

Analyses d'erreur pour des méthodes d'éléments finis de l'équation elliptique de Monge-Ampère et du problème couplé Stationnaire Navier-Stokes/Darcy

Jamal Adetola

▶ **To cite this version:**

Jamal Adetola. Analyses d'erreur pour des méthodes d'éléments finis de l'équation elliptique de Monge-Ampère et du problème couplé Stationnaire Navier-Stokes/Darcy. Mathématiques [math]. Institut de Methématiques et de Sciences physiques (UAC), 2018. Français. NNT : . tel-02482193

HAL Id: tel-02482193
https://hal.science/tel-02482193

Submitted on 17 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



République du Bénin
Université d'Abomey-Calavi (UAC)
Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques (IMSP)
Centre d'Excellence Africain en Sciences Mathématiques et Applications (CEA-SMA)
Unité de Recherche en Mathématiques et en Physiques Mathématiques (URMPM)

THÈSE

Option : Mathématiques Appliquées
Spécialité : *Analyse Numérique*

Présentée et soutenue publiquement le 19 décembre 2018 par

Jamal ADETOLA

Pour l'obtention du grade de Docteur de l'**Université d'Abomey-Calavi**

Titre de la thèse

Analyses d'erreur pour des méthodes d'éléments finis de l'équation elliptique de Monge-Ampère et du problème couplé stationnaire Navier-Stokes/ Darcy.

Directeur de thèse

Professeur Gérard AWANOU, *University of Illinois at Chicago, USA.*

Tuteur

Docteur Bernadin AHOUNOU, *Université d'Abomey-Calavi, Bénin.*

Résumé

Ce travail porte sur une analyse d'erreur a priori pour une méthode d'éléments finis mixtes de l'équation elliptique de **Monge-Ampère** et une analyse d'erreur a posteriori pour une méthode d'éléments finis mixtes du problème couplé stationnaire **Navier-Stokes/Darcy**. Dans un premier temps, nous avons considéré : **Problème de Monge-Ampère**

Pour ce problème nous avons suivi les étapes suivantes :

1. Nous avons écrit une formulation faible mixte.
2. Ce problème faible est approché par un problème discret dont les espaces sont construits à l'aide d'éléments finis mixtes $(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_1^{2\times 2})$. L'existence de solution pour le problème discret s'obtient à l'aide du théorème du point fixe de Brouwer. La méthode d'éléments finis est celle du gradient reconstruit. Cette méthode est détaillée dans la thèse.
3. Pour prouver la convergence de la méthode, nous avons établi une majoration d'erreur a priori entre la solution du problème continu et celle du problème discret.
4. Un résultat de régularité elliptique est établi qui a servi dans la majoration d'erreur a priori.

Et dans un deuxième temps, nous avons considéé : **Problème couplé stationnaire Navier-Stokes/Darcy**

Jamal ADETOLA ©URPM/IMSP 2018
adetolajamal58@yahoo.com

Pour ce problème nous avons adopté une démarche analogue à celle du problème précédent.

1. Dans un premier temps, nous avons écrit une formulation faible mixte du problème continu.
2. Pour ce problème, nous avons proposé une discrétisation conforme à l'aide d'éléments finis mixtes : celui de Bernardi-Raugel et Raviart-Thomas pour la vitesse et les fonctions constantes par morceaux pour la pression.
3. Pour l'analyse d'erreur a posteriori, nous avons construit de nouveaux indicateurs d'erreur. Nous avons prouvé que cette famille d'indicateurs d'erreur est fiable et efficace. Ceci a fait l'objet d'une publication. *Residual-based a posterior error estimates for a conforming finite element discretization of the Navier-Stokes/Darcy coupled problem.*

(Journal of Pure and Applied Mathematics : Advances and Applications Volume 18, Number 1, 2017, Pages 37-73)

Jamal ADETOLA ©URPM/IMSP 2018
adetolajamal58@yahoo.com

Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Dieu. Ensuite mes remerciements vont à l'endroit de mes directeurs de thèse professeur Gérard AWANOU et professeur Bernadin AHOUNOU. Une fois encore chers professeurs, merci pour votre patience, votre rigueur et votre disponibilité. Ce travail n'aurait pas vu le jour sans le professeur Bernadin AHOUNOU. C'est le moment pour moi d'exprimer ma gratitude envers vous. Cher professeur, merci infiniment pour le choix que vous avez porté en ma modeste personne. Merci aussi professeur pour m'avoir orienté vers le domaine d'analyse numérique avec votre choix pertinent du sujet de recherche. Je voudrais particulièrement remercier le Professeur Aurélien GOUDJO. Cher Professeur, merci pour tout et surtout pour la formation que vous nous avez donnée en programmation et aussi pour votre très grande disponibilité à travailler avec nous pour les cours doctoraux. Je remercie aussi le Professeur Joël TOSSA et le Professeur Léonard TODJIHOUNDE respectivement Directeur de l'école doctorale des sciences exactes et applications à l'université d'Abomey-Calavi et Directeur de l'Institut de Mathématiques et des Sciences Physiques. Mes remerciements vont également vers le Professeur Aboubacar MARCOS pour son aide dans l'obtention de la bourse du gouvernement de l'Etat béninois dans le programme d'appui aux doctorants et le Professeur Côme GOUDJO pour le cours qu'il nous a donné en Master et pour ses conseils. Je remercie également Dr Wilfrid HOUEDANOU,

surtout pour sa collaboration sur le problème couplé Navier-Stokes/Darcy. Je porte un regard particulier à tous les amis du Labo 3A. Je veux nommer Uriel AGUEMON, Louis KOUYE et bien d'autres. Je voudrais aussi remercier mes parents et mon épouse Wassiath ACHAFFA pour leurs soutiens moraux et spirituels. Mes remerciements iront enfin vers tous ceux qui m'ont soutenu de près ou de loin pour un aboutissement heureux de ce travail en particuliers Arikè, Adénikè et Ismaël Adémola.

Listes des notations

1. $\mathbb{R}$ espace vectoriel des nombres réels
2. $\mathbb{C}$ espace vectoriel des nombres complexes
3. $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels
4. V' le dual topologique d'un espace vectoriel V
5. $d = 2$ ou $d = 3$
6. $\mathbb{R}^{d\times d}$ l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $d \times d$
7. $\mathbb{M}^T$ transposée d'une matrice $\mathbb{M} \in \mathbb{R}^{d\times d}$
8. $\mathbb{I}$ matrice unité de $\mathbb{R}^{d\times d}$
9. Ω ouvert borné polygonal de $\mathbb{R}^d$
10. Pour un ouvert borné Ω, $\partial\Omega$ dénote le bord de Ω
11. $\mathbb{P}_k(\Omega)$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k sur Ω
12. $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ sur Ω et à support compact contenu dans Ω
13. $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur $\mathcal{D}(\Omega)$
14. $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions de carré intégrable sur Ω
15. $L^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions essentiellement bornées
16. $H^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions dont les dérivées m-ièmes(faibles) appartiennent à $L^2(\Omega)$

17. $H_0^m(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions de $H^m(\Omega)$ satisfaisant une condition au bord de type Dirichlet homogène
18. $(.,.)_\Omega$ le produit scalaire de $L^2(\Omega)$
19. $(.,.)_{m,\Omega}$ le produit scalaire dans $H^m(\Omega)$ ou dans $[H^m(\Omega)]^d$
20. $(.,.)_{\mathbb{R}^d}$ produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$
21. $\langle .,. \rangle_\Gamma$ crochet de dualité $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$
22. $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de u par rapport à la variable x_i
23. $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x_i^m}$ la dérivée partielle d'ordre α de u par rapport à x_i
24. ∇u désigne gradient de u (ligne ou colonne)
25. $D^2 u$ désigne la Hessienne de u
26. $\triangle u$ désigne le laplacien de u
27. $\|\cdot\|$ la norme sur $L^2(\Omega)$
28. $\mathcal{T}_h$ triangulation de Ω
29. $K \in \mathcal{T}_h$ triangle ou tétraèdre
30. $|K|$ aire ou volume de K
31. $\widehat{K}$ triangle ou tétraèdre de référence
32. e arête ou face de K
33. $|e|$ longueur ou l'aire de e
34. $\|\cdot\|_K$ la norme sur l'élément K
35. $\|\cdot\|_e$ la norme sur l'arête e
36. $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^{d\times d}}$ la norme spectrale d'une matrice
37. $\|\cdot\|_{m,K}$ la norme sur l'espace de Sobolev $H^m(K)$ ou sur $[H^m(K)]^d$
38. $\|\cdot\|_{1/2,\partial K}$ la norme de l'espace de Sobolev fractionnaire $H^{1/2}(\partial K)$
39. $|\cdot|_{\mathbb{R}^d}$ norme Euclidienne d'un vecteur de $\mathbb{R}^d$
40. $|\cdot|_{m,K}$ la semi-norme de l'espace de Sobolev $H^m(K)$ ou sur $[H^m(K)]^d$

41. $\mathcal{E}_h$ ensemble de toutes les arêtes ou faces de $\mathcal{T}_h$
42. $\mathcal{E}_h^i$ ensemble de toutes les arêtes ou faces internes de $\mathcal{T}_h$
43. $\mathcal{E}_h^b$ ensemble de toutes les arêtes ou faces au bord de Ω
44. $\mathbf{n} = (n_{e_1}, n_{e_2})$ normale extérieure d'une arête ou face e
45. $\tau = (-n_{e_2}, n_{e_1})$ vecteur tangent à l'arête
46. $\text{diam}(e) = h_e$ diamètre de e
47. $h_K = \text{diam}(K)$ diamètre d'un élément K
48. $\delta_{i,j}$ symbole de Kronecker
49. $p.p$ presque partout
50. Ω_S Domaine borné polygonal à bord $\partial\Omega_S$ représentant le milieu fluide
51. Ω_D Domaine borné polygonal à bord $\partial\Omega_D$ représentant le milieu poreux
52. $\mathcal{T}_h^S$ triangulation de Ω_S
53. $\mathcal{T}_h^D$ triangulation de Ω_D
54. $\mathcal{E}_h^S$ ensemble de toutes les arêtes ou faces de $\mathcal{T}_h^S$
55. $\mathcal{E}_h^D$ ensemble de toutes les arêtes ou faces de $\mathcal{T}_h^D$
56. $\mathcal{E}(K)$ ensemble de toutes les arêtes ou faces de K
57. $\mathcal{E}_h(K)$ ensemble de toutes les arêtes ou faces de $\mathcal{T}_h$ incluses dans K
58. $\mathcal{N}_h$ ensemble des nœuds de $\mathcal{T}_h$
59. $\mathcal{N}(K)$ ensemble des nœuds de K
60. $\mathcal{N}_h(K)$ ensemble des nœuds de $\mathcal{T}_h$ appartenant à K
61. $diam(e)$ diamètre d'une face ou arête e
62. F_K application linéaire affine de $\widehat{K}$ sur K
63. $a \lesssim b$: il existe une constante positive C indépendante de a et b telle que $a \leqslant Cb$

64. w_K réunion des éléments partageant une arête ou face commune avec K
65. w_e réunion des éléments partageant l'arête ou face e
66. $w_{\mathbf{x}}$ réunion des éléments partageant le nœud $\mathbf{x}$
67. $\tilde{w}_K$ réunion des éléments partageant un nœud avec K
68. $\tilde{w}_e$ réunion des éléments partageant un nœud avec e
69. $[\![\phi]\!]_e$ le saut de ϕ à travers l'arête ou face e
70. $\lambda_{i,K}$ fonctions coordonnées barycentriques associées à K
71. b_K fonction bulle associée à K
72. F_{ext} opérateur d'extension $F_{ext} : C^0(e) \longrightarrow C^0(K)$
73. $\mathbf{R}_{*,K}$ résidu exacte sur K pour $K \in \mathcal{T}_h^*$, $* = S$ ou D
74. $\mathbf{r}_{*,K}$ résidu approché sur K pour $K \in \mathcal{T}_h^*$, $* = S$ ou D
75. ζ_K terme d'approximation local associé à K
76. $\zeta := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \zeta_K^2 \right)^{1/2}$ terme d'approximation global
77. Θ_K indicateur d'erreur local associé à K
78. $\Theta := \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Theta_K^2 \right)^{1/2}$ indicateur d'erreur global
79. I_{Cl}^0, I_{Cl}, $\mathcal{P}_{Cl}$ opérateurs d'interpolation de Clément

Table des matières

1 Préliminaires **20**

1.1 Introduction 21

1.2 Opérateurs 21

1.3 Espaces de Sobolev classiques 24

1.3.1 Quelques injections de Sobolev 27

1.4 Quelques outils d'analyse 27

1.4.1 Quelques inégalités 27

1.4.2 Formules de Green 28

1.4.3 Quelques théorèmes utiles 29

1.4.4 Triangulation 30

1.4.5 Eléments finis de Lagrange 32

1.4.6 Quelques inégalités d'interpolation 34

1.4.7 Inégalités d'interpolation de Lagrange 35

1.5 Analyse d'erreur à priori pour un problème modèle 36

1.5.1 Equation de Poisson 36

1.5.2 Formulation variationnelle 36

1.5.3 Discrétisation 37

1.5.4 Relation d'orthogonalité de Galerkin 37

1.5.5 Quelques propriétés de la forme a 37

1.5.6 Estimation d'erreur en norme L^2 38

1.5.7 Régularité elliptique 38

2 Régularité elliptique $W^{2,p}$ dans un domaine polygonal 40
2.1 Introduction 40
2.2 Préliminaires et notations 42
2.2.1 Notations 42
2.2.2 Quelques inégalités 42
2.3 Estimation L^p de la solution forte u d'une équation elliptique d'ordre deux 46
2.3.1 Estimation L^p de la solution forte de l'équation de Poisson 47
2.3.2 Estimation L^p de la solution forte d'une équation elliptique d'ordre deux (Cas général) 52
2.4 Estimation en norme L^p de ∇u 57
2.4.1 Inégalité de Young pour le produit de convolution 57
2.4.2 Estimation en norme L^p 58
2.5 Estimation en norme L^p de D^2u 59
2.5.1 Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz 60
2.6 Conclusion 69

3 Analyse d'erreur à priori pour la méthode d'éléments finis mixtes $\mathbb{P}_1-\mathbb{P}_1^{2\times 2}$ de l'équation elliptique de Monge-Ampère 70
3.1 Introduction 71
3.2 Modèle 72
3.2.1 Modèle 73
3.3 Rappel de quelques formules 73
3.4 Formulation faible mixte 77
3.5 Analyse d'erreur à priori pour une méthode d'éléments finis mixtes $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1^{2\times 2}$ 80
3.5.1 Discrétisation 80
3.5.2 Méthode du gradient reconstruit 80

3.5.3 Procédure de construction du gradient reconstruit 81
3.5.4 Queslques proprétés de l'opérateur gradient reconstruit . . . 83
3.6 Formulation mixte discrète . . . 84
3.6.1 Espace de discrétisation et normes dépendantes du maillage . . . 84
3.6.2 Espaces de discrétisation . . . 85
3.6.3 Norme dépendant du maillage . . . 85
3.6.4 Problème linéarisé . . . 86
3.6.5 Formulation faible du problème linéarisé . . . 86
3.6.6 Formulation discrète du problème linéarisé . . . 87
3.6.7 Sur la régularité elliptique . . . 87
3.6.8 Quelques opérations sur le saut et la moyenne . . . 89
3.7 Analyse d'erreur à priori . . . 92
3.7.1 Définition de la boule . . . 94
3.7.2 Définition de l'application T . . . 95
3.7.3 Propriété de contraction . . . 99
3.7.4 Existence et unicité de solution . . . 103
3.7.5 Majoration d'erreur à priori . . . 104
3.8 Conclusion . . . 105

4 Modèle du problème couplé Navier-Stokes/ Darcy 106
4.1 Introduction . . . 106
4.2 Cadre général d'analyse d'erreur a posteriori . . . 108
4.3 Modèle couplé Navier-Stokes/ Darcy . . . 109
4.3.1 Modèle de Navier-Stokes . . . 110
4.4 Modèle de Darcy . . . 110
4.5 Conditions sur l'interface . . . 111
4.6 Modèle couplé Navier-Stokes/Darcy . . . 113

4.7 Formulation faible mixte 113
4.7.1 Définition des espaces fonctionnels 115
4.7.2 Formulation faible 115
4.7.3 Définition des formes 118
4.8 Analyse du problème continu 121
4.9 Discrétisation 124
4.9.1 Triangulation 124
4.9.2 Définition des sous espaces discrets 125
4.9.3 Problème discret 125
4.10 Analyse du problème discret 127
4.11 Conclusion 133

5 Analyse d'erreur de type résiduel pour une méthode d'éléments finis mixtes du problème couplé Navier-Stokes/ Darcy : Discrétisation conforme 134
5.1 Introduction 134
5.2 Analyse d'erreur a posteriori 134
5.2.1 Opérateurs d'interpolation de Clément 135
5.2.2 Fonctions bulles, opérateurs d'extension et inégalités inverses 136
5.2.3 Relation d'orthogonalité de Garlerkin 138
5.2.4 Résidus 138
5.2.5 Résidus approchés 139
5.2.6 Fiabilité des indicateurs d'erreur 141
5.2.7 Efficacité des indicateurs d'erreur a posteriori . . . 146
5.3 Conclusion 157

Table des figures

1.1 Transformation affine J_K envoyant l'élément de référence $\widehat{K}$ sur $K \in \mathcal{T}_h$ en $2D$. 32

3.1 Exemple de w_z 82

3.2 Exemple de deux éléments partageant une arête commune 90

4.1 Géomètrie du problème 110

Introduction générale

Introduction et motivations

Les phénomènes physiques sont généralement modélisés à partir des lois de conservation et par des grandeurs physiques qui interviennent dans ces phénomènes. Ceci conduit souvent aux équations différentielles ou aux équations aux dérivées partielles linéaires ou non linéaires. Les EDP (équations aux dérivées partielles) non linéaires constituent une classe d'EDP les plus rencontrées dans les problèmes de modélisation et leurs résolutions analytiques ou théoriques demandent un peu plus d'effort contrairement à celles qui sont linéaires. On pourra consulter par exemple [21, 23, 41, 52] et d'autres références les concernants. Elles constituent aussi une classe d'EDP dont la recherche d'une solution approchée n'est pas systématique comme le cas des EDP linéaires où l'on a simplement besoin d'inverser une matrice pour obtenir la solution approchée. A chaque EDP non linéaire est associée une méthode de recherche de la solution approchée. Ces EDP sont des EDP dont l'étude mathématique attire beaucoup l'attention des chercheurs dans les domaines de l'analyse fonctionnelle et de l'analyse numérique. En particulier les EDP non linéaires comme celle de **Monge-Ampère** et celle de **Navier-Stokes** ou plus précisement les problèmes couplés **Navier-Stokes/Darcy** ont fait l'objet de plusieurs résultats de recherches ces dernières années c.f. [46, 45, 25]. Ces EDP interviennent

dans plusieurs domaines de la science et de l'ingénerie. En occurence en : physique, mécanique, chimie, biologie, économie. Elles interviennent aussi en la géométrie différentielle, le contrôle optimal, le transport de masse, le traitement d'image, la dynamique des fluides etc.

Notons qu'il y a eu beaucoup de progrès dans la résolution théorique de l'équation de **Monge-Ampère** au cours du temps après l'introduction de la solution de viscosité par M. Crandall et P.L. Lions en 1983 (c.f.[20, 21, 28, 43]). Cependant, il y a peu de résultats concernant les solutions approchées pour ce type d'EDP. Pour ce qui concerne le problème couplé **Navier-Stokes/Darcy**, le constat est pratiquement le même dans la recherche de la solution approchée de ce modèle. Néanmoins, il y a des résultats d'analyse d'erreur à priori par des méthodes des éléments finis. Notons qu'il y a eu de progrès considérables pour ce qui concerne l'analyse d'erreur que cela soit à priori ou a posteriori du cas linéaire c'est-à-dire du problème couplé **Stokes-Darcy**. Confère [46, 45, 25].

Nous avons traité deux modèles. Le premier est celui des équations de **Monge-Ampère**. Dans ce dernier, nous nous proposons de faire une étude d'analyse d'erreur à priori pour une méthode d'éléments finis de l'équation elliptique de **Monge-Ampère** puis le modèle couplé **Navier-Stokes/Darcy** dans lequel nous abordons l'analyse d'erreur a posteriori de type résiduel pour une méthode d'éléments finis mixtes conformes.

En effet, pour ce qui concerne l'approximation de l'équation de **Monge-Ampère** par la méthode des éléments finis mixtes (mefm), à notre connaissance les premiers travaux datent de 2003. Ils ont été proposé par Glowinski dans [31]. En 2009, Feng et Neilan ont proposé la méthode des moment dite "vanishing moment method" c.f.[37] pour l'approximation de l'équation de **Monge-Ampère**. Courant 2010 Lakkis et Pryers dans [50] ont proposé une technique de méthode des éléments finis mixtes pour la résolution numérique des problèmes elliptiques non linéaires sous forme

nondivergentielle. Cette dernière a été appliquée à l'équation de **Monge-Ampère**. Le constat fait est qu'aucune étude théorique d'analyse de convergence (analyse d'erreur à priori) n'a été abordée dans leur approche c.f. [32, 33]. Nous nous interressons à la méthode proposée par Lakkis et Pryers. Pour cette dernière, il y a eu des études d'analyse d'erreur par Neilan, Awanou et Li c.f.[55, 11, 10]. Malgré l'existence des résultats, le cas où toutes les variables sont approchées par des fonctions linéaires par morceau et continues, n'a pas encore eu de résultats. Ainsi nous décrivons dans cette thèse, une nouvelle méthode basée sur la méthode du gradient reconstruit, résumée dans notre préprint [4].

Parlant du modèle couplé **Navier-Stokes/Darcy**, en 2015 Nicaise, Ahounou et Houedanou ont obtenu dans [46] des résultats d'analyse d'erreur a posteriori de type résiduel du problème couplé linéaire Stokes-Darcy pour une discrétisation conforme et isotrope avec des éléments finis mixtes. En 2015 Ahounou et Houedanou ont cette fois ci proposé dans [45] le cas non conforme anisotropie pour ce même modèle. En 2016 Discacciati et Oyarzua dans [34] ont proposé une étude d'analyse d'erreur à priori du problème non linéaire couplé **Navier-Stokes/Darcy** avec une discrétisation conforme. Mais l'aspect analyse d'erreur a posteriori n'a pas été abordé. Ainsi nous avons donc orienté une partie de nos travaux dans ce sens.

Objectifs de la thèse

Les objectifs principaux de notre travail sont classés suivant chaque modèle de ce manuscrit.

Pour ce qui concerne le modèle de l'éqaution de **Monge-Ampère** , ils sont au nombre de deux.

Premièrement, il s'agit pour nous d'apporter une réponse au pro-

blème non résolu mentionné dans [56, 11, 10]. En effet, en 2013 dans [56] Neilan a proposé une méthode d'analyse d'erreur à priori pour une formulation primale éléments finis de Lagrange pour l'équation standard de **Monge-Ampère**. Quant à Awanou et Li [11], ils ont analysé en 2014 une méthode d'élément finis mixtes de type Lagrange pour approcher la solution strictement convexe de l'équation de **Monge-Ampère**. Ces derniers ont obtenu des résultats de convergence concluants avec des tests numériques. Le cas d'éléments finis de degré bas restait encore non résolu. C'est courant 2015 à 2016 que Awanou dans [10] donne une approche de solution au cas quadratique. Nous décrivons dans nos travaux une nouvelle méthode basée sur la méthode du gradient reconstruit, en suivant notre préprint [4]. Nous avons utilisé cette nouvelle méthode combinée avec celle de Awanou dans [10] pour procéder à l'analyse d'erreur à priori avec les éléments finis mixtes $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1^{2\times 2}$ pour l'équation de **Monge-Ampère**. Ceci nous a conduit à l'obtention des problèmes discrets non linéaires en dimension finie. Ainsi, nous avons prouvé les résultats d'existence et d'unicité de la solution des problèmes discrets non linéaires obtenus via le théorème du point fixe de Brouwer. Puis nous établissons les résultats de majoration d'erreur à priori qui nous permettront d'apprécier l'etat de convergence de notre approche, c.f.[4]. La régularité elliptique $W^{2,p}$ dans un domaine assez régulier ou polygonal est l'un des outils de notre approche. Ainsi avant d'aborder l'analyse d'erreur pour l'équation de **Monge-Ampère**, nous avons proposé une approche à ce résultat de régularité elliptique $W^{2,p}$ pour un problème elliptique d'ordre deux. Cette estimation est rencontrée dans [39, 40, 65, 22], mais sous une forme où la constante est plus ou moins explicite. Notons que dans [22] la constante de régularité elliptique $W^{2,p}$ a été explicite et donc le résultat de régularité est bien satisfaite

mais seulement sur des domaines suffisament réguliers. Dans notre analyse nous avons besoin de la dépendance explicite de la constante de majoration de la régularité en fonction de p. Parce que l'analyse demande de choisir p en fonction du pas de discrétisation h.

Avec le modèle couplé non linéaire **Navier-Stokes/Darcy**, nous avons abordé l'analyse d'erreur a posteriori de type résiduel du problème couplé non linéaire **Navier-Stokes/Darcy**. Nos objectifs sont les suivants. Construire des indicateurs de type résiduel à partir d'une formulation naturelle du problème couplé **Navier-Stokes/Darcy** proposée par Discacciati et R. Oyarzua dans [34]. Prouver que les indicateurs ainsi construits sont fiables et efficaces. Compte tenu du fait que le problème est non lináire, il n'était pas évident d'obtenir un tel résultat. Nous avons contourné cette difficulté en utilisant la technique de Gatica et ses collaborateurs dans [24].

Plan de la thèse

Le tout premier chapitre concerne les préliminaires : il s'agira pour nous de rappeler quelques définitions, certaines notations, quelques notions sur les espaces de Sobolev classiques, quelques outils d'analyse et certaines inégalités d'interpolation. On y mettra aussi d'autres outils d'analyse nécessaires. Nous allons parler de l'analyse d'erreur à priori pour une méthode d'éléments finis d'un problème modèle en occurence l'équation de Poisson. Dans le deuxième chapitre, nous parlerons du problème de régularité elliptique $W^{2,p}$ dans un domaine polygonal. Dans le chapitre trois (3), nous abordérons l'analyse d'erreur à priori pour une méthode d'éléments finis mixtes $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1^{2\times 2}$ de l'équation de **Monge-Ampère**. Le chapitre quatre introduit le cadre général de l'analyse d'erreur a posteriori et le modèle couplé **Navier-Stokes/Darcy**. Le cinquième chapitre (5) est consacré

à l'analyse d'erreur a posteriori du modèle. Nous bouclons ce document en donnant une conclusion générale et les perspectives pour les travaux futurs.

Jamal ADETOLA ©URPM/IMSP 2018
adetolajamal58@yahoo.com

Chapitre Un

Préliminaires

Sommaire

1.1 Introduction 21
1.2 Opérateurs 21
1.3 Espaces de Sobolev classiques 24
1.3.1 Quelques injections de Sobolev 27
1.4 Quelques outils d'analyse 27
1.4.1 Quelques inégalités 27
1.4.2 Formules de Green 28
1.4.3 Quelques théorèmes utiles 29
1.4.4 Triangulation 30
1.4.5 Eléments finis de Lagrange 32
1.4.6 Quelques inégalités d'interpolation 34
1.4.7 Inégalités d'interpolation de Lagrange 35
1.5 Analyse d'erreur à priori pour un problème modèle . . . 36
1.5.1 Equation de Poisson 36
1.5.2 Formulation variationnelle 36
1.5.3 Discrétisation 37
1.5.4 Relation d'orthogonalité de Galerkin 37
1.5.5 Quelques propriétés de la forme a 37
1.5.6 Estimation d'erreur en norme L^2 38
1.5.7 Régularité elliptique 38

Jamal ADETOLA ©URPM/IMSP 2018
adetolajamal58@yahoo.com

1.1 Introduction

Tout au long de ce document, nous allons utiliser certaines notations et certains outils d'analyse. Nous nous proposons de les rappeler dans ce chapitre. Par ailleurs certains résultats techniques aussi sont nécessaires pour la suite de ce manuscrit. Nous allons aussi les rappeler sans pour autant en donner une démonstration. Dans la Section 1.2, nous allons donner la définition de quelques opérateurs utiles pour l'ensemble du document. Dans la Section 1.3, nous allons définir quelques espaces de Sobolev classiques. Dans la Section 1.4, nous allons rappeler quelques outils d'analyse qui seront utilisés fréquemment. Dans cette dernière on parlera de la triangulation dans la sous-section 1.4.4 et des inégalités d'interpolation importantes que nous manipulons dans ce document dans la sous section 1.4.6.

1.2 Opérateurs

Définition 1.1 (Opérateur Nabla)**.** *L'opérateur nabla est un opérateur différantiel formellement représenté sous la forme* ∇ *et définit pour tout* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ *par :*

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \ \frac{\partial}{\partial x_2} \cdots \ \frac{\partial}{\partial x_d} \right). \tag{1.1}$$

Définition 1.2 (Gradient)**.** *1. Le gradient d'une fonction* v *assez régulière définie sur un domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *est donné pour tout* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \Omega$ *par :*

$$\nabla v := \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \ \frac{\partial v}{\partial x_2} \cdots \ \frac{\partial v}{\partial x_d} \right). \tag{1.2}$$

2. *Pour tout vecteur* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, *le gradient de* $\mathbf{v}$ *est donné par :*

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial v_d}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial v_d}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_d} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_d} & \cdots & \dfrac{\partial v_d}{\partial x_d} \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Définition 1.3 (Divergence)**.**

1. *La divergence de tout champ de vecteur* $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \cdots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, *assez régulier est donnée, pour tout* $x = (x_1, x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ *par :*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \tag{1.4}$$

On pourra aussi voir que la divergence est le produit scalaire de l'opérateur ∇ *par le vecteur* $\mathbf{v}$. *Soit*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := \nabla \cdot \mathbf{v}. \tag{1.5}$$

2. *La divergence d'une matrice* $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_{ij})_{i,j=1,\cdots,d} \in \mathbb{R}^{d\times d}$, *est donnée*

par

$$\operatorname{div}\mathbf{K} := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial \mathbf{K}_{1i}}{\partial x_i} \\ \sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial \mathbf{K}_{2i}}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{d} \dfrac{\partial \mathbf{K}_{di}}{\partial x_i} \end{bmatrix}. \tag{1.6}$$

Définition 1.4. *(Laplacien d'une fonction scalaire) Pour toute fonction scalaire v assez régulière, le Laplacien de v est défini par*

$$\Delta v := \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_d^2}. \tag{1.7}$$

Définition 1.5. *(Trace d'une matrice)*

La trace d'une matrice carrée $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_{ij})_{i,j=1,\ldots,d}$ est donnée par :

$$tr\,\mathbf{K} := \sum_{i=1}^{d} \mathbf{K}_{ii}. \tag{1.8}$$

Définition 1.6. *(Produit scalaire matriciel) Etant donné deux matrices carrées $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ d'ordre d, le produit scalaire de ces deux matrices est donné par :*

$$\mathbf{K} : \mathbf{L} := \sum_{i,j=1}^{d} \mathbf{K}_{ij}\mathbb{L}_{ij} = tr(\mathbf{K}\mathbf{L}^T). \tag{1.9}$$

La norme associée à ce produit scalaire est la norme de Frobenius $\|.\|_F$ et est définie par

$$\|\mathbf{K}\|_F := \left(\sum_{i,j=1}^{d} \mathbf{K}_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.10}$$

1.3 Espaces de Sobolev classiques

Pour un domaine assez régulier Ω et pour une fonction $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable au sens de Lebesgue, on définit :

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |v|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty \tag{1.11}$$

et

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{C > 0 : |v(x)| \leq C, \quad x \in \Omega \,\text{p.p}\}. \tag{1.12}$$

On rappelle que

$$L^p(\Omega) := \{v \text{ mesurable au sens de Lebesgue} : \int_\Omega |v|^p \, dx < \infty\}. \tag{1.13}$$

L'espace L^p est muni de la norme $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ pour $1 \leq p \leq \infty$. Pour $m \geq 0$ et $l \in \mathbb{N}$ entier naturel, $1 \leq p < \infty$, un nombre réel. On définit :

$$W^{m,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) : |\alpha| \leq m\}. \tag{1.14}$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme :

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p}^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty \tag{1.15}$$

et

$$\|v\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{1.16}$$

En particulier pour $p = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ est défini classiquement comme suit

$$H^m(\Omega) \;:=\; \left\{v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leqslant m\right\}. \tag{1.17}$$

Pour $m = 0$, on pose $H^0(K) = L^2(\Omega)$. L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de

Hilbert lorsqu'il est muni du produit scalaire

$$(v,w)_{m,\Omega} := \sum_{|\alpha|\leqslant m} \int_\Omega D^\alpha v D^\alpha w, \forall v,w \in H^m(\Omega). \tag{1.18}$$

• La norme induite est définie par

$$\| v \|_{m,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|\leqslant m} \| D^\alpha v \|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \forall v \in H^m(\Omega). \tag{1.19}$$

• On définit également la semi-norme

$$|v|_{m,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \| \partial^\alpha v \|_{0,\Omega}^2 \right)^{1/2}, \forall v \in H^m(\Omega). \tag{1.20}$$

• Pour $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)$ une fonction vectorielle, on a

$$\| \mathbf{v} \|_{m,\Omega} := \sum_{i=1}^d \| v_i \|_{m,\Omega} \text{ et } |\mathbf{v}|_{1,\Omega} := \sum_{i=1}^d |v_i|_{1,\Omega}. \tag{1.21}$$

• On définit aussi l'espace

$$H_0^m(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^m(\Omega)}. \tag{1.22}$$

• Pour $d = 2$, on définit l'opérateur rotationnel **rot** d'une fonction scalaire $\phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et d'une fonction vectorielle $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^2$ par :

$$\mathbf{rot}\phi := \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right), \tag{1.23}$$

$$\mathbf{rotv} := \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}. \tag{1.24}$$

• Pour $d = 3$, on définit l'opérateur rotationnel **rot** d'une fonction vecto-

rielle $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3$ par :

$$\mathbf{rotv} \;:=\; \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3},\; \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1},\; \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right). \quad (1.25)$$

• On a aussi les identité suivantes :

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\phi) \;=\; -\triangle\phi, \forall\phi \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad (1.26)$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotv}) \;=\; -\triangle\mathbf{v} + \nabla(\operatorname{div}\mathbf{v}),\ \forall\mathbf{v} \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^2 \quad (1.27)$$

$$\mathbf{rot}(\mathbf{rotv}) \;=\; -\triangle\mathbf{v} + \nabla(\operatorname{div}\mathbf{v}), \forall\mathbf{v} \in [\mathcal{D}'(\Omega)]^3. \quad (1.28)$$

• On définit finalement les espaces suivants :

$$H(\mathbf{rot}, \Omega) \;:=\; \left\{\phi \in L^2(\Omega) : \mathbf{rot}\phi \in [L^2(\Omega)]^2\right\}$$

$$H(\mathbf{rot}, \Omega) \;:=\; \begin{cases} \left\{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^2 : \mathbf{rotv} \in L^2(\Omega)\right\} & , \quad \text{si} \quad d = 2 \\ \left\{\mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^3 : \mathbf{rotv} \in [L^2(\Omega)]^3\right\} & , \quad \text{si} \quad d = 3 \end{cases}.$$

• Les espaces $C^{k,\alpha}(\Omega)$

Nous définissons ici les espaces de Hölder comme suit :

Pour une fonction v définie sur Ω et α tel que $0 < \alpha < 1$, on pose

$$[v]_{\alpha;\Omega} := \sup_{x,y\in\Omega;x\neq y} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

On note

$$C^\alpha(\bar{\Omega}) := \{v : [v]_{\alpha;\Omega} < +\infty\}.$$

On définit

$$C^{k,\alpha}(\bar{\Omega}) := \{v : D^\beta v \in C^\alpha(\bar{\Omega})\ \forall\beta; |\beta| \leq k\}.$$

1.3.1 Quelques injections de Sobolev

Nous rappelons dans cette sous-section quelques injections de Sobolev. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\quad d > 1$ à bord Lipschitzien, on a les injections continues de Sobolev suivantes. • Injections continiues

1. Si $d > mp$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q \leq dp/(d-mp)$.
2. Si $d = mp$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q < \infty$. Si $p = 1$ alors $W^{d,1} \hookrightarrow C_b(\bar{\Omega})$.
3. Si $mp > d$, lorsque $d/p \notin \mathbb{N}$, et si j est tel que $(j-1)p < d < jp$ alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda} \quad \lambda \leq j - d/p$. Si $d/p \in \mathbb{N}$ et $m \geq j = d/p + 1$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^{m-d/p-1,\lambda} \quad \lambda < 1$.

• Injections Compacts

1. Si $d > mp$, alors $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour tout $q < dp/(d-mp)$ et l'injection est compacte.
2. Si $mp > d$ et $j = E(d/p) + 1$, alors pour tout $\lambda < j - d/p$, les injections $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m-j,\lambda}$ sont compactes.

1.4 Quelques outils d'analyse

1.4.1 Quelques inégalités

• Inégalité de Hölder

Soient v et w deux fonctions telles que $v \in L^p(\Omega)$ et $w \in L^q(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors $vw \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\|vw\|_{L^1} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)} \|w\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.29}$$

Pour $p = q = 2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

• Inégalité de Young

Soient $a > 0$, $b > 0$, p et q deux entiers tels que $p \geq 1$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1.30}$$

ou pour tout $\epsilon \geq 0$,

$$ab \leq \epsilon \frac{a^p}{p} + \epsilon^{\frac{-p}{q}} \frac{b^q}{q}, \tag{1.31}$$

ou encore

$$ab \leq \epsilon a^p + \epsilon^{\frac{-p}{q}} b^q. \tag{1.32}$$

• Inégalité de Poincaré

Il existe une constante positive $C_p(\Omega)$ telle que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, on ait

$$\|v\|_{L^p} \leq C_p(\Omega) \|\nabla v\|_{L^p}. \tag{1.33}$$

1.4.2 Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné à bord Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{R}^d$ est la normale unitaire sur $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieure.

• Pour tout $\psi \in [H^1(\Omega)]^3$ si $d = 3$ ou $\psi \in H^1(\Omega)$ si $d = 2$, on a :

1. Pour v et w deux fonctions suffisament régulières, on a

$$\int_\Omega (\Delta v) w \, d\, x = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, dx + \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, ds, \tag{1.34}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire à Ω orientée vers l'extérieur et $\dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \nabla v.\mathbf{n}$.

2. Pour $\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$ et $\tau \in H^1(\Omega)^{d\times d}$ données, on a

$$\int_\Omega (\nabla \mathbf{v}) : \tau \, dx = -\int_\Omega \mathbf{v} \operatorname{div} \tau \, dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot (\tau \mathbf{n}) \, ds. \tag{1.35}$$

3.

$$(\mathbf{curl}\psi, w)_\Omega - (\psi, \mathbf{curl}w)_\Omega = (\gamma_\tau\psi, w)_{\partial\Omega},\ \forall w \in H(\mathbf{curl}, \Omega), \quad (1.36)$$

où $\gamma_\tau\psi$ est la composante tangentielle (resp. les composantes tangentielles) de ψ pour $d = 2$ (resp. pour $d = 3$) et est définie par : $\gamma_\tau\psi := \begin{cases} \psi \cdot \tau_{|\partial\Omega} & \text{si} \quad d = 2 \\ \psi \times \mathbf{n}_{|\partial\Omega} & \text{si} \quad d = 3 \end{cases}$, avec la condition $\tau \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$.

1.4.3 Quelques théorèmes utiles

• Théorème de représentation de Riesz

Théorème 1.7 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace de Hilbert et* $\mathbf{l}$ *une forme linéaire continue sur* $\mathbf{X}$ *(*$\mathbf{l} \in \mathbf{X}'$*). Alors il existe un et un seule* $u \in \mathbf{X}$ *tel que*

$$\mathbf{l}(v) = (u, v) \quad \forall v \in \mathbf{X}. \quad (1.37)$$

De plus

$$\|\mathbf{l}\|_{\mathbf{X}'} = \|u\|_{\mathbf{X}}. \quad (1.38)$$

• **Lemme de Lax-Milgram**

Définition 1.8. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace de Hilbert. Une forme bilinéaire* $\mathbf{a} : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite continue lorqu'il existe une constante positive* C *telle que*

$$|\mathbf{a}(x_1, x_2)| \leq C\|x_1\|\|x_2\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbf{X}. \quad (1.39)$$

Définition 1.9. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace de Hilbert. Une forme bilinéaire* $\mathbf{a} : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est coercive lorqu'il existe une constante positive* C *telle que*

$$\mathbf{a}(x, x) \geq C\|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbf{X}. \quad (1.40)$$

Théorème 1.10 (Lemme de Lax-Milgram)**.** *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace de Hilbert,* $\mathbf{a}$ *une forme bilinéaire, continue et coercive sur* $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ *et* $\mathbf{l}$ *une forme linéaire continue sur* $\mathbf{X}$*.*

Alors le problème : trouver $u \in \mathbf{X}$ *tel que* $\mathbf{a}(u, v) = \mathbf{l}(v) \quad \forall v \in \mathbf{X}$ *admet une unique solution.*

• **Théorème du point fixe de Brouwer**

Le théorème du point fixe de Brouwer est le théorème de point fixe fondamental en dimension finie. Soit $\bar{B}^d$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^d$. Le théorème du point fixe de Brouwer s'énnonce comme suit :

Théorème 1.11. *(Point fixe de Brouwer) Toute application* T *continue de* $\bar{B}^d$ *dans lui même admet au moins un point fixe. C'est-à-dire il existe au moins un point* $x^* \in \bar{B}^d$ *tel que*

$$T(x^*) = x^*. \tag{1.41}$$

• **Théorème du point fixe de Banach**

Théorème 1.12. *(Point fixe de Banach) Soit* $\mathcal{B}$ *un espace de Banach et* $T : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ *une application vérifiant*

$$\|T(x_1) - T(x_2)\| \leq k\|x_1 - x_2\|, \tag{1.42}$$

avec $0 < k < 1$*. Alors* T *admet un unique point fixe dans* $\mathcal{B}$*.*

1.4.4 Triangulation

Dans l'approximation d'une EDP par la méthode des éléments finis, la plus importante des étapes est la triangulation du domaine dans laquelle on se place. Cette technique consiste à découper le domaine réel en de petits morceaux (appelés éléments) de forme plus simple suivant une régle bien définie. Ainsi pour un domaine polygonal Ω, on note $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une

famille de triangulation de Ω où h est le paramètre de discrétisation qui tendra vers 0. Pour $K \in \mathcal{T}_h$, K désigne un triangle en dimension deux et un tétraèdre en dimension trois de l'espace.

Définition 1.13. *(Triangulation conforme) On dit qu'une triangulation $(\mathcal{T}_h)_h$ est conforme lorsque :*

1. $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} K$
2. *Pour tout K et L deux éléments de $\mathcal{T}_h$, $K \cap L$ est soit :*
   - *(a) un ensemble vide*
   - *(b) un sommet commun*
   - *(c) une arête commune*
   - *(d) une face commune.*

Pour une triangulation $(\mathcal{T}_h)_h$, on note h_K le diamètre d'un élément K, $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$ et par ρ_K le diamètre du cercle (resp de la shpère) inscrit (resp inscrite) dans K.

Définition 1.14. *(Triangulation régulière) La famille de triangulation $(\mathcal{T}_h)_h$ est dite régulière lorqu'il existe une constante positive δ telle que*

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \delta. \tag{1.43}$$

Elle est dite quasi-uniforme lorsqu'il existe une constante positive C telle que

$$h \leq C h_K. \tag{1.44}$$

Remarque 1.15. *Tout au long de ce document, nous allons entendre par triangulation du domaine lorque ce n'est pas précisé une triangulation conforme et régulière. Notons aussi qu'en lieu et place d'une triangulation, on pourra aussi dire maillage.*

• **Elément de référence :** Nous désignons par $\widehat{K}$, l'élément de référence. C'est-à-dire un élément dont la forme géométrique est la plus simple possible à manipuler. Par exemple en dimension deux, un triangle rectangle dont les côtés droits sont unitaires ou bien un carré unité.

• **Transformation affine :** Généralement on génère une triangulation à partir d'un élément de référence, qu'on note $\widehat{K}$ et d'une famille de transformations géométriques envoyant $\widehat{K}$ dans les cellules du maillage $\mathcal{T}_h$. Pour une cellule $K \in \mathcal{T}_h$, on note

$$J_K : \hat{x} \in \widehat{K} \longmapsto x \in K \quad \text{par} \quad x = J_K(\hat{x}), \tag{1.45}$$

la transformation géomètrique correspondante (voir la Figure 1.1).

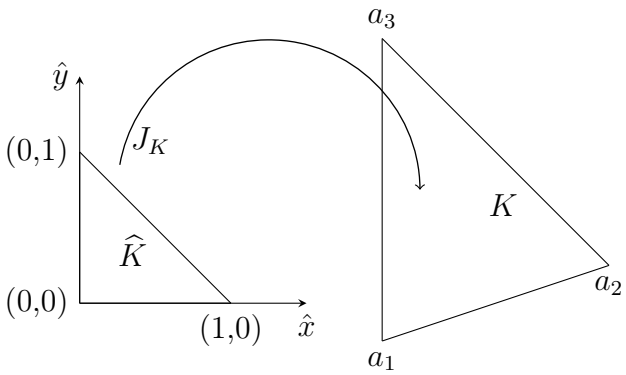


FIGURE 1.1 – Transformation affine J_K envoyant l'élément de référence $\widehat{K}$ sur $K \in \mathcal{T}_h$ en $2D$.

1.4.5 Eléments finis de Lagrange

Il s'agit dans cette sous-section de donner une brève introduction de la méthode des éléments finis à travers quelques définitions. Nous y donnerons aussi la définition de l'opérateur d'interpolation de Lagrange.

Définition 1.16.

Soit K une partie de $\mathbb{R}^d$. Par simplification, on suppose que K est un

intervalle en dimension 1, un polygone en dimension deux ou un polyèdre en dimension trois.

Soit P un espace de fonctions (en général polynomiales) définies sur K à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_N\}$ un ensemble de points de K où N est un entier strictement positif.

Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ on introduit la forme linéaire

$f_i : P \ni p \longmapsto p(a_i) \in \mathbb{R}$ et on pose $\mathcal{N} = \{f_1, f_2, f_3, \ldots f_N\}$.

On appelle élément fini de Lagrange tout triplet $(K, P, \mathcal{N})$ telle que l'application $P \ni p \longmapsto \{f_1(p), f_2(p), \ldots, f_N(p)\}^T \in \mathbb{R}^N$ est bijective.

1. *Les points $\{a_1, a_2, \quad, a_N\}$ sont appelés les nœud de l'élément fini de Lagrange.*
2. *Les formes linéaires $\{f_1, f_2, \ldots, f_N\}$ sont les degrés de liberté de l'élément fini.*
3. *On définit par $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N\}$ les fonctions de forme constituant une base de P.*

Définition 1.17 (Eléments finis affinements équivalents)**.** *Deux éléments finis $(K, P, \mathcal{N})$ et $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\mathcal{N}})$ sont dits affinement équivalents lorsqu'il existe une application affine inversible $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ telle que :*

- *$K = F(\widehat{K})$,*
- *$P = \{\widehat{p} \circ F^{-1}, \ \forall \widehat{p} \in \widehat{P}\}$,*
- *il existe des énumérotations $\Sigma = \{\varphi_i\}_{i=1}^N$ et $\widehat{\Sigma} = \{\widehat{\varphi}_i\}_{i=1}^N$ telles que $\varphi(p) = \widehat{\varphi}(p \circ F)$ pour tout $p \in P$ et $i = 1, 2, \ldots, N$.*

Définition 1.18 (Opérateur d'interpolation local de Lagrange)**.** *Soit $(K, P, \mathcal{N})$ un élément fini. L'opérateur d'interpolation local $\mathcal{L}_h^K$ de Lagrange est défini comme suit :*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_h^K : \ \mathcal{C}^0(K) &\longrightarrow P \\ v &\longmapsto \sum_{i=1}^{N} v(a_i)\phi_i.\end{aligned}$$

Les ϕ_i sont appelés les fonctions de forme. L'opérateur d'interpolation global de Lagrange est défini par

$$\begin{aligned}I_h : \ \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) &\longrightarrow V_h \\ v &\longmapsto \sum_{i=1}^{N} v(a_i)\phi_i.\end{aligned}$$

1.4.6 Quelques inégalités d'interpolation

Dans cette section, nous avons besoin entre autres de certaines inégalités que nous allons utiliser au niveau discret pour la méthode des éléments finis. Il s'agit essentiellement des inégalités : de trace, inverse de trace, d'interpolation de Lagrange et d'autres estimations. Confère [15, 26] pour plus de détails.

Théorème 1.19. *[15][Inégalité de trace] Il existe une constante positive C telle que*

$$\|v\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}, 1 \leq p \leq \infty \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega). \tag{1.46}$$

Théorème 1.20 (Inégalité inverse)**.** *[15] Pour tout $K \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $v \in V_h$, il existe une constante positive C telle que*

$$\|v\|_{L^q(\partial K)} \leq C h_k^{-\frac{1}{q}} \|v\|_{L^q(K)} \tag{1.47}$$

pour tout $q \geq 1$.

1.4.7 Inégalités d'interpolation de Lagrange

Pour tout $v \in H^2(\Omega)$, il existe une constante positive C telle que

$$\|v - I_h v\|_{W^{j,p}} \leq Ch^{2-j}\|v\|_{W^{2,p}}, \quad j = 0, 1, \ 1 \leq p \leq \infty \ \forall v \in W^{2,p}(\Omega), \tag{1.48}$$

où I_h est l'oprérateur d'interpolation de Lagrange. Aussi pour tout $K \in \mathcal{T}_h$ et pour tout $\sigma \in W^{1,p}(K)^{2\times 2}$, il existe une constante positive C telle que

$$||\sigma - I_h\sigma||_{L^p(K)} \leq Ch_K^2||\sigma||_{W^{1,p}(K)}, \tag{1.49}$$

où $I_h\sigma$ est l'interpolé de σ.

Théorème 1.21. *[15][Estimation inverse] Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ avec $0 < h \leq 1$ une triangulation quasi-uniforme de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Soit $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\mathcal{N}})$ un élément fini de référence tel que $P \subseteq W^{l,p}(K) \cap W^{n,p}(K)$, où $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ et $0 \leq s \leq t$. Pour $K \in (\mathcal{T}_h)_h$, soit $(K, P_K, \mathcal{N}_K)$ l'élément fini affinement équivalent à $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\mathcal{N}})$ et*
$V_h := \{v : v$ mesurable $\quad v_{|K} \in \mathbb{P}_k \ : \forall K \in \mathcal{T}_h\}$. Alors il existe une constante positive C telle que

$$\left[\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v_h\|^p_{W^{t,p}p(\mathcal{T}_h)}\right]^{\frac{1}{q}} \leq Ch^{s-t+\min(0,\frac{d}{p}-\frac{d}{q})} \left[\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v_h\|^q_{W^{s,q}(\mathcal{T}_h)}\right]^{\frac{1}{q}}, \tag{1.50}$$

pour tout $v_h \in V_h$. Lorsque $p = \infty$ (respectivement $q = \infty$) alors $\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v_h\|^p_{W^{t,p}(\mathcal{T}_h)}$ (respectivement $\sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v_h\|^p_{W^{s,p}(\mathcal{T}_h)}$) sont données par $\max_{K\in\mathcal{T}_h} \|v_h\|^p_{W^{t,\infty}(\mathcal{T}_h)}$ (respectivement $\max_{K\in\mathcal{T}_h} \|v_h\|^q_{W^{s,\infty}(\mathcal{T}_h)}$).

Preuve. Confère [15] pages 112 – 113. ■

1.5 Analyse d'erreur à priori pour un problème modèle

1.5.1 Equation de Poisson

Par simplicité, plaçons nous dans le cadre de l'équation de Poisson avec des conditions aux limites de type Dirichlet homogène ; c'est-à-dire étant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} -\Delta u & = & f & \text{dans} & \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sur} & \partial\Omega \quad . \end{array} \right. \tag{1.51}$$

1.5.2 Formulation variationnelle

Le problème (1.51) admet une formulation variationnelle équivalente suivante : étant donné $f \in L^2(\Omega)$, trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u, v) = L(v), \ \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{1.52}$$

où $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue, coercive et est définie sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ par

$$a(u, v) := (\nabla u, \nabla v)_\Omega,$$

$L(\cdot)$ est une forme linéaire, continue et est définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$L(v) := (f, v)_\Omega.$$

Par le Lemme de Lax-Milgram, le problème (1.52) admet une unique solution dans $H_0^1(\Omega)$.

1.5.3 Discrétisation

On considère $\mathcal{T}_h$ une triangulation régulière et conforme de Ω. On définit l'espace discret conforme à $H_0^1(\Omega)$, par

$$H_{0,h}^1 := \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}), v_h|K \in \mathbb{P}_1(K),\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \tag{1.53}$$

Le problème discret associé est de trouver u_h dans $H_{0,h}^1 \subset H_0^1(\Omega)$ tel que

$$a(u_h, v_h) = L(v_h),\ \forall v_h \in H_{0,h}^1. \tag{1.54}$$

Comme l'approximation spatiale est conforme, grâce au Lemme de Lax-Milgram, le problème (1.54) admet une unique solution dans $H_{0,h}^1$.

1.5.4 Relation d'orthogonalité de Galerkin

Soit u et u_h les solutions respectives de (1.52) et (1.54), nous avons la relation suivante dite relation d'orthogonalité de Galerkin.

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in H_{0,h}^1. \tag{1.55}$$

1.5.5 Quelques propriétés de la forme a

Nous donnons ici quelques propriétés de la forme a.

- $a(v, v) = \displaystyle\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx.$
- $\forall v, a(v, v) = 0 \Longrightarrow v = 0.$
- On définit la norme énergie par

$$\|v\|_E = \sqrt{a(v, v)} = |v|_{H^1(\Omega)}. \tag{1.56}$$

- Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_E \|v\|_E \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.57}$$

1.5.6 Estimation d'erreur en norme L^2

Dans cette sous-section, nous allons d'abord parler du théorème de régularité elliptique en norme L^2.

1.5.7 Régularité elliptique

On suppose que le domaine Ω est ouvert borné convexe polygonal. En dimension deux, on a le théorème suivant :

Théorème 1.22 ([17]). *Etant donné $f \in L^2(\Omega)$, il existe une constante positive C, telle que*

$$\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}. \tag{1.58}$$

Proposition 1.23. *[57](Propriété d'approximation)*

Nous avons l'estimation suivante : Il existe une constante positive C telle que

$$\inf_{v \in H^1_{0,h}} \|\nabla(u-v)\|_{L^2} \leq Ch|u|_{H^2}. \tag{1.59}$$

Lemme 1.24. *[15](Inégalité de Poincaré) Soit $v \in H^1(K)$ tel que $\int_K v = 0$. Alors il existe une constante positive C telle que*

$$\|v\|_{L^2(K)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(K)}. \tag{1.60}$$

Aussi pour $v \in H^1_0(\Omega)$, il existe une constante positive C telle que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.61}$$

Lemme 1.25. *[15](Inégalité de Sobolev)*

Si $v \in H^2(\widehat{K})$, alors $v \in C(\widehat{K})$ et

$$\|v\|_{L^\infty(\hat{K})} \leq C\|v\|_{H^2(\hat{K})}. \tag{1.62}$$

Lemme 1.26. *[15](Bramble-Hilbert)*
Soit $w \in H^2(K)$. Alors il existe $v \in \mathbb{P}_1(K)$ tel que

$$\|w - v\|_{L^2(K)} + h_K \|\nabla(w - v)\|_{L^2(K)} \leq C h_K^2 |w|_{H^2(K)}. \tag{1.63}$$

On a le théorème de convergence suivant,

Théorème 1.27. *[57](Convergence) Soient u et u_h les solutions respectives de (1.52) et (1.54), alors il existe une constante positive C telle que*

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C h^2 \|f\|_{L^2}. \tag{1.64}$$

Avant de procéder à l'analyse d'erreur à priori de l'éqaution de **Monge-Ampère**, nous donnons dans le chapitre qui suit un résultat de régularité elliptique dans un domaine polygonal.

Chapitre Deux

Régularité elliptique $W^{2,p}$ dans un domaine polygonal

Sommaire

2.1 Introduction 40
2.2 Préliminaires et notations 42
2.2.1 Notations 42
2.2.2 Quelques inégalités 42
2.3 Estimation L^p de la solution forte u d'une équation elliptique d'ordre deux 46
2.3.1 Estimation L^p de la solution forte de l'équation de Poisson 47
2.3.2 Estimation L^p de la solution forte d'une équation elliptique d'ordre deux (Cas général) 52
2.4 Estimation en norme L^p de ∇u 57
2.4.1 Inégalité de Young pour le produit de convolution 57
2.4.2 Estimation en norme L^p 58
2.5 Estimation en norme L^p de D^2u 59
2.5.1 Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz 60
2.6 Conclusion 69

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'établir un résultat de régularité elliptique $W^{2,p}$ (avec $p \geq 1$ un nombre réel) dans un carré en explicitant la constante de majoration. L'idée que nous avons développée a

été suggérée par Awanou dans [10]. Il s'agit donc pour nous de considérer l'équation elliptique d'ordre deux suivante

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un domaine à bord Lipschitzien de $\mathbb{R}^d$, en occurence un carré en dimension deux ($d = 2$). On établit par la suite l'estimation suivante : pour toute fonction $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfaisant l'équation (2.1) au sens faible, il existe une constante positive $C(d,p)$ dépendante de d et de p telle que

$$\|u\|_{2,p} \leq C(d,p)\|f\|_p. \tag{2.2}$$

Ce résulltat est rencontré dans la littérature, notamment dans [65, 39, 40, 17, 22]. Dans [65], ce résultat a été établi dans un cube. Dans [17], le résultat de régularité elliptique est beaucoup plus accentué sur une estimation H^2. Cependant ce que nous constatons dans tous ses travaux est qu'il n'y a pas assez de détails sur la constante C de majoration. Dans [40] nous avons un résultat analogue dans un carré. La constante de majoration C n'a pas été calculée explicitement dans tous ces travaux. La particularité de nos travaux est d'évaluer explicitement la constante de majoration dans (2.2), en d'autres termes nous allons établir une majoration du type :

$$\|u\|_{2,p} \leq C(d)p\|f\|_p. \tag{2.3}$$

Notre approche vient du fait que l'analyse demande une dépendance de p en fonction du pas de discrétisation h. Cette estimation a été prouvée dans [22] lorsque le domaine est suffisament régulier. Notre but est donc de l'établir dans un domaine polygonal. Par ailleurs, cette estimation a été

utilisée dans [10, 55] pour l'analyse d'erreur par une méthode d'éléments finis quadratique de l'équation elliptique de **Monge-Ampère**. Elle l'est aussi dans [4] pour l'étude de la convergence par la méthode des éléments finis mixtes linéaire de l'équation de **Monge-Ampère** sous sa forme classique avec la condition de Dirichlet non homogène. Nous commençons par quelques préliminaires et notations.

2.2 Préliminaires et notations

Dans cette section nous donnerons quelques notations et définitions utiles pour ce chapitre.

2.2.1 Notations

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, p entier vérifiant $p \geq 2$ et v une fonction assez régulière définie sur Ω.

- ∇v : désigne le gradient de v et est défini par $\nabla v := \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial v}{\partial x_d}\right)$.
- $|v|$: signifie la valeur absolue de la fonction v.
- $\|v\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |v|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$
- Δv : désigne le Laplacien de v et est donné par

$$\Delta v := \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 v}{\partial x_d^2}\right).$$

2.2.2 Quelques inégalités

- **Inégalité de Hölder**

Soient v et w deux fonctions telles que $v \in L^p(\Omega)$ et $w \in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $vw \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\|vw\|_{L^1} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)}\|w\|_{L^q(\Omega)}. \tag{2.4}$$

• **Inégalité de Poincaré**

Tenant compte du fait que nous voulons avoir beaucoup plus d'informations sur la contante de notre majoration, nous allons énoncer et prouver l'inégalité de Poincaré dans l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lemme 2.1. *[36] Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ (tout au moins borné dans une direction). Alors il existe une constante positive $C_p(\Omega)$ (dépendante de p et de Ω) telle que*

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p(\Omega)\|\nabla v\|_{L^p}, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.5}$$

Preuve. Nous allons prouver ce lemme pour $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ puis nous concluons par densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$. Le domaine Ω étant borné, alors Ω est contenu dans une bande

$$\Omega \subset \left\{(z, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}, \quad a \leq x_d \leq b\right\} \tag{2.6}$$

pour certains réels a et b.

Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\tilde{v}$ le prolongement de v par 0 en dehors de Ω. En d'autres termes on définit $\tilde{v}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \tilde{v}(x) = v(x) & \text{si} \quad x \in \Omega \\ \tilde{v}(x) = 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega. \end{cases} \tag{2.7}$$

On a $\tilde{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\tilde{v}(z, a) = 0$. Ainsi

$$\tilde{v}(z, x_d) = \int_a^{x_d} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(z, t)\, dt \quad \forall (z, x_d) \in \mathbb{R}^d. \tag{2.8}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}|\tilde{v}(z,x_d)| &\leq \left(\int_a^{x_d} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(z,t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^{x_d} 1^q\right)^{1/q}\\ &\leq \left(\int_a^{x_d} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(z,t)|^p\,dt\right)^{1/p}(x_d-a)^{1/q}\\ |\tilde{v}(z,x_d)|^p &\leq \left(\int_a^{x_d} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(z,t)|^p\,dt\right)(x_d-a)^{p/q}.\end{aligned}$$

Comme $p/q = p-1$ alors on a

$$|\tilde{v}(z,x_d)|^p \leq \left(\int_a^{x_d} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}(z,t)|^p\,dt\right)(x_d-a)^{p-1}.$$

On intègre sur $\mathbb{R}^{d-1}$ par rapport à la variable z et on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |\tilde{v}(z,x_d)|^p\,dz \leq (x_d-a)^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}|^p\,dx\right).$$

On intègre sur $\mathbb{R}$ par rapport à la variable x_d et on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{v}(z,x_d)|^p\,dz &\leq \left\|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\int_{\mathbb{R}^d}(x_d-a)^{p-1}\,dx_d\\ &\leq \frac{(b-a)^p}{p}\left\|\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_d}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{(b-a)}{\sqrt[p]{p}}\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, alors on conclut le résultat. ■

On rappelle aussi la première formule de Green suivante.

• **Formule de Green** Pour v et w deux fonctions suffisament régulières, on a

$$\int_\Omega (\Delta v) w\,d\,x = -\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla w + \int_{\partial\Omega} w\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, \tag{2.10}$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire à Ω orientée vers l'extérieur et $\dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \nabla v \cdot \mathbf{n}$.

On définit ensuite la notion de solution forte. L'opérateur différentiel linéaire d'ordre deux sur les fonctions $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 2.2. *L'opérateur différentiel linéaire d'ordre deux sur les fonctions $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est défini par*

$$\mathcal{L}v = -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial v}{\partial x_i} + c(x)v. \tag{2.11}$$

Ensuite, on considère, l'équation

$$\begin{cases} \mathcal{L}u &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.12}$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur elliptique d'ordre deux (2.11) et f une fonction donnée. On a la définition suivante :

Définition 2.3. *On appelle solution forte de l'équation (2.12), toute fonction u admettant des dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux et vérifiant cette équation presque partout dans Ω.*

Enfin, nous donnons aussi la définition de la solution fondamentale de l'équation de Laplace et du potentiel Newtonien associé à une fonction.

Définition 2.4. *On considère la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}^d$ pour $x \neq 0$ par*

$$\Gamma(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} log(|x|) & si \quad (d = 2) \\ \dfrac{1}{d(d-2)\alpha(d)}\dfrac{1}{|x|^{d-2}} & si \quad (d \geq 3), \end{cases}, \tag{2.13}$$

où $\alpha(d)$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$ et $|x| = \left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_d^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

La fonction Γ ainsi définie est appelée solution fondamentale de l'équation de Laplace.

Définition 2.5. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et $f \in L^p(\Omega)$ pour $p \geq 1$. Le potentiel Newtonien de f est la fonction $w = Nf$ définie par*

$$w(x) = \int_U \Gamma(x-y) f(y)\, dy, \tag{2.14}$$

où Γ est la solution fondamentale (ou le noyau) de l'équation de Laplace.

Remarque 2.6. *$w = \Gamma * f$ qui est le produit de convolution de Γ par la fonction f.*

Remarque 2.7. *Dans ce chapitre, on parlera tantôt de solution forte et tantôt de solution faible. Ce qu'il faut noter ici est que toute solution forte est au sens des distribution une solution faible. C'est la réciproque qui n'est pas toujours vraie.*

2.3 Estimation L^p de la solution forte u d'une équation elliptique d'ordre deux

Nous allons établir dans cette section une estimation en norme L^p de la solution forte de l'équation de Poisson. En effet, dans [65] il est établi une estimation en norme L^p de la solution forte de l'équation

$$-\Delta u + c(x)u = f, \tag{2.15}$$

dans un domaine Ω tel que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^{2,\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$. Nous allons donc généraliser ce résultat aux équations elliptiques sous forme divergencielle. En d'autres termes nous allons considérer l'équation (2.1) et établir une estimation en norme L^p de la solution forte dans un domaine à bord Lipschitzien. Dans la sous-section 2.3.1, nous allons établir une estimation en norme L^p de la solution forte de l'équation de Poisson et dans la sous-section 2.3.2, nous allons donner le résultat d'estimation en norme L^p du modèle (2.1).

Notre approche est motivée par la Proposition 2.8 suivante, dont la démonstration se trouve dans [65].

Proposition 2.8. *[65] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, tel que $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $p \geq 2$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$. Etant donné $f \in L^p$, l'équation (2.15) admet une unique solution forte $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. De plus il existe une constante $C \geq 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \tag{2.16}$$

où la constante C dépend uniquement de n, p , Ω et de $\|c\|_{L^\infty}$.

2.3.1 Estimation L^p de la solution forte de l'équation de Poisson

On considère donc l'équation suivante :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

Le résultat est donné par la Proposition 2.9 suivante :

Proposition 2.9. *Soit Ω un ouvert polygonal de $\mathbb{R}^d (d = 2, 3)$, $p \geq 2$ et $c \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$. Etant donné $f \in L^p$, l'équation (2.17) admet une unique solution forte $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. De plus il existe une $C(\Omega, d) > 0$ indépendante de p telle que*

$$\|u\|_{L^p} \leq C(\Omega, d)p\|f\|_{L^p}. \tag{2.18}$$

Avant de donner la preuve de cette Proposition 2.9, nous allons établir le lemme suivant.

Lemme 2.10. *[5] Soit $p \geq 2$. Pour toute fonction $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$*

avec $|u|$ différentiable, on a

$$\int_\Omega |u|^{p-2}|\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega u^2|u|^{p-4}|\nabla|u||^2\,dx = \int_\Omega u|u|^{p-3}\nabla u\cdot\nabla|u|\,dx. \tag{2.19}$$

Preuve. Soient $p \geq 2$ et $u \in W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)$, on a $|u| = \sqrt{u^2}$ donc $\nabla|u| = \nabla(\sqrt{u^2}) \Longleftrightarrow \nabla|u| = \dfrac{1}{2\sqrt{u^2}}\nabla(u^2) = \dfrac{2u}{2|u|}\nabla u$. D'où

$$\nabla|u| = \frac{u}{|u|}\nabla u. \tag{2.20}$$

Ainsi $|\nabla|u||^2 = |\nabla u|^2$. Nous évaluons maintenant $u^2|u|^{p-4}|\nabla|u||^2$. On a $u^2|u|^{p-4}|\nabla|u||^2 = |u|^{p-2}|\nabla u|^2$. Ainsi

$$\int_\Omega u^2|u|^{p-4}|\nabla|u||^2\,dx = \int_\Omega |u|^{p-2}|\nabla u|^2\,dx. \tag{2.21}$$

Aussi, en utilisant (2.20), on a $\nabla u\cdot\nabla|u| = \dfrac{u}{|u|}|\nabla u|^2$. Donc $u|u|^{p-3}\nabla u\cdot\nabla|u| = u|u|^{p-3}\dfrac{u}{|u|}|\nabla u|^2 = \dfrac{|u|^{p-1}}{|u|}|\nabla u|^2 = |u|^{p-2}|\nabla u|^2$. Il en résulte que

$$\int_\Omega |u|^{p-2}|\nabla|^2\,dx = \int_\Omega u^2|u|^{p-4}|\nabla|u||^2\,dx = \int_\Omega u|u|^{p-3}\nabla u\cdot\nabla|u|\,dx. \tag{2.22}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Preuve. de la Proposition 2.9

La preuve est analogue à celle établie pour l'équation (2.15) dans [65]. Pour cette raison en ce qui concerne l'existence et l'unicité de la solution forte de l'équation (2.17), nous renvoyons à [65]. Considérons l'équation $-\operatorname{div}(\nabla u) = f$. On la multiplie membre à membre par la fonction $v = |u|^{p-2}u$ puis on intègre sur Ω. On obtient

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u)|u|^{p-2}u\,dx = \int_\Omega f|u|^{p-2}u\,dx. \tag{2.23}$$

En utilisant la formule de Green (2.10), on a

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(|u|^{p-2}u)\, dx = \int_\Omega f|u|^{p-2}u\, dx. \tag{2.24}$$

Considérons à présent l'intégrale $\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(|u|^{p-2}u)\, dx$. On a

$$\nabla(|u|^{p-2}u) = u\nabla(|u|^{p-2}) + |u|^{p-2}\nabla u$$

$$= (p-2)u|u|^{p-3}\nabla|u| + |u|^{p-2}\nabla u.$$

Donc on a,

$$\nabla u \cdot \nabla(|u|^{p-2}u) = (p-2)u|u|^{p-3}\nabla u \cdot \nabla|u| + |u|^{p-2}|\nabla u|^2. \tag{2.25}$$

Par ailleurs

$$\nabla(|u|^{\frac{p}{2}-1}u) = u\nabla(|u|^{\frac{p}{2}-1}) + |u|^{\frac{p}{2}-1}\nabla u$$

$$= |u|^{\frac{p}{2}-1}\nabla u + \left(\frac{p}{2}-1\right) u|u|^{\frac{p}{2}-2}\nabla|u|.$$

Donc

$$\left|\nabla(|u|^{\frac{p}{2}-1}u)\right|^2 = |u|^{p-2}|\nabla u|^2 +$$
$$\left(\frac{p}{2}-1\right)^2 u^2|u|^{p-4}|\nabla|u||^2 + 2\left(\frac{p}{2}-1\right) u|u|^{p-3}\nabla u\nabla|u|.$$

En utilisant le Lemme 2.10 on a

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left|\nabla(|u|^{\frac{p}{2}-1}u)\right|^2 dx &= \left[1+\left(\frac{p}{2}-1\right)^2+2\left(\frac{p}{2}-1\right)\right]\int_\Omega |u|^{p-2}|\nabla u|^2\,dx\\ &= \left(\frac{p}{2}-1+1\right)^2\int_\Omega |u|^{p-2}|\nabla u|^2\,dx\\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^2\int_\Omega |u|^{p-2}|\nabla u|^2\,dx.\end{aligned}$$

En combinant (2.25) et le Lemme 2.10, on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\left(|u|^{p-2}u\right)\,dx &= (p-2+1)\int_\Omega |u|^{p-2}|\nabla u|^2\,dx\\ &= (p-1)\int_\Omega |u|^{p-2}|\nabla u|^2\,dx.\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla\left(|u|^{p-2}u\right)\,dx = \frac{4(p-1)}{p^2}\int_\Omega |\nabla\left(|u|^{\frac{p}{2}-1}u\right)|^2\,dx. \tag{2.26}$$

En utilisant les équations (2.26) et (2.24), on a

$$\int_\Omega \frac{4(p-1)}{p^2}\left|\nabla\left(|u|^{\frac{p}{2}-1}u\right)\right|^2 dx = \int_\Omega f|u|^{p-2}u\,dx. \tag{2.27}$$

Posons $v=|u|^{\frac{p}{2}-1}u$, en appliquant l'inégalité de Poincaré (2.5), on a $\|v\|_{L^2}\leq C_p(\Omega)\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx &\geq \frac{1}{[C_p(\Omega)]^2}\int_\Omega |v|^2\,dx\\ \int_\Omega |\nabla|u|^{\frac{p}{2}-1}u|^2\,dx &\geq \frac{1}{[C_p(\Omega)]^2}\int_\Omega |u|^p\,dx.\end{aligned}$$

Ains on a

$$\frac{4(p-1)}{p^2}\int_\Omega |\nabla|u|^{\frac{p}{2}-1}u|^2\,dx \geq \frac{4(p-1)}{p^2[C_p(\Omega)]^2}\int_\Omega |u|^p\,dx. \tag{2.28}$$

Nous obtenons ainsi

$$\frac{4(p-1)}{p^2[C_p(\Omega)]^2}\|u\|_p^p \leq \int_\Omega f|u|^{p-2}u\,dx. \tag{2.29}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder (2.2.2) puisque $q = p/(p-1)$, nous obtenons,

$$\begin{aligned}\frac{4(p-1)}{p^2[C_p(\Omega)]^2}\|u\|_p^p &\leq \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega (|u|^{p-1})^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega (|u|^{q(p-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \|f\|_{L^p}\|u\|_{L^p}^{(p-1)}.\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young (1.32), on a pour une certaine constante positive $\mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}\frac{4(p-1)}{p^2[C_p(\Omega)]^2}\|u\|_p^p &\leq \mathcal{E}\|f\|_{L^p}^p + \mathcal{E}^{-\frac{p}{q}}\|u\|_{L^p}^{(p-1)q}\\ &\leq \mathcal{E}\|f\|_{L^p}^p + \mathcal{E}^{-\frac{p}{q}}\|u\|_{L^p}^p.\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\frac{4(p-1)}{p^2[C_p(\Omega)]^2} - \mathcal{E}^{-\frac{p}{q}}\right)\|u\|_p^p \leq \mathcal{E}\|f\|_{L^p}^p.$$

On a $\lim_{\mathcal{E}\to+\infty}\mathcal{E}^{-\frac{p}{q}} = 0$, donc on peut choisir $\mathcal{E} > 0$ tel que $\dfrac{4(p-1)}{p^2C_p(\Omega)} -$

$\mathcal{E}^{-\frac{p}{q}} > 0$ et en posant $[C_p(\Omega)]^2 = C_p$ on a

$$\|u\|_p^p \leq \frac{\mathcal{E}p^2C_p}{4(p-1) - p^2C_p\mathcal{E}^{-\frac{p}{q}}}\|f\|_{L^p}^p$$

$$\leq C_pp\left[\frac{\mathcal{E}p}{4(p-1) - p^2C_p\mathcal{E}^{-\frac{p}{q}}}\right]\|f\|_{L^p}^p$$

En faisant tendre $\mathcal{E} \longrightarrow +\infty$, on obtient

$$\|u\|_p^p \leq C_pp\left[\frac{\mathcal{E}p}{4(p-1)}\right]\|f\|_{L^p}^p$$

$$\leq C_pp\frac{\mathcal{E}p}{4p}\|f\|_{L^p}^p = C_pp\frac{\mathcal{E}}{4}\|f\|_{L^p}^p.$$

Nous pouvons donc conclure que

$\|u\|_p^p \leq C\|f\|_{L^p}^p$, avec $C = pC_p\frac{\mathcal{E}}{4}$ et $C_p = C\frac{1}{p^{2/p}}$ où C est une constante indépendante de p. Donc $\|u\|_p^p \leq Cp\frac{1}{p^{2/p}}\|f\|_{L^p}^p \leq Cp\|f\|_{L^p}^p$. Ce qui achève la preuve. ■

Nous pouvons maintenant donner le résultat d'estimation en norme L^p de la solution forte de l'équation (2.30).

2.3.2 Estimation L^p de la solution forte d'une équation elliptique d'ordre deux (Cas général)

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.30}$$

Nous supposons que $a_{ij} = a_{ji}, b_i, c \in L^\infty$ avec $(c \geq 0)$ et qu'il existe des constantes positives M_1 et M_2 telles que

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq M_1|\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, x \in \Omega, \tag{2.31}$$

et

$$\sum_{i,j=1}^{d} \|a_{ij}\|_{L^\infty(\Omega)} + \sum_{i=1}^{d} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M_2. \tag{2.32}$$

Remarque 2.11. *La condition (2.31) permet de dire que l'opérateur est $\mathcal{L}$ est elliptique.*

Remarque 2.12. *1. Pour $a_{ij} \in C^1(\Omega)$ par morceaux, nous pouvons réecrire (2.30) sous la forme nondivergencielle.*

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j} + \sum_{i=1}^{d} \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \quad dans \quad \Omega \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.33}$$

avec $\bar{b}_i = b_i - \displaystyle\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}$, $(i = 1, \ldots, d)$ et réciproquement.

2. On utilisera la forme (2.33) dans la suite de cette section.

On se propose de prouver le résultat suivant :

Proposition 2.13. *Soit Ω un domaine polygonal de $\mathbb{R}^2$. Soit $p \geq 2$, $f \in L^p(\Omega)$ et $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ solution forte de l'équation (2.33). Alors il existe une constante positive C_1 indépendante de p telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1 p \|f\|_{L^p(\Omega)}, \tag{2.34}$$

où C_1 dépend uniquement de d et Ω.

Preuve. Soit $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$, et ψ une fonction de troncature

définie sur Ω. On pourra consulter [65] pour plus de détails sur la fonction ψ. Posons $v = \psi u$, alors $v \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ et on a

$$-\sum_{i,j}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right) = g(x),\ x \in \Omega, \tag{2.35}$$

avec

$$g(x) = -\left(2\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi\sum_{i=1}^{d} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$
$$-u\left(\sum_{i,j} a_{i,j}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} + \psi c(x)\right) + \psi f.$$

En effet, nous avons :

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = u\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi\frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Alors

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + u\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \psi}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + \psi\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ce qui nous donne :

$$\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = 2\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sum_{i,j} a_{ij}u\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j} a_{ij}\psi\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$
$$= 2\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + u\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} + \psi\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Comme $\sum_{i,j} a_{i,j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = -f + \sum_{i=1}^{d} \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u$, nous avons

$$\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = 2\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + u\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} - \psi f + \psi \sum_{i=1}^{d} \bar{b}_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \psi c(x)u.$$

En d'autres termes, on peut réecrire les équations ci-dessus comme : $-\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = g(x)$ où

$$g(x) = -\left(2\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \psi \sum_{i=1}^{d} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - u\left(\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} + \psi c(x)\right) + \psi f.$$

Nous fixons $x_0 \in \Omega$, ainsi nous avons

$$-\sum_{i,j}\left(a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right) = F(x) = g(x) - h(x), \tag{2.36}$$

où $h(x) = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j}\left([a_{ij}(x_0) - a_{ij}(x)]\frac{\partial v}{\partial x_i}\right), \quad x \in \Omega.$

Partant de (2.36), nous procédons au changement de variable pour obtenir l'équation de Poisson. En effet, nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\sum_{i,j} a_{ij}(x_0)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = F(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ v = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.37}$$

Avec F définie ci-dessus. Comme $A = (a_{ij}(x_0))_{1\leq i,j\leq d}$ est une matrice définie positive, il existe une matrice P non singulière telle que $P^T AP = I_d$

où I_d est la matrice unité d'ordre d. Posons $y = P^T x$ où nous considérons les variables x et y comme des vecteurs colonnes. Alors

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial \hat{v}}{\partial y_k}\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial x_i} = P_{ki}\frac{\partial \hat{y}_k}{\partial x_i} = P_{ki}\hat{D}_k\hat{v} \tag{2.38}$$

et

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = P_{ki}\frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y_k \partial y_l}\frac{\partial \hat{y}_l}{\partial x_j} = P_{ki}P_{kl}\hat{D}_{kl}\hat{v}, \tag{2.39}$$

où $\hat{D}_k = \dfrac{\partial}{\partial y_k}$, $\hat{D}_{kl} = \dfrac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_l}$ et $\hat{v}(y) = v((P^T)^{-1})(y)$.

Par conséquent,

$$-\sum_{i,j}\left(a_{i,j}(x_0)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}\right) = -\sum_{i,j} a_{i,j}(x_0)P_{ki}P_{kl}\hat{D}_{kl}\hat{v}. \tag{2.40}$$

Comme $P^T A P = I_d$, nous avons

$$a_{i,j}(x_0)P_{ki}P_{kl}\hat{D}_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = l \\ 0 & \text{si} \quad k \neq l. \end{cases}$$

Alors (2.37) devient

$$\begin{cases} -\hat{\Delta}\hat{v} &= \hat{F}(y) \quad \text{dans} \quad \hat{\Omega} \\ \hat{v} &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial\hat{\Omega}, \end{cases} \tag{2.41}$$

où $\hat{\Delta} = \displaystyle\sum_{i,j}^{d} \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$ et $\hat{F}(y) = F((P^T)^{-1}y)$.

Nous appliquons le résultat de la Proposition 2.9. Ainsi il existe une constante positive $C(\hat{\Omega})$ telle que

$$\|\hat{v}\|_{L^p(\hat{\Omega})} \leq C(\hat{\Omega})p\|\hat{F}\|_{L^p(\hat{\Omega})}. \tag{2.42}$$

En revenant au changement de variable, et en utilisant la définition de v

et de F et puisque $\|\hat{v}\|_{L^p(\hat{\Omega})} \leq C\|v\|_{L^p(\Omega)}$, nous concluons qu'il existe une constante positive $C(\Omega)$ indépendante de p telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_1(\Omega)p\|f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.43}$$

Ce qui achève la preuve. ■

2.4 Estimation en norme L^p de ∇u

Soit Ω un domaine polygonal. Nous allons considérer l'équation elliptique d'ordre deux suivante :

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.44}$$

où $A = (a_{ij})$ satisfait les conditions (2.31) et (2.32). Nous nous proposons de prouver qu'il existe une constante positive C indépendante de p telle que

$$\|\nabla u\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}. \tag{2.45}$$

Cette estimation a été établie dans [22] pour un domaine régulier. Nous adaptons la preuve de [22] pour estimer la norme du gradient.

2.4.1 Inégalité de Young pour le produit de convolution

Nous allons rappeler l'inégalité de Young pour le produit de convolution. Le preuve de cette inégalité peut être consultée dans [3]. Elle s'énonce comme suit :

Proposition 2.14. *On suppose que $1 \leq p, q, r \leq \infty$ avec $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ et V, W deux ouverts de $\mathbb{R}^d$. soit $U = \{x - y : x \in W, y \in V\}$.*

Pour tout $u \in L^p(U)$ et $v \in L^q(V)$, on a

$$\|u * v\|_{L^r(W)} \leq \|u\|_{L^p(U)} \|v\|_{L^q(V)}. \tag{2.46}$$

2.4.2 Estimation en norme L^p

On se propose maintenant de prouver la proposition suivante :

Proposition 2.15. *Soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ solution faible de l'équation (2.44) et $f \in L^p(\Omega)$. Alors il existe une constante positive C_2 indépendante de p telle que*

$$\|\nabla u\|_{L^p} \leq C_2 \|f\|_{L^p}. \tag{2.47}$$

Preuve. Nous pouvons ramener notre problème (2.44) sous la forme

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.48}$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur différentiel défini au (2.11). D'après [48, Corollaire du Théorème 3.3] et du fait de l'unicité de u, on a pour tout $x \in \Omega$,

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x, y) Lu(y)\, dy, \tag{2.49}$$

où les dérivées de Γ vérifient l'estimation suivante. Il existe une constante positive telle que

$$|D^\alpha \Gamma(x, y)| \leq C \bar{\Gamma}_k(x - y), \tag{2.50}$$

pour $|\alpha| = k$. Avec

$$\bar{\Gamma}_k(z) \leq \begin{cases} 1 + log\frac{1}{|z|} & \text{si} \quad 2 - d - k = 0 \\ |z|^{2-d-k} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.51}$$

Soit $\mathcal{O}$ le cercle de rayon R circonscrit au rectangle Ω. Puisque dans le cas

d'espèce $d = 2 \neq 1$, on a

$$|D\Gamma(x,y)| \leq C\bar{\Gamma}(x-y). \tag{2.52}$$

Avec $\bar{\Gamma}(z) \leq \dfrac{1}{|z|}$. On a $\displaystyle\int_\Omega |\bar{\Gamma}(z)| \leq \int_\Omega \frac{1}{|z|} \leq C\int_0^R \frac{1}{r} r dr$. Par suite

$$\|\bar{\Gamma}(z)\|_{L^1} \leq C, \tag{2.53}$$

où C est une constante positive indépendante de p.
Comme $Du(x) = \displaystyle\int_\Omega D\Gamma(x,y)Lu(y)\,dy$, alors en utilisant l'inégalité de Young (2.46), on a

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^p} \leq & \|D\Gamma(x,y)Lu(y)\|_{L^1}\|Lu(y)\|_{L^p}\\ \leq & C\|\bar{\Gamma}(x-y)Lu(y)\|_{L^1}\|Lu(y)\|_{L^p}\\ \leq & C\|Lu(y)\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Par conséquent on obtient

$$\|\nabla u\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \tag{2.54}$$

où C est une constante indépendante de p. Ce qui achève la preuve de la proposition. ■

2.5 Estimation en norme L^p de D^2u

Dans cette section, nous allons donner une estimation en norme L^p de la solution forte de l'équation (2.1) dans Ω tel que $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Comme nous l'avons dit dans l'introduction, notre principal objectif pour ce qui concerne cette estimation est de donner plus de précision sur la constante de majoration. Les ingrédients principaux de notre approche sont : le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, l'inégalité de Calderon-Zygmund

et le potentiel Newtonien pour l'équation de Poisson. Ainsi, nous abordons dans un premier temps le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz comme dans [39], dans un second temps nous allons aborder l'inégalité de Calderon-Zygmund et le potentiel Newtonien pour l'équation de Poisson et finalement nous donnons le résultat sur l'estimation en norme L^p des dérivées d'ordre deux de la solution faible des équations elliptiques d'ordre deux.

2.5.1 Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz

Avant de donner ce théorème, nous allons donner quelques définitions et propositions.

Définition 2.16. *Soit f une fonction mesurable sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$. La distribution régulière $\mu = \mu_f$ de f est définie par :*

$$\mu(t) = \mu_f(t) = |\{x \in \Omega \quad f(x) > t\}|. \tag{2.55}$$

où $|A|$ dénote la mesure de Lebesgue de l'ensemble mesurable A avec $t > 0$.

Nous avons le lemme suivant.

Lemme 2.17. *[39] La fonction μ ainsi définie est une fonction décroissante sur $]0; +\infty[$.*

Preuve. On définit par $\Omega_t = \{x \in \Omega; \quad f(x) > t\}$.
Soient $t_1, t_2 \in]0; +\infty[$ tels que $t_1 < t_2$. Posons

$$\Omega_{t_1} = \{x \in \Omega; \quad f(x) > t_1\}. \tag{2.56}$$

et

$$\Omega_{t_2} = \{x \in \Omega; \quad f(x) > t_2\}. \tag{2.57}$$

Soit $x \in \Omega_{t_2}$, on a $f(x) > t_2 > t_1$. Donc $f(x) > t_1$ ainsi $x \in \Omega_{t_1}$. Par conséquent $\Omega_{t_2} \subset \Omega_{t_1}$ par suite $|\Omega_{t_2}| \leq |\Omega_{t_2}|$. D'où $\mu(t_2) \leq \mu(t_1)$. ■

Les propriétés de base d'une distribution régulière sont données par la proposition suivante.

Proposition 2.18. *Soit $p > 0$ et f une fonction mesurable telle que $|f|^p \in L^1(\Omega)$, on a :*

$$\mu(t) \leq t^{-p} \int_\Omega |f|^p \, dx \quad \textit{pour tout } t > 0, \tag{2.58}$$

et

$$\int_\Omega |f|^p \, dx = p \int_\Omega t^{p-1} \mu(t) \, dt \ \textit{pour tout } t > 0. \tag{2.59}$$

Preuve. Pour $x \in \Omega_t$, on a $x \in \Omega$ et $f(x) > t$. Donc $|f(x)|^p > t^p$.

Ainsi $\displaystyle\int_{\Omega_t} |f(x)|^p \geq t^p |\Omega_t| = t^p \mu(t)$. Ce qui prouve la relation (2.58).

Aussi on sait que $\displaystyle|f(x)| = \int_0^{|f(x)|} dt$. Donc $\displaystyle\int_\Omega |f(x)| \, dx = \int_\Omega \left(\int_0^{|f(x)|} dt \right) dx$. Ce qui donne $\displaystyle\int_\Omega |f(x)| \, dx = \int_0^{+\infty} \mu(t) \, dt$. En effet, il suffit de trouver une fonction $\begin{array}{rccl} h & : &]0;+\infty[\times\Omega & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (t,x) & \mapsto h(t,x), \end{array}$

telle que $\displaystyle\int_\Omega f(t,x) \, dx = \mu(t)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t,x) \, dt = |f(x)|$.

Soit $\chi(t,x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(x) > t \\ \\ 0 & \text{si} \quad f(x) \leq t. \end{cases}$

Posons $R = \{(t,x) \in]0;+\infty[\times\Omega / f(x) > t\}$. Nous constatons que, pour x fixé, $R_x = \{t > 0, f(x) > 0\} =]0; f(x)[$ et pour t fixé

$R_t = \{x \in \Omega / f(x) > t\} = U_t$. Ainsi, pour x fixé,

$$\chi(t,x) = \chi_x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(x) > t \\ \\ 0 & \text{si} \quad f(x) \leq t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad]0; |f(x)|[\\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \chi_{\{]0;|f(x)|[\}}(t),$$

et pour t fixé,

$$\chi(t,x) = \chi_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f(x) > t \\ \\ 0 & \text{si} \quad f(x) \leq t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in f^{-1}(]t; +\infty[) \\ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= \chi_{f^{-1}(]0;+\infty[)}(x)$$

$$= \chi_{\Omega_t}(x).$$

On a,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left[\int_\Omega \chi(t,x)\,dx\right]\,dt &= \int_\Omega\left(\int_0^{+\infty}\chi(t,x)\,dt\right)\,dx\\ &= \int_\Omega\left(\int_0^{+\infty}\chi(t)_{]0;|f(x)|[}\,dt\right)\,dx\\ &= \int_\Omega\left(\int_0^{+\infty}\chi(t)_{]0;|f(x)|[}\,dt\right)\,dx.\end{aligned}$$

On peut donc conclure que

$$\int_0^{+\infty}\mu(t)\,dt = \int_\Omega |f(x)|\,dx. \tag{2.60}$$

Pour obtenir l'égalité (2.59), nous allons procéder au changement de variable suivant : On pose $g = f^p$ et on définit donc

$$G_s := \{x\in\Omega/g(x) > s\}, \tag{2.61}$$

et $\lambda(s) = |G(s)|$. On a $\displaystyle\int_\Omega |g(x)|^p\,dx = \int_0^{+\infty}\lambda(s)\,ds$. Donc $\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p\,dx = \int_0^{+\infty}\mu(s^{\frac{1}{p}})\,ds$. Pour $s = t^p, ds = pt^{p-1}dt$. On obtient donc l'égalité cherchée. ■

Nous allons par la suite énoncer le théorème d'interpolation de Marcinkiewicz sous la forme donnée dans [39] dont nous reprenons la preuve en y apportant plus de détails.

Théorème 2.19 (Interpolation de Marcinkiewicz)**.** *Soit T une application linéaire définie de $L^q(\Omega)\cap L^r(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)\cap L^r(\Omega)$ avec $1\le q < r < \infty$. On suppose qu'il existe des constantes T_1 et T_2 telles que*

$$\mu_{T_f}(t) \le \left(\frac{T_1\|f\|_q}{t}\right)^q \tag{2.62}$$

et

$$\mu_{T_f}(t) \leq \left(\frac{T_2\|f\|_r}{t}\right)^r, \tag{2.63}$$

pour tout $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ et $t > 0$. Alors T est une application linéaire de $L^p(\Omega)$ dans lui même pour tout $q < p < r$ et

$$\|Tf\|_p \leq C(p,q,r)T_1^{\alpha}T_2^{1-\alpha}\|f\|_{L^p}, \tag{2.64}$$

pour tout $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ avec $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\alpha}{q} + \dfrac{1-\alpha}{r}$ et

$$C(p,q,r) = 2\left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-q}\right)^{1/p}.$$

Preuve. Soit $f \in L^q(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ et $s > 0$. Nous allons décomposer $f = f_1 + f_2$ avec

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad |f(x)| > s \\ \\ 0 & \text{si} \quad |f(x)| \leq s \end{cases}$$

et

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |f(x)| > s \\ \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq s. \end{cases}$$

Ainsi nous avons $Tf = Tf_1 + Tf_2$ et $|Tf| \leq |Tf_1| + |Tf_2|$ et par suite $\mu(t) = \mu_{Tf} \leq \mu_{Tf_1}(t/2) + \mu_{Tf_2}(t/2)$. Par conséquent on a

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{2T_1}{t}\right)^q \int_U |f_1|^q + \left(\frac{2T_2}{t}\right)^r \int_U |f_2|^r$$

$$\mu_{Tf}(t) \leq \left(\frac{2T_1}{t}\right)^q \int_{|f|>s} |f_1|^q + \left(\frac{2T_2}{t}\right)^r \int_{|f|\leq s} |f_2|^r.$$

En multipliant chaque terme par pt^{p-1} et après intégration on a,

$$p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mu_{Tf}(t) \leq p\,(2T_1)^q \int_0^{+\infty} t^{p-q-1}\left(\int_{|f|>s}|f_1|^q\right)\,dt \\ +p\,(2T_2)^r \int_0^{+\infty} t^{p-r-1}\left(\int_{|f|\leq s}|f_2|^r\right)\,dt.$$

En utilisant la relation (2.59), on obtient

$$\int_\Omega |Tf|^p \leq p\,(2T_1)^q \int_0^{+\infty} t^{p-q-1}\left(\int_{|f|>s}|f_1|^q\right)\,dt \\ +p\,(2T_2)^r \int_0^{+\infty} t^{p-r-1}\left(\int_{|f|\leq s}|f_2|^r\right)\,dt.$$

Posons $t = \gamma s$ où γ est une constante positive que nous allons définir après. Alors on a

$$\int_\Omega |Tf|^p \leq p\,(2T_1)^q\,\gamma^{p-q} \int_0^{+\infty} s^{p-q-1}\left(\int_{|f|>s}|f_1|^q\right)\,ds+ \\ p\,(2T_2)^r\,\gamma^{p-r} \int_0^{+\infty} s^{p-r-1}\left(\int_{|f|\leq s}|f_2|^r\right)\,ds.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} s^{p-q-1}\left(\int_{|f|>s}|f_1|^q\right)\,ds &= \int_\Omega |f|^q\left(\int_0^{|f|} s^{p-q-1}\,ds\right)\,dx \\ &= \frac{1}{p-q}\int_\Omega |f|^p\,dx.\end{aligned}$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} s^{p-r-1}\left(\int_{|f|\leq s}|f_2|^r\right)\,ds &= \int_\Omega |f|^r\left(\int_{|f|}^{\infty} s^{p-r-1}\,ds\right)\,dx \\ &= \frac{1}{r-p}\int_\Omega |f|^p\,dx.\end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\int_\Omega |Tf|^p \leq \left\{ \frac{p}{p-q}(2T_1)^q \gamma^{p-q} + \frac{p}{r-q}(2T_2)^r \gamma^{p-r} \right\} \int_\Omega |f|^p. \qquad (2.65)$$

Nous pouvons maintenant faire le choix de γ de telle sorte que le terme entre accolades soit minimal. Pour cela, on considère l'application $\Lambda : x \longmapsto \frac{p}{p-q}(2T_1)^q x^{p-q} + \frac{p}{r-q}(2T_2)^r x^{p-r}$. On suppose γ est telle que $\Lambda'(\gamma) = 0$. On a

$$\Lambda'(x) = 0 \Longleftrightarrow p(2T_1)^q x^{p-q-1} - p(2T_2)^r x^{p-r-1} = 0$$

$$\Longleftrightarrow p(2T_1)^q x^{p-q-1} = p(2T_2)^r x^{p-r-1}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^r}{x^q} = \frac{(2T_2)^r}{(2T_1)^q}$$

$$\Longleftrightarrow x^{r-q} = 2^{r-q} T_2^r T_1^{-q}$$

$$\Longleftrightarrow x = 2T_2^{\frac{r}{r-q}} T_1^{\frac{q}{q-r}}.$$

On peut donc prendre $\gamma = 2T_2^{\frac{r}{r-q}} T_1^{\frac{q}{q-r}}$. Par suite la relation (2.65) devient

$$\int_U |Tf|^p \leq \left\{ \frac{p}{p-q}(2T_1)^q (2T_2^{\frac{r}{r-q}} T_1^{\frac{q}{q-r}})^{p-q} + \frac{p}{r-q}(2T_2)^r (2T_2^{\frac{r}{r-q}} T_1^{\frac{q}{q-r}})^{p-r} \right\} \int_U |f|^p. \quad (2.66)$$

Par suite nous obtenons

$$\|Tf\|_p \leq 2 \left(\frac{p}{p-q} + \frac{p}{r-q} \right)^{\frac{1}{p}} T_2^{1-\alpha} T_1^{\alpha} \|f\|_{L^p}, \qquad (2.67)$$

où $\alpha = \dfrac{q(r-p)}{p(r-q)}$. ■

Nous allons énoncer ensuite l'inégalité de Calderon-Zygmund.

Théorème 2.20. *[39][Inégalité de Calderon-Zygmund] Soit $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$ et w le potentiel de Newton associé à f. Alors $w \in W^{2,p}$ et $\Delta w = f$. De plus il existe une constante $C(d,p)$*

$$\|D^2 w\|_p \leq C(d,p)\|f\|_{L^p}. \tag{2.68}$$

Remarque 2.21. *La constante $C(d,p)$ de l'inégalité de Calderon-Zygmund est issue de celle du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz pour $q = 1$ et $r = 2$. Par conséquent*

$$C(d,p) = \left(\frac{p}{p-1} + p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{p^2}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} = e^{\frac{1}{p} ln\left(\frac{p^2}{p-1}\right)}. \tag{2.69}$$

Nous rappelons le lemme de Dautray-Lions.

Lemme 2.22. *[30][Dautray-Lions vol.1 pp 277]*

Soit Ω_d un ouvert de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, $f \in \mathcal{D}'(\Omega_d)$ et v solution de l'équation de Poisson (2.17) dans Ω_d. Alors pour tout ouvert borné $\Omega \subset \Omega_d$, il existe $f_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_d)$ telle que $f = f_1$ dans Ω_d et v est le potentiel de Newton de f_1 dans Ω.

Nous sommes donc en mesure de donner la proposition suivante.

Proposition 2.23. *Soit $1 < p < \infty$ et $f \in L^p$. Soit u solution forte de l'équation de Poisson (2.17) dans Ω. Alors on a $u \in W^{2,p}$ et*

$$\|D^2 u\|_p \leq C\|f\|_p, \tag{2.70}$$

où C est une contante positive indépendante de p.

Preuve. La preuve de cette Proposition 2.23 est une conséquence du Théorème 2.20 et du Lemme 2.22 lorsque nous posons $f = f_1$ et $C(d,p) = e^{\frac{1}{p} ln\left(\frac{p^2}{p-1}\right)}$. On a $\frac{p^2}{p-1} = p + \frac{p}{p-1}$, donc

$$\frac{1}{p}ln\left(\frac{p^2}{p-1}\right) = \frac{1}{p}ln\left(p+\frac{p}{p-1}\right) \quad \begin{matrix} \longrightarrow & 0 \\ p & \longrightarrow & \infty. \end{matrix}$$

De plus la fonction $p \longmapsto \frac{1}{p}ln\left(\frac{p^2}{p-1}\right)$ est décroissante.

Donc il existe une constante positive C' indépendante de p telle que $C(d,p) \leq C'$.

Par conséquent on obtient

$$\|D^2u\|_p \leq C'\|f\|_p. \tag{2.71}$$

On prend $C = C'$. Ce qui achève la preuve. ■

On peut donc généraliser cette Proposition 2.23 aux équations elliptiques d'ordre deux de la même manière que celle que nous avons effectué dans l'estimation en norme L^p de la solution forte des équations elliptiques d'ordre deux. Ainsi nous avons la proposition suivante.

Proposition 2.24. *Soit $1 < p < \infty$ et $f \in L^p$. Soit u solution forte de l'équation elliptique (2.1) dans Ω.*

Alors on a $u \in W^{2,p}$ et $\|D^2u\|_p \leq C'\|f\|_p$.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 2.25. *Soit $p \geq 2$ et $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ solution faible du problème (2.1). Etant donné $f \in L^p(\Omega)$, il existe une constante positive C indépendante de p telle que :*

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq Cp\|f\|_{L^p}. \tag{2.72}$$

Preuve. En utilisnant les propositions 2.13, 2.15 et 2.23 on a

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq (C_1p + C_2 + C_3p)\|f\|_{L^p}. \tag{2.73}$$

En posant $C = max(C_1, C_2, C_3)$, on obtient

$$\|u\|_{W^{2,p}} \leq Cp\|f\|_{L^p}. \tag{2.74}$$

Ce qui achève la preuve. ■

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi un résultat d'estimation en norme $W^{2,p}$ de la solution faible des équations elliptiques linéaires d'ordre deux. Notre principal apport pour cette estimation est le fait que nous avons donné plus de détails sur la constante de majoration dans un domaine borné polygonal.

Chapitre Trois

Analyse d'erreur à priori pour la méthode d'éléments finis mixtes $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1^{2\times 2}$ de l'équation elliptique de Monge-Ampère

Sommaire

3.1 Introduction 71

3.2 Modèle 72

3.2.1 Modèle 73

3.3 Rappel de quelques formules 73

3.4 Formulation faible mixte 77

3.5 Analyse d'erreur à priori pour une méthode d'éléments finis mixtes $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1^{2\times 2}$ 80

3.5.1 Discrétisation 80

3.5.2 Méthode du gradient reconstruit 80

3.5.3 Procédure de construction du gradient reconstruit 81

3.5.4 Queslques proprétés de l'opérateur gradient reconstruit . . . 83

3.6 Formulation mixte discrète 84

3.6.1 Espace de discrétisation et normes dépendantes du maillage 84

3.6.2 Espaces de discrétisation 85

3.6.3 Norme dépendant du maillage 85

3.6.4 Problème linéarisé 86

3.6.5 Formulation faible du problème linéarisé 86

3.6.6 Formulation discrète du problème linéarisé 87

Jamal ADETOLA ©URPM/IMSP 2018
adetolajamal58@yahoo.com

3.6.7 Sur la régularité elliptique 87
3.6.8 Quelques opérations sur le saut et la moyenne 89
3.7 Analyse d'erreur à priori 92
3.7.1 Définition de la boule 94
3.7.2 Définition de l'application T 95
3.7.3 Propriété de contraction 99
3.7.4 Existence et unicité de solution 103
3.7.5 Majoration d'erreur à priori 104
3.8 Conclusion 105

3.1 Introduction

L'équation elliptique de **Monge-Ampère** intervient particulièrement dans le problème du réflecteur inverse. En effet, le problème du réflecteur inverse se pose en optique géométrique non imaginaire [64, 49]. Il peut être formulé de la manière suivante : **Etant donné une source de lumière et une cible, comment concevoir une surface u réfléchissante en forme libre telle qu'une distribution de densité de lumière souhaitée soit générée sur la cible** ? A titre illustratif, projeter une image sur un écran ou bien projeter une image sur un mur. Il y a de cela deux mille ans, des réflecteurs projetant des images appelés miroir magiques chinois ont été fabriqués à la main en bronze en Chine et au Japon, mais cette recette a été perdue et reconstruite plusieurs fois au cours des années [14, 16]. Aujourd'hui de telles surfaces de forme libre sont très importantes dans les applications d'éclairage. Par exemple, elles sont utilisées dans l'industrie automobile pour la construction des phares qui utilisent le plein de la lumière émise par la lampe pour éclairer la route mais en même temps sans éblouir la circulation en sens inverse [68]. C'est au début du 21^e siècle qu'il s'est avéré que la résolution du problème du réflecteur inverse peut être modélisée par l'équation de **Monge-Ampère**. Cette équation est une

équation aux dérivées partielles totalement non linéaire et se pose souvent dans le contexte d'un problème de transport optimal. Elle intervient aussi dans le contexte économique. Par exemple si l'on veut minimiser le coût du transport qui est mésuré par une fonctionnelle de coût quadratique sous la contrainte de conservation de la masse totale, on obtient l'équation de **Monge-Ampère** [68]. Dans cet esprit, le problème du réflecteur inverse traite du transport de la lumière sous la contrainte selon laquelle le flux total émis par la source est redistribué à la surface ciblée [19, 18]. Pour ce qui nous concerne, nous allons proposer une méthode d'éléments finis mixtes linéaires pour l'approximation numérique des solutions régulières de l'équation elliptique de **Monge-Ampère**. Avant d'y procéder, nous donnons dans le chapitre qui suit un résultat de régularité elliptique dans un domaine polygonal.

3.2 Modèle

Les problèmes du réffracteur inverse sont modélisés par l'équation de **Monge-Ampère** qui se met généralement sous la forme cf [19, 18] :

$$\det(D^2u + A(x, u, \nabla u)) = \mathcal{G}(x, \nabla u) \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{3.1}$$

Avec

- Ω est un ouvert régulier de $\mathbb{R}^d$.
- $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction scalaire convexe ou concave.
- ∇u est le vecteur gradient de u et D^2u est sa matrice Hessienne.
- $\mathcal{G} : \Omega \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions données.
- On ajoute les conditions au bord de Ω.

Remarque 3.1. *L'hypothèse de convexité de la solution u est une condition nécessaire pour rendre l'équation de* ***Monge-Ampère*** *elliptique. Elle*

intervient aussi pour les résultats de régularité de la dite équation.

Dans toute la suite le modèle que nous allons utiliser est le suivant.

3.2.1 Modèle

$$\begin{cases} \det D^2u = f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ \qquad u = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

où u est une fonction scalaire convexe solution de (3.2),

$$D^2u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,2}, \tag{3.3}$$

est la Hessienne de u, $f \in C(\Omega)$ et $g \in C(\partial\Omega)$ sont des fonctions données. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $f \geq c$. Dans nos travaux nous ne nous interressons pas à la théorie de l'existence, d'unicité et de régularité de la solution faible ou généralisée de (3.2). Plusieurs travaux et résulltats allant dans ce sens sont abordés et traités dans [20, 62, 61, 63, 21]. Par la suite on supposera que la solution u de (3.2) est suffisament régulière pour nos besoins.Comme nous allons travailler dans un domaine polygonal, on supposera pour la suite $d = 2$. Nous donnons dans ce qui suit quelques formules utiles pour la suite.

3.3 Rappel de quelques formules

Tout au long de ce chapitre nous allons utiliser certaines identités ou formules. Nous proposons dans cette section de les rappeler.

Proposition 3.2. *Pour toute matrice $A \in \mathbb{M}$ avec $d = 2$,on a*

$$\partial(\det A)/\partial(a_{ij}) = (\mathrm{cof}(A))_{ij}. \tag{3.4}$$

Preuve. Pour fixer les idées. Nous posons $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21}$. Aussi $\dfrac{\partial(\det A)}{\partial a_{11}} = a_{22}$ $\dfrac{\partial(\det A)}{\partial a_{21}} = -a_{12}$, $\dfrac{\partial(\det A)}{\partial a_{22}} = a_{11}$ et $\dfrac{\partial(\det A)}{\partial a_{12}} = -a_{21}$. En notant

$$\nabla(\det A) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial(\det A)}{\partial a_{11}} & \dfrac{\partial(\det A)}{\partial a_{12}} \\ \\ \dfrac{\partial(\det A)}{\partial a_{21}} & \dfrac{\partial(\det A)}{\partial a_{22}} \end{pmatrix},$$

on obtient $\nabla(\det A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} = \operatorname{cof}(A)$. Ce qui achève preuve de la proposition. ■

Proposition 3.3. *Pour toute fonction v de classe $C^2(\Omega)$, l'application $F : v \longmapsto \det D^2 v$ est différentiable et pour tout $w \in C^2(\Omega)$, on a*

$$DF(v)(w) = (\operatorname{cof} D^2 v) : D^2 w. \tag{3.5}$$

Preuve. Soit $v \in C^2(\Omega)$. Considérons l'application F définie par $F(v) = \det D^2 v$.

Soit $x \in \Omega$, considérons la fonction $f_1 : v \longmapsto D^2 v$. Définissons l'application f_2 par :

$$\begin{array}{rccc} f_2 & : \mathbb{M}_{d\times d}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & M & \longmapsto & \det M. \end{array} \tag{3.6}$$

On a $F(v) = f_2 \circ f_1(v)$. Ainsi pour tout w, on a $DF(v)(w) = Df_2 \circ f_1(v) \circ Df_1(v)(w)$. Comme f_1 est linéaire et continue alors $Df_1(v)(w) = f_1(w)$. Ainsi en utilisant (3.4), on obtient

$$\begin{aligned} DF(v)(w) &= Df_2 \circ f_1(v)(f_1(w)) \\ &= \langle \nabla f_2(f_1(v)), f_1(w) \rangle \\ &= \langle \mathrm{cof}(D^2 v), D^2 w \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi on a $DF(v)(w) = \langle \mathrm{cof}(D^2 v), D^2 w \rangle$ et par conséquent, on peut conclure que $DF(v)(w) = \mathrm{cof}(D^2 v) : D^2 w$. ■

Proposition 3.4 ([6]). *Pour toute fonction convexe (respectivement strictement convexe) v de classe $C^2(\Omega)$, la matrice Hessiennee $D^2 v$ est positive (respectivement définie positive).*

Nous donnons aussi quelques formules techniques sur le calcul du déterminant. En considérant une matrice carrée $A = (A)_{i,j=1,\dots,2}$ d'ordre 2 et en désignant par $(\mathrm{cof}\, A)$ la matrice du cofacteur. C'est-à-dire $(\mathrm{cof}\, A)_{ij} = (-1)^{i+j}(\det A)_i^j$; où $(\det A)_i^j$ est le déterminant de la matrice obtenue par suppression du i^{ime} ligne de la j^{ime} colonne de la matrice A.

Proposition 3.5. *Pour toute matrice $A \in \mathbb{M}$ et $d = 2$, on a*

$$\det A = \frac{1}{2}\mathrm{cof}(A) : A. \tag{3.7}$$

Preuve. On pose $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ on a $\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$ donc

$$\begin{aligned} A : \mathrm{cof}(A) &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} \\ &= 2a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ &= 2\det A. \end{aligned}$$

Par suite on a

$\det A = \dfrac{1}{2}\mathrm{cof}(A) : A$ ■

Proposition 3.6. *Pour toute fonction $v \in C^3(\Omega)$,*

$$\mathrm{div}(\mathrm{cof}\, D^2 v) = 0. \tag{3.8}$$

Preuve. Soit $v \in C^3(\Omega)$, on a $D^2 v = \begin{pmatrix} v_{xx} & v_{xy} \\ v_{yx} & v_{yy} \end{pmatrix}$ et

$\mathrm{cof}(D^2 v) = \begin{pmatrix} v_{yy} & -v_{yx} \\ -v_{xy} & v_{xx} \end{pmatrix}$. Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{div}[\mathrm{cof}\, D^2 u] &= \mathrm{div} \begin{pmatrix} v_{yy} & -v_{yx} \\ -v_{xy} & v_{xx} \end{pmatrix} \\ &= v_{yyx} - v_{yxx} - v_{xyy} + v_{xxy} \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Remarque 3.7. *Toutes les identités ou formules énoncées dans cette section sont valables en dimension d quelconque.*

3.4 Formulation faible mixte

Nous donnons une formulation faible mixte de notre modèle (3.2). On pose $\sigma = D^2u$, on a

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\sigma,\tau)_\Omega & = & (D^2u,\tau)_\Omega \quad \forall\tau \in H^1(\Omega)^{2\times 2} \\ (\det\,\sigma, v)_\Omega & = & (f,v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{array}\right. \tag{3.9}$$

En ulilisant (2.10), la formulation mixte du problème (3.2) est alors :

trouver $(u,\sigma) \in H^3(\Omega)\times[H^1(\Omega)]^{2\times 2}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} (\sigma,\tau)_\Omega + (\mathrm{div}\,\tau, \nabla u)_\Omega - \langle \nabla u, \tau n\rangle_{\partial\Omega} & = & 0 \quad \forall\tau \in [H^1(\Omega)]^{2\times 2} \\ (\det\,\sigma, v)_\Omega & = & (f,v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u & = & g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3.10}$$

Proposition 3.8. *[11] Le problème (3.10), est bien défini.*

Preuve. Pour voir le caractère bien défini du système (3.10), il suffit de voir que le produit scalaire $(\det\,\sigma, v)$ a un sens pour tout $v \in L^2(\Omega)$ et $\sigma \in H^1(\Omega)^{d\times d}$. Comme $d = 2$, alors on écrit σ sous la forme

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

et $\det\sigma = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{21}\sigma_{12}$ où $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{21}, \sigma_{12} \in H^1(\Omega)$. En utilisant l'inégalité de Hölder on a

$$\left|\int_\Omega \sigma_{11}\sigma_{22}v\right| \leq \|\sigma_{11}\|_{L^4}\|\sigma_{22}\|_{L^4}\|v\|_{L^2}. \tag{3.11}$$

En utilisant les injections de Sobolev

$(H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ pour $1 \leq q < \infty$ en dimension $d = 2)$. Nous obtenons

$$\left|\int_\Omega \sigma_{11}\sigma_{22}v\right| \lesssim \|\sigma_{11}\|_{H^1}\|\sigma_{22}\|_{H^1}\|v\|_{L^2} < \infty. \tag{3.12}$$

De la même manière on prouve que

$$\left|\int_\Omega \sigma_{11}\sigma_{22}v\right| \lesssim \|\sigma_{11}\|_{H^1}\|\sigma_{22}\|_{H^1}\|v\|_{L^2} < \infty. \tag{3.13}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Pour voir le caractère bien posé de la formulation mixte, nous donnons la proposition suivante.

Proposition 3.9. *La formulation variationnelle mixte est équivalente au prolème de* ***Monge-Ampère*** (3.10) *et le problème est bien posé.*

Preuve. Soit $u \in H^3(\Omega)$ solution du problème (3.10). Pour $\sigma = D^2u$ dans Ω, on a :

$$\begin{cases} \det \sigma &= f \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u &= g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} (\sigma,\tau)_\Omega &= (D^2u,\tau)_\Omega \quad \forall \tau \in H^1(\Omega)^{2\times 2} \\ (\det\,\sigma, v)_\Omega &= (f,v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u &= g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

En utilisant la formule de Green, (2.10), on obtient

$$\begin{cases} (\sigma,\tau)_\Omega + (\operatorname{div}\tau, \nabla u)_\Omega - \langle \nabla u, \tau n\rangle_{\partial\Omega} &= 0 \quad \forall \tau \in H^1(\Omega)^{2\times 2} \\ (\det\,\sigma, v)_\Omega &= (f,v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u &= g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.14}$$

Réciproquement, supposons que (u,σ) est solution du problème mixte

(3.10)

$$\begin{cases} (\sigma,\tau)_\Omega + (\operatorname{div}\tau, \nabla u)_\Omega - \langle \nabla u, \tau n\rangle_{\partial\Omega} &= 0 \quad \forall \tau \in H^1(\Omega)^{2\times 2} \\ (\det\,\sigma, v)_\Omega &= (f,v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ u &= g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.15}$$

On utilise encore la formule de Green (2.10), et on a

$$\begin{cases} (\sigma,\tau)_\Omega &= (D^2u,\tau)_\Omega \quad \forall \tau \in H^1(\Omega)^{2\times 2} \\ (\det\,\sigma, v)_\Omega &= (f,v)_\Omega \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ u &= g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Ce qui donne,

$$\begin{cases} \sigma &= D^2u \quad \text{dans} \quad D'(\Omega) \\ \det\,\sigma &= f \quad \text{dans} \quad D'(\Omega) \\ u &= g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Il est prouvé dans [11] que si le problème (3.2) admet une unique solution convexe $u \in H^\delta(\Omega)$ avec $\delta > 3$ en dimension deux. Alors le problème mixte (3.10) admet une unique solution $(u,\sigma) \in H^2(\Omega) \times H^1(\Omega)^{2\times 2}$. Ce qui achève la preuve. ■

On peut faire le constat suivant.

Remarque 3.10.

• *Pour $u \in H^\delta(\Omega)$ avec $\delta > 3$, par injection de Sobolev on a $u \in C^2(\Omega)$.*

• *D'autres hypothèses de régularité sur u pourraient être ajoutées lors de l'analyse d'erreur à priori par la méthode des éléments finis.*

Nous pouvons donc passer à une discrétisation et l'analyse d'erreur de notre approche.

3.5 Analyse d'erreur à priori pour une méthode d'éléments finis mixtes $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1^{2\times 2}$

3.5.1 Discrétisation

Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une famille régulière de triangulation de Ω. Nous désignons par $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction définissant la taille d'un élément de $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$. Autrement dit $h := \max_{x\in\widehat{K}} h_K$. Nous introduisons alors les espaces de dimensions finies suivants :

$$\Sigma_h := \left\{\tau_h : \tau_h|_K \in \mathbb{P}_1(K)^{2\times 2}, \forall K \in \mathcal{T}_h\right\} \tag{3.16}$$

et

$$V_h := \left\{v_h \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\right\} \tag{3.17}$$

où $\mathbb{P}_k$ l'espace des fonctions polynomiales à deux variables de degré au plus k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3.5.2 Méthode du gradient reconstruit

Nous nous proposons dans cette section de donner un bref aperçu sur la technique du gradient reconstruit. Cette technique est beaucoup utilisée pour la superconvergence de l'approximation des équations aux dérivées partielles par des méthodes des éléments finis. Nous avons utilisé cette technique dans l'étude d'analyse d'erreur à priori de notre modèle de **Monge-Ampère**. Ainsi, avec cette dernière nous avons obtenu une nouvelle méthode pour l'approximation de l'équation de **Monge-Ampère**. Il existe plusieurs manières de définir un opérateur gradient reconstruit.

3.5.3 Procédure de construction du gradient reconstruit

Nous allons rappeler dans ce qui suit la procédure de construction d'un certain opérateur gradient reconstruit. Soit $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ une triangulation régulière et uniforme d'un ouvert borné polygonal Ω. On définit

$$V_h := \{w_h \in C^0(\bar{\Omega}), w_{h|K} \in \mathbb{P}_k(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \tag{3.18}$$

Soit $\mathcal{N}_h$: l'ensemble de tous les sommets de la triangulation. Pour $z \in \mathcal{N}_h$, on désigne par w_z la réunion de tous les éléments ayant z en commun et par $\mathcal{N}_h(w_z)$ l'ensemble de tous les nœuds de w_z. L'opérateur gradient reconstruit est dénoté par : $G_h : V_h \longrightarrow V_h \times V_h$ tel que

$$G_h v_h = \sum_{z\in\mathcal{N}_h} G_h v_h(z)\phi_z. \tag{3.19}$$

où ϕ_z est une fonction de base associée à un nœud z. Pour construire $G_h v_h$, on défini dans un premier temps $G_h v_h$ au nœud z de w_z. En définissant $G_h v_h$ au nœud z pour tout z, on a ainsi définit $G_h v_h$ à tous les nœuds. On obtient $G_h v_h \in V_h \times V_h$ sur tout le domaine par interpolation en utilisant les fonctions de base d'origine de V_h. Pour ce qui concerne la construction de $G_h v_h(z)$, on procède par un ajustement grâce à la méthode des moindres carrées d'un polynôme de degré $k+1$ avec les valeurs de v_h aux nœuds de $\mathcal{N}_h(w_z)$. On peut se référer par exemple à [54]. En d'autres termes, on cherche $p_{k+1} \in \mathbb{P}_{k+1}$ tel que :

$$\sum_{j=1}^{N} \left(p_{k+1} - v_h\right)^2 (z_j) = \min_{q\in\mathbb{P}_{k+1}} \sum_{j=1}^{N} \left(q - v_h\right)^2 (z_j). \tag{3.20}$$

On définit alors

$$G_h v_h(z) = \nabla p_{k+1}(x, y), \tag{3.21}$$

où (x, y) sont les coordonnées de la triangulation de centre z. On pose

$$G_h v_h(z) = (G_h^x v_h(z), G_h^y v_h(z)). \tag{3.22}$$

Cette démarche conduit à une méthode de différences finies. Ainsi

$$G_h v_h(z) = \frac{1}{h}\left(\sum_{j=0}^{N} b_j^1 v_{hj}(z), \sum_{j=0}^{N} b_j^2 v_{hj}(z)\right), \tag{3.23}$$

où les b_j^1 et b_j^2 sont des constantes indépendantes de h. Nous allons adopter la définition suivante. Pour toute matrice carrée d'ordre deux $A = (a_{ij})$ on définit par

$$AG_h v_h := (a_{11}G_h^x v_h + a_{12}G_h^y v_h, a_{21}G_h^x v_h + a_{22}G_h^y v_h) \in V_h \times V_h. \tag{3.24}$$

On peut aussi consulter [42] et [67] pour plus de détails dans la construction de l'opérateur gradient reconstruit.

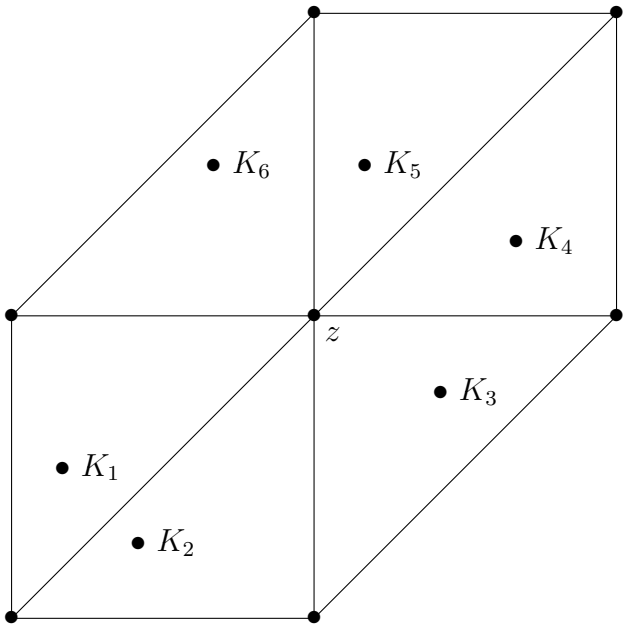


FIGURE 3.1 – Exemple de w_z

3.5.4 Queslques proprétés de l'opérateur gradient reconstruit

Pour une triangulation régulière et uniforme, l'opérateur gradient reconstruit vérifie l'inégalité discrète de Poincaré suivante

Proposition 3.11. *[67, Section 4.1] Pour tout* $v_h \in V_h$, *et* $p \geq 2$

$$\exists C > 0, \|v_h\|_{W^{i,p}} \leq C\|G_h v_h\|_{W^{i,p}}, \ i = 0, 1. \tag{3.25}$$

Par ailleurs l'opérateur gradient reconstruit vérifie les propriétés suivantes

Proposition 3.12. *[42, 67]*

1. *L'opérateur* G_h *est linéaire.*
2. G_h *satisfait la condition de consistance. C'est -à-dire*

$$G_h(I_h p) = \nabla p \quad \forall p \in \mathbb{P}_{k+1},$$

où I_h *est l'opérateur d'interpolation de Lagrange. Par conséquent,* G_h *est un opérateur de préservation polynomiale et possède la propriété d'approximation suivante c.f. [54] : il existe une constante positive* C *indépendante de* h *telle que*

$$\|\nabla v - G_h(I_h v)\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{k+1} |v|_{k+2,\Omega}, \ \forall v \in \mathbb{P}_{k+1}(\Omega). \tag{3.26}$$

Proposition 3.13. *[67, Theorem 2.2]. L'opérateur gradient reconstruit* $G_h : V_h \to V_h \times V_h$ *possède la propriété de superconvergence, i.e.*

$$||\sigma - DG_h I_h u||_{L^\infty} \leq Ch||u||_{W^{3,\infty}}, \tag{3.27}$$

où $\sigma = D^2 u$

L'opérateur gradient reconstruit est borné. Dans le sens du lemme suivant.

Lemme 3.14. *Pour tout $v \in V_h$, on a*

$$||G_h v||_{L^p} \leq ||\nabla v_h||_{L^p}, \tag{3.28}$$

pour une constante positive C indépendante de h et de p.

Preuve. La preuve de ce lemme est analogue aux preuves données dans [66, Proposition 2] et dans [53, Theorem 3.2]. ■

3.6 Formulation mixte discrète

Notre formulation discrète mixte est de : trouver $(u_h, \sigma_h) \in V_h \times \Sigma_h$ tel que $u_h = g_h$ sur $\partial\Omega$

$$\begin{aligned} \int_\Omega (f - \det \sigma_h) v \, dx = 0, \ \forall v \in V_h \cap H_0^1(\Omega) \\ \int_\Omega \sigma_h : \mu \, dx = \int_\Omega \nabla G_h u_h : \mu \, dx, \ \forall \mu \in \Sigma_h, \end{aligned} \tag{3.29}$$

où G_h est l'opérateur gradient reconstruit défini en (3.19).

3.6.1 Espace de discrétisation et normes dépendantes du maillage

On considère une triangulation régulière $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$ de Ω. Dans cette section on abordera dans un premier temps la notion sur les espaces de Sobolev discrets et dans un second temps la notion de norme discrète c'est-à-dire norme dépendante du maillage. Tous les résultats de cette section sont valables pour les V_h définis par :

$$V_h := \{v \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) : v_{|K} \in \mathbb{P}_k \ \forall K \in \mathcal{T}_h \text{ et } k \geq 1\}. \tag{3.30}$$

3.6.2 Espaces de discrétisation

Pour une triangulation régulière $(\mathcal{T}_h)_{h>0}$, $m \geq 0$ et $1 \leq p \leq \infty$ on définit :

$$W^{m,p}(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^p(\Omega) : \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{|K} \in W^{m,p}(K)\} \tag{3.31}$$

et

$$H^m(\mathcal{T}_h) := \{v \in L^2(\Omega) : \forall K \in \mathcal{T}_h, v_{|K} \in H^m(K)\}. \tag{3.32}$$

En d'autres termes, on a

$$\|v\|^2_{H^m(\mathcal{T}_h)} := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v\|^2_{H^m(K)}, \tag{3.33}$$

$$\|v\|^2_{W^{m,\infty}(\mathcal{T}_h)} := \max_{K\in\mathcal{T}_h} \|v\|^2_{W^{m,\infty}(K)} \tag{3.34}$$

et

$$\|v\|^2_{L^\infty(\mathcal{T}_h)} := \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \|v\|^2_{L^\infty(K)}. \tag{3.35}$$

3.6.3 Norme dépendant du maillage

Il est parfois indispensable de définir de nouvelles normes liées au maillage du domaine. Cette nouvelle définition de norme est technique et permet souvent de pouvoir obtenir des majorations en norme discrète. Notre approche utilise une norme dépendante du maillage (**Mesh depending norm**) que nous définissons sur V_h par

$$\|v\|^p_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathcal{T}_h)} := \|v\|^p_{L^p} + ||G_h v||^p_{L^p}.$$

Par ailleurs utilisant (3.28), on vérifie que cette norme dépendante du maillage vérifie la propriété suivante.

$$\|v\|^p_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathcal{T}_h)} \leq C\|v\|^p_{W^{1,p}}, \tag{3.36}$$

pour une constante positive C indépendante de h et de p.

3.6.4 Problème linéarisé

Dans notre approche nous allons utiliser le problème linéarisé du modèle (3.2). Ainsi on pose $F(u) = f - \det D^2u$, en utilisant la différentiabilité au sens de Fréchet on a, $F'(u)(v) = -\operatorname{div}(\operatorname{cof} D^2u\nabla v)$. On pose par la suite $A = \operatorname{cof}(D^2u)$. Nous pouvons donc mettre le problème (3.2) sous la forme : trouver w tel que :

$$\begin{cases} \eta = D^2w & \text{dans} \quad \Omega \\ -\operatorname{div}(A\nabla w) = m & \text{dans} \quad \Omega \\ w = l & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.37}$$

3.6.5 Formulation faible du problème linéarisé

Une formulation faible du problème linéarisé est : étant donné $m \in L^2(\Omega)$, et $l \in L^2(\partial\Omega)$ trouver $(w, \eta) \in H^3(\Omega) \times [H^1(\Omega)]^{2\times 2}$ tel que

$$\begin{cases} (\eta, \mu)_\Omega = (D^2w, \mu)_\Omega & \forall \mu \in [H^1(\Omega)]^{2\times 2} \\ (\operatorname{cof}(D^2u)\nabla w, \nabla v)_\Omega = (m, v)_\Omega & \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ w = l \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.38}$$

En ulilisant la stricte convexité de D^2u et le lemme de Lax-Milgram, le problème (3.38) est bien posé.

3.6.6 Formulation discrète du problème linéarisé

La formulation du problème linéarisé au niveau discret que nous avons considérée est la suivante : trouver $(w_h, \eta_h) \in V_h \times \Sigma_h$

$$\begin{aligned} (\eta_h, \mu)_\Omega &= (\nabla G_h w_h, \mu)_\Omega \forall \mu \in \Sigma_h \\ ((\mathrm{cof}(D^2 u)\nabla w_h, \nabla v)_\Omega &= (f, v)_\Omega, \ \forall v \in V_h \cap H_0^1(\Omega) \\ w_h &= g_h \,\mathrm{sur}\, \partial\Omega. \end{aligned} \tag{3.39}$$

Par la stricte convexité de u, le problème (3.39) est bien posé.

3.6.7 Sur la régularité elliptique

Nous rappelons ici le théorème de régularité et nous donnons quelques conséquences directes liées à ce théorème, notamment la régularité elliptique discrète.

Théorème 3.15 (Régularité elliptique)**.** *Soit* Φ*, une solution du problème*

$$-\,\mathrm{div}((\mathrm{cof}\, D^2 u)\nabla\Phi) = r \ \textit{dans}\ \Omega, \ \ \Phi = 0 \ \textit{sur}\ \partial\Omega. \tag{3.40}$$

Pour $r \in L^p(\Omega), \quad p \geq 2$*, nous avons : la solution faible* Φ *de* (3.40) *est dans* $W^{2,p}(\Omega)$ *et de plus l'inégalité suivante est satisfaite*

$$\|\Phi\|_{W^{2,p}} \leq Cp\|r\|_{L^p}. \tag{3.41}$$

Il est prouvé dans [22] que si Ω est régulier(c'est-à-dire ouvert de classe $C^{1,1}$) (3.41) est vérifié. Dans cette thèse nous avons prouvé c.f. [5] que c'est aussi vérifié sur un carré.

Nous donnons ensuite la version discrète du théorème de régularité.

Lemme 3.16 (Régularité elliptique discrète)**.** *Soit* $r \in L^p(\Omega)$ *et soit* $v \in$

$V_h \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *solution faible de*

$$\big((\text{cof } D^2u)\nabla v, \nabla w\big)_\Omega = (r,w)_\Omega, \forall w \in V_h \cap W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.42}$$

Alors

$$\|v\|_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} \leq Cp\|r\|_{L^p}.$$

Preuve.

Soit ϕ solution faible de

$$-\text{div}((\text{cof } D^2u)\nabla\phi) = r \ in \ \Omega, \ \phi = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \tag{3.43}$$

D'après l'hypothèse de régularité elliptique (3.41), $\phi \in W^{2,p}(\Omega)$ on a

$$||\phi||_{W^{2,p}} \leq Cp||r||_{L^p}.$$

Soit $P_h : W_0^{1,p}(\Omega) \to V_h \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ la projection définie par

$$\big((\text{cof } D^2u)\nabla P_h z, \nabla w)\big) = \big((\text{cof } D^2u)\nabla z, \nabla w\big)\, dx, \quad \forall w \in V_h \cap W_0^{1,p}(\Omega).$$

Nous avons, en se référant par exemple [15, (8.5.4)],

$$\|P_h w - w\|_{W^{1,p}} \leq Ch\|w\|_{W^{2,p}} \text{ pour } w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.44}$$

Nous avons par (3.36) et (3.44)

$$\begin{aligned} ||v||_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} &= ||P_h\phi||_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} \leq ||P_h\phi - \phi||_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} + ||\phi||_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} \\ &\leq ||P_h\phi - \phi||_{W^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} + ||\phi||_{W^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} \\ &\leq Ch\|\phi\|_{W^{2,p}} + \|\phi\|_{W^{2,p}}. \end{aligned}$$

Nous concluons par le théorème de régularité 3.15

$$||v||_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} \leq C\|\phi\|_{W^{2,p}} \leq Cp||r||_{L^p}.$$

■

Nous aurons aussi besoin de la proposition suivante.

Proposition 3.17. *[10] Soit $y \in V_h$, alors pour $p \geq 2$, on a*

$$\|y\|_{L^p} \leq C \sup_{\substack{z \neq 0 \\ z \in V_h}} \frac{|(y,z)|}{\|z\|_{L^q}} \tag{3.45}$$

avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1.$

Preuve. On a par définition

$$\|y\|_{L^p} = \sup_{\substack{w \neq 0 \\ w \in L^q}} \frac{|(y,w)|}{\|w\|_{L^q}} \tag{3.46}$$

Soit P_{V_h}, projection L^2 sur V_h. P_{V_h} est stable dans L^q [35]. Autrement dit, pour $w \in L^q$

$$\|P_{V_h} w\|_{L^q} \leq C^\theta \|w\|_{L^q} \tag{3.47}$$

avec $\theta = |1 - \frac{2}{q}|$. Comme $p \geq 2$ alors $-1 \leq 1 - \frac{2}{q} \leq 2$, par conséquent C^θ est uniformément borné en q. Comme $y \in V_h$ et $(y,w) = (y, P_{V_h} w)$, alors on a

$$\frac{|(y,w)|}{\|w\|_{L^q}} \leq C \frac{|(y, P_{V_h} w)|}{\|P_{V_h} w\|_{L^q}} \leq C \sup_{\substack{z \neq 0 \\ z \in V_h}} \frac{|(y,z)|}{\|z\|_{L^q}}. \tag{3.48}$$

Ce qui prouve le résultat. ■

Nous rappelons quelques définitions et propriétés sur la notion de **saut** et de la **moyenne** en méthodes des éléments finis.

3.6.8 Quelques opérations sur le saut et la moyenne

Définition 3.18. *Soit n_K la normale extérieur à un élément K de la triangulation $\mathcal{T}_h$. Pour $e \subset \partial K$, une arête de K nous définissons le* ***saut***

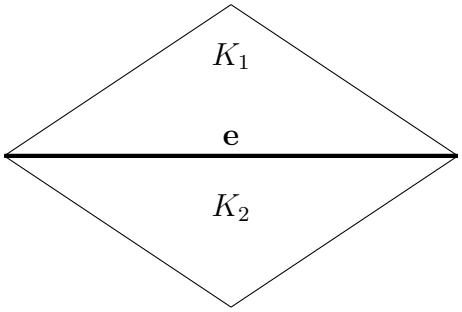


FIGURE 3.2 – Exemple de deux éléments partageant une arête commune

et la ***moyenne*** *d'une fonction vectorielle v sur e respectivement par*

$$\begin{aligned}
[\![v]\!]_e &= v_{K^+} \cdot n_{K^+} + v_{K^-} \cdot n_{K^-}, \ si\ e = \partial K^+ \cap \partial K^- \in \mathcal{E}_h^i, \\
[\![v]\!]_e &= v_{K^+} \cdot n_{K^+}, \ si\ e = \partial K^+ \cap \partial\Omega \in \mathcal{E}_h^b, \\
\{\!\{v\}\!\}_e &= \frac{1}{2}(v_{K^+} + v_{K^-}), \ si\ e = \partial K^+ \cap \partial K^- \in \mathcal{E}_h^i, \\
\{\!\{v\}\!\}_e &= v_{K^+} \ si\ e = \partial K^+ \cap \partial\Omega \in \mathcal{E}_h^b.
\end{aligned}$$

Définition 3.19. *Pour une fonction scalaire ϕ, le* ***saut*** *et la* ***moyenne*** *sont données respectivement par*

$$\begin{aligned}
[\![\phi]\!]_e &= \phi_{K^+} \cdot n_{K^+} + \phi_{K^-} \cdot n_{K^-}, \ si\ e = \partial K^+ \cap \partial K^- \in \mathcal{E}_h^i, \\
[\![\phi]\!]_e &= \phi_{K^+} \cdot n_{K^+}, \ si\ e = \partial K^+ \cap \partial\Omega \in \mathcal{E}_h^b, \\
\{\!\{\phi\}\!\}_e &= \frac{1}{2}(\phi_{K^+} + \phi_{K^-}), \ si\ e = \partial K^+ \cap \partial K^- \in \mathcal{E}_h^i, \\
\{\!\{\phi\}\!\}_e &= \phi_{K^+} \ si\ e = \partial K^+ \cap \partial\Omega \in \mathcal{E}_h^b.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $n_{K^+} = -n_{K^-}$, par simple manipulation algé-

brique pour une fonction scalaire ϕ et pour tout vecteur v, on a

$$\begin{aligned}\llbracket \phi v \rrbracket_e &= \phi_{K^+} v_{K^+} \cdot n_{K^+} + \phi_{K^-} v_{K^-} \cdot n_{K^-}, \\ &= \frac{1}{2}(\phi^+ + \phi^-)(v^+ - v^-) + \frac{1}{2}(\phi^+ - \phi^-)(v^+ + v^-) \\ &= \{\!\{v\}\!\}\llbracket \phi \rrbracket + \llbracket v \rrbracket \{\!\{\phi\}\!\}.\end{aligned}$$

De plus pour un champ de matrices A et pour tout champ de vecteur v, nous donnons la décomposition de $\llbracket Av \rrbracket$.

Nous définissons par $\{\!\{A\}\!\} = \frac{1}{2}(A|_{K^+} + A|_{K^-})$ et

$$\llbracket \{\!\{A\}\!\} v \rrbracket := \Big(\{\!\{A\}\!\} v_{K^+} \Big) \cdot n_{K^+} + \Big(\{\!\{A\}\!\} v_{K^-} \Big) \cdot n_{K^-}, \llbracket A \rrbracket := n'_{K^+} A_{K^+} + n'_{K^-} A_{K^-}.$$

Nous avons aussi

$$\llbracket Av \rrbracket = \llbracket \{\!\{A\}\!\} v \rrbracket + \llbracket A \rrbracket \{\!\{v\}\!\}. \tag{3.49}$$

Lemme 3.20. *Pour toute matrice A et tout vecteur v, nous avons*

$$/\!\!/ A /\!\!/ \{\!\{v\}\!\} = /\!\!/ A \{\!\{v\}\!\} /\!\!/. \tag{3.50}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\llbracket A\{\!\{v\}\!\} \rrbracket &= \big(A_{K^+}\{\!\{v\}\!\}\big) \cdot n_{K^+} + \big(A_{K^-}\{\!\{v\}\!\}\big) \cdot n_{K^-} \\ &= n_{K^+}^T \big(A_{K^+}\{\!\{v\}\!\}\big) + n_{K^-}^T \big(A_{K^-}\{\!\{v\}\!\}\big) = \big(n_{K^+}^T A_{K^+} + n_{K^-}^T A_{K^-}\big)\{\!\{v\}\!\},\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\llbracket A \rrbracket \{\!\{v\}\!\} = \llbracket A\{\!\{v\}\!\} \rrbracket. \tag{3.51}$$

■

3.7 Analyse d'erreur à priori

La formulation discrète est donnée par (3.29). Pour ce qui concerne l'analyse d'erreur, la technique est analogue à celle utilisée dans [10]. Nous partons d'un problème linéarisé et nous définissons l'application dont tout point fixe résoud le problème non linéaire discret (3.29).

Nous nous interessons aux éléments $(w_h, \eta_h) \in V_h \times \Sigma_h$ satisfaisant

$$(\eta_h, \mu)_\Omega = (\nabla G_h w_h, \mu)_K, \forall \mu \in \Sigma_h. \tag{3.52}$$

D'après l'inégalité de Hölder et le lemme de Lax-Milgram, étant donné $w_h \in V_h$, la Hessienne discrète de w_h

$$H(w_h) := \eta_h,$$

est bien définie d'après (3.52).

Lemme 3.21. *Pour w_h et $z_h \in V_h$, l'inégalité suivante est vérifiée. C'est-à-dire, l'opérateur H est Lipschitzien.*

$$||H(w_h) - H(z_h)||_{L^\infty} \leq C_3 ||w_h - z_h||_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)}.$$

Preuve. Soit w_h et $z_h \in V_h$. D'après (3.52) nous avons pour $p \geq 2$ et $1/q = 1 - 1/p$

$$\begin{aligned} |(H(w_h) - H(z_h), \mu)| &= \left|(\nabla G_h(w_h - z_h), \mu)\right| \\ &\leq C||\nabla G_h(w_h - z_h)||_{L^p}||\mu||_{L^q}. \end{aligned}$$

D'après (3.45), nous avons

$$||H(w_h) - H(z_h)||_{L^p} \leq C||w_h - z_h||_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)}.$$

En utilisant l'estimation inverse et avec p satisfait la relation

$$|\ln h| \leq p \leq 2|\ln h|, \tag{3.53}$$

nous obtenons

$$||H(w_h) - H(z_h)||_{L^\infty} \leq Ch^{-\frac{2}{p}}||H(w_h) - H(z_h)||_{L^p} \leq C||w_h - z_h||_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)}.$$

■

On a le le suivnat.

Lemme 3.22. *Pour $\mu \in \Sigma_h$ et $v \in V_h$*

$$(\nabla G_h v, \mu)_\Omega = -(\operatorname{div}\mu, G_h v)_\Omega + \langle G_h v, \mu n\rangle_{\partial\Omega}.$$

Preuve. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\mu, G_h v)_\Omega &= \sum_{K\in\mathfrak{T}_h}(\operatorname{div}\mu, G_h v)_K = -\sum_{K\in\mathfrak{T}_h}(\mu, \nabla G_h v)_K \\ &\quad + \sum_{K\in\mathfrak{T}_h}\langle G_h v, \mu n_K\rangle_{\partial K} \\ &= -\sum_{K\in\mathfrak{T}_h}(\mu, \nabla G_h v)_K + \sum_{e\in\mathcal{E}_h^i}\int_e [\![\mu G_h v]\!]\, ds + \langle G_h v, \mu n\rangle_{\partial\Omega}.\end{aligned}$$

Comme μ et $G_h v$ sont continus, le résultat s'en déduit. ■

Remarque 3.23. *Nous constatons avec le Lemme 3.22 que notre problème discret (3.29) est une variante de celle proposée par Lakkis et Neilan dans [51, 56].*

Remarque 3.24. *D'après le Lemme 3.22 on a pour $\mu \in \Sigma_h$*

$$(H(u_h), \mu)_\Omega = -(\operatorname{div}\mu, G_h v)_\Omega + \langle G_h v, \mu n\rangle_{\partial\Omega},$$

ce qui est identique à la définition de la Hessienne discrète donnée dans [51] lorsque $G_h v$ est remplacé par Dv.

3.7.1 Définition de la boule

On ne perd pas la généralité en supposant que $h \leq 1$. Nous définissons pour $\rho > 0$, par

$$\bar{B}_h(\rho) = \{(w_h, \eta_h) \in V_h \times \Sigma_h,\ \|w_h - I_h u\|_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathcal{T}_h)} \leq \rho,\ \|\eta_h - I_h\sigma\|_{L^\infty} \leq h^{-1}\rho\}.$$

Nous définissons aussi

$$Z_h = \{\, (w_h, \eta_h) \in V_h \times \Sigma_h, w_h = g_h \text{ sur } \partial\Omega, (w_h, \eta_h) \text{ résoud } (3.52) \,\} \text{ et}$$

$$B_h(\rho) = \bar{B}_h(\rho) \cap Z_h.$$

Lemme 3.25. *$B_h(\rho) \neq \emptyset$ pour $\rho = C_0 h^2$ et $C_0 > 0$ constante.*

Preuve. Soit $\eta_h \in \Sigma_h$ désignant la Hessienne discrète pour $I_h u$ donné par (3.52). Nous prouvons que $(I_h u, \eta_h) \in B_h(\rho)$ pour h assez petit $\rho = C_0 h$ pour une constante C_0. En utilisant (3.52), on a $(\eta_h, \mu) = (DG_h I_h u, \mu)$. Par conséquent

$$(\eta_h - I_h\sigma, \mu) = (\eta_h - \sigma, \mu) + (\sigma - I_h\sigma, \mu) = (DG_h I_h u - \sigma, \mu) + (\sigma - I_h\sigma, \mu)$$

D'après le Lemme 3.45 avec $p \geq 2$

$$\|\eta_h - I_h\sigma\|_{L^p} \leq ||DG_h I_h u - \sigma||_{L^p} + ||I_h\sigma - \sigma||_{L^p} \leq C||DG_h I_h u - \sigma||_{L^\infty} + ||I_h\sigma - \sigma||$$

Ainsi par (1.49) et (3.27)

$$\|\eta_h - I_h\sigma\|_{L^p} \leq Ch^2 + Ch \leq Ch.$$

D'après l'estimation inverse et comme p satisfait (3.53) on a

$$\|\eta_h - I_h\sigma\|_{L^\infty} \leq Ch^{-\frac{2}{p}}\|\eta_h - I_h\sigma\|_{L^p} \leq Ch \equiv h^{-1}\rho.$$

■

3.7.2 Définition de l'application T

Considérons l'application T définie de la façon suivante :
$T : V_h \times \Sigma_h \to V_h \times \Sigma_h$ par

$$T(w_h, \eta_h) = (T_1(w_h, \eta_h), T_2(w_h, \eta_h)),$$

où $T_1(w_h, \eta_h)$ et $T_2(w_h, \eta_h)$ vérifient

$$(T_2(w_h, \eta_h), \mu)_K = (\nabla G_h T_1(w_h, \eta_h), \mu)_K, \forall \mu \in \Sigma_h \tag{3.54}$$

$$((\text{cof } D^2 u)\nabla(w_h - T_1(w_h, \eta_h)), \nabla v)_K = (f, v) - (\det \eta_h, v)_K, \forall\ v \in V_h \cap H_0^1(\Omega). \tag{3.55}$$

$$w_h - T_1(w_h, \eta_h) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \tag{3.56}$$

En utilisant [11, Remark 3.6], on a le lemme 3.26 suivant

Lemme 3.26. *L'application T est bien définie et tout point fixe (w_h, η_h) de T avec $w_h = g_h$ sur $\partial\Omega$ est solution du problème non linéaire (3.29).*

Nous allons ensuite donner les différentes propositions nous permettant de prouver que le problème discret non linéaire (3.29) admet un point fixe. Ces propositions nous conduisent à l'utilisation du théorème du point fixe de Brouwer.

La toute première nous permet d'établir une relation entre les applications composantes T_1 et T_2 de l'application T.

Proposition 3.27. *Soit $\rho > 0$ et (w_1, η_1) et (w_2, η_2) dans $B_h(\rho)$. Nous avons*

$$||T_2(w_1, \eta_1) - T_2(w_2, \eta_2)||_{L^2(\mathfrak{T}_h)} \leq C_3 ||T_1(w_1, \eta_1) - T_1(w_2, \eta_2)||_{W^{1,\infty}(\mathfrak{T}_h)}, \tag{3.57}$$

pour une certaine constante positive choisie $C_3 \geq 1$.

Preuve. Soit (w_1, η_1) et (w_2, η_2) deux éléments de $B_h(\rho)$. Comme $T_2(w_h, \eta_h) = H(T_1(w_h, \eta_h))$, d'après le Lemme 3.21. On a

$$||T_2(w_1, \eta_1) - T_2(w_2, \eta_2)||_{L^2(\mathfrak{T}_h)} \leq C_3||T_1(w_1, \eta_1) - T_1(w_2, \eta_2)||_{W^{1,\infty}(\mathfrak{T}_h)}. \tag{3.58}$$

Ce qui achève la preuve. ■

Nous donnons ensuite la proposition suivante qui indique comment l'application T agit sur le centre de la boule $\bar{B}_h(\rho)$.

Proposition 3.28. *L'application* T *déplace faiblement le centre* $(I_h u, I_h \sigma)$ *de la boule* $\bar{B}_h(\rho)$*, c'est-à- dire qu'il existe des constantes positives* C_1 *et* C_2 *telles que :*

$$\|I_h u - T_1(I_h u, I_h \sigma)\|_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} \leq C_1 h^2 |\ln h| \tag{3.59}$$

$$\|I_h \sigma - T_2(I_h u, I_h \sigma)\|_{L^\infty} \leq C_2 h, \tag{3.60}$$

pour h *assez petit.*

Preuve. Pour $w_h = I_h u$ et $\eta_h = I_h \sigma$, utilisant (3.55) et $\det D^2 u = \det \sigma = f$, nous avons

$$((\operatorname{cof} D^2 u)\nabla(I_h u - T_1(I_h u, I_h \sigma)), \nabla v)_\Omega = (\det \sigma - \det I_h \sigma, v)_\Omega.$$

Comme sur chaque élément K, $\det I_h \sigma - \det \sigma = \frac{1}{2}(\operatorname{cof}(I_h \sigma) + \operatorname{cof}(\sigma)) : (I_h \sigma - \sigma)$, nous avons

$$\|\det I_h \sigma - \det \sigma\|_{L^p(K)} \leq C\|I_h \sigma + \sigma\|_{L^\infty(K)}\|I_h \sigma - \sigma\|_{L^p(K)}.$$

D'après (1.49), nous avons $\|I_h \sigma\|_{L^\infty} \leq C\|\sigma\|_{L^\infty}$. Ainsi, en utilisant une

fois encore (1.49)

$$\|\det I_h\sigma - \det\sigma\|_{L^p(K)} \leq C\|I_h\sigma - \sigma\|_{L^p(K)} \leq Ch^2.$$

Par conséquent, d'après la régularité elliptique et (3.53), nous avons

$$\begin{aligned}\|I_hu - T_1(I_hu, I_h\sigma)\|_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} &\leq Cp(\|\det I_h\sigma - \det\sigma\|_{L^p}) \\ &\leq Ch^2|\ln h| \leq Ch|\ln h|.\end{aligned}$$

Nous concluons d'après le Lemme 3.21 que

$$||H(I_hu) - T_2(I_hu, I_h\sigma)||_{L^\infty} \leq C\|I_hu - T_1(I_hu, I_h\sigma)\|_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} \leq Ch^2|\ln h|.$$

Comme nous avons prouvé dans le Lemme 3.25 que $||H(I_hu) - I_h\sigma||_{L^\infty} \leq C_0h$, nous obtenons $\|I_h\sigma - T_2(I_hu, I_h\sigma)\|_{L^\infty} \leq Ch$, pour h suffisament petit. Ce qui achève la preuve de la proposition. ■

Nous aurons aussi besoin du lemme suivant.

Lemme 3.29. *Pour $w_h \in V_h, p \geq 2, 1/p + 1/q = 1$, pour tout $v \in W^{3,q}$ et $A = \operatorname{cof} D^2u$, on a*

$$|(A(\nabla w_h - G_hw_h), \nabla v)| \leq Ch^2||\nabla G_hw_h||_{L^p}||v||_{W^{3,q}}. \tag{3.61}$$

Preuve. Soit $w_h \in V_h$, $v \in W^{3,q}$ et $A = \operatorname{cof} D^2u$, on a

$$(A(\nabla w_h - G_hw_h), \nabla v) = (\nabla w_h - G_hw_h, A^T\nabla v). \tag{3.62}$$

En utilisant $(\nabla w_h - G_hw_h, A^T\nabla v)$, la suite de la preuve est analogue à celle prouvée dans [42, Théorème 3.1] pour $p = q = 2$ et A la matrice unité. ■

Proposition 3.30. *Soit $(w_h, \eta_h) \in V_h \times \Sigma_h$. Nous avons pour $p \geq 2$ et*

$1/p + 1/q = 1$

$$|((\operatorname{cof} D^2u) : \eta_h, v) + ((\operatorname{cof} D^2u)\nabla w_h, \nabla v)| \leq Ch\|v\|_{L^q}\|w_h\|_{\widetilde{W}^{1,p}}. \quad (3.63)$$

Preuve. Posons $A = \operatorname{cof} D^2u$. Pour une fonction scalaire $v \in V_h \cap H_0^1(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned}(A : \eta_h, v)_\Omega = (\eta_h, vA)_\Omega = (\eta_h, P_{\Sigma_h}(vA))_\Omega = (\nabla G_h w_h, P_{\Sigma_h}(vA))_\Omega \\ = (\nabla G_h w_h, P_{\Sigma_h}(vA) - vA)_\Omega + (\nabla G_h w_h, vA)_\Omega.\end{aligned} \quad (3.64)$$

Par intégration par parties,

$$(\nabla G_h w_h, vA)_\Omega = -(G_h w_h, \operatorname{div}(vA))_\Omega + \sum_{K\in\mathcal{T}_h} \langle G_h w_h, (vA)n_K\rangle_{\partial K}.$$

En d'autres termes $\sum_{K\in\mathcal{T}_h}\langle G_h w_h, (vA)n_K\rangle_{\partial K} = 0$ comme $v = 0$ sur $\partial\Omega$ et $G_h w_h, v$ et A sont continus. Autrement dit $\operatorname{div}(vA) = A\nabla v + v \operatorname{div} A = A\nabla v$. Ainsi

$$(\nabla G_h w_h, vA)_\Omega = -(G_h w_h, A\nabla v)_\Omega,$$

et nous obtenons pour (3.64)

$$\begin{aligned}(A : \eta_h, v)_\Omega + (A\nabla w_h, \nabla v)_\Omega = (\nabla G_h w_h, P_{\Sigma_h}(vA) - vA)_\Omega \\ + (A(\nabla w_h - G_h w_h), \nabla v)_\Omega.\end{aligned} \quad (3.65)$$

Comme v est une fonction linéaire par morceau, par l'estimation inverse

$$\begin{aligned}||P_{\Sigma_h}(vA) - vA||_{L^q} \leq Ch^2||vA||_{W^{2,q}} = Ch^2||vA||_{W^{1,q}} \leq Ch^2||v||_{W^{1,q}} \\ \leq Ch||v||_{L^q}.\end{aligned} \quad (3.66)$$

De plus, d'après (3.61)

$$\begin{aligned}|(A(\nabla w_h - G_h w_h), \nabla v)| &\leq Ch^2 ||\nabla G_h w_h||_{L^p} ||v||_{W^{3,q}} \\ &= Ch^2 ||\nabla G_h w_h||_{L^p} ||v||_{W^{1,q}} \\ &\leq Ch ||\nabla G_h w_h||_{L^p} ||v||_{L^q}.\end{aligned} \tag{3.67}$$

Nous concluons pour (3.65), d'après l'inégalité de Hölder, (3.66) et (3.67) que

$$|(A : \eta_h, v) + (A\nabla w_h, \nabla v)| \leq Ch ||\nabla G_h w_h||_{L^p} ||v||_{L^q}.$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. ■

3.7.3 Propriété de contraction

L'unicité du point fixe dans le théorème du point fixe de Brouwer n'étant pas garantie, nous donnons la proposition suivante qui nous permet de prouver l'unicité de la solution du problème discret non linéaire.

Proposition 3.31. *Pour h suffisament et pour (w_1, η_1) et (w_2, η_2) dans $B_h(\rho)$, nous avons*

$$\begin{aligned}\|T_1(w_1, \eta_1) - T_1(w_2, \eta_2)\|_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} \leq \frac{1}{4C_3} \|w_1 - w_2\|_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)} \\ + \left(\frac{h^{\frac{1}{2}}}{4C_3} + C\rho h^{-1} |\ln h| \right) \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^\infty},\end{aligned}$$

pour une constante $C_3 \geq 1$.

Preuve. En utilisant (3.55), on a

$$\begin{aligned}((\operatorname{cof} D^2 u)\nabla(T_1(w_1, \eta_1) - T_1(w_2, \eta_2), \nabla v)_\Omega &= ((\operatorname{cof} D^2 u)\nabla(w_1 - w_2), \nabla v)_\Omega \\ &\quad + (\det \eta_1 - \det \eta_2, v)_\Omega \\ &= \Gamma - ((\operatorname{cof} D^2 u) : (\eta_1 - \eta_2), v) + (\det \eta_1 - \det \eta_2, v)_\Omega,\end{aligned}$$

où

$$\Gamma = ((\operatorname{cof} D^2u)\nabla(w_1 - w_2), \nabla v)_\Omega + ((\operatorname{cof} D^2u) : (\eta_1 - \eta_2), v)_\Omega.$$

Par la Proposition 3.30, on a

$$|\Gamma| \leq Ch\|v\|_{L^q}\|w_1 - w_2\|_{\widetilde{W}^{1,p}(\mathfrak{T}_h)}. \tag{3.68}$$

Par [11, Lemma 2.4], sur chaque élément K nous avons

$$\det \eta_1 - \det \eta_2 = \operatorname{cof}\left(\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2\right) : (\eta_1 - \eta_2). \tag{3.69}$$

Par conséquent, sur chaque élément K et utilisant $\sigma = D^2u$, nous avons

$$\begin{aligned}(\operatorname{cof} D^2u) : (\eta_1 - \eta_2) - (\det \eta_1 - \det \eta_2) = \\ \left((\operatorname{cof} D^2u) - \operatorname{cof}\left(\frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}\eta_2\right)\right) : (\eta_1 - \eta_2) \\ = \operatorname{cof}\left(\sigma - \frac{1}{2}\eta_1 - \frac{1}{2}\eta_2\right) : (\eta_1 - \eta_2) \\ = \operatorname{cof}\left(\sigma - I_h\sigma + \frac{1}{2}I_h\sigma - \frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}I_h\sigma - \frac{1}{2}\eta_2\right) : (\eta_1 - \eta_2).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left\|\operatorname{cof}\left(\sigma - I_h\sigma + \frac{1}{2}I_h\sigma - \frac{1}{2}\eta_1 + \frac{1}{2}I_h\sigma - \frac{1}{2}\eta_2\right)\right\|_{L^\infty(K)} \leq \\ C\left(\|\sigma - I_h\sigma\|_{L^\infty(K)} + \frac{1}{2}\|I_h\sigma - \eta_1\|_{L^\infty(K)} + \frac{1}{2}\|I_h\sigma - \eta_2\|_{L^\infty(K)}\right) \\ \leq Ch^2 + C\rho h^{-1}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|(\operatorname{cof} D^2u) : (\eta_1 - \eta_2) - (\det \eta_1 - \det \eta_2)\|_{L^p} \leq C(h^2 + \rho h^{-1})\|\eta_1 - \eta_2\|_{L^\infty}. \tag{3.70}$$

Nous définissons la forme linéaire φ sur V_h par,

$$\varphi(v) = ((\text{cof } D^2u)\nabla(T_1(w_1,\eta_1) - T_1(w_2,\eta_2)), \nabla v)_\Omega.$$

Par le théorème de représentation Riesz, il existe $\chi \in V_h$ avec $\varphi(v) = (\chi, v)$ pour tout $v \in V_h$ et par (3.45), nous avons

$$\|\chi\|_{L^p} \leq C \sup_{\substack{v\neq 0 \\ v\in V_h}} \frac{|(\chi, v)|}{\|v\|_{L^q}}. \tag{3.71}$$

Utilisant (3.68),(3.70) et (3.71) nous obtenons

$$\|\chi\|_{L^p} \leq Ch\|w_1 - w_2\|_{\widetilde{W}^{1,p}} + C(h^2 + \rho h^{-1})\|\eta_1 - \eta_2\|_{L^\infty}.$$

D'après la régularité elliptique discrète, on a

$$\|T_1(w_1,\eta_1) - T_1(w_2,\eta_2)\|_{\widetilde{W}^{1,p}} \leq Cph\|w_1 - w_2\|_{\widetilde{W}^{1,p}}$$
$$+Cp(h^2 + \rho h^{-1})\|\eta_1 - \eta_2\|_{L^\infty}.$$

Comme $|\ln h| \leq p \leq 2|\ln h|$, nous avons $Cph \leq 1/(4C_3)$ et $Cph \leq h^{1/2}/(4C_3)$ pour h assez petit et $C_3 \geq 1$. Ce qui achève la preuve. ■

Nous allons aussi prouver que l'application T laisse invariante la boule $B_h(\rho)$. Ce qui est donnée par la proposition ci-dessous.

Proposition 3.32. *Soit $\rho(h) = 4C_4|\ln h|h^2$ où $C_4 = \max(C_0, C_1, C_2)$, C_0 est la constante du Proposition 3.25 et C_1, C_2, sont des constantes de la Proposition 3.28. L'application T laisse invariante la boule $B_h(\rho)$. C'est- à - dire, pour (w_h, η_h) dans $B_h(\rho)$, on a*

$$\|T_1(w_h,\eta_h) - I_hu\|_{W^{1,\infty}(\mathcal{T}_h)} \leq \rho \tag{3.72}$$
$$\|T_2(w_h,\eta_h) - I_h\sigma\|_{L^\infty} \leq \rho h^{-1}. \tag{3.73}$$

Preuve. Soit $(w_h, \eta_h) \in B_h(\rho)$. On rappelle que $\|w_h - I_hu\|_{W^{1,\infty}(\mathcal{T}_h)} \leq$

ρ et $\|\eta_h - I_h\sigma\|_{L^\infty} \leq \rho h^{-1}$. En appliquant l'inégalité triangulaire et la Proposition 3.31, on a

$$\begin{aligned}\|T_1(w_h,\eta_h) - I_h u\|_{\widetilde{W}^{1,p}} &\leq \|T_1(w_h,\eta_h) - T_1(I_h u, I_h\sigma)\|_{\widetilde{W}^{1,p}} \\ &\quad + \|T_1(I_h u, I_h\sigma) - I_h u\|_{\widetilde{W}^{1,p}} \\ &\leq \frac{1}{4C_3}\|w_h - I_h u\|_{\widetilde{W}^{1,p}} + \left(\frac{h^{\frac{1}{2}}}{4C_3} + C\rho h^{-1}|\ln h|\right)\|\eta_h - I_h\sigma\|_{L^\infty} + C_1 h|\ln h|.\end{aligned}$$

Pour h assez petit, $h^{1/2}/(4C_3) \leq 1/8$ et $C\rho h^{-1}|\ln h| = Ch|\ln h|^2 \leq 1/8$. Par conséquent, comme $C_3 \geq 1$

$$\begin{aligned}\|T_1(w_h,\eta_h) - I_h u\|_{\widetilde{W}^{1,p}} &\leq \frac{1}{4}\|w_h - I_h u\|_{\widetilde{W}^{1,p}} + \frac{1}{4}\|\eta_h - I_h\sigma\|_{L^\infty} + C_4 h|\ln h| \\ &\leq \frac{1}{4}\rho + \frac{1}{4}\rho + \frac{\rho}{2} \\ &\leq \rho.\end{aligned}$$

Ceci prouve (3.72). D'après l'inégalité triangulaire

$$\|T_2(w_h,\eta_h) - I_h\sigma\|_{L^\infty} \leq \|T_2(w_h,\eta_h) - T_2(I_h u, I_h\sigma)\|_{L^\infty} + \|T_2(I_h u, I_h\sigma) - I_h\sigma\|_{L^\infty}.$$

Ainsi, par la Proposition 3.27

$$\begin{aligned}\|T_2(w_h,\eta_h) - I_h\sigma\|_{L^\infty} &\leq C_3\|T_1(w_h,\eta_h) - T_1(I_h u, I_h\sigma)\|_{\widetilde{W}^{1,p}} + C_2 h|\ln h| \\ &\leq C_3\left(\frac{1}{4C_3}\|w_h - I_h u\|_{\widetilde{W}^{1,p}} + \left(\frac{h^{\frac{1}{2}}}{4C_3} + C\rho h^{-1}|\ln h|\right)\|\eta_h - I_h\sigma\|_{L^\infty}\right) \\ &\quad + C_2 h|\ln h|.\end{aligned}$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\|T_2(w_h,\eta_h) - I_h\sigma\|_{L^\infty} &\leq \frac{1}{4}\|w_h - I_h u\|_{\widetilde{W}^{1,p}} + \frac{1}{4}\|\eta_h - I_h\sigma\|_{L^\infty} \\ &\quad + Ch|\ln h|^2)\|\eta_h - I_h\sigma\|_{L^\infty} + C_2 h|\ln h|.\end{aligned}$$

Pour h assez petit nous avons $Ch|\ln h|^2 \leq 1/4$. Par conséquent

$$\|T_2(w_h,\eta_h) - I_h\sigma\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{4}\rho + \frac{1}{4}\rho + \frac{1}{4}\rho + \frac{1}{4}\rho \leq \rho.$$

Ceci prouve (3.73). Ce qui achève la preuve. ■

La continuité de l'application T est donnée par la proposition suivante.

Proposition 3.33. *L'application T est continue de $B_h(\rho)$ dans $B_h(\rho)$.*

Preuve. Soit (w_1,η_1) et (w_2,η_2) dans $B_h(\rho)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\|T_1(w_1,\eta_1) - T_1(w_2,\eta_2)\|_{W^{1,\infty}(\mathfrak{T}_h)} + \|T_2(w_1,\eta_1) - T_2(w_2,\eta_2)\|_{L^\infty} \leq \\ (1+C_3)\|T_1(w_1,\eta_1) - T_1(w_2,\eta_2)\|_{W^{1,\infty}(\mathfrak{T}_h)} \\ \leq C\left(\|w_1 - w_2\|_{W^{1,\infty}(\mathfrak{T}_h)} + \|\eta_1 - \eta_2\|_{L^2}\right).\end{aligned}$$

Ce qui prouve la continuité de l'application T. ■

3.7.4 Existence et unicité de solution

Nous sommes donc en mesure d'énoncer le résultat d'existence et d'unicité de solution du problème non linéaire discret (3.29). Ceci est donné par le théorème suivant.

Théorème 3.34. *[4] Le problème discret (3.29) admet une unique solution (u_h,σ_h) dans $B_h(\rho)$ pour h suffisament petit et ρ défini comme dans la Proposition 3.32.*

Preuve. Nous utilisons le théorème du point de Brouwer pour prouver ce théorème. En utilisant 3.33, T est continue de $B_h(\rho)$ dans lui même. Donc d'après le théorème du point fixe de Brouwer (1.11), l'application T admet au moins un point fixe (w_h,η_h) dans $B_h(\rho)$. Supposons qu'il existe deux points fixes (w_h^1,η_h^1) et (w_h^2,η_h^2) de T.

Alors nous avons $T_1(w_h^1, \eta_h^1) = w_h^1$ et $T_1(w_h^2, \eta_h^2) = w_h^2$. Pour h assez petit, on a

$$\|T_1(w_h^1, \eta_h^1) - T_1(w_h^2, \eta_h^2)\|_{\widetilde{W}^{1,p}} \leq \frac{1}{4}\Big(\|w_h^1 - w_h^2\|_{\widetilde{W}^{1,p}} + \|\eta_h^1 - \eta_h^2\|_{L^\infty} \Big).$$

Par conséquent

$$\|w_h^1 - w_h^2\|_{\widetilde{W}^{1,p}} \leq \frac{1}{4}\|w_h^1 - w_h^2\|_{\widetilde{W}^{1,p}} + \frac{1}{4}\|\eta_h^1 - \eta_h^2\|_{L^\infty},$$

ce qui donne

$$\|w_h^1 - w_h^2\|_{\widetilde{W}^{1,p}} \leq \frac{4}{3}\|\eta_h^1 - \eta_h^2\|_{L^\infty}. \tag{3.74}$$

En d'autres termes $T_2(w_h^1, \eta_h^1) = \eta_h^1$ et $T_2(w_h^2, \eta_h^2) = \eta_h^2$. Utilisant la Proposition 3.31 et pour h assez petit, on a

$$\begin{aligned} \|T_2(w_h^1, \eta_h^1) - T_2(w_h^2, \eta_h^2)\|_{L^\infty} &\leq C_3 \|T_1(w_h^1, \eta_h^1) - T_1(w_h^2, \eta_h^2)\|_{\widetilde{W}^{1,p}} \\ &\leq \|T_1(w_h^1, \eta_h^1) - T_1(w_h^2, \eta_h^2)\|_{\widetilde{W}^{1,p}}. \end{aligned}$$

Il s'en suit que (3.74)

$$\begin{aligned} \|\eta_h^1 - \eta_h^2\|_{L^\infty} &\leq \frac{1}{4}\Big(\|w_h^1 - w_h^2\|_{\widetilde{W}^{1,p}} + \|\eta_h^1 - \eta_h^2\|_{L^\infty} \Big) \\ &\leq \frac{1}{3}\|\eta_h^1 - \eta_h^2\|_{L^\infty} + \frac{1}{4}\|\eta_h^1 - \eta_h^2\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Nous concluons que $\eta_h^1 = \eta_h^2$ et ainsi par (3.74), on a $w_h^1 = w_h^2$. Ce qui achève la preuve du théorème. ■

3.7.5 Majoration d'erreur à priori

Nous donnons le résultat de convergence de notre méthode dans le théorème suivant.

Théorème 3.35. *[4] Soit* $(u, \sigma) \in W^{3,\infty}(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega)^{2\times 2}$ *l'unique so-*

lution convexe du problème continu (3.10) *et* (u_h, σ_h) *l'unique solution dans* $B_h(\rho)$ *du problème discret* (3.29) *pour* h *suffisament petit et* $\rho = 4C_4h^2|\ln h|$, *alors les inégalités suivantes sont satisfaites.*

$$\|u - u_h\|_{\widetilde{W}^{1,p}} \leq Ch^2|\ln h| \tag{3.75}$$

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{L^\infty} \leq Ch|\ln h|. \tag{3.76}$$

Preuve. La preuve est une conséquence directe du Théorème 3.34, qui stipule que la solution est dans $B_h(\rho)$, en utilisant la définition de $B_h(\rho)$ et le choix de ρ. ■

Remarque 3.36. *Dans [11], une analyse d'erreur par une méthode d'éléments finis mixte* $\mathbb{P}_k - \mathbb{P}_k^{d\times d}$ *avec* $k \geq 3$ *et* $d = 2, 3$ *a été étudiée pour le modèle standard de l'équation de* ***Monge-Ampère****. Ainsi, les résultats d'existence, d'unicité et de majoration d'erreur à priori sont obtenus.*

3.8 Conclusion

Dans cet chapitre nous avons procédé à l'analyse d'erreur à priori par une méthode d'éléments finis mixtes $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1^{2\times 2}$ de l'équation elliptique de **Monge-Ampère**. Ceci nous a conduit à établir un résultat de régularité elliptique $W^{2,p}$ pour les EDP elliptiques linéaires d'ordre deux dans un rectangle [5]. L'outil essentiel que nous avons utilisé dans notre approche est l'opérateur gradient reconstruit. Pour conséquence, nous avons obtenu des résultats théoriques de convergences optimales c.f.[4]. L'implémentation numérique de notre méthode est en cours d'élaboration.

Chapitre Quatre

Modèle du problème couplé Navier-Stokes/ Darcy

4.1 Introduction

Le monde scientifique est confronté à beaucoup de problèmes dont les modélisations engendrent des problèmes de couplage. En effet, le couplage entre les eaux souterraines et les eaux de surface est important. Par exemple prédire comment la pollution se déverse dans les cours d'eau, les lacs et les rivières. Ce couplage est également important dans les applications technologiques impliquant la filtration. En particulier, pour des applications spécifiques, nous nous référons au flux dans les milieux poreux apparaissant dans l'extraction pétrolière [1, 8, 9], puits de réservoir [2], filtrations industrielles et le mouvement du sang dans les tumeurs et les micro-vaisseaux [58, 60]. L'un des modèles les plus populaires utilisés pour décrire l'interaction mentionnée est le modèle de Navier-Stokes / Darcy (ou Stokes-Darcy), qui consiste en un ensemble d'équations aux dérivées partielles où les équations de Navier-Stokes (ou Stokes) sont couplés avec le modèle de Darcy à travers un ensemble d'équations de couplage agissant sur une interface commune donnée par la conservation de masse, l'équilibre des forces normales, et la condition dite de Beavers-Joseph-Saffman. La condition de Beavers-Joseph-Saffman a été expérimentalement dérivée par Beavers et Joseph dans [45], modifiée par Saffman et plus tard ma-

thématiquement justifiée. Les estimateurs d'erreurs a-posteriori sont des grandeurs calculables, exprimées en termes de la solution discrète et des données, qui mesurent les erreurs discrètes réelles sans la connaissance de la solution exacte. Ils sont essentiels pour concevoir un maillage adapté au problème. Ce qui entraine un équirépartissement d'effort de calcul et optimise l'efficacité de l'approximation. Depuis les travaux pionniers de Babuŝka et Rheinboldt [46], les méthodes d'éléments finis adaptatifs basées sur des estimations d'erreur a-posteriori ont été largement étudiées. Les estimations d'erreur a posteriori ont été bien établies pour le problème couplé Stokes-Darcy [46, 45]. A notre connaissance, le premier travail traitant des algorithmes adaptatifs pour le couplage Navier-Stokes / Darcy a été étudié dans [44]. En effet dans [44] une méthode d'analyse d'erreur a-posteriori a été proposée pour une approximation discontinue de Galerkin de ce problème couplé. Dans [7], les auteurs ont obtenu des estimateurs d'erreur a posteriori fiables et efficaces basés sur les résidus pour la version tridimensionnelle avec une méthode mixte augmentée introduite dans [25]. Les auteurs [34] considèrent la formulation mixte standard dans le domaine de Navier-Stokes et la formulation mixte dans la région de Darcy, ce qui donne l'introduction de la trace du milieu poreux comme multiplicateur de Lagrange approprié. Les sous-espaces d'éléments finis définissant la formulation discrète utilisent des éléments de Bernardi-Raugel et Raviart-Thomas pour les vitesses, des constantes par morceaux pour les pressions et des éléments linéaires continus par morceaux pour le multiplicateur de Lagrange. Une analyse d'erreur à priori est effectuée avec quelques tests numériques confirmant les taux de convergence. Nous nous proposons de developper une analyse d'erreur a-posteriori pour la méthode des éléments finis conformes étudiées dans [34]. En effet, cette méthode généralise toutes les approximations conformes pour ce type de modèle et aucune étude d'analyse d'erreur n'avait été proposée. L'estimation d'er-

reur a-posteriori est basée sur une évaluation sur le résidu de la solution d'éléments finis. Nous prouvons en outre que notre estimateur d'erreur a-posteriori est à la fois fiable et efficace [47].

4.2 Cadre général d'analyse d'erreur a posteriori

Soit Ω un ouvert assez régulier de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, d)$. Soit $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ deux espaces de Banach et $\mathcal{A} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ une application continue. On considère le problème continu suivant : Etant donné $f \in \mathbf{Y}$, trouver $u \in \mathbf{X}$ tel que

$$\mathcal{A}(u) = f. \tag{4.1}$$

On suppose que le problème (4.1) est bien posé. Soit $h > 0$ un paramètre de discrétisation et $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de triangulation régulière de Ω. $\mathbf{X}_h$ un espace de dimension finie.

- Si $\mathbf{X}_h \subset \mathbf{X}$, alors il s'agit d'une discrétisation conforme.
- Si $\mathbf{X}_h \not\subset \mathbf{X}$, alors il s'agit d'une discrétisation non-conforme.

Le problème discret est alors : trouver $u_h \in \mathbf{X}_h$ tel que

$$\mathcal{A}_h(u_h) = f_h. \tag{4.2}$$

- $\mathcal{A}_h$ est une approximation de $\mathcal{A}$ dans $\mathbf{X}_h$
- f_h est une approximation de f dans $\mathbf{Y}_h$.

On suppose que le problème (4.2) est bien posé. Sous une certaine hypothèse de régularité de la solution du problème continu, on peut prouver que :

$$\|u - u_h\|_{\mathbf{X}} \leq C(u, f)h^r. \tag{4.3}$$

La majoration (4.3) permet de prouver la convergence de la méthode. **Question** : Que faire pour vérifier la convergence de la méthode lorsque la régularité de la solution n'est pas connue ?

On peut procéder à l'analyse d'erreur a posteriori. Pour cela,

1. On construit des quantités $\Theta_K(u_h, K, f)$ appelées indicateurs d'erreur locaux avec $K \in (\mathcal{T}_h)_h$ et on pose $\Theta = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Theta_K(u_h, K, f)^p \right)^{\frac{1}{p}}$.
2. on établit des majorations :

$$\|u - u_h\|_{\mathbf{X}} \leq \Theta(u_h, f_h, h) + \zeta_1^K(h, f) \tag{4.4}$$

$$\Theta_K \leq C\|u - u_h\|_{\mathbf{X}_K} + \zeta_2^K(h, f) \tag{4.5}$$

où X_K est un espace de patchs locaux et $\zeta_1^K(h, f)$ et $\zeta_2^K(h, f)$ sont des termes dépendant de la donnée encore appelés termes sources.

Lorsque la famille d'indicateur Θ vérifie respectivement (4.4) et (4.5), on dit qu'elle est fiable et efficace respectivement. Dans ce cas on conclut qu'elle est optimale. Les Θ forment alors une bonne carte de l'erreur (indiquent la zone où l'erreur est plus faible et celle où elle est plus grossière). Ceci permet de procéder à la mise sur place d'un algorithme d'adaptation de maillage.

4.3 Modèle couplé Navier-Stokes/ Darcy

Pour ce qui concerne le modèle du problème couplé Navier-Stokes/Darcy, nous allons le décomposer en trois parties à savoir :

1. Le modèle de Navier-Stokes
2. Le modèle de Darcy
3. Les conditions de transmissions.

Remarque 4.1. *Pour faciliter les notations, pour toute la suite de ce document on adoptera cette identité* $v.Mv \equiv v^T Mv$.

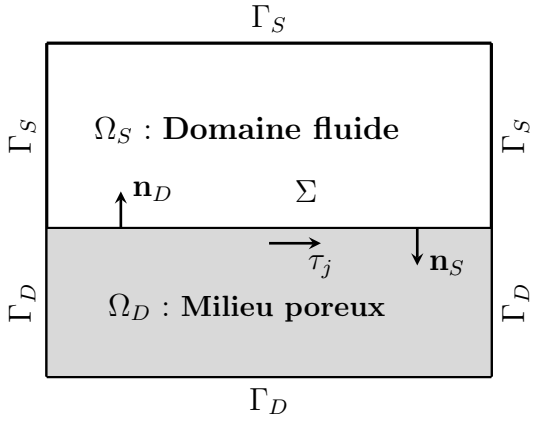


FIGURE 4.1 – Géomètrie du problème

4.3.1 Modèle de Navier-Stokes

L'écoulement d'un fluide visqueux dans un domaine est généralement modélisé par les équations de **Navier-Stokes**. Soit $\Omega_S \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert borné assez régulier, $d \in \{2, 3\}$ et $\mathbf{n}_S$ la normale unitaire à $\partial\Omega_S$ dirigée vers l'extérieur. Ainsi les équations de **Navier-Stokes** dans le cas d'un régime d'écoulement stationnaire d'un fluide incompressible occupant le domaine Ω_S s'écrivent sous la forme :
Trouver $(\mathbf{u}_S, p_S) : \Omega_S \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, telles que

$$\left\{\begin{array}{rcccc} -2\nu \operatorname{div} \mathbf{e}(\mathbf{u}_S) + \nabla p_S + \rho(\mathbf{u}_S \cdot \nabla)\mathbf{u}_S & = & \mathbf{f}_S & \text{dans} & \Omega_S \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_S & = & 0 & \text{dans} & \Omega_S \\ \mathbf{u}_S & = & 0 & \text{sur} & \Gamma_S \quad . \end{array}\right. \tag{4.6}$$

4.4 Modèle de Darcy

L'écoulement d'un fluide à travers un milieux poreux dans le cadre d'un régime stationnaire est modélisé par la loi de Darcy. Pour un fluide occupant un domaine $\Omega_D \subset \mathbb{R}^2$ assez régulier, cette loi est donnée par :

trouver $(\mathbf{u}_D, p_D) : \Omega_D \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{rcccc} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D + \nabla p_D & = & \mathbf{f}_D & \text{dans} & \Omega_D, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_D & = & 0 & \text{dans} & \Omega_D, \\ \mathbf{u}_D & = & 0 & \text{sur} & \Gamma_D \quad . \end{array} \right. \tag{4.7}$$

Avec

- $\nu > 0$: viscosité du fluide
- $\rho > 0$: densité du fluide
- $\mathbf{K} : x \in \Omega_d \longmapsto \mathbf{K}(x) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ le tenseur de conductivité hydraulique décrivant les caractéristiques du milieu poreux et les propriétés du fluide. De plus on supposera que

$$\exists C > 0 \quad \text{tel que} \quad \xi \cdot \mathbf{K} \cdot \xi \geq C\|\xi\|^2_{\mathbb{R}^2}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2. \tag{4.8}$$

Pour $* \in \{S, D\}$

- $\mathbf{f}_*$: est donnée.
- $\mathbf{v}_*$: est la vitesse du fluide (inconnue).
- p_* : est la pression du fluide (inconnue).
- $\mathbf{e}$ est la matrice désignant le tenseur des déformations linéaire et est donnée pour tout fonction assez régulière ψ par

$$\mathbf{e}(\psi)_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\right). \tag{4.9}$$

4.5 Conditions sur l'interface

Les conditions sur l'interface pour le problème couplé Navier-Sokes/Darcy sont imposées sur l'interface entre les domaines Ω_S et Ω_D. On les appelle encore les conditions de transmission. Elles sont données par le système

suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_S.\mathbf{n}_S + \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D & = 0 \quad , \text{ sur} \quad \Sigma \\ p_S - 2\nu \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}_S) \cdot \mathbf{n}_S & = p_D \quad , \text{ sur} \quad \Sigma \\ \dfrac{\sqrt{\tau \cdot k \cdot \tau}}{\alpha_l \nu} \mathbf{n}_S.\mathbf{e}(\mathbf{u}_S) \cdot \tau & = -\mathbf{u}_S \cdot \tau \quad , \text{ sur} \quad \Sigma \quad . \end{cases} \tag{4.10}$$

L'équation (4.10)1 traduit physiquement la conservation de masse à travers l'interface. L'équation (4.10)2 est l'équilibre des forces normales sur l'interface Σ. La dernire L'équation (4.10)3 est la condition de Beavers-Joseph-Saffman et k est un réel strictement positif défini par $k = \tau^T.\nu\mathbf{K}.\tau$ puis un nombre réel vérifiant $\alpha_d > 0$.

De plus en considérant sur l'interface Σ une arête e, $\mathbf{n}_S$ est la normale à e et τ le vecteur tengent à e de telle sorte que $(\mathbf{n}_S, \tau)$ constitue une base du plan.

4.6 Modèle couplé Navier-Stokes/Darcy

Le modèle couplé Navier-Stokes/Darcy est donc donné par le système suivant.

$$\begin{cases} -2\nu \operatorname{div} \mathbf{e}(\mathbf{u}_S) + \nabla p_S + \rho(\mathbf{u}_S \cdot \nabla)\mathbf{u}_S = \mathbf{f}_S & \text{dans} \quad \Omega_S \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_S = 0 & \text{dans} \quad \Omega_S \\ \mathbf{u}_S = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_S \\ \mathbf{u}_S \cdot \mathbf{n}_S + \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_D = 0 \quad , & \text{sur} \quad \Sigma \\ p_S - 2\nu \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}_S) \cdot \mathbf{n}_S = p_D & \text{sur} \quad \Sigma \\ \dfrac{\sqrt{\tau \cdot k \cdot \tau}}{\alpha_d \nu} \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}_S) \cdot \tau = -\mathbf{u}_S \cdot \tau & \text{sur} \quad \Sigma \\ \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D + \nabla p_D = \mathbf{f}_D & \text{dans} \quad \Omega_D, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}_D = 0 & \text{dans} \quad \Omega_D, \\ \mathbf{u}_D = 0 & \text{sur} \quad \Gamma_D \quad . \end{cases} \tag{4.11}$$

4.7 Formulation faible mixte

Notre formulation est celle proposée dans [34], mais nous y apportons quelques détails. Pour aborder l'aspect formulation variationnelle du modèle, nous rappelons quelques définitions de certains espaces fonctionnels. Ainsi on dans tout ce qui suit,

- Etant donné $* \in \{S, D\}$, $u, v \in L^2(\Omega_*)$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [L^2(\Omega_*)]^2$ et $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in$

$[L^2(\Omega_*)]^{2\times 2}$, on définit par :

• $(u,v)_* = \displaystyle\int_{\Omega_*} uv$, $(\mathbf{u},\mathbf{v})_* = \int_{\Omega_*} \mathbf{uv}$ et $(\mathbf{M},\mathbf{N}) = \int_{\Omega_*} \mathbf{M}:\mathbf{N}$.

• Etant donné un ouvert Ω, pour $r \in \mathbb{R}$ et $p \in [1,+\infty[$, on définit aussi par $\mathbf{H}^r(\Omega) := [H^r(\Omega)]^2$ et $\mathbf{L}^p(\Omega) := [L^p(\Omega)]^2$. Lorsque $p = 0$, on note $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma)$ au lieu de $\mathbf{H}^0(\Omega)$ et $H^0(\Gamma)$ respectivement.

• Les normes associées à ces espaces sont définies par $\|.\|_{r,\Omega}$ pour $\mathbf{H}^r(\Omega)$ et $H^r(\Omega)$ et $\|.\|_{r,\Gamma}$ pour $\mathbf{H}^r(\Gamma)$.

• On définit l'espace de Hilbert suivant

$$\mathbf{H}(\mathrm{div},\Omega) := \{\mathbf{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega) : \mathrm{div}\,\mathbf{w} \in L^2(\Omega)\}.$$

On le muni de la norme

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathrm{div},\Omega} := \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathrm{div}\,\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{4.12}$$

Par ailleurs, le produit scalaire sur $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est noté $\langle \xi,\lambda\rangle_\Gamma := \displaystyle\int_\Gamma \xi\lambda$. On pourra aussi étendre ceci au crochet de dualité sur le produit $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$. Nous définissons sur $H^{1/2}$ et $H^{-1/2}$ les normes suivantes respectivement.

$$\|\gamma\|_{H^{-1/2}(\Sigma)} := \sup_{\xi\in H^{1/2}(\Sigma),\xi\neq 0} \frac{|\langle\gamma,\xi\rangle|}{\|\xi\|_{H^{1/2}(\Sigma)}} \tag{4.13}$$

et

$$\|\gamma\|_{H^{1/2}(\Sigma)} := \sup_{\xi\in H^{-1/2}(\Sigma),\xi\neq 0} \frac{|\langle\gamma,\xi\rangle|}{\|\xi\|_{H^{-1/2}(\Sigma)}}. \tag{4.14}$$

Etant donné deux espaces de Hilbert H_1 et H_2 l'espace produit $H_1 \times H_2$ est muni de la norme $\|v\|_{H_1\times H_2} = \|v\|_{H_1} + \|v\|_{H_2}$.

4.7.1 Définition des espaces fonctionnels

Nous allons définir dans cette sous-section les espaces fonctionnels qui nous permettrons de mettre en place une formulation faible de notre problème. Ainsi on définit :

$$\mathbf{H}^1_{\Gamma_S}(\Omega_S) := \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_S\right\}, \tag{4.15}$$

$$\mathbf{H}_{\Gamma_D}(\mathrm{div}; \Omega_D) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{div}; \Omega_D) : \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_D = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \tag{4.16}$$

$$L^2_0(\Omega) := \left\{q \in L^2(\Omega) : \int_\Omega q = 0\right\}. \tag{4.17}$$

On pose $\lambda := p_D$ sur Σ et on regroupe les solutions ainsi que les fonctions tests comme suit

- **Solutions** $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D)$ et $\psi := (p, \lambda)$.
- **Fonctions tests** $\mathbf{v} := (\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D)$ et $\Phi := (q, \xi)$. Nous définissons aussi les espaces produits suivants :

$$\mathbf{H} := \mathbf{H}^1_{\Gamma_S}(\Omega_S) \times \mathbf{H}_{\Gamma_D}(\mathrm{div}; \Omega_D) \tag{4.18}$$

et

$$\mathbf{Q} := L^2_0(\Omega) \times H^{1/2}(\Sigma). \tag{4.19}$$

4.7.2 Formulation faible

• Premièrement on multiplie la première équation du système de **Navier-Stokes** (4.6) par une fonction test $\mathbf{v}_S$ puis on intègre sur Ω_S. On a :

$$(-2\nu\, \mathrm{div}\, \mathbf{e}(\mathbf{u}_S), \mathbf{v}_S)_{\Omega_S} + (\nabla p_S, \mathbf{v}_S)_{\Omega_S} + (\rho(\mathbf{u}_S.\nabla)\mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S)_{\Omega_S} = \ (\mathbf{f}_S, \mathbf{v}_S)_{\Omega_S}.$$

On utilise ensuite la formule de Green (1.34), et on a

$$2\nu(\mathbf{e}(\mathbf{u}_S),\mathbf{e}(\mathbf{v}_S))_{\Omega_S} - (p_S,\operatorname{div}\mathbf{v}_S)_{\Omega_S} + (\rho(\mathbf{u}_S.\nabla)\mathbf{u}_S,\mathbf{v}_S)_{\Omega_S}$$

$$+\langle p_S,\mathbf{v}_S.\mathbf{n}_S\rangle_{\partial\Omega_S} - 2\nu\langle\mathbf{n}_S.\mathbf{e}(\mathbf{u}_S).\mathbf{n}_S,\mathbf{v}_S.\mathbf{n}_S\rangle_{\partial\Omega_S} = (\mathbf{f}_S,\mathbf{v}_S)_{\Omega_S}.$$

Comme $\mathbf{v}_S = 0$ sur Γ_S, on obtient

$$2\nu(\mathbf{e}(\mathbf{u}_S),\mathbf{e}(\mathbf{v}_S))_{\Omega_S} - (p_S,\operatorname{div}\mathbf{v}_S)_{\Omega_S} + (\rho(\mathbf{u}_S.\nabla)\mathbf{u}_S,\mathbf{v}_S)_{\Omega_S}$$

$$+\langle p_S,\mathbf{v}_S.\mathbf{n}_S\rangle_{\Sigma} - 2\nu\langle\mathbf{n}_S.\mathbf{e}(\mathbf{u}_S).\mathbf{n}_S,\mathbf{v}_S.\mathbf{n}_S\rangle_{\Sigma} = (\mathbf{f}_S,\mathbf{v}_S)_{\Omega_S}.$$

Nous allons ensuite décomposer $\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_S.\mathbf{n}_S + \mathbf{v}_S.\tau$ et on obtient

$$2\nu(\mathbf{e}(\mathbf{u}_S),\mathbf{e}(\mathbf{v}_S))_{\Omega_S} - (p_S,\operatorname{div}\mathbf{v}_S)_{\Omega_S} + (\rho(\mathbf{u}_S.\nabla)\mathbf{u}_S,\mathbf{v}_S)_{\Omega_S}$$

$$+\langle p_S,\mathbf{v}_S.\mathbf{n}_S\rangle_{\Sigma} - 2\nu\langle\mathbf{n}_S.\mathbf{e}(\mathbf{u}_S).\mathbf{n}_S,\mathbf{v}_S.\mathbf{n}_S\rangle_{\Sigma}$$
$$-2\nu\langle\mathbf{n}_S\cdot\mathbf{e}(\mathbf{u}_S)\cdot\mathbf{n},\mathbf{v}_S\cdot\tau\rangle_{\Sigma} = (\mathbf{f}_S,\mathbf{v}_S)_{\Omega_S}.$$

Ce qui entraine

$$2\nu(\mathbf{e}(\mathbf{u}_S),\mathbf{e}(\mathbf{v}_S))_{\Omega_S} - (p_S,\operatorname{div}\mathbf{v}_S)_{\Omega_S} + (\rho(\mathbf{u}_S\cdot\nabla)\mathbf{u}_S,\mathbf{v}_S)_{\Omega_S}$$

$$+\langle p_S - 2\nu\mathbf{n}_S\cdot\mathbf{e}(\mathbf{u}_S)\cdot\mathbf{n}_S,\mathbf{v}_S\cdot\mathbf{n}_S\rangle_{\Sigma} - 2\nu\langle\mathbf{n}_S\cdot\mathbf{e}(\mathbf{u}_S)\cdot\mathbf{n},\mathbf{v}_S\cdot\tau\rangle_{\Sigma} = (\mathbf{f}_S,\mathbf{v}_S)_{\Omega_S}.$$

En utilisant les conditions de transmission (4.10), on a

$$2\nu(\mathbf{e}(\mathbf{u}_S),\mathbf{e}(\mathbf{v}_S))_{\Omega_S} - (p_S,\operatorname{div}\mathbf{v}_S)_{\Omega_S} + (\rho(\mathbf{u}_S\cdot\nabla)\mathbf{u}_S,\mathbf{v}_S)_{\Omega_S}$$

$$+\langle p_D,\mathbf{v}_S\cdot\mathbf{n}_S\rangle_\Sigma + \frac{2\nu\alpha_d}{\sqrt{\tau\cdot k\cdot\tau}}\langle\mathbf{v}_S\cdot\tau,\mathbf{v}_S\cdot\tau\rangle_\Sigma = (\mathbf{f}_S,\mathbf{v}_S)_{\Omega_S}.$$

• Deuxièment on multiplie la seconde équation du système de **Navier-Stokes** par la fonction test q_S et puis on intègre. On a

$$(q_S,\operatorname{div}\mathbf{v}_S)_{\Omega_S} = 0.$$

• Troisièment on procède de façon analogue pour le système de Darcy (4.7) et on obtient

$$\begin{cases} (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D,\mathbf{v}_D) + (\nabla p_D,\mathbf{v}_D) &= (\mathbf{f}_D,\mathbf{v}_D)_{\Omega_D} \\ \\ (q_D,\operatorname{div}\mathbf{u}_D) &= 0. \end{cases} \tag{4.20}$$

Avec la formule de Green, on a

$$\begin{cases} (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D,\mathbf{v}_D) - (p_D,\operatorname{div}\mathbf{v}_D) + \langle p_D,\mathbf{v}_D\cdot\mathbf{n}_D\rangle_{\partial\Omega_D} &= (\mathbf{f}_D,\mathbf{v}_D)_{\Omega_D} \\ \\ (q_D,\operatorname{div}\mathbf{u}_D) &= 0. \end{cases}$$

Comme $\mathbf{v}_D.\mathbf{n}_D = 0$ sur Γ_D, alors on a

$$\begin{cases} (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D,\mathbf{v}_D) - (p_D,\operatorname{div}\mathbf{v}_D) + \langle p_D,\mathbf{v}_D\cdot\mathbf{n}_D\rangle_{\Sigma} &= (\mathbf{f}_D,\mathbf{v}_D)_{\Omega_D} \\ \\ (q_D,\operatorname{div}\mathbf{u}_D) &= 0. \end{cases} \tag{4.21}$$

Nous allons ensuite définir les formes suivantes.

4.7.3 Définition des formes

On définit donc les formes suivantes

$$A_S : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R};$$

$$A_S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A_S(\mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S) := \ 2\nu \left(\mathbf{e}(\mathbf{u}_S), \mathbf{e}(\mathbf{v}_S)\right)_S + \left\langle \tfrac{\alpha_d \nu}{\sqrt{\tau \cdot \kappa \cdot \tau}} \mathbf{u}_S \cdot \tau, \mathbf{v}_S \cdot \tau \right\rangle_\Sigma ,$$

$$O_S : \mathbf{H}^1_{\Gamma_S}(\Omega_S) \times \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$O_S(\mathbf{w}_S; \mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S) := \ \rho \left((\mathbf{w}_S \cdot \nabla)\mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S\right)_S ,$$

$$\begin{aligned} A_D : \mathbf{H} \times \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A_D(\mathbf{u}_D, \mathbf{v}_D) &:= \quad (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D, \mathbf{v}_D)_D. \end{aligned}$$

$\mathbf{F} : \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}_S, \mathbf{v}_S)_S + (\mathbf{f}_D, \mathbf{v}_D)_D, \ \forall \mathbf{v} := (\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D) \in \mathbf{H}.$$

Une formulation faible du problème est donc : Etant donné $f_* \in L^2(\Omega_*)$, trouver $(\mathbf{u}, \psi) = ((\mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D), (p, \lambda)) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$, tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{a}(\mathbf{u}_S; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, (p, \lambda)) & = & \mathbf{F}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} := (\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D) \in \mathbf{H}, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, (q, \xi)) & = & 0, \quad \forall (q, \xi) \in \mathbf{Q}. \end{array} \right. \tag{4.22}$$

Avec :

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_S; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = A_S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + O_S(\mathbf{w}_S; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + A_D(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

et

$$b(\mathbf{v}, \phi) = -(q, \operatorname{div} \mathbf{v}_S)_S - (q, \operatorname{div} \mathbf{v}_D)_D + \langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}_S + \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}_D, \xi \rangle_\Sigma.$$

Nous avons la proposition suivante.

Proposition 4.2. *Les formes A_S, O_S, A_D et b sont continues.*

Preuve. Soit • $A_S : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$.
En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de trace,

$$\begin{aligned}|A_S(\mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S)| =& \left| 2\nu \left(\mathbf{e}(\mathbf{u}_S), \mathbf{e}(\mathbf{v}_S)\right)_S + \left\langle \frac{\alpha_d \nu}{\sqrt{\tau \cdot \kappa \cdot \tau}} \mathbf{u}_S \cdot \tau, \mathbf{v}_S \cdot \tau \right\rangle_\Sigma \right| \\ \leq & C \|\nabla \mathbf{u}_S\|_S \|\nabla \mathbf{v}_S\|_S \\ \\ \leq & C_1 \|\mathbf{u}_S\|_{1,S} \|\mathbf{v}_S\|_{1,S}.\end{aligned}$$

• $O_S : \mathbf{H}^1_{\Gamma_S}(\Omega_S) \times \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$.
D'après l'inégalité de Hölder généralisée, on a

$$\begin{aligned}|O_S(\mathbf{w}_S; \mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S)| =& |\rho \left((\mathbf{w}_S \cdot \nabla)\mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S\right)_S| \\ \leq & \rho \|\mathbf{w}_S\|_{L^4(\Omega_S)} \|\nabla \mathbf{u}_S\|_S \|\mathbf{v}_S\|_{L^4(\Omega_S)} \\ \leq & \rho \|\mathbf{w}_S\|_{L^4(\Omega_S)} \|\mathbf{u}_S\|_{1,\Omega_S} \|\mathbf{v}_S\|_{L^4(\Omega_S)}.\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $H^1(\Omega_S)$ s'injecte de façon continue dans $L^4(\Omega_S)$, on a

$$|O_S(\mathbf{w}_S; \mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S)| \leq C_2 \rho \|\mathbf{w}_S\|_{1,\Omega_S} \|\mathbf{u}_S\|_{1,\Omega_S} \|\mathbf{v}_S\|_{1,\Omega_S}.$$

•$A_D : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \longrightarrow \mathbb{R}$
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|A_D(\mathbf{u}_D, \mathbf{v}_D)| \leq C \|\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_D\|_{\mathrm{div},\Omega_D} \|\mathbf{v}_D\|_{\mathrm{div},\Omega_D}.$$

Comme $\mathbf{K}$ est bornée, on a

$$|A_D(\mathbf{u}_D, \mathbf{v}_D)| \leq C_3 \|\mathbf{u}_D\|_{\mathrm{div},\Omega_D} \|\mathbf{v}_D\|_{div,\Omega_D}.$$

Pour terminer avec la preuve on a

$$\begin{aligned}|b(\mathbf{v},(q,\xi))| =& |-(q,\operatorname{div}\mathbf{v}_S)_S-(q,\operatorname{div}\mathbf{v}_D)_D+\langle\mathbf{v}_S\cdot\mathbf{n}_S+\mathbf{v}_D\cdot\mathbf{n}_D,\xi\rangle_\Sigma|\\ \leq& |(q,\operatorname{div}\mathbf{v}_S)_S+(q,\operatorname{div}\mathbf{v}_D)_D|+|\langle\mathbf{v}_S\cdot\mathbf{n}_S+\mathbf{v}_D\cdot\mathbf{n}_D,\xi\rangle_\Sigma|\\ \leq& C_4\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}\|(q,\xi)\|_{\mathbf{Q}}.\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve de la proposition. ■

Nous pouvons aussi constater que $\mathbf{F}$ est une forme linéaire continue. C'est-à-dire

$$|\mathbf{F}(\mathbf{v})| \leq (\|\mathbf{f}_S\|_S+\|\mathbf{f}_D\|_D)\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}}.$$

Ensuite nous signalons aussi que par le fait que $\mathbf{K}^{-1}$ est symétrique définie positive et grace à l'inégalité de Korn classique il existe des contantes α_S et α_D toutes strictement positives et dépendantes uniquement de Ω_S et le tenseur $\mathbf{K}$ telles que

$$A_S(\mathbf{v}_S,\mathbf{v}_S) \geq 2\nu\alpha_S\|\mathbf{v}_S\|^2_{1,\Omega_S}. \tag{4.23}$$

et

$$A_D(\mathbf{v}_D,\mathbf{v}_D) \geq \alpha_D\|\mathbf{v}_D\|^2_{0,\Omega_D}, \tag{4.24}$$

pour tout $\mathbf{v}=(\mathbf{v}_S,\mathbf{v}_D)$.

Nous définissons les formes bilinéaires a_1 et non linéaires a_2 respectivement par :

$$[a_1(\mathbf{u}),\mathbf{v}] \;:=\; A_S(\mathbf{u}_S,\mathbf{v}_S)+A_D(\mathbf{u}_D,\mathbf{v}_D), \tag{4.25}$$

$$[a_2(\mathbf{u}_S)(\mathbf{u}),\mathbf{v}] := O_S(\mathbf{u}_S;\mathbf{u}_S,\mathbf{v}_S), \tag{4.26}$$

et nous posons $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D)$, $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D)$ puis $\phi = (q, \xi)$

$$[\mathbf{A}(\mathbf{u}_S)(\mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D), (\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D)] := [a_1(\mathbf{u}), \mathbf{v}] + [a_2(\mathbf{u}_S)(\mathbf{u}), \mathbf{v}],$$

$$[\mathbf{B}(\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D), \phi] := \mathbf{b}(\mathbf{v}, q) + \langle \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{n}_S + \mathbf{v}_D \cdot \mathbf{n}_D, \xi \rangle_\Sigma,$$

$$[\mathcal{F}, \mathbf{v}] := \mathbf{F}(\mathbf{v}).$$

Remarque 4.3. $[\cdot, \cdot]$ *signifie le crochet de dualité entre les espaces concernés.*

Par conséquent, la formulation (4.22) est équivalente à, trouver $(\mathbf{u}, \psi) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$, avec $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D)$ et $\psi = (p, \lambda)$ tel que :

$$\begin{cases} [\mathbf{A}(\mathbf{u}_S)(\mathbf{u}), \mathbf{v}] + [\mathbf{B}(\mathbf{v}), \psi] = [\mathcal{F}, \mathbf{v}] & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}, \\ [\mathbf{B}(\mathbf{u}), \phi] = 0 & \forall \phi \in \mathbf{Q}. \end{cases} \tag{4.27}$$

4.8 Analyse du problème continu

Contrairement au cas linéaire où grace au théorème de Banach-Necâs-Babuŝka (BNB), on prouve le caractère bien posé des problèmes du type point selle, le cas non linéaire utilise le Théorème 4.4 suivant. Le dit théorème a été développé dans [34] en vue de la résolution des problèmes non linéaires du type point selle.

Théorème 4.4 ([34])**.** *Soient X_1, M_1 et M des espaces de Hilbert et X_1', M_1' et M' leurs duaux respectifs. On pose $\boldsymbol{X} := X_1 \times M_1$ et $\boldsymbol{X}' := X_1' \times M_1'$. On définit l'opérateur non linéaire $A_1 : X_1 \longrightarrow X_1'$ et les opérateurs linéaires bornés suivants : $S : M_1 \longrightarrow M_1'$, $B_1 : X_1 \longrightarrow M_1'$ et $B : X \longrightarrow M'$. On définit aussi $B' : M \longrightarrow X*$ et $B_1' : M_1 \longrightarrow X_1'$.*

Soit l'opérateur nonliéaire $\mathbf{A}$ *défini par* $[\mathbf{A}(s,\Phi),(r,\psi)] := [A_1(s),r] + [B_1'(\Phi),r] + [B_1(s),\psi] - [S(\Phi),\psi] \quad \forall (s,\Phi),(r,\psi) \in \boldsymbol{X}$. *On considère le problème : trouver* $((t,\varphi),p) \in \boldsymbol{X} \times M$ *tel que*

$$\begin{cases} [\mathbf{A}(t,\varphi),(r,\psi)] + [B'(p),(r,\psi)] &= [F,(r,\psi)] \quad \forall (r,\psi) \in \boldsymbol{X}, \\ [B(t,\varphi),q] &= [G,q] \qquad \forall q \in M. \end{cases} \tag{4.28}$$

Ce problème peut également se mettre sous la forme

$$[\mathcal{P}((t,\varphi),p),((r,\psi),q)] = [\mathcal{F},((r,\psi),q)], \quad \forall ((r,\psi),q) \in \boldsymbol{X} \times M, \tag{4.29}$$

où $\mathcal{P} : \boldsymbol{X} \times M \longrightarrow \boldsymbol{X}' \times M'$ *tel que*

$$[\mathcal{P}((t,\varphi),p),((r,\psi),q)] := [\mathbf{A}((t,\varphi),p),(r,\psi)] + [B'(p),(r,\psi)] + [B(t,\varphi),q] \quad \forall ((r,\psi),q) \in \boldsymbol{X} \times M. \tag{4.30}$$

et $\mathcal{F} : \boldsymbol{X} \times M \longrightarrow \boldsymbol{X}' \times M'$ *tel que*
$[\mathcal{F},((r,\psi),q)] := [F,(r,\psi)] + [G,q] \quad \forall ((r,\psi),q) \in \boldsymbol{X} \times M$. *Soit*

$$V := \{(r,\psi) \in \boldsymbol{X} : [B(r,\psi),q] = 0 \quad , \forall q \in M\} \tag{4.31}$$

puis $\tilde{X}_1$ *et* $\tilde{M}_1$ *des sous espaces de* X_1 *et* M_1 *respectivement telque* $V = \tilde{X}_1 \times \tilde{M}_1$. *On suppose que*

- $A_1|_{\tilde{X}_1} : \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_1'$ *est Lipschitzien et fortement monotone. C'est-à-dire qu'il existe* α_1 *et* α_2 *positives telles que*

$$\|A_1(s_1) - A_1(s_2)\|_{\tilde{X}_1} \leq \alpha_1 \|s_1 - s_2\|_{X_1}, \forall s_1, s_2 \in \tilde{X}_1 \tag{4.32}$$

et

$$[A_1(s_1) - A_1(s_2), s_1 - s_2] \geq \alpha_2 \|s_1 - s_2\|_{X_1}^2, \forall s_1, s_2 \in \tilde{X}_1. \tag{4.33}$$

- *Pour chaque couple* $(r, r^\perp) \in \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_1^\perp$, *l'opérateur* A_1 *vérifie la relation suivante* $A_1(r + r^\perp) = A_1(r) + A_1(r^\perp)$.
- *L'opérateur* S *est semi-défini positif. C'est-à-dire* $[S(\psi),\psi] \geq 0 \quad \forall \psi \in$

$\tilde{M}_1$.

– *L'opérateur* B_1 *satisfait la condition inf-sup sur* $\tilde{X}_1 \times \tilde{M}_1$. *C'est-à-dire il existe* $\beta_1 > 0$ *telle que*

$$\sup_{\substack{r\neq 0\\ r\in\tilde{X}_1}} \frac{[B_1(r),\psi]}{\|r\|_{X_1}} \geq \beta_1\|\psi\|_M \quad \forall\psi\in\tilde{M}_1. \tag{4.34}$$

– *L'opérateur* B *satisfait la condition inf-sup sur* $\boldsymbol{X}\times M$. *C'est-à-dire il existe* $\beta_2 > 0$ *telle que*

$$\sup_{\substack{(r,\psi)\neq 0\\ (r,\psi)\in\boldsymbol{X}}} \frac{[B(r,\psi),q]}{\|(r,\psi)\|_{\boldsymbol{X}}} \geq \beta_1\|q\|_M \quad \forall q\in M. \tag{4.35}$$

Alors le problème (4.28) *admet une unique solution* $((t,\varphi),p)\in\boldsymbol{X}\times M$. *De plus*

$$\|((t,\varphi),p)\|_{\boldsymbol{X}\times M} \lesssim \{\|F\|_{\boldsymbol{X}'}+\|G\|_{M'}\}. \tag{4.36}$$

Remarque 4.5. *Avec l'inégalité* (4.36) *on a*

$$\|((s,\Phi),v)\|_{\boldsymbol{X}\times M} \lesssim \sup_{\substack{((r,\psi),q)\neq 0\\ ((r,\psi),q)\in\boldsymbol{X}\times M}} \frac{[\mathcal{P}((s,\Phi),v),((r,\psi),q)]}{\|((r,\psi),q)\|_{\boldsymbol{X}\times M}}$$

$$\forall((s,\Phi),v)\in\boldsymbol{X}\times M.$$

Remarque 4.6. *Dans la pratique, on ramène le problème* (4.28) *sous une forme linéarisée*

$$\begin{cases} [\mathbf{A}(z)(t,\varphi),(r,\psi)]+[B(r,\psi),p] &= [F,(r,\psi)] \quad \forall(r,\psi)\in\boldsymbol{X},\\ [B(t,\varphi),q] &= [G,q] \quad \forall q\in M, \end{cases} \tag{4.37}$$

où z *est le point fixe d'un opérateur donné. On prouve l'existence de* z *en utilisant le théorème du point fixe de Schauder et son unicité grâce au théorème du point fixe de Banach. Tous les détails sur l'opérateur et la preuve du théorème peuvent être consultés dans [34].*

Théorème 4.7. *[34, Section 2.2, Theorem 2] On suppose que* $\boldsymbol{f}_S \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_S)$ *et* $\boldsymbol{f}_D \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_D)$*. Alors il existe une unique solution* $(\boldsymbol{u}, (p, \lambda)) \in \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{Q}$ *de (4.27). En plus, il existe une constante* $C > 0$*, indépendante de la solution, telle que*

$$\|(\boldsymbol{u}, (p, \lambda))\|_{\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{Q}} \leq C \left(\|\boldsymbol{f}_S\|_{0,\Omega_S} + \|\boldsymbol{f}_D\|_{0,\Omega_D}\right).$$

4.9 Discrétisation

4.9.1 Triangulation

Dans le but de déterminer la solution discrète au problème (4.27), nous allons discrétiser le domaine Ω. Cette discrétisation passera par celle de Ω_S et de Ω_D. Soit donc $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille de triangulation régulière de Ω. On désigne par $(\mathcal{T}_h^S)_h$ et $(\mathcal{T}_h^D)_h$ des familles de triangulation régulières de Ω_S et Ω_D respectivement. On pose $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h^S \cup \mathcal{T}_h^D$. Cette triangulation est faite de telle sorte que les sommets des éléments de $\mathcal{T}_h^S$ et $\mathcal{T}_h^D$ coincident sur l'interface Σ. Ainsi on pourra noter Σ_h le discrétisation de l'interface Σ. Pour chaque $K \in \mathcal{T}_h^D$ on définit l'espace local des éléments finis de Raviart-Thomas de degré bas [26] :

$$RT_0(K) := \text{span}\{(1,0), (0,1), (x_1, x_2)\}, \tag{4.38}$$

où $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. De plus pour $K \in \mathcal{T}_h^S$, on désigne par $BR(K)$ l'espace de Bernadi-Raugel local (voir [13]).

$$BR(K) := [\mathbb{P}_1(K)]^2 \oplus \{\eta_1\eta_2\mathbf{n}_3, \eta_1\eta_3\mathbf{n}_2, \eta_2\eta_3\mathbf{n}_1\} \tag{4.39}$$

où les $\eta_i \quad i \in \{1,2,3\}$ sont des coordonnées barycentriques associées au sommets de l'élément K et les $\mathbf{n}_i \quad i \in \{1,2,3\}$ sont les vecteurs normaux extérieurs opposés à l'arête i du triangle K.

4.9.2 Définition des sous espaces discrets

Nous allons définir les espaces discrets suivants :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_h(\Omega_S) &:= \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_S) : \mathbf{v}_{|K} \in BR(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^S\right\}, \\
\mathbf{H}_h(\Omega_D) &:= \left\{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega_D) : \mathbf{v}_{|K} \in RT_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h^D\right\}, \\
L_h(\Omega) &:= \left\{q \in L^2(\Omega) : q_{|K} \in \mathbb{P}_0(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\right\}.
\end{aligned}$$

Les sous-espaces des éléments finis pour les vitesses dans Ω_S et Ω_D sont respectivement définis par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{h,\Gamma_S}(\Omega_S) &:= \mathbf{H}_h(\Omega_S) \cap \mathbf{H}^1_{\Gamma_S}(\Omega_S), \\
\mathbf{H}_{h,\Gamma_D}(\Omega_D) &:= \mathbf{H}_h(\Omega_D) \cap \mathbf{H}_{\Gamma_D}(\mathrm{div};\Omega_D).
\end{aligned}$$

Nous aurons aussi besoin de l'espace pour la pression :

$$L_{h,0}(\Omega) := L_h(\Omega) \cap L^2_0(\Omega).$$

Pour ce qui concerne l'espace $H^{1/2}(\Sigma)$, nous définisons le sous-espace d'éléments finis de Lagrange linéaire sur Σ_h

$$\Lambda_h(\Sigma) := \left\{\xi_h \in C^0(\Sigma) : \xi_{h|e} \in \mathbb{P}_1(e), \forall e \in \Sigma_h\right\}.$$

4.9.3 Problème discret

Comme pour le cas continu, pour définir le problème discret, nous donnons quelques notations et définitions. Ainsi on a

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_h := (\mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,D}) \in \mathbf{H}_h :=& \mathbf{H}^1_{h,\Gamma_S}(\Omega_S) \times \mathbf{H}_{h,\Gamma_D}(\mathrm{div};\Omega_D);\\ \mathbf{v}_h :=& (\mathbf{v}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,D}) \in \mathbf{H}_h\\ \psi_h = (p_h, \lambda_h) \in \mathbf{Q}_h :=& L^2_{h,0}(\Omega) \times \Lambda_h(\Sigma),\\ \phi_h =& (q_h, \xi_h) \in \mathbf{Q}_h.\end{aligned}$$

On définit donc les formes suivantes

$$\begin{aligned}&A_{h,S} : \mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h \longrightarrow \mathbb{R};\\ &\qquad A_{h,S}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := \ 2\nu\left(\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S}), \mathbf{e}(\mathbf{v}_{h,S})\right)_S + \left\langle \tfrac{\alpha_d \nu}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}} \mathbf{u}_{h,S}\cdot\tau, \mathbf{v}_{h,S}\cdot\tau \right\rangle_\Sigma,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}O_{h,S} : \mathbf{H}^1_{h,\Gamma_S}(\Omega_S) \times \mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h &\longrightarrow \mathbb{R}\\ O_{h,S}(\mathbf{w}_{h,S}; \mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S}) :=& \ \rho\left((\mathbf{w}_{h,S}\cdot\nabla)\mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S}\right)_S,\\ J : \mathbf{H}^1_{h,\Gamma_S}(\Omega_S) \times \mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h &\longrightarrow \mathbb{R}\\ J(\mathbf{w}_{h,S}; \mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,S}) :=& \ \tfrac{\rho}{2}\left((\mathbf{w}_{h,S}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_{h,S}, v_{h,S})\right)_S,\\ A_{h,D} : \mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h &\longrightarrow \mathbb{R}\\ A_{h,D}(\mathbf{u}_{h,D}, \mathbf{v}_{h,D}) :=& \qquad (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}, \mathbf{v}_{h,D})_D.\end{aligned}$$

$\mathbf{F} : \mathbf{H}_h \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par

$$\mathbf{F}(\mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}_S, \mathbf{v}_{h,S})_S + (\mathbf{f}_{h,D}, \mathbf{v}_{h,D})_D, \ \forall \mathbf{v} := (\mathbf{v}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,D}) \in \mathbf{H}_h.$$

Une formulation discrète du problème est donc : trouver
$(\mathbf{u}_h, \psi_h) = ((\mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,D}), (p_h, \lambda_h)) \in \mathbf{H}_h \times \mathbf{Q}_h$, tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{a}_h(\mathbf{u}_{h,S}; \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, (p_h, \lambda_h)) &=& \mathbf{F}(\mathbf{v}) \ \forall \mathbf{v} := (\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D) \in \mathbf{H}_h,\\ \mathbf{b}(\mathbf{u}_h, (q, \xi)) &=& 0 \quad \forall (q, \xi) \in \mathbf{Q}_h. \end{array}\right. \tag{4.40}$$

Avec :

$$\mathbf{a}_h(\mathbf{w}_{h,S};\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)=\mathbf{a}(\mathbf{w}_{h,S};\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)+\mathbf{J}_S(\mathbf{w}_{h,S};\mathbf{u}_{h,S},\mathbf{v}_{h,S}), \tag{4.41}$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_{h,S};\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)=A_S(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)+O_S(\mathbf{w}_{h,S};\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h)+A_D(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h),$$

et

$$b(v_h,\phi_h)=-(q_h,\operatorname{div}\mathbf{v}_{h,S})_S-(q_h,\operatorname{div}\mathbf{v}_{h,D})_D+\langle\mathbf{v}_{h,S}\cdot\mathbf{n}_{h,S}+\mathbf{v}_{h,D}\cdot\mathbf{n}_{h,D},\xi\rangle_\Sigma.$$

Comme précedemment, on définit

$$[\mathbf{A}_h(\mathbf{u}_{h,S})(\mathbf{u}_{h,S},\mathbf{u}_{h,D}),(\mathbf{v}_{h,S},\mathbf{v}_{h,D})] \;:=\; [a_1(\mathbf{u}_h),\mathbf{v}_h]+[a_2^h(\mathbf{u}_{h,S})(\mathbf{u}_h),\mathbf{v}_h],$$

avec,

$$[a_2^h(\mathbf{u}_{h,S})(\mathbf{u}_h),\mathbf{v}_h]:=[a_2(\mathbf{u}_{h,S})(\mathbf{u}_h),\mathbf{v}_h]+\mathbf{J}_S(\mathbf{u}_{h,S};\mathbf{u}_{h,S},\mathbf{v}_{h,S}).$$

Alors, la formulation (4.40) est équivalente à : trouver $(\mathbf{u}_h,\psi_h)\in\mathbf{H}_h\times\mathbf{Q}_h$, avec
$\mathbf{u}_h=(\mathbf{u}_{h,S},\mathbf{u}_{h,D})$ et $\psi_h=(p_h,\lambda_h)$ tel que :

$$\begin{cases} [\mathbf{A}_h(\mathbf{u}_{h,S})(\mathbf{u}_h),\mathbf{v}]+[\mathbf{B}(\mathbf{v}_h),\psi_h] &= [\mathcal{F},\mathbf{v}_h] \quad \forall\mathbf{v}_h\in\mathbf{H}_h,\\ [\mathbf{B}(\mathbf{u}_h),\phi_h] &= 0 \quad \forall\phi_h\in\mathbf{Q}_h. \end{cases} \tag{4.42}$$

4.10 Analyse du problème discret

En ce qui concerne la résolution du problème discret non linéaire du type point selle, nous allons utitilisé la version discrète du Théorème 4.4. Ainsi on a

Théorème 4.8. *Soient X_{1h}, M_{1h} et M_h des sous espaces respectifs de*

X_1, M_1 *et* M *et* X'_{1h}, M'_{1h} *et* M'_h *leurs duaux respectifs. On pose* $\boldsymbol{X}_h := X_{1h} \times M_{1h}$ *et* $\boldsymbol{X}' := X'_{1h} \times M_{1h}$. *On définit l'opérateur* $A_{1h} : X_{1h} \longrightarrow X'_{1h}$ *et les opérateurs linéaires bornés suivants :* $S_h : M_{1h} \longrightarrow M'_{1h}$, $B_{1h} : X_{1h} \longrightarrow M_{1h}$ *et* $B_h : \boldsymbol{X}_h \longrightarrow M'$. *On définit aussi* $B' : M_h \longrightarrow \boldsymbol{X}'_h$ *et* $B'_{1h} : M_{1h} \longrightarrow X'_{1h}$. *Soit l'opérateur nonliéaire* $\mathbf{A}_h$ *défini par* $[\mathbf{A}_h(s_h, \Phi_h), (r_h, \psi_h)] := [A_{1h}(s_h), r_h] + [B'_{1h}(\Phi_h), r_h] + [B_{1_h}(s_h), \psi_h] - [S_h(\Phi_h), \psi_h] \quad \forall (s_h, \Phi_h), (r_h, \psi_h) \in \boldsymbol{X}_h$. *On considère le problème trouver* $((t_h, \varphi_h), p_h) \in \boldsymbol{X}_h \times M_h$ *tel que*

$$\begin{cases} [\mathbf{A}_h(t_h, \varphi_h), (r_h, \psi_h)] + [B'_h(p_h), (r_h, \psi_h)] = [F_h, (r_h, \psi_h)] & \forall (r_h, \psi_h) \in \boldsymbol{X}_h, \\ [B_h(t_h, \varphi_h), q_h] = [G_h, q_h] & \forall q_h \in M_h. \end{cases} \tag{4.43}$$

Ce problème peut également se mettre sous la forme

$$[\mathcal{P}_h((t_h, \varphi_h), p_h), ((r_h, \psi_h), q_h)] := [\mathcal{F}_h, ((r_h, \psi_h), q_h)], \quad \forall (r_h, \psi_h) \in \boldsymbol{X}_h, \tag{4.44}$$

où $\mathcal{P}_h : \boldsymbol{X}_h \times M_h \longrightarrow \boldsymbol{X}'_h \times M'_h$ *tel que*

$$[\mathcal{P}_h((t_h, \varphi_h), p_h), ((r_h, \psi_h), q_h)] := [\mathbf{A}_h(t_h, \varphi_h), (r_h, \psi_h)] + [B'_h(p_h), (r_h, \psi_h)] + [B_h(t_h, \varphi_h), q_h] \quad \forall ((r_h, \psi_h), q_h) \in \boldsymbol{X}_h \times M_h.$$

Puis $\mathcal{F}_h : \boldsymbol{X}_h \times M_h \longrightarrow \boldsymbol{X}'_h \times M'_h$ *tel que* $[\mathcal{F}_h, ((r_h, \psi_h), q_h)] := [F_h, (r_h, \psi_h)] + [G_h, q_h] \quad \forall ((r_h, \psi_h), q_h) \in \boldsymbol{X}_h \times M_h$. *Soit*

$$V_h := \{(r_h, \psi_h) \in \boldsymbol{X}_h : [B_h(r_h, \psi_h), q_h] = 0 \quad , \forall q_h \in M_h\} \tag{4.45}$$

puis $\tilde{X}_{1h}$ *et* $\tilde{M}_{1h}$ *des sous espaces de* X_{1h} *et* M_{1h} *respectivement tels que* $V_h = \tilde{X}_{1h} \times \tilde{M}_{1h}$. *On suppose que*

- $A_{1h}|_{\tilde{X}_{1h}} : \tilde{X}_{1h} \longrightarrow \tilde{X}'_{1h}$ *est Lipschitzien et fortement monotone. C'est-à-dire il existe* α_{1h} *et* α_{2h} *positives telles que*

$$\|A_{1h}(s_{1h}) - A_{1h}(s_{2h})\|_{\tilde{X}_{1h}} \leq \alpha_{1h} \|s_{1h} - s_{2h}\|_{X_{1h}}, \forall s_{1h}, s_{2h} \in \tilde{X}_{1h} \tag{4.46}$$

et

$$[A_{1h}(s_{1h}) - A_{1h}(s_{2h}), s_{1h} - s_{2h}] \geq \alpha_{2h}\|s_{1h} - s_{2h}\|^2_{X_{1h}}, \forall s_{1h}, s_{2h} \in \tilde{X}_{1h}. \tag{4.47}$$

- *Pour chaque couple* $(r_h, r_h^{\perp}) \in \tilde{X}_{1h} \times \tilde{X}_{1h}^{\perp}$, *l'opérateur* A_{1h} *vérifie la relation suivante* $A_{1h}(r_h + r_h^{\perp}) = A_{1h}(r_h) + A_{1h}(r_h^{\perp})$.
- *L'opérateur* S *est semi-défini positif. C'est-à-dire* $[S_h(\psi_h), \psi_h] \geq 0 \quad \forall \psi \in \tilde{M}_{1h}$.
- *L'opérateur* B_{1h} *satisfait la condition inf-sup sur* $\tilde{X}_{1h} \times \tilde{M}_{1h}$. *C'est-à-dire il existe* $\beta_{1h} > 0$ *telle que*

$$\sup_{\substack{r_h \neq 0 \\ r_h \in \tilde{X}_{1h}}} \frac{[B_{1h}(r_h), \psi_h]}{\|r_h\|_{X_{1h}}} \geq \beta_{1h}\|\psi\|_{M_h} \quad \forall \psi_h \in \tilde{M}_{1h}. \tag{4.48}$$

- *L'opérateur* B_h *satisfait la condition inf-sup sur* $\boldsymbol{X}_h \times M_h$. *C'est-à-dire il existe* $\beta_{2h} > 0$ *telle que*

$$\sup_{\substack{(r_h, \psi_h) \neq 0 \\ (r_h, \psi_h) \in \boldsymbol{X}_h}} \frac{[B_h(r_h, \psi_h), q_h]}{\|(r_h, \psi_h)\|_{\boldsymbol{X}_h}} \geq \beta_{1h}\|q_h\|_{M_h} \quad \forall q_h \in M_h. \tag{4.49}$$

Alors le problme (4.28) *admet une unique solution* $((t_h, \varphi_h), p_h) \in \boldsymbol{X}_h \times M_h$. *De plus*

$$\|((t_h, \varphi_h), p_h)\|_{\boldsymbol{X}_h \times M_h} \lesssim \{\|F_h\|_{\boldsymbol{X}_h'} + \|G_h\|_{M_h'}\}. \tag{4.50}$$

Remarque 4.9. *Avec l'inégalité* (4.50) *on a*

$$\|((s_h, \Phi_h), v_h)\|_{\boldsymbol{X}_h \times M_h} \lesssim \sup_{\substack{((r_h, \psi_h), q_h) \neq 0 \\ ((r_h, \psi_h), q_h) \in \boldsymbol{X}_h \times M_h}} \frac{[\mathcal{P}_h((s_h, \Phi_h), v_h), ((r_h, \psi_h), q_h)]}{\|((r_h, \psi_h), q_h)\|_{\boldsymbol{X}_h \times M_h}} \tag{4.51}$$

$\forall ((s_h, \Phi_h), v_h) \in \boldsymbol{X}_h \times M_h$.

Remarque 4.10. *Dans la pratique, on ramème le problème* (4.43) *sous*

une forme linéarisée

$$\begin{cases} [\mathbf{A}_h(z_h)(t_h,\varphi_h),(r_h,\psi_h)] + [B_h(r_h,\psi_h),p_h] &= [F_h,(r_h,\psi_h)] \quad \forall (r_h,\psi_h)\in \boldsymbol{X}_h, \\ [B_h(t_h,\varphi_h),q_h] &= [G_h,q_h] \qquad \forall q_h \in M_h, \end{cases} \tag{4.52}$$

où z_h est le point fixe d'un opérateur $\boldsymbol{T}$ donné. On prouve l'existence de z_h en utilisant le théorème du point fixe de Brouwer et son unicité grâce au théorème du point fixe de Banach. Tous les détails sur l'opérateur $\boldsymbol{T}$ et la preuve du théorème 4.8 peuvent être consultés dans [34].

Nous pouvons donc énoncer le théorème d'existence et d'unicité de notre problème discret comme suit :

Théorème 4.11. *(Voir [34, Section 3.2, Theorem 4 et Theorem 6]) On suppose $\boldsymbol{f}_S \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_S)$ et $\boldsymbol{f}_D \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_D)$. Alors, le problème (4.42) admet une unique solution $(\boldsymbol{u}_h,(p_h,\lambda_h)) \in \boldsymbol{H}_h \times \boldsymbol{Q}_h$ et si la solution $(\boldsymbol{u},(p,\lambda)) \in \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{Q}$ du problème continu (4.27) est assez régulière, alors on a :*

$$\begin{aligned} \|(\boldsymbol{u},(p,\lambda)) - (\boldsymbol{u}_h,(p_h,\lambda_h))\|_{\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{Q}} \lesssim\ & h\left(\|\boldsymbol{u}_S\|_{2,\Omega_S} + \|\boldsymbol{u}_D\|_{1,\Omega_D} + \|\operatorname{div}\boldsymbol{u}_D\|_{1,\Omega_D}\right. \\ &+ \left.\|p\|_{1,\Omega} + \|\lambda\|_{3/2,\Sigma}\right). \end{aligned}$$

Avant d'aboder la notion d'analyse d'erreur a posteriori pour notre modèle, nous aurons besoin de certaines définitions et de quelques lemmes. Nous les donnons dans ce qui suit. Soient X et Y deux espaces de Banach et F un opérateur non linéaire définit au voisinage de x_0 de X à valeur dans Y.

Définition 4.12. *On appelle première variation de F en x_0, si elle existe la limite*

$$\lim_{t\to 0}\frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t} \tag{4.53}$$

pour tout $h \in X$. On la note $\delta F(x_0;h)$.

Définition 4.13. *On suppose que F admet en x_0 une première variation de la forme $\delta F(x_0;h) \equiv Ah$ où A est un opérateur linéaire borńe,*

$A \in \mathcal{L}(X,Y)$. *On dit que l'opérateur* F *est différentiable au sens de Gâteaux au point* x_0. *La différentielle de* F *au sens de Gâteaux est alors notée* $A = DF(x_0)$ *et* $\delta F(x_0;h) = DF(x_0)h$.

Définition 4.14. *On dit que l'application* F *est hémi-continue lorsque l'application*

$$\begin{aligned} h \ &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ &t \longmapsto \quad [F(u+tv), w] \end{aligned}$$

est continue pour tout u v *et* w *dans* X.

Dans l'étude d'analyse d'erreur pour un problème non linéaire de la forme (4.28) et (4.43), on intoduit une hypothèse de différentiabilité sur A_1. Ainsi on le lemme suivant.

Lemme 4.15. *On suppose que l'opérateur* A_1 *satisfait les conditions suivantes :*

- *L'opérateur* $A_1 : X_1 \longrightarrow X_1'$ *est Lipschitzien et fortement monotone.*
- *L'opérateur* $A_1 : X_1 \longrightarrow X_1'$ *admet une dérivée première* DA_1 *au sens de Gâteaux hemi-continu,* $DA_1 : X_1 \longrightarrow \mathcal{L}(X_1, X_1')$.
  Alors pour tout $s_1 \in X_1$, $DA_1(s_1)$ *est une forme bilineáire continue et coercive sur* X_1.

Preuve. Soit $x_1 \in X_1$. On a $DA_1(s_1)\mathcal{L}(X_1, X_1')$ et peut être interpreté comme une forme bilinéaire sur $X_1 \times X_1$ définie par

$$DA_1(s_1)(r,s) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{[A_1(s_1+\epsilon r), s] - [A_1(s_1), s]}{\epsilon}$$

pour tout $r, s \in X_1$. Comme

$$\frac{[A_1(s_1+\epsilon r), s] - [A_1(s_1), s]}{\epsilon} = \frac{[A_1(s_1+\epsilon r) - A_1(s_1), s]}{\epsilon}.$$

Le fait que A_1 est Lipschitzien implique

$$\left|\frac{[A_1(s_1+\epsilon r)-A_1(s_1),s]}{\epsilon}\right| \leq \gamma\|r\|_{X_1}\|s\|_{X_1}.$$

Aussi on a

$$DA_1(s_1)(s,s) = \frac{[A_1(s_1+\epsilon s),s]-[A_1(s_1),s]}{\epsilon} = \frac{[A_1(s_1+\epsilon s)-A_1(s_1),(s_1+\epsilon s)-s_1]}{\epsilon^2} \geq \|s\|^2_{X_1}.$$

Ce qui prouve le lemme. ■

Une généralisation du lemme de Céa est donnée par le lemme suivant. On pourra consulter pour [25] pour plus de détails. On pose $E := \mathbf{X}\times M$ et $E' := \mathbf{X}'\times M'$ aussi $E_h := \mathbf{X}_h \times M_h$ et $E'_h := \mathbf{X}'_h \times M'_h$.

Lemme 4.16. *Soit $\vec{t} = (t,\sigma,u)$ solution du problème continu (4.28) et $\vec{t}_h = (t_h,\sigma_h,u_h)$ solution du problème approché (4.43), on a*

$$\|\vec{t}-\vec{t}_h\|_E \lesssim \inf_{\vec{r}_h=(r_h,\rho_h,w_h)} \|\vec{t}-\vec{r}_h\|_E. \tag{4.54}$$

Preuve. Soit $\vec{r}_h = (r_h,\rho_h,w_h)$ et $\vec{s}_h = (s_h,\tau_h,v_h)$ des éléments de E_h. On a

$$[\mathcal{P}(\vec{t}_h),\vec{s}_h]-[\mathcal{P}(\vec{r}_h),\vec{s}_h] = \int_0^1 \frac{d}{ds}\{[\mathcal{P}(z\vec{t}_h+(1-z)\vec{r}_h),\vec{s}_h]\}\,dz = \int_0^1 D\mathcal{P}(z\vec{t}_h+(1-z)\vec{r}_h))(\vec{t}_h-\vec{r}_h,\vec{s}_h)\}\,dz,$$

où $D\mathcal{P}: E \longrightarrow \mathcal{L}(E,E')$ est la dérivée première de $\mathcal{P}$ au sens de Gâteaux. Plus précisement on a

$$D\mathcal{P}(\vec{s}_1)(\vec{r},\vec{s}) := DA_1(s_1)(r,s)+[B_1^*(\rho),s]+[B_1(r),\tau]-[S(\rho),\tau] \quad [B^*(w),\tau]+[B(\rho),v].$$

Compte tenu de Lemme 4.15 et en utilisant (4.51), on a

$$\|\vec{t}_h - \vec{r}_h\|_E \lesssim \sup_{\substack{\vec{s}_h \neq 0 \\ s_h \in \mathbf{X}_h}} \frac{D\mathcal{P}(\vec{s}_1)(\vec{t}_h - \vec{r}_h, \vec{s}_h)}{\vec{s}_h}. \tag{4.55}$$

Par ailleurs en utilisant le second théorème de la moyenne il existe $z_0 \in]0,1[$ tel que

$$\int_0^1 D\mathcal{P}(z\vec{t}_h+(1-z)\vec{r}_h))(\vec{t}_h-\vec{r}_h, \vec{s}_h)\}\, dz = D\mathcal{P}(z_0\vec{t}_h+(1-z_0)\vec{r}_h))(\vec{t}_h-\vec{r}_h, \vec{s}_h)\}. \tag{4.56}$$

Ainsi en posant $\vec{s}_1 = z_0\vec{t}_h + (1-z_0)\vec{r}_h$, on a

$$\|\vec{t}_h - \vec{r}_h\|_E \lesssim \sup_{\substack{\vec{s}_h \neq 0 \\ s_h \in \mathbf{X}_h}} \frac{[\mathcal{P}(\vec{t}_h), \vec{s}_h] - [\mathcal{P}(\vec{r}_h), \vec{s}_h]}{\vec{s}_h}. \tag{4.57}$$

De plus on $[\mathcal{P}(\vec{t}_h), \vec{s}_h] = [\mathcal{P}(\vec{t}), \vec{s}_h] \quad \forall \vec{s}_h \in X_h$ et comme $\mathcal{P}$ est Lipschitzien, on a

$$\|\vec{t}_h - \vec{r}_h\|_E \lesssim \|\vec{t} - \vec{r}_h\|_E \quad \forall \vec{r}_h \in X_h. \tag{4.58}$$

■

4.11 Conclusion

Dans ce chapitre,Nous avons d'abord parlé du cadre général de l'analyse d'erreur a posteriori. Nous avons ensuite abordé le problème couplé Navier-Stokes/ Darcy en mettant en relief les conditions de transmissions surl'interface. Enfin nous avons proposé une formulation faible du niveau continu et celui discret à notre modèle.

Chapitre Cinq

Analyse d'erreur de type résiduel pour une méthode d'éléments finis mixtes du problème couplé Navier-Stokes/ Darcy : Discrétisation conforme

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons procéder à l'analyse d'erreur a posteriori de notre modèle. Ainsi à partir d'une formulation faible mixte du problème au niveau continu puis celle discrète, nous définissons les éléments résiduels. Partant de là, nous définissons les indicateurs d'erreur de type résiduel exacts et approchés et nous prouvons par la suite leur fiabilité et leur efficacité.

5.2 Analyse d'erreur a posteriori

Pour aborder l'analyse d'erreur a posteriori de notre problème, nous allons donner quelques outils essenciels pour la suite du travail.

5.2.1 Opérateurs d'interpolation de Clément

Un outil important dans notre analyse est l'opérateur d'interpolation de Clément. Nous allons le définir dans cette sous section on pourra consulter [27] pour d'autres détails sur cet opérateur.

• On introduit les espaces

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &:= \left\{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^2 : \ \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_s \text{ et } \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_D = 0 \text{ sur } \Gamma_D\right\} \\ V_{Cl} &:= \left\{v_h \in C^0(\Omega) : \ v_{h|K} \circ F_K \in \mathbb{P}_k(\bar{K}), \forall K \in \mathfrak{T}_h, \ k \in \mathbb{N}^*\right\} \end{aligned}$$

F_K est la transformation affine linéaire de $\bar{K}$ dans K de la Figure 1.1. On définit :

$$\mathbf{V}_{Cl}^0 := [V_{Cl}]^d \cap \mathbf{V} \text{ et } V_{Cl}^0 := V_{Cl} \cap H_0^1(\Omega). \tag{5.1}$$

• On fixe $k = 1$ et nous définissons l'opérateur d'interpolation de Clément $I_{Cl}^i : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}_{Cl}^0$ par :

$$I_{Cl}^i\mathbf{v} := \sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{N}(\Omega)} \frac{1}{|W_\mathbf{x}|}\left(\int_{W_\mathbf{x}} \mathbf{v}\right)\varphi_\mathbf{x}. \tag{5.2}$$

Pour $\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^N$, l'interpolé de Clément de $\mathbf{w}$ est noté $I_{Cl}\mathbf{w}$ et est défini par :

$$I_{Cl}\mathbf{w} := \sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{N}(\overline{\Omega})} \frac{1}{|W_\mathbf{x}|}\left(\int_{W_\mathbf{x}} \mathbf{w}\right)\varphi_\mathbf{x} \in [V_{Cl}]^N. \tag{5.3}$$

La fonction de base $\varphi_\mathbf{x} \in \mathbf{V}_{Cl}^0$ (resp. $\varphi_\mathbf{x} \in [V_{Cl}]^N$) associée à un nœud $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\Omega)$ (resp. $\mathbf{x} \in \mathcal{N}(\overline{\Omega})$) est uniquement déterminée par la condition :

$$\varphi_\mathbf{x}(\mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{N}(\Omega) \ (\text{ resp. } \varphi_\mathbf{x}(\mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{x},\mathbf{y}}, \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{N}(\overline{\Omega})). \tag{5.4}$$

où $\mathcal{N}(\Omega)$ est l'ensemble des nœuds qui ne sont pas situés sur $\Gamma_S \cup \Gamma_D$ et

$W_{\mathbf{x}} := \{K \in \mathcal{T}_h : \mathbf{x} \in \mathcal{N}(K)\}$. Ces opérateurs d'interpolation vérifient les propriétés d'interpolation locales suivantes :

Lemme 5.1. *(Estimation d'interpolation de Clément cas isotrope) Soit* $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ *une famille régulière de triangulations de* Ω. *Alors on a les estimations suivantes pour tout* $\boldsymbol{w} \in [H^1(\Omega)]^N$, $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ *et* $\psi \in [H^1(\Omega_D)]^3 \cap H_0(\boldsymbol{rot}, \Omega_d)$ *:*

$$\| \boldsymbol{v} - I^0_{Cl}(\boldsymbol{v}) \|_K \lesssim h_K \| \boldsymbol{v} \|_{1,\Delta(K)} \quad \forall K \in \mathcal{T}^l_h, l = s, d, \tag{5.5}$$

$$\| \boldsymbol{v} - I^0_{Cl}(\boldsymbol{v}) \|_E \lesssim [diam(e)]^{1/2} \| \boldsymbol{v} \|_{1,\Delta(e)} \quad \forall e \in \mathcal{E}_h(\Omega_l), l = s, d, \tag{5.6}$$

$$\| \boldsymbol{w} - I_{Cl}(\boldsymbol{w}) \|_K \lesssim h_K \| \boldsymbol{w} \|_{1,\Delta(K)} \quad \forall K \in \mathcal{K}^l_h, l = s, d, \tag{5.7}$$

$$\| \boldsymbol{w} - I_{Cl}(\boldsymbol{w}) \|_e \lesssim [diam(e)]^{1/2} \| \boldsymbol{w} \|_{1,\Delta(e)} \quad \forall e \in \mathcal{E}_h(\overline{\Omega}_l), l = s, d, \tag{5.8}$$

$$\| \psi - \mathcal{P}_{Cl}(\psi) \|_T \lesssim h_T \| \psi \|_{1,\Delta(K)} \quad \forall K \in \mathcal{T}^D_h, \tag{5.9}$$

$$\| \psi - \mathcal{P}_{Cl}(\psi) \|_e \lesssim [diam(e)]^{1/2} \| \psi \|_{1,\Delta(e)} \quad \forall e \in \mathcal{E}_h(\overline{\Omega}_D), \tag{5.10}$$

où $\Delta(K) := \cup\{K' \in \mathcal{T}_h : K' \cap K \neq \emptyset\}$ *et* $\Delta(e) := \cup\{K' \in \mathcal{T}_h : K' \cap e \neq \emptyset\}$.

Preuve. Toutes ces estimations sont prouvées dans [27]. On pourra aussi consulter [59] pour des estimations analogues. ■

5.2.2 Fonctions bulles, opérateurs d'extension et inégalités inverses

Nous allons énoncer quelques unes de leurs propriétés.

• La fonction bulle b_K sur un élément K est un élément de $\mathbb{P}^{2+1}(K)$, définie par :

$$b_K := (2+1)^{2+1} \times \prod_{i=1}^{2+1} \lambda_{i,K} \tag{5.11}$$

où les $\lambda_{i,K}$ sont des fonctions coordonnées barycentriques associées à K.

• Si $e \subset \partial K$, on définit aussi $b_{e,K} \in \mathbb{P}^2(K)$ par

$$b_{e,K} := 2^2 \times \prod_{i=1}^{2} \lambda_{x_i,K}. \tag{5.12}$$

On définit b_e sur $W_e := K_1 \cup K_2$ où $e = \partial K_1 \cap \partial K_2$ par

$$b_{e|K_i} := b_{e,K_i}, \forall i \in \{1,2\}. \tag{5.13}$$

• Enfin, pour faciliter l'obtention de la borne inférieure de l'erreur, on utilise un opérateur d'extension $F_{ext} : C^0(e) \longrightarrow C^0(K)$ défini par

$$F_{ext}(\varphi)(x) \ := \ \varphi|_e \equiv \ \text{Cste} \ , \forall x \in K. \tag{5.14}$$

Sur $W_e := K_1 \cup K_2$ où $e = \partial K_1 \cap \partial K_2$, on définit l'opérateur d'extension $F_{ext} : C^0(e) \longrightarrow C^0(W_e)$ par $F_{ext}(\varphi)_{|K_i}(x) := \varphi_{|e} \equiv \text{C} \ , \ \forall x \in K_i$, $i = 1, 2$.

Noter que pour les fonctions vectorielles, l'opérateur d'extension est défini composante par composante.

La transformation affine linéaire F_K (voir Figure 1.1) pour définir b_K, $b_{e,K}$ et F_{ext} par $b_K := b_{\bar{K}} \circ F_K^{-1}$, $b_{e,K} := b_{\bar{e},\bar{K}} \circ F_K^{-1}$ et $F_{ext}(\varphi) := \bar{F}_{ext} \circ F_K^{-1}(\varphi)$.

Lemme 5.2. *Les propriétés suivantes sont satisfaites pour les fonctions bulles :*

$$\begin{aligned} b_K &= 0 \ \textit{sur} \ \partial K, \\ b_e &= 0 \ \textit{sur} \ \partial W_e, \\ \| \, b_T \, \|_{\infty,K} &= \| \, b_e \, \|_{\infty,W_e} = 1, \\ 0 &\leqslant b_K \leqslant 1, \\ 0 &\leqslant b_e \leqslant 1. \end{aligned}$$

Preuve. Toutes ces propriétés sont démontrées dans [29]. ■

Remarque 5.3. *Le faite que les fonctions bulles soient nulles sur ∂K (ou sur ∂W_e) permet, en effectuant des intégrations par parties adéquates, de faire apparaître la norme de l'erreur locale en annulant les termes de bord qui interviennent dans les calculs.*

5.2.3 Relation d'orthogonalité de Garlerkin

Nous allons donner la relation d'orthogonalité de Garlerkin. On définit les erreurs comme suit :

$$\mathbf{e}_{\mathbf{u}_*} := \mathbf{u}_* - \mathbf{u}_{h,*}; \quad e_p = p - p_h \text{ et } e_\lambda = \lambda - \lambda_h, * \in \{S, D\}. \tag{5.15}$$

Pour $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D) \in \mathbf{H}_h$ et pour $(q, \xi) \in \mathbf{Q}_h$, en soustrayant (4.22) de (4.40) on obtient la relation d'orthogonalité de Galerkin.

$$\begin{aligned} A_s(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}, \mathbf{v}_S) + A_D(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_D}, \mathbf{v}_D) + O_S^h(\mathbf{u}_S; \mathbf{u}_S, \mathbf{v}_S) - O_S^h(\mathbf{u}_{h,S}; \mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{v}_S) + \mathbf{b}(e_p, e_\lambda) &= 0, \\ \mathbf{b}((\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}, \mathbf{e}_{\mathbf{u}_D}), (q, \xi)) &= 0. \end{aligned}$$

Nous allons rappeler par la suite ce qui suit. Pour chaque $K \in \mathcal{T}_h$, on note par $\mathcal{E}(K)$ (resp. $\mathcal{N}(K)$) l'ensemble des arêtes (resp. sommets) et les ensembles $\mathcal{E}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{E}(K)$, $\mathcal{N}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \mathcal{N}(K)$. Pour $\mathcal{A} \subset \bar{\Omega}$ nous définissons

$$\mathcal{E}_h(\mathcal{A}) := \{e \in \mathcal{E}_h : e \subset \mathcal{A}\} \text{ et } \mathcal{N}_h(\mathcal{A}) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{N}_h, \mathbf{x} \in \mathcal{A}\}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de définir les résidus exacts et approchés :

5.2.4 Résidus

Nous définissons les résidus exacts comme suit,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{S,K} &= \mathbf{f}_S + 2\nu \operatorname{div}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})) - \nabla p_{h,S} - \rho\,(\mathbf{u}_{h,S} \cdot \nabla)\,\mathbf{u}_{h,S} - \\ &\quad \frac{\rho}{2}\mathbf{u}_{h,S} \operatorname{div} \mathbf{u}_{h,S} \text{ dans } K \in \mathcal{T}_h^S. \end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\mathbf{R}_{D,K} = \mathbf{f}_D - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D} - \nabla p_{h,D} \text{ dans } K \in \mathcal{T}_h^D. \tag{5.17}$$

Ces résidus exacts seront remplacés par des résidus approchés en di-

mension finie.

5.2.5 Résidus approchés

Cette approximation des résidus est donnée par : $\mathbf{r}_{*,K}$, $* \in \{S, D\}$,

$$\mathbf{r}_{*,K} \in [\mathbb{P}_k(K)]^2 \text{ sur } K \in \mathcal{T}_h^*.$$

On définit

$$\mathbf{f}_{K,S} = \frac{1}{|K|} \int_K \mathbf{f}(x)\, dx,$$

pour tout $K \in \mathcal{T}_h^D$, et $\mathbf{f}_{K,D}$ comme l'unique élément de $[\mathbb{P}_1(K)]^2$ tel que

$$\int_K \mathbf{f}_{K,D}(x) \cdot \mathbf{q}(x)\, dx = \int_K \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{q}(x)\, dx, \forall \mathbf{q} \in [\mathbb{P}_1(K)]^2.$$

Enfin on définit $\mathbf{f}_h$ par

$$\mathbf{f}_{h,*} = \mathbf{f}_{K,*} \text{ dans } K, \forall K \in \mathcal{T}_h^*, * \in \{S, D\}.$$

Ainsi les résidus approchés sont définis par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{S,K} &= \mathbf{f}_{K,S} + 2\nu \operatorname{div} \mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S}) - \\
&\quad \nabla p_{h,S} - \rho(\mathbf{u}_{h,S} \cdot \nabla)\mathbf{u}_{h,S} - \frac{\rho}{2}[\operatorname{div}(\mathbf{u}_{h,S})\mathbf{u}_{h,S}] \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^S, \\
\mathbf{r}_{D,K} &= \mathbf{f}_{K,D} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D} - \nabla p_{h,D} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h^D.
\end{aligned}$$

Après on introduit le saut dans la direction du vecteur normal par

$$\mathbf{J}_{E,\mathbf{n}_E} := \begin{cases} [\![(2\nu\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S}) - p_{h,S}\mathbf{I})\mathbf{n}_e]\!]_e & \text{si} \quad e \in \mathcal{E}_h(\Omega_S), \\ \mathbf{0} & \text{si} \quad e \in \mathcal{E}_h(\partial\Omega_S), \end{cases}$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice unité de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

Définition 5.4. *(**Indicateur d'erreur**) L'indicateur d'erreur global est*

défini par :

$$\Theta := \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h^S} \Theta_{S,K}^2 + \sum_{K\in\mathcal{T}_h^D} \Theta_{D,K}^2 \right\}^{1/2}, \tag{5.18}$$

où $\Theta_{S,K}^2$ *(avec* $K \in \mathcal{T}_h^S$*)* *et* $\Theta_{D,K}^2$ *(avec* $K \in \mathcal{T}_h^D$*)* *sont des indicateurs d'erreur locaux et sont définis par :*

$$\begin{aligned}
\Theta_{S,K}^2 &:= \|\boldsymbol{r}_{S,K}\|_{0,K}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_h(\bar{\Omega}_S)} \|\boldsymbol{J}_{e,\boldsymbol{n}_e}\|_{0,e}^2 \\
&+ \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} \| - p_{h,S} + p_{h,D} - 2\nu \boldsymbol{n}_S \cdot \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_{h,S}) \cdot \boldsymbol{n}_S\|_{0,e}^2 \\
&+ \sum_{e\in\mathcal{E}(T)\cap\mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} \left\| \frac{\alpha_d \nu}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}} \boldsymbol{u}_{h,S}\cdot\tau + 2\nu \boldsymbol{n}_S \cdot \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_{h,S})\cdot\tau \right\|_{0,e}^2 \\
&+ \sum_{e\in\mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} \|\boldsymbol{u}_{h,S}\cdot\boldsymbol{n}_S + \boldsymbol{u}_{h,D}\cdot\boldsymbol{n}_D\|_{0,e}^2 \\
&+ \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{h,S}\|_{0,K}^2,
\end{aligned} \tag{5.19}$$

et

$$\begin{aligned}
\Theta_{D,K}^2 &:= h_K^2 \left(\|\boldsymbol{f}_{h,D} - \nabla p_{h,D} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_{h,D}\|_{0,K}^2 + \|\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{f}_{h,D} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_{h,D})\|_{0,K}^2 \right) \\
&+ \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_h(\Omega_D)} h_e \|[(\boldsymbol{f}_{h,D} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_{h,D} - \nabla p_{h,D})\cdot\tau_e]_e\|_{0,e}^2 \\
&+ \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_h(\partial\Omega_D)} h_e \|(\boldsymbol{f}_{h,D} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_{h,D} - \nabla p_{h,D})\cdot\tau_e\|_{0,e}^2 \\
&+ \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} h_e \|p_{h,D} - \lambda_h\|_{0,e}^2 \\
&+ \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{h,D}\|_{0,K}^2.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

De plus on définit les termes d'approximations locaux et globaux par

$$\zeta_K := \begin{cases} \| \mathbf{f}_S - \mathbf{f}_{h,S} \|_{0,K} & \forall K \in \mathcal{T}_h^S, \\ h_K(\| \mathbf{f}_D - \mathbf{f}_{h,D} \|_{0,K} + \|\mathbf{rot}(\mathbf{f}_D - \mathbf{f}_{h,D})\|_{0,K}) & \forall K \in \mathcal{T}_h^D, \end{cases}$$

$$\zeta := \left(\zeta_S^2 + \zeta_D^2\right)^{1/2}, \tag{5.21}$$

où

$$\zeta_S := \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h^S} \zeta_K^2\right)^{1/2} \text{ et } \zeta_D := \left(\sum_{K\in\mathcal{T}_h^D} \zeta_K^2\right)^{1/2}. \tag{5.22}$$

Remarque 5.5. *Le caractère résiduel du terme de droite de(5.19) et (5.20) est observé lorsque* $(\boldsymbol{u}_h, (p_h, \lambda_h))$ *est la solution exacte de (4.27), alors ces termes s'annulent.*

5.2.6 Fiabilité des indicateurs d'erreur

L'un des résultats importants que nous avons obtenus est la fiabilité des indicateurs d'erreur. Pour prouver ce résultat, nous allons énoncer quelques lemmes utiles. Mais avant d'énoncer les dits lemmes, nous allons procéder comme dans [25]. On pose $\mathbf{X} := \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$, $\mathbf{X}' := \mathbf{H}' \times \mathbf{Q}'$, $\mathbf{X}_h := \mathbf{H}_h \times \mathbf{Q}_h$ et $\mathbf{X}_h' := \mathbf{H}_h' \times \mathbf{Q}_h'$. On définit ensuite par $\mathbf{P} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{X}'$;

$$[\mathbf{P}(\mathbf{U}), \mathbf{V}] := [(a_1 + a_2(\mathbf{u}_S))(\mathbf{u}_S), \mathbf{v}] + [\mathbf{B}(\mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D), \phi] + [\mathbf{B}(\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D), \psi] \tag{5.23}$$

pour tout $\mathbf{U} = ((\mathbf{u}_S, \mathbf{u}_D), \psi)$, $\mathbf{V} = ((\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D), \phi)$,

où $\psi = (p, \lambda)$, $\phi = (q, \xi)$; et

$\mathbf{P}_h : \mathbf{X}_h \longrightarrow \mathbf{X}_h'$;

$$\begin{aligned} [\mathbf{P}_h(\mathbf{U}_h), \mathbf{V}_h] &:= [a_1 + a_2^h(\mathbf{u}_{h,S})(\mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,D})] + \\ &\quad [\mathbf{B}(\mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,D}), \phi_h] + [\mathbf{B}(\mathbf{v}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,D}), \psi_h], \end{aligned} \tag{5.24}$$

pour tout $\mathbf{U}_h = ((\mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{u}_{h,D}), \psi_h)$, $\mathbf{V}_h = ((\mathbf{v}_{h,S}, \mathbf{v}_{h,D}), \phi_h)$. Alors, on désigne,
$\mathcal{F} := (\mathbf{F}, \mathbf{O}) \in \mathbf{H}' \times \mathbf{Q}'$ avec $\mathbf{O} \equiv 0$ sur $\mathbf{H} \times \mathbf{Q}$, en utilisant (4.27) et (4.42), $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}_h$ satisfont

$$[\mathbf{P}(\mathbf{U}), \mathbf{V}] = [\mathcal{F}, \mathbf{V}], \forall \mathbf{V} \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q} \tag{5.25}$$

et

$$[\mathbf{P}_h(\mathbf{U}_h), \mathbf{V}_h] = [\mathcal{F}, \mathbf{V}_h], \forall \mathbf{V}_h \in \mathbf{H}_h \times \mathbf{Q}_h. \tag{5.26}$$

Lemme 5.6. *L'opérateur P est différentiable au sens de Gâteaux et sa différentielle première au sens de Gâteaux en un point $\boldsymbol{W} \in \boldsymbol{X}$ est donnée par,*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{W})(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) &= \mathcal{D}_{a_1}(\boldsymbol{w})(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + [a_2(\boldsymbol{u}_S)(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{v}] + \\ &\quad [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{v}_S, \boldsymbol{v}_D), \psi] + [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{u}_S, \boldsymbol{u}_D), \phi], \end{aligned} \tag{5.27}$$

pour tout $\boldsymbol{U} = ((\boldsymbol{u}_S, \boldsymbol{u}_D), \psi)$, $\boldsymbol{V} = ((\boldsymbol{v}_S, \boldsymbol{v}_D), \phi) \in \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{Q}$. De plus il existe une constante positive $C_{\boldsymbol{P}}$, indépendante de $\boldsymbol{U}$ et de $\boldsymbol{U}$ tel que la condition inf-sup généralisée suivante soit vérifiée.

$$C_{\boldsymbol{P}} \| \boldsymbol{U} \|_{\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{Q}} \leq \sup_{\boldsymbol{V} \in (\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{Q})^*} \frac{\mathcal{D}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{W})(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V})}{\| \boldsymbol{V} \|_{\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{Q}}}, \forall \boldsymbol{W} \in \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{Q}. \tag{5.28}$$

Preuve. Il suffit d'utiliser le Lemme 4.15 et avec la relation (4.55). ■
On pourra aussi consulter [25] pour plus de détails.

Proposition 5.7. *Soit $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{U}_h$ solutions respectives des problèmes (4.27) et (4.42), alors*

$$\| \boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}_h \|_{\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{Q}} \lesssim \| R \|_{(\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{Q})'}, \tag{5.29}$$

où $R : \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonctionnelle résiduelle définie par

$R(\boldsymbol{V}) := [\mathcal{F} - \boldsymbol{P}_h(\boldsymbol{U}_h), \boldsymbol{V}]$, *pour tout* $\boldsymbol{V} \in \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{Q}$, *et satisfaisant*

$$R(\boldsymbol{V}_h) = 0, \forall\, \boldsymbol{V}_h \in \boldsymbol{H}_h \times \boldsymbol{Q}_h. \tag{5.30}$$

Preuve. On utilise le Lemme 4.16 et la relation (4.57) ■

L'étape suivante est donc d'estimer $\|R\|_{(\mathbf{H}\times\mathbf{Q})'}$. Pour ce faire, en utilisant les formules d'intégration par parties (1.34), (1.35) et (1.36) nous décomposons R de la façon suivante.

$$R(\mathbf{V}) := R_1(\mathbf{v}_S) + R_2(\mathbf{v}_D) + R_3(q_S) + R_4(q_D) + R_5(\xi) + R_6(\mathbf{v}), \tag{5.31}$$

pour tout $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, (q, \xi)) \in \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$, avec $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_S, \mathbf{v}_D)$, $q = (q_S, q_D)$; et où,

$$\begin{aligned}
R_1(\mathbf{v}_S) &:= (\mathbf{f}_S + 2\nu \operatorname{div}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})) - \nabla p_{h,S} - \rho\,(\mathbf{u}_{h,S}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{v}_S)_S \\
&- (\frac{\rho}{2}\mathbf{u}_{h,S}, \mathbf{v}_S)_S + \operatorname{div}\mathbf{u}_{h,S}\,([p_{h,S}\mathbf{I} - 2\nu\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S}))\cdot\mathbf{n}_S], \mathbf{v}_S)_{\partial\Omega_S} \\
&+ \langle -p_{h,S} + p_{h,D} - 2\nu\mathbf{n}_S\cdot\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})\cdot\mathbf{n}_S, \mathbf{v}_S\cdot\mathbf{n}_S\rangle_\Sigma \\
&- \left\langle \frac{\alpha_d\nu}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}}\mathbf{u}_{h,S}\cdot\tau + 2\nu\mathbf{n}_S\cdot\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})\cdot\tau, \mathbf{v}_S\cdot\tau\right\rangle_\Sigma, \\
R_2(\mathbf{v}_D) &:= \left(\mathbf{f}_D - \nabla p_{h,D} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}, \mathbf{v}_D\right)_D, \\
R_3(q_S) &:= (q_S, \nabla\cdot\mathbf{u}_{h,S})_S, \\
R_4(q_D) &:= (q_D, \nabla\cdot\mathbf{u}_{h,D})_D, \\
R_5(\xi) &:= -\langle \mathbf{u}_{h,S}\cdot\mathbf{n}_S + \mathbf{u}_{h,D}\cdot\mathbf{n}_D, \xi\rangle_\Sigma, \\
R_6(\mathbf{v}_D) &:= \langle p_{h,D} - \lambda_h, \mathbf{v}_S\cdot\mathbf{n}_S + \mathbf{v}_D\cdot\mathbf{n}_D\rangle_\Sigma.
\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned}
\|R\|_{(\mathbf{H}\times\mathbf{Q})'} &\le \Big\{\|R_1\|_{\mathbf{H}_{\Gamma_S}(\Omega_S)'} + \|R_2\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div};\Omega_D)'} + \|R_3\|_{L^2(\Omega_S)'} + \|R_4\|_{L^2(\Omega_D)'} \\
&+ \|R_5\|_{H^{-1/2}(\Sigma)} + \|R_6\|_{H^{-1/2}(\Sigma)}\Big\}.
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Par suite nous avons le lemme suivant :

Lemme 5.8. *Les estimations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{aligned}\|R_1\|_{\boldsymbol{H}_{\Gamma_S}(\Omega_S)'} \lesssim & \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h^S} \Big(\|\boldsymbol{r}_{S,K}\|_{0,K}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_h(\bar{\Omega}_S)} \|\boldsymbol{J}_{e,\boldsymbol{n}_e}\|_{0,e}^2 \right. \\ & + \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} \| - p_{h,S} + p_{h,D} - 2\nu \boldsymbol{n}_S \cdot \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_{h,S}) \cdot \boldsymbol{n}_S\|_{0,e}^2 \\ & \left. + \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} \left\| \frac{\alpha_d \nu}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}} \boldsymbol{u}_{h,S}\cdot\tau + 2\nu \boldsymbol{n}_S \cdot \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}_{h,S})\cdot\tau \right\|_{0,e}^2 \Big) \right\}^{1/2} \\ & + \zeta_S.\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}\|R_3\|_{L^2(\Omega_S)'} &\lesssim \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h^S} \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{h,S}\|_{0,K}^2 \right\}^{1/2}, \\ \|R_4\|_{L^2(\Omega_D)'} &\lesssim \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h^D} \|\operatorname{div} \boldsymbol{u}_{h,D}\|_{0,K}^2 \right\}^{1/2}, \\ \|R_5\|_{H^{-1/2}(\Sigma)} &\lesssim \left\{ \sum_{e\in\mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} \|\boldsymbol{u}_{h,S}\cdot\boldsymbol{n}_S + \boldsymbol{u}_{h,D}\cdot\boldsymbol{n}_D\|_{0,e}^2 \right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Preuve. La preuve de ce lemme est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et de l'inégalité de trace. ■

Nous avons aussi le lemme suivant

Lemme 5.9. *Les estimations suivantes sont satisfaites :*

$$\|R_2\|_{\boldsymbol{H}(\mathrm{div},\Omega_D)'} \lesssim \left\{ \sum_{K\in\mathcal{T}_h^D} h_K^2 \Big(\|\boldsymbol{f}_{h,D} - \nabla p_{h,D} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_{h,D}\|_{0,K}^2 + \|\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{f}_{h,D} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_{h,D})\|_{0,K}^2 \Big) \right.$$
$$+ \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_h(\Omega_D)} h_e \|[(\boldsymbol{f}_{h,D} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_{h,D} - \nabla p_{h,D})\cdot\tau_e]_e\|_{0,e}^2 \quad (5.33)$$
$$\left. + \sum_{e\in\mathcal{E}(K)\cap\mathcal{E}_h(\partial\Omega_D)} h_e \|(\boldsymbol{f}_{h,D} - \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{u}_{h,D} - \nabla p_{h,D})\cdot\tau_e\|_{0,e}^2 \right\}^{1/2} + \zeta_D,$$

et

$$\|R_6\|_{H^{-1/2}(\Sigma)} \lesssim \left\{ \sum_{e\in\mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} h_e \|p_{h,D} - \lambda_h\|_{0,e}^2 \right\}^{1/2}. \quad (5.34)$$

Preuve. L'estimation de (5.34) suit directe [24, Page 953, Lemma 3.4]. Nous allons maintenant donner l'estimation de R_2, pour $\mathbf{v}_D \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega_D)$, nous allons utiliser la décomposition Helmholtz telle énoncée dans [38, Page 1882, Lemma 3.3]. Plus précisement, il existe $C_D > 0$ telle que chaque $\mathbf{v}_D \in \mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega_D)$ peut être decomposé comme $\mathbf{v}_D = \mathbf{w}_D + \mathbf{rot}\beta_D$, avec $\mathbf{w}_D \in \mathbf{H}^1(\Omega_D)$ et $\beta_D \in H^1(\Omega_D)$ avec $\int_{\Omega_D}\beta_D = 0$, et

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_D)} + \|\beta\|_{H^1(\Omega_D)} \le C_D \|\mathbf{v}_D\|_{\mathbf{H}(\mathrm{div};\Omega_D)}. \quad (5.35)$$

Ainsi, en définissant

$$\mathbf{v}_{h,D} := I_h^D(\mathbf{w}_D) + \mathbf{rot}(I_h^D\beta_D) \in \mathbf{H}_h(\mathrm{div},\Omega_D), \quad (5.36)$$

l'équation (5.36) peut être vue comme une décomposition discrète de Helmholtz de $\mathbf{v}_{h,D}$. En appliquant (5.30) que $R_2(\mathbf{v}_{h,D}) = 0$, on a alors

$$R_2(\mathbf{v}_D) = R_2(\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_{h,D}) = R_2(\mathbf{w}_D - \mathbf{w}_{h,D}) + R_2(\mathbf{rot}(\beta_D - \beta_{h,D})), \quad (5.37)$$

avec $\mathbf{w}_{h,D} = I_h^D(\mathbf{w}_D)$ et $\beta_{h,D} = \mathbf{rot}(I_h^D\beta_D)$. On note $\mathbf{rot}(\nabla p_{h,D}) = 0$. Ainsi, en utilisant la formule de Green standard sur chaque K en dimension

deux de l'espace, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} R_2(\mathbf{v}_D) \lesssim \sum_{K\in\mathcal{T}_h^D} \big\{ &(\mathbf{f}_D - \nabla p_{h,D} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}, \mathbf{w}_D - \mathbf{w}_{h,D})_K \\ &- \big(\mathbf{rot}(\mathbf{f}_D - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}), \beta_D - \beta_{h,D}\big)_K \\ &+ ((\mathbf{f}_D - \nabla p_{h,D} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D})\cdot\tau_D, \beta_D - \beta_{h,D})_{\partial K}\big\}. \end{aligned}$$

Nous introduisons l'approximation $\mathbf{f}_{h,D}$ de $\mathbf{f}_D$, et donc nous obtenons l'estimation (5.33) par application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'opérateur d'interpolation de Clément. ■

Enfin, nous pouvons maintenant donner le résultat principal de cette sous-section.

Théorème 5.10 ([47]). *En désignant par $(u,(p,\lambda))$ la solution du problème continu (4.27) et $(u_h,(p_h,\lambda_h))$ solution du problème discret (4.42). Alors*

$$\|(\boldsymbol{e_u},(e_p,e_\lambda))\|_{\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{Q}} \lesssim \Theta + \zeta. \tag{5.38}$$

Preuve. En utilisant les lemmes 5.8 et 5.9 le résultat suit directement. ■

5.2.7 Efficacité des indicateurs d'erreur a posteriori

Le second résultat important que nous avons obtenu dans cette partie est l'efficacité des indicateurs d'erreur. Ce résultat fera l'objet de cette sous section. Pour y parvenir, nous allons donner le lemme suivant :

Lemme 5.11. *Pour $k\in\mathbb{N}^*$, il existe des constantes dépendantes de k et de la régularité de la triangulation , tel que pour chaque élément K et*

$e \in \mathcal{E}(K)$ *on ait*

$$\begin{aligned} \| q \|_{0,K} &\lesssim \| q b_K^{1/2} \|_{0,K} \lesssim \| q \|_{0,K}, \forall q \in \mathbb{P}_k(K), && (5.39)\\ \|\nabla(q b_K)\|_{0,K} &\lesssim h_K^{-1} \| q \|_{0,K}, \forall q \in \mathbb{P}_k(K), && (5.40)\\ \| p \|_{0,e} &\lesssim \| b_e^{1/2} p \|_{0,e} \lesssim \| p \|_{0,e}, \forall p \in \mathbb{P}_k(e), && (5.41)\\ \| L(p) \|_{0,K} + h_e \|\nabla(L(p))\|_{0,K} &\lesssim h_e^{1/2} \| p \|_{0,e} \ \forall p \in \mathbb{P}_k(e). && (5.42) \end{aligned}$$

Toujours dans cette même logique, nous définissons pour $\omega \subset \Omega := \Omega_S \cup \Sigma \cup \Omega_D$, et pour $\xi \| \in \Sigma \cap \bar{\omega}$ par :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{v},(q,\xi))\|_{h,w}^2 &:= \sum_{e \in \mathcal{E}_h(\bar{\omega} \cap \bar{\Omega}_S)} h_e^{-1} \left(\|\mathbf{v}\|_{1,\omega_e}^2 + \|q_S\|_{\omega_e}^2 \right) + \|\mathbf{v}_D\|_{\mathbf{H}(\mathrm{div};\omega \cap \Omega_D)}^2 \\ &+ \|q_D\|_{L^2(\omega \cap \Omega_D)}^2 + \|\xi\|_{1/2,\Sigma \cap \bar{\omega}}^2, \end{aligned}$$

avec

$$\omega := \cup \left\{ K' \in \mathcal{T}_h^S : \ K' \in \mathcal{E}(K) \right\}. \tag{5.43}$$

et

$$\omega_e := \cup \left\{ e \in \mathcal{E}(K) \quad K \in \mathcal{T}_h^S \right\}. \tag{5.44}$$

Nous énonçons donc le résultat important de cette sous-section.

Théorème 5.12 ([47]). *On suppose que $\boldsymbol{f}_S \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_S)$ et $\boldsymbol{f}_D \in \boldsymbol{L}^2(\Omega_D)$ satisfont les conditions des théorèmes 4.7 et 4.11. Soit $(\boldsymbol{u},(p,\lambda)) \in \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{Q}$ solution exacte du problème (4.27) et $(\boldsymbol{u}_h,(p_h,\lambda_h)) \in \boldsymbol{H}_h \times \boldsymbol{Q}_h$ solution approchée du problème couplé **Navier-Stokes/Darcy** (4.42). Alors, l'indicateur d'erreur local Θ_K satisfait :*

$$\Theta_K \lesssim \|(\boldsymbol{e_u},(e_p,e_\lambda))\|_{h,\tilde{\omega}_K} + \sum_{K' \subset \tilde{\omega}_K} \zeta_{K'}, \forall K \in \mathcal{T}_h, \tag{5.45}$$

où $\tilde{\omega}_K$ est la réunion des éléments qui sont au voisinage de l'élément K.

Preuve. Nous allons procéder cas par cas afin d'obtenir le résultat

final.

1. **Elément résiduel dans Ω_S.** Soit $\mathbf{w}_K := \mathbf{r}_{S,K} b_K \in [H_0^1(K)]^2$ et on considère

$$(\mathbf{r}_{S,K}, \mathbf{w}_K)_K = \int_K (\mathbf{f}_S + 2\nu \operatorname{div}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})) - \nabla p_{h,S} - \rho\,(\mathbf{u}_{h,S}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_{h,S} - \frac{\rho}{2}\mathbf{u}_{h,S}\operatorname{div}\mathbf{u}_{h,S})\cdot\mathbf{w}_K.$$

En introduisant $\mathbf{f}_S$ et en utilisant la formulation (4.22) on obtient,

$$\begin{aligned}\int_K \mathbf{r}_{S,K}\cdot\mathbf{w}_K = \int_K (\mathbf{f}_S - \mathbf{f}_{S,h})\cdot\mathbf{w}_K + \int_K (2\nu\mathbf{e}(\mathbf{u}_S) : \nabla\mathbf{w}_K) \\ +\rho\int_K [(\mathbf{u}_S\cdot\nabla)\mathbf{u}_S]\cdot\mathbf{w}_K - p_S\operatorname{div}\mathbf{w}_K \\ + \int_K [2\nu\operatorname{div}(\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})) - \nabla p_{h,S} - \rho\,(\mathbf{u}_{h,S}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_{h,S}]\cdot\mathbf{w}_K \\ -\int_K \left[\frac{\rho}{2}\mathbf{u}_{h,S}\operatorname{div}\mathbf{u}_{h,S}\right]\cdot\mathbf{w}_K.\end{aligned}$$

Par intégration par parties on a ,

$$\begin{aligned}\int_K \mathbf{r}_{S,K}\cdot\mathbf{w}_K = \int_K (\mathbf{f}_S - \mathbf{f}_{S,h})\cdot\mathbf{w}_K + 2\nu\int_K \mathbf{e}(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}) : \nabla(\mathbf{w}_K) \\ -\int_T e_p\operatorname{div}\mathbf{w}_K \\ + \int_K \left[\rho(\mathbf{u}_S\cdot\nabla)\mathbf{u}_S - \frac{\rho}{2}\mathbf{u}_{h,S}\operatorname{div}\mathbf{u}_{h,S} - \rho\,(\mathbf{u}_{h,S}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_{h,S}\right]\cdot\mathbf{w}_K.\end{aligned}$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz on a,

$$\begin{aligned}\int_K \mathbf{r}_{S,K}\cdot\mathbf{w}_K \lesssim \|\mathbf{f}_S - \mathbf{f}_{S,h}\|_{0,K}\|\mathbf{w}_K\|_{0,K} \\ +(2\nu\|\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}\|_{1,K} + \|e_{p_S}\|_{0,K})\|\nabla\mathbf{w}_K\|_{0,K} \\ + \left|\int_K \left[\rho(\mathbf{u}_S\cdot\nabla)\mathbf{u}_S - \frac{\rho}{2}\mathbf{u}_{h,S}\operatorname{div}\mathbf{u}_{h,S} - \rho\,(\mathbf{u}_{h,S}\cdot\nabla)\,\mathbf{u}_{h,S}\right]\cdot\mathbf{w}_K\right|.\end{aligned}$$

Les inégalités inverses (5.39), (5.40), la relation $\| \mathbf{w}_K \|_{0,K} \leqslant \| \mathbf{r}_{s,K} \|_{0,K}$

et le fait que $\|\mathbf{u}_S\|_{1,\Omega_S}$ (voir [34, Lemme 5 et Lemme 6]) et $\|\mathbf{u}_{S,h}\|_{1,\Omega_S}$ (voir [34, Lemma 12]) soient bornés,

$$\|\mathbf{r}_{S,K}\|_{0,K} \lesssim \|\mathbf{f}_S - \mathbf{f}_{S,h}\|_{0,K} + h_K^{-1}\|\nabla \mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}\|_{0,K} + h_K^{-1}\|e_{p_S}\|_{0,K},$$

comme $h_K^{-1} \leq h_e^{-1}, \forall e \in \mathcal{E}(K)$, on déduit que,

$$\|\mathbf{r}_{S,K}\|_{0,K} \lesssim \|(\mathbf{e}_{\mathbf{u}}, (e_p, e_\lambda))\|_{h,w_K} + \zeta_S. \tag{5.46}$$

où w_K est la réunion des éléments partageant des arêtes communes avec K.

2. **Elément résidual dans Ω_D.** Soit $\mathbf{w}_K := \mathbf{r}_{D,K} b_K \in [H_0^1(K)]^2$, nous utilisons (4.22) et par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_K \mathbf{r}_{D,K} \cdot \mathbf{w}_K &= \int_K (\mathbf{f}_{h,D} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D} - \nabla p_{h,D}) \cdot \mathbf{w}_K \\
&= \int_K (\mathbf{f}_{h,D} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D} - \nabla p_{h,D}) \cdot \mathbf{w}_K \\
&+ \int_K (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D - \mathbf{f}_D) \cdot \mathbf{w}_K - p_D \operatorname{div} \mathbf{w}_K \\
&= \int_K -(\mathbf{f}_D - \mathbf{f}_{h,D}) \cdot \mathbf{w}_K \\
&+ \int_K (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{e}_{\mathbf{u}_D} \cdot \mathbf{w}_K + e_{p_D} \operatorname{div} \mathbf{w}_K).
\end{aligned}$$

Comme avant, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimations inverses (5.39)-(5.40) donne ,

$$h_K\|\mathbf{r}_{D,K}\|_{0,K} \lesssim h_K \parallel \mathbf{f}_D - \mathbf{f}_{h,D} \parallel_{0,K} + \parallel \mathbf{K}^{-1}\mathbf{e}_{\mathbf{u}_D} \parallel_{0,K} + \parallel e_{p_D} \parallel_{0,K} .$$

Par conséquent,

$$h_K\|\mathbf{r}_{D,K}\|_{0,K} \lesssim \|(\mathbf{e}_{\mathbf{u}}, (e_p, e_\lambda))\|_{h,w_K} + \zeta_D. \tag{5.47}$$

3. **Elément résidual rot dans Ω_D.**

Pour $K \in \mathfrak{T}_h^D$, posons $C_K = \mathbf{rot}(\mathbf{f}_{h,D} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D})$ et $w_K = C_K b_K$. Ainsi on a $\mathbf{rot}(w_K) \in \mathbf{H}$ et est à divergence nulle, par conséquent d'après (4.22) nous avons

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_D, \mathbf{rot}(w_K)) = (\mathbf{f}_D, \mathbf{rot}(w_K))_D,$$

ou de façon équivalente

$$\int_K (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D - \mathbf{f}_D) \cdot \mathbf{rot}(w_K) = 0. \tag{5.48}$$

D'après la formule de Green on a

$$\int_K C_K w_K = \int_K \mathbf{rot}(\mathbf{f}_{h,D} - \mathbf{f}_D) w_K + \int_K (\mathbf{f}_D - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}) \cdot \mathbf{rot}(w_K),$$

en utilisant (5.48) on déduit que

$$\int_K C_K w_K = \int_K \mathbf{rot}(\mathbf{f}_{h,D} - \mathbf{f}_D) w_K + \int_K [\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{u}_D - \mathbf{u}_{h,D})] \cdot \mathbf{rot}(w_K).$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\int_K C_K w_K \leq \|\mathbf{rot}(\mathbf{f}_{h,D} - \mathbf{f}_D)\|_{0,K} \|w_K\|_{0,K} + \| \mathbf{K}^{-1}\mathbf{e}_{\mathbf{u}_D} \|_{0,K} \|\mathbf{rot} w_K\|_{0,K}.$$

En appliquant encore les inégalités inverses (5.39)-(5.40) on obtient

$$h_K \|\mathbf{rot}(\mathbf{f}_{h,D} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D})\|_{0,K} \lesssim \| \mathbf{K}^{-1}\mathbf{e}_{\mathbf{u}_D} \|_{0,K} + h_K \|\mathbf{rot}(\mathbf{f}_{h,D} - \mathbf{f}_D)\|_{0,K},$$

Soit

$$h_K \|\mathbf{rot}(\mathbf{f}_{h,D} - \mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D})\|_{0,K} \lesssim \|(\mathbf{e}_{\mathbf{u}}, (e_p, e_\lambda))\|_{h,w_K} + \zeta_D \tag{5.49}$$

4. **Elément de divergence dans Ω_*, $* \in \{S, D\}$.** Directement on a

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}_* - \mathbf{u}_{h,*}) = -\operatorname{div}\mathbf{u}_{h,*}, \forall * \in \{S, D\},$$

ainsi d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous concluons que

$$\|\operatorname{div}\mathbf{u}_{h,*}\|_{0,K} \lesssim \|\operatorname{div}\mathbf{e}_{\mathbf{u}_*}\|_{0,K}, * \in \{S, D\}. \tag{5.50}$$

5. **Le saut de la Normale $\mathbf{J}_{e,\mathbf{n}_e}$ dans Ω_S.** Pour chaque arête $e \in \mathcal{E}_h(\Omega_S)$, nous considérons $w_e = \cup\{e : e \in K_1 \cup K_2\}$. Comme $\mathbf{J}_{e,\mathbf{n}_e} \in [\mathbb{P}^0(e)]^2$, posons

$$\mathbf{w}_e := -\mathbf{J}_{e,\mathbf{n}_e} b_e \in [H_0^1(w_e)]^2.$$

La première formulation (4.22) nous donne

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{w}_e) + \mathbf{b}(\mathbf{w}_e, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}_e)_{w_e},$$

ce qui est équivalent

$$\begin{aligned}\int_{w_e} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{w}_e &= \int_{w_e} [2\nu\mathbf{e}(\mathbf{u}_S) - p_S\mathbf{I}] : \mathbf{e}(\mathbf{w}_e) \\ &+ \int_{w_e} [\rho(\mathbf{u}_S \cdot \nabla)\mathbf{u}_S] \cdot \mathbf{w}_e \\ &+ \int_{\partial\omega_e} [p_S\mathbf{I} - 2\nu\mathbf{e}(\mathbf{u}_S)]\mathbf{n}_E \cdot \mathbf{w}_e. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Par intégration nous avons

$$\begin{aligned}-\int_e \mathbf{J}_{e,\mathbf{n}_e} \cdot \mathbf{w}_e &= \int_{\omega_e} (2\nu\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S}) - p_{h,S}\mathbf{I}) : \mathbf{e}(\mathbf{w}_e) \\ &- \sum_{i=1}^{2} \int_{K_i} (-2\nu \operatorname{div}\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S}) + \nabla p_{h,S}) \cdot \mathbf{w}_e.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après (5.51) on a

$$\begin{aligned} -\int_e \mathbf{J}_{e,\mathbf{n}_e}\cdot\mathbf{w}_e &= \sum_{i=1}^{2}\int_{K_i}[\mathbf{f}_S-(-2\nu\,\mathrm{div}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})+\nabla p_{h,S})]\cdot\mathbf{w}_e \\ &- \int_{w_e}[2\nu\mathbf{e}(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_{h,S}})-e_{p_S}\mathbf{I}]:\mathbf{e}(\mathbf{w}_e) \\ &+ \int_{w_e}[\rho(\mathbf{u}_S\cdot\nabla)\mathbf{u}_S]\cdot\mathbf{w}_e. \end{aligned}$$

Nous introduisons l'approximation $\mathbf{f}_{S,h}$ de $\mathbf{f}_S$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, les inégalités inverses (5.41)-(5.42) et le fait que $\|\mathbf{u}_S\|_{1,\Omega_S}$ (voir [34, Lemme 5 et Lemme 6]) est borné, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \|\,\mathbf{J}_{e,\mathbf{n}_e}\,\|_{0,e} &\lesssim h_e^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{2}(\|\,\mathbf{f}_S-\mathbf{f}_{h,S}\,\|_{0,K_i}+\|\,\mathbf{r}_{S,K_i}\,\|_{0,K_i})\right) \\ &+ h_e^{-1/2}\left(\|\nabla(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S})\|_{0,w_e}+\|\,e_{p_S}\,\|_{0,w_e}\right). \end{aligned}$$

Comme $h_e\leq 1$, alors par (5.46) on a,

$$\|\,\mathbf{J}_{e,\mathbf{n}_e}\,\|_{0,e} \lesssim \|(\mathbf{e}_{\mathbf{u}},(e_p,e_\lambda))\|_{h,w_e}+\zeta_S. \tag{5.52}$$

6. **Les éléments sur l'interface Σ.** Pour estimer les éléments sur l'interface, nous fixons une arête e dans Σ et pour une constante r_e fixée après et puis un vecteur unitaire $\mathbf{n}$, on considère $\mathbf{w}_e=(\mathbf{w}_{e,S},\mathbf{w}_{e,D})$ telle que :

$$\mathbf{w}_e = r_e b_e \mathbf{n}. \tag{5.53}$$

On a $\mathbf{w}_e\in\mathbf{H}$. Donc la formulation faible (4.22) vérifie

$$\mathbf{a}(\mathbf{u},\mathbf{w}_e)+\mathbf{b}(\mathbf{w}_e,p)=(\mathbf{f},\mathbf{w}_e)_{\omega_e},$$

ce qui est équivalent à

$$\int_{K_S}(2\nu\mathbf{e}(\mathbf{u}_S):\mathbf{e}(\mathbf{w}_e)-p_S\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}_e)+\int_{K_S}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_D\cdot\mathbf{w}_e-p_D\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}_e)$$

$$+\frac{\nu\alpha_d}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}}(\mathbf{u}_S\cdot\tau,\mathbf{w}_{e,S}\cdot\tau)_e+\int_{w_e}[\rho(\mathbf{u}_S\cdot\nabla)\mathbf{u}_S]\cdot\mathbf{w}_e=(\mathbf{f},\mathbf{w}_e)_{\omega_e}, \tag{5.54}$$

avec K_S (resp. K_D) est l'unique triangle inclut dans $\bar{\Omega}_S$ (resp. $\bar{\Omega}_D$) ayant e comme arête.

En d'autre terme, par intégration par parties dans K_S et K_D on a

$$\int_{K_S}(2\nu\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S}):\mathbf{e}(\mathbf{w}_{e,S})-p_{h,S}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}_{e,S})+\frac{\nu\alpha_d}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}}(\mathbf{u}_{h,S}\cdot\tau,\mathbf{w}_{e,S}\cdot\tau)_e$$

$$+\int_{K_D}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}\cdot\mathbf{w}_{e,D}-p_{h,D}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}_{e,D})$$

$$=-\int_{K_S}(2\nu\,\mathrm{div}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})-\nabla p_{h,S})\cdot\mathbf{w}_{e,S}+\int_{K_D}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}\cdot\mathbf{w}_{e,D}+\nabla p_{h,D})\cdot\mathbf{w}_{e,D}$$

$$+\frac{\nu\alpha_d}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}}(\mathbf{u}_{h,S}\cdot\tau,\mathbf{w}_{e,S}\cdot\tau)_e-\int_e([p_{h,S}]_e\mathbf{w}_{e,S}\cdot\mathbf{n}_e-2\nu[\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})\mathbf{n}_e]\cdot\mathbf{w}_{e,S})\,.$$

En soustrayant cette égalité de (5.54), on trouve

$$\int_e([p_h]_e\mathbf{w}_E\cdot\mathbf{n}_e-2\nu(\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})\mathbf{n}_e\cdot\mathbf{w}_{e,S})-\frac{\nu\alpha_d}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}}(\mathbf{u}_{h,S}\cdot\tau,\mathbf{w}_{e,S}\cdot\tau)_e$$

$$=\int_{K_S}(2\nu\mathbf{e}(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}):\mathbf{e}(\mathbf{w}_{e,S})-e_{p_S}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}_{e,S})+\frac{\nu\alpha_d}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}}(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}\cdot\tau,\mathbf{w}_{e,s}\cdot\tau)_e$$

$$+\int_{K_D}(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{e}_{\mathbf{u}_D}\cdot\mathbf{w}_{e,D}-e_{p_D}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}_{e,D})-\int_{K_S}[\rho(\mathbf{u}_S\cdot\nabla)\mathbf{u}_S]\cdot\mathbf{w}_e$$

$$-\int_{K_S}(\mathbf{f}_S+2\nu\,\mathrm{div}\,\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})-\nabla p_{h,S})\cdot\mathbf{w}_{e,S}-\int_{K_D}(\mathbf{f}_D-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}-\nabla p_{h,D})\cdot\mathbf{w}_{e,D}.$$

Dans le dernier terme, nous introduisons l'élément résiduel $\mathbf{r}_{*,K}$, $*\in\{S,D\}$, ce qui nous donne

$$\int_e ([p_{h,S}]_e \mathbf{w}_e \cdot \mathbf{n}_e - 2\nu(\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})\mathbf{n}_e \cdot \mathbf{w}_{e,S}) - \frac{\nu\alpha_d}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}}(\mathbf{u}_{h,S}\cdot\tau, \mathbf{w}_{e,S}\cdot\tau)_e$$
$$= \int_{K_S} (2\nu\mathbf{e}(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}) : \mathbf{e}(\mathbf{w}_{e,S}) - e_{p_S} \operatorname{div} \mathbf{w}_{e,S}) + \frac{\nu\alpha_d}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}}(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}\cdot\tau, \mathbf{w}_{e,S}\cdot\tau)_e$$
$$+ \int_{K_D} (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{e}_{\mathbf{u}_D} \cdot \mathbf{w}_{e,D} - e_{p_D} \operatorname{div} \mathbf{w}_{e,D}) - \int_{K_S} [\rho(\mathbf{u}_S\cdot\nabla)\mathbf{u}_S]\cdot\mathbf{w}_e \qquad (5.55)$$
$$- \int_{K_S} (\mathbf{f}_S - \mathbf{f}_{h,S} + \mathbf{r}_{S,K})\cdot\mathbf{w}_{e,S} - \int_{K_D} (\mathbf{f}_D - \mathbf{f}_{h,D} + \mathbf{r}_{D,K})\cdot\mathbf{w}_{e,D}.$$

1. Pour estimer $\displaystyle\sum_{e\in\mathcal{E}(T)\cap\mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} \left\| \frac{\alpha_d\nu}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}}\mathbf{u}_{h,S}\cdot\tau + 2\nu\mathbf{n}_S\cdot\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})\cdot\tau \right\|_{0,e}^2$, en posant

$$r_e = \frac{\alpha_d\nu}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}}\mathbf{u}_{h,S}\cdot\tau + 2\nu\mathbf{n}_S\cdot\mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S})\cdot\tau \text{ et } \mathbf{N} = \tau.$$

Avec ce choix, $\mathbf{w}_e\cdot\mathbf{n}_S + \mathbf{w}_e\cdot\mathbf{n}_D = 0$ sur Σ. Aussi, l'indentité (5.55) et l'inégalité inverse (5.41) on a,

$$\begin{aligned}
\|r_e\|_e^2 \lesssim & \int_{K_S} (2\nu\mathbf{e}(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}) : \mathbf{e}(\mathbf{w}_{e,S}) - e_{p_S}\operatorname{div}\mathbf{w}_{e,S}) \\
& + \int_{K_D} (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{e}_{\mathbf{u}_D}\cdot\mathbf{w}_{e,D} - e_{p_D}\operatorname{div}\mathbf{w}_{e,D}) \\
& + \frac{\nu\alpha_d}{\sqrt{\tau\cdot\kappa\cdot\tau}}(\mathbf{e}_{\mathbf{u}_S}\cdot\tau, \mathbf{w}_{e,S}\cdot\tau)_e - \int_{K_S}[\rho(\mathbf{u}_S\cdot\nabla)\mathbf{u}_S]\cdot\mathbf{w}_{e,S} \\
& - \int_{K_S}(\mathbf{f}_S - \mathbf{f}_{h,S} + \mathbf{r}_{S,K})\cdot\mathbf{w}_{e,S} - \int_{K_D}(\mathbf{f}_D - \mathbf{f}_{h,D} + \mathbf{r}_{D,K})\cdot\mathbf{w}_{e,D}.
\end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz , l'inégalité inverse (5.42), l'estimation de $\|\mathbf{r}_{*,K}\|_{0,K}$ [i.e. estimations (5.46) et (5.47)], et le fait que

$\|\mathbf{u}_S\|_{1,\Omega_S}$ (voir [34, Lemme 5 et Lemme 6]) est borné

$$\left\| \frac{\alpha_d \nu}{\sqrt{\tau \cdot \kappa \cdot \tau}} \mathbf{u}_{h,S} \cdot \tau + 2\nu \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S}) \cdot \tau \right\|_{0,e} \lesssim \|(\mathbf{e}_\mathbf{u}, (e_p, e_\lambda))\|_{h,\omega_e} + \sum_{K' \subset \omega_e} \zeta_{K'}, \tag{5.56}$$

avec $\omega_e = K_S \cup K_D$.

2. Pour estimer le terme $\sum_{e \in \mathcal{E}(T) \cap \mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} \| - p_{h,S} + p_{h,D} - 2\nu \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S}) \cdot \mathbf{n}_S \|_{0,e}^2$, en posant

$$r_e = p_{h,D} - p_{h,S} + 2\nu \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S}) \cdot \mathbf{n}_S \text{ et } \mathbf{N} = \mathbf{n}_S.$$

Comme avant, l'identité (5.55), les inégalités inverses (5.41) et (5.42), les bornes $\|\mathbf{r}_{*,K}\|_{0,K}$, $* \in \{S, D\}$et de (5.52), et le fait que $\|\mathbf{u}_S\|_{1,\Omega_S}$ (voir [34, Lemme 5 et Lemme 6]) est borné

$$\|p_{h,D} - p_{h,S} + 2\nu \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{e}(\mathbf{u}_{h,S}) \cdot \mathbf{n}_S\|_{0,e} \lesssim \|(\mathbf{e}_\mathbf{u}, (e_p, e_\lambda))\|_{h,\omega_e} + \sum_{K' \subset \omega_e} \zeta_{K'}. \tag{5.57}$$

3. Pour $e \in \mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})$, le terme $\sum_{e \in \mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} h_e \|p_{h,D} - \lambda_h\|_{0,e}^2$ est majoré comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} h_e \|p_{h,D} - \lambda_h\|_{0,e}^2 &\lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}_h(\bar{\Sigma})} h_e \left(\|\lambda - \lambda_h\|_{0,e}^2 + \|\lambda - p_{h,D}\|_{0,e}^2 \right) \\ &\lesssim h \|\lambda - \lambda_h\|_{1/2,\Sigma}^2 \lesssim \|(\mathbf{e}_\mathbf{u}, (e_p, e_\lambda))\|_{h,\omega_e}^2. \end{aligned} \tag{5.58}$$

4. D'une manière analogue [12, Lemme 4.7], le terme

$\sum_{e\in\mathcal{E}(\bar{\Sigma})} \|\mathbf{u}_{h,S}\cdot\mathbf{n}_S+\mathbf{u}_{h,D}\cdot\mathbf{n}_D\|_{0,e}$ peut être borné par

$$\|\mathbf{u}_{h,S}\cdot\mathbf{n}_S+\mathbf{u}_{h,D}\cdot\mathbf{n}_D\|_{0,e}^2 \lesssim h_{K_S}^{-1}\|\mathbf{u}_S-\mathbf{u}_{h,S}\|_{0,K_S}^2+h_{K_S}^2\|\mathbf{u}_D-\mathbf{u}_{h,D}\|_{0,K_D}^2 +\|\nabla(\mathbf{u}_S-\mathbf{u}_{h,S})\|_{0,K}^2+h_{K_D}^2\|\operatorname{div}(\mathbf{u}_D-\mathbf{u}_{h,D})\|_{0,K}^2,$$

où $e=\partial K_S\cap\partial K_D$. Maintenant, comme pour chaque $*\in\{S,D\}$, $h_{K_*}\leq 1$ et $h_{K_S}^{-1}\leq h_e^{-1}$, alors nous avons l'estimation,

$$\|\mathbf{u}_{h,S}\cdot\mathbf{n}_S+\mathbf{u}_{h,D}\cdot\mathbf{n}_D\|_{0,e}\lesssim \quad \|(\mathbf{e}_{\mathbf{u}},(e_p,e_\lambda))\|_{h,\omega_e}, \tag{5.59}$$
$$\text{avec } \omega_e=K_S\cup K_D.$$

5. **La tangentielle dans $\bar{\Omega}_D$.** Finalement, pour $e\in\mathcal{E}_h(\bar{\Omega}_D)$, les termes $\sum_{e\in\mathcal{E}_h(\Omega_D)} h_e\|[(\mathbf{f}_{h,D}-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}-\nabla p_{h,D})\cdot\tau_e]_e\|_{0,e}^2$ et $\sum_{e\in\mathcal{E}_h(\partial\Omega_D)} h_e\|(\mathbf{f}_{h,D}-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}-\nabla p_{h,D})\cdot\tau_e\|_{0,e}^2$ sont respectivement borné comme dans [24, Lemma 3.16] par :

$$\begin{aligned} h_e\|[(\mathbf{f}_{h,D}-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}-\nabla p_{h,D})\cdot\tau_e]_e\|_{0,e}^2 &\lesssim \|\mathbf{u}_D-\mathbf{u}_{h,D}\|_{0,w_e}^2 \quad (5.60)\\ &\lesssim \|(\mathbf{e}_{\mathbf{u}},(e_p,e_\lambda))\|_{h,\omega_e}^2, \end{aligned}$$

pour tout $e\in\mathcal{E}_h(\Omega_D)$, avec

w_e donné par

$$w_e:=\cup\left\{K'\in\mathcal{T}_h^D : e\in\mathcal{E}(K')\right\};$$

et

$$\begin{aligned} h_e\|(\mathbf{f}_{h,D}-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_{h,D}-\nabla p_{h,D})\cdot\tau_e\|_{0,e}^2 &\lesssim \|\mathbf{u}_D-\mathbf{u}_{h,D}\|_{0,K_e}^2 \quad (5.61)\\ &\lesssim \|(\mathbf{e}_{\mathbf{u}},(e_p,e_\lambda))\|_{h,\omega_e}^2, \end{aligned}$$

pour tout $e\in\mathcal{E}_h(\partial\Omega_D)$, avec K_e, le triangle de $\mathcal{T}_h^D$ ait e comme une

arête.

Les estimations (5.46), (5.47), (5.49), (5.50), (5.52), (5.56), (5.57), (5.58), (5.59), (5.60) et (5.61) nous permettent de conclure le résultat du Théorème 5.12. ■

5.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une étude d'analyse d'erreur a posteriori pour une méthode d'éléments finis mixtes du problème couplé **Navier-Stokes/Darcy**.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons abordé deux notions fondamentales dans la technique d'analyse numérique des équations aux dérivées partielles non linéaires. Dans un premier temps, nous avons étudié l'analyse d'erreur à priori pour une méthode d'éléments finis mixte de l'équation aux dérivées partielles elliptiques non linéaire de **Monge-Ampère**. Cette étude nous a conduit d'abord à établir un résultat de régularité elliptique $W^{2,p}$ des **EDP** elliptiques d'ordre deux dans un domaine polygonal. Ensuite nous avons proposé une nouvelle méthode (méthode du gradient reconstruit) pour l'approximation numérique de l'équation de **Monge-Ampère**. Enfin nous avons prouvé la convergence de notre méthode en énonçant des résultats d'analyse d'erreur à priori. Dans un deuxième temps, c'est le problème couplé **Navier-Stokes/Darcy** qui a été étudié. Nous avons proposé une méthode pour l'étude d'analyse d'erreur de type résiduel de ce problème. Nous avons obtenu des indicateurs d'erreur fiables et efficaces donc optimaux pour notre méthode.

Perspectives

Nos prochains axes de recherches se présentent comme suit.

Implémentation numérique

Dans les tous prochains jours nous allons finaliser l'implémentation numérique de l'analyse d'erreur à priori pour l'équation de **Monge-Ampère**.

Analyse d'erreur a posteriori de type résiduel de l'équation de Monge-Ampère

Par ailleurs, les résultats d'estimation d'erreur à priori nécessitent en général une hypothèse de régularité sur la solution du problème continu. Cette hypothèse est souvent très difficile à réaliser, ainsi la majoration d'erreur à priori ne permet pas effectivement de contrôler l'erreur commise dans l'approximation d'une EDP par la méthode des éléments finis. Pour contourner cette difficulté, on procède à l'analyse d'erreur a posteriori.

Nous projetons dans les jours à venir, procéder à l'analyse d'erreur a posteriori pour l'équation de **Monge-Ampère**. Plus précisement, nos prochains objectifs seront de partir de la formulation mixte standard de l'équation de cette équation. C'est-à-dire trouver $(\sigma, u) \in H^1(\Omega)^{d\times d} \times H^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} (\sigma,\tau) + (\operatorname{div}\tau, Du) - \langle Du, \tau n\rangle &= 0 \quad \forall \tau \in H^1(\Omega)^{d\times d} \\ (\det\,\sigma, v) &= (f,v) \quad \forall v \in H^1(\Omega)^2 \\ u &= g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.62}$$

Puis ensuite utiliser une discrétisation du type

$$V_h := \{v_h \in C^0(\bar{\Omega}) : v_{|K} \in \mathbb{P}_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad k \geq 3\} \tag{5.63}$$

$$\Sigma_h = V_h^{d\times d}. \tag{5.64}$$

avec la formulation discrète du problème 5.62 donnée par :

trouver $(\sigma_h, u_h) \in \Sigma_h \times V_h$ tel que

$$\begin{cases} (\sigma_h, \tau_h) + (\operatorname{div} \tau_h, Du_h) - \langle Du_h, \tau_h n \rangle &= 0 \quad \forall \tau_h \in \Sigma_h \\ (\det \sigma_h, v_h) &= (f, v_h) \quad \forall v \in V_h \\ u_h &= g_h \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.65}$$

Construire enfin des indicateurs d'erreurs de type résiduel qui seront probablement sous la forme

$$\Phi_{1,T}^2 = h_T^2 \| f_h - \det \sigma_h) \|_K^2, \tag{5.66}$$

$$\Phi_{2,T}^2 = h_T^2 \| \sigma_h + D^2 u_h - Du_h \|_K^2, \tag{5.67}$$

$$\Phi_K = \left(\sum_{i=1}^{2} \Phi_{i,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.68}$$

et

$$\Phi = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \Phi_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.69}$$

Puis prouver leur fiabilité et leur efficacité.

Nous pensons aussi regarder le cas $d = 3$ dans nos prochains travaux de recherches.

Deplus pour ce qui concerne le théorème du point fixe de Brouwer qui a été utilisé, nous pensons regarder comment appliquer directement le théorème du point fixe de Banach sur l'application T.

Construction d'un algorithme adaptatif pour le problème couplé Navier-Stokes/ Darcy

Dans l'étude d'analyse d'erreur a posteriori, il urge de construire un algorithme adaptatif de maillage. Ainsi dans les jours à venir, nous allons orienter nos axes de recherches dans ce sens pour le modèle couplé **Navier-Stokes/Darcy** et celui de **Monge-Ampère**.

Bibliographie

[1] B. Achchab, A. Agouzal, J. Baranger, and J. Maitre. Estimateur d'erreur a posteriori hiérarchique. application aux éléments finis mixtes. *Numer. Math.*, 80 :159–179, 1998.

[2] Y. Achdou, C. Bernardi, and F. Coquel. A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of darcy's equations. *Numer. Math.*, 96 :17–42, 2003.

[3] R. A. Adams and J. J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2003.

[4] J. Adetola, B. Ahounou, and G. Awanou. Low order mixed finite element approximations of the Monge-Ampère equation. *Preprint*, 2018.

[5] J. Adetola, G. Awanou, and B. Ahounou. $W^{2,p}$- elliptic regularity on polygonal domain for the second order linear equations. Technical report, Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques, 2018.

[6] A. D. Aleksandrov. Certain estimates for the dirichlet problem. *Soviet Math. Dokl*, 1 :1151–1154, 1961.

[7] M. Amara, L. Nadau, and D. Trujillo. Estimateurs a posteriori pour une méthode de volumes finis appliquée à des équations linéaires elliptique et parabolique. Technical report, Université de Pau, 2003.

[8] T. Arbogast and D. Brunson. A computational method for approximating a darcy-stokes system governing a vuggy porous medium. *Comput. Geosci.*, 11 :207–218, 2007.

[9] T. Arbogast and H. L. Lehr. Homogenization of a darcy-stokes system modeling vuggy porous media. *Comput. Geosci.*, 10 :291–302, 2006.

[10] G. Awanou. Erratum to : Quadratic mixed finite element approximations of the Monge-Ampère equations in 2d. *Calcolo*, pages 1–17, 2016.

[11] G. Awanou and H. Li. Error analysis of a mixed finite element method for the Monge-Ampère equation. *Int. J. Num. Analysis and Modeling*, 11 :745–761, 2014.

[12] I. Babûska and G. Gatica. A residual-based a posteriori error estimator for the stokes-darcy coupled problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48 :498–523, 2010.

[13] C. Bernardi, J. Dakroub, G. Mansour, and T. Sayah. A posteriori analysis of iterative algorithms for a nonlinear problem. *J. Sci. Comput.*, 65 :672–697, 2015.

[14] M. V. Berry. Oriental magic mirrors and the laplacian image. *European J. Phys.*, 27 :109–118, 2006.

[15] C. S. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Texts in Applied Mathematics 2nd edn. Springer-Verlag New York, 2002.

[16] S. C. Brenner, T. Gud, M. Neilan, and L.-Y. Sung. C^0 penalty methods for the fully nonlinear Monge-Ampère equation. *Math. Comput.*, 80 :1979–1995, 2011.

[17] H. Brézis. *Functional Analysis Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science+Business Media, 2011.

[18] K. Brix, Y. Hafizogullari, and A. Platen. Designing illumination lenses and mirrors by the numerical solution of Monge-Ampère equations. *JOSA A*, 32 :2227–2236, 2015.

[19] K. Brix, Y. Hafizogullari, and A. Platen. Solving the Monge-Ampère equations for the inverse reflector problem. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 25 :803–837, 2015.

[20] L. Caffarelli. The Monge-Ampère equation and optimal transportation an elementary review. in optimal transportation and applications. *Notes in Math.*, 1813 :1–10, 2003.

[21] L. A. Caffarelli and X. Cabré. Fully nonlinear elliptic equations. *American Mathematical Society Colloquium Publications*, 43, 1995.

[22] A. W. Cameron. *Estimates for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations with Explicit Constants and Aspects of the Finite Element Method for Second-Order Equations.* PhD thesis, Dissertation, Cornell University., 2010.

[23] V. Caselles, J. M. Morel, and C. Sbert. An axiomatic approach to image interpolation. *IEEE Trans.*, 7 :376–386, 1999.

[24] S. Caucao, G. N. Gatica, and R. Oyarzùa. A posteriori error analysis of a fully-mixed formulation for the Navier-Stokes/Darcy coupled problem with nonlinear viscosity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, 315 :943–971, 2016.

[25] S. Caucao, G. N. Gatica, R. Oyarzùa, and I. Sebestovà. A fully-mixed finite element method for the Navier-Stokes/Darcy coupled problem with nonlinear viscosity. *J. Numer. Math.*, 34 :1–42, 2015.

[26] P. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.

[27] P. Clément. Approximation by finite element functions using local regularisation. *RAIRO Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, 9 :77–84, 1975.

[28] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.L. Lions. Userâs guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 27 :1–67, 1992.

[29] E. Creusé, G. Kunert, and S. Nicaise. A posteriori error estimation for the stokes problem : Anisotropic and isotropic discretizations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14 :1297–1341, 2004.

[30] R. Dautray and J. Lions. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology.* Springer, 1987.

[31] E. J. Dean and R. Glowinski. Numerical solution of the two-dimensional elliptic Monge-Ampère equation with dirichlet boundary conditions : an augmented lagrangian approach. *Math. Acad. Sci. Paris*, 336 :779–784, 2003.

[32] E. J. Dean and R. Glowinski. Numerical solution of the two-dimensional elliptic Monge-Ampère equation with dirichlet boundary conditions : a least-squares approach. *Math. Acad. Sci. Paris*, 339 :887–892, 2004.

[33] E. J. Dean and R. Glowinski. Numerical methods for fully nonlinear elliptic equations of the Monge-Ampère type. *Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :1344–1386, 2006.

[34] M. Discacciati and R. Oyarzua. A conforming mixed finite element method for the Navier-Stokes/Darcy coupled problem. *Numerische Mathematik*, pages 1–36, 2016.

[35] J. Douglas, T. Dupont, and L.Wahlbin. The stability in L^q -projection into finite element function spaces. *Numer. Math*, 23 :193–197, 1974/75.

[36] H. Le Dret and B. Lucquin. *Partial Differential Equations : Modeling, Analysis and Numerical Approximation.* Springer Cham Heidelberg New York Dordrecht London, 2016.

[37] X. Feng and M. Neilan. Error analysis for mixed finite element approximations of the fully nonlinear Monge-Ampère equation based on the vanishing moment method. *SIAM J. Numer.Anal.*, 47 :1226–1250, 2009.

[38] G. Gatica, R. Oyarzùa, and F.J. Sayas. A residual-based a posteriori error estimator for a fully-mixed formulation of the Stokes-Darcy coupled problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200 :1877–1891, 2011.

[39] D. Gilbarg and N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[40] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.* Pitman Boston-London-Melbourne, 1985.

[41] B. Guan and J. Spruck. Locally convex hypersurfaces of constant curvature with boundary. *Comm. Pure Appl. Math.*, 57 :1311–1331, 2004.

[42] H. Guo, Z. Zhang, and Q. Zou. A C^0 linear finite element method for biharmonic problems. *J. of Scientific Computing*, pages 1–26, 2017.

[43] C. E. Gutiérrez. Monge-Ampère equation. progress in nonlinear differential equations and their applications. *Birkhuser Boston Inc.*, 39 :1–137, 2001.

[44] M. Hadji, A. Assala, and F. Nouri. A posteriori error analysis for Navier-Stokes equations coupled with Darcy problem. *Calcolo*, pages 1–18, 2014.

Jamal ADETOLA ©URPM/IMSP 2018
adetolajamal58@yahoo.com

[45] K. W. Houedanou. *Analyse d'erreur a-posteriori pour quelques méthodes d'éléments finis mixtes pour le problème de transmission Stokes-Darcy : Discrétisations isotrope et anisotrope.* PhD thesis, Université d'Abomey-Calavi, 2015.

[46] K. W. Houedanou and B. Ahounou. A posteriori error estimation for the Stokes-Darcy coupled problem on anisotropic discretization. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2016.

[47] K.W. Houedanou, J.Adetola, and B. Ahounou. Residual-based a posteriori error estimate for a conforming finite element discretization of the Navier-Stokes/Darcy coupled problem. *Journal of Pure and Applied Mathematics : Advances and Applications*, 18 :37–73, 2017.

[48] J. P. Krasovskii. Isolation of singularities of the greenâs function. *Mathematics of the USSR*, 5 :935–966, 1967.

[49] J. P. Krasovskii. Introduction to nonimaging optics. *Optical Science and Engineering*, 134, 2008.

[50] O. Lakkis and P. Pryer. A finite element method for second order nonvariational elliptic problems. *Siam J.Sci. Comput*, 33 :786–801, 2010.

[51] O. Lakkis and P. Tristan. A finite element method for nonlinear elliptic problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 35 :A2025–A2045, 2013.

[52] R. J. McCann and A. M. Oberman. Exact semi-geostrophic flows in an elliptical ocean basin. *Nonlinearity*, 17 :1891–1922, 2004.

[53] A. Naga and Z. Zhang. A posteriori error estimates based on the polynomial preserving recovery. *SIAM J. Numer. Anal.*, 42 :1780–1800, 2004.

[54] A. Naga and Z. Zhang. The polynomial-preserving recovery for higher order finite element methods in 2d and 3d. *Discrete and continous dynamical systems*, 5 :769–798, 2005.

[55] M. Neilan. Quadratic finite element approximations of the Monge-Ampère equation. *J. Sci. Comput.*, 54 :200–226, 2013.

[56] M. Neilan. Finite element methods for fully nonlinear second order PDEs based on a discrete Hessian with applications to the Monge–Ampère equation. *J. Comput. Appl. Math.*, 263 :351–369, 2014.

[57] S. Nicaise. *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles.* Dunod Paris, 2000.

[58] C. Pozrikidis and D. A Farrow. Farrow a model of fluid flow in solid tumors. *Ann. Biomed Eng.*, 31 :181–194, 2003.

[59] R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of non-smooth function satisfying boundary condition. *Mathematics of Computation*, 54 :483–493, 1990.

[60] M. Sugihara-Seki and B. Fu. Blood flow and permeability in microvessels. *Fuid. Dyn.Res.*, 37 :82–132, 2005.

[61] N.S. Trudinger and X.J. Wang. The bernstein problem for affine maximal hypersurfaces. *Invent.Math.*, 140 :399–422, 2000.

[62] N.S. Trudinger and X.J. Wang. J. american math. society. *Invent.Math.*, 18 :253–289, 2005.

[63] N.S. Trudinger and X.J. Wang. On strict convexity and differentiability of potential functions in optimal transprtation Monge-Ampère type equations and optimal transportation. *Arch. Ration.*, 192 :403–418, 2009.

[64] R. Winston, J. C. Miñano, and P. Benítez. *Nonimaging Optics.* Academic Press New York, 2005.

[65] Z. Wu, J. Yin, and C. Wang. *Elliptic and parabolic equations.* World Scientific Publishing, 2006.

[66] Z. Zhang. Polynomial preserving recovery for anisotropic and irregular grids. *J.of Computational Mathematics*, 22 :331–340, 2004.

[67] Z. Zhang and A. Naga. A new finite element gradient recovery method : superconvergence property. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26 :1192–1213, 2005.

[68] X. Zhu, J. Ni, and Q.Chen. An optical design and simulation of led low-beam head- lamps. *J. Phys. Conf. Ser.*, 276 :6596–1742, 2011.

Jamal ADETOLA ©URPM/IMSP 2018
adetolajamal58@yahoo.com