



HAL
open science

Modélisation Markovienne de lasers multimodes à semiconducteurs

Arthur Vallet

► **To cite this version:**

Arthur Vallet. Modélisation Markovienne de lasers multimodes à semiconducteurs. Electronique. Université Montpellier, 2019. Français. NNT : 2019MONT029 . tel-02476199

HAL Id: tel-02476199

<https://theses.hal.science/tel-02476199>

Submitted on 12 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Électronique

École doctorale I2S

Unité de recherche IES

Modélisation Markovienne de lasers multimodes à semiconducteurs

Présentée par Arthur Vallet

Le 15 octobre 2019

Sous la direction de Laurent Chusseau
et Fabrice Philippe

Devant le jury composé de

Gian Luca LIPPI, Professeur, Université de Nice-Sophia Antipolis

Frédéric GRILLOT, Professeur, Institut Polytechnique de Paris

Mehdi ALOUINI, Professeur, Université de Rennes

Alain JEAN-MARIE, Directeur de Recherche INRIA, Sophia Antipolis

Fabrice PHILIPPE, Maître de Conférences, Université de Montpellier

Laurent CHUSSEAU, Directeur de Recherche CNRS, Université de Montpellier

Rapporteur

Rapporteur

Président

Examineur

Co-directeur

Directeur



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER

"RRRRRrrrrrrrrhhh!!!"

Le T-Rex, Jurassic Park

Remerciements

Mes travaux ayant impliqué beaucoup de personnes je ne peux pas simplement partir en remerciant uniquement mon chat, je vais donc accorder quelques mots de reconnaissance pour le soutien que j'ai pu recevoir de nombreuses personnes. Bien évidemment le premier à remercier est Laurent Chusseau. Il est difficile pour moi d'être concis tant son implication a été importante dans ma thèse. Je tiens à lui dire merci pour sa pédagogie et sa rigueur qui m'ont permis de progresser sans cesse. Je tiens à aussi remercier Fabrice Philippe (un 'l' deux 'p' bien sûr), qui m'a permis d'avoir une rigueur mathématique en comprenant qu'il suffit de bien poser le problème, les solutions en découleront tout simplement.

Je veux remercier Alain Jean-Marie qui est présent dans le projet depuis mon arrivée, il a de nombreuses fois pu me débloquer. Je voudrais remercier l'ensemble des partenaires d'IDYLIC et notamment Mehdi Alouini. Ils ont tous eut confiance dans mon sujet et sans leur financement ma thèse n'aurait pas pu être possible. Je tiens à remercier Gian Luca Lippi, non seulement il a émis quantité de remarques afin d'améliorer mon manuscrit, mais en plus il a grandement inspiré un chapitre de ma thèse. Je tiens également à remercier Frédéric Grillot pour avoir accepté d'examiner mon travail.

Ensuite, j'aimerais remercier l'ensemble des doctorants de RADIAC avec lesquels j'ai eu de longues discussions intéressantes, parfois même de sciences. Je tiens particulièrement à remercier Pierre Payet Baron de Caravêtes, Alexandre (Aka. Anaconda), Samir la trahison-disgrâce, Kimmo, Salvo, Israel ainsi que Mathias et Flavien, parti trop tôt. Je remercie aussi ceux qui ont partagé mon bureau et ont dû alors supporter ma vision personnelle du rangement. Ils sont rarement restés longtemps. Je remercie donc Thomas et Pierre K ainsi que Gwen à qui je souhaite une bonne carrière en tant que RH. Je veux aussi remercier les permanents de RADIAC notamment, Alain pour son aide sur le code, Jeremy pour ces conseils sur la pédagogie et Cathy pour m'avoir permis d'enseigner.

Je remercie aussi ma Famille pour son soutien depuis aussi longtemps que je m'en souviens. Je tiens particulièrement à remercier ma mère pour avoir corrigé beaucoup de fautes de français et je m'excuse auprès de toute la fratrie à qui on imposera à l'avenir de m'appeler *doc*. Je veux remercier mes amis Jordan, Thomas et Florian qui m'ont épaulé malgré mon éloignement durant ces trois dernières années. Je tiens à remercier ma copine Katushia pour son appui durant l'intégralité de la thèse. Et finalement, le plus important, je remercie mon chat.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	État de l'art	2
1.1.1	Problématique bimode	3
1.1.2	Différents modèles de lasers	5
1.1.3	Chaîne de Markov	7
1.2	Modèle de laser QW microscopique	8
1.2.1	Espace d'états	8
1.2.2	Taux de transitions	11
1.3	Implémentation	13
1.3.1	Algorithme de Gillespie [26]	13
1.3.2	Résolution stationnaire	14
1.3.3	Utilisation du modèle	15
1.4	Problématique	17
2	Monomode	21
2.1	Calcul de l'occupation canonique des niveaux	22
2.1.1	Définitions	22
2.1.2	Cas général	23
2.1.3	Application à notre modèle de laser	25
2.1.4	Probabilité de présence d'un électron au niveau de pom- page	28
2.1.5	Double symétrie des bandes	29
2.1.6	Description du modèle canonique	31
2.2	Laser statique	31
2.2.1	Comparaison des modèles microscopique et canonique	32

2.2.2	Équations de balance	36
2.3	Dynamique du laser	38
2.3.1	Phases Markoviennes	38
2.3.2	Pompage électrique	40
2.3.3	Trou spectral	42
2.4	Conclusion	45
3	Laser Mesoscopique	47
3.1	Problématique	47
3.2	Comparaison avec la littérature	51
3.2.1	Comparaison avec les équations à taux de populations	51
3.2.2	Classe du laser et modèle Markovien	54
3.3	Étude du seuil	56
3.3.1	Analyse statique	57
3.3.2	Analyse dynamique	60
3.3.3	Laser sans seuil	68
3.4	Conclusion	70
4	Multimode	73
4.1	Introduction	73
4.1.1	État de l'art	73
4.1.2	Modélisation	74
4.1.3	Facteur de Lamb	76
4.2	Facteur C dans les lasers à QD	78
4.2.1	Modèle	78
4.2.2	Symétrie parfaite entre les modes	81
4.2.3	Dissymétrie entre les modes	84
4.3	Facteur C dans les lasers à QW	86
4.3.1	Modèle	86
4.3.2	Confrontation avec l'expérience	90
4.4	Laser à deux dimensions	92
4.4.1	Description du modèle 2D	93
4.4.2	Résultats préliminaires	100
4.5	Conclusion	103

Conclusion générale	105
Glossaire	109
Bibliographie	120

Chapitre 1

Introduction

La physique est une discipline qui tente de simplifier des systèmes réels grâce à des modèles. La modélisation est alors une abstraction de la réalité qui n'a pas un but d'exactitude, mais d'observer comment des phénomènes visuellement complexes, peuvent être expliqués par des hypothèses simples.

Tous les modèles sont faux. Certains sont utiles
(George Box)

Nous présenterons une modélisation originale du laser à semi-conducteur en utilisant une chaîne de Markov. Une chaîne de Markov est un modèle stochastique décrivant une séquence de processus. Cette vision d'un système par une succession de processus pose des règles simples qui produisent néanmoins des phénomènes globaux sophistiqués. Le bruit dans de tels systèmes est totalement intrinsèque. Le changement d'état n'étant pas déterministe, en regardant la séquence de processus dans son ensemble, celle-ci dispose de petites variations individuelles qui créent alors un bruit. Cette prise en compte du bruit natif est alors très importante pour pouvoir simuler des systèmes instables. Les systèmes instables qui nous intéresseront dans ce manuscrit sont les lasers bimodes. Ces lasers offrent la possibilité d'une génération THz, mais le régime bimode est d'autant plus instable que les modes sont couplés. C'est pour répondre à la question de la stabilité du régime bimode dans ces lasers que le modèle a été choisi et la thèse a été financée.

1.1 État de l'art

L'interprétation quantique de l'effet photoélectrique par Einstein a été la prémisse de l'élaboration des lasers [1, p. 765]. Pour comprendre ce phénomène il faut considérer un atome ou émetteur, ayant un électron pouvant prendre deux énergies. Ces énergies possibles seront appelées niveaux d'énergie ; la plus basse est le niveau fondamental E_0 , l'autre est le niveau excité E_1 . Si cet atome est couplé à un champ électromagnétique composé de photons cohérents dont la fréquence ν est proportionnelle à la différence d'énergie des niveaux : $h\nu = E_1 - E_0$, avec h la constante de Planck, alors des transitions photoniques sont possibles. Ces transitions sont au nombre de trois. Si l'électron est sur le niveau fondamental il peut absorber un photon pour d'augmenter son énergie afin de se retrouver sur le niveau excité, c'est une absorption et la vitesse d'apparition de l'événement est proportionnelle au nombre de photons du champ. Si l'électron est sur le niveau excité, il peut se désexciter spontanément, sans besoin de présence d'un champs électromagnétique, afin de revenir sur le niveau fondamental. Il émettra un photon d'énergie $h\nu$ dans une direction et avec une phase aléatoire, c'est une émission spontanée. Lorsque l'électron est sur le niveau excité il peut aussi émettre un photon cohérent avec le champ électromagnétique, de même direction et même phase, c'est l'émission stimulée et sa vitesse d'apparition est proportionnelle au nombre de photons dans le champ. C'est cet événement qui est à la base du laser : les émetteurs sont placés dans un milieu de gain qui se chargera de les exciter grâce à un pompage, c'est l'inversion de population. Le champ électromagnétique sera contraint dans une cavité résonnante à la fréquence des photons, bornée par des miroirs. Les allers-retours des photons entre les miroirs permettent d'amplifier le champ électromagnétique grâce à l'émission stimulée. Une imperfection sur un des miroirs permet qu'une petite partie des photons puissent sortir de la cavité, cette fuite des photons est le signal utile du laser.

Il existe toute une zoologie de lasers. Le milieu de gain peut être gazeux (lasers CO_2 , He-Ne, ...), solide (YAG, Titane : saphir, ...) ou **semiconducteur (SC)**. Ces derniers possèdent une bande d'énergie que les électrons ne

peuvent pas posséder : la bande interdite. La bande interdite sépare en deux l'ensemble des énergies possibles : la **bande de valence (BV)** pour les énergies les plus faibles et la **bande de conduction (BC)** pour les énergies les plus élevées. Grâce à une contrainte spatiale obtenue à la croissance, il est possible de restreindre les énergies accessibles des électrons. Ainsi pour le **SC** massif, sans contrainte, l'ensemble des énergies des bandes paraboliques sont accessibles. Avec une contrainte sur une dimension, on obtient des **puits quantique (QWs)** dont l'énergie est discrétisée en niveaux. Pour les **SCs à boîtes quantique (QDs)** l'énergie est contrainte dans les trois dimensions, quelques énergies seulement sont accessibles. Pour ce manuscrit, nous porterons notre intérêt principalement sur les lasers à **SC à QW** et à **QD**.

1.1.1 Problématique bimode

La thèse s'inscrit dans un projet de l'**Agence Nationale de la Recherche (ANR)** appelé **IDYLIC**¹. **IDYLIC** est une coopération franco-suisse alliant différents partenaires universitaires. C'est un projet de recherche dédié à concevoir un nouveau type de laser bimode, ultrastable, couvrant la gamme fréquentielle [0.1, 4] THz. Les lasers envisagés sont alors des **diodes laser à cavité verticale émettant par la surface (VECSEL)** à cavité externe illustrés sur la figure 1.1. Au vu de leur cavité externe d'assez grande dimension, ce sont clairement des lasers de classe A : des lasers dont le temps de vie des photons est plus grand que le temps de vie des états excités.

Un mode est défini comme une population de photons cohérents, donc avec une fréquence spécifique, une répartition spatiale dans la cavité et une polarisation. Notre cas ignorera les modes spatiaux et de polarisation. Un tel laser permet, grâce au battement entre les modes, de réaliser un oscillateur haute fréquence [2] beaucoup moins bruité que par cascade de mélangeur électronique [3]. Un signal de haute pureté THz utilisé dans un mélangeur permet une génération et une détection THz efficace. L'avancée technologique du projet est de faire partager le même milieu de gain par les deux modes lasers, tout en assurant le fonctionnement bimode stable. Si les milieux de

1. Investigation of quantum Dots within electrically excited vertical and external cavity surface emitting Lasers for the realization of a Coherent and compact dual wavelength laser

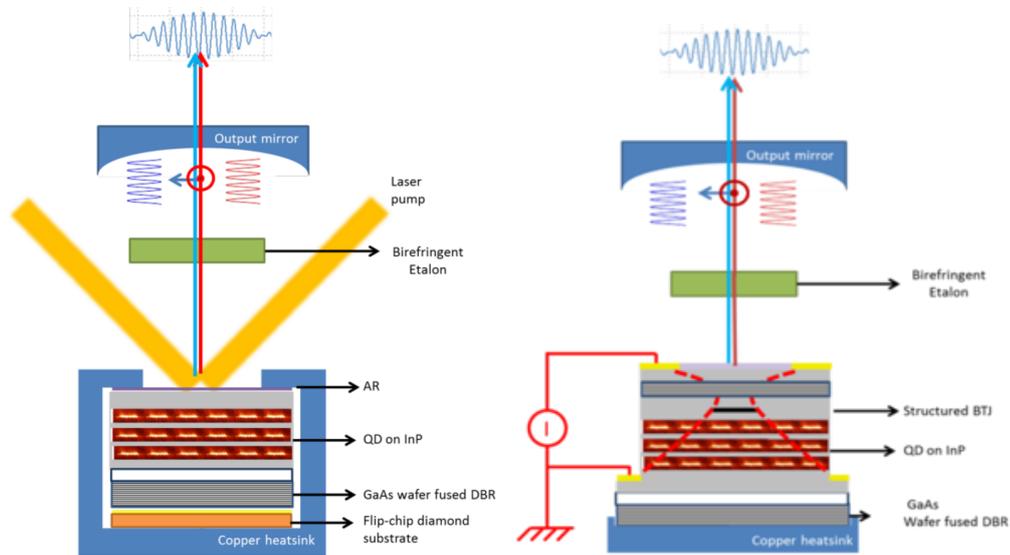


FIGURE 1.1 – Vues en coupe schématique des VECSEL bimodes envisagés dans le projet IDYLIC.

gain sont séparés, chacun des modes sera indépendant de l'autre. Avec un milieu de gain partagé, les modes ne sont plus indépendants, le bruit est commun aux deux modes. Le bruit du battement peut être plus petit que le cumul du bruit des modes. C'est ce bruit de battement faible qui permettrait à IDYLIC de développer la technologie pour une génération et une détection THz efficace.

Notre rôle au sein du projet est de modéliser ce laser bimode. Notre modèle trouve ici une grande utilité, nous considérons des particules discrètes. Chaque modification sur une variable se fait donc par saut entier, ce qui génère un bruit par saut quantique. Nous disons alors que le bruit est intrinsèque dans ce modèle. Les régimes bimode ne sont pas forcément stables, ils peuvent être bistables [4]. Cette stabilité est fortement corrélée au bruit. C'est pourquoi notre modèle, qui intègre le bruit *ab-initio* par les sauts quantiques, est particulièrement adapté. La prise en compte des bandes dans le modèle permet en outre d'observer le dépeuplement local des émetteurs, ce qui a une importance capitale sur le bruit [5] et donc sur le régime bimode.

Les lasers sont aussi divisés en plusieurs catégories en fonction de leurs tailles : les lasers nanoscopiques, possédant quelques émetteurs, les lasers mé-

soscopiques avec un nombre d'émetteurs plus élevé mais restant dénombrable, le reste étant les lasers macroscopiques qui composent quasiment l'intégralité des lasers actuels. Notre objectif dans le projet est de pouvoir, grâce au modèle, étudier la stabilité du régime bimode dans un laser mésoscopique.

1.1.2 Différents modèles de lasers

Depuis l'identification des phénomènes physiques de couplage champ matière par Einstein, la compréhension du laser a bien évolué. Cette compréhension passe aujourd'hui par sa modélisation. Le modèle le plus répandu est le système d'équations à taux de population comme dans le livre de Coldren [6, p. 187]. C'est un système d'équations qui étudie la dynamique de deux populations couplées : les photons et les électrons excités. C'est une approche phénoménologique, qui peut être appliquée pour la majorité des lasers et qui rend compte autant des effets stationnaires que dynamiques. Le bruit du laser peut être modélisé par des forces de Langevin [4]. L'approche multimode est envisageable en ajoutant des populations de photons. Il est possible de trouver une solution bimode et de tester sa stabilité comme fait pour les lasers à QD et QW dans Chusseau *et al.* [7].

Certains autres modèles sont basés sur la mécanique quantique, ils sont regroupés dans l'électrodynamique quantique (QED) [8]. Ils permettent de simuler avec une grande précision le laser en résolvant l'Hamiltonien du laser, mais sont généralement bornés à très peu de particules ; même si de grosses approximations permettent de modéliser jusqu'à 25 émetteurs [9].

Les équations de Maxwell-Bloch peuvent être utilisées pour les régimes transitoires à grand signaux en remplacement des équations à taux de population qui y montrent leurs limites [10, p. 1257].

Ces modèles peuvent être résolus par résolution stationnaire [6, 11] pour la QED, [12] pour les équations à taux de population et celle de Maxwell-Bloch. Ces méthodes sont nommées équations maîtres ou approximations de Born-Markov.

Parmi ces modèles certains cherchent à simuler une trajectoire qui montrera l'évolution temporelle du système. La moyenne sur un nombre impor-

tant de trajectoires, ou sur une trajectoire très grande si le système est ergodique, permet d'obtenir les valeurs stationnaires. Ces simulations permettent aussi d'observer simplement la dynamique du système en observant l'évolution temporelle. Un modèle qui se démarque des autres est l'automate cellulaire [13]. Il permet en instaurant des règles simples d'observer des comportements dynamiques comme l'oscillation de population ou la saturation de la population d'émetteurs excités.

Le simulateur stochastique de Puccionni et Lippi [14] présente un marcheur aléatoire qui lui permet d'observer le passage au seuil avec une courbe caractéristique reproduisant ce qu'un laser réel peut générer. Il a pu être réutilisé plus tard [15] pour observer la dynamique des populations résultante du passage au seuil. Ces différents processus apparaissent en suivant soit des distributions de Poisson soit une distribution binomiale mais en ne simulant pas les bandes. Son temps de calcul est très rapide et il permet une séparation entre les photons émis spontanément et par émission stimulée, ce qui permet d'observer directement la cohérence des photons.

Le modèle de Rice et Carmichael [16] est le modèle le plus proche du nôtre. Il présente un processus de naissance et de mort en considérant un état composé du nombre de photons et d'émetteurs excités, cet état peut changer avec des taux de transition dépendant de celui-ci. Ce modèle est une chaîne de Markov tout comme notre modèle à la différence qu'il ne simule pas les bandes. Le simulateur stochastique de Puccioni et Lippi est lui aussi une chaîne de Markov, mais comme le modèle de Rice et Carmichael, est en temps discret. La différence est qu'une chaîne de Markov en temps discret va discrétiser le temps régulièrement et tester à chaque pas de temps si un événement est apparu. La chaîne de Markov en temps continu ne s'intéresse qu'aux instants d'apparition des événements et est donc plus rapide et plus précise.

Le modèle de Roy-Choudhury *et al.* [17] est la continuité du modèle de Rice et Carmichael, c'est une chaîne de Markov en temps discret simulé par un marcheur aléatoire ou résolu stationnairement avec leur équation maître. Ils proposent d'observer les transitions photoniques grâce à la dépendance de l'état avec le gain. Tout comme le modèle de Rice et Carmichael ils ne si-

mulent pas les interactions dans les bandes. Ce modèle leur a permis d'étudier le seuil grâce à leur trajectoire très granuleuse [17, 18], l'implication d'absorbants saturables dans la stabilité du laser, ainsi que l'aspect multimode de laser à QD dans un couplage fort.

1.1.3 Chaîne de Markov

Les chaînes de Markov sont beaucoup utilisées pour simuler des phénomènes aléatoires surtout en physique, notamment pour les simulations de Monte-Carlo [19]. Notre modèle sera, lui aussi, modélisé par une chaîne de Markov. Une chaîne est décrite par des états, ces états correspondent à des instantanés. Autrement dit, un état regroupe l'ensemble des valeurs des différentes variables à un instant t . À chaque nouveau temps le processus se trouve dans un nouvel état. À chaque changement d'état est associé une probabilité. Le principe fondamental de la chaîne de Markov est que le processus n'a pas de mémoire : si le processus au temps t et au temps $t+n$ sont dans le même état i , alors la probabilité de passer dans l'état j pour ces deux temps sera la même [20, p. 529].

La figure 1.2 représente une chaîne de Markov très simple. Lorsque la chaîne est dans l'état i , le prochain état peut être soit l'état j soit l'état k avec des taux de transition respectivement λ_{ij} et λ_{ik} .

Pour les chaînes de Markov il est plus simple de parler en taux de transition plutôt qu'en probabilité. Contrairement aux probabilités, les taux de transition donnent une information sur la durée nécessaire pour l'événement. Le taux de transition peut être défini comme la fréquence d'apparition de l'événement par unité de temps. Pour un taux de transition de i vers j , noté λ_{ij} il est relié à la probabilité P_{ij} d'apparition de l'événement à la prochaine unité de temps par

$$P_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\sum_k \lambda_{ik}}. \quad (1.1)$$

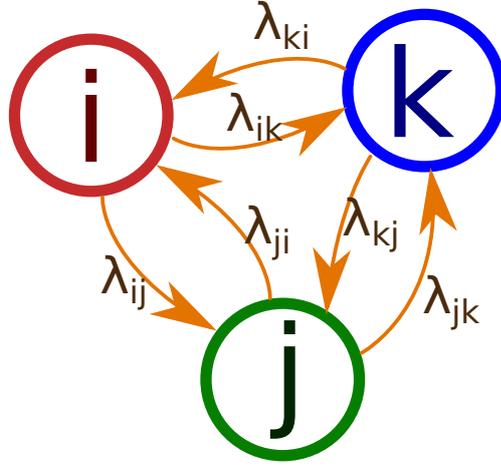


FIGURE 1.2 – Exemple simple d’une chaîne de Markov, elle possède 3 états i, j, k avec les taux de transition respectifs λ .

1.2 Modèle de laser à puits quantique microscopique

1.2.1 Espace d’états

Notre modèle de laser à SC à QW est composé d’un champ électromagnétique quantifié résonnant avec la cavité cf. figure 1.3 [21, 22]. Le milieu de gain est constitué de m photons et d’un nombre fini d’électrons N . Ces électrons se déplacent sur un nombre fini de niveaux d’énergie. Ces niveaux sont répartis en deux bandes : BV et BC séparés par une bande interdite. Chaque bande contient B niveaux d’énergie séparés par une énergie constante ϵ . Les électrons au sein des bandes suivent une distribution de Boltzmann. Ces niveaux sont numérotés par indice croissant avec l’énergie. Cet indice est négatif pour la BV et positif pour la BC : pour le niveau le moins énergétique et pour le niveau le plus énergétique de la BV il vaut respectivement $-B$ et -1 . De la même manière l’indice pour le niveau le moins énergétique et pour le niveau le plus énergétique de la BC est respectivement 1 et B . En rappelant la nature fermionique des électrons, et sans se soucier du spin, chaque niveau peut contenir au maximum un seul électron. Nous noterons l’occupation du niveau k avec o_k et si le niveau est vide \bar{o}_k . Afin d’avoir la

possibilité d'avoir tous les électrons en BV dans l'état initial nous utiliserons en pratique $B = N$. Sur la figure 1.3 les différentes énergies que peut prendre un électron sont réparties sur l'axe vertical. Les indices de ces niveaux sont indiqués en bleu sur la gauche de l'axe. Sur chacune des bandes nous plaçons un niveau laser, par commodité pour les calculs, ce niveau est placé en milieu de bande. Le choix de niveaux équidistants correspond à la prise en compte d'une masse effective égale en BV et BC . L'égalité des masses effectives et la conservation de la quantité de mouvement imposent alors la symétrie des bandes. C'est-à-dire qu'il y a autant de niveaux avant le niveau laser en BC que de niveaux après le niveau laser en BV . Les niveaux lasers en BV et en BC sont indiqués respectivement avec l'indice $-L$ et L . Le bain de photons, à droite de la figure représente l'onde électromagnétique dont l'énergie de chaque photon correspond à la différence d'énergie des niveaux lasers. Nous supposons que la cavité filtrera les autres modes afin qu'il reste seulement les photons résonnants avec les niveaux lasers.

Les différents événements modifiant la distribution d'électrons et/ou le nombre de photons sont marqués par des flèches. Si un électron est présent au niveau laser de la BC et que le niveau laser en BV est vide, une émission cohérente est possible qui dégrade l'électron en BC au niveau laser de la BV en ajoutant un photon au bain. Dans la position inverse, un électron sur le niveau laser de la BV et une place disponible sur le niveau laser en BC permet une absorption. Cette absorption va retirer un photon du réservoir, promouvant l'électron du niveau laser de la BV sur le niveau laser de la BC . L'apport d'énergie se fait par le pompage. Si le premier niveau de la BV est occupé et le dernier niveau de la BC est disponible, le pompage est réalisé par le transfert de cet électron. L'équilibre énergétique est assuré par la sortie des photons. La sortie de photon de la cavité est le signal utile du laser, qui dans notre modèle, se modélise par une diminution d'un photon dans la cavité. Les derniers événements concernent la thermalisation. La thermalisation fait déplacer un électron uniquement sur un niveau adjacent, si la place est vacante. La thermalisation ne permet pas de franchir la bande interdite. L'effet Auger qui permet un déplacement d'une paire d'électrons sans perte d'énergie est négligé car très coûteux en temps de calcul mais n'apportant pas de change-

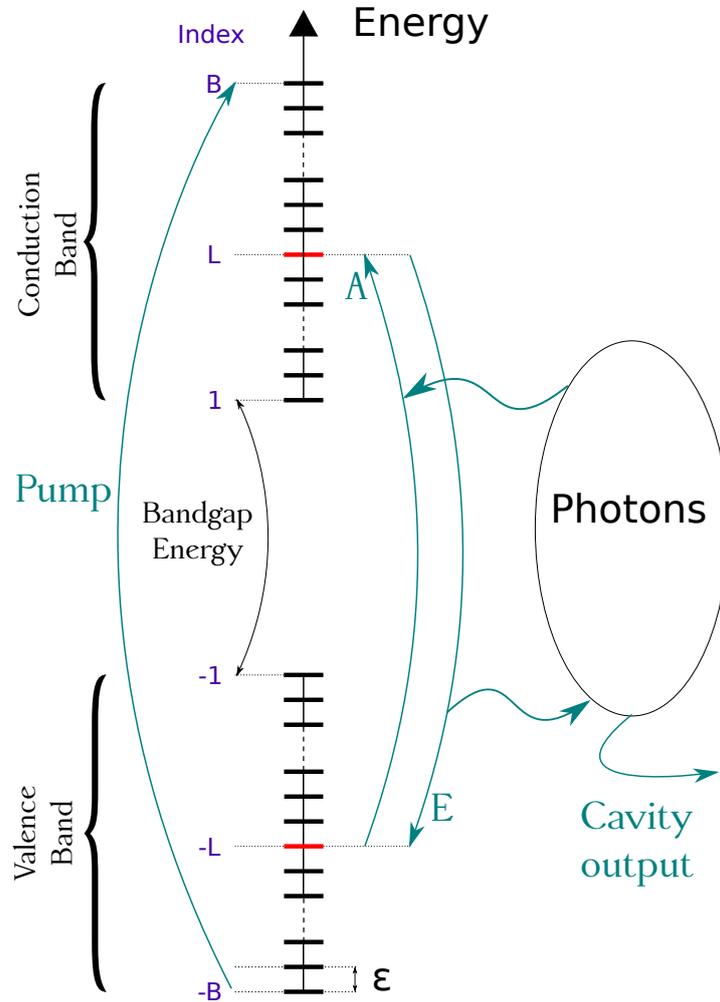


FIGURE 1.3 – Schéma du laser à SC. Les bandes (BV et BC) sont composées de B niveaux d'énergie séparés par une énergie constante ϵ . Le milieu de gain du SC est couplé à la cavité optique. Les photons sont stockés dans la cavité et peuvent s'en échapper avec taux α . Les événements d'émission E et d'absorption A ne se réalisent qu'aux niveaux lasers, placés arbitrairement en milieux de bandes. Le pompage déplace un électron du premier niveau de la BV au dernier niveau de la BC. La thermalisation n'est pas affichée sur la figure. Les indices des niveaux sont affichés en bleu et vont du niveau le moins énergétique au plus énergétique de $-B$ à -1 pour la BV et de 1 à B pour la BC. Les différents niveaux lasers sont labellisés $-L$ et L pour respectivement la BV et BC.

ment significatif [23]. La seconde perte énergétique, thermique est introduite dans la thermalisation grâce à un critère de Metropolis [24]. Ce critère est une réjection de l'événement de gain d'énergie avec une probabilité exponentielle. Cette probabilité dépend du rapport de l'énergie nécessaire au déplacement (la différence d'énergie des deux niveaux) sur l'énergie thermique (le produit de la constante de Boltzmann et de la température).

1.2.2 Taux de transitions

Par commodité nous fixons l'unité de temps sur les transitions photoniques. Ainsi l'unité de temps du modèle (\tilde{t}) est définie par le temps moyen pour lequel un émetteur se désexcite spontanément. L'ensemble des taux de transition sera donc exprimé dans l'inverse de cette unité. Les coefficients d'Einstein nous donnent les taux de transition pour les transitions photoniques. Les émissions stimulée et spontanée sont regroupées et nous considérons que l'intégralité des photons² est émise dans le mode laser. Lorsque la distribution d'électron le permet cf. §1.2.1, le taux de transition de l'émission est de $m + 1$, pour l'absorption, il est de m . Pour obtenir un pompage poissonien nous fixons le taux de transition à J . En fixant le temps que le photon reste dans la cavité à $1/\alpha$ le taux de transition d'une sortie de photon sera alors αm . Pour la thermalisation, le temps qu'un électron reste sur le même niveau est fixé à $1/p$. Le taux de transition associé pour la descente de chaque électron est alors de p . Dans une chaîne de Markov, accepter un événement avec une probabilité revient à multiplier le taux de transition par cette probabilité. Nous posons $q = \exp(\frac{-1}{k_B T})$ avec k_B la constante de Boltzmann et T la température. Le taux de transition associé à la montée de chaque électron est alors de $p q^\epsilon$. Les taux de transitions sont résumés dans la table 1.1.

Dans les chaînes de Markov, afin de pouvoir faire des calculs sur l'ensemble des taux de transition, ces taux sont stockés dans ce qu'on appelle un générateur infinitésimal, \mathbf{Q} [25]. Un générateur infinitésimal est une matrice carrée de côté le nombre d'états de la chaîne. \mathbf{Q}_{ij} représente le taux de transition de l'état i vers l'état j . Par convention les diagonales sont faites pour

2. Je ne parle pas ici des photons possédants une autre énergie que notre mode laser comme dit précédemment ils sont filtrés par la cavité.

normaliser les marginales comme l'impose l'équation 1.2.

$$\mathbf{Q}_{ii} = \sum_{j \neq i} \mathbf{Q}_{ij}. \quad (1.2)$$

Ces matrices sont en général trop grandes pour être totalement stockées dans la mémoire d'un ordinateur.

Nom	Conditions	Changement	Taux de transition adimensionnés
Émission	$\overline{o_{-L}}$ o_L	o_{-L}' $\overline{o_L}'$ $m' = m + 1$	$m + 1$
Absorption	o_{-L} $\overline{o_L}$	$\overline{o_{-L}'}$ o_L' $m' = m - 1$	m
Pompage	o_{-B} $\overline{o_B}$	$\overline{o_{-B}'}$ o_B'	J
Sortie de cavité		$m' = m - 1$	αm
Thermalisation : gain d'énergie	o_k $\overline{o_{k+1}}$ $k \in [-B; -1[\cup]1; B[$	$\overline{o_k}'$ o_{k+1}'	pq^ϵ
Thermalisation : perte d'énergie	o_k $\overline{o_{k-1}}$ $k \in]-B; -1] \cup]1; B]$	$\overline{o_k}'$ o_{k-1}'	p

TABLE 1.1 – Tableau résumant les différentes transitions dans le modèle de laser à SC à puits quantiques. m représente le nombre de photons, o_k et $\overline{o_k}$ respectivement la présence et l'absence d'électrons au niveau k . Les niveaux sont numérotés de $-B$ à -1 pour la BV et de 1 à B pour la BC. Les niveaux laser sont situés aux indices $-L$ et L . À chaque transition est associée la condition pour que celle-ci soit possible, ainsi que son taux de transition exprimé en \tilde{t}^{-1} .

1.3 Implémentation

1.3.1 Algorithme de Gillespie [26]

Notre laser est modélisé par une chaîne de Markov en temps continu. Le temps d'attente du prochain événement n'est pas une constante, c'est une variable aléatoire. Les temps d'attente sont indépendants et donc distribués exponentiellement. Nous utiliserons pour ce temps d'attente la formule 1.3 [26, p. 287]; avec r tiré aléatoirement sur l'intervalle $]0, 1]$, et Λ la somme des différents poids :

$$\tau = \frac{-\ln(r)}{\Lambda}. \quad (1.3)$$

Algorithm 1: Déroulement global de la chaîne de Markov du laser

```

begin
1  | laser initialisation
   |  $t = 0$ 
   | while  $t < T$  do
2  |   random number  $r = U[0, 1]$  for the waiting time
   |    $\Lambda = \sum_{i \geq 1} \lambda_i$ 
   |    $\tau = -\frac{\ln r}{\Lambda}$ 
3  |   random number  $r' = U[0, 1]$  for the next event
   |    $index = \min i : \sum_{j=1}^i \lambda_j \geq r' \Lambda$ 
4  |   update rates and state
   |   perform other statistical computations :
   |       occupancies, histogram, spectral density
   |    $t = t + \tau$ 

```

L'algorithme de Gillespie (cf. algorithme 1) permet de simuler une trajectoire par un algorithme de Monte-Carlo sur les chaînes de Markov. Les algorithmes de Monte-Carlo utilisés régulièrement dans la physique discrétisent le temps régulièrement et testent, à chaque nouveau temps, si l'événement a été réalisé. Contrairement à ces autres algorithmes, celui de Gillespie s'intéresse uniquement qu'aux changements d'états. Cela a l'avantage de ne pas

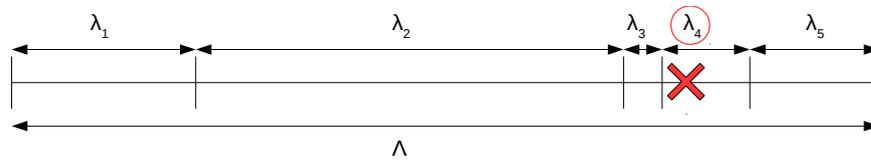


FIGURE 1.4 – Exemple du tirage du prochain événement. Un nombre est tiré aléatoirement sur $[0, \Lambda]$. L'événement sélectionné dans cet exemple est le numéro 4.

passer la plupart du temps de calcul à refuser des événements, ce qui coûte cher en temps de calcul, tout en se passant d'approximation.

- 1 Initialisation : fixe les conditions initiales.
- 2 Tirage du temps auquel arrivera le prochain événement (cf. (1.3))
- 3 Tirage d'un nombre compris entre 0 et la somme de tous les poids Λ , le résultat nous donne le prochain événement (cf. Figure 1.4)
- 4 Application de l'événement qui a été choisi à l'étape 3, puis mise à jour de la liste des poids.

1.3.2 Résolution stationnaire

La simulation n'est pas la seule façon d'obtenir des informations sur la chaîne de Markov. Il est possible d'obtenir la distribution stationnaire de la chaîne en résolvant un système d'équations. Soit $\vec{\Pi}$ la distribution stationnaire, un vecteur horizontal qui pour un indice i contient la probabilité d'être dans l'état i . Si \mathbf{Q} est le générateur infinitésimal cf. §1.2.2 alors :

$$\begin{cases} \vec{\Pi} \mathbf{Q} = 0, \\ \vec{\Pi} \vec{1} = 1. \end{cases} \quad (1.4)$$

Dans la pratique, résoudre cette équation est très lourd, la complexité étant de l'ordre de $O(N^3)$. Il est préférable de transformer le générateur infinitésimal en matrice de probabilité \mathbf{P} . Une matrice de probabilité regroupe l'ensemble des probabilités de changement d'états. Tout comme le générateur infinitésimal c'est une matrice carré, de côté le nombre d'état possible de la chaîne. Ainsi la coordonnée \mathbf{P}_{ij} représente la probabilité par unité de

temps de passer à l'état j , lorsqu'on est dans l'état i . Similairement, la coordonnée \mathbf{P}_{ii} représente la probabilité par unité de temps de rester dans le même état i . Ceci permet de transformer l'équation 1.4 en 1.5.

$$\vec{\Pi} \mathbf{P} = \vec{\Pi}. \quad (1.5)$$

Il est alors possible d'obtenir la distribution stationnaire en faisant converger par récurrence l'équation 1.6 cf. [27].

$$\vec{\Pi}_{n+1} = \vec{\Pi}_n \mathbf{P}. \quad (1.6)$$

Cette convergence est plus efficace si la distribution stationnaire est proche de sa valeur finale. Il peut donc être intéressant de l'initialiser avec une valeur cohérente ou le résultat d'une trajectoire.

Une dernière méthode est la résolution de l'équation de balance. L'équation de balance d'une chaîne décrit les flux de probabilités entrants et sortants d'un ensemble d'états. Sa résolution permet d'obtenir la probabilité stationnaire de la chaîne. Cette solution sera utilisée dans le §2.2.2.

1.3.3 Utilisation du modèle

Ce modèle possède des sorties intéressantes pour comprendre la physique du laser, cette section les présentera. Le nombre d'événements peut être simplement obtenu par un compteur en cours de simulation. Il permet une vérification simple des probabilités attendues. Le nombre d'événements attendus par unité de temps est simplement le taux de transition de cet événement. Les distributions du nombre de photons ou d'électrons sont enregistrées à chaque changement d'état. Le signal intéressant du laser est directement proportionnel au nombre de photons dans la cavité. Afin de caractériser le bruit, il est possible d'utiliser le facteur de Fano [12, 16, 28], le ratio entre la variance et la valeur moyenne du nombre de photons. Plus le facteur de Fano est grand plus le laser est bruité. Un facteur de Fano à 1 correspond à de la lumière poissonnienne. Certains préfèrent le facteur de Mandel [29, 30] pour caractériser le bruit, qui n'est que le facteur de Fano - 1.

L'ensemble des statistiques liées aux photons sont dépendantes de la statistique interne du laser. La statistique des photons externe est proportionnelle à la statistique interne, avec α comme facteur de proportionnalité.

La densité spectrale permet de représenter les différentes composantes spectrales d'un signal. Dans notre cas elle peut être approximée par l'équation 1.7 donnée par [31, eq 8.23].

$$\mathcal{S}_{\Delta Q}(\Omega) = \frac{\Omega}{2\pi} \left\langle \left| \sum_k \exp(-i\Omega t_k) \right|^2 \right\rangle. \quad (1.7)$$

Cette densité spectrale est généralement utilisée normée il faudra donc diviser par le nombre moyen de photons sortants. L'approximation de la densité spectrale par (1.7) est cependant mauvaise sur une seule trajectoire de taille raisonnable et présente des difficultés de convergence liées à la portée infinie de chaque événement d'émission pris en compte comme un Dirac.

La dernière sortie intéressante du laser est la fonction de corrélation du second ordre des photons, $g^{(2)}(t)$. Le $g^{(2)}(t)$ est utilisé notamment pour la définition du seuil [32], il est calculé par la formule 1.8 [33]. Si le régime stationnaire est atteint le dénominateur devient simplement $\langle m \rangle^2$.

$$g^{(2)}(\tau) = \frac{\langle m(t)m(t+\tau) \rangle}{\langle m(t) \rangle \langle m(t+\tau) \rangle}. \quad (1.8)$$

Les formules (1.7) et (1.8) ne sont valides que si le système est stationnaire. De façon plus générale l'ensemble des sorties doit être mesuré à l'état stationnaire afin de ne pas créer de biais : les mesures dépendent de l'état initial des évaluations or, si il est stationnaire, cet état est temporellement indépendant. La recherche de l'état stationnaire n'est pas simple. En pratique l'état stationnaire est vérifié a posteriori en calculant les valeurs moyennes avant et après la simulation pour voir si elles sont similaires. Comme l'état de départ de la simulation doit être stationnaire, une trajectoire sera réalisée avant chaque simulation, appelée recherche de l'état stationnaire. L'état final de la recherche de l'état stationnaire servira de précurseur pour la simulation.

Afin d'avoir des résultats précis, il est nécessaire d'avoir la durée de trajectoire la plus grande possible. L'ergodicité de la chaîne nous permet de calculer

la moyenne sur plusieurs trajectoires plutôt que sur une chaîne plus grande. L'ergodicité est garantie du fait que sa violation impliquerait un nombre de photons tendant vers l'infini, contredisant un système à énergie finie. Fabrice Philippe a produit une démonstration mathématique dont l'exposé sort du cadre de cette thèse. Cela devient très intéressant sur des machines multi-cœurs. Pour une trajectoire gourmande en temps, il est possible de partager l'état stationnaire entre plusieurs trajectoires. Il est cependant nécessaire dans ces cas-là, de ne pas partir du même état, afin de ne pas biaiser les résultats.

Le modèle a déjà été employé par le passé pour sa prise en compte du bruit. Il devient alors intéressant sur l'étude des lasers bimodes [22, 34]. Ces communications étudient la compétition modale et montrent que pour les cas des puits quantiques la solution est bistable. Récemment il a été utilisé afin de visualiser le seuil dans les nanolasers [35]. L'aspect discret des variables permet d'avoir une discontinuité abrupte entre une cavité vide et possédant un photon. Le seuil est alors présenté comme une succession entre un régime éteint et un régime laser. Enfin il a été utilisé dans [21] pour comprendre la lumière qui devient sous-poissonienne à fort pompage. Cette publication nous montre aussi que le coefficient d'échange thermique p doit être le plus grand possible pour que les résultats de la simulation collent avec la théorie.

1.4 Problématique

Comme dit précédemment les résultats du modèle [21] montrent qu'afin de retrouver un comportement similaire à un laser réel le facteur p doit être supérieur à 10000. Cette importance du taux de transition fait que, en pratique la plupart des événements ne sont que des événements de thermalisation. La chaîne peut être alors vue comme composée de deux sous-chaînes. La première, rapide, change d'état très souvent, et, n'est composée que d'événements de thermalisation. La seconde, lente, change d'état beaucoup plus rarement et possède tous les autres événements. D'un point de vue pratique, seule la chaîne lente est intéressante pour l'étude d'un laser. Une trajectoire peut alors durer plus d'une heure, avec quasiment l'intégralité du temps de

calcul alloué à la thermalisation. La constatation de la différence de vitesse des sous-chaînes est le point de départ de la thèse.

Si nous faisons l’hypothèse que ces deux sous-chaînes sont indépendantes il est alors possible de traiter ces deux sous-chaînes séparément.

Ceci sera mis en œuvre dans le chapitre 2. La section 2.1 est consacrée à une résolution numérique de la chaîne rapide. En faisant l’hypothèse que les bandes sont canoniques, il est alors possible de connaître la probabilité d’avoir un électron sur les niveaux lasers en sachant le nombre d’électrons dans la bande. Le modèle suivant une description des bandes canonique sera appelé modèle canonique; le modèle simulant entièrement la thermalisation sera appelé microscopique. La section suivante, 2.2, est dédiée à comprendre les différences entre ce modèle canonique et le modèle microscopique. La section 2.3.1 présentera une solution permettant de retrouver le comportement du modèle microscopique dans le modèle canonique. Cette solution sera utilisée aussi afin de simuler le pompage électrique tout en restant Markovien. Le fait de résoudre analytiquement la thermalisation possède un net avantage : plus besoin de la simuler. Cela procure un gain important de performance : pour $p \sim 10000$ ce gain de temps est de l’ordre de $\times 1000$ et il croît avec la valeur de p .

Le gain de performance permet d’ajouter des nouvelles fonctionnalités comme la prise en compte de la proportion de photons émis spontanément dans le mode β . Ce paramètre permet de se rapprocher d’un laser réel comme traité dans le chapitre 3. La prise en compte du facteur β diffère dans la littérature. Pour notre cas nous avons choisi une prise en compte de l’émission hors mode qui se rapproche le plus d’une vision particulière. Nous comparerons notre modèle avec la littérature. Nous verrons dans le §3.2.2 que le modèle est très pratique pour simuler un laser de classe A, il permet cependant de simuler des comportements de classe B. Le §3.3 présentera des travaux publiés avec l’analyse du seuil [35], une analyse aussi bien statique §3.3.1 que dynamique §3.3.2. Le modèle a pu montrer son utilité dans cette analyse dynamique car elle permet d’observer des trajectoires qui permettent de réellement observer les mécanismes du passage au seuil. Le seuil est alors

montré comme une alternance de régime cohérent et de coupure du laser. Le §3.3.3 soulève la question des laser dit "sans seuil" et montre que le modèle peut apporter de nouvelles observables de ces lasers.

Le dernier chapitre §4 s'attardera sur les lasers bimodes, des lasers dont la cavité entretient deux modes. Le développement d'un laser bimode très peu bruité est l'objectif d'IDYLIC. Afin de réduire le bruit dans un tel laser, une solution est d'augmenter le couplage entre les modes. Augmenter le couplage entre les modes réduit la stabilité du système. La prise en compte native du bruit dans notre modèle montre son utilité ici. La stabilité du système sera observée grâce au facteur de couplage de Lamb. Le §4.1.3 montrera comment ce facteur peut être mesuré expérimentalement. Le §4.2 imitera l'expérimental afin de retrouver le facteur de Lamb dans les lasers à QD. Ce travail a fait l'objet d'une publication [36]. Nous y montrerons qu'il est possible de trouver une solution analytique simple si nous posons une symétrie cf. §4.2.2. Dans le cas non symétrique il est cependant possible d'obtenir une solution numérique cf. §4.2.3. Le facteur de Lamb ne varie pas beaucoup avec cette symétrie et sa valeur montre que le régime bimode dans les lasers à QD est possible. Le §4.3.1 montre le calcul du facteur de couplage de Lamb dans les lasers à QW, toujours en imitant la procédure expérimentale. Nous montrerons que les régimes de tels lasers sont visuellement bistable, nous observerons que la stabilité ne dépend pas de la différence de fréquences des modes, tout comme l'expérimentale [37]. Cependant cette même référence montre la possibilité de régime bimode.

Afin de comprendre cette stabilité nous développerons un nouveau modèle permettant en compte l'aspect spatial du laser, cf. §4.4. Pour cela les bandes de plusieurs émetteurs seront couplées électriquement entre plus proches voisins et globalement en partageant un bain commun de photons.

Chapitre 2

Monomode

Le point de départ de la thèse est la constatation que la chaîne de Markov est en réalité composée de deux sous-chaînes. La première sous-chaîne représente les événements de thermalisation. La seconde l'ensemble de tous les autres événements. Force est de constater que la majorité du temps de calcul est utilisé pour résoudre la première chaîne, le facteur de proportionnalité associé à la thermalisation rendant tous les autres taux de transition négligeables. Il est possible de s'intéresser à ces deux-sous chaînes séparément si celles-ci sont indépendantes [38, 39].

Nous posons que la thermalisation est à l'équilibre avant chaque autre événement.

Cette hypothèse nous permet d'avoir l'indépendance entre les deux sous-chaînes. Alors, les seules informations nécessaires pour savoir si les transitions photoniques sont possibles sont la présence d'électrons aux niveaux laser cf. table 1.1. De la même manière la possibilité de pompage est déterminée avec la présence d'électrons aux bords des bandes, les niveaux de pompe. Ainsi seule la présence d'électrons aux différents niveaux laser et de pompe est nécessaire pour résoudre la seconde sous-chaîne. Le §2.1 sera consacré à résoudre analytiquement cette sous-chaîne, en calculant ces présences d'électrons aux différents niveaux. Entre les événements photoniques et de pompe, seule l'énergie et non le nombre de particules varie : avant un événement non thermique, les particules suivent une distribution canonique au sein des bandes. Il est possible alors de calculer la probabilité canonique de présence

d'un électron, un calcul similaire pourra être trouvé dans [40]. Le §2.2 étudiera les implications du fait de résoudre analytiquement la thermalisation. Le §2.3 présentera les phases dans une chaîne de Markov, un outil qui permet non seulement de contourner l'hypothèse principale établie mais en plus de pouvoir modéliser un pompage électrique sans devenir non-Markovien.

2.1 Calcul de l'occupation canonique des niveaux

On considère un système d'électrons, en nombre fini, sans spin, répartis sur un ensemble de B niveaux d'énergie $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_B$. Une configuration du système est une répartition possible de ses électrons sur les B niveaux (il y aura 0 ou 1 électron par niveau d'après nos hypothèses). L'énergie d'une configuration est la somme des énergies des niveaux occupés.

Lorsque le système est isolé, les configurations de même énergie sont équiprobables. Ce n'est plus vrai lorsque le système peut échanger de l'énergie (mais pas des particules) avec un milieu ambiant à température T , ce qu'on appelle l'ensemble canonique en physique statistique. D'après Boltzmann la probabilité canonique qu'une configuration soit d'énergie U est proportionnelle à q^U , où q est défini par $\exp(\frac{-1}{k_B T})$, avec k_B la constante de Boltzmann.

2.1.1 Définitions

Définition 1. Soit $\nu_k(q)$ la probabilité canonique de trouver un électron au niveau k .

Définition 2. Soit Ω l'ensemble des configurations possibles.

Définition 3. Soit Ω_U l'ensemble des configurations possibles d'énergie U .

Définition 4. La fonction de partition est une constante de normalisation. Elle est représenté par la somme suivante, où U_s est l'énergie d'un état s :

$$Z(q) = \sum_{s \in \Omega} q^{U_s}. \quad (2.1)$$

Définition 5. Soit $W_k(U)$ le nombre de configurations dans Ω avec une énergie U et possédant un électron au niveau k .

Définition 6. Soit $W_{\bar{k}}(U)$ le nombre de configurations dans Ω avec une énergie U et ne possédant pas d'électron au niveau k .

Définition 7. Soit $W(U)$ le nombre de configurations dans Ω avec une énergie U .

2.1.2 Cas général

Introduction

La probabilité canonique qu'une configuration soit d'énergie U est $q^U/Z(q)$. La probabilité de trouver un électron au niveau k est simplement la somme des probabilités sur toutes les configurations possédant un électron au niveau k cf. (2.2). Il est intéressant de voir que comme la présence de l'électron ne peut que prendre comme valeur 0 ou 1, cette probabilité est aussi la valeur moyenne d'électron au niveau k .

$$\nu_k(q) = \sum_{\substack{s \in \Omega \\ o_k}} \frac{q^{U_s}}{Z(q)} \quad (2.2)$$

La somme sur l'ensemble des configurations peut être changée par une somme sur l'ensemble des énergies possibles, en se rappelant qu'une énergie peut faire référence à plusieurs configurations. Pour cela les sommes des équations (2.2) et (2.1) sont faites sur les énergies ce qui donne les équations respectivement (2.3) et (2.4). Il faut rajouter sur chaque énergie la dégénérescence de celle-ci. La dégénérescence est le nombre de configurations de même énergie

$$\nu_k(q) = \sum_{U \geq 0} \frac{q^U}{Z(q)} W_k(U), \quad (2.3)$$

$$Z(q) = \sum_{U \geq 0} q^U W(U). \quad (2.4)$$

Compte des ensembles

Le but ici est de compter $W_k(U)$ qui apparaît dans (2.3). Comme dorénavant cela a de l'importance, on rajoutera la dépendance en n à nos variables, où n est le nombre d'électrons dans la bande.

Partons d'une configuration quelconque d'énergie U et dont le niveau k possède un électron. En enlevant l'électron du niveau k , l'état contient donc un électron en moins et l'énergie est diminuée de l'énergie du niveau k . La configuration est donc d'énergie $U - \varepsilon_k$ avec $n - 1$ électrons et aucun électron au niveau k . Comme la présence de l'électron est imposé dans la configuration de départ, enlever cet électron ne change pas le nombre de configurations possibles : cette transformation est bijective, donc

$$W_k(n, U) = W_{\bar{k}}(n - 1, U - \varepsilon_k). \quad (2.5)$$

En réécrivant le nombre de configurations ne possédant pas d'électron au niveau k comme l'ensemble des configurations auquel on enlève celles qui ont l'électron au niveau k , cela nous donne (2.6)

$$W_k(n, U) = W(n - 1, U - \varepsilon_k) - W_k(n - 1, U - \varepsilon_k). \quad (2.6)$$

Déduction de la probabilité de présence canonique générale

NB : Le calcul qui va suivre va être réalisé plusieurs fois je ne le décris qu'une seule fois et mettrai un lien ici.

En remplaçant (2.6) dans (2.3) on obtient

$$\nu_k(n, q) = \sum_{U \geq 0} W(n - 1, U - \varepsilon_k) \frac{q^U}{Z(n, q)} - \sum_{U \geq 0} W_k(n - 1, U - \varepsilon_k) \frac{q^U}{Z(n, q)}. \quad (2.7)$$

On pose $V = U - \varepsilon_k$

$$\nu_k(n, q) = \sum_{V \geq -\varepsilon_k} W(n - 1, V) \frac{q^{V+\varepsilon_k}}{Z(n, q)} - \sum_{V \geq -\varepsilon_k} W_k(n - 1, V) \frac{q^{V+\varepsilon_k}}{Z(n, q)}. \quad (2.8)$$

Les énergies étant forcément positives, tant que $V < 0$, $W(n-1, V) = 0$

$$\nu_k(n, q) = \frac{q^{\varepsilon_k}}{Z(n, q)} \left[\sum_{V \geq 0} W(n-1, V) q^V - \sum_{V \geq 0} W_k(n-1, V) q^V \right]. \quad (2.9)$$

(2.3) et (2.4) sont insérées dans la précédente ce qui donne :

$$\nu_k(n, q) = \frac{q^{\varepsilon_k}}{Z(n, q)} [Z(n-1, q) - \nu_k(n-1, q)Z(n-1, q)]. \quad (2.10)$$

En factorisant la précédente équation nous obtenons la formule générale de la probabilité de présence d'électrons au niveau k , $\nu_k(n, q)$ pour un système canonique

$$\nu_k(n, q) = \frac{Z(n-1, q)q^{\varepsilon_k}}{Z(n, q)} [1 - \nu_k(n-1, q)]. \quad (2.11)$$

Il est donc possible d'obtenir cette occupation du niveau k dès lors que la fonction de partition du système est connue.

2.1.3 Application à notre modèle de laser

Fonction de partition

Nous allons considérer à présent un système de B niveaux d'énergie équidistants séparés par une énergie constante. Nous allons numéroter nos niveaux en partant de 1 donc $k \in [1, B]$. Nous supposons que l'énergie qui sépare deux niveaux, soit de 1. L'énergie d'un électron peut donc prendre comme valeurs $U \in [1, B]$.

Comme dorénavant B a une influence dans nos calculs nous allons l'intégrer à nos variables. Tout comme pour l'équation (2.2) nous pouvons interpréter $W(B, n, U)$ comme la somme du nombre de configurations avec un électron au niveau B et le nombre de configurations sans électrons au niveau B (2.12)

$$W(B, n, U) = W_B(B, n, U) + W_{\bar{B}}(B, n, U). \quad (2.12)$$

Lorsque la présence de l'électron est connue sur un niveau au bord de la bande il est intéressant de considérer la bande privée de ce niveau. En effet, comme cette présence est déterminée, le nombre de configurations ne bouge alors pas lorsque le niveau est ignoré. Cela nous donne (2.13)

$$W_B(B, n, U) = W(B - 1, n - 1, U - B). \quad (2.13)$$

En faisant la même chose pour le second terme, (2.12) devient (2.14)

$$W(B, n, U) = W(B - 1, n - 1, U - B) + W(B - 1, n, U). \quad (2.14)$$

En multipliant partout par q^U et en sommant sur toutes les énergies, puis en utilisant (2.4), (2.14) devient (2.15) :

$$Z(B, n, q) = \sum_{U \geq 0} [W(B - 1, n - 1, U - B)q^U] + Z(B - 1, n, q). \quad (2.15)$$

Tout comme (2.8) nous posons $U' = U - B$, (2.15) devient (2.16)

$$Z(B, n, q) = q^B Z(B - 1, n - 1, q) + Z(B - 1, n, q). \quad (2.16)$$

En faisant le même raisonnement que pour (2.12) mais pour le premier niveau on obtient (2.17)

$$W(B, n, U) = W_1(B, n, U) + W_{\bar{1}}(B, n, U). \quad (2.17)$$

Avec le même raisonnement que précédemment : enlever le premier niveau revient à considérer le même système décalé vers le haut avec une perte d'énergie n .

$$W(B, n, U) = W(B - 1, n - 1, U - n) + W(B - 1, n, U - n). \quad (2.18)$$

De la même manière que (2.14) nous posons $U' = U - n$ et multiplions

partout par q^U , et enfin nous sommions sur toutes les énergies afin d'obtenir (2.19)

$$Z(B, n, q) = q^n [Z(B - 1, n - 1, q) + Z(B - 1, n, q)]. \quad (2.19)$$

Avec (2.19) - (2.16) on obtient

$$0 = q^n [Z(B - 1, n - 1, q) + Z(B - 1, n, q)] - q^B Z(B - 1, n - 1, q) - Z(B - 1, n, q). \quad (2.20)$$

En simplifiant le schéma de récurrence se forme avec (2.21)

$$Z(B - 1, n, q) = \frac{q^n - q^B}{1 - q^n} Z(B - 1, n - 1, q). \quad (2.21)$$

Afin d'avoir la formule générale il est nécessaire de connaître les limites.

- Lorsqu'il y a 0 particule, il existe une seule façon de les organiser (tous les niveaux vides)
- Pour connaître le nombre d'itérations nous pouvons les compter. Pour passer de n à $n - 1$ il y a un facteur, pour passer de n à $n - n$ (soit parcourir tous les n) il y a donc n facteurs.

La fonction de partition pour notre bande canonique est donc :

$$Z(B - 1, n, q) = \prod_{i=1}^n \frac{q^i - q^B}{1 - q^i}. \quad (2.22)$$

Probabilité de présence d'un électron au niveau k

Il est possible de réécrire (2.21) afin d'obtenir (2.23)

$$\frac{Z(B, n - 1, q)}{Z(B, n, q)} = \frac{1 - q^n}{q^n - q^{B+1}}. \quad (2.23)$$

Cette forme peut être réinjectée dans (2.11) afin d'obtenir (2.24) qui permet de connaître la probabilité de présence d'électron au niveau laser en

fonction de n ¹

$$\nu_k(B, n+1, q) = \frac{(1-q^{n+1})q^k}{q^{n+1}-q^{B+1}} [1 - \nu_k(B, n, q)]. \quad (2.24)$$

2.1.4 Probabilité de présence d'un électron au niveau de pompage

L'équation (2.18) peut aussi s'écrire de la manière suivante

$$W(B, n, U) = W_1(B, n, U) + W(B-1, n, U-n). \quad (2.25)$$

Comme pour §2.1.2 nous multiplions chaque terme par q^U , puis faisons la somme sur toutes les énergies :

$$\sum_{U \geq 0} W(B, n, U)q^U = \sum_{U \geq 0} [W_1(B, n, U)q^U] + \sum_{U \geq 0} [W(B-1, n, U-n)q^U]. \quad (2.26)$$

Tout comme §2.1.2 il est alors possible de poser $V = U - n$ et grâce à (2.3) et (2.4) nous obtenons la forme suivante :

$$Z(B, n, q) = \nu_1(B, n, q)Z(B, n, q) + Z(B-1, n, q)q^n, \quad (2.27)$$

$$\nu_1(B, n, q) = 1 - \frac{Z(B-1, n, q)q^n}{Z(B, n, q)}. \quad (2.28)$$

En utilisant l'équation (2.22) nous obtenons :

$$\nu_1(B, n, q) = 1 - q^n \frac{\prod_{i=1}^n \frac{q^i - q^B}{1 - q^i}}{\prod_{i=1}^n \frac{q^i - q^{B+1}}{1 - q^i}}, \quad (2.29)$$

1. En pratique, si les niveaux d'énergie sont numérotés de 0 à $B-1$, comme dans le programme, il sera nécessaire d'adapter la formule. Ce changement revient à diminuer de n l'énergie d'une config de n particules. Il faut donc diviser par q^n la fonction de partition Z , (2.22). Comme il y a n facteurs dans le produit, il faut diviser chaque facteur par q . Cela revient donc à multiplier (2.24) par un facteur q .

en réduisant

$$\nu_1(B, n, q) = 1 - q^n \prod_{i=1}^n \frac{q^i - q^B}{q^i - q^{B+1}}. \quad (2.30)$$

En écrivant les premiers termes du produit, il est possible de voir un schéma se former

$$\nu_1(B, n, q) = 1 - q^n \frac{q^1 - q^B}{q^1 - q^{B+1}} \frac{q^2 - q^B}{q^2 - q^{B+1}} \frac{q^3 - q^B}{q^3 - q^{B+1}} \cdots \frac{q^n - q^B}{q^n - q^{B+1}}. \quad (2.31)$$

Nous remarquons qu'un numérateur peut se simplifier avec le dénominateur suivant donnant alors un terme q^{-1} . Nous pouvons donc obtenir en réduisant :

$$\nu_1(B, n, q) = 1 - \frac{q^n}{q^{n-1}} \frac{q^n - q^B}{q - q^{B+1}}, \quad (2.32)$$

$$\nu_1(B, n, q) = 1 + \frac{-q^n + q^B}{1 - q^B}. \quad (2.33)$$

Et finalement en mettant au même dénominateur

$$\nu_1(B, n, q) = \frac{1 - q^n}{1 - q^B}. \quad (2.34)$$

En utilisant la double symétrie des bandes (2.37) démontrée à la section suivante, nous trouvons :

$$\nu_B(B, n, q) = 1 - \nu_1(B, B - n, q). \quad (2.35)$$

Et finalement,

$$\nu_B(B, n, q) = q^{B-n} \frac{1 - q^n}{1 - q^B}. \quad (2.36)$$

2.1.5 Double symétrie des bandes

La double symétrie des bandes est donnée par (2.37),

$$\nu_k(B, n, q) + \nu_{B+1-k}(B, B - n, q) = 1. \quad (2.37)$$

Nous allons prouver cette formule par récurrence.

Initialisation

Pour $n = 0$, lorsqu'il n'y a aucun électron dans la bande, la probabilité d'avoir un électron à n'importe quel niveau est nulle

$$\nu_k(B, 0, q) = 0. \quad (2.38)$$

Lorsque la bande est pleine, la probabilité d'avoir un électron à n'importe quel niveau est de 1,

$$\nu_{B+1-k}(B, B, q) = 1. \quad (2.39)$$

Nous avons donc bien la condition d'initialisation.

$$\nu_k(B, 0, q) + \nu_{B+1-k}(B, B - 0, q) = 1. \quad (2.40)$$

Récurrence

Supposons que (2.37) est vraie, nous allons montrer que

$$\nu_k(B, n + 1, q) + \nu_{B+1-k}(B, B - n - 1, q) = 1. \quad (2.41)$$

Pour cela on utilise (2.24) dans un sens puis dans l'autre afin d'obtenir

$$\nu_k(B, n + 1, q) = \frac{(1 - q^{n+1})q^k}{q^{n+1} - q^{B+1}} [1 - \nu_k(B, n, q)], \quad (2.42)$$

$$1 - \nu_{B+1-k}(B, B - n - 1, q) = \frac{q^{B-n} - q^{B+1}}{(1 - q^{B-n})q^{B+1-k}} \nu_{B+1-k}(B, B - n, q). \quad (2.43)$$

En multipliant en haut et en bas par q^{k+n-B} on voit que

$$\frac{q^{B-n} - q^{B+1}}{(1 - q^{B-n})q^{B+1-k}} = \frac{(1 - q^{n+1})q^k}{q^{n+1} - q^{B+1}}. \quad (2.44)$$

Par soustraction des (2.43) et (2.42) on obtient donc

$$1 - \nu_{B+1-k}(B, B - n - 1, q) - \nu_k(B, n + 1, q) \quad (2.45)$$

$$= \frac{(1 - q^{n+1})q^k}{q^{n+1} - q^{B+1}} [\nu_{B+1-k}(B, B - n, q) - 1 + \nu_k(B, n, q)], \quad (2.46)$$

qui vaut bien 0 par hypothèse de récurrence (2.37).

2.1.6 Description du modèle canonique

Connaissant le nombre d'électrons en BC n , (2.24) nous permet d'obtenir la probabilité d'avoir un électron sur le niveau laser. Celle-ci peut être calculée avant la simulation. Il est donc désormais seulement nécessaire de connaître ce nombre et non plus l'ensemble de la distribution des électrons. La symétrie des bandes nous permet de poser $\nu_k(n) = 1 - \nu_{-k}(n)$. Ainsi notre état était auparavant composé du nombre de photons m et d'un simplexe de dimension $2B$ représentant la répartition des électrons. Un simplexe est un vecteur de valeurs 0 ou 1 dont la norme est constante. Dorénavant le modèle canonique est beaucoup plus simple puisque l'état est simplement décrit par le couple (n, m) cf. figure 2.1.

2.2 Laser statique

Cette section étudiera les différences entre le modèle microscopique qui simule l'intégralité des transferts d'électrons et le modèle canonique dont la thermalisation est résolue analytiquement cf. §2.1.6. Le modèle canonique diffère du modèle microscopique avec l'hypothèse qu'entre chaque événement photonique ou de pompage, la thermalisation a atteint son équilibre. Les modèles seront comparés entre eux afin de voir les conséquences de l'hypothèse, la confrontation avec la physique sera faite dans les chapitres suivants.

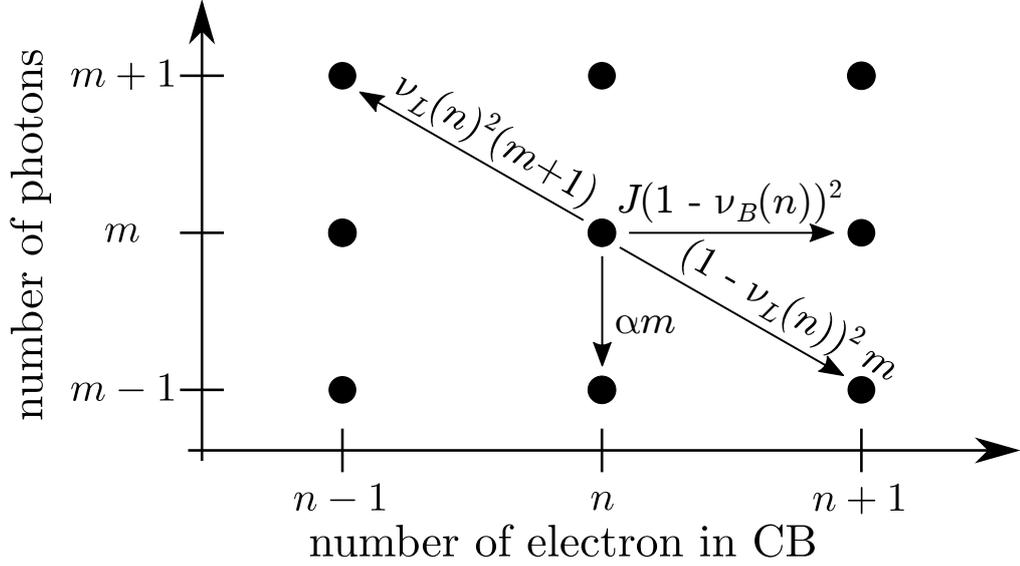


FIGURE 2.1 – Représentation de la chaîne de Markov canonique pour l'état (n, m) . Les flèches sont les taux de transition avec leurs valeurs respectives. ν_L et ν_B sont les probabilités de présence d'électron sachant qu'il y a n électrons en **BC** pour respectivement le niveau laser et le niveau le plus énergétique. J est la fréquence des événements de pompe et $\frac{1}{\alpha}$ représente le temps de vie des photons dans la cavité.

2.2.1 Comparaison des modèles microscopique et canonique

La comparaison se fera en utilisant les paramètres de la table 2.1, les différents paramètres et l'unité de temps du modèle, \tilde{t} , sont décrits dans le §1.2.

Cette comparaison est donnée à la table 2.2. Elle nous présente des résultats qui sont très proches. On voit que les résultats du modèle canonique ne dépendent pas de la méthode d'acquisition : simulation ou résolution stationnaire. La résolution stationnaire est traitée au §1.3.2. Seules les statistiques de photons sont affichées ici car elles sont représentatives des différences entre les deux modèles. Les valeurs moyennes du nombre de photons entre la description microscopique et canonique, quoique proches, restent suffisamment différentes pour sortir des intervalles de confiance. Pour comprendre cette différence il faut s'attarder sur le pompage.

Paramètre	Valeur	unité/remarques
B	800	
δ	1	meV
α	0.6	
p	50000	
q	0.962	@ $T = 300$ K
J	35	
temps de simulation	5000	\tilde{t}
temps de recherche de l'état stationnaire	5010	\tilde{t}

TABLE 2.1 – Paramètres pour la comparaison des modèles microscopique et canonique. La valeur de p n'est valable que pour le modèle microscopique.

Modèle	$\langle m \rangle$	var (m)
Microscopique	56.23 \pm 0.14	110.3 \pm 2.5
Canonique	58.32 \pm 0.10	115.6 \pm 2.2
Canonique par résolution stationnaire	58.333 \pm 0.001	115.04 \pm 0.01

TABLE 2.2 – Comparaison des différents modèles canonique et microscopique en utilisant les paramètres de la table 2.1. La statistique du nombre de photons m est étudiée. Les intervalles de confiance sont calculés en prenant 95% d'une distribution normale sur 12 trajectoires sauf pour la résolution stationnaire.

La figure 2.2 représente le nombre d'événements de pompe par unité de temps en fonction du facteur p pour les simulations microscopiques. Le point à $p = 50000$ correspond à un nombre d'événements de pompe par unité de temps de 33.7. La fréquence attendue est de $35 \tilde{t}^{-1}$ comme le taux de transition associé. Le modèle canonique, représenté par les pointillés retrouve bien la valeur attendue. Le graphique montre que si p augmente la valeur se rapproche des $35 \tilde{t}^{-1}$. Comme l'échelle est logarithmique cette convergence est très difficile à obtenir. Les trajectoires ont dû être simulées avec un temps inversement proportionnel à l'augmentation de p afin de ne pas exploser le

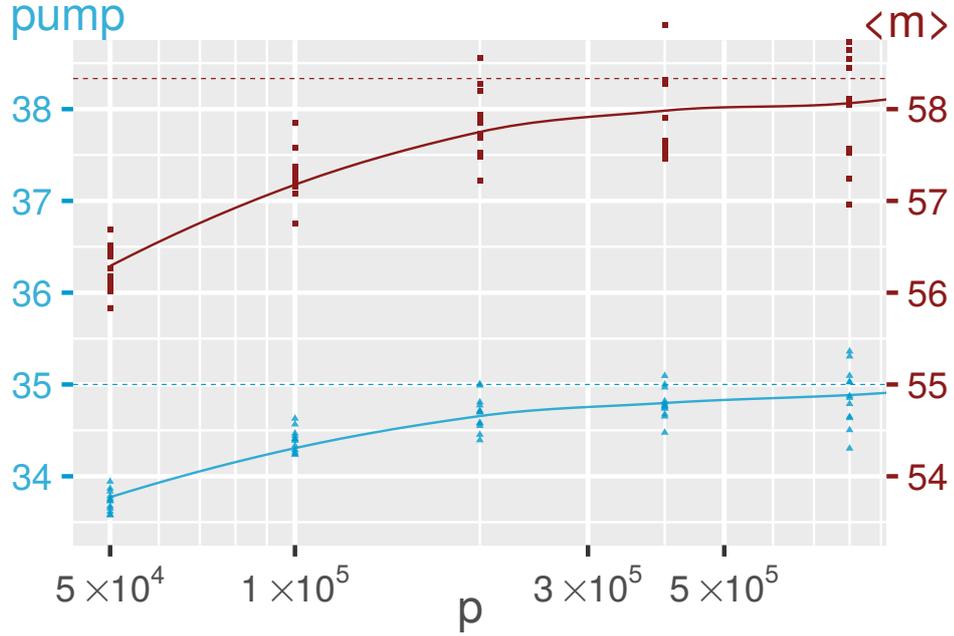


FIGURE 2.2 – Courbe représentant pour le modèle microscopique, le nombre d'événements de pompage par unité de temps (triangles bleus) et le nombre moyen de photon, $\langle m \rangle$ (carrés rouges) en fonction du facteur de thermalisation, p . Chaque point représente une trajectoire et les lignes correspondent à la moyenne des 12 trajectoires. Les pointillés représentent les valeurs obtenues dans le modèle canonique. Pour ne pas exploser le temps de calcul lorsque le facteur p est doublé le temps de simulation sera divisé par deux. Les premiers points correspondent à la table 2.1.

temps de calcul.

Le taux de transition de $35 \tilde{t}^{-1}$ n'est valable que si le premier niveau de la **BV** est toujours occupé et que le dernier niveau de la **BC** est toujours libre. Or après un événement de pompe, l'évacuation de l'électron en **BC** et du trou en **BV** prend du temps, au minimum deux événements de thermalisation. La figure 2.3 présente ce dépeuplement des niveaux de pompe, la probabilité de présence d'électron est affichée pour chaque niveau d'énergie de la **BC** et **BV**. Les cercles rouges dans la figure indiquent que les premiers niveaux de la **BV** ne sont pas toujours occupés et que les derniers niveaux de la **BC** ne sont pas toujours vides. Une telle configuration rend le pompage impossible. Le fait de ne pas pouvoir pomper durant cet intervalle réduit le nombre d'événements de pompe par rapport à celui attendu. Le modèle canonique prend en compte

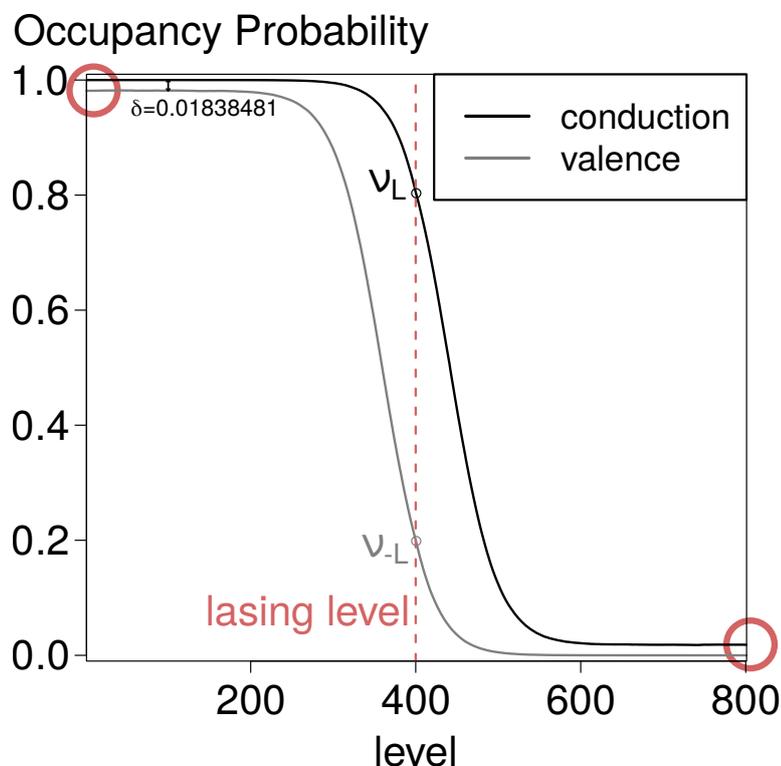


FIGURE 2.3 – Probabilité de présence d’un électron pour chacun des niveaux d’énergie de la BV (gris clair) et de la BC (noir). Les niveaux laser sont indiqués par les pointillés rouges. Ces probabilités correspondent au cas de la table 2.1 du modèle microscopique calculé sur une durée de 125. Les probabilités de présence aux niveaux de pompe sont indiqués avec des cercles rouges, la différence de probabilité aux niveaux de pompes est affichée en haut à gauche.

la distribution de la bande avant un événement canonique, cependant pour qu’il y ait une impossibilité de pomper il faut que la bande soit quasiment remplie. Une telle situation est extrêmement rare. L’impossibilité de pouvoir pomper est gênante dans le modèle microscopique. Dans un laser réel il n’y a pas qu’une seule paire de niveaux qui pourrait permettre d’être pompé. Cette impossibilité de pomper est donc un artefact non voulu du modèle microscopique. Il peut être diminué en augmentant le facteur p mais au prix d’un temps de calcul exponentiellement plus élevé.

2.2.2 Équations de balance

Les équations de balance d'une chaîne sont utiles pour obtenir ses valeurs stationnaires, dans notre cas nous les utiliserons pour comprendre les différences sur le pompage entre les deux modèles.

Dans cette section nous considérons l'ensemble des états (n, m) de la chaîne canonique qui ont un nombre total de particules, $n + m$, inférieur ou égal à une constante c cf. figure 2.4. La balance globale pour cet ensemble est donnée par (2.47) où $\pi(n, m)$ représente la probabilité d'être dans l'état possédant n électrons en BC et m photons. Les seules transitions sortantes proviennent d'événements de pompage, pour tous les états (n, m) avec $n + m = c$, et les seules transitions entrantes viennent d'événements de sorties de photons de la cavité, pour tous les états $(n, m + 1)$ avec $n + m = c$. Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{\min(B,c)} \pi(n, c-n) J(1 - \nu_B(n)) = \sum_{n=0}^{\min(B,c)} \pi(n, c-n+1) \alpha(c-n+1). \quad (2.47)$$

La transition de pompage lorsque la bande est pleine est impossible, alors qu'elle apparaît dans la somme. Cependant elle a un taux de transition nul car $\nu_B(B) = 1$, donc n'intervient pas.

Il est alors possible de sommer membre à membre les équations précédentes pour toutes les valeurs de c . Chaque état apparaît dans l'équation finale une seule fois, sauf dans le membre de droite où seuls les états avec $m \geq 1$ sont présents. On obtient donc

$$\sum_{n=0}^B \sum_{m=0}^{\infty} \pi(n, m) J(1 - \nu_B(n)) = \sum_{n=0}^B \sum_{m=1}^{\infty} \pi(n, m) \alpha m. \quad (2.48)$$

La somme de toutes les probabilités doit être 1 :

$$\sum_{n=0}^B \sum_{m=0}^{\infty} \pi(n, m) = 1. \quad (2.49)$$

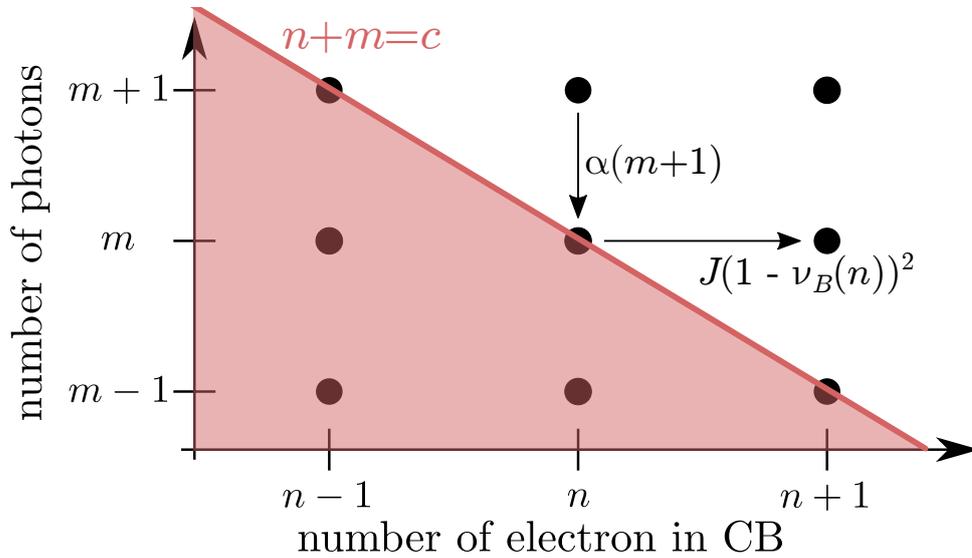


FIGURE 2.4 – Schéma du calcul de l'équation de balance qui ont un nombre total de particules, c'est-à-dire $n + m$, inférieur ou égal à une constante c . Ce schéma reprend la figure 2.1 mais en considérant le sous-ensemble d'états dont le nombre de particules c n'augmente pas. Afin d'obtenir la balance de la chaîne il faudra prendre en compte les transitions sortantes de ce sous-ensemble d'état : les événements de pompage, et les transitions rentrantes : les sorties de photon de la cavité.

En utilisant (2.49) et en notant $\pi(n)$ la probabilité d'être dans un état possédant n électrons en BC, (2.48) devient (2.50) :

$$J - J \sum_{n=0}^B \pi(n) \nu_B(n) = \alpha \langle m \rangle. \quad (2.50)$$

Le second terme à gauche de (2.50) fait intervenir l'occupation moyenne du niveau B . Donc cette équation peut être vue comme $J_{\text{effectif}} = \alpha \langle m \rangle$. Cette relation montre que le nombre moyen de photons dans la cavité est proportionnel à la fréquence effective des événements de pompage. La figure 2.2 montre que lorsque cette fréquence de pompe effective converge vers les 35, quand p est grand, $\langle m \rangle$ converge lui aussi vers la valeur du modèle canonique. Il est donc possible d'obtenir la même valeur moyenne du nombre de photons entre le modèle microscopique et canonique si p est choisi suffisamment grand. Cette déduction semble logique en reprenant l'hypothèse initiale

du modèle canonique : la thermalisation est à l'équilibre avant chaque autre événement. Pour que la thermalisation soit à l'équilibre il faut que le temps séparant deux transitions thermiques soit négligeable par rapport au temps séparant les transitions photoniques et de pompage. Dans le cas contraire, le refus de pompage est un artefact non désiré du modèle microscopique, le modèle canonique montre son avantage par rapport au modèle microscopique sur les valeurs statiques.

2.3 Dynamique du laser

Dans une chaîne de Markov, le caractère sans mémoire de la chaîne fait que les temps d'attente des événements suivent chacun une distribution exponentielle. Avant de pouvoir comparer la dynamique des deux modèles, nous ferons une petite pause pour étudier comment, sans sortir du cadre Markovien, rendre compte d'effets dynamiques fins qui semblent nécessiter de la mémoire, et nous verrons les applications possibles dans notre cas.

2.3.1 Phases Markoviennes

La référence [41] présente une méthode pour avoir une distribution du temps du prochain événement non exponentielle tout en restant Markovien. Celle-ci insère des phases au sens Markovien, à ne pas confondre avec la phase du laser, ce sont des états éphémères dont l'effet global peut être vu comme une distribution d'Erlang. La distribution d'Erlang est la distribution d'une somme de k exponentielles indépendantes de moyennes $1/\lambda$. Sachant qu'une variable aléatoire suivant une distribution exponentielle de paramètre λ aura une valeur moyenne de $1/\lambda$ et une variance de $1/\lambda^2$. La somme de k variables aléatoires suivant une distribution exponentielle de paramètre $k\lambda$ aura donc une valeur moyenne de $1/\lambda$ et une variance de $1/(\lambda^2 k)$ cf. figure 2.5. Il est alors possible de modifier une distribution exponentielle (quand $k = 1$) en une nouvelle distribution de même valeur moyenne, plus centrée sur cette valeur moyenne dont la variance peut se contrôler par le nombre d'exponentielles [42].

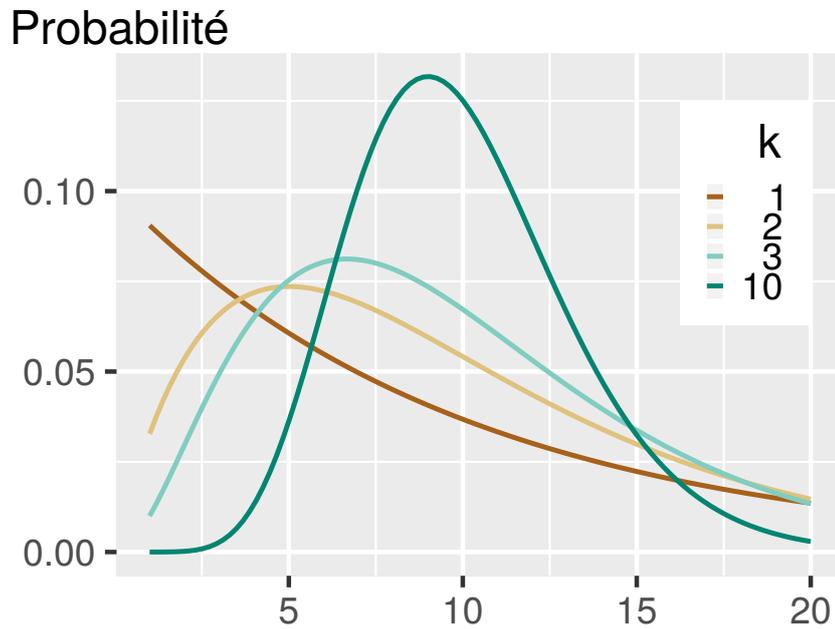


FIGURE 2.5 – Illustration des distributions d’Erlang : chaque courbe correspond à la distribution d’une somme de k exponentielles indépendantes de moyennes individuelles $k/10$, ceci afin que la valeur moyenne de chaque courbe soit de 10. Plus le nombre de phases k augmente, moins le processus devient poissonien et plus le temps d’attente devient déterministe. Dans l’application avec les phases Markoviennes, l’abscisse représente le temps entre deux événements.

La distribution d’Erlang peut être utilisée sur un taux de transition afin de modifier la distribution de son temps d’attente. La figure 2.6 présente la technique. Partant d’une transition i vers j il suffit de rajouter des états tampons, i_1 et i_2 pour le cas traité par la figure avec 3 phases. Il suffit que la somme de tous les taux de transition qui sépare i de j soit égale au taux de transition initial λ_{ij} afin que le temps moyen d’attente entre i et j reste inchangé. La variance de la distribution peut être modifiée en augmentant le nombre de phases. Autrement dit il est possible d’avoir un temps d’attente non plus régi par une loi exponentielle, mais prédictible. Il est donc possible d’avoir des événements régulièrement espacés dans le temps sans sortir du cadre Markovien. Un exemple est donné par le pompage électrique.

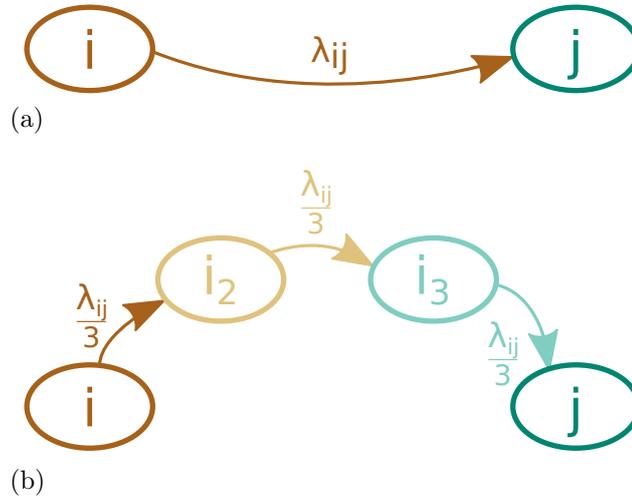


FIGURE 2.6 – Schéma de décomposition d’une transition par 3 phases. Le (a) représente la transition d’un état i à un état j avec son taux λ_{ij} . Le (b) représente l’application des phases de Markov afin de modifier la distribution du temps d’attente de cet événement. Des états temporaires i_2 et i_3 sont ajoutés afin que le temps d’attente ne soit plus dépendant d’une exponentielle, mais d’une somme de trois exponentielles. La somme des taux de transition correspond au taux de transition du cas (a) afin d’avoir le même temps d’attente moyen entre les deux cas.

2.3.2 Pompage électrique

Les lasers considérés dans la figure 2.1 ont un pompage poissonien, le processus de pompe est par exemple un pompage optique avec un laser idéal. Il en découle que la variance du temps entre deux pompage est égal à sa valeur moyenne. Les événements de pompage sont alors indépendants. Il existe un autre type de laser : les lasers à pompage électrique [31]. Avec ces lasers il est possible, avec des schémas expérimentaux particuliers, d’obtenir des instants de pompage réguliers plus ou moins espacés [43].

En accord avec les prédictions de [44], ceci régularise la statistique de photons. Sur un laser à pompage électrique la densité spectrale de sortie des photons à basse fréquence devient alors sous-Poissonienne ($\mathcal{S}_{\frac{\Delta Q}{Q}} < 1$). Une possibilité de simuler le pompage électrique idéal et parfaitement régulier a été proposée dans [21] : il suffit d’imposer le pompage à instant régulier $1/J$. Cette méthode fonctionne mais elle a l’inconvénient de sortir du cadre

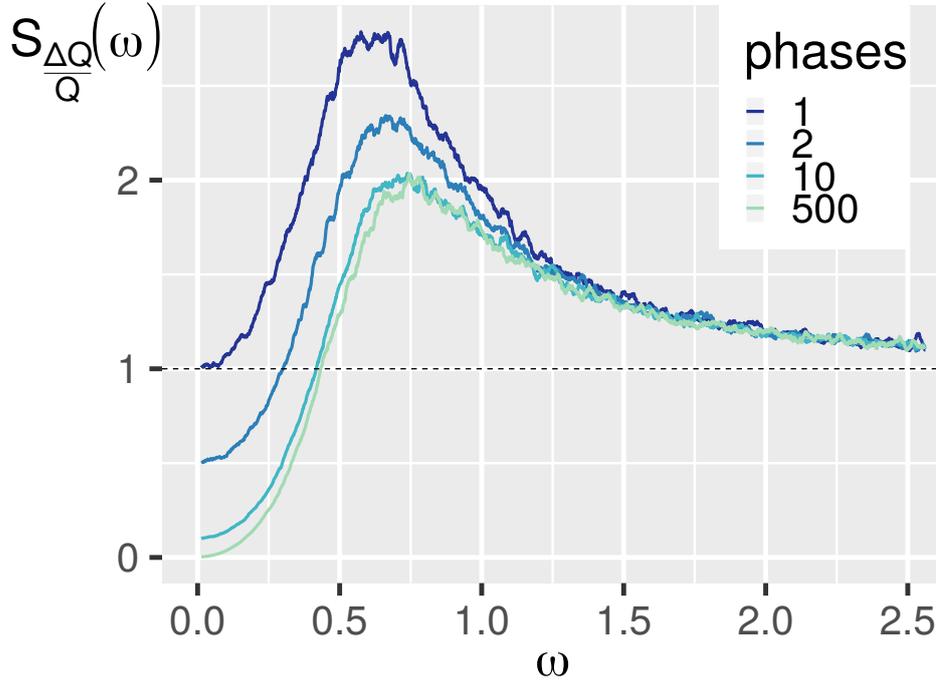


FIGURE 2.7 – Densités spectrales relevées sur le modèle canonique avec les paramètres de la table 2.1, la fréquence en abscisse correspond à $2\pi/(\text{unité de temps du modèle})$. La courbe avec une phase est une lumière avec un pompage poissonien, $\mathcal{S}_{\frac{\Delta Q}{Q}}(0) = 1$ il est possible en augmentant le nombre de phase à faire plonger $\mathcal{S}_{\frac{\Delta Q}{Q}}(0)$ vers 0 qui indique alors un pompage parfaitement régulier.

Markovien, il y a un effet de mémoire qui s’installe au sein de la chaîne. Une autre solution est possible, ajouter des états tampons au sein de la transition de pompage, comme vu à la section précédente. Par exemple pour le cas de 2 phases dans le modèle canonique, la transition de l’état (n, m) à l’état $(n + 1, m)$ avec un taux J devient une transition de l’état $(n, m, 0)$ vers l’état $(n, m, 1)$ puis une transition vers $(n + 1, m, 0)$ chacune avec un taux de transition $J/2$. L’espace d’état est alors plus grand, mais comme lors d’une trajectoire le générateur infinitésimal n’est pas calculé dans son intégralité cela n’est pas gênant.

La figure 2.7 montre la densité spectrale pour différents nombres de phases de pompes. Le cas à une phase correspond au pompage poissonien. Lorsque le nombre de phase est élevé la densité spectrale des basses fréquences tend

vers 0, qui nous montre qu'un nombre de phases élevé tend vers les mêmes résultats qu'un pompage électrique parfaitement régularisé. Il est intéressant de voir que la densité spectrale en 0 est l'inverse du nombre de phases.

2.3.3 Trou spectral

Grâce à nos compétences sur la dynamique des chaînes de Markov, nous allons reprendre la comparaison du §2.1.6 en s'attachant à la dynamique. Le temps nécessaire pour avoir la thermalisation stationnaire peut créer un dépeuplement local des niveaux d'énergie s'il est intense. Cet effet affecte les niveaux de pompe comme vu au §2.2.1 mais il affecte aussi les niveaux laser, cet aspect sera développé dans cette section.

La figure 2.8 montre l'histogramme des temps entre deux événements d'émission. La courbe jaune correspondant au modèle canonique montre une distribution exponentielle des temps entre deux événements, rien de surprenant, c'est la distribution attendue pour un processus Poissonien. La distribution pour le modèle microscopique est légèrement différente : c'est une distribution exponentielle dont le pic à 0 est aplani. La probabilité d'avoir deux émissions successives dans un temps court est plus faible qu'une distribution exponentielle. Ceci se comprend par le dépeuplement local des niveaux lasers. Après une émission, le niveau laser en BC est vide et le niveau laser en BV est rempli. Cette configuration ne permet pas une nouvelle émission laser mais favorise fortement une absorption. Afin de pouvoir émettre à nouveau il faut au minimum deux événements de thermalisation. Chaque durée d'un événement de thermalisation étant régi lui-même par une distribution exponentielle, la durée entre deux événements d'émission se caractérise par une somme de distributions exponentielles. Cet effet se retrouve dans les lasers sous le nom de trou spectral [10, p. 1172] qui retrouve un dépeuplement des porteurs aux alentours du niveau laser. Contrairement à l'impossibilité de pomper vue au §2.2.1, le trou spectral est un phénomène physique qui est intéressant à observer et qui ne se retrouve plus dans le modèle canonique. Il est donc intéressant de pouvoir garder ce phénomène dans le modèle canonique ; une solution est possible grâce aux phases de Markov cf. §2.3.1.

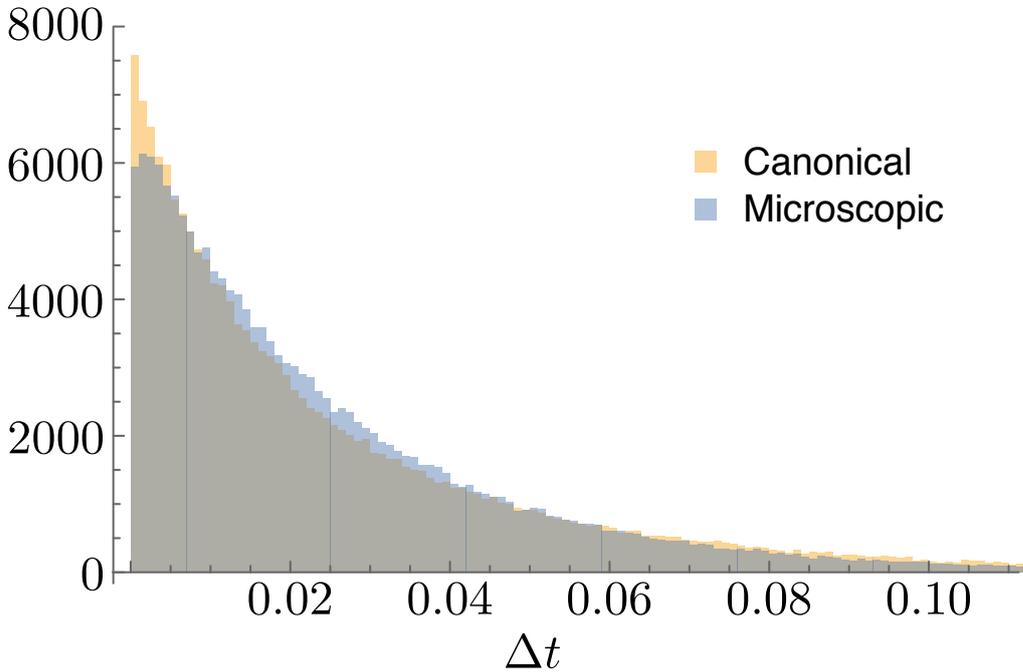


FIGURE 2.8 – Histogramme des intervalles de temps en \tilde{t} entre deux émissions successives calculé pour des trajectoires du modèle microscopique (bleu) et du modèle canonique (jaune). Des émissions successives correspondent à des émissions sans autre événement photoélectrique entre elles, elles peuvent cependant avoir d'autres événements entre elles comme de la thermalisation. Les paramètres proviennent de la table 2.1.

Les phases permettent de modéliser ce trou spectral, pour cela il faut reproduire le comportement du modèle microscopique au niveau des transitions photoniques. Après une émission, un électron se trouve sur le niveau laser en **BC** et un trou sur le niveau laser en **BV**. Cette configuration empêche une nouvelle émission, et réciproquement pour l'absorption. Afin de pouvoir à nouveau avoir des transitions photoniques normales il faut au minimum deux événements de thermalisation : une en **BC** et une autre en **BV**. Ce sont ces événements de thermalisation qu'il faut reproduire avec des phases. Pour cela le nombre de phases représentera le nombre d'événements de thermalisation afin de déplacer la paire électron-trou créée en dehors des niveaux lasers. Le poids associé aux phases représente le facteur de thermalisation p que le modèle microscopique présentait.

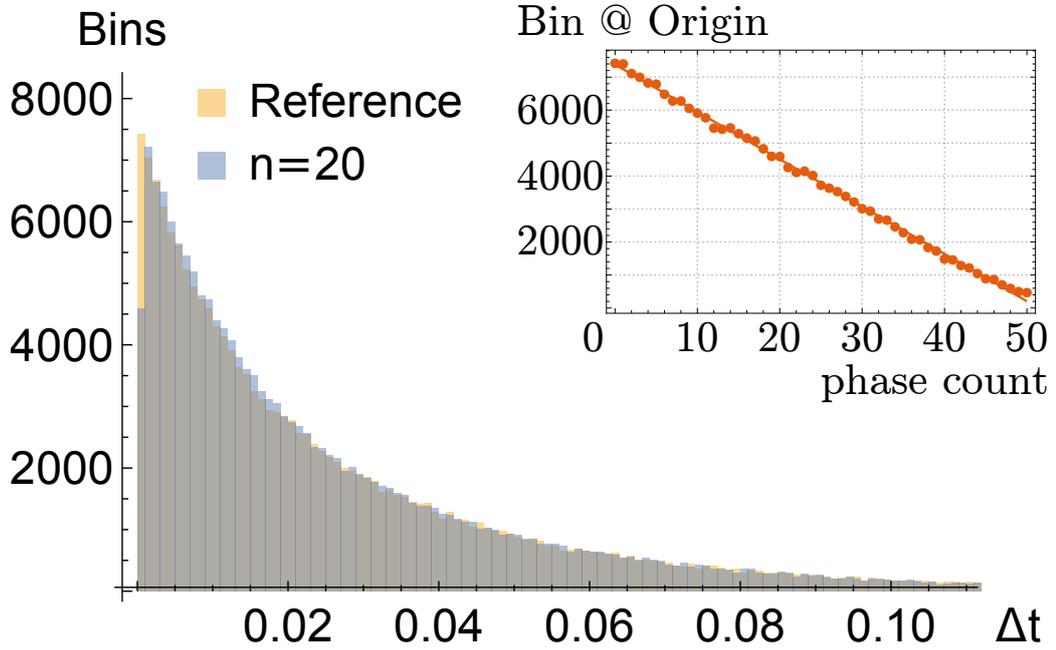


FIGURE 2.9 – Histogramme des intervalles de temps en \tilde{t} entre deux émissions successives calculé pour des trajectoires du modèle canonique sans phases (jaune) et avec 20 phases de poids 50000 (bleu). Des émissions successives correspondent à des émissions sans autre événement photoélectrique entre elles, elles peuvent cependant avoir d'autres événements entre elles comme le pompage. Les paramètres sont similaires à la table 2.1. Le cas de référence est similaire à l'histogramme jaune de la figure 2.8, par convention ce cas correspond à 0 phase. En haut à gauche droite valeur du premier groupe de l'histogramme en fonction du nombre de phases.

La figure 2.9 présente l'implication des phases photoniques sur la distribution des temps entre deux émissions successives. La figure compare le cas canonique similaire à la figure 2.8 avec la même chaîne possédant 20 phases entre les transitions photoniques. Celle-ci montre que deux émissions successives très courtes ont de plus faibles chances d'occurrences que pour le cas sans phases. La figure montre cependant que cet effet intervient principalement sur le premier groupe de l'histogramme, contrairement au cas microscopique où cette différence se propage sur des temps plus longs. La valeur du premier groupe de l'histogramme décroît avec le nombre de phases de façon linéaire comme le montre la seconde courbe de la figure 2.9.

2.4 Conclusion

La cohérence physique du modèle impose que le facteur de thermalisation p du modèle microscopique soit très grand par rapport aux autres taux de transition. Cette différence de plusieurs ordres de grandeur fait que lors d'une trajectoire presque la totalité des événements concernent la thermalisation. La chaîne peut être alors considérée comme deux sous-chaînes qu'il est possible de résoudre séparément en faisant l'hypothèse qu'entre chaque événement, photonique ou de pompage, la thermalisation a atteint son équilibre stationnaire. Cette hypothèse nous permet de considérer que les bandes sont canoniques. Il est alors possible de calculer la probabilité de présence d'un électron aux niveaux lasers et de pompe sachant seulement le nombre de niveaux, le facteur q qui représente l'énergie thermique nécessaire pour qu'un électron passe sur le niveau d'énergie supérieur et le nombre d'électrons en BC n . Comme les deux premiers paramètres sont fixes la chaîne se simplifie grandement. Nous avons étudié les différences entre le modèle microscopique et canonique. Ces modèles nous donnent des résultats presque identiques. La seule différence est sur le dépeuplement local des porteurs qui n'est pas reproduit dans le modèle canonique. Ce dépeuplement est gênant pour les niveaux de pompe mais pour les niveaux laser c'est un phénomène qui est observable expérimentalement : le trou spectral. Nous avons pu voir une méthode pour reproduire ce trou spectral dans le modèle canonique grâce aux distributions d'Erlang. Cette solution nous a permis aussi d'introduire le pompage régulier sans que le modèle sorte du cadre Markovien. Il est donc possible de simuler le même comportement que le modèle microscopique avec le modèle canonique. Cependant, une différence majeure différencie les modèles pour le cas étudié cf. table 2.1 : le temps de calcul d'une trajectoire microscopique dure une heure contre une seconde pour une trajectoire canonique. Ce gain de performances permet d'envisager la prise en compte d'autres paramètres du laser qui auraient fait exploser le temps de calcul du modèle microscopique ; cela sera fait dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Laser Mesoscopique

3.1 Problématique

Le gain de performance, obtenu grâce à l'hypothèse canonique dans le chapitre précédent, permet d'envisager de simuler des systèmes plus compliqués. Il est donc temps de s'éloigner du nanolaser modélisé jusqu'ici afin de modéliser un laser mésoscopique. La principale caractéristique des lasers nanoscopiques est que le volume de cavité est très petit et ne contient que quelques ventres du mode résonnant de la cavité dans les trois dimensions de l'espace. Ce volume à la limite de diffraction limite considérablement l'émission spontanée qui est presque exclusivement contrainte dans le mode principal. Dans le cas des lasers mésoscopiques, les cavités résonnantes sont plus importantes en dimension, mais restent proches de la limite de diffraction. Elles permettent cependant à quelques modes résonnants d'exister soit en émission stimulée soit en émission spontanée avec pour conséquence une diminution de l'émission spontanée dans le mode laser. Les lasers classiques quant à eux ont un très grand nombre de modes possibles et le volume de la cavité est très grand par rapport à la limite de diffraction. Tous ces lasers présentent une caractéristique commune qui est le passage d'une lumière de statistique thermique à faible pompage à une lumière cohérente à fort pompage. Je retiendrais cette transition comme la caractéristique du seuil des lasers [45]. Outre cette définition, que j'estime générale du seuil laser, ce chapitre illustrera les différents marqueurs de ce seuil tels qu'ils sont discutés

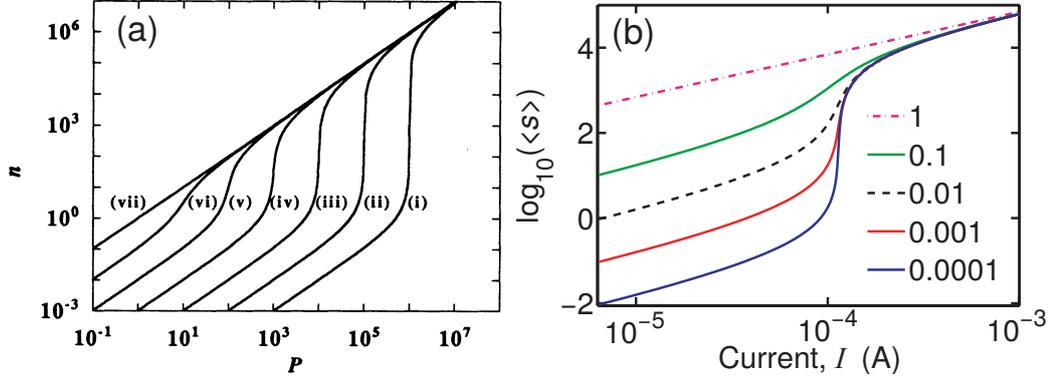


FIGURE 3.1 – Courbe de la puissance lumineuse émise en fonction de la puissance électrique pour différents modèles qui diffèrent par la prise en compte de leur facteur β . Les résultats proviennent chacune de résolutions stationnaires de systèmes d'équations à taux de population.

(a) Repris de Rice et Carmichael [16], où n représente le nombre de photons en fonction du pompage P . Les courbes (i) à (vii) représentent les différentes valeurs du paramètre β : (i) $\beta = 10^{-6}$, (ii) $\beta = 10^{-5}$, (iii) $\beta = 10^{-4}$, (vi) $\beta = 10^{-3}$, (v) $\beta = 10^{-2}$, (vi) $\beta = 10^{-1}$, (vii) $\beta = 1$.

(b) Repris de Roy-Choudhury et Levi [18], où $\langle s \rangle$ représente le nombre de photons moyen.

dans la littérature [46].

En première approximation, en particulier pour les "lasers classiques" de grandes tailles, le seuil peut être illustré par une abrupte discontinuité dans la courbe caractéristique de puissance du laser, cf. figure 3.1. Les courbes montrent la puissance lumineuse sortant du laser en fonction du courant de pompage avec des échelles logarithmiques. La proportion de photons participant à l'amplification du champ électromagnétique est nommée β . Contrairement aux autres lasers, les lasers nanoscopiques avec $\beta \simeq 1$ ne présentent pas visuellement de changement abrupt de caractéristique lors du passage au seuil, ils sont appelés dans la littérature "lasers sans seuil" [47-49]. Il y a deux manières différentes et homonymes de prendre en compte ce β , qui sont présentées sur la figure 3.1. La première méthode de Rice et Carmichael [16] est d'avoir un facteur de probabilité β sur l'ensemble des transitions photoniques. La seconde méthode employée par Roy-Choudhury et Levi [17, 18] est de considérer que chaque photon émis spontanément a une probabilité β

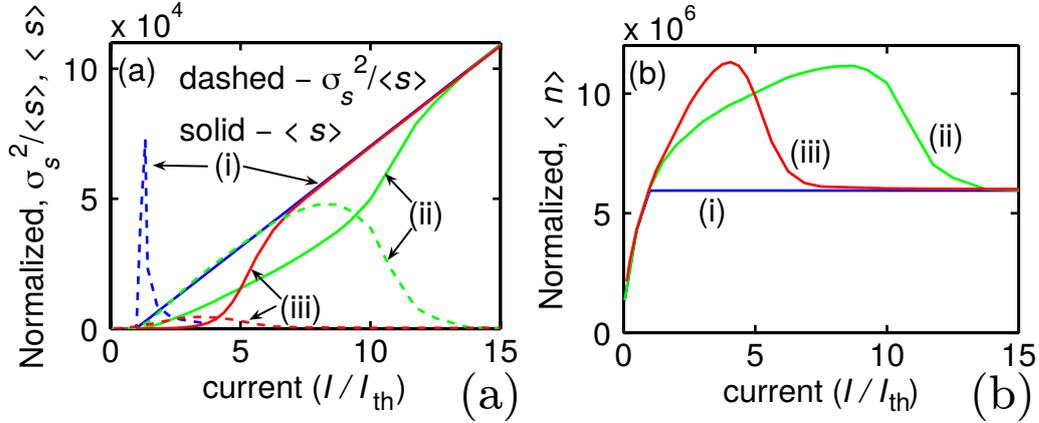


FIGURE 3.2 – Différents marqueurs du seuil relevé pour Roy-Choudhury *et al.* [17]. (a) représente le nombre moyen de photons (ligne continue), le facteur de Fano (tirets) et (b) représente le nombre moyen d'électrons, tous en fonction du courant normalisé au seuil pour une cavité grande (i), intermédiaire (ii) et petite (iii).

d'être émis dans le mode laser. La principale différence entre ces deux prises en compte du seuil est que pour celle de Roy-Choudhury et Levi le seuil n'est pas décalé avec le pompage. Cette vision se rapproche plus d'une vision particulière, c'est pourquoi nous choisirons cette méthode de prise en compte du seuil.

Le modèle de Roy-Choudhury et Levi montre un comportement atypique. Dans un tel laser, il y a un retard au seuil par rapport aux équations à taux de populations qui entraîne une surcharge des électrons excités aux alentours du seuil cf. figure 3.2. Ceci s'observe par la présence d'une "bosse" au-dessus de la saturation du nombre de porteurs, aux alentours du seuil. La trajectoire temporelle [18] présente alors une alternance entre deux régimes du laser : dans l'un l'émission spontanée domine, et dans l'autre c'est l'émission stimulée. Cette alternance de régimes sera illustré dans le §3.3.2. Ils justifient alors le seuil comme une zone où l'émission spontanée domine, mais où le pompage n'est pas assez puissant pour permettre le maintien du régime stimulé.

Chow *et al.* [50] dans un autre cas montrent que le seuil dans les lasers à fort β marque la distinction entre une lumière thermique générée de façon chaotique et une lumière cohérente. Il peut être déterminé grâce au temps

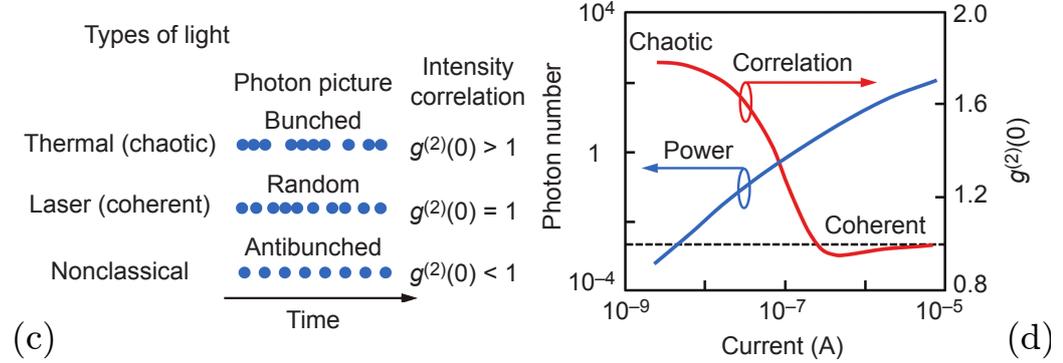


FIGURE 3.3 – Illustration du passage de la lumière achronique à cohérente par Chow *et al.* [50]. (a) représente une illustration des différents types de lumière en connaissant le $g^{(2)}(0)$, (b) présente la combinaison des observables entre le nombre de photons et le $g^{(2)}(0)$ afin de pouvoir faire la distinction entre la lumière cohérente et chaotique.

de cohérence. La fonction de corrélation du second ordre est un très bon marqueur pour ce seuil. Le $g^{(2)}(0)$ tend vers 1 lorsque la lumière est cohérente cf. figure 3.3.

La même équipe [51] a montré plus tard qu'au niveau du seuil, il est difficile de distinguer le laser d'une LED pour laquelle la génération de photons se fait essentiellement par émission spontanée, sans amplification par la cavité : seule l'émission thermique est donc principalement présente. Ils observent que, avant le seuil, quand le nombre de photons dans la cavité est faible un effet de super-radiance apparaît. C'est un effet d'émission de photons collectifs qui a un bruit plus important que la lumière thermique. Le $g^{(2)}(0)$ tend vers 2 pour de la lumière thermique ; il monte bien au-delà en cas de super-radiance.

Le simulateur stochastique de Puccioni *et al.* [14] permet d'observer les fluctuations des populations apparaissant aux alentours du seuil. Sa séparation des populations de photons émis spontanément ou par émission stimulée permet d'accéder à une nouvelle information concernant le temps de cohérence du laser, le seuil étant alors défini comme la limite quand ce temps tend vers l'infini. La même équipe [52] a pu montrer expérimentalement le changement de forme de la distribution des photons, qui passe de gaussienne à asymétrique. Ils ont pu observer l'apparition d'oscillations dans le $g^{(2)}(t)$ [15], un phénomène observé expérimentalement dans [53].

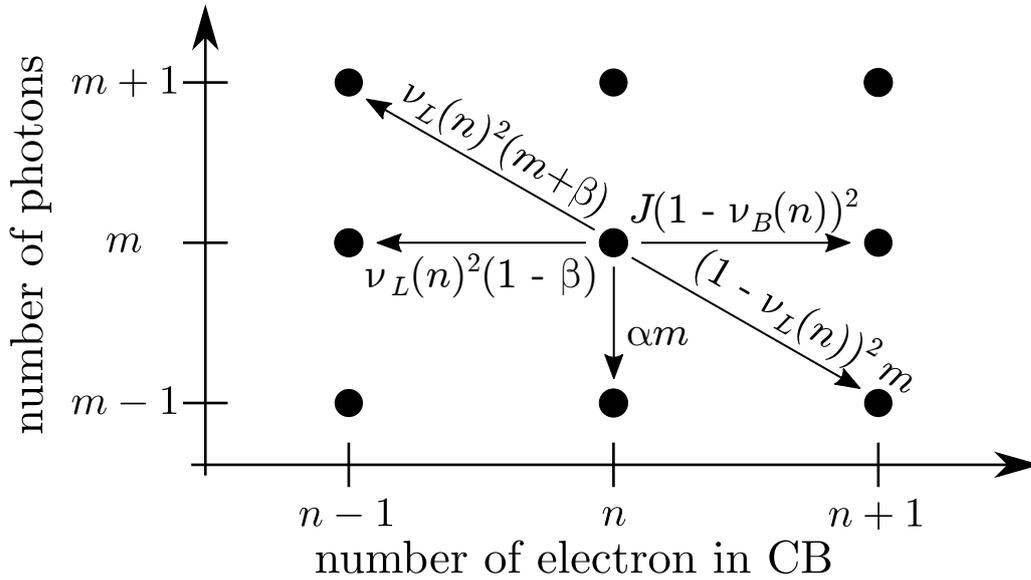


FIGURE 3.4 – Représentation de la chaîne de Markov canonique pour l'état (n, m) avec la prise en compte des photons émis hors du mode. Les flèches sont les taux de transition avec leurs valeurs respectives. L'ensemble des taux correspond au taux de la figure 2.1. Seule l'émission est modifiée en ajoutant une probabilité β d'émettre hors du mode, ce qui crée une nouvelle transition de (n, m) vers $(n - 1, m)$.

La prise en compte du β ne change pas beaucoup notre chaîne, ainsi la figure 2.1 devient figure 3.4 en ajoutant une transition qui correspond à l'émission hors du mode.

3.2 Comparaison avec la littérature

3.2.1 Comparaison avec les équations à taux de populations

Les équations à taux de populations représentent un modèle largement admis dans la communauté laser, elles constituent un point de comparaison essentiel.

Soit le jeu d'équations à taux de populations au-dessus du seuil :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{I}{eV} - \frac{n}{\tau_n} - Anm \quad (3.1)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{m}{\tau_m} + \frac{\beta n}{\tau_n} + Anm, \quad (3.2)$$

avec I l'intensité du courant de pompage, e la charge élémentaire, V le volume de la cavité, τ_n temps de vie des porteurs, τ_m temps de vie des photons dans la cavité et A le gain. Les variables β , m et n ont la même définition que le modèle canonique cf. figure 3.4.

Pour retrouver cet ensemble d'équations nous considérerons le système d'équations (3.3) et (3.4) représentant les variations de populations dans notre modèle. Ce système provient de la transcription de la figure 3.4 au-dessus du seuil, à la manière de [54, chap. 7].

$$\frac{dn}{dt'} = J - \nu_L^2(m+1) + (1-\nu_L)^2 m \quad (3.3)$$

$$\frac{dm}{dt'} = \nu_L^2(m+\beta) - (1-\nu_L)^2 m - \alpha m \quad (3.4)$$

L'unité de temps n'étant pas la même que le système international le dt' correspond à $dt \times \tilde{t}^{-1}$.

La principale différence entre notre modèle et les équations à taux de populations est que la probabilité de transition photonique est liée, au nombre de particules dans les équations à taux de population, et à l'occupation du niveau laser pour notre modèle.

Afin de pouvoir rapprocher les équations, nous poserons que les électrons suivent approximativement une distribution de Fermi-Dirac, ce qui est le cas tant que les bandes ne sont pas trop pleines ou trop vides [55]. Nos électrons suivent donc (3.5)

$$\nu_k = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_k - \mu}{k_B T}\right)}, \quad (3.5)$$

avec E_k l'énergie du niveau k et μ le niveau de Fermi.

La somme sur les niveaux d'énergie de (3.5) permet de retrouver la valeur

de μ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu_k dE_k = k_B T \log \left(\exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) + 1 \right). \quad (3.6)$$

La partie gauche de (3.6) est la somme de la probabilité de présence d'un électron sur chacune des énergies. Or, $E_k = \epsilon k$ cf. §1.2.1, l'intégrale correspond donc à ϵn . Comme $\exp(\frac{\mu}{k_B T}) \gg 1$ et que nos bandes sont suffisamment grandes pour la probabilité de présence d'électron soit nulle aux derniers niveaux (c'est à dire que l'intégrale de B à ∞ est nulle), il est raisonnable de poser $\mu = \epsilon n$, afin de pouvoir poser (3.7).

$$\nu_L = \frac{1}{1 + q^{\epsilon(n-L)}}, \quad (3.7)$$

avec $q = \exp\frac{-1}{k_B T}$.

Malgré l'approximation de ne pas être à haute température, nous supposons que $q^\epsilon \simeq 1$, qui est le cas à température ambiante, afin de pouvoir avoir le développement limité de (3.7).

Les développements de Taylor en $q=1$ pour ν_L et ν_L^2 sont donnés respectivement par

$$\nu_L = \frac{1}{2} + \frac{rn}{4} + o(q) \quad (3.8)$$

$$\nu_L^2 = \frac{1}{4} + \frac{rn}{4} + o(q), \quad (3.9)$$

avec $r = \frac{\epsilon(q-1)}{k_B T}$.

Il est donc possible de réécrire (3.3) et (3.4) en intégrant les développements limités :

$$\frac{dn}{dt'} = J - \frac{rmn}{2} - \frac{rn+1}{4} + o(q), \quad (3.10)$$

$$\frac{dm}{dt'} = -\alpha m + \frac{rmn}{2} + \beta \frac{rn+1}{4} + o(q). \quad (3.11)$$

Ce qui permet de faire correspondre les paramètres de (3.3) et (3.4) avec (3.10) et (3.11). Cela donne $J = \frac{\tilde{I}}{eV}$, $r = 2A\tilde{t}$, $\alpha = \frac{\tilde{t}}{\tau_m}$ et $\frac{rn+1}{4} = \frac{n\tilde{t}}{\tau_n}$.

3.2.2 Classe du laser et modèle Markovien

Le précédent chapitre a présenté la correspondance entre les paramètres du modèle et ceux des équations à taux de population. Un paramètre ressort du lot : le α . Dans notre modèle, α représente l'inverse du temps de vie des photons mais en regardant la chaîne, il est rapide de voir que $\alpha \in]0; 1 + \beta[$, afin d'avoir la possibilité d'amplification du laser. Si la valeur de α dépasse cette limite, le laser a une probabilité plus faible de pomper que d'avoir des photons sortant, menant alors à coup sûr au dépeuplement de la cavité, et donc, aucun maintien de l'effet laser.

Pour comprendre la suite il faut d'abord voir la classification des lasers suivant la dynamique des populations [46]. La classe A correspond aux lasers dont le temps de vie des photons est plus long que celui des porteurs. Les lasers de classe A ont alors une dynamique des photons plus lente que celle des porteurs. Ainsi un changement abrupt des porteurs, comme une augmentation instantanée du pompage, ne se répercutera que lentement sur les photons, entraînant alors une augmentation asymptotique des photons jusqu'au régime du nouveau pompage. À l'inverse, les lasers de classe B ont un temps de vie des photons faible par rapport aux porteurs. La dynamique des photons suit alors très rapidement la dynamique des porteurs. Ainsi, dans le cas précédent où le pompage augmente instantanément, l'augmentation des photons suivra aussitôt celle des porteurs. Cela crée alors des oscillations du nombre de photons et des porteurs, caractéristique des classes B.

Les équations que nous utilisons pour notre modèle sont faites pour simuler les deux classes de laser. Si notre intention était de simuler simplement les classes A, une élimination adiabatique des porteurs nous permettrait de se préoccuper uniquement des photons [56]. Cependant, la contrainte sur α fait qu'il est impossible de simuler un laser de classe B dont la dynamique de population de photons est négligeable par rapport à celle des porteurs. Le modèle est donc plus pertinent pour la représentation de classe A. Il est quand même justifié de se demander si un laser dont $\alpha \simeq 1$ ne présente pas les caractéristiques d'un classe B.

Sur un laser réel cette question ne pose pas beaucoup de problèmes, il

suffit d'appliquer une augmentation de pompage brusque et d'observer si la réponse des photons présente une oscillation. Sur notre modèle cela pose quelques problèmes. Le nombre de photons étant beaucoup plus faible que sur un laser réel, le bruit rendrait alors la lecture d'oscillation impossible sur une trajectoire unique. Il faut donc pouvoir observer la dynamique sur plusieurs trajectoires, et donc synchroniser le déclenchement de l'augmentation du pompage. Plutôt que de considérer une trajectoire dont le pompage varie à un instant donné, il est plus simple de considérer deux trajectoires. La première à l'équilibre stationnaire, à la première valeur de pompage, et dont l'état final détermine l'état initial de la seconde trajectoire. La seconde trajectoire initiée avec l'état final de la précédente trajectoire, qui n'est alors qu'un couple de valeur (n, m) , est alors lancée sans recherche de l'état stationnaire avec la seconde valeur de pompage. La synchronisation se fait alors simplement sur le début de la seconde trajectoire. Comme la chaîne est en temps continu, il faut discrétiser la trajectoire avant de moyenner plusieurs trajectoires. Les simulations seront faites sur la partie linéaire du laser, celle-ci correspond à une région de pompage au-dessus du seuil. Cette détermination se fait alors avec une courbe caractéristique classique comme sur la figure 3.1.

La figure 3.5 représente une moyenne sur plusieurs trajectoires dont le pompage augmente brusquement à $t = 100$ pour un laser à $\alpha = 0.1$ et un autre à $\alpha = 0.9$. Le laser à $\alpha = 0.1$ présente une augmentation rapide des photons et une asymptote sur son régime final, c'est bien un classe A. Pour la seconde courbe à $\alpha = 0.9$ l'augmentation des photons est beaucoup plus lente. Il y a l'apparition d'une bosse avant la stabilisation sur le régime stationnaire du second pompage. Il y a donc bien un début d'oscillation sur la réponse des photons, mais l'amortissement est trop important pour observer des oscillations multiples : la dénomination correcte serait plutôt "marginale de classe B".

Comme vu dans cette section le modèle est très bien pour la simulation de lasers classe A, il suffit alors d'un α petit. Ceci est parfaitement en accord avec les lasers SC à cavité étendue qui sont développés dans le programme IDYLIC. La modélisation de classe B est cependant peu recommandée avec

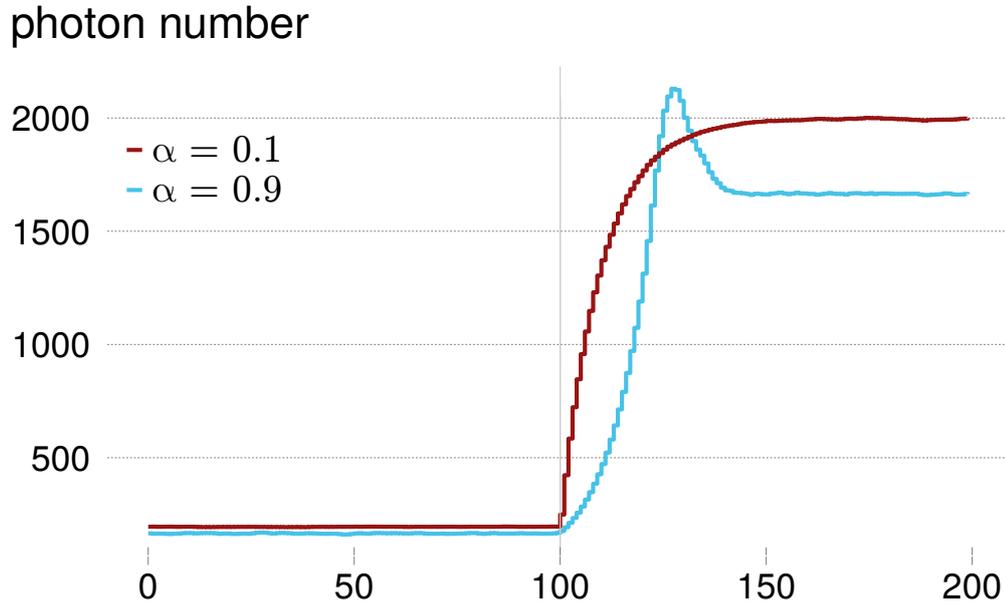


FIGURE 3.5 – Moyenne de 256 trajectoires réalisées loin du seuil du nombre de photons dans la cavité pour $\alpha = 0.1$ et $\alpha = 0.9$. L’instant $t=100$ correspond à un changement de pompage passant de $J = 20$ à $J = 200$ ($\alpha = 0.1$) et $J = 150$ à $J = 1500$ ($\alpha = 0.9$). Les trajectoires sont réalisées à $\beta = 10^{-3}$, $B = 10000$, $q = 0.94209$ et $L = 4999$.

le modèle : il est difficile d’observer de courtes oscillations avec un α proche de 1, mais dans ces cas le pompage nécessaire au maintien du régime cohérent est tellement grand que la trajectoire devient coûteuse en temps de calcul, notamment pour son traitement après simulation.

3.3 Étude du seuil

Le seuil est un comportement intéressant du laser mésoscopique, notre modèle Markovien montrera son utilité pour l’analyse de celui-ci. Nous utiliserons pour comparer notre modèle avec la littérature les paramètres de la table 3.1. Une partie de cette étude a été publiée dans [35].

Paramètre	Valeur	Unité/Remarque
B	10000	
ϵ	1	meV
α	0.1	
q^ϵ	0.96209	@ $T = 300$ K
J	35	
L	4999	
durée trajectoire	1000000	\tilde{t}
nombre trajectoires	1023	

TABLE 3.1 – Paramètres du laser canonique utilisés pour l'étude du seuil. L'unité de temps du modèle (\tilde{t}) est décrit dans le §1.2.2. L'énergie totale de la bande ϵB peut paraître grande, en pratique seule une petite partie des niveaux sont utilisés. La grande taille de la bande est simplement adoptée pour éviter le remplissage total de la BC.

3.3.1 Analyse statique

La figure 3.6 représente le nombre moyen de photon $\langle m \rangle$ dans la cavité en fonction du pompage en échelle logarithmique pour différentes valeurs de β . Ce $\langle m \rangle$ est directement proportionnel à la puissance lumineuse externe. La figure 3.6 présente la forme en "S" caractéristique des lasers déjà observée dans les deux figures de 3.1. C'est un changement abrupt dans la caractéristique au niveau du seuil, et dont la pente dépend de β . On observe une grande similarité avec le modèle de Roy-Choudhury, ce qui est peu surprenant car nous avons choisi la même prise en compte de β . La détermination du seuil est difficile avec cette figure et ce d'autant plus que β est élevé. Le cas $\beta = 1$ est intéressant car on voit juste une dépendance linéaire, déjà observée dans le §2.2.2. Dans ce cas, $J \simeq \alpha \langle m \rangle$ ce qui semble conforter la dénomination de "laser sans seuil" vue dans le §3.1. La courbe à $\beta = 0.001$ présente une légère bosse centrée aux alentours de $J = 0.5$ qui montre une différence avec la figure 3.1.

Une autre méthode de visualisation du seuil présentée par Rice et Carmichael [16] est le facteur de Fano. C'est le ratio entre la variance et la valeur moyenne du nombre de photons, déjà traité dans le §1.3.3. Le maximum du

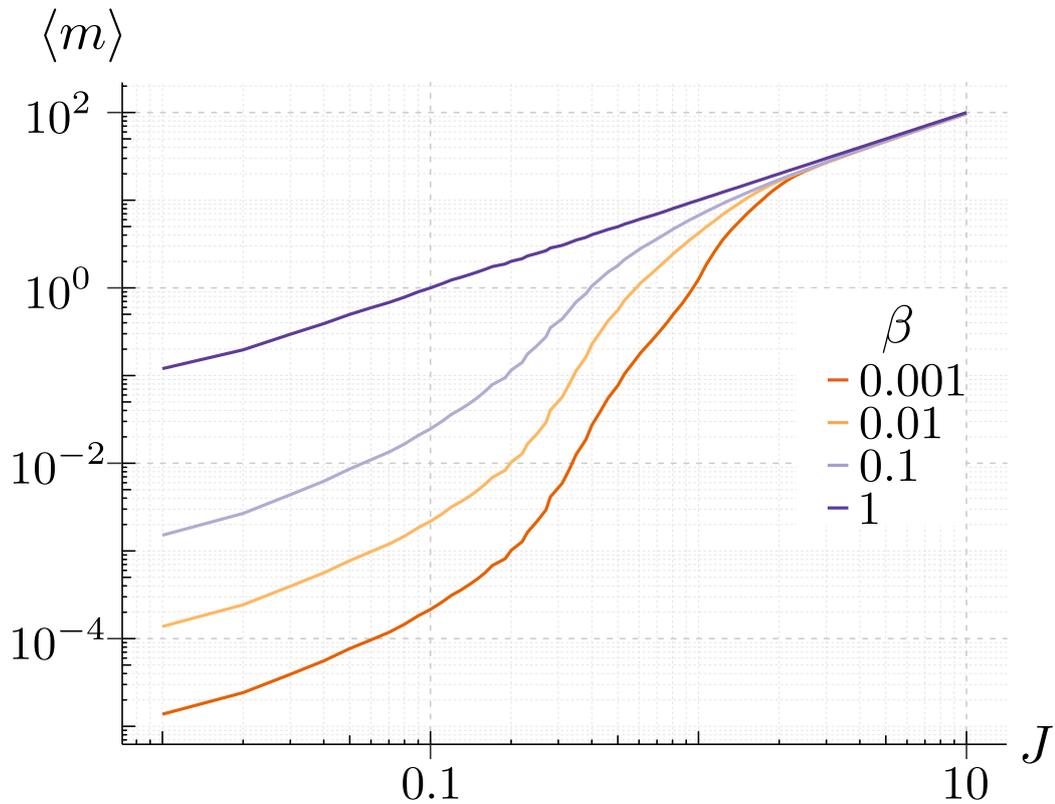


FIGURE 3.6 – Courbe caractéristique de la puissance lumineuse en fonction du pompage pour différentes valeurs de β . L'émission externe est $\alpha \langle m \rangle$. Les autres paramètres sont dans la table 3.1.

facteur de Fano donne alors le pompage générant le plus de bruit, ce qui correspond à la limite entre une génération chaotique et cohérente, le seuil selon ces auteurs. La figure 3.7 montre le facteur de Fano en fonction du pompage pour différentes valeurs de β . Cette figure présente, pour chacun des β , une courbe en cloche dont le minimum se situe à 1 et dont le maximum augmente quand β diminue. La valeur du pompage correspondant au maximum peut être alors utilisée comme la définition du seuil. Cette valeur est facilement obtenue, contrairement au cas de la lecture de la caractéristique. La courbe correspondant à $\beta = 1$ présente alors une bosse assimilable à un seuil, ce qui n'est pas observable dans la figure 3.6. De plus la courbe à $\beta = 0.001$ présente une asymétrie qui montre un second pic aux alentours de $J = 0.5$, qui semble similaire à la bosse de la figure 3.6. Cela permet de supposer une

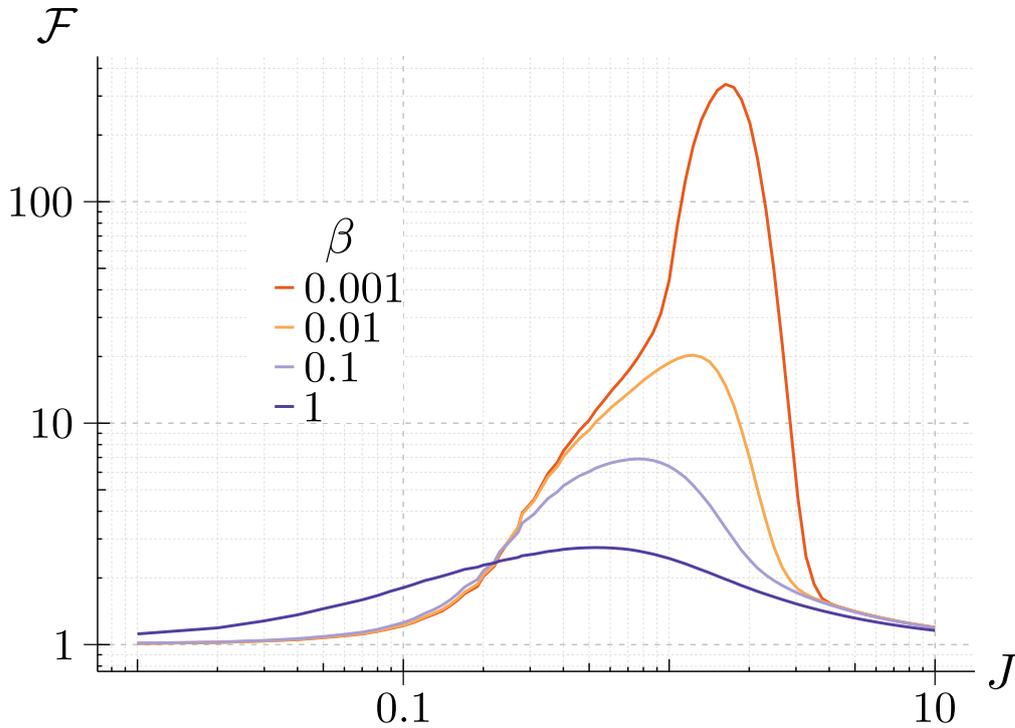


FIGURE 3.7 – Facteur de Fano \mathcal{F} en fonction du pompage pour différentes valeurs de β . Les autres paramètres sont dans la table 3.1.

cause commune à cette bosse pour les deux courbes.

La saturation des porteurs à fort pompage est une caractéristique du seuil qui peut être vue sur la figure 3.8. Cette figure montre le nombre moyen d'électrons dans l'état excité en fonction du pompage pour différentes valeurs de β . À fort pompage, la valeur moyenne du nombre d'électrons en BC sature vers $n = 5006$. La proximité de 5000 correspond au milieu de bande, position pour laquelle le niveau laser a été fixé. Si ce niveau est déplacé la valeur de n saturé la suivra. L'excédent de 7 au dessus de ce niveau laser correspond à l'inversion de population nécessaire au maintien du régime cohérent. La probabilité de présence d'électron au niveau laser pour 5006 électrons en BC est d'environ 80%. Les courbes présentent une bosse dont la hauteur augmente en diminuant β et dont la valeur maximum à une position en accord avec celle du pic de Fano de la figure 3.7. Ce pic peut être très large (plus de 10% à $\beta = 10^{-3}$), et a déjà été observé dans [17]. Dans cette publication,

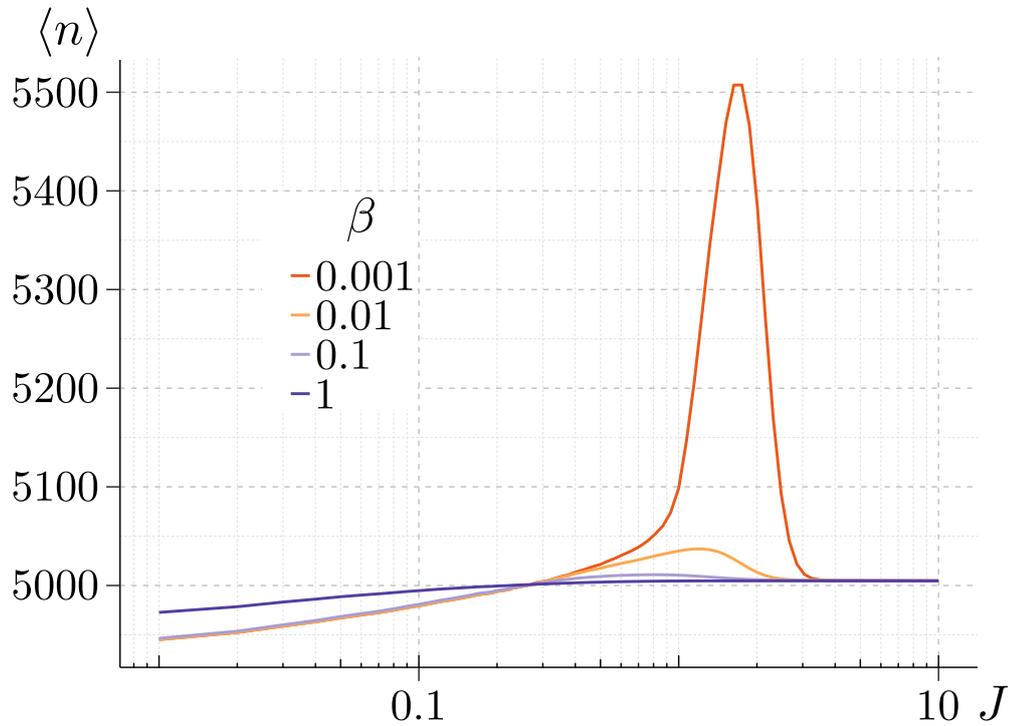


FIGURE 3.8 – Nombre moyen d'électrons en BC en fonction du pompage pour différentes valeurs de β . Les autres paramètres sont dans la table 3.1.

cette bosse est alors montrée comme responsable du retard dans le seuil par rapport aux équations à taux de populations, à cause des corrélations quantiques entre électrons et photons. Il est intéressant de voir que pour les faibles valeurs de pompage la courbe de $\beta = 1$ diverge des trois autres, que ce soit pour la figure 3.7 ou 3.8.

3.3.2 Analyse dynamique

Afin de comprendre mieux le comportement statique observé précédemment il faut en observer la dynamique. Pour expliquer les bosses apparaissant dans les figure 3.7 et 3.8 nous allons observer ce qui se passe dans une trajectoire.

La figure 3.9 présente une partie d'une trajectoire au seuil supposé par le maximum de Fano trouvé sur la la figure 3.7, à $J = 1.7$. La trajectoire

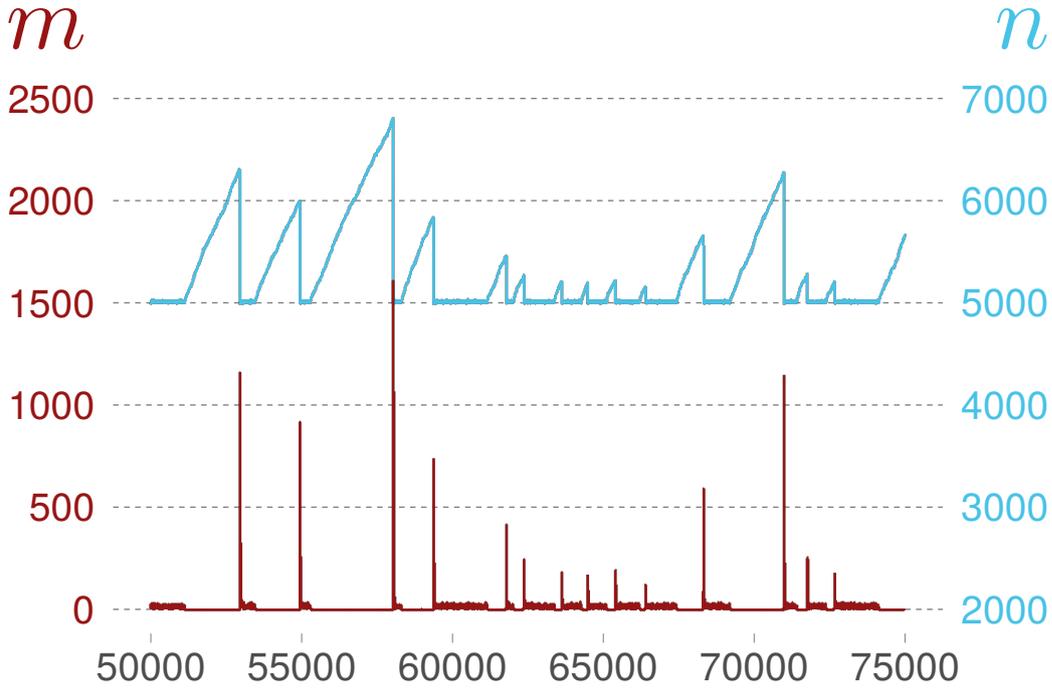


FIGURE 3.9 – Petite portion d’une trajectoire des électrons en BC, n en bleu et du nombre de photons dans la cavité m en marron, calculée à $J = 1.7$, le maximum du facteur de Fano de la figure 3.7 pour $\beta = 10^{-3}$. Les autres paramètres sont pris de la table 3.1.

de photons montre que le laser alterne entre un régime allumé et un régime éteint. Durant le régime allumé, les valeurs de m et n restent assez stables jusqu’à ce que le dernier photon dans la cavité s’échappe. La valeur moyenne de n durant ce régime correspond à la valeur de la saturation à fort pompage observée en figure 3.8, suggérant un laser cohérent durant ce régime. Le laser s’éteint ensuite pour une durée moyenne de $\beta^{-1} \times \tilde{t}$. L’absence de photons cause une augmentation de n à une vitesse d’environ $(J - 1 + \beta) \times \tilde{t}^{-1}$. Cette augmentation peut être vue sur la partie gauche de la figure 3.10. La période d’extinction finit dès l’émission spontanée d’un photon, agissant comme le déclencheur d’une croissance exponentielle du nombre de photons, s’arrêtant seulement lorsque l’excédant de n est consommée. Ce pulse est visible sur la partie droite de la figure 3.10. À ce moment la cavité a atteint son maximum du nombre de photons qui va alors décroître suivant le temps de vie des photons α^{-1} . Le laser est à nouveau dans son régime allumé jusqu’à ce

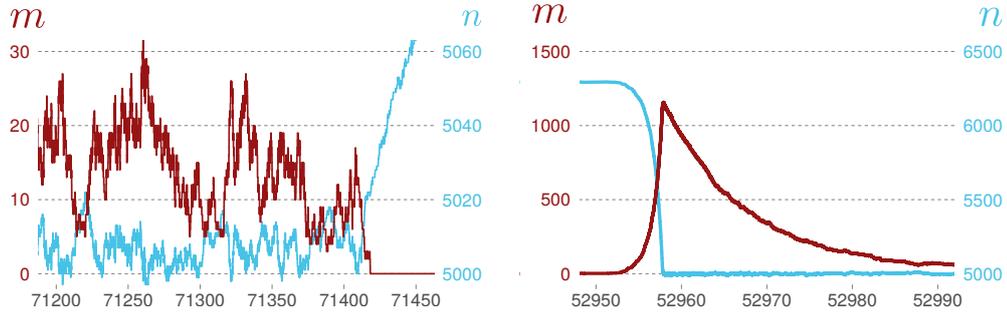


FIGURE 3.10 – Portion de la trajectoire figure 3.9 zoomé sur la douzième extinction de mode à gauche et sur le premier pic à droite.

que le dernier photon sorte de la cavité ce qui recrée l'augmentation rapide de photons et recommence le cycle. Ce pulse rappelle alors ceux obtenus avec les commutations de gain sauf qu'ils sont causés par la nature discrète des particules plutôt qu'un changement rapide du milieu de gain, ces pics seront appelés par la suite **quantum gain switch (QGS)**. Ces QGS sont très asymétriques. La hauteur est proportionnelle à la valeur de n avant l'émission spontanée. La largeur à mi-hauteur est donnée essentiellement par la décroissance exponentielle, et est donc la même pour tous les pics, soit $\simeq \ln 2/\alpha$.

Lorsque J diminue un peu, aux alentours de la bosse de la figure 3.7, la trajectoire est complètement composée de QGS. Le régime allumé ne se déclenche pas car le pompage devient trop faible pour garantir le maintien de la saturation des porteurs. En diminuant davantage J l'amplitude des QGS diminuera et leur nombre aussi. Le régime de pulses lors du passage au seuil a été mis en évidence dans [57].

Nous pouvons donc poser plusieurs paramètres facilement accessibles pour distinguer un seuil : la durée moyenne du régime allumé, la durée moyenne du régime éteint, et la fréquence du changement de régime (les QGS). On sait que la somme des deux premiers est égale à l'inverse de la dernière. La durée moyenne pendant laquelle le laser est éteint est simplement de $\beta^{-1} \times \tilde{t}$, comme dit précédemment. La durée moyenne du régime allumé est affichée sur la figure 3.11 en fonction du pompage pour plusieurs valeurs de β . Cette durée peut être vue comme un temps durant lequel les photons

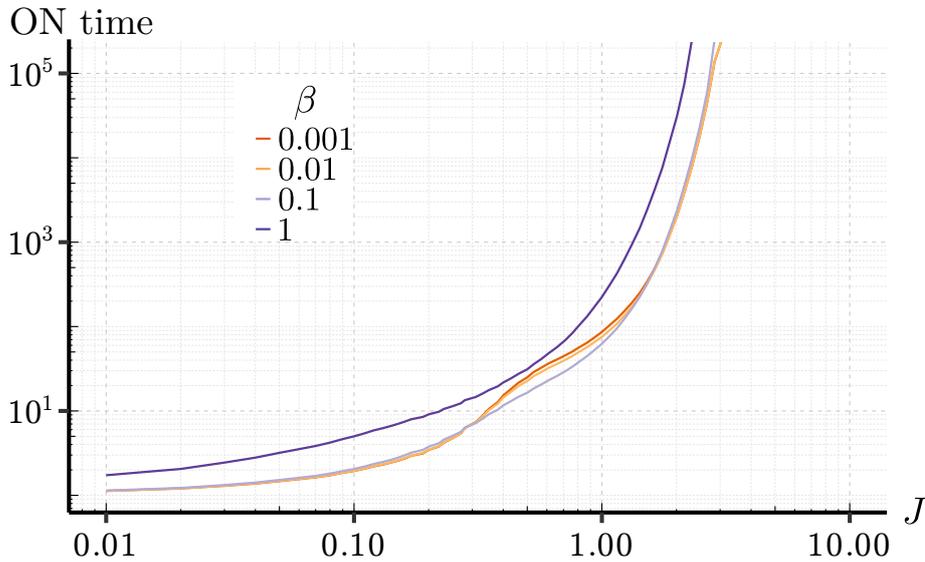


FIGURE 3.11 – Durée moyenne du régime allumé en \tilde{t} en fonction du pompage pour plusieurs valeurs de β , les autres paramètres sont tirés de la table 3.1.

restent cohérents entre eux¹. Ce temps croît avec le pompage. Il est difficile d'obtenir les valeurs au-dessus de $J = 3$ car la probabilité d'une coupure devient trop faible pour être observée. La figure montre que, pour tous les $\beta < 1$, les courbes ont le même comportement avant, et après les valeurs présumées du seuil par le facteur de Fano. Nous pouvons observer aux alentours de $J = 0.5$ une apparition d'une bosse similaire à celle trouvée sur la figure 3.7. Comme pour les précédentes figures le cas $\beta = 1$ se distingue totalement des autres. La courbe correspondant à $\beta = 1$ ne converge pas vers les autres valeurs de β avant et après le seuil présumé, mais il est possible d'obtenir les points entre les courbes en prenant des β intermédiaires.

Un autre critère pourrait être le ratio entre le temps passé dans le régime allumé et le temps passé dans le régime éteint. Ce n'est pas un bon critère, la courbe du ratio en fonction du pompage ne présente pas de structures particulières. De plus, fixer un ratio pour en définir le seuil, tel que l'égalité entre le temps du laser éteint et le temps où les photons sont cohérent, serait juste arbitraire.

1. Il ne faut cependant pas confondre ce temps avec le temps de cohérence d'un laser qui mesure le décalage temporel nécessaire afin qu'un signal ne puisse plus interférer avec lui-même, ces deux phénomènes n'ont *a priori* rien à voir.

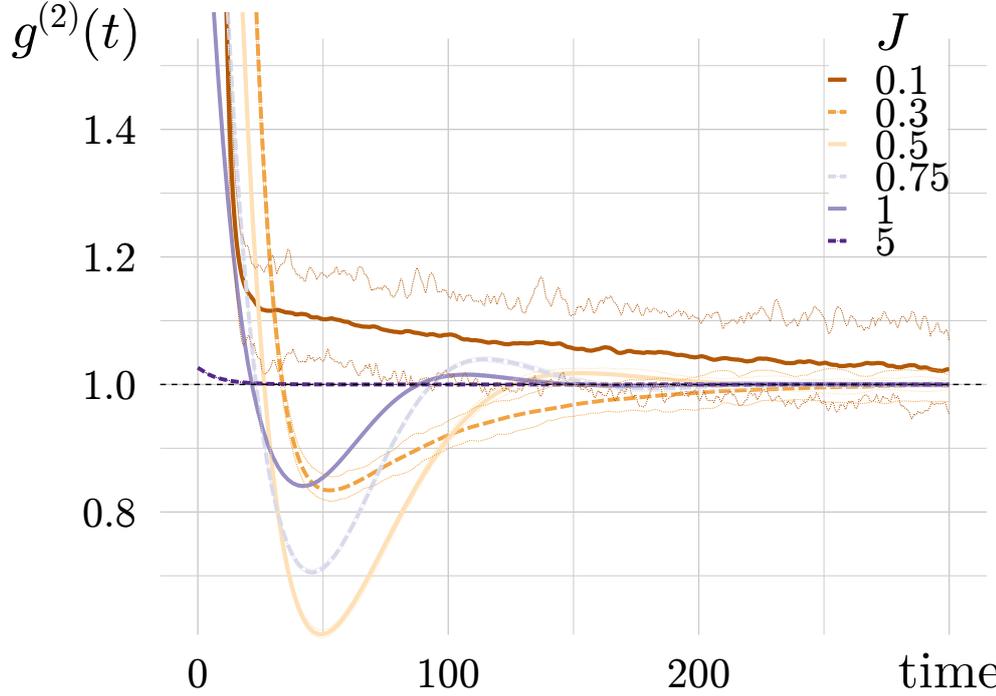


FIGURE 3.12 – $g^{(2)}(t)$ pour plusieurs valeurs de pompage à $\beta = 0.1$, l'axe horizontal est exprimé en \tilde{t} . Les données ont été calculées sur 127 trajectoires avec une résolution temporelle de $0.5\tilde{t}$ pour les pompages $J = 0.1$ et $J = 0.3$ et sur 64 trajectoires avec une résolution temporelle de $2\tilde{t}$ pour les autres pompages. Les données ont été calculées sur des trajectoires de durées $10\,000\,000\tilde{t}$, les autres paramètres sont tirés de la table 3.1. Les courbes fines permettent d'observer l'incertitude sur les courbes : elles représentent les valeurs minimales et maximales obtenues sur les trajectoires.

Corrélations du second ordre

Comme décrit dans le §3.1 la corrélation du second ordre, $g^{(2)}(t)$ cf. (1.8), est un bon indicateur du seuil, notamment la valeur de $g^{(2)}(0)$ qui peut être reliée au facteur de Fano grâce à

$$\mathcal{F} = (g^{(2)}(0) - 1) \langle m \rangle. \quad (3.12)$$

La figure 3.12 représente la courbe de $g^{(2)}(t)$ pour $\beta = 0.1$, les β inférieurs sont beaucoup plus gourmands en ressources ; les résultats présentés ici ayant déjà nécessité deux jours de simulation sur ma machine. Tout comme

[15, 53], $g^{(2)}(t)$ présente une forme dépendant de la position par rapport au seuil. Chaque courbe tend vers 1 à l'infini et possède un maximum à $t = 0$ qui décroît en augmentant le pompage. Ce maximum correspond à la présence de QGS qui s'amointrissent après le seuil. Ce maximum monte bien au-delà de 2 pour les faibles pompages, ce qui montre l'émission collective apparaissant dans les QGS et rappelle la super-radiance. Lorsque le régime est intégralement composé de QGS à $J = 0.1$ la valeur de $g^{(2)}(t)$ tend asymptotiquement vers un. En augmentant le pompage légèrement à $J = 0.3$, à l'apparition du régime cohérent, $g^{(2)}(t)$ descend en dessous de 1 et l'asymptote se fait par le bas. Ce point marque l'endroit où $\langle n \rangle$ atteint la valeur de saturation de n à fort pompage. Au fur et à mesure de l'augmentation, $g^{(2)}(t)$ va commencer à osciller avec un minimum pour le premier creux obtenu à $J = 0.5$, et un maximum pour le premier pic à $J = 0.75$. Cette dernière valeur correspond au maximum de Fano. En augmentant encore le pompage, les oscillations s'amortissent si bien qu'à $J = 5$ la courbe est pratiquement égale à un en tout point sauf au temps nul, qui montre la présence rare de QGS. En augmentant davantage le pompage, $g^{(2)}(t) = 1$ en accord avec le franchissement du seuil.

La courbe de $g^{(2)}(t)$ montre des similarités avec les résultats de Wang *et al.* [15] cf. figure 3.13. Avant le seuil nos deux modèles indiquent des résultats similaires : une courbe décroissante asymptotique vers un pour les faibles valeurs de pompage. Les expériences de Wang *et al.* présente des oscillations aux alentours du seuil, pour une intensité de 1.45mA, tout comme notre point de pompage à 0.75. Cependant, sur notre modèle les oscillations sont beaucoup plus amorties. Ceci est totalement en accord avec notre laser qui est marginalement de classe B ($\alpha = 0.1$) contrairement au laser totalement de classe B de Wang *et al.* . Les $g^{(2)}(t)$ à fort pompage sont tous les deux constants à un, ce qui est le résultat attendu pour un laser au-dessus du seuil.

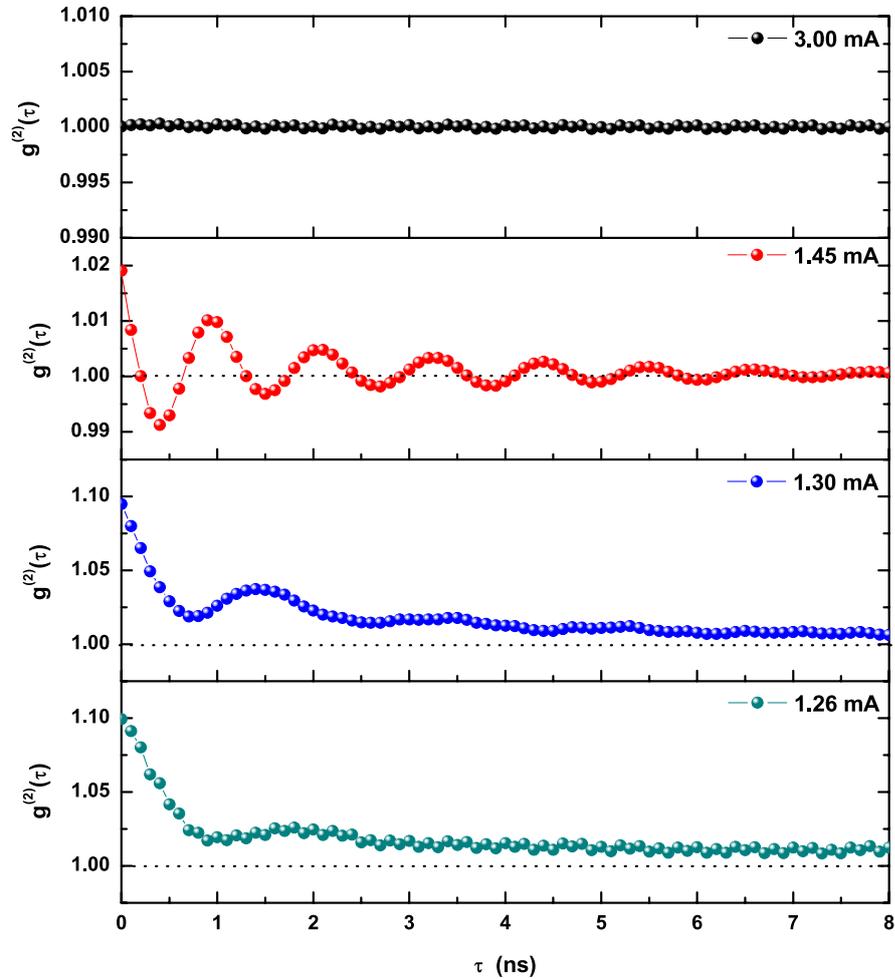


FIGURE 3.13 – $g^{(2)}(t)$ obtenus par Wang *et al.* [15] pour quatre valeurs de pompage correspondant à quatre valeurs d'intérêt pour l'étude du seuil. La première valeur, à 3mA correspond au-delà du seuil. Les deux dernières, à 1.26 et 1.30 mA, correspond à avant le seuil. La valeur à 1.45mA ce situe au alentours du seuil. Ces résultats ont été obtenus expérimentalement sur un laser de classe B.

Distribution des porteurs

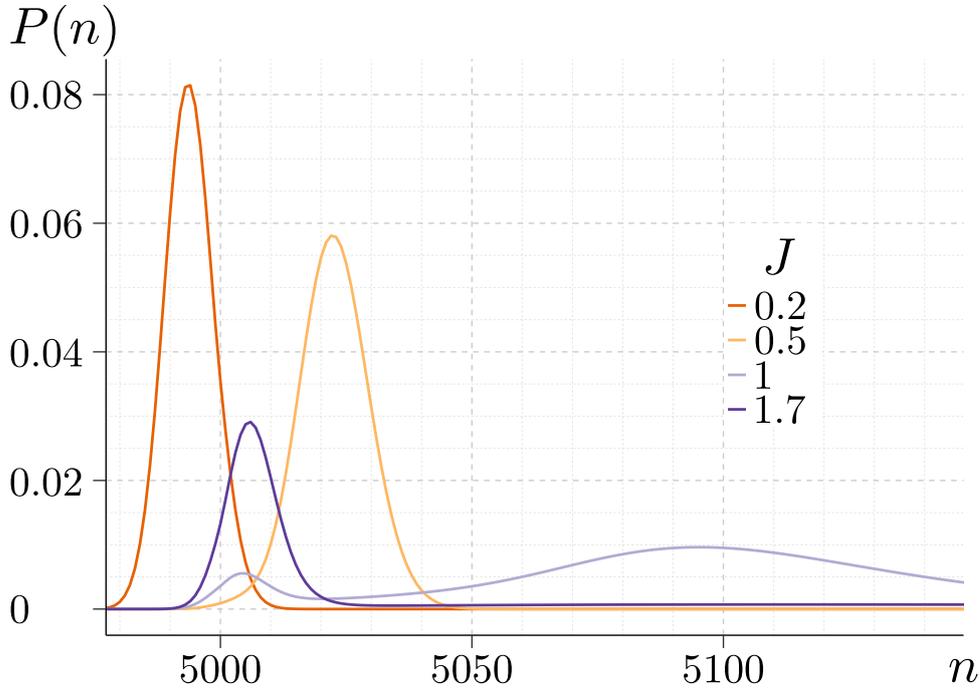


FIGURE 3.14 – Probabilité de présence de n électrons en BC pour plusieurs valeurs de pompage, les autres paramètres sont tirés de la table 3.1.

Une illustration de l’alternance entre un régime allumé et éteint est donnée par la figure 3.14. La probabilité $P(n)$ d’avoir n électrons en BC est affichée en fonction de J pour $\beta = 10^{-3}$. Ces données sont obtenues avec la résolution stationnaire cf. §1.3.2. Sur les faibles valeurs de pompage, $P(n)$ présente un seul pic dont le maximum se déplace en augmentant le pompage : $n = 4994$ à $J = 0.2$, $n = 5022$ à $J = 0.5$ et $n = 5094$ à $J = 1$. À partir de $J = 1$, un second pic apparaît à $n = 5006$, et ce pic ne change pas de position en augmentant le pompage. Il correspond à l’apparition du régime cohérent, et cette valeur de n est la même que la valeur atteinte à fort pompage dans la figure 3.8. L’autre pic, correspondant à une émission chaotique, ou thermique, s’affaïsse en augmentant le pompage. À $J = 1.7$, sur le maximum du facteur Fano, n présente un unique pic, mais garde une probabilité supérieure à 5×10^{-4} pour le reste des valeurs de n . Lorsque le pompage continue à augmenter le pic correspondant au régime cohérent continue de grandir, le

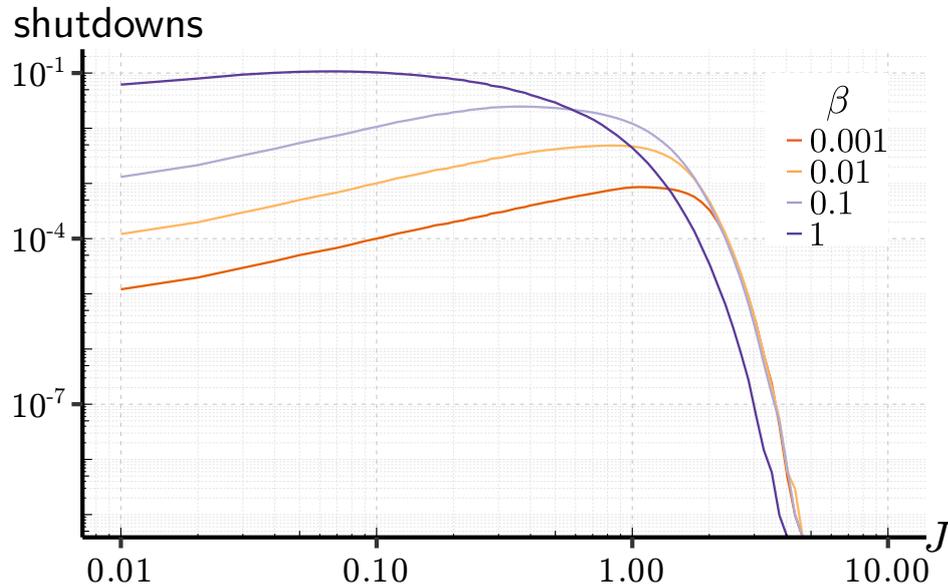


FIGURE 3.15 – Fréquence des QGS en fonction du pompage pour plusieurs valeurs de β , les autres paramètres sont tirés de la table 3.1.

second pic s'efface totalement, car les extinctions du laser disparaissent. Il y a donc aux alentours du seuil une distribution bimodale pour n , ce qui illustre l'alternance entre le régime cohérent et éteint constatée depuis le début du chapitre.

3.3.3 Laser sans seuil

La figure 3.15 représente la fréquence des QGS en fonction du pompage et pour différentes valeurs de β . Les trois courbes avec $\beta < 1$ augmentent au départ, linéairement à une vitesse de $\beta \times J$. Comme dit auparavant, dans ces valeurs, le laser est constitué uniquement de QGS dont l'apparition est gouvernée par le facteur β , ce qui explique le décalage entre les courbes. La proportionnalité avec le pompage s'explique par le fait que la hauteur des QGS est proportionnelle à l'accumulation de porteurs au dessus de la valeur de saturation, et donc du pompage. Les QGS apparaissent à la même vitesse mais leur hauteur, et donc leur durée, augmente avec le pompage. En augmentant plus le pompage, la fréquence des QGS ne s'accroît plus linéairement mais décroît. C'est ici que le régime cohérent apparaît. En augmentant

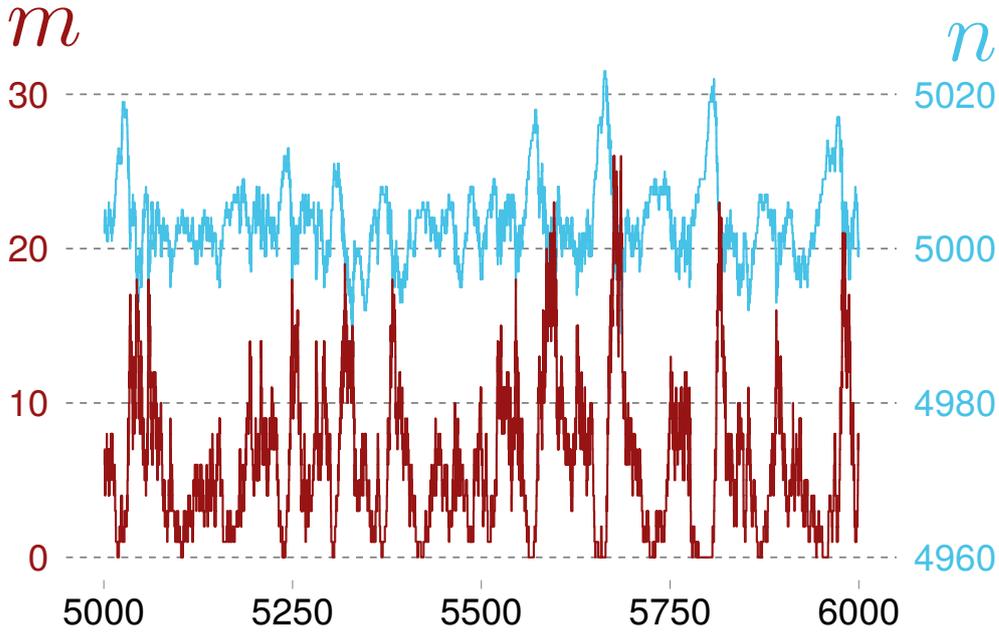


FIGURE 3.16 – Petite portion d’une trajectoire des électrons en BC, n en bleu et du nombre de photons dans la cavité m en marron, calculé à $J = 0.55$, le maximum du facteur de Fano de la figure 3.7 pour $\beta = 1$. Les autres paramètres sont pris de la table 3.1.

davantage le pompage, les courbes se confondent. L’implication du β devient alors négligeable devant l’implication du pompage qui est alors suffisamment importante pour maintenir le régime cohérent. Les bosses observées sur la figure 3.6 et figure 3.7 apparaissent alors sur la zone linéaire de la figure 3.15. Nous pouvons donc supposer que ces bosses sont un artefact involontaire lié au fait que les bandes sont pleines. Cela change pas la fréquence d’apparition des QGS et dépend de β , mais empêche l’accumulation de davantage de porteurs, ce qui modifie alors la statistique des photons lors du régime continu. Cet artefact montre une limite de notre modèle : la limite de la mémoire de la machine contraignant le nombre de niveaux d’énergie accessibles.

Tout comme pour les figures précédentes, la courbe $\beta = 1$ se distingue des autres : non seulement elle ne converge pas avec les autres à fort pompage, mais elle ne montre pas de partie linéaire avant le pompage. Ceci s’explique par le fait que la courbe $\beta = 1$ ne présente pas de QGS. La figure 3.16 présente l’évolution temporelle des photons m et électrons en BC n pour une

trajectoire réalisée sur le maximum de Fano de la figure 3.7 pour $\beta = 1$. Contrairement à la figure 3.9, celle-ci ne présente pas de QGS. Le bruit de n et m entre les coupures est beaucoup plus élevé que les régimes cohérents précédents. Les coupures sont beaucoup plus fréquentes, cf. figure 3.15, et brèves, en moyenne une coupure dure $1 \tilde{t}$. Lors de cette trajectoire la probabilité de pompage est plus faible que la probabilité d'émission, cela explique pourquoi elle ne présente pas d'accumulation de porteurs nécessaire aux QGS.

La statistique du laser à $\beta = 1$ est déjà connue, cf. §2.2.2. Elle présente une dépendance linéaire du nombre de photons en fonction du pompage. Au vu de cette dépendance linéaire et des différences entre les courbes $\beta = 1$ et les autres pour les figures 3.7, 3.8 et 3.15, et malgré le fait que le facteur de Fano présente un maximum, nous pouvons nommer le laser $\beta = 1$ laser sans seuil.

Il est intéressant de noter que le $\beta = 0.1$ est encore loin du laser sans seuil car présentant les caractéristiques de la présence d'un seuil. Il faut donc augmenter bien plus le β pour observer des effets notables liés à la disparition du seuil.

3.4 Conclusion

Le gain de performance lié au modèle canonique a permis l'ajout de nouvelles fonctionnalités afin de coller au plus près avec la réalité. Nous avons choisi de prendre en compte le facteur β qui représente la proportion des photons participants à la résonance du champ électromagnétique. Ce facteur peut être introduit de deux manières : globale ou particulière. Nous avons choisi de suivre la vision particulière, plus en accord avec notre vision du laser à processus. Ce chapitre a été l'occasion de comparer notre modèle avec la littérature, notamment avec les équations à taux de population.

Cette comparaison nous a donné une correspondance du paramètre α , l'inverse du temps de vie des photons avec celle de la littérature. Or comme notre **unité de temps du modèle** (\tilde{t}) est fixée sur le temps de désexcitation des électrons, une dynamique des photons inférieure à celle des électrons nécessiterait un $\alpha > 1$ qui ne permet pas de régime cohérent dans notre

modèle. Cela nous a conduit à voir quelle classe de laser pouvait simuler notre modèle. Les classes A, où la dynamique des photons est plus rapide que celle des électrons, sont facilement modélisables. Nous avons réussi à observer le comportement attendu pour un tel laser : lors de changements soudains de pompage, nous obtenons comme attendu une réponse rapide des photons sans oscillation. Les classes B, à l’opposé, ont une dynamique des photons négligeable par rapport aux électrons, entraînant alors des oscillations dans la population de photons s’il y a un changement brutal du pompage. Même s’il est possible d’imiter un tel comportement avec notre modèle, celui-ci est plutôt destiné à modéliser des classes A.

L’ajout du facteur β dans le modèle a permis d’introduire la notion de seuil, il a donc été étudié afin de se comparer avec la littérature. L’analyse statique a montré un accord entre nos résultats et ceux de Rice et Carmichael [16], Roy-Choudhury et Levi [17, 18] ainsi que de Wang *et al.* [15, 52]. L’analyse dynamique a illustré, quant à elle, un comportement intéressant au seuil. Le seuil correspond à une alternance entre un régime allumé et un régime éteint, séparés par des pics de photons nommés QGS. Cette alternance peut se voir facilement sur la distribution des porteurs qui est alors bimodale.

La présence de QGS ne se retrouve cependant pas sur les lasers à $\beta = 1$ contrairement aux autres valeurs de β , ce qui conforte l’idée qu’à $\beta = 1$ le laser est sans seuil.

Chapitre 4

Multimode

4.1 Introduction

4.1.1 État de l'art

La génération de fréquences allant jusqu'au THz est assez aisée grâce au photomélange [58, Chap. 4][2], ce qui permet de combler les limites des sources électroniques classiques qui peinent à monter en fréquence [58, Chap 1]. Des solutions plutôt basées sur l'optique non-linéaire ont aussi été avancées [59], mais elles ne semblent pas émerger à cause de difficultés de mise en œuvre. La solution photomélange classique utilise deux lasers différents nécessitant des stabilisations de fréquence séparées et des contre-réactions nombreuses en puissance, température, etc... Même avec l'ensemble de ces difficultés techniques résolues, le bruit du battement optique est *a minima* la somme du bruit des deux lasers indépendants puisqu'ils ne sont pas couplés et que les processus de bruit sont donc non corrélés.

Une première amélioration consiste à utiliser deux lasers différents, construits sur la même puce, soit ayant deux cavités optiques couplées mais physiquement différentes sur une portion grâce à un guide en Y [60], soit ayant deux milieux de gain physiquement séparés mais extrêmement proches et sur le même substrat. Ils peuvent alors être pompés individuellement ce qui est une solution fréquente dans les géométries VCSEL [61], ou simultanément si par exemple ils sont constitués d'un empilement de QWs différents [62]. Si les

bruits individuels des deux modes restent non corrélés, l'ensemble des dérives dues aux variables macroscopiques comme la température se compensent au premier ordre ce qui réduit le bruit de battement. C'est par exemple le cas des dérives des fréquences primaires dues à la température.

Pour aller plus loin, il faut créer un couplage entre ces modes qui permet alors que le bruit total puisse être inférieur à la somme des bruits de chaque mode parce qu'ils deviennent partiellement ou totalement anticorrélés [63]. Pour cela, plutôt que d'avoir deux cavités séparées, une seule cavité contient les deux modes qui sont pompés identiquement, on parlera alors de laser monolithique. Plusieurs exemples de ce genre de structure ont été proposés, incluant des structures à QW à cavité verticale [64] ou émettant par la tranche [65, 66], ainsi que des lasers à QD [67, 68].

Le couplage des modes permet donc de diminuer le bruit mais il est aussi connu pour induire de la bistabilité et empêcher le régime bimode [56]. La maîtrise du couplage de ces modes grâce aux structures à QD est l'objectif du projet IDYLIC. Il est à noter que Fedorova *et al.* [69] ont réussi récemment à développer un tel composant bimode à milieu de gain partagé. Cette équipe a ainsi prouvé que le laser étudié au sein d'IDYLIC est possible et d'actualité.

4.1.2 Modélisation

Dans ce chapitre, la modélisation d'un laser bimode s'intéresse essentiellement à la stabilité du régime bimode. Dans la littérature il a été proposé une modélisation du bruit par des forces de Langevin afin d'étudier la stabilité de la solution multimode [4, 70]. Nous allons ici plutôt traiter cette question soit analytiquement en suite des travaux de [7], soit grâce à notre modélisation markovienne applicable tant aux lasers à QW que QD, là encore en suite des travaux initiaux de [34]. À la différence des forces de Langevin la prise en compte du bruit *ab-initio* n'émet aucun préalable quand à sa distribution statistique. Néanmoins une comparaison détaillée des modèles est compliquée sans entrer plus en détail dans chacun des modèles.

Dans un modèle appliqué aux lasers à QD, le couplage entre les modes peut se faire tant au niveau des photons qu'au niveau des électrons. Le cou-

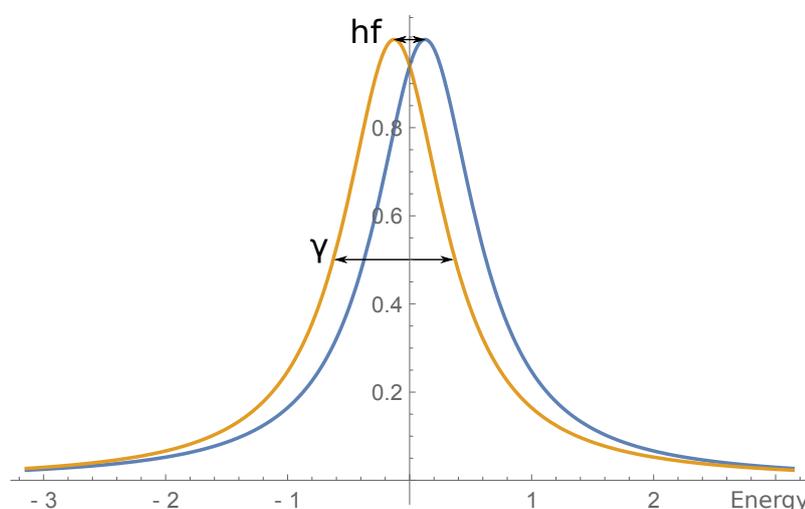


FIGURE 4.1 – Présentation du couplage photonique apparaissant dans les lasers bimodes. L'intensité est affichée en fonction de la fréquence pour chacun des modes. Les valeurs hf et γ représentent respectivement la différence fréquentielle des deux modes et l'élargissement homogène du mode de basse énergie (orange).

plage avec les photons arrive à cause de l'élargissement homogène de chacune des raies laser correspondant aux deux modes, cf. figure 4.1. En pratique le gain d'un laser à QD s'étend sur une large plage spectrale, mais on suppose néanmoins que la cavité résonnante filtre seulement deux modes au sein de ce large spectre, ce qui nous permettra dans la suite de se restreindre à deux sous-familles de boîtes parmi l'ensemble de toutes celles créées par la croissance. En conséquence, les porteurs correspondant à une famille de boîtes sont partiellement résonnants avec l'autre mode, et ce d'autant plus que les modes sont proches.

Le couplage électrique entre les porteurs des deux familles de QD est *a priori* beaucoup moins direct que pour deux niveaux différents au sein des bandes de valence et de conduction d'un laser à QW. Pour ces derniers c'est le réarrangement très rapide imposé par la relaxation intrabande qui prime (pris en compte dans notre cas par la solution canonique donnant les taux d'occupation des niveaux lasers). Alors que pour les lasers à QD ce couplage se produit par des transferts énergétiques vers les niveaux excités de chaque boîte puis vers la couche de mouillage qui est un résidu de la croissance des

QDs (cf. §4.2.1 et figure 4.3). En pratique le couplage par cette couche de mouillage sera pris en compte comme dans [7].

4.1.3 Facteur de Lamb

En 1964 W. E. Lamb a introduit un facteur de couplage de mode C pour caractériser la stabilité d'un laser bimode, pour plus de détails cf. [56, p. 120]. Suivant l'analyse de Lamb, et en reprenant sa notations, pour des lasers de classe A, grâce à élimination adiabatique des porteurs dont la dynamique est ultra-rapide, les intensités I_1 et I_2 sont couplées au travers de

$$\frac{dI_1}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 I_1 - \theta_{12} I_2) I_1, \quad (4.1a)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = (\alpha_2 - \beta_2 I_2 - \theta_{21} I_1) I_2, \quad (4.1b)$$

avec α_i le gain net, β_i l'autosaturation du i -ème mode et θ_{ij} la saturation croisée du mode j sur le mode i . L'analyse de la stabilité du système d'équations (4.1) produit le facteur de couplage de Lamb qui est alors défini par

$$C = \frac{\theta_{12}\theta_{21}}{\beta_1\beta_2}. \quad (4.2)$$

Ainsi, si $C < 1$, la saturation croisée est plus petite que l'autosaturation, les deux modes peuvent donc osciller ensemble. Au contraire, si $C > 1$, la saturation croisée est plus grande que l'autosaturation et le système est bistable. Dans la pratique le maintien d'un régime bimode lorsque $C \approx 1$ est impossible à cause du bruit. C'est pourquoi nous considérerons que pour obtenir un régime bimode il faut considérer une marge. Nous envisagerons que le régime bimode n'est possible que si $C < 0.95$ puisqu'un régime bimode a déjà été observé avec cette valeur par Alouini *et al.* [71].

Une procédure pour extraire le facteur de couplage de Lamb expérimentalement a déjà été développée dans cette même référence. En régime stationnaire, $\frac{\partial I}{\partial t} = 0$, la dérivation de (4.1) par rapport au gain net permet de

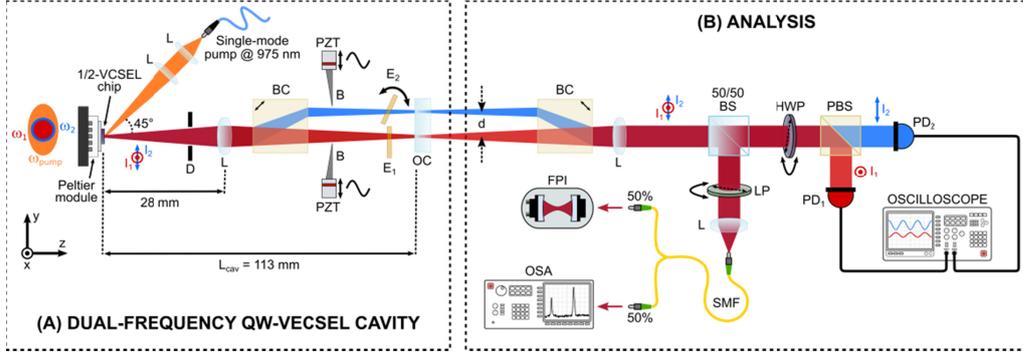


FIGURE 4.2 – Banc de test permettant de calculer le facteur de couplage de Lamb d’un laser bimode, développé par Brévalle *et al.* [37]. La cavité du laser est située sur la partie gauche et est délimitée par 1/2 VCSEL à gauche et par le miroir OC à droite. À l’intérieur de la cavité un cristal biréfringent (BC) permet de séparer spatialement les deux longueurs d’onde. Sur la trajectoire de chacun des faisceaux est placée une lame de rasoir B posée sur un piézoélectrique. Les piézoélectriques permettent de faire vibrer les lames afin d’augmenter les pertes des photons indépendamment entre les modes. La partie gauche permet d’analyser l’intensité de chacun des modes. L’observation des variations d’intensité des modes par rapport aux pertes induites sur chacun des modes permet de retrouver le facteur de couplage de Lamb.

retrouver C grâce aux deux facteurs K_{12} et K_{21}

$$K_{ij} = \frac{\partial I_i}{\partial I_j}. \quad (4.3)$$

Le facteur de couplage de Lamb est alors simplement

$$C = K_{12}K_{21}. \quad (4.4)$$

En réécrivant les facteurs K_{ij} il est possible d’accéder à ces valeurs en faisant varier le gain

$$K_{ij} = \frac{\partial I_i / \partial \alpha_j}{\partial I_j / \partial \alpha_j}. \quad (4.5)$$

C’est avec cette formulation que le facteur de couplage de Lamb a été mesuré expérimentalement par Brévalle *et al.* [37], cf. figure 4.2. La cavité,

située entre le 1/2-VCSEL et le miroir de sortie OC, est ouverte. Cela permet de séparer les deux longueurs d'onde grâce à un cristal biréfringent. Sur chacune de ces longueurs d'onde des lames de rasoir changent les pertes de la cavité en obstruant une petite partie du faisceau selon une variation temporelle sinusoïdale de faible fréquence. Comme le laser est au-delà du seuil, le gain égale les pertes et se réajuste donc dynamiquement quand α change. Il est possible de retrouver les facteurs K en regardant les variations d'intensité du mode par rapport aux variations des pertes sur chaque lame. Cette méthode sera appliquée afin d'étudier la stabilité du régime bimode pour les lasers à QD dans le §4.2 et à QW dans le §4.3.

4.2 Facteur de couplage de Lamb dans les lasers à boîtes quantiques

4.2.1 Modèle

Le modèle étudié dans les chapitres précédents est un laser à QW. Comme décrit dans l'état de l'art ce ne sont pas les seuls lasers existants. Cette section s'attachera à étudier la stabilité bimode dans le cas des lasers à QD. Ce travail a fait l'objet d'une publication [36].

Les lasers à QD sont des lasers à SC mais, contrairement au laser à QW, les modes dans ceux-ci sont beaucoup plus indépendants. Chaque porteur dans une QD n'a qu'un nombre très restreint d'énergies accessibles alors qu'un QW en a un nombre plus important. Étant donné le faible nombre d'énergies admises dans les QDs, nous considérerons que les lasers à QD ne sont résonnants qu'à une seule fréquence. Tout comme les lasers à QW, les modes non désirés seront filtrés par la cavité. Ainsi, si les modes d'un laser multimode à QW partagent exactement le même matériel de gain, les QDs ont seulement de petites interactions entre elles. Lors de la croissance, les QDs n'ont pas toutes la même taille et ne sont donc pas résonnantes avec la même fréquence. Les photons émis par des QDs non résonnantes avec la cavité seront aussi filtrés par celle-ci. Dans un laser bimode, seules deux populations de QDs seront alors résonnantes avec les deux modes de la cavité. Ces deux

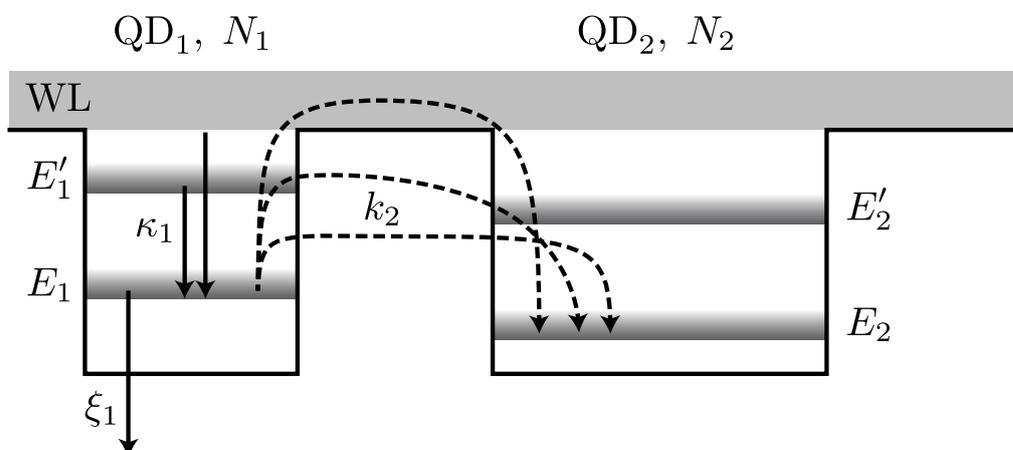


FIGURE 4.3 – Diagramme d'énergie représentant deux populations de QDs. Chaque population possède deux niveaux d'énergie dans sa BC, E_i' et E_i . Seule la BC est affichée, la BV peut se déduire par symétrie. Le couplage électrique entre QDs est illustré par la WL. Les flèches permettent d'illustrer certaines transitions de (4.6) : κ représente le pompage, ξ sont les recombinaisons spontanées et k l'échange de porteurs entre les QDs.

populations sont schématisées dans un diagramme d'énergie, cf. figure 4.3. Chaque population de QDs possède quatre niveaux d'énergie. Sur la figure, seule la BC est visible, la BV peut être déduite par symétrie. Les niveaux en résonance avec la cavité sont ceux entourant la bande interdite : le niveau E_i dans la figure qui contiendra les électrons excités et son symétrique dans la BV contenant les électrons non excités ; la différence d'énergie entre les deux niveaux correspond à l'énergie des photons du i -ème mode. Les QDs sont couplées électriquement par la couche de mouillage (WL), une monocouche de la même composition que les QDs, nécessaire à la croissance de celles-ci.

En partant des équations à taux de populations des lasers à SC et des lasers à QD [72] il est possible de construire un système d'équations à taux

de populations pour un laser à QD bimode loin du seuil [7] :

$$\begin{aligned} \frac{dN_1}{dt} = & \kappa_1 + k_1 N_2 P_1 - k_2 N_1 P_2 - \xi_1 N_1 \\ & - A_1 (N_1 - P_1) (S_1 + \epsilon S_2), \end{aligned} \quad (4.6a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_2}{dt} = & \kappa_2 + k_2 N_1 P_2 - k_1 N_2 P_1 - \xi_2 N_2 \\ & - A_2 (N_2 - P_2) (S_2 + \epsilon S_1), \end{aligned} \quad (4.6b)$$

$$\frac{dS_1}{dt} = -\alpha_1 S_1 + (A_1 (N_1 - P_1) + \epsilon A_2 (N_2 - P_2)) S_1, \quad (4.6c)$$

$$\frac{dS_2}{dt} = -\alpha_2 S_2 + (A_2 (N_2 - P_2) + \epsilon A_1 (N_1 - P_1)) S_2, \quad (4.6d)$$

avec pour chaque population de QDs : S_i le nombre de photons dans le mode i , N_i le nombre de boîtes en résonance avec le mode i dans l'état excité, P_i le nombre de boîtes en résonance avec le mode i dans l'état non excité. La somme des deux $B_i = N_i + P_i$ est constante par construction. κ_i représente le pompage, A_i le gain modal, ξ_i les fuites des porteurs dans l'état excité et α_i les fuites de la cavité.

Le paramètre ϵ est défini par

$$\epsilon = \frac{1}{1 + (2hf/\gamma)^2} = \frac{1}{1 + 4\mathcal{F}^2}, \quad (4.7)$$

avec hf l'énergie qui sépare les deux modes et γ l'élargissement homogène supposé identique pour les deux populations de QDs, cf. figure 4.1. Le paramètre ϵ est compris entre 0 et 1. Il représente la proportion d'énergie transmise par l'autre mode avec l'élargissement homogène. Ce paramètre dépend non seulement de la différence de fréquence f qui sépare les deux modes mais aussi des conditions de croissance des QDs. Pour un côté pratique nous utiliserons la fréquence normalisée \mathcal{F} définie comme

$$\mathcal{F} = \frac{hf}{\gamma}. \quad (4.8)$$

La résolution des équations (4.6) a pu être faite dans le cas stationnaire en utilisant un logiciel de mathématiques [73], les résultats sont disponibles

dans les matériels supplémentaires de [36]. Sept **solution stationnaire (SS)** de (4.6) sont alors possibles. Les deux premières sont des solutions nulles et donc peu intéressantes ($S_1 = S_2 = 0$). Parmi ces deux, une seule solution possède un nombre positif de porteurs et, est donc la seule vraisemblable. Les deux solutions suivantes correspondent à deux lasers monomodes. Finalement, une seule solution possède les deux modes non nuls ($S_1 > 0$ et $S_2 > 0$) et est physiquement vraisemblable. C'est cette solution qui sera utilisée afin d'en analyser la stabilité.

4.2.2 Symétrie parfaite entre les modes

Une première hypothèse, afin d'analyser (4.6), est de poser une symétrie dans le régime bimode : les deux modes ont une intensité similaire. De plus, nous choisissons les mêmes paramètres matériels et optiques pour les deux modes. Cela donne $k_i = k$, $\kappa_i = \kappa/2$, $A_i = A$, $B_i = B$ and $\xi_i = \xi$. Les fuites de la cavité α_i restent différentes, car leur variation servira à déterminer C par (4.5). La **SS** du nombre de porteurs dans l'état excité voit sa forme se simplifier :

$$N_i^{\text{ss}} = \frac{B}{2} + \frac{\alpha_i - \alpha_j \epsilon}{2A(1 - \epsilon^2)}, \quad (4.9)$$

avec $j \neq i$.

La solution du nombre de photons reste cependant peu simple :

$$S_1^{\text{ss}} = \frac{\kappa - B\xi}{2} f_- - \frac{kB(\alpha_1 - \alpha_2)}{2A(1 - \epsilon)} f_+ - \frac{\xi}{2A(1 + \epsilon)}, \quad (4.10)$$

où f_+ et f_- sont des fonctions de α_1 et α_2 :

$$f_{\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{\alpha_1 - \epsilon\alpha_2} \pm \frac{\epsilon}{\alpha_2 - \epsilon\alpha_1}. \quad (4.11)$$

Pour continuer il faut évaluer le point où les deux fuites sont égales, $\alpha_i = \alpha$. Les équations devenant alors complètement symétriques, il est possible d'obtenir des solutions analytiques simples en posant $K_{12} = K_{21} = K$; même si cette hypothèse paraît forte, elle a cependant déjà été utilisée afin d'étudier

la stabilité bimode dans [74]. Il vient alors exactement le même résultat même si le système laser considéré n'est pas le même :

$$C = \left[\frac{1 - (\Omega_L/\Omega_R)^2}{1 + (\Omega_L/\Omega_R)^2} \right]^2, \quad (4.12)$$

avec pour notre part

$$\frac{\Omega_L}{\Omega_R} = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \sqrt{\frac{a}{2 + a}},$$

où le paramètre $a = A(1 + \epsilon)(\kappa - B\xi)/(kB\alpha)$, qui rend compte du matériau, prend une forme plus simplifiée $a = \xi g_0/(kB\alpha)$ en introduisant le gain non saturé g_0 [36].

Le résultat est surprenamment simple compte tenu de (4.10) et (4.11). Deux paramètres seulement permettent d'obtenir le facteur de couplage. Le premier est ϵ , caractérisant la capacité de discerner les modes, le second paramètre étant a . Dans l'expression de a , ξ et kB dépendent du matériau, alors que g_0 et α dépendent du design du laser et de son point d'opération.

Comme $a > 0$ au-dessus du seuil, et que $0 \leq \epsilon \leq 1$, la solution bimode est théoriquement tout le temps accessible. Cependant, comme spécifié dans le §4.1.2, en pratique un régime bimode est atteignable lorsque $C < 0.95$; cette valeur correspond alors à $\epsilon = 0.80$ ou encore $\mathcal{F} = 0.253$. Pour résumer, même si c'est théoriquement possible d'avoir un régime bimode possible dès que $\mathcal{F} \neq 0$, il est très difficile d'avoir un battement à une fréquence de moins d'un quart de l'élargissement homogène sans découpler artificiellement les modes.

La figure 4.4 montre le facteur de couplage en fonction des deux précédents paramètres. Un régime bimode est obtenu dans le cas idéal, quand a et \mathcal{F} sont grands. La ligne blanche définit la limite pratique de ce régime fixé à $C < 0.95$. Cette limite montre que la valeur minimum de \mathcal{F} augmente à l'infini si a devient plus petit que 0.5. Au-delà de cette limite, seuls les modes bien séparés peuvent réussir à osciller.

L'équation (4.12) montre avant tout que le paramètre clé pour obtenir un facteur de Lamb faible est le couplage par la largeur homogène qui devient prépondérant lorsque la fréquence de battement est faible. Si aux tempéra-

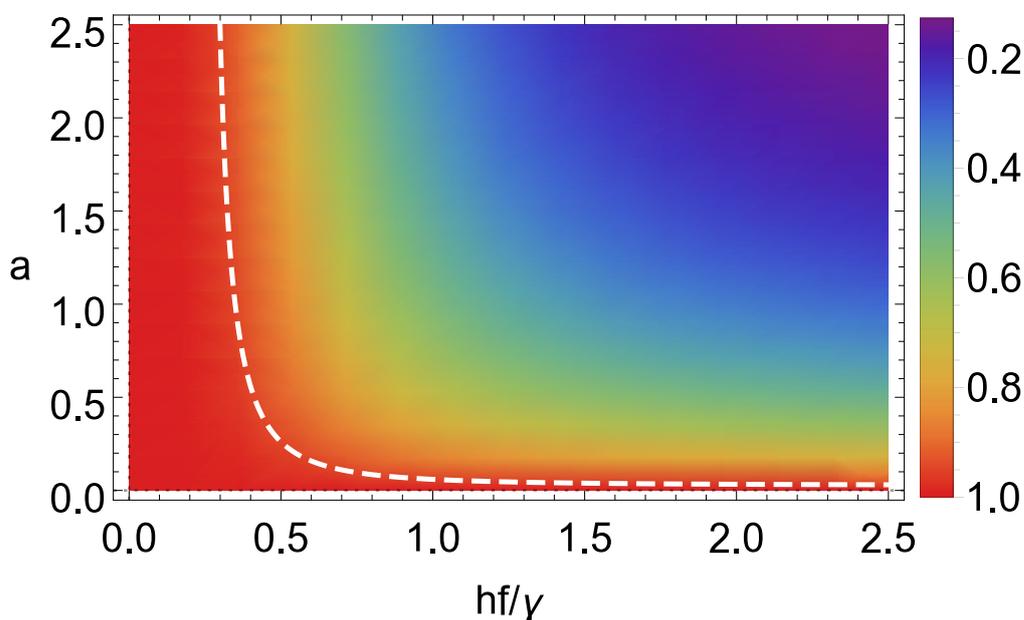


FIGURE 4.4 – Valeur du facteur de couplage de Lamb C dans le cas symétrique en fonction de la fréquence normalisée \mathcal{F} et du paramètre a . La ligne en pointillés blancs correspond à $C = 0.95$, une limite pratique du maintien du régime bimode.

tures basses ceci est toujours assez simple, cela n'est plus forcément vrai à température ambiante [75-79]. Alors (4.12) montre que pour des structures particulières où a serait grand la marge de fonctionnement bimode serait encore conséquente. Mais dans la réalité cela impose un petit nombre de boîtes actives B , des pertes optiques dans le mode et hors du mode faible, donc un β grand, tout en pouvant supporter un gain et un pompage fort : c'est l'image d'un milieu de gain idéal dans une structure de cavité ultime qui n'est peut-être pas encore d'actualité. En conclusion un laser bimode uniaxe (avec les zones de gain des deux modes confondus) est clairement envisageable et plus aisé avec des boîtes mais seulement tant que la fréquence de battement permet de dissocier suffisamment les gains des deux modes avec l'élargissement homogène.

4.2.3 Dissymétrie entre les modes

Précédemment nous avons traité le cas symétrique, qui peut cependant paraître un peu trop éloigné de la réalité. Il a néanmoins l'avantage de fournir une solution analytique. Dans un cas moins parfait, pour pouvoir maintenir un régime bimode, il est nécessaire d'instaurer une dissymétrie dans les gains ou les pertes. Si le gain et les pertes sont les mêmes pour les deux modes, le laser aura tendance à maintenir le mode de plus basse énergie. Afin de modéliser cette dissymétrie nous introduisons un nouveau paramètre r_α défini tel que :

$$r_\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \quad (4.13)$$

Par simplicité, nous supposons seulement une dissymétrie sur les pertes et les gains mais pas sur le pompage, ainsi

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa. \quad (4.14)$$

En supposant que le pompage est suffisamment élevé, r_α est alors défini uniquement sur un certain intervalle, tel que

$$\frac{2\epsilon}{1 + \epsilon^2} < r_\alpha < \frac{1 + \epsilon^2}{2\epsilon}, \quad (4.15)$$

puisque en dehors de cet intervalle, l'étude analytique lorsque $\kappa \rightarrow \infty$ montre qu'au moins une des deux solutions de S^{SS} devient négative. La solution $r_\alpha = 1$ correspond au cas symétrique de la solution analytique (4.12).

À l'intérieur de cet intervalle, malgré le fait qu'il n'y a pas de solution analytique simple, il est tout à fait possible d'obtenir des résultats numériques. Certains de ces résultats numériques sont représentés sur la figure 4.5.

Cette figure montre pour différents jeux de paramètres le facteur de couplage de Lamb C , ainsi que K_{12} et K_{21} , en fonction de r_α . Sur ces solutions on voit que les valeurs K_{12} et K_{21} varient énormément avec r_α . Malgré cela, le facteur C varie très peu, ce qui le positionne comme une caractéristique intrinsèque d'un laser. Le point où les facteurs K_{12} et K_{21} se croisent cor-

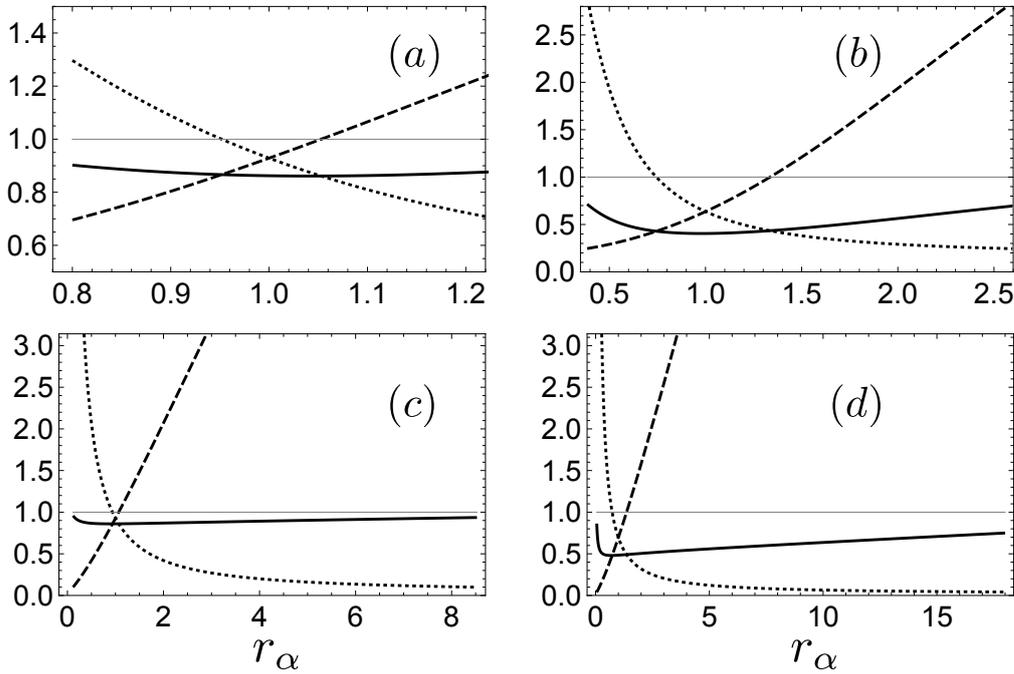


FIGURE 4.5 – Valeur du facteur de couplage de Lamb C (ligne pleine) et facteurs K_{12} (tirets) et K_{21} (pointillés) en fonction du rapport des pertes de la cavité r_α . Différents jeux de paramètres sont montrés, chacun correspond à des solutions où les deux modes sont de même ordre de grandeur. Les paramètres sont : (a) $\mathcal{F} = 0.5$, $a = 1$, $kB/\xi = 0.5$ (b) $\mathcal{F} = 1$, $a = 2$, $kB/\xi = 0.2$ (c) $\mathcal{F} = 2$, $a = 0.1$, $kB/\xi = 2$ (d) $\mathcal{F} = 3$, $a = 0.5$, $kB/\xi = 1$

respond au cas symétrique et se trouve donc en $r_\alpha = 1$. La valeur minimale du facteur C se situe alors aux alentours du cas symétrique. Ces deux points coïncident pour tous les cas saufs pour le cas (d), et dans ce cas la valeur de C du cas symétrique est tout de même très proche de sa valeur minimum. Le dernier point intéressant à voir est que dans tous les cas $C < 1$ et qu'il n'est pas difficile de trouver un jeu de paramètres permettant $C < 0.95$. Cela montre que, dans le cadre du modèle, les lasers à QD sont un très bon candidat pour un laser bimode stable.

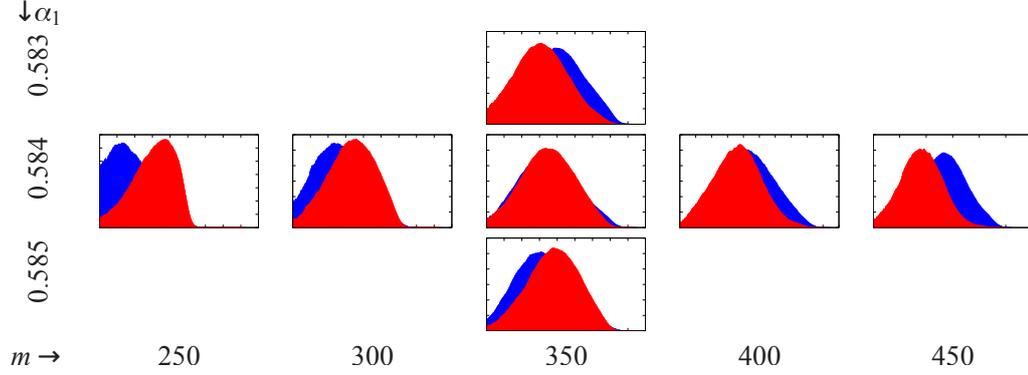


FIGURE 4.6 – Distribution des photons pour chaque mode d’un laser bimode obtenu sur le modèle microscopique Markovien [22]. Sur chacune des figures, plus la distribution est située vers la droite plus l’intensité du mode est importante. Le mode rouge correspond au **mode de basse énergie (LEM)** et le mode bleu correspond au **mode de haute énergie (HEM)**. Les différentes distributions sont comparées en fonction des fuites du **HEM** (axe vertical), et du pompage (axe horizontal).

4.3 Facteur de couplage de Lamb dans les lasers à puits quantiques

4.3.1 Modèle

L’étude du régime bimode dans les **QWs** a pu être réalisée avec le modèle microscopique dans [22]. La figure 4.6, extraite de la référence, présente la distribution des photons pour chaque mode d’un laser bimode. La figure présente un changement de mode dominant en augmentant le pompage, du **LEM** vers le **HEM**. La distribution du nombre de photons de **HEM** se décale vers la droite en augmentant le pompage (axe horizontal), dépassant le **LEM** à fort pompage. La figure montre aussi qu’il est possible de faire ce même changement de mode en diminuant les fuites de la cavité pour le **HEM**¹. Le changement de mode avec les fuites de la cavité s’explique simplement en sachant que l’amplification d’un laser dépend du gain. Pour le pompage cela

1. Dans cette publication la somme $\alpha_{LEM} + \alpha_{HEM}$ est constante, donc diminuer α_{HEM} fait aussi augmenter α_{LEM} . L’effet est cependant visible en ne faisant diminuer que α_{LEM} .

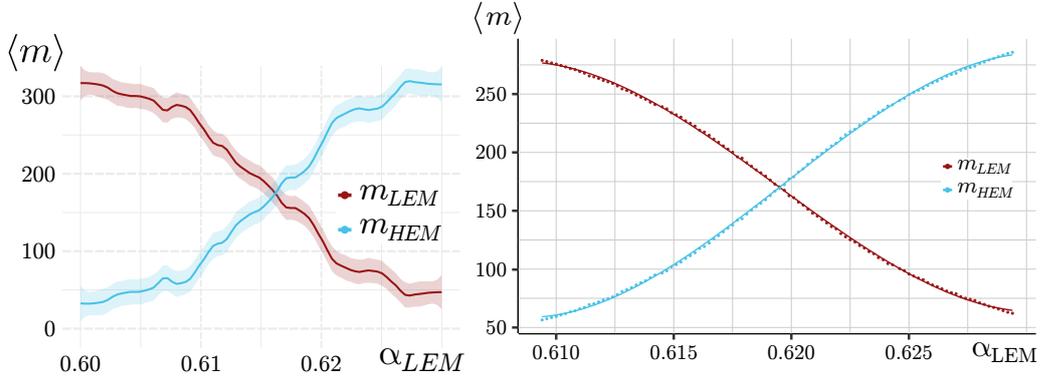


FIGURE 4.7 – Nombre moyen de photons dans la cavité pour le LEM et HEM, respectivement m_{LEM} et m_{HEM} , en fonction des fuites de la cavité pour le LEM. À gauche les résultats du modèle microscopique et à droite les résultats du modèle canonique. Les paramètres sont similaires pour les deux modèles, cependant l’efficacité du modèle canonique lui permet d’avoir beaucoup plus de points en beaucoup moins de temps.

devient plus subtil, ce n’est pas un saut de mode, il est donc probablement dû à l’échauffement artificiel des bandes que crée le modèle microscopique [80].

Les simulations pour obtenir les résultats de [22] ont nécessité plusieurs jours de calcul, le changement de mode étant très sensible. L’augmentation de la vitesse de calcul, grâce au modèle canonique, permet d’obtenir les mêmes simulations plus beaucoup rapidement : la série de simulation reproduisant les résultats de [22] a duré une dizaine de minute. Ce gain de performance permet donc d’envisager d’approfondir la compréhension du régime bimode dans les lasers à QW. La figure 4.7 présente le changement de mode obtenu avec le modèle microscopique à gauche et canonique à droite. Les courbes présentent le nombre moyen de photons dans la cavité pour chaque mode. Les courbes sont très similaires mais celles du modèle canonique sont beaucoup moins bruitées. Son efficacité lui permet d’obtenir plus de points, qui montrent, comme pour [22], que l’augmentation des pertes du LEM entraîne un changement de mode du LEM vers le HEM.

La valeur de α , où la moyenne des deux modes est la même, sera appelée le point d’intersection des modes. Sa présence laisse à supposer l’existence

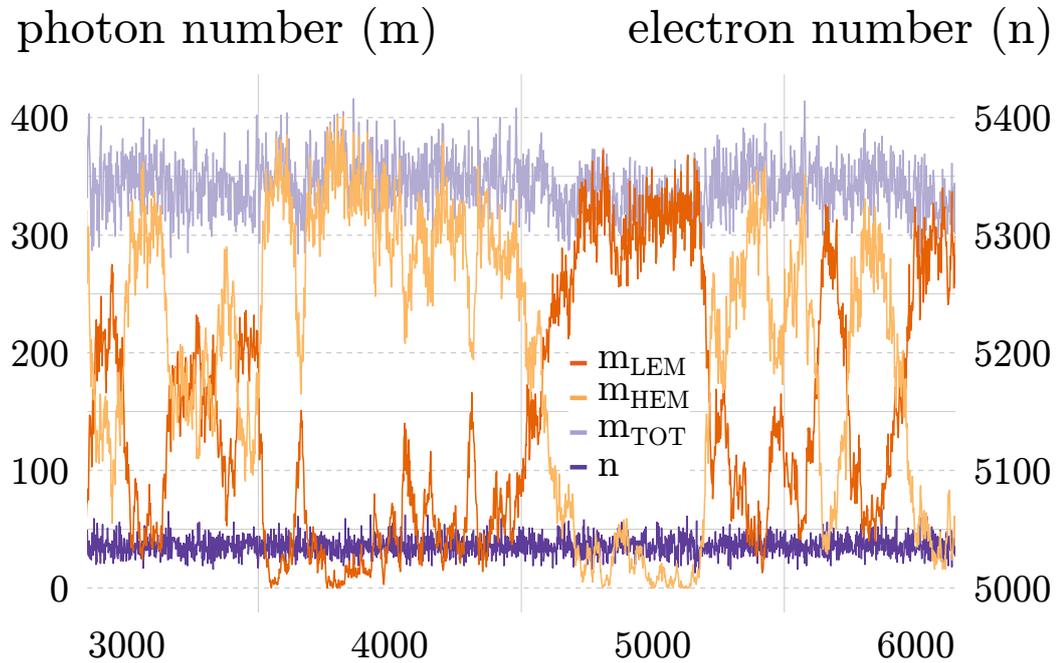


FIGURE 4.8 – Petite portion d’une trajectoire avec la chaîne de Markov canonique. Les paramètres sont les mêmes que pour la figure 4.7. Les fuites de la cavité, correspondent au point d’intersection de la figure 4.7, l’égalité entre m_{LEM} et m_{HEM}

d’un régime bimode. Comme pour le §3.3.2, l’observation de la trajectoire permet d’aider à la compréhension de la dynamique.

La figure 4.8 montre une partie d’une trajectoire sur le point d’intersection des modes du modèle canonique. La trajectoire présente un comportement intéressant : les deux modes ne sont que rarement ensemble. Lorsqu’un des deux modes prend de l’importance, l’autre décroît et les deux oscillent en opposition de phase. La trajectoire du nombre d’électrons et du nombre total de photons est étonnamment très stable. Ce qui montre que, malgré le fait que les modes, pris séparément, soient peu stables, le laser dans son ensemble est lui stable et peu bruyé.

Expérimentalement la stabilité du régime bimode serait observée avec la largeur de raie, le bruit de battement étant interférométrique. Nous ne prenons pas en compte dans ce modèle la phase optique, c’est donc impossible à reproduire proprement. Afin de pouvoir quantifier la stabilité des modes, il

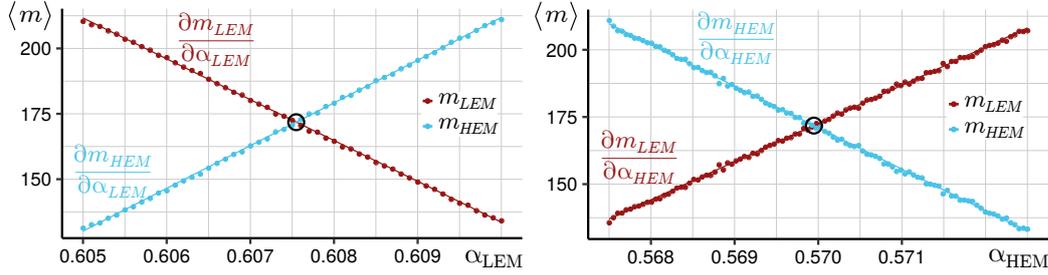


FIGURE 4.9 – Procédure pour le calcul des facteurs K afin de retrouver le facteur de couplage de Lamb. Les courbes présentent l'intensité moyenne de chaque mode en fonction des fuites de la cavité, LEM à gauche et HEM à droite. Le cercle noir représente le point de croisement des modes, il correspond aux mêmes paramètres sur les deux figures. C'est aussi le même point de croisement des modes de la figure 4.7. Les fits linéaires sur chacune des courbes permettent de calculer les différents facteurs K .

est possible de calculer le facteur de couplage de Lamb C similairement avec la procédure de Brevaille *et al.* [37].

Pour cela, la première étape est de trouver le point d'intersection des modes. Il peut être obtenu en reproduisant les points de la figure 4.7. Au niveau du point d'intersection la variation d'intensité de chaque mode est linéaire. L'extraction du point d'intersection peut simplement se faire grâce à une double régression linéaire puis en fixant la même valeur de $\langle m \rangle$ afin d'en trouver la valeur de α correspondante cf. figure 4.7. Cette première partie est donc facilement automatisable. La seconde série de simulations sera divisée en deux groupes cf. figure 4.9. Dans chaque groupe, des simulations indépendantes seront lancées avec un des deux α qui variera légèrement entre chaque simulation. Le but est de rester dans le domaine linéaire autour du point d'intersection². Une régression linéaire sur chacun des groupes, pour chacun des modes permet de calculer le facteur de Lamb. Ainsi pour l'exemple le facteur K_{12} se calculera en faisant le rapport des coefficients directeurs de chacune des régressions linéaires pour la série de simulations faisant varier les fuites de la cavité du second mode, cf. (4.3).

2. Cette variation a été faite en pratique avec $\alpha = \alpha_{inter} \pm 0.0025$ car visuellement la variation d'intensité restait linéaire. Il serait plus intéressant de se fixer un paramètre objectif tel qu'une limite sur le coefficient de détermination lors de la régression linéaire afin d'augmenter l'automatisation du processus.

Le facteur de couplage pour le cas de la figure 4.8 est alors $C = 0.96173 \pm 3 \times 10^{-5}$, avec $K_{12} = 0.90108 \pm 2 \times 10^{-5}$ et $K_{21} = 1.06731 \pm 2 \times 10^{-5}$, tous les trois avec un intervalle de confiance à 95%. Cela montre premièrement que le régime bimode est possible en théorie, comme $C < 1$. Cependant, comme C est en dessous de la marge pratique que nous nous sommes fixée, le maintien du régime bimode est très compliqué. Cela est très bien illustré sur la figure 4.8. Le régime est visuellement plutôt bistable, il présente des basculements très fréquents d'un mode à l'autre et peu de coexistence effective des modes.

4.3.2 Confrontation avec l'expérience

Brevaille *et al.* ont observé un facteur de couplage de Lamb de $C = 0.839 \pm 0.023$ [37]. Ce facteur de couplage est largement en dessous de nos valeurs, et en plus ils montrent que la valeur de C ne dépend pas de la différence de fréquence entre les deux modes. La différence d'énergie entre les deux modes est comprise entre 3.4 meV et 0.11 meV. La figure 4.10 essaye de reproduire ces résultats grâce à notre modèle. Le facteur C et les facteurs K qui le composent sont calculés avec la méthode précédente et affichés en fonction de la différence d'énergie entre nos deux modes. Nous voyons que contrairement à Brevaille *et al.* les facteurs K_{12} et K_{21} évoluent nettement en changeant la différence entre les deux modes. De plus nos valeurs des facteurs K sont beaucoup plus proches les unes des autres.

La variation du facteur C avec l'écart de fréquence entre les modes peut être observée, même si celle-ci est très faible : le fit linéaire donne un coefficient directeur de 5×10^{-4} . Ce même fit montre une intersection à l'origine à $C = 0.964$. Cela laisse à penser que le régime bimode sur un tel laser est toujours théoriquement atteignable mais difficilement réalisable en pratique.

Nous avons ici une limite sur l'écart énergétique des modes atteignable : nous avons fixé la limite entre deux niveaux successifs $\epsilon = 1$ meV. Il est impossible d'avoir une différence d'énergie entre les niveaux lasers inférieure à ϵ . Atteindre des différences d'énergie entre les modes inférieures à 1meV nécessite alors de diminuer ϵ créant un surcoût en temps de calcul.

Il est légitime de se demander si la valeur de ϵ a un impact sur la stabilité

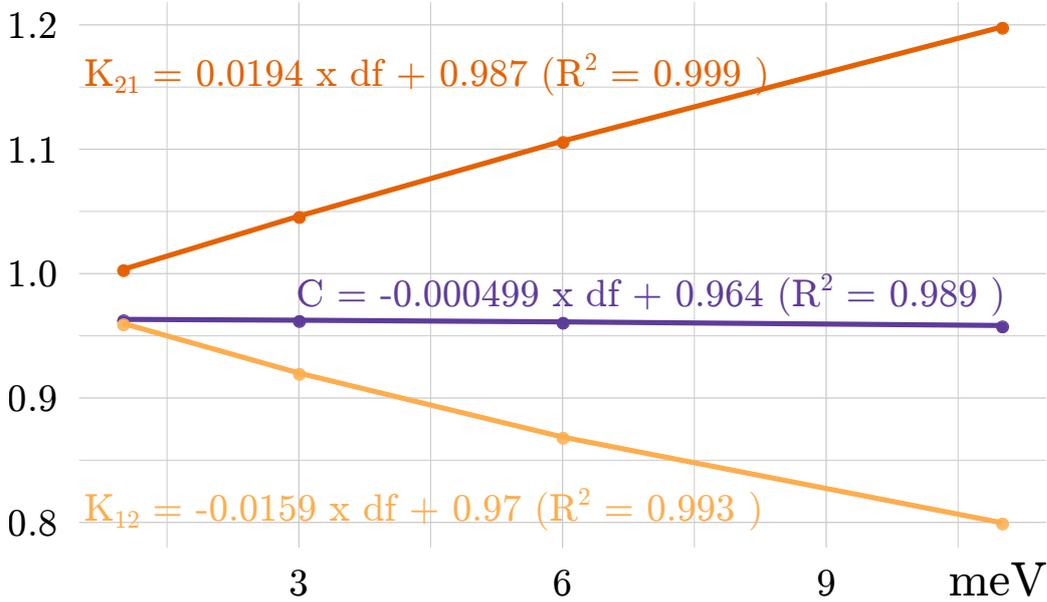


FIGURE 4.10 – Facteur K_{12} , K_{21} et facteur de couplage de Lamb C , en fonction de la différence d'énergie entre les deux niveaux lasers, en meV. Le protocole pour le calcul de ces points est présenté au §4.3.2. Les intervalles de confiance sont trop petits pour être visibles sur le graphique. Chaque point représente le calcul sur deux séries de 1600 simulations de durée 1000000 \tilde{t} . Les autres paramètres sont : $B = 10000$, $J = 202.30$, $q^\epsilon = 0.962090$ et $\beta = 1$. Les pertes de la cavité sont définies par le protocole, le niveau laser LEM est fixé au niveau 4999.

bimode ; la réponse est non. La même série de simulation que la figure 4.10 a été réalisée avec $\epsilon = 0.5$ meV. Cela nécessite de doubler le nombre de niveaux qui sépare les niveaux laser afin que les conditions soient les mêmes. Le résultat n'est alors pas discernable de la figure 4.10, ce qui permet de dire que changer ϵ n'a aucune conséquence sur la stabilité du régime bimode.

La valeur du facteur C de 0.839 de Brevaille *et al.* reste nettement inférieure à celle du modèle canonique, même si celui-ci produit aussi un comportement idéalement bimode stable. Une des possibilités pour expliquer ce phénomène serait une non-uniformité du milieu de gain qui rendrait les modes plus indépendants. Nous basons cette supposition sur l'expérience [37], pour laquelle un spot de pompage externe recouvre largement la tache de focalisation calculée de chacun des modes. Cependant la longueur d'onde très

légèrement différente des deux modes, et la grande longueur de la cavité produisent des points focaux dont les *waists* sont de 30 et 31 μm ; il existe donc environ 5% du milieu de gain qui n'adresse qu'un seul mode. Tout en restant dans le cadre de notre modèle, il est possible de modéliser cette non-uniformité, en couplant plusieurs lasers électriquement et, en imposant un gradient de pompage. Cela sera fait dans la prochaine section.

4.4 Laser à deux dimensions

Le but de la mise en place du modèle de laser à deux dimensions (2D) est de pouvoir observer les implications du couplage spatial dans la stabilité bimode. Le couplage entre émetteurs isolés a déjà montré des conséquences dans la dynamique du laser :

- Elk [8] a étudié l'implication de plusieurs émetteurs couplés dans un modèle quantique. L'augmentation du nombre d'émetteurs induit une petite variation dans l'état stationnaire, mais a une dépendance linéaire avec la variance des photons. Le nombre d'émetteurs pose alors une contrainte technique importante qui fait qu'il est très difficile de le simuler.

- Plus récemment, Sàez-Blàzquez *et al.* [9] ont étudié une collection d'émetteurs couplés avec un champ électromagnétique, mais non couplés entre eux. Ils ont pu observer qu'un nombre d'émetteurs plus important permet d'accroître la fréquence des oscillations de Rabi. Ces oscillations ne sont pas visibles dans notre modèle car elles nécessitent un couplage fort entre la cavité et les porteurs. Dans un jeu de paramètres très restreint, augmenter le nombre d'émetteurs permet d'obtenir de la lumière sous-poissonienne.

- L'augmentation du nombre d'émetteurs est à la base de la nuance entre un laser nanoscopique et un laser mésoscopique. C'est pourquoi dans un autre cas, l'étude du seuil des lasers mésoscopiques, Chow *et al.* [50] étudient l'augmentation du nombre d'émetteurs afin de réguler les photons.

- Ces modèles montrent le couplage entre plusieurs émetteurs et la cavité, cependant les émetteurs ne sont pas couplés électriquement entre eux. Guisado *et al.* [13] apportent une alternative intéressante en utilisant un automate cellulaire. Cette étude se rapproche de notre vision du laser avec des

processus : en considérant des règles simples régissant le système, mais qui permettent l'observation de comportements complexes. Cette étude suppose de pouvoir localiser les photons précisément dans le maillage. Cet aspect est gênant, le photon n'étant pas ponctuel, ou du moins, beaucoup moins localisé que l'électron, ce qui est implicite dans ce travail. À titre de règle rapide, la seule localisation possible du photon serait une tache d'Airy dont le rayon est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde. Les applications visées pour nos lasers sont les télécommunications optiques, qui se font à $1.55\mu m$, or les lasers mésoscopiques ont un milieu de gain nettement plus petit que cette longueur d'onde.

- L'équipe de [81] possède un modèle similaire au nôtre modélisé par une chaîne de Markov, résolue stationnairement grâce aux équations maître. Les taux de transition de la chaîne ont été calculés grâce à la mécanique quantique. Ils ont couplé plusieurs émetteurs indépendants avec la cavité. Ils montrent dans cet article qu'augmenter le nombre d'émetteurs indépendants revient au même que d'augmenter le facteur de couplage cavité-émetteur. L'équipe, pour continuer sur les conséquences d'émetteurs multiples, a préféré modéliser plus globalement le laser [11]. Les émetteurs sont plongés dans un bain de photons et de phonons. L'approche s'éloigne donc de l'aspect processus qui inspire la nôtre.

4.4.1 Description du modèle 2D

Description du modèle

L'idée du laser 2D est de pouvoir simuler l'aspect spatial du laser en couplant plusieurs des lasers abordés précédemment. Pour cela, le champ électromagnétique sera couplé avec plusieurs émetteurs. Chaque émetteur sera représenté par sa BC et sa BV. Ces émetteurs sont répartis sur une grille régulière, cf. figure 4.11. Les émetteurs sont couplés électriquement entre eux avec des transferts d'électrons. Seuls les plus proches voisins sont considérés pour ces transferts.

Notre modèle de laser s'intéresse à l'interaction entre un ensemble quantifié de porteurs et un champ électromagnétique. Il serait faux de vouloir isoler

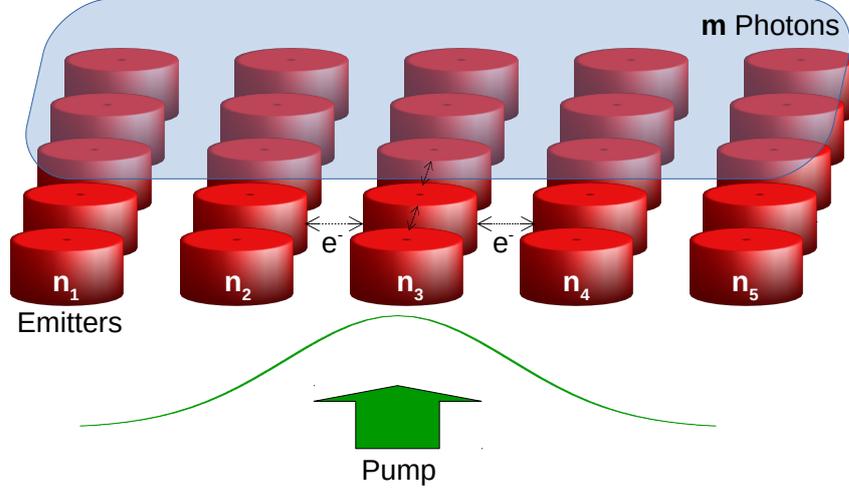


FIGURE 4.11 – Schéma du laser 2D

les photons sur une partie de notre maillage. L'ensemble de ces émetteurs partage donc la même cavité qui rappelle [9].

Découpler totalement spatialement le champ électromagnétique pose cependant un problème : la non-uniformité du milieu de gain n'est plus possible. L'hypothèse faite dans le §4.3.2, qu'un régime bimode pourrait s'expliquer par une non-uniformité du milieu de gain, n'est alors plus vérifiable. Pour garder une possibilité d'avoir une variation spatiale du milieu de gain, nous poserons dans nos taux de transition un facteur de couplage avec la cavité γ . Ce facteur représentera la probabilité que le champ électromagnétique participe à l'amplification photonique. Les taux de transition pour l'absorption et pour l'émission du j -ème émetteur pour le i -ème mode deviennent alors respectivement

$$\lambda_{A_{ij}} = \overline{\nu_{L_j}} \nu_{-L_j} m_j \gamma_{ij}, \quad (4.16)$$

$$\lambda_{E_{ij}} = \nu_{L_j} \overline{\nu_{-L_j}} (m_j \gamma_{ij} + \beta). \quad (4.17)$$

Seule l'émission stimulée est affectée, l'émission spontanée ne change pas, et donc par continuité l'émission hors du mode n'est pas changée.

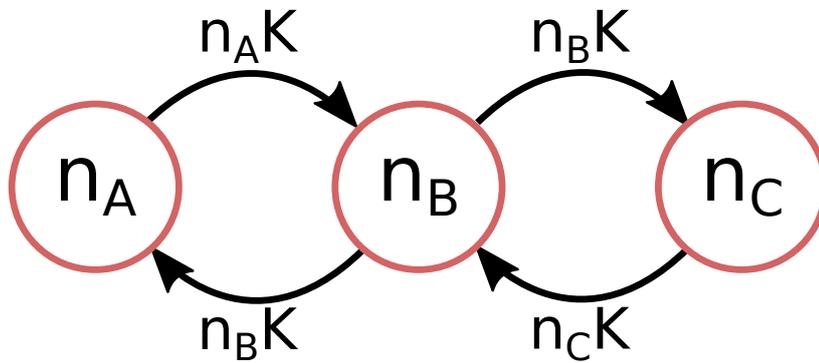


FIGURE 4.12 – Schéma de trois réservoirs de particules de A,B,C possédant chacun un nombre de particules respectivement n_A , n_B et n_C . Les transitions entre les bains sont marquées par des flèches avec leurs taux respectifs.

Le pompage est inhomogène, suivant l'idée d'un pompage optique ; il suit une gaussienne telle que le centre soit la partie ayant le pompage le plus fort. La température du maillage est elle aussi inhomogène. Les zones où le pompage est le plus élevé sont les zones les plus chaudes. La température est alors alignée sur la gaussienne imposée pour le pompage. Les variations de température dues aux transferts d'électrons sont supposées négligeables, ainsi le gradient de température du maillage est supposé stationnaire. La température à chaque point du maillage est imposée à l'initialisation.

Transfert d'électrons

L'objectif est de pouvoir simuler des déplacements d'électrons entre les émetteurs qui soient similaires à un mouvement brownien. Un taux de transition entre les émetteurs proportionnel au nombre de particules permet de modéliser une diffusion des porteurs. Pour visualiser ceci, considérons un système d'une diffusion de particules discrètes entre trois positions, cf. figure 4.12.

Le transfert d'électron dans chaque direction est proportionnel au nombre de particules. Le nombre de particules en B, n_B peut s'approcher par

$$n_B(t + \delta t) = n_B(t) + K\delta t [n_A(t) + n_C(t) - 2n_B(t)]. \quad (4.18)$$

Une diffusion de particules est définie dans le cas à une dimension par :

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2}, \quad (4.19)$$

avec D le coefficient de diffusion. Les schémas des différences finies pour les différentielles de gauche et droite donnent respectivement (4.20) et (4.21) :

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = \frac{n(x, t + \delta t) - n(x, t)}{\delta t} + o(\delta t), \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2} = \frac{n(x - \delta x, t) - 2n(x, t) + n(x + \delta x, t)}{\delta x^2} + o(\delta x^2). \quad (4.21)$$

En réintégrant ces deux dernières dans (4.19) nous obtenons finalement

$$n(x, t + \delta t) = n(x, t) + \delta t D \left[\frac{n(x - \delta x, t) - 2n(x, t) + n(x + \delta x, t)}{\delta x^2} \right] + o(\delta t + \delta x^2). \quad (4.22)$$

La ressemblance entre (4.22) et (4.18) est visible. Nous choisirons donc, pour les transferts d'électrons, un taux proportionnel à leur nombre.

Ce transfert d'électrons doit pouvoir aussi dépendre de la température. En effet, plus la variation de température augmente, plus le nombre de transferts d'électrons doit augmenter. Cette prise en compte de la température sera effectuée grâce au critère de Metropolis, comme réalisé dans le §1.2.2 pour les changements de niveaux d'énergie des électrons. Si la température du premier bain est supérieure au second bain, $T_1 \geq T_2$, la transition est acceptée. Inversement, si $T_1 < T_2$ la probabilité que cette transition soit acceptée est de : $\exp(-E/k_B T_1)$, avec E l'énergie résultante de la transition, soit $E = k_B(T_2 - T_1)$.

Pour les conditions aux bords, la manière la plus simple est de définir une réflexion totale aux bords. Comme une réflexion n'entraînerait pas un changement d'état car le nombre d'électrons dans l'émetteur ne change pas, il suffit d'avoir un taux de transition nul pour les transferts d'électrons aux bords. Ne pas avoir de transition aux bords correspond donc à une réflexion sur ces bords.

Pour résumer, le taux de transition associé au transfert d'électron d'un émetteur i vers émetteur j voisin est

$$\lambda T_{ij} = K n_i \min [\exp(1 - T_j/T_i), 1]. \quad (4.23)$$

Le nombre K est alors une constante de normalisation qui modélise le couplage entre les émetteurs. Plus K est grand, plus les émetteurs sont couplés. La valeur n_i est le nombre d'électrons dans la bande du i -ème émetteur dont on considère le transfert.

Depuis le début du chapitre nous parlons de transfert d'électrons sans préciser l'énergie de celui-ci. Comme le modèle canonique a seulement besoin de connaître le nombre d'électrons dans la bande pour en calculer la probabilité de présence aux niveaux laser et de pompe, le nombre d'électrons à utiliser sera le nombre d'électrons dans la bande. Les bandes seront considérées séparément. Il y aura donc des transferts d'électrons, d'émetteurs voisins, entre les deux BCs ou entre deux BVs mais pas de croisements. Contrairement à précédemment, les transitions affectant la BC ne sont pas directement opposées aux transitions affectant la BV. En effet, auparavant une transition ajoutant un électron en BC en retirait un en BV et inversement. Maintenant, un transfert d'électron en BC ne changera pas les nombres d'électrons en BV et un transfert d'électron en BV ne changera pas les nombres d'électrons en BC. Il faudra donc simuler les deux bandes pour chaque émetteur.

La double symétrie des bandes, (2.37), permet cependant de simplifier le problème. Il sera ainsi possible d'écrire

$$\nu_L(n_C) [1 - \nu_{-L}(n_V)] = \nu_L(n_C) \nu_L(B - n_V). \quad (4.24)$$

Il n'est alors pas nécessaire de connaître les probabilités de présence des deux bandes pour les différentes transitions photoniques ou de pompe. Il faut cependant rajouter le nombre d'électrons en bande de valence dans l'espace d'état.

Implémentation

La nouvelle chaîne de Markov change d'espace d'état. Auparavant pour les lasers à puits quantiques du modèle canonique, nous considérons l'espace d'état (m_1, \dots, m_M, n) , avec M le nombre de mode lasers. Dorénavant, avec le modèle 2D, l'espace d'état est $(m_1, \dots, m_M, n_1^V, \dots, n_N^V, n_1^C, \dots, n_N^C)$, avec N le nombre d'émetteurs, n_i^V et n_i^C le nombre d'électrons du i -ème émetteur respectivement en BV et BC. Les sous-espaces associés aux électrons sont bornés, contrairement aux sous-espaces associés aux photons. L'ensemble des transitions de cette nouvelle chaîne est décrit dans la table 4.1. Le graphique de transition ne peut plus être décrit simplement en deux dimensions. Les transitions photoniques restent identiques mais chaque émetteur en possède. Les sorties de la cavité n'interagissant pas avec les bandes, les sorties des photons sont donc communes à tous les émetteurs. Le pompage est distribué entre chacun des émetteurs en suivant une gaussienne. Les émetteurs sont répartis sur une grille 2D régulière, cf. figure 4.11. Les transferts d'électrons sur chacune des bandes ne se font qu'entre les émetteurs voisins, soit les plus proches sur chaque dimension. La nouvelle chaîne est très grosse, le nombre d'états possible étant extrêmement important, afficher le générateur infinitésimal est impossible ; une résolution stationnaire est donc difficilement envisageable. Cependant, le nombre d'états accessibles est suffisamment restreint pour pouvoir le simuler.

L'implémentation de la chaîne a été faite dans un premier temps avec la librairie MARMOTE[82]. C'est une librairie en C++ utilisée pour la résolution de chaînes de Markov. Pour créer la chaîne, MARMOTE a besoin du générateur infinitésimal. Comme dit précédemment, le générateur infinitésimal est trop grand pour être stocké en mémoire. Le générateur ne sera donc pas envoyé tel quel, mais il sera envoyé, pour chaque état, la liste des états accessibles associée à leurs taux de transitions. MARMOTE est une librairie générique qui traite des chaînes de toutes les formes. Pour avoir ce côté générique, les états sont représentés sur un vecteur, donc une seule dimension. Pour pouvoir simuler notre modèle dont l'espace d'état est $(m_1, \dots, m_M, n_1^V, \dots, n_N^V, n_1^C, \dots, n_N^C)$, il a fallu une conversion entre notre espace d'état et le vecteur. MARMOTE fournit des outils afin d'aider cette

Nom	Change.	Taux de transition adimensionnés	conditions
Absorption	$n_i^C ++$ $n_i^V --$ $m_j --$	$\overline{\nu_{L_j}(B - n_i^C)} \overline{\nu_{L_j}(n_i^V)} m_j \gamma_{ij}$	\forall émetteur i \forall mode j
Émission	$n_i^C --$ $n_i^V ++$ $m_j ++$	$\nu_{L_j}(n_i^C) \nu_{L_j}(B - n_i^V) (m_j \gamma_{ij} + \beta)$	\forall émetteur i \forall mode j
Émission hors mode(s)	$n_i^C --$ $n_i^V ++$	$\nu_{L_j}(n_i^C) \nu_{L_j}(B - n_i^V) (1 - \beta)$	\forall émetteur i \forall mode j
Pompage	$n_i^C ++$ $n_i^V --$	$\overline{\nu_B(n_i^C)} \overline{\nu_B(B - n_i^V)}$	\forall émetteur i
Sortie de photons	$m_j ++$ $n_i^V --$	$\alpha_j m_j$	\forall mode j
Transfert d'électrons en BC	$n_i^C --$ $n_k^C ++$	$K n_i^C \min[\exp(1 - T_k/T_i), 1]$	\forall émetteur i et k t.q. k voisin de i
Transfert d'électrons en BV	$n_i^V --$ $n_k^V ++$	$K n_i^V \min[\exp(1 - T_k/T_i), 1]$	\forall émetteur i et k t.q. k voisin de i

TABLE 4.1 – Tableau résumant les différentes transitions dans le modèle de laser 2D. À chaque transition est associé le changement des variables, son taux de transition et les conditions de réalisation. m_j représente le nombre de photons du mode j , ν_k la probabilité de présence d'électrons au niveau k cf. (2.24). Le complémentaire de la probabilité de présence est noté $\bar{\nu}$, tel que $\bar{\nu}_k = 1 - \nu_k$. Les niveaux d'énergie de la BC sont numérotés de 1 à B . Les niveaux laser en BC de chaque mode j sont notés L_j , et n_i^C et n_i^V représentent le nombre d'électrons du i -ème émetteur en BC et BV. Les incréments ou décréments de particules sont notés respectivement $++$ et $--$. K représente le couplage entre les émetteurs, T_i la température du i -ème émetteur, α_j^{-1} le temps de vie des photons, β est la proportion des photons émis dans le mode, J_i est la fréquence de pompage du i -ème émetteur et γ_{ij} est le couplage du i -ème émetteur avec le j -ème mode de la cavité. Tous les taux de transition sont exprimés en \tilde{t}^{-1} .

conversion, en considérant le vecteur comme le produit cartésien de notre espace d'état. Cette conversion a été réalisée lors de la transmission des taux de transition, l'ensemble des taux de transition dépendant de l'état. Une trajectoire simulée par MARMOTE fournit un vecteur de numéros d'état et un vecteur de temps d'attentes. Il faut donc convertir ces états dans un espace d'état faisant apparaître le nombre de particules, afin de pouvoir les analyser. J'ai construit les fonctions de conversion dans les deux sens, entre l'espace d'état et le vecteur de numéro d'états. J'ai implémenté la transmission de l'ensemble des taux de transition entre chaque états. Et enfin, j'ai écrit les fonctions d'analyse de trajectoires à partir du vecteur de numéros d'états.

MARMOTE est un logiciel qui veut résoudre les chaînes de Markov de façon générique. Pour cela, l'intégralité des états doit être numérotée. Prenons un cas simple de cinq émetteurs possédant chacun deux bandes de 1000 niveaux d'énergie en résonance avec deux modes. Supposons que chacun des modes soit borné à 1000 photons. Le nombre d'états accessibles est donc 10^{36} . Sachant qu'un entier codé sur 64 bits ne peut représenter que 2×10^{19} combinaisons, nous voyons rapidement que le logiciel MARMOTE montre ses limites. Même si l'outil MARMOTE dans le cas de l'émetteur unique était utile, la réécriture de l'algorithme de Gillespie cf. §1.3.1 a été nécessaire afin de pouvoir simuler les trajectoires.

4.4.2 Résultats préliminaires

La section qui suit présente des résultats encore en cours d'acquisition au moment de la rédaction de ce mémoire. Pour la soutenance, les conclusions liées à ceux-ci pourront varier, et de nouvelles simulations seront faites. On s'attachera ici à comprendre l'implication de la dimension spatiale dans la stabilité bimodale, dans la continuité de §4.3.2. Pour cela nous reproduirons le protocole introduit pour calculer le facteur de Lamb, cf. §4.3.1, dans le laser 2D cf. table 4.1. Les paramètres sont les mêmes que pour le §4.3.1, hormis que le pompage est réparti uniformément sur l'ensemble des émetteurs. Nous fixons les fuites de cavité du LEM à 0.6, car comme nous le verrons par la suite, l'ajout d'émetteurs a tendance à augmenter l'écart des fuites de la

Nombre d'émetteurs	α_{LEM} ($m_{LEM} = m_{HEM}$)	α_{HEM} ($m_{LEM} = m_{HEM}$)	Facteur de Lamb
1	0.6	0.5482	0.9626 ± 0.0004
2	0.6	0.4537	0.9319 ± 0.0009
3	0.6	0.3735	0.9499 ± 0.0009

TABLE 4.2 – Résultats de la procédure du calcul de facteur de couplage de Lamb dans le cas du laser 2D en fonction du nombre d'émetteurs. La table montre les différentes fuites de la cavité à l'égalité des modes, ainsi que le facteur de Lamb calculé à cet endroit, grâce à la procédure de la §4.3.2. L'énergie qui sépare les modes est de 4 meV. Les valeurs sont calculées à partir de deux séries de 50 simulations de durée 5000 \tilde{t} . Le couplage électrique est fixé à 0 et le couplage émetteur-cavité est fixée à 1 pour les deux modes. Les autres paramètres sont similaires à ceux de [22].

cavité au point d'égalité des modes. Nous fixons le couplage électrique à 0, et le couplage émetteur-cavité à 1 afin d'observer seulement les implications de l'ajout d'émetteurs.

La table 4.2 représente les résultats préliminaires du laser 2D pour 1, 2 et 3 émetteurs. L'écart entre les fuites de la cavité nécessaire à l'égalité des modes augmente linéairement avec le nombre d'émetteurs, tel que : $\alpha_{HEM} = -0.0874 \times nmb_{emitters} + 0.633$, avec $R^2 = 0.998$. Cette différence des fuites de la cavité devient tellement importante, qu'au-delà de 3 émetteurs, ces fuites sont deux fois plus grandes pour le HEM que pour le LEM. Le facteur de Lamb correspondant à l'égalité des modes varie suffisamment pour pouvoir être noté. Cela montre que l'augmentation du nombre d'émetteurs a une incidence sur la stabilité bimodale. Nous pouvons voir que la stabilité avec plus d'un émetteur est inférieure à la marge expérimentale de 95% que nous nous sommes fixé, qui laisse à supposer la possibilité du maintien d'un régime bimode. Nous ne voyons pas de tendance linéaire se dessiner entre le facteur C et le nombre d'émetteurs. Comme le point d'égalité des modes a beaucoup varié sur chacune des déterminations du facteur de couplage, nous ne pouvons pas négliger la possibilité que la position de l'égalité de mode affecte la stabilité du régime bimode.

La partie qui va suivre est en cours de progression, la simulation d'une trajectoire durant environ trois minutes, un facteur de couplage de Lamb

demande quelques heures pour être obtenu. Nous allons donc dégager ici les axes de recherche que nous allons traiter d’ici à la soutenance. En augmentant le nombre d’émetteurs, nous allons valider, ou infirmer, la tendance linéaire de la position de l’égalité des modes, par rapport au nombre d’émetteurs. Nous allons aussi pouvoir examiner s’il est possible de trouver une tendance du facteur C . Le but est de pouvoir avoir suffisamment d’émetteurs afin les placer sur une ligne, et d’observer les différents couplages sur une dimension. La seconde dimension pourrait alors s’obtenir par symétrie circulaire. Afin de vérifier si le point d’égalité des modes a une importance, nous allons modifier le gain spatialement afin qu’une partie des émetteurs soit plus résonnante avec un des modes, et la seconde partie des émetteurs avec l’autre mode. Afin d’imiter la manipulation de Brevalle *et al.* [37], le couplage émetteur-cavité sera symbolisé par deux gaussiennes, une pour chaque mode, dont le ratio des largeurs à mi-hauteur représentera le ratio des *waists* cf. §4.3.2. Dans un premier temps, il faudra réaliser ces mesures avec un couplage électrique K nul, afin d’observer seulement les implications du couplage avec la cavité. L’impact du couplage électrique pourra s’observer en utilisant un facteur K croissant à partir d’une valeur négligeable. Un tel facteur K ne devrait rien changer à la stabilité bimodale. Pour que la probabilité de transfert d’électrons soit négligeable, il faut que le facteur K soit négligeable par rapport au nombre total d’électrons dans le système. Une augmentation progressive du couplage électrique permettra d’en déterminer les conséquences sur la stabilité bimodale.

Un résultat surprenant du modèle 2D a été réalisé avec deux émetteurs, dont un des deux n’est pas couplé avec la cavité ($\gamma_{11} = \gamma_{12} = 0$). Cet émetteur peut donc émettre spontanément, mais pas d’amplification possible par la cavité. Le point d’égalité des modes n’est alors que très légèrement altéré par rapport aux simulations avec un seul émetteur. Nous obtenons dans ce cas $C = 0.8416 \pm 0.0005$, qui est étonnamment faible comparé aux valeurs obtenues avec un ou deux émetteurs. Cet ajout d’émetteurs peut être considéré comme une augmentation de l’émission spontanée, tout en gardant la même résonance avec la cavité qu’avec un émetteur. Il sera donc intéressant d’étudier les variations de la stabilité par rapport à la valeur de β , qui semble,

crucial si l'on en croit les résultats de cette simulation.

4.5 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les lasers bimodes. Les cavités de ces lasers sont en résonance avec deux longueurs d'onde, ou modes. D'un point de vue pratique, le photomélange permettrait d'obtenir la fréquence correspondant à la différence de celles des deux modes. Les lasers bimodes ont le potentiel pour atteindre sans difficultés les fréquences THz pour lesquelles les sources électroniques classiques montrent leurs limites, en particulier à cause du bruit de multiplication. Un couplage entre les modes permet, s'il est idéal, d'avoir le bruit total du laser inférieur à la somme des bruits de chacun des modes. Un bruit minimal permet de générer un signal THz plus pur. C'est dans cette optique que IDYLIC essaye de fabriquer un laser bimode à milieu de gain partagé afin de pouvoir générer le battement THz à $1.55\mu\text{m}$, le plus pur possible. Cependant, le couplage entre les modes soulève le problème de la stabilité dynamique de ce régime. En effet, un laser bimode peut se retrouver dans plusieurs régimes : monomode ou bistable, le couplage entre les modes est si grand que l'amplification d'un mode anéantit le second, ou bimode stable avec les deux modes qui coexistent. Néanmoins c'est la solution bimode stable que nous cherchons à obtenir. Pour cela, le facteur de couplage de Lamb C est le critère de stabilité. Nous avons pu voir comment il pouvait être mesuré expérimentalement. Nous avons appliqué le même protocole à un modèle de laser à QD au §4.2 et à QW au §4.3. Nous avons pu voir que les QDs étaient beaucoup plus indépendantes, chaque famille de QD étant principalement résonnante avec un seul mode. Le couplage se fait alors, soit électriquement par la couche de mouillage, soit par les photons, d'énergies voisines, à cause de l'élargissement homogène. Nous avons montré que analytiquement, il est possible de trouver une solution qui ne dépend que de seulement deux paramètres. Le premier dépend du matériel et du design du laser, le second est une fréquence normalisée. Nous avons pu obtenir une solution très compacte de C dans le cas symétrique. Le cas non symétrique permet néanmoins d'obtenir des solutions numériques plus conformes à la

réalité. Nous avons pu voir que C est alors presque constant quel que soient les asymétries du gain et des pertes. Le régime bimode est théoriquement possible pour tous les lasers à QD. Cependant en pratique, pour avoir le maintien du régime, il faut que la fréquence qui sépare les modes soit plus grande que le quart de l'élargissement homogène.

Les lasers bimodes à QW avaient déjà été étudiés grâce au modèle microscopique. Nous avons pu approfondir l'étude de la stabilité bimodale grâce à l'efficacité du modèle canonique. Les résultats du modèle microscopique [22] étaient en réalité plus proche d'un régime bistable que d'un vrai comportement bimode. Nous avons aussi pu développer une procédure imitant la détermination expérimentale du facteur C . Par ailleurs, nous avons montré que la valeur de C dépend extrêmement peu de l'énergie qui sépare les deux modes. De plus, le facteur C ne dépend pas non plus de la résolution de la discrétisation des niveaux d'énergie, car les résultats à $\epsilon = 1\text{meV}$ sont les mêmes que pour $\epsilon = 0.5\text{meV}$. La solution bimodale est en théorie toujours possible, cependant elle n'est pas accessible en pratique. Les simulations montrant l'indépendance de la différence d'énergie des modes sur la stabilité bimode sont en accord avec les résultats de Breville *et al.* Cependant, leur équipe a réussi à maintenir un régime bimode stable avec $C = 0.839 \pm 0.023$. Il est donc nécessaire de modifier le modèle pour voir si une non-uniformité du milieu de gain, créée par le non-recouvrement parfait des deux modes de la cavité étendue, permet d'expliquer ce surcroît de stabilité. La modification du modèle a été construite théoriquement et pratiquement. Les résultats sont en cours d'acquisition.

Conclusion générale

Nous avons vu ensemble un modèle atypique de laser basé sur une chaîne de Markov : le modèle microscopique. Même si ce modèle a, par le passé, déjà permis d'obtenir des résultats intéressants, il souffre d'un temps de résolution très lent. Nous sommes partis du constat que la chaîne de Markov microscopique pouvait être considérée comme une composition de deux sous-chaînes. La résolution analytique de la sous-chaîne correspondant aux événements de thermalisation a permis de simplifier énormément le système, formant le modèle canonique. Lorsqu'une trajectoire nécessitait une heure de calcul par le passé, elle n'en demande qu'une seconde avec la chaîne canonique. Nous avons vu que cette approximation permettait de reproduire fidèlement les résultats du modèle microscopique. La seule différence entre les deux modèles provient de la distribution des temps d'attentes, où certains événements ultras courts sont plus rares dans le modèle microscopique. Nous avons montré qu'il est possible de reproduire des temps attentes ultras courts, pour le modèle canonique, sans sortir du cadre Markovien. Le nouveau modèle est donc aussi précis que l'ancien et génère des résultats quasiment instantanément.

Cette efficacité a offert la possibilité de complexifier le système, afin de le rapprocher d'un système réel. Nous avons ajouté la prise en compte des photons émis hors du mode afin de pouvoir observer un seuil. Nous avons découvert, grâce à la trajectoire, qu'au niveau du seuil supposé par la zone la plus bruyante, nous trouvions une alternance entre un régime cohérent et un régime éteint. Nous avons pu mettre en évidence que le cas $\beta = 0.1$ est encore très loin du laser sans seuil, le laser sans seuil ne présentant pas cette alternance de régime.

Nous avons montré que la mesure expérimentale du facteur de couplage

de Lamb, caractérisant la stabilité du régime bimode, pouvait être appliquée aussi bien sur des modèles de laser à QD que de laser à QW. Dans le cas des lasers à QD, nous avons obtenu des solutions numériques, et même analytiques dans le cas symétrique. Ces solutions montrent que les lasers à QD sont de bons candidats pour l'obtention d'un régime bimode stable et que la stabilité ne dépendait que très peu de l'asymétrie du système. Le modèle de laser à QW présentait, quant à lui, un régime visuellement bistable. Cependant la stabilité du régime ne dépend pas de la différence d'énergie des modes, tout comme observé expérimentalement. Un modèle prenant en compte l'aspect spatial du laser a été développé afin de comprendre l'implication de la spatialité dans la stabilité bimodale.

La thèse se déroulant sur un temps fini, il est difficile d'explorer toutes les possibilités que le sujet offre. Cependant il est utile de mentionner les perspectives que celui-ci propose.

Le passage au seuil a montré une alternance de régimes, il serait intéressant d'observer comment ces régimes sont affectés lorsque les émetteurs sont multiples tout en gardant le même pompage total. Le but serait de voir si le changement de caractéristique devient plus abrupt. De plus la durée du régime éteint est censée être inversement proportionnelle au nombre d'émetteurs. Il est donc possible d'avoir une durée de régime éteint négligeable avec un $\beta < 1$. Une comparaison entre un laser à plusieurs émetteurs possédant un β relativement faible, et le laser sans seuil étudié dans ce manuscrit pourrait être intéressante.

Les phases markoviennes ont montré leur intérêt en réduisant l'impossibilité d'une double émission ultra courte. Nous n'avons pas étudié les implications de ces phases sur la stabilité bimodale. Comme vu dans ce manuscrit ces phases permettent de reproduire le dépeuplement local des porteurs, ce qui pourrait faciliter les émissions dans l'autre mode. Ainsi tester les résultats de la stabilité bimode par rapport à l'importance de ces phases pourrait augmenter cette stabilité.

Le programme simulant la trajectoire de la chaîne a été conçu et développé de façon générique, il est ainsi possible d'intégrer le modèle de laser à QD dans celui-ci. Cette intégration n'a pas été encore faite. Celle-ci pourrait

répondre à la même question posée pour les lasers à *QW* : quelles sont les implications de la prise en compte de l'aspect spatial des lasers à *QD* ?

Pour les lasers à *QW*, nous avons supposé que tous les autres modes sont filtrés par la cavité et, ainsi, il n'existe seulement qu'une paire de niveaux d'énergie, en résonance avec la cavité. Cette hypothèse n'est pas forcément nécessaire, il faudrait pour cela considérer plus de niveaux laser en résonance avec la cavité et donc plus de modes. Une sélection de la cavité est alors toujours possible en affectant un facteur de fuite beaucoup plus important sur les modes non désirés. Une telle sélection des modes se rapproche plus de ce qui se passe dans un laser réel. Cette sélection était inenvisageable sur la chaîne microscopique, l'efficacité de la chaîne canonique rend cette approche concevable.

Glossaire

\tilde{t} unité de temps du modèle. 11, 12, 32–34, 43, 44, 52, 53, 57, 61–64, 70, 91, 99, 101

2D à deux dimensions. 92, 93, 98–102

ANR Agence Nationale de la Recherche. 3

BC bande de conduction. 3, 8–10, 12, 31, 32, 34–37, 42, 43, 45, 57, 59–61, 67, 69, 79, 93, 97–99

BV bande de valence. 3, 8–10, 12, 34, 35, 42, 43, 79, 93, 97–99

HEM mode de haute énergie. 86, 87, 89, 101

LEM mode de basse énergie. 86, 87, 89, 91, 100, 101

QD boîte quantique. 3, 5, 7, 19, 74–76, 78–80, 85, 103, 104, 106, 107

QED électrodynamique quantique. 5

QGS quantum gain switch. 62, 65, 68–71

QW puits quantique. 3, 5, 8, 19, 73–75, 78, 86, 87, 103, 104, 106, 107

SC semiconducteur. 2, 3, 8, 10, 12, 55, 78, 79

SS solution stationnaire. 81

VECSEL diodes laser à cavité verticale émettant par la surface. 3, 4

WL couche de mouillage. 79

Bibliographie

- [1] L. MANDEL et E. WOLF, *Coherence and quantum optics*. New York : cambridge University press, 1995, p. 1166. DOI : [10.1017/CB09781139644105](https://doi.org/10.1017/CB09781139644105).
- [2] M. TANI, P. GU, M. HYODO, K. SAKAI et T. HIDAHA, « Generation of coherent terahertz radiation by photomixing of dual-mode lasers », *Optical and Quantum Electronics*, t. 32, n° 4/5, p. 503-520, 2000. DOI : [10.1023/A:1007070931314](https://doi.org/10.1023/A:1007070931314).
- [3] A. MAESTRINI, J. WARD, G. CHATTOPADHYAY, E. SCHLECHT et I. MEHDI, « Terahertz Sources Based on Frequency Multiplication and Their Applications », *Frequenz*, t. 62, n° 5-6, p. 118-122, 2008. DOI : [10.1515/FREQ.2008.62.5-6.118](https://doi.org/10.1515/FREQ.2008.62.5-6.118).
- [4] M. AHMED et M. YAMADA, « Influence of instantaneous mode competition on the dynamics of semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, t. 38, n° 6, p. 682-693, 2002. DOI : [10.1109/JQE.2002.1005419](https://doi.org/10.1109/JQE.2002.1005419).
- [5] M. J. THORPE, L. RIPPE, T. M. FORTIER, M. S. KIRCHNER et T. ROSEN BAND, « Frequency stabilization to 6×10^{-16} via spectral-hole burning », *Nature Photonics*, t. 5, n° 11, p. 688-693, 2011. DOI : [10.1038/NPHOTON.2011.215](https://doi.org/10.1038/NPHOTON.2011.215).
- [6] L. A. COLDREN et S. W. CORZINE, *Diode Lasers and Photonic Integrated Circuits*, Optical En, K. CHANG, éd. 1995, t. 53, p. 616. DOI : [10.1103/PhysRevA.54.4351](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.4351).

- [7] L. CHUSSEAU, F. PHILIPPE, P. VIKTOROVITCH et X. LETARTRE, « Mode competition in a dual-mode quantum-dot semiconductor microlaser », *Phys. Rev. A*, t. 88, n° 1, p. 015 803, 2013. DOI : [10.1103/PhysRevA.88.015803](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.015803).
- [8] M. ELK, « Numerical studies of the mesomaser », *Phys. Rev. A*, t. 54, n° 5, p. 4351-4358, 1996. DOI : [10.1103/PhysRevA.54.4351](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.4351).
- [9] R. SÁEZ-BLÁZQUEZ, J. FEIST, F. J. GARCÍA-VIDAL et A. I. FERNÁNDEZ-DOMÍNGUEZ, « Photon statistics in collective strong coupling : Nanocavities and microcavities », *Phys. Rev. A*, t. 98, n° 1, p. 013 839, 2018. DOI : [10.1103/PhysRevA.98.013839](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.013839).
- [10] A. E. SIEGMAN, *Lasers*. University Science Books, 1986. DOI : [10.1017/S0263034600003050](https://doi.org/10.1017/S0263034600003050).
- [11] K. ROY-CHOUDHURY et S. HUGHES, « Quantum theory of the emission spectrum from quantum dots coupled to structured photonic reservoirs and acoustic phonons », *Phys. Rev. B*, t. 92, n° 20, p. 205 406, 2015. DOI : [10.1103/PhysRevB.92.205406](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.92.205406).
- [12] A. LEBRETON, I. ABRAM, N. TAKEMURA, M. KUWATA-GONOKAMI, I. ROBERT-PHILIP et A. BEVERATOS, « Stochastically sustained population oscillations in high- β nanolasers », *New Journal of Physics*, t. 15, n° 3, p. 033 039, 2013. DOI : [10.1088/1367-2630/15/3/033039](https://doi.org/10.1088/1367-2630/15/3/033039).
- [13] J. L. GUISADO, F. JIMÉNEZ-MORALES et J. M. GUERRA, « Cellular automaton model for the simulation of laser dynamics », *Phys. Rev. E*, t. 67, n° 6, p. 066 708, 2003. DOI : [10.1103/PhysRevE.67.066708](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.066708).
- [14] G. P. PUCCIONI et G. L. LIPPI, « Stochastic Simulator for modeling the transition to lasing », *Optics Express*, t. 23, n° 3, p. 2369, 2015. DOI : [10.1364/OE.23.002369](https://doi.org/10.1364/OE.23.002369).
- [15] T. WANG, G. P. PUCCIONI et G. L. LIPPI, « Dynamical Buildup of Lasing in Mesoscale Devices », *Scientific Reports*, t. 5, n° 1, p. 15 858, 2015. DOI : [10.1038/srep15858](https://doi.org/10.1038/srep15858).

- [16] P. R. RICE et H. J. CARMICHAEL, « Photon statistics of a cavity-QED laser : A comment on the laser phase-transition analogy », *Phys. Rev. A*, t. 50, n° 5, p. 4318-4329, 1994. DOI : [10.1103/PhysRevA.50.4318](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.50.4318).
- [17] K. ROY-CHOUDHURY, S. HAAS et A. F. LEVI, « Quantum fluctuations in small lasers », *Phys. Rev. Lett.*, t. 102, n° 5, p. 053 902, 2009. DOI : [10.1103/PhysRevLett.102.053902](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.053902).
- [18] K. ROY-CHOUDHURY et A. F. J. LEVI, « Quantum fluctuations in very small laser diodes », *Phys. Rev. A*, t. 81, n° 1, p. 013 827, 2010. DOI : [10.1103/PhysRevA.81.013827](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.013827).
- [19] D. LANDAU et K. BINDER, *A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics*, C. U. PRESS, éd. 2014. DOI : [10.1017/CB09781139696463](https://doi.org/10.1017/CB09781139696463).
- [20] P. ATHANASIOS, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, M. hill book COMPANY, éd. 1965.
- [21] L. CHUSSEAU et J. ARNAUD, « Monte-Carlo simulation of laser diode sub-Poissonian light generation », *Optical and Quantum Electronics*, t. 34, n° 10, p. 1007-1023, 2002. DOI : [10.1023/A:1020446230434](https://doi.org/10.1023/A:1020446230434).
- [22] L. CHUSSEAU, F. PHILIPPE et F. DISANTO, « Monte Carlo modeling of the dual-mode regime in quantum-well and quantum-dot semiconductor lasers », *Optics Express*, t. 22, n° 5, p. 5312-5324, 2014. DOI : [10.1364/OE.22.005312](https://doi.org/10.1364/OE.22.005312).
- [23] F. PHILIPPE, « Quelques interactions entre Informatique et Physique de la lumiere », HDR, U. Montpellier, 2005. URL : [🔗](#).
- [24] G. S. FISHMAN, *Monte Carlo - Concepts, Algorithms, and Applications*. Springer, New York, NY, 1996. DOI : [10.1007/978-1-4757-2553-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2553-7).
- [25] P. BRÉMAUD, *Markov Chains Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*. Springer-Verlag New York, 1999. DOI : [10.1007/978-1-4757-3124-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3124-8).
- [26] D. T. GILLESPIE, *Markov Processes : An Introduction for Physical Scientists*, I. ACADEMIC PRESS, éd. Elsevier, 1991. URL : [🔗](#).

- [27] W. J. STEWART, *Introduction to the numerical solution of Markov Chains*. Princeton University Press, 1994. URL : [🔗](#).
- [28] R. JIN, D. BOGGAVARAPU, M. S. III, P. MEYSTRE, H. M. GIBBS et G. KHITROVA, « Photon-number correlations near the threshold of micro-cavity lasers in the weak-coupling regime », *Phys. Rev. A*, t. 49, n° 5, p. 4038-4042, 1994. DOI : [10.1103/PhysRevA.49.4038](#).
- [29] A. JANN et Y. BEN-ARYEH, « Quantum-noise reduction in semiconductor lasers », *Journal of the Optical Society of America B*, t. 13, n° 5, p. 761, 1996. DOI : [10.1364/JOSAB.13.000761](#).
- [30] R. SHORT et L. MANDEL, « Observation of Sub-Poissonian Photon Statistics », *Phys. Rev. Lett.*, t. 51, n° 5, p. 384-387, 1983. DOI : [10.1103/PhysRevLett.51.384](#).
- [31] J. ARNAUD, L. CHUSSEAU et F. PHILIPPE. (2009). arXiv : [0906.1469](#).
- [32] N. TAKEMURA, J. OMACHI et M. KUWATA-GONOKAMI, « Fast periodic modulations in the photon correlation of single-mode vertical-cavity surface-emitting lasers », *Phys. Rev. A*, t. 85, n° 5, p. 053811, 2012. DOI : [10.1103/PhysRevA.85.053811](#).
- [33] M. FACAO, A. LOPES, L. A. SILVA et P. SILVA, « Computer Simulation for Calculating the Second-Order Correlation Function of Classical and Quantum Light », *European Journal of Physics*, t. 32, n° 4, p. 925-934, 2011. DOI : [10.1088/0143-0807/32/4/007](#).
- [34] L. CHUSSEAU, F. PHILIPPE et A. JEAN-MARIE, « Monte Carlo markovian modeling of modal competition in dual-wavelength semiconductor lasers », in *Physics and Simulation of Optoelectronic Devices XXII*, San Francisco, CA : SPIE, 2014, p. 354-359. DOI : [10.1117/12.2036268](#).
- [35] A. VALLET, L. CHUSSEAU, F. PHILIPPE et A. JEAN-MARIE, « Markov model of quantum fluctuations at the transition to lasing of semiconductor nanolasers », *Physica E*, t. 105, n° January, p. 97-104, 2019. DOI : [10.1016/j.physe.2018.08.028](#).

- [36] L. CHUSSEAU, A. VALLET, M. PERRIN, C. PARANTHOËN et M. ALOUINI, « Lamb mode-coupling constant in quantum-dot semiconductor lasers », *Phys. Rev. B*, t. 98, n° 15, p. 155 306, 2018. DOI : [10.1103/PhysRevB.98.155306](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.98.155306).
- [37] G. BRÉVALLE, S. PES, C. PARANTHOËN, M. PERRIN, C. LEVALLOIS, C. HAMEL, A. MEREUTA, A. CALIMAN, E. KAPON, A. VALLET, L. CHUSSEAU, H. FOLLIOT et M. ALOUINI, « Direct measurement of the spectral dependence of Lamb coupling constant in a dual frequency quantum well-based VECSEL », *Optics Express*, t. 27, n° 15, p. 21 083-21 091, 2019. DOI : [10.1364/OE.27.021083](https://doi.org/10.1364/OE.27.021083).
- [38] P. J. COURTOIS, « Error Analysis in Nearly-Completely Decomposable Stochastic Systems », *Econometrica*, t. 43, n° 4, p. 691-709, juil. 1975. DOI : [10.2307/1913078](https://doi.org/10.2307/1913078).
- [39] H. A. SIMON et A. ANDO, « Aggregation of Variables in Dynamic Systems », *Econometrica*, t. 29, n° 2, p. 111-138, avr. 1961. DOI : [10.2307/1909285](https://doi.org/10.2307/1909285).
- [40] A. Y. KHINCHIN, *Mathematical Foundations of Quantum Statistics*, Dover. New York, 1998.
- [41] D. R. COX, « A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes », *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, t. 51, n° 02, p. 313-319, 1955. DOI : [10.1017/S0305004100030231](https://doi.org/10.1017/S0305004100030231).
- [42] H. L. S. YOUNES et R. G. SIMMONS, « Solving Generalized Semi-Markov Decision Processes using continuous Phase-type Distributions », *Proceedings of the 19th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, t. 1, p. 742-747, 2004. URL : [🔗](#).
- [43] Y. YAMAMOTO, S. MACHIDA et O. NILSSON, « Amplitude squeezing in a pump-noise-suppressed laser oscillator », *Phys. Rev. A*, t. 34, n° 5, p. 4025-4042, 1986. DOI : [10.1103/PhysRevA.34.4025](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.34.4025).

- [44] Y. M. GOLUBEV et I. V. SOKOLOV, « Photon antibunching in a coherent light source and suppression of the photorecording noise », *Sov. Phys. JETP*, t. 60, n° 2, p. 234-238, 1984. URL : [↗](#).
- [45] N. TAKEMURA, M. TAKIGUCHI et M. NOTOMI. (2019). Probing the Ginzburg-Landau potential for lasers using higher-order photon correlations. arXiv : [arXiv:1908.08679v2](#).
- [46] N. TAKEMURA, M. TAKIGUCHI, E. KURAMOCHI, A. SHINYA, T. SATO, K. TAKEDA, S. MATSUO et M. NOTOMI, « Lasing thresholds and photon statistics in high- β buried multiple quantum well photonic crystal nanocavity lasers », *Phys. Rev. A*, t. 99, n° 5, p. 53 820, 2019. DOI : [10.1103/PhysRevA.99.053820](#).
- [47] H. YOKOYAMA, « Physics and device applications of optical microcavities. », *Science*, t. 256, n° 5053, p. 66-70, 1992. DOI : [10.1126/science.256.5053.66](#).
- [48] Y. OTA, M. KAKUDA, K. WATANABE, S. IWAMOTO et Y. ARAKAWA, « Thresholdless quantum dot nanolaser », *Opt. Express*, t. 25, n° 17, p. 19 981-19 994, 2017. DOI : [10.1364/OE.25.019981](#).
- [49] M. TAKIGUCHI, H. TANIYAMA, H. SUMIKURA, M. DANANG, E. KURAMOCHI, A. SHINYA, T. SATO, K. TAKEDA, S. MATSUO et M. NOTOMI, « Systematic study of thresholdless oscillation in high- β buried multiple-quantum-well photonic crystal nanocavity lasers », *Opt. Express*, t. 24, n° 4, p. 3441-3450, 2016. DOI : [10.1364/OE.24.003441](#).
- [50] W. W. CHOW, F. JAHNKE et C. GIES, « Emission properties of nanolasers during the transition to lasing », *Light : Science and Applications*, t. 3, n° 8, e201, 2014. DOI : [10.1038/lsa.2014.82](#).
- [51] S. KREINBERG, W. W. CHOW, J. WOLTERS, C. SCHNEIDER, C. GIES, F. JAHNKE, S. HÖFLING, M. KAMP et S. REITZENSTEIN, « Emission from quantum-dot high- β microcavities : Transition from spontaneous emission to lasing and the effects of superradiant emitter coupling », *Light : Science and Applications*, t. 6, n° 8, p. 1-8, 2017. DOI : [10.1038/lsa.2017.30](#).

- [52] T. WANG, D. AKTAS, O. ALIBART, É. PICHOLLE, G. P. PUCCIONI, S. TANZILLI et G. L. LIPPI. (2017). Nontrivial photon statistics in small scale lasers. arXiv : [1710.02052](https://arxiv.org/abs/1710.02052).
- [53] J. WIERSIG, C. GIES, F. JAHNKE, M. AMANN, T. BERSTERMANN, M. BAYER, C. KISTNER, S. REITZENSTEIN, C. SCHNEIDER, S. HÖFLING, A. FORCHEL, C. KRUSE, J. KALDEN et D. HOMMEL, « Direct observation of correlations between individual photon emission events of a microcavity laser », *Nature*, t. 460, n° 7252, p. 245-249, 2009. DOI : [10.1038/nature08126](https://doi.org/10.1038/nature08126).
- [54] R. LOUDON, *The quantum theory of light*. OUP Oxford, 2000.
- [55] J. ARNAUD, J. M. BOÉ, L. CHUSSEAU et F. PHILIPPE, « Illustration of the Fermi–Dirac statistics », *American Journal of Physics*, t. 67, n° 3, p. 215-221, 1999. DOI : [10.1119/1.19228](https://doi.org/10.1119/1.19228).
- [56] M. SARGENT III, M. O. SCULLY et W. E. J. LAMB, *Laser physics*. CRC Press, 1974, p. 462.
- [57] T. WANG, G. P. PUCCIONI et G. L. LIPPI, « Photon bursts at lasing onset and modelling issues in micro-VCSELs », *Journal of Modern Optics*, p. 1-14, 2019. DOI : [10.1080/09500340.2019.1684585](https://doi.org/10.1080/09500340.2019.1684585).
- [58] J.-L. COUTAZ, *Optoélectronique térahertz*, J.-L. COUTAZ, éd. EDP Sciences, 2008, p. 360. URL : [🔗](#).
- [59] A. LISAIKAS, M. DIAS, S. BELZ, R. SACHS, M. FEIGINOV et H. G. ROSKOS, « Concept of internal mixing in semiconductor lasers and optical amplifiers for room-temperature generation of tunable continuous terahertz waves », *Physica E*, t. 40, n° 6, p. 1968-1970, 2008. DOI : [10.1016/j.physe.2007.09.089](https://doi.org/10.1016/j.physe.2007.09.089).
- [60] A. MÜLLER, M. MAIWALD et B. SUMPFF, « Compact Diode Laser-Based Dual-Wavelength Master Oscillator Power Amplifier at 785 nm », *IEEE Photonics Technology Letters*, t. 31, n° 13, p. 1120-1123, 2019. DOI : [10.1109/LPT.2019.2920300](https://doi.org/10.1109/LPT.2019.2920300).

- [61] M. BRUNNER, K. GULDEN, R. HÖVEL, M. MOSER, J. F. CARLIN, R. P. STANLEY et M. ILEGEMS, « Continuous-Wave Dual-Wavelength Lasing in a Two-Section Vertical-Cavity Laser », *IEEE Photonics Technology Letters*, t. 12, n° 10, p. 1316-1318, 2000. DOI : [10.1109/68.883815](https://doi.org/10.1109/68.883815).
- [62] S. M. NEKORKIN, A. A. BIRYUKOV, N. N. SEMENOV, B. N. ZVONKOV, V. Y. ALESHKIN, A. A. DUBINOV, V. I. GAVRILENKO, K. V. MERYMYANIN, S. V. MROZOV, A. A. BELYANIN et V. V. KOCHAROVSKY, V. V. AND KOCHAROVSKY, « Nonlinear mode mixing in dual-wavelength semiconductor lasers with tunnel junctions », *Appl. Phys. Lett.*, t. 90, n° 17, p. 171 106, 2007. DOI : [10.1063/1.2731523](https://doi.org/10.1063/1.2731523).
- [63] S. DE, V. PAL, A. E. AMILI, G. PILLET, G. BAILI, M. ALOUINI, I. SAGNES, R. GHOSH et F. BRETENAKER, « Intensity noise correlations in a two-frequency VECSEL », *Optics Express*, t. 21, n° 3, p. 2538-2550, 2013. DOI : [10.1364/OE.21.002538](https://doi.org/10.1364/OE.21.002538).
- [64] L. CHUSSEAU, G. ALMUNEAU, D. GASQUET, L. a. COLDREN et A. HUNTINGTON, « Coupled-cavity vertical-emitting semiconductor laser for continuous-wave terahertz emission », *IEE Proceedings - Optoelectronics*, t. 149, n° 3, p. 88-92, 2002. DOI : [10.1049/ip-opt:20020259](https://doi.org/10.1049/ip-opt:20020259).
- [65] L. CHUSSEAU, A. AKWOUÉ ONDO, J. TORRES, P. NOUVEL, J. JACQUET et M. THUAL, « Four-sections semiconductor two-mode laser for THz generation », in *Proc. SPIE 6343*, P. MATHIEU, éd., Québec : Photonics North, 2006, p. 1097-1106. DOI : [10.1117/12.708011](https://doi.org/10.1117/12.708011).
- [66] P. GU, F. CHANG, M. TANI, K. SAKAI et C.-L. PAN, « Generation of Coherent cw-Terahertz Radiation Using a Tunable Dual-Wavelength External Cavity Laser Diode », *Jpn. J. Appl. Phys.*, t. 38, n° Part 2, No. 11A, p. L1246-L1248, 1999. DOI : [10.1143/JJAP.38.L1246](https://doi.org/10.1143/JJAP.38.L1246).
- [67] A. MARKUS, J. X. CHEN, C. PARANTHOËN, A. FIORE, C. PLATZ et O. GAUTHIER-LAFAYE, « Simultaneous two-state lasing in quantum-dot lasers », *Appl. Phys. Lett.*, t. 82, n° 12, p. 1818-1820, 2003. DOI : [10.1063/1.1563742](https://doi.org/10.1063/1.1563742).

- [68] F. GRILLOT, N. A. NADERI, J. B. WRIGHT, R. RAGHUNATHAN, M. T. CROWLEY et L. F. LESTER, « A dual-mode quantum dot laser operating in the excited state », *Appl. Phys. Lett.*, t. 99, n° 23, p. 2011-2013, 2011. DOI : [10.1063/1.3667193](https://doi.org/10.1063/1.3667193).
- [69] K. A. FEDOROVA, A. GORODETSKY et E. U. RAFAILOV, « Compact all-quantum-dot-based tunable THz laser source », *IEEE Journal on Selected Topics in Quantum Electronics*, t. 23, n° 4, p. 1-5, 2017. DOI : [10.1109/JSTQE.2016.2633870](https://doi.org/10.1109/JSTQE.2016.2633870).
- [70] Y. A. MOROZOV, T. LEINONEN, A. HÄRKÖNEN et M. PESSA, « Simultaneous Dual-Wavelength Emission From Vertical External-Cavity Surface-Emitting Laser : A Numerical Modeling », t. 42, n° 10, p. 1055-1061, 2006. DOI : [10.1109/JQE.2006.881723](https://doi.org/10.1109/JQE.2006.881723).
- [71] M. ALOUINI, F. BRETENAKER, M. BRUNEL, A. LE FLOCH, M. VALLET et P. THONY, « Existence of two coupling constants in microchip lasers. », *Optics letters*, t. 25, n° 12, p. 896-898, 2000. DOI : [10.1364/OL.25.000896](https://doi.org/10.1364/OL.25.000896).
- [72] M. SUGAWARA, K. MUKAI, Y. NAKATA, H. ISHIKAWA et A. SAKAMOTO, « Effect of homogeneous broadening of optical gain on lasing spectra in self-assembled In_xGa_{1-x}As/GaAs quantum dot lasers », *Phys. Rev. B*, t. 61, n° 11, p. 7595-7603, 2000. DOI : [10.1103/PhysRevB.61.7595](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.61.7595).
- [73] *Wolfram Mathematica*, Wolfram Research Inc. version 11.2, 2017. URL : [↗](#).
- [74] M. BRUNEL, A. AMON et M. VALLET, « Dual-polarization microchip laser at 1.53 μm », t. 30, n° 18, p. 2418-2420, 2005. DOI : [10.1364/OL.30.002418](https://doi.org/10.1364/OL.30.002418).
- [75] D. GAMMON, E. S. SNOW, B. V. SHANABROOK, D. S. KATZER et D. PARK, « Homogeneous Linewidths in the Optical Spectrum of a Single Gallium Arsenide Quantum Dot », *Science*, t. 273, n° 5271, p. 87-90, 1996. DOI : [10.1126/science.273.5271.87](https://doi.org/10.1126/science.273.5271.87).

- [76] P. BORRI, W. LANGBEIN, J. MØRK, J. M. HVAM, F. HEINRICHS-DORFF, M.-H. MAO et D. BIMBERG, « Dephasing in InAs/GaAs quantum dots », *Phys. Rev. B*, t. 60, n° 11, p. 7784-7787, 1999. DOI : [10.1103/PhysRevB.60.7784](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.60.7784).
- [77] K. MATSUDA, K. IKEDA, T. SAIKI, H. TSUCHIYA, H. SAITO et K. NISHI, « Homogeneous linewidth broadening in a In_{0.5}Ga_{0.5}As/GaAs single quantum dot at room temperature investigated using a highly sensitive near-field scanning optical microscope », *Phys. Rev. B*, t. 63, n° 12, 121304(R), 2001. DOI : [10.1103/PhysRevB.63.121304](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.63.121304).
- [78] C. KAMMERER, G. CASSABOIS, C. VOISIN, M. PERRIN, C. DELALANDE, P. ROUSSIGNOL et J. M. GÉRARD, « Interferometric correlation spectroscopy in single quantum dots », *Appl. Phys. Lett.*, t. 81, n° 15, p. 2737, 2002. DOI : [10.1063/1.1510158](https://doi.org/10.1063/1.1510158).
- [79] M. K. BAFNA, P. SEN et P. K. SEN, « Temperature dependence of the photoluminescence properties of self- assembled InGaAs/GaAs single quantum dot », *J. Appl. Phys.*, t. 100, n° 10, p. 103515, 2006. DOI : [10.1063/1.2387054](https://doi.org/10.1063/1.2387054).
- [80] A. VALLET, L. CHUSSEAU, F. PHILLIPE et A. JEAN-MARIE, « Semiconductor laser Markov models in the micro-canonical , canonical and grand-canonical ensembles », in *SigmaPhi 2017*, Corfu, 2017. URL : [🔗](#).
- [81] K. ROY-CHOUDHURY et A. F. J. LEVI, « Quantum fluctuations and saturable absorption in mesoscale lasers », *Phys. Rev. A*, t. 83, n° 4, p. 043827, 2011. DOI : [10.1103/PhysRevA.83.043827](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.83.043827).
- [82] A. JEAN-MARIE, « marmoteCore : a Markov Modeling Platform », in *VALUETOOLS : Performance Evaluation Methodologies and Tools*, Venice, Italy, déc. 2017. DOI : [10.1145/3150928.3150960](https://doi.org/10.1145/3150928.3150960).

Abstract

This work concerns an unconventional modelling of the semiconductor laser using a Markov chain. The laser considered is of small size (nanolaser), which allows a Monte-Carlo simulation using Gillespie's algorithm. This type of model had already been developed in the team in the past and had already produced some interesting results, but it suffers from excessive computation time. The first contribution of this thesis is an analytical resolution of part of the chain that has allowed a considerable acceleration of the program. For each trajectory calculated, the gain in performance is several thousand, which has made it possible to access new scientific results in laser physics thanks to the complexity of the model, which now allows it to be closer to the behaviour of a real laser.

Taking into account all the photons emitted by a real laser, even those emitted outside the main mode, allowed a fine analysis around the laser threshold. The very definition of this threshold in the case of a nanolaser becomes problematic and can no longer simply be extracted from the bend of the characteristic optical power injected as a function of the pump power. A more robust and refined definition based on noise thanks to the Fano factor is also not really more relevant because we have shown that in these nanolasers the threshold zone is in reality only an alternation between the coherent regime and a pulsating regime close to a gain commutation triggered by the quantum nature of photons. We will also study the case of the non-threshold laser, which is a limit of real lasers.

Since laser noise is counted ab initio in the Markov chain, it is very relevant for the study of the stability of the dual mode laser regime envisaged in the IDYLIC project, that funds this work. The Lamb C coupling factor is characteristic of this stability, it is extracted from the laser dynamics, calculated by imitating experimental procedures. In the case of lasers whose gain medium consists of quantum dots, the value of C is obtained analytically. An extremely simple form depending only on two parameters is obtained in a totally symmetrical boundary case but we show by generalization that the overall value of C varies very little when we deviate from this ideal case, validating the "universal" side of this constant for lasers. The stability of the dual mode behaviour is influenced only by a parameter dependent on the active material and laser design, on the one hand, and by the normalized frequency dependent on the beat between modes and the homogeneous expansion of the gain medium, on the other hand. In theory, dual mode operation is always possible with quantum box lasers. The case of quantum well lasers is processed numerically using the Markov chain. The search for dual mode behaviour is complex. We exhibit behaviour that has all the stationary characteristics of dual mode behaviour that is actually visually bistable. In this case the Lamb constant C does not depend on the difference in energy between the two modes, in accordance with experiments, which supports the idea that this is an intrinsic characteristic of the laser.

Finally, we are developing a new model that takes into account the spatial aspect of the laser. This model was built by assembling several of our laser models discussed above. Thus the electromagnetic field of the cavity is coupled with several emitters, which are themselves electrically coupled to each other. This model will help to understand the stability of a dual mode regime when the gain medium is not uniform.

Résumé

Ce travail concerne une modélisation originale du laser à semi-conducteur en utilisant une chaîne de Markov. Le laser considéré est de petite taille (nanolaser), ce qui permet une simulation Monte-Carlo grâce à l'algorithme de Gillespie. Ce type de modèle avait déjà été élaboré dans l'équipe par le passé et il avait déjà permis d'obtenir quelques résultats intéressants, mais il souffre d'un temps de calcul excessif. Le premier apport de cette thèse est une résolution analytique d'une partie de la chaîne qui a permis une accélération considérable du programme. Pour chaque trajectoire calculée, le gain en performance est de plusieurs milliers ce qui a permis d'accéder à des résultats scientifiques nouveaux en physique des lasers grâce à la complexification du modèle, qui lui permet dorénavant de se rapprocher du comportement d'un laser réel.

La prise en compte de l'ensemble des photons émis par un laser réel, même ceux émis hors du mode principal, a permis une analyse fine autour du seuil du laser. La définition même de ce seuil dans le cas d'un nanolaser devient problématique et ne peut plus être simplement extraite du coude de la caractéristique puissance optique injectée en fonction de la puissance de pompe. Une définition plus robuste et raffinée, basée sur le bruit grâce au facteur de Fano, n'est pas non plus réellement plus pertinente. Nous avons montré que dans ces nanolasers la zone du seuil n'est en réalité qu'une alternance entre le régime cohérent et un régime pulsant proche d'une commutation de gain, déclenchée par la nature quantique des photons. Nous étudierons également le cas du laser sans seuil qui est une limite des lasers réels.

Le bruit du laser étant compté ab initio dans la chaîne de Markov, celle-ci est tout à fait pertinente pour l'étude de la stabilité du régime bimode des lasers envisagés dans le projet IDYLIC, qui finance ce travail. Le facteur de couplage de Lamb C est caractéristique de cette stabilité, il est extrait des dynamiques laser calculées en imitant les procédures expérimentales. Dans le cas des lasers dont le milieu de gain est constitué de boîtes quantiques, la valeur de C est extraite analytiquement. Une forme extrêmement simple ne dépendant que de deux paramètres est obtenue dans un cas limite totalement symétrique, mais nous montrons par généralisation que la valeur globale de C varie très peu lorsque l'on s'écarte de ce cas idéal, validant le côté « universel » de cette constante pour les lasers. La stabilité du comportement bimode est influencée seulement d'une part par un paramètre dépendant du matériau actif et du design du laser, et d'autre part par la fréquence normalisée dépendant du battement entre les modes et de l'élargissement homogène du milieu de gain. En théorie, le régime bimode est toujours possible avec les lasers à boîtes quantiques. Le cas des lasers à puits quantique est traité numériquement grâce à la chaîne de Markov. La recherche d'un comportement bimode est complexe. Nous exhibons un comportement ayant toutes les caractéristiques stationnaires d'un comportement bimode, qui est en réalité visuellement bistable. Dans ce cas, la constante de Lamb C ne dépend pas de la différence d'énergie entre les deux modes, en accord avec des expériences, ce qui conforte l'idée que c'est une caractéristique intrinsèque du laser.

Finalement nous développons un nouveau modèle prenant en compte l'aspect spatial du laser. Ce modèle a été construit en assemblant plusieurs de nos modèles lasers abordés précédemment. Ainsi le champ électromagnétique de la cavité est couplé avec plusieurs émetteurs qui sont, eux-mêmes, couplés électriquement entre eux. Ce modèle permettra de comprendre la stabilité d'un régime bimode lorsque le milieu de gain n'est pas uniforme.