



**HAL**  
open science

# Modélisation de la propagation de la houle en présence de courants cisailés et par bathymétrie variable

Elodie Laffitte

► **To cite this version:**

Elodie Laffitte. Modélisation de la propagation de la houle en présence de courants cisailés et par bathymétrie variable. Autre [q-bio.OT]. Université de Toulon, 2018. Français. NNT : 2018TOUL0017 . tel-02484402

**HAL Id: tel-02484402**

**<https://theses.hal.science/tel-02484402>**

Submitted on 19 Feb 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE DOCTORALE 548 - MER & SCIENCES  
INSTITUT MÉDITERRANÉEN D'OCÉANOLOGIE

**Thèse**  
présentée par :  
**Elodie Laffitte**

soutenue le : 18/12/2018  
pour obtenir le grade de Docteur en Sciences de l'Univers  
Spécialité: Océanographie Physique

# Modélisation de la propagation de la houle en présence de courants cisailés et par bathymétrie variable

**THÈSE dirigée par:**

M. Julien TOUBOUL MCF, HDR, Université de Toulon Directeur de thèse  
M. Vincent REY Pr., Université de Toulon Directeur de thèse

**JURY:**

M. Michel BENOIT	Pr. des Universités, École Centrale de Marseille, IRPHE	Rapporteur
M. Philippe BONNETON	Directeur de Recherche, CNRS	Rapporteur
M. Kostas BELIBASSAKIS	Pr. des Universités, Université Technique d'Athènes	Examineur
M. Christian KHARIF	Pr. des Universités, Ecole Centrale de Marseille, IRPHE	Examineur
Mme Agnès MAUREL	Directrice de Recherche, CNRS	Examineur
M. Julien TOUBOUL	MCF, HDR Université de Toulon Directeur de thèse	
M. Vincent REY	Pr. des Universités, Université de Toulon Directeur de thèse	

## Résumé

Cette thèse de doctorat traite d'un aspect particulier des interactions houle-courant-bathymétrie, à savoir l'influence de la vorticité sur un phénomène de résonance de Bragg. Pour l'aspect modélisation, une analyse numérique est présentée, basée sur la comparaison de deux modèles hyperboliques - Pente Douce et Pente Douce Modifiée - étendus pour intégrer des courants cisailés. L'influence de deux paramètres caractéristiques du courant, le cisaillement (considérée comme constant sur la colonne d'eau) et la célérité en surface, est évaluée pour établir une première tendance vis- -vis du comportement de la houle. Pour aller plus loin, une campagne expérimentale en canal   houle a fourni un jeu de données originales sur la propagation d'une houle régulière de fréquence variable, réfléchie par une bathymétrie ondulée et un courant cisailé évolutif. Une analyse poussée a confronté les résultats numériques - basés sur différentes représentations du courant - aux données expérimentales, et plusieurs conclusions fortes en sont ressorties. Sous l'influence d'un courant cisailé opposé   la houle, le pic de Bragg se trouve réduit, en amplitude comme en fréquence, mais un pic de réflexion inattendu survient pour des houles   hautes fréquences. Ensuite, si des modélisations précises du comportement du courant nous ont mené   une très bonne approche de l'intensité de la réflexion de Bragg, la fréquence pic associée a systématiquement été surestimée par les modèles. Gr ce   une profonde remise en question de la théorie et une collaboration des membres de l'équipe, une nouvelle modélisation a vu le jour, avec une décomposition originale du potentiel des vitesses pour tenir compte de la dissymétrie des nombres d'onde incident et réfléchis (dissymétrie caus e par le courant et sa vorticité). Les premiers résultats montrent qu'avec cette nouvelle théorie, la position de la fréquence pic correspondant   la résonance de Bragg est bien représentée. Cette nouvelle approche de la réflexion, par fortes variations bathymétriques et en présence de courant   structure variable, promet de belles découvertes sur l'influence de la vorticité.

**Mots clés:** houle, courant, bathymétrie, vorticité, cisaillement, réflexion, Bragg, résonance

## Abstract

This PhD thesis focuses on a specific part of the interactions between waves, current and bathymetry: the influence of the vorticity on the Bragg resonance phenomenon. Two numerical models, based on hyperbolic equations, are compared: the Mild Slope equation and the Modified Mild Slope equation, both extended to consider vorticity. To establish some trends about the wave behaviour in such a configuration, the influence of the vorticity has been compared to the influence of the surface current velocity, in a parametric study. To go further, an experimental campaign has been settled in a wave flume, and the reflexion of regular waves propagating above sinusoidal bathymetry and horizontally varying sheared current has been registered for a large range of waves frequencies. Some strong conclusions asserted themselves: under the influence of a wave opposing varying sheared current, the maximum of reflexion is reduced, both in amplitude and frequency, but another local maximum appears in higher waves frequencies. Moreover, our modelling achieved to represent the amplitude of the Bragg Peak quite well, but always overestimated the associated frequency. Thanks to a strong questioning of the theory and a collaboration between several researchers, a new modelling arised, with an original decomposition of the velocity potential taking into account the asymmetry between the incident and reflected wavenumbers. The first results are very optimistic: the Bragg Peak frequency is recovered, and the study on the vorticity influence can continue. This new approach in coastal engineering will generate as many questions as opportunities.

**Keywords:** wave, propagation, vorticity, bathymetry, shearing, reflection, Bragg, resonance

A mes parents, à ma grand-mère, à l'homme que j'aime.

## Remerciements

Je remercie chaleureusement Michel BENOIT et Philippe BONNETON d'avoir accepté de rapporter mon manuscrit de thèse. Merci à eux pour le temps qu'ils ont passé sur mes travaux et l'éclairage nouveau qu'ils ont apporté. Je souhaite de même remercier Agnès MAUREL et Christian KHARIF pour avoir examiné mes travaux, pour leurs remarques bienveillantes et constructives, et pour leurs suggestions quant à la suite. Un grand merci à Kostas BELIBASSAKIS, présent tout au long de cette thèse, pour tous les conseils qu'il m'a donnés et les échanges fructueux que nous avons eus. Merci également à Aïmed pour son aide et sa bonne humeur pendant la phase expérimentale.

Julien, On ne résume pas trois années de confiance et de soutien en quelques mots, mais je vais essayer quand même. Merci de m'avoir fait confiance, merci de t'être montré droit et juste. Merci de n'avoir jamais perdu patience, même quand je te regardais fixement, le regard vide, complètement larguée après la cent douzième explication! Merci d'avoir toujours été là, porte ouverte, dans ton bureau, en TP, par mail, par téléphone, en visio, en avion, le jour comme la nuit, avant, pendant et après cette thèse. Merci de m'avoir permis de travailler sur tes idées, de construire la base de ma vie professionnelle sur ton savoir. Merci pour les coups de boost toujours empreints de gentillesse. Merci pour ta formidable pédagogie. Il paraît que le directeur de thèse laisse une marque indélébile sur le reste de sa vie professionnelle, dans mon cas ce sera sur ma vie toute entière. Ton regard bienveillant m'a aidée à grandir, à murir, en tant que scientifique et surtout en tant que personne.

Vincent, nous nous sommes d'abord connus en tant qu'élève et professeur, puis en tant que thésarde et directeur. Merci pour ta clairvoyance, pour ta confiance (même quand je refusais catégoriquement de mettre un pied dans le canal!). Merci de m'avoir guidée avec bienveillance et affection, d'accepter tous mes coups de gueule, de mou, et de révolte. Merci de m'avoir traitée comme une égale, et de m'avoir aidée à devenir celle que je voulais être. Merci d'avoir allégé le stress et la pression quand ça devenait trop dur, et merci pour tous tes enseignements et tes conseils. Merci pour nos discussions sur tout et rien, sur la vie et la façon de l'appréhender, sur ce qui est vraiment important. Merci de m'avoir montré que la vie, c'est prendre plaisir à faire ce qui nous fait vibrer. Je tâcherai de ne pas l'oublier.

Julien, Vincent, Merci à tous les deux pour cette formidable opportunité que vous m'avez offerte. Celle de devenir docteur, de devenir une adulte, de découvrir que je suis capable de faire de belles choses. Merci de m'avoir permis de travailler sur votre projet, de découvrir un métier que j'ai adoré, même si cette voie me paraît pour l'instant inaccessible. Merci pour tous ces bons moments, l'enseignement, les confs, les discussions dans vos bureaux, les rencontres avec des scientifiques du monde entier. Merci de m'avoir appris à ne jamais abandonner, que la voie la plus difficile pouvait s'avérer la plus fructifiante. Merci pour ces trois belles années, je ne les oublierai jamais.

Papa, Maman, j'ai tant à vous remercier que toutes les pages du monde ne suffiraient pas. Merci de vous être toujours privés - de temps, de loisirs, de sommeil! - pour moi, pour me donner les meilleures armes, les meilleures cartes, l'enfance la plus douce et la plus innocente. Merci de m'avoir donné tant d'amour et de sécurité. Merci de m'avoir donné les valeurs qui sont les miennes aujourd'hui: l'honnêteté, le travail, le mérite, la justice, l'abnégation, la loyauté, la persévérance. Merci de m'avoir toujours protégée, même quand j'avais tort. Merci de m'avoir soutenue quelque soit mes choix, et d'être si fiers aujourd'hui. Merci de m'avoir nourrie (trop!), d'avoir lavé ma voiture, gardé mon chat, vérifié mes fautes d'orthographe, aidé avec mes déclarations d'impôts, appelé le soir quand j'étais seule pour que je ne me sente pas si seule

justement. Merci d'oublier toutes les fois où je m'emporte, où j'oublie de vous répondre. Merci pour ces soirées à papoter, à me conseiller, et me rassurer. Je vous aime, je vous dédie ces travaux.

Merci à ma grand mère d'avoir été à la fois si insupportablement inquiète pour moi, si fière et si aimante. Tu es restée forte jusqu'au bout, tu es restée parmi nous jusqu'à ma soutenance malgré ton immense fatigue. Tu as même lu le début de ce manuscrit en avant première! Tu es partie comme une brise de printemps ce midi du 5 avril, du haut de tes 96 ans, et je ne t'oublierai jamais. Je te dédie ces travaux, et t'envoie tout mon amour où que tu sois à présent. Promis, je mange et je mets le chauffage!

Ma soeurette, je t'aime. On ne se l'ai jamais trop dit quand on était jeunes, je n'étais jamais assez mûre pour comprendre ce que tu vivais. Mais j'ai l'immense chance de t'avoir pour soeur, et Manon est un rayon de soleil. Je vous aime, ma porte est toujours ouverte, et chaque jour nous verra plus proches.

J'adresse à mon compagnon Alexandre un immense merci, pour son amour, sa constance, sa tendresse et sa patience. Merci de m'avoir écoutée, de m'avoir consolée et d'avoir partagé mes joies, mes crises de nerfs et de larmes. Merci d'avoir vraiment donné toute ton attention, de la première à la dix millièmes plainte. Merci de m'avoir aimée même les soirs où je rentrais à bout de nerfs et déçue de moi même, même les fois où je te laissais pour rédiger, même les fois où je te faisais subir mon stress. Merci d'être venu avec moi en conf, et merci d'avoir toujours été sûr que j'y arriverais, quand moi je ne l'étais pas. Merci d'avoir tout géré à la maison quand je ne gérais plus rien (#jepeuxpasjaithèse!) Merci pour ce formidable voyage post-thèse en Nouvelle Zélande, où je nous ai aimés plus que jamais auparavant. Merci de faire de ma vie cette si douce aventure.

D'ailleurs, je remercie à ce sujet Karin et Alain: un immense merci d'être les meilleurs beaux parents que je puisse avoir, merci de m'avoir accueillie dans votre famille avec autant d'amour, et merci pour votre gentillesse et votre écoute, merci pour toutes ces discussions et vos encouragements. Votre présence à mon pot de thèse m'a beaucoup touchée, je vous aime profondément.

Gwen, ma Gwen, si tu savais comme je t'aime! Tu as fait de ces trois ans un merveilleux moment d'amitié et de rires. Merci de m'avoir toujours soutenue et encouragée, de m'avoir répété mille fois ce que je ne voulais pas entendre, d'avoir empêché Julien de m'étrangler, de m'avoir rassurée encore et encore. Si tu pouvais te voir à travers mes yeux, tu saurais à quel point tu illumines tout sur ton passage. Depuis que je ne travailles plus avec toi, j'ai perdu mon repère, tout est plus triste et gris. Notre amitié ne se perdra jamais, et je te dois cette thèse. Prend soin de toi, de Timothé, mais surtout ne t'oublie pas. Je serais toujours là pour toi, n'importe où, n'importe quand, pour n'importe quoi.

Merci à ma jum Victoria pour donner à l'amitié la définition que j'ai toujours imaginée. Je suis la pire des amies, et pourtant tu es toujours au bout du clavier quand je t'appelle, depuis tellement d'années que j'ai oublié. Jusqu'à nos 90ans je vais te coller aux basques, et sinon ton cher et tendre dans l'avion, je vais débarquer sur ton canap. Prépare Heartland. PS: j'ai réservé les chevaux pour ton mariage. PPS: Nous deux, on a oublié le début, et on n'en verra jamais la fin!

Thomas, Tu as soutenu avant moi, mais on s'est soutenus pendant bien plus longtemps que ça. On s'est connu en 2011 à l'ISITV ça fait maintenant 8 ans! Tu avais beau dire que les amis ça ne sert à rien, et qu'on s'oublierait sitôt partis chacun dans notre coin, mais c'est faux. Ton poème a confirmé ce que je sais depuis longtemps: tu as beau faire l'ours, tu es quelqu'un de généreux, attentionné, sensible et dévoué. Tu es un ami formidable, et je te remercie d'être dans ma vie. On finira par la monter cette boîte !

Steph, mon cobureau. Déjà, un merci du fond du coeur pour ta patience et ta bienveillance. On s'est suivis, on a appris en même temps, galéré en même temps, on s'est aidés, rassurés (attends, t'as mis quoi sur le formulaire? Tu me fais répéter pour le comité de thèse?). Même bureau, même année, même victoire. Ne t'éloigne pas trop, donne des nouvelles, et bon vent avec Anne-So (et que le Dieu des Plats Préparés te protège!)

Quentin, DE-STRESSE. Tu réussiras, parce que tu es brillant. Pas parce que tu fais rentrer une semaine de boulot dans une journée. On est des "vieux cons" mais ne perd pas de vue ce qui compte vraiment: les gens qui t'aiment. Et qui veulent te voir. DONT MOI. Ramène tes fesses au Veggyvan! Mille m\*\*\* pour ta soutenance!

Cam-Cam, notre maman à tous, la douceur et le calme incarné. Comment as-tu fait bon sang?? Tu es toujours restée tellement positive, tellement gentille avec tout le monde. Notre bisounours à nous. Je vais te fabriquer une poupée vaudou avec des visages interchangeables, je suis sûre qu'un jour tu vas exploser sinon. Pense à toi, mais ne m'oublie pas, tu as été un rayon de bienveillance dont je n'aurais pu me passer.

Merci à Seb également, pour veiller sur moi, être toujours de bons conseils et avoir créé mes avatars dans WOW et LOL. Je n'y ai toujours rien compris, mais les graphismes sont sympas. De façon générale, arrête de tuer des monstres, ils sont mignons tout plein et ont le droit de vivre. On s'est connus en prépa, et j'espère que malgré ta vie de dingue, tu me feras une place encore longtemps!

Sylvain, merci pour tes passages dans le bureau et nos conversations, merci de m'avoir fait rire quand ça n'allait pas, conseillé sur les méthodes mathématiques et aidée à prendre du recul. Merci de nous avoir fait râler sur les cartes Magik, sur ton talent à écrire un article en deux jours quand il nous faut 6 mois. Tu aimes enseigner, c'est rare. J'espère qu'on se recroisera régulièrement, et bon KFC!

Mention spéciale pour le magnifique pot de thèse que vous tous m'avez offert, avec un énorme câlin pour l'organisatrice Gwen <3 Je garde vos messages précieusement, comme souvenirs de ce qu'on a partagé pendant ces années si spéciales.

Mes chats, Milka puis Miko, pour leur chaleur, la douceur de leur poil, leurs facéties perpétuelles (quand vous me regardez droit dans les yeux, l'air innocent et les pattoues fermement ancrées sur mon clavier qui agonise). Pour avoir toujours été les premiers à m'accueillir en courant le soir quand je rentre. Miko, tu es à l'heure actuelle sur mes genoux depuis bientôt trois heures et je ne sens plus mes jambes. Mais je t'aime ma boule de poils.

A tout ceux que je vais oublier, ou citer trop rapidement, Mehmet, Zack, Fred, Rémi, Emilien, Bruno et Christelle, Suzie, Emily, vous tous avez contribué à rendre ces années formidables, qui avez ajouté des petits moments de joie, de confidences, de partage, de chaleur, je vous remercie du fond du coeur.

Enfin, à tous ceux que j'ai eu le plaisir et le privilège de cotoyer, merci de m'avoir tant apportée. Je sors de cette thèse fière, pourrie gâtée, accomplie, diplômée, grandie, et tellement heureuse. Je vous le dois, et je vous souhaite au moins autant de bonheur en retour.



# Table des Matières

<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>13</b>
1.1 Motivation de l'étude . . . . .	13
1.2 Définition de la houle et généralités . . . . .	16
1.2.1 Théorie potentielle, équations et conditions aux limites . . . . .	19
1.2.2 Théories linéaires stationnaires: Airy . . . . .	21
1.2.3 Limites du domaine de validité et mention des théories non linéaires / instationnaires . . . . .	23
1.3 Interaction houle-bathymétrie - effets de variations de topographie en profondeur finie . . . . .	26
1.3.1 Cas 3D : la réfraction-diffraction . . . . .	26
1.3.2 Cas 2D . . . . .	30
1.3.3 Extensions du modèle de Berkhoff selon l'ordre de variation de la pente du fond . . . . .	41
1.3.4 Cas particulier: la résonance de Bragg . . . . .	45
1.3.5 Dissipation . . . . .	46
1.4 Interaction houle-courant . . . . .	47
1.5 Interaction houle-courant-bathymétrie . . . . .	49
1.5.1 Les principaux modèles d'interaction houle-courant-bathymétrie . . . . .	49
1.5.2 Coupled-Mode system, Athanassoulis & Belibassakis (1999) . . . . .	51
1.5.3 Cas d'un fond sinusoïdal . . . . .	52
<b>2 Modèles de propagation</b>	<b>59</b>
2.1 Equations de propagation . . . . .	59
2.1.1 Généralités sur les modèles de l'étude . . . . .	59
2.1.2 Equation de pente douce étendue à la vorticité, Touboul et al. (2016) - M1	60
2.1.3 Equation de pente douce modifiée étendue à la vorticité, Belibassakis et al. (2017) - M2 . . . . .	60
2.1.4 Coupled-Mode system étendu pour intégrer courant et vorticité, Belibas- sakis et al. (2017) - M3 . . . . .	61
2.1.5 Limites et questionnements . . . . .	62
2.1.6 Premières modélisations d'interactions houle-courant par les modèles M1 et M2 . . . . .	63
2.2 Implémentation numérique et configuration . . . . .	64

<b>3</b>	<b>Techniques expérimentales</b>	<b>75</b>
3.1	Présentation de l'instrumentation . . . . .	76
3.1.1	Le canal hydraulique de SeaTech . . . . .	76
3.1.2	Instruments de mesure . . . . .	77
3.2	Dimensionnement . . . . .	82
3.2.1	Bathymétrie: choix de la longueur, de la période, de l'amplitude . . . . .	82
3.2.2	Profil de courant en entrée et son contrôle . . . . .	85
3.3	Analyse et post-traitement des signaux . . . . .	99
3.3.1	Mesures de courant . . . . .	99
3.3.2	Mesures de houle : Méthode à 3 sondes . . . . .	101
3.4	Résultats et discussions . . . . .	102
3.4.1	Profil de courant . . . . .	102
3.4.2	Etude de la résonance de Bragg . . . . .	110
3.4.3	Etude paramétrique . . . . .	113
3.4.4	Mesures complémentaires . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Confrontations modèles - expériences et discussions</b>	<b>125</b>
4.1	Réflexion en l'absence de courant . . . . .	125
4.1.1	Fond sinusoïdal . . . . .	125
4.1.2	Fond à deux composantes de Fourier . . . . .	126
4.2	Réflexion en présence de courant et variabilité selon x et selon z . . . . .	130
4.2.1	Courant non cisailé . . . . .	131
4.2.2	Courant cisailé horizontalement uniforme . . . . .	132
4.2.3	Courant cisailé horizontalement linéaire . . . . .	133
4.2.4	Courant cisailé horizontalement polynomial . . . . .	138
4.2.5	Comparatif et discussions des effets de telles approximations . . . . .	142
4.3	Etude des différences et discussions . . . . .	145
4.3.1	Autres méthodes d'estimation du cisaillement d'un profil . . . . .	146
4.3.2	Prise en compte de l'évolution du courant au-dessus du fond: modélisation polynômiale . . . . .	161
4.4	Nouveau modèle développé . . . . .	178
4.5	Etude paramétrique . . . . .	184
4.5.1	Sensibilité aux paramètres de courant . . . . .	184
4.5.2	Sensibilité aux gradients des paramètres de courant . . . . .	187
4.6	Retour sur la littérature . . . . .	195
<b>5</b>	<b>Conclusions et ouverture</b>	<b>197</b>
<b>A</b>	<b>Mesures complémentaires le long du fond ondulé</b>	<b>205</b>
A.1	Mesures de la première portion de fond (M1L3) . . . . .	205
A.2	Mesures de la deuxième portion de fond (M2L5) . . . . .	207
A.3	Mesures de la troisième portion de fond (M3L7) . . . . .	209
A.4	Mesures de la quatrième portion de fond (M4L9) . . . . .	209
<b>B</b>	<b>Méthode de résolution d'un système linéaire</b>	<b>215</b>
B.1	Méthodes directes . . . . .	216
B.2	Méthodes itératives stationnaires . . . . .	216

# Table des Figures

1.1	Exemple de dégâts causés par la tempête Eleanor (2008) à Saint-Malo . . . . .	13
2.1	Dispositif expérimental de l'expérience menée par Magne et al. (2005 [119]) sur la réflexion de la houle par résonance de Bragg en présence de courant variable .	63
2.2	a) Profil de courant enregistré avant et au-dessus du fond ondulé, expérience de Magne et al. (2005 [119]) - b) Comparaison entre les résultats expérimentaux de Magne et al. (2005 [119]) et les prédictions numériques de Touboul et al. (2016, [193]) avec les modèles type Pente Douce étendus à la vorticité. . . . .	64
2.3	Réflexion de la houle par un obstacle trapézoïdal en situation de contre courant, étude de Belibassakis et al. (2017, [17]) . . . . .	65
2.4	Courbe de convergence: M1 par fond plat . . . . .	72
3.1	Schéma explicatif du phénomène de résonance de Bragg (Mei, 2004) . . . . .	75
3.2	Canal hydraulique de SeaTech . . . . .	76
3.3	Schéma du dispositif expérimental - Partie courantomètres . . . . .	79
3.4	Schéma du dispositif expérimental - partie sondes résistives . . . . .	80
3.5	Sondes résistives utilisées dans le cadre de cette étude . . . . .	80
3.6	P�r�nit� du profil de courant - Exemple d'évolution mensuelle et journalière du profil établi en début d'écoulement, relevé en $x=7.55\text{m}$ . . . . .	82
3.7	Dimensionnement du fond sinusoidal: a) influence de la longueur totale, pour $a=0.035\text{m}$ -b) influence de l'amplitude des oscillations, pour $n=10$ longueurs d'onde de fond . . . . .	83
3.8	Etude prédictive: réflexion pour un fond sinusoidal de $0.035\text{m}$ d'amplitude - Méthode Kirby - Méthode Intégrale aux Frontières . . . . .	84
3.9	Bathymétrie - a) Schéma d'une longueur d'onde de fond - b) Bathymétrie installée dans le canal . . . . .	85
3.10	Dimensionnement du fond sinusoidal: influence de l'amplitude pour $n=10$ longueurs d'onde de fond, avec un courant de $U=0.20\text{m/s}$ . . . . .	86
3.11	Grille génératrice de vorticité: a) Schéma explicatif du fonctionnement du système - b) Formes de grille nécessaires pour générer un écoulement � vorticité constante, si $\beta = 0.32$ et $K = 4.52$ . Crédit : Woo & Cermak (1992 [206]). . . . .	93
3.12	Système générateur de vorticité: a) présentation générale du système b) Gamme d'inclinaisons-test (photo prise lors de la vidange du canal) . . . . .	94
3.13	Comparaison des différents cas-tests : a) Profils de courant - pris en entrée de l'écoulement en $x=8.67\text{m}$ - b) Vorticités associées (valeur absolue) . . . . .	94
3.14	Intensités du profil de courant généré par la grille incurvée � l'entrée de l'écoulement, en $x=8.67\text{m}$ - a) Composante horizontale - b) Composantes horizontale, trasverse et verticale . . . . .	96

3.15	Evolution du profil vertical de courant le long du canal : intensité selon la profondeur d'immersion . . . . .	97
3.16	Evolution de la vorticit�e la long du canal . . . . .	97
3.17	Courbes pr�edictives de la c�el�erit�e de la houle en pr�esence d'un courant cisailée, d'un courant constant et sans courant . . . . .	99
3.18	Ellipse de lissage du profil de courant relevée en $x=8.67m$ et $z=-0.108m$ , a) sans houle - b) $F= 1.58Hz$ ( $T=0.63s$ ) - c) $F= 1.35Hz$ ( $T=0.74s$ ) - d) $F= 1.12Hz$ ( $T=0.89s$ ) -e) $F= 0.95Hz$ ( $T=1.05s$ ) . . . . .	100
3.19	Evolution de la composante horizontale du courant dans la direction $Ox$ , relevée en $z = -7cm$ : a) Relevée le long du canal - b) Mesures au-dessus d'une cr�ete du fond: sch�ema du dispositif - c) Mesures au-dessus d'une cr�ete du fond: r�esultats	103
3.20	Elevation du niveau moyen de la surface libre sous l'influence du courant . . . . .	104
3.21	Impact de la houle sur les profils de courant - a) Profils horizontaux pr�es de la surface selon la fr�equence de la houle - b) Comparaison des profils relevées avec ou sans la houle . . . . .	107
3.22	Influence de la vitesse orbitale . . . . .	108
3.23	Influence de la houle sur les profils verticaux de courant : Pr�esentation des profils et comparaison avec les profils sans houle . . . . .	109
3.24	Influence de la houle sur les profils verticaux de courant : a) influence du mouvement orbital -b) Evolution spatiale de la vorticit�e selon la fr�equence de houle .	110
3.25	Coefficient de r�eflexion de la houle en l'absence de courant : comparaison avec les courbes pr�edictives . . . . .	111
3.26	Evolution de la fr�equence associée au maximum de r�esonance selon l'intensit�e du courant de surface (pour $s=0$ ) - mod�ele de Kirby . . . . .	113
3.27	Comparaison des mesures de r�eflexion de la houle avec ou sans courant . . . . .	114
3.28	R�eflexion de la houle en pr�esence de courant: comparaison entre les donn�ees exp�erimentales et le mod�ele Kirby ( $s=0s^{-1}$ , $U_0=-0.1840m/s$ ) . . . . .	115
3.29	Etude param�etrique de l'influence du courant de surface sur la propagation de la houle ( $s=0s^{-1}$ ) avec M2 . . . . .	115
3.30	Influence du cisaillement sur la r�eflexion de la houle ( $U_0=0m/s$ ) avec M2 . . . . .	117
3.31	Mesure de l'�evolution du profil de courant sur une longueur d'onde de fond sinuso�idal - a) Sch�ema du dispositif - b) Profils verticaux de courant selon les conditions de houle . . . . .	118
3.32	Evolution de la vorticit�e sur une longueur d'onde de fond . . . . .	119
3.33	Profils de courant sur une longueur d'onde de fond sinuso�idal: d�ecomposition courant moyen - vitesse orbitale pour chaque courantom�etre . . . . .	121
3.34	Evolution de la vorticit�e au-dessus du fond sinuso�idal- a) Sch�ema de positionnement des courantom�etres - b) Comparaison des profils verticaux de courant le long du canal, relevées aux m�emes positions d'une longueur d'onde de fond � l'autre	123
4.1	R�eflexion de la houle: comparaison entre les donn�ees exp�erimentales et les calculs des mod�eles M1 et M2 . . . . .	126
4.2	Bathym�etries de fonds � deux composantes de Fourier . . . . .	127
4.3	R�esonance de Bragg et int�eractions entre une houle lin�eaire et un fond doublement sinuso�idal: comparaison entre donn�ees exp�erimentales et donn�ees num�eriques	129
4.4	Mod�elisation par courant uniforme: Comparaison donn�ees exp�erimentales - mod�eles num�eriques M1 et M2 . . . . .	132

4.5	Modélisation par courant cisailé horizontalement uniforme: a) Profils P1 et P4 - b) Profils virtuels . . . . .	134
4.6	Modélisation par cisaillement horizontalement linéaire: a) approximation linéaire du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales . . . . .	135
4.7	Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire de la vorticité . . . . .	135
4.8	Modélisation par courant de surface horizontalement linéaire: a) approximation linéaire du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales . . . . .	137
4.9	Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire du courant de surface . . . . .	137
4.10	Modélisation par cisaillement horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 3 du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales . . . . .	138
4.11	Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale de la vorticité . . . . .	139
4.12	Modélisation par courant de surface horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 3 du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales . . . . .	140
4.13	Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du courant de surface . . . . .	140
4.14	Modélisation par cisaillement horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales . . . . .	141
4.15	Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale de la vorticité . . . . .	142
4.16	Modélisation par courant de surface horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales . . . . .	143
4.17	Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du courant de surface . . . . .	143
4.18	Profils verticaux: méthode d'estimation des paramètres du profil par tangente à la profondeur critique . . . . .	147
4.19	Modélisation par courant cisailé horizontalement uniforme . . . . .	148
4.20	Modélisation par cisaillement horizontalement linéaire: a) approximation linéaire du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales . . . . .	149
4.21	Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire de la vorticité . . . . .	150
4.22	Modélisation par courant de surface horizontalement linéaire: a) approximation linéaire du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales . . . . .	150
4.23	Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire du courant de surface . . . . .	151
4.24	Modélisation par cisaillement horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales . . . . .	151
4.25	Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du cisaillement . . . . .	152
4.26	Modélisation par courant de surface horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales . . . . .	152
4.27	Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du courant de surface . . . . .	153
4.28	Profils verticaux: méthode d'estimation des paramètres du profil par régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau . . . . .	155

4.29	Modélisation par courant cisailé horizontalement uniforme: a) Profils réels P1 et P4 - b) Profils intermédiaires . . . . .	156
4.30	Modélisation par cisaillement horizontalement linéaire: a) approximation linéaire du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales . . . . .	156
4.31	Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire de la vorticité . . . . .	157
4.32	Modélisation par courant de surface horizontalement linéaire: a) approximation linéaire de l'intensité du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales . . . .	157
4.33	Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire du courant de surface . . .	158
4.34	Modélisation par cisaillement horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales . . .	158
4.35	Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du cisaillement . . . . .	159
4.36	Modélisation par courant de surface horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales .	159
4.37	Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du courant de surface .	160
4.38	Comparaison entre le courant de surface relevé par les courantomètres en l'absence de houle et celui estimé à partir des profils verticaux par régression linéaire sur les deux tiers de la colonne d'eau . . . . .	162
4.39	Modélisation par cisaillement horizontalement polysinusoidal: a) approximation polysinusoidale du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales . . . . .	163
4.40	Réflexion de la houle selon l'approximation polysinusoidale de la vorticité . . .	164
4.41	Modélisation par courant de surface horizontalement polysinusoidal: a) approximation polysinusoidale du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales . . . .	165
4.42	Réflexion de la houle selon l'approximation polysinusoidale du courant de surface - c) . . . . .	165
4.43	Profils verticaux recueillis dans la septième longueur d'onde de fond sous la houle de fréquence $f=1.58\text{Hz}$ . . . . .	166
4.44	Profils verticaux recueillis dans la septième longueur d'onde de fond sous la houle de fréquence $f=1.35\text{Hz}$ . . . . .	167
4.45	Profils verticaux recueillis dans la septième longueur d'onde de fond sous la houle de fréquence $f=1.12\text{Hz}$ . . . . .	168
4.46	Profils verticaux recueillis dans la septième longueur d'onde de fond sous la houle de fréquence $f=0.95\text{Hz}$ . . . . .	169
4.47	Comparaison entre le courant de surface relevé par les courantomètres en présence de houle et celui estimé à partir des profils verticaux par régression linéaire sur les deux tiers de la colonne d'eau . . . . .	170
4.48	Comparaison entre des lois d'approximation polysinusoidales et les paramètres dits "expérimentaux", établis à partir des profils verticaux expérimentaux par régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau, pour chaque fréquence de houle - approximations du cisaillement . . . . .	172

4.49	Comparaison entre des lois d'approximation polysinusoidales et les paramètres dits "expérimentaux", établis à partir des profils verticaux expérimentaux par régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau, pour chaque fréquence de houle - Approximations déduites de l'intensité du courant de surface	173
4.50	Réflexion de la houle selon l'approximation polysinusoidale du cisaillement, selon la fréquence de houle	174
4.51	Comparaison entre des lois d'approximation polysinusoidales et les paramètres dits "expérimentaux", établis à partir des profils verticaux expérimentaux par régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau, pour chaque fréquence de houle - Approximations du courant de surface	175
4.52	Comparaison entre des lois d'approximation polysinusoidales et les paramètres dits "expérimentaux", établis à partir des profils verticaux expérimentaux par régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau, pour chaque fréquence de houle - Approximations déduites de la vorticité	176
4.53	Réflexion de la houle selon l'approximation polysinusoidale du courant de surface, selon la fréquence de houle	176
4.54	Réflexion de la houle par les nouveaux modèles - sans courant	182
4.55	Réflexion de la houle par les nouveaux modèles -a) Lois d'approximation du courant de surface et du cisaillement -b) Courbes de réflexion	183
4.56	Réflexion de la houle par les nouveaux modèles -a) Lois d'approximation du cisaillement et du courant de surface -b) Courbes de réflexion	184
4.57	Courbes de réflexion par le nouveau modèle M2bis, en configuration de courant cisailé horizontalement constant, en imposant l'un ou l'autre des paramètres de courant	185
4.58	Caractéristiques du pic de Bragg selon les paramètres de courant, à vorticité imposée: a) Fréquence pic b) Amplitude pic	186
4.59	Caractéristiques du pic de Bragg selon les paramètres de courant, à courant de surface imposé: a) Fréquence pic b) Amplitude pic	186
4.60	a) Courbes de réflexion - loi de comportement linéaire - b) Comportement de $U_0$ déduit de la modélisation linéaire imposée de $s$ - c) Comportement de $s$ déduit de la modélisation linéaire imposée de $U_0$	188
4.61	a) Courbes de réflexion - loi de comportement polynomiale - b) Comportement de $U_0$ déduit de la modélisation polynomiale imposée de $s$ - c) Comportement de $s$ déduit de la modélisation polynomiale imposée de $U_0$	189
4.62	a) Courbes de réflexion - loi de comportement polysinusoidale - b) Comportement de $U_0$ déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de $s$ - c) Comportement de $s$ déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de $U_0$	190
4.63	a) Courbes de réflexion - loi de comportement polysinusoidale - $f=1.59\text{Hz}$ - b) Comportement de $U_0$ déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de $s$ - c) Comportement de $s$ déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de $U_0$	191
4.64	a) Courbes de réflexion - loi de comportement polysinusoidale - $f=1.35\text{Hz}$ - b) Comportement de $U_0$ déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de $s$ - c) Comportement de $s$ déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de $U_0$	192
4.65	a) Courbes de réflexion - loi de comportement polysinusoidale - $f=1.12\text{Hz}$ - b) Comportement de $U_0$ déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de $s$ - c) Comportement de $s$ déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de $U_0$	193

4.66	a) Courbes de réflexion - loi de comportement polysinusoidale - $f=0.95\text{Hz}$ - b) Comportement de $U_0$ déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de $s$ - c) Comportement de $s$ déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de $U_0$	194
4.67	a) Courbes de réflexion - M2bis et données expérimentales Magne et al. (2005, [119]) - b) Interpolation des paramètres de courant à partir des données expérimentales de ([119]), utilisées pour les courbes de réflexion . . . . .	196
A.1	Schéma de mesure des profils verticaux de courant, relevés sur la 3e longueur d'onde de fond (M1L3) . . . . .	206
A.2	Profils de courant sur la 3e longueur d'onde de fond: superposition, pour chaque position, des profils sans houle et avec houle (M1L3) . . . . .	206
A.3	Régressions linéaires sur les 2/3 de la colonne d'eau des profils de courant relevés sur la 3e longueur d'onde de fond, avec et sans houle (M1L3) . . . . .	207
A.4	Schéma de mesure des profils verticaux de courant, relevés sur la 5e longueur d'onde de fond (M2L5) . . . . .	208
A.5	Profils de courant sur la 5e longueur d'onde de fond: superposition, pour chaque position, des profils sans houle et avec houle (M2L5) . . . . .	208
A.6	Régressions linéaires sur les 2/3 de la colonne d'eau des profils de courant relevés sur la 5e longueur d'onde de fond, avec et sans houle (M2L5) . . . . .	209
A.7	Schéma de mesure des profils verticaux de courant, relevés sur la 7e longueur d'onde de fond (M3L7) . . . . .	210
A.8	Profils de courant sur la 7e longueur d'onde de fond: superposition, pour chaque position, des profils sans houle et avec houle (M3L7) . . . . .	210
A.9	Régressions linéaires sur les 2/3 de la colonne d'eau des profils de courant relevés sur la 7e longueur d'onde de fond, avec et sans houle (M3L7) . . . . .	211
A.10	Schéma de mesure des profils verticaux de courant, relevés sur la 9e longueur d'onde de fond (M4L9) . . . . .	211
A.11	Profils de courant sur la 9e longueur d'onde de fond: superposition, pour chaque position, des profils sans houle et avec houle (M4L9) . . . . .	212
A.12	Régressions linéaires sur les 2/3 de la colonne d'eau des profils de courant relevés sur la 9e longueur d'onde de fond, avec et sans houle (M4L9) . . . . .	212

# Chapitre 1

## Etat de l'art

“Il y a deux réponses à cette question, comme à toutes les questions: celle du savant et celle du poète. Laquelle veux-tu savoir en premier?” Pierre Bottero, Le Pacte des Marchombres.

### 1.1 Motivation de l'étude

Les activités humaines se concentrent sur les littoraux: tourisme balnéaire, accès aux ressources énergétiques et halieutiques, transport... Les changements climatiques, qui dans ces zones peuvent prendre de multiples aspects - montée du niveau de la mer, modification du trait de côte, amplification des phénomènes météorologiques violents, appauvrissement de la faune et de la flore, renforcement des climats de houle... - nous amènent à renouveler nos savoirs et nos savoir-faire.



Figure 1.1: Exemple de dégâts causés par la tempête Eleanor (2008) à Saint-Malo

Récemment, les outils numériques de prédiction du comportement de la houle en milieu côtier ont été mis en défaut: vagues submersives inattendues, infrastructures côtières sous-dimensionnées pour des tempêtes plus fortes et plus fréquentes,... Or la plupart de ces outils

sont basés sur une représentation simplifiée du milieu de propagation des vagues, notamment avec des courants homogènes sur toute la colonne d'eau. Mais le milieu littoral est rarement aussi lisse: le vent, les falaises, les fonds marins abrupts, les marées, les ouvrages côtiers, tout tend à complexifier la nature des courants littoraux en créant de la vorticité, des variations de vitesse (et parfois de direction) selon la profondeur. Il est donc très important - pour ne pas dire vital, quand on comptabilise les pertes humaines causées par les tempêtes ces dernières années- d'évaluer l'impact de ces courants inhomogènes - le terme est "cisailés" - sur la propagation de la houle près des côtes. Si la prise en compte de la vorticité dans les modèles numériques en est encore   ses balbutiements, l'aspect expérimental est   peine plus avancé. Deux campagnes, menées respectivement en 2005 par Magne, Rey et Ardhuin ([119]), puis en 2014 par Rey, Charland et Touboul ([162]), ont établi sans conteste l'impact d'un courant cisailé sur la propagation de la houle. Cependant, le cisaillement était mal maîtrisé et peu instrument . L'objectif de ces travaux est donc de proposer une modélisation fiable de la propagation de la houle en présence de courants cisailés. Cette modélisation s'appuiera sur une campagne expérimentale établie avec un courant pour la première fois maîtrisé et finement cartographié.

**Contexte économique, climatologique, politique** La mer attire et fascine, elle  veille les esprits des courageux, des ingénieux, des commerçants et des po tes. L'allégation "nous connaissons mieux la surface de la Lune que les profondeurs de nos océans" est malheureusement proche de la vérité. Le milieu marin est en effet d'une diversité remarquable, tant du point de vue biologique - 226 000 espèces marines connues sur un nombre total d'espèces évalué   700 000   un million [6]<sup>1</sup> - que physique - les phénomènes qui s'y produisent occupent une grande plage d'échelles temporelles et spatiales, du petit clapotis évanescent sur la plage aux grands courants géostrophiques établis depuis des millénaires. La mer est source de vie, de richesses, d'aventures et d'émerveillement alors même qu'elle est sous nos yeux depuis toujours: les mers et océans recouvrent plus de 70% de la surface de notre planète et représentent 97% de l'eau qui y est présente, et l'océan est bien plus profond que les continents ne sont hauts. Alors que les océans absorbent 2.2 milliards de tonnes de CO2 chaque année, ils nous fournissent également 70% de l'oxygène que nous respirons, grâce aux algues et aux phytoplanctons. Malheureusement, les activités humaines ont un impact dévastateur sur ces écosystèmes aussi fragiles que précieux. 95% des océans et 91% des espèces qui y vivent restent   découvrir, mais en 55 ans 90% des grands prédateurs connus ont disparu, victimes de la surpêche: pour exemple, chaque année 100 millions de requins, 300 000 cétacés et 109 millions de tonnes de poissons divers disparaissent dans les filets (Pauly, D. and D. Zeller (2016) [145]). Les déchets plastiques, flottants ou dissous, contribuent   l'asphyxie du milieu sous-marin : 150 millions de tonnes actuellement, 750 millions de tonnes attendues en 2050, soit la masse estimée de tous les poissons de toutes les mers du monde. Le réchauffement climatique, l'exploitation pétrolière et touristique, les rejets de produits chimiques: la liste des menaces qui pèsent sur les océans est sans fin. Mais les consciences s'éveillent progressivement: les alertes climatiques sont lancées, les aires protégées se multiplient, les solutions écologiques se mettent en place   différentes échelles: dans notre région on peut citer SeaBin pour nettoyer les ports, SeaBubble comme nouveau moyen de transport sans impact carbone, ou, avec plus d'essor encore, les énergies marines renouvelables : hydrolien, mar moteur, houlomoteur, énergie thermique des mers...

De gros enjeux, politiques, économiques et écologiques, pèsent sur cet écosystème, et une meilleure exploitation, plus raisonnée, plus respectueuse et moins invasive, est devenue n ces-

---

<sup>1</sup>Chiffres provenant de l'étude publiée en 2012 dans la revue Current Biology, coordonnée par Ward Appeltans, de la Commission océanographique gouvernementale (COI) de l'UNESCO. Cette étude s'appuie sur les résultats tirés du Registre Mondial des espèces Marines (WoRMS).

saire. Cela passera nécessairement par une meilleure connaissance de cet environnement, et en particulier du milieu côtier, là où les activités humaines - et les risques - se concentrent. Cela permettra à la fois de prévenir et s'adapter aux changements à venir mais aussi d'agir dessus, en réduisant l'empreinte humaine. Mieux comprendre la propagation de la houle sur nos côtes garantira une meilleure gestion du littoral et de ses ressources.

**Le projet MORHOC'H** Avec l'ère technologique, les outils numériques se sont multipliés, y compris pour la prédiction des événements naturels - après tout, quel sujet d'inquiétude plus fréquent que la météo? Ils se présentent sous la forme de modèles, c'est-à-dire que ces outils fournissent les données souhaitées - température, hauteur de houle, puissance de vent- à partir de calculs reposant sur des lois théoriques. Ces théories sont des représentations plus ou moins simplifiées de la réalité, qui relativisent les résultats sous des hypothèses contraignantes. La plupart des outils numériques - et donc les théories associées - sont calibrés et validés par des relevés expérimentaux, la plupart en bassin ou canal de laboratoire, dans un environnement maîtrisé - et donc simplifié.

La prévalence des courants non-uniformes dans les océans, et spécifiquement dans les zones côtières où les activités humaines ont le plus d'intérêt, est à présent acquise. La première étude à justement prouver l'impact de la vortacité d'un écoulement sur la propagation de la houle est celle menée par V. Rey et J. Touboul en 2007 et 2008 ([162]), au Bassin de Génie Océanique First dans le cadre du projet GIS HYDRO. Dans le cadre de la propagation de vagues au dessus d'une bathymétrie 3D et en présence d'un champ de courant tri-dimensionnel, les relevés expérimentaux montraient des hauteurs de vagues bien plus importantes qu'attendues, défiant les prévisions du modèle choisi (l'équation Mild-Slope, connue pour très bien représenter les interactions houle-bathymétrie et qui sera par ailleurs présentée ci-après parmi les modèles classiques de propagation de la houle). Après investigation, il s'est avéré que le fond installé avait modifié la structure verticale du courant, quand le modèle analytique la considérait comme uniforme ([33]). Preuve est faite que la vortacité d'un écoulement change la propagation de la houle, il s'agit alors de déterminer précisément dans quelle mesure et comment l'intégrer aux modèles de houle existants. Le projet MORHOC'H - nom breton du marsouin- est donc créé à cet effet par M. Julien TOUBOUL en 2009. Financé en majeure partie par la Direction Générale de l'Armement via un contrat ANR, il s'attache précisément à l'étude de processus ayant un impact significatif sur la propagation de la houle en présence d'un courant dont la structure varie verticalement. Pour cela, quatre grandes phases ont été planifiées : d'abord, obtenir une grande plage de données expérimentales, pour décrire la structure verticale du courant et le comportement associé de la houle le plus précisément possible. Ensuite, seront menées de front deux analyses théoriques-numériques de l'impact de la vortacité du courant sur les processus de propagation de la houle: d'une part sur les mécanismes de focalisation comme la réflexion, la diffraction et la réfraction (phase 2), d'autre part sur les instabilités longitudinales et transverses (phase 3). Enfin, un recueil de données expérimentales de terrain aura pour but d'identifier et de caractériser ces mécanismes en milieu réel. S'il est légitime de se demander comment la vortacité des courants marins influence la propagation de la houle, le projet MORHOC'H a pour vocation de répondre à cette question en produisant un outil fiable de modélisation du comportement de la houle littorale, qui tient compte de l'inhomogénéité du milieu.

**Stratégie de la thèse** L'étude présentée dans ce manuscrit s'inscrit dans la phase 2 du projet, une démarche scientifique a été mise en place pour comprendre comment la vortacité impacte la dynamique de la houle sur le cas particulier de réflexion par interférence avec la

bathymétrie. A terme, ces travaux s'inscriront dans une démarche de développement de modèle de propagation de houle le plus fiable possible en milieu côtier. Dans cette optique et appuyées sur les études théoriques et de terrain précédemment menées, deux approches, numériques et expérimentales, ont été suivies. Tout d'abord, la première partie du manuscrit abordera le contexte scientifique de cette étude. A la suite de cette introduction, la deuxième section présentera les caractéristiques remarquables de la houle, et passera en revue les représentations les plus connues de la littérature concernant sa propagation et ses interfaces. L'état de l'art se poursuivra avec une section 3 consacrée aux interactions entre la houle et la bathymétrie. En effet, notre étude portant sur la houle en milieu côtier, les fonds marins jouent un rôle important sur les mouvements de surface. Les principaux mécanismes découlant de ses interactions et affectant la propagation de la houle seront décrits: ceux liés à la dissipation puis ceux liés aux phénomènes de réflexion-diffraction, et enfin ceux liés à la réflexion d'une partie de la houle au passage d'une variation de bathymétrie. Un point sera consacré à la résonance de Bragg, le cas particulier de réflexion support de cette étude. Les deux sections suivantes seront consacrées à l'influence du courant, d'abord seule puis couplée à l'influence de la bathymétrie, sur la propagation de la houle.

Le chapitre 2 sera consacré aux méthodes numériques mises en place dans cette étude. Les derniers modèles couplés de propagation de houle en milieu inhomogène, développés au laboratoire au cours du projet MORHOC'H, seront présentés, ainsi que leur implémentation dans un outil de calcul Fortran, premier objet de cette thèse. Les outils de convergence et de stabilité, le solveur, les configurations choisies seront explicitées. Un cas particulier de validation du code, portant sur la réflexion de la houle par un fond doublement sinusoidal, sera présenté. Il mettra en évidence la capacité d'un des modèles choisis à représenter l'influence de la bathymétrie dans toute sa complexité.

Le chapitre 3 portera sur les deux campagnes expérimentales menées au cours de cette thèse dans le canal à houle de l'école d'ingénieurs SeaTech à Toulon. La première campagne et ses résultats justifieront la mise en place d'une seconde campagne, et les techniques et outils mis en place dans les deux cas seront présentés.

Le chapitre 4 servira à confronter les modèles implémentés à la réalité expérimentale, et si besoin à expliquer les comportements observés.

## 1.2 Définition de la houle et généralités

Dans ce paragraphe, vont être présentés les modèles de houles utilisés classiquement pour étudier la houle et sa propagation en milieux hauturiers et côtiers. On détaillera les différents types de modèles employés en sciences marines et en génie océanique et côtier, selon les bassins océaniques et les houles associées, et la bathymétrie des sites. Les applications sont diverses : mesure de la houle, calcul de sa propagation et conditions à la côte, effort sur les structures et dimensionnement d'ouvrages de protection du littoral, effets sur la dynamique sédimentaire, affouillement autour de structures. Les modèles classiques de houle seront présentés par ordre de rapprochement de la côte: par profondeur infinie (loin des côtes) ou finie (zone côtière) jusqu'en eau peu profonde (zone littorale). Mais on ne peut parler de houle sans d'abord parler de physique des ondes.

### L'étude de la houle, ou physique des ondes

**Description de la houle** Une onde est une perturbation qui se propage depuis un endroit d'un milieu matériel jusqu'à un autre, mais qui n'engendre pas de mouvement global du milieu lui-même. Une onde sonore est ainsi une perturbation de la pression de l'air, une onde électromagnétique la perturbation des champs électriques et magnétiques. Il s'agit d'un échange local d'énergie dans un état de quasi-équilibre entre différentes forces agissant sur le système. C'est pourquoi elle peut se faire avec ou sans transport de matière, mais se traduit toujours par un transport d'énergie, à une vitesse qui n'est pas forcément identique à celle de la perturbation (notions de vitesse de phase et vitesse de groupe). En océanographie, les ondes correspondent à des oscillations se produisant dans un milieu aqueux agité. Parmi elles, les vagues sont des perturbations de la surface de l'eau. On les appelle ondes de surface car elles se propagent à l'interface entre deux différents fluides, ici l'interface océan-atmosphère, et sont pour la plus grande majorité issues de l'action du vent sur l'eau. Il existe une infinité de vagues différentes: la déferlante, vague dont la crête se déplace plus vite que le creux et qui est donc vouée à se briser, le soliton, une vague non linéaire qui se propage sans changer de forme, le mascaret, un ressaut qui va remonter les fleuves et les rivières... Les ondes qui se propagent entre deux couches de deux fluides de densités voisines sont, elles, appelées ondes internes. Sous la surface, elles suivent une interface de densité, appelée la pycnocline, et en terme de grandeurs caractéristiques elles sont souvent bien plus impressionnantes que les ondes de surface [41]. Les ondes ont en effet une gamme de taille caractéristique très large, parfois plusieurs kilomètres pour les tsunamis, et des origines très diverses: vent, tempêtes, glissement de terrain, attraction lunaire ou solaire... Les forces de rappel, qui vont s'opposer à la perturbation, dépendent de la taille de l'onde : il s'agira de tensions superficielles pour les plus petites ondes (ondes capillaires, qui ne sont pas l'objet de notre étude) et la gravité pour les ondes de dimensions supérieures: ce sont des ondes dites de gravité. Les modèles analytiques de vagues sont basés soit sur une approche Eulérienne, c'est-à-dire l'étude directe des champs de vitesse, de pression, .. associés à l'écoulement dans l'eau, soit sur une approche Lagrangienne, qui se focalise sur la trajectoire des particules dans l'eau. Notre étude se base sur une approche Eulérienne, qui permet de proposer des solutions pour divers types de milieux inhomogènes.

La houle est initialement une vague en profondeur infinie, c'est-à-dire loin de la côte et loin de sa source, mais par abus de langage, on parle à présent indifféremment de houle ou de vague. Parler de houle, ou de modèle de houle, revient donc à parler de la solution (linéaire ou non linéaire) d'équations (linéarisées dans notre cas) régissant le mouvement dans l'eau induit par la présence d'une onde de gravité de surface, plane et périodique, dans un milieu homogène (célérité de l'onde constante). La propagation de cette onde, appelée "houle" lorsqu'elle se propage au-delà de la région où elle a été générée, à travers des milieux non homogènes (d'indice variable car présentant des discontinuités de bathymétrie, ou pour les cas qui nous intéressent particulièrement en présence de courants inhomogènes) peut être abordée dans des configurations 1DH, c'est-à-dire selon la verticale et seulement une direction horizontale de propagation (appelée aussi 2DV), ou 2DH pour une propagation dans le plan horizontal.

Parmi les principales caractéristiques d'une vague, on peut choisir plusieurs sets de données. Lorsqu'on représente la houle comme une succession de sinusoides (le plus simple), on trouve bien sûr son amplitude  $a$  (en mètres) mais pour des représentations plus générales, incluant les houles irrégulières, on peut parler de hauteur crête à creux  $H$  (qui vaut  $2a$  dans la représentation sinusoidale). De même, pour un dimensionnement spatial, on peut se référer à sa taille longitudinale caractéristique, appelée longueur d'onde  $\lambda$  (en mètres), ou bien au nombre d'onde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.1)$$

(en rad/m). Pour des données temporelles, on peut à loisir travailler avec sa fréquence (en

Hertz) ou sa pulsation

$$\omega = 2\pi f \quad (1.2)$$

(en rad/s). En océanographie, on parlera souvent de période de houle  $T = \frac{1}{f}$ , exprimée en secondes. Pour donner un ordre de grandeur, parmi les ondes gravitaires de surface, nous avons distingué la mer du vent, cambrée et chaotique, de la houle longue, de forme bien sinusoidale: la première a une période moyenne d'environ 3,3s, la seconde aux alentours de 10s. Ainsi, de façon générale, le vecteur d'onde sera le vecteur utilisé pour décrire l'onde : son module est le nombre d'onde  $k$  et sa direction est la direction de propagation de l'onde. Le nombre d'onde va également servir à quantifier l'impact de la houle sur son milieu. On peut décomposer le milieu marin en trois grandes zones, du large vers la côte. Dans la première zone, la haute mer, on va considérer la profondeur comme "infinie": la profondeur est suffisamment grande pour que les mouvements des particules d'eau entre la surface et le fond soient atténués au minimum de 95%. On en déduit une condition entre la profondeur d'eau  $h$  et la taille caractéristique de la perturbation  $k$  :  $h > \frac{\lambda}{2}$  soit  $kh > \pi$ . Dans la troisième zone, dite "eau peu profonde" car la plus proche de la plage, les mouvements de surface vont au contraire grandement impacter le fond:  $kh \ll 1$  soit  $h < \frac{\lambda}{10}$ . Les modèles supposeront dans ce cas des conditions hydrostatiques dans l'approximation linéaire. Notre domaine d'étude, la profondeur finie, est associée aux zones côtières, elle se situe donc entre les deux et est caractérisée par  $\frac{\lambda}{2} > h > \frac{\lambda}{10}$ . Nous reviendrons sur ces conditions limites de domaine et leurs implications plus loin.

La vitesse de propagation de la houle va dépendre de ses caractéristiques - à noter qu'à l'approche du littoral, la profondeur d'eau locale  $h$  a aussi son importance. On distingue trois vitesses caractéristiques différentes: la vitesse du fluide, c'est-à-dire la vitesse associée au déplacement d'un petit volume d'eau; la vitesse de phase :

$$C = \frac{\omega}{k} \quad (1.3)$$

qui correspond au déplacement d'un front d'onde (e.g. une vague de façon individuelle) et la vitesse de groupe :

$$C_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (1.4)$$

qui correspond au déplacement de l'enveloppe de l'onde (e.g. d'un groupe de vagues et de l'énergie). Comme nous le verrons plus loin, le phénomène de propagation de la houle est dispersif : dans un groupe de vagues, toutes n'avancent pas à la même vitesse car cette vitesse dépend de la longueur d'onde ( $C = C(k)$ ). On montrera alors que la longueur d'onde de la houle, qui peut se réécrire, d'après les expressions 1.1 et 1.3  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = CT$ , va diminuer avec la profondeur d'eau. Pour se donner une idée, au large (en profondeur dite infinie), la longueur d'onde des houles longues peut s'estimer par  $\lambda \simeq 1.56T^2 = CT$  donc  $C = 1.56T$  soit pour  $T$  de l'ordre de 10s, nous avons une vitesse  $C = 15.6m/s$ . Ainsi, les vagues ont les caractéristiques moyennes suivantes : une vitesse de propagation de l'ordre de 10m/s, une longueur d'onde de l'ordre de 100 à 400m et une hauteur crête à creux pouvant attendre plusieurs mètres. Par comparaison, les ondes internes sont bien plus lentes mais beaucoup plus impressionnantes: une vitesse de propagation moyenne de 0,1m/s, une longueur d'onde de l'ordre du kilomètre et une hauteur crête à creux avoisinant souvent les 30m.

On parle de houle monochromatique lorsqu'on n'observe qu'une longueur d'onde dans le train de vagues. Mais la houle réelle l'est rarement : de multiples fréquences et directions conduisent à un aspect chaotique de la surface de l'eau. Les états de mer sont ainsi souvent considérés comme très aléatoires, et les quantités utilisés pour les décrire le reflètent bien: hauteur moyenne des vagues, hauteurs et périodes significatives... Les principaux paramètres

caractéristiques statistiques des vagues sont à voir dans de nombreuses études: Goda [130], l'IAHR [189]. Dans ce travail, nous n'aborderons pas ces états de mer et nous focaliserons sur une houle monochromatique.

**Analyse spectrale** L'analyse spectrale est une autre façon de caractériser la houle: grâce à une fonction de transfert, on obtient son spectre d'énergie, c'est-à-dire la description du signal de houle dans le domaine des fréquences. A partir de ces spectres, on peut ainsi définir une hauteur significative  $H_s$ , une période significative  $T_s$ ,... Une houle très nette, bien marquée, comme la houle formée au large, aura un spectre étroit: l'énergie se concentre sur une fréquence. Une mer plus "brouillonne", plus chaotique, comme une mer de vent par exemple, aura un spectre beaucoup plus large, avec une répartition d'énergie sur une gamme de fréquences beaucoup plus grande. En moyenne, l'énergie se concentre dans les basses fréquences de houle: elle est transportée majoritairement par les houles les plus longues. Pour se ramener à un modèle théorique simplifié de houle monochromatique d'amplitude constante, on pourra par exemple analyser un signal relevé en mer et considérer comme période et amplitude les valeurs significatives (ou maximales pour une étude de sécurité) de ces houles réelles.

Le but de cette première partie est de présenter la houle en zone littorale, où elle subit l'influence de la bathymétrie sous forme de phénomènes bien connus: réflexion, réfraction, diffraction, atténuation ... A l'origine de courants littoraux, contribuant aux échanges énergétiques par le déferlement, modifiant le profil de plage, cette houle influe toute la dynamique côtière, et est donc essentielle pour comprendre le fonctionnement de ce milieu. Nous allons présenter les équations régissant cette dynamique.

### 1.2.1 Théorie potentielle, équations et conditions aux limites

**Hypothèses générales** Pour modéliser la houle côtière, notre milieu d'étude est l'eau de mer. On se place tout d'abord dans l'approximation des milieux continus: les propriétés du milieu (densité, pression...) varient sans à-coups, ce qui nous permet d'utiliser pour les décrire des fonctions continues et dérivables. Les modèles de houle et de propagation supposent ensuite un écoulement vérifiant l'hypothèse d'un fluide parfait: il doit être possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de viscosité (pas d'échange de quantité de mouvement) ou de conduction thermique (pas d'échange d'énergie) - le mouvement de l'eau est considéré comme adiabatique. Par simplicité ici, nous choisissons de modéliser la houle par une onde plane: ses caractéristiques ne dépendent que d'une direction de l'espace. Nous supposons que cette onde, à l'origine d'une déformation de la surface libre (surface de l'eau en contact avec l'air), se propage dans la direction horizontale  $Ox$ , l'axe vertical  $Oz$  étant orienté vers le haut, et  $z = 0$  correspondant au niveau de l'eau au repos. On notera  $\eta(x,t)$  cette déformation au cours du temps. Dans ce repère, nous notons  $\vec{u}$  le champ de vitesse bidimensionnel de la houle. Comme le système est considéré comme fermé (nous étudions la propagation d'onde dans le milieu côtier, nous négligerons les échanges avec des masses d'eau extérieures), nous pouvons donc écrire la condition de conservation de la masse :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \tag{1.5}$$

En mécanique des fluides non visqueux, dans le cadre d'écoulements adiabatiques dans l'approximation des milieux continus, c'est l'équation aux dérivées partielles d'Euler qui est utilisée, faisant intervenir la masse volumique  $\rho$  du fluide, sa pression  $p$  et les forces volumiques extérieures  $\vec{f}$ :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{f}_{ext} \quad (1.6)$$

On supposera le fluide incompressible et de mouvement irrotationnel: cela définit dans tout le milieu un potentiel des vitesses, fonction des dimensions de l'espace et du temps,  $\Phi(x,z,t)$  tel que  $\vec{u} = \vec{\nabla} \Phi$ , où  $\vec{u}$  est le vecteur vitesse de l'écoulement. La condition de continuité se réécrit donc pour le potentiel sous la forme de l'équation de Laplace :

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.7)$$

C'est la théorie potentielle. On considère la houle comme une onde gravitaire, la seule force de rappel considérée est la gravité  $\vec{g}$  (les effets de tension superficielle seront discutés plus tard). Le milieu se définit par des conditions aux limites, cinématiques si elles imposent la vitesse aux bords du domaine ou dynamiques si elles imposent les forces. Au fond ( $z = -h$ ), la condition d'imperméabilité impose pour le cas du fond plat:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (1.8)$$

Généralement, nous n'avons besoin que d'une condition limite par interface. Cependant, concernant la surface libre ( $z = \eta(x,t)$ ), deux conditions sont nécessaires car son élévation est une inconnue supplémentaire. La condition cinématique va imposer qu'une particule de la surface libre doit y rester: sa vitesse verticale est égale à celle du déplacement de la surface libre en  $z = \eta$ :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{d\eta}{dt} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (1.9)$$

La condition dynamique (condition de Bernoulli) exprime l'égalité des forces de contacts qui sont des forces de pression: elle impose la pression de l'eau à la surface libre égale à la pression atmosphérique. Issue de l'intégration spatiale de l'équation d'Euler et en l'absence d'effet de la tension superficielle, elle s'écrit en  $z = \eta$  :

$$\frac{p}{\rho} + g\eta + \frac{1}{2} \vec{u}^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1.10)$$

Sachant que  $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{u}^2}{\partial t}$  et en supposant la pression constante et égale à zéro à l'interface air-eau, on déduit de la dérivée totale de (1.10) la condition limite en  $z = \eta(x,t)$  pour le potentiel  $\Phi$ :

$$f(x, \eta, t) = g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\vec{v}^2) = 0 \quad (1.11)$$

Cette condition de surface libre est non-linéaire. En apportant certaines simplifications, des solutions analytiques approchées sont trouvées par fond plat ou en profondeur infinie. Mais dans le milieu qui nous concerne, pour une profondeur finie et une bathymétrie variable, la solution la plus simple est également la plus restrictive. Obtenue après linéarisation, elle sera présentée ci-après [voir paragraphe 1.2.2]. Des solutions plus réalistes sont obtenues par des développements en perturbations et seront évoqués au paragraphe [1.2.3]. Toutes les solutions présentées dans ce chapitre seront bidimensionnelles, dans le plan xOz.

## 1.2.2 Théories linéaires stationnaires: Airy

**Hypothèses et potentiel des vitesses** Cette partie s'attache à détailler les caractéristiques de la houle d'Airy (ou houle de Stokes au 1er ordre), d'après les travaux de Airy en 1844. C'est une onde plane, applicable quelque que soit la configuration (faible ou grande profondeur, présence ou non de courants homogènes) mais qui se limite à de très faibles amplitudes de l'onde. Cela signifie que dans la condition limite de surface libre (1.11), on peut négliger les termes proportionnels au carré de l'amplitude, et réécrire la condition en  $z=0$  :

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (1.12)$$

via un développement de Taylor au premier ordre autour de  $z=0$

$$f(x, \eta, t) = f(x, 0, t) + \eta \left[ \frac{\partial f}{\partial z} \right]_{z=0} + \frac{\eta^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right]_{z=0} + \dots \quad (1.13)$$

Les conditions de validité de 1.12 seront discutées en fin de paragraphe. La houle est un phénomène périodique, ceux qui écoutent le ressac incessant sur la plage et finissent par s'y assoupir peuvent en attester ! Cette périodicité de mouvement se traduit par une déformée de la surface libre de la forme  $\eta(x, t) = a \cdot \sin(\omega t - kx)$ . On peut en déduire une expression complexe pour le potentiel des vitesses :

$$\Phi(x, z, t) = \phi(x, z) \cdot \exp(i\omega t) \quad (1.14)$$

La solution recherchée est donc  $\phi(x, z)$  tel que  $\Phi(x, z, t)$  satisfait aux conditions limites (1.9) et (1.11), ce qui nous permet de déduire une forme générique de solution :

$$\phi(x, z) = [A^- e^{-ikx} + A^+ e^{+ikx}] \cdot \cosh[k(z + h)] \quad (1.15)$$

La solution est exprimée comme une combinaison linéaire de deux solutions, correspondant respectivement à des ondes se propageant vers les  $x$  positifs et vers les  $x$  négatifs. Pour déterminer le nombre d'onde  $k$ , on injecte cette solution dans la condition de surface libre (1.12) et on obtient la relation de dispersion, exprimée ici pour une houle se propageant sans courant :

$$\omega^2 = g \cdot k \cdot \tanh(kh) \quad (1.16)$$

On en déduit la vitesse de propagation de l'onde, i.e. la vitesse de phase  $C$  (1.1) réécrite comme suit :

$$C = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot \tanh(kh)} \quad (1.17)$$

Elle dépend implicitement de la fréquence à travers  $k$ , cela confirme le caractère dispersif de la propagation de la houle. On peut calculer explicitement la déformée de la surface libre d'une onde d'amplitude  $a$  se propageant dans le sens des  $x$  croissants :

$$\eta(x, t) = \text{Re}[-i \cdot a \cdot e^{i(\omega t - kx)}] = a \cdot \sin(\omega t - kx) \quad (1.18)$$

ainsi que le potentiel des vitesses :

$$\begin{aligned}\Phi(x, z, t) &= \text{Re}\left[\frac{a\omega}{k} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} e^{i(\omega t - kx)}\right] = \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cos(\omega t - kx) \\ &= \frac{ag}{\omega} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \cos(\omega t - kx)\end{aligned}\quad (1.19)$$

**Champs de vitesse, de pression et trajectoires** Par définition, le potentiel des vitesses de la houle nous permet de déduire le champ de vitesses par  $\vec{v} = \vec{\nabla}\Phi$ . Ainsi, les positions  $X, Z$  des particules d'eau sont obtenues par intégration des vitesses respectivement selon  $Ox$  et  $Oz$  :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (1.20)$$

et

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.21)$$

soit les expressions finales :  $X = a \cdot \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} \cos(\omega t - kx) = X_0 \cos(\omega t - kx)$  et  $Z = a \cdot \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin(\omega t - kx) = Z_0 \sin(\omega t - kx)$ . On constate que les trajectoires obtenues sont des ellipses, elles vérifient la relation caractéristique  $[\frac{X}{X_0}]^2 + [\frac{Z}{Z_0}]^2 = 1$ . Le champ de pression dynamique dans le fluide est donné par :

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (1.22)$$

**Energie de la houle et propagation** Lorsqu'on parle de l'énergie de la houle, on distingue d'abord l'énergie potentielle, exprimée par unité de volume par  $d^3E_p = \rho \cdot g \cdot z \cdot dx \cdot dy \cdot dz$  avec  $z$  l'altitude, toujours par rapport au niveau de référence  $z=0$  et  $\rho$  la masse volumique du fluide. A noter, pour l'eau de mer de surface, cette masse volumique varie entre 1020 et 1029 kg/m<sup>3</sup> selon la température et la salinité. L'énergie potentielle  $E_p$  cette fois exprimée par unité de largeur  $dy$ , d'une houle monochromatique (toujours dans notre cadre d'étude, i.e. se propageant uniquement suivant  $Ox$ ) se déduit, sous l'hypothèse d'amplitude très faible :

$$E_p = \int_0^\lambda \rho g \frac{\eta^2(x)}{2} dx \approx \frac{\rho g a^2}{4} \lambda \quad (1.23)$$

L'énergie cinétique est donnée, pour une houle là encore infiniment petite :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{x=0}^\lambda \int_{z=-h}^\eta \rho \vec{v}^2 dx \cdot dz \approx \frac{\rho g a^2}{4} \lambda \quad (1.24)$$

L'énergie totale (ou mécanique) de la houle, somme des deux énergies précédentes, est donc:

$$E_m = \frac{\rho g a^2}{2} \lambda \quad (1.25)$$

On peut également la trouver exprimée moyennée par unité de surface  $dx dy$ :  $E = \frac{\rho g a^2}{2}$ . Le flux d'énergie moyenne de la houle d'Airy, transmise à travers le plan  $yOz$ , de normale  $\vec{n}$  et

normal à sa direction de propagation, fait intervenir le champ de pression associé.

$$E_t = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_{x=-h}^{\eta} p \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} \cdot dz \cdot dt \approx \frac{\rho g a^2}{4} \cdot C \cdot \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] = \frac{\rho g a^2}{2} C_g = EC_g. \quad (1.26)$$

avec  $C_g$  la vitesse de groupe à laquelle se propage cette énergie

$$C_g = \frac{1}{2} C \left[ 1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (1.27)$$

### 1.2.3 Limites du domaine de validité et mention des théories non linéaires / instationnaires

**Limites du domaine de validité** Notre étude se restreint à une zone de profondeur finie, selon le critère défini plus haut. Dans les autres zones, le comportement de la houle change légèrement. Pour note, en profondeur infinie, on a  $\frac{h}{\lambda} > 0.5$ , l'expression du potentiel se simplifie par  $\phi(x, z) = [A^- e^{-ikx} + A^+ e^{+ikx}] \cdot e^{kz}$ , la relation de dispersion par  $\omega^2 = gk$  et la vitesse de phase logiquement

$$C = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (1.28)$$

et

$$C_g = \frac{1}{2} C \quad (1.29)$$

Les trajectoires des particules deviennent circulaires. En eau peu profonde, par contre, lorsque  $kh \ll 1$ , la relation de dispersion devient :  $\omega^2 = gk^2 h$ , la vitesse de phase  $C = \sqrt{gh}$  et la vitesse de propagation  $C_g = C = \sqrt{gh}$ .

Revenons à notre zone d'étude. En eau peu profonde, pour garder le caractère linéaire de la houle, nous nous sommes restreints aux petites amplitudes. Voyons ici l'impact de cette hypothèse et comment elle permet d'aboutir aux expressions précédemment présentées. Repartons de la forme initiale des conditions limites de surface libre 1.9 et 1.11. Dans la suite du calcul, on a négligé les termes non linéaires, et cela induit notamment de supposer que  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \ll \frac{\partial \eta}{\partial t}$ . Les expressions générales de la déformée de surface libre et du potentiel vitesse, données par 1.18 et 1.19, permettent de transformer la relation précédente en

$$a\omega \gg \frac{a^2 \omega k}{2 \tanh(kh)} \quad (1.30)$$

Cette relation va, selon la zone marine dans laquelle on se trouve, conditionner la cambrure de la houle, c'est à dire le rapport entre l'amplitude et la longueur d'onde. En effet, en profondeur infinie, soit  $kh \gg 1$  donc on obtient la condition :  $2 \gg ak$ ; dans le milieu considéré pour cette étude, i.e. l'eau peu profonde où  $kh \ll 1$ , cela aboutit à la condition :

$$ak \ll 2kh \ll 2 \quad (1.31)$$

Une autre hypothèse forte est la considération de la houle comme une onde de gravité. Détaillons là encore le cadre théorique délimité par cette hypothèse. Si l'on considère l'ensemble des forces de rappel exercées sur la houle, la prise en compte des effets capillaires modifierait la condition limite de surface libre avec un terme qui fait intervenir la masse volumique de l'eau et la tension superficielle  $\sigma$ :

$$g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3} = 0 \quad (1.32)$$

La relation de dispersion s'en trouverait alors également changée :

$$\omega^2 = \left[ gk + \sigma \frac{k^3}{\rho} \right] \tanh(kh) \quad (1.33)$$

A présent, comment savoir quand conserver cette influence de la capillarité et quand la négliger? On définit une longueur d'onde caractéristique  $\lambda_m$  comme suit :

$$\lambda_m = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (1.34)$$

Ainsi, si  $\lambda \ll \lambda_m$  la force de rappel à la surface sera essentiellement d'origine capillaire. A contrario, si  $\lambda \gg \lambda_m$  l'onde pourra être considérée comme une onde de gravité. En mer, on peut considérer les effets de capillarité négligeables pour les longueurs d'onde supérieures à 10 cm. C'est également les dimensions caractéristiques que nous retiendrons pour cette étude et lors des expériences associées (la question sera abordée plus en détails dans la partie consacrée aux essais).

**Théories non linéaires et ordres supérieurs** La linéarisation du problème a imposé une houle de très faible amplitude, ce qui s'éloigne de la réalité et peut poser problème selon les études, par exemple fausser les calculs d'efforts hydrodynamiques sur les structures. Gerstner, en 1802, a proposé un modèle exact de la houle mais qui ne s'applique qu'aux zones de profondeur infinie. L'étude complète est disponible ici [27], mais ne sera pas plus détaillée dans ce manuscrit. Nous préférons évoquer les solutions non-linéaires valables dans les zones côtières de profondeur finie, et rester ainsi dans le cadre de notre étude. La houle de Stokes du deuxième ordre suppose elle une profondeur d'eau constante  $h$ . Nous avons vu que linéariser la houle revient à négliger des termes comme  $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$ . Si on injecte dans cette expression les formes (1.18) et (1.19), on fait apparaître des termes négligés proportionnels à  $\sin[2(\omega t - kx)]$ ,  $\sin[3(\omega t - kx)]$ ,  $\sin[4(\omega t - kx)]$ ... On peut donc supposer que  $\eta$  et  $\Phi$  peuvent s'écrire également sous la forme d'un développement en série de Fourier, limité ici à l'ordre 2 pour une houle de Stokes au 2e ordre :

$$\eta = a \sin(\omega t - kx) + A_2 a \sin[2(\omega t - kx)] + \dots = \varepsilon \eta_1 + \varepsilon^2 \eta_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (1.35)$$

$$\Phi = \frac{\omega}{k} a \cosh(k(z+h)) \cdot \cos(\omega t - kx) + B_2 \frac{\omega}{k} a^2 \cosh(2k(z+h)) \cdot \cos[2(\omega t - kx)] + \dots = \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \quad (1.36)$$

On note que l'expression (1.36) est valable par profondeur finie; en profondeur infinie, le terme  $\cosh(k(z+h))$  se transforme en  $\exp(kz)$ . En tenant compte de la condition limite au fond et de  $\Delta \Phi = 0$  dans la colonne d'eau, cela équivaut à un développement en perturbations, où le paramètre exact est approché par une série de solutions d'ordres de plus en plus faibles avec  $\varepsilon$  le petit paramètre. En injectant ces expressions dans les conditions limites 1.7, 1.8, 1.9 et 1.10, on en déduit: les conditions limites à chaque ordre  $\varepsilon^i$ ,  $i=1,2$ . La condition de Laplace est également vérifiée à chaque ordre  $i$  :  $\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial z^2} = 0$  ainsi que la condition cinématique de surface libre, à l'ordre  $\varepsilon$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0 \quad (1.37)$$

et à l'ordre  $\varepsilon^2$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \eta_1 \left( \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial t^2 \partial z} + g \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] = 0 \quad (1.38)$$

La condition de Bernoulli en  $z = 0$  devient, pour l'ordre  $\varepsilon$ :

$$-g\eta_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad (1.39)$$

et à l'ordre  $\varepsilon^2$ :

$$-g\eta_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (1.40)$$

Ainsi, la solution à l'ordre  $\varepsilon$  correspond au cas de houle infiniment petite (1.18) et (1.19), tandis que pour l'ordre  $\varepsilon^2$  on trouve :

$$\Phi_2 = \frac{3}{8} \frac{a^2 \omega}{\sinh^4(kh)} \cosh[2k(z+h)] \sin[2(\omega t - kx)] \quad (1.41)$$

$$\eta_2 = \frac{-a^2 k}{2 \sinh(2kh)} - \frac{a^2 k (3 - \tanh^2(kh))}{4 \tanh^3(kh)} \cos[2(\omega t - kx)] \quad (1.42)$$

Nous avons vu précédemment que pour que l'approximation linéaire soit valable, la condition (1.30) devait être vérifiée, imposant les termes non-linéaires faibles par rapport aux termes linéaires dans l'expression de la déformée de la surface libre. Or on vient de voir que pour des ondes d'amplitude "finie", le potentiel  $\Phi$  peut s'écrire comme la somme de la solution linéaire  $\Phi_1$  et d'un terme correctif  $\Phi_2$ . Il est alors nécessaire de justifier notre choix de travailler uniquement avec la solution linéaire. Cette dernière n'est correcte que si  $|\Phi_2| \ll |\Phi_1|$  soit

$$\left| \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right| = \frac{3}{8} \left| ak \frac{\cosh[2k(z+h)]}{\cosh[k(z+h)]} \frac{1}{\sinh^3(kh)} \right| \ll 1 \quad (1.43)$$

Soit dans la limite eau peu profonde,

$$\left| \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \right| = \frac{3}{8} a \frac{1}{k^2 h^3} \ll 1 \quad (1.44)$$

c'est-à-dire que le nombre d'Ursell ( $U = \frac{a\lambda^2}{h^3}$ ) doit rester très inférieur à un.

**Modèles numériques en océanographie physique** A présent que nous avons défini les principaux paramètres qui caractérisent la houle, voyons comment les outils modernes se mettent au service de la physique théorique pour représenter la dynamique des milieux marins. Nous avons défini en introduction ce qu'est un modèle numérique, nous avons vu quels paramètres d'entrée ces modèles utilisent pour représenter la houle, nous allons à présent répertorier les différents modèles opérationnels de prévision de la houle, voir leurs hypothèses et leurs méthodes de résolution. Il existe une différence fondamentale entre les modèles qui considèrent uniquement des houles monochromatiques, à savoir les modèles déterministes, et les modèles qui considèrent des houles à spectre large: les modèles spectraux.

**Modèles déterministes à résolution de phase** Ils permettent de prévoir la propagation de la houle à la côte en fonction des conditions initiales qu'on leur soumettra en entrée. En résolvant des équations modèles, ils déterminent toutes les informations concernant la cinématique de la houle dans un domaine donné, ils sont donc particulièrement appropriés pour l'étude des processus d'interférences. Le modèle Ref-Dif ([101]) est par exemple très utilisé en ingénierie côtière pour définir les houles de projet, c'est-à-dire les houles les plus fréquentes dans la zone géographique choisie et dont l'étude permettra de dimensionner correctement les ouvrages de défense du littoral. Il suppose cependant une houle essentiellement progressive, et est donc inadapté à l'étude des interférences.

**Modèles spectraux à phase moyennée** Ces modèles eux étudient la houle par analyse spectrale: ils déterminent les caractéristiques du spectre de la houle se propageant dans une région donnée en incluant des termes sources et puits d'énergie. Ces modèles à phase moyennée sont donc basés sur l'hypothèse de conservation du flux d'action. Ils sont ainsi très appropriés pour décrire des états de mer aléatoires, comme la mer du vent. Parmi ces modèles nous pouvons citer les très connus Swan ([179]) ou WaveWatch III ([192]).

### 1.3 Intéraction houle-bathymétrie - effets de variations de topographie en profondeur finie

Notre étude porte sur le milieu côtier, là où lorsque la houle se propage, son mouvement est influencé par la bathymétrie. Plusieurs phénomènes, bien connus car également présents en optique, sont recensés : la réfraction, la diffraction, la réflexion, ... Leur compréhension initiale est indispensable pour évaluer l'influence du courant lorsqu'il sera introduit. Or, la principale limite du modèle houle d'Airy est qu'il n'est valable qu'en fond plat. De nouvelles approches vont donc être introduites. Tous les phénomènes seront ici présentés dans l'hypothèse d'une houle de très faible amplitude se propageant en profondeur finie et une attention particulière sera portée à la réflexion, importante dans des conditions de résonance.

Pour décrire les interactions houle-bathymétrie à partir de la théorie linéaire, nous introduisons deux paramètres caractéristiques :  $\varepsilon = \mathcal{O}\left(\left|\frac{\vec{k}}{k}\right|a\right)$  la cambrure de la houle et  $\mu = \mathcal{O}\left(\frac{|\vec{\nabla}_h h|}{|k|h}\right)$  le rapport entre le gradient bathymétrique et le paramètre dispersif. Ainsi, en théorie linéaire la houle est supposée faiblement cambrée:  $\varepsilon \ll 1$  et dans l'approximation de pente douce, les variations bathymétriques seront supposées faibles devant la longueur d'onde de la houle:  $\mu \ll 1$  et donc  $\mu$  est du même ordre de grandeur que la cambrure de la houle.

#### 1.3.1 Cas 3D : la réfraction-diffraction

Lorsque nous considérons deux directions horizontales de propagation, de nouveaux phénomènes, issus de l'intéraction houle-bathymétrie, viennent influencer sur la propagation des vagues. Même si notre étude ne tient compte que d'une direction de propagation, il est important de les mentionner car la suite du projet cherchera à modéliser l'impact de courants inhomogènes sur l'ensemble des phénomènes affectant la houle en profondeur finie, y compris les phénomènes propres à une propagation 3D. La houle est une onde, de période donnée mais dont la longueur d'onde dépend de la profondeur d'eau. En effet, nous rappelons que la longueur d'onde dépend du vecteur d'onde, lui même lié à la profondeur d'eau par la relation de dispersion. La profondeur d'eau

joue le même rôle dans la propagation d'une onde de gravité que l'indice de réfraction d'un milieu pour une onde lumineuse. La réfraction correspond ainsi à la modification de la direction de propagation sous l'effet d'un changement d'indice de propagation du milieu (par effet de la bathymétrie par exemple). La diffraction correspond, elle, à un changement de direction de propagation lié à des gradients d'amplitude de la houle (c'est un phénomène observable par bathymétrie constante). On considèrera une houle d'Airy se propageant dans le plan  $xOy$  et d'incidence  $\theta$  par rapport à l'axe des  $x$ . Tout indice  $h$  fera référence aux directions horizontales  $Ox$  et  $Oy$ , comme par exemple  $\vec{\nabla}_h = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ .

**Réfraction: définition et loi de Snell-Descartes** Les propriétés locales d'une onde sont fonction de la déformée de surface libre  $\eta = ae^{i\varphi}$ , avec  $a$  l'amplitude locale, et de la phase  $\varphi(\vec{x}, t, \vec{k}, \omega)$  définie par  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \omega$  avec  $\omega$  la fréquence de la houle. Cette phase, dans le cas de bathymétries variables ou en présence de courants non uniformes, sera lentement variable dans le temps et dans l'espace. Lorsque le phénomène de réfraction se produit en zone côtière, l'onde "tourne" à l'approche du littoral pour arriver presque toujours de front face à la côte (la direction de propagation est elle perpendiculaire à la côte). Ce phénomène est la réfraction, il est bien connu en optique ou en électromagnétique car il affecte toute onde qui se propage successivement dans des milieux d'indices différents. Près des côtes, c'est la profondeur d'eau qui va jouer sur l'indice du milieu, via le vecteur d'onde  $\vec{k}$  bidimensionnel tel que  $k_1 = k \cos(\theta)$  et  $k_2 = k \sin(\theta)$ . On peut donc d'ailleurs déduire de la définition de la phase une nouvelle expression pour cette dernière  $\varphi = \omega t - k_1 x - k_2 y$ . Le potentiel des vitesses, défini par (1.19) peut alors se réécrire fonction de la phase  $\Phi(x, y, z, t) = \frac{a\omega}{k} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cos(\varphi)$ .

On appelle "rayons de houle" les courbes tangentes en tout point du plan au vecteur  $\vec{k}$  local. Ce vecteur d'onde vérifie  $\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} + \vec{\nabla} \omega = 0$  ce qui équivaut à  $\vec{k} = -\vec{\nabla} \varphi$  soit encore  $(\frac{\partial \varphi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \varphi}{\partial y})^2 = k^2$  l'équation eikonale. Le rotationnel de  $\vec{k}$  est nul donc on en déduit  $\frac{\partial(k \sin(\theta))}{\partial x} - \frac{\partial(k \cos(\theta))}{\partial y} = 0$  ce qui, si l'on considère que la profondeur ne dépend que de  $x$ , se réduit à  $\frac{d(k \sin(\theta))}{dx} = 0$ . On intègre cette équation entre un point initial donné, d'indice 0, et un point quelconque:  $k \sin(\theta) = k_0 \sin(\theta_0) = cste$ , avec  $\theta$  l'incidence locale de la houle et  $\theta_0$  l'incidence de la houle au large, ou encore

$$\frac{\sin(\theta)}{C} = \frac{\sin(\theta_0)}{C_0} \quad (1.45)$$

la loi de Snell-Descartes: l'angle  $\theta$  décroît quand la profondeur d'eau diminue, et les rayons de houle tendent donc à devenir perpendiculaires à la côte. Cette loi a par exemple été utilisée par Arthur (1946 [8]) pour déterminer la réfraction de la houle autour d'îles de formes différentes. Les effets du courant sur ce phénomène seront abordés plus loin dans cette section.

**Diffraction: définition et application aux ouvrages côtiers** Un autre phénomène d'interaction houle-bathymétrie très connu est la diffraction : lorsqu'une houle se propage au-dessus de variations importantes du fond, ou en présence d'obstacles sur toute la colonne d'eau (obstacle émergent ou courant inhomogène), la houle va diffuser: visuellement elle va "tourner", avec un rayon de courbure de l'ordre de sa longueur d'onde. C'est un phénomène facilement observable autour d'une digue semi-infinie ou au travers d'un chenal de largeur finie. Il peut être décrit de façon analogue à la diffraction de la lumière, avec le potentiel réduit de la houle  $\phi(x, y)$  vérifiant l'équation d'Helmholtz:

$$\Delta \phi + k^2 \phi = 0 \quad (1.46)$$

avec  $\Delta = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})$ .

La solution analytique pour le potentiel des vitesses est donnée en détail ici [84] par Horikawa, mais ne fera pas l'objet de plus de développement dans ce manuscrit. Cette solution permet de déduire le comportement de la houle autour d'un obstacle considéré: Penney & Price (1952 [147]) ont établi les solutions de cette équation pour différents types de brise-lames, en utilisant les intégrales de Fresnel. Cette méthode sera d'ailleurs reprise plus tard par Kim & Lee (2009 [94]) pour d'autres analyses numériques de la diffraction. Kirby & Dalrymple (1983 [102]) ont choisi, eux, d'étudier un obstacle de type fosse marine, au-dessus de laquelle se propage une houle d'incidence oblique. Pour cela, ils ont appliqué la méthode de Takano (1960 [187]) et découpé l'espace en trois domaines de profondeur constante, liés par les conditions de continuité de flux et de pression. Kim (2010 [95]) développera une méthode similaire pour des houles se propageant en profondeur infinie. Les modes évanescents, générés autour de structures abruptes, peuvent également s'inclure dans la théorie linéaire potentielle pour modéliser la diffusion, comme l'illustre l'étude de Rey (1995 [158]).

Nous ne pouvons pas restreindre la diffraction uniquement à la théorie linéaire, car la présence d'obstacles peut engendrer des non-linéarités dans le profil de houle. Stamnes et al. (1983 [180]) vont ainsi comparer la théorie linéaire et la théorie non-linéaire aux résultats d'une campagne expérimentale dans le cas d'un champs de houle, soumis au phénomène de diffraction et qui focalise derrière des brise-lames immergés. Bien entendu, les mêmes conditions aux limites sont considérées autour de l'obstacle, pour pouvoir quantifier les effets non-linéaires apparaissant lors de la diffraction. Si les deux théories représentent bien la focalisation, les effets non-linéaires permettent de mieux appréhender la hauteur des vagues au point de focalisation. Suivant cette piste, la représentation de la diffraction dans la théorie non-linéaire a été largement exploitée : Brossard & Chagdali (2001 [28]) ont mené une campagne expérimentale sur les interactions non-linéaires avec un brise-lame, Constantin (2014 [39]) a remis en question le modèle "houle de Stokes" dans l'étude des interactions houle-bathymétrie.

**Réfraction-Diffraction et Equations de Berkhoff** Lorsque la bathymétrie varie de façon marquée, la méthode des rayons et la loi de Snell-Descartes ne sont plus applicables à cause des phénomènes de diffraction qui viennent interférer. Cette combinaison réfraction-diffraction a été longuement observée : Berkhoff et al. (1982 [22]), Vincent & Briggs (1989[201] ), Jarry et al. (2011 [87]). Berkhoff (1972 [20], 1976 [21]) a créé le premier modèle linéaire complet d'interactions houle-bathymétrie. Fait pour traiter des problèmes de réfraction-diffraction sur des fonds lentement variables (l'approximation faible pente est valable pour des pentes d'angle  $\alpha$  telles que  $\tan(\alpha) < \frac{1}{3}$  d'après [25]), il résout une équation différentielle portant sur le potentiel des vitesses horizontal complexe, et sa théorie est à la base de celles des modèles que nous utilisons. D'ailleurs Berkhoff (1972 [20]) puis Booij (1983 [25]) démontreront l'efficacité d'un modèle combiné par rapport à un modèle de réfraction simple. C'est pour cette raison que nous présentons ici les principales étapes du modèle de Berkhoff, à savoir l'intégration sur la colonne d'eau des conditions aux limites classiques de la théorie potentielle linéaire (présentées dans la deuxième section). Le développement complet est détaillé dans les études [171, 21].

La méthodologie est la suivante, on commence par rappeler la condition d'imperméabilité au fond, pour une bathymétrie bidimensionnelle  $h(x, y)$ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\vec{\nabla}_h \cdot h \vec{\nabla}_h \Phi \quad (1.47)$$

Pour des pentes douces, c'est-à-dire des bathymétries variant faiblement sur une distance équivalent à la longueur d'onde de la houle (i.e.  $\mu = \frac{\nabla h}{kh} \ll 1$ ), on peut déduire le potentiel des

vitesses à partir de sa forme “fond plat” (1.19)

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z)e^{i\omega t} = \frac{ig \cosh[k(z+h)]}{\omega \cosh(kh)} \eta(x, y)e^{i\omega t} \quad (1.48)$$

Le potentiel  $\phi$  vérifie pour  $0 \geq z \geq -h(x, y)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\nabla_h^2 \phi \quad (1.49)$$

et en surface (pour  $z=0$ ) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \quad (1.50)$$

et la condition de fond en  $z = -h(x, y)$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \vec{\nabla}_h h \vec{\nabla}_h \phi \quad (1.51)$$

On applique une formulation faible de Laplace, on multiplie par la fonction de Green

$$f = \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \quad (1.52)$$

puis on intègre sur la verticale entre le fond  $z=-h$  et la surface  $z=0$  pour obtenir ([130])

$$\int_{-h}^0 (k^2 f \phi + f \nabla_h^2 \phi) dz = -[f(\vec{\nabla}_h h \vec{\nabla}_h \phi)]_{z=-h}. \quad (1.53)$$

D'après la forme 1.48, on peut déduire les formes dérivées :

$$\vec{\nabla}_h \phi = \frac{-ig}{\omega} [f \vec{\nabla}_h \eta + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \vec{\nabla}_h h] \text{ et } \nabla_h^2 \phi = \frac{-ig}{\omega} [f \vec{\nabla}_h^2 \eta + 2 \frac{\partial f}{\partial h} \vec{\nabla}_h \eta \vec{\nabla}_h h + \eta \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} [\vec{\nabla}_h h]^2 + \eta \frac{\partial f}{\partial h} \vec{\nabla}_h^2 h]$$

et ainsi en multipliant l'équation par  $\frac{-ig}{\omega}$  on peut y insérer les formes précédentes et obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{-h}^0 (f^2 \vec{\nabla}_h^2 \eta + 2f \frac{\partial f}{\partial h} \vec{\nabla}_h \eta \vec{\nabla}_h h + \eta f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} [\vec{\nabla}_h h]^2 + \eta f \frac{\partial f}{\partial h} \vec{\nabla}_h^2 h + k^2 \eta f^2) dz \\ = -[f^2 \vec{\nabla}_h h \vec{\nabla}_h \eta + \eta f \frac{\partial f}{\partial h} (\vec{\nabla}_h h)^2]_{z=-h} \end{aligned} \quad (1.54)$$

On applique la formule de décomposition de Leibnitz  $\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, y) dy = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x} dy + f(x, b(x)) \frac{\partial b}{\partial x} - f(x, a(x)) \frac{\partial a}{\partial x}$  pour en déduire

$$\vec{\nabla}_h \int_{-h}^0 f^2 \vec{\nabla}_h \eta dz + \int_{-h}^0 k^2 f^2 \eta dz = -[\eta f \frac{\partial f}{\partial h} (\vec{\nabla}_h h)^2]_{z=-h} - \int_{-h}^0 \eta f \frac{\partial^2 f}{\partial h^2} [\vec{\nabla}_h h]^2 dz - \int_{-h}^0 \eta f \frac{\partial f}{\partial h} \vec{\nabla}_h^2 h dz \quad (1.55)$$

Les termes de droite de l'équation, d'ordre  $\mu^2$  sont négligeables devant ceux de gauche d'ordre  $\mu$ , ce qui nous permet d'aboutir après intégration à

$$\vec{\nabla}_h \cdot (a_1 \vec{\nabla}_h \eta) + \omega^2 a_2 \eta = 0 \quad (1.56)$$

en posant  $a_1 = gh \frac{\tanh(kh)}{kh} \frac{1}{2} [1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}]$  et  $a_2 = \frac{1}{2} [1 + \frac{2kh}{\sinh(2kh)}]$ . On peut alors reconnaître les vitesses de phase et de groupe et écrire comme suit l'équation sous sa forme finale, l'équation de Berkhoff ou approximation pente faible:

$$\vec{\nabla}_h(CC_g \vec{\nabla}_h \phi) + k^2 CC_g \phi = 0 \quad (1.57)$$

La démonstration détaillée de cette équation elliptique est également proposée par Gouaud (2007 [75]).

**Résolution numérique de l'équation de Berkhoff** Parmi les nombreuses études qui ont porté sur cette équation, certaines se sont attachées à simplifier sa résolution numérique. Une des difficultés majeures de cette résolution porte sur le choix de la condition limite de sortie de domaine, là où la houle doit être totalement transmise. Une condition aux limites trop simple pourrait engendrer une réflexion de la houle sur les bords du domaine en cas d'incidence oblique. Kirby proposera dans son étude de 1989 ([103]) une condition de sortie qui s'affranchit de cette difficulté. Le deuxième problème que pose cette équation elliptique est le coût important de sa résolution numérique, à cause de la discrétisation du domaine spatial et des conditions de sortie ouvertes. Pour réduire le temps de calcul nécessaire, Radder (1979 [154]) a établi de la transformer en une équation parabolique, plus facile à résoudre. Pour cela, l'équation de Berkhoff est projetée sur une direction de propagation privilégiée. Cependant, l'équation parabolique obtenue ne représente pas la réflexion de la houle, et ne supporte que les houles d'incidence proche de la normale (30° d'écart maximum d'après Chagdali et al, 2000 [30]). Plus tard, d'autres études permettront d'atteindre des changements de direction de houle plus importants grâce à l'utilisation des approximants de Padé: jusqu'à 50° environ grâce aux travaux de Kirby (1986b [98]), et jusqu'à 77° par les travaux de Mordane et al (2004 [139]). Cependant, pour atteindre des angles de rotation des crêtes beaucoup plus grands (jusqu'à 90°) et donc pouvoir par exemple modéliser les très fortes diffractions apparaissant derrière les brise-lames, une autre méthode a été mise au point. Il s'agit d'appliquer une transformée de Fourier à l'équation de Berkhoff. Le modèle obtenu, qui tient aussi compte des modes évanescents, est valide tant que les non-linéarités de la houle peuvent être négligées devant la diffraction. Par contre, cette méthode implique de calculer les solutions analytiques du potentiel de la houle autour des variations de bathymétrie avant d'entamer la résolution.

### 1.3.2 Cas 2D

#### Shoaling et déferlement

Lorsque la bathymétrie est douce et monotone, il n'y a que très peu voire pas de changement de direction de la houle, elle continue d'avancer et se produisent alors successivement les phénomènes de shoaling puis de déferlement.

**Le shoaling** Dans la théorie linéaire, le "shoaling" est le phénomène à l'origine de la variation de l'amplitude des vagues et de leur longueur d'onde à l'abord d'une côte. Supposons une houle se propageant depuis le large en direction d'une plaie avec une incidence normale. Si l'on néglige les effets de la viscosité, au niveau du large cette houle de période donnée se propage en "profondeur infinie" sans se déformer: l'évolution de la déformée de la surface libre en fonction du temps reste la même dans cette direction. Par contre, une fois arrivée en zone de "profondeur finie", la houle va ressentir la présence du fond, qui va modifier sa longueur d'onde et sa célérité. En effet, comme la période de la houle reste constante, le nombre d'onde n'est plus fonction que de la profondeur d'eau (via la relation de dispersion). Ainsi, les variations bathymétriques vont directement influencer sur la déformée de surface libre. Sur des fonds en pente douce devant la longueur d'onde, à mesure que la profondeur d'eau diminue, la houle va d'abord se réduire très

légèrement puis fortement se cambrer jusqu’au déferlement. La longueur d’onde et la vitesse de phase diminuent du large vers la côte. Cette évolution de la “forme” de la vague est appelée “shoaling” (qui vient de l’anglais ‘shoal’ pour désigner un haut-fond). Elle se quantifie par le coefficient de shoaling, rapport d’amplitudes entre la houle au large (d’amplitude  $a$  et de vitesse de groupe  $C_{g_0}$ ) et la houle à la côte (d’amplitude  $a$  et de vitesse de groupe  $C_g$ ). D’après les expressions 1.17,1.27,1.28 et 1.29, on obtient :

$$\left(\frac{a}{a_0}\right)^2 = \frac{C_g}{C_{g_0}} = \frac{1}{\tanh(kh) + \frac{kh}{\cosh^2(kh)}} \quad (1.58)$$

Ce coefficient passe par un minimum pour  $1 - kh \tanh(kh) = 0 \iff kh = 1.98$ , ce qui explique la légère diminution de l’amplitude de la houle avant son augmentation. Il est à noter que pour une houle d’incidence oblique, le shoaling se déroule conjointement à la réfraction. Le shoaling ne sera pas plus développé ici car il n’intervient qu’en eau peu profonde, ce qui sort du cadre de notre étude. Cependant, les effets de shoaling sont présentés plus en détails dans l’étude de Mayençon ([130]). L’étude de Rey (1992 [156]) détaille l’effet de la pente du fond sur la réflexion et le shoaling.

**Le déferlement** Très facilement observable sur la plage après le shoaling, le déferlement est le moment où la vague se brise car sa crête et son creux n’ont pas la même vitesse. Il peut également survenir en plus grandes profondeurs (c.f. les vagues déferlantes, section I.2.). Mathématiquement, le point de déferlement est défini généralement comme le point où la déformée de surface libre présente une tangente verticale côté front de la vague. Mais il existe plusieurs types de déferlement selon la pente de la plage. Pour les différencier, Fredsoe & Deigaard (1992) ont défini le nombre caractéristique d’Iribarren  $\xi_b$ , fonction du gradient bathymétrique de la plage  $\tan(\beta)$ , de l’amplitude  $H_b$  de la houle au point de déferlement et de  $\lambda_0$  sa longueur d’onde au large:

$$\xi_b = \frac{\tan(\beta)}{\sqrt{\frac{H_b}{\lambda_0}}} \quad (1.59)$$

Ainsi, on différencie le mascaret (plage horizontale soit  $\xi_b = 0$ ), le déferlement glissant (plage faiblement inclinée soit  $\xi_b < 0.4$ ), le déferlement plongeant (plage d’inclinaison relativement importante, soit  $0.4 < \xi_b < 2$ ) et le déferlement frontal (plage fortement inclinée soit  $\xi_b > 2$ ).

De nombreux autres critères de déferlement ont été proposés par la suite, fonctions des caractéristiques de la houle au large ou au point de déferlement : Horikawa (1988 [84]), Miche (1951 [135]) ou encore Ostendorf & Madsen (1979 [141]).

Pour une plage de pente faible, après le déferlement glissant, la vague se propage avec une amplitude qui va diminuer conjointement à la profondeur d’eau locale  $h$ , selon la relation  $a \simeq 0.8h$  (Anderson & Fredsoe, 1983 [5]). L’étude des caractéristiques de la houle après le déferlement n’est pas à négliger, car l’essentiel des courants côtiers sont induits par la houle en zone de déferlement : Dulou et al. (2000 [53]), Peregrine (1971 [148]).

## La réflexion: généralités

La propagation d’ondes de gravité au-dessus de fonds variables, et la réflexion associée, ont été l’objet de nombreux travaux, les études de Rey (1992 [156]) et Rey et al. (1996 [159]) en présentent une bibliographie presque exhaustive. De façon générale, la réflexion survient lorsque les variations du milieu (bathymétrie, courant...) ne sont plus très petites devant la longueur

d'onde: une partie de l'énergie de la houle incidente est renvoyée vers la source, et le reste sera transmis par delà l'obstacle. Les caractéristiques de cet obstacle (inclinaison, dimensions, profondeur d'immersion, composition) et les paramètres de la houle vont être conditionnants pour la quantité d'énergie réfléchie.

Le potentiel des vitesses de la houle va s'écrire logiquement comme la somme de la contribution de l'onde incidente, d'amplitude  $a_i$ , et de l'onde réfléchie, d'amplitude  $a_r$ , déphasées entre elles de  $\varphi$  :

$$\phi = \frac{i\omega \cosh(k(z+h))}{k \cosh(kh)} \cdot (a_i \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})) + a_r \exp(i(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{x} + \varphi))) \quad (1.60)$$

La réflexion se mesure grâce au coefficient de réflexion  $C_r$ , rapport entre les amplitudes des ondes incidentes et réfléchies

$$C_r = \frac{a_r}{a_i} \quad (1.61)$$

et à son pendant, le coefficient de transmission  $T_r$ , rapport entre les amplitudes des ondes transmises et incidentes:

$$T_r = \frac{a_t}{a_i} \quad (1.62)$$

Le détermination de ces deux coefficients est le but des études de réflexion de houle.

Voyons de façon analytique comment la forme des fonds marins peut influencer la réflexion de la houle, et l'évolution de l'état de l'art associé. Dans le cas d'une réflexion causée par des variations bathymétriques, on peut distinguer deux modélisations distinctes. Pour de faibles pentes du fond (c'est-à-dire lorsque la variation du fond est faible sur une longueur d'onde), l'onde de gravité va se propager en étant presque totalement transmise et très peu réfléchie: on peut donc supposer l'onde uniquement progressive. Ce sont les hypothèses de la classique équation de Berkhoff présentée ci-dessus. La réflexion est alors décrite comme une perturbation de la solution sinusoïdale au premier ordre : c'est la méthode par perturbations. C'est en particulier le cas pour la réflexion par résonance de Bragg, qui apparaît lorsque la longueur caractéristique d'une variation du fond est égale à la moitié de la longueur d'onde de la houle (Guazzelli et al, 1992 [78]), et où l'on considère qu'une onde se propageant au-dessus d'un fond faiblement modulé équivaut à une onde se propageant au-dessus d'un fond plat moyennant de petits termes correctifs. Par contre, pour des fonds présentant de fortes discontinuités (talus, fonds rocheux irréguliers...), l'onde peut être réfléchie en plus grande partie vers le large (là encore, la profondeur d'eau modifie l'indice du milieu). Ce "pouvoir de réflexion" des discontinuités de bathymétrie ouvre de nombreuses applications pratiques en génie côtier: par exemple, des ouvrages immergés "réfléchissants" sont installés au large pour la protection du littoral et de ses aménagements (ports, rade...). La résolution se fait cette fois par méthode intégrale aux frontières. De façon analytique, Patarapanich (1984 [144]) a mis en évidence que la quantité d'énergie réfléchie oscillait selon la longueur d'onde de la houle lorsque cette dernière se propage au-dessus d'une discontinuité, ce qui prouve que les caractéristiques de la houle sont aussi importantes que celles de l'obstacle. Ce phénomène est bien décrit par les modes évanescents, ou modes locaux, qui se développent précisément au niveau de fortes et brusques variations bathymétriques.

Pour rester dans le cadre de notre étude, 2D avec une dimension horizontale et une dimension verticale, nous présenterons les modèles dans le cas d'une houle se propageant dans une seule direction  $Ox$ . Nous commencerons par présenter de façon générale les deux approches

analytiques: modélisation pente douce et modélisation bathymétrie abrupte. Ensuite, nous présenterons un rapide état de l'art des modèles reprenant ces approches, pour rapidement se focaliser sur les modèles les plus classiques et les plus utilisés.

**La réflexion: Première méthode de modélisation: approximation pente douce ou méthode par perturbations ou méthode à échelles multiples ou méthode de Mei**

**Principe de la méthode** La solution analytique au problème de propagation d'une houle de très faible amplitude au-dessus d'un fond plat est connue (Berkhoff [20, 21]), il s'agit d'ondes planes progressives se propageant dans les directions  $-x$  et  $+x$ . On peut donc supposer que la solution pour un cas quasi-similaire, à savoir la propagation au-dessus d'un fond présentant de très faibles variations, peut s'écrire à partir de la solution connue, moyennant des petits termes correctifs. Nous allons présenter cette méthodologie sur un cas simple: la propagation d'une houle d'incidence normale sur un fond sinusoïdal de longueur finie  $L$ , d'après l'étude de Mei (1985 [129]).

Commençons par fixer les hypothèses, au plus près de celles de Berkhoff ([20, 21]): les ondes sont de faible amplitude, et la condition limite linéarisée de surface libre reste la même (1.12). Concernant les variations bathymétriques, on considère une profondeur moyenne  $h$  et une modulation sinusoïdale autour de cette profondeur donnée par

$$\delta = \frac{1}{2}D \exp(iKx) + \frac{1}{2}D \exp(-iKx) \quad (1.63)$$

Ainsi, les variations du fond sont bien faibles, de l'ordre de  $\varepsilon = \mathcal{O}(\frac{D}{h})$ , on peut d'ailleurs les noter  $\varepsilon\delta$ . Comme précédemment, le potentiel des vitesses linéaire vérifie l'équation de Laplace sur toute la colonne d'eau ( $-h + \varepsilon\delta \leq z \leq 0$ ) au-dessus du fond modulé ( $0 < x < L$ ), avec  $kL \gg 1$ . La condition d'imperméabilité va suivre le fond, c'est-à-dire qu'elle va imposer en  $z = -h + \varepsilon\delta$  que  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$  où  $\vec{v}$  est la vitesse locale du fluide et  $\vec{n}$  la normale locale au sol. Cette condition peut s'écrire en fonction du potentiel des vitesses sous la forme :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\vec{\nabla}h \cdot \vec{\nabla}\Phi \quad (1.64)$$

Après un développement de Taylor, on peut l'écrire en  $z = -h$  comme suit:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\delta \frac{\partial\Phi}{\partial x}) + \dots \quad (1.65)$$

Le fond est faiblement modulé, on va donc supposer que les amplitudes des ondes planes se propageant en  $-x$  et  $+x$  sont également faiblement modulées. Pour cela, on va créer des variables "lentes"

$$x_1 = \varepsilon x \quad (1.66)$$

et

$$t_1 = \varepsilon t \quad (1.67)$$

indépendantes vis à vis des variables de référence  $x$  et  $t$ , qui justifient l'appellation "méthode à échelles multiples". Ainsi, une dérivée partielle selon  $x$  ou  $t$  deviendra respectivement  $\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_1}$  ou  $\frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_1}$ . Bien entendu, la notation  $\varepsilon$  ne sert que d'indicatif sur l'ordre de grandeur des différents termes des équations qui vont suivre, elle ne subsiste pas à la fin des calculs.

Notre inconnue potentiel des vitesses est donc formulée comme l'approximation par échelles multiples suivante :

$$\Phi(x, z, t) = \varepsilon \Phi_1(x, z, t, x_1, t_1) + \varepsilon^2 \Phi_2(x, z, t, x_1, t_1) + \dots \quad (1.68)$$

Ainsi, on obtient un jeu d'équations, construites à partir de (1.7),(1.8),(1.12) et (1.65). La solution est donc également une combinaison linéaire, des ondes incidentes (d'exposant +) et réfléchies (d'exposant -), le symbole \* faisant référence au conjugué du terme précédent :

$$\Phi_1 = \psi^- \exp(i(\omega t - kx)) + * + \psi^+ \exp(i(\omega t + kx)) + * \quad (1.69)$$

Ce potentiel vérifie des équations différentielles homogènes et des conditions aux limites en  $z = 0$  ou  $z = -h$  détaillées dans la section 1, sachant que le vecteur d'onde vérifie la relation de dispersion 1.16. La résolution de ces équations permet de déterminer la dépendance en  $z$  de  $\psi^+$  et  $\psi^-$ :

$$\psi^\pm = a^\pm \frac{ig \cosh(k(z+h))}{2\omega \cosh(kh)} \quad (1.70)$$

avec  $a^\pm$  les amplitudes complexes respectives des ondes de surface incidente et réfléchie. Comme on sait qu'un fond modulé réfléchit une quantité significative d'énergie de la houle, on supposera que  $a^+$  et  $a^-$  sont du même ordre de grandeur. Cette hypothèse sera discutée à la fin du paragraphe, comme limite de cette méthode.

Nous remarquons qu'à l'ordre  $\varepsilon$ , le potentiel peut s'exprimer comme un produit entre un terme de propagation  $\exp(i(\omega t \pm kx))$  et un potentiel réduit qui lui-même peut s'écrire comme le produit d'une amplitude et d'un profil vertical. Ce potentiel réduit représente un "mode propagatif" : c'est le "profil de base" qui va se propager, et qui représente le mieux le champ lointain de la houle, indépendamment des inhomogénéités locales.

Pour la solution à l'ordre  $\varepsilon^2$ , le potentiel vérifie cette fois la condition de surface libre en  $z = 0$  suivante:

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = -2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t \partial t_1} \quad (1.71)$$

Ainsi que la condition de fond en  $z = -h$  :

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \delta \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) \quad (1.72)$$

Ainsi que la condition de Laplace, sur la colonne d'eau moyenne  $-h \leq z \leq 0$ :

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial z^2} = -2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial x_1} \quad (1.73)$$

Pour obtenir  $\Phi_2$ , nous repartons de la condition de fond (1.72) en  $z = -h$  et on remplace  $\delta \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}$  par son expression 1.139 en ne conservant que les termes résonnants, c'est-à-dire de forme correspondant à des phases d'onde incidente ou réfléchie (en  $\exp(i(\omega t \pm kx))$ ) et on obtient la condition pour  $K = 2k$ :

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial z} = \frac{1}{2} k^2 D \psi^+ \exp(i(\omega t - kx)) + \frac{1}{2} k^2 D \psi^- \exp(i(\omega t + kx)) + * \quad (1.74)$$

où le deuxième terme de droite correspond à une onde réfléchie. Pour conserver la combinaison linéaire d'ondes incidente et réfléchie, on suppose  $\Phi_2$  de la forme :

$$\Phi_2 = i\gamma^- \exp(i(\omega t - kx)) + * + i\gamma^+ \exp(i(\omega t + kx)) + * \quad (1.75)$$

Pour déterminer les profils verticaux  $\gamma^\pm$ , on insère l'expression de  $\Phi_2$  dans les conditions aux limites (1.71), (1.74) et dans l'équation (1.73) :

$$\frac{\partial \gamma^\pm}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \gamma^\pm = -\frac{\partial a^\pm}{\partial t_1} \quad (1.76)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma^\pm}{\partial z^2} - k^2 \gamma^\pm = \frac{igk \cosh(k(z+h))}{\omega \cosh(kh)} \frac{\partial a^\pm}{\partial x_1} \quad (1.77)$$

$$\frac{\partial \gamma^\pm}{\partial z} = \frac{1}{4} \frac{gk^2 D}{\omega \cosh(kh)} a^\pm \quad (1.78)$$

Pour résoudre ce jeu d'équations, on va utiliser la fonction de Green  $F(z) = \cosh(k(z+h))$  telle que :

$$\int_{-h}^0 F \left( \frac{\partial^2 \gamma^\pm}{\partial z^2} - k^2 \gamma^\pm \right) dz = \left[ F \frac{\partial \gamma^\pm}{\partial z} - \gamma^\pm \frac{\partial F}{\partial z} \right]_{-h}^0 \quad (1.79)$$

La solvabilité de  $\gamma^\pm$  au-dessus du fond ondulé impose un couplage des amplitudes des ondes incidentes et réfléchies,  $\forall 0 \leq x \leq L$  :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_1} \pm C_g \frac{\partial}{\partial x_1} \right) .a^\pm = -i\Omega_0 a^\pm \quad (1.80)$$

avec le terme

$$\Omega_0 = \frac{gk^2 D}{4\omega \cosh(kh)} = \frac{\omega k D}{2 \sinh(2kh)} \quad (1.81)$$

qui a la dimension d'une fréquence.

En dehors du fond ondulé, pour  $x < 0$  et  $x > L$ , il n'y a pas de couplage :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t_1} \pm C_g \frac{\partial}{\partial x_1} \right) A^\pm = 0 \quad (1.82)$$

Toutefois, avant le fond ondulé pour  $x < 0$ , le potentiel des vitesses, cette fois restreint à l'ordre  $\varepsilon$ , vérifie bien la décomposition onde incidente / onde réfléchie (1.69).

Les continuités des amplitudes des ondes incidentes et réfléchies  $a^+/A^+$  et  $a^-/A^-$  aux abords du fond ondulé en  $x = 0$  et  $x = L$  permettent de formuler les expressions suivantes, d'abord en amont du fond ondulé :

$$A^+ = A_0 \exp(i(\Omega t_1 - \kappa x_1)) \quad (1.83)$$

et

$$A^- = A_0 R(0) \exp(i(\Omega t_1 + \kappa x_1)) \quad (1.84)$$

où  $\varepsilon \kappa = k - 2K$  correspond à l'écart du vecteur d'onde par rapport à la condition de résonance, ce qui équivaut en fréquence à un écart de  $\varepsilon \Omega = \varepsilon C_g \kappa$ , et  $R(0)$  est le coefficient de réflexion du fond ondulé en  $x = 0$ . De la même façon, en aval du fond ondulé :

$$A^+ = 0 \quad (1.85)$$

car on impose qu'il n'y a aucune onde réfléchie pour  $x > L$  (c'est-à-dire qu'il n'y a plus d'influence du fond ondulé et que la condition de sortie de domaine est une condition de sortie libre).

$$A^- = A_0 T(L) \exp(i(\Omega t_1 + \kappa x_1)) \quad (1.86)$$

où  $T(L)$  correspond au coefficient de transmission en  $x = L$ .

Enfin, on peut en déduire les expressions des amplitudes au-dessus du fond ondulé, exprimées selon les variables locales lentes  $\forall 0 < x_1 < L$ :

$$A^+ = A_0 T(x_1) \exp(i(\Omega t_1 - \kappa x_1)) \quad (1.87)$$

$$A^- = A_0 R(x_1) \exp(i(\Omega t_1 + \kappa x_1)) \quad (1.88)$$

où ici, changement de notation, le sigle + fait référence à l'onde transmise (se propageant dans le sens des  $x$  croissants) et le sigle - à l'onde réfléchie (se propageant dans le sens des  $x$  décroissants).

Nos inconnues, les coefficients de réflexion  $R(x_1)$  et transmission  $T(x_1)$  au-dessus du fond sinusoidal, vont dépendre de la fréquence  $\Omega$  de la houle par rapport à la fréquence de coupure  $\Omega_0$  du système. On pose d'ailleurs le coefficient :

$$P = \frac{(\Omega^2 - \Omega_0^2)^{\frac{1}{2}}}{C_g} \quad (1.89)$$

Si  $\Omega > \Omega_0$ , on obtient la solution sous la forme:

$$T(x_1) = \frac{PC_g \cos(P(L - x_1)) - i\Omega \sin(P(L - x_1))}{PC_g \cos(PL) - i\Omega \sin(PL)} \quad (1.90)$$

$$R(x_1) = \frac{-i\Omega_0 \sin(P(L - x_1))}{PC_g \cos(PL) - i\Omega \sin(PL)} \quad (1.91)$$

Au-dessus de la fréquence de coupure, la réflexion présente un profil oscillant selon le nombre de modulations du fond.

Si  $\Omega = \Omega_0$  alors :

$$T(x_1) = \frac{1 - i\left(\frac{\Omega_0}{C_g}(L - x_1)\right)}{1 - i\frac{\Omega_0}{C_g}L} \quad (1.92)$$

$$R(x_1) = \frac{-i\frac{\Omega_0}{C_g}(L - x_1)}{1 - i\frac{\Omega_0}{C_g}L} \quad (1.93)$$

Si  $0 < \Omega < \Omega_0$ , on pose :

$$Q = iP = \frac{(\Omega_0^2 - \Omega^2)^{\frac{1}{2}}}{C_g} \quad (1.94)$$

et donc :

$$T(x_1) = \frac{iQC_g \cosh(Q(L - x_1)) + \Omega \sinh(Q(L - x_1))}{iQC_g \cosh(QL) + \Omega \sinh(QL)} \quad (1.95)$$

$$R(x_1) = \frac{\Omega_0 \sinh(Q(L - x_1))}{iQC_g \cosh(QL) + \Omega \sinh(QL)} \quad (1.96)$$

En dessous de la fréquence de coupure, la réflexion augmente avec le nombre de modulations du fond.

On remarque que le cas  $\Omega = \Omega_0$  correspond à cette configuration où  $Q \rightarrow 0$ .

Si  $\Omega = 0$  alors :

$$T(x_1) = \frac{\cosh(\frac{\Omega_0}{C_g}(L - x_1))}{\cosh(\frac{\Omega_0}{C_g}L)} \quad (1.97)$$

$$R(x_1) = \frac{-i \sinh(\frac{\Omega_0}{C_g}(L - x_1))}{\cosh(\frac{\Omega_0}{C_g}L)} \quad (1.98)$$

Sur l'ensemble du domaine de propagation, on remarque que l'énergie est bien conservée car :

$$R(0)^2 + T(L)^2 = 1 \quad (1.99)$$

A la résonance, nous pouvons écrire :

$$|R(0)| = \tanh(\frac{\Omega_0}{C_g}L) \quad (1.100)$$

Cela est cohérent : lorsque la longueur  $L$  du fond ondulé augmente,  $|R(0)| \rightarrow 1$  et la réflexion tend à être totale.

**Limites de la méthode** Cette méthode anticipe le pouvoir de réflexion du fond ondulé, en supposant que les amplitudes des ondes incidentes et réfléchies sont du même ordre de grandeur. Cette hypothèse est discutable : si la longueur  $L$  du fond ondulé reste petite (seulement quelques oscillations), alors le pouvoir réfléchif de la structure est très faible même pour une houle en condition de résonance :  $R(0) = \mathcal{O}(\varepsilon)$  et  $A^- \ll A^+$ .

Davies ([44, 45] ) avait d'ailleurs de son côté proposé une méthode par perturbations régulières, qui permet de contourner cette difficulté. Au premier ordre, au-dessus du fond ondulé, on transforme la relation de couplage (1.80) en deux relations découplées :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + C_g \frac{\partial}{\partial x_1}\right)a^+ = 0 \quad (1.101)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1} - C_g \frac{\partial}{\partial x_1}\right)a^- = -i\varepsilon\Omega_0 a^+ \quad (1.102)$$

De la même façon que précédemment, on va calculer un coefficient de réflexion pour un écart de fréquence  $\varepsilon\Omega = \varepsilon C_g \kappa$  tel que :

$$R(0) = \frac{\varepsilon\Omega_0}{2\Omega}(1 - \exp(2i\kappa L)) \quad (1.103)$$

Ce résultat n'existe que si  $\kappa = \mathcal{O}(1)$  n'est pas petit. Quand  $\kappa \ll 1$ , c'est-à-dire quand la fréquence de la houle tend vers la condition de résonance, on obtient pour le cas limite  $\Omega = C_g \kappa = 0$ :

$$|R(0)| = \frac{\varepsilon \Omega_0 L}{C_g} \quad (1.104)$$

De même, pour un fond sinusoïdal donné par  $\delta = D \sin(Kx)$  et composé de  $m$  périodes de longueur d'onde  $K$ , alors au-dessus de ce fond, c'est-à-dire pour  $0 < x < L = \frac{2\pi m}{K}$ , l'expression 1.104 peut s'écrire :

$$|R(0)| = \frac{2kD}{2kh + \sinh(2kh)} \frac{m\pi}{2} \quad (1.105)$$

Ainsi, dans les deux cas, la quantité d'énergie réfléchie augmente bien linéairement avec la longueur du fond. Cependant, cette fois l'énergie n'est conservée qu'à l'ordre  $\varepsilon$ . Si le fond atteint une longueur conséquente, soit  $\varepsilon L = \mathcal{O}(1)$ , l'expression (1.104) n'est plus valable et il faut revenir à la méthode précédente, par anticipation.

### **La réflexion: Deuxième méthode de modélisation: méthode intégrale aux frontières pour bathymétries abruptes ou méthode exacte**

Les variations bathymétriques sont souvent brutales par rapport à la longueur d'onde de la houle, particulièrement en milieu côtier où les falaises, les fonds rocheux et les installations humaines modifient profondément le paysage sous-marin (études de Massel (1989 [122]) et Thomas & Klopman (1997 [189])). Pour considérer ces variations, la méthode dite "intégrale aux frontières", considère ces variations comme une succession de domaines de profondeur constante, sur lesquels il faut déterminer les potentiels des vitesses à partir de l'écriture de façon intégrale des conditions de continuité et de pression aux frontières des domaines successifs.

**Expressions des potentiels de vitesse** On considère encore ici une houle d'amplitude faible et de vecteur d'onde  $k_0$ , se propageant au-dessus d'un fond de profondeur constante  $-h$  alors la solution pour le potentiel des vitesses correspond à la somme de deux ondes planes se propageant respectivement dans les directions  $+x$  et  $-x$ , soit (1.15). On considèrera le cas général d'une onde d'incidence d'angle  $\theta_0$  par rapport à  $\mathcal{O}x$ , et pour cela on pose  $\mu = k_0 \sin(\theta_0)$ . Alors, d'après Kirby & Dalrymple (1983 [102]), la solution générale pour le potentiel des vitesses s'inspire de la décomposition classique (1.14) avec un terme correctif pour tenir compte du décalage d'incidence:

$$\Phi(x, y, z, t) = \phi(x, z) \exp(i(\omega t - \mu y)) \quad (1.106)$$

Le potentiel réduit, pour tenir compte des variations plus abruptes de bathymétrie, va faire intervenir des modes locaux évanescents (c'est-à-dire qui n'ont d'influence remarquable qu'aux abords très proches de la discontinuité topographique). Plus précisément, il va s'exprimer comme la somme du mode propagatif, vu précédemment, et de  $n$  modes évanescents, construits sur le modèle du mode propagatif, c'est-à-dire comme le produit d'amplitudes et de profils verticaux et de termes évanescents suivant  $\mathcal{O}x$ .

$$\phi(x, z) = A^\pm \exp(\pm i k_{0x} x) \cosh(k_{0x}(z + h)) + \sum_n B_n^\pm \exp(\pm k_{nx} x) \cos(k_{nx}(z + h)) \quad (1.107)$$

A noter que contrairement aux modes propagatifs, les ondes évanescentes ne se propagent pas. Leur nombre est *a priori* infini pour tendre vers la représentation la plus précise possible du champ de houle près de l'inhomogénéité de bathymétrie, mais dans la pratique, pour une

résolution numérique de coût raisonnable, on n'en conservera qu'un certain nombre. Par contre, leur longueur d'atténuation est conditionnée par un vecteur d'onde propre à chacun des modes évanescents, noté  $k_n$  et déterminé comme solution d'une relation de dispersion propre. Le nombre d'onde  $k_0$  du mode propagatif est toujours déterminé par la relation de dispersion propagative locale (1.16), tandis que les nombres d'ondes évanescents, eux, sont solutions des "relations de dispersion" locales évanescentes, relations obtenues en remplaçant  $k$  par  $ik$  dans la relation de dispersion propagative (1.143):

$$\omega^2 = \sigma^2 = -gk_n \tan(k_n h) = gk_0 \tanh(k_0 h) \quad (1.108)$$

Ici, nous sommes dans le cas d'une houle d'incidence non nulle, la propagation va donc faire intervenir des nombres d'onde projetés suivant la direction normale aux discontinuités de la bathymétrie. Nous avons  $k_0$  donné par la relation de dispersion, nous avons à présent dans le cas 2D  $\tilde{k}_0 = \tilde{k}_{0x} + \tilde{k}_{0y}$ , où  $\tilde{k}_{0x} = cste$  et  $\tilde{k}_{0y} = cste$ , ou dans notre cas 1D  $\tilde{k}_0 = \tilde{k}_{0x}$  avec

$$\tilde{k}_{0x} = \sqrt{k_0^2 - \mu^2} \quad (1.109)$$

et de la même façon, pour les modes évanescents:

$$\tilde{k}_{nx} = \sqrt{k_n^2 + \mu^2} \quad (1.110)$$

Notons que  $\tilde{k}_{0x}$  devient imaginaire si  $k_0 < \mu$ . L'onde devient alors évanescente, on retrouve ici l'angle critique d'incidence de la relation de Snell-Descartes (1.45). Cette méthode peut s'appliquer pour des fonds variables, que ces variations se présentent comme une succession de domaines de profondeur constante ou comme une fonction continue  $h(x)$  qui sera approchée par une fonction continue par morceaux de domaines de profondeur constante. Il s'agit alors d'imposer une continuité des conditions limites aux frontières des domaines successifs.

À présent que nous avons défini l'expression du potentiel vitesses sur un domaine de façon générale, voyons quelles conditions de continuité entre domaines ce potentiel doit vérifier.

**Condition de continuité sur une frontière entre deux domaines** Lorsqu'une onde se propage entre deux domaines de profondeur différente, la variation de hauteur d'eau va jouer le rôle de variation d'indice de milieu, et va modifier les conditions de propagation de la houle. Si le nombre d'onde dans le milieu aval est  $k$  tel que  $k < \mu$  alors l'onde incidente sera totalement réfléchiée. Sinon, la houle va être partiellement réfléchiée et les coefficients de réflexion et transmission seront calculés selon  $\mathcal{O}x$  comme pour une incidence normale, avec la forme réduite du potentiel des vitesses.

Considérons un premier domaine semi-infini amont, de profondeur  $h_1$ , et un deuxième domaine semi-infini aval, commençant à  $x = x_m$  et de profondeur  $h_2$  telle que  $h_1 > h_2$ . Pour ces deux domaines, les vitesses horizontales et la pression dynamique dans le fluide sont définies comme usuellement à partir du potentiel des vitesses, respectivement par 1.20 et par 1.22. On va donc exprimer la nécessaire continuité des vitesses, par une formulation faible intégrale, respectivement pour le mode propagatif puis pour les modes évanescents  $\forall n = 1, 2, \dots$  :

$$\int_0^{h_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \chi_1 dz = \int_0^{h_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \chi_1 dz \quad (1.111)$$

$$\int_0^{h_1} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \psi_{1,n} dz = \int_0^{h_2} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \psi_{1,n} dz \quad (1.112)$$

La continuité des pressions, après réduction au potentiel réduit et dérivation temporelle, revient à :

$$\int_0^{h_1} \phi_1 \chi_2 dz = \int_0^{h_2} \phi_2 \chi_2 dz \quad (1.113)$$

$$\int_0^{h_1} \phi_1 \psi_{2,n} dz = \int_0^{h_2} \phi_2 \psi_{2,n} dz \quad (1.114)$$

avec  $\chi_i = \cosh[k_{ix}(z + h_i)]$  et  $\psi_{i,n} = \cos[k_{nix}(z + h_i)]$ .

Si l'on choisit de ne considérer que  $P$  modes évanescents pour converger, on obtient un système de  $2(P + 1)$  équations, mais largement simplifié par le fait que  $\chi_i$  et  $\psi_{i,n}$  forment un système orthogonal pour le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_{z=-h}^{z=0} f(z) \cdot g(z) \cdot dz. \quad (1.115)$$

**Solution finale sur l'ensemble d'un domaine divisé en  $N+1$  sous-domaines** On va appeler "marche" la frontière entre deux sous-domaines de profondeurs différentes, et on va considérer un domaine de propagation constitué de  $N$  marches donc  $N+1$  sous-domaines, respectivement notés  $d = 0, \dots, N$ . Pour les  $N$  marches, nous pouvons écrire les conditions de continuité présentées au paragraphe précédent (1.111), (1.112), (1.113) et (1.114). On obtient un système de  $2N(P + 1)$  équations linéaires complexes, avec  $2N(P + 1)$  coefficients complexes à déterminer. Pour ce faire, on peut poser des conditions de bord. Pour le premier et le dernier domaine, d'indices respectifs 0 et  $N$  et qui sont semi-infinis, les modes évanescents ne doivent pas persister quand  $x \rightarrow \pm\infty$ , donc cela impose dans (1.107) que  $B_{n,0}^- = B_{n,0}^+ = 0 \forall n = 1, 2, \dots$ . Dans le premier domaine semi-infini,  $A_0^-$  correspond à l'amplitude du potentiel pour l'onde incidente (à ne pas confondre avec l'amplitude physique de la forme  $a \sin(\omega t)$ ). Dans le dernier domaine semi-infini, comme précédemment on impose qu'il n'y ait aucune onde réfléchie, pour éviter toute réflexion parasite due à l'extrémité du domaine de propagation, cela se traduit par  $A_N^+ = 0$ . On peut alors résoudre le système d'équations, déterminer l'ensemble des coefficients complexes et en déduire les coefficients de réflexion et de transmission :

$$R = \frac{|A_0^+|}{|A_0^-|} \quad (1.116)$$

$$T = \frac{|A_N^+|}{|A_0^-|} \frac{\chi_N(0)}{\chi_0(0)} \quad (1.117)$$

Comme précédemment, ces coefficients vérifient la conservation de l'énergie pour une houle d'incidence oblique:

$$R^2 + T^2 \left( \frac{n_N k_{0,0}^2 k_{0x,N}}{n_0 k_{0,N}^2 k_{0x,0}} \right) = 1 \quad (1.118)$$

où  $k_{0,0}$  est le nombre d'onde propagatif sur le premier domaine,  $k_{0,N}$  sur le dernier domaine,  $k_{0x,0}$  le nombre d'onde propagatif projeté suivant  $Ox$  sur le premier domaine et  $k_{0x,N}$  sur le dernier domaine. On a défini le coefficient  $n_i$  caractéristique du domaine  $i$  associé comme suit,  $\forall i = 0, 1, \dots, N$  :

$$n_i = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2k_{0,i} h_i}{\sinh(2k_{0,i} h_i)} \right] \quad (1.119)$$

Lorsque les domaines 0 et N sont de même profondeur (et donc de même indice), (1.118) se réduit à l'équation bien connue  $R^2 + T^2 = 1$ . Le nombre de modes évanescents retenus va conditionner la convergence vers la solution du problème, à savoir pour le champ lointain par exemple une réflexion qui ne dépend plus du nombre P. Pour un fond continuellement variable, la méthode consiste à le discrétiser en marches successives (Guazzelli et al., 1992 ([78])), conduisant à une représentation erronée de la dynamique près du fond. Belibassakis et Athanassoulis ont proposé d'ajouter un mode supplémentaire à l'expression du potentiel des vitesses afin de conserver une variation continue de la bathymétrie, c'est le système des modes couplés qui sera détaillé plus tard (1.152).

### 1.3.3 Extensions du modèle de Berkhoff selon l'ordre de variation de la pente du fond

Suite à l'équation de Berkhoff, beaucoup d'autres modèles s'en sont inspirés pour traiter la propagation de vagues de petite amplitude au-dessus de bathymétries faiblement variables: Vainberg & Maz'ja (1973 [197]), Fitz-Gerald (1976 [67]), Fitz-Gerald & Grimshaw (1979 [68]), Simon & Ursell (1984 [171]), Kuznetsov (1993 [107]), Evans & Kuznetsov (1997 [64]). Parmi eux, deux catégories se distinguent. Tout d'abord, dans la lignée de la méthode exacte présentée précédemment, d'autres méthodes générales vont résoudre les problèmes linéaires de façon directe: pour n'en citer que quelques uns Mei (1978 [127], 1983 [128]), Euvrard & al (1981 [61]), Yeung (1982 [208]). Les autres modèles sont construits sur des méthodes de discrétisation spatiale : Devillard, Dunlop & Souillard (1988 [50]), Rey (1992 [157]), Evans & Linton (1994 [63]). Cependant, ces modèles ont un coût de calcul considérable et sont inaptes aux simulations 3D.

**Equation de pente douce (MSE) de Kirby (1984)** C'est alors que les travaux de Booij (1981 [24]) et Liu (1983 [111]) prennent le relais et préparent le terrain pour l'étude de Kirby (1984 [96]). Ce dernier, à partir du modèle de Berkhoff, obtient une équation linéaire elliptique qui combine les effets de la réflexion, de la réfraction et de la diffraction (via un développement par perturbations) sur une bathymétrie faiblement variable. Cette équation, appelée Equation de Pente Douce ou 'Mild-slope Equation' (M.S.E.) sera largement utilisée, notamment pour modéliser l'agitation portuaire. Nous allons la présenter ici sous sa forme initiale, en l'absence de courant.

Nous reprenons les hypothèses et notations présentées plus tôt. La relation de dispersion de la houle est de la forme (1.16). Avant d'entrer en détails dans la théorie linéaire développée par Kirby, faisons un bref rappel sur le principe variationnel et le Lagrangien. Le Lagrangien  $\mathcal{L}$  a été formulé pour la première fois dans le cadre de la propagation de la houle dans les années 1960 et 1970, par Luke (1967 [117]) puis Whitham (1970 [204], 1974 [205]). Le Lagrangien d'un système isolé est la différence entre les énergies cinétique et potentielle de ce système, et il est donc logiquement nul pour un système à l'équilibre. On peut écrire le principe variationnel autour de la position d'équilibre, pour décrire l'évolution d'une houle de faible amplitude. En effet, la faible amplitude permet de voir l'élévation de la surface libre comme une petite fluctuation autour de la position de repos :

$$\delta J = \delta \int_t \int_x \mathcal{L}.dx.dt = 0 \quad (1.120)$$

écrite avec la fonctionnelle  $J$ . Suivant ce principe et toujours dans la théorie potentielle linéaire, Luke (1967 [117]) démontre l'égalité entre le Lagrangien  $\mathcal{L}$  de l'écoulement et l'intégrale

du terme de pression sur la hauteur d'eau locale :

$$\mathcal{L} = \int_{-h(x,t)}^{\eta(x,t)} -\frac{p}{\rho} dz \quad (1.121)$$

A partir de là, nous pouvons aisément retrouver les conditions aux limites habituelles présentées dans la section 2 de ce chapitre.

Dans la théorie potentielle linéaire et sous l'hypothèse de faible pente, Kirby calcule le Lagrangien  $\mathcal{L}$  de l'écoulement à partir de l'expression (1.121). Il s'agit alors d'exprimer l'expression obtenue par rapport au potentiel réduit  $\phi$  et l'élévation de surface libre  $\eta$ , et de l'insérer dans l'équation mild-slope de Berkhoff (1.57) pour obtenir:

$$\frac{D^2\phi}{Dt^2} - \vec{\nabla}(CC_g\vec{\nabla}\phi) + (\omega^2 - k^2CC_g)\phi = 0 \quad (1.122)$$

Si l'on choisit de ne pas travailler avec le potentiel complexe mais avec sa décomposition en mode locaux, en ne gardant que le mode propagatif (pour caractériser le champ de la houle hors des inhomogénéités), alors le potentiel se décompose comme suit:

$$\phi(x, y, z) = \varphi_0(x, y).Z_0(x, z) \quad (1.123)$$

Avec la fonction  $Z_0(x, z)$  fonction propre de la relation de dispersion, fonction de Green pour l'intégrale (1.52) et profil vertical de la forme :

$$Z_0 = \frac{\cosh(k_0(z+h))}{\cosh(k_0h)} \quad (1.124)$$

L'équation prendra sa forme finale:

$$CC_g\nabla^2\varphi_0 + \nabla CC_g\nabla\varphi_0 + k^2CC_g\varphi_0 = 0 \quad (1.125)$$

D'autres études ont essayé d'élargir le champ d'application de l'équation de Berkhoff, par exemple à des houles non-linéaires ou instationnaires, se propageant au-dessus de bathymétries plus abruptes. En 1986, Kirby ([97]) considère la propagation d'une houle au-dessus d'une topographie pouvant se décomposer en deux parties: une première variant dans l'approximation mild-slope, et la deuxième composée de rides et superposée à la première. Son modèle tient compte des modes évanescents, et le potentiel de la houle dépend du temps et néglige les termes d'ordre  $\mathcal{O}(k\delta_r)$ , d'ordre  $\mathcal{O}(|\vec{\nabla}_h h|^2)$  et d'ordre  $\mathcal{O}(\vec{\nabla}_h^2 h)$ , où  $\delta_r$  est la variation de la profondeur autour de sa valeur moyenne. L'équation s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}_h(CC_g\vec{\nabla}_h\phi) + (\omega^2 - k^2CC_g)\phi + \frac{g}{\cosh^2(kh)}\vec{\nabla}_h(\delta_r\vec{\nabla}_h\phi) = 0 \quad (1.126)$$

Il s'agit de l'équation de pente douce étendue.

**Equation de pente douce modifiée (MMS) de Chamberlain & Porter (1995)** L'équation de pente douce de Kirby sera modifiée plus tard par Chamberlain & Porter (1995 [31], 1997 [151]) pour prendre en compte à un ordre supérieur la pente et la courbure du fond, c'est-à-dire des variations topographiques plus grandes et plus rapides. Pour cela, les termes d'ordre  $\mathcal{O}(|\vec{\nabla}_h h|^2)$  et d'ordre  $\mathcal{O}(\vec{\nabla}_h^2 h)$ , négligés dans l'équation de pente douce étendue, seront cette fois conservés. Nous obtenons alors l'équation de pente douce modifiée, ou Modified Mild Slope equation (M.M.S):

$$\vec{\nabla}_h(CC_g \vec{\nabla}_h \phi) + (k^2 CC_g + \frac{r}{g})\phi = 0 \quad (1.127)$$

avec le terme  $r = \mathcal{O}(|\vec{\nabla}_h h|, \vec{\nabla}_h^2 h)$

$$r = \int_{-h}^0 f(z) \vec{\nabla}_h^2 f(z) . dz + \vec{\nabla}_h h . [f(z) \vec{\nabla}_h f(z)]_{z=-h} \quad (1.128)$$

En passant par la décomposition en modes locaux, l'équation de pente douce modifiée peut se reformuler comme suit :

$$CC_g \nabla^2 \varphi_0 + \nabla CC_g \nabla \varphi_0 + (k^2 CC_g + g \cdot \langle \nabla^2 Z_0, Z_0 \rangle + g \left[ \frac{\partial Z_0}{\partial z}(-h) + \nabla Z_0 \cdot \nabla h \right] Z_0(-h)) \varphi_0 = 0 \quad (1.129)$$

où le terme  $\langle \nabla^2 Z_0, Z_0 \rangle$  fait référence au produit scalaire défini par (1.115).

La prise en compte du second ordre de la pente et de la courbure du fond apparaissent dans les termes  $g \cdot \langle \nabla^2 Z_0, Z_0 \rangle + g \left[ \frac{\partial Z_0}{\partial z}(-h) + \nabla Z_0 \cdot \nabla h \right] Z_0(-h)$  faisant intervenir les dérivées premières et secondes de la fonction  $Z_0$ , cette dernière dépendant directement du nombre d'onde  $k_0$ , qui lui-même dépend de la profondeur d'eau, de la pente et de la courbure du fond. Lorsque ces termes sont négligés, l'équation se réduit à l'équation de pente douce étendue de Kirby (1.125), qui ne tient compte qu'au premier ordre de la pente du fond. L'équation de pente douce modifiée de Chamberlain & Porter (1.127) va d'ailleurs s'avérer plus efficace sur des bathymétries rapidement variables.

En suivant une approche différente, Chandrasekera & Cheung (1997 [32]) obtiendront toutefois une formulation équivalente. Suh et al (1997 [184]) étendront la formulation de Chamberlain & Porter en considérant les variations temporelles de la houle, sous la formulation suivante :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}_h(CC_g \vec{\nabla}_h \phi) + (\omega^2 - k^2 CC_g - \frac{r}{g})\phi = 0 \quad (1.130)$$

**Système de Berkhoff généralisé de Massel (1993):** Mais l'importance du fond et de ses caractéristiques ne s'arrête pas là. Les modes locaux ou modes évanescents ont été une autre piste de développement, après la découverte de leur rôle significatif sur la propagation de la houle en présence de bathymétrie abrupte. Ils viennent s'ajouter au mode propagatif dans le potentiel des vitesses solution. De nombreux travaux en ont fait leur point de mire: Guazzelli et al. (1992 [78]) les utilisent pour décrire le comportement de la houle face à des obstacles sinusoïdaux, tandis que Rey (1992 [157]) applique la méthode numérique de résolution de Takano (1960 [187]) à la modélisation de la propagation de la houle au-dessus d'obstacles abrupts. Mei étudie également les modes évanescents dans une configuration de résonance sous-harmonique: des tempêtes impactant le lagon vénitien (1994 [131]). Kirby & Dalrymple l'ont particulièrement mis en avant dans leurs travaux sur l'effet tunnel (1983 [102]). Dix ans plus tard, Massel développe le système de Berkhoff généralisé (1993 [123]): un modèle couplé basé sur l'équation de pente douce, étendue pour tenir compte des effets d'une bathymétrie plus variable grâce aux modes évanescents. On rappelle que le potentiel s'écrit comme :  $\Phi(x, z, t) = \Re(\phi(x, z) \exp(-i\omega t))$  où  $\phi(x, z)$  est le potentiel complexe de la houle. La suite (détaillée dans [178]) est basée à nouveau sur la décomposition du potentiel des vitesses en modes locaux, sous la forme :

$$\phi(x, z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n(x) \cdot Z_n(x, z) \quad (1.131)$$

où les fonctions  $Z_n(x, z) \forall n = 0, 1, \dots$  sont obtenues comme les fonctions propres de la relation de dispersion, appelée aussi problème local vertical de Sturm-Liouville et formulés sur la colonne d'eau, soit  $-h(x) < z < 0$ . La fonction  $Z_0$  a toujours la même formulation et les autres fonctions sont de la forme :

$$Z_n = \frac{\cos(k_n(z+h))}{\cos(k_n h)} \forall n = 1, 2.. \quad (1.132)$$

Comme précédemment, le mode 0 correspond au mode propagatif et les modes 1, 2, ... sont les modes évanescents considérés. Le nombre d'onde du mode propagatif est toujours déterminé par la relation de dispersion propagative locale et les nombres d'ondes évanescents, eux, sont solutions des relations de dispersion locales évanescentes présentées ici.

Comme précédemment également, la cinématique et la dynamique du problème seront décrites, après linéarisation, par le principe variationnel de Luke (1967 [117]). Nous obtenons finalement une reformulation du problème linéarisé d'interaction houle-bathymétrie sous la forme d'un système d'équations couplées, ayant pour inconnues les potentiels complexes  $\varphi_n(x)$ :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} \nabla^2 \varphi_n + b_{mn} \nabla \varphi_n + c_{mn} \varphi_n = 0 \quad (1.133)$$

Les coefficients  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  et  $c_{mn}$  sont uniquement fonctions de  $x$  et sont donnés par :

$$a_{mn} = \langle Z_m, Z_n \rangle \quad (1.134)$$

$$b_{mn} = 2 \langle Z_m, \nabla Z_n \rangle + \nabla h \cdot Z_m(-h) \cdot Z_n(-h) \quad (1.135)$$

$$c_{mn} = \langle Z_m, \Delta Z_n \rangle + Z_m(-h) \cdot \left( \frac{\partial Z_n}{\partial z} \Big|_{z=-h} + \nabla Z_n \cdot \nabla h \right) \quad (1.136)$$

Avec  $Z_{mn} = Z_m(z=0) \cdot Z_n(z=0) = 1$ . Les crochets représentent toujours le produit scalaire sur la colonne d'eau, défini par 1.115.

On remarque qu'en ne conservant que le mode propagatif, on retombe sur l'équation de Chamberlain & Porter :

$$\nabla(CC_g \nabla \varphi_0) + [k_0^2 CC_g + gc_{00}^2] \varphi_0 = 0 \quad (1.137)$$

avec:

$$c_{00} = \langle \nabla^2 Z_0, Z_0 \rangle + \nabla h \cdot \nabla Z_0 \cdot Z_0(-h) \quad (1.138)$$

Là encore, on constate que le terme  $c_{00}$  est bien le terme directement associé aux effets au second-ordre de la pente et de la courbure du fond. Cependant, dans le système de Berkhoff généralisé, la condition de fond proposée impose de considérer le fond comme constant par morceaux. Il est donc malgré tout encore difficile de représenter correctement le potentiel de la houle près du fond, et la solution ne vérifie pas la conservation de l'énergie. Ce problème sera pallié plus tard (voir Section 1.5).

### 1.3.4 Cas particulier: la résonance de Bragg

L'évolution dynamique de fonds sédimentaires vers des topographies quasi-sinusoidales (bandes ou barres de sable) sous l'action d'ondes partiellement stationnaires assure une protection partielle du littoral contre l'action de la houle incidente par réflexion partielle de son énergie. De nombreuses études ont donc été menées sur la propagation d'ondes de gravité au-dessus de fonds variables, et en particulier des fonds sinusoidaux, dans l'espoir d'exploiter ce phénomène de réflexion au travers d'ouvrages dédiés à la protection du littoral.

En effet, pour une houle d'incidence normale en l'absence de courant, seule la longueur d'onde de la houle est conditionnante pour observer la résonance de Bragg. Elle doit simplement être égale au double de la longueur d'onde des variations de fond, peu importe l'amplitude de ces variations. Si on reprend la formulation (1.63) d'un fond ondulé d'amplitude  $D$ , ainsi que l'expression du potentiel des vitesses établie ci-dessus (1.69) à l'ordre  $\varepsilon$  et que l'on calcule sa dérivée partielle selon  $x$  pour  $K = 2k$ , la condition de Bragg ou "résonance de Bragg" est la suivante:

$$\begin{aligned} \delta \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = & -\frac{1}{2}ikD\psi^- \exp(i(\omega t - 3kx)) + \frac{1}{2}ikD\psi^+ \exp(i(\omega t - kx)) \\ & -\frac{1}{2}ikD\psi^- \exp(i(\omega t + kx)) + \frac{1}{2}ikD\psi^+ \exp(i(\omega t + 3kx)) + * \end{aligned} \quad (1.139)$$

Le troisième terme de droite, proportionnel à  $\exp(i(\omega t + kx))$  correspond à une solution d'onde réfléchie, tout comme sa dérivée partielle par rapport à  $x$ . Nous avons donc la démonstration qu'un fond modulé réfléchit bien une partie de l'énergie d'une onde incidente. Il a également été prouvé que la quantité maximale d'énergie réfléchie lors de la résonance de Bragg augmente avec le nombre de modulations du fond (Belzons et al, 1991 [19]).

Ainsi, ce phénomène a pu être largement étudié ces dernières années. De nombreuses campagnes expérimentales ont étudié l'efficacité du processus : Heathershaw (1982 [83]), Davies (1982 [44]), Davies & Heathershaw (1984 [45]), Hara & Mei (1987 [81]), Liu (1987 [112]), Rey (1991 [155]), ou encore Bailard & al (1992 [12]), Guazzelli et al. (1992 [78]) et Rey et al. (1995 [157]). L'impact de bandes de sables parallèles à la côte sur la houle océanique ayant ainsi été prouvé, les structures côtières reprenant ce concept se sont multipliées sur les littoraux: Dolan & Dean (1985 [51]), Evans (1940 [65]), Boczar-Karakiewicz & Davidson-Arnott (1987 [23]), Komar (1998 [105]), Moore et al. (2002 [138]). Si la plage est relativement raide, la houle transmise après les barres sableuses ou l'ouvrage de défense peut subir une nouvelle réflexion au niveau du rivage, qui va s'ajouter à l'effet précédent : Miche (1951 [135]), Elgar et al (1994 [57]). Ces interférences entre les barres et le rivage donnent lieu à une amplification de l'énergie renvoyée vers le large (Yu & Mei, 2000 [211, 212]). Une autre configuration développée est celle de Cho, Lee & Lee (1996 [35]), qui ont établi un ensemble d'équations pour décrire l'évolution d'ondes en eau peu profonde au-dessus d'un fond sinusoidal sur une plage en pente. Sont incluses les interactions non-linéaires entre les différentes composantes de la houle ainsi que l'effet de shoaling (amplification de la houle à l'approche de la côte, phénomène détaillé dans la sous-section suivante).

En parallèle de ces travaux sont menées des études théoriques et numériques: Mei (1985 [129]) propose une approximation asymptotique pour résoudre la réflexion de Bragg d'une houle, d'incidence normale ou oblique, au-dessus de barres sableuses périodiques. Les équations linéarisées sont résolues en utilisant une méthode par perturbations multi-échelles, pour obtenir les coefficients de réflexion et de transmission. Ces résultats théoriques seront confrontés aux données expérimentales d'Heathershaw ([83]). Plus récemment, l'équation de pente douce modifiée, très efficace pour les bathymétries variables, a été appliquée à des configurations de

résonance de Bragg: Miles & Chamberlain (1998 [136]), Zhang et al (1999 [213]).

**Approximation faible pente de Berkhoff, étendue par Kirby (1986) pour un fond modulé** Mais on doit la plus importante extension de l'approximation faible pente à Kirby (1986 [97]) et Massel (1989 [122]), et nous allons la présenter brièvement ici. On suppose un fond modulé d'amplitude d'oscillations  $\delta(x)$  autour de la profondeur moyenne  $-h$ . On peut donc exprimer la condition limite au fond comme un développement de Taylor, sous la forme 1.65. L'équation faible pente, de forme initialement définie par Berkhoff comme (1.57), devient alors :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) + k^2\varphi - \frac{g}{CC_g \cosh^2(kh)} \frac{d}{dx}\left(\delta \frac{d\varphi}{dx}\right) = 0 \quad (1.140)$$

Pour résoudre cette équation, on impose des conditions limites aux bords du fond ondulé, comme par exemple en condition d'entrée:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = ik(\varphi - 2\varphi_i) \quad (1.141)$$

avec  $\varphi_i = \exp(-ikx)$  l'onde incidente d'amplitude 1, et en condition de sortie seulement une onde progressive (pas de réflexion parasite due à l'extrémité du domaine) :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -ik\varphi \quad (1.142)$$

Pour calculer le coefficient de réflexion  $R$ , on exprime l'onde réfléchie comme suit :  $\varphi_r = R \exp(ikx)$  et on utilise la relation suivante en amont du domaine de calcul  $\varphi = \varphi_i + \varphi_r = \exp(-ikx) + R \exp(ikx)$ .

Concernant les interactions non-linéaires entre une houle d'incidence oblique et un fond ondulé infini, Mitra & Greenberg (1984 [137]) ont mis en évidence des échanges périodiques d'énergie entre les ondes primaires et les ondes résonantes. En s'appuyant sur la théorie non-linéaire, Liu & Yue (1998 [114]) ont étudié différentes classes de réflexion de Bragg par fond ondulé. Cho & Lee (2000 [36]) ont approfondi le sujet en considérant une bathymétrie variant arbitrairement puis un fond sinusoïdal à une puis deux composantes. Xu et al (2014 [207]) se sont penchés sur l'influence des caractéristiques du milieu : l'angle d'incidence de la houle, la profondeur d'eau ou encore la pente du fond. Ardhuin & Herbers (2002 [7]) ont, eux, étudié la réflexion de Bragg pour des houles faiblement non-linéaires. La résonance de Bragg a également été étudiée en eau peu profonde: Yoon & Liu (1987 [209]) ont modélisé une réflexion de houle par résonance sur fond ondulé, et plus tard Chen & Guza (1998 [34]) ont étendu l'étude par une approche multi-échelles pour modéliser cette fois la réflexion par résonance d'une houle confinée par une bathymétrie périodique parallèle à la côte. En s'appuyant sur l'équation de Boussinesq, Liu & Cho (1993 [113]) ont démontré que des ondes longues interagissant avec un train d'ondes plus courtes peuvent être réfléchies par résonance par un champ de barres sableuses. Toujours concernant des barres sableuses parallèles à la côte, Elgar & Raubenheimer (2003 [58]) ont étudié leur impact dans une baie, sur la houle et les tempêtes.

### 1.3.5 Dissipation

Les modèles de houle présentés ci-dessus supposent un fluide parfait. Le plus souvent dans la réalité cette hypothèse est justifiée car le taux d'atténuation des ondes par longueur caractéristique reste faible. Pourtant, les causes d'atténuation peuvent être multiples: déferlement par

instabilité de la surface, dissipation en volume par viscosité, effets de tension superficielle (ce cas a été évoqué plus haut en limite à la théorie linéaire), transfert d'énergie par effets non-linéaires, mais surtout interactions avec la bathymétrie : frottements sur le fond et déferlement. En profondeur finie, ces deux derniers sont les principales causes de perte d'énergie de la houle. N'étant pas l'objet de notre étude, ils ne seront que brièvement évoqués ici.

Le mouvement du fluide induit par le passage de l'onde est oscillant au-dessus du fond, et une partie de l'énergie est dissipée par frottements au fond. Ce mode de dissipation d'énergie peut d'ailleurs comprendre un transfert d'énergie cinétique aux sédiments ou à la flore marine par impulsion de mouvement. Pour prendre en compte ce phénomène, on considère près du fond une couche limite. En dehors de celle-ci, l'écoulement est celui calculé sous l'hypothèse du fluide parfait. A l'intérieur, le mouvement oscillant au-dessus du fond pour une houle d'Airy permettra de poser comme vitesse au fond  $U(x, z = -h, t) = U_0 e^{i(\omega t - kx)}$ . De plus, l'écoulement sera supposé laminaire et devra satisfaire les équations de Prandtl. Dans la couche limite, il existe un déphasage, qui est fonction de l'altitude  $z$ . On peut ainsi définir l'épaisseur de la couche limite comme la position pour laquelle la vitesse est égale à la vitesse hors couche limite à 1% près. Pour indication, pour une houle de période 1s se propageant au-dessus d'un sol peu rugueux, la couche limite mesure 2.3mm d'épaisseur, et si la période passe à 10s, l'épaisseur monte à 7.3mm. Ces épaisseurs restent très faibles au vu des profondeurs que l'on considèrera dans cette étude (environ 25cm de hauteur d'eau pour des périodes de houle comprises entre 0.60 et 1.11s: en grossière approximation la période tourne autour de 1s donc la couche limite reste sous les 2.5mm d'épaisseur, soit moins de 1% de l'épaisseur totale). Dans notre dispositif expérimental, le fond ayant été conçu le plus lisse possible, il est donc raisonnable de supposer, en première approximation, que les frottements au fond sont négligeables.

## 1.4 Interaction houle-courant

Nous avons brièvement évoqué le courant dans les paragraphes précédents, nous allons à présent nous pencher plus en détails sur ce phénomène marin parfois impressionnant (Gulf Stream: jusqu'à 130 millions de  $m^3/s$  pour une vitesse de 1.5m/s, Kuroshio: 400m de profondeur et une vitesse allant jusqu'à 3m/s), souvent invisible, mais peut-être qui fera probablement partie intégrante de la transition énergétique, grâce aux hydroliennes.<sup>2</sup>

**Définition d'un courant et généralités** Le courant peut se définir comme un mouvement moyen de l'eau, quasi-stationnaire et dans une direction privilégiée. Il existe trois principaux types de courants. Tout d'abord, les courants de surface, créés par le vent: ils atteignent une vitesse moyenne de 0.1m/s et s'étendent sur la couche supérieure des océans, entre 100 et 200m de profondeur au maximum. Ensuite, la circulation thermohaline: il s'agit de mouvements de masse d'eau à l'échelle planétaire et en grande prondeur, engendrés par une différence de densité entre les eaux de surface chaudes, plongeantes, et les eaux abyssales, froides et donc plus denses. Enfin, les courants de marée: multi-périodiques à échelles temporelles courtes, ils sont particulièrement surveillés pour les activités humaines. Les courants côtiers à l'origine de cette étude peuvent être issus des marées comme du vent. Nous considèrerons uniquement des courants formés, loin de leur zone de formation.

**Courant verticalement constant** Le milieu côtier est un environnement complexe et difficile à maîtriser, avec des courants forts et imprévisibles. Il peut d'agir de courants sagittaux,

---

<sup>2</sup><https://www.planete-energies.com/fr/medias/decryptages/1-energie-des-courants-marins>

de courants de marées (Soulsby 1990 [179]), ou encore de courants créés par le vent (Jonsson 1990 [91]). Parmi les précurseurs dans l'étude des interactions houle-courants, on retrouve les travaux théoriques de Longuet-Higgins & Stewart (1961 [116]), Whitham (1974 [205]), Peregrine (1976 [149]) et Jonsson (1990 [91]). Tous ces modèles supposent que la houle voit ses caractéristiques varier lorsqu'elle se propage au-dessus de courants inhomogènes. Il est donc logique de retrouver les interactions houle-courant impacter les phénomènes classiques de propagation de houle, comme la réflexion. La présence d'un courant, qu'il soit oblique ou dans la même direction que la houle, dans le même sens ou à contre courant, peut amoindrir voire bloquer la transmission de l'énergie des vagues. Shyu & Tung (1999 [169]) supposent un courant stationnaire, unidirectionnel et irrotationnel et utilisent la théorie linéaire et l'équation de Laplace pour déterminer la réflexion de la houle. Plus tard, Suh et al. (2001 [185]) ont mis au point une méthode numérique pour identifier la réflexion d'une houle par un courant connu, à partir de résultats d'une campagne expérimentale en canal. Mais les applications concrètes de l'étude des interactions houle-courant ne s'arrêtent pas là, avec pour exemples: l'explication de la modification de l'amplitude de la houle dans les circulations de Langmuir (Smith, 2001 [177]), la mise en évidence de grandes amplitudes de houle lorsque les vagues se propagent avec une incidence oblique et à contre-courant (Mei, 1983 [128]), ou bien l'explication de l'apparition de vagues géantes en présence de courants des Aiguilles (Smith, 1973 [175], Lavrenov & Porubov, 2006 [109]). De façon générale, les courants verticalement uniformes ont rapidement été intégrés dans les modèles d'interaction houle-bathymétrie, y compris dans l'Equation de Pente Douce et les Systèmes de Modes Couplés.

**Influence du courant dans les phénomènes de propagation** Le profil de courant est à prendre en compte dans toute étude de ces phénomènes 3D. En effet, les phénomènes de réfraction-diffraction ne se limitent pas aux cas de bathymétries variables: la direction de propagation est modifiée à partir du moment où la célérité de l'onde n'est pas constante le long de la ligne de crête. Or la célérité dépend de la profondeur d'eau mais aussi de la présence ou non de courant, qui va modifier la relation de dispersion. Pour un courant unidirectionnel homogène sur la colonne d'eau, de vitesse de surface  $U_0$  selon  $x$ , et une houle linéaire se propageant également dans la direction  $Ox$ , cette relation devient

$$(\omega - kU_0)^2 = \sigma^2 = gk \tanh(kh) \quad (1.143)$$

où  $\omega$  est la fréquence de l'onde dans un repère fixe, et  $\sigma$  sa fréquence dans un repère en mouvement à la vitesse  $U_0$ .  $\sigma$  est la pulsation dite "intrinsèque" de la houle : la pulsation dans un référentiel en translation rectiligne à vitesse  $U_0$  par rapport à un référentiel absolu. Ainsi, pour des houles se propageant dans la direction et le sens du courant, la longueur d'onde et la célérité augmentent. Par contre, pour un courant opposé à la houle, la longueur d'onde et la célérité diminuent, jusqu'à une valeur limite au-delà de laquelle la houle ne se propage plus. Par profondeur infinie et dans l'approximation linéaire, cette valeur est  $|U| = \frac{C_0}{4}$  où  $C_0$  est la célérité de l'onde en l'absence de courant. En pratique, à mesure que la vitesse du contre-courant augmente, la cambrure de l'onde augmente fortement jusqu'à se briser et la condition de blocage est rarement atteinte. Concernant la réfraction, elle peut survenir en présence d'un gradient horizontal de courant: lorsque le courant  $U$  varie lentement dans la direction transverse, il modifie ainsi la célérité de l'onde le long de la crête des vagues. L'étude numérique de Jonsson & Skovgard (1978 [89]) suppose un courant verticalement constant mais à gradient horizontal, et utilise la loi de Snell-Descartes pour prédire le comportement de la houle sujette à la réfraction par la présence de ce courant. Egalement pour un courant à gradient

uniquement horizontal, Dysthe (2001 [55]) a établi les équations de réfraction de la houle en profondeur infinie.

Concernant la prise en compte du caractère inhomogène des courants côtiers, les premiers modèles de houle concernés représentaient des courants à faible vitesse, sous forme de jets ou de marche, avec une vitesse variant horizontalement uniquement: Smith (1987 [176]) ou encore Belibassakis (2007 [15]).

**Courants verticalement inhomogènes** Il faudra attendre Dalrymple (1974 [43]) et Stewart & Joy (1974 [182]) pour la première étude sur l'interaction entre la houle et des courants verticalement inhomogènes: ils ont considéré cette inhomogénéité comme une petite perturbation dans un courant uniforme. La relation de dispersion d'une houle se propageant en présence de vorticit   a   t     tablie en th  orie lin  aire par Skop (1987 [172]), Kirby & Chen (1989 [100]), Swan & James (2001 [186]), Nwogu (2009 [140]), et en th  orie non-lin  aire par Shrira (1993 [168]), Liu et al (2014). En parall  le, des campagnes exp  rimentales en milieu c  tier viennent contribuer    ces   tudes: Greenwood & Osborne (1990 [77]), Putrevu & Svendsen (1993 [152]), Haas & Svendsen (2002 [79]). Ces derni  res attestent de la vorticit   des courants c  tiers et de l'importance d'int  grer dans les mod  les de houle la d  pendance    la profondeur de ces courants.

Une part non n  gligeable de l'  tude des courants inhomog  nes sur la verticale concerne les courants au large, qui s'  tendent entre 200 et 300m de profondeur sur une colonne d'eau de profondeur de 4km en moyenne. Ces courants, nous l'avons vu créés par le vent, apparaissent dans un contexte de stratification des eaux, avec des couches d'eau chaudes et agit  es en surface et une couche d'eau abyssale froide et quasi-immobile en dessous. Leur profil varie avec la profondeur et est caract  ris   par un renversement de profil. Les courants   quatoriaux, par exemple, sont caract  ris  s par une d  rive vers l'ouest dans la couche sup  rieure, et en-dessous une d  rive vers l'est centr  e sur la thermocline. L'  tude suivante [40] s'est attach  e    d  velopper un mod  le lin  aire simple pour expliquer certaines caract  ristiques du courant cisail     quatorial. Mais de nombreux courants inhomog  nes sur la verticale circulent pr  s des c  tes, fa  onn  s par la bathym  trie, les activit  s humaines, le vent. Et les ph  nom  nes physiques mis en jeu deviennent encore plus complexes, m  lant des interactions coupl  es entre la houle, le courant et la bathym  trie.

## 1.5 Int  raction houle-courant-bathym  trie

La pr  sence d'un champ de courant peut int  ragir avec la houle de fa  on toute aussi importante que des variations bathym  triques, et cela a toujours   t   au coeur des pr  occupations: Kirby (1988 [99]), Magne et al (2005 [119]). Afin de repr  senter ces triples interactions houle-courant-bathym  trie, les principaux mod  les   voqu  s pr  c  demment (  quation de pente douce,   quation de pente douce modifi  e, syst  me de Berkhoff g  n  ralis  ) ont rapidement   t     tendus pour tenir compte du courant, par modification de la relation de dispersion et ajout de termes correctifs. Nous avons choisi de pr  senter ces formes   tendues dans un second temps, afin d'identifier clairement et terme    terme la part d'influence du champ de courant sur la propagation de la houle.

### 1.5.1 Les principaux mod  les d'int  raction houle-courant-bathym  trie

Le premier mod  le th  orique    int  grer un courant, lentement variable, aux ph  nom  nes de propagation de houle est celui de Longuet-Higgins & Stewart (1961 [116]). Mais leur approche

n'est pas valable pour des variations de courant plus fortes (Evans, 1975 [62]). En 1984 ([90]), Jonsson & Christoffersen étendent le modèle de réfraction pure mis au point par de Skovgaard et al. quelques années plus tôt (1975 [173]) : ils modélisent la réfraction au-dessus d'un fond lentement variable en ajoutant les effets d'un courant constant sur la verticale et la dissipation au fond. Ils se restreignent toutefois à des houles régulières, de faible amplitude et d'incidence normale. L'année suivant leurs travaux, en 1985, la théorie s'étoffe avec Grue & Palm ([76]), qui étudient la réfraction et la diffraction de la houle autour d'un cylindre immergé et en présence d'un courant constant. Côté expérimental, en 2002, Rey et al. ([160]) ont eux étudié l'évolution de la quantité d'énergie réfléchiée par une houle se propageant au-dessus d'une plaque immergée, en présence d'un co-courant verticalement uniforme. Pour en revenir aux modèles les plus connus, en 1983 Booij ([25]) puis Liu ([111]) ont également tenté d'établir un modèle capable de modéliser l'ensemble des processus d'interactions linéaires couplées. Ils ont obtenu deux équations différentes capables de représenter la réfraction, la diffraction et la réflexion d'une houle se propageant au-dessus d'une bathymétrie lentement variable et en présence d'un courant constant sur la verticale. Mais, nous l'avons vu, c'est Kirby (1984 [96]) qui obtiendra la formulation finale : l'équation de pente douce étendue. Nous l'avons présentée dans la section précédente sous sa forme sans courant, nous allons la présenter ici sous sa forme unifiée, avec un courant verticalement uniforme. Les travaux de Touboul et al. (2016 [193]) pour intégrer un courant inhomogène seront détaillés par la suite.

**Equation de pente douce de Kirby, forme étendue au courant** Nous reprenons les hypothèses et notations présentées plus tôt. On considère un champ de courant supposé constant sur la colonne d'eau, et où le gradient de cisaillement horizontal reste faible. Le champ total de l'écoulement s'écrit avec le potentiel des vitesses et le champ des vitesses de surface:  $\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{\nabla}\Phi + \vec{U}_0(x, y)$  et la relation de dispersion de la houle, en présence d'un courant verticalement uniforme, est de la forme (1.143). De la même façon que précédemment, dans la théorie potentielle linéaire et sous l'hypothèse de faible pente, Kirby calcule le Lagrangien  $\mathcal{L}$  de l'écoulement à partir de l'expression (1.121) et formule l'expression obtenue par rapport au potentiel réduit  $\phi$  et l'élévation de surface libre  $\eta$ , il l'insère ensuite dans l'équation mild-slope de Berkhoff (1.57) pour obtenir cette fois des termes supplémentaires:

$$\frac{D^2\phi}{Dt^2} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{U}_0) \frac{D\phi}{Dt} - \vec{\nabla} \cdot (CC_g \vec{\nabla} \phi) + (\sigma^2 - k^2 CC_g) \phi = 0 \quad (1.144)$$

Cette équation vérifie bien la conservation de l'action  $A = \frac{E}{\sigma}$  avec  $E$  la densité d'énergie de la houle :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla}_h \cdot [A(C_g + U_0)] = 0 \quad (1.145)$$

En repassant au potentiel réduit, on trouve la formulation :

$$CC_g \nabla^2 \varphi_0 + (\nabla CC_g + 2i\omega U_0) \nabla \varphi_0 + (k^2 CC_g + \omega^2 - \sigma^2 + i\omega \nabla U_0) \varphi_0 = 0 \quad (1.146)$$

C'est l'équation de pente douce de Kirby, étendue pour tenir compte du courant.

**Equation de pente douce modifiée de Chamberlain & Porter, forme étendue au courant** A présent, nous pouvons appliquer le même raisonnement à l'équation de pente douce modifiée de Chamberlain & Porter (1.129) et trouver sa formulation étendue pour un courant constant:

$$CC_g \nabla^2 \varphi_0 - \nabla \cdot (U_0 [(U_0 \cdot \nabla) \varphi_0]) + (\nabla C C_g + 2i\omega U_0) \nabla \varphi_0 + (k^2 C C_g + g c_0 + \omega^2 - \sigma^2 + i\omega \nabla U_0) \varphi_0 = 0 \quad (1.147)$$

avec  $c_0 = \langle \nabla^2 Z_0, Z_0 \rangle + (\frac{\partial Z_0}{\partial z}(-h) + \nabla Z_0 \cdot \nabla h) \cdot Z_0(-h)$  le terme contenant les interactions du second ordre avec la pente et la courbure du fond.

**Système de Berkhoff généralisé de Massel, forme étendue au courant** Notre troisième modèle de référence, le système de Berkhoff généralisé (1.133), a bien entendu aussi été étendu pour tenir compte de la présence d'un courant, et en voici la formulation, toujours établie à partir de la formulation sans courant (1.133) et de la relation de dispersion (1.108):

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} \nabla^2 \varphi_n + b_{mn} \nabla \varphi_n + c_{mn} \varphi_n - \frac{1}{g} \nabla \cdot (U_0 [(U_0 \cdot \nabla) \varphi_0]) = 0 \quad (1.148)$$

Les coefficients  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  et  $c_{mn}$  sont uniquement fonctions de  $x$  et sont donnés par :

$$a_{mn} = \langle Z_m, Z_n \rangle \quad (1.149)$$

$$b_{mn} = \frac{2i\omega}{g} U_0 + 2 \langle Z_m, \nabla Z_n \rangle + \nabla h \cdot Z_m(-h) \cdot Z_n(-h) \quad (1.150)$$

$$c_{mn} = Z_{mn} \frac{\omega^2 - \sigma^2}{g} + \frac{i\omega}{g} (\nabla U_0) + \langle Z_m, \Delta Z_n \rangle + Z_m(-h) \cdot (\frac{\partial Z_n}{\partial z} \Big|_{z=-h} + \nabla Z_n \cdot \nabla h) \quad (1.151)$$

### 1.5.2 Coupled-Mode system, Athanassoulis & Belibassakis (1999)

En 1999, Athanassoulis et Belibassakis vont pallier aux défauts du Système de Berkhoff généralisé de Massel: un mode supplémentaire  $\varphi_{-1} Z_{-1}$  est ajouté dans la décomposition locale par modes 1.131, pour vérifier la condition d'imperméabilité sur un fond en pente, y compris en cas d'oscillations rapides. Une des formes de ce mode supplémentaire est la suivante :

$$Z_{-1} = h [(\frac{z}{h})^3 + (\frac{z}{h})^2] \quad (1.152)$$

et possède les propriétés :

$$\begin{aligned} Z'_{-1}(z = -h) &= \frac{\partial Z_{-1}}{\partial z}(z = -h) = 1 \\ Z_{-1}(z = -h) &= 0 \\ Z'_{-1}(z = 0) &= 0 \\ Z_{-1}(z = 0) &= 0 \end{aligned}$$

C'est le Système de Modes Couplés, ou 'Coupled Mode System' (C.M.S.), d'abord établi sans courant ([10, 11]) puis avec courant (1.148). Ce nouveau modèle tient compte de la courbure du fond, et voit sa vitesse de convergence significativement améliorée, de l'ordre de  $\mathcal{O}(n^{-4})$ , d'après l'étude de Belibassakis et al. (2011 [16]). Il sera ensuite généralisé pour des cas d'écoulements 3D, par exemple pour un cas de propagation de houle au-dessus d'un canyon sous-marin (Magne et al, 2007 [120]).

Kim & Bai (2004 [93]) ont proposé une méthode alternative à celle développée par Athanassoulis & Belibassakis. A partir d'une formulation variationnelle, il s'agit cette fois d'exprimer les solutions comme fonctions de courant, tout en s'assurant de vérifier la condition de fond et la conservation d'énergie.

Ces modèles d'interactions triples houle-courant-bathymétrie ont servi à de nombreux projets : dimensionnement d'ouvrages de défense portuaire, aide à la navigation, prévisions météorologiques... Il est donc indispensable qu'ils soient les plus représentatifs possible de la réalité, et en particulier des conditions hydrodynamiques en milieu côtier. Or nous allons voir que la considération de courants verticalement uniformes n'est pas toujours suffisante pour le degré de précision nécessaire.

### 1.5.3 Cas d'un fond sinusoïdal

Notre étude cherche à modéliser la résonance de Bragg, c'est-à-dire un phénomène physique mettant en jeu des interactions complexes entre la houle, le courant et une bathymétrie sinusoïdale. L'étude menée par Kirby en 1988 ([99]) constitue une très bonne introduction au sujet : il s'agit d'un modèle par perturbations qui se ramène, en l'absence de courant, au modèle de Mei (1983 [128]) présentée dans le paragraphe 1.3.2.3. Nous allons ici l'étendre au cas d'une réflexion par résonance de Bragg en présence de courant. Précisément, l'étude porte sur la compréhension des interactions houle-courant survenant au-dessus d'un fond plat  $z = -h$  présentant localement des ondulations de la forme

$$\delta(x) = D \sin(\lambda x) \quad 0 \leq x \leq L \quad (1.153)$$

Nous avons ainsi un champ de  $n$  bosses d'amplitude constante  $D$  et de longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi n}{L}$ . Le courant, hors de toute perturbation due à la bathymétrie, est constant  $\{U_0, V_0\}$ . Commençons par poser le problème et sa solution en écoulement stationnaire à l'ordre  $\mathcal{O}(\delta)$ , d'après les travaux de Kennedy (1963) et Reynolds (1965).

**Solution pour l'écoulement moyen** On détermine tout d'abord la perturbation de l'écoulement moyen  $\{U_0, V_0\}$  causé par notre bathymétrie variable  $\delta(x)$ . On considère une houle linéaire de potentiel  $\phi$  déformant la surface libre selon  $\eta$ . On conserve la condition de continuité sur la colonne d'eau, soit (1.7) pour  $-h \leq z \leq \eta$ . La condition d'imperméabilité au fond devient

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \varepsilon \nabla \cdot \{\delta \nabla \phi\} \quad \forall z = -h \quad (1.154)$$

Les conditions dynamique et cinématique de la surface libre s'expriment respectivement pour  $z = \eta$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} g\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 = c(t) \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \eta = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{array} \right. \quad (1.155)$$

où  $\varepsilon$  représente l'effet des petites variations du fond. Comme on considère uniquement une houle linéaire, on peut décomposer  $\phi$ ,  $\eta$  et  $c$  en une partie stationnaire associée au courant et une partie hamonique associée à la houle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi = \phi_c + \phi_w \\ \eta = b + \eta_w \\ c = c_c + c_w \end{array} \right. \quad (1.156)$$

Si on réécrit notre système (1.7,1.154,1.155) en isolant les termes stationnaires, on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \phi_c + \frac{\partial^2 \phi_c}{\partial z^2} = 0 \quad \forall -h \leq z \leq b \\ \frac{\partial \phi_c}{\partial z} = \varepsilon \nabla \cdot (\delta \nabla \phi_c) \quad z = -h \\ gb + \frac{1}{2} (\nabla \phi_c)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \right)^2 = c_c \\ \nabla \phi_c \cdot \nabla b = \frac{\partial \phi_c}{\partial z} \end{array} \right. \quad (1.157)$$

On procède ensuite à une nouvelle décomposition entre la composante moyenne et la composante liée aux variations bathymétriques:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_c = \phi_{0c} + \varepsilon \phi_{1c} \\ b = b_0 + \varepsilon b_1 \\ c = c_0 + \varepsilon c_1 \end{array} \right. \quad (1.158)$$

A l'ordre 1, on obtient la solution pour le champ de courant moyen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{0c} = U_0 x + V_0 y \\ b_0 = 0 \\ c_0 = \frac{1}{2} (U_0^2 + V_0^2) \end{array} \right. \quad (1.159)$$

A l'ordre  $\varepsilon$ , on obtient le problème considéré par Kennedy (1963) et Reynolds (1965). La solution s'écrit alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_{1c} = \frac{U_0 D}{2\alpha} \{ \beta \cosh(\lambda(z+h)) + \alpha \sinh(\lambda(z+h)) \} \exp(i\lambda x) + c.c. \\ b_1 = \frac{-i\lambda h F_x^2 D}{2\alpha \cosh(\lambda h)} \exp(i\lambda x) + c.c. \end{array} \right. \quad (1.160)$$

avec  $\lambda$  le nombre d'onde de la houle,  $F_x^2 = \frac{U_0}{\sqrt{gh}}$  le nombre de Froude associé à la composante horizontale du courant,  $\alpha = \lambda h F_x^2 - \tanh(\lambda h)$  et  $\beta = 1 - \lambda h F_x^2 \tanh(\lambda h)$ . Lorsque  $\alpha = 0$ , on retrouve la relation de dispersion en présence du courant  $U_0$ . Cette condition induit une singularité dans l'écoulement: la résonance de la houle, forcée par la bathymétrie. Le nombre de Froude critique associé est :

$$F_{xc} = \pm \sqrt{\frac{\tanh(\lambda h)}{\lambda h}} \quad (1.161)$$

La limite ondes longues (soit  $\lambda h \rightarrow 0$ ) nous donne

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{-i F_x^2 D}{2(F_x^2 - 1)} \exp(i\lambda x) + c.c. \\ u_1 = \frac{\partial \phi_{1c}}{\partial x} = \frac{i U_0 (\frac{D}{h})}{2(F_x^2 - 1)} \exp(i\lambda x) + c.c. \end{array} \right. \quad (1.162)$$

aussi solutions des équations en eau peu profondes:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + g \frac{\partial b}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \{ h u_1 + (b_1 - \delta) U_0 \} = 0 \end{array} \right. \quad (1.163)$$

**Conditions pour la résonance de Bragg** Le courant a une énorme influence sur les trois nombres d'onde intervenant dans la résonance de Bragg. On va noter le nombre d'onde de l'onde incidente  $k_1$  et celui de l'onde réfléchi  $k_2$  et on écrit la condition de résonance comme:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_1 - \lambda = k_2 \\ \omega_1 - 0 = \omega_2 \end{array} \right. \quad (1.164)$$

La deuxième équation du système (1.164) impose la même fréquence pour l'onde incidente et l'onde réfléchie. Ecrivons les relations de dispersion auxquelles obéissent chaque composante du nombre d'onde de la houle:

$$\begin{cases} (\omega - k_1 U_0)^2 = g k_1 \tanh(k_1 h) \\ (\omega + k_2 U_0)^2 = g k_2 \tanh(k_2 h) \end{cases} \quad (1.165)$$

De même, on rappelle qu'on peut définir les deux pulsations propres  $\forall i = 1, 2$  telles que  $\sigma_1 = \omega + k_1 U_0$  et  $\sigma_2 = \omega - k_2 U_0$ . On remarque que la condition de résonance (1.164) peut aussi s'écrire  $k_1 + k_2 = \lambda$ , et qu'en l'absence de courant, elle se réduit à  $2k = \lambda$ . Si on suppose une houle se propageant uniquement dans la direction  $\mathcal{O}x$ , on utilise la relation (1.164) pour remplacer  $k_2$  dans (1.165) et on obtient :

$$\begin{cases} (\omega - k_1 U_0)^2 = g k_1 \tanh(k_1 h) \\ (\omega - (\lambda - k_1) U_0)^2 = g (\lambda - k_1) \tanh((\lambda - k_1) h) \end{cases} \quad (1.166)$$

La résolution de ce système nous donne la pulsation (et donc la fréquence) de résonance  $\omega_r$  et le nombre d'onde incident normalisé  $\left(\frac{2k_1}{\lambda}\right)_r$ . Le cas limite des ondes longues (soit  $\lambda h \rightarrow 0$ ) se résout directement :

$$\begin{cases} \left(\frac{2k_1}{\lambda}\right)_r = 1 - F_x \\ \left(\frac{2k_2}{\lambda}\right)_r = 1 + F_x \end{cases} \quad (1.167)$$

et la fréquence de résonance est

$$\omega_r = \frac{\lambda(1 - F_x^2)}{2} \sqrt{gh} \quad (1.168)$$

**Vagues d'incidence normale au-dessus d'un champ fini de barres** On garde le même cadre d'étude que précédemment: on considère toujours un train de vagues d'incidence normale se propageant au-dessus d'un fond ondulé compris entre  $0 \leq x \leq L$  et de longueur d'onde  $\lambda$ . La fréquence de résonance de la houle est  $\omega_r$  et on suppose que la fréquence de la houle admet un léger décalage par rapport à la fréquence de résonance:  $\omega = \omega_r + \varepsilon\Omega$ . Les nombres d'onde de la houle vont alors aussi être décalés:

$$\begin{cases} k_1 + \varepsilon K_1; \Omega = C_1 K_1 \\ k_2 + \varepsilon K_2; \Omega = C_2 K_2 \end{cases} \quad (1.169)$$

Le problème va se résoudre selon la même logique présentée au paragraphe 1.3.2.3. En amont du fond ondulé ( $x < 0$ ), les amplitudes  $A$  et  $B$  du mouvement de la surface (normalisées par la pulsation propre) sont données par (1.83) et (1.84). En aval du fond ondulé, la condition  $B(x > L) = 0$  évite toute réflexion de houle parasite (voir condition (1.85)). Au-dessus du fond ondulé, on anticipe que l'amplitude de la houle va varier proportionnellement aux interactions avec ce fond, on va donc définir les variables lentes  $X_1$  et  $T_1$  (qui justifient l'appellation "méthode à échelles multiples") comme suit (voir (1.66) et (1.67)):

$$\begin{cases} x \rightarrow x + \varepsilon x + \dots = x + X_1 \\ t \rightarrow t + \varepsilon t + \dots = t + T_1 \end{cases} \quad (1.170)$$

Les conditions limites (des conditions de continuité pour  $A$  et  $B$  en  $x = 0, L$ ) conduisent au système d'équations couplées:

$$\begin{cases} A_{T_1} + C_1 A_{X_1} = -\frac{\Omega_c \omega}{\sigma_1} B \\ B_{T_1} - C_2 B_{X_1} = \frac{\Omega_c \omega}{\sigma_2} A \end{cases} \quad (1.171)$$

pendant du système sans courant (1.80), avec  $C_1 = C_{g_1} + U_0$ ,  $C_2 = C_{g_2} - U_0$  (où  $C_{g_1} = \frac{\partial \omega}{\partial k_1}$  et  $C_{g_2} = \frac{\partial \omega}{\partial k_2}$ ) et

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_c = \Omega_{0c} + \Omega_{1c} \\ \Omega_{0c} = \frac{gk_1 k_2 D}{4\omega \cosh(k_1 h) \cosh(k_2 h)} \\ \Omega_{1c} = \frac{1}{4\omega \alpha \cosh(\lambda h)} \left\{ \lambda U_0 (|k_2| \sigma_1 - |k_1| \sigma_2) D - \frac{\lambda U_0^2}{g} \left[ gk_1 k_2 + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{g} (\sigma_1 \sigma_2 + (\lambda U_0)^2) \right] D \right\} \end{array} \right\} \quad (1.172)$$

Le système (1.171) peut se réécrire sous forme matricielle:

$$\frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + (C_1 - C_2) \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{\partial}{\partial X_1} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} - C_1 C_2 \frac{\partial^2}{\partial X_1^2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + (\Omega'_c)^2 \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (1.173)$$

avec  $(\Omega'_c)^2 = \frac{\Omega_c^2 \omega^2}{\sigma_1 \sigma_2}$ . Au-dessus du fond ondulé, on introduit les formes perturbées:

$$\begin{cases} A(x, t) = \hat{A}(x) \exp(-i\Omega t) \\ B(x, t) = \hat{B}(x) \exp(-i\Omega t) \end{cases} \quad (1.174)$$

alors notre système (1.173) se réécrit:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} + i\Theta \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} + (P')^2 \begin{pmatrix} \hat{A} \\ \hat{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.175)$$

avec les termes  $\Theta = \frac{(C_1 - C_2)\Omega}{C_1 C_2}$  et  $(P')^2 = \frac{\Omega^2 - (\Omega'_c)^2}{C_1 C_2}$ . Nous procédons ensuite à une dernière substitution pour retomber sur des équations analogues à celles de Mei ([128]), on pose  $\hat{A}(x) = \tilde{A}(x) \exp\left(\frac{-i\Theta x}{2}\right)$  et  $\hat{B}(x) = \tilde{B}(x) \exp\left(\frac{-i\Theta x}{2}\right)$  et on retombe sur un système de la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} + P^2 \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix} = 0 \quad (1.176)$$

où  $P^2 = (P')^2 + \frac{1}{4}\Theta^2$ . Déterminer les zéros de  $P^2$  nous donne la condition de coupure en présence de courant:

$$\Omega_{cutoff}^2 = \frac{(\Omega'_c)^2}{1 + \frac{(C_1 - C_2)^2}{4C_1 C_2}} \quad (1.177)$$

On rappelle qu'en l'absence de courant, la fréquence de coupure est  $\pm\Omega_0$ . Comme pour le cas sans courant (paragraphe 1.3.2.3), nous avons plusieurs configurations selon la valeur de la fréquence de coupure. Pour des raisons pratiques, on définit  $\Omega' = \Omega + \frac{1}{2}C_1\Theta$ . Ainsi, si on est à la fréquence de coupure (soit  $P^2 = 0$ ), les solutions sont:

$$\begin{cases} A(x, t) = A_0 \exp\left(\frac{-i\Theta x}{2}\right) \frac{1 - i\left(\frac{\Omega'}{C_1}\right)(L-x)}{1 - \frac{i\Omega' L}{C_1}} \exp(-i\Omega t) \\ B(x, t) = A_0 \exp\left(\frac{-i\Theta x}{2}\right) \frac{\Omega'_c \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \frac{1}{C_2} (L-x)}{1 - \frac{i\Omega' L}{C_1}} \exp(-i\Omega t) \end{cases} \quad (1.178)$$

Si notre fréquence est en-dessous de la fréquence de coupure (soit  $P^2 < 0$ ), on pose  $Q = iP$  et on obtient:

$$\begin{cases} A(x, t) = A_0 \exp\left(\frac{-i\Theta x}{2}\right) \frac{QC_1 \cosh(Q(L-x)) + i\Omega' \sinh(Q(L-x))}{QC_1 \cosh(QL) + i\Omega' \sinh(QL)} \exp(-i\Omega t) \\ B(x, t) = -A_0 \exp\left(\frac{-i\Theta x}{2}\right) \frac{\Omega'_c \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \frac{C_1}{C_2} \sinh(Q(L-x))}{QC_1 \cosh(QL) + i\Omega' \sinh(QL)} \exp(-i\Omega t) \end{cases} \quad (1.179)$$

Si notre fréquence est au-dessus de la fréquence de coupure (soit  $P^2 > 0$ ) alors les solutions sont de la forme:

$$\begin{cases} A(x, t) = A_0 \exp\left(\frac{-i\Theta x}{2}\right) \frac{PC_1 \cos(P(L-x)) - i\Omega' \sin(P(L-x))}{PC_1 \cos(PL) - i\Omega' \sin(PL)} \exp(-i\Omega t) \\ B(x, t) = A_0 \exp\left(\frac{-i\Theta x}{2}\right) \frac{\Omega'_c \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \frac{C_1}{C_2} \sin(P(L-x))}{PC_1 \cos(PL) - i\Omega' \sin(PL)} \exp(-i\Omega t) \end{cases} \quad (1.180)$$

Le dernier cas survient si  $\Omega = 0$ , alors le terme  $Q$  devient  $Q^2 = \frac{(\Omega'_c)^2}{C_1 C_2}$  et on obtient

$$\begin{cases} A(x, t) = A(x) = A_0 \frac{\cosh(Q(L-x))}{\cosh(QL)} \\ B(x, t) = B(x) = -A_0 \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \frac{\sinh(Q(L-x))}{\cosh(QL)} \end{cases} \quad (1.181)$$

Le coefficient de réflexion de la houle sera alors défini comme

$$\frac{|B(0)|}{A_0} = \sqrt{\frac{\sigma_1}{\sigma_2}} \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \tanh(QL) \quad (1.182)$$

On remarque que, contrairement au cas sans courant (paragraphe 1.3.2.3) quand on augmente infiniment la longueur  $L$  du fond ondulé, le coefficient de réflexion devient supérieur à 1 à cause des interactions houle-courant.

**Effets du courant sur la transmission au-dessus du fond ondulé** Intéressons-nous à présent aux effets induits par le courant sur le processus de réflexion-transmission de la houle au-dessus du fond ondulé de longueur  $L$ . On considèrera qu'avec ou sans courant, la réflexion est parfaitement en phase, et donc que la fréquence de la houle s'ajuste aux changements de vitesse de l'écoulement pour maintenir cette résonance. On reprend le dernier cas évoqué, pour lequel  $\Omega = 0$ , alors on a:

$$\left\{ \frac{A(L)}{A_0} \right\}_{current} = (\cosh(Q_c L))^{-1} \quad (1.183)$$

$$\left\{ \frac{A(L)}{A_0} \right\}_{nocurrent} = (\cosh(QL))^{-1} \quad (1.184)$$

avec  $Q = \frac{\Omega_0}{C_g}$  et  $Q_c = \frac{\Omega'_c}{\sqrt{C_1 C_2}}$ . On peut exprimer le ratio entre la transmission avec courant et la transmission sans courant sous la forme  $T_A = \frac{\cosh(QL)}{\cosh(Q_c L)}$ .

A présent, supposons une houle de fréquence de résonance  $\omega_{r0}$  en l'absence de courant, et supposons que la houle conserve cette fréquence en présence d'un courant (alors qu'elle devrait s'ajuster à  $\omega_r$  (1.168): cela va conduire à un décalage que l'on peut formuler comme suit  $\omega_{r0} = \omega_r + \Omega$ . On pourra alors observer n'importe quel comportement présenté précédemment selon la valeur de  $\Omega$  par rapport à la fréquence de coupure. Dans le cas des ondes longues ( $\lambda h \rightarrow 0$ ), la condition de coupure devient

$$\Omega_{cutoff}^2 (\lambda h \rightarrow 0) = \frac{g^2 \lambda^2 D^2}{64C^2} \quad (1.185)$$

avec  $C^2 = gh$  . Le décalage en fréquence s'exprime alors  $\Omega^2 = \frac{1}{4}C^2 \lambda^2 F_x^4$  , et pour vérifier la condition de coupure il faut un courant dont la vitesse vérifie  $F_x^4 = \left(\frac{D}{4h}\right)^2$  .



# Chapitre 2

## Modèles de propagation

“Where there is a will, there is a way”. Pr Richard, collègue G. Philippe.

La question concernant le profil du courant qu’il convient de considérer pour représenter correctement le milieu côtier s’est très vite posée. MacIver et al (2006 [118]) ont démontré expérimentalement l’aspect non négligeable des gradients de cisaillement verticaux dans le profil de courant, et leur impact sur la propagation de la houle. Il a donc été urgent d’étendre les modèles d’interactions houle-courant-bathymétrie à la vorticit   afin d’am  liorer leurs performances. Le but de cette th  se de doctorat   tait justement de mod  liser la propagation de la houle au-dessus de bathym  trie variable et en pr  sence de courants cisail  s. Dans ce chapitre, nous allons pr  senter les mod  les th  oriques sur lesquels repose cette   tude, ainsi que leur impl  mentation num  rique dans un code de calcul original en Fortran.

### 2.1 Equations de propagation

#### 2.1.1 G  n  ralit  s sur les mod  les de l’  tude

Nous avons retenu trois mod  les, de complexit   (et donc de co  t de calcul) croissante,   tendus pour tenir compte du cisaillement vertical des profils de courant, le but   tant de trouver le mod  le repr  sentant le mieux le ph  nom  ne de r  flexion de Bragg pour une houle se propageant au-dessus d’un courant cisail   et sur un fond ondul  . Pour tous ces mod  les, nous nous basons de la m  me fa  on que pr  c  demment sur la th  orie potentielle lin  aire. Nous travaillons avec le potentiel r  duit  $\varphi$  issu des d  compositions successives (1.14) et (1.131). L’indice 0 fera r  f  rence au mode propagatif, dont le nombre d’onde  $k_0$  est d  termin   par la relation de dispersion (1.143). L’indice  $n$ , faisant r  f  rence aux valeurs  $-1, 1, 2, \dots$  correspond aux modes   vanescents ou locaux, dont les nombres d’onde sont d  finis comme   tant les solutions successives des relations de dispersion (1.108). Les hypoth  ses sont toujours les m  mes que pr  c  demment : nous avons une houle d’incidence normale se propageant dans la direction  $Ox$ , de fr  quence (ou pulsation angulaire)  $\omega$  et de pulsation intrins  que  $\sigma$ .  $C$  est sa vitesse de phase,  $C_g$  sa vitesse de groupe. La profondeur d’eau moyenne est not  e  $h$ . Concernant le profil de courant retenu, il s’agit de consid  rer un courant variant horizontalement mais aussi verticalement, il s’agit alors d’un profil dit “cisail  ”. Ces variations sont d  crites par le param  tre de vorticit   ou cisaillement  $s(x, z)$  qui intervient dans le profil de courant comme suit :

$$U(x, z) = U_0(x) + s(x, z) * z \quad (2.1)$$

o    $U_0$  est la vitesse du courant en surface selon  $Ox$ . Dans notre   tude, nous nous limitons    un cisaillement verticalement constant, c’est-  -dire que le gradient de l’intensit   du courant

sur la verticale en tout point de  $x$  est constant et égal à  $s(x)$ . En parallèle du cisaillement, on définit le profil de courant via un autre paramètre: la vitesse caractéristique  $U_2$ . Il s'agit de la vitesse du courant à la profondeur caractéristique  $-2d_e$ , soit, selon (2.1):

$$U_2(x) = U(z = -2d_e) = U_0(x) - 2d_e s(x) \quad (2.2)$$

avec

$$d_e = \frac{\tanh(k_0 h)}{2k_0} \quad (2.3)$$

la profondeur caractéristique définie par Touboul et al. (2016 [193]). Pour définir le courant, nous parlerons ainsi indifféremment du couple  $(U_0(x), s(x))$  ou du couple  $(U_0(x), U_2(x))$ . A présent, présentons les modèles. La présence de ce courant cisailé modifie également les relations de dispersion, et nous passons des formes (1.108) et (1.143) aux formes propagative et évanescentes (forme oscillation amortie) respectives (Thompson, 1949 [190]) :

$$\begin{cases} (\omega - k_0 U_0)(\omega - k_0 U_2) = g k_0 \tanh(k_0 h) \\ (\omega - i k_n U_0)(\omega - i k_n U_2) = -g k_n \tan(k_n h) \end{cases} \quad (2.4)$$

### 2.1.2 Equation de pente douce étendue à la vorticité, Touboul et al. (2016) - M1

Le point de départ de ce modèle est l'équation de pente douce, initialement écrite par Berkhoff (1972 [20]), modifiée par Kirby (1983 [102]), présentée dans le chapitre 1 ici (1.146) sous sa forme unifiée avec courant constant. L'inclusion d'un courant verticalement cisailé a été récemment réalisée par Touboul et al. (2016 [193]). Par la suite, on fera référence   ce modèle sous l'appellation modèle M1.

$$CC_g \nabla^2 \varphi_0 + (\nabla C C_g + i\omega(U_0 + U_2)) \nabla \varphi_0 + (k_0^2 C C_g + \omega^2 - \sigma^2 + i\omega \nabla U_0) \varphi_0 - \nabla(U_0[(U_2 \nabla) \varphi_0]) = 0 \quad (2.5)$$

Par rapport   la formulation en courant constant (1.146), plusieurs changements ont eu lieu. On constate que le terme  $2i\omega U_0 \nabla \varphi_0$  est remplacé par  $i\omega(U_0 + U_2) \nabla \varphi_0$  pour tenir compte de l'ensemble du profil de courant. Nous avons également un terme supplémentaire :  $-\nabla(U_0[(U_2 \nabla) \varphi_0])$  qui se décompose en  $(U_0 \nabla_2 + U_2 \nabla U_0) \nabla \varphi_0 + U_0 U_2 \nabla^2 \varphi_0$ . Comme précédemment, c'est le modèle de réfraction-diffraction le plus simple, il n'impose qu'une seule équation   résoudre, et il ne tient compte des variations du fond qu'  l'ordre  $\delta$ .

### 2.1.3 Equation de pente douce modifiée étendue   la vorticité, Belibassakis et al. (2017) - M2

Le second modèle retenu est également un modèle   une seule équation mais cette fois-ci tenant compte   un ordre supérieur des variations du fond, et donc potentiellement prenant en compte plus d'interactions houle-courant-bathymétrie. Généralisation de l'équation de pente douce modifiée de Chamberlain & Porter (1.129), socle de départ du Coupled-Mode system de Belibassakis (il en est le mode propagatif), notre modèle M2 résout l'équation suivante :

$$\begin{aligned}
{}_g\nabla^2\varphi_0 + (\nabla CC_g + i\omega(U_0 + U_2))\nabla\varphi_0 + (c^1 + k_0^2 CC_g + \omega^2 - \sigma^2 + i\omega\nabla U_0)\varphi_0 - \nabla(U_0[(U_2\nabla)\varphi_0]) \\
= -gf_0h\bar{S}\nabla h
\end{aligned} \tag{2.6}$$

avec le terme déjà connu

$$c^1 = g \langle \nabla^2 Z_0, Z_0 \rangle + g \left( \frac{\partial Z_0}{\partial z}(-h) + \nabla Z_0 \cdot \nabla h \right) \cdot Z_0(-h) \tag{2.7}$$

et avec la fonction verticale toujours définie par (1.124). Cette fois le second membre est non nul, il dépend directement du cisaillement via le terme  $\bar{S} = \frac{1}{h} \int_{z=-h}^{z=0} s(z) dz$  (qui, dans notre cas de cisaillement constant sur la verticale, vaut simplement  $s$ ) et de la fonction :

$$f_0 = \frac{1}{\cosh(k_0 h)} \tag{2.8}$$

En premier lieu, nous avons considéré que les variations de fond de nos cas d'étude étaient douces, faibles comparées aux longueurs caractéristiques des houles considérées : ce modèle était *a priori* apte à représenter les phénomènes d'interactions houle-courant-bathymétrie dans le cas d'une réflexion par résonance de Bragg. Toutefois, un modèle plus complet, faisant intervenir des modes évanescents, pourrait être utile. Non implémenté dans un premier temps, il est intervenu plus tard dans la suite de l'étude.

#### 2.1.4 Coupled-Mode system étendu pour intégrer courant et vorticité, Belibassakis et al. (2017) - M3

Le dernier modèle est aussi le plus lourd en terme de calculs, c'est le Système des Modes Couplés, de Belibassakis et al., développé avec vorticité en 2017 [17]. Par comparaison avec la version "courant constant" (1.148), l'extension   la vorticité garde la forme globale :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn}^{(1)} \nabla^2 \varphi_n + \left( b_{mn}^{(1)} + \frac{2i\omega Z_{mn} U_0}{g} \right) \nabla \varphi_n + \left( c_{mn}^{(1)} + Z_{mn} \left( \frac{\omega^2 - \sigma^2}{g} + \frac{i\omega}{g} \nabla U_0 \right) \right) \varphi_n \\
- \frac{Z_m(0)}{g} \nabla(U_0[(U_2\nabla)\varphi_n]) = -f_m h s \nabla h
\end{aligned} \tag{2.9}$$

mais fait apparaître des termes supplémentaires via les coefficients  $a_{mn}^{(1)}$ ,  $b_{mn}^{(1)}$  et  $c_{mn}^{(1)}$ , uniquement fonctions de  $x$  :

$$a_{mn}^{(1)} = a_{mn} + \frac{\widetilde{Z}_n(0) Z_m(0) U_0 s}{g} \tag{2.10}$$

$$b_{mn}^{(1)} = b_{mn} + \frac{s}{g} \cdot [2U_0 \nabla \widetilde{Z}_n(0) - (i\omega - \nabla U_0) \widetilde{Z}_n(0)] Z_m(0) \tag{2.11}$$

$$c_{mn}^{(1)} = c_{mn} - \frac{s}{g} \cdot [(i\omega - \nabla U_0) W_n(0) Z_m(0) - U_0 \nabla W_n(0) Z_m(0)] \tag{2.12}$$

Avec  $a_{mn}$ ,  $b_{mn}$  et  $c_{mn}$  définis comme précédemment, respectivement par (1.134), (1.135) et (1.136). C'est le modèle le plus impact  par l'insertion de la vorticité, au travers de nouvelles fonctions verticales, définie  $\forall n = -1, 0, 1, \dots$

$$\widetilde{Z}_n(x, z) = \int_{z=-h}^z Z_n(x, z) dz \quad (2.13)$$

ce qui nous donne en expressions littérales :

$$\widetilde{Z}_{-1}(z) = \frac{z^4}{4h^2} + \frac{z^3}{3h} \quad (2.14)$$

$$\widetilde{Z}_0(z) = \frac{\sinh(k_0(z+h))}{k_0 \cosh(k_0 h)} \quad (2.15)$$

et  $\forall n = 1, 2..$

$$\widetilde{Z}_n(z) = \frac{\sin(k_n(z+h))}{k_n \cos(k_n h)} \quad (2.16)$$

La deuxième fonction  $W_n$  se définit comme suit  $\forall n = -1, 0, 1, \dots$ :

$$W_n(x, z) = \int_{z=-h}^z \nabla Z_n(x, z) dz = \nabla \widetilde{Z}_n - \nabla h \cdot Z_n(z = -h) \quad (2.17)$$

Les seconds termes eux aussi changent, notamment la fonction  $f_n$ , qui pour  $n = 0$  conserve sa forme (2.8) et qui pour les autres modes est de la forme :

$$f_{-1} = 0 \quad (2.18)$$

et  $\forall n = -1, 0, 1, \dots$ :

$$f_n = \frac{1}{\cos(k_n h)} \quad (2.19)$$

On remarque d'ailleurs que  $W_n$  peut s'écrire  $\forall n = -1, 0, 1, \dots$ :

$$W_n(x, z) = \nabla \widetilde{Z}_n - f_n \nabla h \quad (2.20)$$

A présent que nous avons vu les modèles utilisés dans cette étude, voyons plus en détails comment ils ont été implémentés.

### 2.1.5 Limites et questionnements

Les modèles choisis pour cette étude reposent sur des hypothèses communes de mouvement irrotationnel (qui induit le potentiel des vitesses) et de résolution de la relation de dispersion pour déterminer le nombre d'onde. Ces hypothèses pourraient-elles s'avérer contraignantes, voire difficilement compatibles avec le phénomène que l'on souhaite observer? On peut par exemple se demander si la théorie potentielle est compatible avec tous les profils de courant. Dans notre cas, elle l'est, car nous nous restreignons à un profil de courant à cisaillement constant sur la verticale. La relation de dispersion, telle que nous l'avons écrite, n'est conforme que pour des houles monodirectionnelles, dans le cadre d'une étude en deux dimensions (x,z). Dans notre cas, cela est parfaitement compatible avec notre étude en canal et notre modélisation en 2D. La question des effets transverses que l'on pourrait potentiellement observer sera abordée dans le chapitre trois dans le détail des techniques expérimentales. Enfin, rappelons que notre modèle omet l'influence de la houle sur le courant. Mentionné plus en détails dans le chapitre 3 sur les techniques expérimentales, il conviendra de garder ce point à l'esprit lors de l'analyse des profils de courant sous la houle.

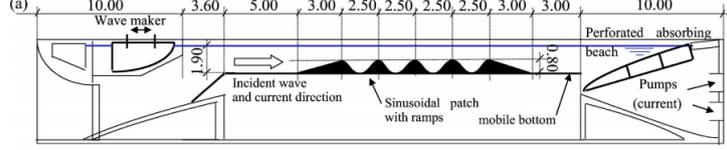


Figure 2.1: Dispositif expérimental de l'expérience menée par Magne et al. (2005 [119]) sur la réflexion de la houle par résonance de Bragg en présence de courant variable

## 2.1.6 Premières modélisations d'interactions houle-courant par les modèles M1 et M2

Les modèles M1 et M2 ont été confrontés aux résultats de campagnes expérimentales variées. La première est celle menée par Magne et al. (2005 [119]) sur la propagation de la houle au-dessus d'un fond sinusoïdal en présence d'un courant variable. La figure (2.1) nous présente la bathymétrie mise en place ainsi que la disposition des capteurs. La figure (2.2) expose en première partie le courant enregistré le long du canal en trois profondeurs: à 1m par des micromoulinets (trait plein), puis à 90cm (trait discontinu point) et 50cm (trait discontinu) de profondeur par des ADV, les barres verticales montrant la déviation standard autour de la moyenne. La deuxième partie de la figure montre les coefficients de réflexion obtenus expérimentalement, sans courant (marqueurs carrés rouges) et avec un courant de vitesse en surface relevée à 0.4m/s (marqueurs ronds bleus). L'observation d'un pic large et aplati s'explique par le nombre réduit de longueurs d'onde de fond (seulement quatre). On remarque que ce pic de réflexion est légèrement décalé par rapport à 1 (qui correspond à la condition de résonance en l'absence de courant): l'influence du courant sur la réflexion de la houle est prouvée. En 2016, l'étude de Touboul et al. ([193]) confronte ces résultats expérimentaux au modèle de type Pente Douce Modifiée intégrant la vorticité (nommé dans la suite de cette étude M2). La comparaison entre les résultats expérimentaux de Magne et al. (2005 [119]) et les courbes de réflexion obtenues numériquement par Touboul et al. ([193]) est présentée sur la même figure (2.2) ci-dessous: en bleu on considère l'absence de courant, en vert on considère un courant verticalement constant  $U_0 = 0.4m/s$  et  $s = 0s^{-1}$ , en jaune on considère un courant verticalement cisailé   cisaillement négatif  $U_0 = 0.4m/s$  et  $s = -0.2s^{-1}$  (la vitesse du courant augmente avec la profondeur), et en fushia on considère un courant cisailé   cisaillement positif  $U_0 = 0.4m/s$  et  $s = 0.2s^{-1}$  (la vitesse du courant diminue avec la profondeur). De façon générale, la corrélation est bonne entre les résultats numériques et expérimentaux: l'amplitude du pic est bien représentée compte tenu de sa largeur et des incertitudes sur la mesure de la vorticité (seulement trois points sur le profil vertical, pour une hauteur d'eau totale de 1.90m). On peut toutefois remarquer que la fréquence pic est légèrement surestimée par les modèles: là où le pic expérimental se place   environ  $\frac{2k_{sc}}{\lambda_{fond}} \simeq 0.8$ , le pic numérique, lui, avoisine plutôt les  $\frac{2k_{sc}}{\lambda_{fond}} \simeq 0.93$ . Les modèles présentent donc des résultats satisfaisants, mais une instrumentation plus poussée de la vorticité, et donc une comparaison modèle-expérience sur un pic de Bragg plus étroit, est nécessaire pour valider précisément les modèles.

Deux autres études sont significatives dans la littérature numérique des modèles type Pente Douce sur les interactions houle-courant bathymétrie, même si elles sortent du cadre de la résonance de Bragg. Il s'agit tout d'abord de l'étude menée par Rey et al. (2014 [162]) sur la propagation de la houle au-dessus d'une bathymétrie 3D et en présence de courant, dont nous avons parlé dans l'introduction de ce manuscrit. Les résultats expérimentaux de focalisation de la houle n'ont pas été ceux attendus par la modélisation de type Pente Douce, et après

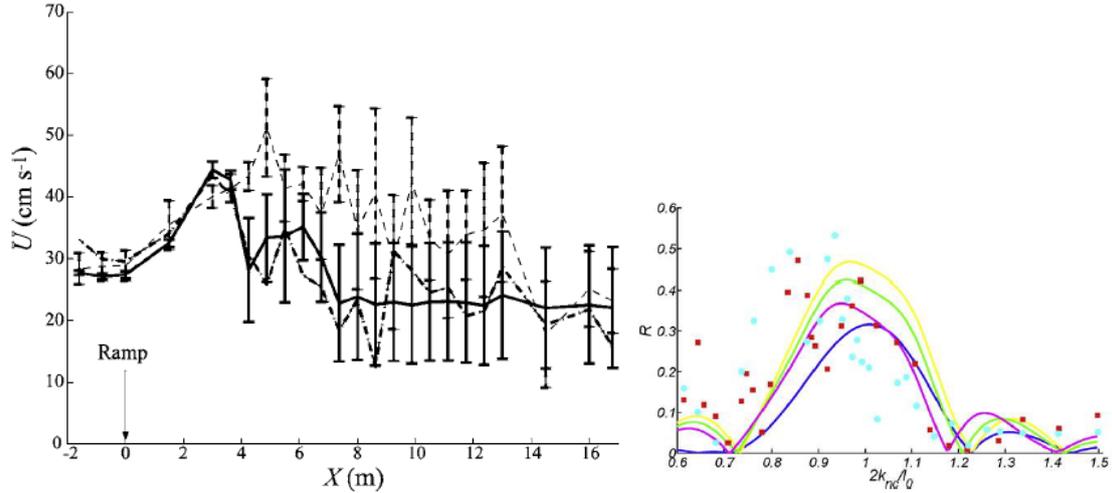


Figure 2.2: a) Profil de courant enregistré avant et au-dessus du fond ondulé, expérience de Magne et al. (2005 [119]) - b) Comparaison entre les résultats expérimentaux de Magne et al. (2005 [119]) et les prédictions numériques de Touboul et al. (2016, [193]) avec les modèles type Pente Douce étendus à la vorticité.

investigation, il s'est avéré que la bathymétrie avait cisailé verticalement le profil de courant. Là encore, une instrumentation insuffisante du courant n'a pas permis de conclure avec précision sur le rôle de la vorticité. Sur la même trame, les travaux portés par Belibassakis et al. en 2017 ([17]) étudient la réflexion de la houle par un obstacle trapézoïdal en configuration de contre-courant. La courbe présentée sur la figure (2.3) expose la réflexion relevée expérimentalement (en bleu), ainsi que les résultats numériques obtenus respectivement avec le modèle M1 (en vert) puis le modèle M2 (en rouge). On constate une très bonne corrélation entre le modèle Pente Douce modifié et les données expérimentales, avec un pic de réflexion bien approché tant en amplitude qu'en fréquence, bien qu'il soit large et aplati.

A présent, intéressons-nous à l'implémentation numérique des modèles dans le cadre de notre étude.

## 2.2 Implémentation numérique et configuration

Ces modèles ont été implémentés dans un code original en Fortran. Nous allons détailler la structure de ce code, ainsi que les outils numériques mis en place pour la résolution pour une configuration générale.

La grande majorité des problèmes physiques sont trop complexes pour être résolus tels quels: soit parce que l'équation est trop complexe pour être résolue de façon directe, soit parce que sa résolution est possible en un point mais trop coûteuse en calculs pour une résolution en tout points du domaine d'application. Il existe plusieurs méthodes pour les résoudre quand même: l'approximation des solutions (via des méthodes comme les Différences Finies, les Elements Finis ou les Volumes Finis), les méthodes d'interpolation, qui consistent à approcher la fonction par un ensemble de fonctions continues par morceaux et plus simples à résoudre, ou encore les problèmes d'optimisation, où l'on cherche une combinaison linéaire de fonctions qui vont approcher aussi près que possible la vraie fonction sur certains points. Nous avons choisi une méthode d'approximation des solutions, pour minimiser à la fois les difficultés mathématiques et les coûts de calcul numérique.

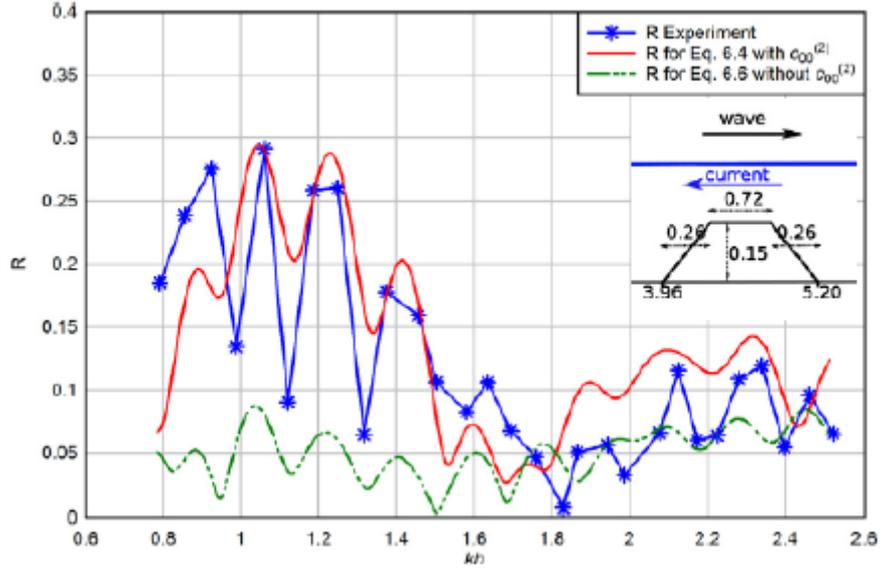


Figure 2.3: Réflexion de la houle par un obstacle trapézoïdal en situation de contre courant, étude de Belibassakis et al. (2017, [17])

**Discrétisation et transformation en système matrice vecteur** Nos trois modèles théoriques sont des problèmes infini-dimensionnels: on travaille dans des espaces de dimensions finies (1D dans notre cas), mais si on garde les équations sous la forme que l'on a présenté ci-dessus, l'inconnue est à déterminer en tout point  $x$  de l'espace de travail, soit une infinité de points. Pour calculer numériquement la solution, il faut se ramener à un problème en dimension finie, c'est-à-dire transformer nos équations en modèles d'approximation. Il s'agit d'abord de discrétiser l'espace de résolution, puis de résoudre l'équation en chaque point (ou noeud) de l'espace, pour approcher la solution continue par un ensemble de solutions locales. On passe d'un problème continu à un problème discrétisé. Dans cette étude, nous nous sommes cantonnées à une dimension spatiale horizontale, selon la direction  $\mathcal{O}x$ . Nous avons donc discrétisé notre espace de longueur  $L_{dom}$  en  $N_x$  noeuds d'espacement régulier  $\Delta_x$ , et la valeur d'une variable quelconque en ce noeud est notée avec l'indice  $ii$ ,  $\forall ii = 1, 2, \dots, N_x$ . Ainsi, la valeur du potentiel des vitesses du mode propagatif au  $ii$ -ème noeud est notée  $\varphi_{0,ii}$ . Pour passer de la distance  $x$  en mètre dans l'espace au numéro  $ii$  du noeud le plus proche, on utilise la fonction de transfert :

$$x(ii) = \Delta_x * (ii - 1) \quad (2.21)$$

Ensuite, nous devons choisir un schéma d'approximation de notre équation. Le choix du schéma va grandement dépendre du type d'équation, ici nous avons une équation (ou un système d'équations) aux dérivées partielles, stationnaires, elliptiques et donc d'ordre 2 (le plus haut ordre de dérivation de notre inconnue, le potentiel des vitesses). Elles sont également linéaires, car pour chacun des modèles on peut trouver une application  $\mathcal{L}$  linéaire par rapport à  $\varphi$  telle que notre équation se résume à  $\mathcal{L}(\varphi)$ , avec  $\mathcal{L}$  sous la forme  $A.\nabla^2 + B.\nabla + C$  où  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des fonctions linéaires (car combinaison linéaire de fonctions linéaires) indépendantes de  $\varphi$ .

Nous avons donc choisi un schéma de discrétisation par Différences Finies de type explicite centré, qui approche toute dérivée d'une variable quelconque par un accroissement de la fonction entre deux points. Prenons l'exemple de notre inconnue, le potentiel des vitesses, le schéma centré va approcher la première dérivée par une moyenne de la fonction entre deux points, centrés autour de la solution :

$$\nabla\varphi_{0,ii} = \frac{\varphi_{0,ii+1} - \varphi_{0,ii-1}}{2\Delta_x} \quad (2.22)$$

A l'ordre deux, le schéma centré correspondant est :

$$\nabla^2\varphi_{0,ii} = \frac{\varphi_{0,ii+1} - 2\varphi_{0,ii} + \varphi_{0,ii-1}}{\Delta_x^2} \quad (2.23)$$

Concernant les points de bord dans l'expression des gradients par différences finies, nous choisissons les schémas à l'ordre 2 suivants :

$$\nabla\varphi_{0,1} = \frac{-3\varphi_{0,1} + 4\varphi_{0,2} - \varphi_{0,3}}{2\Delta_x} \quad (2.24)$$

$$\nabla\varphi_{0,Nx} = \frac{\varphi_{0,Nx-2} - 4\varphi_{0,Nx-1} + 3\varphi_{0,Nx}}{2\Delta_x} \quad (2.25)$$

$$\nabla^2\varphi_{0,1} = \frac{\varphi_{0,3} - 2\varphi_{0,2} + \varphi_{0,1}}{\Delta_x^2} \quad (2.26)$$

$$\nabla^2\varphi_{0,Nx} = \frac{\varphi_{0,Nx-2} - 2\varphi_{0,Nx-1} + \varphi_{0,Nx}}{\Delta_x^2} \quad (2.27)$$

L'origine de ces formulations vient d'un développement de Taylor, elle est particulièrement documentée, par exemple dans le cours du Dr L. Risser ([163]). Nous avons choisi la méthode des Différences Finies car elle peut s'appliquer à tout type d'équations aux dérivées partielles et elle est particulièrement simple à mettre en place (et peu coûteuse) pour un problème 1D. Elle permet de transformer un problème physique continu en un système numérique discret, linéaire, de type matrice vecteur  $Ax = b$ , facilement solvable. Voyons comment procéder. Les équations de nos trois modèles peuvent s'écrire sous la forme générale :

$$A\nabla^2\phi + B\nabla\phi + C\phi = D \quad (2.28)$$

avec  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  les coefficients indépendants de  $\phi$ . En discrétisant, on passe d'une équation continue à une série d'équations s'appliquant aux noeuds  $i$ , et en exprimant chaque dérivée par son approximation sous forme de différences finies, on obtient  $\forall i = 2, \dots, Nx - 1$ :

$$A\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta_x^2} + B\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta_x} + C\phi_i = D \quad (2.29)$$

On regroupe ensuite par position :

$$\left(\frac{A}{\Delta_x^2} + \frac{B}{2\Delta_x}\right)\phi_{i+1} + \left(\frac{-2A}{\Delta_x^2} + C\right)\phi_i + \left(\frac{A}{\Delta_x^2} - \frac{B}{2\Delta_x}\right)\phi_{i-1} = D \quad (2.30)$$

Et on peut donc aboutir à une matrice creuse de forme tridiagonale, de la forme générale :

$$P\phi_{i+1} + Q\phi_i + R\phi_{i-1} = D \quad (2.31)$$

avec  $P = \frac{A}{\Delta_x^2} + \frac{B}{2\Delta_x}$ ,  $Q = \frac{-2A}{\Delta_x^2} + C$  et  $R = \frac{A}{\Delta_x^2} - \frac{B}{2\Delta_x}$ .

**Paramètres physiques de l'étude** Nous rappelons que le but de cette étude est de quantifier l'influence de la vorticité sur la propagation de la houle, et en particulier sur un phénomène de réflexion par résonance de Bragg. Pour cela, nous allons calculer la réflexion d'une houle se propageant au-dessus d'un fond ondulé de longueur finie en présence d'un courant cisailé. Nous disposerons donc d'un fichier de paramètres d'entrée communs, choisis en pratique pour être au plus proche des conditions expérimentales de notre étude menée dans le canal hydrodynamique de SeaTech (voir chapitre 3). Notre méthode s'applique toutefois également   toute configuration similaire. La longueur totale du domaine est de 10m et le pas de discrétisation spatiale vaut 8mm, soit  $\Delta x = \frac{\lambda_{houle}}{125}$ . Nous avons généré des houles de fréquences comprises entre 0.95 et 1.65Hz, avec un pas de 0.005Hz et d'amplitude égale   2cm. La hauteur d'eau moyenne  $h$  est de 22cm. Le choix du pas spatial est justifié dans la preuve de convergence, plus loin dans cette section. De plus, le rapport entre les caractéristiques spatiales de la houle et la profondeur d'eau nous place quasiment toujours en profondeur intermédiaire, nous préservant des cas limites d'eau peu profonde ou de profondeur infinie. En effet, notre étude est centrée autour du phénomène de résonance de Bragg: les longueurs d'onde de houle testées vont donc varier autour de  $2\lambda_{bath}$ , soit dans l'étude principale environ 1m, ce qui vérifie bien  $0.1m = \frac{\lambda_{houle}}{10} < h < \frac{\lambda_{houle}}{2} = 0.5m$ . Nous avons également choisi de préciser dans le fichier d'entrée le modèle (M1, M2 ou M3), ainsi que le profil de courant choisi parmi une large variété de profils issus de l'expérience: sans courant, courant horizontalement constant et verticalement cisailé, courant horizontalement polynomial et verticalement cisailé... Une première sous-routine se chargera de calculer la profondeur d'eau locale en tout point discrétisé  $ii$ , selon le profil bathymétrique choisi (fond plat, fond en pente, fond ondulé   composante simple,   composante double...), ainsi que le ou les nombres d'onde et les gradients associés. Concernant les nombres d'onde, leur méthode de calcul est précisée ci-après. Les conditions aux limites du problème physique sont définies dans la sous-routine chargée d'assembler la matrice du système   résoudre.

**Calcul des nombres d'onde par la méthode de Newton** En présence de courant, les nombres d'onde de chaque mode sont donnés par les relations de dispersion 2.4, et pour la résoudre nous avons fait appel   une méthode itérative dite de Newton. Il s'agit de résoudre en tout noeud de l'espace discrétisé l'équation  $F(k) = 0$  avec  $F = F_0(k_0) = (\omega - k_0U_0)(\omega - k_0U_2) - gk_0 \tanh(k_0h)$  pour le mode propagatif et  $F = F_n(k_n) = (\omega - k_nU_0)(\omega - k_nU_2) + gk_n \tan(k_nh)$  pour les  $n$  modes évanescents. Par souci de clarté,   partir de ce point nous noterons indifféremment les nombres d'ondes propagatifs ou évanescents, incidents ou réfléchis, sous la forme générale  $k$ , et les indices feront référence   l'itération considérée.

La méthode de Newton - ou méthode de Newton-Raphson, dont l'historique et plusieurs cas d'application sont détaillés dans les études [210, 48, 49, 86]- consiste   choisir un point de départ  $k_0$ , qui va conditionner la convergence vers la solution - ou racine  $r$  - la plus proche, qu'elle soit positive (nombre d'onde incident) ou négative (nombre d'onde réfléchi). A partir de ce nombre d'onde de départ choisi donc proche de la racine  $r$ , on formule un développement de Taylor   l'ordre 1 de la fonction  $F$  en  $k_0$ :

$$F(k) = F(k_0) + (k - k_0)F'(k_0) + \mathcal{O}((k - k_0)^2) \quad (2.32)$$

où  $F'$  fait référence   la dérivée de la fonction  $F$  selon  $k$ . Comme l'on souhaite trouver une valeur approchée de  $r$ , on ne garde que la partie linéaire du développement, et on résout :

$$F(r) = 0 \approx F(k_0) + (r - k_0)F'(k_0) \quad (2.33)$$

d'où

$$r \approx k_0 - \frac{F(k_0)}{F'(k_0)} \quad (2.34)$$

On établit donc la suite récurrente définie par une valeur initiale  $k_0$  proche de la racine et par la relation de récurrence:

$$k_{p+1} = k_p - \frac{F(k_p)}{F'(k_p)} \quad (2.35)$$

Nous avons choisi un critère d'arrêt de la récurrence portant sur la précision en convergence.

**Conditions aux limites** En effet, pour que la méthode des Différences Finies puisse s'appliquer, nous devons disposer d'un problème aux limites, c'est-à-dire une équation (ou un système d'équations) sur l'intérieur d'un domaine, mais également des conditions sur les bords du domaine. En ces points-là, notre schéma centré est incapable de fonctionner (centrer sur un point de bord impliquerait un point fantôme en dehors du domaine). Nous avons choisi des frontières ouvertes pour les deux bords de notre domaine : une condition de type Panchang et al. ([143]) en entrée, et une condition de sortie libre en sortie.

La condition d'entrée va s'établir comme suit en  $x_0 = 0$  ou  $i = 1$ : on part de la forme de la houle incidente linéaire, de type Airy, qui va entrer dans le domaine

$$\phi_{incident} = a_0 \exp(ik_0 x_0) \quad (2.36)$$

Ici et dans la suite du calcul,  $k_0$  fait référence au nombre d'onde propagatif pris en  $x_0 = 0$ . Or, on sait que sur l'ensemble du domaine, le gradient de potentiel fait intervenir une superposition de houle incidente et réfléchi, sous la forme:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = ik_0^+ \phi_{incident} - ik_0^- \phi_{réfléchi} \quad (2.37)$$

avec  $k_0^+$  et  $k_0^-$  différents en présence de courant. Or, par définition on décompose  $\phi = \phi_{incident} + \phi_{réfléchi}$  donc on peut dans l'expression 2.37 remplacer  $\phi_{réfléchi}$ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = ik_0 \phi_{incident} - ik_0 (\phi - \phi_{incident}) = ik_0 (2\phi_{incident} - \phi) \quad (2.38)$$

On peut à présent insérer l'approximation par différences finies:

$$\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta_x} = ik_0 (2\phi_{incident} - \phi_i) \quad (2.39)$$

Pour les équations (2.31) et (2.39) centrées en  $x = 0$  soit  $i = 1$ , le point qui va poser problème est le point d'indice  $i - 1$  qui n'existe pas. Mais d'après la condition que l'ont vient d'écrire (2.39), on peut extraire qu'en ce point,

$$\phi_{i-1} = \phi_{i+1} - 2ik_0 \Delta_x (2\phi_{incident} - \phi_i) \quad (2.40)$$

On le réinjecte par exemple dans l'équation (2.31) et on obtient en  $x = 0$  soit  $i = 1$  :

$$P\phi_{i+1} + Q\phi_i + R(\phi_{i+1} - 2ik_0 \Delta_x (2\phi_{incident} - \phi_i)) = D \quad (2.41)$$

soit

$$(P + R)\phi_{i+1} + (Q + 2ik_0 \Delta_x R)\phi_i = D + 4Rik_0 \Delta_x \phi_{incident} \quad (2.42)$$

avec  $\phi_{incident}$  défini par (2.36).

Concernant la condition de sortie, on applique la même méthode, avec une condition de sortie libre en  $x = L_{dom}$  ou  $i = N_x$  :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = ik_0 \phi \quad (2.43)$$

Attention, cette fois  $k_0$  fait référence au nombre d'onde propagatif pris en  $x = L_{dom}$ . On applique l'approximation par différences finies pour extraire le point fantôme en  $i + 1$ :

$$\phi_{i+1} = 2ik_0 \Delta_x \phi_i + \phi_{i-1} \quad (2.44)$$

et l'équation 2.31 devient :

$$(Q + 2ik_0 \Delta_x P) \phi_i + (P + R) \phi_{i-1} = D \quad (2.45)$$

On obtient donc le système matriciel complet suivant, avec en  $i = 1$  l'équation (2.42),  $\forall i = 2, \dots, N_x - 1$  l'équation (2.30) et en  $i = N_x$  l'équation (2.45).

**Solveur utilisé : le BICG pour matrice complexe** Pour leur applicabilité aux problèmes linéaires de grandes tailles, nous avons choisi une méthode de projection de Krylov: le solveur Gradient Biconjugué (BICG) qui, contrairement au Gradient Conjugué, est adapté aux matrices non symétriques. Ce n'est bien sûr pas la seule ([88, 165]) mais cette méthode possède une récurrence courte, et c'est cet avantage que nous avons souhaité exploiter. Le principe de cette méthode est largement détaillé ([134, 166]), nous nous en tiendrons ici aux grandes étapes.

La méthode du BICG résout le système augmenté  $\tilde{\mathbf{A}} \vec{x} = \vec{b}$  suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{A}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

où on choisit par commodité  $\vec{b} = \vec{b}$  et où  $\vec{x}$  est la deuxième partie du vecteur solution, qui sert simplement à poser le problème. La résolution se fait par la méthode de projection de Krylov, où l'espace de Krylov associé est :

$$\begin{pmatrix} K_k(\mathbf{A}, \vec{r}_0) \\ K_k(\mathbf{A}^T, \vec{r}_0) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

et où la matrice  $\mathbf{B}$  est choisie égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

Ainsi

$$\mathbf{B} \tilde{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Les conditions d'espace et de Galerkin sont les suivantes, issues respectivement de (2.47) et (2.49):

$$\vec{x}_k \in [\vec{x}_0 + K_k(\mathbf{A}, \vec{r}_0)] \quad (2.50)$$

$$\vec{x}_k \in \left[ \vec{x}_0 + K_k(\mathbf{A}^T, \vec{r}_0) \right] \quad (2.51)$$

$$\vec{r}_k \perp K_k(\mathbf{A}^T, \vec{r}_0) \quad (2.52)$$

$$\vec{r}_k \in K_k(\mathbf{A}, \vec{r}_0) \quad (2.53)$$

Il est à noter que les deux résidus et les deux directions de descente vérifient toujours les conditions d'orthogonalité :

$$\begin{aligned} r_{k+1}^T \tilde{r}_k &= 0 \\ \mathbf{A} p_{k+1}^T \tilde{p}_k &= p_{k+1}^T \mathbf{A}^T \tilde{p}_k = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

Les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{BA}$  sont symétriques, ce qui confère à la méthode un récurrence courte car permettant de calculer une base  $\mathbf{B}$ -orthogonale de l'espace de Krylov. L'algorithme va se construire sur les mêmes bases que la méthode du Gradient Conjugué, en commençant par choisir  $x_0$ ,  $\tilde{x}_0$  et  $\tilde{b}$  pour construire le système augmenté. Ensuite, on initialise les résidus :

$$\begin{aligned} \vec{r}_0 &= \vec{b} - \mathbf{A} \vec{x}_0 \\ \tilde{r}_0 &= \tilde{b} - \mathbf{A} \tilde{x}_0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

et les directions de descente :

$$\begin{aligned} \vec{p}_0 &= \vec{r}_0 \\ \tilde{p}_0 &= \tilde{r}_0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ensuite, une fois le critère de convergence choisi, on calcule à chaque itération les coefficients  $\alpha_k$  et  $\beta_k$ , les résidus, les directions de descente, et la solution, avec les formulations tirées et justifiées de la méthode du Gradient Conjugué:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{\vec{r}_k^T \vec{r}_k}{\vec{p}_k^T \mathbf{A} \vec{p}_k} \\ \vec{x}_{k+1} &= \vec{x}_k + \alpha_k \vec{p}_k \\ \vec{r}_{k+1} &= \vec{r}_k - \alpha_k \mathbf{A} \vec{p}_k \\ \tilde{r}_{k+1} &= \tilde{r}_k - \alpha_k \mathbf{A}^T \tilde{p}_k \\ \beta_{k+1} &= \frac{\vec{r}_{k+1}^T \vec{r}_{k+1}}{\vec{r}_k^T \vec{r}_k} \\ \vec{p}_{k+1} &= \vec{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \vec{p}_k \\ \tilde{p}_{k+1} &= \tilde{r}_{k+1} + \beta_{k+1} \tilde{p}_k \end{aligned} \quad (2.57)$$

Nous avons choisi la méthode BICG pour sa récurrence courte. Par contre, à chaque itération, deux produits matrice-vecteur sont calculés (avec  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}^T$ ). Cependant, la matrice  $\mathbf{B}$  n'étant pas définie, la méthode de projection de Krylov risque d'échouer. De plus, le résidu ou l'erreur ne vérifient pas de propriété de minimisation, on ne peut donc pas prouver de convergence monotone. La régularité de la convergence sera donc à surveiller, avec une stabilisation (méthode BICGSTAB [199]) et/ou un préconditionnement à prévoir éventuellement.

**Consistance, stabilité et donc convergence** Afin de valider la convergence de notre schéma, il faut en vérifier les propriétés de consistance et de stabilité. La consistance du schéma est sa capacité à représenter une solution régulière satisfaisant localement les équations aux dérivées partielles même lorsque les pas de discrétisation (dans notre cas  $\Delta_x$ ) tendent vers 0. Nous avons donc fait une étude de consistance, c'est-à-dire pour chacun des schémas, nous avons calculé l'évolution de l'erreur de consistance selon le pas d'espace. Sachant que les modèles M2 et M3 sont des extensions du modèle M1 (subroutines de calcul de coefficients supplémentaires mais schéma numérique identique), tester la consistance du M1 revient à valider la consistance de l'ensemble du code. Nous avons donc lancé M1 sur une configuration simple: un domaine de 9m de long, une houle d'amplitude  $a_0 = 2cm$  et de fréquence choisie au milieu de notre plage habituelle  $f = 1.345Hz$ , se propageant sur une profondeur d'eau de 22cm par fond plat. Nous avons regardé la convergence du code à la fois sur l'enveloppe de la houle et sur la surface libre, en comparant les résultats numériques à la formulation théorique pour une houle d'Airy. Nous avons donc tracé selon un nombre de points de discrétisation  $N_x$  croissant (donc un pas d'espace tendant vers 0) les deux erreurs de consistance suivantes :

$$\varepsilon_1 = \sum_{i=1}^{N_x} |Ev_{num}(i) - Ev_{th}(i)| \quad (2.58)$$

$$\varepsilon_2 = \sum_{i=1}^{N_x} |S_{num}(i) - S_{th}(i)| \quad (2.59)$$

A partir des expressions théoriques respectives de l'enveloppe de la houle et de la surface libre :

$$Ev_{th}(x) = a_0 \quad (2.60)$$

$$S_{th}(x) = a_0 \cos(k_0 x) \quad (2.61)$$

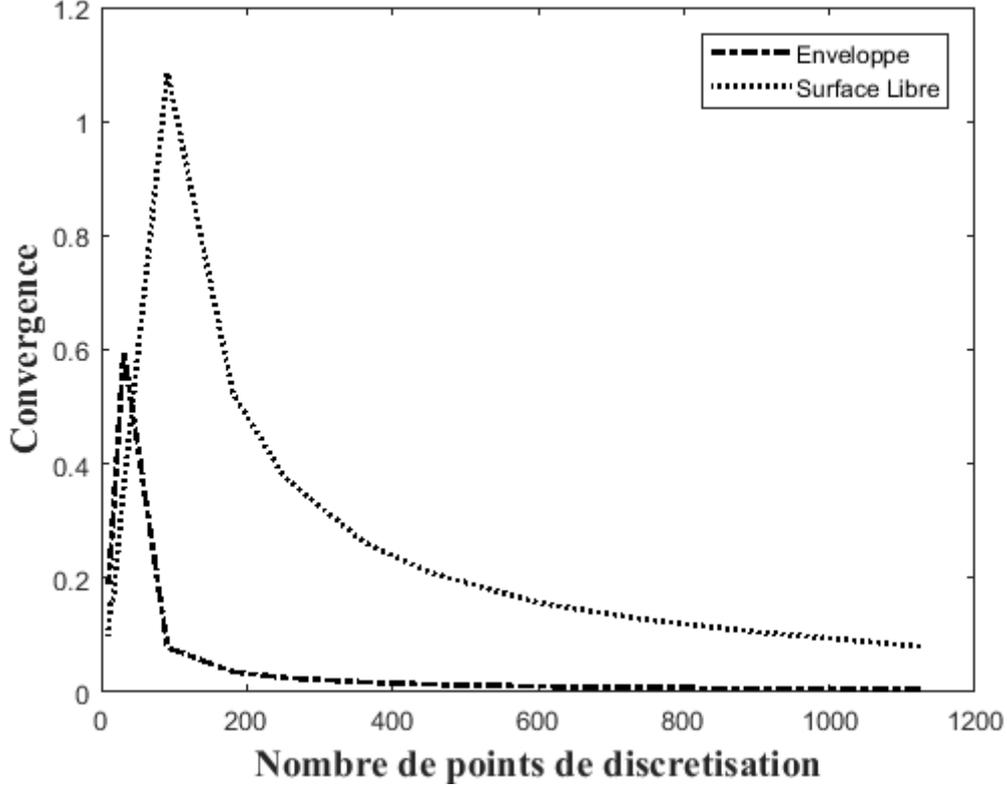
Les expressions numériques sont tirées du potentiel de vitesse résultat, sa norme pour comparer l'enveloppe, et sa partie réelle pour comparer la surface libre.

Nous obtenons les courbes suivantes (2.4). On observe rapidement une convergence des résultats vers une valeur limite, atteinte dès 200 points de discrétisation spatiale pour la méthode "enveloppe", et vers 1000 points pour la méthode "surface libre".

Notre schéma numérique est donc correctement implémenté, et nous fixons le nombre de points de discrétisation à  $N_x = 1126$ , soit un pas d'espace de  $\Delta_x = 0.008m$ , là où la convergence semble acquise pour l'enveloppe comme la surface libre. De plus, nos modèles étant stationnaires, la notion de stabilité est automatiquement acquise. Notre schéma numérique est stable et consistant, on a donc prouvé qu'il converge.

**Calcul du coefficient de réflexion : méthode à 2 sondes corrigée** Une fois le potentiel vitesse obtenu en tout noeud de l'espace discrétisé, il convient d'en extraire le coefficient de réflexion, défini par (1.61), pour mesurer l'effet potentiel du fond sinusoïdal sur la propagation d'une houle monochromatique de fréquence  $f$  donnée. La réflexion est étudiée en amont du fond variable, pour que l'on puisse capter l'ensemble de l'influence du fond, des ondes réfléchies par le fond. Ainsi, comme nous sommes partis sur une méthode de calcul de la réflexion tout à fait classique, la méthode dite "à deux sondes" (présentée pour la première fois dans l'étude de Guda & Suzuki [71]), nous avons choisi deux points d'abscisses  $x_A = 0m$  et  $x_B = \frac{\pi}{k_A^+ - k_A^-}$  situés en

Figure 2.4: Courbe de convergence: M1 par fond plat



amont de notre fond. Le choix de la deuxième position est réfléchi, il s'agit surtout d'éviter de retomber sur les mêmes mesures, espacées de  $\frac{\lambda}{2}$  et notre abscisse  $x_B$  nous donne bien en l'absence de courant  $\Delta_{x_A-x_B} = \frac{\lambda}{4}$ . Ici,  $k_A^+ = k_0^+(x_A)$  fait référence au nombre d'onde propagatif incident pris en  $x = x_A$  et de la même manière  $k_A^- = k_0^-(x_A)$  fait référence au nombre d'onde propagatif réfléchi pris en  $x = x_A$ . Par extension, les notations  $k_B^+$  et  $k_B^-$  feront référence aux nombres d'onde propagatif pris en  $x = x_B$ . Nous n'avons donc pas de problème de définition de  $x_B$  quand le courant tend à s'annuler car, en l'absence de courant, on a  $k^-(U=0) = -k^+(U=0)$ .

On rappelle que pour une onde de gravité monochromatique, l'expression générale du potentiel des vitesses peut s'écrire comme la somme de deux composantes, une incidente et une réfléchie :(1.14) et (1.15).

Notre code nous a calculé ce potentiel complexe en tout noeud de l'espace discrétisé. Nous pouvons donc écrire la relation (1.15) aux deux points  $x_A$  et  $x_B$  choisis :

$$\begin{cases} \phi(x_A) = \phi_A = [A^- \exp(ik_A^- x_A) + A^+ \exp(ik_A^+ x_A)] \\ \phi(x_B) = \phi_B = [A^- \exp(ik_B^- x_B) + A^+ \exp(ik_B^+ x_B)] \end{cases} \quad (2.62)$$

où  $A^-$  et  $A^+$  représentent les amplitudes respectives des potentiels pour les ondes réfléchies et incidentes, nos inconnues. Ces deux équations à deux inconnues peuvent d'ailleurs s'écrire sous la forme d'un système matrice vecteur de taille 2\*2 :

$$\begin{pmatrix} \exp(ik_A^+ x_A) & \exp(ik_A^- x_A) \\ \exp(ik_B^+ x_B) & \exp(ik_B^- x_B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_A \\ \phi_B \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

On résout ce problème par extraction puis remplacement et on trouve les expressions:

$$A^- = \frac{\phi_B \exp(ik_A^+ x_A) - \phi_A \exp(ik_B^+ x_B)}{\exp(ik_B^- x_B) \exp(ik_A^+ x_A) - \exp(ik_A^- x_A) \exp(ik_B^+ x_B)} \quad (2.64)$$

$$A^+ = \frac{\phi_A \exp(ik_B^- x_B) - \phi_B \exp(ik_A^- x_A)}{\exp(ik_B^- x_B) \exp(ik_A^+ x_A) - \exp(ik_A^- x_A) \exp(ik_B^+ x_B)} \quad (2.65)$$

Sachant que

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + U \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}_{z=0} \quad (2.66)$$

l'amplitude  $a^\pm$  de l'onde dépend de la direction de propagation de l'onde pour les conditions de courant données. Utilisons cette formule dans le cas de l'onde incidente. Nous avons défini

$$\Phi^+ = A^+ \exp(ik^+ x) \exp(-i\omega_0 t) \frac{\cosh(k^+(z+h))}{\cosh(k^+h)} \quad (2.67)$$

donc

$$\frac{\partial \Phi^+}{\partial z}_{z=0} = k^+ A^+ \exp(ik^+ x) \exp(-i\omega_0 t) \frac{\sinh(k^+h)}{\cosh(k^+h)} \quad (2.68)$$

On rappelle que

$$\eta^+ = ia^+ \exp(ik^+ x) \exp(-i\omega_0 t) \quad (2.69)$$

On en déduit

$$\frac{\partial \eta^+}{\partial t} = a^+ \omega_0 \exp(ik^+ x) \exp(-i\omega_0 t) \quad (2.70)$$

et

$$U \frac{\partial \eta}{\partial x} = -U a^+ k^+ \exp(ik^+ x) \exp(-i\omega_0 t) \quad (2.71)$$

Alors la relation (2.66) peut se réécrire:

$$a^+(\omega_0 - Uk^+) = k^+ A^+ \frac{\sinh(k^+h)}{\cosh(k^+h)} \quad (2.72)$$

et on exprime l'amplitude de l'onde incidente comme suit:

$$a^+ = k^+ A^+ \frac{\sinh(k^+h)}{\cosh(k^+h)} \cdot \frac{1}{-Uk^+ + \omega_0} = \frac{k^+ A^+ \tanh(k^+h)}{-Uk^+ + \omega_0} \quad (2.73)$$

Aux points  $x_A$  choisi, on calcule les pulsations suivantes, issues respectivement des relations de dispersion propagatives avec courant constant et des relations de dispersion propagatives avec courant cisailé, avec toujours  $\omega_0 = 2\pi f$ ,  $f$  la fréquence de la houle:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_0^+ = \omega_0 - k_A^+ U_0(x_A) \\ \sigma_0^- = \omega_0 - k_A^- U_0(x_A) \\ \sigma_1^+ = \sqrt{gk_A^+ \tanh(k_A^+ h(x_A))} \\ \sigma_1^- = \sqrt{gk_A^- \tanh(k_A^- h(x_A))} \end{array} \right. \quad (2.74)$$

On peut alors exprimer l'amplitude de l'onde incidente (et par similitude l'amplitude de l'onde réfléchie), calculée en (2.72), selon les pulsations (2.74) :

$$\begin{cases} a^+(x_A) = \frac{A^+ \sigma_1^{+2}}{-g\sigma_0^+} \\ a^-(x_A) = \frac{A^- \sigma_1^{-2}}{-g\sigma_0^-} \end{cases} \quad (2.75)$$

Le coefficient de réflexion peut alors s'exprimer comme suit:

$$C_r = \frac{a^-}{a^+} = \frac{A^- \sigma_1^{-2}}{g\sigma_0^-} \frac{g\sigma_0^+}{A^+ \sigma_1^{+2}} = \frac{A^- \sigma_1^{-2} \sigma_0^+}{A^+ \sigma_1^{+2} \sigma_0^-} \quad (2.76)$$

On extrait le coefficient suivant :

$$N_a = \frac{(\sigma_1^-)^2 \sigma_0^+}{(\sigma_1^+)^2 \sigma_0^-} \quad (2.77)$$

et le coefficient de réflexion s'écrit alors :

$$C_r = \frac{|A^-|}{|A^+|} N_a \quad (2.78)$$

A présent qu'ont été établis tous les éléments qui ont permis l'implémentation de nos codes de calcul, passons à la deuxième partie de cette étude, l'obtention de résultats expérimentaux à confronter aux prédictions numériques. Nous allons dans un premier temps présenter le matériel mis à notre disposition ainsi que leurs caractéristiques techniques, puis nous justifierons nos choix dans l'établissement du protocole expérimental grâce à une première campagne de prédimensionnement. Ensuite, nous présenterons les outils dont nous nous sommes servis pour acquérir et analyser les données, et nous présenterons les conditions de propagation de houle que nous avons réussi à mettre en place.

# Chapitre 3

## Techniques expérimentales

“Des fois t’es le pare-brise, des fois le moucheron”. Ann Brashares, Quatre filles et un jean

Nos modèles numériques nécessitent une validation expérimentale, portant sur un phénomène de propagation relativement facile à mettre en place en laboratoire et ayant un intérêt pour l’hydrodynamique côtière. Notre choix s’est donc naturellement porté sur la résonance de Bragg, phénomène largement connu et documenté en l’absence de courant (voir première partie, paragraphe 1.3.4). Habituellement, lorsqu’une houle se propage au-dessus d’un fond lentement variable, une très grande partie de son énergie est transmise. Dans le cas particulier d’un fond sinusoïdal, la situation change si la longueur d’onde de la houle incidente est deux fois égale à la longueur d’onde du fond. La houle entre en résonance, une grande partie de son énergie va alors être réfléchiée par le fond périodique, c’est le phénomène de résonance de Bragg. Le schéma présenté dans l’étude de Mei illustre le phénomène (2004 [132]) et particulièrement l’interférence constructive entre la houle incidente et la houle réfléchiée à l’origine de cette résonance. Ainsi, de petites variations du milieu - par ailleurs compatibles avec les modèles numériques de type Pente Douce- conduisent à une réaction du milieu facilement observable et mesurable, c’est ce qui rend ce phénomène particulièrement intéressant pour l’expérimentation en laboratoire. De plus, cette résonance apparaît spontanément en milieu côtier: lorsque les points de déferlement se multiplient, des barres sableuses se forment parallèlement à la côte. L’ingénierie côtière y a porté un grand intérêt, des ouvrages de défense du littoral basés sur ce phénomène ont vu le jour (voir paragraphe 1.3.4). Il s’agit donc d’un phénomène dont la compréhension et la modélisation en présence de courants côtiers pourraient ouvrir de belles perspectives pour le génie côtier.

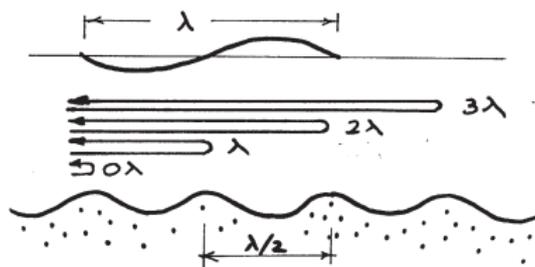


Figure 3.1: Schéma explicatif du phénomène de résonance de Bragg (Mei, 2004)

Figure 3.2: Canal hydraulique de SeaTech



Cette partie concerne donc la validation de nos modèles numériques sur un cas de réflexion de houle par résonance de Bragg, par comparaison avec les résultats d'une campagne expérimentale menée en canal à houle, en présence d'un courant cisailé. Cette campagne s'inscrit dans un état de l'art très riche en l'absence de courant (années 1980, voir partie 1.3.4), mais une seule expérience été recensée en présence de courant inhomogène: celles menée au Bassin de Génie Océanique First respectivement par Magne et al. (2005 [119]) puis reprise par Touboul et al. (2016 [193]) et présentée dans la partie 1.5.3. Si cette campagne a confirmé l'influence de la vorticité sur la propagation de la houle, le cisaillement était alors encore mal maîtrisé et trop peu instrument  pour pouvoir quantifier avec précision cette influence. L'objectif de cette partie est donc de proposer la première expérience de résonance de Bragg en présence d'un courant cisailé contrôlé et en cartographiant précisément le courant sur son profil vertical.

### 3.1 Présentation de l'instrumentation

Il s'agissait donc de produire une étude exp rientele 1D portant sur le contrôle et la mesure du cisaillement, dans un contexte de réflexion de la houle par résonance de Bragg. Pour ce faire, un canal hydraulique a été mis   notre disposition, commun   l' cole d'ingénieurs SeaTech (anciennement ISITV), affiliée   l'Université de Toulon, et au laboratoire MIO. Ce canal, présenté sur la figure (3.2) est muni de systèmes de génération de houle et de courant, il répond donc parfaitement aux attentes de la campagne que nous souhaitons mettre en place. Il a d'ailleurs déjà été utilisé dans le cadre du projet MORHOC'H (voir les travaux de B. Simon [170]). Voyons en détail ses caractéristiques et capacités, et comment ces dernières ont conditionné notre expérience.

#### 3.1.1 Le canal hydraulique de SeaTech

##### Dimensions du canal et systèmes de génération du courant

Mis en place   l' cole d'ingénieurs ISITV dès 1995, le canal   houle est un outil de pédagogie et de recherche très apprécié pour sa polyvalence et sa simplicité d'utilisation. Il a une longueur utile de 10m, une largeur de 0.3m et une hauteur de 0.5m, ce qui le rend idéal pour les études 2D. Grâce   un système de leviers, il est inclinable, d'une pente maximale de 4%. Une pompe permet de générer du courant, en faisant circuler de l'eau douce (  environ 16 C pendant

notre campagne) en circuit fermé depuis un réservoir, puis au travers de bacs de décantation-sédimentation. L'eau circule dans un système de canaux, d'où on peut en lire le débit grâce à un tube de Pitot. Elle est ensuite hissée dans la partie arrière du canal, plus large, afin d'arriver dans la zone d'expérimentation, plus étroite, sans jaillir, puis elle retombe dans le réservoir à l'autre extrémité du canal. La pompe doit être ouverte avec doigté, on la règle conjointement grâce à un volant d'ouverture et au tube de Pitot. Elle permet un débit maximum de  $100\text{m}^3$  par heure.

### **Système de génération de la houle**

Plusieurs batteurs (type volet, type piston...) sont à disposition pour générer des houles très variées: régulières comme irrégulières, en co-courant comme à contre-courant. Le batteur piston que nous avons choisi de mettre en place à contre-courant dans le canal permet une large gamme de houles, régulières : on entre le nombre de périodes, la fréquence et l'amplitude, éventuellement des rampes pour lisser, initialiser ou terminer le profil de houle, ou irrégulières : l'ordinateur va lire un fichier de houle et après instructions former un profil évolutif tel qu'on l'a souhaité. Nous avons choisi des houles régulières, en prenant soin de mettre une rampe en entrée et en sortie pour établir un profil le moins perturbé possible. Concernant ces houles linéaires, le batteur piston peut générer des vagues de fréquence comprise entre 0.5 et 4Hz (gravité capillarité). Le réglage de l'amplitude dépend de la fréquence choisie et de la cambrure souhaitée. Nous avons toujours pris soin de conserver des amplitudes de houle comprises entre 0.8 et 1.60 cm selon la longueur d'onde de la houle, afin d'obtenir les profils de houle les plus sinusoidaux possible et d'éliminer tout risque de déferlement de crête.

### **3.1.2 Instruments de mesure**

La mise en place de l'ensemble des instruments a été affinée entre la première campagne de pré-dimensionnement, qui a eu lieu entre octobre 2016 et février 2017, et la seconde campagne, cette fois entre novembre 2017 et mars 2018. Par souci de clarté et de concision, nous ne présenterons que les dispositifs définitifs.

#### **Relevés des profils de courant**

Pour établir un profil de courant, nous avons besoin de relever la vitesse de l'écoulement, et nous avons choisi pour cela des courantomètres acoustiques ou ADV (Acoustic Doppler Velocimeter). Leur nom est évocateur, ils utilisent en effet l'effet Doppler : ils émettent une onde acoustique qui est diffusée par les particules en suspension dans l'eau. Par rétro-diffusion de cette onde ils récupèrent les informations sur la vitesse de déplacement de ces particules dans les trois dimensions de l'espace, vitesse assimilée à l'intensité du courant. Nous avons choisi de travailler avec une fréquence d'échantillonnage de 100Hz, sur des enregistrements de trois minutes, avec un ordre de grandeur des vitesses à mesurer de  $1\text{m/s}$ . La zone d'échantillonnage de ces capteurs se situe à 5cm de leur tête, et nous avons réglé le volume d'échantillonnage, cylindrique, à  $9.1\text{ mm}^3$ , avec une longueur du cylindre de 2.4mm. Notons ici que pour une bonne clarté de l'information, une grande quantité de particules par volume d'échantillonnage est nécessaire. Nous avons donc régulièrement nous assurer d'une certaine opacité de l'eau, par ajout de particules en suspension et par remise en mouvement des particules restées dans les bacs de sédimentation. Les vélocimètres mis à notre disposition pour cette étude sont des Vectrino© conçus par la société NortekMed. On distingue les Vectrino© classiques, avec une tête émettrice orientée vers le bas, dans l'axe de la tige qui la soutient, et les Vectrino© dits

“side-looking”: leur tête émet dans une direction perpendiculaire à la tige support. Ces derniers sont ainsi particulièrement utiles pour mesurer la vitesse de l’écoulement près du fond. Les deux types d’instruments ont le même fonctionnement, ils permettent une mesure de la vitesse dans les trois directions de l’espace et ont une fréquence d’échantillonnage allant jusqu’à 200Hz. Ils sont polyvalents, et assurent des mesures fiables en laboratoire. Deux logiciels permettent de les contrôler (paramètres d’acquisition, synchronisation...), d’acquérir et de traiter les données qu’ils recueillent : PolySync© et VectrinoPlus©, les deux ayant été utilisés indifféremment au cours de cette étude. Chaque courantomètre produit à chaque enregistrement un grand nombre de données stockées dans des fichiers .vno. Ces fichiers n’étant pas lisibles directement, les logiciels de traitement vont en extraire les données et les stocker sous des formats plus communs. Les courantomètres étant des outils de mesure très complets, parmi les données enregistrées on retrouve les détails de l’enregistrement (date, durée, nombre de mesures), la configuration de l’instrument (fréquence, longueur et volume d’échantillonnage, ordre de grandeur de la vitesse à mesurer), les caractéristiques du milieu de mesure (température et salinité de l’eau, distance entre la tête de l’instrument et le fond du canal), les caractéristiques du signal (son amplitude et sa corrélation dans chaque direction)... et bien sûr les données qui nous intéressent pour établir un profil moyen de courant à chaque position: le temps, les vitesses selon les trois directions, et les corrélations associées. A chaque position le long du canal, à chaque profondeur d’immersion, la durée d’un enregistrement est de trois minutes afin de disposer de suffisamment de données pour établir une moyenne fiable.

Concernant justement la disposition des courantomètres, elle peut se décomposer en deux parties, d’objectifs distincts mais présentés conjointement sur le schéma 3.3. Dans le premier temps, nous avons d’abord réparti quatre courantomètres le long du canal, un en amont du fond sinusoïdal, deux au-dessus et un en aval, afin de visualiser de façon globale l’évolution du profil de courant lors de sa mise en place, et pour les contrôles quotidiens du maintien de ce profil dans la répétition. Dans un deuxième temps, lorsqu’un besoin de mesures plus précises s’est fait sentir, nous avons construit un chariot roulant portant cinq courantomètres, installés en décalés afin que les lâchers tourbillonnaires d’une tête ne brouillent pas les mesures de la tête suivante dans le sens du courant. Le chariot coulisse horizontalement pour déplacer les courantomètres le long du canal et le bloc porteur coulisse verticalement à loisir pour permettre un relevé de profils verticaux simultanés. Les instruments sont espacés de façon à établir l’évolution précise du courant sur une longueur d’onde de fond sinusoïdal. Pour gérer simultanément tous les instruments - courantomètres et sondes résistives -, un système de piliers métalliques a été installé autour du canal. Cette installation, spécialement dimensionnée pour ce projet, permet à la fois de placer des Vectrino aux endroits stratégiques et de faire coulisser les sondes à houles disposées le long du canal de façon simultanée, pour établir des mesures de surface libre sur toute la longueur utile.

## Mesures de la surface libre

Une fois les profils de courant relevés et établis, nous souhaitons mesurer l’impact du fond sinusoïdal sur la propagation de la houle. Une mesure de la déformée de la surface libre est donc nécessaire, et pour cela nous avons utilisé dix sondes à houles résistives, que nous avons fabriquées spécialement pour l’expérience. Leur principe est simple: la sonde est composée de deux électrodes (tiges métalliques) plongées dans l’eau et non reliées entre elles. Un câble d’entrée envoie un courant électrique dans la première électrode, et un câble de sortie récupère ce même courant dans la seconde électrode. Plus la sonde est immergée, plus la résistance électrique créée par l’eau va varier. Ainsi en présence de houle, le signal de sortie renvoyé par la sonde, c’est-à-dire la tension de la sonde, va osciller proportionnellement au mouvement de la



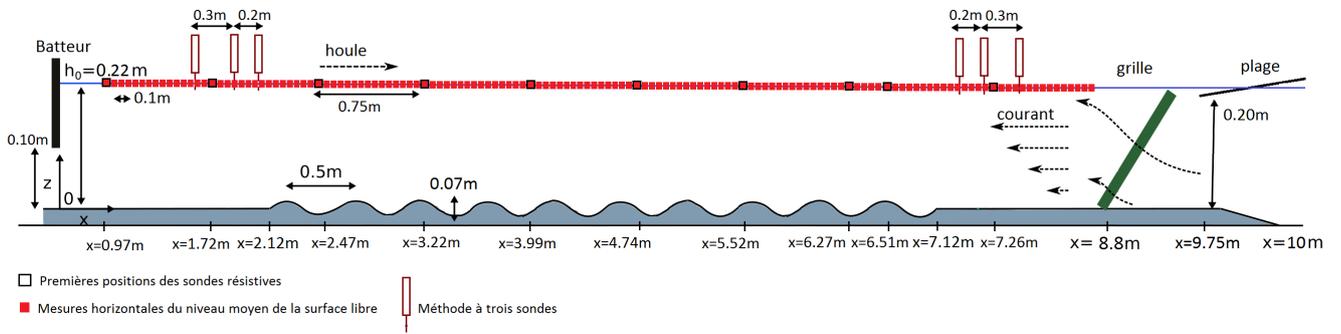


Figure 3.4: Schéma du dispositif expérimental - partie sondes résistives



Figure 3.5: Sondes résistives utilisées dans le cadre de cette étude

...). Ce dernier se gère avec la pratique de l'instrument: pour les Vectrino© il s'agit par exemple de s'assurer de l'opacité de l'eau ou encore de régler le volume d'échantillonnage selon la distance par rapport au fond ou aux parois du canal. Concernant les sondes à houle, un étalonnage adapté à l'amplitude de houle étudiée est effectué avant les mesures.

Le bruit physique est autrement plus difficile à gérer, et le caractère turbulent de l'écoulement du à la circulation de l'eau en circuit fermé a été une des causes majeures de bruit physique dans nos signaux. Tout au long de la campagne expérimentale, s'assurer de la stabilité spatiale et de la pérenité du profil de courant a été une priorité, car c'est la garantie de la répétabilité, et donc de la validité, de nos résultats. Nous nous sommes ainsi interrogés sur le maintien du profil de courant dans l'écoulement (turbulence) mais aussi près du fond (présence de couche limite) et des parois vitrées (effets de bord). Concernant la stabilité globale de l'écoulement, un dispositif anti-turbulence a été installé dans la zone arrière du canal, là où l'eau est propulsée par la pompe. Un milieu poreux, créé à l'aide de caissons grillagés de cailloux, casse les tourbillons créés par la pompe et par le brassage dans les bacs et les canalisations. Pour renforcer cet effet, nous avons également installé plusieurs grilles verticales successives, qui vont décomposer les gros tourbillons en plus petits jusqu'à n'obtenir finalement qu'une turbulence de grille de très petites échelles spatiale et temporelle - ce dispositif est présenté sur la figure 3.12. Des tests visuels à la fluoresceïne ont été réalisés pour évaluer la persistance des tourbillons parasites le long du canal, et ont conclu à une première validation de notre système de laminarisation de l'écoulement. L'analyse détaillée des signaux de courant, de leur variance et de leur écart-type notamment, permettra une validation définitive. Tous les enregistrements de la campagne ont d'ailleurs duré plus de trois minutes, afin de pouvoir moyenniser les signaux et éliminer la turbulence locale et évanescence.

Concernant la pérenité des profils (qui tient à la capacité des installations -y compris notre système de création du profil de courant- à reproduire les mêmes conditions d'expérience), en début et en fin de chaque journée de mesure, les profils de courant d'entrée et de sortie de canal ont été relevés et comparés. Une de ces comparaisons est présentée dans le paragraphe 3.2.2.4, pour justifier la stabilité de nos profils de courant. Sur la figure 3.6 on peut voir par exemple la persistance du profil de courant établi sans la houle en début d'écoulement sur un mois. On note au passage que l'intensité du courant est négative car notre repère place le sens  $Ox$  positif dans la direction de propagation de la houle, soit le sens contraire du courant. En moyenne, les variations sont toujours inférieures à 30% sur les trois quarts supérieurs de la colonne d'eau. Ce chiffre peut s'expliquer par plusieurs facteurs: le profil d'entrée est le plus perturbé, déjà car il est relevé au plus près de la sortie de la pompe, et ensuite car le système de grilles mis en place pour façonner le profil crée un léger ressaut près de la surface, et donc une instabilité locale. A cette position, le bruit instrumental est également le plus fort: un faux fond métallique a été placé afin d'être raccord avec le fond sinusoïdal. Or le métal entraîne des réflexions acoustiques parasites à partir d'une certaine profondeur d'immersion. Deux plaques de caoutchouc ont donc été collées sur le métal afin d'améliorer la qualité du signal recueilli par les courantomètres.

Abordons à présent les problèmes de bord. Plusieurs hypothèses ont été évoquées. L'une d'elle a déjà été mentionnée précédemment: les têtes des courantomètres pourraient générer des tourbillons dans l'écoulement, le modifier et perturber les mesures des sondes suivantes. Le nombre de Reynolds d'une tête de courantomètre (d'environ 1cm) dans l'écoulement est d'environ 2000 (valeur calculée avec une vitesse de courant majorée à 0.2m/s, la masse volumique de l'eau prise égale à 1000 kg/m<sup>3</sup> et la viscosité dynamique de l'eau prise à la valeur de référence 0.001 Pa/s). Or, les sillages turbulents n'apparaissent pas avant un nombre de Reynolds de 3000. Nous sommes donc tout au plus en présence de petits sillages tourbillon-

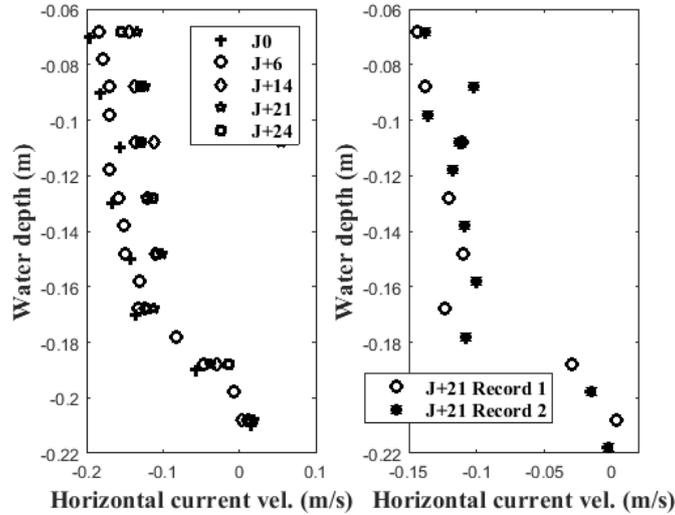


Figure 3.6: P er enit e du profil de courant - Exemple d' evolution mensuelle et journali ere du profil  etabli en d ebut d' ecoulement, relevée en  $x=7.55\text{m}$

naires  evanescents qui ne vont pas perturber l' ecoulement global, et placer les courantom etres en d ecal e (selon les axes horizontaux et verticaux) suffit  a pr eserver la qualit e des mesures. Une deuxi eme hypoth ese est le d evveloppement d'une couche limite pr es du fond ou pr es des parois,  a cause des changements de rugosit es d'une zone ça l'autre (faux fond m etallique, fond sinusoidal en bois, raccords...). Vu le faible nombre de Reynolds de l' ecoulement, la rugosit e quasi nulle des parois en verre et le soin apportée au lissage du fond, cette hypoth ese a rapidement  et e mise de c ot e. De plus, l'objectif  etant d' etudier le comportement de la houle, il est important de rappeler que cette derni ere a une profondeur d'action limit ee: il est tr es peu probable que des modifications mineures du profil de courant pr es du fond influencent de fa con significative la propagation de la houle en surface.

## 3.2 Dimensionnement

A pr esent que nous avons pr esent e l'environnement et les outils de mesure  a notre disposition, nous allons rentrer plus en d etails dans le dimensionnement de l'exp erience, notamment en discutant le choix de la bathym etrie et l' elaboration du syst eme de contr ole de la vorticit e.

### 3.2.1 Bathym etrie: choix de la longueur, de la p eriod e, de l'amplitude

**Similitude de Froude et mod ele r eduit** Une houle c otiere classique en M editerran ee a une p eriod e comprise entre 4 et 8s pour une profondeur d'eau moyenne de 10m. Par similitude de Froude, cela nous m ene  a une hauteur d'eau de 22cm, ce qui correspond parfaitement aux dimensions de notre canal. On obtient  egalement des houles de p eriod e comprises entre 0.63 et 1.1s, ce qui l a encore correspond aux capacit es de notre batteur. Ces houles ont donc une fr equance comprise entre 0.9 et 1.6Hz, et une longueur d'onde associ ee de 0.59 ça 1.44m (pour un nombre d'onde allant de 4.37  a 10.51 rad/m et un rapport  $h/\lambda$  de 0.15  a 0.37 (ce qui nous place bien en profondeur interm ediaire). Il serait donc judicieux de caler le ph enom ene de r esonance de Bragg sur ces caract eristiques de houle afin d'en faciliter l'observation. On rappelle que le ph enom ene se produit pour un fond sinusoidal de longueur d'onde deux fois inf erieur ça la

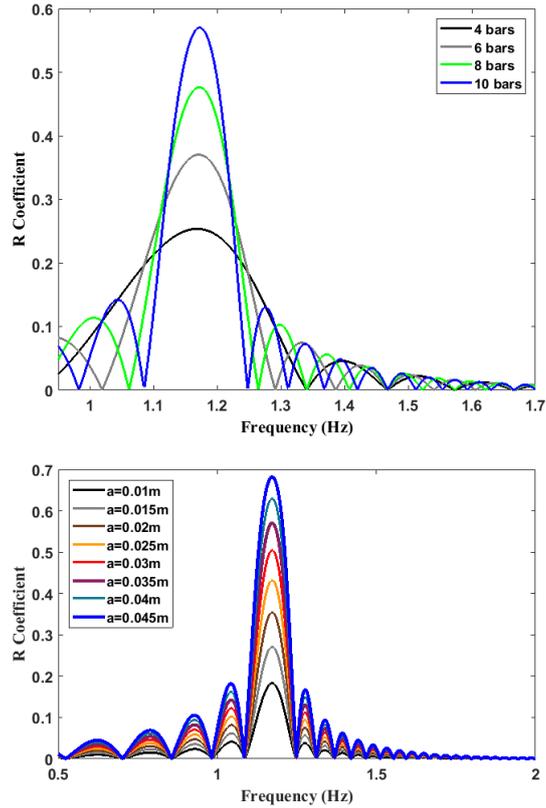


Figure 3.7: Dimensionnement du fond sinusoïdal: a) influence de la longueur totale, pour  $a=0.035m$  -b) influence de l'amplitude des oscillations, pour  $n=10$  longueurs d'onde de fond

longueur d'onde de la houle. Ici, notre houle a des longueurs d'onde centrées en  $\lambda = 1m$  environ, le fond idéal serait donc de longueur d'onde  $\lambda = 50cm$ .

**Dimensionnement et pré-calculs** Pour observer le phénomène de résonance de Bragg, un fond sinusoïdal a été réalisé. Nous nous sommes basés sur la première étude de Simon ([170]), réalisée dans le même canal. La bathymétrie choisie avait les caractéristiques suivantes : 6 périodes de 50cm de longueur d'onde (entre 2.05 et 5.05m) et une amplitude de 1.5cm. Cette bathymétrie avait permis d'observer une réflexion de l'ordre de 30% environ, nous souhaitons amplifier ce résultat afin de mieux observer l'influence du cisaillement par la suite. Pour cela, nous avons deux moyens d'action: rajouter des périodes de fond et/ou augmenter l'amplitude des oscillations. Dans une première campagne de pré-dimensionnement, nous avons utilisé un fond ondulé de 2cm d'amplitude, toujours de 50cm de longueur d'onde mais avec cette fois seulement 4 périodes. Nous n'avons cependant obtenu que des résultats peu exploitables et brouillés. Afin de déterminer l'impact de chaque caractéristiques du fond, nous avons mené en parallèle une rapide étude prédictive à l'aide de deux codes de calcul simples. Le premier code de calcul est basé sur l'approche analytique de Kirby, présenté au paragraphe 1.5.3. On rappelle qu'il s'agit d'un modèle par perturbations qui se ramène, en l'absence de courant, au modèle de Mei (1983 [128]). Nous avons dans un premier temps fixé l'amplitude de fond sinusoïdal à 0.035m et fait varier le nombre de portions de 4 à 10. Ensuite, nous avons fixé le nombre de portions à 10 et fait varier l'amplitude des oscillations de 0.01m à 0.045m. Les courbes obtenues sont présentées sur la figure (3.7).

La première figure nous confirme que le fond de dix périodes permet d'observer le mieux le

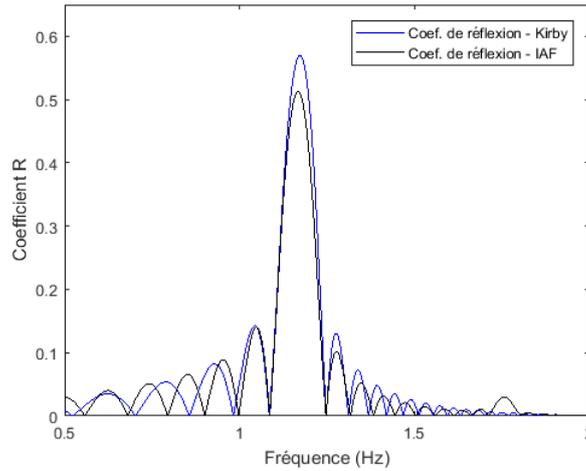


Figure 3.8: Etude prédictive: réflexion pour un fond sinusoïdal de 0.035m d'amplitude - Méthode Kirby - Méthode Intégrale aux Frontières

phénomène, avec un coefficient de réflexion de presque 60%. Nous avons donc choisi d'installer notre nouveau fond sur 10 périodes, le nombre maximum que l'on peut placer dans le canal compte tenu de ses dimensions et de la place à garder en amont et en aval pour les mesures des champs incident et réfléchi. Ainsi, la houle parcourra 5m de fond sinusoïdal au lieu de 3m auparavant. D'après la deuxième figure (3.7), augmenter l'amplitude des oscillations affine également le pic de Bragg et augmente la réflexion. Nous avons donc modifié l'amplitude des oscillations de 2cm à 3.5cm, ce qui d'après nos prédictions numériques nous permettrait d'observer un pic de Bragg étroit et bien formé, avec une réflexion d'environ 55%. Nous avons donc les paramètres adimensionnés suivants  $\frac{a}{L_b} = \frac{3.5}{50} = 0.07$  et  $\frac{a}{h} = 0.16$ . La condition de Pente Douce de nos modèles numériques, qui impose une courbure du fond inférieure à 0.33, est bien satisfaite: la courbure de notre nouveau fond est de 0.28.

Une fois les caractéristiques du fond choisies, on fait une dernière estimation de la réflexion attendue sans courant, avec le premier code (modèle par perturbations de Kirby, 1988) et pour affiner l'estimation, avec le second modèle également. Ce dernier est basé sur une méthode Intégrale aux Frontières (IAF, parfois appelé EFE pour Eigen Function Expansion matching method) (Rey, 1992 ([156])), rapidement présentée dans le paragraphe 1.3.2.4. Ce modèle a été exploité dans de nombreuses études: Takano (1960, [187]), Kirby & Dalrymple (1983, [102]), Belzons et al. (1991, [19]), Rey (1991, [155]) Rey et al. (1992, [157]). Il s'agit du modèle potentiel avec résolution intégrale des conditions de pression et de flux entre domaines successifs de profondeur d'eau constante. Nous avons choisi d'utiliser deux méthodes pour obtenir une fourchette d'estimation du coefficient de réflexion à la fréquence de résonance, et ces deux méthodes en particulier car elles sont peu coûteuses en terme de calculs et que nous disposions déjà des codes sous Matlab. Concernant la bathymétrie, nous avons repris les caractéristiques du dispositif expérimental: un fond sinusoïdal de 10 périodes de longueur d'onde de 50cm et d'amplitude 3.5cm. Des houles se propagent au-dessus de ce fond par 0.22m de hauteur d'eau moyenne, sur la plage de fréquence comprise entre 0.5 et 2Hz. D'après les résultats présentés sur la figure (3.8), en l'absence de courant, d'après les calculs de prédimensionnement, ce fond devrait nous mener à une réflexion de presque 60%. Ainsi, en doublant l'amplitude des oscillations et presque le nombre de périodes, nous devrions multiplier par deux (en termes d'amplitude) l'impact de ce fond sur la propagation de la houle.

Côté fabrication, notre nouveau fond se présente sous forme de portions (d'une longueur

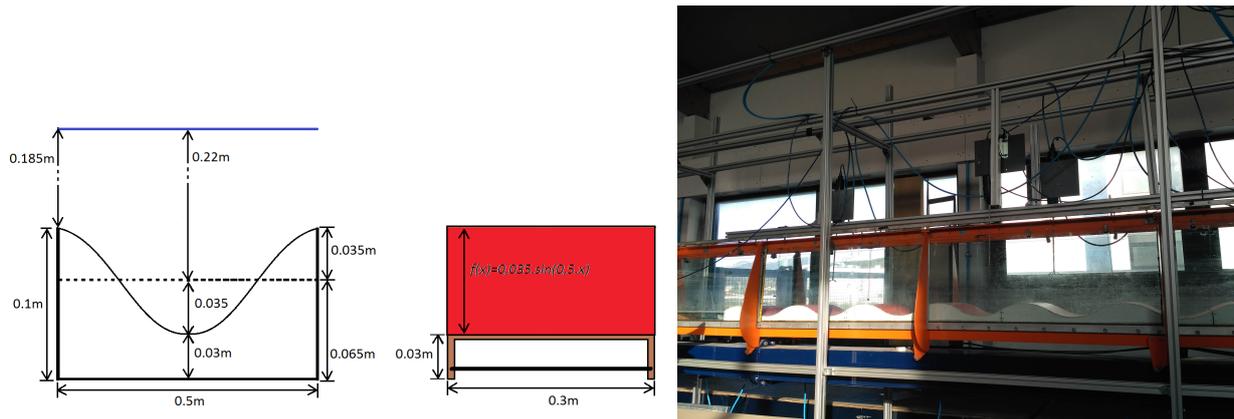


Figure 3.9: Bathymétrie - a) Schéma d'une longueur d'onde de fond - b) Bathymétrie installée dans le canal

d'onde) emboîtables, en bois et résine époxy. Chaque portion est creuse et risque donc de flotter, mais une encoche est prévue pour insérer une plaque métallique qui servira de lest. La figure (3.9) rappelle ses caractéristiques et nous montrent le fond une fois installé dans le canal.

**Limites** Une limite importante de notre dispositif expérimental découle de ce dimensionnement de la bathymétrie. Avec une longueur d'onde de fond de 50cm, le phénomène de résonance de Bragg affectera particulièrement les houles de longueur d'onde de 1m. Cependant, pour bien observer le phénomène, nous considérons des houles de longueur d'onde comprise entre 0.59 et 1.44m en l'absence de courant, et 0.31 et 1.17m en présence de courant. Dans les deux cas, notre canal étant large de 30cm, les modes transverses peuvent être excités (correspondant à une houle de longueur d'onde de 60cm). Ces modes transverses vont perturber la surface libre et risquent de fausser la mesure de la réflexion. Pour minimiser ce risque, nous plaçons nos sondes au centre du canal, au plus près des noeuds.

A présent que les principales dimensions de notre dispositif ont été fixées, nous pouvons soulever la questions des effets capillaires. A priori négligeables, la résolution de la relation de dispersion sans (1.16) puis avec ces effets (1.33) nous permet de nous en assurer. L'écart est de l'ordre de  $\Delta k = -0.0188\%$ , cette inquiétude est donc écartée.

### 3.2.2 Profil de courant en entrée et son contrôle

**Similitude de Froude et modèle réduit: le courant** Considérons un courant côtier moyen classique, comme un courant de marée ou une dérive littorale, de 1.35m/s, associé à une profondeur d'eau de 10m et une houle de période comprise entre 4 et 8s, comme précédemment. Par similitude de Froude, on obtient un courant d'environ 0.20m/s pour notre hauteur d'eau de 0.22m et nos houles de périodes comprises entre 0.63 et 1.1s. Pour une deuxième comparaison, nous pouvons nous placer en milieu océanique, par 20m de fond. Par similitude de Froude, nos paramètres expérimentaux seraient associés à une houle océanique tout à fait classique, de périodes comprises entre 5.9 et 10.4s, pour un courant de 1.90m/s. Ajouter ce courant à notre écoulement va impacter les caractéristiques spatiales de nos houles (la fréquence reste bien sûr comprise entre 0.9 et 1.6Hz). La longueur d'onde variera ainsi entre 0.31 et 1.17m, et le rapport  $h/\lambda$  entre 0.19 et 0.71: on reste en profondeur intermédiaire. Le nombre d'onde, compris entre 4.37 et 10.51 rad/m en l'absence de courant, évolue aussi. On distingue à présent le nombre d'onde de l'onde incidente, compris entre 5.36 et 20.08 rad/m, et le nombre d'onde

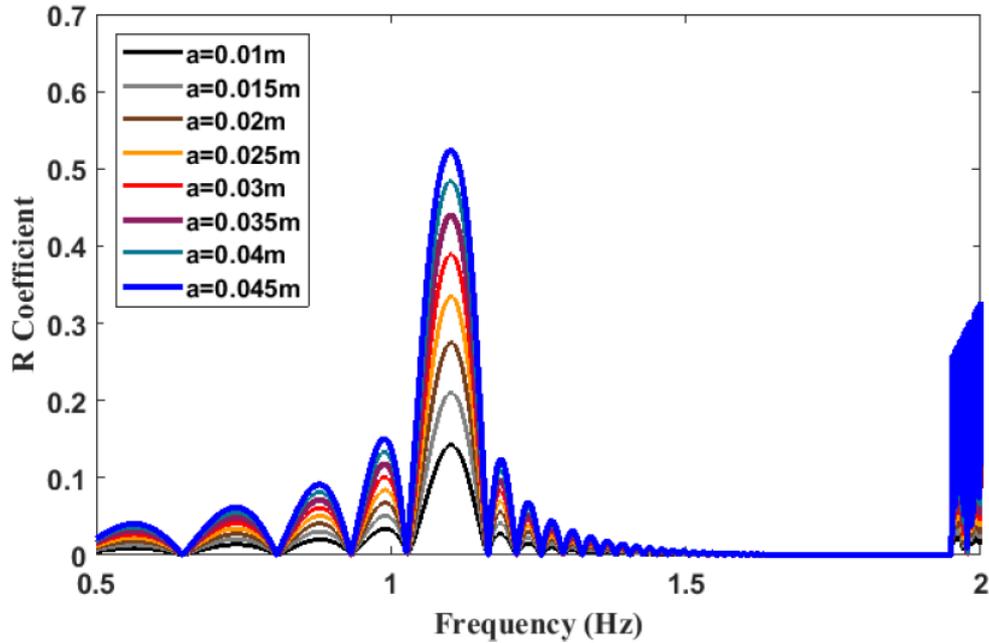


Figure 3.10: Dimensionnement du fond sinusoidal: influence de l'amplitude pour  $n=10$  longueurs d'onde de fond, avec un courant de  $U=0.20\text{m/s}$

de l'onde réfléchie, compris entre  $-3.77$  et  $-7.98$  rad/m (le signe moins fait référence au sens de propagation de cette houle réfléchie, dans le sens des  $x$  décroissants). Il s'agit alors de vérifier si le fond nous permet toujours d'observer une bonne réflexion de houle. On fait tourner le modèle par perturbations pour dix longueurs d'onde de fond en faisant varier l'amplitude de  $0.01\text{m}$  à  $0.045\text{m}$ , en présence d'un courant constant de  $20\text{cm/s}$ , opposé à la houle. Les résultats sont présentés sur la figure (3.10).

On constate que l'amplitude que nous avons choisie,  $0.035\text{m}$ , nous prédit toujours une réflexion de plus de  $40\%$ , facilement perceptible. Nous allons donc tenter d'installer dans le canal un courant moyen d'environ  $0.20\text{m/s}$ , à cisaillement vertical constant. On rappelle que dans une configuration avec courant, les houles de basses fréquences seront majoritairement réfléchies par le fond, alors qu'à hautes fréquences, elles seront majoritairement réfléchies par les modulations du courant par le fond. Cela peut d'ailleurs conduire à des phénomènes de blocage de la houle par le courant à très hautes fréquences, comme on peut l'observer sur la figure (3.10) au voisinage de  $f = 2\text{Hz}$ . Ce phénomène et sa probabilité d'occurrence dans notre expérience sera discuté plus loin dans cette partie.

**Contrôle et caractérisation du cisaillement** L'objectif de cette étude est de comprendre les effets d'une vorticité uniforme sur la colonne d'eau (c'est- -dire un courant linéairement cisailé) sur la propagation de vagues   contre courant. Mais l'établissement et le contrôle d'un profil de courant de ce type a été le point le plus épineux de la campagne. Nous avons choisi d'appliquer la méthode introduite par Woo & Cermak (1992 [206]) et Dunn & Tavoularis (2007 [54]). Il s'agit de placer au début de l'écoulement et sur toute la colonne d'eau une grille inclinée en forme de S. Selon l'inclinaison, cette forme spécifique va dévier les lignes de courant vers le haut ou vers le bas et ainsi changer le profil vertical du courant. Nous allons voir comment cette méthode a été mise au point au fil des ans et des campagnes, et comment grâce aux études précédentes nous avons choisi les paramètres de notre propre système. Nous présenterons ensuite les tests que nous avons faits, les profils que nous avons obtenus et celui que nous avons

finalement retenu. Pour se conformer aux normes de la littérature, faisons un point sur le paramètre de cisaillement. Nous avons défini le notre,  $s(x)$ , dans 2.1 pour coller aux notations d'usage des modèles de propagation de houle. Dans la littérature des systèmes générateurs de vorticité, il est d'usage d'utiliser plutôt le paramètre  $\lambda(x)$ , qui intervient différemment dans la formulation du profil de courant :

$$\frac{U(z)}{U_m} - 1 = \lambda(x)\left(\frac{z}{h} - 0.5\right) \quad (3.1)$$

avec  $U_m$  la vitesse horizontale   mi-profondeur et  $h$  la hauteur d'eau totale. Ainsi, si  $\lambda(x) = \lambda$  est constant, alors la vitesse dans la colonne d'eau dépendra linéairement de la profondeur. Il s'agit simplement d'une autre notation, liée   notre paramètre de cisaillement par la relation :

$$s(x) = \frac{U_m \lambda(x)}{h} \quad (3.2)$$

Dans cette section, nous conserverons notre paramètre de cisaillement afin de parler du dimensionnement de notre grille de façon cohérente avec le reste de notre étude.

### Littérature des systèmes générateurs de vorticité

Générer un écoulement   vorticité constante en laboratoire a depuis longtemps éveillé un grand intérêt. Ces écoulements sont en effet   la base de tous les phénomènes d'inhomog nit s sur une colonne fluide ( coulements de Couette,...). De façon générale, le problème a toujours été abordé sous l'angle pratique d'un appareil générateur de vorticité, placé en début d'écoulement. Cet appareil a pour vocation de transformer un écoulement uniforme (en amont) en écoulement cisailé (en aval). Il a successivement pris la forme d'une structure de type échelle (Owen & Zienkiewicz 1957 [142], Livesey & Turner 1964 [115]), puis d'une plaque alvéolée (structure type nid d'abeilles, Kotansky 1966 [106], Kiya et al. 1980 [104]) ou encore un ensemble de canaux parallèles dans lesquels le débit est ajusté (Karnik & Tavoularis 1987 [92], Stillinger et al. 1983 [183]). L'usage de grilles incurvées, simples ou doubles, de porositt  uniforme ou non, a également été largement exploité: Elder (1959 [56]), Turner (1969 [195]), Maull & Young 1973 [125], Stansby 1976 [181], Castro (1976 [29]), Coelho (1989 [38]). L'étude de Woo & Cermak (1992 [206]) compare également plusieurs configurations, jouant sur le nombre de grilles et leur porositt . Mais une fois le profil cisailé généré, rien ne garantit qu'il se conserve! Outre les effets visqueux qui peuvent parfois créer une couche limite près des parois, de nombreux facteurs peuvent déstabiliser l'écoulement: des variations brutales de vitesse, des tourbillons... En pratique, pour conserver son profil de courant, il est essentiel de minimiser la turbulence, et donc d'avoir une distribution verticale des vitesses aussi linéaire que possible. Le choix du dispositif générateur de vorticité est donc particulièrement important. La structure en nid d'abeilles de Kotansky (1966 [106]) peut produire une large gamme de vorticité ( $\lambda = 0.42$  Kotansky 1966 [106],  $\lambda = 0.74$  dans Kiya et al. 1980 [104]), et elle a bien cet avantage d'engendrer très peu de turbulence. Mais techniquement, produire une structure de cet type est difficile, et la modifier pour corriger les profils obtenus l'est encore plus. L'appareil de Owen & Zienkiewicz (1957 [142]), de type échelle, est bien plus facile   utiliser, mais la version originelle avait le désavantage de ne pouvoir engendrer que de faibles cisaillements ( $\lambda = 0.43$ ). Leur méthode a été étendue par Livesey & Turner (1964 [115]) et elle est aujourd'hui tout   fait capable de produire de fortes vorticités (jusqu'  0.8), mais on a malheureusement constaté que la présence des barres horizontales peut engendrer beaucoup de turbulence (Davies 1976 [46]).

Remettons un peu le nez dans la théorie des grilles incurvées pour nous éclairer sur le sujet. Cette théorie est particulièrement complexe, et a abouti   de nombreuses erreurs dans les

premiers travaux. Une des études les plus générales concernant la production d'une distribution spécifique des vitesses par l'utilisation d'une distribution spatiale d'obstacles est celle de Elder (1959 [56]). Outre ses travaux expérimentaux cités au paragraphe précédent, ce dernier a établi les équations générales qui représentent un écoulement au travers des grilles incurvées de résistance variable, sous l'hypothèse d'un faible rayon de courbure de la grille. Il les a également résolues pour déterminer la forme d'une grille de porosité constante capable de transformer un écoulement uniforme en un écoulement uniformément cisailé. Cependant, sa méthode la résolution directe des équations linéarisées est mathématiquement coûteuse, ce qui limite rapidement l'obtention de résultats. En 1968, Maull ([124]) s'est également inspiré des travaux de Elder (1959 [56]): la première tentative d'appliquer les prédictions théoriques au design de grille incurvée pour générer de la vorticité dans une soufflerie vient de lui. Cependant, ses tests ont abouti   la création d'un profil de vitesse non-linéaire, Maull a alors modifié de façon conséquente la forme de sa grille, par corrections empiriques successives, et est finalement parvenu   un profil linéaire sur les trois quarts supérieurs de la section. Il a ainsi proposé un système de grille incurvée   porosité constante, qui génère une vorticité de l'ordre de 0.4 et une turbulence de seulement 0.5%. Son système a été repris par la suite dans de nombreuses études: Maull & Young (1973 [125]), Mair & Stansby (1976 [121]) et Stansby (1976 [181]), et nous détaillerons ses résultats dans le paragraphe suivant. Lau & Blaines (1968 [108]) ont également tenté de proposer une solution, mais c'est avec Turner (1969 [195]) que le problème de la résolution des équations a été contourné, par la mise en place d'un schéma de résolution de type itératif. Les premières études sur l'efficacité d'un appareil de type grille   porosité constante, produisant une vorticité de 0.35 et dont la forme avait été calculée analytiquement, sont parues, démontrant une bonne corrélation dans l'ensemble (Turner [195]). Pour poursuivre les recherches théoriques du côté des grilles inclinées, on retrouve les travaux de Vahl Davis (1957 [196]) ainsi que la synthèse de Laws & Livesey (1978 [110]). En 1976, Castro ([29]) a comparé les solutions de Lau & Blaines (1968 [108]), Turner ([195]) et Maull ([124]) et mis en évidence leurs limites. Mais Castro (1976 [29]) a également mis en place ses propres grilles incurvées et a observé que les profils de vitesse obtenus expérimentalement étaient différents de ceux attendus analytiquement, et présentaient notamment des fortes non-linéarités (de petite échelle). Il les a interprétées comme venant d'une coalescence de jet qui elle-même survient   cause de baisses de pression relativement importantes (Blaines & Peterson 1951 [13], Corrsin 1963 [42]). Coelho (1989 [38]) a lui aussi fabriqué et testé ses propres grilles, mais celles-ci étaient trop rigides pour produire des profils stables et lisses, et ses travaux seront aussi point s du doigt pour des erreurs de calculs. Au passage, notons que dans l'ensemble de la littérature évoquée précédemment, le problème de la turbulence a été abordé de façon ambiguë. En effet, le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement a été intégré dans les équations servant   prédire la forme des grilles incurvées, mais son importance n'a pas été démontrée en elle-même, ni théoriquement ni expérimentalement. Toutes les campagnes ont été menées sur des écoulements   grand nombre de Reynolds, ce qui permet aux systèmes générateurs de vorticité d'y être relativement insensibles. Les travaux de Dunn & Tavoularis (2007 [54]) ont quant   eux exploré l'efficacité des grilles incurvées   faible nombre de Reynolds.

## Paramètres de grilles et équations

Parmi les méthodes décrites ci-dessus, l'usage d'une seule grille incurvée nous paraît le plus judicieux pour générer une vorticité   moindre turbulence, grâce   une fabrication possible   faible côté.

**Forme de la grille** La configuration d'un générateur de vorticité de type grille incurvée fait appel aux travaux analytiques pr cursseurs de Vahl Davis (1957 [196]) et Elder (1959 [56]). On se place dans un canal   houle 2D (comme celui utilisé pour notre étude) avec  $L$  la hauteur d'eau moyenne. On suppose une grille de forme arbitraire  $x = f(z)$ , qui sera considérée comme interface ponctuelle de discontinuité de vitesse, de pression et de vorticité. Une grille incurvée   maillage carré uniforme se caractérise par sa **largeur de saillie**  $d$  et l'espacement entre le premier et le dernier élément sur un même axe (**la largeur de la grille** en somme)  $l$ . Ces deux paramètres permettent de définir la **solidité**  $\sigma_g$  comme le rapport entre la surface projetée et la surface totale de grille:

$$\sigma_g = \frac{2dl - d^2}{l^2} \quad (3.3)$$

On peut noter que pour différencier les différentes techniques de conception d'une grille (tissage, perforation, ...), un paramètre secondaire, la **solidité effective**, a été introduit en 1951 par Baines & Peterson ([13]).

**Efficacité de la grille et conditions aux limites** On conserve notre hypothèse de fluide incompressible, et les effets visqueux seront négligés (sauf très près de la grille). Lorsque l'eau passe au travers de la grille, la pression hydrostatique et la vitesse tangentielle changent. On définit donc un premier paramètre caractéristique  $K$ , **coefficient de perte de charge**, comme

$$K = \frac{\Delta p}{0.5\rho U_n^2} \quad (3.4)$$

où  $\Delta p$  est la variation de pression hydrostatique au travers de la grille,  $\rho$  la masse volumique de l'eau et  $U_n$  la vitesse normale   la surface de la grille (la vitesse uniforme de l'écoulement en amont de la grille). Ce coefficient n'a pas de dimension. Dans le cas de fluide incompressible, il est directement fonction de la solidité et du nombre de Reynolds (Dunn & Tavoularis, 2002 [54]). Concernant les variations de vitesse tangentielle, elles surviennent lorsqu'on place une grille incurvée dans un écoulement uniforme. En effet, la grille dévie les lignes de courant mais par continuité, les composantes normales   la grille des vitesses en amont et en aval doivent être égales. Or la déviation des lignes de courant va entraîner une diminution de la vitesse tangentielle en amont de la grille, jusqu'  atteindre la valeur de la vitesse tangentielle en aval de la grille. Cela conduit   un changement de direction de l'écoulement   travers la grille, qui est défini par  $B$ , le **coefficient de déviation**, comme:

$$B = \frac{V_{s1} - V_{s2}}{V_{s1}} \quad (3.5)$$

avec  $V_{s1}$  et  $V_{s2}$  les vitesses tangentielles respectivement en amont et en aval de la grille. On peut interpréter  $B$  comme l'efficacité de la grille   dévier une ligne de courant d'incidence donnée. Ces deux paramètres vont permettre de caractériser l'hydrodynamisme de la grille, et si le coefficient de perte de charge ne dépend pas du type d'écoulement dans lequel on va les placer, le coefficient de déviation et la forme du profil de vitesse en amont de la grille vont eux dépendre du nombre de Reynolds de l'écoulement, de la solidité effective de la grille et de l'angle d'incidence des lignes de courant. Dans le cas d'une grille   mailles carrées, on peut relier les deux paramètres entre eux (Elder 1959 [56]) :

$$B = 1 - (1 + \sqrt{K})^{-\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

sachant que pour dans ce cas là également, on peut relier les pertes de charge à la fraction ouverte de la grille (c'est-à-dire la surface d'une maille, ou encore sa porosité)  $\beta$  :

$$K = \left( \frac{1 - \beta}{\beta} \right)^2 \quad (3.7)$$

En 1973, Gibbings ([70]) a proposé une autre expression empirique:

$$B = 1 + \frac{K}{4} - \left[ \left( \frac{K}{4} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} \quad (3.8)$$

et en 1989, Coelho (1989 [38]) a également proposé la sienne:

$$B \approx 1 - \frac{1.1}{\sqrt{1 + K \cos^2 \theta_0}} \quad (3.9)$$

où  $\theta_0$  est l'angle moyen d'inclinaison de la grille incurvée. Ces trois expressions mettent en évidence l'incertitude qui demeure sur l'estimation de ce coefficient, mais l'usage veut que l'expression de Elder soit considérée comme assez réaliste. Non seulement elle donne les valeurs les plus basses de  $B$  (et nous permet donc de ne pas surestimer le cisaillement) mais elle a été utilisée dans les études à la base de celle-ci (Woo & Cermak [206], Dunn & Tavoularis [54]).

En 1957, Valh Davis ([196]) a exprimé le **coefficient de pertes effectives**,  $\gamma$  en fonction du coefficient de perte de charges  $K$  et de l'angle  $\theta$  entre la direction de l'écoulement moyen et la normale à la grille :

$$\gamma = K \cos^2 \theta \quad (3.10)$$

Si on ne constate que de faibles variations de  $\theta$  et de la résistance  $\gamma$ , on peut simplifier l'expression précédente sous la forme d'un développement limité à l'ordre 1 :

$$\gamma = \gamma_0 [1 + s(y)] \quad (3.11)$$

avec  $s(y)$  fonction de  $K$  et  $\theta$ , et  $\gamma_0$  le **coefficient moyen de pertes effectives**, constant et déterminé par la forme et les propriétés physiques de la grille. Nous avons ici défini les principaux paramètres caractéristiques d'une grille génératrice de vorticité, penchons nous   présent sur les conditions limites linéarisées aux abords de la grille. A la fin des années 50, Vahl Davis (1957 [196]) et Elder (1959 [56]) ont établi les équations reliant la vitesse de l'écoulement au passage de la grille   ces paramètres :

$$\begin{cases} u - u^* = \gamma_0(q - 1) + \frac{1}{5}\gamma_0 s \\ \hat{u}_1 = \hat{u}_2 = q \\ BqT = (1 - B)v_1 - v_2 \end{cases} \quad (3.12)$$

avec  $u = \frac{U_{\infty 1}}{\bar{V}}$ ,  $u^* = \frac{U_{\infty 2}}{\bar{V}}$ ,  $q = \frac{U}{\bar{V}}$ ,  $\hat{u}_1 = \frac{U_1}{\bar{V}}$ ,  $\hat{u}_2 = \frac{U_2}{\bar{V}}$ ,  $T = \tan \theta$ ,  $v_1 = \frac{V_1}{\bar{V}}$  et  $v_2 = \frac{V_2}{\bar{V}}$ , où  $V$  est une vitesse moyenne selon la verticale, non-dimensionnante pour les équations,  $\bar{V}$  la vitesse moyenne selon  $z$ ,  $q$  la vitesse locale de l'écoulement aux abords immédiats de la grille et  $s$  fait référence    $s(y)$  fonction de  $K$  et  $\theta$ . Les indices  $\infty$ , 1 et 2 signifient respectivement "  bonne distance de la grille", "en amont de la grille" et "en aval de la grille". Le changement de vitesse au passage de la grille est donc bien directement relié au coefficient moyen de pertes effectives.

**Equations pour une grille seule dans un canal 2D** On suppose que la grille génère une petite perturbation  $\psi'$  de la fonction de courant moyen  $\psi_\infty$  qui s'écrit  $\psi = \psi_\infty + \psi'$ , alors :

$$\nabla^2 \psi' = 0 \quad (3.13)$$

On cherche une solution finie de cette équation, qui satisfasse les conditions aux limites (3.12) et telle que la grille coïncide presque avec le plan  $x = 0$  (c'est-à-dire que la grille a un angle d'inclinaison faible par rapport à la verticale, et que l'on place le référentiel non plus au début du canal mais à l'emplacement de la grille). D'après Elder (1959 [56]), cette solution s'écrit:

$$u^* - 1 = A(u - 1) - \frac{1}{2}(1 - A)s + E \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\omega) \quad (3.14)$$

avec  $u^*$  et  $u$  définis par 3.12, ainsi que :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{2 - \gamma_0 - B + \gamma_0 B}{2 + \gamma_0 - B} \\ E = \frac{\gamma_0}{2 + \gamma_0 - B} \\ \omega = \frac{\pi y}{L} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\omega) = BT \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Cette équation relie les distributions de vitesse de l'écoulement en amont et en aval de la grille, les coefficients hydrodynamiques et les paramètres géométriques de la grille. Cependant, dans cette formulation, la détermination des  $\alpha_n$  présente une difficulté technique non négligeable. Elder (1959 [56]) a proposé une technique pour transformer le problème, mais sa technique a été discutée par Hardy & Rogosinski (1944 [82]), et l'obtention de solutions analytiques du nouveau problème obtenu est encore ardue. Une approche par schéma numérique itératif sera finalement retenue (Turner 1959 [195]) pour résoudre l'équation. Une fois le type de matériau-grille défini (et donc à porosité et coefficient de perte de charges fixés), les solutions correspondent à des formes de grilles incurvées, en S. Nous allons voir comment on aboutit à cette forme grâce à la solution proposée par Maull (1968 [124]).

**Solutions** La grille incurvée en forme de S a été la solution privilégiée, et ce même avant l'aboutissement des calculs analytiques. La première solution de grille incurvée en forme de S fut proposée par Maull ([124]), elle se base sur les formulations empiriques de Elder des coefficients de perte de pression  $K$  et de déviation  $B$ , respectivement définis par (3.4) et (3.6). On peut expérimentalement définir notre paramètre de vorticit e comme suit - on conservera la notation  $s_g$  par souci de coh erence :

$$s_g = \frac{h}{U_c} \frac{dU_z}{dz} \quad (3.16)$$

avec  $z$  la verticale, direction normale à l'écoulement,  $h$  la colonne d'eau selon  $z$ ,  $U_c$  et  $U_z$  respectivement l'intensit e du courant au centre de l'écoulement et en tout point de la colonne d'eau, prises toutes les deux loin de l'influence imm ediate de la grille. Est propos ee une relation empirique qui d efinit la forme de la grille, en liant ses dimensions horizontale  $x_g$  et verticale  $z_g$ :

$$\frac{x_g}{h} = \frac{(2 + K - B)s_g}{KB} f\left(\frac{z_g}{h}\right) \quad (3.17)$$

o u l'on a formulée la fonction  $f\left(\frac{z_g}{h}\right)$  comme la s erie suivante:

$$f\left(\frac{z_g}{h}\right) = \frac{4}{\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{(2m+1)\pi z_g}{h}\right] - 1}{(2m+1)^3} \quad (3.18)$$

L'équation (3.17) peut être utilisée tant pour prédire la forme de la grille que son efficacité selon les conditions dans lesquelles elle sera placée. Par la suite, nous l'avons vu dans le paragraphe consacré à la littérature des grilles incurvées, Maull a modifié empiriquement cette forme, en multipliant le terme de droite de la forme (3.18) par le terme correctif suivant sur une partie de la colonne d'eau  $\frac{1}{2} < \frac{z_g}{h} < 1$ :

$$f_c\left(\frac{z_g}{h}\right) = 0.26\frac{z_g}{h} + 0.87 \quad (3.19)$$

Une formulation générale de l'équation (3.17) corrigée, valable sur toute la colonne d'eau, a été établie par Tavoularis (2005 [188]) :

$$f\left(\frac{z_g}{h}\right) = -0.738\left(\frac{z_g}{h}\right)^6 + 2.812\left(\frac{z_g}{h}\right)^5 - 3.839\left(\frac{z_g}{h}\right)^4 + 2.687\left(\frac{z_g}{h}\right)^3 - 1.224\left(\frac{z_g}{h}\right)^2 - 0.0054\left(\frac{z_g}{h}\right) \quad (3.20)$$

Cette formulation présente moins de 0.07% d'écart avec la solution corrigée de Maull, et ce profil, modélisé par un polynôme d'ordre 6, a bien la forme d'un S. Comme cité précédemment, cette grille modifiée donne un profil de vitesse linéairement cisailé, avec la vorticité souhaitée pour  $\frac{z_g}{h} > 0.25$  (soit bien les trois quarts supérieurs de la colonne d'eau). Par contre, pour le quart inférieur ( $\frac{z_g}{h} < 0.25$ ), on observe des variations de vitesse fortement non linéaires. De façon générale, si la solidité de la grille et le nombre de Reynolds de l'écoulement sont connus, alors les équations (3.17) et (3.20) permettent de définir la forme de la grille nécessaire pour produire la vorticité recherchée  $s_g$ . Dans le cas où les paramètres de grille sont imposés (solidité et forme), l'équation permettra de déterminer les vorticités qui seront générées selon les conditions d'écoulement.

Plus tard, les solutions de l'équation d'Elder ont pu être calculées de façon analytique (schéma itératif de Turner). On peut retrouver ces solutions appliquées à une étude expérimentale dans les travaux de Woo & Cermak (1992 [206]). On suppose une grille de mailles carrées uniformes de diamètre 0.15mm, réparties avec une densité de 30 mailles par centimètres. Cela fixe la porosité  $\beta = 0.32$  et le coefficient de pertes de charges  $K = 4.52$ . La figure (3.11) trace les formes de grille solutions de l'équation et calculées pour produire quatre cisaillements constants différents, là encore la forme de S est retrouvée. On constate que l'angle d'inclinaison de la grille par rapport à la verticale augmente pour générer un cisaillement plus important dans l'écoulement. Le schéma (3.11) explique sommairement l'intérêt de cette forme et sa capacité à dévier les lignes de courant. La courbure de la grille influe directement sur l'angle de déviation des trajectoires des particules d'eau, et donc sur la répartition verticale des vitesses.

### Configurations testées et profils obtenus

Sur la base de la grille fabriquée lors de l'étude de B. Simon ([170]), après plusieurs essais (simple ou double grille, porosité uniforme ou non), nous avons choisi d'utiliser une grille incurvée de porosité uniforme, que nous avons fabriquée sur mesure pour les besoins de l'expérience (figure 3.12). Ses dimensions sont de 29cm de large pour 51cm de haut, afin de pouvoir couvrir toute la colonne d'eau même avec des angles d'inclinaison importants (la profondeur moyenne d'immersion est toutefois d'environ 27cm). La surface poreuse est constituée de deux surfaces superposées de mailles carrées de 1.5mm de côté intérieur (soit 2.1mm de diagonale), réparties

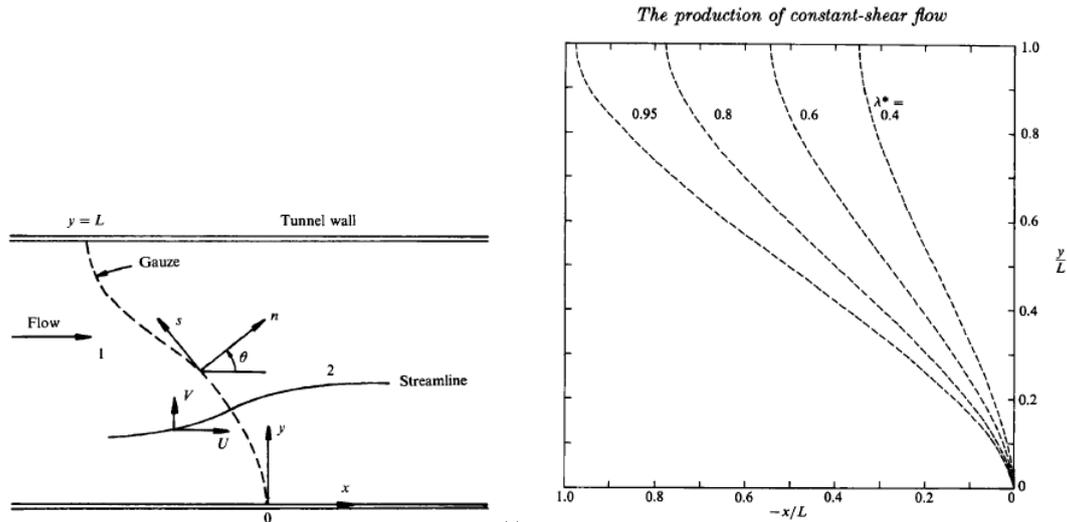


Figure 3.11: Grille génératrice de vorticité: a) Schéma explicatif du fonctionnement du système - b) Formes de grille nécessaires pour générer un écoulement   vorticité constante, si  $\beta = 0.32$  et  $K = 4.52$ . Crédit : Woo & Cermak (1992 [206]).

avec une densité de 30 mailles par  $\text{cm}^2$ , ce qui donne une porosité  $\beta \simeq 0.45$  et un coefficient de perte de charges égal    $K \simeq 1.49$ . Il est   noter que le choix d'une porosité uniforme est basé sur les conclusions de Woo & Cermak (1992 [206]) qui expliquent qu'une variation de porosité augmente la turbulence. Concernant le rayon de courbure de notre grille, il est présenté sur la figure (3.12), avec la grille installée dans le canal juste   la suite du dispositif anti-turbulence.

Une fois la grille construite, il s'agissait de savoir comment la positionner, c'est- -dire définir son emplacement et son inclinaison. Concernant l'emplacement, pour que l'écoulement cisailé soit pleinement établi, il est d'usage de mesurer le profil de courant   une distance  $x$  suffisante du système générateur de vorticité, c'est- -dire telle que  $\frac{x}{L} \geq 1.7$ . Une hauteur d'eau moyenne dans notre canal de  $L = 0.22\text{m}$  nous imposait un profil mesuré   plus de 37cm de la grille. Nous avons choisi de séparer les courantomètres du pied de la grille de 1.25m (cf schéma positionnement des courantomètres). Notre grille, de par sa structure en acier, avait un rayon de courbure difficilement ajustable. Nous avons donc choisi de jouer sur son inclinaison, et les différentes positions testées sont représentées sur la deuxième partie de la figure (3.12). L'angle d'inclinaison est mesuré entre la normale au fond du canal, verticale, et la grille   10cm de son pied (distance   laquelle on considère que la grille n'est pas encore incurvée), et varie entre 23 et 53  par pas de 5 : plus l'angle augmente, plus la grille est inclinée. Nous avons défini cette plage d'angles d'inclinaison dans l'objectif d'éviter les positions trop proches de 0  (grille verticale) ou 90  (grille   plat sur le fond), positions inefficaces pour créer de la vorticité. La figure (3.13) présente les profils verticaux de la composante horizontale courant, obtenus   l'entrée de l'écoulement (en  $x=8.67\text{m}$ ), selon l'angle d'inclinaison de la grille. L'intensité négative du courant provient de notre repère, qui place l'axe  $Ox$  dans le sens de propagation de la houle, soit le sens contraire du courant. Nous avons par contre représenté la vorticité en valeur absolue, afin d'être clair sur ce qu'on recherche.

Nous avons vu précédemment qu'un angle d'inclinaison important générait une vorticité plus importante. Les résultats obtenus, présentés sur la figure (3.13), vont dans le même sens: plus la grille s'incline, plus le profil de vitesse suit la même tendance. Si on extrait la vorticité de chaque profil par régression linéaire sur toute la colonne d'eau, on constate que pour de faibles angles d'inclinaison (23 , 28 ), la vorticité est faible, inférieure    $0.5\text{s}^{-1}$ . Alors que pour des



Figure 3.12: Système générateur de vorticité: a) présentation générale du système b) Gamme d'inclinaisons-test (photo prise lors de la vidange du canal)

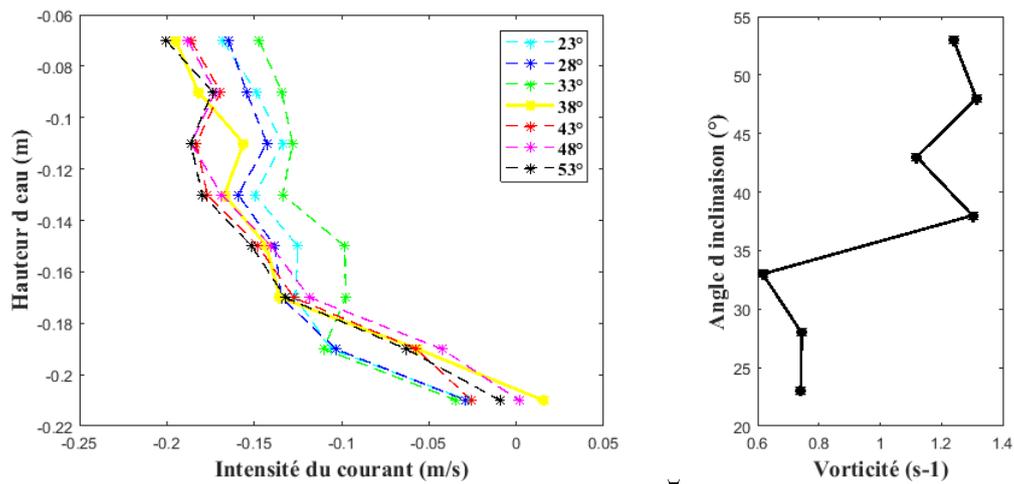


Figure 3.13: Comparaison des différents cas-tests : a) Profils de courant - pris en entrée de l'écoulement en  $x=8.67\text{m}$  - b) Vorticités associées (valeur absolue)

inclinaiions croissantes ( $33^\circ$ ,  $43^\circ$ ), la vorticit e augmente brutalement puis semble tendre vers une valeur limite d'environ  $1.3s^{-1}$ . Nous avons choisi de retenir un des profils les plus cisailées, afin d'observer au mieux l'effet du cisaillement sur la propagation de la houle: cela impliquait donc les angles d'inclinaison sup erieurs    $35^\circ$ . Parmi les vorticit es les plus fortes, nous avons choisi le profil qui nous semblait le plus lin eaire: celui issu de l'inclinaison    $38^\circ$ .

## Configuration retenue

**Qualit e du profil d'entr ee** A pr esent que nous avons obtenu un premier profil acceptable, nous devons en justifier la stabilit e. Nous avons d ej a justifiée sa reproductibilit e dans le paragraphe 3.1.2.3: ce profil est stable, on peut le reproduire dans le temps sans qu'il ne se modifie, le syst eme g en erateur de vorticit e est fiable. A pr esent, v erifions la qualit e du profil, c'est-ça-dire l'intensit e de la turbulence pr esente sur la colonne d'eau. La figure (3.14) pr esente ainsi le profil d'entr ee que nous avons retenu, avec pour chaque position la plage de variations de l'intensit e du courant. Attention, il est   noter que dans ces variations, on retrouve les effets du bruit instrumental. Nous avons d'abord analys e l'écart-type moyen pour la composante horizontale du courant. Sur l'ensemble de la colonne d'eau, il est de  $3.13\text{cm/s}$  soit en moyenne  $48.20\%$  de l'intensit e du courant, mais on peut d ecomposer le profil en deux parties. Sur les 10 premi eres positions en partant de la surface, on remarque de faibles variations -  $2.26\text{cm/s}$  soit en moyenne soit  $14.53\%$  de l'intensit e moyenne du courant. Il est   noter que la forte variation   la cinqui eme position en partant de la surface a  t e r ecurrente sur tous les profils mesurées par la suite, et co incide avec l'abscisse verticale du premier barreau transverse de notre grille. On suppose donc que ce barreau cr ee de la turbulence que l'on retrouve   cet endroit du profil de courant, supposition corrobor ee par les conclusions de Davies (1976 [46]). Par contre, lorsqu'on se rapproche du fond (on consid ere les 5 derni eres positions), l'intensit e du courant va varier en moyenne de  $4.86\text{cm/s}$ , soit deux fois plus que sur deux tiers sup erieurs du profil! Or, nous l'avons vu,   cette position, vers le fond les instruments r ecup erent plus de bruit instrumental   cause du fond m etallique, les courantom etres sont soumis   plus de vibrations car leur profondeur d'immersion est plus grande... Ces valeurs ne sont pas tr es probl ematiques, car notre étude porte sur l'impact du courant sur la propagation de la houle, or les vagues sont surtout sensibles   la partie sup erieure du profil de courant, et sur les deux-tiers haut de la colonne d'eau, les variations (moins de  $15\%$  en tenant compte du bruit instrumental) sont tout   fait acceptables. A pr esent, évaluons les autres composantes du courant (selon la direction transverse  $Oy$  et selon la verticale  $Oz$ ).

On constate que les composantes transverse et verticale du courant sont en moyenne tr es proches de z ero, et n'en d evient que tr es faiblement. Ces d eviances peuvent s'expliquer par deux facteurs: les sondes mal positionn ees ou l'existence de turbulence. La premi ere hypoth ese n'est pas   n egligier, car si les sondes coulissaient le long d'un r eglet pour mesurer avec pr ecision leur profondeur d'immersion, l'orientation pr ecise de leur t ete était laiss ee   l'appr eciation visuelle. Pour chaque composante du courant, on a donc calculée l'intensit e de la turbulence locale comme le rapport entre la vitesse de fluctuation et la vitesse moyenne locales. Les r esultats nous montrent que sur le profil en entr ee d'écoulement, juste derri ere la grille, l'énergie cin etique turbulente est du m eme ordre et m eme un peu sup erieure   l'énergie cin etique de l'écoulement moyen. Mais outre le fait que le principe de mesure lui-m eme apporte une dispersion des vitesses, si on regarde les fr equences associ ees, on s'aperçoit qu'il s'agit principalement de turbulence de grille, évanescence et non probl ematique pour l'établissement du profil de courant. Nous avons donc un profil d'entr ee caract eris e par une vitesse de surface  $U_0 = -0.1845\text{m/s}$  et par un cisaillement que l'on va consid erer comme verticalement constant et égal    $s = 1.237$ .

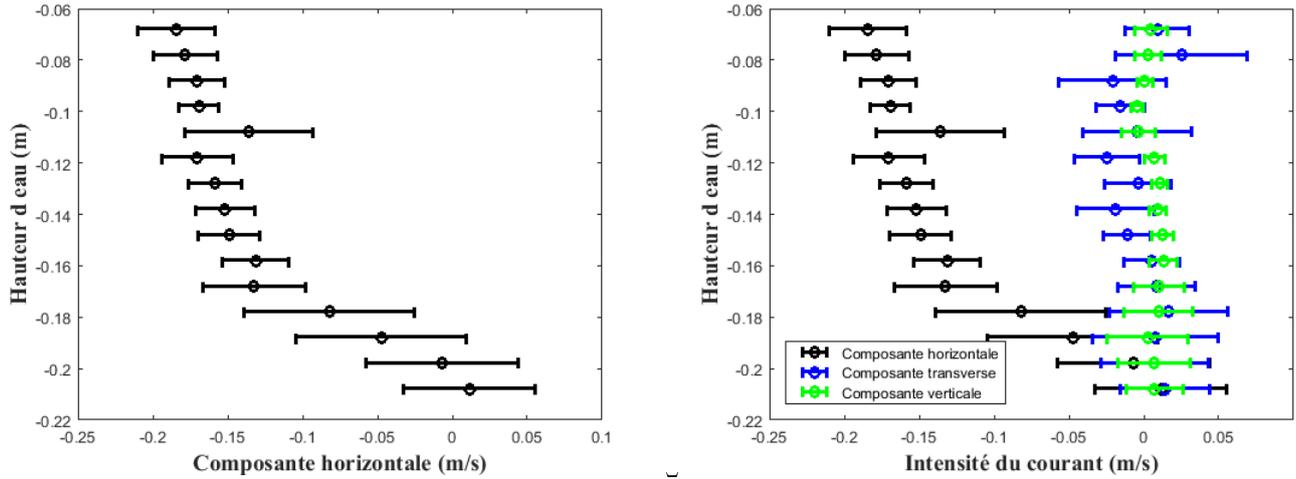


Figure 3.14: Intensités du profil de courant généré par la grille incurvée à l'entrée de l'écoulement, en  $x=8.67m$  - a) Composante horizontale - b) Composantes horizontale, transverse et verticale

X (m)	s ( $s^{-1}$ )
1.17	0.1678
4.07	0.1235
5.93	-0.5509
8.67	-1.2365

Table 3.1: Vorticités ( $s^{-1}$ ) établies le long du canal par régression linéaire sur toute la colonne d'eau

**Evolution selon  $x$**  A présent que notre profil d'entrée est validé, intéressons-nous à son évolution le long du canal. Nous avons positionné au total quatre courantomètres (deux de part et d'autre du fond sinusoïdal et deux au-dessus), et les profils de courant que nous avons obtenus sont présentés sur la figure (3.15). Il est à noter qu'on a utilisé des courantomètres de type Side-looking pour les deux positions au-dessus du fond sinusoïdal (afin de pouvoir mesurer au plus près du creux du fond), ce qui explique la différence de plage de mesures.

Examinons l'évolution du profil de courant sur l'ensemble du canal (3.16). On rappelle que notre axe  $Ox$  est orienté dans le sens de propagation des vagues, donc dans le sens opposé au courant. De plus, notre axe  $Oz$  est orienté vers le haut, avec l'origine placée à la surface libre. Notre profil de courant s'écrit  $U(x, z) = U_0(x) + s(x) * z$ , avec ici  $z < 0$ . Ainsi, la vorticité sera établie comme positive si elle permet au courant de décroître (devenir de plus en plus négatif) avec la profondeur. On constate qu'au-dessus du fond sinusoïdal survient une inversion de profil, la vorticité change de signe. Si en début d'écoulement, le courant était plus fort (en valeur absolue) en surface, à la fin de l'écoulement, il est plus fort (toujours en valeur absolue) près du fond. Dans une première approche, cette évolution peut être modélisée par la fonction polynomiale empirique d'ordre 5 suivante:

$$S_{sh}(x) = -3.3687 \cdot 10^{-4} x^5 + 9,5 \cdot 10^{-3} x^4 - 8,83 \cdot 10^{-2} x^3 + 0,2746 \cdot x^2 - 2,9169 \cdot 10^{-1} x + 1,70 \cdot 10^{-1} \quad (3.21)$$

On peut aussi l'exprimer selon l'espacement relatif  $\tilde{x} = (x - x_e)$ , où  $x_e = 8.67m$  est la position du profil d'entrée :

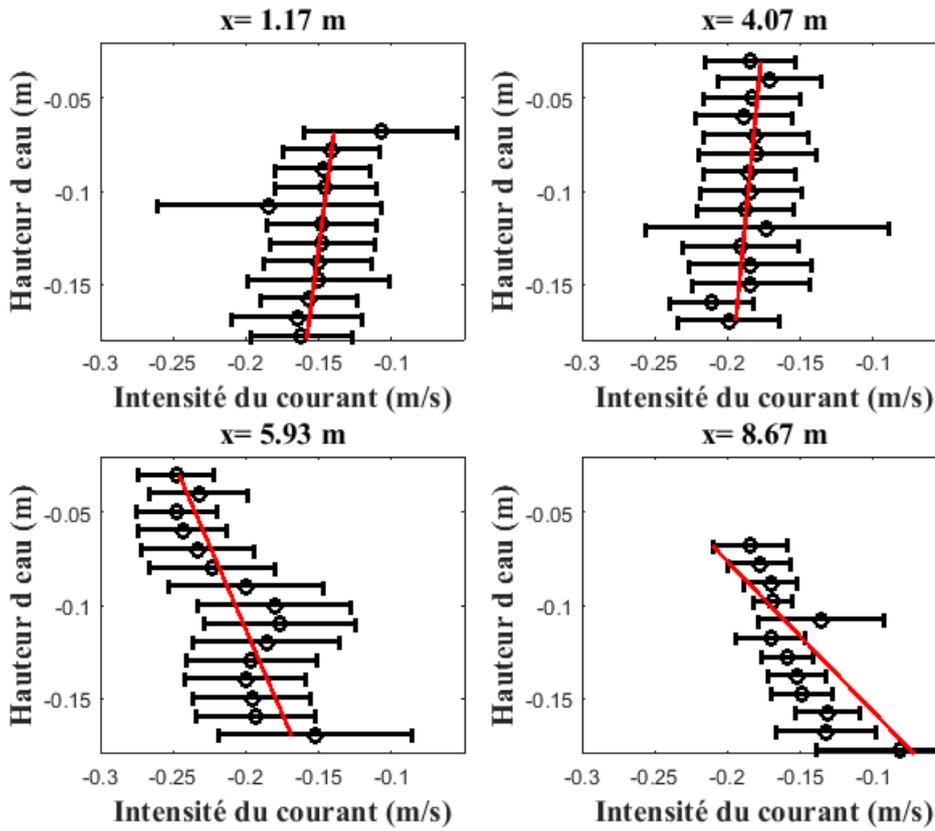


Figure 3.15: Evolution du profil vertical de courant le long du canal : intensité selon la profondeur d'immersion

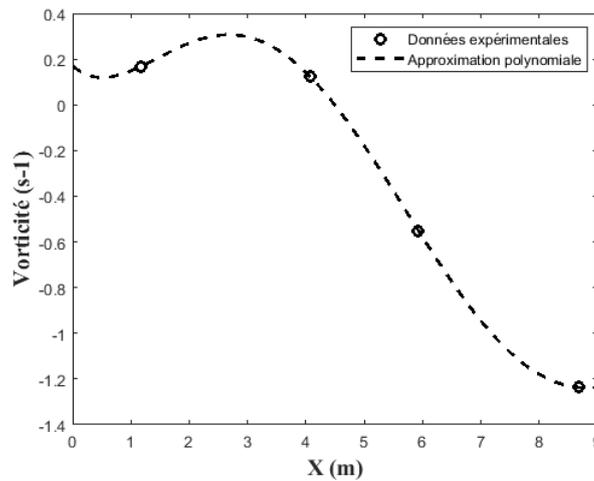


Figure 3.16: Evolution de la vorticité la long du canal

$$S_{sh}(\tilde{x}) = -3,3687.10^{-4}\tilde{x}^5 - 5,1.10^{-3}\tilde{x}^4 - 1,08.10^{-2}\tilde{x}^3 + 8,32.10^{-2}\tilde{x}^2 - 2,61.10^{-2}\tilde{x} - 1,2365 \quad (3.22)$$

On constate de plus que les profils sont globalement moins perturbés à mesure que l'on avance dans le canal, avec cette fois un comportement turbulent homogène sur toute la colonne d'eau. En effet, si dans l'absolu l'intensité du courant varie plus au passage du fond sinusoïdal, elle est surtout plus grande. Ainsi, la variation de l'intensité de la composante horizontale du courant par rapport à sa position moyenne va passer de 3.13cm/s (soit 48.20%) à l'entrée de l'écoulement à 4.29cm/s (seulement 21.78%), puis 3.85cm/s (soit 20.92%) au dessus du fond sinusoïdal, puis finalement 4.11cm/s (soit 27.42%) à la sortie de l'écoulement. Rappelons que le bruit instrumental tient une bonne place dans ces perturbations. Nous pouvons donc dire que le profil établi, s'il évolue le long du canal, n'est pas disloqué par les instabilités.

### Condition de blocage de la houle

A présent que nous avons vérifié la qualité de notre profil de courant, voyons s'il est bien compatible avec la propagation d'une houle. En effet, il existe une condition de blocage de la houle par le courant: au-delà d'une certaine vitesse d'écoulement, les vagues ne peuvent plus se propager à contre-courant au-delà d'une certaine fréquence. Cette fréquence s'abaisse à mesure que le courant se renforce. Notre fond, de longueur d'onde 50cm, nous imposait la valeur centrale de notre plage de fréquences de houle, à savoir environ 1.2Hz d'après les courbes prédictives présentées plus tôt. Dans des conditions de profondeur infinie, la houle va être bloquée par le courant si la condition de blocage suivante est vérifiée :

$$u > \frac{c}{4} \quad (3.23)$$

avec  $u$  l'intensité du courant en surface, environ 0.18m/s, et  $c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{k}$  la célérité de la houle. Cette condition nous dit que des houles se propageant à une vitesse inférieure à  $4u \simeq 0.738m/s$  ne se propageront pas, et même si nous ne sommes pas en condition de profondeur infinie, cela nous donne un bon ordre de grandeur pour notre cas d'étude. Afin de vérifier si notre profil de courant allait être compatible avec la plage de fréquences de houle, nous avons réalisé une petite courbe prédictive présentée figure (3.17). Nous avons calculé la vitesse de la houle par résolution de la relation de dispersion propagative (2.4) dans trois cas: sans courant, avec courant constant (pris égal à  $U_0 = -0.1845m/s$ ) et avec courant cisailé (même intensité du courant de surface et  $s = 1.237$ ). Il s'agit d'une étude de dimensionnement, qui vise à nous donner une idée de la faisabilité de l'étude, c'est pour cela que nous avons calculé la vitesse de la houle à partir du seul profil de courant pris en entrée d'écoulement. Les résultats nous montrent qu'en présence d'un courant cisailé, les vagues vont se propager sur l'ensemble du canal jusqu'à la fréquence d'environ 1.5Hz. Concrètement pendant l'expérience, on a effectivement constaté un blocage de la houle, mais uniquement sur l'extrémité du canal et vers de plus hautes fréquences, au-delà de 1.63Hz (le blocage survenant souvent même au-delà de l'emplacement des sondes). Cette différence est due au fait que la houle se propage majoritairement au-dessus d'un espace où le profil de courant n'est plus le même qu'en entrée d'écoulement, et que la condition limite a été estimée pour des conditions de profondeur infinie. Nous avons toutefois validé que la houle pouvait se propager entièrement au-dessus de notre profil de courant. A présent que le cadre de l'expérience est posé, parlons de la façon dont nous post-traiterons les données une fois celles-ci enregistrées.

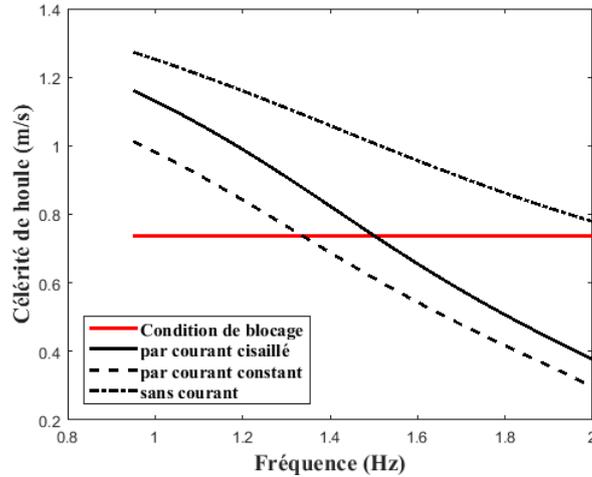


Figure 3.17: Courbes prédictives de la célérité de la houle en présence d’un courant cisailé, d’un courant constant et sans courant

### 3.3 Analyse et post-traitement des signaux

#### 3.3.1 Mesures de courant

**Routine de despiking** Concernant les données de courant, nous l’avons vu nous travaillons sur des fichiers .dat (initialement .vno, convertis grâce aux logiciels PolySync© et Vectrino-Plus©). Ces fichiers contiennent un ensemble d’informations, et parmi elles le temps, les vitesses mesurées selon les trois directions et les corrélations associées. Le seul post-traitement que l’on va appliquer à nos signaux de courant est un procédé dit de “despiking” ou filtrage. C’est une méthode statistique de détection et de suppression des pics parasites, dans notre cas destinée à éliminer le bruit instrumental autant que faire se peut. Présentée dans les travaux de Goring & Nikora (2002 [74]), discutée par Wahl (2002 [202]), elle se déroule en plusieurs étapes, en commençant par sélectionner sur une fenêtre glissante les données sur lesquelles on va effectuer l’étude (le procédé fonctionne mieux s’il n’y a pas un trop gros volume de données à traiter à la fois). On va ensuite utiliser le concept d’une application de Poincaré en trois dimensions: on va tracer la variable (ici l’intensité du courant) et ses dérivées (première et seconde) dans un espace-phase l’une par rapport aux autres. Les points du signal vont alors se retrouver dans une ellipse dont les axes sont définis par un critère universel. Les points qui se retrouveront excentrés de l’ellipse correspondent en fait à un pic dépassant du signal, car ses dérivées seront aussi démarquées des dérivées des points classiques. Il suffira alors pour lisser le signal d’éliminer chaque point placé en dehors de l’ellipse, associé à un pic parasite. La méthode de calcul est présentée en détail dans le rapport ([167]). La figure (3.18) présente un exemple d’une ellipse de lissage, extraite du signal de courant relevé à l’entrée de l’écoulement à la cinquième position en partant de la surface libre, soit à -10.8cm de profondeur, quasiment au milieu de la colonne d’eau. On présente le signal enregistré par le même courantomètre à la même position, sans houle puis selon les quatre fréquences de houle. On constate que la houle a tendance à améliorer la qualité des signaux.

**Routine de décomposition du courant en courant moyen et vitesse orbitale** Pour les profils de courant relevés sous la houle, nous avons besoin de déterminer la part de vitesse orbitale présente dans les fluctuations du courant moyen. Pour cela, nous avons utilisé une

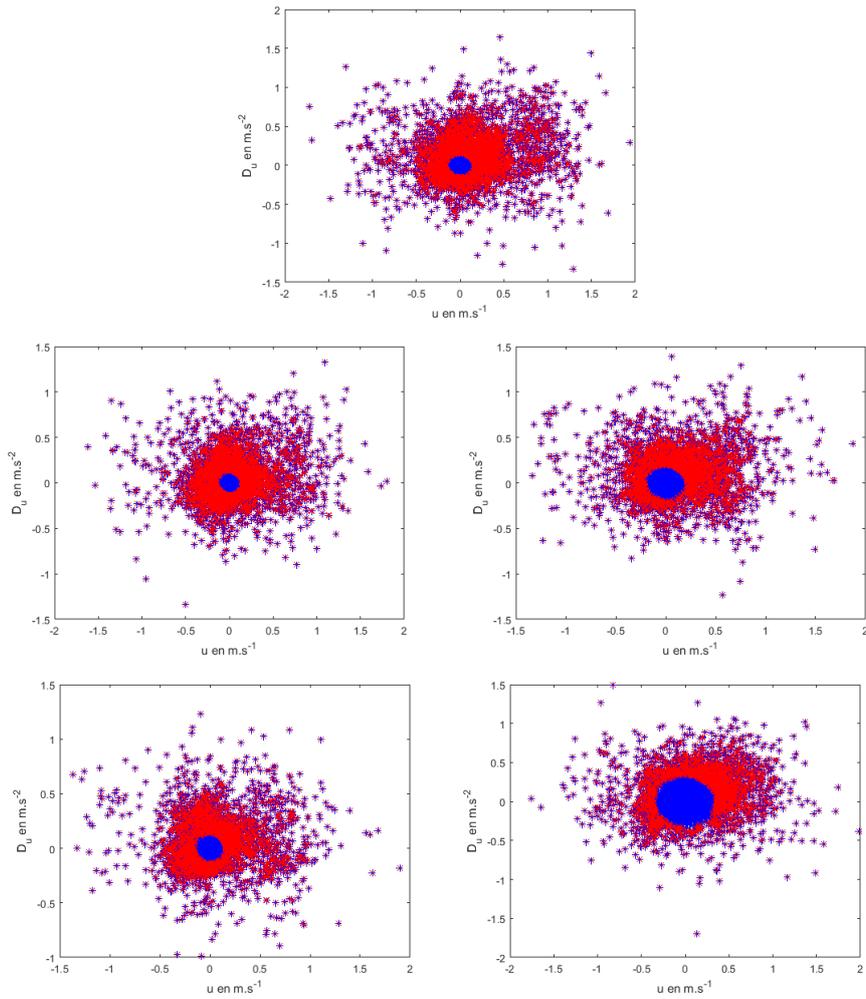


Figure 3.18: Ellipse de lissage du profil de courant relevé en  $x=8.67\text{m}$  et  $z=-0.108\text{m}$ , a) sans houle - b)  $F= 1.58\text{Hz}$  ( $T=0.63\text{s}$ ) - c)  $F= 1.35\text{Hz}$  ( $T=0.74\text{s}$ ) - d)  $F= 1.12\text{Hz}$  ( $T=0.89\text{s}$ ) -e)  $F= 0.95\text{Hz}$  ( $T=1.05\text{s}$ )

routine Matlab qui établit la transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform) d'une mesure temporelle de courant afin d'en obtenir le spectre d'énergie. Dans ce spectre, nous ne devrions avoir que des pics secondaires, de faible amplitude, correspondant au bruit, et deux pics principaux. Le premier pic en amplitude (centré sur la fréquence nulle) correspondra à l'intensité du courant moyen, tandis que le deuxième pic en amplitude (centré sur la fréquence de la houle) correspondra à la vitesse orbitale des particules entraînées par la houle. Ensuite, comme pour toute FFT, les amplitudes des pics identifiés correspondent aux intensités des données associées (ici, du courant moyen et du mouvement orbital).

### 3.3.2 Mesures de houle : Méthode à 3 sondes

Comme présenté sur le schéma de la figure (3.3), nous avons installé six sondes résistives, trois en amont et trois en aval dans le but de mesurer la réflexion de la houle par le fond sinusoïdal et de vérifier que notre système de minimisation des réflexions parasites en bout de canal est efficace. A partir des signaux de trois sondes placées en amont du fond, on va calculer le coefficient de réflexion, à l'aide donc d'une méthode dite "méthode à trois sondes" (contrairement à la partie numérique où nous avons utilisé une méthode à deux sondes virtuelles). Le principe reste le même: on va toujours utiliser le déphasage entre les différentes crêtes pour décomposer la partie incidente et la partie réfléchi de la houle dans le signal complet renvoyé par les sondes. Cette méthode est détaillée dans l'étude de Rey (2002 [160]). Le principe est le même que celui détaillé dans le paragraphe (2.3), on résout l'équation (1.15) cette fois en trois points, pour obtenir un système comme (2.62) (qui peut se mettre sous la forme d'un système sur le schéma de (2.63)) mais de 3 équations à 3 inconnues. Nous allons simplement écrire les solutions afin d'être clair sur les différences avec la méthodologie numérique. On reste dans les hypothèses classiques de fluide non visqueux, incompressible et de mouvement irrotationnel. On considère cette fois trois sondes  $S_n$  d'abscisses respectives  $x_n$  avec  $n = 1, 2, 3$ . En analysant le signal d'une sonde  $S_n$ , on extrait l'amplitude  $A_n$  et la fréquence de la houle - donc sa pulsation  $\omega$ , et par analyse de Fourier on extrait la phase  $\varphi_n$ . On peut donc reconstruire la surface libre à l'emplacement de la sonde sous la forme générale :

$$\eta_n = A_n \exp(i(\omega t - \varphi_n)) \quad (3.24)$$

avec  $n = 1, 2, 3$ . On va d'ailleurs noter  $\delta_n = \varphi_n - \varphi_1$  avec  $n = 1, 2, 3$  le déphasage entre le signal de la première sonde et les autres signaux. Par une routine de résolution de la relation de dispersion, on détermine  $k^+$  et  $k^-$ , les nombres d'onde propagatifs respectivement incident et réfléchi, et on pose  $\Delta_n^+ = k^+(x_n - x_1)$  et son pendant  $\Delta_n^- = k^-(x_n - x_1)$  avec  $n = 1, 2, 3$ . Une remarque importante concernant cette étape: les sondes résistives sont placées sur la partie gauche du canal, côté batteur. Or à cet endroit là, la figure (3.15) nous montre un profil de courant presque verticalement constant (la vorticité est d'environ  $-0.2s^{-1}$ ). En première approximation, nous avons donc choisi de résoudre plutôt la relation de dispersion par courant uniforme (1.143). On pose le système de trois équations à trois inconnues, et les solutions (2.64) et (2.65) vont à présent s'écrire à l'aide des coefficients :

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = \sum_{n=1}^3 \exp(-2i\Delta_n^-) \\ s_2 = \sum_{n=1}^3 \exp(2i\Delta_n^+) \\ s_{12} = \sum_{n=1}^3 \exp(i(\Delta_n^+ - \Delta_n^-)) \\ s_3 = \sum_{n=1}^3 A_n \exp(-i(\Delta_n^- + \delta_n)) \\ s_4 = \sum_{n=1}^3 A_n \exp(i(\Delta_n^+ - \delta_n)) \\ s_5 = s_1 s_2 - s_{12}^2 \end{array} \right. \quad (3.25)$$

sous la forme:

$$A^+ = \frac{s_2 s_3 - s_{12} s_4}{s_5} \quad (3.26)$$

$$A^- = \frac{s_1 s_4 - s_{12} s_3}{s_5} \quad (3.27)$$

Et le coefficient de réflexion s'écrit toujours

$$C_r = \frac{|A^-|}{|A^+|} \quad (3.28)$$

Nous avons à présent tous les outils à notre disposition pour analyser et comprendre les données recueillies lors de la campagne.

## 3.4 Résultats et discussions

### 3.4.1 Profil de courant

**En l'absence de houle: courant moyen et niveau moyen de la surface libre**

**Champ de courant de surface le long du canal** Nous avons présenté sur les figures (3.14) et (3.15) le profil de courant obtenu grâce à notre système générateur de vorticité. Après avoir établi sa stabilité, nous allons   présent nous intéresser   son évolution dans la zone de la colonne d'eau où il est le plus perçu par la houle: près de la surface. Nous avons placé cinq courantomètres le long du canal, la tête   2cm sous la surface (ce qui nous donne une zone de mesure  $z = -7cm$ ), et nous les avons déplacés quinze fois de dix centimètres   chaque fois, selon le schéma présenté en figure (3.2). Ainsi, nous avons  $x_{s1} = [1.40 : 2.88]m$ ,  $x_{s2} = [2.90 : 4.30]m$ ,  $x_{s3} = [4.42 : 5.82]m$ ,  $x_{s4} = [5.95 : 7.35]m$  et  $x_{s5} = [6.94 : 8.34]m$ . La figure (3.19) présente l'intensité de la composante horizontale du courant de surface le long du canal. Par souci de clarté, nous avons choisi de représenter l'intensité du courant en valeur absolue et d'attribuer une couleur   chaque courantomètre. Nous avons également superposé le fond ondulé   la courbe (l'amplitude des oscillations s'inscrit dans l'échelle des vitesses), afin de pouvoir facilement corréler le comportement du courant   la bathymétrie. De façon générale, on remarque que la vitesse de surface conserve son ordre de grandeur sur l'ensemble du canal. Sur chaque tronçon, on enregistre les vitesses moyennes de courant de surface successives:  $\bar{u}_{s1} = 0.1678m/s$ ,  $\bar{u}_{s2} = 0.1773m/s$ ,  $\bar{u}_{s3} = 0.1918m/s$ ,  $\bar{u}_{s4} = 0.1998m/s$  et  $\bar{u}_{s5} = 0.1836m/s$  soit une variation maximale d'environ 19% et une vitesse moyenne sur l'ensemble du canal estimée    $\bar{u}_s = 0.1840m/s$ . On observe ainsi que l'intensité du courant de surface connaît un pic lorsqu'il entame le fond ondulé, puis diminue   mesure qu'il le parcourt. Si on regarde de plus près, on constate que le courant de surface est particulièrement corrélé avec la bathymétrie. En effet, deux zones de grande turbulence apparaissent exactement au début et   la fin du fond ondulé. A ces endroits-là, l'écart-type sur la composante horizontale est respectivement de 0.1533 et 0.1965, contre 0.0612 en moyenne sur les autres tronçons (0.0596 sur le premier tronçon hors discontinuité, 0.0492 sur le tronçon 2, 0.0978 sur le tronçon 3, 0.0534 sur le tronçon 4 hors discontinuité et 0.046 sur le tronçon 5). Soit une augmentation de 286%! On observe également que le courant de surface oscille au-dessus du fond ondulé, oscillations qui apparaissent être de même période que le fond. Cela est bien visible notamment sur le deuxième tronçon (en rose sur la figure) où le même courantomètre enregistre des chutes de vitesse exactement au-dessus des creux du fond ondulé. Pour vérifier si ce comportement

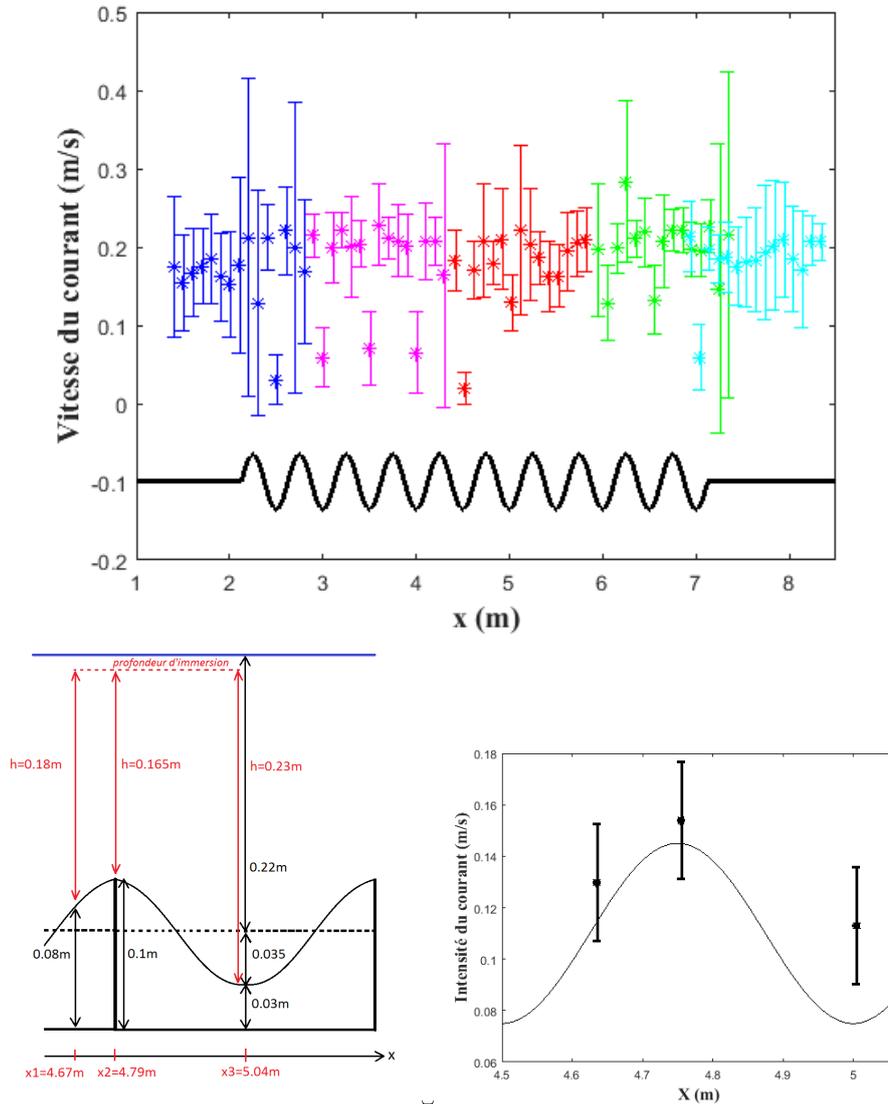


Figure 3.19: Evolution de la composante horizontale du courant dans la direction  $Ox$ , relevé en  $z = -7cm$ : a) Relevé le long du canal - b) Mesures au-dessus d'une crête du fond: schéma du dispositif - c) Mesures au-dessus d'une crête du fond: résultats

était bien persistant, nous avons réitéré la mesure du courant de surface au-dessus d'une bosse de fond un mois après la première mesure. Le résultat est présenté sur le deuxième graphe de la figure (3.19), avec encore une fois le profil bathymétrique superposé par souci de clarté. Nous avons choisi la cinquième longueur d'onde de fond, afin d'être au milieu du fond ondulé et d'éviter les effets de bord. Les abscisses des trois points de mesure sont respectivement  $x_1 = 4.67m$ ,  $x_2 = 4.79m$  et  $x_3 = 5.04m$ . Nous constatons encore une fois une variation de l'intensité du courant de surface de même période et presque proportionnelle à la variation bathymétrique: pour 1cm de variation verticale de bathymétrie, on constate une variation du courant de surface de  $0.59cm.s^{-1}$ . Il y a bien un comportement spécifique du courant qui est établi au-dessus du fond sinusoïdal.

Nous avons analysé l'évolution du profil de courant en surface, mais il reste à lier cette évolution au débit. Le caractère constant de ce dernier est théoriquement acquis, mais l'établir de façon définitive par des relevés expérimentaux permettra d'en avoir confirmation.

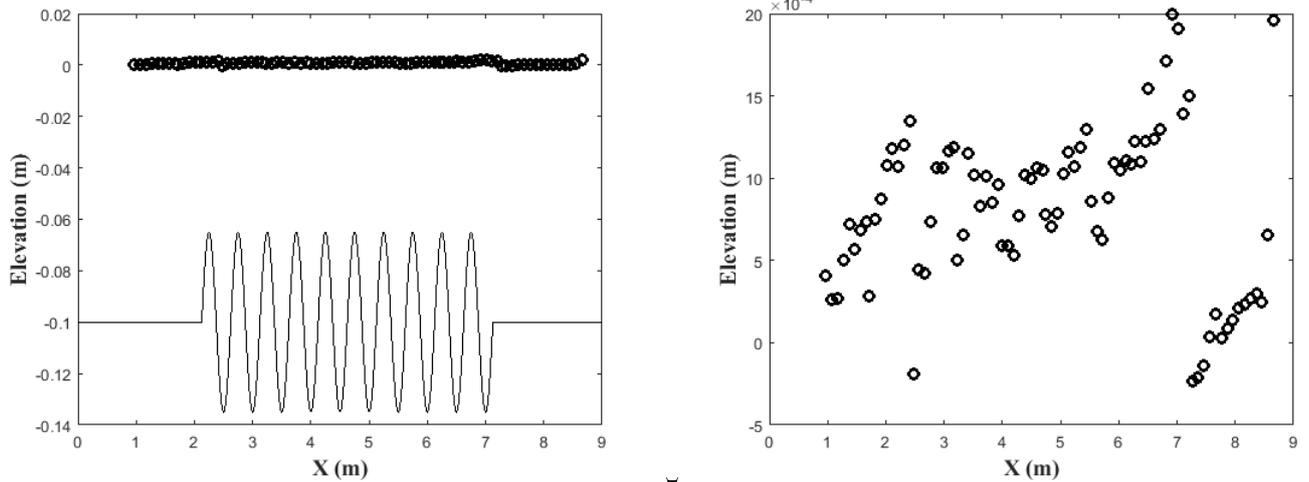


Figure 3.20: Elevation du niveau moyen de la surface libre sous l'influence du courant

**Variation du niveau moyen de la surface libre et conservation du débit** La conservation du débit de l'écoulement est une hypothèse importante à vérifier pour que l'expérience repose sur des bases solides. Pour cela, en dehors de toute considération concernant la houle, nous avons déterminé l'élévation relative du niveau moyen de la surface libre sous l'influence du courant. Elle se calcule comme la différence entre les niveaux moyens de la surface libre en présence et en l'absence de courant. Le protocole pour chacune de ces mesures a été décrit précédemment, dans le paragraphe 3.1.2.2. Après un étalonnage particulièrement précis des sondes, nous avons mesuré le niveau moyen de la surface libre au repos, sans courant, selon les positions présentées en rouge sur le schéma figure 3.4. Nous savons que dans ce cas de figure, le niveau de l'eau, soumis à la seule gravité, est parfaitement horizontal. Or chaque sonde est déplacée 15 fois, de 140cm au total. Si l'on constate une variation de la tension (donc de profondeur d'immersion) au cours de ce déplacement, nous saurons que le support de sondes n'est pas exactement horizontal, et nous saurons le quantifier avec précision. Ensuite, sans vider le canal nous installons le courant et remesurons le niveau moyen de la surface libre. En faisant la différence à chaque position entre le niveau relevé au repos et le niveau relevé avec courant, nous aurons la variation du niveau moyen de la surface libre due au courant, et ainsi une indication sur la conservation du débit sous l'influence du courant. Notons que le niveau moyen de l'eau est imposé par les conditions d'écoulement en aval. Cette élévation est présentée sur la figure 3.20, d'abord d'un point de vue global, avec une superposition du fond pour faire le lien avec la bathymétrie, puis d'un point de vue agrandi, pour analyser les micro-variations.

On constate qu'en effet, globalement l'élévation est quasi nulle: son maximum est d'environ deux millimètres, soit moins de 0.91% de la hauteur d'eau totale. On peut donc en déduire que la dissipation est faible (pas de perte de charges). Si on regarde de très près, on voit une légère augmentation du niveau moyen de la surface libre au-dessus du fond sinusoïdal. C'est particulièrement visible aux alentours de 7.2m, lorsque le niveau moyen de la surface libre chute quand l'écoulement plonge dans le premier creux du fond ondulé, puis augmente sur le reste du fond. Cela est logique, nous avons vu qu'en effet le courant s'intensifiait dans cette zone.

### En présence de houle

Les profils de courant en l'absence de houle sont décrits en détails au paragraphe 3.4.4. Cependant, tous les calculs et discussions qui vont suivre sont basés sur l'impact du profil de courant

sur la propagation de la houle. Il est donc nécessaire de vérifier si ce profil n'est pas trop perturbé par les vagues, justement. Nous allons donc vérifier comment se comporte le profil de courant sous quatre fréquences de houle, choisies pour être représentatives de l'ensemble de la plage de fréquences que nous utiliserons pour les mesures de réflexion:  $f_1 = 1.59Hz$  (avec une amplitude de  $a=0.01m$ ),  $f_2 = 1.35Hz$  (et  $a=0.01m$ ),  $f_3 = 1.12Hz$  (et  $a=0.02m$ ) et  $f_4 = 0.95Hz$  (pour  $a=0.032m$ ). Les amplitudes ont été choisies de façon à toujours présenter un profil de houle le plus sinusoïdal possible (pour rester dans le cas d'une houle linéaire).

**Impact de la houle sur les profils horizontaux de la composante horizontale du courant** Commençons par la partie supérieure de l'écoulement, à la fois celle où le courant va le plus impacter le comportement de la houle et celle qui risque justement d'être la plus perturbée par les vitesses orbitales des particules d'eau associées à cette houle. Dans un premier temps, intéressons nous à l'écart entre les profils de courant sous la houle et les profils relevés initialement sans la houle (figure 3.21). Par souci de clarté, on travaille ici avec la valeur absolue de l'intensité du courant. Comme précédemment, nous avons affiché dans une couleur différente les mesures relevées par des courantomètres différents, avec leur écart-type. Pour pouvoir corrélérer les variations de courant avec les variations de bathymétrie, nous avons superposé (sans considération d'échelle) la forme du fond, en trait plein noir. Dans l'ensemble, on constate que l'ordre de grandeur et le mouvement oscillant sont conservés, ce dernier étant toujours de même période que le fond sinusoïdal. De façon logique, l'écart-type moyen est plus important que pour le profil sans houle, mais on retrouve les pics de turbulence aux extrémités du fond ondulé. Cette augmentation peut s'expliquer par le mouvement orbital des particules d'eau dû à la houle (ce point sera discuté plus loin), et de façon plus pratique par les vibrations transmises aux courantomètres par les vagues pendant les mesures. L'influence de la houle est très significative: les profils en présence de houle "épousent" la bathymétrie sinusoïdale. On remarque que, par rapport au profil relevé initialement, la houle abaisse légèrement l'intensité du courant. En effet, l'intensité du courant sur l'ensemble du canal baisse en moyenne de 14.64% sous l'influence de la houle, toutes fréquences confondues. Les basses fréquences ont d'ailleurs plus d'impact sur ces valeurs: l'intensité du courant baisse de 13.6% pour une houle de fréquence 1.59Hz et de 11.8% pour une houle de 1.35Hz, mais elle chute de 16.04% pour une houle de 1.12Hz et 17.12% pour une houle 0.95Hz. On suppose que dans la partie supérieure de l'écoulement, une partie du mouvement des particules entraînées par le courant peut être inversé par le mouvement orbital initié par la houle, et ce phénomène s'accroît pour des houles longues. On remarque aussi que pour les fréquences de houle intermédiaires, l'intensité du courant de surface reste élevée à droite du canal ( $x > 7.14m$ ). Cela peut s'expliquer par l'agitation qui règne dans cette zone à ces fréquences: on a noté la présence d'ondes transverses qui ont tendance à favoriser la turbulence dans l'écoulement, et donc à augmenter la vitesse moyenne. A l'autre extrémité du canal par contre ( $x < 2.13m$ ), l'intensité du courant de surface n'est pratiquement pas modifiée par la houle, et ce pour aucune fréquence: en effet, le courant est homogène sur la verticale et le fond est plat.

Nous avons vu qu'en certains endroits, la houle perturbe légèrement le courant de surface. Penchons-nous donc sur le mouvement orbital des particules d'eau près de la surface. Nous utilisons la méthode de décomposition du courant de surface en courant moyen et vitesse orbitale présentée dans le paragraphe 3.3.1, et cette décomposition est présentée sur la figure (3.22). De façon prévisible, plus la fréquence de la houle est faible (soit de longues périodes), plus la vitesse orbitale est élevée (car les particules ont un mouvement construit). Ainsi, plus la houle est longue, plus on peut s'attendre à une modification du courant sur toute la colonne d'eau. On rappelle d'ailleurs que, sous l'influence de la houle, la vitesse moyenne du courant

de surface diminuait jusqu'à 17.12%, valeur maximale justement obtenue sous une houle de basse fréquence. Or, nous voyons ici que pour cette même basse fréquence, la vitesse orbitale moyenne est d'environ 17.88% de l'intensité du courant sans la houle. On peut donc déduire que les vagues ne modifient le courant que d'environ 0.76% au maximum. Il est à noter qu'à partir de  $x=7\text{m}$ , on visualise les effets transverses qui ajoutent de la turbulence en surface: la vitesse orbitale s'accroît.

### **Impact de la houle sur les profils verticaux de la composante horizontale du courant**

Intéressons-nous à présent à ce qui se passe dans la colonne d'eau! La figure (3.23) présente quatre profils verticaux de courant mesurés en présence de houle, pour les quatre fréquences évoquées ci-dessus, et comparés aux mêmes profils relevés sans houle. Dans un premier regard d'ensemble, on constate que sur l'ensemble de la colonne d'eau, la houle - peu importe sa fréquence - n'impacte que vraiment très peu le profil de courant. En moyenne sur la colonne d'eau et pour les quatre courantomètres, l'intensité du courant va augmenter (en valeur absolue) de 6.4mm/s sous une houle de 1.59Hz, de 1.9mm/s pour une houle de 1.35Hz, de 3.5mm/s pour une houle de 1.12Hz et diminuer de 4.8mm/s pour une houle de 0.95Hz. cela nous donne sur l'ensemble des houles testées une diminution moyenne de l'intensité du courant sur la colonne d'eau d'environ 1.8mm/s, soit environ 1/10<sup>e</sup> de l'intensité elle-même. On peut donc considérer en première approximation que les profils verticaux de courant se conservent sous la houle. On remarque toutefois que la plage de variation de l'intensité du courant a tendance à augmenter en présence de houle, principalement sur la moitié supérieure de l'écoulement (de façon logique).

À présent que nous avons comparé chaque profil sous une fréquence de houle spécifique à son pendant au repos, comparons les profils sous houle entre eux, à chaque position, pour vérifier si une tendance n'émerge pas. Nous en profitons d'ailleurs pour comparer séparément les composantes du signal: le courant moyen et la vitesse orbitale. Cette comparaison est présentée sur la figure (3.24). Chaque figure correspond aux relevés d'un même courantomètre (même position), on compare les profils qu'il a enregistrés sous différentes conditions de houle. Cette fois, nous revenons à notre profil sans courant de référence, celui présenté sur la figure (3.11), afin de rester dans la continuité des comparaisons précédentes. Les initiales 'MCV' signifient 'Intensité Moyenne de la composante horizontale du Courant' ('Mean Current horizontal Velocity'), et 'OV' signifie "Vitesse Orbitale", cette dernière concernant aussi la composante horizontale du courant, bien entendu. On rappelle que la méthode pour extraire les vitesses orbitales est détaillée dans le paragraphe 3.1.1. De façon générale, les vitesses orbitales restent très faibles sur l'ensemble de la colonne d'eau, et tendent seulement à impacter la vitesse du courant sur les cinq premiers centimètres sous la surface. Le courant moyen, quant à lui, reste peu impacté par la houle. On remarque sur la position  $x=4.07\text{m}$ , soit après que le courant ait parcouru une grande partie du fond sinusoïdal, la plus haute fréquence de houle (soit la houle la plus courte) déconstruit le profil de courant sur la moitié supérieure de la colonne d'eau. On remarque également que pour la partie droite du canal, les profils de courant sont plus impactés par la houle, on le voit particulièrement pour la position 8.67m, où on observe un net décalage entre le profil sans courant et les autres profils. Cependant, si on se réfère au profil sans courant enregistré le jour même, l'écart est moindre, on suppose donc que l'écart observé sur la figure (3.24) vient juste de la variation parfois observée d'un jour à l'autre des conditions hydrodynamiques. De plus, l'allure générale et la linéarité du profil nous paraissent très bien conservés, nous allons le vérifier en comparant les vorticités (calculées comme toujours par régression linéaire sur toute la colonne d'eau à chaque position et pour chaque condition de houle). Les résultats sont présentés sur la deuxième partie de la figure (3.24). Les vorticités associées aux profils "sans houle" et leur approximation sont celles présentées sur la figure

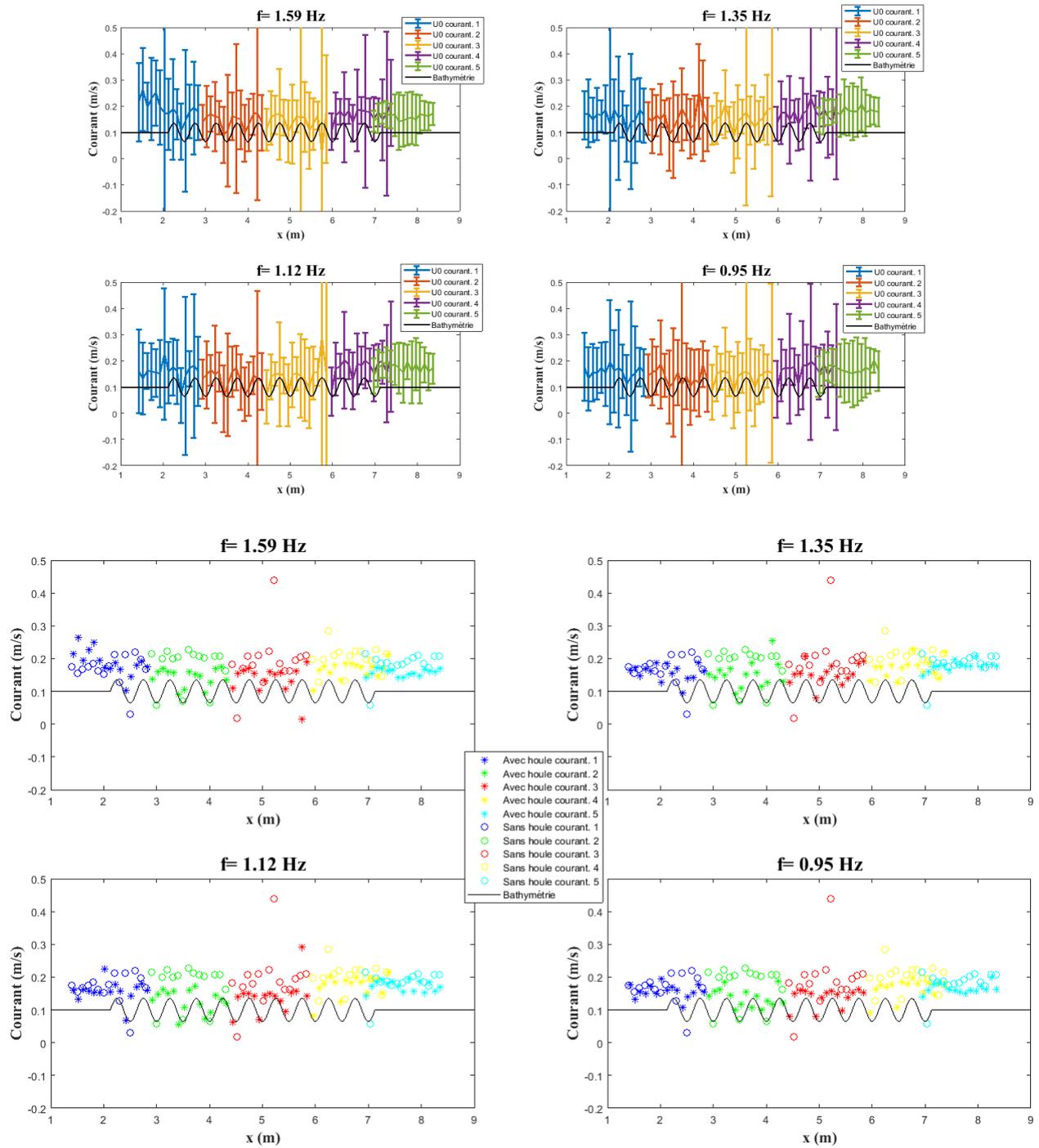


Figure 3.21: Impact de la houle sur les profils de courant - a) Profils horizontaux près de la surface selon la fréquence de la houle - b) Comparaison des profils relevés avec ou sans la houle

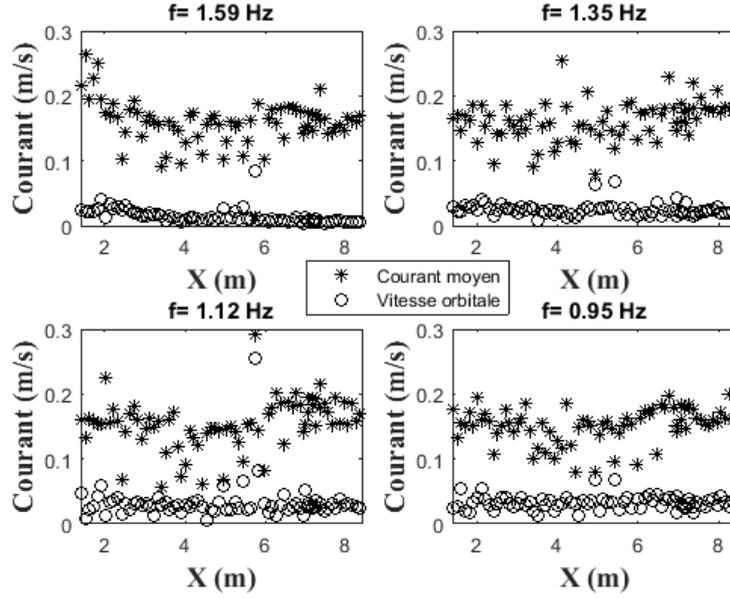


Figure 3.22: Influence de la vitesse orbitale

(3.15), pour comparaison.

Il est à noter qu'ici, en première approximation, nous avons extrait les vorticités par régression linéaire sur toute la colonne d'eau. Nous verrons dans la section suivante que d'autres méthodes existent (régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau, approximation polynomiale d'ordre cinq du profil vertical puis mesure de la tangente à ce profil en  $z = -d_e...$ ), chacune avec leurs avantages et leurs inconvénients. Une fois les vorticités déterminées à chaque position pour chaque condition de houle, nous avons établi une loi d'approximation polynomiale pour représenter l'évolution du cisaillement le long du canal pour une fréquence de houle particulière. Il s'agit d'avoir une représentation approchée de l'évolution du cisaillement le long du canal pour chaque condition hydrodynamique testée, pour mettre en évidence les différences et éventuellement établir une tendance sur toute la plage de fréquences. Les courbes obtenues sont présentées sur la deuxième partie de la figure (3.24) et voici les équations associées :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S_{sh}(x) = 1,8224 \cdot 10^{-4} x^5 - 5,076 \cdot 10^{-3} x^4 + 4,017 \cdot 10^{-2} x^3 - 3,756 \cdot 10^{-2} x^2 - 2,926 \cdot 10^{-1} x \\
 \quad \quad \quad + 1,708 \cdot 10^{-1} \\
 S_{1.59}(x) = -3,8957 \cdot 10^{-4} x^5 + 9,7 \cdot 10^{-3} x^4 - 7,87 \cdot 10^{-2} x^3 + 2,107 \cdot 10^{-1} x^2 - 1,536 \cdot 10^{-1} x \\
 \quad \quad \quad + 1,149 \cdot 10^{-1} \\
 S_{1.35}(x) = -8,9825 \cdot 10^{-4} x^5 + 2,31 \cdot 10^{-2} x^4 - 1,994 \cdot 10^{-1} x^3 + 6,264 \cdot 10^{-1} x^2 - 4,952 \cdot 10^{-1} x \\
 \quad \quad \quad - 1,264 \cdot 10^{-1} \\
 S_{1.12}(x) = -8,1941 \cdot 10^{-4} x^5 + 2,09 \cdot 10^{-2} x^4 - 1,776 \cdot 10^{-1} x^3 + 5,409 \cdot 10^{-1} x^2 - 4,216 \cdot 10^{-1} x \\
 \quad \quad \quad + 1,31 \cdot 10^{-1} \\
 S_{0.95}(x) = 1,1 \cdot 10^{-3} x^5 - 3,2 \cdot 10^{-2} x^4 + 3,189 \cdot 10^{-1} x^3 - 1,2802 x^2 + 1,1104 x + 2,7721
 \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Si on compare les vorticités établies ainsi, on constate une inversion de la tendance à cause de la houle : le long du canal, le cisaillement sans houle était d'abord négatif puis positif, et en présence de houle, il présente une évolution contraire. Il faut cependant prendre ces lois d'approximation avec précaution. En effet, par exemple, pour le profil enregistré sous une houle

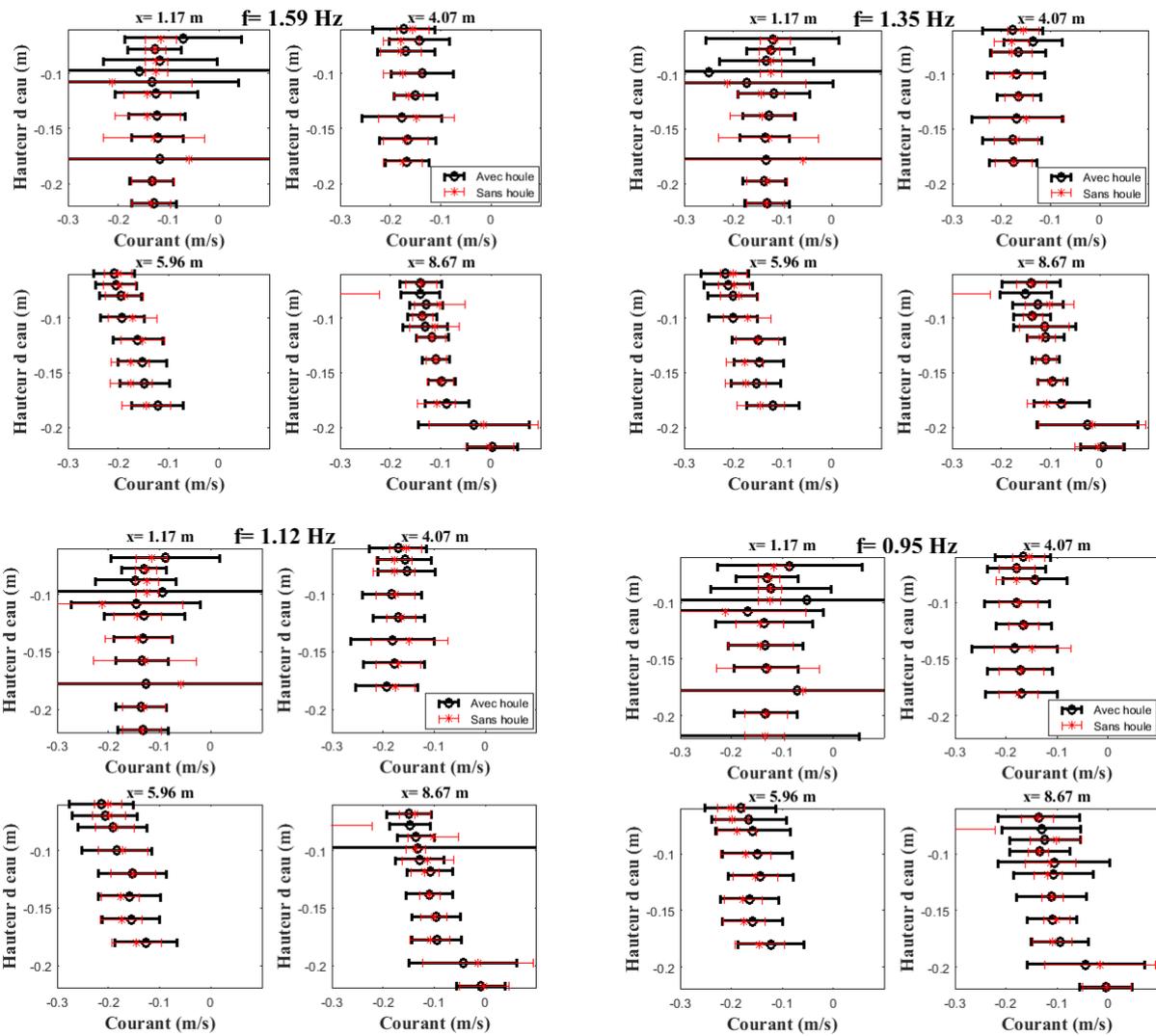


Figure 3.23: Influence de la houle sur les profils verticaux de courant : Présentation des profils et comparaison avec les profils sans houle

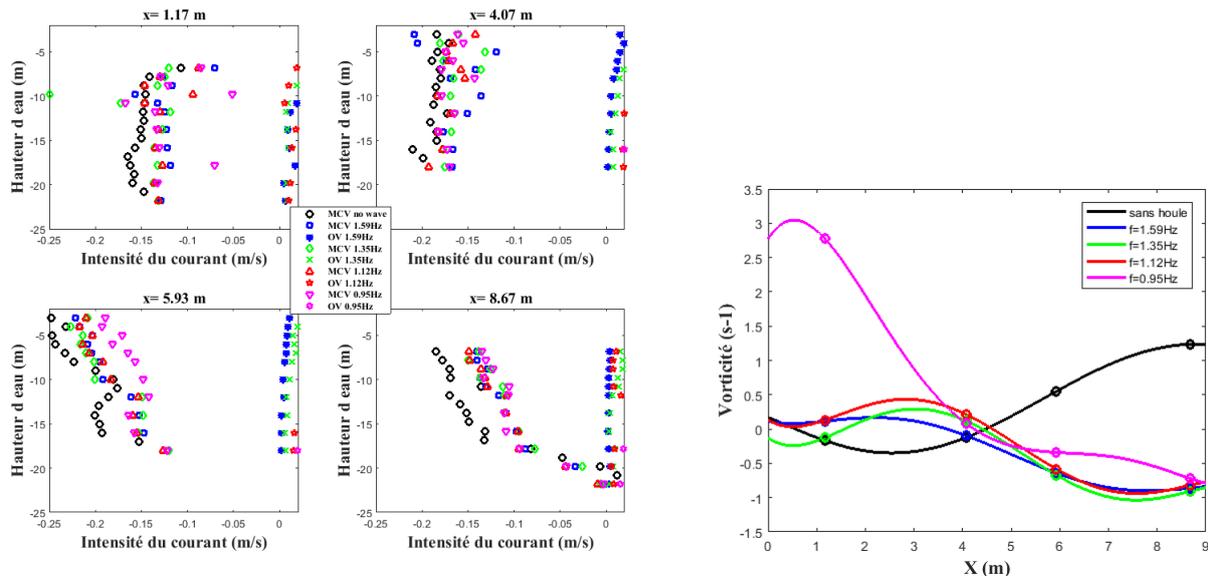


Figure 3.24: Influence de la houle sur les profils verticaux de courant : a) influence du mouvement orbital -b) Evolution spatiale de la vorticité selon la fréquence de houle

de fréquence 0.95Hz, la vorticité supérieure à  $2.5s^{-1}$  est uniquement due à notre méthode de détermination par régression linéaire sur la colonne d'eau, car près du fond la vitesse moyenne du courant (en valeur absolue) était particulièrement importante, alors qu'elle restait à peu près constante sur tout le reste de la colonne d'eau. Ce point là est donc peut-être moins pertinent que les autres. De même, nous avons vu que sur la partie droite du canal, les profils étaient parfois perturbés par des effets transverses. Si on considère donc les trois premières positions, et qu'on néglige la première pour la houle de fréquence 0.95Hz, on constate que les points sont particulièrement proches, voire confondus. En première approximation, nous pouvons donc considérer que le profil de courant sans houle reste valable sur l'ensemble du canal pour toutes les conditions hydrodynamiques testées, mais que notre méthode de détermination par régression linéaire n'est pas très appropriée.

A présent que les conditions hydrodynamiques de houle et de courant ont été présentées, nous avons tous les paramètres d'entrée pour nos modèles et nous pouvons tester avec nos modèles des calculs de prédiction de la réflexion de la houle pour différentes configurations de courant et de cisaillement, avant de passer plus tard à la confrontation avec les mesures expérimentales.

### 3.4.2 Etude de la résonance de Bragg

#### Conditions de l'expérience

Il est important de préciser les conditions dans lesquelles la mesure de la réflexion de la houle est réalisée. Nous avons placé trois sondes en amont et trois sondes en aval du fond sinusoïdal, de fréquence d'échantillonnage 512Hz. Elles ont pour abscisses respectives :  $x_{s1} = 1.45m$ ,  $x_2 = 1.75m$ ,  $x_3 = 1.952m$  puis  $x_4 = 7.35m$ ,  $x_5 = 7.553m$  et  $x_6 = 7.86m$  et sont donc espacées comme suit:  $\Delta x_{s1-s2} = 0.3m$ ,  $\Delta x_{s2-s3} = 0.202m$  et  $\Delta x_{s4-s5} = 0.203m$ ,  $\Delta x_{s5-s6} = 0.305m$ . Les tableaux (3.2) récapitulent les conditions de houle générées dans le canal, le premier concernant la mesure de réflexion de la houle sans courant et le second la mesure avec courant. Nous y avons précisé la période de houle générée  $T$ , en secondes (la plage parcourue selon un pas égal

T (s)	f (Hz)	a (cm)	Nb_periodes	T(s)	f (Hz)	a (cm)	Nb_périodes
[60:69]	[1.66:1.44]	1	200	[60:69]	[1.66:1.44]	1	250
[70:73]	[1.43:1.37]	1.1	200	[70:76]	[1.43:1.32]	1.1	250
[74:84]	[1.36:1.19]	1.6	200	[77:84]	[1.31:1.19]	1.6	250
[85:86]	[1.18:1.16]	2	200	[85:88]	[1.18:1.14]	2	250
[87:90]	[1.15:1.11]	2.8	200	[89:94]	[1.13:1.06]	2.8	250
[91:93]	[1.10:1.07]	3	200	95	1.05	3.2	250
[94:99]	[1.06:1.01]	3.2	200	[96:106]	[1.04:0.94]	2.5	250
[100:111]	[1:0.90]	3.3	200	[107:111]	[0.93:0.90]	2.8	250

Table 3.2: Tableau récapitulatif des conditions de houle : a) Réflexion de la houle sans courant - b) Réflexion de la houle en présence de courant

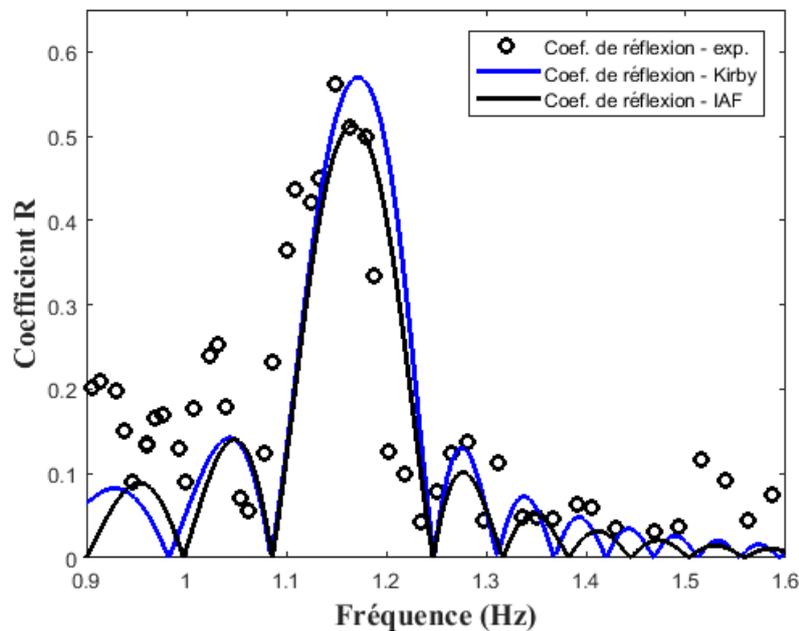


Figure 3.25: Coefficient de réflexion de la houle en l'absence de courant : comparaison avec les courbes prédictives

à 1s), la fréquence associée  $f$  en Hertz, l'amplitude en centimètres et le nombre de périodes par enregistrement (pour indication).

### Réflexion de la houle en l'absence de courant

Nous avons recueilli les premiers résultats de réflexion de la houle en l'absence de courant, et nous les avons comparés avec nos courbes prédictives de la figure (3.8) (la comparaison avec nos propres modèles sera détaillée dans le chapitre suivant). Ici, il s'agit simplement de vérifier que notre montage expérimental nous donne des résultats conformes aux attentes exprimées pendant le dimensionnement. Nous pourrions alors plus tard confronter ces résultats avec nos propres modèles (voir le chapitre suivant) et partir sur des considérations plus poussées, comme l'influence comparée des mécanismes physiques intervenant dans la réflexion de la houle. On constate une assez bonne corrélation des résultats numériques et expérimentaux. Si on regarde

dans le détail, le maximum de réflexion est bien approché en amplitude par le modèle de Kirby (présenté au paragraphe 1.5.3):  $CR_{maxKirby} = 0.5701$  numériquement et  $CR_{maxexpé} = 0.5615$  expérimentalement, soit 1.51% d'écart seulement. Le modèle Intégrales Aux Frontières, lui, le sous-estime un petit peu:  $CR_{maxIAF} = 0.51$ (soit 9.17% d'écart). Concernant la fréquence de résonance, les deux modèles la surestiment légèrement:  $f_{maxKirby} = 1.173Hz$  et  $f_{maxIAF} = 1.167Hz$  au lieu de  $f_{maxexpé} = 1.148Hz$ , soit respectivement une surestimation de 2.17 et 1.65%. Ces modèles ont donc fourni une prédiction tout de même très perspicace.

L'évolution aux hautes fréquences (entre 1.2 et 1.5Hz) est très bien représentée par les deux modèles, l'écart que nous constatons ensuite (au-delà de 1.5Hz) peut être attribué à de la réflexion parasite venant des installations placées en bout de canal (plage absorbante, grilles de stabilisation de l'écoulement...) ainsi qu'à l'atténuation de la houle lors de sa propagation. Cela n'impacte pas la qualité du profil sur le reste de la plage de fréquences. Au-dessous de la fréquence de résonance, entre 0.9 et 1.1Hz environ, on constate que les modèles prévoient une réflexion sous-estimée par rapport aux résultats expérimentaux, même si on retrouve la forme générale en maxima successifs. Ces dernières sont d'ailleurs réparties différemment. Sur cette plage de fréquences, le modèle de Kirby prévoit deux maxima de fréquences pics et d'amplitudes respectives 0.08223 à 0.9279Hz et 0.1422 à 1.044 Hz. Le modèle IAF en prévoit également deux, légèrement décalés mais d'amplitudes semblables : 0.08876 à 0.9529 Hz et 0.1406 à 1.048 Hz. Expérimentalement par contre, nous en avons relevé trois : 0.2087 à 0.9141Hz, 0.1702 à 0.9766Hz et 0.2521 à 1.031Hz.

La mesure de la réflexion de la houle sans courant nous a permis de valider notre montage expérimental, en validant nos mesures par des modèles numériques éprouvés. A présent, nous allons présenter les courbes prédictives sorties de ces mêmes modèles pour la réflexion de la houle en présence de courant.

## Courbes prédictives en présence de courant

**Courbe d'évolution de la fréquence associée au maximum de résonance en fonction de  $U_0$  (pour  $s=0$ )** Lorsqu'on pense à la réflexion de la houle en présence d'un courant, le premier paramètre qu'on imagine avoir de l'influence est bien entendu le courant de surface. Nous avons donc réalisé une étude paramétrique pour quantifier cette influence sur la fréquence de résonance. Pour avoir une bonne fourchette d'estimation, nous avons poursuivi avec le modèle de Kirby (ce qui reste cohérent vis-à-vis de l'ensemble des courbes de dimensionnement ou de prédiction obtenues jusqu'ici). Comme il ne tient pas compte du cisaillement, nous sommes certains de n'observer que l'influence du courant de surface. Nous avons donc calculé la fréquence de résonance dans le cas d'une houle se propageant au-dessus d'un fond sinusoïdal de longueur 5m, d'amplitude 0.035m et avec une profondeur d'eau moyenne de 0.22m, pour rester fidèle aux conditions expérimentales. Les résultats sont présentés sur la figure (3.26). Nous avons choisi de travailler avec un courant de surface variant de 0 à -0.2m/s car cette plage englobe les valeurs que nous avons mesurées en présence de houle (voir les courbes figure (3.19) notamment).

On constate que l'intensité du courant de surface a une relative influence sur la position du pic de Bragg: une variation de 1cm/s du courant de surface peut modifier la fréquence de résonance jusqu'à 0.06 Hz. Plus l'intensité du courant de surface est forte (en valeur absolue) et plus elle va impacter la position du pic de Bragg. Notre courant de surface moyen a été mesuré respectivement à 0.1840m/s sans houle, et même s'il a été relevé à des intensités inférieures en présence de houle, nous considérerons d'abord qu'une grande partie des variations a pour origine, comme nous l'avons vu, les vitesses orbitales, et que donc le courant moyen se conserve. D'après la courbe de la figure (3.26), pour un courant de surface de 0.1840m/s, la fréquence de

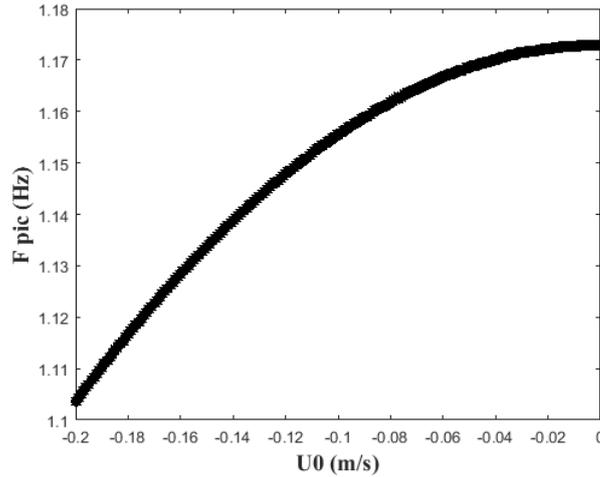


Figure 3.26: Evolution de la fréquence associée au maximum de résonance selon l'intensité du courant de surface (pour  $s=0$ ) - modèle de Kirby

résonance est prévue à 1.114Hz si l'écoulement est considéré comme verticalement uniforme. Or, nous l'avons vu, si l'écoulement est pratiquement uniforme à l'emplacement de sondes résistives qui mesurent la réflexion de la houle, ce n'est pas le cas sur l'ensemble du canal. Voyons à quel point ce cisaillement variable impacte la réflexion.

### Comparaison des données expérimentales avec et sans courant

La figure (3.27) montre les données de réflexion acquises en présence de courant. On constate que le maximum de réflexion a fortement diminué: son amplitude passe de 0.56 à 0.36 (soit une baisse d'environ 36%) tandis que sa fréquence passe de 1.14Hz à environ 1.10Hz. (soit une baisse 3.6%). Il est à noter que cette nouvelle fréquence est très proche de celle prédite par le modèle Kirby (3.26). Tâchons de comprendre l'origine de cette variation. L'onde réfléchie est advectée par le courant, pour une énergie réfléchie donnée, l'amplitude est donc plus faible, ce qui peut expliquer une diminution de l'amplitude du pic. La dissipation de la houle au cours de sa propagation peut aussi expliquer une diminution de l'amplitude de l'onde réfléchie. Le profil présente d'autres modifications tout aussi intéressantes, avec en premier lieu l'émergence d'un second pic de réflexion, aux alentours de 1.3Hz, complètement absent du profil sans courant. Les mesures prises avec un faible intervalle de fréquence nous montrent bien qu'il ne s'agit plus d'une succession de maxima et minima locaux, mais bien d'un comportement particulier. Nous remarquons également que la réflexion aux basses fréquences a diminué: on passe de minima locaux d'amplitudes 0.2521 pour 1.031Hz et 0.1702 pour 0.9766Hz sans courant à des minima d'amplitudes 0.1021 à 0.9857Hz et 0.04965 à 0.9345Hz, soit pour chaque minimum une diminution moyenne respective de 32.5% et 51.4% en amplitude et 5.2% et 5.1% en fréquence. On souhaite comprendre quel(s) phénomène(s) physique(s) lié(s) à notre profil de courant cisailé interfère(nt) dans la propagation de la houle (et donc *a fortiori* dans sa réflexion), et quel(s) paramètre(s) impacte(nt) précisément le pic de Bragg.

### 3.4.3 Etude paramétrique

Pour cela, nous avons donc mené une étude paramétrique qui compare les influences des deux paramètres qui définissent notre profil de courant : son intensité en surface et sa vorticité.

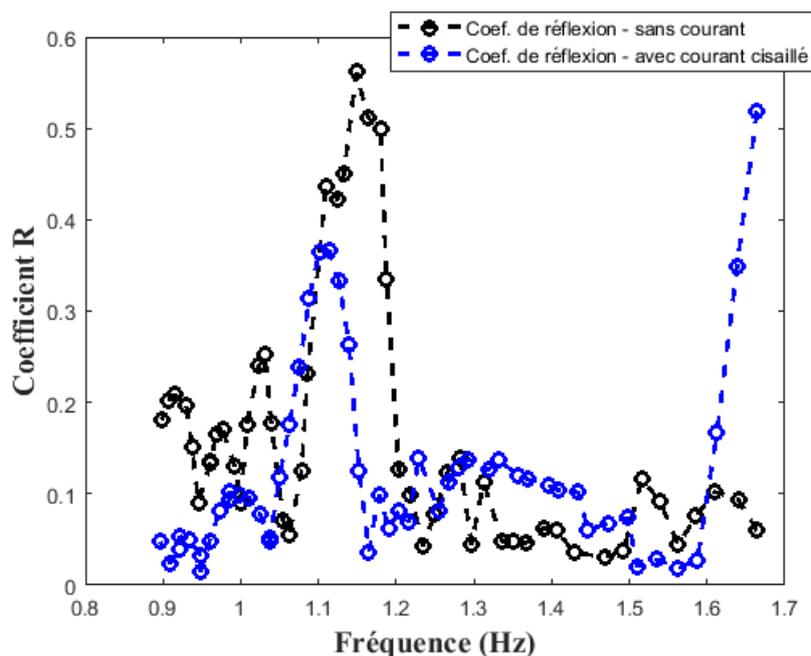


Figure 3.27: Comparaison des mesures de réflexion de la houle avec ou sans courant

Commençons par le courant de surface, dont nous savons déjà qu'il conditionne en partie la fréquence de résonance.

**Influence de  $U_0$  à  $s$  fixé,  $s=0$**  Dans un premier temps, nous avons poursuivi notre étude amont avec le modèle de Kirby. Nous avons vu qu'il représentait très bien la réflexion de la houle en l'absence de courant. En présence de courant, nous nous attendons à ce que la fréquence de résonance soit bien représentée, car nous avons vu que sa prédiction collait déjà très bien aux résultats. Cependant, comme ce modèle ne modélise qu'un profil de courant uniforme, sans cisaillement, on devrait constater un écart au niveau de l'amplitude du pic de Bragg - écart qui ne devrait toutefois pas être trop important car nous l'avons vu, au niveau des sondes résistives, le profil de courant est relativement uniforme. Nous avons donc calculé le coefficient de réflexion de la houle en présence d'un courant verticalement uniforme d'intensité  $u = U_{0_{exp}} = -0.1840 m/s$ . Les résultats sont présentés sur la figure (3.28) et correspondent à nos prédictions. On constate que les fréquences de résonance sont identiques au milliHertz près: 1.113Hz pour le modèle et 1.114Hz pour les données expérimentales. Par contre, l'amplitude du pic est surestimée par le modèle de 22.3% (0.4482 au lieu de 0.3664). L'évolution du coefficient de réflexion aux abords de la fréquence de résonance suit la même tendance: par exemple, le maximum local aux alentours de 1Hz est aussi surestimé de 21.2% (mais est centré en fréquence). Par contre, une différence majeure entre le modèle et les données expérimentales concerne le second pic de réflexion, aux alentours de 1.3Hz: il est complètement ignoré par le modèle. A cette fréquence nous avons un coefficient de réflexion mesuré de 0.1379 et un coefficient de réflexion calculé de 0.0345, soit une différence de presque 75%. Le comportement général n'est pas non plus respecté : le modèle présente une succession de maxima et minima locaux tandis qu'expérimentalement, on constate une forte réflexion quasi constante entre 1.25Hz et 1.49Hz. Les résultats du code et des mesures expérimentales sont à nouveau cohérents pour les très hautes fréquences, au-dessus de 1.5Hz.

A ce point de l'étude, on peut donc émettre l'hypothèse que le cisaillement influe sur

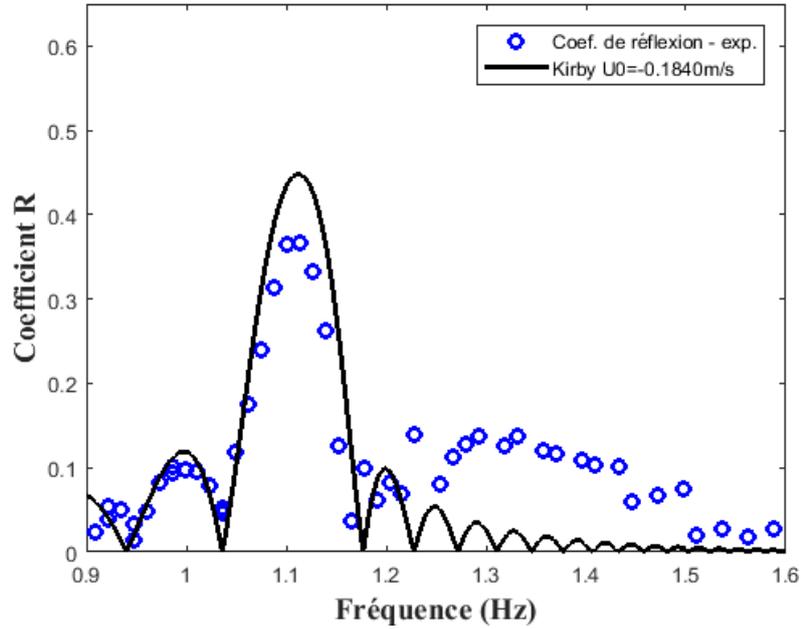


Figure 3.28: Réflexion de la houle en présence de courant: comparaison entre les données expérimentales et le modèle Kirby ( $s=0s^{-1}$ ,  $U_0=-0.1840m/s$ )

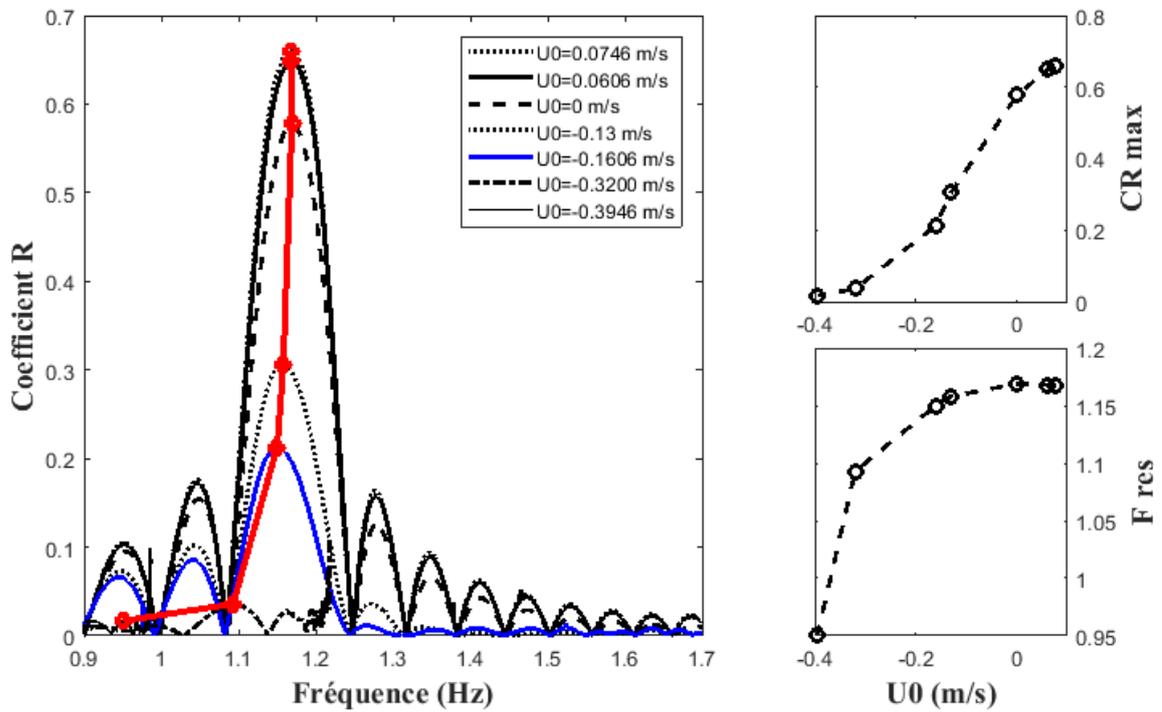


Figure 3.29: Etude paramétrique de l'influence du courant de surface sur la propagation de la houle ( $s=0s^{-1}$ ) avec M2

l'amplitude du pic de Bragg et sur la réflexion aux plus hautes fréquences. Nous avons décidé de poursuivre cette étude avec un modèle plus complet: notre modèle M2, toujours rapide d'exécution car mono-équation. Nous avons modélisé le même écoulement verticalement uniforme (sans vorticité), fait varier le courant de surface et comparé les courbes de réflexion de la houle obtenues. Les résultats sont présentés sur la figure 3.29 et ils complètent nos conclusions précédentes. Dans la gamme de valeurs qui nous concernent,   savoir  $U_0 \in [-0.2 : 0]m/s$ , la fréquence de résonance était déjà déterminée et faire varier le courant de surface n'a quasiment aucune influence: en passant de  $U_0 = 0.0746m/s$     $U_0 = -0.1606m/s$  (soit une augmentation de l'intensité (en valeur absolue) de 116.8%), la fréquence n'a diminué que de 1.54%. Par contre, dans la même gamme de valeur, l'amplitude du pic de Bragg diminue, elle, de 68% (passant de  $CR_{max} = 0.66$     $CR_{max} = 0.2128$ ). On remarque d'ailleurs que, pour l'intensité du courant de surface expérimental que nous avons relevée ( $U_0 = -0.1840m/s$ ), si les deux modèles (Kirby et M2) approchent plutôt bien la fréquence de résonance, là où Kirby surestime l'amplitude du pic de Bragg, M2 la sous-estime. Pour finir, au-delà de  $U_0 = -0.25m/s$ , on rentre dans des problématiques de déferlement de la houle (on voit sur le graphe que les courbes sont incomplètes), et forcément, la réflexion chute.

**Influence de  $s$     $U_0$  fixé,  $U_0=0$**  Pour la suite de l'étude,   savoir l'influence du cisaillement sur la réflexion de la houle, nous gardons le modèle M2 dans la même configuration, cette fois en faisant varier la vorticité, dans un premier temps pour un écoulement dont le courant est nul en surface. Les résultats sont présentés sur la figure 3.30 et nous montrent que le cisaillement impacte le pic de Bragg   la fois sur son amplitude et sa fréquence. Le fait d'avoir un courant de surface nul écarte les considérations d'inversion du profil de courant dans la colonne d'eau. Ainsi, un cisaillement négatif correspondra   un écoulement sous la surface en opposition aux vagues,   l'inverse un cisaillement positif impliquera un écoulement dans le même sens que la houle. Ainsi, il est logique qu'un cisaillement négatif augmente l'amplitude du pic de Bragg (si les vagues se propagent   contre-courant, alors les ondes réfléchies vont se propager avec le courant). Lorsqu'on multiplie le cisaillement par cinq (de -0.25   -1.25), l'amplitude du pic de Bragg augmente de 23% (et passe de 0.5677   0.7417). Sa fréquence, elle, augmente seulement de 1.6% (de 1.165   1.184 Hz).

Nous savons que c'est conjointement le courant de surface et le cisaillement qui imposent la valeur du nombre d'onde de la houle, et donc l'emplacement du pic de résonance. Mais au travers de cette étude de sensibilité, nous avons l'impression que l'intensité du courant de surface influence un peu plus la fréquence de résonance, et que c'est la vorticité de l'écoulement qui, estimée avec précision, permettrait d'affiner l'amplitude du pic de Bragg. Nous avons donc   coeur de comprendre comment évolue le cisaillement selon  $Ox$ , et pour cela nous avons réalisé des mesures plus précises, notamment le long du fond sinusoïdal.

### 3.4.4 Mesures complémentaires

Gr ce   nos quatre profils verticaux relevés le long du canal et présentés sur la figure (3.15), nous avons une idée de l'évolution du cisaillement sur l'ensemble du canal. Mais que se passe t'il lorsque le flux s'écoule au-dessus du fond sinusoïdal, qui occupe quand même une grande partie de l'espace de propagation?

**Profils de courant expérimentaux relevés sur une période de fond** Nous avons réparti un ensemble de cinq courantomètres sur une longueur d'onde de fond, et nous avons établi conjointement cinq profils verticaux d'espacement vertical cette fois égal   un centimètre, pour

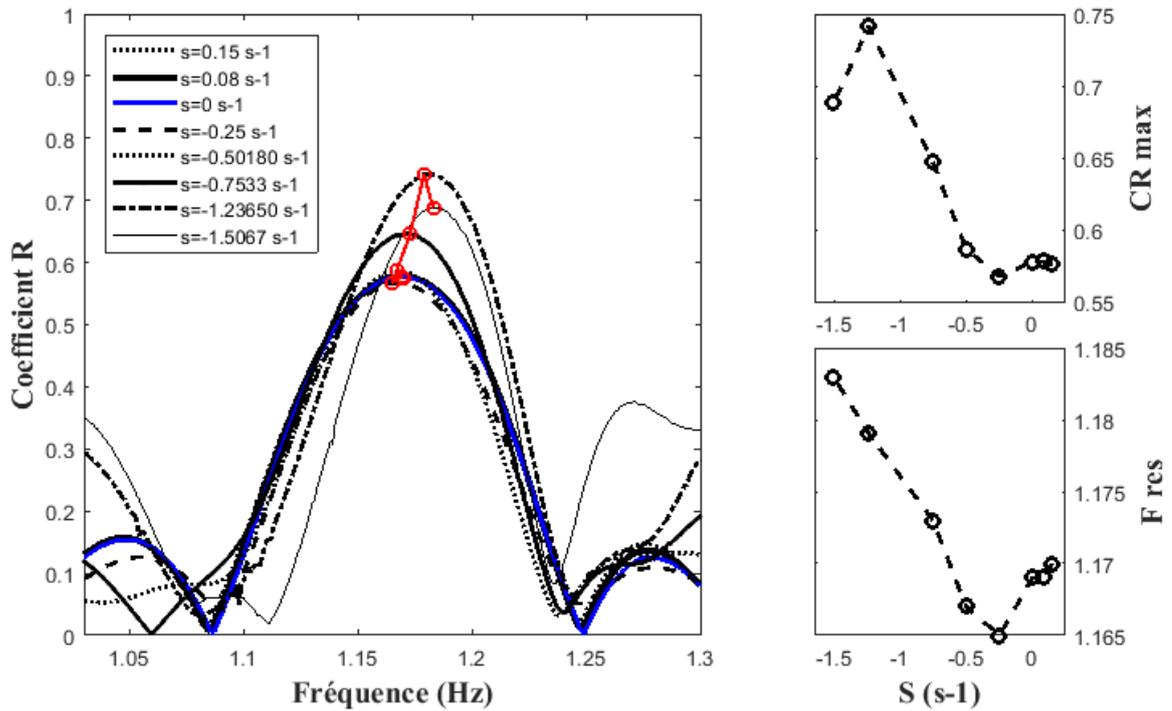


Figure 3.30: Influence du cisaillement sur la réflexion de la houle ( $U_0=0\text{m/s}$ ) avec M2

une précision optimale. Puis nous avons répété l'opération sur quatre longueurs d'onde de fond, les mesures étant présentées en vert sapin sur la figure (3.3). On rappelle que le courant se propage dans le sens contraire à notre axe  $\mathcal{O}x$ .

**Première mesure (troisième période)** Nous avons choisi pour commencer la troisième longueur d'onde de fond en partant de la plage, soit sur la portion comprise entre 5.78 et 6.27m, située en début d'écoulement. Nous évitons ainsi les turbulences présentes aux extrémités du fond ondulé (remarquées sur la figure (3.19)).

Globalement, l'intensité du courant varie très peu pour une même profondeur, sur l'ensemble des courantmètres. La présence des vagues se traduit seulement par une très légère agitation sur la partie supérieure de la colonne d'eau, entre 10cm de profondeur et la surface. Cependant, la houle semble perturber plus les profils des deux premières positions que voit l'écoulement ( $x_5 = 6.27\text{m}$  et  $x_4 = 6.15\text{m}$ ). Tout d'abord, toujours dans la partie supérieure de la colonne d'eau, on observe un changement de signe de la vorticité: pour une houle de haute fréquence (1.58Hz), le cisaillement est positif (intensité du courant plus faible à 10cm de profondeur que près de la surface), alors que pour toutes les autres conditions de houle, la partie supérieure de l'écoulement suivait la tendance de l'ensemble du profil, à savoir un cisaillement négatif (un courant plus intense à 18cm de profondeur qu'en surface). On note d'ailleurs en passant que, toujours spécifiquement pour ces deux courantmètres, augmenter la fréquence de la houle diminue l'intensité du courant sur la partie inférieure de la colonne d'eau (entre 10 et 20cm de profondeur). Ainsi, à 15cm de profondeur, changer la fréquence de la houle de 0.95Hz à 1.58Hz (soit une augmentation de 66.31%) réduit l'intensité du courant de 24.31% (en passant de -0.12m/s à -0.09m/s environ). Si on regarde l'évolution sur l'ensemble de la longueur d'onde de fond, on constate deux inversions de profils successives. On va négliger les intensités relevées à plus de 20cm de profondeur, car elles ne sont pas représentatives du mouvement global des

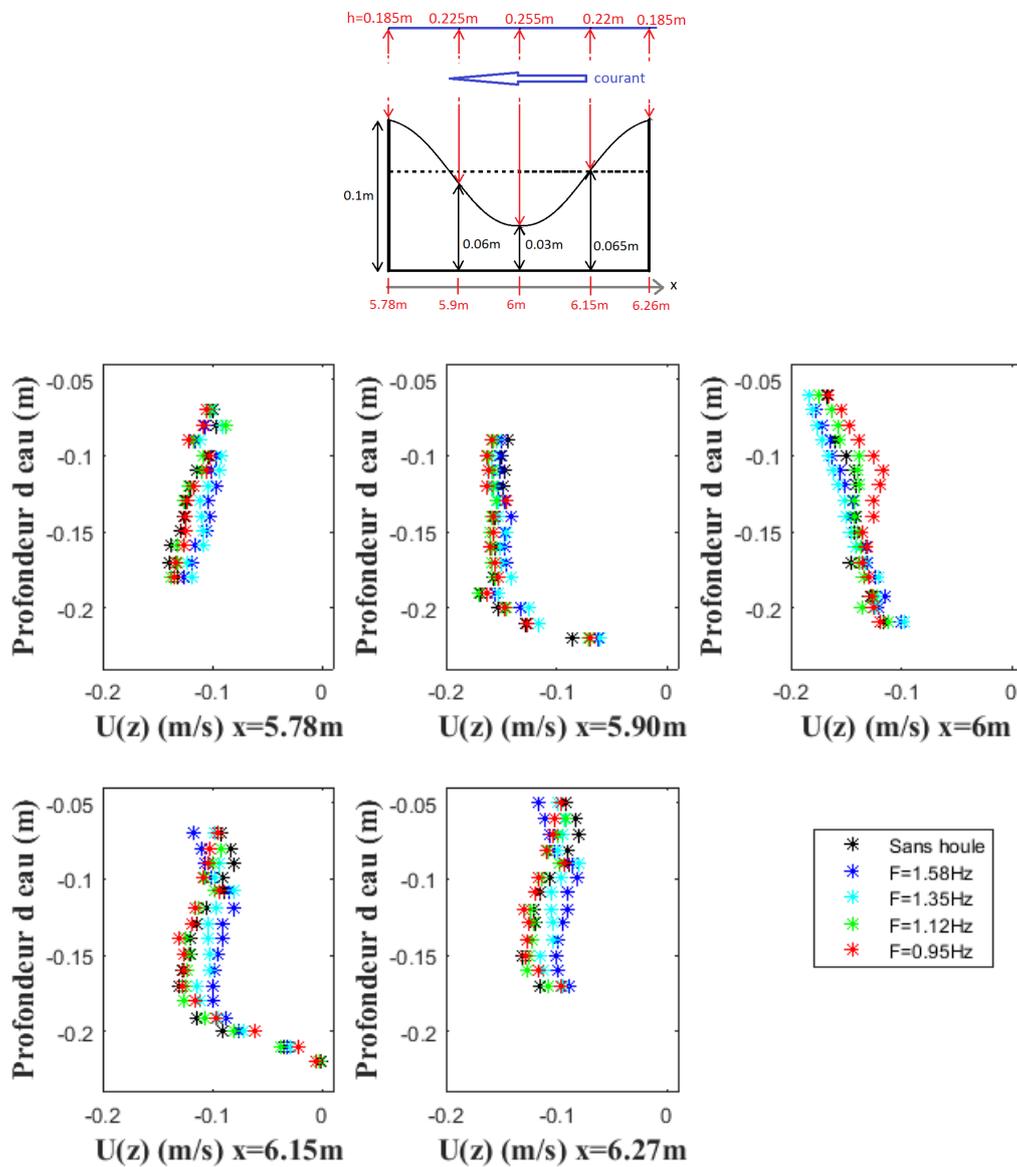


Figure 3.31: Mesure de l'évolution du profil de courant sur une longueur d'onde de fond sinusoïdal - a) Schéma du dispositif - b) Profils verticaux de courant selon les conditions de houle

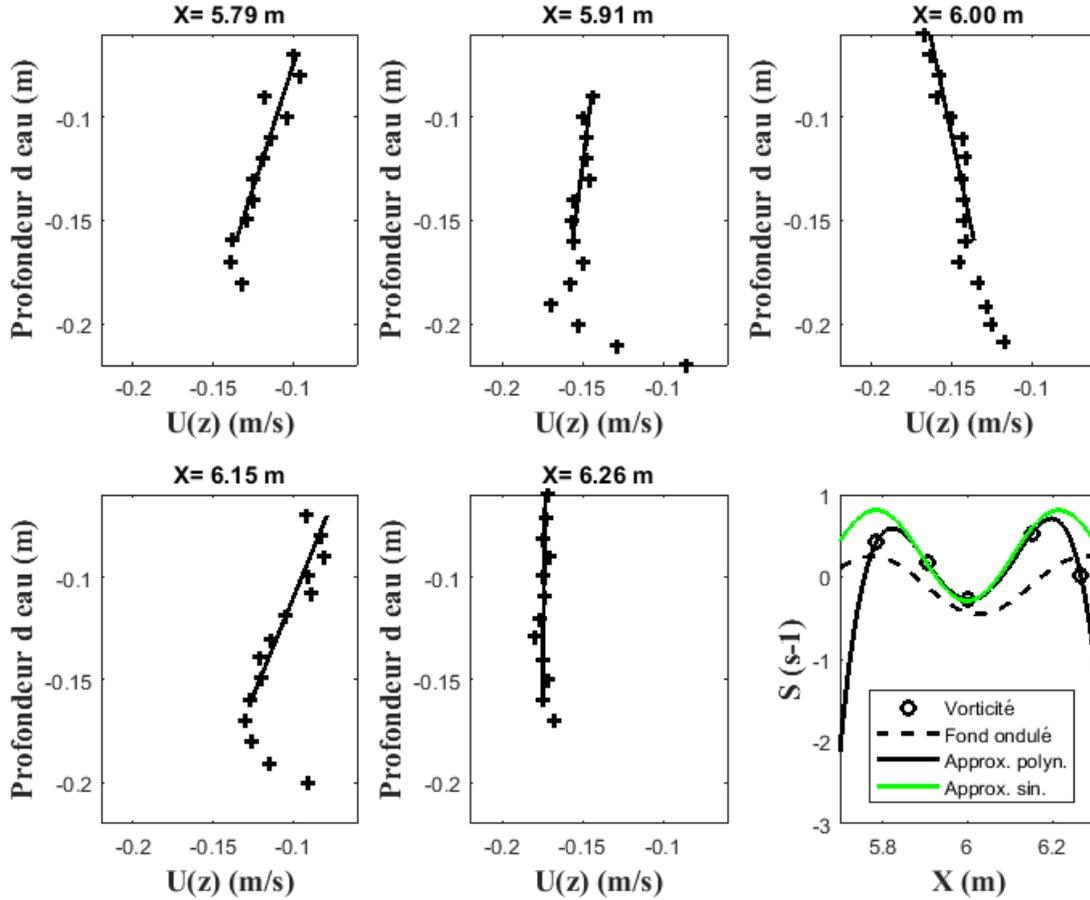


Figure 3.32: Evolution de la vorticité sur une longueur d'onde de fond

particules d'eau (qui vont s'échouer logiquement dans le creux de la bathymétrie), ainsi que, pour les deux premiers profils, les mesures associées à la plus haute fréquence de houle, qui montrent un comportement opposé à celui mis en évidence à toutes les autres fréquences de houle. En première approximation, les cisaillements seront calculés par régression linéaire des profils relevés sans houle, sur l'ensemble des positions significatives de la colonne d'eau (soit les deux-tiers supérieurs de la colonne d'eau, entre la première position près de la surface (à -5, -6 ou -9cm) et -16cm). La figure (3.32) nous les présente.

On rappelle qu'on considère le profil vertical de courant sous la forme  $U(x, z) = U_0(x) + s(x) * z$ , avec  $\mathcal{O}z$  orientée vers le haut et  $z = 0$  à la surface. Ainsi, la vorticité est établie comme positive lorsque l'intensité du courant décroît avec la profondeur (devient de plus en plus négative). Sur la première crête (position  $x_5$ ), le profil a tendance à être verticalement uniforme ( $s_5 = 0.063s^{-1}$ ) mais lorsque l'écoulement rentre dans la portion de fond (position  $x_4$ ), le profil est globalement de cisaillement positif: à 17cm de profondeur, le premier courantomètre relève une vitesse moyenne de -0.1033m/s et le second de -0.1241m/s tandis qu'à 5cm de profondeur, ils relèvent respectivement des intensités de courant de -0.09523 m/s et de -0.09524 m/s (soit  $s_4 = 0.55s^{-1}$ ). Tout bascule dans le creux, le cisaillement devient fortement négatif :  $s_3 = -0.29s^{-1}$ , avec un courant d'intensité moyenne de -0.119m/s à 21cm de profondeur et de -0.17m/s à 6cm sous la surface. Par contre, lorsque le courant remonte la bosse du fond, le cisaillement change à nouveau de signe  $s_2 = 0.166s^{-1}$  et  $s_1 = 0.42s^{-1}$ . Nous avons bien une inversion de profil sur une longueur d'onde de fond. Nous avons proposé ici deux

	VNO 1 (x=5.78m)	VNO 2 (x=5.90m)	VNO 3 (x=6m)	VNO 4 (x=6.15m)
F1=1.58Hz	0.0094	0.0062	0.0075	0.0076
F2=1.35Hz	0.0166	0.0156	0.0154	0.0137
F3=1.12Hz	0.0184	0.0183	0.0159	0.0126
F4=0.95Hz	0.0308	0.0259	0.0231	0.0257
moyenne par VNO	0.0188	0.0165	0.0155	0.0149

	VNO 5 (x=6.27m)	moyenne par fréquence
F1=1.58Hz	0.0090	0.00794
F2=1.35Hz	0.0198	0.0162
F3=1.12Hz	0.0202	0.0171
F4=0.95Hz	0.0349	0.0280
moyenne par VNO	0.0209	—————

Table 3.4: Vitesses orbitales moyennes (en m/s) sur la colonne d'eau, par courantomètre et par fréquence de houle

approximations pour modéliser cette évolution. La première est un polynôme d'ordre quatre déterminé par la méthode des moindres carrés, qui passe bien par les valeurs de vorticité mais qui a un comportement incohérent aux bords du domaine. La seconde est une approximation par fonction sinus déterminée empiriquement, elle a un comportement plus cohérent mais se contente d'approcher les valeurs de vorticité. Les fonctions sont respectivement les suivantes:

$$\begin{cases} f_{pol}(x) = -748.84.x^4 + 17997.x^3 - 162130.x^2 + 648990x - 973840 \\ f_{sin}(x) = -0.26 - 0.55 \sin\left(\frac{2\pi}{0.428}(x + 0.1)\right) \end{cases} \quad (3.30)$$

Et nous pourrions nous en servir par la suite comme entrée de nos modèles numériques. Nous constatons que nous avons imposé à la deuxième fonction d'être périodique, afin d'être cohérente avec les comportements périodiques mis en évidence pour la vorticité. Il est à noter que cette périodicité spatiale, 0.428, a également été déterminée empiriquement, pour approcher la périodicité du fond (0.5). La corrélation entre les variations de courant et les variations du fond s'en trouvent renforcées.

Avant de poursuivre, nous devons nous assurer que cette tendance n'est pas influencée par le mouvement orbital des particules. La décomposition courant moyen / vitesse orbitale pour les cinq courantomètres et les quatre conditions de houle sont présentées sur la figure (3.33), et la conclusion est aisée à tirer.

On constate en premier lieu que les profils de courant que nous avons précédemment étudiés sont parfaitement valides: les vitesses orbitales restent globalement faibles. Ensuite, concernant les vitesses orbitales, nous constatons de façon logique qu'elles augmentent, de façon uniforme pour tous les courantomètres, quand la profondeur décroît (de façon plus marquée entre 10cm et la surface). Pour une comparaison plus aisée, le tableau (3.4) récapitule les vitesses orbitales moyennes (en m/s) sur la colonne d'eau, par courantomètre et par fréquence de houle. Quand on diminue la fréquence de la houle (création d'ondes longues), comme auparavant les vitesses orbitales augmentent, et descendent plus profond dans la colonne d'eau. On remarque une très grande similitude des profils de vitesses orbitales pour les courantomètres symétriques sur une longueur d'onde du fond par rapport aux creux de la sinusoïde (2 et 4, 1 et 5). La turbulence a tendance à caler sur le quatrième courantomètre, lorsque l'écoulement remonte la pente du sol (et qu'à cet endroit la bathymétrie fait écran entre l'écoulement et les vagues).

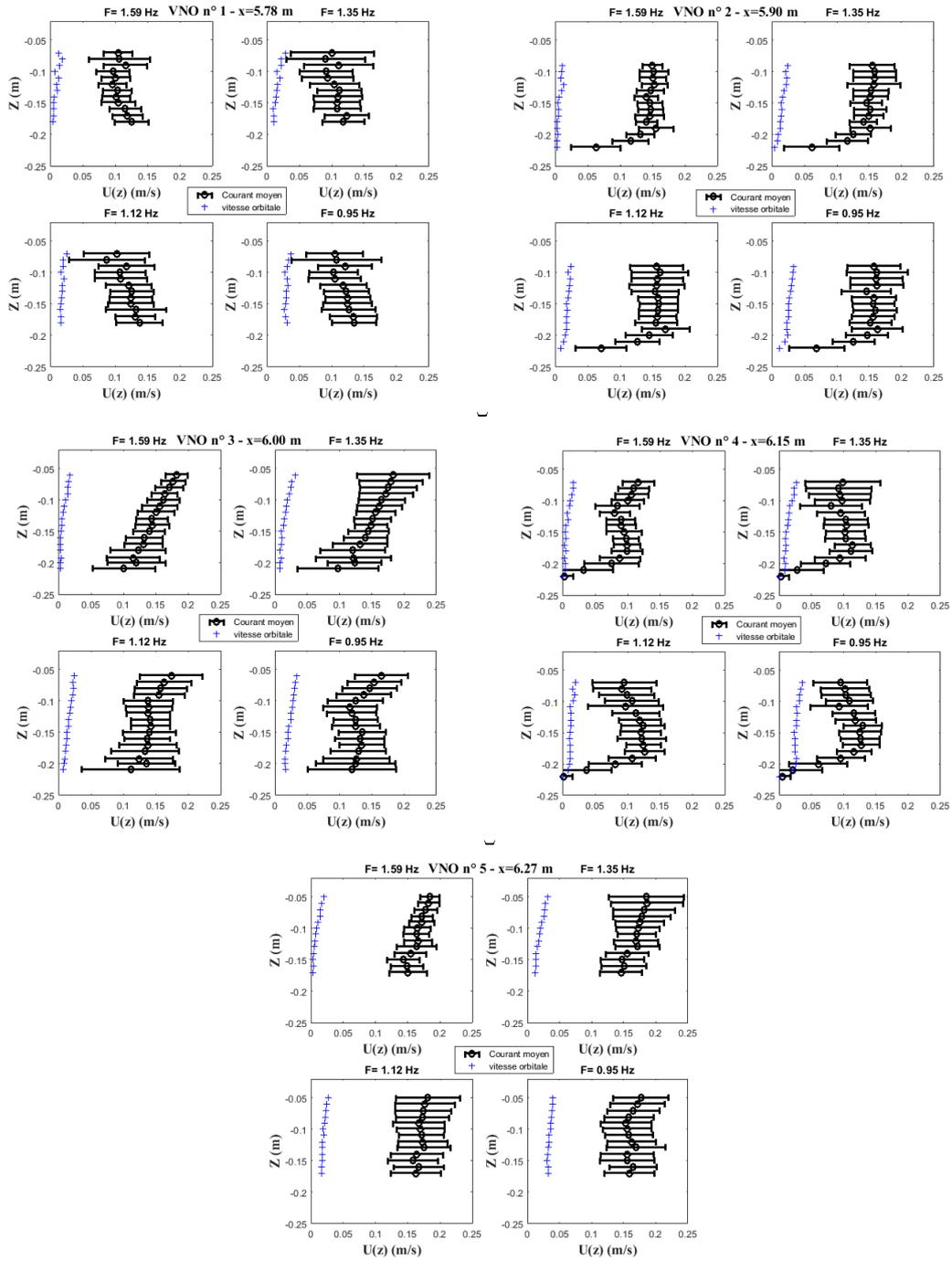


Figure 3.33: Profils de courant sur une longueur d'onde de fond sinusoïdal: décomposition courant moyen - vitesse orbitale pour chaque courantomètre

Pour résumer, sur les cinq positions, le cisaillement devient successivement négatif, positif puis à nouveau négatif. Nous avons mis en évidence une oscillation du cisaillement quasiment de même période que le fond et avec changement de signe. Mais ce schéma perdure-t-il sur l'ensemble du fond sinusoïdal ou s'efface-t-il rapidement pour laisser place à un profil moyenné, de cisaillement faible? Pour cela, nous avons poursuivi nos relevés de profils sur la moitié des longueurs du fond (une sur deux). Nous allons tenter de mettre en évidence un comportement spécifique du courant au-dessus du fond ondulé, pour mieux comprendre la réflexion de la houle que nous avons observée.

**Evolution horizontale d'une période à l'autre** Nous avons réitéré nos mesures sur trois autres longueurs d'onde de fond: la cinquième, la septième et la neuvième, comme précisé sur le schéma (3.3). Au vu de la grande quantité de données (cinq profils de courants par longueur d'onde, relevés cinq fois (une fois sans courant puis sous quatre conditions de houle), le tout répété trois fois pour trois longueurs d'onde), nous avons décidé de comparer dans un premier temps uniquement les profils sans houle, relevés aux mêmes positions d'une longueur d'onde de fond à l'autre. Nous avons vu en effet que l'impact de la houle sur le courant restait négligeable, et après vérification, cela se maintient sur l'ensemble du fond sinusoïdal, nous pouvons donc considérer que les profils sans houle sont parfaitement stables, et que leur analyse donne une bonne idée du type d'écoulement que la houle rencontre au cours de sa propagation. Les résultats sont présentés sur la figure (3.34). Pour rappel, l'écoulement parcourt le fond dans le sens opposé à la houle, donc tous les courantomètres numérotés "VNO 1" et "VNO 5" renvoient aux positions de crête (respectivement en sortie et en entrée de portion du fond), ceux numérotés "VNO 4" à une position de pente descendante, "VNO 3" à une position de creux et "VNO 2" à une position de pente montante. La première partie de la figure (3.34) est un schéma de la répartition générale des courantomètres, ainsi qu'une approximation de la profondeur d'eau à chaque position.

De façon générale, pour chaque portion de fond ondulé étudié, on retrouve le même enchaînement de profils, avec cette alternance de vorticités positives au-dessus des crêtes et négatives au-dessus des creux. La tendance que nous avons décelée se trouve bien être un comportement établi tout le long de notre bathymétrie sinusoïdale. Il ne fait alors nul doute qu'il a son rôle à jouer dans la propagation de la houle telle que nous l'avons observée. Il est à noter que les vorticités présentées sur ce graphe ont été calculées par régression linéaire sur l'ensemble des positions verticales. Nous reprendrons donc ces profils plus en détails dans la section suivante, pour ajuster la méthode de prédiction du cisaillement au plus près des profils de courant observés expérimentalement.

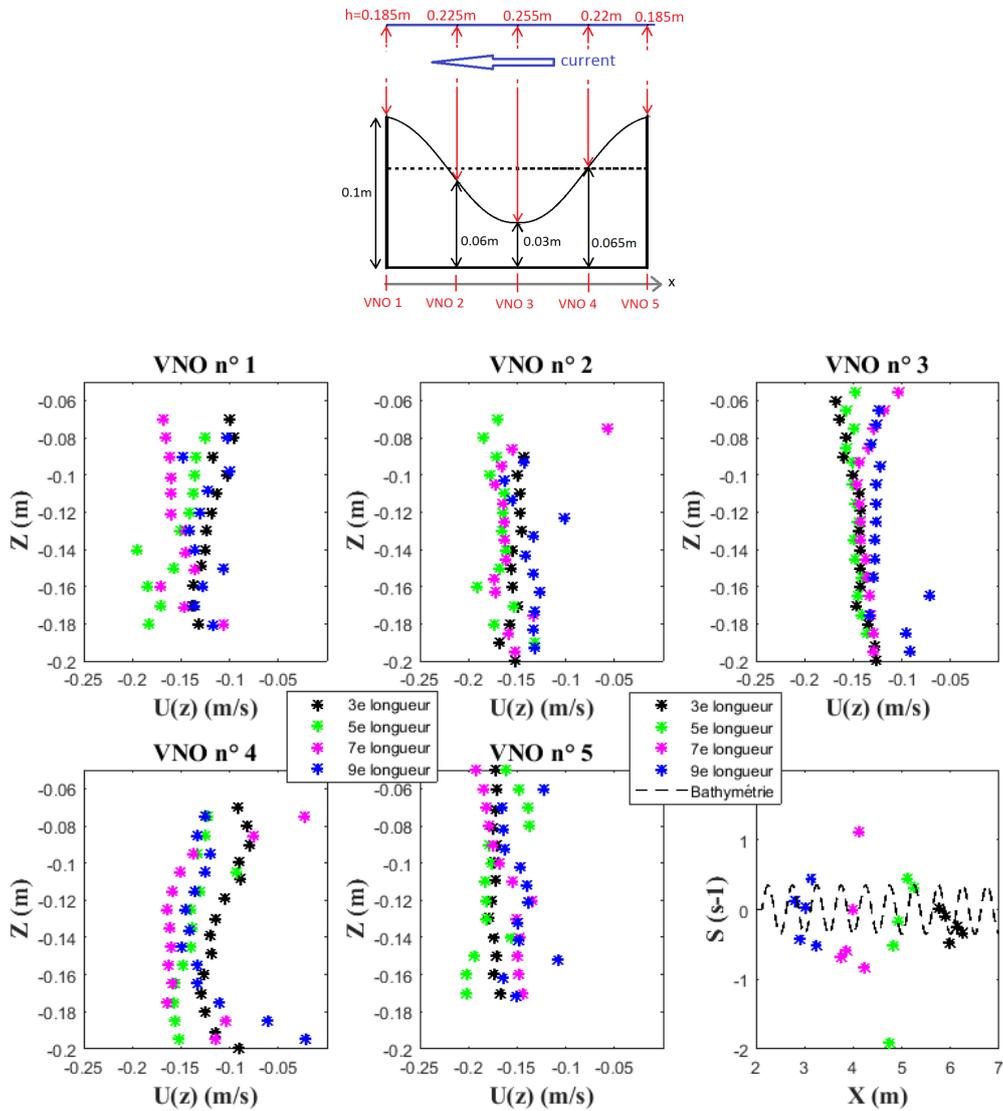


Figure 3.34: Evolution de la vorticité au-dessus du fond sinusoïdal- a) Schéma de positionnement des courantomètres - b) Comparaison des profils verticaux de courant le long du canal, relevés aux mêmes positions d'une longueur d'onde de fond à l'autre



# Chapitre 4

## Confrontations modèles - expériences et discussions

“N’oublie jamais: celui qui croit savoir n’apprend plus”. Pierre Bottero, Le Pacte des Marchombres

Nous abordons à présent la partie centrale de ce manuscrit: la présentation des résultats effectifs. Dans ce chapitre, nous allons comparer les données obtenues expérimentalement en présence de courant cisailé et les résultats issus de modèles intégrant l’inhomogénéité verticale du courant. Cette comparaison se fera dans un premier temps en l’absence de courant, dans une perspective de validation des modèles. Nous les confronterons ensuite à la réflexion enregistrée par courant cisailé, et la question de la représentation de la vorticit   sera discut  e en d  tails. De cette confrontation d  couleront de nouvelles perspectives, inattendues mais prometteuses pour la suite de cette   tude.

### 4.1 R  flexion en l’absence de courant

Par l’ordre de complexit  , il est n  cessaire d’aborder en premier le cas de la r  flexion de la houle en l’absence de courant. Cela permettra non seulement de valider nos mod  les en dehors de toute consid  ration de vorticit  , et de comparer leurs performances respectives sur la mod  lisation des interactions houle-bathym  trie, dans un cas de fond sinuso  dal d’abord, puis sur un fond doublement sinuso  dal (   deux composantes de Fourier) ensuite.

#### 4.1.1 Fond sinuso  dal

Nous avons pr  sent   au chapitre pr  c  dent les courbes de r  flexion de la houle obtenue exp  rimentalement en l’absence de courant (3.25), au-dessus d’un fond sinuso  dal de 5m de long, constitu   de 10 p  riodes de longueur d’onde de 0.5m et de 0.035m d’amplitude. Sur cette configuration simple et bien connue de la litt  rature, les mod  les utilis  s dans le cadre du dimensionnement de l’exp  rience   taient remarquablement bien corr  l  s avec ces donn  es. Qu’en est-il des mod  les que nous avons choisis pour cette   tude, M1 (2.5) et M2 (2.6)? La figure (4.1) pr  sente la comparaison entre nos donn  es exp  rimentales et les calculs de r  flexion men  s avec chacun de ces mod  les.

De fa  on g  n  rale, on constate que le mod  le M1 a un comportement tr  s   loign   de celui que nous attendions. Sur la premi  re moiti   du graphe, entre [0.9:1.3]Hz, il sous-estime grandement la r  flexion de la houle. Si les deux premiers maxima sont bien repr  sent  s en fr  quence

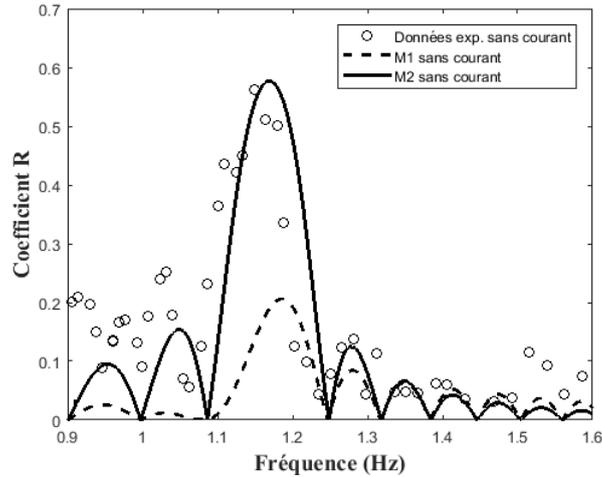


Figure 4.1: Réflexion de la houle: comparaison entre les données expérimentales et les calculs des modèles M1 et M2

(respectivement, le modèle les sous-estime avec un décalage de seulement 3.13 et 0.29%), leur amplitude est grandement sous-évaluée: respectivement de 84.7 et 94.9% ! Plus grave encore, le pic de Bragg est lui aussi très mal représenté par ce modèle: l'amplitude est sous-estimée de plus de 63% (là encore, la fréquence est bien définie, sur-estimée de seulement 3.22%). Après 1.3Hz, pour les plus hautes fréquences, les résultats donnés par ce modèle sont au contraire très proches des résultats expérimentaux.

Le second modèle présente quant à lui des résultats beaucoup plus en accord avec les données expérimentales, sur l'ensemble du profil (malgré encore une légère sous-estimation de l'amplitude des deux premiers maxima, de respectivement 44 et 38.8%). Le pic de Bragg est d'ailleurs particulièrement bien représenté : la fréquence pic est surestimée de seulement 1.83% et l'amplitude de 2.29%. Sur les plus hautes fréquences, on constate encore une très belle corrélation numérique / expérimental.

Sur ce cas très simple, on constate déjà que la prise en compte de la pente et de la courbure du fond à l'ordre deux (modèle M2) permet une bien meilleure interprétation de ce qui se passe physiquement lorsque la houle est réfléchié par un fond ondulé. Clairement, la non-prise en compte de ces interactions (M1) empêche de saisir l'ensemble des influences exercées sur la houle, et conduit donc à une grave sous-estimation de la réflexion. Mais le modèle M2 est-il suffisant pour saisir toutes les interactions houle-bathymétrie dans le cas de fonds ondulés plus complexes ? Ou bien notre bathymétrie simple nous empêche-t-elle de voir que son efficacité est en réalité limitée ?

#### 4.1.2 Fond à deux composantes de Fourier

Pour le savoir, nous avons décidé de tester notre modèle M2 sur une configuration de fond doublement sinusoïdal, toujours en l'absence de courant. Cette configuration a été notamment modélisée dans l'étude de Guazzelli & al. ([78]), et met en évidence des interactions d'ordres supérieurs (de type résonance de Bragg) entre des ondes de gravité linéaires et un fond à deux composantes de Fourier. Ces interactions correspondent à des réflexions de Bragg, harmoniques et sous-harmoniques, et dans cette étude ([78]) qui va nous servir de référence, elles ont été mesurées expérimentalement de façon très précise. L'expérience s'est déroulée dans un bassin à houle, de longueur 4.70m et de largeur 0.39m, avec une profondeur d'eau  $H_0$  variant entre

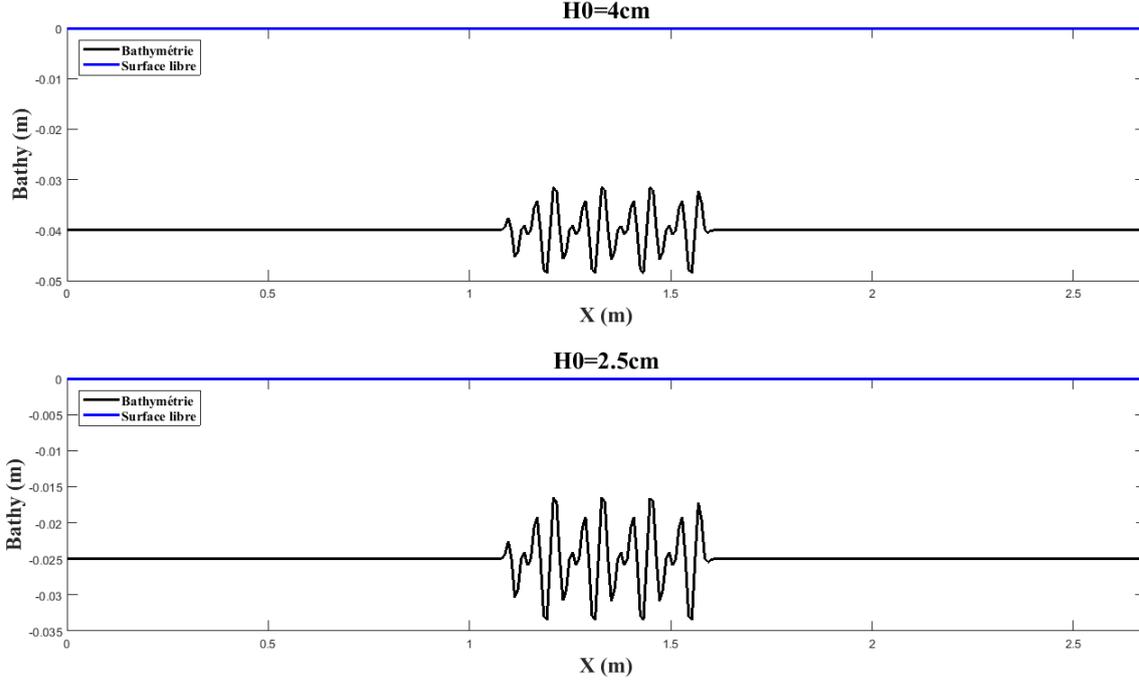


Figure 4.2: Bathymétries de fonds à deux composantes de Fourier

2.5 et 4cm. Différentes bathymétries ont été installées, telles que la profondeur d'eau ne varie que dans la direction  $Ox$  le long du bassin, dans la direction de propagation de la houle. On peut donc nous considérer dans une étude de type 2D. Les fonds installés correspondant à une superposition de deux sinusoïdes de nombres d'onde différents  $K_1$  et  $K_2$ , qui peut s'écrire comme suit:

$$H(x) = H_0 - \Delta H_1 \sin(K_1 x) - \Delta H_2 \sin(K_2 x) \quad (4.1)$$

Parmi les trois fonds installés, nous en avons retenu un et étudié deux configurations hydrodynamiques. Le fond a les paramètres suivants :  $\Delta H = \Delta H_1 = \Delta H_2 = 0.005m$ ,  $K_1 = 104.72m^{-1}$  (soit  $\lambda_1 = 0.06m$ ) et  $K_2 = 157.08m^{-1}$  (soit  $\lambda_2 = 0.04m$ ). Pour ce fond, parmi les hauteurs d'eau moyennes testées, nous avons retenu  $H_0 = 0.04m$ , soit une amplitude relative des ondulations bathymétriques  $\epsilon$  égale à  $\epsilon = \frac{\Delta H}{H_0} = 0.125$ . Pour le deuxième fond, nous avons retenu  $H_0 = 0.025m$ , soit  $\epsilon = 0.2$ . Le fond ondulé mesure 0.48m de long, et a été installé avec un fond plat de 1.10m en amont et en aval. Les deux bathymétries sont présentées sur la figure (4.2). Comme dans notre dispositif, une plage absorbante a été installée à l'extrémité aval du canal, pour prévenir toute réflexion parasite. Un générateur de houle de type piston (placé à l'extrémité du canal opposée à la plage) crée une onde sinusoïdale monochromatique, d'amplitude  $A_1$  d'environ 1mm, telle que :

$$\eta_1(x, t) = A_1(x) \cos(kx - \omega t) \quad (4.2)$$

Les houles générées sont de fréquence comprise entre 0.7 et 6Hz, avec une précision supérieure à 0.1mHz. On note que pour les plus hautes fréquences, bien que proches de la limite ondes de gravité / ondes de capillarité, nous considérerons notre modèle "ondes de gravité" toujours valable. Le coefficient de réflexion a été obtenu expérimentalement, en calculant le taux d'onde stationnaire, à partir de mesures de la déformée de la surface libre entre le batteur et le début du fond ondulé, cette fois par le biais d'une technique de détection optique. Le coefficient de

réflexion obtenu expérimentalement pour chacune de ces configurations est présenté sur la figure (4.3). Dans chaque cas, on distingue très clairement les deux harmoniques, liées aux deux composantes de Fourier du fond sinusoïdal. Dans le premier cas, la première harmonique est située à 3.5Hz et la réflexion est de 0.18 environ, et la seconde harmonique est à 4.39Hz pour une réflexion très faible de 0.04. Dans le deuxième cas, les deux harmoniques sont situées aux mêmes fréquences (ou presque) mais leur amplitude est bien plus marquée: la première harmonique, située à 3.3Hz, est à l'origine d'une réflexion de 0.47 et la seconde, à 4.29Hz, une réflexion de 0.32. Cette amplification est bien entendu due à la hauteur d'eau plus réduite, en d'autres termes à l'augmentation de l'amplitude relative du fond ondulé ou encore à la diminution de la profondeur d'eau relative. Ces deux harmoniques sont censées être très bien représentées par nos deux modèles, car elles sont issues d'une interaction houle-bathymétrie de premier ordre. Si on s'intéresse aux données numériques présentes sur la figure (4.3), penchons-nous d'abord sur le modèle présenté dans l'étude elle-même. C'est l'intérêt principal de cette étude, et la raison pour laquelle nous l'avons choisie. Il s'agit du modèle IAF que nous avons utilisé dans nos travaux de dimensionnement de la bathymétrie (voir chapitre 3 partie 2.1) puis pour qualifier la réflexion de la houle mesurée sans courant sur notre dispositif expérimental (voir chapitre 3 partie 4.2). On rappelle qu'il s'agit du modèle potentiel avec résolution intégrale des conditions de pression et de flux entre domaines successifs de profondeur d'eau constante. Ici, le fond est discrétisé en une succession de marches de profondeur constante et ainsi découpé en domaines afin d'appliquer le modèle. Ce modèle repose sur la théorie linéaire d'ondes monochromatiques, dans un écoulement supposé irrotationnel. Nous allons comparer ses résultats avec les performances de nos deux modèles M1 et M2. Les deux tableaux de (4.1) récapitulent les maxima de réflexion associés aux deux harmoniques et à la sous harmonique, ainsi que leur décalage par rapport aux valeurs expérimentales (en pourcentage), respectivement pour chacun des deux cas.

Intéressons-nous dans un premier temps aux harmoniques principales. De façon générale, le modèle IAF et notre modèle M2 marchent très bien, mais comme précédemment, M1 est déjà mis en défaut. Plus précisément, dans le premier cas, on remarque que le modèle IAF est encore une fois remarquablement bien corrélé avec les résultats expérimentaux, tant en terme de fréquence de résonance que d'amplitude. Les deux harmoniques sont décalées de moins de 1% en fréquence, et l'amplitude est surestimée respectivement de 14% pour la première et de 49% pour la seconde (mais la réflexion est déjà très faible). Nos modèles quant à eux s'en sortent moins bien, spécialement M1 qui surestime les deux harmoniques respectivement de 68 et 453%. M2 surestime déjà moins la seconde harmonique (plus de 212%) et fait même mieux qu'IAF sur la première harmonique (seulement 13.3% de surestimation), même s'il est à peine plus décalé en fréquence (+1.43%). Dans le deuxième cas, la surestimation de la réflexion sur les harmoniques est généralement un peu plus marquée. Les modèles IAF et M2 présentent des résultats similaires (même si M2 approche mieux la première harmonique). M1 passe à côté de la première harmonique et surestime la seconde. Nous pouvons en conclure que nos deux modèles M1 et M2 intègrent les interactions houle-bathymétrie au premier ordre, même si M2 est beaucoup plus précis (parfois même plus que le modèle IAF).

Passons maintenant à l'objet de cette étude sur fond doublement sinusoïdal: la sous-harmonique, située dans le premier cas entre 2 et 2.5Hz et dans le deuxième cas entre 1.5 et 2Hz. (Notons au passage que pour un même fond, augmenter l'amplitude relative (en diminuant la hauteur d'eau) décale les pics de réflexion vers de plus basses fréquences. La hauteur d'eau va conditionner grandement la réflexion. Dans les deux cas, M1 passe complètement à côté et ignore ce maximum de réflexion, alors que les modèles M2 et IAF les représentent très bien. Dans le premier cas, cette sous-harmonique est approchée à -6.8% par le modèle IAF

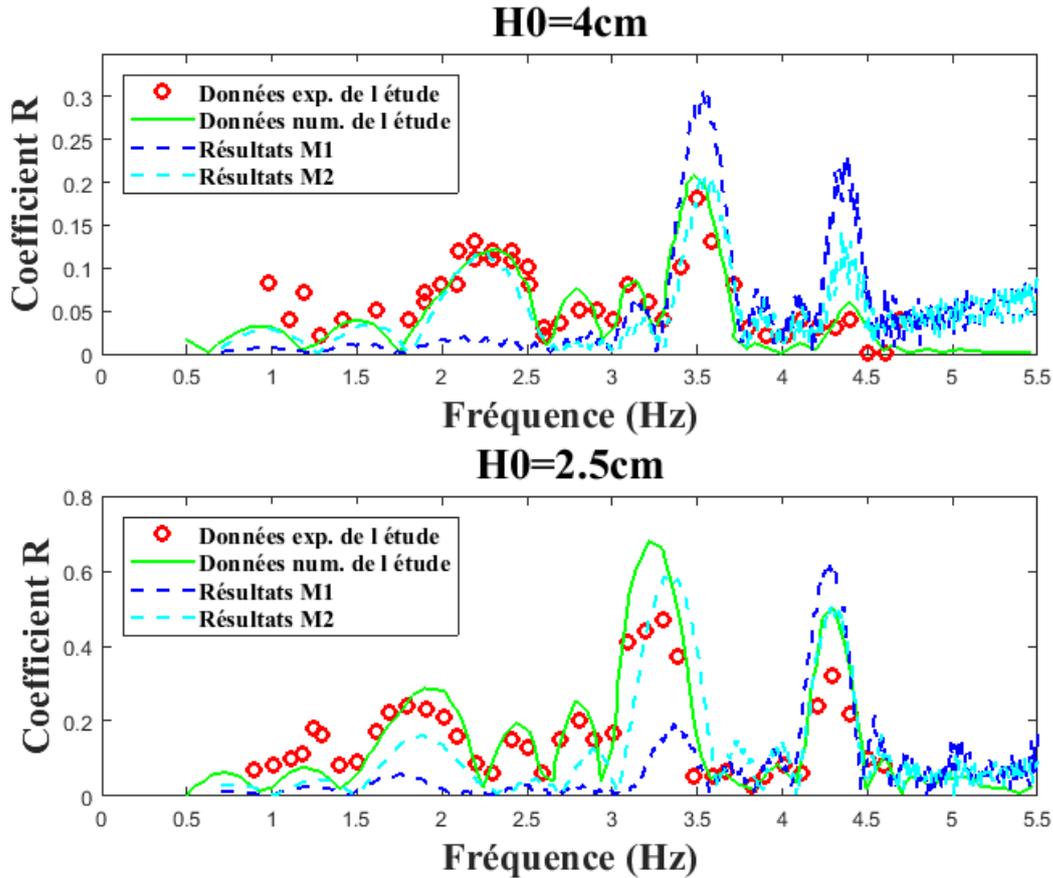


Figure 4.3: Résonance de Bragg et interactions entre une houle linéaire et un fond doublement sinusoïdal: comparaison entre données expérimentales et données numériques

et à -13% par M2, avec pour les deux une très bonne estimation de la fréquence pic associée (5.4% de décalage avec le modèle IAF, 1.2% avec M2 qui s'en sort mieux). Le modèle M1, lui, l'ignore à presque 85%. Dans le deuxième cas, encore une fois le modèle M1 est logiquement incapable de représenter cette sous-harmonique (sous estimation de 75%), tandis que M2 n'a rien à envier au modèle IAF: là où ce dernier surestime la réflexion de 22%, M2 la sous-estime de seulement 31% mais est légèrement plus précis en terme de fréquence pic. Les bonnes performances du modèle M2 s'expliquent par les termes qui le composent. Dans l'équation (2.6), on remarque en effet des termes de dérivation d'ordre 2 selon la fonction  $Z_0$ , cela implique des dérivées d'ordre 2 du nombre d'onde (on rappelle que  $Z_0$  a pour expression (1.124), elle dépend donc directement de  $k_0$ ). Or le nombre d'onde est directement proportionnel aux variations bathymétriques (ainsi qu'à la fréquence de la houle bien sûr, et à l'intensité du courant, mais il n'en est pas encore question ici). Nous retrouvons bien dans le modèle M2 une interaction à l'ordre 2 avec la bathymétrie, absente du modèle M1.

En conclusion, grâce à cette étude nous avons démontré la capacité du modèle M2 à représenter de façon appropriée les résonances de Bragg de premier et second ordre, sur les deux cas étudiés. Nous avons remarqué une petite tendance à la sous-estimation dans la deuxième configuration testée, où la plus grande amplitude relative avait forcé la réflexion à de plus hautes valeurs. Cependant, dans notre expérience, l'amplitude relative du fond reste faible, avec  $\epsilon = 0.159$ . Cela ne devrait donc pas amoindrir les capacités du modèle outre mesure. De plus, ce modèle a souvent été plus précis que le modèle IAF, il est donc pertinent pour mener

	<b>exp.</b>	IAF	%	M1	%	M2	%
f1 (Hz)	<b>3.5</b>	3.478	<i>-0.63</i>	3.53	<i>+0.86</i>	3.55	<i>+1.43</i>
a1	<b>0.1823</b>	0.2081	<i>+14.15</i>	0.3065	<i>+68.13</i>	0.2067	<i>+13.38</i>
f2 (Hz)	<b>4.397</b>	4.389	<i>-0.18</i>	4.36	<i>-0.84</i>	4.37	<i>-0.61</i>
a2	<b>0.0407</b>	0.0608	<i>+49.56</i>	0.2249	<i>+453.12</i>	0.127	<i>+212.35</i>
f3 (Hz)	<b>2.193</b>	2.313	<i>+5.47</i>	2.08	<i>-5.15</i>	2.22	<i>+1.23</i>
a3	<b>0.1312</b>	0.1222	<i>-6.86</i>	0.0198	<i>-84.9</i>	0.1141	<i>-13.03</i>

	<b>exp.</b>	IAF	%	M1	%	M2	%
f1 (Hz)	<b>3.302</b>	3.218	<i>-2.54</i>	3.36	<i>+1.76</i>	3.34	<i>+1.15</i>
a1	<b>0.469</b>	0.6788	<i>+44.73</i>	0.1939	<i>+41.34</i>	0.5887	<i>+25.52</i>
f2 (hz)	<b>4.291</b>	4.3	<i>+0.2</i>	4.28	<i>-0.25</i>	4.32	<i>+0.68</i>
a2	<b>0.3214</b>	0.5018	<i>+56.13</i>	0.6163	<i>+91.75</i>	0.5125	<i>+59.45</i>
f3 (Hz)	<b>1.775</b>	1.901	<i>+7.10</i>	1.76	<i>-0.85</i>	1.89	<i>+6.48</i>
a3	<b>0.235</b>	0.2876	<i>+22.38</i>	0.0584	<i>-75.15</i>	0.1613	<i>-31.36</i>

Table 4.1: Comparaison des résonances: expérimental et numérique (IAF, M1, M2) - a) Premier cas - b) Deuxième cas

cette étude. Nous avons également conclu que le modèle M1 n'est pas capable de représenter ces interactions d'ordre supérieur. Mais il sera tout de même intéressant de confronter les deux modèles M1 et M2 aux résultats expérimentaux pour identifier quels mécanismes entrent en jeu dans la réflexion et à quelle fréquence elle est maximale. Si nous poursuivons notre analyse, le modèle M3 ne nous paraît plus indispensable, en première approche, pour modéliser toutes les interactions entre la houle et le fond, dans le cas de pentes continûment variables. En effet, par rapport au modèle M2, il fait simplement intervenir en plus les modes évanescents, qui apparaissent localement au-dessus de discontinuités bathymétriques. Notons que le modèle IAF doit au contraire faire intervenir les modes évanescents, qui contribuent à l'adaptation de l'écoulement induit pas la houle au voisinage des discontinuités du fond. En d'autres termes, la méthode IAF utilise une méthode de discrétisation du fond générant artificiellement des sauts d'indice. Ceux-ci sont lissés par l'introduction des modes évanescents dans l'expression générale du potentiel des vitesses pour chacun des domaines. Pour des fonds continûment variables, le modèle M3 n'apporte donc pas d'information supplémentaire dans la modélisation des interactions houle-bathymétrie, comme dans le cadre de la résonance de Bragg au-dessus de fonds ondulés que nous venons de présenter et pour laquelle le modèle M2 suffit à représenter toutes les interactions houle-bathymétrie. Il est à la fois plus simple et plus rapide que le modèle couplé M3. Nous allons donc restreindre la suite de notre étude à la confrontation de nos deux premiers modèles M1 et M2 aux résultats de notre expérience, en présence de courant.

## 4.2 Réflexion en présence de courant et variabilité selon x et selon z

Le but de ce paragraphe va être d'évaluer l'impact des différents paramètres de courant, le cisaillement notamment, sur la réflexion de la houle. Pour cela, nous allons analyser en détails les quatre profils de courant qui ont été relevés le long du canal, et tâcher d'estimer le plus précisément possible la vorticité. Nous pourrons alors proposer différents modèles numériques, et discuter lequel sera le plus pertinent. Le tableau (4.2) rappelle les caractéristiques issues de

x (m)	$U_0$ (m/s)	s ( $s^{-1}$ )	n° du profil
1.17	-0.1075	0.1678	P1
4.04	-0.1844	0.1318	P2
5.9	-0.2479	-0.5391	P3
8.68	-0.1845	-1.237	P4

Table 4.2: Caractéristiques des quatre profils verticaux relevés le long du canal

ces profils. On rappelle que ces caractéristiques et la façon dont elles ont été établies seront discutées plus tard dans cette étude.

### 4.2.1 Courant non cisailé

Précédemment, nous avons comparé nos données expérimentales en présence de courant cisailé et les résultats du modèle de Kirby (3.28), qui considère un profil de courant constant à la fois verticalement (aucune vorticité) et horizontalement (pas d'évolution le long du canal). Malgré la grande simplification du cadre hydrodynamique faite par le modèle, nous avons trouvé une assez bonne corrélation. Sachant que dans une configuration de résonance de Bragg sans courant, le modèle M2 a été souvent plus précis que le modèle IAF, nous avons également lancé nos modèles M1 et M2 dans une configuration de courant constant, et attendons d'aussi bonnes performances que celles du modèle de Kirby (3.28). Les paramètres du calcul restent les mêmes: un canal long de 9m, discrétisé en 1126 points pour un pas d'espace horizontal de 0.008m. Le fond sinusoïdal est toujours compris entre 2.05 et 7.05m, d'amplitude 0.035m et de longueur d'onde 0.5m. Nous avons conservé la même plage de fréquences bien évidemment. Nous avons dans un premier temps appliqué nos deux modèles aux deux configurations suivantes: l'intensité du courant sur toute la colonne d'eau égale   l'intensité du courant de surface mesurée   l'entrée de l'écoulement (par le quatrième courantomètre, soit en  $x = 8.68m$ ), soit :  $U_0(x, z) = -0.1840ms^{-1}$ , puis égale   l'intensité mesurée en sortie de l'écoulement (en  $x = 1.17m$ ), soit  $U_0(x, z) = -0.1075ms^{-1}$ , puis égale   une valeur intermédiaire prise arbitrairement    $U_0 = -0.13ms^{-1}$ . Nous rappelons que le courant est opposé au sens de propagation de la houle incidente. Le fait de considérer les deux valeurs d'intensité du courant de surface relevées aux extrémités du canal n'est pas anodin, selon la pertinence des résultats associés, nous aurons une idée de ce que voit réellement la houle en termes d'intensité de courant, puisqu'il évolue sans cesse. Le fait de négliger les cisaillements associés   ces profils nous permettra également de quantifier l'importance de ces derniers par rapport   l'intensité du courant de surface.

Les résultats sont présentés sur la figure (4.4), et comparés avec les données expérimentales prises en présence de vorticité. On constate en premier lieu que la conclusion établie précédemment est vérifiée: l'intensité du courant de surface modifie fortement l'amplitude du pic de Bragg mais n'impacte que très peu la fréquence associée, pour un même modèle. Nous avons en effet imposé une variation maximale de 71.16% de l'intensité du courant de surface. En réaction, M1 voit sa fréquence pic quasi-constante (-0.43%) et son maximum de résonance croître de 20.7%. Autrement dit, selon notre premier modèle, augmenter l'intensité (en valeur absolue) du courant de surface revient   augmenter la réflexion. L'onde réfléchie se propage dans le même sens que le courant, cela paraît plausible. Pour M2 en revanche, la même variation d'intensité du courant de surface entraîne une chute de 68% pour le maximum de réflexion (là encore, la fréquence pic associée reste stable, -1.72% de variation seulement). Le modèle M2 est bien plus sensible aux variations d'intensité du courant de surface que le modèle M1. Mais cette différence de comportement pourrait signifier que des interactions d'ordres supérieurs

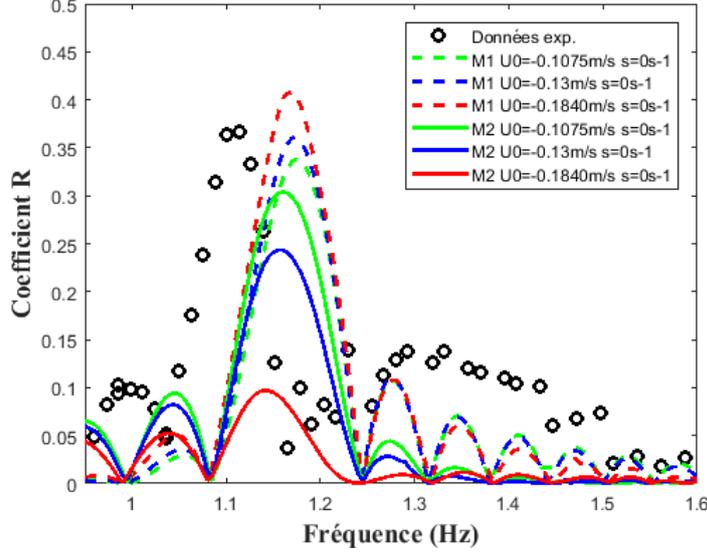


Figure 4.4: Modélisation par courant uniforme: Comparaison données expérimentales - modèles numériques M1 et M2

avec la bathymétrie altèrent la réflexion de la houle par le courant. Si M1 est plus proche des résultats expérimentaux en terme de maximum de réflexion, M2 est plus proche de la bonne fréquence pic. Concernant l'intensité du courant de surface, on constate que la valeur mesurée à l'entrée de l'écoulement,  $U_0(x, z) = -0.1840 \text{ m s}^{-1}$ , ne conduit pas aux meilleurs résultats, pour aucun des deux modèles. La valeur intermédiaire conclut à la meilleure approximation avec M1, pour un écart en fréquence de seulement 5.02% et un écart en amplitude de -1.61%. En comparaison, la meilleure approximation donnée par M2 présente un écart en fréquence pic plus faible, de seulement 4.13%, mais accuse un écart en amplitude plus conséquent, de -17% environ. On peut donc affirmer que le profil mesuré en entrée n'est pas exactement celui vu par la houle. Néanmoins, le comportement de la houle aux plus hautes fréquences, au-delà de 1.25Hz, n'est approché par aucun des deux modèles, dans aucune des configurations hydrodynamiques. Il manque quelque chose à notre modélisation, nous allons poursuivre dans notre logique de complexité croissante et intégrer la vorticit   à nos modèles.

#### 4.2.2 Courant cisail   horizontalement uniforme

Notre seconde approche consiste    consid  rer un profil de courant cisail  ,    vorticit   constante selon la verticale, et    l'imposer sur l'ensemble du canal. On n  glige donc toute   volution horizontale du courant. Notre loi d'approximation du courant peut s'  crire :

$$U(x, z) = U_0 + s.z \quad (4.3)$$

On rappelle qu'ici,    cause de notre choix d'  chelle verticale, la vorticit   n  gative entra  nera un profil de courant plus faible au fond qu'   la surface. Nous choisissons de tester quatre configurations, avec comme pr  c  demment en premier choix le profil P4   tabli en entr  e d'  coulement en  $x = 8.68 \text{ m}$ , pr  sent   sur la figure (3.14), avec  $U_0 = -0.1845 \text{ m.s}^{-1}$  et  $s = -1.237 \text{ s}^{-1}$  (d  termin  e par r  gression lin  aire sur l'ensemble de la colonne d'eau). Par souci de coh  rence, nous consid  rons   galement le profil P1 enregistr      l'autre extr  mit   du canal, en  $x = 1.17 \text{ m}$ :  $U_0 = -0.1075 \text{ m.s}^{-1}$  et  $s = 0.1678 \text{ s}^{-1}$ . Nous avons donc deux profils de

courant très différents: le premier avec une forte intensité en surface mais qui s'affaiblit rapidement avec la profondeur (fort cisaillement), le second avec un courant de surface d'intensité plus faible mais un cisaillement positif (un écoulement qui va se renforcer près du fond). La comparaison entre les résultats basés sur ces deux profils sont présentés sur la première partie de la figure (4.5). Là encore, le modèle M2 est beaucoup plus sensible aux variations du profil que le modèle M1, qui garde sensiblement la même allure. Le modèle M2, lui, réagit très fortement au premier profil, et présente un pic de réflexion décalé vers les hautes fréquences (aux alentours de 1.205Hz), puis une forte réflexion, décroissant lentement, et étonnamment proche des points expérimentaux sur toute la deuxième moitié de la plage de fréquences. Pour le deuxième profil de courant en revanche, ce modèle nous présente une réflexion d'allure tout à fait classique, avec un seul pic bien identifié, mais largement en deçà des résultats expérimentaux. Nous avons là un indice probant sur le rôle de la vorticité dans la propagation et en particulier la réflexion de la houle par le courant. Si on se focalise sur le pic de Bragg, on constate là encore que le modèle M1 présente de meilleurs résultats en terme d'amplitude, mais l'intégration du cisaillement amoindrit les performances du modèle, et on observe une réflexion sous-estimée.

Comme on constate qu'aucun des deux profils n'a permis d'établir une approximation réussie en terme d'amplitude du pic de Bragg, on décide de modéliser deux autres profils "virtuels", établis pour le premier comme une moyenne entre les deux premiers profils P1 et P4 et pour le second comme une moyenne des quatre profils verticaux P1, P2, P3 et P4 (voir (4.2)). On obtient donc respectivement les profils suivants:  $U_0 = -0.146m.s^{-1}$  et  $s = -0.5346s^{-1}$  puis  $U_0 = -0.1810m.s^{-1}$  et  $s = -0.369s^{-1}$ . Les résultats associés sont présentés sur la partie droite de la figure (4.5). Les mêmes conclusions s'imposent: le modèle M1 ne varie quasiment pas et représente très bien le pic de Bragg en amplitude, tandis que le modèle M2 est très sensible à la vorticité. Un cisaillement négatif très fort entraîne une plus forte réflexion à haute fréquence, un cisaillement qui augmente (faible valeur négative) fait diminuer la réflexion et la décale vers les basses fréquences, et enfin un cisaillement positif conduit à une meilleure approximation, avec une réflexion plus marquée et une fréquence pic appropriée. La meilleure approximation est donnée encore une fois par le modèle M1, avec le profil établi en moyennant P1 et P4. On obtient une amplitude et une fréquences décalées respectivement de seulement -4.86% et +5.47%. La sensibilité du modèle M2 à la vorticité et la meilleure adéquation entre les résultats expérimentaux et les simulations issues de profils intermédiaires nous confirment que l'évolution de la vorticité est la clé pour comprendre le comportement de la houle, et que nous devons l'estimer le plus précisément possible. Il est donc temps de laisser de côté les représentations d'un courant horizontalement constant, et d'envisager différentes lois d'évolution spatiale.

### 4.2.3 Courant cisailé horizontalement linéaire

La manière la plus simple de représenter l'évolution du profil de courant le long du canal est de considérer une loi linéaire entre le premier et le dernier profil mesurés. Cependant, lorsqu'on impose une hauteur d'eau constante (vérifiée au paragraphe 3.4.1.1), on ne peut déterminer arbitrairement toutes les vitesses à la fois sur la verticale et sur l'horizontale, car cela contreviendrait à la conservation du débit dans l'écoulement. Le profil de courant étant déterminé par deux paramètres (l'intensité en surface et le cisaillement), il nous a donc fallu en choisir un et déduire l'autre par conservation du débit, afin d'être cohérents avec la réalité expérimentale.

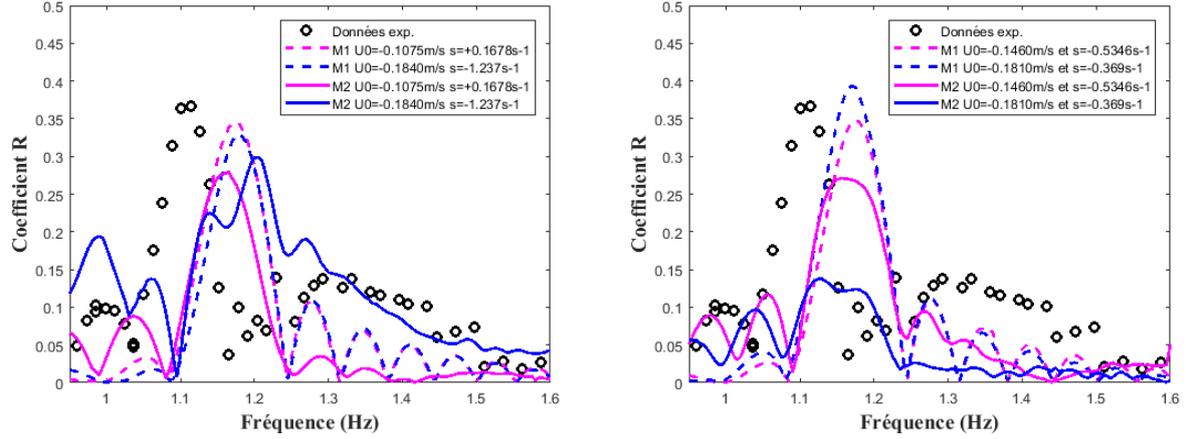


Figure 4.5: Modélisation par courant cisailé horizontalement uniforme: a) Profils P1 et P4 - b) Profils virtuels

### Interpolation du champ de cisaillement

Cette étude porte sur l'influence du cisaillement sur le comportement de la houle, il nous a donc semblé logique d'établir une loi qui approche le cisaillement au plus près des valeurs expérimentales, et de seulement déduire l'intensité du courant en surface. Cette approche est représentée sur la partie gauche de la figure (4.6), et la loi associée, déterminée par la méthode des moindres carrés, s'écrit :

$$s(x) = -0.1871x + 0.386 \quad (4.4)$$

Ensuite, il s'agit de déterminer le débit entrant dans le canal d'après les caractéristiques relevées en entrée de l'écoulement, en  $x_4 = 8.68m$  et présentées sur le tableau (4.2):

$$Q(x_4) = \left\| U_0(x_4) \cdot h(x_4) - \frac{h(x_4)^2 \cdot s(x_4)}{2} \right\| = 0.0107m^3 \cdot s^{-1} \quad (4.5)$$

On écrit ensuite la conservation de ce débit le long du canal:

$$\forall x \in [0 : 9], Q(x) = \left\| U_0(x) \cdot h(x) - \frac{h(x)^2 \cdot s(x)}{2} \right\| = Q(x_4)$$

Dans cette expression,  $h(x)$  et  $s(x)$  sont imposées, on peut donc en déduire l'expression de  $U_0(x)$ :

$$U_0(x) = \frac{Q(x_4)}{h(x)} + \frac{h(x) \cdot s(x)}{2} \quad (4.6)$$

Nous avons ainsi déterminé un profil de courant verticalement cisailé et horizontalement linéaire, et les résultats basés sur ce profil sont présentés sur la la figure (4.7). On constate une inversion de la tendance observée précédemment: cette fois, c'est notre modèle M2 qui propose une approximation supérieure en amplitude, et toujours plus précise en fréquence. Par rapport aux données expérimentales, M1 présente un pic décalé de 6.37% en fréquence et -7.94% en amplitude, tandis que M2 présente un pic décalé de 3.68% en fréquence et +14.056% en amplitude. Cependant, pour les hautes fréquences, là où M1 conserve son évolution en sinusoïdes, M2 nous présente à nouveau une réflexion importante et décroissant lentement, de façon parallèle à la décroissance observée expérimentalement, mais sous-estimée d'environ -39.75%.

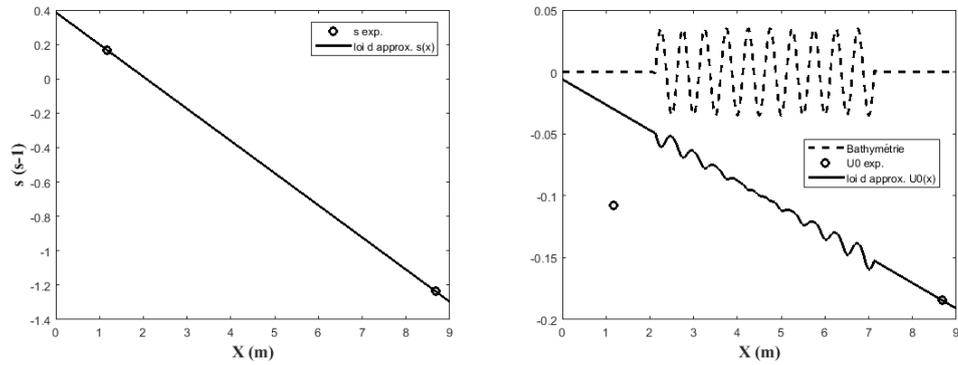


Figure 4.6: Modélisation par cisaillement horizontalement linéaire: a) approximation linéaire du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales

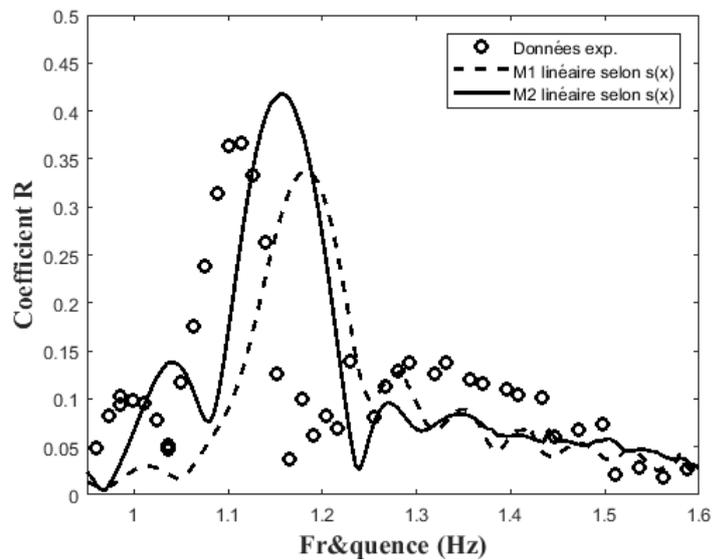


Figure 4.7: Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire de la vorticité

En cherchant l'origine de ces écarts, tant sur le pic de Bragg qu'aux hautes fréquences, on a comparé l'intensité du courant de surface calculée et celle bel et bien mesurée dans le canal (deuxième partie de la figure (4.6)). On constate une corrélation mitigée. Nous avons superposé (sans considération d'échelle) le fond ondulé sur la figure, et on observe logiquement une évolution d'allure sinusoïdale au-dessus de ce fond. La loi passe également de façon attendue par le point de mesure en  $x = 8.68m$  car c'est à cette position que nous avons calculé le débit entrant dans le canal. Par contre, à l'autre extrémité, notre approximation dévie de la mesure à  $-72.16\%$ . Notre simulation considère un courant de surface bien trop faible sur la partie gauche du canal. Pour déterminer quel impact cette erreur a sur nos résultats, nous choisissons de procéder de la manière inverse, et de déterminer une loi d'approximation de l'intensité du courant de surface pour en déduire la vorticit  .

### Interpolation du courant de surface

Nous avons donc   tabli une loi d'  volution lin  aire entre les courants de surface mesur  s en entr  e et en sortie d'  coulement, elle est pr  sent  e sur la partie gauche de la figure (4.8). Les coefficients de la loi ont, comme pr  c  demment,   t   d  termin  s de fa  on empirique par une m  thode des moindres carr  s:

$$U_0(x) = -0.0103x - 0.0955 \quad (4.7)$$

Nous en avons ensuite d  duit le cisaillement par conservation du d  bit:

$$s(x) = \frac{-2Q(x_4)}{h(x)^2} + \frac{2U_0(x)}{h(x)} \quad (4.8)$$

Les r  sultats donn  s par nos deux mod  les sur la base de ce profil de courant sont pr  sent  s sur la figure (4.9). Nous avons vu pr  c  demment que l'intensit   du courant de surface jouait un r  le important sur l'amplitude du pic de Bragg, et cela se v  rifie ici. Dans aucune autre configuration pr  c  demment test  e, nous n'avions eu une aussi bonne cor  lation num  rique - exp  rimental, pour les deux mod  les. M1 nous pr  sente un maximum de r  flexion d  cal   de  $5.92\%$  en fr  quence et seulement  $-0.33\%$  en amplitude, et M2 offre un maximum d  cal   de  $2.78\%$  en fr  quence et  $-4.34\%$  en amplitude. De plus, M2 offre une cor  lation particuli  rement bonne sur le reste de la plage de fr  quence, sur le premier maximum local aux alentours de  $1Hz$  notamment puis sur les plus hautes fr  quences, au-del   de  $1.4Hz$ . Persiste toutefois ce d  calage en fr  quence du pic de Bragg, ainsi que le second pic de r  flexion aux alentours de  $1.3Hz$  qui cette fois a de nouveau   t   ignor   par les deux mod  les. Sachant que ce dernier avait bien   t   repr  sent   par les mod  lisations pr  c  dentes o   la vorticit     tait bien approch  e, voyons si notre loi d'approximation la concernant est pertinente. Elle est pr  sent  e dans la partie de droite de la figure (4.8).

Cette fois encore, la loi d'approximation d  duite de la conservation du d  bit passe    c  t   de ce qu'il se passe r  ellement en d  but de canal. La vorticit   est ici compl  tement fauss  e, m  me le signe est faux: en  $x = 1.17m$ , la vorticit   exp  rimentale est de  $0.1678s^{-1}$  et notre loi d'approximation la fixe     $-0.54s^{-1}$ . (On note au passage que la superposition du fond ondul   sur le graphe s'  st faite    la m  me   chelle que sur la figure pr  c  dente (4.6), pour comparer visuellement les   carts entre les mesures et les lois d'approximation). Notre m  thode bas  e sur une   volution lin  aire du profil de courant n'  st pas suffisante pour approcher correctement    la fois la vorticit   et l'intensit   du courant de surface. Des   carts probl  matiques persistent, preuve que nous passons encore    c  t   de ph  nom  nes physiques essentiels qui surviennent dans l'  coulement et impactent la r  flexion de la houle.

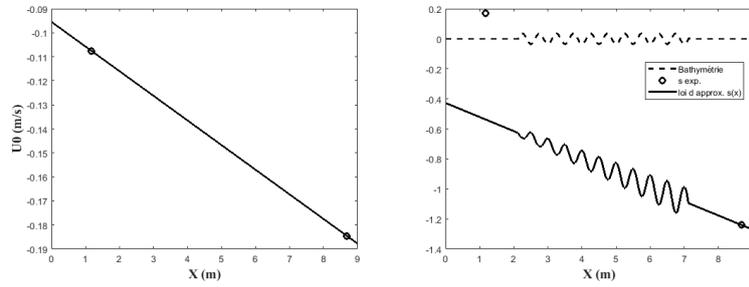


Figure 4.8: Modélisation par courant de surface horizontalement linéaire: a) approximation linéaire du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales

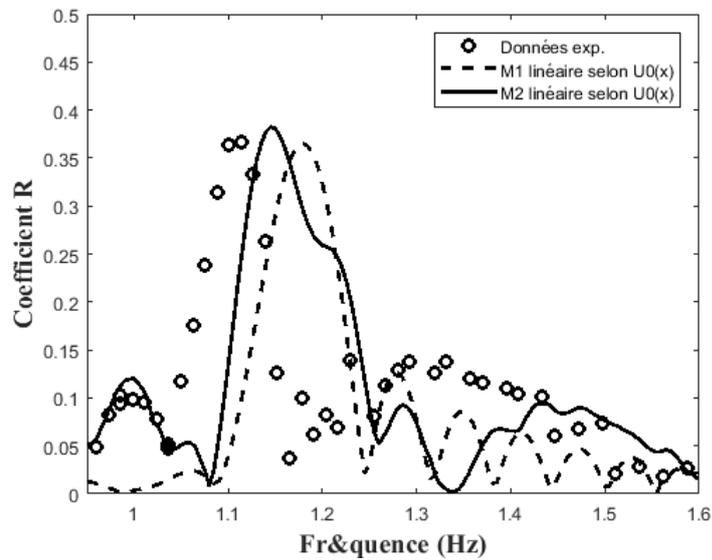


Figure 4.9: Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire du courant de surface

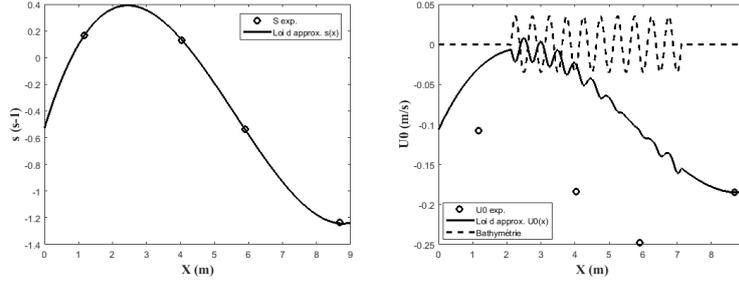


Figure 4.10: Modélisation par cisaillement horizontal polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 3 du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales

#### 4.2.4 Courant cisailé horizontalement polynomial

Nous passons donc à une modélisation horizontale d'ordre supérieur: une approche polynomiale, en considérant cette fois les quatre profils verticaux relevés le long du canal (3.4). Là encore, nous partons initialement sur l'approximation de la vorticité pour en déduire ensuite l'intensité du courant de surface, puis nous ferons l'inverse.

##### Approximation polynomiale d'ordre 3

**Interpolation du champ de cisaillement** Puisque nous disposons de quatre profils verticaux, une approximation polynomiale d'ordre 3 nous paraît cohérente pour une première approche. Toujours par une méthode des moindres carrés, nous établissons la loi d'approximation polynomiale de la vorticité suivante:

$$s(x) = 0.0129.x^3 - 0.217.x^2 + 0.8294x - 0.5285 \quad (4.9)$$

Elle est présentée sur la partie gauche de la figure (4.10), et nous remarquons une assez bonne corrélation avec les mesures, à part pour la première partie de l'écoulement (entre 0 et 2m), où la vorticité devient négative alors que la première mesure, à 1.17m, nous la présente comme clairement positive... Comme précédemment, par souci de cohérence physique, nous déterminons ensuite l'intensité du courant de surface grâce à la formule par débit conservé (4.6), elle est présentée sur la partie droite de la figure (4.10). On remarque directement que cette modélisation est très éloignée des mesures de courant de surface. On note en premier l'allure pseudo-sinusoïdale au-dessus du fond ondulé, mais qui ne se maintient pas. Ensuite, entre 2 et 7m, l'intensité du courant en surface décroît à peu près de la même façon dans l'approximation que dans les mesures. Cependant, on observe un écart colossal: à l'exception du point-référence pour le débit (en  $x = 8.68m$ ), l'approximation s'éloigne des mesures de 55.62% à 85.63%. Nous nous attendons donc à des écarts aussi significatifs dans le calcul de l'amplitude du pic de Bragg. Les résultats du calcul de réflexion de la houle sont présentés sur la figure (4.11)

On constate en effet que les modèles ne sont pas vraiment en adéquation avec les résultats expérimentaux. M1 sous-estime largement le maximum de réflexion (-43.83%), et est encore plus éloigné que précédemment en terme de fréquence pic associée (+7.7%). M2 s'en sort mieux, une nouvelle fois, mais la qualité de l'approximation n'est pas satisfaisante: la fréquence pic est bien déterminée (écart de 4.13% seulement) mais l'amplitude reste encore surestimée de presque 30%. Cette approche ne sera pas considérée comme pertinente. Peut-être qu'une

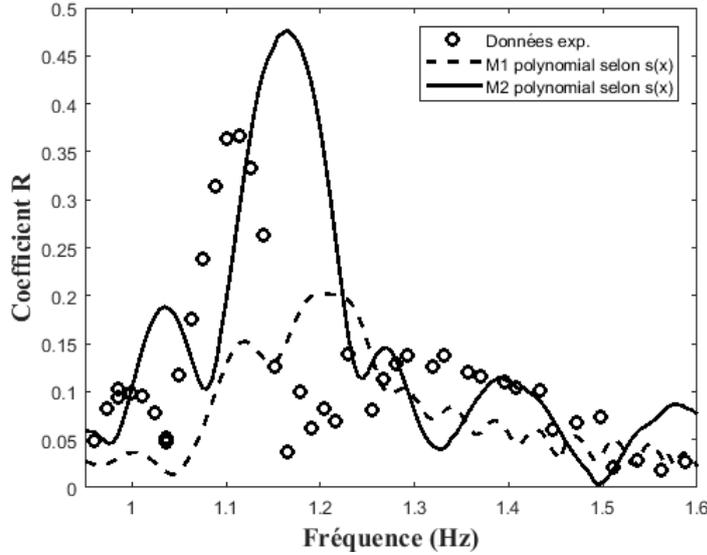


Figure 4.11: Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale de la vorticité

meilleure approximation de l'intensité du courant de surface améliorera les performances de nos modèles?

**Interpolation du courant de surface** Cette fois, la loi d'approximation que nous avons déterminée pour l'intensité du courant de surface reste cohérente même sur les bords du domaine (pas de changement de signe aberrant). Elle est présentée sur la partie gauche de la figure (4.12), et s'écrit:

$$U_0(x) = 0.0018x^3 - 0.022x^2 + 0.0466x - 0.1348 \quad (4.10)$$

et on déduit l'évolution horizontale de la vorticité par conservation du débit, grâce à la relation (4.8). Si on se penche sur les résultats numériques issus de ce profil (4.13), on constate que cette fois encore M2 est le plus proche des résultats expérimentaux (un écart d'amplitude de 14.68%, contre presque 39% pour M1), même s'il est cette fois légèrement moins précis en terme de fréquence pic associée (6.82% d'écart contre 5.92% pour M1). On remarque de bonnes tendances sur le reste de la plage de fréquences également: le premier maximum local est placé exactement sur la bonne fréquence (bien que surestimé de presque 100%), et une réflexion décroissante sur les hautes fréquences (bien que sous-estimées). Si on cherche la source des écarts du côté de la vorticité, son évolution est, comme précédemment, présentée sur la partie droite de la figure (4.12). Et là encore, malgré une tendance à la décroissance plutôt juste, on constate toujours des écarts que l'on ne peut tolérer, avec des changements de signe parfaitement inappropriés sur toute la première moitié du canal.

Tenir compte des évolutions spatiales du courant dans la modélisation reste une bonne idée, car cela nous rapproche des conditions expérimentales. Cependant, un choix inapproprié de lois d'approximation polynomiale nous a mené à de mauvaises représentations de la réflexion de la houle, moins pertinentes que les représentations par courant uniforme. En examinant les évolutions des paramètres déduits, nous avons constaté des incohérences, notamment sur les bords de domaine, avec parfois mêmes des signes contradictoires. Pour remédier à cela, nous proposons une nouvelle forme d'approximation polynomiale, d'ordre 5 cette fois.

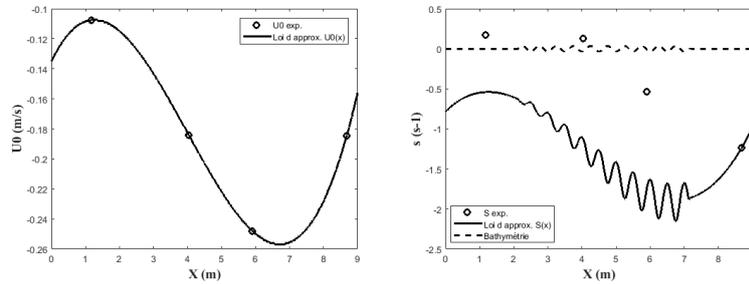


Figure 4.12: Modélisation par courant de surface horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 3 du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisailment et les mesures expérimentales

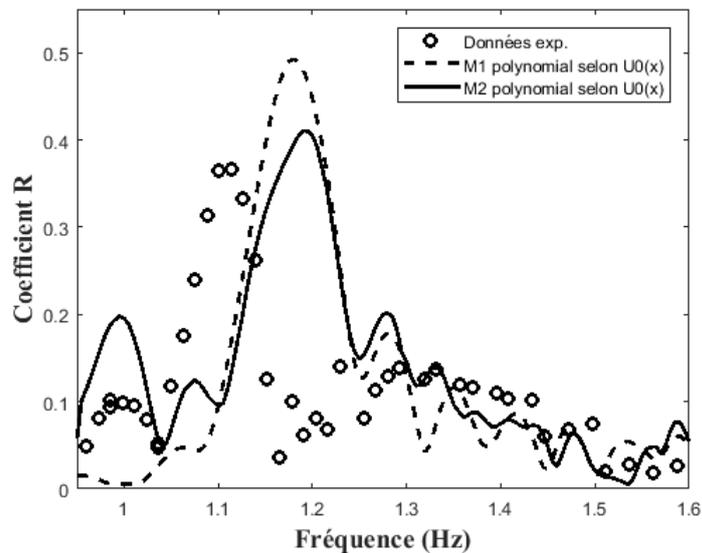


Figure 4.13: Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du courant de surface

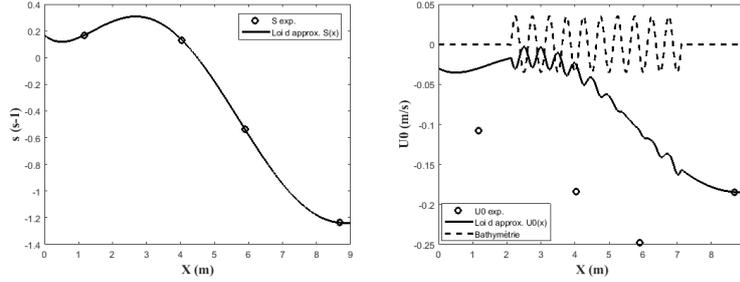


Figure 4.14: Modélisation par cisaillement horizontal polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales

### Approximation polynomiale d'ordre 5

Pour établir une loi polynomiale d'ordre 5 avec seulement quatre valeurs, nous avons supposé qu'une fois l'écoulement au-dessus d'un fond plat, le profil de courant ne changerait plus de façon significative. Autrement dit, pour le paramètre considéré nous avons dupliqué les valeurs d'entrée et de sortie d'écoulement (prises respectivement en  $x_4 = 8.68m$  et  $x_1 = 1.17m$ ) sur les extrêmes bords du domaine (respectivement en  $x_4 = 9m$  et  $x_1 = 0m$ ). Nous disposons alors de six valeurs pour le cisaillement et six valeurs pour l'intensité du courant de surface, ce qui nous a permis - toujours par méthode des moindres carrés - d'obtenir des lois d'approximation plus cohérentes en bord de domaine.

**Interpolation du champ de cisaillement** Comme précédemment, nous avons commencé par imposer le cisaillement, et nous reprenons la loi (3.21) que l'on a établie au paragraphe (3.2.2.4.2), qui est présentée sur la figure (3.16) et est rappelée ici sur la figure (4.14). Si on compare cette loi à la précédente (4.9), on constate deux améliorations: sur l'entrée du domaine le signe du cisaillement reste cohérent, et sur le début du fond ondulé, entre 2 et 4m, la valeur est bien plus pertinente (auparavant, elle était quasiment doublée par rapport à la valeur d'entrée, ce n'est plus le cas). L'allure est lissée, et nous n'avons plus de valeurs extrêmes. En ce qui concerne les résultats issus des modèles sur la base de ce modèle (figure (4.15)), nous nous attendions à des écarts d'amplitude, et c'est ce que nous obtenons. M2 nous renvoie un maximum de réflexion grandement surestimé à presque 0.5 quand le pic expérimental ne dépasse pas 0.4, et M1 nous présente un pic de Bragg complètement effondré, à à peine 0.2. En terme de fréquence pic associée, M2 fait mieux que M1, mais les deux dépassent 1.15Hz quand le pic expérimental est proche de 1.1Hz. Concernant les évolutions aux hautes fréquences, les deux modèles ont adopté une allure correcte, en décroissance douce (bien que M2 reprenne sa tendance en bosses successives vers la fin de la plage de fréquences). L'écart d'amplitude pour le maximum de réflexion s'explique facilement lorsqu'on regarde l'évolution de l'intensité du courant de surface. Notre loi d'approximation est de qualité médiocre concernant ce paramètre: si l'allure est encore une fois respectée, l'intensité du courant de surface est pratiquement nulle (inférieure à 5cm/s) sur la première moitié du canal, alors qu'elle a été relevée comme variant entre 10 et 20 cm/s dans cette zone. Comme nous l'attendions, sous-estimer le courant de surface (en valeur absolue) a amplifié la réflexion calculée par M2 et réduit celle calculée par M1. Nous allons passer à une approximation du courant de surface, toujours par une fonction polynomiale d'ordre 5, pour tenter de corriger ces défauts.

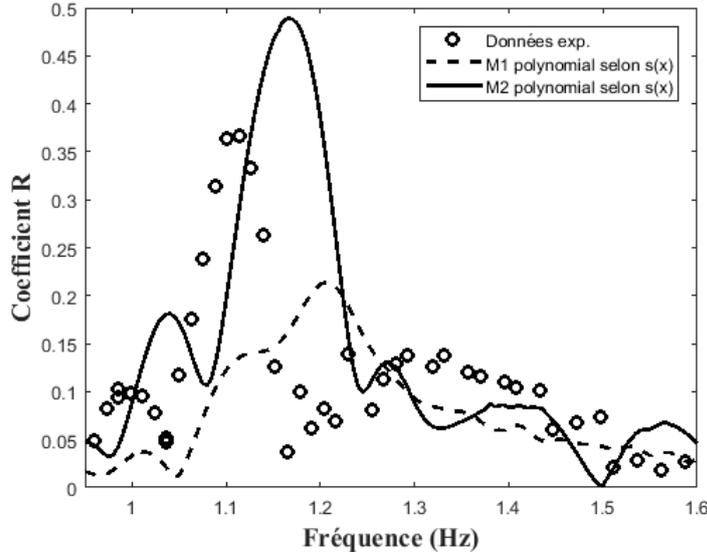


Figure 4.15: Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale de la vorticité

**Interpolation du courant de surface** Nous reprenons donc la même méthode que dans le paragraphe précédent et établissons une loi empirique d'estimation de l'intensité du courant de surface, sous la forme d'un polynôme d'ordre cinq:

$$U_0(x) = -0.0001 \cdot x^5 + 0.002 \cdot x^4 - 0.0129x^3 + 0.0247 \cdot x^2 - 0.0143 \cdot x - 0.1075 \quad (4.11)$$

Si on regarde par avance l'évolution induite du cisaillement (4.16), on remarque un problème. Puisque cette évolution dépend directement de l'évolution imposée du courant de surface, les allures vont être similaires: le long du canal, une forte décroissance puis une légère réaugmentation. Or, dans le cas de la vorticité, cela ne marche pas car le cisaillement décroît de façon beaucoup plus lente. On observe donc un gros décalage sur l'ensemble du canal: sur la première moitié, le cisaillement est relevé comme légèrement positif alors que notre approximation l'impose comme compris entre  $-0.5$  et  $-1.5s^{-1}$ . Sur la troisième position, on retrouve encore ce décalage de  $-1.5s^{-1}$ : il est relevé à  $0.5$  et on l'impose à  $-2s^{-1}$ . On s'attend donc à retrouver des amplitudes cohérentes mais un décalage en fréquence un peu plus important que précédemment. Et c'est bien le cas (4.17): M2 est assez proche en amplitude ( $0.3982$  au lieu de  $0.3664$ ) mais a une fréquence associée encore trop décalée ( $1.19Hz$  au lieu de  $1.114Hz$ ). M1 présente à nouveau une réflexion bien trop surestimée ( $0.4883$ ).

Après avoir établi de nombreuses lois d'approximation, tantôt pour approcher le cisaillement, tantôt pour approcher l'intensité du courant de surface, il est temps de faire un bilan.

#### 4.2.5 Comparatif et discussions des effets de telles approximations

Cette étude est centrée sur le phénomène de résonance de Bragg, nous allons dans ce paragraphe nous concentrer uniquement sur ce point du comportement de la houle, et réserver l'analyse des autres comportements (notamment le second pic apparaissant aux plus hautes fréquences) pour plus tard. Les tableaux (4.3) et (4.4) récapitulent les caractéristiques du pic de Bragg (fréquence pic, amplitude) pour chaque modèle dans chaque configuration étudiée, afin d'avoir une vue d'ensemble et de visualiser plus facilement les tendances éventuelles. A chaque fois, nous avons également calculé l'écart (en pourcentage) par rapport à la valeur expérimentale du

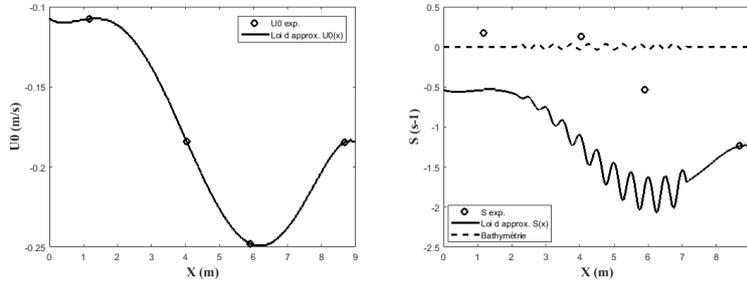


Figure 4.16: Modélisation par courant de surface horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales

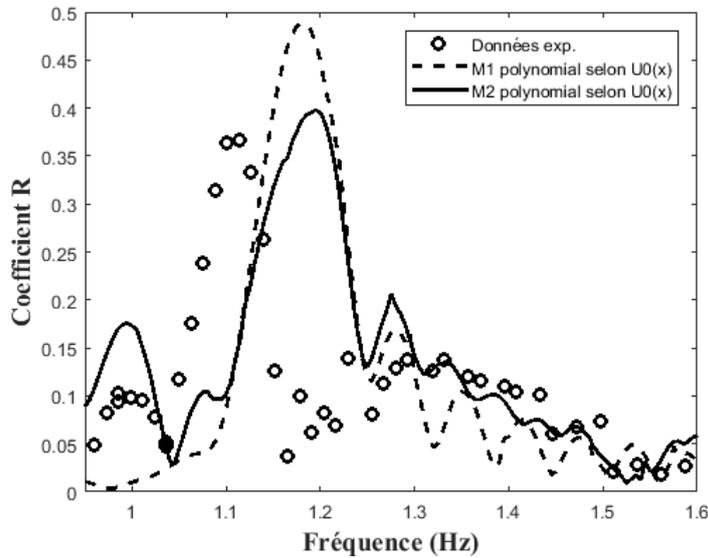


Figure 4.17: Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du courant de surface

Approximation	Paramètres	M1				
		f (Hz)	$\Delta$ (%)	a	$\Delta$ (%)	$\ \Delta_a\ $ (%)
non cisailé	$U_0 = -0.1075$ m/s	1.175	5.48	0.3881	5.92	±6.3
	$U_0 = -0.13$ m/s	1.17	5.03	0.3605	-1.61	
	$U_0 = -0.1840$ m/s	1.17	5.03	0.4081	11.38	
cisailé unif.	$U_0 = -0.1075$ m/s, $s = 0.1678$ s <sup>-1</sup>	1.175	5.48	0.3453	-5.68	±7.02
	$U_0 = -0.1840$ m/s, $s = -1.237$ s <sup>-1</sup>	1.18	5.93	0.3293	-10.13	
	$U_0 = -0.1460$ m/s, $s = -0.5346$ s <sup>-1</sup>	1.175	5.48	0.3486	-4.86	
	$U_0 = -0.1810$ m/s, $s = -0.369$ s <sup>-1</sup>	1.17	5.03	0.3936	7.42	
linéaire	$s(x)$	1.185	6.37	0.3373	-7.94	±4.14
	$U_0(x)$	1.18	5.93	0.3652	-0.33	
polyn. (3)	$s(x)$	1.2	7.72	0.2021	-44.84	±39.62
	$U_0(x)$	1.18	5.93	0.4924	34.39	
polyn. (5)	$s(x)$	1.205	8.17	0.2137	-41.68	±37.48
	$U_0(x)$	1.18	5.925	0.4883	33.27	

Table 4.3: Récapitulatif des paramètres de résonance de Bragg (fréquence pic et maximum de réflexion) - méthode 1 - M1

paramètre, afin d'évaluer la pertinence de la configuration associée. Enfin, pour chaque grande famille de lois d'approximations (constante, linéaire...), nous avons calculé l'écart moyen de l'amplitude calculée numériquement par rapport à la mesure expérimentale.

Là où pour M1, augmenter la complexité de nos approximations semble nous éloigner des mesures expérimentales (les écarts moyens augmentent doucement de 6% à 37% environ), pour M2 cela semble au contraire bénéfique: on passe d'un écart moyen de presque 44% à 21% pour la loi polynomiale d'ordre 3. Les plus faibles écarts en amplitude reviennent à loi d'approximation linéaire du courant de surface: 0.33% d'écart pour M1 et 4.34% pour M2. Pour ce modèle, c'est d'ailleurs la seule loi qui nous permet d'approcher à la fois l'amplitude et la fréquence du pic de Bragg à moins de 5% d'écart. Nous avons remarqué de façon générale que dans le cas des lois d'évolution horizontale, imposer l'intensité du courant de surface donne de bien meilleurs résultats. Dans le cas du modèle M2 c'est flagrant, pour les approximations linéaires et polynomiales d'ordre 3 et 5, en imposant le courant de surface on obtient des écarts d'amplitude respectivement égaux à 4.34, 12 et 8.68% tandis qu'en imposant le cisaillement, on obtient les écarts respectifs de 51.4, 29.9 et 48.42%. Pour le modèle M1 c'est également le cas, de façon plus nuancée pour les lois polynomiales mais particulièrement marquée pour la loi linéaire: là où nous avons presque 8% d'écart en amplitude pour un cisaillement imposé, lorsque la loi porte sur le courant de surface on tombe à 0.33% d'écart, la plus faible valeur calculée sur l'ensemble des essais. Or, nous avons vu qu'en imposant le courant de surface, nous sous-estimions systématiquement le cisaillement. A contrario, toutes les approximations du cisaillement mènent à surestimer le courant de surface et cela impacte grandement et de façon négative les résultats: si la fréquence pic est parfois légèrement mieux estimée, l'écart entre l'amplitude calculée et l'amplitude mesurée se creuse.

En ce qui concerne la fréquence pic, aucune tendance ne semble se dégager des résultats: pour M1, on tourne toujours autour de 5% d'écart, sauf pour les lois polynomiales qui imposent le cisaillement et où là l'écart se creuse jusqu'à 8%. Pour M2, on tourne plutôt à 4% d'écart, mais avec des variations légèrement plus importantes, entre 1 et 8% environ. Le modèle le plus proche de la fréquence pic expérimentale est le courant cisailé uniforme, précisément celui estimé comme une moyenne des quatre profils verticaux. Pourtant, le maximum de réflexion

	M2				
	f (Hz)	$\Delta$ (%)	a	$\Delta$ (%)	$\ \Delta_a\ $ (%)
<b>non cisailé</b>	1.16	<i>4.13</i>	0.304	<i>-17.03</i>	±43.58
	1.155	<i>3.68</i>	0.2435	<i>-33.54</i>	
	1.14	<i>2.33</i>	0.0727	<i>-80.16</i>	
<b>cisailé uniforme</b>	1.165	<i>4.58</i>	0.2799	<i>-23.61</i>	±32.6
	1.205	<i>8.17</i>	0.2991	<i>-18.37</i>	
	1.155	<i>3.68</i>	0.271	<i>-26.04</i>	
	1.125	<i>0.99</i>	0.1378	<i>-62.39</i>	
<b>linéaire</b>	1.155	<i>3.68</i>	0.4779	<i>-51.45</i>	±27.9
	1.145	<i>2.78</i>	0.3823	<i>4.34</i>	
<b>polynomial (ordre 3)</b>	1.165	<i>4.58</i>	0.4762	<i>29.97</i>	±20.99
	1.19	<i>6.82</i>	0.4104	<i>12.01</i>	
<b>polynomial (ordre 5)</b>	1.165	<i>4.58</i>	0.489	<i>-48.42</i>	±28.55
	1.195	<i>7.27</i>	0.3982	<i>8.68</i>	

Table 4.4: Récapitulatif des paramètres de résonance de Bragg (fréquence pic et maximum de réflexion) - méthode 2 - M2

associé accuse un écart de plus de 60% avec la valeur expérimentale.

### 4.3 Etude des différences et discussions

A présent que nous avons fait le bilan des études précédentes, nous pouvons poser un oeil critique. Aucune de nos approximations n'arrive à modéliser de façon exacte à la fois la fréquence et l'amplitude du pic de Bragg. Nous avons basé nos lois d'approximation sur le courant de surface et le cisaillement, établis à partir des profils verticaux relevés en quatre points le long du canal. Reprenons la façon dont ces paramètres ont été établis précisément. Puisque nos modèles considèrent un cisaillement constant sur la verticale, pour chaque profil nous avons établi une régression linéaire sur l'ensemble de la colonne d'eau, afin d'extraire une seule valeur de cisaillement, moyennée sur les 22cm d'eau, et une valeur de la vitesse en surface. Or, si notre protocole expérimental nous a bien fourni un profil à peu près linéaire en début d'écoulement, l'évolution le long du canal a modifié la structure verticale du courant, et l'approximation linéaire n'est plus forcément appropriée. Sur le profil mesuré en  $x = 5.93m$  par exemple, on distingue bien deux évolutions, l'une à cisaillement positif entre 11 et 18cm de profondeur, et une à cisaillement négatif entre la surface et 11cm de profondeur. De façon générale, sur presque l'ensemble des profils on constate une diminution de la vitesse sur les cinq derniers centimètres près du fond, et cette évolution est prise en compte par la régression linéaire alors qu'elle n'est pas forcément pertinente. Nous cherchons en effet à déterminer l'impact du cisaillement sur la propagation de la houle. Il est donc important de porter toute notre attention sur la moitié haute du profil, celui qui va être "vu" par la houle, et de négliger la couche limite près du fond. Deux nouvelles méthodes ont donc été mises en place afin d'établir un cisaillement plus pertinent.

### 4.3.1 Autres méthodes d'estimation du cisaillement d'un profil

La première méthode a pour objectif d'établir le cisaillement et la valeur du courant de surface à partir du profil de houle à une certaine profondeur, choisie ni trop près de la surface ni trop profond. En effet, la houle et le courant interagissent justement par la modification des vitesses orbitales par l'écoulement moyen. Cet effet est intégré sur une certaine profondeur (et se placer trop près de la surface ne permet pas de prendre en compte les effets profonds). Cependant, au delà d'une certaine profondeur, les vitesses orbitales deviennent trop faibles, et leur modification par l'écoulement moyen n'a que peu d'effet. Il s'agit donc de choisir une profondeur optimale, tenant compte de ces deux effets.

#### Approximation polynomiale et approximation tangentielle à la mi-profondeur

Nous avons choisi la profondeur caractéristique  $d_e$  car c'est elle qui, dans nos modèles, nous permet de créer numériquement nos profils de courant (paramètres  $U_0$  et  $U_2$ ). Il nous semble donc normal de poursuivre avec la même logique de paramètres caractéristiques. Nous avons choisi de travailler avec les profils mesurés en l'absence de houle, nous allons donc calculer  $d_e$  dans les mêmes conditions. On rappelle que  $d_e$  est défini par (2.3), il dépend directement du nombre d'onde qui peut s'écrire  $k = \frac{2\pi}{\lambda_{houle}}$ . Or, en l'absence de houle, mathématiquement on peut considérer que  $\lambda_{houle} \rightarrow +\infty$ , donc que  $k \rightarrow 0$  et donc que  $\tanh(kh) \rightarrow kh$ . Dès lors, nous pouvons réécrire  $d_e$  comme :

$$d_e \rightarrow \frac{kh}{2k} = \frac{h}{2} = 0.11 \quad (4.12)$$

Notre profondeur critique a été fixée à 11cm de profondeur. Comment à présent établir au plus juste les paramètres du courant à cette profondeur? Nous avons choisi d'approcher le profil avec une fonction polynomiale d'ordre 5 (pour pouvoir prendre en compte les inhomogénéités comme celles relevées sur le profil en  $x = 5.93m$  par exemple), et de calculer la tangente à cette courbe en  $z = -d_e$ . Le cisaillement sera pris comme égal à la pente de cette tangente, et le courant de surface comme la valeur de cette tangente en  $z = 0$ . La figure (4.18) nous montre le résultat de cette méthode: l'approximation polynomiale du profil mesuré est représentée en trait plein noir et la tangente en trait plein rouge. On remarque que cette méthode nous donne des cisaillements moins forts que la méthodes précédents, mais plus ajustés au profil de courant dans la moitié supérieure de l'écoulement, notamment pour le profil d'entrée en  $x = 8.67m$ . Le profil en  $x = 5.93m$  est lui plutôt malchanceux, le point de tangente tombe exactement sur le point d'inflexion du profil, et notre approximation, bien que d'allure similaire, sous-estime la vorticité. On notera également que les courants de surface sont bien plus proches des valeurs expérimentales, quand la méthode précédente, avec son inclinaison parfois surestimée, s'en éloignait parfois.

Le tableau (4.5) récapitule les paramètres établis grâce à cette méthode, pour chaque profil. Il nous servira de référence pour l'établissement des lois d'approximation. On constate que toutes les vorticités sont négatives, contrairement aux vorticités établies précédemment. Nous espérons que cette nouvelle évolution nous conduira à de meilleures estimations de la réflexion.

**Lois d'approximation uniformes** Les lois d'approximation de type "courant cisailé uniforme" ont précédemment été plutôt prometteuses, elles ont conduit notamment à la meilleure estimation de la fréquence pic par notre modèle M2. Nous allons donc reconduire ces études avec nos nouveaux paramètres, et dans une logique de continuité, nous avons choisi de mener trois études. La première reprend les paramètres du profil d'entrée d'écoulement, P4, la seconde

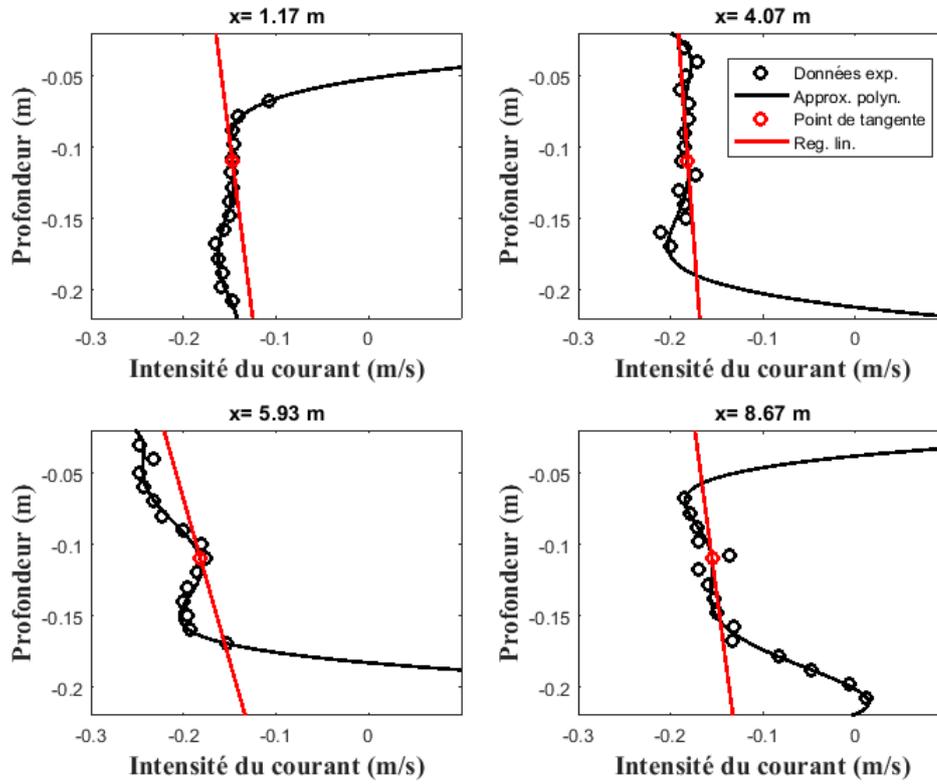


Figure 4.18: Profils verticaux: méthode d'estimation des paramètres du profil par tangente à la profondeur critique

x (m)	U0 (m/s)	s (s-1)	n°
1.17	-0.1687	-0.1987	P1
4.07	-0.1937	-0.1161	P2
5.93	-0.2295	-0.4391	P3
8.67	-0.1773	-0.2060	P4

Table 4.5: Caractéristiques des profils verticaux de courant établies par approximation polynomiale puis régression verticale à mi-profondeur

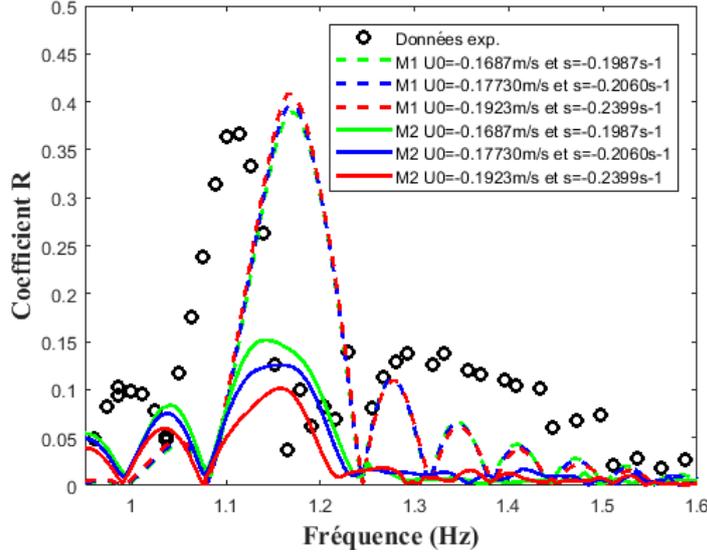


Figure 4.19: Modélisation par courant cisailé horizontalement uniforme

les paramètres du profil de sortie d'écoulement P1. Nous n'avons pas calculé un écoulement intermédiaire en moyennant ces deux profils car leurs paramètres sont très proches, la moyenne n'aurait donc pas apporté d'information pertinente. Par contre, nous avons conservé le profil intermédiaire établi en moyennant les quatre profils, cela nous donne les paramètres suivants:  $U_0 = -0.1923\text{m/s}$  et  $s = -0.2399\text{s}^{-1}$ . La figure (4.19) nous présente les résultats.

Ici, les trois profils implémentés évoluent de concert pour les deux paramètres:  $U_0$  et  $s$  augmentent successivement (en valeur absolue). Et encore une fois, on constate que ça a des effets inverses sur chacun des modèles. M1 surestime l'amplitude de plus en plus et sous-estime la fréquence pic de moins en moins. En effet, on est très proche des valeurs expérimentales pour le premier profil, avec une amplitude estimée à seulement 6% de la valeur expérimentale, alors que pour le troisième profil l'écart a doublé (presque 12%). La fréquence pic associée, elle, est de 5.03% pour le premier profil et de -4.38% pour le troisième, mais la variation est si faible qu'on peut considérer que, pour M1, lorsque le profil de courant se renforce (tant en cisaillement qu'en vitesse de surface), la fréquence associée reste inchangée. Notre second modèle, lui, surestime très légèrement la fréquence pic: l'écart entre le premier et le troisième profil passe de 2.7 à 4.1%. Par contre, l'amplitude est dramatiquement sous-estimée, et l'écart s'aggrave avec le courant: entre -58.6 et -72.3%. Et comme précédemment, le profil P1 est celui qui conduit aux meilleurs résultats, encore la preuve que l'évolution du profil de courant le long du fond ondulé a bien un impact sur la propagation de la houle.

**Lois d'approximations linéaires** Passons aux lois d'approximation linéaires, établies entre le premier et le dernier profil. Dans une logique de continuité, nous approcherons d'abord la vorticit   puis dans un deuxi  me temps le courant de surface.

**Interpolation du champ de cisaillement** Nous avons   tabli la loi d'approximation empirique suivante pour la vorticit  :

$$s(x) = -0.0010x - 0.1976 \quad (4.13)$$

Le courant de surface a   t   d  duit par conservation du d  bit, calcul   en entr  e de veine et

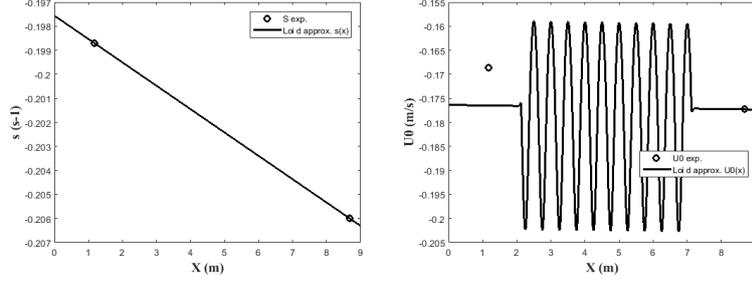


Figure 4.20: Modélisation par cisaillement horizontalement linéaire: a) approximation linéaire du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales

égal à :

$$Q(x) = Q(x_4) = U_0(x_4).h(x_4) - \frac{h(x_4)^2.s(x_4)}{2} = -0.034m^3s^{-1} \quad (4.14)$$

Cette nouvelle estimation du débit vaut presque le triple de la valeur estimée par la méthode précédente (écart de +217.75%), ce changement devrait forcément avoir un fort impact sur la modélisation. Notre loi d'approximation du cisaillement est représentée sur la figure (4.20), et on retrouve également l'estimation du courant de surface déduit par conservation de débit. On remarque immédiatement que par rapport à aux résultats de l'approche "évolution linéaire" de la section précédente, les résultats sont inversés (4.21): M2 surestimait la réflexion, à présent il la sous-estime, plus que M1 même, et aux hautes fréquences les deux modèles ont perdu leur évolution en décroissance douce pour reprendre une évolution basique en sinusoïdes. On remarque toutefois que, pour la première fois, les maxima successifs des sinusoïdes suivent parfaitement les points expérimentaux ente 1.25 et 1.45Hz. Concernant le pic de Bragg à proprement parler, M2 approche mieux la fréquence pic, à 4.58%, mais la réflexion est diminuée d'un tiers (écart de 36.22%). Nous savons que les problèmes d'amplitude sont liées à des erreurs dans l'estimation du courant de surface, nous avons donc tracé cette dernière sur la troisième partie de la figure (4.20) et on constate que certes, en début de canal, une petite erreur persiste (-0.176 au lieu de -0.168) mais elle a vraiment été bien réduite comparée aux simulations précédentes, et c'est peut-être la raison de la bonne estimation de la réflexion aux plus hautes fréquences. Nous poursuivons donc en tentant cette fois d'établir en premier une loi d'approximation pour le courant de surface.

**Interpolation du courant de surface** Par regression linéaire entre les valeurs mesurées expérimentalement en entrée et en sortie d'écoulement, nous avons établi la loi d'approximation suivante pour l'intensité du courant de surface:

$$U_0(x) = -0.0011x - 0.1674 \quad (4.15)$$

Le cisaillement sera ensuite calculé par conservation du débit, et les deux évolutions sont représentées sur la figure (4.22), le calcul de réflexion de la houle en présence de ce profil sera lui présenté sur la figure (4.23). Cette évolution est très surprenante, car à partir de 1.2Hz environ, les deux modèles présentent une allure très similaire, mais avant ce point, autour du pic de Bragg aucun des deux modèles ne présente de cohérence avec les résultats expérimentaux. Notre modèle M2 a complètement ignoré le phénomène de résonance (et présente un maximum de réflexion qui dépasse à peine 0.05) et M1 est encore une fois en deça de la réalité, avec

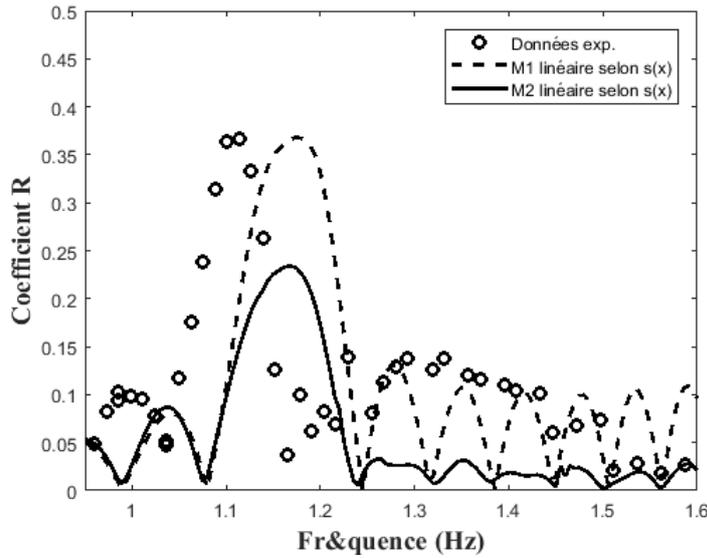


Figure 4.21: Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire de la vorticité

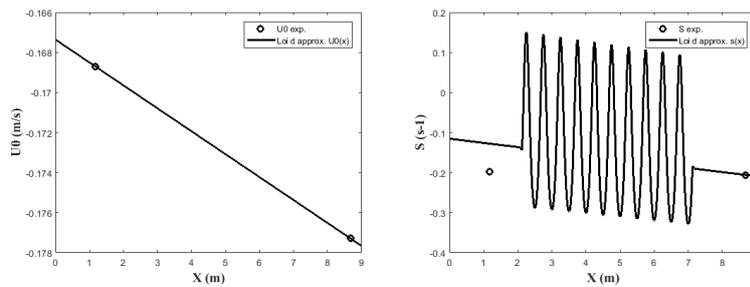


Figure 4.22: Modélisation par courant de surface horizontalement linéaire: a) approximation linéaire du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales

un maximum de réflexion qui dépasse péniblement 0.2 alors qu'expérimentalement, la houle est réfléchi à presque 40%. Si on regarde l'évolution du cisaillement induit, on remarque de très fortes variations au-dessus du fond ondulé, avec une vorticité majoritairement très positive (alors que pour l'instant, on s'intéresse aux vorticités relevées en entrée et en sortie d'écoulement, négatives).

Afin d'estimer si ce type de variations intermédiaires est pertinent, nous décidons d'inclure les mesures verticales relevées en deux points au-dessus du fond ondulé. Nous passons donc à des lois d'approximation de type polynomiales.

**Lois d'approximations polynomiales** Pour se prémunir directement de toute aberration aux limites du domaine, nous décidons d'établir directement des fonctions polynomiales d'ordre 5.

**Interpolation du champ de cisaillement** On impose tout d'abord la vorticité, par la loi empirique suivante (cf (4.24)):

$$s(x) = -0.0007x^5 + 0.0163x^4 - 0.1281x^3 + 0.3735x^2 - 0.2865x - 0.1987 \quad (4.16)$$

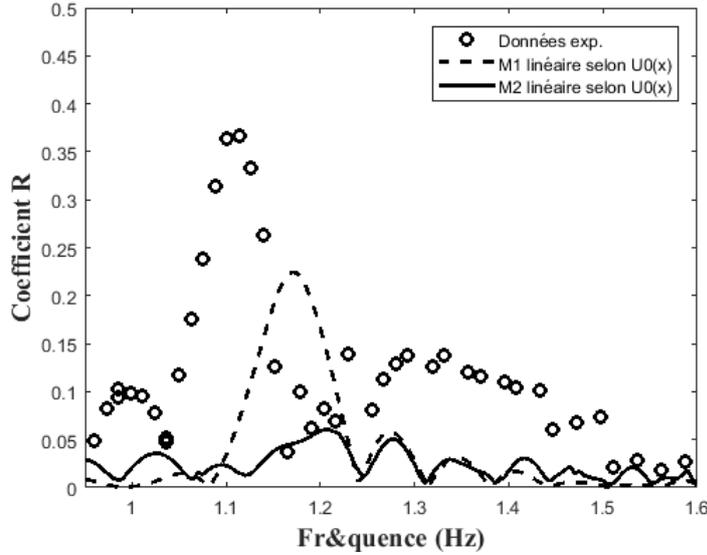


Figure 4.23: Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire du courant de surface

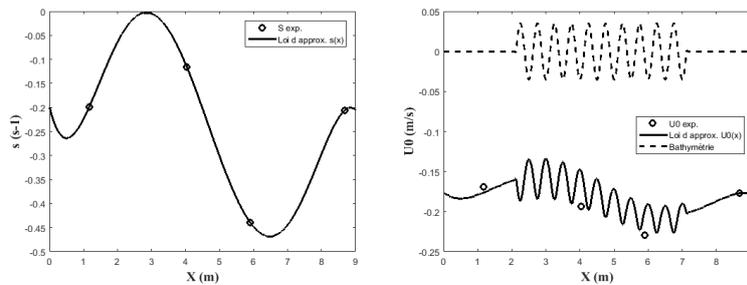


Figure 4.24: Modélisation par cisaillement horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales

On remarque que cette loi présente un point problématique, entre 2 et 3m, où la vorticité s'annule alors qu'elle est strictement négative sur l'ensemble du domaine. Par contre, cela ne semble pas avoir d'incident négative notable sur l'estimation de l'intensité du courant de surface. Cette dernière paraît assez pertinente, les points relevés sont très bien approchés par la courbe. Nous pourrions penser qu'il s'agit d'un hasard de placement des courantomètres, et que de façon générale l'intensité du courant peut être surestimée, mais on remarque que les deux mesures sont placées au-dessus de creux de la bathymétrie: l'étude détaillée du cisaillement dans les bosses du fond nous éclairera plus mais nous pouvons pour l'instant supposer que l'intensité du courant de surface suit la bathymétrie, et qu'au-dessus des creux on constate bien une baisse de la vitesse du courant en surface. Voyons à présent la réflexion calculée par nos modèles à partir de cette loi (4.25). On remarque immédiatement que cette modélisation manque de précision: le modèle M1, bien que se rapprochant des mesures expérimentales aux hautes fréquences, manque le pic de Bragg (surestimation de plus de 30%). M1 passe encore une fois complètement à côté et sous-estime la réflexion de plus de 40%.

**Interpolation du courant de surface** En imposant l'intensité du courant de surface, on ne retrouve aucun point problématique dans l'estimation (présentée figure (4.26)), aucun écart

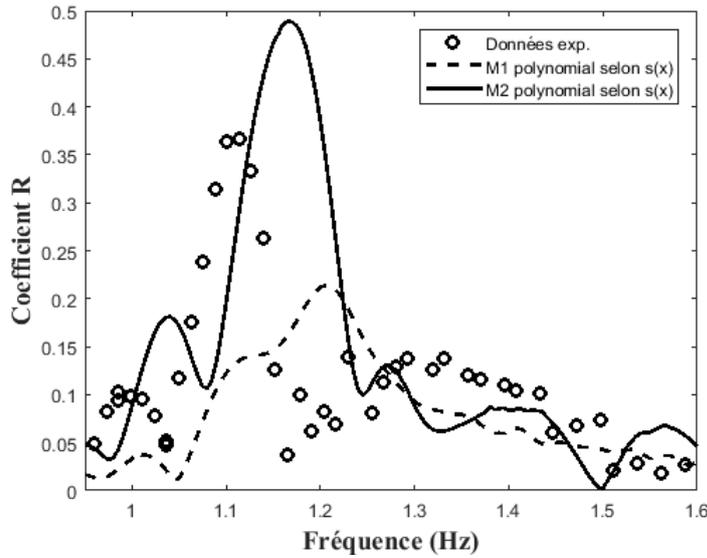


Figure 4.25: Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du cisaillement

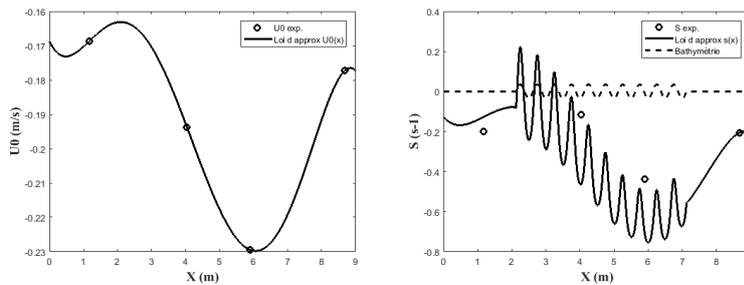


Figure 4.26: Modélisation par courant de surface horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales

trop important par rapport aux valeurs expérimentales. L'estimation déduite de la vorticité est également assez satisfaisante, la vorticité en début de canal est légèrement surestimée mais comme au-dessus du fond ondulé elle est légèrement sous-estimée, nous pouvons dire que l'allure est correcte. On peut juste regretter que les ondulations au-dessus du fond variable soient pour moitié d'un peu trop forte cambrure. Concernant les résultats, également présentés figure (4.26)), effectivement l'amélioration est flagrante. Si M1 surestime le maximum de réflexion (en amplitude - d'environ 33.2%- comme en fréquence - presque +6%-), M2 nous montre une courbe particulièrement intéressante. Le tout premier maximum local de réflexion est bien représenté en fréquence, malheureusement le pic de Bragg est un peu décalé (d'un peu plus de 7%) mais son amplitude, elle, est bien approchée, avec un écart de seulement 8.68%, le plus faible pour cette modélisation. L'évolution aux hautes fréquences est également prometteuse, on retrouve enfin l'évolution en décroissance douce, et elle est relativement bien corrélée avec les résultats expérimentaux jusqu'à la fin de la plage de fréquences.

**Bilan de cette méthode** Les tableaux (4.6) et (4.7) récapitulent les données des simulations précédentes, pour des paramètres de courant établis par approximation polynomiale du profil vertical de courant puis régression linéaire à la profondeur critique. La meilleure approximation

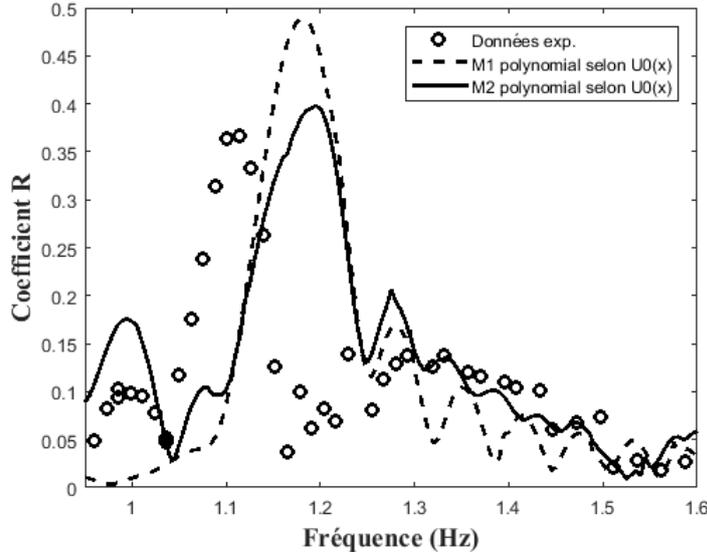


Figure 4.27: Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du courant de surface

Approximation	Paramètres	M1				
		f (Hz)	$\Delta$ (%)	a	$\Delta$ (%)	$\ \Delta_a\ $ (%)
cisailé unif.	$U_0 = -0.1687 \text{ m/s}, s = -0.1987 \text{ s}^{-1}$	1.17	5.03	0.3896	6.33	$\pm 8.81$
	$U_0 = -0.1773 \text{ m/s}, s = -0.2060 \text{ s}^{-1}$	1.17	5.03	0.3978	8.57	
	$U_0 = -0.1923 \text{ m/s}, s = -0.2399 \text{ s}^{-1}$	1.165	4.58	0.4086	11.52	
linéaire	$s(x)$	1.175	5.48	0.3683	0.52	$\pm 39.22$
	$U_0(x)$	1.17	5.03	0.2245	-77.92	
polyn. (5)	$s(x)$	1.205	8.17	0.2137	-41.68	$\pm 37.48$
	$U_0(x)$	1.18	5.92	0.4883	33.27	

Table 4.6: Récapitulatif des paramètres de résonance de Bragg (fréquence pic et maximum de réflexion) - méthode 2 - M1

revient au modèle M1, sur la modélisation linéaire selon le cisaillement, avec un maximum de réflexion approché à 0.52% d'écart. On constate toutefois que la modélisation polynomiale ne convient pas à ce modèle, et entraîne des écarts plus importants (entre 30 et 40%). Pour notre modèle M2 en revanche, cette modélisation donne de très bon résultats comme nous avons pu le voir notamment pour l'estimation de l'intensité du courant de surface.

Nous avons cependant émis des réserves sur notre façon d'estimer le cisaillement. Notre méthode, bien que dans l'idée déjà plus pertinente que la première, présentait parfois des incohérences sur les profils verticaux soumis à une inflexion à mi profondeur, et cela faussait parfois le calcul. De plus, elle présentait une vorticité toujours négative sur l'ensemble du canal, alors que des vorticités positives menaient   de meilleurs résultats en terme de réflexion de houle. Il nous est donc apparu nécessaire de poursuivre l'investigation et de mettre en place une troisième méthode pour estimer avec précision la vorticité et son évolution dans l'écoulement.

	M2				
	f (Hz)	$\Delta$ (%)	a	$\Delta$ (%)	$\ \Delta_a\ $ (%)
<b>cisaillé uniforme</b>	1.145	2.78	0.1515	-58.65	±65.57
	1.16	4.13	0.1256	-65.72	
	1.16	4.13	0.1013	-72.35	
<b>linéaire</b>	1.165	4.58	0.2337	-36.22	±59.89
	1.205	8.17	0.06024	-83.56	
<b>polynomial (ordre 5)</b>	1.165	4.58	0.489	33.46	±21.07
	1.195	7.27	0.3982	8.68	

Table 4.7: Récapitulatif des paramètres de résonance de Bragg (fréquence pic et maximum de réflexion) - méthode 2 - M2

x (m)	U0 (m/s)	s (s-1)	n°
1.17	-0.1010	0.4009	P1
4.07	-0.1817	0.0011	P2
5.93	-0.2809	-0.8641	P3
8.67	-0.2085	-0.4283	P4

Table 4.8: Caractéristiques des profils verticaux de courant établies par régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau

### Regression linéaire sur les deux-tiers de la colonne d'eau

Cette méthode a pour but d'allier l'avantage de la seconde méthode, à savoir se concentrer sur la partie supérieure de l'écoulement, et celle de la première, à savoir minimiser au maximum l'influence de points parasites. Nous avons décidé de déterminer le cisaillement et l'intensité du courant de surface par régression linéaire mais cette fois uniquement sur les deux-tiers de la colonne d'eau. Précisément, nous avons pris en compte les deux-tiers supérieurs des mesures à notre disposition, entre 6 et 22cm pour la plage la plus large. Cela nous donne une fenêtre de régression comprise entre 6 et 16cm de profondeur. La figure (4.28) présente les profils et la régression, que nous avons choisie de tracer jusqu'en  $z = 0$  afin de visualiser l'intensité du courant de surface, et vérifier sa cohérence. Les profils obtenus sont très satisfaisants, et sont très représentatifs du comportement de l'écoulement près de la surface. L'estimation de l'inclinaison des profils est notamment de bien meilleure qualité que la méthode précédente. Le tableau (4.8) résume les paramètres établis par cette méthode, et on retrouve un changement de signe de la vorticité.

**Loi d'approximation uniforme** Nos premières modélisations portent comme précédemment sur une évolution uniforme selon  $Ox$ . Cette approche avait en effet donné des résultats prometteurs lors de notre première série de calculs (partie 4.2.2). Nous avons choisi de calculer la réflexion de la houle en présence d'un courant verticalement cisaillé et horizontalement uniforme, et nous avons considéré plusieurs profils (cf (4.8)): P1, P4 ainsi qu'un profil intermédiaire établi comme la moyenne entre P1 et P4 et défini par  $U_0 = -0.15475m/s$  et  $s = 0.0085s^{-1}$ . Un second profil intermédiaire a été implémenté, il a été établi comme la moyenne des quatre profils verticaux:  $U_0 = -0.193025m/s$  et  $s = -0.2115s^{-1}$ . Ces quatre configurations nous donnent des combinaisons particulièrement intéressantes, avec des intensités de surface allant du simple au presque triple et des vorticités positives comme négatives, parfois opposées. La figure (4.29)

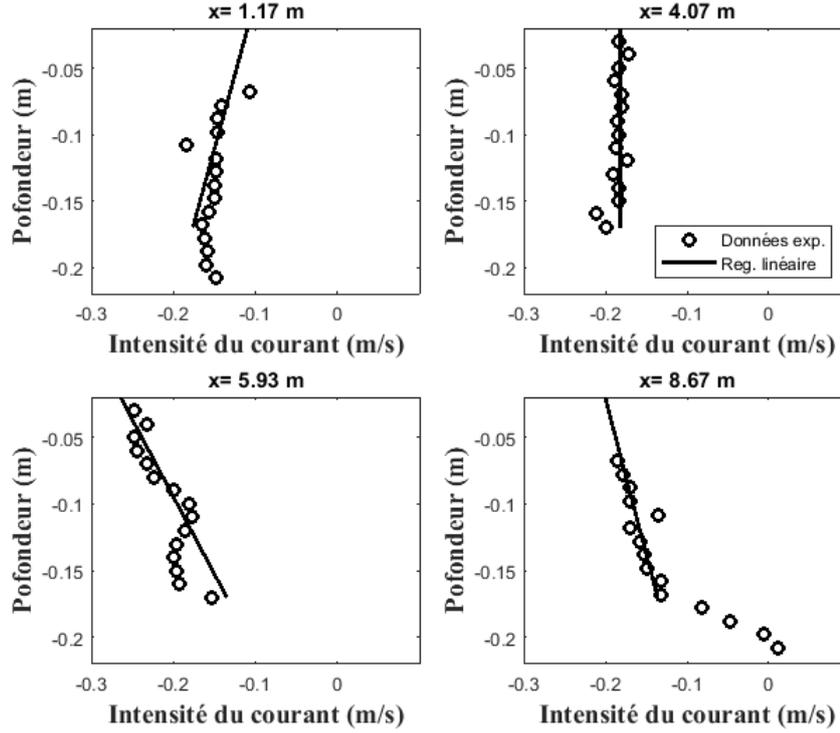


Figure 4.28: Profils verticaux: méthode d’estimation des paramètres du profil par régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d’eau

nous présente les résultats, profils réels d’un côté, profils virtuels de l’autre. Ce qui frappe en premier lieu c’est la meilleure corrélation entre les courbes issues de notre premier modèle M1 et les données expérimentales. Nous nous y attendions, nous avons largement démontré dans les configurations précédentes que M1 était particulièrement efficace dans des configurations de courant horizontalement uniforme. Le profil intermédiaire issu de la moyenne entre P1 et P4 donne la meilleure estimation de l’amplitude avec M1 (écart de seulement 4.88%) et la meilleure estimation de la fréquence (écart de 3.2%) avec M2. Par contre, aucune des configurations ne donne une approximation correcte en hautes fréquences.

**Loi d’approximation linéaire** Viennent ensuite les modélisations de type “évolution horizontalement linéaire”, d’abord pour la vorticité puis pour l’intensité du courant de surface.

**Interpolation du champ de du cisaillement** Par une méthode des moindres carrés, nous avons établi la loi d’approximation du cisaillement suivante:

$$s(x) = -0.1163x + 0.5814 \quad (4.17)$$

présentée sur la figure (4.30). Dans cette modélisation, le débit entrant est calculé avec les paramètres du profil P4 (voir tableau (4.8)):

$$Q(x) = Q(x_4) = U_0(x_4).h(x_4) - \frac{h(x_4)^2.s(x_4)}{2} = -0.0355m^3s^{-1} \quad (4.18)$$

Il est très proche du débit établi dans la partie précédente, signe que nous convergeons vers une estimation pertinente des paramètres de l’écoulement. La figure (4.30) présente l’évolution

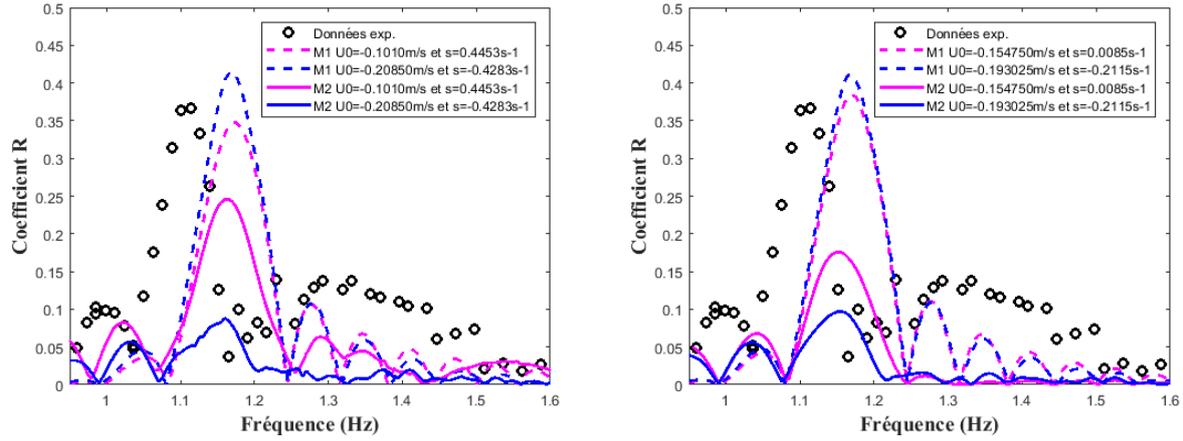


Figure 4.29: Modélisation par courant cisailé horizontalement uniforme: a) Profils réels P1 et P4 - b) Profils intermédiaires

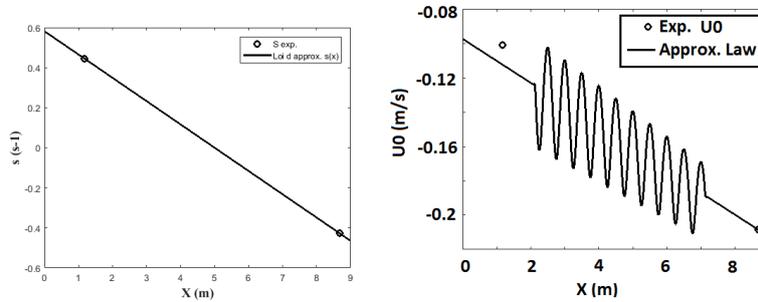


Figure 4.30: Modélisation par cisaillement horizontalement linéaire: a) approximation linéaire du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales

de l'intensité du courant de surface, déduite par conservation du débit. On retrouve logiquement l'évolution sinusoïdale au-dessus du fond ondulé et on constate qu'en début de canal, la vitesse est légèrement sous-estimée. Sur la même figure, on peut analyser les résultats renvoyés par les modèles M1 et M2. On constate immédiatement une baisse de la qualité de la modélisation par M1: l'écart entre le maximum de réflexion calculé et celui mesuré augmente à presque 33%, quand il est en moyenne de 8.7% pour une approximation type courant uniforme. De la même façon, on constate une amélioration du comportement de M2: là où avant l'écart avec le maximum de réflexion tournait autour de 59%, ici il tombe à 20.7%. Encore trop approximatif, mais c'est mieux. On remarque aussi que M1 approche bien la réflexion aux hautes fréquences, malgré les maxima et minima successifs.

**Interpolation du courant de surface** A présent, on établit une loi empirique d'approximation de l'intensité du courant de surface, linéaire entre les profils P1 et P4:

$$U_0(x) = -0.0143x - 0.0843 \quad (4.19)$$

et la vorticité est déduite par conservation du débit (4.18). On remarque que cette loi (4.19) est très similaire de celle établie dans la partie précédente (4.15), du fait des paramètres très proches. Les deux évolutions sont présentées sur la figure (4.32) et cette fois, c'est la vorticité qui est légèrement surestimée. On constate aussi que la cambrure des sinusoïdes au-dessus du

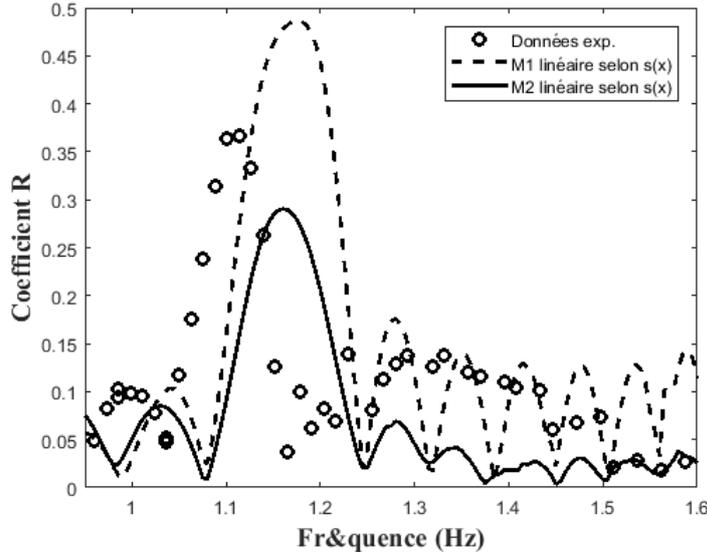


Figure 4.31: Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire de la vorticité

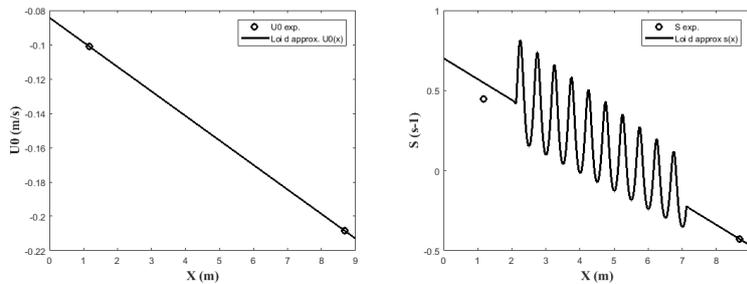


Figure 4.32: Modélisation par courant de surface horizontalement linéaire: a) approximation linéaire de l'intensité du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales

Le fond ondulé est plus importante. Selon les résultats renvoyés par les modèles (4.33), cela a effectivement posé problème, comme précédemment (4.22). Notre modèle M1 sous-estime le maximum de réflexion, mais l'écart reste en valeur absolue du même ordre de grandeur que celui constaté pour la modélisation précédente (-41.8%). Pour M2 en revanche, le pic de Bragg chute (-75% d'écart) et l'estimation de la réflexion n'est pas plus pertinente sur le reste de la plage de fréquence.

**Loi d'approximation polynomiale** Pour améliorer la précision de notre modélisation, nous intégrons l'évolution au-dessus du fond ondulé et passons à des lois d'approximation de type polynômes d'ordre quatre.

**Interpolation du champ de cisaillement** On commence par la loi d'approximation de la vorticité, établie par la méthode des moindres carrés:

$$s(x) = -0.0013x^5 + 0.0294x^4 - 0.2167x^3 + 0.5515x^2 - 0.3932x + 0.4453 \quad (4.20)$$

et le courant de surface sera calculé par conservation du débit. Les résultats, ainsi que la courbe de réflexion de la houle, sont présentés sur la figure (4.34). En observant l'évolution du

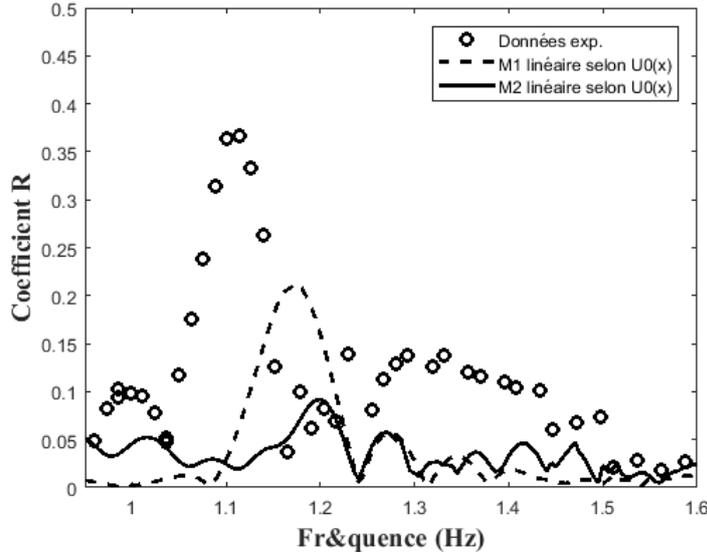


Figure 4.33: Réflexion de la houle selon l'approximation linéaire du courant de surface

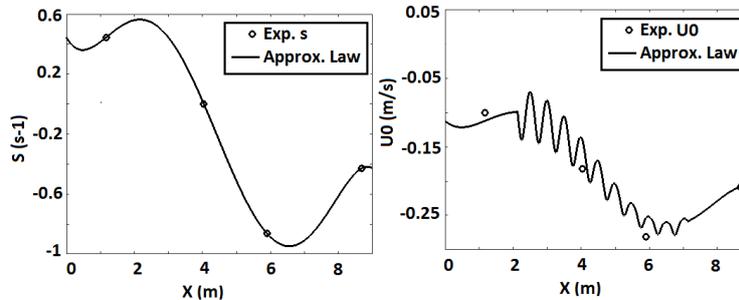


Figure 4.34: Modélisation par cisaillement horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales

courant de surface, on remarque une forte intensité (négative, donc opposée à la propagation des vagues) vers la fin du fond ondulé, à environ  $-30\text{cm/s}$  (bien qu'en accord avec la valeur estimée par régression linéaire sur les deux-tiers supérieurs de la colonne d'eau). Cela se ressent sur le calcul de réflexion: contrairement à précédemment, l'évolution aux hautes fréquences est très perturbée, on suppose alors par un phénomène de blocage de la houle par le courant. La représentation du pic de Bragg s'est cependant améliorée pour les deux modèles: l'amplitude calculée par M1 présente un écart de seulement 11.03%, et M2 de 34.63% (alors que l'écart était en moyenne de 59% pour un courant modélisé constant et 48% pour un courant modélisé linéaire selon  $Ox$ ).

**Interpolation du courant de surface** Déduire l'intensité du courant de surface au lieu de l'estimer directement à partir des valeurs expérimentales a posé problème dans la modélisation précédente, nous y remédions ici et établissons la loi d'évolution empirique suivante:

$$U_0(x) = -0.0002x^5 + 0.0033x^4 - 0.023x^3 + 0.0531x^2 - 0.0356x - 0.1010 \quad (4.21)$$

Elle est représentée sur la figure (4.36) avec l'évolution de la vorticité déduite par conservation du débit. La courbe de réflexion de la houle selon la fréquence est présentée sur la figure

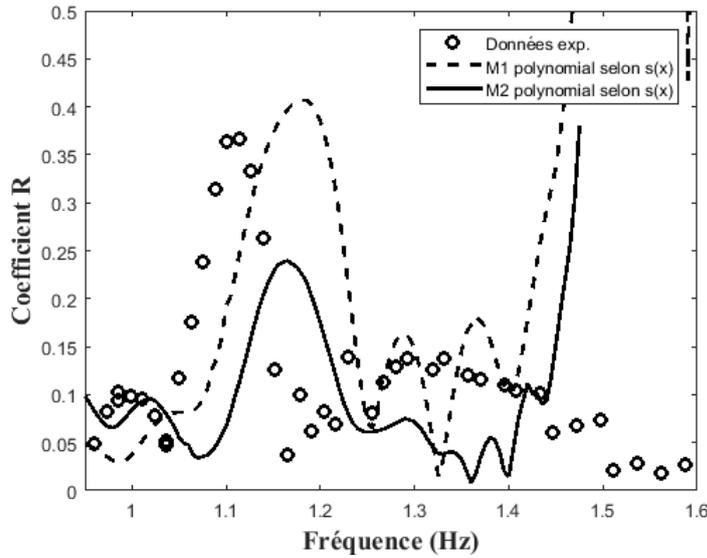


Figure 4.35: Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du cisaillement

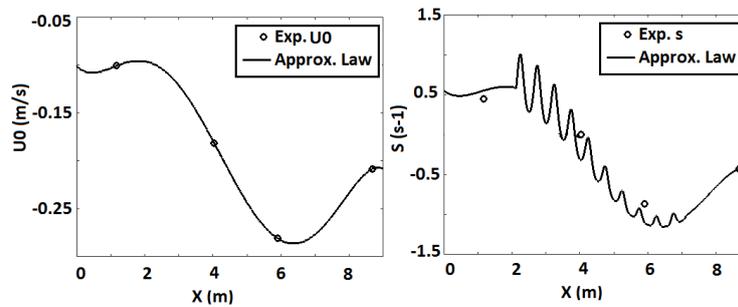


Figure 4.36: Modélisation par courant de surface horizontalement polynomial: a) approximation polynomiale d'ordre 5 du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales

(4.37). Étonnamment, le modèle M1 donne de meilleurs résultats, on constate un écart de -30% environ entre l'amplitude calculée du pic de Bragg et celle mesurée, mais pour M2, l'écart se creuse jusqu'à -54%. On remarque là encore un blocage de courant, qui apparaît encore plus tôt que dans le cas précédent (aux alentours de 1.45Hz). Nous avons peut-être un indice en regardant l'évolution déduite de la vorticité: en début de canal, l'allure oscillante imposée par le fond ondulé et la conservation du débit impose des variations brutales, avec parfois un cisaillement égal à plus du double de ce qu'il a été estimé d'après les mesures. On remarque ainsi qu'en  $x = 1.17m$ , la valeur expérimentale est un peu en-dessous de  $0.5s^{-1}$ , alors que juste après, au début du fond ondulé vers 2m, elle est numériquement estimée à plus de  $1s^{-1}$ . Ces variations s'adoucissent par la suite, mais cela ne suffit peut-être pas à permettre à la houle de se propager. En effet, lorsque la houle arrive sur le fond ondulé, elle rencontre un courant de surface certes "faible" mais avec le cisaillement, il s'intensifie très rapidement sur la colonne d'eau et à mi-profondeur, on a déjà une vitesse de  $-22cm/s$  et au fond de presque  $-32cm/s$ . A contrario, à la sortie du fond ondulé nous avons un écoulement complètement différent: le courant de surface atteint presque les  $30cm/s$  et la vorticité dépasse  $-1$ , donc à mi profondeur le courant tombe à  $-18cm/s$  et au fond il est quasi nul ( $8cm/s$  environ). Pourtant, de façon générale nos lois d'approximation semblent bien approcher les points de mesure...

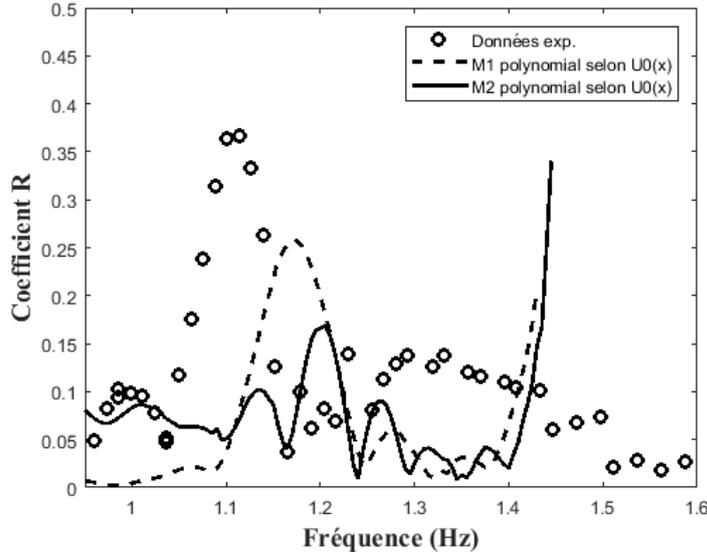


Figure 4.37: Réflexion de la houle selon l'approximation polynomiale du courant de surface

Approximation	Paramètres	M1				
		f (Hz)	$\Delta$ (%)	a	$\Delta$ (%)	$\ \overline{\Delta_a}\ $ (%)
cisailé unif.	$U_0 = -0.2085 \text{ m/s}, s = -0.4283 \text{ s}^{-1}$	1.17	5.03	0.4143	13.07	±8.79
	$U_0 = -0.1010 \text{ m/s}, s = 0.4453 \text{ s}^{-1}$	1.175	5.48	0.3476	-5.13	
	$U_0 = -0.15475 \text{ m/s}, s = 0.0085 \text{ s}^{-1}$	1.17	5.03	0.3843	4.88	
	$U_0 = -0.193025 \text{ m/s}, s = -0.2115 \text{ s}^{-1}$	1.165	4.58	0.4106	12.06	
linéaire	$s(x)$	1.175	5.48	0.4872	32.97	±37.42
	$U_0(x)$	1.175	5.48	0.213	-41.87	
polyn. (5)	$s(x)$	1.18	5.92	0.4068	11.03	±20.2
	$U_0(x)$	1.17	5.03	0.2588	-29.37	

Table 4.9: Récapitulatif des paramètres de résonance de Bragg (fréquence pic et maximum de réflexion) - méthode 3 - M1

**Bilan de cette étude** Les tableaux (4.9) et (4.10) récapitulent les caractéristiques des configurations que nous avons testées dans cette partie. Malheureusement, nous n'aboutissons pas à une modélisation correcte du comportement de la houle avec notre modèle M2 ici. Seul le modèle M1, en configuration de courant cisailé uniforme, nous donne une estimation acceptable du maximum de réflexion de la houle.

Nous avons vu que selon la manière d'établir les caractéristiques du courant à partir des profils verticaux mesurés, les résultats variaient du tout au tout, même si les paramètres ne semblent pas différer de beaucoup. Nous avons également constaté que notre dernière méthode, pourtant la plus cohérente a priori, nous donnait pourtant des résultats médiocres. La meilleure estimation de l'amplitude du pic de Bragg vient du modèle M1, à presque 5%, tandis que M2, pourtant plus complet, ne s'en approche pas à moins de 20%. Nous avons donc deux possibilités. Nous pourrions tenter d'établir une autre méthode d'estimation des paramètres à partir des profils, mais cela reste difficile d'établir une tendance en minimisant l'influence de paramètres parasites, et nous avons tout de même obtenus des paramètres similaires en exploitant de deux façon différente la partie supérieure de l'écoulement. Nous pouvons également exploiter les autres données que nous avons à disposition: avec un jeu de paramètres plus grand, nous aurons

	M2				
	f (Hz)	$\Delta$ (%)	a	$\Delta$ (%)	$\ \Delta_a\ $ (%)
<b>cisaillé uniforme</b>	1.16	<i>4.13</i>	0.08827	<i>-75.91</i>	±58.57
	1.165	<i>4.58</i>	0.2459	<i>-32.89</i>	
	1.15	<i>3.23</i>	0.1759	<i>-51.99</i>	
	1.155	<i>3.68</i>	0.09709	<i>-73.5</i>	
<b>linéaire</b>	1.16	<i>4.13</i>	0.2905	<i>-20.72</i>	±47.84
	1.2	<i>7.72</i>	0.09179	<i>-74.95</i>	
<b>polynomial (ordre 5)</b>	1.165	<i>4.58</i>	0.2395	<i>-34.63</i>	±44.31
	1.205	<i>8.17</i>	0.1686	<i>-53.98</i>	

Table 4.10: Récapitulatif des paramètres de résonance de Bragg (fréquence pic et maximum de réflexion) - méthode 3 - M2

plus de facilités pour établir l'évolution du profil de courant le long du canal, et comprendre ce qu'il s'y passe.

### 4.3.2 Prise en compte de l'évolution du courant au-dessus du fond: modélisation polysinusoidale

#### Sans houle

Nous avons recueilli de nombreux profils verticaux très rapprochés au-dessus du fond sinusoidal, avec et sans houle, et un échantillon a été présenté dans le chapitre trois, sur les figures (3.31) et (3.34). Nous pouvons exploiter ces mesures pour en extraire deux sets de données supplémentaires, de cisaillement et de courant de surface, en l'absence de houle tout d'abord (dans notre logique de continuité, et car la figure (3.31) nous montre une certaine similarité entre les profils relevés sans et avec la houle). Pour cela, nous avons procédé avec la troisième méthode: par régression linéaire sur les deux-tiers supérieurs de la colonne d'eau. L'annexe 1 résume l'ensemble des travaux d'exploitation des profils: les schémas de prise de mesure, les profils recueillis en l'absence de houle et le traitement par régression linéaire. Pour donner un exemple, la figure (3.32) présente les profils recueillis sur la septième longueur d'onde de fond (dans le sens de propagation de la houle, ou la troisième en partant de la plage) et les régressions linéaires associées. Nous avons la possibilité de vérifier l'efficacité de notre méthode en comparant les courants de surface obtenus par cette méthode à ceux effectivement relevés par les courantomètres, en l'absence de houle. Les résultats sont présentés sur la figure (4.38), on rappelle que dans le cas des valeurs relevées par les courantomètres (associées à la légende "U0 exp."), chaque couleur symbolise les mesures relevées par une même sonde, par souci de clarté.

D'un point de vue général, l'approximation est assez proche du courant effectivement relevé dans le canal. Si les mesures avoisinent les 20cm/s en moyenne, notre méthode d'estimation nous donne un profil moyen aux alentours de 18cm/s. On retrouve dans les deux cas quelques mesures bien supérieures à la moyenne (au-dessus des sommets du fond ondulé). Le courant de surface estimé après le fond ondulé, en  $x = 8.67m$ , est particulièrement en accord avec les mesures relevées juste avant. Par contre, notre estimation en début de canal, en  $x = 1.17m$ , est clairement supérieure à ce qui semble se passer réellement dans le canal: à cet endroit, notre méthode estime le courant de surface à environ 10cm/s, alors que quelques centimètres plus loin (toujours sur fond plat), nous avons mesuré un courant de surface d'environ 18cm/s. Nous

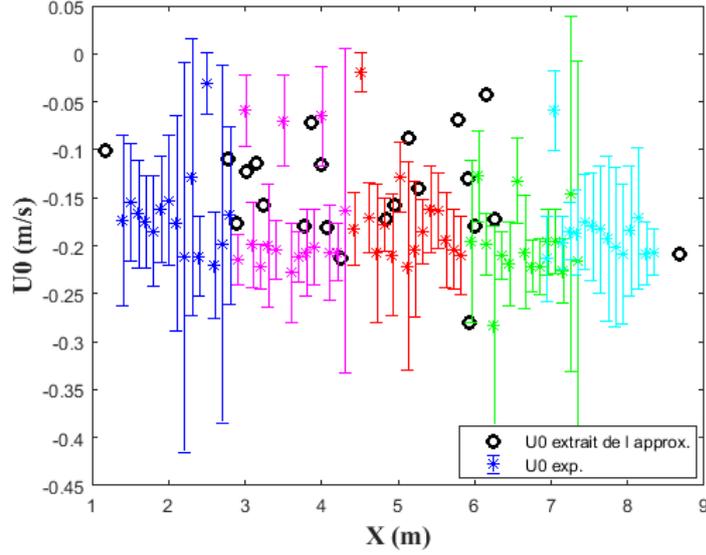


Figure 4.38: Comparaison entre le courant de surface relevé par les courantomètres en l'absence de houle et celui estimé à partir des profils verticaux par régression linéaire sur les deux tiers de la colonne d'eau

devrons garder ce point à l'esprit lorsque nous analyserons les résultats issus de ces paramètres estimés.

Une fois que nous avons établi toutes les vorticités et toutes les intensités du courant de surface sur les quatre longueurs d'onde de fond que nous avons exploitées, il est temps d'établir une loi d'approximation. Nous avons vu précédemment que la conservation du débit faisait apparaître des oscillations au-dessus du fond dans l'évolution du paramètre déduit, et qu'on retrouvait ces oscillations dans les mesures du courant de surface avec comme sans houle, comme l'illustrent les figures (3.19) et (3.21) par exemple. Nous avons donc décidé d'estimer les paramètres de courant selon une loi que nous appellerons "polysinusoidale": une allure générale de polynôme d'ordre cinq (pour les quatre profils verticaux) avec une partie sinusoidale au-dessus du fond. Comme nous avons constaté expérimentalement qu'au-dessus du fond ondulé, le courant de surface présentait des oscillations de même longueur d'onde que la bathymétrie, nous intégrons cette caractéristique à nos modélisations également. Pour un paramètre P (soit le cisaillement, soit l'intensité du courant de surface), la loi d'approximation se présente donc sous la forme:

$$P(x) = X_1x^5 + X_2x^4 + X_3x^3 + X_4x^2 + X_5x + X_6 + X_7.H(x) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_{bathy}}x\right) + X_8.H(x) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_{bathy}}x\right) \quad (4.22)$$

avec  $H(x)$  une fonction-porte qui va lisser la courbe à l'entrée et à la sortie de la partie ondulée et éviter toute discontinuité dans les calculs de dérivées de toute sorte. Elle s'écrit à l'aide d'une constante de raideur  $R = 10$  et des abscisses des bornes du fond ondulé  $Fr_1 = 2.05m$  et  $Fr_2 = 7.05m$ :

$$H(x) = \tanh(R.(x - Fr_1)) - \tanh(R.(x - Fr_2)) \quad (4.23)$$

Ensuite, chaque loi d'approximation nécessite huit constantes  $X_i, i \in [1 : 8]$  qui vont être déterminées en écrivant le système matriciel de taille 8x8 suivant:

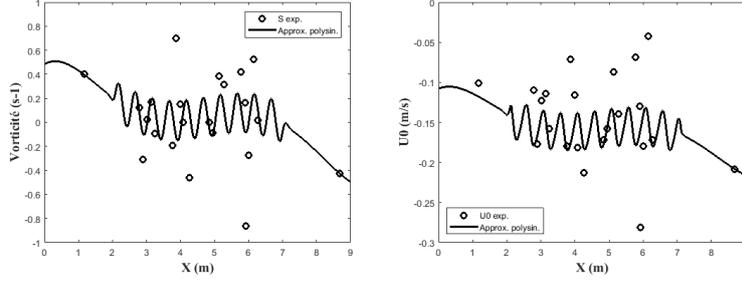


Figure 4.39: Modélisation par cisaillement horizontalement polysinusoidal: a) approximation polysinusoidal du cisaillement le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du courant de surface et les mesures expérimentales

$$\begin{pmatrix} \sum_i x_i^{10} & \sum_i x_i^9 & \sum_i x_i^8 & \sum_i x_i^7 & \sum_i x_i^6 & \sum_i x_i^5 & HC5 & HS5 \\ \sum_i x_i^9 & \sum_i x_i^8 & \sum_i x_i^7 & \sum_i x_i^6 & \sum_i x_i^5 & \sum_i x_i^4 & HC4 & HS4 \\ \sum_i x_i^8 & \sum_i x_i^7 & \sum_i x_i^6 & \sum_i x_i^5 & \sum_i x_i^4 & \sum_i x_i^3 & HC3 & HS3 \\ \sum_i x_i^7 & \sum_i x_i^6 & \sum_i x_i^5 & \sum_i x_i^4 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^2 & HC2 & HS2 \\ \sum_i x_i^6 & \sum_i x_i^5 & \sum_i x_i^4 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i & HC1 & HS1 \\ \sum_i x_i^5 & \sum_i x_i^4 & \sum_i x_i^3 & \sum_i x_i^2 & \sum_i x_i & 24 & HC0 & HS0 \\ HC5 & HC4 & HC3 & HC2 & HC1 & HC0 & H2C2 & H2CS \\ HS5 & HS4 & HS3 & HS2 & HS1 & HS0 & H2CS & H2S2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i s_i x_i^5 \\ \sum_i s_i x_i^4 \\ \sum_i s_i x_i^3 \\ \sum_i s_i x_i^2 \\ \sum_i s_i x_i \\ \sum_i s_i \\ \sum_i s_i H_i \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \\ \sum_i s_i H_i \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

avec  $\forall P \in [0 : 5]$   $HCP = \sum_i H_i \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) x_i^P$  (par exemple  $HC5 = \sum_i H_i \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) x_i^5$ ,  $HC4 = \sum_i H_i \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) x_i^4$  et ainsi de suite jusqu'à  $HC0 = \sum_i H_i \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ ). Sur la même logique, nous avons établi les termes  $HSP = \sum_i H_i \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) x_i^P$ . En reprenant le modèle de notation, on définit les termes  $H2C2 = \sum_i H_i^2 \cos^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ ,  $H2S2 = \sum_i H_i^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$  et  $H2CS = \sum_i H_i^2 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$ .

En effet, cela revient à écrire le système d'équations suivantes:  $\forall x \in [1 : 10]m$

$$X_1 x^{10} + X_2 x^9 + X_3 x^8 + X_4 x^7 + X_5 x^6 + X_6 x^5 + X_7 H \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) x^5 + X_8 H \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) x^5 = s x^5 \quad (4.25)$$

ce qui, une fois divisé par  $x^5$ , nous redonne bien l'équation (4.22), et ainsi de suite sur chacune des lignes. Le système (4.24) nous donne bien un système de huit équations à huit inconnues, qui sera résolu sous Matlab.

**Interpolation du champ de cisaillement** On commence par imposer le cisaillement selon une loi de type (4.22) avec  $X_1 = 4,95 \cdot 10^{-4}$ ,  $X_2 = -1,199 \cdot 10^{-2}$ ,  $X_3 = 9,80 \cdot 10^{-2}$ ,  $X_4 = -3,01 \cdot 10^{-1}$ ,  $X_5 = 1,61 \cdot 10^{-1}$ ,  $X_6 = 4,85 \cdot 10^{-1}$ ,  $X_7 = -4,43 \cdot 10^{-2}$ ,  $X_8 = 7,05 \cdot 10^{-2}$ . Le courant de surface est déduit par conservation du débit, et nous choisissons de conserver la valeur établie en (4.18) puisque nous avons conservé la même méthode pour estimer les paramètres de l'écoulement (et que nous avons donc les mêmes caractéristiques pour le profil d'entrée relevé en  $x = 8.67m$ ).

La loi d'approximation du cisaillement est présentée sur la figure (4.39) et elle nous paraît appropriée. Elle passe par les quatre points de mesure associés au cisaillement extraits des quatre profils verticaux répartis le long du canal. Ces points donnent l'allure polynomiale de

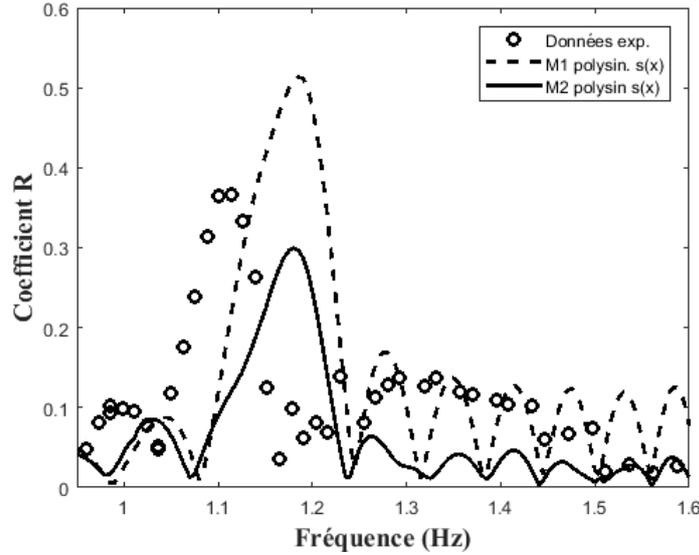


Figure 4.40: Réflexion de la houle selon l'approximation polysinusoidale de la vorticité

la fonction. Mais l'aspect sinusoidal est particulièrement réussi: on remarque que la courbe passe exactement par plus de la moitié des points et que ceux qui restent sont en accord (les points expérimentaux sous la courbe sont tout de même placés dans l'alignement des creux de la sinusoïde, et ceux placés au-dessus dans l'alignement des crêtes). Le choix d'une périodicité égale   la périodicité du fond est bien cohérent. On pourrait émettre un bémol sur l'estimation de l'amplitude de la sinusoïde: un peu moins de la moitié des points restent de part et d'autre de la courbe, et augmenter l'amplitude aurait permis de passer par la plupart d'entre eux. On s'intéresse   l'évolution déduite du courant de surface, présentés sur la même figure. Concernant les points issus des profils verticaux, nous n'avons qu'une remarque   formuler: le courant de surface est très légèrement sous-estimé vers  $x = 1m$ . Concernant l'évolution au-dessus du fond ondulé, la courbe passe là aussi par la moitié des points et sous-estime presque toute l'autre moitié, de peu cependant. L'évolution du coefficient de réflexion calculée par nos modèles sur la base de ces approximations est présentée sur la figure (4.40). Malgré une évolution en maxima successifs, le modèle M1 produit une belle approximation de la réflexion de la houle aux hautes fréquences, entre 1.25 et 1.45Hz. Concernant l'estimation de la fréquence pic, on note une nette amélioration du modèle M2 ( cart constaté de seulement 5.92%) qui surpasse même de peu le modèle M1 (+3.67M%). Il fait aussi mieux que M1 dans l'estimation de l'amplitude: -18.15% d'écart contra plus de 40% pour M1. Ce résultat est meilleur que tous ceux obtenus avec les lois d'approximation uniformes, linéaires ou polynomiales issues de la troisième méthode (régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau) (cf (4.9)), et démontre l'intérêt d'une loi d'approximation de type polysinusoidale. Dans les études précédentes, les résultats ont quasiment toujours été meilleurs lorsqu'on approchait l'intensité du courant de surface, c'est donc ce que nous allons faire ici aussi.

**Interpolation du courant de surface** Pour ce faire, on reste donc sur une loi de type (4.22) avec  $X_1 = 2,91.10^{-5}$ ,  $X_2 = -6,28.10^{-4}$ ,  $X_3 = 4,27.10^{-3}$ ,  $X_4 = -1,01.10^{-2}$ ,  $X_5 = -1,07.10^{-3}$ ,  $X_6 = -9,88.10^{-3}$ ,  $X_7 = 1,63.10^{-3}$ ,  $X_8 = 2,39.10^{-2}$ . Cette loi est présentée sur le graphe (4.41) et l'on constate que l'approximation est plutot réussie, très peu de points sont en dehors de la courbe car l'amplitude de la sinusoïde est plus grande: précédemment, le courant de surface variait grosso-modo entre -13 et -18cm/s, ici la plage est plus large, entre -7 et -18 cm/s.

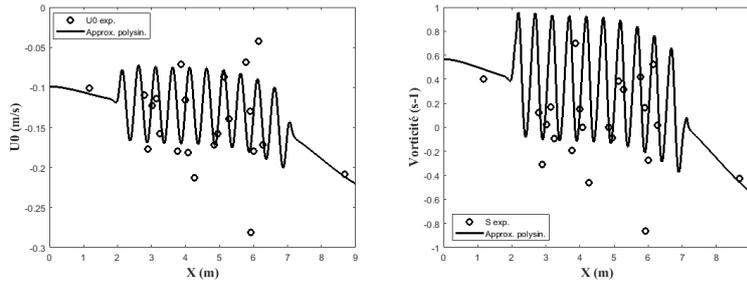


Figure 4.41: Modélisation par courant de surface horizontalement polysinusoidal: a) approximation polysinusoidale du courant de surface le long du canal - b) Comparaison entre la loi d'approximation du cisaillement et les mesures expérimentales

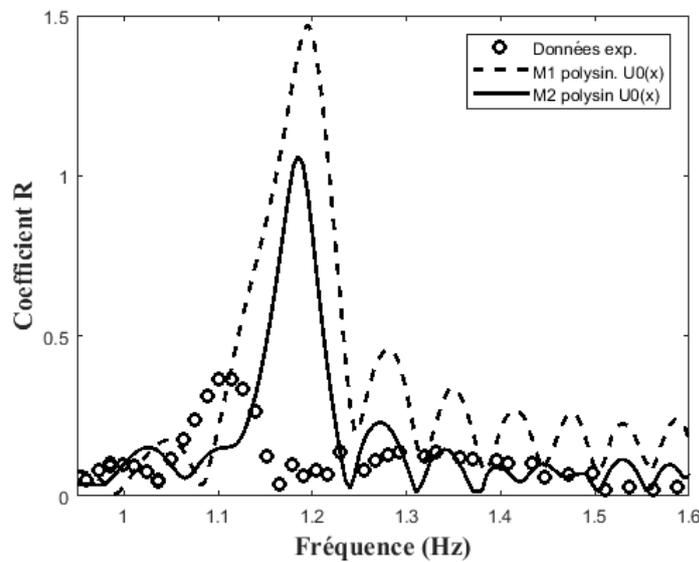


Figure 4.42: Réflexion de la houle selon l'approximation polysinusoidale du courant de surface - c)

Le cisaillement est déduit par conservation du débit (4.18), et en observant le graphe associé (4.41), on constate que la gamme de valeurs est également plus grande. Là où précédemment la vorticité variait entre  $0.2$  et  $-0.2s^{-1}$ , elle varie ici entre  $1$  et  $-0.2s^{-1}$ . Certes, beaucoup plus de points sont approchés par la courbe, mais des vorticités trop fortes et des transitions trop brutales pourraient conduire à des comportements aberrants. On pense notamment aux valeurs approchant les  $1s^{-1}$  prises par l'approximation sur presque toute la longueur du fond ondulé, alors qu'expérimentalement, on observe une mesure à  $0.7s^{-1}$  et toutes les autres inférieures à  $0.2s^{-1}$  sur la première moitié du fond ondulé, et inférieures à  $0.6s^{-1}$  sur la fin de la zone de bathymétrie variable (entre  $5$  et  $6.5m$ ). La courbe de variation du coefficient de réflexion est présentée sur la figure (4.42). Comme nous nous y attendions, cette surestimation exagérée de la vorticité a causé des problèmes. Nos deux modèles ont surestimé la réflexion de la houle à des taux dépassant la raison: presque  $1.5$  pour M1 et plus de  $1$  pour M2. Le seul point positif est un comportement cohérent de la houle calculé par M2 aux hautes fréquences, entre  $1.3$  et  $1.6Hz$ . Mis à part cela, nous savons à présent qu'il va falloir veiller à rester dans des valeurs cohérentes de cisaillement.

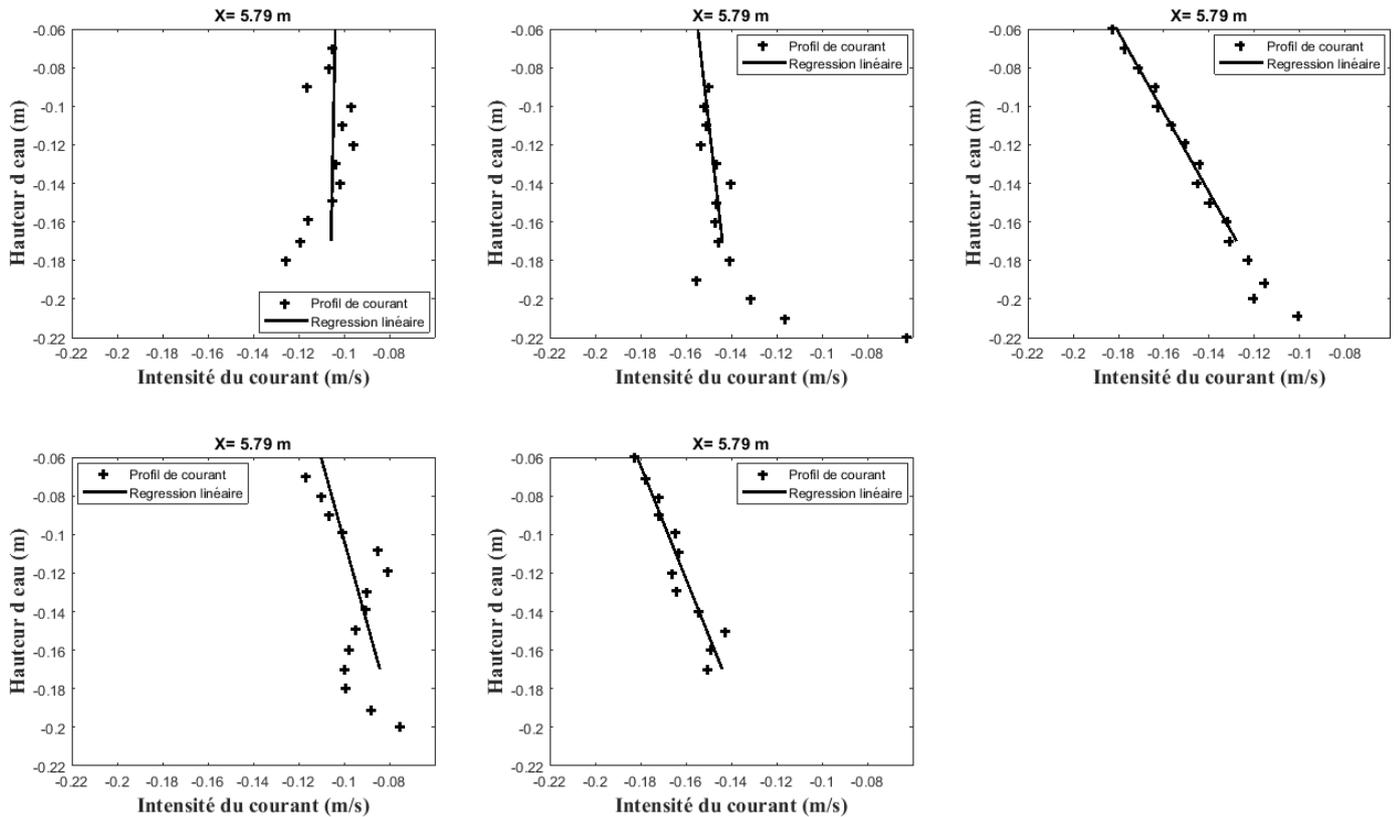
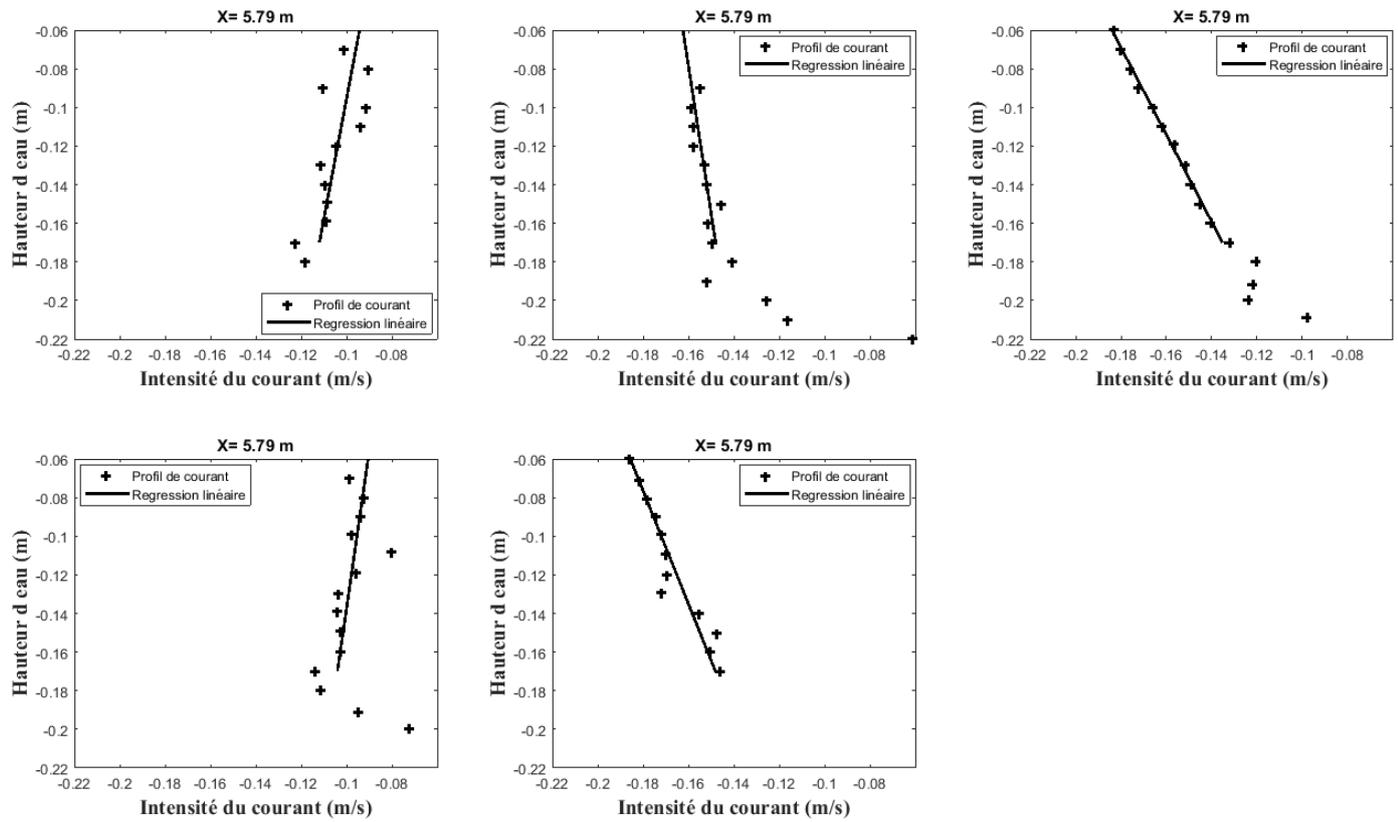


Figure 4.43: Profils verticaux recueillis dans la septième longueur d’onde de fond sous la houle de fréquence  $f=1.58\text{Hz}$

### Avec la houle

Nous avons comparé les profils de courant relevés en l’absence de houle avec ceux relevés aux mêmes positions mais en présence de houle, sous quatre fréquences caractéristiques choisies pour être à elles seules représentatives de l’ensemble de la plage testée. On rappelle que les fréquences choisies sont les suivantes:  $1.58\text{Hz}$  (soit  $T=0.63\text{s}$ ),  $1.35\text{Hz}$  (soit  $T=0.74\text{s}$ ),  $1.12\text{Hz}$  (soit  $T=0.89\text{s}$ ) et  $0.95\text{Hz}$  (soit  $T=1.05\text{s}$ ). Nous avons exploité l’ensemble des profils à notre disposition relevés avec ces quatre fréquences de houle: les quatre profils verticaux (3.23) et tous les profils recueillis dans les bosses du fond ondulé, et nous leur avons appliqué la troisième méthode, c’est-à-dire une régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d’eau pour établir le cisaillement et l’intensité du courant en surface. Les profils relevés au-dessus du fond ondulé n’ont pour l’instant été présentés qu’en l’absence de houle (3.34), mais ils sont tous présentés dans l’annexe 1. Nous allons ici simplement présenter les profils recueillis sur la septième longueur d’onde de fond, sous les quatre fréquences de houle, avec leur régression (4.43,4.44,4.45,4.46). Pour la majorité des profils, la régression est particulièrement représentative du comportement de l’écoulement (hors couche limite). Il arrive parfois qu’on constate un point d’inflexion aux alentours de 12cm de profondeur, mais on l’impute soit à un détachement tourbillonnaire résiduel et ponctuel, soit à l’influence d’un des barreaux transverse de la grille (dont nous ne sommes pas si loin sur cette longueur d’onde de fond).

Une fois que nous avons estimé le cisaillement sur chaque profil à chaque fréquence, nous comparons ces estimations avec les mesures des courantomètres (comme précédemment sans la houle) afin d’avoir un recul sur la qualité de nos estimations et des calculs qui suivront. Les comparaisons sont présentées sur la figure (4.47) et on constate une nette amélioration de la



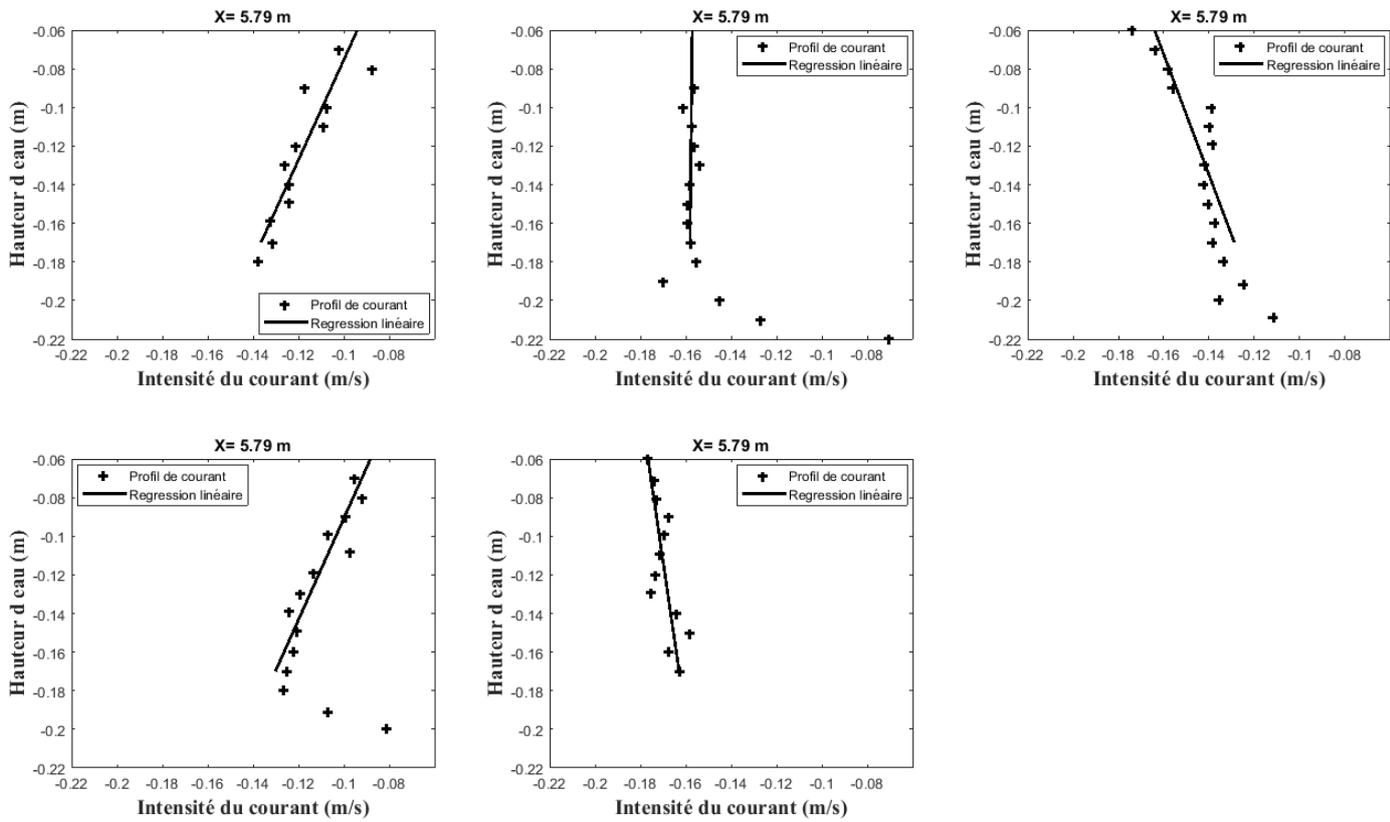


Figure 4.45: Profils verticaux recueillis dans la septième longueur d'onde de fond sous la houle de fréquence  $f=1.12\text{Hz}$

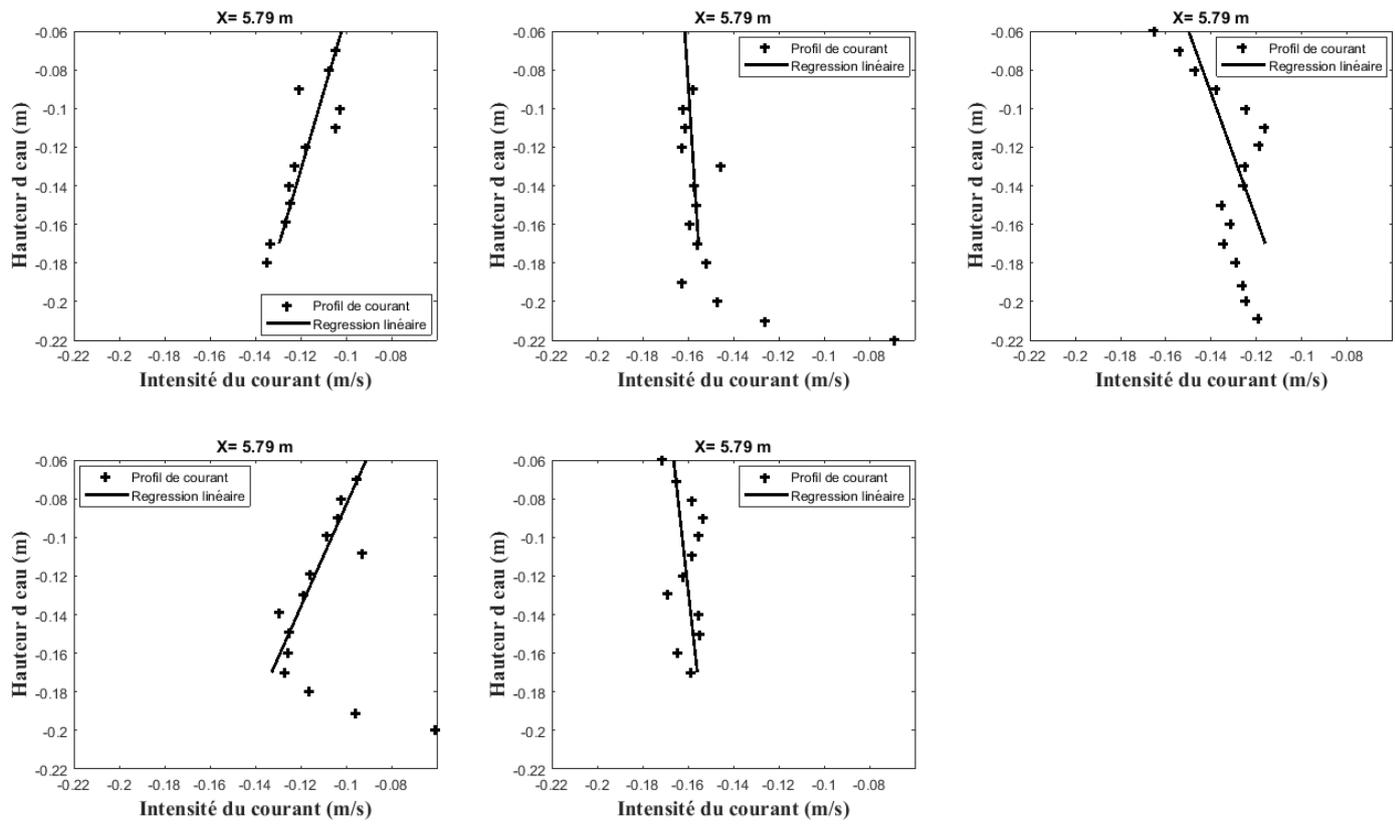


Figure 4.46: Profils verticaux recueillis dans la septième longueur d'onde de fond sous la houle de fréquence  $f=0.95\text{Hz}$

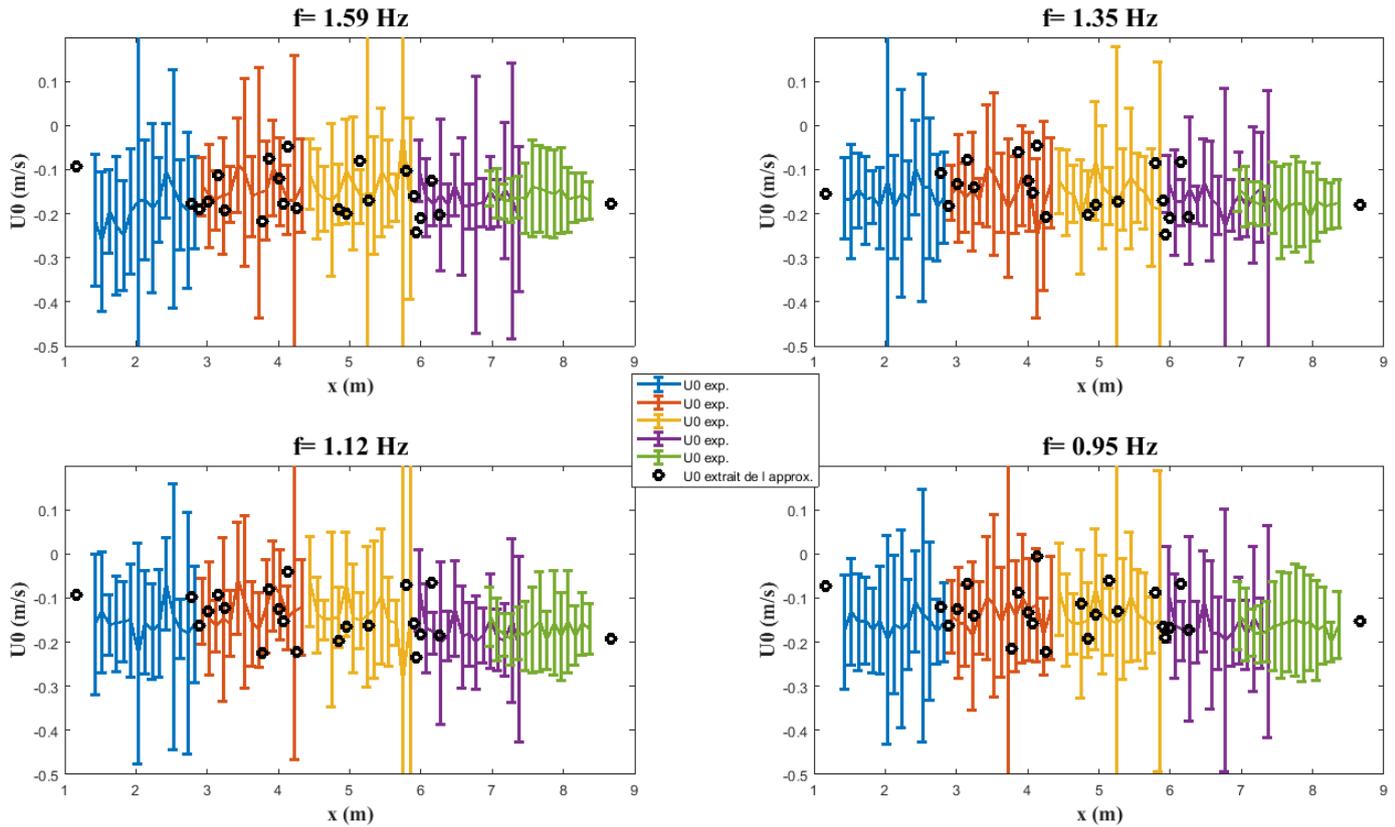


Figure 4.47: Comparaison entre le courant de surface relevé par les courantomètres en présence de houle et celui estimé à partir des profils verticaux par régression linéaire sur les deux tiers de la colonne d'eau

qualité des estimations par rapport au cas précédent en l'absence de houle. Ceci est peut-être dû au fait qu'en présence de houle, les profils verticaux de courant ont tendance à être plus linéaires, ce qui rend notre méthode d'estimation plus précise. Ensuite, toutes nos estimations sont très proches des valeurs expérimentales, comprises dans l'écart-type. Nous avons quelques petites réserves à émettre concernant, comme précédemment, l'intensité du courant de surface sur fond plat avant le fond ondulé ( $x = 1.17m$ ): seule la deuxième fréquence, 1.35Hz, correspond à une estimation appropriée. Dans les autres configurations de houle, l'estimation est supérieure aux mesures. Ce n'est pas le cas à l'autre extrémité du canal, où les estimations sont dans la continuité des mesures.

Nous avons validé notre méthode d'estimation des paramètres de courant à partir des profils verticaux relevés dans les creux du fond ondulé. Nous avons ensuite établi des lois d'approximation polysinusoïdales (sous la forme 4.22) pour chaque paramètre pour chaque fréquence.

**Interpolation du champ de cisaillement** Comme en l'absence de houle, approcher le cisaillement et déduire le courant de surface a donné de meilleurs résultats, nous reprenons cette méthode et l'appliquons quatre fois, pour les quatre fréquences de houle. En résolvant quatre systèmes matriciels du même genre que celui établi sans houle (4.24), nous obtenons quatre lois d'approximation du cisaillement  $s(x)$ , dont les paramètres sont détaillés dans les tableaux (4.11) et (4.12) et qui sont représentées sur la figure (4.48). Nous en déduisons ensuite le courant de surface, par conservation du débit (4.49). Attention, nous avons conservé la valeur

F (Hz)	T (s)	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	X <sub>5</sub>
F=1.59Hz	T=0.63s	9, 85.10 <sup>-4</sup>	-2, 53.10 <sup>-2</sup>	2, 33.10 <sup>-1</sup>	-9, 26.10 <sup>-1</sup>	1, 40
F=1.35Hz	T=0.74s	-2, 83.10 <sup>-4</sup>	8, 42.10 <sup>-3</sup>	-8, 48.10 <sup>-2</sup>	3, 2.10 <sup>-1</sup>	-3, 34.10 <sup>-1</sup>
F=1.12Hz	T=0.89s	4, 21.10 <sup>-4</sup>	-9, 79.10 <sup>-3</sup>	7, 74.10 <sup>-2</sup>	-2, 47.10 <sup>-1</sup>	2, 22.10 <sup>-1</sup>
F=0.95Hz	T=1.05s	2, 23.10 <sup>-4</sup>	-4.95.10 <sup>-3</sup>	3, 38.10 <sup>-2</sup>	-5, 94.10 <sup>-2</sup>	-1, 54.10 <sup>-1</sup>

Table 4.11: Paramètres des lois polysinusoidales d'approximation du cisaillement, établies pour les quatre fréquences de houle

F (Hz)	T (s)	X <sub>6</sub>	X <sub>7</sub>	X <sub>8</sub>
F=1.59Hz	T=0.63s	-4, 42.10 <sup>-1</sup>	1, 08.10 <sup>-2</sup>	7, 71.10 <sup>-2</sup>
F=1.35Hz	T=0.74s	-1.10 <sup>-1</sup>	-3, 88.10 <sup>-2</sup>	8, 12.10 <sup>-2</sup>
F=1.12Hz	T=0.89s	2, 57.10 <sup>-1</sup>	-8, 58.10 <sup>-3</sup>	1, 12.10 <sup>-1</sup>
F=0.95Hz	T=1.05s	5, 34.10 <sup>-1</sup>	6, 46.10 <sup>-4</sup>	1, 48.10 <sup>-1</sup>

Table 4.12: Paramètres des lois polysinusoidales d'approximation du cisaillement, établies pour les quatre fréquences de houle - partie 2

du débit établi sans houle, car nous avons démontré que ce dernier n'était pas modifié par la houle (conservation du niveau moyen de la surface libre) et ce même si le profil de courant relevé en entrée d'écoulement était légèrement modifié.

De façon générale, les lois d'approximation sont satisfaisantes, et passent par la majorité des points. Il faudra bien sûr garder à l'esprit que ces lois sont éloignées de deux étapes de la réalité expérimentale: des profils mesurés nous avons déduit des paramètres par régression linéaire, et nous avons ensuite tiré de ces paramètres une loi d'évolution spatiale. Nous émettons un avis mesuré concernant l'approximation du cisaillement (et donc celle déduite du courant de surface) pour la houle de fréquence 1.59Hz. En effet, si la loi passe bien par le point situé en  $x = 1.17m$ , l'évolution entre l'entrée du domaine et ce point, soit entre 0 et 1.17m, n'est pas pertinente. Par exemple, à l'entrée du domaine, la vorticité est devenue négative à presque  $-0.5s^{-1}$ , alors qu'elle est positive au premier point mesuré (environ  $0.35s^{-1}$ ). Toutes les autres lois présentent des évolutions cohérentes en bord de domaine. La figure (4.50) compare le coefficient de réflexion de cette houle relevé expérimentalement et les calculs menés par nos deux modèles, sur la base de lois d'approximation polysinusoidales associées à des paramètres établis pour certaines fréquences de houle.

On remarque que les deux premières fréquences de houle, pourtant hautes, nous ont donné les paramètres à la base des lois d'approximation les plus performantes. Précisément, ce sont les paramètres estimés à partir des profils relevés sous une houle de période 0.74s qui donnent les meilleurs résultats, avec M2 qui surestime l'amplitude du pic de Bragg de seulement - 6.09%. C'est pour l'instant le meilleur résultat fourni par ce modèle, avec malheureusement toujours une surestimation de la fréquence pic d'environ 6%. Concernant l'évolution aux hautes fréquences, pour toutes les configurations, M2 présente une évolution d'allure similaire, bien qu'on distingue les vestiges d'une allure sinusoidale (comme le présente M1). D'ailleurs, c'est encore la même configuration (T=0.74s ou F= 1.35Hz) qui nous donne également la meilleure approximation aux hautes fréquences pour M2.

**Interpolation du courant de surface** On réitère l'ensemble de la procédure, cette fois en établissant des lois d'approximation pour l'intensité du courant de surface pour en déduire la vorticité par conservation du débit. Les approximations sont présentées sur les figures (4.51) et

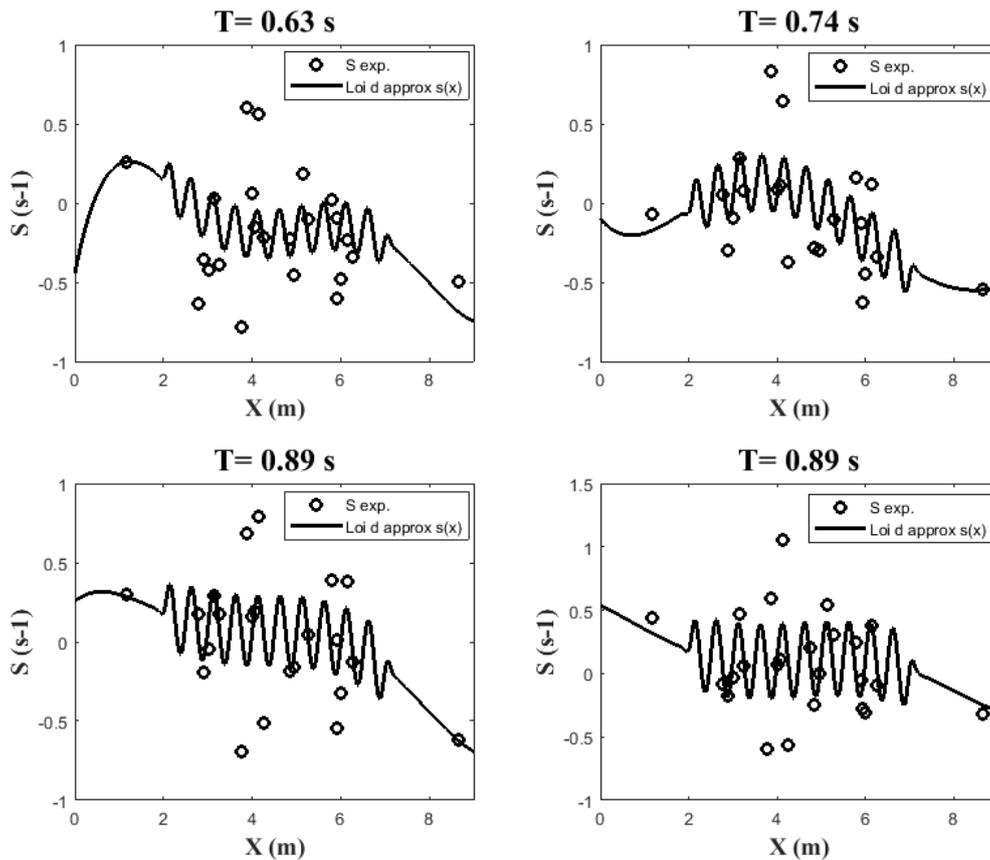


Figure 4.48: Comparaison entre des lois d'approximation polysinusoïdales et les paramètres dits "expérimentaux", établis à partir des profils verticaux expérimentaux par régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau, pour chaque fréquence de houle - approximations du cisaillement

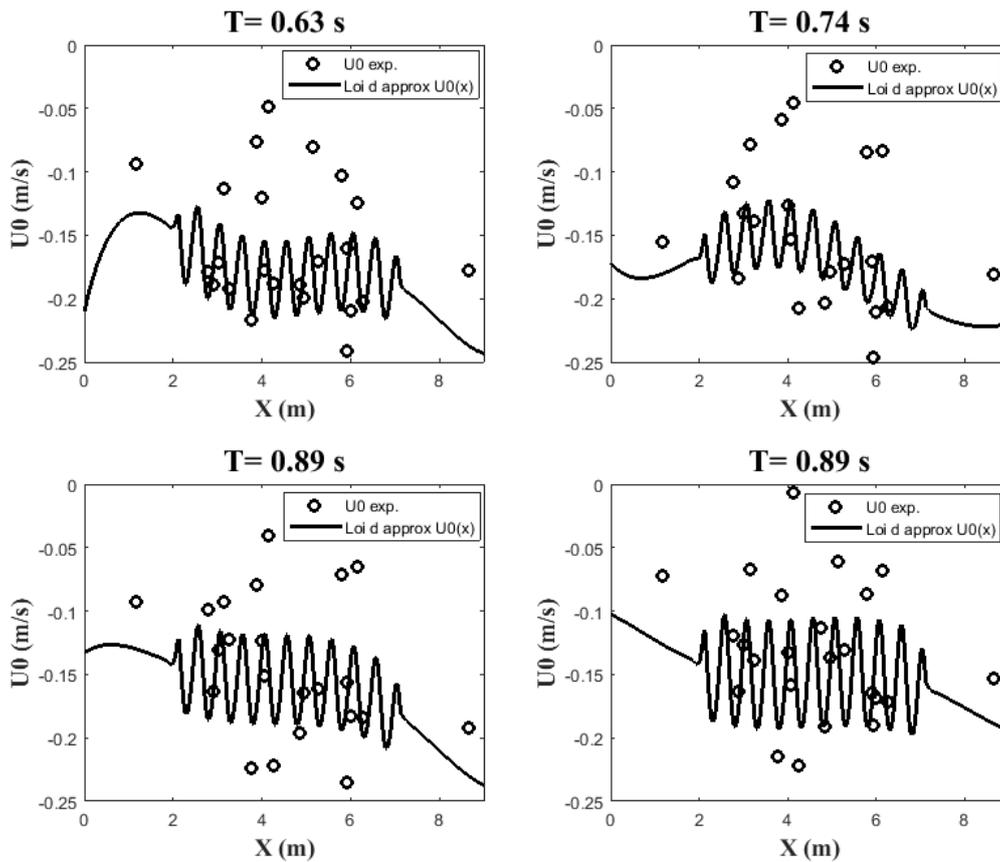


Figure 4.49: Comparaison entre des lois d'approximation polysinusoïdales et les paramètres dits "expérimentaux", établis à partir des profils verticaux expérimentaux par régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau, pour chaque fréquence de houle -Approximations déduites de l'intensité du courant de surface

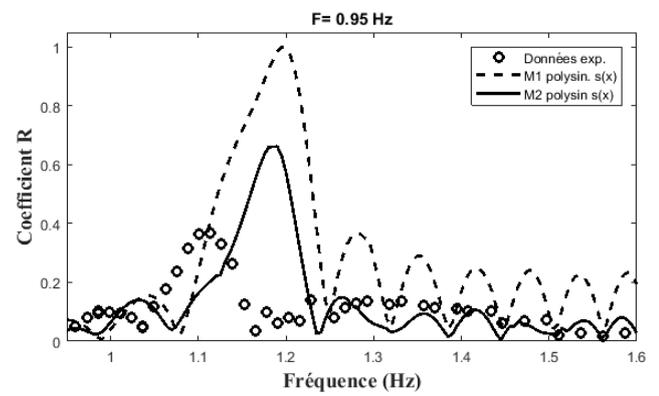
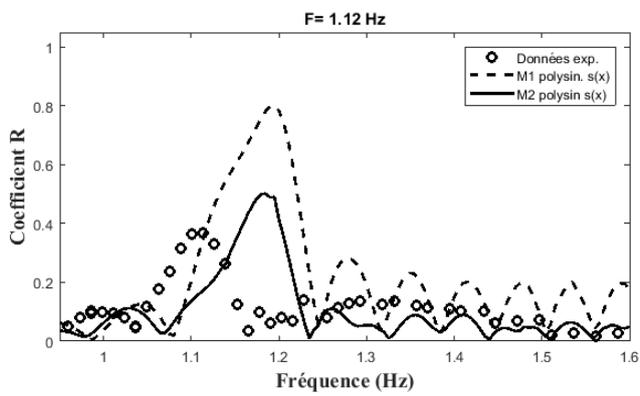
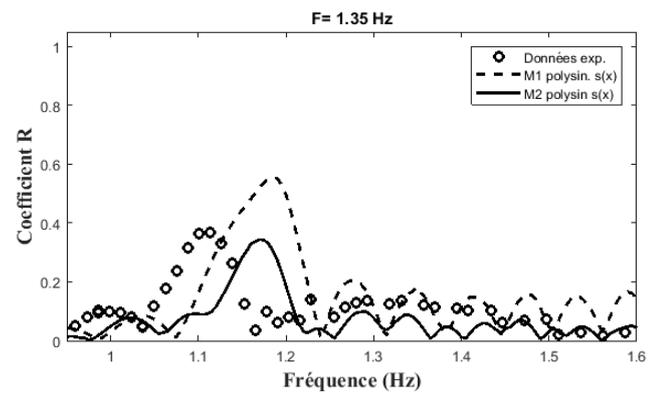
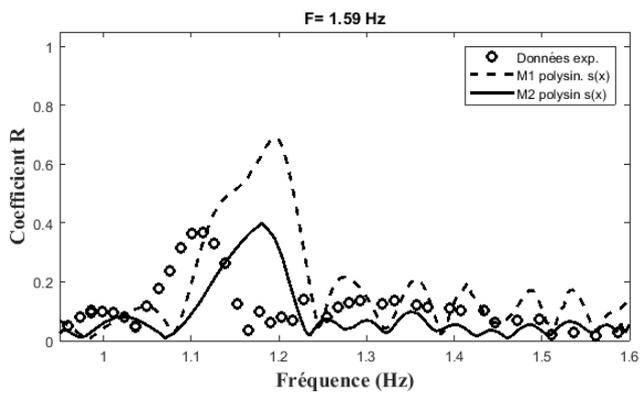


Figure 4.50: Réflexion de la houle selon l'approximation polysinusoidale du cisaillement, selon la fréquence de houle

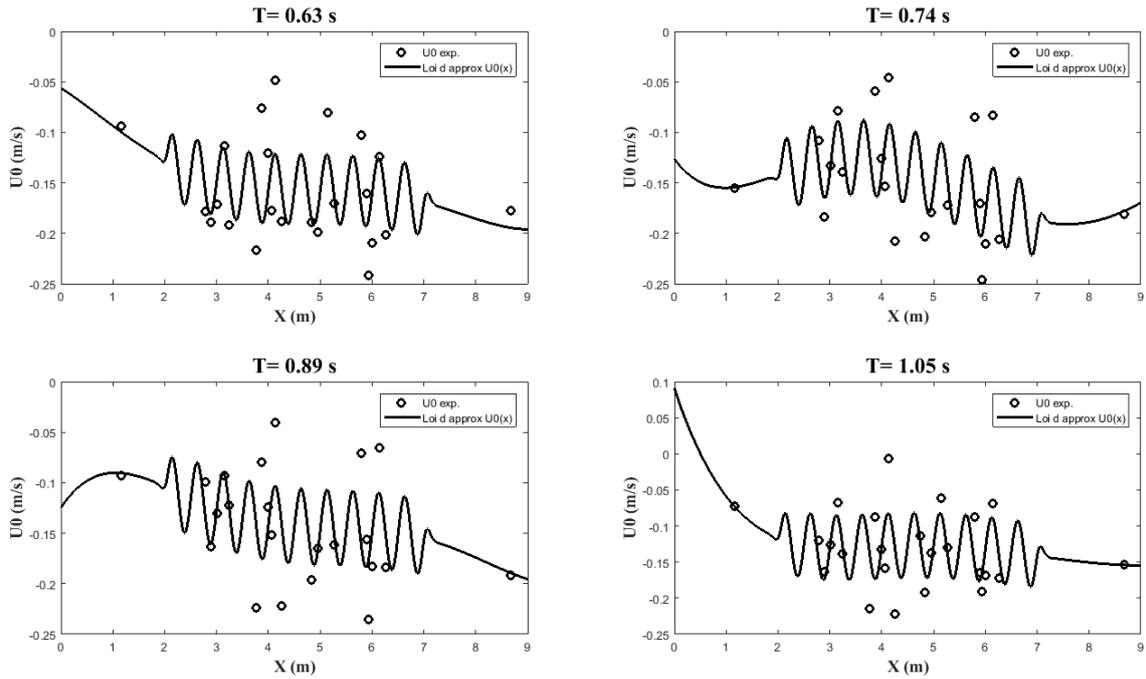


Figure 4.51: Comparaison entre des lois d'approximation polysinusoidales et les paramètres dits "expérimentaux", établis à partir des profils verticaux expérimentaux par régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau, pour chaque fréquence de houle - Approximations du courant de surface

(4.52), et nous pouvons d'ores et déjà remarquer la très bonne corrélation du courant de surface approché et des points de mesure pour la configuration "T=0.63s" (ou F=1.59Hz). L'amplitude de la sinusoïde colle quasi-parfaitement avec les points de mesure, et encore une fois le choix de la longueur d'onde égale à la longueur d'onde du fond donne de très bon résultats. Pour les autres configurations, les lois d'approximation sont également satisfaisantes, avec seulement une mauvaise estimation en début de canal pour la configuration "T=1.05s", que nous devons garder en tête au moment de l'analyse des résultats.

La figure (4.53) présente la réflexion de la houle calculée par nos modèles sur la base des profils de courant établis respectivement en (4.51) et (4.52). Et malheureusement, comme dans l'étude en l'absence de houle, on retrouve des comportements aberrants de surestimation exagérée de la houle, surtout par le premier modèle. Notre modèle M2, bien que lui aussi surestimant la réflexion, ne propose pas de maximum supérieur à 1, et propose une évolution aux hautes fréquences (entre 1.25 et 1.6Hz) plutôt cohérente par rapport aux données expérimentales. Aucun des deux modèles n'est cependant capable d'approcher à moins de 5% ni la fréquence pic ni son amplitude, et on impute ça aux fortes variations et valeurs du cisaillement que l'on a imposées. C'est en effet la configuration associée à la fréquence 1.32Hz qui présente une surestimation la plus forte (M1 renvoie un coefficient de réflexion maximum de 1.452), alors même que la loi d'approximation du cisaillement associée présente les plus fortes variations.

## Bilan de cette étude

Les tableaux (4.13) et (4.14) résument les résultats obtenus par nos modèles sur les approximations polysinusoidales en présence de courant. On remarque une différence énorme de performance entre les configurations où l'on a imposé le cisaillement et déduit le courant de surface, qui donnent de bons résultats, et les configurations où l'on a fait l'inverse, qui elles

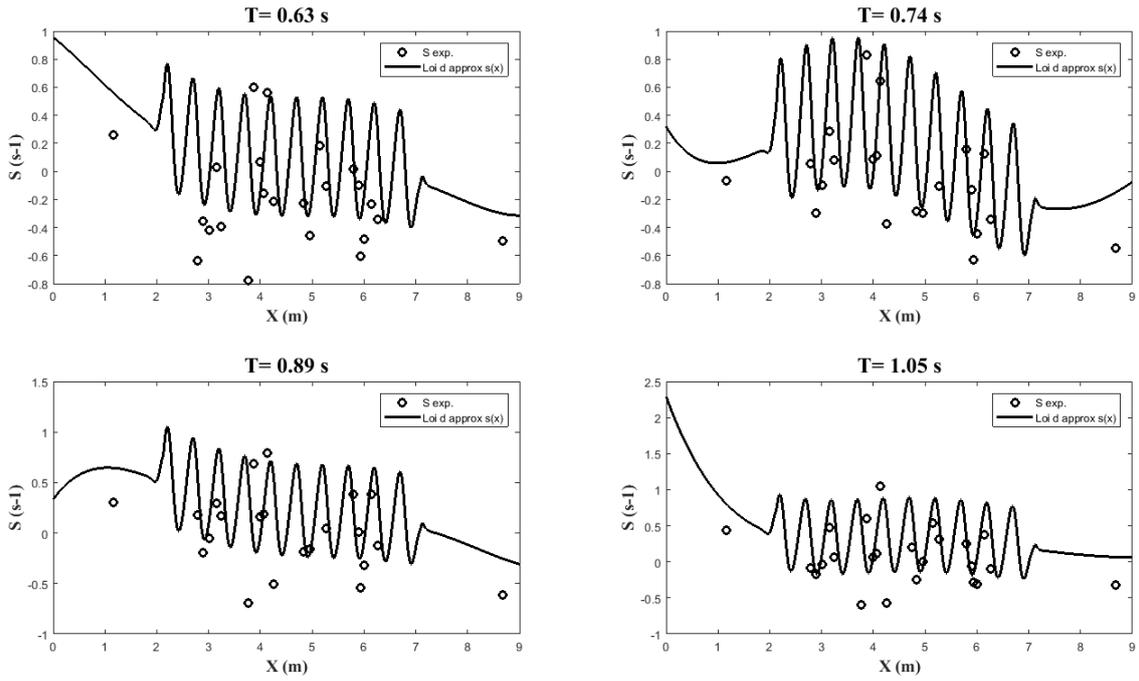


Figure 4.52: Comparaison entre des lois d'approximation polysinusoidales et les paramètres dits "expérimentaux", établis à partir des profils verticaux expérimentaux par régression linéaire sur les deux tiers supérieurs de la colonne d'eau, pour chaque fréquence de houle - Approximations déduites de la vorticité

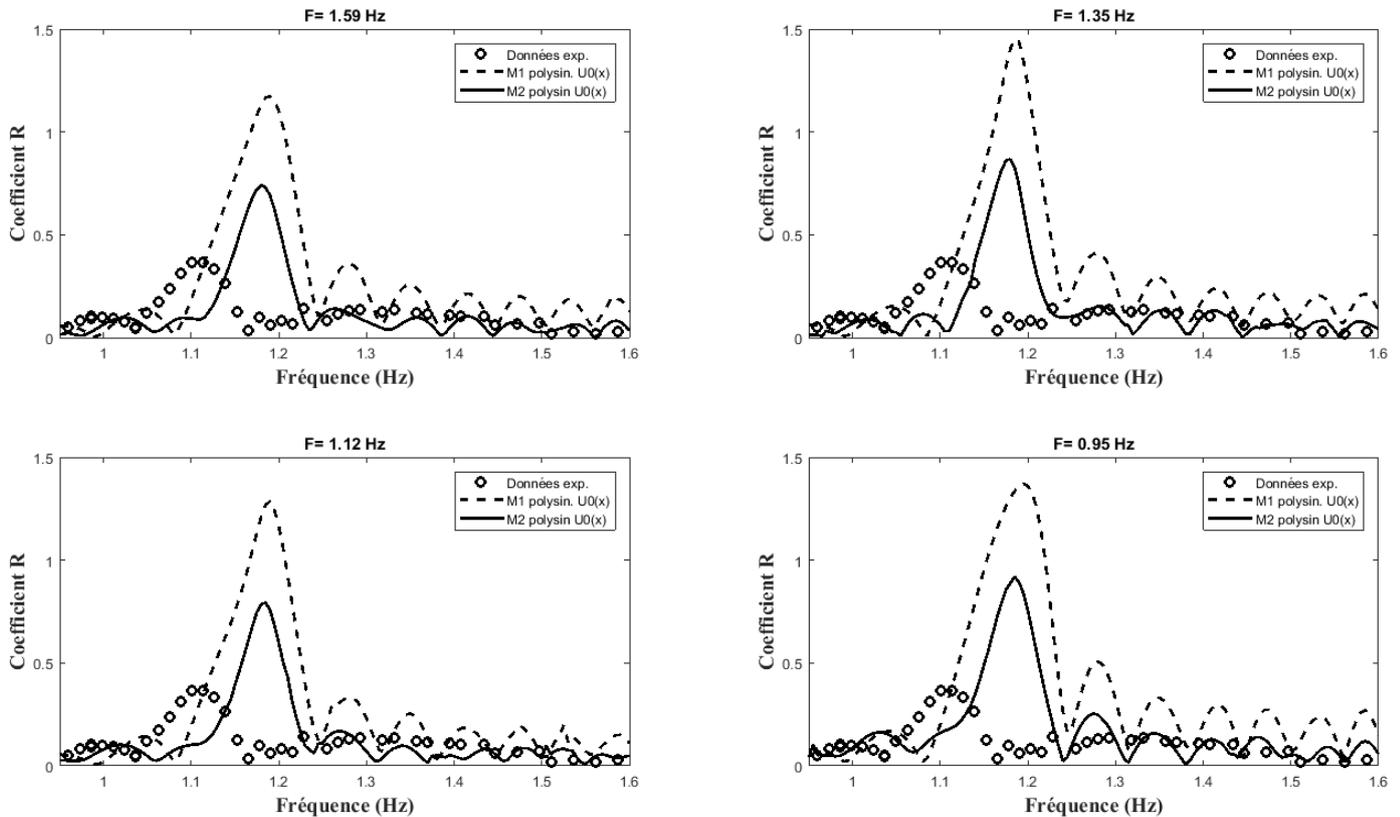


Figure 4.53: Réflexion de la houle selon l'approximation polysinusoidale du courant de surface, selon la fréquence de houle

Approximation	T (s)	Paramètres	M1				
			f (Hz)	$\Delta$ (%)	a	$\Delta$ (%)	$\ \Delta_a\ $ (%)
sans houle		$s(x)$	1.185	6.37	0.5138	40.23	$\pm 170.85$
		$U_o(x)$	1.195	7.27	1.471	301.47	
avec houle	0.63s	$s(x)$	1.195	7.27	0.6895	88.18	$\pm 154.16$
		$U_o(x)$	1.19	6.82	1.173	220.14	
	0.74s	$s(x)$	1.185	6.35	0.5558	51.69	$\pm 173.98$
		$U_o(x)$	1.185	6.35	1.452	296.29	
	0.89s	$s(x)$	1.195	7.27	0.7993	118.15	$\pm 184.57$
		$U_o(x)$	1.19	6.82	1.286	250.98	
	1.05s	$s(x)$	1.195	7.27	1.005	174.29	$\pm 224.09$
		$U_o(x)$	1.195	7.27	1.37	273.91	

Table 4.13: Récapitulatif des paramètres de résonance de Bragg (fréquence pic et maximum de réflexion) - approximation polysinusoidale - M1

Approximation	T (s)	Paramètres	M2				
			f (Hz)	$\Delta$ (%)	a	$\Delta$ (%)	$\ \Delta_a\ $ (%)
sans houle		$s(x)$	1.18	5.92	0.2999	-18.15	$\pm 103.86$
		$U_o(x)$	1.185	6.37	1.061	189.57	
avec houle	0.63s	$s(x)$	1.18	5.92	0.3996	9.06	$\pm 55.52$
		$U_o(x)$	1.18	5.92	0.74	101.97	
	0.74s	$s(x)$	1.17	5.03	0.3441	-6.09	$\pm 71.42$
		$U_o(x)$	1.18	5.92	0.8675	136.76	
	0.89s	$s(x)$	1.185	6.37	0.5019	36.98	$\pm 76.68$
		$U_o(x)$	1.185	6.37	0.7928	116.38	
	1.05s	$s(x)$	1.19	6.82	0.6622	80.73	$\pm 115.79$
		$U_o(x)$	1.185	6.37	0.9191	150.85	

Table 4.14: Récapitulatif des paramètres de résonance de Bragg (fréquence pic et maximum de réflexion) - approximation polysinusoidale - M2

surestiment à outrance la réflexion de la houle. Parmi les lois d'approximation du cisaillement, celle basée sur les paramètres établis à partir des profils de courant recueillis sous une houle de période  $T=0.74s$  (ou  $f=1.32Hz$ ) donne les meilleurs résultats, avec notamment une très bonne estimation de la part du modèle M2 à la fois sur l'amplitude (9%) et sur la fréquence (6%). Nous ne sommes cependant pas entièrement satisfaits...

## 4.4 Nouveau modèle développé

Dans cette étude, nous avons comparé nos deux modèles sur de nombreuses configurations, pour tenter de représenter au mieux le comportement de la houle en résonance de Bragg. Selon la précision des lois d'approximation, nous avons abouti à de bonnes estimations du maximum de réflexion, jusqu'à 6% d'écart avec les points expérimentaux grâce à notre modèle M2. Mais nos résultats ont toujours accusé un écart non négligable sur l'estimation de la fréquence pic, sans que nous parvenions à le réduire d'une façon ou d'une autre, ni qu'aucune tendance n'émerge au fil des configurations testées. Un autre mystère demeure quant au second pic de réflexion qui est apparu dans les résultats expérimentaux mais jamais vraiment dans aucune modélisation. N'étant pas l'objet principal de l'étude, il n'a été abordé que comme aspect secondaire, mais il mérite pourtant toute notre attention, car il est révélateur d'un comportement de la houle à hautes fréquences qui n'a pour l'instant pas d'explication claire. Sur les derniers mois de cette thèse, ces points ont été creusés, et les discussions et modèle qui vont être abordés ici sont le fruit du travail collaboratif entre membres de l'université d'Athènes et de l'équipe Océanographie Physique, Littorale et Côtière du M.I.O.

**Prise en compte de l'asymétrie des nombres d'onde** Face aux échecs répétés de l'estimation de la fréquence pic malgré des simulations basées sur des estimations correctes du cisaillement et du courant de surface, un aspect de la modélisation a été remis en question au sein de l'équipe: la non-considération de l'asymétrie entre les nombres d'onde incident et réfléchis  $k^+$  et  $k^-$ , due au courant. En effet, historiquement, Berkhoff a mis au point l'équation elliptique de Pente Douce (Mild Slope) avec une hypothèse de forte réflexion mais sans courant. Or, sans courant, aucun problème ne survient car les nombres d'onde sont parfaitement symétriques. Par la suite, Radder (1979 [154]) a obtenu une version parabolisée de l'équation de Mild Slope, et a pour cela dû ajouter une hypothèse de faible réflexion. Le modèle de Davies (1982 [44]) par perturbations suppose aussi une faible réflexion. Nous disposions alors de modèles elliptiques qui permettaient de prendre en compte la forte réflexion, et des modèles paraboliques dédiés à la faible réflexion. L'introduction du courant va changer les choses, car les nombres d'onde incidents et réfléchis ne sont plus égaux. Dans le cas de faible réflexion, cela ne posera pas de problème. De même, les modèles hyperboliques (dont font partie nos modèles M1 et M2) permettent une forte réflexion si les variations bathymétriques, elles, restent faibles. Or dans le cas de la résonance de Bragg, nous avons utilisé notre modèle M2 pour modéliser une forte réflexion mais en présence de fortes variations bathymétriques. L'écart entre les nombres d'onde incident et réfléchi est devenu trop important et a faussé nos résultats. Cette spécificité avait été ignorée par la littérature jusqu'alors (sans doute parce que l'écart en fréquence observé entre expérience et modélisation était jugé comme acceptable), mais dans notre cas la vorticit   a encore plus exacerb   la difficult  , nous mettant face au probl  me. L   o   jusqu'alors nous utilisions exclusivement le nombre d'onde  $k^+$  li      l'onde incidente, notamment dans la d  composition du potentiel en fonctions verticales de terme caract  ristique  $\cosh(k^+(z+h))$ , il nous est    pr  sent n  cessaire de tenir compte de cette asym  trie entre  $k^+$  et  $k^-$  et donc de repenser la d  composition du potentiel des vitesses. Un nouveau mod  le a ainsi   t   d  velopp  , reportant

un intérêt sur l'ordre de grandeur de l'onde réfléchiée, et nous allons en présenter brièvement le principe. Pour cela, on étudie les propriétés de cette équation du second ordre (2.6) dans un contexte de résonance paramétrique de systèmes dynamiques (Fosse & Nijmeijer, 2011 [69]). Par souci de clarté, nous noterons à présent le potentiel  $\varphi^+(x)$  pour bien signifier qu'il s'agit de l'amplitude complexe du mode propagatif incident.

On considère la forme simplifiée de M1, sous l'hypothèse que les variations horizontales restent faibles:

$$(CC_g - U_0U_2) \nabla^2 \varphi^+ + i\omega (U_0 + U_2) \nabla \varphi^+ + \left[ k^{+2} CC_g + \omega^2 - \sigma^2 \right] \varphi^+ = 0 \quad (4.26)$$

On peut la réécrire sous la forme:

$$\nabla^2 \varphi^+ + \beta \nabla \varphi^+ + \gamma^2 \varphi^+ = 0 \quad (4.27)$$

avec  $\beta = \frac{i\omega(U_0+U_2)}{CC_g-U_0U_2}$  et  $\gamma^2 = k^{+2} \left[ \frac{\omega}{k^+} \frac{(U_0+U_2)}{(CC_g+U_0U_2)} \right]$ . Nous avons vu expérimentalement que les variations sinusoïdales de profondeur (fond ondulé) engendrent des variations similaires d'intensité de courant, imposées par la conservation du débit au-dessus du fond ondulé (3.21). Nous avons d'ailleurs précédemment choisi d'approcher ces variations par des fonctions polysinusoïdales empiriquement calées sur les mesures. Ces variations vont conditionner la relation de dispersion à fournir des nombres d'onde présentant aussi des variations de ce genre. On peut donc supposer que:

$$k^+(x) = k^+(x_a) + \delta k^+ \sin(K_b x) \quad (4.28)$$

avec  $x_a = 2.07m$  l'abscisse du point de départ du fond ondulé et où on note  $K_b = \frac{2\pi}{\lambda_b} = \frac{2\pi}{0.5} \simeq 12.57 rad.m^{-1}$  le nombre d'onde du fond ondulé. Logiquement, les deux paramètres de l'équation  $\beta$  et  $\gamma^2$  vont présenter les mêmes variations eux aussi. On peut alors effectuer une légère transformation du potentiel:

$$\varphi^+(x) \approx \exp(-D(x))f(x) \quad (4.29)$$

avec  $D(x) = \frac{1}{2} \int_x \beta(x) dx$  et  $f$  une fonction générique de  $x$  introduite par cette transformation. On peut alors mettre notre équation (4.26) sous la forme:

$$\nabla^2 f + \kappa^2 f = 0 \quad (4.30)$$

avec bien entendu  $\kappa^2 = \gamma^2 - \frac{\beta^2}{4}$ . L'équation de pente douce a été transformée en système harmonique selon  $x$ , et la condition de résonance est la condition classique imposant à  $\kappa$  d'être égal à la moitié de  $K_b$ , soit:

$$2\kappa \equiv 2k^+ \left( 1 + \frac{\omega}{k^+} \frac{U_0 + U_2}{CC_g - U_0U_2} + \left( \frac{\omega}{2k^+} \right)^2 \frac{(U_0 + U_2)^2}{(CC_g - U_0U_2)^2} \right)^{1/2} = K_b \quad (4.31)$$

D'un autre côté, il est bien connu (Kirby, 1988 ([99])) que la houle réfléchiée par des barres sableuses entre en résonance quand

$$k^+ + k^- = K_b \quad (4.32)$$

avec  $k^+$  et  $k^-$  donnés par la relation de dispersion propagative en présence de courant (2.4). Les travaux de Belibassakis et al. (2018) testent cette nouvelle théorie sur notre configuration expérimentale, et ils montrent que ces nouvelles conditions de résonance (4.31) sont non seulement compatibles avec les conditions "naturelles" (4.32), mais qu'en plus elles renvoient une

fréquence de résonance beaucoup plus proche de la fréquence relevée expérimentalement. Pour un fond sinusoïdal identique à celui que nous avons utilisé, avec une hauteur d'eau de 0.23m au lieu de 0.22m, sur un cas très simple de courant modélisé comme uniforme à -0.17m/s (soit approximativement la valeur mesurée expérimentalement en entrée d'écoulement), la théorie classique (4.26,4.27) prédisait une fréquence de résonance d'environ 1.17Hz, et c'est également ce que nous obtenions avec notre modèle d'ordre 1 M1 (voir tableau (4.3), cas du courant constant profil P4). En revanche, notre nouveau modèle (4.30) et les nombres d'onde associés renvoient une fréquence de résonance de 1.125Hz, bien plus proche de la fréquence pic mesurée expérimentalement aux alentours de 1.114Hz. On peut donc espérer une corrélation encore meilleure avec des paramètres d'expérience plus précis et des lois d'approximation du courant plus évoluées.

**Insertion dans les modèles M1 et M2** Une fois que l'on a constaté cette dissymétrie des nombres d'onde, et à quel point elle impacte la fréquence de résonance, nous pouvons l'intégrer dans nos deux modèles classiques, M1 (2.5) et M2 (2.6). La mise en place de ces modèles est mathématiquement détaillée dans les travaux de Touboul et al. (2016 ([193])) et il s'agit ici de repartir sur ce développement en y intégrant l'onde réfléchi au même ordre de grandeur que l'onde incidente. Pour cela, on reprend la décompositon du potentiel (1.123) pour le mode propagatif et on y ajoute l'onde réfléchi sous la forme:

$$\phi(x, z) = \varphi_0^+(x).Z_0^+(x, z) + \varphi_0^-(x).Z_0^-(x, z) \quad (4.33)$$

avec comme précédemment  $Z_0^+ = \frac{\cosh(k_0^+(z+h))}{\cosh(k_0^+h)}$  et on construit sur le même modèle  $Z_0^- = \frac{\cosh(k_0^-(z+h))}{\cosh(k_0^-h)}$ . Ce potentiel intervient ensuite dans la minimisation du Lagrangien  $\mathcal{L}$ , et là où auparavant nous n'avions que deux fonctions de minimisation (selon  $\eta$  et selon  $\varphi_0^+$ ), nous en avons à présent trois (selon  $\varphi_0^-$  en plus):

$$\begin{cases} \iint \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} \delta \eta = 0 \\ \iint \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0^+} \delta \varphi_0^+ = 0 \\ \iint \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_0^-} \delta \varphi_0^- = 0 \end{cases} \quad (4.34)$$

Or si une majorité de termes linéaires en  $\phi$  ne vont donc pas poser de problème pour la suite des calculs, l'expression du Lagrangien fait, elle, intervenir un terme non linéaire  $(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2$ , qui va apporter un terme couplé faisant intervenir  $\varphi_0^+$  et  $\varphi_0^-$ . Après élimination de  $\eta$ , on obtient donc un système de deux équations couplées à la place du modèle mono-équation de M1. Ce système peut s'écrire sous la forme matricielle suivante:

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{14} & T_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^2 \varphi^+ \\ \nabla^2 \varphi^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{21} & T_{23} \\ T_{24} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla \varphi^+ \\ \nabla \varphi^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{31} & T_{33} \\ T_{33} & T_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

avec

$$\begin{cases} T_{11} = \langle Z_0^+, Z_0^+ \rangle - U_0 U_2^+ \\ T_{12} = \langle Z_0^-, Z_0^- \rangle - U_0 U_2^- \\ T_{13} = \langle Z_0^-, Z_0^+ \rangle - U_0 U_2^- \\ T_{14} = \langle Z_0^-, Z_0^+ \rangle - U_0 U_2^+ \end{cases} \quad (4.36)$$

où

$$\begin{cases} U_2^+ = U_0 - s \frac{\tanh(k^+h)}{k^+} \\ U_2^- = U_0 - s \frac{\tanh(k^-h)}{k^-} \end{cases} \quad (4.37)$$

Nous avons également noté pour la deuxième matrice bloc:

$$\begin{cases} T_{21} = \nabla \left( \langle Z_0^+, Z_0^+ \rangle \right) - \nabla (U_0 U_2^+) + i\omega (U_0 + U_2^+) \\ T_{22} = \nabla \left( \langle Z_0^-, Z_0^- \rangle \right) - \nabla (U_0 U_2^-) + i\omega (U_0 + U_2^-) \\ T_{23} = \nabla \left( \langle Z_0^-, Z_0^+ \rangle \right) - \nabla (U_0 U_2^-) + i\omega (U_0 + U_2^-) \\ T_{24} = \nabla \left( \langle Z_0^-, Z_0^+ \rangle \right) - \nabla (U_0 U_2^+) + i\omega (U_0 + U_2^+) \end{cases} \quad (4.38)$$

Dans notre troisième terme, nous avons:

$$\begin{cases} T_{31} = \omega^2 - \langle Z_0^{+'}, Z_0^{+'} \rangle + i\omega \nabla U_0 \\ T_{32} = \omega^2 - \langle Z_0^{-'}, Z_0^{-'} \rangle + i\omega \nabla U_0 \\ T_{33} = \omega^2 - \langle Z_0^{-'}, Z_0^{+'} \rangle + i\omega \nabla U_0 \end{cases} \quad (4.39)$$

Pour ces derniers termes, on rappelle qu'on utilise la notation suivante  $Z_0^{\pm'} = \frac{\partial Z_0^{\pm}}{\partial z}$ . Il s'agit donc de l'expression du modèle Mild Slope couplé, appelé par cohérence dans la suite de ce manuscrit le modèle M1 couplé. On remarque que, à l'image du modèle initial, cette expression fait intervenir des produits scalaires, tout aussi aisés à calculer que précédemment :

$$\langle Z_0^+, Z_0^+ \rangle = \frac{C^+ C_g^+}{g} \quad (4.40)$$

avec  $C^+ C_g^+ = \frac{g \tanh(k^+h)}{k^+} + \frac{gh}{\cosh^2(k^+h)}$  (et de même  $\langle Z_0^-, Z_0^- \rangle = \frac{C^- C_g^-}{g}$ ). Nous avons également :

$$\langle Z_0^{+'}, Z_0^{+'} \rangle = \frac{(\sigma^+)^2 - k^{+2} C^+ C_g^+}{g} \quad (4.41)$$

avec  $(\sigma^+)^2 = gk^+ \tanh(k^+h)$  (et bien sûr  $\langle Z_0^{-'}, Z_0^{-'} \rangle = \frac{(\sigma^-)^2 - k^{-2} C^- C_g^-}{g} \dots$ ). Alors, on obtiendra les produits scalaires croisés suivants:

$$\langle Z_0^-, Z_0^+ \rangle = \frac{(\sigma^+)^2 - (\sigma^-)^2}{g((k^+)^2 - (k^-)^2)} = \frac{k^+ \tanh(k^+h) - k^- \tanh(k^-h)}{(k^+)^2 - (k^-)^2} \quad (4.42)$$

et

$$\langle Z_0^{-'}, Z_0^{+'} \rangle = \frac{(k^+)^2 (\sigma^-)^2 - (k^-)^2 (\sigma^+)^2}{g((k^+)^2 - (k^-)^2)} \quad (4.43)$$

Selon la même méthode et en retenant cette fois les termes d'ordre  $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ , on obtient le modèle M2 couplé (Modified Mild Slope couplé), qui se met quasiment sous la même forme matricielle que précédemment (4.45):

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{14} & T_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla^2 \varphi^+ \\ \nabla^2 \varphi^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{21} & T_{23} \\ T_{24} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla \varphi^+ \\ \nabla \varphi^- \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_{31} & T_{33} \\ T_{34} & T_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

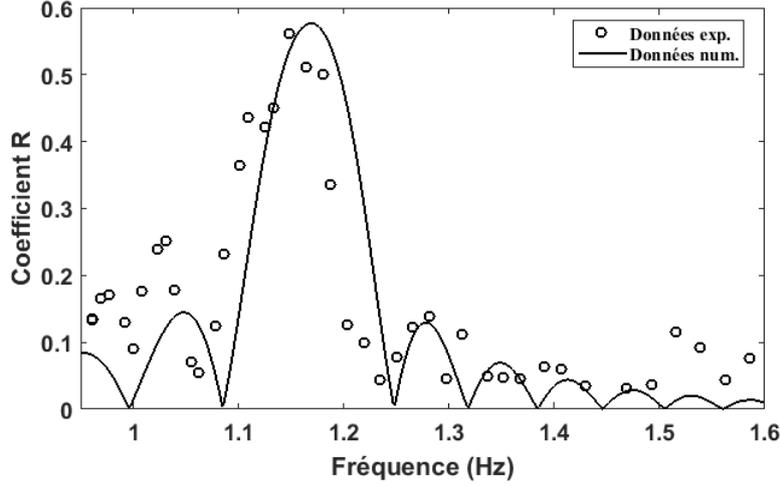


Figure 4.54: Réflexion de la houle par les nouveaux modèles - sans courant

avec les mêmes définitions des termes  $T_{11}$ ,  $T_{12}$ ,  $T_{13}$  et  $T_{14}$ . Cela se complique pour les autres matrices-blocs, avec des termes supplémentaires venant se rajouter aux termes évoqués pour le modèle précédent:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{21} = \nabla \left( \langle Z_0^+, Z_0^+ \rangle \right) - \nabla (U_0 U_2^+) + i\omega (U_0 + U_2^+) + sZ_0^+ (-h) U_2^+ \nabla h \\ T_{22} = \nabla \left( \langle Z_0^-, Z_0^- \rangle \right) - \nabla (U_0 U_2^-) + i\omega (U_0 + U_2^-) + sZ_0^- (-h) U_2^- \nabla h \\ T_{23} = \nabla \left( \langle Z_0^-, Z_0^+ \rangle \right) - \nabla (U_0 U_2^-) + i\omega (U_0 + U_2^-) + sZ_0^+ (-h) U_2^- \nabla h - \langle Z_0^-, \nabla Z_0^+ \rangle \\ \quad - \langle Z_0^+, \nabla Z_0^- \rangle \\ T_{24} = \nabla \left( \langle Z_0^-, Z_0^+ \rangle \right) - \nabla (U_0 U_2^+) + i\omega (U_0 + U_2^+) + sZ_0^- (-h) U_2^+ \nabla h - \langle Z_0^+, \nabla Z_0^- \rangle \\ \quad - \langle Z_0^-, \nabla Z_0^+ \rangle \end{array} \right. \quad (4.45)$$

Les termes de la troisième matrice-bloc vont également faire intervenir les gradients horizontaux des fonctions  $Z_0^\pm$ , qu'on rappelle définis par  $\nabla Z_0^\pm = \frac{\partial Z_0^\pm}{\partial h} \nabla h + \frac{\partial Z_0^\pm}{\partial k^\pm} \nabla k^\pm$ , mais aussi les dérivées secondes:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{31} = \omega^2 - \langle Z_0^+, Z_0^+ \rangle + i\omega (\nabla U_0 - sZ_0^+ (-h) \nabla h) + \langle Z_0^+, \nabla^2 Z_0^+ \rangle + Z_0^+ (-h) \nabla Z_0^+ (-h) \nabla h \\ T_{32} = \omega^2 - \langle Z_0^-, Z_0^- \rangle + i\omega (\nabla U_0 - sZ_0^- (-h) \nabla h) + \langle Z_0^-, \nabla^2 Z_0^- \rangle + Z_0^- (-h) \nabla Z_0^- (-h) \nabla h \\ T_{33} = \omega^2 - \langle Z_0^-, Z_0^+ \rangle + i\omega (\nabla U_0 - sZ_0^+ (-h) \nabla h) + \langle Z_0^+, \nabla^2 Z_0^- \rangle + Z_0^+ (-h) \nabla Z_0^- (-h) \nabla h \\ T_{34} = \omega^2 - \langle Z_0^-, Z_0^+ \rangle + i\omega (\nabla U_0 - sZ_0^- (-h) \nabla h) + \langle Z_0^-, \nabla^2 Z_0^+ \rangle + Z_0^- (-h) \nabla Z_0^+ (-h) \nabla h \end{array} \right. \quad (4.46)$$

## Premiers résultats

**En l'absence de courant** Nous allons confronter ces deux nouveaux modèles à nos résultats expérimentaux, en commençant par la configuration sans courant, modélisée par le modèle M2bis et présentée sur la figure (4.54).

Les prédictions numériques sont toujours très proches des anciens résultats. Elles sont en particulier très bonnes par rapport à nos mesures expérimentales, notamment au niveau du pic

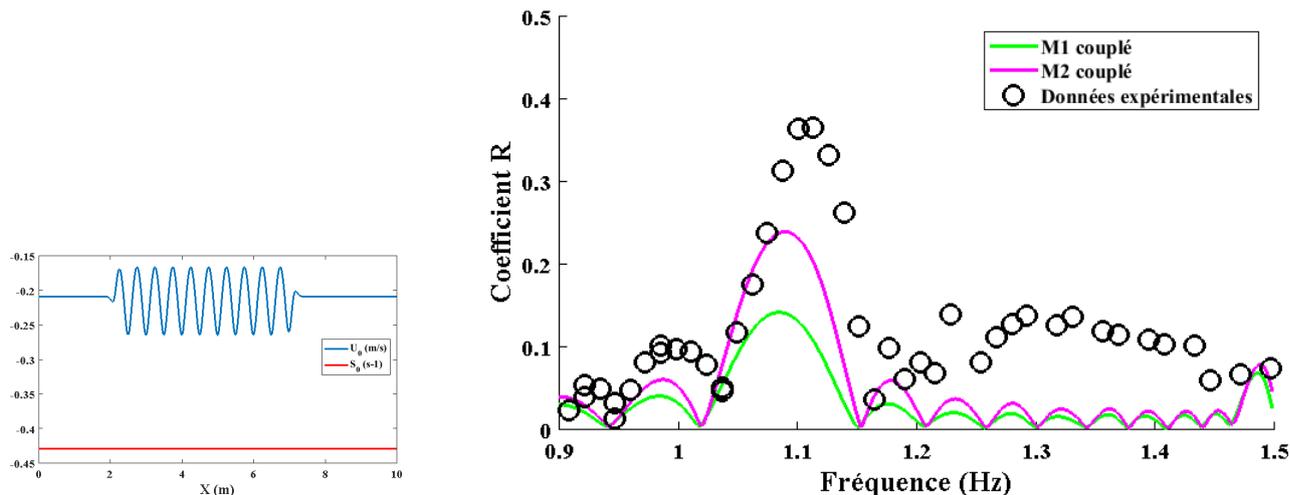


Figure 4.55: Réflexion de la houle par les nouveaux modèles -a) Lois d'approximation du courant de surface et du cisaillement -b) Courbes de réflexion

de Bragg ainsi que du comportement à hautes fréquences (entre 1.25 et 1.50Hz) avec toutefois un très léger décalage fréquentiel au niveau du pic. Aux plus basses fréquences, le modèle sous-estime encore la réflexion qui a été enregistrée, comme le faisait la version initiale M2.

A présent, nous allons approcher le profil de courant par un profil cisailé qui va être modulé au-dessus du fond ondulé. Pour une première configuration, on retient le profil P4 établi à partir de la régression linéaire sur les deux tiers de la colonne d'eau (méthode qui semblait donner les meilleurs résultats), soit:  $U_0 = -0.2085 m.s^{-1}$  et  $s = -0.4283 s^{-1}$ . Dans la même logique que précédemment, on choisira d'imposer à l'une ou l'autre de ces variables une modulation au-dessus du fond ondulé, avec une périodicité spatiale égale à celle de la bathymétrie.

**Interpolation du cisaillement** Dans un premier temps, nous avons imposé le cisaillement à sa valeur constante mesurée à l'entrée de l'écoulement. Par conservation du débit (4.18), on obtient un courant de surface modulé au-dessus du fond (4.55). Les résultats renvoyés par nos deux nouveaux modèles sont présentés dans la deuxième partie de cette même figure, et nous constatons immédiatement que la surestimation systématique de la fréquence pic, qui caractérisait les résultats de nos modèles initiaux, a disparu: à présent, les deux modèles couplés la sous-estiment légèrement (-2.6% d'écart par rapport à la valeur expérimentale pour M1 couplé et -2.15% pour M2 couplé). L'amplitude du pic de Bragg est par contre assez largement sous-évaluée, même si notre modèle M2 couplé offre de meilleurs résultats que le modèle M1 couplé. De même, la réflexion à plus hautes fréquences est complètement ignorée, le second pic n'est pas du tout représenté.

**Interpolation du courant de surface** Dans un second temps, nous avons imposé la valeur constante du courant de surface, et observé un cisaillement modulé au-dessus du fond (4.56). Les allures obtenues sont bien meilleures, en particulier sur le premier maximum local de résonance, entre 0.95 et 1Hz. Concernant le pic de Bragg, les fréquences pic sont encore mieux approchées (-1.89% pour M1 couplé et -1.17% pour M2 couplé) et les amplitudes également, avec moins de 20% d'écart pour la meilleure approximation. Cependant, nous n'avons toujours aucune mention du second pic, de la part d'aucun des deux modèles.

Le tableau (4.15) récapitule les paramètres de résonance calculés par chaque modèle couplé

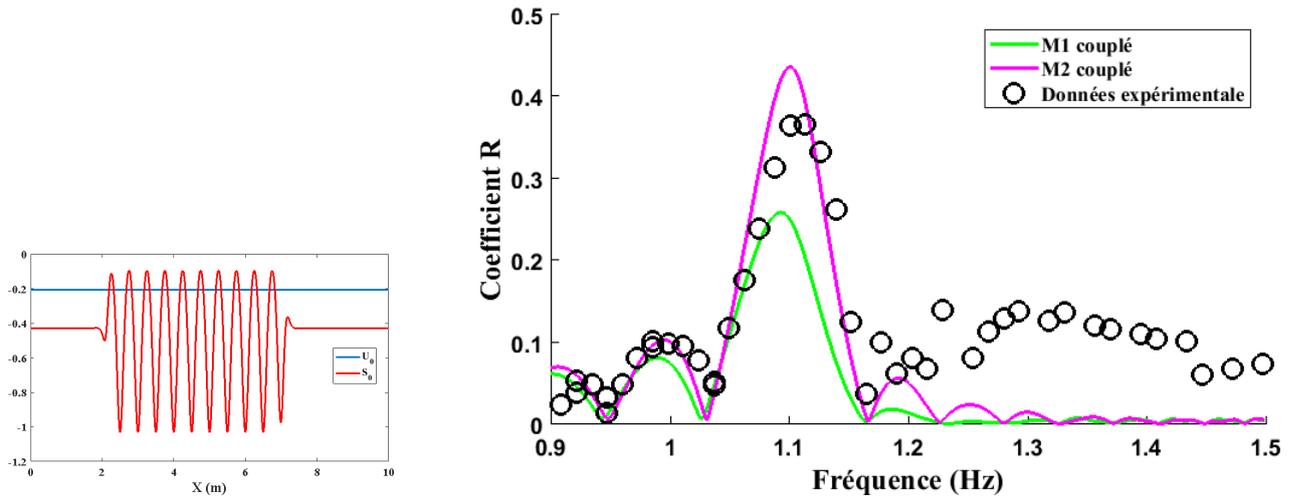


Figure 4.56: Réflexion de la houle par les nouveaux modèles -a) Lois d'approximation du cisaillement et du courant de surface -b) Courbes de réflexion

Paramètre imposé	M1 couplé				M2 couplé			
	f (Hz)	$\Delta$ (%)	a	$\Delta$ (%)	f (Hz)	$\Delta$ (%)	a	$\Delta$ (%)
$s$	1.085	-2.6	0.1424	-61.14	1.09	-2.15	0.2399	-34.52
$U_0$	1.093	-1.89	0.2588	-29.37	1.101	-1.17	0.4365	19.13

Table 4.15: Récapitulatif des paramètres de résonance de Bragg (fréquence et maximum de réflexion) - modèles couplés

dans chacune des configurations. Nous devons garder à l'esprit qu'il ne s'agit pour l'instant que d'un cas préliminaire, où on compare des résultats expérimentaux de réflexion en présence d'un courant cisailé complexe et inhomogène à une modélisation très simplifiée de cisaillement linéaire et d'évolution horizontale moyenne constante. Par comparaison, pour les lois d'approximation cisailées uniforme, nous n'avions pas d'aussi bons paramètres de résonance. M2 par exemple, approchait certes l'amplitude attendue de -18.37% mais surestimait la fréquence pic de plus de 8%, ou bien il l'estimait à moins de 1% d'écart mais cette fois c'était l'amplitude qu'il surestimait de presque 63%... On peut de plus émettre quelques réserves sur les profils de courant que nous avons choisi d'implémenter: les variations de vorticité sont par exemple très fortes, allant de  $-0.1s^{-1}$     $-1s^{-1}$  sur une demi-période de fond, alors que les inversions de profil que nous avons observées expérimentalement étaient bien plus douces. Il serait intéressant de reprendre la méthode que nous avons établie précédemment, en testant des lois d'approximation du profil de courant évolutives selon  $\mathcal{O}x$ .

## 4.5 Etude paramétrique

### 4.5.1 Sensibilité aux paramètres de courant

Les premiers résultats obtenus grâce aux nouveaux modèles couplés sont très prometteurs: malgré des profils de courant très simplifiés, nous arrivons   approcher la fréquence pic   presque 1% et le maximum de réflexion   moins de 20% d'écart. Il s'agit   présent de mener une étude paramétrique plus complète, pour évaluer précisément la sensibilité du pic de Bragg aux paramètres de courant  $U_0$  et  $s$ . Elle sera portée exclusivement avec le modèle M2bis, qui

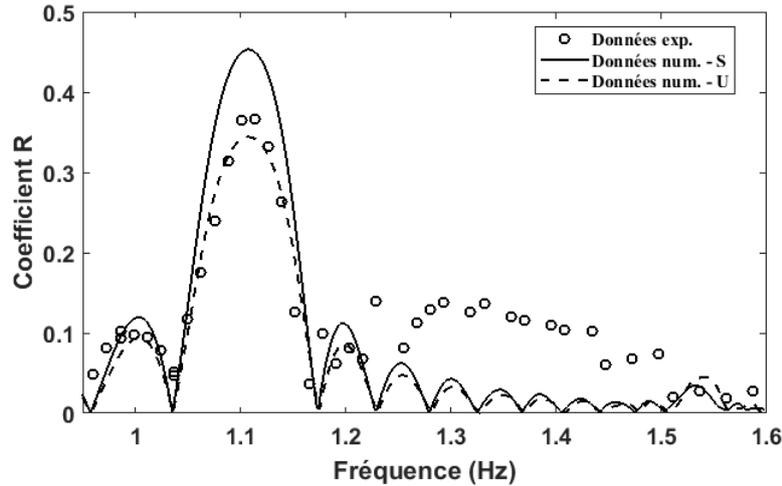


Figure 4.57: Courbes de réflexion par le nouveau modèle M2bis, en configuration de courant cisailé horizontalement constant, en imposant l’un ou l’autre des paramètres de courant

s’avère être à l’origine des modélisations les plus fiables. Une première direction est donnée en comparant les résultats obtenus expérimentalement en présence de courant cisailé avec deux modélisations basées sur un profil de courant verticalement cisailé et partiellement uniforme. Ce dernier terme, “partiellement”, permet de différencier le premier calcul, où on impose le cisaillement comme horizontalement uniforme et où on déduit le courant de surface variant par conservation du débit, et le second calcul, où comme précédemment on impose le courant de surface et on déduit le cisaillement. Ces deux cas sont présentés sur la figure (4.57) et viennent compléter l’étude préliminaire présentée au paragraphe précédent.

On constate là encore que la résolution de la fréquence pic est très bonne, avec un écart de -0.54% avec la valeur expérimentale et identique dans les deux calculs. En terme d’amplitude du pic de Bragg, en imposant le cisaillement, nos prédictions numériques accusent plus de 20% d’écart avec la réalité expérimentale. En revanche, en imposant le courant de surface, nos prédictions s’ajustent, et l’écart se réduit à -6%. Une première tendance se dessine, qui nous laisserait à penser que le courant de surface influence fortement l’amplitude du pic de Bragg. A partir de ce premier constat, nous allons mener une étude comparative sur l’influence de ces deux paramètres. Là encore on distinguera le cas où on impose le courant de surface (cas A) de celui où on impose le cisaillement (cas B).

On va considérer une plage de valeurs pour chacun de ces paramètres, centrée en 0 et cohérente avec nos valeurs expérimentales. On fera ainsi varier le courant de surface entre -0.25 et 0.25 m/s avec un pas de 0.1m/s et le cisaillement entre -0.45 et 0.45s<sup>-1</sup> avec un pas de 0.1s<sup>-1</sup>. Ces deux plages nous donnent une grille de n noeuds, où chaque noeud est associé à un couple (U0,s) et correspond à un cas de calcul (i). En effet, en chaque noeud, le couple de paramètres va permettre de déterminer un débit d’entrée, qu’on va imposer comme constant le long du canal. Ensuite, dans le cas A, on imposera également la vorticité comme constante le long du canal (à sa valeur d’entrée) et on fera varier le courant de surface à débit constant, et dans le cas B nous ferons l’inverse. Pour chaque calcul (A,i) ou (B,i) réalisé, nous affichons d’une part la fréquence pic, de l’autre l’amplitude pic. Nous obtenons alors deux sets de deux grilles, le premier set correspondant aux résultats (Fpic, Apic) issus des calculs de type A et présenté sur la figure (4.58), et le second set correspondant aux résultats issus des calculs de type B et présenté sur la figure (4.59) :

En observant ces cartes, peu de différences ressortent entre le cas A et le cas B, pour les deux

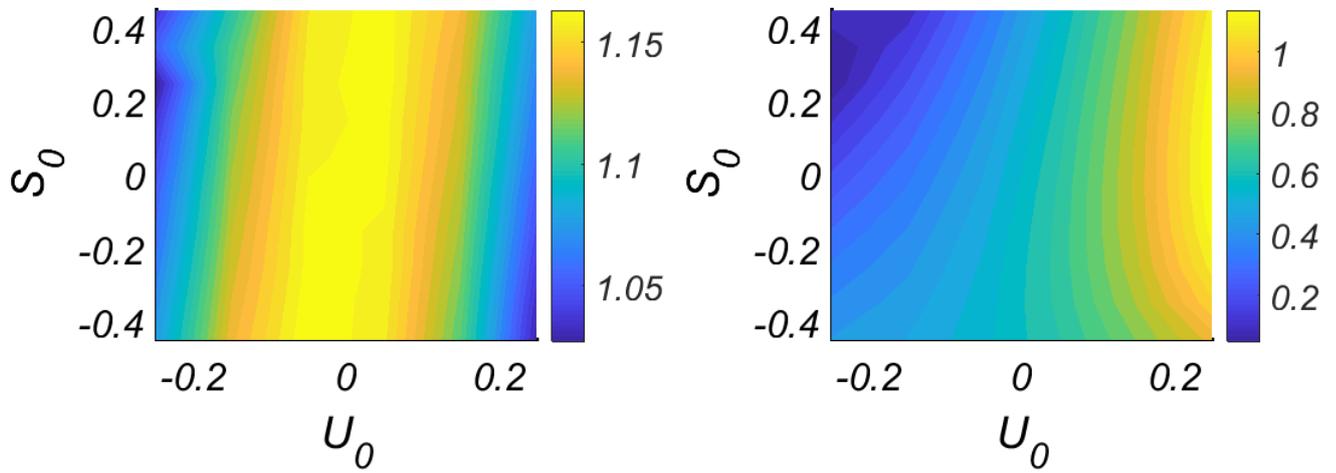


Figure 4.58: Caractéristiques du pic de Bragg selon les paramètres de courant, à vorticité imposée: a) Fréquence pic b) Amplitude pic

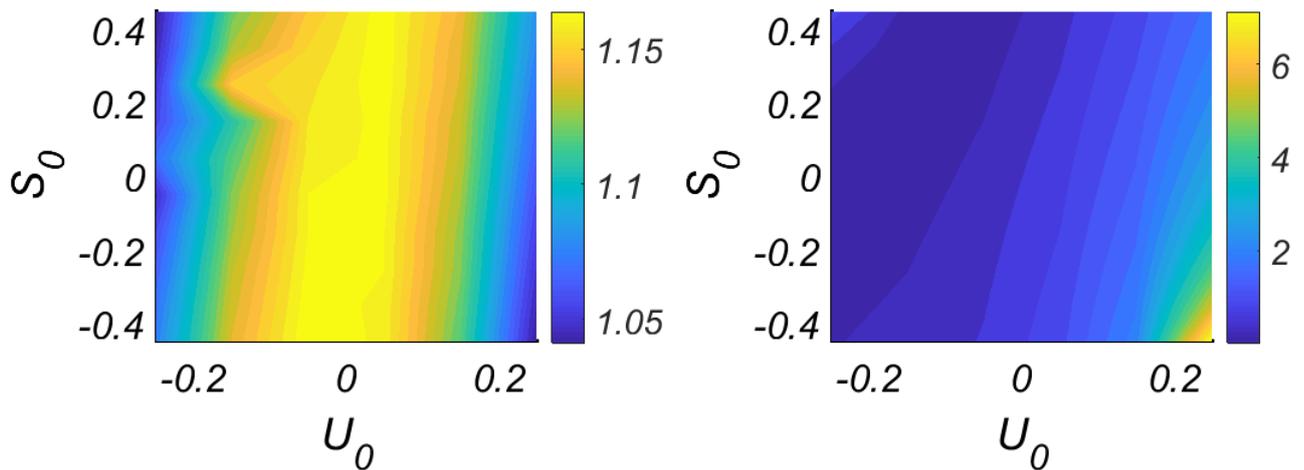


Figure 4.59: Caractéristiques du pic de Bragg selon les paramètres de courant, à courant de surface imposé: a) Fréquence pic b) Amplitude pic

paramètres du pic de Bragg. En observant les résultats issus du calcul A (4.58), il semblerait que le courant de surface joue un rôle prédominant pour déterminer la fréquence pic, tandis que le cisaillement aurait plutôt une influence à la marge. Pour l'amplitude du pic, les conclusions sont plus nuancées: à co courant, il semble que le courant de surface ait une influence dominante, mais à contre-courant il semble que ce soit plutôt la vorticité.

Les résultats issus du cas B ont une allure similaire, mais cette fois l'influence de la vorticité sur la fréquence pic est un peu plus visible   contre courant. De même concernant l'amplitude, où l'échelle colorimétrique a été modifiée, l'inclinaison des lignes de démarcation est plus importante, plus marquée. Un point singulier apparaît sur cette carte des fréquences pics pour le cas B, avec une fréquence pic d'environ 1.15 Hz pour un cisaillement d'environ 0.3 et un courant de surface aux alentours de -0.15m/s. Il reste encore   déterminer s'il s'agit d'un comportement isolé ou d'une tendance   part entière, il faudra pour cela raffiner le maillage et/ou étendre la plage des valeurs ( $U_{0,s}$ ) initiales.

  présent que nous savons quel paramètre de courant influence majoritairement quelle caractéristique du pic de Bragg, entamons une étude de sensibilité aux gradients des paramètres de courant.

#### 4.5.2 Sensibilité aux gradients des paramètres de courant

Pour poursuivre l'étude précédente, nous allons cette fois considérer des profils de courant évolutifs sur la longueur du canal. Il s'agit de reprendre le même protocole de calcul, mais cette fois le paramètre choisi ne sera plus imposé comme constant mais comme variable horizontalement, selon une loi de comportement. Cette loi sera établie par interpolation des valeurs relevées expérimentalement sans houle, et on consid rera successivement des lois de type linéaire, polynomiale et polysinusoidale. Les résultats sont respectivement présentés sur les figures (4.60), (4.61) et (4.62).

On remarque de façon générale que plus la représentation du courant est complexe, meilleurs sont les résultats pour le pic de Bragg: ainsi l'approximation de type linéaire donne des résultats encourageants si on impose le cisaillement, mais sous-estime gravement le pic en Bragg lorsqu'on impose le courant de surface. Pour une modélisation de type polynomiale, là encore, imposer le courant de surface décale le pic de Bragg, et imposer le cisaillement nous permet d'améliorer la représentation, mais surestime toujours le maximum de réflexion. La configuration polysinusoidale est celle qui donne les meilleurs résultats pour l'approximation du pic de Bragg, mais l'écart entre numérique et expérimental, concernant le comportement de la houle   plus hautes fréquences, reste important. La différence entre le calcul   cisaillement imposé et celui   courant de surface imposé est faible: imposer le cisaillement renvoie des maxima légèrement plus importants et   fréquence légèrement plus basse qu'en imposant le courant de surface. Mais l'écart entre les deux modélisations reste faible sur l'ensemble de la plage de fréquences.

Une piste pour améliorer la modélisation est justement de se pencher sur ce comportement   hautes fréquences. Plusieurs phénomènes interviennent pour modifier la propagation de la houle selon la fréquence, or notre loi d'approximation est basée sur des données relevées en l'absence de houle. Nous avons donc relancé les mêmes simulations, mais cette fois avec quatre lois d'évolution du courant de type polysinusoidale, basées sur les données relevées sous quatre fréquences de houle (1.59Hz, 1.35Hz, 1.12Hz, 0.95Hz). Les résultats associés sont présentés respectivement sur les figures (4.63), (4.64), (4.65) et (4.66), et les résultats varient.

De façon générale, les approximations du pic de Bragg sont très bonnes, en fréquence comme en amplitude. On constate une cohérence entre les résultats numériques issus d'une loi basée

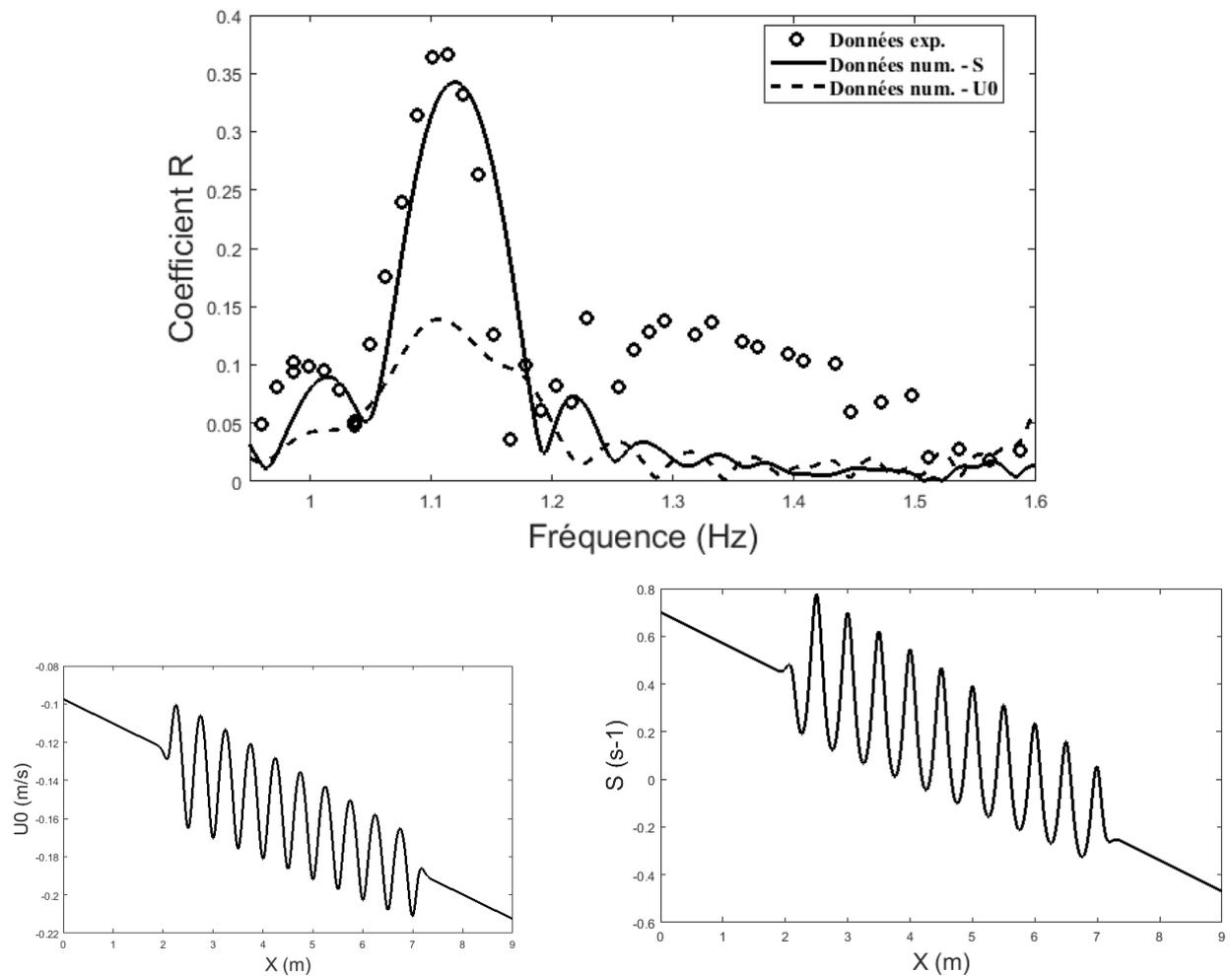


Figure 4.60: a) Courbes de réflexion - loi de comportement linéaire - b) Comportement de  $U_0$  déduit de la modélisation linéaire imposée de  $s$  - c) Comportement de  $s$  déduit de la modélisation linéaire imposée de  $U_0$

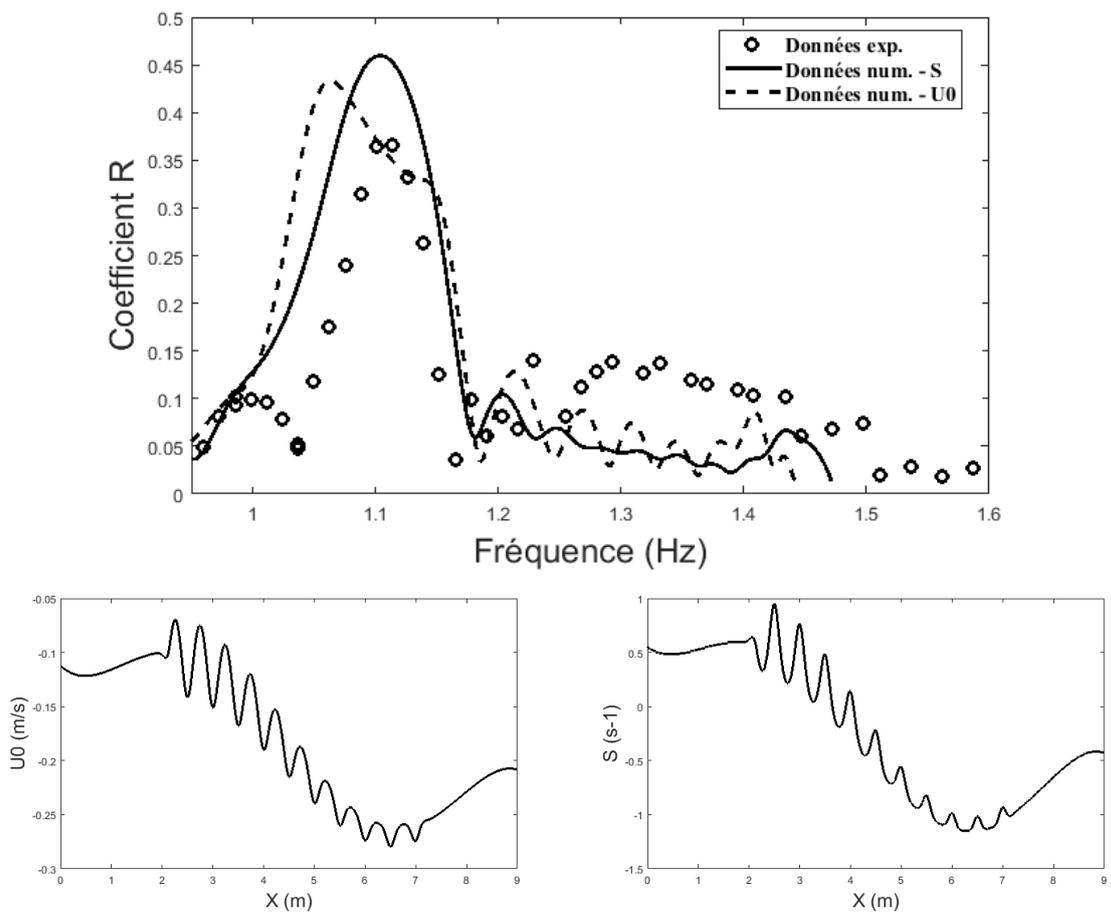


Figure 4.61: a) Courbes de réflexion - loi de comportement polynomiale - b) Comportement de  $U_0$  déduit de la modélisation polynomiale imposée de  $s$  - c) Comportement de  $s$  déduit de la modélisation polynomiale imposée de  $U_0$

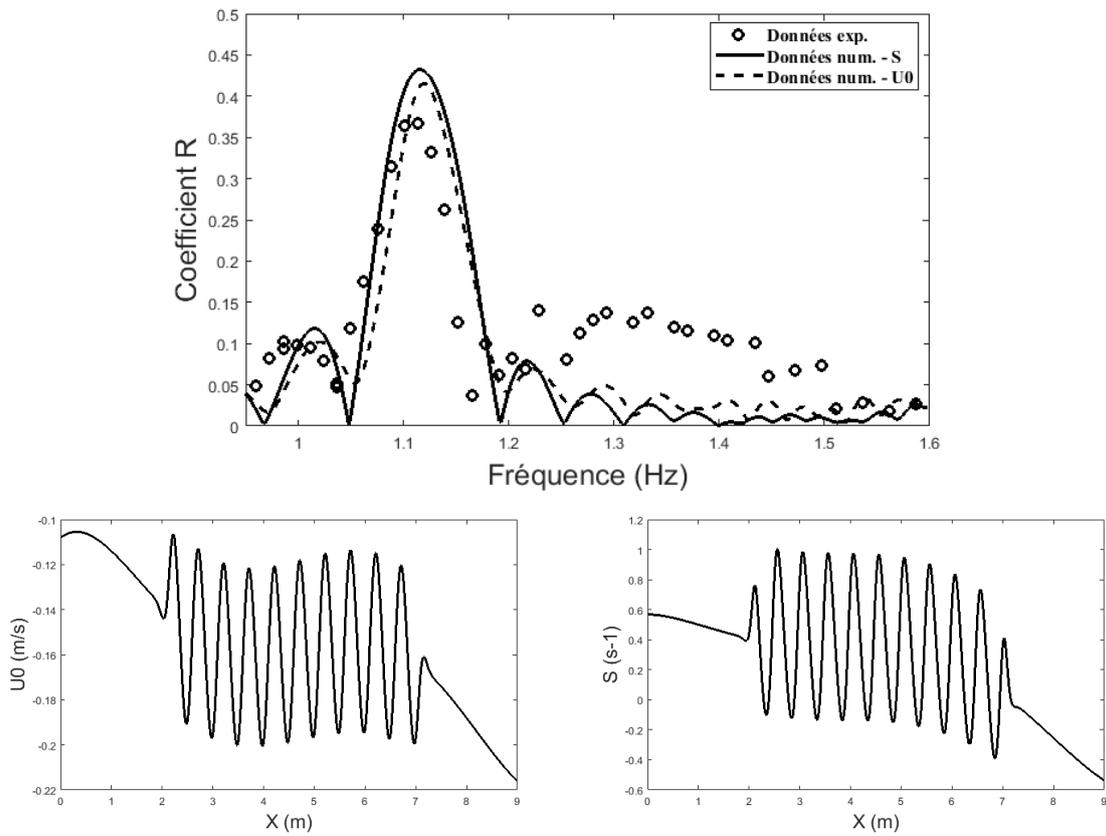


Figure 4.62: a) Courbes de réflexion - loi de comportement polysinusoidale - b) Comportement de  $U_0$  déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de  $s$  - c) Comportement de  $s$  déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de  $U_0$

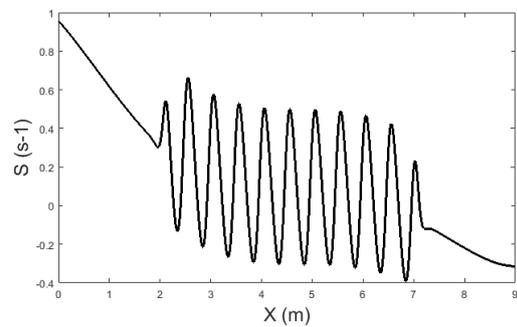
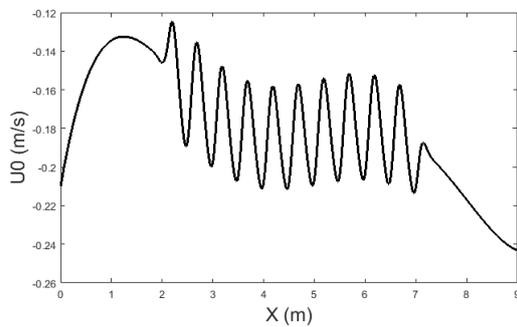
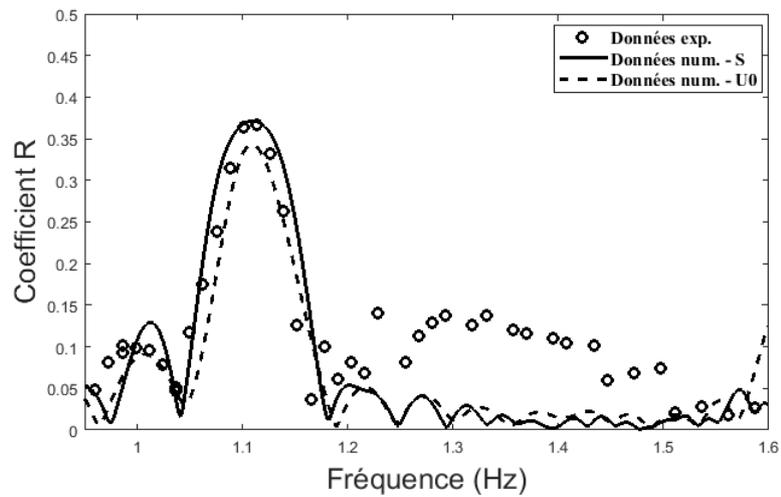


Figure 4.63: a) Courbes de réflexion - loi de comportement polysinusoidale -  $f=1.59\text{Hz}$  - b) Comportement de  $U_0$  déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de  $s$  - c) Comportement de  $s$  déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de  $U_0$

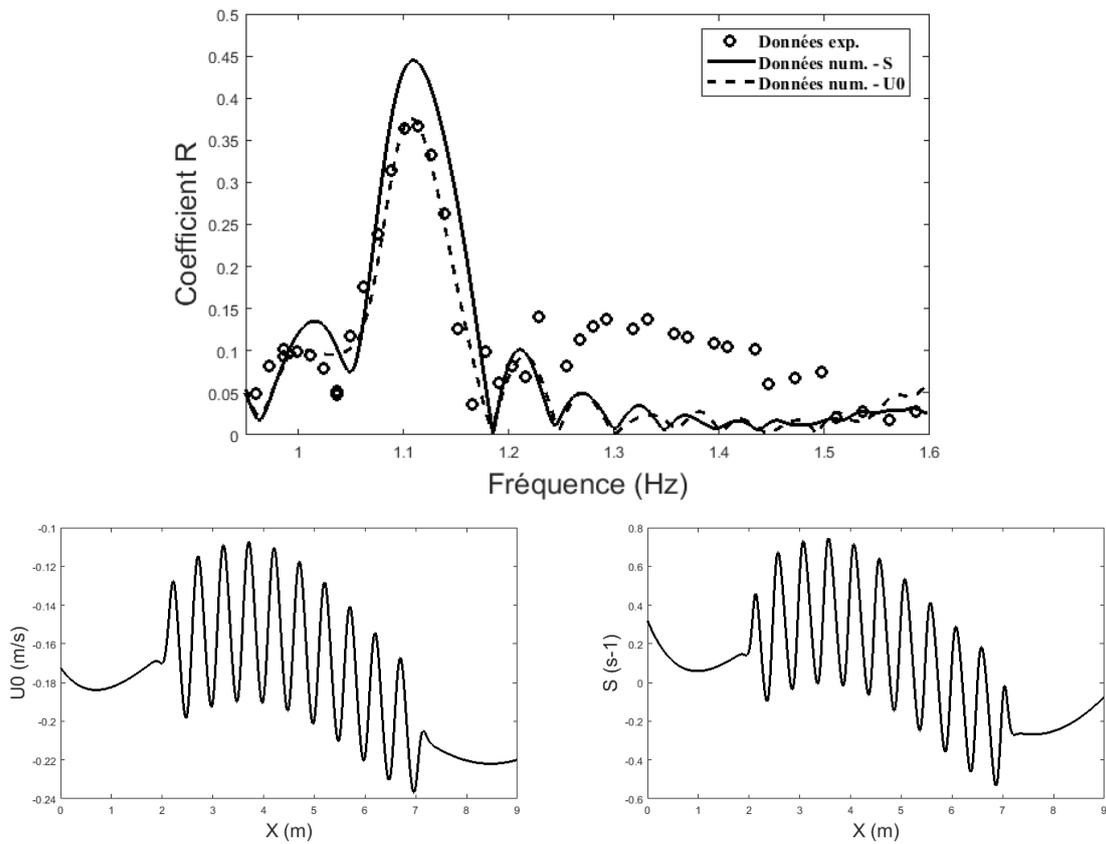


Figure 4.64: a) Courbes de réflexion - loi de comportement polysinusoidale -  $f=1.35\text{Hz}$ - b) Comportement de  $U_0$  déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de  $s$  - c) Comportement de  $s$  déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de  $U_0$

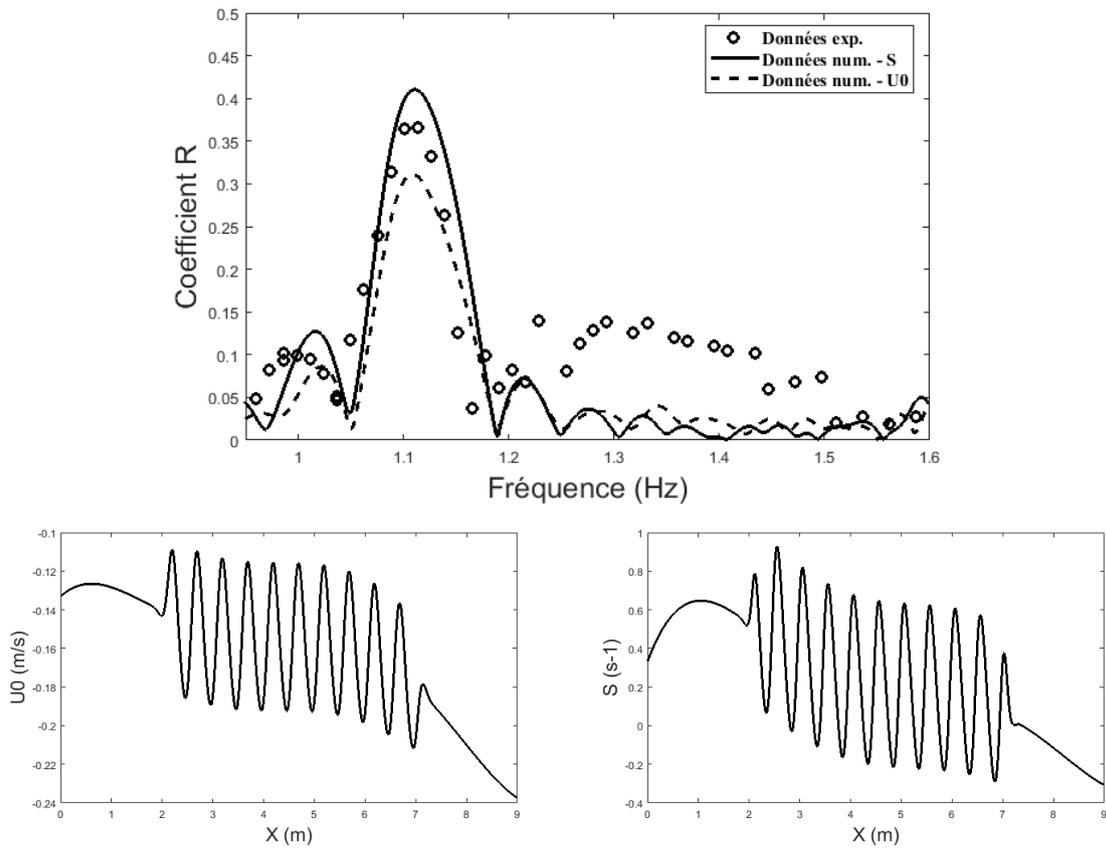


Figure 4.65: a) Courbes de réflexion - loi de comportement polysinusoidale -  $f=1.12\text{Hz}$ - b) Comportement de  $U_0$  déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de  $s$  - c) Comportement de  $s$  déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de  $U_0$

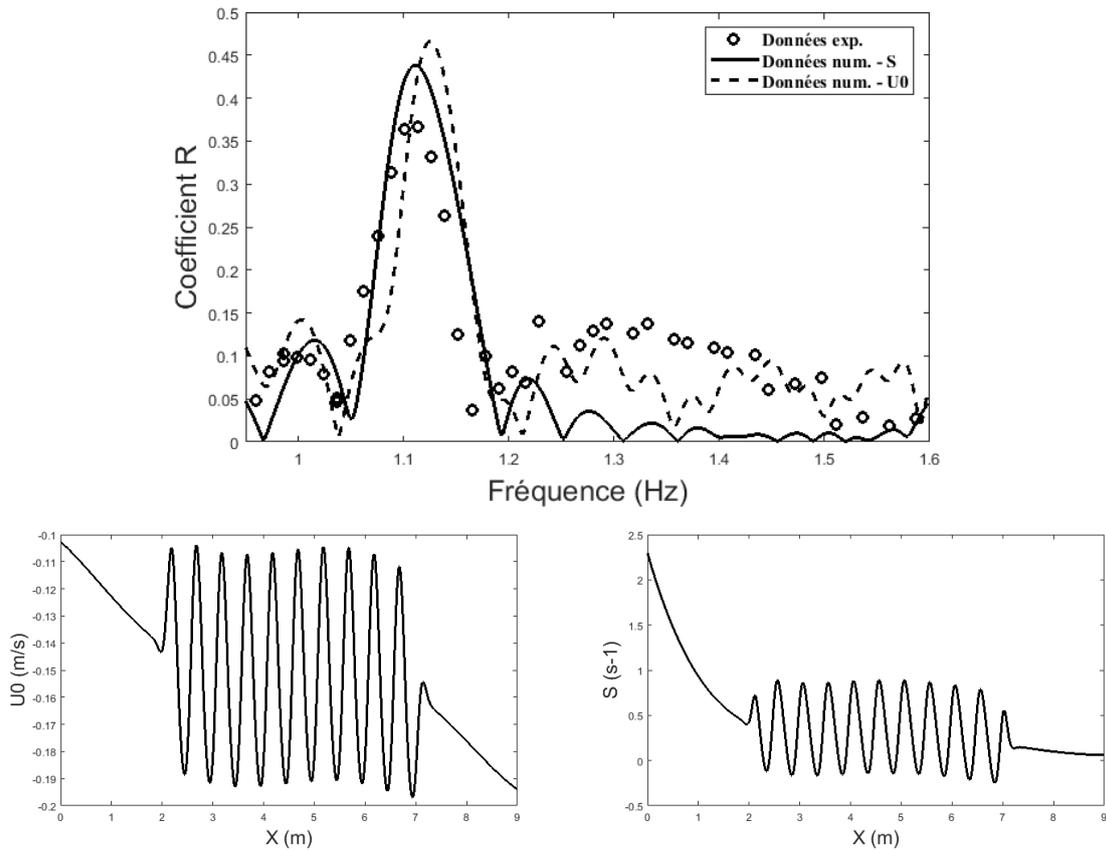


Figure 4.66: a) Courbes de réflexion - loi de comportement polysinusoidale -  $f=0.95\text{Hz}$ - b) Comportement de  $U_0$  déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de  $s$  - c) Comportement de  $s$  déduit de la modélisation polysinusoidale imposée de  $U_0$

sur des relevés à la fréquence  $F$  et les résultats expérimentaux aux alentours de cette fréquence  $F$ . par exemple, notre modèle basée sur la loi polysinusoidale  $F=0.95\text{Hz}$  approche de très près les résultats expérimentaux sur la plage  $0.9:1.5\text{Hz}$ . Deux modélisations en particulier retiennent notre attention, la première est celle reposant sur les profils relevés sous une houle de fréquence  $1.35\text{Hz}$  (4.64). En imposant le courant de surface comme polysinusoidal, on représente quasi-parfaitement le pic de Bragg, en amplitude comme en fréquence. Cela nous permet d'affirmer que la résonance de Bragg est sensible à l'influence du fond (nous avons imposé une loi polysinusoidale de même période que le fond) mais aussi à celle que la houle (la modélisation varie selon les caractéristiques de houle sous lesquelles nos profils de courant ont été mesurés).

Dans une autre optique, la deuxième modélisation qui nous intéresse repose sur les profils relevés sous une houle de fréquence  $0.95\text{Hz}$  (4.66): c'est la première fois sous le nouveau modèle qu'une modélisation marque la seconde zone de réflexion. On peut donc supposer que cette réflexion est sensible à l'évolution du courant de surface le long du canal. Cette affirmation est toutefois à nuancer, car dans la zone de fréquences où cette réflexion survient, nous avons relevé des oscillations transverses non négligeables. Il est donc également possible que ces modes transverses jouent un rôle dans cette réflexion.

## 4.6 Retour sur la littérature

Le nouveau modèle M2bis a résolu la faille des modèles de type Pente Douce et a réussi à représenter correctement notre pic de Bragg mesuré expérimentalement en présence de courant cisailé. Nous avons souhaité poursuivre notre étude de Bragg en revenant sur certaines études référentes, présentées plus tôt. La première porte sur la réflexion mesurée expérimentalement par Magne et al. au BGO First (2005, [119]) puis reprise par Touboul et al. pour confronter les résultats expérimentaux au modèle M2 (2016, [193]). Les résultats ont été présentés au paragraphe 2.1.6 (2.2). En première approximation, nous avons lancé notre modèle M2bis sur le cas de courant verticalement cisailé et horizontalement constant qui nous paraissait le plus représentatif des essais sur M2, et le plus cohérent avec les profils de courant relevés expérimentalement, soit  $U_0 = 0.4\text{m/s}$  et  $s = 0.2\text{s}^{-1}$ . Le résultat est présenté sur la figure (4.67). On remarque immédiatement que la fréquence pic est bien mieux représentée qu'avec l'ancien modèle Pente Douce Modifiée. Cependant, et de façon logique au vu des conclusions tirées aux paragraphes précédents, l'amplitude du pic de Bragg est sur-évaluée. Pour améliorer la modélisation, il faut donc se baser sur un profil de courant plus réaliste. D'après les données de courant relevées expérimentalement par Magne et al. et présentées sur la figure (2.2), nous avons établi des lois d'interpolation de la vitesse du courant à 50 puis 90cm de profondeur. En première approximation, nous pouvons en déduire une évolution du courant de surface et du cisaillement le long du canal, présentée sur la figure (4.67). La réflexion associée à ce profil de courant évolutif est également présentée sur la figure (4.67), en première partie. Cette réflexion est bien plus cohérente en terme d'amplitude du pic de Bragg, et est toujours plus précise que l'ancien modèle en terme de fréquence pic. Cette nouvelle théorie pourrait donc apporter un éclairage nouveau à beaucoup d'autres études de propagation de houle en présence de courant.

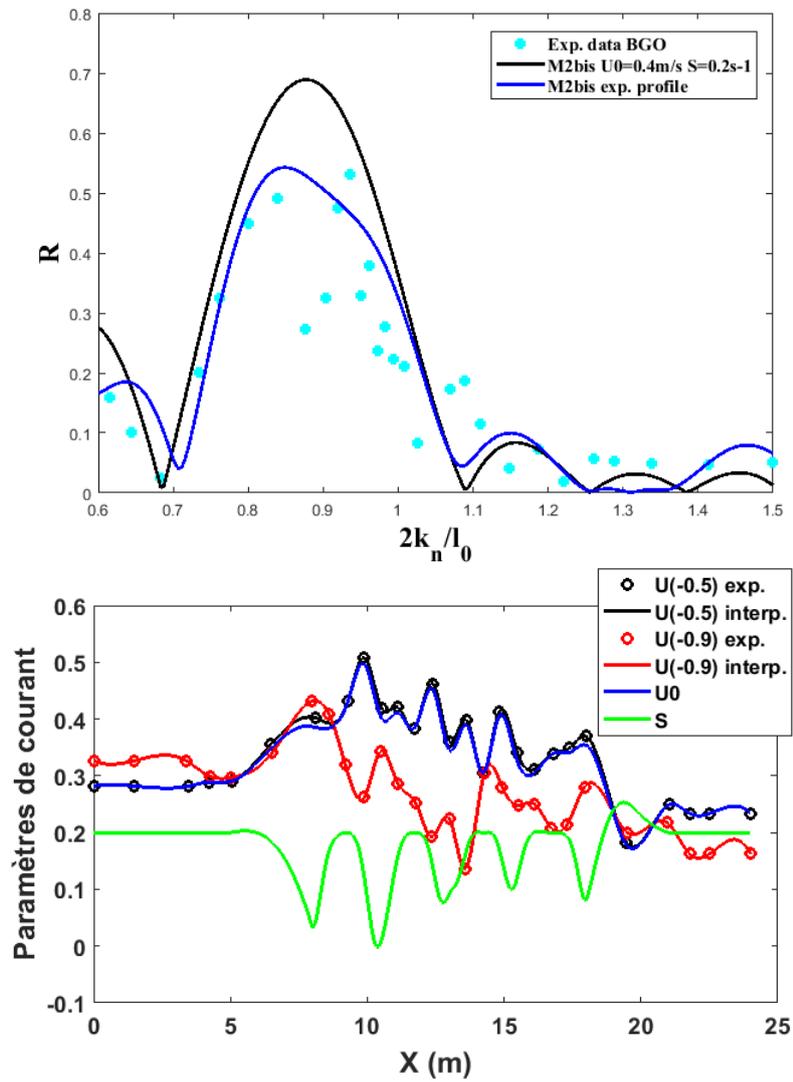


Figure 4.67: a) Courbes de réflexion - M2bis et données expérimentales Magne et al. (2005, [119]) - b) Interpolation des paramètres de courant à partir des données expérimentales de ([119]), utilisées pour les courbes de réflexion

# Chapitre 5

## Conclusions et ouverture

“L’air sera-t’il plus doux? Les jours de soleil seront-ils plus brillants? Les étoiles seront-elles plus scintillantes? Ou vais-je perdre tout ça? Est-ce que je veux vraiment être riche?”. Don Rosa, *La Grande Epopée de Picsou*.

Dans cette partie, nous aurons pour but d’expliciter le message le plus important qui émerge de ces trois années de travail, de souligner l’aspect innovant et central de cette étude et de préciser les perspectives qui pourront en découler pour la suite. Dans un premier temps, nous allons présenter une synthèse de notre argumentaire. Nous allons rappeler la question de recherche, quel est le but de cette étude, et expliquer les pas que nous avons faits pour y répondre au travers des différents chapitres, des grandes lignes et des étapes marquantes. Il s’agira de mettre en lumière le cheminement parcouru, sa cohérence. Nous pourrons alors formuler notre réponse à la question générale, en s’appuyant sur nos principales observations et conclusions pour étayer cette position. Nous tenterons ensuite de remettre nos travaux en perspective, en expliquant en quoi ils contribuent à compléter la littérature sur les modèles de propagation de houle en milieu côtier. Enfin, toute recherche étant “finie”, nous aborderons les points que nous avons choisis de laisser de côté, ainsi que ceux que nous n’avons pas encore eu le temps de traiter et qui sont pourtant sur la liste des perspectives immédiates. Nous présenterons également quelques pistes de réflexion à plus long terme.

Notre objectif premier était d’analyser l’influence de la vorticité sur la réflexion de la houle, et en particulier sur le phénomène de résonance de Bragg. Cependant, nous avons mis en évidence qu’en présence de courant, l’impact de l’asymétrie entre les nombres d’onde incident et réfléchi ne permet pas une modélisation rigoureuse des intéractions houle-courant-bathymétrie, a fortiori en présence de vorticité. Le plus bel aboutissement de ces travaux est donc la mise en place de deux nouveaux modèles de propagation de houle côtière, plus pertinents, basés sur une décomposition originale du potentiel des vitesses. Cet aboutissement a été permis grâce aux expériences menées en canal qui, par la forte réflexion induite dans les conditions de résonance de Bragg, nous a amené   remettre en question les approches classiquement menées sur ce type de modèles. Ces nouveaux modèles permettent, entre autres, de modéliser une forte réflexion de la houle en présence de courant et de bathymétrie variable, là où, auparavant, nous devions choisir entre une forte réflexion sur une bathymétrie lentement variable en l’absence de courant ou de fortes variations bathymétriques mais une réflexion faible. Grâce aux simulations menées avec nos modèles initiaux, imprécis mais pas inexacts, nous avons tout de même pu faire émerger quelques tendances sur l’influence comparée de la vorticité et du courant de surface sur le pic de Bragg. Il s’agit désormais de préciser ces tendances, en menant de nouveau une analyse détaillée de l’influence de la vorticité   l’aide des nouveaux modèles.

**Résumé des travaux de recherche** Le projet MORHOC'H, dans lequel s'inscrit cette thèse de doctorat, avait pour but de contribuer à la compréhension du milieu côtier, en amenant les modèles physiques usuels à tenir compte d'un paramètre jusqu'alors négligé mais pourtant bien présent: l'inhomogénéité verticale des courants littoraux. Pour cela, deux modèles de propagation de houle - l'équation de Pente Douce et l'équation de Pente Douce Modifiée - ont été étendus pour tenir compte de cette vorticité: c'était la première phase du projet. La principale Question de Recherche de cette thèse était donc de déterminer quelle influence a la vorticité sur la propagation de la houle en présence de bathymétrie variable, grâce   des simulations effectuées avec ces deux modèles. Plus précisément, nous avons choisi de travailler sur le phénomène de résonance de Bragg en présence de courant cisailé. Ce phénomène allie les interactions houle-courant-bathymétrie et présente un intérêt particulier pour l'ingénierie côtière, en raison de son fort potentiel défensif contre l'érosion littorale (renvoi d'une grande partie de l'énergie de la houle vers le large par une structure bathymétrique peu invasive).

Pour répondre   cette question, il a d'abord fallu s'appropri er les connaissances actuelles sur les interactions houle-courant-bathymétrie, et sur la résonance de Bragg en particulier. On peut retrouver un aperçu non exhaustif de la littérature sur le sujet dans le premier chapitre. Nous avons également passé en revue les différents modèles numériques existants pour représenter ces phénomènes, en particulier les plus récents, développés dans le cadre du projet MORHOC'H: les modèles de Pente Douce simple et modifié.

La production d'un code original en Fortran, pour pouvoir utiliser ces modèles sur des études concrètes, a été la première contribution de cette thèse au projet. Elle est présentée dans le chapitre deux, avec tous les détails relatifs aux modèles implémentés, aux méthodes de résolution utilisées et   la configuration numérique générale. Gr ce   ce code, nous avons pu étudier l'influence de la vorticité sur la propagation de la houle, dans le cas particulier de la résonance de Bragg. Une première analyse paramétrique (présentée dans la deuxième partie du chapitre trois) a fait émerger quelques tendances sur l'influence comparée du courant de surface et du cisaillement, avec notamment une propension du courant de surface   influencer sur l'amplitude du pic de réflexion, tandis que le cisaillement influencerait plus sur la fréquence du pic.

Une fois l'outil de modélisation en main, nous avons besoin de références sur l'influence de la vorticité sur la propagation de la houle. Nous avons décidé de collecter notre propre jeu de données expérimentales et nous avons mené une campagne en canal   houle: c' st notre deuxième contribution. Le dispositif et les outils utilisés sont présentés dans le troisième chapitre. Comme nous l'avons vu, notre objectif était de quantifier l'impact de la vorticité sur les interactions houle-courant-bathymétrie et spécifiquement sur la résonance de Bragg. Si l'aspect bathymétrique a été facilement mis en place grâce   un fond ondulé en bois et résine époxy, la création d'un courant cisailé stable a été plus compliquée, et a nécessité un certain nombre d'essais et un solide système de laminarisation de l'écoulement. Nous avons toutefois réussi   observer la réflexion d'une houle régulière se propageant au-dessus d'un courant cisailé horizontalement variable et d'une bathymétrie sinusoïdale, avec un pic de réflexion clairement identifié. Nous avons également fait une première et importante constatation: par rapport aux données expérimentales de réflexion collectées sans courant, un décalage en fréquence et en amplitude du pic de Bragg survient en présence d'un courant cisailé. Plus étonnant, on remarque aussi l'apparition d'un second pic de réflexion,   plus hautes fréquences. En analysant de près les mesures de courant réalisées   intervalles r guli rs et rapprochés au-dessus du fond ondulé, nous avons observé des inversions régulières et récurrentes des profils verticaux (soit un changement de signe de la vorticité), en adéquation avec les ondulations de la bathymétrie. Nous avons besoin des modèles pour corréler les comportements de l'écoulement et de la houle, et faire la lumière sur l'origine de ces réflexions inattendues.

Pour comprendre ce que nous avons observé dans le canal, nous tentons de le modéliser, par le biais des deux équations spécifiquement formulées pour traiter la vorticité (Mild Slope et Mild Slope modifiée): c'est notre troisième contribution, et elle est présentée dans le quatrième chapitre. Il s'agit d'analyser de façon plus en plus complexe l'évolution du courant le long du canal, en établissant des lois d'approximation du courant de surface et du cisaillement de type constant, linéaire puis polynomial voire même polysinusoidal (polynomial sur l'ensemble du canal et sinusoidal spécifiquement au-dessus du fond ondulé), afin d'intégrer même les inversions locales du profil vertical de courant. Nous avons imposé   tour de rôle l'un ou l'autre des paramètres de courant, pour comparer leur influence respective et confirmer les tendances qui s'étaient dessinées pendant l'étude paramétrique. Nos tentatives pour modéliser convenablement le comportement de la houle sont plutôt positives. En tenant compte des intéractions de second ordre avec le fond (modèle Mild Slope modifié), nous obtenons des résultats acceptables en terme d'amplitude du pic de Bragg. Cependant, ils sont systématiquement associés   un décalage inopportun de la fréquence pic, et ce malgré tous nos efforts pour gagner en précision. Nous avons par exemple amélioré notre méthodologie de traitement des profils relevés expérimentalement, en nous questionnant sur la pertinence de considérer comme influent l'ensemble du profil vertical, sur toute la colonne d'eau. Après avoir considéré le courant   une profondeur caractéristique (et constaté que cela nous donnait déjà de meilleurs résultats), il nous a paru cohérent de tenir compte de la couche supérieure de l'écoulement, celle qui impacte le plus la houle. Mais même avec les caractéristiques les plus précises possible (compte tenu des mesures réalisées) obtenues par cette méthode, nous n'avons pas pu éliminer le décalage de fréquence pic.

C'est donc le dernier pas que nous avons entrepris: nous avons remis en question les modèles sur lesquels nos analyses reposent, et le cadre théorique associé. Nous disposons de modèles hyperboliques qui permettent une forte réflexion seulement en présence de variations bathymétriques faibles. Or, le phénomène de résonance de Bragg implique justement des variations bathymétriques non négligeables. Jusqu'alors, la littérature n'avait nullement fait mention d'un quelconque problème pour ce type de configurations, les résultats étant sans doute jugés acceptables pour les projets associés. Mais dans notre cas, l'arrivée d'un courant a compliqué les choses, en créant une dissymétrie entre les nombres d'onde incident et réfléchi, aggravée par la vorticité. Or cette dissymétrie n'est absolument pas prise en compte par nos modèles, qui reposent sur une décomposition du potentiel des vitesses en modes locaux tenant compte uniquement de l'onde incidente. Nous supposons que cet écart significatif entre nos modélisations et la réalité est très certainement lié au décalage trouvé dans nos résultats.

Plusieurs membres de l'équipe d'Océanographie Physique, en collaboration avec l'université d'Athènes, se sont alors attelés   mettre au point une nouvelle décomposition du potentiel des vitesses, en tenant compte de cette dissymétrie. Très rapidement, il en a résulté deux nouveaux modèles couplés, basés sur nos modèles initiaux ( quations de pente douce et pente douce modifiée, prise en compte ou non des intéractions de second ordre avec le fond). Nous avons immédiatement appliqué ces modèles   notre cas de résonance de Bragg, les premiers résultats sont de très bonne augure: la fréquence pic n'est plus surestimée, et une modélisation   courant évolutif permet une excellente représentation du pic de Bragg! Les modèles et les résultats préliminaires associés sont présentés   la fin du quatrième chapitre.

**Réponse   la question de recherche** Nous étions partis pour étudier l'influence de la vorticité sur la propagation de la houle, en comparant une série de données expérimentales originales (résonance de Bragg en présence d'un courant cisailé évolutif) et deux modèles hyperboliques, étendus en amont de ces travaux pour intégrer la vorticité. Nous pouvons

répondre en partie à la question de départ, car l'exploitation de nos données expérimentales a fait apparaître des comportements spécifiques (décalage en fréquence et en amplitude du pic de Bragg) et parfois inédits (apparition d'un second pic de réflexion à plus hautes fréquences). De plus, une étude paramétrique a été menée pour comparer l'influence respective du cisaillement et du courant de surface, et a fait émerger quelques tendances.

Cependant, au cours de nos recherches, les échecs répétés pour approcher précisément à la fois l'amplitude et la fréquence du pic de Bragg - et ce malgré des modélisations complexes de l'évolution du profil de courant - nous ont conduit à remettre en question nos modèles. Nous nous sommes ainsi aperçus qu'une partie du phénomène de propagation (attachée à l'onde réfléchie) avait été ignorée par la littérature, mais qu'en présence de courant (et a fortiori de vorticité) elle avait manifestement un rôle   jouer dans la réflexion de la houle. Pour poursuivre nos analyses sur le rôle du cisaillement, il était nécessaire de modifier nos modèles et d'intégrer l'onde réfléchie dans une nouvelle décomposition du potentiel des vitesses. Nous obtenons non plus deux modèles mono-équations mais des modèles   deux équations couplées. Cette prise de conscience arrivant en fin de thèse - il a tout de même fallu mener une campagne expérimentale et une étude paramétrique poussée pour mettre en évidence cette faille théorique - nous n'avons pour l'instant testé ces nouveaux modèles que dans une configuration très simplifiée (modèle de courant constant) mais avec des résultats très prometteurs. Nous pouvons   présent reprendre notre démarche pour répondre   la question de recherche, cette fois avec des modèles plus aptes   modéliser précisément l'ensemble des phénomènes et interactions impliquées.

**Mise en perspective ... et perspectives de mise !** Historiquement, la littérature a mis   notre disposition des modèles elliptiques (Berkhoff) qui permettaient de modéliser une forte réflexion de la houle en l'absence de courant, puis des modèles parabolis s qui ont restreint l'étude   de faibles réflexions et enfin des modèles hyperboliques (sur lesquels nous avons initialement basé notre étude) qui autorisaient   nouveau de fortes réflexions mais uniquement sous couvert de faibles variations bathymétriques. Avec les travaux présentés dans cette thèse, et tout ce qui en découlera, nous espérons bientôt disposer de modèles autorisant les fortes réflexions en présence de courant et de fortes variations bathymétriques, et en prime intégrant la vorticité. Conclure l'étude sur l'influence de cette vorticité sur le pic de Bragg est une des perspectives   très court terme. Il faudra pour cela trouver la meilleure approximation de l'évolution du courant (en exploitant la totalité des données que nous avons recueillies), comparer   nouveaux avec nos résultats expérimentaux (voire en obtenir d'autres, par exemple la réflexion de la houle en présence d'un courant constant, pour isoler l'influence du courant de celle de la vorticité) et compléter cette étude paramétrique sur l'influence du cisaillement sur le comportement de la houle.

Nous avons surtout consacré cette thèse   l'étude du pic de Bragg, son objectif premier. Mais le second pic de réflexion que nous avons pu observer de façon tout   fait inattendue (et que nous avons aussi observé pendant la campagne de prédimensionnement) mérite qu'on s'y consacre pleinement. D'où vient-il et dans quel contexte apparaît-il? Est-ce un phénomène typiquement engendré par la vorticité? Quels paramètres influent sur son intensité ou sa position? Pourra-t'on l'analyser grâce aux nouveaux modèles (nous supposons en effet que la dissymétrie des nombres d'onde n'y est peut-être pas étrangère) ? Telles sont les questions qui subsistent, et qu'il serait intéressant d'explorer dans les prochains mois.

De façon plus générale, des pistes de réflexion   plus long terme sont aussi   considérer. Cette thèse de doctorat devait conclure le projet de recherche MORHOC'H. En fin de compte, par les nouveaux modèles mis en place, elle ouvre une nouvelle voie de modélisation pour la propagation de la houle en milieu côtier. Il s'agira de poursuivre sur ce chemin en  ten-

dant nos modèles à d'autres phénomènes de propagation, en trois dimensions notamment, et, pourquoi pas, en proposant cette nouvelle décomposition du potentiel à d'autres modèles océanographiques (météorologie, dimensionnement d'ouvrages...). Après tout, la recherche en elle-même est un processus qui ne finit jamais...

“Les humains sont d'éternels insatisfaits parce qu'ils ne savent pas être patients. Moi, tu vois, cahin-caha, en-deçà des philosophes qui frôlent la vérité sans jamais la saisir, des scientifiques qui l'expliquent sans jamais la comprendre et en-deçà des artistes qui l'utilisent sans la connaître, je cherche la lumière au fond de ma tanière.” Patricia Reining, *Le Buveur de Liberté*.



# Annexes



# Appendix A

## Mesures complémentaires le long du fond ondulé

Cette annexe est destinée à présenter en détail les mesures de courant relevées sur le fond ondulé. Nous avons numéroté les portions de fond dans le sens du courant (inverse au sens de propagation de la houle), soit de la plage vers le batteur. La première mesure, sur la troisième longueur d'onde de fond ondulé, bien que présentée dans au paragraphe 3.4.4.1.1, sera rappelée, pour faciliter le suivi de l'évolution du profil de courant le long du fond ondulé. Pour avoir une idée assez précise de l'évolution du profil de courant, nous avons décidé de procéder comme suit: cinq profils verticaux par longueur d'onde de fond, sur une longueur d'onde sur deux à partir de la troisième (en partant de la plage). Nous avons donc successivement instrumenté la troisième longueur d'onde, puis la cinquième, la septième et la neuvième. Nous ferons donc référence aux zones de mesure selon les appellations M1L3 (pour la première série de Mesure sur la troisième Longueur d'onde), M2L5, M3L7 et M4L9.

### A.1 Mesures de la première portion de fond (M1L3)

Le schéma (A.1) nous donne une vision globale des mesures effectuées sur cette portion de fond. On rappelle que le courant s'écoule de la droite vers la gauche alors que la houle se propage dans le sens inverse. Nous sommes sur la troisième longueur d'onde de fond que parcourt le courant, assez loin du bord pour ne plus se préoccuper d'éventuelles turbulences de bord.

Sur la figure (A.2), on peut observer l'évolution des profils de courant relevés en chaque position, avec et sans houle. Ayant été largement commentés dans le corps du manuscrit (3.31), ils ne sont insérés que pour faciliter la comparaison d'une portion de fond à l'autre.

Pour faciliter l'analyse de ces profils - et car nous en avons extrait les vorticités expérimentales à la base des lois d'approximation - nous présentons sur la figure (A.3) les régressions linéaires associées aux profils de la figure (A.2), régressions établies sur les deux-tiers de la colonne d'eau. Nous avons d'ailleurs déjà discuté de ces résultats pour le cas sans houle dans le chapitre trois (3.32). On remarque simplement que le profil de courant relevé sans la houle ne présente qu'une inversion, sur la troisième position. Les profils relevés en présence de houle sont eux plus complexes: sous la plus haute fréquence de houle, on n'observe qu'une inversion pour la position  $x = 5.79m$ . Sous les houles pour les trois autres fréquences (1.35Hz, 1.12Hz et 0.95Hz), c'est plus chaotique, avec une inversion entre les positions 6.26 et 6.15m, puis à nouveau entre 6.15m et 6m, et enfin une troisième en  $x = 5.79m$ .

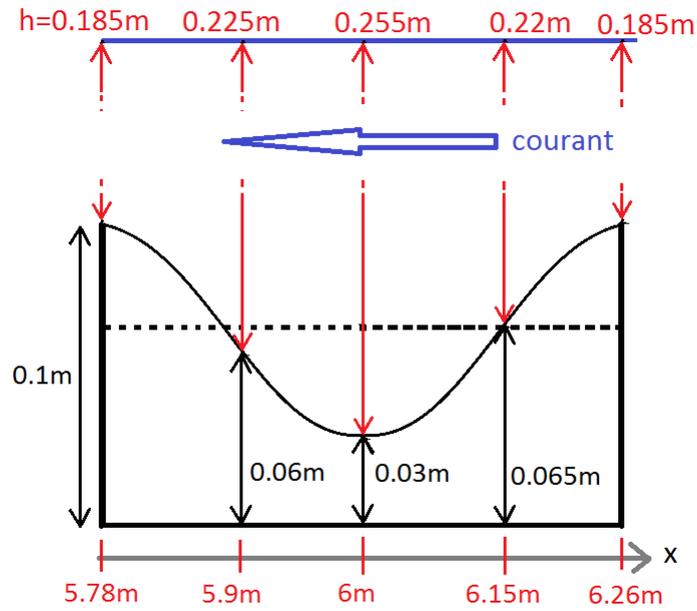


Figure A.1: Schéma de mesure des profils verticaux de courant, relevés sur la 3e longueur d'onde de fond (M1L3)

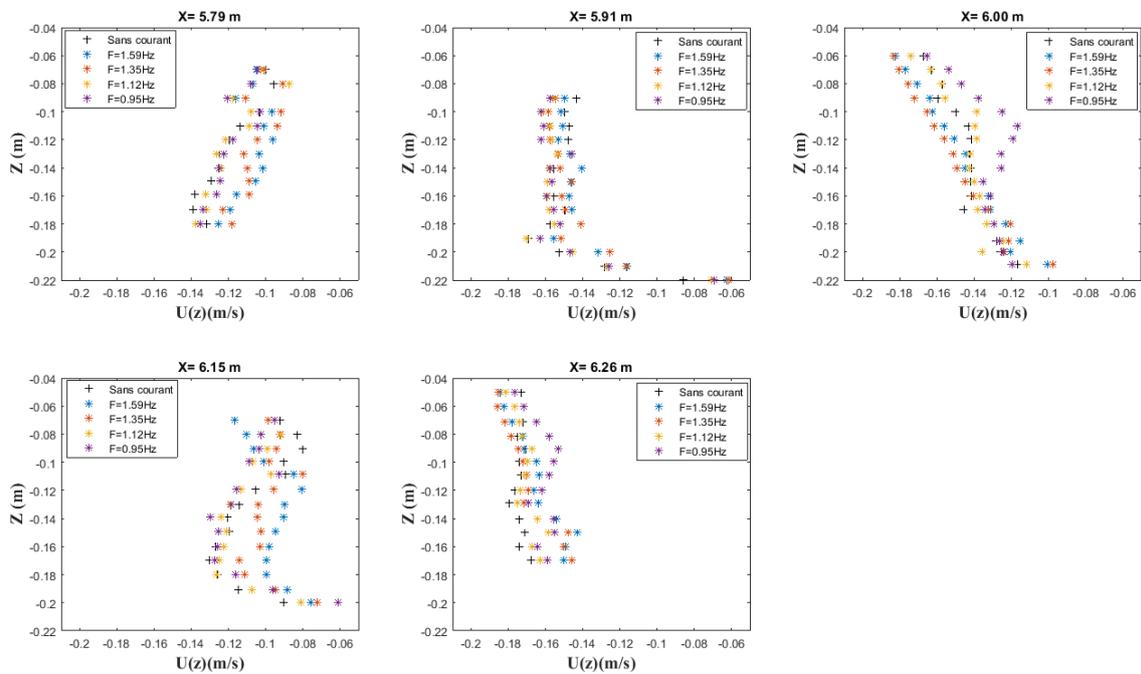


Figure A.2: Profils de courant sur la 3e longueur d'onde de fond: superposition, pour chaque position, des profils sans houle et avec houle (M1L3)

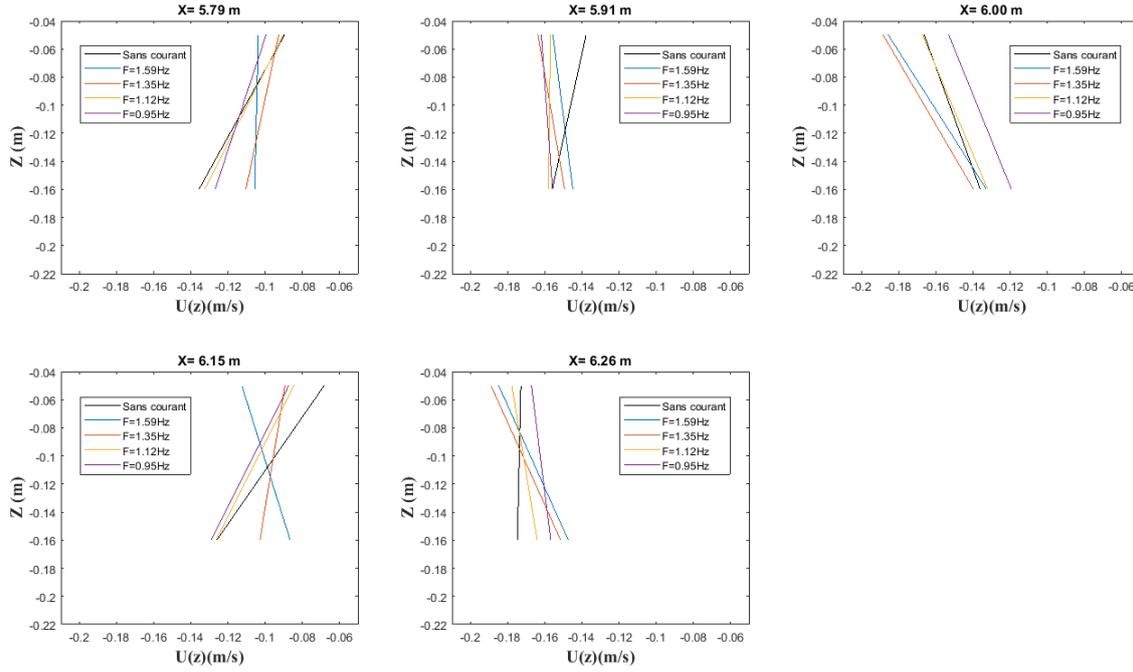


Figure A.3: Régressions linéaires sur les 2/3 de la colonne d'eau des profils de courant relevés sur la 3e longueur d'onde de fond, avec et sans houle (M1L3)

## A.2 Mesures de la deuxième portion de fond (M2L5)

Le schéma (A.4) présente les caractéristiques du protocole expérimental de mesure du courant sur cette portion de fond. Comme précédemment, nous disposons de deux profils sur les crêtes bathymétriques, un profil dans le creux, et deux profils intermédiaires, pour bien comprendre comment évolue l'écoulement au passage d'une bosse du fond.

La figure (A.5) présente les profils relevés à ces cinq positions sous cinq conditions hydrodynamiques: sans houle puis pour les quatre fréquences de houle. On relève une moindre constance dans les profils par rapport à la première série de mesure, sur la première portion de fond considéré. Ici, le profil relevé dans le creux de la bosse est le plus inchangé. Les autres profils, et notamment le profil relevé en début de section ( $x=5.27\text{m}$ ), sont un peu plus perturbés.

Concernant les régressions linéaires (figure (A.6)) associées aux profils de la figure (A.5), on remarque là encore que tous les profils présentent un changement de signe de la vorticité (soit un changement d'inclinaison de la droite d'approximation), même si elle ne survient pas toujours à la même position. Si on numérote les positions dans le sens du courant, soit selon les  $x$  décroissants, on obtiendra la position 1 en  $x=5.27$  et la position 5 en  $x=4.75\text{m}$ . Pour le cas sans houle, le changement survient sur la position 3, dans le creux. Pour les profils relevés en présence de houle, pour les plus hautes fréquences (1.59Hz et 1.35Hz) on constate trois inversions, aux positions 2, 3 puis presque 5. Pour les ondes les plus longues (1.12Hz et 0.95Hz), il n'y a plus que deux inversions, à la troisième et à la cinquième position. C'est particulièrement flagrant pour les profils de la première position, où on constate une orientation différente selon les conditions hydrodynamiques. La fréquence de la houle serait-elle liée à la fréquence d'inversion des profils de courant?

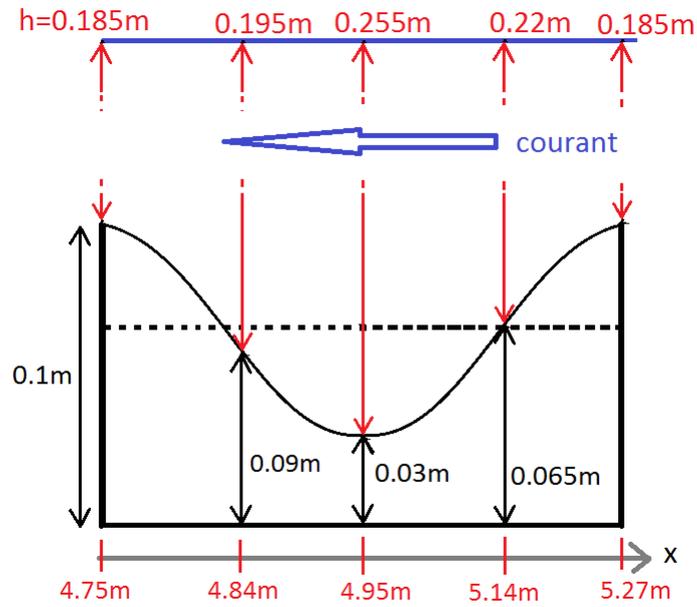


Figure A.4: Schéma de mesure des profils verticaux de courant, relevés sur la 5<sup>e</sup> longueur d'onde de fond (M2L5)

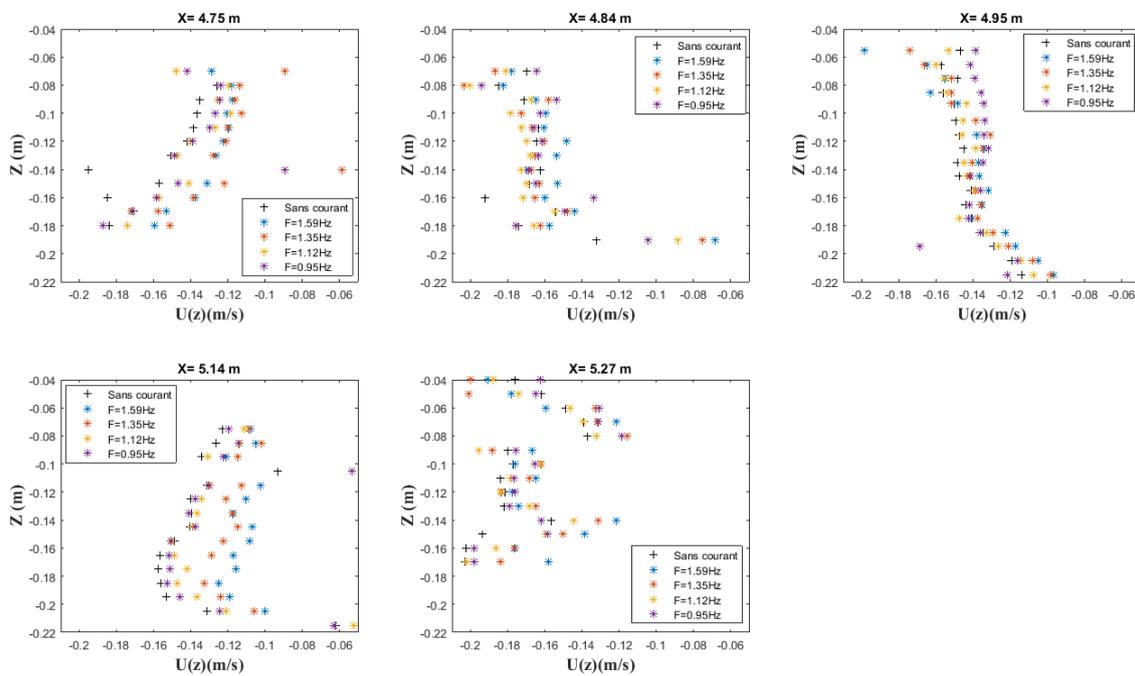


Figure A.5: Profils de courant sur la 5<sup>e</sup> longueur d'onde de fond: superposition, pour chaque position, des profils sans houle et avec houle (M2L5)

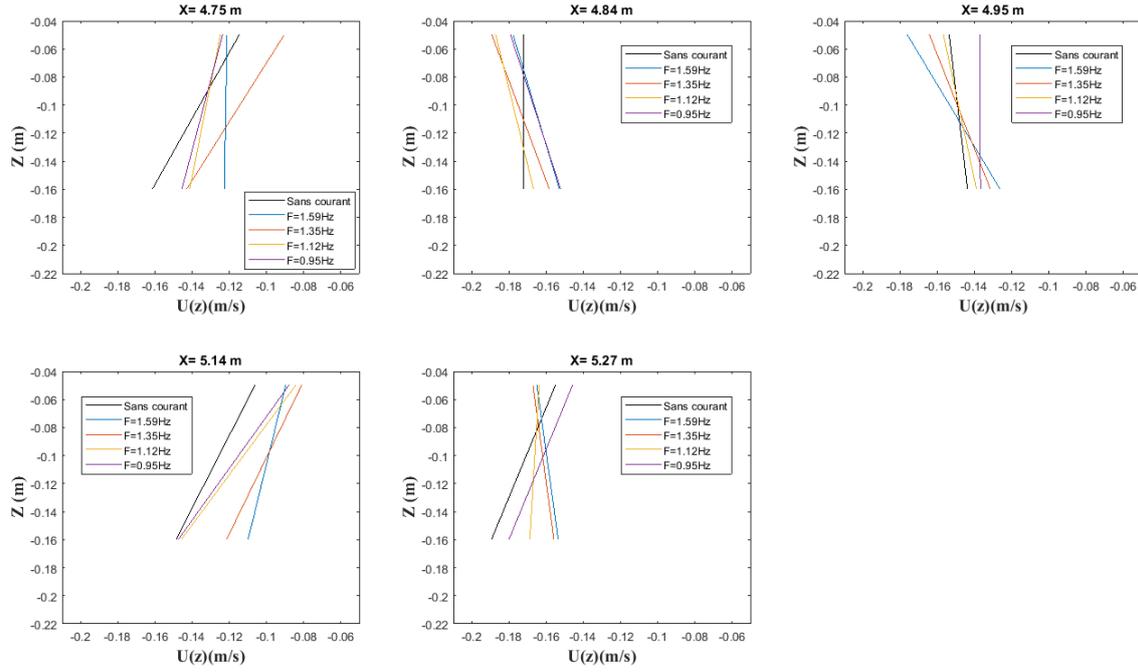


Figure A.6: Régressions linéaires sur les 2/3 de la colonne d'eau des profils de courant relevés sur la 5e longueur d'onde de fond, avec et sans houle (M2L5)

### A.3 Mesures de la troisième portion de fond (M3L7)

Concernant la septième portion de fond ondulé, la figure (A.7) resitue les mesures dans leur contexte, en précisant la disposition de nos cinq courantomètres.

Examinons les profils verticaux relevés par ces courantomètres en l'absence et en présence de houle (figure (A.8)). Comme précédemment, on constate que ces profils sont relativement peu impactés par la houle, y compris celui situé sur la première crête.

Sur la figure (A.9), on examine les régressions linéaires associées. Pour tous les profils relevés, avec ou sans houle, on ne relève que deux changements de signe de la vorticité, en positions 2 et 5. Sur cette portion, les mesures de vitesses ont été particulièrement réussies, et on constate bien le faible impact de la houle, et l'évolution très similaire du courant malgré les variations de conditions hydrodynamiques.

### A.4 Mesures de la quatrième portion de fond (M4L9)

Intéressons-nous à présent à la dernière portion de fond instrumentée, la neuvième (soit, rappelons-le, la deuxième que voit la houle qui se propage à contre-courant). La figure (A.10) nous donne tous les détails des mesures.

La figure (A.11) nous présente les profils verticaux relevés, et on remarque qu'ils sont plus perturbés que précédemment. Il s'agit probablement d'une légère recrudescence du bruit instrumental.

Les régressions linéaires, présentées sur la figure (A.12), s'en ressentent, avec par exemple un graphe en  $x = 3.25m$  où les profils présentent une grande variation de vorticité selon la condition de houle. On arrive toutefois à distinguer un changement de signe plus ou moins général entre la position 2 et la position 4.

L'évolution globale du profil de courant le long du canal a été longuement discutée dans

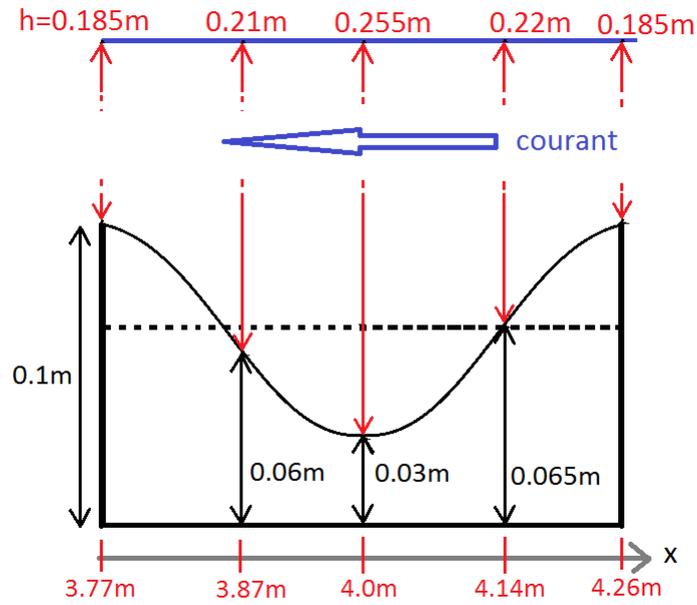


Figure A.7: Schéma de mesure des profils verticaux de courant, relevés sur la 7e longueur d'onde de fond (M3L7)

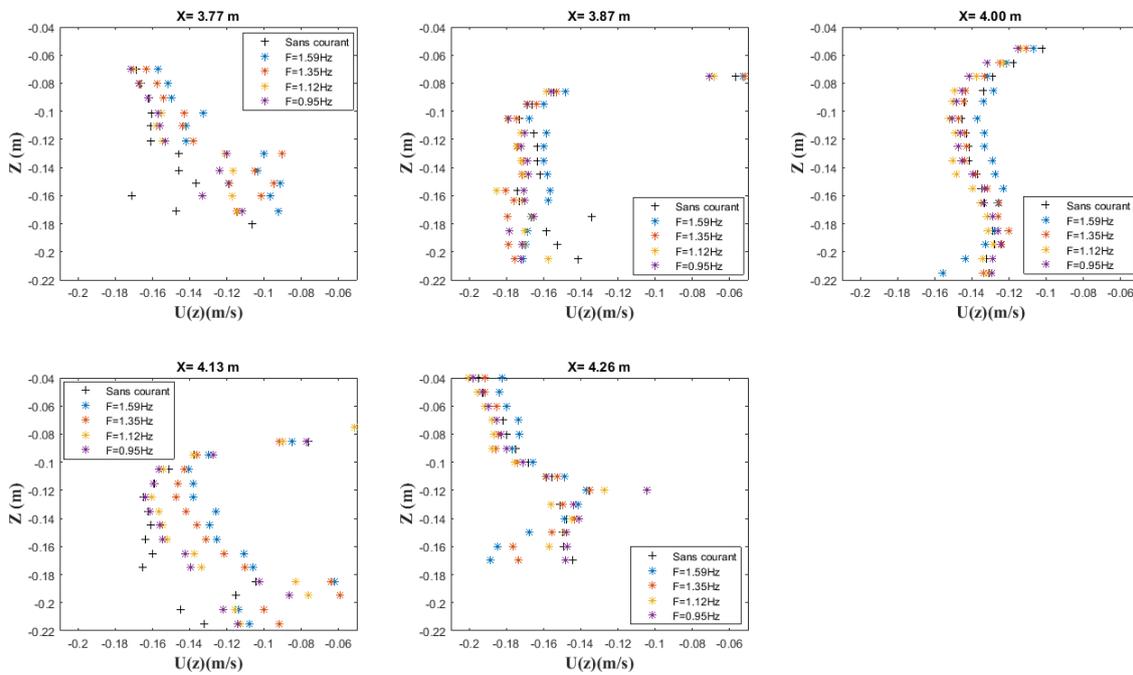


Figure A.8: Profils de courant sur la 7e longueur d'onde de fond: superposition, pour chaque position, des profils sans houle et avec houle (M3L7)

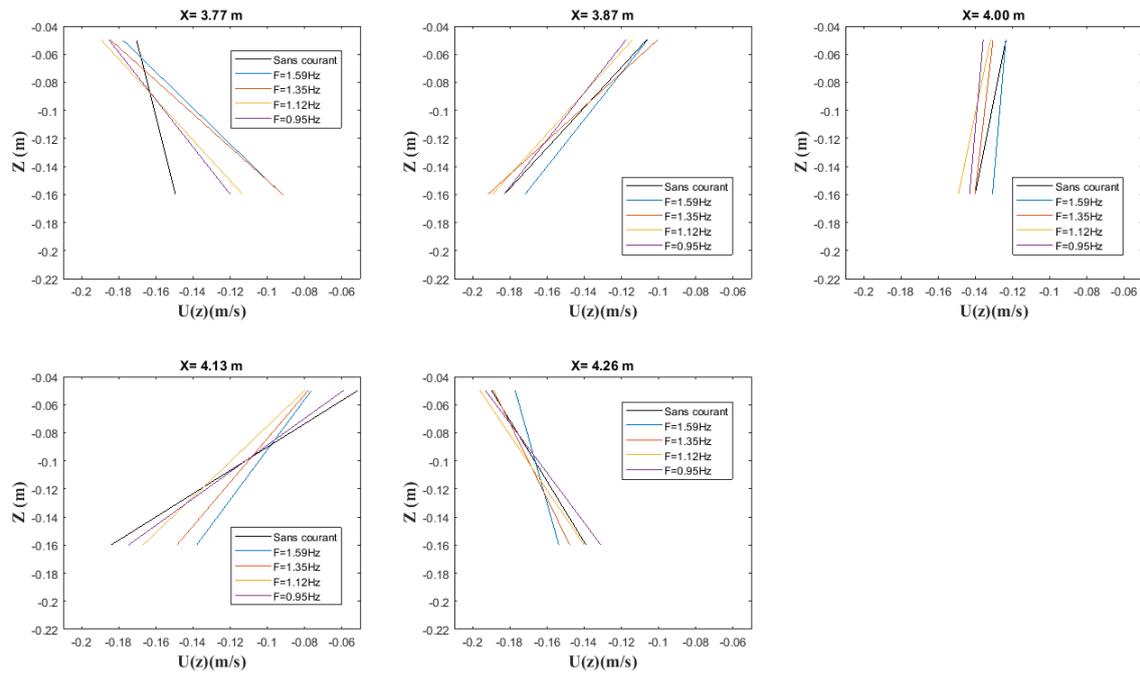


Figure A.9: Régressions linéaires sur les 2/3 de la colonne d'eau des profils de courant relevés sur la 7e longueur d'onde de fond, avec et sans houle (M3L7)

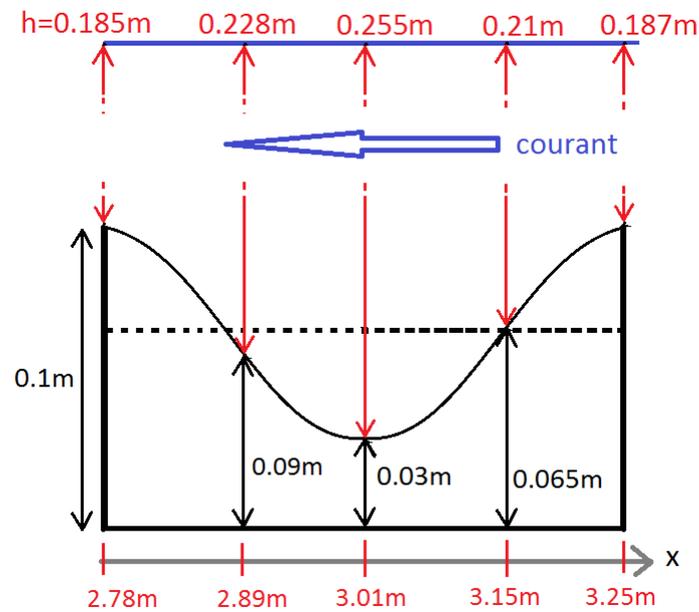


Figure A.10: Schéma de mesure des profils verticaux de courant, relevés sur la 9e longueur d'onde de fond (M4L9)

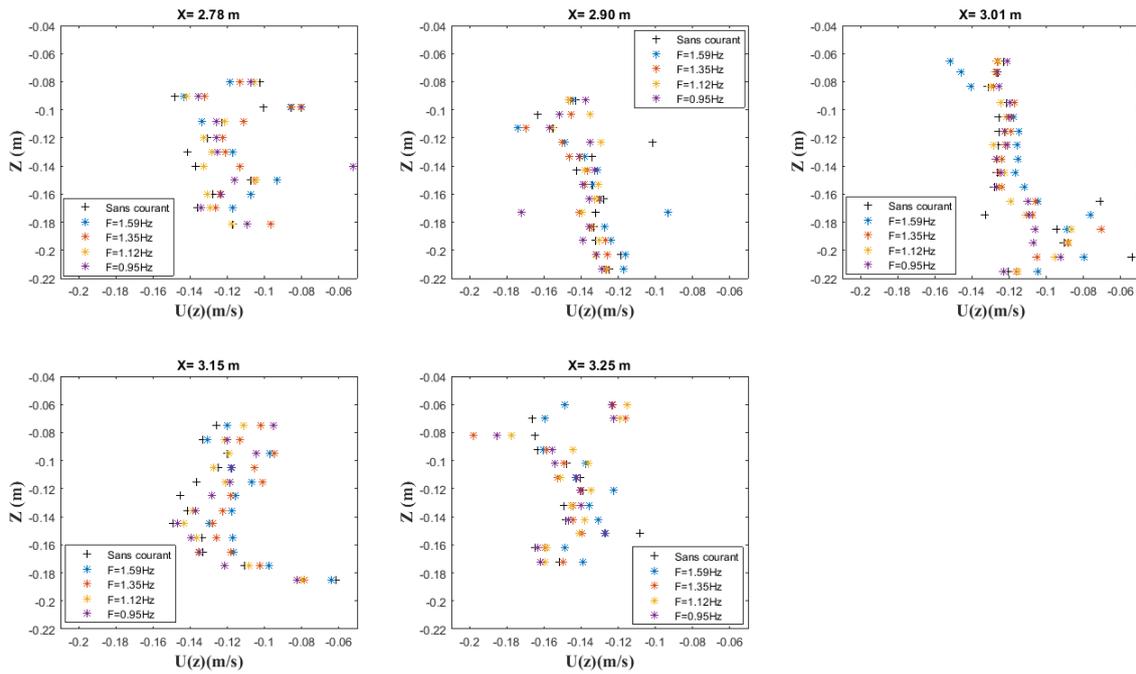


Figure A.11: Profils de courant sur la 9e longueur d'onde de fond: superposition, pour chaque position, des profils sans houle et avec houle (M4L9)

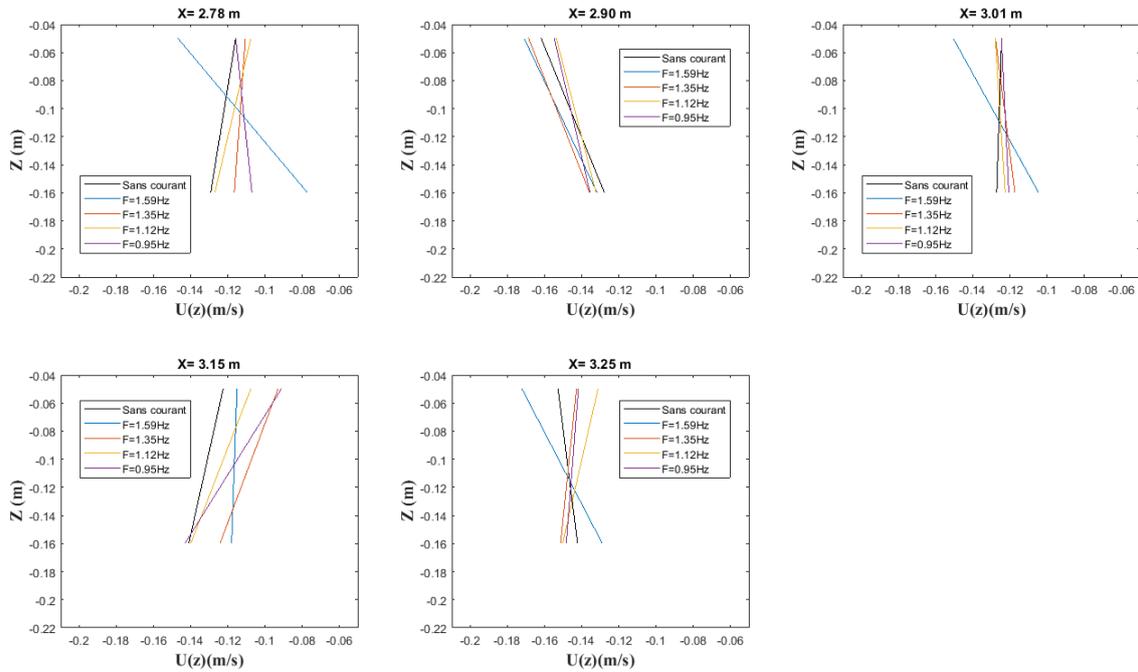


Figure A.12: Régressions linéaires sur les 2/3 de la colonne d'eau des profils de courant relevés sur la 9e longueur d'onde de fond, avec et sans houle (M4L9)

le corps du manuscrit, depuis le paragraphe 3.4.4.1.2. Ces évolutions ont cependant été déterminées au travers du spectre de la méthode d'établissement de la vorticité - et nous avons vu que les résultats pouvaient varier de façon non négligeable. Si on se concentre uniquement sur les profils, on remarque déjà que pour chaque portion de fond examinée, les inversions se produisent au minimum deux fois de façon nette. Pour chaque condition hydrodynamique testée, ces inversions se retrouvent souvent sur les mêmes positions de mesure, ce qui renforce encore la corrélation avec la bathymétrie, établie en observant le courant de surface. Les profils sont de façon générale très bien conservés par la houle, ce qui valide une nouvelle fois notre dispositif expérimental.



# Appendix B

## Méthode de résolution d'un système linéaire

Afin de présenter plus tard et en toute clarté le solveur utilisé dans cette étude, faisons ici un bref rappel de l'état de l'art sur la résolution de systèmes linéaires (une revue détaillée est disponible dans l'étude [153]) et sur ses trois grandes familles de méthodes de résolution. Si on pose  $p$  le nombre d'équations et  $q$  le nombre d'inconnues de notre problème, nous allons chercher à résoudre le système matrice-vecteur  $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$  avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times q}$  la matrice inversible des coefficients de notre modèle théorique,  $\vec{b} \in \mathbb{R}^q$  le vecteur colonne second membre, également imposé par notre modèle, et  $\vec{x} \in \mathbb{R}^q$  notre vecteur solution. Concernant les caractéristiques éventuelles de  $\mathbf{A}$ , on rappelle que  $\mathbf{A}$  est symétrique si  $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ , qu'elle est positive si  $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} \geq 0$  et qu'elle est définie si pour  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x}^T \mathbf{A} \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = 0$ . On définira également la norme matricielle comme suit :

$$\|\mathbf{A}\| = \max_{\|x\|=1} \|\mathbf{A}x\| = \max_{\|x\| \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}x\|}{\|x\|} \quad (\text{B.1})$$

**Existence et unicité de la solution** Plusieurs cas sont à considérer. Commençons par le cas le plus rare de matrices non carrées: s'il y a plus d'équations que d'inconnues (système sur-déterminé), il n'y aura probablement pas de solution. Si au contraire il y a moins d'équations que d'inconnues (système sous-déterminé), il y aura une infinité de solutions. Mais le plus fréquent est le cas des matrices carrées, où il y a autant d'équations que d'inconnues - c'est également le cas dans nos modèles théoriques. Si le système associé était homogène, l'inversibilité de la matrice déterminerait le nombre de solution : si elle est inversible, le système aurait une seule solution  $\vec{x} = \mathbf{A}^{-1}\vec{b}$ , si elle ne l'est pas, il y aurait une infinité de solutions. Dans le cas d'un système non homogène (c'est le cas pour nos trois modèles, puisqu'un second membre intervient dans les conditions aux limites), là encore une matrice inversible va imposer une solution unique, tandis que dans le cas d'une matrice non inversible, pour qu'il y ait au moins une solution, il faudra vérifier la condition  $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{A}\mathbf{b})$  (où la matrice  $\mathbf{A}\mathbf{b}$  est formée par la matrice  $\mathbf{A}$  à laquelle  $\vec{b}$  est accolé).

Avant d'entamer la résolution, il est donc important de vérifier l'inversibilité du système. Dans notre étude, la matrice est carrée et appartient au corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ , qui est un corps commutatif comme  $\mathbb{R}$ , alors il suffira de vérifier au choix que le déterminant de  $\mathbf{A}$  est non nul, ou que 0 n'est pas valeur propre de  $\mathbf{A}$ , ou que  $N_x$  est le rang de  $\mathbf{A}$ . Il est à noter que la transposée de  $\mathbf{A}$  sera également inversible. Dans la présentation des méthodes générales de résolution, pour ne pas nuire à la clarté du propos, nous nous ramènerons au cas d'un

système réel. Le choix de la méthode de résolution va être conditionné par les caractéristiques de la matrice (positivité, symétrie, définie, son rang, son conditionnement), impliquera divers points de contrôle (stabilité, nécessité d'un préconditionneur, convergence), et offrira certaines possibilités (parallélisme).

## B.1 Méthodes directes

Tout d'abord, les méthodes directes donnent la solution exacte en un nombre fini d'opérations, et peuvent s'appliquer indifféremment aux matrices denses ([73]) ou creuses ([52, 47]).

Parmi elles, les formules de Cramer sont particulièrement simples d'utilisation: elles écrivent les solutions comme des rapports de déterminants. Mais le calcul de déterminant peut vite être trop gourmand en calcul. Ces formules sont donc réservées à de très petits systèmes. D'autres méthodes directes reposent sur la transformation de la matrice  $\mathbf{A}$ , sachant que l'on ne change pas la solution d'un système linéaire lorsque l'on permute deux lignes ou deux colonnes, lorsqu'on fait une combinaison linéaire de lignes. On retrouve ainsi les procédés de triangulation-remontée, en général articulés autour des principes de pivot ou substitution, des variantes de la méthode d'élimination de Gauss: la factorisation LU et en particulier la factorisation de Choleski, celle de Crout... Les solveurs directs ont l'avantage d'être robustes: ils fournissent la solution arithmétique exacte, mais le nombre d'opérations nécessaires peut être grand. Ils sont donc très efficaces sur des systèmes de petites tailles, ou demandant des calculs simples. Il est d'ailleurs possible d'optimiser le stockage pour des systèmes creux (théorie des graphes). Les méthodes *solve* (Python, Octave, Matlab) utilisent par exemple une factorisation LU. Par contre, pour des systèmes de grande taille, le coût en mémoire, le poids des calculs et les erreurs de troncature viennent souvent déstabiliser ces méthodes. Du point de vue de l'optimisation numérique, la parallélisation est possible mais pas évidente. Il est à noter qu'il existe des méthodes hybrides, qui souhaitent combiner les avantages des méthodes directes et itératives. Elles se basent sur une décomposition de domaine (ce qui implique un maillage multi-grilles), ou des solveurs directs s'occupent des problèmes locaux tandis que des solveurs de krylov équilibrent les interfaces. On retrouve ainsi les méthodes de Schur, FETI-I, ... pour n'en citer que quelques unes, mais n'étant pas l'objet de cette étude elles ne seront pas développées ici.

## B.2 Méthodes itératives stationnaires

De façon générale, les méthodes itératives ([200]) nécessitent très peu de mémoire, elles sont donc particulièrement adaptées à la résolution de très gros problèmes. Pour notre étude, le choix d'une méthode de ce type s'est imposé de lui-même, nous en présenterons le mode de fonctionnement général. Parmi la multitude de méthodes itératives à disposition aujourd'hui, choisir la méthode la plus adaptée à notre problème n'est pas toujours évident. Si elles sont parfois plus difficiles à paralléliser, les méthodes de Krylov convergent généralement plus rapidement, et c'est vers l'une d'elles que notre choix s'est porté: la méthode du Gradient Biconjugué, une extension de la méthode de Gradient Conjugué. Nous allons ainsi présenter cette dernière pour plus tard pouvoir resituer le Gradient Biconjugué dans un contexte clair. Le soin que nous allons apporter à la présentation des méthodes type Gradient Conjugué et à leur fonctionnement n'est pas anodin. L'implémentation du solveur Gradient Biconjugué pour système complexe a pris une grande importance dans cette étude, car il a été implémenté hors de toute bibliothèque préconçue, dans une politique de feuille blanche afin de se confronter à la science et au problème dans toutes ses nuances.

**Algorithme et préconditionnement d'une méthode itérative générale** Les méthodes itératives stationnaires cherchent à construire une suite de vecteurs  $\vec{x}_k$  qui converge vers la solution que l'on notera  $\vec{x}^*$  (pour la différentier mathématiquement de la solution exacte):

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\vec{x}_k) \rightarrow \mathbf{A}^{-1} \vec{b} = \vec{x}^* \forall x_0 \quad (\text{B.2})$$

On peut ainsi définir  $\vec{x}_k$  l'approximation de  $\vec{x}^*$  au pas  $k$  à l'aide d'une erreur  $\vec{e}_k$ :

$$\vec{x}^* = \vec{x}_k + \vec{e}_k \quad (\text{B.3})$$

et d'un résidu  $\vec{r}_k$  :

$$\mathbf{A} \vec{e}_k = \mathbf{A} \vec{x}^* - \mathbf{A} \vec{x}_k := \vec{r}_k \quad (\text{B.4})$$

On peut donc écrire notre solution à l'ordre de convergence final  $p$  choisi comme:

$$\vec{x}^* = \vec{x}_k + \mathbf{A}^{-1} \vec{r}_k \quad (\text{B.5})$$

A partir de là, une astuce d'optimisation du solveur consiste à préconditionner le problème, c'est-à-dire remplacer  $\mathbf{A}$  par une matrice  $\mathbf{M}$  proche mais plus facilement inversible. La construction du préconditionneur peut s'avérer délicate: il faut décomposer la matrice comme suit

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} - \mathbf{N} \quad (\text{B.6})$$

avec  $\mathbf{M}$  facilement inversible. Une fois cette matrice de préconditionnement établie, au lieu de résoudre (B.5), on itérera plutôt comme suit, en trois temps. Tout d'abord, le calcul du résidu:

$$\vec{r}_k = \vec{b} - \mathbf{A} \vec{x}_k \quad (\text{B.7})$$

Ensuite, la résolution du problème préconditionné: grâce au préconditionnement (B.6), on établit une itération sous la forme d'un schéma de point fixe défini à partir de  $\vec{x}_0$ .

$$\mathbf{M} \vec{x}_{k+1} = \mathbf{N} \vec{x}_k + \vec{b} \quad (\text{B.8})$$

A partir de là, quelques manipulations algébriques et la définition du résidu (B.7) sont nécessaires :

$$\mathbf{M} \vec{x}_{k+1} = (\mathbf{M} - \mathbf{A}) \vec{x}_k + \vec{b} = \mathbf{M} \vec{x}_k + (\vec{b} - \mathbf{A} \vec{x}_k) = \mathbf{M} \vec{x}_k + \vec{r}_k$$

soit :

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \mathbf{M}^{-1} \vec{r}_k \quad (\text{B.9})$$

pour la dernière étape, la mise à jour de la solution à l'étape suivante.

A partir de B.8, on arrive aussi à une formulation de type point fixe sous la forme :

$$\vec{x}_{k+1} = \mathbf{B} \vec{x}_k + \vec{c} \quad (\text{B.10})$$

où  $\mathbf{B} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{N}$  est la matrice d'itérations  $\vec{e}_{k+1} = \mathbf{B} \vec{e}_k$  et  $\vec{c} = \mathbf{M}^{-1} \vec{b}$ . Notons au passage que la convergence de la méthode est assurée pour tout vecteur initial  $\vec{x}_0$  si et seulement si le rayon spectral (la plus grande valeur propre en valeur absolue) de cette matrice d'itération vérifie  $\rho(\mathbf{B}) < 1$ .

Le calcul de l'erreur permettra alors de choisir de poursuivre les itérations ou non., selon un critère d'arrêt qui peut porter soit sur la norme du résidu:

$$\|\vec{r}_k\| \leq \epsilon \|\vec{r}_0\| \quad (\text{B.11})$$

soit sur la stagnation de la solution :

$$\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| \leq \epsilon \|\vec{x}_k\| \quad (\text{B.12})$$

Suivant le choix du préconditionneur  $\mathbf{M}$ , on obtiendra les méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel, de relaxation, SOR (Successive Over Relaxation), SSOR... Si on décompose  $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{F}$  respectivement en une partie diagonale, une partie triangulaire inférieure et une partie triangulaire supérieure, la méthode de Jacobi est définie par  $\mathbf{M} = \mathbf{D}$ , celle de Gauss-Seidel par  $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \mathbf{E}$ , la méthode SOR par  $\mathbf{M} = \mathbf{D} - \omega\mathbf{E}$  avec  $\omega$  un paramètre choisi pour accélérer la convergence et la méthode SSOR effectue une itération SOR suivie d'une itération SOR en sens inverse, ce qui aboutit à une matrice de préconditionnement de la forme :  $M = \frac{1}{\omega(2-\omega)}(\mathbf{D} - \omega\mathbf{E})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{D} - \omega\mathbf{F})$ .

Les propriétés de convergence seront bien entendu différentes car elles dépendent grandement du préconditionnement.

**Introduction aux méthodes polynomiales et aux méthodes de Krylov** Parmi les méthodes itératives, on va s'intéresser tout particulièrement aux méthodes polynomiales, et en particulier aux méthodes dites de Krylov ([166, 198, 80]). Les méthodes polynomiales reposent sur l'utilisation du théorème de Cayley Hamilton qui démontre que pour toute matrice  $\mathbf{A}$  inversible de taille  $m * n$ , on obtient l'existence d'un polynôme  $p$  de degré au plus  $n - 1$  tel que  $\mathbf{A}^{-1} = p(\mathbf{A})$ . Cela signifie que la solution de notre problème  $\mathbf{A}\vec{u} = \vec{b}$  s'écrit maintenant:

$$u = u_0 + p(\mathbf{A})r_0 \quad (\text{B.13})$$

L'objectif des méthodes polynomiales est d'approcher ce polynôme  $p(X)$ , soit en le définissant explicitement (méthode CHEBY pour les matrices symétriques définies positives), soit indirectement, sans calculer ses coefficients mais à travers son application à la matrice et à un vecteur (la plupart des méthodes polynomiales). L'écriture (B.13) suggère de définir les sous-espaces suivants de  $\mathbb{R}^n$  appelés sous-espaces de Krylov:

$$K_m(\mathbf{A}, \vec{r}_0) = \text{Vect}(\vec{r}_0, \mathbf{A}\vec{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{m-1}\vec{r}_0) = \{p(\mathbf{A})\vec{r}_0 \mid p \in P_{m-1}\} \quad (\text{B.14})$$

où  $P_{m-1}$  est l'espace des polynômes de degré au plus  $m - 1$ . Ainsi, par définition, la méthode itérative polynomiale vérifie la condition de sous espace

$$\vec{x}_m \in \vec{x}_0 + K_m(\mathbf{K}, \vec{r}_0) \quad (\text{B.15})$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme

$$\vec{x}_k = \vec{x}_0 + p_{k-1}(\mathbf{A})\vec{r}_0 \quad (\text{B.16})$$

Nous utilisons ainsi une méthode de projection liée aux espaces de Krylov. Il est à remarquer que ces méthodes engendrent des suites finies et calculent la solution exacte.<sup>1</sup> Ces méthodes sont en fait des méthodes directes, mais elles sont utilisées comme méthodes itératives car pour

---

<sup>1</sup>En effet, la suite des sous-espaces de Krylov  $K_k(\mathbf{A}, \vec{r}_0)$  est une suite croissante de sous espaces, elle est donc stationnaire à partir d'un rang  $p \leq n$ . D'ailleurs, pour  $k \leq p$ , la dimension de  $K_k(\mathbf{A}, \vec{r}_0)$  est égale à  $k$  et le système  $\{\vec{r}_0, \mathbf{A}\vec{r}_0, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\vec{r}_0\}$  est une base de  $K_k(\mathbf{A}, \vec{r}_0)$ . Le sous-espace  $K_p(\mathbf{A}, \vec{r}_0)$  est invariant de  $\mathbf{A}$  et la solution de  $\mathbf{A}\vec{y} = \vec{r}_0$  appartient à cet espace.

les grands systèmes il s'agit de converger vers une approximation précise bien avant d'aboutir à la solution exacte. L'objectif qui guide la construction de ces méthodes est la minimisation de l'erreur  $\vec{e}_k$ , pour un certain produit scalaire. Cet objectif n'est pas toujours réalisable, c'est pourquoi on a défini une condition plus générale d'orthogonalité, la condition de Petrov-Galerkin, qui définit une classe particulière de méthodes polynomiales: les méthodes dites de projection.

**Méthodes de projection** Considérons un système linéaire inversible admettant  $\vec{u}$  comme unique solution du système  $\mathbf{A}\vec{u} = \vec{b}$  où  $\mathbf{A}$  est une matrice carrée inversible d'ordre  $n$ . Comme pour toute méthode itérative, nous avons besoin d'un point de départ  $\vec{u}_0$ , proche de la solution  $\vec{u}$ . Le système matrice vecteur peut s'écrire sous les deux formes suivantes : "trouver  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$  qui vérifie la relation  $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$$(\vec{b} - \mathbf{A}\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad (\text{B.17})$$

Ou bien sous la forme d'une condition d'orthogonalité:

$$\vec{b} - \mathbf{A}\vec{u} \perp \mathbb{R}^n \quad (\text{B.18})$$

Le principe de base d'une méthode de projection consiste à se donner un sous-espace  $K$  et de chercher une approximation  $\vec{u}$  de la solution  $\vec{u}$  dans l'espace  $u_0 + K$ , solution qui vérifiera bien sûr toujours la condition d'orthogonalité dans ce sous-espace:

$$\vec{b} - \mathbf{A}\vec{u} \perp K \quad (\text{B.19})$$

Cette condition, comme précédemment, peut s'écrire sous la forme "déterminer  $\vec{u} \in \vec{u}_0 + K$  vérifiant"

$$(\mathbf{A}\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{b}, \vec{v}) \forall \vec{v} \in K \quad (\text{B.20})$$

Cette condition est la condition de Galerkin, et de façon générale on remarque que cette méthode est construite sur le même principe que la méthode de Galerkin utilisée dans l'approche par Éléments Finis.

En pratique et de façon générale, on se donnera deux sous-espace  $K$  et  $L$  de même dimension et on recherchera une solution rapprochée  $\vec{u} \in \vec{u}_0 + K$  vérifiant la condition d'orthogonalité :

$$\vec{b} - \mathbf{A}\vec{u} \perp L \quad (\text{B.21})$$

qui peut prendre encore une fois la forme

$$(\mathbf{A}\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{b}, \vec{v}) \forall \vec{v} \in L \quad (\text{B.22})$$

Il s'agit cette fois de la condition de Petrov-Galerkin.

En résumé, une méthode de projection est une méthode itérative de résolution des systèmes linéaires qui, à chaque itération, construit deux espaces  $K$  et  $L$  et recherche le nouvel itéré  $u$  dans  $u_0 + K$  tel que satisfaisant la condition de Petrov-Galerkin (B.22).

Il existe deux familles de méthodes de projection : le choix  $L = K$  conduira aux méthodes du Gradient Conjugué (CG) et Full Orthogonalization Method (FOM), tandis que le choix  $L = AK$  mènera aux méthodes GMRES et MINRES. Dans le cadre de cette étude, nous nous sommes tournés vers la première famille.

**Méthode du gradient conjugué** Les méthodes type gradient cherchent à minimiser une fonction en suivant son gradient. Parmi elles, la méthode du Gradient Conjugué (CG) ([9, 60, 73, 174, 66]) est une méthode particulièrement efficace car elle a la propriété de converger en au plus  $n$  itérations. Dans le cas d'une matrice  $\mathbf{A}$  symétrique définie positive, la récurrence sera alors particulièrement courte. De nombreuses études la décrivent en détails, mais comme elle est à l'origine de la méthode utilisée dans cette étude, il est important d'en présenter les grandes lignes, dans le cadre des méthodes de projection de Krylov. On suppose  $\mathbf{A}$  symétrique définie positive. La méthode du gradient conjugué est alors une méthode de projection de Krylov dans laquelle  $\mathbf{B} = \mathbf{A}$ . Ainsi, la condition de Petrov-Galerkin (B.22). revient à imposer une condition d'orthogonalité sur le résidu :

$$r_m \perp K_m(\mathbf{K}, \vec{r}_0) \quad (\text{B.23})$$

En effet,  $\mathbf{B}\vec{e}_k = \mathbf{A}\vec{e}_k = \vec{r}_k$ . La première étape de la méthode CG est d'ailleurs l'initialisation de ce résidu selon sa définition (B.7):

$$\vec{r}_0 = \mathbf{A}\vec{x}_0 - \vec{b} \quad (\text{B.24})$$

Ensuite, on définit un critère d'arrêt, portant sur la norme du résidu par exemple : “tant que les résidus sont non nuls”, ou “tant que  $\sqrt{\vec{r}_j^T \vec{r}_j}$  existe” dans le cas de problème à variables complexes.

A chaque itération,  $\mathbf{x}_k$  est bien défini  $\forall k \geq 0$  à partir des conditions d'espace et de Petrov-Galerkin, et il minimise la  $\mathbf{A}$ -norme de l'erreur sur l'espace de Krylov:

$$\|\vec{e}_k\|_{\mathbf{A}} = \|\vec{r}_k\|_{\mathbf{A}^{-1}} = \min_{\vec{y} \in K_k(\mathbf{A}, \vec{r}_0)} \|\vec{e}_0 - \vec{y}\|_{\mathbf{A}} \quad (\text{B.25})$$

La suite converge: il existe  $p \leq n$  tel que  $\vec{x}_p = \vec{x}^*$  et pour arriver à cette valeur, d'après la condition d'espace B.15, il existe  $\alpha_k \in \mathbb{R}$  et  $\vec{p}_k \in K_{k+1}(\mathbf{A}, \vec{r}_0)$  tels que :

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha_k \vec{p}_k \quad (\text{B.26})$$

où le vecteur  $\vec{p}_k$  est appelé direction de descente. Cette forme (B.26) impose l'incrémementation du résidu sous la forme :

$$\vec{r}_{k+1} = \vec{r}_k - \alpha_k \mathbf{A} \vec{p}_k \quad (\text{B.27})$$

A chaque incrémementation, la condition de Galerkin et le fait que les résidus soient dans l'espace de Krylov impliquent immédiatement les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\vec{r}_k^T \vec{r}_j = 0 \forall j \neq k \quad (\text{B.28})$$

La condition de Galerkin, la récurrence (B.27) et la symétrie de la matrice  $\mathbf{A}$  induisent:

$$\vec{p}_k^T \mathbf{A} \vec{p}_j = 0 \forall j \neq k \quad (\text{B.29})$$

et les directions de descente peuvent être choisies pour vérifier la récurrence à une constante près. Puisque  $\vec{p}_0 \in \text{eng}\{\vec{r}_0\}$  on peut initialiser  $\vec{p}_0 = \vec{r}_0$ . Concernant l'incrémementation de la direction de descente, puisque  $\vec{r}_{k+1} \in \text{eng}\{\vec{p}_0, \vec{p}_1, \dots, \vec{p}_{k+1}\}$  on peut écrire :

$$\vec{r}_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} \gamma_i \vec{p}_i \quad (\text{B.30})$$

Pour  $j \leq k-1$ ,  $\mathbf{A}p_j \in K_{j+2} \subseteq K_{k+1}$  donc la condition d'orthogonalité impose  $\vec{r}_{k+1}^T \mathbf{A} \vec{p}_j = 0$  et d'autre part,  $\vec{p}_i^T \mathbf{A} \vec{p}_j = 0 \forall i \neq j$ , d'où finalement  $\gamma_j = 0 \forall j \leq k-1$  et on en peut réécrire (B.30) avec les deux termes restants :

$$\vec{r}_{k+1} = \gamma_k \vec{p}_k + \gamma_{k+1} \vec{p}_{k+1} \quad (\text{B.31})$$

Puisque  $\dim(K_k) = k$ , on a  $\gamma_{k+1} \neq 0$  et on choisit  $\gamma_{k+1} = 1$ , on peut alors en déduire l'incrémement de la direction de descente :

$$\vec{p}_{k+1} = \vec{r}_{k+1} + \beta_k \vec{p}_k \quad (\text{B.32})$$

Il reste à exprimer  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  pour définir complètement la méthode. Tant que  $\vec{r}_k \neq \vec{0}$ , ils existent et sont uniques. Les résidus sont orthogonaux donc en particulier :  $r_{k+1}^T r_k = 0$  d'où  $r_k^T r_k - \alpha_k r_k^T \mathbf{A} p_k = 0$ . Mais  $r_k = p_k - \beta_{k-1} p_{k-1}$  et les directions de descente sont  $\mathbf{A}$ -conjuguées donc :  $r_k^T \mathbf{A} p_k = p_k^T \mathbf{A} p_k$  et

$$\alpha_k = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T \mathbf{A} p_k} \quad (\text{B.33})$$

Puisque les directions de descente sont  $\mathbf{A}$ -conjuguées, on a aussi  $p_{k+1}^T \mathbf{A} p_k = 0$ . Or :

$$r_{k+1}^T \mathbf{A} p_k = \frac{1}{\alpha_k} r_{k+1}^T (r_k - r_{k+1}) = -\frac{1}{\alpha_k} r_{k+1}^T r_{k+1} \quad (\text{B.34})$$

d'où

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{\alpha_k p_k^T \mathbf{A} p_k} = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k} \quad (\text{B.35})$$

Notre algorithme est à présent entièrement défini. La convergence de cette méthode ainsi que les préconditionnements conseillés sont discutés en détails dans l'étude de Erhel ([59]) mais en pratique, la méthode converge très vite vers une approximation assez précise. C'est pour cette raison que notre dévolu s'est porté sur ce solveur. Les matrices associées à nos modèles n'étant pas symétriques, nous avons utilisé une de ses extensions aux matrices non-symétriques: la méthode du Gradient Biconjugué. Elle sera présentée dans la section suivante, avec l'ensemble de la configuration numérique.



# Bibliographie

- [1] Alam, M. R., Y. Liu and D. K. P. Yue, Chaotic internal wave motion due to multiple Bragg resonances, American Geophysical Union Fall Meeting, San Francisco, CA, 2008.
- [2] Alam, M. R., Y. Liu and D. K. P. Yue, Bragg resonance of waves in a two-layer fluid propagating over bottom ripples. Part I. Perturbation analysis, *J. Fluid Mech.*, 624, 191-224, 2009.
- [3] Alam, M. R., Y. Liu and D. K. P. Yue, Bragg resonance of waves in a two-layer fluid propagating over bottom ripples. Part II. Numerical simulation, *J. Fluid Mech.*, 624, 225-253, 2009.
- [4] Alam, M. R., Y. Liu and D. K. P. Yue, Higher order resonant interaction of surface waves by undulatory bottom topography, Proceeding of the ASME 2009 28th International conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, OMAE2009-80069, 2009.
- [5] Andersen, O., and H. Fredsoe, Transport of suspended sediment along the coast, Institute of Hydrodynamics and Hydraulic Engineering, Technical University of Denmark, Prog. rep. 59, 33-46, 1983.
- [6] Appeltans, W., et al., The magnitude of global marine species diversity, *Current Biology*, 22(23), 2189-2202, 2012
- [7] Ardhuin, F., and T. H. C. Herbers, Bragg scattering of random surface gravity waves by irregular seabed topography, *J. Fluid Mech.*, 451, 1-33, 2002.
- [8] Arthur, R. S., Refraction of waves by islands and shoals with circular bottom contours, *Trans. Amer. Geophys. Union*, 27 (2), 168, 1946.
- [9] Ashby, S. F., T. A. Manteuffel and P. E. Saylor, A taxonomy for Conjugate Gradient Methods, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 26:1542-1568, 1990.
- [10] Athanassoulis, G. A., and K. A. Belibassakis, A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions, *J. Fluid Mech.*, 389, 275-301, 1999.
- [11] Athanassoulis, G. A., and K. A. Belibassakis, A coupled-mode propagation / dissipation model of small amplitude water waves over variable bathymetry regions, *J. Coastal Engineering*, 99, 1999.
- [12] Bailard, J. A., J. W. Devries and J. T. Kirby, Considerations in using Bragg reflection for storm erosion protection, *J. Waterway Port Coastal Ocean Engr.*, 118, 62-74, 1992.

- [13] Baines, W. D., and E. G. Peterson, An investigation of flow through screens, *Trans. ASME*, 73, 467-480, 1951.
- [14] Belibassakis, K. A., G. A. Athanassoulis and Th. P. Gerostathis, A coupled-mode model for the refraction-diffraction of linear waves over steep three-dimensional bathymetry, *Applied Ocean Research*, 23, 319-336, 2001.
- [15] Belibassakis, K. A., A coupled-mode model for the scattering of water waves by shearing currents in variable bathymetry, *J. Fluid Mech.*, 578, 413-434, 2007.
- [16] Belibassakis, K. A., and G. A. Athanassoulis, A coupled-mode system with application to nonlinear water waves propagating in finite water depth and in variable bathymetry regions, *Coastal Engineering* 58, 337-350, 2011.
- [17] Belibassakis, K. A., B. Simon, J. Touboul and V. Rey, A coupled-mode model for water wave scattering by vertically sheared currents in variable bathymetry regions, *Wave Motion*, 2017.
- [18] Belibassakis, K. A., J. Touboul, E. Laffitte and V. Rey, A mild-slope system for Bragg scattering of water waves by sinusoidal bathymetry in the presence of vertically sheared currents, *Journal of Marine Science and Engineering* (submitted), 2018.
- [19] Belzons, M., V. Rey and E. Guazzelli, Subharmonic Bragg resonance for surface water waves, *EuroPhysics Letters*, 16-2, 1991.
- [20] Berkhoff, J. C. W., Computation of combined refraction-diffraction, proceeding for the 13th International Conference on Coastal Engineering, 1972.
- [21] Berkhoff, J. C. W., Mathematical Models for simple harmonic linear water waves. Wave refraction and diffraction, publ. 163, Delft hydraulics Laboratory, 1976.
- [22] Berkhoff, J. C., N. Booy and A. C. Radder, A verification of numerical wave propagation models for simple harmonic linear water waves, *Coastal Engineering*, 6 (3), 255-279, 1982.
- [23] Boczar-Karakiewicz, B., and R. G. Davidson-Arnott, Nearshore bar formation by nonlinear wave processes –a comparison of model results and field data, *Marine Geology*, 77, 287 – 304, 1987.
- [24] Booij, N., Gravity waves on water with non-uniform depth and current, 1981.
- [25] Booij, N., A note on the accuracy of the mild-slope equation, *Coastal Engineering*, 7, 191-203, 1983.
- [26] Booij, N., R. C. Ris and L.H. Holthuijsen, A third-generation wave model for coastal regions: 1. Model description and validation, 1999.
- [27] Bonnefille, R., *Cours d’hydrodynamique maritime*, 1992.
- [28] Brossard, J. and Chagdali, M., Experimental investigation of the harmonic generation by waves over a submerged plate, *Coastal Engineering*, 42, 277-290, 2001.
- [29] Castro, I. P., Some problems concerning the production of a linear shear flow using curved wire-gauze screens, *J. Fluid Mech.*, 76, 689-709, 1976.

- [30] Chagdali M., S. Mordane and K. L. Maoihi, Une formulation parabolique des équations de propagation des ondes de gravité en surface, VIèmes Journées Nationales Génie Civil-Génie Côtier, 2000.
- [31] Chamberlain, P. G., and D. Porter, The modified mild-slope equation, *J. Fluid Mech.*, 291, 3 407, 1995.
- [32] Chandrasekera, C. N., and K. F. Cheung, Extended linear refraction-diffraction model, *J. Waterw. Port C.-ASCE*, 1997.
- [33] Charland, J., Modélisation de la propagation de la houle en présence d'un courant inhomogène et au-dessus d'une topographie variable, PhD thesis, University of Toulon, 2014.
- [34] Chen, Y., and R. T. Guza, Resonant scattering of edge waves by longshore periodic topography, *J. Fluid Mech.*, 369, 91-123, 1998.
- [35] Cho, Y. S., J. I. Lee and J. K. Lee, Bragg reflection of shallow-water waves on a sloping beach, proceeding for the 25th international conference on Coastal Engineering, 1996.
- [36] Cho, Y. S., and C. Lee, Resonant reflection of waves over sinusoidally varying topography, *J. Coastal Research*, 16(3), 870-876, 2000.
- [37] Chou, T., Band structure of surface flexural-gravity waves along periodic interfaces, *J. Fluid Mech.*, 369, 333-350, 1998.
- [38] Coelho, S. L. V., The production of uniformly sheared streams by means of double gauzes in wind tunnels: a mathematical analysis, *Exp. Fluids*: 8, 25-32, 1989.
- [39] Constantin, A., Stockes waves in water with a non-flat bed, *J. Fluid Mech.*, 740, 17-27, 2014.
- [40] Constantin, A., and R. S. Jonhson, The dynamics of waves interacting with the Equatorial Undercurrent, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, 109, 2015.
- [41] Constantin, A., Equatorial wave-current interactions, Summer School 'Waves in Flows', 2018.
- [42] Corrsin, S., Turbulence: experimental methods, Flugge S (ed) *Encyclopedia of physics*, VIII/2, 521-590, 1963.
- [43] Dalrymple, R. A., A finite amplitude wave on a linear shear current, *Journal of Geophysical Research*, 79(30), 4498-4504, 1974.
- [44] Davies, A. G., The reflection of water-wave energy by undulations on the seabed, *Dynamics of Atmos. And Oceans*, 6, 207-232, 1982.
- [45] Davies, A. G., and A. D. Heathershaw, Surface wave propagation over sinusoidally varying topography, *J. Fluid Mech.*, 144, 419-443, 1984.
- [46] Davies, M. E., The effects of turbulent shear flow on the critical Reynolds number of a circular cylinder, *NPL Rep. Mar. Sci.*, R151, 1976.
- [47] Davis, T., *Direct Methods for Sparse Linear Systems*, SIAM, 2006.

- [48] Dedieu, J.-P., *Points Fixes, Zéros et la Méthode de Newton*, Mathématiques et Applications, 54, Springer Verlag, 2006.
- [49] Deuffhard, P., *Newton Methods for Nonlinear Problems, Affine invariance and adaptive algorithms*, Springer Series In Computational Mathematics, Vol. 35, Springer, 2004.
- [50] Devillard, P., F. Dunlop and B. Souillard, Localization of gravity waves on a channel with random bottom, *J. Fluid Mech.*, 186, 521-538, 1988.
- [51] Dolan, T. J., and R. G. Dean, Multiple longshore sand bars in the upper Chesapeake Bay, *Estuarine Coastal Shelf Sci.*, 21, 727-743, 1985.
- [52] Duff, I., A. Erisman and J. Reid, *Direct Methods for Sparse Matrices*, Oxford University Press, 1986.
- [53] Dulou, C., V. Rey and M. Belzons, Etude expérimentale de l'évolution spatio-temporelle du couplage onde-fond sédimentaire en zone de déferlement, VIèmes Journées Nationales génie Civil Génie Côtier, Caen, 17-19 Mai 2000.
- [54] Dunn, W., and S. Tavoularis, The use of curved screens for generating uniform shear at low Reynolds numbers, *Exp Fluids*, 42, 281-290, 2007.
- [55] Dysthe, K., Refraction of gravity waves by weak current gradients, *J. Fluid mech.*, 442;157-159, 2001.
- [56] Elder, J. W., Steady flow through nonuniform gauzes of arbitrary shape, *J. Fluid Mech.*, 5, 355, 1959.
- [57] Elgar, S., T. H. C. Herbers and R. T. Guza, Reflection of ocean surface gravity waves from a natural beach, *J. Phys. Oceanolog.*, 24, 1503-1511, 1994.
- [58] Elgar, S., B. Raubenheimer and T. H. C. Herbers, Bragg reflection of ocean waves from sandbars, *Geophysical research letters*, 30, NO. I, 1016, 2003.
- [59] Erhel, J., *Résolution itérative de systèmes linéaires*, 2014.
- [60] Erhel, J. and F. Guymarc'h, An augmented conjugate gradient method for solving consecutive symmetric positive definite systems, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 21(4):1279,1299, 2000.
- [61] Euvrard, D., M. Jami, M. Lenoir and D. Martin, Recent progress towards an optimal coupling of finite elements and singularity distribution procedures in numerical ship hydrodynamics, *Proceedings of 3rd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics Paris*, 193-210, 1981.
- [62] Evans, D. V., The transmission of deep-water waves across a vortex sheet, *J. Fluid Mech.*, 68, 389-401, 1975.
- [63] Evans, D. V., and C. M. Linton, On step approximations for water-wave problems, *J. Fluid Mech.*, 278, 229-249, 1994.
- [64] Evans, D. V., N. Kuznetsov and J. N. Hunt, Gravity waves in water of finite depth, *Comp. Mech. Int.*, 127-168, 1997.

- [65] Evans, O. F., The low and ball of the east shore of Lake Michigan, *J. Geology*, 48, 476-511, 1940.
- [66] Faber, V., and T. Manteuffel, Necessary and sufficient conditions for the existence of a conjugate gradient methods, *SIAM Journal on numerical analysis*, 21:352-362, 1984.
- [67] Fitz-Gerald, G. F., The reflexion of plane gravity waves travelling in water of variable depth, *Phil. trans. R. Soc. Lond. A*, 284, 49-89, 1976.
- [68] Fitz-Gerald, G. F., and R. H. J. Grimshaw, A note on the uniqueness of small-amplitude water waves travelling in a region of varying depth, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 86-3, 511-519, 1979.
- [69] Fossen, Th., and H. Nijmeijer, *Parametric resonance in dynamical systems*, Springer, 2011.
- [70] Gibbings, J. C., The pyramid gauze diffuser, *Ing. Arch.*, 42, 25-233, 1973.
- [71] Goda, Y., and Y. Suzuki, Estimation of incident and reflected waves in random wave experiments, *Coastal Engineering*, 828-845, 1976.
- [72] Goda, Y., *Random Seas and design of Maritime Structures*, Advances Series on Ocean Engineering, 33, 2000.
- [73] Golub & Van Loan, *Matrix computations*, 3rd edition, Johns Hopkins, 1996.
- [74] Goring, D. G., and V. I. Nikora, Despiking acoustic doppler velocimeter data, *Journal of Hydraulic Engineering*, 128, 117-126, 2002.
- [75] Gouaud, F., *Etude de l'évolution du trait de côte à long terme : modélisation physique et numérique*, PhD thesis, Université du Sud Toulon-Var, 2007.
- [76] Grue, J., and E. Palm, Wave radiation and wave diffraction from submerged body in a uniform current, *J. Fluid Mech.*, 151, 257, 278, 1985.
- [77] Greenwood, B. and P. D. Osborne, Vertical and horizontal structure in cross-shore flows: an exemple of undertow and wave set-up on a barred beach, *Coastal Engineering*, 14(6)n 543-580, 1990.
- [78] Guazzelli, E., V. Rey and M. Belzons, Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds, *J. Fluid Mech.*, 245, 301-317, 1992.
- [79] Haas, K. A., and I. A. Svendsen, Laboratory measurements of the vertical structure of rip currents, *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 107(C5), 2002.
- [80] Hached, M., *Methodes de sous-espaces de Krylov matriciels appliquées aux équations aux dérivées partielles*, Mathématiques générales, Université du Littoral Côte d'Opale, 2012.
- [81] Hara, T., and C. C. Mei, Bragg scattering of surface waves by periodic bars: theory and experiment, *J. Fluid Mech.*, 178, 221-241, 1987.
- [82] Hardy, G. H., and W. W. Rogosinski, *Fourier Series*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics No. 38, Cambridge University Press, 1944.

- [83] Heathershaw, A. D., Seabed-wave resonance and sand bar growth, *Nature*, 296, 343-345, 1982.
- [84] Horikawa, *Nearshore Dynamics and Coastal Processes*, Tokyo press., 1988.
- [85] IAHR Working Group, List of sea-state parameters, *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 115(6), 793-808, 1989.
- [86] Izmailov, A. F., and M. V. Solodov, *Newton-Type Methods for optimization and variational problems*, Springer Series in Operations research and Financial Engineering, Springer, 2014.
- [87] Jarry, N., V. Rey, F. Gouaud and D. Lajoie, Gravity wave amplification and phase crest re-organization over a shoal, *Nat. Hazards Earth Syst. Sci.* 11, 789-796, 2011.
- [88] Joubert, W. D., and T. A. Manteuffel, *Iterative Methods for Nonsymmetric Linear Systems*, 10:149-171, Academic Press, 1990.
- [89] Jonsson, I. G., and O. Skovgaard, Wave refraction across a shearing current, *Coastal Engineering*, 1978.
- [90] Jonsson, I. G., and J. B. Christoffersen, Current depth refraction of regular waves, *Coastal Engineering*, 1978.
- [91] Jonsson, I. G., Wave-current interactions, in B. Le Méhauté and D. M. Hanes, *Ocean Engineering Science, The Sea*, 9A, Wiley Interscience, 65-120, 1990.
- [92] Karnik, U., and S. Tavoularis, Generation and manipulation of uniform shear with the use of screens, *Exp. Fluids*, 5, 247-254.
- [93] Kim, J. W., and K. J. Bai, A new complementary Mild-slope equation, *J. Fluid Mech.*, 511, 25-40, 2004.
- [94] Kim, S. D., and H. J. Lee, Diffraction analysis by gap type breakwater using polynomial approximation for Fresnel integral, *Eur. J. Scientific Research*, 37 (1), 80-88, 2009.
- [95] Kim, S. D., The analysis of long wave diffractions due to offshore breakwater and seawall, *Scientific research and essays* 5 (4), 378-388, 2010.
- [96] Kirby, J. T., A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography, *J. Geophys. Res.*, 89, 745-747, 1984.
- [97] Kirby, J. T., A general wave equation for waves over rippled beds, *J. Fluid Mech.*, 162, 171-186, 1986a.
- [98] Kirby, J. T., Higher-order approximations in parabolic equation method for water-waves, *Journal of Geophysical research*, 91, 933-952, 1986b.
- [99] Kirby, J. T., Current effects on resonant reflection of surface water waves by sand bars, *J. Fluid Mech.*, 186, 501-520, 1988.
- [100] Kirby, J. T., and T. M. Chen, Surface waves on vertically sheared flows: approximate dispersion relations, *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 94(C1), 1013-1027, 1989.

- [101] Kirby, J. T. and R. A. Dalrymple, Combined Refraction/Diffraction Model: documentation and User's manual.
- [102] Kirby, J. T, and R. A. Dalrymple, A parabolic equation for the combined refraction-diffraction of Stokes waves by mildly varying topography, *J. Fluid Mech.*, 136, 453-466, 1983.
- [103] Kirby, J. T., A note on parabolic radiation boundary conditions for elliptic wave calculations, *Coastal Engineering*, 13,211-218, 1989.
- [104] Kiya, M.,H. Tamura and M. Arie, Vortex shedding from a circular cylinder in a moderate Reynolds number shear flow, *J. Fluid Mech.*, 141, 721, 1980.
- [105] Komar, P. D., *Beach Processes and sedimentation*, Prentice Hall, Saddle River, Nj, 1998.
- [106] Kotansky, D. R., The use of honeycomb for shear flow generation, *AIAA J.* 4, 1490, 1966.
- [107] Kuznetsov, N., Trapped modes of internal waves in a channel spanned by a submerged cylinder, *J. of Fluid Mech*, 1993.
- [108] Lau, Y. L., and W. D. Baines, Flow of stratified fluid through curved screens, *J. Fluid Mech.*, 33, 721-738, 1968.
- [109] Lavrenov, I. V., and A. V. Porubov, Three reasons for freak wave generation in the non-uniform current, *European Journal of Mechanics-B/Fluids*, 25(5), 574-585, 2006.
- [110] Laws, E. M., and J. L. Livesey, Flow through screens, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 10, 247, 1978.
- [111] Liu, P. L. F., and T. K. Tsay, On weak reflection of water waves, *J. Fluid Mech.*, 131, 59-71, 1983.
- [112] Liu, P. L.-F., Wave-current interactions on a slowly varying topography, *J of Geophysical Research: Oceans*, 88(C7), 4421-4426, 1983  
Liu, P. L.-F., Resonant reflection of water waves in a long channel with corrugated boundaries, *J. Fluid Mech.*, 179, 371-381, 1987.
- [113] Liu, P. L. F., and Y. S. Cho, Bragg reflection of infragravity waves by sandbars, *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 98(C2), 22733-22741, 1993.
- [114] Liu, Y., and D. K. P. Yue, On generalized Bragg scattering of surface waves by bottom ripples, *J. Fluid Mech.*, 356, 297-326, 1998.
- [115] Livesey, J. L., and J. T. Turner, The generation of symmetrical duct velocity profiles of high uniform shear, *J. Fluid Mech.*, 20, 201, 1964.
- [116] Longuet-Higgins, M. S., and R. W. Stewart, The changes in amplitude of short gravity waves on steady non-uniform currents, *J. Fluid Mech.*, 10(4), 529-549, 1961.
- [117] Luke, J. C., A variational principle for a fluid with a free surface, *J. Fluid Mech.*, 27(2), 395-397, 1967.
- [118] MacIver, R. D., R. R. Simons and G. P. Thomas, Gravity waves interacting with a narrow jet-like current, *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 111, 2006.

- [119] Magne, R., V. Rey and F. Ardhuin, Measurement of wave scattering by topography in presence of current, . *Physic of Fluid.*, 17, 126-601, 2005.
- [120] Magne, R., K. A. Belibassakis, T. H. C. Herbers, F. Ardhuin, W. C. O'Reilly and V. Rey, Evolution of surface gravity waves over a submarine canyon, *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 112, 2007.
- [121] Mair, W. A., and P. K. Stansby, Vortex wakes of bluff cylinders in shear flow, *SIAM J. Appl. Maths*, 28, 519, 1975.
- [122] Massel, S. R., *Hydrodynamics of Coastal zones Elsevier oceanography seris*, 48k, 1989.
- [123] Massel, S. R., Extended refraction-diffraction equation for surface waves, *J. Coastal Engineering*, 97-126, 1993.
- [124] Maull, D. J., The wake characteristics of a bluff body in shear flow, *AGARD Conf. Proc.* 48, 1968.
- [125] Maull, D. J., and R. A. Young, Vortex shedding from bluff bodies in a shear flow, *J. Fluid Mech.*, 60, 401, 1973.
- [126] Mayençon, René, and P. Y. Pavec. *Météorologie marine. Editions maritimes & d'outre-mer [EMOM]*, 1992.
- [127] Mei, C. C., Numerical Methods in Water-Wave Diffraction and Radiation, *Annual review of Fluid Mechanics*, 10, 393-416, 1978.
- [128] Mei, C. C., *The applied dynamics of ocean waves*, John Wiley & Sons, New York, 1983.
- [129] Mei, C. C., Resonant reflection of surface waves by periodic sand-bars, *J. Fluid Mech.*, 152, 315-335, 1985.
- [130] Mei, C. C., *The applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.,Singapore, 1989.
- [131] Mei, C. C., P. Sammarco, E. S. Chan and C. Procaccini, Subharmonic resonance of proposed storm gates for Venice lagoon, *Proc. R. Soc. Lond. A*, 444(1920), 257-265, 1994.
- [132] Mei, C. C., Multiple scattering by an extended region of inhomogeneities, *Wave Propagation*, Fall, 2004.
- [133] Mei, C., M. Stiassnie and D. K. P. Yue, Theory and applications of ocean surface waves : Part II : nonlinear aspects, *Advanced Series on Ocean Engineering*, 23, 2005.
- [134] Meurant, G., *Computer solution of large linear systems*, North Holland, Amsterdam, 1999.
- [135] Miche, M., Le pouvoir réfléchissant des ouvrages maritimes exposés à l'action de la houle, *Ann Points. Chausses*, 121, 285-319, 1951.
- [136] Miles, J. W., and P. G. Chamberlain, Topographical scattering of gravity waves, *J. Fluid Mech.*, 361, 175-188, 1998.
- [137] Mitra, A., and M. D. Greenberg, Slow Interactions of Gravity Waves and a corrugated sea bed, *J. Applied Mech.* 51(2), 1984.

- [138] Moore, L., C. Sullivan, and D. Aubrey, Interannual evolution of multiple longshore sand bars in a mesotidal environment, *Marine Ge-ology*, in press, 2002.
- [139] Mordane, S., G. Mangoub, K. L. Maroihi and M. Chagdali, A parabolic equation based on rational quadratic approximation for surface gravity wave propagation, *Coastal Engineering*, 50, 85-95, 2004.
- [140] Nwogu, O. G., Interaction of finite-amplitude waves with vertically sheared current fields, *J. Fluid Mech.*, 627, 179-213, 2009.
- [141] Ostendorf, D. W., and O. S. Madsen, An analysis of longshore currents and associated sediment transport in the surf zone, Ralph M. Parsons Laboratory for Water Resources and Hydrodynamics, 1979.
- [142] Owen, P. R., and K. H. Zienkiewicz, The production of uniform shear flow in a wind tunnel, *J. Fluid Mech.*, 2, 521, 1957.
- [143] Panchang, V., B. R. Pearce, G. Wei and B. Cushman-Roisin, Solution of the mild-slope wave problem by iteration, *Applied Ocean Research*, 13, 4, 1999.
- [144] Patarapanich, M., Maximum and zero reflection from submerged plate, *J. Waterw. Port C.-ASCE* 110 (2), 171-181, 1984.
- [145] Pauly, D. and D. Zeller, Catch reconstructions reveal that global marine fisheries catches are higher than reported and declining, *Nature Communications* 7, 10244(2016), 2016.
- [146] Pengzhi, L., Numerical Modeling of water waves, 3.9.4, 2008.
- [147] Penney, W. G., and A. T. Price, Part i. The diffraction theory of sea waves and the shelter afforded by breakwaters, *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, 224, 263-253, 1952.
- [148] Peregrine, D. H., Equations for water waves and the approximation behind them, Proceedings of the advanced seminar conducted by the Mathematical Research Center, The University of Wisconsin, and the Coastal Engineering Research Center U.S. Army, at Madison, 11-13, 1971.
- [149] Peregrine, D. H., Interaction of water waves and currents, *Advances in applied mechanics*, 16, 9-117, 1976.
- [150] Porter, D. and D. J. Staziker, Extension of the mild-slope equation, *J. Fluid Mech.*, 300, 367-382, 1995.
- [151] Porter, D., and P. G. Chamberlain, Linear wave scattering by two-dimensional topography, *International series on advances in fluid mechanics*, 10, 13-54, 1997.
- [152] Putrevu, U., and I. A. Svendsen, Vertical structure of the undertow outside the surf zone, *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 98(C12), 22707-22716, 1993.
- [153] Quarteroni, A. M., R. Sacco and F. Saleri, *Méthodes numériques : algorithmes, analyse et applications*, Springer Science & Business Media, 2008.
- [154] Radder, A. C., On the parabolic equation method for water-wave propagation, *J. Fluid Mech.*, 1, 159-176, 1979.

- [155] Rey, V., Propagation d'ondes de gravité au-dessus de fonds solides ou constitués de sédiments, : application à l'étude d'interactions dynamiques ondes-sédiments, Thèse de l'Université de Provence, 1991.
- [156] Rey, V., Propagation and local behaviour of normally incident gravity waves over varying topography, *Eur. J. Mech. B : Fluids*, 11, 213, 1992.
- [157] Rey, V., M. Belzons and E. Guazzelli, Propagation of surface gravity waves over a rectangular submerged bar, *J. Fluid Mech.*, 235, 453-479, 1992.
- [158] Rey, V., A note on the scattering of obliquely incident surface gravity waves by cylindrical obstacles in waters of finite depth, *Eur. J. Mech. B-Fluid* 14 (1), 207-216, 1995.
- [159] Rey, V., E. Guazzelli and C. C. Mei, Resonant reflection of surface gravity waves by one-dimensional doubly sinusoidal beds, *Physics of Fluids*, 8, 6, 1996.
- [160] Rey, V., R. Capobianco and C. Dulou, Wave scattering by a submerged plate in presence of steady uniform current, *Coastal Engineering*, 47, 27-34, 2002.
- [161] Rey, V. and J. Touboul, Forces and moment on a horizontal plate due to regular and irregular waves in the presence of current, *Applied Ocean Research*, 33-2, 88-99, 2011.
- [162] Rey, V., J. Charland and J. Touboul, Wave-current interaction in the presence of a three-dimensional bathymetry: Deep water wave focusing in opposing current conditions, *Physics of Fluids* 26, 096601, 2014.
- [163] Risser, L., Differences finies pour la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides, 2006.
- [164] Saad, Y., Practical use of polynomial preconditioning for the conjugate gradient method, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 6(4):865-881, 1985.
- [165] Saad, Y., and H. Schultz, GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 7:856-869, 1986.
- [166] Saad, Y., *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2nd edition, 103-128, SIAM, 2003.
- [167] Schreiber, F., Etude de l'interaction entre la houle et un courant cisailé, analyse de données de courant, Rapport Master Océanographie, 2016.
- [168] Shrira, V. I., Surface waves on shear currents: solution of the boundary-value problem, *J. Fluid Mech.*, 252, 565-584, 1993.
- [169] Shyu, J. and C. Tung, Reflection of oblique waves by currents : analytical solutions and their application to numerical computations, *J. Fluid Mech.*, 396, 143-182, 1999.
- [170] Simon, B., Wave-current interaction, experiments with uniform shear, EGU 2016, 2016.
- [171] Simon, M. J., and F. Ursell, Uniqueness in linearized two-dimensional water-wave problems, *J. Fluid Mech.*, 1984.
- [172] Skop, R. A., Approximate dispersion relation for wave-current interactions, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 113(2), 187-195, 1987.

- [173] Skovgaard, O., I. G. Jonsson and J. A. Bertelsen, Computation of wave heights due to refraction and friction, *J. Waterways, Harbors and Coastal Eng.*, 101, 15-32, 1975.
- [174] Van der Sluis, A., and H. van der Vorst, The rate of convergence of conjugate gradients, *Numerische Mathematik*, 48:543-560, 1986.
- [175] Smith, R., Giant waves, *J. Fluid Mech.*, 77(3), 417-431, 1976.
- [176] Smith, J. A., Estimating the upper tail of flood frequency distributions, *Water Resources Research*, 23(8), 1657-1666, 1987.
- [177] Smith, J. A., Observations and theories of Langmuir circulation: a story of mixing, *Fluid mechanics and the Environment: Dynamical Approaches*, 295-314, 2001.
- [178] Soares, C. G., and F. L. Pena, *Developments in Maritime Transportation and exploitation of sea Resources*, IMAM 2013, CRC Press, 2013.
- [179] Soulsby R. L., and Humphery J. D., Field Observations of Wave-current Interaction at the Sea Bed. In: Torum A., Gudmestad O.T. (eds) *Water Wave Kinematics*. NATO ASI Series (E: Applied Sciences), vol 178. Springer, Dordrecht, 1990.
- [180] Stamnes, J. J., O. Lovhaugen, B. Spjelkavik, C. C. Mei, E. Lo and D. K.P. Yue, Nonlinear focusing of surface waves by a lens-theory and experiment, *J. Fluid Mech.*, 135, 71-94, 1983.
- [181] Stansby, P. K., The locking-on of vortex shedding due to the cross-stream vibration of circular cylinders in uniform and shear flows, *J. Fluid Mech.*, 74, 641, 1976.
- [182] Stewart, R. H., and J. W. Joy, HF Radio measurements of surface currents, *Deep Sea Research and oceanographic abstracts*, 21-12,1039-1049, 1974.
- [183] Stillinger, D. C., M. J. Head, K. N. Helland and C. W. Van Atta, A closed loop gravity-driven water channel for density-stratified shear flows, *J. Fluid Mech.*, 131, 73-89, 1983.
- [184] Suh, K. D., C. Lee and W. S. Park, Time-dependant equations for wave propagation on rapidly varying topography, *Coastal Engineering*, 32, 91-117, 1997.
- [185] Suh, K. G., W. S. Park and B. S. Park, Separation of incident and reflected waves in wave-current flumes, *Coastal Engineering*, 149-159, 2001.
- [186] Swan, C., I. P. Cummins and R. L. James, An experimental study of two-dimensional surface water waves propagating on depth-varying currents. part 1. Regular waves, *J. Fluid Mech.*, 428, 273-304, 2001.
- [187] Takano, K., Effets d'un obstacle parallélépipedique sur la propagation de la houle, *Houille Blanche*, 15, 247-267, 1960.
- [188] Tavoularis, S., *Measurement in fluid mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [189] Thomas, G.P., and G. Klopman, Wave-current interaction in the nearshore region, In: Hunt, J.N. (ed.) *Gravity waves in Water of Finite Depth*, *Advanced Fluid Mechanics*, vol. 10, pp. 215-319, Computational Mechanics Publications, Southampton, 1997.

- [190] Thompson, P. D., The propagation of small surface disturbances through rotational flow, *Annals of the New York Academy of Sciences*, 51: 463-474, 1949.
- [191] Tobisch, E., *New approaches to nonlinear waves*, 3., 2015.
- [192] Tolman, H. L., User manual and system documentation of Waewatch III version 3.14, tech. note 276, NOAA A/NWS/NCEP/MMAB, 2009.
- [193] Touboul, J., J. Charland, V. Rey and K. Belibassakis, Extended mild-slope equation for surface waves interacting with a vertically sheared current, *J. Coastal Engineering*, 116, 77-88, 2016.
- [194] Tsai, L. H., T. W. Hsu and S. K. Wang, Bragg scattering of water waves by multiple compositions of artificial bars, *Taiwan-Polish Joint Seminar on Coastal Protection*, 2008.
- [195] Turner, J. T., A computational method for the flow through non-uniform gauzes : the general two dimensional case, *J. Fluid Mech.*, 36, 367, 1969.
- [196] Vahl Davis, G. De, Steady non uniform flow through wire screens, PhD Dissertation, University of Cambridge, 1957.
- [197] Vainberg, B. R., and V. G. Maz'ja, On the problem of the steady state oscillations of a fluid layer of variable depth, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 28, 56-73, 1973.
- [198] Van der Vorst, H. A., *Iterative Krylov methods for large linear systems*, 13, Cambridge University Press, 2003.
- [199] Van der Vorst, H. A., Bi-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of Bi-CG for the solution of nonsymmetric linear systems, *SIAM journal on scientific and statistical computing*, 13:631-644, 1992.
- [200] Varga, R. S., *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962.
- [201] Vincent, C. L., and M. J. Briggs, Refraction-diffraction of irregular waves over a mound, *J. Waterw. Div.-ASCE* 115, 269-284, 1989.
- [202] Wahl, T., Discussions and closures of despiking acoustic doppler velocimeter data, *Journal of Hydraulic Engineering*, 128:117-126, 2002.
- [203] Wang, S. K., T. W. Hsu, L. H. Tsai and S. H. Chen, An application of Mile's Theory to Bragg scattering of water waves by doubly composite artificial bars, *Ocean Eng.* 33(3-4), 331-349, 2006.
- [204] Whitham, G. B., Two-timing, variational principles and waves, *J. Fluid Mech.*, 44(2), 373-395, 1970.
- [205] Whitham, G. B., Dispersive waves and variational principles, *Nonlinear waves*, 139-169, 1974.
- [206] Woo, H. G. C., and J. E. Cermak, The production of constant-shear flow, *J. Fluid, Mech.*, 234, 279-296, 1992.
- [207] Xu, D., and S. Liao, Z. Lin , Equilibrium states of class-I Bragg resonant wave system', *European Journal of Mechanics – B/Fluids* 50:38-51, 2014.

- [208] Yeung, R. W., Numerical methods in free-surface flows, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 14(1), 395-442, 1982.
- [209] Yoon, S. B., and P. L. F. Liu, Resonant reflection of shallow-water waves due to corrugated boundaries, *J. Fluid Mech.*, 180, 451-469, 1987.
- [210] Ypma, T. J., Historical development of the Newton-Raphson method, *SIAM Review*, 37, 531-551, 1995.
- [211] Yu, J., and C. C. Mei, Do longshore bars shelter the shore?, *J. Fluid Mech.*, 404, 251-268, 2000a.
- [212] Yu, J., and C. C. Mei, Formation of sand bars under surface waves, *J. Fluid Mech.*, 416, 315-348, 2000b.
- [213] Zhang, L., M. H. Kim, J. Zhang and B. L. Edge, Hybrid model for Bragg scattering of water waves by steep doubly-sinusoidal bars, *Journal of Coastal Research*, 15(2), 486-495

## Modélisation de la propagation de la houle en présence de courants cisailés et par bathymétrie variable

**Résumé** Cette thèse de doctorat traite d'un aspect particulier des interactions houle-courant-bathymétrie, à savoir l'influence de la vorticité sur un phénomène de résonance de Bragg. Pour l'aspect modélisation, une analyse numérique est présentée, basée sur la comparaison de deux modèles hyperboliques - Pente Douce et Pente Douce Modifiée - étendus pour intégrer des courants cisailés. L'influence de deux paramètres caractéristiques du courant, le cisaillement (considérée comme constant sur la colonne d'eau) et la célérité en surface, est évaluée pour établir une première tendance vis- -vis du comportement de la houle. Pour aller plus loin, une campagne expérimentale en canal   houle a fourni un jeu de données originales sur la propagation d'une houle régulière de fréquence variable, réfléchie par une bathymétrie ondulée et un courant cisailé évolutif. Une analyse poussée a confronté les résultats numériques - basés sur différentes représentations du courant - aux données expérimentales, et plusieurs conclusions fortes en sont ressorties. Sous l'influence d'un courant cisailé opposé   la houle, le pic de Bragg se trouve réduit, en amplitude comme en fréquence, mais un pic de réflexion inattendu survient pour des houles   hautes fréquences. Ensuite, si des modélisations précises du comportement du courant nous ont mené   une très bonne approche de l'intensité de la réflexion de Bragg, la fréquence pic associée a systématiquement été surestimée par les modèles. Gr ce   une profonde remise en question de la théorie et une collaboration des membres de l'équipe, une nouvelle modélisation a vu le jour, avec une décomposition originale du potentiel des vitesses pour tenir compte de la dissymétrie des nombres d'onde incident et réfléchis (dissymétrie caus e par le courant et sa vorticité). Les premiers résultats montrent qu'avec cette nouvelle théorie, la position de la fréquence pic correspondant   la résonance de Bragg est bien représentée. Cette nouvelle approche de la réflexion, par fortes variations bathymétriques et en présence de courant   structure variable, promet de belles découvertes sur l'influence de la vorticité.

**Mots clés:** houle, courant, bathymétrie, vorticité, cisaillement, réflexion, Bragg, résonance

## Modelling of wave propagation above sheared currents and varying bathymetry

**Abstract** This PhD thesis focuses on a specific part of the interactions between waves, current and bathymetry: the influence of the vorticity on the Bragg resonance phenomenon. Two numerical models, based on hyperbolic equations, are compared: the Mild Slope equation and the Modified Mild Slope equation, both extended to consider vorticity. To establish some trends about the wave behaviour in such a configuration, the influence of the vorticity has been compared to the influence of the surface current velocity, in a parametric study. To go further, an experimental campaign has been settled in a wave flume, and the reflexion of regular waves propagating above sinusoidal bathymetry and horizontally varying sheared current has been registered for a large range of waves frequencies. Some strong conclusions asserted themselves: under the influence of a wave opposing varying sheared current, the maximum of reflexion is reduced, both in amplitude and frequency, but another local maximum appears in higher waves frequencies. Moreover, our modelling achieved to represent the amplitude of the Bragg Peak quite well, but always overestimated the associated frequency. Thanks to a strong questioning of the theory and a collaboration between several researchers, a new modelling arised, with an original decomposition of the velocity potential taking into account the asymmetry between the incident and reflected wavenumbers. The first results are very optimistic: the Bragg Peak frequency is recovered, and the study on the vorticity influence can continue. This new approach in coastal engineering will generate as many questions as opportunities.

**Keywords:** wave, propagation, vorticity, bathymetry, shearing, reflection, Bragg, resonance