La rotation de ce mode se comprends comme si chaque dipôle du champ de base se comportait comme un corps rigide qui subit une poussée infinitésimale dont la direction tourne autour du temps.

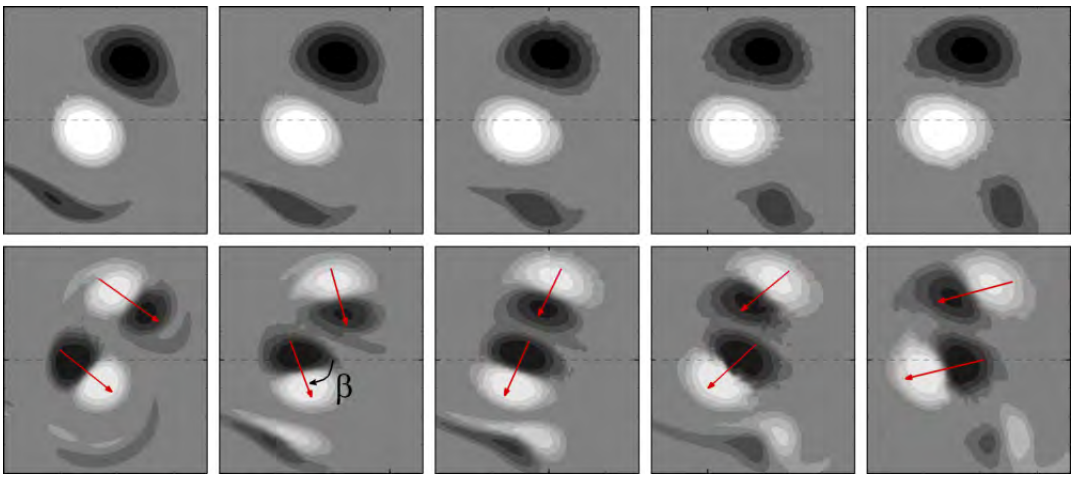


FIGURE 4.18 – Suivi au cours de son mouvement de l'évolution en temps (haut) d'un dipôle du champ de base et (bas) de la rotation des dipôles du mode de Floquet à la même position aux instants $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, $t = 3T/4$, $t = T$.

On cherche maintenant à déterminer quantitativement la direction de ce déplacement infinitésimal que le mode de Floquet provoque sur les tourbillons du champ de base. On définit l'angle $\beta(t)$ comme l'angle que forme la direction de déplacement du mode de Floquet avec l'horizontal à l'instant t (4.18). On trace dans la figure (4.19) l'évolution temporelle sur trois périodes de battement de cet angle β pour les deux tourbillons (positif et négatif) du champ de base dont on suit le mouvement dans la figure (4.18). La valeur de $\beta(t)$ est bien évidemment congrue à 360°. L'échelle verticale de la figure (4.19) est choisie pour ne pas qu'il n'y ait pas de fracture. L'évolution temporelle de β est linéaire avec le temps et une régression à partir des points relevés permet de construire la loi temporelle suivante

$$\beta(t/T) = a_1 \frac{t}{T} + b_1 \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} a_1 &= -116.9° \\ b_1 &= 426.7° \\ R^2 &= 0.9964 \end{cases} \tag{4.3}$$

Le coefficient a_1 correspond à la vitesse de rotation angulaire de la direction du déplacement provoqué par chaque dipôle du mode de Floquet sur chaque tourbillon du champ de base. Sa valeur est proche de l'argument du multiplicateur de Floquet dans le même cas (125.6°). La différence entre ces deux valeurs est par ailleurs probablement lié à la précision de la mesure de l'angle β (voir section 1.3.2.1). Ces résultats nous permettent

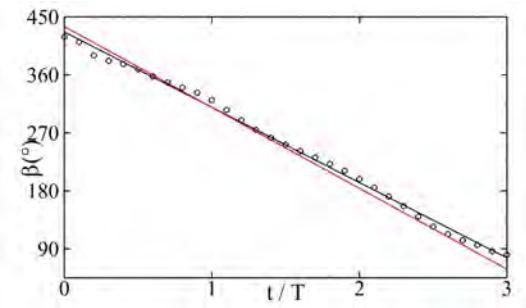


FIGURE 4.19 – Évolution de β en fonction du temps. La droite noire est obtenue par régression linéaire. La droite rouge a pour coefficient directeur l'argument du mode de Floquet dominant ($-125.6°$).

d'en déduire que l'argument du multiplicateur de Floquet correspond à la vitesse de rotation des dipôles du mode. C'est cette rotation qui est responsable du changement de périodicité vers un état dont la période est triplée.

L'analyse de Floquet a permit d'identifier une paire de modes complexes conjugués, d'arguments réduits proches de $f/3$. L'analyse de leur structure spatiale montre qu'ils provoquent un déplacement des tourbillons dans le sillage de l'aile et que la direction de ce déplacement tourne dans le sens horaire à la même fréquence réduite que le mode. Ces observations permettent de conclure que c'est bien ce mode qui est responsable de la bifurcation observée en analysant les simulations non linéaires. Par contre, celles-ci ont montré que au delà de la bifurcation, les écoulements deviennent $3T$-périodique, alors que les arguments linéaires apportés ici ne permettent pas de justifier de cette synchronisation. Cela implique donc que des effets non linéaires apparaissent rapidement après la bifurcation et sont responsables de la re-synchronisation de la période secondaire avec un multiple de la période fondamentale de battement. Ces effets sont étudiés dans la section suivante à travers une analyse des perturbations non linaires.

4.3.4 Analyse de la perturbation non-linéaire

Pour analyser les effets non linéaires, on commence par construire les perturbations linéaires et non linéaires.

$$\text{perturbation linéaire : } \boldsymbol{u}'(\boldsymbol{x},t) = \hat{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x},t)e^{\lambda t} \tag{4.4a}$$

$$\text{perturbation non linéaire : } \boldsymbol{u}''(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t) \tag{4.4b}$$

La perturbation linéaire est construite à partir du mode de Floquet en prenant en compte le déphasage du à la partie imaginaire de l'exposant de Floquet. Dans le cas étudié ici, le taux d'amplification qui correspond à la partie réelle de l'exposant de Floquet est négligé. Cela permet ainsi de ne visualiser que l'effet du déphasage temporel qui nous intéresse. Sa vorticité instantanée est représentée dans la figure (4.20a-d) (4.20a-d). Aux mêmes instants,La perturbation non linéaire est représentée dans la figure (4.20e-h). Celle-ci est définie comme la différence entre la solution non linéaire, obtenue par simulation directe, et le champ de base T-périodique, obtenu en stabilisant la solution non linéaire. Par construction, elle a donc la même périodicité que la solution non linéaire : presque $3T$-périodique pour $\alpha = 10.5°$ et $3T$-périodique pour les plus grandes valeurs de α. La représentation de la perturbation non linéaire n'est pas normée, ce qui implique que le niveau de couleur est le même que pour la solution non linéaire et le champ de base qui ont été montré auparavant (4.13).

La perturbation linéaire est visuellement quasiment identique au mode de Floquet associée. L'apport du déphasage ne se voit que faiblement, en observant une légère rotation

des dipôles dans le sillage. Au premier regard, la structure spatiale de la perturbation non linéaire ressemble à celle de la perturbation linéaire. On note la présence de plusieurs structures dipolaires, localisées aux mêmes positions que dans le cas linéaire, et qui doivent donc correspondre à la présence de tourbillons. En gardant en tête le rôle de déplacement de ces structures dipolaires, on peut analyser leur présence comme des décalages de position entre les tourbillons du sillage de la solution non linéaire, et les tourbillons du sillage du champ de base. On remarque qu'à certaines positions ($x \approx 25$ à $t = t_0$ et $t = t_0+3T$, $x \approx 10$ à $t = t_0+2T$ et $x \approx 15$ à $t = t_0$) les dipôles sont de très faibles intensités. Cela implique qu'à ces instants et positions, les tourbillons de la solution non linéaire et du champ de base sont superposés. En suivant l'évolution de ces positions au cours du temps, on se rend compte que cela se produit une fois toutes les trois périodes et se déplace vers l'aval. Toutes les trois périodes, la position de la paire de tourbillons émis dans le sillage de l'aile n'est pas affecté par la bifurcation. En revanche, les deux autres paires émises sont fortement déplacées comme on peut le constater en regardant l'évolution temporelle des structures dipolaires à $x \approx 15$. Enfin, on constate de légères différences entre les instants $t = t_0$ et $t = t_0 + 3T$, ce qui confirme que ce cas ($\alpha = 10.5°$) est bien presque $3T$-périodique.

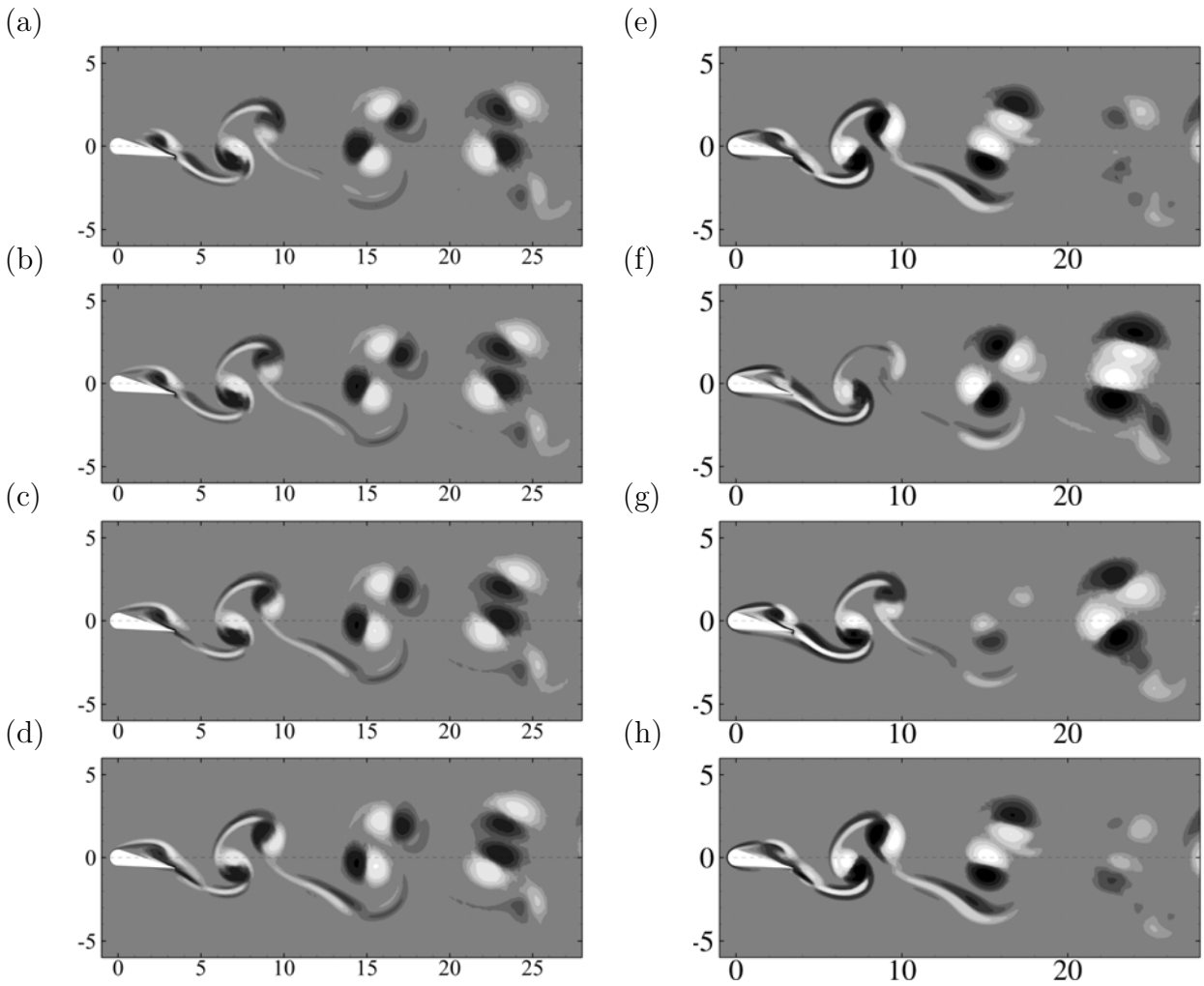


FIGURE 4.20 – Vorticité instantanée de la perturbation (a-d) linéaire et (e-h) non-linéaire à (a,e) $t = t_0$, (b,f) $t = t_0 + T$, (c,g) $t = t_0 + 2T$ et (d,h) $t = t_0 + 3T$ pour $f = 0.1$ et $\alpha = 10.5°$.

On définit une norme pour la perturbation non-linéaire de la manière suivante

$$||\boldsymbol{u}''|| = \frac{1}{3T} \int_{t_0}^{t_0+3T} \sqrt{\int_{\Omega_f} (\boldsymbol{u}''(\boldsymbol{x},t))^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}t \tag{4.5}$$

où la vitesse fluide est intégrée dans tout le domaine fluide pendant trois périodes de battements. L'évolution de la norme (4.5) en fonction de α est représentée dans la figure (4.21). Le point à la bifurcation ($\alpha = 10.1°$) a été rajouté *a posteriori*. On peut par ailleurs noter que cette norme n'est pas rigoureusement juste pour les cas proches de la bifurcation qui ne sont pas synchronisés à $3T$. La moyenne temporelle en est alors forcément affectée. Cela ne concerne ici qu'un seul cas, à $\alpha = 10.5°$, pour lequel la même définition a été gardée, par simplicité. L'évolution de cette norme permet de conclure à une bifurcation supercritique de l'écoulement.

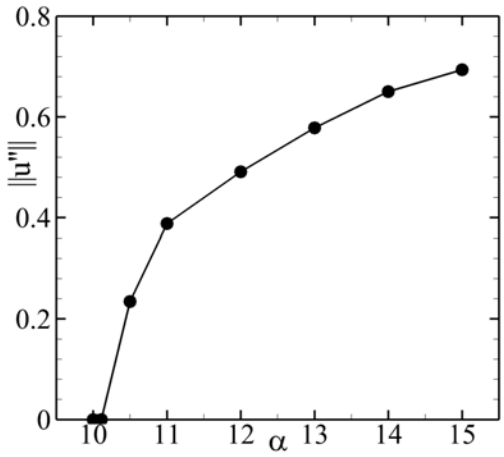


FIGURE 4.21 – Norme de la perturbation non linéaire en fonction de α pour $f = 0.1$.

Au vu de l'évolution de la norme de la perturbation non linéaire avec α, on peut faire l'approximation que proche de la bifurcation, on a $||\boldsymbol{u}''|| \propto \sqrt{\alpha - \alpha_c}$, avec $\alpha_c \approx 10.15°$. Pour de plus grandes valeurs de α, on observe un effet de saturation. Idéalement, il faudrait conduire des simulations supplémentaires entre $\alpha = 10°$ et $\alpha = 12°$ pour avoir une meilleure description de l'évolution de $||\boldsymbol{u}''||$. On peut envisager cela, notamment dans le but de construire un modèle faiblement non linéaire de cette bifurcation [126, 108].

En conclusion, on a identifié l'existence d'un mode linéaire dont l'argument est proche de $2\pi/3$. Ce mode est responsable de la bifurcation de la solution T-périodique vers une solution quasi $3T$-périodique. Cette bifurcation prend acte par un déplacement périodique des dipôles du sillage de la solution T-périodique. Du aux effets non linéaires, il y a un accrochage peu après la bifurcation vers un état $3T$-périodique, ou les non-linéarités supprime presque l'action du mode linéaire, un dipôle sur trois, sans changer l'action de déplacement, pendant les deux autres périodes suivantes. In fine, cette bifurcation a une influence faible à la fois sur la structure globale du sillage, mais également sur les efforts moyens subis par l'aile.

4.4 Analyse de la bifurcation subharmonique à $f = 0.15$

Dans cette section, on analyse cette fois les bifurcations observées à $f = 0.15$. De la même manière que dans la partie précédente, la fréquence de battement est fixe dans toute cette partie.

4.4.1 Résultats de simulations non-linéaires

Pour des valeurs intermédiaires de $5° \leq \alpha \leq 10°$, l'écoulement est T-périodique. La topologie du sillage est du type $P+S$ (figure (4.22) comme dans la partie précédente, avec une paire de tourbillons contra-rotatifs qui dévient vers le bas, et une nappe de vorticité négative (rotation dans le sens horaire) qui se déplace dans la direction de l'écoulement. Les deux tourbillons à vorticité négative se décrochent en fait en même temps au bord de fuite mais se séparent en deux partie, l'une des deux formant une paire avec le tourbillon à vorticité positive (en blanc), décroché juste avant.

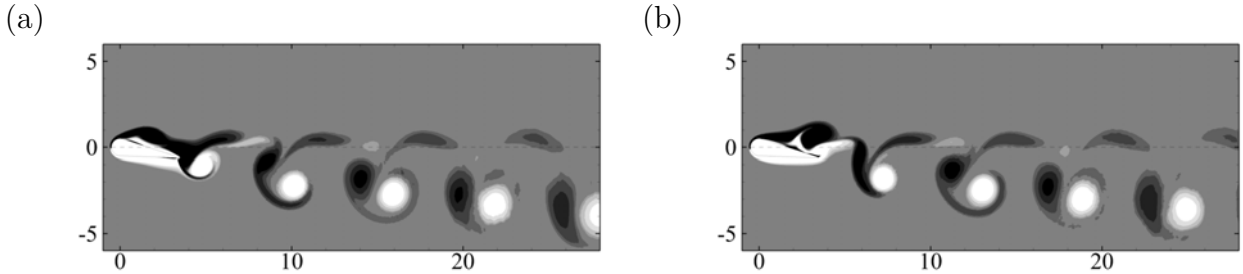


FIGURE 4.22 – Vorticité instantanée de l'écoulement T-périodique ($f = 0.15$, $\alpha = 10°$). (a) $t = t_0$. (b) $t = t_0 + T/2$.

Lorsqu'on augmente la valeur de α, le sillage devient $2T$-périodique pour $\alpha > 10.5°$. On a cette fois une forte modification de la topologie de l'écoulement. Celle-ci est représenté dans la figure (4.23a-c). Juste après le bord de fuite, le sillage conserve encore une topologie de la forme $P + S$, mais change rapidement vers une autre topologie. La nappe de vorticité négative se met à interagir avec la paire de tourbillons contra-rotatifs pour former un tripôle de vorticité (négatif-positif-négatif ou NPN). Cette structure ne semble pas correspondre à celles décrites dans les travaux de Williamson [24] ou de Schnipper *et al.* [112]. La différence de vorticité entre deux périodes successives est représentée dans les figures (4.23d-f) aux mêmes instants. Les niveaux de couleurs sont les mêmes ce qui montre que l'écart à la périodicité est très important. D'autre part, on peut remarquer que cet écart n'est pas seulement conséquent là où se trouve le tripôle, mais également à l'extrados de l'aile et aux endroits où la modification de la structure du sillage est moins évidente. Par exemple, si on regarde l'évolution du sillage à la position $x = 10$ sur les figures (4.23a-c), la modification des tourbillons d'une période à l'autre ne semble pas importante mais conduit néanmoins à une différence de vorticité inter-périodique importante.

Enfin, pour des valeurs de $\alpha > 13°$, l'écoulement perd sa périodicité et devient quasi $2T$-périodique, comme cela a été expliqué dans la section (4.2.2). Entre les deux bifurcations, le sillage a déjà été largement modifié. Pour illustrer cela, la solution $2T$-périodique à $\alpha = 13°$ est représenté dans la figure (4.24). On remarque alors que les tourbillons s'assemblent plus ou moins par paires, une période sur deux. Le tourbillon à vorticité négative (en noir) est alors largement déformé et s'enroule autour du tourbillon à vorticité positive (en blanc). D'autre part, le sillage a de plus petits angles d'incidence possédait encore une structure assez continue, et les tourbillons émis sur deux périodes successives étaient assez proche dans le sillage. Ce n'est plus le cas désormais et on observe une émission discontinue de tourbillons dans le sillage. Une partie des dipôles de tourbillons contra-rotatifs sont éjectés du sillage (vers le haut) et quittent complètement la direction principale du sillage (légèrement vers le bas).

Après la seconde bifurcation, la solution stable, représentée toute les deux périodes, perd sa périodicité (4.25a-c). La position des tourbillons dans le sillage est largement modifiée. D'autre part, les instantanées à $t = t_0$ et $t = t_0 + 4T$ sont très similaires,

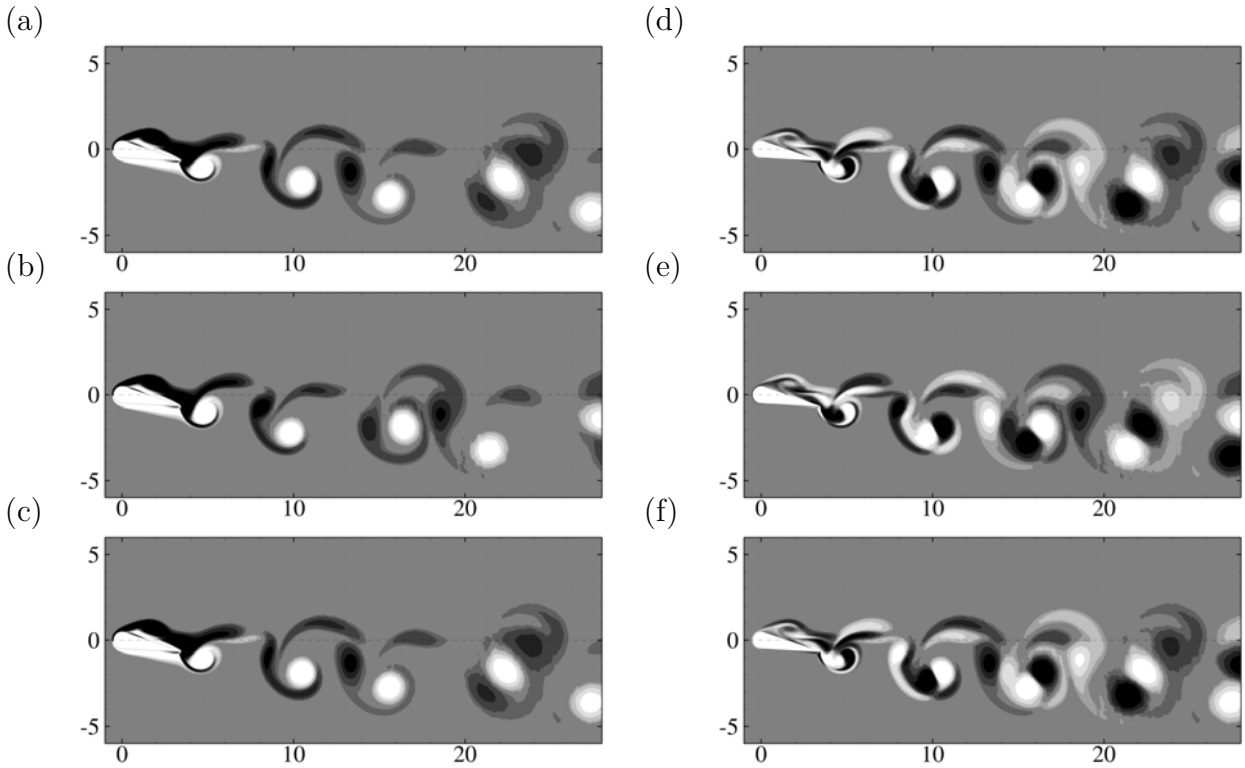


FIGURE 4.23 – (a-c) Vorticité instantanée $\omega_z(t)$ et (d-f) différence de vorticité $\omega_z(t) - \omega_z(t-T)$ pour $f = 0.15$ et $\alpha = 11°$. (a,d) $t = t_0$, (b,e) $t = t_0 + T$ et (c,f) $t = t_0 + 2T$.

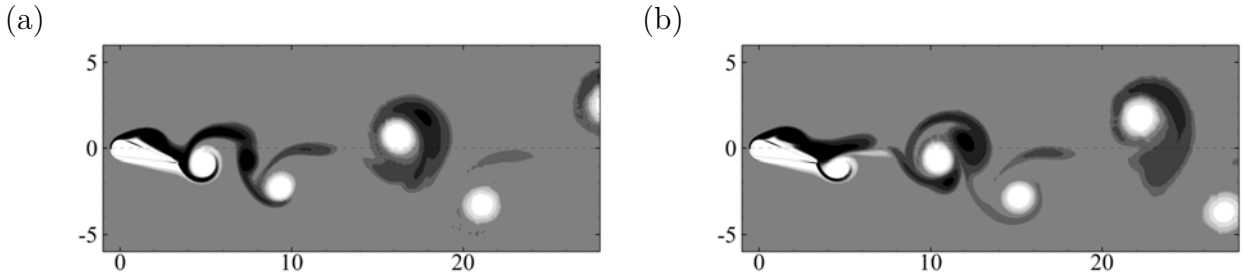


FIGURE 4.24 – Vorticité instantanée de l'écoulement $2T$-périodique ($f = 0.15$, $\alpha = 13°$). (a) $t = t_0$. (b) $t = t_0 + T$.

ce qui peut laisser penser que la solution serait plus proche d'être $4T$-périodique que $2T$-périodique. Il se trouve effectivement que l'écart à la $4T$-périodicité est plus petit que l'écart à la $2T$-périodicité après cette seconde bifurcation. Cependant, ces solutions ne sont de tout façon pas périodiques au sens strict du terme, aucun des écarts à la périodicité ne convergeant asymptotiquement. De plus, ces solutions transitent depuis un état $2T$-périodique, ce qui nous pousse à garder l'appellation de solution quasi $2T$-périodique. Le fait que l'écart à la $4T$-périodicité soit aussi faible sera plus amplement détaillé dans la section (4.4.4).

En conclusion de cette partie, on observe donc deux bifurcations successives. D'abord, l'écoulement passe d'un état T-périodique à un état $2T$-périodique. Dans un second temps, l'écoulement devient quasi $2T$-périodique. Dans la partie suivante, on présente les résultats obtenus en calculant les champs de base devenu instables suite à ces deux bifurcations.

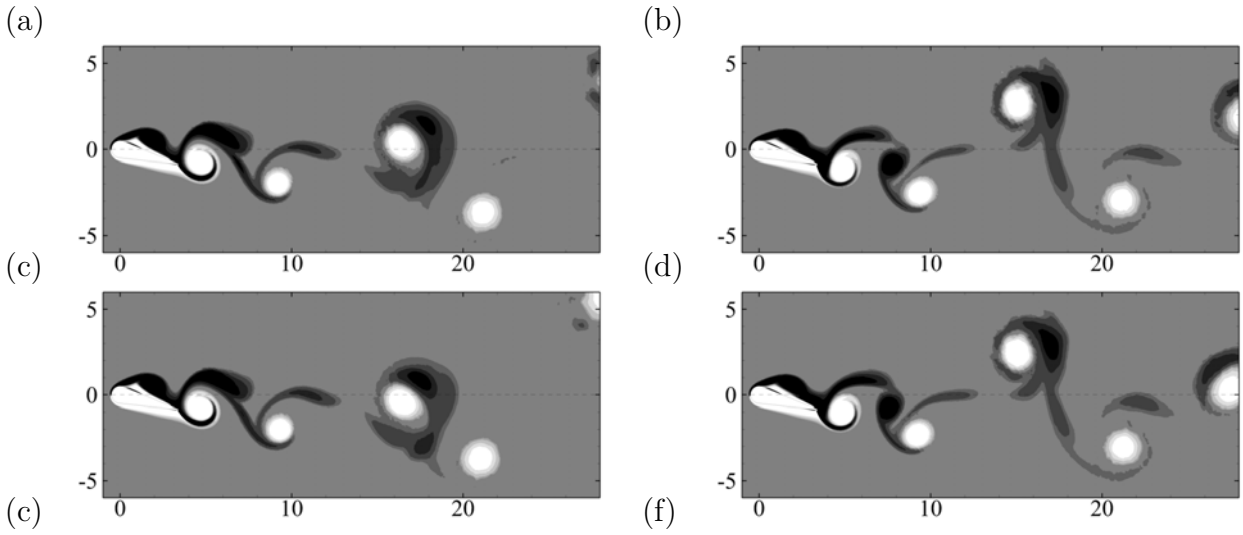


FIGURE 4.25 – Vorticité instantanée de l'écoulement quasi $2T$-périodique pour $f = 0.15$ et $\alpha = 14°$. (a) $t = t_0$, (b) $t = t_0 + 2T$, (c) $t = t_0 + 4T$ et (d) $t = t_0 + 6T$.

4.4.2 Calculs de champs de base

Comme pour le cas précédent, on utilise la méthode de stabilisation détaillée dans la section (2) pour calculer le champ de base. Dans cette section pourtant, comme il y a deux bifurcations, il y a nécessairement deux champs de base instables à calculer. D'abord le champ de base est T-périodique et devient instable suite à la première bifurcation. Ensuite, le champ de base est $2T$-périodique et devient instable suite à la seconde bifurcation. On compare dans la figure (4.26) la solution $2T$-périodique (a,b) obtenue par simulation numérique directe à la solution T-périodique (c,d) instable pour $\alpha = 11°$. Le tripôle

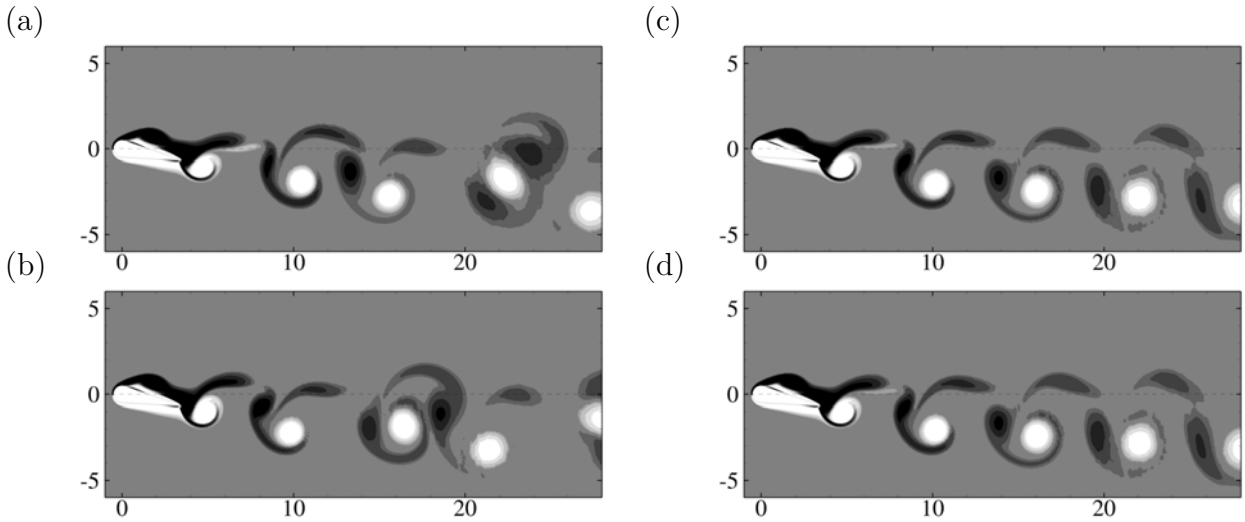


FIGURE 4.26 – Vorticité instantanée de (a,b) la solution $2T$-périodique et de (c,d) la solution stabilisée T-périodique pour (a,c) $t = t_0$ et (b,d) $t = t_0 + T$ pour $\alpha = 11°$ et $f = 0.15$ ($T = 6.67$).

observé après la bifurcation disparaît complètement dans le sillage de l'écoulement T-périodique instable. On retrouve en fait la structure $P+S$ caractéristique du sillage avant la bifurcation, que l'on avait observé pour $\alpha = 10°$ en figure (4.22).

Pour la seconde bifurcation, on représente l'évolution temporelle de la solution quasi $2T$-périodique obtenue par simulation directe dans la figure (4.27a-c). On lui juxtapose en

figure (4.27d-f) la solution $2T$-périodique instable, obtenue par stabilisation de la précédente. On observe de fortes disparités de position des tourbillons entre les deux solutions. L'état de la couche limite au bord de fuite est également largement modifié. On voit clairement apparaître la différence entre une solution périodique (4.27f) et une solution quasi-périodique (4.27c).

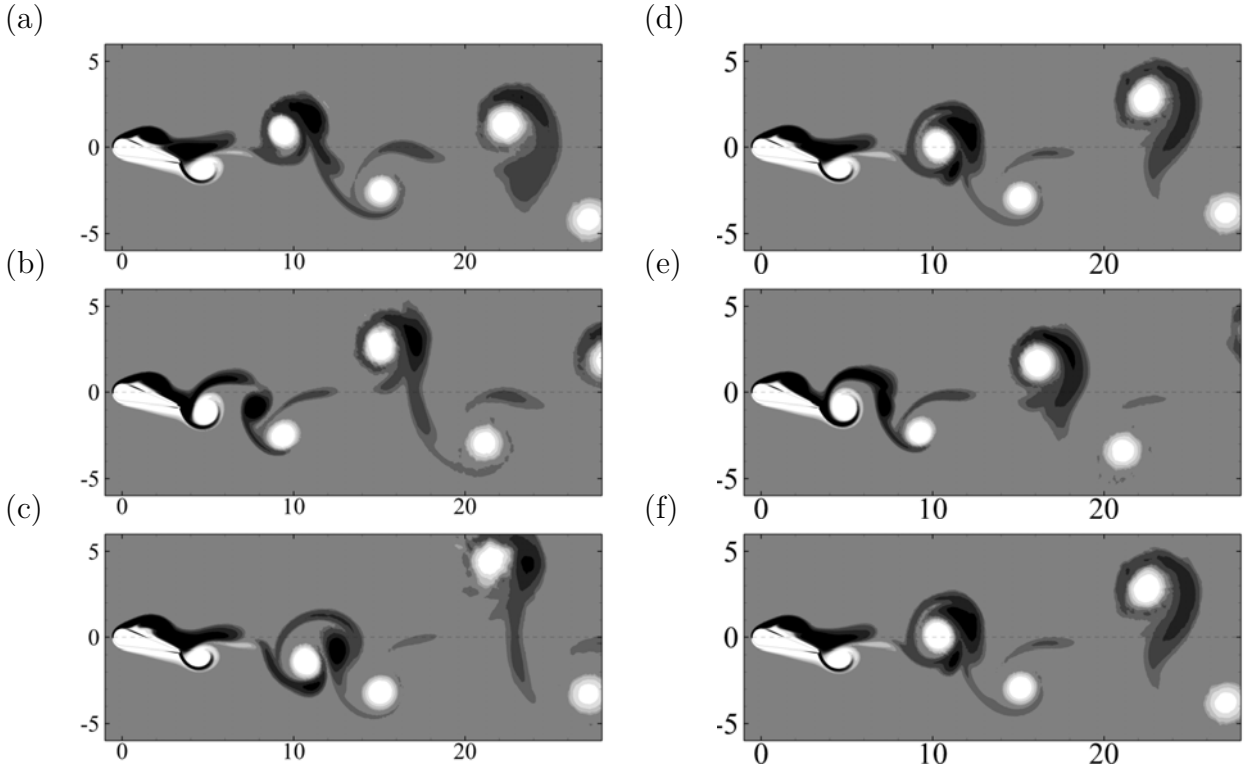


FIGURE 4.27 – Vorticité instantanée de (a-c) la solution quasi $2T$-périodique et de (d-f) la solution stabilisée $2T$-périodique pour (a,d) $t = t_0$, (b,e) $t = t_0 + T$ et (c,f) $t = t_0 + 2T$ pour $\alpha = 14°$ et $f = 0.15$ ($T = 6.67$).

Finalement, on est capable d'identifier trois branches de solutions en fonction du paramètre α. L'évolution des efforts moyens pour ces trois branches est représenté dans la figure (4.28). La première branche T-périodique existe pour toutes les valeurs de α mais devient instable pour $\alpha > 10.5°$. On remarque que celle-ci est liée à une augmentation de la traînée et de la portance moyennes avec α tant qu'elle est stable. On observe néanmoins un large plateau de la portance moyenne dans la gamme $6° < \alpha < 10°$. Enfin, après déstabilisation, cette branche est associée à une décroissance de la traînée et la portance moyenne, de manière très marqué pour cette dernière. Cela est potentiellement associé à un phénomène de décrochage dynamique. La seconde branche est $2T$-périodique. Elle existe pour $10.5° < \alpha$ et devient instable pour $\alpha > 13°$. Celle-ci est liée à une augmentation monotone de la traînée et de la portance avec α que ce soit dans son domaine stable ou instable. Enfin, la troisième branche que l'on qualifie de quasi $2T$-périodique n'existe que pour $\alpha > 13°$. Cette branche est associée à une légère diminution de la traînée et de la portance moyennes, par rapport à la branche $2T$-périodique.

Quelle que soit la branche, la traînée est positive ce qui implique que le rendement est négatif. On fournit de l'énergie au système mais celui-ci ne se propulse pas pour autant. D'autre part, en comparant ces courbes avec le cas $f = 0$, c'est-à-dire le cas d'une aile fixe, on se rend compte que la traînée moyenne est plus importante à $f = 0.15$, qu'à $f = 0$ dès que $\alpha > 4°$. Donc, non seulement l'aile continue à traîner malgré son battement, mais en plus, elle traîne encore plus que si on la gardait fixe. On peut voir cela dans la figure (4.28) avec la traînée moyenne à $f = 0$ indiquée en vert. On constate par contre que la

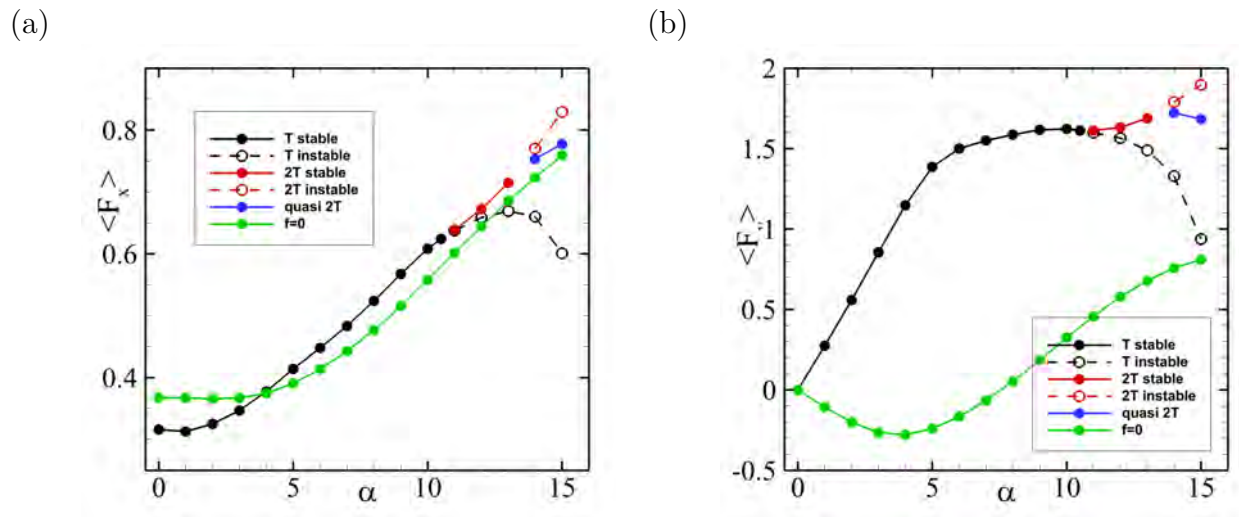


FIGURE 4.28 – Évolution de (a) la traînée moyenne et de (b) la portance moyenne en fonction de l'angle d'incidence pour $f = 0.15$.

solution T-périodique instable à grand α traîne moins que la solution à $f = 0$. On a donc un intérêt à stabiliser cette solution à grand α pour profiter d'une diminution de la traînée moyenne.

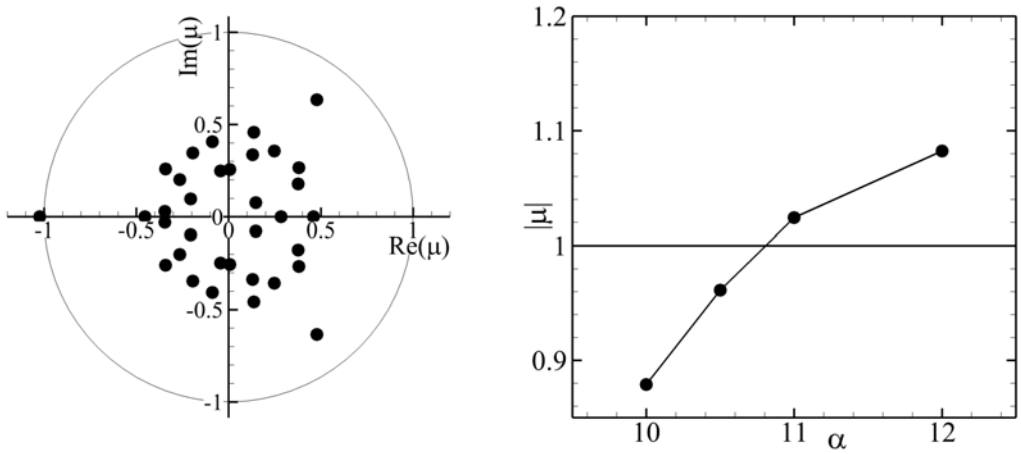
4.4.3 Analyse de Floquet de la solution T-périodique

Avec les champs de base obtenus à la section précédente, deux analyses de Floquet successives peuvent être conduites : une pour la solution T-périodique et une pour la solution $2T$-périodique. Dans cette section, on commence par traiter l'analyse de Floquet relative à la première bifurcation.

La figure (4.29a) représente le spectre de multiplicateur de Floquet obtenu pour $f = 0.15$ et $\alpha = 11°$, c'est-à-dire un cas pour lequel la solution stable obtenue par simulation numérique directe est $2T$-périodique. Dans ce cas, une seule valeur propre est instable (à l'extérieur du cercle unité) et vaut $\mu_1 \approx -1.024$. L'évolution de cette valeur propre en fonction de α est représentée dans la figure (4.29b) où l'on peut voir qu'elle franchit le cercle unité pour approximativement $\alpha_c \approx 10.8°$. Dans tous ces cas, la valeur propre est réelle et négative, ce qui correspond à un mode subharmonique. Ce type de mode est classique du phénomène de doublement de période [105], qui est observé dans les simulations non linéaires.

La structure spatiale de ce mode subharmonique est représentée dans la figure (4.31) pour $\alpha = 10.5°$. De la même manière que les modes observés précédemment, on identifie la présence de dipôles de vorticité aux positions où se trouvent des tourbillons du champ de base.

Lorsqu'on superpose dans la figure (4.30) le champ de base (en haut) à la perturbation linéaire (en bas), on peut reproduire le même raisonnement que pour les analyses de Floquet précédentes. Là encore, la perturbation linéaire agit sur les tourbillons du sillage comme une succession de modes de déplacement. La direction de déplacement (mais pas l'intensité) est indiquée pour chaque tourbillon par une flèche rouge. On remarque ainsi que deux dipôles consécutifs du champ de base sont soit éloignés, soit rapprochés, paires à paires. Cela montre l'effet de doublement de la période, puisque le motif structurel T-périodique devient $2T$-périodique. D'autre part, cela explique la formation d'un tripôle de tourbillons, formé par deux paires consécutives, dont le rapprochement a provoqué l'encadrement d'un tourbillon positif par deux tourbillons négatifs. On retrouve bien un



(a) (b)

FIGURE 4.29 – (a) Spectre pour $\alpha = 11°$ et $f = 0.15$. (b) Amplitude du mode dominant subharmonique en fonction de α à $f = 0.15$.

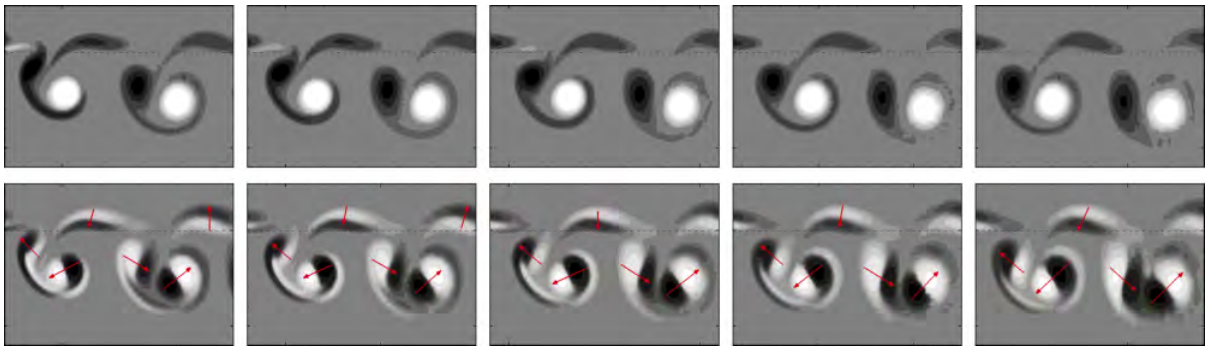


FIGURE 4.30 – Suivi au cours de son mouvement de l'évolution en temps (haut) de deux dipôles du champ de base et (bas) du déplacement de la perturbation linéaire à la même position et aux mêmes instants $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, $t = 3T/4$, $t = T$.

tripôle NPN comme dans les écoulements obtenus par simulations non linéaires. Un autre point à considérer est que le mode de Floquet linéaire et la perturbation linéaire associée sont tous les deux définis à une amplitude infinitésimale près, dont le signe peut être négatif. Ainsi, l'opposé de la perturbation observée est également solution du problème linéaire. Cela a une conséquence importante sur la superposition montrée ici. Cela implique que l'on pourrait très bien obtenir la formation d'un tripôle positif-négatif-positif (ou PNP), au moins avec une argumentation purement linéaire. Nos simulations non linéaires n'ont jamais montré de tripôle PNP, uniquement NPN. Il est possible en revanche que ce choix spécifique d'un tripôle NPN soit dû à d'autres effets, notamment mais pas exhaustivement : la présence de la nappe de vorticité dans l'axe de l'écoulement qui force préférentiellement cet appareillement, les conditions initiales de battement comme dans le cas de la déviation du sillage [52, 66], etc.

L'analyse de Floquet nous a donc permit d'identifier un mode subharmonique qui devient instable pour $\alpha \approx 10.7°$, ce qui correspond à l'angle d'incidence critique observé avec les simulations non linéaires. Ce mode est responsable de l'appareillement de deux tourbillons négatifs successifs, ce qui conduit à l'apparition de tripôles dans le sillage. Cet effet ce produit sur un couple de tourbillons sur deux, ce qui conduit l'écoulement résultant à avoir sa période caractéristique doublée.

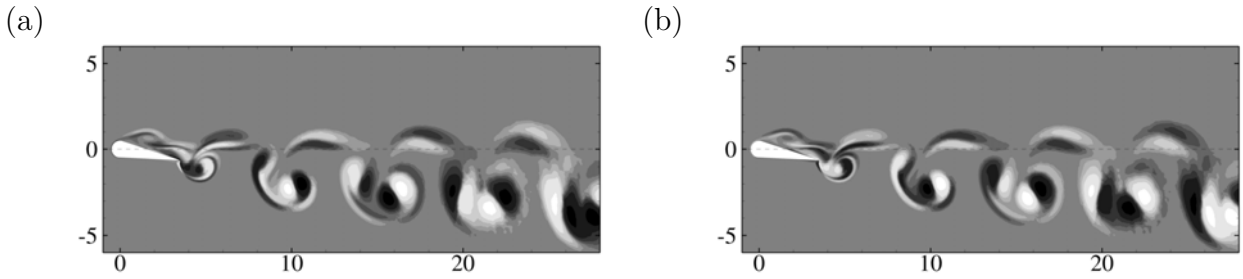


FIGURE 4.31 – Vorticité instantanée de la perturbation linéaire à (a) $t = t_0$ et (b) $t = t_0 + T$ pour $f = 0.15$ et $\alpha = 10.5°$.

4.4.4 Analyse de Floquet de la solution $2T$-périodique

Après la bifurcation subharmonique à $\alpha = 10.7°$, on peut analyser la stabilité de la solution $2T$-périodique qui devient instable pour $\alpha > 14°$.

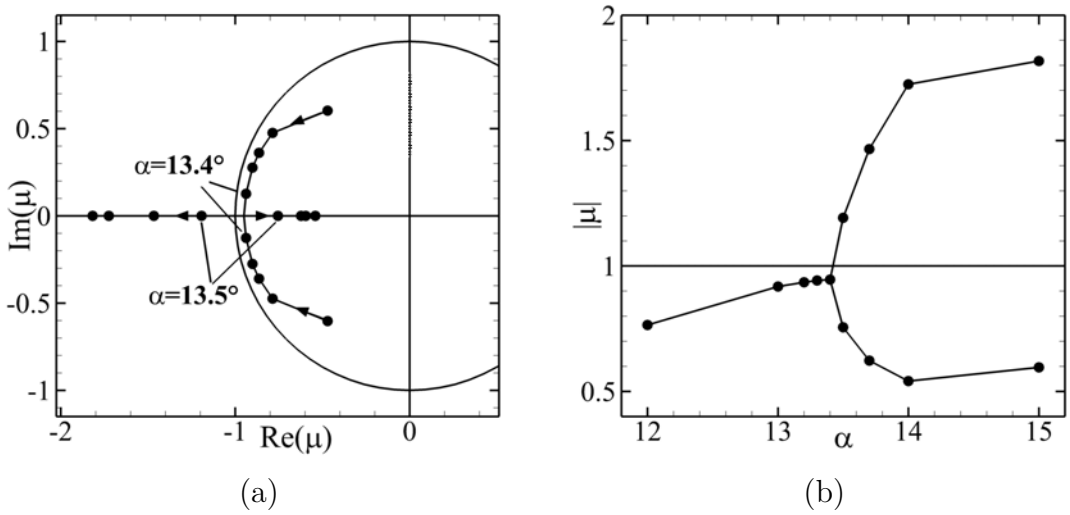
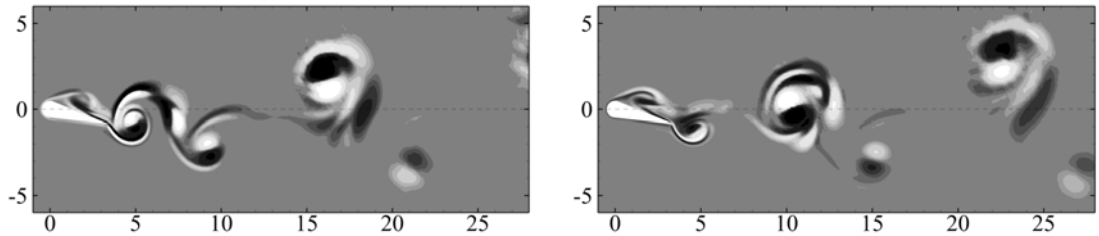


FIGURE 4.32 – (a) Valeur propre du mode dominant pour des valeurs croissantes de α à $f = 0.15$ lorsque le champ de base est $2T$-périodique. (b) Amplitude du mode dominant secondaire en fonction de α à $f = 0.15$.

La figure (4.32a) représente l'évolution de la paire de multiplicateur de Floquet dominant pour des valeurs croissantes de l'angle d'incidence α à $f = 0.15$. Dans ce cas-ci, on rappelle que le champ de base est $2T$-périodique ce qui signifie que les modes de Floquet associés sont $2T$-périodiques par construction. Les deux valeurs propres dominantes forment un couple de valeurs propres complexes conjugués pour $\alpha = 13°$. La variation des valeurs propres par α croissant est indiqué par des flèches. Lorsque celui-ci augmente, elles s'apprêtent à traverser le cercle unité et à devenir instable (à $\alpha = 13.45°$) mais semblent rejoindre l'axe des réels juste avant leur déstabilisation. Une fois l'axe des réels rejoint, elles se séparent en deux valeurs propres subharmoniques, dont une des deux traverse immédiatement le cercle unité et devient instable et la seconde qui devient encore plus stable. Cette séparation en deux modes subharmoniques semble se produire simultanément à leur déstabilisation. Il y aurait donc une cascade de deux bifurcations subharmoniques successives. Ce phénomène n'est pas nouveau puisqu'il est notamment décrit comme un mécanisme de transition vers le chaos dans les systèmes dynamiques non linéaires [127], mais aussi comme un mécanisme possible de transition vers la turbulence [128]. Pour autant, le fait que la séparation en deux modes subharmoniques se produise avant la bifurcation semble relativement étrange au regard des simulations non linéaires.

Puisque l'écoulement résultant après la bifurcation est quasi périodique, on se serait attendu à avoir une paire de modes complexes conjugués qui devient instable. En revanche, le fait que cette déstabilisation se fasse autour de l'axe des réels négatifs concorde avec nos observations d'écoulements proches d'être $4T$-périodique.



(a) (b)

FIGURE 4.33 – Vorticité instantanée de la perturbation linéaire $2T$-périodique à (a) $t = t_0$ et (b) $t = t_0 + T$ pour $f = 0.15$ et $\alpha = 14°$.

La structure de la perturbation linéaire est représentée dans la figure (4.33). Comme précédemment, le mode est concentré dans les zones où se trouvent les tourbillons du champ de base. On remarque par ailleurs une forte présence de la perturbation autour de l'aile. Le mode est constitué de dipôles de vorticité semblant être des modes de déplacements, et qui sont superposés aux tourbillons positifs du champ de base. La partie du mode qui se superpose aux tourbillons négatifs sont eux très déformés. Il est difficile de dire quel est l'effet que cela provoque sur le champ de base. Il est envisageable que cette partie du mode soit en partie responsable de la déformation des tourbillons négatifs. Pour autant, il ne nous est pas possible de conclure avec certitude sur ce point.

4.4.5 Analyse de la perturbation non-linéaire

Comme pour la bifurcation à $f = 0.1$, une nouvelle norme (4.6) est définie pour analyser l'évolution de la perturbation non linéaire. Les deux bifurcations successives sont analysées ici. Pour la première bifurcation, le champ de base est T-périodique. C'est le champ de base $2T$-périodique qui est utilisé pour analyser la seconde bifurcation.

$$||\boldsymbol{u}''|| = \frac{1}{2T} \int_{t_0}^{t_0+2T} \sqrt{\int_{\Omega_f} (\boldsymbol{u}''(\boldsymbol{x}, t))^2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}} \, \mathrm{d}t \tag{4.6}$$

Le seul changement opéré pour définir la norme de la perturbation non linéaire est la période d'intégration temporelle qui est maintenant de deux périodes de battement de l'aile. Comme dans le cas précédent, le fait d'intégrer en temps sur seulement deux périodes conduit à une erreur dès que la solution non linéaire n'est pas $2T$-périodique. Lorsque c'est la première bifurcation qui est analysée, l'erreur n'existe que pour les plus grandes valeurs de α. De toute façon, l'évolution de la perturbation non linéaire n'a plus beaucoup de sens à ce stade et c'est le comportement de la perturbation non linéaire dans le domaine $10.5° < \alpha < 13°$ qui est pertinente. Lorsque la seconde bifurcation est analysée, une erreur est commise dès la bifurcation. La fréquence secondaire qui apparaît à la deuxième bifurcation est très faible. Pour supprimer cette erreur, la période d'intégration de la perturbation non linéaire devrait donc être étendue sur plusieurs dizaines de périodes de battement. Cela est difficilement réalisable en pratique ce qui nous oblige à procéder avec cette approximation de la norme de la perturbation. L'évolution de cette norme avec α est représentée dans la figure (4.35a) pour la première bifurcation. Celle-ci a bien lieu pour $10.5° < \alpha < 11°$. À la bifurcation, la norme de la bifurcation non-linéaire augmente

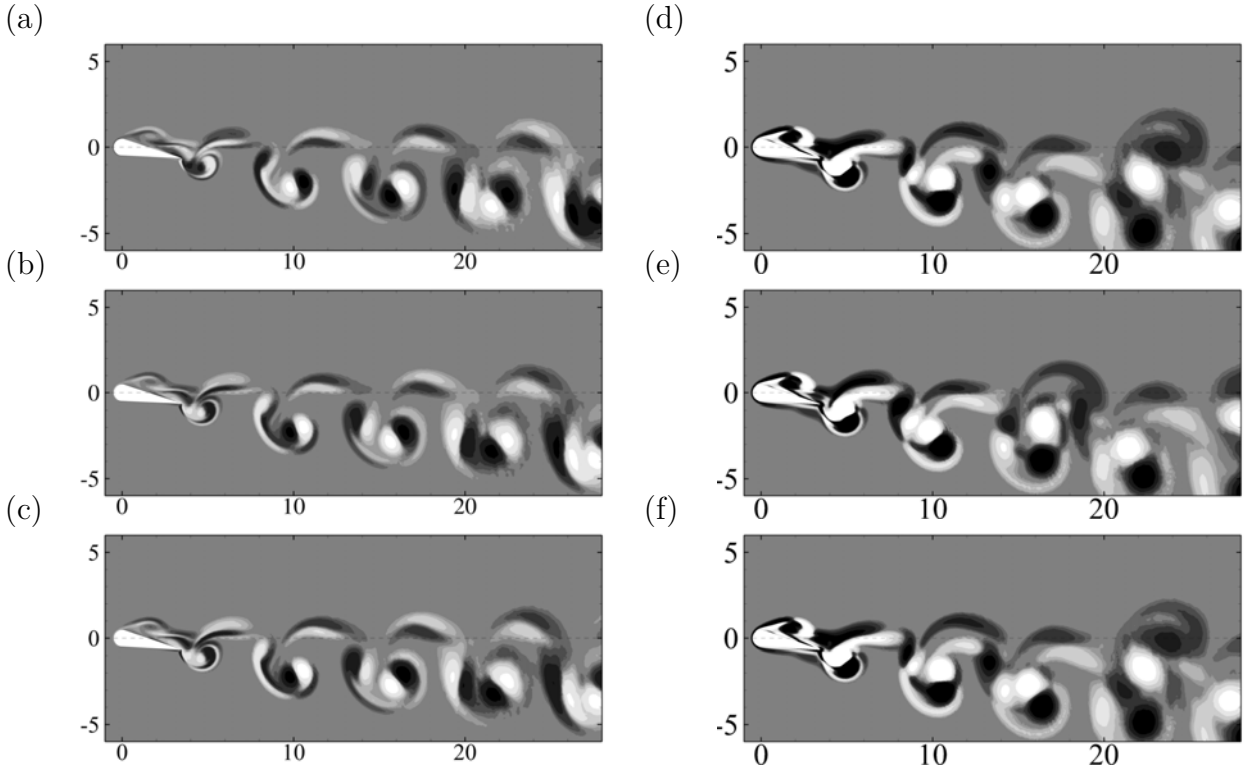


FIGURE 4.34 – Vorticité instantanée de la perturbation (a-c) linéaire et (d-f) non-linéaire à (a,d) $t = t_0$, (b,e) $t = t_0 + T$ et (c,f) $t = t_0 + 2T$ pour $f = 0.15$ et $\alpha = 11°$.

drastiquement. La variation de la norme pour $\alpha = 13°$ est probablement du à la seconde bifurcation. L'évolution de la norme est indicatrice d'une bifurcation super-critique comme pour la bifurcation à $f = 0.1$. Pour la seconde bifurcation, l'évolution de la norme non linéaire avec α est représentée dans la figure (4.35b). Malgré le peu de points, la tendance affichée indique également que la bifurcation est super-critique.

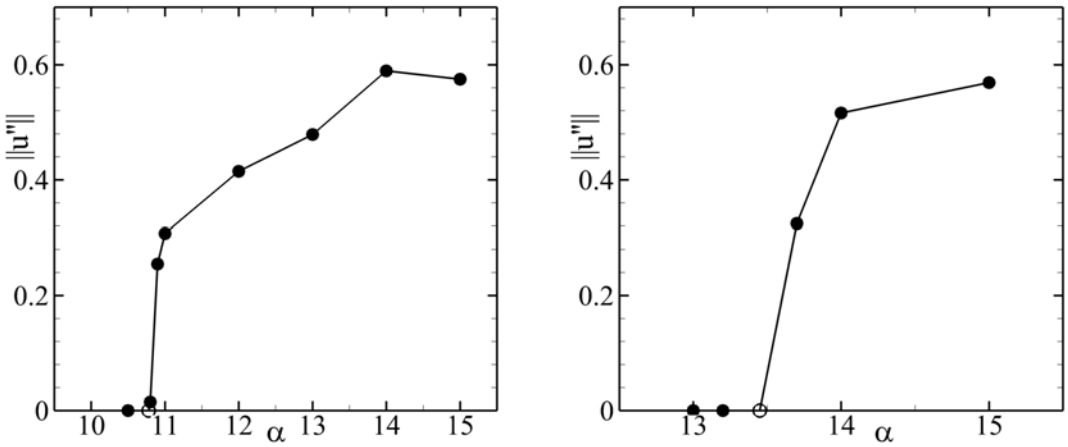
4.5 Conclusions et perspectives

Ce chapitre a été consacré à l'écoulement autour d'une aile battante bi-dimensionnelle avec un fort angle d'incidence. Une large gamme de simulations en angle et en fréquence a permis de mettre en évidence de nombreuses topologies de sillages, avec une grande variété de périodicité des écoulements stables. Plusieurs bifurcations ont ainsi été observée lorsque l'angle d'incidence est suffisamment élevé (supérieur à 10°) et que la fréquence de battement est proche de la fréquence naturelle de l'écoulement lorsque l'aile est fixe (entre $f = 0.1$ et $f = 0.2$ principalement).

On a montré que ces bifurcations peuvent être étudiées séparément à fréquence de battement constante.

Notamment pour $f = 0.1$, on a identifié une bifurcation de Hopf supercritique qui mène à un triplement de la période de l'écoulement. Le mode de Floquet responsable de cette bifurcation consiste en une succession de modes de déplacements qui tournent sur eux-mêmes à un taux de rotation réduit proche de 1/3. Alors que l'analyse de stabilité linéaire n'explique pas le triplement de période, les effets non linéaires sont responsables d'un phénomène d'accrochage dynamique où l'effet de la perturbation est grandement réduit une période sur trois pour que la période finale de l'écoulement soit égale à un multiple entier (trois fois) de la période de battement.

Lorsque la fréquence de battement est $f = 0.15$, deux bifurcations successives appa-



(a) (b)

FIGURE 4.35 – Norme de la perturbation non linéaire en fonction de α pour (a) la première bifurcation à $\alpha_c \approx 10.7°$ et (b) la deuxième bifurcation à $\alpha_c \approx 13.45°$. Les cercles creux ($\circ$) sont placés *a posteriori* au niveau des bifurcations.

raissent. La première est subharmonique et est liée à la formation d'un tripôle de tourbillons négatif-positif-négatif (NPN) dans le sillage. Ce phénomène se produit toutes les deux paires de dipôles de tourbillons, alors qu'un dipôle est émis à chaque période de battement. On a alors un doublement de la période de l'écoulement. La seconde bifurcation est à la limite entre une bifurcation quasi-périodique et une bifurcation subharmonique. Il est difficile de conclure sur ce point, même si les résultats de simulations non linéaires tendent à favoriser la première, puisque l'écoulement après la bifurcation est quasi-périodique lui aussi.

Lorsque la fréquence de battement est $f = 0.2$, bien qu'une bifurcation vers un état quasi-périodique puis vers des solutions à très grandes périodes ait été observé, les analyses de Floquet conduites (et non présentées dans ce chapitre) n'ont pas permis d'identifier un mécanisme qui en soit responsable. La raison à cela est que la méthode de stabilisation qui permet de calculer un champ de base T-périodique n'est pas conçu pour supprimer des fréquences très faibles et/ou très proches de la fréquence fondamentale. Elle fonctionne donc très bien dans le cas de bifurcation subharmonique, mais très mal, pour des bifurcations quasi-périodiques dont la fréquence secondaire est très faible. L'hypothèse que l'on peut faire à la vue des simulations non linéaires conduites est qu'une bifurcation quasi-périodique se produit pour $\alpha = 10°$, et que celle-ci résulte d'un mode quasi-périodique très proche de l'axe des réels positifs. Par la suite, lorsqu'on continue à augmenter α, il y aurait alors plusieurs accrochages non linéaires successifs, en fonction de l'évolution du multiplicateur de Floquet. La fréquence secondaire qui est induite par cette instabilité est malheureusement compliquée à supprimer. Une manière de contourner le problème serait de modifier la méthode de stabilisation utilisée pour nous permettre d'obtenir un champ de base adéquat. Un tel développement n'a pas pu être réalisé avec succès dans le temps de la thèse mais constitue une perspective intéressante dans le but de parvenir à analyser de toutes les transitions observées.

Un autre point qui n'a pas été abordé dans ce chapitre consiste en une meilleure compréhension de la continuité des solutions autour de toutes ces bifurcations. Notre méthodologie a consisté à étudier chaque bifurcation à une fréquence de battement constante. En revanche, il est à ce stade très difficile de comprendre comment l'on passe d'une bifurcation à l'autre si l'on fait varier la fréquence de battement à angle d'incidence constant. Cette perspective est par contre plutôt fastidieuse puisqu'elle consiste majoritairement en plusieurs nouvelles vagues de simulations pour d'autre jeux de paramètres.

Une constatation que l'on peut faire à la lumière des résultats présentés ici, est la prédominance des instabilités constituées de successions de modes de déplacements dans les sillages. Ce chapitre, mais également le précédent, permettent de montrer que c'est le cas autant dans les régimes de traînée que dans les régimes de poussée. Si tous les modes obtenus par les analyses de Floquet ne le sont pas forcément, les plus instables (qui sont montrés ici) le sont systématiquement. Pour autant, il est intéressant de constater la variabilité des effets que ces instabilités peuvent provoquer.

Enfin, les différentes analyses des bifurcations observées dans le sillage de l'aile battante a permis de mettre en évidence des modifications importantes de la portance et la traînée moyenne. Si tous les régimes traités ici sont traînant, et donc peu pertinent pour répondre à des problématiques de propulsion, cela apporte de nouvelles stratégies de contrôle des écoulements d'ailes battantes, dans le but d'améliorer leur performances.

Chapitre 5

Auto-propulsion, stabilité et bifurcation d'une aile battante symétrique dans un fluide au repos

5.1 Introduction

Dans le monde animal, la locomotion basée sur le mode de battement n'est pas utilisée par tous les êtres vivants. Les micro-organismes se déplaçant à très petite échelle utilisent plutôt d'autres modes de déplacement [41], comme la propulsion ciliaire pour les cellules dont la taille est de l'ordre de $100\mu m$ (figure 5.1a) ou la propulsion ondulatoire pour les spermatozoïdes humains dont la taille est d'environ $50\mu m$ (figure 5.1b). A ces échelles, le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de déplacement est de l'ordre de 10^{-2}, de sorte que les équations de Stokes, obtenues en négligeant les termes d'inertie dans le équations de Navier-Stokes, sont appropriées pour étudier les forces hydrodynamiques permettant à ces micro-organismes de se mouvoir. Dans une lecture en 1977, Purcell [131] notait déjà

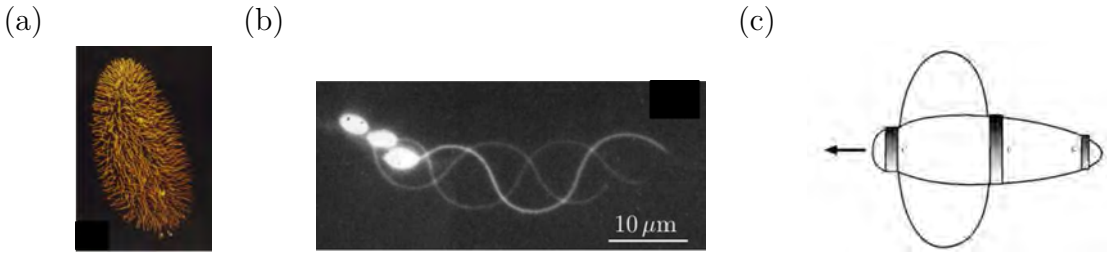


FIGURE 5.1 – (a) Cellule à propulsion ciliaire, (b) spermatozoïde à propulsion oscillatoire [129] et (c) mollusque "Clione Antartica" utilisant deux modes de propulsion suivant sa vitesse de déplacement [130].

"There is a very funny thing about motion at low Reynolds number, which is the following. One special kind of swimming motion is what I call reciprocal motion. That is to say, I change my body into a certain shape and then I go back to the original shape by going through the sequence in reverse. At low Reynolds number, everything reverses just fine. Time, in fact, makes no difference - only configuration. If I change quickly or slowly, the pattern motion is exactly the same.

ce qui l'amena à énoncer ce qui est désormais connu sous le nom de théorème de la coquille ("scallop theorem") :

So, if the animal tries to swim by a reciprocal motion, it cant' go anywhere. Fast or slow, it exactly retraces its trajectory and it's back where it started. A good example of that is a scallop. You know, a scallop opens its shell slowly and closes its shell fast, squirting out water. The moral of this is that the scallop at low Reynolds number is no good. It can't swim ...

Ce théorème indique donc qu'un mouvement de battement réciproque ne permet pas à des organismes vivants de se mouvoir si ceux ci sont de trop petit taille. Il existe donc une échelle critique permettant au mode de battement de devenir efficace pour se propulser. Autrement dit existerait-il un nombre de Reynolds critique permettant d'observer la propulsion par mode de battement. En 2004, Childress *et al.* [130] ont publié une étude portant sur les différents modes de propulsion observés chez un mollusque appelés le "Clione Antartica" dont la longueur est typiquement de 6 mm (figure 5.1c). Tandis que les cils (représentés par les bandes grises sur la figure) sont utilisés quelle que soit la vitesse de propulsion, les ailes se rétractent dans le corps du mollusque lorsque la vitesse de propulsion est trop faible, correspondant typiquement à des nombres de Reynolds inférieurs à $Re = 5$. En étudiant divers modèles théoriques simplifiés du déplacement de ce mollusque, ils ont reporté l'existence d'une bifurcation permettant d'expliquer l'existence d'une nombre de Reynolds critique au delà duquel le mode de propulsion par battement devient possible (et plus efficace que le mode ciliaire).

Pour mieux comprendre le lien entre la naissance du mode de propulsion par battement et l'existence d'une bifurcation de l'écoulement, discutons a nouveau l'expérience de Vandenberghe *et al.* [39, 40], déjà mentionnée dans l'introduction générale de cette thèse (figure 5.2a). Un mouvement de pilonnement périodique est appliqué à une aile de section symétrique, placée dans une cuve d'eau, et libre de tourner autour de l'axe de pilonnement. La figure 5.2(b) représente le nombre de Reynolds basée sur la vitesse de rotation et la taille caractéristique de l'aile en fonction du nombre de Reynolds basé sur l'amplitude et la fréquence de battement. On observe clairement l'existence d'un nombre de Reynolds critique au delà duquel le mouvement de pilonnement génère un mouvement de rotation de l'aile.[1] Pour comprendre la nature du mode de propulsion par battement, Alben &

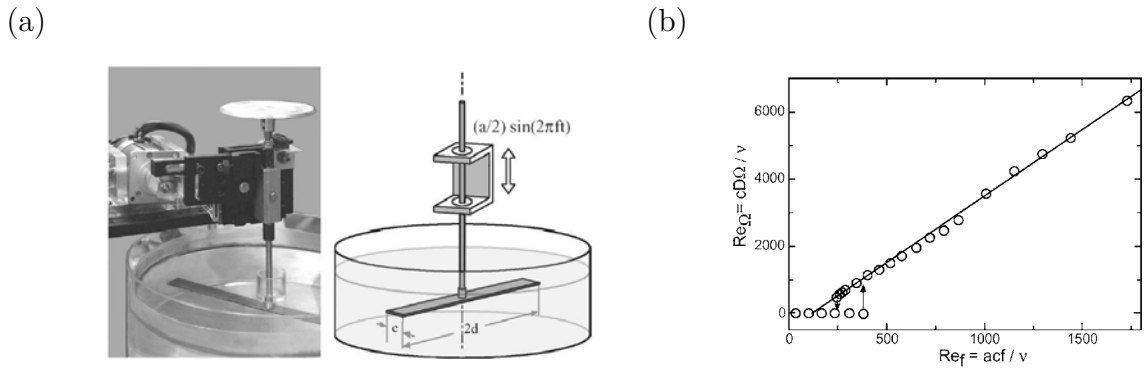


FIGURE 5.2 – (a) Dispositif expérimental et (b) vitesse de rotation en fonction de l'amplitude de battement [40].

Shelley (2005) [42], Lu & Liao (2006) [132] et Zhang *et al.* (2010) [133] ont ensuite étudié numériquement la dynamique d'une aile symétrique bidimensionnelle, plongée dans un fluide visqueux initialement au repos, qui est animée d'un mouvement vertical périodique (imposé) et qui est libre de se déplacer horizontalement. Ils ont montré qu'un mouvement de propulsion unidirectionnel apparaît lorsque la fréquence ou l'amplitude de battement sont suffisamment grandes, et qu'il existe aussi d'autres régimes de déplacement, tels que

1. L'hystérésis est expliquée par l'existence de frottement solide dans le mécanisme de rotation.

des mouvements de va-et-vient périodique ou chaotique dans la direction horizontale. La figure 5.3(a), extraites des travaux de Lu & Liao (2006) [132] montre les régimes d'écoulement dans le plan amplitude de battement adimensionnée et nombre de Reynolds, définis comme $A = A_{max}/c$ et $Re_f = fc^2/\nu$ où A_{max} et f sont l'amplitude maximale et la fréquence de pilonnement, c est la corde de l'aile et ν est la viscosité cinématique du fluide. Pour de faibles valeurs de l'amplitude et du nombre de Reynolds, l'écoulement est dans un régime symétrique représenté sur la figure 5.4(a), pour lequel l'aile ne s'auto-propulse pas. Pour de grandes valeurs de l'amplitude et du nombre de Reynolds, l'écoulement est dans un régime asymétrique (figure 5.4-b), pour lequel l'aile s'auto-propulse. La brisure de la symétrie gauche/droite est à l'origine du mouvement d'auto-propulsion dans la direction horizontale. Il peut néanmoins exister d'autres régimes d'écoulements, en particulier

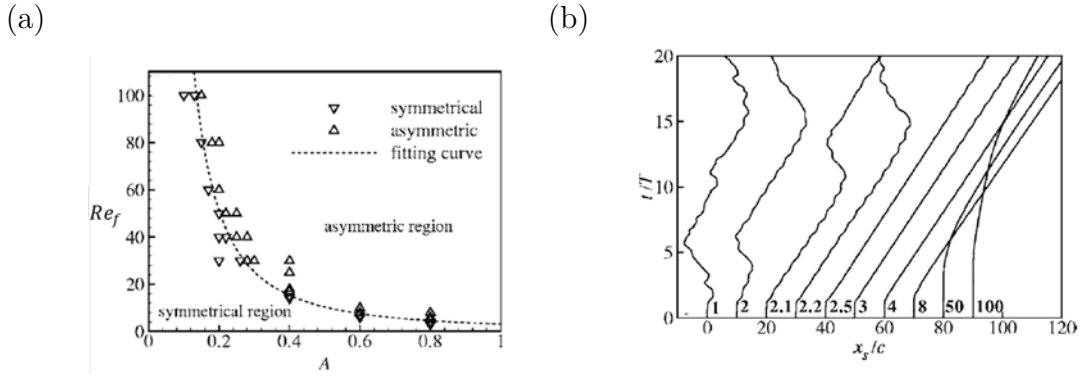


FIGURE 5.3 – (a) Régime symétrique (non-propulsif) et asymétrique (propulsif) dans l'espace des paramètres amplitude de battement A et nombre de Reynolds basé sur la fréquence $Re_f = fc^2/\nu$, c étant la corde de l'aile. (b) Évolution de la position horizontale en fonction du temps pour différents rapports de densité solide/fluide ρ_s/ρ_f. Figures extraites et adaptées de [132].

lorsque le rapport $\rho = \rho_s/\rho_f$ entre la densité du solide et du fluide devient trop faible. La figure 5.3(b), extraites de Lu & Liao (2006), montre la position horizontale en fonction du temps pour différents rapports de densité $1 \leq \rho \leq 100$. Pour de faibles rapports de densité, on observe clairement un régime oscillant (de nature non périodique), pour lequel l'aile ne parvient pas à se propulser dans une direction donnée et oscille (de manière chaotique) dans la direction horizontale.

L'objectif de ce chapitre est de mieux comprendre l'influence du rapport de densité sur

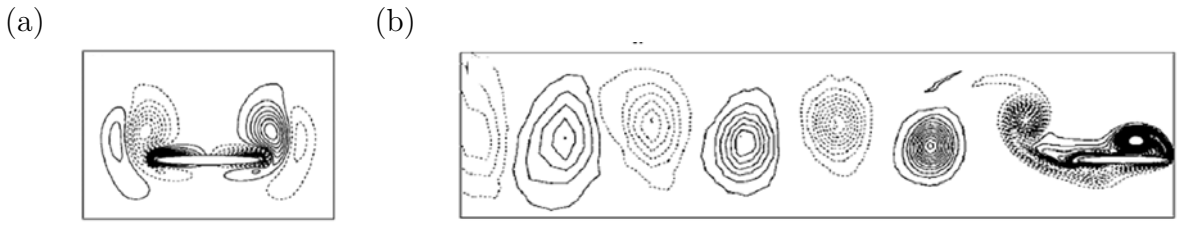


FIGURE 5.4 – Champ de vorticité pour (a) le régime symétrique (non-propulsif) et (b) le régime asymétrique (propulsif) [132].

la dynamique de l'aile auto-propulsée, en réalisant des simulations numériques instationnaires similaires à celles présentées précédemment et en étudiant la stabilité linéaire des écoulements périodiques générés par le mouvement de pillonement dans une large gamme de valeur du rapport de densité ($10 \leq \rho \leq 10^6$)

Des analyses de stabilité d'écoulements périodiques (analyse de Floquet) ont déjà été réalisées pour analyser les brisures de symétrie observées lorsqu'un cylindre circulaire est mis en mouvement de pilonnement périodique dans un écoulement au repos [44, 75]. La différence principale avec le cas étudié dans ce chapitre, hormis la géométrie de l'objet, est le fait que le mouvement dans la direction orthogonale au battement n'est pas autorisé. La figure 5.5, extraite des travaux de Elston et al. (2006), montre les résultats de l'analyse de stabilité à des perturbations bi-dimensionnelles. Pour de faibles valeurs de la fréquence d'oscillation (c'est-à-dire de Re_f), un mode de Floquet synchrone (S) devient instable et brise la symétrie spatiale de l'écoulement, tandis que pour de plus fortes valeurs, un mode de Floquet quasi-périodique (QP) devient instable et introduit une nouvelle période dans l'écoulement, représentée sur la figure 5.5(b). À noter que l'amplification de perturba-

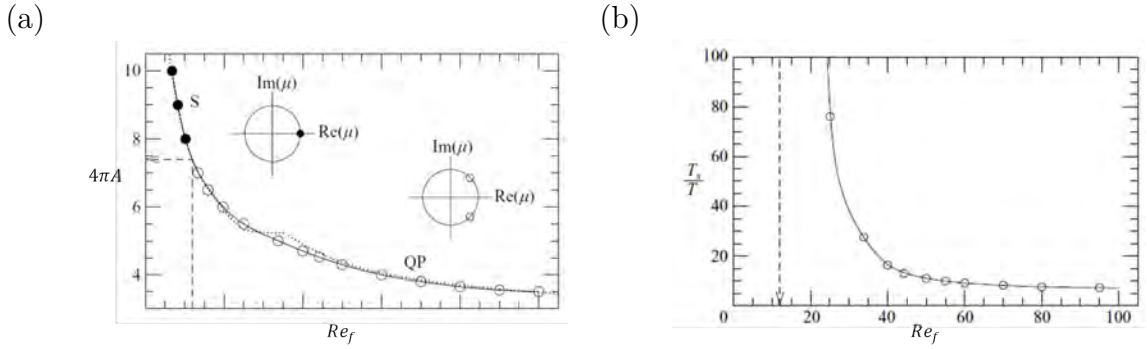


FIGURE 5.5 – Cylindre circulaire - Résultats de la stabilité d'un écoulement périodique généré par un cylindre en mouvement de pilonnement. Les figures sont extraites des travaux de Elston et al. [75]. (a) Nature des modes de Floquet marginalement stables dans le plan $(A - Re_f)$. S pour synchrone et QP pour quasi-périodique. (b) Rapport de la période T_s du mode de Floquet sur la période de battement T en fonction du nombre de Reynolds Re_f basé sur la fréquence.

tions tridimensionnnelles est aussi étudiée dans leur article. Les résultats indiquent que ces perturbations sont amplifiées de façon prédominantes (par rapport aux perturbations bidimensionnnelles) pour de grandes valeurs de fréquences, que nous ne considérerons pas par la suite.

Plus récemment, Deng & Caulfield (2016) [46] ont étudié l'influence, sur la brisure de symétrie, du rapport d'aspect d'une aile elliptique définie comme $AR = e/c$ où e est l'épaisseur de l'ellipse. La figure 5.6(a) représente la courbe de transition entre les régimes symétriques et asymétriques pour différents valeurs du rapport d'aspect (dans le plan $Re_f - A$, et non pas $A - Re_f$ comme dans la figure précédente). À fréquence fixée, on constate que la transition apparaît pour de plus faibles valeurs d'amplitude lorsqu'on diminue le rapport d'aspect. Dans la suite de ce travail, on s'intéresse exclusivement au rapport d'aspect $AR = 0.1$. L'article de Deng & Caulfield indique que, pour ce rapport d'aspect, les résultats de l'analyse de stabilité linéaire ne sont pas cohérents avec les résultats des simulations non linéaires. Seuls des modes synchrones instables ont pu être déterminés, alors que des écoulements quasi-périodiques sont obtenus pour certaines valeurs des paramètres, comme on le constate dans la figure 5.6(a). Enfin, cet article s'intéresse aussi à des configurations auto-propulsées, pour lesquelles le mouvement horizontal est libre. La plupart des résultats sont obtenus à partir de simulations instationnaires, l'analyse de stabilité n'ayant pas été considéré pour cette configuration. Les résultats, représentés sur la figure 5.6(b) pour $AR = 0.1$ et le rapport de densité $\rho = 10$ (seule valeur considérée dans cet article), montrent que la brisure de symétrie apparaît pour de plus faibles valeurs d'amplitude que dans le cas fixe.

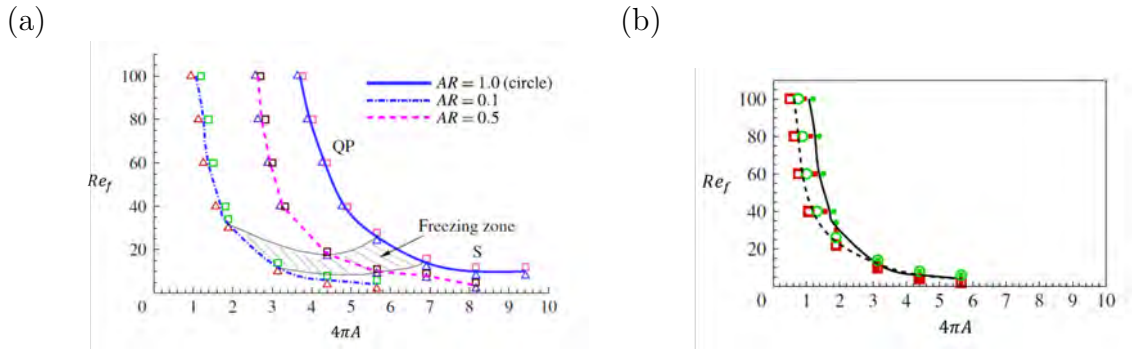


FIGURE 5.6 – Ellipse de rapport d'aspect AR - Résultats de simulations instationnaires d'écoulements périodiques générés par des ellipses en mouvement de pilonnement pour (a) différents rapport d'aspect AR dans mouvement horizontal et (b) pour $AR = 0.1$ et avec un mouvement horizontal libre ($\rho = 10$). Les figures sont extraites des travaux de Deng & Caulfield (2016) [46].

Dans ce chapitre, on étudie le mouvement auto-propulsé d'une ellipse de rapport d'aspect $AR = 0.1$ pour un nombre de Reynolds $Re_f = 12$. La fréquence de battement est donc fixe. La section 5.2 présente d'abord les équations non linéaires régissant ce problème d'interaction entre l'aile rigide mobile et le fluide visqueux environnant, détaille ensuite les symétries du problème, et rapporte enfin les résultats de simulations numériques pour le rapport de densité $\rho = 100$, en faisant varier l'amplitude de battement A. Différents régimes d'auto-propulsion sont ainsi obtenus et décrits. La section 5.3 est consacrée à l'analyse de stabilité de l'écoulement périodique et symétrique généré par le battement de l'aile. A la différence des analyses de stabilité précédemment évoqués, le problème perturbatif est formulé de façon à inclure le mouvement horizontal comme un perturbation du système. On peut ainsi étudié l'influence du rapport de densité sur les résultats de stabilité et la brisure de symétrie qui génère le mouvement horizontal. Une comparaison exhaustive des résultats linéaires et non linéaires est présentée pour le rapport de densité $\rho = 100$, avant de présenter les résultats de stabilité pour d'autres valeurs de densité dans le plan $A - \rho$. Le chapitre se conclut par une discussion des résultats de stabilité obtenus pour des très grandes valeurs de ρ et pour des valeurs infinies (mouvement horizontal non autorisé), afin de mettre en lumière l'existence d'un mode de Floquet instable de type quasi-statique.

5.2 Simulations instationnaires d'une aile battante auto-propulsée

Reprécisons tout d'abord le problème étudié. On considère une aile de forme elliptique de corde c et d'épaisseur e. Un mouvement sinusoïdal est imposé à cette aile dans la direction verticale, d'amplitude maximale A_{max} et de fréquence d'oscillation $f = 1/T$, où T est la période. Cette aile est initialement dans un fluide au repos, de densité ρ_f et de viscosité cinématique $\nu = \mu/\rho_f$, μ étant la viscosité dynamique. Quatre nombres adimensionnels caractérisent alors ce problème : le nombre de Reynolds Re_f basé sur la fréquence[2] l'amplitude maximale adimensionnée par la corde A, le rapport des densités

2. La dénomination de *Nombre de Reynolds* donnée au paramètre Re_f peut prêter à confusion. En effet ce paramètre ne fait pas apparaître d'échelle de vitesse caractéristique de l'écoulement. On peut noter par ailleurs que ce paramètre peut s'écrire également $Re_f = c^2/\delta^2$ où $\delta = \sqrt{\nu/f}$ est reconnue comme la longueur de pénétration visqueuse d'oscillations de fréquence f. Il serait donc plus correct d'appeler Re_f un *nombre de Stokes* et d'appeler nombre de Reynolds le paramètre $Re^* = 2\pi f A_{max} c/\nu$ (comme dans

solide et fluide ρ et le rapport d'aspect. On rappelle ici la définition de ces nombres adimensionnels :

$$A = \frac{A_{max}}{c} \quad , \quad Re_f = \frac{fc^2}{\nu} \tag{5.1}$$

$$\rho = \frac{\rho_s}{\rho_f} \quad \text{et} \quad AR = \frac{e}{c} \tag{5.2}$$

Dans ce travail on fixera le rapport d'aspect à $AR = 0.1$ et le Reynolds basé sur la fréquence à $Re_f = 12$, et on se concentrera sur l'effet des deux derniers paramètres ρ et A.

Par la suite, toutes les grandeurs du problèmes sont adimensionées en utilisant c ($T = 1/f$) comme échelle de longueur (resp. temps) caractéristique. Les positions y_g et vitesses v_g instantanées (adimensionnée) du centre de masse G de l'aile sont donc régies par les lois

$$\begin{aligned} y_g(t) &= -A\,\cos(2\pi(t-t_0)) \\ v_g(t) &= 2\pi\,A\,\sin(2\pi(t-t_0)) \end{aligned} \tag{5.3}$$

où t est le temps adimensionné par la période. Ainsi, quelle que soit la fréquence dimensionnée $\tilde{f}$, la période T et la fréquence f adimensionnée valent 1. Ce mouvement est clairement réciproque (comme défini dans l'introduction) puisque l'aile repasse par les mêmes positions d'une demi-période à une autre, avec des vitesses opposées ($v_g(t+T/2) = -v_g(t)$).

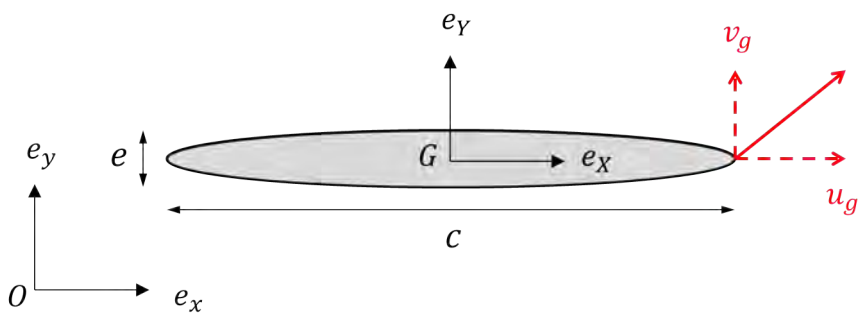


FIGURE 5.7 – Géométrie de l'aile battante, définition des systèmes d'axe et de la vitesse instantanée de l'aile.

5.2.1 Équations non linéaires

Pour décrire le mouvement de l'aile et le fluide environnant, on définit deux systèmes d'axe représentés sur la figure 5.7(a) : un système d'axe fixe noté $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ où O est un point arbitraire, et un système d'axe mobile attaché à l'aile, noté $(G, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y)$ où G est le centre de masse de l'aile. L'écoulement est décrit par le vecteur vitesse $\mathbf{u} = (u, v)^T$ et le champ de pression p qui satisfont les équations de Navier-Stokes incompressibles

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_g) \cdot \nabla]\,\mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re}\mathbf{\Delta u} \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{5.4}$$

Comme expliqué dans le chapitre 1.1, cette formulation des équations de Navier-Stokes est écrite pour un champ de vitesse $\mathbf{u}$ projeté dans le système d'axe fixe $(0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, alors que les

la référence [40]) qui est lui construit sur la vitesse de battement $2\pi f A_{max}$. Cependant nous garderons dans la suite la notation Re_f car celle-ci a été adoptée dans la plus grande partie de la littérature.

champs de vitesse et de pression dépendent de coordonnées de l'espace (X, Y) du système d'axe mobile $(G, \mathbf{e}_X, \mathbf{e}_Y)$. On note que la vitesse de convection dans le terme non linéaire des équations ci-dessus est corrigée de la vitesse de translation de l'aile $\mathbf{u}_g = (u_g, v_g)^T$, où u_g est la vitesse de déplacement *libre* de l'aile, tandis que v_g est la vitesse de déplacement *imposée* selon (5.3). La condition d'adhérence du fluide à la surface de l'aile s'écrit

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}_w, t) = \mathbf{u}_g \tag{5.5}$$

où $\mathbf{X}_w$ sont les points de la surface de l'aile. Enfin, le mouvement de l'aile dans la direction libre $\mathbf{e}_y$ est régi par l'équilibre entre l'accélération de l'aile et les efforts aérodynamiques, qui s'écrit

$$M\frac{du_g}{dt} = F_x \tag{5.6}$$

où la masse adimensionée de l'aile est définie par $M = \rho\, AR\, \pi/4$ et la force hydrodynamique horizontale est définie par

$$F_x = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_x = \int_{\Gamma_s}\left(-p\mathbf{n} + \frac{1}{Re}\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T\right]\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\mathbf{e}_x \tag{5.7}$$

$\mathbf{n}$ étant le vecteur normale sortant de l'aile.

Enfin, bien que celles-ci ne sont pas couplés au déplacement, on s'intéressera dans la suite à deux autres composantes des efforts exercés sur l'aile. Définissons la force hydrodynamique verticale F_y et le couple hydrodynamique M_z ainsi :

$$F_y = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_x = \int_{\Gamma_s}\left(-p\mathbf{n} + \frac{1}{Re}\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T\right]\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\mathbf{e}_y, \tag{5.8}$$

$$M_z = \mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_x = \int_{\Gamma_s}\mathbf{x}\wedge\left(-p\mathbf{n} + \frac{1}{Re}\left[\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T\right]\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\mathbf{e}_z. \tag{5.9}$$

5.2.2 Symétries du problème

	$\mathcal{I}$	K_x	H_1	H_2
$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	K_x	H_1	H_2
K_x	K_x	$\mathcal{I}$	H_2	H_1
H_1	H_1	H_2	$\mathcal{I}$	K_x
H_2	H_2	H_1	K_x	$\mathcal{I}$

TABLE 5.1 – Tableau de composition du groupe de symétries $\mathcal{S} = \{\mathcal{I}, K_x, H_1, H_2\}$ caractérisant le problème de l'aile battante symétrique.

Étudions tout d'abord quelles sont les symétries imposées par les conditions limites du problème (ou causes du problème au sens de Curie selon la terminologie du chapitre 2). Deux symétries sont évidentes. Premièrement, la géométrie de l'aile est à chaque instant invariante par la symétrie spatiale de réflexion selon l'axe vertical (qu'on notera K_x pour reprendre la nomenclature introduite dans [44]). Deuxièmement, le mouvement imposé par la loi (5.3) vérifie une symétrie spatio-temporelle : les deux demi-périodes de battement, montante et descendante, sont symétriques l'une de l'autre par réflexion selon l'axe horizontal. Dans la suite on notera H_1 cette symétrie [3].

3. Avec les notation introduites dans le chapitre 2, les symétries H_1 et H_2 peuvent s'écrire $H_1 = s_y \circ s_{T/2}$ et $H_2 = (s_x \circ s_y) \circ s_{T/2}$. On reconnaît par ailleurs dans $(s_x \circ s_y)$ la symétrie centrale d'axe (O, z).

Ces deux symétries en induisent une troisième obtenue par composition des deux précédentes, que l'on notera H_2 (avec$H_2 = K_x \circ H_1$). Géométriquement, cette nouvelle symétrie signifie que les demi-périodes de battement montante et descendante sont symétriques l'une de l'autre selon une symétrie centrale autour de l'axe (O, z). Pour formaliser un peu plus les choses, on peut introduire le groupe des symétries $\mathcal{S}$ du problème. Ce groupe est constitué de quatre éléments : $\mathcal{S} = \{\mathcal{I}, K_x, H_1, H_2\}$ où $\mathcal{I}$ est l'identité. Le tableau 5.1 explicite la loi de composition de ce groupe.

5.2.3 Symétries attendues pour les solutions du problème

Après avoir caractérisé les symétries du problème en étudiant simplement la nature du forçage, précisons maintenant l'effet de l'application de chacune des symétries à un écoulement défini par $(u, v, p, \omega_z)(x, y, t)$:

$$(K_x): \quad (u, v, p, \omega_z)(x, y, t) \rightarrow (-u, v, p, -\omega_z)(-x, y, t) \tag{5.10}$$
$$(H_1): \quad (u, v, p, \omega_z)(x, y, t_0) \rightarrow (u, -v, p, \omega_z)(x, -y, t_0 + T/2) \tag{5.11}$$
$$(H_2): \quad (u, v, p, \omega_z)(x, y, t_0) \rightarrow (-u, -v, p, \omega_z)(-x, -y, t_0 + T/2). \tag{5.12}$$

Un écoulement sera dit symétrique selon la symétrie K_x (resp. H_1, H_2) s'il est invariant sous l'application de l'opérateur correspondant.

Précisons également l'implication de chacune des symétries sur les efforts instantanés ainsi que sur les efforts moyens exercés sur l'aile :

$$(K_x): \quad \begin{aligned} F_x(t) = 0 \quad \forall t &\longrightarrow \langle F_x \rangle = 0, \\ F_y(t) \neq F_y(t + T/2) &\longrightarrow \langle F_y \rangle \neq 0, \\ M_z(t) = 0 \quad \forall t &\longrightarrow \langle M_x \rangle = 0, \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$(H_1): \quad \begin{aligned} F_x(t) = F_x(t + T/2) &\longrightarrow \langle F_x \rangle \neq 0, \\ F_y(t) = -F_y(t + T/2) &\longrightarrow \langle F_y \rangle = 0, \\ M_z(t) = -M_z(t + T/2) &\longrightarrow \langle F_z \rangle = 0, \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$(H_2): \quad \begin{aligned} F_x(t) = -F_x(t + T/2) &\longrightarrow \langle F_x \rangle = 0, \\ F_y(t) = -F_y(t + T/2) &\longrightarrow \langle F_y \rangle = 0, \\ M_z(t) = M_z(t + T/2) &\longrightarrow \langle F_z \rangle \neq 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Selon la discussion menée au chapitre 2, on peut s'attendre à ce que les symétries présentes dans les causes du problème se retrouvent dans les solutions observables (c'est à dire dans la structure de l'écoulement observé dans une expérience ou une simulation numérique) ou au contraire soient brisées par celles-ci. L'existence de plusieurs symétries rend la discussion un peu plus subtile que dans le cas du chapitre 2. On peut en effet s'attendre à 5 cas différents :

1. La première possibilité est que l'écoulement respecte l'ensemble des symétries $\mathcal{S}$ du problème. Le premier schéma de la figure (5.8) illustre la structure d'un tel écoulement. Dans ce schéma (et dans les suivants) les lignes de courant noires et bleues schématisent l'intensité des tourbillons émis lors d'un battement descendant et battement ascendant. Dans le cas ou toutes les symétries sont préservées, le lâcher de tourbillons se fait de manière parfaitement symétrique. On comprend aisément que les forces moyennes générées sur l'aile par ce type d'écoulement sont nulles. Un écoulement respectant l'ensemble des symétries ne peut donc pas être associé à une auto-propulsion.

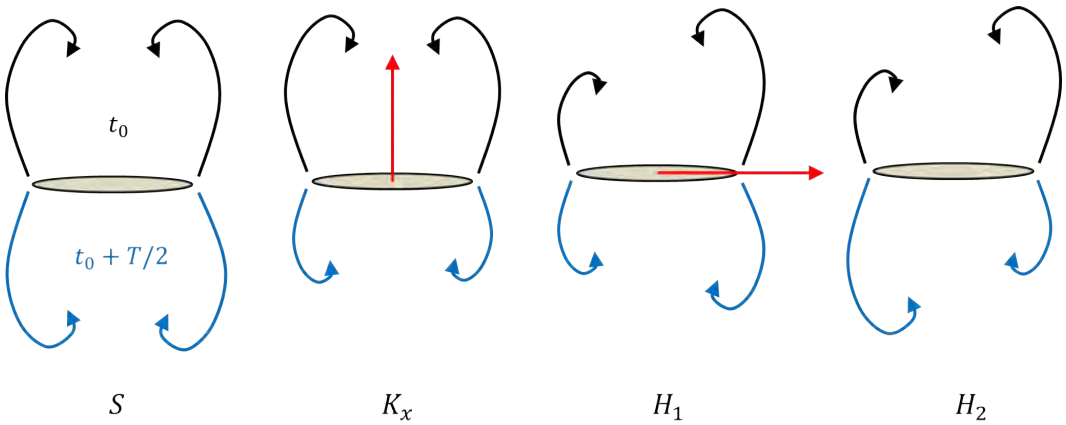


FIGURE 5.8 – Schéma illustrant les solutions $T-$périodiques respectant des symétries du problème. (S) Toutes les symétries sont respectées. Sur les autres schémas, seule la symétrie indiquée (Kx, H_1 ou H_2) est respectée. Les lignes de courant noires (resp. bleues) schématisent l'intensité des tourbillons émis lors d'un battement descendant à $t = t_0$ (resp. lors d'un battement ascendant à $t = t_0 + T/2$). La flèche rouge indique la force moyenne sur une période T de battement.

2. La seconde possibilité est que l'écoulement respecte la symétrie de réflexion K_x mais brise les symétries H_1 et H_2. Ce cas est illustré par le deuxième schéma sur la figure 5.8. Les tourbillons émis lors de chaque battement restent symétriques entre la droite et la gauche, mais sont plus intenses lors du battement descendant. D'après les relations (5.13), La force moyenne horizontale $\langle F_x \rangle$ est nulle. Ce type d'écoulement ne peut donc pas donner lieu à une autopropulsion. En revanche, la force moyenne verticale $\langle F_y \rangle$ est non nulle, comme indiqué par la flèche rouge sur le schéma. Cependant cette force vertical ne peut pas conduire à un déplacement vertical, celui-ci étant par définition imposé.

3. La troisième possibilité est que l'écoulement respecte la symétrie de réflexion H_1 mais brise les symétries K_x et H_2. Ce cas est illustré par le troisième schéma sur la figure 5.8. Lors de chaque demi-période, les tourbillons générés du côté droit sont plus intenses que ceux générés du coté gauche et sont de plus identiques entre eux. D'après les relations (5.14), La force moyenne horizontale $\langle F_y \rangle$ est maintenant non nulle. Ce type d'écoulement peut donc donner lieu à une autopropulsion.

4. La quatrième possibilité est que l'écoulement respecte la symétrie de réflexion H_2 mais brise les symétries K_x et H_1. Ce cas est illustré par le quatrième schéma sur la figure 5.8. Cette fois-ci, le tourbillon généré du coté gauche lors du battement descendant à la même structure que celui généré du coté droit lors du battement ascendant, et vice-versa. D'après les relations (5.15), La force moyenne horizontale $\langle F_x \rangle$ est nulle. Ce type d'écoulement ne peut donc pas donner lieu à une auto-propulsion. En revanche, le couple moyen $\langle M_z \rangle$ est non nul. Si l'on autorisait la rotation de l'aile autour de son axe Oz, par exemple en montant celle-ci sur un pivot, on pourrait donc s'attendre à l'apparition d'un tel mouvement.

5. Enfin, la cinquième possibilité est que l'écoulement observé brise toutes les symétries du problème. Dans ce cas, on peut s'attendre à observer à la fois une auto-propulsion et à ce que l'aile laisse derrière elle un sillage de tourbillons déviés vers le haut ou vers le bas, de manière identique au problème étudié au chapitre 3.

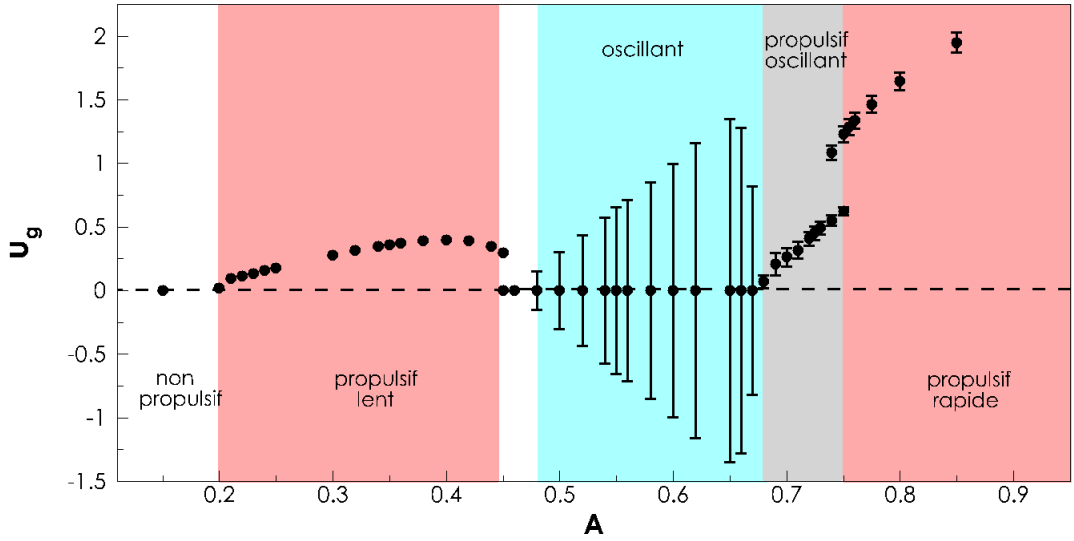


FIGURE 5.9 – Régimes de déplacement de l'aile pour $Re_f = 12$ et $\rho = 100$. Vitesses horizontales moyennes (points) et extrêmes (barres verticale) en fonction de l'amplitude de battement vertical A. On distingue cinq régimes : un régime non-propulsif (blanc), deux régimes propulsifs lent et rapide (rose), un régime oscillant (bleu) et un régime propulsif oscillant (gris).

5.2.4 Résultats numériques

Pour tous les résultats présentés dans cette section, le nombre de Reynolds basé sur la fréquence de battement de l'aile est fixé à $Re_f = 12$ et le rapport de densité est égal à $\rho = \rho_s/\rho_f = 100$. Différentes amplitudes de battement sont considérées dans la gamme $0.15 \leq A \leq 0.85$. La condition initiale est un écoulement au repos et une perturbation de la vitesse horizontale $u_s = 0.01$, à moins qu'une autre condition initiale ne soit précisée.

Les résultats sont résumés sur les figures 5.9 et 5.10 qui représentent la vitesse horizontale moyenne et les fréquences d'oscillation de la vitesse horizontale (5.10a et 5.10b) en fonction de l'amplitude de battement.

On distingue 5 régimes de déplacement de l'aile. Le régime non-propulsif symétrique, représenté en blanc, est obtenu pour deux gammes d'amplitude de battement, $0.2 \leq A$ et $0.45 \leq A \leq 0.48$. Un régime propulsif lent est observé pour $0.2 < A \leq 0.45$ et un régime propulsif rapide est observé pour $A \geq 0.75$. Enfin, un régime oscillant est observé pour $0.48 < A \leq 0.68$ et un régime propulsif oscillant est obtenu pour $0.68 < A \leq 0.75$. Ces différents régimes sont décrits en détail par la suite.

5.2.4.0.1 Régime non-propulsif (symétrique)

Comme son nom l'indique, le régime non-propulsif est un régime où l'aile oscille verticalement mais ne se propulse pas dans la direction horizontale.

La figure 5.11(a) (respectivement 5.11b) représente la vitesse de battement u_s (resp. le déplacement x_s) en fonction du temps pour l'amplitude de battement $A = 0.15$. La perturbation de vitesse $u_s = 0.01$ initialement introduite est amortie et tend à s'annuler. L'aile se stabilise vers une position proche de $x_g = 0.6$. L'évolution du champ de vorticité est représenté sur la figure 5.11(c) pour une période de battement, une fois que la perturbation initiale s'est amortie. L'écoulement est T-périodique et satisfait la symétrie de réflexion K_x à chaque instant de la période, ainsi que que la symétrie H_1 (et donc aussi la symétrie H_2). Ce régime est obtenu pour les faibles amplitudes, $A \leq 0.2$, ainsi que dans

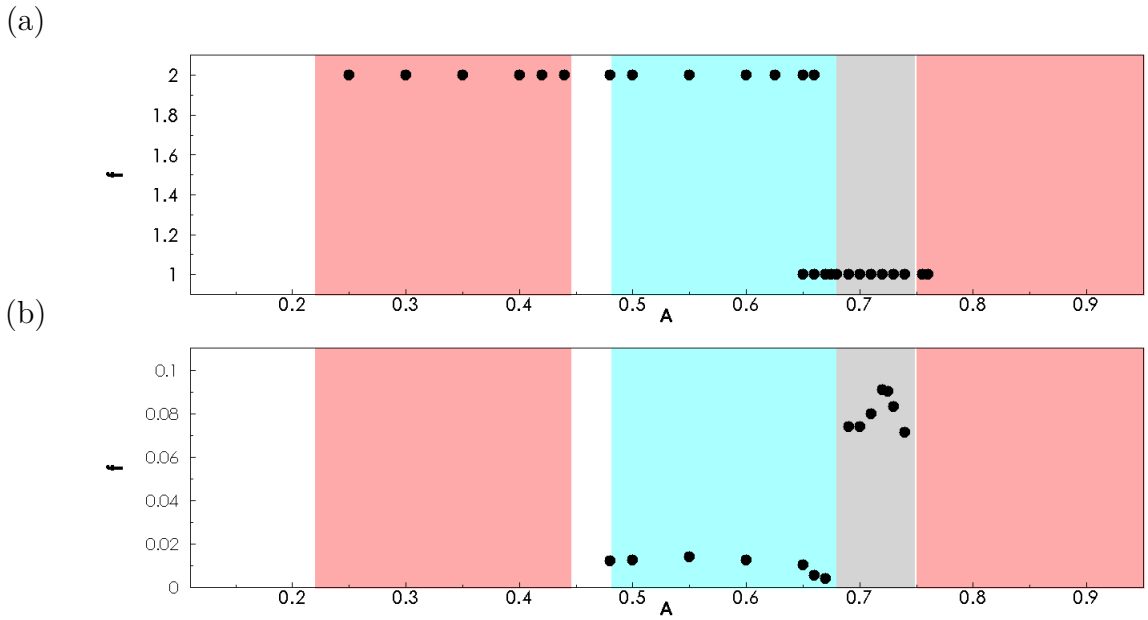


FIGURE 5.10 – Régimes de déplacement de l'aile pour $Re_f = 12$ et $\rho = 100$. (a) Haute fréquence et (b) basse fréquence observée dans le signal de vitesse horizontale en fonction de l'amplitude.

la gamme d'amplitude $0.45 \leq A \leq 0.48$. Dans la prochaine section, on montrera que cette solution périodique et symétrique existe pour toutes les amplitudes de battement, mais n'est pas observable hors des gammes d'amplitudes indiquées, car elle devient instable.

5.2.4.0.2 Régime propulsif lent

Le régime propulsif lent, obtenu pour $0.2 \leq A \leq 0.45$, se caractérise par une vitesse moyenne de propulsion non-nulle mais faible. La figure 5.12 représente la vitesse de battement u_s, le déplacement x_s et le champ de vorticité sur une période pour $A = 0.3$. La vitesse horizontale initialement introduite croît exponentiellement dans le temps avant de saturer vers un régime établi pour $t > 200$, qui est périodique (zoom de la figure 5.12) et caractérisé par de très faibles amplitudes d'oscillation par rapport à la vitesse moyenne. On remarque que la période d'oscillation de la vitesse horizontale est égale à la moité de la période d'oscillation de battement verticale. La fréquence adimensionée représentée dans la figure 5.9(c) vaut donc $f = 0.5$ dans ce régime. Ceci s'explique en considérant les symétries de l'écoulement, représenté sur une période de battement dans la figure 5.12(c). La brisure de la symétrie de réflexion K_x est clairement visible, les paires de tourbillons émises à chaque demi-période de battement ne sont pas symétriques par rapport à l'axe vertical (O, y). Elles sont convectées dans la direction horizontale (vers la gauche dans la figure) à une vitesse proche de (mais opposée à) la vitesse moyenne de translation de l'aile $\langle u_s \rangle$ (positive, l'aile se déplace vers la droite). Par contre, cet écoulement vérifie la symétrie spatio-temporelle H_1. Par conséquent, la force horizontale générée par l'écoulement pendant une phase ascendante de l'aile est égale à celle pendant une phase descendante, et la vitesse horizontale est donc $T/2$ périodique. Le déplacement de l'aile dans la direction horizontale est représenté sur la figure 5.12(b). Le mouvement est clairement cohérent. La condition initiale choisie ici ($u_s = 0.01$) permet d'obtenir un mouvement de propulsion cohérent dans la direction $x > 0$. En choisissant une valeur négative de la condition initiale, on peut obtenir des déplacements de l'aile dans la direction $x < 0$.

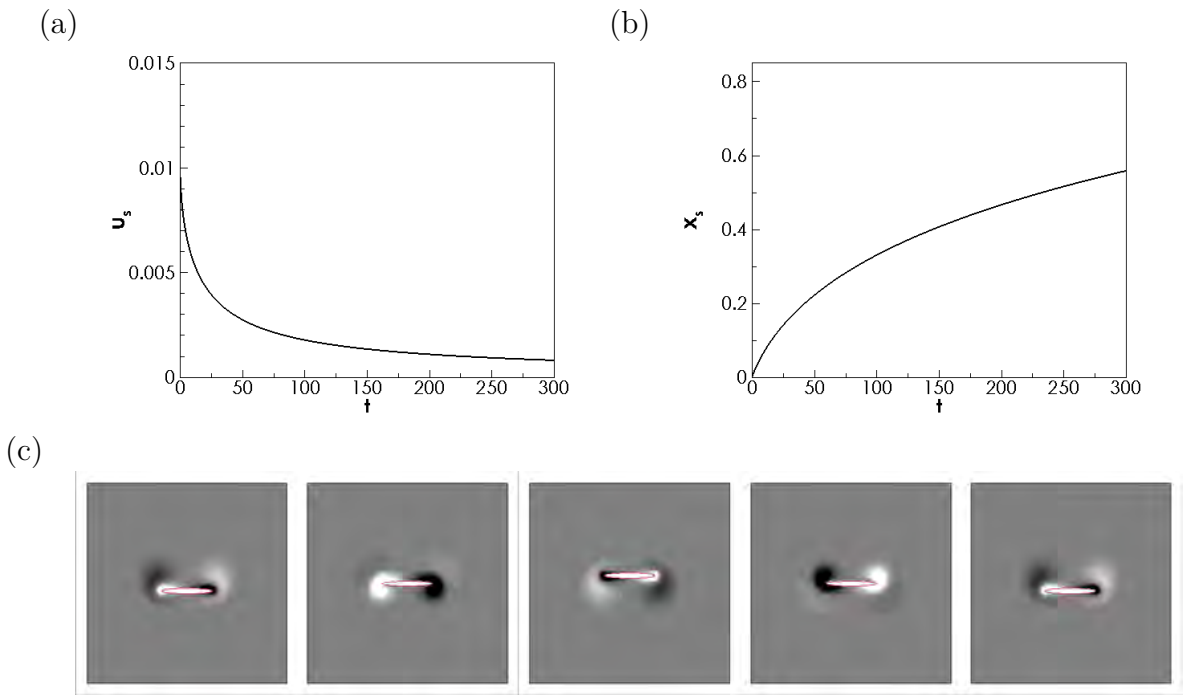


FIGURE 5.11 – Régime non-propulsif symétrique pour $A = 0.15$. (a) Vitesse instantanée de propulsion u_s et (b) déplacement x_s de l'aile en fonction du temps t adimensionné par la période de battement. (c) Évolution temporelle du champ de vorticité sur une période de battement. Le pas de temps entre chaque image est $T/4$. $Re_f = 12$ et $\rho = 100$.

5.2.4.0.3 Régime oscillant

Le régime oscillant est obtenu pour $0.48 \leq A \leq 0.68$ (zone bleue dans la Figure 5.9). Il se caractérise par une oscillation de l'aile autour d'une position $x \sim 0$. La vitesse horizontale moyenne (sur plusieurs centaines de périodes) est nulle mais les valeurs minimales et maximales de la vitesse sont très grandes. Pour mieux comprendre ce régime, examinons les figures 5.13(a-b) qui représentent l'évolution temporelle de u_s et x_s pour l'amplitude $A = 0.5$. On observe très clairement une oscillation très basse-fréquence $f \sim 0.012$ dans les signaux de vitesse et de position, correspondant à une période 80 fois plus grande que la période de battement. L'aile se propulse donc alternativement vers la gauche ou vers la droite, sans jamais atteindre un régime où la vitesse horizontale est constante.

Les figures 5.13(c-d) représentent la structure de l'écoulement au cours d'une période de battement, mais à deux moments différents du cycle d'oscillation à basse fréquence. Le premier cas (5.13c) est pour $t_0 = 190$, ce qui correspond à un moment où l'aile se déplace vers la gauche ($u_s(t) < 0$), tandis que le second cas (5.13c) est pour $t_0 = 240$, ce qui correspond à un moment où l'aile se déplace vers la droite ($u_s(t) > 0$). Comme attendu, dans chacun des cas les tourbillons sont convectés dans la direction opposée au déplacement de l'aile. Notons qu'aucune propriété remarquable de symétrie n'est visible sur ces figures.

Pour les plus grandes amplitudes de ce régime, on observe sur la figure 5.9(b) qu'il existe deux valeurs de fréquence pour certaines amplitudes, l'une à $f = 2$ et l'autre à $f = 1$. Pour mieux comprendre cette coexistence des fréquences, la figure 5.14(b) représente l'évolution temporelle de la vitesse u_g pendant une phase d'accélération de l'aile. On observe très clairement un doublement de la période sur cet intervalle temporel.

Ces comportements peuvent être expliqués à travers des considérations de symétrie. En effet, on a vu en énonçant les relations (5.14) que la symétrie H_1 implique que $F_y(t) = F_y(t+T/2)$. On s'attend donc à ce que lorsque cette symétrie est respectée, la force $F_y(t)$,

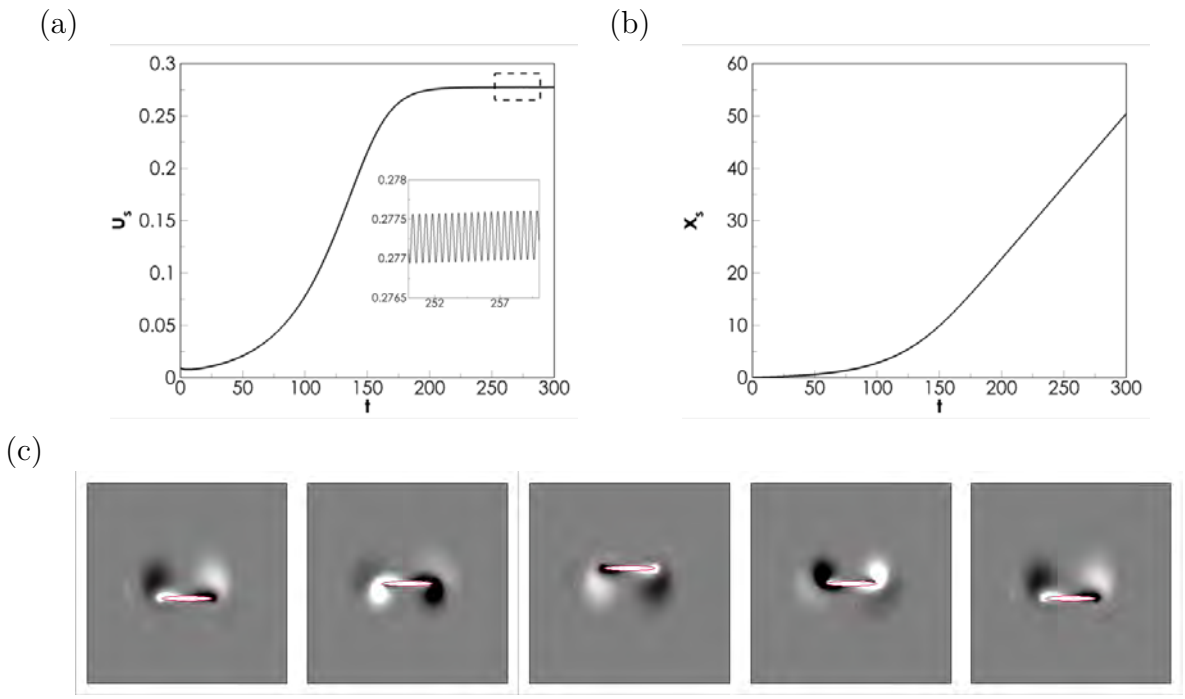


FIGURE 5.12 – Régime propulsif lent pour $A = 0.3$. (a) Vitesse instantanée de propulsion u_s et (b) déplacement x_s de l'aile en fonction du temps t adimensionné par la période de battement. (c) Évolution temporelle du champ de vorticité sur une période de battement. Le pas de temps entre chaque image est $T/4$. $Re_f = 12$ et $\rho = 100$.

ainsi que la vitesse $u_s(t)$ qui lui est directement liée, soient des fonctions périodiques de fréquence $2f$. La figure 5.14c représente la structure du sillage au cours d'une période de battement pour $t_0 = 300$, ce qui correspond à un un moment du cycle ou la vitesse oscille à la fréquence $2f$. On constate que la symétrie H_1 n'est pas vérifiée de manière exacte mais l'est tout de même de manière approchée : au cours des battements ascendant et descendant on émet une paire de tourbillons et le plus intense des deux est situé du coté droit. En revanche, la figure 5.14d représente la structure du sillage au cours d'une période de battement pour $t_0 = 400$, ce qui correspond à un un moment du cycle ou la vitesse oscille à la fréquence f. Dans ce cas, la symétrie H_1 est fortement brisée. En effet, les deux moitiés du cycle sont très différentes l'une de l'autre, et au cours de l'oscillation on observe qu'une seule paire de tourbillons se détache de l'aile, et est convectée rapidement vers le bas.

5.2.4.0.4 Régime propulsif oscillant

Le régime propulsif oscillant est obtenu pour $0.68 < A \leq 0.75$ (zone grise dans la Figure 5.9). Il se caractérise par une propulsion de l'aile à une vitesse moyenne non-nulle du même ordre de grandeur que pour le régime propulsif lent. La différence fondamentale avec ce régime réside dans le contenu fréquentiel du signal de vitesse. La fréquence haute d'oscillation est maintenant $f = 1.$ et il existe une basse-fréquence de l'ordre de 0.08. Cette basse-fréquence, d'un ordre de grandeur plus grande que celle observée dans le régime oscillant, est associée à des fluctuations importantes de la vitesse de propulsion, comme on peut le voir sur la figure 5.15 qui présente les résultats obtenus pour $A = 0.725$. Enfin dans tout ce régime la haute fréquence est f et non $2f$, ce qui suggère, d'après la discussion du paragraphe précédent, que la symétrie H_1 est fortement brisée. Ce point est confirmé par la figure 5.15(c) où on peut voir une dissymétrie dans la structure de

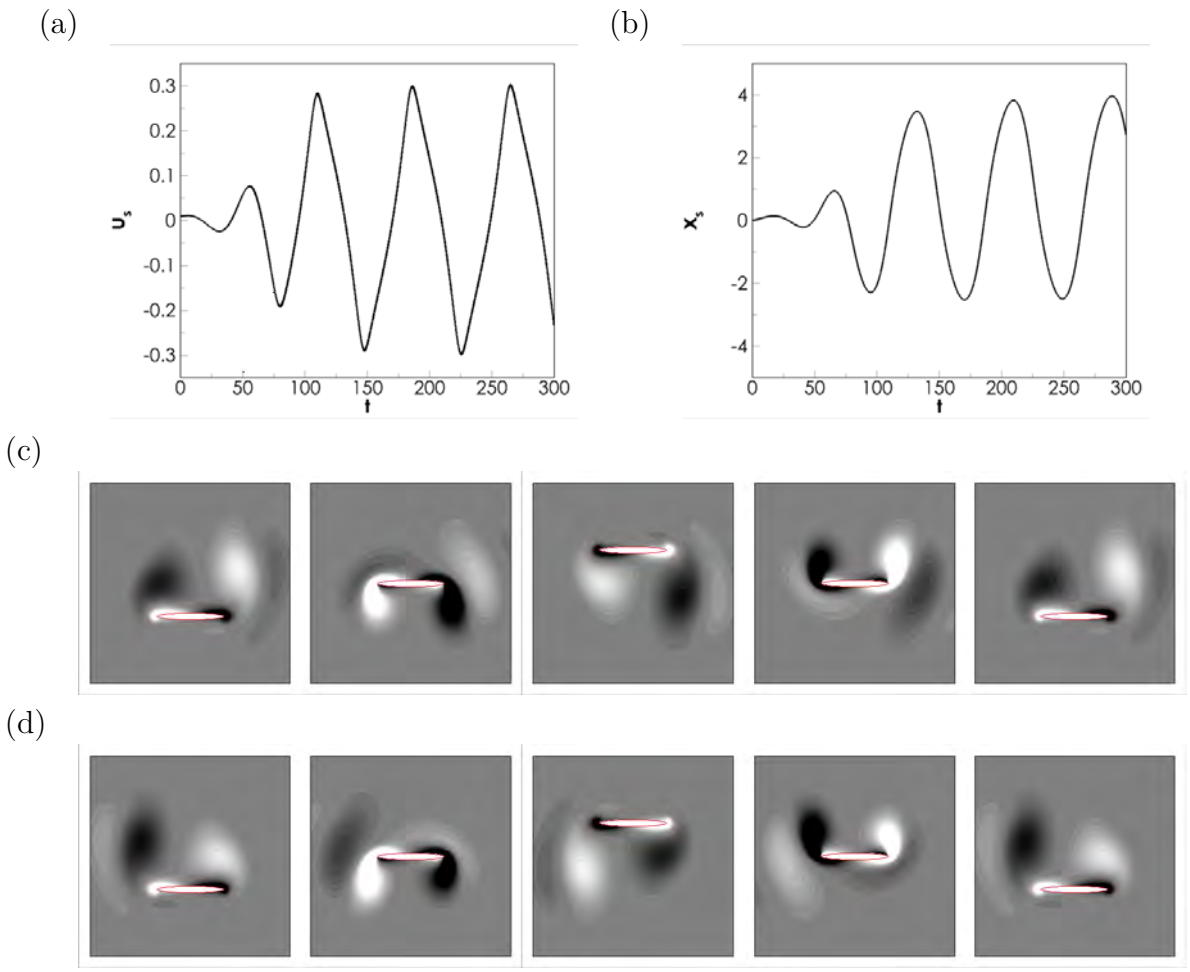


FIGURE 5.13 – Régime oscillant pour $A = 0.5$. (a) Vitesse instantanée de propulsion u_s et (b) déplacement x_s de l'aile en fonction du temps t adimensionné par la période de battement. (c-d) Évolution temporelle du champ de vorticité sur une période de battement (le pas de temps entre chaque image est $T/4$) pour (c) $t_0 = 190$ et (d) $t_0 = 240$. $Re_f = 12$ et $\rho = 100$

l'écoulement entre les battements ascendant et descendant. En effet, les tourbillons formés pendant ces deux phases de battement s'apparient et sont ensuite convectés vers le haut.

5.2.4.0.5 Régime propulsif rapide

Pour des amplitudes $A \geq 0.75$, on obtient un régime propulsif rapide, qui se caractérise par une vitesse de propulsion moyenne, plus grande que celle observée dans les précédents régimes. La figure 5.16 représente les vitesses, déplacements et champs de vorticité pour $A = 0.8$. Le signal de vitesse horizontale (zoom dans la figure 5.16a) montre une fonction T-périodique mais fortement disymétrique entre les parties "montante" et "descendante" du cycle d'oscillation, ce qui trahit la présence de composantes de fréquence f et $2f$ avec des amplitudes comparables. La fréquence fondamentale est toutefois bien f et non $2f$, ce qui suggère à nouveau que la symétrie H_1 est brisée par l'écoulement. Ce point est confirmé par la figure 5.15(c) où l'on peut voir une dynamique tourbillonnaire similaire à celle du régime précédent. En effet, les tourbillons formés pendant ces deux phases de battement s'apparient et sont ensuite convectés vers le haut. La différence par rapport au cas précédent est toutefois que celui-ci est plus simple car exactement T-périodique.

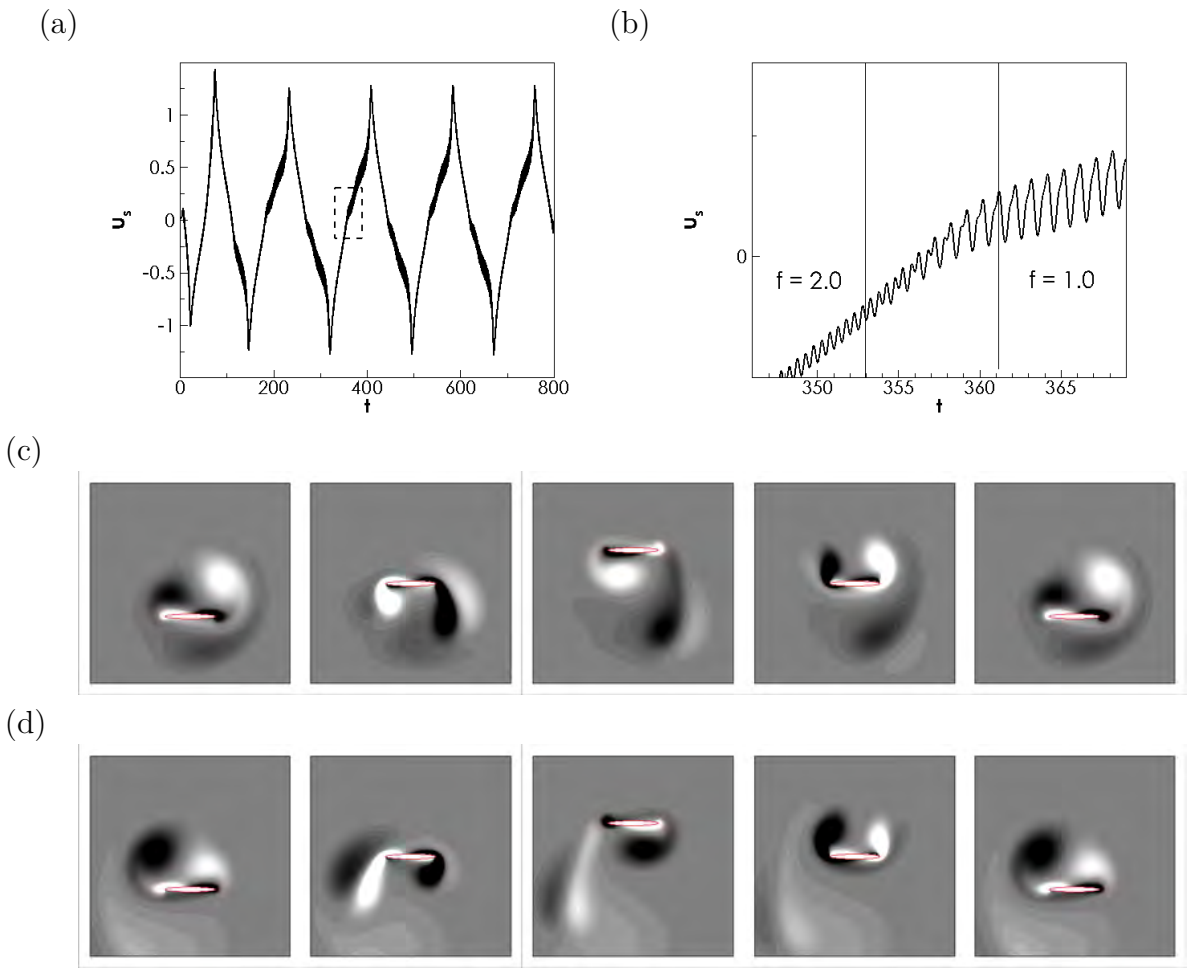


FIGURE 5.14 – Régime oscillant pour $A = 0.66$. Vitesse instantanée de propulsion $u_s(t)$ en fonction du temps (a) pour $0 \leq t \leq 200$ et (b) $150 \leq t \leq 180$. La figure (b) montre le doublement de période (transitoire) correspondant au passage de la fréquence de $f = 2.$ à $f = 1.0$. (c-d) Évolution temporelle du champ de vorticité sur une période de battement pour (c) $t_0 = 300$ et (d) $t_0 = 400$.

5.2.4.0.6 Caractère sous-critique des transitions

Au voisinage de la valeur $A = 0.45$, frontière entre les régimes propulsif lent et oscillant, la figure 5.9(a), montre que la vitesse de propulsion subit une variation brutale entre une valeur non nulle et une valeur nulle. Cette transition brutale suggère une transition sous-critique, ce qui se traduit par l'existence d'un intervalle de bistabilité correspondant à des valeurs de A pour lesquelles les deux solutions sont possibles. Pour vérifier ce point, deux simulations instationnaires ont été réalisées pour $A = 0.45$ avec des conditions initiales différentes. Les courbes bleues représentées sur la figure 5.17 montrent l'évolution temporelle de la vitesse horizontale pour ces deux conditions initiales : un écoulement au repos avec $u_g = 0.01$ pour $t = 0$ et la solution obtenue pour l'amplitude $A = 0.44$ à $t = 100$ (représentée par la courbe noire). On observe clairement que, pour la première condition initiale, la solution converge vers un état symétrique non-propulsif, tandis que la solution converge vers un état propulsif (lent) pour la seconde condition initiale.

De manière similaire, on peut voir également sur la figure 5.9(a) que la transition entre les régimes propulsif oscillant et propulsif rapide est elle aussi marquée par une brusque augmentation de la vitesse moyenne de propulsion. Pour déterminer s'il existe plusieurs solutions pour une même valeur d'amplitude, on a calculé la solution pour $A = 0.75$ en utilisant comme condition initiale la solution périodique obtenue pour $A = 0.76$ (régime

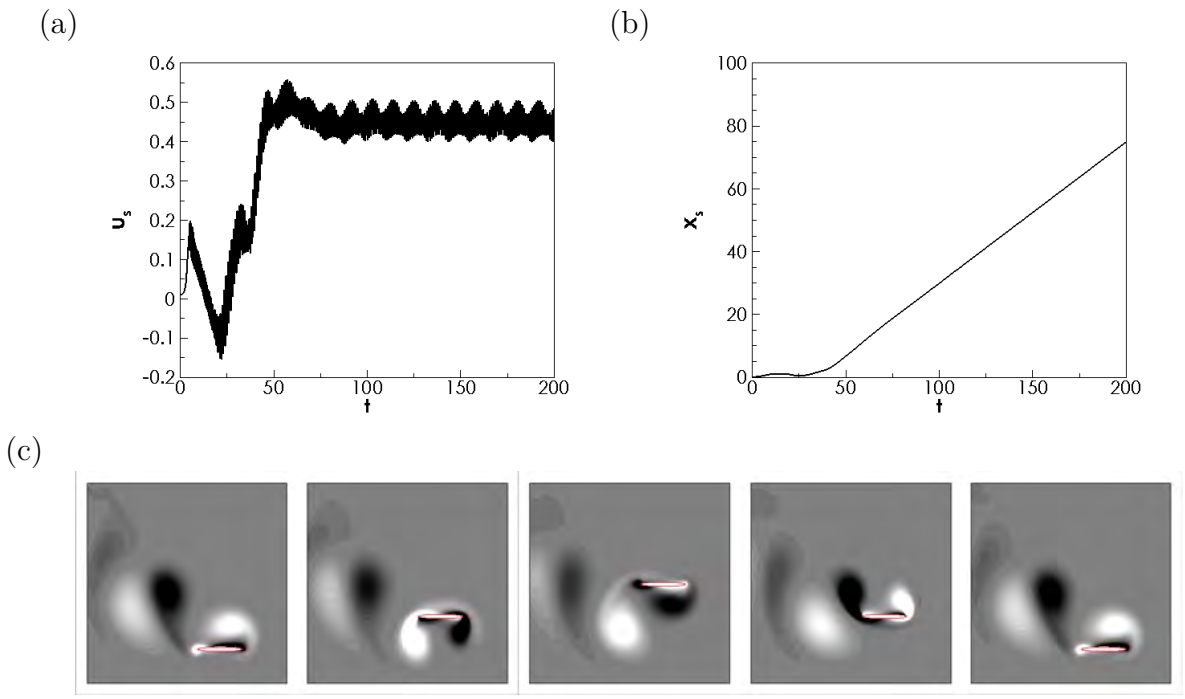


FIGURE 5.15 – Régime propulsif oscillant pour $A = 0.725$. (a) Vitesse instantanée de propulsion u_s et (b) déplacement x_s de l'aile en fonction du temps t adimensionnés par la période de battement. (c) Évolution temporelle du champ de vorticité sur une période de battement. Le pas de temps entre chaque image est $T/4$. $Re_f = 12$ et $\rho = 100$

propulsif rapide), ou la condition initiale d'un écoulement au repos (et $u_g = 0.01$). Les résultats, reportés sur la figure 5.17(b), montre qu'il existe effectivement deux solutions pour $A = 0.75$, l'une appartenant à la branche de solution du régime propulsif rapide, l'autre à celle du régime propulsif oscillant.

5.3 Stabilité des solutions périodiques du problème d'auto-propulsion

Dans la suite de ce chapitre, on étudie l'apparition de ces différents régimes d'écoulement grâce à une analyse de stabilité de la solution périodique vérifiant l'ensemble des symétries $\mathcal{S}$ du problème, comme expliqué précédemment.

Les équations linéarisées du problème auto-propulsif sont décrites dans la section 5.3.1. La méthode de stabilisation utilisée pour calculer ces solutions périodiques est brièvement décrites dans la section 5.3.2. Enfin, les résultats de stabilité sont présentés dans la section 5.3.3, en s'intéressant d'abord au rapport de densité $\rho = 100$ pour comparaison avec les résultats non linéaires de la section précédentes, puis en explorant les autres rapports de densité. Le cas des très grandes densités est traité en toute fin et comparé aux résultats obtenus en supprimant le mouvement horizontal de l'aile.

5.3.1 Équations linéarisées et analyse de Floquet

L'écoulement $(\mathbf{u}, p)$ est décomposé sous la forme

$$(\mathbf{u}, p)(t) \quad = \quad (\mathbf{u}_s, p_s)(t) + \epsilon(\mathbf{u}', p')(t) \tag{5.16}$$

où $(\mathbf{u}_s, p_s)$ est une solution périodique vérifiant l'ensemble des symétries $\mathcal{S}$, alors que $(\mathbf{u}', p')$ est un perturbation infinitésimale de cette solution. La vitesse de translation u_g

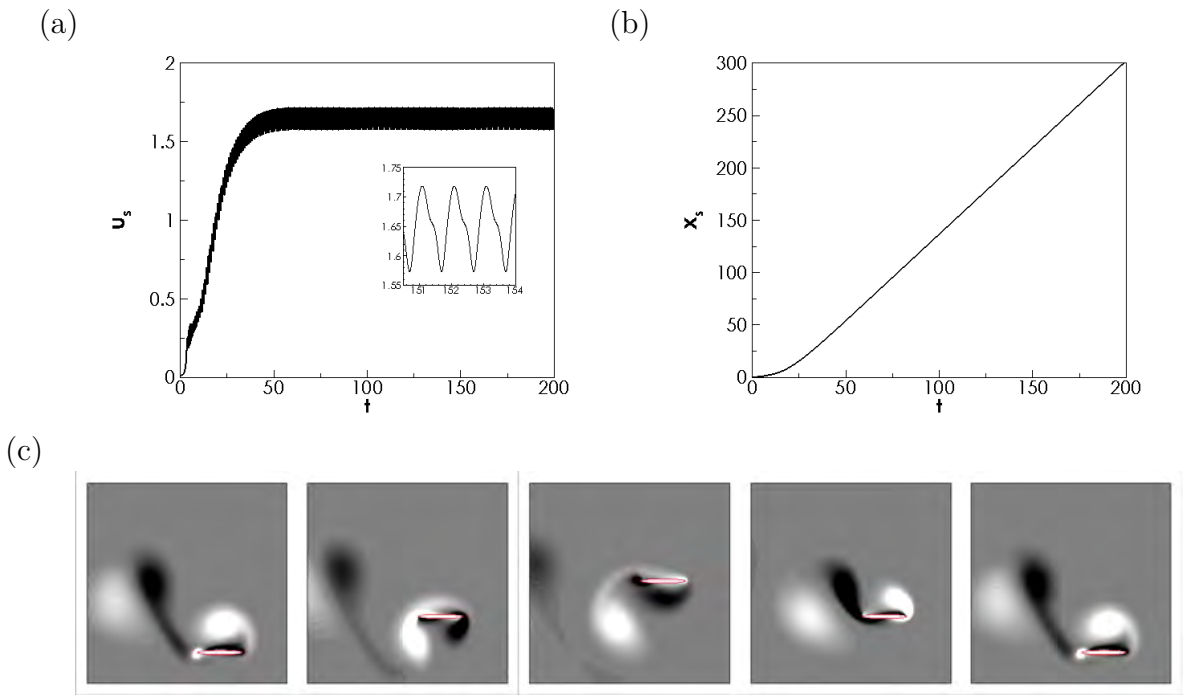


FIGURE 5.16 – Régime propulsif rapide pour $A = 0.8$. (a) Vitesse instantanée de propulsion u_s et (b) déplacement x_s de l'aile en fonction du temps t adimensionné par la période de battement. (c) Évolution temporelle du champ de vorticité sur une période de battement. Le pas de temps entre chaque image est $T/4$. $Re_f = 12$ et $\rho = 100$

de l'aile est décomposée sous la forme

$$u_g(t) = 0 + \epsilon u'_g(t) \tag{5.17}$$

la symétrie de réflexion K_x de l'écoulement $(\mathbf{u}_s, p_s)$ imposant que la vitesse de translation horizontale soit nulle à l'ordre dominant. Par ailleurs, on ne considère pas de perturbations de la vitesse verticale car la cinématique est imposée selon la loi (5.3). En injectant ces décompositions dans les équations (5.4-5.7), on obtient à l'ordre dominant que la solution périodique symétrique vérifie

$$\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + [(\mathbf{u}_s - v_g \mathbf{e}_y) \cdot \nabla]\, \mathbf{u}_s = -\nabla p_s + \frac{1}{Re} \mathbf{\Delta} \mathbf{u}_s \tag{5.18}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_s = 0 \tag{5.19}$$

$$u_s(\mathbf{X}_w, t) = 0 \ , \ v_s(\mathbf{X}_w, t) = v_g(t) \tag{5.20}$$

où v_g est la vitesse dans la direction verticale. La résolution de ces équations ne permet pas de converger vers la solution périodique satisfaisant les symétries K_x et H_1, lorsque celle-ci est instable. La méthode de stabilisation permettant d'obtenir ces solutions est rapidement discutée au prochain paragraphe. Plus de détails peuvent être trouvés dans le chapitre 2. À l'ordre ϵ, on obtient le système d'équations linéarisées autour de la solution périodique symétrique, qui s'écrit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + [(\mathbf{u}_s - v_g \mathbf{e}_y) \cdot \nabla]\, \mathbf{u}' + \left[(\mathbf{u}' - u'_g \mathbf{e}_x) \cdot \nabla\right] \mathbf{u}_s &= -\nabla p' + \frac{1}{Re} \mathbf{\Delta} \mathbf{u}' \\
\nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0 \\
u'(\mathbf{X}_w, t) = u'_g(t) \ , \ v'(\mathbf{X}_w, t) &= 0 \\
M \frac{du'_g}{dt} &= \mathbf{F}' \cdot \mathbf{e}_x \\
\mathbf{F}' = \int_{\Gamma_w} (-p' \mathbf{n} &+ \frac{1}{Re} \left[\nabla \mathbf{u}' + \nabla \mathbf{u}'^T\right] \cdot \mathbf{n}) d\mathbf{X}_w
\end{aligned} \tag{5.21}$$

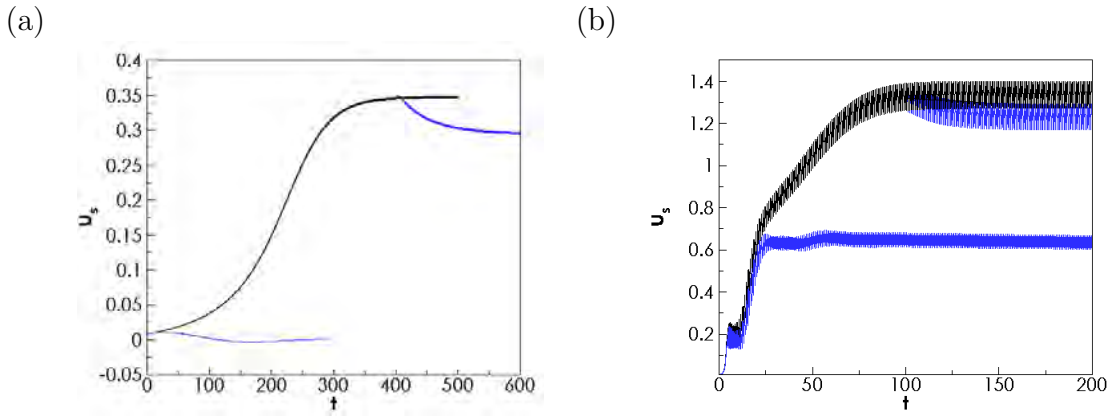


FIGURE 5.17 – Existence de deux solutions périodiques pour une même valeur d'amplitude. Vitesse horizontale de l'aile en fonction du temps pour des amplitudes proches de (a) $A = 0.45$ et (b) $A = 0.75$. Les courbes bleues correspondent aux amplitudes (a) $A = 0.45$ et (b) $A = 0.75$ avec comme condition initiale soit un écoulement au repos et une perturbation de vitesse de l'aile égale à $u_s = 0.01$, soit la solution obtenue pour l'amplitude de battement (a) $A = 0.44$ et (b) A=0.76 (courbes noires).

Si le déplacement de l'aile dans la direction horizontale n'est pas autorisée (cas qui sera considéré dans le paragraphe 5.3.3.3), les équations précédentes se simplifient sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + [(\mathbf{u}_s - v_g \mathbf{e}_y) \cdot \nabla]\, \mathbf{u}' + [\mathbf{u}' \cdot \nabla]\, \mathbf{u}_s &= -\nabla p' + \frac{1}{Re} \mathbf{\Delta} \mathbf{u}' \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0 \\ u'(\mathbf{X}_w, t) &= 0 \ , \quad v'(\mathbf{X}_w, t) = 0 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Ce sont les équations perturbatives résolues par exemple par Elston *et al* [44, 75]. Si on note $\mathbf{q}'$ toutes les inconnues du problème de perturbations, ces dernières sont recherchées sous la forme

$$\mathbf{q}'(t) = \left(\hat{\mathbf{q}}_T(t) e^{\lambda t} + c.c.\right) \tag{5.23}$$

où $\hat{\mathbf{q}}_T$ est un mode de Floquet associé à la valeur propre complexe $\lambda = \lambda_r + \mathrm{i}\lambda_\mathrm{i}$. On rappelle que les modes de Floquet sont T-périodiques, c'est-à-dire $\hat{\mathbf{q}}_T(t_0) = \hat{\mathbf{q}}_T(t_0 + T)$. Comme expliqué dans le chapitre 1.2, pour des systèmes de grande dimension, il est plus aisé de rechercher les valeurs propres μ (de plus grande amplitude) de la matrice de monodromie $\mathcal{M}$. Il s'agit de l'opérateur linéaire permettant de faire évoluer la perturbation d'un instant t_0 à un instant $t_0 + T$ autour de la solution périodique $\mathbf{u}_s, p_s$, et qui est défini par

$$\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t_0 + T) = \mathcal{M} \mathbf{q}'(\mathbf{x}, t_0). \tag{5.24}$$

Les valeurs propres de cet opérateur sont appelés les multiplicateurs de Floquet et sont liées aux valeurs propres λ par la relation $\mu = \exp(\lambda T)$. La valeur absolue $|\mu| = \exp(\lambda_r T)$ du multiplicateur de Floquet représente l'amplification du mode de Floquet sur la période T, tandis que la phase $\phi = \lambda_i T$ permet de définir une fréquence du mode de Floquet, à comparer à la fréquence battement f selon

$$\frac{f_{Floquet}}{f} = \frac{\lambda_i}{2\pi f} = \frac{\phi}{2\pi} \tag{5.25}$$

La phase ϕ est calculée à partir du multiplicateur de Floquet selon l'expression

$$\phi = \Im(\log(\frac{\mu}{|\mu|})) \tag{5.26}$$

5.3.2 Solutions périodiques symétriques

Pour calculer des solutions périodiques des équations (5.18) qui satisfont l'ensemble des symétries $\mathcal{S}$, les équations (5.18) sont résolues sur un demi-maillage et les conditions aux limites suivantes sont imposées sur l'axe $(0, y)$

$$u_s(x = 0, y, t) = 0 \quad , \quad \partial_x v_s(x = 0, y, t) = 0 \tag{5.27}$$

de façon à imposer la symétrie de réflexion K_x. Dans la plupart des cas considérés, l'imposition de ces conditions aux limites permet aussi d'obtenir des solutions vérifiant la symétrie spatio-temporelle H_1. Néanmoins, pour des grandes valeurs de fréquence de battement, la symétrie H_1 peut se briser sans que la symétrie K_x ne le soit. L'imposition de ces conditions aux limites n'est alors pas suffisante et la solution ainsi obtenue n'est plus T-périodique. Dans ces cas, dont les résultats ne sont pas rapportés dans la thèse, on a utilisé la méthode de préservation des symétries, décrite dans le chapitre 2, pour calculer les solutions satisfaisant la symétrie H_1.

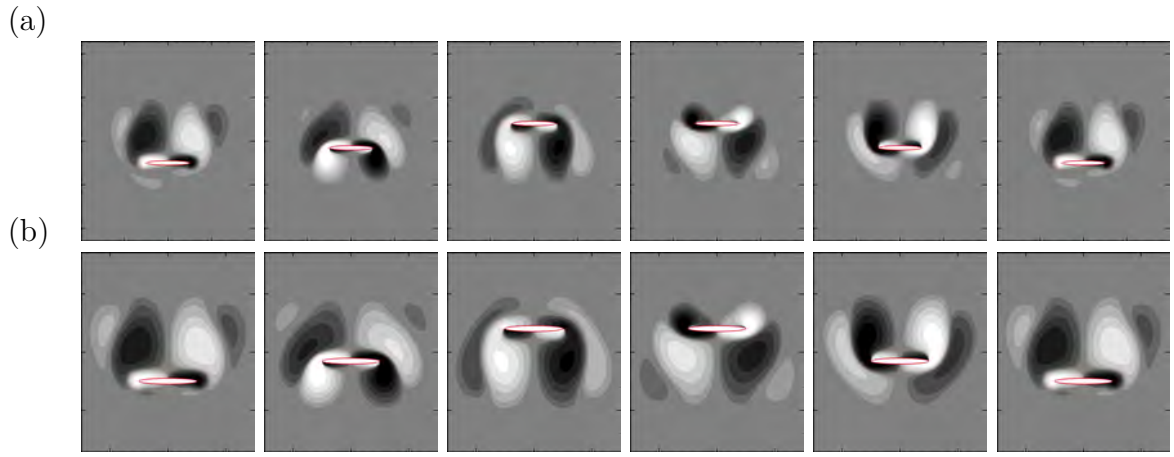


FIGURE 5.18 – (a) Solution dans le régime oscillant et (b) solution périodique vérifiant les symétries K_x et H_1 obtenues pour $A = 0.5$. Les champs de vorticité sont espacés de $T/5$ et représentés sur une période de battement T. $Re_f = 12$

Une solution périodique satisfaisant ces symétries est représentée sur la figure 5.18 par son champ de vorticité. Pour chaque instant de la période, le champ de vorticité satisfait $\omega_z(x, y, t) = -\omega_z(-x, y, t)$. La symétrie de réflexion spatiale est donc clairement respectée. Pendant la première demi-période de battement (figures 5.18a-c), l'aile est en phase ascendante et éjecte une paire de tourbillons de signe opposées. Pendant la demi-période suivante (figures 5.18d-f), l'aile est en phase descendante et éjecte une paire de tourbillons de signe opposées à celle éjectée à la demi-période précédente. Les symétries spatio-temporelles H_1 et H_2 sont donc bien respectées.

5.3.3 Résultats de stabilité des solutions périodiques et symétriques

5.3.3.1 Résultats pour $\rho = 100$

On présente dans un premier temps les résultats de l'analyse de stabilité des solutions périodiques symétriques, réalisée pour le rapport de densité $\rho = 100$. La figure 5.19(a) présente la valeur absolue du multiplicateur de Floquet du mode le plus instable en fonction de l'amplitude de battement. On identifie clairement deux régions d'instabilité. Pour les amplitudes $0.2 \leq A \leq 0.42$, le mode de Floquet instable est synchrone, c'est-à-dire

que le multiplicateur de Floquet est réel et positif. Par conséquent, ce mode ne brise pas la périodicité du mouvement de battement. Pour les amplitudes $0.46 \leq A \leq 0.58$, le mode de Floquet instable est asynchrone, c'est-à-dire que le multiplicateur de Floquet est complexe. Ce mode brise la périodicité du mouvement de battement. L'existence de ce mode asynchrone implique l'apparition d'une nouvelle fréquence $f_{Floquet}$ définie par (5.25). Elle est représentée sur la figure 5.19(b) en fonction de l'amplitude de battement. Cette fréquence est très faible comparé à la fréquence de forçage, et tend vers zéro à mesure que l'amplitude de battement augmente. Pour l'amplitude $A = 0.585$, la fréquence $f_{Floquet}$ s'annule, la paire de valeurs propres complexes conjuguées rejoint l'axe réelle et se transforme en deux valeurs propres réelles, comme on peut le voir également sur la figure (5.19a).

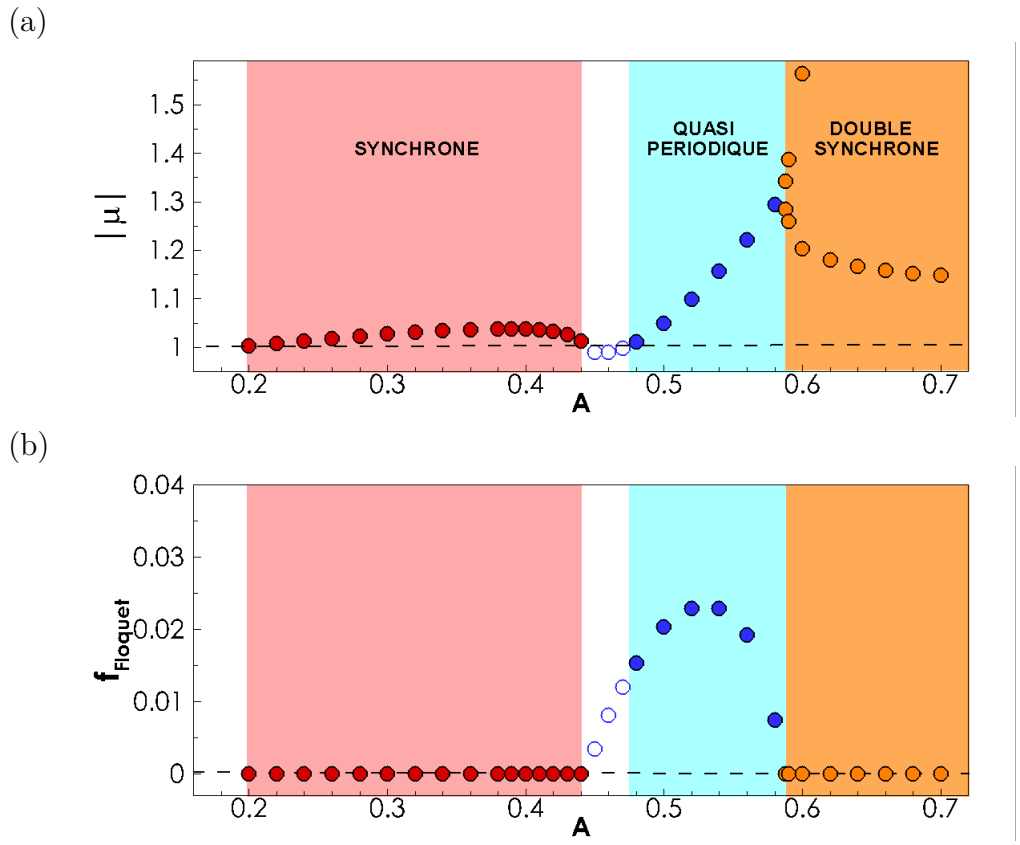


FIGURE 5.19 – Stabilité de la solution périodique et symétrique K_x, H_1. (a) Valeur absolue $|\mu|$ et (b) fréquence $f_{Floquet} = \phi/2\pi$ du multiplicateur de Floquet (dominant) en fonction de l'amplitude de battement A pour le rapport de densité $\rho = 100$. Les multiplicateurs stables ($|\mu| < 1$) et instables ($|\mu| > 1$) sont représentés par des cercles vides et pleins, respectivement. Les cercles rouges représentent des modes synchrones ($f_{Floquet} = 0$), les cercles bleues des modes quasi-périodiques ($f_{Floquet} \neq 0$) et les cercles oranges deux modes synchrones instables.

Les modes de Floquet synchrones et asynchrones sont représentés sur la figure 5.20(a) et (b), respectivement. Ces deux modes brisent la symétrie de réflexion K_x, puisque le champ de vorticité est anti-symétrique par rapport à l'axe (O, y) dans les deux cas. Il se pose la question de savoir si en plus de briser K_x, est-ce que le mode brise H_1. Pour identifier cela, on décompose le mode entre ses composantes symétriques $\hat{\mathbf{u}}_s$ et anti-symétriques $\hat{\mathbf{u}}_a$ pour évaluer la prédominance de chacune de ses composantes. En pratique pour le mode synchrone à $A = 0.3$, on trouve $\|\hat{\mathbf{u}}_s\|/\|\hat{\mathbf{u}}_a\| \sim 5$. On a donc un mode qui majoritairement vérifie la symétrie H_1 mais dont une partie non négligeable est anti-symétrique. Par conséquent, on s'attend à l'émergence de solutions non linéaires T-périodiques, ne

satisfaisant ni H_1 ni K_x, dans la gamme d'amplitude $0.3 \leq A \leq 0.41$. En pratique, les solutions non linéaires dans ce régime vérifient H_1 ce qui laisse supposer que la partie anti-symétrique du mode ne domine pas et a tendance à être re-stabilisée par les effets non linéaires.
Le mode asynchrone est représenté dans la figure 5.20(b) par sa partie réelle. De la même manière que pour le mode synchrone, on évalue à la bifurcation (pour $A = 0.465$) que $\|\hat{\mathbf{u}}_s\|/\|\hat{\mathbf{u}}_a\| \sim 20$. On a donc un mode qui vérifie nettement plus la symétrie H_1. Néanmoins, l'apparition d'une fréquence secondaire (du au fait que le mode est quasi-périodique) implique que la perturbation linéaire brise nécessairement la périodicité et la symétrie spatio-temporelle H_1, même si le mode de Floquet respecte H_1. Par conséquent, on s'attend à l'émergence de solutions non linéaires quasi-périodiques dans la gamme d'amplitude $0.46 \leq A \leq 0.58$. On notera par ailleurs que si on regarde pour une plus grande valeur d'amplitude $A = 0.5$, on a $\|\hat{\mathbf{u}}_s\|/\|\hat{\mathbf{u}}_a\| \sim 100$, ce qui montre que le mode de Floquet vérifie de plus en plus la symétrie H_1 pour une amplitude croissante, indépendamment de l'argument du mode.

(a)

(b)

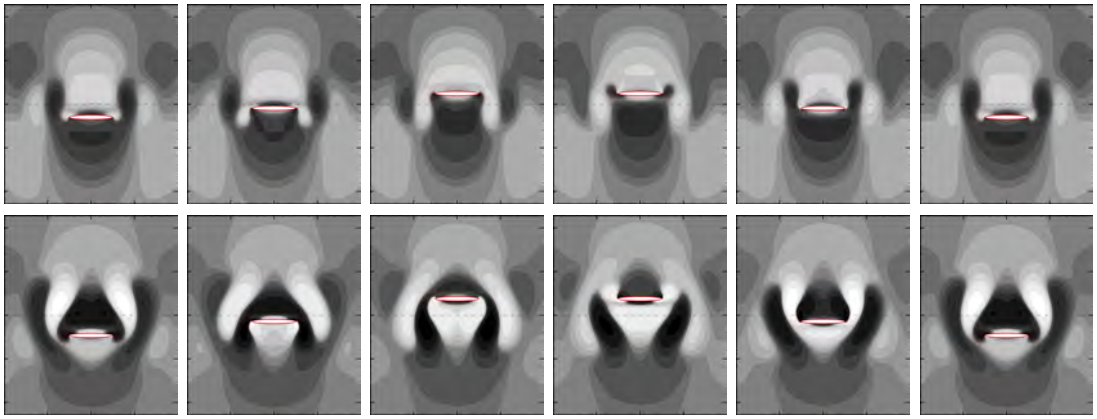


FIGURE 5.20 – Modes de Floquet instables pour $\rho = 100$. (a) Mode synchrone ($A = 0.3$) et (b) mode asynchrone ($A = 0.465$) représentés par la partie réelle du champ de vorticité aux instants $t = t_0$, $t = t_0 + T/5$, $\cdots$, $t = t_0 + T$.

L'interprétation de la structure spatiale des modes de Floquet représentés sur la figure 5.20 n'est pas triviale. Pour comprendre leur implication sur le mouvement dans la direction horizontale, on s'intéresse plutôt à la vitesse de l'aile dans la direction horizontale qui s'écrit sous la forme

$$u_g(t) = \epsilon \left(\hat{u}_g(t)\, e^{\lambda_r t} e^{\mathrm{i}\lambda_\mathrm{i} \mathrm{t}} + \mathrm{c.c.} \right)$$

où $\hat{u}_g(t)$ est la composante du mode de Floquet, qui est une fonction complexe et périodique (c.a.d. $\hat{u}_g(t_0 + T) = \hat{u}_g(t_0)$). La vitesse horizontale peut se réécrire sous la forme $u_g(t) = \epsilon e^{\lambda_r t} \tilde{u}_g(t)$ en introduisant la fonction $\tilde{u}_g(t)$ définie par

$$\tilde{u}_g(t) = \Re(\hat{u}_g)(t)\, \cos(\lambda_i t) - \Im(\hat{u}_g)(t)\, \sin(\lambda_i t) \tag{5.28}$$

Dans le cas d'un mode synchrone, cette fonction se simplifie comme $\tilde{u}_g(t) = \Re(\hat{u}_g)(t))$ et est donc T-périodique. Dans le cas d'un mode asynchrone, cette fonction n'est pas T-périodique : la phase ϕ du multiplicateur de Floquet déphase le signal périodique $\hat{u}_g$ du mode de Floquet.

La figure 5.21 représente l'évolution temporelle de la perturbation de vitesse $\tilde{u}_g$ pour le mode synchrone (figure 5.21a) et le mode asynchrone (Figure 5.21b). Pour le mode

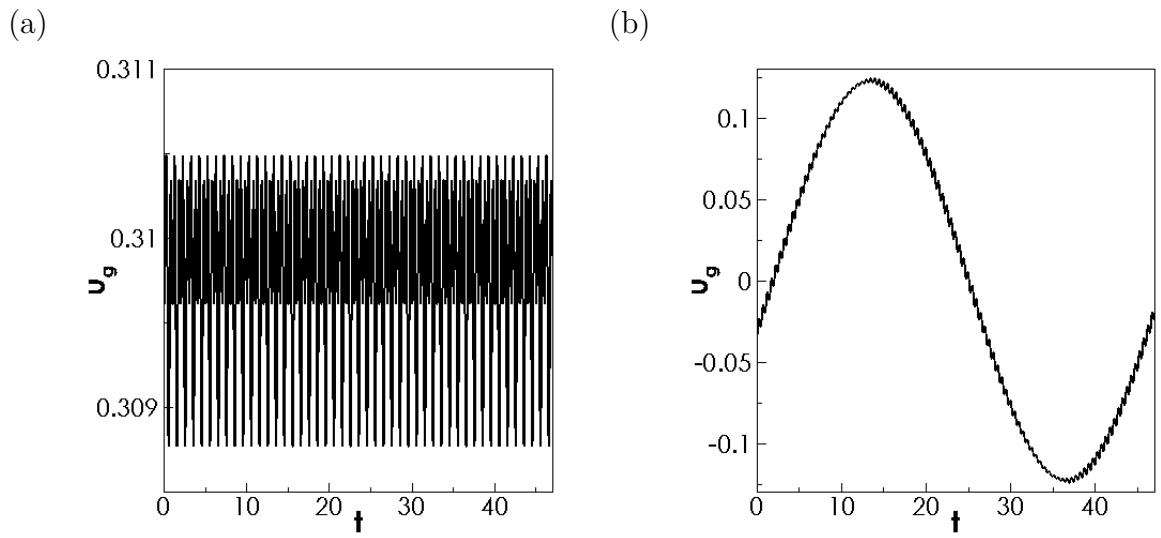


FIGURE 5.21 – Évolution temporelle de la perturbation de vitesse horizontale $\tilde{u}_g$ définie selon l'équation (5.28) pour (a) le mode synchrone à $A = 0.3$ et (b) le mode asynchrone à $A = 0.5$.

synchrone, la vitesse horizontale de l'aile oscille donc à la fréquence $f = 1/T$ du battement, autour d'une vitesse moyenne non nulle. À noter que l'amplitude d'oscillation est faible devant la valeur moyenne. Pour le mode asynchrone, on distingue deux fréquences d'oscillations, la fréquence du battement f et la très basse fréquence de Floquet $f_{Floquet}$. Par ailleurs, on remarque que la vitesse oscille autour d'une valeur moyenne quasiment nulle.

5.3.3.1.1 Comparaison des résultats linéaires et non linéaires

Ces résultats de stabilité sont en bon accord avec les résultats précédents obtenus par simulations non linéaires.

Le régime propulsif observé pour $0.25 \leq A \leq 0.42$ (figure 5.9) s'explique par la déstabilisation et la réstabilisation du mode de Floquet synchrone (figure 5.20-a). Ce mode synchrone se caractérise par une vitesse horizontale dont la moyenne est non-nulle, ce qui est en accord avec la vitesse moyenne non-nulle, caractéristique du régime propulsif. En comparant les figures 5.9 et 5.19, on constate que les intervalles d'existence du régime propulsif ($A \in [0.25, 0.45]$) et du mode synchrone correspondant ($A \in [0.2, 0.45]$) sont en bon accord.

Le régime symétrique observé dans l'intervalle $0.42 \leq A \leq 0.44$ est en bon accord avec la stabilité de la solution périodique et symétrique observée dans l'intervalle pour $0.445 \leq A \leq 0.475$.

L'existence du régime oscillant s'explique par la déstabilisation d'un mode asynchrone (ou quasi-périodique). Ce mode asynchrone se caractérise par une vitesse horizontale de l'aile qui oscille autour d'une valeur nulle, ce qui explique le caractère oscillant de la solution non linéaire autour de l'axe $(0, x)$. La fréquence d'oscillation associée à ce mode asynchrone (figure 5.19b) surestime la basse-fréquence de la solution non linéaire (figure 5.10b) mais reste du même ordre de grandeur.

En revanche, le régime propulsif rapide, observé dans les simulations pour $A \geq 0.75$, ne peut pas être expliqué directement par les résultats de stabilité linéaire. On pourrait penser, comme pour le régime propulsif lents, que ce régime est lui aussi lié à un mode synchrone. Or, si les résultats de stabilité révèlent en effet l'existence de deux modes synchrones pour les grandes valeurs de A, leur gamme d'existence ($A > 0.58$) n'est pas

en bon accord avec celle du régime propulsif rapide. D'autre part, les modes synchrones révélés par l'analyse de stabilité vérifient la symétrie H_1 de manière approchée, tandis que le régime propulsif rapide brise cette symétrie de manière forte.

5.3.3.2 Effet du rapport de densité sur les régions d'instabilité

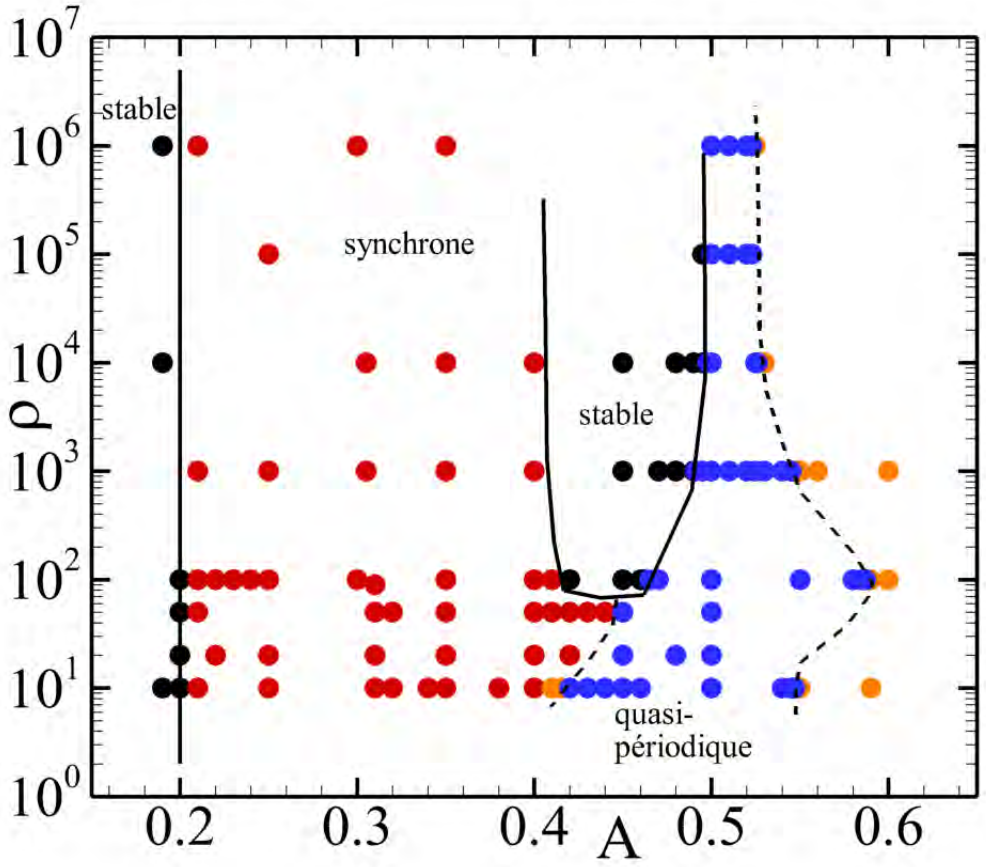


FIGURE 5.22 – Régions d'instabilités dans le plan (ρ, A) pour $Re_f = 12$. Les points stables sont représentés en cercle noir, les points instables par un mode synchrone en rouge et par deux modes synchrones en orange, et les points instables par une paire de modes asynchrones (quasi-périodiques) en bleus. Les courbes neutres sont pleines. La courbe pointillée indique la frontière entre une paire de modes asynchrones et deux modes synchrones.

L'analyse de stabilité a été étendue à d'autres valeurs du rapport de densité. Les résultats sont résumés dans la figure 5.22 qui représente les modes de Floquet dominants obtenus dans le plan (A, ρ). Les modes stables sont représentés par des points noirs, les modes synchrones instables par des points rouges, les modes asynchrones (quasi-périodiques) par des points bleus. Les point oranges représentent deux modes synchrones instables. On constate que l'amplitude critique de déstabilisation du mode synchrone (entrée dans le régime propulsif) est indépendante du rapport de masse et vaut $A = 0.3$. Pour de grands rapports de densité ($\rho \geq 100$), l'amplitude critique de restabilisation du mode synchrone (sortie du régime propulsif) est aussi indépendante du rapport de densité et vaut $A = 0.4$. Il existe alors une région stable (régime symétrique) dans laquelle l'aile n'a aucun mou-

vement dans la direction horizontale. Lorsque $A > 0.5$, le mode quasi-périodique se déstabilise et se transforme en deux modes synchrones instables. Pour de faibles rapports de densité ($\rho < 100$), le mode synchrone ne se restabilise pas et la région stable (régime symétrique) disparaît. Entre la région synchrone et la région quasi-périodique, il existe une région étroite où un nouveau mode synchrone se déstabilise, de sorte que deux modes synchrones sont alors instables (points oranges). Lorsque ces deux modes synchrones se rencontrent dans le plan complexe, ils forment une paire de mode quasi-périodiques. On constate que l'amplitude critique de ce second mode synchrone diminue avec le rapport de densité. Ce résultat suggère que la région synchrone à un mode instable disparaîtrait pour des rapports de densité plus faibles que ceux explorés ici ($\rho < 10$).

5.3.3.3 Résultats pour $\rho \to \infty$

On compare maintenant les résultats obtenus en résolvant le problème linéarisé (5.21) pour de très grand rapport de densité ($\rho \to \infty$) aux résultats du problème (5.22) correspondant au cas où le mouvement horizontal de l'aile n'est pas autorisé.

On présente dans un premier temps les résultats, réalisées pour plusieurs amplitudes de battement et pour un rapport de densité tendant vers l'infini. Le multiplicateur $\mu = \exp(\lambda T)$ associé au mode de Floquet dominant est représenté sur la figure 5.23 par sa valeur absolue en fonction de l'amplitude de battement.

L'écoulement périodique devient instable pour une amplitude supérieure à l'amplitude critique $A = 0.5$, puisque $|\mu| > 1$. Le mode qui se déstabilise est un mode asynchrone proche de l'amplitude critique. Lorsque l'amplitude augmente, la paire de valeurs propres complexes conjuguées se rapproche de l'axe réel et se transforme en deux valeurs propres réelles pour $A \leq 0.524$.

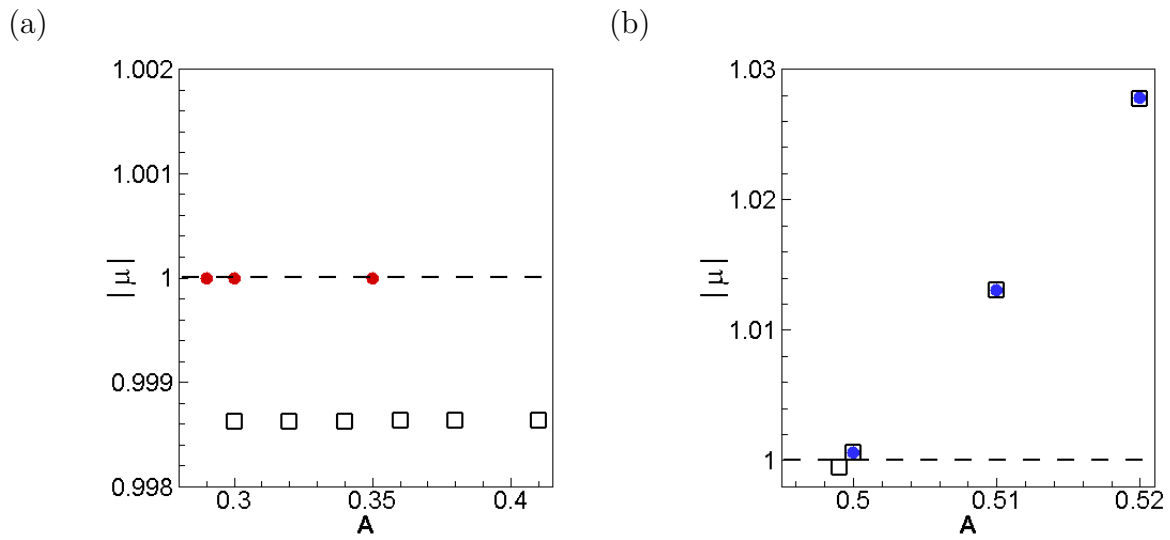


FIGURE 5.23 – Comparaison des multiplicateurs de Floquet obtenus dans le cas fixe (carré noir) et dans le cas libre avec un très grand rapport de densité $\rho = 10^6$ (cercles rouges et bleus). Valeur absolue du multiplicateur de Floquet $|\mu|$ en fonction de l'amplitude pour (a) les modes synchrones (cercles rouges) $0.3 \leq A \leq 0.4$ et (b) les modes asynchrones (cercles bleus) pour $0.5 \leq A \leq 0.52$. $Re_f = 12$.

L'évolution temporelle du mode de Floquet est représentée sur la figure 5.24 pour l'amplitude critique $A = 0.5$, aux mêmes instants que pour la solution périodique symétrique (déjà représentée à la figure 5.18). La vorticité du mode de Floquet (noir et blanc) est superposée à celle de la solution périodique (contours) pour montrer que ce mode de Floquet brise la symétrie de réflexion K_x de la solution périodique. En plus, l'évolution

temporelle du mode de Floquet indique qu'il satisfait la symétrie spatio-temporelle H_1 puisqu'on retrouve $\|\hat{\mathbf{u}}_s\|/\|\hat{\mathbf{u}}_a\| \sim 180$.

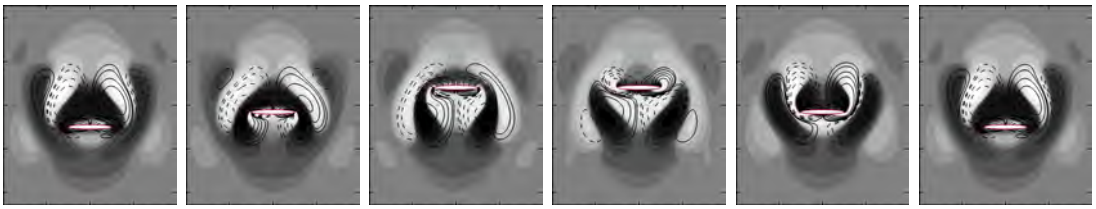


FIGURE 5.24 – Mode de Floquet quasi-périodique instable pour $\rho = +\infty$ et $A = 0.5$ représenté par la partie réelle du champ de vorticité aux instants $t = t_0$, $t = t_0 + T/5$, $\cdots$, $t = t_0 + T$.

Si on compare ce mode au mode quasi-périodique observé pour $\rho = 100$, on remarque qu'ils sont presque identiques dans leur structure. Comme pour celui-ci, la superposition avec le champ de base ne permet pas de comprendre l'effet du mode de manière triviale. En revanche, le fait que ce mode existe encore pour $\rho = \infty$ montre qu'il n'est pas lié au degré de liberté horizontal de l'aile. Il s'agit d'un mode purement lié à la dynamique du fluide et l'ajout du déplacement horizontal de l'aile peut changer son effet mais pas sa nature.

En conclusion de ce paragraphe, on compare les résultats de l'analyse de stabilité linéaire (réalisé pour $\rho \to \infty$) aux résultats non-linéaires obtenues dans la section précédente pour $\rho = 100$. L'amplitude critique $A = 0.5$ au delà de laquelle le mode de Floquet est instable ne correspond pas à l'entrée dans un régime de propulsion cohérent, qui est obtenu pour $0.2 \leq A \leq 0.45$ (mouvement propulsif lent) et pour $A \geq 0.75$ (mouvement propulsif rapide). La prise en compte de la vitesse de translation dans le problème de perturbation (en considérant donc un rapport de densité fini) est donc indispensable pour expliquer les résultats non linéaires. Néanmoins, l'analyse des efforts générés par la perturbation linéaire dans la direction horizontale suggère que le mode de Floquet ici déterminé est lié au régime de propulsion non-cohérent.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a étudié le comportement d'une aile battante elliptique de rapport d'aspect 1 : 10, auto-propulsée dans un fluide au repos. Les simulations non linéaires ont montré l'existence de cinq régimes distincts : un régime symétrique non propulsif pour $A \leq 0.2$ et $0.44 \leq A \leq 0.48$, un régime propulsif lent pour $0.2 \leq A \leq 0.44$, un régime oscillant pour $0.48 \leq A \leq 0.68$, un régime propulsif oscillant pour $0.68 \leq A \leq 0.75$ et un régime propulsif rapide pour $A \geq 0.75$. La symétrie spatiale est brisée dans tous les régimes asymétriques et la symétrie spatio-temporelle est brisée dans les trois derniers régimes (oscillant, propulsif oscillant et propulsif rapide). Dans ce dernier régime, on observe également une déviation du sillage comme celle que l'on a étudié dans le chapitre 3.

Des analyses de Floquet ont été conduites pour comprendre le passage d'un écoulement symétrique et périodique à ces différents régimes. L'analyse de Floquet à $\rho = 100$ a montré une évolution complexe des modes en fonction de l'amplitude de battement. Par amplitude croissante, on voit apparaître la déstabilisation d'un mode synchrone pour $A \geq 0.3$ qui explique l'apparition du régime propulsif lent, même si le seuil n'est pas identique. Dans un second temps, ce mode se re-stabilise ce qui explique le retour à un régime non propulsif symétrique dans la gamme $0.44 \leq A \leq 0.48$. Pour de plus grandes amplitudes, une paire de modes quasi-périodiques devient instable, expliquant l'existence du régime purement

oscillant. Ce mode oscille autour d'une vitesse solide moyenne nulle ce qui explique que le régime ne soit pas propulsif. En revanche, on surestime la basse-fréquence qui apparaît dans les solutions non linéaires, tout en ayant le même ordre de grandeur. Finalement, cette paire de modes quasi-périodiques fini par se séparer en deux modes synchrones qui restent instables. Cette séparation ne correspond pas, par contre, à l'émergence du régime propulsif rapide.

Nous avons également fait varier le rapport de densité ρ. Pour de plus grande valeur de ρ, le scénario décrit ci-dessus reste inchangé. Le seuil de déstabilisation à $A = 0.3$ est indépendant du rapport de densité, tout comme le seuil de restabilisation pour $A = 0.42$. En revanche pour des plus petites valeurs de ρ, le scénario est modifié avec notamment une disparition du deuxième régime non-propulsif intermédiaire. Pour ces petites valeurs de ρ, il semble que la paire de modes quasi-périodiques devient instable alors que le mode synchrone n'est pas encore restabilisé. Cette transition de l'un à l'autre semble être continue et il parait opportun de s'intéresser à ce sujet à l'avenir. Enfin, on notera que les résultats pour $\rho \to \infty$ montrent que le premier mode synchrone n'existe pas dans ce cas. Il semble que ce mode soit complètement lié au degré de liberté solide de l'aile, ce qui montre la nécessité de prendre en compte ce mouvement dans les études de stabilité pour analyser la mise en plus du premier régime propulsif dans les solutions non linéaires ; La paire de modes quasi-périodiques observée à $\rho = 100$ est encore présente à $\rho = +\infty$ et sensiblement identique. Cela montre que ce second mode, lié à l'apparition du régime oscillant, n'est pas directement lié au degré de liberté solide mais à la dynamique du fluide environnant. D'autre part, au travers des résultats présentés, plusieurs zones d'ombres restent à éclaircir et nécessiteront des investigations supplémentaires pour expliquer l'ensemble des régimes et transitions rencontrés.

Conclusion

De nombreux travaux ont montré que la topologie des sillages possède une zoologie foisonnante dont plusieurs structures de sillages sont encore peu documentées. Nos travaux suggèrent que les instabilités de sillages possèdent au moins une zoologie aussi impressionnante, dont on n'a probablement ici fait que gratter la surface.

Cette thèse a permis la mise au point de deux méthodes originales pour imposer des symétries à des écoulements. Ces deux méthodes sont applicables à des symétries spatiales de réflexion, symétrie temporelles de périodicité et des combinaisons des deux. La première méthode repose sur la décomposition des champs fluides en leurs composantes symétriques et anti-symétriques. Cette décomposition est injectée dans les équations de Navier-Stokes pour former deux systèmes d'équations couplées à résoudre, gouvernant chacun la dynamique d'une des deux composantes. Le système qui gouverne la dynamique de la composante anti-symétrique étant linéaire, on peut s'assurer de sa stabilité en ajoutant un terme d'amortissement proportionnel à la composante anti-symétrique, similairement à ce qui est fait dans la méthode SFD. Cette méthode a été appliquée au cas d'une symétrie spatiale de réflexion et d'une symétrie spatio-temporelle. Dans les deux cas, elle permet de calculer la solution symétrique lorsque celle-ci est instable avec un amortissement exponentiel de la composante anti-symétrique. La méthode peut également servir à accélérer la convergence des calculs proche des bifurcations, même dans le domaine stable, ce qui la rend particulièrement intéressante.

La seconde méthode est très similaire à la première dans le sens où elle consiste à injecter le même terme d'amortissement directement dans le système initial des équations de Navier-Stokes. Ainsi, il n'y a qu'un seul système d'équations à résoudre au lieu de deux systèmes couplés. La construction du terme d'amortissement proportionnel à la composante anti-symétrique est gérée en stockant pendant le calcul les champs de vitesse fluide. Cette deuxième méthode se révèle plus facile d'implémentation que la première et moins coûteuse en temps de calcul (on ne résout qu'un seul système d'équations au lieu d'une paire de systèmes couplés), au détriment d'une augmentation de la quantité mémoire nécessaire pour le stockage du champ de vitesse. On a pu l'appliquer au même cas que pour la méthode précédente, avec là encore des résultats excellents. On l'a également utilisé pour imposer la symétrie temporelle de périodicité de l'écoulement, même lorsque celle-ci est brisée par une bifurcation. La comparaison des performances avec la première méthode a montré que toute chose égale par ailleurs, la deuxième méthode converge moins bien en temps de simulation. Cela a finalement peu d'importance puisqu'il suffit de choisir un coefficient d'amortissement plus important pour accélérer la convergence.

Ces développements ont permis de mettre au point deux méthodes efficaces pour le calcul de solution symétrique instable. Comme dit plus haut, elles sont également utilisables pour accélérer la convergence de solutions stables. Par ailleurs, l'inconvénient du stockage pour la deuxième méthode semble pouvoir être corrigé facilement puisque de récents développements ont montré l'efficacité d'une interpolation polynomiale pour réduire la quantité des données à stocker. Cette hypothèse sera probablement testée à très court terme.

Le troisième chapitre a porté sur l'étude de la déviation du sillage propulsif d'une aile battante et la brisure de symétrie spatio-temporelle associée. En premier lieu, des simulations non linéaires ont montré l'existence de trois régimes distincts. Dans le premier régime, le sillage propulsif n'est pas dévié et la portance moyenne est nulle. Dans le deuxième régime, le sillage est faiblement dévié et la portance moyenne devient non nulle. Enfin dans le troisième régime, le sillage est fortement dévié et lié à une augmentation importante à la fois de la portance moyenne mais également de la poussée moyenne et du rendement. Les méthodes de préservation de symétries introduites au chapitre précédent ont permis de calculer les sillages propulsifs symétriques devenus instables suite à la brisure de symétrie décrite dans la littérature. L'accès à ces solutions symétriques a permis de conduire une analyse de stabilité de Floquet du sillage symétrique et d'identifier l'existence d'un mode de Floquet synchrone, devenant instable au niveau de la brisure de la symétrie. L'analyse de ce mode a montré qu'il était purement anti-symétrique et que sa superposition avec le champ de base permettait d'expliquer la déviation observée. En effet, le mode de Floquet est constitué d'une allée de dipôles de vorticité, appelés modes de déplacements, qui ont pour effet de déplacer tous les tourbillons du sillage dans la même direction (le haut ou le bas suivant le signe du mode). Par la suite, l'analyse des perturbations non linéaires a permis de montrer que c'est leur développement dans le voisinage de l'aile qui conduit à la transition entre le deuxième et le troisième régime. Ce dernier régime, marqué par un sillage très organisé, présente comme on l'a dit de très bonnes caractéristiques du point de vue des performances de l'aile. Enfin, une analyse fine du mode responsable de la déviation, conjugué à une modélisation cinématique du sillage ont permis de mettre en évidence le couplage entre la déviation du sillage et l'appariement de tourbillons contrarotatifs dans ce dernier régime. Ces deux effets apparaissent initialement avec la déstabilisation du mode de Floquet et se renforcent, mais le second n'est pleinement développé que dans le dernier régime du sillage.

Dans ce chapitre, on a également voulu analyser le comportement de la bifurcation lorsqu'on l'aile possède un faible angle d'incidence. Comme pressenti, cette brisure explicite de la symétrie spatio-temporelle conduit à la transformation de la bifurcation en une bifurcation imparfaite. Nos résultats suggèrent que la déviation du sillage se produit alors préférentiellement vers le haut lorsque l'angle d'incidence est positif, et vers le bas lorsque l'angle d'incidence est négatif. D'autre part, on note que l'introduction de cet angle d'incidence permet de déterminer des solutions dans le troisième régime, donc à grand rendement, mais dont la modification de la déviation du sillage conduit à une portance moyenne faible. L'aile est alors pleinement poussée vers l'avant.

Dans le quatrième chapitre, on s'est concentré sur de plus faibles fréquences de battement et de grands angles d'incidence de l'aile ($\alpha \geq 10°$). Dans cette gamme de paramètres, les simulations non linéaires ont permis d'identifier plusieurs bifurcations liées à des modifications de la périodicité de l'écoulement. En utilisant les méthodes de préservation de la périodicité, on a pu déterminer les écoulements T-périodiques devenus instables. Notre travail a ensuite permis d'isoler et d'étudier séparément trois des bifurcations observées.

La première bifurcation, observée pour une fréquence $f = 0.1$ et un angle $\alpha \approx 10°$ conduit à la transition de l'écoulement T-périodique à un écoulement $3T$-périodique. Une analyse de Floquet de l'écoulement $T-$périodique a montré l'existence d'une paire de modes quasi-périodiques, devenant instables pour les mêmes paramètres et dont l'argument est proche de $2i\pi/3$. La synchronisation à un état exactement $3T$-périodique se fait par la suite, par accrochage non linéaire. La structure du mode de Floquet a montré qu'il était composé d'une suite de modes de déplacement, tournant sur eux-mêmes, ce qui conduit au changement de la périodicité. La comparaison des efforts sur l'aile entre les deux solutions montre de petites variations avec la solution stable qui traîne et porte

légèrement plus en moyenne.

La deuxième bifurcation, observée pour une fréquence $f = 0.15$ et un angle $10° \leq \alpha \leq 11°$ conduit à la transition de l'écoulement T-périodique à un écoulement $2T$-périodique. L'analyse du mode de Floquet montre que la bifurcation est liée à la formation d'un tripôle de tourbillons négatif-positif-négatif (NPN). Ce tripôle n'apparaît en revanche qu'une période sur deux ce qui explique que la bifurcation soit subharmonique. La comparaison des efforts sur l'aile entre les écoulements instable $T-$périodique et stable $2T-$périodique indique que la bifurcation n'est pas profitable puisqu'elle augmente la traînée sur l'aile qui est déjà très largement en régime traînant.

Enfin, la troisième bifurcation analysée se produit à la suite de la seconde, pour une fréquence $f = 0.15$ et un angle $13° \leq \alpha \leq 14°$. Celle-ci conduit à la transition de l'écoulement $2T$-périodique à un écoulement quasi $2T$-périodique. L'analyse de Floquet montre que la bifurcation se produit suite à la séparation de deux modes quasi-périodiques en deux modes sous-harmoniques juste avant que l'un des deux ne devienne instable. Ce résultat est étrange dans le sens où on se serait plutôt attendu, au vu des résultats non linéaires, à ce que cette séparation se produise après la bifurcation et pas avant. L'analyse du mode n'a pas permis d'expliquer cette dichotomie, ni la raison pour laquelle la solution non-linéaire devient quasi-périodique. En revanche, cette bifurcation conduit à une diminution légère de la traînée de l'aile, comparativement à la solution $2T$-périodique devenue instable. Dans tous les cas, c'est la solution T-périodique instable qui traîne le moins à fort angle d'incidence, où il s'agit d'ailleurs de la seule solution qui traîne moins que l'aile fixe, signe que le battement à fort angle d'incidence et faible fréquence de battement est particulièrement inefficace, voire même que cela peut être envisagé comme une technique de freinage. Malgré les nombreux résultats obtenus, nous n'avons pas réussi à analyser toutes les bifurcations observées, par manque de temps, mais également à cause de la difficulté numérique de calculer un champ de base périodique propre lorsque la solution non linéaire est quasi-périodique avec une fréquence secondaire extrêmement faible. L'amélioration ou la modification de la méthode d'imposition des symétries constitue, à cet égard, un axe de développement intéressant pour être capable de résoudre ce problème.

Enfin le dernier chapitre de la thèse est consacré à l'étude de l'auto-propulsion d'une aile battante symétrique dans un fluide au repos. Nos travaux se sont concentrés sur une aile elliptique de rapport d'aspect 1 : 10.

En premier lieu, on a conduit des simulations non linéaires pour un rapport de densité $\rho = 100$ et de nombreuses valeurs de l'amplitude de battement. Les résultats ont montré l'existence de cinq régimes différents : un régime symétrique non propulsif, deux régimes propulsifs (un lent et un rapide), un régime oscillant où l'aile suit des mouvements de va-et-vient autour d'une position centrale et enfin un régime propulsif oscillant. À l'exception du régime non-propulsif, tous les autres régimes sont asymétriques. Dans les deux régimes oscillants, une fréquence secondaire apparaît et en plus de la symétrie spatiale, la symétrie spatio-temporelle est également brisée. C'est également le cas dans le régime propulsif rapide où une déviation du sillage identique à celle étudiée dans le chapitre 3 apparaît. Là encore, on a utilisé les méthodes développées dans la thèse pour calculer des solutions périodiques vérifiant toutes les symétries du problème.

Par la suite, nous avons conduit des analyses de Floquet en considérant en plus des perturbations du fluide, les perturbations de la vitesse horizontale de l'aile, liée à la brisure de la symétrie spatiale. L'analyse de Floquet à $\rho = 100$ a montré une évolution complexe des modes en fonction de l'amplitude de battement. Par amplitude croissante, on voit apparaître la déstabilisation d'un mode synchrone qui explique l'apparition du régime propulsif lent. Dans un second temps, ce mode se re-stabilise ce qui explique le retour à un régime non propulsif symétrique. Pour de plus grandes amplitudes, une paire de modes

quasi-périodiques devient instable, expliquant l'existence du régime purement oscillant. Ce mode oscille autour d'une vitesse solide moyenne nulle ce qui explique que le régime ne soit pas propulsif. En revanche, on surestime la basse-fréquence qui apparaît dans les solutions non linéaires. Finalement, cette paire de modes quasi-périodiques fini par se séparer en deux modes synchrones qui restent instables. Par contre, cette séparation ne correspond pas à l'émergence du régime propulsif rapide.

Nous avons également fait varier le rapport de densité ρ. Pour de plus grande valeur de ρ, le scénario décrit ci-dessus reste inchangé avec plusieurs seuils qui ne sont d'ailleurs pas influencé, comme la déstabilisation et restabilisation du premier mode synchrone. En revanche, pour des plus petites valeurs de ρ, le scénario est modifié avec notamment une disparition du deuxième régime non-propulsif. Il conviendrait par ailleurs d'étudier plus en détails ce qui se passe à ces petites valeurs pour expliquer la transition entre le mode synchrone et la paire de modes quasi-périodiques. Enfin, on notera que les résultats pour $\rho \to \infty$ montrent que le premier mode synchrone n'existe pas dans ce cas. Par contre, la paire de modes quasi-périodiques est bien présente. Cela montre que la mise en place d'un régime propulsif ne saurait être expliquée par une analyse de stabilité sans considération du degré de liberté horizontal de l'aile. D'autre part, il semble nécessaire de continuer les investigations pour expliquer tous les régimes et transitions rencontrés.

Cette thèse a été consacrée à la stabilité des écoulements de sillages périodiques d'ailes battantes. À travers le développement de nouvelles méthodes théoriques et numériques, nous avons réussi à étudier trois phénomènes liées à des brisures de symétries de ces écoulements. Outre une meilleure compréhension des écoulements étudiés, notre travail a permis d'illustrer la complexité des scénarios mis en jeu et la profusion de bifurcations dans ces écoulements. Nous pensons que les travaux présentés ici apportent des méthodologies claires et de nouvelles briques à la compréhension de la dynamique des sillages d'ailes battantes.

Appendices

Annexe A

Discrétisation spatiale et temporelle des équations continues

Cette annexe est dédiée à la présentation des discrétisations spatiales et temporelles des équations continues qui ont été utilisées au cours de la thèse.

A.1 Discrétisation spatiale

Pour résoudre les problèmes considérés dans la thèse, on utilise la méthode des éléments finis à l'aide du logiciel *FreeFem++* [70]. Les équations sont résolues sur des maillages non conformes composés de triangles. Le logiciel *FreeFem++* permet l'utilisation de nombreux types d'éléments finis. Par défaut, on a utilisé des éléments Taylor Hood. Pour vérifier la condition inf-sup (aussi appellée condition Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB)) [134, 135], on a utilisé des couples $P2/P1$ ou $P1b/P1$ pour les champs de vitesses et de pression respectivement (voir figure A.1).

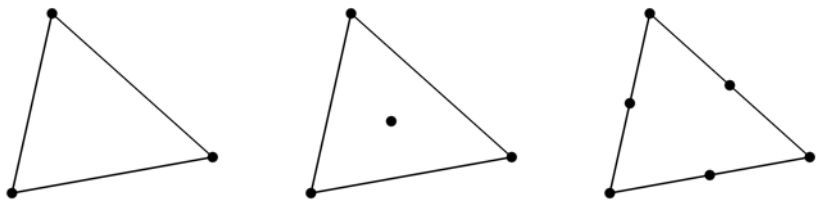


FIGURE A.1 – Schémas des éléments finis triangulaires de Taylor-Hood. (a) Élément linéaire $P1$. (b) Élément linéaire avec bulle (P1b). (c) Élément quadratique.

A.2 Discrétisation temporelle

A.2.1 Schéma semi-implicite BDF/EXT

La dérivée temporelle à l'instant t^{n+1} d'une grandeur u est décrite de manière implicite à l'aide de sa valeur à cet instant u^{n+1} et de ses valeurs aux r instants précédents, où r est l'ordre du schéma BDF. L'expression est explicitée dans l'équation A.1.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{n+1} \approx \sum_{i=0}^{r} \frac{\alpha_i}{\Delta t} u^{n+1-i} \tag{A.1}$$

Les termes non linéaires sont eux obtenus au temps t^{n+1} à l'aide d'un schéma purement explicite. Les coefficients β sont obtenus par extrapolation polynomiale à partir des instants précédents.

$$N(u^{n+1}, u^{n+1}) \approx \sum_{i=1}^{r} \beta_i N(u^{n+1-i}, u^{n+1-i}) \tag{A.2}$$

Les coefficients α_i et β_i dépendent de l'ordre du schéma r et sont regroupés dans le tableau A.1. Les schémas BDF d'ordre $r > 6$ ne sont pas zéro-stables [136]. Ils ne sont donc pas utilisables. Pour cette raison, les coefficients associés ne sont pas indiqués ici. Au cours de ces travaux, seuls les schémas BDF/EXT d'ordre 1 à 3 ont été utilisés, avec une grande majorité des résultats présentés obtenus en utilisant un schéma d'ordre 2.

ordre	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
1	1	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
2	3/2	-2	1/2	0	0	0	0	2	-1	0	0	0	0
3	11/6	-3	3/2	-1/3	0	0	0	3	-3	1	0	0	0
4	25/12	-4	3	-1/2	1/4	0	0	4	-6	4	-1	0	0
5	137/60	-5	5	-10/3	15/12	-1/5	0	5	-10	10	-5	1	0
6	147/60	-6	15/2	-20/3	15/4	-6/5	1/6	6	-15	20	-15	6	-1

Table A.1 – Coefficients de pondération des schémas BDF/EXT.

Annexe B

Propriétés relatives au changement de référentiel

Cette annexe vise à démontrer l'invariance des opérateurs constituant les équations de Navier-Stokes par un changement de référentiel. Ces invariances sont utilisées dans le chapitre (1.1) pour écrire les équations de Navier-Stokes exprimées en vitesses absolues dans un référentiel relatif.

Dans un premier temps, on rappelle les notations utilisées. Le vecteur vitesse exprimé dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_l$, considéré galiléen est noté $\boldsymbol{u} = (u, v)^T$. On note $\tilde{\boldsymbol{u}}$ le vecteur vitesse écrit en fonction des coordonnées spatiales (X, Y) dans le référentiel de l'aile $\mathcal{R}_a$.

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(X, Y, t) = \boldsymbol{u}(x, y, t) \tag{B.1}$$

Le vecteur vitesse dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_t$ est noté $\tilde{\boldsymbol{U}} = (\tilde{U}, \tilde{V})^T$ de telle sorte que

$$\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{R}^T(\theta(t))\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{B.2}$$

où $\boldsymbol{R}$ est la matrice de rotation qui passe un vecteur défini dans le référentiel tournant $\mathcal{R}_t$ à un vecteur défini dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}_l$.

Les notations étant rappelées, on montre que l'opération de divergence est invariante par le changement de référentiel

Propriété 1.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{U}} \tag{B.3}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{u} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} && \text{(B.4a)}\\
&= cos\,(\theta)\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial X} - sin\,(\theta)\,\frac{\partial \tilde{u}}{\partial Y} + sin\,(\theta)\,\frac{\partial \tilde{v}}{\partial X} + cos\,(\theta)\,\frac{\partial \tilde{v}}{\partial Y} && \text{(B.4b)}\\
&= \frac{\partial}{\partial X}\left(cos\,(\theta)\,\tilde{u} + sin\,(\theta)\,\tilde{v}\right) + \frac{\partial}{\partial Y}\left(-sin\,(\theta)\,\tilde{u} + cos\,(\theta)\,\tilde{v}\right) && \text{(B.4c)}\\
&= \frac{\partial \tilde{U}}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial Y} && \text{(B.4d)}\\
&= \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\boldsymbol{U}} && \text{(B.4e)}
\end{aligned}$$

On montre maintenant que l'opérateur Laplacien est également invariant par changement de référentiel

Propriété 2.

$$\Delta\psi = \tilde{\Delta}\tilde{\psi} \tag{B.5}$$

Preuve. *Pour montrer cela, on commence par reprendre les dérivées spatiales au premier ordre de champs scalaires* $\psi(\boldsymbol{x},t)$ *et* $\tilde{psi}(\boldsymbol{X},t)$*, écrits respectivement dans* $\mathcal{R}_l$ *et* $\mathcal{R}_a$ *de telle sorte que* $\psi(\boldsymbol{x},t) = \tilde{psi}(\boldsymbol{X},t)$*.*

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = cos\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X} - sin\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y} \tag{B.6a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = sin\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X} + cos\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y} \tag{B.6b}$$

On peut également déterminer les dérivées spatiales de ψ *au second ordre*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(cos\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X} - sin\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y}\right) \tag{B.7a}$$

$$= cos\left(\theta\right)\frac{\partial}{\partial X}\left(cos\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X} - sin\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y}\right) - sin\left(\theta\right)\frac{\partial}{\partial Y}\left(cos\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X} - sin\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y}\right) \tag{B.7b}$$

$$= cos^2\left(\theta\right)\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial X^2} + sin^2\left(\theta\right)\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial Y^2} - 2cos\left(\theta\right)sin\left(\theta\right)\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial X \partial Y} \tag{B.7c}$$

et

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(sin\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X} + cos\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y}\right) \tag{B.8a}$$

$$= sin\left(\theta\right)\frac{\partial}{\partial X}\left(sin\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X} + cos\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y}\right) + cos\left(\theta\right)\frac{\partial}{\partial Y}\left(sin\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial X} + cos\left(\theta\right)\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y}\right) \tag{B.8b}$$

$$= sin^2\left(\theta\right)\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial X^2} + cos^2\left(\theta\right)\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial Y^2} + 2cos\left(\theta\right)sin\left(\theta\right)\frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial X \partial Y} \tag{B.8c}$$

En conséquence, on en déduit que

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial Y^2} = \tilde{\Delta}\tilde{\psi} \tag{B.9}$$

Enfin, on montre que le terme d'advection est également invariant par changements de référentiel

Propriété 3.

$$\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} = \left(\tilde{\boldsymbol{U}}\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{B.10}$$

Preuve. *On reprend les dérivées spatiales décrits dans la preuve de la propriété (2) ce qui donne*

$$\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u\partial_x u + v\partial_y u \\ u\partial_x v + v\partial_y v \end{pmatrix} \tag{B.11a}$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{u}\left(cos\left(\theta\right)\partial_X\tilde{u} - sin\left(\theta\right)\partial_Y\tilde{u}\right) + \tilde{v}\left(sin\left(\theta\right)\partial_X\tilde{u} + cos\left(\theta\right)\partial_Y\tilde{u}\right) \\ \tilde{u}\left(cos\left(\theta\right)\partial_X\tilde{v} - sin\left(\theta\right)\partial_Y\tilde{v}\right) + \tilde{v}\left(sin\left(\theta\right)\partial_X\tilde{v} + cos\left(\theta\right)\partial_Y\tilde{v}\right) \end{pmatrix} \tag{B.11b}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\tilde{u}cos\left(\theta\right) + \tilde{v}sin\left(\theta\right)\right)\partial_X\tilde{u} + \left(-\tilde{u}sin\left(\theta\right) + \tilde{v}cos\left(\theta\right)\right)\partial_Y\tilde{u} \\ \left(\tilde{u}cos\left(\theta\right) + \tilde{v}sin\left(\theta\right)\right)\partial_X\tilde{v} + \left(-\tilde{u}sin\left(\theta\right) + \tilde{v}cos\left(\theta\right)\right)\partial_Y\tilde{v} \end{pmatrix} \tag{B.11c}$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{U}\partial_X\tilde{u} + \tilde{V}\partial_Y\tilde{u} \\ \tilde{U}\partial_X\tilde{v} + \tilde{V}\partial_Y\tilde{v} \end{pmatrix} \tag{B.11d}$$

$$= \left(\tilde{\boldsymbol{U}}\cdot\tilde{\nabla}\right)\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{B.11e}$$

Annexe C

Propriétés relatives à la méthode de préservation des symétries

Cette annexe vise à démontrer plusieurs propriétés de l'opérateur $\mathcal{S}$ qui sert de projecteur sur l'espace des solutions symétriques lors de la mise en place de la méthode de préservation des symétries.

Soit un vecteur des variables fluides $\boldsymbol{q} = (u, v, p)^T$.

C.1 Symétrie spatiale

On considère ici la symétrie spatiale, rappelée ici

$$(u, v, p)(x, y, t) = (u, -v, p)(x, -y, t) \tag{C.1}$$

L'opérateur $\mathcal{S}$ prend alors la forme suivante

$$\mathcal{S}\boldsymbol{q}(x, y, t) = \boldsymbol{q}_s(x, y, t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(x, y, t) + u(x, -y, t) \\ v(x, y, t) - v(x, -y, t) \\ p(x, y, t) + p(x, -y, t) \end{pmatrix} \tag{C.2}$$

Il s'agit ici de la formulation regroupée de l'application de $\mathcal{S}$ à un champ vectoriel $\boldsymbol{u} = (u, v)^T$ et un champ scalaire p. Les expressions suivantes ont donc un sens

$$\mathcal{S}\boldsymbol{u}(x, y, t) = \boldsymbol{u}_s(x, y, t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(x, y, t) + u(x, -y, t) \\ v(x, y, t) - v(x, -y, t) \end{pmatrix} \tag{C.3a}$$

$$\mathcal{S}p(x, y, t) = p_s(x, y, t) = \frac{1}{2}\left(p(x, y, t) + p(x, -y, t)\right) \tag{C.3b}$$

D'autre part, la symétrie spatiale (C.1) étant une réflexion, la composante anti-symétrique de l'écoulement est complémentaire de la composante symétrique. On a donc l'existence de l'opérateur d'anti-symétrie $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}\boldsymbol{q}(x, y, t) = \boldsymbol{q}_a(x, y, t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(x, y, t) - u(x, -y, t) \\ v(x, y, t) + v(x, -y, t) \\ p(x, y, t) - p(x, -y, t) \end{pmatrix} \tag{C.4}$$

et également la propriété de complétude, qui traduit le fait que les variables de l'écoulement sont entièrement déterminées par leurs composantes symétriques et anti-symétriques

$$\boldsymbol{q}(x, y, t) = \boldsymbol{q}_s(x, y, t) + \boldsymbol{q}_a(x, y, t) \tag{C.5}$$

Enfin, on rappelle le système d'équations qui gouverne la dynamique de $\boldsymbol{q}$

$$\mathcal{B}\partial_t \boldsymbol{q} = \mathcal{R}(\boldsymbol{q}) \tag{C.6}$$

avec les opérateurs $\mathcal{B}$ et $\mathcal{R}$ définis par

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad , \qquad \mathcal{R}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} -\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} - \nabla p + \mathrm{Re}^{-1}\boldsymbol{u} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.7}$$

En premier lieu, on peut établir que la projection par $\mathcal{S}$ et la dérivée partielle en temps sont deux opérations commutatives entre elles

Propriété 4.

$$\mathcal{S}\left[\partial_t \boldsymbol{q}\right] = \partial_t \boldsymbol{q}_s \tag{C.8}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\partial_t \boldsymbol{q} =& \mathcal{S}\partial_t \begin{pmatrix} u(x,y,t) \\ v(x,y,t) \\ p(x,y,t) \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_t u(x,y,t) + \partial_t u(x,-y,t) \\ \partial_t v(x,y,t) - \partial_t v(x,-y,t) \\ \partial_t p(x,y,t) + \partial_t p(x,-y,t) \end{pmatrix} \\
=& \partial_t \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(x,y,t) + u(x,-y,t) \\ v(x,y,t) - v(x,-y,t) \\ p(x,y,t) + p(x,-y,t) \end{pmatrix} \\
=& \partial_t \boldsymbol{q}_s
\end{aligned}$$

D'autre part, la projection par $\mathcal{S}$ est également commutative avec toutes les opérations en espace des équations de Navier-Stokes, c'est-à-dire le gradient de pression, la diffusion et la divergence de la vitesse.

Propriété 5.

$$\mathcal{S}\left[\nabla p\right] = \nabla p_s \tag{C.10}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\nabla p =& \mathcal{S}\begin{pmatrix} \partial_x p(x,y,t) \\ \partial_y p(x,y,t) \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_x p(x,y,t) + \partial_x p(x,-y,t) \\ \partial_y p(x,y,t) - \partial_{-y} p(x,-y,t) \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_x \left(p(x,y,t) + p(x,-y,t)\right) \\ \partial_y \left(p(x,y,t) + p(x,-y,t)\right) \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \partial_x \left[\frac{1}{2}(p(x,y,t) + p(x,-y,t))\right] \\ \partial_y \left[\frac{1}{2}(p(x,y,t) + p(x,-y,t))\right] \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} \partial_x p_s(x,y,t) \\ \partial_y p_s(x,y,t) \end{pmatrix} \\
=& \nabla p_s
\end{aligned}$$

Propriété 6.

$$\mathcal{S}\left[\Delta \boldsymbol{u}\right] = \Delta \boldsymbol{u}_s \tag{C.12}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\Delta\boldsymbol{u} =& \mathcal{S}\begin{pmatrix}\partial_{x^2}u(x,y,t)+\partial_{y^2}u(x,y,t)\\ \partial_{x^2}v(x,y,t)+\partial_{y^2}v(x,y,t)\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial_{x^2}u(x,y,t)+\partial_{y^2}u(x,y,t)+\partial_{x^2}u(x,-y,t)+\partial_{y^2}u(x,-y,t)\\ \partial_{x^2}v(x,y,t)+\partial_{y^2}v(x,y,t)-\partial_{x^2}v(x,-y,t)-\partial_{(-y)^2}v(x,-y,t)\end{pmatrix}\\
=&\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\partial_{x^2}(u(x,y,t)+u(x,-y,t))+\partial_{y^2}(u(x,y,t)+u(x,-y,t))\\ \partial_{x^2}(v(x,y,t)-v(x,-y,t))+\partial_{y^2}(v(x,y,t)-v(x,-y,t))\end{pmatrix}\\
=&\begin{pmatrix}\partial_{x^2}u_s(x,y,t)+\partial_{y^2}u_s(x,y,t)\\ \partial_{x^2}v_s(x,y,t)+\partial_{y^2}v_s(x,y,t)\end{pmatrix}\\
=&\Delta\boldsymbol{u}_s
\end{aligned}$$

Propriété 7.

$$\mathcal{S}\left[\nabla\cdot\boldsymbol{u}\right]=\nabla\cdot\boldsymbol{u}_s \tag{C.14}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\nabla\cdot\boldsymbol{u} =& \mathcal{S}\left(\partial_x u(x,y,t)+\partial_y v(x,y,t)\right)\\
=&\frac{1}{2}\left(\partial_x u(x,y,t)+\partial_y v(x,y,t)+\partial_x u(x,-y,t)+\partial_{-y}v(x,-y,t)\right)\\
=&\frac{1}{2}\left(\partial_x(u(x,y,t)+u(x,-y,t))+\partial_y(v(x,y,t)-v(x,-y,t))\right)\\
=&\partial_x us_(x,y,t)+\partial_y v_s(x,y,t)\\
=&\nabla\cdot\boldsymbol{u}_s
\end{aligned}$$

Enfin, on considère les termes non linéaires des équations de Navier-Stokes

Propriété 8.

$$\mathcal{S}\left[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}\right]=(\boldsymbol{u}_s\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}_s+(\boldsymbol{u}_a\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}_a \tag{C.16}$$

Pour démontrer cette propriété, on utilise notamment la propriété de complétude des solutions, qui permet d'établir les relations suivantes

$$u(x,y,t)=u_s(x,y,t)+u_a(x,y,t) \tag{C.17a}$$
$$u(x,-y,t)=u_s(x,y,t)-u_a(x,y,t) \tag{C.17b}$$
$$v(x,y,t)=v_s(x,y,t)+v_a(x,y,t) \tag{C.17c}$$
$$v(x,-y,t)=v_a(x,y,t)-v_s(x,y,t) \tag{C.17d}$$

Pour plus de clarté, la variable d'espace x et la variable temporelle t ne sont pas précisées puisqu'elles n'interviennent pas dans le raisonnement. La variable d'espace y n'est elle précisée que lorsque le point courant n'est pas le même pour tous les termes.

Preuve.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}\left(\boldsymbol{u}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} =& \mathcal{S}\begin{pmatrix} u\partial_x u + v\partial_y u \\ u\partial_x v + v\partial_y v \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(y)\partial_x u(y) + v(y)\partial_y u(y) + u(-y)\partial_x u(-y) + v(-y)\partial_{-y} u(-y) \\ u(y)\partial_x v(y) + v(y)\partial_y v(y) - u(-y)\partial_x v(-y) - v(-y)\partial_{-y} v(-y) \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (u_s+u_a)\partial_x(u_s+u_a) + (v_s+v_a)\partial_y(u_s+u_a) \\ (u_s+u_a)\partial_x(v_s+v_a) + (v_s+v_a)\partial_y(v_s+v_a) \end{pmatrix} \\
& \qquad\qquad \begin{matrix} +(u_s-u_a)\partial_x(u_s-u_a) - (v_a-v_s)\partial_y(u_s-u_a) \\ -(u_s-u_a)\partial_x(v_a-v_s) + (v_a-v_s)\partial_y(v_a-v_s) \end{matrix}\Bigg) \\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2\left(u_s\partial_x u_s + u_a\partial_x u_a + v_s\partial_y u_s + v_a\partial_y u_a\right) \\ 2\left(u_s\partial_x v_s + u_a\partial_x v_a + v_s\partial_y v_s + v_a\partial_y v_a\right) \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} u_s\partial_x u_s + v_s\partial_y u_s \\ u_s\partial_x v_s + v_s\partial_y v_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_a\partial_x u_a + v_a\partial_y u_a \\ u_a\partial_x v_a + v_a\partial_y v_a \end{pmatrix} \\
=& \left(\boldsymbol{u}_s\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}_s + \left(\boldsymbol{u}_a\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}_a
\end{aligned}
$$

Les propriétés similaires peuvent être obtenues pour l'opérateur $\mathcal{A}$. Ces propriétés ne sont pas nécessaires pour déterminer les équations gouvernant la dynamique des composantes symétriques et anti-symétriques. Elles ne sont donc pas démontrées ici.

C.2 Symétrie spatio-temporelle

Dans cette section, la symétrie considérée est une symétrie de réflexion spatio-temporelle de période T

$$(u, v, p)(x, y, t) = (u, -v, p)(x, -y, t - T/2) \tag{C.19}$$

Les opérateurs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ servent donc à sélectionner les composantes symétriques et anit-symétriques de l'écoulement au sens spatio-temporel du terme

$$\mathcal{S}\boldsymbol{q}(x,y,t) = \boldsymbol{q}_s(x,y,t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(x,y,t) + u(x,-y,t-T/2) \\ v(x,y,t) - v(x,-y,t-T/2) \\ p(x,y,t) + p(x,-y,t-T/2) \end{pmatrix} \tag{C.20a}$$

$$\mathcal{A}\boldsymbol{q}(x,y,t) = \boldsymbol{q}_a(x,y,t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(x,y,t) - u(x,-y,t-T/2) \\ v(x,y,t) + v(x,-y,t-T/2) \\ p(x,y,t) - p(x,-y,t-T/2) \end{pmatrix} \tag{C.20b}$$

La propriété de complétude (C.5) est inchangée et seul l'opérateur $\mathcal{R}$ des équations de Navier-Stokes est modifié.

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{q}) = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\Omega}(t)\times\boldsymbol{u} - \left(\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_0 - \boldsymbol{\Omega}(t)\times\boldsymbol{X}\right)\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} - \nabla p + \mathrm{Re}^{-1}\boldsymbol{u} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{C.21}$$

En revanche, le référentiel de résolution des équations est modifié. Celles-ci ne sont plus résolus dans le référentiel du laboratoire $(O, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$ mais dans le référentiel de l'aile $(O, \boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y)$. On rappelle que pour passer d'un référentiel à l'autre, on utilise les lois de changement de base (1.2) que l'on rappelle ici

$$\begin{matrix} \boldsymbol{e}_X(t) = cos(\theta(t))\boldsymbol{e}_x + sin(\theta(t))\boldsymbol{e}_y & , & \boldsymbol{e}_x = cos(\theta(t))\boldsymbol{e}_X(t) - sin(\theta(t))\boldsymbol{e}_Y(t) \\ \boldsymbol{e}_Y(t) = -sin(\theta(t))\boldsymbol{e}_x + cos(\theta(t))\boldsymbol{e}_y & , & \boldsymbol{e}_y = sin(\theta(t))\boldsymbol{e}_X(t) + cos(\theta(t))\boldsymbol{e}_Y(t) \end{matrix} \tag{C.22}$$

Ce changement de base implique que l'opérateur de symétrie peut-être appliqué à des variables qui dépendent des coordonnées dans le référentiel de l'aile. L'opérateur $\mathcal{S}$ demeure

alors inchangé et s'écrit

$$\mathcal{S}\boldsymbol{q}(X,Y,t) = \boldsymbol{q}_s(X,Y,t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u(X,Y,t) + u(X,-Y,t-T/2) \\ v(X,Y,t) - v(X,-Y,t-T/2) \\ p(X,Y,t) + p(X,-Y,t-T/2) \end{pmatrix} \tag{C.23}$$

Maintenant que les modifications induites par le passage d'une symétrie spatiale à une symétrie spatio-temporelle sont bien définies, on peut regarder l'influence de ces modifications sur les équations de Navier-Stokes. L'application de l'opérateur de symétrie au second membre des équations de Navier-Stokes (C.21) ne change pas pour tous les termes déjà présents dans la section précédente. Il y a bien commutation avec la dérivée partielle temporelle, le gradient de pression, la diffusion et la divergence de la vitesse. En revanche, deux termes supplémentaires apparaissent : un terme d'accélération de Coriolis du fluide $\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{u}$ et une modification du terme de convection pour prendre en compte la translation et la rotation de l'aile.

Dans un premier temps, on montre que l'opérateur $\mathcal{S}$ commute avec l'opération d'accélération de Coriolis du fluide à la condition que la rotation $\boldsymbol{\Omega}$ respecte la même symétrie, c'est-à-dire que $\boldsymbol{\Omega}(t) = -\boldsymbol{\Omega}(t - T/2)$. C'est bien évidemment le cas puisque la symétrie spatio-temporelle résulte de cette propriété de $\boldsymbol{\Omega}$.

Propriété 9.

$$\mathcal{S}\left[\boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{u}\right] = \boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{u}_s \tag{C.24}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{u} =& \mathcal{S}\begin{pmatrix} -\Omega(t)v(x,y,t) \\ \Omega(t)u(x,y,t) \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\Omega(t)v(x,y,t) - \Omega(t-T/2)v(x,-y,t-T/2) \\ \Omega(t)u(x,y,t) - \Omega(t-T/2)u(x,-y,t-T/2) \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\Omega(t)\left[v(x,y,t) - v(x,-y,t-T/2)\right] \\ \Omega(t)\left[u(x,y,t) + u(x,-y,t-T/2)\right] \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\Omega(t)v_s(x,y,t) \\ \Omega(t)u_s(x,y,t) \end{pmatrix} \\
=& \boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{u}_s
\end{aligned}$$

La projection du terme de convection par l'opérateur de symétrie $\mathcal{S}$ est modifiée dans le cas de la symétrie spatio-temporelle par la présence de deux termes supplémentaires. Le premier correspond à la présence de l'écoulement amont tandis que le second correspond à la rotation de l'aile.

Propriété 10.

$$\mathcal{S}\left[\left(\left(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{U}_0 - \boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{X}\right) \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u}\right] = \left(\left(\boldsymbol{u}_s - \boldsymbol{U}_0 - \boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{x}\right) \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u}_s + \left(\boldsymbol{u}_a \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u}_a \tag{C.26}$$

Preuve. *La vitesse amont de l'écoulement $\boldsymbol{U}_0$ est fixe dans le référentiel du laboratoire $(O, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y)$. Dans le référentiel de l'aile $(O, \boldsymbol{e}_X, \boldsymbol{e}_Y)$, dans lequel les équations de Navier-Stokes sont résolus, la vitesse amont dépend donc de l'angle $\theta(t)$ que forme instantanément l'aile avec la direction de l'écoulement amont.*

$$\boldsymbol{U}_0 = (U_0, 0)_{x,y} = (U_0 cos(\theta(t)), -U_0 sin(\theta(t)))_{X,Y} \tag{C.27}$$

La vitesse amont est donc intégralement préservée par l'utilisation de l'opérateur de symétrie $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{U}_0 \tag{C.28}$$

Le terme $\boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{X}$ est lui-même écrit dans le référentiel de l'aile. L'application de l'opérateur de symétrie réécrit dans le référentiel de l'aile (C.23) préserve également ce terme en intégralité

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}\boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{X} =& \mathcal{S}\begin{pmatrix} -\Omega(t)Y \\ \Omega(t)X \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\Omega(t)Y - \Omega(t-T/2)(-Y) \\ \Omega(t)X - \Omega(t-T/2)X \end{pmatrix} \\
=& \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\Omega(t)Y \\ 2\Omega(t)X \end{pmatrix} \\
=& \boldsymbol{\Omega}(t) \times \boldsymbol{X}
\end{aligned}$$

Puisque les termes supplémentaires appartiennent à l'espace des fonctions qui respectent la symétrie spatio-temporelle, ils subissent le même effet par la projection $\mathcal{S}$ que la composante symétrique du champ de vitesse $\boldsymbol{u}_s$. Ce qui prouve la propriété (10).

Annexe D

Codes de calcul

Construction d'un maillage symétrique

Pour construire un maillage symétrique par rapport à un axe (par exemple l'axe (O, x)), nous avons recours à une procédure en trois étapes :

1. construction d'un demi-maillage "haut" ($x \geqslant 0$) DMH
2. construction d'un demi-maillage "bas" DMB symétrique de DMH
3. concaténation des deux maillages

Le code de calcul utilisé pour réaliser les étapes 2 et 3 est visible dans la figure D.1

Construction de l'opérateur de symétrie $\mathcal{S}$

L'opérateur de symétrie $\mathcal{S}$ est construit en parcourant les noeuds du maillage pour trouver pour chacun d'eux son symétrique par rapport à l'axe (O, x). Le détail de cette procédure est écrit dans la figure D.2

Calcul des composantes symétriques et anti-symétriques

Une fois que l'opérateur de symétrie $\mathcal{S}$ est construit, il suffit de le charger et de l'appliquer au champ de vitesse $\mathbf{u}$ pour pouvoir en extraire les composantes symétriques $\mathbf{u}_s$ et anti-symétriques $\mathbf{u}_a$ dans le cas d'une symétrie spatiale. Le code permettant de réaliser cette opération est écrit dans la figure D.3.

```
int nv,nt,ne; // number of vertices, triangles and edges
nv=1; nt=1; ne=1;

real[int] xx(nv),yy(nv); // vertices coordinates
int[int] labelv(nv);
int[int] numt1(nt),numt2(nt),numt3(nt),labelt(nt);
int[int] nume1(ne),nume2(ne),labele(ne);
{
  ifstream file("demimesh-haut.msh"); // load demi-mesh haut
  file >> nv >> nt >> ne;
  xx.resize(nv); yy.resize(nv); labelv.resize(nv);
  for(int k=0; k<nv; k++){ // load vertices list
    file >> xx[k] >> yy[k] >> labelv[k] ;
  }
  numt1.resize(nt); numt2.resize(nt); numt3.resize(nt);
      labelt.resize(nt);
  for(int k=0; k<nt; k++){ // load triangles list
        file >> numt1[k] >> numt2[k] >> numt3[k] >> labelt[k];
  }
  nume1.resize(nt); nume2.resize(nt); labele.resize(nt);
    for(int k=0; k<ne; k++){ // load edges list
        file >> nume1[k] >> nume2[k] >> labele[k] ;
    }
}
{
  ofstream file("demimesh-bas.msh"); // construct and export
      demi-mesh bas
  file << nv << " " << nt << " " << ne << endl;
    for(int k=0; k<nv; k++){
        file << xx[k] << " " << -yy[k] << " " << labelv[k] << endl;
  }
    for(int k=0; k<nt; k++){
        file << numt1[k] << " " << numt3[k] << " " << numt2[k];
        file << " " << labelt[k] << endl;
  }
    for(int k=0; k<ne; k++){
        file << nume1[k] << " " << nume2[k] << " " << labele[k] << endl;
  }
}
mesh th1=readmesh("demimesh-bas.msh");
mesh th2=readmesh("demimesh-haut.msh");
mesh th=th1+th2; // concatenation
savemesh(th,"meshsym.msh");
```

FIGURE D.1 – Code FreeFem++ pour construire un maillage symétrique.

```
int nv,nt,ne;
nv=1; nt=1; ne=1;

real[int] xx(nv),yy(nv);
int[int] labelv(nv);
int[int] numt1(nt),numt2(nt),numt3(nt),labelt(nt);
int[int] nume1(ne),nume2(ne),labele(ne);
mesh th=readmesh("meshsym.msh"); // load mesh
fespace fu(th,P2); // fe-space for velocity
int ndof=fu.ndof; // number of dof for velocity
int[int] num(ndof),nums(ndof);
real[int] xc(ndof),yc(ndof);
for(int k=0; k<ndof; k++) num(k)=k;
{
  fu xu,yu;
  xu=x; yu=y; xc=xu[]; yc=yu[];
}
sort(xc,num); // sort xc in ascending order
int iss,is,jmin,comp;
real xss,xs,yss,ys,xmin,dist;
jmin=0; xmin=xc(0);
for(int k=0; k<ndof; k++){
  is=num(k); xs=xc(k); ys=yc(is);
  if(xs>xmin){
    xmin=xs;
    jmin=comp;
  }
  else{
    comp+=1;
  }
  for(int j=jmin; j<ndof; j++){
    iss=num(j); xss=xc(j); yss=yc(iss);
    dist=sqrt( (xss-xs)*(xss-xs)+(yss+ys)*(yss+ys) );
    if(dist < 1.e-04){
      nums(is)=iss;
      break;
    }
  }
}
{
  ofstream file("numsym.txt");
  file << nums << endl;
}
```

FIGURE D.2 – Code FreeFem++ pour construire l'opérateur de symétrie $\mathcal{S}$.

```
mesh th=readmesh("meshsym.msh"); // load mesh
fespace fu(th,P2); //fespace for veloicity
fu u,v,us,vs,ua,va; // velocity fields
matrix S; // create operator
int[int] nums(fu.ndof);
{
  ifstream file("numsym.txt"); // load operator
  file >> nums;
}
int[int] II(fu.ndof),JJ(fu.ndof);
real[int] CC(fu.ndof);
for(int k=0; k<fu.ndof; k++) // loop on all dof
{
  II(k)=k;
  JJ(k)=nums(k);
  CC(k)=1.;
}
S=[II,JJ,CC]; // construct operator
// extract symmetric component
real[int] tempu(fu.ndof); // temporary array
us[]=u[]; tempu=S*u[]; us[]+=tempu; us[]*=0.5;
vs[]=v[]; tempu=S*v[]; vs[]-=tempu; vs[]*=0.5;
// extract anti-symmetric component
ua[]=u[]; ua[]-=us[];
va[]=v[]; va[]-=vs[];
```

FIGURE D.3 – Code FreeFem++ pour calculer les composantes symétriques $\mathbf{u}_s$ et anti-symétriques $\mathbf{u}_a$ avec l'opérateur $\mathcal{S}$.

Bibliographie

[1] Secrétariat général de la défense et de la sécurité nationale. "l'essor des drones aériens civils en france : enjeux et réponses possibles de l'État". *http : //www.sgdsn.gouv.fr/uploads/*2017/01/151016 − *rapport − du − gouvernement − au − parlement − sur − les − drones.pdf*, remis en octobre 2015.

[2] Pierre Alonso et Gabriel Siméon. "drones, la panoplie des antivols". *http : //www.liberation.fr/futurs/*2015/06/21/*drones − la − panopliedes − antivols*$_1$334288, mis en ligne le 21 juin 2015.

[3] Xavier Pintat et Jacques Gautier. "loi relative au renforcement de la sécurité de l'usage des drones civils". *https : //www.senat.fr/dossier − legislatif/ppl*15 − 504.*html*, Loi $n°$ 2016-1428 du 24 octobre 2016 parue au JO $n°$ 249 du 25 octobre 2016.

[4] Michel GARCIA, Envan NORMAND, Hideaki PAGE, Iain HOWIESON, and Micheal MCCUIIOCH. Détection et identification chimique par spectroscopie qcl sur des prélèvements d'air réalisés par microdrones : Interaction du champ électromagnétique avec l'environnement. REE. Revue de l'électricité et de l'électronique, (6-7) :85–89, 2005.

[5] Jonathan Lisein, Nathalie Pineux, Marc Pierrot-Deseilligny, Aurore Degré, and Philippe Lejeune. Détection de l'érosion dans un bassin versant agricole par comparaison d'images multidates acquises par drone. 2014.

[6] Svetlana A Chechetka, Yue Yu, Masayoshi Tange, and Eijiro Miyako. Materially engineered artificial pollinators. Chem, 2(2) :224–239, 2017.

[7] Agence France Presse. "des mini drones pollinisateurs à la rescousse des abeilles". *https : //www.sciencesetavenir.fr/nature−environnement/des−mini−drones− pollinisateurs − a − la − rescousse − des − abeilles*$_1$10479, mis en ligne le 9 février 2017.

[8] Jérôme Sueur, Elizabeth J Tuck, and Daniel Robert. Sound radiation around a flying fly. The Journal of the Acoustical Society of America, 118(1) :530–538, 2005.

[9] Youngmin Bae and Young J Moon. Aerodynamic sound generation of flapping wing. The Journal of the Acoustical Society of America, 124(1) :72–81, 2008.

[10] Rick Weiss. "dragonfly or insect spy ? scientists at work on robobugs.". *http : //www.washingtonpost.com/wp − dyn/content/article/*2007/10/08/*AR*2007100801434.*html*, mis en ligne le 9 octobre 2007.

[11] Nancy Bradshaw and David Lentink. Aerodynamic and structural dynamic identification of a flapping wing micro air vehicle. In 26th AIAA applied aerodynamics conference, page 6248, 2008.

[12] David Lentink, Stefan R Jongerius, and Nancy L Bradshaw. The scalable design of flapping micro-air vehicles inspired by insect flight. In Flying insects and robots, pages 185–205. Springer, 2009.

[13] Kevin Y Ma, Pakpong Chirarattananon, Sawyer B Fuller, and Robert J Wood. Controlled flight of a biologically inspired, insect-scale robot. Science, 340(6132) :603–607, 2013.

[14] Thomas J Mueller. Aerodynamic measurements at low raynolds numbers for fixed wing micro-air vehicles. Technical report, NOTRE DAME UNIV IN DEPT OF AEROSPACE AND MECHANICAL ENGINEERING, 2000.

[15] Thomas J Mueller. Fixed and flapping wing aerodynamics for micro air vehicle applications, volume 195. AIAA, 2001.

[16] Pierre Pellegrin and C Dalimier. Aristote. Traité du ciel, 2004.

[17] Pierre Curie. Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique. J. Phys. Theor. Appl., 3(1) :393–415, 1894.

[18] Martin Golubitsky and Ian Stewart. The symmetry perspective : from equilibrium to chaos in phase space and physical space, volume 200. Springer Science & Business Media, 2003.

[19] Gaston Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. In Annales scientifiques de l'École normale supérieure, volume 12, pages 47–88, 1883.

[20] Michael F Schatz, Dwight Barkley, and Harry L Swinney. Instability in a spatially periodic open flow. Physics of Fluids, 7(2) :344–358, 1995.

[21] Leonid Brevdo and Thomas J Bridges. Absolute and convective instabilities of spatially periodic flows. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 354(1710) :1027–1064, 1996.

[22] Dwight Barkley and Ronald D Henderson. Three-dimensional floquet stability analysis of the wake of a circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics, 322 :215–241, 1996.

[23] H Honji. Streaked flow around an oscillating circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics, 107 :509–520, 1981.

[24] Charles HK Williamson and Anatol Roshko. Vortex formation in the wake of an oscillating cylinder. Journal of fluids and structures, 2(4) :355–381, 1988.

[25] M Tatsuno and PW Bearman. A visual study of the flow around an oscillating circular cylinder at low keulegan–carpenter numbers and low stokes numbers. Journal of Fluid Mechanics, 211 :157–182, 1990.

[26] James Lighthill. Aerodynamic aspects of animal flight. In Swimming and flying in nature, pages 423–491. Springer, 1975.

[27] Adrian LR Thomas and Graham K Taylor. Animal flight dynamics i. stability in gliding flight. Journal of Theoretical Biology, 212(3) :399–424, 2001.

[28] GK Taylor and ALR Thomas. Animal flight dynamics ii. longitudinal stability in flapping flight. Journal of theoretical biology, 214(3) :351–370, 2002.

[29] Michael H Dickinson, Fritz-Olaf Lehmann, and Sanjay P Sane. Wing rotation and the aerodynamic basis of insect flight. Science, 284(5422) :1954–1960, 1999.

[30] Sanjay P Sane and Michael H Dickinson. The aerodynamic effects of wing rotation and a revised quasi-steady model of flapping flight. Journal of experimental biology, 205(8) :1087–1096, 2002.

[31] R Dudley and CP Ellington. Mechanics of forward flight in bumblebees : Ii. quasi-steady lift and power requirements. Journal of Experimental Biology, 148(1) :53–88, 1990.

[32] Charles P Ellington. The novel aerodynamics of insect flight : applications to micro-air vehicles. Journal of Experimental Biology, 202(23) :3439–3448, 1999.

[33] JM Anderson, K Streitlien, DS Barrett, and MS Triantafyllou. Oscillating foils of high propulsive efficiency. Journal of Fluid Mechanics, 360 :41–72, 1998.

[34] D.J. Cleaver, Z. Wang, and I. Gursul. Vortex mode bifurcation and lift force of a plunging airfoil at low reynolds numbers. AIAA Paper, 390, 2010.

[35] D.J. Cleaver, Z. Wang, I. Gursul, and M.R. Visbal. Lift enhancement by means of small-amplitude airfoil oscillations at low reynolds numbers. AIAA journal, 49(9) :2018–2033, 2011.

[36] D.J. Cleaver, Z. Wang, and I. Gursul. Bifurcating flows of plunging aerofoils at high strouhal numbers. Journal of Fluid Mechanics, 708 :349–376, 2012.

[37] D.J. Cleaver, Z. Wang, and I. Gursul. Investigation of high-lift mechanisms for a flat-plate airfoil undergoing small-amplitude plunging oscillations. AIAA journal, 2013.

[38] Jean-Yves Andro and Laurent Jacquin. Frequency effects on the aerodynamic mechanisms of a heaving airfoil in a forward flight configuration. Aerospace Science and Technology, 13(1) :71–80, 2009.

[39] Nicolas Vandenberghe, Jun Zhang, and Stephen Childress. Symmetry breaking leads to forward flapping flight. Journal of Fluid Mechanics, 506 :147–155, 2004.

[40] Nicolas Vandenberghe, Stephen Childress, and Jun Zhang. On unidirectional flight of a free flapping wing. Physics of Fluids, 18(1) :014102, 2006.

[41] Stephen Childress. Mechanics of swimming and flying, volume 2. Cambridge University Press, 1981.

[42] Silas Alben and Michael Shelley. Coherent locomotion as an attracting state for a free flapping body. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 102(32) :11163–11166, 2005.

[43] Saverio E Spagnolie, Lionel Moret, Michael J Shelley, and Jun Zhang. Surprising behaviors in flapping locomotion with passive pitching. Physics of Fluids, 22(4) :041903, 2010.

[44] John R Elston, John Sheridan, and Hugh M Blackburn. Two-dimensional floquet stability analysis of the flow produced by an oscillating circular cylinder in quiescent fluid. European Journal of Mechanics-B/Fluids, 23(1) :99–106, 2004.

[45] Hugh M Blackburn, F Marques, and JM Lopez. Symmetry breaking of two-dimensional time-periodic wakes. Journal of Fluid Mechanics, 522 :395–411, 2005.

[46] Jian Deng and Colm-cille Patrick Caulfield. Dependence on aspect ratio of symmetry breaking for oscillating foils : implications for flapping flight. Journal of Fluid Mechanics, 787 :16–49, 2016.

[47] Ramiro Godoy-Diana, Catherine Marais, Jean-Luc Aider, and José Eduardo Wesfreid. A model for the symmetry breaking of the reverse bénard–von kármán vortex street produced by a flapping foil. Journal of Fluid Mechanics, 622 :23–32, 2009.

[48] JB Bratt. Flow patterns in the wake of an oscillating aerofoil. Number 2773. HM Stationery Office UK, 1953.

[49] K.D. Jones, C.M. Dohring, and M. Platzer. Wake structures behind plunging airfoils-a comparison of numerical and experimental results. In 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, page 78, 1996.

[50] K.D. Jones, C.M. Dohring, and M.F. Platzer. Experimental and computational investigation of the knoller-betz effect. AIAA journal, 36(7) :1240–1246, 1998.

[51] Ramiro Godoy-Diana, Jean-Luc Aider, and José Eduardo Wesfreid. Transitions in the wake of a flapping foil. Physical Review E, 77(1) :016308, 2008.

[52] Zhongquan Charlie Zheng and Z Wei. Study of mechanisms and factors that influence the formation of vortical wake of a heaving airfoil. Physics of Fluids, 24(10) :103601, 2012.

[53] D.E. Calderon, D.J. Cleaver, I. Gursul, and Z. Wang. On the absence of asymmetric wakes for periodically plunging finite wings. Physics of Fluids, 26(7) :349–376, 2014.

[54] Jian Deng, CP Caulfield, and Xueming Shao. Effect of aspect ratio on the energy extraction efficiency of three-dimensional flapping foils. Physics of Fluids, 26(4) :043102, 2014.

[55] Catherine Marais, Benjamin Thiria, José Eduardo Wesfreid, and Ramiro Godoy-Diana. Stabilizing effect of flexibility in the wake of a flapping foil. Journal of Fluid Mechanics, 710 :659–669, 2012.

[56] Xiaojue Zhu, Guowei He, and Xing Zhang. How flexibility affects the wake symmetry properties of a self-propelled plunging foil. Journal of Fluid Mechanics, 751 :164–183, 2014.

[57] Charles S Peskin. The immersed boundary method. Acta numerica, 11 :479–517, 2002.

[58] Rajat Mittal and Gianluca Iaccarino. Immersed boundary methods. Annu. Rev. Fluid Mech., 37 :239–261, 2005.

[59] Randall J Leveque and Zhilin Li. The immersed interface method for elliptic equations with discontinuous coefficients and singular sources. SIAM Journal on Numerical Analysis, 31(4) :1019–1044, 1994.

[60] Roland Glowinski, Tsorng-Whay Pan, and Jacques Periaux. A fictitious domain method for dirichlet problem and applications. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 111(3-4) :283–303, 1994.

[61] Roland Glowinski, T-W Pan, Todd I Hesla, and Daniel D Joseph. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. International Journal of Multiphase Flow, 25(5) :755–794, 1999.

[62] CW Hirt, Anthony A Amsden, and JL Cook. An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds. Journal of computational physics, 14(3) :227–253, 1974.

[63] Guillaume Mougin and Jacques Magnaudet. Path instability of a rising bubble. Phys. Rev. Lett., 88 :014502, Dec 2001.

[64] G Mougin and Jacques Magnaudet. The generalized kirchhoff equations and their application to the interaction between a rigid body and an arbitrary time-dependent viscous flow. International journal of multiphase flow, 28(11) :1837–1851, 2002.

[65] Pierre Varignon. Nouvelle Mecanique Ou Statique : Dont Le Projet Fut Donné En M. DC. LXXXVII, volume 2. Jombert, 1725.

[66] Damien Jallas, Olivier Marquet, and David Fabre. Linear and nonlinear perturbation analysis of the symmetry breaking in time-periodic propulsive wakes. Physical Review E, 95(6) :063111, 2017.

[67] H Dütsch, F Durst, S Becker, and H Lienhart. Low-reynolds-number flow around an oscillating circular cylinder at low keulegan–carpenter numbers. Journal of Fluid Mechanics, 360 :249–271, 1998.

[68] Emmanuel Guilmineau and P Queutey. A numerical simulation of vortex shedding from an oscillating circular cylinder. Journal of Fluids and Structures, 16(6) :773–794, 2002.

[69] Ali Akbar Hosseinjani and Ali Ashrafizadeh. Numerical simulation of the wake structure and thrust/lift generation of a pitching airfoil at low reynolds number via an immersed boundary method. Journal of Aerospace Technology and Management, 7(3) :334–350, 2015.

[70] F. Hecht. New development in freefem++. J. Numer. Math., 20(3-4) :251–265, 2012.

[71] J Cahouet and J-P Chabard. Some fast 3d finite element solvers for the generalized stokes problem. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 8(8) :869–895, 1988.

[72] Roland Glowinski. Finite element methods for incompressible viscous flow. Handbook of numerical analysis, 9 :3–1176, 2003.

[73] Wendy Kress and Per Lötstedt. Time step restrictions using semi-explicit methods for the incompressible navier–stokes equations. Computer methods in applied mechanics and engineering, 195(33) :4433–4447, 2006.

[74] HM Blackburn and GJ Sheard. On quasiperiodic and subharmonic floquet wake instabilities. Physics of Fluids, 22(3) :031701, 2010.

[75] John R Elston, Hugh M Blackburn, and John Sheridan. The primary and secondary instabilities of flow generated by an oscillating circular cylinder. Journal of Fluid Mechanics, 550 :359–389, 2006.

[76] Walter Edwin Arnoldi. The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. Quarterly of applied mathematics, 9(1) :17–29, 1951.

[77] Yousef Saad. Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2003.

[78] Thomas Ericsson and Axel Ruhe. The spectral transformation lanczos method for the numerical solution of large sparse generalized symmetric eigenvalue problems. Mathematics of Computation, 35(152) :1251–1268, 1980.

[79] Pauline Assemat, David Fabre, and Jacques Magnaudet. The onset of unsteadiness of two-dimensional bodies falling or rising freely in a viscous fluid : a linear study. Journal of Fluid Mechanics, 690 :173–202, 2012.

[80] J Sánchez, M Net, B Garcıa-Archilla, and C Simó. Newton–krylov continuation of periodic orbits for navier–stokes flows. Journal of Computational Physics, 201(1) :13–33, 2004.

[81] Juan Sánchez and Marta Net. On the multiple shooting continuation of periodic orbits by newton–krylov methods. International Journal of Bifurcation and Chaos, 20(01) :43–61, 2010.

[82] Karthik Kashinath, Iain C Waugh, and Matthew P Juniper. Nonlinear self-excited thermoacoustic oscillations of a ducted premixed flame : bifurcations and routes to chaos. Journal of Fluid Mechanics, 761 :399–430, 2014.

[83] David Fabre, Denis Sipp, and Laurent Jacquin. Kelvin waves and the singular modes of the lamb–oseen vortex. Journal of Fluid Mechanics, 551 :235–274, 2006.

[84] David Fabre. Instabilité et instationnarités dans les tourbillons : Application aux sillages d'avions. PhD thesis, 2002.

[85] Julian CR Hunt, Alan A Wray, and Parviz Moin. Eddies, streams, and convergence zones in turbulent flows. 1988.

[86] Jinhee Jeong, Fazle Hussain, Wade Schoppa, and John Kim. Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow. Journal of Fluid Mechanics, 332 :185–214, 1997.

[87] Min S Chong, Anthony E Perry, and Brian J Cantwell. A general classification of three-dimensional flow fields. Physics of Fluids A : Fluid Dynamics, 2(5) :765–777, 1990.

[88] Laurent Graftieaux, Marc Michard, and Nathalie Grosjean. Combining piv, pod and vortex identification algorithms for the study of unsteady turbulent swirling flows. Measurement Science and technology, 12(9) :1422, 2001.

[89] Gal Berkooz, Philip Holmes, and John L Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. Annual review of fluid mechanics, 25(1) :539–575, 1993.

[90] Michele Benzi. Preconditioning techniques for large linear systems : a survey. Journal of computational Physics, 182(2) :418–477, 2002.

[91] Gautam M Shroff and Herbert B Keller. Stabilization of unstable procedures : the recursive projection method. SIAM Journal on numerical analysis, 30(4) :1099–1120, 1993.

[92] Espen Åkervik, Luca Brandt, Dan S Henningson, Jérôme Hœpffner, Olaf Marxen, and Philipp Schlatter. Steady solutions of the navier-stokes equations by selective frequency damping. Physics of fluids, 18(6) :068102, 2006.

[93] Bastien E Jordi, Colin J Cotter, and Spencer J Sherwin. An adaptive selective frequency damping method. Physics of Fluids, 27(9) :094104, 2015.

[94] Guilherme Cunha, Pierre-Yves Passaggia, and Marc Lazareff. Optimization of the selective frequency damping parameters using model reduction. Physics of Fluids, 27(9) :094103, 2015.

[95] Peter J Schmid. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. Journal of fluid mechanics, 656 :5–28, 2010.

[96] F Richez, M Leguille, and O Marquet. Selective frequency damping method for steady rans solutions of turbulent separated flows around an airfoil at stall. Computers & Fluids, 132 :51–61, 2016.

[97] Laurette S Tuckerman. Steady-state solving via stokes preconditioning ; recursion relations for elliptic operators. In 11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, pages 573–577. Springer, 1989.

[98] Chowdhury K Mamun and Laurette S Tuckerman. Asymmetry and hopf bifurcation in spherical couette flow. Physics of Fluids, 7(1) :80–91, 1995.

[99] Cédric Beaume. Adaptive stokes preconditioning for steady incompressible flows. Communications in Computational Physics, 22(2) :494–516, 2017.

[100] Kurt Lust and Dirk Roose. An adaptive newton–picard algorithm with subspace iteration for computing periodic solutions. SIAM Journal on Scientific Computing, 19(4) :1188–1209, 1998.

[101] Jean-Lou JPfister. Quasi-linear modelization of the laminar vortex shedding past two-dimensional bluff-bodies, 2015.

[102] David Fabre, Vincenzo Citro, D. Ferreira Sabino, Paul Bonnefis, and Flavio Giannetti. A practical review on linear and nonlinear global approaches to flow instabilities. Applied Mechanics Reviews, page (submitted), 2018.

[103] The harmonic balance method to describe nonlinear saturated states. Journal of Fluid Mechanics, page (in preparation), 2018.

[104] Kestutis Pyragas. Continuous control of chaos by self-controlling feedback. Physics letters A, 170(6) :421–428, 1992.

[105] Léopold Shaabani-Ardali, Denis Sipp, and Lutz Lesshafft. Time-delayed feedback technique for suppressing instabilities in time-periodic flow. Phys. Rev. Fluids, 2 :113904, Nov 2017.

[106] JC S. Lai and MF Platzer. Jet characteristics of a plunging airfoil. AIAA journal, 37(12) :1529–1537, 1999.

[107] Karl D von Ellenrieder and Stamatios Pothos. Piv measurements of the asymmetric wake of a two dimensional heaving hydrofoil. Experiments in fluids, 44(5) :733–745, 2008.

[108] V Citro, J Tchoufag, D Fabre, F Giannetti, and P Luchini. Linear stability and weakly nonlinear analysis of the flow past rotating spheres. Journal of Fluid Mechanics, 807 :62–86, 2016.

[109] Shizhao Wang, Guowei He, and Xing Zhang. Self-propulsion of flapping bodies in viscous fluids : Recent advances and perspectives. Acta Mechanica Sinica, 32(6) :980–990, 2016.

[110] Rahul Bale, Anup A Shirgaonkar, Izaak D Neveln, Amneet Pal Singh Bhalla, Malcolm A MacIver, and Neelesh A Patankar. Separability of drag and thrust in undulatory animals and machines. Scientific reports, 4 :7329, 2014.

[111] Stefan Kern and Petros Koumoutsakos. Simulations of optimized anguilliform swimming. Journal of Experimental Biology, 209(24) :4841–4857, 2006.

[112] Teis Schnipper, Anders Andersen, and Tomas Bohr. Vortex wakes of a flapping foil. Journal of Fluid Mechanics, 633 :411–423, 2009.

[113] Horace Lamb. Hydrodynamics. Cambridge university press, 1932.

[114] L Rosenhead. The formation of vortices from a surface of discontinuity. Proc. R. Soc. Lond. A, 134(823) :170–192, 1931.

[115] Philip G Saffman. Vortex dynamics. Cambridge university press, 1992.

[116] Hassan Aref. On the equilibrium and stability of a row of point vortices. Journal of Fluid Mechanics, 290 :167–181, 1995.

[117] Xuzhao He and Ismet Gursul. Point vortex model of deflected wakes of oscillating airfoils. AIAA Journal, pages 3647–3651, 2016.

[118] Sidney Leibovich, SN Brown, and Y Patel. Bending waves on inviscid columnar vortices. Journal of Fluid Mechanics, 173 :595–624, 1986.

[119] Vincent Brion, Denis Sipp, and Laurent Jacquin. Linear dynamics of the lamb-chaplygin dipole in the two-dimensional limit. Physics of Fluids, 26(6) :064103, 2014.

[120] D.J. Cleaver, Z. Wang, and I. Gursul. Oscillating flexible wings at low reynolds numbers. In 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting. University of Bath, 2013.

[121] D.J. Cleaver, I. Gursul, D.E. Calderon, and Z. Wang. Thrust enhancement due to flexible trailing-edge of plunging foils. Journal of Fluids and Structures, 51 :401–412, 2014.

[122] Michael P Païdoussis, Stuart J Price, and Emmanuel De Langre. Fluid-structure interactions : cross-flow-induced instabilities. Cambridge University Press, 2010.

[123] C Mannini, AM Marra, and G Bartoli. Viv–galloping instability of rectangular cylinders : review and new experiments. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 132 :109–124, 2014.

[124] H Glauert. The rotation of an aerofoil about a fixed axis. ACA, R & M, (595), 1919.

[125] JP Den Hartog. Transmission line vibration due to sleet. Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, 51(4) :1074–1076, 1932.

[126] Joël Tchoufag, David Fabre, and Jacques Magnaudet. Global linear stability analysis of the wake and path of buoyancy-driven disks and thin cylinders. Journal of Fluid Mechanics, 740 :278–311, 2014.

[127] Nikolai Aleksandrovich Magnitskii and Sergei Vasil'evich Sidorov. Transition to chaos in nonlinear dynamical systems through a subharmonic cascade of bifurcations of two-dimensional tori. Differential equations, 38(12) :1703–1708, 2002.

[128] A Arneodo, P Coullet, and Ch Tresser. A possible new mechanism for the onset of turbulence. Physics Letters A, 81(4) :197–201, 1981.

[129] Eric Lauga. Life around the scallop theorem. Soft Matter, 7(7) :3060–3065, 2011.

[130] Stephen Childress and Robert Dudley. Transition from ciliary to flapping mode in a swimming mollusc : flapping flight as a bifurcation in re_ω. Journal of Fluid Mechanics, 498 :257–288, 2004.

[131] Edward M Purcell. Life at low reynolds number. American journal of physics, 45(1) :3–11, 1977.

[132] Xi-Yun Lu and Qin Liao. Dynamic responses of a two-dimensional flapping foil motion. Physics of Fluids, 18(9) :098104, 2006.

[133] Xing Zhang, Saizhen Ni, Shizhao Wang, and Guowei He. Effects of geometric shape on the hydrodynamics of a self-propelled flapping foil. Physics of Fluids, 21(10) :103302, 2009.

[134] Ivo Babuška. Error-bounds for finite element method. Numerische Mathematik, 16(4) :322–333, 1971.

[135] Franco Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, 8(R2) :129–151, 1974.

[136] Endre Süli and David F Mayers. An introduction to numerical analysis. Cambridge university press, 2003.

Doctorat de l'Université de Toulouse
Délivré par l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier
École doctorale MEGeP
Spécialité Dynamique des Fluides
Date de soutenance : 17/10/2018
Damien Jallas

Stabilité d'écoulements de sillages périodiques générés par des ailes battantes

Mots-clés : ailes battantes, interaction fluide/structure, stabilité de Floquet, symétries

La thèse porte sur l'étude numérique de la stabilité d'écoulements de sillages périodiques en temps générés par des ailes battantes. Elle vise à expliquer trois phénomènes observés expérimentalement et simulés numériquement : (*i*) la déviation du sillage propulsif d'une aile battante en incidence nulle, (*ii*) les écoulements quasi-périodiques autour d'ailes battantes en incidence non nulle, et (*iii*) l'auto-propulsion d'ailes battantes symétriques dans des fluides au repos. Tous ces phénomènes sont reliés à l'existence d'instabilités de l'écoulement fluide autour de l'aile. Plusieurs méthodes originales ont été développées pour calculer les champs de base périodiques instables qui satisfont les symétries spatio-temporelles imposées par la cinématique des ailes. La stabilité de ces écoulements de sillages périodiques a ensuite été étudiée au moyen d'une analyse de Floquet. En plus de ces analyses linéaires, la connaissance des champs de base périodiques permet l'étude de la saturation non linéaire des instabilités rencontrées. Dans chaque cas, ces résultats permettent de discuter les effets observés sur les performances aérodynamiques des ailes battantes.

Stability analysis of time-periodic wake flows generated by flapping wings

Key-words : flapping wings, fluid-structure interactions, Floquet stability, symmetries

The thesis investigates numerically the stability of time-periodic wake flows generated by flapping wings and aims at explaining three phenomena that have been observed experimentally or simulated numerically : (*i*) the deviation of propulsive wakes behind a flapping wing with zero mean angle, (*ii*) the quasi-periodic flows around flapping wings with non zero mean angle, and (*iii*) the self-propulsion of heaving symmetric wings in a quiescent fluid. All these phenomena are related to the existence of instabilities of time-periodic base flows. Original methods are developed to compute unstable time-periodic flows that satisfy the spatio-temporal symmetries imposed by the wings kinematics. The stability analysis of these time-periodic base flows are then determined by computing the Floquet multiplier and corresponding modes. In addition to the linear stability analysis, the knowledge of time-periodic base flows allows to investigate the non-linear saturation of these perturbations. In each case, the influence of the instabilities developing in the wake-flows on the flapping wing performances are discussed.

ONERA, The French Aerospace Lab
Aerodynamics, Aeroelasticity & Acoustics Department (DAAA)
8, rue des Vertugadins
92190 Meudon, FRANCE