



HAL
open science

Méthode de zoom structural étendue aux hétérogénéités non linéaires.

Anthony Chagneau

► **To cite this version:**

Anthony Chagneau. Méthode de zoom structural étendue aux hétérogénéités non linéaires.. Autre. Université Montpellier, 2019. Français. NNT : 2019MONT051 . tel-02476276

HAL Id: tel-02476276

<https://theses.hal.science/tel-02476276>

Submitted on 12 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE POUR OBTENIR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

En Mécanique et Génie Civil

École doctorale : Informations, Structures, Systèmes

Unité de recherche : Laboratoire de Mécanique et Génie Civil

Méthode de zoom structural étendue aux hétérogénéités non linéaires.

Présentée par Anthony CHAGNEAU

Le 18 Octobre 2019

Sous la direction de Stéphane PAGANO
et Pierre ALART

Devant le jury composé de

David DUREISSEIX,	Professeur,	Insa de Lyon	Président
Hachmi BEN DHIA,	Professeur,	Université Paris_Saclay	Rapporteur
Frédéric LEBON,	Professeur,	Aix-Marseille Université	Rapporteur
Loïc DARIDON,	Professeur,	Université de Montpellier	Examineur
Stéphane PAGANO,	DR2,	CNRS	Directeur de thèse
Pierre ALART,	Professeur,	Université de Montpellier	Co-Directeur de thèse



UNIVERSITÉ
DE MONTPELLIER

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus profonde gratitude à mes deux encadrants, Stéphane Pagano et Pierre Alart qui m'ont proposé ce sujet de thèse et sans qui cette aventure aurait été impossible. Je les remercie pour leurs aides et leurs conseils ainsi que leur patience et leurs soutiens qui ont été d'un grand renfort tout au long de la thèse. J'ai eu beaucoup de chance de les avoir comme encadrant et qu'ils trouvent ici ma plus profonde reconnaissance.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à David Dureisseix pour avoir accepté de présider le jury, à Hachmi Ben Dhia et Frédéric Lebon pour avoir accepté la tâche de rapporteur de ce mémoire de thèse ainsi qu'aux autres membres du jury.

Je désire aussi remercier l'ensemble du personnel du LMGC pour leur accueil ainsi que pour l'environnement de travail et l'ambiance qui est idéal. Particulièrement Kaje-tan avec qui j'ai partagé le bureau durant toutes ces années et de Loïc, pour leur aide et leur bonne ambiance.

Enfin je remercie ma famille et amis dont la bienveillance de chacun m'a encouragé tout au long de mes études et leurs conseils et leurs encouragements ont été déterminants en particulier mon oncle et mon parrain qui ont toujours été pour moi une source de conseils et un exemple de réussite. Je remercie également ma maman que rien ne pourra lui exprimer tout ce que je lui dois. Ce travail est une petite partie du témoignage de l'amour que je lui porte. À ma copine, Laurine, son soutien et son affection ont été pour moi une motivation sans failles durant toutes ces années. Et pour finir à ma grand-mère, Jeannine, et à mon cousin germain, Roger. Leurs départ prématurés m'a son doute permis de réussir cette aventure en guise de souvenirs.

Table des matières

1 Transfert d'information entre maillages incompatibles	9
1.1 Méthode de zoom structural	10
1.2 Méthode Arlequin	22
2 Zoom structural à fort contraste et optimisation numérique	31
2.1 Améliorations de la méthode de zoom structural	32
2.2 Résolution numérique du système linéaire	36
3 Validation sur une plaque avec/sans défaut	49
3.1 Mise en place des paramètres de validation	50
3.2 Mesures de l'erreur	55
3.3 Étude paramétrique	61
4 Extension à un problème non linéaire : Élastoplasticité	77
4.1 Formulation du zoom structural en élastoplasticité	78
4.2 Validation sur une structure élastoplastique	87

Introduction

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC) de Montpellier sous la direction de Stéphane Pagano et de Pierre Alart. L'objectif était d'étudier une méthode de couplage multi-échelle autre que la méthode Arlequin initialement proposé par Ben Dhia [5] en 1998.

Contexte scientifique

Les structures mécaniques peuvent avoir des géométries complexes, des défauts, ou encore des zones d'intérêt particulières (concentration de contraintes, plasticité, ...). Leur étude peut nécessiter la réalisation de maillages complexes, avec une différence de taille d'éléments fins importantes, ce qui peut être pratique à l'usage. Une approche consiste à réaliser une discrétisation "grossière" de la structure ainsi qu'une discrétisation "fine" au niveau du défaut ou de la zone d'intérêt, avec des modèles potentiellement différents. Le degré d'incompatibilité entre les deux discrétisations peut se présenter sous plusieurs formes,

- soit les maillages sont identiques dans la zone d'intérêt, cf Figure 1a.
- soit les maillages sont imbriqués, c'est-à-dire que les coins du maillage fin coïncident avec des nœuds du maillage grossier, cf Figure 1b.
- soit les maillages sont superposés, cf Figure 1c.
- soit les maillages sont dissemblables, par exemple avec une topologie de mailles différentes, cf Figure 1d.

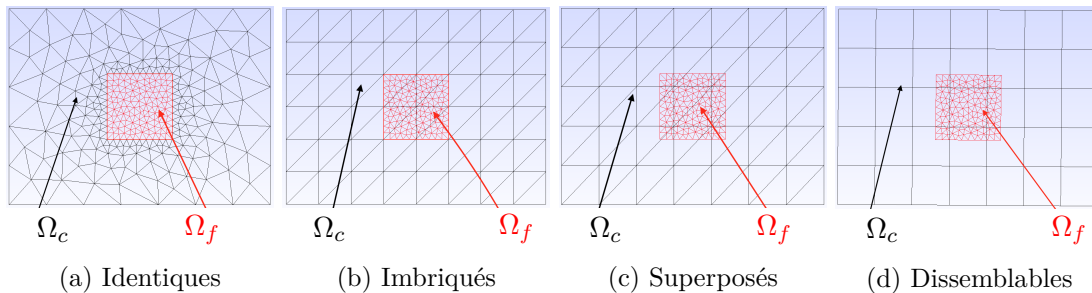


FIGURE 1 – Degrès d'incompatibilité entre les maillages.

Avec cette approche, on peut déplacer alors le modèle fin, appelé le patch, dans la structure pour réaliser les différentes études, sans pour autant avoir à remailler la structure (cf Figure 2) et ainsi avoir une plus grande liberté d'usage.

Cette approche nécessite d'avoir un outil de simulation sur deux modèles en simultané, et un outil de transfert d'information entre maillages incompatibles. Dans la littérature ce type d'approche a déjà été proposée par Ben Dhia avec la méthode Arlequin [5]. Dans notre approche, on met en place un outil de transfert d'information entre

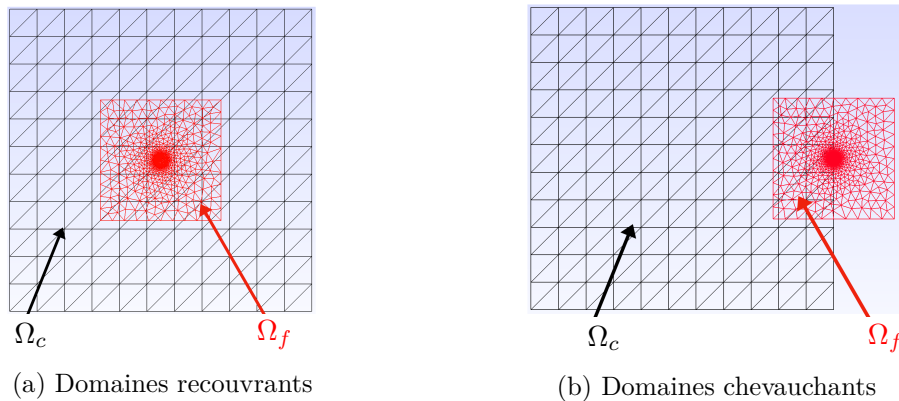


FIGURE 2 – Maillages superposés avec une discrétisation "grossière" pour Ω_c et une discrétisation "fine" pour Ω_f .

les deux maillages incompatibles pour des champs matériels échantillonnés aux points d'intégration des maillages. L'intérêt de cette approche est de ne pas faire intervenir de paramètre de pondération entre les champs issus des deux discrétisations différentes, celui-ci est automatiquement défini par les opérateurs de transfert. Il existe d'autres techniques de zoom de type "adaptatif" basées sur la méthode multigrille qui consiste à un raffinement local du maillage dans une zone d'intérêt (cf [29] et [28]). On peut citer par exemple les quatre méthodes suivantes,

- la méthode LDC, pour Local Defect Correction (cf [27]),
- la méthode MLAT, pour MultiLevel Adaptive Techniques (cf [15]),
- la méthode FAC, pour Fast Adaptive Composite (cf [30]) et
- la méthode FIC, pour Flux Interface Correction (cf [2]).

Objectifs

L'objectif initial de ce travail était de poursuivre le travail mené par David Dureisseix sur la méthode de zoom structural. Dans un premier temps, on a étudié la résolution du système tangent pour le cas d'une structure élastique afin de définir les meilleurs outils de résolution en termes de temps CPU. Une fois cette étude faite, l'objectif suivant était de valider la méthode de zoom structural sur des tests mécaniques différents (traction ou cisaillement) avec une structure possédant ou non un défaut (inclusion dure ou molle et trou). Après cette validation, on devait étendre cet approche à un comportement non linéaire.

Plan de l'étude

Les deux premiers chapitres servent à positionner le travail réalisé dans le cadre de cette thèse. Le chapitre 1 a pour objectif de présenter la méthode de zoom structural et de construire le système tangent élastique, provenant de l'équilibre de la structure avec l'hypothèse des petites perturbations ainsi que d'un raccord énergétique entre les deux modèles sur la zone d'intérêt. La deuxième partie de ce chapitre est de situer la méthode de zoom structural par rapport à une autre méthode multi-échelle, la méthode Arlequin.

Le chapitre 2 est consacré à la prise en compte de la présence de forts contrastes dans la zone d'intérêt ainsi que le choix des outils pour la résolution du système tangent. Ces outils sont le solveur, le préconditionneurs et la renumérotation du système.

Le chapitre 3 regroupe les résultats numériques sur deux essais mécaniques (traction et cisaillement) pour quatre cas test,

- Structure saine ou sans défaut,
- Structure avec un inclusion circulaire dure,
- Structure avec un inclusion circulaire molle,
- Structure avec un trou.

On étudie l'influence de certains paramètres considérés dans la stratégie de zoom structural, comme par exemple la taille dédié à la zone de raccord.

Le chapitre 4 complexifie le problème en y ajoutant un comportement non linéaire à l'intérieur de la zone d'intérêt, un comportement élastoplastique. On teste notre nouveau système tangent élastoplastique sur des essais mécaniques et des cas tests afin de valider l'extension de la méthode de zoom structural. Les tests sont les mêmes que pour le chapitre 3 (traction et cisaillement) avec en plus un structure comportant plusieurs défauts de géométries différentes ainsi que des essais avec des sollicitations mixtes comprenant à la fois de la traction et du cisaillement.

Chapitre 1

Transfert d'information entre maillages incompatibles

Sommaire

1.1 Méthode de zoom structural	10
1.1.1 Transfert nodal de champs	10
1.1.1.1 Opérateurs de collocation	10
1.1.1.2 La projection de type mortar	12
1.1.2 Transfert de champs échantillonnés	13
1.1.2.1 Définition des opérateurs élémentaires	13
1.1.2.2 Adaptation de la méthode de projection	15
1.1.3 Équilibre d'une structure élastique	17
1.1.3.1 Positionnement du problème et conditions aux limites	17
1.1.3.2 Construction du problème d'élasticité approché	19
1.2 Méthode Arlequin	22
1.2.1 Présentation de la méthode	22
1.2.2 Illustration des deux méthodes sur un exemple 1D	25
1.2.2.1 Cas d'un chargement au bord	25
1.2.2.2 Cas d'un chargement volumique	26
1.2.3 Illustration des deux méthodes sur un exemple 2D	26
1.2.3.1 Maillages identiques	27
1.2.3.2 Maillages imbriqués	28

Ce chapitre est consacré à la présentation d'une méthode multi-échelle, la méthode de zoom structural (cf [17]), et à sa comparaison avec une méthode multi-échelle alternative, la méthode Arlequin (cf [5], [7]). Il est construit en deux parties. La première consiste en un rappel des principes et ingrédients de la méthode de zoom structural pour un transfert entre deux maillages, ainsi que son intégration dans une formulation variationnelle. Dans la deuxième partie présente de manière succincte la méthode Arlequin et la compare avec la méthode de zoom structural sur des exemples très simples.

1.1 Méthode de zoom structural

Dans [17] et [18], on considère deux maillages, un grossier sur toute la structure et un autre local plus raffiné. Il convient d'abord d'être capable de transférer des champs représentés par des valeurs nodales sur les deux maillages, notamment des champs de déplacement ou de force. Ce transfert s'opère à l'aide d'une approche de type mortar, sans l'introduction de paramètres numériques, cette méthode se traduisant par des opérateurs algébriques ([13], [12], [11]).

En outre, d'autres champs sont représentés non plus aux nœuds mais aux points d'intégration, notamment dans le cas des champs tensoriels de déformation et de contrainte en mécanique du solide. Pour ces champs, dits échantillonnés, il convient de définir des opérateurs d'interpolation et d'extrapolation afin de se ramener au cas précédent des transferts nodaux. Enfin l'équilibre d'un champ de contrainte, représentatif du comportement sur la structure prenant en compte les deux maillages, inséré dans la formulation variationnelle, permet d'obtenir le problème discret associé.

1.1.1 Transfert nodal de champs

Selon [18], l'opérateur de transfert le plus simple est de type "collocation". On considère deux domaines, Ω_c pour la structure globale et Ω_f pour une partie d'intérêt particulier de Ω_c , appelé le patch. On confond dans la même dénomination les domaines et leurs maillages pour simplifier l'écriture.

Le maillage Ω_f , qualifié de maillage fin, a pour vocation d'être plus riche que le maillage de la structure, qualifié de grossier. On considère dans la suite deux champs de déplacement, $\underline{u}^{(c)}$ et $\underline{u}^{(f)}$, et leurs représentants nodaux, $U^{(c)}$ et $U^{(f)}$ définis respectivement sur Ω_c et Ω_f . Ainsi que les champs de forces internes, $\underline{f}^{(c)}$ et $\underline{f}^{(f)}$, et leurs représentants nodaux, $F^{(c)}$ et $F^{(f)}$.

1.1.1.1 Opérateurs de collocation

L'opérateur de prolongation P_{fc} transfère un champ nodal de Ω_c à Ω_f tel que $U^{(f)} = P_{fc}U^{(c)}$. Évidemment pour deux maillages identiques, l'opérateur P_{fc} est l'identité. Dans le cas où le maillage sur Ω_f est emboîté dans le maillage grossier de Ω_c l'opérateur P_{fc} conserve l'information lié à la finesse du grossier. L'opérateur inverse P_{cf} conduit à une perte d'information lors du transfert du maillage fin vers le maillage grossier.

On se focalise dans un premier temps à un domaine Ω_f inclus dans le domaine Ω_c . L'extension au domaine débordant est traitée dans le chapitre 3. Ces deux cas sont représentés sur la Figure 3.4

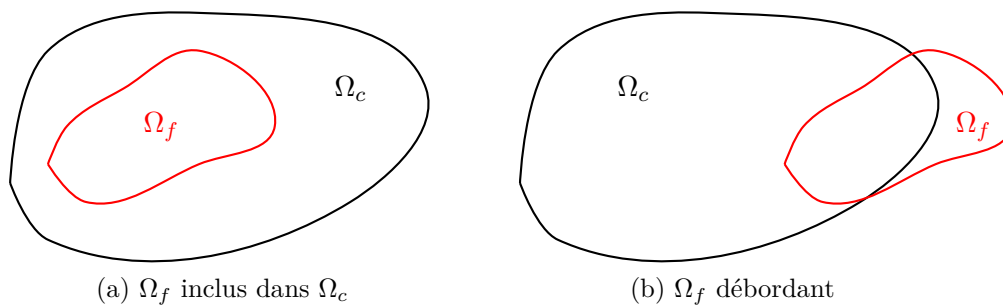


FIGURE 1.1 – Zoom inclusif et zoom débordant.

Pour le transfert du champ nodal $U^{(c)}$ sur un maillage Ω_f , il faut exprimer le champ dual avec sa forme interpolée, notée $F^{(c)}$. En notant $N^{(c)}$ les fonctions de forme discrètes tel que $\underline{u}^{(f)} = N^{(f)T} U^{(f)}$ et $\underline{f}^{(c)} = N^{(c)T} F^{(c)}$, le travail $\langle \underline{u}^{(c)}, \underline{f}^{(c)} \rangle_{\Omega_f}$ est défini par,

$$\langle \underline{u}^{(c)}, \underline{f}^{(c)} \rangle_{\Omega_f} = \int_{\Omega_f} \underline{u}^{(c)} \cdot \underline{f}^{(c)} d\Omega_f = U^{(c)T} \left(\int_{\Omega_f} N^{(c)T} N^{(c)} d\Omega_f \right) F^{(c)}. \quad (1.1)$$

On pose $M_{ij} = \int_{\Omega_f} N^{(i)T} N^{(j)} d\Omega_f$ pour $i, j \in \{c, f\}$, le produit des fonctions de forme, appelé aussi matrice de "masse". Celle-ci est symétrique, définie positive et donc inversible. Le travail s'écrit,

$$\langle \underline{u}^{(c)}, \underline{f}^{(c)} \rangle_{\Omega_f} = U^{(c)T} M_{cc} F^{(c)}. \quad (1.2)$$

L'étape suivante est d'exprimer la conservation du travail entre les deux maillages, c'est-à-dire,

$$\langle \underline{u}^{(c)}, \underline{f}^{(c)} \rangle_{\Omega_f} = \langle \underline{u}^{(f)}, \underline{f}^{(f)} \rangle_{\Omega_f}. \quad (1.3)$$

En utilisant le calcul du travail (1.2) et la conservation du travail entre les deux maillages (1.3), on obtient une relation entre grandeurs nodales,

$$U^{(c)T} M_{cc} F^{(c)} = U^{(f)T} M_{ff} F^{(f)}. \quad (1.4)$$

En remplaçant $U^{(f)}$ par $P_{fc} U^{(c)}$ et en simplifiant par $U^{(c)T}$, l'opérateur de prolongation P_{fc} conduit à,

$$M_{cc} F^{(c)} = P_{fc}^T M_{ff} F^{(f)} \Leftrightarrow F^{(c)} = M_{cc}^{-1} P_{fc}^T M_{ff} F^{(f)}. \quad (1.5)$$

L'opérateur de restriction R_{cf} se déduit de $F^{(c)} = R_{cf} F^{(f)}$ et en simplifiant cette fois-ci par $F^{(f)T}$, ceci donne,

$$R_{cf} = M_{cc}^{-1} P_{fc}^T M_{ff}. \quad (1.6)$$

De manière analogue, on obtient,

$$R_{cf} = M_{cc}^{-1} P_{fc}^T M_{ff} \Leftrightarrow P_{fc}^T = M_{cc} R_{cf} M_{ff}^{-1} \Leftrightarrow P_{fc} = M_{ff}^{-T} R_{cf}^T M_{cc}^T.$$

Les matrices de masse étant symétriques, on a,

$$P_{fc} = M_{ff}^{-1} R_{cf}^T M_{cc} \quad (1.7)$$

Cette dernière relation n'établit qu'un lien entre les opérateurs de prolongation P_{fc} et de restriction R_{cf} sans les construire, ce qui est l'objet de la partie suivante.

1.1.1.2 La projection de type mortar

La projection de type mortar (cf [13], [12], [11], [4] et [3]) sert à transférer le champ $\underline{u}^{(c)} = N^{(c)}U^{(c)}$ vers $\underline{u}^{(f)} = N^{(f)}U^{(f)}$ et doit exprimer l'égalité du travail de ces deux champs dans le champ d'effort $\underline{f}^{(f)}$,

$$\int_{\Omega_f} \underline{u}^{(c)} \cdot \underline{f}^{(f)} d\Omega_f = \int_{\Omega_f} \underline{u}^{(f)} \cdot \underline{f}^{(f)} d\Omega_f, \quad \forall \underline{f}^{(f)}. \quad (1.8)$$

En partant de l'équation (1.8) et avec la définition des champs, on obtient,

$$M_{ff}^{-1} M_{fc} U^{(c)} = U^{(f)}. \quad (1.9)$$

Comme on a défini, $U^{(f)} = P_{fc} U^{(c)}$, on identifie le projecteur de type mortar, $P_{fc} = M_{ff}^{-1} M_{fc}$. Il sert à transférer l'information du domaine fin vers le domaine grossier. On utilise le même formalisme pour identifier le projecteur inverse P_{cf} . Pour cela, on exprime l'égalité du travail de ces deux champs dans le champ d'effort $\underline{f}^{(c)}$,

$$\int_{\Omega_f} \underline{u}^{(c)} \cdot \underline{f}^{(c)} d\Omega_f = \int_{\Omega_f} \underline{u}^{(f)} \cdot \underline{f}^{(c)} d\Omega_f, \quad \forall \underline{f}^{(c)}. \quad (1.10)$$

De la même façon que pour l'équation (1.9), on trouve,

$$U^{(c)} = M_{cc}^{-1} M_{cf} U^{(f)}. \quad (1.11)$$

L'équation (1.11) permet d'identifier $P_{cf} = M_{cc}^{-1} M_{cf}$ par $U^{(c)} = P_{cf} U^{(f)}$. En utilisant l'équation (1.4), on en déduit,

$$M_{ff}^{-1} P_{cf}^T M_{cc} F^{(c)} = F^{(f)}. \quad (1.12)$$

On définit l'opérateur de restriction $R_{fc} = M_{ff}^{-1} P_{cf}^T M_{cc}$ en remplaçant P_{cf} en fonction des matrices de masses,

$$R_{fc} = M_{ff}^{-1} M_{fc}. \quad (1.13)$$

On remarque que l'on a $P_{cf} = R_{cf}$ et $P_{fc} = R_{fc}$. Mais ces opérateurs n'agissent pas sur la même nature de champ. Les opérateurs de prolongations P_{cf} et P_{fc} agissent respectivement sur les champs primaux $U^{(f)}$ et $U^{(c)}$ tandis que les opérateurs de restrictions R_{cf} et R_{fc} agissent respectivement sur les champs duaux $F^{(f)}$ et $F^{(c)}$. Ces résultats sont représentés sur la Figure 1.2.

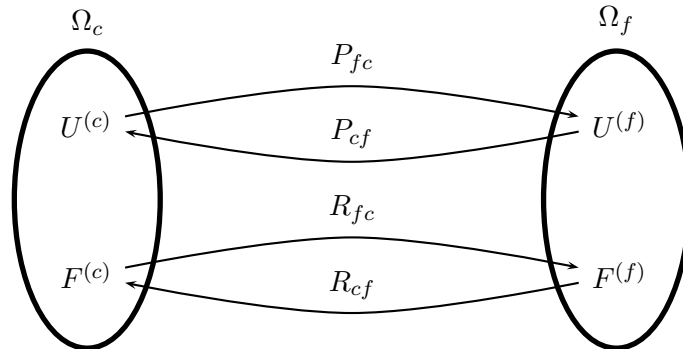


FIGURE 1.2 – Récapitulatif des projecteurs nodaux de type mortar (cf [20], [25]).

Remarque 1.1.1. Cette méthode à l'inconvénient de calculer l'inverse des matrices de masse M_{cc}^{-1} et M_{ff}^{-1} ainsi que les matrices "produits croisés" M_{cf} et M_{fc} .

1.1.2 Transfert de champs échantillonnés

On traite maintenant le cas de l'échantillonnage aux points d'intégration (cf [18]). Le problème est de transférer des informations d'un jeu de valeurs aux points d'intégration d'un maillage Ω_c vers ceux d'un maillage Ω_f . Pour un champ tensoriel $\underline{\underline{\varepsilon}}$ (respectivement $\underline{\underline{\sigma}}$), on dispose des valeurs aux points d'intégrations \mathcal{E} (respectivement Σ) et non plus des valeurs nodales E (respectivement S). On définit l'approximation suivante,

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \approx \sum_{e_{el} \in \Omega} \sum_{k=1}^{n_g} \underline{\underline{\varepsilon}}(I_k) : \underline{\underline{\sigma}}(I_k) w_k J(I_k) = \mathcal{E}^T W \Sigma, \quad (1.14)$$

où on note, I_k les points d'intégration, n_g le nombre de points d'intégration dans l'élément e_{el} , w_k les poids des points de Gauss, J le Jacobien et W la matrice diagonale qui contient le produit des poids de Gauss par le jacobien de la transformation. Il convient de définir un opérateur de transfert entre un champ $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(c)}$ échantillonné aux points d'intégration de Ω_c , vers un champ $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(f)}$ défini sur Ω_f . On pose $\mathcal{E}^{(c)}$ le vecteur global stockant les valeurs du champ aux points d'intégration sur le maillage Ω_c . On veut définir l'opérateur de prolongation \mathcal{P}_{fc} qui transfère un champ de Ω_c à Ω_f tel que $\mathcal{E}^{(f)} = \mathcal{P}_{fc} \mathcal{E}^{(c)}$ où $\mathcal{E}^{(f)}$ est le vecteur global stockant les valeurs du champ aux points d'intégration sur le maillage Ω_f . La conservation du travail sur Ω_f des champs "grossier" et "fin",

$$\int_{\Omega_f} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(c)} : \underline{\underline{\sigma}}^{(c)} d\Omega_f = \int_{\Omega_f} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(f)} : \underline{\underline{\sigma}}^{(f)} d\Omega_f, \quad (1.15)$$

fournit la relation suivante entre les champs échantillonnés,

$$\mathcal{E}^{(c)T} W_c \Sigma^{(c)} = \mathcal{E}^{(f)T} W_f \Sigma^{(f)}. \quad (1.16)$$

De manière analogue aux champs nodaux, on obtient ainsi une relation entre les opérateurs de prolongation \mathcal{P}_{fc} et de restriction \mathcal{R}_{cf} de champs échantillonnés,

$$\Sigma^{(c)} = W_c^{-1} \mathcal{P}_{fc}^T W_f \Sigma^{(f)} = \mathcal{R}_{cf} \Sigma^{(f)},$$

soit,

$$\mathcal{R}_{cf} = W_c^{-1} \mathcal{P}_{fc}^T W_f \text{ et } \mathcal{P}_{fc} = W_f^{-1} \mathcal{R}_{cf}^T W_c. \quad (1.17)$$

Le transfert d'un champ échantillonné entre deux maillages nécessite plusieurs étapes, décrites sur la Figure [L.3]. Reste à définir les opérateurs d'extrapolation et d'interpolation entre champs échantillonnés et champs nodaux.

1.1.2.1 Définition des opérateurs élémentaires

Selon [18], l'approche la plus simple pour le transfert d'un champ échantillonné d'un maillage vers un autre (voir Figure [L.3]) est de considérer les fonctions de forme sur chaque élément et non de manière globale. Par conséquent les projecteurs nodaux P_{cf} et P_{fc} , sont définis au niveau d'un élément, noté e_{el} , et sont désignés P_{cf}^{el} et P_{fc}^{el} . Au niveau d'un élément, le transfert d'un champ échantillonné ε_{el} vers un champ nodal E_{el} est obtenu par un opérateur d'extrapolation \mathcal{L} tel que $E_{el} = \mathcal{L} \varepsilon_{el}$.

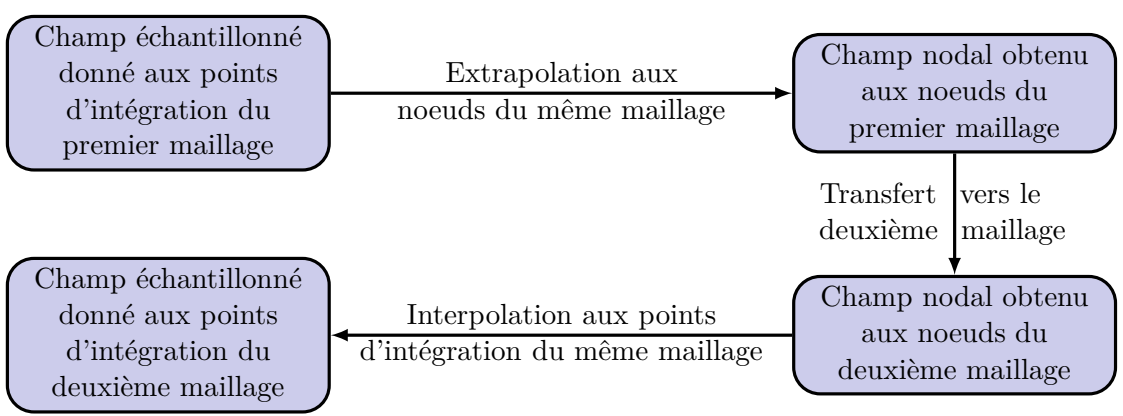


FIGURE 1.3 – Transfert d'un champ échantillonné entre deux maillages.

Le champ dual Σ_{el} est interpolé aux points d'intégration via un *opérateur d'interpolation* \mathcal{N} tel que $\Sigma_{el} = \mathcal{N}S_{el}$, où S_{el} est la représentation nodale du champ Σ_{el} . Dans notre cas, celui de deux maillages, comprenant un jeu de valeurs aux nœuds O^{nod} et un jeu de valeurs aux points d'intégration O^{int} , les relations entre valeurs nodales et échantillonnées sont décrites sur la Figure 1.4 d'un même maillage (Ω_c ou Ω_f).

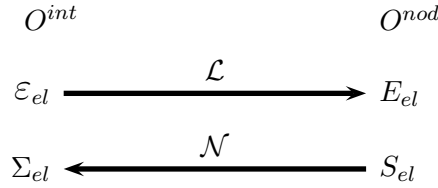


FIGURE 1.4 – Opérateurs d'extrapolation et d'interpolation (cf [20], [25]).

En exprimant le champ continu au niveau de l'élément e_{el} , $\underline{\underline{\varepsilon}}_{el}$ (respectivement $\underline{\underline{\sigma}}_{el}$), par les champs discrets élémentaires, E_{el} (respectivement S_{el}), grâce aux fonctions de forme discrètes élémentaires N_{el} tel que $\underline{\underline{\varepsilon}}_{el} = N_{el}E_{el}$ (respectivement $\underline{\underline{\sigma}}_{el} = N_{el}S_{el}$), on obtient l'approximation du travail,

$$\int_{e_{el}} \underline{\underline{\varepsilon}}_{el} : \underline{\underline{\sigma}}_{el} dV = E_{el}^T \left(\int_{e_{el}} N_{el}^T N_{el} dV \right) S_{el} = E_{el}^T M_{el} S_{el}. \quad (1.18)$$

L'équation (1.14) au niveau élémentaire s'écrit,

$$\int_{e_{el}} \underline{\underline{\varepsilon}}_{el} : \underline{\underline{\sigma}}_{el} dV = \sum_{k=1}^{n_g} \underline{\underline{\varepsilon}}_{el}(I_k) : \underline{\underline{\sigma}}_{el}(I_k) w_k J(I_k) = \varepsilon_{el}^T W_{el} \Sigma_{el}. \quad (1.19)$$

On déduit des équations (1.18) et (1.19), que l'approximation du travail sur un élément est égale, quelle que soit le jeu de valeurs pris en compte (valeurs nodales ou valeurs aux points d'intégrations),

$$\langle \underline{\underline{\varepsilon}}_{el}, \underline{\underline{\sigma}}_{el} \rangle_{e_{el}} = E_{el}^T M_{el} S_{el} = \varepsilon_{el}^T W_{el} \Sigma_{el}. \quad (1.20)$$

Ici, toutes les quantités sont définies au niveau élémentaire, par conséquent l'opérateur d'intégration W_{el} et la matrice de masse M_{el} sont de petites tailles. En reprenant l'égalité (1.20), on obtient,

$$E_{el}^T M_{el} S_{el} = \varepsilon_{el}^T W_{el} \Sigma_{el} \Rightarrow \varepsilon_{el}^T \mathcal{L}^T M_{el} S_{el} = \varepsilon_{el}^T W_{el} \mathcal{N} S_{el} \Rightarrow \mathcal{L}^T M_{el} = W_{el} \mathcal{N} \quad (1.21)$$

1.1. MÉTHODE DE ZOOM STRUCTURAL

Par l'égalité (1.21), on obtient la relation suivante,

$$\mathcal{L} = M_{el}^{-1} \mathcal{N}^T W_{el} \quad (1.22)$$

Si on choisit l'opérateur d'interpolation \mathcal{N} , comme vecteur qui contient les valeurs des fonctions de forme aux points d'intégration I_k ,

$$\mathcal{N} = \begin{bmatrix} N_{el}(I_1) \\ \vdots \\ N_{el}(I_{n_g}) \end{bmatrix}, \quad (1.23)$$

l'équation (1.18) donne,

$$M_{el} = \int_{e_{el}} N_{el}^T N_{el} dV = \sum_{k=1}^{n_g} N_{el}(I_k)^T N_{el}(I_k) w_k J(I_k) = \mathcal{N}^T W_{el} \mathcal{N}. \quad (1.24)$$

Le choix de cet opérateur d'interpolation donne la propriété,

$$\mathcal{L} \mathcal{N} \stackrel{(1.22)}{=} M_{el}^{-1} \mathcal{N}^T W_{el} \mathcal{N} \stackrel{(1.24)}{=} M_{el}^{-1} M_{el} = 1_o, \quad (1.25)$$

où 1_o est la matrice identité des champs nodaux élémentaires. Cette propriété dit que si un champ nodal est interpolé aux points d'intégrations alors son extrapolation aux nœuds doit donner le champ d'origine. Ceci est seulement possible si le nombre de points d'intégration sur e_{el} est au minimum égal au nombre de nœuds sur cet élément. Ce qui est une condition nécessaire pour l'inversion de la matrice de masse élémentaire M_{el} , et donc pour la construction de l'opérateur d'extrapolation \mathcal{L} , obtenue à la relation (1.22).

1.1.2.2 Adaptation de la méthode de projection

Une fois les opérateurs d'interpolation \mathcal{N} et d'extrapolation \mathcal{L} définis, l'étape suivante consiste à construire les opérateurs de prolongation et de restriction des champs échantillonnés au niveau de l'élément e_{el} , notés \mathcal{P}_{fc}^{el} et \mathcal{R}_{cf}^{el} (cf [17], [18]). Les différentes étapes au niveau élémentaire sont illustrées sur la Figure 1.5.

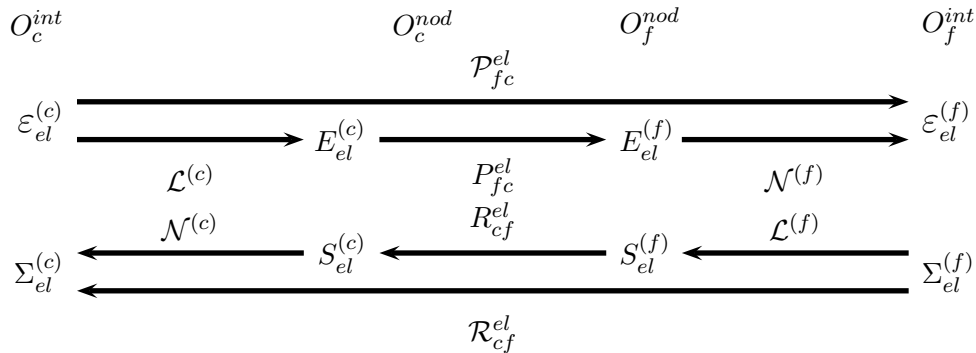


FIGURE 1.5 – Prolongation et restriction pour un champ échantillonné au niveau élémentaire, où $\mathcal{N}^{(i)}$ est l'opérateur d'interpolation, $\mathcal{L}^{(i)}$ est l'opérateur d'extrapolation, pour $i = \{c, f\}$ (cf [17]).

L'opérateur nodal de prolongation élément par élément du maillage Ω_c vers le maillage Ω_f se note P_{fc}^{el} et l'opérateur inverse de restriction R_{cf}^{el} . Par la conservation du travail entre les deux maillages (L.4) et la Figure L.5, on obtient,

$$\begin{cases} \varepsilon_{el}^{(f)} = \mathcal{N}^{(f)} E_{el}^{(f)} \\ E_{el}^{(f)} = P_{fc}^{el} E_{el}^{(c)} \\ E_{el}^{(c)} = \mathcal{L}^{(c)} \varepsilon_{el}^{(c)} \end{cases} . \quad (1.26)$$

Ce qui donne une fois les équations simplifiées,

$$\varepsilon_{el}^{(f)} = \mathcal{N}^{(f)} P_{fc}^{el} \mathcal{L}^{(c)} \varepsilon_{el}^{(c)} . \quad (1.27)$$

L'opérateur de prolongation dans le cas des points d'intégration s'écrit,

$$\mathcal{P}_{fc}^{el} = \mathcal{N}^{(f)} P_{fc}^{el} \mathcal{L}^{(c)} . \quad (1.28)$$

Par (L.4) et la Figure L.5, on obtient,

$$\begin{cases} \Sigma_{el}^{(c)} = \mathcal{N}^{(c)} S_{el}^{(c)} \\ S_{el}^{(c)} = R_{cf}^{el} S_{el}^{(f)} \\ S_{el}^{(f)} = \mathcal{L}^{(f)} \Sigma_{el}^{(f)} \end{cases} . \quad (1.29)$$

Ce qui donne une fois les équations simplifiées,

$$\Sigma_{el}^{(c)} = \mathcal{N}^{(c)} R_{cf}^{el} \mathcal{L}^{(f)} \Sigma_{el}^{(f)} . \quad (1.30)$$

L'opérateur de restriction dans le cas des points d'intégration s'écrit,

$$\mathcal{R}_{cf}^{el} = \mathcal{N}^{(c)} R_{cf}^{el} \mathcal{L}^{(f)} . \quad (1.31)$$

Par définition des opérateurs nodaux P_{fc} et R_{cf} , ces mêmes opérateurs nodaux, élément par élément, P_{fc}^{el} et R_{cf}^{el} , s'écrivent,

$$P_{fc}^{el} = M_{ff}^{el-1} M_{fc}^{el} \text{ et } R_{cf}^{el} = M_{cc}^{el-1} M_{cf}^{el} . \quad (1.32)$$

Comme le calcul des matrices "produits croisés" élémentaires fait intervenir les fonction de forme des deux maillages sur chaque élément, on considère l'intersection Ω_i des deux éléments (cf [18]). La contribution de l'élément "fin" sur l'élément "grossier" est définie par,

$$M_{cf}^{el} = P_{ic}^T M_i P_{if} \quad (1.33)$$

où M_i est la matrice de masse sur Ω_i et P_{ic} et P_{if} sont des opérateurs locaux de collocation. La contribution inverse se définit par $M_{fc}^{el} = (M_{cf}^{el})^T$.

On considère maintenant le transfert d'un maillage Ω_f vers un maillage Ω_c . Les opérateurs \mathcal{P}_{fc} et \mathcal{R}_{cf} sont définis de façon similaire à \mathcal{P}_{cf} et \mathcal{R}_{fc} , on obtient,

$$\mathcal{P}_{fc}^{el} = \mathcal{N}^{(f)} P_{fc}^{el} \mathcal{L}^{(c)} = \mathcal{N}^{(f)} M_{ff}^{el-1} M_{fc}^{el} \mathcal{L}^{(c)} = \mathcal{R}_{fc}^{el} . \quad (1.34)$$

De même pour,

$$\mathcal{P}_{cf}^{el} = \mathcal{R}_{cf}^{el} . \quad (1.35)$$

Une fois les opérateurs élémentaires construits, on peut définir les projecteurs globaux. Pour cela, on considère la contribution des opérateurs élémentaires sur les degrés de liberté des points d'intégration de chaque élément e_{el} d'un premier maillage pour chaque élément e_{int} de son intersection avec le second maillage,

$$\mathcal{P}_{cf} = \sum_{e_{el} \in \Omega_c} \sum_{e_{int} \in e_{el} \cap \Omega_f} \mathcal{P}_{cf}^{el} = \sum_{e_{el} \in \Omega_c} \sum_{e_{int} \in e_{el} \cap \Omega_f} \mathcal{N}^{(c)} P_{cf}^{el} \mathcal{L}^{(f)}. \quad (1.36)$$

Pour construire l'opérateur inverse, on reprend (1.36) et on utilise la relation (1.7) au niveau élémentaire. Ainsi, on obtient,

$$\mathcal{P}_{fc} = \sum_{e_{el} \in \Omega_c} \sum_{e_{int} \in e_{el} \cap \Omega_f} \mathcal{P}_{fc}^{el} = \sum_{e_{el} \in \Omega_c} \sum_{e_{int} \in e_{el} \cap \Omega_f} \mathcal{N}^{(f)} P_{fc}^{el} \mathcal{L}^{(c)}$$

avec $P_{fc}^{el} = M_{ff}^{el-1} P_{cf}^{elT} M_{cc}^{el}$. (1.37)

Dans la section suivante, l'équilibre d'un champ de contrainte tenant compte du comportement sur les deux maillages, permet d'obtenir le problème discret associé.

1.1.3 Équilibre d'une structure élastique

On considère une structure occupant le domaine $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_f \subset \mathbb{R}^3$ dans son état naturel (cf [17]). Son comportement est supposé élastique linéaire, et on se place dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP).

Tout d'abord le problème consiste à étudier le transfert d'information entre un premier maillage "grossier" et un deuxième mobile plus "fin" sans contraste de propriété, c'est-à-dire, avec des modules de Young ($E^{(c)}$ et $E^{(f)}$) et des coefficients de Poisson ($\nu^{(c)}$ et $\nu^{(f)}$) égaux sur les deux domaines et sans défaut.

1.1.3.1 Positionnement du problème et conditions aux limites

On définit Σ le vecteur colonne stockant les composantes du champ de contrainte sur la structure $\underline{\underline{\sigma}}$, aux différents points d'intégrations du maillage, par,

$$\Sigma = \Sigma^{(c)} - \mathcal{P}_{cf} \left(\mathcal{P}_{fc} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(f)} \right) \quad (1.38)$$

avec $\Sigma^{(c)}$ (respectivement $\Sigma^{(f)}$), le vecteur colonne stockant les composantes du champ de contrainte sur le maillage de Ω_c (respectivement Ω_f). Pour simplifier, on parle de contrainte au lieu de champs de contrainte. Implicitement, la contrainte sur la structure, est égale à la contrainte sur Ω_c , corrigée sur Ω_f . Sur ce dernier, on retranche la contribution de la contrainte sur Ω_c , projetée sur Ω_f , et à nouveau sur Ω_c . Puis on ajoute la contribution de la contrainte sur Ω_f projetée sur Ω_c . Cette démarche est illustrée sur la Figure 1.6 pour des maillages emboîtés.

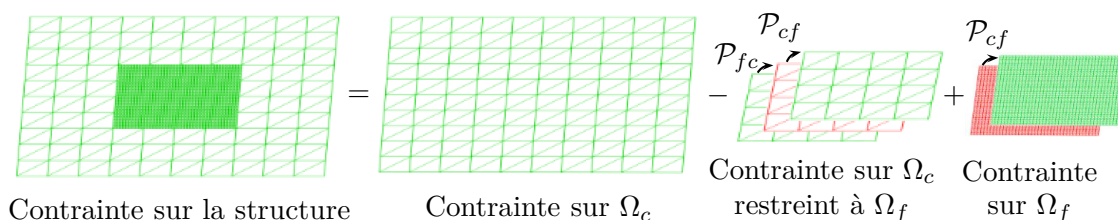


FIGURE 1.6 – Décomposition de la contrainte sur la structure.

La formulation du champ de contrainte discret $\underline{\underline{\sigma}}$ est défini par la construction des projecteurs qui se fait au niveau élémentaire. D'un point de vue continu, l'équation (L.38) s'écrit,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^{(c)} - \mathbf{P}_{cf} \left(\mathbf{P}_{fc} \underline{\underline{\sigma}}^{(c)} - \underline{\underline{\sigma}}^{(f)} \right) \quad (1.39)$$

où \mathbf{P}_{cf} est le projecteur du transfert de champs continus de Ω_f vers Ω_c et \mathbf{P}_{fc} est le projecteur du transfert inverse.

L'équilibre de la structure dans les conditions décrites précédemment (HPP) est définie par les équations locales,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \text{sur } \Omega_c \end{array} \right. \quad (1.40)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(c)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\underline{u}}^{(c)} + (\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\underline{u}}^{(c)})^T) & \text{sur } \Omega_c \end{array} \right. \quad (1.41)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\sigma}}^{(c)} = \mathbf{A}^{(c)} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(c)} & \text{sur } \Omega_c \end{array} \right. \quad (1.42)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(f)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\underline{u}}^{(f)} + (\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\underline{u}}^{(f)})^T) & \text{sur } \Omega_f \end{array} \right. \quad (1.43)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\sigma}}^{(f)} = \mathbf{A}^{(f)} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(f)} & \text{sur } \Omega_f \end{array} \right. \quad (1.44)$$

et les conditions aux limites,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{f}} & \text{sur } S_1 \end{array} \right. \quad (1.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{u}}^{(c)} = \underline{\underline{u}}^{dc} & \text{sur } S_0 \end{array} \right. \quad (1.46)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\sigma}}^{(f)} \cdot \underline{\underline{n}}_f = \underline{\underline{f}}^{(f)} & \text{sur } S_a \end{array} \right. \quad (1.47)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{u}}^{(f)} = \underline{\underline{u}}^{df} & \text{sur } S_b \end{array} \right. \quad (1.48)$$

pour lesquelles les surfaces S_0 et S_1 forment une partition de $\partial\Omega_c$ et les surfaces S_a et S_b forment une partition de $\partial\Omega_f$,

$$\left\{ \begin{array}{ll} S_0 \cup S_1 = \partial\Omega_c, & S_0 \cap S_1 = \emptyset \\ S_a \cup S_b = \partial\Omega_f, & S_a \cap S_b = \emptyset \end{array} \right. \quad (1.49)$$

Les équations (L.40) à (L.48) constituent ce qu'on appelle parfois la formulation forte du problème d'équilibre en élasticité. Elles relèvent, comme pour tout modèle de milieu continu, de trois catégories essentielles :

1. Équations de compatibilité cinématique : (L.41), (L.43)
2. Équations d'équilibre : (L.40), (L.45), (L.46), (L.47), (L.48)
3. Équations de comportement : (L.42), (L.44)

Dans les équations de comportement (L.42) et (L.44), les tenseurs $\mathbf{A}^{(c)}$ et $\mathbf{A}^{(f)}$ sont les modules d'élasticité respectivement sur Ω_c et Ω_f . Ils sont du quatrième ordre et possèdent les symétries mineures et majeures. Dans le cas d'un matériau isotrope sur les deux domaines Ω_c et Ω_f , les tenseurs $\mathbf{A}^{(c)}$ et $\mathbf{A}^{(f)}$ peuvent se mettre sous diverses formes en terme de module d'élasticité usuel, par exemple sur Ω_c ,

$$\mathbf{A}^{(c)} = 3\lambda^{(c)}\mathbf{J} + 2\mu^{(c)}\mathbf{I} = 2\mu^{(c)} \left(\frac{3\nu^{(c)}}{1-2\nu^{(c)}}\mathbf{J} + \mathbf{I} \right) = 3\kappa^{(c)}\mathbf{J} + 2\mu^{(c)}\mathbf{D} \quad (1.50)$$

avec

— $\lambda^{(c)}, \mu^{(c)}$ les coefficients de Lamé,

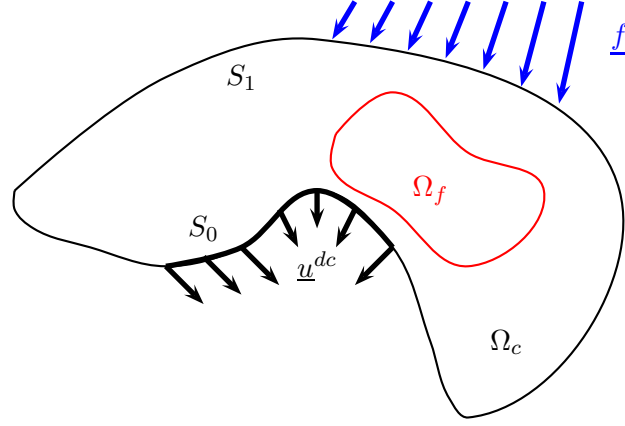


FIGURE 1.7 – Problème classique aux limites en mécanique du solide avec Ω_f inclus dans Ω_c pour fixer les idées.

- $\nu^{(c)}$ le coefficient de Poisson,
- $\kappa^{(c)}$ le module de compressibilité,
- \mathbf{I} est le tenseur associé à l'identité entre tenseurs symétriques du second ordre,

$$\mathbf{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}), \quad (1.51)$$

- \mathbf{J} est le tenseur associé à la projection sur le sous-espace des tenseurs sphériques,

$$\mathbf{J}_{ijkl} = \frac{1}{3}(\delta_{ij}\delta_{kl}), \quad (1.52)$$

- \mathbf{D} est le tenseur associé à la projection sur le sous-espace des tenseurs déviatoriques ,

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} - \mathbf{J}. \quad (1.53)$$

La démarche est la même sur le domaine Ω_f en remplaçant les exposants (c) par (f) . Pour finir, on définit les tenseurs d'ordre 4, $\mathbf{S}^{(c)}$ et $\mathbf{S}^{(f)}$, de souplesse élastique respectivement sur Ω_c et Ω_f . Ces deux tenseurs sont associés à la forme inverse des relations de comportement (1.42) et (1.44), par,

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}}^{(c)} = \mathbf{A}^{(c)} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(c)} \Leftrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}^{(c)} = \mathbf{S}^{(c)} : \underline{\underline{\sigma}}^{(c)} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{(f)} = \mathbf{A}^{(f)} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{(f)} \Leftrightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}^{(f)} = \mathbf{S}^{(f)} : \underline{\underline{\sigma}}^{(f)} \end{cases} \quad (1.54)$$

1.1.3.2 Construction du problème d'élasticité approché

L'équation locale d'équilibre (1.40) peut être exprimée par dualisation sous forme d'intégrale, c'est-à-dire en multipliant par un champ $\underline{u}^{(c)*} \in C(\underline{\Omega})$ arbitraire et en intégrant sur Ω_c . Avec $C(\underline{\Omega})$ l'ensemble des champs de déplacement admissibles,

$$C(\underline{\Omega}) = \{\underline{u}^{(c)*} | \underline{u}^{(c)*} \text{ continu et régulier sur } \Omega_c \text{ tel que } \underline{u}^{(c)*} = \underline{0} \text{ sur } S_0\}, \quad (1.55)$$

on obtient la forme faible de l'équation locale d'équilibre,

$$\int_{\Omega_c} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(c)*}) d\Omega_c = \int_{\partial\Omega_c} [\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}] \cdot \underline{u}^{(c)*} dS, \quad \forall \underline{u}^{(c)*} \in C(\underline{\Omega}) \quad (1.56)$$

qui correspond en fait au principe des puissances virtuelles (PPV) appliqué au cas de l'équilibre. Tenant compte des conditions aux limites (L.45) et (L.46), le principe des puissances virtuelles prend la forme,

$$\int_{\Omega_c} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(c)*}) d\Omega_c = \int_{S_1} \underline{f} \cdot \underline{u}^{(c)*} dS, \quad \forall \underline{u}^{(c)*} \in C(\underline{0}). \quad (1.57)$$

Par (L.14) et en passant en discret, on obtient,

$$\varepsilon^{(c)*T} W_c \Sigma = \sum_{i=1}^{n_{s_1}} \int_{e_i} \underline{f} \cdot \underline{u}^{(c)*} dS = U^{(c)*T} M_{cc} F^{(c)}, \quad \forall U^{(c)*}, \quad (1.58)$$

avec e_i l'élément fini d'étude sur S_1 , n_{s_1} le nombre d'éléments du domaine S_1 , W_c la matrice diagonale qui contient le produit des poids de Gauss par le jacobien de la transformation sur le domaine Ω_c et Σ (respectivement $\varepsilon^{(c)*T}$) le vecteur des valeurs de $\underline{\underline{\sigma}}$ (respectivement $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{(c)*})$) aux points d'intégration et $F^{(c)}$ le vecteur des forces généralisées. En remplaçant la contrainte sur toute la structure, notée Σ , par sa décomposition (4.39), on obtient,

$$\varepsilon^{(c)*T} W_c \left(\Sigma^{(c)} - \mathcal{P}_{cf} \left(\mathcal{P}_{fc} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(f)} \right) \right) = U^{(c)*T} M_{cc} F^{(c)}, \quad \forall U^{(c)*}. \quad (1.59)$$

Soit encore,

$$\varepsilon^{(c)*T} W_c \Sigma^{(c)} - \varepsilon^{(c)*T} W_c \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} \Sigma^{(c)} + \varepsilon^{(c)*T} W_c \mathcal{P}_{cf} \Sigma^{(f)} = U^{(c)*T} M_{cc} F^{(c)}, \quad \forall U^{(c)*}. \quad (1.60)$$

La loi d'élasticité discrète sur Ω_i , $\Sigma^{(i)} = A^{(i)} \varepsilon^{(i)}$ pour $i = \{c, f\}$ permet d'écrire,

$$\varepsilon^{(c)*T} W_c A^{(c)} \varepsilon^{(c)} - \varepsilon^{(c)*T} W_c \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} \varepsilon^{(c)} + \varepsilon^{(c)*T} W_c \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} \varepsilon^{(f)} = U^{(c)*T} M_{cc} F^{(c)}, \quad \forall U^{(c)*}. \quad (1.61)$$

L'équation reliant le champ de déformation discret $\varepsilon^{(i)}$ aux déplacements nodaux $U^{(i)}$ par l'opérateur $B_{\varepsilon^{(i)}}$ pour $i = \{c, f\}$,

$$\varepsilon^{(i)} = B_{\varepsilon^{(i)}} U^{(i)} \text{ pour } i = \{c, f\} \quad (1.62)$$

permet d'écrire (L.61) soit

$$\begin{aligned} & \left(B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)*} \right)^T W_c A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} - \left(B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)*} \right)^T W_c \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} \\ & + \left(B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)*} \right)^T W_c \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} U^{(f)} = U^{(c)*T} M_{cc} F^{(c)}, \quad \forall U^{(c)*}, \end{aligned} \quad (1.63)$$

soit encore par,

$$\begin{aligned} & U^{(c)*T} B_{\varepsilon^{(c)}}^T W_c A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} - U^{(c)*T} B_{\varepsilon^{(c)}}^T W_c \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} \\ & + U^{(c)*T} B_{\varepsilon^{(c)}}^T W_c \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} U^{(f)} = U^{(c)*T} M_{cc} F^{(c)}, \quad \forall U^{(c)*}. \end{aligned} \quad (1.64)$$

En s'inspirant de (L.14), on peut écrire,

$$\begin{aligned}
 U^{(c)*T} B_{\varepsilon^{(c)}}^T W_c A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} &= \int_{\Omega_c} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(c)*} : \underline{\underline{\sigma}}^{(c)} d\Omega_c = \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{E_e} \underline{\underline{\varepsilon}}^{(c)*} : \underline{\underline{\sigma}}^{(c)} d\Omega_c \\
 &= U^{(c)*T} K_c U^{(c)} - U^{(c)*T} F^{U^{(c)}}, \quad \forall U^{(c)*}. \quad (1.65)
 \end{aligned}$$

où K_c est la matrice de rigidité et $F^{U^{(c)}}$ l'effort associé au déplacement imposé sur Ω_c . Avec E_e l'élément fini d'étude sur Ω_{el} , n_{el} le nombre d'éléments sur le domaine Ω_c . Par (1.65), l'équation (1.64) donne alors

$$\begin{aligned}
 U^{(c)*T} K_c U^{(c)} - U^{(c)*T} B_{\varepsilon^{(c)}}^T W_c \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} + U^{(c)*T} B_{\varepsilon^{(c)}}^T W_c \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} U^{(f)} \\
 = U^{(c)*T} M_{cc} F^{(c)} + U^{(c)*T} F^{U^{(c)}}, \quad \forall U^{(c)*}. \quad (1.66)
 \end{aligned}$$

En posant l'opérateur $B_{\sigma^{(c)}} = W_c B_{\varepsilon^{(c)}}$ et du fait que W_c est diagonale, on a,

$$\begin{aligned}
 U^{(c)*T} K_c U^{(c)} - U^{(c)*T} B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} + U^{(c)*T} B_{\sigma^{(c)}}^T W_c \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} U^{(f)} \\
 = U^{(c)*T} M_{cc} F^{(c)} + U^{(c)*T} F^{U^{(c)}}, \quad \forall U^{(c)*}. \quad (1.67)
 \end{aligned}$$

En simplifiant par $U^{(c)*}$, l'équation précédente conduit à,

$$K_c U^{(c)} - B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} + B_{\sigma^{(c)}}^T W_c \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} U^{(f)} = M_{cc} F^{(c)} + F^{U^{(c)}}. \quad (1.68)$$

On s'intéresse à présent à ce qui se passe sur le maillage Ω_f . On veut sur Ω_f une égalité du travail pour un champ $\underline{\underline{u}}^{(f)*} \in C(\underline{\underline{u}}^{df})$ arbitraire, entre le champ de contrainte (respectivement de déformation) sur Ω_f et la représentation du champ de contrainte (respectivement de déformation) de Ω_c sur Ω_f . Cette équation est appelé le raccord en contrainte (respectivement en déformation). Pour les détails voir [18].

$$\varepsilon^{(f)*T} W_f \Sigma^{(f)} = \varepsilon^{(f)*T} W_f \mathcal{P}_{fc} \Sigma^{(c)}, \quad \forall \varepsilon^{(f)*T}. \quad (\text{Raccord en contrainte}) \quad (1.69)$$

$$\Sigma^{(f)*T} W_f \varepsilon^{(f)} = \Sigma^{(f)*T} W_f \mathcal{P}_{fc} \varepsilon^{(c)}, \quad \forall \Sigma^{(f)*T}. \quad (\text{Raccord en déformation}) \quad (1.70)$$

Si on adopte la même démarche suivie pour le calcul du PPV, les équations des raccords (1.69) et (1.70) deviennent,

$$K^{(f)} U^{(f)} - B_{\sigma^{(f)}}^T \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} = 0 \quad (\text{Raccord en contrainte}) \quad (1.71)$$

$$K^{(f)} U^{(f)} - B_{\sigma^{(f)}}^T A^{(f)} \mathcal{P}_{fc} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} = 0 \quad (\text{Raccord en déformation}) \quad (1.72)$$

Selon le choix du raccord, soit en contrainte, soit en déformation, on obtient l'un des deux systèmes élastiques suivants,

$$\begin{bmatrix} K^{(c)} - B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} & B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} \\ -B_{\sigma^{(f)}}^T \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} & K^{(f)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(c)} \\ U^{(f)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{cc} F^{(c)} + F^{U^{(c)}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(Raccord en contrainte) (1.73)

$$\begin{bmatrix} K^{(c)} - B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} & B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} \\ -B_{\sigma^{(f)}}^T A^{(f)} \mathcal{P}_{fc} B_{\varepsilon^{(c)}} & K^{(f)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(c)} \\ U^{(f)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{cc} & M_{cf} \\ M_{fc} & M_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{(c)} \\ U^{(f)} \end{bmatrix} \quad \text{INCOMPATIBLES} \\ \text{(Raccord en déformation)} \quad (1.74)$$

Pour deux essais de chargement différents, traction pure et cisaillement, sur une plaque sans défaut, les deux systèmes donnent les mêmes résultats. Le choix du raccord est présenté dans le chapitre suivant.

1.2 Méthode Arlequin

Comme la méthode de zoom structural, la méthode Arlequin (cf [5]) est une méthode multi-échelle permettant de relier des modèles éléments finis de finesses différentes par une technique de superposition. Les différents domaines peuvent être de natures différentes. Son principal avantage est d'étudier le comportement local sans mettre en œuvre une procédure de maillage adaptatif, tout en considérant simultanément deux modèles, chacun étant pertinent à son échelle. La présentation de cette méthode s'appuie essentiellement sur les travaux de ([5], [7], [9]) ainsi que ([34] et [31]).

1.2.1 Présentation de la méthode

Par analogie avec la méthode de zoom structural présentée auparavant, on se contente de deux domaines Ω_1 et Ω_2 et d'une zone de recouvrement de mesure non nulle, définie par $\Omega_s = \Omega_1 \cap \Omega_2$. La zone de recouvrement Ω_s peut être éventuellement subdivisée en deux, une zone de collage, notée Ω_{sc} , où sont écrites les conditions de raccord, et une zone de non-collage, notée Ω_{si} , où seulement le comportement sur Ω_2 est pris en compte. Les différents cas sont représentés sur la Figure 1.8 avec les relations suivantes,

$$\Omega_s = \Omega_{sc} \cup \Omega_{si} \text{ et } \Omega_{sc} \cap \Omega_{si} = \emptyset.$$

La méthode Arlequin offre trois possibilités de modèle, selon les besoins de notre étude (1.8) :

- **Jonction.** ($\Omega_s \subsetneq \Omega_1$ et $\Omega_s \subsetneq \Omega_2$) La zone de recouvrement n'est qu'une partie commune des deux domaines et le couplage s'effectue sur cette zone Ω_s .
- **Zoom.** ($\Omega_s = \Omega_2$) La zone de recouvrement Ω_s est le domaine fin Ω_2 tout entier. Le couplage se fait alors sur Ω_2 .
- **Substitution.** ($\Omega_{sc} \subsetneq \Omega_s$) Le couplage ne s'effectue que sur une partie de la zone de recouvrement Ω_{sc} . Sur le reste de la zone de recouvrement Ω_{si} , seulement le modèle fin est représenté.

La terminologie (jonction, zoom, substitution) est issue de ([5], [7], [9], [34]).

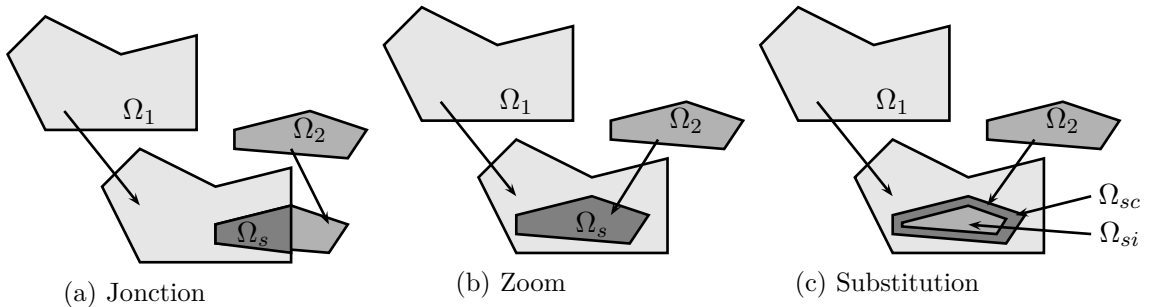


FIGURE 1.8 – Les trois modèles possibles pour la méthode Arlequin (cf [34]).

La méthode Arlequin consiste dans un cadre variationnel à pondérer les énergies issues des modèles superposés, en particulier dans la zone de recouvrement. Les fonctions de pondération peuvent être différentes pour le travail des efforts extérieurs et le travail des efforts intérieurs. Par la suite on considère les mêmes fonctions dans les deux cas et on les note α_1 et α_2 .

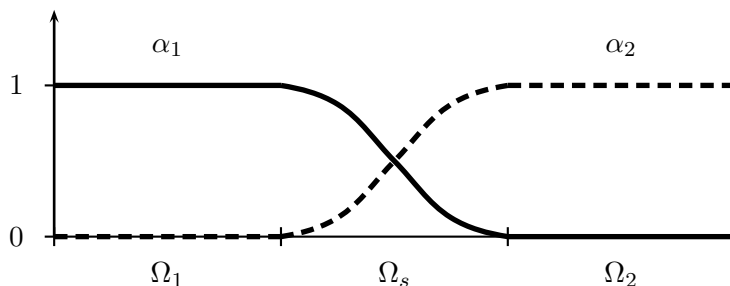


FIGURE 1.9 – Fonction de pondération α_1 et α_2 (cf [34]).

Ces fonctions sont construites sur le principe de partition de l'unité (Figure 1.9),

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \text{ sur } S = \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ \alpha_1 = 1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus S \\ \alpha_2 = 1 \text{ sur } \Omega_2 \setminus S \end{cases} . \quad (1.75)$$

Ces fonctions représentent un ingrédient important de la méthode puisqu'elles définissent la prédominance d'un modèle sur l'autre dans la zone de recouvrement. La solution de la méthode Arlequin dépend de ces fonctions quand deux modèles numériques ou mécaniques différents sont superposés. Il n'est pas question ici de se focaliser sur un choix optimal des fonctions de pondération (cf [34]).

On pose W_1 et W_2 , les espaces des champs cinématiquement admissibles associés aux deux domaines. Les travaux virtuels pondérés s'écrivent,

$$k_1(\underline{u}_1, \underline{v}_1^*) = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_1) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_1^*) dV, \quad \forall \underline{u}_1, \underline{v}_1^* \in W_1 \quad (1.76)$$

$$k_2(\underline{u}_2, \underline{v}_2^*) = \int_{\Omega_2} \alpha_2 \underline{\underline{\sigma}}(\underline{u}_2) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_2^*) dV, \quad \forall \underline{u}_2, \underline{v}_2^* \in W_2 \quad (1.77)$$

$$f_1(\underline{v}_1^*) = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \underline{f} \cdot \underline{v}_1^* dV, \quad \forall \underline{v}_1^* \in W_1 \quad (1.78)$$

$$f_2(\underline{v}_2^*) = \int_{\Omega_2} \alpha_2 \underline{f} \cdot \underline{v}_2^* dV, \quad \forall \underline{v}_2^* \in W_2. \quad (1.79)$$

L'ensemble des éléments servant à comparer les états mécaniques des deux domaines, forme un espace pivot, noté \mathcal{M} , appelé médiateur pour le rôle qu'il joue dans le dialogue entre les deux domaines. On se place dans le cas où l'espace médiateur \mathcal{M} est un espace de Hilbert (cf [34]). Les forces de couplage entre les deux domaines correspondent à des multiplicateurs de Lagrange et évoluent dans l'espace médiateur \mathcal{M} . Comme tous les ingrédients ont été définis, la formulation variationnelle continue sur les deux domaines Ω_1 et Ω_2 , s'écrit,

Problème global.

Trouver $(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{\lambda})$, tel que $\forall(\underline{v}_1^*, \underline{v}_2^*, \underline{\mu}^*) \in W_1 \times W_2 \times \mathcal{M}$ satisfaisant

$$\begin{cases} k_1(\underline{u}_1, \underline{v}_1^*) + c(\underline{\lambda}, \underline{v}_1^*) = f_1(\underline{v}_1^*) \\ k_2(\underline{u}_2, \underline{v}_2^*) - c(\underline{\lambda}, \underline{v}_2^*) = f_2(\underline{v}_2^*) \\ c(\underline{\mu}^*, \underline{u}_1 - \underline{u}_2) = 0 \end{cases} \quad (1.80)$$

Le terme de couplage c est calculé à partir de l'énergie de déformation élastique par un produit scalaire dans H^1 ,

$$c(\underline{\lambda}, \underline{\mu}^*) = \int_{S_c} (\underline{\lambda} \mid \underline{\mu}^* + l^2 \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\lambda}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\mu}^*)) dV. \quad (1.81)$$

Ce terme de couplage nécessite l'introduction de la longueur d'homogénéisation l , un paramètre numérique qui peut être optimisé selon l'application. La formulation variationnelle discrète découle de celle continue en utilisant la méthode des éléments finis. Le domaine Ω_1 (respectivement Ω_2) est discrétisé par une série d'éléments finis de classe \mathcal{C}^0 , notée (\mathcal{T}_{h_1}) (respectivement (\mathcal{T}_{h_2})), d'espace correspondant W_{h_1} (respectivement W_{h_2}) inclus dans W_1 (respectivement W_2). La zone de collage est discrétisée par un maillage noté quand à lui (\mathcal{T}_{h_c}) , d'espace correspondant W_{h_c} inclus dans l'espace médiateur \mathcal{M} . De cette façon, le problème discret s'écrit alors,

Trouver $(\underline{u}_{h_1}, \underline{u}_{h_2}, \underline{\lambda}_{h_c})$, tel que $\forall(\underline{v}_{h_1}^*, \underline{v}_{h_2}^*, \underline{\mu}_{h_c}^*) \in W_{h_1} \times W_{h_2} \times W_{h_c}$ satisfaisant

$$\begin{cases} k_1(\underline{u}_{h_1}, \underline{v}_{h_1}^*) + c(\underline{\lambda}_{h_c}, \underline{v}_{h_1}^*) = f_1(\underline{v}_{h_1}^*) \\ k_2(\underline{u}_{h_2}, \underline{v}_{h_2}^*) - c(\underline{\lambda}_{h_c}, \underline{v}_{h_2}^*) = f_2(\underline{v}_{h_2}^*) \\ c(\underline{\mu}_{h_c}^*, \underline{u}_{h_1} - \underline{u}_{h_2}) = 0 \end{cases} \quad (1.82)$$

De manière similaire à la méthode de zoom structural, on construit un système pour la résolution du problème discret (1.82). Pour cela, on note respectivement $(\underline{\varphi}_1^i)$, $(\underline{\varphi}_2^j)$ et $(\underline{\varphi}_c^k)$ les fonctions de base des éléments finis des espaces W_{h_1} , W_{h_2} et W_{h_c} . Les vecteurs \underline{U}_1 , \underline{U}_2 et $\underline{\Lambda}$ représentent les valeurs nodales respectivement de \underline{u}_{h_1} , \underline{u}_{h_2} et $\underline{\lambda}_{h_c}$. Le problème discret (1.82) fournit le système linéaire suivant,

$$\begin{bmatrix} K_1 & 0 & C_1^T \\ 0 & K_2 & -C_2^T \\ C_1 & -C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_1 \\ \underline{F}_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (1.83)$$

pour lesquels les matrices de rigidité pondérées sont définies par,

$$(K_i)_{jk} = \int_{\Omega_i} \alpha_i \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\varphi}_i^k) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_i^j) dV, \quad (1.84)$$

les chargements pondérés par,

$$(F_i)_j = \int_{\Omega_i} \alpha_i \underline{f} \cdot \underline{\varphi}_i^j dV, \quad (1.85)$$

et les matrices de couplage par,

$$(C_i)_{jk} = \int_{S_c} \underline{\varphi}_c^j \cdot \underline{\varphi}_c^k + l^2 \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_c^j) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_c^k) dV, \quad (1.86)$$

1.2. MÉTHODE ARLEQUIN

pour $i \in \{1, 2\}$. La matrice mixte dans (1.83) n'est pas définie positive. Mais contrairement à celle du zoom structural (1.73) ou (1.74), selon le type de raccord utilisé, la matrice mixte est symétrique. Les deux premières lignes du système expriment l'équilibre sur chacun de deux modèles quant à la troisième ligne, elle exprime le raccord ou couplage des modèles. La première ligne de la méthode du zoom structural traduit l'équilibre sur le domaine grossier enrichie du modèle fin et la deuxième ligne assurant le raccord. Par contre, la méthode Arlequin exige le calage de paramètres numériques, α_1 , α_2 et l .

1.2.2 Illustration des deux méthodes sur un exemple 1D

On compare les deux méthodes multi-échelles sur un exemple simple pour une modélisation unidimensionnelle pour deux chargements différents, un chargement à l'extrémité libre du domaine et un chargement dans le domaine (Figure 1.10). Dans la suite, le domaine Ω_c est discrétisé en deux éléments et le domaine Ω_f est discrétisé successivement de quatre à sept éléments.

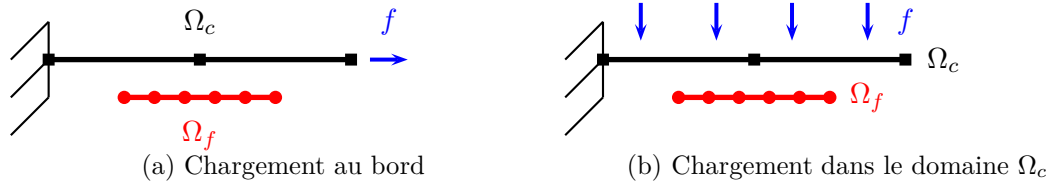


FIGURE 1.10 – Modélisation des deux essais 1d.

1.2.2.1 Cas d'un chargement au bord

On applique un chargement sur l'extrémité droite d'une barre (Figure 1.10). Pour la méthode Arlequin, on prend comme modèle celui du zoom et comme paramètres, une longueur d'homogénéisation l de 1 et des fonctions de pondérations,

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2} \text{ sur } \Omega_s = \Omega_1 \cap \Omega_2 \\ \alpha_1 = 1 \text{ sur } \Omega_1 \setminus S \end{cases}.$$

Sur cet exemple simple le champ de déplacement est linéaire sur la structure. Ceci explique les solutions similaires obtenues avec les deux méthodes pour différentes discrétisations (Figures 1.11 et 1.12).

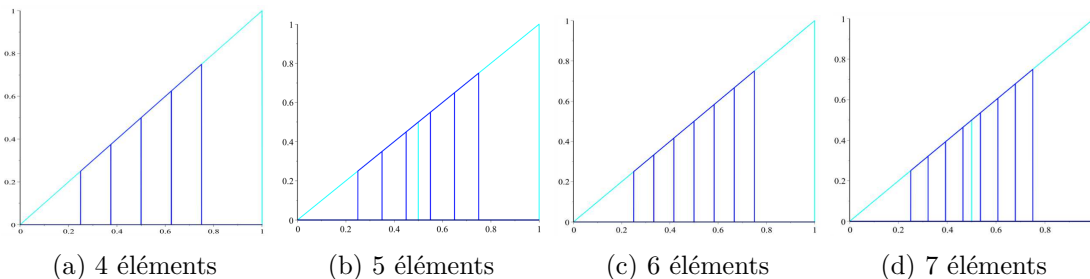


FIGURE 1.11 – Champ de déplacement sur la barre chargée à son extrémité avec la méthode Arlequin.

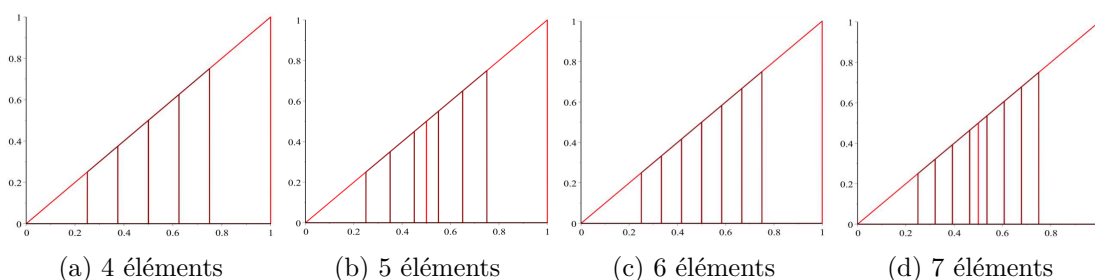


FIGURE 1.12 – Champ de déplacement sur la barre chargée à son extrémité avec la méthode de zoom structural (pour un raccord en déformation).

1.2.2.2 Cas d'un chargement volumique

On applique cette fois, un chargement volumique constant de type gravité (Figure 3.4). On garde le même modèle ainsi que les paramètres de l'essai précédent. Dans le cas d'un chargement volumique, le champ de déplacement solution n'est plus linéaire et les deux méthodes de résolution diffèrent (Figures 1.13 et 1.14). La méthode de zoom structural capte mieux le profil du champ de déplacement. Toutefois la méthode Arlequin n'a pas été mise en œuvre à l'aide d'un jeu optimal de paramètres, $\{\alpha_1, \alpha_2, l\}$, ni améliorée pour prendre en compte ces effets ([5], [7], [9], [34]).

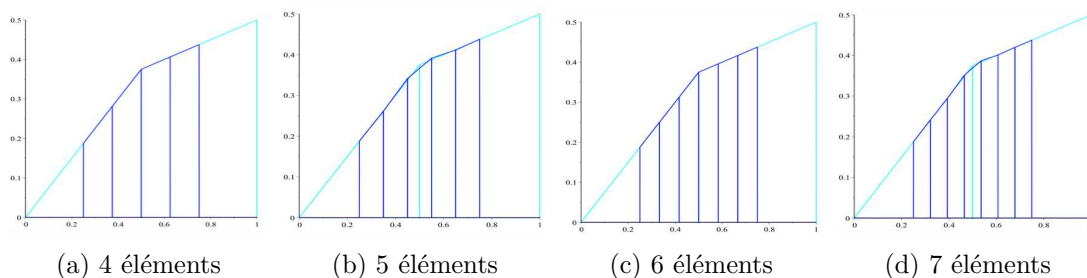


FIGURE 1.13 – Chargement volumique d'une poutre pour différents nombres d'éléments sur le domaine fin avec la méthode Arlequin.

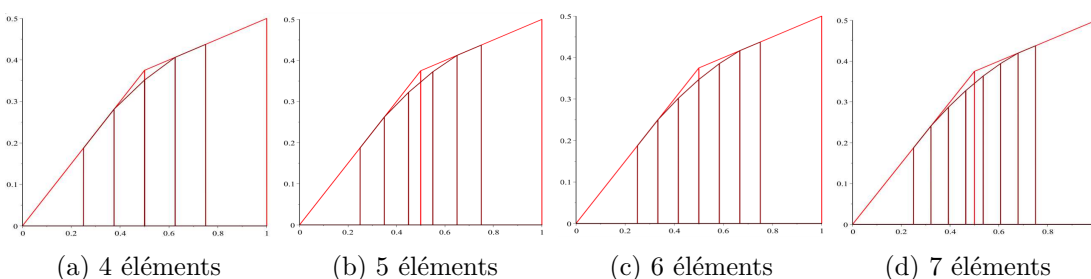


FIGURE 1.14 – Chargement volumique d'une poutre pour différents nombres d'éléments sur le domaine fin avec la méthode de Zoom structural (pour un raccord en déformation).

1.2.3 Illustration des deux méthodes sur un exemple 2D

On compare maintenant les deux méthodes multi-échelles pour un problème bidimensionnel, en considérant tout d'abord deux maillages identiques dans la zone du patch puis deux maillages imbriqués. Le maillage fin est une subdivision du maillage

grossier. Aucun élément du maillage fin ne chevauche deux éléments du maillage grossier.

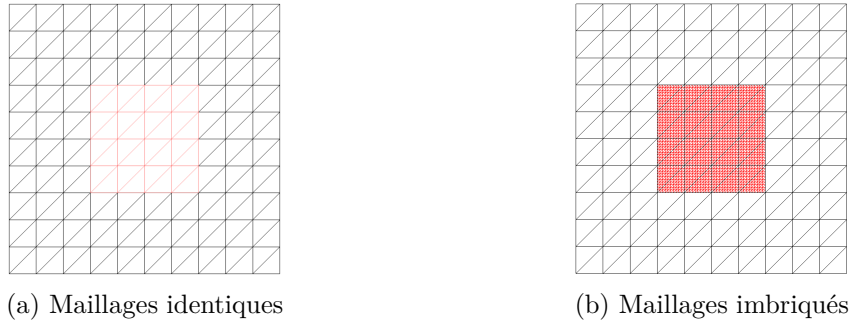


FIGURE 1.15 – Les deux types de maillage.

On teste ces deux configurations sur un essai de cisaillement.

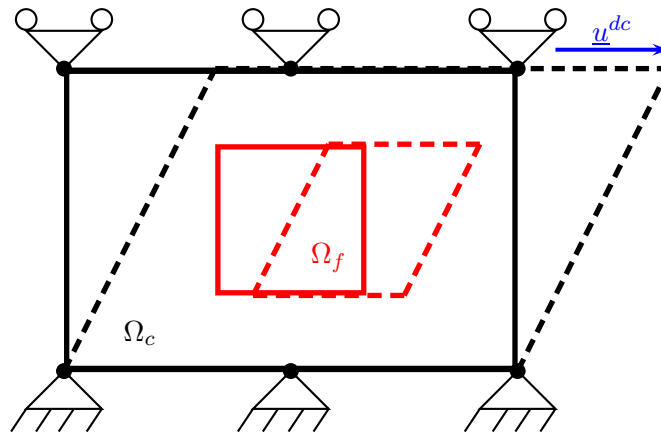


FIGURE 1.16 – Modélisation de l'essai de cisaillement.

On considère une plaque carrée de 40 cm de côté, qui est le domaine Ω_1 , encastrée sur le bas de la structure et bloquée dans la direction y sur le haut de cette même structure. Un déplacement imposé, \underline{u}^{dc} , de 5 cm est appliqué dans la direction x sur le haut de la plaque. Le domaine Ω_2 est une partie carrée de 16 cm de côté, au centre de la plaque. Les paramètres matériaux sont les mêmes sur les deux maillages, un module de Young de 1 Pa et un coefficient de Poisson de 0,3.

1.2.3.1 Maillages identiques

On considère toujours le modèle du zoom. Les deux maillages sont identiques sur le domaine Ω_2 dans un premier temps. Pour comparer les deux méthodes multi-échelles sur un essai 2D, on étudie un modèle de référence qui résout le même problème mais de manière traditionnelle. En effet, on utilise pour ce faire un seul maillage sur toute la structure qui comporte les mêmes sollicitations. On observe que les trois méthodes donnent sur le maillage grossier le même résultat (Figures 1.17 et 1.18). Sur le maillage fin, on remarque le même profil de déplacement mais les extrema sont mieux captés par la méthode Arlequin que par la méthode de zoom structural.

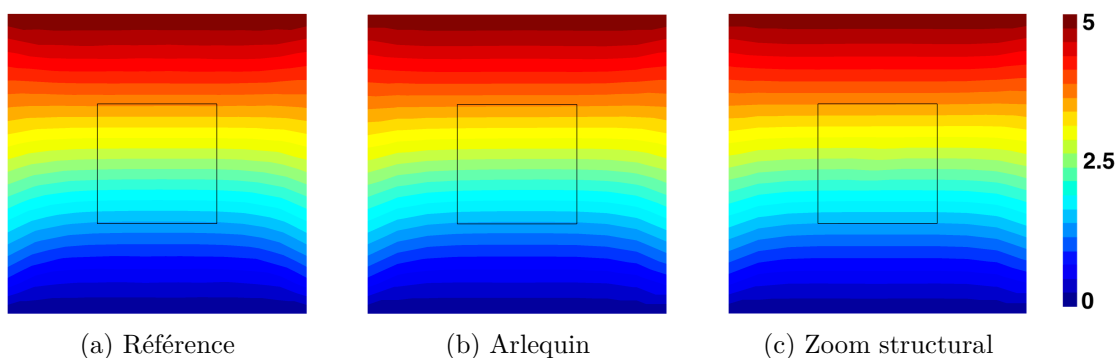


FIGURE 1.17 – **Essai de cisaillement** - Norme du déplacement sur Ω_c avec maillages identiques (en cm).

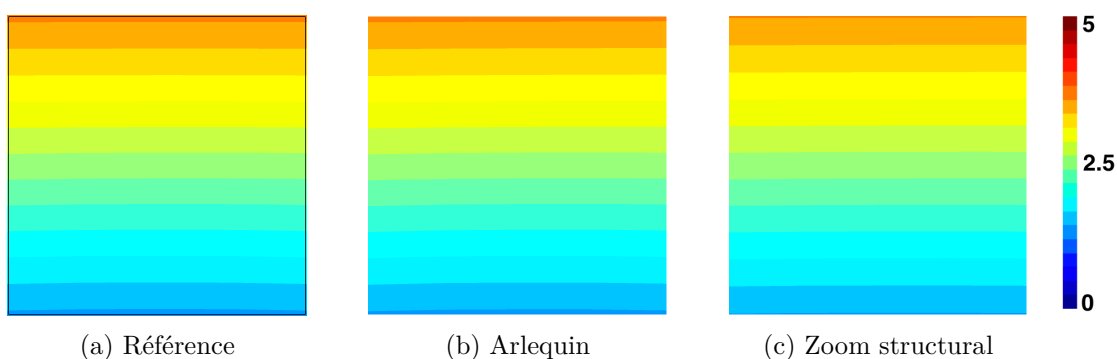


FIGURE 1.18 – **Essai de cisaillement** - Norme du déplacement sur Ω_f avec maillages identiques (en cm).

1.2.3.2 Maillages imbriqués

Les deux maillages sont imbriqués sur le domaine Ω_2 . Les coins de Ω_2 ont les mêmes coordonnées que des nœuds de Ω_1 mais les deux maillages n'ont pas la même discrétisation sur cette zone. En effet le maillage Ω_2 est plus fin que Ω_1 . Le modèle de référence a la même discrétisation que Ω_2 sur cette zone. On remarque que les deux méthodes ne donnent plus les mêmes profils de déplacement sur le domaine fin (Figures 1.19 et 1.20).

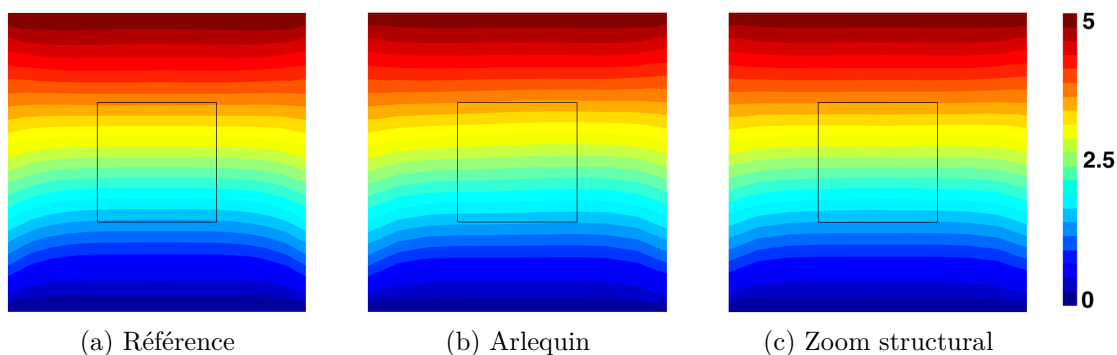


FIGURE 1.19 – **Essai de cisaillement** - Norme du déplacement sur Ω_c avec maillages identiques (en cm).

Pour cet essai, la méthode de zoom structural donne le même profil que la solution de référence. Tandis qu'avec la méthode Arlequin, on observe une moyenne sur les éléments finis du grossier (en effet on voit la délimitation des éléments finis du maillage grossier). Toutefois cette dernière n'a pas été mise en œuvre à l'aide d'un jeu optimal de

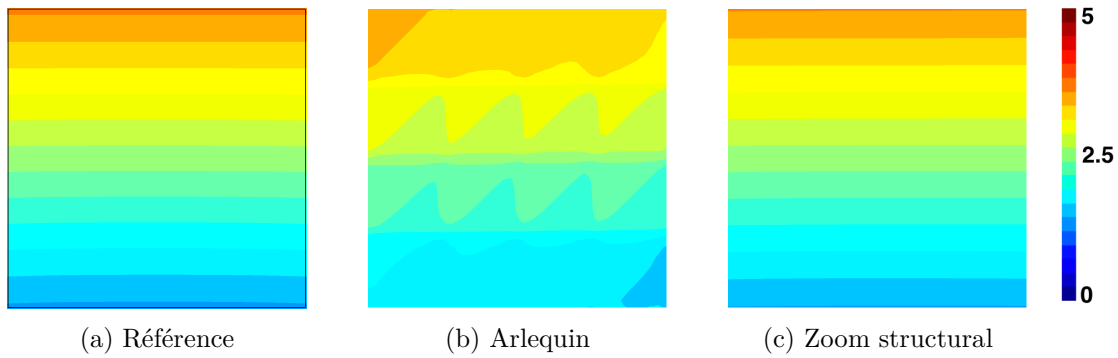


FIGURE 1.20 – **Essai de cisaillement** - Norme du déplacement sur Ω_f avec maillages imbriqués (en cm).

paramètres, $\{\alpha_1, \alpha_2, l\}$, ni améliorée pour prendre en compte ces effets et ainsi adopter une stratégie plus adéquate ([5], [7], [9], [34]).

La méthode de zoom structural est dans l'immédiat opérante pour des problèmes à faibles contrastes. Mais ne semble pas adaptée pour de forts contrastes de propriété sur Ω_f .

Pour intégrer le modèle de substitution, on s'intéresse alors dans le chapitre suivant à une extension de la méthode de zoom structural .

Chapitre 2

Zoom structural à fort contraste et optimisation numérique

Sommaire

2.1 Améliorations de la méthode de zoom structural	32
2.1.1 Adaptation aux forts contrastes	32
2.1.2 Correction des mouvements de solide rigide	34
2.2 Résolution numérique du système linéaire	36
2.2.1 Les solveurs	36
2.2.2 Les préconditionneurs	39
2.2.3 Les renumérotations	42

Le chapitre précédent a présenté un outil de transfert d'information entre deux maillages par le biais de la projection de type mortar. Ce qui permet de construire deux projecteurs discrets, un pour le transfert d'information du maillage "fin" vers le "grossier" et l'autre pour le transfert inverse. Cette approche est insérée dans une formulation variationnelle dans le cadre d'une stratégie de zoom sur une zone d'intérêt Ω_f incluse dans Ω_c (cf Figure 1.8b). De plus, elle se focalise sur des problèmes à faibles contrastes, comme on l'a évoqué précédemment et comme on va le présenter dans le chapitre suivant (cf Figures 3.25, 3.26 et 3.27).

Ce chapitre se découpe en deux parties, la première partie présente une extension de la méthode de zoom structural pour intégrer les forts contrastes de propriétés ainsi qu'une correction du déplacement sur Ω_f pour éviter les mouvements de corps rigide. La deuxième partie traite du choix du solveur du système linéaire issu de la formulation variationnelle.

2.1 Améliorations de la méthode de zoom structural

Pour intégrer ces forts contrastes, l'idée est d'utiliser un modèle de substitution au lieu d'un modèle de zoom (cf 1.8c).

2.1.1 Adaptation aux forts contrastes

Pour adapter la méthode de zoom structural vers un modèle de substitution, on applique le raccord uniquement sur une partie de Ω_f ([17], [18]). On subdivise le domaine Ω_f en deux nouvelles zones. La première, notée $\Omega_f^{(b)}$, sur laquelle sont écrites les conditions de raccord et $\Omega_f^{(i)}$ la deuxième, représente son complémentaire (cf Figure 2.1). Ce partitionnement est inspiré des développements de la méthode Arlequin ([6] et [8]).

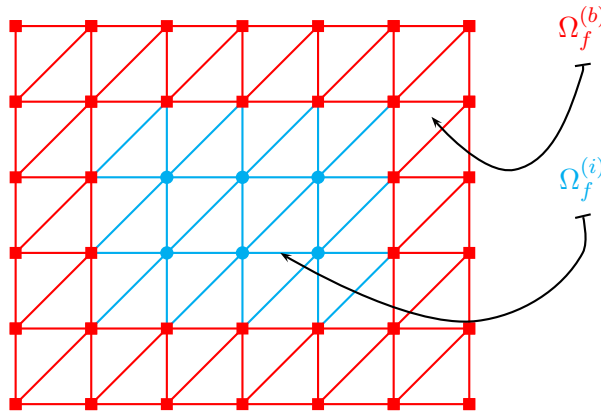


FIGURE 2.1 – Partition de Ω_f .

Pour définir $\Omega_f^{(b)}$, on considère une seule bande d'éléments sur la Figure 2.1, mais on pourrait en prendre plusieurs. L'influence du nombre de bandes de $\Omega_f^{(b)}$ est traitée dans le chapitre 3. La formulation variationnelle reste identique sur Ω_c , voir équation (1.68)). La partition subséquente de Ω_f et de $U^{(f)}$, en $U_{(b)}^{(f)}$ et $U_{(i)}^{(f)}$, induit la nouvelle écriture de (1.68),

$$\begin{aligned} \left(K^{(c)} - B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} \right) U^{(c)} + \left(B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} \right) U_{(b)}^{(f)} \\ + \left(B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon^{(i)}} \right) U_{(i)}^{(f)} = M_{cc} F^{(c)} + F^{U^{(c)}} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Le problème sur le domaine Ω_f est quant à lui différent. Le raccord s'applique seulement sur $\Omega_f^{(b)}$. On considère uniquement le raccord en déformation (L.72) qui, pour le module d'élasticité $A^{(f)}$, donne une condition beaucoup plus naturelle et plus pratique qu'une condition pour $A^{(c)}$ présent pour le raccord en contrainte (L.71). Pour ce faire, on définit le champ de module d'élasticité sur Ω_f par,

$$\bar{A}^{(f)} = \begin{cases} A^{(f)} & \text{sur } \Omega_f^{(b)} \\ 0 & \text{sur } \Omega_f^{(i)} \end{cases}. \quad (2.2)$$

Le raccord en déformation avec (2.2) devient,

$$\bar{K}_{(bb)}^{(f)} U_{(b)}^{(f)} = B_{\sigma^{(f)}}^{(b)T} \bar{A}^{(f)} \mathcal{P}_{fc} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)}, \quad (2.3)$$

avec $\bar{K}_{(bb)}^{(f)}$ la matrice de rigidité obtenue sur $\Omega_f^{(b)}$ avec la module d'élasticité $\bar{A}^{(f)}$ et $B_{\sigma^{(f)}}^{(b)}$ l'opérateur $B_{\sigma^{(f)}}$ restreint à $\Omega_f^{(b)}$. Le problème sur Ω_f s'écrit alors comme s'écrit l'équilibre sur Ω_f sous la condition du raccord en déformation, soit,

$$\min_{U^{(f)}} \frac{1}{2} U^{(f)T} K^{(f)} U^{(f)} - U^{(f)T} F^{(f)} - U^{(f)T} F^{U^{(f)}} \text{ sous la condition (2.3)}. \quad (2.4)$$

où $F^{U^{(f)}}$ est l'effort associé au déplacement imposé sur Ω_f . La subdivision de Ω_f permet d'écrire la matrice de rigidité $K^{(f)}$ et le vecteur nodal de déplacement $U^{(f)}$ par,

$$K^{(f)} = \begin{pmatrix} K_{(bb)}^{(f)} & K_{(bi)}^{(f)} \\ K_{(ib)}^{(f)} & K_{(ii)}^{(f)} \end{pmatrix} \text{ et } U^{(f)} = \begin{pmatrix} U_{(b)}^{(f)} \\ U_{(i)}^{(f)} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

On décide d'intégrer le raccord en déformation à l'équation d'équilibre à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange λ_b , soit,

$$\frac{1}{2} U^{(f)T} K^{(f)} U^{(f)} - U^{(f)T} F^{(f)} - U^{(f)T} F^{U^{(f)}} - \lambda_b^T \left(\bar{K}_{(bb)}^{(f)} U_{(b)}^{(f)} - B_{\sigma^{(f)}}^{(b)T} \bar{A}^{(f)} \mathcal{P}_{fc} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} \right) \quad (2.6)$$

En écrivant la variation par rapport à $U^{(f)}$ et λ_b , on obtient le système d'équations,

$$\begin{cases} K^{(f)} U^{(f)} - F^{(f)} - F^{U^{(f)}} - \begin{pmatrix} \bar{K}_{(bb)}^{(f)} \lambda_b \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \bar{K}_{(bb)}^{(f)} U_{(b)}^{(f)} - B_{\sigma^{(f)}}^{(b)T} \bar{A}^{(f)} \mathcal{P}_{fc} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

ce qui donne avec la partition subséquente de Ω_f ,

$$\begin{cases} K_{(bb)}^{(f)} U_{(b)}^{(f)} + K_{(bi)}^{(f)} U_{(i)}^{(f)} - \bar{K}_{(bb)}^{(f)} \lambda_b = F_{(b)}^{(f)} + F_{(b)}^{U^{(f)}} \\ K_{(ib)}^{(f)} U_{(b)}^{(f)} + K_{(ii)}^{(f)} U_{(i)}^{(f)} = F_{(i)}^{(f)} + F_{(i)}^{U^{(f)}} \\ \bar{K}_{(bb)}^{(f)} U_{(b)}^{(f)} = B_{\sigma^{(f)}}^{(b)T} \bar{A}^{(f)} \mathcal{P}_{fc} B_{\varepsilon^{(c)}} U^{(c)} \end{cases} \quad (2.8)$$

La première équation de (2.8) sert uniquement à calculer le multiplicateur de Lagrange. Les deux autres équations permettent d'écrire un système complet sur Ω_f ,

$$\begin{bmatrix} \overline{K}_{(bb)}^{(f)} & 0 \\ K_{(ib)}^{(f)} & K_{(ii)}^{(f)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{(b)}^{(f)} \\ U_{(i)}^{(f)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{\sigma(f)}^{(b)T} \overline{A}^{(f)} \mathcal{P}_{fc} B_{\varepsilon(c)} U^{(c)} \\ F_{(i)}^{(f)} + F_{(i)}^{U^{(f)}} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Le système sur la structure s'écrit,

$$\begin{bmatrix} K^{(c)} - B_{\sigma(c)}^T \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon(c)} & B_{\sigma(c)}^T \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon(b)} & B_{\sigma(c)}^T \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon(i)} \\ -B_{\sigma(f)}^{(b)T} \overline{A}^{(f)} \mathcal{P}_{fc} B_{\varepsilon(c)} & \overline{K}_{(bb)}^{(f)} & 0 \\ 0 & K_{(ib)}^{(f)} & K_{(ii)}^{(f)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U^{(c)} \\ U_{(b)}^{(f)} \\ U_{(i)}^{(f)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{cc} F^{(c)} + F^{U^{(c)}} \\ 0 \\ F_{(i)}^{(f)} + F_{(i)}^{U^{(f)}} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Maintenant que la méthode de zoom structural intègre le modèle de substitution, on obtient une structure similaire à celle de la méthode Arlequin.

2.1.2 Correction des mouvements de solide rigide

Le système linéaire (2.10) a pour inconnues les déplacements nodaux sur les deux maillages. Mais le raccord est formulé en déformation et non en déplacement, ce qui veut dire que des mouvements de solide rigide perturbent le déplacement sur Ω_f . Contrairement à l'adaptation aux forts contrastes qui est du pré-traitement, la correction du mouvement sur Ω_f est plus du post-traitement. On se propose une approche pour éliminer les mouvements de corps rigide. Le nouveau déplacement corrigé, noté $U^{(p)}$, s'écrit alors,

$$U^{(p)} = U^{(f)} - U^{cr} \quad (2.11)$$

où U^{cr} sont les mouvements de corps rigide. Le mouvement de corps rigide infinitésimal continu s'écrit de la manière suivante,

$$\underline{u}^{cr} = \underline{c} + \underline{\omega} \cdot \underline{X}, \quad (2.12)$$

avec \underline{c} une translation et $\underline{\omega}$ le tenseur des rotations infinitésimales ([22], [24], [23]). Le mouvement de corps rigide infinitésimal en un point M , dans un repère bi-dimensionnel, s'écrit

$$\underline{u}^{cr}(M) = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

avec ϕ un angle de rotation, c_x (respectivement c_y) la composante de la translation \underline{c} suivant x (respectivement suivant y) et X_M et Y_M les coordonnées du point M .

Étant donné que l'on connaît le déplacement $U^{(c)}$ sur le maillage grossier, on peut déduire celui des coins du patch et trouver les paramètres c_x , c_y et ϕ . Pour trouver les paramètres c_x , c_y et ϕ , les équations découlent de toutes les configurations possibles du choix de deux nœuds, notés A et B , parmi les quatre coins du maillage fin Ω_f (cf Figure 2.2).

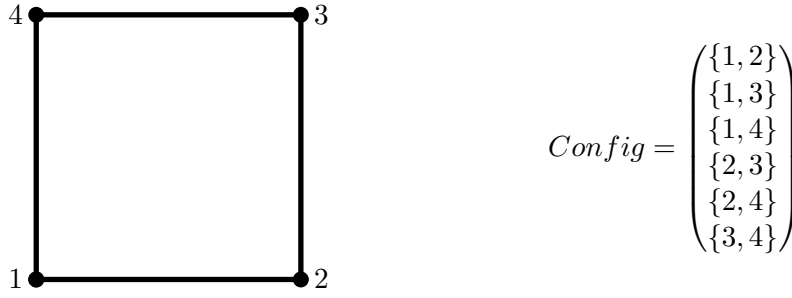


FIGURE 2.2 – Liste des configurations possibles.

L'équation (2.19) au nœud A s'écrit,

$$U^{(p)}(A) = U^{(f)}(A) - U^{cr}(A) = U^{(c)}(A) \Rightarrow U^{cr}(A) = U^{(f)}(A) - U^{(c)}(A) \quad (2.14)$$

En isolant c_x et c_y , l'équation (2.13) au nœud A devient,

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = U^{(f)}(A) - U^{(c)}(A) - \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

De même au nœud B ,

$$\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} = U^{(f)}(B) - U^{(c)}(B) - \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Le vecteur $U^{(c)}(A)$ correspond au déplacement sur Ω_c au nœud A . De la même manière que le vecteur $U^{(c)}(B)$ au nœud B . Il est possible que le nœud A ne corresponde pas à un nœud de Ω_c , c'est-à-dire qu'il se trouve à l'intérieur ou sur la frontière d'un élément. Pour palier tous les cas, le vecteur $U^{(c)}(A)$ est défini par une interpolation linéaire des déplacements nodaux,

$$U^{(c)}(A) = N_1(x_A, y_A)u_1 + N_2(x_A, y_A)u_2 + N_3(x_A, y_A)u_3.$$

Les $N_i(x_A, y_A)$ sont les fonctions d'interpolation au nœud A et les u_i sont les déplacements nodaux de l'élément. Il en est de même au nœud B .

En posant $U^{(i)}(M) = \begin{pmatrix} U_x^{(i)}(M) \\ U_y^{(i)}(M) \end{pmatrix}$, on obtient des équations (2.15) et (2.16) la relation de l'angle de rotation ϕ suivante,

$$\begin{cases} -\phi(Y_A - Y_B) = U_x^{(f)}(A) - U_x^{(c)}(A) - U_x^{(f)}(B) + U_x^{(c)}(B) \\ \phi(X_A - X_B) = U_y^{(f)}(A) - U_y^{(c)}(A) - U_y^{(f)}(B) + U_y^{(c)}(B) \end{cases} \quad (2.17)$$

Le système suivant pour chaque configuration s'écrit,

$$\begin{cases} -\phi(Y_A - Y_B) = U_x^{(f)}(A) - U_x^{(c)}(A) - U_x^{(f)}(B) + U_x^{(c)}(B) \\ \phi(X_A - X_B) = U_y^{(f)}(A) - U_y^{(c)}(A) - U_y^{(f)}(B) + U_y^{(c)}(B) \\ c_x = U_x^{(f)}(A) - U_x^{(c)}(A) + \phi.Y_A \\ c_y = U_y^{(f)}(A) - U_y^{(c)}(A) - \phi.X_A \\ c_x = U_x^{(f)}(B) - U_x^{(c)}(B) + \phi.Y_B \\ c_y = U_y^{(f)}(B) - U_y^{(c)}(B) - \phi.X_B \end{cases} \quad (2.18)$$

On obtient au total six équations pour chaque configuration, ce qui donne en tout 36 équations pour 3 inconnues. Comme le système est surcontraint, on procède par la méthode des moindres carrés pour déterminer ϕ , c_x et c_y . Cette méthode est implémentée dans MATLAB[®] par la fonction *lsqnonlin*.

Pour éviter les mouvements de solide rigide, une autre méthode est premièrement de bloquer certains coins de Ω_f et, deuxièmement de corriger le déplacement nodal sur Ω_f par celui d'un nœud de Ω_c . L'opération la plus naturelle est de bloquer les nœuds de Ω_f de la même façon que ceux de Ω_c , illustrée sur la Figure 2.3.

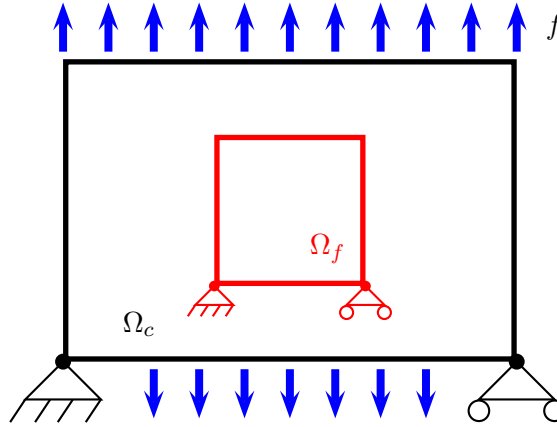


FIGURE 2.3 – Modélisation du recalage du déplacement sur un essai de traction.

Le déplacement recalé s'écrit pour chaque nœud N de Ω_f ,

$$U^{(r)}(N) = U^{(f)}(N) + U^c(A) \quad (2.19)$$

où le vecteur $U^{(c)}(A)$ est le déplacement de Ω_c défini par une interpolation linéaire des déplacements nodaux en un coin de Ω_f , noté A . La comparaison des deux méthodes est traitée dans le chapitre 3.

2.2 Résolution numérique du système linéaire

Pour résoudre un système linéaire, il existe deux types de méthode, les méthodes directes basées sur des factorisations matricielles (exemple : pivot de Gauss), et les méthodes itératives qui donnent une suite de solutions approchées convergente vers la solution exacte (exemple : méthode du point fixe) ([1]). Le choix du solveur est surtout influencé par les propriétés de la matrice K (symétrique, définie positive, triangulaire, etc). Selon le solveur choisi, un préconditionnement et une renumérotation de la matrice peuvent être nécessaires. Pour obtenir les résultats de cette section, l'essai est un essai en traction qui sera présenté dans le chapitre suivant (cf Figure 3.2b). Il en est de même pour les paramètres géométriques de la structure.

2.2.1 Les solveurs

Les méthodes directes ont une structure simple et sont faciles à implanter dans un logiciel de calcul numérique, comme MATLAB[®]. Mais pour un système de grande taille, les méthodes directes peuvent devenir coûteuses numériquement et avoir un stockage en mémoire élevé. On utilise alors des méthodes itératives qui transforment le système linéaire de grande taille en un problème réduit par une méthode polynomiale de projection

2.2. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME LINÉAIRE

sur les sous-espaces de Krylov, qui, elle, donne une solution approchée du problème ([26], [19] et [35]). Ces sous-espaces vectoriels, notés $\mathcal{K}_n(K, r_0)$ de dimension n , sont engendrés (fonction *span*) par le produit de la matrice K par le résidu de la première itération $r_0 = F - KU_0$, et s'écrivent selon (ref Saad),

$$\mathcal{K}_n(K, r_0) = \text{span}\{r_0, Kr_0, K^2r_0, \dots, K^{n-1}r_0\}. \quad (2.20)$$

Les solveurs sur les espaces de Krylov ont besoin des paramètres suivants,

- U_0 un itéré initial,
- Tol une tolérance pour la convergence du solveur associée à un test d'arrêt sur la norme du résidu (cf [1]),

$$T_{\text{arrêt}} = \frac{\|KU_k - F\|}{\|KU_0 - F\|} \leq Tol, \quad (2.21)$$

- et *maxiter* le nombre maximum d'itérations s'il n'y a pas convergence du solveur.

Le but de cette partie est de comparer différents solveurs afin de choisir le plus performant en terme de temps CPU. Les solveurs sont listés ici. Pour plus d'information à leurs sujets, voir [35]. Les solveurs sont implantés dans MATLAB[®]. Pour plus d'information sur l'utilisation des solveurs se référer aux pages de chaque solveur.

On choisit les solveurs suivants, adaptés aux matrices non symétriques,

- *gmres* : généralisation de la méthode de minimisation du résidu ([44])
- *bicg* : méthode du gradient bi-conjugué ([38]).
- *cgs* : méthode du gradient conjugué carré ([41]).
- *bicgstab* : méthode du gradient bi-conjugué stabilisé ([39]).
- *bicgstabl* : méthode du gradient bi-conjugué stabilisé couplé avec *gmres* ([40]).
- *qmr* : méthode du résidu quasi-minimal ([46]).
- *tfqmr* : méthode du résidu quasi-minimal sans transposé ([48]).

Pour éviter d'avoir un sous-espace de Krylov de trop grande dimension et réduire ainsi le stockage en mémoire et le temps de calcul, on peut redémarrer le solveur *gmres* à partir d'une certaine itération (cf [35]). Ce nouveau paramètre est noté *restart*. Avant de comparer les solveurs entre eux, on essaye d'optimiser le solveur *gmres* selon différentes valeurs de *restart*.

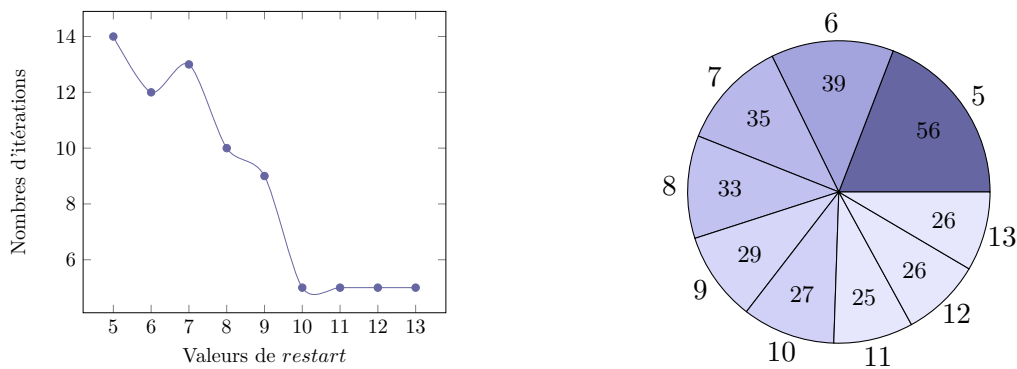


FIGURE 2.4 – *Plaque trouée* - Nombre d'itérations et temps d'exécution (en ms) du solveur *gmres* pour différentes valeurs du redémarrage avec préconditionnement et renumérotation du système linéaire.

On remarque sur la Figure 2.4 que le temps optimal est obtenu pour $restart = 11$, mais reste très proche pour $restart = \{10, 12, 13\}$. On observe aussi que le nombre d'itérations ne varie plus à partir de $restart = 10$. Pour choisir la valeur de $restart$, on fait un compromis entre le temps d'exécution du solveur et le stockage en mémoire des sous-espaces de Krylov. On choisit désormais la valeur de $restart$ afin que la convergence soit la plus rapide. Pour toutes les méthodes sur les sous-espaces de Krylov, cette convergence dépend du conditionnement de la matrice K du système linéaire ([35], [1]).

Pour améliorer le conditionnement de K , on utilise un préconditionnement et une renumérotation. Les choix du préconditionneur et de la renumérotation sont étudiés dans la suite. Pour comparer les divers solveurs, la matrice K est renumérotée de la même façon (renumérotation *AMD*) pour chacun d'eux, idem pour le préconditionnement (factorisation *ILUC*). Ainsi on analyse la seule influence des solveurs.

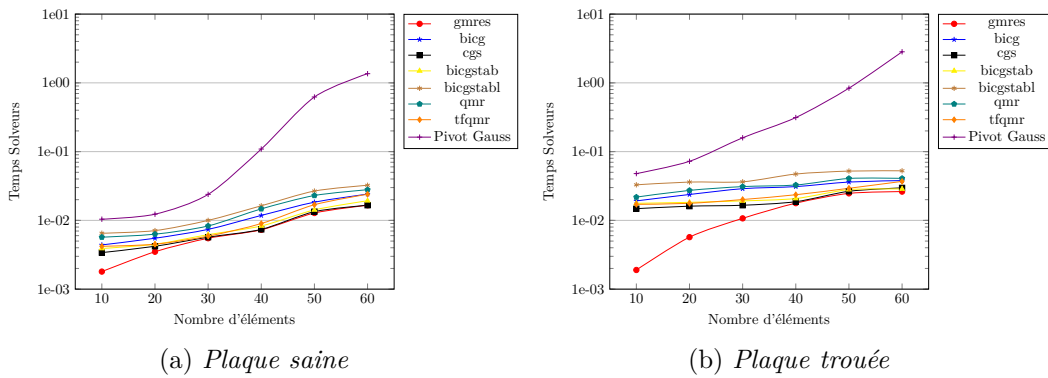


FIGURE 2.5 – Temps des solveurs (en s) en fonction du raffinement du maillage fin.

On observe sur la Figure 2.5 que pour un même préconditionnement et une même renumérotation le solveur *gmres* est légèrement plus rapide en temps CPU. Le fait de rajouter une hétérogénéité sur Ω_f multiplie en moyenne le nombre de degrés de liberté par 1.95 alors que le temps CPU des solveurs est multiplié en moyenne par 2.95.

On remarque sur les Figures 2.6 et 2.7 que le solveur *cgs* est celui qui demande le moins d'itérations pour converger comparativement à *gmres* qui en exige plus. Les itérations durent moins longtemps, en terme de temps CPU, pour *gmres*. On retient donc le solveur *gmres*.

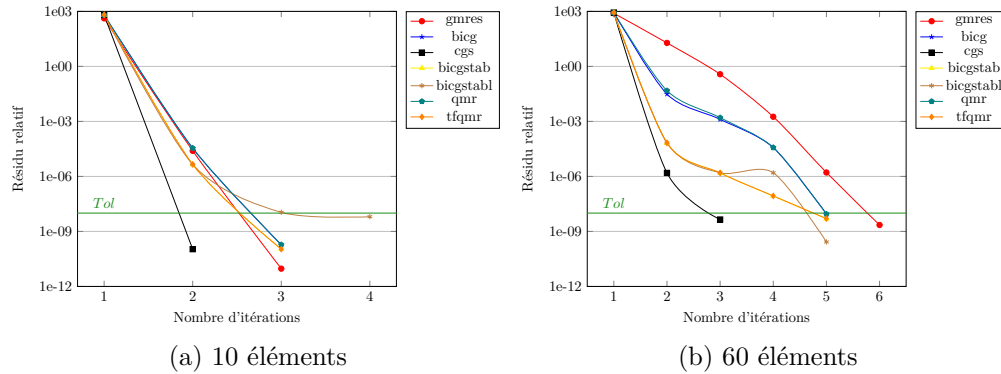


FIGURE 2.6 – Plaque saine - Convergence des solveurs.

2.2. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME LINÉAIRE

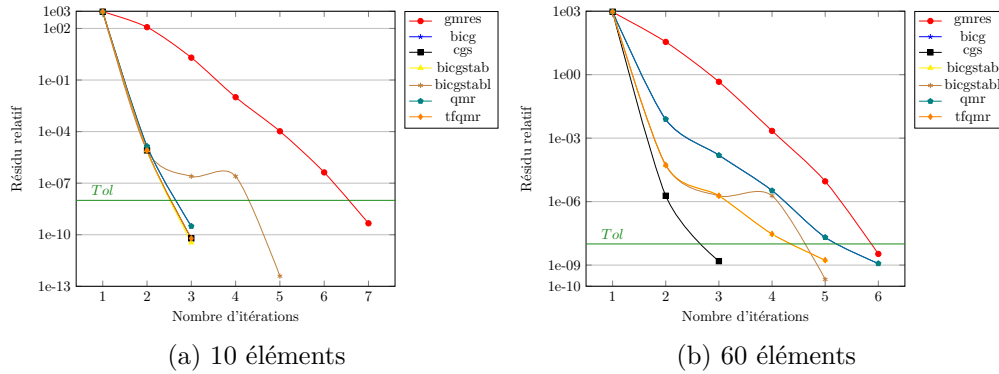


FIGURE 2.7 – *Plaque trouée* - Convergence des solveurs.

Maintenant que le solveur est choisi, on s'intéresse au préconditionnement nécessaire à une convergence rapide du solveur ([1]).

2.2.2 Les préconditionneurs

L'idée du préconditionnement est de trouver une matrice C telle que $C^{-1}K$ possède un conditionnement plus petit que K et telle que l'inversion de C soit peu coûteuse ([35], [1]). Le système linéaire,

$$KU = F. \quad (2.22)$$

admet la même solution que le système "préconditionné",

$$C^{-1}KU = C^{-1}F. \quad (2.23)$$

On appelle C la matrice de préconditionnement associée au système "préconditionné" (2.23). La convergence des solveurs dépend du spectre de la matrice $C^{-1}K$. Pour plus d'informations se référer à [35]. La matrice de préconditionnement vérifie les propriétés suivante,

1. C doit être le plus proche possible de K
2. C doit respecter les propriétés de la matrice (symétrique, définie positive, triangulaire, etc).
3. Le stockage de C ne doit pas excéder de beaucoup celui de K .

Le but de cette partie est de comparer différents préconditionneurs afin de choisir le plus performant pour le solveur *gmres* en terme de temps CPU. Les préconditionneurs peuvent se construire de deux façons ([35]). La première est de décomposer la matrice K sous la forme,

$$K = K_{diag} - K_{inf} - K_{sup}, \quad (2.24)$$

avec K_{diag} est la diagonale de K , $-K_{inf}$ est la partie triangulaire inférieure stricte de la matrice K et $-K_{sup}$ est la partie triangulaire supérieure stricte de la matrice K . La deuxième est de décomposer la matrice K par une factorisation incomplète, soit sous la forme,

$$K = K_l K_u - K_r, \quad (2.25)$$

avec K_l (respectivement K_u) est la matrice triangulaire inférieure (respectivement supérieure) résultant de la factorisation incomplète, et K_r est le résidu de la factorisation. La factorisation incomplète dépend des propriétés de K . Comme K du système (2.10) n'est pas symétrique, on choisit la factorisation LU incomplète. Les préconditionneurs sont seulement listés ici. Pour plus d'information à leurs sujets, voir [35]. Pour la décomposition (2.24), on choisit les préconditionneurs,

- *Jac* : préconditionneur de Jacobi, $C_{Jac} = K_{diag}$
- *SOR* : préconditionneur de surrelaxation successive, $C_{SOR} = \frac{K_{diag} - \omega K_{inf}}{\omega}$ où ω est un paramètre numérique pour accélérer la convergence du solveur.
- *GS* : préconditionneur de Gauss-Siedel, $C_{GS} = K_{diag} - K_{inf}$.

Pour la décomposition (2.25), les préconditionneurs sont implantés dans MATLAB[®]. Pour plus d'information sur l'utilisation de ces préconditionnements se référer à la page de la factorisation incomplète LU (cf [45]).

On choisit les préconditionneurs suivants,

- *ILU(0)* : factorisation incomplète LU sans remplissage.
- *ILUTP* : factorisation incomplète LU avec seuil et pivot.
- *ILUC* : factorisation incomplète LU de Crout.

Pour comparer les divers préconditionneurs, la matrice K est renumérotée de la même façon pour chacun d'eux, et le solveur commun pour la résolution du système est *gmres*. Ceci dans le but précis que seuls les préconditionneurs influent sur les temps d'exécution et la convergence du solveur.

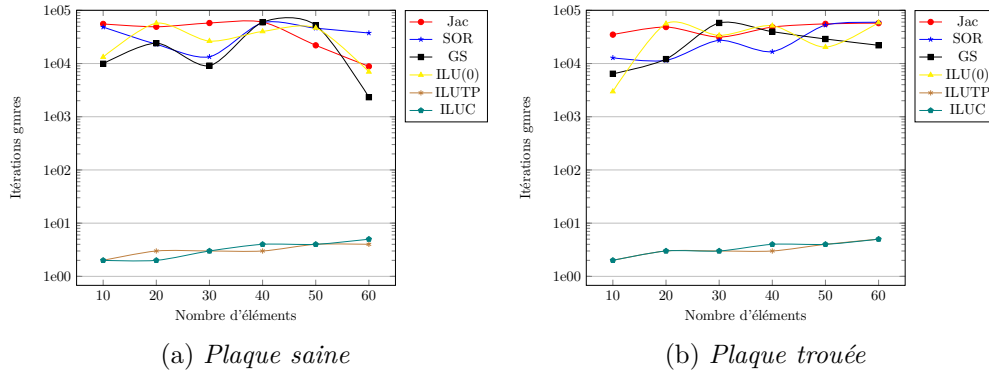


FIGURE 2.8 – Itérations du solveur en fonction du raffinement du maillage fin.

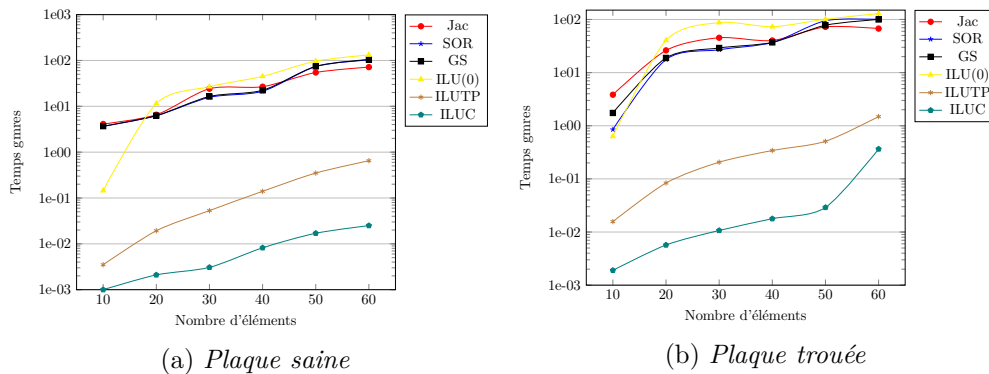


FIGURE 2.9 – Temps du solveur (en s) en fonction du raffinement du maillage fin.

On observe sur la Figure 2.8 que deux préconditionneurs donnent une convergence très rapide du solveur *gmres*, ce sont les factorisations *ILUTP* et *ILUC* (entre 2 et

2.2. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME LINÉAIRE

5 itérations selon le nombre d'éléments). Le préconditionneur *ILUC* donne le meilleur temps CPU pour le solveur comparativement aux autres préconditionneurs, voir Figure 2.9. On remarque que l'on a ce même profil pour le conditionnement de la matrice $C^{-1}K$, illustré sur la Figure 2.10. Ce qui vérifie que la vitesse de convergence du solveur est lié au spectre de $C^{-1}K$. En effet, pour un conditionnement très faible de la matrice $C^{-1}K$ 2.10, on a une convergence très rapide 2.8. On voit également que pour une matrice de dimension 1 000 (pour 10 éléments sur le bord du patch), les factorisations *ILUTP* et *ILUC* sont quasiment complètes car le conditionnement est quasiment de 1.

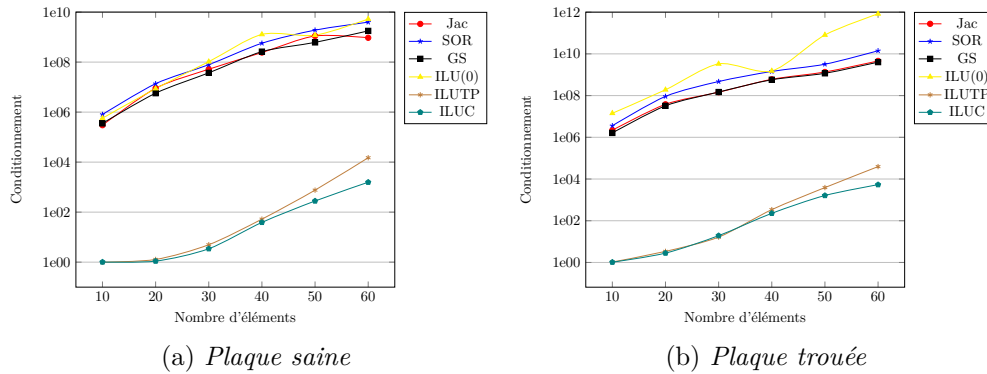


FIGURE 2.10 – Conditionnement des matrices $C^{-1}K$ en fonction du raffinement du maillage fin.

L'inconvénient des factorisations est qu'elles peuvent prendre du temps. On regarde si le temps pour le préconditionnement est de même ordre que le temps du solveurs.

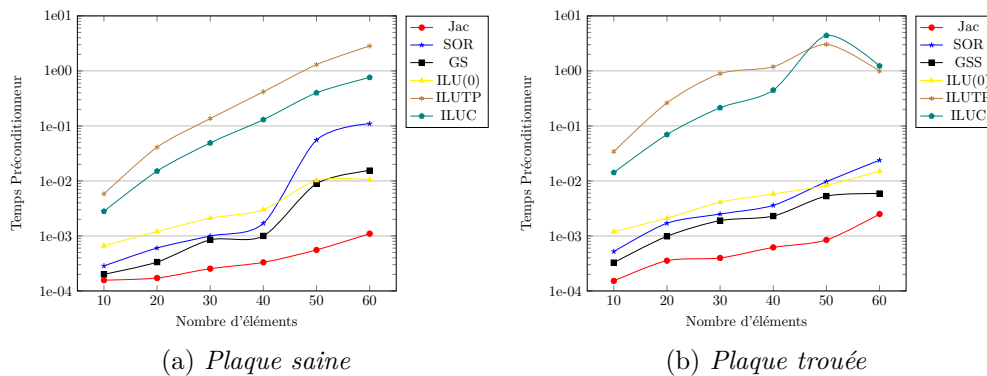


FIGURE 2.11 – Temps du préconditionnement (en s) en fonction du raffinement du maillage fin.

Comme on s'y attendait, on observe sur les Figures 2.11 que *ILUC* et *ILUTP* prennent plus de temps pour avoir le préconditionnement que les autres méthodes. Ceci n'est pas seulement dû au fait qu'une factorisation demande plus de temps, mais aussi au fait que le taux de remplissage pour les factorisations *ILUC* et *ILUTP* est très élevé. On a ici un taux de remplissage de $1e - 07$, sachant que plus le taux de remplissage est proche de 0 plus la factorisation *LU* est complète. Mais le gain de temps sur la résolution du système est tellement important que le surplus de délai pour le préconditionneur est négligeable. On choisit le préconditionneur *ILUC* car il donne les résultats optimaux. Il est en outre le seul que la résolution complète (renumérotation + préconditionnement + solveur) donne un temps CPU inférieur à celui de la méthode directe, visible sur la Table 2.1.

Méthode \ Structure	Pivot de Gauss	Jac	SOR	GS	ILU(0)	ILUTP	ILUC
Plaque saine	1.36	54.68	73.75	74.4	96.81	1.65	0.42
Plaque trouée	2.83	71.63	102.5	104.78	132.16	3.48	0.79

TABLE 2.1 – *Plaque trouée* - Temps total (en s) de la résolution du système linéaire pour les solveurs direct et itératifs avec les différents préconditionneurs pour un raffinement de 60 éléments sur les bords du patch.

Le problème possible des factorisations est qu'elles peuvent prendre du temps par rapport à la résolution du système par la méthode directe. Pour remédier à ce problème, une solution est de réorganiser la matrice K du système, c'est-à-dire à utiliser une technique de renumérotation ([35]).

2.2.3 Les renumérotations

L'idée de la renumérotation est d'avoir une forme pour la matrice K telle que le coût en temps du préconditionnement soit relativement petit. Les méthodes de renumérotation s'inspirent de la théorie des graphes, puisque toute matrice peut-être représentée par un graphe (cf Figure 2.12).

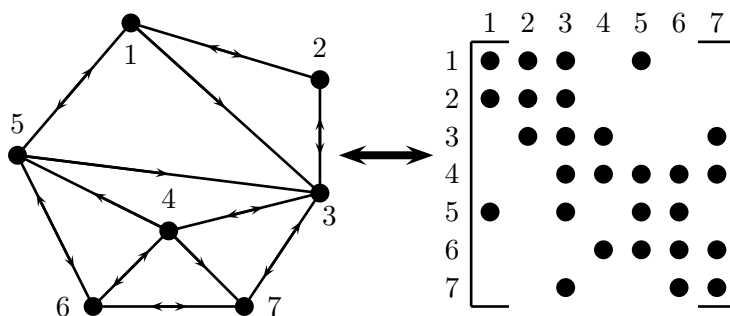


FIGURE 2.12 – Graphe orienté et matrice associée ([35]).

Le système préconditionné $C^{-1}KU = C^{-1}F$ s'écrit avec une renumérotation,

$$(P^T C^{-1} K P)(P^T U) = P^T C^{-1} F. \quad (2.26)$$

où P est une matrice de permutation. Cela donne un meilleur rendement pour la factorisation incomplète avec des matrices creuses par rapport à une factorisation incomplète sans renumérotation. Le but de cette partie est de comparer différentes renumérotations afin de choisir la plus performante en temps CPU pour la résolution du système (temps de la renumérotation + temps du préconditionnement + temps du solveur). Les renumérotations sont listées ici. Pour plus d'information à leurs sujets comme leurs correspondances en théorie des graphes, voir ([35]). Les techniques de renumérotation sont implantées dans MATLAB[®]. Pour plus d'information sur l'utilisation des renumérotation se référer aux pages de chaque renumérotation.

On s'intéresse ici aux renumérotations, suivantes, celles basées sur la méthode de Cuthill-McKee,

- CMK , renumérotation de Cuthill-McKee (matrices construites par rotation de celles obtenues par *symrcm*).
- $RCMK$, renumérotation de Cuthill-McKee inverse ([47]),
- celles basés sur la méthode de degré minimum,
- AMD , renumérotation de degré minimum approché ([37]).

2.2. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME LINÉAIRE

- *CAMD*, renumérotation par permutation de colonne par degré minimum ([42]), ainsi que,
- *Dissect*, renumérotation par dissection imbriquée ([43]).

Pour mettre en valeur l'influence des renumérotation sur la structure des matrices, on regarde le profil des matrices K , K_l et K_u définies à l'équation (2.25). Comme point de départ, on prend les matrices $K^{origine}$, $K_l^{origine}$ et $K_u^{origine}$ obtenues par le système (2.10) (Figure 2.13). On voit sur la Figure 2.13 que les matrices obtenues après la factorisation incomplète de Crout sont denses. En effet pour une matrice $K^{origine}$ avec 173 355 coefficients non nuls, les matrices $K_l^{origine}$ et $K_u^{origine}$ ont respectivement 5 630 077 et 6 721 876 coefficients non nuls.

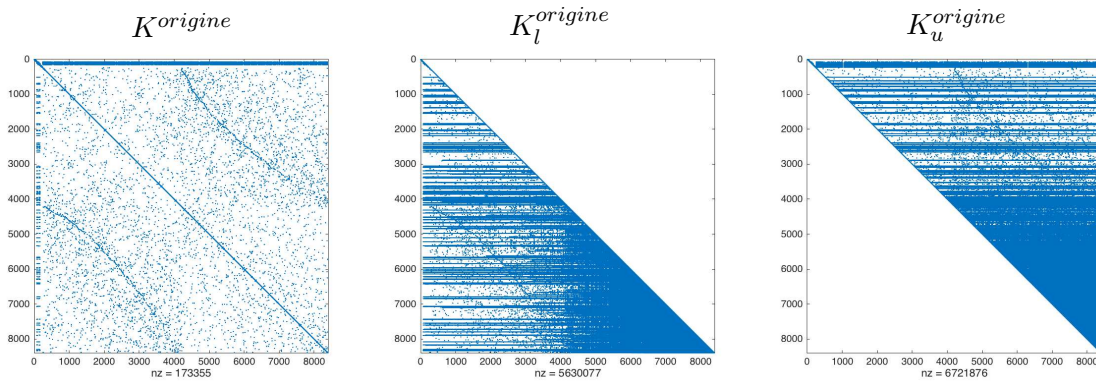


FIGURE 2.13 – Représentation des matrices K , K_l et K_u sans renumérotation.

Pour éviter d'avoir ce genre de profil, on utilise une renumérotation afin de réduire le remplissage pendant la factorisation incomplète LU et plus précisément pendant l'élimination de Gauss ([35]). Et ceci dans l'objectif précis d'obtenir le préconditionneur $C = K_l K_u$ avec le moins de coefficients non nuls possible. La densité de C , notée $d(C)$, est définie par,

$$d(C) = \frac{\text{Nombre d'éléments non nuls de } C}{\text{Nombre d'éléments de } C}. \quad (2.27)$$

Les renumérotations de Cuthill–McKee permettent de réduire la largeur de bande d'une matrice creuse par permutation des lignes et des colonnes, ce qui maintient les éléments non nuls dans une bande aussi proche que possible de la diagonale principale de la matrice ([35]), visible sur la Figure 2.14.

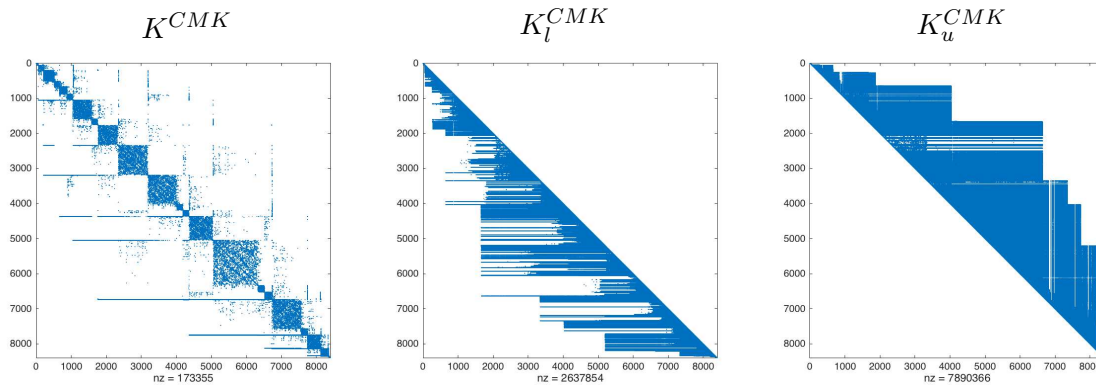


FIGURE 2.14 – Représentation des matrices K , K_l et K_u avec la renumérotation *CMK*.

Néanmoins, on remarque que la matrice K_u^{CMK} est plus dense que la matrice $K_u^{origine}$, en effet la matrice K_u^{CMK} possède 7 890 366 coefficients non nuls alors que la matrice $K_u^{origine}$ en possède 6 721 876, ce qui n'est pas attendu. La méthode *RCMK* est une variante de la méthode *CMK* dans laquelle l'indexage des nœuds est inversé. On remarque sur les Figures 2.14 et 2.15 que les matrices K ont la même structure dite en "épi de maïs" ([35]) et que la largeur de bande des trois matrices est aussi la même pour les deux renumérotations. Néanmoins, la densité est beaucoup plus petite avec *RCMK*, précisément pour K_u^{RCMK} qui possède un nombre d'éléments non nuls environ cinq fois plus petit que la matrice $K_u^{origine}$. En effet, la matrice K_u^{RCMK} possède 1 378 440 coefficients non nuls alors que la matrice $K_u^{origine}$ en possède 6 721 876.

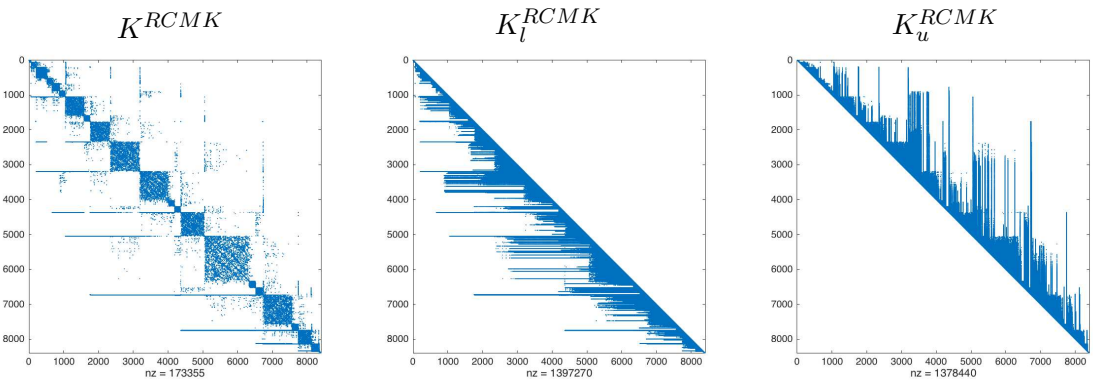


FIGURE 2.15 – Représentation des matrices K , K_l et K_u avec la renumérotation *RCMK*.

L'idée principale de la méthode de degré minimum est qu'à chaque étape de l'élimination de Gauss les permutations des lignes et des colonnes sont exécutées afin de minimiser le nombre d'éléments non nuls en dehors de la diagonale ([35]).

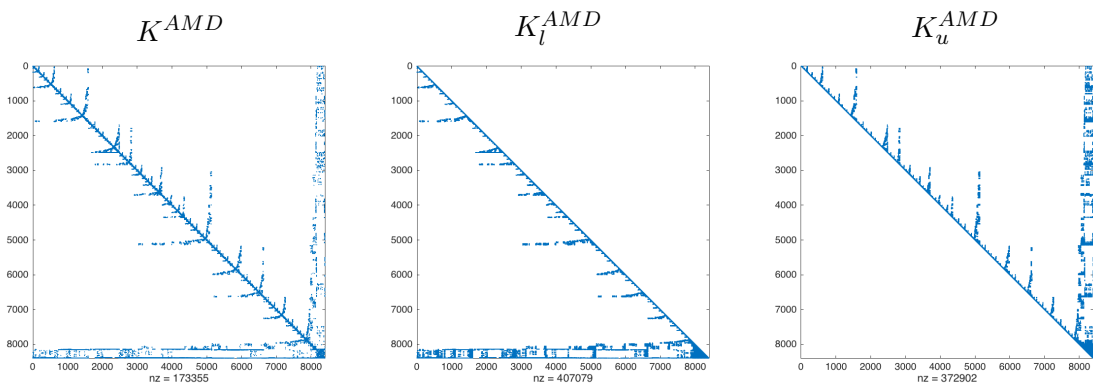


FIGURE 2.16 – Représentation des matrices K , K_l et K_u avec la renumérotation *AMD*.

La renumérotation *AMD* donne des matrices très éparées, avec un profil dit en "flèche" ([35]). Les éléments non nuls sont rassemblés autour de la diagonale mais aussi sur deux bandes respectivement dans les dernières lignes et les dernières colonnes de la matrice K , visibles sur la Figure 2.16, contrairement aux renumérotations vues précédemment. Les matrices obtenues avec la renumérotation *AMD*, après factorisation ont une densité moins élevée qu'avec la renumérotation *RCMK*, les matrices ont environ trois fois moins d'éléments non nuls. En effet, la matrice K_l^{AMD} a 407 079 (respectivement K_u^{AMD} a 372 902) coefficients non nuls alors que la matrice K_l^{RCMK} en a 1 397 270 (respectivement K_u^{RCMK} en a 1 378 440).

2.2. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME LINÉAIRE

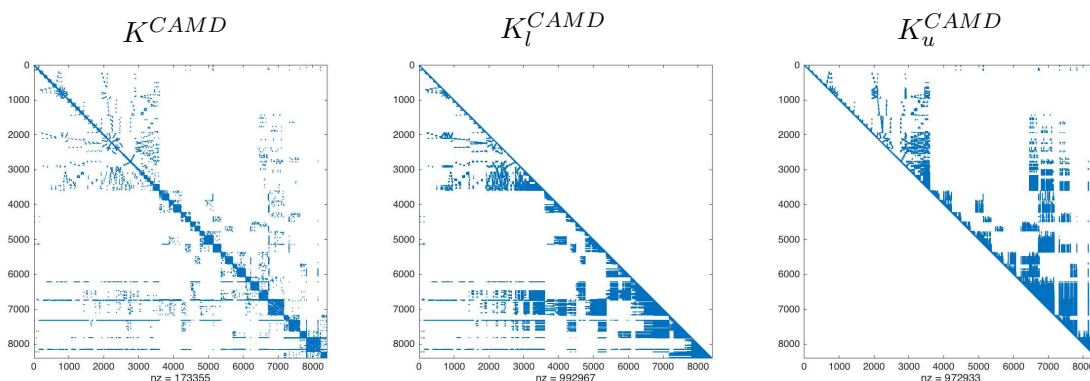


FIGURE 2.17 – Représentation des matrices K , K_l et K_u avec la renumérotation $CAMD$.

On remarque sur la Figure 2.17 que la méthode $CAMD$ donne des profils intermédiaires des matrices entre la méthode AMD et la méthode $RCMK$. La largeur de bande des trois matrices est, quant à elle, la même pour les deux renumérotations (AMD et $CAMD$). Néanmoins, la densité est beaucoup plus petite avec AMD , avec un nombre d'éléments non nuls environ deux fois plus petit. En effet les matrices K_l^{AMD} et K_u^{AMD} ont respectivement 407 079 et 372 902 coefficients non nuls alors que les matrices K_l^{CAMD} et K_u^{CAMD} en ont 992 967 et 972 933.

La méthode par dissection imbriquée, notée $Dissect$, est basée sur une technique de théorie des graphes ([35]). On observe sur la Figure 2.18 que cette renumérotation donne des résultats assez proche de la renumérotation AMD au niveau du profil et de la densité des matrices. En effet les matrices $K_l^{Dissect}$ et $K_u^{Dissect}$ ont respectivement 406 176 et 364 209 coefficients non nuls et les matrices K_l^{AMD} et K_u^{AMD} ont respectivement 407 079 et 372 902 coefficients non nuls. Il y a donc moins de 10 000 coefficients d'écart entre ces matrices pour des matrices de 71 368 704 coefficients.

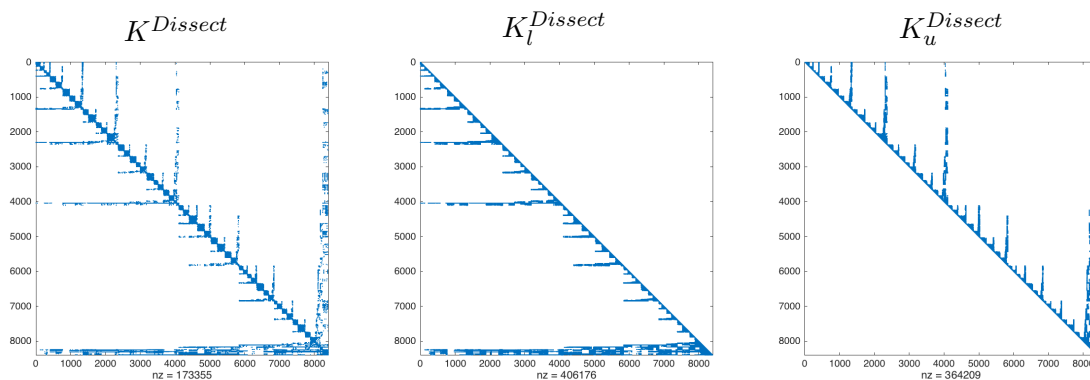


FIGURE 2.18 – Représentation des matrices K , K_l et K_u avec la renumérotation $Dissect$.

Pour comparer les diverses renumérotations, on prend le solveur et le préconditionneur choisis auparavant, c'est-à-dire respectivement $gmres$ et $ILUC$. Ceci afin que seulement les renumérotations influencent les temps d'exécution, le conditionnement et le remplissage. On observe sur les Figures 2.19 et 2.20 que le temps de la résolution du système est dominé par le temps du préconditionnement. Pour choisir la meilleure méthode de renumérotation, il convient donc de tenir compte tant du coût de la renumérotation elle-même que de son impact sur le coût du préconditionnement. Deux renumérotations sortent du lot, AMD et $Dissect$. La renumérotation $Dissect$ coûte plus cher en temps que AMD avec des résultats similaires sur le préconditionnement.

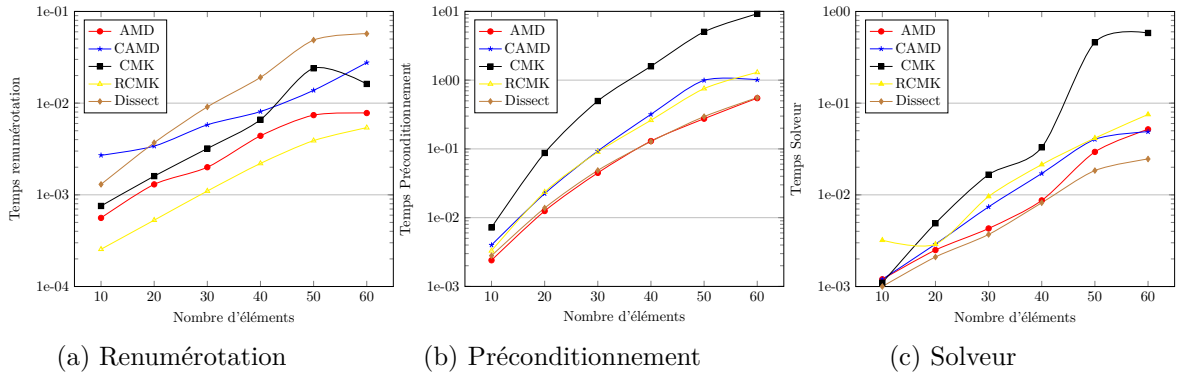


FIGURE 2.19 – *Plaque saine* - Temps d'exécution (en s) en fonction du raffinement du maillage fin.

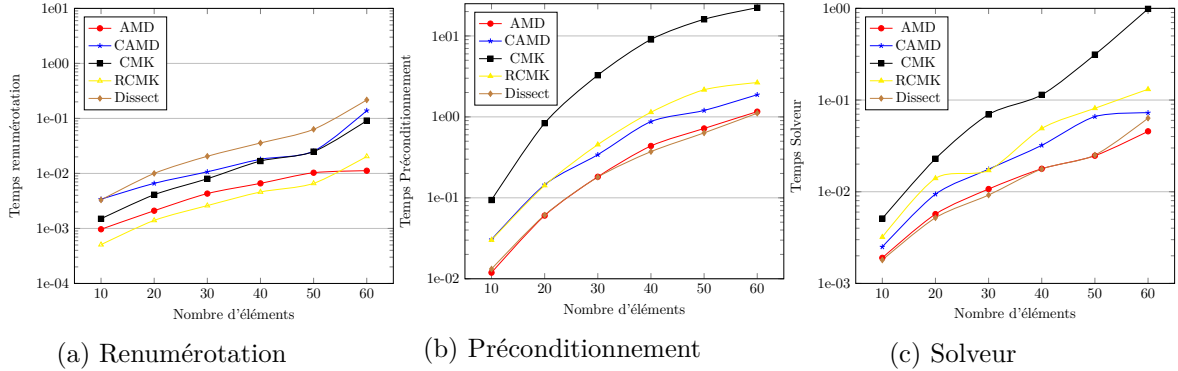


FIGURE 2.20 – *Plaque trouée* - Temps d'exécution (en s) en fonction du raffinement du maillage fin.

Pour un nombre d'éléments plus important (60 éléments), la gain de temps maximal du solveur itératif par rapport au solveur direct est de 55.15 % pour une plaque saine et de 56.89 % pour une plaque trouée (cf Table 2.2).

Structure	Méthode	Pivot de Gauss	AMD	CAMD	CMK	RCMK	Dissect
Plaque saine		1.36	0.61	1.08	10.24	1.38	0.64
Plaque trouée		2.83	1.22	2.09	25.42	2.8	1.4

TABLE 2.2 – Temps (en s) de la résolution du système linéaire pour les solveurs direct et itératif avec les différentes renumérotations.

Pour toutes les renumérotations ainsi que pour le méthode du pivot de Gauss, l'ajout de l'hétérogénéité multiplie environ par 2 le temps de résolution totale alors que le nombre de degrés de liberté est multiplié par 1.52 (pour 60 éléments, Ω engendre 9 942 degrés de liberté pour la plaque saine et 15 148 degrés de liberté pour la plaque trouée). Pour la majorité des renumérotations, le conditionnement est relativement faible (entre 1 et 100 000 sauf pour *CMK* qui est plus élevée) mais la renumérotation *AMD* donne le plus petit, ceci est visible sur la Figure 2.21.

2.2. RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME LINÉAIRE

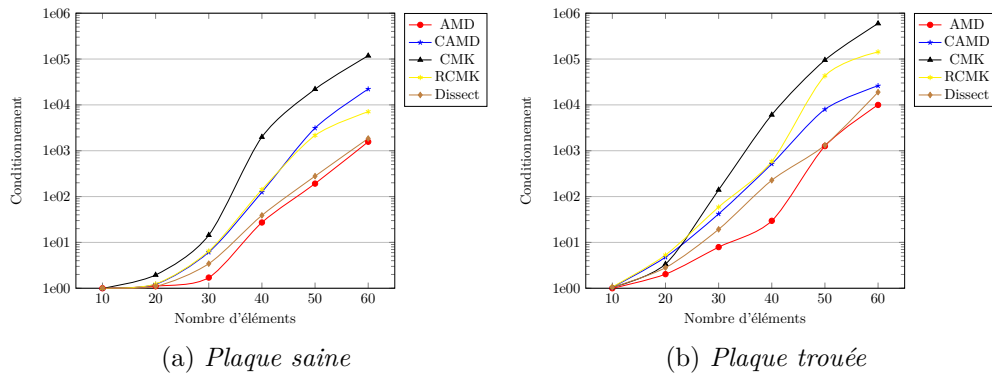


FIGURE 2.21 – Conditionnement de la matrice $C^{-1}K$ pour chaque renumérotation en fonction du raffinement du maillage fin.

L'un des enjeux des renumérotations est le remplissage et plus particulièrement celui de la matrice du préconditionnement $C = K_l K_u$ obtenue lors de la factorisation incomplète de Crout ([35]). Pour cela on évalue la densité de C , définie à l'équation (2.27). Comme pour les temps d'exécution *AMD* et *Dissect* se démarquent des autres par une densité très faible, visibles sur la Figure 2.22.

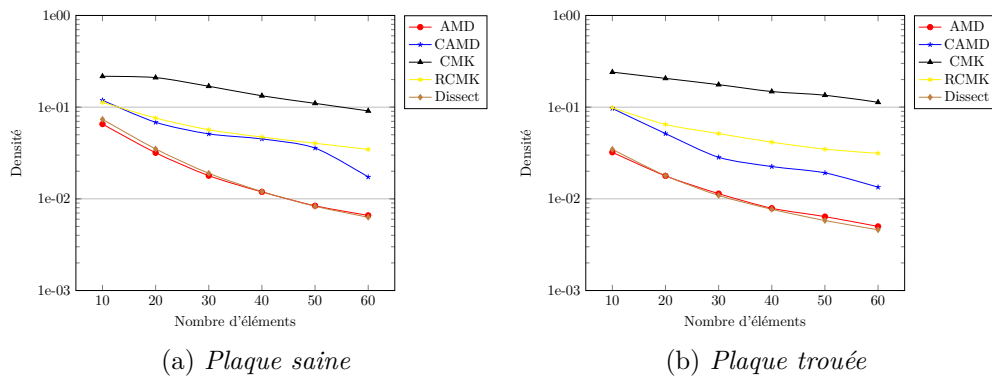


FIGURE 2.22 – Densité de la matrice creuse C en fonction du raffinement du maillage fin.

Pour finir, le solveur *gmres* converge plus rapidement avec la renumérotation *AMD*, visible sur les Figures 2.23 et 2.24.

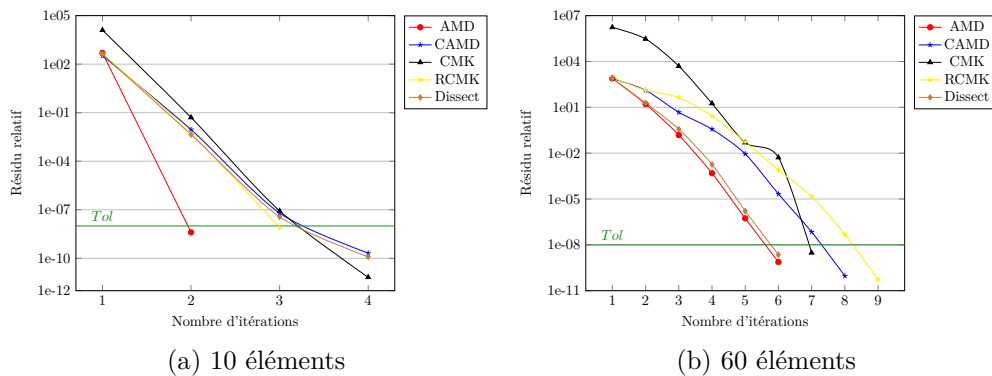


FIGURE 2.23 – *Plaque saine* - Convergence du solveur.

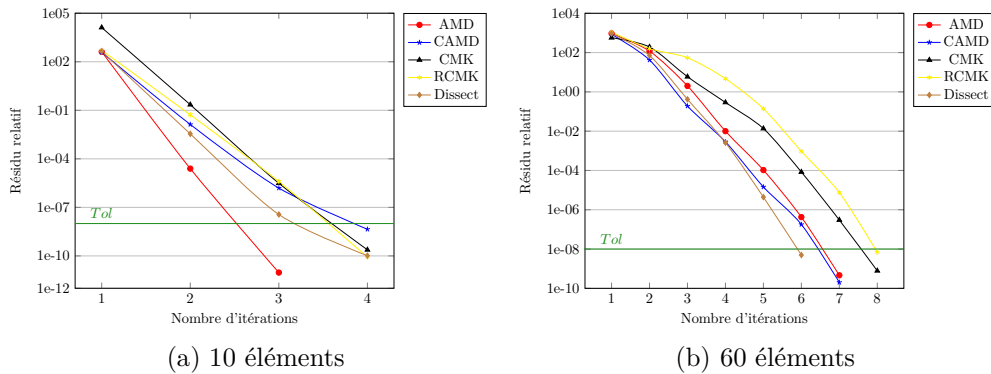


FIGURE 2.24 – Plaque trouée - Convergence du solveur.

Au vu des différents tests, deux renomérotations *AMD* et *Dissect* s'avèrent être les meilleures. Toutefois une légère préférence se porte sur *AMD*, grâce au conditionnement de $C^{-1}K$ et la vitesse de convergence de *gmres*, même si les deux renomérotations donnent des temps CPU équivalents.

En conclusion, pour résoudre notre système, la meilleure combinaison, pour des solveurs itératifs, est basée sur le solveur *gmres* avec un redémarrage *restart* déterminé en fonction du cas test pour avoir la valeur optimale. Le préconditionneur le plus performant est une factorisation incomplète *LU* de Crout, notée *ILUC*. Enfin la meilleure renomérotation est la méthode *AMD*. Cette combinaison donne un temps total de résolution plus efficace que la méthode de pivot de Gauss lorsque le nombre d'éléments devient important.

Après cette étude sur les aspects numériques, le chapitre suivant se focalise sur la qualité des solutions d'un point de vue mécanique pour des problèmes élastiques à forts contrastes.

Chapitre 3

Validation sur une plaque avec/sans défaut

Sommaire

3.1 Mise en place des paramètres de validation	50
3.1.1 Solution de référence	50
3.1.2 Différents types de sollicitations	51
3.1.3 Différents types de défauts	52
3.2 Mesures de l'erreur	55
3.2.1 Erreur L^2	55
3.2.2 Erreur énergétique	58
3.3 Étude paramétrique	61
3.3.1 Taille du raccord	61
3.3.2 Taille du patch par rapport au défaut	65
3.3.3 Effets de la symétrie	67
3.3.4 Degré d'incompatibilité des maillages	69
3.3.5 Patch débordant	71
3.3.6 Recalage du champ de déplacement sur Ω_f	73

Le chapitre précédent a finalisé la construction du système linéaire issu d'une stratégie de zoom structural en y intégrant le modèle de substitution. On a présenté une combinaison optimale de résolution avec *gmres* comme solveur, *ILUC* comme préconditionnement et *AMD* comme renumérotation.

Ce chapitre s'attache à valider la méthode de zoom structural d'un point de vue mécanique. Il se découpe en trois parties, la première partie présente les cas tests et la solution de référence pour mettre en valeur la qualité des solutions d'un point de vue mécanique pour des problèmes élastiques. La deuxième partie se concentre sur le choix de la norme pour quantifier l'erreur entre les solutions obtenues avec la méthode de zoom structural et la solution de référence. La dernière partie se propose d'étudier l'influence des caractéristiques des deux maillages sur la solution captée par le zoom.

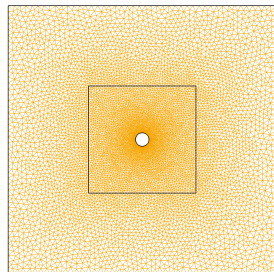
3.1 Mise en place des paramètres de validation

L'objectif est de présenter la solution de référence, ainsi que les défauts et les sollicitations choisis pour les cas tests.

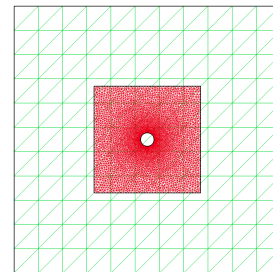
3.1.1 Solution de référence

Pour comparer et valider la méthode de subdivision du patch, on introduit une solution de référence obtenue sur un unique maillage suffisamment fin autour du défaut (14). Pour simplifier les écritures, le maillage sur le domaine Ω est noté de la même façon. Pour comparer les deux solutions au niveau du défaut, on s'assure que le maillage du patch Ω_f et le maillage de référence sont discrétisés de la même façon sur la zone d'intérêt (Figure 3.1).

Pour la solution de référence, on considère une plaque carrée de 40 cm de côté, correspondant au domaine Ω . Un défaut se situe au centre de cette plaque. Les paramètres matériaux sur la structure de référence sont un module de Young, notée E_m (pour E matrice ou E moyen) et un coefficient de Poisson, notée ν_m de 0.3. Pour la solution avec zoom, on considère une autre plaque carrée de 40 cm de côté, qui lui est le domaine Ω_c . Quant au domaine Ω_f il est caractérisé par une plaque carrée de 16 cm de côté incluse dans Ω_c , où le défaut se situe également en son centre. Les paramètres matériaux sont les mêmes sur les deux maillages, un module de Young, notée E_c sur Ω_c de 210 *GPa* (module de Young de l'acier) et E_f sur l'ensemble de Ω_f , égal à E_c initialement pour un domaine sans défaut, et un coefficient de Poisson, notée ν_c sur Ω_c et ν_f sur tout Ω_f de 0.3.



(a) Maillage de référence



(b) Maillages sur les deux domaines

FIGURE 3.1 – Maillages pour une plaque trouée.

En reprenant le problème d'équilibre pour la méthode du zoom structural ((1.40) - (1.46)), on a les équations locales suivantes,

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \text{sur } \Omega & (3.1) \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{u} + (\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{u})^T) & \text{sur } \Omega & (3.2) \\ \underline{\underline{\sigma}} = \mathbf{A} : \underline{\underline{\varepsilon}} & \text{sur } \Omega & (3.3) \end{cases}$$

et les conditions limites,

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{f} & \text{sur } S_1 & (3.4) \\ \underline{u} = \underline{u}^d & \text{sur } S_0 & (3.5) \end{cases}$$

pour lesquelles les surfaces S_0 , S_1 forment une partition de la frontière de Ω . En partant des équations (3.1)-(3.5) et en utilisant le formalisme des éléments finis, on obtient le système linéaire approché,

$$KU = F \quad (3.6)$$

où K est la matrice élastique de rigidité, U le vecteur des déplacements nodaux sur Ω et F le vecteur des chargements. Pour résoudre ce système, on utilise le solveur direct, c'est-à-dire la méthode du pivot de Gauss.

3.1.2 Différents types de sollicitations

Dans ce chapitre, on étudie deux sollicitations différentes. La première est un essai de traction pure et la deuxième, un essai de cisaillement. Pour l'essai de traction, une densité d'effort normal, notée $f = 0.1 \text{ GPa}$, est appliquée sur le haut dans la direction y et $-f$ est appliquée sur le bas de la structure. Pour éliminer les mouvements de solides rigides de la structure, les déplacements sont imposés aux points A et B , cela est illustré sur la Figure 3.2.

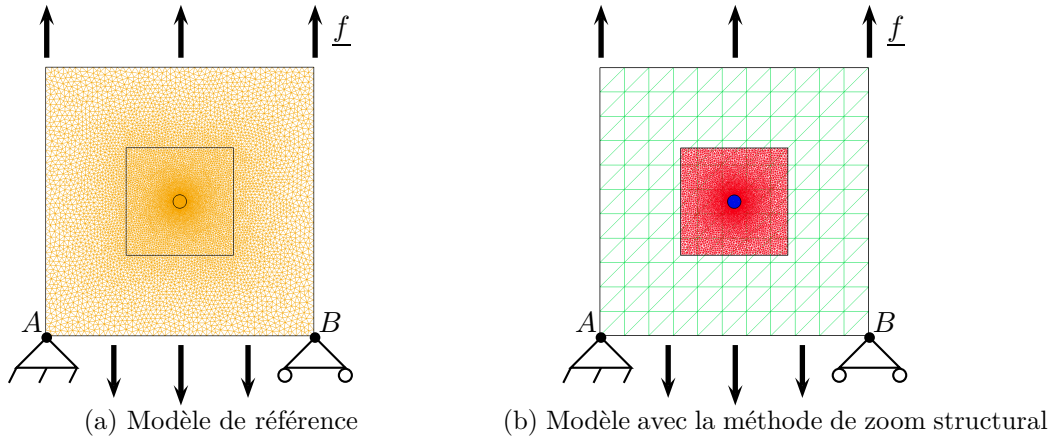


FIGURE 3.2 – Différents modèles pour l'essai en traction pure.

Pour l'essai de cisaillement, le domaine Ω_c est encastré sur le bas de la structure et bloqué dans la direction y sur le haut de la structure. Un déplacement imposé, noté \underline{u}_d , de 0.02 cm est appliqué dans la direction x sur le haut de la plaque. Ce modèle est illustré sur la Figure 3.3.

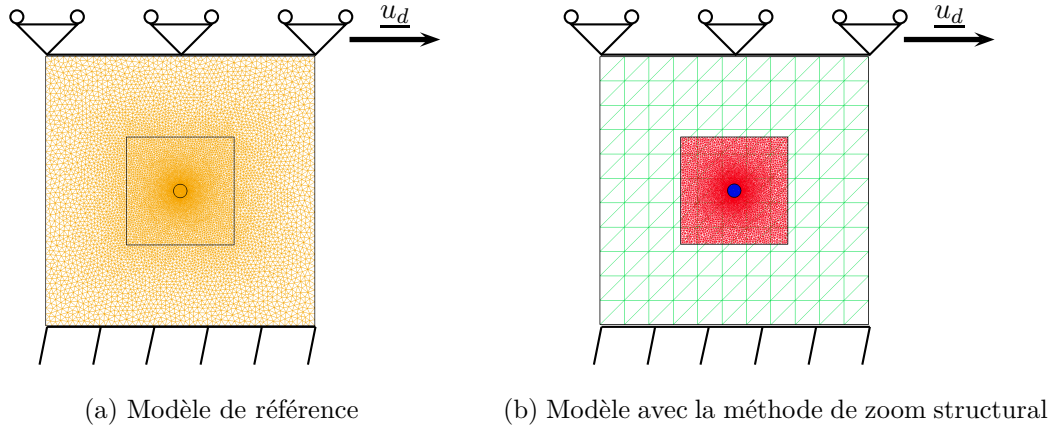


FIGURE 3.3 – Différents modèles pour l'essai de cisaillement.

3.1.3 Différents types de défauts

Pour tester et critiquer la méthode de subdivision de Ω_f , on étudie plusieurs types de défauts,

1. structure saine ou sans défaut ($E_f = E_c$ sur Ω_f),
2. structure avec une inclusion circulaire dure,
3. structure avec une inclusion circulaire molle,
4. structure avec un trou (inclusion infiniment molle).

Pour une inclusion dure, le module de Young E_f vaut E_c en dehors de l'inclusion et vaut $E_{dur} = 406 \text{ GPa}$ dans celle-ci (module de Young du tungstène). Pour une inclusion molle, le module de Young E_f vaut E_c en dehors de l'inclusion et vaut $E_{mol} = 69 \text{ GPa}$ dans celle-ci (module de Young de l'aluminium). Ces deux paramètres sont définis ainsi dans le but d'avoir un fort contraste entre l'inclusion et le reste de Ω_f , illustré sur la Figure 3.4.

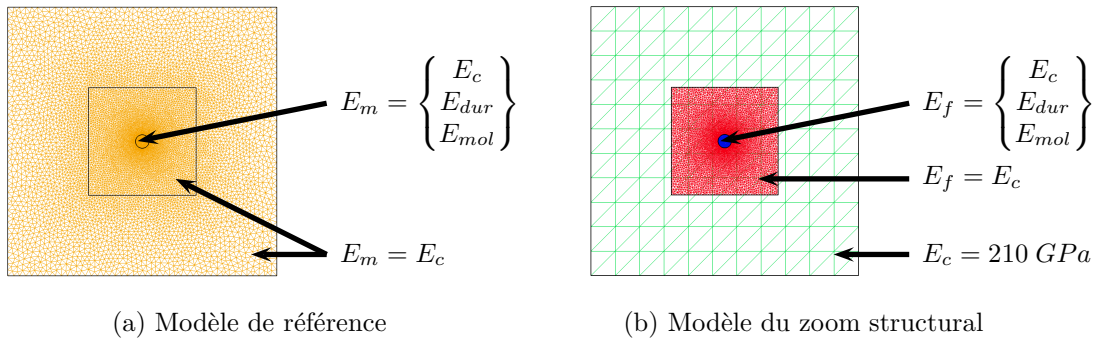


FIGURE 3.4 – Les deux modèles pour les différents types de défauts.

Pour la discrétisation en éléments finis, on adopte pour le domaine grossier Ω_c , un maillage structuré discrétisé en 11 éléments sur les bords. Ce paramètre est seulement modifié lors de l'étude du degré d'incompatibilité des maillages. Le domaine fin Ω_f est discrétisé en 10, 20, 30, 40, 50 et 60 éléments sur les bords en un maillage non structuré. Dès 10 éléments, le maillage Ω_f est plus fin que le maillage Ω_c . Une première étude consiste à présenter la capacité à capter les différents défauts énoncés précédemment. Pour ce faire, on adopte les paramètres optimaux, pour la stratégie de zoom structural, étudiés dans la partie suivante. La comparaison des résultats obtenus sur les différents types de défauts se limite au seul champ de déplacement.

Essai de traction. Les profils de déplacements obtenus, avec ou sans zoom structural, sont très proches, quel que soit le défaut, présent ou non, sur Ω_f , visibles sur les Figures 3.5 à 3.8. En effet, on trouve entre les deux solutions, une augmentation en moyenne de 0.32 % pour la norme du déplacement maximal et une diminution de 0.47 % pour la norme du déplacement minimal, ce qui est très peu. La procédure de recalage, vu au chapitre précédent, semble donc donner des résultats probants. On observe que le défaut est capté par la perturbation du champ de déplacement par la méthode de zoom structural. Cette perturbation est plus significative pour le trou.

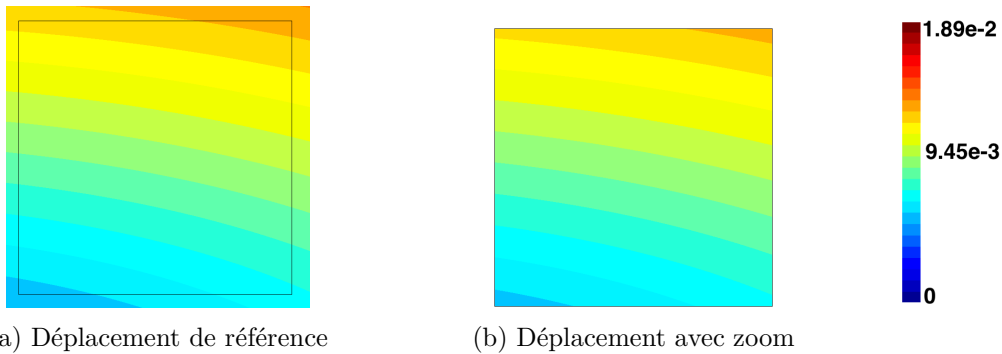


FIGURE 3.5 – **Essai de traction** - *Plaque saine* - Norme du déplacement sur le domaine Ω_f sans/avec zoom (en cm).

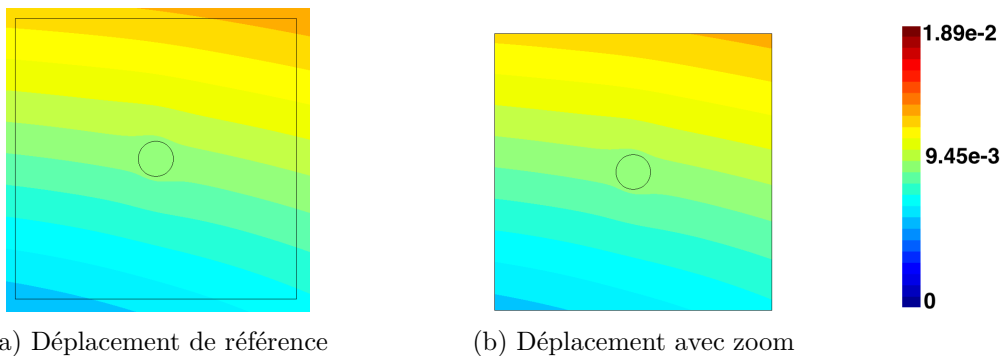


FIGURE 3.6 – **Essai de traction** - *Plaque avec inclusion dure* - Norme du déplacement sur le domaine Ω_f sans/avec zoom (en cm).

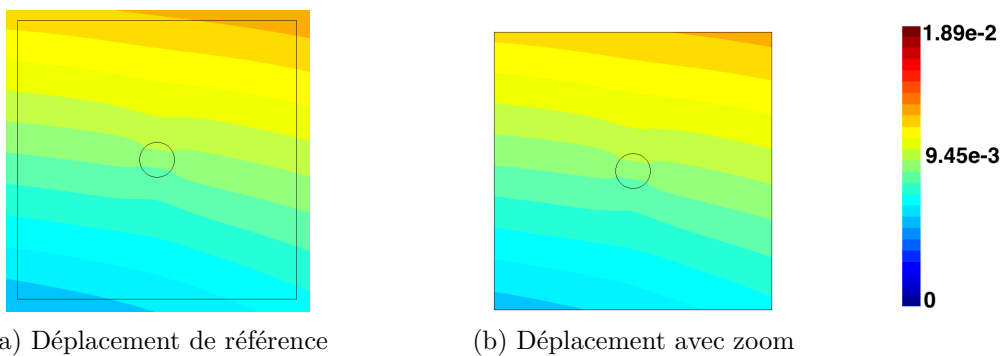


FIGURE 3.7 – **Essai de traction** - *Plaque avec inclusion molle* - Norme du déplacement sur le domaine Ω_f sans/avec zoom (en cm).

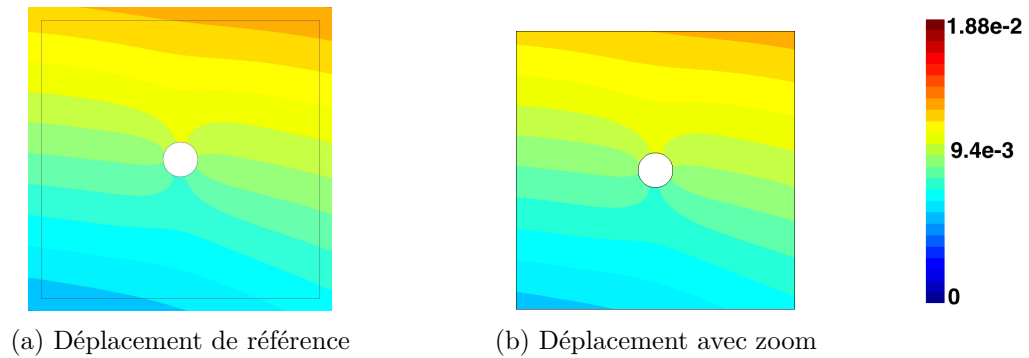


FIGURE 3.8 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Norme du déplacement sur le domaine Ω_f sans/avec zoom (en cm).

Essai cisaillement. Les profils de déplacements obtenus, avec ou sans zoom structural, sont encore proches, quel que soit le défaut sur Ω_f , visibles sur les Figures 3.9 à 3.12. On observe, comme pour l'essai de traction, que la présence d'un défaut perturbe le déplacement sur Ω_f par rapport au déplacement sur plaque saine. Néanmoins, les extrema sont moins bien captés que pour l'essai en traction. En effet, on trouve entre les deux solutions une augmentation en moyenne de 1.06 % pour la norme du déplacement minimal et une diminution de 0.73 % pour la norme du déplacement maximal, phénomène inverse de l'essai de traction. La procédure de recalage du déplacement en est peut-être la cause, ce point est examiné en fin de chapitre.

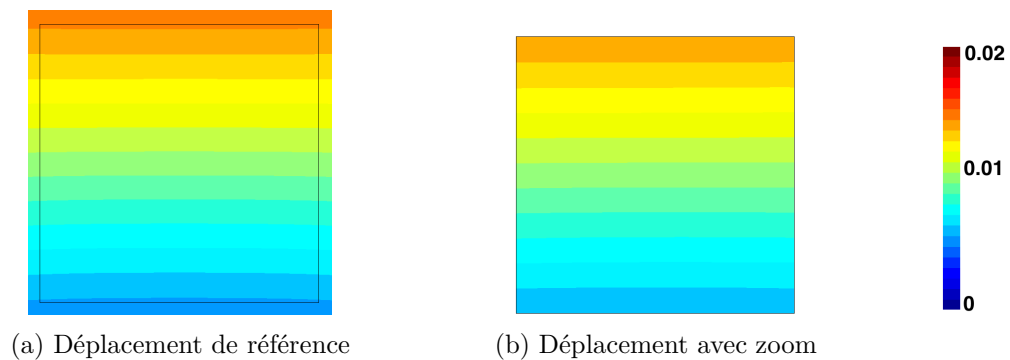


FIGURE 3.9 – **Essai de cisaillement** - *Plaque saine* - Norme du déplacement sur le domaine Ω_f sans/avec zoom (en cm).

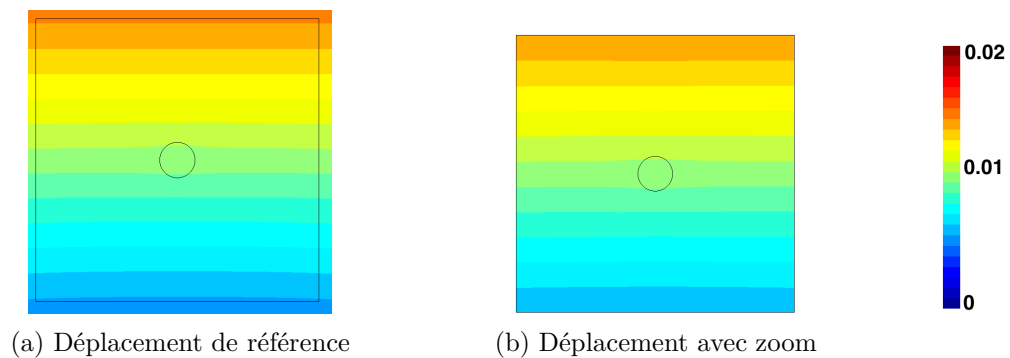


FIGURE 3.10 – **Essai de cisaillement** - *Plaque avec inclusion dure* - Norme du déplacement sur le domaine Ω_f sans/avec zoom (en cm).

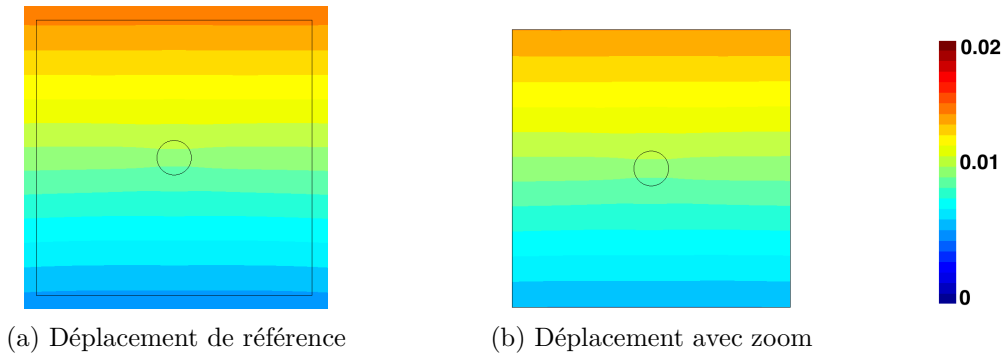


FIGURE 3.11 – **Essai de cisaillement** - *Plaque avec inclusion molle* - Norme du déplacement sur le domaine Ω_f sans/avec zoom (en cm).

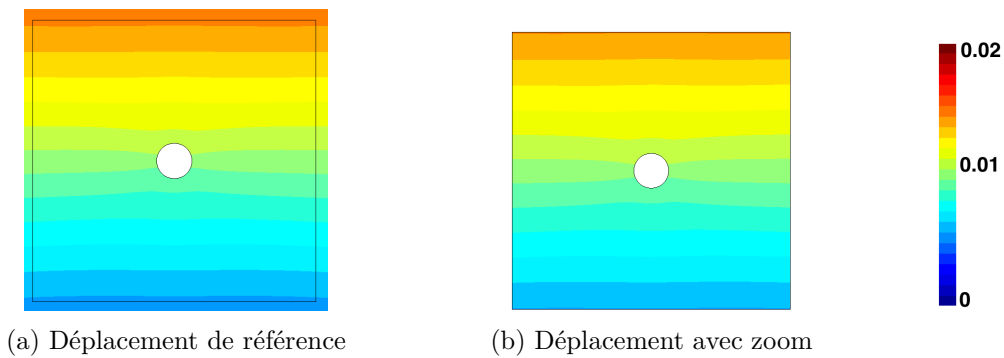


FIGURE 3.12 – **Essai de cisaillement** - *Plaque trouée* - Norme du déplacement sur le domaine Ω_f sans/avec zoom (en cm).

3.2 Mesures de l'erreur

On définit des mesures d'erreurs locales et globales sur Ω_f . On s'intéresse à deux types d'erreurs. La première erreur est commise sur les champs de déplacements, variables solutions des systèmes linéaires (2.10) et (3.6), et est définie avec la norme L^2 . La seconde erreur est définie avec une norme faisant intervenir les champs de déformation et de contrainte. Cette nouvelle norme est appelée norme en énergie ([10], [14]).

3.2.1 Erreur L^2

Le calcul de l'erreur globale L^2 s'effectue entre le déplacement nodal trouvé avec la méthode de zoom structural, noté $U^{(f)}$, et le déplacement nodal de référence restreint au domaine Ω_f , notée $U_{|\Omega_f}^{ref}$ ([21]). On rappelle que pour faciliter cette comparaison, le maillage Ω_f et le maillage de référence sont identiques sur la zone d'intérêt. L'erreur absolue globale L^2 , noté $ER_{L^2}^a$, s'écrit,

$$ER_{L^2}^a = \|U_{|\Omega_f}^{ref} - U^{(f)}\|_{L^2} = \sqrt{\left(U_{|\Omega_f}^{ref} - U^{(f)}\right)^T \left(U_{|\Omega_f}^{ref} - U^{(f)}\right)} \quad (3.7)$$

On introduit l'erreur normalisée en divisant l'erreur absolue par la norme de la solution de référence, soit

$$ER_{L^2}^r = \frac{\|U_{\Omega_f}^{ref} - U^{(f)}\|_{L^2}}{\|U_{\Omega_f}^{ref}\|_{L^2}}. \quad (3.8)$$

Pour les quatre types de défauts et l'essai de traction, on observe sur la Figure 3.13 que l'erreur globale L^2 normalisée est inférieure à $1e-2$ quelle que soit la finesse du maillage. Le maillage de la solution de référence est raffiné en même temps que celui du patch afin que l'erreur ne représente que l'influence de la discrétisation de Ω_c . On remarque pour la plaque saine, une erreur globale normalisée L^2 extrêmement petite. En effet, elle est inférieure à $1e-5$. Pour l'essai de cisaillement cette erreur est comprise entre $9.5e-3$ et $1.7e-2$, quels que soient le défaut et la discrétisation du domaine Ω_f . Pour les deux essais (traction et cisaillement), les erreurs les plus élevées sont obtenues pour la plaque trouée. Les erreurs les plus basses sont obtenues pour la plaque saine. Ceci correspond au fait que la solution obtenue pour une plaque saine est la plus homogène, à contrario de celle pour une plaque trouée.

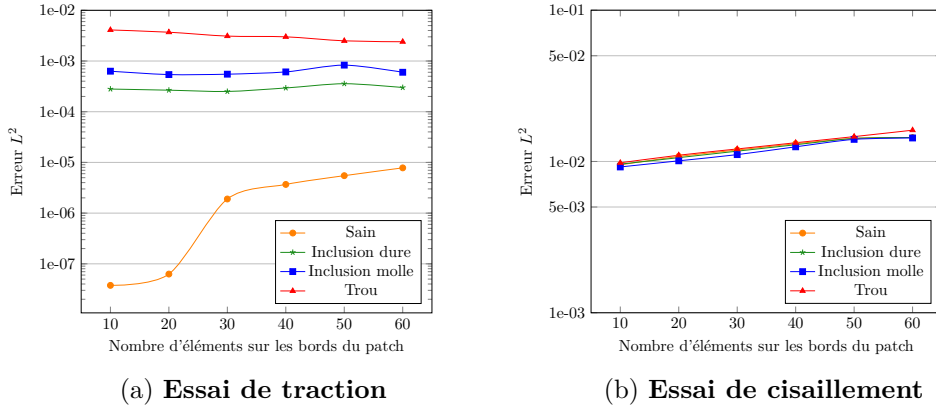


FIGURE 3.13 – Erreur L^2 globale normalisée $ER_{L^2}^R$ en fonction de la finesse du maillage fin.

On s'intéresse aussi à la contribution de chaque degré de liberté sur l'erreur relative globale $ER_{L^2}^r$ défini à l'équation (3.8). L'erreur globale $ER_{L^2}^r$ peut s'écrire avec la somme sur chaque degré de liberté d_{dl} du maillage par,

$$ER_{L^2}^r = \frac{\sqrt{\sum_{d_{dl}}^{n_{ddl}} (U_{d_{dl}}^{ref} - U_{d_{dl}}^{(f)})^T (U_{d_{dl}}^{ref} - U_{d_{dl}}^{(f)})}}{\sqrt{\sum_{d_{dl}}^{n_{ddl}} (U_{d_{dl}}^{ref})^T (U_{d_{dl}}^{ref})}} \quad (3.9)$$

Pour avoir une cartographie d'erreur locale sur Ω_f , on définit l'erreur relative locale au carré $ER_{L^2}^{el}$ pour chaque degré de liberté d_{dl} par,

$$ER_{L^2}^{el}(d_{dl}) = \frac{(U_{d_{dl}}^{ref} - U_{d_{dl}}^{(f)})^T (U_{d_{dl}}^{ref} - U_{d_{dl}}^{(f)})}{U_{ref}^T U_{ref}} \quad (3.10)$$

On reprend les deux essais présentés auparavant pour chaque type de défaut et on visualise l'erreur locale en déplacement $ER_{L^2}^{el}$ sur Ω_f . On observe sur les Figures 3.14 à 3.17 que les erreurs se concentrent sur certains bords du patch Ω_f . Pour l'essai de cisaillement, cette erreur se concentre sur les bords verticaux pour tous les types de défauts, sans qu'on puisse distinguer la zone de raccord. Pour l'essai de traction, les conclusions sont moins nettes, avec des erreurs locales définis à l'équation (3.10), proches

3.2. MESURES DE L'ERREUR

de la précision machine ($2.2204e - 16$). C'est peut-être la raison pour laquelle l'erreur est toujours localisée en quelques zones du bord. Cependant sur certaines figures (3.15a et 3.16a) on peut distinguer que l'erreur se concentre sur le bord interne du raccord. On observe aussi que les erreurs sont plus élevées pour l'essai de cisaillement que pour l'essai de traction. En effet, les erreurs locales sont au maximum de l'ordre de $1e - 9$ pour l'essai de traction, avec une grande disparité entre les différents types de défauts (de l'ordre de $1e - 14$ pour la plaque saine à $1e - 9$ pour la plaque trouée), due au contraste de propriété dépendant de la nature du défaut. Alors que pour l'essai de cisaillement, ces erreurs locales sont de l'ordre de $1e - 7$ quels que soient le type de défauts.

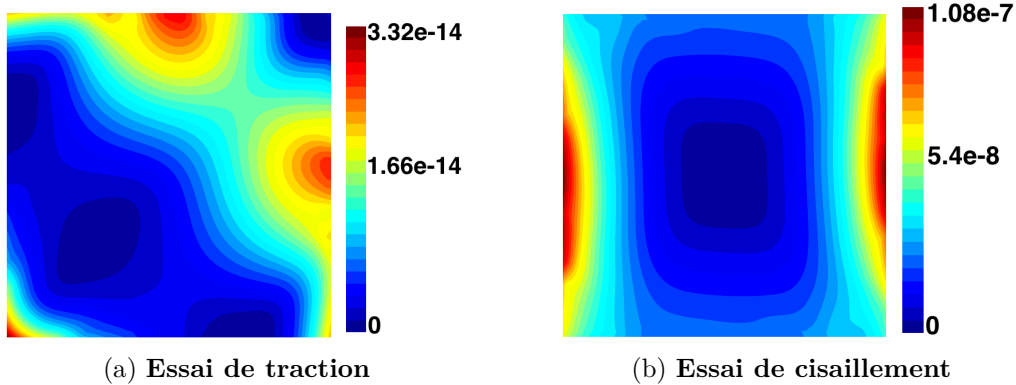


FIGURE 3.14 – *Plaque saine* - Cartographie de l'erreur locale en déplacement $ER_{L^2}^{el}$.

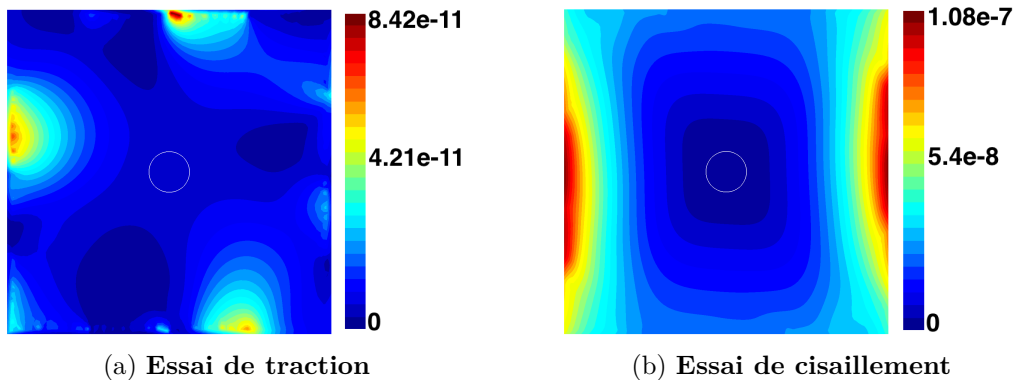


FIGURE 3.15 – *Plaque avec inclusion dure* - Cartographie de l'erreur locale en déplacement $ER_{L^2}^{el}$.

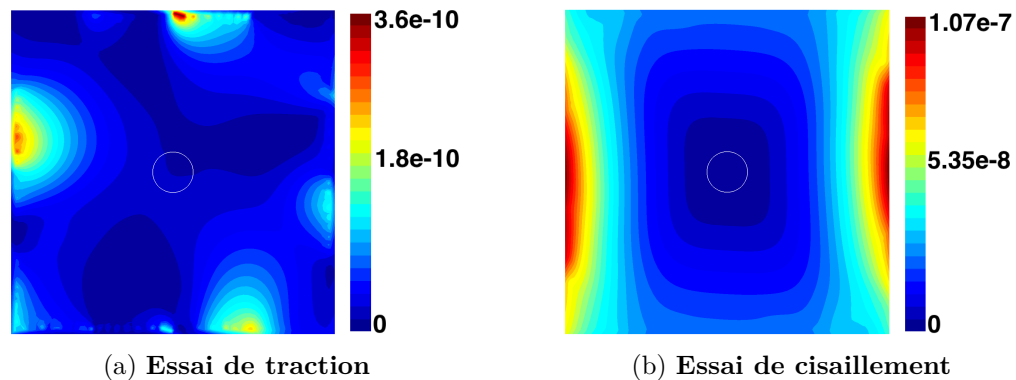
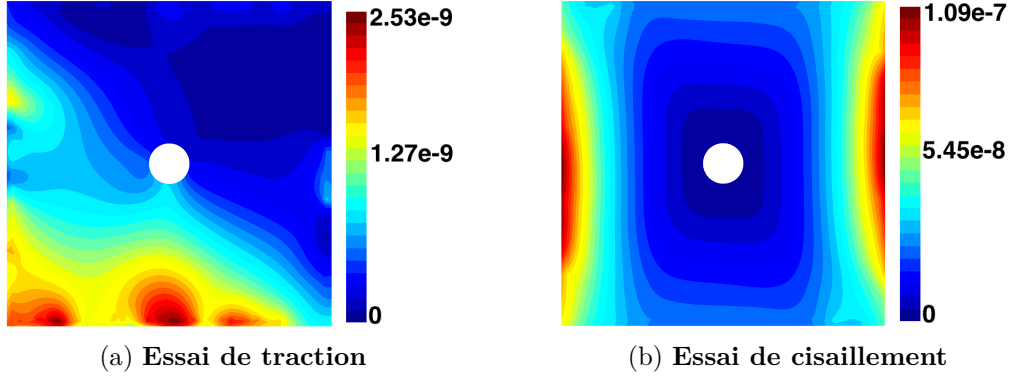


FIGURE 3.16 – *Plaque avec inclusion molle* - Cartographie de l'erreur locale en déplacement $ER_{L^2}^{el}$.


 FIGURE 3.17 – *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur globale en déplacement $ER_{L^2}^{el}$.

3.2.2 Erreur énergétique

L'erreur sur le déplacement n'est peut être pas la mesure la plus pertinente pour évaluer l'influence de la stratégie de zoom structural sur la qualité de la solution. En effet, les informations échangées entre les deux maillages concernent les champs échantillonnés de contrainte et de déformation. En conséquence, on utilise une norme dite énergétique portant sur les champs échantillonnés ([10], [14]). L'erreur énergétique absolue, noté ER_{Σ}^a , est défini par,

$$ER_{\Sigma}^a = \sqrt{\left(\Sigma_{|\Omega_f}^{ref} - \Sigma(f)\right)^T W_f \left(\varepsilon_{|\Omega_f}^{ref} - \varepsilon(f)\right)} \quad (3.11)$$

avec $\Sigma_{|\Omega_f}^{ref}$ (respectivement $\varepsilon_{|\Omega_f}^{ref}$), le vecteur des valeurs du champ de contrainte (respectivement de déformation) de référence restreint au domaine Ω_f . Cependant, d'après la stratégie adoptée au chapitre 2, seul le champ de contrainte est échangé. Les deux maillages étant identiques sur Ω_f , la loi d'élasticité discrète inverse sur le maillage de référence permet d'écrire sur la zone d'intérêt,

$$\varepsilon_{|\Omega_f}^{ref} = S(f)\Sigma_{|\Omega_f}^{ref}. \quad (3.12)$$

L'erreur énergétique peut donc s'exprimer uniquement en fonction des vecteurs de contrainte, d'où le Σ en indice dans ER_{Σ}^a , sous la forme

$$ER_{\Sigma}^a = \sqrt{\left(\Sigma_{|\Omega_f}^{ref} - \Sigma(f)\right)^T W_f S(f) \left(\Sigma_{|\Omega_f}^{ref} - \Sigma(f)\right)}. \quad (3.13)$$

On introduit l'erreur énergétique relative en divisant l'erreur absolue en énergie par la norme énergétique de la solution de référence,

$$ER_{\Sigma}^r = \frac{\sqrt{\left(\Sigma_{|\Omega_f}^{ref} - \Sigma(f)\right)^T W_f S(f) \left(\Sigma_{|\Omega_f}^{ref} - \Sigma(f)\right)}}{\sqrt{\Sigma_{|\Omega_f}^{refT} W_f S(f) \Sigma_{|\Omega_f}^{ref}}}. \quad (3.14)$$

La Figure 3.18 met en évidence que, pour l'essai de traction, l'évolution de l'erreur en énergie en fonction de la finesse du maillage est la même que pour l'erreur L^2 . Pour l'essai de cisaillement, lorsqu'on raffine le maillage l'erreur énergétique diminue alors que l'erreur L^2 augmente. Pour les deux essais (traction et cisaillement), les erreurs les plus

3.2. MESURES DE L'ERREUR

élevées sont une nouvelle fois obtenues avec la plaque trouée et les erreurs les plus basses avec la plaque saine.

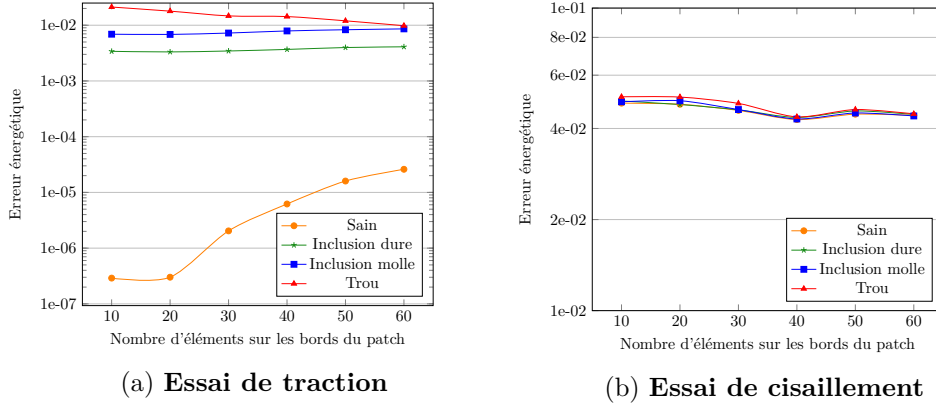


FIGURE 3.18 – Erreur énergétique globale normalisée ER_{Σ}^r en fonction de la finesse du maillage fin.

On s'intéresse aussi à la contribution de chaque élément sur l'erreur relative globale ER_{Σ}^r définie à l'équation (3.14). L'erreur globale ER_{Σ}^r peut s'écrire avec la somme sur chaque élément e_{el} du maillage par,

$$ER_{\Sigma}^r = \frac{\sqrt{\sum_{e_{el}}^{n_{el}} \left(\Sigma_{e_{el}}^{ref} - \Sigma_{e_{el}}^{(f)} \right)^T W_f^{e_{el}} S_{e_{el}}^{(f)} \left(\Sigma_{e_{el}}^{ref} - \Sigma_{e_{el}}^{(f)} \right)}}{\sqrt{\sum_{e_{el}}^{n_{el}} \left(\Sigma_{e_{el}}^{ref} \right)^T W_f^{e_{el}} S_{e_{el}}^{(f)} \left(\Sigma_{e_{el}}^{ref} \right)}} \quad (3.15)$$

avec $\Sigma_{e_{el}}^{ref}$ (respectivement $\Sigma_{e_{el}}^{(f)}$) un vecteur qui concatène les composantes des contraintes de la solution de référence (respectivement de la solution obtenue avec la méthode de zoom structural) sur les points de Gauss. Pour avoir une cartographie d'erreur locale sur Ω_f , on définit l'erreur relative locale au carré ER_{Σ}^{el} pour chaque élément e_{el} par,

$$ER_{\Sigma}^{el}(e_{el}) = \frac{\left(\Sigma_{e_{el}}^{ref} - \Sigma_{e_{el}}^{(f)} \right)^T W_f^{e_{el}} S_{e_{el}}^{(f)} \left(\Sigma_{e_{el}}^{ref} - \Sigma_{e_{el}}^{(f)} \right)}{\Sigma^{refT} W_f S^{(f)} \Sigma^{ref}} \quad (3.16)$$

On reprend les deux essais présentés auparavant pour chaque type de défaut et on visualise l'erreur locale ER_{Σ}^{el} sur Ω_f .

Les Figures 3.19 à 3.22 mettent bien en évidence que les erreurs se concentrent sur la zone de raccord, que ce soit pour l'essai de traction ou de cisaillement et quel que soit le type de défaut. Pour l'essai de cisaillement, on retrouve que les erreurs se concentrent sur les zones de raccords verticales. Pour l'essai de traction, l'erreur se focalise soit sur les bords horizontaux (Figures 3.20a et 3.21a), soit verticaux (Figure 3.22a), soit sur les quatre bords (Figure 3.19a).

Mais pour la plaque saine, l'erreur y est très faible car les champs de contrainte et de déformation sont homogènes. On peut dire que l'erreur commise est l'erreur due à la méthode de zoom structural. Par contre pour la plaque trouée, la localisation de l'erreur dépend un peu de l'hétérogénéité induite par le défaut de type trou.

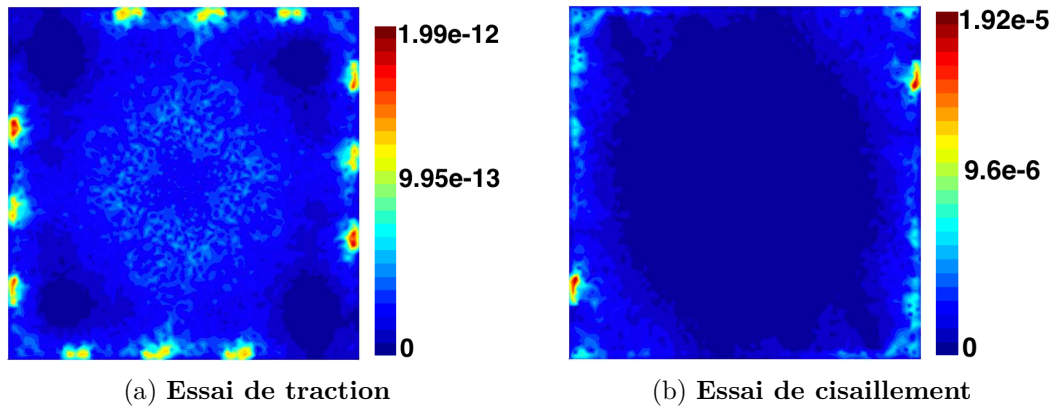


FIGURE 3.19 – *Plaque saine* - Cartographie de l'erreur locale énergétique ER_{Σ}^{el} .

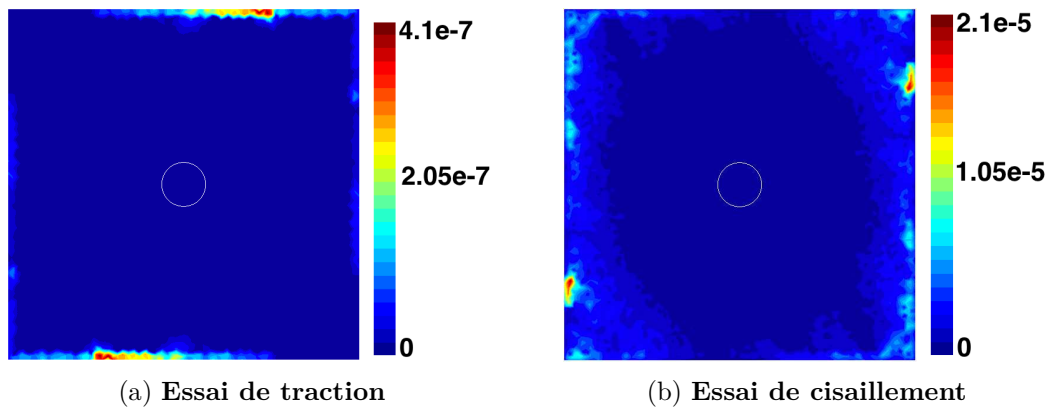


FIGURE 3.20 – *Plaque avec inclusion dure* - Cartographie de l'erreur locale énergétique ER_{Σ}^{el} .

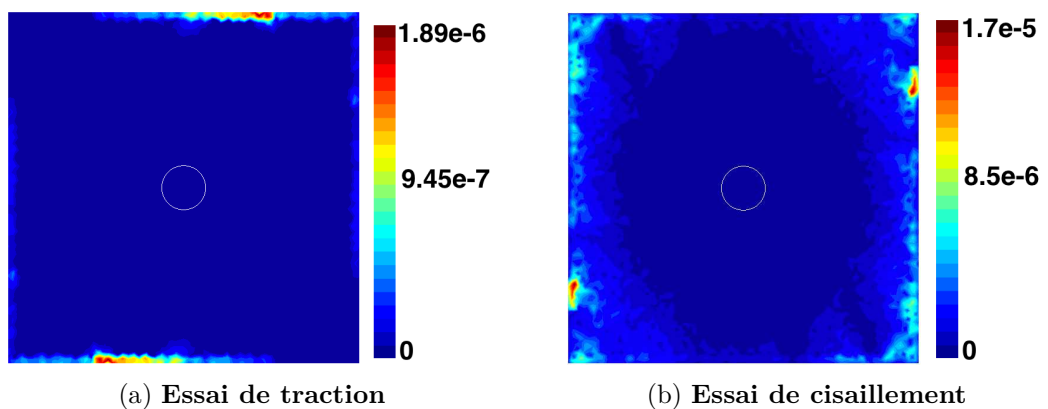


FIGURE 3.21 – *Plaque avec inclusion molle* - Cartographie de l'erreur locale énergétique ER_{Σ}^{el} .

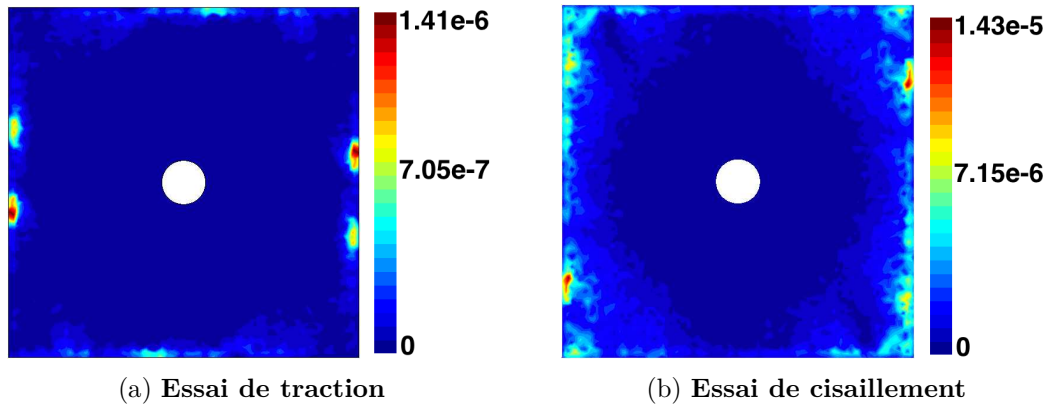


FIGURE 3.22 – *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur locale énergétique ER_{Σ}^{el} .

3.3 Étude paramétrique

Plusieurs paramètres sont considérés dans une stratégie de zoom structural pour analyser les erreurs de méthodes. Certains paramètres concernent le modèle de zoom lui-même : modèle de zoom ou modèle de substitution. Au sein du modèle de substitution, d'autres paramètres interviennent : taille de la zone où s'effectue le raccord, taille du patch par rapport au défaut, patch interne ou patch débordant. D'autres paramètres sont directement liés aux maillages : symétrie du maillage par rapport à la symétrie géométrique du problème, degré d'incompatibilité des maillages. Enfin, on regarde l'influence de la procédure de recalage choisie pour le déplacement sur Ω_f . Les conclusions étant les mêmes pour les essais de traction et de cisaillement, on ne présente les résultats que sur l'essai de traction. Comme l'erreur est la plus élevée avec une plaque trouée (cf Figure 3.13 ou Figure 3.18), on s'intéresse seulement à ce type de défaut pour l'étude paramétrique.

3.3.1 Taille du raccord

On a introduit dans les chapitres précédents la méthode de zoom structural avec ou sans substitution (on appelle le modèle sans substitution, le modèle de zoom). Sans substitution, le raccord s'effectue alors sur l'ensemble du patch. Dans le cas de la substitution, on étudie ici la taille de la zone de raccord. Pour les affichages de la subdivision de Ω_f , on a $\Omega_f^{(b)}$ en rouge, zone où le raccord est appliqué et son complémentaire $\Omega_f^{(i)}$ en bleu, illustré sur les Figures 3.23 et 3.24.

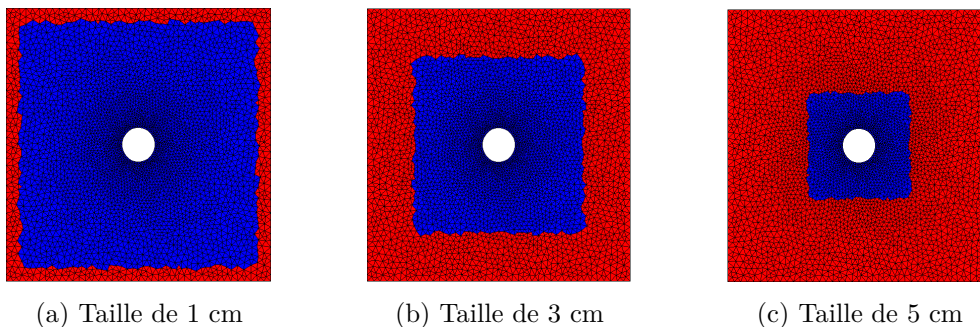
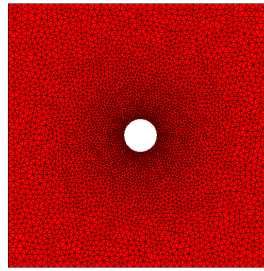


FIGURE 3.23 – Subdivision pour diverses tailles de raccord.



(a) Modèle de Zoom

FIGURE 3.24 – Modèle de zoom.

On observe le réel apport du raccord. On s'intéresse d'abord au champ de déplacement (cf Figure 3.25). Le modèle de zoom ne permet pas de capturer la perturbation liée au défaut. Plus on diminue la taille du raccord mieux la perturbation sur le champ de déplacement est captée. La solution est proche de celle de référence lorsque la taille du raccord n'est que de quelques éléments.

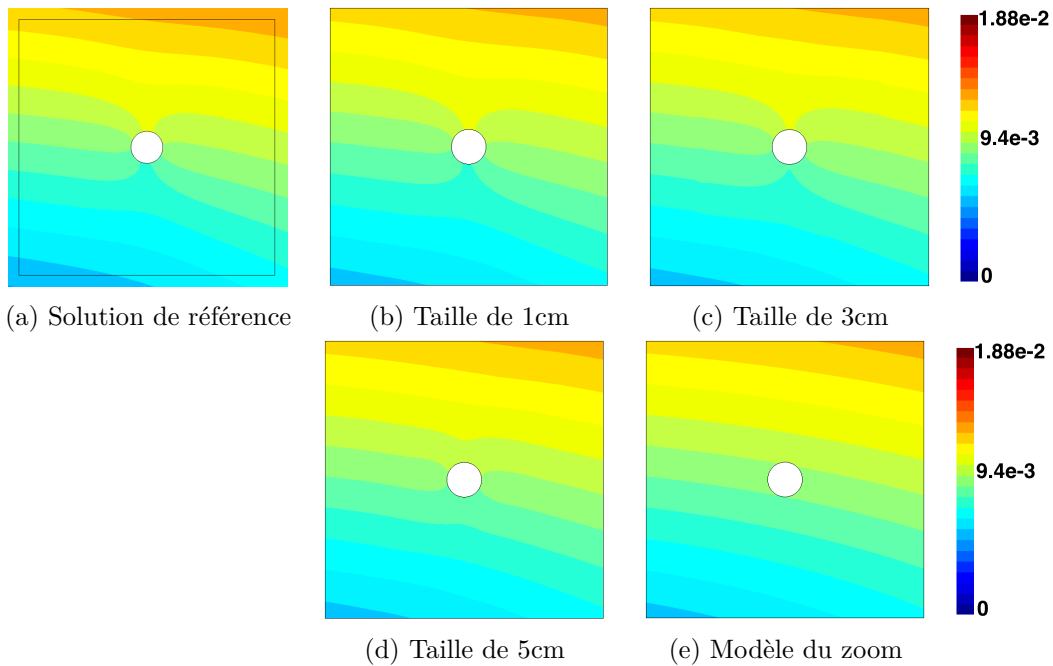


FIGURE 3.25 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Norme du déplacement sur Ω_f avec/sans substitution pour diverses tailles de raccord (en cm).

Pour les contraintes, on remarque une concentration de contrainte à gauche et à droite du trou, dans les directions perpendiculaires aux sollicitations, ainsi qu'une chute de la concentration des contraintes en haut et en bas du trou pour les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} , visible sur les Figures 3.26 et 3.27. Loin du défaut on retrouve un état de contrainte constant, de 0 *GPa* pour la contrainte σ_{xx} et de 0.1 *GPa* pour la contrainte σ_{yy} . On retrouve globalement le même profil sur les contraintes pour les modèles de substitution, mais on observe la présence de quelques artefacts dans $\Omega_f^{(b)}$ proche de $\Omega_f^{(i)}$, ceux-ci sont dus au fait que les perturbations ne sont pas entièrement contenues dans Ω_f . Plus la taille de la zone où s'applique le raccord est élevée plus les contraintes sont perturbées. Comme pour les déplacements, le raccord ne prend pas en compte le défaut pour le modèle du

3.3. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

zoom, et on obtient le champ de contrainte uniforme sur Ω_f , de valeur 0 GPa pour la contrainte σ_{xx} et de valeur 0.1 GPa pour la contrainte σ_{yy} . Les perturbations sur les solutions sont beaucoup plus significatives sur les contraintes que sur les déplacements.

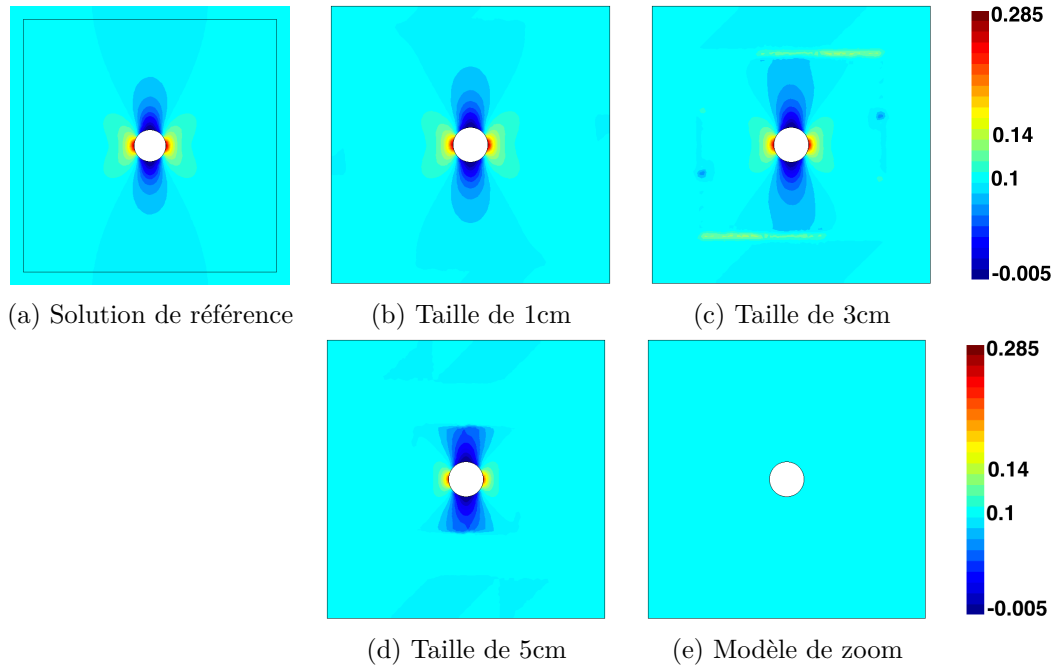


FIGURE 3.26 – **Essai de traction - Plaque trouée -** Contrainte σ_{yy} sur Ω_f avec/sans substitution pour diverses tailles de raccord (en GPa).

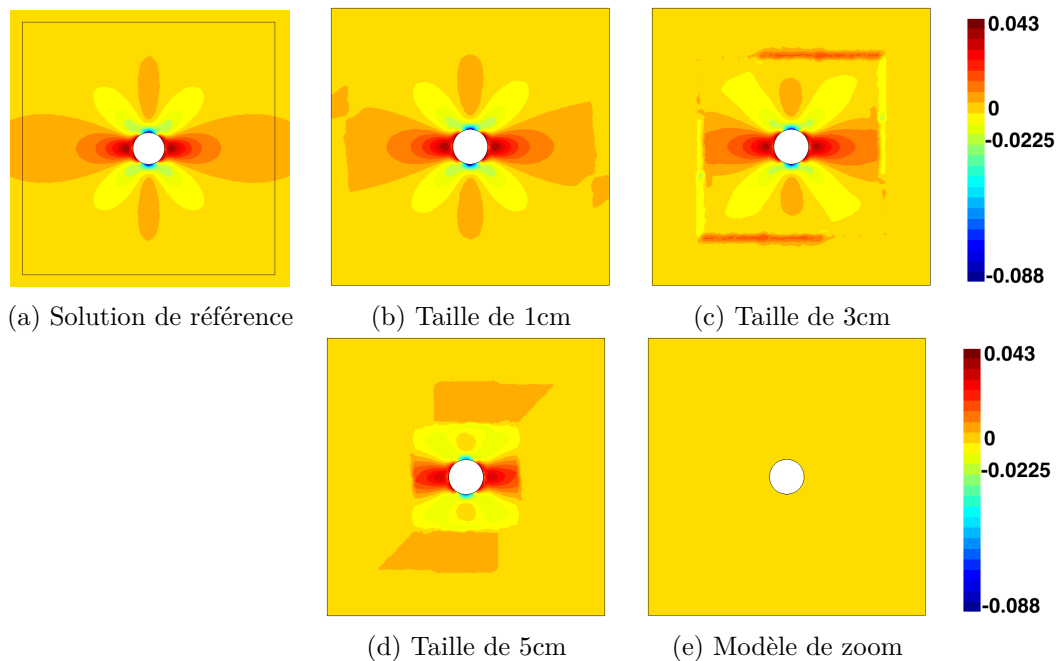


FIGURE 3.27 – **Essai de traction - Plaque trouée -** Contrainte σ_{xx} sur Ω_f avec/sans substitution pour diverses tailles de raccord (en GPa).

On s'intéresse à l'erreur énergétique globale sur le domaine Ω_f . L'erreur énergétique globale est inférieure à $2e - 2$ pour une zone de taille inférieure ou égal à 2.5 cm . Pour une zone de taille supérieure à 4 cm , l'erreur globale a un fort accroissement, visible

sur la Figure 3.28. Ce profil reste le même lorsqu'on raffine le maillage fin Ω_f . Pour le modèle de zoom l'erreur énergétique est d'environ $1.5e - 1$.

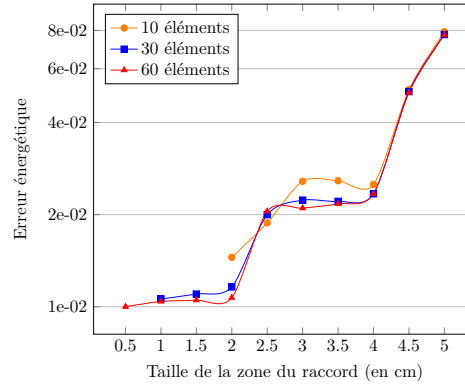


FIGURE 3.28 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Erreur énergétique globale avec/sans substitution en fonction de la taille de raccord.

On observe que les courbes sur la Figure 3.28 comportent trois paliers. Le premier pour un raccord de moins de 2.5 cm où seulement une perturbation déborde dans la zone de raccord $\Omega_f^{(b)}$. Le second palier, entre 2.5 et 4 cm, où quelques perturbations ne sont plus contenues dans la zone de raccord. Enfin, le dernier palier, pour une taille supérieure à 4 cm, où beaucoup trop de perturbations débordent du patch. On remarque sur la Figure 3.29 que plus la zone où s'effectue le raccord est grande, plus l'erreur locale est élevée. On observe qu'au départ l'erreur maximale est localisée sur $\Omega_f^{(b)}$ mais lorsque la zone de raccord est agrandie, l'erreur se diffuse dans tout $\Omega_f^{(b)}$. L'erreur locale maximale pour une zone de 1 cm est de $1.34e - 6$ alors que pour le modèle du zoom, cette erreur est de $3.02e - 4$, soit une erreur 225 fois plus grande.

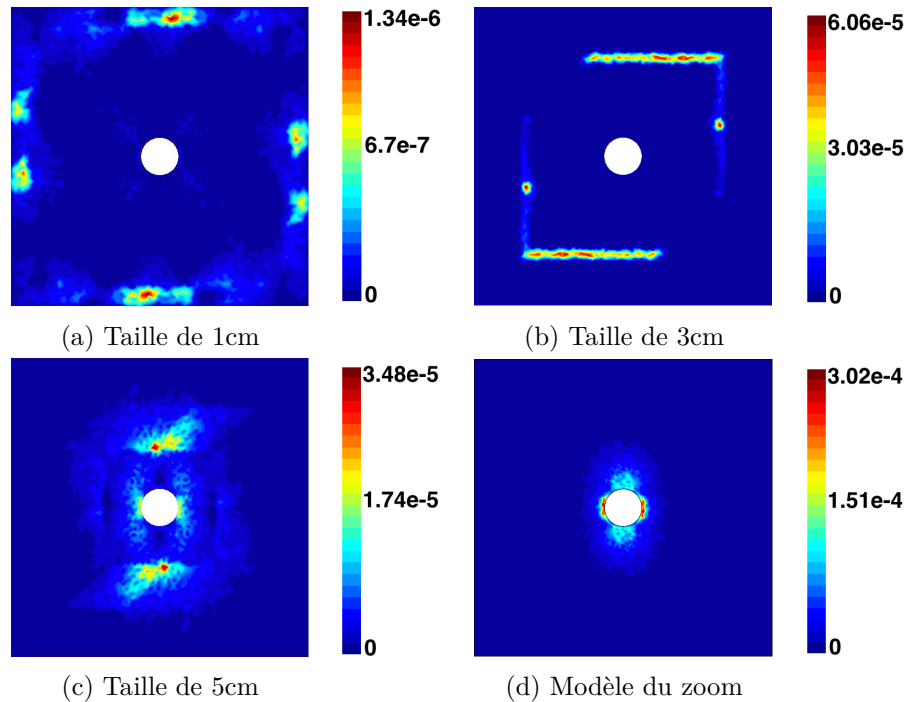


FIGURE 3.29 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Cartographie de l'erreur locale ER_{Σ}^{el} avec/sans substitution pour diverses tailles de raccord.

3.3. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

Au niveau des solutions et de l'erreur obtenues, le modèle du zoom n'est pas adapté à la présence d'hétérogénéité sur Ω_f . C'est pour cette raison que le modèle de substitution a été intégré dans la méthode de zoom structural au chapitre 2. Pour avoir une solution adéquate sur Ω_f , le choix de la taille de la zone où s'applique le raccord est un élément essentiel. Le choix logique pour la taille du maillage est d'avoir une taille minimale, c'est-à-dire de tendre vers une seule couche d'éléments pour la zone de raccord $\Omega_f^{(b)}$.

3.3.2 Taille du patch par rapport au défaut

Dans la partie précédente, on a vu que la taille de la zone de raccord influence la qualité de la solution. Maintenant, on étudie ici l'influence de la taille relative du patch par rapport à celle du défaut. Pour cela, on fait varier la taille du défaut. La taille du patch est fixée à une largeur de 18 cm et la taille de la zone de raccord, $\Omega_f^{(b)}$, est fixée à une couche d'éléments. Pour les affichages de la subdivision du domaine fin Ω_f , on garde toujours la zone de raccord $\Omega_f^{(b)}$ en rouge, et son complémentaire $\Omega_f^{(i)}$ en bleu, illustrées sur la Figure 3.30. Comme dans la partie précédente, on visualise les résultats seulement pour une plaque trouée qui représente le plus haut niveau de contraste.

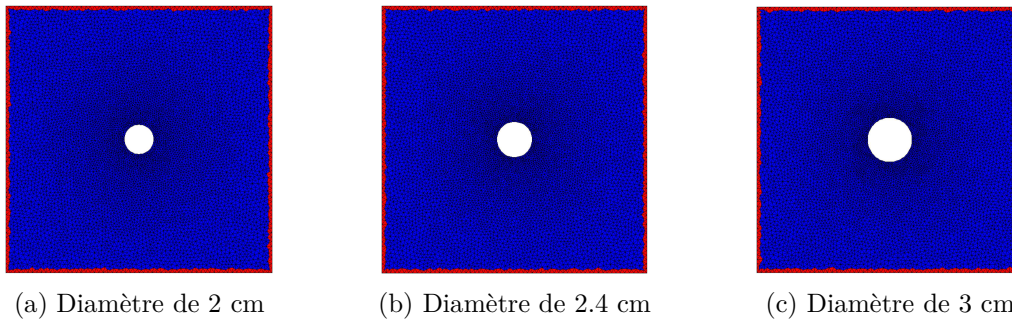


FIGURE 3.30 – Modèle de subdivision pour des tailles de défauts différentes.

Le but est de visualiser la répartition des artefacts dans la zone de raccord $\Omega_f^{(b)}$. Comme ces artefacts sont plus visibles sur les champs de contrainte, on n'étudie pas les champs de déplacement. On observe sur les Figures 3.31 et 3.32, un profil similaire sur les champs de contrainte, mais on observe plus d'artefacts dans la zone de raccord quand on augmente la taille du défaut, notamment visible sur la contrainte σ_{xx} . Il existe donc une taille du patch Ω_f optimale par rapport à celle du défaut pour que la présence des artefacts soit minimale.

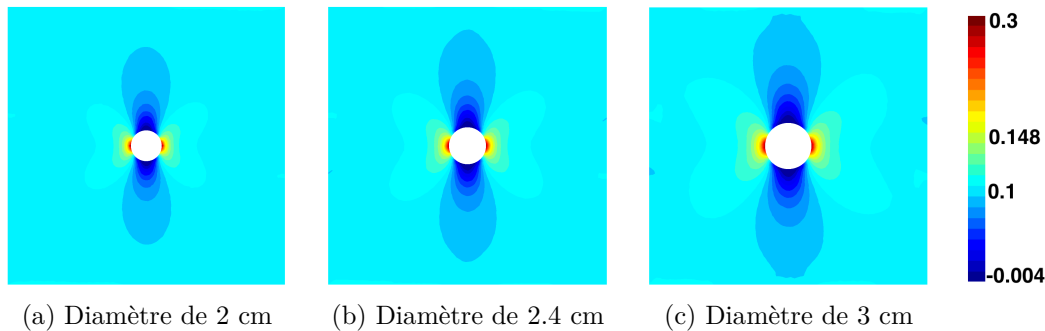


FIGURE 3.31 – Essai de traction - Plaque trouée - Contrainte σ_{yy} pour diverses tailles de défauts (en GPa).

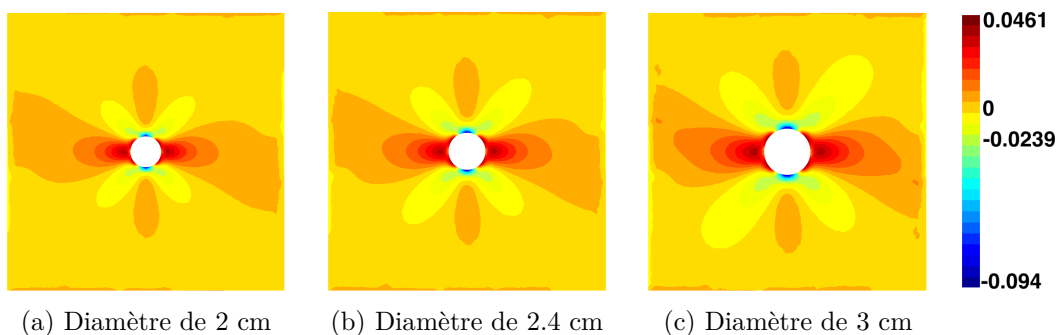


FIGURE 3.32 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{xx} pour diverses tailles de défauts (en GPa).

On remarque sur la Figure 3.33 que plus le défaut est petit, plus l'erreur locale est petite. En effet on a une erreur locale de $4.56e - 6$ pour un défaut de 2 cm de diamètre et de $1.18e - 5$ pour un défaut de 3 cm de diamètre, environ 2.57 fois plus grande. On observe aussi que les répartitions des erreurs locales sont assez proches, pour les différentes tailles du défaut. Seulement les amplitudes de ces erreurs locales augmentent. Les erreurs locales se concentrent en grande partie sur la zone de raccord (encore plus visible sur cette étude que celle sur la taille de la zone de raccord).

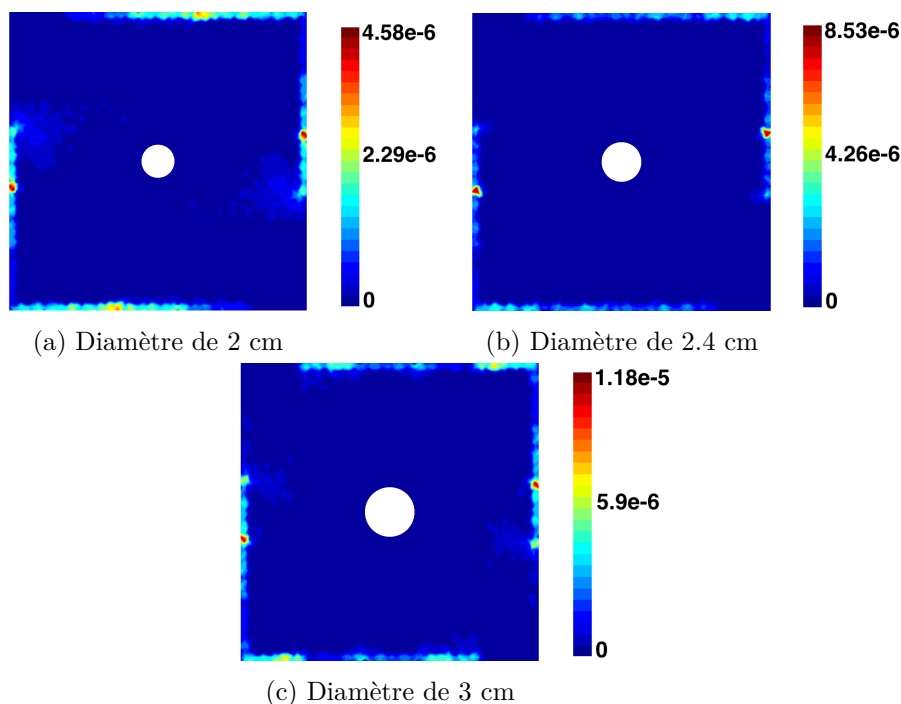


FIGURE 3.33 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur locale ER_{Σ}^{el} pour différentes tailles de défauts.

L'erreur énergétique normalisée diminue lorsque l'on augmente la taille du défaut jusqu'à un rapport optimal entre la taille du défaut et celle du patch, visible sur la Figure 3.34. Ici le rapport optimal est de 11/90, soit environ 1/8. Après ce rapport optimal, on a un accroissement de l'erreur énergétique. Cette évolution n'est visible que seulement pour un raffinement de 60 éléments sur les bords du patch, c'est-à-dire quand le maillage fin est "très fin". Pour les autres raffinements, l'erreur croit lorsqu'on augmente la taille

3.3. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

du défaut. Plus on raffine le maillage fin Ω_f , plus la valeur de l'erreur est faible.

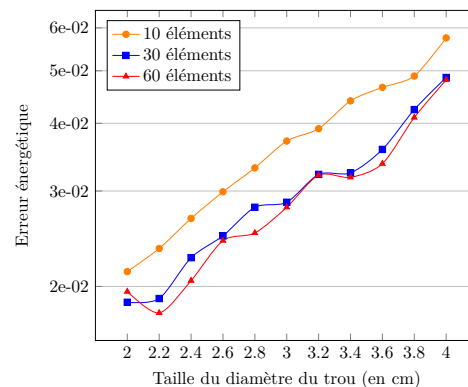


FIGURE 3.34 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Erreur énergétique globale en fonction de la taille du défaut pour divers raffinements du maillage fin.

Le choix probant pour la taille relative du défaut sur Ω_f est d'un rapport de 1/8 par rapport à la taille du patch. Ce rapport dépend de la nature du défaut (trou, inclusion, ...) et non du chargement appliqué sur la structure. On remarque sur les deux premières études que la qualité de la solution dépend plus de la taille de la zone de raccord que du rapport entre la taille du patch et celle du défaut.

3.3.3 Effets de la symétrie

Une fois les paramètres du modèle de substitution étudiés, on passe aux paramètres liés aux maillages. Tout d'abord, on s'intéresse à la symétrie du maillage fin Ω_f par rapport à un ou plusieurs axes. Pour cela, on met en place divers cas tests illustrés sur la Figure 3.35.

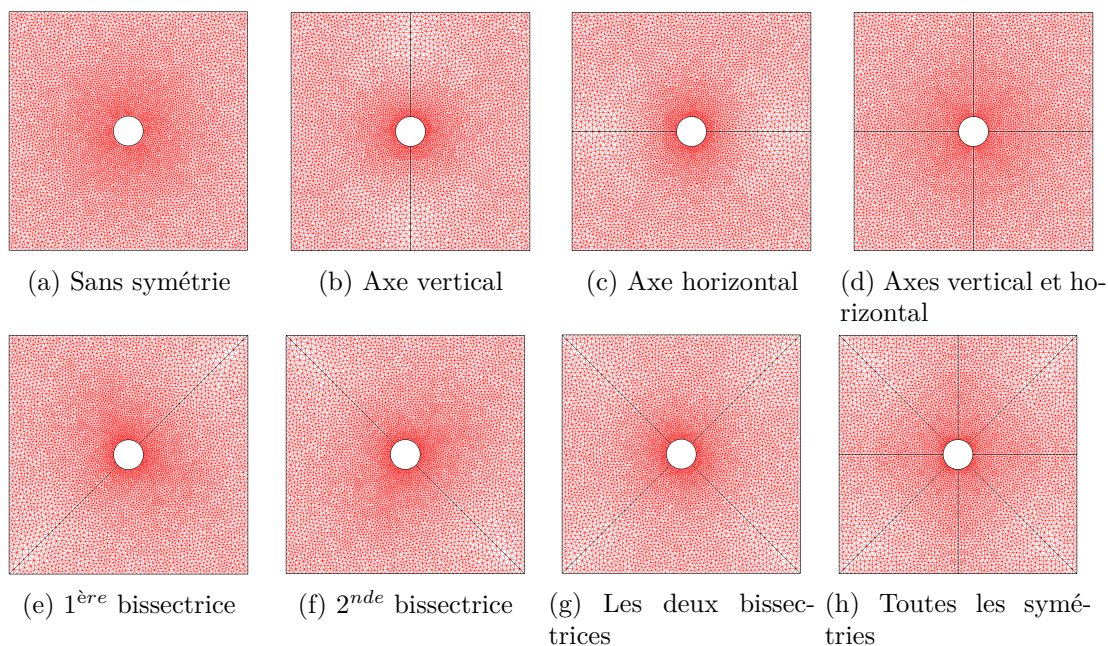


FIGURE 3.35 – Modèle du maillage Ω_f pour les différentes symétries.

La taille du patch est fixée à une largeur de 18 cm et la taille de la zone de raccord,

$\Omega_f^{(b)}$, est fixée à une couche d'éléments. Le défaut, quant à lui, est un trou de diamètre 2 cm . Les maillages sont construits de manière à avoir le même raffinement proche du défaut. La finesse des maillages est de 13 276 ($\pm 11\%$) éléments sur le domaine fin Ω_f pour les cas tests. Les résultats sont une nouvelle fois présentés pour une plaque trouée soumise à un essai de traction.

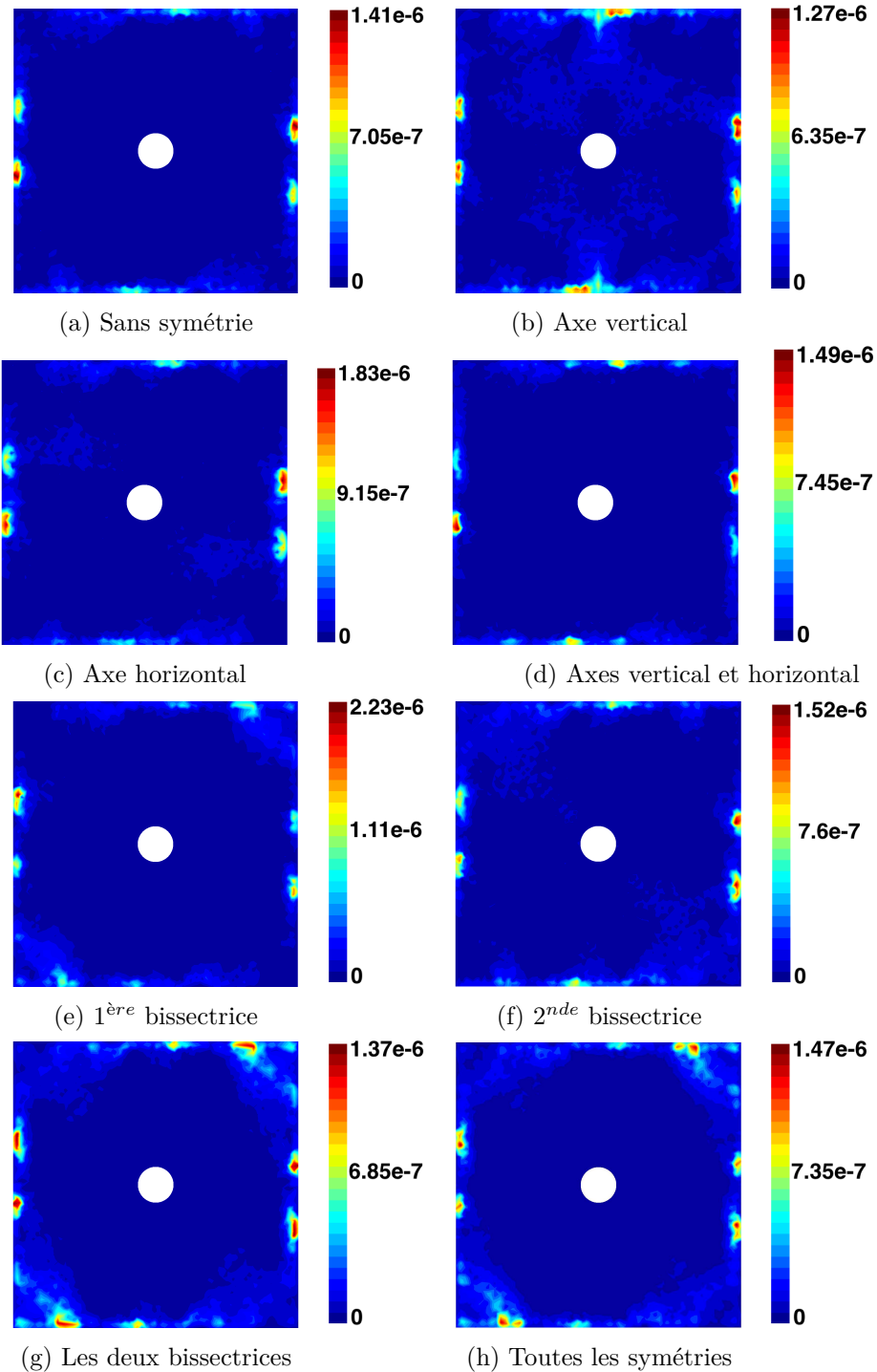


FIGURE 3.36 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur locale ER_{Σ}^{el} pour les différentes symétries du maillage fin.

On observe sur la Figure 3.36 que le fait de structurer le maillage Ω_f influe légèrement sur l'amplitude de l'erreur énergétique locale. En effet, on a une erreur minimale pour

3.3. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

la symétrie verticale ($1.27e - 6$) et une erreur maximale pour la symétrie par rapport à la première bissectrice ($2.23e - 6$). Mais les amplitudes des erreurs, pour les diverses symétries du maillage, restent très faibles (avec un ordre de grandeur de $1e - 6$) par rapport aux études précédentes (ordre de grandeur de $1e - 4$ pour la taille de la zone de raccord par exemple). La symétrie du maillage fin n'influe que très peu sur l'amplitude des erreurs locales. Pour tous les cas tests, les répartitions des erreurs locales sont très proches. Comme pour les précédentes études, les erreurs locales maximales sont localisées dans la zone de raccord $\Omega_f^{(b)}$.

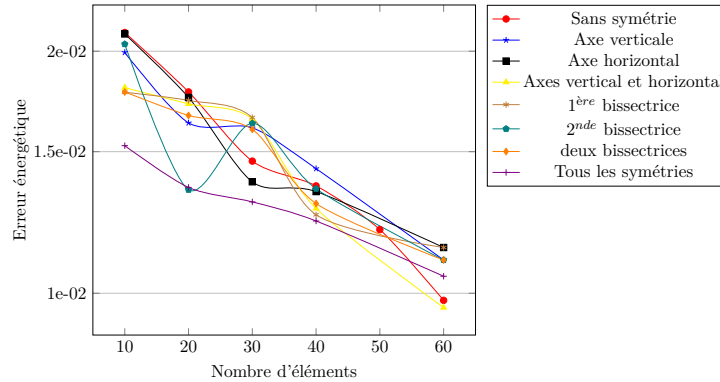


FIGURE 3.37 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Erreur énergétique globale en fonction du raffinement du maillage fin pour diverses symétries du maillage Ω_f .

On s'intéresse maintenant à l'erreur énergétique globale sur le domaine Ω_f . La solution est de meilleure qualité lorsqu'on raffine le maillage fin, illustrée sur la Figure 3.37. En effet, pour 60 éléments sur les bords du patch, tous les cas tests donnent une erreur globale énergétique inférieure à $1.2e - 2$. Pour 60 éléments, on observe aussi que l'erreur la plus basse ($9.6e - 3$) est obtenue pour un maillage avec les axes vertical et horizontal comme symétries. Mais les erreurs énergétiques globales sont faibles. La symétrie du maillage fin n'influe que très peu sur les erreurs globales, remarque déjà observé sur les erreurs locales. Comme les gains sur les erreurs (locales et globales) sont faibles, il n'est pas nécessaire de faire un effort supplémentaire sur la symétrie du maillage fin Ω_f .

3.3.4 Degré d'incompatibilité des maillages

On s'intéresse au degré d'incompatibilité entre le maillage fin Ω_f et le maillage grossier Ω_c . Les trois cas d'étude sont illustrés sur la Figure 3.38.

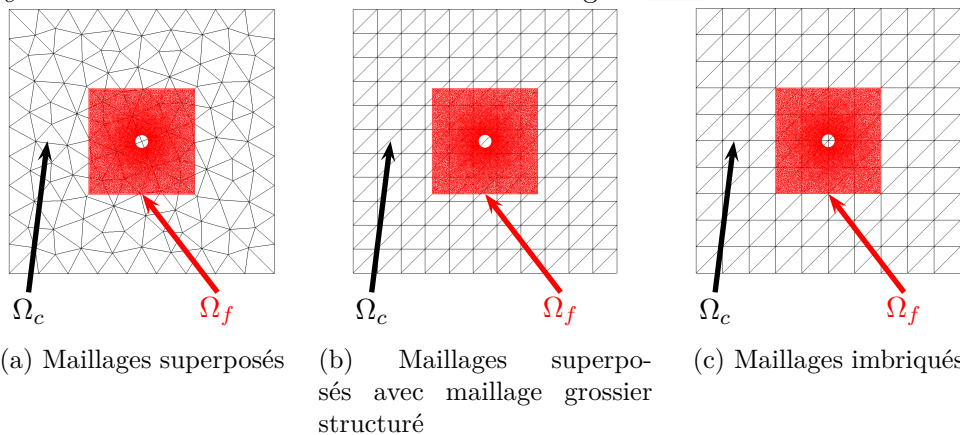


FIGURE 3.38 – Différents types de maillages des cas tests.

Pour toutes les simulations le maillage fin Ω_f ne change pas, seul le maillage grossier Ω_c est modifié pour observer seulement la contribution de celui-ci. La taille du patch est de 16 cm avec un défaut de 2 cm de diamètre, afin d'avoir le rapport optimal de 1/8. Le patch est discrétisé en 60 éléments sur ses bords et la taille de la zone de raccord est fixée à une couche d'éléments. On observe, sur la Figure 3.39, que les erreurs élémentaires en énergie sont localisées sur la zone de raccord $\Omega_f^{(b)}$. Lorsque les maillages sont imbriqués l'erreur locale énergétique est plus élevée par rapport à celle des autres cas. En effet, l'erreur locale est entre 12 et 43 fois plus grande, il est donc préférable d'opter pour des maillages superposés. Pour les maillages superposés, les erreurs locales sont très faibles mais il y a un gain d'environ 70 %, lorsqu'on structure le maillage grossier. La qualité de la solution est plus sensible à la structure du maillage grossier qu'à celle du maillage fin (étude sur la symétrie du maillage fin). Comme on l'a vu précédemment. Plus les maillages ont un degré d'incompatibilité élevé, plus l'erreur locale est faible.

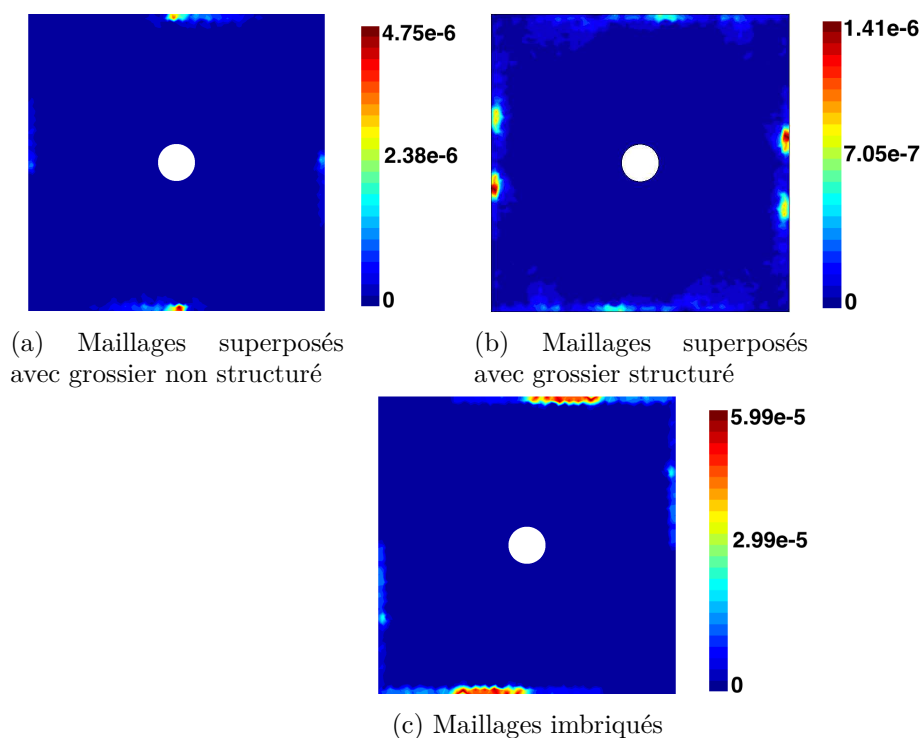


FIGURE 3.39 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Cartographie de l'erreur locale ER_{Σ}^{el} pour divers degrés d'incompatibilité entre les maillages.

On remarque sur la Figure 3.40 que l'erreur énergétique globale pour des maillages imbriqués est élevée (au-dessus de $3.5e - 2$) par rapport aux autres cas (inférieure à $2.5e - 2$). De plus l'erreur globale croît lorsqu'on raffine le maillage grossier pour le cas des maillages imbriqués. Alors que l'erreur globale diminue lorsqu'on raffine le maillage grossier pour le cas des maillages superposés.

On a vu dans les différentes études que les erreurs locales sont concentrées sur le bord du patch. Ceci est peut-être dû au processus de transfert d'information entre les maillages. En effet le processus de transfert, pour les champs échantillonnés, implique des opérateurs d'interpolation, d'extrapolation et de transfert d'information de champs nodaux. L'imbrication des maillages va maintenir la discontinuité des champs nodaux, résultant de l'extrapolation, alors que la superposition va avoir tendance à moyennner ces champs.

3.3. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

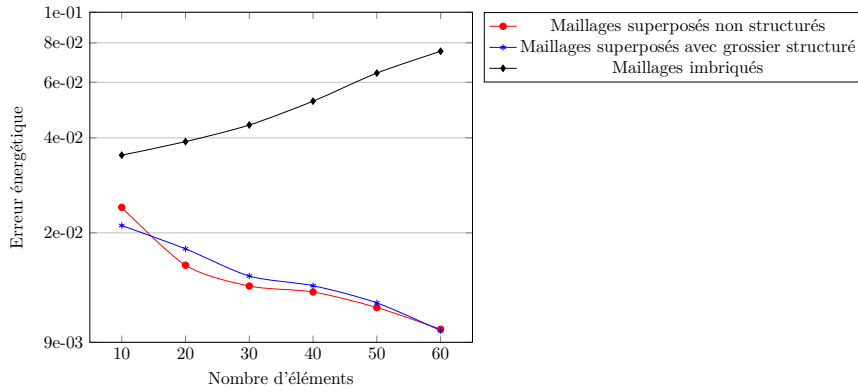


FIGURE 3.40 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Erreur énergétique globale en fonction du raffinement du maillage grossier pour divers degrés d'incompatibilité des maillages.

3.3.5 Patch débordant

On déplace le maillage Ω_f , de sorte qu'il soit débordant. C'est-à-dire que l'intersection entre les deux domaines ne vaut plus Ω_f tout entier, $\Omega_c \cap \Omega_f \neq \Omega_f$. Les paramètres sur le patch sont les mêmes que lors de l'étude précédente (patch de 16 cm, défaut de 2 cm de diamètre, taille de la zone de raccord fixée à une couche d'éléments) avec un raffinement de 60 éléments sur les bords du patch. De plus, le maillage fin possède une symétrie d'axe vertical de sorte que la partie gauche du maillage soit incluse dans le domaine grossier Ω_c et la partie droite soit débordante. Pour prendre en compte le fait que le patch soit débordant, et ainsi enlever la contribution des éléments de Ω_f qui sont débordants, on fait tendre leur module de Young vers zéro. Ce qui définit le champ de module d'élasticité sur Ω_f , de façon similaire à l'approche adoptée pour intégrer les forts contrastes (cf (2.2)), par,

$$\tilde{A}^{(f)} = \begin{cases} A^{(f)} & \text{sur } \Omega_f^{(inc)} = \Omega_f \cap \Omega_c \\ \ll 1 & \text{sur } \Omega_f^{(deb)} = \Omega_f \setminus \Omega_c \end{cases} . \quad (3.17)$$

On observe sur la Figure 3.41 que le profil du champ de déplacement trouvé est similaire à celui de la solution de référence sur la zone du patch qui se trouve dans le domaine Ω_c .

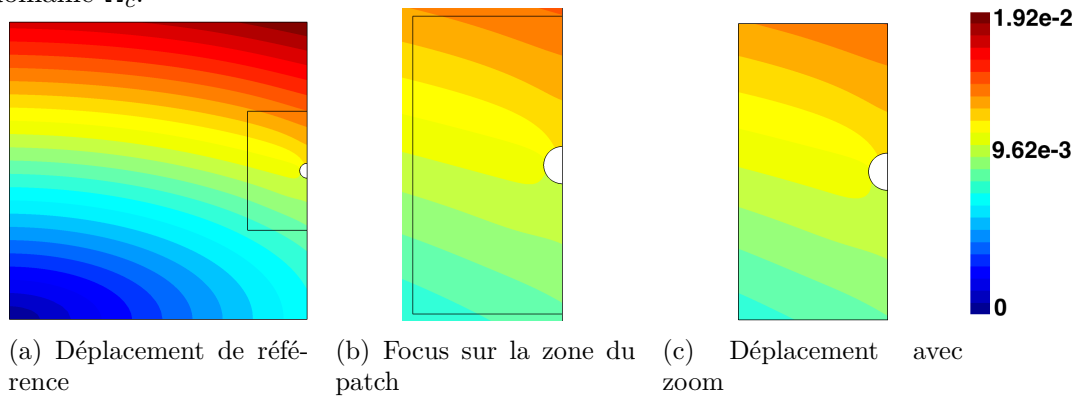


FIGURE 3.41 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Déplacements sans/avec zoom pour un modèle de patch débordant (en cm).

Sur les Figures 3.42 et 3.43, on retrouve le même profil pour les champs de contrainte sur la zone du patch incluse dans le domaine Ω_c . On remarque que les contraintes sont perturbées au bord de la structure.

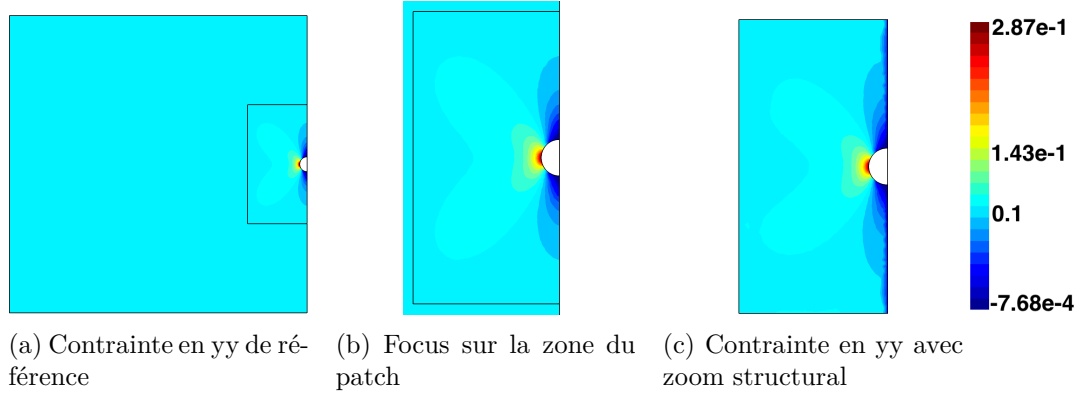


FIGURE 3.42 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Contrainte σ_{yy} sur Ω_f sans/avec zoom pour un modèle de patch débordant (en *GPa*).

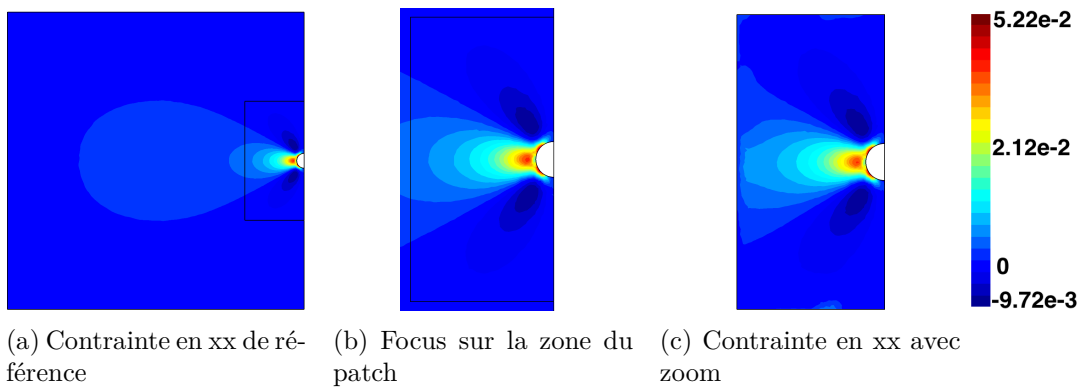


FIGURE 3.43 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Contrainte σ_{xx} sur Ω_f sans/avec zoom pour un modèle de patch débordant (en *GPa*).

On observe sur la Figure 3.44 que l'erreur locale maximale est localisée sur la zone de raccord $\Omega_f^{(b)}$. On reste avec des erreurs locales (ordre d'erreur de $1e - 6$) ainsi qu'une erreur globale ($2.55e - 2$) acceptables. La méthode de zoom structural avec substitution intègre bien le modèle de patch débordant.

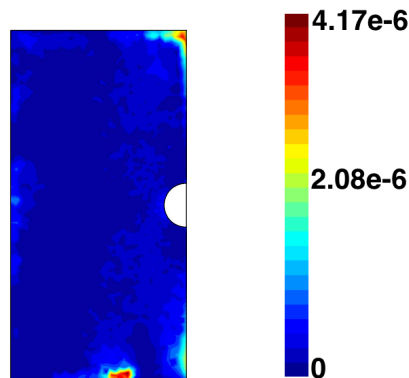


FIGURE 3.44 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Cartographie de l'erreur locale ER_{Σ}^{el} pour un modèle de patch débordant.

3.3.6 Recalage du champ de déplacement sur Ω_f

Il reste à étudier l'influence du choix de la procédure de recalage du déplacement sur Ω_f . On rappelle brièvement les deux approches présentées au chapitre 2. La première a été de retirer, au champ de déplacement obtenue à l'aide du système linéaire [2.10](#), les mouvements de solide rigide, notée U^{cr} , grâce aux valeurs du champ de déplacement au coin du patch. Pour cela, on a mis en place plusieurs configurations à fin d'obtenir les équations en lien entre le déplacement grossier, noté $U^{(c)}$ et le déplacement fin, noté $U^{(f)}$, aux coins du patch. La correction du champ de déplacement par cette procédure est illustrée sur la Figure [3.45](#). Le champ de déplacement corrigé est le même quelle que soit la configuration choisie.

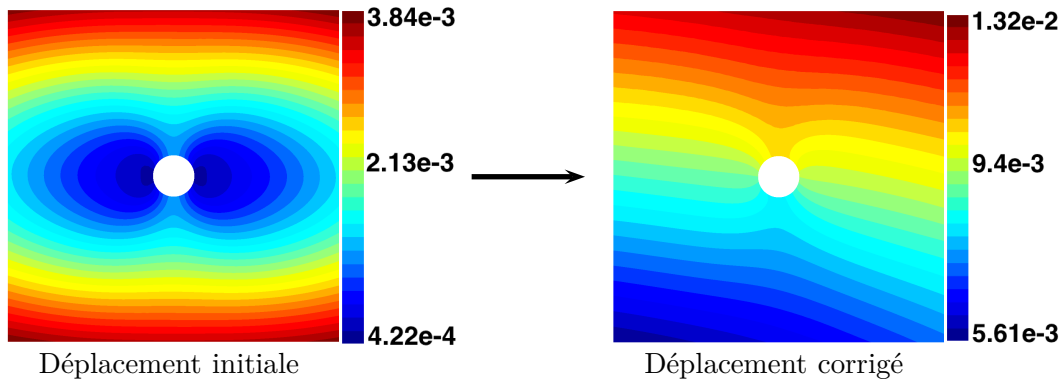


FIGURE 3.45 – Recalage du champ de déplacement pour la procédure avec les moindres carrés.

La seconde approche a été de bloquer certains degrés de liberté des coins du patch Ω_f pour éviter les mouvements de solide rigide et de translater le champ de déplacement solution par les valeurs du champs de déplacement grossier $U^{(c)}$. Les cas tests, pour cette procédure, sont illustrés sur la Figure [3.46](#).

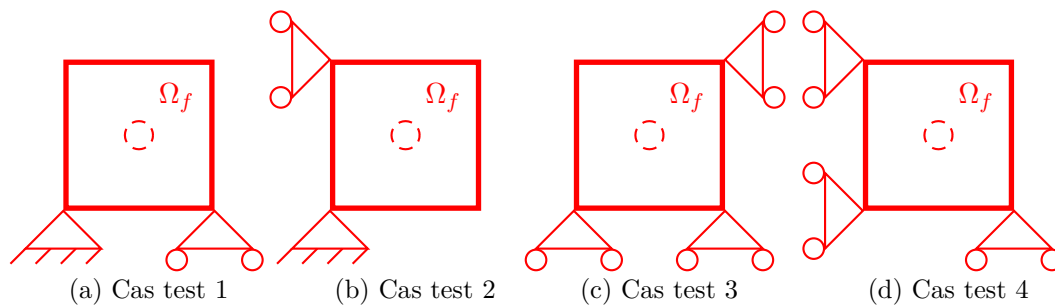


FIGURE 3.46 – Configurations des différents cas tests pour le recalage du champ de déplacement.

La correction du champ de déplacement par cette procédure est illustrée sur la Figure [3.47](#). Le champ de déplacement corrigé est le même quel que soit le cas test choisi. On peut même étendre cette observation sur le champ de déplacement corrigé. Il est le même quel que soit le blocage de trois degrés de liberté parmi les huit degrés de liberté des coins du patch Ω_f . Il ne reste plus qu'à comparer les deux procédures entre elles.

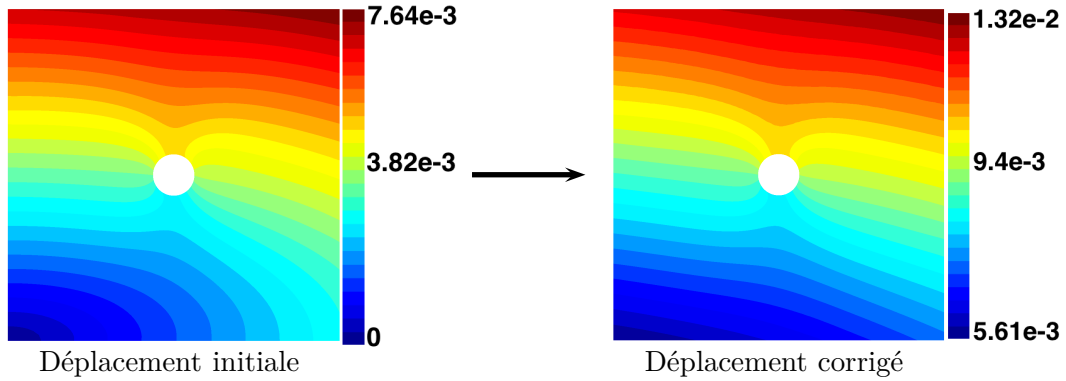
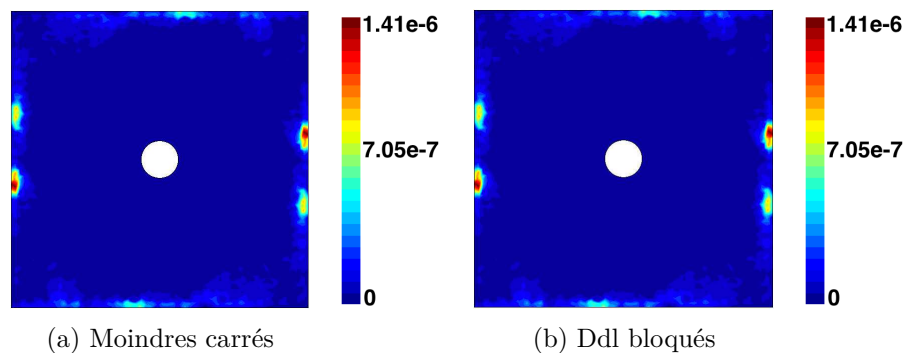


FIGURE 3.47 – Recalage du champ de déplacement pour le cas test 1.

On observe sur la Figure 3.48 que les erreurs énergétiques sont les mêmes pour les différentes procédures. Ce résultat est cohérent puisque les deux procédures de recalage témoignent des transformations mais pas de la même façon. En effet, les mouvements de solide rigide, obtenus avec l’approche des moindres carrés, sont la combinaison d’une rotation infinitésimale et d’une translation. On soustrait donc cette rotation infinitésimale et cette translation au champ de déplacement obtenu par le système (2.10). Dans l’autre approche le fait de bloquer des degrés de liberté enlève déjà la rotation infinitésimale et il ne reste qu’à appliquer une translation.

Les deux translations obtenues par les deux procédures ne sont pas les mêmes. Chacune des deux approches a son inconvénient. La première approche consomme plus de temps CPU par l’utilisation de la méthode des moindres carrés pour trouver l’angle de rotation et les composantes de la translation. L’inconvénient de la seconde approche est de modifier la matrice du système en fonction des degrés de liberté bloqués, ce qui suppose un pré-traitement.

On choisit de garder la première approche pour que la procédure de recalage du champ de déplacement fin reste uniquement du post-traitement même si c’est plus coûteux en temps de calcul (0.0142 secondes).


 FIGURE 3.48 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l’erreur locale ER_{Σ}^{el} pour les deux procédures de recalage du champ de déplacement fin.

Au vu des différentes études menées, notre système linéaire donne des solutions de bonnes qualités d’un point de vue mécanique à la condition de définir correctement certains paramètres. En effet, la façon, dont le maillage Ω_f est structuré, est cruciale pour obtenir une solution proche de la réalité. L’erreur maximale est, la plupart du temps, localisée dans $\Omega_f^{(b)}$, ce qui implique que la taille de cette zone doit être la plus petite possible. Néanmoins, la taille de Ω_f est aussi importante. La zone où s’effectue le rac-

3.3. ÉTUDE PARAMÉTRIQUE

cord doit être assez éloignée du défaut. Ceci afin que le maximum de perturbations soit contenu dans $\Omega_f^{(i)}$ et ainsi avoir une solution la moins perturbée possible.

Une fois le système linéaire validé pour des problèmes élastiques à forts contrastes, le chapitre suivant se focalise sur l'enrichissement de ce système pour des problèmes élastoplastiques à forts contrastes.

Chapitre 4

Extension à un problème non linéaire : Élastoplasticité

Sommaire

4.1 Formulation du zoom structural en élastoplasticité	78
4.1.1 Équilibre global d'une structure élastoplastique avec zoom	78
4.1.2 Équilibre sur l'intérieur du patch	82
4.1.3 Algorithme de résolution globale	83
4.2 Validation sur une structure élastoplastique	87
4.2.1 Application à la plaque trouée	87
4.2.2 Essais avec deux défauts dans la structure	95
4.2.3 Essais avec différentes histoires de chargement	102

Le chapitre précédent a validé la stratégie de zoom structural dans le cas linéaire. On a testé cette solution pour divers défauts (sans défaut, inclusion dure, inclusion molle, trou) sur deux types de chargement, traction et cisaillement. Une étude a été menée sur les paramètres (de modèle, de maillage ou de post-traitement) considérés dans la stratégie de zoom structural afin d'obtenir la meilleure solution possible.

Ce chapitre est dédié à l'extension de la méthode de zoom structural à un premier type de non linéarité engendrant une localisation des déformations, l'élastoplasticité. Il se découpe en deux parties. La première partie présente l'adaptation de la démarche de zoom structural à un comportement non linéaire. La deuxième partie valide de cette démarche et étudie la qualité de la solution obtenue d'un point de vue mécanique.

4.1 Formulation du zoom structural en élastoplasticité

L'idée est d'adapter la méthode de zoom structural pour un modèle élastoplastique. Pour simplifier la démarche, on considère un comportement élastique sur le domaine grossier Ω_c ainsi que sur la zone de raccord $\Omega_f^{(b)}$ et un comportement élastoplastique dans l'intérieur du patch, c'est-à-dire $\Omega_f^{(i)}$. Il convient de vérifier ces hypothèses a posteriori. On présente d'abord le modèle sur la structure. On détaille ensuite les aspects locaux puis globaux du problème élastoplastique avec zoom après discrétisation par éléments finis.

4.1.1 Équilibre global d'une structure élastoplastique avec zoom

On présente l'adaptation de la méthode de zoom structural pour un comportement élastoplastique limité à une partie du patch. Le formalisme s'inspire de l'approche pour une structure élastoplastique étudiée dans [14] et [36], pour plus de détails se référer à celles-ci. En se restreignant au comportement des métaux, la plasticité est décrite suivant le critère de Von Mises, pris en compte sur le seul domaine Ω_f , par

$$f(\underline{\underline{\sigma}}^{(f)}, p^{(f)}) = \sigma^{eq(f)} - R(p^{(f)}) \leq 0 \quad (4.1)$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^{(f)}$ est le champ de contrainte, $p^{(f)}$ la déformation plastique cumulée, $\sigma^{eq(f)}$ la contrainte équivalente et la fonction seuil $R(p^{(f)})$ donnant la limite d'élasticité en fonction de la déformation plastique cumulée sur le domaine fin Ω_f . Ce critère correspond à un écrouissage isotrope. On ne considère que ce type d'écrouissage et la fonction seuil $R(p^{(f)})$ est alors de la forme, pour un modèle linéaire,

$$R(p^{(f)}) = \sigma_0 + hp^{(f)} \quad (4.2)$$

avec σ_0 la limite d'élasticité initiale en traction simple et h le module d'écrouissage. Le champ de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}^{(f)}$ est décomposé en deux parties, une partie élastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{E(f)}$ et une partie plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{P(f)}$, définies par,

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{E(f)} = \mathbf{S}^{(f)} : \underline{\underline{\sigma}}^{(f)}, \underline{\underline{\varepsilon}}^{P(f)} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{(f)} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{E(f)} \quad (4.3)$$

Le champ de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^{(f)}$ s'écrit avec les définitions (4.3),

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(f)} = \mathbf{A}^{(f)} : \underline{\underline{\varepsilon}}^{E(f)} = \mathbf{A}^{(f)} : (\underline{\underline{\varepsilon}}^{(f)} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{P(f)}) \quad (4.4)$$

L'évolution de la déformation plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{P(f)}$ est décrite par la règle de normalité. Cette règle avec le critère de Von Mises donne les équations de comportement,

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{P(f)} = \dot{p}^{(f)} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^{(f)}}(\underline{\underline{\sigma}}^{(f)}, p^{(f)}) = \dot{p}^{(f)} \frac{3}{2\sigma^{eq(f)}} \underline{\underline{s}}^{(f)}, \dot{p}^{(f)} \geq 0, \dot{p}^{(f)}(\sigma^{eq(f)} - R(p^{(f)})) = 0 \quad (4.5)$$

où $\dot{p}^{(f)}$ est la vitesse de déformation plastique cumulée et $\underline{\underline{s}}^{(f)} = \mathbf{D} : \underline{\underline{\sigma}}^{(f)}$ le déviateur des contraintes. Le tenseur associé à la projection sur le sous-espace des tenseurs déviateuriques \mathbf{D} est défini à l'équation (1.53). L'équilibre de la structure dans l'hypothèse des petites perturbations (HPP) est définie par les équations locales,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \text{Équilibre sur } \Omega_c \quad (4.6a) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{(c)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\underline{u}}^{(c)} + (\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\underline{u}}^{(c)})^T) & \text{Compatibilité sur } \Omega_c \quad (4.6b) \\ \underline{\underline{\sigma}}^{(c)} = \kappa \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{(c)}) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{e}}^{(c)}) & \text{Comportement élastique sur } \Omega_c \quad (4.6c) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{(f)} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\underline{u}}^{(f)} + (\underline{\underline{\operatorname{grad}}} \underline{\underline{u}}^{(f)})^T) & \text{Compatibilité sur } \Omega_f \quad (4.6d) \\ \underline{\underline{\sigma}}^{(f)} = \kappa \operatorname{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}^{(f)}) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\underline{\underline{e}}^{(f)} - \underline{\underline{\varepsilon}}_P^{(f)}) & \text{Comportement élastique sur } \Omega_f \quad (4.6e) \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{P(f)} = \dot{p}^{(f)} \frac{3}{2\sigma^{eq(f)}} \underline{\underline{s}}^{(f)}, \dot{p}^{(f)} \geq 0, & \text{Comportement plastique sur } \Omega_f \quad (4.6f) \\ \dot{p}^{(f)}(\sigma^{eq(f)} - R(p^{(f)})) = 0 & \end{array} \right.$$

La contrainte sur la structure $\underline{\underline{\sigma}}$ est liée aux contraintes $\underline{\underline{\sigma}}^{(c)}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{(f)}$ comme décrit dans le chapitre 1 dans l'équation (1.39).

Les coefficients de Lamé (λ, μ) , et par extension le module de compressibilité κ , introduits en (4.6c) et (4.6e) sont bien sûr identiques sur Ω_c et Ω_f ,

$$3\kappa = 3\lambda + 2\mu = 2\mu \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu}$$

Les conditions aux limites du problème élastoplastique sont définies de la même façon que pour le cas élastique (cf 1.7) par,

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{f}} \text{ sur } S_1 \end{array} \right. \quad (4.7a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{u}}^{(c)} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{u}}^{dc} \text{ sur } S_0 \times [0, T] \end{array} \right. \quad (4.7b)$$

et la condition initiale,

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{P(f)}(\underline{\underline{x}}, 0) = \underline{\underline{0}} \quad (4.8)$$

traduit qu'il n'y a pas de déformation plastique initiale. Les frontières S_0 et S_1 sont supposées invariables au cours du temps. Pour prendre en compte l'évolution de la solution, on procède par une approche incrémentale. L'état mécanique de la structure, Φ , est calculé successivement aux incréments de pas de temps, t_0, t_1, \dots, t_M . Cet état mécanique à l'incrément t_{n+1} est déterminé par,

$$\Phi_{n+1} = \{ \underline{\underline{u}}_{n+1}^{(c)}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{(c)}, \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{(c)}, \underline{\underline{u}}_{n+1}^{(f)}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{(f)}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{P(f)}, \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{(f)} \}, \quad (4.9)$$

connaissant l'état mécanique à l'incrément précédent Φ_n . On rappelle que le comportement élastoplastique est supposé restreint à l'intérieur du patch $\Omega_f^{(i)}$ et le reste de la structure a un comportement élastique, il n'est donc pas nécessaire d'introduire la déformation plastique $\underline{\underline{\varepsilon}}^{P(c)}$. La discrétisation temporelle donne les relations suivantes par différences finies,

$$\begin{cases} \underline{u}_{n+1}^{(c)} = \underline{u}_n^{(c)} + \Delta \underline{u}_n^{(c)}, \underline{\varepsilon}_{n+1}^{(c)} = \underline{\varepsilon}_n^{(c)} + \Delta \underline{\varepsilon}_n^{(c)}, \underline{\sigma}_{n+1}^{(c)} = \underline{\sigma}_n^{(c)} + \Delta \underline{\sigma}_n^{(c)} \\ \underline{u}_{n+1}^{(f)} = \underline{u}_n^{(f)} + \Delta \underline{u}_n^{(f)}, \underline{\varepsilon}_{n+1}^{(f)} = \underline{\varepsilon}_n^{(f)} + \Delta \underline{\varepsilon}_n^{(f)}, \underline{\sigma}_{n+1}^{(f)} = \underline{\sigma}_n^{(f)} + \Delta \underline{\sigma}_n^{(f)}, p_{n+1}^{(f)} = p_n^{(f)} + \Delta p_n^{(f)} \end{cases} \quad (4.10)$$

où $\Delta \underline{u}_n^{(c)}$ et $\Delta \underline{u}_n^{(f)}$ sont les incréments de déplacement, $\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(c)}$ et $\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(f)}$ sont les incréments de déformation, $\Delta \underline{\sigma}_n^{(c)}$ et $\Delta \underline{\sigma}_n^{(f)}$ sont les incréments de contrainte sur les deux domaines Ω_c et Ω_f et $\Delta p_n^{(f)}$ est l'incrément de déformation plastique cumulée sur Ω_f . Les équations locales (4.6c), (4.6e), (4.6f) se réécrivent,

$$\begin{cases} \underline{\sigma}_{n+1}^{(c)} = \underline{\sigma}_n^{(c)} + \kappa \text{tr}(\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(c)}) + 2\mu(\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(c)}) & (4.11a) \\ \underline{\sigma}_{n+1}^{(f)} = \underline{\sigma}_n^{(f)} + \kappa \text{tr}(\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(f)}) + 2\mu(\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(f)} - \Delta \underline{\varepsilon}_n^{P(f)}) & (4.11b) \\ \Delta \underline{\varepsilon}_n^{P(f)} = \Delta p_n^{(f)} \frac{3}{2\sigma_{n+1}^{eq(f)}} \underline{s}_{n+1}^{(f)}, \Delta p_n^{(f)} \geq 0, \Omega_f & (4.11c) \\ \Delta p_n^{(f)} (\sigma_{n+1}^{eq(f)} - R(p_n^{(f)} + \Delta p_n^{(f)})) = 0 & (4.11d) \end{cases}$$

De même le critère de Von Mises (4.1) devient,

$$f(\underline{\sigma}_{n+1}^{(f)}, p_{n+1}^{(f)}) = \sigma_{n+1}^{eq(f)} - R(p_n^{(f)} + \Delta p_n^{(f)}) \leq 0 \quad (4.12)$$

La solution des équations (4.11a) à (4.11d) dépend du comportement de la structure sur le pas de temps $[t_n; t_{n+1}]$, c'est-à-dire si le comportement est élastique ou non. Pour cela, on utilise une approche par prédiction élastique, suivie si besoin d'une correction plastique (cf [14]). Au pas de temps t_{n+1} , la prédiction élastique, notée $\underline{\sigma}_{n+1}^{elas(f)}$, de la contrainte $\underline{\sigma}_{n+1}^{(f)}$ est définie par,

$$\underline{\sigma}_{n+1}^{elas(f)} = \underline{\sigma}_n^{(f)} + (3\kappa \mathbf{J} + 2\mu \mathbf{D}) : \Delta \underline{\varepsilon}_n^{(f)}. \quad (4.13)$$

Le critère de Von Mises s'écrit alors $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{(f)}, p_n^{(f)} + \Delta p_n^{(f)}) \leq 0$.

Cette inégalité permet de connaître le comportement de la structure au pas de temps t_{n+1} . Si $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{elas(f)}, p_n^{(f)}) \leq 0$, le comportement est alors élastique et la prédiction élastique $\underline{\sigma}_{n+1}^{elas(f)}$ est validée. Les variables mécaniques sont mises à jour par,

$$\underline{\sigma}_{n+1}^{(f)} = \underline{\sigma}_{n+1}^{elas(f)}, \underline{\varepsilon}_{n+1}^{P(f)} = \underline{\varepsilon}_n^{P(f)} \text{ et } p_{n+1}^{(f)} = p_n^{(f)}. \quad (4.14)$$

Si $f(\underline{\sigma}_{n+1}^{elas(f)}, p_n^{(f)}) > 0$ alors le comportement est élastoplastique et la prédiction élastique $\underline{\sigma}_{n+1}^{elas(f)}$ n'est pas plastiquement admissible. L'algorithme de retour radial permet de calculer successivement $\Delta p_n^{(f)}$, $\Delta \underline{\varepsilon}_n^{P(f)}$, puis d'actualiser $p_{n+1}^{(f)}$, $\underline{\varepsilon}_{n+1}^{P(f)}$ et $\underline{\sigma}_{n+1}^{(f)}$. Les décompositions suivantes,

$$\begin{cases} \underline{s}_{n+1}^{elas(f)} = \underline{s}_n^{(f)} + 2\mu \Delta \underline{\varepsilon}_n^{(f)} \\ \sigma_{n+1}^{eq(f)} = \sigma_{n+1}^{elas,eq(f)} - 3\mu \Delta p_n^{(f)} \end{cases} \quad (4.15)$$

permettent d'obtenir la condition de cohérence discrète,

$$\sigma_{n+1}^{elas,eq(f)} - 3\mu \Delta p_n^{(f)} - R(p_n^{(f)} + \Delta p_n^{(f)}) = 0. \quad (4.16)$$

Cette équation, non linéaire si R l'est, doit être résolue pour $\Delta p_n^{(f)}$. La contrainte sur le patch, l'incrément de déformation plastique ainsi que la déformation plastique cumulée, s'en déduisent par,

$$\underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{(f)} = \underline{\underline{\sigma}}_{n+1}^{elas(f)} - 2\mu\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_{P_n}^{(f)}, \quad \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{P(f)} = \Delta p_n^{(f)} \frac{3}{2\sigma_{n+1}^{eq(f)}} \underline{\underline{\varepsilon}}_{n+1}^{(f)} \quad \text{et} \quad p_{n+1}^{(f)} = p_n^{(f)} + \Delta p_n^{(f)}. \quad (4.17)$$

Maintenant que l'on connaît le champ de contrainte à l'instant t_{n+1} en fonction de l'état mécanique Φ_n à l'incrément précédent, on s'intéresse à la résolution global du problème élastoplastique. Les inconnues à l'instant t_{n+1} de la stratégie de zoom structural lié au problème élastoplastique sont les champs de déplacement $\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(c)}$ et $\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(f)}$. Pour trouver ces inconnues, on procède par une méthode itérative, la méthode de Newton avec opérateur tangent cohérent. Cette stratégie procède par la recherche de corrections successives des déplacements, notées $\delta\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(c)k}$ et $\delta\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(f)k}$ respectivement sur les domaines Ω_c et Ω_f (où k est le compteur d'itérations), définies par

$$\begin{cases} \Delta\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(c)k+1} = \Delta\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(c)k} + \delta\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(c)k} \\ \Delta\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(f)k+1} = \Delta\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(f)k} + \delta\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(f)k} \end{cases}, \quad (4.18)$$

La construction des équations du problème approché permettant la résolution numérique à chaque pas de temps prend appui sur la formulation faible des conditions d'équilibre (4.6a) et (4.7a) à l'instant t_{n+1} ,

$$\int_{\Omega_c} \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}^{(c)*}) d\Omega_c = \int_{S_1} \underline{\underline{f}}_{n+1} \cdot \underline{\underline{u}}^{(c)*} dS_1 \quad \forall \underline{\underline{u}}^{(c)*} \in C(0) \quad (4.19)$$

L'action de l'algorithme de retour radial peut être résumé par \mathcal{F} réalisant l'opération (cf [14]),

$$(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(c)}, \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(f)}, \Phi_n) \longrightarrow \underline{\underline{\sigma}}_{n+1} = \mathcal{F}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(c)}, \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(f)}, \Phi_n). \quad (4.20)$$

La formulation faible de l'équilibre à l'instant t_{n+1} conduit ainsi au problème d'inconnue $\underline{\underline{u}}_{n+1}$ suivant,

Problème global.

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \underline{\underline{u}}_{n+1}^{(c)}, \underline{\underline{u}}_{n+1}^{(f)} \in C(\underline{\underline{u}}_{n+1}^D), \mathcal{R}(\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(c)}, \underline{\underline{u}}_{n+1}^{(f)}, \underline{\underline{u}}^{(c)*}, \Phi_n) = 0 \quad \forall \underline{\underline{u}}^{(c)*} \in C(0) \\ \text{sous la condition de raccord sur } \Omega_f^{(b)} \text{ et l'équilibre sur l'intérieur du patch} \end{aligned} \quad (4.21)$$

où le résidu $\mathcal{R}(\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(c)}, \underline{\underline{u}}_{n+1}^{(f)}, \underline{\underline{u}}^{(c)*}, \Phi_n)$ est défini par

$$\mathcal{R}(\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(c)}, \underline{\underline{u}}_{n+1}^{(f)}, \underline{\underline{u}}^{(c)*}, \Phi_n) = \int_{\Omega_c} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta\underline{\underline{u}}_n^{(c)}], \underline{\underline{\varepsilon}}[\Delta\underline{\underline{u}}_n^{(f)}], \Phi_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{\underline{u}}^{(c)*}] d\Omega_c - \int_{S_1} \underline{\underline{f}}_{n+1} \cdot \underline{\underline{u}}^{(c)*} dS_1. \quad (4.22)$$

Le test d'arrêt de l'algorithme de Newton porte sur la norme du résidu \mathcal{R} associé à une tolérance Tol prédéfinie,

$$T_{arrêt} = \frac{\|\mathcal{R}(\underline{\underline{u}}_{n+1}^{(c)}, \underline{\underline{u}}_{n+1}^{(f)}, \underline{\underline{u}}^{(c)*}, \Phi_n)\|}{\|\mathcal{R}(\underline{\underline{u}}_0^{(c)}, \underline{\underline{u}}_0^{(f)}, \underline{\underline{u}}^{(c)*}, \Phi_n)\|} \leq Tol. \quad (4.23)$$

4.1.2 Équilibre sur l'intérieur du patch

Comme le comportement est élastoplastique uniquement sur Ω_f , on s'intéresse dans un premier temps à l'équilibre sur le domaine fin Ω_f qui conduit au problème,

$$\text{Trouver } \underline{u}_{n+1}^{(f)} \text{ admissible tel que } \tilde{\mathcal{R}}(\underline{u}_{n+1}^{(f)}, \underline{u}^{(f)*}, \Phi_n) = 0 \quad \forall \underline{u}^{(f)*} \quad (4.24)$$

où le résidu $\tilde{\mathcal{R}}(\underline{u}_{n+1}^{(f)}, \underline{u}^{(f)*}, \Phi_n)$ est défini par

$$\tilde{\mathcal{R}}(\underline{u}_{n+1}^{(f)}, \underline{u}^{(f)*}, \Phi_n) = \int_{\Omega_f} \tilde{\mathcal{F}}(\underline{\varepsilon}[\Delta \underline{u}_n^{(f)}], \Phi_n) : \underline{\varepsilon}[\underline{u}^{(f)*}] d\Omega_f - \int_{S_a} \underline{f}^f \cdot \underline{u}^{(f)*} dS_a. \quad (4.25)$$

où $\tilde{\mathcal{R}}$ et $\tilde{\mathcal{F}}$ représentent \mathcal{R} et \mathcal{F} uniquement sur le patch. En considérant les corrections successives sur Ω_f des déplacements, définies à l'équation (4.18), le problème (4.24) linéarisé autour de l'itéré $\Delta \underline{u}_{n+1}^{(f)k}$ s'écrit,

$$\tilde{\mathcal{R}}(\underline{u}_{n+1}^{(f)}, \underline{u}^{(f)*}, \Phi_n) + \langle \tilde{\mathcal{R}}'(\underline{u}_{n+1}^{(f)k}, \underline{u}^{(f)*}, \Phi_n), \delta \underline{u}_n^{(f)k} \rangle = 0 \quad (4.26)$$

Dans l'équation (4.25) seul le premier terme dépend des champs de déplacement $\underline{u}_{n+1}^{(f)}$. En admettant la différentiabilité de $\tilde{\mathcal{F}}$ par rapport à son premier argument (cf [14]), on a,

$$\langle \tilde{\mathcal{R}}'(\underline{u}_{n+1}^{(f)k}, \underline{u}^{(f)*}, \Phi_n), \delta \underline{u}_n^{(f)k} \rangle = \int_{\Omega_f} \langle \tilde{\mathcal{F}}'(\underline{\varepsilon}[\Delta \underline{u}_n^{(f)k}], \Phi_n), \underline{\varepsilon}[\delta \underline{u}_n^{(f)k}] \rangle : \underline{\varepsilon}[\underline{u}^{(f)*}] d\Omega_f \quad (4.27)$$

On introduit le module tangent élastoplastique $\mathbf{A}^{EP(f)}$, pour le calcul de la dérivée de $\tilde{\mathcal{F}}$, dépendant de l'état mécanique Φ_n et des incréments de déplacements $\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(f)k}$ tel que,

$$\langle \tilde{\mathcal{R}}'(\underline{u}_{n+1}^{(f)k}, \underline{u}^{(f)*}, \Phi_n), \delta \underline{u}_n^{(f)k} \rangle = \int_{\Omega_f} \underline{\varepsilon}[\delta \underline{u}_n^{(f)k}] : \mathbf{A}^{EP(f)}(\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(f)k}, \Phi_n) : \underline{\varepsilon}[\underline{u}^{(f)*}] d\Omega_c \quad (4.28)$$

Ce module tangent $\mathbf{A}^{EP(f)}$ est défini de la façon suivante,

$$\mathbf{A}^{EP(f)}(\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(f)k}, \Phi_n) = \begin{cases} \mathbf{A}^{(f)} & \text{si } f(\underline{\sigma}_{n+1}^{elas(f)}, p_n^{(f)}) < 0 \text{ (évolution élastique)} \\ \mathbf{A}^{(f)} - \mathbf{P}(\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(f)k}, \Phi_n) & \text{si } f(\underline{\sigma}_{n+1}^{elas(f)}, p_n^{(f)}) > 0 \text{ (évolution élastoplastique)} \end{cases} \quad (4.29)$$

où $\mathbf{A}^{(f)}$ est le module d'élasticité sur le domaine fin Ω_f et \mathbf{P} est définie par

$$\mathbf{P}(\Delta \underline{\varepsilon}_n^{(f)k}, \Phi_n) = 3\mu(\gamma - \beta) \left(\frac{\underline{\varepsilon}_{n+1}^{elas(f)}}{\sigma_{n+1}^{elas,eq(f)}} \otimes \frac{\underline{\varepsilon}_{n+1}^{elas(f)}}{\sigma_{n+1}^{elas,eq(f)}} \right) + 2\mu\beta \mathbf{D}^{(f)} \quad (4.30)$$

avec

$$\beta = \frac{3\mu\Delta p_n}{\sigma_{n+1}^{elas,eq(f)}} \quad \gamma = \frac{3\mu}{3\mu + h}$$

En décomposant en une partie élastique et une partie de correction plastique, l'équation (4.28) devient,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\mathcal{R}}'(\underline{u}_{n+1}^{(f)k}, \underline{u}^{(f)*}, \Phi_n), \delta \underline{u}_n^{(f)k} \rangle &= \int_{\Omega_f} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(f)k}] : \mathbf{A}^{(f)} : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(f)*}] d\Omega_f \\ &\quad - \int_{\Omega_f} \underline{\underline{\varepsilon}}[\delta \underline{u}_n^{(f)k}] : \mathbf{P}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(f)k}, \Phi_n) : \underline{\underline{\varepsilon}}[\underline{u}^{(f)*}] d\Omega_f \end{aligned} \quad (4.31)$$

Le premier terme du second membre correspond à l'opérateur de rigidité élastique, appliqué à la correction $\delta \underline{u}_n^{(f)k}$. Le second terme correspond à une "correction plastique" de l'opérateur de rigidité. L'équation (4.26), après une discrétisation par éléments finis, s'écrit

$$K_{n+1}^{(f)k} \delta U_n^{(f)k} + R_{n+1}^{(f)k} = 0 \quad \text{avec } K_{n+1}^{(f)k} = K^{(f)} - P_{n+1}^{(f)k} \quad (4.32)$$

où $P_{n+1}^{(k)}$ le module tangent de la correction plastique est construit par assemblage de l'opérateur de rigidité associé à $\mathbf{P}^{(f)}(\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}_n^{(f)k}, \Phi_n)$, et $R_{n+1}^{(f)k}$ est le résidu associé à $\tilde{\mathcal{R}}(\underline{u}_{n+1}^{(f)}, \underline{u}^{(f)*}, \Phi_n)$. Le module tangent local A_{el}^{EP} est défini de la façon suivante,

$$A_{el}^{EP} = \begin{cases} A_{el}^{(f)} & \text{si } f_{n+1}^{elas} < 0 \text{ (évolution élastique)} \\ A_{el}^{(f)} - \mathcal{P}_{eln+1}^{(k)} & \text{si } f_{n+1}^{elas} > 0 \text{ (évolution élastoplastique)} \end{cases} \quad (4.33)$$

Après discrétisation en éléments finis, on associe au tenseur de correction plastique \mathcal{P} défini par (4.30), la matrice $P_{n+1}^{(k)} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ donnée par

$$P_{eln+1}^{(k)} = 3\mu(\gamma - \beta)N_{el}^{elas}N_{el}^{elasT} + 2\mu\beta D \quad \text{avec } N_{el}^{elas} = \frac{Z_{el}^{elas}}{\Sigma_{el}^{elas,eq}} \quad (4.34)$$

où D est l'extracteur déviatorique local sur Ω_f , Z_{el}^{elas} le déviateur et $\Sigma_{el}^{elas,eq}$ la contrainte équivalente locale associée à la prédiction élastique de la contrainte locale Σ_{el}^{elas} . La matrice locale de rigidité et le vecteur local des forces internes sont définis par,

$$K_{el}^{EP(f)} = B_{el_{\varepsilon}(f)}^T W_f^{el} A_{el}^{EP(f)} B_{el_{\varepsilon}(f)}, \quad (4.35)$$

$$F_{el}^{int(f)} = B_{el_{\varepsilon}(f)}^T W_f^{el} \Sigma_{el}^{(f)}. \quad (4.36)$$

avec $\Sigma_{el}^{(f)} = \Sigma_{el}^{elas} - 3\mu N_{el}^{elas} \frac{f_{elas}}{3\mu+h}$. On obtient ainsi la matrice globale de rigidité et le vecteur global des forces internes par,

$$K^{EP(f)} = \sum_{e_{el} \in \Omega_f} K_{el}^{EP(f)}, \quad (4.37)$$

$$F^{int(f)} = \sum_{e_{el} \in \Omega_f} F_{el}^{int(f)}. \quad (4.38)$$

4.1.3 Algorithme de résolution globale

La section précédente a détaillé les ingrédients à la mise en œuvre d'un algorithme de Newton pour résoudre l'équilibre élastoplastique sur le domaine Ω_f , seul domaine équipé d'une modélisation élastoplastique. Il convient de revenir à la résolution du problème

global comportant deux maillages à partir de (4.21) en reprenant la démarche du chapitre 1 basé sur la décomposition de la contrainte (4.39),

$$\Sigma = \Sigma^{(c)} - \mathcal{P}_{cf} \left(\mathcal{P}_{fc} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(f)} \right) \quad (4.39)$$

Analogue à (1.68), l'approche incrémentale-itérative conduit à la formulation discrète du résidu développé au premier ordre,

$$\begin{aligned} & \left(K^{(c)} - B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} \right) \delta U^{(c)} + B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} \delta U_{(b)}^{(f)} \\ & + B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} A^{EP(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} \delta U_{(i)}^{(f)} = M_{cc} F^{(c)} + F_{int}^{(c)} \end{aligned} \quad (4.40)$$

où la seule différence réside dans le module tangent $A^{EP(f)}$ du troisième terme qui peut différer d'une itération à l'autre. Les forces internes sur le grossier se calculent par

$$F_{int}^{(c)} = -B_{\sigma^{(c)}}^T (\Sigma^{(c)} - \mathcal{P}_{cf} (\mathcal{P}_{fc} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(f)})) \quad (4.41)$$

où $\Sigma^{(f)}$ est le vecteur global des contraintes sur le patch, construit à partir du vecteur des contraintes de chaque élément $\Sigma_{el}^{(f)}$. Finalement, le système tangent pour chaque itération de Newton s'écrit,

$$\begin{bmatrix} K^{(c)} - B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} A^{(c)} B_{\varepsilon^{(c)}} & B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} A^{(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} & B_{\sigma^{(c)}}^T \mathcal{P}_{cf} A^{EP(f)} B_{\varepsilon^{(f)}} \\ -B_{\sigma^{(f)}}^{(b)T} \overline{A}^{(f)} \mathcal{P}_{fc} B_{\varepsilon^{(c)}} & \overline{K}^{(f)}_{(bb)} & 0 \\ 0 & K^{EP(f)}_{(ib)} & K^{EP(f)}_{(ii)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta U^{(c)} \\ \delta U_{(b)}^{(f)} \\ \delta U_{(i)}^{(f)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{cc} F^{(c)} + F_{int}^{(c)} \\ 0 \\ F_{(i)}^{(f)} + F_{int_{(i)}}^{(f)} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

où $F_{int_{(i)}}^{(f)}$ est le vecteur des forces internes uniquement sur l'intérieur du patch, associée à $F_{int}^{(f)}$. On vérifie que le raccord, effectué par la deuxième ligne du système n'est pas affecté par le comportement élastoplastique de l'intérieur du patch. Il conviendra de vérifier a posteriori cette hypothèse de modélisation.

À l'instant t_{n+1} , les vecteurs des chargements $F_{n+1}^{(c)}$ et des déplacements imposés U_{n+1}^d sont pilotés par,

$$\begin{cases} F_{n+1}^{(c)} = \lambda_{n+1} F^{(c)} \\ U_{n+1}^d = \lambda_{n+1} U^d \end{cases} \quad (4.43)$$

avec λ_{n+1} un facteur de chargement défini par l'utilisateur, $F^{(c)}$ le vecteur initial des chargements et U^d le vecteur initial des déplacements imposés. Le problème d'évolution (4.21) est résolu par une méthode de Newton dont l'algorithme est présenté par [11](#).

Algorithm 1 Résolution de l'évolution d'une structure élastoplastique.

Pré-conditions : : maillages Ω_c et Ω_f , découpage temporel t_0, \dots, t_M , paramètres matériaux de la structure, tolérance ϵ , chargements $F^{(c)}$ et déplacements imposés U^d , λ_n les facteurs de chargement pour chaque pas de temps, les éléments du système tangent élastique (2.10).

- 1: Initialisation à $t = 0$:
 - 2: Résolution du système (2.10) avec correction du déplacement fin U^f .
 - 3: Calcul des incréments de déplacement $\Delta U^{(c)} = U^{(c)}$, $\Delta U^{(f)} = U^{(f)}$
-

4.1. FORMULATION DU ZOOM STRUCTURAL EN ÉLASTOPLASTICITÉ

4: Calcul des déplacements, contraintes et variables internes

$$U^{(c)} = \{0\}, \Sigma^{(c)} = \{0\}, U^{(f)} = \{0\}, \Sigma^{(f)} = \{0\}, \{p^{(f)}\} = \{0\}$$

5: Norme de référence du résidu : $r^{ref} = \|\{F^{(c)}\}\|$;

6: **Pour** $n = 0, 1, \dots, M - 1$ **faire**

7: Initialisation des incréments de déplacement pour $n > 0$,

$$\Delta U^{(c)} = \Delta U^{(c)} \frac{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}, \Delta U^{(f)} = \Delta U^{(f)} \frac{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$$

8: Initialisation de la norme du résidu courant $r = r^{ref}$

9: **Tant que** $r > Tol$ r^{ref} **faire**

10: Initialisation des forces nodales internes et de la matrice élastoplastique sur le patch,

$$F^{int(c)} = \{0\}, F^{int(f)} = \{0\}, K^{EP(f)} = [0]$$

11: **Pour** $el = 1, 2, \dots, N_{el}$ (boucle sur tous les éléments du patch Ω_f) **faire**

12: Incrément de déplacements nodaux élémentaires $\Delta U_{el}^{(f)}$

13: Incrément de déformation $\Delta \varepsilon_{el}^{(f)} = B_{el_{\varepsilon}^{(f)}} \Delta U_{el}^{(f)}$

14: Calcul de la prédiction élémentaire élastique de la contraintes

$$\Sigma_{el}^{elas} = \Sigma_{el} + \kappa tr(\Delta \varepsilon_{el}^{(f)}) \mathbf{1}_4$$

15: Calcul de la prédiction élémentaire élastique du déviateur

$$Z_{el}^{elas} = \Sigma_{el}^{elas} - \frac{1}{3}(\Sigma_{el11}^{elas} + \Sigma_{el22}^{elas} + \Sigma_{el33}^{elas})V_1$$

avec $V_1 = (111000)^T$

16: Calcul de la prédiction élémentaire élastique de la contrainte équivalente élémentaire

$$\Sigma_{el}^{elas,eq} = \left[\frac{3}{2}(Z_{el11}^{elas^2} + Z_{el22}^{elas^2} + Z_{el33}^{elas^2}) + 3Z_{el12}^{elas^2} + 3Z_{el13}^{elas^2} + 3Z_{el23}^{elas^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

17: Calcul du seuil de plasticité $f_{n+1}^{elas} = \Sigma_{n+1}^{elas,eq} - hp_{el}^{(f)} - \sigma_0$

18: **Si** $f_{n+1}^{elas} \leq 0$ **alors**

19: Actualiser les variables mécaniques,

$$\Sigma_{el_{n+1}}^{(f)} = \Sigma_{el}^{elas}, \Delta p_{el}^{(f)} = 0 \text{ et } A_{el}^{EP(f)} = A_{el}^{(f)}$$

20: **sinon**

21: Calcul de l'incrément de la déformation plastique cumulée

$$\Delta p_{el}^{(f)} = \frac{f_{n+1}^{elas}}{3\mu + h}$$

22: Évaluer les constantes $\beta = \frac{3\mu \Delta p_{el}^{(f)}}{\Sigma_{el,eq}^{elas}}$ et $\gamma = \frac{3\mu}{3\mu + h}$

23: Actualiser les contraintes élémentaires $\Sigma_{el_{n+1}}^{(f)} = \Sigma_{el}^{elas} - 3\mu \Delta p_{el}^{(f)} N_{el}^{elas}$
où N_{el}^{elas} est définie à l'équation (4.34)

- 24: Calcul de la correction plastique $P_{n+1}^{(k)}$ par l'équation (4.34) et de l'assemblage du module tangent élastoplastique $A_{el}^{EP(f)}$,

$$A_{el}^{EP(f)} = A_{el}^{(f)} - P_{n+1}^{(k)}$$

- 25: **Fin Si**

- 26: Calcul de la matrice locale de rigidité

$$K_{el}^{EP(f)} = B_{el_{\varepsilon(f)}}^T W_{el}^{(f)} A_{el}^{EP(f)} B_{el_{\varepsilon(f)}}$$

et des forces internes

$$F_{el}^{int(f)} = -B_{el_{\varepsilon(f)}}^T W_{el}^{(f)} \Sigma_{el_{n+1}}^{(f)}$$

- 27: Contribution de $K_{el}^{EP(f)}$ à l'assemblage de $K^{EP(f)}$ et $F_{el}^{int(f)}$ à l'assemblage de $F^{int(f)}$.

- 28: Calcul du module d'élasticité $\tilde{A}_{el}^{(f)}$ pour la prise en compte des déformations planes.

- 29: **Fin Pour**

- 30: Construction du module tangent global $A^{EP(f)}$ à l'aide du module tangent élastoplastique $\tilde{A}_{el}^{(f)}$ sur chaque élément

- 31: **Pour** $el = 1, 2, \dots, N_{el}$ (boucle sur tous les éléments du maillage Ω_c) **faire**

- 32: Incrément de déplacements nodaux élémentaires $\Delta U_{el}^{(c)}$

- 33: Incrément de déformation $\Delta \varepsilon_{el}^{(c)} = B_{el_{\varepsilon(c)}} \Delta U_{el}^{(c)}$

- 34: Calcul de déviateur élémentaire $Z_{el}^{(c)} = \Delta \varepsilon_{el}^{(c)} - \frac{1}{3} tr(\Delta \varepsilon_{el}^{(c)}) V_1$

- 35: Actualiser les contraintes élémentaires, $\Sigma_{el_{n+1}}^{(c)} = \Sigma_{el_n}^{(c)} + \kappa tr(\Delta \varepsilon_{el}^{(c)}) + 2\mu Z_{el}^{(c)}$

- 36: **Fin Pour**

- 37: Contribution des contraintes locales $\Sigma_{el_{n+1}}^{(c)}$ et $\Sigma_{el_{n+1}}^{(f)}$ à l'assemblage des contraintes globales $\Sigma_{n+1}^{(c)}$ et $\Sigma_{n+1}^{(f)}$

- 38: Construction des forces internes globales sur Ω_c ,

$$F^{int(c)} = -B_{\sigma(c)}^T \left(\Sigma_{n+1}^{(c)} - \mathcal{P}_{cf} \mathcal{P}_{fc} \Sigma_{n+1}^{(c)} + \mathcal{P}_{cf} \Sigma_{n+1}^{(f)} \right)$$

- 39: Résolution du système élastoplastique (4.42)

- 40: Actualisation des incréments de déplacement,

$$\Delta U^{(c)} = \Delta U^{(c)} + \delta U^{(c)} \text{ et } \Delta U^{(f)} = \Delta U^{(f)} + \delta U^{(f)}$$

- 41: Nouveau résidu, $R = \begin{pmatrix} M_{cc} F^{(c)} + F_{int}^{(c)} \\ 0 \\ F_{(i)}^{(f)} + F_{int(i)}^{(f)} \end{pmatrix}$

- 42: Norme du nouveau résidu, $r = \|R\|$;

- 43: **Fin Tant que**

- 44: Mise à jours des variables à t_{n+1} :

- 45: Actualisation des déplacements, $U_{n+1}^{(c)} = U_n^{(c)} + \Delta U^{(c)}$ et $U_{n+1}^{(f)} = U_n^{(f)} + \Delta U^{(f)}$

- 46: Actualisation de la déformation plastique cumulé sur le patch $p_{n+1}^{(f)} = p_n^{(f)} + \Delta p^{(f)}$

- 47: **Fin Pour**
-

La tolérance pour le critère d'arrêt de la méthode de Newton (Tol), définie à l'équation (4.23), est égale à $1e - 5$. Pour les figures on visualise les résultats pour l'incrément final de la charge et l'incrément final de la décharge.

4.2 Validation sur une structure élastoplastique

Pour valider la stratégie de zoom élastoplastique, on procède comme dans le Chapitre 3. On compare avec un cas de référence qui résout les mêmes problèmes avec un seul maillage sur toute la structure qui comporte les mêmes défauts et est soumise aux mêmes sollicitations. Le maillage Ω_f et le maillage pour le cas de référence sont identiques dans la zone du patch. Comme pour l'étude paramétrique faite au chapitre 3, on s'intéresse seulement à une plaque trouée, cas où le gradient de propriétés mécaniques est le plus important (comparé à l'inclusion dure et à l'inclusion molle). La limite d'élasticité est celle de l'acier, soit $\sigma_0 = 300 MPa$. Le module d'écroutissage est celui de l'acier, soit $h = 400 MPa$.

4.2.1 Application à la plaque trouée

Les deux sollicitations étudiées sont les mêmes que celles du chapitre 3, la première est un essai de traction pure et la deuxième, un essai de cisaillement. L'essai de traction est représenté par la Figure 3.2 et l'essai de cisaillement par la Figure 3.3. Pour l'essai de traction, la densité d'effort normal est égal à $f = 0.05 GPa$. Pour l'essai de cisaillement, le déplacement imposé est toujours de 0.018 cm appliqué dans la direction x sur le haut de la plaque.

Essai de traction. Pour les contraintes, lors de l'incrément final de la charge, on remarque une concentration de contrainte à gauche et à droite du trou et une chute des contraintes en haut et en bas du trou pour les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} , visible respectivement sur les Figures 4.1 et 4.2. On observe que les contraintes sont légèrement perturbés dans le patch. Ceci est dû que les sollicitations sont présentes au niveau de la zone de raccord. Loin du défaut on retrouve un état de contrainte nul pour les deux directions des contraintes. On retrouve globalement le même profil sur les contraintes pour le cas de référence et le cas avec zoom, avec une légère différence sur les extrema. Les extrema sont légèrement plus élevé pour le cas de référence que pour le cas avec zoom, en effet on a une différence de 5 % pour σ_{xx} et une différence de 9 % pour σ_{yy} . La méthode de zoom a tendance à sous-évaluer les contraintes pour l'essai de traction.

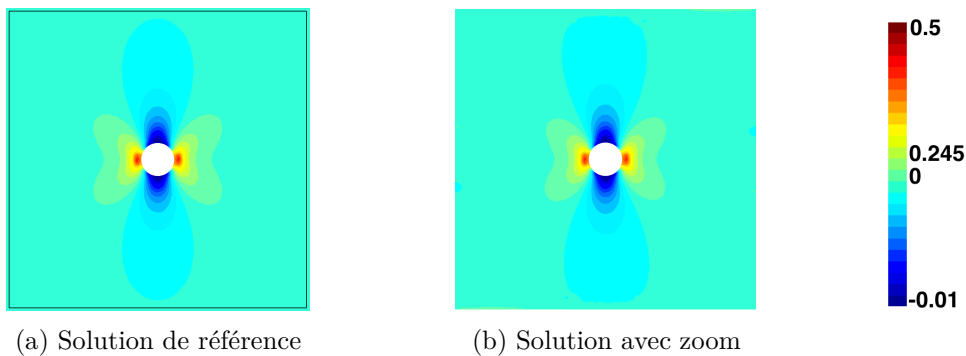


FIGURE 4.1 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Contrainte σ_{yy} pour l'incrément final de la charge (en GPa).

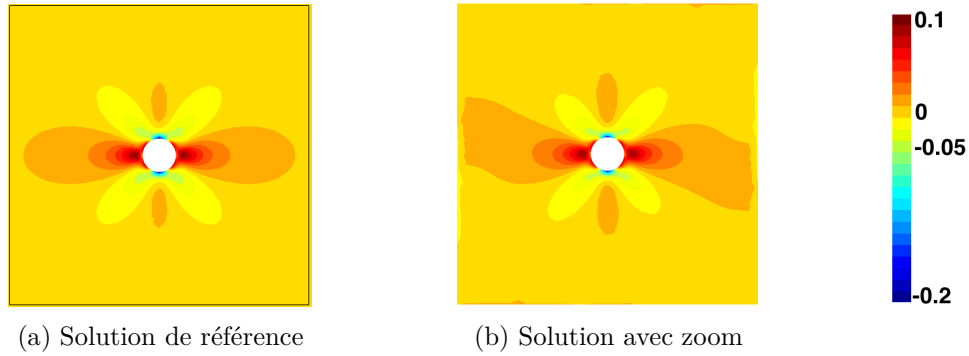


FIGURE 4.2 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{xx} pour l'incrément final de la charge (en GPa).

Pour la déformation plastique cumulée, on remarque une répartition de celle-ci similaire, visible sur la Figure 4.3. Les extrema sont légèrement plus élevés pour le cas de référence que pour le cas numérique avec une baisse de 6 %. Comme pour les contraintes, la méthode de zoom structurale implique une sous-évaluation de la déformation plastique cumulée.

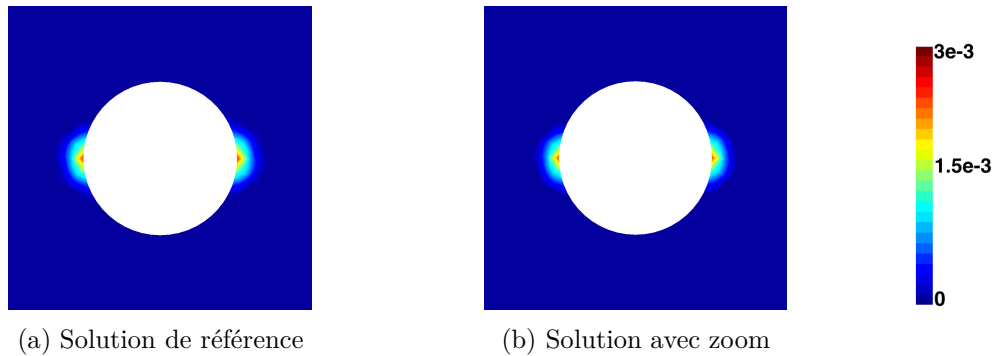


FIGURE 4.3 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la charge avec focus sur le trou.

La Figure 4.4 met en évidence que l'erreur énergétique est surtout présente dans la zone de raccord mais aussi dans la zone où la structure a plastifié.

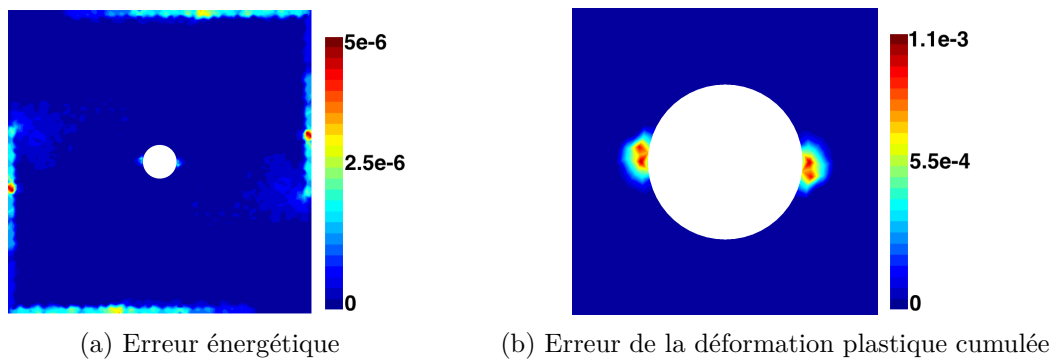


FIGURE 4.4 – **Essai de traction.** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique au carré et de l'erreur L_2 au carré de la déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la charge.

4.2. VALIDATION SUR UNE STRUCTURE ÉLASTOPLASTIQUE

Pour les contraintes résiduelles à l'incrément final de la décharge, on remarque une chute de la concentration de contrainte à gauche et à droite du trou suivi d'une augmentation de la concentration des contraintes pour σ_{yy} (cf Figure 4.5). Pour σ_{xx} , on a une augmentation de la concentration des contraintes à gauche et à droite du trou et une diminution de la concentration en haut et en bas du trou (cf Figure 4.6).

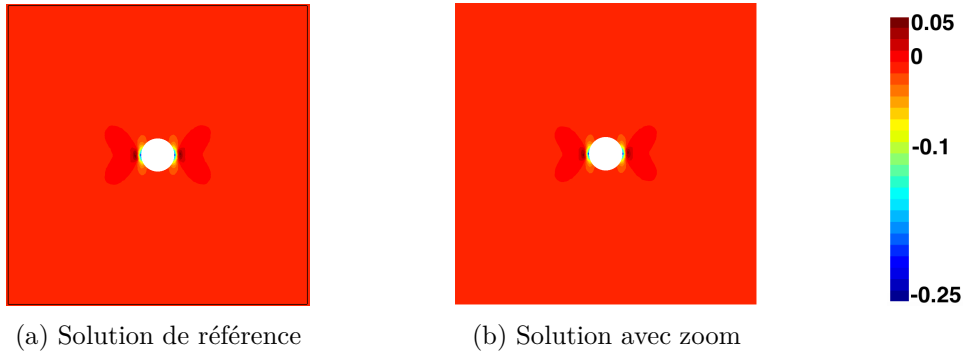


FIGURE 4.5 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{yy} résiduelle pour l'incrément final de la décharge (en GPa).

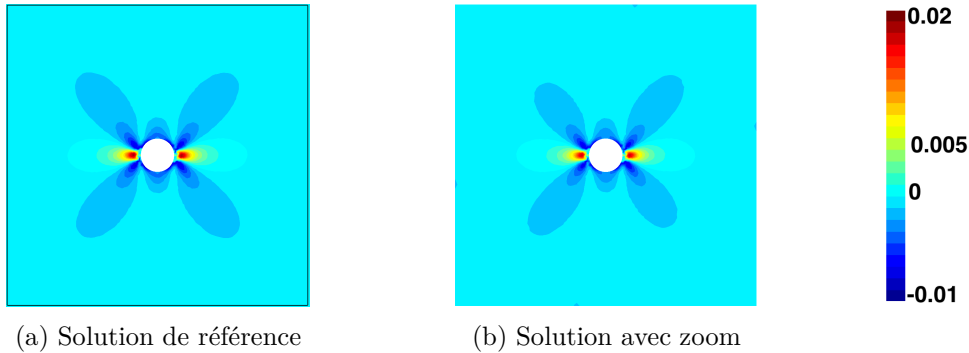


FIGURE 4.6 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{xx} résiduelle pour l'incrément final de la décharge (en GPa).

Loin du défaut on retrouve un état de contrainte nul pour les deux directions des contraintes. On retrouve globalement le même profil sur les contraintes pour les solutions de référence et avec la méthode de zoom structural. Les extrema sont encore légèrement plus élevés pour le cas de référence que pour le cas du zoom avec une différence de 8 % pour la contrainte σ_{xx} et une différence de 5 % pour la contrainte σ_{yy} . En conclusion, le zoom structural semble conduire à une sous estimation des contraintes résiduelles.

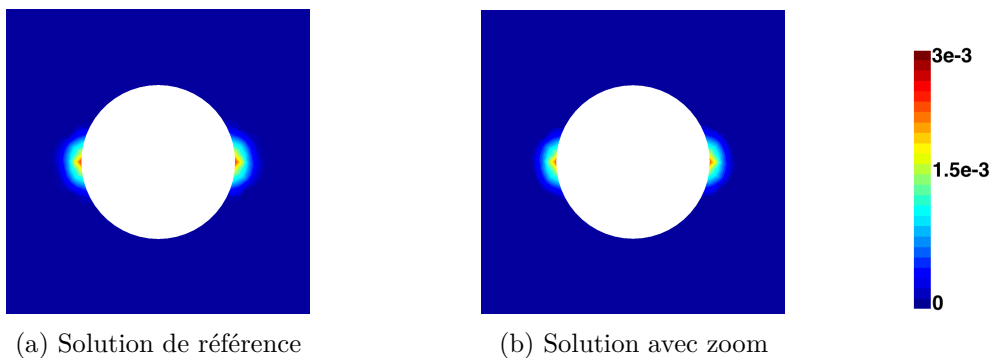


FIGURE 4.7 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la décharge avec focus sur le trou.

Pour la déformation plastique cumulée, on remarque une répartition de celle-ci similaire, visible sur la Figure 4.7. Les extrêmes sont légèrement plus élevés pour le cas de référence que pour le cas numérique avec une baisse de 6 %, comme pour l'incrément final de la charge. Cela est cohérent puisque lors de la décharge, il n'y a pas d'augmentation de la déformation plastique cumulée.

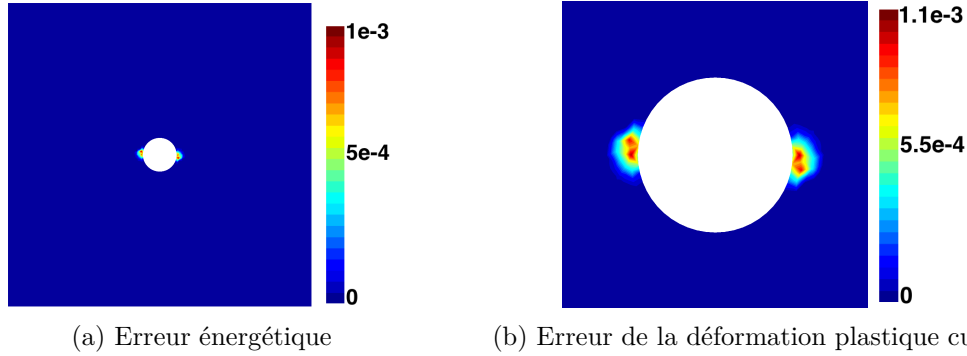


FIGURE 4.8 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Cartographie de l'erreur énergétique locale et de l'erreur L_2 locale de la déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la décharge.

La Figure 4.8 met en évidence que les répartitions des erreurs sont les mêmes pour l'erreur énergétique sur le patch et pour l'erreur sur la déformation plastique cumulée. L'erreur énergétique est donc localisée dans la zone où la structure se plastifie lors de l'incrément final d'un cycle charge-décharge.

Essai de cisaillement. Pour les contraintes lors de l'incrément final de la charge, on remarque une concentration de contrainte à gauche et à droite du trou et une chute des contraintes en haut et en bas du trou pour les contraintes σ_{xx} et σ_{yy} , visible respectivement sur les Figures 4.10 et 4.9. On observe que les contraintes sont légèrement perturbées dans le patch, surtout au niveau des coins. Ceci est dû à la présence de sollicitation au niveau de ces zones remontant du comportement sur le domaine grossier.

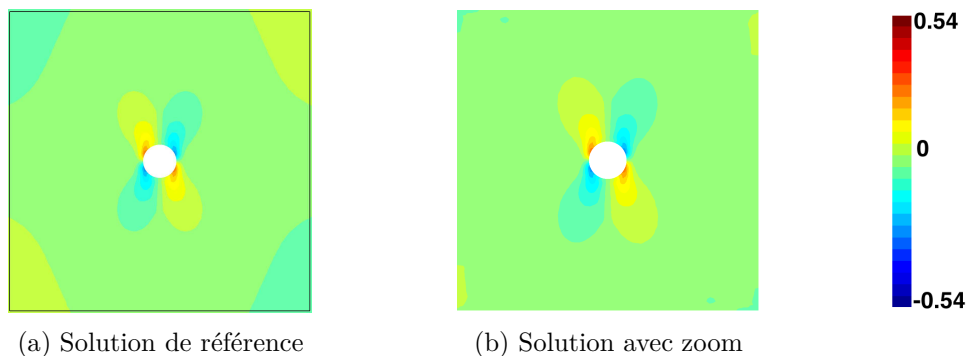


FIGURE 4.9 – **Essai de cisaillement - Plaque trouée** - Contrainte σ_{yy} pour l'incrément final de la charge (en GPa).

Loin du défaut on retrouve un état de contrainte nul pour les deux directions des contraintes. On retrouve globalement le même profil sur les contraintes pour les solutions de référence et avec la méthode de zoom structural, avec une légère différence sur les extrema.

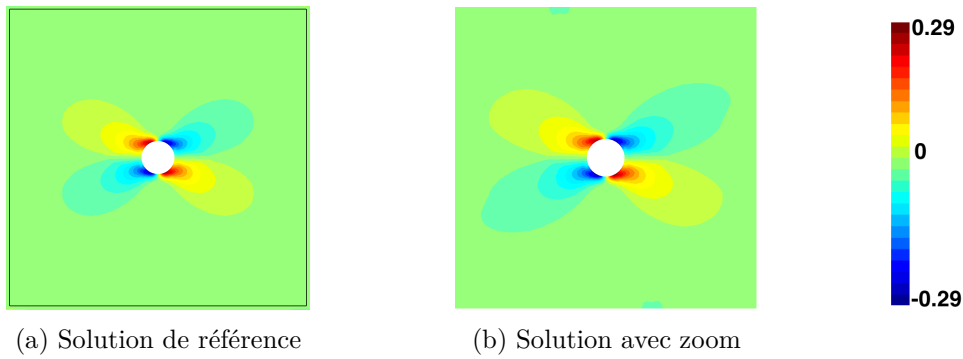


FIGURE 4.10 – **Essai de cisaillement** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{xx} pour l'incrément final de la charge (en GPa).

Les extrema sont légèrement plus élevés pour le cas du zoom que pour le cas de référence, en effet on a une différence de 2 % pour σ_{xx} et une différence de 9 % pour σ_{yy} . La méthode de zoom a tendance à surévaluer les contraintes pour l'essai de cisaillement. Pour la déformation plastique cumulée, on remarque une répartition de celle-ci similaire pour nos deux cas, visible sur la Figure 4.11. Les extrema sont légèrement plus élevés pour le cas du zoom que pour le cas de référence avec une augmentation de 3 %. Comme pour les contraintes, la méthode de zoom structurale implique une surévaluation de la déformation plastique cumulée.

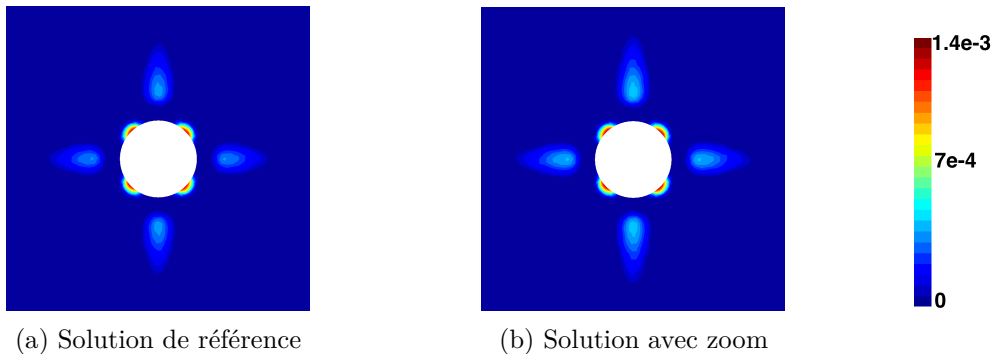


FIGURE 4.11 – **Essai de cisaillement.** - *Plaque trouée* - Déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la charge avec focus sur le trou.

La Figure 4.12 met en évidence que l'erreur énergétique est surtout présente dans la zone de raccord.

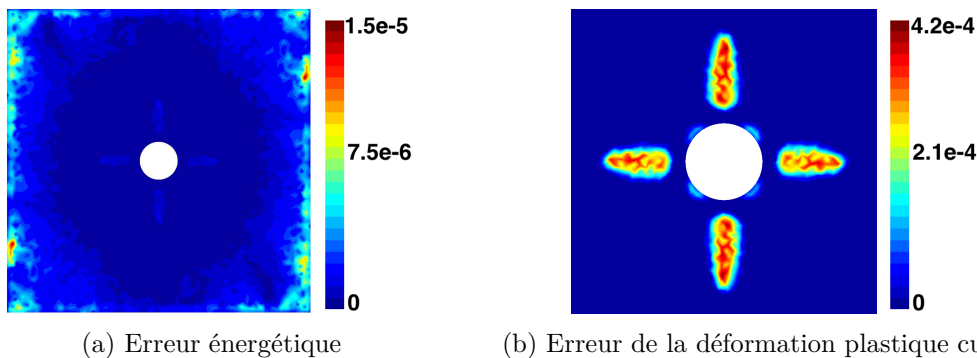


FIGURE 4.12 – **Essai de cisaillement** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique locale et de l'erreur L_2 locale de la déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la charge.

À l'incrément final de la décharge, du fait que la structure a plastifié, on remarque une concentration des contraintes similaire dans nos deux cas pour les deux contraintes σ_{xx} et σ_{yy} , visible sur les Figures 4.14 et 4.13.

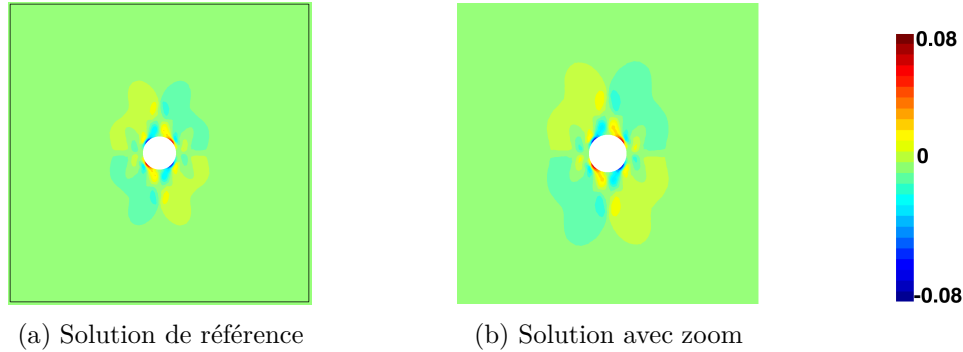


FIGURE 4.13 – **Essai de cisaillement** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{yy} résiduelle pour l'incrément final de la décharge (en GPa).

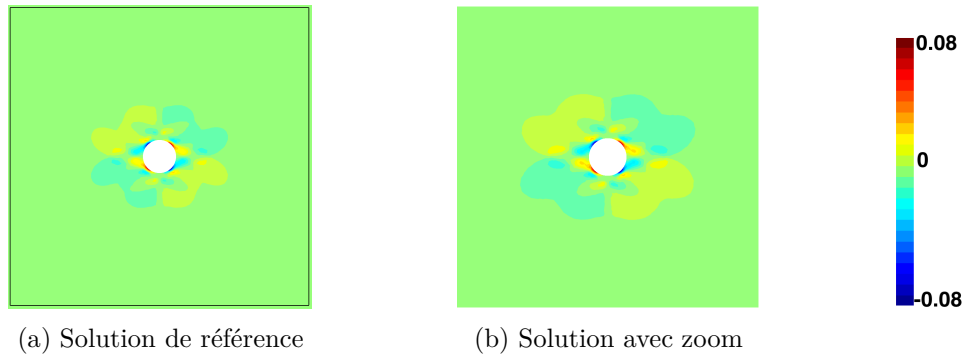


FIGURE 4.14 – **Essai de cisaillement** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{xx} résiduelle pour l'incrément final de la décharge (en GPa).

Loin du défaut on retrouve un état de contrainte nul pour les deux directions des contraintes. On retrouve globalement le même profil sur les contraintes pour les solutions de référence et avec la méthode de zoom structural. Les extrema sont encore légèrement plus élevés pour le cas du zoom que pour le cas de référence avec une différence de 4 % pour la contrainte σ_{xx} et une différence de 4 % pour la contrainte σ_{yy} . En conclusion, le zoom structural semble conduire à une sous estimation des contraintes résiduelles.

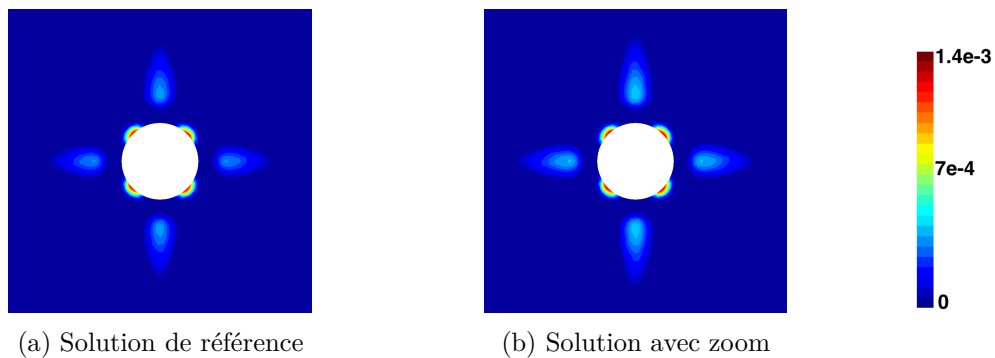


FIGURE 4.15 – **Essai de cisaillement** - *Plaque trouée* - Déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la décharge avec focus sur le trou.

4.2. VALIDATION SUR UNE STRUCTURE ÉLASTOPLASTIQUE

Pour la déformation plastique cumulée, on remarque une répartition de celle-ci similaire pour nos deux cas, visible sur la Figure 4.15. Les extrema sont légèrement plus élevés pour le cas du zoom que pour le cas de référence avec une baisse de 3 %, comme pour l'incrément final de la charge. Cela est cohérent puisque lors de la décharge, il n'y a pas augmentation de la déformation plastique cumulée.

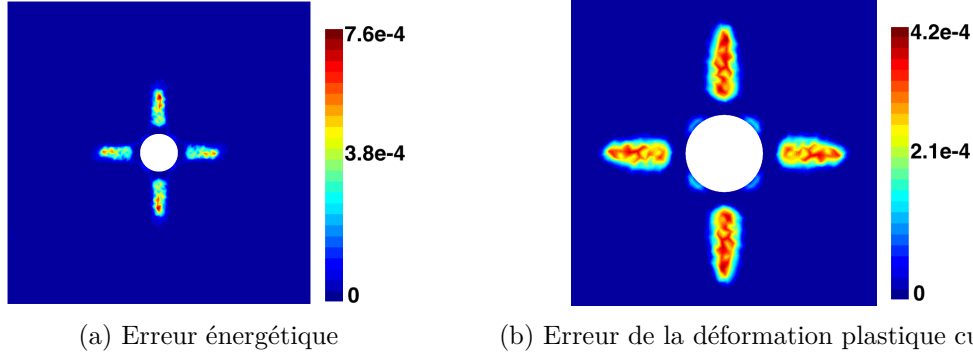


FIGURE 4.16 – **Essai de cisaillement - Plaque trouée** - Cartographie de l'erreur énergétique locale et de l'erreur L_2 locale de la déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la décharge.

La Figure 4.16 met en évidence que les répartitions des erreurs pour l'erreur énergétique sur le patch se rapproche de l'erreur sur la déformation plastique cumulée, comparé à la Figure 4.8. L'erreur énergétique est donc localisée en majorité dans la zone où la structure se plastifie lors de l'incrément final d'un cycle charge-décharge. Lors de ces deux essais on observe que l'algorithme de Newton converge moins vite pour la méthode de zoom structural que pour la résolution de référence. L'idée pour améliorer la convergence est de considérer uniquement le résidu sur le patch pour l'instant t_{n+1} . Le test d'arrêt se réécrit,

$$T_{arrêt} = \frac{\|\tilde{\mathcal{R}}(\underline{u}_{n+1}^{(f)}, \underline{u}^{(f)*}, \Phi_n)\|}{\|\mathcal{R}(\underline{u}_0^{(c)}, \underline{u}_0^{(f)}, \underline{u}^{(c)*}, \Phi_n)\|} \leq Tol. \quad (4.44)$$

On compare maintenant les deux tests d'arrêts 4.23 et 4.44 pour la convergence de l'algorithme de Newton et pour l'erreur énergétique des solutions obtenues, afin d'obtenir le meilleur test d'arrêt. Les comparaisons sont faites pour un cycle de traction-compression complet ou un cycle de cisaillement complet. On remarque que le fait de faire le test d'arrêt uniquement sur les forces appliquées dans le patch, permet d'être plus rapide en itération, sans pour autant perdre de la qualité pour la solution, visibles sur les Figures 4.17 et 4.18. Le fait de considérer le résidu uniquement sur le patch permet de retrouver le même nombre d'itération avec la méthode de zoom structural qu'avec la solution de référence pour une majorité de pas de temps.

Les erreurs énergétique globale absolue ER_{Σ}^a selon le choix du résidu pour le test d'arrêt de l'algorithme de Newton, sont presque les mêmes quelque soit le cycle effectué (traction-compression ou cisaillement) sauf pour les deux premier incrément de temps et les incréments des états de repos pour le cycle de cisaillement. En effet les erreurs énergétique globale absolue ER_{Σ}^a selon le choix du résidu pour le test d'arrêt de l'algorithme de Newton, sont presque les mêmes quelque soit le cycle effectué (traction-compression ou cisaillement), sauf pour les deux premiers incréments de temps et les incréments de repos $n^{\circ} 8$ et $n^{\circ} 16$ pour l'essai de cisaillement. On conclue donc que le fait de considérer

le résidu uniquement sur le patch permet de retrouver le même nombre d'itérations que pour la résolution de référence pour une majorité de pas de temps.

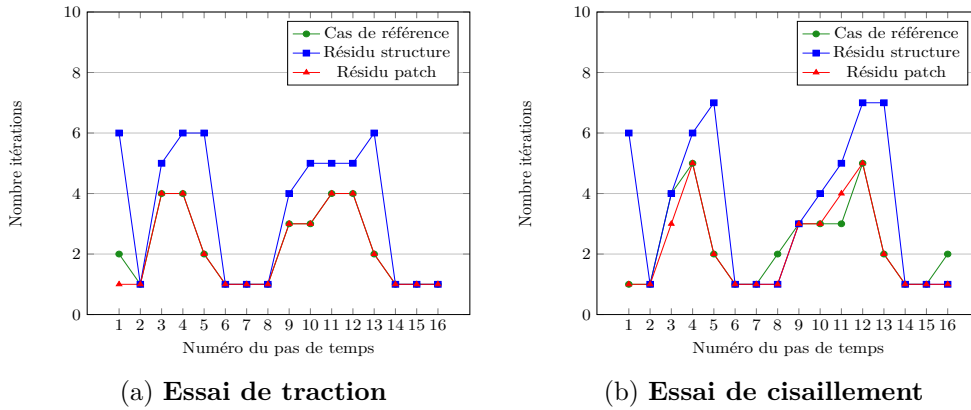


FIGURE 4.17 – *Plaque trouée* - Nombre d'itérations de l'algorithme de Newton en fonction de la discrétisation en temps.

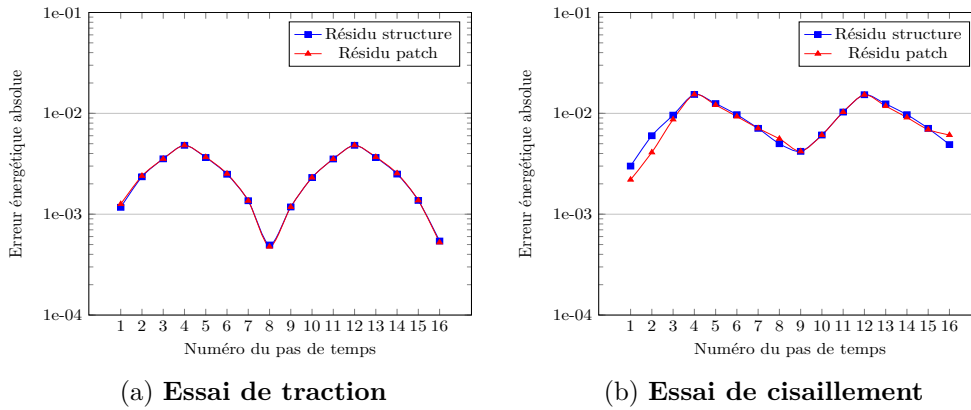


FIGURE 4.18 – *Plaque trouée* - Erreur énergétique globale absolue ER_{Σ}^a en fonction de la discrétisation en temps.

On remarque sur la Figure 4.19 que pour l'incrément final de la charge, la répartition des erreurs énergétiques sont les mêmes que pour un résidu sur toute la structure (cf Figures 4.4 et 4.12), mais avec des valeurs plus élevées. Pour la traction, on passe d'une erreur de $5e - 6$ à $6.75e - 6$ et pour le cisaillement, on passe d'une erreur de $1.5e - 5$ à $2.03e - 5$, ce qui donne des erreurs très faibles.

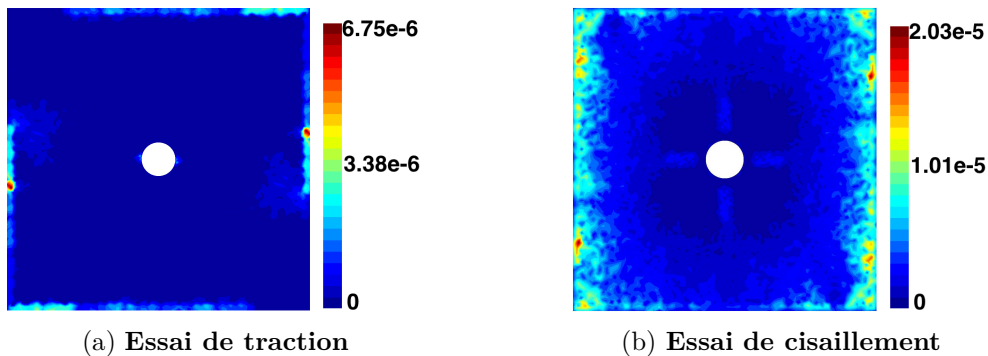


FIGURE 4.19 – *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique absolue au carré pour le résidu uniquement sur le patch pour l'incrément final de la charge.

4.2. VALIDATION SUR UNE STRUCTURE ÉLASTOPLASTIQUE

Pour l'incrément final de décharge, on remarque une différence pour l'essai de cisaillement, entre la Figure 4.20 et la Figure 4.16. L'erreur énergétique ne se situe plus seulement sur la zone où la structure a plastifié mais aussi sur la zone de raccord. Le fait de considérer le résidu uniquement sur le patch, donne une convergence en itération plus rapide mais donne une erreur énergétique plus élevée sur la zone de raccord.

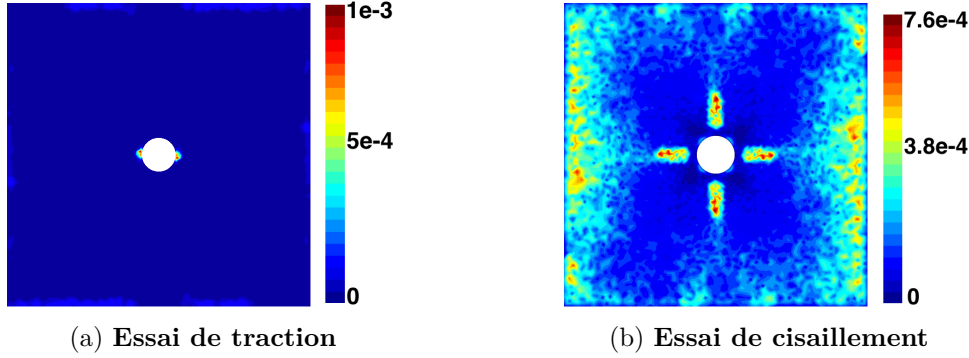


FIGURE 4.20 – *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique absolue au carré pour le résidu uniquement sur le patch pour l'incrément final de la décharge.

Pour un résidu sur toute la structure, il semble que la convergence de l'algorithme de Newton est lié au fait que les forces internes $F^{int(c)}$ sur le maillage grossier Ω_c converge moins rapidement vers $F^{(c)}$ que les forces internes $F^{int(f)}$ vers $F^{(f)}$ sur le patch. À partir de maintenant, on considère seulement le résidu sur le patch pour le critère d'arrêt de l'algorithme de Newton.

4.2.2 Essais avec deux défauts dans la structure

On étudie une structure avec deux défauts, on prend deux trous de géométries différentes, un cercle et une ellipse. Les deux défauts sont placés de tel sorte que l'on est un patch pour chaque défaut et les patches ne se chevauche pas. En effet si les défauts sont proches on peut construire un seul patch comprenant les deux défauts. On considère une structure occupant le domaine $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_e \cup \Omega_t \subset \mathbb{R}^3$, où Ω_e est le domaine avec l'ellipse et Ω_t est le domaine avec le trou. Pour chaque patch, on garde la méthode de zoom structural avec substitution, présenté dans le chapitre 2. Son comportement est supposé élastoplastique dans l'intérieur des deux patches, $\Omega_e^{(i)}$ pour le patch avec l'ellipse et $\Omega_t^{(i)}$ pour le patch avec le cercle. Les deux essais appliqués à cette nouvelle structure restent un essai de traction et un essai de cisaillement, représentés sur la Figure 4.21.

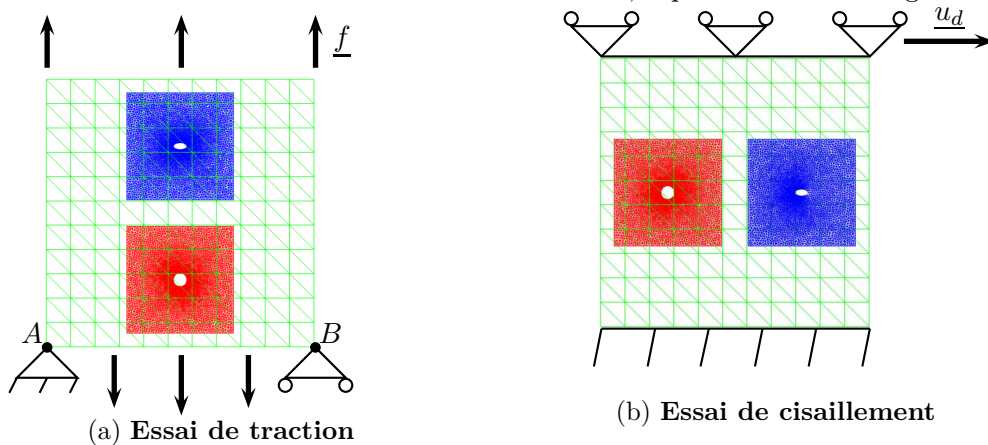


FIGURE 4.21 – *Plaque trouée* - Essais pour la structure avec deux défauts.

On définit le vecteur Σ , représentant le champ de contraintes de la structure par,

$$\Sigma = \Sigma^{(c)} - \mathcal{P}_{ce} \left(\mathcal{P}_{ec} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(e)} \right) - \mathcal{P}_{ct} \left(\mathcal{P}_{tc} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(t)} \right) \quad (4.45)$$

avec $\Sigma^{(i)}$, le vecteur des champs de contrainte sur le maillage Ω_i avec $i = \{c, e, t\}$. En adoptant la même approche qu'auparavant, on obtient deux systèmes tangents, un élastique et l'autre élastoplastique, similaires respectivement aux systèmes (2.10) et (4.42).

Pour valider notre approche pour une structure avec deux défauts sur les figures on visualise uniquement l'erreur énergétique relative ER_{Σ}^{el} pour l'incrément final de la charge et pour l'incrément final de la décharge. Il est intéressant de noter que les deux zones d'erreur maximale sont des zones de raccord des zooms entre les deux défauts, c'est à dire des zones d'influence mutuelle des défauts.

Essai de traction. On observe sur la Figure 4.22 que pour l'incrément final de la charge, les erreurs sont localisées sur la zone de raccord, sur le bord bas pour le patch avec l'ellipse et sur le bord haut pour celui avec le cercle. Ceci est dû au fait que les sollicitations débordent du patch dans ces deux zones. On retrouve le même ordre de grandeur pour les erreurs locales énergétiques que celui du chapitre 3, voir Figure 3.22.

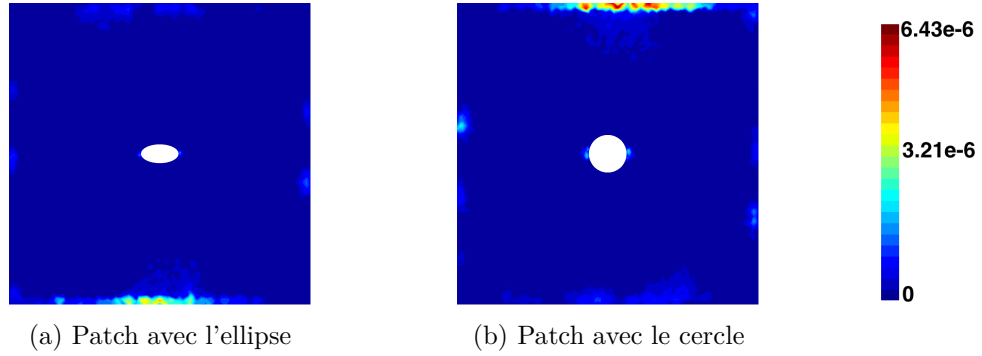


FIGURE 4.22 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique relative au carré pour l'incrément final de la charge.

Par contre pour l'incrément final de la décharge, on retrouve sur la Figure 4.23 que les erreurs sont localisées dans les zones où la structure s'est plastifiée, c'est-à-dire autour des défauts. On s'aperçoit également que l'erreur est ici plus élevée de 29 % que l'erreur pour une structure avec un seul défaut (cf Figure 4.8) mais reste dans les mêmes ordres de grandeur.

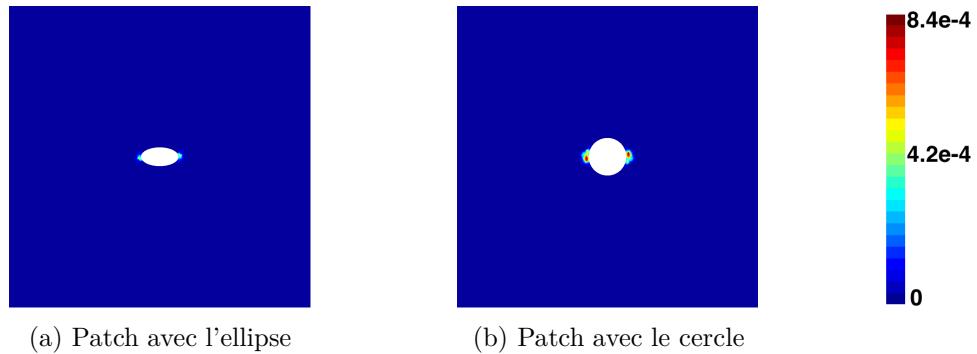


FIGURE 4.23 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique relative au carré pour l'incrément final de la décharge.

Essai de cisaillement. Pour l'essai de cisaillement, on observe sur les Figures 4.24 et 4.25 que les erreurs sont surtout localisées sur la zone de raccord, zones où les sollicitations débordent du patch. La valeur maximum des erreurs locales énergétiques est quinze fois plus grande pour l'incrément final de la charge (erreur en $3.43e-4$) et est deux fois plus grande pour l'incrément final de la décharge (erreur en $1.53e-3$) qu'avec le cas d'un seul défaut, elles sont donc un ordre de grandeur au dessus.

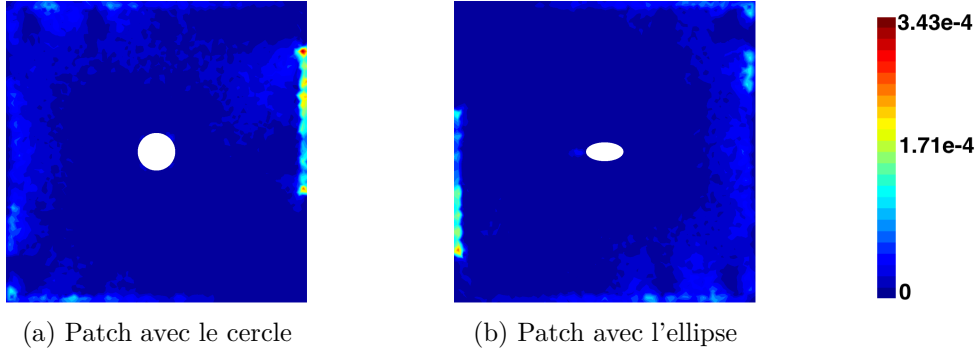


FIGURE 4.24 – **Essai de cisaillement** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique relative au carré pour l'incrément final de la charge.

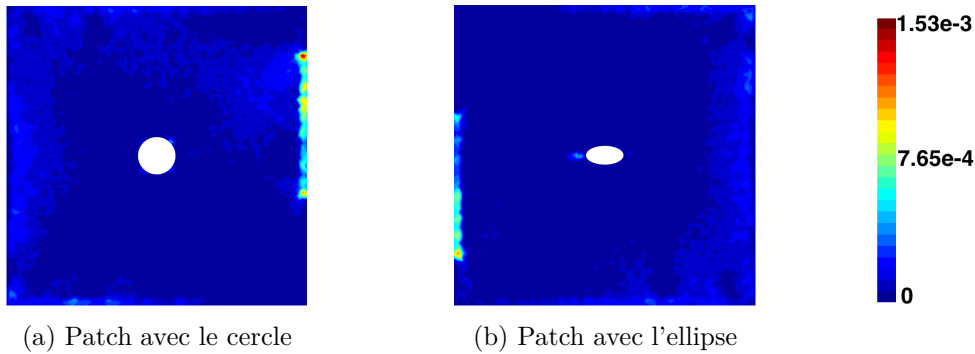


FIGURE 4.25 – **Essai de cisaillement** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique relative au carré pour l'incrément final de la décharge.

Notre approche est validée pour une structure avec plusieurs patches. On peut donc étendre l'approche à n_p patches qui ne se chevauchent pas. La définition de la contrainte sur la structure pour n_p patches s'appuie sur l'équation 4.45 et s'écrit,

$$\Sigma = \Sigma^{(c)} - \sum_{i=1}^{n_p} \mathcal{P}_{ci} \left(\mathcal{P}_{ic} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(i)} \right) \quad (4.46)$$

Maintenant le champ de contrainte sur la structure est défini, on va regarder si cette définition peut convenir pour d'autres cas que celui avec des patches séparés. On va y aller en deux étapes. Tout d'abord pour des patches collés (Figure 4.26a), c'est-à-dire que les patches ont un bord en commun, et ensuite pour des patches chevauchant (Figure 4.26b). Pour le cas des patches collés, le bord commun entre les deux patches est discrétisé de la même façon pour les deux patches. Pour le cas des patches chevauchant, le maillage de l'intersection des patches, noté Ω_{ip} , est le même pour les deux patches (zone en orange sur la Figure 4.26b). Ceci dans le but de pouvoir comparer l'erreur énergétique dans cette zone pour les deux patches avec la solution de référence. On s'intéresse uniquement à l'incrément final de la charge pour valider la définition du champ de contrainte. Les résultats sont étudiés uniquement pour un essai de traction car les remarques sont les mêmes pour les deux essais seules les valeurs changent.

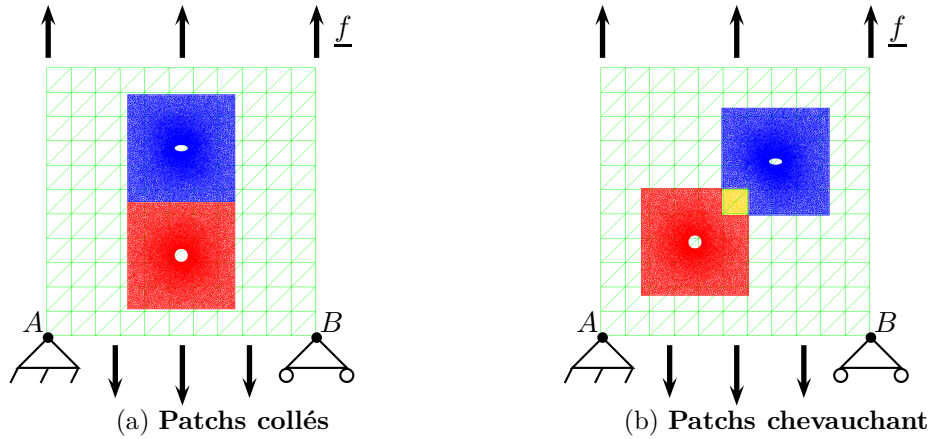


FIGURE 4.26 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Essais pour la structure avec deux défauts avec diverses positions des patches.

Essai pour des patches collés. Pour l'essai de traction avec des patches collés, on observe sur la Figure 4.27 que les erreurs sont localisées sur le bord en commun entre les deux patches. La valeur maximum des erreurs locales énergétiques pour l'incrément final de la charge reste dans le même ordre de grandeur (erreur en $4.12e - 6$) que pour le cas des patches séparés. La définition du champ de contrainte (4.45) convient encore pour deux patch collés.

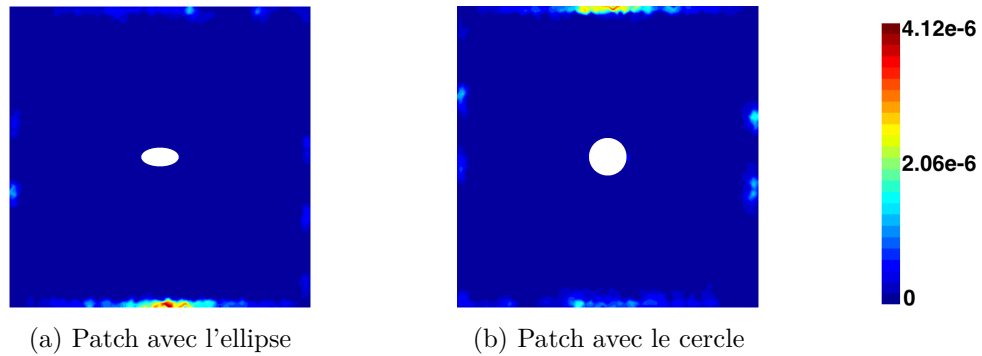


FIGURE 4.27 – **Essai de traction - Plaque trouée** - Cartographie de l'erreur énergétique relative au carré pour l'incrément final de la charge pour des patches collés.

Essai pour des patches chevauchant. Pour l'essai de traction avec des patches chevauchant, on observe sur la Figure 4.28 que les erreurs sont localisées sur la zone en commun entre les deux patches et plus précisément dans la zone qui correspond au raccord pour chacun des patches. La valeur maximum des erreurs locales énergétiques pour l'incrément final de la charge est d'un ordre de grandeur au-dessus (erreur en $5.22e - 5$) que pour le cas des patches séparés. La définition du champ de contrainte (4.45) convient encore pour deux patch collés mais on va proposer une alternative dans le but de réduire cette erreur.

Dans la définition du champ de contrainte (4.45), on enlève deux fois la contribution du grossier dans le domaine Ω_{ip} correspondant à la zone d'intersection des patches et on ajoute la contribution du patch Ω_e ainsi que celle du patch Ω_t .

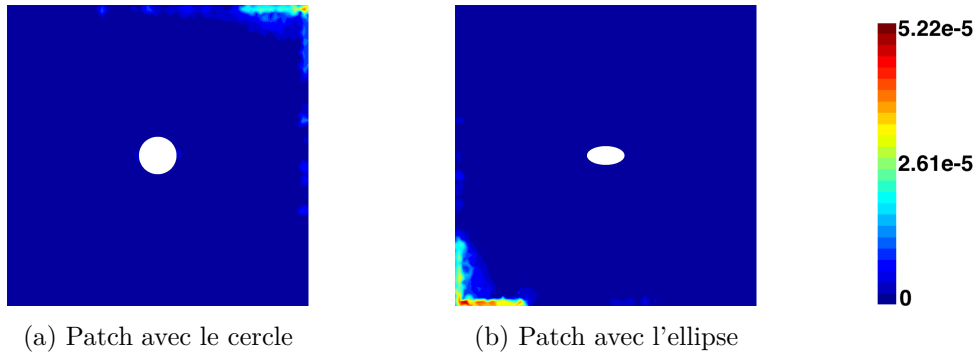


FIGURE 4.28 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique relative au carré pour l'incrément final de la charge pour des patches chevauchant.

On propose cette fois-ci d'enlever une seule fois la contribution du grossier et de moyenner celle des patches sur Ω_{ip} . La contrainte sur la structure s'écrit alors,

$$\begin{aligned} \Sigma = \Sigma^{(c)} - \mathcal{P}_{ce} \left(\mathcal{P}_{ec} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(e)} \right) - \mathcal{P}_{ct} \left(\mathcal{P}_{tc} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(t)} \right) \\ + \frac{1}{2} \mathcal{P}_{ce} \mathcal{P}_{et} \left(\mathcal{P}_{tc} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(t)} \right) + \frac{1}{2} \mathcal{P}_{ct} \mathcal{P}_{te} \left(\mathcal{P}_{ec} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(e)} \right) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Avec la nouvelle définition de la contrainte (4.47), on observe sur la Figure 4.29 que les erreurs sont localisées sur la même zone que pour le cas précédent (cf Figure 4.28). La valeur maximum des erreurs locales énergétiques pour l'incrément final de la charge est 1.7 fois inférieur (erreur en $5.22e - 5$) avec le champ de contrainte défini par l'équation (4.47).

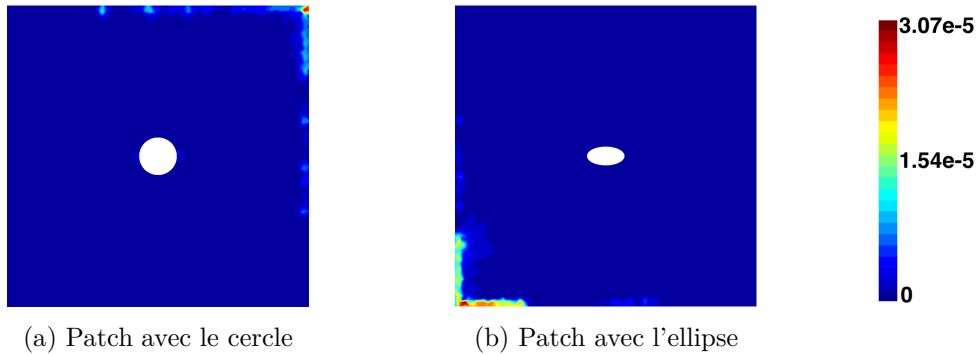


FIGURE 4.29 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique relative au carré pour l'incrément final de la charge pour des patches chevauchant avec les contraintes moyennées.

La nouvelle définition de la contrainte (4.47) donne une erreur moins élevée mais a comme principal inconvénient de construire deux nouveaux projecteurs \mathcal{P}_{et} et \mathcal{P}_{te} . On a remarqué que l'erreur est localisée dans la zone où les patches se chevauchent. On propose un essai avec quatre défauts dans la structure afin d'avoir des intersections où plusieurs patches interviennent et de voir leur influence sur la répartition de l'erreur.

Essai pour une structure avec quatre défauts pour des patches superposées. Le but de cet essai est d'observer si l'erreur est localisée dans la zone où le plus grand nombre de patch se chevauchent. L'essai est toujours celui de traction et est décrit par la Figure 4.30.

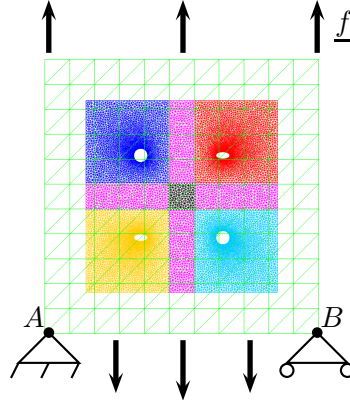


FIGURE 4.30 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Essais pour la structure avec quatre défauts pour des patch superposés.

Comme pour l'essai avec deux défauts pour des patches chevauchant, on compare les deux définitions de la contrainte sur la structure (équations (4.45) et (4.47)). À partir de la Figure 4.30, on numérote les patches de la façon suivante, zone bleue avec le cercle (Patch 1), zone rouge avec l'ellipse (Patch 2), zone jaune avec l'ellipse (Patch 3) et zone cyan avec le cercle (Patch 4). Chaque patch comprend la zone avec le défaut plus deux zones où deux patch se chevauchent (zones en violet) et la zone où les quatre patches se chevauchent (zone en noir).

On utilise la définition (4.46) avec $n_p = 4$, équivalente à (4.45) pour quatre patches. De la même façon on définit une nouvelle formulation équivalente à (4.47) pour n_p patches par,

$$\Sigma = \Sigma^{(c)} - \sum_{i=1}^{n_p} \mathcal{P}_{ci} \left(\mathcal{P}_{ic} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(i)} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n_p} \frac{1}{2} \mathcal{P}_{cj} \mathcal{P}_{ji} \left(\mathcal{P}_{ic} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(i)} \right) \quad (4.48)$$

Avec la définition de la contrainte (4.46), on observe sur les Figures 4.31 et 4.32 que les erreurs sont localisées sur les bords extérieurs des patches. Mais elles ne sont pas localisées là où il y a le plus grand nombre de patches. La valeur maximum des erreurs locales énergétiques pour l'incrément final de la charge est de $2.68e - 3$. Si on prend un seul patch comprenant les quatre défauts, on obtient la même répartition des erreurs.

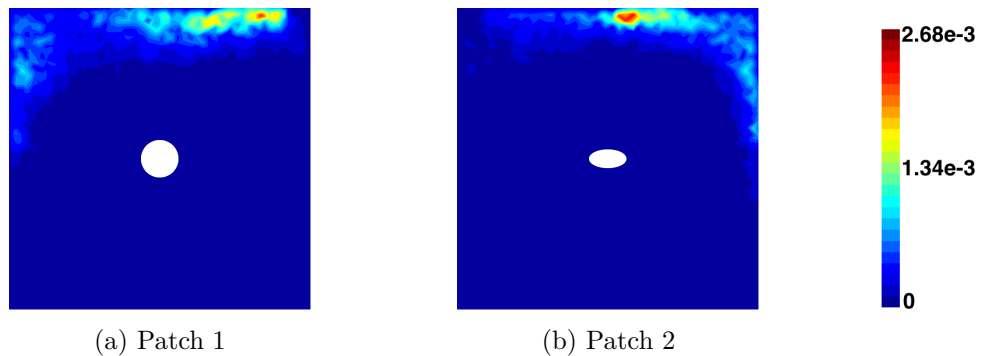


FIGURE 4.31 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique relative au carré pour l'incrément final de la charge pour des patches chevauchant.

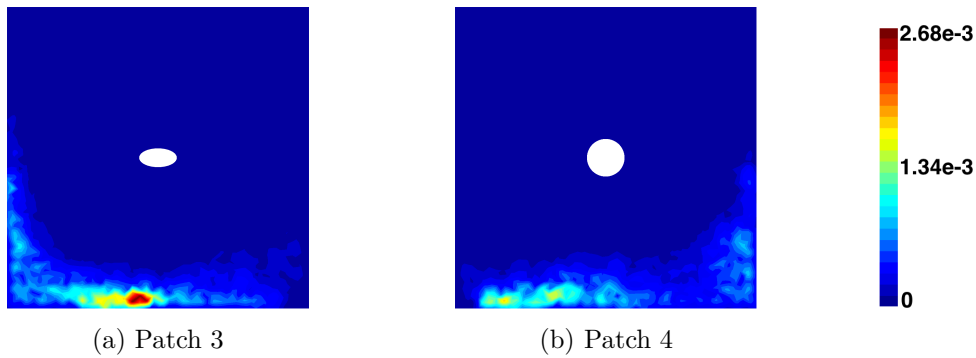


FIGURE 4.32 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique relative au carré pour l'incrément final de la charge pour des patches chevauchant.

Avec la définition de la contrainte (4.48), on observe sur les Figures 4.33 et 4.34 que les erreurs sont localisées aux mêmes endroits que le cas précédent. La valeur maximum des erreurs locales énergétiques pour l'incrément final de la charge est de $2.45e-3$. Soit environ une erreur 10 % plus faible lorsqu'on utilise la définition (4.48).

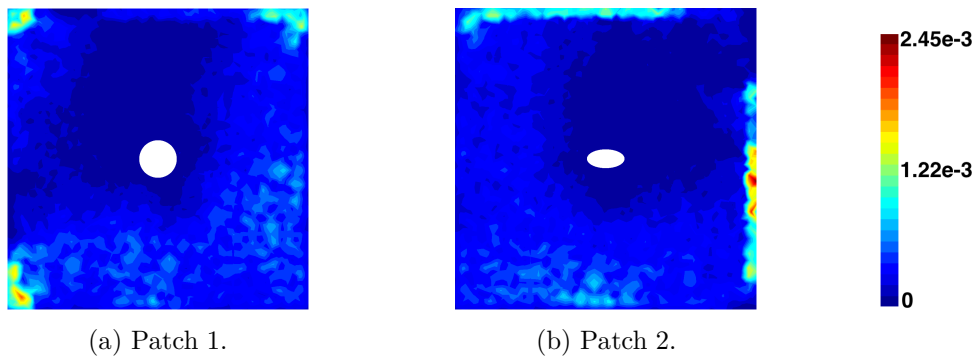


FIGURE 4.33 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique relative au carré pour l'incrément final de la charge pour des patches chevauchant avec les contraintes moyennées.

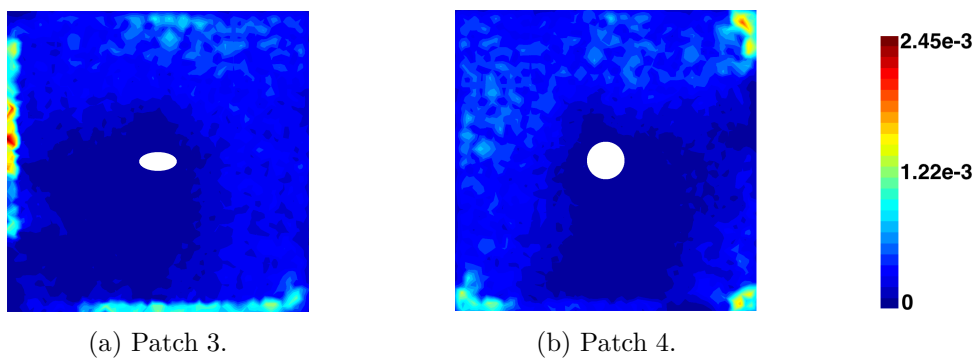


FIGURE 4.34 – **Essai de traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique relative au carré pour l'incrément final de la charge pour des patches chevauchant avec les contraintes moyennées.

En conclusion, la fait de moyenner les contributions dans les zones où les patches se chevauchent donne une erreur plus faible mais a un inconvénient, on doit construire d'autres opérateurs de projection d'un patch sur un autre.

Remarque 4.2.1. On peut étendre la définition (4.48), en prenant en compte les zones où plus de deux patchs se chevauchent (zone en noir sur la Figure 4.30). La définition de la contrainte s'écrit alors,

$$\begin{aligned} \Sigma = & \Sigma^{(c)} - \sum_{i=1}^{np} \mathcal{P}_{ci} \left(\mathcal{P}_{ic} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(i)} \right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{1}{2} \mathcal{P}_{cj} \mathcal{P}_{ji} \left(\mathcal{P}_{ic} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(i)} \right) \\ & + \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{1}{2} \mathcal{P}_{ck} \mathcal{P}_{kj} \mathcal{P}_{ji} \left(\mathcal{P}_{ic} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(i)} \right) + \sum_{\substack{l=1 \\ j \neq i}}^{np} \frac{1}{2} \mathcal{P}_{cl} \mathcal{P}_{lk} \mathcal{P}_{kj} \mathcal{P}_{ji} \left(\mathcal{P}_{ic} \Sigma^{(c)} - \Sigma^{(i)} \right) \end{aligned} \quad (4.49)$$

En utilisant cette définition, on obtient la même répartition de l'erreur énergétique locale mais la valeur est deux fois plus grande, l'erreur est de $5.38e - 3$.

4.2.3 Essais avec différentes histoires de chargement

On étudie maintenant une structure avec un seul défaut mais pour des sollicitations combinées de traction et de cisaillement. On a trois types de sollicitations,

- traction et cisaillement simultanés (Figure 4.35a).
- traction puis cisaillement, ou cisaillement puis traction (Figure 4.35b)

La traction se traduit par un déplacement imposé de 0.005 cm appliqué dans la direction y sur le haut de la plaque et le cisaillement se traduit par un déplacement imposé de 0.01 cm appliqué dans la direction x sur le haut de la plaque. Le bas de la structure est supposée encadrée. Le but de cet essai est de voir comment se comporte notre structure lorsque différents types de sollicitations y sont appliqués en même temps.

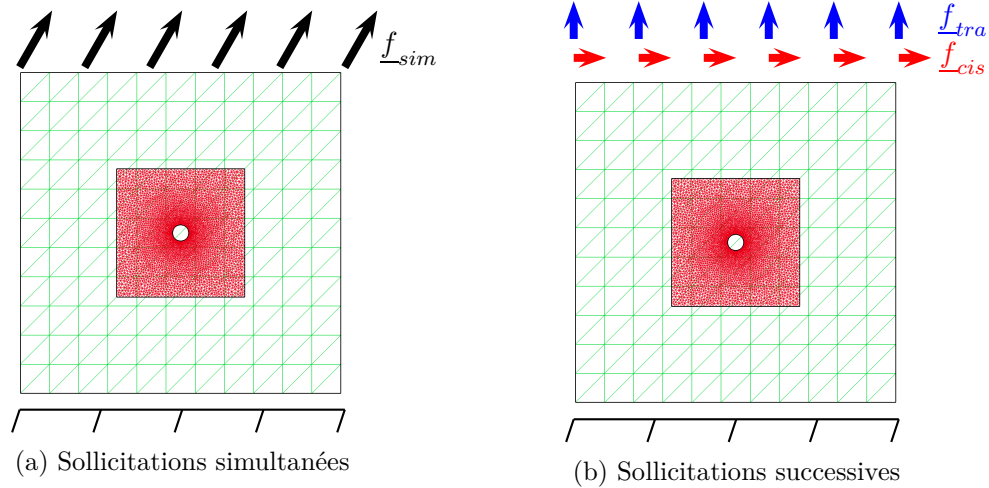


FIGURE 4.35 – Modèles pour des sollicitations combinées.

Chargement simultané Pour les contraintes, lors de l'incrément final de la charge, on remarque que les contraintes σ_{yy} et σ_{xx} sont légèrement perturbées dans le patch, visible respectivement sur les Figures 4.36 et 4.37. Comme les contraintes ne sont pas constantes loin du défaut sur le domaine grossier, à cause des conditions limites. La projection de ces contraintes sur le patch vient perturber la solution sur celui-ci. Ceci à pour cause la perte d'information lors de la projection du maillage fin vers le maillage grossier. Les extrema sont légèrement plus élevés pour le cas avec zoom que pour le cas de référence pour σ_{xx} , avec une différence 5 % et l'inverse pour σ_{yy} , avec une différence de 5 %.

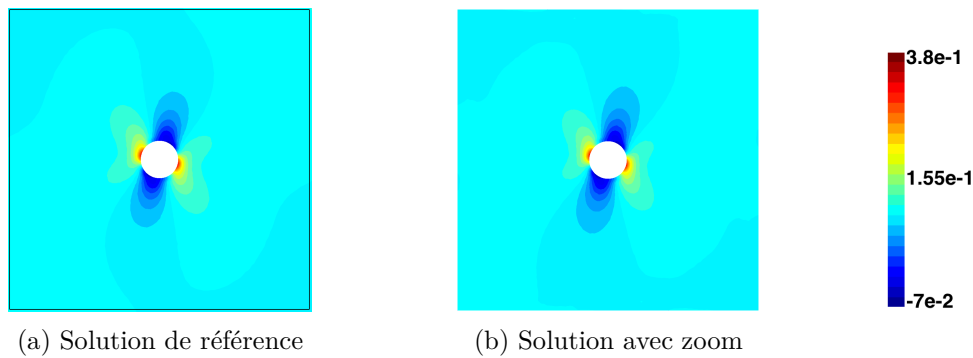


FIGURE 4.36 – **Essai chargement simultané** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{yy} pour l'incrément final de la charge (en *GPa*).

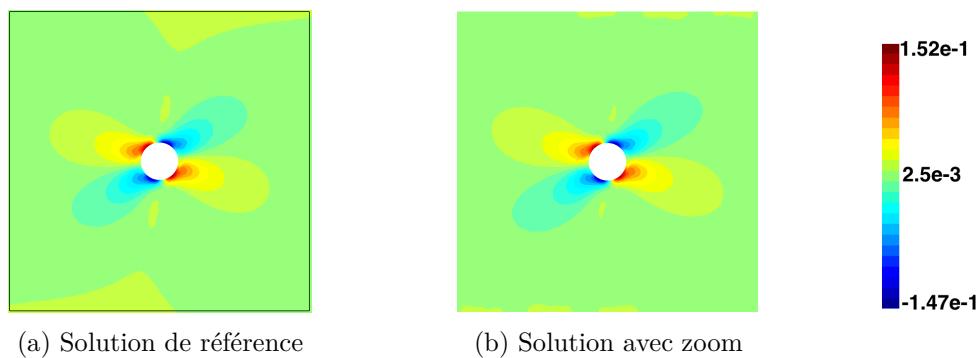


FIGURE 4.37 – **Essai chargement simultané** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{xx} pour l'incrément final de la charge (en *GPa*).

Pour la déformation plastique cumulée, on remarque une répartition similaire, visible sur la Figure 4.38. Les extrema sont légèrement plus élevés pour le cas de référence que pour le cas numérique avec une baisse de 10 %.

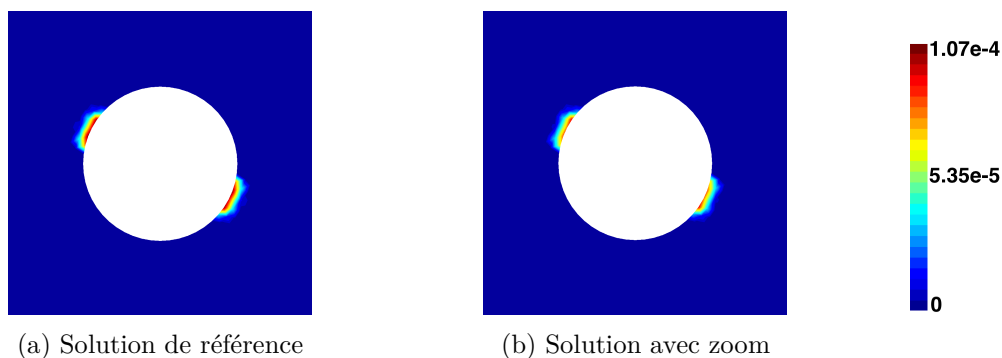


FIGURE 4.38 – **Essai chargement simultané** - *Plaque trouée* - Déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la charge avec focus sur le trou.

La Figure 4.39 met en évidence que l'erreur énergétique est dans la zone de raccord. La valeur des erreurs reste dans les mêmes ordres de grandeurs que les tests précédents.

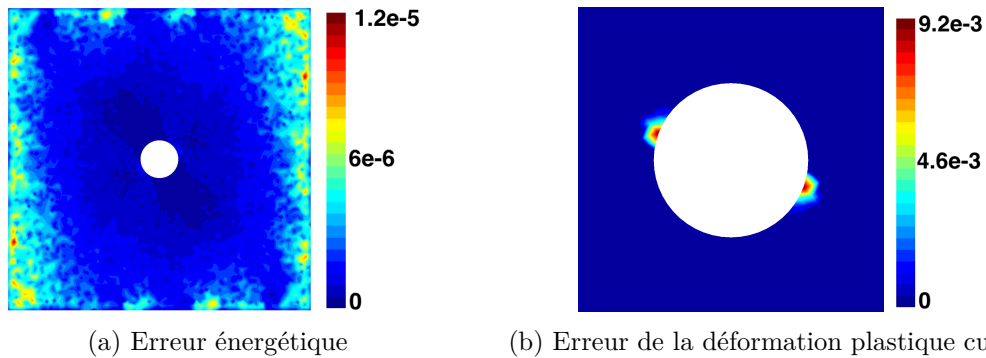


FIGURE 4.39 – **Essai chargement simultané** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique absolue au carré et de l'erreur absolue au carré de la déformation plastique cumulée avec focus sur le trou pour l'incrément final de charge.

Pour les contraintes résiduelles, lors de l'incrément final de la décharge, on remarque que les contraintes σ_{yy} et σ_{xx} sont sous-évaluées dans le patch avec la méthode de zoom structural, visible respectivement sur les Figures 4.40 et 4.41. Ceci est encore la conséquence de la perte d'information lors de la projection du maillage fin vers le maillage grossier.

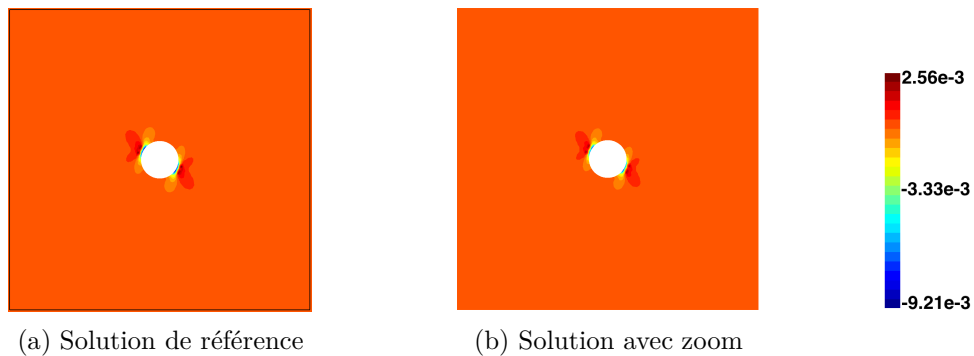


FIGURE 4.40 – **Essai chargement simultané** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{yy} pour l'incrément final de la décharge (en *GPa*).

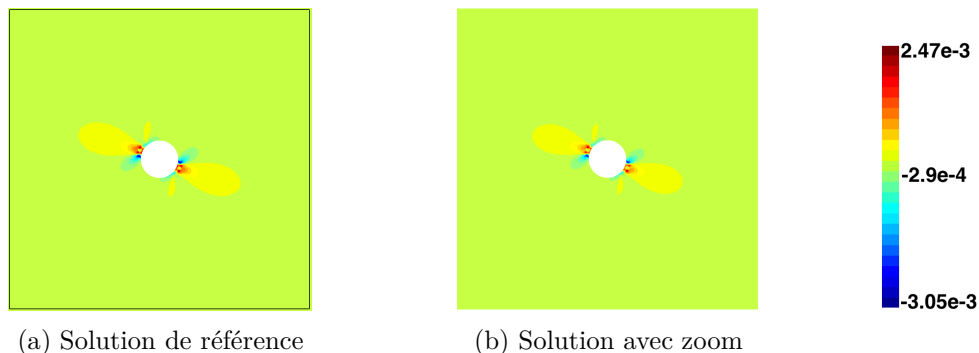


FIGURE 4.41 – **Essai chargement simultané** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{xx} pour l'incrément final de la décharge (en *GPa*).

Les extrema sont légèrement plus élevés pour le cas de référence que pour le cas du zoom pour σ_{xx} , avec une différence 17 % et l'inverse pour σ_{yy} , avec une différence de 17 %. La différence est assez grande, on est peut être dans un cas qui sort de la modélisation de la méthode de zoom structural.

Pour la déformation plastique cumulée, on remarque une répartition de celle-ci similaire pour nos deux cas, visible sur la Figure 4.42. Les extrema sont légèrement plus élevés pour le cas de référence que pour le cas numérique avec une baisse de 10 %.

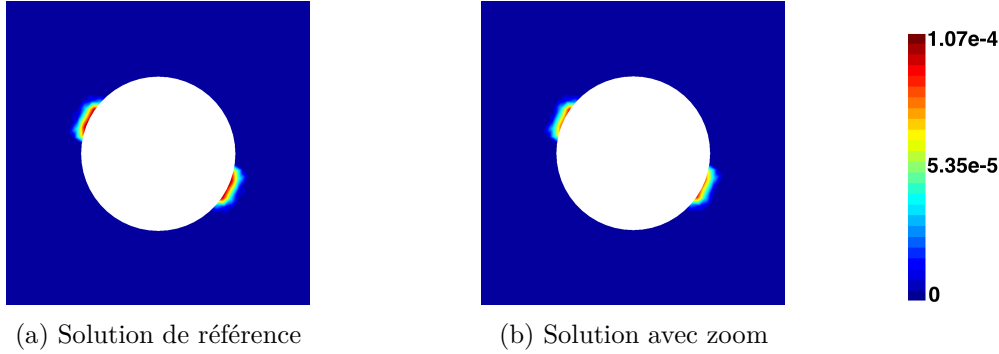


FIGURE 4.42 – **Essai chargement simultané** - *Plaque trouée* - Déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la décharge avec focus sur le trou.

La Figure 4.43 met en évidence que l'erreur énergétique est surtout présente dans la zone de raccord. Mais l'erreur locale est élevée, on est bien dans un cas qui sort de la modélisation de la méthode de zoom structurale malgré le fait que la répartition des contraintes résiduelles est similaire aux cas de référence. Ceci est dû au fait que la projection de la solution du grossier sur le fin vient perturber la solution sur le patch. Mais cette valeur élevée s'explique aussi que lors de l'incrément final de la décharge la norme énergétique au carré de la solution de référence dans la définition de l'erreur locale (3.16) est extrêmement petite ($1.22e - 7$) tandis que le maximum des erreurs absolues locales est compris entre $1.66e - 8$ et $2.25e - 8$ pour tous les incréments de chargement.

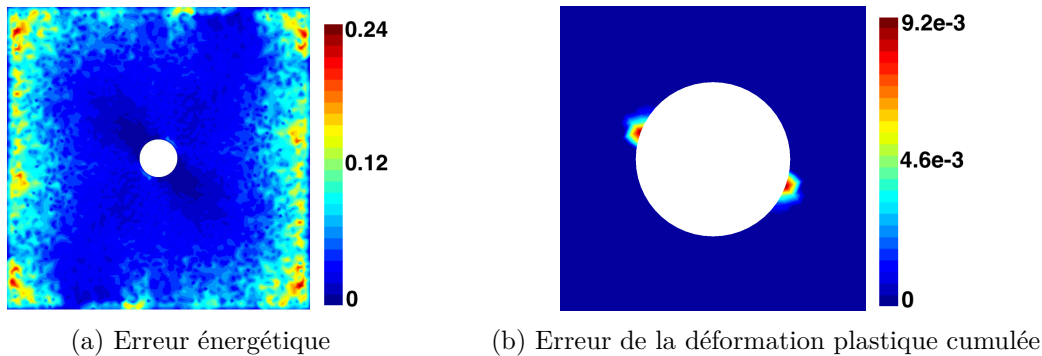


FIGURE 4.43 – **Essai chargement simultané** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique absolue au carré et de l'erreur absolue au carré de la déformation plastique cumulée avec focus sur le trou pour l'incrément final de décharge.

Cisaillement puis traction Pour les contraintes, lors de l'incrément final de la charge, on remarque que les contraintes σ_{yy} et σ_{xx} sont perturbées dans le patch, visible respectivement sur les Figures 4.44 et 4.45. Comme les contraintes ne sont pas constantes loin du défaut sur le domaine grossier, à cause des conditions limites. La projection de ces contraintes sur le patch vient perturber la solution sur celui-ci. Ceci a toujours pour cause la perte d'information lors de la projection du maillage fin vers le maillage grossier. Les extrema sont légèrement plus élevés pour le cas avec zoom que pour le cas de référence pour σ_{xx} , avec une différence 2 % et l'inverse pour σ_{yy} , avec une différence de 17 %.

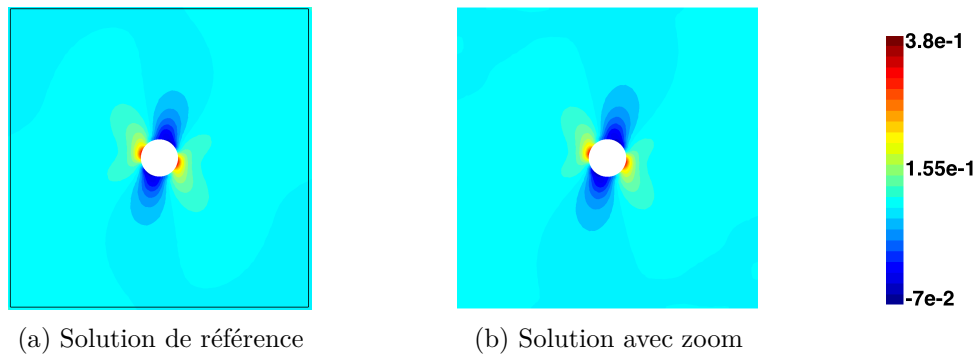


FIGURE 4.44 – **Essai cisaillement puis traction** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{yy} pour l'incrément final de la charge (en *GPa*).

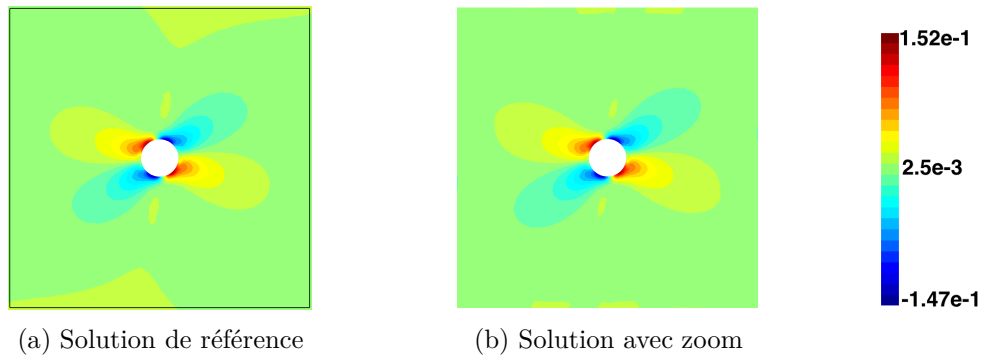


FIGURE 4.45 – **Essai cisaillement puis traction** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{xx} pour l'incrément final de la charge (en *GPa*).

Pour la déformation plastique cumulée, on remarque une répartition similaire pour nos deux cas, visible sur la Figure 4.46. Les extrema sont légèrement plus élevés pour le cas de référence que pour le cas numérique avec une baisse insignifiante de moins de 1 %.

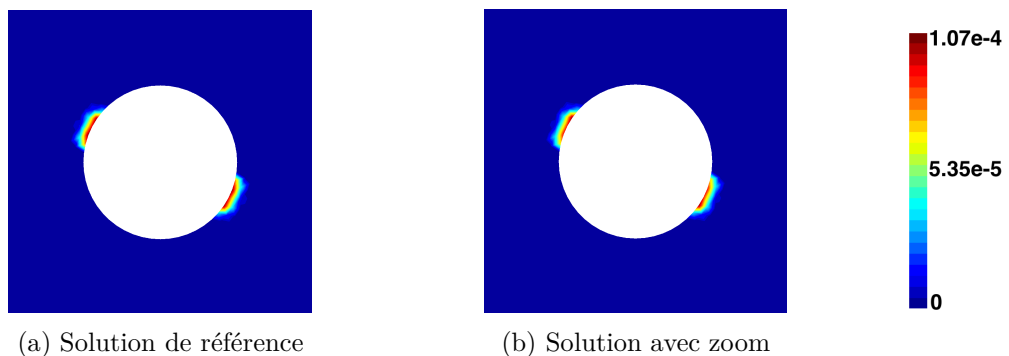


FIGURE 4.46 – **Essai cisaillement puis traction** - *Plaque trouée* - Déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la charge avec focus sur le trou.

La Figure 4.47 met en évidence que l'erreur énergétique est localisée dans la zone de raccord au niveau des nœuds sur la frontière entre les deux domaines du patch en se diffusant à l'intérieur de ce dernier. La valeur des erreurs reste dans les mêmes ordres de grandeurs que les tests précédents.

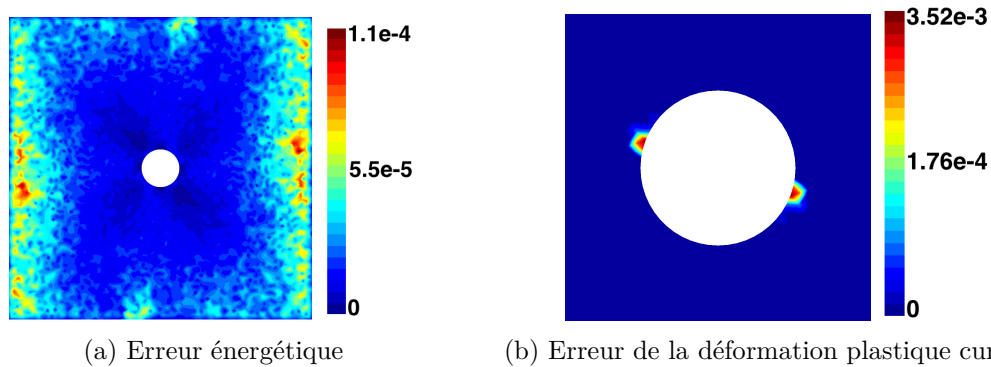


FIGURE 4.47 – **Essai cisaillement puis traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique absolue au carré et de l'erreur absolue au carré de la déformation plastique cumulée avec focus sur le trou pour l'incrément final de charge.

Pour les contraintes résiduelles, lors de l'incrément final de la décharge, on remarque que les contraintes σ_{yy} et σ_{xx} sont très perturbées dans le patch, visible respectivement sur les Figures 4.48 et 4.49. Cette perturbation a pour cause la perte d'information lors de la projection du maillage fin vers le maillage grossier. La différence est assez importante, on est dans un cas qui sort de la modélisation de la méthode de zoom structural.

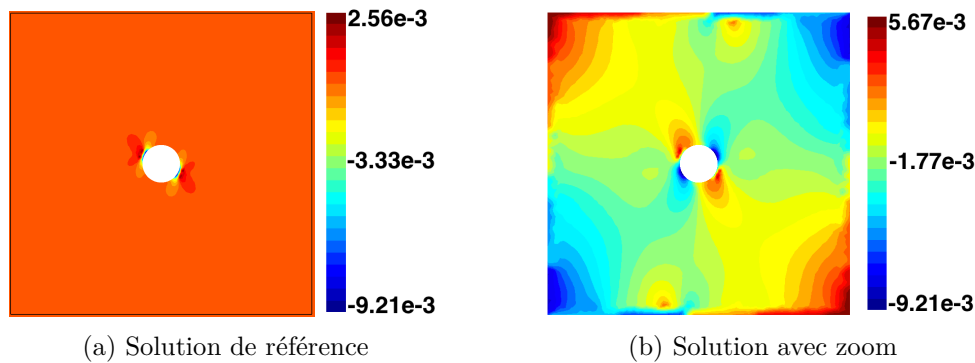


FIGURE 4.48 – **Essai cisaillement puis traction** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{yy} pour l'incrément final de la décharge (en *GPa*).

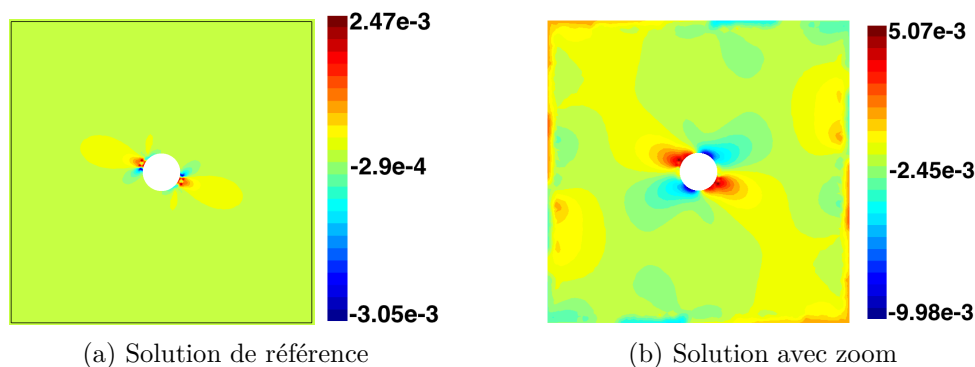


FIGURE 4.49 – **Essai cisaillement puis traction** - *Plaque trouée* - Contrainte σ_{xx} pour l'incrément final de la décharge (en *GPa*).

Pour la déformation plastique cumulée, on remarque une répartition de celle-ci si-

miliaire pour nos deux cas, visible sur la Figure 4.50. Les extrema sont légèrement plus élevés pour le cas de référence que pour le cas numérique avec une baisse de moins de 1 %. Il s'agit de la même déformation plastique cumulée que pour l'incrément final de charge puisque la structure n'a pas plastifié davantage.

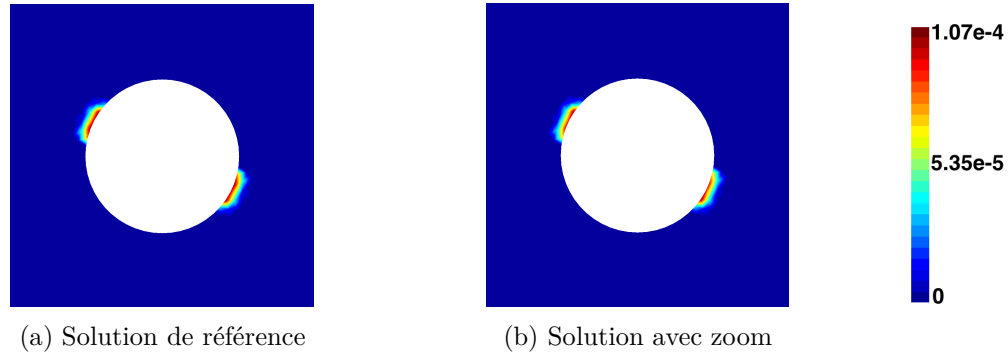


FIGURE 4.50 – **Essai cisaillement puis traction** - *Plaque trouée* - Déformation plastique cumulée pour l'incrément final de la décharge avec focus sur le trou.

La Figure 4.51 met en évidence que l'erreur énergétique est surtout présente dans la zone de raccord. Mais l'erreur locale est très élevée, on est bien dans un cas qui sort de la modélisation de la méthode de zoom structural, hypothèse émise au vu de la répartition des contraintes résiduelles. Ceci est dû au fait que la projection de la solution du grossier sur le fin vient perturber la solution sur le patch. Mais cette valeur élevée s'explique aussi que lors de l'incrément final de la décharge la norme énergétique au carré de la solution de référence dans la définition de l'erreur locale (3.16) est extrêmement petite ($1.26e-7$) tandis que le maximum des erreurs absolues locales est compris entre $2.39e-8$ et $2.21e-6$ pour tous les incréments de chargement.

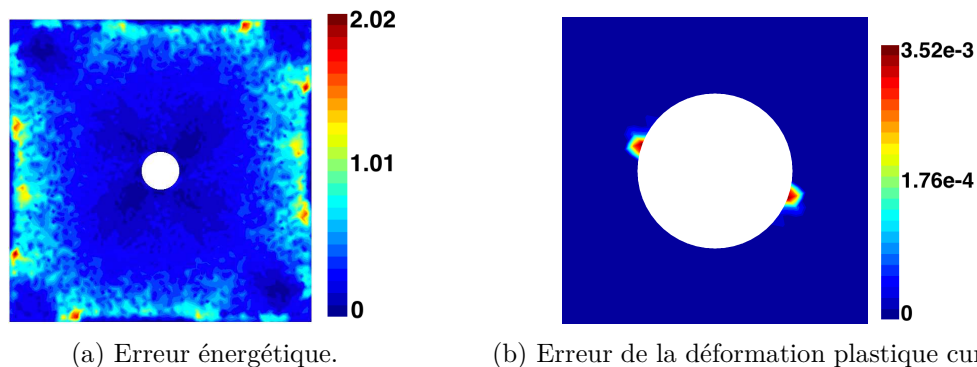


FIGURE 4.51 – **Essai cisaillement puis traction** - *Plaque trouée* - Cartographie de l'erreur énergétique absolue au carré et de l'erreur absolue au carré de la déformation plastique cumulée avec focus sur le trou pour l'incrément final de décharge.

Traction puis cisaillement Les solutions trouvées pour cet essai sont les mêmes que l'essai cisaillement puis traction.

Au vu des différentes études menées, l'extension de la méthode de zoom structural au comportement élastoplastique donne des solutions de bonnes qualités d'un point de vue mécanique si hors de l'intérieur du patch on a un état de contrainte constant. Une limite

4.2. VALIDATION SUR UNE STRUCTURE ÉLASTOPLASTIQUE

néanmoins à l'approche s'est justifié encore plus par rapport au chapitre 3. Il s'agit des sollicitations qui partent du maillage grossier et se diffusent dans le patch, c'est-à-dire un état non constant sur le domaine grossier et aussi sur la zone de raccord. Ceci a pour but de perturber la solution dans le patch au niveau des contraintes mais pas pour la déformation plastique ni pour le déplacement. Cette perturbation a pour cause la perte d'information lors de la projection du maillage fin vers le maillage grossier.

Conclusion générale

Bilan

L'objectif de ce travail était de valider et d'étendre la méthode de zoom structural proposée par Dureisseix.

La première étape fut de comparer la méthode de zoom structural avec la méthode Arlequin standard sans amélioration. On a commencé sur deux exemples 1D, le premier pour un chargement au bord et le deuxième pour un chargement volumique constant. On s'est aperçu que pour un chargement au bord les deux méthodes donnaient les mêmes solutions mais pour un chargement volumique, la méthode de zoom structural capte mieux le profil du champ de déplacement que la méthode Arlequin standard. On a poursuivie la comparaison sur deux exemple 2D. Dans le premier essai où les maillages grossier et fin étaient identiques dans le patch, les deux méthodes donnaient des résultats assez proches mais la méthode Arlequin captait mieux les extrema. Dans le deuxième essai où les maillages grossier et fin étaient imbriqués sur le zone du patch, les deux méthodes donnaient des résultats différents. La méthode de zoom structural donnait le même profil du champ de déplacement que la solution de référence. Tandis qu'avec la méthode Arlequin standard, la solution observée était une moyenne sur les éléments finis du maillage grossier.

La deuxième étape fut de choisir la méthode de résolution du système linéaire. Le choix d'un solveur itératif paraissait compte tenu du nombre de nœuds et donc du nombre de degrés de liberté qui peut être important, on s'est donc focalisé sur les solveurs des espaces de Krylov. Néanmoins ces solveurs ne peuvent pas être utilisés seuls, ils ont besoin d'un préconditionneur ainsi qu'une renumérotation du système pour être efficace en temps CPU. Après divers tests, le choix optimal en temps CPU était le solveur GMRes accompagné par une factorisation incomplète LU de Crout pour préconditionnement et de la renumérotation *AMD*.

La troisième étape fut de valider mécaniquement les solutions obtenues par la méthode de zoom structural ainsi de faire une étude sur les paramètres considérés dans la stratégie de zoom structural et de voir leurs influences sur les solutions obtenues. Les différents tests étaient sur,

- la taille de la zone de raccord entre les deux domaines
- la taille du patch par rapport au défaut,
- les effets de la symétrie du maillage fin,
- le degré d'incompatibilité entre les deux maillages,
- le patch débordant, c'est-à-dire une partie du patch n'est pas contenue dans le domaine grossier,
- la procédure de recalage du champ de déplacement sur le patch.

Après cette étude paramétrique, la méthode de zoom structural donnait des résultats mécaniquement acceptables si certains paramètres étaient définis correctement, en particulier la taille de la zone de raccord et le rapport entre la taille du patch et celle du défaut.

La quatrième étape fut d'étendre la méthode de zoom structural à un comportement élastoplastique dans l'intérieur du patch. Le problème d'évolution fut résolu par une méthode de Newton dans lequel la matrice élastoplastique sur le patch et les forces internes sur les deux domaines sont calculées. L'extension fut construite avec l'hypothèse que les déformations plastiques sont présentes uniquement dans l'intérieur du patch. Deux tests d'arrêts furent comparés, le premier sur la norme des forces internes sur toute la structure, le deuxième sur la norme des forces internes uniquement du patch. Le deuxième fut choisi car il permet une convergence, en terme d'itération, de l'algorithme de Newton acceptable malgré le fait que l'on perde en précision surtout visible pour les incréments de repos. Pour valider la méthode de zoom structural pour un comportement élastoplastique, on a fait divers essais,

- essai de traction et de cisaillement pour un plaque trouée,
- essai de traction et de cisaillement pour une structure avec plusieurs défauts avec ou non des patches chevauchant,
- essai avec différentes histoires de chargement.

Les solutions obtenues étaient mécaniquement acceptable sauf pour l'incrément final de la décharge pour l'essai avec différentes histoires de chargement. Ce qui pose une limite à notre modèle lié à la perte d'information lors du transfert du maillage fin vers le maillage grossier, et c'est ceci qui perturbe la solution sur le patch.

Perspectives

Dans la continuité de notre travail de thèse, nous pouvons tenter de tester la méthode de zoom structural pour un autre modèle non linéaire dans l'intérieur du patch, les modèles de zones cohésives [32] et [16]. Les modèles de zones cohésives nécessitent une procédure pour transformer le maillage [33]. L'implémentation dans MATLAB[®] de cette procédure, pour l'extension de la méthode de zoom structural, se fait de la manière suivante,

- Étape 1 :
 1. Chercher les éléments qui appartiennent à la zone de raccord.
 2. Chercher les éléments qui appartiennent à l'intérieur du patch.
- Étape 2 :
 1. Création d'une liste de connectivité entre chaque nœud et les éléments auxquels ils appartiennent.
 2. Création d'une liste des voisins du chaque élément.
 3. Duplication et numérotation des nœuds des éléments trouvés à l'Étape 1 b) avec allocation des degrés de liberté de ces nouveaux nœuds.
 4. Mise à jour des nœuds des éléments ainsi que du nombre de nœud et du nombre des degrés de liberté.
- Étape 3 :
 1. Chercher les nœuds pour lesquels tous les éléments auxquels ils sont connectés appartiennent à l'intérieur du patch.
 2. Supprimer les nœuds trouvés à l'Étape 3 a) et mise à jour des degrés de liberté, des éléments, du nombre de nœud et du nombre de degrés de liberté.

4.2. VALIDATION SUR UNE STRUCTURE ÉLASTOPLASTIQUE

- Étape 5 : Création du fichier maillage.msh.
- Étape 6 : Création de la liste des éléments cohésives

Le problème d'évolution peut être résolu par une méthode de Newton. La difficulté vient de l'initialisation de champs de déplacement. En effet l'un des opérateur intervenant à la construction du système tangent nécessite le saut de déplacement si ce dernier est initialisé à 0, la zone cohésive ne s'ouvre pas.

Une autre étude serait de voir si on ne peut pas améliorer le transfert du maillage fin vers le maillage grossier afin de limiter la perte d'information. Cela permettrait d'avoir des solutions plus fidèles à la solution de référence et peut être d'obtenir les bonnes contraintes pour l'incrément final de décharge.

Bibliographie

- [1] Grégoire Allaire. *Analyse numérique et optimisation*, chapter Recherche Opérationnelle. Ellipses, 2012. http://www.editions.polytechnique.fr/files/pdf/EXT_1255_8.pdf.
- [2] Philippe Angot, Jean-Paul Caltagirone, and Khodor Khadra. Une méthode adaptative de raffinement local : La correction du flux à l'interface. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I*, 315(6) :739–745, 1992.
- [3] Faker Ben Belgacem. The mortar finite element method with Lagrange multipliers. *Numer. Math.*, 84(2) :173–197, 1999.
- [4] Faker Ben Belgacem and Yvon Maday. The mortar element method for three dimensional finite elements. *RAIRO Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 31(2) :289–302, 1997.
- [5] Hachmi Ben Dhia. Multiscale mechanical problems : the Arlequin method. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy*, 326(12) :899–904, 1998.
- [6] Hachmi Ben Dhia. Numerical modelling of multiscale problems : the arlequin method. *CD ECCM99*, pages 1–1, 1999.
- [7] Hachmi Ben Dhia. Local-Global approaches. The Arlequin method. In *5ème Colloque National de Calcul des Structures, Giens 2005*, Giens (Var), France, May 2005.
- [8] Hachmi Ben Dhia and Guillaume Rateau. Application of the arlequin method to some structures with defects. *Revue Européenne des Éléments*, 11(2-4) :291–304, 2002.
- [9] Hachmi Ben Dhia and Guillaume Rateau. The arlequin method as a flexible engineering design tool. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(11) :1442–1462, 2005.
- [10] Nathan Benkemoun, Jean-Baptiste Colliat, and Adnan Ibrahimbegovic. Éléments finis enrichis pour la modélisation de la rupture des matériaux hétérogènes. In *10e colloque national en calcul des structures*, page Clé USB, Giens, France, May 2011.
- [11] Christine Bernardi and Yvon Maday. Mesh adaptivity in finite elements by the mortar method. Technical Report R94029, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie – Centre National de la Recherche Scientifique, January 1995.
- [12] Christine Bernardi, Yvon Maday, and Anthony T. Patera. A new non conforming approach to domain decomposition : The mortar element method. In Haim Brezis and Jacques-Louis Lions, editors, *Collège de France Seminar*. Pitman, 1994. This paper appeared as a technical report about five years earlier.
- [13] Christine Bernardi, Yvon Maday, and Anthony T. Patera. Domain decomposition by the mortar element method. In H.G. Kaper and M. Garbey, editor, *Asymptotic*

- and Numerical Methods for Partial Differential Equations with Critical Parameters*, pages 269–286. N.A.T.O. ASI, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [14] Marc Bonnet and Attilio Frangi. *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Editions de l'Ecole Polytechnique, 2006.
- [15] Achi Brandt. *Multi-Level Adaptive Technique (MLAT) for Fast Numerical Solution to Boundary Value Problems*, volume 18, pages 82–89. 02 2008.
- [16] Fabien Cazes. *Construction et implémentation de lois cohésives extrinsèques*. PhD thesis, Institut national des sciences appliquées de Lyon, 2010.
- [17] Loic Daridon, David Dureisseix, Sylvain Garcia, and Stéphane Pagano. Changement d'échelles et zoom structural. In *10e colloque national en calcul des structures*, page Clé USB, Giens, France, May 2011.
- [18] David Dureisseix and Henri Bavestrello. Information transfer between incompatible finite element meshes : application to coupled thermo-viscoelasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(44-47) :6523–6541, 2006.
- [19] Jocelyne Erhel, Nabil Nassif, and Bernard. Philippe. Calcul matriciel et systèmes linéaires, cours. 2004.
- [20] Sylvain Garcia. Changement d'échelle et zoom structural. 2010.
- [21] Paul Louis George and Éric Saltel. Postprocessing and graphics, 1993.
- [22] Paul Germain. *Cours de mécanique des milieux continus*. Number vol. 1 in Cours de mécanique des milieux continus. Masson, 1973.
- [23] Paul Germain. *Mécanique : énoncés et résultats*. Ecole Polytechnique, 1984.
- [24] Paul Germain and Patrick Muller. *INTRODUCTION A LA MECHANIQUE DES MILIEUX CONTINUS*. MASSON, 1980.
- [25] Bastien Gourdon. Méthode de zoom structural et intersection de maillage. 2012.
- [26] Mustapha Hached. *Matrix Krylov methods applied to partial differential equations*. Theses, Université du Littoral Côte d'Opale, December 2012.
- [27] Wolfgang Hackbusch. *Local Defect Correction Method and Domain Decomposition Techniques*, volume 5, pages 89–. 01 1984.
- [28] Wolfgang Hackbusch. *Multi-Grid Methods and Applications*, volume 4. 01 1985.
- [29] Khodor Khadra, Philippe Angot, Jean Paul Caltagirone, and Patrice Morel. Concept de zoom adaptatif en architecture multigrille locale ; étude comparative des méthodes l.d.c., f.a.c. et f.i.c. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 30(1) :39–82, 1996.
- [30] Steve McCormick. Fast adaptive composite grid (fac) methods : Theory for the variational case. *Computing, Suppl.*, 5, 01 1984.
- [31] Sébastien Meunier. Méthode arlequin. 2009.
- [32] Vinh Phu Nguyen. Discontinuous galerkin/extrinsic cohesive zone modeling : implementation caveats and applications in computational fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*, 128 :37–68, 9 2014.
- [33] Vinh Phu Nguyen. An open source program to generate zero-thickness cohesive interface elements. *Advances in Engineering Software*, 74 :27–39, 8 2014.
- [34] Guillaume Rateau. *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles : applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées*. PhD thesis, 2003. Thèse de doctorat dirigée par Ben Dhia, Hachmi Mécanique Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris 2003.

- [35] Youssef Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Other Titles in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- [36] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computational Inelasticity*. Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer New York, 2006.
- [37] MATLAB[®]. amd. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/amd.html>.
- [38] MATLAB[®]. bicg. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/bicg.html>.
- [39] MATLAB[®]. bicgstab. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/bicgstab.html>.
- [40] MATLAB[®]. bicgstabl. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/bicgstabl.html>.
- [41] MATLAB[®]. cgs. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/cgs.html>.
- [42] MATLAB[®]. colamd. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/camd.html>.
- [43] MATLAB[®]. dissect. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/dissect.html>.
- [44] MATLAB[®]. gmres. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/gmres.html>.
- [45] MATLAB[®]. ilu. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/ilu.html>.
- [46] MATLAB[®]. qmr. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/qmr.html>.
- [47] MATLAB[®]. symrcm. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/symrcm.html>.
- [48] MATLAB[®]. tfqmr. <https://fr.mathworks.com/help/matlab/ref/tfqmr.html>.

Méthode de zoom structural étendue aux hétérogénéités non linéaires.

Une approche multi-échelle introduit une méthode de zoom structural dans une zone d'intérêt, appelé le patch, utilisant uniquement des opérateurs de projection de champs. Les différents comportements dans le patch et dans la structure globale sont pris en compte sans utiliser des paramètres de poids entre énergies locales et globales comme la méthode Arlequin. Notre problème initial est de fiabiliser numériquement la méthode de zoom structural pour le cas linéaire, et plus précisément de choisir un solveur performant sur les espaces de Krylov, ainsi qu'un préconditionnement et une rénumérotation efficaces et adaptés au système à résoudre. Une fois le solveur choisi, cette approche est validée mécaniquement sur deux essais, un de traction et l'autre de cisaillement. Une étude paramétrique sur le patch est effectuée afin d'obtenir une solution acceptable. L'objectif suivant est d'étendre cette approche à des régions comportant des hétérogénéités à comportement non linéaire. On s'est intéressé au comportement élastoplastique. L'hypothèse de départ est de considérer le comportement élastoplastique uniquement à l'intérieur du patch et un comportement élastique sur la structure globale ainsi que sur la zone de raccord. On valide ensuite cette approche avec différents essais comprenant plusieurs défauts et donc plusieurs patches ainsi que des histoires de chargement différents.

Mots-Clés : Méthodes multi-échelles, Approche local-global, Méthode de zoom structural, Décomposition de domaine, Élasticité, Plasticité, Méthode de Newton.

A structural multiscale zooming method extended to non linear heterogeneous media.

A multi-scale approach introduces a structural zoom method into a region of interest, called the patch, using only field projection operators. The different behaviours in the patch and in the overall structure are taken into account without using weight parameters between local and global energies such as the Arlequin method. Our initial problem is to digitally reliable the structural zoom method for the linear case, and more precisely to choose a high-performance solver on Krylov spaces, as well as effective preconditioning and ordering adapted to the system to be solved. Once the solver is chosen, this approach is mechanically validated in the mean of two tests, namely traction and shear. A parametric study of the patch is performed to obtain an acceptable solution. The next objective is to extend this approach to regions with heterogeneities of non-linear behaviour. The method has been reached out for elastoplastic behaviour. Initial hypothesis assumes the elastoplastic behaviour only inside the patch and an elastic behaviour of the overall structure as well as of the gluing area. Finally, this approach is validated with different tests including several faults and therefore several patches as well as different loading history.

Keywords : Multiscale method, Local-global approche, Structural zooming method, Domain decomposition, Elasticity, Plasticity, Newton method.

