



HAL
open science

Analyse temps-fréquence de la droite de marché : une application au marché français sur données journalières de 2005 à 2015

Roman Mestre

► **To cite this version:**

Roman Mestre. Analyse temps-fréquence de la droite de marché : une application au marché français sur données journalières de 2005 à 2015. Economies et finances. Université Montpellier, 2019. Français. NNT : 2019MONTD008 . tel-02476235

HAL Id: tel-02476235

<https://theses.hal.science/tel-02476235>

Submitted on 12 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Sciences Economiques

École doctorale EDEG N°231

Unité de recherche MRE EA N°7491

ANALYSE TEMPS-FREQUENCE DE LA DROITE DE MARCHÉ UNE APPLICATION AU MARCHÉ FRANÇAIS SUR DONNÉES JOURNALIÈRES DE 2005 A 2015

Présentée par Roman MESTRE

Le 19/11/2019

Sous la direction du Pr. Michel TERRAZA

Devant le jury composé de

Valérie MIGNON, Professeure, Université Paris Nanterre, EconomiX

Stéphane MUSSARD, Professeur, Université de Nîmes, CHROME

Jamel TRABELSI, Maître de Conférence HDR, Université de Strasbourg, BETA

Françoise SEYTE, Maître de Conférence HDR, Université de Montpellier, MRE

Zied FTITI, Professeur, EDC Paris Business School, OCRE

Michel TERRAZA, Professeur, Université de Montpellier, MRE

Présidente du Jury

Rapporteur

Rapporteur

Examinatrice

Examineur

Directeur de Thèse



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER

Remerciements

Il me sera très difficile de remercier tout le monde car c'est grâce à l'aide de nombreuses personnes que j'ai pu mener cette thèse à son terme.

Je voudrais tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse, le Professeur Michel TERRAZA, qui m'a encadré, aidé et conseillé tout au long de ces trois années. Je le remercie tout particulièrement pour sa grande disponibilité, pour ses conseils avisés mais aussi pour ses nombreux encouragements.

Je n'oublie pas de remercier Madame Valérie MIGNON qui a accepté d'être Présidente du Jury ainsi que Messieurs Stéphane MUSSARD et Jamel TRABELSI pour le temps qu'ils ont passé à rédiger les rapports sur ce travail. Je remercie également Madame Françoise SEYTE et Monsieur Zied FTITI qui ont gentiment accepté d'être examinateur.

Je remercie aussi toutes les personnes avec qui j'ai partagé ces années de thèse, les collègues doctorants pour leur bonne humeur, le personnel administratif de la faculté d'économie de Montpellier pour leur gentillesse ainsi que les membres du laboratoire MRE pour leur accueil.

Mes derniers remerciements vont à Madame Yang MESTRE-ZHOU, mon épouse, qui m'a soutenue et supportée durant ces trois années de thèse.

RESUME

Nous étudions dans cette thèse la pertinence de recourir à la méthodologie des ondelettes pour améliorer les résultats issus du Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (MEDAF). L'équation de ce modèle, la Droite de Marché, établit une relation entre les rendements d'une action et ceux du Marché. L'estimation du Beta de cette Droite fournit la sensibilité de l'action aux mouvements de l'indice de Marché. Ce paramètre est couramment employé comme mesure du risque systématique permettant une classification des actions. Sous l'hypothèse d'homogénéité comportementale, les agents possèdent les mêmes horizons de placements, et par conséquent, ils estiment un Beta similaire sans tenir compte de leurs caractéristiques. Il est, de plus, communément estimé par les MCO ce qui implique de facto sa stabilité au cours du temps. Les différentes critiques du MEDAF ont mené à des prolongements et à des améliorations qui sont présentés dans un premier chapitre. Il ressort que le modèle ne permet pas d'apprécier, d'une part, la dynamique du risque au cours du temps, et d'autre part, de tenir compte de l'hypothèse d'hétérogénéité des agents. L'appréciation par les ondelettes de l'instabilité temporelle et fréquentielle du Beta du MEDAF représente le cœur de cette recherche. L'utilisation des ondelettes discrètes, en se plaçant dans le domaine temps-fréquence, constitue une méthodologie qui, dans le cadre du MEDAF, permet de réaliser une étude du risque en fonction de divers horizons de placements. L'application au marché français sur données journalières de 2005 à 2015, constitue l'élément essentiel de la recherche dans le domaine univarié (Chapitre 2) et multivariée (Chapitre 3). Le Beta estimé par les MCO et ceux estimés pour divers horizons, liés à la décomposition fréquentielle, sont significativement différents. Il est donc possible de recourir à ce type de décomposition pour étendre les possibilités d'analyse du risque. L'analyse de la dynamique tempo-fréquentielle du risque systématique est obtenue en associant les Fenêtres Roulantes aux ondelettes discrètes. Malgré ces améliorations, les Betas estimés par les MCO ne possèdent pas les propriétés BLUE par la présence d'anomalies dans les résidus de l'estimation. Le recours aux processus de la famille des ARMA-GARCH corrige partiellement l'estimation du Beta de ces phénomènes et permet de construire une correction simple du Beta obtenu par les MCO. L'approche développée dans le chapitre 3 comprend le caractère multivarié de la régression en considérant le rajout de variables explicatives dans l'équation en tant que sources de risques supplémentaires. Le Pétrole et l'Or, retenus selon une analyse de différents travaux, associés à des décompositions fréquentielles discrètes

conduisent à l'estimation des Betas d'un Modèle Multi-Betas Tempo-Fréquentiel. Les résultats confirment la différenciation des paramètres selon les bandes de fréquence et proposent une information riche et diversifiée pour une analyse plus poussée du risque. Dans ce même chapitre, nous proposons la piste offerte par les ondelettes continues pour étudier de façon plus précise le MEDAF et sa robustesse. Dans ce contexte, la cohérence et la phase précisent la relation Action-Marché ainsi que le poids de Risque Systématique dans le risque total. Nous montrons que les liens Actions-Marché ne sont ni homogènes ni unilatéraux comme le suppose le MEDAF. L'intensité et le sens de la relation dépendent du temps et se différencient selon les fréquences. Nous proposons de ce fait de recourir à une estimation du Beta variable dans le temps et les fréquences, qui conduit à des résultats nombreux et à une information sur l'évolution tempo-fréquentielle du risque nettement améliorée. Cette recherche ouvre de nouvelles perspectives sur l'évaluation du Risque Systématique et son insertion dans les nouvelles technologies informatiques, par leurs capacités de calculs, va améliorer grandement l'interprétation de ses résultats.

Mots Clé : MEDAF, BETA, MODWT, CWT, Fenêtre Roulante Tempo-Fréquentielle, Modèle Multi-Beta Tempo-Fréquentiel, Betas tempo-fréquentiels variants

Abstract

In this thesis, we study the relevance of using the wavelet methodology to improve the results of the Capital Assets Pricing Model (CAPM). The equation of this model, the Market Line, establishes a relationship between the returns of a stock and those of the Market. The Beta estimate of this Line provides the sensitivity of the stock to Market's movements. This parameter is commonly used as a systematic measure of risk for classifying equities. Under the hypothesis of homogeneity of agents behaviours, the investors have same investment horizons, and therefore they estimate a similar Beta without considering their characteristics. Moreover, the Beta is commonly estimated by OLS supposing its stability over time. The various criticisms of the CAPM have led to extensions and improvements that are presented in a first chapter. On the one hand, it appears that, in the model, it is not possible to assess the dynamics of risk over time. On the other hand, it is also impossible to take into account the heterogeneity of the agents. The wavelet appreciation of the time-frequency instability of the CAPM Beta represents the heart of this research. The use of discrete wavelets, in the context of the CAPM, is a usefull methodology to study the risk in the time-frequency domain according differents investing horizons. The application to the French market with daily data from 2005 to 2015 is the main part of this research in the univariate (Chapter 2) and multivariate (Chapter 3) cases. Beta estimated by OLS and those estimated for various horizons, related to frequency decomposition, are significantly different. It is therefore possible to use this type of decomposition to extend the possibilities of risk analysis. The analysis of the time-frequency dynamics of the systematic risk is obtained by associating the Rolling Windows with the discrete wavelets. Despite these improvements, OLS- Betas do not have BLUE properties because of there are anomalies in the estimation residuals. The use of the ARMA-GARCH family processes partially corrects the Beta estimate. So, it is possible to to develop a simple correction of OLS-Beta. The approach developed in Chapter 3 includes the multivariate nature of the regression by considering the addition of explanatory variables in the equation as additional sources of risk. Oil and gold, selected according to an analysis of different works, associated with discrete frequency decompositions lead to the estimation of the Betas of a Time-Frequency Multi-Betas Model. The results confirm the differentiation of parameters across frequency bands and provide a lot of information for risk analysis. In this same chapter, we use continuous wavelets to study in a more precise way the CAPM and its robustness. In this context, the coherence and the phase specify the Equity-Market

relationship as well as the weight of Systematic Risk in the total risk. We show that Equity-Market links are neither homogeneous nor unilateral as assumed by the CAPM. The intensity and the direction of the links depend on the time and are differentiated according to the frequencies. Therefore, we propose to use a time- frequency-variable estimation of Beta, which leads to numerous results and information on the time-frequency evolution of risk. This research opens up new perspectives on the evaluation of Systematic Risk and its insertion in new computational technologies, by their computing capacities, will greatly improve the interpretation of its results.

Keywords : CAPM, BETA, MODWT, CWT, Time-Frequency Rolling Window, Time-Frequency Multi-Betas Model, Time-Frequency Varying Betas

Sommaire

<u>Introduction Générale</u>	9
<u>Chapitre 1 : Le Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (MEDAF) et l'analyse Temps-Fréquence.</u>	25
<i>Section 1 : Aspects théoriques du Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers de Sharpe et ses prolongements :</i>	27
<i>Section 2 : Théorie des ondelettes univariées et multivariées :</i>	64
<i>Annexe du Chapitre :</i>	113
<u>Chapitre 2 : Le MEDAF Tempo-Fréquentiel</u>	137
<i>Section 1 : Construction et Estimation du MEDAF fréquentiel par les ondelettes discrètes</i>	139
<i>Section 2 : La fenêtre tempo-fréquentielle roulante : une étude de l'instabilité des Betas</i>	194
<i>Annexe du Chapitre :</i>	214
<u>Chapitre 3 : Analyses Temps-Fréquences multivariées du MEDAF</u>	229
<i>Section 1 : Un Modèle-Multi-Betas tempo-fréquentiel</i>	231
<i>Section 2 : Estimation du risque systématique par les Ondelettes Continues</i>	263
<i>Annexe du Chapitre :</i>	307
<u>Conclusion Générale</u>	336
<u>Bibliographie</u>	340

Introduction Générale

La Finance est le domaine qui étudie les instruments financiers nécessaires au financement des opérations économiques. Elle met ainsi à disposition les ressources nécessaires au fonctionnement de l'économie en collectant et en redistribuant l'épargne. Elle concerne donc tous les acteurs comme les particuliers, les entreprises, les Etats C'est pourquoi, on distingue plusieurs branches ayant chacune différents objets d'études comme la Finance d'entreprise, la Finance Publique et la Finance de Marché. Cette dernière se rapporte à tout ce qui a trait au bon fonctionnement des opérations de marché sur les différentes bourses, comme à titre d'exemple :

- Garantir les transactions et les émissions des titres et instruments financiers.
- **Evaluer le prix des titres**
- **Quantifier le risque des titres.**

Elle analyse donc les opérations financières sur les Marchés (de détails, de gros, de gré à gré, organisés, etc...) qui concernent différents produits/actifs financiers. On distingue par conséquent plusieurs formes de Marchés Financiers, comme celui des Titres. Il comprend :

➔ Le Marché obligataire qui concerne uniquement les Entreprises et les Etats cherchant à se financer auprès des investisseurs. Le Marché Primaire assure les émissions des obligations à un Prix donné tandis que le Marché Secondaire assure la liquidité du titre en permettant l'échange entre parties (ce qui réduit le risque initial lors de l'achat). Les taux d'intérêts constituent ainsi les principales variables d'ajustement pour les Emprunts d'Etat (avec le Taux Sans Risque) et le Marché Interbancaire ou SWAPS (avec les InterBank Offered Rate IBOR).

Dans la zone euro, les taux interbancaires les plus courants sont l'EURIBOR (moyen long-terme) et l'EONIA (au jour-le-jour). Il existe autant de Taux sans risque que de pays. Les principaux sont les taux OAT (Obligations Assimilables du Trésors) pour la France et les Bundesanleihe ou Bunds pour l'Allemagne. Aux Etats-Unis l'équivalent de l'Euribor est le LIBOR \$ et le taux Fed Funds est similaire à l'EONIA. Le taux sans risque américain communément admis est le T-Bill (ou T-Note).

➔ Le Marché des Actions constitue le lieu d'échanges des titres de propriétés des entreprises. Le Marché Primaire concerne les IPO c'est-à-dire les Introduction en Bourse des entreprises tandis que le Marché secondaire traite de leur échange et de leur liquidité. Les Actions y sont cotées et échangées tous les jours ouvrés de la semaine sur les Places Boursières Mondiales et sont ouvertes à l'achat à tous les agents même les particuliers. La création d'Indices Boursiers permet de synthétiser l'évolution des cours boursiers qui seront largement communiqués au public ce qui en fait la forme de marché la plus communément représentée. A la Bourse de Paris, par exemple, l'indice CAC40 constitue une synthèse des cotations journalières des actions des 40 Grandes Entreprises Franco-Européennes.

Ces Marchés concernent des actifs financiers « standards » puisqu'on y échange des titres de propriétés ou de créances mais il existe aussi des Marchés particuliers qui concernent des Biens échangeables :

- ➔ Le Marché des Devises ou le bien échangé est une monnaie nationale. Le taux de change représente ainsi le Prix (relatif) d'une devise en fonction d'une autre (Par exemple le taux EUR/USD).
- ➔ Le Marché des Commodités (Commodities) qui concerne les Matières Premières. Toutes les matières peuvent être cotées comme le Pétrole, le Gaz, le Blé etc... On y retrouve aussi les Métaux comme l'Or, l'Argent et le Cuivre. Le bétail est aussi coté sur ce type de Marché.

Compte tenu de la diversité des instruments financiers, les agents (investisseurs) définissent des stratégies d'investissements adaptées à leurs profils. Le manque de réglementation (liée la dérégulation de la Finance) et l'importance croissante des risques ont conduit à l'apparition de Produits Dérivés permettant des échanges et des transferts de risque entre agents. Le système financier devient ainsi de plus en plus complexe puisque de nouveaux marchés émergent pour donner un prix à ces produits. L'analyse Gain-Perte et l'appréciation du risque inhérent à l'investissement représentent, de ce fait, une part importante de la Finance de Marché permettant ainsi aux agents de construire leurs portefeuilles selon des stratégies d'investissements qui deviennent de plus en plus développées. Le phénomène de spéculation est alors exacerbé dans ce contexte comme en témoigne la crise financière de 2007-2008 qui plongea l'économie mondiale dans une phase de « Grande Récession » ayant pour conséquence 10 ans d'instabilité sur les marchés.

Cette crise trouve sa source, entre autre, dans une utilisation prononcée de produits dérivés permettant de se couvrir contre le risque ou de se prémunir en cas de défaut de paiement de la contrepartie (comme les "Credit Default Swaps" ou les "Collateralised Debt Obligation"). Ces produits largement utilisés par les Banques Américaines en matière de crédit sont la conséquence des célèbres "subprimes" qui provoquèrent des pertes sèches pour les banques sur leurs prêts hypothécaires lors des défauts massifs.

Les marchés boursiers anticipent des changements dans le "climat des affaires" mais la confiance reste. Les Banques Américaines entament ainsi des ventes massives de leurs portefeuilles de créances "douteuses" en dissimulant leur risque (via la titrisation) pour couvrir une partie de leurs pertes. Mais quand les fonds d'investissements réalisent que leurs portefeuilles sont en réalité en défaut, la baisse commence (été 2007) et se propage rapidement au monde entier. Elle s'accélère et les indices boursiers du monde chutent fortement à l'automne 2008. Par exemple, en seulement quatre jours durant la semaine du 6 au 10 octobre 2008 (la pire semaine de l'histoire des marchés boursiers) le CAC 40 a perdu 1000 points (soit 20% de sa valeur) dont -9% pour la seule journée du 6 octobre. Les actions cotées sur ces marchés s'effondrent elles-aussi emportées par le système. L'économie est alors grandement fragilisée par les nombreuses faillites entraînant un chômage de masse et une augmentation de l'endettement public des Etats (déjà à des niveaux élevés). La crise au départ financière se transforme en crise économique, et va conduire le monde vers 10 ans de morosité.

Les débats sont nombreux sur les causes profondes qui ont menées à une crise de cette ampleur. Certains pointent simplement l'avidité des Banques mais cet argument n'explique pas la manière dont celles-ci arrivent à « réduire » le risque. Le manque de réglementations précises et uniformes, liées à la libéralisation de la finance, est alors mis en avant pour expliquer certains phénomènes comme, par exemple, la titrisation. La Finance dans son ensemble apparaît ainsi comme étant totalement déconnectée de la réalité économique notamment à cause de l'opacité de son fonctionnement, de la complexité des mouvements boursiers et des choix financiers qui en résultent.

Les Lois Bâloises, développées à cet effet, définissent les bonnes pratiques en matière de gestion des risques et mettent en place des exigences réglementaires claires et partagées par tous. Elles imposent, de plus, une meilleure appréciation des différents risques financiers liés à l'activité des banques. Elles ne font pas, cependant, directement référence aux théories

financières mais évoquent des outils standardisés ou adaptés à la structure des organismes financiers. Sur ce point, les Accords de Bâle définissent des standards pour mesurer le risque associé à un certain niveau de robustesse des méthodes employées. L'utilisation d'outils de mesure performants est alors réglementairement demandée pour cartographier l'exposition des organismes à diverses formes de risque.

Les outils mathématiques sont aussi critiqués et critiquables car ils se basent sur des théories financières sous-jacentes souvent jugées obsolètes et non-conformes aux observations empiriques. Les différences mises en évidence entre les modèles employés en pratique et les modèles théoriques contribuent à dégrader la confiance envers le système financier.

Les théories financières suscitent, cependant, un grand intérêt à la fois pour les chercheurs et les professionnels. Elles visent à répondre à plusieurs questions fondamentales concernant la modélisation des gains, du risque, les comparaisons et la sélection d'actifs, etc....

La Finance Moderne a été développée plus particulièrement dans les années 1950 par Markowitz. Il est le premier théoricien à s'intéresser à la construction des portefeuilles. Il part du postulat que les investisseurs sont dans un environnement risqué où les prix des actifs sont des variables pour lesquelles les distributions de leurs rendements obéissent à une loi normale. Les couples *Espérance* – *Variance* caractérisent les actifs, les agents forment ainsi leur portefeuille d'après leur aversion pour le risque, qui est représenté par leur fonction d'utilité. Le choix du portefeuille est alors résolu par le programme de maximisation de la fonction d'utilité de l'investisseur et fournit le rendement le plus haut pour un niveau de risque donné (ou inversement : le risque le plus faible pour une rentabilité fixée).

Il existe ainsi une infinité de portefeuilles efficaces qui forment la frontière efficiente. Le portefeuille efficace pour un investisseur est situé au point tangent entre la frontière efficiente et une de ses courbes d'utilités (ou d'indifférences). Plusieurs modèles ont été élaborés sur la base de ces travaux afin de répondre aux nouvelles problématiques et aux besoins des agents.

Il en est ainsi de Tobin (1958) et de son théorème de séparation des fonds incluant dans le raisonnement un actif sans risque. L'existence de cet actif modifie la frontière efficiente. Ainsi un portefeuille est efficient s'il est composé de l'actif sans risque et d'actifs risqués. Il ressort du modèle de Markowitz-Tobin que le risque total du portefeuille peut être réduit par diversification au sein du portefeuille. Cependant, ce modèle n'explique pas entièrement la

décomposition totale du risque d'un portefeuille. De plus, la variance comme mesure du risque n'est pas parfaite et elle est trop réductrice.

Le Modèle d'évaluation des actifs financiers (de l'anglais Capital Asset Pricing Model) abrégé par MEDAF (agl. CAPM) peut être considéré comme le prolongement des travaux de Markowitz et de Tobin. Il est théorisé par Sharpe (1964) sur la base des recherches (non publiées) de Treynor (1962). Mossin (1966), Lintner (1965) et Black (1972) ont aussi contribué à la construction théorique et à la diffusion du modèle sous sa forme actuelle. Le MEDAF reprend les hypothèses de Markowitz-Tobin en les complétant sur la non-restriction du marché. Les investisseurs sont définis comme :

- Etant rationnels et averse au risque.
- Ayant des comportements **homogènes**. Ils ont les mêmes attentes et anticipations concernant le marché et le même horizon d'investissement.

L'idée de base du modèle, consiste à analyser la formation des prix des actifs pour expliquer sa rentabilité. A cet effet, Sharpe relie la rentabilité d'un actif à celle du marché par une simple équation linéaire avec un terme aléatoire, appelée la Droite de Marché.

Le MEDAF permet de décomposer le risque total d'un actif comme étant la somme du *risque spécifique* et du *risque systématique*. Le risque spécifique (ou idiosyncratique) est intrinsèque à un actif résultant de facteurs qui lui sont propres (endogènes) tandis que le risque systématique concerne un facteur exogène, le Marché. Pour un portefeuille, la diversification permet d'annuler le risque spécifique des actifs sélectionnés et pas le risque systématique puisqu'il affecte l'ensemble des actions. Le Beta du portefeuille est une moyenne pondérée des Betas des différentes actions et, par conséquent, son niveau de risque systématique ne peut pas être nul (sauf en incluant que des actifs insensibles au marché). Le risque systématique doit donc faire l'objet d'une rémunération supplémentaire par rapport au taux sans risque, d'où le principe de Prime de Risque (Risk Premium).

L'utilisation du Beta par les gestionnaires de portefeuilles permet une classification des actions par leur niveau de risque systématique. Elle s'effectue par rapport à la valeur unitaire du Beta du Marché. Cette classification des actifs permet la construction de portefeuilles plus ou moins diversifiés et risqués d'après les appétences des gestionnaires. L'intérêt d'incorporer un actif dans un portefeuille est aussi dépendant de la situation haussière ou baissière du Marché. En période d'expansion, les actions offensives sont privilégiées pour obtenir une

Rentabilité élevée tandis qu'en période de crise, ce sont les actions défensives qui sont conservées afin d'abaisser le niveau de risque.

Le MEDAF permet aussi les comparaisons entre les actifs (et les portefeuilles) selon leur niveau de risque systématique. La mesure de la performance des fonds de gestion s'effectue, d'ailleurs, sur la base de plusieurs ratios et différentes mesures incluant le risque systématique.

Le MEDAF génère une littérature abondante qui le questionne sur ses fondements théoriques, le teste sur le plan économétrique et qui propose des pistes d'amélioration.

- Les tests de validité du MEDAF

Le MEDAF a fait l'objet de nombreuses études afin de le confirmer ou de l'infirmier. Les premiers travaux réalisés à la fin des années 1960 vont globalement dans le sens du MEDAF, mais les travaux de Sharpe et Cooper (1972) montrent que les méthodes utilisées étaient responsables de biais statistiques. Ils ont été les premiers à utiliser une approche par portefeuille, pour valider le modèle. Par la suite, les études menées par Black, Scholes et Jensen (1972) puis par Fama et MacBeth (1973) permettent de calculer les betas pour différents portefeuilles et de trouver, par régression, les estimateurs du taux sans risque et des primes de risque. Fama et MacBeth, se basent une méthodologie similaire à celle de Black-Jensen-Scholes, tout en rajoutant des équations supplémentaires pour tester la linéarité du modèle et l'éventuel effet de la variance. Cette étude confirme la linéarité du modèle, mais indique que les résultats ne sont pas conformes aux observations empiriques. De plus, ils constatent, eux aussi, l'instabilités des paramètres. En Europe, le MEDAF a été testé par Pogue et Solnik (1974) qui retrouvent les mêmes résultats que les études antérieures.

Une critique importante des études sur le MEDAF a été soulevé par Roll (1977). Ce dernier indique que le modèle théorique suppose un portefeuille de marché parfaitement diversifié qui n'est pas observable empiriquement. Les tests du MEDAF se basent sur des indices boursiers comme substitut au portefeuille de marché, mais Roll souligne qu'ils ne sont pas représentatifs de l'ensemble des investissements disponible. Il indique donc le MEDAF n'est pas un modèle testable, donc, les résultats des études sont "fausses et erronées", du fait que les tests ne sont pas exactement basés sur le même portefeuille de Marché que le MEDAF théorique.

Les conclusions de ces articles ne permettent pas d'infirmer ni de confirmer TOTALEMENT et ENTIEREMENT le MEDAF. Elles mettent, cependant, en évidence plusieurs problèmes statistiques, comme l'insuffisance du modèle à expliquer certains phénomènes, la négativité de la prime de risque et l'instabilité du paramètre Beta. Il existe de nombreuses réponses apportées pour améliorer le Modèle et corriger ces anomalies

- Les Extensions au MEDAF et le relâchement de certaines hypothèses :

Des variantes du MEDAF ont été développées afin de relâcher les hypothèses considérées comme étant en contradiction avec les observations.

Au milieu des années 1970, des MEDAF alternatifs se développent à partir des nombreuses critiques sur la prime de risque négative et des comportements des agents. Black (1972) construit, à cet effet, le modèle Zéro-Beta, une version du MEDAF qui tient compte des différences entre les taux emprunteur et d'épargne. Ce modèle similaire au MEDAF est considéré comme ''meilleur'' d'après l'étude de Black-Scholes-Jensen. Ces résultats ne sont pas, cependant, fondamentalement différents en termes de mesure du risque systématique. Les agents se focalisant plus sur les pertes que sur les gains, une autre extension au MEDAF se développe sur l'idée du Downside-Risk. Hogan et Warren (1974) utilisent les semi-variances et la semi-covariance pour calculer un Downside-Beta mais ce sont Harlow et Rao (1989) puis d'Estrada (2002) qui développent le modèle Downside-CAPM et le généralise avec le E-BETA. D'après leurs études, les modèles D-CAPM et le E-BETA sont plus adaptés que le CAPM pour les marchés des pays émergents car ils sont particulièrement sensibles au Downside-Risk.

Le MEDAF étant un modèle mono-périodique de maximisation d'une fonction d'utilité, une version Intertemporelle du MEDAF (I-CAPM) de Merton (1973) se développe en supposant que les investisseurs effectuent un arbitrage entre Consommation Instantanée et l'Investissement. L'ajout d'une Variable d'Etat modélise, à cet effet, les changements d'opportunité de l'investissement. Le modèle Intertemporel introduit ainsi le développement du C-CAPM, extension du MEDAF sous l'angle microéconomique avec une approche par la consommation (Breedon 1979). L'agent maximise ainsi son utilité en définissant sur plusieurs périodes et simultanément son niveau de consommation et d'investissement en actifs. Même si le C-CAPM est théoriquement supérieur que le CAPM, Hansen et Singleton (1983) puis Mankiw et Shapiro (1986) indiquent qu'empiriquement les résultats ne sont pas

plus performants que ceux du CAPM. L'étude de Breeden, Gibbons et Litzenberger (1989) indiquent en effet que le C-CAPM présente des problèmes économétriques liés aux variables relatives à la consommation. Ils concluent que leurs résultats sont proches en les comparant avec ceux du CAPM classique.

Le MEDAF ne prenant pas en considération les effets du taux change et de l'inflation sur les décisions des agents, Solnik (1974) et Sercu (1980) développent en conséquence l'International Asset Pricing Model (IAPM). Engel et Rodrigues (1986) recourent au test de Wald sur le CAPM et montrent que leurs résultats ne permettent pas de confirmer les hypothèses de l'IAPM.

- La catégorie des Modèles Multi-Facteurs : vers une fin du MEDAF ?

En parallèle aux extensions au MEDAF, de nombreux auteurs mettent en évidence le manque de variables explicatives qui pourrait expliquer les anomalies observées.

Basu (1977) est le premier à remarquer sur le marché que les actions ayant un Price Earning Ratio (PER) élevé ont en moyenne une rentabilité plus forte que les rentabilités théoriquement prévues par le MEDAF. Bantz (1981) constate, de plus, que la capitalisation boursière des firmes affecte la rentabilité des actions, de sorte, que la rentabilité moyenne des petites firmes cotées (small caps) est supérieure de 6% environ à celle des grosses firmes (large caps). Cette surperformance des small caps serait lié à un facteur de risque autre que le marché d'après Bantz. Plusieurs études seront menées confirmant et rejetant les effets anormaux observés.

Le rajout de variables explicatives dans le MEDAF, porte le nom de Modèles Multi-Facteurs ou Multi-Betas. Il a été initié à l'origine et construit théoriquement par Merton (1973) et Ross (1976) (modèles Arbitrage Pricing Theory ou APT). Le Modèle Multi-Betas, théorisé par Merton (1973), incorpore à côté de la variable de marché d'autres variables, appelées facteurs, censées améliorer l'estimation des paramètres de la droite de marché d'origine.

Sur la base des travaux de Bantz et Basu, Fama et French (1992-1993-1996) développent le modèle FAMA-FRENCH à 3 facteurs qui considère le Price-Earning-Ratio et la taille de l'entreprise en supplément du Marché. Dans leur analyse, ils construisent des portefeuilles en distinguant les grandes entreprises des petites, puis à l'intérieur de ceux-ci ils reconstruisent des portefeuilles et incorpore le PER au côté du Marché pour estimer des Betas. Les résultats sont totalement opposés à ceux du MEDAF car ils trouvent une relation négative entre les

rentabilités moyennes et les betas, ce qui revient à admettre l'existence de prime de risque négative. Une action ayant une beta fort doit théoriquement avoir une rentabilité plus forte qu'une action à faible beta, or leurs résultats contredisent cette idée. Les estimateurs relatifs aux facteurs taille et PER sont toujours négatifs et significativement différents de zéro.

Le Modèle Fama-French est le plus représenté dans la classe des Modèles Multi-Betas. Chen et al (1986) soulignent, cependant, la nécessité d'inclure des variables macroéconomiques dans l'équation de la Droite de Marché comme les taux d'intérêt, l'inflation, la production industrielle, etc... Une vaste littérature porte ainsi sur l'intérêt de rajouter plusieurs variables afin de chercher les sources de risque extérieures au Marché, mais aussi sur la nature et le nombre de facteurs à retenir.

Le MEDAF est donc en concurrence avec des modèles plus avancés collant davantage à la réalité empirique, comme l'indiquent Fama et French dans leur article intitulé « la mort du beta ». Ils montrent que la relation rentabilité-risque du MEDAF est nulle ou peu significative et par conséquent ils en concluent que le Beta joue un rôle mineur. Or une étude de Chan et Lakonishock (1993) indique « qu'il faut y regarder à deux fois avant de disqualifier le beta ». Leur étude porte sur les mêmes données que Fama et French mais pour différentes périodes. Ils montrent que la Beta continue de jouer un rôle significatif dans la détermination des rentabilités mais surtout que les éléments apportés pour le « tuer » ne sont pas suffisants d'un point de vue empirique.

- Améliorations Econométriques du MEDAF

Les critiques sur le Modèle et ses hypothèses sont nombreuses comme le montre cette synthèse. Les investisseurs et les professionnels, en parallèle aux débats sur sa validité, continuent de l'utiliser. Le Beta reste le risque systématique car il constitue un Benchmark intéressant et simple à employer en pratique. Il existe un bon nombre de ratios se basant sur ce paramètre afin de suivre et de comparer les performances de leurs portefeuilles/actions. Il continue ainsi de faire l'objet d'études portant sur une actualisation du modèle avec de nouvelles techniques économétriques pour estimer le Beta et améliorer ses propriétés statistiques.

L'instabilité des paramètres et donc la robustesse du modèle constitue la limite la plus importante du MEDAF. Fabozzi et Francis (1978) montrent, en plus, que le Beta est d'autant plus volatil que la taille de l'échantillon est élevée puis Bos et Newbold (1984) confirment ce

résultat par le caractère dynamique (ou aléatoire) du risque systématique. Ces derniers partent de l'hypothèse que des facteurs microéconomique et macroéconomique affectent la valeur du Beta au cours du temps. Il est alors communément admis, grâce à leurs travaux, que des modèles incluant la variabilité du Beta sont statistiquement meilleurs que le modèle d'origine à Beta fixe.

Les recherches se développent, par la suite, autour de méthodes permettant de corriger le MEDAF pour améliorer l'estimation du paramètre Beta et prendre en considération sa volatilité.

- Les approches ‘traditionnelles’.

On appelle « méthodes traditionnelles » pour prendre en compte la volatilité du Beta celles qui consistent à estimer le Beta sur différentes périodes. Le problème de l'instabilité n'est pas entièrement résolu car le Beta est considéré comme stable sur chacune des sous-périodes. Ce découpage va permettre l'émergence de la technique de la fenêtre roulante (de longueur variable). L'estimation roulante ou glissante du Beta permet donc d'apprécier les évolutions du Beta au cours du temps (les estimations récursives sont aussi utilisées). Groenewold et Fraser (1997b) ont montré que le Beta des actions australiennes est instable et leurs conclusions sur le MEDAF sont mitigées. Jagannathan et Wang (1996) soulignent qu'un MEDAF avec un Beta variable est statistiquement « meilleur » que sa version avec un paramètre constant (ou fixe). Cette version est cependant beaucoup plus complexe à mettre en œuvre en pratique.

- Les approches ‘conditionnelles’.

Une des premières approches conditionnelles a été développée par Bollerslev, Engle et Wooldrige (1988) en utilisant les Processus GARCH –Multivariés afin de considérer la variabilité de la covariance au cours du temps et partant de construire un estimateur du Beta moins biaisé et dynamique. Depuis leurs travaux, il existe une littérature abondante portant sur l'estimation du Beta par les processus GARCH afin de construire des modèles avec un Beta volatil (Faff et al (1992) puis Brooks et al (1992)). Les travaux de Abell et Kreuger (1989) se basent sur des processus GARCH et le concept de causalité pour inclure des variables macroéconomiques susceptibles d'influencer la variabilité du Beta. Plus récemment, les études portent sur l'estimation du Beta avec des processus avancés comme le DCC-

GARCH permettant de calculer le Beta conditionnel dynamique. On peut citer, à titre d'exemple, les articles de Hsiu-Jung Tsai et al (2014) et d'Engle (2016).

Ces approches conditionnelles permettent une estimation dynamique du Beta et font l'objet de nombreuses études comparatives. Elles prennent en compte la volatilité du Beta en fonction des différentes phases du marchés (calme, en crise etc...) et introduisent ainsi des travaux plus précis s'orientant sur les facteurs qui influencent la variabilité du Beta.

- Les approches ‘alternatives’.

L'utilisation de méthodes alternatives, comme le Filtre de Kalman-Bucy, a été introduite par Brooks et al (1998), Faff et al (2000), Groenwold et Fraser (1999) puis Yeo (2001) afin de comparer les résultats avec différentes méthodes d'estimation. Les résultats montrent que l'estimation du Beta dynamique permet d'améliorer le MEDAF en termes de prédiction et d'analyse du risque. L'étude de Groenwold et Fraser (1997) résume bien la problématique autour du Beta. Ils comparent différentes méthodes pour apprécier l'instabilité du Beta comme l'estimation récursive et roulante avec le filtre de Kalman-Bucy (modèle Espace-Etat). Leurs conclusions confirment bien la dynamique du Beta au cours du temps qui résulte, entre autres, de la rentabilité du marché, d'événements extrêmes à des dates précises (en l'occurrence 1987 dans leur étude) et enfin aux cycles économiques.

Il est aussi mis en évidence l'existence de ‘régime’ de variation du Beta lié aux différentes phases du marché. Les études indiquent notamment l'importance des ruptures dans la dynamique du Beta, nécessitant le recours à des modèles de changement de régime. Une des études les plus importantes sur ce type d'estimation du Beta est celle réalisée par Huang (2000) qui établit l'hypothèse de deux régimes de variation du Beta : un état de risque élevé et un autre de risque faible. Il arrive aux conclusions que son hypothèse de « Deux-Etats » est acceptable car les résultats ne peuvent la rejeter. Il conclue, de plus, que durant l'Etat de risque faible le MEDAF et ses implications sont respectés, alors que durant l'Etat-Fort, le MEDAF ne tient plus.

La littérature récente porte majoritairement sur l'application de ces méthodes à des marchés autres qu'Américain et Anglo-Saxons permettant ainsi des comparaisons internationales. Mergner et Bulla (2008) et Choudhry et Wu (2008) illustrent ainsi la variabilité du Beta sur les marchés européens, il en est de même pour Chen et Huang (2007) et Suthawan Prukumpai (2015) pour les pays du Sud-Pacifique.

Les hypothèses de rationalité et d'homogénéité des agents

L'Homo Oeconomicus constitue la base du raisonnement du MEDAF puisqu'il décrit l'évolution du marché à l'équilibre excluant de facto la non-rationalité des agents. Ces derniers réalisent ainsi des anticipations similaires basées sur l'historique des prix et la Loi Normale. Ils sont donc homogènes et possèdent le même comportement. Leurs analyses sur la formation des prix et du risque sont identiques mais ils définissent leurs préférences pour construire leur portefeuille optimal. Ceci implique que le marché soit efficient car tous les agents trouvent un portefeuille adapté à leurs préférences puisqu'il incorpore la totalité de l'information disponible.

La Finance Comportementale remet ainsi en question le MEDAF à cause des « dogmes financiers » qu'il a instaurés, mais surtout la rationalité et l'hypothèse d'homogénéité des agents. Leur objectif est de replacer l'individualité de l'agent, qui possède ses propres croyances et anticipations, au cœur de l'analyse des risques financiers (et économiques).

Les psychologues Tversky et Kahneman (1979) ont prouvé, les premiers, l'existence de comportements anormaux lors d'expériences menées sur l'échange donnant naissance à la Théorie des Perspectives. Ils remettent ainsi en cause la Théorie classique de l'Utilité Espérée de Von Neumann Morgenstern (VNM). Par la suite, Thaler (1980) et Shiller (1981), mettent en évidence les conséquences des biais psychologiques sur les cours boursiers (sur-réactions et sous-réactions aux informations) tout en partant du principe que les agents sont rationnels mais soumis à des influences extérieures. Ces biais ne sont pas considérés par le MEDAF, d'où les mauvaises performances du modèle à expliquer les rendements anormaux.

De son côté, Robert Schiller qui analyse la formation des prix sur les marchés conclue que les prévisions des investisseurs anticipent les futurs dividendes versés par les actions. Ces dividendes sont inclus dans les calculs en appliquant une « décote » (en les actualisant). Or il remarque que la volatilité réelle sur les marchés est trop forte par rapport aux modèles basés sur la rationalité. Il parle alors d'« Exubérance irrationnelle » qui donne lieu à l'apparition de bulles spéculatives. De nombreuses anomalies, par ailleurs, sont dénombrées tels les effets lundi ou de fin de mois, qui causent des surréactions des agents aux signaux du marché. Pour ces travaux Schiller a reçu le Prix Nobel d'Economie en 2003 et Thaler l'a obtenu en 2017.

De nombreuses études portent sur les mécanismes de formation des prix en considérant les croyances des agents face au risque en gestion de portefeuille. Le but est d'appréhender

l'impact de l'hétérogénéité des agents et des différents biais sur les modèles théoriques, plus particulièrement le MEDAF, afin d'expliquer ses « anomalies ».

On peut citer, par exemple, les études de Barberis et Huang (2001) sur les effets du phénomène de « Comptabilité Mentale » (de Thaler (1985)) sur la perception du risque sur les marchés financiers, de Klein (2012) sur la présence d'effets mimétiques ou "effets moutonnier". Les agents disposant de moins d'informations auront ainsi tendances à adopter les stratégies des « géants » qui disposent d'informations supplémentaires.

Les travaux précédents critiquent vivement le MEDAF en se focalisant sur la psychologie des agents, les biais et les croyances hétérogènes pour expliquer les différences comportementales empiriques. Ils n'améliorent pas le MEDAF dans le sens où ils ne proposent pas (encore) de substitut. On note, toutefois, que certaines études conduisent à une reconsidération du modèle en modifiant directement ses hypothèses comme, à titre d'exemple, les travaux de Shefrin et Statman (2000).

Sous un angle comportementaliste, l'homogénéité des agents du MEDAF, indiquant implicitement que les investisseurs possèdent le même horizon de placement, est fortement critiquée. Les agents possèdent des fréquences différentes de placement différentes qui, en pratique, s'interprètent par une différenciation de comportement d'investissement qui mène à des stratégies diverses. On aborde ainsi la distinction Fundamentalistes-Chartistes. Selon Frankel et Froot (1986), les Fundamentalistes ont des visions à long-terme alors que les Chartistes ont des horizons plus courts. On peut ainsi comparer, à titre d'illustration, les positions des Traders à Hautes-Fréquences (THF) qui placent à court-terme de celles des Fonds Commun de Placements (FCP) qui investissent à plus long-terme. La distinction entre Fundamentalistes et Chartistes n'est pas, cependant, immuable dans le sens où un agent peut changer d'horizons de placement en fonction de ses appétences, de l'information, du risque etc...

Ces deux catégories d'agents ne valorisent pas les mêmes informations sur les marchés mais, dans le cadre du MEDAF, ils utilisent pourtant les mêmes modèles et méthodes d'analyse. Cela implique alors que le THF et le FCP calculent le même Beta et le même niveau de risque pour une action. Or celle-ci peut s'avérer plus risquée à court-terme qu'à long-terme (ou inversement). Il y a, par conséquent, une sous ou surévaluation du risque provenant de l'erreur

d'appréciation (d'estimation) du Beta qui n'est pas conditionnel à l'horizon d'investissement. Cet état de fait peut être une des sources des anomalies observées empiriquement.

Suites aux progrès réalisés dans le domaine du traitement des signaux, les décompositions tempo-fréquentielles par les ondelettes constituent une opportunité pour distinguer les agents selon plusieurs horizons de placements.

La transformation en ondelettes des séries temporelles est justifiée par sa capacité à décomposer des séries dans l'espace Temps-Fréquences. Elles s'inscrivent dans le prolongement de l'analyse spectrale et du traitement du signal dont l'objectif est de décomposer et de reconstruire un signal donné sur différents niveaux de fréquences et ce sans pertes informationnelles. Au début du 19^{ème} siècle, la transformée de Fourier répondait aux attentes des scientifiques, mais elle n'inscrivait l'analyse que dans l'espace des fréquences. Cette méthode, fortement tributaire de l'arbitrage entre le temps ou la fréquence, réduit ces applications en finance où l'information temporelle doit être conservée.

C'est avec l'apparition de sujets d'études plus complexes que la nécessité d'une localisation temporelle complémentaire à celle fréquentielle se fait ressentir jusqu'au travaux sur l'analyse temps-fréquence développée par Haar en 1909 et qui a été rendue pratique et populaire par Grossman et Morlet (1984). Ce dernier a donné le nom « d'ondelettes » (en anglais « wavelets ») aux principaux résultats de la décomposition fréquentielle en référence à leurs formes particulières de petites vagues/ondes.

Il existe différentes transformations en ondelettes chacune ayant des propriétés spécifiques. Elles ont en commun de projeter le signal dans des sous-espaces emboîtés de résolution croissante. Ces sous-espaces peuvent être assimilés à la quantité d'information disponible pour un niveau de résolution fréquentiel donné : plus le niveau est élevé plus nous captions d'informations sur le signal. Les fréquences pouvant ainsi être reliées à des horizons temporels, nous sommes alors en mesure d'étudier le comportement du signal selon l'horizon de placement tout en ayant une localisation temporelle.

Les ondelettes trouvent rapidement une utilisation pratique dans les domaines qui traitent des volumes de données importants comme c'est le cas pour les sciences Physique et Informatique. Les récentes avancées technologiques ont abouti à l'augmentation sans précédente de la puissance de calcul des ordinateurs et a permis l'essor du 'Big Data'. Ces mutations bouleversent profondément les activités humaines actuelles. Les Nouvelle

Technologies de l'Information et de Communication (NTIC) commencent à modifier significativement les habitudes des métiers rattachés à ce secteur et la démocratisation de ces technologies ouvre la voie à de nouvelles applications et problématiques. La Finance n'échappe pas à cette tendance.

Dans ce contexte, elle offre, au contraire, un cadre idéal à l'application des ondelettes car d'importantes bases de données financières sont facilement disponibles et conduisent à des problématiques nécessitant une importante puissance de calcul. Les ondelettes constituent ainsi un réel intérêt depuis les travaux de Gençay et al (2003, 2005) et de Rua et Nunes (2012) qui illustrent l'importance de l'horizon de placement dans les mesures de risque. D'un point de vue économétrique, le MEDAF constitue un sujet intéressant car les avancées dans ce domaine peuvent apporter des résultats nouveaux sur différents aspects quantitatifs du modèle. Par ailleurs, les ondelettes sont majoritairement employées pour l'analyse des interactions entre variables financières et dans l'analyse des cycles économiques. Vacha et Barunik (2012) les ont utilisées pour étudier la corrélation de Court, Moyen et Long terme entre les marchés pétroliers et gaziers et ceux des commodities. Par la suite, Bekiros et Marcellino (2013) analysent à l'aide des ondelettes les relations entre les différentes monnaies dans le but de prévoir les taux de changes. Dans le cadre de la gestion de portefeuilles, Bekiros *et al* (2016) ont recours aux ondelettes pour apprécier les co-mouvements entre les commodities et les indices boursiers selon différents horizons de placement. Les interprétations des résultats sont aussi grandement diversifiées par rapport aux méthodes standards car les ondelettes permettent de considérer divers horizons de placements.

Les développements fructueux des décompositions univariées et multivariées des séries temporelles offrent des perspectives nouvelles pour étudier le MEDAF et son Beta sous l'hypothèse d'hétérogénéité des comportements des agents. **L'objet de cette thèse est de contribuer à ces perspectives pour améliorer la mesure du risque systématique de la Droite de Marché du MEDAF.** Pour vérifier notre apport, nous faisons appel à une importante base de données constituée de 30 actions françaises incluses dans l'indice CAC40 pour la période journalière 2005-2015. Le nombre d'observations (N=2869) rend robuste la méthodologie fréquentielle retenue.

Pour atteindre cet objectif, nous proposons un développement de la recherche selon trois chapitres.

Le premier tisse les contours théoriques du MEDAF et de l'analyse par ondelettes. Il s'agit d'une revue de la littérature sur le modèle afin de fournir les éléments économiques pour commenter les résultats des applications des chapitres suivants. Cette revue est associée à une présentation des différents aspects de l'analyse temps-fréquence. Nous distinguons d'abord les ondelettes univariées continues et leurs formes discrètes qui constituent une simplification pratique. Nous illustrons en annexe une application au CAC40 de ces différentes approches auxquelles nous nous référons dans le chapitre suivant. Nous présentons par la suite l'analyse multivariée en ondelettes et les outils qui lui sont associés comme la Cohérence et la Phase. Ces instruments constituent des compléments fondamentaux pour l'étude des relations entre les variables de la Droite de Marché.

L'estimation tempo-fréquentielle du MEDAF par les ondelettes discrètes appliquée aux 30 actions françaises de notre base de données est réalisée dans **le Chapitre deux**. Son objectif est de vérifier la puissance des ondelettes pour différencier le Beta de la Droite de Marché selon les fréquences. Nous construisons, pour analyser l'instabilité du Beta de la Droite de Marché, une fenêtre tempo-fréquentielle roulante conceptuellement mieux adaptée que l'application directe de la régression forward avec fenêtre roulante sur la décomposition fréquentielle des séries. Nous montrons, par la suite, qu'il est possible d'établir une correction des valeurs estimées des Betas par une prise en compte hétéroscédastique de l'aléa.

Le Chapitre trois étudie deux formes multivariées du MEDAF. La première consiste à construire un Modèle Multi-Betas par l'ajout de variables exogènes supplémentaires, l'Or et le Pétrole, sélectionnés selon les résultats de différents travaux. La seconde est un prolongement de la théorie des ondelettes multivariées qui permet d'améliorer la compréhension des mouvements du Beta au cours du Temps et des Fréquences.

Chapitre 1 : Le Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (MEDAF) et l'analyse Temps-Fréquence

Le MEDAF a été élaboré par Sharpe en 1964 et s'est rapidement imposé comme un pilier de la Théorie Financière Moderne. Il se base sur les travaux précurseurs de Markowitz sur le critère Espérance-Variance (Gain-Risque) qui conditionne l'allocation de portefeuille et les choix d'investissements risqués. Le MEDAF prolonge ce type d'approche avec le paramètre Beta qui définit la notion de risque systématique. Il est nécessaire de bien comprendre ses hypothèses et ses développements théoriques afin d'exploiter pleinement ses résultats économétriques. Les aspects théoriques du modèle ainsi que ses extensions sont exposés dans une **première section**, l'objectif est de résumer les grandes étapes de la recherche sur le modèle qui s'est orientée autour de plusieurs axes :

- Les tests du MEDAF se basant sur la méthodologie de Black, Jensen et Scholes qui permettent d'analyser empiriquement la relation entre l'Espérance de rentabilité ex post et le Beta. Ces analyses se concentrent donc sur les implications théoriques du MEDAF et tentent de vérifier si elles s'observent dans la réalité.
- Les « anomalies » observées dans plusieurs études qui ont conduit les théoriciens à repenser le modèle en relâchant certaines hypothèses. Une remise en cause profonde du modèle se développe par la suite avec l'émergence des Modèles à plusieurs facteurs (Fama et French 1992).
- Une utilisation des méthodes statistiques pour valider le MEDAF. La problématique de l'instabilité temporelle du Beta constitue une partie importante de l'amélioration du MEDAF et de sa robustesse.
- La finance comportementale qui apporte des éléments de réponses aux anomalies observées en se référant aux facteurs psychologiques et comportementaux auxquels font face les agents comme l'ont montré les travaux de Kahnemann et Tversky (1979). La problématique concerne l'hypothèse d'homogénéité des comportements des investisseurs. Sous cette hypothèse, les agents supposent qu'ils possèdent le même horizon

d'investissement afin de réaliser leurs calculs et effectuer leurs choix. Or la fréquence d'investissement (horizon de placement) est un facteur important à prendre en compte en gestion de portefeuille pour ajuster ses positions.

L'instabilité du Beta, associée au rejet de l'hypothèse d'homogénéité comportementale, peuvent remettre en cause les implications du MEDAF en matière d'appréciation du risque systématique. Les travaux de Gençay *et al* (2003-2005) sont utilisés comme référence pour apporter une réponse à cette problématique avec la possibilité de différencier les investisseurs par leurs horizons de placement. Ils recourent à l'analyse par ondelettes qui constitue un réel progrès en mathématiques en autorisant l'étude des chroniques dans l'espace temps-fréquences.

L'augmentation de la puissance de calculs a permis l'utilisation de ce type de méthodes en finance afin de prendre en considération l'impact de l'horizon de placement sur les modèles. Les fondements des différentes décompositions (ou transformations) en ondelettes, qu'elles soient Continues (CWT) ou Discrètes (DWT et MODWT), sont abordés dans la **deuxième section** de ce chapitre.

Les ondelettes sont théoriquement développées sous leur forme continue avec la CWT, mais leur emploi, freiné par des limitations techniques sur la puissance de calcul, a nécessité le développement des Transformations Discrètes en ondelettes plus rapides à mettre œuvre. Les cas discrets, à cet effet, se basent sur l'utilisation de bandes de fréquences élaborées selon une échelle dyadique afin de réduire drastiquement le temps de calcul nécessaire pour décomposer une série. Ces bandes de fréquences sont ensuite exprimées dans la même unité de temps que la série d'origine (par un passage des Fréquences aux Périodes) pour obtenir des intervalles temporels qui traduisent, en finance, les différents horizons de placements. Le développement rapide des technologies informatiques a permis, par la suite, l'utilisation d'outils multivariés basés sur la CWT comme la cohérence et la phase.

Ce Chapitre est, par ailleurs, complété par une Annexe dans laquelle ces notions sont empiriquement appliquées au CAC40.

Section 1 : Aspects théoriques du Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers de Sharpe et ses prolongements.

Les fondements théoriques du MEDAF et sa formulation mathématique, la Droite de Marché, débutent la présentation d'un historique des principales études réalisées sur ce modèle qui ont permis à la fois de le confronter à la réalité, de l'améliorer sur le plan théorique et de résoudre certains problèmes liés à l'estimation de son paramètre central, le Beta.

1.1. De Markowitz à Sharpe : Les origines du MEDAF :

La sélection des actifs pour construire des portefeuilles est une étape primordiale qui nécessite de discriminer les actions sur la base de plusieurs critères. Harry Markowitz en 1952 est le premier à réaliser cette sélection des actifs par leurs caractéristiques propres. Il part du postulat suivant : un investisseur fait face à plusieurs actifs dont les rentabilités futures sont aléatoires (et inconnues). N'étant pas en mesure de distinguer les différents profils d'actifs en termes de rentabilité et de risque, l'investisseur ne sait pas lesquels doivent figurer dans son portefeuille ni dans quelle proportion.

Markowitz se base sur les travaux de Von Neumann et Morgenstern (1944) sur les prises de décisions dans un environnement risqué. Il propose de simplifier le problème en se basant sur une fonction d'Utilité quadratique et une distribution Normale.

L'espérance mathématique des rentabilités passées notée $E(R_i) = \mu_i$ définit la rentabilité espérée de l'investissement (expected return) et la variance (ou l'écart-type) des cours passés notée $V(R_i) = \sigma_i^2$ est utilisée comme mesure du risque. Un actif peut se définir par son couple Rentabilité-Risque (ou Rendement-Risque). Le critère Espérance-Variance (CEV) pose ainsi les bases du système de comparaison et des programmes de maximisation.

Un portefeuille se caractérise lui-aussi par son couple Rentabilité-Risque qui dépend entièrement des actifs qui le composent. En notant w_i pour $i = 1 \dots A$ (A est le nombre d'actifs), la proportion du Portefeuille P investit dans l'actif i , σ_{ij}

la covariance entre l'actif i et j , et ρ_{ij} la corrélation entre l'actif i et j , on obtient le couple suivant :

$$E(R_P) = \mu_P = \sum_{i=1}^A w_i \mu_i$$

$$V(R_P) = \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A w_i w_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A w_i w_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$$

Pour Markowitz, les agents effectuent leurs choix et déterminent w_i , à partir du CEV. Ils cherchent à maximiser une fonction d'Utilité de leur Portefeuille P qui dépend positivement de son Rendement et négativement de son Risque. Il théorise les étapes de la construction d'un portefeuille optimal et montre que celui-ci correspond au portefeuille offrant une rentabilité maximale pour un niveau de risque fixé à l'avance par l'investisseur (de façon exogène) ou alors celui qui minimise le risque sous la contrainte d'une rentabilité fixée.

Les hypothèses suivantes découlent de cette approche et définissent l'ensemble des portefeuilles efficients/optimaux que l'on nomme la Frontière Efficiente (de Markowitz).

- A rentabilités identiques, un investisseur choisira le portefeuille présentant le risque le plus faible impliquant alors une aversion pour le risque des agents.
- Pour un niveau de risque fixé, l'investisseur optera pour le portefeuille offrant la rentabilité la plus forte.

Pour trouver l'allocation optimale selon ses préférences un investisseur doit résoudre un des programmes d'optimisation suivants

- $Min V(R_P) = \sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A w_i w_j \sigma_{ij}$ s/c $\sum_{i=1}^A w_i \mu_i = \bar{\mu}$ et $\sum_{i=1}^A w_i = 1$
- $Max E(R_P) = \sum_{i=1}^A w_i \mu_i$ s/c $\sum_{i=1}^A \sum_{j=1}^A w_i w_j \sigma_{ij} = \bar{\sigma}^2$ et $\sum_{i=1}^A w_i = 1$

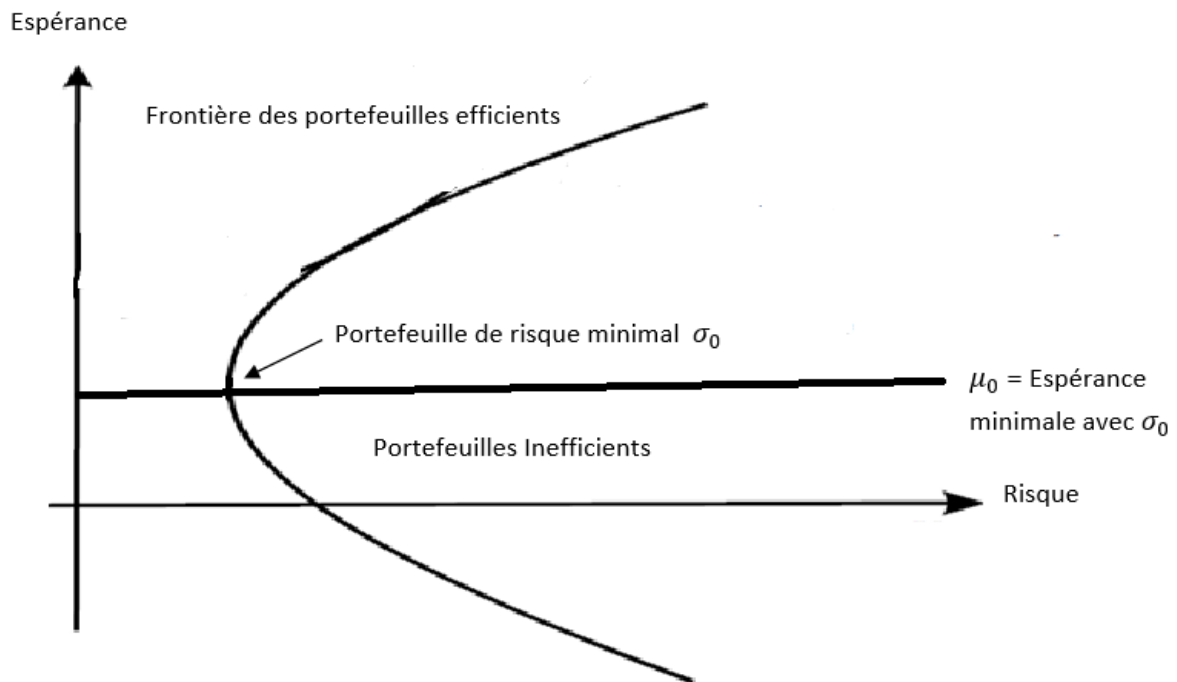
$\bar{\sigma}^2$ et $\bar{\mu}$ sont les valeur fixées par l'agent (s/c = sous contrainte).

La contrainte $\sum_{i=1}^A w_i = 1$ avec $w_i > 0$ signifie que les investisseurs ne peuvent pas acheter ou vendre à découvert (emprunter à un tiers plus que sa richesse initiale pour investir et le rembourser une fois la position liquidée).

Il existe, par conséquent, une infinité de portefeuille efficient d'après le critère rentabilité-risque (ou espérance-variance) constituant la frontière efficiente de Markowitz. Cette

Frontière prend la forme d'une "demi-lune" concave croissante puisque plus le risque augmente plus l'espérance de rentabilité doit être élevée (Figure 1).

Figure 1 : Frontière Efficiente de Markowitz



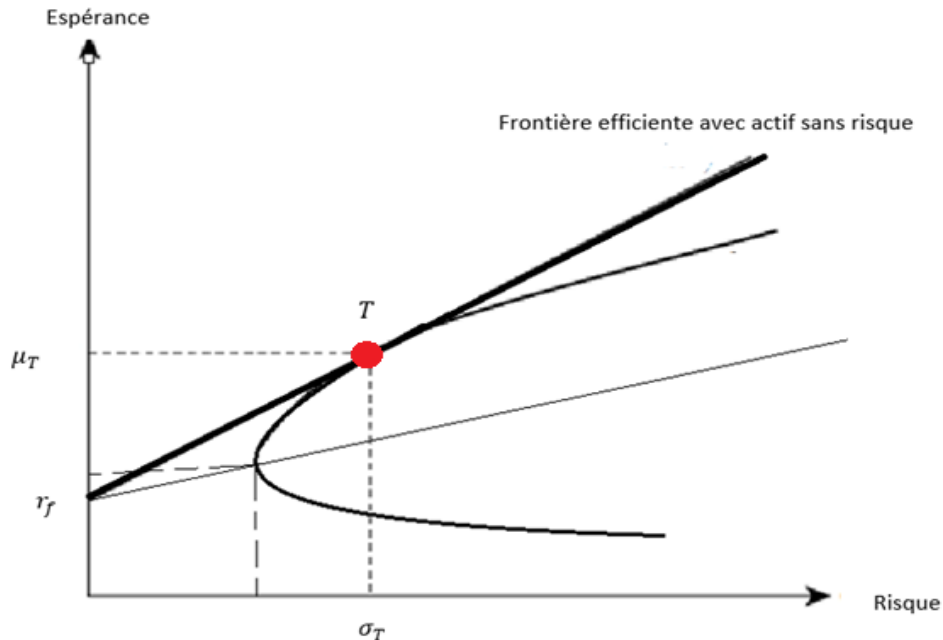
Il existe un couple (μ_0, σ_0) qui définit le portefeuille de risque minimal tel que tous les portefeuilles situés en dessous ne sont pas efficients, dans la mesure où il existe, pour un même niveau de risque, un portefeuille offrant une espérance de rentabilité plus élevée.

La logique de Markowitz constitue le socle des théories financières modernes et de la gestion de portefeuille. Son article fondateur de 1952 fut l'objet de plusieurs études, et par la suite plusieurs auteurs ont rajoutées des hypothèses supplémentaires permettant l'amélioration du modèle.

A cet effet, Tobin suppose l'existence d'un actif sans risque, de rentabilité r_f , auquel les agents peuvent prêter ou emprunter. La présence de cet actif à rentabilité certaine (il n'y a pas de risque de fluctuations incertaines de sa valeur) modifie alors le choix initial de l'investisseur de Markowitz. La frontière efficiente est modifiée, elle présente une ordonnée à l'origine correspondant à la rentabilité de l'actif sans risque. Il existe, par conséquent, un portefeuille efficient parfaitement diversifié mais aussi un portefeuille sans risque. Le

portefeuille T avec son couple (μ_T, σ_T) représente le portefeuille de marché qui ne contient que des actifs risqués parfaitement diversifiés.

Figure 2 : Frontière Efficiente avec Actif sans risque.



Tobin, par le théorème de séparation des fonds, montre que tout portefeuille efficient peut s'obtenir en combinant T et r_f ; « tout autre portefeuille est efficient s'il est constitué du portefeuille parfaitement diversifié et du portefeuille sans risque » (Tobin). Les investisseurs sont supposés avoir les mêmes anticipations et le même horizon de placement par conséquent ils partagent la même frontière efficiente. Le choix de l'allocation entre actifs risqués (le portefeuille risqué) et non-risqué dépendra alors de la fonction d'utilité de l'investisseur et de son degré d'aversion au risque.

Les portefeuilles situés sur la partie gauche de la droite $[r_f, T]$ représentent des agents globalement averses au risque allouant à l'actif sans risque une proportion positive. Plus le portefeuille se rapproche de l'ordonnée plus l'agent est risquophobe et tend à investir une grosse partie de son capital dans l'actif sans-risque. Plus le portefeuille se déplace vers la droite, plus on tend vers le portefeuille de marché et donc l'agent est moins averse au risque. A l'opposé, la partie droite $[T, \infty]$ correspond aux investisseurs risquophiles ayant tendance à surinvestir dans le portefeuille de marché en lui attribuant une proportion supérieure à 100%. Ils empruntent, par conséquent, au taux sans risque aux agents situés sur la partie droite.

L'apport de Tobin à la théorie de Markowitz pose les bases du principe de la prime de risque qui est au cœur du MEDAF. La diversification dans le portefeuille est aussi mise en évidence car elle permet une réduction du risque mais certaines questions restent encore en suspens notamment sur la composition totale du risque.

1.2. Les fondements du MEDAF

Le théorème de Tobin et le modèle de Markowitz vont donner naissance au Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers (MEDAF) ou Capital Asset Pricing Model (CAPM) en anglais, développé par Sharpe en 1964, Mossin en 1966, Treynor en 1962, et Lintner en 1965. Alors que la théorie précédente explique le choix optimal pour un investisseur en particulier, le MEDAF se place dans un cadre concurrentiel où il existe une multitude d'agents ayant un comportement rationnel à la Markowitz. Il en découle alors des Prix d'équilibre des actifs découlant du Marché. Le modèle ajoute ainsi les hypothèses suivantes pour parvenir à un équilibre :

- Le marché est parfait car il n'y a aucune barrière aux échanges de titres (c'est-à-dire aucun frais de transactions ou de taxes).
- Les agents utilisent le modèle de Markowitz pour la construction de leurs portefeuilles. Ils minimisent le risque sous contrainte d'une rentabilité donnée, les agents sont donc averses au risque.
- Les anticipations sur les titres sont les mêmes pour tous les agents ce qui revient à considérer qu'ils possèdent le même horizon de placement. Il y a donc une homogénéité des comportements des investisseurs.
- Il n'y a aucune restriction sur les prêts et les emprunts au taux sans risque r_f .

L'équilibre entre Offre et Demande de titres est obtenu si l'allocation optimale correspond à la proportion de chaque actif dans la valeur totale du marché. Le Portefeuille de Marché, M , se définit justement à partir d'une allocation optimale entre tous les actifs suivant leurs poids dans la valeur du marché.

On considère un marché composé de J agents qui sont pourvus d'une richesse initiale notée W_j ainsi que d'une fonction d'utilité U_j dépendante de leur richesse terminale après investissement notée \tilde{W}_j ($j = 1 \dots J$).

Le MEDAF implique l'existence de A titres risqués (indicés tels que $i = 1 \dots A$) d'espérance de rentabilité μ_i qui correspondent aux actions émises par A entreprises. Chacune émet un nombre constant (normé à 1) d'actions dont le prix est noté q_i . Les agents déterminent la part γ_i^j de l'entreprise i qu'il souhaite détenir. Il apparaît alors que la condition d'équilibre pour le titre i est $\sum_{j=1}^J \gamma_i^j = 1$. Sous cette condition, le prix q_i peut s'assimiler à la capitalisation boursière de l'entreprise i .

A l'équilibre, la demande des ménages en titre i doit être égale à la capitalisation boursière de l'entreprise i :

$$\sum_{j=1}^J q_i \gamma_i^j = q_i$$

Un raisonnement similaire s'opère pour le Marché qui se caractérise par l'ensemble des q_i , ainsi $\sum_{i=1}^A q_i$ définit sa valeur boursière (capitalisation totale) et γ_i^M traduit les poids de chaque titre, tel que :

$$\gamma_i^M = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^A q_i}$$

La composition du Marché $\gamma^M = (\gamma_1^M, \dots, \gamma_N^M)$ constitue le Portefeuille de Marché M tel que $\sum_{i=1}^A \gamma_i^M = 1$.

Les agents définissent aussi le montant B_j qu'ils souhaitent investir dans l'actif sans risque de rentabilité r_f . Si $B_j > 0$ les agents sont prêteurs alors qu'ils sont emprunteurs si $B_j < 0$. La demande des entreprises ou des Etats est supposée nulle dans le MEDAF. La condition d'équilibre du Marché est donc $\sum_{j=1}^J B_j = 0$.

A partir des structures définies précédemment on caractérise la contrainte de chaque agent ainsi que sa richesse finale issue de son investissement.

La contrainte budgétaire d'un agent peut s'écrire :

$$\sum_{i=1}^A q_i \gamma_i^j + B_j = W_j$$

En divisant par W_j , on fait apparaître les proportions d'investissement dans chaque actif risqué w_i^j et dans l'actif sans risque w_o^j tel que :

$$\sum_{i=1}^A \frac{q_i \gamma_i^j}{W_j} + \left(\frac{B_j}{W_j}\right) = 1$$

Donc

$$w_i^j = \frac{q_i \gamma_i^j}{W_j} \quad \forall i = 1 \dots A$$

$$w_o^j = \frac{B_j}{W_j} = 1 - \sum_{i=1}^A w_i^j$$

En multipliant la richesse initiale W_j par le taux de rendement de l'investissement en actifs (risqués ou non) on peut en déduire la richesse finale \tilde{W}_j telle que :

$$\tilde{W}_j = W_j \left[w_o^j r_f + \sum_{i=1}^A w_i^j \mu_i \right] = W_j \left[r_f + \sum_{i=1}^A w_i^j (\mu_i - r_f) \right]$$

On fait ainsi apparaître les primes de risque offertes par les actifs risqués $\mu_i - r_f$.

Le MEDAF est un modèle d'équilibre qui respecte les conditions de Markowitz-Tobin. Les positions en actifs risqués définissent donc un portefeuille efficient T qui est détenu par l'ensemble des agents à l'équilibre. On définit sa composition (allocation) comme suit :

$$T = (t_1 \dots t_A)$$

$$\sum_{i=1}^A t_i = 1$$

La condition d'équilibre $\sum_{j=1}^J q_i \gamma_i^j = q_i$ s'écrit alors

$$\sum_{j=1}^J w_i^j W_j = q_i$$

En considérant le Théorème de Tobin, l'investisseur investit aussi dans l'actif sans risque et le reste de sa richesse dans les actifs risqués tel que $w_i^j = (1 - w_o^j)t_i$. Il apparaît alors :

$$\sum_{j=1}^J (1 - w_o^j)t_i W_j = q_i$$

$$t_i \left(\sum_{j=1}^J (1 - w_o^j) W_j \right) = q_i$$

En faisant la somme pour l'ensemble de titres, il vient :

$$\sum_{i=1}^A t_i \left(\sum_{j=1}^J (1 - w_o^j) W_j \right) = \sum_{i=1}^A q_i$$

Par simplification à l'équilibre, il vient que $\sum_{j=1}^J (1 - w_o^j) W_j = \sum_{i=1}^A q_i$. On peut donc trouver les valeurs de t_i à l'équilibre. Elles sont telles que :

$$t_i = \frac{q_i}{\sum_{i=1}^A q_i} = \gamma_i^M$$

Les hypothèses, notamment celle sur l'homogénéité des comportements, impliquent alors qu'à l'équilibre tous les agents possèdent le même portefeuille (tangente) T. Celui-ci contient alors tous les actifs dans les mêmes proportions que le Portefeuille de Marché. Seule l'allocation entre M et l'actif sans-risque dépendra des préférences des investisseurs et de son aversion au risque.

Le Portefeuille de Marché constitue le seul portefeuille risqué efficient. On peut l'assimiler aisément à un A+1 ième actif risqué. Un agent rationnel va donc chercher à minimiser le risque sous contraintes d'une rentabilité fixée $\bar{\mu}$ afin de définir son allocation optimale :

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{A+1} \sum_{k=1}^{A+1} w_i w_k \sigma_{ik}$$

$$r_f + \sum_{i=1}^{A+1} w_i (\mu_i - r_f) \geq \bar{\mu}$$

On trouve donc les conditions du premier ordre suivantes en dérivant le programme précédent par w_i :

$$w_i \sigma_i^2 + \sum_{k \neq i} w_k \sigma_{ik} - \lambda(\mu_i - r_f) = 0$$

Inclure le Marché comme actif dans le programme conduit toujours au choix optimal d'investir $1 - w_0$ dans les actifs risqués (le portefeuille T) dans les mêmes proportions que M. Ainsi si $i \neq A + 1 = M$ on trouve $w_i = 0$ et donc $w_{A+1} = w_M = 1 - w_0$. Les conditions du premier ordre prennent alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} w_M \sigma_{iM} &= \lambda(\mu_i - r_f) \quad \text{pour } i = 1 \dots A \\ w_M \sigma_M^2 &= \lambda(\mu_M - r_f) \end{aligned}$$

A l'équilibre, les investisseurs détiennent donc une part $1 - w_0 = w_M$ de M dans leur portefeuille P avec une rentabilité espérée de μ_P avec une variance σ_P^2 tels que :

$$\begin{aligned} \mu_P &= w_0 r_f + (1 - w_0) \mu_M = \bar{\mu} \\ \sigma_P^2 &= (1 - w_0)^2 \sigma_M^2 \end{aligned}$$

Il apparait que $\mu_P = \bar{\mu} = r_f + (1 - w_0)(\mu_M - r_f)$ et que $1 - w_0 = \frac{\sigma_P}{\sigma_M}$ il vient donc :

$$\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_P} = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$$

Il existe alors une relation linéaire entre la rentabilité d'un portefeuille efficient quelconque P, celle du Marché et le risque. Cette relation se nomme la Droite de Marché des Capitaux (ou CML , Capital Market Line) :

$$E(R_P) = \mu_P = r_f + \left(\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M} \right) \sigma_P$$

Le MEDAF amène la notion de prime de risque du marché. Le risque est rémunéré par le marché (i.e. à l'équilibre) uniquement si les agents détiennent un portefeuille efficient avec la même allocation risqué que M. La diversification permettant de réduire une partie du risque total, 'le risque restant' apporté par le Marché doit conduire à un rendement supérieur au taux sans risque du portefeuille M. L'expression $\mu_M - r_f$ définit ainsi la prime de risque du Marché

Les agents fondamentalement averses aux risques d'après les hypothèses du MEDAF, accepteront de prendre un risque supplémentaire uniquement s'ils reçoivent en contrepartie

une rentabilité plus élevée pour compenser le risque qu'ils supportent, donc la prime de risque doit être positive.

La notion fondamentale du MEDAF est représentée par la rémunération de cette partie du risque qui n'est pas diversifiable et que l'on nomme le *Risque Systématique*. Le risque total du portefeuille se décompose donc en Risque Systématique qui provient du Marché et du Risque Idiosyncratique ou spécifique. Celui-ci est propre à chaque titre mais il est éliminé par diversification donc il ne fournit pas de prime de risque. La pente de la CML est le ratio de la prime de marché rapporté à son risque que l'on nomme le Prix de Marché du Risque.

La CML n'est cependant valide que pour un Portefeuille P et non pour un actif i en particulier. Les agents ne détiennent uniquement le titre i que parce qu'il est contenu dans M dans une certaine proportion. Son risque ne peut être apprécié uniquement par l'écart-type. Il faut, en effet, le mesurer en tenant compte de sa part dans le risque du portefeuille M.

En reprenant les conditions du premier ordre du programme et en utilisant le paramètre λ , il vient le quotient $\frac{\mu_i - r_f}{\mu_M - r_f} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ qui peut se réécrire comme suit :

$$E(R_i) = \mu_i = r_f + (\mu_M - r_f) \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M}$$

Avec $\sigma_{i,M}$ la covariance du titre i avec le Marché M

Le MEDAF définit ainsi une Droite de Marché pour les Titres (SML, Securities Market Line). Le Beta (noté β) est alors l'indicateur du risque systématique de l'actif tel que :

$$\beta_i = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M}$$

Il peut être perçu comme un coefficient multiplicateur de la prime de marché qui définit celle de l'actif :

$$\mu_i - r_f = (\mu_M - r_f) \beta_i$$

Pour un Portefeuille P, le Beta correspond à la moyenne pondérée des Betas de chaque titre qui le compose :

$$\beta_P = \sum w_i \beta_i$$

D'un point de vue statistique, le MEDAF peut se réécrire en considérant les rendements aux cours du temps de l'actif et du Marché comme l'a remarqué Jensen (1969) :

$$R_{i,t} = \alpha_i + \beta_i R_{M,t} + \varepsilon_{i,t}$$

Avec $\varepsilon_{i,t}$ un processus *n.i.d.*

La constante de ce modèle doit être similaire à celle de la SML tel que $\alpha_i = (1 - \beta_i)r_f$. L'estimation par les MCO de la droite de régression de $R_{i,t}$ sur $R_{M,t}$ fournit l'estimateur du Beta qui s'assimile alors à un coefficient d'élasticité qui traduit la sensibilité de l'actif i aux variations du Marché et la constante $\hat{\alpha}_i = \mu_i - \beta_i \mu_M$. On remarque que l'estimateur de cette équation n'est pas fidèle à la SML mais, en posant $r_{i,t} = R_{i,t} - r_f$ la prime de l'actif i et $r_{M,t} = R_{M,t} - r_f$ celle du Marché il vient :

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{M,t} + \varepsilon_{i,t}$$

Cette équation est la représentation empirique du MEDAF que l'on appelle la Droite Caractéristique du Titre (ou encore Modèle de Marché). Elle est l'écho empirique de la SML et du MEDAF, en l'estimant par les MCO il vient les résultats suivants :

$$\hat{\beta}_i = \frac{Cov(r_{i,t}, r_{M,t})}{V(r_{M,t})}$$

$$\hat{\alpha}_i = E(r_{i,t}) - \hat{\beta}_i E(r_{M,t}) = 0$$

Le MEDAF repose alors sur le fait que le Beta est constant et est parfaitement déterminé pour chaque actif, et que l'alpha est nul. L'alpha est communément appelé "Alpha de Jensen".

Bien que le MEDAF soit un modèle relativement simple à comprendre, ses hypothèses sont sujettes aux critiques et sont considérées comme irréalistes et trop fortes. Plusieurs études ont été réalisées et montrent que le modèle n'est pas totalement valide. Il existe plusieurs façons de tester la validité du MEDAF en considérant les points précédents, cependant malgré les nombreuses critiques, ce dernier a trouvé des applications empiriques basées sur le Beta et son analyse.

1.3. Empirie versus Théorie : vers une validité relative du MEDAF :

De nombreux auteurs ont testé la validité empirique du MEDAF dans les années suivant l'article de Sharpe. Le MEDAF est un modèle basé sur les anticipations des rentabilités, or il nous est impossible de les connaître, nous sommes alors contraints d'utiliser les réalisations passées des rentabilités pour le vérifier. Les premiers articles étudiant le modèle sont directement basés sur l'estimations du Modèle de Marché afin d'en tester les paramètres notamment la nullité de l'alpha.

Le MEDAF, de plus, explique la rentabilité d'un actif par une relation avec le risque. Les hypothèses testables du modèle sont réalisées en recourant à l'estimation du modèle :

$$E(r_{i,t}) = Y_0 + Y_1 \beta_i + Y_2 \beta_i^2 + \eta_{i,t}$$

$\eta_{i,t}$ est un *n.i.d.*

- 1) L'hypothèse de linéarité de la relation Espérance de rentabilité-Risque. Le terme β_i^2 permet de tester la linéarité de l'équation quand $\hat{Y}_2 = 0$
- 2) Le β est la seule mesure du risque d'un titre ou d'un portefeuille donc si $\hat{\alpha}_i \neq 0$ cette condition ne tient plus. Cela nécessite que $\hat{Y}_0 = 0$ ou $\hat{Y}_0 = r_f$ si le modèle considère les Espérances des rentabilités au lieu de la prime de risque.
- 3) Plus le risque est fort plus l'espérance est élevée ce qui implique la positivité de la prime de risque soit $\hat{Y}_1 = E(r_{M,t}) > 0$

Les travaux de Douglas (1968), portant sur des données trimestrielles et annuelles, minimisent le poids du Beta dans l'équation du modèle. Ils indiquent que le risque total mesuré par la variance présente un estimateur significatif plus important que la beta. Leurs conclusions ont été en partie rejetées par Miller et Scholes (1972) qui considèrent qu'il existe des erreurs de mesure sur les betas mais aussi des biais introduits par l'asymétrie des distributions des rendements. Ces biais seraient à l'origine des décalages observés par Douglas, faussant ainsi leurs conclusions. Ils montrent par ailleurs que les actions avec un beta fort ont tendance à avoir un alpha négatif alors que celles possédant un Beta faible ont un alpha plutôt positif. Ce résultat tend à confirmer ceux de Friend et Blume (1970) et de Black (1972) qui ont trouvé que l'estimateur $\hat{Y}_0 > r_f$. Ils indiquent aussi que les portefeuilles à Beta faible ont une prime de risque plus importante que celle théorique, alors qu'à l'opposé les portefeuilles à Beta fort

possèdent une prime inférieure. L'étude de Blume et Friend (1970-1973) portant sur des données trimestrielles américaines de 1955 à 1968, ont montré qu'il existe bien une relation linéaire entre les rentabilités en excès et le beta. Cependant, les auteurs n'ont pas validé le modèle suite à leurs résultats car les estimateurs du taux sans risque et de la prime de risque n'étaient pas conformes à leurs observations empiriques.

Ces travaux ont conduit Black (1972) à considérer une autre version du MEDAF qui relâche l'hypothèse d'emprunt et de prêt aux taux sans risque en observant la non-nullité des alphas de Jensen. Black part du principe qu'il existe un autre facteur dans l'équation du MEDAF qui n'est pas corrélé avec le marché mais dont la rentabilité est supérieure au taux sans risque. On parle alors du Portefeuille Zéro-Beta noté P_z d'espérance de rentabilité $E(R_z)$. Le Black-CAPM est alors souvent appelé 'modèle à deux facteurs'. Le modèle se réécrit sous la forme :

$$R_{i,t} = \alpha_i + (1 - \beta_i)R_{z,t} + \beta_i \cdot R_{M,t} + \varepsilon_{i,t}$$

Empiriquement, l'estimation de ce type de modèle est cohérente avec la significativité de l'alpha qui vaut $\hat{\alpha}_i = (E(R_{i,t}) - E(R_{z,t})) - \beta_i(E(R_M) - E(R_z))$.

Le Black-CAPM fut testé en même temps que celui de Sharpe-Lintner par de nombreux auteurs.

En 1972, Sharpe et Cooper ont analysé toutes les actions cotées sur le marché américain NYSE sur une période de 31 ans (en fréquence mensuelle), dans le but de valider le MEDAF. Pour cela ils ont estimé pour chaque action leur beta respectif sur la base des rentabilités des cinq dernières années. Une fois les betas estimés, ils ont classé les actions par ordre du beta croissant. Ils ont ensuite rassemblé par déciles les actions en 10 portefeuilles équipondérés. Ils ont ainsi observé la rentabilité des 10 portefeuilles pendant 1 an et ils ont ré-estimé les Betas afin de reconstruire des portefeuilles chaque année. Avec cette méthode, ils ont réduit les biais statistiques de mesure. Ils ont ensuite réalisé des régressions en panel dont les résultats finaux semblent confirmer le MEDAF en indiquant une relation positive entre la rentabilité et le Beta. Cependant, ils avaient considéré un taux sans risque constant dans leurs calculs ce qui n'est pas empiriquement vérifié. Cette erreur a introduit un biais dans les estimateurs des Betas, mais dans l'ensemble leurs travaux ont été considérés comme recevables et les résultats comme satisfaisants.

La même année Black, Jensen et Scholes (noté BJS par la suite) ont réalisé eux aussi une étude sur le NYSE pour la période 1926-1965. La méthodologie se base sur une double estimation par les MCO détaillée étape par étape ci-dessous :

- Ils estiment les betas des actifs pour la période 1926-1930 par régressions des rentabilités en excès du taux sans risque.
- Comme Sharpe et Cooper, ils classent les actifs en fonction de leurs betas et ils construisent des portefeuilles.
- Ils calculent pour l'année 1931, les rentabilités en excès des 10 portefeuilles,
- La deuxième régression porte sur les rentabilités moyennes des portefeuilles et les betas pour trouver les estimateurs de γ_0 , γ_1 et γ_2 .

Ces étapes sont ensuite répétées, avec un décalage d'un an, jusqu'à obtenir les rentabilités des portefeuilles sur l'ensemble de la période considérée.

Les résultats des travaux de BJS sont mitigés, la constante γ_0 est significativement différente de zéro, ce qui rejette le MEDAF et ils confirment le lien existant entre la constante et le beta : quand celui-ci est supérieur à un la constante est négative (et inversement). De plus, γ_1 est bien positif mais inférieur aux prévisions du MEDAF théorique, mais la linéarité de la relation Rentabilité-Risque est attestée. En découpant leur période initiale en 4 sous-périodes, ils arrivent à des résultats semblables en nature mais différents en valeur. Ils abordent de ce fait l'éventualité de l'instabilité des estimateurs et des betas au cours du temps.

Les résultats de BJS confirment l'intérêt de recourir au MEDAF de Black sans toutefois rejeter le MEDAF classique de Sharpe. Ils indiquent, en effet, que les observations empiriques sont plus proches du Black-CAPM que du MEDAF standard.

Fama et MacBeth (1973) ont aussi testé le MEDAF en utilisant la méthodologie de BJS. Cependant en plus de tester l'équation ils ont ajouté des équations dans le but de vérifier les hypothèses de linéarité et de positivité du lien entre rentabilité et le beta.

$$E(r_{i,t}) = \gamma_0 + \beta_i \gamma_1 + \beta_i^2 \gamma_2 + \sigma_i \gamma_3 + \eta_{i,t}$$

En théorie, le MEDAF implique que les paramètres $\gamma_2 = \gamma_3 = 0$ et $\gamma_1 > 0$. Leur méthodologie reprend celle de BJS. Dans un premier temps ils estiment les betas de tous les titres pour une période, afin de construire 20 portefeuilles. Durant la période suivante il

réestiment les betas des actifs, en calculent une moyenne pondérée pour trouver les betas des portefeuilles. Ils estiment ensuite les équations précédentes avec les portefeuilles créés.

Les résultats montrent que la constante Y_0 est légèrement plus élevée que la moyenne des taux sans risque, tout comme l'estimateur de la prime de risque qui est bien positif mais au-dessus des résultats théoriquement attendus. Ils trouvent, par ailleurs, que $Y_2 = Y_3 = 0$. D'après Fama, ces résultats ne permettent pas de rejeter complètement le MEDAF dans la mesure où rien ne vient contredire la relation linéaire et positive entre rentabilité et risque. Ils ont constaté, cependant, à l'instar de BJS, une instabilité des betas au cours du temps, ce qui constitue une barrière importante à la validation du MEDAF.

En Europe, Modigliani et al (1973) puis Pogue et Solnik (1974) ont étudié la validité du MEDAF sur des données regroupant les actions des 7 bourses européennes (France, Allemagne, Italie, Angleterre, Belgique, Pays-Bas, Suisse). Leurs résultats sont les suivants :

- Les betas sont tous significatifs mais leurs pouvoirs explicatifs des primes de risque (mesuré par le R^2) varient selon les pays.
- Les Betas sont fortement volatils et ont tendance à varier en fonction de la fréquence des données (mois, hebdomadaires, jours) et selon les périodes considérées.
- Les constantes ne sont pas toujours significatives et elles sont corrélées avec le risque.

Dans leurs conclusions, ils ne rejettent pas pour autant le MEDAF et le confirment dans la grande majorité de ces implications. Ils expliquent les anomalies observées par une forme d'inefficacité des marchés européens à évaluer correctement les actifs.

Les études précédentes ne rejettent donc pas fondamentalement le MEDAF mais elles mettent en évidence certaines limites propres aux méthodes d'estimations employées. Des « anomalies » sont observables comme la négativité de la prime de risque sur certaines périodes ou encore la variabilité des Betas. Il est devenu commun de ce fait d'estimer le MEDAF par période de 5 ans conduisant ainsi à l'usage des fenêtres roulantes.

Roll (1977), à cet effet, a soulevé une critique majeure au MEDAF. Le modèle se base sur la relation liant l'actif au portefeuille de marché parfaitement diversifié, or celui-ci n'est pas observable car il n'existe pas réellement. Les tests du MEDAF se basent sur les indices boursiers (CAC40, Dow Jones, S&P500 etc ...) comme « proxy » du portefeuille de marché mais Roll explique que ce proxy n'est pas représentatif de tous les investissements possibles

(l'investissement dans l'immobilier par exemple). Pour Roll, le MEDAF n'est pas un modèle testable, par conséquent, les conclusions prétendant le valider ou l'infirmier sont fausses et erronées, puisque les tests ne peuvent pas être exactement construits comme pour le MEDAF théorique.

Les débats sur la validité du MEDAF ont été nombreux. Le modèle se basant sur des hypothèses très fortes, ses résultats ne sont pas observés empiriquement. Une modification du modèle et de ses hypothèses conditionne l'apparition de MEDAF plus complets.

1.4. Les extensions du MEDAF signent-elles la fin du modèle ?

A l'invalidité empirique du MEDAF a correspondu plusieurs tentatives d'amélioration par le relâchement des hypothèses les plus restrictives ou jugées comme irréalistes.

Black (1972) discute l'hypothèse d'un actif sans risque auquel les agents empruntent et prêtent sans limites en observant la non-nullité de l'alpha. Ce modèle est considéré comme "meilleur" selon Black et al (1972), Fama et McBeth (1973) et Blume et Friend (1973) ; les résultats ne sont pas, cependant, fondamentalement différents en termes de mesure du risque systématique.

L'hypothèse la plus critiquée est celle qui concerne les attentes des investisseurs qui ne considèrent que leur richesse finale ou leur gain en fin de période pour effectuer leurs choix. Merton (1973) développe une version du MEDAF où les agents prennent en compte l'arbitrage entre Consommation et Investissement de leurs gains à la fin de la période. Cette version Intertemporelle du MEDAF (I-CAPM), initialement modélisée en temps continue par Merton, introduit une variable d'état, notée z_t ; elle est utilisée pour considérer les possibilités d'investissement et de consommation futures qui sont incluses dans la fonction d'utilité. Epstein et Zin (1989), puis Campbell (1993) et Fama (1996) en ont construit des versions discrètes.

Un agent va donc chercher à résoudre le programme suivant :

$$\text{Max } U(c_t, z_t) + \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j E(U(c_{t+j}, z_{t+j}))$$

Avec c_t la consommation au temps t , et c_{t+j} celle en $t+j$, z_t la variable d'état et δ qui correspond au taux de préférence pour le temps c'est à dire une pondération psychologique accordée aux Utilités Futures.

Dans ce modèle, les rendements espérés d'un titre dépendent à la fois de son lien avec le Marché et des variations de la variable d'état qui résume les possibilités d'investissement. La conclusion du modèle est que les investisseurs achèteront davantage d'actifs risqués s'ils sont corrélés négativement avec la variable d'état. Campbell et al (2010-2013) ont montré que ce type d'approche permet d'expliquer de façon plus cohérente la construction des portefeuilles en fournissant des prédictions sur la formation de la prime de risque au cours des périodes.

Breeden (1979) a étendu le I-CAPM en considérant le caractère aléatoire des opportunités de consommation et d'investissement. Ces travaux incluent l'incertitude dans le choix simultané entre investissement et consommation instantanée et future. Le modèle Intertemporel introduit ainsi le développement du C-CAPM (Consumption CAPM) qui est une autre extension du MEDAF sous l'angle microéconomique basée sur la consommation (Breeden 1979). Dans ce type de modèle, l'agent maximise son utilité en choisissant simultanément son niveau de consommation et d'investissement en actifs sur plusieurs périodes. L'aspect mathématique est proche du modèle I-CAPM mais les conclusions du modèle sont davantage axées sur le rôle de la consommation. La principale conclusion du modèle est qu'un actif risqué positivement corrélé avec la consommation doit fournir un rendement très élevé afin de lisser les dépenses de consommation. La rentabilité espérée d'un actif dépend de son lien avec la croissance de la consommation entre deux période noté g_t , le C-CAPM définit ainsi le Beta Consommation comme :

$$\beta_c = \frac{Cov(r_{i,t}, g_t)}{Cov(r_{M,t}, g_t)}$$

Bien que le C-CAPM apparaisse comme meilleur que le CAPM sur le plan théorique, Hansen et Singleton (1983) puis Mankiw et Shapiro (1986) montrent que ses résultats empiriques ne peuvent confirmer cette hypothèse car ils ne sont pas plus performants que ceux du CAPM. En estimant l'équation $E(r_{i,t}) = Y_0 + \beta_i Y_1 + \beta_c Y_2 + \eta_{i,t}$, on peut vérifier le C-CAPM si $Y_1 = 0$ et $Y_2 = E(r_{i,t}) - r_f$ ou le MEDAF si $Y_2 = 0$ et $Y_1 = E(r_{i,t}) - r_f$. Leurs résultats ne sont pas en faveur du C-CAPM qui apparait moins performant que le MEDAF traditionnel.

Breeden, Gibbons et Litzenberger (1989) indiquent, par ailleurs, que le C-CAPM présente de nombreux problèmes économétriques liés à la prise en compte de la variable consommation. Empiriquement la consommation agrégée n'est disponible qu'à partir des dépenses en biens et en services sur un intervalle de temps. Les données disponibles sont alors assimilables à une somme des dépenses jusqu'à l'instant t au lieu d'être la valeur "spot" en t ce qui cause des « biais sommation » par la suite. Les auteurs indiquent que ces erreurs sous-évaluent les valeurs des variances et des covariances d'au moins 50%. Leurs résultats montrent aussi le rejet de la linéarité entre rentabilité et risque dans le CCAPM. Au final, ils en concluent que le MEDAF et le CCAPM fournissent des résultats similaires car les deux betas sont fortement corrélés. Ils notent, cependant, que leurs conclusions dépendent de la fréquence des données. Les tests fournissent de meilleurs résultats avec des observations mensuelles. Ils ont aussi testé le CCAPM mais leurs résultats rejettent le modèle car ses prédictions ne sont pas en adéquation avec la réalité.

Cochrane (1996) émet des conclusions plus mitigées, les modèles basés sur le Marché (le MEDAF) et ceux incluant l'investissement et des variables macroéconomiques semblent porter plus d'informations que le CCAPM basé sur la consommation. Il indique notamment la nécessité de considérer la variabilité de la prime de risque. Lettau et Ludvigson (2001) ont comparé les résultats de plusieurs versions du MEDAF avec le modèle à 3 facteurs (développé plus en détails par la suite). Leurs conclusions montrent qu'une version conditionnelle du CCAPM fournit des résultats équivalents à ceux de Fama et French.

Plusieurs auteurs, par la suite, ont développé un axe de recherche en s'orientant sur l'amélioration théorique du CCAPM en lui ajoutant des conditions sur la consommation et les préférences des agents économiques à l'image des travaux de Duffie et Zame (1989). On peut aussi se référer aux études de Ferson et Constantinides (1991) qui ont modifié la fonction d'Utilité des agents en y incluant les habitudes de consommation. Ces travaux se détournent du MEDAF traditionnel. Ils considèrent que la source des problèmes rencontrés est dans les fonctions d'utilité des agents.

Solnik (1974) met en lumière le défaut des théories financières (notamment le MEDAF) qui se focalisent (à l'époque) sur le marché américain uniquement sans considérer les autres possibilités d'investissement. Solnik tente alors de développer une version Internationale du MEDAF (ou IAPM International Asset Pricing Model) qui prend en compte les différents taux sans risque et les taux de changes existants. Ce modèle permet alors aux agents de

considérer différentes possibilités d'investissement : le taux sans risque de leur pays, un portefeuille obligataire (pour les autres pays) qui permet des arbitrages sur les taux de changes, et le Marché. La notion de risque systématique est un peu modifiée car le Marché inclue des actifs internationaux couvert du risque de changes. Grauer et al (1976) ont souligné des restrictions fortes dans les hypothèses de Solnik, notamment sur les flux de capitaux, Sercu (1980) généralise le modèle de Solnik en réglant certaines hypothèses trop fortes sur les taux d'intérêts et l'inflation. Par la suite, Adler et Dumas (1983) et Dumas (1994) ont étudié les conditions d'équilibre de l'IAPM et ont développé une autre version du modèle avec des hypothèses différentes sur l'inflation. Frankel et Engel (1984) puis Engel et Rodrigues (1986-1986) utilisent le Test de Wald sur le CAPM pour conforter ou non l'IAPM mais leurs résultats ne sont pas en faveur des hypothèses de l'IAPM. Ng (2004) a lui aussi testé le IAPM tout en développant une version conditionnelle. Ses résultats sont plutôt encourageants pour la version conditionnelle de l'IAPM mais il montre que le MEDAF est tout aussi efficace. Balvers et Klein (2014) arrivent à des conclusions similaires sur le modèle IAPM conditionnel, bien qu'il soit théoriquement supérieur au MEDAF il n'est pas empiriquement vérifié.

A côté de ces extensions du modèle, un nouvel axe de recherche s'est développé à partir des travaux de Merton sur le I-CAPM. La prise en compte d'une variable d'état conduit à une réécriture du modèle qui autorise plusieurs facteurs (en plus du Marché) influençant les rentabilités. Cette approche associée aux observations « d'anomalies » dans les résultats empiriques du MEDAF conduit à l'émergence des Modèles à Facteurs ou Multi-Betas de Merton (1973) et de l'APT (Arbitrage Pricing Theory) de Ross (1976).

Ces deux modèles considèrent K facteurs/sources de risque expliquant les rentabilités des actifs, l'équation du MEDAF peut alors se réécrire comme suit :

$$R_{i,t} = r_f + \sum_{k=1}^K \beta_{i,k} \cdot F_{k,t} + \varepsilon_{i,t}$$

Avec $\beta_{i,k}$ la sensibilité du titres i au facteur de risque F_k , et $\varepsilon_{i,t} \sim n. i. d.$

Le Modèle APT se distingue du MEDAF car il ne considère pas le Marché parmi les K facteurs alors que le Modèle Multi-Beta maintient le Marché mais rajoute K-1 sources de risque supplémentaires.

Une littérature abondante va alors apparaître afin de déterminer quels sont les facteurs à considérer. Plusieurs études vont apporter des éléments de réponse pertinents en se basant sur des variables de natures différentes :

- Des variables exogènes issues de données macroéconomiques (taux d'intérêt, taux de changes etc ...)
- Des variables endogènes aux entreprises comme des ratios comptables.

Harvey et al (2016) développent dans leur étude l'ensemble des facteurs étudiés pour expliquer la rentabilité attendue.

Cette catégorie de Modèles permet la réalisation de multiples analyses qui considèrent un nombre plus ou moins élevé de facteurs. Certains auteurs recommandent de déterminer a posteriori les facteurs tandis que d'autres se focalisent sur un nombre restreint de variables qui sont définies a priori. Dhrymes et al (1985) indiquent, cependant, que le nombre de facteurs et leurs natures varient selon les périodes considérées.

Chan et al (1985) puis Chen et al (1986), ont considéré des variables exogènes macroéconomiques dans l'équation du MEDAF car elles représentent une source de risque commune aux actifs. Ils retiennent ainsi les variables suivantes : l'inflation inattendue (surprise), les changements anticipés de l'inflation, le taux de croissance de la consommation, les prix du pétrole, les différences entre les taux court et long et la croissance de la production industrielle. Leurs études ont ouvert la voie à d'autres travaux analysant la pertinence d'inclure des variables reflétant des "forces économiques". On peut citer celles de Burnmeister et Wall (1986), de Beenstock et Chan (1988), de Ferson et Harvey (1991-1993-1994), puis de Fung et Hsieh (1997). Cet axe de la recherche est relié directement aux différentes extensions du MEDAF présentées plus haut. Son approche globale, cependant, est différente dans le sens où l'équation du MEDAF est modifiée par le rajout de variables explicatives. Les résultats sont contrastés car ils dépendent fortement du pays étudié, de la fréquence des données et de la période considérée mais ils mettent en évidence l'intérêt de considérer d'autres sources de risque exogène au Marché.

Depuis les chocs pétroliers des années 1980, le rôle du Pétrole est de plus en plus étudié car il représente une source de risque majeure comme l'a indiqué Hamilton (1983). Jones et Kaul (1996), Huang et al (1996) puis Jones et al (2004), Basher et Sadorsky (2006), Boyer et Filion (2007), Driespong et al (2008) et Narayan et Sharma (2011) montrent ainsi les effets des

variations des prix du pétrole sur les rendements des actions. Lee et Zeng (2011) arrivent à des résultats similaires pour les pays du G7 à partir d'une Régression Quantile. Les changements dans les prix du pétrole affectent différemment les actions en fonction du pays, de leurs secteurs etc ..., à titre d'exemple, les actions des entreprises des secteurs Énergétique et Pétrolier, notamment dans les pays producteurs, sont positivement dépendantes de ses fluctuations.

D'autres commodités occupent aussi une place importante dans la littérature financière. Il en est ainsi de l'Or qui, de par ses propriétés de couverture (Hedge), joue un rôle d'actif contracyclique au Marché (cf. Baur et Lucey (2010) puis Baur et McDermott (2010-2016)). Les études sur les relations entre l'Or et les Marchés sont nombreuses et confirment en partie ce constat qui dépend de la période retenue et de la nature des entreprises (Cf. Sumner et al (2010), Miyazaki et al (2012), Mirsha et al (2010), Chan et al (2011), Arfaoui et Ben Rejeb (2017), Hussain Shahzad et al (2017)). L'or apparaît ainsi comme un actif particulier qui s'insère dans l'équation du MEDAF pour en calculer son Beta. Chua et al (1990) ont, à cet effet, estimé le paramètre Beta pour l'Or (considéré ici comme une variable dépendante) et en concluent qu'il est peu sensible aux variations du marché. Ces auteurs n'étudient pas la relation inverse, à savoir la sensibilité des actions aux variations du prix de l'Or, contrairement à Tufano (1998) à partir d'actions minières nord-américaines durant les années 1990. En analysant le MEDAF avec l'Or comme variable explicative, ce dernier conclue, que les actions de ce secteur sont beaucoup plus sensibles à l'Or qu'au Marché car leur Beta est plus important. Il met aussi en évidence des différences de Beta en fonction de la fréquence des données retenues (journalière, mensuelle ou annuelle). Jonhson et Lamdin (2016) puis He et al (2018) arrivent à des résultats similaires avec les mêmes variables pour des données journalières américaines et anglaises plus récentes (entre 2005-2015).

L'importance des variables comptables, comme déterminant du prix, a aussi été étudiée pour répondre aux insuffisances du MEDAF. Basu en 1977, à cet effet, a identifié l'impact du Price Earning Ratio (PER) sur la valeur prédite des rentabilités futures. Il montre que les actions ayant un PER important ont un rendement plus élevé que la prévision du MEDAF. Ce résultat implique alors que le Beta n'est pas le seul déterminant expliquant le prix des actions. Banz (1981) constate que la capitalisation boursière des firmes joue aussi un rôle dans l'appréciation de la rentabilité. Les petites firmes cotées (small caps) offrent une rentabilité moyenne supérieure de 6% environ à celle des grosses firmes (large caps). Banz attribue alors

ces surperformances à un facteur de risque autre que le marché. Bandhari (1988) montre que le ratio d'endettement (noté D/E) explique certaines « anomalies » observées dans le MEDAF. Il note que les actions des entreprises avec un D/E élevé ont une rentabilité anormalement forte par rapport à leur Beta. Stattman (1980) puis Rosenberg et al (1985) soulignent que la rentabilité des actions dépend aussi de la valeur du Book-to-Market Ratio ou B/M qui est le rapport de la valeur comptable de l'entreprise sur sa valeur de Marché. De nombreux auteurs vont confirmer les effets de ces variables sur des marchés autres qu'américains comme le montrent Chan et al (1991) puis Capaul et al (1993).

Ce sont, cependant, Fama et French (1992-1993-1996) qui vont confirmer l'importance de ces variables. Les actions peuvent se distinguer selon la valeur des différents ratios considérés. Fama et French classent les actions selon le ratio B/M et observent que les portefeuilles composés d'actions à fort B/M ont des rentabilités moyennes plus élevées que ceux composés d'actifs à faible B/M. Il apparaît aussi que la valeur du Beta est plus forte quand le ratio B/M est faible (et inversement), par conséquent, plus le beta augmente plus la rentabilité de l'action diminue ... ce résultat est en totale contradiction avec ceux du MEDAF traditionnel. Leurs résultats conduisent à distinguer les "Growth Stocks" (valeur de croissance) avec un B/M faible des "value stock" (valeur de revenu) possédant un B/M fort.

Fama-French vont développer, par la suite, le modèle à 3 facteurs (aussi appelé Modèle de Fama-French) afin de pallier aux insuffisances du MEDAF. Il s'écrit :

$$E(R_{i,t}) - r_f = \beta_{i,M}(E(R_{M,t}) - r_f) + \beta_{i,s}E(SMB_t) + \beta_{i,h}E(HML_t)$$

Avec M pour le marché, s pour le facteur SMB et h pour le facteur HML.

SMB (Small-Minus-Big) représente la différence entre les rendements de deux portefeuilles, l'un composé de "petites" actions l'autre de "grosses". HML (High-Minus-Low) correspond à la différence entre les rendements de deux portefeuilles composés respectivement d'actions à fort ratio B/M et à faible B/M.

Le modèle à 3 facteurs fonctionne relativement bien pour expliquer les « anomalies du MEDAF » par des variables endogènes à l'entreprise. Fama et French (2015) ont amélioré leur modèle en rajoutant deux autres facteurs pour prendre en compte les différents types d'investissement et le niveau de rentabilité.

Cahart (1997) a indiqué, cependant, que le modèle de Fama-French initial ne permet pas d'expliquer l'effet Momentum analysé par Jegadeesh et Titman (1993). Brièvement, l'effet Momentum met en évidence que les actions possédant de bonnes performances (ou mauvaises) pour une période passée continueront de surperformer (ou de sous-performer) les actions dans le futur. Cahart a montré que cet effet n'est pas considéré par les facteurs SMB et HML c'est pourquoi il développe le modèle à 4 facteurs :

$$E(R_{i,t}) - r_f = \beta_{i,M}(E(R_{M,t}) - r_f) + \beta_{i,S}E(SMB_t) + \beta_{i,H}E(HML_t) + \beta_{i,U}E(UMD_t)$$

UMD représente alors la différence de rentabilité entre un portefeuille d'actions dites "gagnantes" et un autre avec des actions "perdantes" selon le critère du Momentum.

Les résultats de Fama et French sont souvent interprétés comme signant la "mort du Beta" car celui-ci est inutile pour expliquer les rentabilités moyennes des titres/portefeuilles. Le MEDAF apparaît comme complètement dépassé par les modèles à facteurs, mais Chan et Lakonishock (1993) estiment « qu'il faut y regarder à deux fois avant de disqualifier le Beta ». En se basant sur les mêmes données que Fama et French mais pour des périodes différentes, ils montrent que le Beta joue encore un rôle prépondérant et concluent qu'il est de ce fait, prématuré d'annoncer la fin du MEDAF. Il s'en suit un vaste débat sur la validité ou non du MEDAF et sur la supériorité des modèles à facteurs ; chaque "camps" apportent des arguments à sa cause.

Les insuffisances du modèle à expliquer correctement les rentabilités sont mis en avant pour le rejeter. Le MEDAF est sujet à de lourdes critiques essentiellement basées sur ses hypothèses théoriques et leur inadéquation empirique. Il reste pourtant un sujet d'étude toujours intéressant : son paramètre Beta constitue l'outil simple d'analyse utilisé par la plupart des investisseurs en pratique.

1.5. L'utilisation empirique du MEDAF : Le Beta un outil d'analyse simple

Bien que théoriquement contesté, le MEDAF s'est vite imposé en pratique car il fournit des outils simples et rapides permettant des comparaisons entre les actifs et les portefeuilles.

Le modèle est employé en Finance d'Entreprise dans le calcul du cout moyen pondéré du capital, noté CMPC, d'une entreprise cotée à partir de son Beta de capitaux propres :

$$CMPC = \frac{E \cdot k_E + D \cdot k_D \cdot (1 - Ip)}{E + D}$$

Avec E les fonds propres, k_E le cout des fonds propres, D les fonds étrangers, k_D le cout des fonds étrangers, et Ip le taux d'imposition.

Le MEDAF entre dans la détermination de k_E car le cout des fonds propres s'assimile à la rentabilité attendue des actionnaires. On obtient ainsi l'équation suivante :

$$k_E = r_f + (\mu_M - r_f) \beta_E$$

Le paramètre β_E représente ici le Beta des Fonds propres qui est calculé directement par l'estimation de la droite de marché sur une période de 5 ans ou de 2 ans. Ce Beta est aussi appelé Beta désendetté par opposition au Beta endetté qui se calcul comme suit :

$$\beta_{Endetté} = \beta_E * (1 + (1 - Ip) * \frac{Dette}{E})$$

Son utilisation en pratique se base avant tout sur l'information qu'il propose sur le niveau de risque systématique c'est-à-dire l'exposition aux fluctuations du Marché. Il est par ailleurs souvent employé comme « Benchmark » afin de comparer les performances des fonds d'investissement.

Les gestionnaires de portefeuilles utilisent le Beta comme un indicateur permettant une classification des actions selon leur niveau de risque systématique. Ils peuvent alors apprécier l'évolution du risque d'un portefeuille si on y inclue l'action en question. En partant du principe que le Portefeuille de Marché possède un Beta égal à 1, on peut définir les profils-risque suivants :

- Une action avec un Beta supérieur à 1 est un action dite « Agressive » qui amplifie les mouvements du marché. L'action est fortement sensible aux Marché, le risque est naturellement plus élevé mais sa rentabilité doit être plus forte en contrepartie.
- Une action « Défensive » avec un Beta inférieur à 1 atténue les fluctuations du marché. L'action est moins risquée que le Marché de ce fait sa rentabilité doit être plus faible.

- Une action avec un Beta égale à 0 n'est pas sensible au Marché. L'intérêt du MEDAF est ainsi limité dans ce cas car l'action est sensible à d'autres sources de risque (souvent endogènes). On note que ce type de Portefeuille dit « Zéro-Beta » est utilisé par Black pour construire une version particulière du MEDAF.
- Une action contracyclique au Marché possède un Beta significativement inférieur à 0. L'action évolue en sens opposé au Marché la rendant particulièrement intéressante en période de crises.

Cette catégorisation des actifs conditionne la création de portefeuilles plus ou moins diversifiés voire spécifiques selon les appétences des gestionnaires. L'intérêt d'inclure une action dans un portefeuille dépend donc de la situation du Marché (haussier ou baissier) et de la valeur de son Beta. Si le Marché croit, les actions offensives sont optimales pour fournir une Rentabilité élevée tandis que s'il baisse, les actions défensives sont préférées pour réduire le risque (tout en conservant une possibilité de gain à la reprise). Les actions contracyclique ou Beta-zéro sont utiles quand le marché est en situation de crise profonde. En revanche, Les gestionnaires ne se basent pas uniquement sur la seule valeur du Beta pour effectuer des choix d'investissement d'autres critères de classification des actions existent comme le PER et B/M évoqués précédemment. Le Beta est aussi très utile en gestion passive afin de construire un portefeuille « Tracker » qui va suivre un indice (le Marché). Dans ce cas l'objectif est d'obtenir un Beta proche de 1.

Le MEDAF propose diverses mesures de performance servant ainsi de base commune pour comparer les portefeuilles ou les actifs entre eux. Les plus connus sont les suivants:

- *Le ratio de Sharpe*

Ce ratio repose sur la CML (ou la SML) et mesure la prime de risque d'un portefeuille (ou d'un actif) par unité de risque total :

$$S = \frac{R_P - r_f}{\sigma_P} = \frac{R_M - r_f}{\sigma_M}$$

Il s'agit de la prime de risque d'un portefeuille P normalisée par son écart-type, donc à l'équilibre, le Ratio de Sharpe de P et du Marché sont égaux.

Ce ratio permet de classer des portefeuilles (ou des actifs) selon leur gain relatif au risque. Sur une période donnée, le portefeuille ayant le ratio le plus élevé peut alors être considéré comme le plus performant, puisque pour un niveau de risque fixé, il procure le rendement le plus élevé. Cela revient à dire que l'actif offre une prime plus importante par unité de risque total. Ce ratio utilise l'écart-type comme mesure du risque, mais il existe un indicateur similaire qui considère le risque systématique.

- *Le ratio de Treynor*

Il constitue une mesure de performance dérivée du MEDAF qui se base sur le Beta comme mesure du risque. Il s'agit donc de la prime par unité de risque systématique. Le ratio se calcule comme suit :

$$T = \frac{R_P - r_f}{\beta_P} = \frac{R_M - r_f}{\beta_M}$$

Le portefeuille (ou actifs) ayant le ratio le plus élevé, lorsqu'ils sont classés selon cette mesure, sont considérés comme les plus performants car il rémunère mieux une unité supplémentaire de risque systématique.

Ces deux ratios servent de critères de comparaison pour les actifs ou les portefeuilles. Ils ne permettent pas, cependant, de déterminer si une action est sous ou surestimée à l'équilibre.

- *L'Alpha de Jensen*

La mesure de performance de Jensen cherche ainsi à capturer les rendements anormaux qui ne sont pas expliqués par le CAPM théorique :

$$\alpha_P = (R_P - R_f) - [\beta_P(R_M - R_f)]$$

L'alpha de Jensen se calcule directement par l'estimation de la droite de marché avec les primes de risque. Comme nous l'avons vu précédemment, l'alpha est théoriquement, nul d'après le MEDAF, ainsi un estimateur de α_P positif signifie que la prime du portefeuille est au-dessus de celle prévue par le MEDAF. En d'autres termes, pour un même niveau de risque systématique, le portefeuille obtient une rentabilité supérieure aux prévisions du modèle. Dans ce cas, le MEDAF sous-estime les performances du portefeuille. Un α_P négatif met en

évidence une sous-performance du portefeuille car il offre une prime insuffisante à la vue de son risque systématique. Le MEDAF surestime donc la performance du fond.

On note que la non-nullité de l'Alpha de Jensen dans les résultats des études précédentes a conduit les auteurs à rejeter le modèle. L'utilisation empirique du MEDAF, cependant, ne dépend pas de sa validité théorique puisque cette faiblesse du modèle est exploitée par les investisseurs pour effectuer leurs choix et repérer les actions sur et sous cotées. Les agents se servent ainsi du MEDAF comme d'un point de départ pour réaliser des analyses plus poussées.

1.6. Le Beta au cœur des améliorations économétriques du MEDAF

Comme indiqué précédemment, le MEDAF souffre de lacunes empiriques car la grande majorité des tests concluent que le Beta ne permet pas d'expliquer le niveau de rentabilité moyens des actifs. Le Beta occupe une place centrale dans ces analyses en tant que variable explicative. D'un point de vue économétrique "à la Jensen", le MEDAF est un modèle de régression en série temporelle dont le Beta représente l'élasticité des rendements de l'actif aux Marché. Dans cette optique, la qualité du Beta dépend directement de la robustesse de la droite de marché. La faiblesse du MEDAF à expliquer les rentabilités moyennes peut ainsi découler d'une mauvaise appréciation du Beta de chaque actif et portefeuille. A ce titre, une grande partie de la littérature sur le MEDAF porte sur l'amélioration des propriétés statistiques du Beta qui suit les avancées en matière d'économétrie.

Hogan et Warren (1974) remettent ainsi en cause non pas le MEDAF mais la manière de calculer son Beta. Ils partent du postulat que les agents sont plus attentifs aux pertes qu'aux gains ainsi l'utilisation de la variance dans les calculs sous-estime le risque. Leur approche revient à considérer le "Downside Risk" (risque à la baisse) pour le calcul du Beta. En se basant sur les travaux de Mao (1970) et Klemkosky (1973) sur les semi-moments (notamment la semi-variance) ils proposent un nouvel estimateur Beta qui donne naissance au DCAPM (Downside CAPM). Leurs travaux seront par la suite améliorés en suivant les avancées de la recherche sur la méthode des Moments Partiels Inferieurs (Bawa (1975) et Fishburn (1977)). Bawa et Lindenberg (1977) puis Harlow et Rao (1989), par la suite, proposent différentes formules d'estimation pour le Beta mais Estrada (2002) généralise ces différentes approches avec le E-Beta.

$$\beta_E = \frac{E(\text{Min}(R_{i,t} - \mu_i, 0), \text{Min}(R_{M,t} - \mu_M, 0))}{E(\text{Min}(R_{M,t} - \mu_M, 0))^2}$$

Il montre que le D-CAPM et le E-BETA sont particulièrement utiles pour des investissements dans les pays émergents car leurs marchés sont plus sensibles aux Downside-Risk. Ces résultats seront confirmés par la suite par Post et Van Vliet (2004) puis par Tsai et al (2014).

L'approche du DCAPM est intéressante mais elle ne permet pas de résoudre entièrement les anomalies observées dans le MEDAF en particuliers l'instabilité du Beta et la fréquence des données.

1.6.1. L'instabilité temporelle du Beta

Les chercheurs ont très vite remarqué le phénomène d'instabilité du paramètre Beta dans les régressions initiales des procédures de Fama-McBeth et de Black-Scholes-Jensen (Cf. Blume et Friend 1973, Klemkorsky and Martin 1975).

Une version conditionnelle du MEDAF va alors apparaitre. Elle s'écrit :

$$r_{i,t} = \alpha_t + \beta_t \cdot r_{M,t} + \varepsilon_{i,t}$$

Les paramètres Alphas et Betas sont dans ce cas dépendant du temps ou de la période retenue.

L'instabilité des paramètres du MEDAF représente aussi une limite importante à sa validité comme l'indiquent Fabozzi et Francis (1978). Ces derniers confirment le caractère stochastique du Beta qui est d'autant plus volatil que la taille de l'échantillon est élevée. Boss et Newbold (1984) montrent, à leur tour, le caractère variable du risque systématique. Leur étude indique que le Beta possède bien un comportement aléatoire mais ils ne parviennent pas à définir exactement la structure de celui-ci. Ils émettent l'hypothèse que des facteurs microéconomique et macroéconomique influencent la valeur du Beta au cours du temps. Abell et Krueger (1989) puis de Brooks et al (1994) confirment leur hypothèse et montrent que la variabilité du Beta provient de facteurs macroéconomiques. Les résultats empiriques confirment le phénomène d'instabilité du paramètre Beta remettant ainsi en question les précédents tests sur la validité du modèle.

Jagannathan et Wang (1996) ont aussi mis en évidence qu'un MEDAF qui considère un Beta variable permet de réduire les "anomalies" observées dans la version à paramètre constant (ou fixe). Des résultats similaires sur l'intérêt des paramètres temps-variants sont apportés par

la suite par Zhang (2005), Andrian et Franzoni (2009). Petkova et Zhang (2005) indiquent aussi que le MEDAF conditionnel est plus performant que le MEDAF Standard. Ang et Chen (2007) montrent, cependant, que malgré la variabilité du Beta, l'alpha peut toujours être positive et donc le modèle n'est pas grandement amélioré. Lewellen et Nagel (2006) indiquent clairement que le MEDAF conditionnel n'est pas plus performant que sa version standard dans le sens où il n'explique pas les effets du B/M et le Momentum. Que ce soit dans sa version conditionnelle ou inconditionnelle, la validité du MEDAF est toujours d'actualité.

Les études précédentes dépendent entièrement des méthodes employées pour estimer les paramètres au cours du temps qui sont généralement des méthodes traditionnelles. La littérature va ainsi proposer diverses approches permettant d'estimer le paramètre Beta au cours du temps.

1.6.1.1. Les approches 'traditionnelles'

Une méthode traditionnelle utilisée empiriquement consiste à estimer le Beta sur des périodes de 5 ans comme indiqué dans la méthodologie de Fama French. Cette approche ne résout pas entièrement le problème puisque cela revient à considérer le Beta comme stable sur cette période. L'idée de ce découpage en période va conduire, toutefois, à l'émergence de la fenêtre roulante (de longueur variable) qui illustre très bien l'instabilité du Beta au cours du temps (Cf. Fabozzi et Francis 1978 et Bos et Newbold 1984). On parle alors d'estimation roulante ou glissante du Beta. Les estimations récursives sont aussi utilisées pour apprécier l'instabilité du Beta comme l'ont montré Groenwold et Fraser (1997). Ces derniers ont montré que l'estimateur Beta est dépendant de la taille de l'échantillon et de la taille de fenêtre employée. Ils basent leurs calculs sur des données mensuelles et recommandent une estimation par période de 5 ans (soit 60 observations) pour garantir un bon estimateur. Ces différentes utilisations des fenêtres roulantes sont comparées avec d'autres types d'approches.

1.6.1.2. Les approches 'conditionnelles'

L'émergence des approches conditionnelles est directement reliée à l'apparition des processus ARCH d'Engle (1982) et GARCH de Bollerslev (1986) qui autorisent une modélisation de la volatilité des séries. Bera et al (1988) puis Corhay et Rad (1996) se basent sur les travaux de Diebold et al (1988) et de Giaccoto et Ali (1982) qui indiquent la présence d'hétéroscédasticité dans les variables du modèle, pour estimer des Betas avec des processus GARCH qui sont plus consistant que ceux des MCO. Schwert et Seguin (1990) ont développé

une approche GARCH pour estimer des paramètres variants en considérant le caractère hétéroscédastique des séries.

Une autre approche pour calculer un paramètre temps-variant réside dans l'utilisation des processus GARCH Multivariées de Bollerslev, Engle et Wooldrige (1988). Cette approche permet le calcul des variances et covariances dynamiques afin de construire un Beta qui varie. Leurs travaux sont à la base de nombreuses études portant sur l'utilisation des processus GARCH dans l'estimation du Beta du modèle de Marché de plusieurs pays (Faff et al 1992, Brooks et al 1992, Gianopoulos 1995, Braun et al 1995 puis Brooks et al 1998). Des processus conditionnels plus avancés comme le DCC-GARCH ou les BEKK-GARCH sont aussi employés pour l'estimation d'un Beta dynamique. On peut citer, à titre d'exemple, les articles de Choudhry et Wu (2008), de Tsai et al (2014) puis d'Engle (2016) qui illustrent cette méthodologie. Ce type d'approche permet de mettre en évidence la volatilité du Beta pour différentes périodes et secteurs économiques. Les processus GARCH ne sont pas les seules techniques utilisées pour l'estimation dynamique, les avancées en économétrie ont ainsi permis l'apparition de méthodes alternatives.

1.6.1.3. Les approches 'alternatives'

Le Filtre de Kalman-Bucy représente, à cet effet, une méthode de choix pour l'estimation variante du Beta car elle permet d'inclure les effets de variables non-observées. Brooks et al (1998), Faff et al (2000), Groenwold et Fraser (1999) puis Yeo (2001) ont employé cette technique et l'ont comparée avec les différentes méthodes d'estimation précédentes. L'étude de Groenwold et Fraser (1997), Choudhry et Wu (2008) puis Adrian et Franzoni (2009) montrent ainsi que le filtre de Kalman-Bucy représente une approche non-GARCH intéressante pour l'étude du Beta au cours du temps. Ils montrent, de plus, que le Beta n'est pas stationnaire. Ils concluent que la variabilité du Beta résulte de plusieurs phénomènes comme la rentabilité du marché, des événements extrêmes ou des dates/périodes précises (comme 1987 pour l'étude de Groenwold et Fraser).

Une autre approche alternative tente de trouver une explication à l'existence des régimes de variation dans la dynamique du Beta conditionnées par des ruptures. Cette approche nécessite de faire appel à des modèles de changement de régime de Markov. Huang (2000) établit alors l'hypothèse de deux régimes de variation du Beta, un état de risque élevé et un autre de risque faible. Ses résultats indiquent que son hypothèse de « Deux-Etats » ne peut être rejetée. Il

montre ainsi que le MEDAF et ses implications sont respectés durant l'Etat de risque faible, à contrario, durant l'Etat-Fort la violation du CAPM est confirmée.

Actuellement, la littérature récente se base sur l'application et la comparaison de ces méthodes aux marchés internationaux (autres qu'Américain et Anglo-Saxons) permettant ainsi des comparaisons de risque par pays. Des évidences empiriques sur la variabilité du Beta ont été apportées pour les marchés européens et asiatiques comme celles de Suthawan Prukumpai (2015) pour la Thaïlande, Chen et Huang (2007) pour les pays du Sud-Pacifique et Mergner et Bulla (2008) pour l'Europe.

Les résultats de ces travaux montrent que l'estimation du Beta dynamique permet d'améliorer grandement le MEDAF en termes de prédiction et d'analyse du risque. Chaque méthode dispose d'avantages et d'inconvénients spécifiques. Les fenêtres roulantes sont simples d'utilisation et le choix de la taille permet de considérer différents termes de placement, c'est pourquoi les professionnels les utilisent très largement. Elles sont cependant dépendantes d'une estimation fixe du Beta sur la période considérée. Les processus GARCH permettent l'estimation directe du Beta par le calcul des variances-covariances conditionnelles. Les GARCH Multivarié sont certes plus précis que les fenêtres mais ils sont plus complexes à mettre en œuvre via les nombreuses conditions à respecter. Il en est de même pour les approches alternatives. L'amélioration des propriétés statistiques du Beta représente un point essentiel qui explique pourquoi le MEDAF continue d'être un sujet d'étude important. Le MEDAF est ainsi "actualisé" en fonction des avancées en matière d'économétrie.

1.6.2. Le Beta est-il dépendant de la fréquence des données ?

Il reste, cependant, une critique majeure du MEDAF (et à ses extensions) qui se base sur la nature même des données. Hawawini (1983) a montré que la valeur du Beta est dépendante de la fréquence des données utilisées (journalière, hebdomadaire ou mensuelle). Ce dernier indique que les actions avec une valeur de marché faible possèdent un Beta qui décroît avec le pas de temps tandis que celui des actions avec une valeur de marché forte augmente. Les tests précédents se basent sur des données en fréquences mensuelles ou hebdomadaires. Leurs conclusions infirmant ou confirmant le MEDAF sont ainsi sujettes à cette critique, celles-ci contribuent à alimenter le débat sur le modèle.

L'effet de la fréquence des données sur le Beta est relié aux travaux de Levy (1972) et de Levhari et Levy (1977) sur l'hétérogénéité des horizons d'investissement des agents qui affecte les résultats du MEDAF. Ce résultat est proche de la vision comportementaliste du MEDAF qui étudie le rôle des caractéristiques propres aux agents sur leurs choix.

1.7. La rationalité et l'hétérogénéité des agents du MEDAF

La finance comportementale trouve sa source dans les travaux de Kahneman et Tversky (1979) qui mettent en évidence des comportements anormaux des agents face à des choix risqués. Leurs travaux remettent en cause l'hypothèse de rationalité des agents liée à l'hypothèse de VNM. Pour les théoriciens comportementalistes les "anomalies" du MEDAF trouvent leur source dans le comportement des agents.

1.7.1. La Finance Comportementale et ses critiques du MEDAF

La remise en cause de la rationalité des agents constitue les bases de la finance comportementale. Elle est à la base des principales critiques adressées aux MEDAF. Kahneman et Tversky développent la Théorie des Perspectives dans laquelle les agents accordent des « pondérations » à la valeur des gains et des pertes. Les agents effectuent des choix risqués et incertains et sont sujets à des biais psychologiques lors de leurs choix d'investissements, tels que :

- Le conservatisme impliquant que les agents n'ajustent pas leurs anticipations suite à de nouvelles informations comme le montre Edwards (1968).
- Le biais de représentativité qui conduit à l'apparition de raisonnement/calcul intuitif. Grether et Bayes (1980) montrent que les investisseurs surpondèrent les informations récentes dans leurs calculs. Ils extrapolent de ce fait « trop facilement » les tendances.
- Le phénomène de sur-confiance peut prendre plusieurs formes comme le soulignent Weinstein (1980) puis Svenson (1981). Les agents ont ainsi tendance à avoir une trop forte confiance dans les résultats de leurs prévisions/modèles/calculs ou alors dans leurs capacités de gestion ou de réussite.

La littérature sur le rôle des biais en finance est très importante et s'oriente autour de la notion de « sentiment des investisseurs » de Barberis et al (1998). DeBondt et Thaler (1987), Lakonishok et al (1994) puis Chan et Lakonishok (2002) indiquent que l'incapacité du modèle

à expliquer les ‘‘anomalies’’ comme les ‘‘Growth stock’’ et ‘‘Value stock’’ peuvent résulter directement des comportements des investisseurs qui ne sont plus nécessairement rationnels et sujets à ces biais psychologiques. Ces derniers observent que les Values possèdent des performances passées plutôt mauvaises par rapport au Growth en termes de croissance du chiffre d’affaires et de bénéfices. Le biais de représentativité conduit alors les agents à anticiper un niveau de croissance similaire dans le futur créant artificiellement un « climat favorable » pour les Growth qui deviennent plus « tentante » pour les investisseurs (c’est pourquoi on trouve aussi le terme général de ‘‘Glamours Stocks’’). Le biais de sur-confiance implique alors une sous-évaluation des Values et une survalorisation des Growth.

Par la suite, d’autres auteurs ont montré les effets des biais sur les marchés financiers à l’image de Thaler (1980) puis Schiller (1981). Ce dernier parle alors d’« Exubérance Irrationnelle » pour décrire les excès de volatilité qui conduisent à la formation de bulles spéculatives. Ces bulles sont la conséquence d’un mauvais pricing des actifs par les agents à cause des différents biais. A titre d’exemple, un excès d’optimisme peut conduire à une sous-perception du risque ou encore des croyances particulières peuvent amener à surinterpréter un événement etc Des phénomènes particuliers tels que les effets Lundi et Week-end sont aussi mis en évidence.

Le biais de comptabilité mentale de Thaler (1985) indique que les individus traitent différemment les chiffres économiques. Les agents accordent des valeurs différentes à un bien : une valeur d’acquisition lors d’un achat et une valeur de transaction lors d’une vente. Les études de Barberis et Huang (2001) puis de Haigh et List (2005) montrent que ce biais affecte fortement la perception du risque sur les marchés notamment en modifiant l’aversion au risque, ils parlent ainsi d’« aversion myopique ».

L’étude des comportements moutonniers par Klein (2012), Shih et al (2012) puis de Chiang et al (2013) soulignent que les agents de moindres importances, disposant de moins de moyens et de moins d’informations, ont tendance à suivre les stratégies des « géants ».

Sur la base de ces travaux, l’association de MEDAF et de la Finance Comportementale semble particulièrement difficile tant le modèle est critiqué et remis en cause. L’approche comportementaliste apporte une vision différente du risque et des choix et partant elle remet grandement en question les « dogmes financiers » instaurés par le MEDAF et l’Efficiencia des Marchés de Fama (1969). Malgré des divergences profondes certains auteurs essayent de

développer des MEDAF Comportementaux à l'image de Shefrin et Statman (1994-2000) avec la Théorie Comportementaliste du Portefeuille. Un agent se définit ainsi par sa richesse initiale mais aussi par un niveau minimal de richesse qu'il souhaite conserver (un plancher). Il fixe, par la suite, une richesse espérée et exprime sa volonté d'atteindre de hauts niveaux de richesse. Les biais comportementaux sont inclus dans le modèle notamment celui de la comptabilité mentale. Les résultats montrent que les agents détiennent des portefeuilles qui ne sont pas sur la frontière efficiente définie dans le MEDAF. Leurs travaux, cependant, n'indiquent pas en quoi l'estimation du Beta est modifiée.

Un MEDAF comportementaliste est toujours en cours de construction, mais il ressort que l'hypothèse d'homogénéité des agents représente un obstacle important au modèle de marché. La suppression de cette hypothèse dans le MEDAF a conduit au développement de nouvelles approches qui se concentrent sur un type de problématique : un modèle financier avec des agents hétérogènes.

1.7.2. L'hétérogénéité des agents est-elle compatible avec le MEDAF ?

La finance comportementale dans sa globalité rejette l'hypothèse d'homogénéité des agents qui sont soumis différemment à des biais. L'Homogénéité des agents indique que des agents rationnels possèdent les mêmes croyances et anticipations. Dans le cadre du MEDAF cette hypothèse implique que les agents détiennent la même combinaison d'actifs risqués, seule l'allocation dans l'actif sans risque est différente. Implicitement, cela revient à considérer que les agents arrivent toujours aux mêmes conclusions sur le risque peu importe leurs caractéristiques propres.

Peu de travaux portent sur la construction d'un MEDAF avec croyances hétérogènes, les travaux de Levy et al (2006), de Chiarella et al (2010) et de Chiarella et al (2014) sont les plus avancés sur le plan théorique mais ils ne sont pas encore testés empiriquement. Une fois de plus, leurs approches sont théoriques et se basent essentiellement sur des modifications des fonctions d'utilité et ses modalités. L'effet du rejet de l'hypothèse d'homogénéité sur les mesures n'est pas abordé.

L'homogénéité des agents suppose implicitement que les investisseurs possèdent le même horizon de placement. Empiriquement, les investisseurs se distinguent par leurs fréquences d'investissement. Frankel et Froot (1986) identifient les Fundamentalistes, qui ont des visions à long-terme, et les Chartistes qui investissent à plus court terme. Ces deux catégories

d'agents ne valorisent pas les mêmes informations, mais le MEDAF implique qu'ils calculent les mêmes indicateurs de risque pour un actif. Les anomalies du modèle peuvent alors résulter de l'erreur d'appréciation (d'estimation) du Beta car les agents sur ou sous estiment le risque comme l'indique Levy (1972) puis Levhari et Levy (1977). Lee et al (1990) proposent alors une nouvelle formulation théorique du MEDAF considérant des horizons hétérogènes qui apparaissent apte à expliquer les insuffisances du modèle standard. Lee et al (2015) analysent la valeur optimale de la prime de risque selon différents horizons. Leur conclusion montre l'effet des horizons longs sur la valeur de la prime de risque mais ils ne traitent pas du Beta. Leon et al (2012) montrent qu'il existe des différences significatives entre les Betas estimés sur des horizons courts et longs. Il apparaît alors que le Beta est aussi instable sur le plan fréquentiel en plus de varier temporellement. L'effet de l'horizon temporel sur la valeur du Beta est alors un sujet d'analyse important mais qui est dépendant de la méthode utilisée. L'utilisation de données avec des pas de temps différents où l'application des moyennes mobiles constituent le type d'approche couramment employée.

Les avancées scientifiques dans les domaines de la physique, et plus particulièrement celui du traitement des signaux, représentent une approche mathématique utilisable en finance pour considérer une pluralité d'horizons de placements. Ces progrès notables sont dus à la décomposition tempo-fréquentielle des signaux appelée communément "Transformation en Ondelettes".

Gençay et al (2003-2005) sont les premiers à utiliser une approche par ondelettes pour estimer le Beta selon différentes échelles fréquentielles qui sont associées à des horizons de placements. Ce type d'approche leur permet de montrer la différenciation du Beta selon les fréquences retenues. Ils observent alors que les résultats du MEDAF sont plus pertinents à moyen-long terme. L'analyse temps-fréquence par ondelettes représente un réel intérêt en finance depuis leurs travaux. Rua et Nunes (2012) étudient par les ondelettes l'importance du risque systématique qui représente le poids du risque systématique dans le risque total. En utilisant des ondelettes particulières, ils soulignent que l'importance du risque est variable à la fois dans le temps et selon l'horizon de placement. Ils en déduisent alors que le risque systématique est plus volatil à court-terme.

Les ondelettes se révèlent comme un outil adapté pour étudier le MEDAF sous l'hypothèse d'hétérogénéité comportementale. Elles sont aussi de plus en plus utilisées dans le domaine de la finance en général. Aguiar-Conraria et al (2011) ont employé les ondelettes en

macroéconomie pour l'étude des cycles économiques des pays européens. Rua et Nunes (2009) illustrent l'importance de l'horizon de placement dans l'étude des interactions entre variables financières et dans l'analyse des cycles économiques. Ils montrent aussi l'intérêt d'utiliser ce type d'outils pour réanalyser les « problématiques anciennes » sous un nouvel angle. Vacha et Barunik (2012) ont ainsi étudié, par les ondelettes, la corrélation de Court, Moyen et Long terme entre les marchés pétroliers et gaziers et les autres biens énergétiques. Bekiros et Marcellino (2013) les ont employées pour étudier les liens entre les différentes monnaies afin de prédire les taux de changes. En gestion de portefeuilles Bekiros *et al* (2016) analysent les co-mouvements entre les commodités et les indices boursiers afin de construire différents portefeuilles diversifiés en fonction de l'horizon de placement.

Ces études montrent que les ondelettes permettent de diversifier les interprétations, par rapport aux méthodes traditionnellement employées, car elles intègrent l'impact de l'horizons de placement sur les résultats économique-financiers.

1.8. Conclusion Section 1 :

Le MEDAF reste un pilier de la théorie financière qui a fortement influencé la perception du risque et conditionné les choix d'investissement même s'il reste critiqué tant sur le plan théorique qu'empirique. L'observation d'« anomalies » dans ses résultats empiriques ont posé les fondations des multiples extensions qui ont été apportées au modèle. Les plus connus sont les modèles multi-betas qui considèrent plusieurs sources de risques supplémentaires. Le choix des variables à inclure dans l'équation de la Droite de Marché varie selon les auteurs. Il en est ainsi du Modèle de Fama et French qui recommande l'utilisation de facteurs comptables et spécifiques aux entreprises, comme par la Taille ou le PER. Les Modèles Multi-Betas ne sont pas cependant restrictifs sur le nombre et la nature des variables supplémentaires comme celles macroéconomiques qui sont rajoutées dans l'équation pour traduire des sources de risques potentielles ou des actifs particuliers, à l'image du Pétrole et de l'Or. Ces modèles multivariés sont souvent opposés au MEDAF car ils sont supposés théoriquement supérieurs à ce dernier mais leurs résultats empiriques dépendent de nombreux facteurs (choix des variables, but recherché, pays étudiés, secteurs économiques, etc ...). Les Modèles Multi-Betas peuvent donc être perçus comme complémentaires au MEDAF plutôt que concurrent.

L'instabilité temporelle du Beta représente aussi une limite importante du MEDAF. L'estimation par les MCO implique de facto la stabilité du paramètre Beta au cours du temps ce qui est remis en question dès les premières études. La stabilité du Beta est une hypothèse très forte empiriquement puisque le Marché est régulièrement sujet à des mouvements haussiers ou baissiers qui modifient par nature l'intensité du risque. Le développement des méthodes économétriques va aussi contribuer à l'amélioration du MEDAF et plus particulièrement l'estimation dynamique du risque systématique selon différentes approches. Une méthode simple et intuitive consiste à estimer le Beta sur différentes périodes plus ou moins longues (2 ou 5 ans par exemple) ce qui a conduit à la technique de la régression roulante à fenêtres glissantes (Forwards, Backward, récursives ...) de taille fixe qui est définie par l'opérateur. Cette approche reste simple à mettre œuvre mais elle permet une analyse rapide de l'instabilité du Beta au cours du temps.

Outre son caractère instable, le Beta dépend de la fréquence des données utilisées (le pas d'observation). Ce problème trouve son origine avec l'hypothèse d'homogénéité des agents. Ces derniers sont supposés identiques dans le sens où ils observent les mêmes informations sur les prix pour effectuer leurs choix d'investissements ce qui les amènent à détenir les mêmes combinaisons d'actifs risqués, seul leur aversion au risque les distingue sur la droite de marché. Le relâchement de cette hypothèse pose un certain nombre de questions sur la manière de distinguer les comportements de trading. Peu de travaux portent sur la construction d'un MEDAF sous l'hypothèse d'hétérogénéité des agents mais une distinction des agents selon leurs horizons de placement (court, moyen ou long) dessine une piste de recherche intéressante.

L'analyse temps-fréquence par ondelettes apparait comme un bon candidat pour répondre à cette problématique. Nous présentons dans la section suivante de ce chapitre les différentes approches et les propriétés de cette méthode.

Section 2 : Théorie des ondelettes univariées et multivariées

L'analyse fréquentielle d'une série chronologique trouve son origine en Chimie avec les travaux de Fourier sur la chaleur et les transferts thermiques. Il développe une méthode (éponyme) permettant de représenter une fonction mathématique selon plusieurs séries trigonométrique (les séries de Fourier) et de réaliser l'opération inverse. Elle trouve de nombreuses applications notamment en physique, en chimie, en traitement du signal et l'imagerie numérique. En économie, elle est plus connue sous le nom **d'analyse spectrale** : la chronique à analyser constitue **le signal** et la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation son **spectre**. Les variables économiques étant souvent marquées par des cycles, le spectre permet de les analyser sur plusieurs fréquences et de les distinguer plus aisément qu'avec la simple information temporelle. L'étude des filtres et de leurs effets (conséquences) sur la structure des variables temporelles est grandement améliorée via les fonctions de Gain et de Transfert. C'est sur cette base que le principe des processus ARMA et ARCH ont pu être élaborés, de même que certaines méthodes de désaisonnalisation comme TRAMO-SEAT de Gomez et Maravall (1996).

Cette méthodologie est parfaitement adaptée pour des processus stationnaires. Le spectre d'un signal possède des effets (des mouvements) répétitifs suivant une structure déterministe, comme une saisonnalité rigide ou les cycles, indiquant parfaitement la fréquence de ces événements. En revanche, si les effets ne suivent pas de schéma homogène, dans le sens où des ruptures sont observées et/ou si son intensité n'est pas uniforme, alors le spectre ne pourra capter efficacement les fréquences de ces phénomènes. Par ailleurs, si plusieurs effets de même fréquence sont localisés à des instants différents du temps alors on ne peut pas les distinguer dans le domaine fréquentiel.

Cette limite de l'analyse spectrale rentre dans le cadre du paradoxe d'incertitude d'Heisenberg impliquant un arbitrage entre information Temporelle **ET** fréquentielle. En finance, les choix des investisseurs s'inscrivent dans le temps, l'information temporelle est reliée aux variations des supports d'investissement et fournit les notions de rentabilité, de risque ce qui conditionne l'achat ou la vente de titres. L'information fréquentielle reste, cependant, importante

puisqu'elle représente les différentes structures existantes dans la chronique illustrant ainsi les comportements d'investissement.

Le principe des ondelettes trouve son origine en 1909 avec Haar. Son raisonnement se base sur la capacité du spectre d'une fonction à capter des mouvements de forte amplitude ce qui le conduit à développer la première ondelette (Ondelette de Haar). En 1946, Gabor améliore la transformation de Fourier en lui associant une fenêtre roulante, la Short-Fast Fourier Transform. Elle inspirera par la suite Grossman et Morlet en 1984 pour développer mathématiquement les ondelettes. De nombreux mathématiciens vont alors définir et améliorer les propriétés des ondelettes comme Lemarié et Meyer (1986), Meyer et al (1987) mais aussi Meyer (1990) reconnu comme étant le père de la théorie des ondelettes (Lauréat du Prix Abel 2017 pour ses travaux). On peut enfin citer Mallat (1989-2009) et Daubechies et al (2002) qui relie les ondelettes à l'analyse multi-résolution ou encore Daubechies (1988-1992) qui développe de nombreuses familles d'ondelettes.

Les ondelettes sont des fonctions capables de capter à la fois l'information temporelle et fréquentielle. La décomposition fréquentielle du signal fournit des évolutions temporelles conditionnellement à une fréquence. On distingue, généralement, deux types de décomposition (ou Transformation) : la Transformation Continue en ondelettes (Abrégé en CWT) et sa variante Discrète (Abrégé en DWT). La principale différence entre ces décompositions réside dans le traitement des fréquences : soit en échelle fréquentielle dans le cadre de la DWT qui nous fournit des bandes de fréquences ; soit en fréquence continue dans le cas de la CWT qui traite séparément chacune des fréquences. En règle générale, que ce soit pour la CWT ou la DWT, les fréquences sont reliées aux périodes des sinusoides de Fourier qui peuvent s'interpréter en finance comme l'horizon temporel de placement des investisseurs. Les ondelettes seront par la suite reliées à l'Analyse Multirésolution (Abrégé MRA) qui permet d'étudier un signal en choisissant son degré de précision fréquentielle comme l'a montré Mallat (1989). Ces travaux constituent les prémices de la construction d'une technique moins contraignante et restrictive : la Maximal Overlap Discrete Wavelets Transform (MODWT).

L'utilisation des ondelettes en finance permet d'extraire des informations supplémentaires d'une observation temporelle fournissant une information globale (ou agrégée). A titre d'exemple, les observations temporelles des cours boursiers fournissent une information qui est une agrégation de tous les comportements d'investissement des agents opérant sur le

Marché. Les agents n'ayant pas nécessairement des comportements homogènes, l'information temporelle est ainsi réduite à une "simple" agrégation de composantes hétérogènes impliquant que deux investisseurs ayant des comportements différents partagent les mêmes mesures ou indicateurs de risque (ou autres calculs) ce qui est conceptuellement contestable. Les ondelettes permettent entre autres de dépasser cette limite des théories économiques et financières.

Dans cette section nous présentons les fondements de la théorie des ondelettes, les bases et les notions utilisées dans la suite de la recherche. Après un bref résumé du vocabulaire employé dans le cadre de l'analyse spectrale, nous détaillons les différents types de transformations en ondelettes et leurs aspects mathématiques.

2.1 L'Analyse Spectrale à l'origine des études dans le domaine des fréquences.

Les ondelettes sont liées aux développements de l'analyse harmonique et spectrale qui trouvent leurs sources dans les travaux de Fourier. La théorie des ondelettes se base, par conséquent, sur l'utilisation de différents filtres et en adopte le vocable spécifique. Nous présentons brièvement les notions clés de l'analyse spectrale avant de développer les différentes formes de décompositions en ondelettes.

L'analyse en série de Fourier permet de décomposer un signal en une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales fréquentielles (cosinus et sinus). Nous rappelons qu'une sinusoïde se définit par sa périodicité qui définit l'intervalle temporel sur lequel un événement se répète (on parle ainsi de cycle complet). En fixant l'unité de temps (seconde, minute, heures etc..) on définit la fréquence, exprimée en Hertz, qui est le nombre de périodes présentes pour une unité de temps. La fréquence f et la période T sont liées par la relation suivante $f = \frac{1}{T}$. On peut définir aussi la fréquence en radian appelée la pulsation ω (de l'anglais angular frequency) qui est telle que $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.¹ Par soucis de simplification, nous traiterons indifféremment ces notions que nous rassemblons sous le terme générique de "fréquence".

¹ Cf. Analyse des séries temporelles-applications à l'économie et à la gestion, Michel Terraza, et Régis Bourbonnais chez Dunod

Si l'on considère un signal temporel $x(t)$ appartenant à \mathbb{C} ou à \mathbb{R} avec t continue, sa **Transformée de Fourier** (continue) notée $X(f)$ s'écrit comme suit :

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

La **transformée inverse de Fourier** s'écrit alors :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi f t} df \quad (2)$$

La combinaison de $X(f)$ et $x(t)$ forme une paire de transformées de Fourier et constitue la représentation de Fourier du signal. Lors de ce processus de transformation-reconstruction du signal, la variance doit nécessairement être conservée afin que la quantité d'information temporelle soit "égale" à celle fréquentielle, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de perte informationnelle. Le théorème de Parseval et celui de Plancherel permettent d'établir dans ce sens la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df = E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \quad (3)$$

La partie de droite nous fournit l'énergie dans le domaine temporel tandis que celle de gauche représente l'énergie dans le domaine fréquentiel qui est une agrégation des contributions énergétique de chaque composante fréquentielle. Il apparaît alors que l'énergie totale se conserve à la fois dans le domaine temporel et fréquentiel, c'est-à-dire, que le passage d'un espace à l'autre n'altère pas l'information contenue dans la série d'origine. Il s'agit ici d'un résultat fondamental pour l'application concrète de l'analyse spectrale.

En appliquant un filtre \mathcal{F} linéaire infini général à un signal temporel $x(t)$ (l'input) on obtient un output noté $y(t)$. Celui-ci est le produit de convolution de $x(t)$ avec les coefficients du filtre F que l'on note $w(\tau)$, tel que :

$$y(t) = \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} x(t \pm \tau) w(\tau) d\tau \quad (4)$$

Un filtre est donc défini par l'ensemble de ses coefficients w sur le domaine de variation de τ . On caractérise, de la sorte, sa fonction de réponse impulsionnelle notée $w(\tau)$ qui consigne l'ensemble des valeurs prise par de w . Cette fonction correspond au filtrage dans l'espace

temporel. Pour décrire le filtre dans l'espace fréquentiel on fait appel à la transformée de Fourier de la fonction de réponse impulsionnelle, que l'on note $H(f)$. On parle ainsi de fonction de réponse en fréquence définie tel que :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau \quad (5)$$

Avec la relation d'Euler il est possible de décomposer la fonction de réponse en fréquence comme suit :

$$H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau - i \int_{-\infty}^{+\infty} w(\tau) \sin 2\pi f\tau d\tau = H_1(f) - iH_2(f) \quad (5b)$$

On caractérise aussi un filtre par sa paire de transformées de Fourier en considérant en complément de $H(\omega)$ sa transformée inverse qui n'est autre que la fonction de réponse impulsionnelle :

$$w(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} H(f) e^{i2\pi f\tau} df \quad (6)$$

L'équation (5b) peut se réécrire sous sa forme polaire :

$$H(f) = G(f) e^{-i\theta(f)} \quad (7)$$

Avec $G(f)$ le module de l'équation (5b) et la $\theta(f)$ fonction de phase du filtre.

On peut donc obtenir la fonction de transfert $G(f)$ tel que :

$$G(f) = \sqrt{|H_1(f)|^2 + |H_2(f)|^2} = \sqrt{|H(f)|^2} \quad (7b)$$

$|H(f)|^2$ est la fonction de Gain que l'on note $\mathcal{G}(f)$.

La fonction de phase $\theta(f)$ est définie par $\theta(f) = \arctan \frac{\text{Im}(H(f))}{\text{Re}(H(f))}$ c'est-à-dire le rapport de la partie imaginaire et réelle de la fonction $H(f)$ (issues de la relation d'Euler).

En représentant le graphe de la fonction $\mathcal{G}(f)$, on peut ainsi définir les propriétés fréquentielles d'un filtre. Celui-ci sera caractérisé de filtres Passe-Bas (FPB) si les basses fréquences sont bien préservées lors du filtrage et si les hautes fréquences sont écartées. A l'inverse, un filtre Passe-Haut (FPH) ne conserve que les caractéristiques de hautes fréquences

de la série filtrée. En d'autres termes, le filtre Passe-Haut atténue les fréquences inférieures à sa fréquence de coupure tandis que le filtre Passe-Bas atténue celle supérieure à la coupure.

On peut alors définir un filtre particulier ne conservant que les fréquences comprises entre des bornes fréquentielles. Ce Filtre Passe-Bande va donc « laisser-passer » les fréquences dans l'intervalle de la bande (avec une réponse de 1) et « annuler » celles en dehors (impliquant une réponse nulle) tel que :

$$H(f) = 1 \quad \text{si } f_i \leq f \leq f_s$$

$$H(f) = 0 \quad \text{sinon}$$

Avec f_i la fréquence de coupure inférieure et f_s la fréquence de coupure supérieure.

En suivant cette logique le Filtre Passe-Haut Idéal est un filtre Passe-Bande tel que $f_i > 0$ et $f_s = \frac{1}{2}$ et le filtre Passe-Bas Idéal se définit alors par $f_i = 0$ et $f_s < \frac{1}{2}$. La fréquence $\frac{1}{2}$ ou fréquence de Nyquist est la fréquence maximale pour reconstruire le signal convenablement d'après les travaux de Nyquist-Shannon sur les repliements du spectre.

Le filtrage Passe-Haut ou Passe-Bas implique ainsi des modifications fréquentielles de la série filtrée et sa reconstruction dans l'espace temporel (l'output) est alors décalée. Ce phénomène de Déphasage (ou Phase-Shift) implique alors l'utilisation de filtre de phase nulle pour corriger et réaligner l'output avec l'origine de l'input afin de ne pas biaiser l'analyse. En finance, on utilise très souvent le filtre des Moyennes Mobiles pour approcher la tendance des cours boursiers. C'est un filtre Passe-Bas, puisqu'il laisse intact les basses-fréquences (la tendance) et lisse les haute-fréquences (les composantes saisonnières par exemple). Une mauvaise application de ce type de filtre, comme par exemple le choix de l'ordre ou de sa parité, peut conduire à introduire des biais dans la série comme des cycles fallacieux (*spurious cycles*) qui sont en partie liés aux déphasages. C'est pourquoi une Moyenne Mobile centrée (donc symétrique) est par construction un filtre muni de la propriété de phase nulle (Cf. Terraza 1979-1981).

Les transformations de Fourier et les filtres ont ouvert la voie à l'analyse harmonique qui en est une généralisation permettant le développement de l'analyse spectrale. L'Analyse Harmonique permet la décomposition d'une fonction aléatoire $Z(t)$ en temps continu, composée des plusieurs fonctions temporelles, de la manière suivante comme l'indique le théorème de Loeve, :

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi ft} dU_Z(f) \quad (8)$$

Avec $dU_Z(f)$ des variables aléatoires complexes.

En définissant $\gamma_Z(\theta)$ la fonction d'autocovariance de $Z(t)$ et en lui appliquant ce théorème, on obtient le théorème de Khintchine :

$$\gamma_Z(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi f\theta} E[|dU_Z(f)|^2] \quad (8b)$$

Par la stationnarité et la continuité de $Z(t)$, on peut écrire $E[|dU_Z(f)|^2] = dF_Z(f)$ avec $F_Z(f)$ la fonction de répartition spectrale qui tend vers 0 avec la fréquence. Cette fonction définit une probabilité de Lebesgues à laquelle on applique l'intégrable éponyme. Le résultat permet de considérer la partie continue et dérivable telle que $dF_Z(f) = f_Z(f)df$, il vient alors :

$$\gamma_Z(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi f\theta} f_Z(f)df \quad (8c)$$

La fonction $f_Z(f)$, donnée par la transformée de Fourier de l'équation (8c), constitue le spectre de la série $Z(t)$:

$$f_Z(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi f\theta} \gamma_Z(\theta)d\theta \quad (8d)$$

L'estimation de $f_Z(f)$ peut conduire à des résultats difficilement exploitables à cause de la forme erratique du spectre lorsqu'il est discrétisé. On réalise alors un "lissage spectral" en calculant la moyenne de $f_Z(f)$ dans une fenêtre fréquentielle qui glissera le long des fréquences. On doit alors définir les caractéristiques de la fenêtre et sa taille pour éviter d'introduire des biais dans le spectre. On peut citer à titre d'exemple la fenêtre de Parzen et de Tukey-Hanning.

Le Spectre possède, cependant, les mêmes limites que l'analyse de Fourier à savoir la perte de l'information temporelle et une mauvaise appréciation des évènements de variations extrêmes. La transformation de Fourier est pertinente tant que le signal est stationnaire en moyenne et surtout en variance. Une des limites à l'analyse de Fourier réside dans son impossibilité à capter des évènements affectant la variance du signal.

La transformation de Fourier est une représentation dans l'espace fréquentiel ou l'information initiale est synthétisée par des fonctions fréquentielles uniquement, il n'y a donc pas de localisation temporelle qui s'effectue. Un événement est représenté pour une fréquence particulière, ainsi s'il réapparaît au cours du temps, celui-ci sera toujours représenté sur le même niveau fréquentiel bien qu'il soit positionné à différents endroits du temps. Si on considère la série dans l'espace temporel et sa transformée de Fourier cela implique un arbitrage entre représentation (ou localisation) Fréquentielle et Temporelle. C'est pourquoi Gabor (1946) élabore la transformation de Fourier à fenêtre (ou par morceaux) appelée Short-Time Fourier Transform (STFT).

Elle consiste à réaliser une transformation de Fourier sur une fenêtre de taille constante que l'on fait glisser (ou rouler) le long de la chronique. Cette procédure permet de choisir son degré de résolution temporelle et fréquentielle, mais pas de résoudre totalement l'arbitrage temps-fréquence. Le paramètre central est donc la taille de la fenêtre. S'il est élevé la fenêtre concerne un nombre important de points et donc une localisation fréquentielle bonne (au détriment de la localisation temporelle). A l'inverse une fenêtre plus étroite améliore la résolution temporelle mais détériore la localisation fréquentielle. Ce constat provient du principe d'incertitude d'Heisenberg qui indique qu'on ne peut connaître de manière précise à la fois la position et l'impulsion d'une particule.

L'analyse spectrale, limitée par ces constats, a conduit Priestley (1965-1966), Mélard (1985) puis Mélard et Herteleer (1989) à développer des approches différentes pour considérer une méthode qui calcule les valeurs du spectre au cours du temps, connue sous le nom de Spectre Evolutif. Les ondelettes se positionnent directement dans la lignée de leurs travaux qui consistent « à redonner » l'information temporelle à l'analyse fréquentielle. Elles peuvent, en effet, se définir comme des filtres particuliers autorisant une représentation temporelle des composantes fréquentielles.

2.2 La transformation continue en ondelette (Continuous Wavelet Transform -CWT):

La technique des ondelettes permet de réduire l'arbitrage temps-fréquence en limitant le principe d'incertitude. Les décompositions en ondelettes se basent sur une fonction ou *ondelette-mère* notée $\psi(t)$ qui est translatée et dilatée pour extraire des informations de la série sur plusieurs niveaux de fréquences pour un moment précis du temps. Ce procédé

conduit à une « partition temps-fréquence » qui capte à la fois les hautes-fréquences avec une bonne localisation temporelle (on dira alors qu'on est long en fréquence) et les basses-fréquences avec une bonne localisation fréquentielle (on est alors long en temps). En d'autres termes, une ondelette est une fenêtre dont la taille est variable et qui se modifie en fonction de la fréquence permettant de capter correctement chaque événement. La transformation continue représente une généralisation théorique des ondelettes or celle-ci doit s'adapter aux besoins des praticiens, c'est pourquoi, une approche discrète plus fonctionnelle est développée par la suite.

2.2.1 Approche théorique des ondelettes continues

Une ondelette $\psi(t)$ est une "fonction-mère" qui dépend du temps et elle est définie dans L^2 (Espace d'Hilbert). Cette fonction fait office de fenêtre afin de retransmettre les évolutions temporelles de fréquences. A ce titre, elle doit elle-même être localisée dans les domaines du Temps et des Fréquences. Il est donc nécessaire, d'après Grossman et Morlet (1984) puis Mallat (1998), que sa transformée de Fourier, notée $\widehat{\Psi}(f)$, s'annule rapidement à mesure que f tend vers 0 ($\widehat{\Psi}(0) = 0 / f \rightarrow 0$). Cette première définition implique la nullité de la moyenne de $\psi(t)$. Les décompositions en ondelettes, de plus, impliquent aussi une préservation de la variance du signal c'est pourquoi il est nécessaire que $\psi(t)$ soit normalisée. Cette condition est en parti respectée dans le sens où $\psi(t)$ est une fonction de carré sommable (i.e. de variance finie) définit dans l'espace hilbertien. La normalisation de $\psi(t)$ implique aussi que les décompositions en ondelettes puissent être facilement comparables à chaque échelle s .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$$

Lors du processus de transformation d'un signal en ondelettes, $\psi(t)$ est dilatée et translatée pour créer des sous-espaces groupes et donner ainsi naissance à des "ondelettes-fille".

On définit alors la famille d'ondelettes $\psi_{\tau,s}(t)$ qui "rassemble" toutes les versions de ψ translatées par τ et dilatées par s (ses filles) telle que :

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (9)$$

la normalisation s'effectue avec $\frac{1}{\sqrt{s}}$

Considérons une fonction temporelle $x(t)$, elle admet une transformée continue $W(s, \tau)$ en ondelettes, qui n'est autre que la projection de $x(t)$, sur la famille d'ondelettes décrite précédemment (soit le produit scalaire de x et ψ) :

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t - \tau}{s} \right) dt = \langle x(t), \psi_{\tau, s}(t) \rangle \quad (10)$$

* indique le complexe conjugué d'une fonction

La transformée en ondelettes illustre, en fonctions des paramètres s et τ , les variations de la série de départ pour chaque échelle de fréquence s et à chaque instant t . En appliquant la formule de Parseval, on peut réécrire l'équation 10 comme un produit de convolution. Il est noté \star .

$$W(s, \tau) = x(t) \star \bar{\psi}_s(\tau) \quad (11)$$

$$\text{Tel que } \bar{\psi}_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{-t}{s} \right) \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t}{s} \right) \quad (11b)$$

Sous cette forme, l'équation 11 (et donc 10) peut se transposer dans le domaine fréquentiel de Fourier grâce au théorème de convolution indiquant que le produit dans l'espace temporel peut s'effectuer dans le domaine fréquentiel (de Fourier).

Ce procédé implique une décomposition du signal (et de sa structure) sur plusieurs échelles fréquentielles s tout en conservant son évolution temporelle. En d'autres termes, le coefficient $W(s, \tau)$ représente les variations de $x(t)$ autour du temps τ de taille fréquentielle s . Par conséquent, les événements affectant fortement la variance du signal se traduisent par des coefficients d'ondelettes élevés. Il est alors possible de reconstruire la série d'origine à partir des ondelettes $W(s, \tau)$. A cet effet, on effectue l'opération inverse appelée Inverse Continuous Wavelet Transform (ICWT) :

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(s, \tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t - \tau}{s} \right) \cdot d\tau \frac{ds}{s^2} = R_x(t) \quad (12)$$

$R_x(t)$ Étant la Reconstruction de la fonction $x(t)$

Dans la mesure où les contraintes citées plus haut sont respectées, la reconstruction de la série $R_x(t)$ est dite complète et préservatrice de l'énergie. En d'autres termes, l'énergie "initiale" de la fonction $x(t)$ (i.e. dans le domaine Temps) se répartit complètement dans l'espace

Temps-Fréquence (i.e. sur les outputs du filtre d'ondelette), comme le montre la relation suivante qui est une transcription de l'égalité de Parseval (équation (3)) pour les ondelettes :

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |R_x(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |W(s, \tau)|^2 d\tau \right) \frac{ds}{s^2} \quad (13)$$

Pour garantir cette égalité il faut donc déterminer des contraintes sur le terme C_ψ . A cet effet, on peut réécrire $R_x(t)$ comme un produit de convolution ce qui "supprime" l'intégrale en τ :

$$R_x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} W(s, \cdot) \star \psi_s(t) \frac{ds}{s^2} \quad (14)$$

$$\text{Avec } \psi_s(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t}{s}\right) \quad (14b)$$

En introduisant l'équation (11) dans l'équation (14), on construit un triple produit de convolution :

$$R_x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} x_t \star \overline{\psi_s} \star \psi_s(t) \frac{ds}{s^2} \quad (15)$$

Pour confirmer les équations (12) et (13) (i.e que la reconstruction du signal soit bonne), on doit montrer l'égalité des transformées de Fourier de $x(t)$ et $R_x(t)$. On note ainsi la transformée de Fourier de $x(t)$ par $X(f)$ et celle de $R_x(t)$ par $\widehat{R}_x(f)$.

La formule de convolution et le théorème de Fubini² conduisent à l'équation suivante :

$$\widehat{R}_x(f) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} X(f) \cdot \sqrt{s} \widehat{\Psi}^*(sf) \cdot \sqrt{s} \widehat{\Psi}(sf) \frac{ds}{s} \quad (16)$$

Nous pouvons simplifier (16) par :

$$\widehat{R}_x(f) = \frac{X(f)}{C_\psi} \int_0^{+\infty} |\widehat{\Psi}(sf)|^2 \frac{ds}{s} \quad (17)$$

En posant $\theta = sf$, l'équation (17) devient :

² Le Théorème de Fubini permet de changer les ordres d'intégration dans les calculs d'intégrales d'une fonction à plusieurs variables. Il montre ainsi que l'on peut intégrer les variables à la suite ce qui est plus rapide que de réaliser l'intégrale globale.

$$\widehat{R}_x(f) = X(f) \frac{\int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\theta)|^2}{\theta} d\theta}{C_\psi} \quad (18)$$

De cette équation, pour que $\widehat{R}_x(f) = X(f)$ il est nécessaire que :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(\theta)|^2}{\theta} d\theta < +\infty \quad (19)$$

En remplaçant θ par sf , on arrive à l'expression mathématique de C_ψ comme l'ont démontré Calderón (1964) et Grossmann et Morlet (1984):

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(f)|^2}{f} df < +\infty \quad (19b)$$

Cette équation constitue la « condition d'admissibilité » d'une ondelette garantissant l'hypothèse de préservation de l'énergie (la variance) afin que la variance de la série reconstruite soit bien égale à celle de $x(t)$, c'est-à-dire que la somme fréquentielle des variances des coefficients d'ondelettes soient similaires à la variance du signal. Calderón (1964) puis Grossmann et Morlet (1984) ont montré que cette hypothèse est vérifiée sous certaines conditions, comme la nullité de la moyenne. Pour que C_ψ soit fini il est nécessaire que $\lim_{f \rightarrow 0} \widehat{\Psi}(f) = 0$ or cela est équivalent à poser que $\widehat{\psi}(0) = 0$ et donc si $\widehat{\Psi}(f)$ est différentiable et continue alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0$. On retrouve ainsi les conditions citées plus haut, qui se traduisent par le respect de l'équation (19b).

Les ondelettes s'inscrivent dans la logique de l'analyse spectrale puisqu'elles décomposent le signal en fréquence (échelles). La partition Temps-Fréquences permet, de plus, une représentation temporelle des composantes fréquentielles. Une ondelette analytique est donc préférable pour une utilisation pratique de la CWT.

2.2.2 La Transformation continue en ondelettes : Analytical-CWT

Une ondelette $\psi_a(t)$ est dite analytique si elle "annule" les fréquences négatives lors du filtrage. Il est donc nécessaire que sa fonction de réponse en fréquence soit nulle pour les fréquences négatives. Comme la fonction de réponse en fréquence correspond à la transformée de Fourier du filtre d'ondelette, on peut écrire :

$$\widehat{\Psi}_a(f) = 0 \text{ si } f < 0 \quad (20)$$

Les ondelettes analytiques sont des fonctions complexes par nature, elles sont par conséquent représentées par leur partie réelle notée $\psi = \text{Re}(\psi_a)$. Lorsque les fréquences sont positives on peut alors calculer $\widehat{\Psi}_a(f)$, la fonction de réponse en fréquence, à partir de la transformée de Fourier de $\psi(t)$ notée $\widehat{\Psi}(f)$:

$$\widehat{\Psi}_a(f) = \begin{cases} 2\widehat{\Psi}(f) & \text{si } f > 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases} \quad (20b)$$

$$\text{Avec } \widehat{\Psi}(f) = \frac{\widehat{\Psi}_a(f) + \widehat{\Psi}_a^*(f)}{2} \text{ et } \widehat{\Psi}_a^*(f) \text{ le complexe conjugué de } \widehat{\Psi}_a(f)$$

Pour une ondelette analytique $\psi_a(t)$, la transformée inverse de Fourier de $\widehat{\Psi}_a(f)$ définit sa partie analytique. Ce raisonnement s'applique aussi pour un signal $x(t)$. Sa partie analytique, notée $x_a(t)$, se définit comme la transformée inverse de Fourier de $X_a(f)$.

Les ondelettes analytiques permettent de traiter des signaux sans tenir compte des fréquences négatives qui n'ont pas nécessairement d'interprétations en économie et en finance, 0 étant la fréquence minimale (La série dans le domaine temporel). L'intérêt de recourir à ce type d'ondelettes réside dans leurs capacités à réduire considérablement le temps de calculs pour réaliser une transformation continue.

Nous utiliserons par la suite une ondelette-mère analytique complexe couramment employée dans l'analyse temps-fréquence continue : l'ondelette de Morlet notée $\psi_M(t)$:

$$\psi_M(t) = \pi^{-1/4} e^{if_0 t} e^{(-\frac{t^2}{2})} \quad (21)$$

Avec $i^2 = -1$ et f_0 la fréquence non-dimensionnelle

L'équation (21) est la représentation temporelle de l'ondelette de Morlet composée d'une onde et d'une fenêtre Gaussienne (ou Enveloppe Gaussienne). On identifie clairement son caractère analytique sous sa représentation fréquentielle :

$$\widehat{\Psi}_M(sf) = \pi^{-\frac{1}{4}} \cdot I(f) \cdot e^{(-\frac{(sf-f_0)^2}{2})} \quad (21b)$$

$I(f)$ est la fonction de Heaviside assimilée à une fonction indicatrice fréquentielle telle que :

$$I(f) = \begin{cases} 1 & \text{si } f > 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases} \quad (21c)$$

Le choix de f_0 détermine ainsi l'admissibilité ou non de l'ondelette. Daubechie (1992) et Farge (1992) ont montré que $f_0 = 6$ permet de respecter la condition (19b) pour l'ondelette de Morlet. Ils indiquent par ailleurs que cette valeur permet une localisation temporelle et fréquentielle équilibrée.

Sur la base d'une ondelette analytique, on réalise une transformation continue en ondelette analytique, dont la formule est similaire à celle décrite précédemment par l'équation 10. De plus, en reprenant $W(s, \tau) = x(t) \star \overline{\psi_s}(\tau)$ et en calculant \widehat{W} sa transformée de Fourier par rapport à τ , il vient :

$$\widehat{W} = X(f) \sqrt{s} \widehat{\Psi}^*(sf) \quad (22)$$

Grâce à (20b), on peut simplifier l'équation (21):

$$\widehat{W} = \frac{1}{2} X_a(f) \sqrt{s} \widehat{\Psi}^*(sf) \quad (22b)$$

En réalisant la transformée inverse de Fourier de l'équation (22b) on arrive à la propriété de complétude qui permet de définir la transformation en ondelette analytique de $x(t)$ uniquement par sa partie analytique :

$$W(s, \tau) = \frac{1}{2} Wa(s, \tau) \quad (23)$$

Avec $Wa(s, \tau)$ la transformée en ondelettes de la partie analytique de $x(t)$.

Nous pouvons ainsi reconstruire complètement la partie analytique de la série de départ par l'intermédiaire de la transformation inverse en ondelettes (de manière analogue à l'équation 12):

$$x_a(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wa(s, \tau) \psi_s(t - \tau) d\tau \frac{ds}{s^2} \quad (24)$$

$$\|x_a\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_a(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |Wa(s, \tau)|^2 d\tau \right) \frac{ds}{s^2} \quad (24b)$$

Toujours sous la contrainte 19b sur C_ψ

En insérant (22) dans (23) et en posant $\|x_a\|^2 = 2\|x\|^2$ on peut écrire :

$$x(t) x_t = \frac{2}{C_\psi} \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(s, \tau) \psi_s(t - \tau) d\tau \frac{ds}{s^2} \right) \quad (24c)$$

$$\|x\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{2}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |W(s, \tau)|^2 d\tau \right) \frac{ds}{s^2} \quad (24d)$$

Les équations (24) et (24c) sont similaires car l'équation (23) réduit la CWT à la partie analytique du signal. Une démonstration plus complète du théorème de complétude est fourni par Mallat (2009).

Le terme $|W(s, \tau)|^2$ de l'équation (24d) indique que la variance de la série de départ se répartit en temps et en fréquences à travers les coefficients d'ondelettes. On peut affirmer que la distribution tempo-fréquentielle de la variance du signal est induite par les ondelettes filles et que leurs répartitions se situent autour d'un centre temporel et fréquentiel. Les ondelettes filles étant liées à l'ondelettes-mère, il est plus simple d'analyser ses caractéristiques tempo-fréquentielles pour en déduire celles de sa famille.

On étudie tout d'abord la répartition temporelle de l'énergie contenue dans $\psi(t)$ pour définir la distribution énergétique pour $\psi_{\tau,s}(t)$. Par construction $\psi(t)$ est centrée sur 0 donc la répartition temporelle de son énergie s'effectue selon :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 |\psi(t)|^2 dt \quad (25)$$

L'équation (25) s'apparente à une variance temporelle. On la note $\sigma^2(t)$.

On peut en déduire la répartition de l'énergie liée à une de ses filles $\psi_{\tau,s}(t)$. Celle-ci est issue d'une opération de translation sur $\psi(t)$, elle est centrée sur τ . De manière analogue à (25) on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - \tau)^2 |\psi_{\tau,s}(t)|^2 dt \text{ soit } s^2 \sigma_t^2 \quad (25b)$$

Les équations (25) et (25b) permettent de définir « l'étalement temporel » de la variance des ondelettes-filles.

On représente ensuite la répartition fréquentielle de l'énergie de $\psi_{\tau,s}(t)$. Pour cela, nous représentons $\psi_{\tau,s}(t)$ dans l'espace fréquentiel via sa transformé de Fourier :

$$\widehat{\Psi}_{\tau,s}(f) = \sqrt{s} \widehat{\Psi}(sf) e^{-if\tau} \quad (26)$$

Il est nécessaire de déterminer le centre fréquentiel de $\widehat{\Psi}(f)$ pour en déduire celui de $\widehat{\Psi}_{\tau,s}(f)$. La propriété analytique de l'ondelette-mère permet de le définir par :

$$\xi = \frac{\int_0^{+\infty} f |\widehat{\Psi}(f)|^2 df}{2\pi} \quad (27)$$

La répartition autour de ξ prend la forme suivante :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (f - \xi)^2 |\widehat{\Psi}(f)|^2 df \text{ soit } \sigma_f^2 \quad (27b)$$

$\widehat{\Psi}_{\tau,s}$ est une dilatation de $\widehat{\Psi}(f)$ par $1/s$, donc son centre fréquentiel est une remise à l'échelle de ξ :

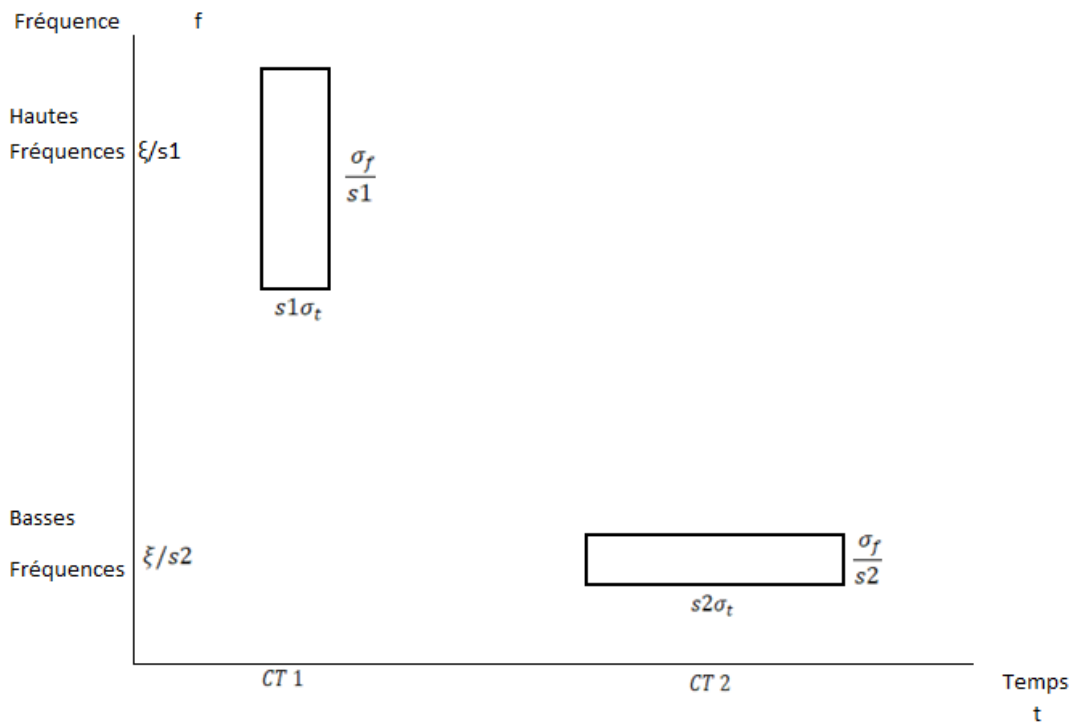
$$\xi/s = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} f |\widehat{\Psi}(f)|^2 df}{s} \quad (28)$$

L'énergie de $\widehat{\Psi}_{\tau,s}$ se répartit autour de ξ/s comme suit :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} (f - \xi/s)^2 |\widehat{\Psi}_{\tau,s}(f)|^2 df = \sigma_f^2/s^2 \quad (28b)$$

De ces équations on en conclue que la transformation en ondelettes analytiques rend possible la localisation en Temps et en Fréquence mais elle reste contrainte par le Principe d'Incertitude. En effet, on peut remarquer que la répartition de l'énergie est limitée par une Fenêtre Temps-Fréquence centrée autour de $(\tau, \frac{\xi}{s})$ de largeur temporelle σ_t et de largeur fréquentielle $\frac{\sigma_f}{s}$. Celle-ci possède une surface $\sigma_t \sigma_f$ quels que soient τ et s mais sa largeur en temps et en fréquence est modulable en fonction de s , contrairement à la Transformée de Fourier où elle est de largeur fixe. On peut ainsi « jouer » avec le principe d'Heisenberg car on peut définir son degré de résolution en temps et en fréquence en fonction de l'échelle s . Cet intervalle constitue alors la boîte d'Heisenberg de l'ondelette $\psi_{\tau,s}(t)$.

Figure 3: Boite d'Heisenberg d'une ondelette



En comparant les échelles s_1 et s_2 , on remarque que plus s est faible plus le support temporel est étroit mais celui fréquentiel est plus large.

Sous cet angle, le terme $|W(s, \tau)|^2$ apparaît comme une mesure de la variance temporel-fréquentielle (la densité d'énergie) du signal dans les boîtes d'Heisenberg issues de la famille d'ondelettes de paramètres s et τ . On l'appelle Scalogramme ou Spectre de Puissance en Ondelettes. En le divisant par s on effectue une remise à l'échelle. On définit ainsi une version normalisée du scalogramme $\frac{|W(s, \tau)|^2}{s}$ permettant des comparaisons multivariées de Spectres de Puissance.

Les ondelettes analytiques permettent de réduire le temps de calcul en se focalisant sur la partie positive des fréquences mais elles se basent sur un signal continu. Les séries financières le sont rarement, ce qui nécessite des ondelettes discrétisées en temps.

2.2.3 Vers une discrétisation temporelle de la CWT

Les ondelettes analytiques constituent une simplification de la CWT mais celle-ci a une mise en œuvre pratique relativement complexe car elle se base sur un signal continu infini. Empiriquement, les séries sont finies (de longueur N) et s'observent avec un pas de temps δ_t

qui induit une discrétisation temporelle. Il est ainsi nécessaire de « discrétiser » en temps les équations de la CWT tout en l’associant avec une ondelette analytique. Dans ce cas, on doit ajuster les équations (20b) pour des signaux discrets x_t :

$$\widehat{x}_a(f) = \begin{cases} \widehat{x}(f) & \text{si } f = 0 \text{ et } N/2 \\ 2 \widehat{x}(f) & \text{si } 0 < f < N/2 \\ 0 & \text{si } \frac{N}{2} < f < N \end{cases} \quad (20c)$$

Nous réécrivons l’équation (10) sous une forme discrète en temps :

$$W(s, \tau) = \sum_{\tau=0}^{N-1} x_t \sqrt{\delta_t/s} \psi^* \left(\frac{(\tau - t) \delta_t}{s} \right) \quad (29)$$

$\sqrt{\delta_t/s}$ permet d’assurer la normalisation de la variance d’après Torrence et Compo (1998).

La reconstruction de la série s’effectue en sommant, à un instant, les parties réelles des coefficients d’ondelettes de chaque échelle s .

En théorie cette équation s’effectue dans le domaine temporel (à chaque instant du temps), ce qui amène à répéter N fois la relation ci-dessus sur chaque échelle fréquentielle s , soit $N*s$ itérations. On peut réduire le nombre de calculs en basculant dans le domaine fréquentiel de Fourier et en utilisant le théorème de convolution. De cette manière, on réalise ‘seulement’ N fois l’équation (29) pour obtenir la transformée en ondelettes $W(s, \tau)$ qui est la transformée inverse de Fourier du produit de convolution.

En notant \widehat{x}_f , la transformée discrète de Fourier de la série x_t , on peut écrire :

$$W(s, \tau) = \sqrt{\delta_t/s} \sum_{f=0}^{N-1} \widehat{x}_f \overline{\Psi_{\tau,s}}^*(s w_f) e^{(i w_f t \delta_t)} \quad (29b)$$

Avec w_f la fréquence angulaire liée à f telle que

$$w_f = \begin{cases} \frac{2\pi f}{N \delta_t} & \text{si } f \leq N/2 \\ \frac{-2\pi f}{N \delta_t} & \text{si } f > N/2 \end{cases} \quad (29c)$$

Les équations (29) et (29c) impliquent aussi une répartition de l'énergie du signal discret représentée par le scalogramme $|W(s, \tau)|^2$.

La discrétisation en temps des ondelettes est la résultante du caractère discret des variables à décomposer. Puisque le temps n'est plus continu certaines échelles s perdent de leur utilité pour l'interprétation. Il est alors nécessaire de définir convenablement un ensemble de taille J traduisant les échelles fréquentielles s_j retenues. Un ensemble d'échelle indique le "raffinement en fréquence" de la transformation en spécifiant les fréquences retenues et leurs nombres. Il est devenu commun d'exprimer les échelles comme des multiples de 2 en utilisant une grille dyadique. La prise en compte d'échelles intermédiaires permet alors de moduler la précision fréquentielle.

Rioul et Duhamel (1992) commencent par définir s_0 la plus petite échelle réalisable compte tenu du pas temporel telle que $s_0 = 2\delta_t$. Ils montrent, par la suite, qu'en prenant un ensemble d'échelle trop restreint on tend vers une version particulière des transformations en ondelettes appelée Discrete Wavelets Transforms (DWT). Un ensemble fréquentiel large couvre, à l'opposé, la totalité des fréquences et se rapproche de la CWT.

Le choix de s_j dépend du caractère orthogonal des ondelettes comme l'indique Farge (1992). Un ensemble discret d'échelles est nécessairement sélectionné en cas d'ondelettes orthogonales, ce qui amène à la DWT. Dans le cas des ondelettes continues qui sont non-orthogonales, cet ensemble d'échelle peut être choisi arbitrairement pour régler à sa convenance le niveau de résolution en fréquence.

Pour considérer un nombre d'échelles intermédiaires plus important, dans le cadre de la CWT, Lau et Weng (1995) puis Torrence et Compo (1998) donnent des formules pour déterminer les valeurs optimales de s_j et J pour réaliser une CWT à la fois plus complète et plus rapide en calcul tout en ayant la possibilité de choisir son degré de résolution :

$$s_j = s_0 \cdot 2^{j \delta_j} \quad (30)$$

$$\forall j = 0, \dots, J$$

$$J = \frac{1}{\delta_j} \left\lceil \text{Log}_2 \left(\frac{N \delta_t}{s_0} \right) \right\rceil = \frac{1}{\delta_j} \left\lceil \text{Log}_2 \left(\frac{N}{2} \right) \right\rceil \quad (30b)$$

[...] renvoie à la partie entière

Dans ces formules δ_j représente le pas fréquentiel, et il détermine le nombre d'échelles intermédiaires. L'exemple suivant illustre plus clairement les différentes échelles fréquentielles.

En fixant le pas temporel δ_t à 1, il vient $s_0 = 2$. En considérant l'échelle dyadique, l'échelle 1 est égale à $s_1 = 2 \cdot s_0 = 4\delta_t = 4$ puis l'échelle $s_2 = 8$ et etc ... dans ce cas, on ne considère aucune échelle intermédiaire entre 2 et 4. Comme nous le verrons ultérieurement, ce cas constitue la base de la DWT car le 'raffinement' fréquentiel (maillage en fréquence) est relativement limité.

On applique ici la formule (30) avec $\delta_j = 0.5$. L'échelle s_0 reste identique mais $s_1 = s_0 \cdot 2^{0.5} = 2.83 \neq 4$ et $s_2 = s_0 \cdot 2^{2 \cdot 0.5} = 4 \neq 8$, nous considérons une échelle intermédiaire entre 2 et 4. L'échelle dyadique revient à fixer un pas fréquentiel égal à 1.

On peut alors déterminer le degré de résolution de notre CWT par le choix de δ_j qui considère $(\frac{1}{\delta_j} - 1)$ échelles intermédiaires entre deux échelles dyadiques. Dans ce sens plus δ_j est faible, plus on considère un nombre élevé d'échelles intermédiaires conduisant à un maillage fréquentiel s_j plus fin et très précis mais au prix d'une mise en œuvre complexe et lente. La valeur de δ_j est liée à l'ondelette-mère utilisée dans la décomposition car celle-ci peut être limitée dans sa localisation temporelle ou fréquentielle. L'ondelette de Morlet, en ce sens, est bien équilibrée mais δ_j ne doit pas dépasser 0.5 pour garantir un 'bon' ensemble d'échelle.

Comme nous venons de le constater l'ensemble d'échelle s_j (et J) correspond au paramètre de dilatation de l'ondelette-mère et fournit les coefficients d'ondelettes sur les niveaux de fréquences retenues. L'interprétation de ce paramètre n'a pas de sens en dehors de l'aspect purement mathématique, contrairement à la fréquence ou à la période de l'analyse de Fourier. Il est nécessaire de convertir l'échelle en période afin d'interpréter les résultats plus facilement.

Meyers et al (1993) proposent d'introduire dans l'équation de l'ondelette-mère une fonction de période définie (une cosinusoïde) d'en réaliser la CWT puis d'identifier l'échelle s maximisant la puissance spectrale. Cette méthode revient à chercher le « pic » du scalogramme qui indique que l'ondelette et la cosinusoïde sont fortement corrélées et donc de périodes identiques. Ils arrivent ainsi à déterminer un facteur de conversion, noté FC, permettant de transcrire l'échelle s en période T :

$$T_j = s_j * \frac{4\pi}{f_0 + \sqrt{2 + f_0^2}} \quad (31)$$

$$FC = \frac{4\pi}{f_0 + \sqrt{2 + f_0^2}} \quad (31b)$$

Ces formules ne sont valides que pour l'ondelette de Morlet, en considérant $f_0 = 6$ on obtient un facteur de conversion de 1.033.

La sélection de l'ensemble d'échelle implique, par ailleurs, une perte d'information car l'échelle maximale retenue est s_j . L'information contenue dans les échelles $s_a \forall a > j$ n'est pas considérée lors de la reconstruction du signal. On doit prendre en compte une approximation A_j qui concentre l'information pour les échelles s_a . On définit, à cet effet, une fonction d'échelle particulière notée $\phi(t)$ tel que :

$$\phi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s_j}} \phi\left(\frac{t-\tau}{s_j}\right) \quad (32)$$

Ce filtre est aussi normalisé $\|\phi\| = 1$

On peut alors calculer l'approximation comme suit :

$$A_j(s, \tau) = \begin{cases} \langle x(t), \frac{1}{\sqrt{s}} \phi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \rangle = x_t * \overline{\phi_s} & \text{dans le cas continu global} \\ \langle x_t, \sqrt{\delta_t/s} \phi^*\left(\frac{(\tau-t)\delta_t}{s}\right) \rangle = x_t * \overline{\phi_s} & \text{pour la CWT discrétisée} \end{cases} \quad (32b)$$

La reconstruction de la série suit alors la même logique que l'équation (14).

$$R_x(t) = \frac{1}{C_\psi} \sum_s^J W(s, \cdot) * \psi_s(t) + \frac{1}{C_\psi s_j} A_j(s, \cdot) * \overline{\phi_{s_j}} \quad (33)$$

Sous cette forme, la transformation en ondelette apparait comme **un filtre Passe-Bande** avec **$\psi(f)$ le filtre Passe-Haut et $\phi(f)$ le Passe-Bas.**

L'utilisation de $\phi(f)$ pour la CWT dépend directement du choix de s et J et permet une implémentation rapide. Cette fonction d'échelle porte aussi le nom d'ondelette-père, son

utilité réside surtout dans le cas totalement discret et de son implémentation dans le cadre d'une l'analyse multirésolution.

La Transformation Continue est une représentation théorique des ondelettes mais elle nécessite de nombreux calculs même sous ses formes discrétisées car elle fournit énormément de coefficients d'ondelettes dépendant de s et τ et de leurs pas. Son utilisation pratique demande une puissance de calcul importante qui n'était pas disponible lors de sa théorisation. Des versions totalement discrètes des transformations en ondelettes ont alors été développées afin de réduire les temps de calculs et de simplifier son implémentation pratique.

2.3 Les transformations discrètes en ondelettes :

Les limites de la puissance de calcul des ordinateurs ont conduit au développement des ondelettes discrètes afin de réduire des étapes trop complexes à mettre en œuvre dans la pratique (Goupillaud et al 1984). Les transformations en ondelettes discrètes se basent sur une "adaptation" des équations de la CWT en imposant des valeurs discrètes à s et τ afin de définir un échantillonnage idéal (en anglais *critical sampling*) des coefficients d'ondelettes.

La famille d'ondelettes continues $\psi_{\tau,s}(t)$, qui sert de filtre lors de la transformation, permet de construire l'équation d'une ondelette discrète en contraignant s et τ à des échelles dyadiques :

$$\begin{aligned} s &= 2^j \\ \tau &= k 2^j \end{aligned} \quad (34)$$

Le choix de l'échelle dyadique pour τ impose que le nombre d'observations N soit uniquement un multiple de 2. Cette contrainte de longueur peut être relâchée en fixant $\tau = k$ dans ce cas on réalise une Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform ou MODWT.

En introduisant (34) dans (9) et en normalisant le résultat, on obtient la famille d'ondelettes discrètes :

$$\psi_{\tau,s}(t) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}, t - k) \quad (35)$$

Il s'agit d'une discrétisation de la CWT dans le sens où l'on considère des échelles fréquentielles (ou bandes de fréquences) contenant un nombre réduit de coefficients d'ondelettes pour traduire toute l'information de la série.

Sur cette base, Mallat (1989) développe un algorithme itératif permettant des transformations rapides en ondelettes mais sous certaines conditions. Il établit aussi le lien entre l'analyse multirésolution et les ondelettes ouvrant ainsi la voie à des applications plus concrètes.

Dans cette étude nous présentons dans un premier temps le principe d'une cascade de filtre pour décrire simplement la DWT et la MODWT comme une succession de filtres passe-haut et passe-bas. Nous pouvons ainsi détailler plus facilement les principes de l'analyse multirésolution pour aborder les différences existantes entre la DWT et la MODWT.

2.3.1 Les Transformations en ondelettes vues comme un Filtrage Passe-Bandes successif

La discrétisation du filtre continu en ondelettes s'effectue concrètement par l'utilisation d'un filtre discret d'ondelettes de longueur L noté h_l tel que $h_l = (h_0, h_1, \dots, h_{L-1})$. Ce filtre permet de respecter les propriétés de la CWT en les transposant pour la discrétisation. Il est, par construction, de moyenne nulle, normalisé et orthogonal avec ses versions translatées, ce qui en fait un filtre Passe-Haut intéressant qui capte convenablement les hautes-fréquences ($1/4 - 1/2$). On note $\mathcal{H}(f)$ sa fonction de gain au carré et $H(f)$ sa transformé de Fourier (fonction de réponse).

La nullité de la moyenne et la normalisation de l'énergie découlent directement de la CWT. Cependant, pour des signaux discrétisés un repliement du spectre peut survenir. On se rapproche ici du phénomène d'aliasing (en français aliasing se traduit par distorsion spectrale) d'un signal discrétisé à une fréquence donnée (appelée fréquence d'échantillonnage). Ainsi, les composantes du signal ayant une distance fréquentielle égale (en valeur absolue) par rapport à la fréquence d'échantillonnage (mais n'ayant pas les mêmes effets), sont considérées comme faisant partie du même échantillon fréquentiel. Leurs effets sont donc traités de façon similaires lors de la reconstruction. L'orthogonalité du filtre, dans ce sens, permet d'éviter que les coefficients d'ondelettes calculés sur plusieurs échelles distinctes et à des instants différents s'influencent mutuellement.

Les équations suivantes (Gençay[2001] et Mallat[1989-2009]) traduisent l'expression mathématique des propriétés de ce filtre :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{L-1} h_l &= 0 \\ \sum_{l=0}^{L-1} h_l^2 &= 1 \\ \sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+2n} &= 0 \quad \forall n \neq 0 \text{ un entier} \end{aligned} \quad (36)$$

Ces trois propriétés se transcrivent aisément dans le domaine fréquentiel en considérant $\mathcal{H}(f)$ tel que :

$$\sum_{l=0}^{L-1} h_l h_{l+2n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \mathcal{H}\left(\frac{f}{2}\right) + \mathcal{H}\left(\frac{f}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{i2\pi f n} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{i2\pi f n} df = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{La simplification est ici possible car } \mathcal{H}(f) + \mathcal{H}\left(f + \frac{1}{2}\right) = 2 \quad \forall f \quad (37)$$

Par construction, h_l n'est pas optimal pour capter toutes les fréquences, il est donc nécessaire de considérer un Filtre Passe-Bas $b_l = (b_0, b_1, \dots, b_{L-1})$ pour capter les basses-fréquences. Sa fonction de gain au carré est notée $\mathcal{B}(f)$ et sa fonction de réponse $B(f)$. Ce filtre b_l possède une fonction de gain au carré croissante (et monotone) quand f tend vers 0 (et inversement pour h_l).

Dans le cadre des transformations par ondelettes discrètes (développées par Mallat et Daubechie), les deux filtres h_l et b_l sont reliés par une relation de filtre miroir en quadrature (abrégé par QMF pour *Quadrature Mirror Filter*). Celle-ci implique que la somme des spectres de puissance de deux filtres Passe-Haut et Passe-Bas soit égale à 1, ce qui permet de simplifier les calculs.

Le QMF fut à l'origine créé pour résoudre les problèmes d'aliasing lors de la discrétisation de signaux continus. On peut alors établir les relations suivantes :

$$\begin{aligned} b_l &= (-1)^{l+1} h_{L-1-l} \\ h_l &= (-1)^l b_{L-1-l} \\ \forall l &= 0, \dots, L-1 \end{aligned} \quad (38)$$

Dans le domaine fréquentiel celles-ci deviennent :

$$B(f) = e^{-i2\pi f(L-1)}H(f - 1/2) \quad (38b)$$

Et la relation en variance associée s'écrit :

$$\mathcal{B}(f) = \left| e^{-i2\pi f(L-1)}H\left(f - \frac{1}{2}\right) \right|^2 = \mathcal{H}\left(\frac{1}{2} - f\right) \quad (38c)$$

L'équation (38c) est alors décroissante quand f tends vers 0 et $\frac{1}{2}$ indiquant que la combinaison des filtres h_l et b_l considère l'intervalle fréquentiel $[0, \frac{1}{2}]$ (i.e. toutes les fréquences).

Ces relations miroirs en quadrature permettent, de plus, le développement d'un algorithme permettant de construire des filtres Passe-Bande composés de plusieurs filtres h_l et b_l appliqués J fois successivement. On parle alors de filtrage en cascade ou d'une cascade de filtres.

En considérant le filtre $h_{j,l}$ appliqué J fois à une série x_t discrète (J indiquant alors l'ordre du filtrage i.e. le nombre d'itérations du filtre) et en notant $o_{i,t}$ avec $i = 1, \dots, J$, les outputs du filtre $h_{i,l}$, on peut écrire la cascade comme suit dans le domaine temporel :

$$\begin{aligned} o_{1,t} &= h_{1,l} * x_t \\ o_{2,t} &= h_{2,l} * o_{1,t} \\ &\dots \\ &\dots \\ o_{J,t} &= h_{J,l} * o_{J-1,t} \end{aligned} \quad (39)$$

La cascade dans le domaine fréquentiel s'écrivant :

$$\begin{aligned} O_1(f) &= H_1(f)X(f) \\ O_2(f) &= H_2(f)O_1(f) = H_2(f)H_1(f)X(f) \\ &\dots \\ &\dots \\ O_J(f) &= H_J(f) * O_{J-1}(f) = H_J(f)H_{J-1}(f) \dots \dots H_2(f)H_1(f)X(f) \end{aligned} \quad (39b)$$

Avec $H_j(f)$ la transformée de Fourier (ou fonction de transfert) du filtre $h_{j,l}$, c'est à la dire, à la j -ième itération du filtre. On définit ainsi $H(f)$ la fonction de transfert globale du 'filtre cascade h_l telle que :

$$H(f) = \prod_{j=1}^J H_j(f) \quad (39c)$$

En considérant (39c) dans l'équation (39b) on obtient ainsi une écriture plus légère du filtrage en cascade :

$$O_j(f) = H(f) * X(f) \quad (39d)$$

A partir de ces équations il est possible de définir la transformation discrète en ondelettes comme une matrice \mathbf{W} particulière découlant d'un double filtrage en cascade particulier.

En considérant une série x_t de longueur dyadique N , on peut définir la DWT, de façon homologue à la CWT, comme un produit de convolution entre la série et la matrice \mathbf{W} (de taille $N \times N$) caractéristique de la DWT. On note que celle-ci est orthogonale pour les raisons évoquées précédemment.

$$w = \mathbf{W}x \quad (40)$$

Avec w un vecteur de longueur N qui rassemble les coefficients d'ondelettes c'est-à-dire les outputs de la transformation. Ces coefficients traduisent les variations de x_t sur plusieurs échelles de longueurs/tailles différentes. Le nombre d'échelles dépend directement de J , on peut alors fractionner le vecteur w en $J+1$ sous-secteurs associés à différentes échelles :

$$w = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_J, \mathbf{v}_J]^T \quad (40b)$$

T= transposé

De la sorte, \mathbf{w}_j est un vecteur de taille $N/2^j$ illustrant le comportement de la série pour l'échelle s_j de longueur 2^{j-1} et \mathbf{v}_J est un vecteur de taille $N/2^J$ qui rassemble les coefficients d'échelle. Ceux-ci traduisent l'évolution pour l'échelle s_j (en moyenne/en tendance) de la série c'est-à-dire à long-terme. Ces sous-secteurs \mathbf{w}_j correspondent aux bandes de fréquences de la transformation discrète.

De manière analogue à w , la matrice \mathbf{W} contient les coefficients du filtre h (de longueur L) sur plusieurs échelles, telle que :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \cdot \\ \mathbf{W}_j \\ \mathbf{V}_j \end{bmatrix} \quad (40c)$$

Le filtre d'ondelette h fournit les caractéristiques du filtrage et respecte les conditions (36) et (37) en fonction de la famille d'ondelettes choisie. On définit pour commencer, h_1 comme le vecteur qui contient les coefficients d'échelle unitaire du filtre d'ondelette (i.e. la base des coefficients). Pour des raisons pratiques, il s'agit d'un filtre « *zero-padding* » c'est-à-dire qu'on rajoute des zéros à la série pour augmenter sa longueur (toujours dyadique) afin d'améliorer la précision fréquentielle (méthode de la complétion de zéro). De la sorte, les coefficients $h_{1,1}, h_{1,0}, \dots, h_{1,L-1}$ sont non-nuls et issus d'une famille d'ondelettes orthogonales, et ceux compris entre $[L, N]$ sont nuls.

$$h_1 = [h_{1,N-1}, h_{1,N-2}, \dots, h_{1,1}, h_{1,0}]^T \quad (41)$$

Appliquons maintenant un décalage circulaire (*circularly shift*) par un multiple de 2 (i.e. 2, 4, 6, 8 etc....) et nous obtenons les coefficients décalés par 2 h_1^2 , décalés par 4 h_1^4 et etc... .

$$\begin{aligned} h_1^2 &= [h_{1,1}, h_{1,0}, h_{1,N-1}, h_{1,N-2}, \dots, h_{1,3}, h_{1,2}]^T \\ h_1^4 &= [h_{1,3}, \dots, h_{1,0}, h_{1,N-1}, h_{1,N-2}, \dots, h_{1,5}, h_{1,4}]^T \end{aligned} \quad (41b)$$

Ainsi la sous-matrice \mathbf{W}_1 de taille $(N/2 \times N)$ rassemble l'ensemble des coefficients décalés de h_1 . Elle s'écrit :

$$\mathbf{W}_1 = [h_1^2, h_1^4, \dots, h_1^{\frac{N}{2-1}}, h_1]^T \quad (41c)$$

On peut alors considérer h_2 les coefficients de filtre à l'échelle 2 et leurs versions décalées par des multiples de 4 qui sont regroupés dans \mathbf{W}_2 . Et ainsi de suite jusqu'à l'ordre j . En définitive la sous-matrice \mathbf{V}_j est un vecteur égal à $\frac{1}{\sqrt{N}}$ (Cf. McCoy et Walden 1996).

On fait alors appel, comme montré précédemment, à leur fonction de transfert pour lier les filtres d'ondelettes h_1 avec le filtre d'échelle b_1 (Passe-Bas) pour une échelle j .

$$H_{j,k} = H_{1,k \cdot 2^{j-1} \bmod N} \prod_{l=0}^{j-2} B_{1,k \cdot 2^l \bmod N} \quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1 \quad (42)$$

Et pour l'échelle J on obtient :

$$B_{J,k} = \prod_{l=0}^{j-2} B_{1,k \cdot 2^l \bmod N} \quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1 \quad (42b)$$

Avec $x \bmod y = x - y * \lfloor x/y \rfloor$ avec $\lfloor x/y \rfloor$ le plus grand entier supérieur inférieur ou égal à x/y .

On peut ainsi définir le filtre d'ondelettes $h_{j,l}$ pour l'échelle j comme la transformation inverse de Fourier de l'équation (42) et le filtre d'échelle b_l comme la transformée inverse de Fourier de (42b).

Nous avons présenté théoriquement la transformation en ondelettes discrètes mais son utilisation pratique et rapide s'effectue avec l'algorithme pyramidal de Mallat (1989) qui se base sur le filtrage en cascade. Cette méthode repose sur le principe suivant : la série est filtrée par h_l et b_l , on coupe les outputs de h_l en deux à leur moitié et on les considère comme les coefficients d'ondelettes d'ordre 1, on effectue la même opération sur les outputs de b_l et on réapplique les deux filtres sur une des moitiés. On effectue cette opération jusqu'à l'ordre J.

La première étape consiste à filtrer x_t avec les filtres h_l et b_l ce qui est similaire à réaliser une convolution entre x_t et les coefficients des filtres d'ondelettes et d'échelle :

$$\begin{aligned} w_{1,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} h_l x_{2t+1-l \bmod N} \\ v_{1,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} b_l x_{2t+1-l \bmod N} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\forall t = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

Le filtrage Passe-Haut et Passe-Bas de la série x_t de longueur N fournit ainsi deux outputs de taille N/2 (suite à l'opération de sous-échantillonnage par 2 qui est ici modélisée dans l'indice de x). La seconde étape consiste à refiltrer les coefficients $v_{l,t}$. On calcule donc le produit de convolution de $v_{l,t}$ avec les coefficients des filtres.

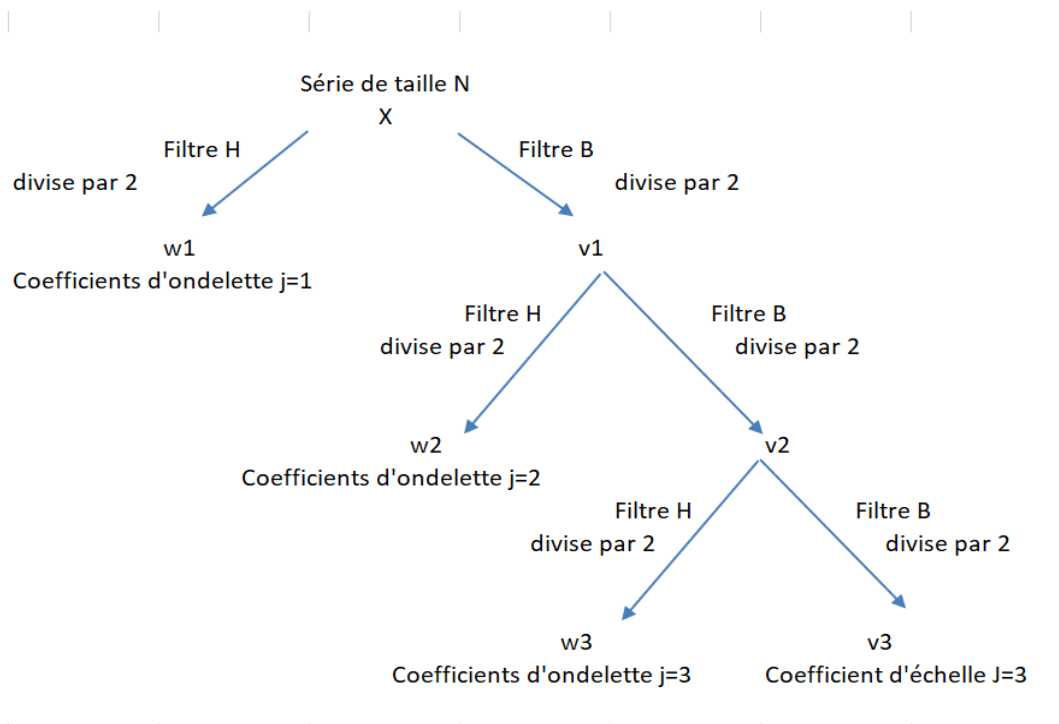
$$\begin{aligned}
 w_{2,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} h_l v_{1,2t+1-l \bmod N} \\
 v_{2,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} b_l v_{1,2t+1-l \bmod N} \\
 \forall t &= 0, 1, \dots, \frac{N}{4} - 1
 \end{aligned} \tag{43b}$$

Le nombre maximal J de bandes de fréquences considérées dans l'analyse dépend directement de N et de l'échelle dyadique. On a donc $N = 2^J$ en appliquant le logarithme népérien à cette quantité on trouve que :

$$J = \text{Log}_2(N) = \frac{\text{Ln}(N)}{\text{Ln}(2)} \tag{44}$$

Cette méthode s'illustre très facilement par le diagramme ci-dessous :

Figure 4 : Algorithme de Mallat pour une DWT d'ordre 3 :



Grâce à ces équations, nous pouvons décomposer la série, mais il est aussi intéressant d'effectuer une reconstruction de la chronique, de manière analogue à la Transformée inverse de Fourier, en partant des J bandes de fréquences. L'algorithme de Mallat étant itératif et basé

sur un Banc de Filtre, il est possible de reconstruire la série à partir des coefficients d'ondelettes, on parle alors de Transformation Inverse en Ondelettes Discrète (ou IDWT). Le processus de reconstruction débute par un sur-échantillonnage des coefficients d'ondelettes et d'échelles (l'opération inverse aux sous-échantillonnages). Il consiste à insérer des zéros entre chaque coefficient. On obtient ainsi des vecteurs de taille N notés w_J^o et v_J^o . On filtre alors ces coefficients par les filtres duaux H^* et B^* (effectuant « l'opération inverse » de H et B) et on somme leurs outputs pour obtenir v_{J-1} le vecteur des coefficients d'échelles à l'échelle J-1.

On réeffectue alors un sur-échantillonnage de v_{J-1} et w_{J-1} puis on les filtre à nouveau et on somme leurs outputs pour obtenir v_{J-2} les coefficients d'échelles à l'échelle J-2. Et ainsi de suite jusqu'à l'ordre 1 où on obtient $v_{1,t}$ auquel il faut ajouter les coefficients $w_{1,t}$ (sur-échantillonné et filtré) pour obtenir la reconstruction R_t .

$$\begin{aligned}
 v_{J-1,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} h_l w_{J,t-l \bmod 2}^o + \sum_{l=0}^{L-1} b_l v_{J,t-l \bmod 2}^o \\
 &\quad \forall t = 0,1 \\
 v_{J-2,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} h_l w_{J-1,t-l \bmod 4}^o + \sum_{l=0}^{L-1} b_l v_{J-1,t-l \bmod 4}^o \\
 &\quad \forall t = 0,1,2,3 \\
 &\quad \vdots \\
 R_t &= \sum_{l=0}^{L-1} h_l w_{1,t-l \bmod N}^o + \sum_{l=0}^{L-1} b_l v_{1,t-l \bmod N}^o \\
 &\quad \forall t = 0,1, \dots, N-1
 \end{aligned} \tag{45}$$

D'après le théorème de Vetterli³ et sous le respect des conditions énoncées, on a un banc de filtres à reconstruction parfaite. Si les deux filtres et leurs filtres duaux sont égaux, on parle de filtres miroirs conjugués.

Une reconstruction parfaite de la série implique aussi une préservation de la variance lors de la décomposition-reconstruction. Dans le cadre de la DWT, il faut que la somme en temps et en fréquences des coefficients au carré soit égale à la variance de la série décomposée.

³ Le théorème de Vetterli donne des conditions sur les filtres-duaux de h et b afin d'avoir un banc de filtres à reconstruction parfaite. Ces conditions se simplifient selon l'écriture :

$$\bar{h}^*(f)h(f) + \bar{h}^*(f + \pi)h(f + \pi) = 2$$

$$\|w\|^2 = \sum_{j=0}^J \sum_{t=0}^{\frac{N}{2^j}-1} w_{j,t}^2 + v_{j,t}^2 = \|x\|^2 \quad (46)$$

Comme la DWT fournit des outputs sur J niveaux, on les assimile à de nouvelles séries. On peut ainsi simplifier (46) comme la somme fréquentielle de variances de toutes les bandes de fréquences.

$$\|w\|^2 = \sum_{j=0}^{J-1} \|w_j\|^2 + \|v_j\|^2 = \|x\|^2 \quad (46b)$$

Avec $\|w_j\|^2$ la variance du vecteur des coefficients d'ondelettes d'échelle j c'est à dire la variance de x causée par des fluctuations sur l'échelle j, $\|v_j\|^2$ traduit ainsi la variance de x sur l'échelle J (Hautes-Fréquences).

Matriciellement on peut montrer que la DWT préserve l'énergie :

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= x^T x \\ &\text{en insérant (40)} \\ x^T x &= (\mathbf{W}w)^T (\mathbf{W}w) = w^T \mathbf{W}^T \mathbf{W} w = w^T w = \|w\|^2 \end{aligned} \quad (47)$$

Nous avons alors une décomposition-reconstruction de la série similaire à celle de Fourier mais avec une localisation temporelle en plus (indice t).

La DWT constitue une discrétisation complète de la CWT dont le but est de retranscrire en un minimum de coefficients d'ondelettes les évolutions de la série sur plusieurs échelles. Cela s'effectue par des opérations de sous-échantillonnage par 2 dans l'algorithme en vue de simplifier la procédure. Mais en pratique, cela implique d'avoir un nombre d'observations multiple de deux, ce qui représente un frein considérable pour une analyse en finance de marché où les résultats sont interprétés par rapport à une période sélectionnée qui ne peut être modulée aisément pour obtenir un nombre dyadique. De plus, réaliser des calculs avec des bandes de fréquences de tailles différentes et décroissantes de l'échelle fréquentielle peut poser des problèmes pour certaines applications où la robustesse des résultats dépend de N. Il existe aussi des contraintes pour une implémentation de la DWT mais il y a une alternative pour les contourner : La Maximal Overlap Discret Wavelet Transforms ou MODWT (en français la transformation discrète en ondelette avec chevauchement maximal) développée par Nanson et Silverman (1995), Coifman et Donoho (1995) entre autres.

2.3.2 La MODWT : une transformation discrète améliorée

La MODWT se base les mêmes équations que la DWT concernant le filtrage en cascade mais elle n'est pas basée sur des ondelettes orthogonales. De plus, elle n'impose pas de conditions sur N et elle est invariante aux décalages temporels. Nous verrons ultérieurement avec plus de détails les conséquences de ces différences entre DWT et MODWT.

Mathématiquement, comme pour la DWT, on définit la MODWT d'une série de taille quelconque N par la matrice $\widetilde{\mathbf{W}}$ et par le vecteur des coefficients d'ondelettes $\widetilde{\mathbf{w}}$ de taille $(J+1)N \times N$.

$$\widetilde{\mathbf{w}} = \widetilde{\mathbf{W}}\mathbf{x} \quad (48)$$

$$\text{Avec } \widetilde{\mathbf{w}} = [\widetilde{\mathbf{w}}_1, \widetilde{\mathbf{w}}_2, \dots, \widetilde{\mathbf{w}}_J, \widetilde{\mathbf{v}}_J]^T \text{ et } \widetilde{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{W}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{W}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{W}}_J \\ \widetilde{\mathbf{V}}_J \end{bmatrix}$$

Contrairement à la DWT, la MODWT n'est pas basée sur des ondelettes orthogonales donc on ne doit pas considérer les filtres h et b mais leurs versions remisent à l'échelle (rééchelonnée) notés $\widetilde{\mathbf{h}}$ et $\widetilde{\mathbf{b}}$ tels que :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{h}}_j &= h_j/2^j \\ \widetilde{\mathbf{b}}_j &= b_j/2^j \\ \forall j &= 1, \dots, J-1 \end{aligned} \quad (49)$$

La matrice $\widetilde{\mathbf{W}}_1$ est de ce fait un vecteur qui contient les coefficients rééchelonnés du filtre et décalés à droite d'une unité (pour l'échelle unitaire)

$$\widetilde{\mathbf{W}}_1 = [\widetilde{\mathbf{h}}_1^1, \widetilde{\mathbf{h}}_1^2, \dots, \widetilde{\mathbf{h}}_1^{N-2}, \widetilde{\mathbf{h}}_1^{N-1}, \widetilde{\mathbf{h}}_1]^T \quad (50)$$

On peut aussi assimiler cette matrice comme un entrelacement/chevauchement de \mathbf{W}_1 (issue de la DWT) avec ses versions translitées d'une unité.

Il est alors théoriquement possible d'établir un lien entre la DWT et la MODWT pour une série de longueur dyadique, c'est à dire d'exprimer les coefficients de l'une en fonction de ceux de l'autre :

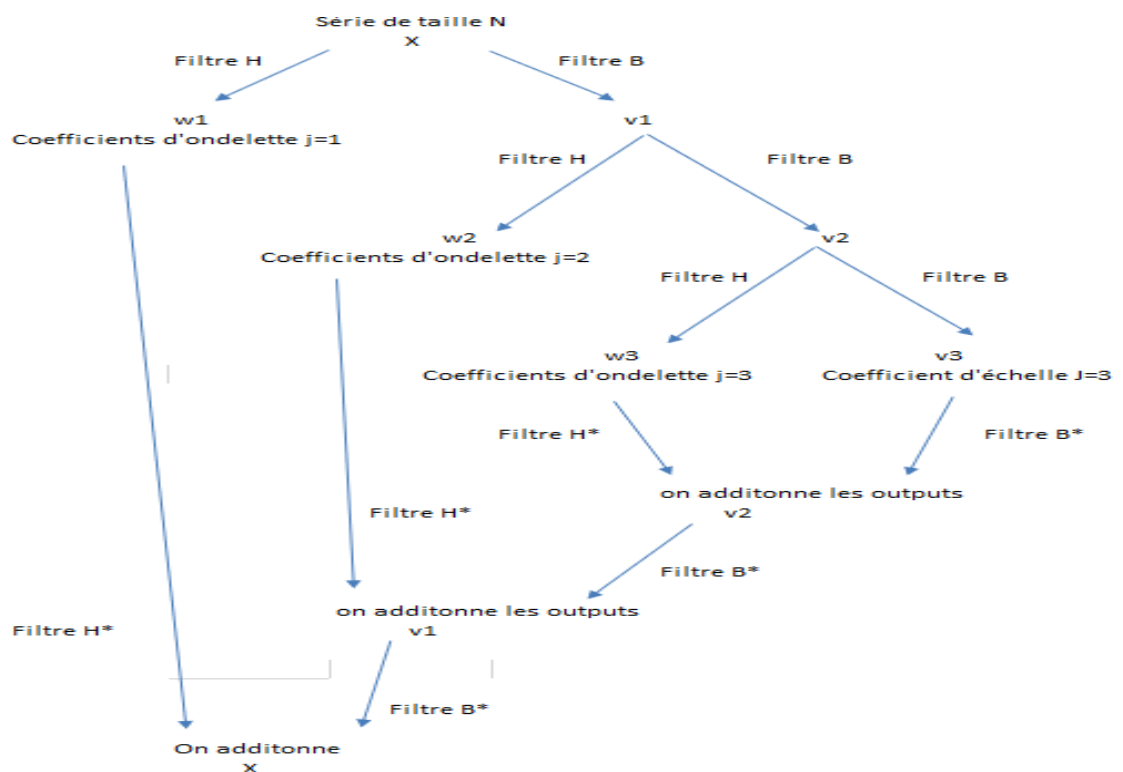
$$\begin{aligned}
 w_{j,t} &= 2^{j/2} \tilde{w}_{j,2^j(t+1)-1} \\
 v_{j,t} &= 2^{j/2} \tilde{v}_{j,2^j(t+1)-1} \\
 \forall t &= 0,1, \dots, \frac{N}{2^j} - 1 \text{ pour } j = 0, \dots, J
 \end{aligned}
 \tag{51}$$

Les coefficients d'ondelettes et d'échelles de la MODWT doivent alors être sous-échantillonnés et rééchelonnés pour obtenir ceux de la DWT.

L'algorithme de Mallat s'applique aussi pour réaliser plus aisément une MODWT mais il est nécessaire de considérer les filtres rééchelonnés (49) relâchant alors la contrainte dyadique et nous évitant l'opération de sous-échantillonnage des outputs.

La Figure 5 illustre l'algorithme de Mallat dans le cadre d'une MODWT d'ordre 3.

Figure 5 : Décomposition et Reconstruction sur la base d'une MODWT d'ordre 3 :



On commence ainsi par filtrer x_t pour obtenir les deux vecteur $\tilde{w}_{1,t}$ et $\tilde{v}_{1,t}$ de taille N contenant les coefficients d'ondelettes.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}}_{1,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{\mathbf{h}}_l x_{t-l \bmod N} \\
\tilde{\mathbf{v}}_{1,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{\mathbf{g}}_l x_{t-l \bmod N} \\
\forall t &= 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{52}$$

Nous suivons l'algorithme en refiltrant $\tilde{\mathbf{v}}_{1,t}$ pour obtenir $\tilde{\mathbf{w}}_{2,t}$ et $\tilde{\mathbf{v}}_{2,t}$

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{w}}_{2,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{\mathbf{h}}_l \tilde{\mathbf{v}}_{1,t-l \bmod N} \\
\tilde{\mathbf{v}}_{2,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{\mathbf{g}}_l \tilde{\mathbf{v}}_{1,t-l \bmod N} \\
\forall t &= 0, 1, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{52b}$$

On continue cette procédure jusqu'à l'ordre J pour obtenir le vecteur $\tilde{\mathbf{w}}$. L'ordre J se calcule de manière similaire à la DWT.

La reconstruction de la série s'opère une fois de plus avec un banc de filtres à reconstruction parfaite, on effectue alors l'Inverse Maximal Overlap Discrete Wavelets Transform (IMODWT). On filtre les coefficients d'ondelettes et d'échelles (de l'échelle J) avec les filtres duaux puis on les additionne pour former le vecteur d'échelle inférieur (J-1). Celui-ci est à nouveau filtré comme le vecteur d'ondelettes et on remonte jusqu'à l'ordre J-1, une sommation des deux vecteurs permet de reconstruire la série.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{v}}_{J-1,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{\mathbf{h}}_l \tilde{\mathbf{w}}_{J,t+l \bmod N} + \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{\mathbf{b}}_l \tilde{\mathbf{v}}_{J,t+l \bmod N} & \tilde{\mathbf{v}}_{J-2,t} &= \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{\mathbf{h}}_l \tilde{\mathbf{w}}_{J-1,t+l \bmod N} + \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{\mathbf{b}}_l \tilde{\mathbf{v}}_{J-1,t+l \bmod N} \\
\tilde{\mathbf{R}}_t &= \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{\mathbf{h}}_l \tilde{\mathbf{w}}_{1,t+l \bmod N} + \sum_{l=0}^{L-1} \tilde{\mathbf{b}}_l \tilde{\mathbf{v}}_{1,t+l \bmod N} & \forall t &= 0, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{53}$$

Au même titre que la DWT, la MODWT est une décomposition additive de la série qui répartit sans pertes la variance sur plusieurs niveaux de fréquences (énergie préservée) tel que l'ont montré Percival et Mofjeld (1997) :

$$\|\tilde{\mathbf{w}}\|^2 = \sum_{j=1}^J \|\tilde{\mathbf{w}}_j\|^2 + \|\tilde{\mathbf{v}}_J\|^2 = \|x\|^2 \tag{54}$$

2.3.3 Différences entre la DWT et la MODWT

Percival et Mofjeld (1997) ont détaillé les différences qui peuvent exister entre les deux formes de transformations discrètes. Ils ont de plus montré leurs conséquences inhérentes à ces méthodes lors du filtrage.

La différence la plus importante entre la DWT et la MODWT réside dans le relâchement de la contrainte dyadique sur N rendue possible par l'utilisation d'ondelettes non-orthogonales. Pour une série de longueur non-dyadique N , il est nécessaire d'augmenter artificiellement N avant de réaliser une DWT en ajoutant des zéros à la fin de la série (il existe d'autres méthodes mais, pour un gain similaire, celles-ci sont plus difficiles à mettre en œuvre). Cet ajustement modifie alors la variance de la série d'origine ce qui est une altération non négligeable de l'information. La MODWT a l'avantage d'être réalisable directement sans modifications préalables des séries. Il est, donc, inutile d'effectuer l'opération de sous-échantillonnage des outputs. Un autre avantage réside dans la taille des bandes de fréquences qui est divisée par deux à chaque changement d'échelles car la MODWT fournit des bandes de longueur N . Comme le montre Percival (1995), il est nécessaire de remettre à l'échelle les coefficients d'ondelettes pour maintenir une préservation totale de l'énergie qui est asymptotiquement plus efficaces que la DWT. Comme nous l'avons vu précédemment, il suffit, à cet effet, de considérer les filtres rééchelonnés dans l'algorithme.

Un autre défaut de la DWT est sa forte sensibilité aux décalages temporels (*circularly shift*). Si on considère x_t et x_{t+h} sa version décalée par h (un entier), alors les coefficients d'ondelettes de x_{t+h} ne sont pas proportionnellement décalés par rapport à ceux de x_t . Cela conduit à des effets de désalignement par rapport à la chronique originale. La MODWT, en revanche, est invariante aux temps (time-invariant) ce qui implique qu'un décalage temporel de la série de h induit un décalage équivalent des coefficients d'ondelettes, et donc un évènement situé en $t+h$ sur la série le sera aussi dans les bandes de fréquences.

Ces avantages de la MODWT par rapport à la DWT accentuent toutefois le problème de Redondance des coefficients d'ondelettes (ou problème aux limites) relatif au filtrage d'une série finie.

Ces méthodes se basent toutes les deux sur des séries de taille N et non infini. De ce fait quand l'algorithme arrive aux dernières observations il ne peut plus calculer les coefficients d'ondelettes associés. Il existe plusieurs méthodes pour contourner cette difficulté :

- On peut artificiellement étendre la série avec des zéros (zero-padding) ou avec sa moyenne. Dans ce cas on modifie la variance et/ou la moyenne de notre chronique.
- On peut aussi considérer que la série est périodique en utilisant le début de l'échantillon pour réaliser les calculs à la fin.
- On peut aussi « refléter » la série (méthode de la Réflexion). On considère à la fin une version inversée (par rapport au temps) de la chronique. Cette procédure ne modifie pas la moyenne et la variance mais elle fournit des bandes de fréquences de taille $2N$.

Lors du processus de décomposition, il faut être capable de repérer les coefficients issus d'une de ces méthodes, on parle alors de coefficients redondants ou affectés. Percival et Walden (2000) ont défini, pour la DWT et la MODWT, la taille de l'intervalle temporel dans lequel les coefficients sont affectés par la redondance :

Pour la DWT les coefficients sont affectés pour :

$$\begin{aligned}
 & t = 0, \dots, L'_j - 1 \\
 & \text{avec } L'_j = (L - 2)(1 - 2^{-j}) \\
 & \text{on a donc } N'_j \text{ coefficients non - affectés} \quad (55) \\
 & N'_j = \frac{N}{2^j} - L'_j
 \end{aligned}$$

Pour la MODWT l'intervalle est différent :

$$\begin{aligned}
 & t = 0, \dots, \min(L_j - 2; N - 1) \\
 & \text{avec } L_j = (2^j - 1)(L - 1) + 1 \\
 & \text{on a donc } N_j \text{ coefficients non - affectés} \quad (55b) \\
 & N_j = N - L_j + 1
 \end{aligned}$$

On remarque ainsi que plus le filtre d'ondelettes est long (L augmente) plus l'intervalle s'accroît et plus la redondance est marquée à mesure que j augmente (vers les basses-fréquences). Les effets de la redondance doivent alors être considérés lorsque l'on souhaite calculer la variance d'ondelettes.

La DWT et la MODWT décomposent la série en bandes de fréquences et préservent la variance de la série. Il est alors nécessaire de calculer la variance induite par des variations associées à une échelle particulière tout en considérant les coefficients affectés. On appelle alors variance d'ondelettes, la variance calculée avec les coefficients d'ondelettes à l'ordre j :

Pour la DWT

$$\sigma_x^2(s_j) = \frac{1}{2^j N_j'} \sum_{t=L_j'}^{N/2^j-1} w_{j,t}^2 \quad (56)$$

Pour la MODWT

$$\widetilde{\sigma}_x^2(s_j) = \frac{1}{N_j} \sum_{t=L_{j-1}}^{N-1} \widetilde{w}_{j,t}^2 \quad (56b)$$

On considère donc uniquement les coefficients non-affectés dans les calculs. On parle ainsi des variances non-biaisées. En théorie, en sommant les variances d'ondelettes sur toutes les échelles on obtient la variance de la série :

$$Var(x) = \sum_{j=1}^{J-1} \sigma_x^2(s_j) = \sum_{j=1}^{J-1} \widetilde{\sigma}_x^2(s_j) \quad (57)$$

Percival (1983-1995) a montré que $\widetilde{\sigma}_x^2(s_j)$ est asymptotiquement meilleur que $\sigma_x^2(s_j)$ pour retranscrire les variations de la série.

La plus forte redondance de la MODWT provient de sa base d'ondelettes qui n'est pas orthogonale contrairement à la DWT. Cette différence, a priori sans conséquences, est d'autant plus marquée lorsque l'on réalise une Analyse Multirésolution (ou MRA).

2.3.4 L'analyse Multirésolution et les ondelettes

Une Analyse Multirésolution (Mallat 1989) permet une décomposition additive de la série, à la manière des transformations discrètes, à partir d'une suite de projections orthogonales dans des sous-espaces noté E_j . On calcule alors des approximations liées à des sous-espaces. Mais à la différence des décompositions simples en ondelettes, il existe des relations entre les E_j fournissant des propriétés supplémentaires.

Une MRA se définit mathématiquement comme suit :

$$\begin{aligned} \forall j \in Z \text{ on a } E_j \subset E_{j-1} \\ \lim_{j \rightarrow -\infty} E_j = \{0\} \\ \lim_{j \rightarrow +\infty} E_j = L^2 \end{aligned} \quad (58)$$

$$x(t) \in E_j \leftrightarrow x(t/2) \in E_{j+1}$$

E_0 est une base de Riesz orthonormale

La propriété d'inclusion indique qu'un sous-espace de résolution j contient suffisamment d'information pour calculer les approximations au degré $j-1$. De la sorte, plus j est faible moins on capte d'information. A l'opposé, plus j augmente plus on se rapproche du signal d'origine (L^2 étant l'espace d'Hilbert contenant toutes les informations). Stéphane Mallat (1989), en voulant réaliser le lien entre les ondelettes discrètes et l'algorithme pyramidal, afin de simplifier les calculs, a développé le principe de la MRA avec une « vision filtrage ».

La MRA s'inscrit donc parfaitement dans la logique des ondelettes puisque les bandes de fréquences sont vues comme la différence entre deux approximations à des échelles différentes, on peut alors construire un vecteur qui les rassemble. Celui-ci correspond aux informations perdues/gagnées en diminuant/ augmentant le degré de résolution. On parle dans ce cas des Détails. On définit alors F_j les sous-espaces contenant les détails pour l'échelle j . Stéphane Mallat définit pour chaque sous-espace E_j une base de Riesz orthonormale⁴ notée $\{\phi_{j,n}, n \in Z\}$. Il en est de même pour les sous-espaces F_j , avec $\{\psi_{j,n}, n \in Z\}$. Comme nous l'avons défini plus haut, ϕ est une ondelette-père (ou fonction/filtre d'échelle) et ψ est l'ondelette-mère (ou fonction/filtre d'ondelette).

On peut aisément relier la MRA avec l'algorithme présenté précédemment. On définit, à cet effet, les approximations a_j (i.e. des projections sur les E_j) et les détails d_j (les projections de la série sur les F_j).

On peut alors écrire la relation suivante pour les Sous-Espaces :

$$E_j = E_{j-1} \oplus F_j \quad (59)$$

Et on déduit celle de MRA :

$$a_j = a_{j-1} + d_j \quad (59b)$$

Il apparait ainsi qu'en ajoutant des détails à l'approximation de résolution $j-1$ on obtient une approximation de résolution j . On a ainsi une analyse totalement récursive, qui permet de reconstruire une série par une addition successive de détails sur plusieurs niveaux de résolution. Pour les sous-espaces d'information on définit l'équation suivante :

$$\bigoplus F_j = L^2 \text{ pour } j \in Z \quad (60)$$

⁴ Une suite $\{\phi_j\}$ totale dans l'espace hilbertien H est une base de Riesz s'il existe deux constante A et B et si pour toutes suite de scalaires $\{z_j\}$ on peut écrire $A^2 \sum |z_j|^2 \|\phi_j\|^2 \leq \sum \|z_j \phi_j\|^2 \leq B^2 \sum |z_j|^2 \|\phi_j\|^2$. on que les l'espace généré par la suite est dense dans H .

Permettant la reconstruction dans le cadre de la MRA :

$$x_t = a_J + \sum_{j=1}^J d_j \quad (60b)$$

L'algorithme de Mallat présenté précédemment s'applique pour calculer les coefficients de détails et l'approximation, or, on doit au préalable choisir un type de transformation. En considérant les équations (40) et (48) on réalise une DWT ou une MODWT avec leurs coefficients d'ondelettes associés w et \tilde{w} . On peut définir la DWT-MRA et la MODWT-MRA selon (le tilde indique toujours la MODWT) :

$$\begin{aligned} & \mathbf{DWT - MRA} \\ d_j &= W_j^T w_j \quad \text{et} \quad a_J = V_J^T v_J \\ & \mathbf{MODWT - MRA} \\ \tilde{d}_j &= \tilde{W}_j^T \tilde{w}_j \quad \text{et} \quad \tilde{a}_J = \tilde{V}_J^T \tilde{v}_J \\ & \forall j = 1, \dots, J \end{aligned} \quad (60c)$$

La MRA permet de reconstruire plus simplement la série en sommant les détails, comme le montre l'équation (60b). Cette relative simplicité de décomposition et de reconstruction constitue un avantage dans le domaine de la compression de données (base du format JPEG). On doit, cependant, étudier la capacité de préservation de l'énergie pour les deux types de MRA.

Nous avons montré que la DWT et la MODWT ne détériorent pas la variance du signal

$$\|\tilde{w}\|^2 = \|w\|^2 = \|x\|^2 \quad (61)$$

Dans le cadre d'une DWT-MRA, l'orthogonalité des matrices W et V permet des simplifications intéressantes :

$$\|d_j\|^2 = d_j^T d_j = w_j^T w_j = \|w_j\|^2 \quad \text{et} \quad \|a_J\|^2 = a_J^T a_J = v_J^T v_J = \|v_J\|^2 \quad (61b)$$

L'équation (46b) reste ainsi valide, on peut donc écrire :

$$\sum_{j=1}^J \|d_j\|^2 + \|a_J\|^2 = \|x\|^2 \quad (61c)$$

Pour une MRA-MODWT les simplifications établies pour l'équation (61b) ne sont plus valables car les matrices \tilde{W}_j et \tilde{V}_j ne sont pas orthogonales.

$$\|\tilde{d}_j\|^2 = \tilde{d}_j^T \tilde{d}_j = \tilde{w}_j^T \tilde{W}_j \tilde{W}_j^T \tilde{w}_j \neq \|\tilde{w}_j\|^2 \quad \text{et} \quad \|\tilde{a}_j\|^2 = \tilde{a}_j^T \tilde{a}_j = \tilde{v}_j^T \tilde{V}_j \tilde{V}_j^T \tilde{v}_j \neq \|\tilde{v}_j\|^2 \quad (62)$$

Percival et Walden (2000) ont de plus montré que $\|\tilde{d}_j\|^2 < \|\tilde{w}_j\|^2$ ainsi la MODWT-MRA n'est pas préservatrice de l'énergie.

L'intérêt de la MRA réside dans sa capacité à réaliser rapidement des transformations discrètes. Avec une DWT-MRA on gagne en précision mais les défauts inévitables à la DWT sont toujours présents. La MODWT-MRA est plus efficace pour aligner les événements avec la série car elle est invariante aux décalages, cependant, elle ne conserve pas l'énergie de la série ! Il est alors préférable d'utiliser les coefficients d'ondelettes \tilde{w}_j si l'étude nécessite d'analyser la variance.

2.4 Les outils multivariés par ondelettes continues :

Les décompositions univariées par ondelettes discrètes ou continues permettent l'étude tempo-fréquentielle univariée d'une série chronologique. L'utilisation d'un modèle de régression mettant en relations plusieurs bandes de fréquence issues de la MODWT est alors possible (Cf. Chapitre 2).

La CWT, bien que plus complexe à mettre en œuvre, propose des outils multivariés augmentant grandement les possibilités d'analyse, à l'image de la cohérence-phase. Une analyse tempo-fréquentielle des relations entre variables peut être ainsi effectuée (ces outils multivariés sont repris dans le Chapitre 3).

2.4.1 MODWT et MCO : estimation par ondelettes discrètes

La MODWT est un outil d'analyse univariée d'une série temporelle qui n'est pas incompatible avec les outils statistiques traditionnellement utilisés comme l'analyse de la variance, la covariance et la corrélation. Des versions ajustées de ces notions ont été développées dans le cadre des décompositions discrètes en ondelettes et ont débouchées sur l'association MODWT-MCO.

La MODWT est une décomposition additive d'une série temporelle x_t de longueur N. Les outputs $\tilde{w}_{x_{j,t}}$ ou bandes de fréquences, sont assimilables à des sous-chroniques sur lesquelles une analyse de la variance est réalisable. On peut la représenter par l'équation :

$$\tilde{\sigma}_x^2(s_j) = \frac{1}{N_j} \sum_{t=L_{j-1}}^{N-1} \tilde{w}_{x_{j,t}}^2 = \|\tilde{w}_{x_j}\|^2 \quad (56b)$$

Comme la MODWT respecte la propriété de conservation de l'énergie (la variance), l'équation (57) indique que la somme des variances associées aux échelles fréquentielles est égale à l'énergie totale de la série.

$$Var(x_t) = \sum_{j=1}^{J-1} \tilde{\sigma}_x^2(s_j) = \|x\|^2 \quad (57)$$

Cet aspect univarié des MODWT peut aussi s'étendre au cas bivarié en considérant une deuxième chronique y_t de longueur identique à celle de x_t . En la décomposant avec la MODWT, on obtient, de manière similaire, ses bandes de fréquence notées $\tilde{w}_{y_{j,t}}$.

On peut ainsi calculer $\gamma_{xy}(s_j)$ la covariance entre les coefficients d'ondelettes de x_t et de y_t pour l'échelle fréquentielle s_j (Withcher 1998) telle que :

$$\gamma_{xy}(s_j) = \frac{1}{N_j} \sum_{t=L_{j-1}}^{N-1} \tilde{w}_{x_{j,t}} \tilde{w}_{y_{j,t}} \quad (63)$$

De cette manière il est possible de calculer un coefficient de corrélation par ondelette noté $\rho_{xy}(s_j)$ de la manière suivante :

$$\rho_{xy}(s_j) = \frac{\gamma_{xy}(s_j)}{\sqrt{\tilde{\sigma}_x^2(s_j)} \sqrt{\tilde{\sigma}_y^2(s_j)}} \quad (64)$$

Une approche similaire s'applique pour la DWT (cf. l'ouvrage de Gençay et al (2001).

Les formules (63) et (64) sont des transpositions dans le domaine tempo-fréquentiel de celles traditionnellement employées en statistique. Dans le seul domaine temporel, il n'existe qu'un coefficient de corrélation entre x_t et y_t , or dans le domaine tempo-fréquentielle nous en obtenons J, à savoir 1 par échelle fréquentielle retenue.

Sans perte de généralité, les ondelettes peuvent ainsi être utilisées dans le cadre d'une régression de x_t sur y_t en différentiant le modèle selon plusieurs échelles. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
 & \textbf{Modèle temporel} \\
 & y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t \\
 & \textbf{Modèles Tempo – Fréquentiels} \quad (65) \\
 & \tilde{w}_{y_{j,t}} = \beta_j \tilde{w}_{x_{j,t}} + \varepsilon_{j,t} \\
 & \forall \text{ la bande de fréquence } j = 1, \dots, J
 \end{aligned}$$

Avec α et β les paramètres de régression du modèle temporel et β_j le paramètre de pente associé à l'échelle j .

La formule du $\hat{\beta}_j$ est similaire à celle du $\hat{\beta}$:

$$\hat{\beta}_j = \frac{\gamma_{xy}(s_j)}{\sqrt{\tilde{\sigma}_x^2(s_j)}} = \frac{Cov(\tilde{w}_{x_{j,t}}, \tilde{w}_{y_{j,t}})}{\|\tilde{w}_{x_j}\|^2} \quad \forall j = 1, \dots, J \quad (65b)$$

Dans le cadre des ondelettes discrètes, la méthode des MCO accroît la puissance d'analyse et d'interprétation. Dans le cadre du MEDAF, nous pouvons ainsi estimer différemment le risque systématique pour une action et étudier sa dynamique selon l'horizon de placement.

Une approche similaire peut s'implémenter dans le cadre d'une CWT qui propose des outils puissants d'analyse tempo-fréquentielle.

2.4.2 Approche Multivariée de la CWT : la Cohérence et la Phase en ondelettes.

A l'instar de l'analyse spectrale, la CWT peut aussi s'étendre au cas multivarié. Les outils de l'analyse co-spectrale comme la cohérence et la phase trouvent leur équivalent dans le cadre de l'analyse par ondelettes continues.

La cohérence est une mesure spectrale de corrélation entre les composantes fréquentielles de deux séries. La phase permet l'étude des décalages entre les chroniques, elle fournit aussi des informations sur le signe et le sens de la relation. Ces outils ont notamment contribué à l'apparition de la notion de causalité.

L'utilisation de ces outils font perdre l'information temporelle c'est la raison pour laquelle on recourt aux ondelettes continues qui permettent de "contourner" cette limite. C'est pourquoi la cohérence d'ondelettes entre deux fonctions est souvent appelée *Time-Varying Coherence* ou *Cohérence avec Temps Variant*. Nous présentons la Cohérence en ondelettes dans le cadre de transformations continues réalisées avec l'ondelette de Morlet.

Le calcul de la cohérence nécessite de faire appel à une mesure de covariance tempo-fréquentielle en ondelettes entre deux variables $x(t)$ et $y(t)$ que l'on note $SW_{xy}(s, \tau)$. A partir des coefficients d'ondelettes $W_x(s, \tau)$ et $W_y(s, \tau)$ issus des décompositions univariées de $x(t)$ et de $y(t)$, on définit la transformation croisée en ondelettes par :

$$SW_{xy}(s, \tau) = W_x(s, \tau)W_y^*(s, \tau) \quad (66)$$

$W_y^*(s, \tau)$ désigne le complexe conjugué de $W_y(s, \tau)$.

Nous rappelons que la transformation en ondelettes continues d'une série temporelle permet l'étude de la répartition de la variance au cours du temps et des fréquences à l'aide des Spectres de Puissance notés $|W_x(s, \tau)|^2$ et $|W_y(s, \tau)|^2$ (que l'on peut aussi appeler scalogramme). En associant cette transformation croisée avec les spectres de puissance de chacune des séries, on définit la cohérence en ondelettes notée $WQ(s, \tau)$ (cf. Torrence et Webster 1999) :

$$WQ(s, \tau) = \frac{|G(s^{-1}.SW_{xy}(s, \tau))|^2}{G(s^{-1}.|W_x(s, \tau)|^2).G(s^{-1}.|W_y(s, \tau)|^2)} \quad (67)$$

La formule de la cohérence est très proche de celle du coefficient de détermination, elle fournit donc, à chaque instant t et échelle s , un coefficient compris entre 0 et 1. Celui-ci peut s'interpréter comme une mesure de corrélation (au carrée) dans l'espace temps-fréquence, comme l'indique Grinsted et al (2004).

Torrence et Webster (1999) soulignent que ces coefficients sont complexes car ils découlent d'une transformation par l'ondelette de Morlet. Il est alors nécessaire d'effectuer un "lissage tempo-fréquentiel" des coefficients. Cette opération est représentée par l'opérateur $G(\cdot)$ tel que :

$$G(W(s, \tau)) = G_{scale} \left(G_{time}(W(s, \tau)) \right) \quad (68)$$

L'opérateur $G(\cdot)$ effectue un lissage temporel pour une échelle fréquentielle donnée noté $G_{time}(\cdot)$ puis un lissage de l'échelle fréquentielle pour un instant t donné que l'on note $G_{scale}(\cdot)$.

Les expressions mathématiques de $G_{time}(\cdot)$ et $G_{scale}(\cdot)$ sont données par les équations suivantes :

$$G_{time}(W(s, \tau)) = W(s, \tau) c_1^{\frac{-t^2}{2s^2}} \quad (68b)$$

$$G_{scale}(W(s, \tau)) = W(s, \tau) \cdot c_2 \Pi(0.6 s) \quad (68c)$$

c_1 et c_2 sont des constantes de normalisation et $\Pi(\cdot)$ est la fonction rectangle ou indicatrice qui prend la valeur 1 dans un intervalle $[-0.5 ; 0.5]$ et 0 sinon.

La cohérence en ondelettes est sujette aux effets de bords puisque les séries ne sont pas infinies. Rappelons que les ondelettes ont besoin d'un nombre-support de points, qui est croissant avec l'échelle s , pour réaliser les opérations de translation et de dilatation. Comme au début et à la fin de la série, des problèmes peuvent apparaître pour le calcul des coefficients d'ondelettes qui perturbent la transformation. Torrence et Compo (1998) proposent de rajouter des zéros à la fin des séries pour limiter les effets de bords. L'inclusion de zéros n'est pas, cependant, sans conséquences à cause de perturbations qui apparaissent aux bords. Leurs effets sont plus prononcés à mesure que l'échelle augmente.

Il est possible de déterminer les points affectés par les effets de bords pour chaque échelle. Il faut alors déterminer un point particulier dans le temps (que la littérature nomme *e-folding time*) définissant une "frontière" ou une "limite" entre les coefficients potentiellement affectés et ceux « sains » pour chacune des échelles. Ce point est différent selon l'ondelette retenue mais dans le cadre de l'ondelette de Morlet, il est égal à $s\sqrt{2}$. Le terme de « cône d'influence » est communément utilisé pour caractériser ces effets de bords. Ils sont repérables lors de la représentation graphique de la cohérence où les coefficients affectés forment un cône.

Torrence et Compo (1998) ont développé, par ailleurs, une méthode pour tester la significativité de la cohérence à 5% de niveau de risque. Ils se basent sur des simulations de Monte Carlo pour déterminer des intervalles de significativité. Ils créent des données de

substitution à partir d'un processus AR(1) qu'ils rassemblent en paire. Pour chacune d'elle, ils calculent la cohérence en ondelettes et conservent les coefficients en dehors du cône d'influence. Cette procédure est répétée plusieurs fois (m fois) pour obtenir m coefficients pour chaque échelle. Il est alors possible de construire des intervalles de confiance pour les comparer avec les valeurs empiriques de la cohérence. Lors de la représentation graphique de la cohérence, les coefficients significatifs définissent des zones tempo-fréquentielles qui sont bien délimitées.

La cohérence fournit l'intensité de la relation entre $x(t)$ et $y(t)$ mais elle n'indique pas la nature des liens. La fonction de phase, notée $\theta_{x,y}(s, \tau)$, est utilisée en complément de la cohérence pour identifier le signe de la corrélation et appréhender les décalages temporels entre les composantes cycliques des deux séries.

Si deux séries sont positivement corrélées, alors elles sont *en phase*. Inversement, elles sont *déphasage* (ou *hors-phase*) si elles sont négativement corrélées.

La phase peut aussi s'interpréter comme une mesure de causalité entre les deux séries dans le sens où elle indique qui de $x(t)$ ou $y(t)$ conduit la relation. On parle alors de "*Leader*".

Si les cycles de $x(t)$ sont décaler dans le temps (à gauche) par rapport à ceux de $y(t)$ alors $x(t)$ est le Leader car ses mouvements affectent ceux de $y(t)$.

La fonction $\theta_{x,y}(s, \tau)$ s'exprime à partir du quotient entre la partie imaginaire \Im et réelle \Re de $SW_{xy}(s, \tau)$:

$$\theta_{x,y}(s, \tau) = \arctan\left(\frac{\Im(SW_{xy}(s, \tau))}{\Re(SW_{xy}(s, \tau))}\right) \quad (69)$$

Elle est exprimée en radians et ses valeurs sont donc comprises dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Selon les valeurs de la phase, on peut dresser les conclusions suivantes :

- Si $\theta_{x,y}(s, \tau)$ appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors les séries sont *en phase* et corrélées positivement, et dans ce cas, $y(t)$ est le Leader.
- Si $\theta_{x,y}(s, \tau)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ alors les séries sont *hors-phase* et sont donc négativement corrélées, et dans ce cas, $x(t)$ est le Leader.

- Si $\theta_{x,y}(s, \tau)$ appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ alors les séries sont *en phase* et corrélées positivement, et dans ce cas, $x(t)$ est le Leader.

- Si $\theta_{x,y}(s, \tau)$ appartient à l'intervalle $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ alors les séries sont *hors-phase* et sont donc négativement corrélées, et dans ce cas, $y(t)$ est le Leader.

L'association de la Cohérence et de la Phase représente un outil pertinent pour étudier en profondeur les relations entre deux variables. Bien que se basant sur l'analyse co-spectrale, ces notions sont aussi relativement proches de celles employées traditionnellement comme la corrélation et de la causalité (avec la phase).

L'analyse multivariée, comme l'analyse co-spectrale, permet aussi le calcul du Gain qui représente le coefficient de régression. Nous proposons dans le chapitre 3, une formule de ce gain qui complète cette analyse multivariée.

2.5 Conclusion Section 2

Les différents types de décomposition en ondelettes sont reliés aux problématiques spécifiques de l'analyse spectrale. Etudier un signal uniquement dans le domaine des fréquences restreint les possibilités d'applications, c'est pourquoi, les ondelettes qui permettent de représenter les évolutions temporelles des composantes fréquentielles connaissent des développements fructueux. Théoriquement, le Principe d'Incertitude marque une limite de précision à la double localisation dans le domaine Tempo-Fréquentiel avec le contour de la boîte d'Heisenberg. Les ondelettes vont s'inscrire dans cette logique en considérant des échelles fréquentielles plutôt que des fréquences. C'est donc la taille des échelles fréquentielles qui va distinguer la CWT et la DWT. La CWT considère un grand nombre d'échelles très fines qui lui permet de couvrir et de distinguer quasiment chacune des fréquences tandis que la DWT utilise une base dyadique qui crée des échelles (à chaque multiple de 2) rassemblant plusieurs fréquences entre bandes. Sur le plan théorique, la CWT est supérieure à la DWT mais elle nécessite un nombre élevé d'opérations pouvant entraîner des approximations. Elle fait appel, en outre, à une puissance importante de calculs qui reste technologiquement limité ces dernières années mais ce problème, en cours de résolution, permet à la CWT de connaître un regain d'intérêt en proposant des outils d'analyse multivariées. La cohérence illustre, à cet effet, l'intensité de la corrélation au carré traduisant

des co-mouvements plus ou moins forts. Celle-ci est complétée par la Phase qui décrit la nature des covariations et des relations entre les variables.

La DWT s'est développée en pratique car elle réduisait notablement les temps de calculs. En 1989, Stéphane Mallat établit le lien entre MRA et les ondelettes ouvrant la voie à davantage d'applications de la DWT comme celle du traitement des signaux numériques. Dans ce domaine, la MRA-DWT constitue la base de certaines fonctionnalités informatiques (format JPEG, La compression/décompression et le format ZiP).

L'application au CAC40 consignée en Annexe montre les spécificités des différentes décompositions que nous venons de décrire. La contrainte dyadique est un frein important à l'utilisation de la DWT car l'information temporelle est fortement altérée à cause des bandes de fréquences de tailles différentes et des zéros à introduire pour compléter la chronique. La MODWT apparaît donc comme la solution à ce problème. Celle-ci est très utile pour décrire la dynamique des composantes fréquentielles et elle est robuste à certaines opérations statistiques. Une MRA basée sur une MODWT n'est pas un atout, contrairement à la DWT, car ce type d'opération dégrade la variance. Il est alors préférable d'employer les coefficients de la MODWT plutôt que ceux de la MRA lorsqu'on souhaite estimer des paramètres de régression. Cette application et ses conclusions constituent la référence méthodologique retenue dans les analyses des chapitres suivants.

Conclusion Chapitre 1

Le MEDAF bien que théoriquement remis en cause continue d'être employé en pratique. Il fournit, en effet, une mesure de risque systématique utile, le Beta, qui permet de discriminer les actions entre elles. L'estimation de ce paramètre est indépendante de la validité du modèle mais ses propriétés statistiques conditionnent la robustesse des tests employés. Le caractère statique du Beta est une des limites importantes de l'estimation traditionnelle par les MCO. L'utilisation de fenêtres roulantes représente, à ce titre, une méthode relativement simple à mettre en œuvre pour apprécier la dynamique temporelle du risque. L'hypothèse d'homogénéité des agents constitue aussi un frein important au modèle. Les agents sont en effet supposés identiques car ils possèdent les mêmes croyances et comportements d'investissement. Sous cette hypothèse, tous les investisseurs ont un horizon de placement similaires ce qui implique qu'ils calculent le même Beta. Empiriquement, ce constat est contestable mais très peu d'études montrent l'effet de l'horizon de placement sur le Beta.

L'analyse temps-fréquence par ondelettes apparaît comme une réponse possible pour répondre à ce type de problématique. Il existe, cependant, deux catégories de décompositions en ondelettes, la transformation continues (CWT) et les versions discrètes (DWT/MODWT). Elles possèdent des propriétés différentes, comme la rapidité d'exécution ou encore un meilleur maillage fréquentiel. L'application au CAC 40, consignée en Annexe A1, permet de présenter pour les différentes décompositions en ondelettes les avantages et les inconvénients rencontrés en pratique.

Il apparaît que la CWT est plus performante sur un plan purement théorique, mais son application empirique est complexe ce qui entraîne des temps de calculs longs. L'analyse de la variance par les spectres de puissance constitue, cependant, un atout important de la CWT en fournissant une représentation tempo-fréquentielle du risque à la base du développement des outils multivariés, comme la cohérence, la phase et le gain.

La DWT a grandement popularisée l'utilisation des ondelettes en réduisant significativement les temps de calculs mais la discrétisation implique de nouvelles contraintes à l'image de l'échelle dyadique et de l'orthogonalité de la base. Comme illustré dans l'Annexe 1, une décomposition DWT nécessite un nombre d'observations égal à un multiple de 2, c'est pourquoi, nous rallongeons artificiellement la série du CAC 40 par des zéros. Mais dans ce

cas, les caractéristiques initiales de la série sont altérées (sa moyenne, sa variances etc ...). Les Bandes de Fréquences obtenues ne possèdent pas le même nombre d'observations car leur taille est décroissante de l'échelle fréquentielle, ce qui limite fortement les possibilités d'analyse de l'information temporelle (problèmes d'alignements). La MODWT constitue, à ce titre, une amélioration de la DWT en supprimant la contrainte dyadique. Nous pouvons directement décomposer la série du CAC40 en plusieurs Bandes de Fréquence de même longueur qui sont invariantes par translation, ce qui améliore leur alignement temporel. La MODWT préserve ainsi la variance de la série d'origine qui est répartie sur les différentes bandes. Elle ne permet pas, cependant, d'effectuer une MRA de "bonne qualité" puisque cette propriété fondamentale n'est plus respectée à cause de sa non-orthogonalité.

Les versions discrètes des ondelettes présentent chacune des avantages et des inconvénients. Dans cette recherche, la contrainte dyadique représente une limitation à l'utilisation des ondelettes pour l'estimation du paramètre Beta et la modélisation de sa dynamique. La préservation de la variance est aussi une propriété essentielle. A ce titre nous préférons la MODWT à la DWT ou une MRA. La CWT est également retenue pour la finesse de son maillage fréquentiel et les outils qu'elle propose

Annexe du Chapitre: Décomposition Temps-Fréquence du CAC40

1 Caractéristiques statistiques de l'indice CAC40.

L'indice CAC40 (Cotation Assistée en Continue) est le principal indice boursier de la bourse de Paris géré par Euronext. Il a été mis en place le 31 décembre 1987 avec une base de 1000 points en remplacement de l'ancien indice CAC (Compagnie des Agents de Changes). Il est calculé en fonctions des cours boursiers des 40 entreprises cotées sur le « Premier Marché ». Pour être incorporé dans le calcul du CAC, la capitalisation boursière d'une entreprise doit être supérieure à 1 Milliards d'euros et présenter une bonne liquidité.

Le CAC40 représente globalement les plus grandes entreprises françaises (et européennes) dans tous les secteurs de l'économie. Il est de ce fait un indicateur représentatif de la santé financière et économique du pays. Contrairement à d'autres marchés mondiaux, le CAC est calculé « Out-of-Return » (opposé à « Total Return »), c'est-à-dire, qu'il considère que les dividendes sont non-réinvestis.

La composition de l'indice n'est pas fixe dans le temps, une action qui ne respecte pas les précédentes conditions sort de l'indice et est remplacée par une autre. Les « prétendants » à l'entrée sont en général cotés sur le CACNext20 (de même que les sortants). Certaines actions réalisent alors un jeu de va-et-vient dans l'indice comme le groupe PSA ou Alcatel-Lucent, mais la grosse partie des actions sont cotées depuis le début comme Total et Sanofi. L'indice est calculé en fonction de pondérations ou poids indiciels appliqués aux cours de ses composants. Techniquement, le CAC est un portefeuille d'actions non-équi pondéré (à hauteur de 2.5% par actions), les trois pondérations les plus importantes sont Total (9.98%), Sanofi (8.69%) BNP-Paribas (6.20%) et les trois plus faibles, Veolia (0.74%) Bouygues (0.70%) et AccorHotel (0.59%).

Les principales caractéristiques statistiques de cet indice et de son logarithme népérien sont consignées dans le tableau 1 avec les résultats des tests de Ljung-Box à 5 retards, de ARCH à 1 retard et le Jarque-Bera.

Table 1 : Statistiques élémentaires sur l'indice

Statistiques	CAC	LCAC
Moyenne	4236,19	8,334
Ecart-Type	788,05	0,186
Min	2519	7,83
Max	6168	8,72
Skewness	0,34	-0,0184
Kurtosis	2,4	2,31
LB(5)	14169	1438
ARCH(1)	2821	2798
JB	99,13	56,6

L'indice CAC40 présente des fortes variations avec une amplitude de 3649 points comme le montre le Minimum et le Maximum. La transformation en logarithme permet de réduire ces variations et l'hétéroscédasticité.

Les valeurs du Skewness, du Kurtosis et de la Statistique de Jarque-Bera, indiquent que le processus générateur du CAC n'obéit pas une Loi-Normale. Le test ARCH met en évidence l'importante hétéroscédasticité de l'indice, et la Q-stat sa forte autocorrélation.

Les tests de Dickey-Fuller Augmentés (robuste à l'autocorrélation) et de Phillips-Perron (robuste à l'hétéroscédasticité) concluent à la présence d'une racine unitaire dans le logarithme du CAC et la stratégie retenue indique une non-stationnarité de type DS sans dérive (Cf. Table 2.1). Ce résultat est conforme à celui obtenu dans de nombreuses études.

Table 2.1 : Tests de Stationnarité sur le logarithme du CAC

ADF Test	M3	M2	M1
LCAC	-2,078	-2,032	0,196
PP Test	M3	M2	M1
LCAC	-1,887	-1,848	0,231

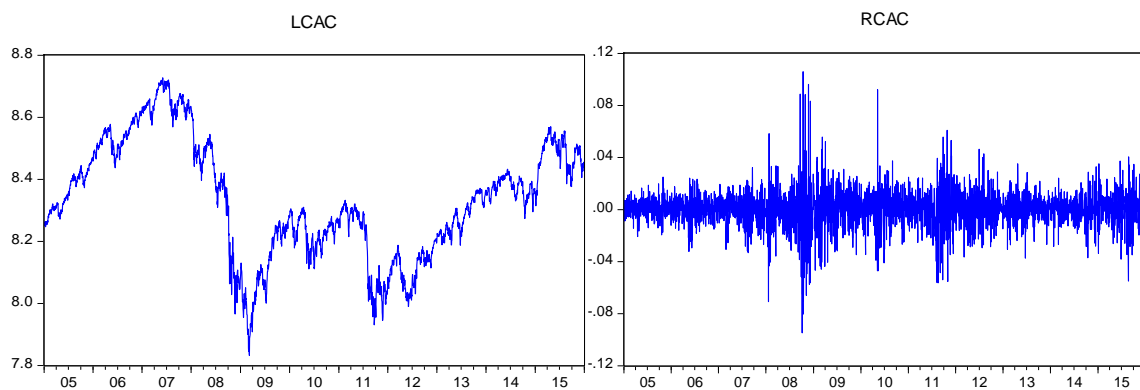
Le filtre aux différences premières stationnarise le processus générateur et conduit à la série des rendements de l'indice CAC notée RCAC rendements. La Table 2.2 présente les résultats des tests de stationnarité sur les séries des rendements.

Table 2.2 : Tests de Stationnarité sur RCAC

ADF Test	M3	M2	M1
RCAC	-26,270	-26,270	-26,270
PP Test	M3	M2	M1
RCAC	-56,110	-56,120	-56,130

La Figure 6 représente, à gauche, les évolutions de l'indice du 1^{er} Janvier 2005 au 31 Décembre 2015, et à droite, les rendements du CAC40 en logarithme népérien.

Figure 6 : L'indice CAC40 en logarithme et ses rendements



Ces évolutions indiquent que l'indice suit les grandes phases économiques du pays :

- La période 2005-2007 est une période de reprise après l'explosion de la bulle internet en 2000-2001.
- Le Krach Boursier lié à la Crise des Subprimes en 2007-2009.
- La Crise de la Dette en Europe en 2010-2012.

Ces évènements se traduisent par une forte hétéroscédasticité comme l'illustre les zones de faible et de forte volatilité.

Le tableau 3 consigne les caractéristiques des rendements.

Table 3 : Statistiques élémentaires des rendements

Statistiques	RCAC
Moyenne	-4,95E-05
Ecart-Type	0,014
Min	-0,0949
Max	0,1078
Skewness	0,016
Kurtosis	9,54
LB(5)	37,16
ARCH(1)	114,86
JB	5119

Les rendements oscillent autour de leur moyenne proche de zéro mais avec une très forte amplitude : ils varient entre -10 % et +10% (par jours) d'où un écart-type relativement important. Cette forte hétéroscédasticité révélée par le test ARCH est associée à une non-normalité des rendements. L'autocorrélation est toujours présente mais son intensité est réduite grâce au filtre des différences premières.

L'ensemble de ces caractéristiques constitue de précieuses informations à exploiter pour analyser l'indice CAC40. Sa Rentabilité journalière Moyenne et son Ecart-Type (le Risque journalier Moyen) constituent des informations de base pour les investisseurs.

Ces indicateurs sont traités et analysés de manière identique par les agents pour effectuer leurs opérations, définissant alors leur comportement de trading. Ce comportement se caractérise en partie par leur horizon de placement, Court-Moyen- Long terme. Ainsi chaque agent opère en fonction de sa fréquence d'investissement mais base son calcul sur les mêmes informations. Dans la mesure où il existe différents comportements de trading il n'est pas cohérent de conserver les mêmes indicateurs (informations). Puisque l'information (temporelle) rassemble tous les types de comportements en les agrégeant, pourquoi ne pas considérer des indicateurs adaptés à ces comportements ? De la sorte, chaque agent peut observer une information liée à un horizon de placement (ou plusieurs) qu'il définit à l'avance.

Les ondelettes offrent cette possibilité par ses décompositions/ transformations qui fournissent une information conditionnelle à une fréquence qui est l'horizon de placement dans notre cas.

2 Transformation Continue en ondelettes des rendements du CAC (CWT).

Les calculs pour réaliser cette transformation continue sont effectués avec le logiciel open source R et sur le packages « Biwavelets » développé par Tarik Gouhier, Aslak Grinsted et Viliam Simko (2016) basé sur les travaux de Christopher Torrence et Gilbert Compo.

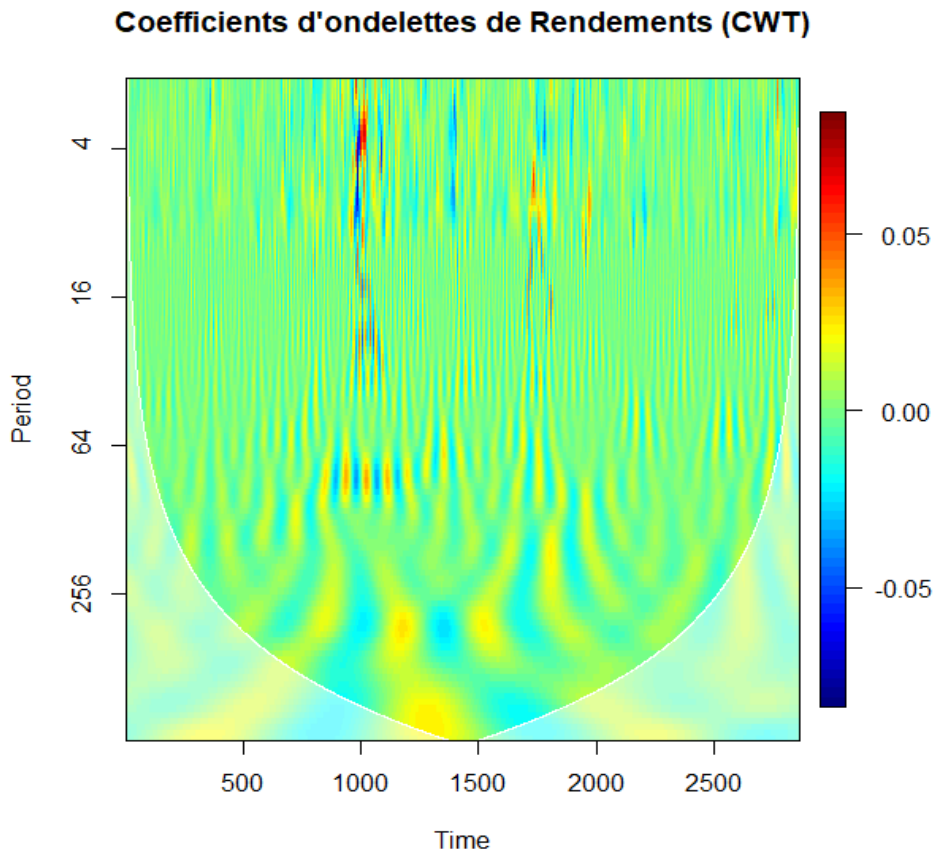
Les rendements du CAC40 sont décomposés avec l'ondelette analytique complexe de Morlet (Ondelettes Continues). Comme nous disposons de 2868 points d'observations des rendements, la transformation continue fournit 2868 coefficients d'ondelettes (qui sont complexes) par chaque échelle fréquentielle. Nous avons fixé à 12 le nombre d'échelles intermédiaires afin de réduire le temps de calcul.

Avec cette configuration, sur un ordinateur (UC) i5-8 Go de RAM d'Intel le temps de calcul varie de 3 à 5 minutes. Pour un i7-8 Go de RAM il est quasi-instantané (environ 30 secondes) si on décompose selon les réglages de la fonction du package. En appliquant des réglages supplémentaires pour obtenir un maillage fréquentiel plus précis ou en spécifiant certains paramètres, les temps de calcul sont beaucoup plus importants (sans compter celui de codage).

Pour représenter les coefficients d'ondelettes issues d'une CWT, nous retenons une représentation en 2D qui présente le temps (en abscisses) et les fréquences (en ordonnées). Une échelle de couleur est alors employée pour synthétiser la valeur des coefficients d'ondelettes.

La Figure 7 illustre le résultat de la CWT obtenues en retenant cette représentation. Sur ce graphique le temps est exprimé en jours (0 pour la première observation et 2868 pour la dernière) et les échelles fréquentielles sont traduites en périodes de Fourier. Les basses-fréquences, qui traduisent des investissements de long-terme, sont positionnées dans la partie basse de l'axe des ordonnées (grandes périodes). A l'opposé les investissements de court-terme sont positionnés en haut de l'axe car ils correspondent à des Périodes plus courtes donc aux Hautes-Fréquences. A titre d'exemple, la période 256 en ordonnée illustre une fréquence d'investissement de 256 jours soit une année en jours financiers. La Période 4 correspond alors à un horizon de placement de 4 jours.

Figure 7 : CWT des rendements de l'indice CAC 40



Avec ce type de représentation la zone voilée blanche représente le Cône d'Influence. On note la dominance du vert qui symbolise la moyenne de la série décomposée à savoir 0 (les ondelettes centrent automatiquement la série lors du processus). Les coefficients varient ainsi autour de cette valeur. L'alternance de zones jaunes et turquoise, symbolise des variations comprises entre 0 et +5% (jaune) et entre 0 et -5% (turquoise). En partant des Hautes-Fréquences, plus on descend vers les Basses-Fréquences plus les zones sont larges dans le sens où elles alternent moins vite. Ce résultat indique qu'à long-terme les évolutions sont moins erratiques et prennent la forme d'une (co-)sinusoïde. On a ainsi sur une même représentation le positionnement fréquentiel et temporel des cycles.

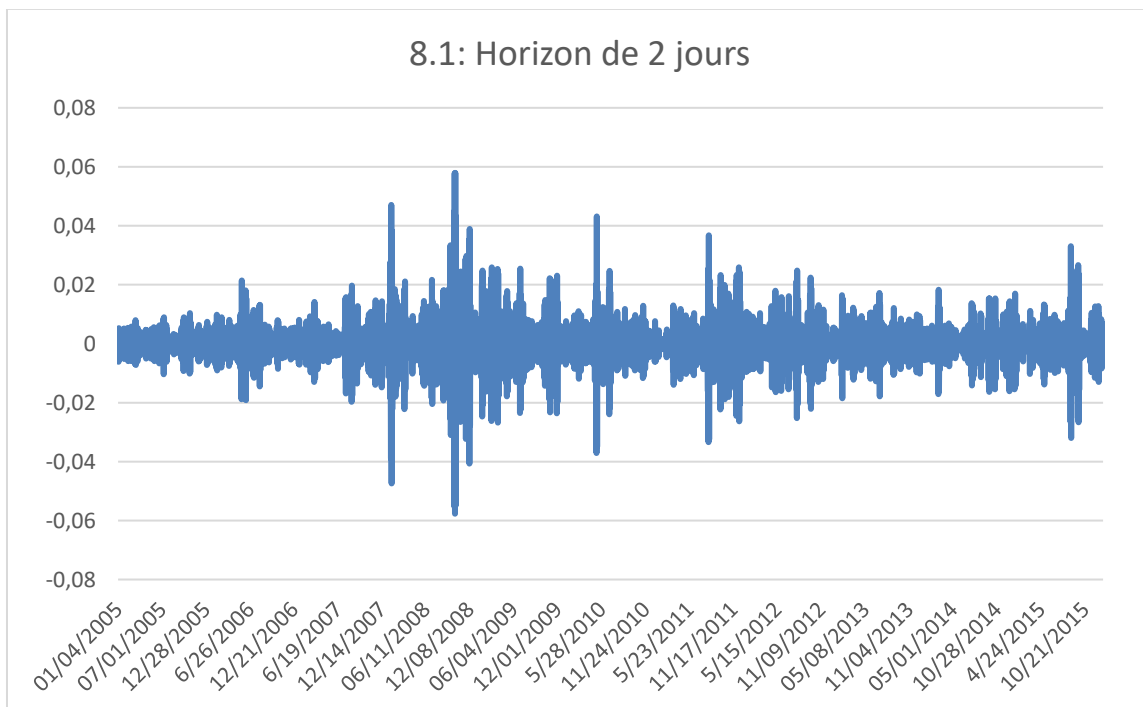
Le Rouge et le Bleu profond traduisent respectivement des variations positives et négatives de plus de 5% en valeurs absolues. Ces deux couleurs sont surtout présentes au Basses-Moyennes fréquences (jusqu'à la Période 64) et pour des intervalles temporels situés autour des 1000 - 1700 jours. Ces intervalles correspondent aux périodes des crises des surprimes et

de la dette et permettent ainsi de visualiser les impacts des crises en fonction de l'horizon de placement.

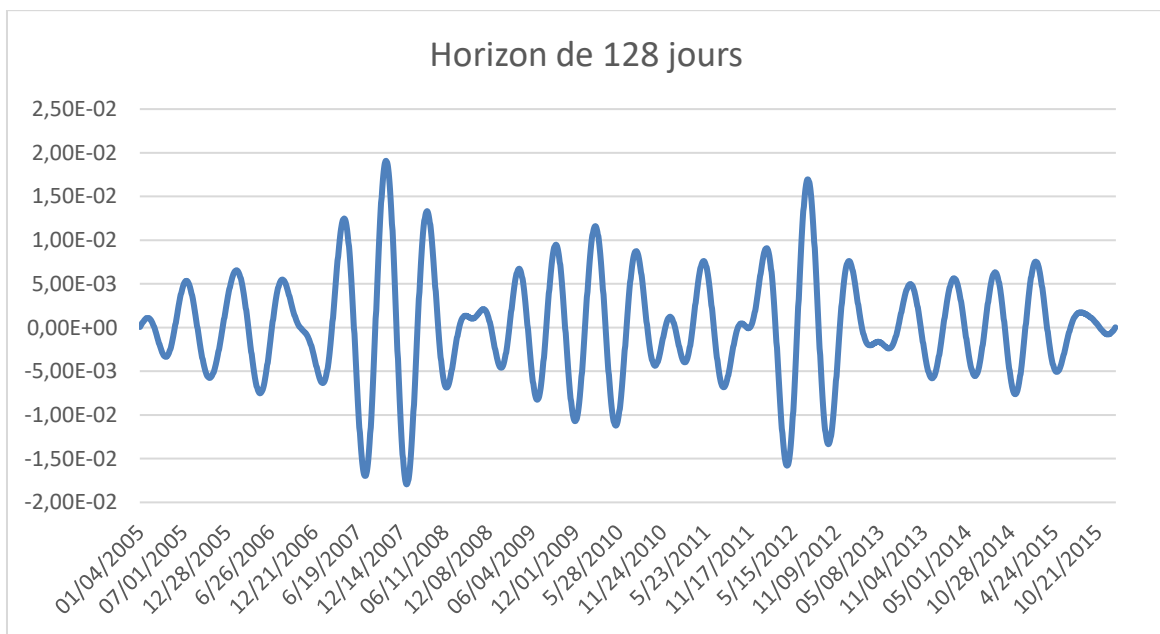
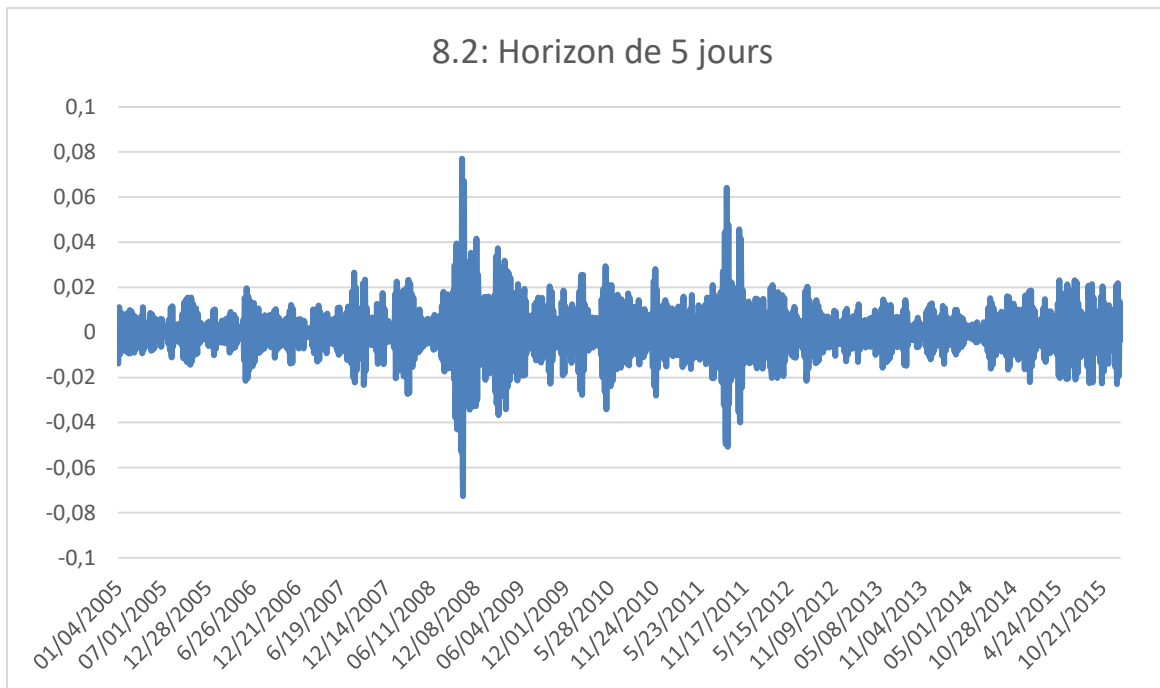
Ce type de représentation, relativement facile à interpréter et à décrire, permet d'étudier les rendements avec une multitude de points de vue. Pour approfondir l'analyse nous pouvons utiliser une représentation alternative en fixant un horizon de placement (i.e. une fréquence/période en ordonnée) et représenter l'évolution temporelle des coefficients d'ondelettes en prenant leur partie réelle⁵.

Les Figures 8 représentent les évolutions des rendements du CAC40 selon un horizon de 2 jours, 1 semaine (5 jours) et 6 mois (128 jours).

Figure 8 : Les Rendements du CAC selon plusieurs horizons de placement (CWT)



⁵ Les coefficients d'ondelettes sont complexes "à cause" de l'ondelette de Morlet. Nous perdons donc un peu d'information concernant la partie imaginaire des coefficients, mais celle-ci est contenue dans la Fonction de Phase.



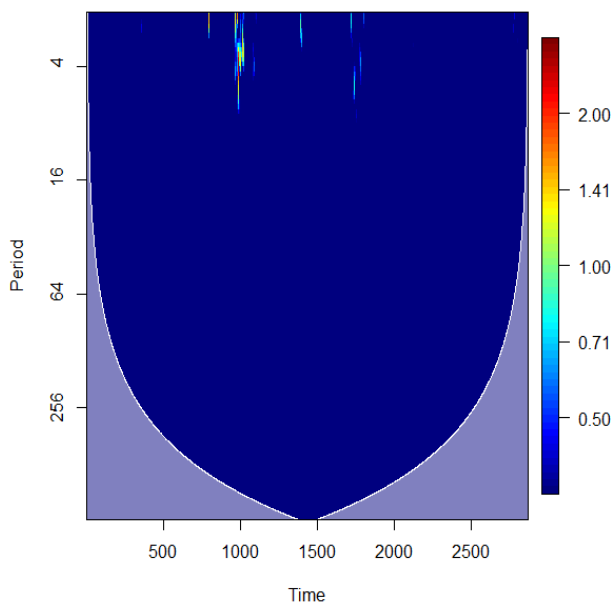
La CWT permet aussi d'étudier la répartition de la variance au cours des fréquences et du temps par le calcul du Scalogramme ou Spectre de Puissance. Avec la représentation en 2D colorisée, l'échelle de couleurs traduit l'intensité de la variation : les couleurs Bleutées pour des variations faibles devenant de plus en plus Rouge à mesure que l'intensité est forte. Les variations des rendements étant marquées par une hétéroscédasticité importante, les très fortes variations en valeurs absolues sont plutôt rares et de ce fait les zones rouges sont peu nombreuses et éparpillées aux cours du temps : le graphique est alors entièrement bleu. La lisibilité d'une telle représentation étant faible, on corrige les valeurs en les divisant par la

variance de la série («normalisation » des valeurs). La représentation en couleurs se prête ainsi à une interprétation graphique plus commode.

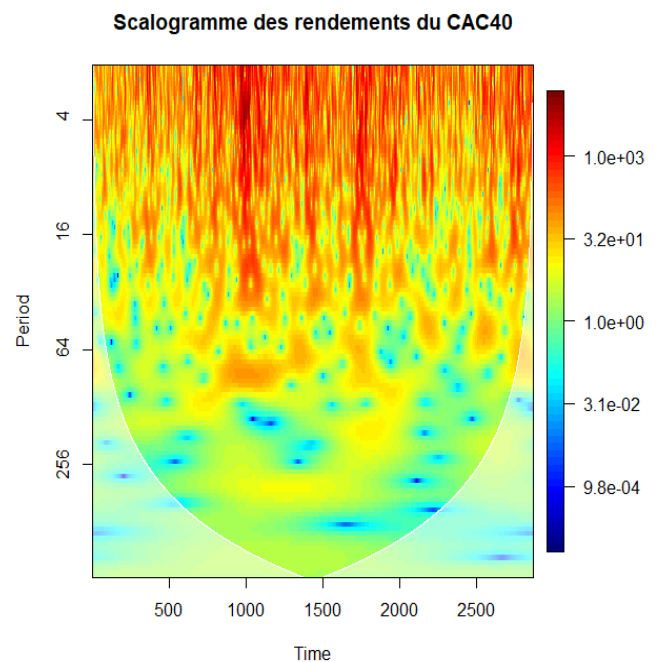
L'opération précédente implique une comparaison par rapport à 1, représentée par la couleur verte. De la sorte, quand le scalogramme vaut 1 cela indique que la variance des coefficients au temps t et à l'échelle s est égale à celle de la série d'origine. Plus la couleur tend vers le rouge plus la variance d'ondelettes est forte par rapport à la variance moyenne de la série (et inversement).

Figure 9 : Les Spectres de Puissance

9.1 : Spectre de Puissance non normalisé



9.2 : Spectre de Puissance Normalisé



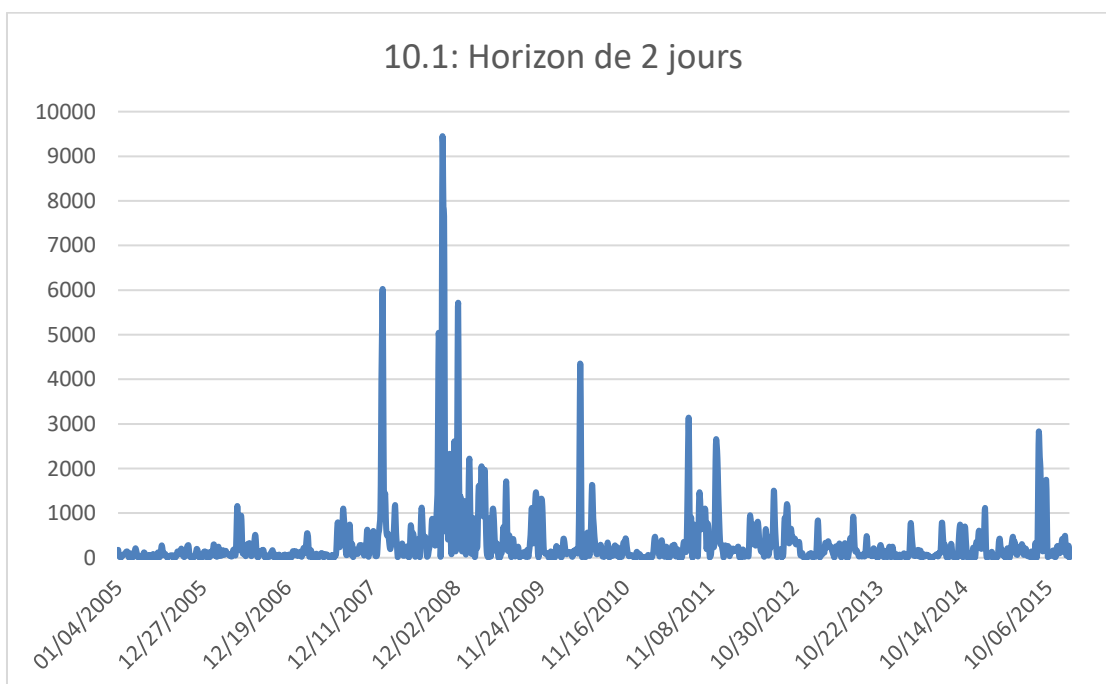
On remarque immédiatement que la variance est répartie sur les Hautes et Moyennes Fréquences avec des intensités très importantes durant les périodes de crises. Aux Basses-Fréquences, en revanche, la variance est globalement en dessous de l'énergie moyenne de la série. A court-terme, les chocs impactent fortement la série qui dévie de sa moyenne, et l'effet du choc se diffuse progressivement aux fréquences alentours en perdant en intensité. Plus l'intensité initiale du choc est importante plus il se diffusera sur un large spectre de fréquence (comme les crises).

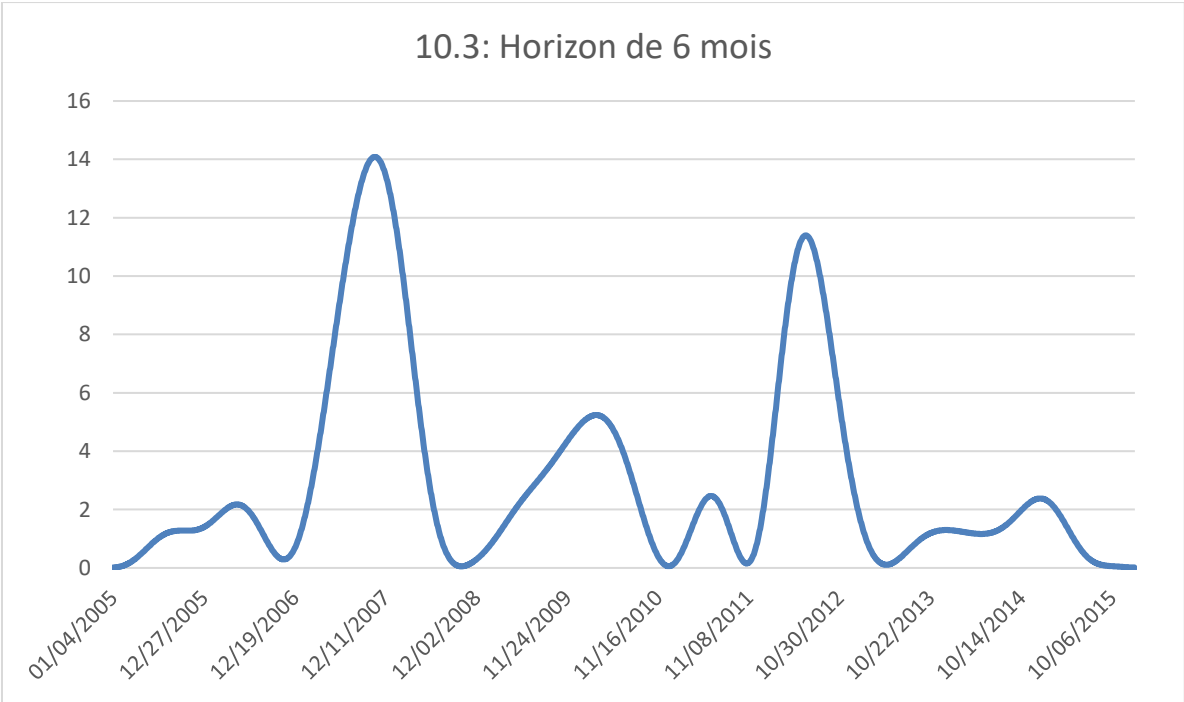
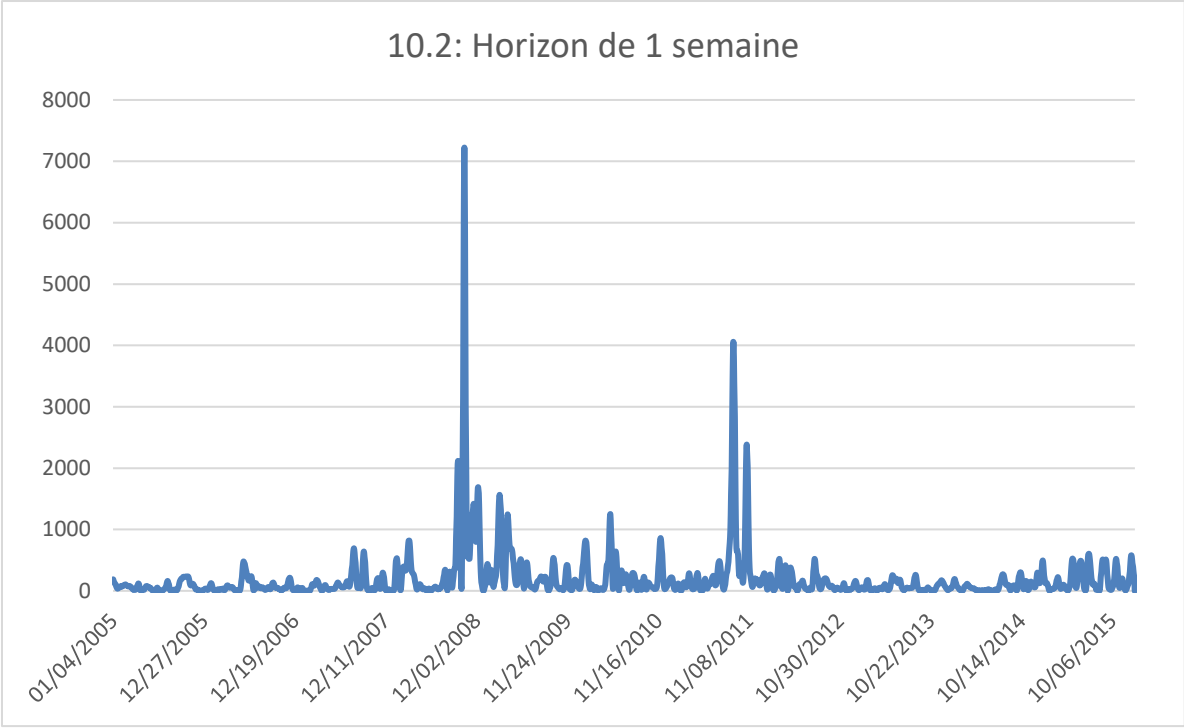
A long-terme la série présente des variations liées aux changements de cycles ou à un choc d'une forte intensité. A titre d'exemple, la crise de 2008 a perturbé ces évolutions comme l'indique la zone jaune aux basses-fréquences entre les points 1000 et 1700, mais ses effets sont beaucoup plus intenses sur les Hautes-Fréquences (périodes entre 2 et 32).

Ce type de graphique, très marqué par un clivage d'intensité entre les Hautes et les Basses fréquences, est une représentation simple et relativement correcte de l'hétéroscédasticité aux cours du temps et des fréquences. Le scalogramme théorique d'une série parfaitement homoscedastique serait dominé par le vert quel que soit le temps et les fréquences.

On peut adopter, comme précédemment, une représentation uniquement temporelle en fixant une fréquence. Les Figures 10 illustrent les scalogrammes normalisés pour les trois fréquences retenues.

Figures 10 : Scalogramme par horizons d'investissement



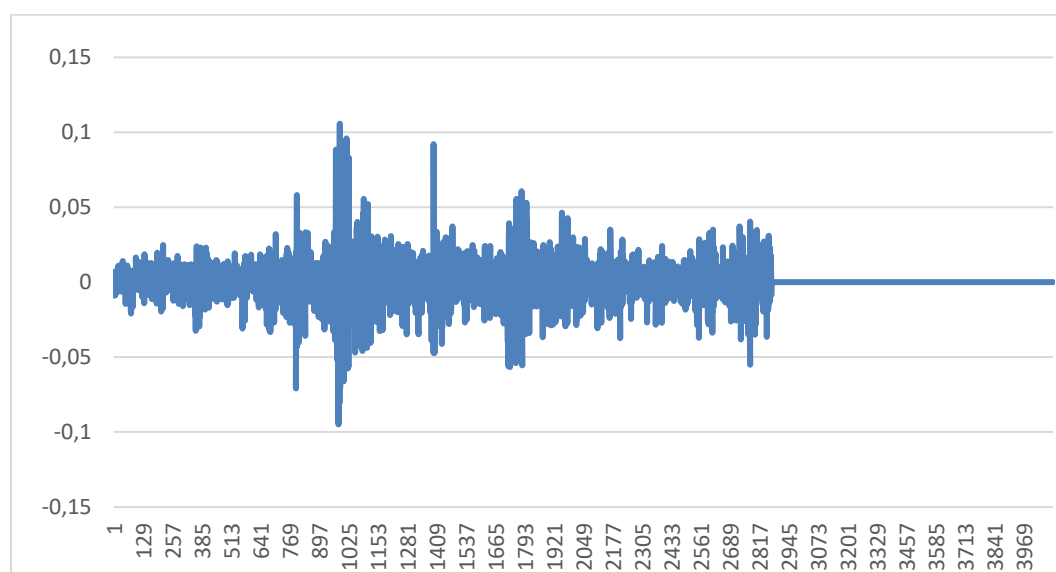


Les ondelettes continues constituent un outil puissant pour analyser une série. Sa mise en œuvre repose sur des équations complexes difficiles à utiliser à cause du nombre de paramètres à prendre en compte et, les résultats sont de plus sensibles aux choix effectués. Les versions discrètes (DWT et MODWT) sont plus simples d'utilisation. Elles nécessitent de recourir au seul filtre d'ondelettes (où la paire de filtres Passe-Haut et Passe-Bas rattachés) et de définir l'ordre de décomposition.

3 Transformations Discrètes en ondelettes des rendements du CAC (DWT)

La DWT des rendements du CAC40 nécessite une série de longueur dyadique. Nous utilisons la méthode de "complétion par des zéros" pour agrandir la taille de la série jusqu'au multiple de deux le plus proche. Nous obtenons alors une série de 4096 points notée RCACaug (Cf Figure 11) dont la moyenne et la variance sont modifiées par rapport à celles du RCAC.

Figures 11 : Rendements du CAC40 augmentés RCACaug



	RCACaug	RCAC
Moyenne	-3,46E-05	-4,94E-05
Variance	0,00014224	0,00020315

Le choix d'une ondelette pour réaliser la DWT repose sur plusieurs critères :

- La compacité ou la taille du support. On peut associer à la longueur du filtre L qui est défini par le nombre de coefficients (du filtre) non-nuls. Nous rappelons que plus L est grand plus la Redondance affecte un nombre élevé de coefficients. Une ondelette à support court, à l'opposé, réduit les effets de la Redondance mais permet aussi des calculs rapides.
- Le nombre de moments nuls noté P de la fonction-mère. Il conditionne la vitesse de décroissance des coefficients (par rapport aux fréquences). Plus P est grand plus l'ondelette est capable de reconstruire des polynômes d'ordre P ou inférieurs, ainsi la décomposition est plus précise et la vitesse de calculs réduite.
- La régularité des ondelettes. Elle définit comment le calcul est effectué pour reconstruire la série d'origine localement dans le domaine temporel ou fréquentiel. L'étude de la régularité permet alors de définir l'erreur d'approximation de la série autour d'un point. Le théorème de Tchamitchian ⁶ fournit une condition suffisante pour la régularité de h dont dépend P et L .
- La symétrie de l'ondelette-mère et père. Elle permet la reconstruction d'une série sur un intervalle en produisant une base d'ondelette régulière à l'intérieur. De la sorte, on peut analyser la régularité par intervalle et non plus sur l'ensemble des points dans le but de minimiser les erreurs d'approximation dans chacun d'eux. On parle alors d'ondelette sur intervalle par repliement.

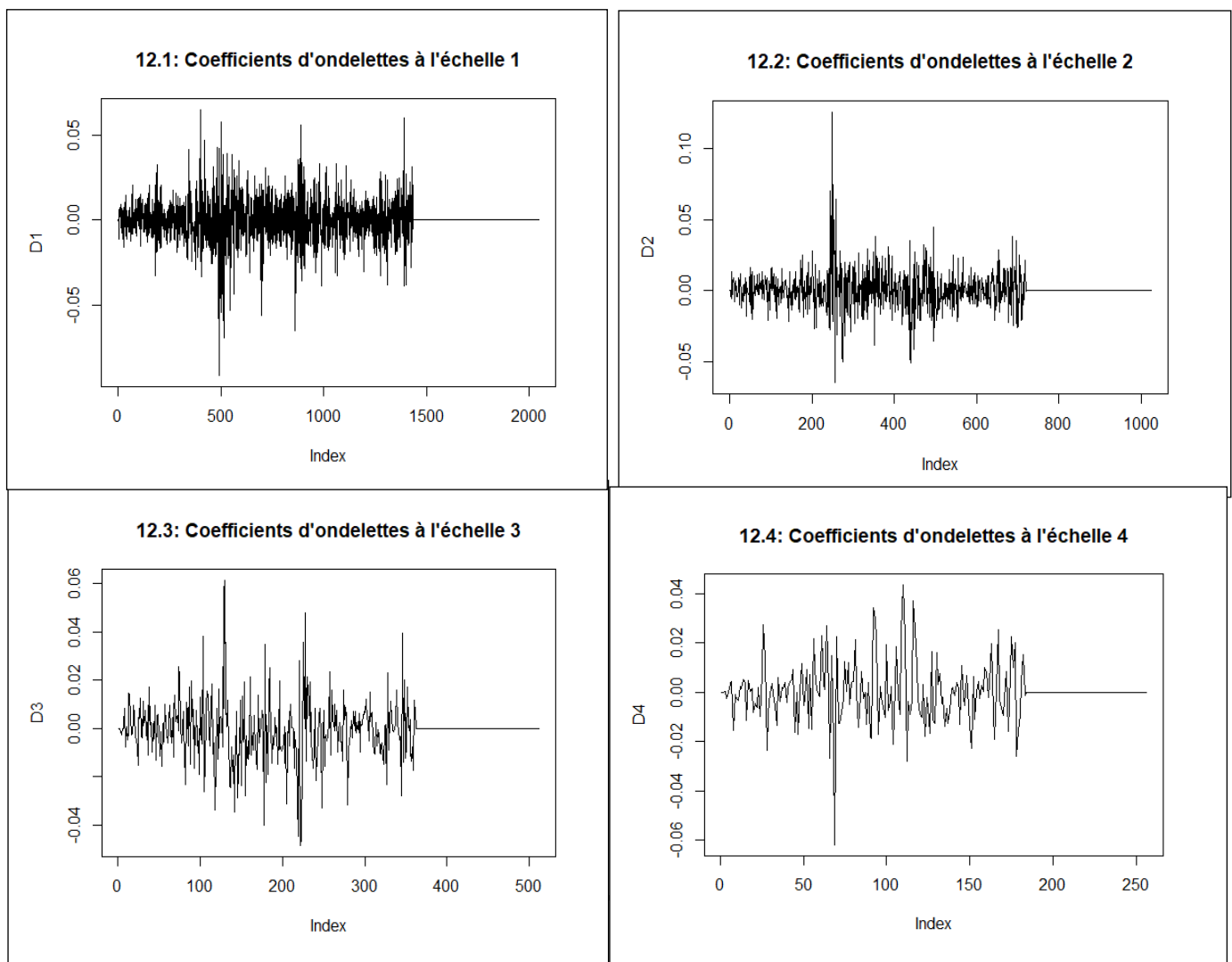
Ingrid Daubechies a établi un lien entre L et P pour les ondelettes qu'elle a développées. L'orthogonalité des ondelettes ne permet pas, en effet, d'avoir un L faible et un P élevé, elle a ainsi établi qu'une ondelette à P moment nul doit avoir un support L au moins égal à $2P$. Les ondelettes de la Famille Daubechies sont nommées « DL » ou « dbP ». Le filtre D8 (ou db4) est ainsi une ondelette à 8 coefficients et 4 moments nuls qui retranscrit les fonctions quadratiques jusqu'à l'ordre 4. Cette relation entre L et P implique un arbitrage lors du choix du filtre : un grand support (avec un nombre de moments nuls important) est généralement

⁶ Le théorème de Tchamitchian permet de réécrire le filtre h sous une forme particulière qui conduit à faire des ondelettes-mère et père des Lipshitz α qui possèdent des propriétés de régularité intéressantes et donc conditionnent la décomposition en ondelettes.

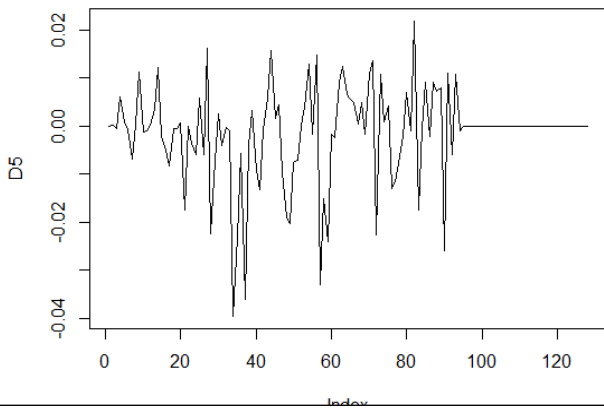
utilisé pour des séries avec peu « d'irrégularités » c'est-à-dire d'événements extrêmes. Dans le cas d'une série marquée par de fortes variations (irrégularités élevées) il est conseillé d'utiliser un support court. Daubechies a aussi montré qu'une ondelette orthogonale et symétrique ne peut être à support compact (i.e. fini) sauf si elle est discontinue avec un seul moment nul. L'ondelette de Haar est la seule ondelette orthogonale à support compact et symétrique. Elle entre dans le cadre des ondelettes de Daubechies et se note D2 (ou très rarement db1).

Nous utilisons par la suite l'ondelette de Daubechies « La8 » qui est légèrement asymétrique à 8 coefficients non nuls (c'est-à-dire que $L=8$ et $P=4$). Un support (longueur) de 8 est intéressant car il est relativement faible et convient à notre série qui possède de nombreuses irrégularités. Une fois le filtre déterminé, on peut calculer l'ordre de décomposition et il est ici égal à 12 d'après la formule (44). Les figures 12 ci-dessous représentent les bandes de fréquences issues de la DWT.

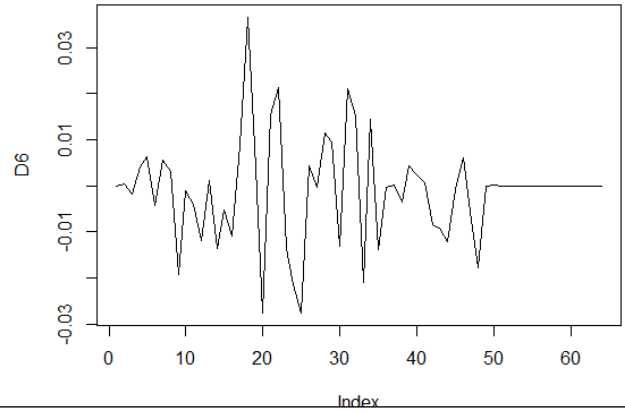
Figures 12 : Bandes de fréquence issues d'une DWT des rendements du CAC40



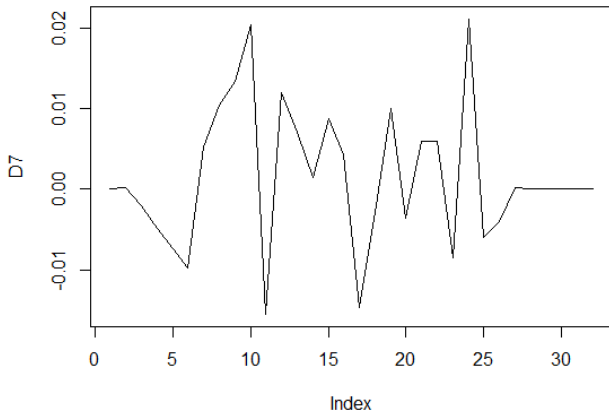
12.5: Coefficients d'ondelettes à l'échelle 5



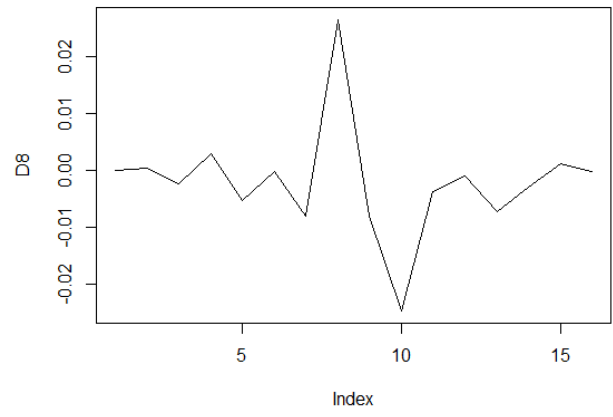
12.6: Coefficients d'ondelettes à l'échelle 6



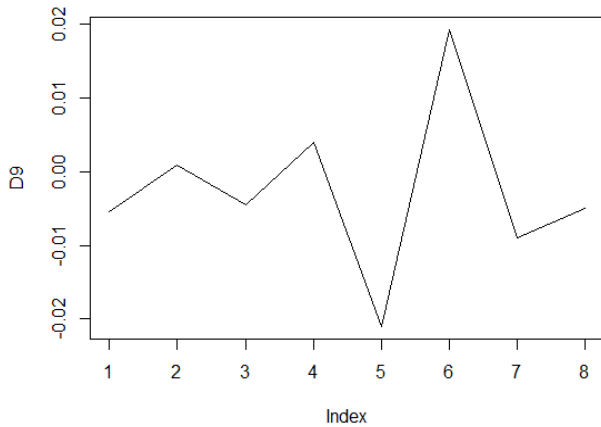
12.7: Coefficients d'ondelettes à l'échelle 7



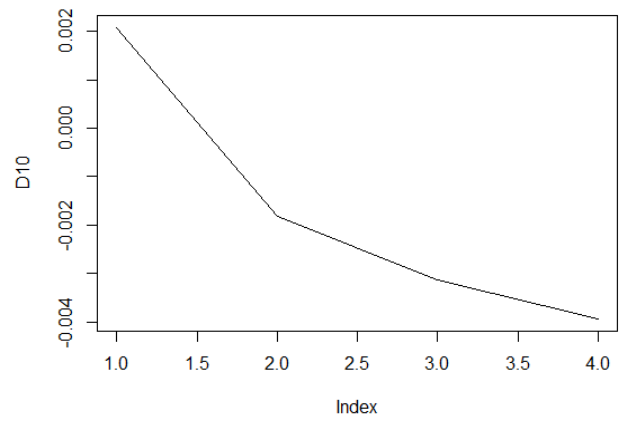
12.8: Coefficients d'ondelettes à l'échelle 8



12.9: Coefficients d'ondelettes à l'échelle 9



12.10: Coefficients d'ondelettes à l'échelle 10



Les dernières bandes de fréquences, composées de peu de points, sont présentées dans le tableau suivant :

	D11	D12	Approximation
Coefficient 1	-0,00488732	0,00463702	-0,00221217
Coefficient 2	-0,0220108	/	/

L'analyse de la série avec ce type de décomposition est conditionnée par un nombre d'observations différent sur chaque bande de fréquences. Il est donc difficile de localiser temporellement les événements à cause de l'échelle dyadique utilisée. La répartition de la variance en fonction des bandes, à l'instar du scalogramme, peut être calculé par les poids des variances d'ondelettes dans la variance totale de la série (Cf. Table 4 et Figure 13).

Figure 13 : Histogrammes synthétique de la Table 4

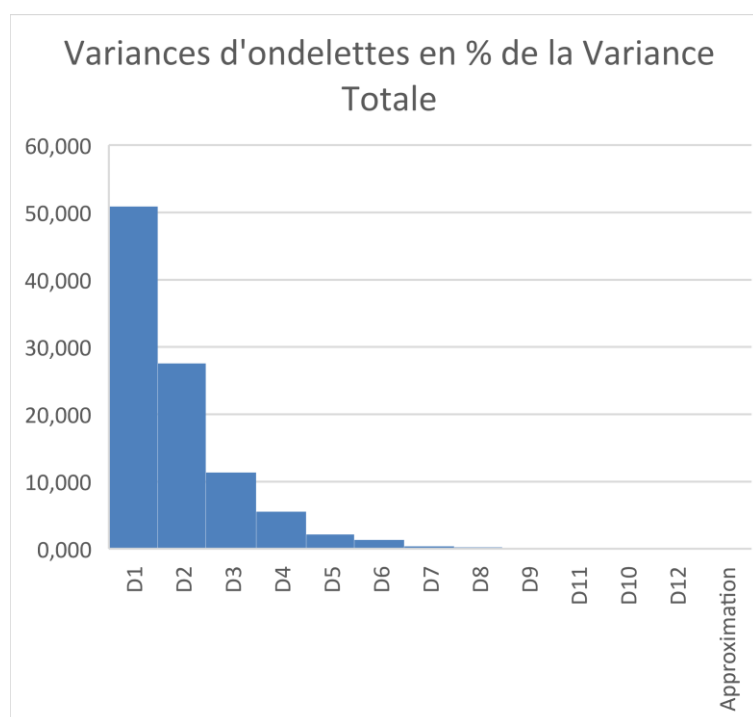


Table 4 : Poids des variances fréquentielles dans la variance totale

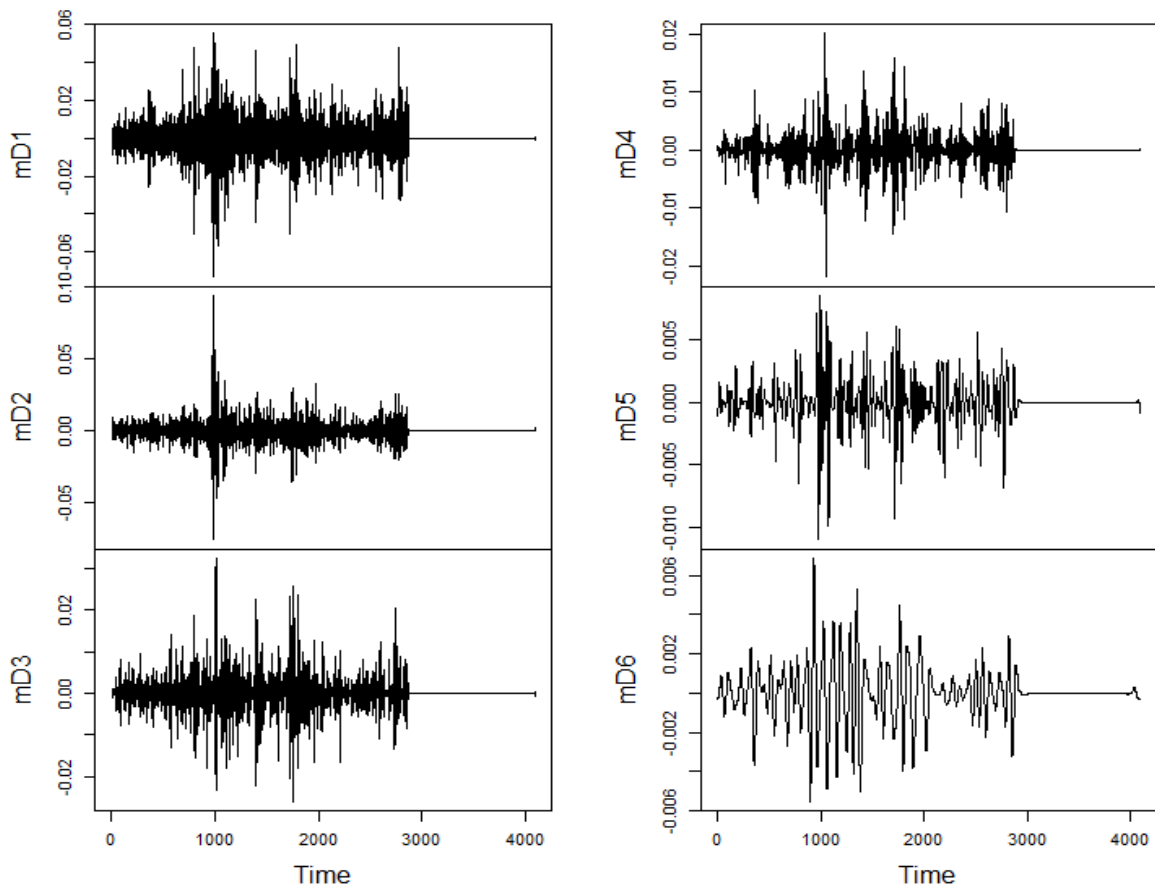
Bandes	Poids en %
D1	50,910
D2	27,593
D3	11,385
D4	5,565
D5	2,163
D6	1,367
D7	0,417
D8	0,276
D9	0,183
D10	0,004902654
D11	0,050313667
D12	0,003689611
Approximation	0,000839728
Variance RCACaug	0,000142278
Somme Variances ondelettes	0,000142163

Les résultats consignés dans la Table 4 et de la Figure 13 n'ont pas une interprétation évidente à cause des variances calculées sur un nombre de points différents. Nous notons, cependant, que la propriété de préservation de la variance est respectée dans le cadre de la DWT car la somme des variances d'ondelettes est quasiment égale à celle de la série des rendements (augmentée par des zéros).

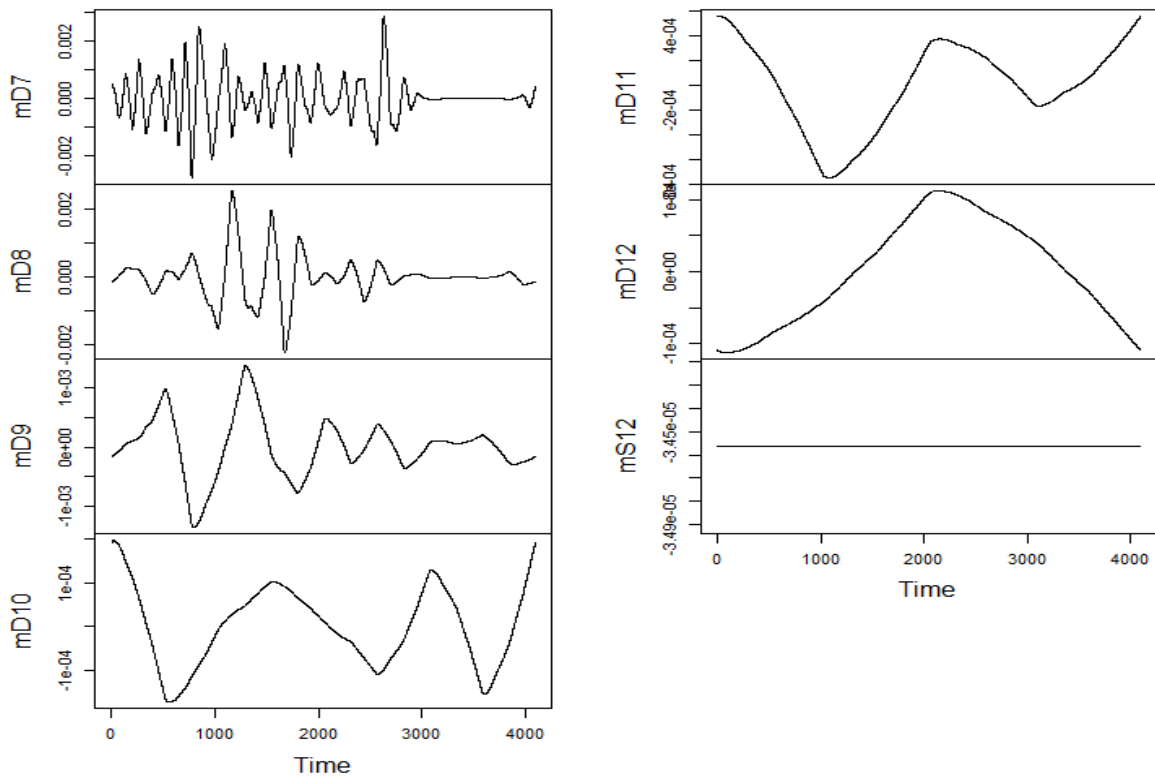
Les avantages de la DWT par rapport à la CWT ne sont pas, dans notre cas, évidents. La CWT permet une analyse plus simple mais avec des temps de calculs plus long, contrairement à la DWT plus rapide à calculer mais avec des possibilités d'analyse considérablement réduites. C'est pourquoi la DWT est surtout utilisée dans le cadre d'une MRA. Comme nous l'avons vu, la MRA permet d'ajouter des propriétés à la DWT en corrigeant en partie ses défauts (sauf la contrainte dyadique). La MRA-DWT se base sur les mêmes caractéristiques que la DWT, elle fournit 12 bandes de fréquences de même longueur et 1 approximation qui traduit la moyenne de la série. On note mD_j la bandes de fréquence à l'échelle j de la MRA-DWT pour les différenciées des bandes de la DWT noté D_j .

Figures 14 : MRA-DWT

14.1: Les Bandes de Fréquences d'échelle 1 à 6



14.2: Les Bandes de Fréquences d'échelle 7 à 12 et l'approximation mS12



Comme les bandes sont de mêmes longueurs, les possibilités d'analyse de la DWT sont donc grandement accrues en réalisant une MRA. La concordance des événements avec la série de départ (on parle d'alignement) est donc meilleure. L'analyse des variances d'ondelettes aussi est améliorée puisqu'elle se base sur le même nombre de points par bandes contrairement à la DWT. Le tableau 5 et la figure 15 représentent la répartition fréquentielle de la variance pour une MRA-DWT.

Figure 15: Histogrammes synthétique de la Table 5

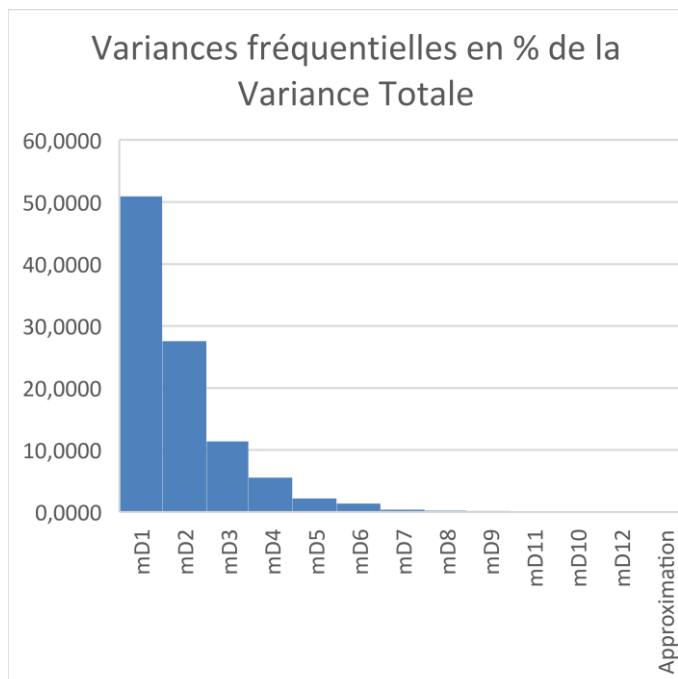


Table 5 : Variances Fréquentilles d'une MRA-DWT

Bandes	Poids en %
mD1	50,9381
mD2	27,5995
mD3	11,4117
mD4	5,5449
mD5	2,1924
mD6	1,3605
mD7	0,4152
mD8	0,2709
mD9	0,1694
mD10	0,0057
mD11	0,0873
mD12	0,0037
Approximation	0,0008
Variance RCACaug	0,000142278
Somme Variances ondelettes	0,000142245

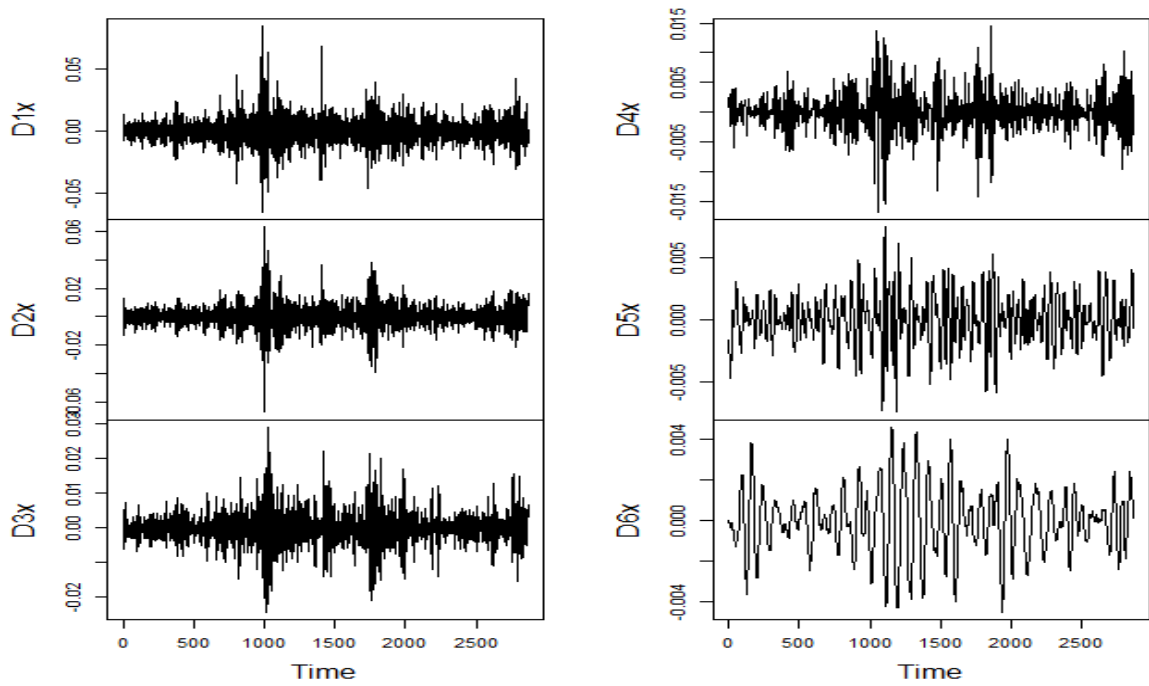
La MRA-DWT possède, cependant, plusieurs limites majeures. La contrainte dyadique est toujours présente et nécessite d'introduire des zéros à la fin de la série qui sont pris en compte dans le calcul de l'ordre de décomposition. Ils sont, de plus, retranscrits dans les Bandes de Fréquences par les traits horizontaux mais ils sont affectés par la Redondance ! Pour les bandes de Hautes-Fréquences (mD1, mD2 etc...) les zéros débutent à la 2869 observations (comme pour la série d'origine) mais avec de petites perturbations à la fin. Celles-ci sont plus marquées aux Basses-Fréquences (mD9, mD10 etc...) car la Redondance affecte un nombre plus élevé de coefficients. Son impact global est cependant moindre car ces bandes sont peu volatiles.

La DWT est, par ailleurs, fortement sensible aux décalages ce qui entraîne le non-respect de la propriété d'invariance par translation. On peut illustrer concrètement ce phénomène de la façon suivante : un décalage dans la série d'origine n'entraîne pas un décalage équivalent des coefficients d'ondelettes, et par conséquent ceux-ci ne sont plus temporellement alignés avec les événements présents sur la série. Ce constat est problématique pour certaines applications, notamment en Finance où les événements sont liés à un instant précis du temps. La dégradation de l'information temporelle n'est pas, ainsi, envisageable et le gain d'information fréquentiel ne compense pas cette perte.

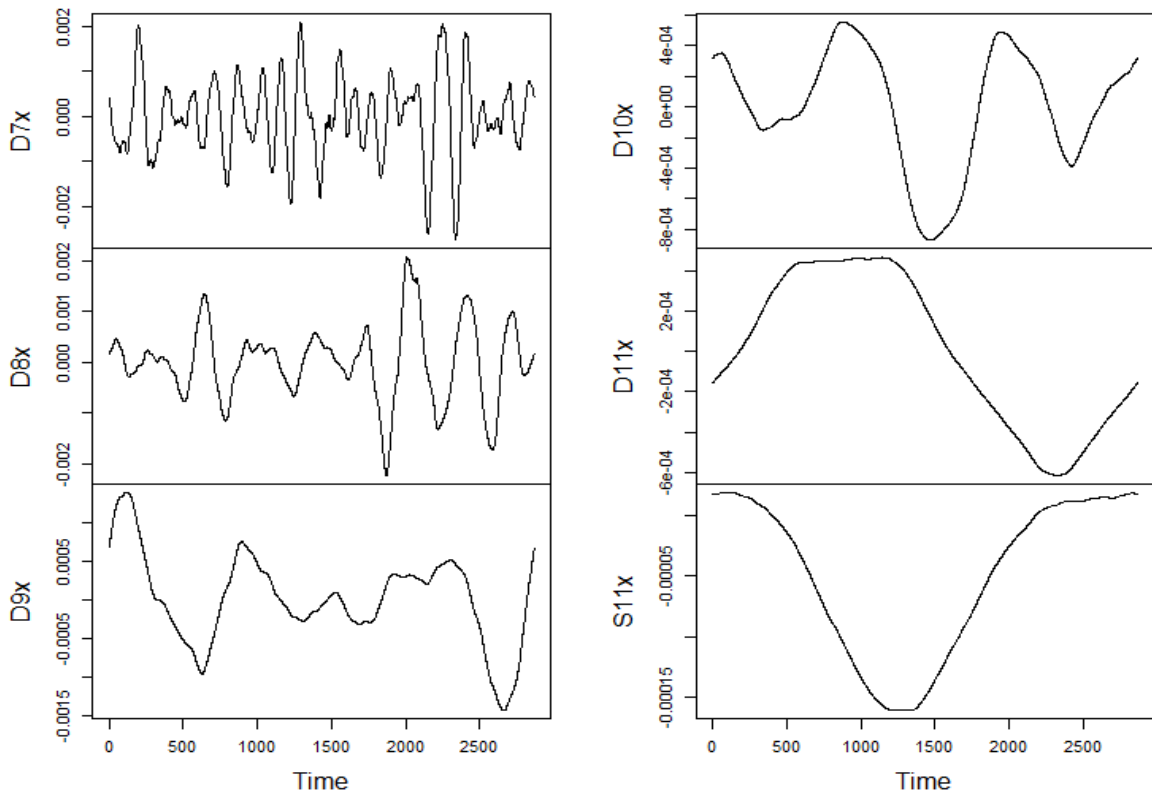
4 Transformations MODWT des rendements du CAC:

La MODWT relâche la contrainte qui n'oblige pas le rajout de zéros à la fin de la chronique et elle est, de plus, invariante par translation. La série RCAC est décomposée jusqu'à l'ordre 11 d'après la formule (44) (en prenant la partie entière). Nous utilisons le même filtre d'ondelettes de Daubechies La8 qui conduit à 11 Bandes de Fréquences contenant chacune 2868 coefficients d'ondelettes et une approximation du trend (Cf. Figures 16). Nous notons D_{jx} la bande de fréquence d'échelle j et S_{11} l'approximation issue de la MODWT.

16.1: Les Bandes de Fréquences d'échelles 1 à 6



16.2: Les Bandes de Fréquences d'échelles 7 à 11 et l'approximation



Les bandes de la MODWT, possédant le même nombre de points que la série décomposée, on peut les analyser comme de nouvelles séries temporelles et étudier les effets de chaque événement. L'information temporelle n'est pas dégradée et les échelles fournissent l'information fréquentielle. Les bandes, à cet effet, synthétisent les variations de la série pour un intervalle fréquentiel déterminé et celui-ci s'exprime généralement dans la même unité que la série d'origine (soit en jours dans notre cas) afin d'en simplifier l'interprétation (en les assimilant aux Période de Fourier).

Les rendements du CAC40 peuvent être analysés dans ce cas selon la fréquence d'investissement des agents, chaque bande illustre les rendements selon un comportement de trading particulier comme les Chartistes ou les Fondamentalistes.

Le tableau 6 consigne les intervalles fréquents exprimés en jours et leurs correspondances en semaines, en mois et en années.

Table 6 : Bandes de Fréquences et Horizon d'investissement

	Bandes	Taille de la bande en jours		Correspondance	
		Borne inférieur	Borne Supérieur	Borne inférieur	Borne Supérieur
Hautes Fréquences	D1	2	4		
	D2	4	8	Environ 1 semaine	2 semaines
	D3	8	16	Environ 2 semaines	3 semaines
	D4	16	32	Environs 3 semaines	1 mois et demi
	D5	32	64	1 mois et demi	3 mois
	D6	64	128	3 mois	6 mois
	D7	128	256	6 mois	1 an
	D8	256	512	1 an	2 ans
	D9	512	1024	2 ans	4 ans
Basses Fréquences	D10	1024	2048	4 ans	8 ans
	D11	2048	4096	8 ans	16 ans
	S11	-	-	-	-

L'analyse des Variances d'ondelettes est plus précise car elle n'est pas affectée par l'introduction de zéros et par l'échelle dyadique. La Figure 17 et la Table 7 consignent les résultats de l'analyse des variances en indiquant leurs poids dans la variance des rendements. On note ainsi que la somme fréquentielle des variances d'ondelettes est égale à la variance des rendements du CAC40.

Table 17 : Histogrammes synthétique de la Table 7

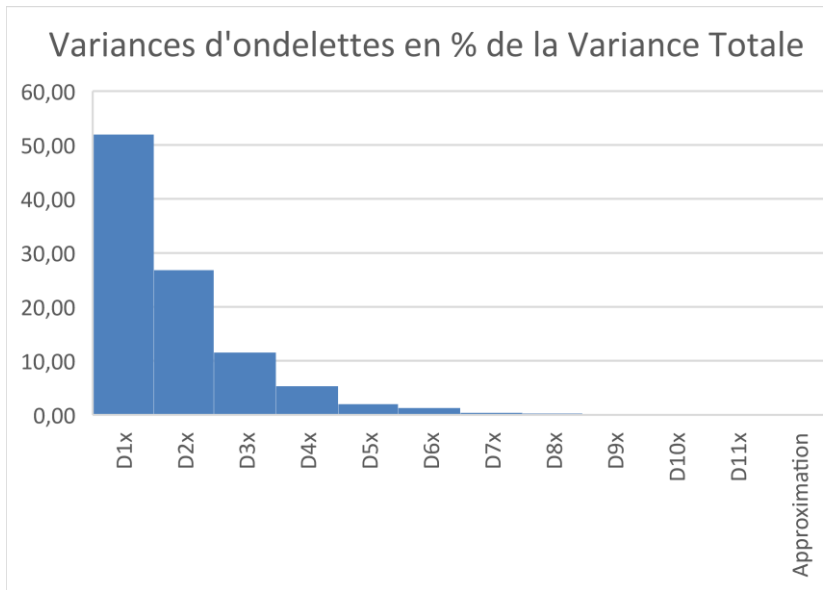


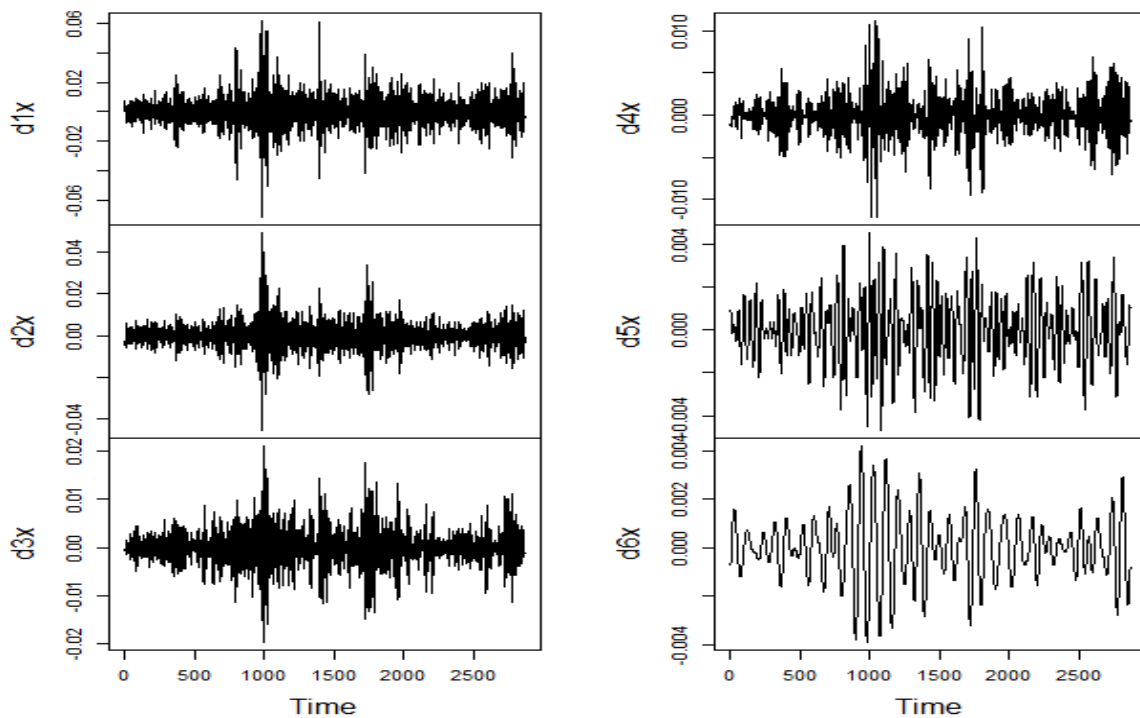
Table 7 : Variances Fréquentilles d'une MODWT

Bandes	Poids en %
D1x	51,95
D2x	26,83
D3x	11,54
D4x	5,36
D5x	2,02
D6x	1,30
D7x	0,393
D8x	0,286
D9x	0,171
D10x	0,075
D11x	0,069
Approximation	0,003
Variance RCAC	0,00020322
Somme variances d'ondelettes	0,00020315

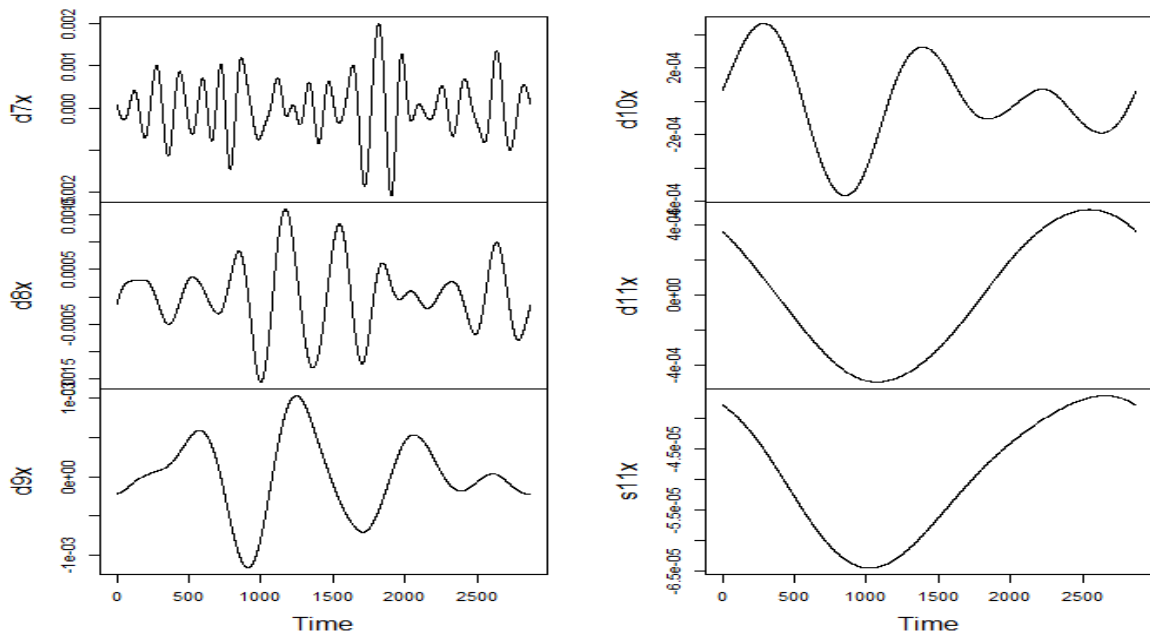
On peut aussi réaliser une MRA sur la base de la MODWT. Les Figures 18 représentent les bandes de fréquences de la MRA-MODWT notées djx.

Figures 18 : MRA-MODWT

18.1: Bandes de Fréquences d'échelle 1 à 6



18.2: Bandes de Fréquences d'échelle 7 à 11 et l'approximation



La MRA-MODWT fournit des résultats qui peuvent apparaitre comme similaire à la MODWT mais celle-ci ne conserve pas la variance de la série décomposée comme le montre la Figure 19 et le tableau 8.

Table 19 : Histogrammes synthétique de la Table 8

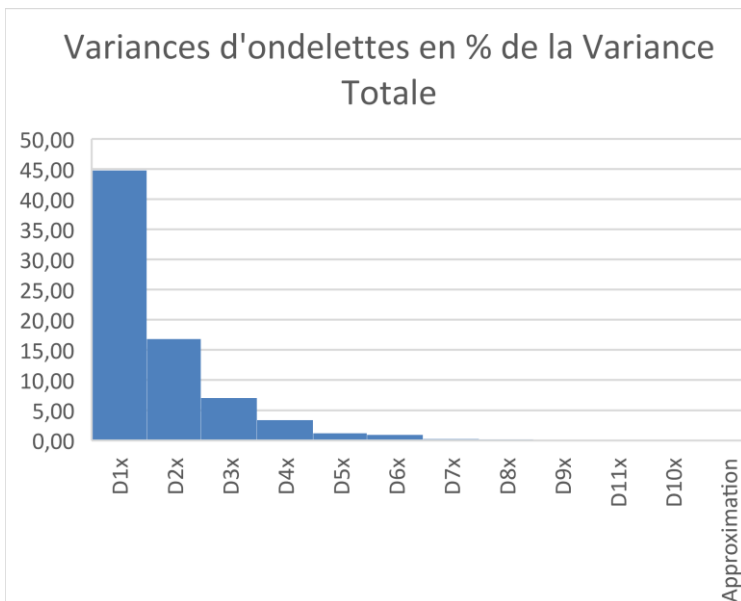


Table 8 : MRA-MODWT Variances d'ondelettes

Bandes	Poids en %
D1x	44,83
D2x	16,83
D3x	7,03
D4x	3,40
D5x	1,18
D6x	0,9056
D7x	0,2377
D8x	0,1987
D9x	0,1137
D10x	0,0340
D11x	0,0596
Approximation	0,0012
Somme	74,821
Variance RCAC	0,00015205
Somme variances d'ondelettes	0,00020315

La MRA-MODWT ‘oublie’ ainsi de reconstituer 25% de la variance des rendements. Il s’agit d’un inconvénient majeur quand on souhaite étudier la volatilité du CAC par fréquences. Elle possède, cependant, de bonnes capacités pour aligner correctement les événements avec la série d’origine (concordance temporelle). La MRA garde une certaine utilité si l’étude nécessite une localisation temporelle des événements efficace dans un but descriptif, mais elle n’est pas recommandée quand l’analyse nécessite de manipuler la variance.

Chapitre 2 : Le MEDAF tempo-Fréquentiel

Pour apprécier l'apport des ondelettes dans le cadre du MEDAF, nous considérons dans ce chapitre l'hypothèse d'hétérogénéité comportementale des agents qui se distinguent selon leurs horizons de placement. La base de données que nous avons sélectionnée correspond aux informations journalières que les investisseurs reçoivent pour construire leurs portefeuilles. Son amplitude de 2005 à 2015 a un nombre d'observations ($N=2869$) suffisamment important pour que les méthodes utilisées dans cette recherche ne souffrent pas des problèmes liés aux petits échantillons. Elle a enfin l'avantage d'englober les différentes crises, comme celles de 2007-2008 et de 2011-2012, permettant ainsi de vérifier leurs éventuels impacts sur les paramètres de la Droite de Marché.

La recherche que nous proposons s'appuie sur ce panel de chroniques et mobilise à la fois les aspects théoriques du MEDAF et ses aspects statistiques plus ou moins élaborés pour en vérifier la pertinence. Elle débute par une présentation de l'estimation classique du MEDAF, puis par l'analyse de la stabilité de son paramètre par des Régressions Forward et son comportement lorsque ses arguments sont décomposés dans le domaine des fréquences. L'objectif est de créer un support de référence à la recherche pour tenter par la suite de le valider, de l'amender ou encore de le compléter. C'est l'objet de la section 1 qui retient dans ses aspect statistiques les tests standards des séries temporelles ainsi que la pierre angulaire de la recherche sur les décompositions en ondelettes.

La régression Forward pour étudier la volatilité du Beta de la Droite de Marché est perçue d'abord dans sa globalité mais aussi à travers les décompositions des séries temporelles qui structure la régression. Il est alors possible d'étudier la dynamique du Beta au cours du temps en fonction de l'horizon d'investissement retenu. Cette dernière façon de procéder peut-être améliorée en considérant une décomposition en ondelettes à chaque étape de la Régression Forward. Nous présentons dans la section 2, un logiciel qui opère automatiquement ces calculs. Il se révèle puissant pour l'étude de la volatilité des Betas et surtout leurs comparaisons au cours du temps. Il permet de corriger les éventuels biais causés par

l'application intuitive d'une fenêtre roulante sur les bandes d'une décomposition en ondelettes.

Ce chapitre est complété dans l'Annexe 2 par une estimation de la droite de marché avec aléa obéissant à un ARMA-EGARCH. Cette méthode permet de corriger les phénomènes d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité observés dans les résidus de la Droite de Marché et de proposer une correction simple des Betas estimés par les MCO.

Les deux sections de ce chapitre font référence aux articles suivants :

« Analyse Temps-Fréquence du CAPM-Une application au CAC40 » disponible en Working Paper (MPRA Paper 86272) et publié dans *Managing Global Transition Journal* Volume 16(2) 2018 (pages 141-157) sous le nom « Time-Frequency analysis of CAPM- An application to CAC 40- » et présenté sous le même nom à Venise à la « MIC 2017 Managing the Global Economy » en Mai 2017.

« Analyse de l'instabilité du Beta de la Droite de Marché par une Régression Forward avec Fenêtre Tempo-Fréquentielle » Working Paper (WPMRE.2019.2) présenté à l'International Work Conference on Time Series Forecasting (ITISE 2018) à Grenades en Septembre 2018 sous le titre « Forward Regression with Discrete wavelets Time-Frequency Window ».

Ce chapitre est complété par l'Annexe qui étudie les propriétés statistiques des estimateurs Betas dans l'article « Estimations simultanées du Beta de la droite de marché avec erreurs GARCH » Working Paper (WPMRE.2019.3) présenté au Doctoral Meeting of Montpellier (DMM 2018) en Octobre 2018 sous le titre « Simultaneous Estimates of Beta Market Line with GARCH errors ».

Section 1 : Construction et Estimation du MEDAF Fréquentiel par les Ondelettes Discrètes

La théorie moderne du portefeuille, initiée par Markowitz (1952) et prolongée par Sharpe, Lintner et Mossin durant les années 1960 se base sur le modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF). L'idée novatrice est celle du risque systématique. Il s'agit du risque de l'actif qui est dû à son lien avec le marché (le système). Sharpe constate que pour des actifs ayant le même niveau de risque total, certains présentent une rentabilité plus élevée car ils possèdent un risque systématique fort. Il définit alors le principe de la prime de risque : un actif doit présenter une rentabilité plus élevée pour compenser le risque supplémentaire par rapport à un actif sans risque.

Le MEDAF implique que le marché est le seul facteur de risque pour une action et la sensibilité de l'action au marché est mesurée par le beta (risque systématique). Cette hypothèse fut testée à plusieurs reprises dans de nombreuses études économétriques. Les premières, réalisées à la fin des années 1960, tendent à confirmer le modèle, même si les travaux de Sharpe et de Cooper en 1972 mettent l'accent sur plusieurs biais statistiques liés aux méthodes d'estimation. Ces résultats sont confortés à partir de travaux comme ceux de Black, Jensen et Scholes (1972) et de Fama et MacBeth (1973) sur des données américaines. Ces auteurs mettent en évidence l'instabilité des paramètres et notamment celui du Beta selon la période retenue où la fréquence des données. Ces conclusions restent identiques pour les bourses européennes (Cf. par exemple Pogue et Solnik 1974). La critique la plus importante du modèle est celle formulée par Fama et French en 1992. Pour ces auteurs le « beta est mort » à cause du nombre important de faits stylisés non-considerés par le MEDAF. Le débat sur la validité du modèle reste cependant ouvert car le beta est toujours utilisé par les investisseurs comme indicateur de risque lors de la construction d'un portefeuille. L'hypothèse que le beta reste constant sur la période d'estimation fait partie de cette remise en cause car elle considère que les agents ont un comportement identique lors de la construction de leurs portefeuilles. Ils sélectionnent leurs actifs de façon homogène avec les mêmes caractéristiques mais adapté à leur appétence, alors que rien ne certifie qu'ils aient des horizons d'investissement identiques. Certains ont un trading de haute fréquence comme les banques qui utilisent des algorithmes automatiques d'achat et de vente, tandis que les fonds

communs de placements (FCP ou OPCVM) ont une vision à plus long-terme. Si deux agents investissent dans le même actif mais sur des horizons différents alors ils n'ont pas forcément le même risque. Il est possible, en effet, qu'en fonction de la fréquence, le risque systématique soit différent, il serait alors relié à un horizon temporel. En d'autres termes, selon la fréquence d'élaboration d'un portefeuille, l'investisseur aurait un comportement différent qui se traduit par une évolution différenciée de sa valeur.

Pour vérifier cette hypothèse, nous recourons, dans cet article, à la décomposition fréquentielle des cours améliorée par une localisation temporelle. Il s'agit de la méthode des ondelettes (Cf. les travaux de Mallat et de Meyer). Les ondelettes sont des fonctions de l'espace L^2 d'Hilbert, qui servent à transformer un signal par l'utilisation d'une fonction-mère. Celle-ci est translatée et dilatée pour constituer une transformée en ondelettes du signal d'origine. La reconstruction se réalise grâce aux coefficients d'ondelettes obtenus lors de la décomposition. La Maximal Overlap Discret Wavelets Transform (ou MODWT) est un procédé consistant à projeter, à l'aide des ondelettes, le signal dans des sous-espaces emboîtés de résolution croissante. Ces sous-espaces peuvent être assimilés à la quantité d'information disponible pour un niveau de résolution donné : plus le niveau est élevé plus nous captions d'information sur le signal. Nous sommes alors en mesure d'étudier le comportement du signal par niveaux de fréquence tout en ayant une localisation temporelle par bandes de fréquence. Ce procédé est parfaitement adapté à notre problématique. La décomposition MODWT conduit à des séries financières décomposées en sous-séries (ou bandes) relatives à différents niveaux de fréquence. Ce type de décomposition a fait l'objet de publications de Gençay et al (2003) portant sur des données américaines, allemandes et anglaises. Ils vérifient l'existence du risque systématique au niveau fréquentiel et la pertinence des relations du MEDAF à moyen et long terme.

Nous appliquons la relation du MEDAF aux 30 actions pérennes du CAC 40 français pour la période journalière de Janvier 2005 à Décembre 2015. Cette période couvre à la fois des périodes calmes et tumultueuses du marché comme la crise des « subprimes ». Le taux sans risque retenu est le taux OAT à 10ans¹. Dans une première partie, nous estimons les paramètres de la droite de marché et nous vérifions leurs instabilités au cours du temps. Nous proposons, par la suite, de recourir aux ondelettes pour construire des MEDAF temps-fréquence qui prennent en compte les comportements hétérogènes des agents. Nous montrons

qu'il est alors possible pour un gestionnaire de portefeuille d'effectuer des choix plus différenciés en fonction des betas fréquentiels².

1.1 Estimation globale du MEDAF:

Sharpe définit le MEDAF par l'équation de la Securities Market Line (ou SML)

$$E(R_i) = r_f + \beta_i(E(R_m) - r_f) \quad (\text{SML})$$

$E(R_i)$ est l'espérance de la rentabilité R_i de l'actif i , r_f (risk free) est le taux sans risque, β_i est le beta ou risque systématique, $E(R_m)$ est l'espérance de la rentabilité R_m du marché m .

Pour les calculs, on utilise traditionnellement la réécriture de l'équation SML en termes de prime de risque appelée droite de marché:

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t}$$

La prime de risque de l'actif i notée $r_{i,t}$ (et celle du marché $r_{m,t}$) est l'espérance de rentabilité de l'actif i (respectivement du marché) réduite du taux sans risque r_f . $\varepsilon_{i,t}$ est un processus i.i.d $(0, \sigma_\varepsilon)$.

Ce modèle est estimé globalement sur les 30 actions retenues. Nous étudions la sensibilité de son beta selon différentes périodes et les caractéristiques de sa volatilité sont obtenues par des estimations forwards du modèle.

1.1.1 Estimation de la droite de marché sur la période 2005-2015:

L'estimation des paramètres de la droite de marché par la méthode des MCO, nécessite la stationnarité des primes de risque $r_{i,t}$ et $r_{m,t}$. Ces primes de risques résultent de la différence entre les rendements et le taux sans risque. Le test de Phillips-Perron, qui prend en compte les caractères d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité, accepte l'hypothèse de racines unitaires dans les séries brutes en logarithme. Le calcul des rendements s'effectue ainsi sans introduction de structures factices et ce même test (associé à celui de KPSS) appliqué aux primes de risque conclue à leurs stationnarités (Cf. annexe 1).

Les résidus de l'estimation des droites de marché par les MCO, sont autocorrélés, hétéroscédastique et non-normaux (Cf. Annexe 2). La propriété de variance minimale n'étant

pas respectée, les régressions sont ainsi réitérées en faisant appel aux Moindres Carrés Quasi-Généralisés (MCQG) associés la matrice de Newey-West qui est plus robuste aux anomalies de formes inconnues de l'autocorrélation et de l'hétéroscédasticité.

Le tableau 1 rassemble les résultats de ces estimations et les principaux tests concernant les paramètres, les coefficients de déterminations et ceux relatifs aux résidus. Les actions Air Liquide, Essilor, L'Oréal, Schneider, Sodexo et Vinci sont les seules à posséder des constantes significativement différentes de zéro. Pour ces actions, la condition nécessaire à la validation du MEDAF n'est donc pas respectée. Pour les autres, le résultat est conforme à l'estimation d'une régression sur variables centrées comme l'indique les tests de nullité réalisés sur la moyenne des primes de risque (Cf. Annexe 3). Le marché est donc le seul facteur qui influence les performances des actifs. Les tests sur les betas et sur les coefficients de détermination acceptent l'hypothèse de significativité, mais on constate pour la majorité des actions et malgré les MCG, la présence dans les résidus d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité couplée avec une forte non-normalité. Malgré ces insuffisances statistiques, il est possible, à l'aide des betas, de différencier aisément les actions entre elles. Par exemple, les actions financières ont plutôt un beta fort comparées aux actions du secteur communication comme Vivendi et Publicis. Elles se révèlent ainsi les plus sensibles aux fluctuations du CAC 40. Il est donc possible, comme nous le verrons ultérieurement, de regrouper à l'aide du beta, de ses caractéristiques et de ses évolutions temporelles, différentes actions entre elles.

Tableau 1 - Résultats des régressions avec les MCQG

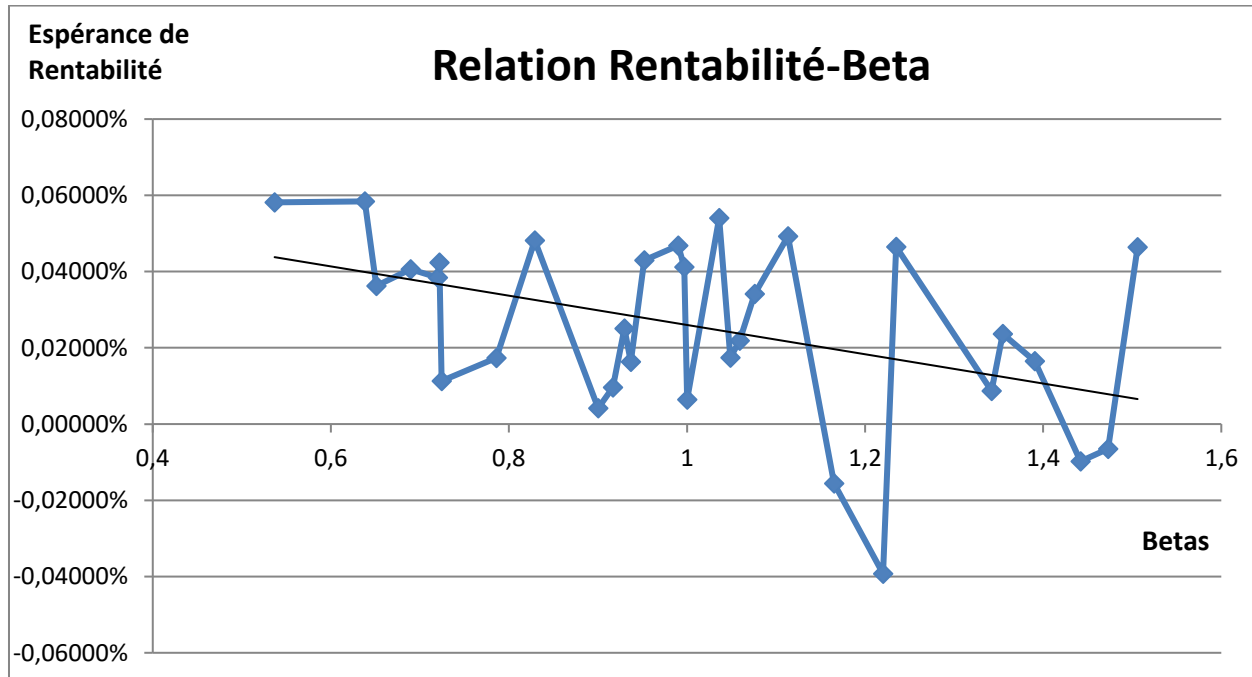
MCQG	Beta	t-Stat	Constante	t-Stat	R ²	LB	ARCH	JB
Accor	0,99	24,85	0,000403	1,73	0,47	13,56	16,49	5812,89
Airbus	0,95	30,9	0,000363	1,11	0,35	13,81	0,83	106016
Alcatel	1,22	36,93	-0,000446	-0,95	0,32	1,34	34,01	14326,7
Air Liquide	0,83	29,81	0,000409	2,9	0,65	13,11	57,43	6729,28
AXA	1,51	31,74	0,000425	1,81	0,68	21,07	62,13	41993,2
BNP	1,39	13,38	0,00012	0,46	0,61	29,64	311,01	36979,6
Bouygues	1,06	34,65	0,000157	0,63	0,51	0,3	57,04	1774,4
CA	1,44	21,91	-0,000141	-0,47	0,56	13,97	161,13	7641,56
Carrefour	0,9	26,56	-3,39E-05	-0,14	0,48	2,83	76,2	3926,46
Danone	0,65	31,47	0,000277	1,64	0,41	9,19	231,21	4778,36
Essilor	0,54	13,16	0,000501	2,64	0,31	11,92	105,44	16498,4
GDF	0,94	21,81	9,33E-05	0,47	0,5	30,29	20,3	164186
Gemini	1,04	41,79	0,000476	1,86	0,48	10,45	14,25	2722,26
St-Gobain	1,34	29,81	3,65E-05	0,18	0,67	12,37	222,05	15224,2
L'Oréal	0,72	22,52	0,000346	2,03	0,48	26,83	40,74	4951,32
LVMH	1	36,81	3,48E-04	1,91	0,62	13,24	38,34	10867,6
Michelin	1,08	24,89	0,000281	1,29	0,49	13,96	29,17	3655,4
Orange	0,73	18,83	3,50E-05	0,16	0,43	17,7	37,81	4480,43
PSA	1,17	27,4	-0,000211	-0,53	0,39	7,69	116,57	1614,53
Publicis	0,72	43,9	0,000306	1,52	0,43	28,88	70,5	1972,62
Renault	1,36	30,46	0,00019	0,55	0,55	12,36	122	2371,17
Ricard	0,69	14,87	0,000327	1,77	0,36	31,55	143,78	8181,13
Schneider	1,24	52,97	0,000412	2,13	0,68	25,79	41,25	976,5
Sodexo	0,64	16,67	0,000502	2,6	0,36	10,21	21,25	9219,78
SG	1,47	16,48	-0,000106	-0,39	0,56	65,51	304,57	13567,8
Technip	1,05	27,25	0,000113	0,35	0,39	17,01	30,72	6149,54
Total	0,93	20,68	0,000183	1,19	0,67	11,82	155,56	2095,14
Veolia	0,92	24,27	2,78E-05	0,09	0,39	8,31	1,58	160406
Vinci	1,11	27,05	0,000434	2,62	0,67	5,19	208,29	5024,85
vivendi	0,79	47,02	9,86E-05	0,52	0,52	4,9	16,85	7732,78

Pour un risque de 5%, Colonne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11,1$; Colonne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(2)=5,99$;
Colonne JB (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$.

Pour un seuil de 5%, la valeur de la statistique de Fisher est égale à 3.85 et tous les coefficients de détermination sont significativement différents de zéro.

D'après la théorie du MEDAF une action avec un beta fort (risque systématique élevé) doit avoir comme conséquence une rentabilité plus élevée qu'une action à beta faible. Le graphique 1 représente en ordonnées l'espérance des rentabilités des actions (son représentant la moyenne) en fonction des betas en abscisses.

Graphique 1-Relation Espérance de rentabilité-Beta:



Estimation par les MCO

L'estimation par les MCO de la droite de régression conduit aux résultats suivants :

Pente	t-Stat	Constante	t-Stat	R ²	LB	ARCH	JB
-0,038	-2,57	0,0644	4,128	0,19	3,6	4,5	0,96

La tendance baissière de cette droite possède des coefficients significativement différents de zéro. La constante qui représente l'espérance du taux sans risque et la pente (représentant l'espérance de la prime de risque du marché) s'établissent respectivement à 0.000644 et à -0.00038. Cette droite est robuste d'après les tests sur ses résidus.

Ce résultat est aussi en contradiction avec la théorie du MEDAF, car il implique une prime de risque du marché négative. La période considérée peut en être la cause. Elle rassemble en effet de nombreux chocs comme la crise financière de 2008 et la crise de la dette souveraine en 2011-2012. On peut, de ce fait, supposer qu'en période de crise, les actions les plus sensibles aux marchés subissent des pertes qui ne sont pas nécessairement compensées par

leurs gains, elles ne peuvent donc fournir une prime de risque suffisamment importante sur la période.

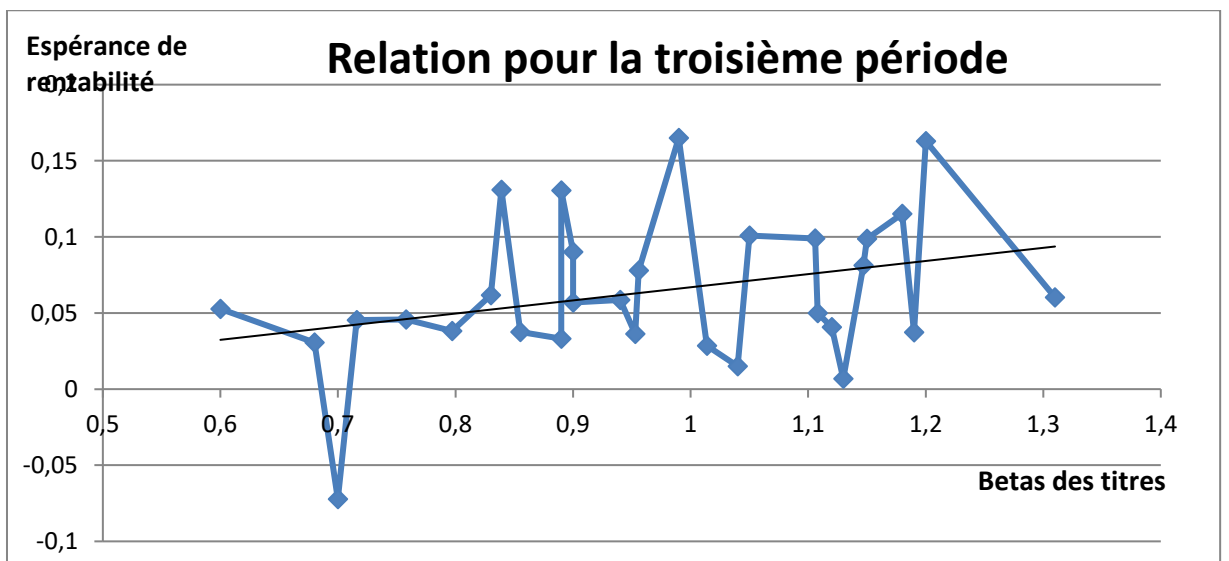
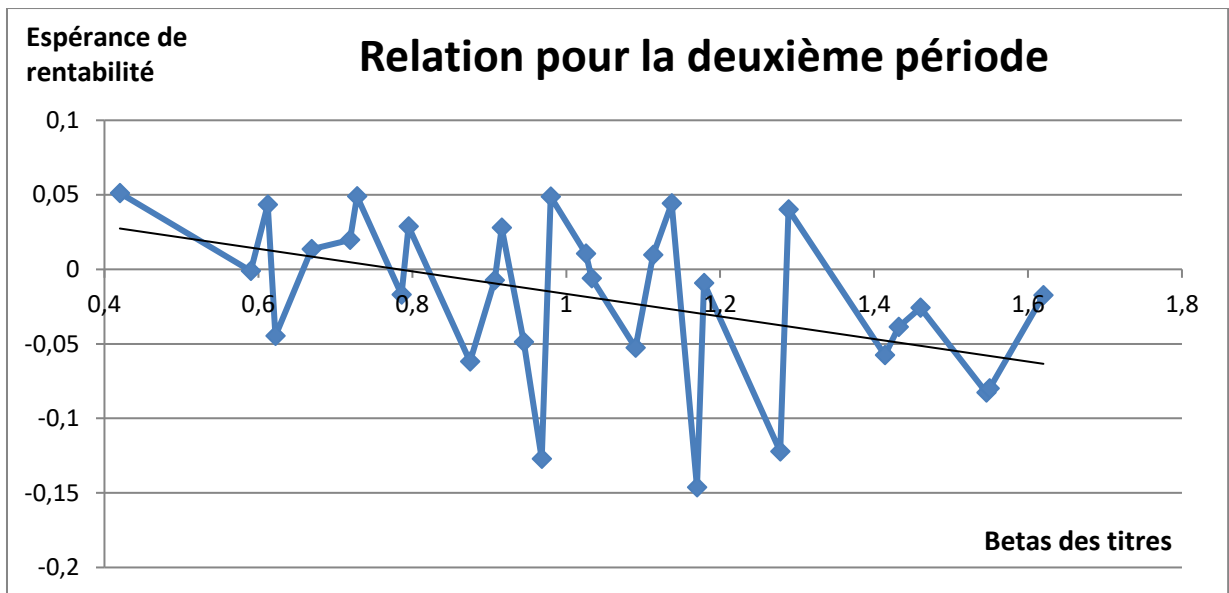
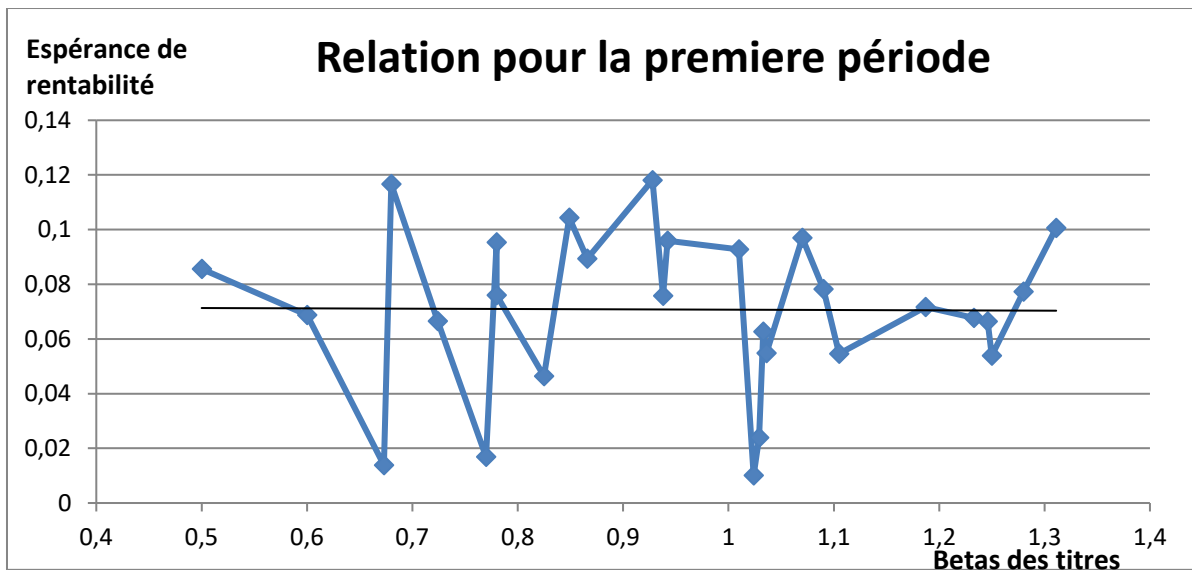
1.1.2 Estimation par période des paramètres :

Notre échantillon d'origine est divisé en 3 périodes, sur lesquelles nous estimons les paramètres de la droite de marché. La première période s'étend de janvier 2005 à décembre 2007 et correspond à une période « calme » où le marché est en expansion. La seconde période s'étale de janvier 2008 à décembre 2012 ; elle comprend l'éclatement de la bulle immobilière, la forte baisse qui s'en est suivie et la dette souveraine en Europe en 2010-2011. C'est une période sur laquelle les événements ont particulièrement perturbé le marché. La dernière période, de 2013 à 2015, couvre une période de relance de l'économie.

Les résultats des estimations des droites de marché sont consignés en annexe 4. Ils indiquent que le MEDAF est bien dépendant de la période considérée : sur les deux périodes « calmes » les résidus sont moins autocorrélés et plus homoscédastiques pour la majorité des actions. Les betas sont volatils, à l'image de certaines actions qui ont un beta plus fort durant la crise, comme les action financières et industrielles (Renault, PSA, Saint-Gobain...) alors que d'autres actions comme Danone et Essilor ont un beta plus faible. En moyenne sur les périodes calmes les betas sont plus faibles que sur la période crise, de même pour les coefficients de détermination qui sont plus forts durant cette période. Les fluctuations du marché ont alors une influence plus importante sur les actions lors des périodes agitées. On peut constater que les résidus présentent d'avantages de biais statistiques durant la période de crise, ce qui confirme l'impact de la crise sur la valeur des betas.

La validité du MEDAF par période peut, comme précédemment, être étudiée en recourant aux relations Espérance-Beta. Les graphes de ces relations avec estimation de la tendance par les MCO sont consignés dans les graphiques 2.

Graphique 2-Relation Espérance de rentabilité-Beta:



Estimation des tendances par les MCO :

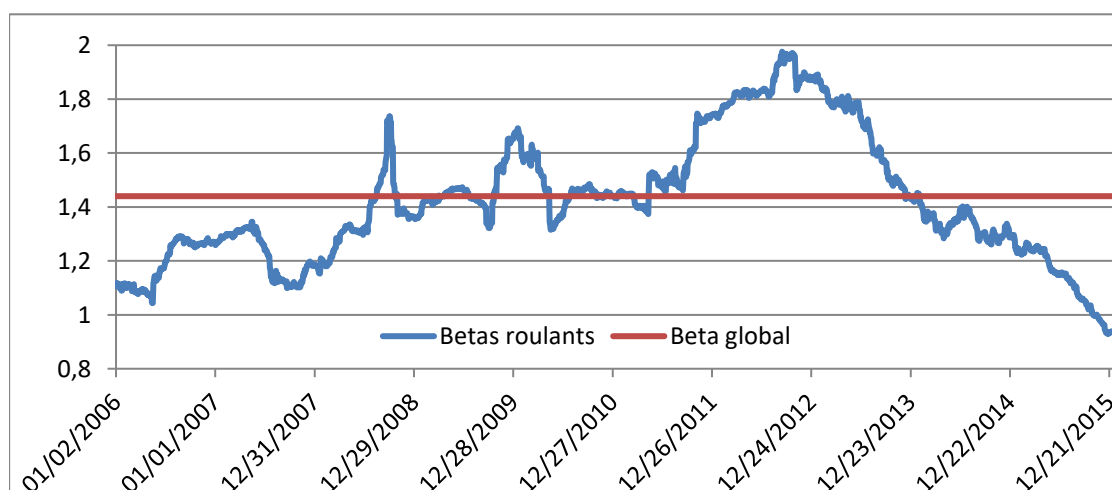
	Pente	t-Stat	Constante	t-Stat	R ²	LB	ARCH	JB
Période 1	-0,0012	-0,046	0,072	2,8	0	5,78	0,4	1,52
Période 2	-0,075	-2,6	0,059	1,88	0,19	6,72	0,79	2,89
Période 3	0,086	1,77	-0,019	-0,41	0,1	1,83	1,16	0,11

La relation espérance-beta sur la première période est constante, selon la t-stat de la pente, ce qui indique que le risque systématique n'a aucune influence sur la rentabilité d'un actif. En revanche, la pente est légèrement croissante sur la troisième période pour un seuil de 10%. La décroissance de la prime de risque durant la « crise » n'est pas le résultat attendu selon la théorie du MEDAF. Cela indique que plus le risque est fort plus une action à une rentabilité faible (voire négative). Ce constat n'est pas en soit choquant car en période de crise le risque est avéré, et pour des actions fortement sensibles aux fluctuations du marché, leurs rentabilités ne peuvent être que faibles. En définitive les relations Espérance-Beta rejettent la validité du MEDAF avec quelques nuances pour la période de crise.

1.1.3 Analyse de l'instabilité temporelle du beta :

Les betas estimés jusqu'à présent obéissent à l'hypothèse ad hoc de stabilité temporelle de la régression. Pour vérifier ou rejeter cette hypothèse, nous recourons à des régressions roulantes forwards avec une fenêtre de 260 jours soit 1 an en jours ouvrés de trading. Le graphique 3 présente, à titre d'exemple, pour l'action Crédit Agricole, le beta par année glissante sur la période globale. En le comparant au beta constant estimé du tableau 1, on peut visualiser le phénomène d'instabilité du beta, et ce constat perdure pour toutes les actions sur les 3 sous-périodes (Cf. Annexe 5).

Graphique 3 : Betas Roulants du crédit agricole :



Pour caractériser la volatilité du beta en fonction des différentes actions nous élaborons des tableaux pour les 4 périodes (la globale et les 3 sous-périodes) selon les considérations suivantes :

- Les betas estimés sont testés par rapport à 1 et classés par décroissance de leur écart-type calculé par les régressions roulantes. On obtient ainsi 3 groupes de titres classés selon leur degré de volatilité (les 3 premières colonnes des tableaux suivants).
- Pour sélectionner les betas égaux à 1, la t-stat se révèle parfois insuffisante en raison de titres dont le beta fluctue autour de 1 sans se stabiliser. Nous choisissons de comptabiliser dans les 3 colonnes suivantes, les pourcentages de beta inférieurs, supérieurs et égaux à 1. Nous regroupons alors un ensemble de titres (un reste) qui ne peut pas appartenir aux 2 autres groupes pour lesquels les actions ont un beta supérieur à 1 ou inférieure à 1 et qui sont plus résistants.
- Pour caractériser la volatilité des betas, nous portons dans les 3 dernières colonnes les pourcentages de beta à l'intérieur ou à l'extérieur d'un intervalle de confiance du beta de la droite de marché estimée sur la période. La volatilité peut ainsi résulter d'un excès supérieur ou inférieur par rapport au beta de la période.

Le tableau 2 résume pour la période globale les résultats obtenus en suivant cette procédure. Le premier groupe rassemble les actions pour lesquelles le beta est inférieur à 1, le second celles avec un beta égal à 1 et le troisième les actions pour le beta supérieur à 1. L'annexe 6.1 consigne les résultats pour les sous-périodes.

Tableaux 2 : Représentation de la volatilité des betas pour la période globale :

Classes	Période globale	Beta Global	t-stat à 1	ET des betas	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% inf à IC	% dans IC	% sup à IC
Betas Inférieurs à 1	Publicis	0,72	-17,93	0,07	100,00	0,00	0,00	51,89	23,66	24,45
	GDF	0,94	-3,57	0,09	58,80	40,94	0,27	44,04	25,03	30,93
	Vivendi	0,79	-15,26	0,11	93,18	3,11	3,72	35,19	16,72	48,10
	Air Liquide	0,83	-14,93	0,11	83,40	16,60	0,00	34,65	8,78	56,57
	Ricard	0,69	-17,89	0,11	100,00	0,00	0,00	76,73	7,75	15,52
	L'Oréal	0,72	-19,97	0,12	97,82	2,19	0,00	41,24	12,77	45,99
	Danone	0,65	-23,84	0,12	99,62	0,38	0,00	30,85	49,06	46,99
	Total	0,93	-5,77	0,13	60,98	24,49	14,53	49,41	12,50	38,10
	Sodexo	0,64	-22,65	0,16	97,39	2,11	0,50	60,60	8,36	31,04
	Airbus	0,95	-2,00	0,17	47,79	20,55	31,66	40,20	19,02	40,78
	Veolia	0,92	-3,90	0,20	80,38	2,77	16,86	68,69	11,89	19,43
	Essilor	0,54	-31,03	0,21	93,48	6,52	0,00	40,05	6,21	53,74
	Carrefour	0,90	-5,75	0,21	56,42	13,91	29,67	53,35	2,61	44,04
	Orange	0,73	-17,60	0,21	70,83	12,46	16,71	36,22	11,81	51,97
Betas égaux à 1	LVMH	1,00	-0,21	0,11	27,75	51,78	20,47	36,41	29,32	34,27
	Gemini	1,04	1,80	0,19	36,60	18,86	44,54	45,61	10,62	43,77
	Accor	0,99	-0,52	0,21	59,41	8,93	31,66	40,20	19,02	40,78
Betas supérieurs à 1	Schneider	1,24	14,72	0,14	4,40	8,06	87,54	41,81	20,05	38,14
	Bouygues	1,06	3,02	0,14	32,00	20,09	47,91	43,30	20,98	35,72
	PSA	1,17	6,04	0,15	12,46	12,11	75,43	39,06	26,44	34,50
	Vinci	1,11	7,85	0,16	19,66	19,86	60,48	50,94	18,21	30,85
	Renault	1,36	15,48	0,17	0,00	4,22	95,78	55,62	17,56	26,83
	Alcatel	1,22	6,66	0,17	8,43	17,79	73,78	41,17	23,80	35,03
	Michelin	1,08	3,70	0,17	24,65	30,29	45,07	51,28	18,33	30,39
	St-Gobain	1,34	19,45	0,18	3,68	11,27	85,05	42,81	39,56	17,63
	AXA	1,51	26,20	0,21	0,00	0,00	100,00	69,49	4,14	26,37
	BNP	1,39	18,84	0,21	0,00	0,00	100,00	53,00	15,65	31,35
	Technip	1,05	1,99	0,22	35,42	21,51	43,08	44,57	21,55	33,88
	CA	1,44	18,46	0,23	0,81	2,04	97,16	49,37	29,43	29,44
	SG	1,47	19,28	0,30	0,00	0,00	100,00	52,08	6,60	41,32

Note : IC = Intervalle de Confiance

Le premier constat qui émerge de ces calculs concerne le nombre d'actions différentes en nature et en nombre selon les classes de beta et les périodes. Il conforte l'hypothèse d'instabilité de la droite de marché au cours du temps. Pour la première période, on remarque qu'il y a environ autant d'actions dans chaque classe et donc une diversité de profil d'action plutôt équitable. En revanche en période de crise, il y a beaucoup moins d'action avec des betas égaux à 1, et d'avantages de betas supérieurs à 1. Les actions ont, de plus, des betas plus volatils durant la crise ce qui se traduit par une non-robustesse plus accentuée et un pourcentage de betas moins nombreux dans l'intervalle de confiance. Considérons pour illustrer notre classification les actions Publicis (avec un beta inférieur à 1) LVMH (avec un beta égal à 1) et Schneider (avec un beta supérieur à 1). La première possède un écart-type faible expliqué par un pourcentage maximum de betas inférieurs à 1 et une volatilité due à des valeurs inférieures à l'intervalle de confiance. L'action LVMH accepte l'hypothèse du beta égal à un et les pourcentages de beta sont équirépartis autour de l'intervalle de confiance, ce qui caractérise sa volatilité. L'action Schneider (avec un beta supérieur à 1) à l'écart-type le plus faible de son groupe. Elle est majoritairement constituée de betas supérieurs à 1. Dans ce cas, sa volatilité est proche de l'action précédente.

Pour consolider ces classifications, nous proposons, un essai de synthèse qualitative des caractéristiques de la volatilité des betas classées, en regroupant les informations des sept dernières colonnes du tableau 2 (Cf. Annexes 6.2). Une action est considérée comme robuste si la grande majorité de ses betas roulants sont dans la même classe que le beta global pour la période (par exemple Publicis). A contrario, certaines actions ont des betas instables car ils changent de catégorie. Il en est ainsi de l'action Gemini qui possède sur la période globale un beta égal à un avec une volatilité importante illustrée par seulement 10.62% de ses valeurs dans l'intervalle de confiance autour du beta estimé. Ce résultat est globalement différent lorsqu'on le compare par période. Sur la première période le beta est significativement supérieur à 1 avec une volatilité faible alors que sur la troisième le beta est significativement inférieur à 1 avec toujours une faible volatilité. C'est sur la période plus mouvementée que le beta est égal à 1 avec une volatilité plus forte. Cet exemple est représentatif de la volatilité temporelle des betas des différentes actions même s'il est possible de trouver des actions résistantes (comme Publicis). On peut aussi réaliser des synthèses en fonction du secteur économique, le secteur financier présente des betas majoritairement supérieurs à 1 mais très volatils (comme le secteur automobile), à l'inverse le secteur Média-Publicité présente des actions à betas majoritairement inférieurs à 1 avec une volatilité assez faible. Il est possible de

construire, à partir de ces tableaux, un canevas d'actions dans lequel le gestionnaire de portefeuille peut puiser selon son choix. En rajoutant l'hypothèse de l'horizon temporel, nous amplifions et améliorons ses possibilités d'investissement.

1.2 Analyse du MEDAF fréquentiel :

L'analyse temps-fréquences des primes de risque des titres et du CAC 40 utilise la technique des ondelettes. Il s'agit d'une prolongation de l'analyse spectrale issue des travaux de Fourier dans le sens où elle permet d'évaluer l'évolution temporelle des valeurs spectrales pour différentes fréquences.

Une ondelette Ψ de moyenne nulle et normalisée s'écrit* :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0$$

Elle est traduite par un paramètre τ et dilatée par un paramètre d'échelle s :

$$\Psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

La transformée en ondelettes continue d'une fonction temporelle $x(t)$ réalisation d'une fonction aléatoire de même nom par rapport à une ondelette $\Psi(t)$ d'échelle s et de position τ est fournie par la convolution :

$$W_x(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \Psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt$$

Avec Ψ^* le conjugué complexe de $\Psi(t)$.

Ainsi la transformée en ondelette est une somme infinie d'ondelettes découlant d'une fonction-mère choisie « arbitrairement » (mais sous certaines conditions).

La transformée inverse en ondelettes s'écrit alors de la manière suivante :

$$x(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{\tau,s}(t) W_x(\tau, s) \frac{d\tau ds}{s^2}$$

Avec $C_\Psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(f)|^2}{f} df < +\infty$ la condition d'existence de l'ondelette, f la fréquence angulaire et $\widehat{\Psi}(f)$ la transformée de Fourier de la partie complexe de $W_x(\tau, s)$.

Nous utilisons cette méthodologie des ondelettes pour une décomposition temps-fréquence des variables de la droite de marché. Une application similaire à la précédente (Cf. Section I partie 3) permet de préciser les caractéristiques des différents betas.

1.2.1 Décomposition par ondelettes des actifs :

Pour des échantillons x_t de processus aléatoire on utilise une transformée en ondelettes MODWT (Maximum Overlap Discret Wavelet Transform). Elle fournit une décomposition additive en ondelettes qui peut être formalisée par l'équation suivante :

$$x_t = A_{J,t} + \sum_{i=1}^{i=J} D_{i,t}$$

x_t correspond à notre signal de départ (la série chronologique). Celui-ci est constitué d'une approximation de sa tendance noté $A_{J,t}$ et d'une somme des sous-séries notées $D_{i,t}$ pour ($i = 1 \dots J$). Ces sous-séries sont des détails supplémentaires ajoutés à l'approximation basique, on peut les assimiler à la précision de la reconstruction et l'indice J correspond au nombre optimal de détails nécessaires à la reconstruction de x_t . On le calcule comme suit : $J = \frac{\text{Ln}(n)}{\text{Ln}(2)}$ où n correspond au nombre d'observations. Ce procédé consiste à projeter, à l'aide des ondelettes, le signal dans des sous-espaces emboîtés de résolution croissante. Ces sous-espaces peuvent être assimilés à la quantité d'information disponible pour un niveau de résolution donné : plus le niveau est élevé plus nous captions d'informations sur le signal. Nous sommes alors en mesure d'étudier le comportement du signal par niveaux de fréquence tout en ayant une localisation temporelle par bandes.

Le tableau 3 consigne le degré de résolution retenu (nombre de bandes fréquence) et les jours et les mois auxquels ils correspondent

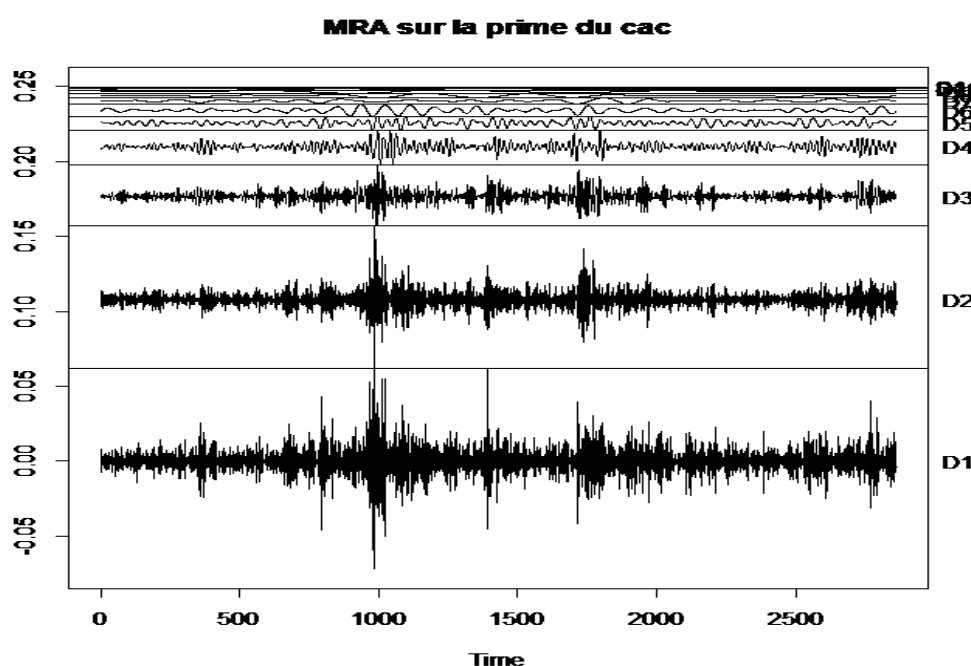
Tableau 3 – Correspondance en jour et en mois des bandes de fréquences

Résolution	Jours fréquentiels		Correspondance en mois	
	bornes inf	bornes sup	bornes inf	bornes sup
D1	2	4	0,09	0,18
D2	4	8	0,18	0,36
D3	8	16	0,36	0,73
D4	16	32	0,73	1,45
D5	32	64	1,45	2,91
D6	64	128	2,91	5,82
D7	128	256	5,82	11,64
D8	256	512	11,64	23,27
D9	512	1024	23,27	46,55
D10	1024	2048	46,55	93,09
D11	2048	4096	93,09	186,18
S11	4096	-	186,18	-

S11 étant l'approximation c'est-à-dire la bande de plus faible résolution.

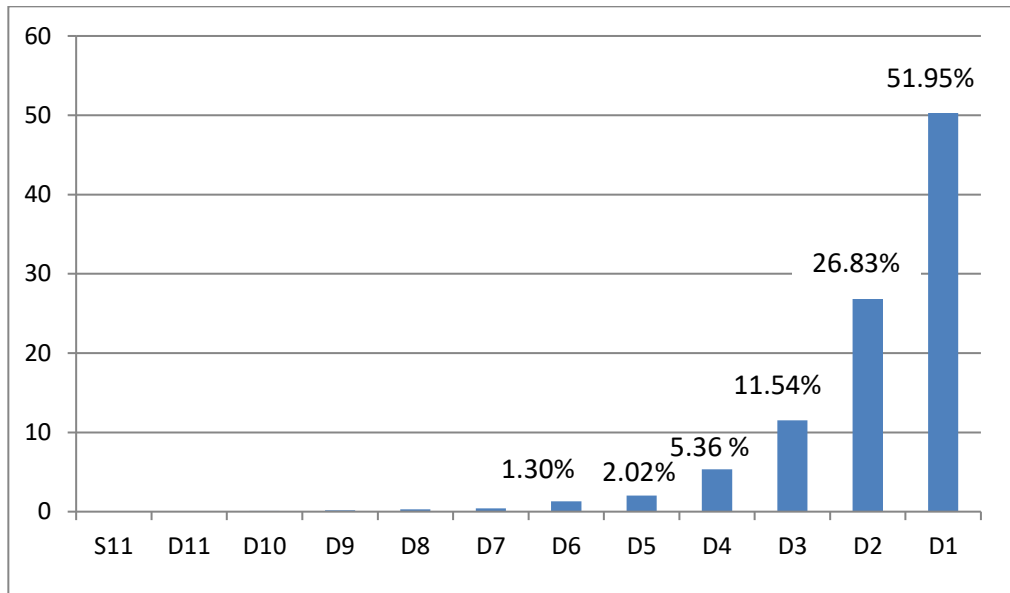
Le graphique 4 décompose, à titre d'exemple, la prime de risque du CAC 40. Il décrit la représentation standard que l'on obtient en utilisant la MODWT. Les bandes du graphique D1, D2... sont plus visibles car elles représentent les variations des primes de risque aux hautes-fréquence qui possèdent les variances les plus fortes, les bandes D7, D8... caractérisent les basses fréquences.

Graphique 4-Décomposition de la prime de risque du CAC:



Le calcul des pourcentages relatifs de la variance de chaque bande dans la variance totale de la série permet de mieux distinguer les bandes de haute et de basse volatilité. Le graphique 5 ci-dessous illustre les poids relatifs des variances fréquentielles du CAC 40.

Graphique 5-Variances par bandes de fréquences du CAC 40:



On constate que plus on augmente l'échelle temporelle plus la variance de la bande est faible. On peut donc admettre que les bandes de court terme sont plus volatiles que les bandes de long-terme, et ce constat reste identique pour le reste des actions.

1.2.2 Régressions fréquentielles sur la période 2005-2015 :

L'estimation des paramètres de la droite de marché fréquentielle est réalisée sur les bandes D1 à D6 qui correspondent à des comportements de trading de 2 jours à 6 mois. Les betas sont tous significatifs et on constate la nullité des constantes pour toutes les actions, quels que soient les horizons d'investissement. Ce résultat est conforme aux hypothèses de la régression entre variables centrées car, par construction, les moyennes des ondelettes et de la prime de risque du CAC 40 sont nulles. L'utilisation des ondelettes n'améliore pas les problèmes liés à l'hétéroscédasticité et à l'autocorrélation des résidus et on peut constater une dégradation significative de certaines valeurs des tests. En revanche, la non-normalité est réduite sur les basses fréquences pour certaines actions. Les coefficients de détermination sont différents selon les actions, ils sont en moyenne plus élevés (autour des 0.6-0.7) pour les actions ayant des betas forts. Nous présentons dans l'annexe 7, un exemple de tableau récapitulatif de l'estimation des betas fréquents pour l'action Accor.

Les actions sont alors classées en fonction de leur significativité à 1 quelle que soit la fréquence. Nous distinguons les actions ayant des betas globaux inférieurs à 1 (respectivement supérieurs à 1) possédant tous leurs betas fréquentiels dans la même classe. Nous regroupons par la suite les actions qui n'appartiennent pas aux classes précédentes et dont les betas fréquentiels sont répartis selon des classes différentes. Dans le tableau 4 qui récapitule ce classement, la colonne "ET betas" correspond à l'écart-type des betas fréquentiels retenus et la colonne "beta global" rappelle les betas estimés dans la première partie de l'étude. Les écarts-types permettent d'apprécier la volatilité des betas fréquentiels et mettent en évidence les changements dans leur structure. On peut constater qu'il y a plus d'actions avec des betas toujours inférieurs à 1 et que leurs écarts-types sont plutôt faibles comparés à ceux de la classe des betas toujours supérieur à 1 : les différences entre ondelettes sont donc plus significatives dans ce cas. Les actions de la troisième classe possèdent majoritairement un beta fréquentiel se distinguant de la dynamique globale ce qui ne permet pas de les considérer comme robuste. Ce constat met en évidence la présence d'une rupture ou d'un changement sur la fréquence correspondante, à l'image de Veolia et de Vinci sur la bande D5. Les actions Accor, Gemini et LVMH classées précédemment dans la classe des betas égaux à 1, avec des betas fréquentiels peu volatils, appartiennent à cette dernière catégorie. Ces actions possèdent des betas fréquentiels supérieurs à 1, et se situent à la limite d'acceptation des tests de significativité à 1. Par ailleurs, on constate que les actions Total, Veolia et Air Liquide classées avec les betas supérieurs à 1 et que les actions Michelin, PSA, Technip, Vinci et Bouygues classées avec les betas inférieurs à 1 sont à présent regroupées dans la classe des betas volatils. Ces exemples montrent que les changements sont notoires.

Tableau 4- Betas fréquentiels pour la Période Globale :

	Actions	D1	D2	D3	D4	D5	D6	ET betas	beta global
Betas toujours inférieurs à 1	Airbus	0,93	0,94	1,05	0,97	1,16	1,19	0,11	0,95 (<1)
	Carrefour	0,9	0,92	0,85	0,95	0,88	0,75	0,07	0,9 (<1)
	Danone	0,68	0,67	0,57	0,46	0,6	0,73	0,10	0,65 (<1)
	Essilor	0,55	0,5	0,45	0,6	0,72	0,48	0,10	0,54 (<1)
	GDF	0,93	0,98	0,87	0,95	0,96	0,8	0,07	0,94 (<1)
	L'Oréal	0,76	0,73	0,61	0,55	0,7	0,81	0,10	0,72 (<1)
	Orange	0,75	0,73	0,68	0,64	0,63	0,59	0,06	0,72 (<1)
	Publicis	0,69	0,73	0,76	0,83	0,82	0,86	0,07	0,72 (<1)
	Ricard	0,66	0,71	0,73	0,69	0,8	0,99	0,12	0,69 (<1)
	Sodexo	0,61	0,69	0,66	0,65	0,65	0,61	0,03	0,64 (<1)
	Vivendi	0,8	0,79	0,76	0,73	0,72	0,75	0,03	0,79 (<1)
Betas toujours supérieurs à 1	Alcatel	1,11	1,24	1,41	1,34	1,66	1,75	0,25	1,22 (>1)
	Axa	1,45	1,56	1,54	1,61	1,52	1,77	0,11	1,51 (>1)
	BNP	1,37	1,37	1,49	1,6	1,05	1,07	0,22	1,39 (<1)
	CA	1,37	1,47	1,59	1,7	1,29	1,52	0,15	1,44 (>1)
	Renault	1,22	1,39	1,56	1,62	1,47	2,01	0,27	1,35 (>1)
	Schneider	1,25	1,24	1,18	1,24	1,15	1,08	0,07	1,24 (>1)
	SG	1,38	1,45	1,7	1,71	1,54	1,91	0,20	1,47 (>1)
St-Gobain	1,31	1,35	1,35	1,5	1,44	1,49	0,08	1,34 (>1)	
Betas volatils par rapport à 1	Gemini	0,98	1,08	1,1	1,07	1,23	1,18	0,09	1,04 (=)
	LVMH	0,98	1,02	1,04	1	1,05	0,97	0,03	1 (=1)
	Accor	0,91	1,06	1,11	1,07	1,05	1,18	0,09	0,99 (=)
	Michelin	1,01	1,11	1,23	1,12	1,06	1,16	0,08	1,08 (>1)
	PSA	1,04	1,24	1,4	1,36	1,39	1,08	0,16	1,17 (>1)
	Technip	0,99	1,06	1,2	1,16	1	1,05	0,09	1,05 (>1)
	Total	0,94	0,94	0,87	0,95	0,99	0,83	0,06	0,93 (<1)
	Veolia	0,86	0,86	1,06	1,11	1,17	1,34	0,19	0,92 (<1)
	Vinci	1,12	1,14	1,12	1,04	0,91	1,04	0,09	1,11 (>1)
	Bouygues	1,06	1,04	1,08	1,11	1	1,11	0,04	1,06(>1)
Air liquide	0,87	0,81	0,78	0,78	0,83	0,6	0,09	0,83 (<1)	

Pour résumer et synthétiser les changements précédents nous avons réalisé une analyse en composante principale (ACP) du tableau 4 (Cf. Annexe 8). La première composante principale (91% de la variance totale) est un axe de taille qui rassemble les fréquences retenues. Les corrélations entre ces fréquences sont fortes pour les bandes D2, D3 et D4 et moins élevées pour les bandes D1 d'une part et D5, D6 d'autres part. Ces trois dernières contribuent à la deuxième composante (5.5% de la variance totale) que l'on peut considérer comme l'opposition des hautes-fréquences (D1) avec les moyennes-fréquences (D5 et D6). La projection des actions sur ce plan factoriel clarifie la classification réalisée dans le tableau 4. L'axe 1 oppose les actions possédant un beta supérieur à 1 sur toutes les ondelettes (comme la Société General par exemple) aux actions dont le beta est inférieur à 1 dans la plupart des bandes de fréquences (comme Essilor). L'axe 2 distingue les actions selon leur dynamique fréquentielle. Les actions situées dans le premier cadran du plan ont des betas plus importants aux basses fréquences (comme Alcatel) et s'opposent à celles du quatrième cadran qui ont majoritairement des betas plus élevés aux hautes fréquences (comme BNP).

En plaçant comme point supplémentaire le beta global de la dernière colonne du tableau 4, on constate que sa projection sur le plan factoriel est confondue avec les hautes fréquences (notamment avec D1 et D2). Les gestionnaires lorsqu'ils font appel à la droite de marché pour gérer leurs portefeuilles, ont implicitement un comportement de trading de court-terme. Cette ACP traduit clairement la diversité des choix qui peuvent être opérés selon l'horizon d'investissement auquel on se place.

Une autre façon de comparer les betas fréquentiels avec les betas globaux des actions consiste à réaliser un test de signification des coefficients entre les betas. Les résultats de ces tests sont consignés dans l'annexe 9. Nous remarquons pour les bandes D1 et D2 que les différences ne sont pas significatives pour la majorité des actions pour des horizons de court terme. La bande D1 comprend 30% de betas significatifs et la bande D2 10%. A l'opposé les bandes de long-terme possèdent 60 à 80% de betas significativement différents des betas globaux. Ce résultat conforte notre hypothèse précédente que l'utilisation des betas globaux revient à considérer le risque systématique sur des horizons courts.

1.2.3 Régressions fréquentielles par périodes :

Nous réitérons la méthodologie précédente sur les 3 périodes pour vérifier l'importance de l'effet de l'environnement économique sur les droites de marché. Les résultats et les betas selon les périodes sont consignés dans l'annexe 10. Pour les commenter nous recourons aux tests précédents de la différence significative ou non entre les betas fréquents et les betas globaux (Cf. Annexe 11).

Dans ces tableaux certaines actions présentent des betas croissants sur une période mais décroissant sur une autre, à l'inverse d'autres ont des betas qui varient peu en fonction des fréquences et du temps. Le risque systématique dépend fortement de la fréquence retenue, les actions sont alors différemment sensibles au marché suivant l'horizon d'investissement. Les investisseurs doivent par conséquent inclure dans leurs raisonnements la volatilité temporelle mais aussi fréquentiel du risque systématique. On peut remarquer que les actions avec des betas fréquents supérieurs (ou inférieurs) à 1, possèdent des betas globaux dans la même catégorie. La troisième catégorie rassemble les actions initialement classées comme ayant des betas globaux égaux à 1 et dont les betas fréquents ne sont pas tous dans cette catégorie. Celles ayant des ruptures dans leurs betas fréquents sont aussi classées dans cette catégorie, à l'image de la BNP ayant une rupture en D5. Les bandes D4 et D5 semblent être des bandes de rupture dans l'évolution des betas fréquents.

Les différences entre les betas fréquents et le beta global sont plus significatives durant la période de « crise ». Les betas fréquents permettraient ainsi d'apprécier avec plus de précision le risque systématique durant ce type de période. On peut, de plus, constater que pour des horizons d'investissement long les betas fréquents diffèrent majoritairement du beta global, ce qui accroît l'intérêt de recourir aux ondelettes pour mesurer le risque systématique pour des investissements de long-terme. Le tableau ci-dessous résume les pourcentages de betas fréquents significatifs par rapport aux betas globaux.

% de betas significatifs	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Période 1	0,00	3,33	16,67	33,33	60,00	73,33
Période 2	16,67	10,00	60,00	70,00	53,33	80,00
Période 3	6,67	6,67	40,00	46,67	56,67	63,33
Période Globale	30,00	10,00	66,67	60,00	63,33	80,00

Les analyses en composantes principales réalisées sur ces 3 périodes (Cf. Annexe 12) confortent le résultat de la période globale concernant la mise en supplémentaire des betas globaux. Leurs proximités avec les bandes de hautes fréquences permettent de conclure que quelle que soit la période d'étude, le comportement des gestionnaires de portefeuilles reste de court-terme.

1.2.4 Analyse de la volatilité des betas fréquentsiels

Nous étudions la volatilité des betas fréquentsiels en recourant aux régressions roulantes à partir d'une fenêtre de 260 jours. Compte tenu du nombre important d'actions et de bandes de fréquence, nous retenons les seules bandes D1 (pour les horizons courts) et D6 (pour les horizons longs) des actions suivantes sélectionnées à partir des tableaux 2 et de l'annexe 6 de la première partie : Axa avec un beta supérieur à 1, Essilor avec un beta majoritairement inférieur à 1 et LVMH avec un beta égal à 1.

Les tableaux 5 consignent les résultats obtenus pour les betas fréquentsiels pour la période dans son ensemble et pour les trois sous-périodes.

*Tableaux 5: Représentation de la volatilité des betas fréquentsiels :
5-1 : Période globale*

Période entière	Beta Global	t-stat à 1	ET des betas	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% beta <= 0	% inf	% dans IC	% sup
LVMH D1	0,98	-1,62	0,1	37,03	41,78	21,2	0,00	36,41	29,32	34,27
Axa D1	1,45	24,44	0,18	0,00	0,00	100,00	0,00	65,93	7,36	26,72
Essilor D1	0,55	-29,72	0,23	88,54	10,58	0,88	0,00	40,02	3,91	56,08
LVMH D6	0,97	-2,6	0,38	45,34	7,67	46,99	0	36,41	29,32	34,27
Axa D6	1,77	36,99	0,59	16,86	3,87	79,26	0,00	70,37	2,61	27,02
Essilor D6	0,48	-34,06	0,43	88,62	3,60	7,78	15,44	60,83	4,60	34,57
LVMH	1	-0,21	0,11	27,75	51,78	20,47	0,00	36,41	29,32	34,27
AXA	1,51	26,2	0,21	0,00	0,00	100	0,00	69,49	4,14	26,37
Essilor	0,54	-31,03	0,21	93,48	6,52	0,00	0,00	40,05	6,21	53,74

5-2 : Période 1

Période 1	Beta Global	t-stat à 1	ET des betas	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% beta <= 0	% inf	% dans IC	% sup
LVMH D1	1	0	0,14	25,53	18,43	56,05	0,00	23,61	21,11	55,28
Axa D1	1,32	8,75	0,10	0,00	0,00	100,00	0,00	29,17	41,65	29,17
Essilor D1	0,66	-9,30	0,06	100,00	0,00	0,00	0,00	2,30	70,25	27,45
LVMH D6	0,99	-0,32	0,31	6,72	8,25	85,03	0,00	6,14	9,02	84,84
Axa D6	1,45	9,85	0,61	43,76	1,73	54,51	0,00	47,02	1,15	51,82
Essilor D6	0,17	-26,27	0,27	100,00	0,00	0,00	67,37	73,70	12,67	13,63
LVMH	1,04	1,19	0,13	19,96	19,77	60,27	0,00	22,26	19,58	58,16
AXA	1,31	7,85	0,1	0	0	100	0,00	41,46	35,32	23,22
Essilor	0,6	-9,23	0,05	100	0	0	0,00	0	63,53	36,47

5-3 : Période 2

Période 2	Beta Global	t-stat à 1	ET des betas	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% beta <= 0	% inf	% dans IC	% sup
LVMH D1	0,95	-2,41	0,06	44,39	40,75	14,86	0,00	25,98	31,74	42,28
Axa D1	1,55	19,44	0,18	0,00	0,00	100,00	0,00	45,06	27,23	27,71
Essilor D1	0,43	-29,02	0,05	100,00	0,00	0,00	0,00	69,89	24,83	5,27
LVMH D6	0,92	-4,83	0,32	60,69	11,6	27,71	0,00	57,72	3,6	39,21
Axa D6	2,00	34,38	0,48	0,00	0,00	100,00	0,00	49,95	9,30	40,75
Essilor D6	0,41	-30,28	0,21	100,00	0,00	0,00	0,00	50,91	8,53	40,56
LVMH	0,98	-,99	0,04	24,92	66,93	8,15	0,00	18,89	53,12	28
AXA	1,62	21,22	0,17	0	0	100	0,00	43,14	8,35	48,51
Essilor	0,42	-29,84	0,04	100	0	0	0,00	60,3	35,1	4,6

5-4 : Période 3

Période 3	Beta Global	t-stat à 1	ET des betas	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% beta <= 0	% inf	% dans IC	% sup
LVMH D1	1,05	1,6	0,11	46,45	36,66	16,89	0	67,37	21,5	11,13
Axa D1	1,15	5,56	0,1	0	0	100	0	27	29,4	43,95
Essilor D1	0,98	-0,68	0,12	57	38,8	4,2	0	46	46,6	7,29
LVMH D6	1,22	6,89	0,13	11,13	6,71	82,15	0	37,62	50,01	12,18
Axa D6	0,94	-2,45	0,2	75	4,41	21	0	50	28,2	21,31
Essilor D6	0,98	-1,14	0,29	33	24,2	43	0	26	26,5	47,22
LVMH	1,04	1,25	0,14	56,05	31,1	12,86	0	63,72	25,53	10,75
AXA	1,15	5,48	0,13	0	0	100	0	36	17,7	46,26
Essilor	0,94	-1,98	0,1	68	32,4	0	0	51	42,6	6,72

Ces résultats étendus à l'ensemble des actions peuvent être synthétisés par un investisseur en fonction de ses préférences et de critères qu'il considère comme les plus pertinents. A titre d'exemple, si nous associons avec un écart-type des betas roulants supérieurs à 0.15 pour une volatilité forte et un écart-type inférieur à 0,1 pour une volatilité faible, les caractéristiques des valeurs des betas et les pourcentages de leurs positions par rapport à l'intervalle de confiance, on peut dresser les tableaux 6 suivants :

Tableaux 6 : Synthèse de la volatilité

Période entière	Global	D1	D6	Robustesse
LVMH	faible	faible	forte	Non
AXA	forte	forte	forte	Non
Essilor	forte	forte	forte	Non

Période 1	Global	D1	D6	Robustesse
LVMH	moyenne	moyenne	forte	Non
AXA	faible	faible	forte	Non
Essilor	faible	faible	forte	Non

Période 2	Global	D1	D6	Robustesse
LVMH	faible	faible	forte	Non
AXA	forte	forte	forte	Oui
Essilor	faible	faible	forte	Oui

Période 3	Global	D1	D6	Robustesse
LVMH	moyenne	moyenne	moyenne	Non
AXA	moyenne	moyenne	forte	Non
Essilor	faible	moyenne	forte	Non

Nous confirmons, à partir des actions sélectionnées selon leurs betas estimés dans la première partie de cette étude, que la droite de marché reste instable. Ce constat lié à la volatilité fréquentielle concerne aussi bien la période globale que les trois sous-périodes retenues malgré l'exception de la période 2 pour les actions Axa (beta supérieur à 1) et Essilor (beta inférieur à 1). La volatilité du paramètre beta est plus accentuée pour la période totale que pour les trois sous-périodes où elle présente une diversité résultant des critères que nous avons retenus. Globalement la moyenne fréquence D6 possède les volatilités les plus importantes contrairement à celle de court-terme D1 : ce contraste, révélateur d'un risque spécifique lors

de la construction de portefeuilles, doit être pris en compte par les investisseurs lorsqu'ils se positionnent selon l'horizon qu'ils adoptent.

1.3 Conclusion :

L'estimation de la droite de marché sur la période 2005-2015 présente des insuffisances statistiques dues principalement à l'autocorrélation et à l'hétéroscédasticité des résidus. La volatilité du beta que nous avons illustrée à l'aide de régressions roulantes est vraisemblablement l'une des causes de la nature des résidus. Ces résultats qui entachent les propriétés statistiques des estimations de la droite de marché ne modifient pas fondamentalement les valeurs des betas estimés. Nous utilisons, de ce fait, ces dernières pour caractériser les structures temporelles des actions et nous offrons aux concepteurs de portefeuille différentes classifications utiles pour leurs prises de décision, en rajoutant l'hypothèse d'hétérogénéité des agents. Elle est étudiée par l'estimation temps-fréquences de la droite de marché sur la période considérée et sur des sous-périodes. Nous montrons qu'il existe une différenciation des betas selon la fréquence et la période retenues. Un gestionnaire qui, de ce fait, utilise le beta classique d'une action pour mesurer son exposition au risque systématique de son portefeuille commet des « erreurs » en négligeant l'impact de l'horizon d'investissement sur le risque.

Si l'on considère, pour illustrer cette conclusion, l'action Veolia sur la période 2005-2015, son beta est de 0,92. On constate qu'il s'agit d'une action qui atténue les fluctuations du marché avec des pertes inférieures à celles du marché, il en est de même pour les gains et, par conséquent cette action a un profil de tracker plutôt défensif. Ce constat est établi sans prendre en considération les différents horizons d'investissement. L'utilisation des ondelettes conduit à un beta associé à un investissement de 2 à 4 jours (bandes D1) égal à 0,86 tandis que le beta de plus long-terme pour des investissements de 3 à 6 mois s'élève à 1,34. Si le gestionnaire utilise le beta global de cette action en investissant à court-terme alors il minimise ses performances défensives puisqu'elle réduira d'avantages les pertes, en revanche, s'il investit à long-terme alors il se retrouve avec un beta supérieur à un et donc une action plutôt agressive et perdra plus que ce qu'il espérait. Au final, si le marché est plutôt calme alors investir à long-terme est profitable en revanche s'il est en crise il vaut mieux réduire son horizon d'investissement. La distinction par les betas fréquentiels permet ainsi de multiplier les choix d'investissement des agents en fournissant une mesure de risque plus en adéquation avec leurs appétences et leurs comportements.

En divisant la période globale en trois sous-périodes, nous montrons dans l'article l'importance de la volatilité temporelle du beta mais aussi son évolution. Les betas pour ces périodes sont différents et en moyenne plus élevés durant la période de crise, les insuffisances statistiques sont réduites pour les périodes calmes et leurs droites de marché ne sont plus décroissantes. A contrario, pour la période de crise nous confirmons la décroissance de la droite de marché et le rejet du MEDAF. En poursuivant l'exemple de l'action Veolia, nous obtenons pour la période 2005-2007 (période calme) un beta global de 0,68, il s'élève à 0,97 pour la période de crise 2008-2012 et il s'établit à 0,84 pour 2013-2015 (période de relance). On remarque que l'action change de catégorie en fonction de la période, elle est plutôt défensive pour la première et la dernière période alors qu'elle est plutôt un tracker (elle suit le marché) pour la période de crise

L'estimation fréquentielle des betas par période permet d'appréhender l'importance des différents horizons d'investissement sur la valeur du beta en le comparant avec les betas globaux. Nous constatons que les betas fréquents de long-termes sont significativement différents du beta global, et ce constat est valable pour la grande majorité des actions. L'action Veolia possède des betas de court-termes légèrement en dessous des betas globaux des périodes. A l'opposé, les betas de moyen-long termes sont plus significatifs et supérieurs aux betas globaux. Ce résultat conforte le constat précédent : à court-terme le beta est surestimé mais à long-terme il est sous-estimé (l'inverse est possible par exemple avec l'action Vivendi), ce qui conduit à biaiser les choix des agents et leur fait courir des risques supplémentaires. L'intérêt de recourir aux décompositions en ondelettes afin de limiter ces « erreurs » de mesure sur le beta, est ainsi notable.

Les régressions roulantes caractérisent plus précisément cette instabilité par l'analyse de la volatilité qui conduit à un canevas décrivant la dynamique des betas roulants. L'action Veolia, par exemple, est considérée comme une action robuste car 80% de ses betas sont dans la même classe que celle de son beta global (inférieur à 1) et 17% sont supérieur à 1. En revanche ses betas sont fortement volatils et celle-ci est dite « inférieure » dans le sens où 70% des betas roulants sont en dessous de l'intervalle du beta global. Cette classification réitérée sur chaque période, permet des comparaisons qui affinent l'analyse. Veolia est ainsi parfaitement robuste pour les périodes calmes avec une volatilité moyenne-faible tandis qu'en période de crise, son beta de 0,97 est non-robuste puisque 65% d'entre eux sont inférieurs à 1

et 35% supérieurs à 1. Il existe ainsi des ruptures importantes conduisant à une volatilité du beta plus élevée.

En définitive, le recours aux ondelettes pour prendre en compte l'horizon d'investissement lorsqu'on l'associe à l'analyse de l'instabilité des betas par les régressions roulantes améliore nettement une classification uniquement construite avec les données de base. Nous montrons que selon l'horizon d'investissement et la période retenue, le risque systématique et sa volatilité sont significativement différents, ce qui permet aux utilisateurs de ces résultats des degrés de liberté supplémentaires pour réaliser ses choix lors de la construction de portefeuilles.

Annexes :

Annexe 1 : Tests de Racine Unitaire sur les primes de risque :

1-1 Tests de Phillips-Perron

Prime	Phillips-Perron	Prime	Phillips-Perron	Prime	Phillips-Perron	Prime	Phillips-Perron
CAC	-56,1127	Danone	-56,78	Publicis	-54,0319	Vivendi	-56,3134
Accor	-52,9269	Essilor	-57,76505	Renault	-49,2059		
Airbus	-53,392	GDF	-54,643	Ricard	-55,2839	critical values:	M3
Alcatel	-51,257	Gemini	-53,499	Schneider	-57,688	1% level	-3,96
Air liquide	-60,49	St-Gobain	-54,643	SG	-48,75932	5% level	-3,41
AXA	-51,2187	L'Oréal	-59,99	Sodexo	-54,6724	10% level	-3,13
BNP	-53,895	LVMH	-55,7	Technip	-53,73487	critical values:	M2
Bouygues	-55,3422	Michelin	-52,2835	Total	-55,6584	1% level	-3,43
CA	-51,416	Orange	-54,4188	Veolia	-510257	5% level	-2,86
Carrefour	-54,478	PSA	-49,2689	Vinci	-56,899	10% level	-2,57

1-2 Tests KPSS

Prime	KPSS-M2	Prime	KPSS-M2	Prime	KPSS-M2	Prime	KPSS-M2
CAC	0,106	Danone	0,077	Publicis	0,1	Vivendi	0,08
Accor	0,06	Essilor	0,073	Renault	0,18		
Airbus	0,2	GDF	0,136	Ricard	0,057	critical values:	M3
Alcatel	0,28	Gemini	0,14	Schneider	0,1	1% level	0,739
Air liquide	0,06	St-Gobain	0,06	SG	0,11	5% level	0,463
AXA	0,074	L'Oréal	0,089	Sodexo	0,075	10% level	0,347
BNP	0,062	LVMH	0,054	Technip	0,12	critical values:	M2
Bouygues	0,11	Michelin	0,062	Total	0,06	1% level	0,216
CA	0,14	Orange	0,24	Veolia	0,2	5% level	0,146
Carrefour	0,109	PSA	0,16	Vinci	0,11	10% level	0,119

Annexe 2 : Estimations de la droite de marché par les MCO :

MCO	Beta	t-Stat	Constante	t-Stat	R ²	LB	ARCH	JB
Accor	0,99	51,02	0,000403	1,458	0,47	13,56	16,489	5812,89
Airbus	0,952	39,709	0,000363	1,06	0,35	13,805	0,83	106016
Alcatel	1,22	36,933	-0,000446	-0,946	0,32	1,342	34,014	14326,7
Air Liquide	0,829	72,39	0,000409	2,5	0,65	13,111	57,429	6729,28
AXA	1,506	77,98	0,000425	1,54	0,68	21,068	62,132	41993,2
BNP	1,391	67,01	0,00012	0,407	0,61	29,637	311,01	36979,6
Bouy	1,059	54,15	0,000157	0,564	0,51	0,302	57,036	1774,4
CA	1,442	60,24	-0,000141	-0,412	0,56	13,967	161,13	7641,56
Carrefour	0,9	51,769	-3,39E-05	-0,136	0,48	2,829	76,199	3926,46
Danone	0,651	44,46	0,000277	1,326	0,41	9,193	231,21	4778,36
Essilor	0,537	35,986	0,000501	2,337	0,31	11,916	105,44	16498,4
GDF	0,937	53,0549	9,33E-05	0,37	0,5	30,291	20,303	164186
Gemini	1,036	51,889	0,000476	1,67	0,48	10,449	14,254	2722,26
St-Gobain	1,342	76,32	3,65E-05	0,1455	0,67	12,369	222,051	15224,2
L'Oréal	0,722	51,86	0,000346	1,74	0,48	26,829	40,735	4951,32
LVMH	0,997	68,815	3,48E-04	1,68	0,62	13,242	38,34	10867,6
Michelin	1,076	52,33	0,000281	0,958	0,49	13,963	29,17	3655,4
Orange	0,725	46,389	3,50E-05	0,157	0,43	17,703	37,808	4480,43
PSA	1,165	42,62	-0,000211	-0,543	0,39	7,69	116,57	1614,53
Publicis	0,72	46,117	0,000306	1,3758	0,43	28,876	70,499	1972,62
Renault	1,355	59,074	0,00019	0,581	0,55	12,358	121,996	2371,17
Ricard	0,69	39,82	0,000327	1,323	0,36	31,548	143,779	8181,13
Schneider	1,235	77,377	0,000412	1,81	0,68	25,787	41,245	976,496
Sodexo	0,638	39,916	0,000502	2,2	0,36	10,205	21,254	9219,78
SG	1,473	60,035	-0,000106	-0,304	0,56	65,509	304,568	13567,8
Technip	1,049	42,588	0,000113	0,32	0,39	17,01	30,72	6149,54
Total	0,93	76,657	0,000183	1,0589	0,67	11,817	155,558	2095,14
Veolia	0,917	43,056	2,78E-05	0,092	0,39	8,307	1,582	160406
Vinci	1,114	76,715	0,000434	2,096	0,67	5,194	208,294	5024,85
vivendi	0,786	56,05	9,86E-05	0,4935	0,52	4,9	16,845	7732,78

Pour un risque de 5%, Colonne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11,1$; Colonne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(2)=5,99$;
Colonne JB (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$.

Pour un seuil de 5%, la valeur de la statistique de Fisher est égale à 3.85 et tous les coefficients de détermination sont significativement différents de zéro

Annexe 3 : test de nullité des primes de risque

Période Globale	t-stat	Suite	t-stat
CAC	-0,185	Orange	-0,003
ACCOR	0,93	Michelin	0,556
Airbus	0,74	PSA	-0,54
Air liquide	1,34	Publicis	0,921
Alcatel	-0,88	Renault	0,2527
Axa	0,72	Ricard	0,951
BNP	0,11	Schneider	0,877
Bouygues	0,27	SG	-0,34
CA	-0,41	Sodexo	1,655
Carrefour	-0,227	StGobain	-0,068
Danone	0,9	Technip	0,135
Essilor	1,83	Total	0,45
GDF	0,13	Veolia	-0,0447
Gemini	1,07	Vinci	1,047
L'Oréal	1,1225	Vivendi	0,207
LVMH	0,89		

période 1	t-stat	Suite	t-stat
CAC	1,047	Orange	0,05
ACCOR	1,44	Michelin	0,92
Airbus	0,56	PSA	0,17
Air liquide	1,91	Publicis	-0,014
Alcatel	-1,75	Renault	0,93
Axa	1,56	Ricard	1,61
BNP	1,06	Schneider	1,57
Bouygues	1,15	SG	0,78
CA	0,03	Sodexo	1,38
Carrefour	1,26	StGobain	0,84
Danone	1,74	Technip	0,67
Essilor	1,45	Total	1,43
GDF	1,61	Veolia	2,35
Gemini	0,94	Vinci	1,92
L'Oréal	1,5	Vivendi	0,83
LVMH	0,94		

période 2	t-stat	Suite	t-stat
CAC	-0,928	Orange	-1,291
ACCOR	-0,033	Michelin	-0,041
Airbus	0,205	PSA	-1,812
Air liquide	0,333	Publicis	0,707
Alcatel	-1,308	Renault	-0,774
Axa	-0,314	Ricard	0,125
BNP	-0,412	Schneider	0,366
Bouygues	-0,936	SG	-0,924
CA	-0,921	Sodexo	0,648
Carrefour	-1,198	StGobain	-0,608
Danone	-0,303	Technip	0,401
Essilor	0,948	Total	-0,383
GDF	-0,975	Veolia	-1,893
Gemini	-0,268	Vinci	-0,332
L'Oréal	0,017	Vivendi	-0,57
LVMH	0,595		

période 3	t-stat	Suite	t-stat
CAC	0,609	Orange	1,448
ACCOR	1,028	Michelin	0,595
Airbus	1,49	PSA	1,673
Air liquide	0,611	Publicis	0,786
Alcatel	1,616	Renault	1,467
Axa	1,64	Ricard	0,556
BNP	0,53	Schneider	0,014
Bouygues	1,267	SG	0,783
CA	1,087	Sodexo	1,124
Carrefour	0,749	StGobain	0,588
Danone	0,736	Technip	-1,146
Essilor	1,013	Total	0,43
GDF	0,588	Veolia	2,194
Gemini	2,27	Vinci	1,444
L'Oréal	1,063	Vivendi	0,858
LVMH	0,161		

La t-stat lue du test de nullité est égale à 1.96

Annexe 4 - Résultats des régressions par périodes

4-1 : Période 1

P1	Beta	t-Stat	Constante	t-Stat	R ²	LB	ARCH	JB
Accor	1,01	20,95	0,000442	1,02	0,36	6,43	0,88	3218,52
Airbus	1,02	17,73	-1,27E-06	0	0,29	10,23	22,98	169,37
Alcatel	1,21	19,46	-0,0016	-2,86	0,33	4,86	0,21	10000
Air Liquide	0,94	28,33	0,000497	1,66	0,51	11,95	0,23	1145,63
AXA	1,31	33,09	0,000419	1,18	0,58	10,75	0,05	66129
BNP	1,25	40,21	9,94E-05	0,36	0,68	8,11	2,57	493,43
Bouy	1,09	22,68	0,000271	0,63	0,4	1,87	0,08	56216
CA	1,2	32,28	-0,000388	-1,16	0,57	6,29	11,76	541,55
Carrefour	0,72	19,02	0,000276	0,81	0,32	15,46	4,4	658,53
Danone	0,78	15,87	0,00054	1,75	0,29	15,66	111,05	4778,36
Essilor	0,6	16,95	0,000339	1,06	0,27	17,31	105,44	6,91
GDF	0,85	15,73	0,000613	1,26	0,24	10,83	0,17	333737
Gemini	1,28	22,09	0,000194	0,37	0,39	8,41	0,03	1078,26
St-Gobain	1,11	30,87	2,90E-05	0,09	0,55	4,83	10,38	517,83
L'Oréal	0,78	21,63	0,000352	1,09	0,38	0,4	2,84	453,89
LVMH	1,04	34,16	5,46E-05	0,2	0,6	5,76	0,96	1617,31
Michelin	1,19	21,93	0,000171	0,35	0,38	7,92	7,95	512,6
Orange	0,77	18,73	-0,000238	-0,64	0,31	6,75	0,92	3102
PSA	1,03	20,86	-0,000252	-0,6	0,36	4,09	0,99	2917,34
Publicis	0,67	16,55	-0,000233	-0,64	0,26	7,31	6,65	446,11
Renault	1,23	26,66	0,000117	0,28	0,48	4,47	2,25	425,95
Ricard	0,5	11,04	0,0005	1,32	0,14	7,68	2,69	1639,65
Schneider	1,07	24,32	0,000464	1,17	0,43	7,71	1,24	315,25
Sodexo	0,87	16,63	0,000457	0,98	0,26	12,09	9,45	916,27
SG	1,25	36,8	-2,80E-05	-0,09	0,64	16,96	48,99	641,4
Technip	1,03	14,64	0,000113	0,21	0,22	7,16	0,86	10910
Total	0,94	27,79	0,000297	0,98	0,5	5,45	0,29	1390,32
Veolia	0,68	16,4	0,000791	2,11	0,26	12,06	19,2	3897,63
Vinci	0,93	18,58	0,000723	1,61	0,31	2,61	48,89	842,06
vivendi	0,83	26,6	4,12E-05	0,15	0,48	8,98	2,65	106,02

Pour un risque de 5%, Colonne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11,1$; Colonne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(2)=5,99$;
Colonne JB (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$.

Pour un seuil de 5%, la valeur de la statistique de Fisher est égale à 3.85 et tous les coefficients de détermination sont significativement différents de zéro

4-2 : Période 2 :

P2	Beta	t-Stat	Constante	t-Stat	R ²	LB	ARCH	JB
Accor	1,03	37,59	0,000447	0,92	0,52	10,29	4,67	1602,54
Airbus	0,92	28,41	5,71E-04	0,99	0,38	9	11,48	347
Alcatel	1,28	27,99	-0,00076	-0,94	0,38	2	3,71	3716
Air Liquide	0,8	52,36	0,000524	1,93	0,68	7,72	58,47	1145,63
AXA	1,62	55,46	0,000444	0,85	0,7	17,87	26,52	7290
BNP	1,46	44,14	2,86E-04	0,48	0,6	18,99	127,5	5826
Bouy	1,09	43,85	-0,000153	-0,34	0,6	6,57	101,02	2707
CA	1,55	42,81	-0,000213	-0,33	0,58	8,39	74,92	1382,35
Carrefour	0,87	34,86	-0,000345	-0,77	0,48	3,55	28,76	1009,3
Danone	0,59	30,39	0,000135	0,38	0,41	10,2	52,22	848,83
Essilor	0,42	21,61	0,000577	1,66	0,26	6,32	51,03	11763,78
GDF	0,95	17,23	-0,000182	-0,49	0,55	17,69	94,73	7714,83
Gemini	1,03	38,56	0,000287	0,6	0,53	12	8,42	798,84
St-Gobain	1,43	55,79	1,44E-04	0,31	0,7	12,32	95,4	5150
Loreal	0,67	35,05	0,000315	0,92	0,49	22,55	15,6	453,89
LVMH	0,98	48,52	8,12E-04	2,24	0,64	11,99	31,6	2104
Michelin	1,11	38,35	0,000481	0,93	0,53	6,44	26,39	1022
Orange	0,62	34,63	-0,000288	-0,9	0,48	22,58	67,17	1248,34
PSA	1,17	31,94	-0,001	-1,6	0,44	1,5	30,37	231,75
Publicis	0,73	35,9	0,00069	1,92	0,5	17,66	38,59	318,97
Renault	1,41	36,38	-5,73E-05	1,1	0,59	11,66	56,86	530,25
Ricard	0,72	29,4465	0,0004	0,92	0,4	19,66	79,57	2503
Schneider	1,29	58,87	0,000864	2,21	0,73	13,42	20,5	220
Sodexo	0,61	30,32	0,000587	1,63	0,41	6,32	8,77	2275
SG	1,55	39,75	-2,45E-04	-0,35	0,55	38,66	106,55	2260,59
Technip	1,14	36,87	0,000838	1,52	0,51	18,29	61,55	780
Total	0,91	59,8	0,000216	0,8	0,73	11,29	162	1390,32
Veolia	0,97	30,78	-0,00095	-1,7	0,42	8,09	0,15	53721
Vinci	1,18	67,89	0,000322	1,04	0,78	14,19	105,79	842,06
vivendi	0,79	40,2	6,30E-05	0,18	0,55	3,37	5,45	3141

Pour un risque de 5%, Colonne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11,1$; Colonne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(2)=5,99$; Colonne JB (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$.

Pour un seuil de 5%, la valeur de la statistique de Fisher est égale à 3.85 et tous les coefficients de détermination sont significativement différents de zéro

4-3: Période 3 :

P3	Beta	t-Stat	Constante	t-Stat	R ²	LB	ARCH	JB
Accor	0,83	22,72	0,00035	0,82	0,4	13,62	6,49	640
Airbus	1,05	25,53	6,88E-04	1,46	0,45	7,08	7,32	1946
Alcatel	0,99	12,63	1,30E-03	1,5	0,17	0,54	40,7	3423
Air Liquide	0,89	41,35	4,74E-05	0,19	0,69	4,55	0,42	9002
AXA	1,15	42	0,000641	2,04	0,69	4,79	11,14	257,5
BNP	1,19	40,53	1,67E-05	0,05	0,68	3,62	4,51	45
Bouy	0,9	18,77	0,000615	1,12	0,31	12,81	19,56	3875
CA	1,15	25,77	0,000467	0,92	0,46	2,46	0,09	1949
Carrefour	1,11	34	0,000164	0,44	0,6	8,33	4,68	449,18
Danone	0,8	31,32	0,000123	0,42	0,55	5,34	4,49	156
Essilor	0,94	30,96	0,000291	0,84	0,55	1,61	1,81	593
GDF	0,95	32,13	6,65E-05	0,19	0,57	4,74	1,6	496,68
Gemini	0,89	24,83	0,001	2,49	0,44	11,31	0,25	662
St-Gobain	1,12	34,65	6,76E-05	0,18	0,6	2,09	1,44	235,38
L'Oréal	0,9	33,69	0,00028	0,93	0,59	7,8	22,92	449,99
LVMH	1,04	32,43	-1,70E-04	-0,45	0,57	2,25	0,19	7891,92
Michelin	0,86	24,46	0,0001	0,26	0,43	4,4	0,42	1195
Orange	1,11	27,69	0,000655	1,43	0,5	4,82	6,23	943,48
PSA	1,2	17,23	0,0012	1,59	0,28	17,44	40,53	499,02
Publicis	0,72	20,12	0,0002	0,53	0,34	12,06	20,58	2102,35
Renault	1,18	23,92	0,000797	1,41	0,42	8,39	1,57	653,97
ricard	0,68	22,78	7,56E-05	0,22	0,4	18,15	0,53	487,92
Schneider	1,13	39,19	-0,000273	-0,82	0,66	6,3	5,87	175,58
Sodexo	0,6	20,57	0,000318	0,95	0,35	1,91	2,14	26906
SG	1,31	34	2,17E-04	0,49	0,6	7	2,63	485,13
Technip	0,7	12,99	-0,000957	-1,54	0,18	4,7	0,4	977,91
Total	1,01	35,95	-2,67E-05	-0,08	0,62	10,34	18,49	125,7
Veolia	0,84	21,1	0,001	2,28	0,36	10,27	0,9	949,5
Vinci	0,96	35,28	0,000482	1,55	0,61	2,58	2,77	607,79
vivendi	0,76	25,13	2,10E-04	0,61	0,45	5,39	0,6	654,69

Pour un risque de 5%, Colonne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11,1$; Colonne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(2)=5,99$;
Colonne JB (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$.

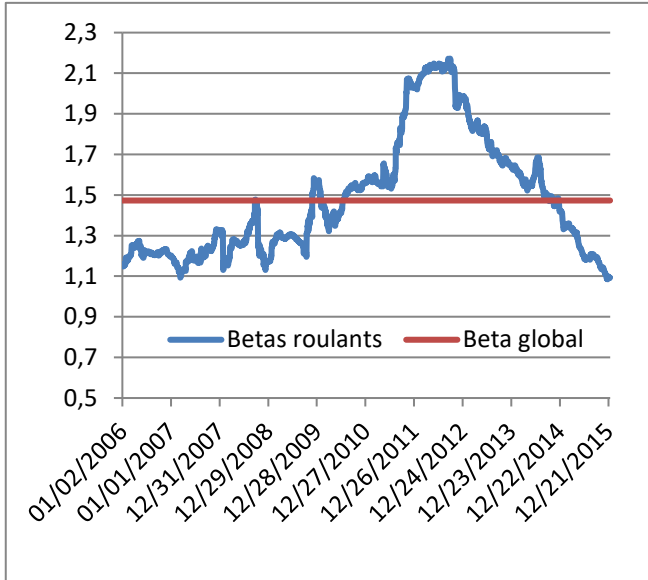
Pour un seuil de 5%, la valeur de la statistique de Fisher est égale à 3.85 et tous les coefficients de détermination sont significativement différents de zéro

Annexe 5 : Betas roulants :

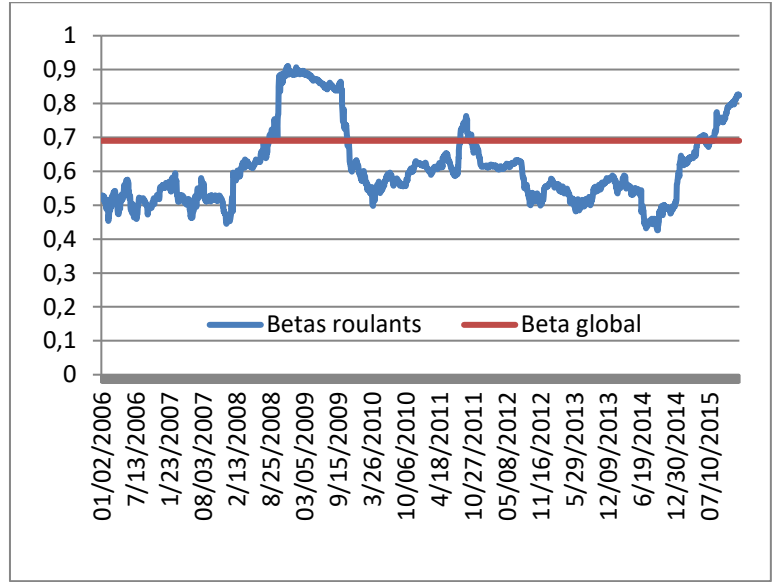
Dans cette annexe nous ne présentons que certains résultats au vue du nombre important de graphiques. Le lecteur intéressé par les autres informations peut contacter le correspondant author.

Période Globale :

Pour la Société Générale :

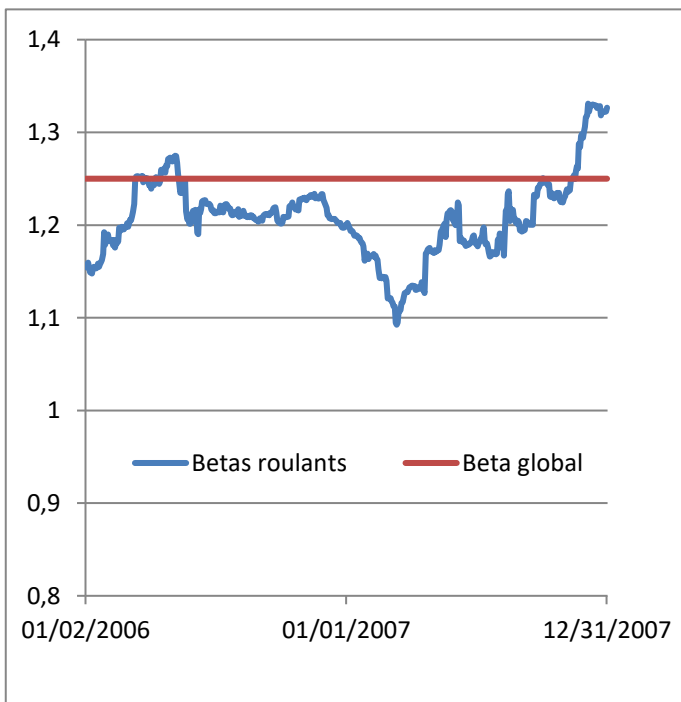


Pour Ricard :

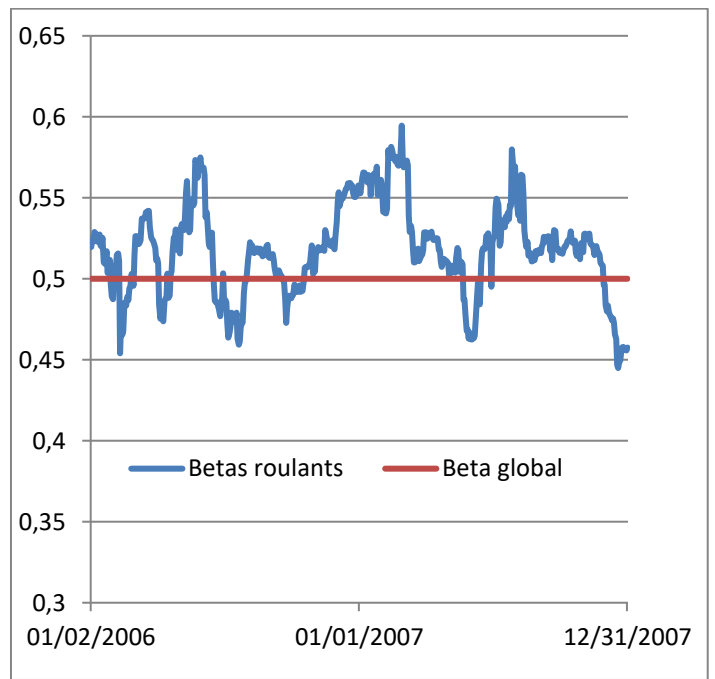


Période 1:

Société Générale :

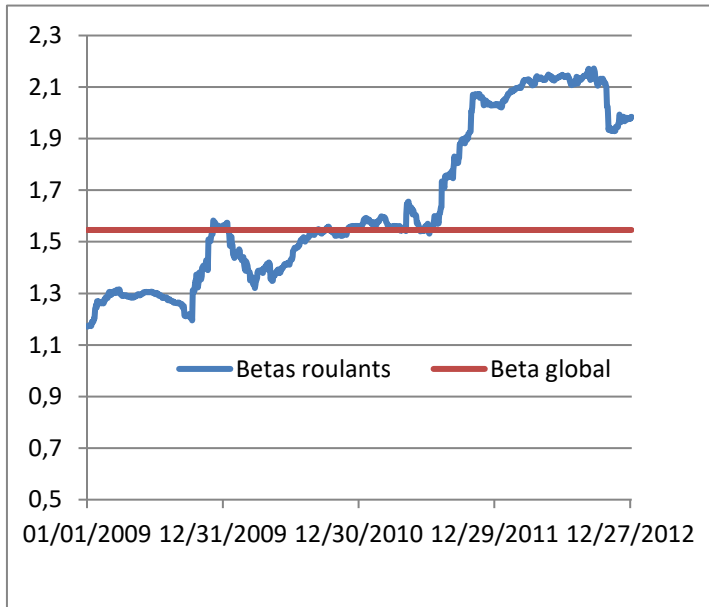


Ricard :

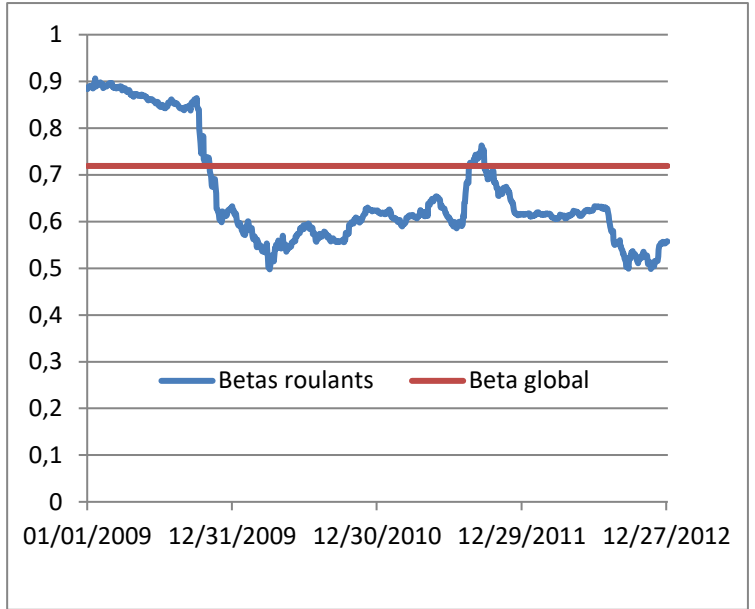


Période 2:

Société Générale :

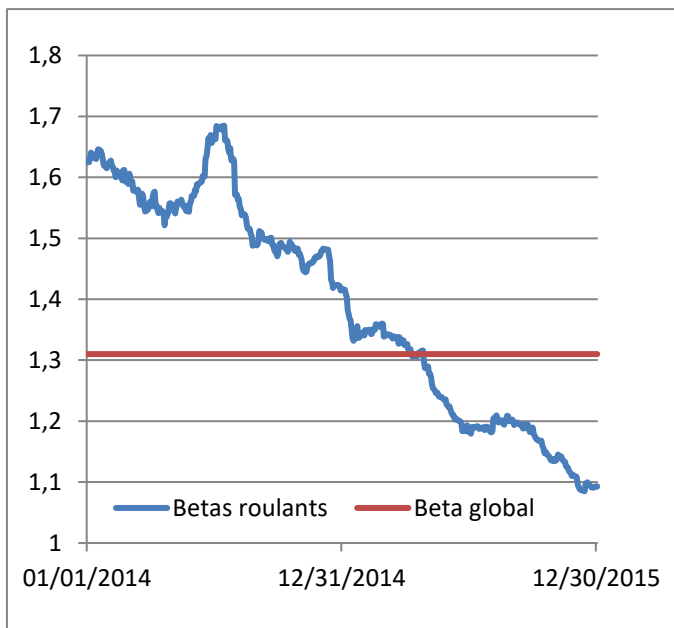


Ricard :

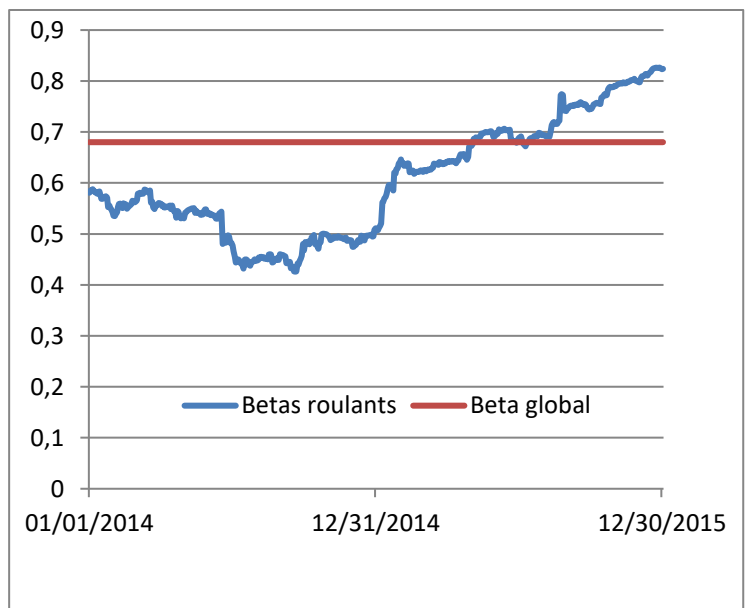


Période 3:

Société Générale :



Ricard :



Annexe 6 : Analyse de la Volatilité des betas:

6.1 Tableaux de synthèse de la volatilité des Betas par périodes

Période 1 :

Classes	Période 1	Beta global	t-stat à 1	ET des betas	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% inf à IC	% dans IC	% sup à IC
Betas inférieurs à 1	Ricard	0,5	-11,04	0,03	100	0	0	0	99,81	0,19
	Veolia	0,68	-7,47	0,04	100	0	0	0	85,41	14,59
	Essilor	0,6	-9,23	0,05	100	0	0	0	63,53	36,47
	Carrefour	0,72	-7,25	0,05	100	0	0	12,86	86,95	0,19
	L'Oréal	0,78	-6,1	0,06	99,04	0,96	0	4,8	64,68	30,52
	Danone	0,78	-4,48	0,06	94,43	5,57	0	3,07	68,14	28,79
	Orange	0,77	-5,59	0,06	91,75	8,25	0	0	79,46	20,54
	Publicis	0,67	-8,04	0,07	100	0	0	17,08	76,78	6,14
	GDF	0,85	-2,8	0,09	91,36	8,64	0	14,78	79,27	5,95
	vivendi	0,83	-5,64	0,14	75,43	7,1	17,47	43,38	16,7	39,92
	Sodexo	0,87	-2,57	0,15	85,03	14,97	0	56,43	34,74	8,83
Betas égaux à 1	Total	0,94	-1,84	0,04	17,85	82,15	0	0	84,45	15,55
	Air Liquide	0,94	-1,74	0,05	54,32	45,68	0	16,7	68,71	14,59
	PSA	1,03	0,59	0,09	42,61	39,73	17,66	43,38	53,93	2,69
	Schneider	1,07	1,59	0,12	20,54	30,33	49,14	28,6	52,78	18,62
	LVMH	1,04	1,19	0,13	19,96	19,77	60,27	22,26	19,58	58,16
	Airbus	1,02	0,36	0,14	19,96	24,38	55,66	18,62	31,67	49,71
	Accor	1,01	0,21	0,14	57,77	22,46	19,77	54,13	26,49	19,39
	Technip	1,03	0,47	0,15	23,42	52,21	24,38	13,82	75,24	10,94
	Vinci	0,93	-0,99	0,16	72,55	7,68	19,77	56,05	20,15	23,8
Betas supérieurs à 1	BNP	1,25	7,94	0,04	0	0	100	19,39	80,61	0
	SG	1,25	5,78	0,04	0	0	100	26,87	69,1	4,03
	CA	1,2	5,34	0,08	0	3,07	96,93	29,75	40,31	29,94
	Gemini	1,28	4,83	0,1	0	1,54	98,46	16,31	64,11	19,58
	Renault	1,23	5,04	0,1	0	44,34	55,66	58,93	33,97	7,1
	AXA	1,31	7,85	0,1	0	0	100	41,46	35,32	23,22
	Michelin	1,19	3,45	0,12	1,34	73,32	25,34	74,66	19,39	5,95
	St-Gobain	1,11	2,93	0,12	18,43	26,87	54,7	31,67	33,01	35,32
	Bouy	1,09	1,87	0,13	22,46	33,4	44,15	37,04	41,07	21,88
	Alcatel	1,21	3,43	0,17	14,59	10,56	74,86	28,6	57,39	14,01

Période 2 :

Classes	Période 2	Beta global	t-stat à 1	ET des betas	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% inf à IC	% dans IC	% sup à IC
Betas Inférieurs à 1	Essilor	0,42	-29,84	0,04	100	0	0	60,3	35,1	4,6
	Danone	0,59	-21,12	0,05	100	0	0	33,37	52,25	14,38
	Publicis	0,73	-13,41	0,06	100	0	0	44,39	44,11	11,5
	L'Oréal	0,67	-17,34	0,07	100	0	0	31,54	56	12,46
	vivendi	0,79	-10,95	0,09	93,76	6,24	0	32,79	17,64	49,57
	Air Liquide	0,8	-13,5	0,1	96,74	3,26	0	38,86	14,07	47,08
	Orange	0,62	-21,04	0,11	100	0	0	54,75	7,86	37,39
	Ricard	0,72	-11,51	0,11	100	0	0	72,19	8,54	19,27
	Airbus	0,92	-2,61	0,12	74,78	25,22	0	41,32	41,51	17,16
	Total	0,91	-6,13	0,12	76,51	13,62	9,87	60,21	11,8	27,99
	Sodexo	0,61	-19,22	0,12	100	0	0	76,8	2,21	21
	Carrefour	0,87	-4,99	0,17	66,06	6,54	27,4	59,44	4,8	35,76
Betas égaux à 1	LVMH	0,98	-0,99	0,04	24,92	66,93	8,15	18,89	53,12	28
	GDF	0,95	-1	0,08	41,22	58,78	0	10,26	89,74	0
	Gemini	1,03	1,23	0,15	37,48	30,12	32,4	43,24	25,41	31,35
	Accor	1,03	0,93	0,18	52,82	12,09	35,09	60,79	4,7	34,52
	Veolia	0,97	-1,02	0,24	64,72	0	35,28	64,33	0,38	35,28
Betas supérieurs à 1	Technip	1,14	4,44	0,1	0,1	16,49	83,41	22,63	51,49	25,88
	PSA	1,17	4,64	0,11	0	1,25	98,75	8,05	47,08	44,87
	Vinci	1,18	10,31	0,11	0	25,32	74,68	58,77	12,95	28,28
	Schneider	1,29	13,2	0,12	0	0	100	39,12	34,23	26,65
	St-Gobain	1,43	16,83	0,12	0	0	100	44,29	29,73	25,98
	Renault	1,41	10,65	0,15	0	0	100	34,42	39,12	26,46
	Michelin	1,11	3,89	0,15	16,97	19,37	63,66	37	30,12	32,88
	Alcatel	1,28	6,09	0,16	0	17,84	82,16	31,54	44,68	23,78
	AXA	1,62	21,22	0,17	0	0	100	43,14	8,35	48,51
	Bouy	1,09	3,62	0,17	45,73	14,97	39,3	58,86	7,39	33,75
	CA	1,55	15,19	0,18	0	0	100	33,46	18,31	48,23
	BNP	1,46	13,91	0,21	0	0	100	31,54	27,81	40,65
SG	1,55	14,03	0,31	0	0	100	33,36	30,49	36,15	

Période 3 :

Classes	Période 3	Beta global	t-stat à 1	ET des betas	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% inf à IC	% dans IC	% sup à IC
Betas Inférieurs à 1	Publicis	0,72	-7,98	0,04	100	0	0	1,54	94,82	3,65
	Sodexo	0,6	-13,71	0,04	100	0	0	17,85	75,82	6,33
	Danone	0,8	-7,98	0,05	100	0	0	47,22	47,22	5,57
	Gemini	0,89	-3,07	0,05	75,43	24,57	0	4,99	74,47	20,54
	Veolia	0,84	-4,05	0,08	100	0	0	23,99	66,03	9,98
	Michelin	0,86	-4,15	0,09	63,53	36,47	0	10,94	49,71	39,35
	vivendi	0,76	-8,02	0,09	100	0	0	35,32	32,82	31,86
	Essilor	0,94	-1,98	0,1	67,56	32,44	0	50,67	42,61	6,72
	Air Liquide	0,89	-5,11	0,1	67,37	32,63	0	40,5	27,06	32,44
	Ricard	0,68	-10,72	0,11	100	0	0	54,51	27,64	17,85
	Technip	0,7	-5,57	0,11	100	0	0	10,17	64,5	25,33
	L'Oréal	0,9	-3,74	0,12	89,25	10,75	0	66,99	22,27	10,75
	Bouy	0,9	-2,09	0,12	41,84	26,87	31,29	3,07	46,26	50,67
	Accor	0,83	-4,65	0,16	82,73	17,28	0	35,51	43,19	21,31
Betas égaux à 1	GDF	0,95	-1,58	0,05	41,65	58,35	0	12,67	59,69	27,64
	Vinci	0,96	-1,62	0,07	17,27	39,36	43,37	10,75	13,82	75,43
	Airbus	1,05	1,22	0,08	12,86	26,49	60,65	21,69	71,59	6,72
	LVMH	1,04	1,25	0,14	56,05	31,1	12,86	63,72	25,53	10,75
	Total	1,01	0,5	0,14	28,79	18,24	52,98	28,79	21,31	49,9
	Alcatel	0,99	-0,13	0,15	10,74	21,89	67,37	1,53	47,22	51,25
Betas supérieurs à 1	Orange	1,11	2,65	0,07	0,19	26,11	73,7	24,38	75,43	0,19
	PSA	1,2	2,87	0,08	0	0	100	0	80,23	19,77
	BNP	1,19	6,47	0,11	0	0	100	15,74	49,71	34,55
	Schneider	1,13	4,51	0,11	0	17,66	82,34	17,85	9,6	72,55
	St-Gobain	1,12	3,71	0,12	0	5	95	5,18	40,69	54,13
	Carrefour	1,11	3,31	0,13	0	56,43	43,57	54,89	21,5	23,61
	AXA	1,15	5,48	0,13	0	0	100	36,08	17,66	46,26
	CA	1,15	3,3	0,13	3,83	9,61	86,56	15,93	21,88	62,19
	Renault	1,18	3,65	0,15	0	0,77	99,23	10,56	53,93	35,51
	SG	1,31	8,05	0,18	0	0	100	29,75	19,19	51,06

6.2 Synthèse qualitative de la volatilité des Betas par périodes

Période Globale :

Classes	Période globale	Beta Global	t-stat à 1	Commentaires
Betas Inférieurs à 1	Publicis	0,72	-17,93	robuste avec faible volatilité inférieure
	GDF	0,94	-3,57	plutôt robuste avec faible volatilité inférieure
	Vivendi	0,79	-15,26	robuste avec faible volatilité supérieure
	Air Liquide	0,83	-14,93	plutôt robuste avec faible volatilité
	Ricard	0,69	-17,89	robuste avec faible volatilité inférieure
	L'Oréal	0,72	-19,97	robuste mais volatilité faible
	Danone	0,65	-23,83	robuste mais faible volatilité supérieure
	Total	0,93	-5,77	plutôt robuste avec volatilité moyenne
	Sodexo	0,64	-22,65	robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Airbus	0,95	-2	non robuste avec forte volatilité
	Veolia	0,92	-3,9	plutôt robuste avec forte volatilité inférieure
	Essilor	0,54	-31,03	robuste avec forte volatilité
	Carrefour	0,9	-5,75	non robuste avec forte volatilité
	Orange	0,73	-17,6	robuste avec forte volatilité inférieure
betas égaux à 1	LVMH	1	-0,21	plutôt robuste avec faible volatilité
	Gemini	1,04	1,8	non robuste avec forte volatilité
	Accor	0,99	-0,52	non robuste avec forte volatilité
Betas supérieurs à 1	Schneider	1,24	14,72	robuste avec volatilité moyenne
	Bouygues	1,06	3,02	non robuste avec volatilité moyenne
	PSA	1,17	6,04	plutôt robuste avec volatilité moyenne
	Vinci	1,11	7,85	plutôt robuste avec volatilité moyenne supérieure
	Renault	1,36	15,48	robuste avec forte volatilité supérieur
	Alcatel	1,22	6,66	plutôt robuste avec forte volatilité inférieure
	Michelin	1,08	3,7	non robuste avec forte volatilité inférieure
	St-Gobain	1,34	19,45	robuste avec forte volatilité inférieure
	AXA	1,51	26,2	robuste avec forte volatilité inférieure
	BNP	1,39	18,84	robuste avec forte volatilité inférieure
	Technip	1,05	1,99	non robuste avec forte volatilité
	CA	1,44	18,46	robuste avec forte volatilité inférieure
SG	1,47	19,28	robuste avec forte volatilité	

Période 1:

Classes	Période 1	Beta	t-stat à 1	Commentaires
Betas inférieurs à 1	Ricard	0,5	-11,04	robuste avec faible volatilité
	Veolia	0,68	-7,47	robuste avec faible volatilité
	Essilor	0,6	-9,23	robuste avec faible volatilité supérieure
	Carrefour	0,72	-7,25	robuste avec faible volatilité inférieure
	L'Oréal	0,78	-6,1	robuste avec faible volatilité supérieure
	Danone	0,78	-4,48	robuste avec volatilité faible supérieure
	Orange	0,77	-5,59	robuste avec faible volatilité supérieure
	Publicis	0,67	-8,04	robuste avec volatilité moyenne inférieure
	GDF	0,85	-2,8	robuste avec volatilité moyenne
	vivendi	0,83	-5,64	non robuste avec forte volatilité
	Sodexo	0,87	-2,57	robuste avec forte volatilité inférieure
Betas égaux à 1	Total	0,94	-1,84	robuste avec faible volatilité
	Air Liquide	0,94	-1,74	plutôt robuste avec faible volatilité
	PSA	1,03	0,59	non robuste avec volatilité moyenne
	Schneider	1,07	1,59	plutôt robuste avec volatilité moyenne
	LVMH	1,04	1,19	non robuste avec forte volatilité supérieure
	Airbus	1,02	0,36	non robuste avec forte volatilité
	Accor	1,01	0,21	non robuste avec forte volatilité inférieure
	Technip	1,03	0,47	plutôt robuste avec forte volatilité
	Vinci	0,93	-0,99	Plutôt robuste avec forte volatilité inférieure
Betas supérieurs à 1	BNP	1,25	7,94	robuste avec volatilité faible
	SG	1,25	5,78	robuste avec volatilité faible
	CA	1,2	5,34	robuste avec volatilité moyenne
	Gemini	1,28	4,83	robuste avec volatilité moyenne
	Renault	1,23	5,04	non robuste avec volatilité moyenne inférieure
	AXA	1,31	7,85	robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Michelin	1,19	3,45	non robuste avec forte volatilité inférieure
	St-Gobain	1,11	2,93	non robuste avec forte volatilité
	Bouygues	1,09	1,87	non-robuste avec forte volatilité
	Alcatel	1,21	3,43	plutôt robuste avec forte volatilité

Période 2:

Classes	Période 2	Beta	t-stat à 1	Commentaires
Betas Inférieurs à 1	Essilor	0,42	-29,84	robuste avec faible volatilité inférieure
	Danone	0,59	-21,12	robuste avec faible volatilité inférieure
	Publicis	0,73	-13,41	robuste avec faible volatilité inférieure
	L'Oréal	0,67	-17,34	robuste avec faible volatilité inférieure
	vivendi	0,79	-10,95	robuste avec faible volatilité supérieure
	Air Liquide	0,80	-13,50	robuste avec volatilité moyenne supérieure
	Orange	0,62	-21,04	robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Ricard	0,72	-11,51	robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Airbus	0,92	-2,61	robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Total	0,91	-6,13	plutôt robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Sodexo	0,61	-19,22	robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Carrefour	0,87	-4,99	plutôt robuste avec volatilité forte inférieure
Betas égaux à 1	LVMH	0,98	-0,99	robuste avec faible volatilité
	GDF	0,95	-1,00	plutôt robuste avec volatilité faible
	Gemini	1,03	1,23	non robuste avec volatilité forte
	Accor	1,03	0,93	non robuste avec forte volatilité inférieure
	Veolia	0,97	-1,02	non robuste avec forte volatilité inférieure
Betas supérieurs à 1	Technip	1,14	4,44	robuste avec volatilité moyenne
	PSA	1,17	4,64	robuste avec volatilité moyenne supérieure
	Vinci	1,18	10,31	robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Schneider	1,29	13,20	robuste avec volatilité moyenne
	St-Gobain	1,43	16,83	robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Renaud	1,41	10,65	robuste avec forte volatilité
	Michelin	1,11	3,89	non robuste avec forte volatilité
	Alcatel	1,28	6,09	robuste avec forte volatilité
	AXA	1,62	21,22	robuste avec forte volatilité
	Bouygues	1,09	3,62	non robuste avec forte volatilité inférieure
	CA	1,55	15,19	robuste avec forte volatilité supérieure
	BNP	1,46	13,91	robuste avec forte volatilité
SG	1,55	14,03	robuste avec forte volatilité	

Période 3:

Classes	Période 3	Beta	t-stat à 1	Commentaires
Betas inférieurs à 1	Publicis	0,72	-7,98	robuste avec faible volatilité
	Sodexo	0,6	-13,71	robuste avec faible volatilité
	Danone	0,8	-7,98	robuste avec faible volatilité inférieure
	Gemini	0,89	-3,07	plutôt robuste avec faible volatilité supérieure
	Veolia	0,84	-4,05	robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Michelin	0,86	-4,15	plutôt robuste mais volatilité moyenne supérieure
	vivendi	0,76	-8,02	robuste avec volatilité moyenne
	Essilor	0,94	-1,98	plutôt robuste avec forte volatilité inférieure
	Air Liquide	0,89	-5,11	plutôt robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Ricard	0,68	-10,72	robuste avec volatilité moyenne inférieure
	Technip	0,7	-5,57	robuste avec une volatilité moyenne
	L'Oréal	0,9	-3,74	robuste avec forte volatilité inférieure
	Bouygues	0,9	-2,09	non robuste avec volatilité moyenne
	Accor	0,83	-4,65	plutôt robuste avec volatilité moyenne supérieure
Betas égaux à 1	GDF	0,95	-1,58	plutôt robuste avec faible volatilité
	Vinci	0,96	-1,62	non robuste avec faible volatilité supérieure
	Airbus	1,05	1,22	plutôt robuste avec volatilité moyenne
	LVMH	1,04	1,25	non robuste avec forte volatilité inférieure
	Total	1,01	0,5	non robuste avec forte volatilité supérieure
	Alcatel	0,99	-0,13	non robuste avec forte volatilité supérieure
Betas supérieurs à 1	Orange	1,11	2,65	robuste avec faible volatilité
	PSA	1,2	2,87	robuste avec volatilité moyenne
	BNP	1,19	6,47	robuste avec volatilité moyenne supérieure
	Schneider	1,13	4,51	robuste avec volatilité moyenne supérieure
	St-Gobain	1,12	3,71	robuste avec volatilité moyenne supérieure
	Carrefour	1,11	3,31	non robuste avec forte volatilité inférieure
	AXA	1,15	5,48	robuste avec forte volatilité
	CA	1,15	3,3	robuste avec forte volatilité
	Renaud	1,18	3,65	robuste avec forte volatilité
	SG	1,31	8,05	robuste avec forte volatilité supérieure

Annexe 7-betas fréquentiels d'Accor

Ce tableau présente une synthèse des estimations des betas fréquentiels de l'action Accor. Compte tenu du nombre important d'actions et de tableaux, les résultats pour les autres actions sont disponibles sur demande (contact : corresponding author).

ACCOR	D1	D2	D3	D4	D5	D6
BETA	0,9114521	1,0589144	1,1073219	1,0745427	1,0517364	1,18
t-stats	46,63	56,17	58,23	54,48	51,15	58
Constante	-2,83E-15	-2,88E-15	-2,89E-15	-2,89E-15	-2,87E-15	-2,92E-15
t-stats	-1,41E-11	-2,07E-11	-3,40E-11	-4,43E-11	-6,90E-11	-8,84E-11
R ²	0,43	0,52	0,54	0,5	0,467	0,54
LB	1079	2197	4393	5361	10730	13370
ARCH	754	834	1589	2653	2845	2860,6
JB	2010	950	234	69	36	23,82

Annexes 8: Analyse en composante principale du tableau 4 :

Matrice des corrélations:

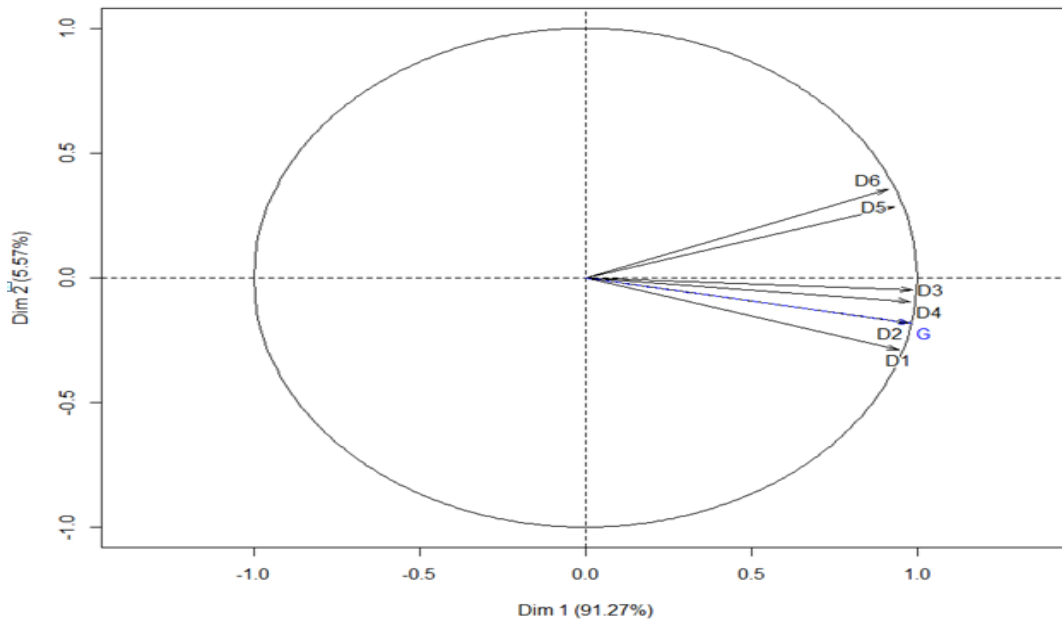
Corrélation	D1	D2	D3	D4	D5	D6	G
D1	1,00						
D2	0,98	1,00					
D3	0,93	0,97	1,00				
D4	0,94	0,96	0,98	1,00			
D5	0,80	0,86	0,89	0,88	1,00		
D6	0,77	0,83	0,88	0,85	0,91	1,00	
G	0,99	0,99	0,97	0,97	0,86	0,84	1,00

G=betas globaux

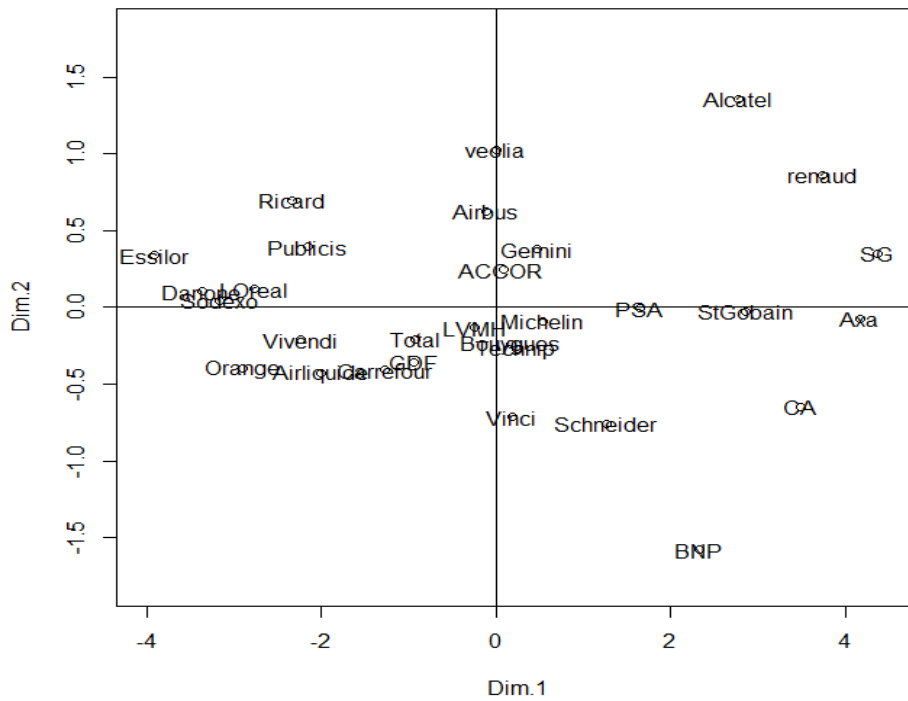
Contributions des bandes de fréquence aux axes factoriels :

En %	Axe 1	Axe 2
D1	16,29	24,94
D2	17,43	9,74
D3	17,73	0,68
D4	17,51	2,69
D5	15,82	24,35
D6	15,16	37,6

Cercle de corrélation avec en supplémentare les betas globaux (G):



Projection des individus sur les deux premiers axes factoriels:



Annexe 9 : Test de comparaison des betas :

La lettre S indique une différence significative entre les deux betas tandis que NS traduit une différence non-significative.

Période Globale	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Accor	S	S	S	S	S	S
Airbus	NS	NS	S	NS	S	S
Airliquide	S	NS	S	S	NS	S
Alcatel	S	NS	S	S	S	S
Axa	S	S	NS	S	NS	S
BNP	NS	NS	S	S	S	S
Bouygues	NS	NS	NS	NS	NS	NS
CA	S	NS	S	S	S	S
Carrefour	NS	NS	NS	NS	NS	S
Danone	NS	NS	S	S	NS	S
Essilor	NS	NS	S	NS	NS	NS
GDF	NS	NS	S	NS	NS	S
Gemini	NS	NS	S	NS	S	S
L'Oréal	S	NS	S	S	NS	S
LVMH	NS	NS	S	NS	S	NS
Michelin	S	NS	S	NS	NS	S
Orange	NS	NS	NS	S	S	S
PSA	S	S	S	S	S	S
Publicis	NS	NS	NS	S	S	S
Renault	NS	NS	S	S	S	S
Ricard	NS	NS	NS	NS	S	S
Schneider	NS	NS	S	NS	S	S
SG	S	NS	S	S	S	S
Sodexo	NS	NS	NS	NS	NS	NS
St-Gobain	NS	NS	NS	S	S	S
Technip	NS	NS	S	S	NS	NS
Total	NS	NS	S	NS	S	S
Veolia	NS	NS	S	S	S	S
Vinci	NS	NS	NS	S	S	S
Vivendi	NS	NS	NS	S	S	NS

Annexe 10 : Betas fréquentiels par périodes :

10-1 : Période 1 :

	Période 1	D1	D2	D3	D4	D5	D6	ET des betas	Beta Global
Betas toujours inférieurs à 1	Carrefour	0,77	0,74	0,6	0,78	0,47	0,06	0,28	0,72 (<1)
	Danone	0,79	0,75	0,85	0,79	0,72	0,55	0,10	0,78 (<1)
	Essilor	0,66	0,48	0,59	0,73	0,96	0,17	0,26	0,6 (<1)
	L'Oréal	0,81	0,77	0,78	0,6	0,74	0,8	0,08	0,78 (<1)
	Orange	0,84	0,76	0,72	0,65	0,38	0,58	0,16	0,77 (<1)
	Publicis	0,67	0,72	0,57	0,71	0,61	0,39	0,12	0,67 (<1)
	Ricard	0,49	0,51	0,54	0,58	0,37	0,53	0,07	0,5 (<1)
	Vivendi	0,87	0,84	0,71	0,77	0,66	0,61	0,10	0,83 (<1)
Betas toujours supérieurs à 1	Alcatel	1,21	1,16	1,15	1,26	1,66	1,36	0,19	1,21 (>1)
	Axa	1,32	1,31	1,3	1,27	1,18	1,45	0,09	1,31 (>1)
	SG	1,24	1,23	1,29	1,27	1,29	1,49	0,10	1,25 (>1)
	Renaud	1,21	1,22	1,26	1,31	1,38	1,64	0,16	1,23 (>1)
	CA	1,22	1,13	1,17	1,26	1,28	1,32	0,07	1,2 (>1)
	Michelin	1,16	1,19	1,12	1,22	1,53	1,63	0,22	1,19 (>1)
Betas volatils par rapport à 1	Accor	1,01	1,03	0,91	0,97	1,53	1,07	0,22	1,01 (=)
	Air liquide	0,96	0,92	1,01	0,9	0,86	0,45	0,20	0,94 (=)
	Airbus	1,03	0,94	1,01	1,19	1,18	1,63	0,25	1,02 (=)
	BNP	1,27	1,24	1,29	1,12	1,06	1,02	0,12	1,25 (>1)
	Bouygues	1,1	1,01	1,03	1,37	1,35	1,06	0,16	1,09 (=)
	GDF	0,84	0,72	0,92	1,14	1,09	0,92	0,16	0,85 (<1)
	Gemini	1,14	1,42	1,49	1,6	1,66	0,88	0,30	1,28 (>1)
	LVMH	1	1,11	1,02	1,08	1,07	0,99	0,05	1,04 (=)
	PSA	1,02	1,02	1,1	1,05	1,28	0,69	0,19	1,03 (=)
	Schneider	1,01	1,08	1,15	1,38	0,89	1,21	0,17	1,07 (=)
	Sodexo	0,74	0,94	1,07	1,19	0,93	1,33	0,21	0,87 (<1)
	St-Gobain	1,13	1,03	1,12	1,25	1,02	0,9	0,12	1,11 (>1)
	Technip	1,04	0,9	1,11	1,16	0,83	1,64	0,29	1,03 (=)
	Total	0,93	0,99	0,85	0,86	1,17	1,24	0,16	0,94 (=)
Veolia	0,61	0,65	0,88	0,98	0,66	0,82	0,15	0,68 (<1)	
Vinci	0,93	0,89	0,98	0,96	0,85	0,84	0,06	0,93 (=)	

10-2 : Période 2

	Période 2	D1	D2	D3	D4	D5	D6	ET des betas	Beta global
Betas toujours inférieurs à 1	Vivendi	0,8	0,79	0,76	0,7	0,75	0,77	0,04	0,79 (<1)
	Sodexo	0,6	0,67	0,59	0,53	0,64	0,62	0,05	0,61 (<1)
	Carrefour	0,866	0,9	0,83	0,95	0,82	0,75	0,07	0,87 (<1)
	Essilor	0,43	0,42	0,33	0,47	0,55	0,41	0,07	0,42 (<2)
	Orange	0,65	0,63	0,59	0,52	0,51	0,43	0,08	0,62 (<1)
	Total	0,92	0,92	0,83	0,92	0,95	0,71	0,09	0,91(<1)
	Airbus	0,89	0,9	1,03	0,93	1,12	1,12	0,11	0,92 (<1)
	L'Oréal	0,7	0,69	0,55	0,48	0,63	0,77	0,11	0,67 (<1)
	Danone	0,62	0,64	0,51	0,34	0,45	0,71	0,14	0,59 (<1)
Betas toujours supérieurs à 1	Bouygues	1,09	1,08	1,13	1,09	1,06	1,21	0,05	1,09 (>1)
	Axa	1,55	1,68	1,67	1,8	1,76	1,999	0,15	1,62 (>1)
	St-Gobain	1,39	1,46	1,42	1,62	1,78	1,77	0,18	1,43 (>1)
	CA	1,45	1,58	1,75	1,92	1,44	1,55	0,19	1,55 (>1)
	SG	1,44	1,51	1,86	1,87	1,61	2,07	0,24	1,55 (<1)
	BNP	1,44	1,43	1,57	1,83	1,07	1,08	0,29	1,46 (>1)
	Alcatel	1,16	1,28	1,49	1,44	1,83	2,03	0,33	1,28 (>1)
	Renaud	1,27	1,44	1,67	1,69	1,46	2,24	0,34	1,41 (>1)
Betas volatils par rapport à 1	LVMH	0,95	1,006	1,06	1,02	0,96	0,92	0,05	0,98 (=)
	Vinci	1,19	1,2	1,17	1,08	1,02	1,17	0,07	1,18 (>1)
	Schneider	1,31	1,32	1,22	1,22	1,14	1,09	0,09	1,29 (>1)
	Technip	1,08	1,15	1,31	1,27	1,1	1,05	0,11	1,14 (>1)
	Michelin	1,04	1,16	1,32	1,17	1,028	1,23	0,11	1,11 (>1)
	GDF	0,94	1,02	0,84	0,92	0,95	0,69	0,12	0,95 (=)
	Gemini	0,99	1,06	1,09	1,06	1,22	1,3	0,12	1,03 (=)
	Air liquide	0,83	0,79	0,74	0,71	0,81	0,5	0,12	0,8 (<1)
	Ricard	0,68	0,75	0,79	0,68	0,78	1,02	0,13	0,72 (<1)
	Publicis	0,69	0,74	0,77	0,84	0,85	1,05	0,13	0,73 (<1)
	Accor	0,92	1,11	1,2	1,12	1,06	1,35	0,14	1,03 (=)
	PSA	1,03	1,27	1,43	1,41	1,44	1,08	0,18	1,17 (>1)
Veolia	0,92	0,88	1,12	1,2	1,33	1,52	0,24	0,97 (=)	

10-3 : Période 3

	Période 3	D1	D2	D3	D4	D5	D6	ET des betas	Beta global
Betas toujours inférieur à 1	Danone	0,86	0,77	0,59	0,67	0,87	0,92	0,13	0,797 (<1)
	Michelin	0,82	0,87	0,92	0,87	0,92	0,67	0,09	0,855 (<1)
	Publicis	0,67	0,71	0,82	0,87	0,8	0,48	0,14	0,716 (<1)
	Sodexo	0,57	0,61	0,66	0,74	0,54	0,44	0,10	0,6 (<1)
	Technip	0,63	0,75	0,82	0,77	0,75	0,8	0,07	0,7 (<1)
	Vivendi	0,74	0,77	0,8	0,83	0,68	0,69	0,06	0,758 (<1)
Betas toujours supérieur à 1	Carrefour	1,11	1,1	1,11	1,05	1,2	1,12	0,05	1,108 (>1)
	PSA	1,07	1,25	1,49	1,34	1,5	1,17	0,17	1,2 (>1)
	Schneider	1,17	1,03	1,04	1,25	1,26	1,06	0,11	1,13(>1)
	SG	1,26	1,36	1,34	1,38	1,49	1,52	0,10	1,31 (>1)
Betas volatils par rapport à 1	Accor	0,81	0,84	0,86	0,98	0,81	0,68	0,10	0,83 (<1)
	Airbus	0,98	1,12	1,14	0,96	1,32	1,47	0,20	1,05 (=)
	Air liquide	0,95	0,83	0,8	0,92	0,86	1,02	0,08	0,89 (<1)
	Alcatel	0,86	1,08	1,22	1,008	1,49	0,83	0,25	0,99 (=)
	Axa	1,15	1,2	1,13	1,18	1,06	0,94	0,10	1,15 (>1)
	BNP	1,2	1,2	1,29	1,09	1	1,05	0,11	1,19 (>1)
	Bouygues	0,92	0,83	0,9	1,006	0,93	0,68	0,11	0,9 (<1)
	CA	1,11	1,18	1,21	1,19	0,95	1,46	0,17	1,147 (>1)
	Essilor	0,98	0,91	0,82	0,91	1,06	0,96	0,08	0,94 (=)
	GDF	0,96	0,96	0,94	0,98	0,83	0,98	0,06	0,953 (=)
	Gemini	0,86	0,97	0,9	0,78	0,96	0,92	0,07	0,89 (<1)
	L'Oréal	0,96	0,87	0,77	0,76	0,82	0,98	0,09	0,9 (<1)
	LVMH	1,05	1,04	0,98	0,9	1,28	1,22	0,14	1,04 (=)
	Orange	1,11	1,16	1,015	1	1,15	1,11	0,07	1,106 (>1)
	Renaud	1,03	1,28	1,32	1,58	1,46	1,48	0,19	1,18 (>1)
	Ricard	0,67	0,65	0,62	0,79	0,97	1,18	0,22	0,68 (<1)
	St-Gobain	1,13	1,06	1,22	1,23	1,08	0,71	0,19	1,12 (>1)
	Total	1,002	1,003	1,04	1,12	1,02	0,98	0,05	1,014 (=)
Veolia	0,77	0,89	0,94	0,9	0,99	0,98	0,08	0,839 (<1)	
Vinci	0,96	0,98	1,005	0,92	0,75	0,58	0,17	0,956 (=)	

Annexe 11: Comparaison des betas fréquentiels par période :

11-1 : Période 1

Période 1	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Accor	NS	NS	NS	NS	S	NS
Airbus	NS	NS	NS	NS	NS	S
Airliquide	NS	NS	NS	NS	NS	S
Alcatel	NS	NS	NS	NS	S	NS
Axa	NS	NS	NS	NS	S	S
BNP	NS	NS	NS	S	S	S
Bouygues	NS	NS	NS	S	S	NS
CA	NS	NS	NS	NS	NS	S
Carrefour	NS	NS	S	NS	S	S
Danone	NS	NS	NS	NS	NS	S
Essilor	NS	S	NS	S	S	S
GDF	NS	NS	NS	S	S	NS
Gemini	NS	NS	S	S	S	S
L'Oréal	NS	NS	NS	S	NS	NS
LVMH	NS	NS	NS	NS	NS	NS
Michelin	NS	NS	NS	NS	S	S
Orange	NS	NS	NS	NS	S	S
PSA	NS	NS	NS	NS	S	S
Publicis	NS	NS	NS	NS	NS	S
Renault	NS	NS	NS	NS	S	S
Ricard	NS	NS	NS	NS	S	NS
Schneider	NS	NS	NS	S	S	S
SG	NS	NS	NS	NS	NS	S
Sodexo	NS	NS	S	S	NS	S
St-Gobain	NS	NS	NS	S	NS	S
Technip	NS	NS	NS	NS	S	S
Total	NS	NS	NS	NS	S	S
Veolia	NS	NS	S	S	NS	S
Vinci	NS	NS	NS	NS	NS	NS
Vivendi	NS	NS	S	NS	S	S

11-2 : Période 2

Période 2	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Accor	S	S	S	S	NS	S
Airbus	NS	NS	S	S	NS	S
Air liquide	NS	NS	S	NS	S	S
Alcatel	NS	NS	S	S	S	S
Axa	NS	NS	NS	S	S	S
BNP	NS	NS	NS	S	S	S
Bouygues	NS	NS	NS	NS	NS	S
CA	S	NS	S	S	S	NS
Carrefour	NS	NS	NS	S	NS	S
Danone	NS	NS	S	S	S	S
Essilor	NS	NS	S	NS	S	NS
GDF	NS	S	S	NS	NS	S
Gemini	NS	NS	NS	NS	S	S
L'Oréal	NS	NS	S	S	NS	S
LVMH	NS	NS	S	NS	NS	S
Michelin	NS	NS	S	NS	S	S
Orange	NS	NS	NS	S	S	S
PSA	S	NS	S	S	S	NS
Publicis	NS	NS	NS	S	S	S
Renault	S	NS	S	S	NS	S
Ricard	NS	NS	NS	NS	NS	S
Schneider	NS	NS	S	S	S	S
SG	S	NS	S	S	NS	S
Sodexo	NS	S	NS	S	NS	NS
St-Gobain	NS	NS	NS	S	S	S
Technip	NS	NS	S	S	NS	S
Total	NS	NS	S	NS	NS	S
Veolia	NS	NS	S	S	S	S
Vinci	NS	NS	NS	S	S	NS
Vivendi	NS	NS	NS	S	NS	NS

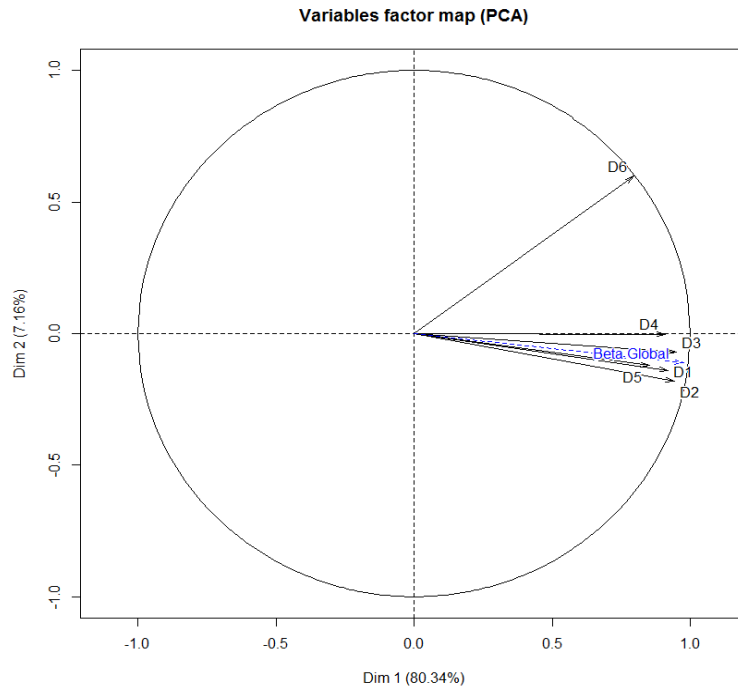
11-3 : Période 3

Période 3	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Accor	NS	NS	NS	S	NS	S
Airbus	NS	S	S	NS	NS	S
Air liquide	NS	NS	NS	NS	S	S
Alcatel	NS	NS	S	NS	S	NS
Axa	NS	NS	NS	NS	S	S
BNP	NS	NS	S	S	S	S
Bouygues	NS	NS	NS	NS	NS	S
CA	NS	NS	S	NS	S	S
Carrefour	NS	NS	NS	NS	S	NS
Danone	NS	NS	S	S	S	S
Essilor	NS	NS	S	NS	S	NS
GDF	NS	NS	NS	NS	S	NS
Gemini	NS	NS	NS	S	NS	NS
L'Oréal	NS	NS	S	S	NS	S
LVMH	NS	NS	NS	S	S	S
Michelin	NS	NS	NS	NS	NS	S
Orange	NS	NS	NS	NS	NS	NS
PSA	S	NS	S	S	S	NS
Publicis	NS	NS	S	S	NS	S
Renault	S	NS	S	S	S	S
Ricard	NS	NS	NS	S	S	S
Schneider	NS	S	S	S	S	NS
SG	NS	NS	NS	NS	S	S
Sodexo	NS	NS	NS	S	NS	S
St-Gobain	NS	NS	S	S	NS	S
Technip	NS	NS	NS	NS	NS	NS
Total	NS	NS	NS	S	NS	NS
Veolia	NS	NS	NS	NS	S	S
Vinci	NS	NS	NS	NS	S	S
Vivendi	NS	NS	NS	NS	NS	NS

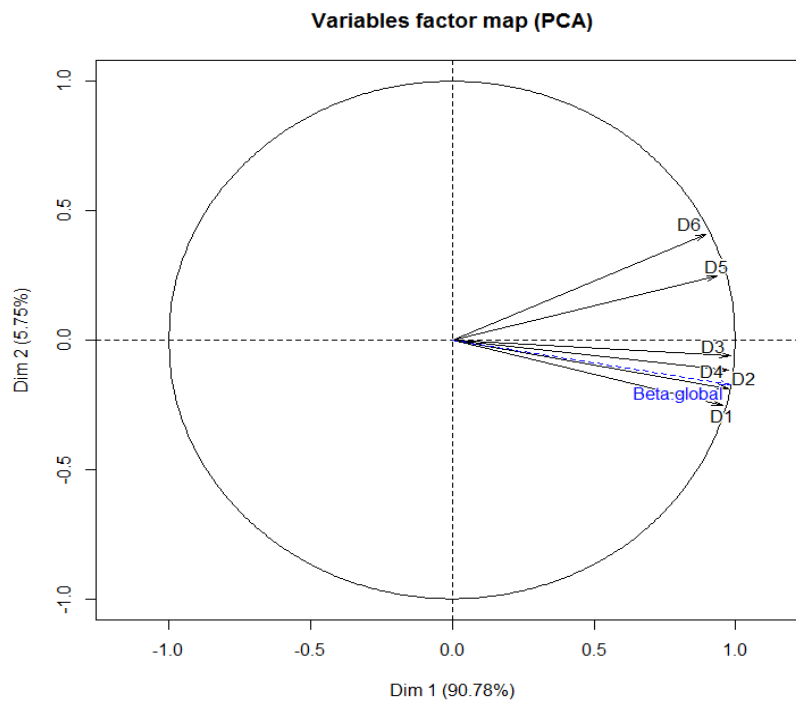
Annexe 12 : Cercles de corrélation des analyses en composantes principales

pour les trois sous-périodes.

Période 1 :

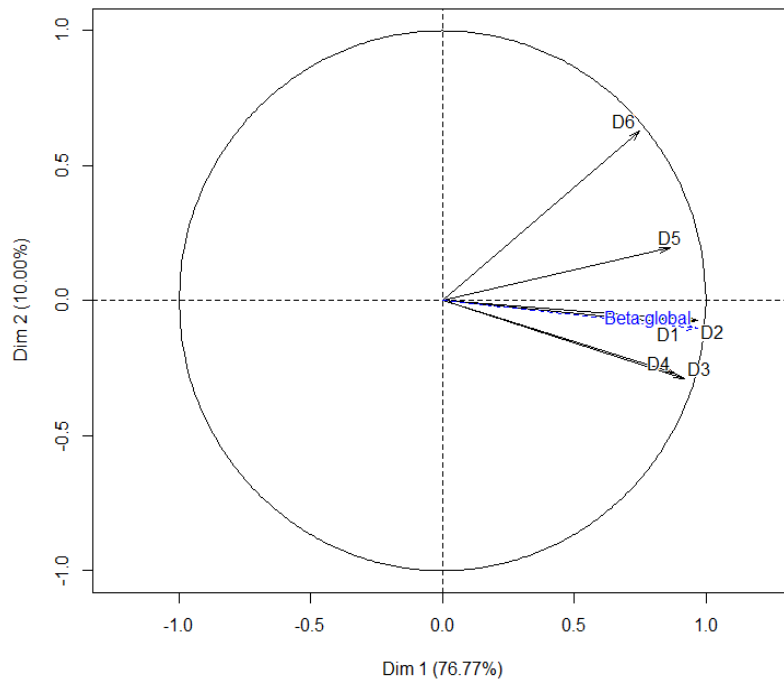


Période 2 :



Période 3 :

Variables factor map (PCA)



Bibliographie

F.Black, M. Jensen, and M. Scholes 1972, 'The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Test'; *Studies in the Theory of Capital Markets* edited by M. Jensen New York: Praeger Publishers.

L. Chan, J.Lakonishok 1993, 'Are the Reports of Beta's Death Premature ?', *Journal of Portfolio Management*, 19 (4): 51-61.

I. Daubechies 1992, 'Ten lectures on wavelets', Conference Series of Applied mathematics ; Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia 1992.

E. Fama 1968, 'Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments'; *Journal of Finance* 23 (1): 29-40.

F. Fabozzi, J-C Francis 1978, 'Beta as a random coefficient', *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13 (1) :101-116

E.Fama 1970,' Efficient Capital Markets: a Review of Theoretical and Empirical Works', *Journal of Finance* 25 (2) : 383-417.

E. Fama and J. MacBeth 1973, 'Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests' *Journal of Political Economy* 81 (3): 607-636.

E. Fama and K. French 1992, 'The Cross-Section of Expected Stock Returns' ; *Journal of Finance*, 47 (2): 427-465.

R. Gençay, F. Selçuk and B. Whitcher 2003. 'Systematic Risk and Timescales', *Quantitative Finance*, 3 (2): 108-116.

J. Lintner 1965, 'The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets'; *Review of Economics and Statistics*. 47 (1) : 13-37.

J. Lintner 1981, 'Some new perspectives on tests of CAPM and other capital asset pricing models and issues of market efficiency' ; edited by Harvard Institute of Economic Research, discussion paper.

S. Mallat 1989, 'A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation'; *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 11 (7).

- S. Mallat 2001, Une exploration des signaux en ondelettes, Ecole polytechnique.
- S. Mallat 2009, Wavelet tour of signal processing: the sparse way, Academic Press.
- H. Markowitz 1952, 'Portfolio Selection' *Journal of Finance*, 7 (1) : 77-91.
- Y. Meyer (1990), Ondelettes et algorithmes concurrents, Actualités mathématiques Hermans éditions des sciences et des arts xii p.217-381, 1990.
- F. Modigliani, G. Pogue B. Solnik (1973), A test of the Capital Asset Pricing Model on european stock markets ; Version réécrite de leur présentation au premier International Congress on stock exchange, March 1972, Milan, Italy.
- J.Mossin (1966), Equilibrium in a Capital Asset Market; *Econometrica* Vol. 34, pp. 768–783.
- W.Newey, K.West, Kenneth (1987), A Simple, Positive Semi-definite, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix. *Econometrica* Vol. 55 No. 3 pp 703–708.
- W. Sharpe (1964), Capital Asset Prices : a Theory of Market Equilibrium under risk ; *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3 (Sep., 1964), pp. 425-442.
- W. Sharpe, G. Cooper (1972), Risk -Return Classes of New York Stock Exchange Common Stocks: 1931 –1967, *Financial Analysis Journal* Vol. 28 No. 2 (March-April 1972) pp 46-54.
- J.Tobin (1958), Liquidity preference as behavior towards risk; *The review of economics studies*, Vol. 25, No. 2 (Feb 58), pp. 65-86.

L'utilisation des ondelettes discrètes dans le cadre du MEDAF met ainsi en évidence la diversification des profils-risque au niveau fréquentiel. L'utilisation des fenêtres roulantes forward sur les bandes de fréquences permet de montrer que la volatilité temporelle du beta se différencie aussi au cours des fréquences. Cette technique, cependant, se base sur une seule décomposition en ondelettes réalisée sur l'ensemble des observations. La fenêtre roulante vient alors "couper" les bandes de fréquences, de la sorte, les propriétés des ondelettes ne sont pas concordantes avec sa taille. Conceptuellement, cette approche intuitive n'est pas adaptée à une utilisation empirique puisque les décompositions sont réalisées a posteriori. Il serait alors préférable d'employer une fenêtre roulante qui à chaque nouvelle observation réalise la décomposition en ondelette et estime les différents betas fréquents. De cette façon, la taille de la fenêtre conditionne les décompositions en ondelettes.

La section suivante fournit des éléments de réponse sur les différences observables entre ces deux utilisations des fenêtres roulantes dans le cadre des ondelettes discrètes. Elle vient compléter les résultats précédents en fournissant pour des horizons court et long la dynamique tempo-fréquentielle des betas des trente actions retenues.

Section 2 : La Fenêtre Tempo-Fréquentielle Roulante : une étude de l'instabilité des Betas

La Régression Roulante (Forward ou Backward) est une méthode fort ancienne utilisée en économétrie essentiellement pour analyser la robustesse des modèles. Elle consiste simplement à sélectionner une fenêtre d'observations constante que l'on fait rouler, en avant ou en arrière, sur l'axe du temps en estimant à chaque pas les paramètres du modèle. On obtient, de la sorte, un ensemble d'informations sur l'évolution des caractéristiques du modèle qui permettent de vérifier des hypothèses posées a priori comme l'absence de rupture ou encore la constance des paramètres. Cette méthode connaît un regain d'intérêt ces dernières années dans divers domaines de l'économie comme celui de la finance qui rassemble des bases de données où le nombre d'observations est conséquent ce qui conduit à une utilisation plus efficace de la Régression Roulante. L'étude de la volatilité de différents paramètres qui jouent un rôle crucial dans la mesure du risque lors de la construction de portefeuilles boursiers en est un exemple. On l'utilise ainsi dans la Théorie de Sharpe et de sa représentation mathématique la Droite de Marché qui met en relation les rendements d'une action avec ceux d'un indice de référence. Dans ce modèle de régression simple le paramètre Beta est, par hypothèse, d'espérance mathématique et de variance constante et les concepteurs de portefeuilles sont supposés avoir un même comportement face au risque qu'ils soient chartistes ou fondamentalistes.

La littérature financière, à travers ses applications empiriques utilisant la technique de la fenêtre roulante, ne vérifie pas ces hypothèses et a mis, au contraire, en évidence l'instabilité du Beta du MEDAF (Cf. Fabozzi and Francis 1978). On peut se référer aux travaux de Faff et al (1992-1998), de Brooks et al (1992-1998) mais surtout de Groenewold et Fraser (1997) et de Yeo (2001) qui comparent l'utilisation des processus GARCH, des fenêtres roulantes et du filtre de Kalman-Bucy pour estimer le Beta au cours du temps. La décomposition en ondelettes des variables de la droite de marché a été utilisé par Gençay *et al* en 2003. Elle montre, sur des données américaines, que les betas se différencient selon les fréquences d'investissement obtenues. Cette approche de l'analyse temps-fréquence a été élaborée en 1909 par Haar et améliorée par Gabor en 1946. Elle constitue une avancée méthodologique décisive dans le traitement fréquentiel du signal. Vulgarisée sous le nom d'ondelettes, elle

permet d'isoler les différentes fréquences d'une chronique tout en étudiant leurs évolutions au cours du temps. Elle est devenue, de ce fait, l'instrument privilégié pour prendre en compte l'hypothèse comportementale d'hétérogénéité des agents lors de la constitution de leurs portefeuilles et a permis la construction, par exemple, de la WVVaR (Wavelets Value-at-Risk).

L'utilisation des Fenêtres Roulantes Forward associée aux ondelettes constitue ainsi un instrument efficace pour analyser l'instabilité fréquentielle du MEDAF. Une approche intuitive consiste à appliquer directement la Fenêtre Roulante sur les outputs de la décomposition fréquentielle. En recourant à cette technique, la robustesse du profil-risque est étudiée en analysant la volatilité temporelle et fréquentielle du paramètre beta selon divers horizons de placement (Cf. Mestre et Terraza 2018). McNevin et Nix (2018) l'ont aussi appliqué pour apprécier la dynamique des betas par secteurs économiques avec des observations mensuelles. Ils ont ainsi montré que celle-ci n'est pas similaire en fonction des bandes de fréquences.

Ce type d'approche revient à considérer que la décomposition en ondelettes est unique sur la période globale de l'étude ce qui est contestable. Il est préférable, conceptuellement, de lui substituer une Fenêtre Tempo-Fréquentielle Roulante qui décompose à chaque pas de temps les rendements boursiers en ondelettes. Nous appliquons cette méthodologie pour estimer et analyser la volatilité fréquentielle des Betas des Droites de Marché de 30 actions françaises cotées sur le CAC40 pour la période journalière 2005-2015 (N=2869).

Dans une première partie nous rappelons les aspects théoriques des ondelettes et nous montrons, sur un échantillon de la base de données, les différences existantes entre les deux approches utilisant la fenêtre roulante fréquentielle. Dans une deuxième partie nous appliquons la Fenêtre Tempo-Fréquentielle pour étudier l'instabilité des Betas.

2.1 Aspects théoriques des ondelettes : une comparaison des fenêtres tempo-fréquentielles appliquées au MEDAF

La droite de marché découlant du Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers (MEDAF) de Sharpe (1964) s'écrit :

$$y_t = \alpha + \beta \cdot x_t + \varepsilon_t$$

Avec y_t et x_t des processus aléatoires stationnaires représentant respectivement les rendements de l'actif et du marché et ε_t un processus *i.i.d.* $(0, \sigma_\varepsilon)$. Les paramètres, estimés par les MCO ou le Maximum de Vraisemblance, sont par hypothèse des estimateurs BLUE qui peuvent, dans ce cas, être utilisés pour réaliser différentes études empiriques.

Ce modèle suppose que le risque systématique estimé est constant et identique quel que soit l'horizon de placement des investisseurs. Il ne prend pas en considération sa variabilité temporelle mais aussi l'hypothèse comportementale d'hétérogénéité des agents. En recourant aux régressions roulantes nous pouvons évaluer ce risque au cours du temps et les ondelettes permettent de l'estimer sur plusieurs échelles fréquentielles.

2.1.1 Présentation théorique des ondelettes

La technique des ondelettes est un outil mathématique permettant de réduire l'arbitrage temps-fréquence. La Transformée de Fourier dans l'analyse spectrale traditionnelle impose, en effet, de choisir son degré de localisation temporelle ou fréquentielle, alors que les décompositions en ondelettes se basent sur une fonction particulière notée $\psi(t)$ (*l'ondelette-mère*) qui est de moyenne nulle et qui préserve l'énergie/variance de la série de départ. Elle est translatée et dilatée par les paramètres s et τ définissant la position fréquentielle et temporelle de la série, et permet de constituer la famille d'ondelettes $\psi_{\tau,s}(t)$:

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

Le processus de Transformation permet ainsi de calculer les coefficients d'ondelettes $W(s, \tau)$ par une projection de la fonction $x(t)$ sur la famille $\psi_{\tau,s}(t)$ (i.e. le produit scalaire).

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt = \langle x(t), \psi_{\tau,s}(t) \rangle$$

Avec $\psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$ le complexe conjugué de $\psi_{\tau,s}(t)$.

Cette décomposition continue en ondelettes (ou CWT) est développée théoriquement par Gabor en 1946 et popularisée par Morlet et Grossman (1984) puis par Meyer (1986). Une adaptation des transformations en ondelettes, dans le cas discret, permet des décompositions plus rapides et simples à mettre en œuvre via une échelle fréquentielle dyadique. On utilise, plus couramment, une version discrétisée particulière appelée Maximal Overlap Discrete

Wavelet Transform (MODWT) qui possède des propriétés intéressantes permettant de choisir le degré de résolution et d'améliorer l'analyse de la variance (Cf. les travaux de Mallat (1989) et de Daubechies (1992)). La décomposition s'opère par un filtrage successif de la série et par une remise à l'échelle des outputs du filtre. Ce procédé est connu sous le nom d'Algorithme en Cascade de Mallat (1989-2001-2009). A l'issue de la décomposition on obtient une segmentation fréquentielle de la série d'origine en plusieurs bandes de fréquences notées D_j pour $j=1, \dots, J$ reliées à un horizon temporel. Le nombre maximal de bandes de fréquence J nécessaire pour la décomposition se calcule selon la formule : $J = \frac{\text{Ln}(N)}{\text{Ln}(2)}$ (voir Table A1 en annexes).

La décomposition additive en ondelettes discrètes permet de reconstruire la série temporelle de départ x_t selon : $x_t = S_J + \sum_{j=1}^J D_j$

La chronique est la somme d'une approximation S_j et de bandes de fréquences de résolution différentes (c'est-à-dire attachées à divers horizons temporels). La décomposition discrète fournit des sous-chroniques sur lesquelles il est possible d'estimer le Beta de la Droite de Marché et d'appliquer la fenêtre roulante intuitive et la fenêtre tempo-fréquentielle pour étudier son instabilité. Ces régressions roulantes Forward à fenêtre fixe sont de longueur 260 jours qui correspondent, pour des observations journalières financières, à 1 année de trading. Nous définissons ainsi les Betas suivants :

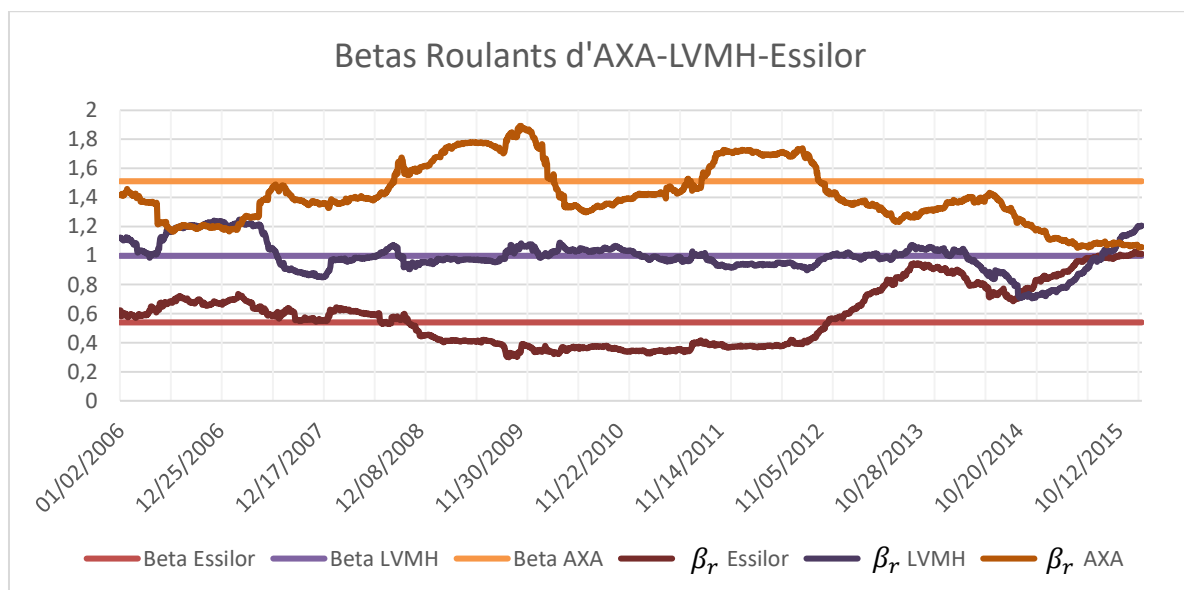
- β est l'estimation traditionnelle par les MCO du paramètre de la Droite de Marché qui est par construction fixe au cours du temps.
- β_r correspond aux Betas Roulants estimés sans recourir à la décomposition fréquentielle. Ce sont les Betas des Régressions Roulantes du modèle $y_{t,i} = \alpha_i + \beta_i x_{t,i} + \varepsilon_{t,i}$ Avec i l'indice des actions retenues dans la base de données ($i = 1 \dots 30$).
- β_F représente les Betas Roulants fréquentiels estimés à partir de l'équation précédente avec la fenêtre à observations constantes (méthode intuitive) qui glisse le long des bandes de fréquence issues des décompositions en ondelettes des séries.
- β_{TF} sont les Betas Roulants tempo-fréquentiels estimés avec des décompositions en ondelettes à chaque glissement de la fenêtre. Les ondelettes devant respecter les propriétés de conservation de l'énergie et la nullité de la moyenne, nous vérifions qu'il

y a concordance entre la taille de la régression et le nombre de points utilisés pour la décomposition. Dans la procédure précédente il peut arriver que ces propriétés ne soient pas respectées ce qui peut introduire des biais dans les estimateurs des paramètres du modèle.

2.1.2 Comparaisons des estimations tempo-fréquentielles du Beta :

L'estimation de la Droite de Marché nécessite, pour le calcul de β et β_r , de vérifier la stationnarité des rendements des actions et de l'indice CAC40 pour la période 2005 – 2015¹. Nous retenons, pour simplifier l'exposé, les actions AXA, LVMH et Essilor qui ont des betas respectivement inférieur, égal et supérieur à 1. La Figure 1 illustre les évolutions des différents Profils-Risque pour les trois actions : AXA amplifie les mouvements du Marché (Risque Fort), Essilor les atténue (Risque Faible), et LVMH réplique les fluctuations du CAC40 (Risque Unitaire). La fenêtre roulante forward permet bien d'apprécier l'instabilité plus ou moins forte des Betas des actifs.

Figures 1 : β_r d'AXA, LVMH et Essilor

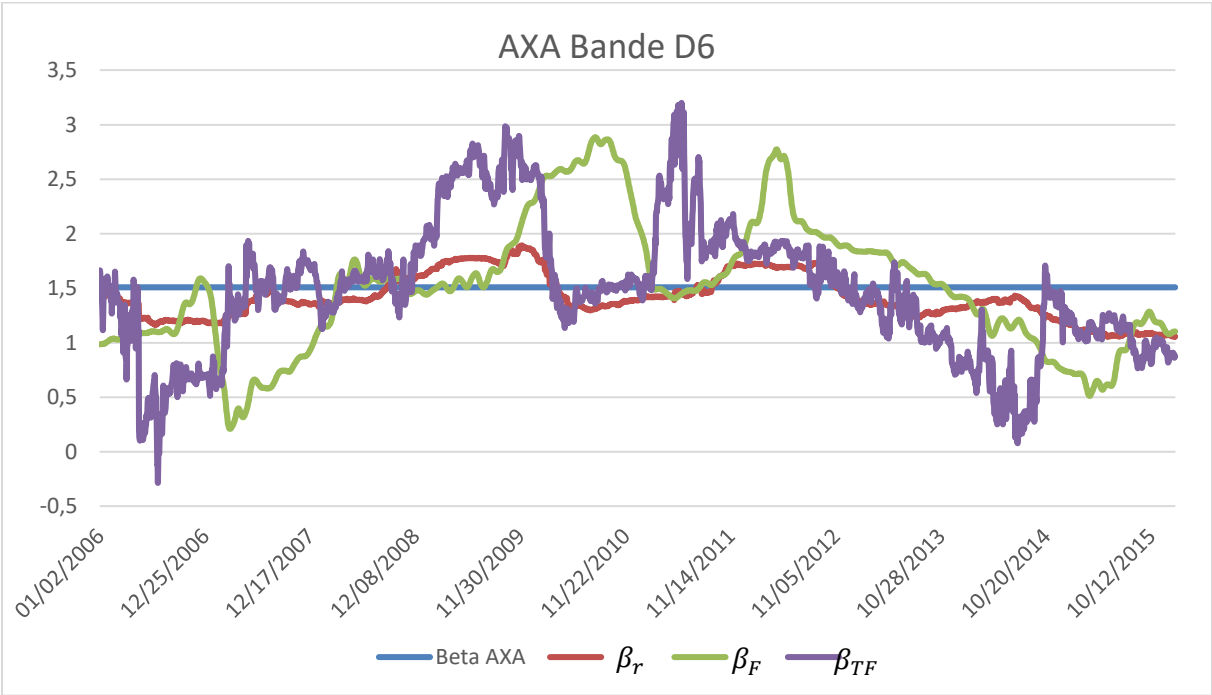
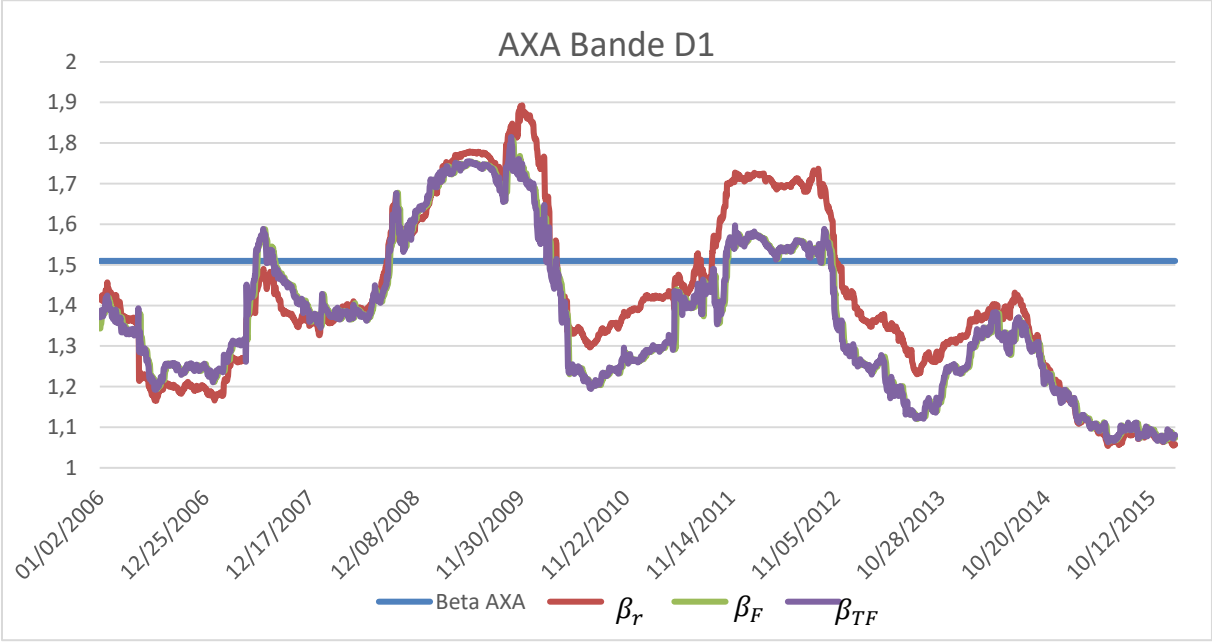


- Estimations des Betas roulants β_F et β_{TF}

Les différences entre les deux approches fréquentielles pour analyser l'instabilité du Betas sont obtenues par l'estimation des Droites de Marché fréquentielles avec les fenêtres roulantes associées.

Les Figures 2 illustrent graphiquement la volatilité du Beta de l'action AXA pour les bandes D1 et D6 qui représentent respectivement les comportements de court et de moyen-terms des gestionnaires de portefeuilles. Nous représentons aussi le Beta des MCO et les β_r afin de compléter les comparaisons. Les résultats pour les deux autres actions, qui présentent les mêmes caractéristiques, sont consignés dans l'annexe A2.

Figures 2 : Betas roulants β_r , β_F et β_{TF} d'AXA :



Les volatilités illustrées par les β_F et les β_{TF} sont confondues sur la bande D1 et parfaitement différentes sur la bande D6. On remarque aussi un résultat similaire en les comparant avec les β_r : à long-terme la dynamique des β_F , des β_{TF} et des β_r sont différentes tandis qu'à court-terme on note des différences moins marquées.

Afin d'analyser plus en détails ces différences selon les bandes de fréquences retenues, nous calculons dans la Table 2 les moyennes absolues des différences entre leurs Betas Roulants

Table 2 : Erreur Moyenne Absolue entre les Betas.

	MAE entre	D1	D2	D3	D4	D5	D6
AXA Beta > 1	β_r et β_F	0,07	0,08	0,13	0,18	0,33	0,39
	β_r et β_{TF}	0,07	0,08	0,11	0,17	0,28	0,35
	β_F et β_{TF}	0,01	0,03	0,06	0,13	0,3	0,59
Essilor Beta < 1	β_r et β_F	0,04	0,07	0,09	0,17	0,26	0,35
	β_r et β_{TF}	0,04	0,07	0,09	0,15	0,20	0,30
	β_F et β_{TF}	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,41
LVMH Beta = 1	β_r et β_F	0,04	0,05	0,12	0,19	0,16	0,30
	β_r et β_{TF}	0,04	0,05	0,11	0,17	0,17	0,31
	β_F et β_{TF}	0,01	0,02	0,05	0,12	0,14	0,35

$$(MAE = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |\hat{\beta}_i - \tilde{\beta}_j| \text{ pour } i = r, F, TF \text{ et } j = r, F, TF \text{ tel que } i \neq j \text{ et } T = \text{nombre de Betas roulants})$$

En moyenne les différences entre les deux méthodes (β_F et β_{TF}) sont plus importantes sur les bandes de Basses-Fréquences (horizon long) que sur celles des Hautes-Fréquences (D1-D2) et elles s'accroissent globalement des Hautes aux Basses fréquences. Les différences plus importantes entre les β_r et les autres Betas quelles que soient les fréquences justifient l'utilisation de l'analyse fréquentielle pour l'étude de l'instabilité.

La Fenêtre Tempo-Fréquentielle est conceptuellement plus adaptée que l'utilisation intuitive parce qu'elle réalise simultanément la régression et les décompositions en ondelettes. Par ailleurs, elle apparaît plus pratique pour un gestionnaire de portefeuille qui n'a pas à décomposer préalablement ses séries pour l'utiliser parce que la régression et la transformation en ondelettes s'effectuent de manière concomitante à chaque étape. Ces différences entre les deux fenêtres roulantes fréquentielles lors de l'étape d'estimation sont aussi dues en partie à l'inéquation entre la taille de fenêtre (260 points) et le nombre de points support de la décomposition (2869 points).

2.2 Analyse de l'instabilité des Betas par la Fenêtre Tempo-Fréquentielle.

La Fenêtre Tempo-Fréquentielle est à présent utilisée pour étudier l'instabilité des Betas³ de l'ensemble des actions de la base de données. Les Tableaux 3 consignent les évolutions des Betas Roulants β_r et des Betas tempo-fréquentiels β_{TF} des 30 actions pour les bandes D1 et D6 (en ligne). Nous mentionnons les valeurs des Betas Statiques estimés par les MCO et leurs t-stat à 1 dans les deux premières colonnes pour établir les Profils-Risque initiaux. La volatilité (Faible-Moyenne-Forte) des β_r et β_{TF} est caractérisée par l'Ecart-Type (colonne ET) des chroniques des betas roulants. Dans les colonnes suivantes nous indiquons les pourcentages de Betas significativement inférieurs, supérieurs et égaux à 1 et ceux significativement inférieurs et égaux à 0 (sensibilité nulle ou contracyclique) afin d'apprécier la robustesse du Profil-Risque. Ce dernier est donc qualifié de Robuste dans le temps si une grande majorité des Betas se trouve dans la même catégorie que le Beta fixe des MCO (et inversement Non Robuste). Dans la dernière colonne, afin de simplifier l'interprétation de nos résultats, nous effectuons une synthèse qualitative.

Tableaux 3 : Volatilités des Betas

3.1 : Pour les actions avec un $\beta = 1$

Action avec Beta = 1	Beta Global	t-stat à 1	ET	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% beta <0	% beta = 0	Commentaires
Accor	0,99	-0,52	0,21	59,41	8,93	31,66	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Accor D1	0,91	-4,53	0,22	64,01	16,06	19,93	0,00	0,00	Plutôt Robuste forte Volatilité
Accor D6	1,18	8,77	0,6	38,10	4,60	48,68	5,06	3,56	Non Robuste très forte Volatilité
LVMH	1,00	-0,21	0,11	27,75	51,78	20,47	0,00	0,00	Plutôt Robuste Volatilité Plutôt faible
LVMH D1	0,98	-1,62	0,10	37,14	41,70	21,16	0,00	0,00	Plutôt Robuste Volatilité Plutôt faible
LVMH D6	0,97	-2,60	0,40	43,56	11,86	42,81	1,57	0,23	Non Robuste forte Volatilité
Cap Gemini	1,04	1,80	0,19	36,60	18,86	44,54	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Cap Gemini D1	0,98	-0,96	0,18	53,12	7,67	39,21	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Cap Gemini D6	1,18	9,59	0,47	38,29	7,51	51,78	1,30	1,11	Non Robuste forte Volatilité

Les lignes bleues correspondent aux résultats obtenus pour les β_r . Les actions sont classées d'après la valeur de leur Beta estimé par les MCO appelé Beta Global dans les tableaux. Ce dernier correspond donc à une estimation fixe du Beta définissant le profil-risque initial. La colonne ET consigne les Ecart-types des chroniques β_r et β_{TF} .

3.2 : Pour les actions avec un $\beta < 1$

Action avec Beta < 1	Beta Global	t-stat à 1	ET	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% beta <0	% beta = 0	Commentaires
Essilor	0,54	-31,03	0,21	93,48	6,52	0,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Essilor D1	0,56	-29,73	0,23	88,23	10,70	1,07	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Essilor D6	0,49	-34,07	0,42	74,40	3,87	5,60	7,44	8,70	Non Robuste forte Volatilité
Sodexo	0,64	-22,65	0,16	97,39	2,11	0,50	0,00	0,00	Robuste Volatilité moyenne
Sodexo D1	0,61	-24,26	0,15	98,20	1,76	0,04	0,00	0,00	Robuste Volatilité moyenne
Sodexo D6	0,61	-25,10	0,52	64,89	6,02	15,75	11,27	2,07	Non Robuste forte Volatilité
Danone	0,65	-23,83	0,12	99,62	0,38	0,00	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Danone D1	0,68	-22,11	0,12	99,50	0,50	0,00	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Danone D6	0,73	-22,82	0,4	74,17	4,87	14,14	4,06	2,76	Non Robuste forte Volatilité
Ricard	0,69	-17,89	0,11	100,00	0,00	0,00	100,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Ricard D1	0,66	-19,49	0,11	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Ricard D6	0,99	-0,98	0,32	73,82	4,02	21,81	0,15	0,19	Non Robuste forte Volatilité
Publicis	0,72	-17,93	0,07	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Publicis D1	0,69	-19,71	0,08	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Publicis D6	0,86	-8,83	0,44	52,09	6,17	35,72	2,99	3,03	Non Robuste forte Volatilité
L'Oréal	0,72	-19,97	0,12	97,82	2,19	0,00	0,00	0,00	Robuste Volatilité faible
L'Oréal D1	0,76	-16,91	0,13	91,68	6,94	1,38	0,00	0,00	Robuste Volatilité faible
L'Oréal D6	0,81	-17,15	0,27	80,64	10,31	8,43	0,15	0,46	Plutôt Robuste forte Volatilité
Orange	0,73	-17,60	0,21	70,83	12,46	16,71	0,00	0,00	Plutôt Robuste forte Volatilité
Orange D1	0,75	-16,84	0,22	69,72	9,66	20,62	0,00	0,00	Plutôt Robuste forte Volatilité
Orange D6	0,59	-26,86	0,57	61,52	4,45	26,22	4,83	2,99	Non Robuste forte Volatilité
Vivendi	0,79	-15,26	0,11	93,18	3,11	3,72	0,00	0,00	Robuste faible Volatilité
Vivendi D1	0,80	-14,45	0,14	77,00	16,02	6,98	0,00	0,00	Plutôt Robuste Volatilité moyenne
Vivendi D6	0,75	-16,04	0,34	73,25	11,19	14,83	0,04	0,69	Plutôt Robuste forte Volatilité
Air Liquide	0,83	-14,93	0,11	83,40	16,60	0,00	0,00	0,00	Plutôt Robuste faible Volatilité
Air Liquide D1	0,87	-11,49	0,11	58,80	35,91	5,29	0,00	0,00	Plutôt Robuste faible Volatilité
Air Liquide D6	0,60	-34,32	0,21	95,63	1,15	1,57	0,65	0,99	Robuste forte Volatilité
Carrefour	0,90	-5,75	0,21	56,42	13,91	29,67	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Carrefour D1	0,90	-5,93	0,21	56,27	17,67	26,06	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Carrefour D6	0,75	-12,81	0,58	47,64	7,01	35,95	8,51	0,88	Non Robuste forte Volatilité
Veolia	0,92	-3,90	0,20	80,38	2,77	16,86	0,00	0,00	Plutôt Robuste forte Volatilité
Veolia D1	0,86	-6,84	0,21	83,06	3,30	13,64	0,00	0,00	Plutôt Robuste forte Volatilité
Veolia D6	1,34	15,43	0,54	22,23	8,32	66,84	2,34	0,27	Non Robuste forte Volatilité
Total	0,93	-5,77	0,13	60,98	24,49	14,53	0,00	0,00	Plutôt Robuste Volatilité moyenne
Total D1	0,94	-5,30	0,14	59,68	19,05	21,27	0,00	0,00	Plutôt Robuste Volatilité moyenne
Total D6	0,83	-12,86	0,34	49,75	14,53	35,72	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
GDF	0,94	-3,57	0,09	58,80	40,94	0,27	0,00	0,00	Plutôt Robuste faible Volatilité
GDF D1	0,93	-3,83	0,11	54,00	36,30	9,70	0,00	0,00	Plutôt Robuste faible Volatilité
GDF D6	0,80	-13,68	0,36	64,24	10,04	25,70	0,00	0,00	Plutôt Robuste forte Volatilité
Airbus	0,95	-2,00	0,17	47,79	20,55	31,66	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Airbus D1	0,93	-3,20	0,18	49,75	25,60	24,65	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Airbus D6	1,19	7,20	0,68	30,82	5,63	57,34	4,98	1,23	Non Robuste très forte Volatilité

3.3 : Pour les actions avec un $\beta > 1$

Action avec Beta > 1	Beta Global	t-stat à 1	ET	% beta < 1	% beta =1	% beta >1	% beta <0	% beta = 0	Commentaires
Technip	1,05	1,99	0,22	35,42	21,51	43,08	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Technip D1	0,99	-0,31	0,23	40,21	23,57	36,22	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Technip D6	1,05	2,06	0,64	39,29	11,27	47,68	1,76	0,00	Non Robuste Très forte Volatilité
Bouygues	1,06	3,02	0,14	32,00	20,09	47,91	0,00	0,00	Non Robuste Volatilité moyenne
Bouygues D1	1,06	3,14	0,15	31,47	17,63	50,90	0,00	0,00	Non Robuste Volatilité moyenne
Bouygues D6	1,11	5,03	0,66	40,82	3,83	52,28	1,99	1,07	Non Robuste Très forte Volatilité
Michelin	1,08	3,70	0,17	24,65	30,29	45,07	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Michelin D1	1,01	0,61	0,19	40,24	28,25	31,51	0,00	0,00	Non Robuste forte Volatilité
Michelin D6	1,16	8,59	0,52	42,39	6,59	49,98	0,12	0,92	Non Robuste forte Volatilité
Vinci	1,11	7,85	0,16	19,66	19,86	60,48	0,00	0,00	Plutôt Robuste Volatilité moyenne
Vinci D1	1,12	8,16	0,18	27,64	13,72	58,64	0,00	0,00	Plutôt Robuste forte Volatilité
Vinci D6	1,04	3,10	0,38	47,11	10,66	42,12	0,00	0,11	Non Robuste Très forte Volatilité
PSA	1,17	6,04	0,15	12,46	12,11	75,43	0,00	0,00	Plutôt Robuste Volatilité moyenne
PSA D1	1,04	1,50	0,16	25,11	31,74	43,16	0,00	0,00	Plutôt Robuste forte Volatilité
PSA D6	1,08	2,84	0,9	30,70	4,64	53,32	10,50	0,84	Non Robuste Très forte Volatilité
Alcatel	1,22	6,66	0,17	8,43	17,79	73,78	0,00	0,00	Plutôt Robuste forte Volatilité
Alcatel D1	1,11	3,52	0,2	21,85	8,93	69,22	0,00	0,00	Plutôt Robuste forte Volatilité
Alcatel D6	1,75	21,39	0,73	12,80	3,80	79,72	2,57	1,11	Plutôt Robuste Très forte Volatilité
Schneider	1,24	14,72	0,14	4,40	8,06	87,54	0,00	0,00	Robuste Volatilité moyenne
Schneider D1	1,25	15,70	0,17	7,55	6,32	86,13	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Schneider D6	1,08	5,12	0,39	30,20	10,16	56,38	2,07	1,19	Non Robuste forte Volatilité
St-Gobain	1,34	19,45	0,18	3,68	11,27	85,05	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
St-Gobain D1	1,31	17,80	0,17	4,37	6,55	89,08	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
St-Gobain D6	1,49	26,85	0,46	21,23	5,29	73,48	0,00	0,00	Plutôt Robuste forte Volatilité
Renault	1,36	15,48	0,17	0,00	4,22	95,78	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Renault D1	1,22	10,18	0,15	8,74	17,52	73,75	0,00	0,00	Plutôt Robuste Volatilité moyenne
Renault D6	2,01	41,45	0,66	12,99	2,72	82,83	1,00	0,46	Robuste Volatilité Très forte
BNP	1,39	18,84	0,21	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
BNP D1	1,37	19,23	0,17	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
BNP D6	1,07	3,46	0,51	27,14	5,33	66,85	0,43	0,27	Plutôt Robuste Très forte Volatilité
CA	1,44	18,46	0,23	0,81	2,04	97,16	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
CA D1	1,37	16,03	0,2	1,00	2,91	96,09	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
CA D6	1,52	21,08	0,49	6,94	2,15	90,92	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
SG	1,47	19,28	0,30	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
SG D1	1,38	17,27	0,28	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
SG D6	1,91	39,46	0,33	6,63	2,91	90,46	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
AXA	1,51	26,20	0,21	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Axa D1	1,45	24,44	0,18	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	Robuste forte Volatilité
Axa D6	1,77	36,99	0,61	18,67	4,52	76,62	0,11	0,08	Plutôt Robuste Très forte Volatilité

Une synthèse des Profils-Risques de Court et de Moyen terme, à partir des tableaux précédents, conduit aux conclusions qui suivent :

- Quel que soit le Profil-Risque initial :
 - Les valeurs des écarts-types des β_{TF} sur D6 sont très importantes.
 - Les valeurs des écarts-types des Betas de D1 sont toujours inférieurs à celles de D6.
 - La volatilité des Betas à Long-Terme est donc foncièrement différente de celle de Court-Terme.
- La volatilité des β_{TF} de Long-Terme (D6) est totalement différente de celle des β_r pour toutes les actions. Des changements de Profil-Risque au niveau fréquentiel, c'est à dire les profils pour lesquels le Beta de long-terme n'est pas dans la même catégorie que celui du Beta Global, sont observés plus particulièrement pour Ricard, Veolia, Airbus, Accor, LVMH et Cap Gemini.
- La volatilité des β_{TF} de Court-Terme (D1) comparée à celle des β_r présente moins de différence que celle observée à long-terme (D6). La dynamique du Profil-Risque de court-terme se rapproche donc de celle du Profil global. On note, cependant, des exceptions pour les actions Accor, Michelin, Technip et PSA pour lesquelles un changement de Profil-Risque s'opère au niveau fréquentiel.

Si on se place du point de vue des différents Profils-Risque par rapport à 1, il est possible de résumer les informations obtenues dans les points suivants :

- Pour les actions dont le Beta est très supérieur à 1, la volatilité est forte mais leurs Profils-Risques de courts-termes et de longs termes restent relativement Robustes dans le temps (les β_{TF} calculés sur D1 et D6 fluctuent fortement mais constamment au-dessus de 1).
- Pour les actions dont le Beta est inférieur à 1, les Profils-Risque de courts-termes sont Robustes dans le temps avec une volatilité relativement faible/moyenne. A long-terme, par contre, la volatilité prend suffisamment d'importance pour dégrader la Robustesse du modèle. On constate même, dans ce cas, qu'il peut exister des β_{TF} inférieurs ou égaux à 0 ! Certaines actions, cependant, comme l'Oréal, Vivendi et Air Liquide conservent un Profil de long-terme plutôt Robuste.
- Les actions comme Airbus, Cap Gemini, Technip ou Michelin, dont les Betas sont égaux ou proches de 1 statistiquement, possèdent des Profils-Risques de courts-termes majoritairement Non-Robustes du fait de l'importante volatilité des β_{TF} autour de 1. Les actions qui possèdent des volatilités de leurs β_{TF} plus faibles (comme par exemple GDF, Total et LVMH) peuvent être considérées comme robustes. A long-terme, en revanche, les plus fortes volatilités des β_{TF} ne permettent pas de conclure à la robustesse des Profils-Risques.

2.3 Conclusion

L'association simultanée des ondelettes avec les fenêtres forward constitue un outil puissant pour l'analyse de la volatilité du Beta de la Droite de Marché. Il est d'une part conceptuellement plus conforme à la réalité et en même temps plus pratique pour les gestionnaires car il peut s'insérer dans un logiciel informatique automatique. La comparaison que nous avons effectuée avec l'approche intuitive met en évidence des différences significatives entre les Betas qui s'accroissent avec l'échelle fréquentielle.

La méthodologie retenue, appliquée aux 30 actions, montre que les Betas possèdent des dynamiques qui se différencient selon leurs termes mais aussi avec la position du Beta par rapport à 1. La Richesse de l'information collectée appelle une synthèse que nous résumons dans le tableau suivant :

	Court Terme	Long Terme
Beta < 1	Volatilité Moyenne Plutôt Robuste Proche des β_r	Volatilité Forte Non Robuste Différentes des β_r
Beta = 1	Volatilité Forte Plutôt Robuste* Proche des β_r	Volatilité plus Forte Non Robuste Différentes des β_r
Beta > 1	Volatilité Forte Robuste* Proche des β_r	Volatilité Très Forte Plutôt Robuste* Différentes des β_r

* Exceptions notables quand le Beta tend vers 1

L'instabilité du Beta Tempo-Fréquentiel de long-terme est plus forte et différente de celle des β_r quelle que soit la nature de l'action. La volatilité des Betas de court-terme, plus faible, tend vers celle des β_r mais il existe des exceptions liées à des changements de profil fréquentiel. La Robustesse dans le temps des Profils-Risques de Court et de Long Terme dépend de la nature de l'action. Les Profils établis à Court-Terme pour les actions avec un Beta Fort (>1) et Faible (<1) sont relativement Robustes mais plus le Beta se rapproche de 1 plus leur robustesse est altérée. A long-terme, bien qu'ils soient très volatiles, les β_{TF} sont Robustes pour les actions avec un Beta très fort. Le Profil-Risque est ainsi conservé seule l'intensité du Beta varie fortement d'où la nécessité de les analyser avec de en détails. Pour

les actions avec un Beta faible, la plus grande proportion de β_{TF} négatifs ou nuls conduit à une non-robustesse de leur Profil. Ce constat montre ainsi qu'une même action peut avoir une pluralité de Profil-Risque lorsqu'on conjugue le cours du temps avec celui des fréquences.

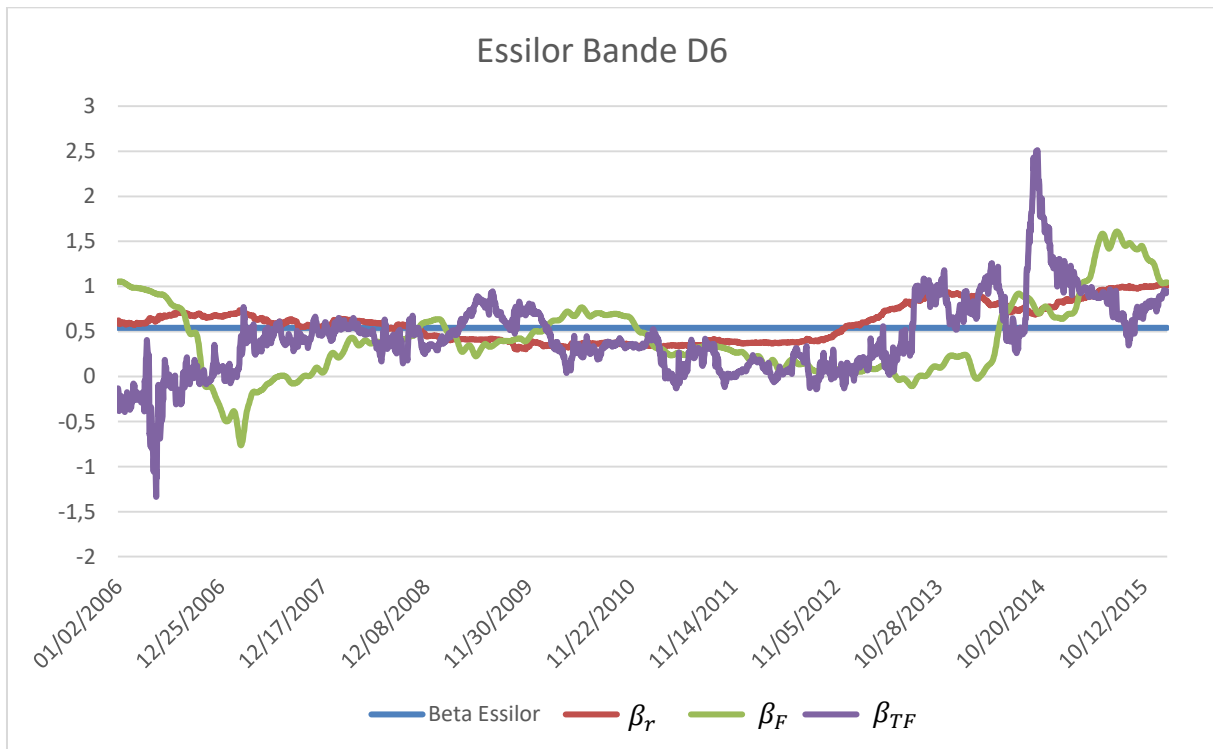
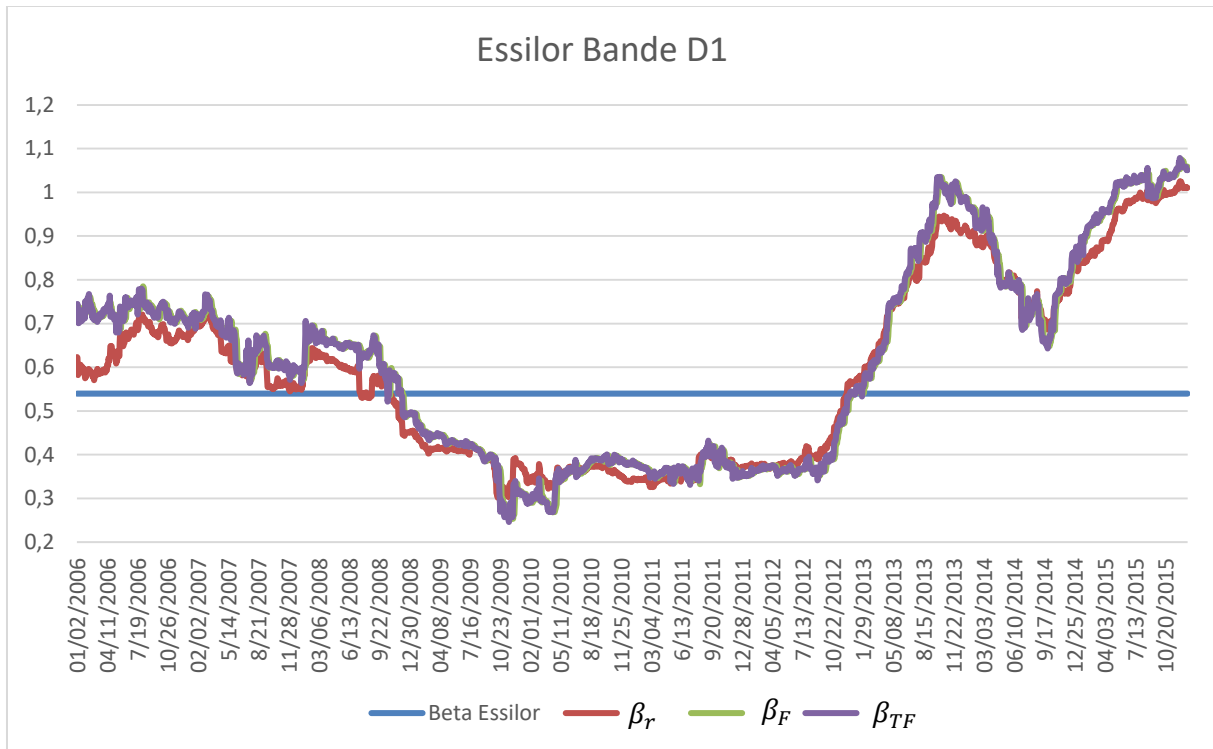
La méthodologie retenue dans cet article permet de bien différencier l'ampleur de la volatilité du Beta de la Droite de Marché selon les fréquences. Elle constitue un outil complémentaire pour les gestionnaires de portefeuilles qui collectent de nouvelles informations associant le risque au cours du temps et des horizons de placements lors de leurs prises de décision. Les progrès technologiques en matière d'informatique autorisent, actuellement, une utilisation rapide de ce type d'approche tempo-fréquentielle. Leurs développements futurs permettront de recourir à des approches plus sophistiquées comme celle se basant sur les ondelettes continues.

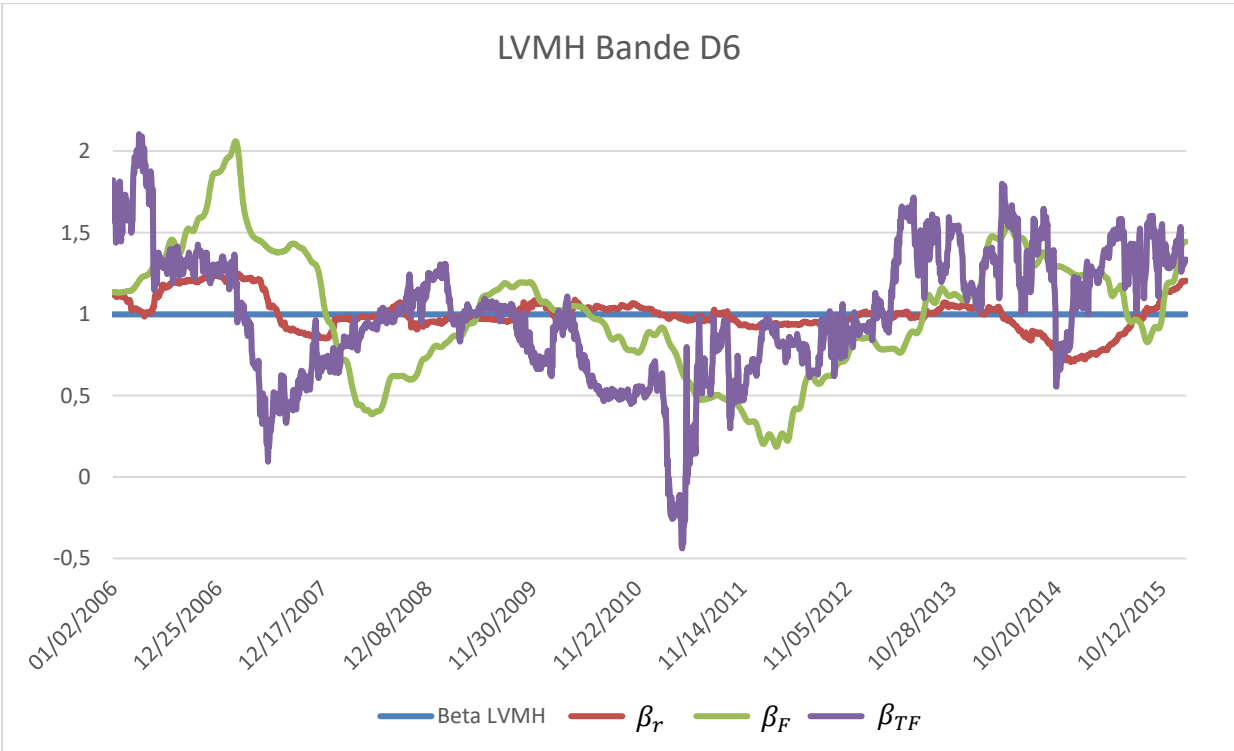
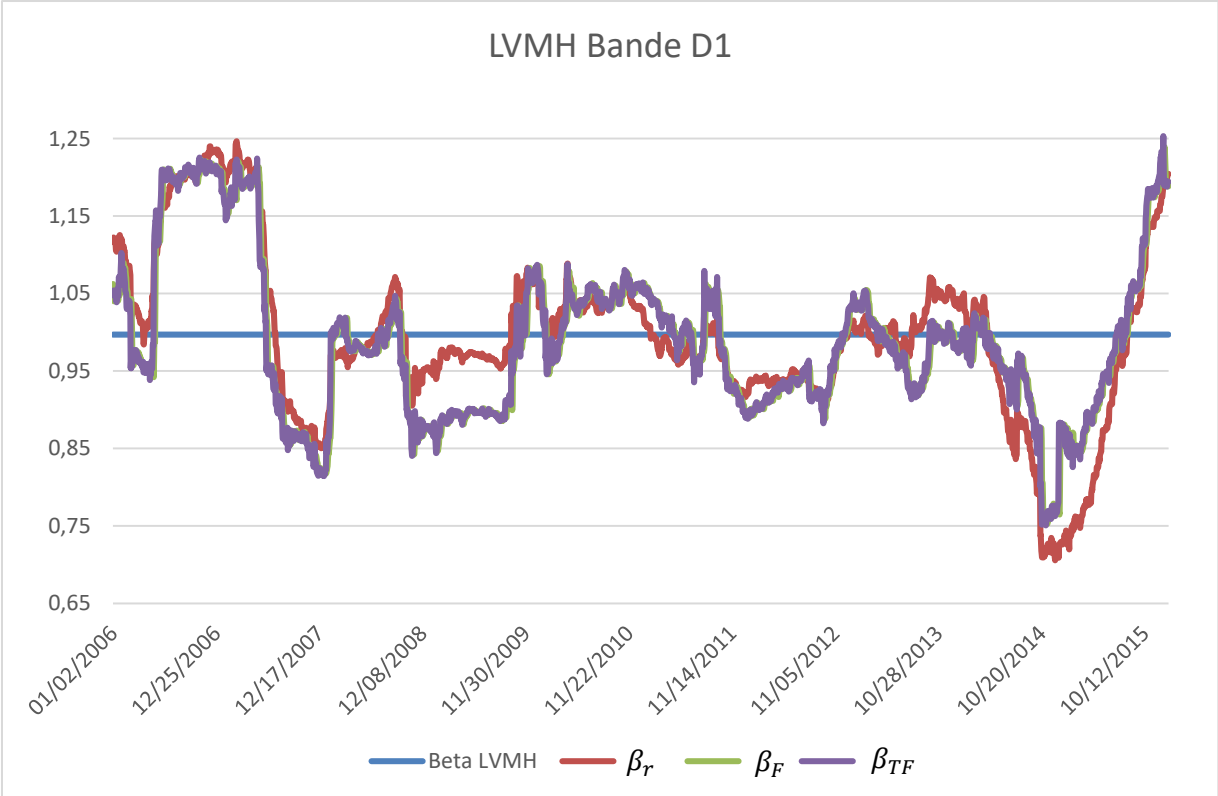
Annexes

Table A1 : Bandes de fréquences et horizon temporel

Résolution	Jours fréquentiels		Correspondance en mois	
	bornes inf	bornes sup	bornes inf	bornes sup
D1	2	4	0,09	0,18
D2	4	8	0,18	0,36
D3	8	16	0,36	0,73
D4	16	32	0,73	1,45
D5	32	64	1,45	2,91
D6	64	128	2,91	5,82
D7	128	256	5,82	11,64
D8	256	512	11,64	23,27
D9	512	1024	23,27	46,55
D10	1024	2048	46,55	93,09
D11	2048	4096	93,09	186,18
S11	4096	-	186,18	-

Figures A2 : Betas Roulants β_F , β_{TF} pour Essilor et LVMH





Bibliographie

Brooks R.D., R.W. Faff and J.H.H Lee, “The form of time variation of systematic risk: some Australian evidence”, *Applied financial econometrics*, Vol 2, 1992, pp 191-198.

Brooks, R.D., R.W. Faff, and M.D. McKenzie, “Time-varying Beta Risk of Australian Industry Portfolios: A Comparison of Modelling Techniques”, *Australian Journal of Management* 23(1), 1998, pp 1–22.

I. Daubechies (1992) Ten lectures on wavelets, Conference Series of Applied mathematics in Philadelphia, Society for industrial and applied mathematics.

F. Fabozzi, J-C Francis, ‘Beta as a random coefficient’, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 1978, Vol. 13, Issue 1, pp 101-116

R.W. Faff, J.H.H Lee and T.R.L Fry, “Stationarity of systematic risk : some Australian evidence”, *Journal of Finance and Accounting*, Vol 19, Issue 2, 1992 ; pp 253-270.

R.W. Faff, R.D. Brooks, “Time-varying risk for Australian industry portfolios, an exploratory analysis”, *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol 25, Issue 5, 1998, pp 721-74.

R. Gençay, F. Selçuk, B. Whitcher, “Systematic Risk and Timescales“, *Quantitative Finance*, Vol 3 issue 2, 2003,pp 108-116.

A. Grossmann J. Morlet, “Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape” *SIAM Journal on mathematical analysis*, 1984, 15 (4),723–736.

N. Groenewold and P. Fraser, “Time Varying Betas and Macroeconomic influences”, discussion paper, departement of economics , University of Western Australia, 1997.

S. Mallat, “A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation” ;*IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* Vol 11 num 7 July 1989.

S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*, Ecole polytechnique, 2001.

S. Mallat ,*Wavelet tour of signal processing: the sparse way*, Academic Press, 2009.

McNevin, B., and Nix, J., “The Beta heuristic from a time/frequency perspective: a wavelets analysis of the market risk of sectors” *Economic Modelling*, 2018, Vol 68, pp 570-585.

Mestre R. and Terraza M., “Time-frequencies analysis of CAPM-Application to the CAC 40” *Managing Global Transition Journal* .Vol.16 (2) 2018, pp-141-157.

Y .Meyer, S. Jaffard and O. Rioul, “L’analyse par ondelettes” 1986 *Pour la science*.

W. Sharpe, “Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under risk” ; *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3 (Sep., 1964), 1964, pp. 425-442.

J.Yeo, “Modelling Time-Varying Systematic Risk in Australia”; *Proceedings of the International Congress on Modelling & Simulation*. ed. / F. Ghessemi; M. McAleer; L. Oxley; M. Scoccimarro. Vol. 3, Canberra. ed. Western Australia : Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand Inc., 2001, p. 1565-1570.

Conclusion du Chapitre 2

Les résultats de l'estimation traditionnelle du MEDAF par les MCO conduisent à une classification des actions selon leurs Profils-Risques (i.e. leur Beta) qui caractérisent leur degré de sensibilité aux fluctuations du CAC40. La présence d'anomalies dans les résidus des régressions (notamment l'hétéroscédasticité et l'autocorrélation), confirmée par divers tests, remet en question la stabilité du paramètre Beta, supposé constant par hypothèse. La division de notre échantillon en trois sous-périodes met en évidence l'importance de la période sur le risque systématique dont l'intensité varie au cours du temps. Le calcul des Betas par régressions roulantes forward illustre plus finement le comportement de l'instabilité du paramètre et établit la robustesse du Profil-Risque initial pour chaque action. Ces résultats confirment l'importance d'inclure la volatilité du risque systématique qui amène à un remaniement de la classification par le Beta.

Le caractère fréquentiel du risque, étudié en recourant aux décompositions en ondelettes des séries, conduit aux remarques suivantes :

- L'estimation du MEDAF fréquentiel pour le panel d'actions fournit des résultats similaires d'un point de vue statistique : les résidus des régressions présentent de l'autocorrélation et de l'hétéroscédasticité.
- La valeur du Beta varie en fonction des bandes de fréquences et se distingue de celle estimée par les MCO. La différenciation du risque selon les horizons d'investissements aboutit ainsi à une classification des actions basée sur la dynamique fréquentielle du Beta. On distingue ainsi, quel que soit l'horizon de placement considéré, les actions ayant des Betas inférieurs à 1, opposées à celles possédant des Betas supérieurs à 1. Une troisième catégorie rassemble les actifs dont le Profil-Risque varie selon les échelles fréquentielles.
- Les Betas de court-terme situés sur les bandes D1 et D2 sont proches de la valeur estimée par les MCO. Ce résultat implique que les gestionnaires utilisant le Beta standard (sans ondelettes) considèrent des horizons courts. Si leur but est d'investir à plus long terme ils introduisent dans le Beta un biais qui peut perturber leurs choix.

- L'estimation fréquentielle du MEDAF sur les sous-périodes fournit des valeurs des Betas variables selon la période considérée. Le risque systématique dépend dans ce cas du temps et de la fréquence ce qui justifie l'utilisation de la fenêtre roulante. L'utilisation de cette technique que l'on fait glisser le long des bandes de fréquences pour estimer le Beta fréquentiel au cours du temps montre que la dynamique du risque systématique se différencie essentiellement selon les fréquences. A long-terme, les Betas sont plus volatils qu'à court-terme.

L'utilisation intuitive de la fenêtre roulante sur les bandes de fréquences se base sur des décompositions en ondelettes uniques réalisées sur l'ensemble de la période. Ceci implique que seule l'estimation du Beta est réalisée à chaque itération, ce qui est contestable d'un point de vue théorique et pratique. Il est conceptuellement préférable d'effectuer les décompositions des variables à l'intérieur de la fenêtre en les réitérant à chaque étape. Sur ce principe nous développons la Fenêtre Tempo-Fréquentielle afin de capter la dynamique tempo-fréquentielle du Beta. La comparaison des deux approches montre que les Betas Roulants sont confondus à court-terme alors que leurs différences sont plus prononcées au fur et à mesure que l'horizon temporel augmente.

L'application de la Fenêtre Roulante Tempo-Fréquentielle à l'ensemble des actions du panel vient compléter les résultats précédents sur l'évolution du risque et la robustesse du Profil-Risque :

- La volatilité de long-terme est plus importante que celle de court-terme pour toutes les actions considérées. Cette dernière est proche de celle MEDAF sans recourir aux ondelettes.
- La robustesse tempo-fréquentielle du Profil-Risque dépend de la classification établie par le Beta. Les actions ayant un Beta fort possèdent un Profil très volatil à court et à long terme mais qui reste majoritairement supérieur à 1 révélant une certaine robustesse dans ce cas. A l'opposé, celle avec un Beta faible ont un Profil de court-terme relativement peu volatile et robuste, mais à long-terme la forte volatilité conduit à la non-robustesse du modèle. Pour les actions avec un Beta proche de un, les Profils de court et de long termes sont majoritairement non-robuste.

Les résultats obtenus par la Fenêtre Tempo-Fréquentielle concentrent une information plus riche et diversifiée de l'estimation tempo-fréquentielle du paramètre Beta. Elle permet d'allier

la robustesse temporelle et fréquentielle du Beta ce qui multiplie les possibilités d'analyse pour les gestionnaires de portefeuilles. Ces derniers peuvent ainsi analyser le risque systématique selon leurs préférences.

L'estimation du Beta avec ou sans les ondelettes considère que les résidus des régressions doivent obéir à un processus *i.i.d.*. Cette hypothèse est rejetée par la présence d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité associée à une non-normalité, ce qui obèrent les qualités des Betas et leurs tests. L'utilisation des processus ARMA-GARCH pour modéliser ces anomalies est fournie en Annexe. Nous montrons que l'estimation d'un MEDAF avec erreurs AR-EGARCH permet de limiter ces effets. Une comparaison de ces estimations avec celles issues des MCO révèle l'existence de différences plus importante pour les actions possédant un Beta fort. La correction proposée du Beta des MCO, qui prend en compte ces résultats, permet d'ajuster rapidement celui-ci sans avoir à estimer une nouvelle droite de marché. Elle ne remet pas en cause la catégorisation des actions en fonction du Beta, elle fournit cependant une information supplémentaire pour le choix des investisseurs.

Annexe du Chapitre: Estimations simultanées du Beta de la Droite de Marché avec erreurs GARCH

Les travaux de Markowitz (1952) amorcent le départ de la théorie moderne du portefeuille. Mais ce sont Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966) et Black (1972) qui vont développer un modèle central en théorie financière permettant d'identifier de manière simple la relation associant la rentabilité des actifs financiers et leur risque : le MEDAF. Ce modèle de régression à deux variables est basé sur une mesure de risque systématique associée à sa pente et communément appelé le Beta. Sharpe définit le MEDAF par l'équation suivante de la Securities Market Line (ou SML).

$$E(R_i) = rf + \beta_i(E(R_m) - rf) \quad (1)$$

$E(R_i)$ est l'espérance de la rentabilité R_i de l'actif i , rf (risk free) est le taux sans risque, β_i est le beta ou risque systématique, $E(R_m)$ est l'espérance de la rentabilité R_m du marché m .

On utilise, traditionnellement, la réécriture de l'équation SML en termes de prime de risque, appelée droite de marché, pour vérifier empiriquement le MEDAF :

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (2)$$

La prime de risque de l'actif i notée $r_{i,t}$ (et celle du marché $r_{m,t}$) est l'espérance de rentabilité de l'actif i (respectivement du marché) réduite du taux sans risque rf ; $\varepsilon_{i,t}$ est un processus i.i.d $(0, \sigma_\varepsilon)$.

Les gestionnaires se basent sur le Beta pour apprécier leur niveau de risque systématique car il représente la sensibilité de l'actif i aux mouvements du Marché. Les actions se distinguent alors selon la valeur de leur Beta par rapport à 1 (sensibilité unitaire). Les paramètres de ce modèle sont estimés traditionnellement par les MCO, qui sous les hypothèses de la régression, possèdent les propriétés requises.

Ce modèle, de conception simple, ne permet pas de prendre en compte la complexité des structures des variables qui se traduisent par des phénomènes d'autocorrélation, d'hétéroscédasticité et de non-normalité des résidus. Les estimateurs du modèle (2) ne sont plus, dans ce cas, BLUE et les valeurs estimées du Beta sont non robustes.

De nombreuses études, comme celles de Black, Scholes et Jensen (1972), de Fama et MacBeth (1973), ont montré à la fois l'instabilité et la non-robustesse de l'estimation du Beta. Plusieurs auteurs ont alors pris en compte ces différents phénomènes qui se traduisent au niveau des résidus. On peut citer, par exemple, les travaux de Diebold et al (1988) et de Giaccoto et Ali (1982) qui confirment la présence d'effets d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité dans le MEDAF. L'utilisation des processus de type (G)ARCH d'Engle (1982) et de Bollerslev (1986) et leur version multivariée permet alors une identification des processus aléatoires générateurs des variables du modèle de marché pour estimer un Beta plus consistant que celui des MCO (Bera et al [1988], Bollerslev et al (1988) Schwert et Seguin [1990] puis Corhay et Rad [1996]). Cette approche nécessite de traiter séparément les variables du modèle pour modéliser leur processus générateur.

Une alternative à cette approche consiste à prendre en compte le processus générateur de l'aléa identifié dans les résidus estimés par les MCO et à estimer simultanément l'ensemble des paramètres de la droite de marché.

Pour apprécier ce gain d'information dans le calcul du Beta par l'estimation des paramètres du nouveau modèle, nous recourons, dans cet article, aux données journalières du 1^{er} janvier 2005 au 31 décembre 2015 des 30 primes de risque pérennes sur la période de l'indice CAC40 (n=2868). Nous présentons dans un premier paragraphe les estimations par les MCO puis celles avec des erreurs de type GARCH avant de discuter et de conclure sur les résultats obtenus.

1 Estimations des Droites de Marché par les MCO

Les résultats de l'estimation par les MCO de la Droite de la Marché sont consignés dans le tableau 1. Les données sont transformées en rendements après avoir vérifié la stationnarité des variables $r_{i,t}$ et $r_{m,t}$ (Cf. Bibliographie 16).

Les estimateurs de la constante, pour la majorité des actifs, ne sont pas, ou très peu, significativement différents de zéro (rendements centrés). Les coefficients betas sont tous significatifs et indiquent la nature de l'actif. A titre d'exemple, l'action Société Générale est fortement sensible aux mouvements du marché avec son beta supérieur à 1, Orange, à l'opposé, est moins sensible aux fluctuations et LVMH possède une sensibilité unitaire (elle suit les mouvements du marché dans les mêmes proportions). Les résidus de ces estimations sont autocorrélés, hétéroscédastiques et ne sont pas des échantillons d'une loi normale. Par

conséquent, l'estimation du Beta ne respecte plus la propriété de variance minimale et rien ne garantit sa robustesse au cours du temps. Ces calculs permettent, cependant, de classer, par la suite, les actions selon leurs valeurs significativement différentes de un ou non pour les comparer aux autres estimations.

Tableau 1 : Estimations par les MCO

MCO	Beta	t-Stat	Constante	t-Stat	R ²	LB	ARCH	JB
Accor	0,99	51,02	0,000403	1,458	0,47	13,56	16,489	5812,89
Airbus	0,952	39,709	0,000363	1,06	0,35	13,805	0,83	106016
Alcatel	1,22	36,933	-0,000446	-0,946	0,32	1,342	34,014	14326,7
Air Liquide	0,829	72,39	0,000409	2,5	0,65	13,111	57,429	6729,28
AXA	1,506	77,98	0,000425	1,54	0,68	21,068	62,132	41993,2
BNP	1,391	67,01	0,00012	0,407	0,61	29,637	311,01	36979,6
Bouy	1,059	54,15	0,000157	0,564	0,51	0,302	57,036	1774,4
CA	1,442	60,24	-0,000141	-0,412	0,56	13,967	161,13	7641,56
Carrefour	0,9	51,769	-3,39E-05	-0,136	0,48	2,829	76,199	3926,46
Danone	0,651	44,46	0,000277	1,326	0,41	9,193	231,21	4778,36
Essilor	0,537	35,986	0,000501	2,337	0,31	11,916	105,44	16498,4
GDF	0,937	53,0549	9,33E-05	0,37	0,5	30,291	20,303	164186
Gemini	1,036	51,889	0,000476	1,67	0,48	10,449	14,254	2722,26
St-Gobain	1,342	76,32	3,65E-05	0,1455	0,67	12,369	222,051	15224,2
L'Oréal	0,722	51,86	0,000346	1,74	0,48	26,829	40,735	4951,32
LVMH	0,997	68,815	3,48E-04	1,68	0,62	13,242	38,34	10867,6
Michelin	1,076	52,33	0,000281	0,958	0,49	13,963	29,17	3655,4
Orange	0,725	46,389	3,50E-05	0,157	0,43	17,703	37,808	4480,43
PSA	1,165	42,62	-0,000211	-0,543	0,39	7,69	116,57	1614,53
Publicis	0,72	46,117	0,000306	1,3758	0,43	28,876	70,499	1972,62
Renault	1,355	59,074	0,00019	0,581	0,55	12,358	121,996	2371,17
Ricard	0,69	39,82	0,000327	1,323	0,36	31,548	143,779	8181,13
Schneider	1,235	77,377	0,000412	1,81	0,68	25,787	41,245	976,496
Sodexo	0,638	39,916	0,000502	2,2	0,36	10,205	21,254	9219,78
SG	1,473	60,035	-0,000106	-0,304	0,56	65,509	304,568	13567,8
Technip	1,049	42,588	0,000113	0,32	0,39	17,01	30,72	6149,54
Total	0,93	76,657	0,000183	1,0589	0,67	11,817	155,558	2095,14
Veolia	0,917	43,056	2,78E-05	0,092	0,39	8,307	1,582	160406
Vinci	1,114	76,715	0,000434	2,096	0,67	5,194	208,294	5024,85
Vivendi	0,786	56,05	9,86E-05	0,4935	0,52	4,9	16,845	7732,78

Pour un risque de 5%, Ligne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11,1$; Ligne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(5)=11,1$

Ligne J-B (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$. Pour un seuil de 5%. Les R² sont tous significatifs.

2 Estimations des Droites de Marché avec erreurs GARCH

Les caractéristiques de la distribution des résidus issus des estimations précédentes (Asymétrie, leptokurticité, ...) impliquent que leurs modélisations soient associées aux différents processus GARCH qui ont prouvés leurs efficacités en finance de marché.

Pour prendre en considération l'autocorrélation des résidus nous recourrons à un processus ARMA dont l'ordre est sélectionné, d'une part, en minimisant le critère d'Akaike et, d'autre part, en vérifiant la significativité des paramètres. Le processus AR(1) présente le meilleur compromis associé aux modèles GARCH de Bollerslev (1986) et EGARCH de Nelson (1991). Les choix et les ordres de ces modèles résultent de leurs capacités à blanchir les résidus tout en assurant la significativité de leurs paramètres. L'utilisation d'autres processus GARCH, qui ne respectent ces critères, ont été écartés de cette étude ¹. L'estimation des paramètres du modèle de régression avec des erreurs obéissant à ce type de processus peut être réalisée de différentes façons. La plus courante est celle des Moindres Carrés Généralisés qui calcule les paramètres de la régression puis recherche et estime les paramètres du processus générateur des résidus pour construire sa matrice des variances-covariances utilisée par la suite pour l'estimation définitive des paramètres du modèle. Nous lui préférons une autre procédure permettant l'estimation simultanée des paramètres basée sur la méthode du maximum de vraisemblance associée à l'algorithme d'optimisation non-linéaire du Point Intérieur de YE (1992) (ou ses variantes dans le cas où la matrice Hessienne ne converge pas) ², qui évite les deux étapes de calcul précédentes.

Les résultats des différentes estimations simultanées de la nouvelle droite de marché par l'utilisation des processus AR-GARCH et AR-EGARCH sont consignés dans les tableaux 2.

Tableaux 2 : Estimations de la droite de Marché avec erreurs AR-GARCH et AR-EGARCH

2.2. : *Estimations avec erreurs AR-GARCH*

Actions	Constante	Beta	AR(1)	R ²	AIC	BIC	LB	ARCH	JB
Essilor	0,00055 (3,18)	0,545 (0,0169)	-0,0697 (-3,48)	0,31	-6,269	-6,26	2,86	4,51	16527
Sodexo	0,00048 (2,55)	0,559 (0,157)	-0,02 (1,85)	0,35	-6,116	-6,1	0,794	0,799	9386
Danone	0,0003 (1,5)	0,69 (0,015)	0,0003 (0,0148)	0,4	-6,349	-6,34	2,11	2,59	4722
Ricard	0,0003 (1,69)	0,63 (0,0172)	-0,068 (-3,4)	0,35	-6,025	-6,01	5,45	0,49	9388
Publicis	0,0004 (1,99)	0,706 (0,0162)	-0,041 (-2)	0,43	-6,101	-6,09	5,43	2,18	2022
L'Oréal	0,0003 (2,1)	0,73 (0,0153)	-0,07 (-3,69)	0,487	-6,36	-6,35	2,1	4,65	4675
Orange	-0,00 (-0,06)	0,726 (0,0153)	0,059 (3,01)	0,62	-6,122	-6,11	2,11	0,524	4580
Vivendi	0,00016 (0,89)	0,79 (0,0147)	0,005 (0,27)	0,52	-6,339	-6,33	1,48	0,126	7745
Air Liquide	0,0004 (2,77)	0,846 (0,0128)	-0,074 (-3,72)	0,65	-6,75	-6,74	2,22	0,04	7413
Carrefour	0,000 (0,36)	0,88 (0,0179)	0,012 (0,54)	0,48	-5,96	-5,95	1,58	0,93	3846
Veolia	0,0006 (2,45)	0,829 (0,021)	0,019 (0,9)	0,39	-5,639	-5,62	0,24	0,48	151590
Total	0,0002 (1,34)	0,89 (0,0124)	0,016 (0,81)	0,67	-6,689	-6,76	2,58	0,83	2246
GDF	-0,00 (-0,17)	0,96 (0,018)	0,057 (2,39)	0,49	-5,93	-5,92	4,23	0,32	152370
Airbus	0,0006 (1,96)	0,94 (0,0245)	0,04 (1,93)	0,35	-5,31	-5,3	4,53	0,046	105740
Accor	0,0005 (2,20)	0,96 (0,021)	-0,047	0,48	-5,689	-5,68	1,14	0,12	5663
LVMH	0,0003 (1,72)	1,02 (0,0157)	-0,042 (-2,15)	0,43	-6,301	-6,29	1,34	0,365	10840
Gemini	0,0007 (2,66)	1,01 (0,021)	-0,044 (-2,27)	0,49	-5,59	-5,58	2,09	0,856	2764
Technip	0,0004 (1,39)	0,979 (0,0265)	-0,021 (-1,01)	0,39	-5,215	-5,2	3,35	2,22	6295
Bouy	0,0002 (0,8)	1,01 (0,0214)	-0,052 (-2,506)	0,5	-5,661	-5,65	0,72	0,55	17807
Michelin	0,0003 (1)	1,026 (0,0215)	0,006 (0,3)	0,49	-5,612	-5,6	4,02	1,89	3556
Vinci	0,0005 (3,04)	1,068 (0,016)	-0,037 (-1,82)	0,67	-6,333	-6,32	1,46	1,11	5174
PSA	0,0001 (0,3)	1,13 (0,026)	0,029 (1,48)	0,39	-5,11	-5,09	3,55	4,11	1549
Alcatel	-0,0005 (-1,28)	1,17 (0,034)	0,018 (0,92)	0,32	-4,631	-4,62	1,046	0,133	14338
Schneider	0,0003 (1,64)	1,20 (0,0172)	-0,035 (-1,86)	0,68	-6,069	-6,06	9,44	2,73	1043
St-Gobain	0,0002 (0,92)	1,25 (0,018)	-0,059 (-2,96)	0,67	-6,022	-6,01	1,72	0,26	15784
Renault	0,0003 (1,02)	1,269 (0,024)	0,04 (1,87)	0,55	-5,419	-5,4	1,31	1,844	2299
BNP	0,0002 (1,1)	1,289 (0,0177)	0,07	0,61	-6,06	-6,05	2,97	0,378	40159
CA	-0,000 (-0,38)	1,34 (0,0244)	0,049 (2,48)	0,56	-5,453	-5,44	2,66	1,11	7849
SG	0,0003 (1,13)	1,319 (0,0218)	0,078 (3,77)	0,56	-5,633	-5,62	5,16	1,7	10812
AXA	0,0007 (3,14)	1,32 (0,0189)	0,055 (2,51)	0,67	-5,932	-5,92	2,57	0,26	43151

Pour un risque de 5%, Ligne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11,1$; Ligne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(5)=11,1$

Ligne J-B (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$. Pour un seuil de 5%, Les R² sont tous significatifs.

Les t-stat sont consignées entre parenthèses.

2.3. : Estimations avec erreurs AR-EGARCH

Actions	Constante	Beta	AR(1)	R ²	AIC	BIC	LB	ARCH	JB
Essilor	0,00054 (3,57)	0,526 (0,0155)	-0,068 (-3,68)	0,31	-6,27	-6,26	2,02	3,59	16301
Sodexo	0,00038 (1,65)	0,576 (0,0151)	-0,052 (-2,38)	0,35	-6,142	-6,12	0,41	0,72	9359
Danone	0,00035 (2)	0,697 (0,0141)	-0,009 (-0,44)	0,41	-6,352	-6337	4,11	2,26	4732
Ricard	0,00037 (2,72)	0,627 (0,0178)	-0,067 (-3,9)	0,355	-6,037	-6,02	5,79	0,386	9427
Publicis	0,0003 (2,84)	0,699 (0,181)	-0,042 (-3,73)	0,43	-6,108	-6,09	6	0,76	2019
L'Oréal	0,00035 (3,57)	0,75 (0,0135)	-0,07 (-4,48)	0,486	-6,37	-6,36	1,34	2,04	4675
Orange	-0,000 (-1,05)	0,72 (0,0198)	0,059 (4,58)	0,43	-6,13	-6,12	2,27	0,46	4566
Vivendi	0,0001 (0,57)	0,787 (57,15)	0,0015 (0,007)	0,52	-6,349	-6,34	1,51	0,16	7736
Air Liquide	0,0004 (2,77)	0,85 (65,12)	-0,088 (-4,86)	0,65	-6,76	-6,74	2,9	0,21	7518
Carrefour	-0,00 (-0,86)	0,865 (49,29)	0,008 (0,648)	0,48	-5,98	-5,97	1,32	1,14	3813
Veolia	0,0003 (1,41)	0,833 (43,33)	0,016 (1,03)	0,39	-5,657	-5,64	0,24	1,35	152130
Total	0,0002 (1,46)	0,887 (73,466)	0,02 (0,96)	0,67	-6,69	-6,68	2,47	0,68	2273
GDF	0,000 (0,39)	0,95 (67,09)	0,099 (5,52)	0,49	-5,967	-5,95	11,6	0,33	148170
Airbus	0,0003 (0,91)	0,945 (42,38)	0,03 (1,54)	0,35	-5,336	-5,32	3,94	0,17	105930
Accor	0,0004 (1,69)	0,95 (41,56)	-0,055 (-2,65)	0,48	-5,694	-5,68	1,4	1,07	5617
LVMH	0,0002 (72,78)	1,027 (72,78)	-0,05(-3,07)	0,62	-6,327	-6,31	1,79	0,31	10806
Gemini	0,00045 (1,66)	0,99 (34,398)	-0,043 (-2,25)	0,484	-5,609	-5,6	2,27	0,35	2782
Technip	0,0003 (0,897)	0,99 (36,04)	-0,029 (-1,45)	0,39	-5,218	-5,2	3,22	1,22	6331
Bouy	0,0002 (0,95)	0,99 (51,51)	-0,04 (-1,84)	0,5	-5,668	-5,65	0,24	0,84	17744
Michelin	0,0003 (1,72)	1,026 (45,12)	0,002 (0,08)	0,49	-5,623	-5,6	4,46	2,41	3560
Vinci	0,0004 (2,88)	1,062 (72,54)	-0,036 (-1,66)	0,67	-6,342	-6,33	1,12	0,875	5150
PSA	0,000 (0,43)	1,13 (44,96)	0,036 (2,07)	0,39	-5,121	-5,1	3,63	0,07	1539
Alcatel	-0,0004 (-1,022)	1,13 (37,52)	0,022 (1,02)	0,32	-4,663	-4,65	0,846	1,56	14264
Schneider	0,00026 (1,85)	1,19 (70,67)	-0,046 (-3,15)	0,68	-6,075	-6,06	9,93	2,533	1063
St-Gobain	0,000 (0,35)	1,25 (64,51)	-0,061 (-3,11)	0,67	-6,034	-6,02	2,04	0,23	15825
Renault	0,000 (0,39)	1,268 (54,9)	0,046 (2,47)	0,55	-5,423	-5,41	1,16	2,05	2262
BNP	0,00015 (0,81)	1,289 (77,32)	0,075 (3,8)	0,61	-6,062	-6,05	2,94	0,96	40217
CA	-0,0003 (-1,15)	1,347 (36,26)	0,043 (2,18)	0,56	-5,459	-5,44	2,62	1,58	7842
SG	0,000 (0,23)	1,305 (63,02)	0,099 (4,92)	0,56	-5,638	-5,62	5,07	4,53	10525
AXA	0,0004 (1,18)	1,287 (42,45)	0,025 (0,9)	0,67	-5,96	-5,95	4,38	0,013	43151

Pour un risque de 5%, Ligne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11,1$; Ligne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(5)=11,1$

Ligne J-B (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$. Pour un seuil de 5%, Les R² sont tous significatifs.

Les t-stat sont consignées entre parenthèses.

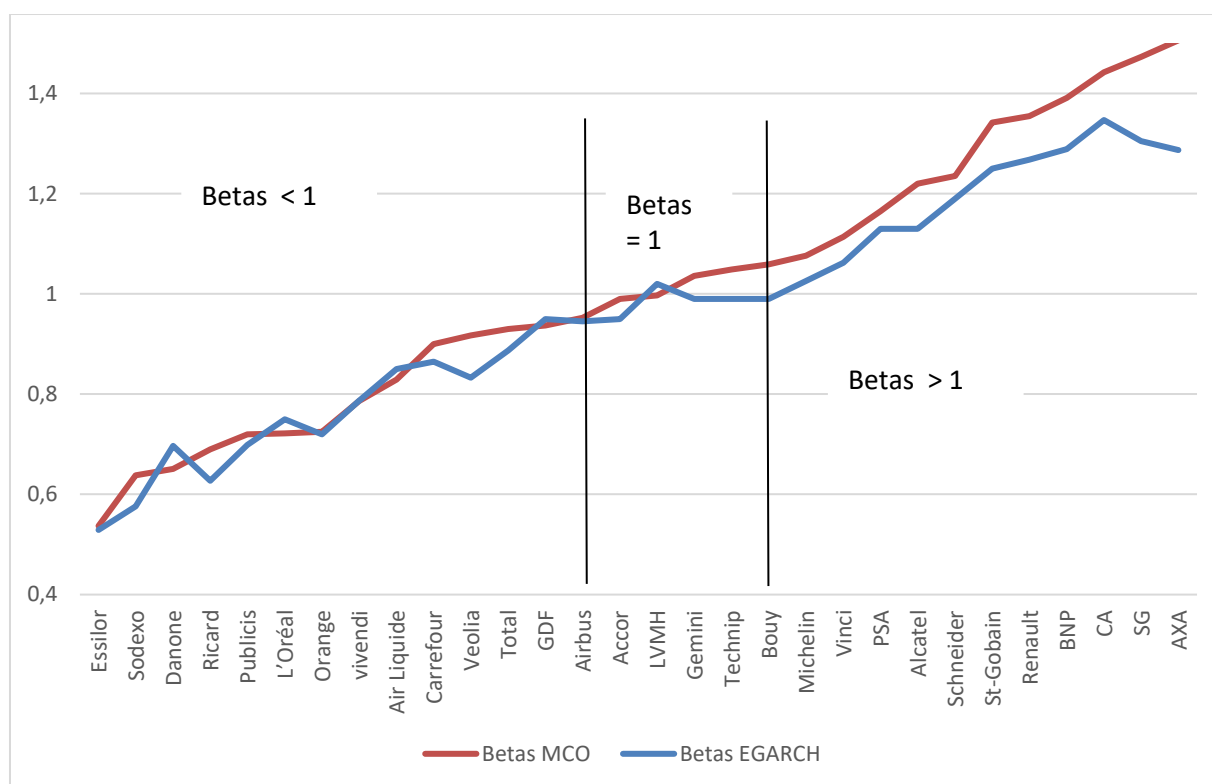
Ces estimations amènent les considérations suivantes :

- Les modèles estimés avec erreurs GARCH et EGARCH possèdent des Betas pratiquement identiques. Ils se révèlent efficaces pour prendre en compte l'autocorrélation et l'hétéroscédasticité des résidus issus des MCO. La distribution de ces derniers reste cependant éloignée de la Loi Normale ce qui affaiblit la puissance des différents tests en particuliers ceux des paramètres estimés.
- Les estimations retenues ne sont pas homogènes quelle que soit l'action. Les tests d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité ont été ajusté pour les processus ARMA-GARCH par des tests pondérés de Ljung-Box et ARCH de Fisher et Gallagher (2012). La plupart de ces tests sont calculés pour des retards d'ordre 5 mais dans les cas Michelin, LVMH, GDF et Sodexo les retards sont portés à l'ordre 6 compte tenu des retards p et q de leurs GARCH et EGARCH qui sont différents de un comme pour la majorité des actions.
- La proximité des résultats issus des estimations rend difficile la sélection d'un modèle unique basée sur les seuls critères d'estimation (AIC et BIC) ou sur la qualité des estimateurs. Nous retenons cependant, par la suite, les modèles EGARCH qui possèdent leur constante dans l'équation de la variance significative pour toutes les actions contrairement aux processus GARCH où elle est le plus souvent nulle (ce qui modifie les caractéristiques de stationnarité du processus).

3 Discussions-Conclusion

La sélection du modèle AR(1)-EGARCH pour ce panel d'actions peut être soumise à une analyse statistique comparative avec les résultats de l'estimation par les MCO de la droite de marché. Le graphique 1 indique, pour chaque action, son beta MCO et son Beta estimé avec les processus AR(1)-EGARCH (p,q).

Figure 1. Betas des MCO et Betas EGARCH



En abscisses sont portées les actions classées par le beta issu des MCO par ordre croissant, les deux traits verticaux indiquent les actions avec un beta inférieurs, égal ou supérieur à 1.

Ce graphique met en évidence une différence plus ou moins importante selon sa proximité à la valeur 1 : pour les betas inférieurs ou égaux à 1 les différences apparaissent comme peu significatives contrairement à celles supérieures à 1. Ces différences s'accroissent au-delà de l'action LVMH.

Le tableau 3 précise ce constat par le calcul des différences entre les Betas des MCO et les Betas EGARCH en valeurs et en pourcentages

Tableau 3 : Comparaisons des Betas

Actions	Betas MCO	Betas EGARCH	Différences	Différences en %
Essilor	0,537	0,529	0,01	1,862
Sodexo	0,638	0,576	0,062	9,717*
Danone	0,651	0,697	-0,046	-7,066*
Ricard	0,69	0,627	0,063	9,130*
Publicis	0,72	0,699	0,021	2,917
L'Oréal	0,722	0,75	-0,028	-3,878
Orange	0,725	0,72	0,005	0,690
Vivendi	0,786	0,787	-0,001	-0,127
Air Liquide	0,829	0,85	-0,021	-2,533
Carrefour	0,9	0,865	0,035	3,889
Veolia	0,917	0,833	0,084	9,160*
Total	0,93	0,887	0,043	4,623*
GDF	0,937	0,95	-0,013	-1,387
Airbus	0,952	0,945	0,007	0,735
Accor	0,99	0,95	0,04	4,040
LVMH	0,997	1,02	-0,023	-2,307
Gemini	1,036	0,99	0,046	4,440
Technip	1,049	0,99	0,058	5,529
Bouy	1,059	0,99	0,069	6,516*
Michelin	1,076	1,026	0,05	4,647
Vinci	1,114	1,062	0,052	4,668*
PSA	1,165	1,13	0,035	3,004
Alcatel	1,22	1,13	0,09	7,377*
Schneider	1,235	1,19	0,045	3,644
St-Gobain	1,342	1,25	0,092	6,855*
Renault	1,355	1,268	0,087	6,421*
BNP	1,391	1,289	0,102	7,332*
CA	1,442	1,347	0,095	6,588*
SG	1,473	1,305	0,168	11,405*
AXA	1,506	1,287	0,219	14,542*

* indique une différence significative entre les deux betas.

Le classement des actions par les Betas issus des MCO et ceux estimés par les EGARCH est sensiblement le même. Il présente, cependant, quelques différences comme pour Accor qui possède un Beta des MCO égal à 1 et un Beta EGARCH inférieur, ou encore Bouygues et Michelin qui ont un Beta des MCO supérieur à 1 mais un Beta EGARCH significativement égal à 1. La classification des actions n'est ainsi remise en question que pour certains actifs dont le Beta est proche de 1.

Les différences entre les Betas sont majoritairement significatives pour les actifs avec un beta fort. Lorsqu'elles sont exprimées en pourcentages elles fournissent une vision globale de l'erreur qu'il est possible de commettre avec l'estimateur des MCO. Elles sont majoritairement positives ce qui indique que les MCO surestiment le risque systématique.

Ces résultats suggèrent qu'une correction peut être rendue possible par la construction d'un modèle de régression prenant en compte l'écart entre les estimateurs des MCO et ceux des EGARCH avec la rupture observée de part et d'autre de LVMH. En considérant les Betas issus des MCO comme variable explicative et ceux du modèle EGARCH comme variable expliquée, le modèle s'écrit sous sa forme matricielle :

$$Beta^{EGARCH} = X.A + \varepsilon$$

Avec $Beta^{EGARCH}$ une matrice (30,1) contenant les Betas estimés avec l'EGARCH

X est une matrice (30,4) contenant les Betas des MCO tel que

c_1	$Beta_1^{MCO}$	c_2	$Beta_2^{MCO}$
1	0,537	0	0
1	0,638	0	0
1	0,651	0	0
1	0,69	0	0
1	0,72	0	0
1	0,722	0	0
1	0,725	0	0
1	0,786	0	0
1	0,829	0	0
1	0,9	0	0
1	0,917	0	0
1	0,93	0	0
1	0,937	0	0
1	0,952	0	0
1	0,99	0	0
1	0,997	0	0
0	0	1	1,036
0	0	1	1,049
0	0	1	1,059
0	0	1	1,076
0	0	1	1,114
0	0	1	1,165
0	0	1	1,22
0	0	1	1,235
0	0	1	1,342
0	0	1	1,355
0	0	1	1,391
0	0	1	1,442
0	0	1	1,473
0	0	1	1,506

A une matrice (4,1) consignant les estimateurs tel que

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{0,1} \\ \alpha_{1,1} \\ \alpha_{0,2} \\ \alpha_{1,2} \end{bmatrix}$$

Le tableau 4 résume les résultats de cette estimation de ce MLGS.

Tableau 4 : Régression des Beta EGARCH sur les Betas MCO

	$\alpha_{0,1}$	$\alpha_{0,2}$	$\alpha_{1,1}$	$\alpha_{1,2}$
Valeurs	0,001667	0,215871	0,979516	0,757705
t-Stat	0,031614	2,939606	15,21724	12,97939
	R ²	LB (5)	ARCH (2)	JB
	0,98	4,35	0,48	1,19

Cette régression présente les qualités nécessaires (non-autocorrélation, homoscédasticité et normalité) pour que les hypothèses de la régression conduisent à une estimation BLUE des paramètres. Le coefficient de détermination proche de un indique que la variance des betas EGARCH estimés est pratiquement expliquée par celle des betas MCO.

Les paramètres $\alpha_{1,1}$ et $\alpha_{1,2}$ représentent, respectivement, les liens entre les deux Betas pour les actions d'Essilor à LVMH et pour celles de Gemini à AXA. Le test de Chow (égal à 3.33) d'égalité des paramètres qui accepte faiblement l'hypothèse H_0 et de Student de leur comparaison indique que les évolutions par actions au-delà de LVMH restent globalement peu significatives. Malgré ceux, on peut exprimer ces différences de pentes de façon plus concrète pour l'utilisateur par l'estimation du modèle non-linéaire double logarithmique. Les élasticités instantées calculées sont respectivement de 1 pour la première moitié des actions et de 0.82 pour les suivantes. Ainsi pour un accroissement de 1% des Betas des MCO correspond un accroissement équivalent des Betas EGARCH avant LVMH alors qu'il est de 0.82% après cette action. Ce pourcentage reflète bien l'écart de plus en plus important constaté sur la Figure 1 ce qui justifie le choix du modèle de régression.

Les valeurs calculées par la régression précédente constituent les Betas des MCO. Dans le tableau 5 nous fournissons cette correction ainsi que les différences en % avec le Betas des MCO.

Tableau 5 : Corrections des betas

Actions	Betas MCO	Betas Corrigés	Différences en %
Essilor	0,537	0,528	1,738
Sodexo	0,638	0,627	1,787
Danone	0,651	0,639	1,792
Ricard	0,69	0,678	1,807
Publicis	0,72	0,707	1,817
L'Oréal	0,722	0,709	1,818
Orange	0,725	0,712	1,818
Vivendi	0,786	0,772	1,836
Air Liquide	0,829	0,814	1,847
Carrefour	0,9	0,883	1,863
Veolia	0,917	0,9	1,867
Total	0,93	0,913	1,869
GDF	0,937	0,919	1,87
Airbus	0,952	0,934	1,873
Accor	0,99	0,971	1,88
LVMH	0,997	0,978	1,881
Gemini	1,036	1,001	3,393
Technip	1,049	1,011	3,651
Bouy	1,059	1,018	3,845
Michelin	1,076	1,031	4,167
Vinci	1,114	1,06	4,851
PSA	1,165	1,099	5,7
Alcatel	1,22	1,14	6,535
Schneider	1,235	1,152	6,75
St-Gobain	1,342	1,233	8,144
Renault	1,355	1,243	8,298
BNP	1,391	1,27	8,71
CA	1,442	1,308	9,259
SG	1,473	1,332	9,574
AXA	1,506	1,357	9,895

Conclusion :

L'estimation simultanée des paramètres de la droite de marché avec erreurs de type GARCH réduit notablement les phénomènes d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité observés sur les résidus de son estimation par les MCO. Le modèle possède ainsi des propriétés statistiques plus satisfaisantes même si la distribution de ces résidus reste éloignée de la Loi Normale. Les différences entre les Betas des MCO et les Betas EGARCH restent peu significatives pour les actions avec un beta inférieur ou égal à 1. On peut donc considérer que le Beta des MCO, communément publié dans des revues financières, est un bon indicateur de son niveau. Pour les autres actions, l'écart des estimations s'amplifie avec leurs éloignements à 1. Nous proposons de ce fait, dans cet article, une correction du Beta des MCO par une régression linéaire avec rupture qui prend en compte ces caractéristiques. Les investisseurs disposent ainsi d'un outil simple, efficace et rapide pour calculer les corrections des betas estimés par les MCO. Ils sont ainsi en mesure de conserver ou de modifier à leur convenance leurs comportements d'investissement.

Bibliographie

1. Bera, A., Bunnys, E. and Park, H. (1988). Conditional heteroscedasticity in the market model and efficient estimates of betas. *The Financial Review*, Vol. 23, No. 2, p. 201–214.
2. F.Black, M. Jensen, and M. Scholes, 1972, ‘The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Test’; *Studies in the Theory of Capital Markets* edited by M. Jensen New York: Praeger Publishers.
3. T. Bollerslev, R.Engle and J.Wooldridge ‘A Capital asset pricing model with time-varying covariance’ *Journal of political economic* vol 96 (1), 1988, pp 116-131.
4. T. Bollerslev Generalized Autoregressive Conditionnal Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, vol 31, 1986, pp 307-327.
5. Corhay, A. – Rad, A. (1996). Conditional heteroscedasticity adjusted market model and an event study. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, Vol. 36. No. 4, p. 529–538.
6. Diebold, F., Jang I. and Jevons L., (1988). Conditional Heteroskedasticity in the Market, *Finance and Economics Discussion Series*, 42, Division of Research and Statistics, Federal Reserve Board, Washington D.C.
7. Engle, R., (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK inflation, *Econometrica*, 50: 987-1008.
8. E. Fama and J. MacBeth, ‘Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests’ 81 (3) 1973: 607–636.
9. E. Fama and K. French, ‘The Cross-Section of Expected Stock Returns’ ; *Journal of Finance*, 47 (2) 1992: 427–465.
10. T.J Fisher and C. Gallagher. New weighted portmanteau statistics for time series goodness of fit testing. *Journal of the American Statistical Association*, 107(498):pp 777-787, 2012.
11. Giaccoto, C. and Ali, M.M., (1982). Optimal Distribution Free Tests and Further Evidence of Heteroskedasticity in the Market Model, *Journal of Finance*, 37: 1247-1257.
12. J. Lintner, ‘The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets’; *Review of Economics and Statistics*. 47 (1) 1965 : 13–37.

13. J. Lintner, 'Some new perspectives on tests of CAPM and other capital asset pricing models and issues of market efficiency' ; edited by Harvard Institute of Economic Research, discussion paper, 1981.
14. D. Nelson, Conditional Heteroskedasticity in Asset Return A new Approach, *Econometrica* Vol 59 (2), 1991, pp 347-370.
15. H. Markowitz, 'Portfolio Selection' *Journal of Finance*, 7 (1) 1952 : 77-91.
16. Mestre R. and Terraza M., "Time-frequencies analysis of CAPM-Application to the CAC 40" *Managing Global Transition Journal* .Vol.16 (2) 2018, pp-141-157
17. J.Mossin, Equilibrium in a Capital Asset Market; *Econometrica* Vol. 34 1966, pp. 768–783.
18. Schwert G. Seguin, P. (1990): Heteroscedasticity in stock returns. *The Journal of Finance*, Vol. 45, No. 4, :1129–1155.
19. W. Sharpe Capital Asset Prices : a Theory of Market Equilibrium under risk ; *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3 (Sep., 1964), pp. 425-442.
20. W. Sharpe, G. Cooper Risk -Return Classes of New York Stock Exchange Common Stocks: 1931 –1967, *Financial Analysis Journal* Vol. 28 No. 2 (March-April 1972) pp 46-54.
21. Y. Ye. Interior point algorithms: Theory and analysis, volume 44.1997.

Chapitre 3 : Analyses Temps-Fréquences multivariées du MEDAF

Nous explorons, dans ce chapitre, différentes méthodes liées aux ondelettes pour améliorer et tenter de dépasser les résultats du MEDAF obtenus précédents.

Le modèle est souvent réduit à sa relative simplicité car il ne retient qu'une seule variable explicative : le Marché. Les Modèles Multi-Betas constituent ainsi un prolongement naturel multivarié du MEDAF en autorisant la présence d'autres facteurs de risque. Le recours aux variables Pétrole et Or, sélectionnées sur un acquis de travaux déjà existant, est associé aux décompositions par ondelettes discrètes et à la modélisation ARMA-GARCH des résidus (Cf. section 1). Le Pétrole est souvent assimilé comme indicateur de bonne santé de l'économie mondiale tandis que l'Or est perçu comme un actif refuge.

Les ondelettes discrètes, utilisées dans le chapitre précédent, permettaient d'estimer le Beta sur chaque bande de fréquence et la fenêtre roulante tempo-fréquentielle autorisait une étude de sa dynamique. Cette approche peut être améliorée par l'utilisation des outils multivariés fournis par les ondelettes continues (Cf. section 2). La Cohérence en ondelettes est le premier instrument utilisé dans l'étude du risque systématique au cours du temps et des fréquences. Elle illustre à la fois l'intensité de la relation entre une Action et le Marché ainsi que sa dynamique tempo-fréquentielle. La Phase complète l'étude en indiquant le sens et le signe de la relation. Cette méthodologie appliquée à un panel réduit d'actions montre que la relation Action-Marché n'est pas uniforme au cours du temps et des fréquences. A court-terme, elle n'est pas nécessairement intense, par conséquent le poids du risque systématique dans le risque total n'est pas homogène. A long, terme, la relation du MEDAF n'est pas toujours unilatérale. Ces résultats varient fortement en fonction des actions ce qui augmente le potentiel d'analyse.

Ce constat nous renseigne sur l'instabilité tempo-fréquentielle de la relation Action-Marché illustrée par une différenciation de son intensité selon les horizons de placement. Pour estimer le risque systématique nous proposons une formule permettant d'obtenir un Beta tempo-

fréquentiel variant en se basant sur les ondelettes multivariées continues. Il est alors possible d'analyser de manière très précise les évolutions tempo-fréquentielles du risque systématique afin de définir le degré de robustesse du Profil-Risque de l'action dans le temps (en fixant un horizon d'investissement) ainsi que sa robustesse au cours des fréquences à un instant t du temps.

Ce chapitre est composé de deux sections :

La première consigne les résultats de l'article « Modèle Multi-Betas Tempo-Fréquentiel - Une application avec l'Or et le Pétrole- » disponible en Working Paper (WPMRE.2019.1) présenté aux Rencontres Scientifiques Sherbrooke-Montpellier (2019) à Sherbrooke sous le titre « Time-Frequency Multi-Betas Model- An application with Gold and Oil ».

La deuxième section porte sur l'application des outils multivariées provenant des ondelettes continues. Elle est composée de l'article « Analyse Multidimensionnelle Temps-Fréquence du MEDAF » disponible en Working Paper (MPRA Paper 86330) et présenté à l'International Work Conference on Time Series Analysis (ITISE 2017) à Grenades en Septembre 2017 sous le titre « Multidimensional Time-Frequency Analysis of CAPM ». Elle consigne aussi l'article « Estimation du Beta Tempo-Fréquentiel de la Droite de Marché-Une approche par les ondelettes continues » disponible en Working Paper (MPRA Paper 86335) et publié dans Economics Bulletin (2018) sous le titre «Time-Frequency Varying Betas : A Continuous Wavelets Approach». et présenté sous le même nom à la CFE-CMStatistics à Londres en décembre 2017

Les résultats de ces sections sont complétés par une comparaison des estimations tempo-fréquentielles roulantes consignée dans une Annexe. Il s'agit de l'article «Time-Frequency Varying Estimations - Comparison of Discrete and Continuous wavelets in the Market Line framework-» publié dans le Journal of Banking and Financial Technology (April 2019).

Section 1 : Un modèle Multi-Betas Tempo-Fréquentiel

La théorie moderne du portefeuille de Markowitz (1952) a conduit (dans les années 60) à l'émergence du modèle d'évaluation des actifs financiers (MEDAF) de Sharpe, Lintner et Mossin. Son expression mathématique, la Securities Market Line (ou SML), est similaire à un modèle de régression linéaire simple entre la prime de risque d'un actif et celle d'un marché de référence. D'après les hypothèses du MEDAF le marché est le seul facteur de risque pour une action et les agents possèdent des comportements d'investissement identiques. Le risque systématique est mesuré par l'estimation du paramètre de la régression traditionnelle qualifiée de Droite de Marché. Nous résumons dans les points suivants les limites statistiques et théoriques du MEDAF qui ont été mises en évidence par les différentes études :

- Le problème de l'estimation des paramètres du modèle

Plusieurs auteurs comme Black, Scholes et Jensen (1972) puis Fama et MacBeth (1973) ont repéré plusieurs anomalies statistiques dans le modèle en particulier la non-robustesse des méthodes utilisées associée à la présence d'une autocorrélation-hétéroscédasticité dans les résidus de l'estimation et à l'absence probable de variables exogènes dans le modèle.

- La présence d'effets d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité dans le MEDAF a été observée par de nombreuses études comme celles de Diebold et al (1988) et de Giaccoto et Ali (1982). Une des conséquences de ce constat réside dans la perte des propriétés statistiques BLUE de l'estimateur Beta notamment celle de variance minimale et de convergence. La famille des processus (G)ARCH d'Engle (1982) et de Bollerslerv (1986) est couramment utilisée pour estimer un paramètre Beta plus consistant que celui des MCO (Bera et al [1988], Schwert et Seguin [1990] et Corhay et Rad [1996]). La prise en compte de l'heteroscedasticité semble, cependant, n'affecter que les périodes de fortes volatilités du modèle, comme le montre Morelli en 2003 en comparant deux versions du MEDAF (avec et sans GARCH) pour les actions anglaises. Plus récemment, Bendod et al (2017), en évaluant le MEDAF et le MEDAF-GARCH pour le secteur pétrolier des pays arabes et du Golf, arrivent à des conclusions similaires à celles de Mestre et Terraza (2018) sur des données françaises. Ces derniers indiquent que les

processus EGARCH sont mieux adaptés pour mesurer le Beta de la droite de marché et précisent que les différences entre les Betas du MEDAF et ceux du MEDAF-EGARCH sont peu significatives lorsqu'ils sont inférieurs à un alors qu'une correction s'avère nécessaire pour les Betas plus grands. Pour l'ensemble de ces études on constate une nette amélioration des caractéristiques des résidus des droites de marches.

- Le rajout de variables explicatives dans le MEDAF, porte le nom de Modèles Multi-Facteurs ou Multi-Betas. Il a été initié à l'origine et construit théoriquement par Merton (1973) et Ross (1976) (modèles Arbitrage Pricing Theory ou APT). La nature et le nombre de variables retenues varient selon les auteurs et les analyses. Ainsi par exemple, Bantz (1981), Basu (1983) montrent l'importance des variables comptables (propres aux entreprises) sur les rendements d'une action, comme leur capitalisation ou leur taille (en fréquences annuelles ou trimestrielles). Dans le prolongement de ces travaux, Fama et French (1992-1996) établissent un MEDAF à trois facteurs (communément appelé Modèle Fama-French) qui considère le Price-Earning-Ratio et la taille de l'entreprise en supplément du Marché. Par ailleurs, Chen et al (1986) incorporent des variables macroéconomiques comme la production ou les taux d'intérêt dans l'équation de la Droite de Marché.
- L'hypothèse d'homogénéité des agents

Cette hypothèse constitue une critique théorique importante du MEDAF. En pratique, les investisseurs possèdent des comportements hétérogènes qui se traduisent par une fréquence de placement différente. On peut ainsi comparer les positions des Trader à Hautes-Fréquences (THF) qui placent à court-terme de celles des Fonds Commun de Placements (FCP) qui investissent à long-terme. Ces agents ne valorisent pas les mêmes informations sur les marchés mais ils utilisent les mêmes modèles/méthodes d'analyse qu'ils adaptent pour les rattacher à des séries chronologiques qui leurs sont propres. Les ondelettes liées à l'analyse temps-fréquence répondent à ce type de problématique. Les décompositions discrètes ou MODWT (Cf. les travaux de Mallat et de Meyer) apparaissent comme l'outil le plus adapté et le plus simple à mettre en œuvre dans ce cas. Gençay et al (2005) sur des données américaines puis Mestre et Terraza (2018) sur des données françaises ont montré, en appliquant cette méthode, qu'il est possible de prendre en compte cette hypothèse de comportements

hétérogènes qui conduit à une différenciation du Beta selon les divers horizons d'investissement.

Nous proposons, dans cet article, pour retenir ces différentes limites du MEDAF (Hétéroscédasticité, variables exogènes supplémentaires, hétérogénéité des agents) d'estimer un modèle Multi-Betas tempo-fréquentiel avec erreurs AR-GARCH pour les 30 actions pérennes du CAC 40 pour la période journalière de Janvier 2005 à Décembre 2015.

Dans une première partie, nous estimons les paramètres du Modèle global Multi-Beta-GARCH puis nous recourons à la décomposition en ondelettes des variables du modèle pour construire des modèles temps-fréquence qui prennent en compte les comportements hétérogènes des agents. Nous discutons les résultats obtenus et les perspectives qu'ils ouvrent pour les gestionnaires de portefeuilles.

1.1 Estimation du Modèle Multi-Betas temporel

Le Modèle Multi-Betas, théorisé par Merton (1973), incorpore à côté de la variable de marché d'autres variables censées améliorer l'estimation des paramètres de la droite de marché d'origine (le MEDAF). Les réalisations dans ce sens sont nombreuses mais depuis les chocs pétroliers des années 1980, elles ont surtout mis en évidence les liens entre les marchés financiers et le Pétrole. Huang *et al* (1996) puis Jones *et al* (2004), Basher et Sadorsky (2006), Boyer et Filion (2007), Nandha (2011), montrent ainsi les effets des variations des prix du pétrole sur les rendements des actions (particulièrement dans les secteurs pétrolier et énergétique). D'après ces auteurs, cette variable impacte positivement les entreprises des secteurs Énergétique et Pétrolier notamment dans les pays producteurs. Lee et Zeng (2011) arrivent à des résultats similaires pour les pays du G7 à partir d'une Régression Quantile.

L'Or est une variable communément présentée comme un « actif refuge » (« Safe Heaven ») avec des variations contracycliques au marché comme l'indique Baur et Lucey (2010), puis Baur et McDermott (2010-2016). Les études sur les relations entre l'Or et les Marchés sont nombreuses et confirment en partie ce constat. Il en est ainsi du travail de Sumner *et al* (2010) qui montrent que les marchés affectent le prix de l'Or en période de crise mais leurs liens sont plus ténus en période d'expansion. Miyazaki *et al* (2012) confirment l'intérêt de l'Or en gestion de portefeuille en tant qu'actif contracyclique faiblement corrélé avec les marchés à

court-terme. Mirsha *et al* (2010) soulignent l'existence d'une relation bicausale entre les prix de l'Or et le Marché Indien. Plus récemment, Arfaoui et Ben Rejeb (2017) avec des données américaines et Hussain Shahzad *et al* (2017) avec un panel de pays Européens (Grèce, Irlande, Portugal, Espagne et Italie) confirment ce résultat : l'Or a bien une influence sur les marchés financiers.

Ces travaux portent, principalement, sur l'analyse des liens existant entre l'Or et les marchés financiers mais peu d'études introduisent directement l'Or dans l'équation du MEDAF. Chua *et al* (1990) ont appliqué le MEDAF en incluant l'Or comme variable dépendante, le considérant ainsi comme un actif à part entière mais il reste, cependant, peu sensible aux variations du marché car son beta est faible. Ces auteurs n'étudient pas la relation inverse, à savoir la sensibilité des actions aux variations du prix de l'Or, contrairement à Tufano (1998) à partir d'actions minières nord-américaines durant les années 1990. En analysant le MEDAF avec l'Or en variable explicative, ce dernier conclue, que les actions de ce secteur sont beaucoup plus sensibles à l'Or qu'au Marché car leur Beta est plus important. Il met aussi en évidence des différences de Beta en fonction de la fréquence des données retenues (journalière, mensuelle ou annuelle). Jonhson et Lamdin (2016) puis He *et al* (2018) arrivent à des résultats similaires avec les mêmes variables pour des données journalières américaines et anglaises plus récentes (entre 2005-2015).

La conjugaison de ces différents travaux, nous conduisent à retenir, dans la suite de cet article, le Pétrole et l'Or comme facteurs supplémentaires à la variable de marché. Nous prenons en compte les limites statistiques des résidus issus de l'estimation de ces modèles ainsi que l'hypothèse d'hétérogénéité des agents par un modèle Multi-Betas avec erreurs AR-EGARCH. Nous l'estimons pour les 30 actions françaises cotées sur le CAC40 (utilisé comme référence) pour la période journalière 2005-2015. Nous considérons le prix du baril de Pétrole WTI coté sur le New-York Mercantile Exchange et celui de l'once d'Or coté au London Bullion Market. Les caractéristiques des différentes séries en logarithme ainsi que les résultats des tests de racine unitaire (Cf. Annexe A1.1 et A1.2) montrent qu'elles sont toutes non-stationnaires de type DS. Nous retranchons le taux sans risque aux variables stationnalisées par le filtre aux différences premières, comme l'indique la théorie du MEDAF, pour obtenir les Primes de Risque. Le taux sans risque retenu est le taux des obligations française OAT à 10 ans. L'Annexe A1.3 consigne les résultats des caractéristiques des séries

des primes de risque retenues. Ces nouvelles variables sont centrées et stationnaires (Cf. A1.2).

Le Modèle Multi-Betas s'écrit alors :

$$r_{i,t} = \beta_{m,i} r_{m,t} + \beta_{o,i} r_{o,t} + \beta_{g,i} r_{g,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (1)$$

Avec $r_{i,t}$ la prime de risque de l'actif i , $r_{m,t}$ celle du marché. $r_{o,t}$ est la prime de risques du pétrole (Oil) et $r_{g,t}$ celle de l'Or (Gold).

Sous les hypothèses des MCO, $\varepsilon_{i,t}$ est un processus *i.i.d* $(0, \sigma_\varepsilon)$ et dans ce cas les paramètres $\beta_{m,i}$, $\beta_{o,i}$ et $\beta_{g,i}$ sont consistants. Les études précitées rejettent cette hypothèse sur l'aléa. Nous lui substituons une représentation de type AR(1)-EGARCH(1,1) (Cf. Bibliographie 44). Les paramètres de l'équation (1) et ceux de ce processus sont simultanément estimés par la méthode du maximum de vraisemblance associée à un algorithme d'optimisation non-linéaire (Cf. Ye [1992] et Ghalanos and Theussl [2011]).

Le tableau 1 résume les résultats de ces estimations classées selon les valeurs décroissantes des β_m obtenus.

Les paramètres Betas sont tous significatifs et on remarque avec les coefficients de détermination (R^2) que l'ensemble des variables explique entre 30 et 70% du risque total des actifs. Ce classement révèle une relation significative ($R^2=0.33$) entre les β_m et les coefficients de déterminations R^2 qui leurs correspondent. Les actions ayant un β_m fort possèdent globalement un R^2 plus élevé, mais cette relation est perturbée par la présence de valeurs exceptionnelles liées à des actions comme Airbus et PSA , par exemple.

Les résidus du Modèle Multi-Betas ne sont plus autocorrélés et hétéroscédastiques et, malgré que leurs hypothèses de normalité ne soient pas respectées, on peut considérer que ce modèle peut être statistiquement utilisé dans la suite de cette étude.

Tableau 1 : Estimation du Modèle Multi-Betas-AR-EGARCH

	MB-EGARCH	β_m	t-Stat	β_o	t-Stat	β_g	t-Stat	R2	JB	LB	ARCH
Actions avec $\beta_m < 1$	Essilor	0,532	33,25	-0,0169	-2,18	0,0376	2,2	0,31	16533	2,35	3,27
	Sodexo	0,571	37,31	-0,0303	-3,77	0,0112	0,85	0,35	9494	0,81	0,7
	Ricard	0,634	40,76	-0,0239	-3,13	0,0398	3,12	0,35	9779	5,62	0,47
	Publicis	0,699	44,35	0,0037	0,29	0,0262	2,85	0,43	2014	5,82	0,77
	Danone	0,701	49,39	-0,0109	-1,33	0,0237	1,52	0,41	4726	3,94	2,24
	Orange	0,727	49,78	-0,0167	-2,21	-0,0427	-3,05	0,43	4609	2,51	0,42
	L'Oréal	0,768	52,25	-0,0254	-3,02	-0,0008	-0,05	0,49	4672	1,47	2,35
	Vivendi	0,791	55,85	-0,0091	-1,04	-0,0091	-0,56	0,52	7738	1,57	2,3
	Veolia	0,833	40,91	-0,0312	-4,95	-0,0195	-0,95	0,39	149850	0,19	1,21
	Air Liquide	0,853	66,28	-0,0052	-1,06	0,0407	3,69	0,65	7500	3,28	0,64
	Total	0,859	72,35	0,0757	10,15	0,0781	5,8	0,69	2419	3	1,06
	Carrefour	0,874	47,28	-0,0155	-1,68	-0,0026	-0,14	0,48	3817	1,39	1,11
	Technip	0,937	38,04	0,1423	11,01	0,1062	4,25	0,41	7486	5,32	4,55
	Airbus	0,946	39,37	0,0071	0,6	0,0217	0,86	0,36	104573	0,17	0,08
	GDF	0,949	28,9	-0,0153	-4,25	-0,0395	-2,52	0,5	153218	6,21	0,18
	Accor	0,959	43,34	-0,0163	-1,35	0,036	1,58	0,48	5618	1,37	1,07
Actions avec $\beta_m = 1$	Bouygues	0,987	47,83	-0,0148	-1,38	0,0417	2,31	0,5	17527	0,59	0,48
	Gemini	1,008	46,98	-0,0281	-2,23	0,021	0,89	0,48	2815	2,43	0,34
	Michelin	1,023	41,23	-0,0162	-1,2	0,0376	1,81	0,49	3588	4,26	1,44
Actions avec $\beta_m > 1$	LVMH	1,031	76,11	-0,0122	-1,54	0,0192	1,17	0,62	10478	1,69	0,68
	Vinci	1,068	77	-0,017	-2,5	0,0132	0,93	0,67	5157	1,34	0,96
	Alcatel	1,133	34,36	-0,0209	-3,27	-0,0883	-5,23	0,32	14120	0,31	1,49
	PSA	1,14	44,18	-0,0176	-1,19	-0,0535	-1,75	0,39	1557	4,19	1,24
	Schneider	1,195	69	-0,0085	-0,82	0,0193	1,06	0,68	1086	9,99	2,54
	St-Gobain	1,252	67,31	-0,0021	-0,29	0,0057	1,21	0,67	15798	1,99	0,23
	Renault	1,276	52,46	-0,0175	-1,52	0,0186	0,82	0,55	2303	0,94	1,94
	AXA	1,296	61,17	-0,0386	-3,74	-0,0591	-3,11	0,67	43408	4,34	0,04
	BNP	1,303	76,83	-0,0315	-3,58	-0,0811	-5,55	0,61	41010	2,48	1,09
	SG	1,315	61,39	-0,0015	-0,13	-0,0878	-4,55	0,56	11224	1,5	4,65
CA	1,356	61,91	-0,0252	-1,97	-0,0712	-2,92	0,56	7966	2,69	1,6	

Au risqué de 5%, Colonne LB (Ljung-Box test): $\chi^2(5)=11,1$; Colonne ARCH (ARCH-LM test): $\chi^2(5)=11,1$ Colonne J-B (Jarque-Bera Line): $\chi^2(2)=5,99$. Il s'agit ici des Tests pondérés de Ljung-Box et de ARCH-M de Fisher-Gallagher (2012).

Par ailleurs, dans ce modèle de régression l'absence de colinéarité entre les variables exogènes du modèle vérifiée dans l'annexe A2.

Les tests de significativité des Betas relatifs au pétrole et à l'or nous permettent de savoir pour quelles actions le Modèle Multi-Betas peut être retenu. Si $\beta_o = \beta_g = 0$, nous retrouvons l'équation de la droite de marché du MEDAF. L'ensemble des résultats des estimations nous amène aux commentaires suivants :

- Pour 37% de l'échantillon soit 11 actions (Danone, Vivendi, Carrefour, Airbus, Accor, Michelin, LVMH, PSA, Schneider, St-Gobain, Renault) l'ajout des variables Pétrole et Or conduisent à accepter l'hypothèse $\beta_o = \beta_g = 0$, et de ce fait les résultats du MEDAF restent valables pour cet échantillon constitué principalement des secteurs agroalimentaire et automobile.
- Pour les 19 actions restantes (soit 63% de l'échantillon), il existe au moins une variable supplémentaire significative. Parmi elles, on remarque que 4 actifs (Publicis, Air Liquide, Bouygues et SG) possèdent un $\beta_o = 0$ et 5 autres (Sodexo, L'Oréal, Gemini, Veolia et Vinci) ont un $\beta_g = 0$. Au final, l'ajout des deux variables supplémentaires est doublement significatif pour 1/3 de notre échantillon, soit 12 actions.

Une correction des β_m du modèle MEDAF est possible afin de se rapprocher d'un Beta plus consistant sans avoir à réestimer le modèle avec des erreurs AR(1) – EGARCH¹. Cette correction reste valable dans le cadre du modèle Multi-Betas puisqu'il n'y a pas de différences significatives entre les β_m (et les résidus) estimés du Modèle Multi-Betas du tableau 2 et ceux du MEDAF avec erreurs AR(1)-EGARCH(1,1) (Cf. Annexe A3 et A4). L'ajout de variables supplémentaires apparaît ainsi comme limité pour une grande partie des actions car aucune différence n'apparaît sur leur Beta du marché. L'intérêt du Modèle Multi-Betas résulte, cependant, dans l'analyse et l'interprétation par les gestionnaires de portefeuille des signes et de l'intensité des β_o et des β_g .

Pour une grande partie des actions avec un β_o significatif, on remarque que les estimateurs sont quasiment tous négatifs. Néanmoins ces sensibilités aux prix du Pétrole sont très faibles comme l'indique leurs intensités qui se situent entre -0.015% et -0.030%. Si l'on se réfère à la classification des actions par la valeur du β_m , illustrée dans le tableau 1 on constate que le Pétrole influence de la même manière les différentes catégories d'actifs. Une exception notable concerne, cependant, les actions Technip et Total pour lesquelles les β_o sont positifs

et plus importants que les autres actifs. Ainsi, une hausse de 1% du prix du pétrole entraîne une augmentation de 0.08% du rendement de Total et de 0.14% pour celui de Technip. On en conclue que les actions du secteurs pétrolier et gazier sont les plus sensibles aux variations du prix du Pétrole, ce qui est concordant avec leurs activités.

Les β_g significatifs sont négatifs pour 7 actions (Alcatel, SG, BNP, CA, AXA, Orange et GDF) et positifs pour 7 autres (Publicis, Essilor, Ricard, Air Liquide, Bouygues, Total, Technip). Les actions bancaires qui sont catégorisées comme « risquées » par leurs β_m supérieur à un, sont négativement affectées par les variations du prix de l'Or, ce qui tend à justifier son caractère « d'actif refuge ». On peut étendre ce résultat aux actions avec un Beta fort (secteur bancaire + Alcatel dans notre cas) possédant une sensibilité négative et élevée aux prix de l'Or alors que les actions avec un $\beta_m < 1$ ont des β_g positifs et plus faibles. Une fois de plus, Total et Technip sont des exceptions car elles sont plus sensibles à l'Or que les autres actions.

En comparant les sensibilités des trois estimateurs, le Marché reste la source de risque principale car les β_m sont plus important que les autres betas en valeurs absolues. On note aussi que les sensibilités à l'Or sont plus élevées (en valeurs absolues) que celles relatives aux Pétrole notamment pour les actions bancaires et pour celles avec une forte sensibilité au marché.

1.2 Estimation du Modèle Multi-Betas Tempo-Fréquentiel

Sur les marchés financiers l'hypothèse d'homogénéité des comportements des agents est difficilement tenable. La fréquence des placements d'un THF et d'un FCP, dans un portefeuille boursier, par exemple, dépend de leurs intentions d'achat ou de vente basées sur divers calculs/modèles financiers. Ces derniers ne permettent pas de différencier les agents dans la mesure où ils considèrent une agrégation des comportements (i.e. un « comportement moyen ») à partir des séries financières qu'ils utilisent comme référentiel. La décomposition temps-fréquences en ondelettes de ces séries trouvent leur justification dans le modèle Multi-Betas, en attribuant les fréquences courtes aux Trading de Hautes-Fréquences et celles plus basses aux fondamentalistes. Elles constituent une réponse pertinente à l'analyse des comportements des agents qui font appel aux modèles de ce type.

Dans ce paragraphe nous rappelons brièvement la méthodologie retenue des ondelettes avant de comparer les résultats du Modèle Multi-Betas global avec sa décomposition temps-fréquences. Nous mettons par la suite l'accent sur les sensibilités fréquentielles aux variables exogènes introduites dans le modèle, l'Or et le Pétrole.

1.2.1 Rappel sur la méthodologie des ondelettes : Maximal Overlap Discret Wavelets Transform (MODWT) :

Rappelons qu'une ondelette-mère $\Psi(t)$ de moyenne nulle et normalisée s'écrit²:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1 \quad (2)$$

Ces propriétés permettent de garantir la préservation de la variance lors de la décomposition d'une série et le respect d'une condition d'admissibilité/d'existence de l'ondelette (Grossman et Morlet [1984]).

Cette ondelette-mère est traduite par un paramètre τ et dilatée par un paramètre d'échelle s pour obtenir des ondelettes-filles qui servent de base au filtrage de la série :

$$\Psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (3)$$

La décomposition de la fonction temporelle $x(t)$ s'effectue selon des coefficients d'ondelettes notés $W(s, \tau)$. Ils s'écrivent :

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt = \langle x(t), \psi_{\tau,s}(t) \rangle \quad (4)$$

ψ^ est la complexe conjuguée de ψ*

Les paramètres τ et s indiquent ainsi la localisation temporelle et fréquentielle du coefficient. Les ondelettes permettent, de ce fait, la représentation temporelle des composantes fréquentielles d'où le nom d'analyse temps-fréquence. Il s'agit ici d'une présentation théorique d'une décomposition en ondelettes continues. Une version en temps discret s'applique pour les séries temporelle x_t mais le principe reste similaire puisque les fréquences restent toujours continues. L'utilisation pratique de ce type de décomposition implique des temps de calculs importants et a conduit à une discrétisation en fréquence appelée la MODWT pour permettre des transformations rapides. Les ondelettes se définissent alors comme une succession d'une combinaison de filtres Passe-Haut et Passe-Bas répétée J fois

(Algorithme de Mallat [1989-2009]). L'indice J correspond au nombre optimal de répétitions nécessaires pour reconstruire entièrement une série x_t de taille N . Il est tel que $J = \frac{\text{Ln}(N)}{\text{Ln}(2)}$.

La MODWT, malgré ce procédé simplifié, préserve la variance de la série décomposée, permettant sa bonne reconstruction sans perte informationnelle. Elle s'effectue alors en sommant les composantes de hautes et de basses-fréquences issues de la décomposition de la série:

$$x_t = S_{J,t} + \sum_{j=1}^{j=J} D_{j,t} \quad (5)$$

$S_{J,t}$ traduit ainsi une approximation basique de la série à laquelle on ajoute des Détails $D_{j,t}$ qui rassemblent les fréquences correspondantes à leur échelle j comprises dans l'intervalle, ou les Bandes de Fréquences, $[\frac{1^{j+1}}{2} ; \frac{1^j}{2}]$.

En finance, l'interprétation des fréquences est simplifiée en les exprimant en Périodes qui possèdent la même unité temporelle que les données. On les assimile ainsi comme les différents horizons d'investissement des agents (Court-Moyen-Long terme). Le tableau de l'Annexe A5 consigne les bandes de fréquences et les horizons temporels en jours auxquels elles correspondent.

Compte tenu de la longueur de nos échantillons, nous obtenons 11 bandes de fréquences et une approximation. Les bandes de Hautes Fréquences (D1-D2) traduisent ainsi des horizons de placement courts tandis que celles de Basses-Fréquences illustrent un horizon plus long. Afin de simplifier l'analyse nous retenons les 6 premières bandes de fréquences : la bande de fréquence notée D1 illustre ainsi un horizon plutôt court compris entre 2 et 4 jours (Hautes-Fréquences) tandis que D6 représente un investissement plus long (Basses-Fréquences) compris entre 3 et 6 mois.

Dans le cadre du Modèle Multi-Betas retenu, nous décomposons la variable expliquée et les trois variables explicatives par la MODWT. Chaque Bandes de Fréquences d'une action est reliée dans le Modèle Multi-Betas tempo-fréquentiel avec celle d'un Marché, du Pétrole et de l'Or.

Les paramètres Betas sont ainsi placés dans l'espace tempo-fréquentiel et traduisent les sensibilités de l'actif aux facteurs retenus en fonction de la fréquence d'investissement de

l'agent augmentant ainsi les possibilités de classification. Les différents modèles de régression sont estimés comme précédemment en conservant l'hypothèse simplificatrice de l'aléa obéissant à un processus AR(1)-EGARCH(1,1).

Pour un actif i , le Modèle Multi-Beta Tempo-Fréquentiel, qui possède par construction des moyennes nulles des différentes Bandes, s'écrit :

$$D_{j,t}^{actif} = \beta_j^m D_{j,t}^{Market} + \beta_j^o D_{j,t}^{Oil} + \beta_j^g D_{j,t}^{Gold} + \varepsilon_{j,t} \quad (6)$$

\forall la bande de fréquence $j = 1, \dots, 6$

$\varepsilon_{j,t} \sim AR(1) - EGARCH(1,1)$

L'ensemble des résultats³ des estimations fréquentielles du Modèle Multi-Betas AR-EGARCH tempo-fréquentiel est consigné dans l'Annexe A6.

1.2.2 Estimations des Modèles Multi-Betas Tempo-Fréquentiels :

Les coefficients β_m sont, pour toutes les fréquences et toutes les actions, hautement significatifs. Les coefficients de déterminations fréquentiels ont des valeurs similaires à ceux du modèle global pour les hautes-fréquences (D1-D2), mais ils deviennent plus importants pour les basses-fréquences (D4-D5) et avoisinent pratiquement 100% pour D6. L'ordre de grandeur des coefficients d'ondelettes des bandes D5-D6 étant très faible, les résidus des estimations le sont aussi ce qui explique les valeurs élevées des R^2 aux basses-fréquences. On note, cependant, pour toutes les fréquences des actions une détérioration des caractéristiques des résidus. En particulier, l'hétéroscédasticité n'est plus correctement capturée par le processus AR-EGARCH. Une augmentation des ordres de ces processus réduit les phénomènes d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité sans pour autant modifier notablement les valeurs estimées des trois paramètres. Le Modèle Multi-Betas Tempo-Fréquentiel, malgré ces réserves, possède des propriétés statistiques suffisantes pour analyser les résultats économiques auquel il conduit.

Les estimations des trois paramètres du modèle jouent ainsi un rôle central dans les stratégies des investisseurs qui peuvent s'interroger sur le choix du modèle à retenir en fonction de la significativité de ces estimateurs. On remarque que, globalement, les actions avec un β_m fort (>1) possèdent des β_o et β_g négatifs pour toutes les bandes de fréquences et particulièrement celles de long-terme et que les actions avec un β_m faible (inférieur à 1) ont des β_g positifs et relativement élevés alors que leurs β_o restent majoritairement négatifs. Les gestionnaires

peuvent ainsi apprécier les différentes sources de risque affectant leurs portefeuilles lorsqu'ils effectuent leurs choix.

Le tableau 2, qui mesure les différences entre les paramètres du modèle global et ceux du modèle tempo-fréquentiel, constitue une aide supplémentaire à cette interprétation globale.

Tableau 2 : Pourcentages de Betas significativement différents entre le Modèle Multi-Betas Global (MBG) et le Modèle Multi-Betas Tempo-Fréquentiel (MBTF)

MBTF -MBG	D1	D2	D3	D4	D5	D6
β_m	20%	16,66%	36,66%	50	73,33	83,33
β_o	20%	20%	30%	46,66%	76,66%	90%
β_g	3,33%	6,66%	23,33%	43,33%	73,33%	73,33%

On teste si la différence entre les deux estimateurs est significative avec un test de Student. On comptabilise alors le nombre de différences significatives que l'on exprime en pourcentage du nombre total d'action (i.e. 30)

Les Betas estimés sans les ondelettes (MBG) restent globalement identiques à ceux de court-terme (D1-D2) pour la majorité des actions et pour les différents betas, alors qu'ils présentent des différences très significatives pour des fréquences de long-termes (Par exemple pour D6, 83% des actions ont des β_m significativement différents entre les deux modèles).

Les ondelettes fournissent ainsi une estimation des betas différenciées selon la fréquence d'investissement permettant d'identifier et de mesurer l'importance de l'horizon de placement sur les indicateurs de risque systématique et les sensibilités aux différents facteurs. L'intensité des β_o et des β_g est plus importante à long-terme qu'à court-terme. Pour toutes les actions, les variables sélectionnées affectent plus fortement les actifs pour des investissements longs. Nous confirmons ainsi les résultats obtenus par Gençay *et al* (2005) et par Mestre et Terraza (2018), concernant l'utilisation des ondelettes pour des placements longs. Le Modèle Multi-Beta tempo-fréquentiel présente donc un intérêt stratégique pour des investissements de long terme par l'estimation de ses paramètres des basses-fréquences.

1.2.3 Sensibilités des primes de risque des actions aux variables Pétrole et Or:

Les tests de significativité des paramètres fréquents β_o et β_g des différentes actions permettent d'établir la grille de lecture suivante :

- Si $\beta_o = \beta_g = 0$, l'ajout des deux variables n'est pas approprié pour cet actif. Dans ce cas, il est possible de retenir la relation entre la décomposition des primes de risque et du marché, on le notera MEDAF *Fréquentiel*⁴.
- Si $\beta_o \neq 0$ et $\beta_g \neq 0$ les deux variables sont pertinentes et le Modèle Multi-Betas (MB) avec le Pétrole et l'Or est conservé.
- Si un seul Beta est significatif, nous retenons toujours le Modèle Multi-Betas en indiquant par « MB-Oil » ou « MB-Gold » le choix de la variable à conserver.

Une synthèse des résultats utilisant cette grille est présentée dans les Tableaux 3 où nous comptabilisons pour chaque bande de fréquences le nombre d'actions pour lesquelles le MEDAF ou le Multi-Betas avec une ou deux variables supplémentaires est retenu.

Tableaux 3 : Analyse des résultats du Modèle Multi-Betas Fréquentiel

3.1 Nombre d'actions pour lesquelles le MEDAF ou le Multi-Betas est valide (en valeurs et en pourcentages)

En Valeur	D1	D2	D3	D4	D5	D6
MEDAF	11	5	6	5	1	1
Multi-Betas	<u>19</u>	<u>25</u>	<u>24</u>	<u>25</u>	<u>29</u>	<u>29</u>
	Dont	Dont	Dont	Dont	Dont	Dont
MB Gold	6	3	6	4	1	1
MB Oil	5	15	7	7	3	5
MB Oil-Gold	8	7	11	14	25	23

En % de l'échantillon	D1	D2	D3	D4	D5	D6
MEDAF	36,67	16,67	20,00	16,67	3,33	3,33
Multi-Betas	<u>63,33</u>	<u>83,33</u>	<u>80,00</u>	<u>83,33</u>	<u>96,67</u>	<u>96,67</u>
MB Gold	20,00	10,00	20,00	13,33	3,33	3,33
MB Oil	16,67	50,00	23,33	23,33	10,00	16,67
MB Oil-Gold	26,67	23,33	36,67	46,67	83,33	76,67

3.2 Résultats par actions

	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Accor	MEDAF	MB Oil	MB Oil	MEDAF	MB	MB
Airbus	MEDAF	MEDAF	MB	MB Oil	MB	MB
Alcatel	MB Gold	MEDAF	MB Gold	MB	MB	MB
Air Liquide	MB Gold	MB Gold	MB Gold	MB Oil	MEDAF	MB Oil
AXA	MB	MB	MB	MB	MB	MB
BNP	MB Gold	MB Gold	MB Oil	MB	MB	MB
Bouygues	MB Oil	MB Oil	MB Gold	MB	MB	MB
CA	MB Gold	MB Gold	MB Gold	MB	MB	MB Oil
Carrefour	MEDAF	MB Oil	MB Oil	MB	MB	MB
Danone	MEDAF	MEDAF	MB	MEDAF	MB Gold	MB Oil
Essilor	MEDAF	MB	MB	MEDAF	MB	MB
GDF	MB Oil	MB Oil	MB Oil	MB Oil	MB	MB
Gemini	MEDAF	MB Oil	MB Gold	MB	MB Oil	MB
St-Gobain	MEDAF	MB Oil	MB Oil	MB Gold	MB	MB
L'Oréal	MB	MB Oil	MB Oil	MEDAF	MB Oil	MB
LVMH	MEDAF	MB Oil	MEDAF	MB Gold	MB	MB
Michelin	MEDAF	MB Oil	MEDAF	MB	MB	MB
Orange	MB	MB Oil	MB	MB Oil	MB	MEDAF
PSA	MB	MB Oil	MB Oil	MB Oil	MB	MB
Publicis	MB	MEDAF	MEDAF	MB Oil	MB Oil	MB
Renault	MB Oil	MB Oil	MB Gold	MEDAF	MB	MB Gold
Ricard	MB	MB	MB	MB Gold	MB	MB
Schneider	MEDAF	MEDAF	MEDAF	MB Gold	MB	MB
SG	MB Gold	MB	MB	MB	MB	MB
Sodexo	MB Oil	MB Oil	MEDAF	MB	MB	MB
Technip	MB	MB	MB	MB	MB	MB
Total	MB	MB	MB	MB	MB	MB
Veolia	MB Gold	MB Oil	MB	MB Oil	MB	MB Oil
Vinci	MEDAF	MB	MEDAF	MB	MB	MB
Vivendi	MB Oil	MB Oil	MB	MB	MB	MB Oil

La lecture de ces tableaux permet d'établir les commentaires suivants:

- Aucune action ne retient le MEDAF sur l'ensemble des bandes de fréquences, contrairement, au Modèle Multi-Betas où AXA, Technip et Total l'utilisent de façon complète. Il n'y a pas d'actions qui possèdent pour toutes les fréquences un modèle multi-betas intermédiaire.
- A court-terme (D1), le MEDAF est retenu pour 1/3 de l'échantillon ce qui correspond à l'estimation précédente du Modèle Global. Ce pourcentage diminue lorsque l'horizon d'investissement s'accroît au profit du Multi-Betas et en particulier du Multi-Betas avec le Pétrole. Les actions sont donc plus impactées par le Pétrole et/ou l'Or à long-terme qu'à court-terme.

Le Modèle Multi-Betas tempo-fréquentiel présente ainsi un intérêt statistique pour une majorité des actions et ce quel que soit les horizons de placement. C'est un modèle qui permet de compléter les résultats du MEDAF par l'introduction des décompositions des variables Pétrole et Or. Il peut constituer une aide à la décision pour les investisseurs en synthétisant les résultats des paramètres estimés qui mettent l'accent sur les sensibilités à l'or et au pétrole des primes de risque des actions.

Le tableau 4 consigne, pour chaque bande de fréquences, le pourcentage de β_o et de β_g significativement supérieur et inférieur à zéro ainsi que leurs moyennes. On associe à ces paramètres, pour une meilleure compréhension des sensibilités aux variables Or et Pétrole, la moyenne des β_m qui correspondent aux paramètres du marché des actions considérées.

Tableau 4 : Synthèse des signes des β_o et des β_g des Modèles Multi-Betas

	D1	D2	D3	D4	D5	D6
% de $\beta_o > 0$	23,08	18,18	16,67	28,57	17,86	42,86
Moyenne β_o	0,06	0,07	0,12	0,06	0,09	0,1
Moyenne β_m	0,88	0,94	0,94	0,92	0,99	0,85
% de $\beta_g > 0$	42,86	60,00	58,82	55,56	50,00	50,00
Moyenne β_g	0,05	0,04	0,05	0,08	0,09	0,12
Moyenne β_m	0,79	0,8	0,86	0,97	1	0,95
% de $\beta_o < 0$	76,92	81,82	83,33	71,43	82,14	57,14
Moyenne β_o	-0,02	-0,03	-0,03	-0,05	-0,06	-0,11
Moyenne β_m	0,89	0,97	0,97	1,1	1,07	1,1
% de $\beta_g < 0$	57,14	40,00	41,18	44,44	50,00	50,00
Moyenne β_g	-0,07	-0,15	-0,08	-0,1	-0,09	-0,16
Moyenne β_m	1,13	1,33	1,16	1,22	1,11	1,11

Les estimations des paramètres de l'Or et du Pétrole du Modèle Multi-Betas Tempo-Fréquentiel permettent d'établir les commentaires généraux suivants.

- Le nombre de modèles multi-betas présentant un β_g positif est relativement stable sur toutes les bandes de fréquence (autour des 50%) tandis qu'il est croissant pour les modèles avec un β_o positif. Nous remarquons, de plus, que leurs moyennes sont croissantes de D1 vers D6 (du court-terme vers le long-terme). Les actions avec un β_g et/ou un β_o positif(s) ont en moyenne un β_m inférieur ou égal à 1. Les actions pétrolières (Total, Technip et Air Liquide) sont fortement et positivement sensibles aux variations du Pétrole et de l'Or sur toutes les bandes de fréquences. On observe, de ce fait, que la valeur moyenne des β_o positifs est plus élevée que celle des β_o négatifs. Dans une moindre mesure les secteurs de l'Automobile, du Luxe (LVMH, L'Oréal et Ricard), de la Grande Distribution et des Services de Restauration (Carrefour, Danone et Sodexo) sont positivement affectés par l'Or et Le Pétrole à long-terme (D6 uniquement).
- Le nombre d'actions négativement sensibles au Pétrole est plus important à court-terme (D1-D2) qu'à long-terme (D6), tandis qu'il est plutôt stable pour l'Or. L'intensité des β_g et des β_o augmente avec l'horizon fréquentiel. Il en est de même de la valeur moyenne des β_m des actions avec $\beta_o < 0$ qui est inférieure à 1 jusqu'à la bande D3 puis supérieure à 1 au-delà. Les actions bancaires (SG, CA, BNP, SG et AXA) et celles liées à l'Energie électrique et à sa gestion (Veolia, GDF, Saint-Gobain, Schneider) ne sont pas (ou peu) sensibles aux variations de court-terme du prix du Pétrole (sauf AXA). Ces actions présentent, cependant, des β_o fortement négatifs avec un accroissement de l'horizons d'investissement des gestionnaires (D5-D6), et on observe un résultat contraire pour les actions du secteur Automobile. Les actions négativement sensibles à l'Or possèdent en moyenne un β_m supérieur à 1. On remarque, cependant, que l'intensité des β_g négatifs est plus forte (en moyenne) que celle des β_g positifs. L'Or affecte négativement les actions ayant un risque systématique important comme les actions bancaires/financières et Alcatel. En période d'expansion une hausse du Marché conduit à une augmentation (plus forte) du prix de ces actions et une baisse de l'Or confirme cette dynamique haussière. A l'opposé en période de Crise, la tendance décroissante du Marché pousse fortement les primes de ces actions à la baisse. Dans ce cas, les agents liquident leurs positions au profit de l'Or. La demande de ce dernier devenant de plus en

plus importante, son prix augmente naturellement et va ainsi confirmer le choix des investisseurs et faire baisser le prix des actions. Son rôle d'« actif refuge » se trouve donc justifié même si la moitié des actions possèdent des β_g positifs.

1.3 Conclusion

Le modèle Multi-Betas tempo-fréquentiel complète efficacement les différents instruments auxquels recourent les investisseurs boursiers pour construire leurs portefeuilles. Il peut, tout d'abord, se substituer au MEDAF par sa prise en compte des anomalies résiduelles au moyen de processus générateurs de type ARMA-EGARCH pour l'aléa de la régression. Il enrichit ensuite l'explication des primes de risque des actions par l'ajout de variables exogènes supplémentaires et enfin il prend en compte l'hétérogénéité des comportements des agents par la décomposition tempo-fréquentielle des variables. Ce modèle, malgré quelques insuffisances statistiques, en particulier celles concernant les caractéristiques de ses résidus fréquentiels, apporte un gain d'information appréciable pour modéliser les primes de risques.

- Le paramètre β_m qui mesure la sensibilité des primes de risque des actions au marché n'est pas significativement différent à court-terme de ceux du modèle Multi-Betas Global et du MEDAF (corrigés de l'hétéroscédasticité de leurs résidus). Pour un "chartiste" l'utilisation du seul modèle MEDAF peut conforter, dans ce cas, ses choix d'investissement. Il peut, toutefois, considérer les sensibilités des actions de son portefeuille aux variations de l'Or et du Pétrole pour moduler ses choix.
- L'estimation du Modèle Multi-Betas Global (sans sa décomposition) concerne 2/3 des actions dans sa version complète avec l'Or et le Pétrole ou l'une de ses variables. Les sensibilités des primes de risque des actions à ces deux facteurs sont faibles par rapport à celle du marché mais, elles permettent, cependant, d'appréhender d'éventuels effets positifs sur certaines catégories d'actions notamment celles des secteurs pétrolier/gazier et bancaire. A titre d'exemple, le Pétrole affecte négativement la majorité des actions, cependant, son impact est plus fort pour les actions ayant un Beta du marché élevé que pour celles avec un β_m faible. L'Or affecte négativement et plus fortement les actions avec un risque systématique fort (comme le secteur bancaire) mais l'effet est inversé pour les actions avec un β_m inférieur à un (principalement

celles des secteurs du Luxe et du Pétrole). Ces cas peuvent être multipliés et répétés avec les modèles multi-betas tempo-fréquentiels de cet article (et complétée par d'autres variables exogènes) en croisant les valeurs des paramètres de régression avec les secteurs d'activités et les horizons de placement des investisseurs.

- Le modèle Multi-Betas Tempo-Fréquentiel est celui qui génère, in fine, le plus d'informations pratiques pour les investisseurs en particulier pour les fundamentalistes. On constate, en effet, aux basses-fréquences (D6) que le MEDAF n'est retenue que pour une action alors que les autres sont impactées simultanément ou séparément par les deux variables Or et Pétrole, et cet effet est croissant avec l'horizon temporel d'investissement.
- Les ondelettes constituent ainsi un outil puissant de différenciation des sensibilités des primes de risque aux différentes variables selon les positions d'investissement des agents. La conjugaison des différentes estimations tempo-fréquentielles du modèle offre une véritable panoplie de choix aux décideurs sur les marchés financiers.

Annexes

Tableaux A1 : Caractéristiques des actions

A1.1 : Moyennes et Ecart-types des Ln(Prix)

Variables	Moyenne	Ecart-types	Skewness	Kurtosis
Accor	3,15	0,34	0,15	2,76
Airbus	3,15	0,52	0,28	2,18
Alcatel	1,20	0,74	0,19	2,05
Air Liquide	4,05	0,40	-0,15	2,16
AXA	2,48	0,31	0,08	2,71
BNP	3,72	0,25	-0,98	3,68
Bouygues	3,13	0,26	0,10	2,17
CA	2,29	0,48	-0,46	2,87
CARREFOUR	3,23	0,28	-0,74	3,31
DANONE	3,70	0,23	-0,39	2,78
ESSILOR	3,84	0,47	0,27	2,00
GDF	2,76	0,19	-0,11	2,75
Gemini	3,51	0,37	0,78	3,22
St Gobain	3,48	0,26	-0,08	3,22
LVMH	4,42	0,41	-0,10	1,79
Michelin	3,90	0,35	0,04	2,28
L'Oréal	4,36	0,36	0,50	2,30
Orange	2,29	0,19	-0,10	3,09
PSA	2,72	0,56	-0,47	2,36
Publicis	3,46	0,43	0,29	1,98
Renault	3,81	0,47	-0,62	2,87
Ricard	4,12	0,31	-0,03	2,21
Schneider	3,51	0,43	-0,16	1,88
SG	3,70	0,50	0,05	2,51
Sodexo	3,77	0,41	-0,06	2,28
Technip	3,85	0,36	-0,65	3,21
Total	3,43	0,18	0,29	2,88
Veolia	2,77	0,49	0,03	2,24
Vinci	3,45	0,30	-0,03	2,84
Vivendi	2,57	0,18	0,68	3,10
Gold	6,64	0,40	-0,44	2,00
Oil	4,05	0,25	-0,58	2,81
CAC	8,33	0,19	-0,02	2,31

A1.2 : Tests de stationnarité de Phillips-Perron sur les Ln(Prix) et les primes de risque

Ln(Prix)	M3	M2	M1	Primes	M3
CAC	-1,89	-1,85	0,23	CAC	-56,11
Oil	-2,57	-2,13	-0,07	Oil	-57,32
Gold	-1,22	-2,23	1,77	Gold	-56,18
Accor	-3,1	-2,06	-1,11	Accor	-52,93
Airbus	-1,53	-0,52	0,93	Airbus	-53,39
Alcatel	-1,15	-1,74	-1,47	Alcatel	-51,26
Air Liquide	-3,27	-1,51	2,08	Air Liquide	-60,49
AXA	-2,41	-2,05	0,72	AXA	-51,22
BNP	-2,48	-2,48	0,24	BNP	-53,9
Bouygues	-1,88	-1,88	0,44	Bouygues	-55,34
CA	-1,5	-1,49	-0,51	CA	-51,42
CARREFOUR	-1,87	-1,67	-0,03	CARREFOUR	-54,48
DANONE	-3,06	-2,19	1,34	DANONE	-56,78
ESSILOR	-2,32	-0,45	2,38	ESSILOR	-57,77
GDF	-3,09	-3,02	0,33	GDF	-54,64
Gemini	-1,58	-0,81	1,4	Gemini	-53,5
St Gobain	-2,36	-2,36	0,03	St Gobain	-54,64
LVMH	-1,96	-0,65	1,73	LVMH	-59,99
Michelin	-2,54	-1,41	1,1	Michelin	-55,7
L'Oréal	-2,46	-1,57	0,69	L'Oréal	-52,28
Orange	-1,42	-1,38	0,32	Orange	-54,42
PSA	-1,36	-1,46	-0,59	PSA	-49,27
Publicis	-1,97	-0,7	1,26	Publicis	-54,03
Renault	-1,27	-1,25	0,3	Renault	-49,21
Ricard	-2,64	-1,48	1,43	Ricard	-55,28
Schneider	-2,53	-1,91	1,19	Schneider	-57,69
SG	-1,72	-1,49	-0,33	SG	-48,76
Sodexo	-3,19	-1,6	2,04	Sodexo	-54,67
Technip	-1,89	-2,04	0,24	Technip	-53,73
Total	-3,31	-2,77	0,78	Total	-55,66
Veolia	-1,1	-1,14	0,04	Veolia	-510257
Vinci	-2,59	-1,99	1,48	Vinci	-56,9
Vivendi	-2,17	-1,86	0,56	Vivendi	-56,31

Valeurs	Critiques
1%	-3,96
5%	-3,41
10%	-3,13

Pour les tests sur les primes de risque, les statistiques pour les modèles 2 et 1 sont quasiment similaires à celles du modèle 3.

Al.3 : Moyennes et Ecart-Types des Primes de risque

Primes	Moyennes	Test de Nullité	Ecart-Types	Skewness	Kurtosis
CAC	-0,0000494	0,19	0,0143	0,02	9,55
Oil	0,0000309	0,07	0,0232	-0,01	8,44
Gold	0,000392	1,78	0,0118	-0,47	8,27
Accor	0,000355	0,93	0,0205	0,17	7
Airbus	0,000316	0,74	0,0228	-0,95	16,65
Alcatel	-0,000506	0,88	0,0307	-0,26	9,46
Air Liquide	0,000368	1,34	0,0147	0,04	7,34
AXA	0,000351	0,72	0,026	0,45	12,15
BNP	0,0000518	0,11	0,0254	0,27	11,53
Bouygues	0,000105	0,26	0,0212	0,31	10,41
CA	-0,000212	0,41	0,0275	0,21	9,03
DANONE	0,000245	0,9	0,0145	-0,05	7,18
CARREFOUR	-0,0000784	0,23	0,0185	-0,06	6,34
ESSILOR	0,000466	1,84	0,0136	0,36	9,08
GDF	0,0000471	0,13	0,019	1,12	23,11
Gemini	0,000425	1,07	0,0212	0,02	6,65
St Gobain	-0,0000298	0,07	0,0234	0,04	9,52
L'Oréal	0,00031	1,12	0,0148	0,23	8,75
LVMH	0,000298	0,89	0,018	0,09	8,53
Orange	-0,0000008	0	0,0158	0,28	6,68
Michelin	0,000228	0,56	0,0219	-0,1	6,59
PSA	-0,000269	0,54	0,0267	-0,02	5,42
Publicis	0,000271	0,92	0,0157	0,01	6,39
Renault	0,000123	0,25	0,0261	-0,16	7,44
Ricard	0,000293	0,95	0,0165	-0,33	12,43
Schneider	0,000351	0,88	0,0214	0,09	7,92
SG	-0,000179	0,34	0,0281	-0,07	9,04
Sodexo	0,00047	1,65	0,0152	-0,11	8,88
Technip	0,0000608	0,14	0,024	-0,34	8,17
Total	0,000137	0,45	0,0162	0,17	10,01
Veolia	-0,0000174	0,04	0,0209	-0,79	17,07
Vinci	0,000379	1,05	0,0194	0,27	10,59
Vivendi	0,0000598	0,21	0,0155	0,07	7,5

Tableau A2 : Analyse de la Multicolinéarité

A2.1 Matrice des corrélations

Matrice Corrélation	CAC	Oil	Gold
CAC	1	0,15	0,28
Oil	0,15	1	-0,07
Gold	0,28	-0,07	1

A2.2 Variance Inflation Factors (ViF)

ViF		
CAC	Oil	Gold
1,099	1,12	1,038

Tableau A3 : Estimation du MEDAF-EGARCH

	MEDAF-EGARCH	β_m	t-stat	R2	LB	ARCH	JB
$\beta_m < 1$	Essilor	0,525	33,527	0.31	2.02	3.59	16301
	Sodexo	0,559	38,830	0.35	0.41	0.72	9359
	Ricard	0,627	35,094	0.355	5.79	0.386	9427
	Danone	0,697	49,456	0.41	4.11	2.26	4732
	Publicis	0,7	43,134	0.43	6	0.76	2019
	Orange	0,722	51,499	0.43	2.27	0.46	4566
	L'Oréal	0,755	55,404	0.486	1.34	2.04	4675
	Vivendi	0,788	57,146	0.52	1.51	0.16	7736
	Veolia	0,838	41,000	0.39	0.24	1.35	152130
	Air Liquide	0,851	65,115	0.65	2.9	0.21	7518
	Carrefour	0,866	49,282	0.48	1.32	1.14	3813
	Total	0,887	73,458	0.67	2.47	0.68	2273
	GDF	0,942	62,613	0.49	11.6	0.33	148170
	Airbus	0,945	42,384	0.35	3.94	0.17	105930
Accor	0,954	41,580	0.48	1.4	1.07	5617	
$\beta_m = 1$	Technip	0,991	35,798	0.39	3.22	1.22	6331
	Bouygues	0,994	51,512	0.5	0.24	0.84	17744
	Gemini	0,996	46,108	0.484	2.27	0.35	2782
	Michelin	1,017	44,993	0.49	4.46	2.41	3560
$\beta_m > 1$	LVMH	1,028	72,783	0.62	1.79	0.31	10806
	Vinci	1,062	72,543	0.67	1.12	0.875	5150
	Alcatel	1,131	37,546	0.32	0.846	1.56	14264
	PSA	1,135	46,521	0.39	3.63	0.07	1539
	Schneider	1,192	70,704	0.68	9.93	2.533	1063
	St-Gobain	1,25	64,465	0.67	2.04	0.23	15825
	Renault	1,268	54,896	0.55	1.16	2.05	2262
	AXA	1,288	70,891	0.67	4.38	0.013	43151
	BNP	1,289	77,316	0.61	2.94	0.96	40217
	SG	1,305	62,943	0.56	5.07	4.53	10525
	CA	1,351	37,302	0.56	2.62	1.58	7842

Tableau A5– Correspondances en jour et en mois des bandes de fréquences

Résolution J	Horizons en Jours	
	bornes inf	bornes sup
D1	2	4
D2	4	8
D3	8	16
D4	16	32
D5	32	64
D6	64	128
D7	128	256
D8	256	512
D9	512	1024
D10	1024	2048
D11	2048	4096
S11	4096	-

Tableau A6: Estimation du Multi-Beta-AR-EGARCH Fréquentiel

β_m = Béta du Marché β_o = Béta du Pétrole β_g = Béta de l'Or

Actions	Bandes	β_m	t-Stat	β_o	t-Stat	β_g	t-Stat	R2	JB	LB	ARCH
ACCOR	D1	0,922	53,568	-0,0131	-1,3	0,0019	0,099	0,64	2204	720,423	5,574
	D2	0,984	50,781	-0,0235	-2,493	0,0017	0,521	0,565	1296	1316,592	12,735
	D3	1,033	65,3	-0,027	-2,944	0,0217	1,151	0,828	312	1813,83	291,959
	D4	1,021	58,074	0,0051	0,554	-0,0123	-0,791	0,943	403	1991,38	0,644
	D5	1,06	102,876	-0,0786	-15,065	0,0876	10,301	0,985	54	3550,87	9,751
	D6	0,922	179,691	0,077	29,068	0,1309	21,159	0,997	133	5414,858	10,955
AIRBUS	D1	0,921	34,132	0,0096	0,533	0,0053	0,25	0,592	15604	685,551	3,232
	D2	0,988	317,141	0,0209	0,309	0,0246	0,29	0,423	10082	1344,368	25,083
	D3	1,052	48,233	0,0339	2,911	0,0718	5,568	0,766	3670	1950,566	361,547
	D4	0,938	59,123	0,0477	4,836	0,0081	0,358	0,93	1814	1940,658	0,376
	D5	1,127	74,908	-0,0123	-2,129	0,0405	4,801	0,983	98	3427,716	17,265
	D6	1,057	100,269	-0,0559	-12,332	-0,2061	-23,259	0,995	1244	5139,662	1,388
ALCATEL	D1	1,13	15,55	-0,006	-0,429	-0,0745	-2,665	0,55	4055	676,418	9,678
	D2	1,162	131,953	-0,0182	-0,827	-0,0307	-0,455	0,407	2053	1239,125	14,845
	D3	1,212	40,039	0,0015	0,097	-0,0645	-2,15	0,766	823	1916,485	227,714
	D4	1,195	72,691	-0,045	-6,653	-0,1012	-6,578	0,928	229	1983,44	6,144
	D5	1,608	87,96	0,0603	9,718	-0,1421	-7,578	0,983	77	3739,435	9,791
	D6	1,056	77,267	0,0952	11,826	-0,4725	-43,9	0,996	110	4906,294	12,773
Air	D1	0,879	77,935	-0,0047	-0,597	0,0467	3,601	0,785	3658	754,676	2,569
	D2	0,838	75,114	-0,007	-1,911	0,0214	2,494	0,685	1151	1322,802	18,965
Liquide	D3	0,866	67,361	-0,0124	-1,657	0,0542	3,986	0,859	774	1827,23	356,415
	D4	0,873	85,264	0,0163	4,512	-0,0154	-1,839	0,955	5918	1962,898	15,448
	D5	0,823	63,518	0,0013	0,195	0,0123	0,928	0,989	1156	3476,632	19,158
	D6	0,735	151,265	0,0731	22,043	-0,0002	-0,056	0,996	90	5375,606	46,855
AXA	D1	1,302	92,734	-0,0154	-2,122	-0,0712	-5,291	0,774	18964	687,71	6,967
	D2	1,359	73,298	-0,0217	-2,53	-0,1259	-7,542	0,722	14559	1229,758	19,739
	D3	1,401	81,679	-0,0196	-3,315	-0,0839	-5,976	0,867	5239	1949,991	306,684
	D4	1,415	88,816	-0,0271	-5,592	-0,1252	-7,886	0,967	2520	2104,741	10,316
	D5	1,184	97,609	-0,0405	-15,744	-0,1378	-12,881	0,987	10038	3495,235	6,593
	D6	1,35	203,93	-0,2821	-92,108	-0,3023	-53,248	0,998	3249	4671,677	10,535
BNP	D1	1,287	71,344	-0,0074	-0,978	-0,0786	-5,334	0,767	10672	682,734	15,477
	D2	1,316	84,514	-0,0026	-1,061	-0,1227	-7,886	0,653	12603	1304,48	18,303
	D3	1,331	71,332	-0,0655	-8,661	-0,0424	-1,315	0,851	12069	1916,993	235,842
	D4	1,332	83,583	-0,0739	-11,28	-0,1264	-9,242	0,957	11237	2007,968	0,508
	D5	1,18	121,582	-0,0536	-11,056	-0,0681	-10,048	0,982	7760	3282,641	2,759
	D6	1,235	143,006	-0,1418	-28,493	-0,1477	-41,589	0,996	25827	4609,296	0,004
Bouygues	D1	0,971	53,72	0,0221	2,435	0,0262	1,424	0,689	6075	714,38	3,226
	D2	0,95	41,002	0,0328	3,353	0,032	1,814	0,564	3648	1265,106	16,355
	D3	1,003	59,313	-0,0016	-0,153	0,0436	2,398	0,814	20125	1821,523	359,875
	D4	0,998	91,394	-0,0362	-6,964	0,0257	2,704	0,944	2357	1900,468	2,986
	D5	0,912	67,347	0,0249	3,418	-0,0555	-4,247	0,982	112	4102,425	8,078
	D6	0,932	140,057	-0,1614	-46,496	0,0633	7,727	0,996	31	5110,38	22,158

Actions	Bandes	β_m	t-Stat	β_o	t-Stat	β_g	t-Stat	R2	JB	LB	ARCH
CA	D1	1,274	44,119	0,0041	0,363	-0,1051	-5,129	0,698	3074	712,218	8,442
	D2	1,271	52,67	0,0145	1,336	-0,194	-8,933	0,607	7921	1340,081	26,383
	D3	1,378	70,074	0,0244	1,693	-0,1689	-8,915	0,842	6246	1886,868	232,375
	D4	1,467	117,298	-0,0932	-10,943	-0,058	-2,638	0,954	1299	1967,495	1,588
	D5	1,28	101,315	-0,1038	-15,193	-0,1333	-14,336	0,983	1990	3102,17	0,686
	D6	1,434	151,138	-0,1313	-17,748	0,0082	0,871	0,997	5665	4782,805	0,063
Carrefour	D1	0,897	63,492	0,0002	0,024	0,0141	0,912	0,673	1139	713,39	8,053
	D2	0,896	59,47	-0,0096	-2,177	-0,0112	-1,02	0,557	1207	1229,213	16,74
	D3	0,858	45,131	-0,0277	-5,541	-0,0178	-1,572	0,788	505	1920,435	307,689
	D4	0,943	51,338	0,0163	2,733	-0,0513	-4,142	0,944	951	2084,816	5,033
	D5	0,966	97,56	-0,099	-18,71	0,0533	3,854	0,984	119	3567,823	8,862
	D6	0,917	228,951	-0,0716	-20,656	0,1206	26,796	0,995	6	5442,434	46,885
Danone	D1	0,737	61,417	-0,0082	-1,665	-0,0018	-0,577	0,637	2964	765,416	23,292
	D2	0,709	58,165	-0,0014	-0,471	0,0039	0,54	0,492	2952	1280,469	22,841
	D3	0,674	61,165	-0,0479	-6,423	0,0313	2,189	0,742	3969	1832,224	294,52
	D4	0,561	52,063	0,0007	0,074	0,0195	1,289	0,918	186	2076,038	16,175
	D5	0,696	97,018	0,0014	0,671	-0,0241	-4,306	0,978	440	3740,374	8,759
	D6	0,725	169,421	0,0921	24,367	-0,0014	-0,917	0,997	2	4852,443	25,67
Essilor	D1	0,546	36,593	-0,0134	-1,794	-0,025	-1,762	0,575	3009	833,8	1,718
	D2	0,553	44,366	-0,0224	-3,815	0,0347	5,343	0,378	2017	1204,631	15,767
	D3	0,533	37,298	-0,0226	-3,211	0,0742	6,076	0,709	16012	1824,622	366,232
	D4	0,561	10,105	-0,0256	-0,689	-0,0029	-0,032	0,93	3151	2072,106	5,2
	D5	0,643	49,295	-0,0542	-13,963	0,0715	9,365	0,982	11167	3644,675	0,1
	D6	0,791	148,989	-0,0935	-30,069	0,1178	17,876	0,994	399	5445,626	2,35
GDF	D1	0,909	65,558	-0,0324	-4,463	-0,0049	-0,329	0,65	71465	735,042	4,969
	D2	0,913	58,982	-0,0319	-3,89	-0,0191	-1,141	0,549	25261	1251,034	17,128
	D3	0,983	72,713	-0,0313	-3,484	0,0022	0,149	0,791	2683	1831,72	301,399
	D4	1,017	48,169	-0,0369	-5,717	0,0449	1,863	0,944	3114	2007,483	4,381
	D5	0,898	99,075	-0,0614	-14,877	-0,0985	-8,745	0,983	763	3506,152	11,128
	D6	0,878	223,197	-0,1281	-15,478	-0,1865	-46,133	0,996	93	4680,596	21,709
Gemini	D1	1,002	33,979	-0,0136	-0,999	0,0138	0,615	0,652	745	739,851	7,738
	D2	1,025	58,859	-0,0387	-6,889	-0,0169	-1,17	0,559	778	1278,93	23,591
	D3	1,037	58,898	-0,0072	-0,855	-0,0437	-3,356	0,818	112	1840,925	319,023
	D4	1,037	52,898	-0,0812	-9,945	0,0731	5,776	0,944	213	1990,637	3,3
	D5	1,202	91,467	-0,0961	-9,763	0,0356	1,703	0,985	516	3346,097	7,629
	D6	1,247	180,589	-0,0754	-20,896	-0,1584	-35,876	0,997	274	5026,435	1,805
Saint Gobain	D1	1,248	81,412	-0,0056	-1,54	-0,0072	-1,087	0,788	3975	717,355	6,754
	D2	1,256	75,235	-0,025	-3,345	-0,0013	-0,075	0,728	2835	1192,911	19,451
	D3	1,299	96,76	-0,032	-3,99	-0,012	-1,286	0,87	10593	1933,088	336,118
	D4	1,247	43,44	-0,008	-1,414	-0,05	-6,234	0,965	20313	1823,361	2,7
	D5	1,42	46,91	-0,0242	-2,973	-0,0714	-5,877	0,99	1591	3779,978	17,416
	D6	1,321	139,715	-0,0847	-19,028	-0,0434	-15,043	0,998	1704	4978,199	10,059

Actions	Bandes	β_m	t-Stat	β_o	t-Stat	β_g	t-Stat	R2	JB	LB	ARCH
L'Oréal	D1	0,806	49,172	-0,0242	-5,081	0,0172	1,998	0,68	2875	721,902	4,962
	D2	0,796	80,283	-0,0395	-3,776	0,0033	0,183	0,544	937	1276,811	11,204
	D3	0,704	46,502	-0,0353	-4,784	0,0113	0,704	0,79	177	1875,929	368,543
	D4	0,704	67,297	-0,0048	-1,343	-0,0038	-0,302	0,934	139	2062,251	8,404
	D5	0,698	5,612	-0,0596	-15,37	0,029	0,393	0,981	174	3779,932	17,939
	D6	0,623	138,419	0,0328	12,872	-0,0103	-2,478	0,997	74	4897,552	27,416
LVMH	D1	0,99	70,254	-0,0195	-1,85	0,0139	0,989	0,752	3855	738,863	5,546
	D2	1,058	75,921	-0,0259	-3,519	0,0236	1,723	0,681	1817	1277,3	11,425
	D3	1,017	79,718	0,0106	1,889	0,0004	0,24	0,875	432	1818,208	239,076
	D4	0,994	102,042	-0,0095	-1,347	0,0788	6,933	0,956	712	1946,948	2,814
	D5	1,17	111,387	-0,0659	-18,094	-0,0309	-6,721	0,988	1194	3673,455	28,345
	D6	0,852	151,765	0,1614	53,827	0,1628	41,282	0,997	63	4948,791	15,012
Michelin	D1	0,99	24,292	-0,0326	-1,821	0,0364	1,913	0,643	1553	805,246	9,807
	D2	1,061	61,831	-0,0275	-2,153	-0,0092	-0,439	0,558	1522	1254,669	20,26
	D3	1,108	63,356	-0,0162	-1,465	-0,0235	-1,19	0,831	654	1902,326	268,755
	D4	1,137	88,262	-0,0653	-12,329	0,0353	2,835	0,938	2541	1861,805	2,606
	D5	1,049	113,278	-0,0436	-13,227	0,0897	9,103	0,983	30	3545,693	14,065
	D6	0,78	46,648	0,1171	16,409	0,1776	12,621	0,996	1463	4783,524	2,389
Orange	D1	0,803	66,52	-0,0171	-3,975	-0,0442	-3,074	0,657	984	642,411	3,546
	D2	0,772	96,492	-0,0205	-2,228	-0,0177	-0,548	0,498	522	1303,186	17,907
	D3	0,75	48,777	-0,0255	-4,569	-0,022	-2,686	0,758	543	2005,264	299,768
	D4	0,689	58,285	-0,0642	-8,598	-0,0096	-0,431	0,926	353	1997,156	1,108
	D5	0,746	91,543	-0,0232	-7,063	0,0573	10,542	0,978	417	3398,805	2,83
	D6	0,734	4,885	-0,0513	-0,892	0,0961	0,624	0,994	49685	4644,284	0,027
PSA	D1	1,11	49,5	-0,0321	-3,072	-0,0756	-3,311	0,577	699	749,887	11,407
	D2	1,212	59,276	-0,0516	-4,214	-0,016	-0,634	0,487	1061	1233,383	11,813
	D3	1,243	59,351	-0,0338	-3,108	0,0151	0,721	0,796	860	1868,307	262,055
	D4	1,219	64,159	-0,0434	-4,992	-0,0142	-1,195	0,935	362	2079,779	0,835
	D5	1,344	97,359	-0,0618	-17,868	0,1681	4,455	0,982	305	3747,039	3,86
	D6	1,191	160,654	0,0318	14,274	-0,224	-38,913	0,995	1043	4734,492	0,6
Publicis	D1	0,694	42,273	-0,0194	-2,112	0,0327	2,76	0,596	1224	757,493	6,301
	D2	0,707	45,385	-0,0137	-1,504	0,027	1,614	0,493	473	1287,14	7,925
	D3	0,741	46,288	0,0172	1,716	0,0019	0,113	0,808	109	1795,001	384,774
	D4	0,817	59,203	0,0171	2,533	0,0149	0,84	0,943	2051	1949,901	1,736
	D5	0,76	88,772	-0,0495	-9,643	0,0015	0,126	0,983	7950	3447,421	0,471
	D6	0,824	86,228	0,026	6,827	-0,0232	-4,281	0,996	157	5151,618	7,091
Renault	D1	1,238	56,505	-0,0477	-5,216	-0,0317	-1,382	0,681	897	755,725	20,346
	D2	1,302	53,378	-0,0409	-4,056	0,0003	0,012	0,61	1495	1341,472	18,856
	D3	1,335	65,015	0,004	0,33	0,0424	2,124	0,855	552	1802,368	346,576
	D4	1,363	4,817	-0,01	-0,148	0,0369	0,544	0,953	528	2035,71	4,813
	D5	1,425	85,697	-0,0958	-18	0,073	7,306	0,986	127	3772,753	7,318
	D6	1,796	46,037	0,0135	1,516	0,0904	15,57	0,998	1839	5054,13	8,789
Ricard	D1	0,61	39,674	-0,0277	-4,981	0,0338	2,379	0,578	3633	720,146	6,28
	D2	0,627	42,105	-0,0236	-5,819	0,0275	3,95	0,441	2238	1295,382	21,609
	D3	0,611	48,038	-0,0163	-2,576	0,113	9,528	0,762	7591	1798,997	306,814
	D4	0,692	65,392	0,0058	1,141	0,0364	2,499	0,925	2444	1867,326	0,227
	D5	0,668	73,462	0,0274	4,784	-0,0382	-2,71	0,981	499	3521,147	13,891
	D6	0,861	163,407	-0,0445	-18,583	0,0947	27,602	0,997	5425	4551,731	0,741

Actions	Bandes	β_m	t-Stat	β_o	t-Stat	β_g	t-Stat	R2	JB	LB	ARCH
Schneider	D1	1,25	78,748	-0,0119	-1,261	-0,0141	-0,451	0,804	298	751,308	6,225
	D2	1,214	62,874	-0,002	-0,408	-0,015	-1,054	0,717	350	1299,377	14,378
	D3	1,183	112,767	-0,0252	-1,861	0,0227	0,733	0,863	485	1939,112	381,906
	D4	1,216	68,8	-0,0015	-0,159	0,0745	8,035	0,966	96	2017,251	12,497
	D5	1,241	142,445	-0,0518	-7,797	0,0532	5,872	0,989	24	3584,71	5,187
	D6	1,121	143,908	-0,1078	-21,842	0,0962	20,502	0,997	12	5337,106	19,574
Société Générale	D1	1,299	65,073	-0,001	-0,085	-0,0728	-4,716	0,691	12655	713,99	6,397
	D2	1,372	65,863	-0,0311	-5,715	-0,1159	-7,495	0,585	15743	1254,541	14,104
	D3	1,316	69,691	-0,0261	-3,157	-0,1266	-6,782	0,833	8311	1965,056	264,734
	D4	1,427	81,925	-0,0399	-4,734	-0,2014	-14,498	0,951	4963	2004,685	6,148
	D5	1,522	122,87	-0,1777	-28,857	-0,1438	-10,264	0,986	1904	3037,177	5,423
	D6	1,603	178,765	-0,1447	-31,842	-0,1056	-7,988	0,998	4839	4808,233	0,031
Sodexo	D1	0,591	38,955	-0,026	-3,343	-0,0041	-0,59	0,564	2380	717,009	7,007
	D2	0,624	46,632	-0,0261	-3,033	0,016	0,782	0,461	1592	1237,021	9,203
	D3	0,518	29,946	0,0015	0,856	0,0028	0,822	0,756	637	1844,456	298,796
	D4	0,602	46,281	-0,0225	-8,268	0,1157	11,177	0,93	257	2136,183	4,415
	D5	0,622	71,037	-0,0089	-2,043	0,1273	15,91	0,98	221	3514,833	18,342
	D6	0,689	74,584	0,0158	8,174	0,1747	25,146	0,995	16	4915,132	16,46
Technip	D1	0,893	36,736	0,1112	8,041	0,1011	4,313	0,614	2414	756,339	4,167
	D2	0,917	40,842	0,1545	11,967	0,0848	4,49	0,494	1022	1275,475	20,702
	D3	0,982	40,088	0,1983	15,557	0,0419	2,407	0,795	2157	1903,7	394,174
	D4	1,032	57,138	0,1747	14,672	0,2132	6,624	0,944	54	2094,344	6,915
	D5	0,825	41,628	0,2057	26,016	0,2193	12,162	0,982	114	3463,723	3,564
	D6	0,795	93,768	0,3087	39,955	0,0275	5,944	0,996	3240	4875,62	0,832
Total	D1	0,873	62,711	0,0614	9,36	0,0649	4,275	0,802	2401	767,264	13,434
	D2	0,852	73,628	0,0851	13,567	0,0649	5,584	0,729	1314	1275,056	14,515
	D3	0,794	75,237	0,1246	21,436	0,0334	2,551	0,88	348	1908,366	334,542
	D4	0,89	65,314	0,1159	14,129	0,1264	9,641	0,964	2681	1932,746	1,687
	D5	0,926	110,936	0,1224	26,215	0,0312	7,279	0,991	118	3410,849	8,209
	D6	0,95	110,29	0,1425	45,248	0,1957	40,782	0,998	75745	4211,004	0,003
Veolia	D1	0,8	51,954	-0,0034	-0,381	-0,0169	-2,083	0,601	19209	712,128	3,719
	D2	0,863	46,134	-0,0316	-3,047	0,0247	1,487	0,448	8043	1230,49	16,82
	D3	1,01	72,509	-0,0391	-6,752	-0,0676	-5,585	0,786	10245	1806,172	279,243
	D4	1,013	66,798	-0,05	-5,947	-0,0053	-0,325	0,942	2550	2044,105	3,863
	D5	1,039	68,723	-0,0509	-8,522	0,0534	4,281	0,982	1380	3352,049	9,374
	D6	1,072	143,174	-0,1706	-46,97	0,0075	1,052	0,997	476	4518,798	1,925
Vinci	D1	1,053	76,824	0,0031	0,997	0,0068	1,386	0,795	2187	745,545	9,871
	D2	1,041	91,259	0,0224	4,651	0,0152	2,504	0,724	3144	1227,291	10,726
	D3	1,108	85,355	0,0031	0,395	0,0158	1,103	0,871	2623	1899,902	459,31
	D4	1,096	91,975	-0,0234	-5,028	0,0439	3,879	0,958	359	2109,606	1,025
	D5	1,045	121,723	-0,0222	-5,911	-0,0666	-8,804	0,985	182	3692,986	16,208
	D6	0,987	167,461	-0,0105	-2,136	-0,0166	-2,887	0,998	129	5239,722	25,223
Vivendi	D1	0,835	65,841	-0,0107	-2,41	0,0053	1,124	0,705	1484	744,222	8,912
	D2	0,804	51,11	-0,0283	-3,634	0,0082	0,561	0,584	751	1296,013	21,059
	D3	0,768	52,12	-0,0347	-5,687	0,0325	2,108	0,805	661	1984,072	404,616
	D4	0,777	85,901	-0,0183	-4,74	-0,0528	-4,837	0,945	219	1934,851	7,703
	D5	0,84	118,075	-0,0243	-7,507	-0,0987	-17,753	0,983	249	3433,533	7,929
	D6	0,814	126,653	-0,1442	-61,332	-0,004	-0,65	0,996	180	5393,483	0,917

Bibliographie

1. Arfaoui M, Ben Rejeb A, (2017). Oil, gold, US dollar and stock market interdependencies: a global analytical insight, *European Journal of Management and Business Economics*, Vol. 26 Issue:3, pp.278-293, <https://doi.org/10.1108/EJMBE-10-2017-016>.
2. Bantz, R., (1981). The relationship between return and market value of common stocks, *Journal of financial economics*, Vol. 9 issue 1, (March 1981) pp 3-18.
3. Basher, S.A. and Sadorsky, P., (2006). Oil price risk and emerging stock markets. *Global Finance Journal*, 17(2): 224-251.
4. Basu, S., (1983). The relationship between earnings yield, market value and return for NYSE common stocks: Further evidence. *Journal of Financial Economics*, 12(1): 129-156.
5. Baur, D. G. and Lucey, B., (2010). Is Gold a Hedge or a Safe Haven? An Analysis of Stocks, Bonds and Gold. *The Financial Review*, 45(2), 217-229.
6. Baur, D. G. & McDermott, T. K., (2010). Is gold a safe haven? International evidence. *Journal of Banking & Finance*, 34, 1886-1898.
7. Baur, D. G. & McDermott, T. K. J., (2016). Why is gold a safe haven? *Journal of Behavioral and Experimental Finance*, 10, 63-71.
8. Bera, A., Bubnys, E. and Park, H. (1988). Conditional heteroscedasticity in the market model and efficient estimates of betas. *The Financial Review*, Vol. 23, No. 2, p. 201–214.
9. Bendod, A., Chikhi, M. and Bennaceur, F. (2017). Testing the CAPM-GARCH MODELS in the GCC-wide Equity sectors, *Asian Journal of Economic Modelling*, Vol 5, No. 4, pp 413-430.
10. Black F., Jensen, M., and Scholes M., (1972), *The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Test; Studies in the Theory of Capital Markets* edited by M. Jensen New York: Praeger Publishers.
11. Bollerslev, T., Engle, R. and Wooldridge, H., (1988) A Capital asset pricing model with time-varying covariance, *Journal of political economic* vol 96 (1), pp 116-131.
12. Bollerslev, T., (1986), Generalized Autoregressive Conditionnal Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, vol 31, pp 307-327.

13. Boyer, M.M. and D. Filion, (2007). Common and fundamental factors in stock returns of Canadian oil and gas companies. *Energy Economics*, 29(3): 428-453.
14. Chen, N.F., Roll R. and Ross, S.A., (1986). Economic forces and the stock market. *Journal of Business*, 59(3): 383-403.
15. Chua, J. H., Sick, G. & Woodward, R.S., (1990). Diversifying with gold stocks. *Financial Analysts Journal*, 46, 76-79.
16. Corhay, A. – Rad, A. (1996). Conditional heteroscedasticity adjusted market model and an event study. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, Vol. 36. No. 4, p. 529–538.
17. Diebold, F., Jang I. and Jevons L., (1988). Conditional Heteroskedasticity in the Market, *Finance and Economics Discussion Series*, 42, Division of Research and Statistics, Federal Reserve Board, Washington D.C.
18. Engle, R., (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK inflation, *Econometrica*, 50: 987-1008.
19. Fama, E.,(1968). Risk, Return and Equilibrium: Some Clarifying Comments; *Journal of Finance* 23 (1) :29–40.
20. Fama, E. (1996) Multifactor Portfolio Efficiency and Multifactor Asset Pricing, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 31 (4) ; 441-465.
21. E. Fama and MacBeth J. (1973), Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests; 81 (3) 607–636.
22. Fama, E. and French, K. (1992) Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds, *Journal of Financial Economics* 33(1), ;3-56;
23. Fama, E. and French, K.R. (1996) The CAPM is wanted, dead or alive. *Journal of Finance*, 51(5): 1947–1958.
24. Fisher, T.J. and Gallagher, C., (2012). New weighted portmanteau statistics for time series goodness of fit testing. *Journal of the American Statistical Association*, 107(498) : 777-787.
25. Gençay, R., Selçuk F. and Whitcher, B. (2005). Systematic Risk and Timescales, *Quantitative Finance*, 3 (2): 108-116.
26. Ghalanos, A., and Theussl. S., (2011) *Rsolnp: General non-linear optimization using augmented Lagrange multiplier method.*, 1.11 edition.

27. Giaccoto, C. and Ali, M.M., (1982). Optimal Distribution Free Tests and Further Evidence of Heteroskedasticity in the Market Model, *Journal of Finance*, 37: 1247-1257.
28. He Z., O'Connor F. and Thijssen J., (2018) Is Gold a sometime Safe Haven or an Always Hedge for Equity Investor ? A Markov Switching CAPM Approach for US and UK Stocks Indices, *International Review of Financial Analysis*, 60 pp 30-37.
29. Huang, R.D., Masulis, R.W. , and Stoll, H.R. , (1996). Energy shocks and financial markets. *Journal of Futures Markets*, 16(1): 1–27.
30. Hussain Shahzad S.J., Raza N, Shahbaz M and Ali A., (2017), Dependence of stock market with gold and bonds under bullish and bearish Market States *Resources Policy*, vol. 52, issue C, 308-319
31. Johnson M. and Lamdin D. (2015) New Evidence on whether Gold Mining Stock are more like Gold or like Stocks, *Alternative Investment Analyst Review*, 5(2) pp 31-38.
32. Jones, D.W., Leiby P. and Paik I., (2004) Oil Price Shocks and the Macroeconomy: What Has Been Learned Since 1996, *The Energy Journal*, 25(2) 1-32.
33. Lee, C.C. and Zeng, J.H., (2011). The impact of oil price shocks on stock market activities: Asymmetric effect with quantile regression. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(7): 1910-1920.
34. Lintner, J., (1965) The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets; *Review of Economics and Statistics*. 47 (1) : 13–37.
35. Lintner, J., (1981) Some new perspectives on tests of CAPM and other capital asset pricing models and issues of market efficiency ; edited by Harvard Institute of Economic Research, discussion paper.
36. Nelson, D., (1991) Conditional Heteroskedasticity in Asset Return A new Approach, *Econometrica* Vol 59 (2) :347-370.
37. Mallat, S., (1989), A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation; *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 11 (7).
38. Mallat, S., (2001), Une exploration des signaux en ondelettes, *Ecole polytechnique*.
39. Mallat, S., (2009), *Wavelet tour of signal processing: the sparse way*, Academic Press.
40. Markowitz, H., (1952) Portfolio Selection, *Journal of Finance*, 7 (1) : 77-91.

41. Merton, R.C., (1973) Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1): 141-183
42. Mishra, P.K., Das, J.R. and Mishra, S.K. , (2010). Gold price volatility and stock market returns in India. *American Journal of Scientific Research*, 9: 49-55.
43. Mestre, R. and Terraza, M. (2018) Time-Frequency analysis of the CAPM – Application to the CAC 40- , *Managing global transitions journal*, Vol.16 (2) 2018, pp-141-157.
44. Mestre, R. and Terraza, M. (2018) Adjusted Beta based on an empirical comparison of OLS CAPM and the CAPM with EGARCH errors, proposed at *International Journal of Finance and Economics*.
45. Morelli, D., (2003) Capital Asset Pricing Models on UK Securities using ARCH. *Applied Financial Economics*, 13 (3). pp. 211-223. ISSN 0960-3107.
46. Meyer, Y., (1990), *Ondelettes et algorithmes concurrents*, Actuelles mathématiques Hermans éditions des sciences et des arts xii p.217-381, 1990.
47. Mossin, J. (1966) Equilibrium in a Capital Asset Market; *Econometrica* Vol. 34, pp. 768–783.
48. Miyazaki, T., Toyoshima, Y. and Hamori,S., (2012). Exploring the dynamic interdependence between gold and other financial markets, *Economics Bulletin, AccessEcon*, vol. 32(1), pages 37-50
49. Ross, S. (1976) The arbitrage theory of capital pricing, *Journal of Economic Theory* 13, 341-360.
50. Schwert G. Seguin, P. (1990): Heteroscedasticity in stock returns. *The Journal of Finance*, Vol. 45, No. 4, :1129–1155.
51. Sharpe, W., (1964) Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under risk ; *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3: 425-442.
52. Sumner, S., Johnson, R., and Soenen, L., (2010). Spillover effects between gold, stocks, and bonds. *Journal of Centrum Cathedra*, 3(2): 106-120.
53. Tufano, P., (1998). The determinants of stock price exposure: Financial engineering and the gold mining industry. *Journal of Finance* 53(3), 1015-1052.
54. Ye, Y., (1997), *Interior point algorithms: Theory and analysis*, Wiley.

Les résultats du MEDAF peuvent donc être améliorés en considérant des variables supplémentaires. Les Modèles Multi-Betas autorisent ainsi d'autres sources de risque pour expliquer les fluctuations des actions. Il apparaît aussi que les paramètres de régressions sont différents selon les bandes de fréquences que l'on soit dans le cas d'une régression simple ou multiple.

L'utilisation des ondelettes continues, et de leurs outils multivariés comme la cohérence et la phase, peut améliorer la portée des résultats précédents en indiquant à chaque instant t du temps et pour chacune des fréquences le poids du risque systématique dans le risque total. Nous pouvons ainsi étudier la relation Action-Marché décrite par le MEDAF en analysant la dynamique tempo-fréquentielle de l'importance du risque systématique qui découle de la plus ou moins forte corrélation entre les deux variables. Il est aussi possible via la phase d'étudier l'unilatéralité de la Droite de Marché.

Section 2 : Estimation du Risque Systématique par les Ondelettes Continues

Cette section porte sur l'application des outils multivariés provenant des ondelettes continues. Nous employons, dans une première partie, la Cohérence et la Phase afin d'étudier la Relation Action-marché sous un nouvel angle. Nous développons par la suite, dans une dernière partie, une formule permettant l'estimation du Beta au cours du temps et des fréquences.

1.1. Analyse Multidimensionnelle Temps-Fréquence du MEDAF

Dans un souci d'efficacité, les gestionnaires de fonds doivent obtenir un niveau de rendements élevé avec un risque maîtrisé. Ils peuvent pour cela recourir à la théorie du MEDAF de Sharpe (1964) qui fournit une mesure de risque (le Beta), correspondant à la sensibilité des rendements de l'action avec ceux du marché. La théorie du MEDAF indique que les rendements en excès du taux sans risque d'une action (ou prime de risque) sont déterminés par la prime de risque du marché. L'équation dérivée de cette théorie (la Droite de Marché des titres) s'écrit :

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (1)$$

Avec $r_{i,t}$ (la prime de risque de l'actif i) et $r_{m,t}$ celle du marché, $\varepsilon_{i,t}$ obéit à un processus *i.i.d* $(0, \sigma_\varepsilon)$.

Le risque systématique d'une action est mesuré par le β de la droite de marché. Une action aura un Beta d'autant plus élevé qu'elle est sensible à son marché. La valeur du Beta est relié à l'intensité de la relation (des liens) entre une action et son marché de référence. Le poids du risque systématique dans le risque total (donc le R^2) indique ainsi dans quelle proportion l'action est sujette aux variations du marché, on peut alors parler d'importance du risque systématique. Celle-ci est ainsi supposée constante au cours du temps comme le suggère la Droite de Marché et le MEDAF. Le β est un paramètre de régression qui est aussi, par

hypothèse, constant au cours du temps. Plusieurs études, comme celles de Bos et Newbold (1984) et de Groenwold et Fraser (1997), ont mis en évidence le phénomène d'instabilité du Beta et ont proposé des méthodes pour le modéliser. Ce constat implique alors que l'intensité de relation Action-Marché est variante au cours du temps, conduisant à un poids plus faible du risque systématique dans la variance totale. D'autres facteurs peuvent alors affecter l'action.

En raison des hypothèses du MEDAF sur l'homogénéité des agents, la relation est aussi supposée identique quel que soit l'horizon d'investissement. Il n'y a donc aucune distinction entre lien de court et de long-terme. Une action peut être, cependant, faiblement corrélée avec son marché à long-terme mais avoir un lien plus ténu à court-terme où des facteurs spécifiques entrent en jeu (ou inversement). Lorsque les agents sont informés sur la variabilité de la relation Action-Marché ils peuvent ajuster leurs positions de manière plus optimale en mesurant l'importance du risque systématique dans leur portefeuilles.

Pour analyser le phénomène d'instabilité de la relation Action-Marché qui entraîne une importance plus ou moins forte du risque systématique, nous recourons, dans cet article, à la technique des ondelettes pour calculer la cohérence entre deux séries. Cet instrument élaboré par Haar en 1909, popularisé par Morlet et Grossmann en 1984 (qui sont à l'origine du nom "d'ondelette") Meyer *and al* en 1986-1987. (Prix Abel en Mathématiques 2017) puis par Mallat (1989-2001-2009), dépasse les limites de l'analyse spectrale, en particulier son atemporalité, et permet de réduire l'arbitrage temps-fréquence.

En finance, les ondelettes occupent une place importante car elles sont devenues l'instrument par excellence permettant de prendre en compte l'hypothèse comportementale des agents. Les approches univariés des ondelettes ont trouvé des applications dans l'analyse de la volatilité des taux de change et dans la construction d'une VaR prenant en compte l'hétérogénéité des agents appelée WVaR (Wavelets Value-at-Risk). Les ondelettes discrètes ont été utilisées par Gençay et al (2003-2005) pour estimer le risque systématique des actions américaines et ils ont mis en évidence la possibilité d'estimer par fréquence le Beta d'une action. La volatilité du Beta dépend aussi de l'hypothèse de comportements hétérogènes des agents (Cf. Bibliographie 15).

Les prolongements multivariés basés sur les ondelettes continues permettent de définir la cohérence que l'on peut rapprocher de la corrélation par fréquence au cours du temps entre

deux signaux stationnaires. Les séries financières sont, en effet, rarement de variance constante au cours du temps et de ce fait l'analyse co-spectrale (Cf. Bibliographie [14]) n'est pas une méthode fiable. La cohérence, complétée par la phase, permet de tester la significativité des relations (des liens) entre les variables au cours du temps et d'appréhender leurs dépendances (les effets de contagion). Leur utilisation par Rua et Nunes (2009), pour analyser les co-mouvements entre les différents marchés internationaux, montre l'importance de recourir à ce type d'outils en finance. Auth (2013) utilise la cohérence en ondelettes continues afin d'appréhender les liens entre des portefeuilles Hedge Funds et d'autres actifs financiers. Il arrive ainsi à montrer les facteurs influençant la diversification de ces portefeuilles. Bekiros et al (2016) l'utilisent aussi pour étudier les relations de court et long entre les commodités et les actifs. Rua et Nunes (2012) se focalisent sur l'utilisation de la cohérence dans le cadre du MEDAF pour analyser les liens entre des indices de pays émergents et un indice de marché global. Ils mesurent ainsi l'importance du risque systématique au cours du temps et des fréquences pour divers pays, et montrent que la part du risque est relativement stable et forte à long-terme mais qu'à court terme elle est plus volatile.

L'objet de cet article est de montrer que l'association cohérence et de la phase d'ondelettes est un outil puissant de mesure du risque pour les investisseurs selon leurs horizons d'investissement qui redéfinit la notion de risque systématique. Pour cela nous l'appliquons aux cours boursiers des actions AXA, LVMH et Orange cotés sur le marché français (l'indice CAC40 servant de référence) pour la période journalière 2005 à 2015. Le choix des actions se justifie par la valeur différente de leurs Betas respectifs (estimés par les MCO) de 1.51 pour AXA, 1 pour LVMH et 0.72 pour Orange. En partant du postulat que le Beta du marché est égal à 1, nous disposons ainsi d'une action fortement sensible au marché qui "surréagit" aux signaux du marché (AXA), d'une action relativement peu sensible qui atténue les variations du marché (Orange) et d'un actif qui "suit" le marché (LVMH).

Nous présentons dans une première partie une synthèse de la méthodologie utilisée avant de l'appliquer aux données sélectionnées et de conclure sur les bénéfices de recourir à la technique de la cohérence-phase en ondelettes pour gérer des portefeuilles.

2.1.1 L'analyse temps-fréquence

2.1.1.1 Les ondelettes

Les ondelettes permettent d'améliorer l'interprétation de la cohérence au sens de Fourier où l'information temporelle d'une série est 'perdue' au profit de l'information fréquentielle. Un premier essai dans ce sens est dû à Gabor (1946) avec la transformation de Fourier à fenêtre (ou par morceaux) appelée Short-Time Fourier Transform (STFT) qui utilise une fenêtre de taille constante qui glisse (ou roule) le long de la chronique. Cette procédure permet de choisir son degré de résolution temporelle et fréquentielle, mais elle ne résout pas totalement l'arbitrage temps-fréquence. Le paramètre central est la taille de la fenêtre qui, si elle est élevée, concerne un nombre important de points et donc une localisation fréquentielle bonne (au détriment de la localisation temporelle). A l'inverse une fenêtre plus étroite améliore la résolution temporelle mais détériore la localisation fréquentielle. Ce constat est le dilemme purement Physique explicité par Heisenberg (avec le Principe d'incertitude éponyme): il est impossible de mesurer correctement et simultanément la position et la quantité de mouvement d'une particule. Dans notre cas ce principe empêche de trouver, de façon concomitante, la position temporelle et fréquentielle d'une variable. Les ondelettes sont limitées par ce principe mais elles "réduisent" l'effet d'arbitrage en permettant une analyse Temps-Fréquence simultanée.

Une ondelette, notée $\psi(t)$ (ou ondelette-mère), joue, en quelque sorte, le rôle de la fenêtre. Celle-ci est de moyenne nulle et préserve l'énergie/variance de la série de départ. La fonction $\psi(t)$ sera translatée par τ et dilatée par s pour extraire de la série des informations sur plusieurs niveaux de fréquences et à un moment précis du temps. L'information est concentrée dans la famille d'ondelette $\psi_{\tau,s}(t)$ qui rassemble toutes les versions translatées et dilatées de $\psi(t)$ (Cf. par exemple Mallat [11 ;12 ;13]).

Une ondelette se définit mathématiquement par l'équation suivante :

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right)$$

La transformation en ondelettes (ou décomposition en ondelettes) consiste à projeter la fonction $x(t)$ sur la famille d'ondelette. Elle indique comment l'ondelette-mère donne "naissance" aux ondelettes, et elle fournit aussi les coefficients d'ondelettes $W(s, \tau)$. Ceux-ci

reproduisent les variations de la série initiale au voisinage de $t \mp \tau$ de largeur fréquentielle s . En faisant varier τ et s on obtient, par conséquent, les variations temporelles de la série sur une échelle fréquentielle donnée, d'où le terme d'analyse temps-fréquence.

Formellement on a le résultat suivant :

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t - \tau}{s} \right) dt$$

Avec $\psi^* \left(\frac{t - \tau}{s} \right)$ le complexe conjugué de $\psi_{\tau,s}(t)$.

On peut reconstruire la série originelle par sa transformée inverse en ondelettes. Son expression mathématique fait apparaître la condition d'existence C_ψ des ondelettes.

$$x(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\tau,s}(t) W(s, \tau) \frac{d\tau ds}{s^2}$$

Elle garantit la nullité de la moyenne et la préservation de l'énergie lors de la décomposition si :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\Psi}(f)|^2}{f} df < +\infty$$

f la fréquence et $\widehat{\Psi}(f)$ la transformée de Fourier de l'ondelette-mère

Cette relation est respectée sous les contraintes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$$

La Transformation Continue en Ondelettes (CWT) nécessite pour son implémentation un grand nombre de calculs. Sa version discrète (ou Discrete Wavelet Transform) réduit le nombre de fréquences grâce à un pas de variation de τ et s moins important. La réduction de ce pas a pour objectif de construire un échantillonnage optimal en limitant les calculs.

Cette discrétisation impose l'utilisation d'une échelle dyadique (le nombre d'observations doit être un multiple de 2) et d'un filtre Passe-Haut et Passe-Bas, déterminant l'ordre de la décomposition J qui indique le nombre de bandes de fréquence nécessaire pour reconstruire la série. Dans ce cas $J = Ln\left(\frac{N}{2}\right)$ avec N étant le nombre d'observation de la série. Cette procédure porte le nom d'algorithme pyramidal (ou cascade) et a été construit par Mallat (on

l'appelle aussi algorithme de Mallat). Il existe une version de la DWT qui relâche la contrainte dyadique, appelée Maximal Overlap Discrete Wavelets Transform (ou MODWT). Pour un développement de ces méthodes les lecteurs peuvent se référer aux ouvrages de Mallat (11 ;12 ;13) et de Daubechies (4).

Les différentes décompositions se distinguent par la forme de l'ondelette-mère et de la famille qui en découle, définissant alors les caractéristiques du filtre d'ondelette. Chacune des familles d'ondelette possèdent des caractéristiques propres comme l'orthogonalité, la symétrie, la compacité de son support etc. La famille des ondelettes de Daubechies est la plus couramment utilisée avec celle de Morlet (ou mexican-hat wavelets). Au sein d'une même famille les ondelettes se différencient par le nombre de moments nuls qu'elles possèdent, ce qui lui donne son nom. Par exemple l'ondelette "D8" est une ondelette de la famille Daubechie avec 8 moments nuls, l'ondelette "La8" possède le même nombre de moments nuls mais elle n'appartient pas à la même famille car c'est une ondelette de Daubechie faiblement asymétrique (Least asymmetric). Des explications plus précises sur les propriétés des ondelettes sont données par Farge (1992) et par Daubechies (1992).

Nous appliquons, dans cet article, la transformation continue avec l'utilisation de l'ondelette de Morlet complexe qui possède de bonne capacité de localisation temporelle et fréquentielle. La CWT est, par ailleurs, bien adaptée pour obtenir un maillage fréquentiel fin (le pas fréquentiel). Son expression mathématique est la suivante :

$$\psi_M(t) = \pi^{-1/4} e^{if_0 t} e^{(-\frac{t^2}{2})} \quad (21)$$

Avec $i^2 = -1$ et f_0 la fréquence non-dimensionnelle qui dans notre cas est égale à 6 afin de satisfaire la condition d'admissibilité.

Les logiciels de calculs réalisent, en pratique, un échantillonnage fréquentiel pour implémenter la CWT afin de définir le niveau de résolution de la transformation. Il s'agit d'un aspect pratique lié à la limite de la puissance des ordinateurs pour calculer une intégrale à l'infinie à partir de séries finies. En théorie, l'ordre de la décomposition découle uniquement du pas fréquentiel δ_j . Dans le cas continu, il peut être choisi arbitrairement (Farge (1992)) mais en pratique, l'ordre J dépend de la taille de l'échantillon N. Cet ordre est important pour définir la résolution graphique et diminuer le temps de calculs. Torrence et Compo (1998)

donnent la formule suivante qui permet de déterminer le niveau maximal d'échelle fréquentielle :

$$J = \frac{1}{\delta_j} \left[\text{Log}_2 \left(\frac{N\delta_t}{s_0} \right) \right] = \frac{1}{\delta_j} \left[\text{Log}_2 \left(\frac{N}{2} \right) \right]$$

Avec δ_j le pas fréquentiel, δ_t le pas temporel, et $s_0 = 2\delta_t$ la plus petite échelle. Il est commun d'utiliser une valeur de $\delta_j = 1/8$ car on obtient une bonne résolution fréquentielle et des temps de calculs raisonnables. Lau et Weng (1995) ont montré que l'ensemble des échelles découlant d'une décomposition d'ordre J sont définies par :

$$s_j = s_0 \cdot 2^{j\delta_j} \\ \forall j = 0, \dots, J$$

On notera que la valeur de s_j détermine, pour chaque échelle j , un horizon temporel (exprimé en unité de temps de la série d'origine).

2.1.1.2 La cohérence d'ondelettes

La cohérence d'ondelettes entre deux fonctions de même taille N , appelée parfois Time-Varying Coherence, est basée sur une transformation continue qui utilise l'ondelette de Morlet. Comme pour la cohérence de Fourier, on dispose d'une mesure de la covariance tempo-fréquentielle en ondelettes définie par la transformation croisée d'ondelettes notée $SW_{xy}(s, \tau)$:

$$SW_{xy}(s, \tau) = W_x(s, \tau)W_y^*(s, \tau)$$

Avec $x(t)$ et $y(t)$ les deux fonctions chronologiques, $W_x(s, \tau)$ les coefficients d'ondelettes issus de la transformation et $W_y^*(s, \tau)$ le complexe conjugué de $W_y(s, \tau)$.

On associe cette transformation croisée entre $x(t)$ et $y(t)$ avec les spectres de puissance de chacune des séries pour définir la cohérence en ondelettes notée $WQ(s, \tau)$:

$$WQ(s, \tau) = \frac{|G(s^{-1} \cdot SW_{xy}(s, \tau))|^2}{G(s^{-1} \cdot |W_x(s, \tau)|^2) \cdot G(s^{-1} \cdot |W_y(s, \tau)|^2)}$$

La formule de $WQ(s, \tau)$ est similaire à celle d'un coefficient de détermination. Pour chaque échelle fréquentielle s (définie par le pas fréquentiel) et à chaque instant du temps on dispose

d'un coefficient compris entre 0 et 1 traduisant la plus ou moins forte corrélation au carrée entre les séries donc le pouvoir explicatif de la variable $x(t)$ sur $y(t)$.

Les coefficients obtenus sont issus d'une décomposition par ondelettes de Morlet, ils sont donc complexes par nature. Par conséquent, la cohérence est égale à 1 quel que soit τ dans sa représentation réelle, ce qui nécessite de recourir à un lissage tempo-fréquentiel noté $G(\cdot)$ qui conduit aux valeurs réelles de la cohérence. Le lissage temporel pour une échelle fréquentielle donnée est noté $G_{time}(\cdot)$ et $G_{scale}(\cdot)$ correspond au lissage de l'échelle fréquentielle pour un instant t donné. L'opérateur de lissage complet $G(\cdot)$ s'écrit :

$$G(W(s, \tau)) = G_{scale}(G_{time}(W(s, \tau)))$$

Les expressions mathématiques de $G_{time}(\cdot)$ et $G_{scale}(\cdot)$ sont donnés par Torrence et Webster (1998):

$$G_{time}(\cdot) = W(s, \tau) c_1^{\frac{-t^2}{2s^2}}$$

$$G_{scale}(\cdot) = W(s, \tau) \cdot c_2 \Pi(0.6 s)$$

c_1 et c_2 sont des constantes de normalisation et $\Pi(\cdot)$ est la fonction rectangle ou indicatrice qui prend la valeur 1 dans un intervalle $[-0.5 ; 0.5]$ et 0 sinon.

Les ondelettes fournissent aussi une mesure de la phase entre les deux fonctions temporelles qui permet de savoir si leurs composantes fréquentielles sont positivement ou négativement corrélées et s'il existe des influences mutuelles. La fonction de phase d'ondelettes $\theta_{x,y}(s, \tau)$ s'exprime à partir du quotient entre la partie imaginaire \Im et réelle \Re de $SW_{xy}(s, \tau)$.

$$\theta_{x,y}(s, \tau) = \arctan\left(\frac{\Im(SW_{xy}(s, \tau))}{\Re(SW_{xy}(s, \tau))}\right)$$

Dans la pratique, on utilise x_t et y_t des échantillons de deux processus aléatoires avec des pas temporelles et fréquentiels définis par la CWT décrite précédemment.

2.1.2 Résultats et Discussions

Nous analysons, dans un premier temps, la relation Action-Marché dans le cadre du MEDAF par l'estimation des droites de marché. Nous calculons aussi la cohérence issue de l'analyse spectrale afin d'apprécier la corrélation dans le domaine des fréquences. Nous recourrons,

dans un deuxième temps, aux ondelettes pour calculer la cohérence et le phase avant de conclure.

2.1.2.1 La relation Action-Marché selon le MEDAF et l'approche fréquentielle.

Le MEDAF avec la droite de marché fournit une modélisation linéaire des liens entre une action et le marché et permet d'appréhender la sensibilité de l'action au marché ainsi que son pouvoir explicatif (importance du risque du risque systématique). Avant de l'estimer pour les trois actions, nous vérifions que les séries sont bien stationnaires (Annexe 1).

Les valeurs estimées, par la méthode des MCO, des Betas de la droite de marché, leurs coefficients de détermination associés ainsi que les tests usuels sur les résidus sont présentés dans le tableau 1 suivant :

Tableau 1 : Synthèse des résultats des estimations

Actions	Beta	t-Stat	R ²	LB	ARCH	JB
AXA	1,51	77,98	0,68	21,068	62,13	41993,2
LVMH	1	68,815	0,62	13,242	38,34	10867,6
ORANGE	0,73	46,39	0,43	17,703	37,81	4480,43

Pour un risque de 5%, Colonne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11,1$; Colonne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(2)=5,99$; Colonne JB (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$.

Les résidus sont hétéroscédastiques, autocorrélés et ne sont pas l'échantillon d'une Loi Normale. Par conséquent les Betas ne possèdent pas les propriétés requises pour être des estimateurs BLUE mais on les considère comme des références par la suite pour établir la classification des actions. AXA apparaît ainsi comme plus sensible au marché que LVMH et ORANGE d'après la valeur de leur Beta. L'importance risque systématique dans le risque totale, mesurée par le R², est plus élevée pour AXA qui est alors fortement reliée au CAC40. Le risque systématique pèse à hauteur de 68% de son risque total. ORANGE à l'opposé est moins corrélée au marché car celui-ci explique 43% des fluctuations de l'action.

Ces relations Action-Marché, étudiées par le Beta et l'intensité des R², sont supposées constantes dans le temps et unilatérales puisque d'après la théorie seul le Marché affecte l'action, l'effet inverse n'est pas considéré. Il n'y a, de plus, aucune distinction entre relations de court et de long terme, puisque l'importance du risque systématique est identique pour tous les agents.

Le recours aux transformations de Fourier permet le calcul de la Cohérence et de la Phase dans le domaine fréquentiel (Annexe 2). Le tableau 2 rassemble les résultats calculés dans le domaine des fréquences en fournissant la moyenne et l'écart-type de la cohérence ainsi que la moyenne des valeurs absolues (pour éviter les valeurs négatives) et l'écart-type de la phase.

Tableau 2 : Caractéristiques de la cohérence et de la phase de l'analyse co-spectrale

Actions	Cohérence Moyenne	Ecart-Type	Actions	Phase Moyenne	Ecart-Type
AXA	0,71	0,17	AXA	0,21	0,17
LVMH	0,65	0,18	LVMH	0,23	0,19
ORANGE	0,48	0,21	ORANGE	0,34	0,32

Les actions AXA et LVMH possèdent des cohérences moyennes plus fortes que celle d'Orange, ce qui est conforme aux valeurs trouvées pour le R^2 (du tableau 2). Par ailleurs, ORANGE possède une cohérence plus erratique que les deux autres actions (Cf. leurs écarts-types), traduisant une variabilité plus forte de son lien avec le marché au cours des fréquences. Ces résultats sont illustrés par les graphiques issus de l'analyse co-spectrale portés en Annexe 2. Les valeurs absolues moyennes des phases sont plus importantes (et volatile) pour Orange. Ce déphasage plus prononcé indique qu'Orange réagit différemment et avec retard aux signaux du marché.

Une action avec un beta faible possède un coefficient de détermination et une cohérence moyenne plus faible qu'une action avec un beta fort. Le pouvoir explicatif du marché sur les variations de l'action (importance du risque systématique) est donc plus important pour une action à beta fort, mais nous ne pouvons pas vérifier si ce constat est valide quelle que soit la période temporelle considérée. L'analyse co-spectrale trouve ainsi sa limite par son atemporalité.

2.1.2.2 Analyse par les ondelettes de la relation Action-Marché

Cette démarche statique est améliorée lorsque qu'on recourt à l'analyse tempo-fréquentielle multidimensionnelle qui est une véritable analyse dynamique du lien action-marché au cours temps et selon les fréquences. Les graphiques suivants (Figures 1) représentent pour les trois actions les évolutions simultanées de la cohérence et de la phase qui enrichit l'analyse de la relation entre les variables¹. La cohérence fournit l'importance du risque systématique qui peut s'assimiler à l'intensité de la corrélation et la phase nous renseigne sur ses caractéristiques.

Les échelles fréquentielles exprimées en jours sont portées en ordonnées, le temps indicé en jours est en abscisses. Il débute de 0 (pour la première observation) à 2869 (pour la dernière).

L'intensité de la cohérence en ondelettes est représentée par le code couleur suivant : le rouge illustre une forte corrélation entre le CAC40 et l'action qui diminue pour les couleurs orange et jaune, et le bleu indique un lien faible entre les deux variables. Par conséquent, plus la couleur est rouge plus le risque systématique explique une part importante de la variance de l'action. Les traits en gras délimitent les zones pour lesquelles la corrélation (le R^2 en l'occurrence) est significative au seuil de 5% (calculé par des simulations de Monte-Carlo). Une zone particulière (la surface blanche transparente) concerne le cône d'influence. Il s'agit des effets de bords susceptibles de perturber les résultats car la majorité des échantillons sont finis et les calculs des spectres de puissance croisés peuvent être biaisés.

L'analyse de la phase s'effectue par la lecture de l'orientation des flèches portées sur les graphiques : une flèche dirigée vers la droite indique que les séries sont *en phase* si elle est dirigée vers la gauche alors sont *déphasées* (ou *hors-phase*). La phase peut s'interpréter comme le sens de la corrélation et son sens. Des séries en phase seront positivement corrélées tandis qu'elles le seront négativement lors d'un déphasage. La phase permet aussi d'appréhender la volatilité des séries et leurs liaisons : si la flèche pointe vers le haut alors $x(t)$ est le "Leader" dans le sens où il amène $y(t)$ vers une forte corrélation ; à l'inverse si elle pointe vers le bas c'est la variable $y(t)$ qui conduit $x(t)$. Nous avons ainsi, en quelque sorte, une mesure de la causalité entre les séries.

Figures 1 Cohérences-phases en ondelettes entre les actions et le marché

Fig 1.1. Cohérence entre AXA et le CAC40

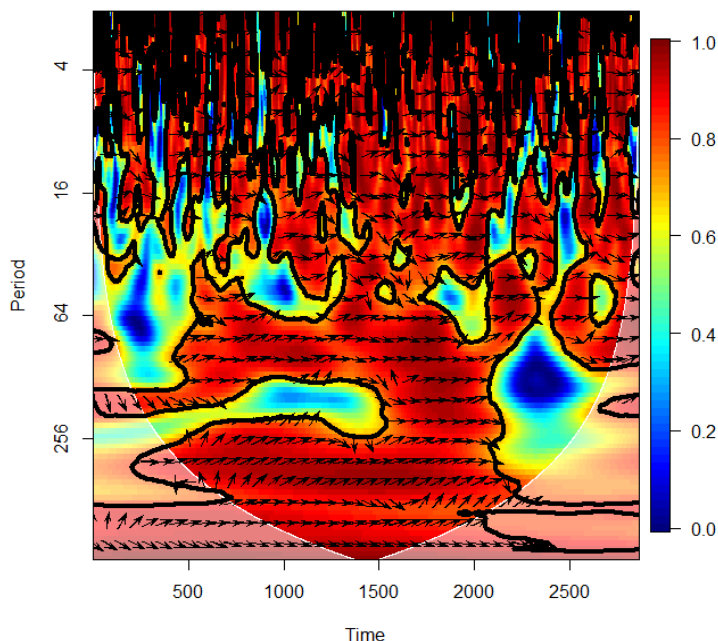


Fig 1.2. Cohérence entre LVMH et le CAC40

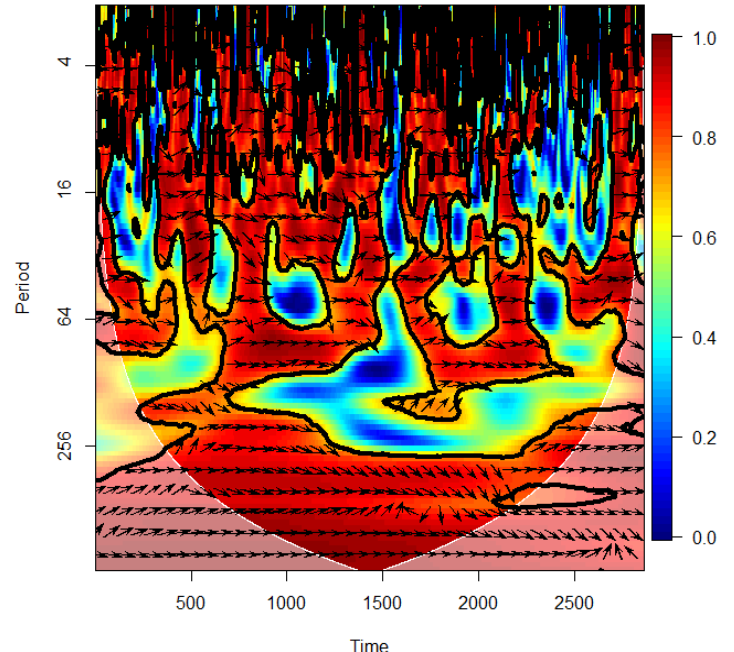
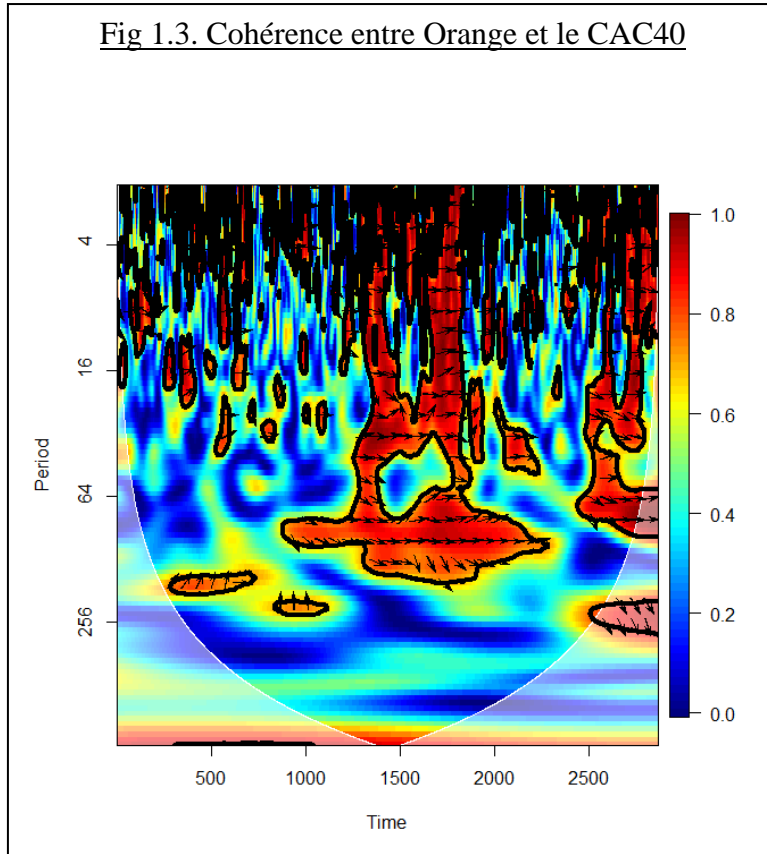


Fig 1.3. Cohérence entre Orange et le CAC40



Ces graphiques mettent en évidence une dominance du rouge pour AXA et pour LVMH (dans une moindre mesure), traduisant une forte corrélation entre les actions et le marché. Pour ces actions le risque systématique occupe donc une part très importante du risque total. L'importance du risque, par contre, n'est pas continue/homogène sur les hautes-fréquences où l'on observe une alternance de zones rouges et bleues. Pour l'action Orange, la couleur bleue domine malgré une zone rouge importante centrée autour de 1500 jours. Globalement pour AXA et LVMH l'importance du risque systématique est élevée quelle que soit la fréquence, a contrario, pour l'action Orange elle ne l'est pas systématiquement.

Les actions ayant un Beta fort ont, en général, une cohérence dominée par le rouge quelle que soit la période et les fréquences. A l'inverse, une action avec un Beta faible possède une cohérence dominée par le bleu, mais les zones de co-mouvements avec le marché seront situées sur des fréquences particuliers et à des instants précis du temps.

L'analyse de la phase montre qu'à certains moments l'action peut affecter le marché sur des fréquences moyennes-hautes. Cette observation contredit l'hypothèse du MEDAF sur l'unilatéralité de la relation Action-Marché.

Pour mettre en évidence l'influence de l'environnement sur les résultats, une synthèse des points les plus importants est réalisée en divisant la période temps global en 5 sous-périodes :

- La période d'avant crise qui s'étend de 2005 jusqu'au début de l'année 2008 (située en ordonnée autour des 800 jours).
- La crise des subprimes couvrant la période de 2008 jusqu'à la fin 2009 (autour des 800 jours jusqu'à 1300 jours).
- Une période de reprise économique à partir de 2010.
- La crise de la dette englobant les années 2011 mi-2012 (autour des 1600-2000 jours).
- La période d'après crise qui débute à la moitié de l'année 2012 jusqu'à la fin de notre échantillon au 31 décembre 2015 (au niveau de 2000 jours).

Nous résumons dans le tableau 3, pour chaque action, l'intensité de la corrélation (Forte, Moyenne, Faible), le leadership du marché est indiqué par la lettre M et celui de l'action par la lettre A. Nous utilisons la lettre I si on ne peut pas définir un leadership dominant, illustrant ainsi une Interaction Mutuelle entre le marché et l'action.

Tableau 3 : Synthèse de la cohérence

Actions	Fréquences	2005-2008	Crise des Subprimes 2008-2010	2010-2011	Crise de la dette 2011-2012	2012-2015
AXA	HF	Forte-M	Forte-M	Forte-M	Forte-M	Forte-I
	MF	Moyenne-I	Forte-M	Forte-I	Forte-M	Forte-I
	BF	Forte-M	Forte-M	Forte-I	Forte-M	Moyenne-Forte
LVMH	HF	Forte-M	Moyenne-M	Moyenne-M	Forte-M	Moyenne-M
	MF	Forte-I	Forte-I	Moyenne-I	Forte-M	Moyenne-I
	BF	Forte-M	Forte-A	Forte-I	Forte-A	Forte-I
ORANGE	HF	Forte-M	Moyenne-M	Forte-M	Moyenne-M	Moyenne-Forte-M
	MF	Faible-I	Moyenne-Faible-M	Forte-I	Moyenne-I	Moyenne-Forte-I
	BF	Faible	Faible	Faible-I	Faible	Faible

HF=Hautes fréquences, MF=Moyenne-Fréquences et BF=Basses-Fréquences

On peut vérifier les hypothèses du MEDAF aux **hautes-fréquences** : les variations du marché causent les fluctuations des actions, mais chacune possède un lien différent au cours du temps. AXA est plus souvent sensible qu'Orange, ce qui est logique d'après la valeur de leur Beta. On peut donc mettre en évidence le phénomène de *Contagion* entre le Marché et les Actions qui y sont cotées. Si on constate qu'elle est déphasée par rapport au marché alors elle a un rôle contracyclique (qui n'est pas observé ici). Elle joue un rôle procyclique si elle est en phase

avec son marché. Cependant à court-terme (aux hautes-fréquences) une action peut rarement influencer le marché.

Sur les **Moyennes Fréquences**, on remarque que le marché n'est plus systématiquement le Leader : il y a une interaction bilatérale. Ces résultats montrent que la nature du lien action-marché n'est pas uniforme et homogène dans le domaine temps-fréquence révélant l'intérêt de recourir à cette démarche par rapport à celle utilisant les outils traditionnels précédents. On constate que chaque action est corrélée avec le marché durant les deux périodes de crise avec une nature du lien différente. A titre d'exemple, l'action AXA à une cohérence relativement moyenne avant la crise des subprimes (ou elle est le Leader à certains instants) et elle amplifie les mouvements du marché (d'après son Beta). Ce dernier réagit aux mouvements d'AXA par une phase d'emballement (phase d'instabilité) avant de s'effondrer. Pendant la crise, le marché redevient le Leader. Ce constat est valable pour les autres actions : Orange, par exemple, est une action peu corrélée avec son marché (en temps normal) mais qui subit ses chocs (en temps de crise), elle contribue néanmoins à le redynamiser en minimisant ses variations négatives. LVMH est un mélange de ces deux profils, ce qui explique son Beta moyen égal à 1 et son importance du risque relativement instable.

Pour les **Basses-Fréquences** (en dessous de l'échelle 256), Orange est peu corrélée avec le CAC40, le risque systématique explique au mieux 40% du risque total. A l'inverse d'AXA et de LVMH ou l'importance du risque est plutôt stable est élevée entre 80% et 100%. Ces dernières sont en phases mais leur lien avec le marché est plus complexe. En effet on ne peut pas définir clairement qui est Leader sur l'ensemble de la période. Les actions répondent bien aux signaux du Marché mais celui-ci est aussi influencé par leurs réponses. Ce résultat permet de conclure à une interdépendance forte entre le marché et les actions. Cela signifie qu'à long terme les fluctuations des actifs et du marché se répondent mutuellement ("interagissent"), ce constat résulte du principe de l'ajustement des prix.

2.1.3 Conclusion

La cohérence-phase en ondelettes se révèlent bien comme un outil puissant pour comprendre les interactions entre le marché et les actifs qui y sont cotés. Elles constituent une procédure indispensable pour compléter l'estimation de la droite de marché et l'atemporalité de l'analyse co-spectrale.

Les actions sélectionnées comptent parmi les plus "grosses" composante du CAC40 dans le sens où leurs poids indiciel est relativement important (LVMH compte pour 8%, AXA 4-5% et ORANGE 2-3%). Il n'est donc pas choquant d'observer que LVMH influence plus le marché qu'Orange. Il s'agit d'une des limites du MEDAF pour lequel théoriquement le Marché doit contenir tous les actifs possibles. Or le CAC40 est un portefeuille français composé de "seulement" 40 actifs, et le Beta estimé mesure la sensibilité de l'action aux mouvements du marché dont elle-même contribue à la hauteur de x%. Ce défaut du MEDAF est ici "réduit" puisque la cohérence nous indique clairement les périodes où l'action répond au marché. La relation Action-Marché n'est plus considérée comme unilatérale grâce à l'étude de la phase.

De plus, la décomposition fréquentielle présente un intérêt récurant car chaque agent peut classifier ses actifs d'après son horizon d'investissement (l'échelle des fréquences en ordonnée). Par exemple Orange est plus corrélée au CAC40 à court-terme durant les périodes tumultueuses qu'à long-terme. Par conséquent un Fond de pension, par exemple (investissant sur 5 ans), sera relativement moins exposé qu'un agent THF (Trading de Hautes-Fréquences) investissant à court-terme. Mais les THF peuvent repérer et exploiter les périodes où l'action et le marché sont non-corrélés.

Cette étude met aussi en évidence la nature des liens fréquentiels actions-marché :

- Aux hautes-fréquences, on observe, le phénomène de Contagion indiquant que les fluctuations du marché définissent celles de l'action. Cependant, elles ne sont pas à chaque instant t fortement affectée par le marché car l'importance du risque systématique n'est pas toujours significative et homogène au cours du temps. Le Marché étant le leader, ils ramènent les actions vers une forte corrélation avec des co-mouvements intenses d'où une part du risque systématique plus importante.
- Aux basses-fréquences, la corrélation et la part du risque systématique sont fortes et homogènes dans le temps mais la phase met en évidence des changements de dans le

sens de la relation. Le phénomène d'Interdépendance se traduit ainsi par des interactions bilatérales entre l'action et le marché. Le marché influence les mouvements des rendements des actions mais celui-ci réagit aux fluctuations des actifs. Il y a donc un jeu de réponse entre l'action et le marché indiquant un risque systématique de nature différente. Ce résultat est surtout visible pour AXA et LVMH, pour ORANGE le risque systématique représente moins de 40% du risque totale sur ces fréquences.

- Aux Moyennes fréquences, les deux phénomènes se combinent selon les actions et la période.

En définitive, il existe une pluralité de profils d'actions réalisables car le risque systématique n'apparaît plus comme constant et unilatéral mais il se traduit ici par une relation multidimensionnelle entre l'action et le marché. Les gestionnaires peuvent ainsi construire des portefeuilles en considérant les variations de l'importance du risque au cours du temps et selon des horizons d'investissement différents.

Annexes

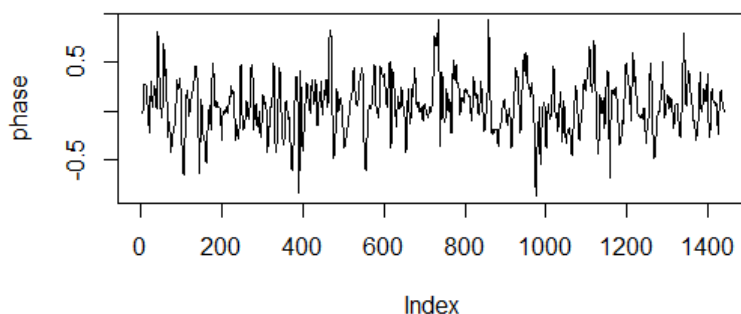
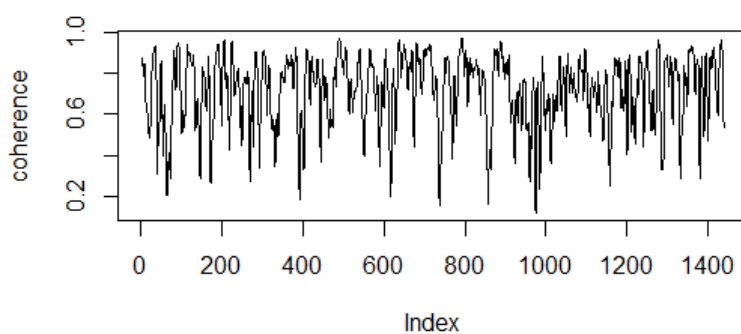
A1. Test de stationnarité de Philips-Perron sur les rendements

Actions	Valeur Test	Valeur Critique
CAC	-56,11	-3,96
AXA	-51,22	-3,96
LVMH	-55,7	-3,96
ORANGE	-54,42	-3,96

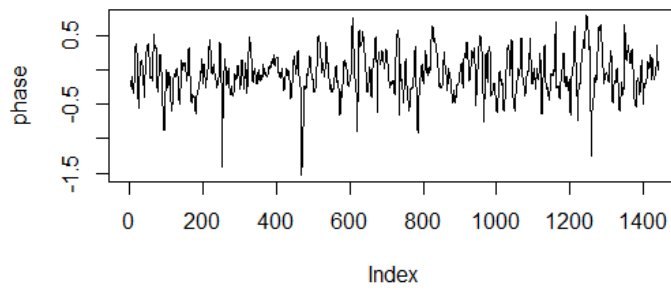
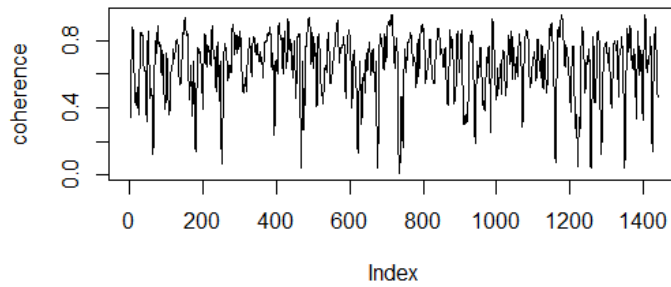
A2. Cohérences et Phases issues de l'analyse co-spectrale entre les actions et le marché

La Cohérence est portée en ordonnées et les fréquences sont exprimées en Périodes sur les abscisses (exprimées en jours).

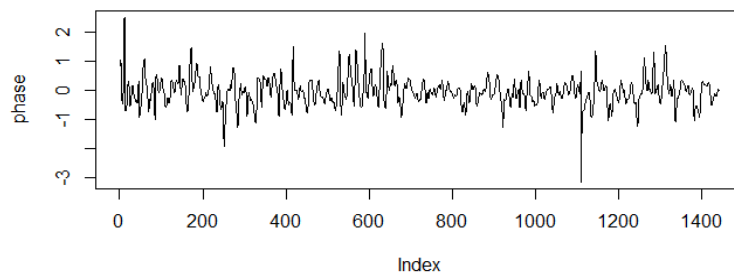
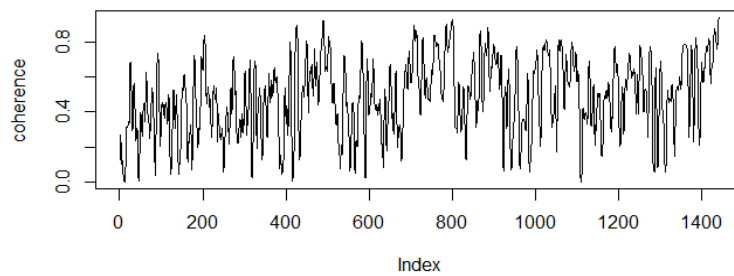
A.2.1 Pour AXA



A.2.2 Pour LVMH



A.2.3 Pour ORANGE



Bibliographie

1. Auth, C. (2013) Continuous Wavelets Transform and wavel coherence-implementation and application to the diversification analysis of hedge funds returns, available online.
2. Bekiros, S., Nguyen, D.K and Uddin, G.S (2016) On time scale behavior of equity-commodity links: implications for portfolio management, Journal of international financial market institutions and money, Vol 41, pp 79-121.
3. Bos, T. and Newbold, P. (1984), An empirical investigation of the possibility of stochastic systematic risk in the market model, Journal of Business, 57 (1), 37-47.
4. I. Daubechies (1992) Ten lectures on wavelets, Conference Series of Applied mathematics in Philadelphia, Society for industrial and applied mathematics.
5. Farge M, (1992), Wavelets Transforms and their applications to turbulence, Annual Review of fluid mechanics, Vol 7 Issue 2 pp 427-465.
6. R. Gençay, F. Selçuk, B. Whitcher, “Systematic Risk and Timescales “, Quantitative Finance, Vol 3 issue 2, 2003,pp 108-116.
7. R. Gençay, F. Selçuk, B. Whitcher, “Multiscale systematic risk “, Journal of international money and finance, Vol 24, 2005,pp 55-70.
8. A. Grossmann J. Morlet, “Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape” SIAM Journal on mathematical analysis, 1984, 15 (4),723–736.
9. N. Groenewold and P. Fraser, “Time Varying Betas and Macroeconomic influences”, discussion paper, departement of economics , University of Western Australia, 1997.
10. Lau K.M and Weng H, (1995) Climate Signal Detection using wavelet transform: how to make a time series sing, Bulletin of american meteorological society, Vol 76 Issue 12, pp 2391-2402.
11. S. Mallat, “A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation” ;IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence Vol 11 num 7 July 1989.
12. S. Mallat, Une exploration des signaux en ondelettes, Ecole polytechnique, 2001.
13. S. Mallat ,Wavelet tour of signal processing: the sparse way, Academic Press, 2009.

14. M elard, G. (1985) Examples of the evolutionary spectrum theory, *Journal of time series analysis*, Vol 6 Issue 2, pp 81-90.
15. Mestre R. and Terraza M., "Time-frequencies analysis of CAPM-Application to the CAC 40" *Managing Global Transition Journal* .Vol.16 (2) 2018, pp-141-157.
16. Y .Meyer, S. Jaffard and O. Rioul, "L'analyse par ondelettes" 1986 *Pour la science*.
17. Rua, A and Nunes, L, (2009), International comovement of stock market returns ; A wavelet analysis, *Journal of Empirical Finance*, Vol 16 Issue 4, pp 632-639.
18. Rua, A and Nunes, L, (2012) A wavelet based assessment of market risk : the emerging case, *Journal of Quaterly Review of Economics and Finance*,Vol 52, pp84-92.
19. W. Sharpe, "Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under risk" ; *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3 (Sep., 1964), 1964, pp. 425-442.
20. Torrence C and Compo G.P. (1998) A practical guide to wavelet analysis, *Bulletin of the american meteorological society*, Vol 79 Issue 1, pp 61-78.
21. Torrence C and Webster P.J. (1999) Interdecadal in the ENSO-Monsoon System, *Journal of Climate*, Vol 12 pp 2679-2690.

1.2. Estimation du Beta Tempo-fréquentiel de la Droite de Marché -Une approche par les ondelettes continues

Le MEDAF de Sharpe (1964) met en relation, à l'instant t , la prime de risque d'un actif i avec celle de son Marché m (Droite de Marché)

$$r_{i,t} = \alpha_i + \beta_i r_{m,t} + \varepsilon_{i,t} \quad (1)$$

Avec $r_{i,t}$ la prime de risque de l'actif i (qui se définit comme la différence entre les rendements et le taux sans risque) et $r_{m,t}$ celle du marché, $\varepsilon_{i,t}$ obéit à un processus *i.i.d* $(0, \sigma_\varepsilon)$.

Le paramètre Beta est une mesure du risque systématique utile aux gestionnaires de portefeuilles car il permet d'apprécier la sensibilité de l'actif aux fluctuations du Marché. Les paramètres de la régression sont estimés par la méthode des MCO dont l'une des hypothèses est la stabilité des coefficients au cours du temps remise en cause par une volatilité importante du Beta. De nombreuses études ont porté sur cette instabilité comme celles de Black Scholes et Jensen (1972), Fama-McBeth (1973), Fabozzi et Francis (1978) et Bos et Newbold (1984). Par la suite, les méthodes employées pour l'estimation du Beta temporel font appel, le plus souvent, aux régressions roulantes (ou récursives) et aux processus de type GARCH à l'image des travaux de Bollerslerv *et al* (1988), Groenwold et Fraser (1997) et Brooks et al (1998).

Le MEDAF suppose que le comportement des agents intervenants sur les marchés sont homogènes. De ce fait, deux agents ayant des horizons d'investissement différents mesurent le risque systématique de la même manière ce qui est contestable, la fréquence d'investissement n'étant pas identique. C'est ce qu'ont montré différents auteurs¹ en recourant à la technique des ondelettes développée par Haar en 1909 et utilisée dans le traitement du signal par Morlet et Grossmann (1984) (qui sont à l'origine du terme 'ondelette'). Les mathématiciens comme Meyer et al (1986) (prix Abel 2017 en Mathématiques), Mallat (1989-2001-2009) et Daubechies (1992), par la suite, étudient leurs propriétés pour construire des ondelettes différentes. Plus récemment, les travaux Rua et Nunes (2009, 2012), puis ceux de Auth (2013) et de Bekiros et al (2016) proposent de recourir à des transformations continues en ondelettes (CWT), rendues possible grâce à l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs. Elles trouvent des applications multivariées comme l'analyse de la causalité et celle des interactions entre plusieurs variables en recourant à la cohérence et à la phase tempo-fréquentielle entre deux variables.

Nous utilisons, dans cet article, ce type de Transformation en Ondelettes Continues pour estimer un Beta Tempo-Fréquentiel à chaque instant du temps et à chaque fréquence.

Nous avons retenu, à titre d'exemple, les primes de risque (les taux OAT 10 ans servant d'actif sans risque) de trois actions cotées sur le marché français (indice CAC40) pour la période journalière 2005-2015 : AXA, LVMH et Orange dont les valeurs du Beta estimées par la méthode des MCO sont significativement différentes entre elles. Nous montrons que les ondelettes permettent d'améliorer l'interprétation du Beta en fournissant ses caractéristiques fréquentielles. Les actions se distinguent à la fois par la dynamique tempo-fréquentielle de leurs Betas, offrant ainsi davantage de profils d'actions aux gestionnaires.

Dans une première partie nous présentons une synthèse de la méthodologie en temps continu de l'analyse multivariée par ondelettes, puis nous décrivons les résultats de notre application aux actions sélectionnées avant de conclure.

2.2.1 L'analyse Temps-Fréquences Multivariée

Nous recourons à des transformations en ondelettes continues dans le cas multivarié qui nous fournit les caractéristiques tempo-fréquentielles recherchées de la droite de marché comme la Cohérence et la Phase.

On retient pour cela l'ondelette complexe de Morlet, notée $\psi_M(t)$ utilisée comme filtre car elle possède à la fois une bonne capacité de localisation temporelle et fréquentielle. Lors de la décomposition, la fonction $\psi_M(t)$ est translatée par τ et dilatée par s pour extraire l'information de la série d'origine sur plusieurs échelles de fréquences à un moment précis du temps. L'ensemble des versions translatées et dilatées de $\psi_M(t)$ constitue la famille d'ondelettes qui définit les caractéristiques du filtrage.

L'expression mathématique de l'ondelette de Morlet s'écrit :

$$\psi_M(t) = \pi^{-1/4} e^{if_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (2)$$

Avec f_0 la fréquence non-dimensionnelle qui, dans notre cas, est égale à 6 afin de satisfaire la condition d'admissibilité².

La cohérence d'ondelettes entre deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$ (de même taille N) appelée parfois *Time-Varying Coherence*, est défini (Cf. bibliographies 10, 15,24,25), comme pour la cohérence de Fourier, à partir d'une mesure de la covariance spectrale entre les ondelettes de

² La condition d'admissibilité garantit la nullité de la moyenne et la préservation de l'énergie lors de la décomposition. $C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(f)|^2}{f} df < +\infty$ (3) avec f la fréquence et $\widehat{\psi}(f)$ la transformée de Fourier de l'ondelette-mère.

$x(t)$ et $y(t)$ appelée spectre croisé d'ondelettes $SW_{xy}(s, \tau)$. Ce spectre, associé aux auto-spectres de puissance des deux séries, conduit à la formule de la cohérence en ondelettes notée $WQ(s, \tau)$:

$$WQ(s, \tau) = \frac{|G(s^{-1} \cdot SW_{xy}(s, \tau))|^2}{G(s^{-1} \cdot |SW_x(s, \tau)|^2) \cdot G(s^{-1} \cdot |SW_y(s, \tau)|^2)} \quad (4)$$

Les coefficients obtenus sont issus d'une décomposition par ondelettes de Morlet, ils sont donc complexes par nature. Par conséquent, la cohérence est égale à 1, quel que soit s et τ , dans sa représentation réelle, ce qui nécessite de recourir à un lissage tempo-fréquentiel noté $G(\cdot)$ qui conduit aux valeurs réelles de la cohérence. Le lissage temporel est noté $G_{time}(\cdot)$ pour une échelle fréquentielle donnée et celui de l'échelle fréquentielle $G_{scale}(\cdot)$ pour un instant t donné. L'opérateur de lissage complet $G(\cdot)$ s'écrit :

$$G(W(s, \tau)) = G_{scale}(G_{time}(W(s, \tau))) \quad (5)$$

Les expressions mathématiques de $G_{time}(\cdot)$ et $G_{scale}(\cdot)$ sont donnés par Torrence et Webster (1999):

$$G_{time}(\cdot) = W(s, \tau) c_1 \frac{-t^2}{c_1^{2s^2}} \quad (6)$$

$$G_{scale}(\cdot) = W(s, \tau) \cdot c_2 \Pi(0.6 s) \quad (7)$$

c_1 et c_2 sont des constantes de normalisation et $\Pi(\cdot)$ est la fonction rectangle ou indicatrice qui prend la valeur 1 dans un intervalle $[-0.5 ; 0.5]$ et 0 sinon.

La formule de $WQ(s, \tau)$ est similaire à celle d'un coefficient de détermination. Pour chaque échelle fréquentielle s (défini par le pas fréquentiel) et à chaque instant du temps on dispose d'un coefficient compris entre 0 et 1 traduisant la plus ou moins forte corrélation au carré entre les séries (le pouvoir explicatif de la variable $x(t)$ et $y(t)$ à l'instant t). Il est donc théoriquement possible de retrouver la formule fournissant la valeur du Beta.

$$\sqrt{WQ(s, \tau)} = \frac{|G(s^{-1} \cdot SW_{xy}(s, \tau))|}{G(s^{-1} \cdot |SW_x(s, \tau)|^2)^{1/2} G(s^{-1} \cdot |SW_y(s, \tau)|^2)^{1/2}} \quad (8)$$

$$\sqrt{WQ(s, \tau)} = \frac{|G(s^{-1} \cdot SW_{xy}(s, \tau))|}{G(s^{-1} \cdot |SW_x(s, \tau)|^2)^{1/2} G(s^{-1} \cdot |SW_y(s, \tau)|^2)^{1/2}} * \frac{G(s^{-1} \cdot |SW_x(s, \tau)|^2)^{\frac{1}{2}}}{G(s^{-1} \cdot |SW_y(s, \tau)|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (9)$$

En faisant apparaître le terme $\frac{|G(s^{-1}.SW_{xy}(s,\tau))|}{G(s^{-1}.|SW_x(s,\tau)|^2)}$ on a :

$$\sqrt{WQ(s,\tau)} = \frac{|G(s^{-1}.SW_{xy}(s,\tau))|}{G(s^{-1}.|SW_x(s,\tau)|^2)} * \frac{G(s^{-1}.|SW_x(s,\tau)|^2)^{\frac{1}{2}}}{G(s^{-1}.|SW_y(s,\tau)|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (10)$$

$$\sqrt{WQ(s,\tau)} * \frac{G(s^{-1}.|SW_y(s,\tau)|^2)^{\frac{1}{2}}}{G(s^{-1}.|SW_x(s,\tau)|^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{|G(s^{-1}.SW_{xy}(s,\tau))|}{G(s^{-1}.|SW_x(s,\tau)|^2)} \quad (11)$$

Le terme de droite de cette équation est la valeur absolue du Beta Tempo-Frequency noté $\beta_{\tau,s}$ qui s'écrit :

$$|\beta_{\tau,s}| = \sqrt{WQ(s,\tau)} * \frac{G(s^{-1}.|SW_y(s,\tau)|^2)^{\frac{1}{2}}}{G(s^{-1}.|SW_x(s,\tau)|^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (12)$$

Le Beta et la Cohérence sont donc reliés, comme pour une régression, par cette relation. La cohérence est pondérée par le ratio représentant la part de l'écart-type de l'ondelette du titre sur celui du marché. Dans le cas où ce ratio est égal à 1 le beta est identique à la cohérence, s'il est inférieur à 1 alors la cohérence est plus petite que le beta (et inversement).

La formule 12 ne donne pas le signe du Beta puisqu'elle découle de la racine carrée de la cohérence. On utilise alors la fonction de phase en ondelettes, notée $\theta_{x,y}(s,\tau)$, qui permet de contourner cette difficulté. Cette fonction est le ratio de la partie imaginaire \Im et réelle \Re du co-spectre :

$$\theta_{x,y}(s,\tau) = \arctan\left(\frac{\Im(SW_{xy}(s,\tau))}{\Re(SW_{xy}(s,\tau))}\right) \quad (13)$$

Ces valeurs sont comprises entre $-\pi$ et π . Nous établissons, alors, un paramètre de signe $\theta_{\tau,s}$ définit comme suit :

- Si $|\theta_{\tau,s}|$ appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ alors les séries sont *en phase*. Elles sont donc positivement corrélées donc $\theta_{\tau,s} = 1$.

- Si $|\theta_{\tau,s}|$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ alors les séries sont *hors-phase* et sont donc négativement corrélées ainsi $\theta_{\tau,s} = -1$.

Nous pouvons ainsi inclure le signe du Beta dans sa formule définitive :

$$\beta_{\tau,s} = \theta_{\tau,s} * WQ(s, \tau)^{\frac{1}{2}} * \frac{G\left(s^{-1} \cdot |SW_y(s, \tau)|^2\right)^{\frac{1}{2}}}{G\left(s^{-1} \cdot |SW_x(s, \tau)|^2\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

2.2.2 Résultats et Discussions

Les estimations de la relation Action-Marché par les MCO sont considérées comme les références traditionnelles des Betas retenus par les investisseurs. L'hypothèse de comportements homogènes des agents qui sous-tend ces estimations est discutée par l'analyse de la cohérence et des betas tempo-fréquentiels calculés à partir d'une décomposition en ondelettes continues des actions sélectionnées.

2.2.2.1 Estimations des paramètres de la relation Action-Marché par les MCO

Les estimations par les MCO des paramètres des trois droites de marché, avec vérification préalable de la stationnarité des différentes variables des régressions retenues, sont consignées dans l'annexe 1. Les estimateurs de la constante ne sont pas significativement différents de zéro contrairement à ceux des Betas.

Les valeurs de ces derniers correspondent à des profils d'actions différents : AXA est une action offensive avec un Beta supérieur à 1 amplifiant les fluctuations du Marché (ce qui est avantageux en période de croissance), LVMH est un "trackers" reproduisant, dans les mêmes proportions, les mouvements du CAC40 et Orange est une action plutôt défensive car elle atténue les effets du marché (Beta inférieur à 1). Les coefficients de détermination expliquent une part relativement importante de la variance des rendements des titres mais les résidus de ces modèles présentent de l'autocorrélation, de l'hétéroscédasticité et de la non-normalité. Sur un plan purement statistique, les résultats de ces estimations sont insuffisants, en particulier les estimateurs β perdent leurs propriétés BLUE car ils ne sont plus de variance minimale. Par ailleurs, il est possible de montrer à partir de régressions roulantes (Cf. Bibliographie 19) que les betas possèdent une volatilité très importante au cours du temps. De ce fait les effets des crises (des chocs) sur les valeurs des Betas sont ignorés et les liens Action-Marché (comme la causalité) sont supposés rigides, ce qui est, aussi, empiriquement contestable. De plus, il

n'existe aucune distinction entre la sensibilité de court et celle de long terme : l'action réagit de la même façon aux chocs de long terme et de court-terme. Dans ces régressions la dimension fréquentielle des variables n'est pas considérée.

Pour améliorer cette approche statique des relations, nous faisons appel à l'analyse tempo-fréquentielle multidimensionnelle avec la cohérence et le calcul des évolutions du Beta tempo-fréquentiel.

2.2.2.2 Calcul de la Cohérence-Phase entre les Actions et le Marché

La cohérence en ondelettes entre les trois actions et le marché (Figures 1) représente³, par l'utilisation d'un système de couleurs, les évolutions simultanées en temps et en fréquences de leurs liens avec le CAC40. On peut ainsi l'interpréter comme l'importance du risque systématique, c'est-à-dire son poids dans le risque total.

-le rouge illustre une forte corrélation (liens / co-mouvements) entre le CAC40 et l'action. Elle diminue avec l'orange et le jaune.

-le bleu indique un lien plus faible entre les deux variables.

La Phase est représentée par les flèches si elles pointent à droite les deux séries sont corrélées positivement alors qu'elles le sont négativement quand elles pointent à gauche.

Les traits en gras délimitent les zones pour lesquelles la corrélation (le R^2 en l'occurrence) est significative au seuil de 5% (calculé par des simulations de Monte-Carlo). Une zone particulière (la surface blanche transparente) concerne le cône d'influence. Il s'agit des effets de bords susceptibles de perturber les résultats car la majorité des échantillons sont finis et les calculs des spectres de puissance croisés peuvent être biaisés.

Ces graphiques possèdent en ordonnées les échelles fréquentielles continues exprimées en jours, et en abscisses le temps (en jours) qui débute de 0 (pour la première observation) jusqu'à 2869 (pour la dernière).

Figures 1 Cohérence-phases des actions avec le marché

Fig1.1 AXA-CAC40

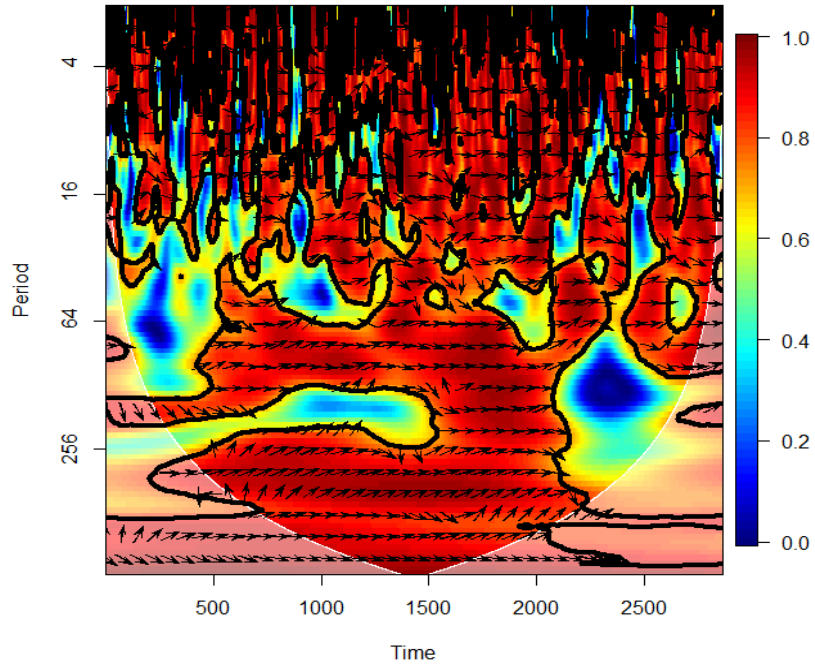


Fig 2.2. LVMH -CAC40

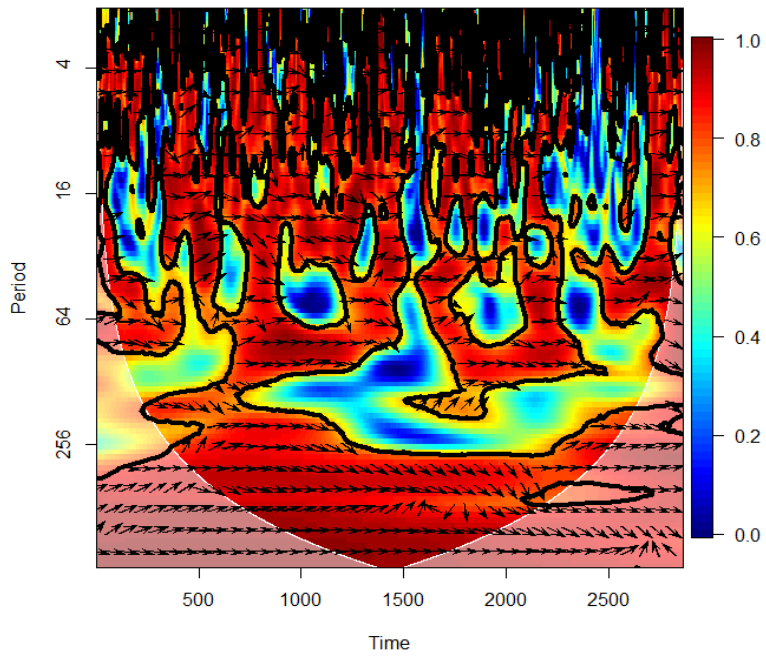
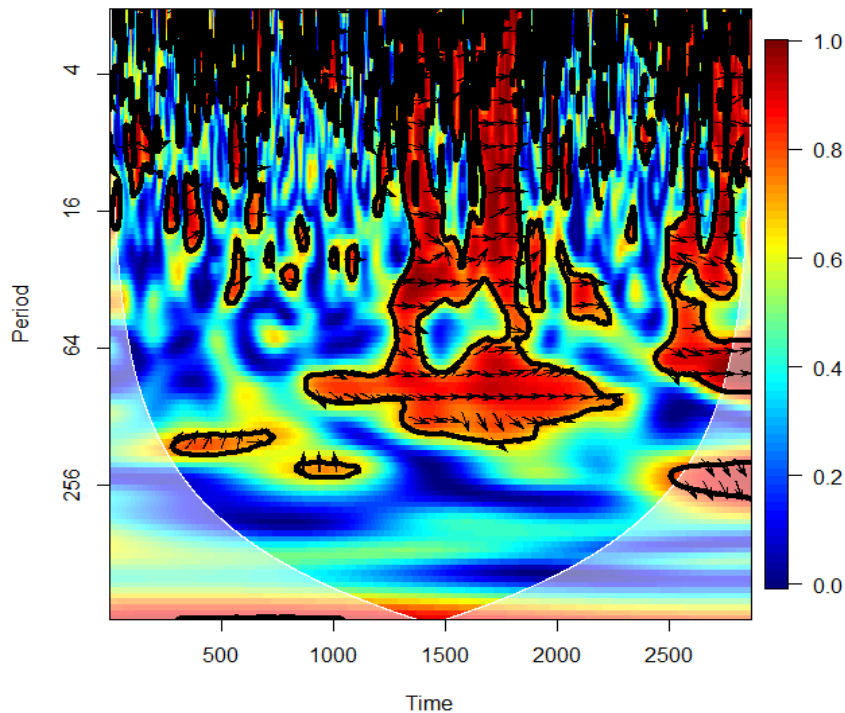


Fig 2.3. ORANGE -CAC40



Ces graphiques mettent en évidence une dominance du rouge pour AXA, et dans une moindre mesure pour LVMH, qui indique une forte corrélation entre ces deux actions et le marché. On peut ainsi apprécier l'importance du risque systématique qui, dans ce cas, constitue 80 à 100% du risque total de ces actions, malgré la présence de zones bleues plus ou moins vastes. Pour l'action Orange, la couleur bleue domine. Elle possède, cependant, une zone rouge principale entre les jours 1200-2000 (en abscisses) pour les périodes de 0 à 256 (en ordonnées) environ, et une zone secondaire à partir de 2500 jours. La relation Action-marché est ainsi, dans ce cas, non homogène au cours du temps.

L'alternance aux hautes fréquences des zones de corrélation Rouge-Orange avec des zones bleues est révélatrice d'une instabilité des relations Action-Marché pour des horizons d'investissements courts (2 jours – 1 semaine). Le risque systématique n'a pas toujours le même poids dans le risque total à chaque instant t . Les zones colorées prennent plus d'ampleur lorsqu'on se déplace vers les basses-fréquences révélant une homogénéité globale de la cohérence à plus long-terme. A long-terme, l'importance du risque est donc moins erratique mais elle varie en intensité au cours temps (en fonction des événements).

En définitive les liens Action-Marché dépendent, à la fois, du temps et des fréquences. De ce fait, le Beta, indicateur du risque systématique, devient l'outil principal pour analyser la dynamique tempo-fréquentielle du risque (Cf formule 14).

2.2.2.3 Estimations tempo-fréquentielle d'un Beta variant :

Préalablement à l'estimation tempo-fréquentielle, nous souhaitons apprécier la différenciation fréquentielle du Beta. Pour l'illustrer, nous recourons à la sélection suivante des fréquences :

- s_2 pour un horizon de 2 jours
- s_5 pour un horizon de 5 jours soit 1 semaine de trading.
- s_{128} pour un horizon de 6 mois.

Nous estimons ainsi par les MCO le Beta sur les trois échelles précédentes. Ces Betas notés B_{s_2} , B_{s_5} et $B_{s_{128}}$ ne sont pas variant dans le temps compte tenu des hypothèses des MCO. Nous comparons leurs valeurs avec le Beta des MCO (calculé sans les ondelettes) que l'on note B_{MCO} par la suite. Le tableau 1 résume les différences entre ces deux estimateurs du Beta.

Table 1 : $B_{MCO} - B_{s_i} \forall i = 2, 5, 128$

Actions	s_2	s_5	s_{128}
AXA	0,07	-0,08	0,34
LVMH	0,03	-0,07	0,22
ORANGE	-0,02	0,06	0,13

L'estimateur du Beta par les MCO sur la période globale est différent de ceux estimés par les ondelettes pour chacune des fréquences, confirmant ainsi son instabilité fréquentielle. Le signe de cette différence indique si le Beta des MCO est inférieur ou supérieur aux Betas des MCO sur les ondelettes. La différence entre les estimateurs est faible (en valeur absolue) pour la fréquence 2 jours, alors qu'elle est plus importante aux basses-fréquences.

Cette simple constatation des différences entre les betas justifie le recours aux décompositions en ondelettes des variables de la relation et conforte l'hypothèse de comportement hétérogène des agents lors de leurs choix d'investissement. Il est donc nécessaire de compléter ce constat par l'étude de la dynamique tempo-fréquentielle des différentes betas qui peut constituer une aide supplémentaire pour les investisseurs par une analyse plus détaillée des évolutions tempo-fréquentielles du risque systématique.

Nous utilisons la formule (14) pour estimer les Betas Tempo-fréquentielles variant. Les décompositions en ondelettes continues sont calculés avec un pas fréquentiel de 1/12 afin de réduire les temps de calculs avec un maillage fin. Nous possédons alors plus de 300 000 données par action correspondant à l'évolution Tempo-Fréquentielle du risque systématique. Pour chaque fréquence s nous avons 2868 Betas (1 par instant t du temps) décrivant la dynamique du risque systématique conditionnellement à l'horizon temporel lié à s . Ces nombreuses informations bi-dimensionnelles permettent une analyse de la stabilité à la fois temporelle et fréquentielle des profils-risque.

Les graphiques 2 ci-dessous présentent les résultats des Betas Tempo-fréquentiels pour l'action AXA, avec en ordonnées les valeurs des Betas et en abscisses le temps. Les représentations pour les autres actions sont consignées en annexe 2. Nous avons porté sur ces mêmes représentations, pour compléter notre étude, les estimateurs du Beta par les MCO sur la période globale (noté BMCO) et ceux correspondant aux diverses fréquences (notées Bs2, Bs5 et Bs128).

La période 2005-2015 comprend, en outre, deux périodes de crises que nous associons, dans nos commentaires, aux fréquences précédentes de la façon suivante :

- La période ante-crise des subprimes de 2005 à 2006.
- La période de Crise qui comporte la Crise des subprimes de 2007-2009.
- La Crise de la dette souveraine en Europe.
- La période post-crise qui débute en 2013.

Ces périodes sont représentées sur les graphiques par des lignes verticales.

Figures 2 : Time-Frequency Varying Betas

Fig. 2.1 Pour AXA – horizon de 2 jours

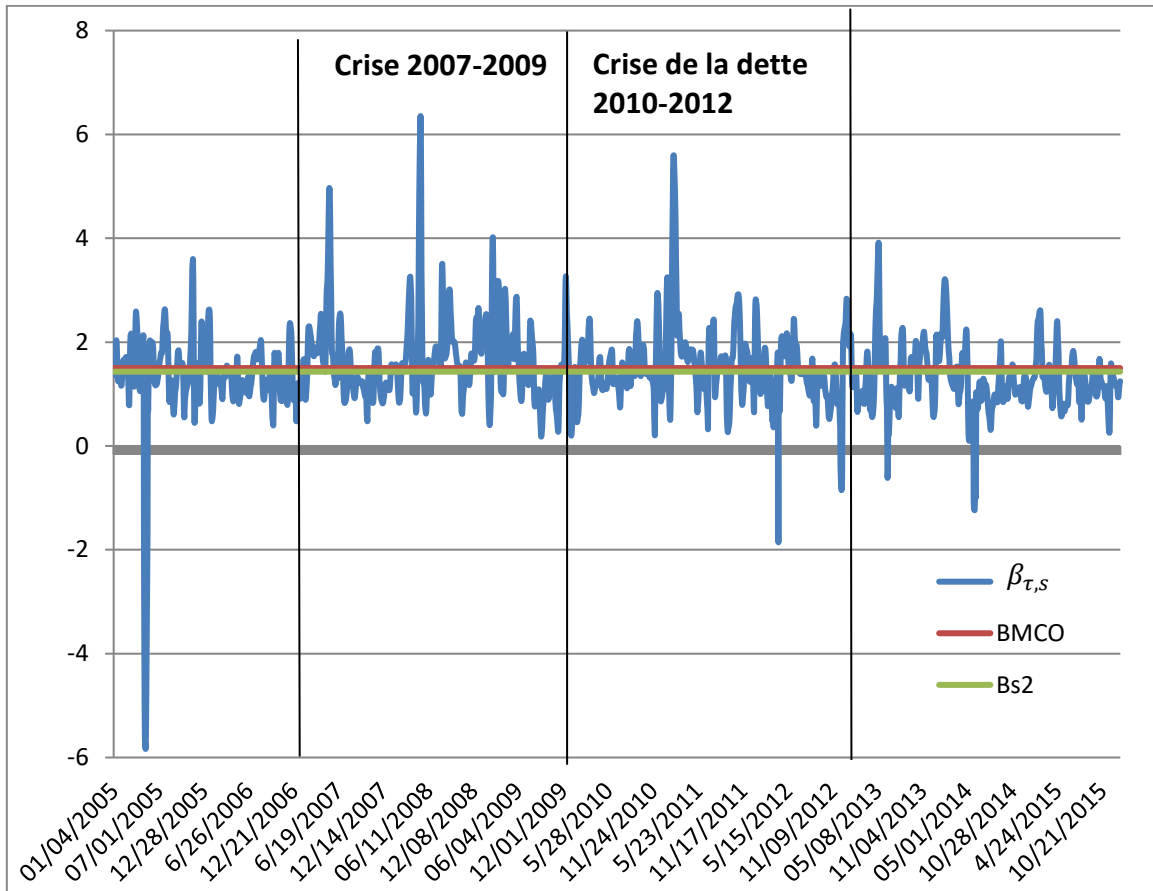


Fig. 2.2 Pour AXA – horizon de 1 semaine

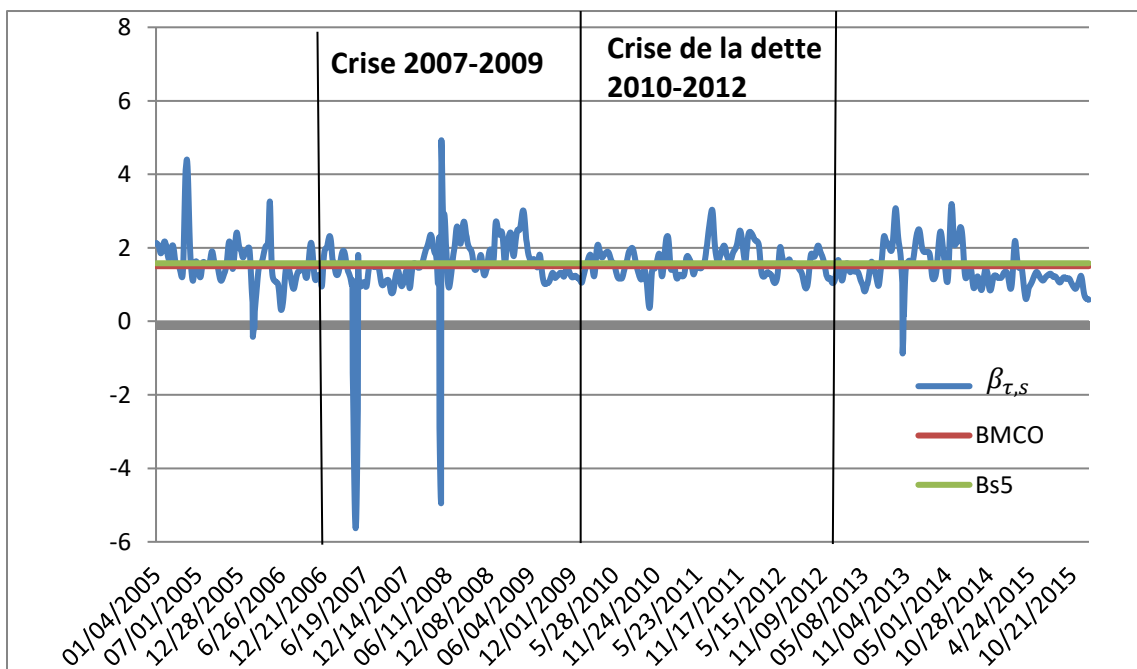
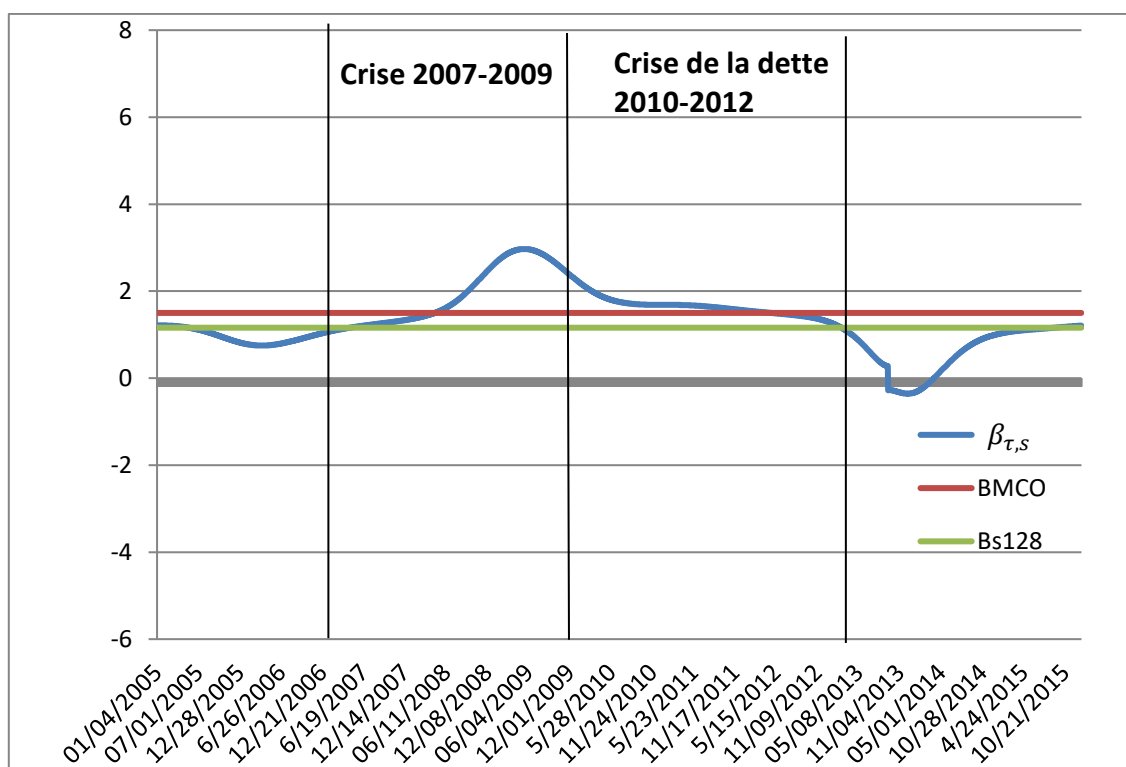


Fig. 2.2 Pour AXA – horizon de 6 mois



La stabilité temporelle des betas (ou leurs robustesses) est assurée si les valeurs des betas ne sont pas significativement différentes au cours du temps. Nous associons à ces évolutions la décomposition par périodes représentée sur les figures 2 par des traits verticaux. Le tableau 2 est une synthèse rapide de cette association par le calcul de la moyenne et de l'écart-type des betas tempo-fréquentiels pour les 4 périodes aux 3 fréquences retenues.

Tableau 2 : Moyennes et Ecart-Types des Betas Tempo-Fréquentiels par périodes

		2005-2006		2007-2009		2010-2012		2013-2015		Période Globale 2005-2015	
		Moyenne	Ecart-Type	Moyenne	Ecart-Type	Moyenne	Ecart-Type	Moyenne	Ecart-Type	Moyenne	Ecart-Type
AXA	S2	1,32	0,95	1,66	0,8	1,5	0,71	1,3	0,61	1,46	0,78
	S5	1,59	0,62	1,48	1,12	1,62	0,41	1,44	0,52	1,52	0,73
	S128	0,96	0,16	1,92	0,68	1,64	0,18	0,67	0,53	1,33	0,69
LVMH	S2	1,11	0,69	1,04	0,53	1,18	0,57	1,14	0,66	1,12	0,61
	S5	1,5	0,51	1,12	0,39	1,1	0,38	1,02	0,66	1,15	0,52
	S128	1	0,08	0,88	0,13	0,78	0,12	1,15	0,14	0,95	0,19
Orange	S2	1,11	0,91	0,75	0,54	0,85	0,49	1,4	1,01	1,02	0,8
	S5	0,97	0,66	0,78	0,61	0,75	0,3	1,23	0,83	0,93	0,66
	S128	0,79	0,069	0,67	0,22	1,15	0,17	1,04	1,34	0,92	0,74

- Les betas des 3 actifs pour les 4 périodes et les 3 fréquences présentent une volatilité relativement importante et différente de celle constatée sur la période globale. Nous n'observons pas, cependant, de rémanences entre les différentes caractéristiques de ce tableau confirmant de ce fait la spécificité des betas Tempo-Fréquentiels par rapport à leurs valeurs statiques.
- Les évolutions des betas aux hautes-fréquences sont volatiles et erratiques et s'opposent à celles, plus lisses, des basses-fréquences. Cette observation est à rapprocher des valeurs de la cohérence pour les trois actions : forte pour AXA et LVMH et faible pour Orange. La relation Action-Marché apparaît plus stable pour les deux premières en particulier aux basses-fréquences où les zones de corrélation sont plus étendues.
- L'impact des crises de 2007-2009 et de 2010-2012 sur les évolutions des betas Tempo-fréquentiels sont surtout perceptibles pour l'action AXA: la valeur moyenne des betas progresse significativement aux hautes et basses fréquences pour ces deux périodes de crise. Le profil "agressif" initial d'AXA est contesté en dehors des périodes de crise et ceux de LVMH et Orange présentent des évolutions contraires. De plus, pour LVMH l'effet de la crise sur les betas de court-terme est plus ténu. Pour Orange, on note une évolution semblable à court-terme, mais à long-terme sa volatilité explosive conduit à un profil-risque non robuste.

2.2.3. Conclusion

Les 3 actions, que nous avons sélectionnées, illustrent les multiples possibilités offertes par la formule du Beta, découlant de la transformation en ondelettes continues, pour évaluer leurs caractéristiques tempo-fréquentielles. Ces exemples, retenus en fonction de leurs betas estimés par les MCO sur la période globale, possèdent à la fois des structures pérennes et spécifiques.

Elles ont, d'une part, des cohérences significatives (AXA et LVMH) ou relativement faible (Orange) mais ne sont pas totalement homogènes à chaque instant et pour chaque fréquence. Ce constat nous indique que la relation action-marché n'est pas uniforme ce qui laisse présager que le risque systématique n'est pas stable dans l'espace tempo-fréquentiel.

D'autre part, l'estimation des Betas Tempo-Fréquentiels variants montre qu'ils évoluent au cours du temps et des fréquences. L'analyse de leur dynamique nous indique que les profils-risque initiaux ne sont pas stable dans le temps notamment en période de crise. Nous notons, de plus, qu'il existe différentes dynamiques fréquentielles : à court-terme, les betas sont très erratiques et volatiles alors qu'à long-terme ils apparaissent plus lissés mais ils restent volatiles. Les gestionnaires de portefeuilles peuvent ainsi classifier différemment les actions selon les caractéristiques tempo-fréquentielles de leur risque systématique.

L'utilisation des ondelettes continues se révèle, en définitive, comme étant un outil puissant pour évaluer la cohérence et le Beta d'un actif avec son marché. Elles permettent, grâce à un maillage très fin des fréquences rendu possible par la puissance des calculateurs, d'optimiser l'horizon d'investissement le mieux adapté aux attentes des opérateurs. Les ondelettes continues mettent, en effet, à leurs dispositions la cohérence et surtout l'évolution temporelle et fréquentielle du Beta, associée à l'action qu'ils ont choisi leurs permettant de mesurer l'impact des crises, l'ampleur de la volatilité et de rechercher le processus générateur du Beta fréquentiel dans un but prévisionnel.

Cette méthodologie peut s'appliquer pour toutes les actions mais aussi pour n'importe quel modèle de régression afin d'apprécier la dynamique de leur paramètre avec un aspect fréquentiel.

Annexes

A1- Tests sur les variables et les régressions

Test de stationnarité de Phillips-Perron sur les rendements

Actions	Valeur Test	Valeur Critique
CAC	-56,11	-3,96
AXA	-51,22	-3,96
LVMH	-55,7	-3,96
ORANGE	-54,42	-3,96

Tests des estimations des Betas

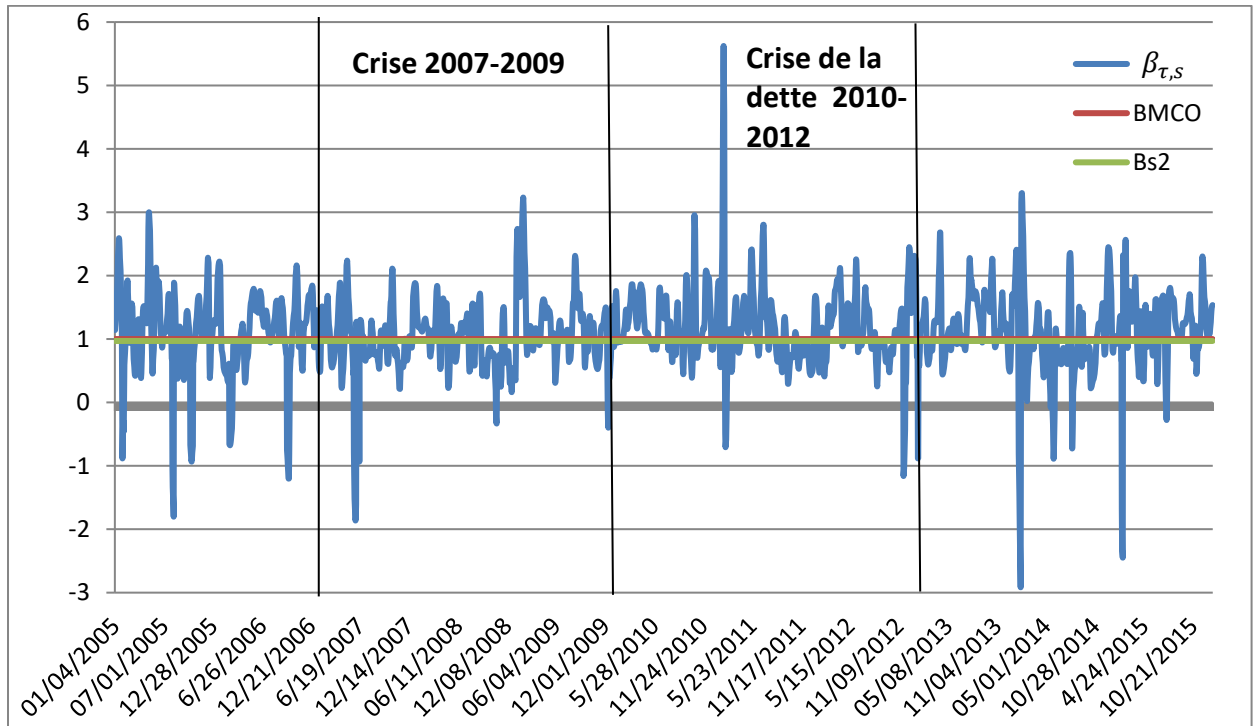
Actions	Beta	t-Stat	R ²	LB	ARCH	JB
AXA	1,51	77,98	0,68	21,068	62,13	41993,2
LVMH	1	68,815	0,62	13,242	38,34	10867,6
ORANGE	0,73	46,39	0,43	17,703	37,81	4480,43

Pour un risque de 5%, Colonne LB (test de Ljung-Box): $\chi^2(5)=11,1$; Colonne ARCH (test ARCH-LM): $\chi^2(2)=5,99$;

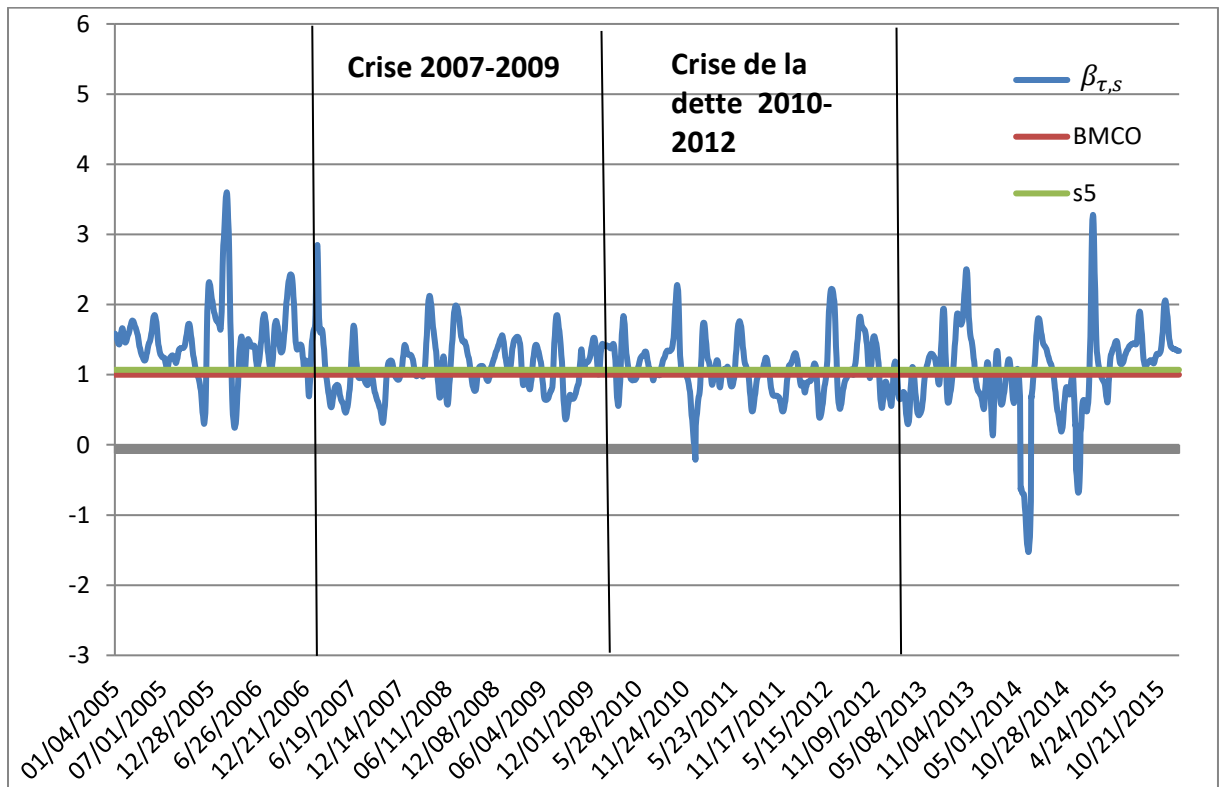
Colonne JB (test de Jarque-Bera): $\chi^2(2)=5,99$.

A2- Betas Tempo-Fréquentiels d'LVMH et d'Orange

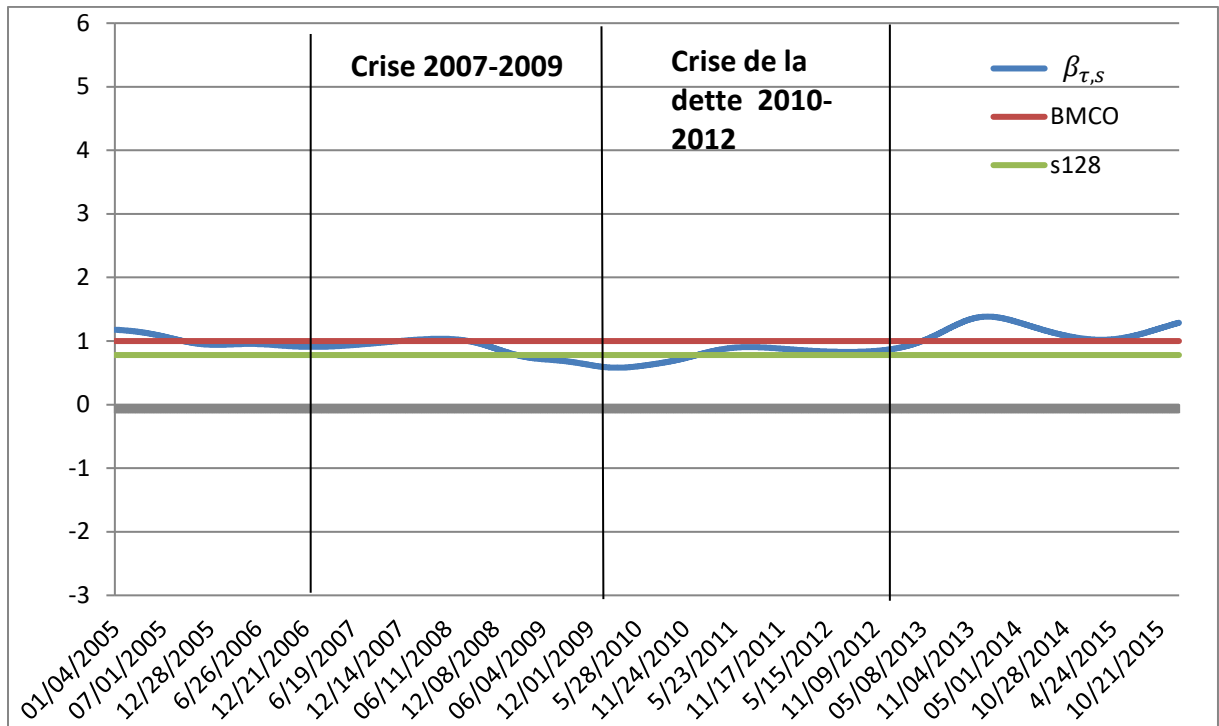
A2.1 LVMH – Horizon 2 jours



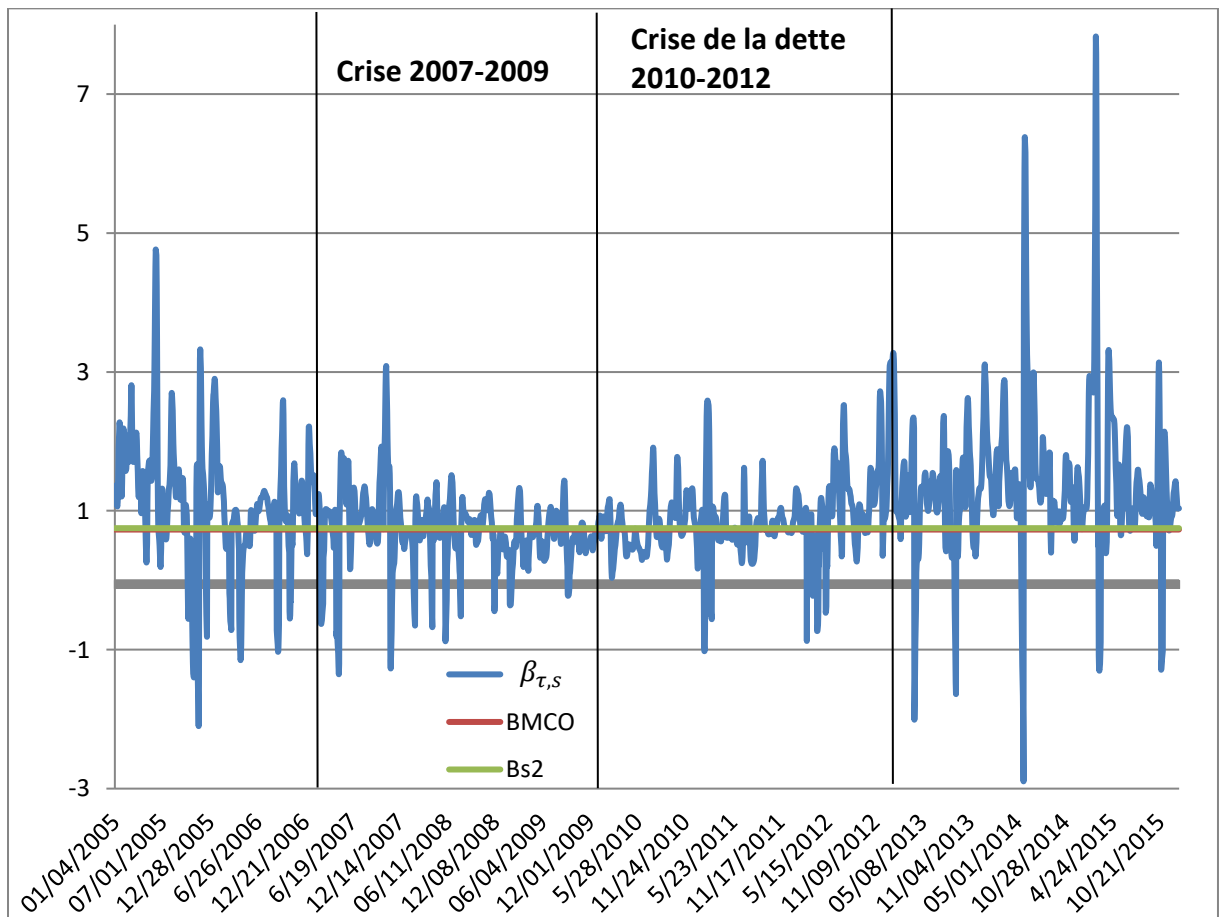
A2.2 LVMH – Horizon 1 semaine



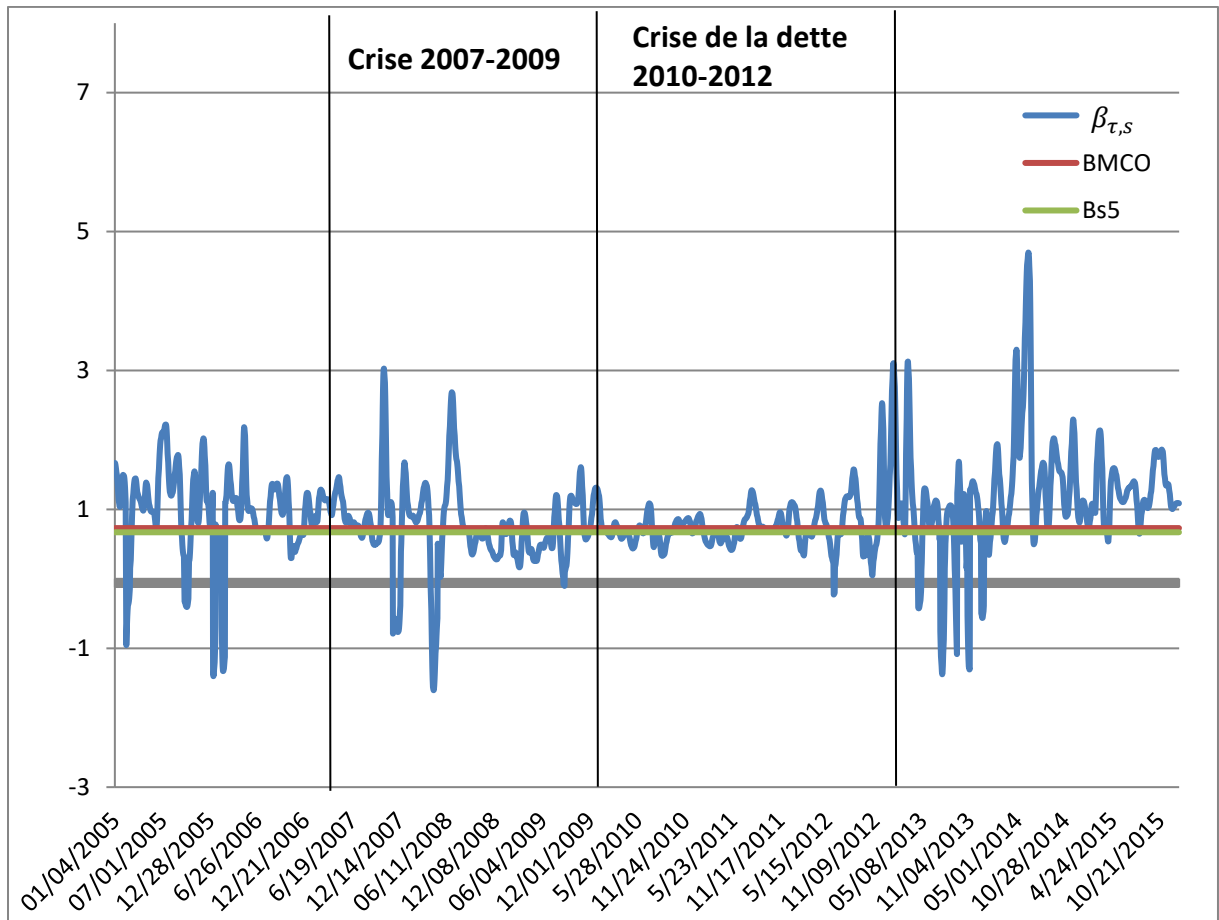
A2.4 LVMH – Horizon 6 mois



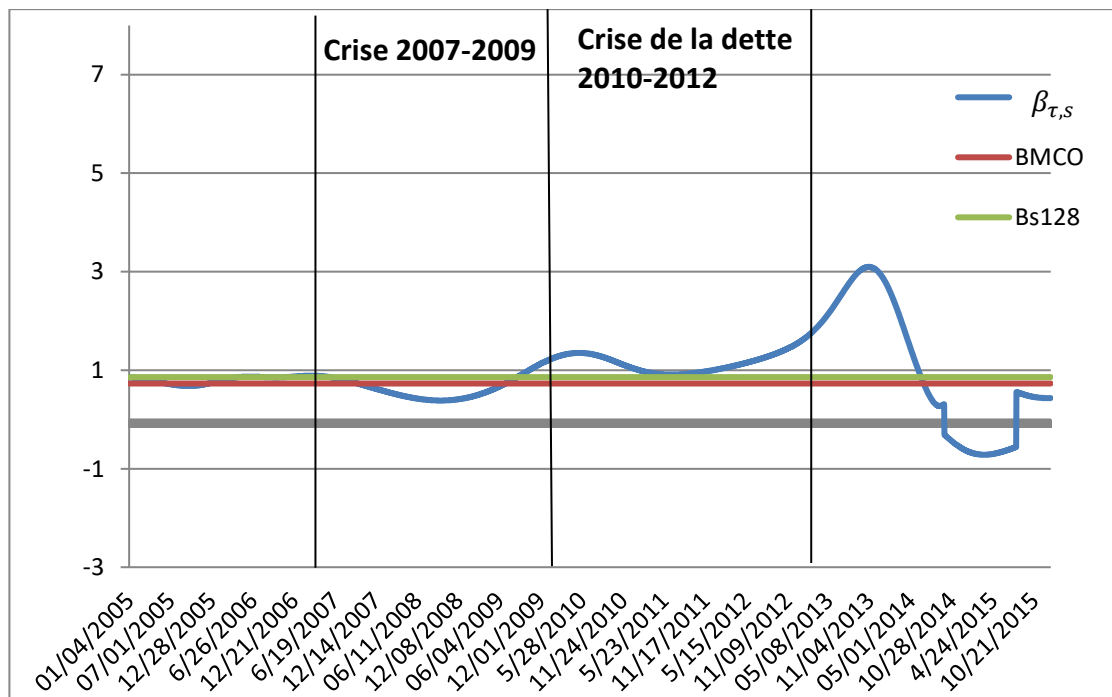
A2.4 ORANGE – Horizon 2 jours



A2.4 ORANGE – Horizon 1 semaine



A2.4 ORANGE – Horizon 6 mois



Bibliographie

1. Auth, C. (2013) Continuous Wavelets Transform and wavelet coherence-implementation and application to the diversification analysis of hedge funds returns, available online.
2. Bekiros, S., Nguyen, D.K and Uddin, G.S (2016) On time scale behavior of equity-commodity links: implications for portfolio management, *Journal of international financial market institutions and money*, Vol 41, pp 79-121.
3. F.Black, M. Jensen, and M. Scholes 1972, 'The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Test'; *Studies in the Theory of Capital Markets* edited by M. Jensen New York: Praeger Publishers.
4. Brooks, R.D., R.W. Faff, and M.D. McKenzie, "Time-varying Beta Risk of Australian Industry Portfolios: A Comparison of Modelling Techniques", *Australian Journal of Management* 23(1), 1998, pp 1–22.
5. T. Bollerslev, R.Engle and J.Wooldridge 'A Capital asset pricing model with time-varying covariance' *Journal of political economic* vol 96 (1), 1988, pp 116-131.
6. Bos, T. and Newbold, P. (1984), An empirical investigation of the possibility of stochastic systematic risk in the market model, *Journal of Business*, 57 (1), 37-47.
7. I. Daubechies (1992) Ten lectures on wavelets, Conference Series of Applied mathematics in Philadelphia, Society for industrial and applied mathematics.
8. F. Fabozzi, J-C Francis 1978, 'Beta as a random coefficient', *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13 (1) :101-116
9. E. Fama and J. MacBeth 1973, 'Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests' *Journal of Political Economy* 81 (3): 607–636.
10. Farge M, (1992), Wavelets Transforms and their applications to turbulence, *Annual Review of fluid mechanics*, Vol 7 Issue 2 pp 427-465.
11. R. Gençay, F. Selçuk, B. Whitcher, "Systematic Risk and Timescales", *Quantitative Finance*, Vol 3 issue 2, 2003,pp 108-116.
12. R. Gençay, F. Selçuk, B. Whitcher, "Multiscale systematic risk", *Journal of international money and finance*, Vol 24, 2005,pp 55-70.
13. A. Grossmann J. Morlet, "Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape" *SIAM Journal on mathematical analysis*, 1984, 15 (4),723–736.
14. N. Groenewold and P. Fraser, "Time Varying Betas and Macroeconomic influences", discussion paper, departement of economics , University of Western Australia, 1997.
15. Lau K.M and Weng H, (1995) Climate Signal Detection using wavelet transform: how to make a time series sing, *Bulletin of american meteorological society*, Vol 76 Issue 12, pp 2391-2402.
16. S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation" ;*IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* Vol 11 num 7 July 1989.
17. S. Mallat, Une exploration des signaux en ondelettes, Ecole polytechnique, 2001.
18. S. Mallat ,Wavelet tour of signal processing: the sparse way, Academic Press, 2009.

19. Mestre R. and Terraza M., "Time-frequencies analysis of CAPM-Application to the CAC 40" *Managing Global Transition Journal* .Vol.16 (2) 2018, pp-141-157.
20. Y .Meyer, S. Jaffard and O. Rioul, "L'analyse par ondelettes" 1986 *Pour la science*.
21. Rua, A and Nunes, L, (2009), International comovement of stock market returns ; A wavelet analysis, *Journal of Empirical Finance*, Vol 16 Issue 4, pp 632-639.
22. Rua, A and Nunes, L, (2012) A wavelet based assessment of market risk : the emerging case, *Journal of Quaterly Review of Economics and Finance*,Vol 52, pp84-92.
23. W. Sharpe, "Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under risk" ; *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3 (Sep., 1964), 1964, pp. 425-442.
24. Torrence C and Compo G.P. (1998) A practical guide to wavelet analysis, *Bulletin of the american meteorological society*, Vol 79 Issue 1, pp 61-78.
25. Torrence C and Webster P.J. (1999) Interdecadal in the ENSO-Monsoon System, *Journal of Climate*, Vol 12 pp 2679-2690.

Conclusion du Chapitre

L'estimation du Modèle Multi-Betas avec erreurs ARMA-GARCH, permet de mesurer la pertinence globale des variables pétrole et or introduites dans le modèle. Les tests sur les différentes estimations du beta établissent les conclusions suivantes :

- Le Modèle Multi-Betas dans sa forme complète ou partielle est retenu pour 63% des actions de notre échantillon. Pour les 37% des actions restantes le MEDAF est conservé.
- Les Betas relatifs à la variable Marché du Modèle Multi-Betas ne sont pas significativement différents de ceux du MEDAF. L'intérêt de ce type de modèle réside donc dans l'analyse des paramètres relatifs à l'or et au pétrole.
- Globalement, le pétrole affecte négativement toutes les actions (exception faite des actions du secteur pétrolier et gazier) mais son effet est plus prononcé pour celles dont le Beta relatif au Marché est fort.
- L'or affecte négativement les actions possédant un Beta du Marché fort (secteur bancaire par exemple) mais il influence positivement celles dont le Beta est plus faible plus particulièrement le secteur pétrolier et gazier.

La décomposition tempo-fréquentielle par les ondelettes MODWT conduit à une différenciation des effets du pétrole et de l'or sur les actions selon divers horizons de placement. La pertinence des variables or et pétrole est aussi étudiée par des tests de significativité des paramètres fréquentiels associés. L'analyse conduit aux remarques suivantes :

- Aucune action retient le MEDAF sur l'ensemble des bandes de fréquences car plus l'horizon d'investissement est long plus les paramètres betas relatifs à l'or et au pétrole sont significatifs. A long-terme, une seule action retient le MEDAF tandis qu'à court-terme nous retrouvons des résultats similaires à ceux de l'estimation globale du modèle (sans les ondelettes).
- Sur le plan statistique, les Betas de court-terme ne sont pas significativement différents de ceux du modèle global contrairement à ceux de plus long terme. La différenciation du beta selon les horizons de placements, déjà évoquée dans le chapitre précédent, se confirme aussi dans le cadre d'une régression multiple.

- La sensibilité au pétrole (en valeur absolue) est croissante avec l'échelle fréquentielle : plus l'horizon augmente plus le pétrole affecte (positivement ou négativement) l'action. A court-terme, les sensibilités au pétrole sont négatives pour une grande majorité des actions (77%). A long-terme, les actions avec un Beta fort possèdent en moyenne des sensibilités négatives au pétrole tandis qu'elles sont positives pour celles dont le Beta du marché est faible.
- On remarque aussi que la sensibilité à l'or (en valeur absolue) augmente avec l'échelle fréquentielle. En moyenne, les sensibilités sont positives pour les actions avec un Beta du Marché faible alors qu'elles sont négatives pour celles ayant ce beta fort.

Les différences entre les effets de court et long terme justifient donc l'usage des ondelettes afin d'enrichir l'analyse des risques. Les gestionnaires de portefeuille peuvent ainsi interpréter différemment leurs expositions à divers facteurs de risque en fonction de leurs horizons d'investissement. A court-terme, ils peuvent se contenter du MEDAF car les effets du pétrole et de l'or sont relativement faibles mais plus l'horizon est long plus leurs intensités deviennent fortes. Ces résultats illustrent les multiples possibilités d'analyses offertes par les ondelettes et complètent le MEDAF en autorisant d'autres sources de risque.

L'utilisation des ondelettes continues, et des outils multivariées associés, permet d'étendre les résultats du MEDAF en considérant non plus des bandes de fréquences mais des fréquences spécifiques.

La cohérence et la phase en ondelettes montrent que la relation Action-Marché spécifiée par la droite de marché n'est pas homogène au cours du temps et des fréquences.

- A court-terme, l'unilatéralité de la relation est observée et concorde avec le MEDAF car la phase indique que le Marché est le Leader. L'intensité du lien Action-Marché n'est pas, en revanche, uniforme au cours du temps d'après les valeurs erratiques de la cohérence. L'importance du risque systématique, c'est-à-dire son poids dans le risque total, n'est donc pas nécessairement constante comme l'indique le MEDAF, ce qui ramène ce résultat au phénomène de contagion.
- Plus l'horizon d'investissement augmente plus le caractère unilatéral du modèle est contesté. Pour certaines périodes (avant la crise par exemple) on observe un changement de leadership dans la relation Action-Marché. Son intensité, de plus, est

moins erratiques qu'aux hautes-fréquences, comme l'indiquent clairement les zones de comouvements forts plus ou moins vastes. L'effet des crises sur les liens Action-Marché est ainsi mise en évidence.

- A plus long-terme, l'intensité de la cohérence s'accroît et apparaît moins volatile. La nature des liens est, cependant, plus complexe par des interactions bilatérales entre les actions et le Marché. Le phénomène d'Interdépendance est ainsi mis en évidence : le Marché influence les actions mais celles-ci affectent l'indice.

Ces résultats illustrent et confirment la puissance des ondelettes multivariées pour l'études des interactions entre les variables. Elles permettent de redéfinir la notion de risque systématique avec une approche multidimensionnelle des liens entre les actions et le Marché. Les gestionnaires de portefeuilles peuvent alors apercevoir/appréhender au cours du temps dans qu'elles proportions une action est sujette aux variations du Marché selon plusieurs horizons de placement. Ils ne disposent pas, cependant, d'un calcul de cette sensibilité.

Une estimation d'un Beta tempo-fréquentiel, calculée à partir de la cohérence et de la phase, est proposée par la suite pour étudier la dynamique tempo-fréquentielle du risque systématique. Elle conduit aux résultats suivants :

- La volatilité du beta se différencie selon les horizons d'investissement retenus. A court-terme, les betas sont beaucoup plus erratiques et volatils tandis qu'à long-terme ils apparaissent plus lissés et leurs variations sont plus larges.
- Les effets des crises de 2007-2008 et de 2011-2012 sur la dynamique de court et de long terme du risque systématique montrent que chaque action réagit différemment aux chocs. A titre d'exemple, les Betas de long-terme d'AXA augmentent fortement durant les crises tandis que ceux de LVMH et d'ORANGE ont tendance à diminuer.

Cette approche est une version différente de celle développée dans le chapitre précédent. Afin de préciser les différences qui peuvent exister entre elles, nous proposons en Annexe une étude comparative entre les ondelettes discrètes et continues sur données simulées qui reproduisent les caractéristiques des variables de la droite de marché. Nous estimons les Betas roulants de manière intuitive puis avec la Fenêtre Tempo-Fréquentielle, et enfin avec les ondelettes continues (discrétisées pour réaliser cette opération). La comparaison s'effectue avec une discrétisation des Betas issus de l'approche par ondelettes continues ce qui permet

d'en calculer leurs différences. On observe un décalage croissant entre les Betas issus de la Fenêtre Tempo-Fréquentielle et de l'approche intuitive, et l'estimation par les ondelettes continues fournit des chroniques de Betas moins erratiques. Les différences entre les méthodologies discrètes et continues sont très significatives à long-terme, même si on note que les Betas issus de la Fenêtre Tempo-Fréquentielle et ceux provenant de l'approche continue suivent les mêmes évolutions. Les deux approches fournissent en définitive des résultats concordants et les différences proviennent uniquement du raffinement fréquentiel qui est plus important avec les ondelettes continues. Il est ainsi possible d'établir le degré de robustesse temporelle des profils-risque en fixant une fréquence particulière et la robustesse fréquentielle en spécifiant un instant t du temps.

*Annexe du Chapitre: Time-Frequency Varying Estimations - Comparison of Discrete and Continuous wavelets in the Market Line framework
(Estimations variable Tempo-Fréquentielles - Une comparaison des Ondelettes Discrètes et Continues dans le cadre de la Droite de Marché)*

Résumé en français

Cet article se concentre sur une comparaison de trois méthodologies basées sur les ondelettes afin d'estimer un paramètre variant dans le temps et la fréquence. Dans le cas discret, nous opposons l'application intuitive de la Régression Roulante sur les bandes de fréquence d'ondelettes à la Fenêtre Roulante Tempo-Fréquentielle. Nous comparons si nous devons utiliser une Fenêtre Roulante Temporelle directement sur les bandes de fréquences des ondelettes ou appliquer à la série une Fenêtre Roulante Tempo-Fréquentielle qui réalise la décomposition en ondelettes à chaque étape du processus. Un estimateur variable en fonction du temps calculé par les ondelettes continues est également considéré dans la comparaison. Notre objectif est de montrer que la Fenêtre Roulante Tempo-Fréquentielle et l'estimation par ondelettes continues sont plus appropriées que la méthode intuitive. Nous utilisons, dans un premier temps, des données simulées puis, dans un deuxième temps, les rendements quotidiens d'AXA et de l'indice CAC 40 de 2005 à 2015 dans une application empirique. Nous montrons que les différences entre les méthodes discrètes sont plus importantes aux basses fréquences. De plus, les bêtas temps-fréquences issus des ondelettes continue sont plus proches des estimateurs de la Fenêtre Temps-Fréquence.

Measuring the risk is one of the objectives of portfolio manager and analyst. The CAPM of Sharpe (1964) provides a simple measure of systematic risk by the Beta parameter. This indicator represents the exposure to the market risk and thus the sensitivity of an equity to market fluctuations. Considering the OLS and CAPM hypotheses, the Beta is constant over time. However, many studies as those of Black, Jensen et Scholes (1972), Fama and McBeth (1973), and Fabozzi and Francis (1977) focused on CAPM limits and the instability of its main parameter the Beta. Consequently, an important literature emerges to develop a Time-Varying estimation of risk such as the rolling window (Faff et al [1992, 1998], Brooks et al [1992, 1998]).

Moreover, the hypothesis of homogeneity of agents behavior represents an important limit in risk measurement. The tool used to appreciate the risk supposes that all agents share the same investment horizon. Empirically, the market is composed by short-run traders and long-run investors but they still use the same computation and model. In this context, the Time-Frequency analysis and the Wavelets represent a suitable tool to analyze the risk according different investment horizons.

The Time-Frequency Analysis, elaborated by Haar in 1909 and Gabor (1946) is an important advance to separate the frequency components of a time series and allows a time representation of it. There are different types of wavelets decompositions: the Continuous wavelets Transforms (CWT) and the Discrete Wavelets Transforms (MODWT). The discrete wavelets transformation is a practical simplification of CWT because it is based on dyadic scale regrouping the frequencies in bands. High-Frequency Bands are tight and regroup short-run horizon whereas the Low-frequencies bands are larger and related to large investment horizon. In the CWT, the frequencies are separately analyzed so the decomposition consider specific and particular investment horizon. Consequently, the wavelets are suitable to take into consideration the hypothesis of heterogeneous behavior and analyze the time-frequency relationships between variables in finance.

The continuous wavelets are mainly used to appreciate the time-frequency linkages between different variables thanks the wavelets-coherence. Rua and Nunes (2009) study the co-movement between several markets with CWT, Bekiros and Marcellino (2013) analyze the dynamics of exchanges rate, Vacha and Barunik (2013), Bekiros *and al* (2016) examine the commodities-energy markets linkages.

In the CAPM framework, Gençay *et al* (2003-2005) study the Beta diversification across different investment horizons by using discrete wavelets decomposition and highlight that the systematic risk is frequencies varying. Mestre and Terraza (2018a) show that the beta value (of an equity) is strongly volatile but it is differentiated across frequencies. McNevin and Nix (2018) study the Beta time-frequency variations by economic sectors using similar approach. They find that the Beta is time-frequency dependent. To highlight this result, they intuitively use the rolling forward regression with a fixed size window associated with discrete wavelets decompositions. This method is equivalent to consider a unique discrete wavelets decomposition of the time series. Conceptually this is contestable because the length of the series is an important parameter to determine the order of wavelet decomposition operated by successive filtering and subsampling. In this case, if we traditionally use the rolling window on discrete Wavelets outputs, the results may be biased. We developpe a Time-Frequency Rolling Window realizing the wavelets decompositions at each step of the rolling procedure. In this case, the wavelets are used inside the window.

The Continuous wavelets are used in the CAPM framework by Rua and Nunes (2012) to analyze the Beta of different countries portfolio. They used the Wavelets coherence to highlight that the importance of systematic risk is time-frequency varying. The risk is higher and stable at long-run than in short-run. Mestre and Terraza (2018b) use continuous wavelets to develop the time-frequency varying beta estimation. They indicate that the systematic risk can be differentially estimate across time and frequency in order to analyze the greater or lesser robustness of the risk-profil.

The objective of this paper is to compare theses three wavelets methodologies (based on discrete and continuous wavelets) to appreciate the difference between the time-frequency varying betas estimates. In the discrete case, we consider the intuitive association of the wavelets decompositions and the Rolling Regression and the Time-Frequency Rolling Window. In the continuous case, we refer to the methodology developed by Mestre and Terraza (2018b). We based our calculations on simulated data characterizing different situations and as an empirical application, we use the daily returns of AXA and the CAC40 index from 2005 to 2015 in order to estimate the Beta of it market line by these three methods.

1 Time-Frequency Betas Methodologies

In this part, we present briefly the theoretical aspects of wavelets, and the different way to estimate a time-frequency varying parameter in the CAPM framework. We simulate data to illustrate various market situations in order to clearly analyze the Betas differences between these methods.

1.1 Theoretical aspects of Wavelets

The wavelets method is a mathematical tool developed to reduce the time or frequency arbitrage imposed by the Fourier Transform. There are two types of wavelets decomposition, the Continuous transforms and the Discrete transform.

The Continuous Wavelets Transform (CWT) is based on a particular function $\psi(t)$ called Wavelet-Mother with zero-mean and energy/variance preserving properties.

$$\psi_{\tau,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (1)$$

The wavelet-mother is shifted by τ and dilated by s to provide the wavelet family $\psi_{\tau,s}(t)$ (equivalent to the filter).

The wavelets coefficients are calculated by the following equation:

$$W(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt = \langle x(t), \psi_{\tau,s} \rangle \quad (2)$$

$\psi^*\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$ is the complex conjugate of $\psi_{\tau,s}(t)$.

These coefficients represent the values of $x(t)$ at frequency scale s and around the time τ , consequently we have a time representation of the frequency component of $x(t)$. In this paper the wavelet-mother used is the Morlet wavelet $\psi_M(t)$:

$$\psi_M(t) = \pi^{-1/4} e^{if_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (3)$$

where $i^2 = -1$ and f_0 the non-dimensionnal frequency equal to 6 in order to have a good balance between Time and Frequency localization (Torrence and Compo [1998]).

The previous equations present the continuous wavelets decomposition (CWT) but there is also a Discrete Wavelets Transform (DWT) easiest to implement. The DWT is based on

dyadic scale (the length of series N must be a multiple of 2) in order to reduce the computational time. However, in this paper, we use a particular version of DWT called Maximal Overlap Discrete Wavelet Transform (MODWT) having supplementary properties as a better variance analysis without the dyadic constraint.

The MODWT can be viewed as a practical simplification of the CWT by discretizing the parameter s and τ . The objectif is to reduce the frequency step without lose informations about the series, consequently, we consider frequency bands gathering intermediate frequencies of the decomposition. Therefore, there is also an optimal level J indicating the number of frequency bands needed to reconstruct the series named the depth of the MODWT.

$$J = \frac{\text{Ln}(N)}{\text{Ln}(2)} \quad (9)$$

The decomposition is realized by a successive filtering of the series and wavelets coefficients with rescaling and subsampling operations. This is called the Cascade Algorithm of Mallat (1989,2001, 2009). On this basis, the MODWT can be assimilated as a Band-Pass Filter composed by a High-Pass Filter $\psi(t)$ called the Wavelet-Mother and a Low-Pass Filter $\phi(t)$ called the Wavelet-Father. As previous $\psi_{\tau,s}(t)$ and $\phi_{\tau,s}(t)$ are the Wavelet Mother and Father shifted by τ and dilated by s .

In the algorithm, the series $x(t)$ is consecutively filtered by $\psi_{\tau,s}(t)$ and $\phi_{\tau,s}(t)$ J times to obtain the details coefficients associated to a particular frequency bands j and the smooth coefficients associated to J level. After the decomposition, we have a frequency repartition of the series on frequency bands D_j for $j=1, \dots, J$ related to a time horizon (see appendix table 1). We can reconstruct the original series by summing up the frequency bands:

$$x(t) = S_{j,x} + \sum_{j=1}^J D_{j,x} \quad (10)$$

The series is a sum of an approximation S_j and the Frequency Bands D_j with different resolution level j (different investment horizon).

The MODWT provide frequency bands of length N , so it is possible to compute the wavelets variance of each bands as:

$$V(D_{j,x}) = \frac{1}{N_j} \sum_t^{N-1} \tilde{a}_{j,x,t}^2 \quad (11)$$

Where $\tilde{\mathbf{a}}_{j,x,t}^2$ are the wavelets coefficients at the level j. N_j is the number of coefficients non-affected by boundary (see Gençay *et al* [2003]).

In a multivariate framework, by considering another time series $y(t)$, we can compute the wavelets covariance between the frequency bands of level j of each series such as:

$$Cov(D_{j,x}, D_{j,y}) = \frac{1}{N_j} \sum_t^{N-1} \tilde{\mathbf{a}}_{j,x,t} \tilde{\mathbf{a}}_{j,y,t} \quad (12)$$

Consequently, an estimator Beta for each frequency bands is written as follow:

$$\beta_j = \frac{Cov(D_{j,x}, D_{j,y})}{V(D_{j,x})} = \frac{\frac{1}{N_j} \sum_t^{N-1} \tilde{\mathbf{a}}_{j,x,t}^2 \tilde{\mathbf{a}}_{j,y,t}^2}{\frac{1}{N_j} \sum_t^{N-1} \tilde{\mathbf{a}}_{j,x,t}^2} \quad (13)$$

The Continuous Wavelets Transform (CWT) can provides a Multivariate case by providing tools to compute the correlation between two signal $x(t)$ and $y(t)$ as the Wavelet Coherence and Phase. These tools are a translation of the spectral analysis methods to the wavelets framework. In this case, we define $SW_{xy}(s, \tau)$ the cross-wavelets transformation and $|SW_{xy}(s, \tau)|^2$ the cross-wavelets power spectrum describing the time-frequency covariance, such as :

$$SW_{xy}(s, \tau) = W_x(s, \tau).W_y^*(s, \tau) \quad (14)$$

$W_x(s, \tau)$ is the wavelets coefficients of $x(t)$ and $W_y^*(s, \tau)$ is the complex conjugate of the coefficient $W_y(s, \tau)$ of $y(t)$.

It is also relatively easy to define the wavelet coherence $WQ(s, \tau)$ as the ratio of the cross-spectrum on the auto-power spectra $|W_x(s, \tau)|^2$ and $|W_y(s, \tau)|^2$ describing the wavelets variance of the two series :

$$WQ(s, \tau) = \frac{|G(s^{-1}.SW_{xy}(s, \tau))|^2}{G(s^{-1}.|W_x(s, \tau)|^2).G(s^{-1}.|W_y(s, \tau)|^2)} \quad (15)$$

G is a time-frequency smoothing operator used to have real values of the coherence (Torrence et Webster [1999]).

With the cross-transforms by continuous wavelets, we can compute the Phase function $\theta_{x,y}(s, \tau)$ providing supplementary informations on the links between $x(t)$ and $y(t)$ such as the

sign of the correlation. If the two series are *in phase* so they are positively correlated at the opposite if they are *out-of-phase* the correlation is negative. The phase is the arc-tangent of the real and imaginary part ratio of the cross-wavelets transform:

$$\theta_{x,y}(s, \tau) = \arctan\left(\frac{\Im(SW_{xy}(s, \tau))}{\Re(SW_{xy}(s, \tau))}\right) \quad (16)$$

The coherence formula is similar to a the determination coefficient (R^2) so it is possible to find the values of the Beta at each frequency and time. From these tools we develop a time-frequency estimator of the Beta $\beta_{\tau,s}$ based on CWT⁷ :

$$\beta_{\tau,s} = \theta_{\tau,s} * \sqrt{WQ_{\tau,s}} * \frac{G(s^{-1}|SW_x|^2)^{1/2}}{G(s^{-1}|SW_y|^2)^{1/2}} \quad (17)$$

For a given s and τ , $WQ_{\tau,s}$ is the wavelets coherence and $\theta_{\tau,s}$ a phase parameter equal to 1 if the series are in phase or -1 if they are *out-of-phase*.

Contrary to the discrete estimator of equation (13) the $\beta_{\tau,s}$ estimated by continuous wavelets are time and frequency varying.

1.2 The Wavelets in the CAPM Framework

Our paper is based on the Capital Asset Pricing Model (CAPM) of Sharpe (1964) and its relations between variables called the market line.

$$y_t = \alpha + \beta \cdot x_t + \varepsilon_t \quad (18)$$

y_t and x_t are stationary stochastic processes illustrating respectively the asset returns and market returns and ε_t is a *i.i.d*($0, \sigma_\varepsilon$) process.

The parameter β estimated by OLS is BLUE estimators by hypothesis and represents the systematic risk of the asset.

The CAPM model supposes that the risk estimated by Beta is stable and constant across time and whatever the investment horizon. It doesn't consider the time evolution (or changings) of systematic risk and the behavioral hypothesis about heterogeneity of agents. To overcome this

⁷ See. Mestre and Terraza (2018)

problem, we use in this paper different wavelets transforms to decompose the series in the time-frequency space and estimate the beta parameter.

The frequency bands of discrete decomposition are sub-chronic for which it is possible to estimate the Beta of the CAPM as show Gençay *et al* (2003). However, the Betas estimated on frequency bands are not time-varying. However, it is possible to use rolling window to estimate a parameter at each iteration. Mestre and Terraza (2018) apply this method to estimate the beta of French stocks with daily data and highlight that at long-run the beta is higher volatile than in short-run. The frequency dynamic of beta is significantly different than the standard rolling beta estimate without wavelets. This approach is also used by McNevin and Nix (2018) with monthly data to analyze the time variations of the Betas by economics sectors. They find that the beta is time and frequency varying and its dynamics are different according sectors. These authors intuitively apply the rolling regression with a fixed window of length L on the frequency bands resulting from a wavelets decomposition based on N observations.

The intuitive combination of the Forward Regression with Rolling Window and Wavelets Decomposition is conceptually contestable because of the parameter estimate is realized on L points (inside the window) whereas the wavelets decompositions are based on N points (total number of observations). In this case, there is not a concordance between the size of the regression and the size of the decomposition. Consequently, the wavelets coefficients are not rescaled and subsampling when the window slides overtime. In practice, it would be conceptually preferable to decompose the series at each step of the regression. Thus, we use the Time-Frequency Rolling Window realizing simultaneously the wavelets decompositions of the series and the parameter estimation at each step of the Forward Regression.

In this paper, we compare different ways to estimate a time-frequency beta with discrete and continuous wavelets. In the discrete case, we use the Forward Rolling Regression with a constant window length equals to L combined with MODWT. In the continuous case, equation (17) is used to estimate Betas across time at each frequency.

By this way, we define the following varying Betas:

- β_r represents the standard Rolling Betas estimated without the frequency decomposition.
- β_F represents the Rolling Betas estimated with the intuitive approach. First, we decompose the series with the MODWT and after, in a second, we use the rolling window on the frequency bands. Only one wavelets decomposition (based on N observations) is realized. We estimate N-L time-varying Betas on each frequency bands.
- β_{TF} are the Time-Frequency Rolling Betas estimated with the Time-Frequency Rolling Window. The wavelets decompositions is realized inside the window of length L, so the number used to decompose the series is equal to L and not N in this case. This method estimates N-L time-varying parameter on each band.
- $\beta_{\tau,s}$ are the Time-Frequency varying Betas estimated by Continuous Wavelets. By this way we estimate N Betas at each frequency.

The different estimated betas have not the same nature, β_F and β_{TF} are estimated for frequency bands regrouping several frequencies (discrete case) whereas $\beta_{\tau,s}$ is estimated for a specific frequency s (continuous case). In order to appreciate the difference between the three methods, we need to realize some adjustments to ‘discretize’ the $\beta_{\tau,s}$.

First, to simplify the analysis, we consider only the D1, D2 and D6 frequency bands corresponding respectively to short-run investment (2 – 4 days), medium run (1- 2 weeks) and long run (3 – 6 months) investment horizon. Second, in the continuous case, we compute the frequency mean of the $\beta_{\tau,s}$ for the frequencies corresponding to the previous bands (D1, D2 and D6). Third, β_F and β_{TF} have not the same length as $\beta_{\tau,s}$, consequently, we calculate the rolling mean of $\beta_{\tau,s}$ across time (with length equal to L) in order to guarantee the time coherence of the comparison. The ‘discretize’ chronic of $\beta_{\tau,s}$ is noted MBc thereafter (for ‘Modified Betas continuous’).

1.3 Comparison of the three methods with Simulated data

In order to concretely assess the differences between these three methods, we resort to simulated data corresponding to the variables of equation (1) and we estimate the Beta to compare them each other's. The number of observations N is equal to 2,800 with a time step of $\Delta t = 1$ in each simulation (similar to a daily frequency).

For the 3 simulations, x_t is a sample of a centered AR(1)-GARCH(1,1) process with $\phi_1 = 0.6$ for the AR part, $u_1 = 0.7$ and $w_1 = 0.2$ for the GARCH part verifying $u_1 + w_1 < 1$. We fix the market line parameters $\alpha = 0$ and $\beta = 1$ in order to compute the y_t by adding simulated ε_t to x_t . In this case, we simulate different ε_t to create three cases corresponding to the lesser or greater volatilities of the CAPM errors and so different Beta dynamics.

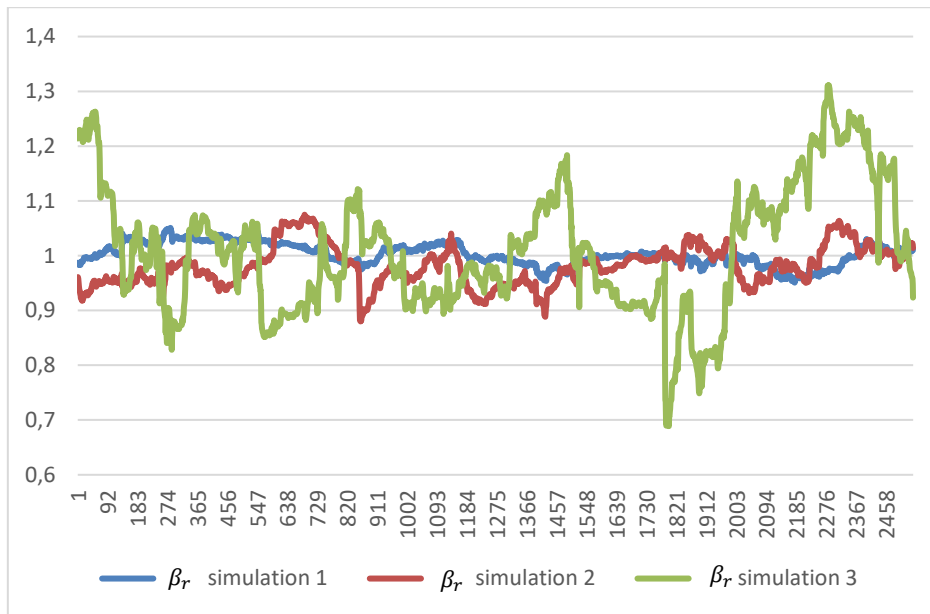
- The first simulation is elaborated with an $\varepsilon_t \sim i.i.d. (0,1)$ and represent the theoretical case.
- For simulation 2, $\varepsilon_t \sim \text{AR}(1) - \text{GARCH}(1,1)$ with $\phi_1 = 0.4$ for the AR part and $u_1 = 0.3$ $w_1 = 0.3$ for the GARCH(1,1) part such as $u_1 + w_1 < 1$. In this case, $\hat{\sigma}_\varepsilon = 1.55$ corresponding to a relatively low volatility.
- For simulation 3, $\varepsilon_t \sim \text{AR}(1) - \text{GARCH}(1,1)$ with $\phi_1 = 0.8$ for the AR part and $u_1 = 0.6$ $w_1 = 0.3$ for the GARCH(1,1) part such as $u_1 + w_1 < 1$. In this case, $\hat{\sigma}_\varepsilon = 4.53$ corresponding to a relatively high volatility.

For the 3 cases, we estimate the traditional Beta by OLS, the β_r (without wavelets) and finally the β_F , β_{TF} and the "discretized" $\beta_{\tau,S}$ noted MBC.

The OLS estimations for the 3 regressions (Appendix A2) indicate that the $\alpha = 0$ and $\beta = 1$. The determination coefficient (R^2) are higher for simulations 1 and 2 and lower for simulation 3 in accordance with the simulated ε_t . Simulation 1 is the only one with characteristics of its residuals close to those of an *i.i.d.* process, while for the other two it is a function of the greater or lesser volatility of ε_t .

Figure 1 illustrates the estimated rolling Betas β_r for the three simulations and their volatilities.

Figure 1 : Standard Rolling Betas



	Average Beta	S.D.
Simulation 1	1	0.02
Simulation 2	0.98	0.04
Simulation 3	1	0.11

S.D. = Standard Deviation of β_r

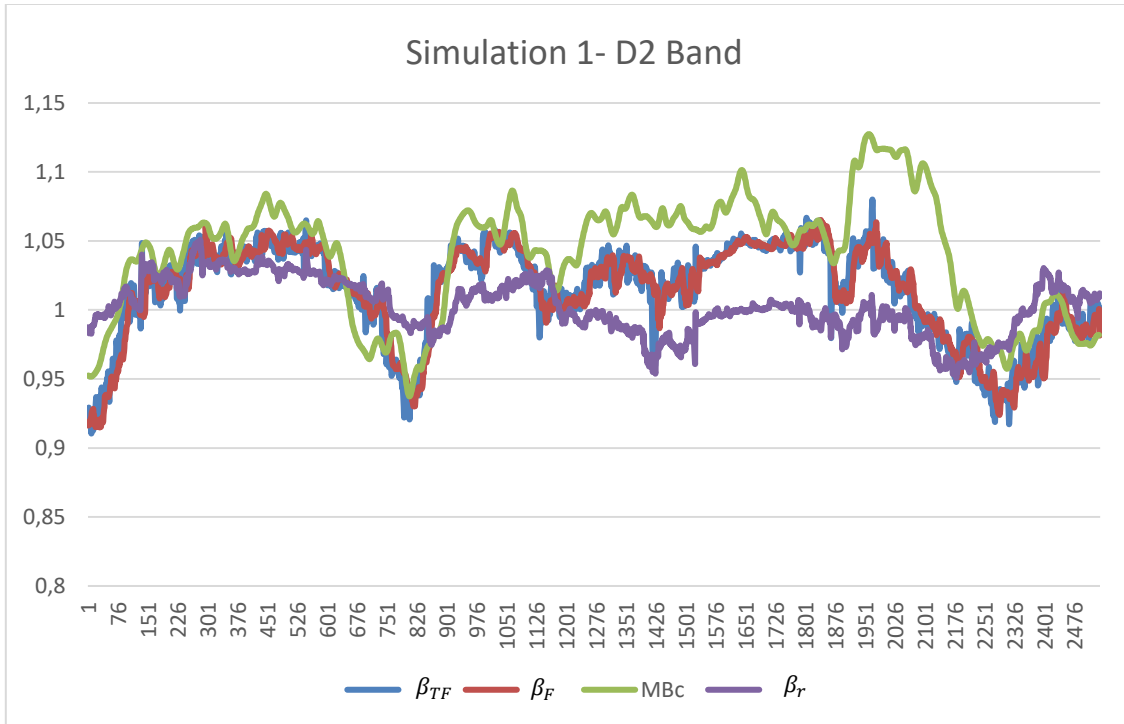
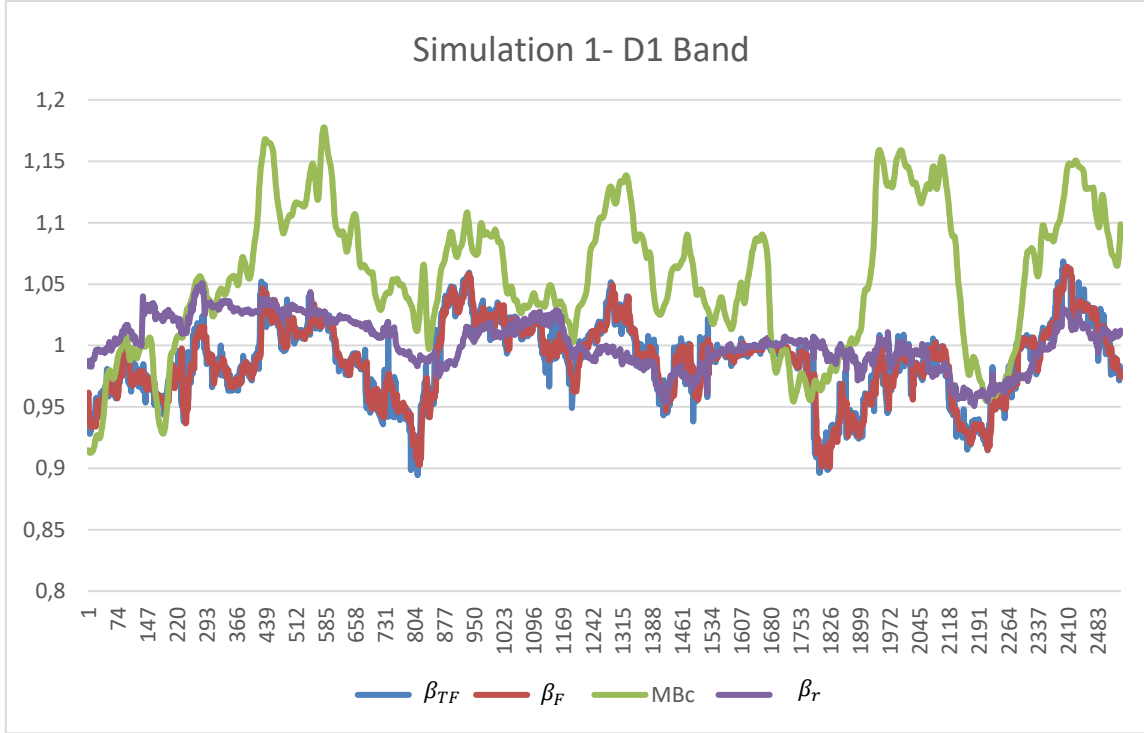
These results confirm our expectation related to the construction of the simulations : the mean of the betas is not significantly different from one (the theoretical value) whereas the standard deviation of the betas of simulation 3 is the most important.

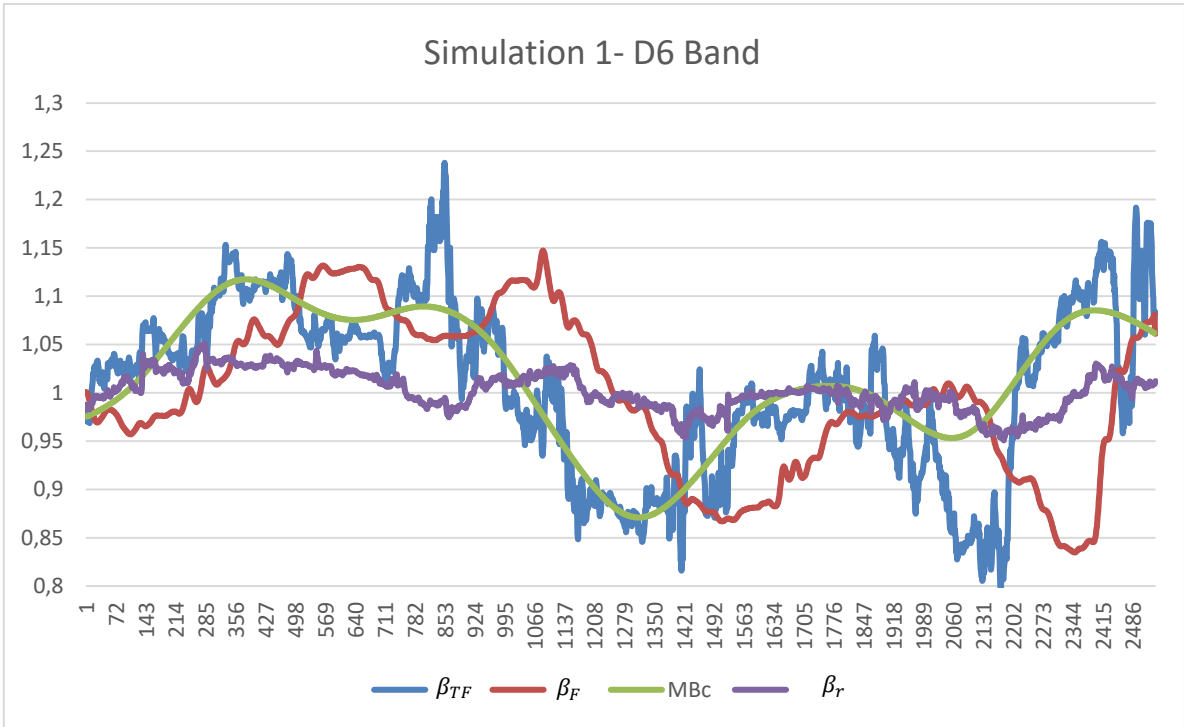
In order to apply the intuitive method, we decompose the series with MODWT with the La8 wavelets of Daubechies. We estimate by OLS the Standard Beta on each frequency bands (Appendix A2.2). As previous, the betas are not significantly different from one and the coefficients of determinations are very high except for the simulation 3 which has the most volatile ε_t .

The Figures 2 illustrated the differents varying parameters for each simulation (for D1-D2-D6).

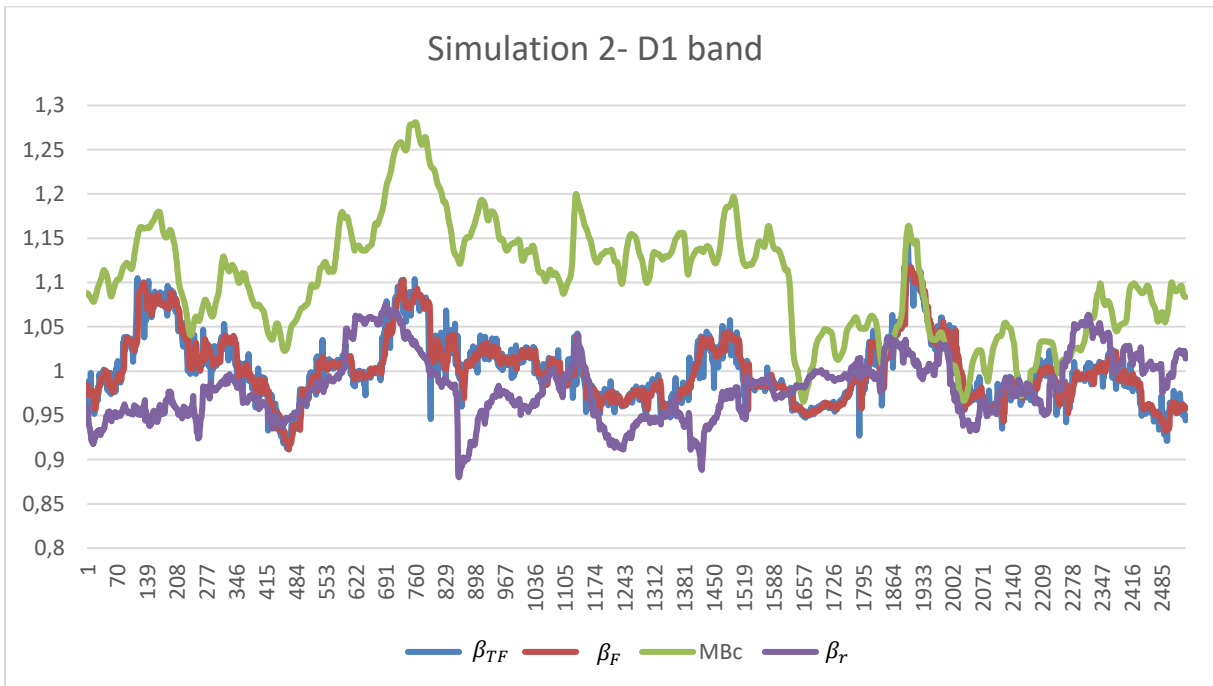
Figures 2 : Time-Frequency Varying Betas

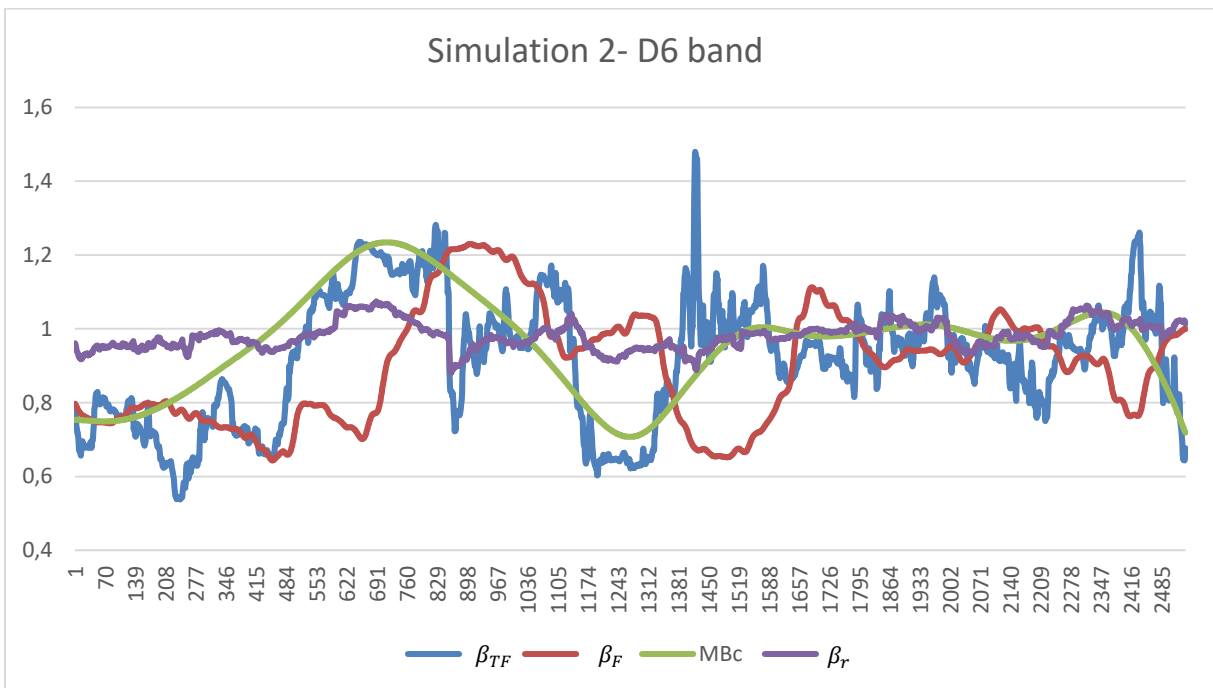
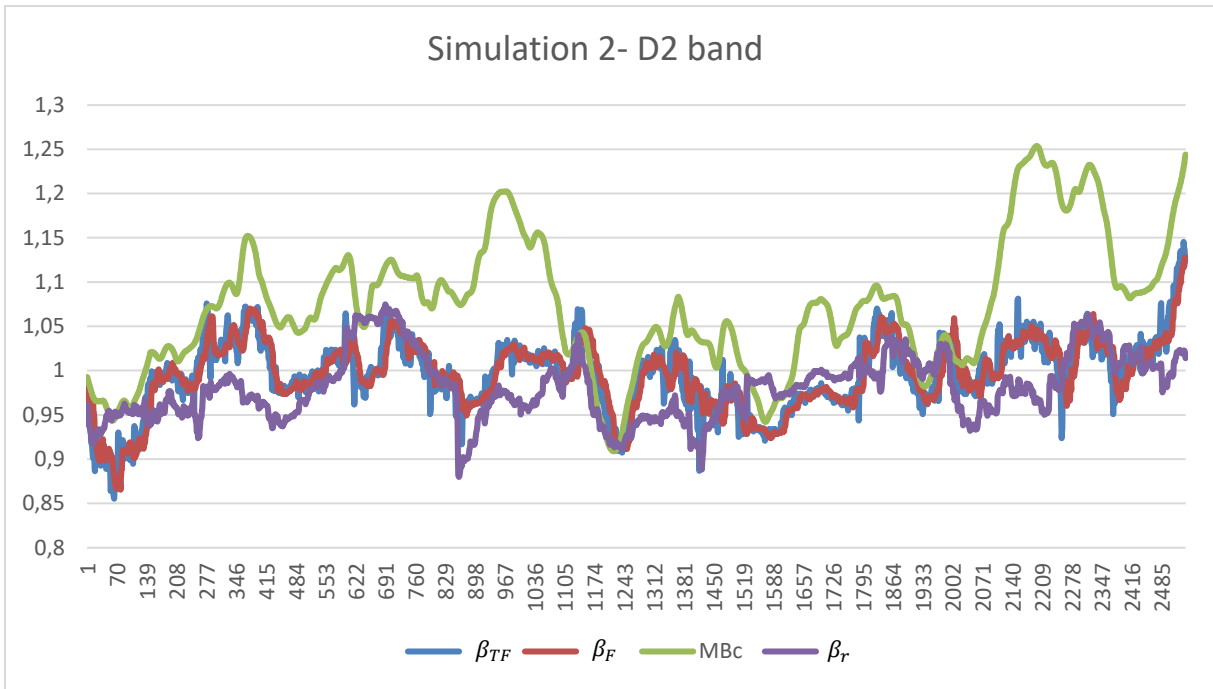
Figures 2a ; Varying Betas of Simulation 1



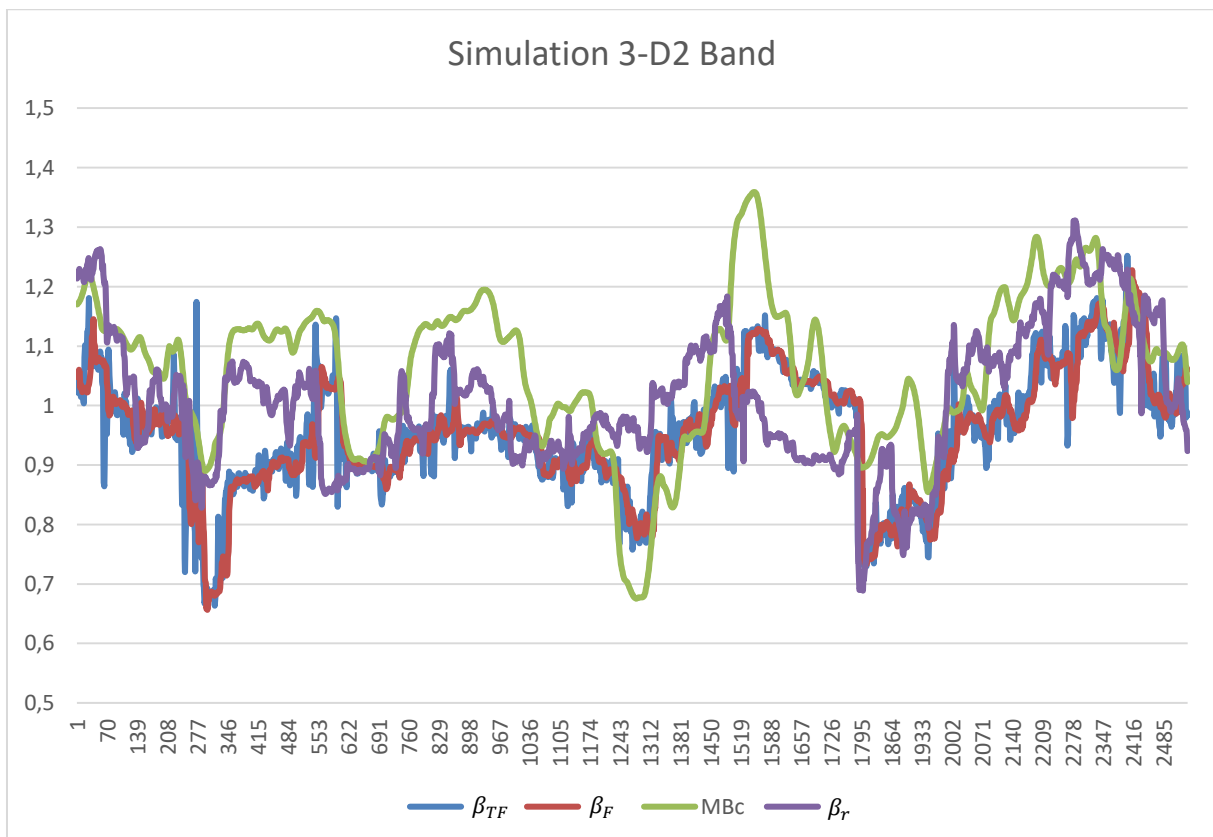
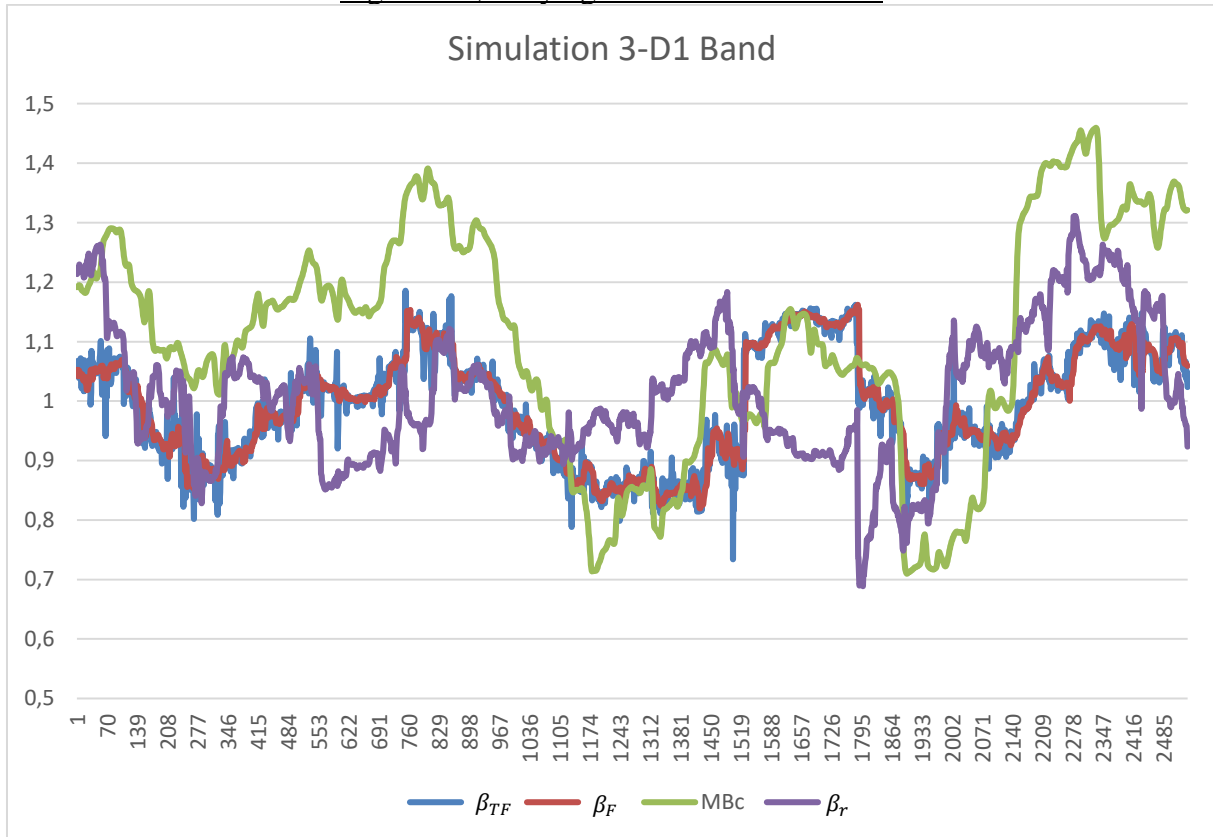


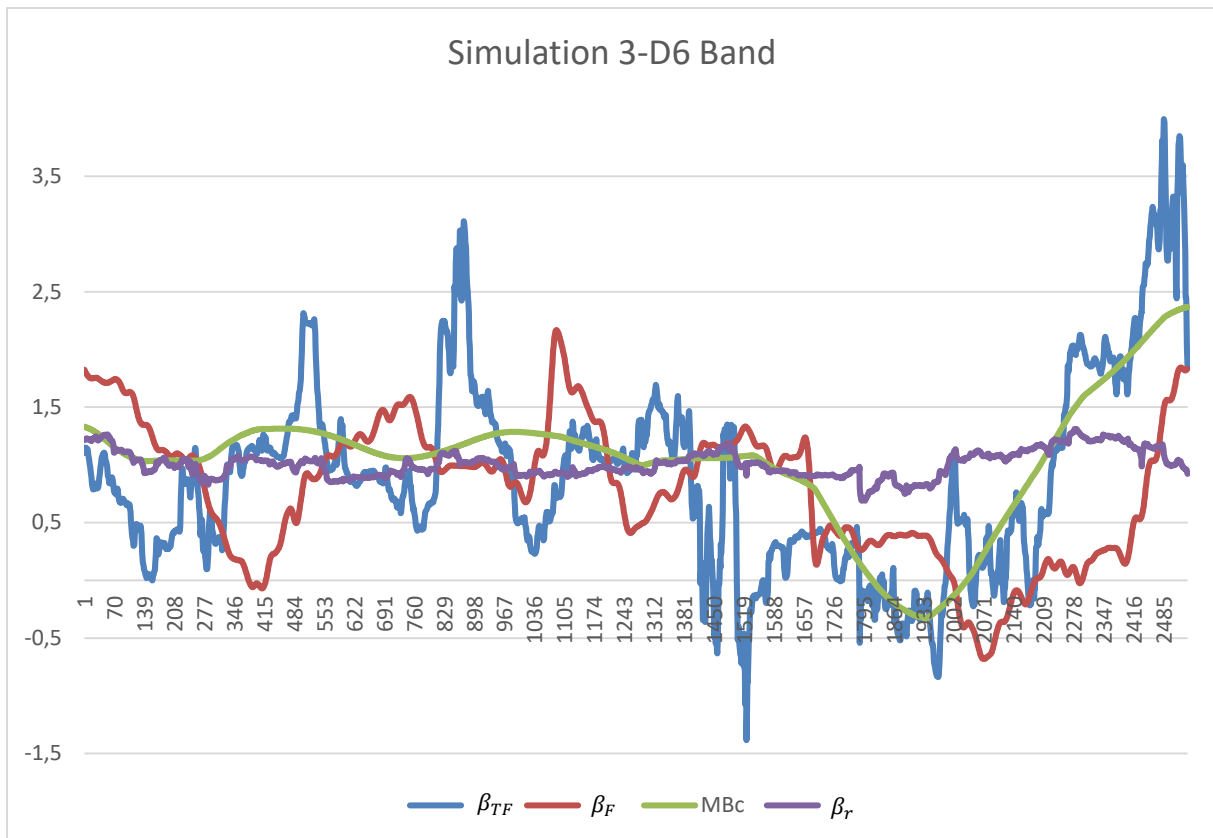
Figures 2b ; Varying Betas of Simulation 2





Figures 2c; Varying Betas of Simulation 3





The three varying wavelets betas are relatively close to the standard rolling betas at High-Frequencies (D1-D2) especially for simulation 1 where the residuals are *i.i.d.* process. At Low-Frequencies (D6), the differences are more pronounced. These figures highlight the higher volatility of the Beta in simulation 3 especially at Low-Frequencies bands.

Whatever the simulation, we note an increasing gap between β_F et β_{TF} as the scale increases : β_F et β_{TF} are similar for D1 and D2 but totally different on D6 band and the differences seems more important for the simulation 3. Moreover, the Betas estimated with continuous wavelets are less erratic than the others betas (of discrete case) because of the ‘‘discretization’’ used to compare the parameters.

At High-Frequencies, the $\beta_{\tau,S}$ (noted MBc) share globally the same evolutions than the others betas but at Low-Frequencies the $\beta_{\tau,S}$ dynamic is relatively closer to the β_{TF} compare to the β_F .

In order to analyse and confirm these observations, we compute in Tables1 the means and the standand deviations of the previous betas chronics.

Tables 1: Time-Frequency Varying Betas Characteristics

1.1 For β_F

Simulation	β_F	D1	D2	D3	D4	D5	D6
1	Average Beta	0.99	1.01	0.99	1	0.99	0.99
	S.D.	0.031	0.035	0.033	0.045	0.04	0.09
2	Average Beta	1	0.99	0.97	1.02	0.92	0.9
	S.D.	0.038	0.039	0.097	0.075	0.097	0.154
3	Average Beta	0.99	0.96	1.08	1.01	1.05	0.78
	S.D.	0.092	0.099	0.189	0.231	0.423	0.591

1.2 For β_{TF}

Simulation	β_{TF}	D1	D2	D3	D4	D5	D6
1	Average Beta	0.99	1.01	0.99	1	0.99	1
	S.D.	0.032	0.035	0.033	0.047	0.047	0.087
2	Average Beta	1	0.99	0.97	1.02	0.93	0.92
	S.D.	0.038	0.041	0.095	0.079	0.107	0.17
3	Average Beta	0.99	0.96	1.08	1	1.05	0.88
	S.D.	0.092	0.101	0.195	0.238	0.428	0.836

1.3 For $\beta_{\tau,s}$

Simulation	$\beta_{\tau,s}/MBC$	D1	D2	D6
1	Average Beta	1.05	1.04	1.01
	S.D.	0.06	0.04	0.07
2	Average Beta	1.11	1.07	0.96
	S.D.	0.06	0.07	0.14
3	Average Beta	1.1	1.06	1.03
	S.D.	0.19	0.13	0.54

Regardless of the simulation, we note that the standard deviations are higher on D5-D6 (long-term) compared to D1-D2 (short-term) and some differences appears between β_F and β_{TF} at long-run. Low-frequency betas (D5-D6) are more volatile than high-frequency betas (D1-D2), so beta is less stable on low frequencies than on high frequencies and the nature of residuals fosters this volatility. The more the residuals are heteroscedastic the more the betas are volatile over time.

These results confirm the previous graphical observations : the β_F is more "smoothed" than β_{TF} and we observe an increasing shift between β_F and β_{TF} . The $\beta_{\tau,S}$ also appear more smooth than the others betas because of the standard deviations are weaker. But this fact is due to the ‘‘discretization’’ method used to realize the comparison (aggregation of frequencies and rolling mean).

In order to appreciate the differences between the previous methodologies, we calculate the mean (in absolute value) of the differences between the rolling estimators (Table 2).

We note, in average, that the differences between the two discrete methods (β_F and β_{TF}) are more important at low frequency bands (long horizon) whatever the simulation, whereas there are almost no differences between β_F and β_{TF} on the high frequencies (D1-D2). Moreover, we notice that the differences are more important for the third simulation. As explained before, the intuitive method doesn't consider the adequation between the window size/ length (260 points) and the number of points used during the decomposition (2800 points). In this case, the intuitive approach supposes a unique wavelet decomposition based on 2800 on and the rolling window of length 260 cuts frequency bands without considerate the rescaled or subsampled coefficients. At the opposite the Time-Frequency window realize a wavelet transform inside the window (at each iteration) so the window length and the number of points used in the decomposition are equal. In this case, the wavelets coefficients are rescaled according to the window length and the wavelets properties are respected. Thus, the time-frequency window is more preferable than the intuitive way.

These results confirm our hypotheses, higher the volatility of the residuals is greater the gap between β_F and β_{TF} is important and increases with the frequency scale.

These observations also concern the differences between β_r and β_F and those between β_r and β_{TF} . We see that differences begin to be relatively large from D5-D6 for simulation 1. For simulation 2, they are wider from D3, while for simulation 3, they are significant on each band.

Table 2: Differences between Betas Estimators.

MAE Between		D1	D2	D3	D4	D5	D6
Simulation 1	$\beta_r - \beta_{TF}$	0.03	0.03	0.02	0.03	0.04	0.06
	$\beta_r - \beta_F$	0.03	0.03	0.02	0.03	0.03	0.06
	$\beta_r - MBC$	0.06	0.05	/	/	/	0.05
	$\beta_F - \beta_{TF}$	0.01	0.01	0.01	0.02	0.04	0.09
	$\beta_F - MBC$	0.07	0.03	/	/	/	0.07
	$\beta_{TF} - MBC$	0.07	0.03	/	/	/	0.03
Simulation 2	$\beta_r - \beta_{TF}$	0.04	0.03	0.07	0.06	0.08	0.13
	$\beta_r - \beta_F$	0.04	0.04	0.08	0.07	0.09	0.15
	$\beta_r - MBC$	0.12	0.09	/	/	/	0.09
	$\beta_F - \beta_{TF}$	0.01	0.01	0.03	0.05	0.08	0.17
	$\beta_F - MBC$	0.1	0.08	/	/	/	0.16
	$\beta_{TF} - MBC$	0.1	0.08	/	/	/	0.09
Simulation 3	$\beta_r - \beta_{TF}$	0.11	0.09	0.13	0.20	0.32	0.62
	$\beta_r - \beta_F$	0.11	0.10	0.13	0.20	0.28	0.51
	$\beta_r - MBC$	0.17	0.1	/	/	/	0.35
	$\beta_F - \beta_{TF}$	0.01	0.03	0.07	0.14	0.28	0.79
	$\beta_F - MBC$	0.15	0.12	/	/	/	0.51
	$\beta_{TF} - MBC$	0.15	0.12	/	/	/	0.43

$$(MAE = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T |\hat{\beta}_i - \beta_i| \text{ pour } i = r, F, TF, (\tau, s) \text{ et } j = r, F, TF, (\tau, s) \text{ such as } i \neq j \text{ and } T = \text{number of Rolling Betas})$$

By analyzing the differences between the continuous betas and the discrete estimations, we note the followings comments:

- We observe that the differences between continuous betas and β_F increase as the scale increases but there is a break for the D2 band. This result is observed whatever the simulation but it is more pronounced for the third simulation due to the heteroscedastic nature of residuals.
- As previously observed the differences between continuous betas and β_{TF} are relatively weaker for D2 band, however, they don't increase at long-run except for simulation 3. At long-term, we notice that the errors between MBC and β_{TF} are lesser than the differences between MBC and β_F . So, we confirm our hypothesis: the continuous betas are closer to β_{TF} than to β_F .
- Whatever the simulation, the differences between continuous betas and the standard rolling betas β_r are again weaker for the D2 band. For simulations 2, the long-run betas differences are lower than errors for D1, and they are relatively closed to simulation 1. The long-run differences are higher than short-run errors only for simulation 3.

As a partial conclusion, the three wavelets procedures confirm that the beta is more volatile at low frequencies in particular when the residuals are strongly heteroskedastic. Moreover, the three methods are relatively similar at high-frequencies especially the two discrete approaches. The differences observed for the continuous betas are due, in part, to the “discretization” of $\beta_{\tau,s}$. At low-frequencies, the differences are more significant particularly between the intuitive approach and the time-frequency window method. At the opposite, the difference between betas estimated by continuous wavelets and by the time-frequency window are the lowest at this frequency. Consequently, we can conclude that the time-frequency window and the continuous method are relatively and conceptually similar because of the two betas chronic share the same tendency (evolutions) even if the errors are important.

These simulations show that it is possible to include frequency volatility in computations by joining regression software and wavelet computations. The use of the time-frequency window instead of the conventional rolling window is an asset to appreciate the stability of the regression parameter over time and frequency scales. Conceptually, the time-frequency window is more suitable than the intuitive approach because of the user does not change his calculations procedure since the discrete wavelet decomposition is realized inside the window at the same time as the regression at each new observation.

However, the simulated data used cannot fully represent the empirical observations of the market line characteristics. They are just a fairly picture of the structures observed for the market line variables and for the residuals resulting from its estimation. It is that why, we empirically apply these methodologies to comfort the previous results.

2 Time-Frequency Betas Estimation: Empirical Application.

As an empirical application part, we use the daily returns of AXA and the CAC40 index from 2005 to 2015 in order to estimate the Rolling Beta of it market line by the previous methodologies based on discrete and continuous wavelets

2.1 Static OLS Beta estimates

Previously, we check the stationary of the returns (see Appendixes A3) and then we estimate the Beta by OLS. The OLS beta is called ‘‘Classic Beta’’ because it is non-varying parameter supposed constant over the period. We also discreetly decompose our series with discrete wavelets and we estimate an OLS Beta for each frequency bands. Results are recorded in Table 2. The estimated parameters confirm the nullity of the constant and we note that all Betas and R^2 are significantly different to zero.

However according to the tests, the residuals are not a white-noise process, so we suppose that we are in the same case of Simulation 2 and 3. Consequently, the Minimal Variance property of BLUE estimator is not respected in our case, so the beta could be instable over time.

Table 2: Static Beta Estimates

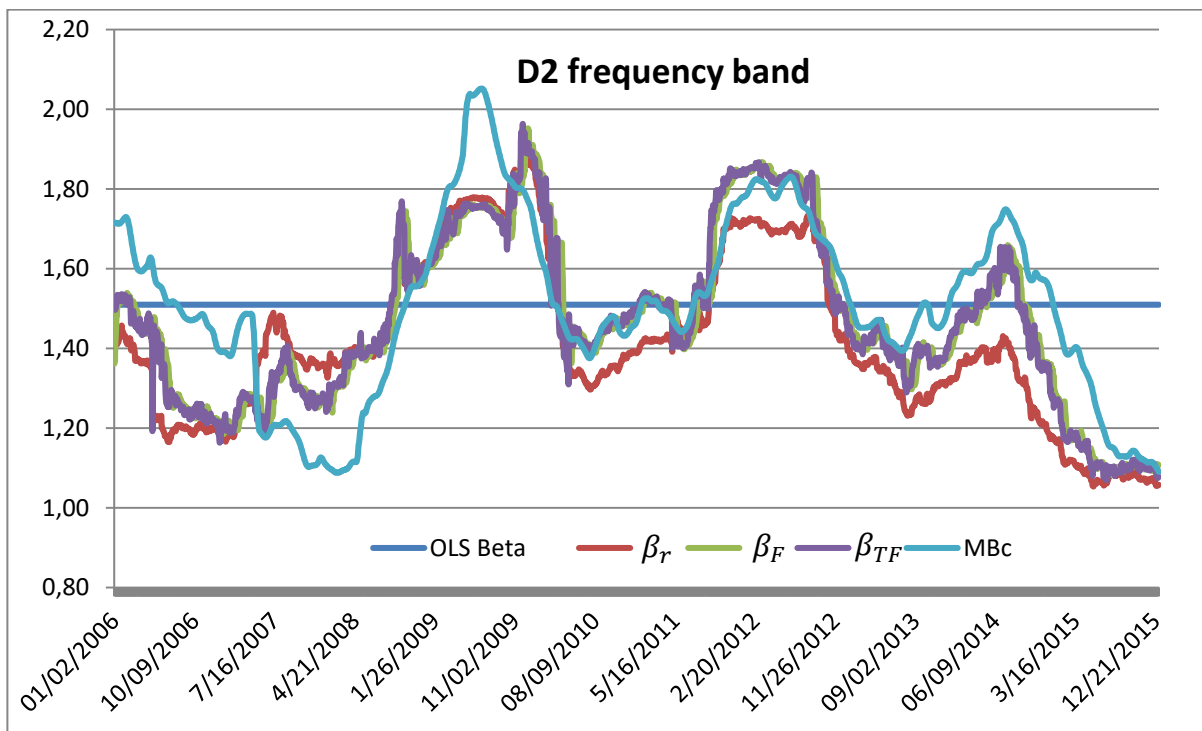
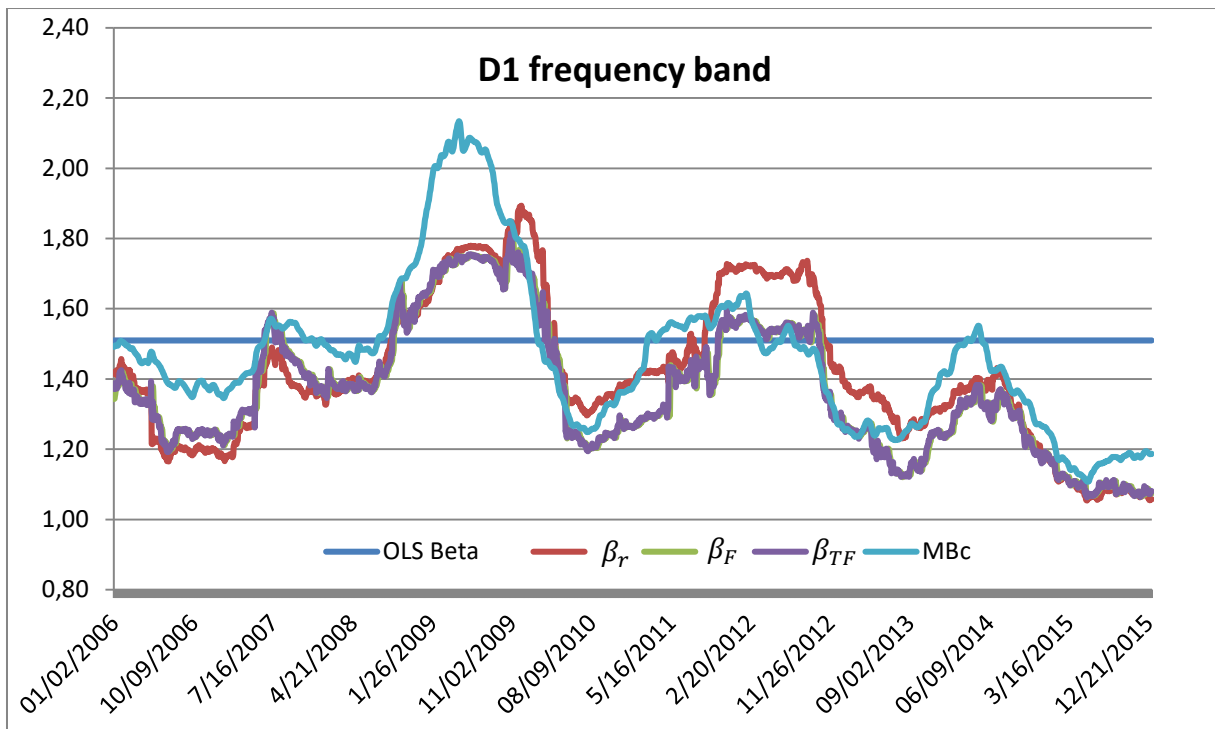
Axa	D1	D2	D3	D4	D5	D6	Overall Period
Beta	1.45	1.56	1.54	1.61	1.52	1.77	1.506
t-stats	78.36	80.39	75.8	79.97	60	85.1	77.98
Constant	0	0	0	0	0	0	0.000425
t-stats	0	0	0	0	0	0	1.54
R^2	0.68	0.69	0.67	0.69	0.56	0.72	0.68
LB	1050	2043	4678.9	5801	10905	13225	21.068
ARCH	621	792	1547	2664	2850	2864	62.132
JB	11765	10145	3695	1192	6617	2374	41993.2

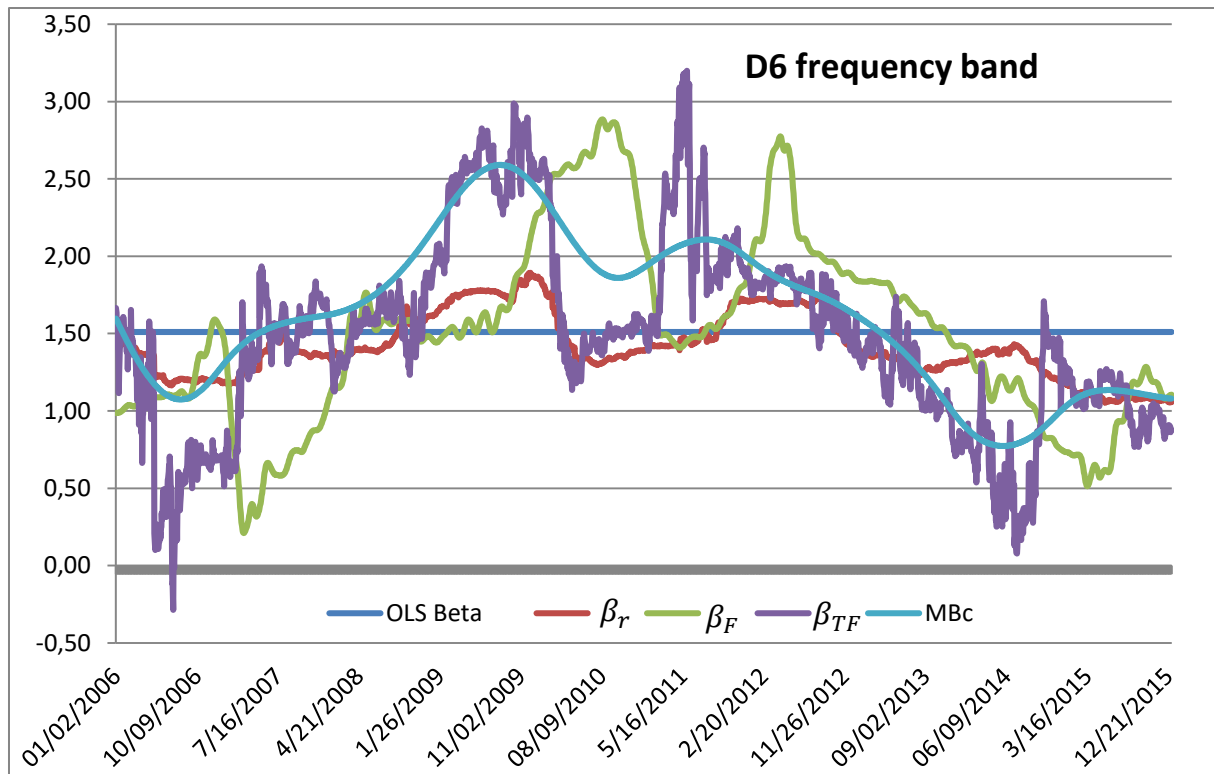
At 5% risk level, Colum LB (Ljung-Box test): $\chi^2(5)=11.1$; Colum ARCH (ARCH-LM test): $\chi^2(2)=5.99$; Colum JB (Jarque-Bera normality test): $\chi^2(2)=5.99$

2.2 Rolling Beta estimates β_{τ} , β_E , β_{TF} and $\beta_{\tau,s}$

We apply the three previous methodologies in order to estimates a time-varying Betas and modelize it instability. Figures 3 illustrates our results. We highlight the Beta volatility around its static estimator and we note a frequency differentiation of the beta dynamics.

Figures 3: Rolling Betas of AXA stock





We notice that the short-run Beta (D1 and D2 bands) are volatile around 1.51 (OLS Beta) but they are always greater than one so the initial risk-profile is preserved across time only the intensity of the risk is time varying. At the opposite, the long-run betas (D6 band) are more volatile than short-run Betas. Consequently, we note that the initial risk-profile is not the same across time.

We observe again a scale increasing gap between β_F and β_{TF} . The differences between these Betas increase with the frequency scale (time horizon larger). Moreover, the continuous betas are closer to betas estimated by the time-frequency rolling window because of they share the same dynamics. At high-frequencies (D1-D2 bands), $\beta_{\tau,S}$ are not totally similar to β_F and β_{TF} but they share globally the same dynamics (similar evolutions). At low-frequencies, $\beta_{\tau,S}$ are less volatile and erratic than β_F and β_{TF} but the $\beta_{\tau,S}$ dynamic is similar to β_{TF} . These results are similar to those observed for simulations 2 and 3.

To confirm these observations, we test if the betas differences are significant (or not) and we calculate its Mean in Absolute Value (see Table 3).

Table 3: Mean Absolute of Errors between different types of betas

MAE between	D1	D2	D3	D4	D5	D6
β_r and β_F	0.07	0.08	0.13	0.18	0.33	0.39
β_r and β_{TF}	0.07	0.08	0.11	0.17	0.28	0.35
β_r and MBC	0.12	0.16	/	/	/	0.33
β_F and β_{TF}	0.01	0.03	0.06	0.13	0.30	0.59
β_F and MBC	0.11	0.11	/	/	/	0.45
β_{TF} and MBC	0.11	0.11	/	/	/	0.25

We note that the differences between β_F and β_{TF} (the two discrete methods) are more important at long-run (low-frequencies bands) whereas there are no significant differences at short-run (high-frequencies). Globally, the differences become relatively important starting the D3 band, these results confirm our previous graphical observations. The estimation gap between β_F and β_{TF} increases as the frequency scale increases.

At high-frequencies, the difference between β_{TF} and $\beta_{\tau,S}$ estimators are 0.11 in average. Similar results are observed for the difference between β_F and the continuous betas. But at low-frequencies, the error between β_{TF} and $\beta_{\tau,S}$ are lesser than differences between β_F and $\beta_{\tau,S}$ ($0.25 < 0.45$). This result confirms our hypothesis: at high-frequencies the two discrete methods and the continuous wavelets estimations are relatively similar whereas at low-frequencies the differences are more important. The time-frequency window and the continuous wavelets method provide Betas sharing similar dynamics even if significant differences are observed. These differences could be explained, in part, by the adjustments used to compare Betas.

Empirically, the evolution of AXA Betas (β_{TF} and $\beta_{\tau,S}$) indicates that the systematic risk increases sharply during crisis period. After the subprime crisis, both the short-run and long-run betas are globally decreasing but their values begin to increase in mid- 2007 with the subprime crisis and rise brutally in autumn 2008 with the financial crisis and the Lehmann Brothers bankruptcy. The Betas reach a peak in mid-2009 - early-2010 at the beginning of the global depression. Betas also increase during the European Debt Crisis in 2011-2012 and the Russian Rubles Crisis in summer-2014. We also note that during expansion or recovery periods, the short-run and long-run betas tend to decreasing until the next crisis time. The differences between the long-run and short-run betas are about their values and volatilities. At short-run, Betas are very erratic and change brutally when shocks appear but it quickly

reverses to its OLS value. At long-run, the variations are larger but smoother so betas are highly volatile especially during persistent crisis period as 2007-2009 but it slowly reverses in tendency to its OLS value.

Our results are globally consistent with those of Rua and Nunes (2012), McNevin and Nix (2018) and Mestre and Terraza (2018) concerning the beta estimate. The short-run betas are not significantly different to the standard beta but as the scale increases the differences are higher and the time-frequency volatility is also different according to the frequency scales. However, our results are different in more particular aspects. Concerning the MODWT, McNevin and Nix use a 60-months rolling window (5 years) on frequency bands to analyze the beta instability by sectors, whereas, we especially focus our research on the better method to combine the Rolling-Window and the MODWT decompositions. Thus, the time-frequency rolling window appears more suitable at long-run than the intuitive approach. In the continuous case, findings are not fully similar to Rua and Nunes because of we find that the systematic risk is volatile and erratic both for short-run and long-range investment. However, the results comparison is complicated because of the time framework has not the same sense in each paper: they use monthly data whereas we employ daily observations so wavelets coefficients are less erratic in their case.

3 Conclusion

In this paper, we compare different methods to estimate time-frequency varying parameter. We consider two methods based on discrete wavelets transformations and one method based on continuous wavelets.

Our results show that there are no significant differences between the short-run betas of the two discrete methods, but errors increase when the frequency scale increases (from high-frequencies to low-frequencies). In the discrete case, the time-frequency rolling window appear more suitable than the intuitive approach. At short and long-run, the varying betas estimated with continuous wavelets share globally the same dynamics as the betas estimated with the time-frequency window. The comparison is depending to the “discretization” of the betas estimated with continuous wavelets so errors between these methods are significant, however, results of are consistent each other (same tendency). The estimation with continuous wavelets is more accurate because it considers more frequencies (opposite to a frequency bands) however the computational effort is greater. At the opposite, the Time-Frequency

rolling window considerate frequency bands (discrete wavelets) in order to reduce the computational time.

The empirical application with AXA and the CAPM confirms the results observed by simulations. We observe that differences between the two discrete methods are larger in long-run where we note a shift between the betas. The betas estimated with the time-frequency window and those estimated with continuous wavelets have similar evolutions and globally the same tendency. Both the short-run and the long-run betas increase sharply during crisis time. But at long-run the systematic risk is highly volatile so the stock risk-profile changes. At short-run the risk is very erratic but the betas values are still in the same risk-profile.

We conclude, that the three methods have similar results if we consider short-run investment, but, the time-frequency window and the continuous approach provide more relevant and consistent results if we consider long-run investment.

4 Appendixes

Table A1: Frequency bands and time horizon

Resolution	Frequency days		Months	
	Inf border	Sup border	Inf border	Sup border
D1	2	4	0.09	0.18
D2	4	8	0.18	0.36
D3	8	16	0.36	0.73
D4	16	32	0.73	1.45
D5	32	64	1.45	2.91
D6	64	128	2.91	5.82
D7	128	256	5.82	11.64
D8	256	512	11.64	23.27
D9	512	1024	23.27	46.55
D10	1024	2048	46.55	93.09
D11	2048	4096	93.09	186.18
S11	4096	-	186.18	-

Tables A2 : Betas Estimation of 3 simulations

Table A.2.1 : OLS Static Betas

	Simulation 1	Simulation 2	Simulation 3
Beta	1	0.98	1
t-Stat	152.7	96.87	33.77
Constante	-0.0186	-0.0016	0.0002
t-Stat	-0.98	-0.055	0.0025
R ²	0.89	0.77	0.29
LB	4.25	615	4223
ARCH	0.029	426	1428
JB	0.19	248	7460

At 5% risk level, Colum LB (Ljung-Box test): $\chi^2(5)=11.1$; Colum ARCH (ARCH-LM test): $\chi^2(2)=5.99$; Colum JB (Jarque-Bera normality test): $\chi^2(2)=5.99$

Table A.2.2 : Wavelets Betas estimation for the 3 simulations

Simulation 1	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Beta	0.98	1.015	1	1.02	0.99	1.02
t-stats	87.55	136	195	250	316	335
R ²	0.73	0.87	0.93	0.96	0.97	0.98
Simulation 2	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Beta	0.99	1	0.986	1.02	0.93	0.91
t-stats	79.62	88.77	94.67	114.68	129.6	122
R ²	0.69	0.74	0.76	0.82	0.86	0.84
Simulation 3	D1	D2	D3	D4	D5	D6
Beta	1.01	0.97	1.04	0.965	1.02	0.98
t-stats	51.62	45.41	38.45	26.22	28.35	27.52
R ²	0.49	0.42	0.35	0.23	0.22	0.21

Table A3: Stationary tests

	Philips-Perron test	KPSS-test
AXA	-51.2187	0.074
CAC	-56.1127	0.106
	Critical Value	
1% level	-3.43	0.216
5% level	-2.86	0.146
10% level	-2.57	0.119

5 References

Bekiros, S, and Marcellino, M., “The Multiscale causal dynamics of foreign exchange markets”, *Journal of International Money and Finance*, Vol 33, pp 282-305.

Bekiros S., Nguyen D.K. and Uddin G.S, “On time scale behavior of equity commodity links: implications for portfolio management”, *Journal of International Financial Market Institutions and Money*, vol 41, 2016, pp 79-121.

Black, F., Jensen M and Scholes, M, “The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Test ; Studies in the Theory of Capital Markets” in M. Jensen ed., New York: Praeger Publishers, 1972 , pp. 79–12.

Brooks R.D., Faff, R.W., and Lee, J.H.H, “The form of time variation of systematic risk: some Australian evidence”, *Applied financial econometrics*, Vol 2, 1992, pp 191-198.

Brooks, R.D., Faff, R.W., and McKenzie, M.D., “Time-varying Beta Risk of Australian Industry Portfolios: A Comparison of Modelling Techniques”, *Australian Journal of Management* 23(1), 1998, pp 1–22.

Fabozzi, F. and Francis, J, “Beta as random coefficient”, *Journal of Financial and Quantitive Analysis*, Vol 13, Issue 1, 1978, pp 101-116.

Faff, R.W., Lee, J.H.H and Fry, T.R.L, “Stationarity of systematic risk : some Australian evidence”, *Journal of Finance and Accounting*, Vol 19, Issue 2, 1992 ; pp 253-270.

Faff, R.W., Brooks, R.D., “Time-varying risk for Australian industry portfolios, an exploratory analysis”, *Journal of Business Finance and Accounting*, Vol 25, Issue 5, 1998, pp 721-74.

Fama. E, and MacBeth, J., “Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests” *Journal of Political Economy* , Vol 81, 1973, pp. 607–636.

Gabor, J.G., (1946) *Theory of communication*, *Journal of Institution of Electrical Engineers*, 93(3):429–457

Gençay R., Selçuk, S., and Whitcher, B., “Systematic Risk and Timescales “, *Quantitative Finance*, Vol 3 issue 2, 2003,pp 108-116.

Gençay R., Selçuk, S., and Whitcher, B., “Multiscale systematic risk “, *Journal of international money and finance*, Vol 24, 2005,pp 55-70.

Mallat, S., “A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation” ;*IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, Vol 11, Issues 7.

Mallat, S., *Une exploration des signaux en ondelettes*, Ecole polytechnique, 2009.

Mallat, S., *Wavelet tour of signal processing: the sparse way*, Academic Press, 2009.

McNevin, B., and Nix, J., “The Beta heuristic from a time/frequency perspective: a wavelets analysis of the market risk of sectors” *Economic Modelling*, 2018, Vol 68, pp 570-585.

Mestre R. and Terraza M., “Time-frequency analysis of CAPM-Application to the CAC 40”, *Managing Global Transitions*, 2018a, Vol 16, Issue 2, pp 141-157.

Mestre R. and Terraza M., “Time-Frequency varying Beta Estimation-A continuous wavelets approach-”, *Economics Bulletin*, 2018b, Vol 38, Issue 4, pp 1796-1810.

Rua, A. and Nunes, L., “International comovement of stock market returns : a wavelets analysis”, *Journal of Empirical Finance*, Vol 16, Issue 4, 2009, pp 632-639.

Rua, A. and Nunes, L., “A wavelet based assesment of market risk: The emerging market case”, *The Quaterly Review of Economics and Finance*, Vol 52, 2012, pp 84-92.

Sharpe, W., “Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under risk”; *Journal of Finance*, Vol. 19, No. 3 (Sep., 1964), 1964, pp. 425-442.

Vacha, L., and Barunik, J., “Co-movement of energy commodities revisited: evidence from wavelets coherence analysis”, *Energy Economics*, Vol 34, pp 241-247.

Torrence, C., and Compo, G.P., “A pratical guide to wavelet analysis”, *Bulletin of the american meteorological society*, 1998, Vol 79 Issue 1, pp 61-78.

Torrence, C., and Webster P.J., “Interdecadal in the ENSO-Monsoon System”, *Journal of Climate*, 1999, Vol 12 pp 2679-2690.

Conclusion Générale

L'analyse temps-fréquence du MEDAF par les ondelettes a pour objectif l'appréciation de l'effet de l'horizon de placement sur l'estimation du risque systématique. Les résultats obtenus suggèrent de nombreuses conclusions que l'on peut synthétiser dans les points suivants :

- **L'utilisation des ondelettes discrètes dans le cadre du MEDAF améliore fortement l'estimation du Beta et l'analyse du risque qui en découle.**

Les différences entre les Betas traditionnels et ceux estimés par les ondelettes discrètes sont particulièrement significatives à long-terme. Les Betas fréquentiels de court-terme (estimés par les ondelettes) sont, en revanche, proches de leurs estimations standards (par les MCO). Les ondelettes conduisent ainsi à une différenciation du risque systématique selon la fréquence d'investissement. Sur cette base, l'analyse du risque basée sur le Beta est conditionnée par l'horizon de placement des agents.

Les propriétés statistiques des paramètres sont, cependant, entachées par la présence d'autocorrélation et d'hétéroscédasticité associée à une non-normalité dans les résidus de l'estimation de la droite de marché. Une estimation simultanée des paramètres du processus ARMA-GARCH et de ceux de la droite de marché fournit des Betas plus consistants sur le plan statistique. Mais ces derniers présentent peu de différences avec ceux issus des MCO pour les actions ayant un Beta inférieur à 1 alors que pour les actions avec un Beta fort, les erreurs d'estimations sont plus significatives. Nous développons un outil simple qui ajuste rapidement la valeur du Beta des MCO sans avoir à réestimer entièrement le modèle avec des processus ARMA-GARCH. Nous montrons que seule l'intensité du Beta dans le choix des investisseurs est modifiée et non son niveau.

Les modèles Multi-Betas (associés à la modélisation ARMA-GARCH précédente) représentent une amélioration du MEDAF d'origine par l'ajout de variables supplémentaires traduisant diverses sources de risque. Le Pétrole et l'Or, à cet effet, sont retenus pour leurs rôles particuliers en finance. Nous observons une fois de plus une différenciation des Betas selon l'horizon de placement, et ils sont de plus différents des paramètres du modèle Multi-Betas Global. Les Betas relatifs au Marché ne sont pas, cependant, différents de ceux du MEDAF. L'intérêt de cette modélisation réside principalement dans l'interprétation financière

des Betas relatifs à l'Or et au Pétrole illustrant les expositions au risque selon l'horizon d'investissement. A court-terme, les effets du pétrole et de l'or sont relativement faibles mais plus l'horizon est long plus leurs intensités deviennent fortes. Il apparaît, par ailleurs, que les signes des coefficients Betas dépendent du secteur économique mais aussi des valeurs des Betas relatifs au Marché. Ces résultats illustrent l'intérêt des ondelettes dans l'estimation du paramètre Beta car elles offrent une information riche et variée. L'usage des ondelettes, en revanche, ne résout pas le problème de l'instabilité du Beta.

- L'instabilité temporelle du Beta est mieux appréhendée lorsqu'on recourt à l'utilisation de la décomposition tempo-fréquentielle des variables du MEDAF.

L'utilisation d'une fenêtre forward pour l'estimation roulante du Beta, permet de révéler son instabilité/volatilité au cours du temps. Nous caractérisons le "degré" de volatilité du Beta afin d'étudier la robustesse temporelle du Profil-Risque. Un Profil robuste indique, qu'au cours du temps, les Betas sont dans la même catégorie que celui statique, dans ce cas seul l'intensité du risque varie. A l'opposé, des fluctuations substantielles de la valeur du Beta au cours du temps conduisant à changements de Profil-Risque sont les signes d'une Non-Robustesse.

L'association de cette méthode avec la MODWT permet d'apprécier la dynamique temporelle des Betas fréquentiels. Il est alors possible d'appliquer intuitivement la fenêtre roulante sur les bandes de fréquences issues d'une MODWT. Ces dernières résultent d'une MODWT basée sur un nombre de points différents de la longueur de la fenêtre, ce qui implique que les coefficients d'ondelettes sont ajustés pour les observations des séries. Cette approche n'est pas empiriquement optimale car la décomposition unique en ondelettes ne permet pas d'inclure de nouvelles informations c'est-à-dire des observations supplémentaires. La Fenêtre Roulante Tempo-Fréquentielles qui décompose les séries à chaque itération de la procédure est plus adaptée puisque la décomposition et la régression se basent sur les mêmes nombres de points, et incluent automatiquement les nouvelles observations. Les différences entre les deux méthodes sont peu significatives aux hautes-fréquences mais elles prennent de l'ampleur avec l'augmentation de l'échelle fréquentielle. La Fenêtre Tempo-Fréquentielle se révèle plus adéquate qu'une application intuitive de celle-ci directement sur les bandes de fréquences. Pour les investisseurs, l'utilisation pratique de la Fenêtre Tempo-Fréquentielle est similaire à son homologue traditionnel (sans les ondelettes) mais ses résultats offrent une information plus dense permettant une analyse plus poussée de la robustesse. L'utilisation de la Fenêtre

Tempo-Fréquentielle sur notre panel d'action met en évidence une distinction de la dynamique du Beta selon l'horizon de placement. Le Beta présente une forte volatilité à long-terme tandis qu'à court terme sa dynamique tend vers celle calculée sans les ondelettes. Le niveau de robustesse est conditionnel à la classification initiale établie à partir du Beta traditionnel. Les actions avec un Beta fort possèdent un Profil volatil mais majoritairement robuste. À l'inverse celles avec un Beta faible ont un Profil-Risque relativement robuste à court-terme mais à long-terme les Betas sont particulièrement instables. La catégorie des actions avec un Beta proche de 1 rassemble des Profils majoritairement non-robuste à court et long-termes car le Beta est fortement volatil autour de 1.

Les ondelettes discrètes associées ou non avec une fenêtre tempo-fréquentielle constituent un véritable atout pour l'analyse du risque. La différenciation des mesures de risque selon divers horizons de placement constitue le résultat clé de cette recherche. Ce type de décomposition en ondelettes est cependant limité par un raffinement fréquentiel relativement faible. Cette limite est liée à la puissance de calcul nécessaire pour implémenter une décomposition en ondelettes : plus le raffinement fréquentiel est fin plus la puissance de calcul est importante. Les échelles fréquentielles employées dans la MODWT sont des intervalles de plus en plus larges, issus de l'échelle dyadique, qui traduisent des horizons de placement compris entre deux valeurs. Dans le cas continu, les bandes de fréquences sont très fines et découlent du choix du pas fréquentiel : plus celui-ci est élevé plus la décomposition considère un nombre important d'échelles intermédiaires.

- **L'utilisation des ondelettes continues permet de distinguer plus précisément les horizons de placement.**

La cohérence et la phase en ondelettes, appliquées dans le cadre du MEDAF, illustrent la complexité des liens entre les actions et le Marché. L'intensité des liens est illustrée par la Cohérence qui indique alors le poids du risque systématique dans le risque total (ou importance du risque). A court-terme, l'importance du risque n'est pas continue dans le temps, car les liens Action-Marché ne sont pas nécessairement forts et intenses quelle que soit la valeur du Beta des MCO. Plus l'horizon est long, plus le risque systématique occupe une part importante du risque pour les actions dont le Beta est supérieur ou égal à 1. Pour les actions avec un Beta faible, la cohérence plus faible illustre que le Marché affecte peu les fluctuations de l'actif. La Phase, quant à elle, fournit le signe et la nature de la relation. Elle permet d'observer les phénomènes de Contagion (à court-terme) et d'Interdépendance (à

long-terme). L'unilatéralité de la Droite de Marché est fortement remise en cause car l'action peut affecter les mouvements du Marché en fréquences et en temps. La nature des relations entre action et marché au cours des fréquences et du temps est complétée par une estimation tempo-fréquentielle du Beta issu des ondelettes continues. Compte tenu des paramètres retenues pour la CWT et du nombre d'observations, nous disposons de plus de 300 000 Betas pour une seule action. L'analyse de ces valeurs confirme que la dynamique du Beta se distingue selon les horizons d'investissement retenus. A court-terme, les betas sont très erratiques et volatils, tandis qu'à long-terme, ils sont plus lissés mais présentent des variations plus amples. Les agents peuvent ainsi analyser les évolutions à la fois temporelles et fréquentielles du risque systématique pour catégoriser différemment les actions et définir leur robustesse temporelle et fréquentielle. L'estimation dynamique tempo-fréquentielle du Beta constitue ainsi un outil puissant d'analyse conduisant à des résultats nouveaux.

Les ondelettes décuplent les résultats du MEDAF en relâchant l'hypothèse d'homogénéité des agents. Elles montrent que le risque systématique est dépendant de l'horizon d'investissement tant sur son estimation (le Beta) que sur sa dynamique (instabilité/volatilité). Les méthodes développées dans cette recherche constituent une amélioration notable en matière d'estimation du Beta en fournissant une masse d'information exploitable de multiples manières. Les capacités d'analyse d'une telle base de données représentent donc le principal défi pour pouvoir exploiter pleinement les ondelettes. Les avancées technologiques constituaient autrefois un frein « naturel » à l'usage « à grande échelle » des ondelettes mais actuellement les limites reposent désormais sur l'interprétation des résultats. Les ondelettes ont cependant l'avantage d'être modulables permettant de les associer à des méthodes existantes. En ce sens, les récentes avancées en matière de traitement de l'informations et d'intelligence artificielle sont des pistes à explorer et à exploiter pour tirer pleinement parti des résultats issus de ces ondelettes.

Bibliographie Introduction et Chapitre 1

Abell, J., and Kreuger, T., (1989) Macroeconomic Influences on Beta, *Journal of Economics and Business*, 41:185-193.

Adler, M., and Dumas, B., (1983) International Portfolio Choice and Corporation Finance: A Synthesis, *The Journal of Finance*, 38(3):925-984.

Aguiar-Conraria, L., and Soares, M.J., (2011) Oil and Macroeconomy: using wavelets to analyse old issues, *Empirical Economics*, 40(3):645-655.

Aguiar-Conraria, L., and Soares, M.J., (2011) Business cycle synchronization and the Euro: A wavelets analysis, *Journal of Macroeconomics*, 33(3):477-489.

Ang, A., and Chen, J., (2007) CAPM over the long run:1926-2001, *Journal of Empirical Finance*, 14(1):1-40.

Andrian, T., and Franzoni, F., (2009) Learning about beta: time-varying factor loadings, expected returns, and the conditional CAPM, *Journal of Empirical Finance*, 16:537-556.

Arfaoui M, Ben Rejeb A, (2017). Oil, gold, US dollar and stock market interdependencies: a global analytical insight, *European Journal of Management and Business Economics*, Vol. 26 Issue:3, pp.278-293, <https://doi.org/10.1108/EJMBE-10-2017-016>.

Balvers, R., and Klein, A., (2014) Currency Risks Premia and Uncovered Interest Parity in the International CAPM, *Journal of International Money and Finance*, 41(C):214-230.

Bantz, R., (1981). The relationship between return and market value of common stocks, *Journal of financial economics*, 9 (1):3-18.

Barberis, N., Schleifer, A., and Vishny, R., (1998) A Model of Investors Sentiment, *Journal of Financial Economics*, 49:307-343.

Barberis, N., and Huang, M.,(2001) Mental Accounting, loss aversion and individual stock returns, *Journal of Finance* 56:1247-1295.

Basher, S.A. and Sadorsky, P., (2006). Oil price risk and emerging stock markets. *Global Finance Journal*, 17(2): 224-251.

Basu, S., (1977) Investment Performances of common stocks in relation to their Price-Earning-Ratios: A Test of the Efficient Market Hypothesis, *Journal of Finance*, 12(3):129-156.

Baur, D. G. and Lucey, B., (2010). Is Gold a Hedge or a Safe Haven? An Analysis of Stocks, Bonds and Gold. *The Financial Review*, 45(2), 217-229.

Baur, D. G. & McDermott, T. K., (2010). Is gold a safe haven? International evidence. *Journal of Banking & Finance*, 34, 1886-1898.

- Baur, D. G. & McDermott, T. K. J., (2016). Why is gold a safe haven? *Journal of Behavioral and Experimental Finance*, 10, 63-71.
- Bawa, V., (1975) Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects, *Journal of Financial Economics*, 2(1):95-121.
- Bawa, V., and Lindenbergh, E., (1977) Capital Market Equilibrium in a Mean-Lower Partial Moment Framework, *Journal of Financial Economics*, 5:189-200.
- Beenstock, M., and Chan, K.F., (1988), Economic Forces in the London Stock Market, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 50(1):27-39.
- Bera, A., Bubnys, E. and Park, H. (1988). Conditional heteroscedasticity in the market model and efficient estimates of betas. *The Financial Review*, 23(2): 201–214.
- Bekiros, S., Nguyen, D.K and Uddin, G.S (2016) On time scale behavior of equity-commodity links: implications for portfolio management, *Journal of international financial market institutions and money*, 41:79-121.
- Bekiros, S., Marcellino, M., (2013) The Multiscale causal dynamics of foreign exchange markets, *Journal of international financial market institutions and money*, 33:282-305.
- Bhandari, L.C., (1988) Debt/Equity ratio and expected common stock returns: empirical evidence, *Journal of Finance*, 43(2):507-528.
- Black, F., (1972) Capital market equilibrium with restricted borrowing, *Journal of Business*, 45:444-454.
- Black F., Jensen, M., and Scholes M., (1972), *The Capital Asset Pricing Model: Some Empirical Test; Studies in the Theory of Capital Markets* edited by M. Jensen New York: Praeger Publishers.
- Blume, M., and Friend, I., (1973) A New Look at the Capital Asset Pricing Model, *Journal of Finance*, 28(1):19-33.
- Bollerslev, T., (1986) Genealized Autoregressive Conditionnal Heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, 31: 307-327.
- Bollerslev, T., Engle, R. and Wooldridge, H., (1988) A Capital asset pricing model with time-varying covariance, *Journal of political economic* 96 (1):116-131.
- Bos, T. and Newbold, P. (1984), An empirical investigation of the possibility of stochastic systematic risk in the market model, *Journal of Business*, 57 (1), 37-47.
- Boyer, M.M. and D. Filion, (2007). Common and fundamental factors instock returns of Canadian oil and gas companies. *Energy Economics*, 29(3): 428-453.

Braun, P. Nelson, D., and Sunier, A., (1995) Good news, Bad news, volatility and Betas, *Journal of Finance*, 50(5):1575-1603.

Breeden, D.T., (1979) An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities, *Journal of Financial Economics*, 7:265-296.

Breeden, D.T., Gibbons M.R., and Litzenberger R.H., (1989), Empirical test of the consumption-oriented CAPM, *Journal of Finance*, 44:231-262.

Brooks R.D., Faff, R.W., and Lee, J.H.H., (1992) The form of time variation of systematic risk: some Australian evidence, *Applied financial econometrics*, 2:191-198.

Brooks R.D., Faff, R.W., and Lee, J.H.H., (1994), Beta stability and Portfolio Formation, *Pacific-Basin Finance Journal*, 4:463-480.

Brooks R.D., Faff, R.W., and McKenzie, M.D., (1998) Time-varying Beta Risk of Australian Industry Portfolios: A Comparison of Modelling Techniques, *Australian Journal of Management* 23(1):1-22.

Burmeister, E., and Wall, K.D., (1986), The Arbitrage Pricing Theory and Macroeconomics Factor Measures, *The Financial Review*, 21(1):1-20.

Cahart, M., (1997) On persistence in mutual fund performance, *The Journal of Finance*, 52(1):57-82.

Calderon, A.P., (1964) Intermediate spaces and interpolation , the complex method, *Studia mathematica*, 24:113-190.

Campbell, J.Y., (1993) Intertemporal Asset Pricing without Consumption, *American Economic Review*, 83(3):487-512

Campbell, J.Y., Giglio, S., and Polk, C., (2013) Hard Times, *Review of Asset Pricing Studies*, 3(1):95-132

Campbell, J.Y., Polk, C., and Vuolteenaho, T., (2010) Growth or Glamour ? Fundamentals and Systematic Risk in Stock Return, *Review of Financial Studies*, 23:305-344.

Capaul, C., and Rowley, I., and Sharpe, W., (1993) International Value and Growth Stock Return, *Financial Analysts Journal*, 49:27-36.

Chan, L., Hamao, Y., and Lakonishok, J., (1991) Fundamentals and Stock Returns in Japan, *Journal of Finance*, 46(5):557-581.

Chan, L., and Lakonishok, J., (1993) Are the reports of Beta's Death Premature?, *Journal of Portfolio Management* 19(4):51-62

Chan, L., and Lakonishok, J., (2002) Value and Growth Investing: A review and update, Working Paper University of Illinois.

- Chan, N.K., Chen, N.F., and Hsieh, D.A., (1985) An exploratory investigation of the firm effect, *Journal of Financial Economics*, 14:451-471.
- Chan, N.K., Treepongkaruna, S., Brooks, R., and Gray, S., (2011) Asset Market linkages: Evidence from financial commodity and real estate assets, *Journal of Banking and Finance*, 35(6):1415-1426.
- Chen, N.F., Roll R. and Ross, S.A., (1986). Economic forces and the stock market. *Journal of Business*, 59(3): 383-403.
- Chen, S-W., and Huang, N-C., (2007) Estimates of the ICAPM with Regime-switching Betas: Evidence from Four Pacific Rim Economies, *Applied Financial Economics*, 17: 313-327.
- Chiarella, C., Dieci, R., and He, X-Z., (2010) A Framework for CAPM with Heterogeneous Beliefs, *Nonlinear Dynamic in Economics, Finance and Social Sciences*, Springer, 353-369.
- Chiarella, C., He, X-Z., Zwinkels, R-C., (2014) Heterogeneous expectations in assets pricing: empirical evidence from S&P500, *Journal of Economic Behavior and Organization*, 105, 1-16.
- Chiang, T., Li, J., Tan, L., and Nelling, E., (2013) Dynamic herding behaviour in Pacific-Bass markets: Evidence and Implications, *Multinational Finance Journal*, 7(3-4):165-200.
- Choudry, T., and Wu, H., (2008) Forecasting ability of GARCH vs Kalman Filter Method; Evidence from Daily UK Time-Varying Beta, *Journal of Forecasting* 27:670-689.
- Chua, J. H., Sick, G. & Woodward, R.S., (1990). Diversifying with gold stocks. *Financial Analysts Journal*, 46:76-79.
- Cochrane, J., (1996) A Cross-Sectional Test of an Investment-Based Asset Pricing Model, *The Journal of Political Economy*, 104(3):572-621.
- Coifman, R.R., and Donoho, M.V., (1995) Translation-Invariant De-Noising. In: Antoniadis A., Oppenheim G. (eds) *Wavelets and Statistics*. Lecture Notes in Statistics, 103, Springer, New York, NY
- Corhay, A., and Rad, A., (1996). Conditional heteroscedasticity adjusted market model and an event study, *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 36(4):529–538.
- Daubechies, I., (1988) Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 41:909-996
- Daubechies, I., (1992) Ten lectures on wavelets, *Conference Series of Applied mathematics in Philadelphia*, Society for industrial and applied mathematics.
- Daubechies, I., Han, B., Ron, A., and Shen, Z., (2002) Framelets: MRA-Based Constructions of Wavelet Frames, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 14(1):1-46.

- DeBondt, W., and Thaler, R., (1987) Further Evidence on Investment Overreaction and Stock Market Seasonality, *Journal of Finance*, 42(3):557-581.
- Dhrymes, P.J., Friend, I., Gultekin, M.N., and Gultekin, N.B., (1985) New Tests of the APT and their Implications, *The Journal of Finance*, 40:659-675.
- Diebold, F., Jang I. and Jevons L., (1988). Conditional Heteroskedasticity in the Market, *Finance and Economics Discussion Series*, 42, Division of Research and Statistics, Federal Reserve Board, Washington D.C.
- Douglas, G.W., (1968) Risk in the Equity Markets: an empirical appraisal of market efficiency, Ann Arbor, Michigan, University Microfilms.
- Driesprong, G., Jacobsen, B., and Maat, B., (2008) Striking oil: Another puzzle? *Journal of Financial Economics*, 89(2):307-327.
- Duffie, D., and Zame, W., (1989) The Consumption-Based Capital Asset Pricing Model, *Econometrica*, 57(6):1279-1297.
- Dumas, B., (1994) Some Models of the International Capital Market, *European Economic Review*, 38:923-931.
- Edwards, W., (1968) Conservatism in human information processing , B. Kleinmütz, edition Formal representation of human judgement, Wiley.
- Engle, R., (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK inflation, *Econometrica*, 50: 987-1008.
- Engle, R., (2016) Dynamic Conditional Beta, *Journal of Financial Econometrics*, 14(4): 643-667.
- Engel, C.M., and Rodrigues, A.P., (1986) A Test of International CAPM, National Bureau of Economic Research Working Paper No. 2054.
- Engel, C.M., and Rodrigues, A.P., (1989) Test of International CAPM with Time-Varying covariances, *Journal of Applied Econometrics*, 4:119-138.
- Estrada, J., (2002) Systematic risk in emerging markets: the D-CAPM, *Emerging Market Review*, 4:365-379.
- Epstein, L., and Zin, S., (1989) Substitution, Risk Aversion, and Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: A Theoretical Framework , *Econometrica*, 57(4):937-969
- Fabozzi, F., and Francis, J-C., (1978) Beta as a random coefficient, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 13 (1) :101-116
- Faff, R.W., Lee, J.H.H., and Fry, T.R.L., (1992) Stationarity of systematic risk : some Australian evidence, *Journal of Finance and Accounting*, 19(2): 253-270

- Faff, R.W., Hiller, D., and Hiller, J., (2000) Time Varying Beta risk: an analysis of alternative modelling techniques, *Journal of Business Finance and Accounting*, 27(2):523-555.
- Fama, E., (1969) Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work, *The Journal of Finance*, 25(2):383-417.
- Fama, E., (1996) Multifactor Portfolio Efficiency and Multifactor Asset Pricing , *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 31(4):441-465
- Fama, E. and MacBeth J., (1973), Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests; *The Journal of Political Economy*, 81 (3) 607–636.
- Fama, E., and French, K., (1992), The Cross-Section of Expected Stock Return, *Journal of Finance*, 47 (2): 427–465.
- Fama, E., and French, K., (1993) Common Risk Factors in the Returns on Stocks and Bonds, *Journal of Financial Economics* 33(1), ;3-56;
- Fama, E., and French, K., (1996) The CAPM is wanted, dead or alive. *Journal of Finance*, 51(5): 1947–1958.
- Fama, E., and French, K., (2015) A Five-Factor Asset Pricing Model, *Journal of Financial Economics*, 116:1-22.
- Farge M, (1992), Wavelets Transforms and their applications to turbulence, *Annual Review of fluid mechanics*, 7(2):427-465.
- Ferson, W., and Constantinides, G., (1991) Habit persistence and durability in aggregate consumption: Empirical test, *Journal of Financial Economics*, 29(2):199-240.
- Ferson, W., and Harvey, C., (1991) The variations of economic risk premium, *Journal of Political Economy*, 99:385-415.
- Ferson, W., and Harvey, C., (1993) The Risk and predictability of international equity markets, *Review of Financial Studies*, 6:527-566.
- Ferson, W., and Harvey, C., (1994) Sources of risk and expected returns in global equity markets, *Journal of Banking and Finance*, 18:775-803.
- Fishburn, P., (1977) Mean-Risk Analysis with risk associated with below-target returns, *American Economic Review*, 67(2):116-126.
- Frankel, J., and Froot, F., (1986) Understanding the U.S. Dollar in the Eighties: The Expectations of Chartists and Fundamentalists, *The Economic Record*, 0(0):24-38.
- Frankel, J., and Engel, C., (1984) Do Asset-Demand Functions optimize over the mean and variance of real returns ? A six-currency test, *Journal of International Economics*, 17:309-323.

- Friend, I., and Blume, M., (1970) Measurement of Portfolio Performance under Uncertainty, *American Economic Review*, 60(4):607-636.
- Fung, W., and Hsieh, D.A., (1997) Empirical characteristics of dynamics trading strategies: the case of hedge funds, *Review of Financial Studies*, 10:275-302.
- Gabor, J.G., (1946) Theory of communication, *Journal of Institution of Electrical Engineers*, 93(3):429-457
- Gençay, R., Selçuk, F., and Whitcher, B., (2001) *An Introduction to Wavelets and other filtering methods in Finance and Economics*, Elsevier.
- Gençay, R., Selçuk, F., and Whitcher, B., (2003) Systematic Risk and Timescales, *Quantitative Finance*, 3(2):108-116.
- Gençay, R., Selçuk, F., and Whitcher, B., (2005) Multiscale systematic risk, *Journal of international money and finance*, 24: 55-70.
- Giacoto, C. and Ali, M.M., (1982) Optimal Distribution Free Tests and Further Evidence of Heteroskedasticity in the Market Model, *Journal of Finance*, 37: 1247-1257.
- Giannopoulos, K., (1995) Estimating the time varying components of international stock markets' risk, *The European Journal of Finance*, 1:129-164.
- Gouhier, T., Grinsted, A., and Simko, V., (2016) Conduct Univariate and Bivariate Wavelets Analyses, R-package description.
- Gomez, V., and Maravall, A., (1996) Programs TRAMO and SEATS; Instructions for the Users, Working Paper 9628, Servicio de Estudios, Banco de Espana.
- Goupillaud, P., Grossman, A., and Morlet, J., (1984) Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis, *Geoexploration*, 23:85-102.
- Grinsted, A., Moore, J.C., and Jevrejeva, S., (2004) Application of the cross wavelet transform and wavelet coherence to geophysical time series, *Nonlinear Processes in Geophysics*, 11(5-6):561-566.
- Grauer, F., Litzenberger, R., and Stehle, R., (1976) Sharing rules and equilibrium in an International Capital Market under Uncertainty, *Journal of Financial Economics* 3:233-256.
- Grether, D., and Bayes, M., (1980) Rule as a descriptive model: The representativeness heuristic, *Quarterly Journal of Economics*, 95:537-557.
- Groenewold, N., and Fraser, P., (1997) Time Varying Betas and Macroeconomic influences, discussion paper 97.09, department of economics, University of Western Australia, 1997.
- Groenewold, N., and Fraser, P., (1997b) Share Prices and Macroeconomics Factors, *Journal of Business Finance & Accounting*, 24(9):1367-1384.

Groenewold, N., and Fraser, P., (1999) Time Varying estimates of CAPM betas, *Mathematics and Computer in Simulation*, 48:531-539.

Grossmann, A., and Morlet, J. (1984) Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM Journal on mathematical analysis*, 15 (4):723–736.

Hansen, L.P., and Singleton, K.J., (1983) Stochastic Consumption, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Asset Returns, *Journal of Political Economy*, 91(2):249-265

Haigh, M., and List, J., (2006) Do Professional Traders Exhibit Myopic Loss Aversion ? An Experimental Analysis, *The Journal of Finance*, 60(1):523-534

Hamilton, J.D., (1983) Oil and the Macroeconomy since World War II, *The Journal of Political Economy*, 91(2):228-248.

Harlow, C., and Rao, R., (1989) Asset Pricing in a a Generalized Mean-Lower Partial Moment Framework: theory and evidence, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24(3):285-312.

Harvey, C., Liu, Y., and Zhu, H., (2016) ... and the Cross-Section of Expected Returns, *The Review of Financial Studies*, 29(1):5–68

Hawawini, G., (1983) Why Beta Shifts as the Returns Interval Changes, *Financial Analysis Journal*, 39:73-77.

He Z., O'Connor F. and Thijssen J., (2018) Is Gold a sometime Safe Haven or an Always Hedge for Equity Investor ? A Markov Switching CAPM Approach for US and Uh Stocks Indices, *Internationnal Review of Financial Analysis*, 60:30-37.

Hogan, W., and Warren J., (1974), Toward the development of an equilibrium Capital-Market Model based on semivariances, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 9(1):1-11.

Huang, R.D., Masulis, R.W. , and Stoll, H.R. , (1996). Energy shocks and financial markets. *Journal of Futures Markets*, 16(1): 1–27.

Huang, H-C., (2000) Tests of Regimes-switching CAPM, *Applied Financial Economics*, 10: 573-578

Hussain Shahzad S.J., Raza N, Shahbaz M and Ali A., (2017), Dependence of stock market with gold and bonds under bullish and bearish Market States, *Resources Policy*, 52©:308-319

Jagannathan, R., and Wang, Z., (1996) The Conditional CAPM and the cross-section of expected returns, *Journal of Finance* 51:3-53.

Jegadeesh, N., and Titman, S., (1993) Returns to buying Winners and Selling Losers: Implications for Stock Market Efficiency, *Journal of Finance*, 48(1):65-91.

Jensen, M-C., (1969) Risk Capital Assets, and the Evaluation of Investment Portfolio, *Journal of Business*, 42(2):167-247.

Jones, C.M., and Kaul, G., (1996) Oil and the Stock markets, *The Journal of Finance*, 51(2):463-491.

Jones, D.W., Leiby P. and Paik I., (2004) Oil Price Shocks and the Macroeconomy: What Has Been Learned Since 1996, *The Energy Journal*, 25(2) 1-32.

Johnson M. and Lamdin D. (2015) New Evidence on whether Gold Mining Stock are more like Gold or like Stocks, *Alternative Investment Analyst Review*, 5(2) pp 31-38.

Kahneman, D., and Tversky, A., (1979) Prospect Theory: an analysis of decision under risk, *Econometrica*, 47:263-291

Klein, A.R., (2012) Time-Variations in Herding Behavior: Evidence from a Markov Switching SUR Model, Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2000324> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2000324>

Klemkorsky, R., (1973) The Bias in Composite Performance Measures, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 8(3):505-514.

Klemkorsky, R., and Martin, J., (1975) The effect of market risk on portfolio diversification, *Journal of Finance*, 30:147-154.

Lakonishok, J., Schleifer, A., and Vishny, R., (1994) Contrarian investment, extrapolation, and risk, *Journal of Finance* 49:1541-1578.

Lau, K.M., and Weng, H., (1995) Climate Signal Detection using wavelet transform: how to make a time series sing, *Bulletin of American meteorological society*, 16(12): 2391-2402.

Lee, E., Kim, C., and Kim, I.M., (2015). Equity premium over different investment horizons, *Empirical Economics*, Springer, 48(3):1169-1187

Lee, C.C. and Zeng, J.H., (2011). The impact of oil price shocks on stock market activities: Asymmetric effect with quantile regression. *Mathematics and Computers in Simulation*, 81(7): 1910-1920.

Lee, C.F., Wu, C., and Wei, J., (1990) The Heterogeneous Investment Horizon and the Capital Asset Pricing Model: Theory and Implications, *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25(3):361-376.

Lemarié, P. G., and Meyer, Y. (1986) Ondelettes et bases hilbertiennes, *Revista Matematica Iberoamericana* 2(1):1-18.

Leon, C., Leiton, K., and Reveiz, A., (2012) Investment Horizon dependant CAPM: Adjusting Beta for long-term dependence, *Borradores de Economia*, 730.

Lettau, M., and Ludvigson, S., (2001) Resurrecting the (C)CAPM: A Cross-Sectional Test When Risk Premia Are Time-Varying, *Journal of Political Economy*, 109(6):1238-1287

- Levhari, D., and Levy, H., (1977) The Capital Asset Pricing Model and the Investment Horizon, *Review of Economics and Statistics*, 59:92-104.
- Levy, H., (1972) Portfolio Performance and Investment Horizon, *Management Science*, 36:645-653.
- Levy, H., Levy, M., and Benita, G., (2006) Capital Asset Prices with Heterogenous Beliefs, *The Journal of Business*, 79(3):1317-1353.
- Lewellen, J., and Nagel, S., (2006) The conditional CAPM does not explain asset-pricing anomalies, *Journal of Financial Economics* 82:289-314.
- Lintner, J., (1965) The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets; *Review of Economics and Statistics*. 47 (1) : 13–37.
- Mallat, S., (1989) A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 11(7).
- Mallat, S., (2001) Une exploration des signaux en ondelettes, Ecole polytechnique, 2001.
- Mallat, S., (2009) Wavelet tour of signal processing: the sparse way, Academic Press, 2009.
- Mankiw, N.G. , and Shapiro, M.D. (1986) Risk and return: consumption beta versus market beta, *Review of Economics and Statistics*, 68(3): 452-459
- Markowitz, H., (1952) Portfolio Selection; *Journal of Finance*, 7 (1) :77-91.
- Mao, J., (1970) Models of Capital Budgeting, E-V vs E-S, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 5(5):657-676.
- McCoy, E.J., Percival, D.B., and Walden, A.T., (1996) Wavelet analysis and synthesis of stationary long-memory processes, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5:26-56.
- Mélar, G., (1985) Examples of the evolutionary spectrum theory, *Journal of Time Series Analysis*, 6(2):81-90.
- Mélar, G., and Herteleer-de-Schutter, A., (1989) Contributions to evolutionary spectral theory, *Journal of Time Series Analysis*, 10(1):14-63.
- Mehra, R., and Prescott, E.C., (1985) The equity premium: A Puzzle, *Journal of Monetary Economics*, 15:145-161.
- Mergner, S., and Bulla, J., (2008) Time-varying Beta Risk of Pan-European Industry Portfolios: A Comparison of Alternative Modeling Techniques, *European Journal of Finance*, 14(8): 771-802.
- Merton, R.C., (1973) Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1): 141-183

- Meyer, Y., Jaffard, S., and Rioul, O., (1986) L'analyse par ondelettes, Pour la science.
- Meyer, Y., (1990), Ondelettes et algorithmes concurrents, Actualités mathématiques Hermans éditions des sciences et des arts xii p.217-381, 1990.
- Meyers, S.D., Kelly, B.G., and O'Brien, J.J., (1993) An Introduction to Wavelets Analysis in Oceanography and Meteorology : with applications to dispersion of Yanai Waves, Monthly Weather Review, 121(10) :2858-2866.
- Miller, M., and Scholes, M., (1972) Rates of Returns in Relation to Risk: a re-examination of some recent findings, Studies in the Theory of Capital Market, Michael Jensen edition New-York: Praeger: 47-78.
- Mishra, P.K., Das, J.R. and Mishra, S.K. , (2010). Gold price volatility and stock market returns in India. American Journal of Scientific Research, 9: 49-55.
- Modigliani, F., Pogue, G., and Solnik, B., (1973) A test of the Capital Asset Pricing Model on european stock markets ; Version réécrite de leur présentation au premier International Congress on stock exchange, March 1972, Milan, Italy
- Mossin, J. (1966) Equilibrium in a Capital Asset Market; *Econometrica* 34:768–783.
- Narayan, P.K., and Sharma, S.S., (2011) New evidence on oil price and firm return, *Journal of Banking and Finance*, 35(12),pp3253-3262.
- Miyazaki, T., Toyoshima, Y. and Hamori,S., (2012). Exploring the dynamic interdependence between gold and other financial markets, *Economics Bulletin*, AccessEcon, vol. 32(1), pages 37-50
- Nason, G.P., and Silverman, B.W., (1995) The stationary wavelet transform and some statistical applications, In: Antoniadis A., Oppenheim G. (eds) *Wavelets and Statistics*. Lecture Notes in Statistics, vol 103. Springer, New York, NY.
- Ng, D., (2004) The International CAPM when expected returns are time-varying, *Journal of International Money and Finance*, 23:189-230.
- Percival D.B.,(1983) *The Statistics of Long Memory Processes*, PhD Thesis, Department of Statistics, University of Washington.
- Percival D.B.,(1995) On estimation of the wavelet variance, *Biometrika*, 82:619-631.
- Percival D.B., and Mofjeld, H.O., (1997) Analysis of subtidal coastal sea level fluctuations using wavelets, *Journal of the American Statistical Association*, 92:868-880.
- Percival D.B., and Walden, A.T., (2000) *Wavelet Methods for Times Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Petkova, R., and Zhang, L., (2005) Is Value riskier than Growth ?, *Journal of Financial Economics*, 78(1):187-202.

- Pogue, G., and Solnik, B., (1974) The market model applied to European common stocks: some empirical results, *Journal of Financial and Quantitative analysis*, 9(6), 917-944.
- Post, T., and Van Vilet, P., (2004) Conditional Downside Risk and the CAPM, Erasmus Research Institute of Management Report Series Research in Management ERS-2004-048-F&A, at Erasmus University Rotterdam.
- Priestley, M.B., (1965) Evolutionary spectra and non-stationary processes, *Journal of the Royal Statistical Society, Serie B*, 27(2):204-237.
- Priestley, M.B., (1966) Design relations for non-stationary processes, *Journal of the Royal Statistical Society, Serie B*, 28:228-240.
- Prukumpai, S., (2015) Time-Varying Industrial Portofolio Betas under Regime-switching Model: Evidence from the Stock Exchange of Thailand, *Applied Economics Journal*, 22(2):54-76.
- Rioul, O., and Duhamel, P., (1992) Fast Algorithm for Discrete and Continuous Wavelets Transforms, *IEEE Transactions on Informations Theory*, 38(2):569-586
- Roll, R., (1977) A Critique of the Asset Pricing Theories' tests, Part 1: On past and potential testability of the theory, *Journal of Financial Economics*, 14:129-176.
- Rosenberg, B., Reid, K., and Lanstein, R., (1985) Persuasive evidence of market inefficiency, *Journal of Portfolio Management*, 11:9-17.
- Ross, S. (1976) The arbitrage theory of capital pricing, *Journal of Economic Theory* 13, 341-360.
- Rua, A and Nunes, L, (2009) International comouvment of stock market returns ; A wavelet analysis, *Journal of Empirical Finance*, 16(4):632-639.
- Rua, A and Nunes, L, (2012) A wavelet based assessment of market risk : the emerging case, *Journal of Quaterly Review of Economics and Finance*, 52 :84-92.
- Schwert G. Seguin, P. (1990): Heteroscedasticity in stock returns. *The Journal of Finance*, Vol. 45, No. 4, :1129–1155.
- Sercu, P., (1980) A Generalisation of the International Asset Pricing Model, *Revue de Association Française de Finance* 1(1):91-135.
- Sharpe, W., (1964) Capital Asset Prices: a Theory of Market Equilibrium under risk; *Journal of Finance*, 19(3): 425-442.
- Sharpe, W. and Cooper, G., (1972), Risk -Return Classes of New York Stock Exchange Common Stocks: 1931 –1967, *Financial Analysis Journal* 28 (2) : 46-54.
- Shefrin, H., and Stateman, M., (1994) Behavioral Capital Asset Pricing Model , *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29:323-349.

Shefrin, H., and Stateman, M., (2000) Behavioral Portfolio Theory, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35(2):127-151.

Shih, T-L., Hsu, A-C., Yang, S-J, and Lee C-C., (2012) Empirical research of herding behaviour in the Pacific Basin Stock Markets: Evidence from the U.S. Stock Market rise (drop) in succession, *International Conference on Asia Pacific Business Innovation and Technology Mangement, Procedia, Social and Behavioral Sciences* 40:7-15

Shiller, R.J., (1981) Do Stock Prices Move Too Much to Be Justified by Subsequent Changes in Dividends?, *The American Economic Review*, 71(3): 421-436.

Solnik, B., (1974) An equilibrium model of the international capital market, *Journal of Economic Theory*, 8:500-524.

Stattman, D., (1980) Book Values and Stock Returns, *The Chicago MBA: A Journal of selected Papers*, 4:25-45.

Sumner, S., Johnson, R., and Soenen, L., (2010). Spillover effects between gold, stocks, and bonds. *Journal of Centrum Cathedra*, 3(2): 106-120.

Svenson, O., (1981) Are we all less risky and more skilful than our fellow drivers?, *Acta Psychologica*, 47:2071-2153.

Terraza, M.,(1979) Les filtres des differences d'ordre p et des differences de moyennes mobiles simples dans l'analyse spectrale, *Journal de la Société Statistiques de Paries*, 2.

Terraza, M.,(1981) Economie des Processus Aléatoires: le cas du marché des vins de consommation courante, Thèse Doctorale d'Etat, Sciences Economiques, Université de Montpellier.

Terraza, M., and Bourbonnais, R., (2016) Analyse des séries temporelles-applications à l'économie et à la gestion, 4eme edition, ed. Dunod.

Tobin, H., (1958) Liquidity preference as behavior towards risk; *The review of economics studies*, 25 (2):65-86.

Thaler, R., (1980) Toward a positive theory of consumer choice, *Journal of Economic Behavior and organization*, 1:39-60.

Thaler, R., (1985) Mental Accounting and Consumer Choice, *Marketing Science*, 4:199-214.

Torrence, C., and Compo, G.P., (1998) A practical guide to wavelet analysis, *Bulletin of the american meteorological society*, 79(1):61-78.

Torrence, C., and Webster, P.J., (1999) Interdecadal in the ENSO-Monsoon System, *Journal of Climate*, 12: 2679-2690.

Treynor, J.L. (1962). Toward a Theory of Market Value of Risky Assets. Unpublished manuscript. Version publiée en 1999 par Robert A. Korajczyk dans *Asset Pricing and*

Portfolio Performance: Models, Strategy and Performance Metrics, London: Risk Books, pp. 15–22.

Tsay, H-J., Chen, M-C., and Yang, C-Y., (2014) A Time-Varying perspective on the CAPM and Downside Betas, *International Review of Economics and Finance*, 29:440-454.

Tufano, P., (1998). The determinants of stock price exposure: Financial engineering and the gold mining industry. *Journal of Finance* 53(3), 1015-1052.

Vacha, L., and Barunik, J., (2012) Co-movement of energy commodities revisited: evidence from wavelet coherence analysis, *Energy Economic*, 34:241-247.

Von Neuman, J., and Morgenstern, O., (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.

Weinstein, N.D., (1980) Unrealistic optimism about future life events, *Journal of Personality and Social Psychology*, 39:806-820.

Whitcher, B., (1998) *Assessing Nonstationary Time Series Using Wavelets*, PhD Thesis, University of Washington.

Yeo, J; (2001), *Modelling Time-Varying Systematic Risk in Australia*; Proceedings of the International Congress on Modelling & Simulation. ed. / F. Ghessemi; M. McAleer; L. Oxley; M. Scoccimarro. Vol. 3, Canberra. ed. Western Australia : Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand Inc., 2001: 1565-1570.

Zhang, L., (2005) The value premium, *Journal of Finance*, 60:67-103.

Table des matières

Introduction Générale.....	9
Chapitre 1 : Le Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (MEDAF) et l'analyse Temps-Fréquence	25
<i>Section 1 : Aspects théoriques du Modèle d'Evaluation Des Actifs Financiers de Sharpe et ses prolongements.....</i>	<i>27</i>
1.1. De Markowitz à Sharpe : Les origines du MEDAF :	27
1.2. Les fondements du MEDAF.....	31
1.3. Empirie versus Théorie : vers une validité relative du MEDAF :	38
1.4. Les extensions du MEDAF signent-elles la fin du modèle ?	42
1.5. L'utilisation empirique du MEDAF : Le Beta un outil d'analyse simple.....	49
1.6. Le Beta au cœur des améliorations économétriques du MEDAF.....	53
1.6.1. L'instabilité temporelle du Beta	54
1.6.1.1. Les approches "traditionnelles"	55
1.6.1.2. Les approches "conditionnelles"	55
1.6.1.3. Les approches "alternatives"	56
1.6.2. Le Beta est-il dépendant de la fréquence des données ?.....	57
1.7. La rationalité et l'hétérogénéité des agents du MEDAF.....	58
1.7.1. La Finance Comportementale et ses critiques du MEDAF	58
1.7.2. L'hétérogénéité des agents est-elle compatible avec le MEDAF ?	60
1.8. Conclusion Section 1 :	62
<i>Section 2 : Théorie des ondelettes univariées et multivariées.....</i>	<i>64</i>
2.1 L'Analyse Spectrale à l'origine des études dans le domaine des fréquences.....	66
2.2 La transformation continue en ondelette (Continuous Wavelet Transform -CWT):	71
2.2.1 Approche théorique des ondelettes continues	72
2.2.2 La Transformation continue en ondelettes : Analytical-CWT	75
2.2.3 Vers une discrétisation temporelle de la CWT	80
2.3 Les transformations discrètes en ondelettes :.....	85
2.3.1 Les Transformations en ondelettes vues comme un Filtrage Passe-Bandes successif	86
2.3.2 La MODWT : une transformation discrète améliorée.....	95
2.3.3 Différences entre la DWT et la MODWT	98
2.3.4 L'analyse Multirésolution et les ondelettes	100

2.4	<i>Les outils multivariés par ondelettes continues :</i>	103
2.4.1	MODWT et MCO : estimation par ondelettes discrètes.....	103
2.4.2	Approche Multivariée de le CWT : la Cohérence et la Phase en ondelettes.	105
2.5	<i>Conclusion Section 2</i>	109
	<i>Conclusion Chapitre 1</i>	111
	<i>Annexe du chapitre: Decomposition Temps-Fréquence du CAC40</i>	113
	Chapitre 2 : Le MEDAF tempo-Fréquentiel	137
	<i>Section 1 : Construction et Estimation du MEDAF Fréquentiel par les Ondelettes Discrètes</i>	139
1.1	<i>Estimation globale du MEDAF:</i>	141
1.1.1	Estimation de la droite de marché sur la période 2005-2015:	141
1.1.2	Estimation par période des paramètres :	145
1.1.3	Analyse de l'instabilité temporelle du beta :	147
1.2	<i>Analyse du MEDAF fréquentiel :</i>	151
1.2.1	Décomposition par ondelettes des actifs :	152
1.2.2	Régressions fréquentielles sur la période 2005-2015 :	154
1.2.3	Régressions fréquentielles par périodes :	158
1.2.4	Analyse de la volatilité des betas fréquents.....	159
1.3	<i>Conclusion :</i>	162
	<i>Annexes :</i>	165
	<i>Bibliographie</i>	191
	<i>Section 2 : La Fenêtre Tempo-Fréquentielle Roulante : une étude de l'instabilité des Betas</i>	194
2.1	<i>Aspects théoriques des ondelettes : une comparaison des fenêtres tempo-fréquentielles appliquées au MEDAF</i>	195
2.1.1	Présentation théorique des ondelettes.....	196
2.1.2	Comparaisons des estimations tempo-fréquentielles du Beta :	198
2.2	<i>Analyse de l'instabilité des Betas par la Fenêtre Tempo-Fréquentielle.</i>	201
2.3	<i>Conclusion</i>	205
	<i>Annexes</i>	206
	<i>Bibliographie</i>	209
	<i>Conclusion du Chapitre 2</i>	211
	<i>Annexe du chapitre: Estimations simultanées du Beta de la Droite de Marché avec erreurs GARCH</i>	214
	Chapitre 3 : Analyses Temps-Fréquences multivariées du MEDAF	229
	<i>Section 1 : Un modèle Multi-Betas Tempo-Fréquentiel</i>	231

1.1	<i>Estimation du Modèle Multi-Betas temporel</i>	233
1.2	<i>Estimation du Modèle Multi-Betas Tempo-Fréquentiel</i>	238
1.2.1	Rappel sur la méthodologie des ondelettes : Maximal Overlap Discret Wavelets Transform (MODWT) :.....	239
1.2.2	Estimations des Modèles Multi-Betas Tempo-Fréquentiels :.....	241
1.2.3	Sensibilités des primes de risque des actions aux variables Pétrole et Or:.....	242
1.3	<i>Conclusion</i>	247
	<i>Annexes</i>	249
	<i>Bibliographie</i>	258
	Section 2 : Estimation du Risque Systématique par les Ondelettes Continues	263
1.1.	<i>Analyse Multidimensionnelle Temps-Fréquence du MEDAF</i>	263
2.1.1	L'analyse temps-fréquence.....	266
2.1.1.1	Les ondelettes	266
2.1.1.2	La cohérence d'ondelettes	269
2.1.2	Résultats et Discussions	270
2.1.2.1	La relation Action-Marché selon le MEDAF et l'approche fréquentielle.	271
2.1.2.2	Analyse par les ondelettes de la relation Action-Marché.....	272
2.1.3	Conclusion.....	277
	<i>Annexes</i>	279
	<i>Bibliographie</i>	281
1.2.	<i>Estimation du Beta Tempo-fréquentiel de la Droite de Marché -Une approche par les ondelettes continues</i>	283
2.2.1	L'analyse Temps-Fréquences Multivariée	284
2.2.2	Résultats et Discussions	287
2.2.2.1	Estimations des paramètres de la relation Action-Marché par les MCO.....	287
2.2.2.2	Calcul de la Cohérence-Phase entre les Actions et le Marché.....	288
2.2.2.3	Estimations tempo-fréquentielle d'un Beta variant :.....	291
2.2.3.	Conclusion.....	296
	<i>Annexes</i>	297
	<i>Bibliographie</i>	301
	<i>Conclusion du Chapitre</i>	303
	<i>Annexe du chapitre: Time-Frequency Varying Estimations - Comparison of Discrete and Continuous wavelets in the Market Line framework</i>	307
	<i>(Estimations variable Tempo-Fréquentielles - Une comparaison des Ondelettes Discrètes et Continues dans le cadre de la Droite de Marché)</i>	307
	Conclusion Générale	336

Bibliographie Introduction et Chapitre 1	340
Table des matières.....	354