



Champs magnétiques générés par effet dynamo dans les objets astrophysiques en rotation

Mélissa Menu

► To cite this version:

Mélissa Menu. Champs magnétiques générés par effet dynamo dans les objets astrophysiques en rotation. Astrophysique [astro-ph]. Université Paris Saclay (COmUE), 2019. Français. ⟨NNT : 2019SACLX104⟩. ⟨tel-02489431⟩

HAL Id: tel-02489431

<https://theses.hal.science/tel-02489431v1>

Submitted on 24 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Champs magnétiques générés par effet dynamo dans les objets astrophysiques en rotation

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'Ecole polytechnique

École doctorale n°572 Ondes et matières (EDOM)
Spécialité de doctorat : Physique des Plasmas

Thèse présentée et soutenue à Paris, le 04/12/2019, par

MÉLISSA D. MENU

Composition du Jury :

Caroline Nore Professeur, Université Paris-Sud (LIMSI)	Présidente
Franck Plunian Professeur, Université de Grenoble Alpes (ISTerre)	Rapporteur
Yannick Ponty Directeur de Recherche, Observatoire de la Côte d'Azur (Lagrange)	Rapporteur
Laurène Jouve Maître de Conférences, Université Toulouse III (IRAP)	Examineur
Michael Le Bars Directeur de Recherche, Université de Marseille (IRPHE)	Examineur
Sébastien Galtier Professeur, Université Paris-Sud (LPP)	Directeur de thèse
Ludovic Petitdemange Chargé de Recherche, Sorbonne Université (LERMA)	Co-directeur de thèse

Remerciements

Avant toute chose je tiens à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse, Sébastien Galtier et Ludovic Petitdemange. Merci à Sébastien pour sa magnanimité, ses conseils bienveillants, sa confiance émancipatrice et enfin son sens de l'humour parfois déroutant. Merci à Ludovic pour ses encouragements dans toutes mes entreprises, sa franchise parfois déstabilisante et son implication. I would also like to thank Alexandros Alexakis for his kindness, patience and disponibility ; it was - and will be - a pleasure to discuss and work with you.

Je remercie également mes rapporteurs Franck Plunian et Yannick Ponty, dans un premier temps pour les discussions dresdoises et finalement pour leur lecture consciencieuse de ce manuscrit. Merci aux examinateurs Laurène Jouve, Michael Le Bars et Caroline Nore pour l'intérêt porté à mon sujet.

Mais qu'auraient-été ces trois années sans les rencontres qu'elles ont amenées, en particulier via le détriplement géographique occasionné.

Tout d'abord, merci à toutes les personnes que j'ai pu rencontrer à l'ENS de m'avoir tenu compagnie dans ce bureau parfois trop froid : Florence, Guillaume et Kanna ainsi qu'Alexis, Bruno, Thibaud, Jordan, Adrian et Gaurav. Merci également à François Petrelis et Christophe Gissinger pour les discussions bien souvent animées mais toujours enrichissantes. Tout spécialement merci à Michael Pereira qui a su illuminer bien des journées grises, au bureau ou ailleurs.

Merci également à toutes les personnes rencontrées à Polytechnique. Merci à mes camarades, Pedro et Victor, de m'avoir si vite intégrée et pour les moments précieux passés en votre compagnie, merci à Shaokang pour les discussions botaniques, merci à Pierre et Ozgür pour m'avoir montré une belle facette de la recherche. Merci à Gaétan pour sa sollicitude et son authenticité. Merci à Romain Meyrand pour son aide précieuse, via son manuscrit et ses lignes de codes.

Et enfin, merci aux occupants du 5ème étage de Jussieu, qui, malgré mon flegme apparent ont bien souvent égayé mes soirées. Merci donc à Alexis, Lionel, Franck et Andrea pour leurs irruptions réconfortantes. Merci à Julien, compagnon de galère imp(r)o(vi)sé durant ces derniers mois, pour les glaces autant en juillet qu'en janvier et les fous rires nerveux (et désolée pour ton coccyx).

Merci à tout ceux qui m'ont permis de me changer les idées, et qui, à bien des moments, m'ont remise d'aplomb. Merci à mes compagnons de route depuis maintenant 5 ans : Maximilien sans qui mes soirées eut été bien plus tristes, Antoine pour les discussions turbulentes et Michelle pour Soulages. Merci également à Jean-Gabriel, Simon et Christophe. Merci aux ami-e-s de plus longue date de m'avoir sortie de ma torpeur quand j'en avais besoin : merci à Louise pour les aventures dans le domaine du muscadet et merci à Hélène de braver mes silences. Merci à André, Axel, Thomas, Jodie, Garance, Félix et Julian. Merci à Nicolas, Rémi et Amandine pour les soirées d'observation fraîches mais chaleureuses. Merci aux traceuses du lundi, pour m'avoir fait comprendre qu'il faut parfois accepter un léger déséquilibre vers l'avant pour aller plus loin.

Merci infiniment à ma famille, pour toute l'attention durant ces derniers mois, leur indulgence et les relectures fastidieuses.

Et merci à mon homonyme d'hier et de demain.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Introduction générale	1
1.1.1	Etats de la matière en astrophysique (plasmas, fluides magnétisés ...)	2
1.1.2	Problèmes historiques non-élucidés (champs magnétiques astrophysiques)	2
1.1.3	Effet dynamo	5
1.2	Décrypter la physique	12
1.2.1	Equations impérieuses	12
1.2.2	Turbulence et complications	14
1.2.3	Différentes approches d'un même problème	17
2	Description des modèles numériques	21
2.0.1	Utilisation de l'approche pseudo-spectrale	21
2.0.2	Discretiser le temps et l'espace	22
2.1	Modèle local	23
2.1.1	Géométrie et équations	24
2.1.2	Aspects numériques de TURBO	24
2.1.3	Forçage choisi	25
2.1.4	Diagnostic de post-traitement	27
2.2	Modèle global	30
2.2.1	Géométrie et équations	30
2.2.2	Aspects numériques de PaRoDy	33
2.2.3	Diagnostic de post-traitement	34
3	Impact de la force de Lorentz sur la topologie des champs magnétiques	37
3.1	Introduction et état de l'art en simulations géodynamo	37
3.1.1	Premiers modèles	38
3.1.2	Controverses	39
3.1.3	Vers une caractérisation des différents régimes dynamo	41
3.2	Différentes définitions des régimes dynamos	42
3.2.1	Régime dipolaire : Définition et caractéristiques	42
3.2.2	Régime multipolaire : Définition et caractéristiques	47
3.2.3	(Bi/In)Stabilité	50
3.3	Evolution des dynamos dipolaires dans l'espace des paramètres	52
3.3.1	Méthodologie	52
3.3.2	Transition vers l'état multipolaire	54
3.3.3	Variations du nombre d'Elsasser	56
3.3.4	Impact de la force de Lorentz	58
3.3.5	Résumé et vue d'ensemble de l'espace des paramètres	60
3.4	Transition en régime dominé par la force de Lorentz	63

3.4.1	Nouveau comportement	63
3.4.2	Différentes façons de mesurer l'importance de l'inertie	66
3.4.3	Equilibre des forces comme point de bascule	71
3.5	Pertinence pour la géodynamo et conclusions	74
4	Cascade inverse et champs de grande échelle	79
4.1	Cascade inverse, hélicité(s) et cas étudié(s)	79
4.1.1	Notion d'invariance et cascade directe	79
4.1.2	Cascades et anisotropies	80
4.1.3	Hélicité hybride	83
4.1.4	Résumé des différents cas attendus	85
4.2	Deux types de polarisation	86
4.2.1	Impact du forçage	86
4.2.2	Cas de référence	92
4.3	Impact de l'angle d'inclinaison	94
4.3.1	Comportement des énergies	96
4.3.2	Efficacité du transfert vers les grandes échelles	103
4.4	Conclusions	108
4.4.1	Dérivation analytique	108
4.4.2	Structures	109
4.4.3	Applications	109
4.5	Impact du nombre de Prandtl magnétique	110
5	Conclusion et perspectives	115
A	Publications	119
A.1	Inverse cascade of hybrid helicity in $B\Omega$ -MHD turbulence	119
A.2	Magnetic effects in geodynamo simulations	135
B	Annexe modèle local	167
B.1	Tableaux récapitulatifs des simulations effectuées dans l'étude locale	167
B.2	Figures additionnelles	172
C	Annexe modèle global	179

Chapitre 1

Introduction

1.1	Introduction générale	1
1.1.1	Etats de la matière en astrophysique (plasmas, fluides magnétisés ...)	2
	Plasma	2
	Approche fluide	2
1.1.2	Problèmes historiques non-élucidés (champs magnétiques astrophysiques)	2
	L'Univers, expérience de pensée physique	2
	Impact de la rotation	3
	Genèse des champs	3
1.1.3	Effet dynamo	5
	Renversements et geodynamo	10
1.2	Décrypter la physique	12
1.2.1	Equations impérieuses	12
1.2.2	Turbulence et complications	14
1.2.3	Différentes approches d'un même problème	17

1.1 Introduction générale

Le mot *physique* nous vient du grec *φυσική* signifiant la nature. Avec le temps, ce terme désigne désormais la discipline scientifique visant à expliquer les phénomènes que l'on peut trouver dans la nature. Un des premiers ouvrages traitant de physique, *φυσικὴ ἀκρόασις* ou l'écoute de la nature d'Aristote, distingue en particulier cinq formes de matière. Le cinquième élément, en marge des quatre états bien connus est nommé *αἰθήρ* ou éther. Cet élément expliquerait les trajectoires des planètes et l'immuabilité des étoiles. L'éther est un élément dont l'existence fût la plus discutée et ce jusqu'au début du XXème siècle. En physique moderne l'éther n'est plus nécessaire pour expliquer la transmission de force électromagnétique ou gravitationnelle. Cette notion de force ambiante portée par un milieu est facilement transposable au concept moderne de champ. Ainsi la gravitation, ou force gravitationnelle, est en réalité une interaction entre une masse et un champ gravitationnel. De la même façon, les forces électromagnétiques désignent les interactions entre particules chargées, et éventuellement avec un champ électromagnétique.

1.1.1 Etats de la matière en astrophysique (plasmas, fluides magnétisés ...)

Plasma

Souvent appelé "quatrième état de la matière", il n'est plus possible de targuer le mot *plasma* d'indéfinissable. Effectivement le plasma n'est pas en marge des trois états de la matière bien connus : le plasma est effectivement défini comme un gaz ionisé, c'est-à-dire un gaz en partie constitué de particules chargées électriquement. Ainsi le plasma est l'état permettant les interactions électromagnétiques en son sein, entre les particules qui le constituent ou avec un champ électromagnétique environnant. La foudre, l'ionosphère ou encore les étoiles sont des exemples de plasmas naturels.

Leur diversité les rend particulièrement intéressant pour nombre de disciplines, et les destine à de nombreuses applications au cœur de thématiques actuelles : traitement de l'air ou de cellules, propulsion et même météo spatiale. La physique des plasmas est donc l'étude de leurs comportements dans différentes conditions et sous différentes contraintes, et donne lieu à de multiples approches possibles - particulière, quantique, électromagnétique (Belmont *et al.*, 2019).

Approche fluide

Dans le cadre de ma thèse, le plasma sera abordé via une approche fluide, c'est-à-dire que les interactions ne seront pas considérées de façon individuelles, mais caractérisées de façon collective. Par exemple, les collisions entre particules ne sont pas considérées comme un phénomène microscopique mais macroscopique, représentées par des termes de dissipation d'énergie comme en mécanique des fluides. Le plasma est ainsi considéré comme un fluide sensible aux différents types d'interactions électromagnétiques, ce qui est particulièrement approprié pour étudier les mécanismes physiques ayant lieu dans les intérieurs planétaires et stellaires (cfr partie 1.1.2).

Le plasma dans cette approche est donc caractérisé par son écoulement, régit par les équations de Navier-Stokes bien connues de la dynamique des fluides (et au-delà¹). Ces équations, bien que sans solution régulière en trois dimensions, sont abondamment étudiées numériquement pour leur utilité en météorologie ou aéronautique. Les équations fluides sont cependant insuffisantes pour décrire totalement le comportement des plasmas, puisque ceux-ci sont également sujets aux interactions électromagnétiques. Celles-ci sont décrites par les équations de Maxwell, qui contraignent le comportement des champs électrique et magnétique au cours du temps (cfr partie 1.2.1).

1.1.2 Problèmes historiques non-élucidés (champs magnétiques astrophysiques)

L'Univers, expérience de pensée physique

En astrophysique - littéralement physique des astres - la lumière fût longtemps la seule source d'information disponible pour sonder l'immense laboratoire qu'est l'Univers. L'histoire de l'astrophysique est donc inlassablement marquée par toute découverte à propos de cette messagère et de ces propriétés. Par exemple, les avancées techniques en optique au XVIIème siècle ont entre autre permis l'avènement de l'héliocentrisme jusqu'à la théorie de la gravitation.

Via la lumière et d'autres messagers depuis, de nombreux phénomènes autant physiques, chimiques que cosmologiques ont été observés. Rien qu'au sein du système solaire de nombreuses données ont été recueillies via la multitude de sondes envoyées en missions d'exploration : composition chimique du milieu interplanétaire, champs magnétiques des différentes planètes, dynamique des atmosphères. En particulier, toutes ces observations ont permis de contraindre différents stades de l'évolution d'astres ou de systèmes dynamiques, de la naissance à la mort de ceux-ci. On considère aujourd'hui que la majeure partie de l'Univers est sous forme de plasma (99% de la matière visible),

1. Se référer aux sept problèmes du millénaire posés par l'Institut de mathématiques Clay.

du milieu interstellaire peu dense jusqu'aux cœurs des étoiles à neutron.

Impact de la rotation

Par conservation du moment cinétique, une grande partie des objets astrophysiques sont soumis dès leur naissance à un taux de rotation. De plus, de nombreux phénomènes astrophysiques sont dus à la rotation omniprésente. Par exemple, la bidimensionnalisation de systèmes stellaires ou de galaxies s'explique en considérant que lors d'une collision d'objets pendant la formation du système le moment cinétique doit également être conservé. Ainsi la collision de deux objets aux trajectoires tridimensionnelles dans un environnement en rotation globale conserve les vitesses orthogonales à l'axe du moment cinétique et amoindrit les autres composantes. Un système suffisamment collisionnel aura ainsi tendance à se bidimensionnaliser. Pour une étoile, l'effondrement du nuage lui donnant naissance induit une rotation d'autant plus rapide que la contraction est importante. Cette rotation globale de l'étoile est amenée à décroître au fur et à mesure de sa vie, jusqu'à ce que celle-ci augmente à nouveau à sa mort lorsque l'étoile se contracte à son tour. C'est ainsi qu'on explique la forte rotation (jusqu'à plusieurs centaines de tours par secondes) de certaines étoiles tels les pulsars, qui sous l'effet de leur masse se sont contractés jusqu'à devenir très denses et très rapides.

Une autre conséquence évidente d'une forte rotation est la forme sphéroïdale - aplatie aux pôles - plus que sphérique des planètes et étoiles. Pour Saturne par exemple, le facteur d'aplatissement atteint presque 10%, alors qu'il est de 1/300 dans le cas de la Terre. Cette déformation est liée à un déséquilibre entre la force de gravitation et la force centrifuge engendrée par la rotation, modulé par la densité de l'objet. Ce type de déformation était prédit dès les débuts de la gravitation, par Newton lui-même.

D'autres phénomènes plus complexes, tels les vents zonaux observés sur Jupiter ou encore la rotation différentielle du Soleil sont en partie causés par la rotation.

Ces observations sont l'objet de nombreuses études cherchant à les reproduire. Le théorème de Taylor-Proudman est un exemple assez évocateur de l'impact de la rotation dans un cadre purement hydrodynamique. Il stipule que les mouvements ne peuvent pas varier dans la direction de l'axe de rotation. On obtient ainsi des colonnes de vorticités alignées avec l'axe de rotation. En d'autres termes, tous les mouvements fluides stables sont nécessairement bidimensionnels (Proudman (1916), Taylor (1917)).

Plusieurs des structures observées dans les systèmes en rotation se retrouvent dans les simulations numériques se focalisant sur ses effets. Le comportement du fluide dépend de plusieurs facteurs s'additionnant à la rotation, et en particulier des phénomènes de convection mais aussi de la géométrie du problème. On retrouve dans la revue d'Aurnou *et al.* (2015) un panel des différents effets de la rotation sur les écoulements fluides en fonction des paramètres du système choisi.

Genèse des champs

A l'image des plasmas, les champs magnétiques sont extrêmement diversifiés, par leur échelle ou leur nature, des galaxies aux aimants permanents. Cette diversité est intrinsèquement liée à celle des objets astrophysiques les hébergeant. En ne considérant *que* les petites étoiles (de masse inférieure à celle du Soleil), plusieurs critères de distinction apparaissent déjà : symétries, configuration, magnitude. La figure 1.1, issue de Moutou *et al.* (2017), recensant les caractéristiques des champs magnétiques stellaires à partir du catalogue de la mission SPIROU notamment en fonction de la masse et du taux de rotation de l'étoile, est largement évocatrice de la diversité qu'il est possible d'y trouver.

Il en va de même pour les planètes du système solaire : le champ magnétique de Jupiter est environ vingt-mille fois plus fort que le champ magnétique terrestre, tandis que celui de Mars est

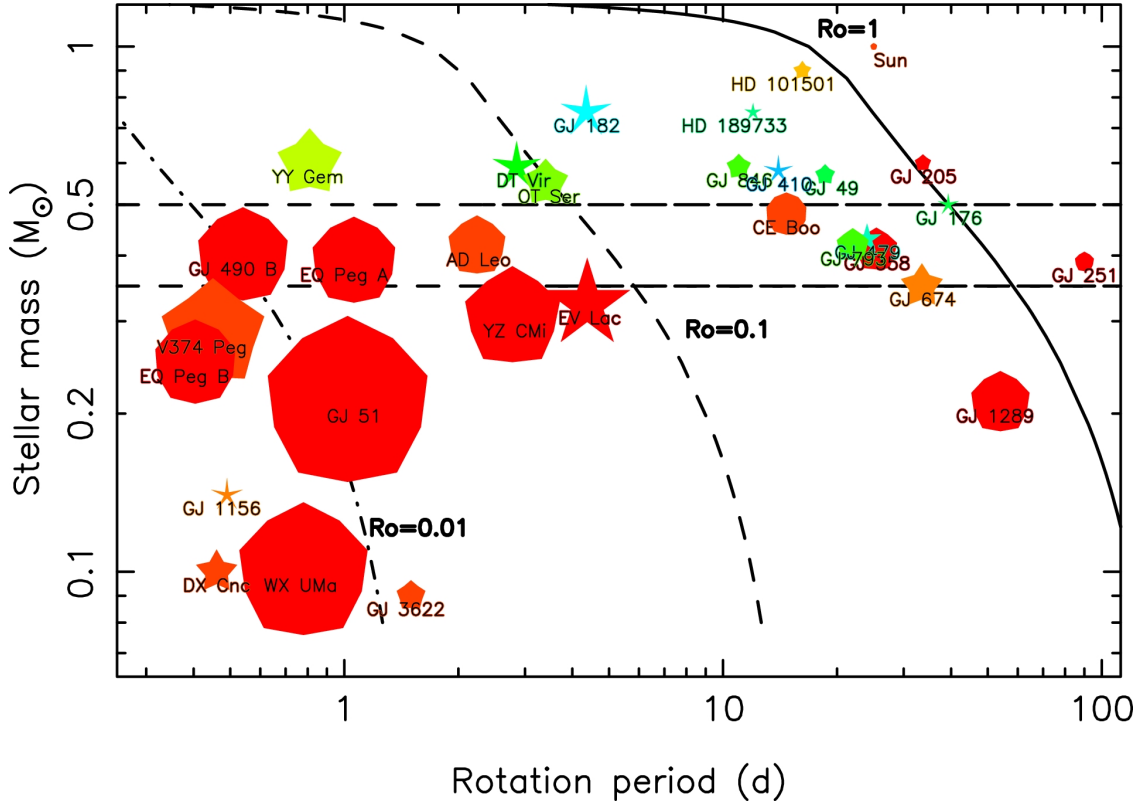


FIGURE 1.1 – Diagramme représentatif des différentes propriétés topologiques des champs magnétiques d'étoiles (majoritairement des naines M) en fonction de leur période de rotation (en jours) et de la masse stellaire (en unité de masse solaire). La taille des symboles indique l'intensité du champ, leur forme le degré d'axisymétrie observé (purent axisymétrique pour les décagones jusqu'à de fines étoiles pour les champs non-axisymétriques) et leur couleur la configuration du champ (bleu foncé pour les cas purement toroïdaux et rouge intense pour les cas purement poloïdaux). D'après Moutou *et al.* (2017).

quasi inexistant. Bien que leur origine soit encore controversée dans les objets astrophysiques, leur évolution temporelle est quant à elle en partie contrainte par de nombreuses observations. Près de 300 ans après la première observation au télescope des taches solaires, Hale mesura leur magnétisme en utilisant l'effet Zeeman. Ce dernier, couplé à l'effet Doppler, permet l'imagerie et la mesure de champs magnétiques stellaires (voir figure 1.1).

Le champ magnétique solaire, par exemple, est soumis à un cycle d'activité d'environ 22 ans et change de polarité (se renverse) tous les 11 ans. L'abondance de taches solaires à sa surface et leur polarité est liée à ce cycle comme le montre la figure 1.2a, aujourd'hui interprété comme résultant d'un effet dynamo (cfr partie 1.1.3). Le champ magnétique terrestre est également soumis à des renversements de polarités, mais au contraire leur distribution est apparemment chaotique (figure 1.2b). Au-delà du type de renversements, la diversité des champs magnétiques se retrouve également lorsqu'on compare leur orientation à l'axe de rotation de l'objet. La Terre, Jupiter et Saturne ont des champs magnétiques quasiment alignés avec leur axe de rotation (angle d'inclinaison inférieur ou de l'ordre de 10°), alors que celui d'Uranus est incliné d'environ 59° .

L'orientation des champs magnétiques astrophysiques est bien évidemment soumise à de nombreuses variations, tout comme l'axe de rotation est modifié par les mouvements de précession (tel les toupies) et de nutation autour de l'axe principal. La corrélation de ces mouvements multiples mène parfois à des mesures originales, comme par exemple des signaux extra-terrestres².

Quid de l'évolution de la magnitude de ces champs ? La dissipation ohmique du champ magnétique devrait conduire à un déclin irrévocable de son intensité, comme le supposait Gilbert³ pour le champ magnétique terrestre il y a 400 ans dans *de Magnete*. Cependant, les relevés du champ magnétique terrestre sur des échelles de temps géologiques issus de différents types de marquage (roches paléomagnétiques, carottes de glace, cernes de bois, coulées de lave) mettent en évidence des phénomènes plus complexes comme les renversements (figure 1.6), sans pour autant mesurer de tendance significative sur son intensité (variations inférieures à 5%).

Les autres planètes telluriques en revanche n'ont pas de champ magnétique aussi important que celui de la Terre. Il a été mesuré sur Mars un champ magnétique très faible, peut-être vestige d'un champ primordial⁴. Le champ magnétique de Vénus, malgré ses similitudes morphologiques avec la Terre, est plus faible que celui de Mars : il n'aurait pas été entretenu par l'effet dynamo potentiellement à cause d'une convection thermique difficile. Les futures missions spatiales focalisées sur l'étude de ces planètes et de leurs intérieurs promettent de nous en apprendre plus sur les mécanismes d'extinction de leurs champs magnétiques (InSight, Venera-D).

Le champ magnétique solaire, dont les variations sur des temps longs sont mesurées de façon analogue au champ terrestre, ne semble pas non plus décliner. Sa magnitude, à laquelle le nombre de taches solaires est lié, est soumise à des variations vraisemblablement anodines face à la vie tumultueuse des étoiles.

Pour maintenir ces champs magnétiques sur les échelles de temps astrophysiques, le candidat favori est l'effet dynamo. Dans la suite, nous nous attacherons à décrire les causes et les effets de ce phénomène physique largement étudié.

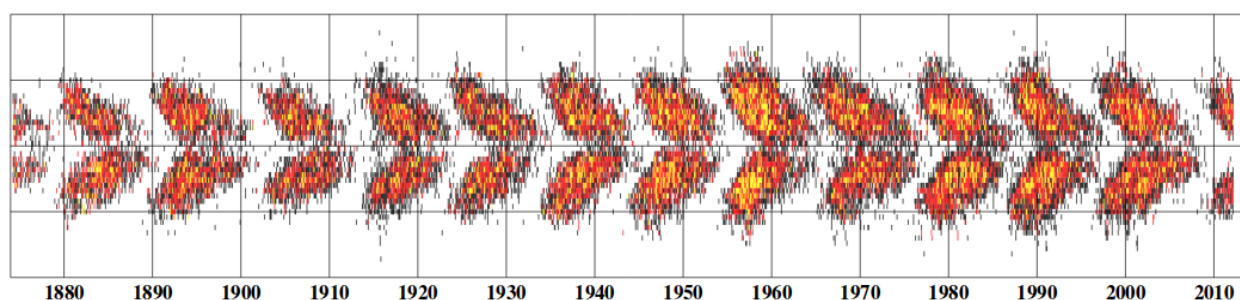
1.1.3 Effet dynamo

Via diverses expériences utilisant aimants, bobines et conducteurs, Faraday en 1831 fit la première expérience d'induction électromagnétique. En faisant tourner un disque conducteur dans

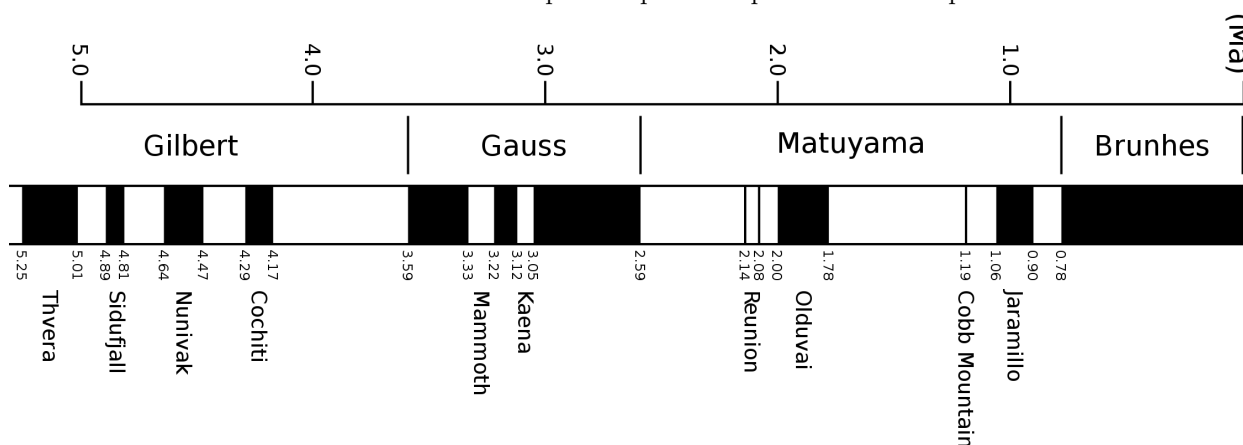
2. La première détection de pulsar fut d'abord remise en cause, sa périodicité la rendant suspecte.

3. Qui a donné son nom au prédécesseur de l'antépénultième chronozone géomagnétique.

4. Mars étant plus petite, la solidification totale de son cœur aurait pu marquer la fin de la convection (voir partie 1.1.3).

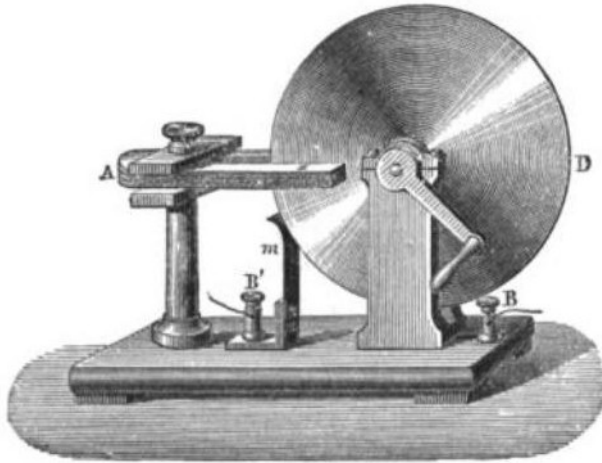


(a) Abondance de taches solaires à la surface en fonction de la latitude (ordonnée) et du temps. Un cycle d'environ 11 années est observé si on ne tient pas compte de la polarité du champ mesuré.

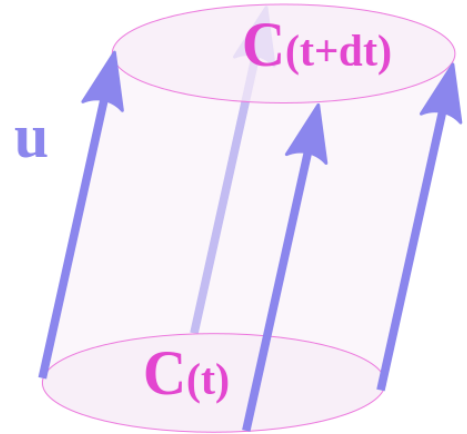


(b) Orientation du champ géomagnétique sur la période 0-5 millions d'années. La chronozone géomagnétique actuelle est dénommée Brunhes. Noir : orientation actuelle, blanc : orientation opposée.

FIGURE 1.2 – (a) : Cycle solaire illustré par l'abondance des taches solaires (source NASA). (b) : Renversements du champ magnétique terrestre et chronozones associées.



(a) Schéma de l'expérience de Faraday.



(b) Déplacement d'un contour de référence avec l'écoulement.

FIGURE 1.3 – (a) : Première expérience d'induction : en A l'aimant en U, en D le disque conducteur en rotation ; (b) : Déplacement d'un contour C dans un écoulement à la vitesse u pendant un temps δt .

un champ magnétique fixe, il observa un courant se créer à l'intérieur du disque, dû à la différence de potentiel entre le centre et l'extérieur de celui-ci (voir figure 1.3a).

Ce phénomène, décrit par l'éponyme loi de Faraday et nommé ensuite induction, illustre la création d'un courant électrique à partir d'une variation de flux de champ magnétique dans le conducteur. Deux cas sont possibles : si le circuit (conducteur) est en mouvement dans un champ magnétique constant, on parle alors d'induction de Lorentz ; en revanche, si le champ magnétique est variable mais que le conducteur est au repos, on parle alors d'induction de Neuman. Le référentiel choisi est décisif puisqu'il détermine quel composé sera considéré mobile ou immobile, variable ou constant.

Ces deux effets sont en réalité les deux côtés d'une même équation : l'équation de Maxwell-Faraday, qui s'écrit ainsi :

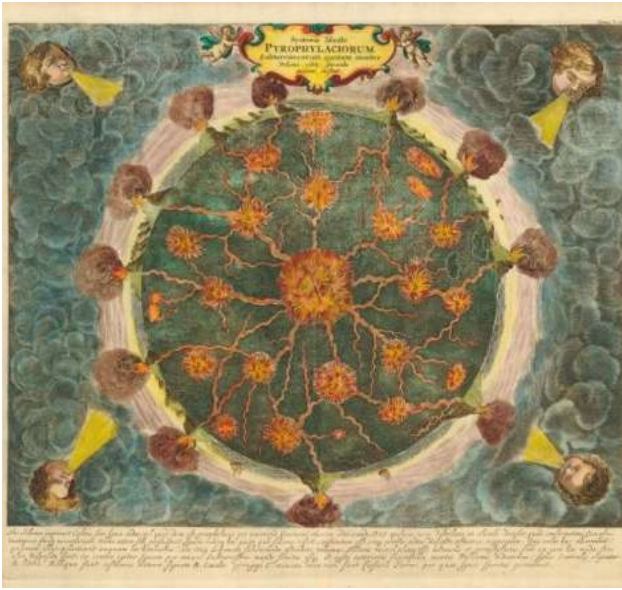
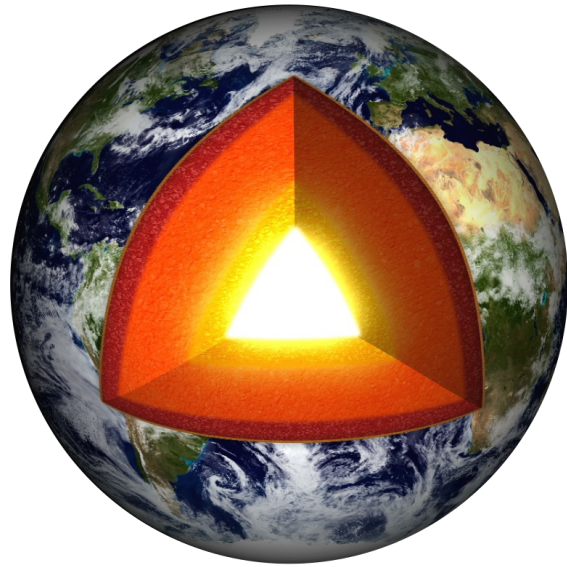
$$\partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}. \quad (1.1)$$

Elle traduit l'impact des variations temporelles du champ magnétique $\vec{B}$ sur les variations spatiales du champ électrique $\vec{E}$ - c'est-à-dire sur les déplacements de charge, et donc sur la génération de courant - et vice et versa.

Cependant, lorsqu'un champ magnétique ambiant est présent, l'équation se complexifie puisque les charges se déplaçant sont impactées par celui-ci via l'induction de Lorentz. Le champ électrique créé est donc soumis à deux effets : les variations de champ magnétique perçues par le conducteur (terme 1) et l'impact du champ magnétique ambiant sur les déplacements de charges (terme 2). On obtient ainsi la loi d'Ohm :

$$\vec{E} = \underbrace{\vec{J}/\sigma}_1 - \underbrace{\vec{u} \times \vec{B}}_2, \quad (1.2)$$

avec $\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$ le vecteur densité de courant, σ la conductivité et $\vec{u}$ la vitesse de déplacement des charges.

(a) 1668 : *Mundus Subterraneus* selon Kircher.

(b) 2016 : Coupe de l'intérieur de la Terre ©NASA.

FIGURE 1.4 – Visions de l'intérieur terrestre à plusieurs siècles d'intervalle.

Dans certaines configurations, en particulier lorsque le courant est généré dans une boucle en rotation, la contribution du courant créé peut s'ajouter au champ magnétique qui l'a créé : c'est l'effet dynamo. Une configuration des plus simples de dynamo solide est la dynamo auto-excitée de Bullard.

Ce mécanisme de génération de champ magnétique fut ensuite proposé pour expliquer la maintenance des champs magnétiques astrophysiques via une dynamo fluide. Cette théorie fut particulièrement développée par W. Elsasser⁵ pour être appliquée aux objets astrophysiques. La recette de l'effet dynamo en astrophysique se base sur trois ingrédients :

- Un fluide **conducteur** (plasma, métal liquide),
- De la **rotation** (énergie cinétique de source *extérieure*),
- Une source d'énergie interne (**convection**).

Prenons comme exemple le cas de la Terre. D'après les mesures, son champ magnétique est majoritairement dipolaire et incliné de 11° environ par rapport à son axe de rotation. Sa structure interne, identifiée par sismologie, est composée de plusieurs couches ayant des propriétés différentes. Au plus proche de la surface, sous la croûte, se trouve le manteau, supérieur puis inférieur, composé d'un mélange de minéraux conducteurs d'électricité mais non magnétiques. Les mouvements de convection y sont possibles (en partie responsables de la tectonique des plaques) et permettent l'évacuation de chaleur, mais le manteau reste majoritairement solide. Sous celui-ci, le cœur se décompose en deux parties également : une partie solide, au centre, composée essentiellement de Fer et de Nickel ; et une partie liquide de composition similaire mais contenant quelques éléments plus légers indéterminés (probablement du soufre, du silicium et de l'oxygène). Cet ensemble est environ de la taille de Mars, c'est-à-dire plus de la moitié du rayon terrestre⁶. Supposons que la Terre, et son cœur, se refroidissent. Le cœur interne, ou *graine*, grossit au fur et à mesure de ce refroidissement par démixtion, les éléments lourds se cristallisant à l'interface cœur solide/liquide

5. Partiellement pendant son service militaire scientifique durant la Seconde Guerre mondiale.

6. Bien que cela ne représente qu'environ 15% de son volume.

ou discontinuité de Lehmann. Cela implique en quelque sorte une émission des éléments plus légers à cette interface vers le noyau liquide. Cette différence de composition chimique crée une convection chimique venant s'ajouter à la convection thermique dans le cœur liquide, toutes deux soumises à la Poussée d'Archimède. Certaines mesures ne permettant pas de vérifier le refroidissement de la graine, d'autres théories s'en affranchissant ont été étudiées (Andraut *et al.*, 2016), permettant de maintenir le mécanisme via les forces de marées exercées par la Lune. La rotation globale de la Terre, et celle de la graine, sont également impliquées dans la dynamique au sein du noyau externe. Effectivement plusieurs études numériques (Schaeffer *et al.*, 2017; Sharma *et al.*, 2018) montrent qu'une forte rotation a tendance à structurer considérablement l'écoulement.

Comme introduit précédemment, mouvements de conducteur et variations de champs magnétiques sont fortement liés, notamment via la force de Lorentz (voir équation (1.2)). Les écoulements structurés de métal liquide dans le noyau externe piègent le champ magnétique local en leur sein, et déforment de cette façon les lignes de champ. Effectivement, pour un fluide de conductivité $\sigma = \infty$, c'est-à-dire parfaitement conducteur, l'équation (1.2) se simplifie et on obtient donc pour l'équation (1.1) :

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}). \quad (1.3)$$

De plus, le flux du champ $\vec{B}$ à travers une surface reposant sur un contour évoluant dynamiquement avec l'écoulement (voir figure 1.3b) a deux composantes variables en temps : l'une est issue de l'évolution du champ magnétique en un intervalle de temps dt (le champ en $C(t)$ est différent de celui en $C(t + dt)$) ; l'autre de la surface parcourue durant le déplacement du contour avec l'écoulement (côtés du cylindre d'extrémité $C(t)$ et $C(t + dt)$), elle aussi traversée par un champ magnétique.

Avec Φ le flux de champ magnétique à travers la surface délimitée par les contours à t et $t + dt$, on obtient après quelques manipulations et pour dt infinitésimal :

$$\partial_t \Phi = \oint \partial_t \vec{B} \cdot \vec{dl} + \oint \vec{B} \cdot (\vec{u} \times \vec{dl}), \quad (1.4)$$

avec $\vec{dl}$ un élément de longueur infinitésimal caractérisant le contour C .

En utilisant (1.3) et les propriétés du calcul vectoriel, les termes de droite s'annulent et on obtient donc que le flux ϕ est constant au cours du temps. Cette propriété du champ magnétique est fortement contraignante : cela implique que les lignes de champ magnétique suivent l'écoulement du fluide (théorème d'Alfvén), et on dit alors que le champ est *gelé* dans l'écoulement.

Ceci est vrai seulement dans le cas idéal d'un fluide parfaitement conducteur, ce qui n'est pas le cas du noyau externe de la Terre ni de la zone convective du Soleil. Cependant, cette propriété s'applique tout de même dans une moindre mesure : les lignes de champ magnétique ont tendance à se déformer pour suivre l'écoulement de fluide conducteur ou de plasma. Cette déformation, par plusieurs phénomènes, peut mener à une amplification du champ magnétique. La rotation du noyau par exemple aura tendance à déformer les lignes de champ vers une disposition dite *toroïdale* (en forme de tore) autour de la graine comme illustré sur la figure 1.5a. Cet effet est appelé effet ω puisqu'il est dû à la rotation différentielle du fluide. Ces lignes de champ toroïdales sont à leur tour affectées par la convection chimique et thermique ayant lieu au sein de la zone convective. Leur mouvement, à la fois vertical et entraîné par la rotation, est donc hélicoïdal - en forme d'hélice. Ainsi, le champ magnétique toroïdal piégé par ces éléments de fluide se déforme à son tour pour créer des boucles de champ *poloïdal* - vers les pôles (effet α , figure 1.5b). En considérant ces deux effets (effet $\alpha\omega$), la somme de toutes les composantes résulte éventuellement en un champ magnétique de plus grande ampleur, majoritairement dipolaire et axisymétrique. Si l'efficacité de cet effet de génération de champ magnétique est supérieure à sa dissipation, le champ augmente. Sur des temps

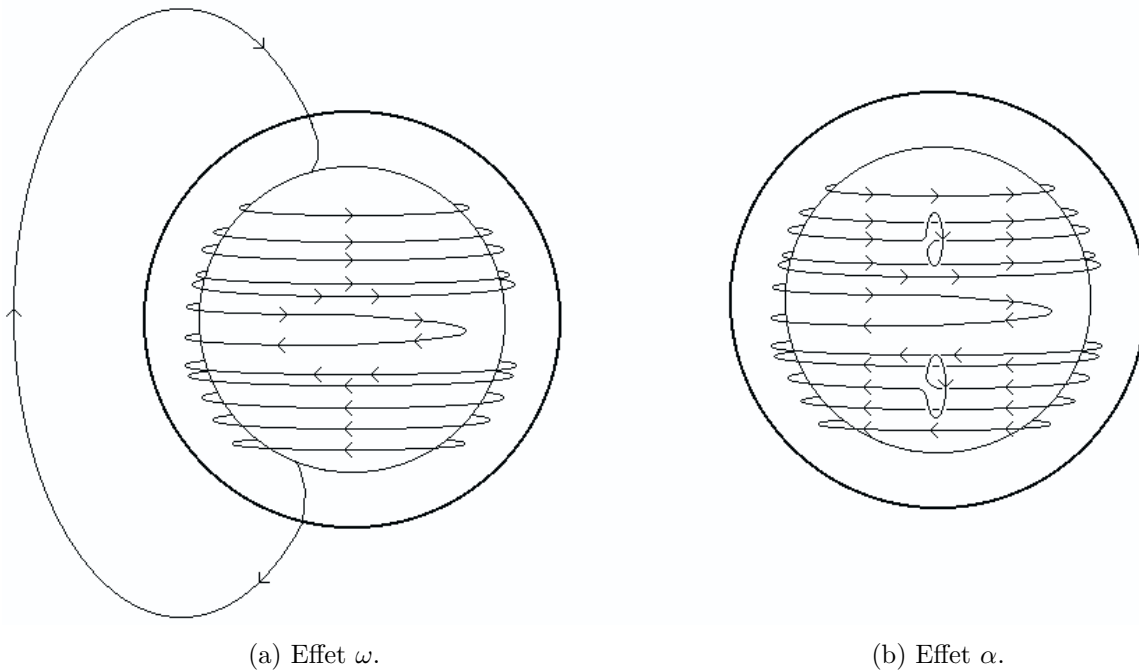


FIGURE 1.5 – Schématisation des effets ω et α , transformant respectivement un champ poloidal en champ toroidal et réciproquement. Source : <https://solarscience.msfc.nasa.gov/dynamo.shtml>.

longs, les systèmes ont tendance à s'équilibrer : le champ augmente jusqu'à ce que l'effet dynamo compense les effets dissipatifs. Cet équilibre entre la génération et la dissipation est représenté par le nombre de Reynolds magnétique Rm que nous définirons dans la section 1.2.1.

L'effet $\alpha\omega$ est supposé être la source du champ magnétique solaire, l'alternance entre un effet α et un effet ω étant supposée être à l'origine du cycle de 22 ans ; tandis qu'un effet α^2 ou $\alpha^2\omega$ est supposé entretenir celui de la Terre. Ces différents types de dynamos sont explicités notamment dans Roberts et Soward (1992), et ont été à plusieurs reprises observés en simulation numériques (Brandenburg *et al.*, 2001; Käpylä *et al.*, 2009). Pour une revue complète et plus récente des différents effets dynamos et de leurs applications aux planètes, consulter Jones (2011).

Pour bon nombre d'étoiles, bien que leur structure interne soit différente, les trois éléments nécessaires à l'effet dynamo sont réunis : une rotation globale de l'astre, composé de plasma évidemment conducteur, et une forte zone convective alimentée par la zone radiative.

Somme toute, les éléments menant à un effet dynamo sont relativement complexes. En particulier, les symétries de l'écoulement ou du champ contraignent les cas dans lesquels l'effet dynamo est possible. Il existe à ce sujet un certain nombre de théorèmes *anti-dynamo*, l'un des plus fameux stipulant qu'un champ magnétique purement axisymétrique ne peut être maintenu par effet dynamo (Cowling, 1933).

Renversements et geodynamo

En 1905 en Auvergne, Bernard Bruhnes⁷ trouva des roches volcaniques magnétisées semblant indiquer que le pôle Nord magnétique était dirigé vers le pôle Sud géographique, c'est-à-dire l'opposé de l'orientation du champ magnétique terrestre actuel. Il en tira alors la conclusion que le champ magnétique fût orienté différemment à un certain moment de son histoire. Environ 20 ans plus tard, le géophysicien Motonori Matuyama⁸, interpellé par l'orientation magnétique de certaines

7. Qui donna son nom à la chronozone géomagnétique actuelle.

8. Qui donna son nom à la précédente chronozone géomagnétique.

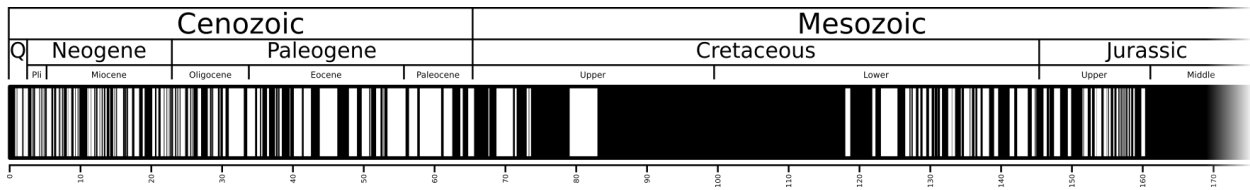


FIGURE 1.6 – Représentation des renversements du dipôle géomagnétique sur les 170 derniers millions d'années. Le Quaternaire, période géologique actuelle, est située à gauche (0 Ma).

roches volcaniques de la région de Kyoto, récolta de nombreuses données sur des roches volcaniques japonaises, coréennes et même chinoises. Cette étude lui permis de corréliser les orientations des roches avec leur âge, et ainsi d'affirmer que l'orientation du champ magnétique terrestre dépend de la période géologique étudiée. Depuis ces premières découvertes, de nombreux progrès dans la compréhension du champ magnétique terrestre ont permis des avancées techniques et ainsi le recensement de 183 renversements avérés dans les 83 derniers millions d'années. Ce phénomène est ainsi particulièrement fréquent à l'échelle de l'âge de la Terre.

Le dernier renversement - dit de Bruhnes-Matuyama - qui nous mena à la configuration actuelle (nord géographique et magnétique dans la même direction), eût lieu il y a 781 000 ans. Cette orientation correspond aux zones noires sur les figures 1.2b et 1.6. La distribution de ces renversements est chaotique, aucun schéma répétitif ne se dégage : certaines chronozones durent plusieurs dizaines de millions d'années (jusqu'à 37 millions d'années pour la super-chronozone *Cretaceous Normal*, visible en figure 1.6) tandis que d'autres ne persistent pas plus que quelques centaines de milliers d'années. Au-delà de cette distribution irrégulière, les observations paléomagnétiques sont suffisamment précises pour rendre compte de processus dynamique très courts (quelques milliers d'années), comme les renversements eux-mêmes. Malgré cela, l'interprétation des données et les méthodes de mesure restent sujettes à de nombreux biais (voir la dernière partie de l'article de Merrill et McFadden (2003)). L'un des seuls consensus, au-delà du nombre importants de renversements, est que l'approximation d'un champ magnétique géocentré axial dipolaire est acceptable⁹. Bien qu'il n'y ait pas de corrélation évidente entre l'intensité du champ magnétique et la fréquence des renversements (Heller *et al.*, 2002), ce phénomène semble progressif et durerait en moyenne 4000 ans. Pendant les phases d'exploration (lorsque le champ magnétique s'écarte d'une des orientations stables), l'intensité du champ serait environ un tiers plus faible (se reporter à la revue de Bogue et Merrill (1992), mettant en évidence bon nombre d'incertitudes sur le comportement du champ pendant les renversements). En particulier, ce changement d'orientation n'est pas synonyme d'un inévitable renversement de polarité. Le processus est fortement imprévisible et le champ magnétique peut revenir à son orientation précédente après avoir exploré des régions équatoriales. Ces phénomènes, différents des renversements dans l'issue bien que similaires dans la forme, sont appelés *excursions*. La première découverte, et la plus fameuse, est l'excursion de Laschamp découverte en Auvergne également, et dura moins de 500 ans (ce qui représente moins de 0.005% du *Cretaceous Normal*!).

Les années 90 ont vu l'apparition de nouveaux relevés de données paléomagnétiques ainsi que de la première simulation numérique reproduisant les renversements (Glatzmaier et Roberts, 1995) et de la première expérience fructueuse de dynamo fluide (Gailitis *et al.*, 2000). Ces premiers pas numériques et expérimentaux ont permis d'arriver aujourd'hui à des simulations bien plus poussées et à des paramètres plus réalistes pour le cœur liquide terrestre (Schaeffer *et al.*, 2017) et à de futures expériences ambitieuses (projet DRESDYN).

Toutes ces avancées ne permettent pas encore d'expliquer tous les phénomènes observés. De nombreuses théories notamment pour comprendre les causes des renversements ont été envisagées aussi diverses que : la corrélation avec des impacts météorites, avec les périodes de glaciation, avec

9. En moyennant sur une période de temps qui, elle, est sujette à controverse.

les irrégularités à l'interface cœur solide/liquide, ou à l'interface manteau/cœur, ou encore les liens avec la tectonique des plaques. Toutes ces suppositions n'ont pas révélé de corrélation particulière. L'imprévisibilité de ces phénomènes est à rapprocher de celle créée par la turbulence, puisque l'état du cœur liquide y est soumis.

1.2 Décrypter la physique

1.2.1 Equations impérieuses

Depuis les années 60, en raison des nombreuses applications possibles des plasmas, la caractérisation de leur mouvement dans un champ électromagnétique est devenu indispensable. La magnétohydrodynamique (MHD) s'inscrit dans ce cadre. Comme son nom l'indique, la MHD est l'étude du comportement d'un fluide interagissant avec les champs électromagnétiques. Elle est ainsi décrite par la combinaison des équations de Navier-Stokes décrivant le comportement de l'écoulement fluide et des équations de Maxwell, décrivant le comportement des champs électromagnétiques en fonction des différentes actions qui leur sont appliquées (consulter le livre (Galtier, 2016) pour une introduction à la MHD).

Pour décrire le comportement du fluide, deux équations sont à notre disposition : l'équation de conservation de la masse (1.5) décrivant l'évolution de la masse volumique ρ et l'équation de conservation de la quantité de mouvement (1.6) décrivant celle de la vitesse $\vec{u}$. Dans le cas incompressible ($\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (1.5)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \nu \Delta \vec{u}, \quad (1.6)$$

avec P la pression et ν la viscosité cinématique.

Aux termes de droite de l'équation du mouvement s'ajoutent les actions agissant sur le fluide. Parmi elles, la gravité agissant via la Poussée d'Archimède $\rho \vec{g}$, ou encore la force de Coriolis issue de la rotation du système, sont fréquemment considérées.

A partir de 1861, les quatre équations qui régissent l'évolution des champs électromagnétiques sont réunies, pour former les équations dites *de Maxwell* :

$$\text{Maxwell-Gauss} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}, \quad (1.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.8)$$

$$\text{Maxwell-Faraday} \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$\text{Maxwell-Ampère} \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.10)$$

où ϵ_0 et μ_0 les permittivités diélectrique et magnétique du vide respectivement.

L'équation (1.7) découle directement du théorème de Gauss permettant de calculer le champ électrique à partir de la densité de charge ρ_c . Son alter-ego pour le champ magnétique est l'équation (1.8), illustration mathématique de l'absence de monopôle magnétique. On reconnaît en l'équation (1.9) le phénomène d'induction préalablement expliqué (partie 1.1.3). Enfin, l'équation (1.10) est la

forme locale du théorème d'Ampère reliant la densité de courant magnétique $\vec{j}$ au champ magnétique $\vec{B}$, agrémentée du courant de déplacement issu des variations de $\vec{E}$ introduit par Maxwell.

A partir de 1942, l'astrophysicien suédois Hannes Alfvén a réuni l'ensemble de ces équations afin de former un ensemble consistant décrivant le comportement de fluides conducteurs. Pour cela il faut ajouter à l'équation du mouvement (1.6) les contributions des champs électromagnétiques. Ceux-ci se manifestent via la force de Coulomb pour le champ électrique et la force de Lorentz pour le champ magnétique.

On obtient ainsi :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \nu \Delta \vec{u} + \rho_c \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}. \quad (1.11)$$

Pour obtenir une description du système dans son ensemble, il faut en plus considérer l'évolution du champ magnétique au cours du temps. A partir des équations (1.1) et (1.2), on obtient l'équation d'induction électromagnétique :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0 \sigma} \right). \quad (1.12)$$

Un certain nombre d'approximations ont été discrètement effectuées dans ces équations et d'autres le seront par la suite. Elles permettent de simplifier le problème¹⁰ selon les conditions dans lesquelles on souhaite l'appliquer.

L'approche purement fluide choisie (partie 1.1.1) nous contraint à certaines approximations. Comme préalablement mentionné, l'écoulement est considéré fortement collisionnel de sorte à ce qu'il puisse être décrit comme un seul ensemble. Le fluide est supposé électriquement neutre et l'impact différencié du champ magnétique sur les trajectoires des charges est négligé (absence d'effet Hall). De plus, on estime la vitesse du fluide faible comparativement à la vitesse de la lumière (approche non-relativiste). Cela permet notamment de s'affranchir du terme impliquant le champ électrique $\vec{E}$, alors négligeable devant la force de Lorentz dans l'équation (1.11) (démonstration explicitée dans Galtier (2016)).

Les solutions doivent finalement satisfaire quatre équations : l'équation du mouvement (1.11) incluant la force de Lorentz, l'équation d'induction (1.12) - combinaison de l'équation de Maxwell-Faraday et de la loi d'Ohm, la conservation de la masse (1.5) et la condition de divergence nulle du champ magnétique (1.8). L'équation de Maxwell-Ampère se réduit sous nos hypothèses à $\vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{B} / \mu_0$. Ces solutions représentent en réalité la propagation des ondes dans le système.

L'écoulement incompressible est une des hypothèses simplificatrices les plus employées. Cela correspond à considérer une densité constante en espace et en temps. L'équation de conservation (1.5) se réduit finalement à $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Cette hypothèse n'est pas aberrante dans notre cas puisque les fluctuations de densité sont généralement faibles dans les plasmas spatiaux, ainsi que dans les métaux liquides composant les intérieurs planétaires. De plus, il existe d'autres types d'approximations permettant de prendre en compte l'impact des variations de densité uniquement dans certains termes, comme l'approximation Boussinesq (cfr partie 2.2.1).

Une autre hypothèse largement simplificatrice déjà mentionnée est de considérer un fluide conducteur parfait ($\sigma = \infty$: aucune résistivité ni viscosité $\nu = 0$). Tous les termes de dissipation sont alors annulés. C'est dans ce cadre inviscide et *idéal* qu'Alfvén a formulé la première solution aux équations de la MHD, nommée en son honneur ondes d'Alfvén.

Cette étude ayant pour objectif de s'appliquer aux dynamos astrophysiques, la rotation est un paramètre important. Nous nous placerons donc dans le cadre de la MHD non-idéale incompressible

10. Qui reste cependant suffisamment complexe.

avec rotation. Le système d'équations que nous nous attacherons à résoudre de différentes manières (cfr chapitre 2) est le suivant :

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\vec{\nabla} P - 2\vec{\Omega}_0 \times \vec{u} + \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{\rho} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}, \quad (1.13)$$

$$\partial_t \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \quad (1.14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.15)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (1.16)$$

avec η la diffusivité magnétique du fluide et $\vec{\Omega}_0$ le taux de rotation global imposé.

A partir de ces équations, plusieurs nombres sans dimension représentant les rapports des différents termes peuvent être définis :

$$\text{Reynolds} \quad Re = \frac{\text{inertie}}{\text{diffusion}} = \frac{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}}{\nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}} = \frac{UL}{\nu}, \quad (1.17)$$

$$\text{Reynolds Magnétique} \quad Rm = \frac{\text{induction}}{\text{diffusion}} = \frac{\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})}{\eta \vec{\nabla}^2 \vec{B}} = \frac{UL}{\eta}, \quad (1.18)$$

$$\text{Elsasser} \quad \Lambda = \frac{\text{Lorentz}}{\text{Coriolis}} = \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{\rho 2\vec{\Omega}_0 \times \vec{u}} = \frac{B^2}{2\Omega_0 \rho \mu \eta}, \quad (1.19)$$

$$\text{Rossby} \quad Ro = \frac{\text{inertie}}{\text{Coriolis}} = \frac{(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}}{2\vec{\Omega}_0 \times \vec{u}} = \frac{U}{\Omega_0 L}, \quad (1.20)$$

$$\text{Ekman} \quad E = \frac{\text{diffusion}}{\text{Coriolis}} = \frac{\nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}}{2\vec{\Omega}_0 \times \vec{u}} = \frac{\nu}{2\Omega_0 L^2}, \quad (1.21)$$

avec L une longueur caractéristique, U et B la vitesse et le champ magnétique moyens dans l'écoulement. De l'équation du mouvement viennent les termes d'inertie $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$ et de diffusion $\nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}$; tandis que de l'équation d'induction viennent les termes d'induction $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})$ et de diffusivité magnétique $\eta \vec{\nabla}^2 \vec{B}$. Les forces de Coriolis et de Lorentz sont respectivement définies par $2\vec{\Omega}_0 \times \vec{u}$ et $\vec{j} \times \vec{B}$.

L'utilisation de ces quantités est largement répandue, dans le but de mesurer l'importance relative d'un terme, c'est-à-dire d'un effet, par rapport à un autre.

1.2.2 Turbulence et complications

La turbulence est omniprésente dans tout type d'écoulements hydrodynamiques, gazeux ou de plasmas. On en trouve dans l'atmosphère, le noyau terrestre, la magnétosphère solaire jusque dans la vie courante : volutes de fumée d'une bougie, tourbillons dans l'écoulement d'une rivière...

Alors comment définir la turbulence? Historiquement, il est nécessaire de mentionner le travail pionnier d'Osborne Reynolds. En 1883 via des expériences hydrodynamiques dans des tubes, Reynolds (1883) étudie la frontière entre deux comportements bien distincts observés dans les écoulements fluides :

The internal motion of water assumes one or the other of two broadly distinguishable forms - either the elements of the fluid follow one another along lines of motion which lead in the most direct manner to their destination, or they eddy about in sinuous paths, the most indirect possible.

Le mouvement interne de l'eau prend l'une ou l'autre de deux formes bien distinctes - soit les éléments du fluide se suivent le long de lignes de mouvement qui mènent le plus

directement à leur destination, soit ils tournoient dans des chemins sinueux, les plus indirects possibles.

La *manière indirecte* - plus tard appelée turbulente - est opposée à la *manière directe* - plus tard appelée laminaire. En faisant varier plusieurs paramètres, il observe que le passage de l'écoulement laminaire à turbulent dépend de la taille de la conduite, de la vitesse du fluide et de sa viscosité (température dans le cas de l'eau). Il obtient ainsi une vitesse critique à partir de laquelle l'écoulement devient turbulent : $U \propto \frac{\mu}{\rho D}$, avec D la section de la conduite, μ la viscosité et ρ la densité du fluide.

De ce rapport découle le nombre de Reynolds $\frac{UD\rho}{\mu}$, que l'on retrouve à partir des équations du mouvement (voir partie 1.2.1), et qui représente le rapport entre les forces d'inertie et de dissipation visqueuse. Plus ce nombre est élevé, plus l'écoulement est turbulent. Dans le cadre hydrodynamique, le seul terme non-linéaire, le terme d'inertie, aura tendance à perturber l'écoulement jusqu'à le rendre turbulent lorsqu'il domine le terme de dissipation visqueuse.

En 1922, Richardson écrit :

Big whirls have little whirls that feed on their velocity, and little whirls have lesser whirls and so on to viscosity.

Les grands tourbillons ont de petits tourbillons se nourrissant de leur vitesse, et les petits tourbillons en ont de plus petits, et cela jusqu'à la viscosité.

En se basant sur cette idée, on peut imaginer un transfert de l'énergie cinétique vers les petites échelles : les grands tourbillons nourrissent les petits, qui nourrissent à leur tour les plus petits¹¹ et cela jusqu'à ce que la viscosité s'en mêle et dissipe l'énergie. On appelle ce phénomène une *cascade directe* d'énergie cinétique. L'intervalle d'échelle dans lequel cette approximation est valable - où l'énergie est conservée - est appelé la zone inertielle, car elle correspond à la zone où l'inertie et la pression sont les deux seules quantités non-négligeables.

Les nombreuses applications liées à la turbulence ont peu à peu permis de développer une théorie de la turbulence. Initiée entre autre par Taylor (Taylor, 1935) et von Karman (von Karman, 1937) dans les années 30, son étude statistique a notamment montré une tendance à l'isotropie des composantes de vitesse. Une première loi théorique décrivant la turbulence hydrodynamique (HD) est développée dans la série K41 (Kolmogorov, 1941). Cette loi s'applique au cas particulier d'une turbulence statistiquement homogène isotrope incompressible, en utilisant une approche à base de différentielles spatiales. Ainsi, à nombre de Reynolds suffisamment élevé, la fameuse loi des 4/5 contraignant le taux de dissipation de l'énergie dans la zone inertielle est obtenue.

Après la formulation du système MHD par Alfvén, la turbulence MHD se développe à travers les déjà mentionnés Cowling (qui rapprocha les propriétés de la vorticit   et du champ magn  tique permettant ainsi une meilleure unification du syst  me MHD, voir Cowling (1953)) et Elsasser (voir Elsasser, 1955, 1956 pour respectivement une revue sur la turbulence encore appel  e hydromagn  tique et les diff  rentes applications astrophysiques), mais aussi Chandrasekhar (voir Chandrasekhar, 1956, 1961). La diff  rence principale vient de la non-possibilit   d'utiliser les m  mes outils que pour la turbulence HD    cause de l'  quation d'induction, ce qui en augmente la difficult   puisqu'on ne peut s'affranchir simplement des termes non-lin  aires.

Cela m  ne au formalisme d'Elsasser, rassemblant les deux composantes via les variables d'Elsasser $\vec{z}^\pm = \vec{u} \pm \vec{b}$ d  finies    partir des fluctuations du champ magn  tique $\vec{b}$ normalis  es aux unit  s d'une vitesse. On obtient les   quations de la MHD id  ale suivantes :

$$\frac{\partial \vec{z}^\pm}{\partial t} \mp (\vec{v}_A \cdot \vec{\nabla}) \vec{z}^\pm = -\vec{\nabla} P - (\vec{z}^\mp \cdot \vec{\nabla}) \vec{z}^\pm, \quad (1.22)$$

11. Tout comme les puces de Jonathan Swift, ayant probablement inspir   Richardson.

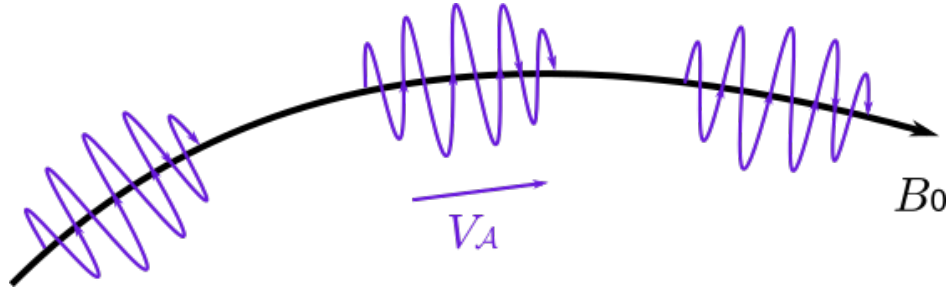


FIGURE 1.7 – Représentation schématique de la propagation d'un paquet d'onde d'Alfvén le long d'une ligne de champ magnétique moyen.

avec $\vec{v}_A = B^2/\mu_0\rho$ la vitesse des ondes d'Alfvén et P la pression totale, incluant la pression magnétique.

Les solutions des équations de la MHD caractérisent la propagation des ondes, et se présentent ainsi sous la forme d'une relation de dispersion des ondes. Les ondes d'Alfvén par exemple - se propageant le long des lignes de champ magnétique (voir figure 1.7)- sont des solutions exactes des équations de la MHD idéale. La direction de propagation de ces ondes dépend de leur polarisation, correspondant au signe $\pm$ des variables d'Elsasser. Iroshnikov (1963) et Kraichnan (1965) développent indépendamment une phénoménologie de la turbulence MHD en considérant à la fois un champ magnétique local ambiant et une isotropie spatiale de la turbulence. Ainsi, dans la zone inertielle, les seules interactions à considérer sont les interactions entre paquets d'ondes le long des lignes de champ magnétique. L'impact des collisions ne résulte donc pas en un échange d'énergie - comme en physique des particules - mais plutôt une distorsion de chacun des paquets d'onde. Deux paquets d'onde de polarisations opposées entrant en collision vont ainsi générer une cascade turbulente vers les petites échelles. Un paramètre devient ainsi important : le temps d'interaction des ondes. Celui-ci dépend de la taille caractéristique du paquet d'onde et de la vitesse d'interaction, i.e. la vitesse d'Alfvén. Ainsi, dans la zone inertielle, cette phénoménologie permet de caractériser l'évolution de l'énergie dans le cas de la MHD avec un minimum d'approximations à l'image de celle de Kolmogorov pour l'hydrodynamique. Le problème de cette approche est qu'elle considère une isotropie alors qu'elle nécessite également la présence d'un champ ambiant.

Cependant, elle peut rester valide dans le cas qu'on appelle *turbulence faible*, c'est-à-dire que l'amplitude des fluctuations est faible devant celle du champ moyen. Plusieurs études analytiques dans le cadre de la turbulence faible d'ondes valident le cadre de cette hypothèse (Galtier *et al.*, 2000). L'autre type de turbulence, par opposition appelé *turbulence forte*, correspond au cas où l'amplitude des fluctuations n'est plus négligeable devant celle des champs moyens. Dans ce cas, une approche dite d'*équilibre critique* estime que les perturbations des paquets d'onde sont du même ordre que les champs moyens auxquels ils sont soumis. Dans la zone inertielle, cela correspond au terme non-linéaire de l'équation (1.22) $(\vec{z}^\mp \cdot \vec{\nabla})\vec{z}^\pm$ - représentant les perturbations - du même ordre que le terme d'inertie $(\vec{v}_A \cdot \vec{\nabla})\vec{z}^\pm$ - représentant l'impact des champs moyens sur les fluctuations.

On distingue ainsi deux types de turbulence pouvant être caractérisés par leur temps (ou longueur) d'interaction. Le cas de la turbulence forte revient donc à considérer un temps d'interaction - issu du terme non-linéaire - du même ordre que le temps de propagation de l'onde lui-même - c'est-à-dire temps d'Alfvén.

En 1967, Kraichnan fut le premier à montrer que le phénomène de cascade ne se produit pas forcément des grandes échelles vers les petites échelles. En utilisant le principe d'interactions triadiques, il démontre qu'en turbulence bidimensionnelle hydrodynamique les transferts d'énergie peuvent se produire dans les deux sens, des grandes échelles vers les petites ou inversement (Kraich-

nan, 1967). Lorsque le transfert d'énergie se fait vers les plus grandes échelles, le terme *cascade inverse* est employé.

A la turbulence MHD se rajoutent les effets d'anisotropie dus à la rotation ou à un champ magnétique ambiant. Effectivement, dans un cas comme dans l'autre, ils ont tendance à structurer l'écoulement le long de la direction d'anisotropie. Pour une revue résumant les différents effets associés à chacune des anisotropies séparément, et leurs démonstrations analytiques, voir les premiers chapitres de Chandrasekhar (1961).

Les premiers travaux numériques étudiant les effets de l'anisotropie dus à un champ magnétique moyen furent menées en deux dimensions par Shebalin *et al.* (1983). Les perturbations de densité de courant $\vec{\nabla} \times \vec{b}$ sont essentiellement transverses à l'axe du champ moyen, ce qui indique que les fluctuations du champ $\vec{b}$ sont essentiellement dans les plans perpendiculaires au champ moyen. Un résultat similaire a été montré en trois dimensions par Oughton *et al.* (1994) en 1994. La direction parallèle au champ magnétique semble plus structurée et donc moins turbulente. De façon similaire au cas purement rotationnel, des structures de densité de courant se forment dans la direction du champ moyen.

Malgré leurs effets indépendants tendant à s'opposer à la turbulence, les effets couplés d'une forte rotation et d'un champ magnétique moyen restent cependant peu étudiés. Le cas de la turbulence doublement anisotrope - avec champ magnétique et rotation - est plus complexe qu'une combinaison des deux effets singuliers. Une approche analytique de la combinaison de ces deux effets est détaillée dans Chandrasekhar (1961).

Dès lors que l'on considère le phénomène de cascade inverse, le lien entre turbulence et effet dynamo est assez évident. En effet, effectivement l'effet dynamo correspond en réalité à un transport de l'énergie magnétique vers les grandes échelles. Mais ce transport doit être suffisamment efficace pour contrer la décroissance du champ. En considérant un cas où l'effet dynamo est possible (voir partie 1.1.3 pour les conditions nécessaires à celui-ci), de nombreux paramètres vont cependant influencer son efficacité. De plus, considérer à la fois champ magnétique et rotation paraît indispensable pour l'étude des dynamos astrophysiques, vu que les corps célestes sont pour la plupart soumis à leurs effets combinés (voir partie 1.1.2).

La turbulence reste finalement imprévisible : bon nombre de configurations et paramètres sont inexplorés, et bon nombre de phénomènes inexpliqués. De multiples travaux récents traitent de différentes approches de la turbulence, visant à mieux comprendre les phénomènes auxquels elle donne naissance. Les transferts d'énergie conservent de nombreuses zones d'ombre : à quel point ceux-ci sont locaux ou non (Brandenburg, 2001; Mininni *et al.*, 2012), à quels phénomènes sont-ils reliés et quels sont les paramètres influençant sur ces résultats (Alexakis, 2015) ? Le sujet est également perpétuellement agrémenté par de nouvelles démonstrations, observations, expériences ou résultats numériques. L'évolution des *shell models* en à peine cinquante années, permettant aujourd'hui de multiples applications en est un bon exemple (Plunian *et al.*, 2013). Une grande partie de ces travaux sont résumés dans (Verma (2004); Galtier (2016)).

1.2.3 Différentes approches d'un même problème

De part les équations irrésolvables analytiquement autant que par la physique complexe y prenant part, l'effet dynamo est un problème où le numérique prend une part importante.

Effectivement, les solutionneurs actuels permettent d'une part de reproduire les phénomènes observés là où ils sont difficiles - pour ne pas dire impossibles - à expliquer analytiquement, par exemple les renversements du champ magnétique, les phénomènes turbulents dans le cas non-idéal ; mais aussi de comprendre un phénomène physique en l'analysant grâce à des mesures inaccessibles en observation ou expérience - on peut par exemple avoir accès à une cartographie quasi-complète d'un domaine.

Les gammes de paramètres accessibles dans les simulations numériques ne reproduisent cependant pas les paramètres réels - comme on peut le constater dans la table 1.1 prenant pour référence le noyau interne terrestre.

Paramètre	Noyau terrestre	Simulations
Ra/Ra_c	10^3	10^2
Pr	$10^{-1} - 10^1$	$10^{-1} - 10^1$
Pm	10^{-6}	10^{-2}
E	10^{-15}	10^{-7}
Ro	10^{-6}	10^{-4}
Re	10^9	10^4
Rm	10^3	10^3
Λ	10^1	10^1

TABLE 1.1 – Tableau de valeurs des nombres sans dimension comparant les valeurs supposées du cœur liquide et les valeurs les plus proches obtenues en simulation numérique.

Le nombre de Rayleigh Ra quantifiant la convection, thermique ici, est exprimé en fonction du nombre de Rayleigh critique Ra_c pour la convection (cfr partie 2.2). Certaines valeurs posent ainsi problème : plusieurs ordres de grandeur séparent les valeurs de Re , Ro , E , Pm des simulations numériques directes comparativement aux valeurs estimées noyau externe de la Terre. En particulier le nombre d’Ekman E est celui qui pâtit le plus des limitations numériques. Il n’est cependant pas étonnant que l’on peine à approcher les valeurs des systèmes astrophysiques : effectivement, même les simulations tentant de comprendre les succès ou les échecs de certaines expériences dynamo par exemple peinent à atteindre des jeux de paramètres similaires à ceux utilisés dans ces expériences macroscopiques (Nore *et al.*, 2016).

Numérique et expérimental ont des limitations différentes et leurs diagnostics peuvent ainsi se compléter. En simulation numérique, il sera plus difficile d’accéder à des régimes fortement turbulents, puisque ceux-ci sont très coûteux en résolution spatiale et temporelle. Pour les expériences, il est plus difficile de reproduire les géométries complexes, telles celles que l’on retrouve en astrophysique justement ; ou des valeurs extrêmes de champ moyen ou de rotation par exemple.

Bien évidemment, les progrès techniques et matériels en informatique ont été largement exploités par l’ensemble des physiciens numériques. Pour le problème de la géodynamo, on observe très nettement le progrès ayant eu lieu les 30 dernières années. Dans le premier article reportant un renversement de champ magnétique (Glatzmaier et Roberts, 1995), 2 000 000 de pas de temps avaient été nécessaires, représentant ainsi pas moins de 2 000 heures CPU. En terme de résolution, étaient considérés des ordres et degré d’harmoniques sphériques jusqu’à 21, et un ordre des polynômes de Chebyshev jusqu’à 48 pour la résolution radiale. De nos jours, les plus petites échelles résolues sont environ un ordre de grandeur en dessous (jusqu’à un degré d’harmonique sphérique maximal de 1000 pour Schaeffer *et al.* (2017) par exemple). En terme de nombres sans dimension, les valeurs *extrêmes* des années 90 sont également à quelques ordres de grandeur de ce qu’on peut atteindre actuellement : $Ra/Ra_c \sim 10$, $Pm \sim 1$, $E \sim 10^{-4}$, $Rm \sim Re \sim 10^2$ et Pm de l’ordre de l’unité. Les écarts avec les paramètres modernes de la table 1.1 sont assez évocateurs : les nombres sans dimension peu sensibles à une évolution sont en réalité ceux pour lesquels il est le plus difficile d’approcher des paramètres réalistes. Le nombre d’Ekman arrive en tête, suivi de près par le nombre de Prandtl magnétique Pm et du nombre de Reynolds Re .

Pour pallier à ce problème, plusieurs approches sont possibles. D’une part, il est possible de considérer les paramètres les plus réalistes possibles compte tenu des limites imposées par les

méthodes numériques et les calculateurs modernes. Les comportements observés sont alors plus susceptibles d'être pertinents pour les objets étudiés. Ainsi, de nouveaux modèles se développent, avec moins d'approximations, et prenant en compte des causes et effets jusqu'alors négligés. Cependant, au vu de l'évolution observée ces dernières décennies, il faudra encore attendre un demi-siècle avant d'atteindre des paramètres réalistes pour les intérieures planétaires. D'autant plus que, le coût numérique étant extrêmement élevé, ces simulations sont souvent isolées dans l'espace des paramètres et se consacrent à l'étude d'un phénomène particulier.

Une autre approche consiste à tenter de dégager un comportement systématique lié à un ou plusieurs paramètres. Cela nécessite un nombre de simulations conséquent, largement réparties dans l'espace des paramètres étudié, ce qui n'est finalement pas moins coûteux que la première approche. En déterminant des lois d'échelle - caractérisant ainsi les variations d'une quantité par rapport à une autre, il est ensuite possible d'extrapoler les comportements obtenus à des valeurs plus réalistes. L'avantage de cette approche est qu'elle s'attache aux comportements observés et non aux valeurs de nombres sans dimension.

En effet, atteindre des valeurs de paramètres réalistes n'implique pas que le régime obtenu l'est également. Un bon exemple est celui du nombre de Reynolds magnétique, dépendant de Re et Pm . En jouant sur ces deux paramètres on obtient plus facilement des valeurs de Rm réalistes sans forcément atteindre un régime adéquat. Ses valeurs sont donc à analyser avec précaution, bien que son apparition immédiate dans l'équation d'induction, et donc sa signification physique, laissent penser que Rm est pertinent et facilement interprétable.

Chapitre 2

Description des modèles numériques

2.0.1	Utilisation de l'approche pseudo-spectrale	21
2.0.2	Discrétiser le temps et l'espace	22
2.1	Modèle local	23
2.1.1	Géométrie et équations	24
2.1.2	Aspects numériques de TURBO	24
2.1.3	Forçage choisi	25
2.1.4	Diagnostic de post-traitement	27
	Spectres	27
	Flux	28
	Taux de transferts	29
2.2	Modèle global	30
2.2.1	Géométrie et équations	30
	Equation de la température et conditions aux limites	31
	Approximation Boussinesq et pertinence	31
2.2.2	Aspects numériques de PaRoDy	33
	Décomposition poloidale-toroïdale	33
	Discrétisation	33
2.2.3	Diagnostic de post-traitement	34
	Nombres sans dimension calculés	34
	Nombres caractéristiques dépendant de l'échelle choisie	34
	Spectres des forces	35

2.0.1 Utilisation de l'approche pseudo-spectrale

Les équations de la MHD impliquant à la fois dérivées spatiales et temporelles, il est appréciable d'exprimer ces champs dans l'espace spectral pour calculer ces quantités. La conversion d'un espace à l'autre se fait via transformée de Fourier directe ou inverse. A la quantité $\vec{A}$ dans l'espace réel correspond la quantité $\hat{A}$ dans l'espace spectral :

$$\hat{A}(\vec{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int A(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x}, \quad (2.1)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \hat{A}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{k}, \quad (2.2)$$

avec $\vec{x}$ le vecteur position dans l'espace réel et $\vec{k}$ le vecteur d'onde.

L'avantage de cette transformation est que l'opérateur de dérivation spatiale ∇ dans l'espace réel correspond à une simple multiplication par $i\vec{k}$ dans l'espace spectral. Ces deux opérations sont effectuées numériquement via la librairie FFTW (Fastest Fourier Transform in the West).

Cependant les équations contiennent également des produits entre champs, rendant certains termes des équations non-linéaires. Or, en espace de Fourier le produit - devenant alors convolution - est bien plus coûteux à calculer qu'il ne l'est dans l'espace réel. Via transformée de Fourier inverse sur chaque champ, le produit est alors effectué dans l'espace réel puis reconverti dans l'espace spectral pour être dérivés.

Cette approche *pseudo-spectrale* utilisant à la fois espace spectral pour les dérivées spatiales et espace réel pour les produits permet de simplifier les opérations et donc d'optimiser le temps de calcul. Elle introduit cependant un problème supplémentaire, l'*aliasing* ou repliement, qui découle justement du produit dans l'espace réel et de la résolution choisie pour le calculer (cfr 2.0.2).

2.0.2 Discrétiser le temps et l'espace

Les équations de Navier-Stokes en incompressible ne disposant pas de solution générale connue, le calcul numérique est devenu indispensable aux études hydrodynamiques et *a fortiori* magnéto-hydrodynamiques. Bien que parfois appelés solutionneurs (traduction littérale de l'anglais *solver*), les codes numériques ne résolvent pas ces équations, bien au contraire. Elles sont simplement utilisées pour calculer les champs à un temps $t + \delta t$ à partir du temps précédent, très proche. Il ne s'agit donc pas d'une résolution continue mais discrète - pas (de temps) à pas (de temps). Cela permet donc de vérifier ces équations à chaque instant, et donc d'étudier l'évolution temporelle des quantités.

De façon analogue, les directions spatiales sont également discrétisées. Il s'agit en réalité de séparer l'espace en secteurs, et de calculer les grandeurs uniquement en ces endroits. En géométrie cubique par exemple, cela revient à utiliser une grille contenant un certain nombre de points qui doit être suffisant pour restituer le signal, c'est-à-dire les structures étudiées. En géométrie sphérique, l'espace peut être décomposé en coquilles concentriques, qui peuvent à leur tour être discrétisées (cfr 2.2).

Des transformées de Fourier discrètes sont donc utilisées :

$$\hat{A}(\vec{k}, t) = \frac{1}{N^3} \sum_{\vec{x}} A(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (2.3)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}} \hat{A}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}}, \quad (2.4)$$

avec N le nombre total de modes ou nombre de points par direction. Dans l'espace spectral, la résolution limite la quantité de nombres d'onde k accessibles. Par exemple en géométrie cubique, à un nombre de points N^3 sont associés N nombres d'onde k_n :

$$k_n = \frac{2\pi}{L} n, \quad (2.5)$$

avec n pouvant varier de $-N/2 + 1$ à $N/2$ et L la taille de la boîte. Le nombre d'onde minimal représentant les grandes échelles est directement dépendant de la taille de la boîte $k_{min} = 2\pi/L$, tandis que le plus petit nombre d'onde dépend du nombre de points choisi $k_{max} = N\pi/L$ et représente la plus petite échelle résolue. A partir de ces paramètres, l'espace entre deux points de la grille est $\Delta = L/N$, qui représente la résolution effective choisie.

Ces pas de temps ou d'espace doivent être choisis précautionneusement : pour qu'un signal soit bien représenté par une distribution discrète, il faut que la fréquence d'échantillonnage - inverse du

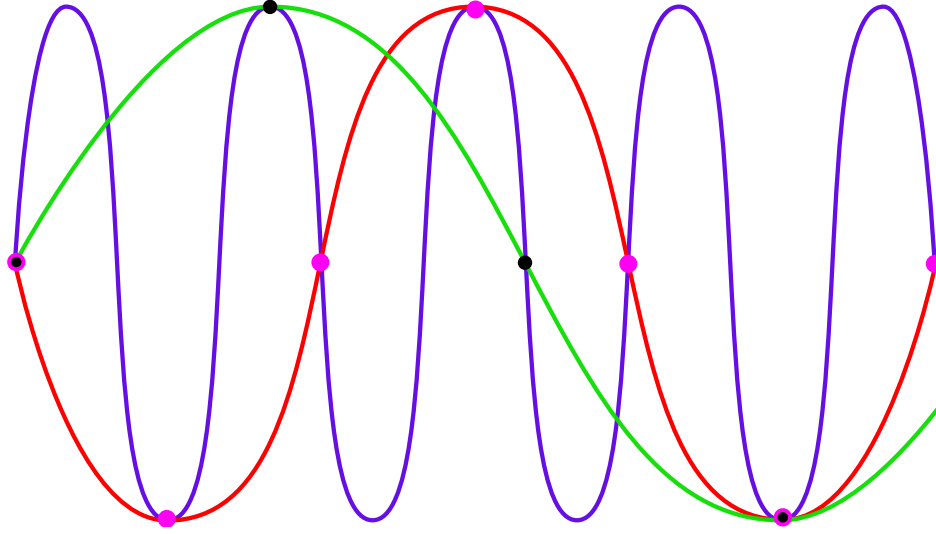


FIGURE 2.1 – Illustration du phénomène d'aliasing. On voit qu'à un ensemble de points donné - rose, noir ou mixte - plusieurs signaux peuvent être reconstruits. Une certaine résolution, dépendant de la fréquence de l'onde, est donc nécessaire pour reconstruire un signal sans l'altérer.

pas de temps - soit supérieure au double de la fréquence maximale du signal attendu (théorème de Shannon).

La résolution autant spatiale que temporelle est limitée par les ressources numériques à disposition, et doit donc être choisie judicieusement, en particulier pour éviter le phénomène d'*aliasing*. Le méthode pseudo-spectrale employée permet de faciliter le calcul des termes non-linéaires en les calculant dans l'espace réel. Cependant, ce produit de deux champs a - dans l'espace spectral - une résolution égale à $2k_{max}$, et il y a alors un biais de l'information. Effectivement les modes k compris entre $k_{max} < k < 2k_{max}$ seraient indissociables dans l'espace spectral des modes $k/2$ (périodicité), les peuplant ainsi artificiellement. Ces modes qui se recouvrent correspondent en réalité au dernier tiers des modes les plus élevés. Ainsi, en imposant ces modes à 0 artificiellement il est possible d'éviter le phénomène d'aliasing. En revanche, cela ne conserve que les 2/3 du spectre, (d'où son nom, méthode des 2/3). Il y a d'autres façons d'aborder ce problème, qui permettent de conserver l'entière du spectre sous réserve de certaines approximations.

Pour le modèle local (2.1), la méthode du *phase-shift dealiasing* est utilisée. Elle consiste à décaler la grille d'un facteur π/N dans toutes les directions avant de faire la transformée de Fourier. En sommant dans l'espace spectral les champs obtenus pour chaque grille, les contributions aux termes non-linéaires issues de l'aliasing s'éliminent entre elles, puisqu'elles sont antisymétriques (égales mais de signe opposé). Les composantes ne s'annulant pas parfaitement étant considérées négligeables par rapport à l'intensité du signal, leur impact est donc réduit.

Pour le modèle global (2.2), l'approche spectrale étant plus complexe, il a été préféré une approche dite *fully aliased*, qui conserve l'aliasing. Une résolution suffisamment élevée est employée, permettant de vérifier que les spectres obtenus convergent puisqu'ils s'étendent sur une large gamme de nombres d'onde (plusieurs ordres de grandeurs entre les extrema du spectre).

2.1 Modèle local

Cette partie présente le modèle utilisé pour la partie de l'étude dite *locale*. Il a été développé pour résoudre les équations de Navier-Stokes dans un domaine cubique-périodique. Nommé TURBO pour *TURbulent flows with periodic BOundary conditions*, il est téléchargeable et librement utilisable

(Teaca *et al.*, 2009).

2.1.1 Géométrie et équations

Les équations résolues pour les champs $\vec{u}$ et $\vec{b}$ se présentent sous la forme :

$$\partial_t \vec{u} = -\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + (\vec{b} + \vec{B}_0) \cdot \nabla \vec{b} - \vec{\nabla} p - 2\vec{\Omega}_0 \wedge \vec{u} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{u} + \vec{F}_u, \quad (2.6a)$$

$$\partial_t \vec{b} = (\vec{b} + \vec{B}_0) \cdot \nabla \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla \vec{b} + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{b} + \vec{F}_b, \quad (2.6b)$$

avec ν et η respectivement la viscosité cinématique et diffusivité magnétique, p la pression et $\vec{F}_{u,b}$ le forçage appliqué. Dans notre cas, rotation globale $\vec{\Omega}_0$ et champ magnétique moyen $\vec{B}_0$ sont également considérés.

La condition d'incompressibilité sur $\vec{u}$ et le caractère solénoïdal de $\vec{b}$ imposent également :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0, \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.8)$$

Ces équations sont résolues dans un espace en trois dimensions cubique, avec des conditions aux limites périodiques dans les trois directions et pour les deux champs. La taille caractéristique de la boîte dans chaque direction $L_{x,y,z}$ est modulable, ainsi que le nombre de points qui les résolvent $N_{x,y,z}$. Dans cette partie un cube est considéré de sorte à ce que $L_{x,y,z} = 2\pi$, et le nombre de points dépend directement de la résolution choisie. Pour une résolution de 256^3 on a $N_{x,y,z} = 256$ points dans chaque direction, correspondant ainsi à des pas $\Delta_{x,y,z} = L_{x,y,z}/N_{x,y,z} = \pi/126$. La grille est donc décrite dans l'espace réel par un maillage x_i tel que :

$$x_i = i_x \Delta_x \text{ avec } 0 < i_x < N_x - 1, \quad (2.9)$$

et identiquement pour les directions y et z . Dans l'espace spectral, cela se traduit par un intervalle de nombres d'onde accessibles $-125 < k < 125$ (voir équation (2.5))

Le code est complètement parallélisé spatialement, d'abord par couches selon z , puis selon x et y . Bien que le nombre de processeurs pour l'exécuter ne soit pas limité, il est préférable que celui-ci soit un multiple de n_z pour une répartition équilibrée des tâches.

2.1.2 Aspects numériques de TURBO

Comme expliqué en 2.0.1, le code TURBO utilise la méthode pseudo-spectrale pour calculer les différents termes des équations (2.6). Pour l'incrémentatation temporelle, TURBO utilise une méthode Runge-Kutta d'ordre 3. C'est une méthode itérative explicite classique pour l'incrémentatation temporelle d'équations différentielles, puisqu'elle permet le calcul de $a(t_{n+1})$ à partir de $\partial_t a(t_n)$ et d'un état initial $(a(t_0), t_0)$.

Le temps est incrémenté par un Δt , qui peut être soit fixe, soit adaptatif. L'avantage du pas de temps adaptatif est qu'il permet de minimiser le coût numérique en adaptant le pas de temps régulièrement (ici tous les deux pas de temps).

Il faut cependant faire attention à ce que la résolution temporelle choisie soit cohérente avec le système étudié. En particulier, le pas de temps utilisé doit pouvoir accéder aux perturbations les plus rapides du système, c'est-à-dire être inférieur au temps nécessaire à l'onde ou au fluide pour parcourir un incrément spatial Δx_i (condition de Courant-Friedrichs-Lewy).

Cela revient donc à :

$$\sum_i \frac{\max(u_i, b_i) \Delta t}{\Delta x_i} < C_{CFL}, \quad (2.10)$$

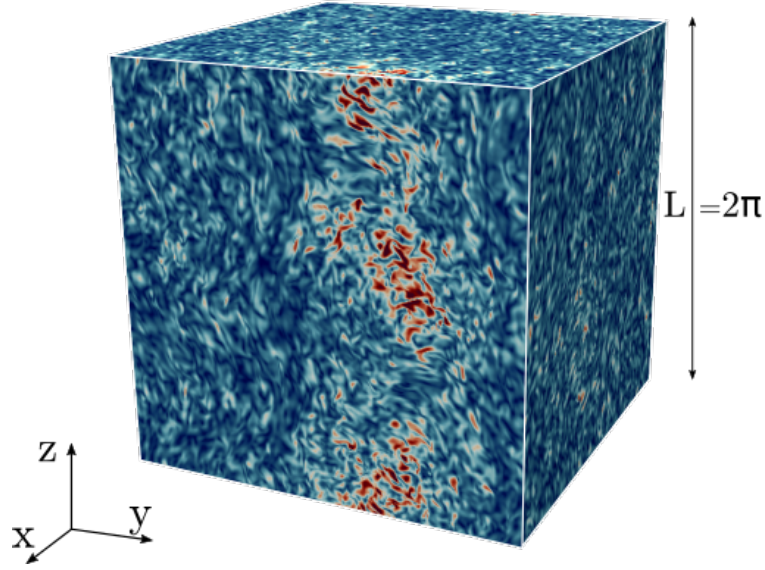


FIGURE 2.2 – Représentation du domaine simulé par TURBO. Le cube est discrétisé dans les trois directions (x, y, z) , la résolution étant déterminée par le nombre de points choisi : N_x, N_y, N_z .

où i représente les trois directions. Dans le cas MHD, il faut prendre en compte les maxima des magnitudes des champs u et b dans chaque direction. En théorie, C_{CFL} pourrait être égal à 1, ce qui maximise le pas de temps et donc minimise le coût numérique. En pratique, il est rarement possible d'atteindre cette valeur. Pour les cas présentés ci-après, C_{CFL} est fixé à 0.5 sauf mention contraire. Fixer cette constante permet à partir de l'équation (2.10) d'adapter le pas de temps en fonction de la magnitude maximale atteinte par l'un des champs.

Il s'agit désormais de calculer le champ a à l'instant $t + \Delta t$. Après un changement de variable, $a = e^{-\nu k^4 t} z$ les équations peuvent s'écrire sous forme simplifiée :

$$\partial_t z = e^{\nu k^4 t} F(e^{-\nu(t-t_0)} z), \quad (2.11)$$

avec $F(e^{-\nu(t-t_0)} z)$ une fonction contenant tous les termes autres que le terme de dissipation $-\nu k^4 a$ (annulé par le changement de variable) et le terme de Coriolis (traité linéairement également).

Finalement pour i variant de 1 à 4 (imposé par la méthode de shift-dealiasing choisie), le schéma numérique suivi est tel que :

$$z_i = z_{i-1} + \alpha_i \Delta t e^{\nu k^4 \chi_{i-1} \Delta t} F(e^{-\nu k^4 \chi_{i-1} \Delta t} z_{i-1}) + \beta_i \Delta t g_i, \quad (2.12)$$

$$g_i = g_{i-1} + \gamma_i e^{\nu k^4 \chi_{i-1} \Delta t} F(e^{-\nu k^4 \chi_{i-1} \Delta t} z_{i-1}), \quad (2.13)$$

avec $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \chi_i$ des coefficients judicieusement choisis pour obtenir une valeur de z_4 donnant une valeur proche de la valeur attendue pour $a(t_{n+1})$. La condition initiale $a(t_0)$ est choisie et impose donc z_0 ; g_0 et χ_0 sont quant à eux imposés à 0. .

2.1.3 Forçage choisi

Dans cette étude locale, il est indispensable d'ajouter un terme de forçage aux équations afin d'une part d'atteindre un régime turbulent, et d'autre part de simuler les mécanismes moteurs dans les systèmes considérés. Cela revient à artificiellement injecter de l'énergie dans le système à chaque instant, tout en contrôlant certains paramètres de cette injection. Le forçage choisi se décompose

en une partie cinétique $\vec{F}_u$ et une partie magnétique $\vec{F}_b$ s'ajoutant respectivement à l'équation du mouvement et à l'équation d'induction.

Le forçage doit être solénoïdal, puisque les champs doivent respecter cette condition. Il est ainsi particulièrement approprié de l'exprimer dans une base hélicitaire complexe $(\vec{h}^+, \vec{h}^-)$ sous la forme :

$$\vec{F}_{u,b}(\vec{x}) = f_{u,b}^+ \vec{h}^+ + f_{u,b}^- \vec{h}^-. \quad (2.14)$$

Les termes $f_{u,b}^\pm$ sont définis par :

$$f_{u,b}^\pm = \frac{1}{2} \left(\alpha_{u,b}^\pm u^\pm + \beta_{u,b}^\pm b^\pm \right), \quad (2.15)$$

où $u^\pm$ et $b^\pm$ sont respectivement les champs de vitesse et magnétique exprimés dans la base hélicitaire. De façon analogue, $E_u^\pm$, $E_b^\pm$ et $H_c^\pm$ sont respectivement l'énergie cinétique, magnétique et l'hélicité croisée exprimées dans cette base. Les coefficients $\alpha_{u,b}^\pm$ et $\beta_{u,b}^\pm$ sont définis par :

$$\begin{aligned} \alpha_u^\pm &= A^\pm (2E_b^\pm \eta_u^\pm - H_c^\pm \gamma_u^\pm), \\ \beta_u^\pm &= A^\pm (2E_u^\pm \gamma_u^\pm - H_c^\pm \eta_u^\pm), \\ \alpha_b^\pm &= A^\pm (2E_b^\pm \gamma_b^\pm - H_c^\pm \eta_b^\pm), \\ \beta_b^\pm &= A^\pm (2E_u^\pm \eta_b^\pm - H_c^\pm \gamma_b^\pm). \end{aligned} \quad (2.16)$$

$A^\pm$ est un coefficient de normalisation défini par $A^\pm = \left(4E_u^\pm E_b^\pm - H_c^{\pm 2} \right)^{-1}$, $\eta_{u,b}^\pm$ et $\gamma_{u,b}^\pm$ représentent les taux d'injection d'énergie ou d'hélicité par unité de temps. Ils sont définis à partir de paramètres d'entrée $\epsilon_{u,b}^\pm$ et $\sigma_{u,b,c}$:

$$\eta_{u,b}^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \sigma_{u,b}) \epsilon_{u,b}^\pm, \quad (2.17)$$

$$\gamma_{u,b}^\pm = \eta_{u,b}^\pm \sigma_c. \quad (2.18)$$

En jouant sur ces cinq paramètres, le forçage est totalement modulable. Ainsi si $\sigma_{u,b,c}$ sont nuls, le forçage est purement énergétique ; tandis que si $\epsilon_b = \epsilon_b^+ + \epsilon_b^-$ et $\sigma_{b,c}$ sont nuls le forçage est purement cinétique (seuls $\epsilon_u = \epsilon_u^+ + \epsilon_u^-$ sont alors présents).

On remarquera que le forçage est dynamique dans le sens où il dépend directement des champs. Cela permet de garder un taux d'injection constant au cours du temps, ce qui facilite les diagnostics. Le choix de ces coefficients permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \partial_t E_u(k) &= \frac{\epsilon_u}{N_f}, & \partial_t E_b(k) &= \frac{\epsilon_b}{N_f}, \\ \partial_t H_k(k) &= \frac{\sigma_u \epsilon_u}{N_f}, & \partial_t H_b(k) &= \frac{\sigma_b \epsilon_b}{N_f}, & \partial_t H_c(k) &= \frac{\sigma_c (\epsilon_u + \epsilon_b)}{N_f}. \end{aligned}$$

avec N_f le nombre d'échelles de forçage. L'échelle de forçage peut être localisée à un seul k_f (dans ce cas $N_f = 1$) ou multiple $k_{inf} < k_f < k_{sup}$.

Les valeurs choisies pour chacun des coefficients d'injection ont un impact non négligeable sur la résolution temporelle nécessaire pour mener à bien une simulation. Effectivement, en injectant à chaque instant de l'énergie, le coût numérique de la simulation grandit avec les taux d'injection d'énergie imposés. C'est pourquoi un taux d'injection relativement bas, $\epsilon_{u,b} = 0.2$, a été choisi pour la plupart des simulations effectuées.

2.1.4 Diagnostiques de post-traitement

Pour analyser les résultats obtenus et les interpréter, il est nécessaire d'avoir accès à un certain nombre de quantités, souvent plus complexes que le résultat brut de notre simulation - i.e. les champs $\vec{u}$ et $\vec{b}$. En particulier, quand on s'intéresse au phénomène de cascade (voir 1.2.2), il est important d'avoir accès à la répartition des quantités selon les différentes échelles et à sa dynamique. Dans cette partie, nous nous attacherons donc à présenter numériquement les fonctions de traitement de données utilisées. Les champs sont sauvegardés de deux façons complémentaires : tous les pas de temps dans l'espace réel sous forme d'énergie (alors moyennés sur tout l'espace) et périodiquement en temps dans l'espace spectral pour connaître leur répartition spatiale.

Spectres

Le terme spectre désigne communément la répartition d'une énergie selon une gamme de fréquences. Dans cette partie, *spectre* désignera la répartition de toute quantité selon le vecteur d'onde $\vec{k}$, analogue de la fréquence spatiale. Ceux-ci sont calculés à partir des fichiers contenant les champs sauvegardés dans l'espace spectral, donnant ainsi directement accès à la distribution en fonction de k de la quantité considérée. Seules deux composantes sont sauvegardées, la troisième pouvant être calculée grâce à la condition de divergence nulle impliquant $k_x \tilde{u}_x + k_y \tilde{u}_y + k_z \tilde{u}_z = 0$.

Par exemple, l'énergie en $k = k_n$ correspond à la somme des énergies associées à tous les modes satisfaisant $k_{n-1} < k_{mode} \leq k_n$, avec $k_{mode} = \sum_i k_i$ la norme en trois dimensions de $\vec{k}_{mode}$. Les spectres d'énergie cinétique et magnétique ainsi que les spectres d'hélicité croisée et magnétique sont calculés de cette façon. Enfin, à partir des spectres d'hélicité croisée et magnétique, il est possible de reconstruire le spectre correspondant à l'hélicité hybride.

Pour les spectres d'énergie, une fonction supplémentaire décomposant le spectre en deux polarisations (cfr partie 4.2) a été implémentée. Effectivement les champs peuvent être décomposés en deux parties notées $\mathcal{A}_\Lambda$ avec $\Lambda = \pm 1$, représentant les composantes du champ complexe $\vec{\mathcal{A}}$ dans la base hélicitaire complexe $(\vec{h}^+, \vec{h}^-)$, plus appropriée pour l'étude d'ondes polarisées circulairement. Ces composantes peuvent s'exprimer en fonction des composantes u_x, u_y, u_z ce qui a l'avantage d'éviter l'implémentation et le calcul de la base hélicitaire :

$$\mathcal{A}_\Lambda(\vec{k}) = \frac{1}{2k k_\parallel} [k_x k_\parallel a_x + k_y k_\parallel a_y - k_z^2 a_z + \Lambda i k (k_y a_x - k_x a_y)]. \quad (2.19)$$

Ce type de décomposition permet l'introduction de variables d'Elsasser dites généralisées, adaptées au cas avec rotation :

$$\mathcal{Z}_\Lambda^s \equiv \mathcal{U}_\Lambda + \xi_\Lambda^s \mathcal{B}_\Lambda, \quad (2.20)$$

avec

$$\xi_\Lambda^s \equiv \frac{-s k d}{-s \Lambda + \sqrt{1 + k^2 d^2}}. \quad (2.21)$$

$\mathcal{U}_\Lambda$ et $\mathcal{B}_\Lambda$ sont calculés à partir de l'équation (2.19), où Λ et s représentent les différentes combinaisons de polarisations possibles (circulaire pour Λ et directionnelle pour s). Les quatre composantes $\mathcal{Z}_\Lambda^s$ sont ainsi calculées, permettant ainsi l'accès aux différentes polarisations du spectre. Celle qu'on appellera *polarisation droite* correspond aux composantes telles que $\Lambda = s$, tandis que *polarisation gauche* correspond à $\Lambda = -s$ (cf partie 4).

Cette démarche a pour but d'ajouter une information supplémentaire à celles déjà renseignées par le spectre : au-delà de la répartition entre échelle, elle permet de distinguer les comportements spécifiques à chacune des composantes de l'énergie.

Flux

Similairement à la décomposition en variables d'Elsasser généralisées - en plus simple cependant - les flux permettent de savoir quel processus énergétique agit dynamiquement sur la répartition des quantités étudiées. Le flux d'une quantité à travers une surface, ici sphérique de rayon k , est calculé pour toutes les valeurs de k possibles et donne ainsi des indications sur le processus dynamique de cascade à toutes les échelles. À partir des équations (2.6), quatre termes non-linéaires sont impliqués dans l'évolution des champs $\vec{u}$ et $\vec{b}$ (deux par équation). Leurs contributions indépendantes ne sont pas identifiables à partir des spectres. Ces termes représentent en fait les interactions inter-champs, et sont donc extrêmement précieux pour caractériser la dynamique d'un système. On rappelle que le flux d'énergie totale Π à l'échelle k est défini par $\partial_t E(k) = -\partial_k \Pi(k)$. Par définition :

$$\partial_t E = \partial_t E_u + \partial_t E_b \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\partial_t (\vec{u} \cdot \vec{u}) + \partial_t (\vec{b} \cdot \vec{b}) \right) \quad (2.23)$$

$$= \vec{u} \cdot \partial_t \vec{u} + \vec{b} \cdot \partial_t \vec{b}, \quad (2.24)$$

et donc avec les équations (2.6) et $\Pi(k)$ le flux total depuis l'intérieur d'une coquille de rayon k (voir Verma (2004)) :

$$\Pi(k) = \vec{u}_k^< \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \vec{u}_k^< \cdot (\vec{b} \cdot \nabla \vec{b}) + \vec{b}_k^< \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{b}) - \vec{b}_k^< \cdot (\vec{b} \cdot \nabla \vec{u}). \quad (2.25)$$

Les interactions possibles sont multiples : $u_k^<$, la composante du champ $\vec{u}$ à l'intérieur de la coquille de rayon k , est potentiellement redistribuée vers n'importe quel $\vec{u}$ ou $\vec{b}$ via les termes non-linéaires, et de même pour $b_k^<$. Cependant les composantes $\vec{u}_k^<$ vers $\vec{u}_k^<$ ne sont pas comptabilisables en tant que flux (car elles ne traversent pas la surface), et il ne reste donc que les composantes de $\vec{u}_k^<$ vers $\vec{u}_k^>$ et $\vec{b}$. Les termes croisés $u_k^<$ vers $b_k^<$ (et réciproquement) sont peu discutés dans la littérature, sûrement puisqu'ils s'annulent lorsque la somme (2.25), correspondante à l'énergie totale, est effectuée. Leur faible impact, bien que non-nul, a été vérifié dans cette étude.

Ne sont finalement considérés que les termes de flux de la coquille interne de rayon k vers toutes les coquilles externes. Une nomenclature s'impose alors. On désignera par $\Pi_{YZ}^X(k)$ le flux du champ $\vec{X}$ vers le champ $\vec{Z}$ via le champ $\vec{Y}$, d'une échelle inférieure à k vers une échelle supérieure :

$$\Pi_{YZ}^X(k') = \text{Re}(\vec{X}_k^< \cdot (\vec{Y} \cdot \vec{Z}_k^>)), \quad (2.26)$$

où les exposants $<$ et $>$ désignent respectivement les composantes des champs respectant $k < k'$ et $k > k'$ avec k' l'échelle à laquelle le flux est calculé. L'opérateur Re désigne l'opérateur partie réelle, nécessaire ici puisque les champs sont complexes. L'équation (2.25) revient finalement à :

$$\Pi(k) = \vec{u}_k^< \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}_k^>) - \vec{u}_k^< \cdot (\vec{b} \cdot \nabla \vec{b}_k^>) + \vec{b}_k^< \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{b}_k^>) - \vec{b}_k^< \cdot (\vec{b} \cdot \nabla \vec{u}_k^>). \quad (2.27)$$

En fonction des quantités choisies pour $\vec{X}$, $\vec{Y}$ et $\vec{Z}$, le flux Π_{YZ}^X peut désigner toutes les combinaisons possibles de termes non-linéaires. Ainsi, les quatre flux d'énergie restant sont définis par :

$$\Pi_{uu}^u(k) \equiv \vec{u}_k^< \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}_k^>), \quad (2.28)$$

$$\Pi_{bb}^u(k) \equiv -\vec{u}_k^< \cdot (\vec{b} \cdot \nabla \vec{b}_k^>), \quad (2.29)$$

$$\Pi_{ub}^b(k) \equiv \vec{b}_k^< \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{b}_k^>), \quad (2.30)$$

$$\Pi_{bu}^b(k) \equiv -\vec{b}_k^< \cdot (\vec{b} \cdot \nabla \vec{u}_k^>). \quad (2.31)$$

On remarquera que Π_{uu}^u et Π_{bb}^u correspondent à l'équation du moment, tandis que Π_{ub}^b et Π_{bu}^b à l'équation d'induction.

De manière analogue, il est possible de définir les flux des hélicités magnétique H_m , croisée H_c et hybride H_h (voir partie 4.1.1 pour les définitions de ces quantités) :

$$\Pi_{H_m}(k) = -\vec{b}_k^< \cdot (\vec{u} \times \vec{b}_k^>), \quad (2.32)$$

$$\Pi_{H_c}(k) = \frac{1}{2}[\vec{b}_k^< \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}_k^> - \vec{b} \cdot \nabla \vec{b}_k^>) + \vec{u}_k^< \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{b}_k^> - \vec{b} \cdot \nabla \vec{u}_k^>)], \quad (2.33)$$

$$\Pi_{H_h}(k) = \Pi_{H_m}(k)/d - \Pi_{H_c}(k), \quad (2.34)$$

avec $\vec{\Omega}_0 d = \vec{B}_0$. Ces flux en revanche ne correspondent pas à un terme d'une équation, mais à une quantité complète.

Taux de transferts

Pour étudier les transferts sous une autre forme, il est possible de définir le taux de dissipation ϵ - à distinguer des taux d'injection - issus du terme éponyme :

$$\epsilon = \nu \sum_{\vec{k} \neq \mathbf{0}} k^2 (|\vec{u}_k|^2), \quad (2.35)$$

mesurant ainsi la dissipation à petite échelle. Cette définition est valable identiquement pour les termes de dissipation visqueuse ou de dissipation magnétique, donnant ainsi deux taux de dissipation, ϵ_u et ϵ_b .

De façon analogue, il est possible de définir les taux de dissipation aux grandes échelles à partir d'un terme d'hypoviscosité de la forme $\nu^- \vec{\nabla}^{-2} \vec{u}$. On obtient finalement quatre types de taux de dissipation, à grandes ou à petites échelles - respectivement notés ϵ^- et ϵ^+ - et cinétique ou magnétique - notés ϵ_u et ϵ_b .

Finalement, ceux-ci peuvent être regroupés sous une seule équation :

$$\epsilon^\pm = \sum_{\vec{k} \neq \mathbf{0}} k^{\pm 2} (\nu^\pm |\hat{u}|^2 + \eta^\pm |\hat{b}|^2) = \epsilon_u^\pm + \epsilon_b^\pm, \quad (2.36)$$

où ν et η désignent ici la viscosité cinématique et la diffusivité magnétique.

2.2 Modèle global

Dans cette partie nous exposerons le modèle numérique et les diagnostics employés pour la partie de l'étude dite *globale*, effectuée avec le code PaRoDy (Dormy *et al.*, 1998). Un modèle en géométrie sphérique est utilisé, particulièrement adapté à l'étude d'objets planétaires et stellaires. Le fluide évolue librement entre deux coquilles sphériques de rayons respectifs r_i pour la coquille interne et r_e pour la coquille externe. Pour les cas astrophysiques, cet espace représente la partie liquide du cœur de l'objet pouvant être décrite par une approche fluide. Celui-ci évolue librement entre ces deux coquilles, chacune avec des conditions aux limites sans glissement. Cette évolution est régie par les équations de la MHD dans le cas avec rotation et champ magnétique globaux.

Toutes les simulations sont initialisées avec un champ magnétique initial dipolaire. Pour atteindre des nombres de Rayleigh élevés, certaines simulations ont été initialisées à partir de simulations précédentes avec une combinaison de paramètres proches.

2.2.1 Géométrie et équations

La distance $D = r_e - r_i$, écart entre les deux coquilles limites, servira d'unité de longueur au système. Un des paramètres variables selon l'objet étudié est le rapport d'aspect $\chi = r_i/r_e$, qui dans le cas terrestre vaut environ 0.35 et est fortement variable pour le cas stellaire (0.7 pour le soleil). La géométrie sphérique est particulièrement adaptée au type de problème que nous cherchons à étudier dans cette étude. Effectivement, planètes et étoiles sont en première approximation à symétrie sphérique. Cependant, à cause de la rotation rapide et de l'inertie qui en découle, la plupart de ces objets sont plus ou moins aplatis au pôles. Dans certaines études géodynamos, la forme ellipsoïdale/oblate des astres est également considérée. Les études en symétrie sphérique restent les plus répandues, et ont l'avantage de simplifier à moindre coût le problème.

De même que pour la longueur, des unités adéquates doivent être définies de sorte à correspondre au système sphérique. Ainsi, le temps sera exprimé en unités D^2/ν , le champ magnétique $\vec{B}$ en $(\rho\mu\eta\Omega)^{1/2}$ et la pression en unités $\rho\nu\Omega$. ρ , Ω , ν , μ et η désignent les mêmes quantités que précédemment, donc respectivement la densité, le taux de rotation, la viscosité cinématique, la perméabilité et la diffusivité magnétiques.

A partir de ces unités et des équations précédemment introduites, on obtient les équations de la MHD sous une forme adimensionnée compacte :

$$E\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} - \nabla^2 \vec{u}\right) = -\vec{\nabla} P - 2\vec{z} \times \vec{u} + \frac{1}{Pm}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \frac{1}{Pm} \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \quad (2.38)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.39)$$

où $\vec{B}$ représente dans ce modèle le champ total. De plus le fluide étant considéré incompressible, cela implique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0. \quad (2.40)$$

L'adimensionnement de ces équations a l'avantage de faire apparaître deux nombres sans dimension déjà définis, le nombre d'Ekman E et le nombre de Prandtl magnétique Pm . Puisqu'ils interviennent explicitement dans les équations, ce sont des paramètres d'entrée souvent choisis pour ce type de problème numérique.

Equation de la température et conditions aux limites

Comme mentionné précédemment, la coquille interne à r_i représente l'interface entre la partie liquide et solide/radiative du cœur de l'objet, tandis que la coquille externe à r_e représente l'interface avec les couches externes de l'objet (manteau pour la Terre ou fin de la zone convective pour certaines étoiles). Différents types de conditions aux limites peuvent être imposées à ces frontières, entre autre des conditions aux limites avec ou sans glissement. Par exemple, des conditions aux limites sans glissement imposent une vitesse nulle aux parois ($\vec{u} = 0$), c'est-à-dire une adhérence totale à celles-ci. Les effets des couches limites ainsi que d'autres types de conditions aux limites à ces différentes interfaces ont été étudiés avec le même code numérique (Schrinner *et al.* (2012), Marcotte *et al.* (2016)). Cependant ici nous choisirons des conditions aux limites sans glissement, ce qui a l'avantage de rendre cette étude comparable à un certain nombre d'autres études de géodynamo.

Le type de transfert thermique est important, puisqu'il va gouverner la dynamique à petites échelles du fluide. King *et al.* (2010) compare deux types de transferts thermiques et leur impact sur les couches limites associées dans le cadre de modèles de dynamo planétaires en rotation.

Une condition supplémentaire est également imposée au champ magnétique, de sorte à ce que celui-ci corresponde à un certain champ potentiel $\nabla\phi$ à l'extérieur de la coquille. Dans cette étude, le cœur interne n'est pas considéré conducteur ce qui permet de restreindre la résolution de l'équation d'induction au domaine entre les coquilles.

Pour les étoiles comme les planètes, le cœur est cependant une source de chaleur pouvant générer des mouvements convectifs dans la partie liquide. Il n'est cependant pas certain que ce soit la source principale de convection (voir partie 1.1.3), la convection chimique ayant a priori une importance non négligeable (Calkins *et al.*, 2012). Dans ce modèle, un gradient de température est imposé entre la coquille interne (à T_i) et la coquille externe (à T_e), de façon à simuler la convection thermique ayant lieu naturellement dans certains objets astrophysiques. L'équation d'évolution de la température est donc à ajouter aux équations de la MHD :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \vec{\nabla}^2 T, \quad (2.41)$$

avec T la température, κ la diffusivité thermique du fluide.

La différence $\Delta T = T_i - T_e$ servira d'unité pour la température.

Approximation Boussinesq et pertinence

Evidemment, en astrophysique aussi bien qu'en laboratoire, la densité d'un fluide n'est jamais parfaitement constante lorsque celui-ci est soumis à de telles actions. Sous l'effet de son propre poids et des mouvements induits par la convection, un fluide aura tendance à se stratifier. La densité réelle ρ du fluide est alors modifiée par les variations de température δT , ce qui se traduit par $\rho = \rho_0 - \alpha \rho_0 \delta T$, avec ρ_0 et T_0 les densité et température de référence et α le coefficient de dilatation thermique du fluide considéré. Ces variations de densité seront ici négligées, excepté lorsque celles-ci sont multipliées par la gravité elle-même, c'est-à-dire dans le terme de poussée d'Archimède. Cette approximation couramment employée est appelée approximation Boussinesq.

Les variations de température se répercutent donc seulement via le terme de flottabilité $\delta \rho \vec{g}$, qui devient après les divers adimensionnements $Ra_{r_e} \vec{T}$ avec $Ra = \alpha g_0 \delta T D^3 / \nu \kappa$ le nombre de Rayleigh. On obtient finalement un système pour $\vec{u}$ et $\vec{B}$ solénoïdaux régi par les équations :

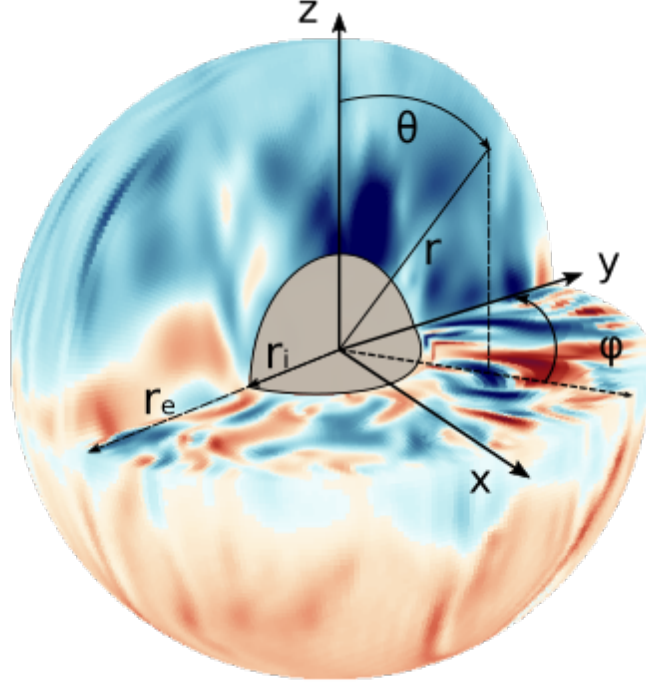


FIGURE 2.3 – Représentation du domaine simulé par PaRoDy. La sphère est discrétisée dans les trois directions (r, θ, ϕ) , la résolution étant déterminée par le nombre de points choisi : nr, nt, np . L'axe de rotation est fixé selon $\vec{z}$

$$E\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \nabla^2 \vec{u}\right) = -\nabla P - 2\vec{z} \times \vec{u} + Ra \frac{\vec{r}}{r_e} T + \frac{1}{Pm} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}, \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \frac{1}{Pm} \vec{\nabla}^2 \vec{B}, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T = \kappa \vec{\nabla}^2 T. \quad (2.44)$$

L'approximation Boussinesq n'est cependant pas adéquate pour la modélisation d'intérieurs stellaires où la stratification joue un rôle plus important. L'approximation anélastique est alors préférée (voir Schinner et al 2014).

2.2.2 Aspects numériques de PaRoDy

Décomposition poloïdale-toroïdale

Pour tout champ de vecteur solénoïdal, c'est-à-dire à divergence nulle, il existe un potentiel vecteur tel que $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$. Cette propriété permet à un champ solénoïdal $\vec{V}$ d'être décomposé en deux champs scalaires sous la forme :

$$\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge (V_t \vec{r}) + \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge (V_p \vec{r}), \quad (2.45)$$

où V_t et V_p sont appelées respectivement les composantes toroïdale et poloïdale. Dans l'équation du mouvement, cette décomposition à l'avantage d'éliminer le terme de pression (puisque étant irrotationnel).

Par analogie avec le système de coordonnées équatoriales en astronomie (ou encore coordonnées géographiques en ... géographie), la composante poloïdale - dirigée vers les pôles - correspond à la déclinaison (ou longitude) et la composante toroïdale à l'ascension droite (ou latitude). Ce type de décomposition est donc particulièrement adéquat pour décrire un champ évoluant en géométrie sphérique.

Pour un champ à divergence non-nulle, il est possible d'utiliser le même type de décomposition à laquelle il faut cependant ajouter une troisième composante scalaire appelée sphéroïdale décrivant la partie non-solénoïdale du champ vectoriel.

Discrétisation

Comme mentionné précédemment, le volume considéré est l'espace entre deux sphères concentriques. Il est donc naturel de décomposer cet espace en coquilles concentriques espacées d'un pas variable, constituant ainsi une discrétisation radiale sur une grille irrégulière. Un schéma aux différences finies centré est utilisé pour calculer les dérivées sur cette grille.

La discrétisation en latitude-longitude est effectuée quant à elle dans l'espace spectral, via une décomposition en harmoniques sphériques. Notées Y_l^m , ce sont des fonctions complexes définies sur chacune des coquilles à partir des coordonnées (θ, ϕ) , remplacées par (l, m) respectivement le degré et l'ordre d'une harmonique. De plus, ici elles sont définies de sorte à former une base de l'ensemble des fonctions continues définies sur la sphère. Ainsi, une fonction $F(\theta, \phi)$ appartenant à cet ensemble peut s'écrire :

$$F(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l f_l^m Y_l^m(\theta, \phi) + c.c. \quad (2.46)$$

avec f_l^m les coefficients attribués à chaque harmonique et $c.c.$ le complexe conjugué. L'avantage principal de cette décomposition est qu'elle permet une simplification radicale de l'opérateur laplacien (∇^2) en coordonnées sphériques, Y_l^m étant les fonctions propres de cet opérateur. Effectivement on impose $\nabla^2 Y_l^m = l(l+1)Y_l^m$.

La composante radiale d'un champ réel $\vec{A}(r, \theta, \phi)$ défini en coordonnées sphériques s'écrit dans cette décomposition :

$$A_r(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l A_r^m f_l^m Y_l^m(\theta, \phi) + c.c., \quad (2.47)$$

permettant ensuite l'expression des composantes toroïdale et poloïdale correspondantes dans cette base.

De part la forme et l'usage présenté ici, les harmoniques sphériques sont un équivalent des transformées de Fourier discrètes en coordonnées sphériques. Elles permettent effectivement la

simplification des dérivées spatiales et miment un passage au domaine spectral (ici représenté par les degré l et ordre m des harmoniques).

Les composantes de $\vec{U}$ et $\vec{B}$ en décomposition poloïdale-toroïdale sont ainsi calculées au cours du temps. Leurs valeurs sont stockées périodiquement, ainsi que plusieurs types de spectres correspondants ($V_{p,t}$ et $B_{p,t}$ en fonction de l ou m par exemple).

2.2.3 Diagnostiques de post-traitement

A partir de ces données en temps sont calculées un certain nombre de grandeurs caractéristiques permettant d'interpréter les résultats. Parmi celles-ci des nombres sans dimension, dont les principaux sont le nombre d'Elsasser Λ , le nombre de Rossby Ro et le nombre de Reynolds magnétique Rm (cfr partie 1.2.1 pour leurs significations), d'autres qui dépendent de l'échelle considérée, et enfin la distribution spectrale de certaines forces en jeu.

Nombres sans dimension calculés

Ils sont définis comme suit dans ce formalisme (voir partie 2.2.1) et leur moyenne temporelle est calculée à chaque sauvegarde :

$$\Lambda = \frac{B_{rms}^2}{2\Omega\rho\mu\eta}, \quad (2.48)$$

$$Ro = \frac{u_{rms}}{\Omega L}, \quad (2.49)$$

$$Rm = \frac{u_{rms}L}{\eta}, \quad (2.50)$$

avec l'indice $_{rms}$ pour *root mean square* ou moyenne quadratique des champs en question. Dans toute cette étude, le nombre de Rayleigh Ra introduit précédemment sera normalisé par la valeur critique Ra_c à partir de laquelle la convection est possible. Les valeurs considérées dépendantes du nombre d'Ekman sont issues de Christensen et Aubert (2006) et sont restituées ci-dessous :

E	Ra_c
3×10^{-4}	2.026×10^5
1×10^{-4}	6.965×10^5
3×10^{-5}	2.833×10^6
1×10^{-5}	1.057×10^7

Nombres caractéristiques dépendant de l'échelle choisie

Le nombre de Rossby local Ro_ℓ , tel que défini par Christensen et Aubert (2006), est calculé directement selon :

$$Ro_\ell = Ro \frac{\bar{\ell}_u}{\pi} \quad \text{avec} \quad \bar{\ell}_u = \frac{\sum_l l \langle \vec{u}_l \cdot \vec{u}_l \rangle}{2E_u}, \quad (2.51)$$

avec l le degré d'harmonique sphérique, $E_u = \frac{1}{2} \int \langle \vec{u} \cdot \vec{u} \rangle dV$ et $\langle \cdot \rangle$ la moyenne temporelle. La notation $\vec{u}_l$ désigne la répartition de la vitesse en degré d'harmoniques sphériques.

Il permet d'avoir une meilleure mesure de l'équilibre entre l'inertie et la force de Coriolis, en prenant pour échelle de longueur le degré d'harmonique sphérique $\bar{\ell}_u$ caractéristique de l'écoulement au lieu de D , l'espace entre la sphère interne et externe.

On utilise également une autre échelle de longueur, l'échelle de dissipation cinétique L_ν définie par :

$$L_\nu^2 = \left\langle \frac{\int \vec{u}^2 dV}{\int (\vec{\nabla} \times \vec{u})^2 dV} \right\rangle. \quad (2.52)$$

à partir de moyennes temporelle et volumique $\int dV$ du champ de vitesse. Celle-ci nous permet de définir un autre nombre de Rossby local : $Ro_{L_\nu} = Ro/L_\nu$, associé cette fois à l'échelle de dissipation visqueuse.

De même, il est possible de calculer une échelle de dissipation magnétique $L_\eta^2 = \left\langle \frac{\int \vec{B}^2 dV}{\int (\vec{\nabla} \times \vec{B})^2 dV} \right\rangle$. A partir de L_η et du nombre de Reynolds magnétique, on obtient un nombre d'Elsasser modifié Λ' (Dormy, 2016) :

$$\Lambda' = \frac{\Lambda D}{Rm L_\eta}. \quad (2.53)$$

Il permet notamment de mesurer l'importance relative de la force de Lorentz par rapport à la force de Coriolis, en tenant compte de l'échelle de dissipation du champ magnétique. Egalement, la valeur critique délimitant les régimes dominés par la force de Coriolis et ceux par la force de Lorentz est proche de $\Lambda' = 1$, indépendamment des paramètres d'entrée. L'interprétation de ce rapport est donc facilitée.

Enfin, pour mesurer l'intensité du champ magnétique, et en particulier celle de la composante dipolaire, Christensen et Aubert (2006) définissent l'intensité relative du champ dipolaire f_{dip} , rapport entre la composante du champ magnétique en $l = 1$ (et donc purement dipolaire) et toutes les autres au niveau de la sphère externe :

$$f_{dip} = \left\langle \frac{(\vec{B}_{l=1} \cdot \vec{B}_{l=1})^{1/2}}{\sum_{l=1}^{12} (\vec{B}_l \cdot \vec{B}_l)^{1/2}} \right\rangle_{\phi, t}. \quad (2.54)$$

Ne considérer que les douze premiers degrés d'harmoniques sphériques ne change pas les résultats : les degrés supérieurs sont négligeables. De plus, dans le cas terrestre, les observations ne permettent de mesurer le champ pour des harmoniques supérieures à 13 à cause du manteau faiblement conducteur (King et Buffett, 2013).

Spectres des forces

La répartition des forces sera étudiée sous forme de spectres, en fonction du degré d'harmonique sphérique l .

L'équation (2.42) met en évidence six termes : l'inertie, la dissipation, la pression, la force de Coriolis, la flottabilité et la force de Lorentz. Pour s'affranchir du calcul du gradient de pression, deux méthodes sont possibles : appliquer le rotationnel ou calculer une moyenne azimutale. Nous avons choisi la seconde méthode et l'avons appliquée à la composante ϕ de chacune des forces calculées (méthode similaire à Sheyko *et al.* (2017)). Cela permet également de ne considérer que la composante de la force de Coriolis non-compensée par le gradient de pression.

Pour éviter de prendre en compte les effets de bords - où la viscosité domine, le calcul est effectué sur une portion réduite de l'espace inter-coquilles : $r_i + 0.15D < r < r_e - 0.15D$. En appliquant la valeur absolue et en moyennant en temps, on obtient $\langle |F_i(l)| \rangle$, avec :

$$F_i(l) = \sum_{\substack{r < r_e - 0.15D \\ r > r_i + 0.15D}} \langle F_i^\phi(l, m=0) \rangle_t, \quad (2.55)$$

avec F_i^ϕ la composante purement azimutale (en $m = 0$ donc) de la force considérée. Seules les forces d'inertie, de Coriolis et de Lorentz ont été calculées de cette façon.

Chapitre 3

Impact de la force de Lorentz sur la topologie des champs magnétiques

3.1	Introduction et état de l'art en simulations géodynamo	37
3.1.1	Premiers modèles	38
3.1.2	Controverses	39
3.1.3	Vers une caractérisation des différents régimes dynamo	41
3.2	Différentes définitions des régimes dynamos	42
3.2.1	Régime dipolaire : Définition et caractéristiques	42
3.2.2	Régime multipolaire : Définition et caractéristiques	47
3.2.3	(Bi/In)Stabilité	50
3.3	Evolution des dynamos dipolaires dans l'espace des paramètres	52
3.3.1	Méthodologie	52
3.3.2	Transition vers l'état multipolaire	54
3.3.3	Variations du nombre d'Elsasser	56
3.3.4	Impact de la force de Lorentz	58
3.3.5	Résumé et vue d'ensemble de l'espace des paramètres	60
3.4	Transition en régime dominé par la force de Lorentz	63
3.4.1	Nouveau comportement	63
3.4.2	Différentes façons de mesurer l'importance de l'inertie	66
3.4.3	Equilibre des forces comme point de bascule	71
3.5	Pertinence pour la géodynamo et conclusions	74

3.1 Introduction et état de l'art en simulations géodynamo

Dans ce chapitre, le comportement des champs à grande échelle est étudié avec le code PaRoDy précédemment présenté (partie 2.2). L'approximation Boussinesq et des conditions aux limites sans glissement sont utilisées. L'étude porte particulièrement sur le champ magnétique terrestre. La résolution typique est de 288 points dans la direction radiale (jusqu'à 384). La décomposition spectrale est tronquée à quelques centaines de modes (jusqu'à $l_{max} = m_{max} = 256$ dans les cas extrêmes) de sorte à observer une chute d'au moins deux ordres de grandeur des spectres cinétiques et magnétiques entre le maximum et la queue du spectre. L'ensemble des simulations est effectué à $Pr = 1$ et peut être trouvé dans la table en Annexe C.

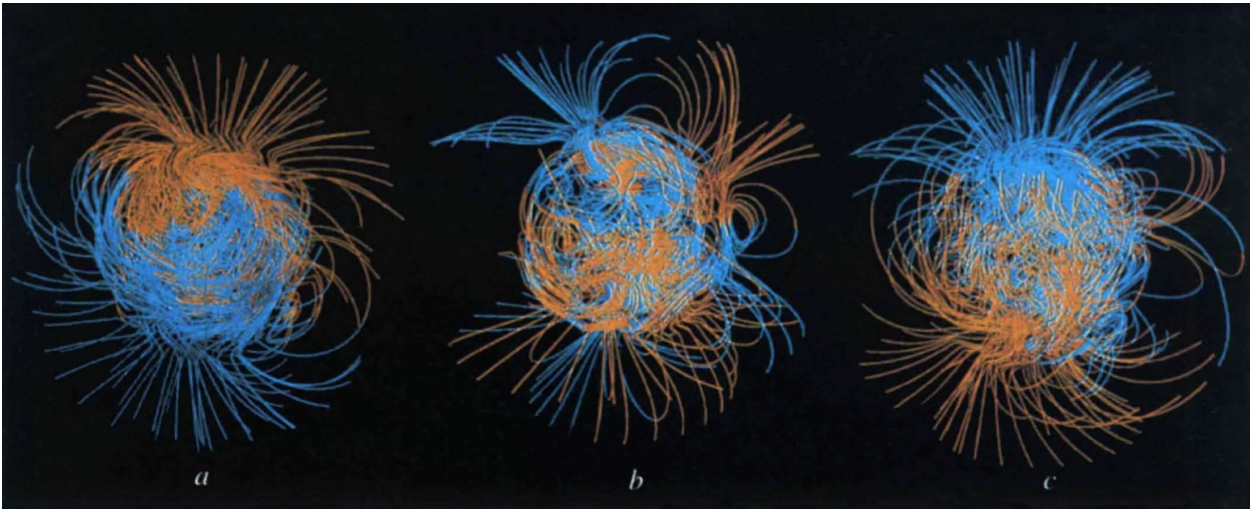


FIGURE 3.1 – Visualisation du champ magnétique pendant le premier renversement observé numériquement (Glatzmaier et Roberts, 1995).

Comme vu précédemment, le mécanisme par lequel les objets célestes maintiennent leur champ magnétique sur des temps astrophysiques est un des plus vieux problèmes de la science. Pour les planètes, l'explication plébiscitée est un champ soutenu par effet dynamo (cfr 1.1.3). Pour mieux comprendre le champ magnétique terrestre, il est intéressant de modéliser numériquement le système qui en est à l'origine. Dans le cas terrestre, il s'agit du noyau externe, c'est-à-dire du métal liquide contenu entre deux coquilles concentriques dont les rayons respectent le rapport d'aspect $\chi = 0.35$. En plus de la convection turbulente, le fluide est soumis à plusieurs forces telles que les forces magnétiques, la flottaison (Poussée d'Archimède) ou encore la force de Coriolis. Ces trois forces sont particulièrement importantes dans les études de géodynamo puisqu'elles constituent ce qu'on appellera par la suite l'équilibre MAC (pour Magnétique-Archimède-Coriolis), un équilibre de forces présumé applicable au cas du noyau externe terrestre.

L'étude de Glatzmaier et Roberts (1995) fait partie des premières simulations numériques tri-dimensionnelles de géodynamo. En particulier, le modèle utilisé, analogue à celui utilisé ici sur de nombreux aspects, a permis d'observer les premiers renversements du dipôle axial du champ magnétique (figure 3.1). Depuis, ce type de comportement a été largement observé par divers modèles. Cependant, un léger détail obscurcit le tableau : les paramètres utilisés sont fortement éloignés des paramètres réels du noyau terrestre (voir Table 1.1).

3.1.1 Premiers modèles

Ces dernières années, après les premières simulations géodynamo, les multiples études ont permis l'exploration d'un espace des paramètres vaste dans le but de déduire les ingrédients physiques à l'origine et influençant la dominance du dipôle axial. En particulier, l'étude de Christensen et Aubert (2006) fixe les bases d'une nouvelle approche de la simulation des dynamos planétaires en délimitant un certain nombre de régimes, ainsi que leurs évolutions en fonction des paramètres choisis. L'identification de lois d'échelle gouvernant les propriétés du champ permettent éventuellement de déterminer dans quel régime se place chacune des planètes (Olson et Christensen, 2006), comme le présente la figure 3.2c. Ces études ont permis de cartographier l'espace des paramètres afin de déterminer la topologie d'un champ magnétique et son mécanisme de génération à partir de quantités observables - et pouvant se rapporter aux paramètres des simulations numériques (voir partie 1.2.1 pour l'introduction des nombres sans dimension à partir des équations). Une approche

similaire du problème se concentrant sur les types de transfert thermique et l'extrapolation d'un comportement pour les intérieurs planétaires est exposée dans King *et al.* (2010). Une étude plus poussée considérant l'analyse des forces en jeu permet en plus de comprendre les causes de certains phénomènes. Par exemple, les renversements du champ géomagnétique sont probablement liés à une importance croissante des forces d'inertie dans le noyau, déstabilisant le champ moyen.

L'une des premières mentions de différents régimes pour le champ géomagnétique date de 2002, dans l'article de Kutzner et Christensen (2002). En particulier, ils ont démontré l'existence d'un régime dominé par un champ magnétique dipolaire ainsi qu'un second régime appelé multipolaire, non dominé par un dipôle magnétique.

Toutes ces études ont pour but de comprendre comment et pourquoi les champs dipolaires sont maintenus dans les systèmes astrophysiques (voir partie 1.1.2). Il est donc nécessaire de caractériser, pour mieux les distinguer, les différents régimes de dynamo ; ainsi que la stabilité, les comportements et la topologie du champ associés à chacun d'eux. Les études de paramètres permettent ainsi de déterminer quels sont les facteurs principaux affectant ces régimes ainsi que leurs limites. On observe ainsi que les nombres d'Ekman, de Prandtl magnétique et de Rayleigh sont des paramètres modifiant considérablement les limites des régimes dipolaire, multipolaire et non-dynamo (voir figure 3.2a).

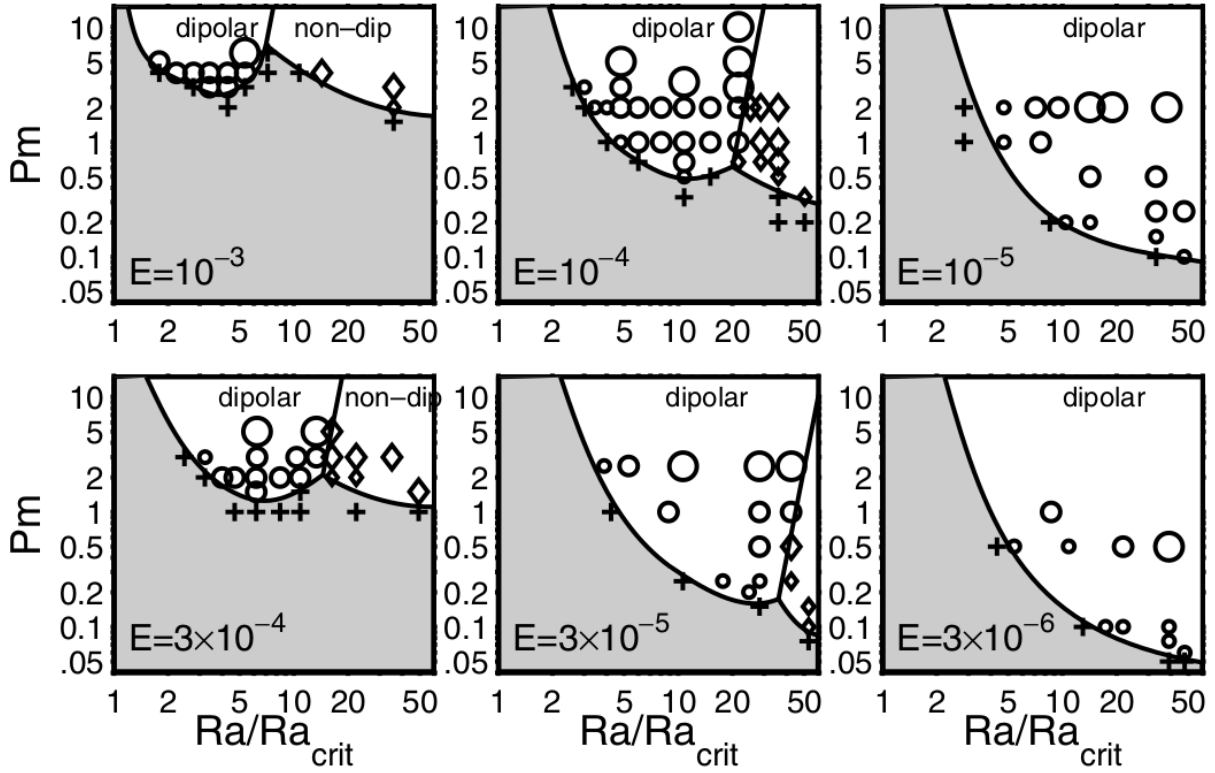
3.1.2 Controverses

Cependant les différentes limites et loi avancées (cfr Christensen *et al.* (2009); Christensen (2010); Christensen *et al.* (2010)) sont sujettes à débat, et en particulier leur pertinence pour les intérieurs planétaires. En effet, un certain nombre d'études mettent en évidence le rôle non négligeable de la viscosité (Soderlund *et al.*, 2012; Oruba et Dormy, 2014b; Cheng et Aurnou, 2016), ouvrant ainsi un débat sur la validité des critères pour toute valeur des nombres d'Ekman ou de Prandtl magnétique. Dans le même temps, les lois d'échelle obtenues en tenant compte de l'importance de la viscosité semblent sous estimer la taille caractéristique de l'écoulement dans les noyaux planétaires (King et Buffett, 2013), et mettent également en évidence les différences de régime entre les simulations modernes et la réalité astrophysique (Aurnou et King, 2017). Un équilibre entre force magnétique et force de Coriolis - dit équilibre *magnétostrophique* - serait valide pour les petites échelles principalement, alors qu'un régime quasi-géostrophique - dominé par les effets de la force de Coriolis - est attendu à grande échelle.

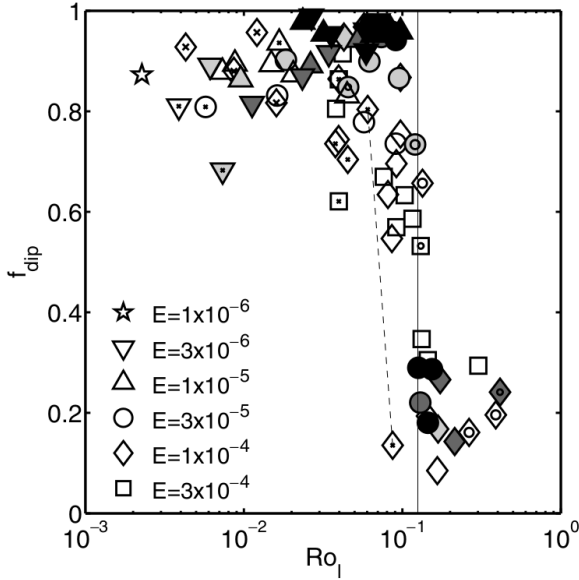
De surcroît, une certaine partie de l'espace des paramètres reste inexplorée, puisqu'elle ne correspond pas à des paramètres réalistes. Effectivement, quelle que soit l'approche utilisée, les différentes études convergent vers des Ra élevés, E et Pm bas ; ceci dans le but d'atteindre le régime magnétostrophique, pour lequel la viscosité est négligeable. Or, ce régime ne se restreint pas à ces paramètres extrêmes mais est également accessible à des nombres de Rayleigh bas et des nombres de Prandtl magnétique élevés (Dormy, 2016). Une dynamique similaire est ainsi obtenue pour des paramètres séparés de plusieurs ordres de grandeurs.

Ce régime paraît particulièrement approprié à la Terre, pour laquelle un équilibre entre force de Lorentz et force Coriolis est attendu au sein du noyau externe (Soderlund *et al.*, 2015). En prenant en compte la convection chimique, et donc la poussée d'Archimède, on obtient finalement le fameux équilibre MAC.

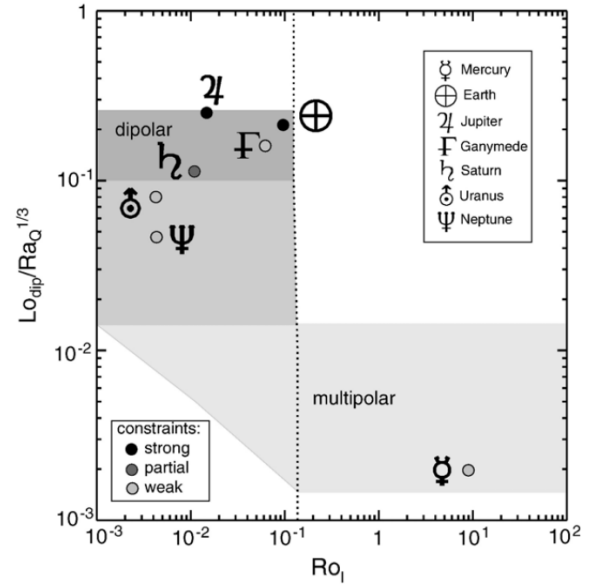
En simulations numériques directes, cet équilibre où la force de Lorentz joue un rôle majeur a été obtenu en considérant soit des nombres de Prandtl magnétique élevés (Dormy, 2016; Dormy *et al.*, 2018; Petitdemange, 2018) ou en diminuant le nombre d'Ekman (Aubert *et al.*, 2017; Schaeffer *et al.*, 2017; Sheyko *et al.*, 2017; Yadav *et al.*, 2016). Dans le premier cas, la turbulence joue un rôle mineur puisque le nombre de Reynolds est assez bas, ce qui permet d'explorer une gamme de paramètres assez large. En revanche, dans la seconde situation, les hauts nombres de Reynolds considérés augmentent le coût - numérique et financier - de telles simulations et ne permettent donc



(a) Diagramme de l'espace des paramètres de Christensen et Aubert (2006), en fonction de trois nombres caractéristiques : E , Pm , Ra/Ra_c . On distingue en particulier trois régimes : dipolaire (cercles), non dipolaire (losanges) et non-dynamo (croix).



(b) Diagramme de transition entre les régimes dipolaire et multipolaire à partir des valeurs de f_{dip} et Ro_ℓ pour plusieurs valeurs des nombres d'Ekman, de Prandtl magnétique et hydrodynamique (Christensen et Aubert, 2006). La transition est clairement observée à $Ro_\ell \sim 0.12$.



(c) Diagramme de l'espace des paramètres de Olson et Christensen (2006), distinguant régime dipolaire et multipolaire en fonction de Ro_ℓ et du rapport entre les nombres de Lorentz et de Rayleigh modifiés. Les planètes susceptibles d'héberger un effet dynamo sont également indiquées.

FIGURE 3.2 – Espace des paramètres balayé par les études de Christensen et Aubert (2006) (a) et (b) et Olson et Christensen (2006) (c), pour les intérieurs planétaires.

pas de faire des études de paramètres étendues.

Dans le cas présent, l'espace de paramètre choisi se place entre ces deux approches en étudiant un régime dans lequel l'inertie est importante tout en imposant des valeurs du nombre de Prandtl magnétique élevées. Cette méthode complète donc le vide entre les deux façons d'obtenir un régime magnétostrophique proposées par les précédentes études. En particulier, cela permet d'étudier l'impact de la force de Lorentz sur les différents régimes dynamo et leur répartition. Pour se faire, la répartition par échelle des forces magnétique, de Coriolis et d'inertie est utilisée comme un outil supplémentaire permettant de mieux distinguer les limites entre les différents régimes, ainsi que la stabilité de chacun d'entre eux.

3.1.3 Vers une caractérisation des différents régimes dynamo

La caractérisation des deux régimes dynamo - dipolaire et non dipolaire, se concrétise via l'étude de Christensen et Aubert (2006), montrant une transition déterminée par un nombre de Rossby local Ro_ℓ , représentant l'influence relative de l'inertie comparativement à la force de Coriolis. Des résultats similaires ont été reportés par la suite (Sreenivasan et Jones, 2006; Olson et Christensen, 2006; Christensen *et al.*, 2010; Schinnerer *et al.*, 2012; King et Buffett, 2013). D'après ces résultats, les modèles dipolaires sont accessibles à de petits nombres de Rossby locaux ; séparés par une limite alors très nette des régimes multipolaires où l'inertie est bien plus importante. La transition entre les deux états a apparemment lieu lorsque le nombre de Rossby atteint une valeur critique, aux alentours de 0.12. Mais cette transition a été constatée uniquement pour des études de paramètres explorant des régimes pour lesquels la force de Lorentz n'est pas dominante. Oruba et Dormy (2014b) ont aussi étudié la validité de ce critère pour des dynamos dipolaires mais seules les données de la même étude ont été utilisées (Christensen et Aubert, 2006).

La validité de cette transition entre les deux régimes à $Ro_\ell \sim 0.12$ a été peu étudiée pour d'autres gammes de paramètres, bien que les renversements géodynamos laissent penser que la Terre est proche de la zone transition. Malgré les nombreuses investigations, cette valeur reste inexpliquée et le mécanisme responsable des transitions reste flou. De plus, Petitdemange (2018) met en évidence l'existence d'un régime bistable où la configuration initiale du champ magnétique détermine la topologie finale de celui-ci.

Pour étudier ces deux régimes dans une nouvelle zone de l'espace des paramètres, il est indispensable de définir ce que nous appellerons les différents *régimes* possibles de dynamo. Celles-ci sont distinguables de différentes façons, bien que la topologie du champ moyen observé soit déterminante.

Les études précédentes se basent sur le rapport entre la valeur du dipôle magnétique à grande échelle - correspondant à $l = 1$ en termes d'harmoniques sphériques - et le champ magnétique total. Ainsi, plus ce rapport est élevé, plus le champ perçu est dipolaire - purement dipolaire si le rapport est égal à 1. Ce rapport sera appelé par la suite *intensité relative du champ dipolaire* et noté f_{dip} - défini par l'équation (3.11). Lorsque $f_{dip} > 0.5$, la solution est qualifiée de dipolaire, et lorsque $f_{dip} < 0.5$ de multipolaire.

La transition à $Ro_\ell \sim 0.12$ est caractérisée par une chute de la valeur de f_{dip} , passant de valeurs proches de 1 à des valeurs proches de 0. Ce comportement est cohérent avec la définition du Ro_ℓ , puisque celui-ci augmente avec l'importance de l'inertie.

Avant d'explorer plus avant l'impact de différents paramètres sur la topologie du champ, il faut définir précisément les critères permettant de diagnostiquer chacun des régimes.

3.2 Différentes définitions des régimes dynamos

Dans cette partie, les régimes dipolaire et multipolaire sont caractérisés précisément via plusieurs analyses, d'une part pour mettre en évidence les comportements spécifiques à chaque régime mais également afin de fixer une limite stricte entre eux. Ils seront d'abord introduits tels qu'ils sont décrits dans la littérature, puis les précisions nécessaires à ces définitions pour notre espace des paramètres seront ajoutées.

3.2.1 Régime dipolaire : Définition et caractéristiques

Pour mesurer la dipolarité d'un champ, seul le rapport f_{dip} semble pertinent. (Christensen et Aubert, 2006) qualifient une solution de dipolaire dès lors qu'elle dépasse la valeur critique pour l'intensité relative du champ dipolaire, fixée à 0.5, par définition. Au-delà de cette valeur, la composante purement dipolaire du champ magnétique représente plus de 50% du champ magnétique total. On dit alors qu'elle domine, et que le champ est alors dipolaire. Plus la valeur est proche de 1, plus le champ est proche d'un dipôle pur, non perturbé par d'autres composantes. Cette définition, n'excluant pas la possibilité de quelques excursions du champ, est adaptée à la recherche d'un régime pertinent pour le cas terrestre : majoritairement dipolaire à $f_{dip} > 0.5$ mais pouvant subir des renversements si ceux-ci ne perturbent pas le champ de grande échelle.

Le nombre d'Elsasser Λ mesure par ailleurs l'intensité du champ, mais ne donne pas d'indication sur sa topologie. On rappelle que les simulations sont initialisées pour la plupart à partir d'une simulation précédente possédant déjà un champ moyen, souvent dipolaire.

Pour mieux définir un cas dipolaire, il est intéressant de regarder la répartition de la composante radiale - selon $\vec{e}_r$ - du champ magnétique. Celle-ci est représentée en figures 3.3 et 3.4 pour plusieurs cas dipolaires classiques aux paramètres comparables à ceux des précédentes études. Dans le but de mettre en évidence le rôle du nombre de Rayleigh et de Prandtl magnétique, les simulations choisies sont à une même valeur du nombre d'Ekman, fixée à $E = 3 \times 10^{-5}$. Cela correspond au diagramme central de la ligne inférieure de la figure 3.2a, pour $Ra/Ra_c \sim 13$ ou $Ra/Ra_c > 30$ et $Pm = 1$ ou $Pm = 0.25$ (voir table 3.1). Le régime dipolaire exploré est ainsi assez représentatif, avec des cas proches ou éloignés de la limite avec les dynamos non dipolaires, d'autres plus proches de la zone non-dynamo. Des cas analogues à ces cas de référence sont présents dans Christensen et Aubert (2006), avec des paramètres d'entrée fortement similaires.

Paramètre	<i>D1</i>	<i>D2</i>	<i>D3</i>	<i>D4</i>
Ra/Ra_c	12.94	12.94	31.77	42.35
Pm	0.25	1	0.25	1
f_{dip}	0.95	0.9	0.91	0.81
Ro_ℓ	0.046	0.028	0.1	0.097
Λ'	0.057	0.45	0.148	0.739

TABLE 3.1 – Tableau de valeurs des paramètres d'entrée et de sortie (cfr partie 2.2 pour leurs définitions) pour les simulations dipolaires représentées en figure 3.3. Pour toutes, le nombre d'Ekman est fixé à $E = 3 \times 10^{-5}$, le nombre de Prandtl cinématique $Pr = 1$.

La simulation *D1* - à Pm et Ra/Ra_c les plus bas - est la plus dipolaire des quatre cas présentés. La valeur de $f_{dip} \sim 0.95$ élevée, ainsi que la dichotomie de signe entre les deux hémisphères, en témoignent. On remarque en particulier que les valeurs de la composante radiale sont presque uniformément réparties sur la sphère. Le champ du cas *D2*, à Pm quatre fois plus élevé, est légèrement différent, même si sa topologie reste globalement similaire. Quelques structures se forment à la sur-

face de la sphère d'une part, et la magnitude de la composante radiale du champ magnétique est plus élevée. La valeur de $f_{dip} \sim 0.91$, bien que légèrement inférieure au cas $D1$, confirme que ce cas est dipolaire.

Le cas $D3$, plus turbulent et à $Pm = 0.25$, témoigne de l'influence du nombre de Ra/Ra_c puisqu'on observe l'apparition de structures plus fines et des valeurs extrêmes de Br plus localisées, essentiellement proches des pôles. La répartition du champ est ainsi moins homogène, ce qui résulte notamment de l'importance de la turbulence et de l'inertie (le nombre de $Ro_\ell = 0.1$). Le cas $D4$ - aux paramètres les plus élevés - se distingue des trois autres cas dipolaires présentés. Bien que la valeur de $f_{dip} \sim 0.81$ reste bien supérieure à 0.5, le dipôle est plus désorganisé. Effectivement, les modes non dipolaires sont alors moins négligeables, mais la cause principale de cette différence est la valeur élevée du nombre de Ra , 40 fois supercritique, et imposant ainsi un état fortement turbulent. On retrouve des structures assez fines, concentrant les valeurs extrêmes de la composante radiale, comme dans le cas $D3$. Une solution quasiment identique au cas $D4$ est présenté dans Christensen et Aubert (2006), avec des paramètres d'entrée et de sortie fortement similaires.

L'impact du nombre de Rayleigh se lit en ligne et celui du nombre de Prandtl magnétique en colonne sur la figure 3.3. Les dynamos dipolaires plus turbulentes - colonne de droite - exposent ainsi des structures plus fines et des valeurs extrêmes plus localisées. L'influence du nombre de Prandtl est plus délicate à caractériser, en particulier à bas Ra/Ra_c . Les valeurs de Br atteintes sont sans surprise plus élevées, environ d'un facteur 3, cependant la composante dipolaire est moins dominante - puisque la valeur de f_{dip} est plus basse et que plus de perturbations sont constatées. Malgré ces différents aspects, toutes les dynamos présentées ici sont dipolaires, les deux hémisphères se distinguant sans difficulté et la valeur de $f_{dip} > 0.5$ pour chacune d'entre elles.

Pour les simulations aux paramètres d'entrée les plus extrêmes, $D1$ et $D4$ (respectivement à bas et haut Ra et Pm), la répartition interne du champ est représentée en figure 3.4 - sous la forme d'une coupe axisymétrique (verticale) et d'une coupe équatoriale (horizontale). La figure 3.4a correspond au cas $D1$, le plus dipolaire. La répartition interne du champ est analogue à la répartition externe : purement dipolaire. Quelques motifs, d'intensité moindre, se dessinent dans la coupe équatoriale. Cette répartition du champ est bien moins manichéenne à haut Ra , représenté en figure 3.4b. Pour la partie axisymétrique, on observe une concentration de valeurs extrêmes, dans l'alignement vertical de la graine - c'est-à-dire dans le cylindre tangent. Pour la coupe équatoriale, de longs *panaches* de la graine jusqu'à l'extérieur de la sphère sont observés, probablement dus à la convection turbulente. Ces types de répartition et de structures du champ magnétique ont déjà été mentionnés et semblent liés à la forte turbulence et à la présence d'un champ magnétique (Schaeffer *et al.*, 2017).

L'ensemble de ces vérifications permet *a priori* de confirmer que ces modèles représentent bien le régime dipolaire tel qu'il est décrit dans la littérature. Pour encore mieux comprendre les différents acteurs déterminants pour la topologie du champ, la répartition des forces selon les échelles est calculée - voir la sous-partie 2.2.3 expliquant la démarche adoptée. Ce diagnostic supplémentaire, largement utilisé, permet de déterminer quelles sont les forces dominantes et à quelles échelles, et éventuellement celles qui gouvernent la dynamique globale du système. Dans le cas dipolaire $D4$, dont l'équilibre est présenté en figure 3.5, la force majoritairement en jeu est celle de Coriolis à grande échelle, suivie de près par la force de Lorentz. Aux échelles moyennes, la force de Lorentz domine, peu à peu rattrapée par l'inertie devenant non négligeable seulement aux petites échelles. L'importance de l'inertie est fortement liée à la valeur du nombre de Rayleigh. Pour les cas à Ra/Ra_c bas, l'inertie est bien moins importante, même aux petites échelles.

Finalement, pour qualifier un modèle de dipolaire, il faut vérifier les différents indicateurs relevés par les précédentes études de paramètres, en particulier les valeurs de f_{dip} et de Ro_ℓ . Pour un cas dipolaire, la valeur de f_{dip} est supérieure à 0.5 et celle de Ro_ℓ inférieure à 0.12 - la transition vers le régime non dipolaire se faisant aux alentours de cette valeur. La répartition du champ dépend fortement de paramètres comme le nombre de Rayleigh ou de Prandtl magnétique, modulant sa dipolarité et les structures présentes. Malgré cette diversité, les diagnostics mentionnés restent pertinents pour les paramètres étudiés.

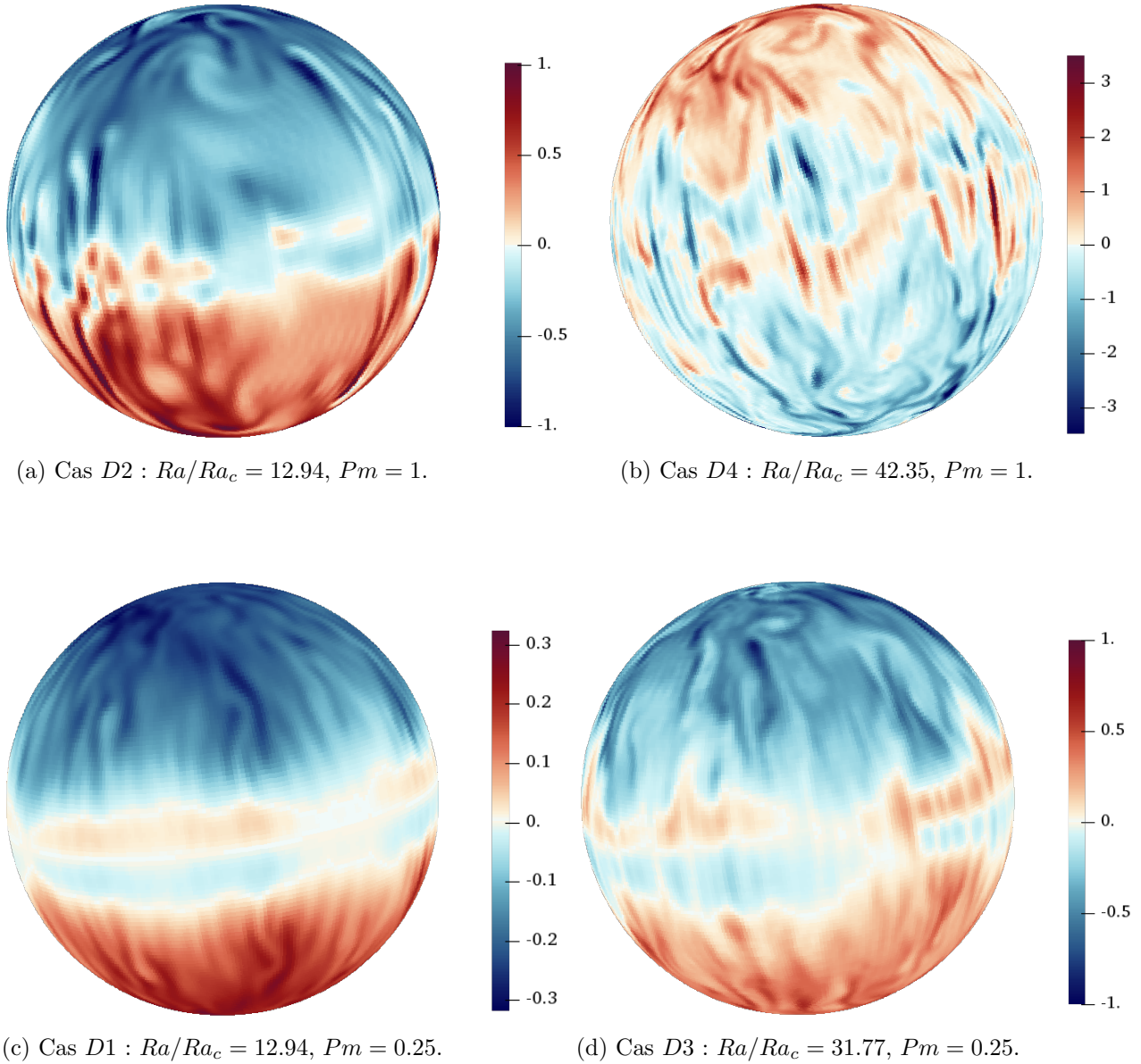


FIGURE 3.3 – Visualisation de la composante radiale (Br) du champ magnétique en unité du nombre d'Elsasser sur la sphère externe pour quatre simulations dipolaires. La couleur bleue distingue les valeurs de Br négatives et le rouge les valeurs positives. Le signe indiqué est relatif au sens du vecteur radial e_r . Les codes couleurs associés à chaque panel sont situés sur leur droite. La première ligne - (a) et (b) - correspond à $Pm = 1$, tandis que la seconde ligne - (c) et (d) - correspond à $Pm = 0.25$. De même, la première colonne illustre les cas à bas Ra/Ra_c et celle de droite à des valeurs de Ra/Ra_c plus turbulentes.

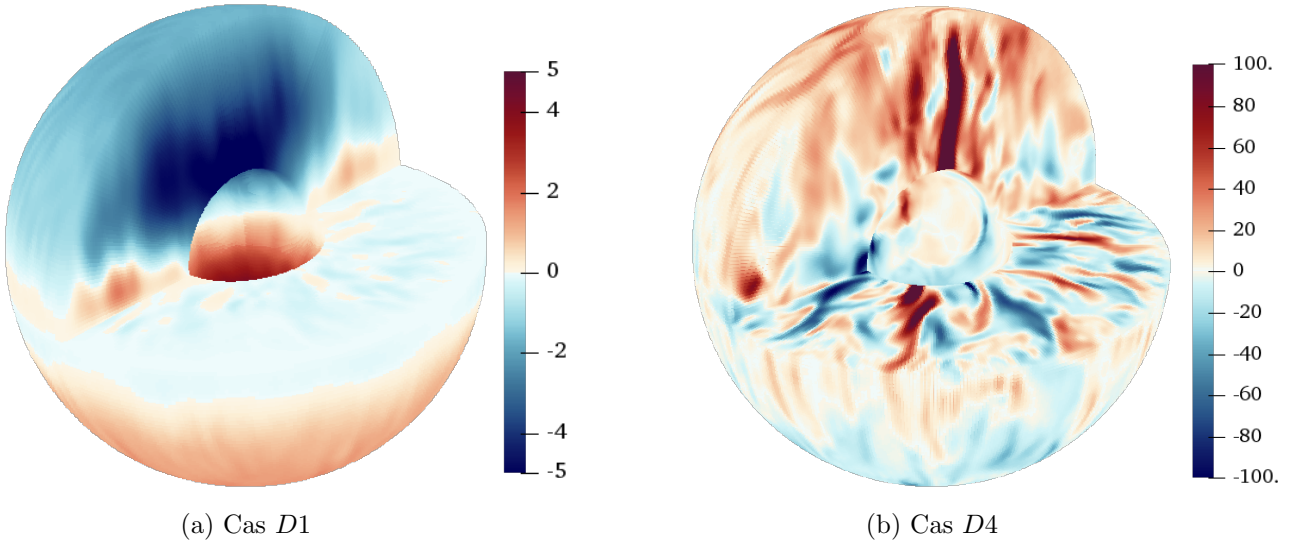


FIGURE 3.4 – Visualisation en trois dimensions de la composante radiale du champ magnétique moyennée en temps et en unité du nombre d’Elsasser pour les simulations $D1$ et $D4$. L’aperçu de l’intérieur de la sphère se fait via les coupes axisymétrique et équatoriale représentées respectivement verticalement et horizontalement. Pour le cas $D4$ (b), les valeurs extrêmes - l’échelle des couleurs est différente qu’en figure 3.3 - sont particulièrement concentrées dans le cylindre tangent à la graine (noyau interne).

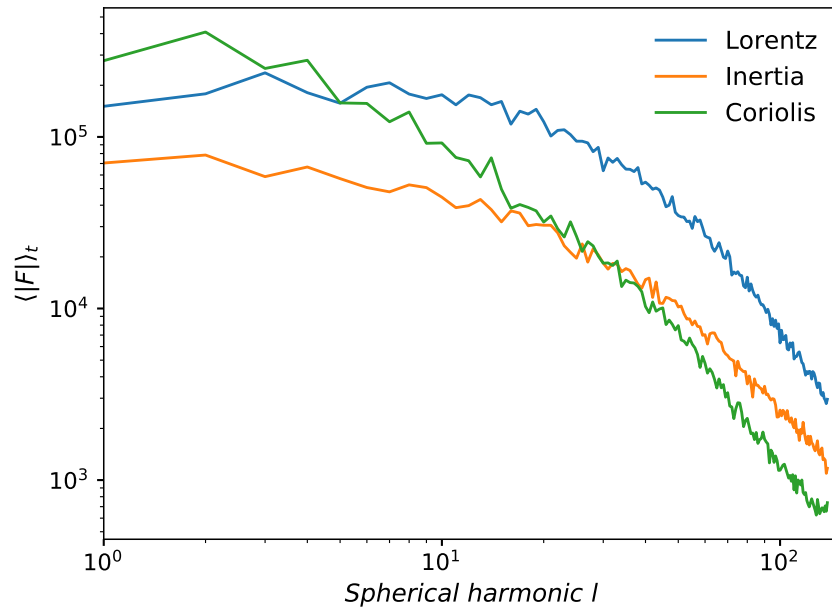


FIGURE 3.5 – Répartition en fonction du degré d’harmoniques sphériques l de trois forces - magnétique en bleu, inertielle en orange et Coriolis en vert - pour le cas dipolaire pris en exemple ($E = 3 \times 10^{-5}$, $Ra/Ra_c \sim 42$, $Pm = 1$).

3.2.2 Régime multipolaire : Définition et caractéristiques

Par opposition à la branche dipolaire, on définit la branche multipolaire pour laquelle il existe bien une dynamo, mais dont le champ résultant n'est pas dipolaire, et au contraire plutôt désorganisé. Ce type de topologie est illustré par la figure 3.6 montrant la composante radiale du champ magnétique à la surface de la sphère externe, sans aucune direction privilégiée. La répartition du champ n'est pas polarisée, les composantes négative et positive coexistant dans les mêmes régions. Chacun de ces cas multipolaires - par la suite dénommés $M1$ et $M2$ - correspondent à des paramètres d'entrée en tout point identiques aux cas dipolaires $D3$ et $D4$ à l'exception du nombre de Rayleigh plus élevé $Ra/Ra_c \sim 35$ et $Ra/Ra_c \sim 65$ respectivement. Le cas $M1$ est un cas multipolaire à bas nombre de Prandtl magnétique, pour lequel des simulations multipolaires ont déjà été obtenues précédemment. En revanche, le cas $M2$ n'est pas comparable à un cas précis de l'espace des paramètres décrit par les précédentes études. En effet, il existe peu de données de cas multipolaires pour des valeurs d'Ekman $E \leq 3 \times 10^{-5}$ et à $Ra/Ra_c > 50$ puisqu'il s'agit d'une région de l'espace des paramètres difficilement modélisable en raison du coût numérique que cela implique. Ces paramètres correspondent à des modèles pour lesquels la viscosité est faible comparativement soit à la rotation - à bas nombre d'Ekman, soit à la Poussée d'Archimède - à haut nombre de Rayleigh. Récemment, Schwaiger *et al.* (2019) exposent des simulations multipolaires à $E = 10^{-5}$ et $Ra/Ra_c \sim 38$, mais proches de la zone de non-dynamo.

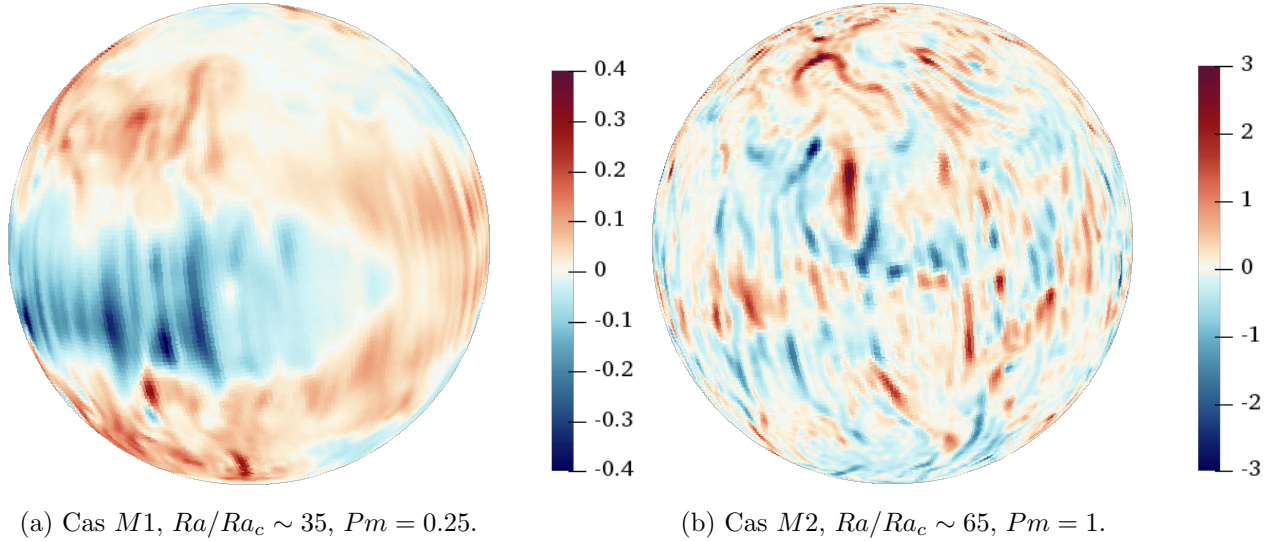


FIGURE 3.6 – Visualisation de la composante radiale (Br) du champ magnétique en unité du nombre d'Elsasser pour deux simulations multipolaires $M1$ et $M2$ dont les paramètres peuvent se trouver en table 3.2. Ils font suite aux cas $D3$ et $D4$, avec un forçage plus turbulent.

La topologie observée n'en reste pas moins similaire aux cas multipolaires préalablement étudiés. Les paramètres de sortie sont assez évocateurs de l'état du champ lorsqu'ils sont comparés aux valeurs précédemment obtenues pour le régime dipolaire (table 3.2) :

Paramètre	Multipolaire $M1$	Multipolaire $M2$	Dipolaire $D3$	Dipolaire $D4$
Ra/Ra_c	35.3	64.71	31.77	42.36
Pm	0.25	1	0.25	1
Ro	1.6×10^{-2}	2.1×10^{-2}	1.2×10^{-2}	1.12×10^{-2}
Rm	133	687	99	376
Nu	10	14.05	8.82	9.5
Λ	0.28	5.26	0.95	9.82
f_{dip}	0.33	0.49	0.91	0.81
Ro_ℓ	0.14	0.16	0.1	0.097

TABLE 3.2 – Tableau de valeurs des paramètres d’entrée (au-dessus de la ligne) et de sortie (en-dessous) comparant les valeurs pour les simulations multipolaires $M1$ et $M2$ aux valeurs obtenues pour les simulations dipolaires $D3$ et $D4$ décrites dans la partie précédente. Toutes les simulations sont à $E = 3 \times 10^{-5}$. Plusieurs paramètres de sortie changent drastiquement alors qu’un seul paramètre d’entrée est modifié : Ra/Ra_c .

Le cas $M1$ est à comparer au cas $D3$, tout deux à $Pm = 0.25$, et le cas $M2$ à comparer au cas $D4$, à $Pm = 1$. Les valeurs de Ra/Ra_c nécessaires à l’obtention du régime multipolaire augmentent avec Pm . A $Pm = 0.25$, le cas $M1$ est obtenu à $Ra/Ra_c \sim 35$, tandis que pour une valeur de Pm quatre fois supérieure, il faut atteindre un régime bien plus turbulent, à $Ra/Ra_c \sim 65$. En comparant les cas multipolaires avec leur prédécesseurs dipolaires, on remarque notamment la chute du nombre d’Elsasser Λ , correspondant à la baisse d’amplitude du champ moyen, ainsi que celle de l’intensité relative du champ dipolaire f_{dip} , correspondant à la perte du caractère dipolaire du champ. Les nombres de Reynolds magnétique et de Rossby augmentent sans surprise au vu des conditions imposées. Ces deux nombres étant directement proportionnels à l’inertie, ces augmentations sont d’autant plus importantes à $Pm = 1$. La valeur de Ro_ℓ a quant à elle dépassé la valeur critique, ce qui confirme donc la validité du critère avancé par Christensen et Aubert (2006) dans ce cas. La valeur critique $Ro_\ell = 0.12$ au-delà de laquelle l’ensemble des solutions obtenues jusqu’alors sont multipolaires ne dépend pas de l’intensité du champ ni de Pm . Il s’agit donc, comme l’illustre la figure 3.2b d’un critère hydrodynamique.

Pour la transition à $Pm = 1$, entre $D4$ et $M2$, bien qu’une chute de la valeur de f_{dip} soit observée, elle n’est pas comparable à celle à plus bas Pm . Une valeur à peine inférieure à 0.5 est obtenue pour cette simulation, alors qu’à $Pm = 0.25$, la valeur de $f_{dip} \sim 0.33$ est similaire à celles obtenues dans les précédentes études (voir partie 3.3). Néanmoins, les critères avancés restent respectés.

La visualisation de l’intérieur de la sphère (figure 3.7) ne révèle cette fois ni direction ni région privilégiées concentrant les valeurs maximales du champ. Des structures apparaissent également dans les coupes axisymétrique et équatoriale, mais leur intensité reste considérablement plus faible que pour le cas dipolaire - presque deux ordres de grandeurs inférieure.

Si l’on s’intéresse à l’équilibre des forces pour le cas multipolaire $M2$ (figure 3.8), la répartition de celles-ci est bien différente. La force de Coriolis domine à nouveau les grandes échelles, mais l’inertie a pris le pas sur la force de Lorentz et domine les petites échelles. Ceci est cohérent avec l’interprétation prêtée au régime multipolaire, c’est-à-dire à une branche pour laquelle le champ magnétique joue un rôle mineur aux grandes échelles et que l’inertie - liée au caractère turbulent de l’écoulement - est devenue suffisamment importante pour perturber la dynamique à grande échelle. Pour des cas multipolaires à plus bas Pm , l’inertie est toujours dominante - signature de ce régime, mais la force de Lorentz est moindre. Bien que ce type de comportement ait été largement observé,

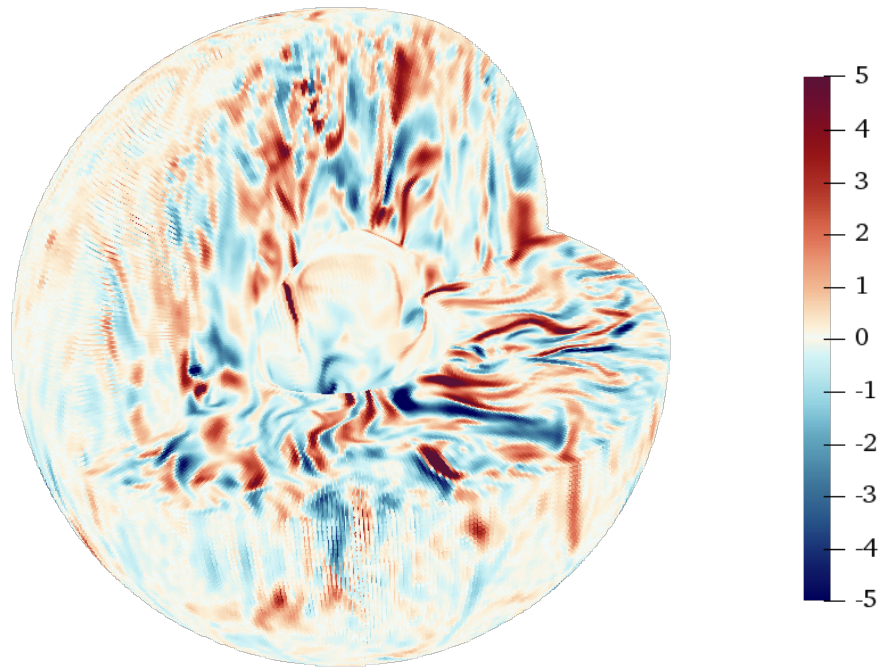


FIGURE 3.7 – Visualisation en trois dimensions de la composante radiale du champ magnétique en unité du nombre d’Elsasser pour la simulation multipolaire $M2$. Les valeurs extrêmes - l’échelle des couleurs est différente de celle de la figure 3.6 - sont plutôt dispersées.

on ignore si cette prépondérance des forces d’inertie est une cause ou une conséquence du régime multipolaire.

Bien que le champ créé soit faible, il est important de noter que ce régime correspond malgré tout à une dynamo stable puisque cet état s’auto-alimente dans le temps. De plus, les cas présentés ici correspondent au type de dynamos multipolaires obtenues dans cette étude. En réalité, les dynamos multipolaires ont des comportements variés : certaines vont ressembler au cas terrestre (Sheyko *et al.*, 2016), d’autres vont subir des renversements, tandis que d’autres encore sont proches de la zone de transition avec l’état dipolaire. La robustesse des critères avancés (sur la valeur de Ro_ℓ et de f_{dip}) est donc primordiale dans l’étude des différents régimes dynamos et de leur répartition dans l’espace des paramètres.

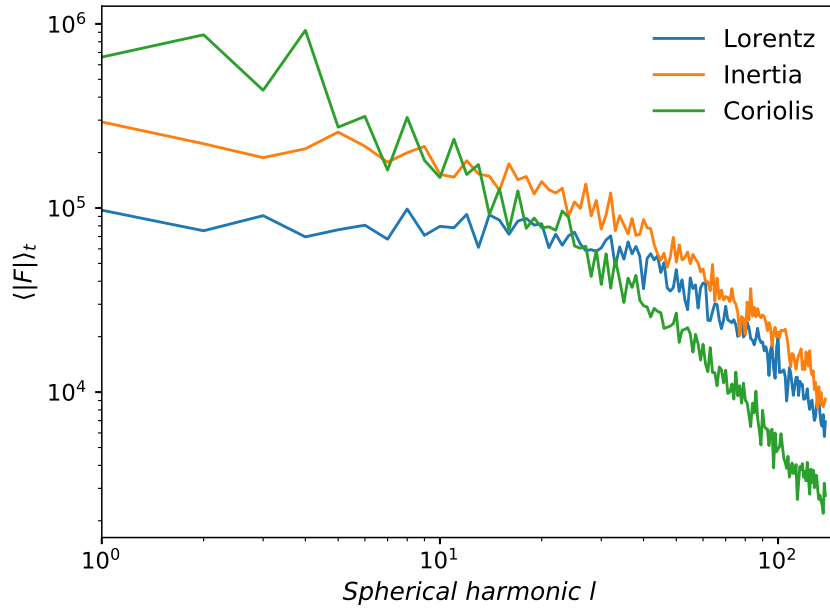


FIGURE 3.8 – Répartition en fonction du degré d’harmonique sphériques l de trois forces - magnétique en bleu, inertielle en orange et de Coriolis en vert - pour le cas multipolaire $M2$.

3.2.3 (Bi/In)Stabilité

Avec ces critères, il paraît simple de faire la distinction entre un régime dipolaire et un régime multipolaire. Cependant, la nature et les simulations numériques qui en découlent ne sont pas aussi manichéennes. Effectivement, il n’y a pas réellement de frontière stricte définie permettant de distinguer les deux régimes, bien que certains critères semblent s’en approcher. De même qu’il n’est pas possible de déterminer si un écoulement est turbulent simplement à partir du nombre de Reynolds, il n’est pas possible de déterminer la topologie d’un champ magnétique à partir d’une ou même de plusieurs valeurs. Les simulations géodynamo sont sensibles à la géométrie, aux conditions aux limites et évidemment aux paramètres choisis. Pour la géométrie choisie, les possibilités sont assez restreintes. Par soucis de simplicité, la symétrie sphérique est largement employée, puisque relativement proche de celle des astres. On trouve aussi quelques modèles étudiant les effets d’un changement de géométrie en utilisant des sphéroïdes.

La transition à $Ro_\ell \sim 0.12$ semble assez robuste puisqu’elle est observée pour une gamme étendue de valeurs des nombres caractéristiques E , Pm et Pr (voir figure 3.2b). On a vu que l’une des distinctions entre les deux branches réside dans le rôle non négligeable des forces d’inertie à grande et moyenne échelle, alors en compétition avec la force de Coriolis. Le nombre de Rossby local Ro_ℓ peut être construit en suivant ce raisonnement : on considère à la fois le rapport de ces deux forces - c’est-à-dire le nombre de Rossby Ro , et l’échelle caractéristique de l’écoulement fluide - représenté par le degré d’harmoniques sphériques $\bar{\ell}_u$ (cfr équation (2.51)). La valeur critique 0.12 correspond quant à elle à une observation sans signification physique, et est donc valable uniquement dans l’espace des paramètres étudié. Ensuite, en utilisant l’intensité relative du champ dipolaire f_{dip} pour déterminer si un modèle est dipolaire ($f_{dip} > 0.5$) ou multipolaire ($f_{dip} < 0.5$), la répartition des deux régimes en fonction de Ro_ℓ est obtenue. Cette représentation très évocatrice fait effectivement apparaître une scission nette entre les modèles dipolaire et multipolaire à $Ro_\ell = 0.12$, indifféremment des paramètres d’entrée (figure 3.2b).

Pour distinguer les deux régimes, au-delà de la valeur de Ro_ℓ obtenue, l'évolution au cours du temps des paramètres de sortie d'une même simulation comme l'intensité relative du champ dipolaire f_{dip} ou l'angle d'inclinaison θ est également utile. Un modèle en régime dipolaire, stable, conserve des valeurs quasiment constantes au cours du temps. Pour le modèle dipolaire $D4$ présenté en 3.2.1, les paramètres obtenus sont $f_{dip} \sim 0.86$ en moyenne, et un angle d'inclinaison $\theta \sim 0$ - c'est-à-dire un champ moyen aligné avec l'axe de rotation. Des fluctuations minimales sont observées autour de ces valeurs moyennes (voir figure 3.9a), qui restent cependant valables quel que soit l'intervalle temporel choisi.

Pour le cas multipolaire $M2$, pour lequel les mêmes quantités sont représentées en figure 3.9b, on observe au contraire de larges fluctuations à partir d'un certain temps $t_{mag} > 0.96$. En effet, avant cela les deux paramètres semblent stables au cours du temps, ce qui est dû au fait que cette simulation a été démarrée d'une simulation dipolaire aux paramètres similaires préalablement effectuée. Cette période de temps durant laquelle les valeurs de f_{dip} et θ sont stables correspond en réalité à la durée nécessaire pour que l'état multipolaire se déclare. Il s'agit donc d'un régime transitoire, dû au champ magnétique dipolaire initialement imposé à la simulation. Il n'est évidemment pas pris en compte dans les calculs des valeurs moyennées en temps. Passé ce régime transitoire, la valeur de f_{dip} chute jusque des valeurs inférieures à 0.5, synchronisée à l'apparition de plus larges fluctuations de θ . Cela correspond à une composante dipolaire amoindrie, et de plus grands écarts de l'axe principal du champ - correspondant à $\theta \sim \pi/4$. Ce type de comportement permet de qualifier ce modèle de multipolaire, bien que f_{dip} fluctue autour de 0.5 après le régime transitoire. Cette valeur proche de la valeur critique est cependant bien inférieure à celle obtenue pour une valeur de Ra/Ra_c légèrement moins turbulente - qui était supérieure à 0.8, ce qui confirme que la transition entre les deux régimes a bien eu lieu.

Evidemment, des modèles multipolaires pour lesquels on constate une chute plus importante de f_{dip} sont également observés - voir figure 3.11 de la partie suivante. Pour ces simulations multipolaires, des renversements désordonnés de l'orientation du champ sont obtenus, avec d'importantes fluctuations de θ entre 0 et π . Le régime multipolaire, dans son incapacité à maintenir un champ d'orientation stable, peut être caractérisé comme un régime instable - en adéquation avec la non-linéarité des forces inertielles importantes dans ce régime.

A la lumière de ces observations, les critères employés pour caractériser les différents régimes doivent être plus strictes. Ainsi, pour notre espace des paramètres :

Le régime **dipolaire** désigne les cas pour lesquels $f_{dip} > 0.5$, dont le champ magnétique est stable dans le temps et ne subit aucune excursion. Les forces d'inertie sont peu importantes à grande échelle comparativement aux forces de Lorentz et de Coriolis.

Le régime **multipolaire** correspond aux cas pour lesquels l'inertie est non négligeable, entraînant une chute de la composante dipolaire du champ. Dans cette étude, une seule excursion du champ magnétique vers de plus basses latitudes suffit pour qualifier une simulation de multipolaire.

Malgré tout, ces deux définitions ne sont utiles que pour distinguer avec certitude deux régimes tels qu'on choisit de les définir. Pour les objets astrophysiques, ou pour d'autres gammes de paramètres, les différences entre les régimes sont plus ténues.

Les régimes multipolaire et dipolaire sont indépendamment stables dans le temps, cependant les modèles se plaçant à proximité de la zone de transition entre les deux régimes peuvent être considérés instables puisqu'ils *oscillent* entre les deux états. Ce type de comportement chaotique est particulièrement recherché, d'une part pour étudier les causes des renversements géomagnétiques, mais également car les paramètres du noyau terrestre le placent proche de la transition (Olson et Christensen, 2006). Les études du champ magnétique pendant les renversements sont également à

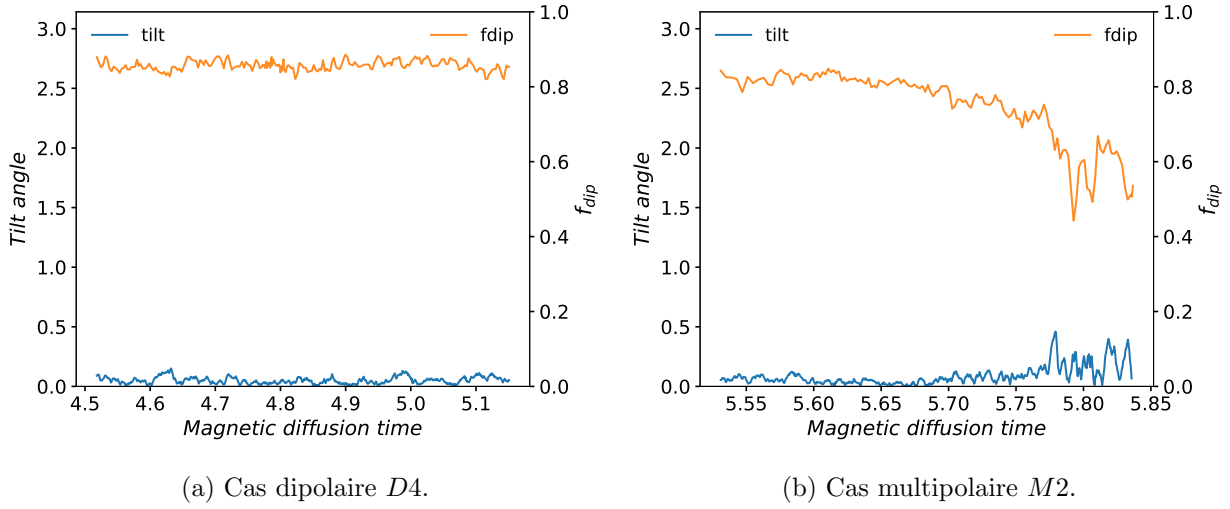


FIGURE 3.9 – Evolution temporelle des paramètres de sortie f_{dip} en orange - entre 0 et 1, axe de droite, et θ ou $tilt$ en bleu - entre 0 et π , axe de gauche - pour les deux cas d'école présentés précédemment. (a) : cas dipolaire $D4$, pas de fluctuations importantes; (b) : cas multipolaire $M2$, fluctuations de f_{dip} et de θ à partir de $t_{mag} \sim 5.8$ environ.

l'interface des deux régimes, rendant ainsi cette zone instable d'autant plus source d'intérêt. De récentes études montrent l'impact des conditions initiales sur le champ observé, allant jusqu'à des zones bistables permettant l'accès aux deux régimes (Petitdemange, 2018).

L'enjeu est donc de caractériser les paramètres influençant les limites et les conditions d'accessibilité à cette zone de transition permettant des renversements chaotiques du champ magnétique. Ainsi, malgré les tentatives de sectorisation de l'espace des paramètres permettant des dynamos auto-entretenues, ce dernier n'est pas simplement divisible en deux régimes bien distincts, et les mécanismes les distinguant sont encore obscures.

Effectivement, les cas présentés dans cette partie sont en quelque sorte les *cas d'école* de notre étude. Ils attestent de la cohérence de nos résultats et de nos méthodes d'analyse avec l'ensemble de la communauté. Cependant ces modèles, et les interprétations qui en découlent ne sont *a priori* pas représentatifs de l'ensemble de l'espace des paramètres. Effectivement, dans le but d'approcher les paramètres du noyau terrestre (voir partie 1.2.3) la plupart des études se tournent vers des valeurs d'Ekman et du Prandtl magnétiques de plus en plus basses, laissant ainsi une bonne partie de l'espace des paramètres inexplorée (figure 3.10). Or, les ressources numériques actuelles ne permettant pas de reproduire les valeurs extrêmes des objets astrophysiques, il est donc dans tous les cas nécessaire d'extrapoler les résultats et comportements observés - à partir de lois d'échelle effectuées sur un espace des paramètres restreint (Olson et Christensen, 2006; Christensen, 2010; Oruba et Dormy, 2014a; Cheng et Aurnou, 2016). Pour une extrapolation plus précise, il est utile de recouvrir une partie conséquente et diversifiée de l'espace des paramètres.

3.3 Evolution des dynamos dipolaires dans l'espace des paramètres

3.3.1 Méthodologie

Cantonons-nous pour le moment à l'espace des paramètres exploré précédemment. Dans certains cas, comme ceux présentés, il est relativement simple de passer d'un régime à l'autre, en augmentant l'intensité de la convection pour atteindre des régimes plus turbulents, correspondant

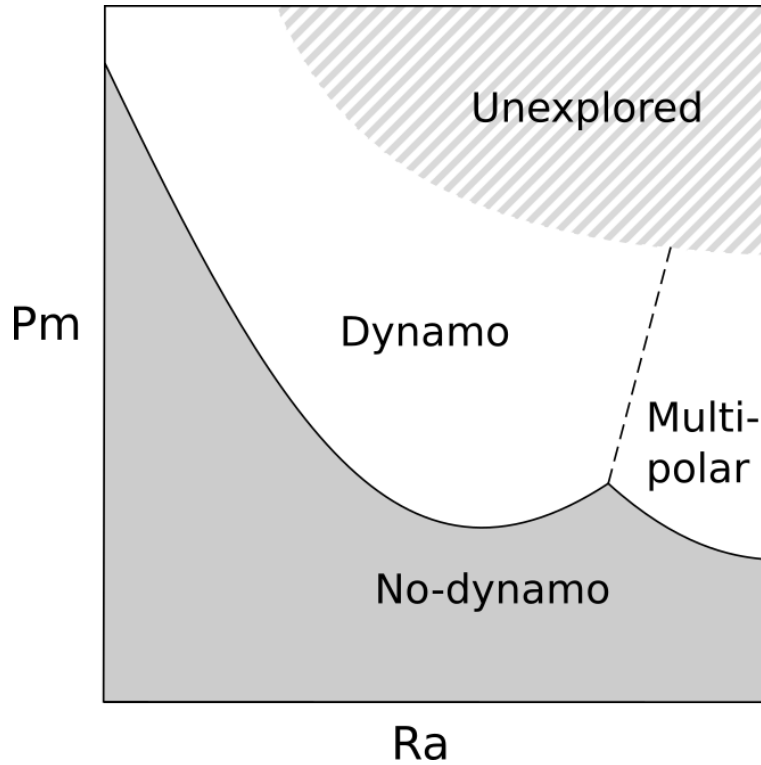


FIGURE 3.10 – Représentation schématique de l'espace des paramètres exploré jusqu'à alors, à Ekman moyen $E \sim 3 \times 10^{-5}$. La zone grise correspond aux paramètres ne permettant pas d'entretenir une dynamo, la zone hachurée à la partie non explorée de l'espace des paramètres, la ligne tiretée est la limite empirique entre les régimes dipolaire et multipolaire.

dans ce modèle à une augmentation du nombre de Rayleigh. Y aurait-il, de façon analogue au Ra_c pour le déclenchement de la convection, un Ra_c déterminant la transition vers le régime multipolaire? Certaines études mentionnent des nombres de Ra critiques pour obtenir les renversements (Kutzner et Christensen, 2002), construits de façon similaire. Cependant, la forte dépendance de ces valeurs en fonction des nombres de Prandtl hydrodynamique et d'Ekman n'a pas permis d'en déduire un critère universel, ni une loi théorique. Que ce soit pour le nombre de Rayleigh ou tout autre paramètre d'entrée, il ne semble pas y avoir de valeur critique définissant la limite entre ces deux régimes. C'est pour cette raison que les valeurs des paramètres de sortie ont été analysées de sorte à trouver différents critères correspondant aux limites entre les différents régimes.

Parmi eux, le nombre de Reynolds magnétique Rm , est un des seuls paramètres dont la valeur obtenue en simulation numérique est réaliste : $Rm \sim 10^3$. De telles valeurs de Rm ont été atteintes par plusieurs études récentes, adoptant différentes stratégies. Lorsque Rm est suffisamment élevé, Dormy (2016); Petitdemange (2018); Dormy *et al.* (2018) ont montré que la force de Lorentz joue un rôle majeur. Cependant, ces études ont atteint ces valeurs en considérant des valeurs de Pm élevées, baissant ainsi le nombre de Reynolds hydrodynamique ($Re = Rm/Pm$) ce qui ne permet pas de qualifier ces modèles de turbulents. Par exemple, l'étude de Dormy (2016) est restreinte à des valeurs du nombre de Rayleigh proche du Ra_c pour la convection - $Ra_{Dormy} < 4Ra_c$. Yadav *et al.* (2016); Schaeffer *et al.* (2017); Aubert *et al.* (2017) ont également observé l'importance de la force de Lorentz à haut Rm en considérant des modèles plus turbulents à bas Pm et à bas E . Le but de cette étude est, entre autre, de compléter cet espace des paramètres en liant les différentes zones déjà étudiées grâce à des modèles turbulents - avec des valeurs de Ra/Ra_c élevées - et des

nombres de Prandtl magnétique moyens (voir figure 3.10). Dans ce but, le nombre de Rayleigh a été graduellement augmenté à Pm fixé pour atteindre ce régime turbulent.

Bien que ne se rapprochant pas des paramètres terrestres ainsi, compléter l'espace des paramètres vers les Pm plus élevés permet de valider ou d'invalider certaines lois d'échelle, mais également de s'éloigner de la zone de non-dynamo, et donc d'étudier la limite entre régimes multipolaire et dipolaire dans d'autres conditions. La distinction entre les deux régimes se fait selon les critères exposés en partie 3.1. Dans cette partie, l'impact de différentes quantités, et en particulier de la force de Lorentz, sur la répartition des dynamos dipolaires dans l'espace des paramètres étendu à la zone non explorée représentée en figure 3.10 est étudié.

3.3.2 Transition vers l'état multipolaire

L'obtention de solution dipolaires turbulentes est limité à haut nombre de Rayleigh par le régime multipolaire. Comme préalablement mentionné, il a été observé que la transition entre ces deux régimes s'effectue, pour l'espace des paramètres sondé, aux alentours de $Ro_\ell \sim 0.12$. La figure 3.11 représente la répartition des modèles dans l'espace (f_{dip}, Ro_ℓ) , pour les quatre valeurs d'Ekman étudiées de façon approfondie - réparties entre $3 \times 10^{-4} \leq E \leq 10^{-5}$. La forme des symboles indique la topologie du champ observé - cercles pour le régime dipolaire, carrés pour le régime multipolaire ; et la couleur indique la valeur de Pm .

Les symboles jaunes correspondent aux valeurs de Pm les plus basses, souvent proches de la limite pour que l'effet dynamo ait lieu. Dans ces cas, appartenant à l'espace des paramètres déjà exploré, on constate effectivement une chute nette de f_{dip} au moment de la transition entre les deux régimes, passant de 0.9 à 0.3 pour $E = 3 \times 10^{-5}$ et $Pm = 0.25$ par exemple. En suivant une même branche - à Pm constant - vers des valeurs plus élevées de Ro_ℓ , la transition s'opère effectivement aux alentours de $Ro_\ell \sim 0.12$, valeur critique indiquée par la ligne en tirets.

Cependant, en augmentant le nombre de Prandtl magnétique, la transition semble bien plus progressive, et entre autre avoir lieu à des valeurs de $Ro_\ell > 0.12$. Par exemple, à $E = 3 \times 10^{-4}$ et $Pm = 6$, en vert sur le panel 3.11a, plusieurs solutions dipolaires persistent jusqu'à $Ro_\ell \sim 0.14$ pour des valeurs de f_{dip} très proches de 0.5. Ce comportement singulier est accentué lorsqu'on augmente encore la valeur du nombre de Prandtl magnétique : à $Pm = 8$, en violet, le champ dipolaire est maintenu jusqu'à $Ro_\ell > 0.15$.

Pour des valeurs du nombre d'Ekman plus basses, un comportement analogue est observé. En s'attardant sur le panel 3.11b, la transition entre les deux régimes se fait effectivement aux alentours de la valeur critique $Ro_\ell \sim 0.12$, mais uniquement pour les valeurs de Pm les plus basses - i.e. à $Pm = 1, 2$. A partir de $Pm = 3$, la transition vers le régime multipolaire a lieu aux alentours de $Ro_\ell \sim 0.15$ seulement ; tandis qu'à $Pm = 5$, les modèles outrepassent la valeur critique et atteignent jusqu'à $Ro_\ell \sim 0.18$ en restant dipolaires et en conservant même une valeur de $f_{dip} > 0.7$. A nouveau, à $E = 3 \times 10^{-5}$ - panel 3.11c : la branche à $Pm = 2.5$ reste dipolaire à $Ro_\ell > 0.16$ alors que les modèles à $Pm = 0.25$ ou $Pm = 1$ sont devenus multipolaires à des valeurs plus basses de Ro_ℓ . A $E = 10^{-5}$, une transition à $Pm = 0.2$ est obtenue aux alentours de la valeur critique $Ro_\ell \sim 0.12$. Effectivement, bien que la valeur de Pm soit plus élevée comparativement aux autres simulations multipolaires étudiées pour cette valeur d'Ekman (Schwaiger *et al.*, 2019), elle reste relativement basse.

La valeur du nombre de Prandtl magnétique a donc un impact non négligeable sur la valeur du nombre de Rossby local pour laquelle la transition vers le régime multipolaire a lieu. Cette valeur critique de $Ro_\ell \sim 0.12$ est dépassée dès lors que des valeurs de Pm suffisamment élevées

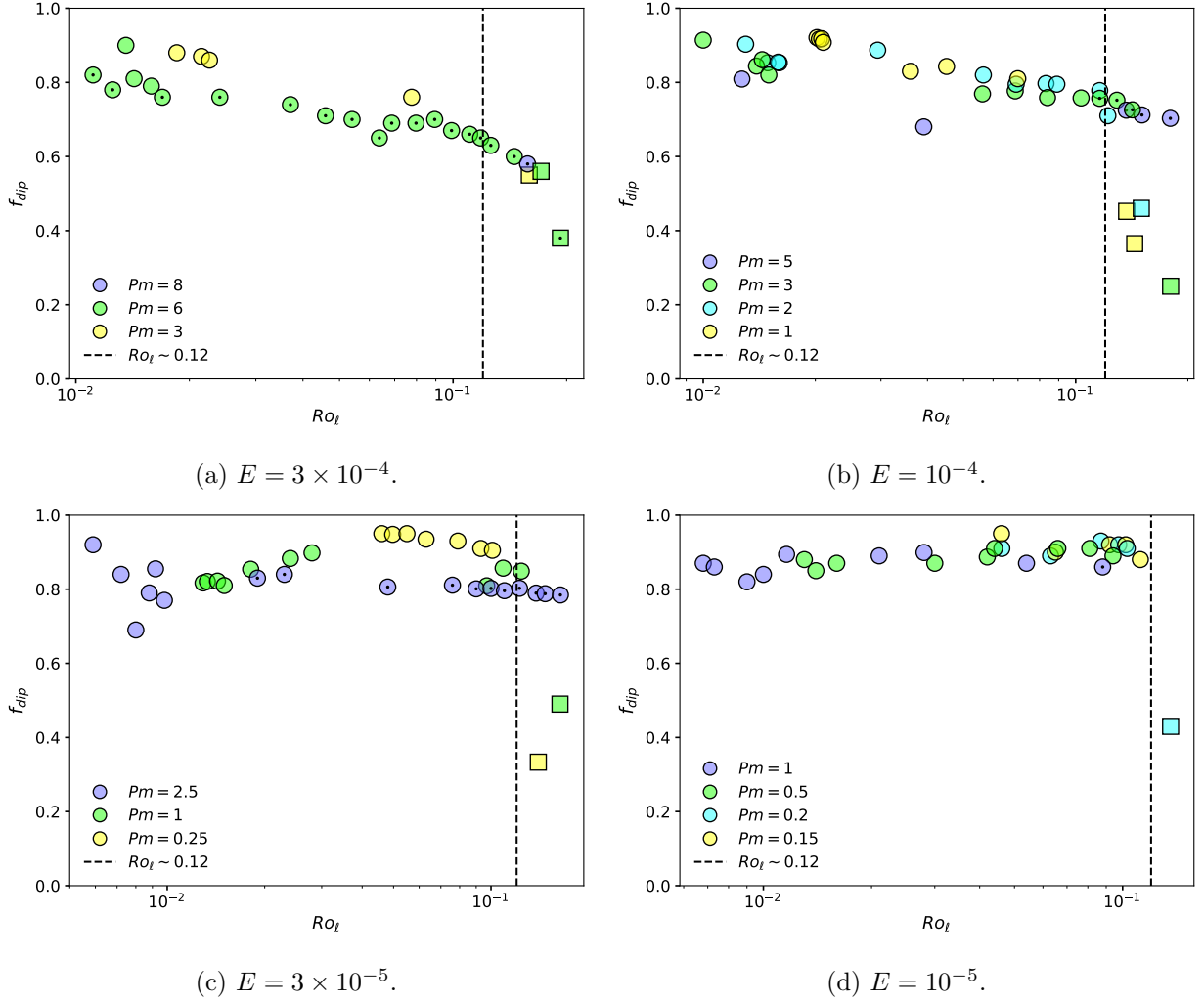


FIGURE 3.11 – Répartition de l'intensité relative du champ dipolaire f_{dip} en fonction du nombre de Rossby local Ro_l pour quatre valeurs du nombre d'Ekman. Pour chacune, les couleurs des symboles correspondent à une valeur du nombre de Prandtl magnétique, et leur forme à la topologie du champ : dipolaire (cercle) ou multipolaire (carré). La ligne verticale en tirets indique la valeur critique pour la transition observée par les études précédentes $Ro_l \sim 0.12$. Les points à l'intérieur de certains symboles distinguent les dynamos dominées par la force de Lorentz des *classiques*.

sont considérées, c'est-à-dire en explorant un espace des paramètres plus éloigné de la zone de non-dynamo. Cette trouvaille n'empêche toutefois pas la transition d'avoir lieu, mais simplement la décale à des valeurs de Ro_ℓ plus élevées. On recense ainsi des transitions ayant lieu jusqu'à $Ro_\ell \sim 0.18$ à mesure que Pm augmente (panel 3.11a).

3.3.3 Variations du nombre d'Elsasser

L'intensité du champ magnétique étant mesurée par le nombre d'Elsasser Λ , son évolution dans l'espace des paramètres est particulièrement intéressante dans l'étude du champ magnétique. Sans surprise, les valeurs élevées de Pm permettent d'obtenir des nombres d'Elsasser plus élevés, et ce quelle que soit la valeur du nombre d'Ekman. Le nombre d'Elsasser étant le rapport entre la force de Lorentz et la force de Coriolis, plus il est élevé, plus on s'approche d'un modèle de champ fort. Les valeurs maximales obtenues pour chaque branche sont listées en table 3.3. Lorsque la force de Coriolis est dominante, les valeurs de Λ sont plus faibles - pas nécessairement inférieures à l'unité. Comme l'illustre Soderlund *et al.* (2015), le nombre d'Elsasser classique, issu de l'équation du mouvement, n'est pas un rapport équilibré, et ne possède pas de valeur critique applicable à l'ensemble de l'espace des paramètres. Pour le noyau terrestre, on estime que la force de Lorentz est importante ($\Lambda \geq 10$) malgré une force de Coriolis dominante aux grandes échelles. Les modèles à bas Pm s'éloignent ainsi des paramètres permettant de maintenir un nombre d'Elsasser proche du cas terrestre. Avec les modèles à plus haut Pm , les valeurs obtenues sont plus réalistes.

E	Pm	Ra/Ra_c	Λ_{max}
3×10^{-4}	8	30	41
	6	25	32
	3	20	5
1×10^{-4}	5	50	49
	3	43	20
	2	32	11
	1	25	3
3×10^{-5}	2.5	82	42
	1	65	10
	0.25	35	1
1×10^{-5}	1	76	22
	0.5	76	6
	0.2	66	2
	0.15	63	1

TABLE 3.3 – Tableau des maxima moyens du nombre d'Elsasser, obtenus pour chaque *branche* étudiée, c'est-à-dire à E et Pm constants. Ces valeurs ont été utilisées pour normaliser l'évolution du nombre d'Elsasser représentée en figure 3.12.

L'évolution de Λ en fonction des trois paramètres d'entrée (Pm, Ra, E) est représentée sur la figure 3.12. Les modèles choisis pour ces panels et leur représentation sont identiques à la figure 3.11. Les valeurs sont normalisées aux maxima de chaque branche à Pm constant (voir table 3.3), afin de mieux pouvoir les comparer. En augmentant la valeur du nombre de Rayleigh, le nombre d'Elsasser - moyenné en temps - augmente progressivement jusqu'à son maximum. Pour des Ra/Ra_c

suffisamment élevés pour atteindre le régime multipolaire (symboles carrés), le nombre d'Elsasser chute, de 20% à 80% de sa valeur maximale. La valeur atteinte après la transition dépend fortement de la branche choisie, i.e. du nombre de Prandtl magnétique. Plus la valeur de Pm est proche des minima pour la dynamo, plus la différence de valeur du nombre d'Elsasser entre les deux régimes est importante. Cette dépendance est bien illustrée au panel 3.12b, à $E = 10^{-4}$: la branche à $Pm = 1$ chute de 80%, celle à $Pm = 2$ de 60% et celle à $Pm = 3$ de 40% seulement. Pour ($E = 3 \times 10^{-4}$, $Pm = 3$), on observe également une baisse de 40% après la transition, mais de moins de 20% à $Pm = 6$.

Cette baisse extrêmement faible rend difficilement distinguables les simulations avant et après la transition. Cette zone de l'espace des paramètres est très proche de la limite entre les deux régimes, ce qui complique le diagnostic concernant la topologie du champ observé. L'influence de la valeur de Pm sur l'écart entre le nombre d'Elsasser avant et après la transition se confirme également à nombre d'Ekman plus bas (panels 3.12c et 3.12d). De plus, les transitions sont réparties de la même façon dans l'espace de paramètres $(\Lambda, Ra/Ra_c)$ que dans l'espace (f_{dip}, Ro_ℓ) , c'est-à-dire que la transition se décale selon la valeur de Pm vers des modèles plus turbulents - Ra/Ra_c ou Ro_ℓ plus élevés.

De l'étude du nombre d'Elsasser dans l'espace des paramètres ressortent plusieurs éléments : sans surprise, les valeurs maximales atteintes par le nombre d'Elsasser, ainsi que le nombre de Rayleigh auquel la transition a lieu, dépendent fortement de Pm . De plus, l'importance de la chute en intensité de Λ lors de la transition dépend également de ce paramètre, et permet de distinguer deux comportements : une chute importante - s'élevant à 80% de la valeur maximale - pour les modèles peu éloignés de la zone non-dynamo ; ou une chute faible, représentant à peine 20% de la valeur maximale, pour les modèles à haut Pm . Bien que le nombre d'Elsasser ne soit pas représentatif de la topologie du champ magnétique, il reste un indicateur de son intensité relative par rapport à la force de Coriolis. En tenant compte uniquement de l'évolution de Λ entre les régimes dipolaire et multipolaire, les branches à haut Pm se distinguent par une baisse minimale de Λ . L'intensité du champ est presque conservée après la transition, ainsi que la répartition entre les forces de Lorentz et de Coriolis (cfr partie 3.3.4).

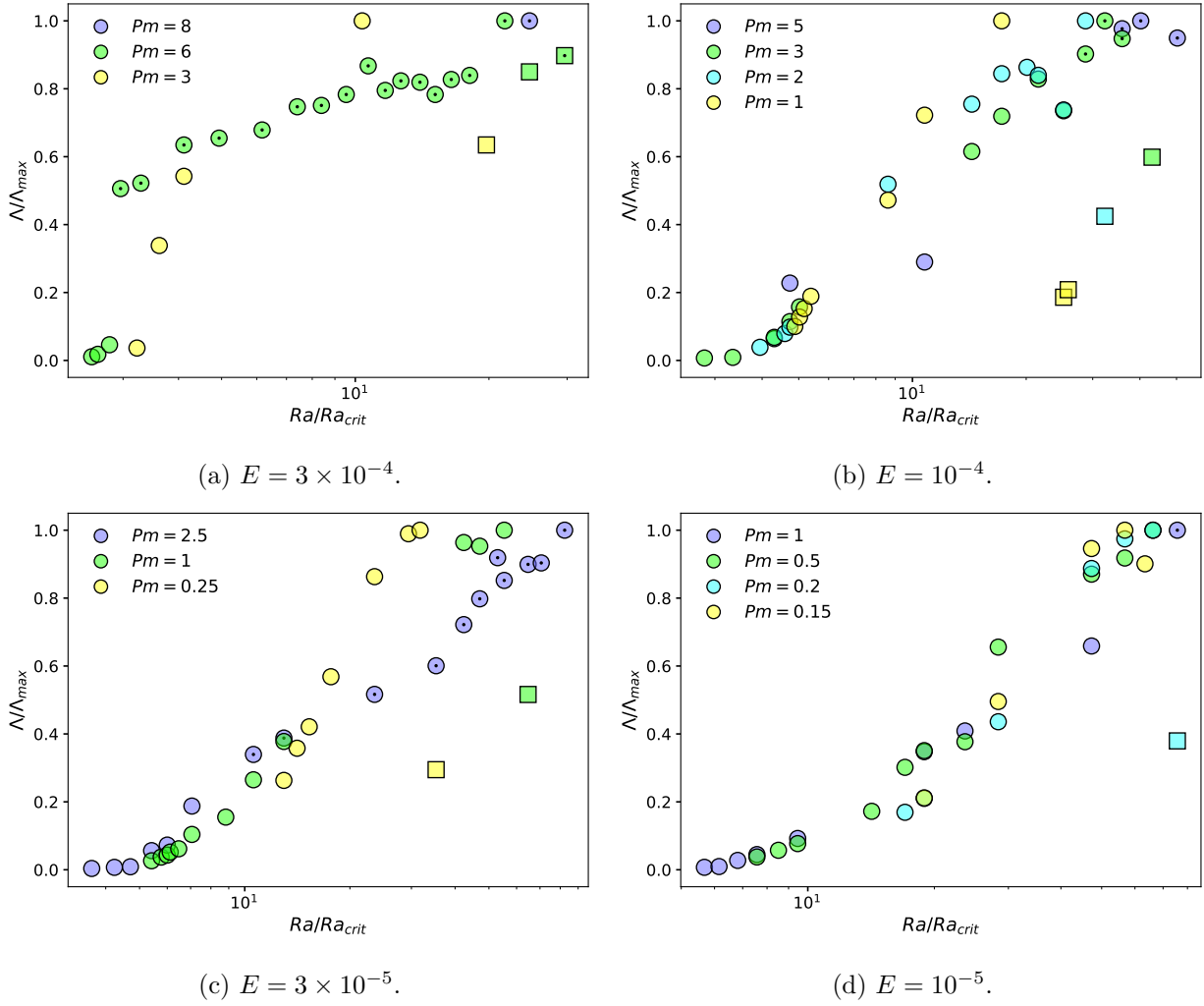


FIGURE 3.12 – Variations du nombre d’Elsasser Λ normalisées par la valeur maximale atteinte pour chaque branche de Pm (distinguées par les couleurs), en fonction de Ra/Ra_c et pour quatre valeurs du nombre d’Ekman. Les cercles représentent les dynamos dipolaires, les carrés les multipolaires, et les points à l’intérieur de certains symboles indiquent les dynamos dominées par la force de Lorentz.

3.3.4 Impact de la force de Lorentz

Comme montré précédemment, le nombre de Prandtl magnétique Pm joue un rôle non négligeable dans la dynamique de l’espace des paramètres, même pour des régimes turbulents. Ce résultat est en adéquation avec les différentes études récentes remettant en question la validité des lois d’échelle et des critères déterminés auparavant pour d’autres gammes de paramètre (voir partie 3.1). Ici, dans une zone de l’espace des paramètres encore inexplorée, ces critères ne sont pas non plus valables. En particulier, la force de Lorentz semble jouer un rôle non négligeable quel que soit le régime pour des modèles à Pm suffisamment élevé.

En quoi ces cas se distinguent-ils des cas de référence ? Un œil observateur aura remarqué que les cas particuliers relevés - dipolaires à des valeurs de Ro_ℓ élevées ou multipolaires à Λ élevés - sont marqués sur les figures d’un point au centre du symbole. De plus, ils sont concentrés aux hautes valeurs de Pm , c’est-à-dire éloignés de la zone non-dynamo, et atteignent des valeurs élevées du nombre d’Elsasser. Tout ces cas seront désignés par la suite comme *dominés par la force de Lorentz*. Effectivement, en se référant à la littérature récente (Dormy, 2016; Aurnou et King, 2017;

Schwaiger *et al.*, 2019), des dynamos dites à *champ fort* se différencient par leur champ magnétique particulièrement important. Ce type de dynamos dipolaires a été mis en évidence essentiellement à bas Ra et haut Pm . Dans cette étude, les dynamos dipolaires dominées par la force de Lorentz se répartissent à plus haut Ra/Ra_c et plus bas Pm pour des nombres d'Ekman plus faibles.

Le nombre qui servira de critère pour déterminer si un modèle fait partie de cette catégorie est le nombre d'Elsasser modifié Λ' tel que défini par Dormy (2016). La différence fondamentale avec le nombre d'Elsasser classique réside dans la considération d'une échelle de dissipation magnétique différente de l'échelle issue du terme d'induction, brisant ainsi l'équilibre postulé entre ces deux termes dans l'équation d'évolution du champ magnétique. Ensuite, à partir du rapport entre force de Coriolis et force de Lorentz - tout comme pour le nombre d'Elsasser classique, et en remplaçant cette fois la vitesse via le nombre de Reynolds magnétique, on obtient le nombre d'Elsasser modifié (équation (3.1)). Ce rapport, tenant compte de l'échelle caractéristique de dissipation magnétique, semble plus pertinent pour distinguer les modèles dominés par la force de Coriolis et ceux dominés par la force de Lorentz. Effectivement, des dynamos dominées par la force de Coriolis ont des valeurs de Λ' très élevées. D'autres rapports permettant de quantifier l'importance relative des forces de Lorentz et de Coriolis ont été proposées, utilisant également des échelles caractéristiques du champ magnétique (Soderlund *et al.*, 2012).

On rappelle la définition de Λ' utilisée :

$$\Lambda' = \frac{\Lambda D}{Rm L_\eta}. \quad (3.1)$$

De plus, la valeur critique distinguant les deux régimes a l'avantage d'être égale à 1, de sorte que pour $\Lambda' > 1$ (respectivement < 1) la force de Lorentz (respectivement Coriolis) domine sur l'autre. L'équilibre des forces, ainsi que la dynamique, observés sont différents d'un régime à l'autre. Pour Λ' proche de 0, un comportement typique d'un équilibre géostrophique avec la formation de colonnes de Taylor-Proudman est attendu ; et dans l'extrême contraire, la dominance de la force de Lorentz a plutôt tendance à stimuler la convection à des échelles plus grandes.

A $E = 3 \times 10^{-5}$, deux branches ont été étudiées de façon approfondie : la branche à $Pm = 1$ pour laquelle une transition a été obtenue à $Ra/Ra_c \sim 65$, et la branche à $Pm = 2.5$ restée dipolaire jusqu'à des valeurs plus élevées de Ra/Ra_c . La répartition des forces de deux simulations dipolaires à $Ra/Ra_c = 55.3$ appartenant à chacune des branches est représentée en figure 3.13. Pour les deux cas, la force d'inertie est plus importante que la force de Coriolis à petite échelle à cause du forçage convectif intense imposé par la valeur de Ra/Ra_c élevée.

La différence majeure réside dans l'équilibre à grande et moyenne échelle. Effectivement, pour le cas à $Pm = 1$, la force de Coriolis domine les grandes échelles, avant d'être presque équilibrée avec la force de Lorentz aux moyennes échelles. La répartition des trois forces est similaire à celle présentée dans le cas dipolaire de référence en figure 3.5. Pour le cas à $Pm = 2.5$, la répartition est différente puisque la force de Lorentz domine toutes les échelles, en s'équilibrant parfaitement avec la force de Coriolis aux premières harmoniques sphériques - i.e. à $l \leq 6$. Cette répartition est caractéristique des dynamos dominées par la force de Lorentz, qui, par conséquent, portent bien leur nom.

En réalité, bien que seule la valeur du paramètre Pm diffère, ces deux cas n'appartiennent pas au même régime : à $Pm = 1$, $\Lambda' = 0.7$ (panel 3.13a) alors qu'à $Pm = 2.5$, $\Lambda' = 1.34$ (panel 3.13b). L'interprétation prêtée au nombre d'Elsasser modifié correspond pour cette gamme de paramètres parfaitement à ce qui est observé. La force de Lorentz est effectivement dominante et contrebalance la force de Coriolis pour $\Lambda' > 1$, alors que la force de Coriolis domine les grandes échelles pour $\Lambda' < 1$. Les dynamos dominées par la force de Lorentz sont donc dans un équilibre dit magnétostrophique à grande échelle, pour lequel force de Lorentz et de Coriolis s'équilibrent. Une analyse simple à

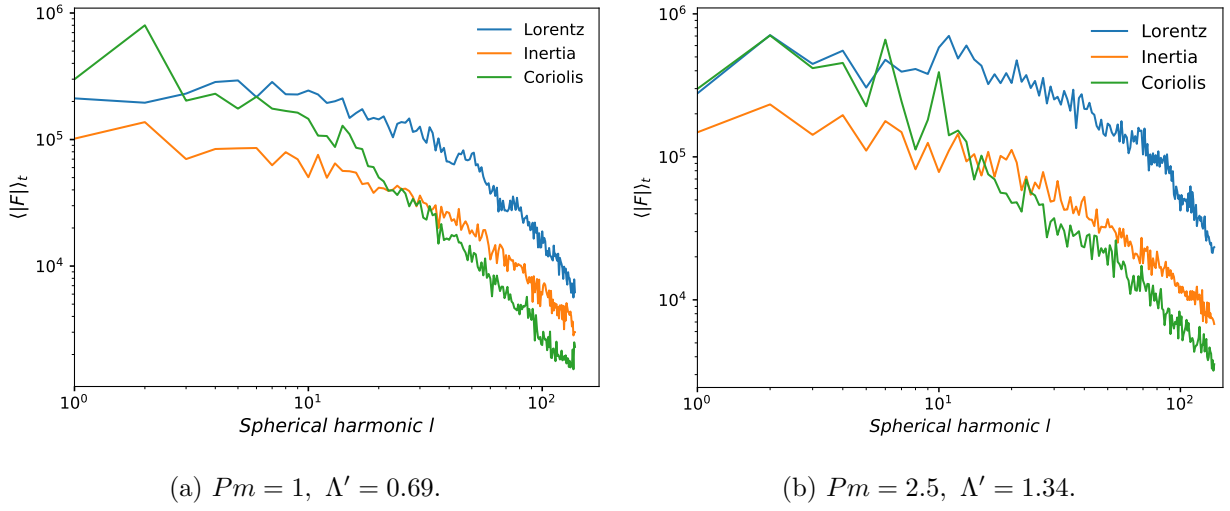


FIGURE 3.13 – Répartition en fonction du degré d'harmoniques sphériques l des forces étudiées pour deux cas, distinguables par leur nombre de Prandtl magnétique seulement. Les deux simulations sont dipolaires et ont pour paramètres d'entrée $E = 3 \times 10^{-5}$, $Ra/Ra_c = 55.3$ et : (a) $Pm = 1$, (b) $Pm = 2$.

partir du nombre d'Elsasser, comme dans la partie précédente, permettait déjà de distinguer les deux régimes (voir tableau 3.3), mais sans tenir compte des échelles associées à chacun des cas. En se basant simplement sur les valeurs de f_{dip} et Ro_ℓ , comme dans la première partie 3.3.2, les deux régimes ne sont pas distinguables (voir figure 3.11c), tout deux dépassant la valeur critique 0.12 avec une valeur $f_{dip} \sim 0.8$.

3.3.5 Résumé et vue d'ensemble de l'espace des paramètres

Dans cette partie, on a mis en évidence l'impact du nombre de Prandtl magnétique sur les différents régimes dynamo et leur répartition dans l'espace des paramètres, particulièrement à Ra/Ra_c élevé. Il s'est avéré que les critères tels le Ro_ℓ ou le f_{dip} ne sont pas suffisants pour déterminer la topologie du champ magnétique. D'autres vérifications sont nécessaires, comme l'évolution temporelle de l'angle d'inclinaison ou celle du nombre d'Elsasser par rapport à des simulations dipolaires avérées, moins turbulentes. La zone de transition entre le régime dipolaire et multipolaire dépend, entre autre, de la valeur de Pm imposée. Ce choix de paramètres, à haut Ra et Pm moyen, modifie l'équilibre des forces, et dans les cas dominés par la force de Lorentz la dynamique du champ est différente des cas dipolaires classiques, dominés par la force de Coriolis. Pour mieux distinguer ces différents régimes et leurs déclinaisons, l'ensemble des simulations étudiées sont regroupées en figure 3.14, en fonction des trois paramètres d'entrée ($E, Pm, Ra/Ra_c$). En particulier, les valeurs critiques mentionnées ci-avant ont été représentées approximativement : $\Lambda' \sim 1$ et $Ro_\ell \sim 0.12$, calculées à chaque valeur du nombre d'Ekman par interpolation linéaire - à Ra constant pour $\Lambda' = 1$ et Pm constant pour $Ro_\ell = 0.12$. L'espace (Pm, Ra) est ainsi séparé en quatre zones. Pour des valeurs de $Ro_\ell < 0.12$ - à gauche de la ligne presque verticale - se trouvent des dynamos dipolaires exclusivement (symboles circulaires), elles-mêmes divisées en deux catégories selon la valeur de Λ' : symbole bleu pour les dynamos dipolaires à $\Lambda' > 1$ et rouge pour $\Lambda' < 1$. L'espace à droite de la limite $Ro_\ell \sim 0.12$ - et donc à Ra/Ra_c plus élevé - est divisé selon le même principe, mais compte cette fois également des dynamos multipolaires (symboles carrés). La taille du symbole est logarithmiquement proportionnelle au nombre d'Elsasser, rapporté entre 0 et 1 après normalisation par la valeur maximale Λ_{max} à chaque valeur du nombre d'Ekman - donc chaque panel.

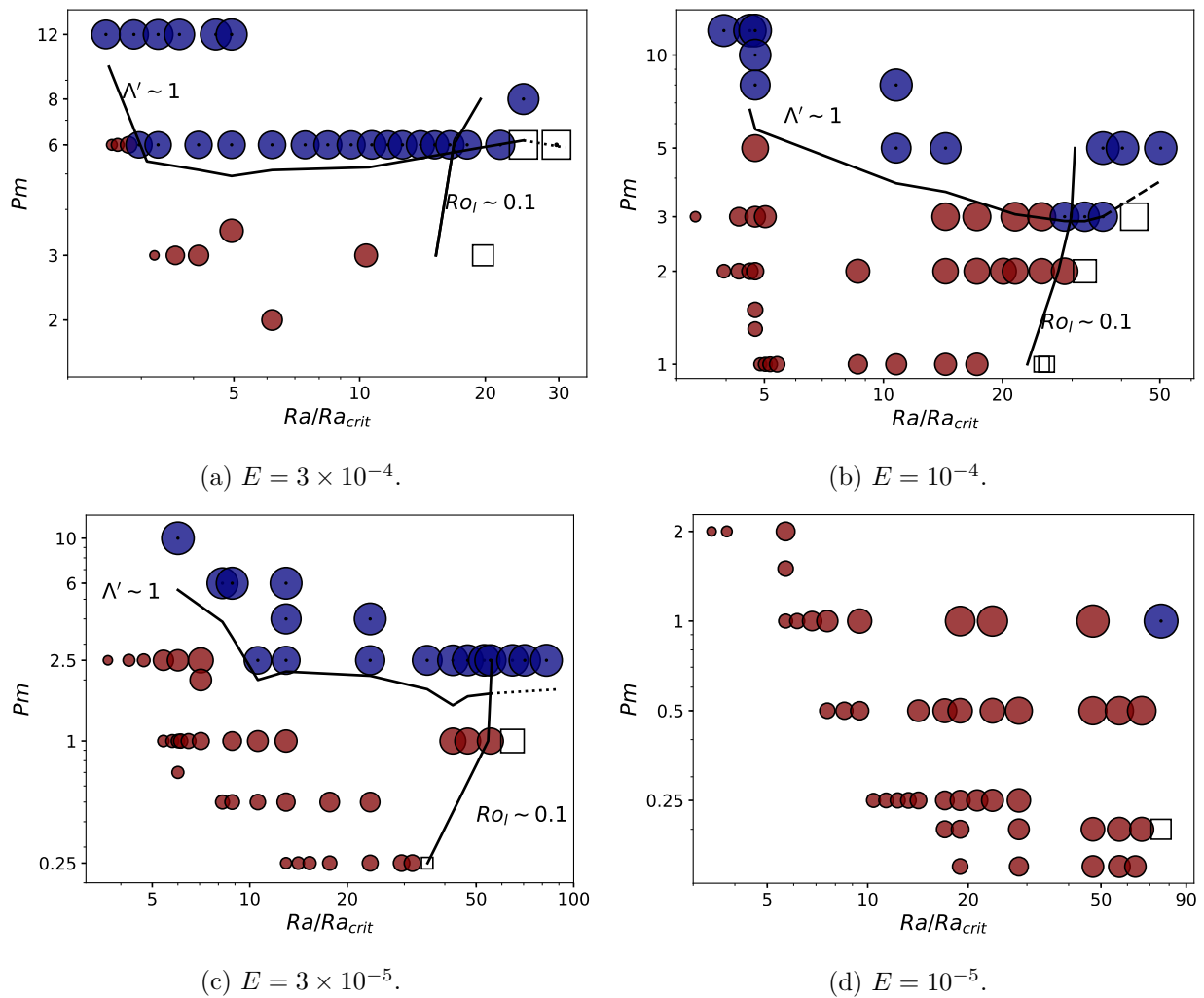


FIGURE 3.14 – Diagrammes des différents régimes dynamos pour les quatre valeurs du nombre d'Ekman. Les cercles indiquent les dynamos dipolaires, les carrés les dynamos multipolaires. La couleur, rouge ou bleu, distingue respectivement les dynamos à $\Lambda' < 1$ and $\Lambda' > 1$. La taille des symboles dépend du nombre d'Elsasser. Les limites $\Lambda' \sim 1$ et $Ro_\ell \sim 0.1$ sont tracées lorsque les données le permettent.

Sans surprise les dynamos dominées par la force de Lorentz sont localisées aux hautes valeurs de Pm et de Ra/Ra_c . La partie la plus intéressante, car nouvelle, de ces diagrammes est la partie à $Ro_\ell > 0.12$. Effectivement, selon la valeur de Λ' , deux comportements sont observés. Pour les dynamos non dominées par la force de Lorentz, la transition a lieu comme attendu dès l'instant que la valeur critique est atteinte : aucune dynamo non dominée par la force de Lorentz reste dipolaire à $Ro_\ell > 0.12$. La taille des symboles, qui diminue, indique également la chute du Elsasser pour les Pm bas, comme observé aux figures 3.12. Cependant, en passant dans la zone bleue de l'espace des paramètres, dominée par la force de Lorentz, des dynamos dipolaires persistent au-delà de $Ro_\ell \sim 0.12$, d'autant plus qu'elles s'éloignent de la limite $\Lambda' = 1$, distinguant les deux équilibres de forces possibles (partie 3.3.4).

Pour les deux premières valeurs d'Ekman - panels 3.14a et 3.14b, des dynamos multipolaires sont très proches voire sur la limite $\Lambda' = 1$. Ces dynamos ont été catégorisées multipolaires malgré des différences non négligeables avec les dynamos multipolaires à $\Lambda' < 1$, parce qu'elles présentent au moins un renversement ou une exploration (voir partie 3.4 ci-après). La valeur du nombre d'Elsasser est d'ailleurs comparable à celle des dynamos dipolaires précédant la transition. Pour une valeur d'Ekman plus faible - $E = 3 \times 10^{-5}$ représentée sur le panel 3.14c, ce type de comportement n'est pas observé malgré des valeurs de $Ro_\ell > 0.16$. Deux facteurs peuvent être avancés pour expliquer cette différence. D'une part, les valeurs de Pm explorées donnent accès à des Λ' assez éloignés de la valeur critique, ne permettant pas la transition vers le régime multipolaire via un changement d'équilibre de force - comme c'est le cas pour la transition à $E = 10^{-4}$, $Pm = 3$. D'autre part, les valeurs de Ro_ℓ atteintes ne sont pas tout à fait comparables aux valeurs obtenues avant les transitions observées à $E = 3 \times 10^{-4}$ - jusqu'à $Ro_\ell > 0.18$, alors que leur nombre d'Elsasser modifié est très proche de la valeur critique 1. Ce point est discuté plus amplement en partie 3.4.3. Pour la valeur la plus basse du nombre d'Ekman - panel 3.14d, le coût des simulations à haut Ra/Ra_c n'a pas permis d'explorer de façon représentative le régime dominé par la force de Lorentz. Un seul cas, à $Pm = 1$ et $Ra/Ra_c \sim 90$ atteint une valeur de Λ' légèrement supérieure à 1¹. Ce cas est la solution dominée par la force de Lorentz à plus bas Pm obtenue. Seul un cas multipolaire à faible valeur de Pm a été obtenu². Pour éviter tout biais dû à une extrapolation excessive, l'absence d'indication des limites entre les différents régimes a été préférée.

On remarque aussi que, à l'image de la limite $Ro_\ell \sim 0.12$ se déplaçant vers les Ra/Ra_c plus élevés lorsque le nombre d'Ekman est diminué, la zone des dynamos dominées par la force de Lorentz se décale vers des valeurs de Pm plus basses. Effectivement, diminuer la valeur du nombre d'Ekman correspond à une augmentation de la rotation par rapport à la dissipation, impactant ainsi les rapports Ro_ℓ et Λ' tout deux dépendant de l'intensité de la force de Coriolis. Pour des dynamos proches du seuil de convection, à bas Ra/Ra_c , il est nécessaire de considérer des valeurs de $Pm \sim 10$ pour obtenir ce régime. En revanche, pour des modèles plus turbulents, des Pm plus modérés permettent d'obtenir des valeurs de $\Lambda' \geq 1$. Par exemple, la dynamo dipolaire dominée par la force de Lorentz obtenue à $E = 10^{-5}$ a pour paramètres $Pm = 1$ et $Ra/Ra_c \sim 80$. La limite entre les deux régimes à des valeurs de Ra encore plus supercritiques est incertaine. Les données des modèles à $E = 10^{-4}$ et $E = 3 \times 10^{-5}$ - panels 3.14b et 3.14c - laissent penser que cette limite stagne à une valeur de Pm constante ou remonte légèrement vers des valeurs de Pm plus élevées.

Cette partie a permis de mettre en évidence trois points principaux :

- Le critère pour la transition à $Ro_\ell \sim 0.12$ n'est pas valable pour les simulations à haut Pm .
- Le comportement du nombre d'Elsasser pendant la transition dépend de Pm .

1. Ce qui est déjà une prouesse numérique.

2. Ce qui est aussi une prouesse numérique.

- Un équilibre entre force de Lorentz et de Coriolis à grande échelle permet de conserver le régime multipolaire à de hautes valeurs de Ra/Ra_c .

3.4 Transition en régime dominé par la force de Lorentz

La transition du régime dipolaire vers le régime multipolaire est caractérisée en termes d'équilibre de forces par une inertie devenue non négligeable par rapport à la force de Lorentz à toutes les échelles. Cependant, en régime dominé par la force de Lorentz, cette dernière est du même ordre de grandeur que la force de Coriolis à grande échelle et est la plus importante aux échelles inférieures, diminuant ainsi l'impact des forces d'inertie sur l'équilibre total. Une question se pose alors naturellement : quid de la transition vers le régime multipolaire pour les dynamos dominées par la force de Lorentz ? Effectivement, il a été montré que le critère sur le Ro_ℓ n'est pas valable pour ces dynamos dipolaires, mais également que le nombre d'Elsasser reste élevé sur toute la branche. Pour un forçage suffisamment turbulent, une transition accompagnée d'une légère baisse du nombre d'Elsasser est observée même pour une branche dominée par la force de Lorentz (cfr panel 3.12a). Ceci a seulement été possible à $E = 3 \times 10^{-4}$, moins coûteux numériquement, et permettant ainsi d'atteindre des valeurs suffisamment élevées de Ra/Ra_c pour obtenir la transition à Pm élevé.

3.4.1 Nouveau comportement

Ci-dessous - en figure 3.15 - est représentée l'équilibre des forces pour la simulation multipolaire de paramètres ($E = 3 \times 10^{-4}$, $Ra/Ra_c \sim 30$, $Pm = 6$). En figure 3.12a, elle correspond au cas le plus extrême de la branche à $Pm = 6$, avec un nombre d'Elsasser n'ayant subi qu'une perte de 10% par rapport à la valeur maximale atteinte juste avant la transition. De plus cette branche est dans un régime dominé par la force de Lorentz, avec des valeurs de $\Lambda' \sim 1.2$ assez proches de la valeur critique. Ce cas est très particulier, comme en témoigne la répartition de ces trois forces, fortement différente de celle présentée préalablement pour le cas multipolaire (figure 3.8). Effectivement, la force de Lorentz a peu baissé à grande échelle, et concurrence toujours la force de Coriolis. Bien que l'inertie ait augmenté, cette dernière ne domine pas l'équilibre avec la force de Coriolis. Il y a donc un équilibre à trois forces à grande échelle : forces de Lorentz, d'inertie et de Coriolis. S'ajoute à cela la dominance à moyenne et petite échelle de la force de Lorentz, exactement comme dans le cas dipolaire (figure 3.5). Cette similitude est cohérente avec les valeurs $f_{dip} = 0.43$ et $Ro_\ell = 0.1844$ obtenues, correspondant au désert de l'espace des paramètres (f_{dip} , Ro_ℓ) - voir figure 3.2b. Cette combinaison, paraissant incompatible au vu des études précédentes, allie à la fois des forces inertielles importantes - d'où le Ro_ℓ élevé, ainsi qu'une force de Lorentz non négligeable à toutes les échelles - d'où le f_{dip} médian. Effectivement, pour ces paramètres, la force inertielle ne renverse pas l'équilibre magnétostrophique (Coriolis-Lorentz) - comme dans le cas multipolaire de référence, mais vient y contribuer à grande échelle. Seule la répartition des forces est à considérer pour comparer les solutions entre elles, leurs magnitudes dépendant des paramètres d'entrée choisis : fatalement, à E faible la force de Coriolis sera plus élevée en magnitude par exemple.

Pour attester de sa multipolarité, le comportement dynamique de l'angle d'inclinaison du champ ainsi que de l'intensité relative de la composante dipolaire du champ ont été vérifiés (figure 3.16a). Pour le même intervalle de temps, les variations du nombre d'Elsasser et de Rossby sont représentées en figure 3.16b. Après un court régime transitoire, la valeur de f_{dip} chute brutalement - de 0.6 à 0.3, accompagnée d'une hausse de l'angle d'inclinaison jusque $\pi/3$ - à environ $t_{mag} \sim 12.5$. A la suite de cette exploration, un léger retour à une période stable a lieu, juste avant le premier renversement observé à $t_{mag} \sim 12.7$. L'angle θ augmente alors brusquement presque jusque π , tandis que la valeur de f_{dip} redescend en flèche jusque 0.1. Ce type de comportement est observable à plusieurs reprises

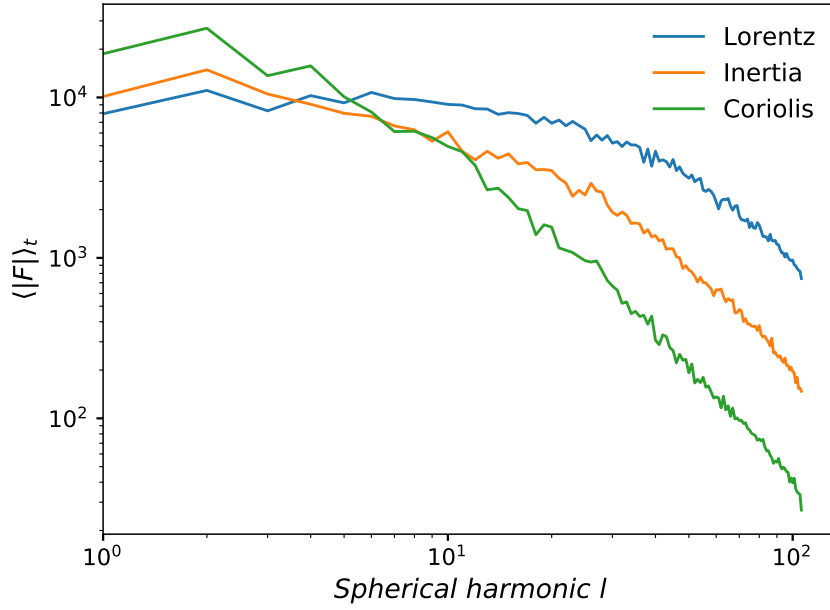


FIGURE 3.15 – Répartition en fonction du degré d’harmoniques sphériques l de trois forces - magnétique en bleu, inertielle en orange et Coriolis en vert - pour un cas multipolaire particulier de paramètres ($E = 3 \times 10^{-4}$, $Ra/Ra_c \sim 30$, $Pm = 6$).

au cours de la simulation.

En comparant cette dynamique avec celles des nombres sans dimension Λ et Ro , on s’aperçoit que ces dernières sont anticorrélées entre elles (quand Λ diminue Ro augmente, et vice versa), et dépendantes de la configuration du champ. Le nombre d’Elsasser chute pendant un renversement, alors que le nombre de Rossby augmente légèrement. Effectivement, pendant les renversements la force de Lorentz diminue avec l’intensité du champ, tandis que les forces d’inertie deviennent plus importantes. Malgré les renversements multiples, une fois le régime transitoire passé, ces deux paramètres de sortie oscillent autour d’une valeur moyenne relativement constante. La valeur du nombre d’Elsasser ne continue pas de chuter, et la valeur de f_{dip} s’approche à nouveau de 0.5. Ainsi, ces paramètres permettent de conserver un champ moyen relativement important malgré des renversements fréquents et des forces inertielle non négligeables.

Sur la même branche et pour un forçage convectif légèrement plus faible - à $Ra/Ra_c = 24.7$, une première transition vers le régime multipolaire avait déjà eu lieu, à $\Lambda' \sim 0.95$ cependant. Ce modèle est donc très proche de la limite entre les régimes dominés par la force de Lorentz et ceux dominés par la force de Coriolis. Il est encore moins distinguable des régimes dipolaires préalablement mentionné puisque la valeur moyenne de l’intensité relative du champ dipolaire $f_{dip} = 0.56$ est supérieure à la valeur critique censée permettre la distinction entre les deux régimes. La valeur du Rossby local de ce modèle, $Ro_\ell > 0.17$ aurait pour sa part indiqué un régime multipolaire. Cependant, comme il a été montré en partie 3.3.4, des solutions dipolaires sont également obtenues pour des valeurs de Ro_ℓ de cet ordre. Il est donc nécessaire de déterminer la topologie du champ en considérant la dynamique de ces paramètres de sortie, et non pas seulement en se basant sur des valeurs moyennées. Effectivement, ce régime est bien multipolaire, et présente un renversement de polarité - θ passe de 0 à π vers $t_{mag} \sim 12.6$ - après plus d’un temps magnétique (figure 3.17). Suite à cela, le modèle explore le nouvel état de façon suffisamment stable pour que f_{dip} et Λ réaugmente - jusqu’aux valeurs observées avant le renversement - tandis que l’importance de la force d’inertie diminue - comme le montre la baisse de Ro à $t_{mag} \sim 13$. De petites oscillations de la direction du

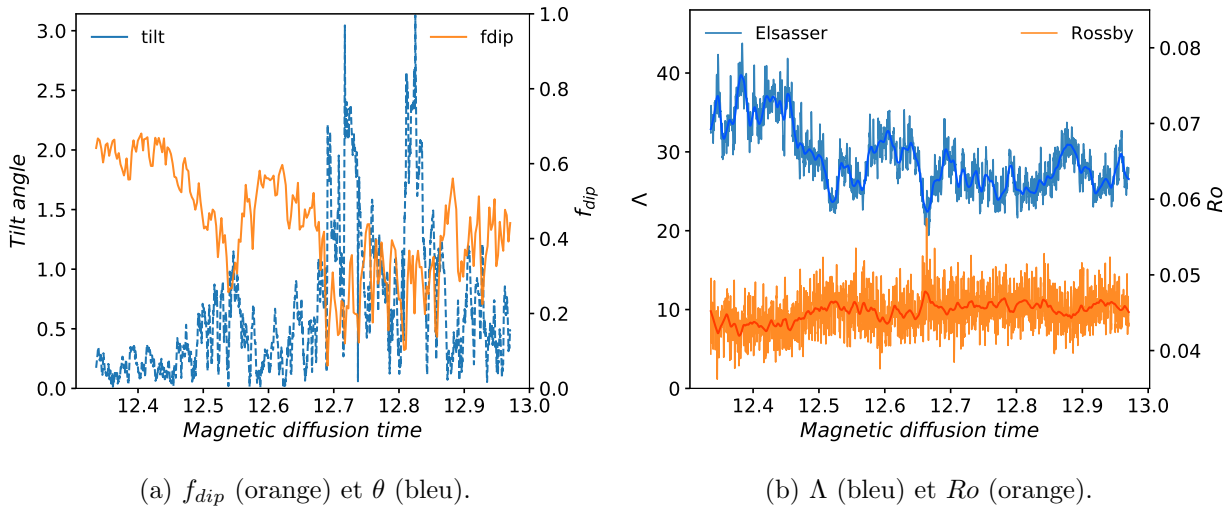


FIGURE 3.16 – Evolution temporelle des quantités utilisées pour déterminer la topologie du champ de la simulation de paramètres ($E = 3 \times 10^{-4}$, $Ra/Ra_c \sim 30$, $Pm = 6$) : (a) f_{dip} et θ , (b) Λ et Ro .

champ magnétique sont visibles, tout comme avant le renversement. Malgré cela, ce modèle peut être considéré comme multipolaire en cela qu'il a effectué au moins un renversement, bien que cela ne semble pas avoir affecté durablement la topologie du champ.

Ce type de comportement semble restreint à une zone réduite de l'espace des paramètres. Effectivement, pour une valeur $Ra/Ra_c = 21.7$, légèrement plus faible, un comportement dipolaire *classique* est observé, sans renversement ni perte de la composante dipolaire. La valeur de Λ est d'ailleurs la valeur maximale obtenue pour cette branche de Pm . En revanche, pour une convection thermique plus vive - $Ra/Ra_c = 30$, le comportement observé est celui présenté en figure 3.16, et est beaucoup plus chaotique, bien que l'équilibre des forces soit différent d'un état multipolaire usuel.

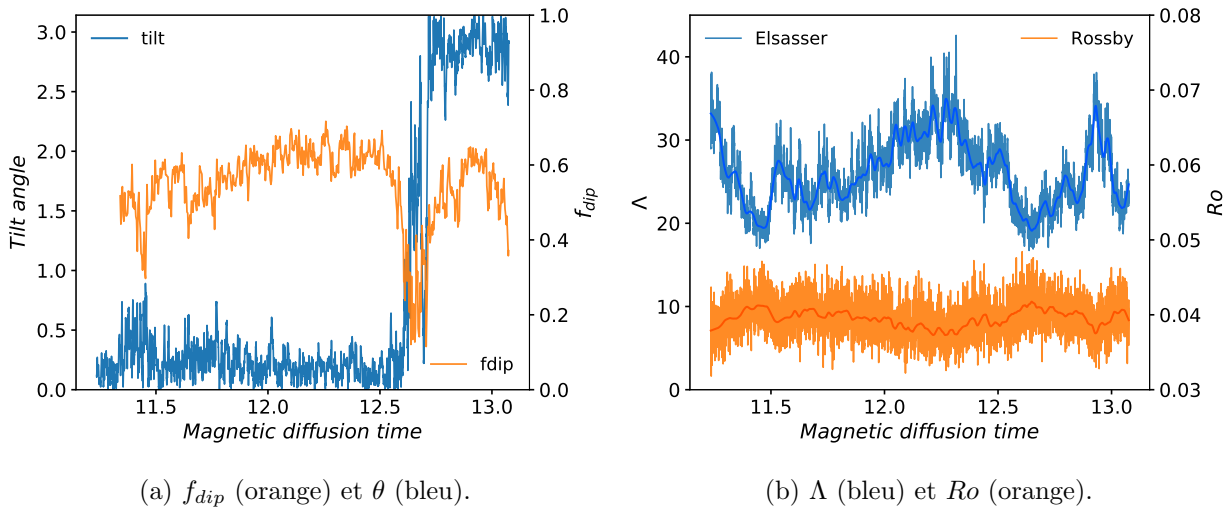


FIGURE 3.17 – Evolution temporelle des quantités utilisées pour déterminer la topologie du champ de la simulation de paramètres ($E = 3 \times 10^{-4}$, $Ra/Ra_c \sim 24.7$, $Pm = 6$) : (a) f_{dip} et θ , (b) Λ et Ro .

Les deux comportements montrés dans cette partie sont insolites, tout comme l'espace des paramètres exploré, puisqu'ils conservent un nombre d'Elsasser élevé malgré un ou plusieurs ren-

versements et oscillations de la polarisation du champ magnétique. La difficulté à catégoriser ces cas dans l'un ou l'autre des régimes à partir des valeurs moyennées obtenues met en évidence l'importance de considérer la dynamique temporelle des paramètres de sortie. En particulier, à travers les figures 3.16 et 3.17, une corrélation évidente se fait entre les renversements ou explorations, la perte de la composante dipolaire du champ et une augmentation des forces d'inertie. Dans la littérature, le régime multipolaire - bien que peu étudié - se caractérise par un champ à polarité instable et de magnitude faible comparativement au régime dipolaire. Les deux cas présentés ici démentissent ces déductions, puisqu'ils allient simultanément renversements et magnitude élevée du champ moyen. En analysant la répartition en échelles des forces de Lorentz, de Coriolis et d'inertie, un équilibre inédit entre ces trois forces à grande échelle est obtenu. Cet équilibre, et le comportement qui lui est associé, semblent spécifiques des dynamos multipolaires dominées par la force de Lorentz.

3.4.2 Différentes façons de mesurer l'importance de l'inertie

Les études de l'espace des paramètres sont suffisamment denses pour mettre en évidence les liens entre plusieurs quantités, notamment sous forme de loi d'échelle. Celles-ci sont d'autant plus utiles qu'elles permettent d'extrapoler les caractéristiques des dynamos étudiées à des zones de l'espace des paramètres inaccessibles numériquement. Par exemple, en déterminant comment évolue le transfert de chaleur en fonction du forçage convectif, i.e. nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh, on peut estimer dans quel régime se situe le noyau terrestre à partir de ses paramètres. Caractériser la topologie du champ en fonction des paramètres d'entrée est donc un enjeu majeur pour comprendre la dynamique régissant les intérieurs planétaires, d'où les nombreuses études à ce sujet (Christensen et Aubert, 2006; Soderlund *et al.*, 2012; Oruba et Dormy, 2014a; Soderlund *et al.*, 2015; Aurnou *et al.*, 2015; Aurnou et King, 2017; Dormy *et al.*, 2018). L'introduction du nombre de Rossby local Ro_ℓ , et en particulier de l'harmonique sphérique caractéristique de l'écoulement $\bar{\ell}_u$, permet de distinguer les régimes dipolaire et multipolaire pour une partie de l'espace des paramètres (voir partie 3.3.2). Les échelles caractéristiques de l'écoulement sont effectivement plus pertinentes et permettent de mieux caractériser un modèle. À partir de la répartition des énergies cinétique et magnétique, il est possible d'en estimer un certain nombre, recensées dans la table 3.4. Ces échelles ont été introduites en partie 2.2.3.

Nombre d'entre elles sont soumises à des lois d'échelle, permettant ainsi de simplifier leur calcul. Ces lois empiriques n'ont cependant pas été éprouvées dans l'espace des paramètres étudié ici. L'une d'elles relie l'échelle de dissipation visqueuse L_ν et le degré d'harmoniques sphériques caractéristique de l'écoulement $\bar{\ell}_u$ via la relation $\frac{\pi}{\bar{\ell}_u} = L_u \sim 5L_\nu$ (Oruba et Dormy, 2014b), permettant ainsi d'attribuer une valeur L_ν , au coût numérique plus élevé, à l'ensemble des simulations effectuées. Cette loi est également pertinente pour l'espace des paramètres exploré dans la présente étude - comme le témoigne la figure 3.18. Les deux types de dynamos dipolaires respectent cette loi, bien que la déviation semble légèrement plus importante pour les dynamos dominées par la force de Lorentz (en bleu). Cette loi sera également utilisée pour compléter les rares valeurs manquantes de L_ν - environ 10% de l'ensemble des simulations.

La loi $\bar{\ell}_u \propto E^{\frac{1}{3}}$, largement évoquée, a également été vérifiée, et semble tout autant pertinente pour les dynamos dipolaires à $\Lambda' > 1$ que pour les dynamos dipolaires à des valeurs plus faible de Λ' .

L'échelle L_u , comme son nom l'indique, ne prend en compte que le degré caractéristique de l'écoulement $\bar{\ell}_u$, sans en considérer l'ordre $\bar{m}_u$. Soderlund *et al.* (2012) introduit k_u , analogue à une moyenne quadratique de l'ordre et du degré caractéristiques de l'écoulement. k_b , son homologue associé au champ magnétique, est notamment utilisé dans le calcul d'un nombre d'Elsasser modifié, ayant une fonction similaire à celle de Λ' . Le jeu de données présenté dans cette étude semble

Notation	Expression	Dénomination
$\bar{\ell}_a$	$\frac{\sum_l l \langle \vec{a}_l \cdot \vec{a}_l \rangle}{2E_a}$	Degré d'harmoniques sphériques caractéristique de l'écoulement ($\vec{a} = \vec{u}$) ou du champ magnétique ($\vec{a} = \vec{B}$)
$\bar{m}_a$	$\frac{\sum_m m \langle \vec{a}_m \cdot \vec{a}_m \rangle}{2E_a}$	Ordre d'harmoniques sphériques caractéristique de l'écoulement ($\vec{a} = \vec{u}$) ou du champ magnétique ($\vec{a} = \vec{B}$)
L_u	$\frac{\pi}{\bar{\ell}_u}$	Echelle de longueur associée au degré d'harmoniques sphériques caractéristique de l'écoulement $\bar{\ell}_u$
L_ν^2	$\langle \frac{\int \vec{u}^2 dV}{\int (\vec{\nabla} \times \vec{u})^2 dV} \rangle$	Echelle de dissipation visqueuse
L_η^2	$\langle \frac{\int \vec{B}^2 dV}{\int (\vec{\nabla} \times \vec{B})^2 dV} \rangle$	Echelle de dissipation magnétique
k_a	$\sqrt{\bar{\ell}_a^2 + \bar{m}_a^2}$	Nombre d'onde caractéristique de l'écoulement ($\vec{a} = \vec{u}$) ou du champ magnétique ($\vec{a} = \vec{B}$)
K_a	$\frac{\pi}{2k_a}$	Echelle de longueur associée au nombre d'onde caractéristique de l'écoulement ($\vec{a} = \vec{u}$) ou du champ magnétique ($\vec{a} = \vec{B}$)

TABLE 3.4 – Définition et nomenclature des différentes échelles ou quantités analogues utilisées. a est à remplacer par les champs u ou B selon que l'échelle caractérise l'écoulement ou le champ magnétique. $\langle \cdot \rangle$ indique une moyenne temporelle et E_a l'énergie associée au champ a . l est le degré et m l'ordre d'harmoniques sphériques.

respecter le critère sur la valeur $Ro_\ell \sim 0.12$ délimitant régime multipolaire et dipolaire, bien que la pertinence de ce rapport entre force d'inertie et force de Coriolis soit discutée.

Sur la figure 3.19 sont représentés trois diagrammes dans l'espace (f_{dip}, Ro_L) , pour trois échelles différentes utilisées pour calculer un nombre de Rossby local Ro_L . Ceux-ci regroupent une bonne partie des simulations effectuées, et utilisent le même code couleur et la même symbolique que précédemment. Sans étonnement, les modèles dipolaires non dominés par la force de Lorentz (en rouge donc) se concentrent aux f_{dip} élevés, et Ro_L inférieurs à la valeur critique. Le premier panel représente le diagramme classique de la transition, en fonction de Ro_ℓ pour toutes valeurs d'Ekman et de Pm confondues. Le même constat que précédemment est effectué, c'est-à-dire que les modèles dominés par la force de Lorentz poursuivent leur avancée vers des valeurs de $Ro_\ell > 0.12$ en restant dipolaires - cercles bleus et carrés rouges vont même jusqu'à se chevaucher. Le second panel utilise l'échelle de dissipation visqueuse L_ν pour le calcul du nombre de Rossby local, tandis que le troisième utilise le nombre d'onde caractéristique de l'écoulement $K_u = \pi/k_u$. Malheureusement, le même constat est effectué pour ces deux derniers panels, ne permettant pas non plus d'établir une valeur critique pour la transition valable pour les deux régimes de dynamo dipolaires.

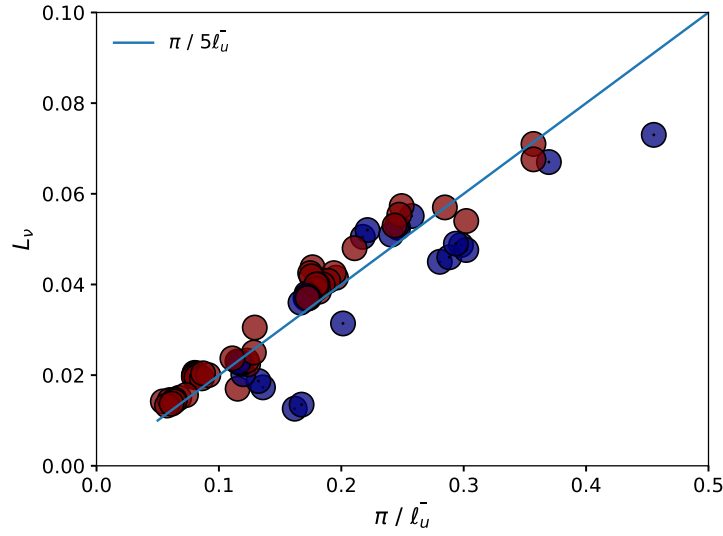


FIGURE 3.18 – Relation entre l'échelle de dissipation visqueuse L_ν et $\bar{\ell}_u$. A nouveau les cercles bleus représentent les dynamos dipolaires dominées par la force de Lorentz $\Lambda' > 1$, et les cercles rouge les dynamos dipolaires à $\Lambda' < 1$. La droite bleue correspond à $L_\nu = \frac{\pi}{5\bar{\ell}_u}$.

Ces diagrammes ont par ailleurs l'avantage de mettre en évidence la répartition des dynamos dipolaires en f_{dip} . Effectivement, les dynamos dominées par la force de Lorentz semblent se répartir à des valeurs $f_{dip} \leq 0.8$ tandis que les dynamos dominées par la force de Coriolis sont majoritairement à des $f_{dip} \geq 0.8$. Cette information n'est pas contradictoire avec les hautes valeurs du nombre d'Elsasser atteintes par les modèles à $\Lambda' > 1$, mais indique simplement une répartition différente de l'énergie magnétique selon les échelles. Cette interprétation est cohérente avec les différentes études montrant l'impact d'un champ magnétique important sur les échelles caractéristiques de l'écoulement (Soderlund *et al.*, 2012; Schaeffer *et al.*, 2017) et l'importance de la répartition de l'énergie pour la topologie du champ (Schrinner *et al.*, 2012). Les champs générés par les dynamos dominées par la force de Coriolis sont donc plus dipolaires au sens de f_{dip} puisque le mode $l = 1$ domine plus largement les modes inférieurs que pour les dynamos dominées par la force de Lorentz. Cette analyse est également cohérente avec les conséquences de ce régime sur la répartition des forces présentée en figure 3.13, puisque la force de Lorentz domine alors toutes les échelles, expliquant ainsi une valeur de f_{dip} légèrement plus faible.

Finalement, l'espace des paramètres (f_{dip}, Ro_ℓ) ne paraît pas approprié pour caractériser la transition en régime dominé par la force de Lorentz. Pour mieux s'accorder à ce régime, l'échelle de dissipation magnétique paraît plus adéquate puisqu'elle intervient dans la définition de Λ' permettant la distinction entre les deux types de régimes dipolaires.

La loi décrivant le comportement de l'échelle de dissipation magnétique L_η en fonction du nombre de Reynolds magnétique Rm est illustrée en figure 3.20. La relation $L_\eta \propto Rm^{-\frac{1}{2}}$, issue de l'équilibre entre terme de diffusion et d'induction, est respectée malgré une dispersion assez importante. Les coefficients les plus appropriés à chaque valeur d'Ekman sont indiqués sur les panels correspondants. Effectivement ceux-ci dépendent du nombre d'Ekman, mais ne semblent pas dépendre de la valeur de Λ' . Certaines dynamos dipolaires dominées par la force de Lorentz (en bleu) sont légèrement au-dessus de la courbe. Il s'agit en réalité des simulations dominées par la force de Lorentz à bas Ra/Ra_c et hautes valeurs de Pm . Leur proximité avec la limite pour le déclenchement

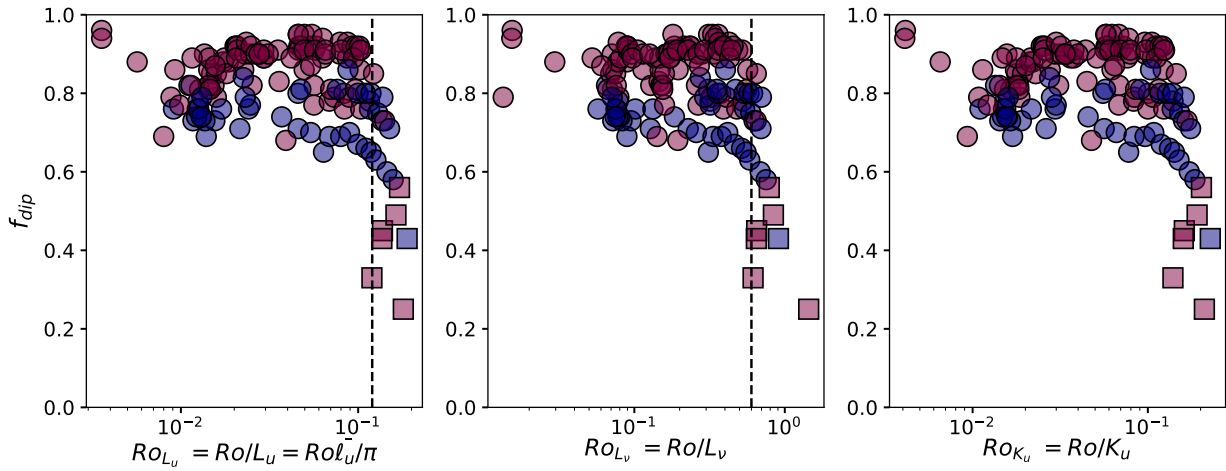


FIGURE 3.19 – Diagrammes censés représenter la transition pour différentes définitions de Ro_L , basées sur des échelles caractéristiques de l'écoulement.

de la convection - parfois à peine deux fois supercritique - est une explication possible de la déviation observée pour cette zone des paramètres exclusivement. Les modèles peu turbulents et à forte viscosité cinématique seraient ainsi distinguable par une légère majoration de l'échelle caractéristique de dissipation magnétique. Les régimes mutipolaires sont quant à eux légèrement en deçà de cette loi d'échelle, ce qui n'est pas surprenant eu égard à la baisse de Rm associée au régime multipolaire.

Cette relation entre l'échelle magnétique et le nombre de Reynolds magnétique a déjà été étudiée par Soderlund *et al.* (2015). L'échelle considérée n'est pas l'échelle de dissipation magnétique L_η , mais celle issue du nombre d'onde caractéristique du champ magnétique K_b (voir table 3.4). La loi obtenue est proche de la loi théorique à un préfacteur près : $K_b/D = 1.3Rm^{-1/2}$. Ce préfacteur est supérieur à l'unité, contrairement aux préfacteurs obtenus dans notre étude, compris entre 0.55 et 0.9. La revue de Roberts et King (2013) met en évidence l'étude d'une échelle caractéristique pour le champ magnétique L_B similaire à L_η à un facteur π près. La loi obtenue en fonction du nombre de Reynolds magnétique $L_B = 3Rm^{-1/2}$ est cohérente avec celle obtenue ici, puisque $L_B = \pi L_\eta$.

A nouveau cette loi sera utilisée pour compléter les quelques valeurs manquantes, et ainsi permettre le calcul du nombre d'Elsasser modifié Λ' pour l'intégralité du jeu de données.

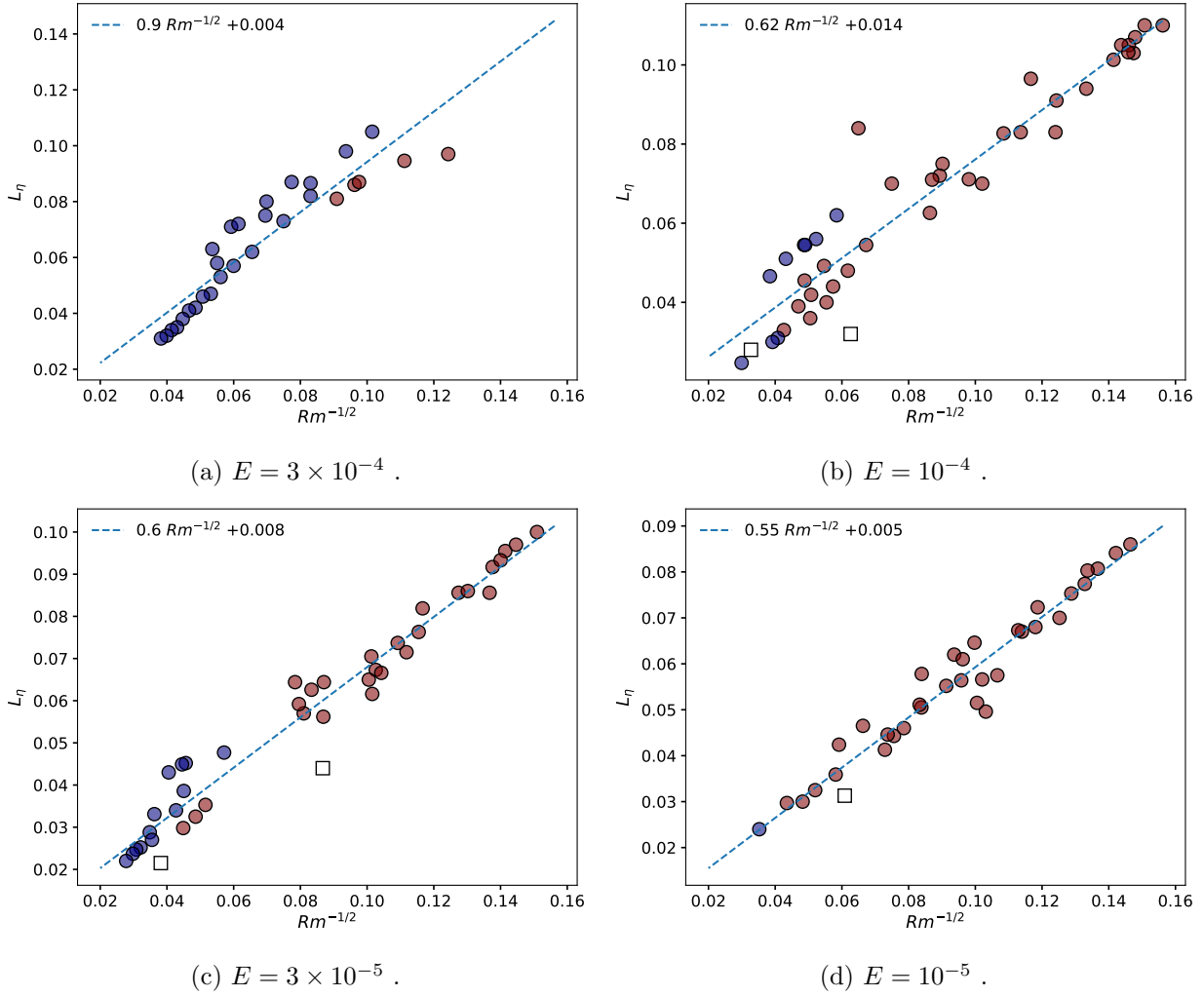


FIGURE 3.20 – $L_\eta \propto Rm^{-1/2}$ pour quatre valeurs d'Ekman. Le code couleur de la figure précédente est utilisé. Les carrés indiquent les cas multipolaires.

3.4.3 Equilibre des forces comme point de bascule

A la lumière de nos résultats, la force de Lorentz serait un acteur déterminant pour la topologie des dynamos, pas seulement pour le maintien d'un champ magnétique moyen élevé, mais également lors la transition entre les régimes. Effectivement, en régime dominé par la force de Lorentz, les forces d'inertie doivent être d'importance comparables aux forces magnétique et de Coriolis pour que la transition vers le régime multipolaire ait lieu. Pour mieux caractériser la limite entre ces régimes, une démarche phénoménologique se basant sur les équilibres de force est employée. On considère que pour que la transition ait lieu, le terme d'inertie doit être comparable au terme représentant la force de Lorentz dans l'équation du moment - de manière analogue à la démarche employée par Oruba et Dormy (2014b) avec les forces visqueuses. En utilisant les échelles préalablement définies, sans approximation supplémentaire on obtient :

$$(\vec{\nabla} \times \vec{u}) \times \vec{u} \sim \frac{1}{\mu\rho} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \times \vec{B}. \quad (3.2)$$

D'où :

$$\frac{\vec{u}^2}{L_{inertie} L_\nu} \sim \frac{\vec{B}^2}{\mu\rho L_B L_\eta}. \quad (3.3)$$

Or, d'après les résultats obtenus sur la répartition des forces, les échelles caractéristiques de l'inertie $L_{inertie}$ et de la force de Lorentz L_B sont du même ordre aux abords de la transition. Dans le but de la caractériser au mieux, nous allons donc considérer $L_{inertie} \sim L_B$ pour la suite de ce raisonnement.

Il vient donc :

$$\frac{\vec{u}^2}{L_\nu} \sim \frac{\vec{B}^2}{\mu\rho L_\eta} \Leftrightarrow \frac{L_\eta}{L_\nu} \sim \frac{\vec{B}^2}{\mu\rho \vec{u}^2}. \quad (3.4)$$

En remanipulant cette équation à l'aide des nombres sans dimension du problème, on reconnaît les deux paramètres qui sectorisaient les diagrammes en figure 3.14 : Λ' - défini par l'équation (3.1) et Ro_{L_ν} - équation (2.51). Ainsi,

$$\frac{L_\eta}{L_\nu} \sim \frac{\Lambda}{Ro \, Rm} \Leftrightarrow \frac{L_\eta}{L_\nu} \sim \frac{\Lambda'}{Ro_{L_\nu}} \frac{L_\eta}{L_\nu}, \quad (3.5)$$

la force de Coriolis étant incluse dans les définitions du Elsasser modifié Λ' et du nombre de Rossby local Ro_{L_ν} .

Finalement on obtient donc la relation suivante, issue de l'équilibre entre les forces inertielles et de Lorentz :

$$\frac{\Lambda'}{Ro_{L_\nu}} \sim 1. \quad (3.6)$$

A partir de la relation entre l'échelle L_ν et $\bar{\ell}_u$, vérifiée sur une gamme de paramètre étendue en figure 3.18, cette relation peut être réécrite en :

$$\frac{\Lambda'}{Ro_\ell} \sim 5. \quad (3.7)$$

La différence avec les précédents raisonnements est de considérer la force de Lorentz et donc l'échelle de dissipation magnétique qui lui est associée. Une valeur supérieure à 1 du rapport de l'équation 3.6 indique que le terme d'inertie n'est pas suffisamment important pour concurrencer la force de Lorentz. Pour une valeur de $\Lambda' = 0.6$, c'est-à-dire pour une force de Coriolis dominante, on retrouve la valeur critique $Ro_\ell = 0.12$. En revanche pour des valeurs plus hautes de Λ' , plus

proches de l'unité et donc du régime dominé par la force de Lorentz, cette valeur critique augmente progressivement.

Pour représenter ce rapport, l'ensemble des simulations a été représenté dans l'espace (Λ', Ro_ℓ) pour chaque valeur du nombre d'Ekman - bien que cette loi n'en dépendent pas - en figure 3.21. Les couleurs indiquent la valeur du nombre de Prandtl magnétique. Les lignes pointillées délimitent les deux valeurs critiques : $\Lambda' = 1$ pour la ligne horizontale et $Ro_\ell = 0.12$ pour la ligne verticale. La ligne oblique, tiretée, indique le critère obtenu ci-dessus. Sans surprise, l'ensemble des dynamos multipolaires se situent sous ou sur cette limite, puisque l'inertie compense au moins la force de Lorentz ; tandis que les dynamos dipolaires sont pour la plupart au-dessus de cette limite. Les dynamos dipolaires sous cette limite sont localisées à bas Ro_ℓ et bas Pm , et correspondent à des nombres d'Elsasser peu élevés. Elles correspondent aux cas pour lesquels le rapport $\Lambda'/Ro_\ell < 5$, c'est-à-dire lorsque la force de Lorentz est moins importante que les forces inertielles. Il s'agit donc de cas largement dominés par la force de Coriolis, sûrement en équilibre géostrophique, et proche de la limite dynamo. Ces cas, notamment à $E = 10^{-5}$, correspondent à des gammes de paramètres plus proches de la zone explorée par les études précédentes, puisqu'elles sont en magnitude plus proches des paramètres terrestres (bas E et bas Pm).

Les dynamos pour lesquelles la force de Lorentz domine les forces inertielles sont au-delà de cette limite. Pour tout ces cas, y compris ceux qui ne sont pas dominés par la force de Lorentz - sans le point au centre du symbole, aucune transition n'a lieu avant que la valeur critique 5 soit atteinte. Pour les branches à Pm moyen des panels 3.21b et 3.21d, les transitions observées s'effectuent dans un intervalle de $Ro_\ell \sim 0.1$, tout en respectant $\Lambda'/Ro_\ell \sim 5$. Effectivement, pour ces valeurs de $\Lambda' < 1$, les valeurs de Ro_ℓ observées après la transition ne transgressent pas le critère développé à partir de l'équilibre entre les forces d'inertie et de Lorentz. Aucune transition n'est observée dans la zone à $Ro_\ell \sim 0.1$ et $\Lambda' > 5Ro_\ell$.

Cependant, pour la branche à $E = 3 \times 10^{-5}$, $Pm = 1$ (panel 3.21c en vert), on obtient un cas dipolaire à $\Lambda' < 1$ et à $Ro_\ell > 0.12$. Bien que non dominé par la force de Lorentz, il fait partie de la zone de l'espace des paramètres qui n'avait pas encore été explorée. Ce cas singulier respecte le critère pour rester dipolaire déduit ci-dessus : $\Lambda' > 5Ro_\ell$. En analysant l'équilibre de force correspondant, on s'aperçoit qu'en effet, bien que la force de Lorentz n'équilibre pas celle de Coriolis aux plus grandes échelles, elle est loin d'être négligeable (voir figure 3.13a). Ainsi, pour ces paramètres, il suffit que la force de Lorentz ne soit pas négligeable ($\Lambda' = 0.7 < 1$) pour retarder la transition à des valeurs de $Ro_\ell > 0.12$, jusqu'à ce que l'inertie devienne suffisamment importante. En effet, à Ro_ℓ plus élevé, on observe bien une transition pour cette même branche, déclenchée par l'inertie alors suffisamment importante pour perturber l'équilibre à grande échelle (simulation M2, dont l'équilibre des forces est présenté en figure 3.8).

Pour les trois valeurs d'Ekman les plus élevées, au moins une branche de dynamos dipolaires à Pm constant est dominée par la force de Lorentz sur environ un ordre de grandeur en Ro_ℓ . On retrouve le comportement caractéristique de ces dynamos, restant dipolaires malgré des valeurs élevées.

A $E = 3 \times 10^{-4}$, un choix judicieux de paramètres a permis de suivre une branche à $\Lambda' \sim 1$. Pour une valeur de Ra/Ra_c élevée, le cas multipolaire dominé par la force de Lorentz présenté en partie 3.4 est obtenu, à $\Lambda' \gtrsim 1$. Le critère (3.6) impose une valeur critique de Ro_ℓ pour la transition linéairement dépendante de Λ' . Pour $\Lambda' = 1$, à la limite du régime dominé par la force de Lorentz, il faut déjà atteindre $Ro_\ell \sim 0.2$, ce qui est le double de la valeur usuelle pour la transition. En approchant cette valeur, à $Ro_\ell \sim 0.19$, on obtient effectivement une transition vers le régime multipolaire pour la branche à $(E = 3 \times 10^{-4}, Pm = 6)$. Pour des Pm et Λ' plus élevés, les valeurs

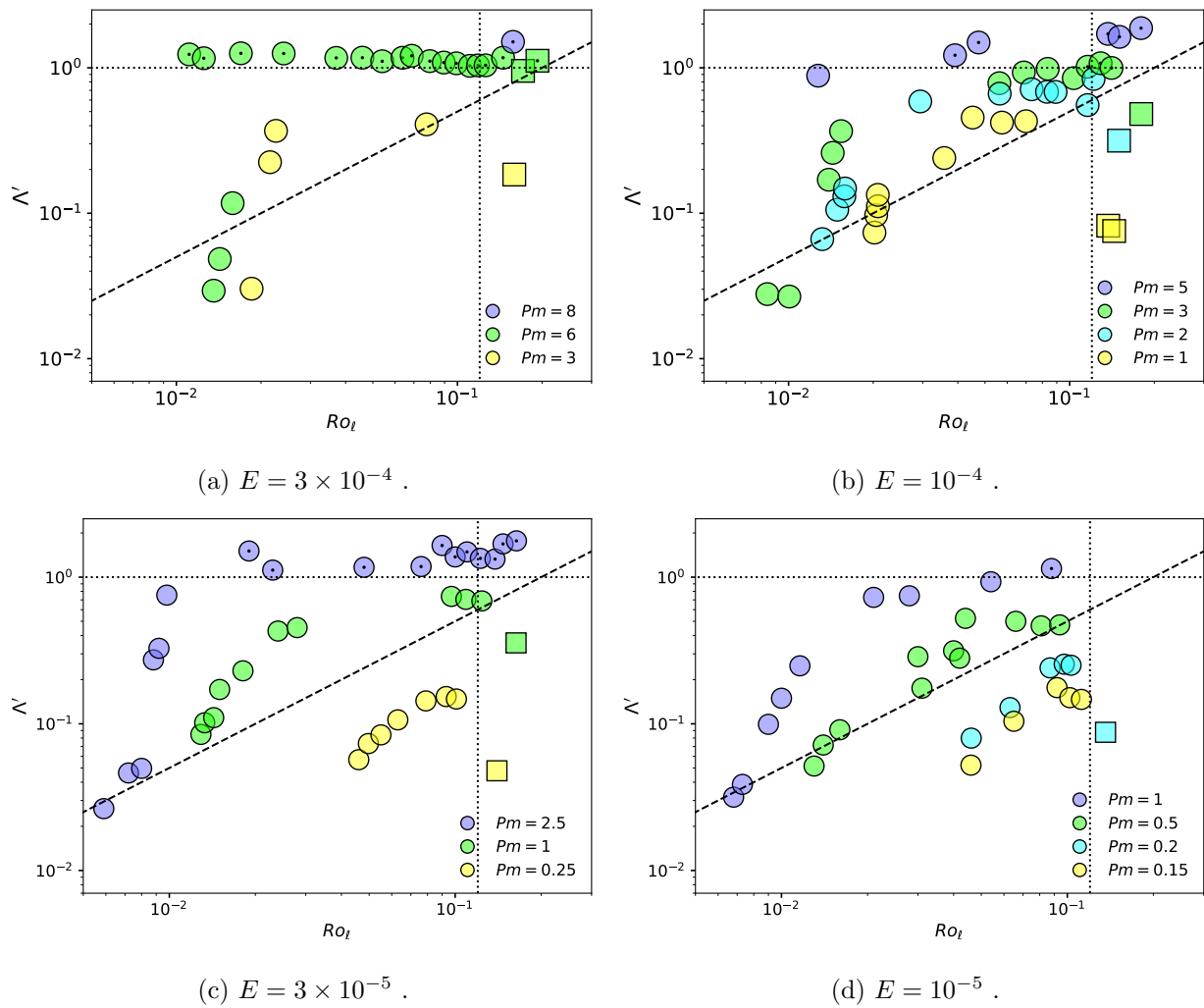


FIGURE 3.21 – Diagrammes Λ' versus Ro_ℓ pour les quatre valeurs du nombre d'Ekman. Les couleurs sur chaque panel correspondent aux valeurs de Pm explorées, et la forme du symbole à la topologie du champ : les cercles pour les modèles dipolaires, les carrés pour les multipolaires. Les lignes pointillées indiquent les valeurs critiques $Ro_\ell = 0.12$ (ligne verticale) et $\Lambda' = 1$ (ligne horizontale). La ligne tiretée représente le critère obtenu en équation 3.6 : $\Lambda' = 5Ro_\ell$.

critiques à atteindre sont extrêmes et au-delà des moyens numériques employés ici.

Ce cas particulier confirme l'interprétation effectuée des solutions dipolaires à haut Ro_ℓ . Pour un modèle où la force de Lorentz est non négligeable, les forces d'inertie doivent être suffisamment importantes pour concurrencer cette dernière, et non pas uniquement la force de Coriolis, pour perdre le dipôle et passer au régime multipolaire. Cette analyse explique les comportements observés auparavant pour ces modèles.

Ainsi, si la valeur de l'intensité relative du dipôle magnétique ne chute pas drastiquement au moment de la transition pour les branches à haut Pm , c'est parce que la force de Lorentz est toujours importante malgré l'inertie. Pour les mêmes raisons, le nombre d'Elsasser reste relativement élevé, et sa chute dépend du nombre de Prandtl magnétique dans la mesure ou celui-ci module la proximité au régime dominé par la force de Lorentz. Lorsqu'il est atteint, il existe toujours un régime générant un champ mutipolaire, mais pour lequel la force de Lorentz ne devient pas négligeable devant les forces inertielles. Effectivement, dans le cas multipolaire non dominé par la force de Lorentz, cette dernière s'affaiblit à toutes les échelles alors que l'inertie la remplace dans l'équilibre des forces sans pour autant dominer la force de Coriolis (voir figure 3.15).

Ainsi, ce critère permet de distinguer les dynamos multipolaires des dynamos dipolaires dès lors que la force de Lorentz est non négligeable dans l'équilibre des forces. En particulier, malgré des valeurs de f_{dip} , Ro_ℓ et Λ élevées, toutes les dynamos multipolaires respectent $\Lambda' \lesssim 5Ro_\ell$. Contrairement aux espaces des paramètres (f_{dip}, Ro_ℓ) , les deux comportements sont dans notre cas bien distinguables.

L'espace des paramètres étudié correspond à la limite entre les zones blanche et violette telles que représentées sur la figure 3.22, diagramme de l'espace des paramètres (Pm, Ra) . Les modèles sont toujours séparables en deux topologies de champ distinctes, dipolaire et multipolaire. En revanche, la transition entre les deux régimes dépend de l'importance de la force d'inertie par rapport à la force de Lorentz, dès lors que celle-ci n'est pas négligeable dans l'équilibre de forces. De plus, si cette dernière est plus importante que la force de Coriolis - en zone violette, les deux régimes ont des comportements différents. Selon les études précédentes, l'intensité du champ est plus élevée et la structure de l'écoulement varie pour les dynamos dipolaires dominées par la force de Lorentz - $\Lambda' \geq 1$ et $Ro_\ell \leq \Lambda'/5$. Lorsque le modèle est multipolaire et dominé par la force de Lorentz - $\Lambda' \geq 1$ et $Ro_\ell \geq \Lambda'/5$, les renversements observés sont plus stables et moins chaotiques que dans un modèle multipolaire classique à Ra/Ra_c équivalents. Les transitions dominées par la force de Lorentz sont plus coûteuses à obtenir, puisque les valeurs de Ro_ℓ à atteindre sont proportionnelles à Λ' .

3.5 Pertinence pour la géodynamo et conclusions

Les paramètres explorés ici s'éloignent de ceux du noyau terrestre par rapport aux précédentes études (voir table 1.1). Cependant, ils ont l'avantage de permettre l'exploration d'un régime dominé par la force de Lorentz, et ainsi d'en étudier l'impact sur les différentes topologies du champ. Effectivement, dans le noyau terrestre, la force de Lorentz n'est pas négligeable par rapport à la force de Coriolis résiduelle (après équilibre avec le gradient de pression). L'équilibre magnétostrophique, précédemment obtenu en diminuant les valeurs du nombre d'Ekman, peut également être étudié en augmentant la valeur du nombre de Prandtl magnétique. Ces deux approches ont en commun la diminution de l'importance relative de la viscosité, soit par rapport à la force de Coriolis, soit par rapport à la diffusivité magnétique. De plus, cette étude méthodique de l'espace des paramètres à haut Pm révèle que la limite entre les dynamos dominées par la force de Lorentz et celles dominées

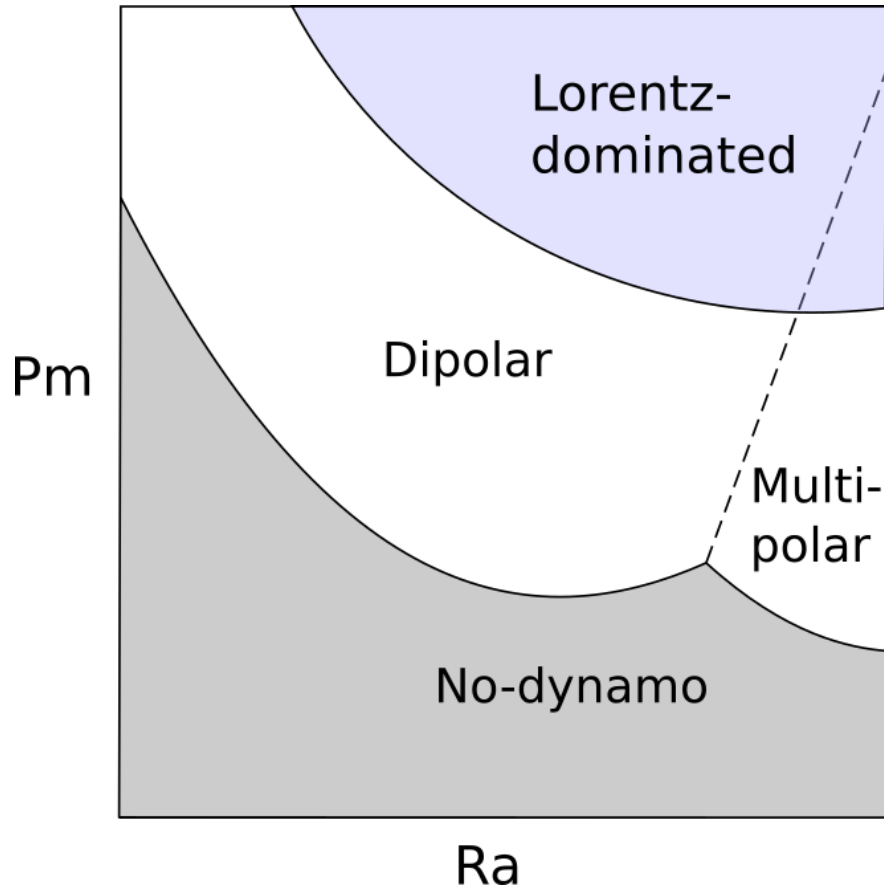


FIGURE 3.22 – Diagramme de l'espace des paramètres étudié. Les topologies dipolaires et multipolaires du champ magnétique sont séparées par une zone de transition, schématiquement représentée par la ligne en tirets. La partie violette indique la zone de l'espace des paramètres pour laquelle la force de Lorentz domine celle de Coriolis. L'inertie quant à elle devient importante dans le régime multipolaire, qui peut également être dominé par la force de Lorentz.

par la force de Coriolis, est effectivement ténue, mais surtout dépendante du nombre d'Ekman choisi. Cette variation du Pm_c , valeur critique du nombre de Prandtl magnétique pour une dynamo à $\Lambda' \geq 1$, est particulièrement visible sur la figure 3.14.

Les valeurs de Pm_c , interpolées pour les quatre valeurs d'Ekman étudiées, sont représentées en bleu sur la figure 3.23. Les simulations d'études précédentes aux valeurs de Pm et E les plus extrêmes sont également représentées (voir la légende pour les couleurs attribuées à chacune). La ligne tiretée bleue est la courbe de tendance issue des modèles de cette étude. Au-dessus de cette courbe, il est possible d'obtenir des dynamos dipolaires dominées par la force de Lorentz. L'ensemble des cas est réparti uniformément autour de cette courbe. Cela ne signifie pas pour autant que les modèles situés au-dessus de cette courbe explorent le régime dominé par la force de Lorentz. En effet, les valeurs minimales de Prandtl magnétique sont obtenues dans cette étude pour les modèles fortement turbulents (à Ra/Ra_c élevé) - voir figure 3.14. Pour des valeurs moins supercritiques du nombre de Rayleigh, on trouve des dynamos dipolaires à $\Lambda' < 1$ pour les mêmes valeurs de Pm , ce qui est le cas des modèles de Schaeffer *et al.* (2017) en l'occurrence. Néanmoins, cette figure met en évidence la pertinence de considérer un tel régime, ses paramètres étant proches des études précédentes comme on peut le constater en figure 3.23b, en particulier à bas nombre d'Ekman.

Les simulations pour la géodynamo considérant les paramètres les plus réalistes accessibles

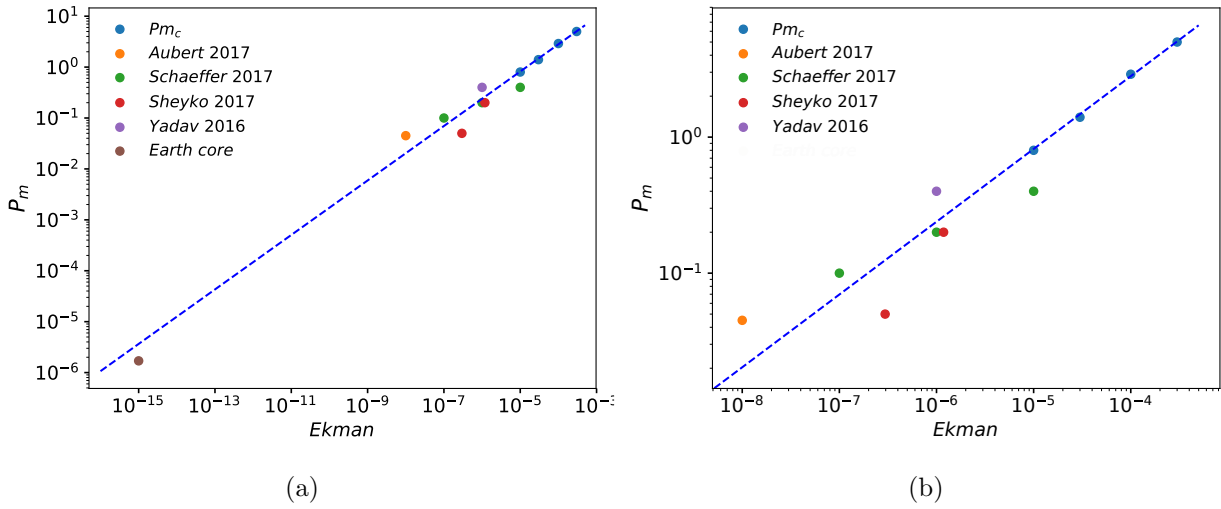


FIGURE 3.23 – Valeur minimale de Pm suffisante pour observer une dynamo dominée par la force de Lorentz d’après cette étude (points bleu). Les paramètres des études précédentes (Aubert *et al.* (2017) en orange, Schaeffer *et al.* (2017) en vert, Sheyko *et al.* (2017) en rouge, Yadav *et al.* (2016) en violet) sont également représentés ainsi que ceux du noyau terrestre (en marron). La ligne tiretée bleue est l’extrapolation de la valeur critique obtenue à partir des modèles présentés. (a) : vue sur 12 ordres de grandeur en Ekman, (b) : zoom sur les 5 ordres de grandeur en Ekman explorés par les modèles numériques.

aujourd’hui restent néanmoins plus proches des modèles présentés que des paramètres du noyau terrestre. La place du noyau terrestre par rapport aux différentes études est représentée en figure 3.23a. Celui-ci est particulièrement proches de la courbe Pm_c extrapolée. Les valeurs ($E = 10^{-15}$, $Pm = 1.5 \times 10^{-6}$) ont été considérées. Ceci est cohérent avec le régime MAC supposé être important à moyennes échelles, après l’équilibre géostrophique dominant aux grandes échelles. Les valeurs estimées du nombre d’Elsasser et du nombre de Reynolds magnétique pour la Terre et les planètes par Schubert et Soderlund (2011) attribuent à la Terre un $\Lambda' \geq 1$, tandis qu’aux autres planètes, Jupiter excepté, un Elsasser modifié inférieur ou de l’ordre de 10^{-2} est obtenu, les plaçant ainsi dans un régime largement dominé par la force de Lorentz. De plus comme illustré en partie 3.4.2, la valeur de Λ' semble impacter la valeur de f_{dip} , en moyenne plus importantes pour les dynamos à $\Lambda' < 1$. Les valeurs plus modérées, et donc plus proches de celle de la Terre, sont prisées par les modèles dominés par la force de Lorentz. D’après des études observationnelles (Schubert et Soderlund, 2011), il est possible d’estimer une valeur de Λ' , et celle du noyau serait supérieure à 1, la situant dans un régime, en partie au moins, dominé par la force de Lorentz. Le critère sur Ro_ℓ en fonction de Λ' est ainsi d’autant plus pertinent pour les études géodynamo, puisque pour le noyau externe on estime ($\Lambda \geq 1$, $Ro_\ell \sim 0.1$).

Caractériser les paramètres nécessaires à une transition vers le régime multipolaire est fondamental dans la mesure où les renversements du dipôle géomagnétique indiquent qu’il est proche de cette zone. Initialement, l’équilibre entre force de Coriolis et inertie était supposé déclencher la transition vers le régime multipolaire quelles que soient les valeurs de Pm ou E considérées (Christensen et Aubert, 2006; Olson et Christensen, 2006; Schinnerer *et al.*, 2012). Soderlund *et al.* (2012) ont montré que ce rapport n’était pas déterminant, mettant en évidence l’importance des forces visqueuses dans cette dynamique. L’étude argumente en faveur d’une transition dominée par des processus hydrodynamiques. Oruba et Dormy (2014b) proposent une transition déterminée par un équilibre à trois forces entre force de Coriolis, inertie et forces visqueuses. L’introduction d’un

nombre d'Elsasser modifié tenant d'une échelle caractéristique du champ magnétique par Soderlund *et al.* (2015), puis Dormy (2016), met en évidence l'intérêt de considérer cette échelle pour mieux représenter la force de Lorentz dans les rapports tels que le nombre d'Elsasser. Yadav *et al.* (2016), dans une étude approfondie du régime MAC, obtiennent des équilibres de forces similaires aux équilibres correspondant au régime dominé par la force de Lorentz (voir figure 3.13b), mentionnant également une répartition différente de l'énergie magnétique pour ce régime. L'importance de cette répartition est étudiée dans le détail par Schaeffer *et al.* (2017), qui reportent également un changement dans la structure de l'écoulement lors de l'application d'un champ magnétique.

Le régime dominé par la force de Lorentz, et les comportements qui lui sont associés, partagent des points communs avec le régime MAC au cœur de précédentes études sur les équilibres de force. Ce régime est aujourd'hui le candidat le plus crédible pour le noyau terrestre, puisqu'il permet d'expliquer plusieurs observations. Le régime magnétostrophique étudié ici ne semble donc pas incompatible avec l'étude du noyau externe terrestre. Ce type d'équilibre à grande échelle entre force de Lorentz et force de Coriolis se retrouve également dans d'autres objets astrophysiques, tels que certaines zones de Jupiter ou certaines étoiles.

Chapitre 4

Cascade inverse et champs de grande échelle

4.1	Cascade inverse, hélicité(s) et cas étudié(s)	79
4.1.1	Notion d'invariance et cascade directe	79
4.1.2	Cascades et anisotropies	80
4.1.3	Hélicité hybride	83
4.1.4	Résumé des différents cas attendus	85
4.2	Deux types de polarisation	86
4.2.1	Impact du forçage	86
4.2.2	Cas de référence	92
4.3	Impact de l'angle d'inclinaison	94
4.3.1	Comportement des énergies	96
	Cas orthogonal	96
	Impact de petits angles sur des temps courts	96
	Impact sur les temps longs	100
4.3.2	Efficacité du transfert vers les grandes échelles	103
4.4	Conclusions	108
4.4.1	Dérivation analytique	108
4.4.2	Structures	109
4.4.3	Applications	109
4.5	Impact du nombre de Prandtl magnétique	110

Dans cette partie, les effets combinés d'un champ magnétique moyen et d'une rotation globale sont étudiés dans un système local tridimensionnel simulant une portion de plasma contenu dans une boîte cubique aux conditions aux limites périodiques (voir partie 2.1). En particulier, les processus de transfert d'énergie, ainsi que les paramètres les influençant, sont au cœur de cette étude.

4.1 Cascade inverse, hélicité(s) et cas étudié(s)

4.1.1 Notion d'invariance et cascade directe

Comme déjà introduit, dans de nombreux systèmes turbulents, l'énergie disponible aux plus grandes échelles est redistribuée vers de plus petites échelles, et ce jusqu'à dissipation. Dans le cadre de la MHD idéale, il n'y a pas de dissipation, et donc l'énergie se conserve. Il s'agit de l'énergie totale, puisqu'il y a de nombreux échanges possibles entre énergie cinétique et magnétique via les termes d'induction et de Lorentz dans les équations de la MHD incompressible (cfr équations

(2.6)). Ainsi, l'énergie totale du système $E_T = \frac{1}{2} \int (\vec{u}^2 + \vec{b}^2) d\mathcal{V}$ est conservée au cours du temps, et est donc qualifiée d'*invariant* des équations de la MHD idéale incompressible. La notion d'invariance est indissociable des processus de transferts d'énergie, puisque les quantités conservées se répartissent aux différentes échelles, générant ainsi des flux et donc des transferts.

Un second invariant de la MHD, H_c , appelé *hélicité croisée* ou *corrélation croisée*, correspond au couplage des champs de vitesse et magnétique. Il est défini par $H_c = \frac{1}{2} \int \vec{u} \cdot \vec{b} d\mathcal{V}$, et il est facile de vérifier son invariance à partir des équations d'évolution du champ de vitesse et du champ magnétique. De façon analogue à l'énergie totale, l'hélicité croisée cascade directement, i.e. des grandes vers les petites échelles.

En dehors de la MHD idéale, de l'énergie est perdue aux petites échelles via les termes de dissipation dépendant de la viscosité cinématique et de la diffusivité magnétique du fluide considérées. Effectivement, dans le cadre d'une turbulence en décroissance libre - sans injection continue d'énergie, l'énergie introduite aux grandes échelles va se dissiper à petite échelle, où les effets de la dissipation sont dominants, i.e. les échelles dissipatives ou de Kolmogorov. Cependant, plusieurs ordres de grandeurs séparent celles-ci des plus grandes échelles auxquelles l'énergie est initialement située. En réalité, via le terme d'inertie, l'énergie cascade localement vers de plus petites échelles de proche en proche (voir 1.2.2). Cette zone, dans laquelle l'énergie est uniquement transportée par le terme d'inertie, est ainsi appelée *zone inertielle*.

Pour étudier une dynamique lente, il est en revanche nécessaire d'injecter de l'énergie afin de maintenir un réservoir non-vide, et de permettre d'autres types de transferts. La quantité d'énergie injectée - ou forçage - doit permettre de contrebalancer l'énergie dissipée aux petites échelles. Souvent, l'injection d'énergie s'effectue à grande échelle, dans le but d'étudier sa répartition au cours du temps, et d'en déduire des lois caractérisant le processus de cascade directe. La plus connue, dite loi des $-5/3$, décrit la répartition de l'énergie cinétique dans la zone inertielle dans le cadre de la MHD homogène isotrope. Elle fut obtenue à de nombreuses reprises, numériquement et expérimentalement (cfr l'ouvrage de Biskamp (2003)).

4.1.2 Cascades et anisotropies

Pour les processus de transfert vers de plus grandes échelles, comme l'effet dynamo, il est plus pertinent d'injecter de l'énergie à échelle moyenne ou petite, pour que le phénomène de cascade inverse étudié ne soit ni biaisé ni perturbé par un forçage aux échelles prises pour cible. Sous certaines conditions, il est possible d'observer deux cascades simultanément : la cascade directe et la cascade inverse comme le représente schématiquement la figure 4.1. Par exemple, dans le modèle global présenté en partie 2.2, un terme source est ajouté dans l'équation du mouvement via le gradient de température entre les deux coquilles, induisant un forçage convectif et ainsi une injection d'énergie aux échelles caractéristiques de la convection. De manière similaire au processus de cascade directe, une cascade inverse correspond à la répartition d'un invariant à travers les différentes échelles, dans ce cas supérieures à l'échelle d'injection. Le principe de cascade inverse, introduit par Kraichnan dans le cas hydrodynamique bidimensionnel (Kraichnan, 1967), mit plus de temps à être démontré dans le cadre de la turbulence MHD tridimensionnelle. En effet, aucun des deux invariants déjà mentionnés, l'énergie totale et l'hélicité croisée, ne cascadennt inversement. Woltjer (1958) introduit un nouvel invariant de la MHD idéale, l'hélicité magnétique $H_m = \frac{1}{2} \int \vec{a} \cdot \vec{b} d\mathcal{V}$. Analytiquement, si cette quantité est injectée à échelle moyenne dans le système, une cascade inverse est attendue (Frisch *et al.*, 1975), menant in fine à une augmentation de l'énergie magnétique. Cette cascade fut ensuite observée numériquement par Pouquet *et al.* (1976) dans le cadre de l'approximation EDQNM (Orszag, 1970). Dans le but d'illustrer le phénomène de cascade inverse, une

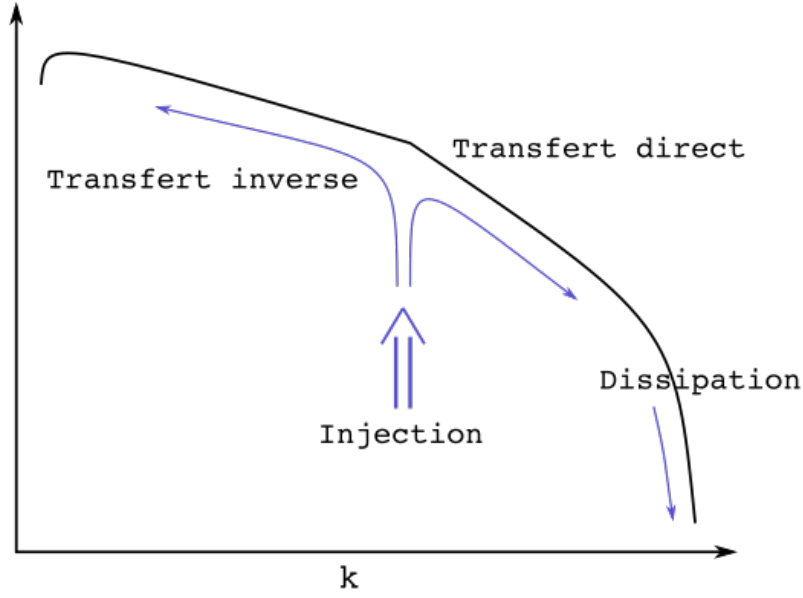


FIGURE 4.1 – Représentation schématic d'un spectre mettant en évidence les deux types de cascade, ainsi que la dissipation à petite échelle (grand k) et l'injection à échelle moyenne.

démonstration phénoménologique est présentée ci-dessous.

La valeur moyenne H_m à une certaine échelle ℓ peut s'écrire :

$$\langle H_m^\ell \rangle = \frac{\langle \vec{a}_\ell \cdot \vec{b}_\ell \rangle}{2}. \quad (4.1)$$

La valeur moyennée de l'hélicité magnétique $\langle H_m \rangle$ est reliée à son spectre en fonction du nombre d'onde k par :

$$\langle H_m \rangle = \int H_m(k) dk \quad (4.2)$$

En partant de l'équation d'induction dans le cas idéal pour les fluctuations du champ magnétique $\vec{b}$:

$$\partial_t \vec{b} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{b}), \quad (4.3)$$

on obtient l'équation donnant l'évolution de H_m :

$$\partial_t H_m = \vec{b} \cdot (\vec{u} \times \vec{b}) + \vec{a} \cdot (\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{b})) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{b} \phi), \quad (4.4)$$

avec ϕ un potentiel électrique.

A partir de la relation (4.1), et de la définition du potentiel vecteur $a_\ell \sim \ell b_\ell$ on peut écrire :

$$H_m^\ell \sim \ell b_\ell^2. \quad (4.5)$$

Finalement, en ajoutant un terme source (forçage) d'hélicité magnétique φ_{H_m} , l'équation (4.4) devient :

$$\partial_t H_m \sim b_\ell^2 u_\ell + \varphi_{H_m}. \quad (4.6)$$

En considérant une situation stationnaire et l'équipartition entre les énergies magnétique et cinétique, on obtient :

$$\varphi_{H_m} \sim b_\ell^3. \quad (4.7)$$

En considérant la version locale de (4.2), en fonction du nombre d'onde k ,

$$H_m^\ell \sim H_m(k)k, \quad (4.8)$$

et (4.5) pour les réinjecter dans (4.7), il vient :

$$\varphi_{H_m} \sim \left(\frac{H_m^\ell}{l} \right)^{3/2} \sim (H_m(k)k^2)^{3/2}. \quad (4.9)$$

Finalement, le spectre d'hélicité magnétique se réduit à :

$$H_m(k) \sim \varphi_{H_m}^{2/3} k^{-2}. \quad (4.10)$$

Cette loi donne lieu à un double transfert d'énergie : une partie de l'énergie injectée cascade dans le sens direct vers les échelles dissipatives, tandis qu'une autre partie cascade inversement vers de plus grandes échelles, conduite par la cascade inverse d'hélicité magnétique en k^{-2} .

Finalement, pour la MHD idéale isotrope, on recense trois invariants : E_T , H_c et H_m . L'ajout d'une rotation globale, correspondant à un terme supplémentaire - la force de Coriolis - dans l'équation du mouvement, brise l'invariance de l'hélicité croisée H_c dont l'évolution est alors décrite par l'équation (4.16). Pour le cas avec champ magnétique uniforme, il s'agit alors de l'hélicité magnétique H_m qui n'est plus conservée - équation (4.12). A chacun de ces cas anisotropes sont associés deux invariants, en revanche, pour le cas avec rotation globale et champ magnétique moyen aucune de ces deux hélicités n'est a priori conservée. En effet, on obtient pour l'évolution de ces deux quantités :

$$\begin{aligned} \frac{dH_c}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\vec{u} \cdot \vec{b}}{2} d\mathcal{V} \\ &= \vec{\Omega}_0 \cdot \int (\vec{b} \times \vec{u}) d\mathcal{V}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dH_m}{dt} &\equiv \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{2} d\mathcal{V} \\ &= \vec{B}_0 \cdot \int (\vec{b} \times \vec{u}) d\mathcal{V}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

La figure 4.2 met en évidence l'évolution à court terme des différentes hélicités en fonction des différentes anisotropies considérées. Quatre simulations, effectuées avec le code TURBO 2.1, aux paramètres en tout point identiques à l'exception des grandeurs Ω_0 et B_0 prenant les valeurs 0 ou 1 ont été exécutées. Pour chacun des cas, une viscosité non-nulle - $\nu = 5 \times 10^{-3} = \eta$ - est considérée, sans forçage mais avec injection initiale d'énergie, ce qui implique une perte d'énergie par dissipation sur des temps longs. L'énergie totale n'est donc pas parfaitement conservée, comme elle l'est dans le cas idéal. Malgré tout, les invariants de la MHD propres à chacune des combinaisons considérées se démarquent dès les temps courts par l'absence d'oscillations, contrairement aux quantités non-invariantes. Ainsi, on constate que l'hélicité croisée H_c est conservée dans les cas sans rotation globale ($\vec{\Omega}_0 = 0$, en bleu et orange sur la figure 5.1a). Il s'agit effectivement d'un invariant de la MHD dans le cas sans rotation. De façon similaire, l'hélicité magnétique H_m est effectivement invariante dans les cas non magnétiques (champ moyen $\vec{B}_0 = 0$, en bleu et vert sur la figure 5.1b). On retrouve finalement les trois invariants quadratiques de la MHD idéale inviscide isotrope (cas en bleu) : l'énergie totale E_T , l'hélicité croisée H_c et l'hélicité magnétique H_m .

Pour le cas doublement anisotrope ($\vec{\Omega}_0 \neq 0$ et $\vec{B}_0 \neq 0$, antialignés) en rouge sur la figure 4.2, aucune des deux hélicités n'est conservée.

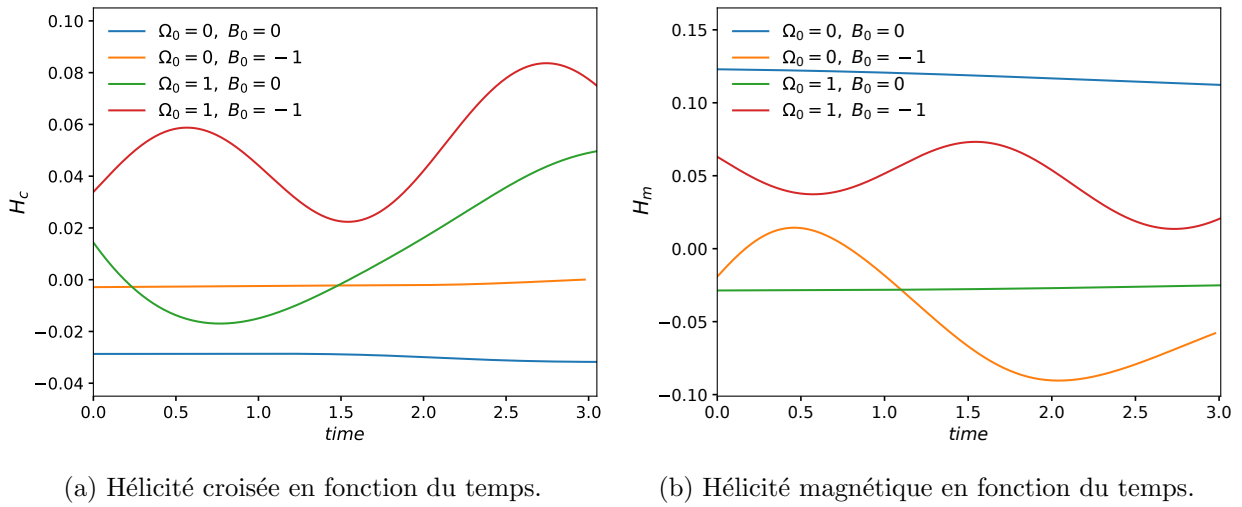


FIGURE 4.2 – Hélicités croisée et magnétique en fonction du temps pour quatre simulations de MHD non-idéale ($\nu = 5 \times 10^{-3} = \eta$) sans forçage en considérant toutes les combinaisons possibles avec Ω et/ou B égaux à 0 ou 1.

4.1.3 Hélicité hybride

Shebalin (2006) a mis en évidence un second invariant en plus de l'énergie totale pour ce cas précis, particulièrement adapté aux objets astrophysiques (cfr partie 1.2.3). Notée H_h , l'hélicité hybride est définie via la relation :

$$H_h \equiv \frac{1}{2} \int \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{d} - \vec{u} \cdot \vec{b} \right) d\mathcal{V} \quad (4.13)$$

$$= \frac{H_m}{d} - H_c, \quad (4.14)$$

avec d défini tel que $\vec{\Omega}_0 d = \vec{B}_0$, similaire à la longueur magnéto-inertielle. Ce rapport peut être négatif, changeant ainsi le signe de la contribution de H_m . L'hélicité hybride est effectivement conservée dans le cas où $\vec{\Omega}_0$ et $\vec{B}_0$ sont selon la même direction. En effet :

$$\frac{dH_h}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \int \left(\frac{H_m}{d} - H_c \right) d\mathcal{V} \quad (4.15)$$

$$= \left(\frac{\vec{B}_0}{d} - \vec{\Omega}_0 \right) \cdot \int (\vec{b} \times \vec{u}) d\mathcal{V}. \quad (4.16)$$

Ainsi, l'hélicité hybride est conservée si $\vec{B}_0/d = \vec{\Omega}_0$. Ce critère étant vectoriel, l'attribution d'un signe au facteur d permet de garder cet invariant autant pour le cas aligné ($d > 0$) ou antialigné ($d < 0$).

Cette hélicité est représentée sur la figure 4.3, accompagnée des deux précédentes qui la composent. Effectivement, on s'aperçoit qu'une combinaison des deux hélicités permet d'obtenir un invariant, légèrement imparfait sur la figure puisqu'on ne considère pas le cas idéal. Néanmoins, sur les temps courts, cette assertion est visiblement valide. On remarque cependant que l'orientation du champ par rapport à l'axe de rotation semble importante même si ceux-ci sont alignés : dans le cas antialigné présenté en figure 4.3a, le facteur $d = -1$ étant alors négatif, l'hélicité hybride

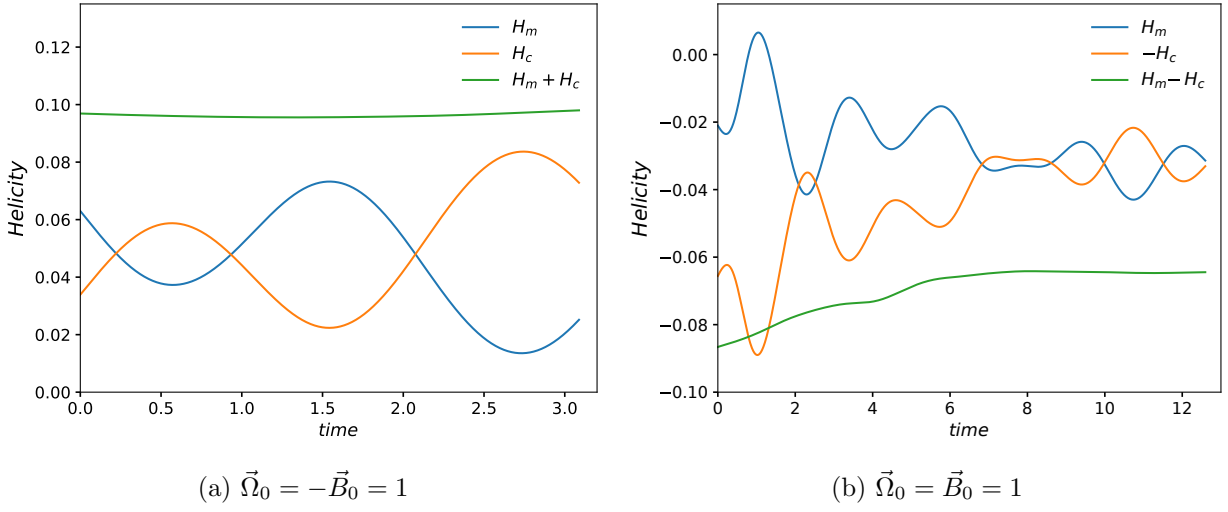


FIGURE 4.3 – Représentation de l'évolution des trois hélicités pour deux simulations sans forçage à $\nu = 5 \times 10^{-3} = \eta$ et $\Omega_0 = B_0 = 1$. (a) : $\vec{\Omega}_0$ et $\vec{B}_0$ antialignés, (b) : $\vec{\Omega}_0$ et $\vec{B}_0$ alignés. On s'aperçoit que la définition de la quantité invariante dépend de l'orientation entre les deux types d'anisotropie.

est alors $H_h = -H_m - H_c$. Par soucis de clarté, la quantité représentée en vert est ainsi $-H_h$, effectivement conservée. Pour la simulation représentée en figure 4.3b, à plus basse résolution, la composante verticale du champ moyen a été imposée de sorte que $H_h = H_m - H_c$. La dynamique des trois hélicités est représentée pour des temps légèrement plus longs. A nouveau, puisque viscosité et diffusivité sont non-nulles, on observe effectivement une diminution de l'amplitude des quantités, en particulier de H_h (en vert), dont l'augmentation initiale correspond aux phénomènes de dissipation - H_h étant négative dans ce cas précis. Malgré tout, l'invariance de l'hélicité hybride est à nouveau illustrée, les oscillations de H_m et H_c étant fortement symétriques.

Finalement, ce second invariant de la MHD avec champ magnétique moyen et rotation globale parallèles doit tenir compte dans sa définition du sens d'une anisotropie par rapport à l'autre via le signe du préfacteur multipliant H_m . Galtier (2014) a montré que cet invariant permet une cascade inverse sous certaines conditions dépendant de la longueur magnéto-inertielle. Effectivement, la résolution linéaire des équations donne la relation de dispersion suivante :

$$\omega = \frac{\vec{k} \cdot \vec{\Omega}_0}{k} \left(-s\Lambda + \sqrt{1 + k^2 d^2} \right), \quad (4.17)$$

avec $s = \pm 1$ la polarité directionnelle de l'onde - indiquant son sens de propagation ($\vec{k} \cdot \vec{\Omega}_0 = s k_z \Omega_0$, avec k_z aligné sur Ω), et $\Lambda = \pm 1$ la polarisation circulaire de l'onde. Contrairement au cas des ondes d'Alfvén n'ayant qu'un type de polarité - la polarité directionnelle relative au sens de propagation (voir figure 1.7), les ondes produites avec rotation globale sont en plus polarisées circulairement (Lehnert, 1954). Le type de polarisation, droite ou gauche, est déterminé par la valeur de Λ : $\Lambda = s$ pour la polarisation droite, $\Lambda = -s$ pour la polarisation gauche. Le produit $s\Lambda$ est déterminant, puisqu'il impose le sens et la forme des oscillations du champ (voir figure 4.4).

La polarité des ondes ainsi que la longueur magnéto-inertielle vont influencer sur la relation de dispersion, et ce particulièrement à grande échelle, où les deux branches sont bien séparées (figure 4.4c). En effet, quand $k|d| \ll 1$, l'équation (4.17) devient :

$$\omega = \begin{cases} 2k_z \Omega_0 / k, & \text{pour } s\Lambda = -1, \\ k_z B_0 d k / 2, & \text{pour } s\Lambda = 1. \end{cases} \quad (4.18)$$

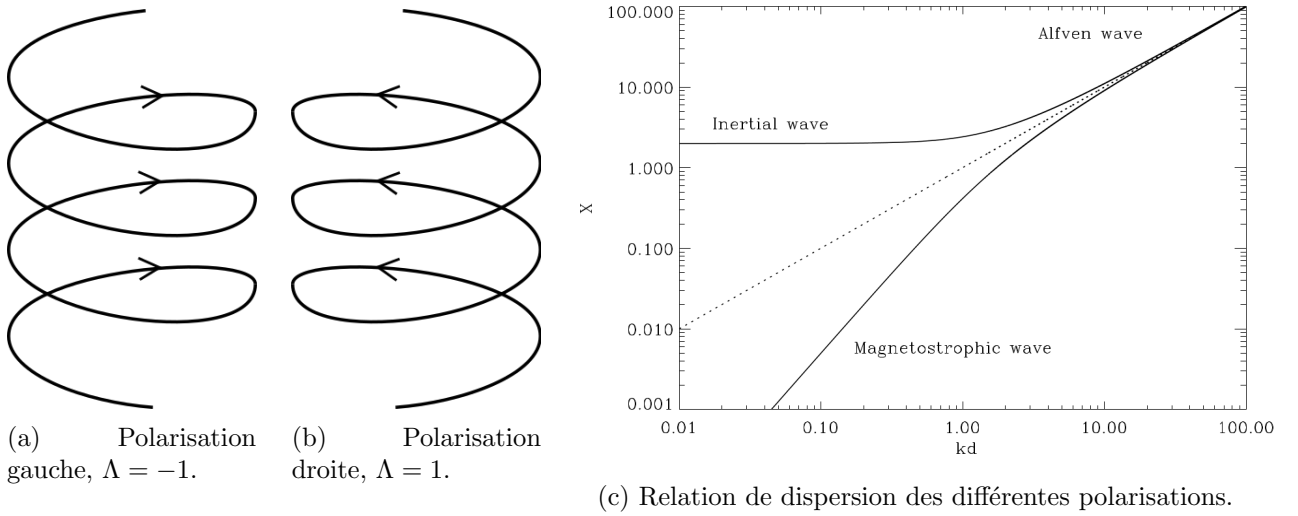


FIGURE 4.4 – Pour une direction de propagation fixée, $s = 1$, vers le haut ici -on distingue deux types de polarisation circulaire des ondes, gauche (a) et droite (b). Les deux branches sont séparées à petit k et tendent vers la solution correspondant aux ondes d’Alfvén à grand k (c).

Pour $s\Lambda = -1$, on reconnaît la relation de dispersion des ondes inertielles, qui correspondent à la polarisation gauche tandis que pour $s\Lambda = 1$, on obtient la relation de dispersion des ondes magnétostrophiques (polarisation droite). Sans surprise, la première dépend uniquement du taux de rotation, tandis que la seconde dépend également du champ magnétique. En revanche, lorsque $k|d| \gg 1$, on retrouve pour les deux types de polarisation la relation de dispersion des ondes d’Alfvén : $\omega = sk_z B_0$.

Ainsi, en se plaçant à des valeurs de $k|d| \ll 1$, c’est-à-dire à des échelles grandes devant la longueur magnéto-inertielle, il est en théorie possible de distinguer deux branches. De plus, le régime magnétostrophique est susceptible de générer une cascade inverse d’hélicité magnétique, comme dans le cas à forte rotation, et finalement une cascade inverse induite d’énergie magnétique (Galtier, 2014). Ces ondes magnétostrophiques sont attendues dans les dynamos magnétostrophiques, pour lesquelles force de Lorentz et de Coriolis sont proches de l’équilibre. Comme expliqué en partie 1.2.3, ce régime est particulièrement adapté aux dynamos planétaires, correspondant à des dynamos à forte rotation et fort champ magnétique moyen.

4.1.4 Résumé des différents cas attendus

On trouve en table 4.1 la répartition des différents invariants selon le type d’anisotropie étudié. Dans le cas avec champ magnétique moyen et rotation globale alignés - notée ci-après $B\Omega - MHD$ - seule l’hélicité hybride peut générer une cascade inverse, puisque l’énergie cascading directement. Ainsi l’étude des transferts d’énergie magnétique vers les grandes échelles via cet invariant est d’autant plus intéressante, puisque la configuration étudiée correspond à celle rencontrée dans les dynamos astrophysiques.

Les trois types d’anisotropie mentionnés dans la table 4.1 ont été étudiés (voir figure 4.5) : le cas doublement anisotrope, à $\vec{\Omega}_0 = 20, \vec{B}_0 = 1$ en bleu ; le cas sans rotation, à $\vec{\Omega}_0 = 0, \vec{B}_0 = 1$ en orange ; et enfin le cas sans champ magnétique moyen à $\vec{\Omega}_0 = 20, \vec{B}_0 = 0$ en vert. Les autres paramètres d’entrée sont identiques, et le type de forçage choisi pour ces simulations est discuté en partie 4.2.1. Pour chacun des cas, on a représenté sur la figure 4.5 les spectres des quatre quantités principales précédemment mentionnées à un temps similaire $t \sim 62$: E_u, E_b, H_m et H_c . Le premier panel (a), représentant l’énergie cinétique, ne met pas en évidence de différence entre les trois simulations,

Invariant	MHD Isotrope	$\Omega - MHD$	$B - MHD$	$B\Omega - MHD$
Energie totale E_T	conservée, cascade directe	conservée, cascade directe	conservée, cascade directe	conservée, cascade directe
Hélicité croisée H_c	conservée, cascade directe		conservée, cascade directe	
Hélicité magnétique H_m	conservée, cascade inverse	conservée, cascade inverse		
Hélicité hybride H_h	conservée, par définition			conservée, cascade inverse

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif des invariants et du type de cascade attendu selon les différentes anisotropies en MHD tridimensionnelle. $\Omega - MHD$, $B - MHD$ $B\Omega - MHD$ désignent respectivement les cas considérant rotation globale, champ magnétique moyen ou les deux.

sans surprise. Comme pour toutes les autres quantités présentées, on observe une cascade directe vers les petites échelles. Pour les autres quantités, les grandes échelles, qui nous intéressent ici, sont plus révélatrices. Le spectre d'énergie magnétique E_b , dissocie parfaitement le comportement des simulations avec rotation du cas sans rotation. Ceci n'est pas une surprise et est une conséquence directe de la cascade inverse d'hélicité magnétique observée en panel (d) pour ces deux cas. En effet, H_m est un invariant de la $\Omega - MHD$ (voir table 4.1), et comme nous l'avons brièvement montré, il permet sous certaines conditions une cascade inverse. La comparaison des spectres d'hélicité croisée (c) est singulière. Puisque l'hélicité hybride est censée cascader indirectement dans le cas doublement anisotrope, il ne paraît pas aberrant qu'on observe une légère cascade inverse d'hélicité croisée, puisque celle-ci la compose. L'étrange forme à petite échelle (vers $k \sim 100$) du spectre d'hélicité croisée est tout à fait normal puisque cette quantité n'est pas définie positive, et un changement de signe de cette variable moyennée en espace à ces petites échelles laisse ce type de signature. Les deux autres cas en revanche restent relativement passifs à grande échelle. Cela n'est pas étonnant, car aucune cascade inverse n'est attendue pour l'hélicité croisée.

Ces résultats sont cohérents avec les transferts attendus (voir table 4.1). Les spectres d'énergie et d'hélicité magnétiques des cas $\vec{\Omega}_0 = 20$, $\vec{B}_0 = 0$ et $\vec{\Omega}_0 = 20$, $\vec{B}_0 = 1$ se ressemblent, ce qui n'est pas surprenant au vu des paramètres choisis ici. En effet, le taux de rotation imposé est bien plus fort que le champ magnétique imposé ($|d| = 1/20$). Ainsi, l'hélicité hybride est dans ce cas dominée par l'hélicité magnétique - alors multipliée par 20, expliquant la proximité des spectres magnétiques de ces deux cas. La seule différence notable se fait via l'hélicité croisée H_c , plus élevée d'un ordre de grandeur à grande échelle dans le cas avec rotation et champ magnétique.

4.2 Deux types de polarisation

4.2.1 Impact du forçage

Pour mieux relier ces polarisations d'onde à des quantités mesurables numériquement, on utilisera la corrélation croisée et l'hélicité magnétique réduites :

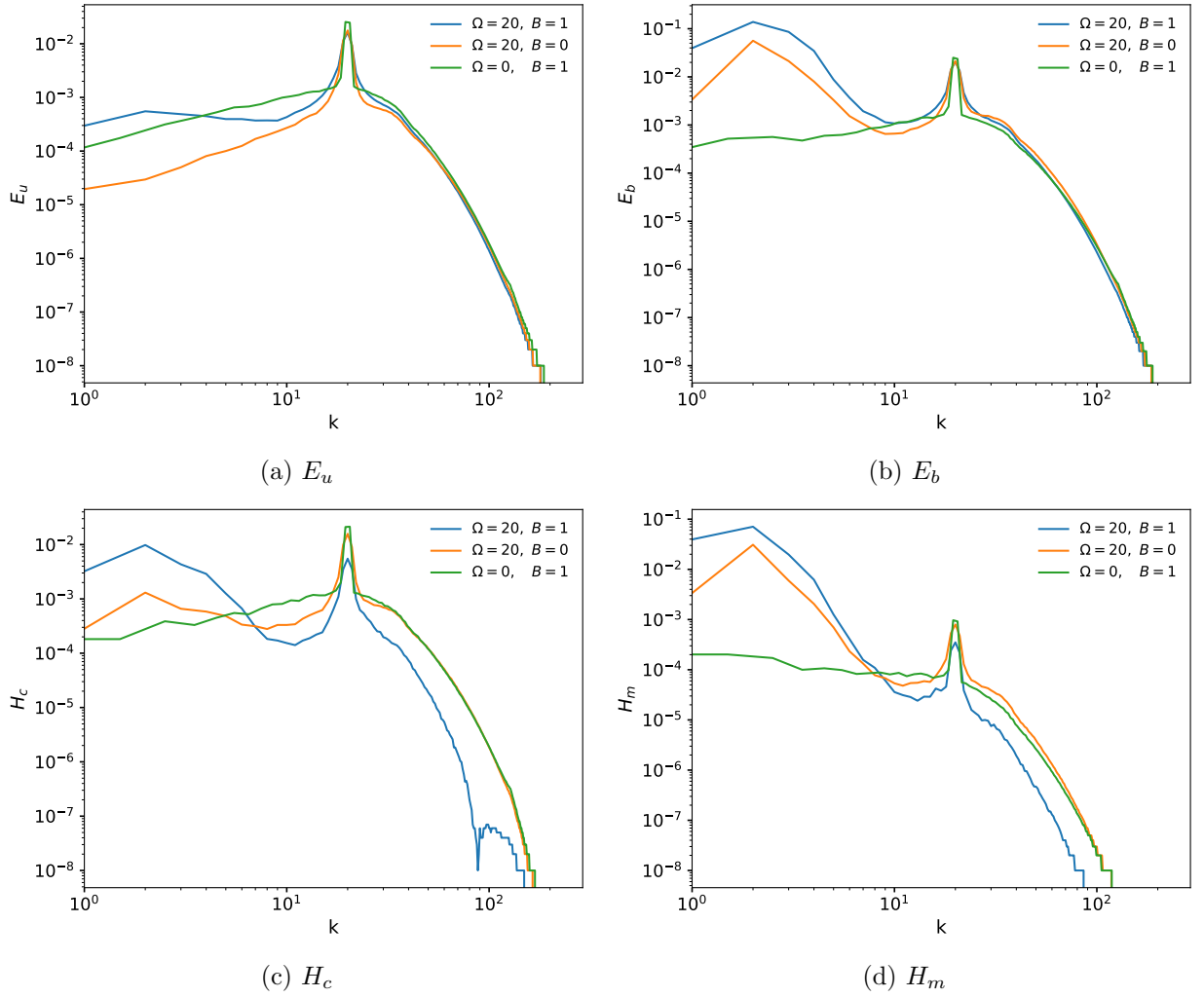


FIGURE 4.5 – Figure comparative des énergies et des deux hélicités, pour les trois types de cas anisotropes à un temps $t \sim 62$. Chaque cas correspond à une simulation de résolution 256^3 , avec $\nu = \eta = 2 \times 10^{-3}$; la couleur des courbes distinguant les anisotropies : bleu pour $B > 0, \Omega > 0$, orange pour $\Omega > 0$ uniquement et enfin le cas sans rotation mais avec $B > 0$ en vert.

$$\sigma_m = \frac{\hat{\vec{a}} \cdot \hat{\vec{b}}^* + \hat{\vec{a}}^* \cdot \hat{\vec{b}}}{2|\hat{\vec{a}}||\hat{\vec{b}}|}, \quad (4.19)$$

$$\sigma_c = \frac{\hat{\vec{u}} \cdot \hat{\vec{b}}^* + \hat{\vec{u}}^* \cdot \hat{\vec{b}}}{2|\hat{\vec{u}}||\hat{\vec{b}}|}, \quad (4.20)$$

où les symboles $\hat{\cdot}$ et $*$ désignent respectivement la transformée de Fourier et le complexe conjugué. Effectivement, comme montré par Galtier (2014), on peut définir la polarisation $P = \sigma_m \sigma_c = -s\Lambda$, imposant ainsi la branche étudiée. $P < 0$ correspond à la branche magnétostrophique, ou droite, et $P > 0$ à la branche inertielle, ou gauche.

En s'inspirant de cette définition, plusieurs types de forçage ont été comparés. Dans tous les cas, il s'agit de forçages continus dans le temps, permettant ainsi d'observer la dynamique sur des temps longs. Deux paramètres sont cruciaux : le taux d'injection d'énergie cinétique ϵ_u et le taux d'injection d'énergie magnétique ϵ_b . Ceux-ci correspondent à l'énergie totale injectée à chaque incrément de temps (voir partie 2.1). Ces taux sont localisés dans une coquille correspondant à un ou plusieurs nombres d'onde k_f , dans cette partie fixés à $k_f \in [19, 21]$. Cette valeur permet ainsi d'injecter de l'énergie autour de $k|d| \sim 1$, dans une zone où les prédictions théoriques permettent une cascade inverse d'hélicité hybride (Galtier, 2014). En plus de ces taux d'injection d'énergie, il est possible d'injecter de l'hélicité de manière analogue. Puisque seules les hélicités croisées et magnétiques nous intéressent dans cette étude, aucune hélicité cinétique n'est injectée - bien que celle-ci soit non-nulle. Pour cela, on utilise les hélicités réduites σ_m et σ_c , définies en équations (4.19) et (4.20). Puisqu'elles sont comprises entre -1 et 1 , elles permettent de contrôler le taux d'injection d'hélicité relativement aux taux d'injection d'énergies préalablement fixés. L'hélicité totale injectée correspond finalement à $\sigma_m \epsilon_b$ pour l'hélicité magnétique et $\sigma_c(\epsilon_u + \epsilon_b)$ pour l'hélicité croisée.

Quatre types de forçage ont été étudiés en détail (résumés dans la table 4.2). Les deux premiers cas, H_inj_L et H_inj_R , diffèrent uniquement par la valeur de σ_c , les taux d'injection d'énergie étant fixés à $\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$. Seule la valeur du produit $\sigma_m \sigma_c$ change, et en particulier son signe. Par exemple, le cas H_inj_R avec $\sigma_m \sigma_c < 0$, le forçage pourrait correspondre à une injection favorisant la polarisation droite $P < 0$; tandis que le cas H_inj_L pour lequel $\sigma_m \sigma_c > 0$ favoriserait une injection polarisée gauche $P > 0$.

Pour les deux autres cas, U_inj et B_inj , les taux d'injection d'énergie ont été modifiés. ϵ_b est réduit de moitié comparativement aux autres cas pour la simulation U_inj , de même que l'est ϵ_u pour la simulation B_inj . Les résultats sont présentés sous forme de spectres pour les quatre quantités conservées en MHD isotrope (figure 4.6).

La première chose remarquable sur cette figure est la singularité de la courbe bleue, c'est-à-dire le cas U_inj , pour lequel l'injection d'énergie est en défaveur de l'énergie magnétique. En effet, seule une très faible cascade inverse transparait pour l'hélicité magnétique, le reste des quantités n'évoluant pas ou très peu aux grandes échelles. Sans grande surprise, les simulations H_inj_L et H_inj_R diffèrent peu. Pour la polarité droite, le spectre surplombe légèrement les autres à grande échelle, pour toutes les quantités. Aux petites échelles, on distingue sans difficulté les cas pour lesquels $\epsilon_u + \epsilon_b = 0.3$, légèrement en deçà des cas pour lesquels $\epsilon_u + \epsilon_b = 0.4$, puisque moins d'énergie est injectée à chaque instant. Enfin le cas B_inj , analogue au cas H_inj_L avec un taux d'injection d'énergie cinétique plus faible de moitié, se distingue très peu des deux cas à $\epsilon_u + \epsilon_b = 0.4$ aux grandes échelles. Effectivement, un transfert d'énergie magnétique et d'hélicité vers les grandes échelles est également observé, et est d'intensité similaire aux cas H_inj_L et H_inj_R . Dans ces conditions, le paramètre semblant impacter considérablement la dynamique vers les grandes échelles est ϵ_b , i.e. le taux d'injection d'énergie magnétique. Cependant cette figure a été effectuée

Référence	Ω	B	Injection d'énergie	Injection d'hélicité
H_inj_L	2	0.1	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$	$\sigma_c = \sigma_m = 0.5$
H_inj_R	2	0.1	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$	$-\sigma_c = \sigma_m = 0.5$
U_inj	2	0.1	$\epsilon_u = 0.2, \epsilon_b = 0.1$	$\sigma_c = \sigma_m = 0.5$
B_inj	2	0.1	$\epsilon_u = 0.1, \epsilon_b = 0.2$	$\sigma_c = \sigma_m = 0.5$

TABLE 4.2 – Simulations effectuées à $\nu = \eta = 2 \times 10^{-3}$, avec 256^3 points, pour différents types de forçage. Les paramètres d'anisotropie sont constants, seuls les taux d'injection d'énergie et d'hélicité varient.

à un temps long, pour lequel on constate une forme de saturation à grande échelle. En effet en regardant l'évolution temporelle des spectres, présentée en Annexe B.2, on s'aperçoit que ceux-ci n'évoluent pas à la même vitesse selon le type de forçage.

En comparant les spectres à un temps inférieur $t \sim 30$, de sorte à ce que ni l'énergie magnétique, ni les hélicités n'aient encore saturé l'échelle de la boîte $k = 1$, les différences observées suivant le type d'injection employé sont plus importantes. En effet, comme on peut le constater en figure 4.7, le cas *H_inj_R* se distingue largement de ces trois autres camarades par une cascade directe plus intense, et plus rapide donc. Un peu moins d'un ordre de grandeur sépare *H_inj_L* de *H_inj_R*, rendant ces deux types d'injection plus distinguables. Il est bon de rappeler que seul le signe de l'injection d'hélicité croisée différencie ces deux simulations. Sans surprise, la simulation *U_inj* est toujours la moins efficace, et, à ce stade, aucun transfert significatif vers les grandes échelles d'énergie ou d'hélicité n'est observé. Le cas *B_inj* est déjà plus intéressant dans le sens qu'il permet une cascade inverse fortement similaire au cas *H_inj_R* à moyennes échelles $5 < k < 20$, et finalement se réajuste au cas *H_inj_L*, qui a la même polarité, pour les grandes échelles $k < 5$. Le déséquilibre d'injection d'énergie en faveur de l'énergie magnétique semble affecter les moyennes échelles, en augmentant légèrement le phénomène de cascade inverse par rapport au cas *H_inj_L*, alors que le même taux d'injection d'énergie magnétique est imposé.

Finalement, le taux d'injection d'énergie totale affecte légèrement les petites échelles, tandis que la répartition de cette injection entre les composantes cinétique et magnétique affecte les échelles immédiatement supérieures à l'échelle d'injection. Cependant, aux plus grandes échelles, la répartition de l'énergie semble dominée par la polarité de l'injection - c'est à dire par le signe des hélicités réduites. Comme attendu, l'injection favorisant la polarisation droite *H_inj_R* est plus efficace pour transférer l'énergie magnétique et les hélicités vers les grandes échelles. En revanche, sur les temps longs, l'ensemble de ces effets s'atténuent (voir figure 4.6). Cela est sans doute dû aux effets de bords, puisque à $t \sim 90$, l'ensemble de ces quantités ont leur maximum proche de $k = 1$, changeant ainsi considérablement la dynamique à grande échelle. Ces effets sur des temps très longs sortent du cadre physique étudié, autant que de la boîte de simulation. Dans la seconde partie de l'étude, une hypoviscosité a été ajoutée à grande échelle pour empêcher ce phénomène, et ainsi conserver des structures de taille raisonnables, sans que les lois ou la dynamique du système ne soient affectées à grande échelle.

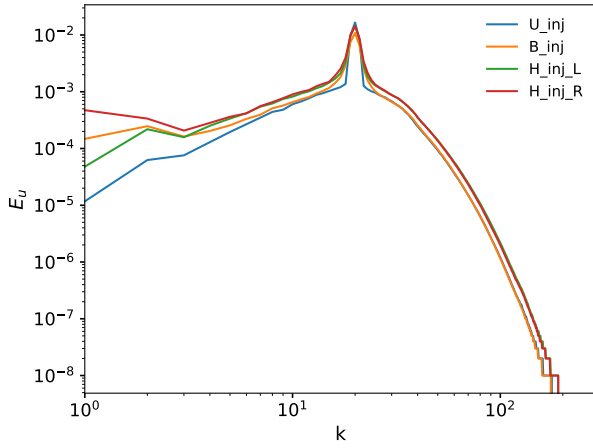
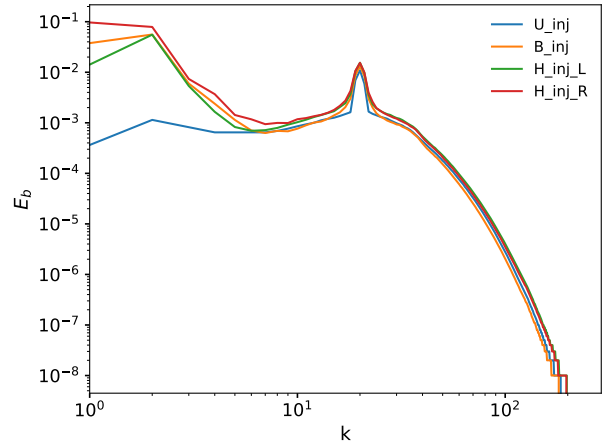
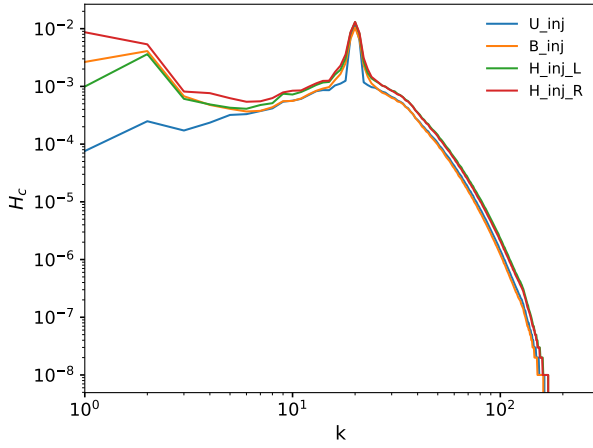
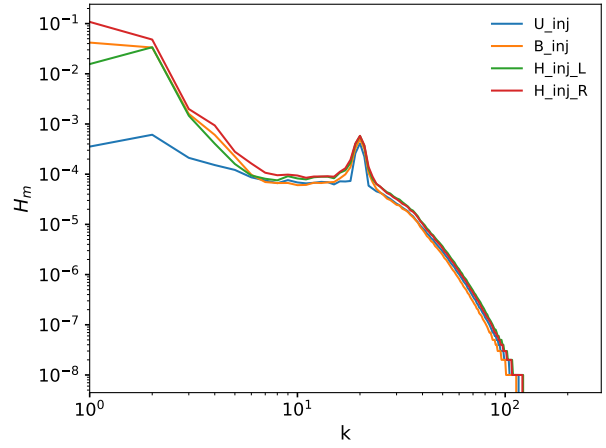
(a) Spectre de l'énergie cinétique E_u .(b) Spectre de l'énergie magnétique E_b .(c) Spectre de l'hélicité croisée H_c .(d) Spectre de l'hélicité magnétique H_m .

FIGURE 4.6 – Figure comparative des spectres des quatre quantités : E_u , E_b , H_c et H_m pour quatre types de forçage différents. Les spectres ont été effectués à un temps $t \sim 90$, juste avant que les spectres saturant en $k = 1$. On notera que pour mieux distinguer les différences au sein de chaque quantités, les valeurs maximales de l'axe des ordonnées diffèrent d'une quantité à l'autre. Il en est de même pour tous les spectres présentés dans ce chapitre.

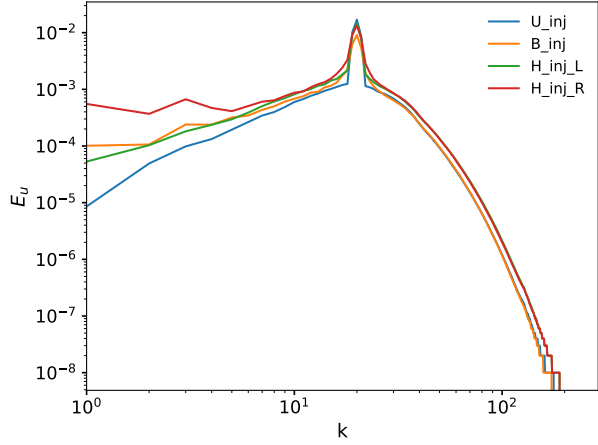
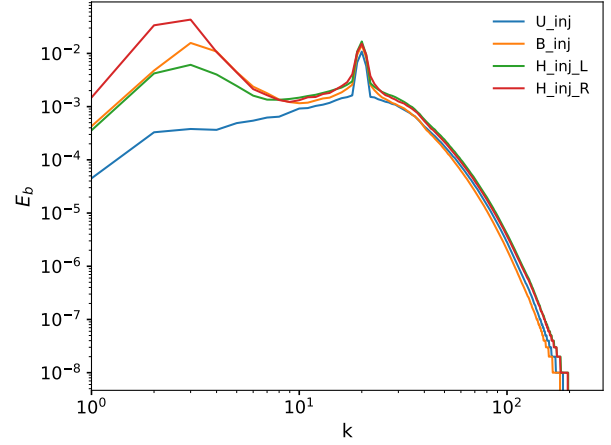
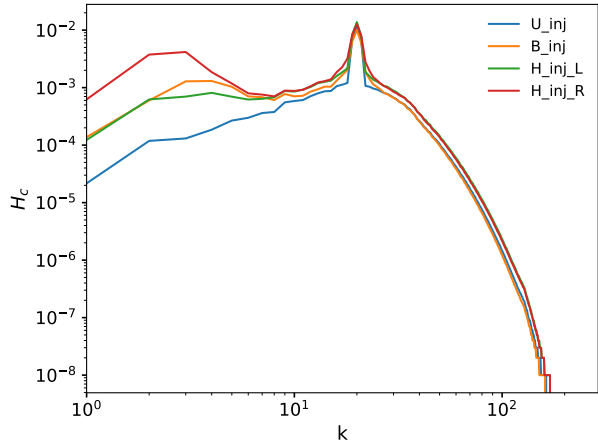
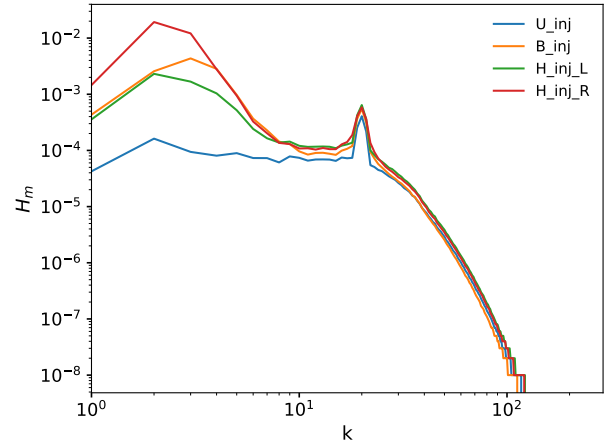
(a) Spectre de l'énergie cinétique E_u .(b) Spectre de l'énergie magnétique E_b .(c) Spectre de l'hélicité croisée H_c .(d) Spectre de l'hélicité magnétique H_m .

FIGURE 4.7 – Figure comparative des spectres des quatre quantités : E_u , E_b , H_c et H_m pour quatre type de forçage différents. Les spectres ont été effectués à un temps $t \sim 30$, bien avant que les spectres saturent en $k = 1$.

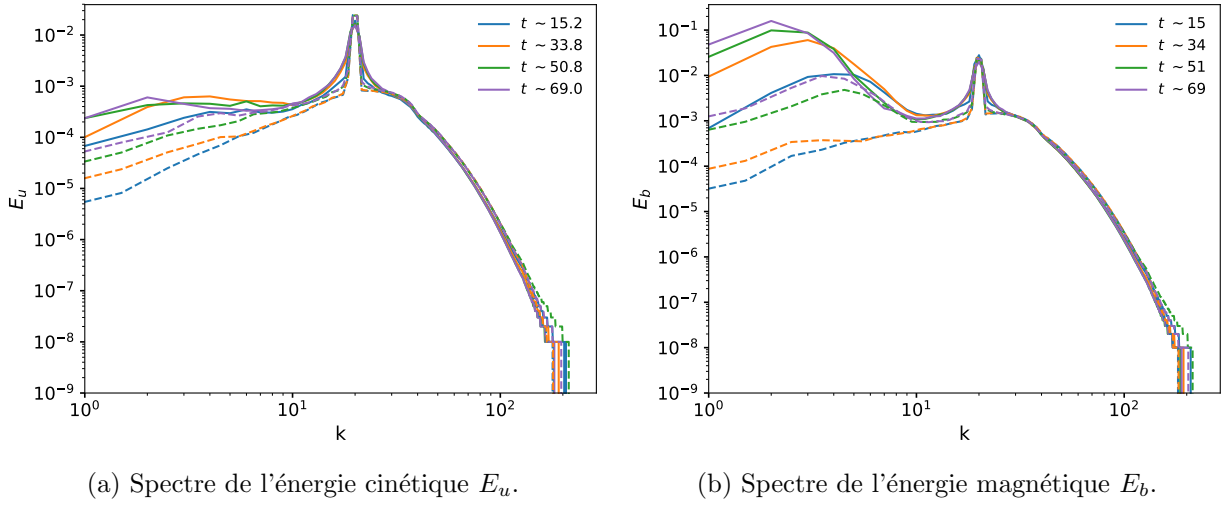


FIGURE 4.8 – Figure comparative des spectres d'énergie E_u et E_b pour deux types de forçage aux polarités différentes. Les spectres sont représentés à plusieurs temps -distingués par la couleur des courbes, chaque fois similaires pour les deux simulations. Pour ces deux cas, dénommés par la suite $20R$ (traits pleins) et $20L$ (tirets), on a imposé $\Omega = 20$ et $B = 1$, tout deux alignés, ainsi qu'un forçage en énergie équilibré $\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$, $\sigma_m = 0.5$ et $\sigma_c = \pm 0.5$, changeant ainsi la polarité à l'injection. Le cas $20L$ est le cas favorisant la polarisation gauche, $P > 0$, tandis que le cas $20R$ favorise la polarisation droite, $P < 0$.

4.2.2 Cas de référence

Dans le but d'atteindre un régime pour lequel rotation et champ magnétique sont plus importants, les valeurs de ceux-ci sont multipliés par 10 dans la suite de cette étude. Le rapport d est toujours égal à $1/20$, de sorte à permettre une injection à $k_f|d| \sim 1$, valeur critique pour laquelle les relations de dispersion des ondes inertielles et des ondes magnétostrophiques se scindent.

Dans un premier temps, comparons à nouveau les deux types d'injection H_{inj-R} et H_{inj-L} pour ces nouvelles valeurs de B et Ω . Les spectres d'énergie sont représentés sur la figure 4.8. Cette fois, la différence entre les types d'injection est bien plus marquée que dans le cas à plus faibles rotation et champ magnétique moyen. En effet, aux premiers temps, environ deux ordres de grandeur de différence sont observés à grande échelle. Plus tard, à $t \sim 70$, le cas $20L$ - en tirets - rattrape peu à peu le cas $20R$ - en traits pleins, qui garde tout de même plus d'un ordre de grandeur de plus pour $k = 2, 3$. Comme on peut le constater, la courbe à $t \sim 70$ du cas $20L$ atteint tout juste celle du cas $20R$ à $t = 15$. Le spectre d'énergie cinétique reste quant à lui assez plat à grande échelle pour les deux types d'injection.

Ainsi, la différence entre les deux types d'injection, uniquement distinguées par le signe de leur polarité, est plus facilement remarquable lorsque la rotation globale et le champ magnétique moyen sont plus importants, même si le rapport entre les deux est constant.

Dans la suite, à part pour les simulations sans rotation pour lesquelles il n'est pas réellement possible de définir deux polarités, toutes les simulations seront forcées avec la configuration commune à H_{inj-R} et $20R$, c'est-à-dire une injection d'hélicité polarisée droite, correspondante aux ondes magnétostrophiques.

Comme déjà observé précédemment (cfr figure 4.5), ces simulations sont comparables avec des cas déjà étudiés pour lesquels un seul type d'anisotropie était imposé. Sans réelle surprise au vu de la configuration, la dynamique observée vers les grandes échelles est largement due à la forte rotation imposée. Effectivement, les spectres d'énergie et d'hélicité magnétiques du cas $\Omega = 20$, $B = 0$

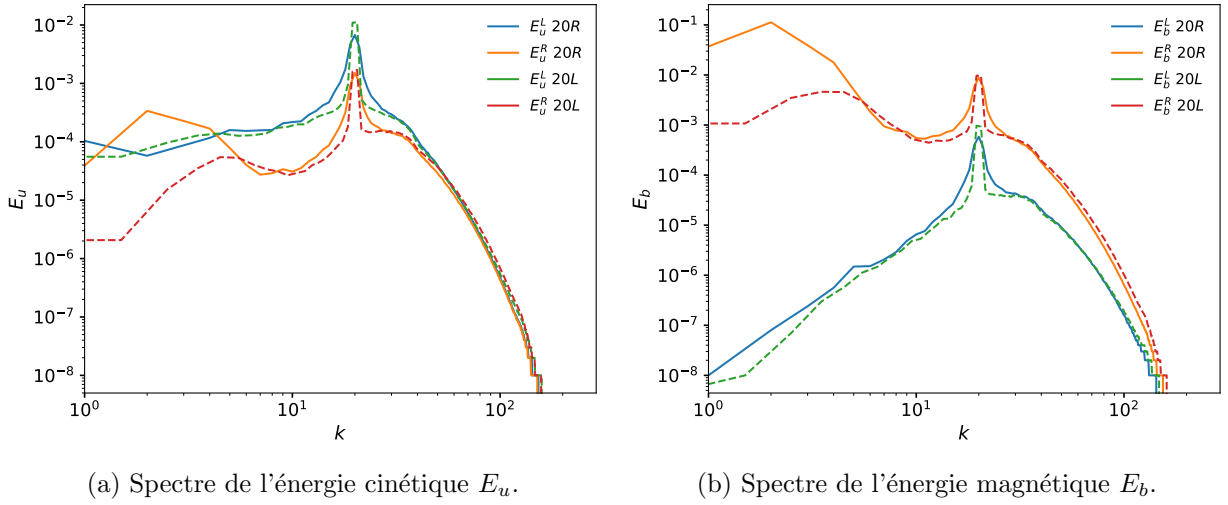


FIGURE 4.9 – Figure comparative de la décomposition des spectres d'énergie E_u et E_b pour les deux cas $20R$ - en traits pleins - et $20L$ - en tirets. $E_u^{L,R}$ indiquent respectivement les polarisation gauche et droite de l'énergie cinétique, de même pour $E_b^{L,R}$ pour l'énergie magnétique.

sont très proches du cas $\Omega = 20$, $B = 1$. En revanche, la cascade inverse d'hélicité croisée observée est plus intense pour le cas doublement anisotrope, puisque cette quantité ne contribue pas au mécanisme de cascade inverse dans la situation $\Omega - MHD$.

Bien que le forçage polarisé à droite soit le plus efficace pour transférer l'énergie vers les grandes échelles, à partir des spectres présentés il n'est pas possible de savoir comment l'énergie se répartie entre les deux polarités après l'injection. Pour cela, en utilisant la répartition spatiale des champs, il est possible d'obtenir le spectre de chacune des polarités $\mathcal{U}^\pm$ et $\mathcal{B}^\pm$ (Galtier, 2014). Pour les simulations $20R$ et $20L$, ces décompositions ont été effectuées et comparées l'une à l'autre (figure 4.9).

Le constat est simple : tandis que les composantes gauche - associées aux ondes inertielles - en bleu et vert, ne laissent pas transparaître de comportement spécifique, les composantes droite - associées aux ondes magnétostrophiques - en orange et rouge, sont particulièrement bombées aux grandes échelles. Ce comportement, caractéristique d'un transfert de l'énergie vers les grandes échelles, est donc associé à la partie droite des énergies cinétique et magnétique. En effet, la petite cascade inverse observée précédemment sur le spectre d'énergie cinétique est également due à la composante droite de celle-ci. De plus, ces différentes composantes sont reliées assez simplement entre elles :

$$E_u^R \sim k^{-2} E_b^R, \quad (4.21)$$

$$E_u^L \sim k^2 E_b^L. \quad (4.22)$$

Ces relations sont ici vérifiées aux grandes échelles, et expliquent pourquoi la composante droite du spectre d'énergie cinétique suit son alter-ego magnétique avec un décalage de l'ordre de k^{-2} .

Sans surprise, on retrouve également la différence entre les deux types d'injection ici. Malgré la dénomination choisie, l'injection de type gauche ne consiste pas à forcer particulièrement la composante gauche des spectres d'énergies. En effet, le système évoluant librement, l'énergie injectée se répartit ensuite selon les différents mécanismes en jeu. Le régime magnétostrophique étant le seul à permettre un transfert vers les grandes échelles, la polarité droite domine donc la dynamique

à grandes échelles, quel que soit le type de forçage choisi. On préférera employer les termes *forçage privilégiant la polarité gauche/droite*. En ce sens, les forçages implémentés sont pertinents, puisque des différences notables d'efficacité sont observées. Le mécanisme observé précédemment est donc effectivement lié à la polarisation choisie, et la polarisation injectée a également une influence sur la dynamique à grande échelle.

Pour mieux comprendre le fonctionnement de la cascade inverse, l'analyse de la contribution de chaque terme des équations est crucial. Les flux sont alors un élément clé de l'interprétation du mécanisme. Ces derniers sont représentés en figure 4.10, pour les deux simulations $20R$ et $20L$, et définis par les équations (2.28)-(2.31).

Sur le panel (a), les deux termes de l'équation du mouvement - Π_{uu}^u et Π_{bb}^u , sur la première ligne - ne contribuent pas ou peu à grande échelle. En revanche, les termes issus de l'équation d'induction, Π_{ub}^b et Π_{bu}^b contribuent plus largement. Le premier terme d'induction est plus important au début de la simulation, et transporte une partie de l'énergie injectée par le forçage aux échelles intermédiaires. Sur des temps longs, ce terme perd de son importance, probablement car le système a commencé à s'équilibrer à ces échelles.

En rapprochant ce comportement du spectre d'énergie magnétique, on peut penser que cela correspond au moment où la pente se stabilise entre $k = 10$ et $k = 4$. Le second terme de l'équation d'induction, qui correspond à la force de Lorentz, transporte quant à lui de plus en plus d'énergie dans le temps. C'est le terme dominant, et la contribution négative de ce terme indique effectivement une cascade inverse. L'apparition d'un plateau entre $k = 10$ et $k = 4$ s'accroissant avec le temps corrobore l'explication proposée précédemment. Ainsi, aux premiers instants l'énergie injectée est transportée vers les échelles $k < 20$ par les termes de l'équation d'induction. Cependant, la cascade inverse vers les grandes échelles semble maintenue uniquement par le terme de Lorentz.

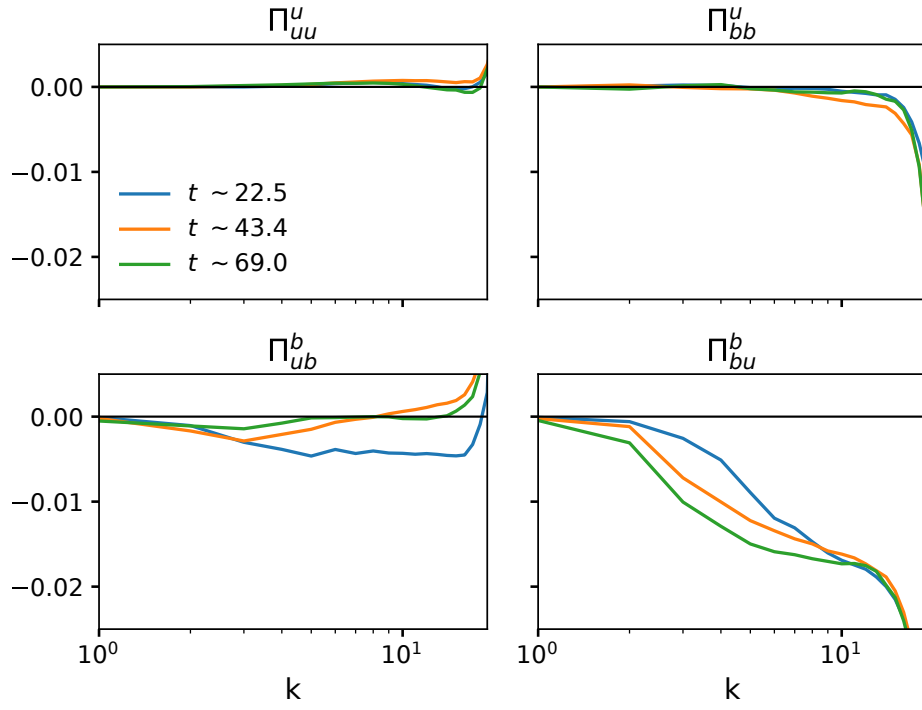
Lorsqu'on compare ces résultats avec les flux de la simulation jumelle $20L$ présentés en figure 4.10b, la dynamique temporelle à travers les échelles est bien moins claire. Seul le terme de Lorentz semble contribuer légèrement à la cascade inverse, mais uniquement sur des temps plus longs et de façon deux fois moins importante. L'absence du mécanisme de transfert *rapide* en début de simulation semble donc être partiellement la cause d'un transfert moins prononcé vers les grandes échelles.

Pour résumer, après avoir montré et constaté l'importance des invariants dans l'étude des phénomènes de cascade, et en particulier de l'hélicité, plusieurs types de forçages ont été testés afin d'établir les différents acteurs principaux du phénomène de cascade inverse en MHD avec rotation globale et champ magnétique moyen.

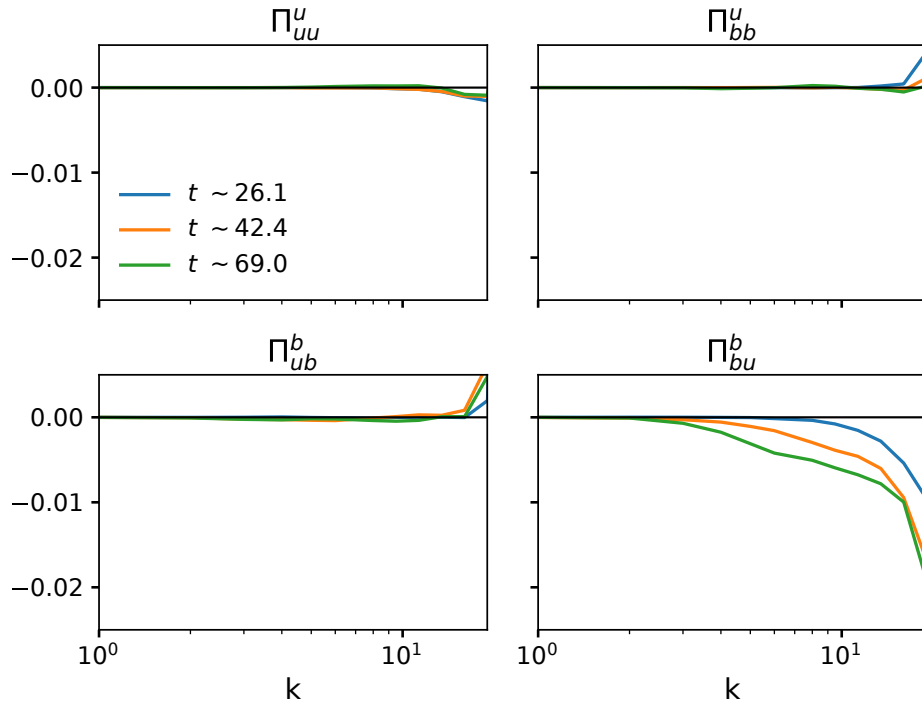
4.3 Impact de l'angle d'inclinaison

Dans la partie précédente, une cascade inverse d'énergie magnétique a été constatée, probablement liée à l'invariant H_h , caractéristique de la configuration doublement anisotrope $B\Omega - MHD$. Comme nous l'avons montré, le type de forçage choisi a une influence non négligeable sur l'efficacité de la cascade, notamment en fonction de la polarité privilégiée. La suite de l'étude porte sur l'impact d'autres paramètres sur le transfert vers les grandes échelles, en commençant par l'angle d'inclinaison entre l'axe du champ magnétique et celui de la rotation globale.

En théorie, l'hélicité hybride est un invariant de la $B\Omega - MHD$ uniquement lorsque $\vec{B}$ et $\vec{\Omega}_0$ sont alignés. La présence d'un angle d'inclinaison entre ces deux axes d'anisotropie devrait perturber la dynamique de cascade inverse et probablement diminuer son efficacité. L'étude de cette cascade inverse dans le cas non-aligné est cependant plus pertinente pour les dynamos astrophysiques, pour lesquelles on observe une grande diversité d'angles, malgré tout centrée autour de 0° .



(a) Cas 20R.



(b) Cas 20L.

FIGURE 4.10 – Flux de chacun des termes des équations de la MHD, pour les deux simulations 20R et 20L. La première ligne représente les termes issus de l'équation du mouvement, la seconde ligne ceux issus de l'équation d'induction. Chaque couleur correspond à un temps - les temps sont proches d'un cas à l'autre - permettant ainsi de constater la répartition, en temps et en échelles, de l'énergie à travers les différents termes.

4.3.1 Comportement des énergies

Cas orthogonal

Dans un premier temps, focalisons-nous sur un cas en tout points similaire aux cas précédents, excepté sur l'orientation de l'axe de rotation, désormais purement selon $\vec{x}$. Celui-ci sera par la suite dénommé *20R_90_x*. Les spectres d'énergies et d'hélicités présentés en figure 4.11 mettent en évidence la présence d'un transfert vers les grandes échelles, tardif mais non négligeable, supérieur à 10^{-3} . Les conditions étant similaires aux cas précédents, c'est-à-dire que la rotation est 20 fois plus forte que le champ magnétique, il est tentant de penser qu'il s'agit à nouveau d'un transfert mené par l'hélicité magnétique. Un point crucial s'oppose cependant à ce scénario : contrairement à tous les cas précédents, la dynamique à grande échelle d'énergie cinétique et d'hélicité croisée est comparable à celle de leurs homologues magnétiques. En effet, si l'on compare les spectres de cette simulation à $\theta = 90^\circ$ avec ceux présentés en partie 4.1.4, figure 4.5, illustrant notamment le cas *20R_B0* sans champ magnétique moyen, on constate une dominance nette des transferts magnétiques vers les grandes échelles, malgré un temps d'implémentation plus long.

Ainsi, dans la configuration où l'axe de rotation est incliné de 90° par rapport à l'axe du champ magnétique, les énergies magnétique et cinétique semblent parfaitement corrélées, de même pour les hélicités croisée et magnétique. Les valeurs, bien que faibles, sont tout à fait comparables entre elles aux grandes échelles. De plus amples diagnostics sont présentés en partie 4.3.2.

Comme déjà précisé, le cas présenté précédemment correspond à un axe de rotation purement selon $\vec{x}$. Afin d'être certain de la validité des simulations, il est nécessaire de vérifier que le comportement observé est indépendant de la direction choisie pour $\vec{\Omega}_0$, mais uniquement de l'angle θ que forment les axes de rotation et du champ magnétique. Dans ce but, trois simulations à $\theta = 90^\circ$ mais testant des configurations différentes ont été effectuées : $\vec{\Omega}_0$ purement selon $\vec{x}$, purement selon $\vec{y}$ ou une combinaison des deux. Les résultats pour les spectres d'énergie à un temps modéré $t \sim 21$ sont présentés en figure 4.12. Comme on peut le constater, il n'y a pas de différence notable entre les trois cas explorés à $\theta = 90^\circ$ (en bleu, orange et vert).

Pour information, les spectres d'énergie du cas de référence à $\theta = 0^\circ$, $\vec{\Omega}_0 = \Omega \vec{z}$ donc, ont également été indiqués sur cette figure (en rouge). Sans surprise, il n'y a quasiment pas de différence entre les spectres d'énergie cinétique. En effet, bien qu'il dépende de l'angle, le processus de cascade inverse prédit est purement magnétique. La différence observée entre les spectres d'énergie magnétique à $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 90^\circ$ le confirme, même sur des temps relativement courts.

Deux conclusions se dégagent de cette étude des différents cas orthogonaux :

Primo, il n'y a pas de différence de comportement entre les différentes configurations choisies à une même valeur de $\theta = 90^\circ$. On en conclut donc qu'il s'agit bien de l'angle entre l'axe de rotation et l'axe du champ magnétique qui détermine la dynamique.

Secundo, bien que la dynamique vers les grandes échelles à $\theta = 90^\circ$ soit bien plus faible qu'à $\theta = 0^\circ$, elle n'est pas pour autant inexistante. Les spectres d'énergies magnétique et cinétique semblent de plus corrélés à grande échelle, tout comme les spectres d'hélicités croisée et magnétique.

Impact de petits angles sur des temps courts

Dans cette partie, le comportement de la cascade inverse pour de plus petits angles est analysé. La première approche adoptée consiste à choisir trois valeurs de θ assez proches entre elles, mais également suffisamment assez éloignées de la configuration alignée. Ce choix permet d'étudier simultanément deux types de changements : l'effet d'un angle d'inclinaison non négligeable entre les

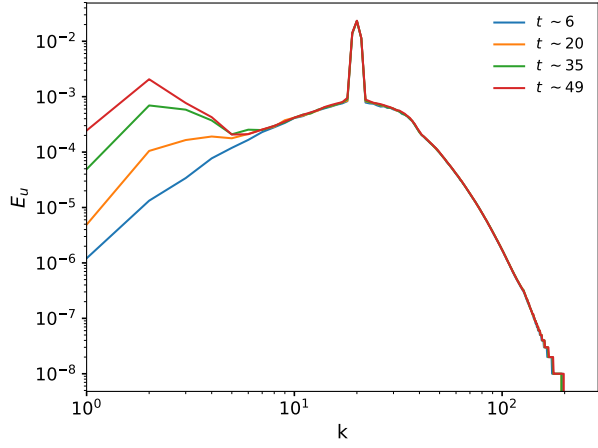
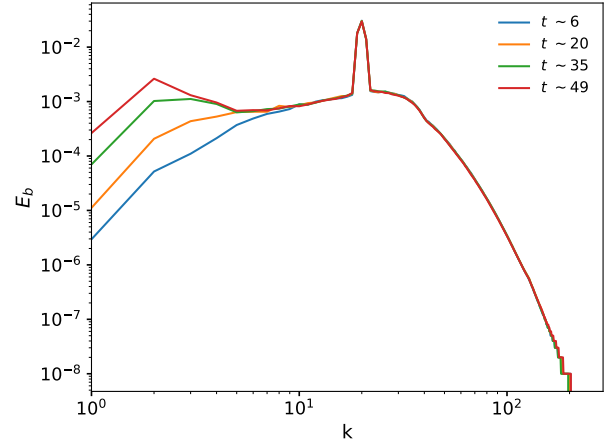
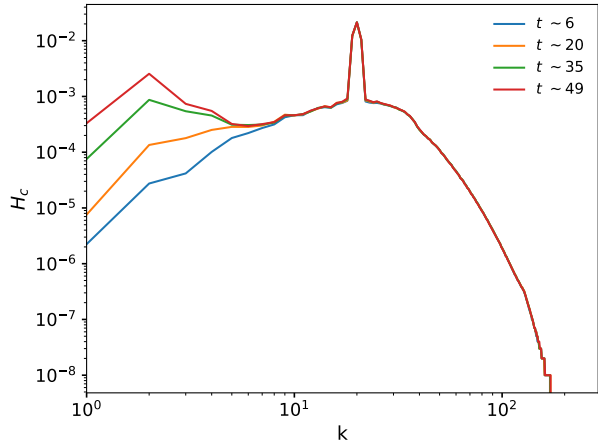
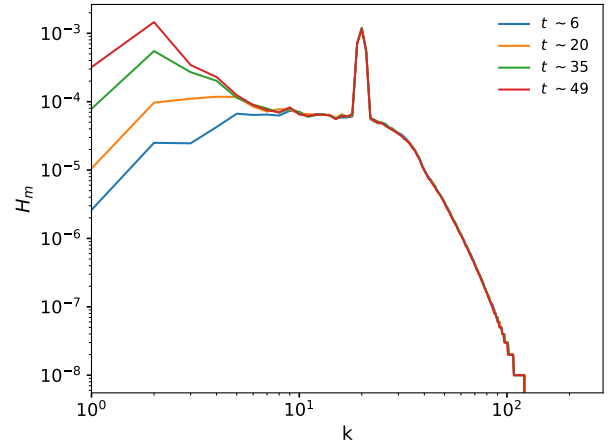
(a) Spectre de l'énergie cinétique E_u .(b) Spectre de l'énergie magnétique E_b .(c) Spectre de l'hélicité croisée H_c .(d) Spectre de l'hélicité magnétique H_m .

FIGURE 4.11 – Evolution temporelle des spectres des quatre quantités : E_u , E_b , H_c et H_m pour la simulation $20R_{90_x}$. A nouveau l'échelle des ordonnées est différente pour chaque panel.

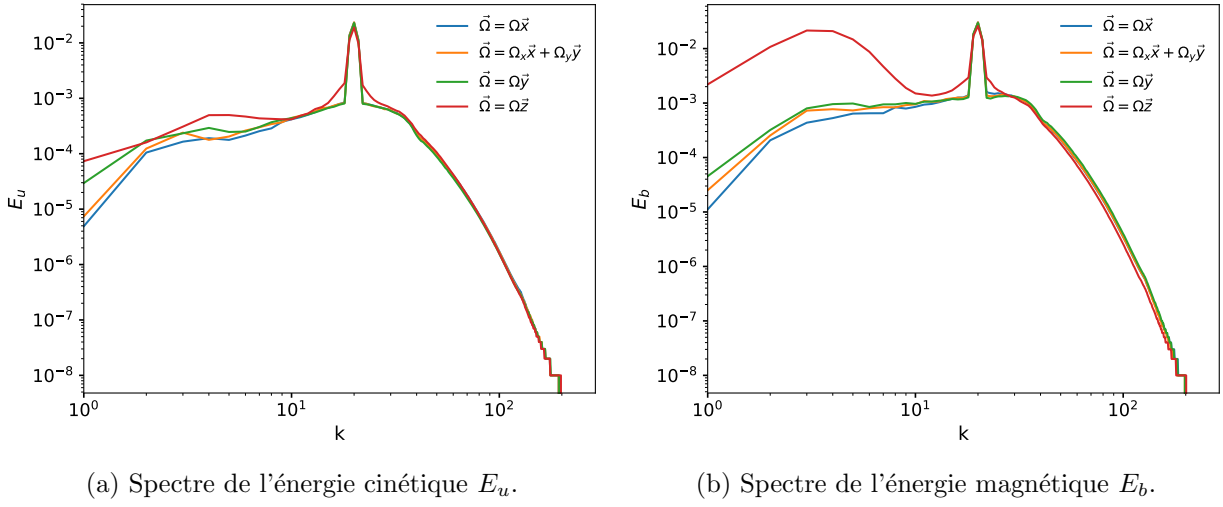


FIGURE 4.12 – Comparaison des spectres d'énergie des trois simulations à $\theta = 90^\circ$ et de la simulation de référence à $\theta = 0^\circ$, dans tous les cas à $\Omega = 20$ et $\vec{B}_0 = 1\vec{z}$. Ces spectres ont été calculés à un temps similaire $t \sim 21$ pour chaque simulation. Pour le cas $20R_{90}xy$, pour lequel $\vec{\Omega}$ est réparti équitablement entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$, la valeur de $\Omega_x = \Omega_y$ a été calculée de sorte que la magnitude Ω soit égale à 20 comme dans les autres cas.

deux axes, et également les répercussions induites par des variations modérées de cet angle. Ainsi, trois valeurs de θ autour de 25° ont été choisies. L'impact d'une variation de l'angle d'inclinaison pourra donc être analysé pour de multiples valeurs : 5, 10, 20 ou 30° .

Les résultats obtenus sont présentés en figure 4.13, avec les trois simulations à $\theta = 20^\circ$, 25° , 30° en bleu, orange et vert respectivement. La simulation de référence à $\theta = 0^\circ$ est indiquée en rouge. En se focalisant sur les spectres d'énergie, on s'aperçoit qu'un angle de l'ordre de 20° ne change pas le comportement global observé auparavant. En effet, on observe toujours une cascade inverse aux grandes échelles pour l'énergie magnétique tandis que le spectre de l'énergie cinétique reste relativement plat. Les spectres étant représentés à un temps similaire $t \sim 30$, relativement tôt dans la dynamique - empêchant ainsi les effets de bords d'y prendre part, les valeurs atteintes aux grandes échelles sont en mesure d'être comparées. Ainsi, la quantité d'énergie transportée aux grandes échelles semble plus importante pour la configuration alignée que pour les cas inclinés. Cette différence se confirme également entre les simulations inclinées, puisque le pic d'énergie à $k \sim 3$ baisse d'autant que θ augmente - peu en l'occurrence. On observe également une légère différence de forme du spectre à $\theta = 30^\circ$ comparativement aux cas à plus petit angle. En effet, celui-ci semble plus *piqué* à $k = 3$ tandis que les autres sont plus *arrondis*.

Pour les spectres d'hélicité, la différence d'évolution, bien que ténue pour l'hélicité croisée, est également visible. Le comportement de l'hélicité magnétique n'est pas sans rappeler celui de l'énergie magnétique, la hiérarchie des angles s'établissant facilement à $k \leq 5$. Moins distincts pour l'hélicité croisée, les spectres restent cependant classés aux grandes échelles. La différence de forme du spectre à $\theta = 30^\circ$ est à nouveau notable.

On observe donc une différence d'intensité des spectres selon l'angle d'inclinaison entre les axes de rotation et du champ magnétique. Cette baisse des valeurs atteintes aux grandes échelles pour toutes les quantités impliquées (ou impactées) dans (ou par) la cascade inverse d'hélicité hybride, est notable pour différentes types variations de l'angle, de seulement 5° (entre $\theta = 25^\circ$ et 30° ou entre 30° et 35°) jusqu'à 30° (entre $\theta = 0^\circ$ et 30°). L'impact de l'inclinaison sur l'efficacité du

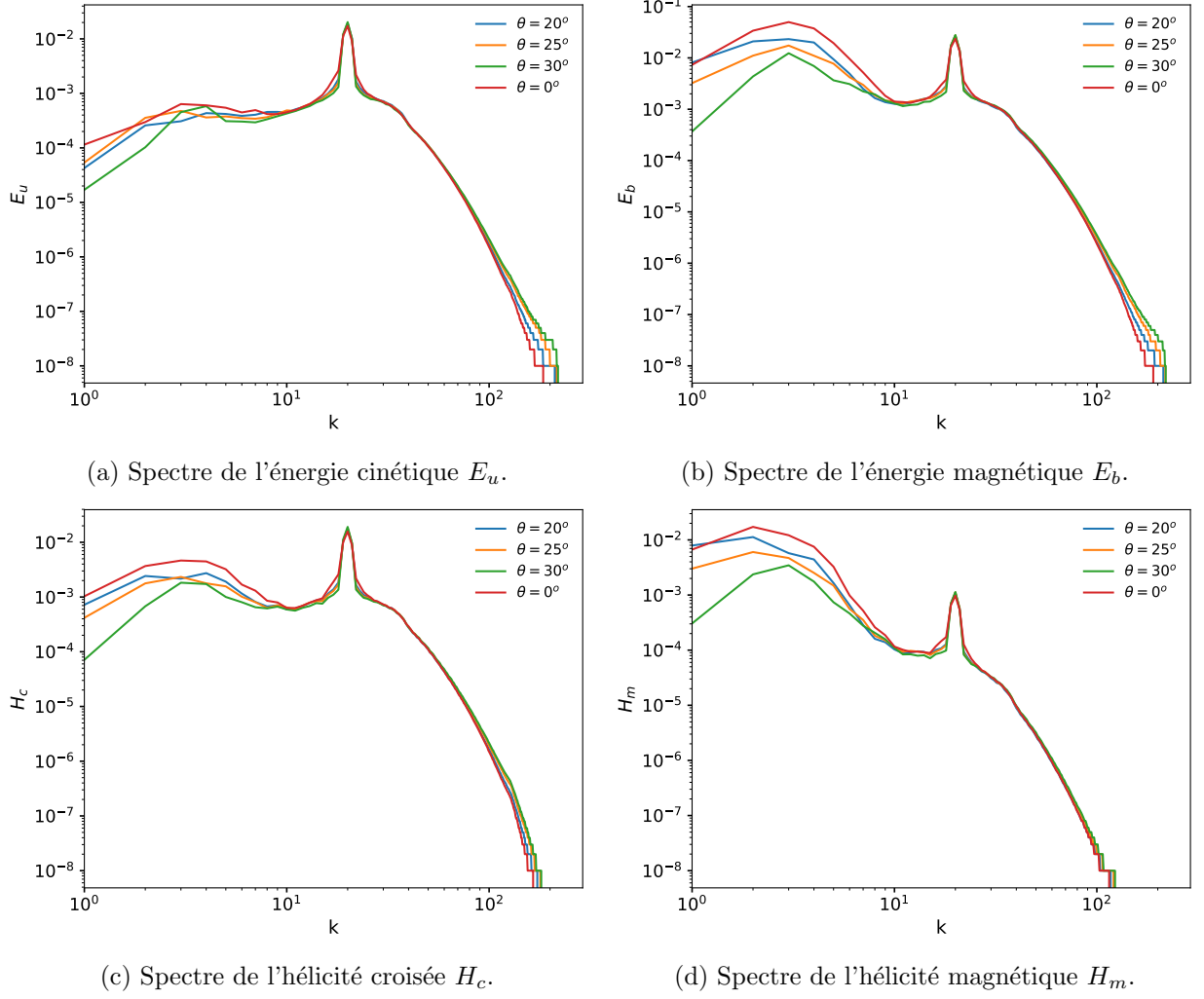


FIGURE 4.13 – Figure comparative des spectres des quatre quantités : E_u , E_b , H_c et H_m pour quatre angles différents. Les spectres ont été effectués à un temps $t \sim 30$.

transfert vers les grandes échelles semble même progressif, comme le témoignent l'évolution des spectres entre les cas à 20° , 25° et 30° . De plus la différence entre le cas aligné et le cas à 20° est modérée, laissant penser que de plus petits angles affecterait à peine la dynamique à grande échelle. Ce résultat est plutôt inattendu, puisque la cascade inverse permise par l'hélicité hybride n'est supposée valable que dans le cas aligné. Pour les angles explorés ici, $\theta \lesssim 30^\circ$, le mécanisme semble moins efficace mais tout de même similaire.

A ces résultats, deux interprétations peuvent être apportées : soit l'angle d'inclinaison entre les deux axes d'anisotropie ne fait que ralentir la dynamique, soit il impacte le transfert vers les grandes échelles qui devient moins important. La première proposition implique que sur des temps plus longs, des valeurs similaires peuvent être atteintes quel que soit l'angle. Bien sûr ces deux propositions peuvent n'être valables que dans la gamme de valeurs explorée jusqu'alors, et être modulées pour de plus grandes valeurs de θ par exemple.

Dans ce but, les simulations suivantes sont étudiées sur des temps plus longs et pour des valeurs de θ plus variées.

Impact sur les temps longs

Comme montré en partie 4.2.1, la dynamique à grande échelle sur des temps longs est rapidement perturbée par des effets de boîte, l'énergie s'accumulant à $k = 1$. Cet effet, dû au caractère périodique des conditions aux limites, est indésirable pour l'étude de la cascade inverse. Pour annuler cet effet, un terme a été ajouté dans les équations de la MHD, analogue au terme de dissipation mais agissant à grande échelle. On introduit l'hypoviscosité ν^- et l'hypodiffusivité η^- , agissant via les termes $\nu^- \nabla^{-2} \vec{u}$ et $\eta^- \nabla^{-2} \vec{b}$ respectivement. Ces termes additionnels aux grandes échelles permettront d'étudier de façon maîtrisée les transferts inverses, en éliminant les effets des conditions aux limites périodiques. Cet artifice force le système à se cantonner à des échelles inférieures à celle de la boîte.

Une simulation jumelle au cas de référence $20R$, à $\theta = 0^\circ$ et nommée par la suite $20R_0_hyp$, a été effectuée en considérant l'hypoviscosité. L'évolution temporelle des spectres d'énergie magnétique et d'hélicité hybride est représentée en figure 4.14. Effectivement, aucune quantité ne s'accumule en $k = 1$, permettant ainsi d'atteindre des valeurs de temps bien supérieures, jusqu'à $t \sim 130$. Les valeurs de ν^- et η^- choisies sont dix fois supérieures à ν^+ et η^+ . Ce ratio a été testé et jugé adéquat pour ces paramètres afin de compenser qualitativement l'accumulation à grande échelle sans brider la dynamique observée sans l'hypoviscosité. La pente à $k < 2$, et n'est donc pas à prendre en compte dans l'analyse des résultats obtenus.

De ces temps très longs résulte un comportement quasi-stationnaire à grande échelle, pour lequel on observe très peu ou pas de variations entre $t = 40$ et $t = 130$ (voir figure 4.14). Il devient alors pertinent de déterminer des lois d'échelle sur ce court intervalle de nombres d'onde, pour mieux caractériser la cascade inverse. On obtient ainsi une pente en k^{-4} pour l'énergie magnétique tandis que hélicités magnétique et hybride ont une pente similaire en k^{-5} . Evidemment, il a été vérifié que le mécanisme observé sur ces temps longs est identique à celui observé précédemment. En regardant la répartition des énergies polarisées, on retrouve que seule la polarité droite génère cette dynamique aux grandes échelles, même sur ces temps longs. De plus, les valeurs atteintes par chaque quantité à temps moyen sont comparables avec les valeurs atteintes sans hypoviscosité. Une légère différence s'observe aux plus grandes échelles, $k = 1, 2$, forcément impactées par l'hypoviscosité. Le transfert d'énergie magnétique vers les grandes échelles reste très efficace, tout comme les transferts d'hélicité. Même sur des temps $t \gtrsim 100$, l'énergie cinétique reste quasiment imperturbable. Les spectres d'énergie cinétique et des hélicités croisée et magnétique sont consultables en annexe (figure B.6).

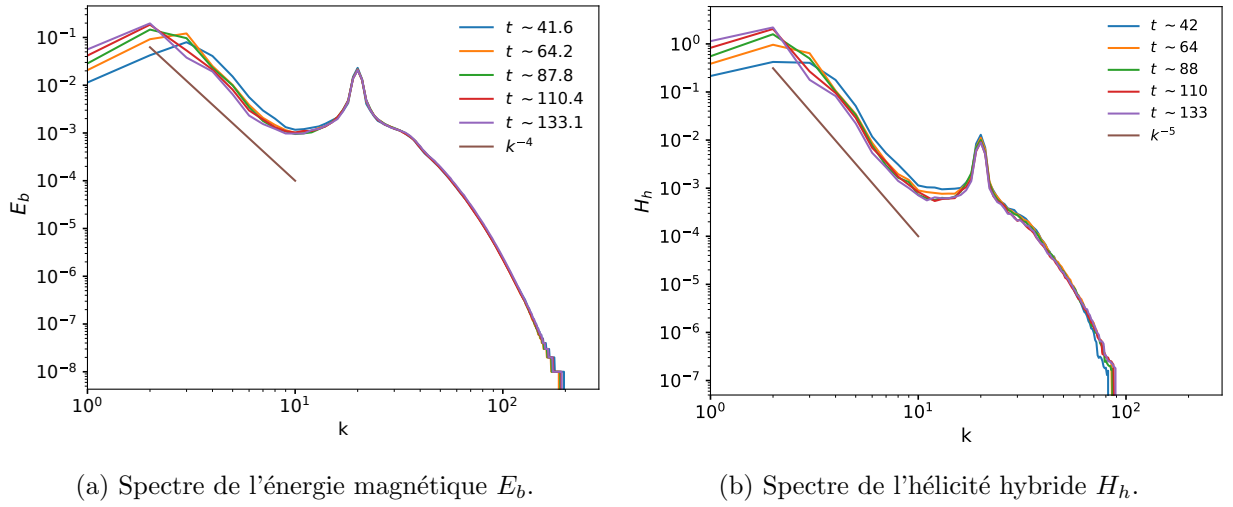


FIGURE 4.14 – Evolution temporelle des spectres d'énergie magnétique et d'hélicité hybride pour le cas $20R_0_hyp$, avec hypoviscosité.

Pour mieux comprendre le rôle de l'hélicité hybride, les flux de chacune de ses composantes, H_m et H_c , ont été implémentés en post-traitement selon les définitions mentionnées en partie 2.1.4. L'évolution de ces flux au cours du temps pour la même simulation $20R_0_hyp$ est présentée en figure 4.15. Les flux d'énergie quant à eux ne diffèrent pas du cas $20R$, sans hypoviscosité (voir figure 4.10a).

Dans le panel supérieur gauche est représenté le flux d'hélicité magnétique divisé par le facteur $d = 1/20$ dans notre cas. On constate la formation d'un plateau négatif au cours du temps, similaire à celui obtenu précédemment pour Π_{bu}^b . Ce plateau est signe d'une cascade inverse d'hélicité magnétique vers les grandes échelles. Le comportement de Π_{H_m} , devenant positif, à très petit k a également été observé dans d'autres études, son explication restant incertaine mais a priori non physique (Alexakis *et al.*, 2006). Dans le panel supérieur droit, le flux d'hélicité croisée est positif à grande échelle et négatif à petite échelle. L'hélicité croisée étant en réalité négative à ces échelles, elle cascade donc bien inversement à $k < k_f$ et directement à $k > k_f$. Sa contribution à l'hélicité hybride H_h , représentée sur le panel inférieur, est cependant moindre, puisque la rotation est très importante comparativement au champ magnétique favorisant ainsi la contribution de l'hélicité magnétique. Le flux d'hélicité hybride est donc extrêmement similaire au flux d'hélicité magnétique, sauf peut être aux derniers instants ($t \sim 133$, en vert) pour lesquels la contribution à $k = 2$ de l'hélicité croisée est non négligeable.

Ce résultat confirme les suppositions avancées précédemment, arguant que la cascade inverse d'énergie magnétique observée est conduite par une cascade inverse d'hélicité hybride.

Par la suite, quatre valeurs supplémentaires de θ ont été étudiées de la même façon : $\theta = 25, 35, 45, 90^\circ$. Les spectres obtenus à $t \sim 105$ pour chaque angle sont comparés en figure 4.16. Le comportement observé précédemment se maintient sur les temps longs puisqu'on observe une baisse, certes, mais progressive de l'efficacité de la cascade inverse entre $\theta = 0^\circ$ et $\theta = 35^\circ$, que ce soit pour l'énergie magnétique ou les hélicités. Cependant, à $\theta > 35^\circ$, l'aspect des spectres change drastiquement, et pique à $k = 2$, la plus grande échelle si l'on considère que $k = 1$ n'est pas atteignable à cause de l'hypoviscosité. En particulier, le spectre d'énergie cinétique semble suivre le comportement du spectre d'énergie magnétique aux grandes échelles pour $\theta = 30^\circ$. Les valeurs atteintes en $k = 2$ par la simulation à $\theta = 90^\circ$ - en violet - sont similaires pour les énergies cinétique

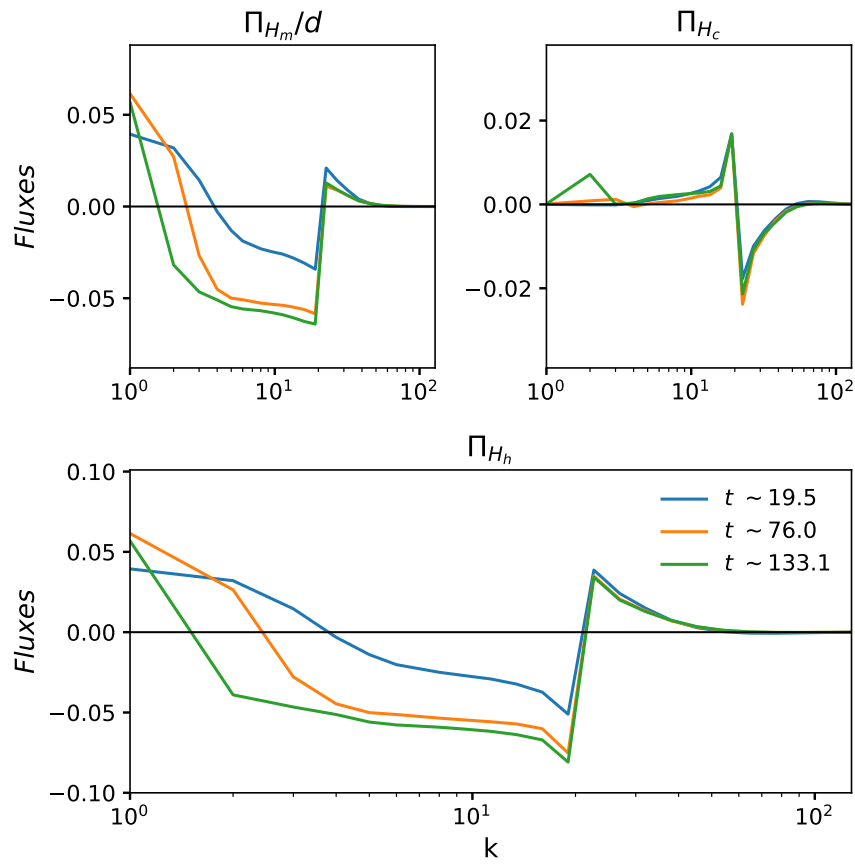


FIGURE 4.15 – Flux de chacune des hélicités calculées pour la simulation *20R_0_hyp* avec hypoviscosité et leur évolution au cours du temps.

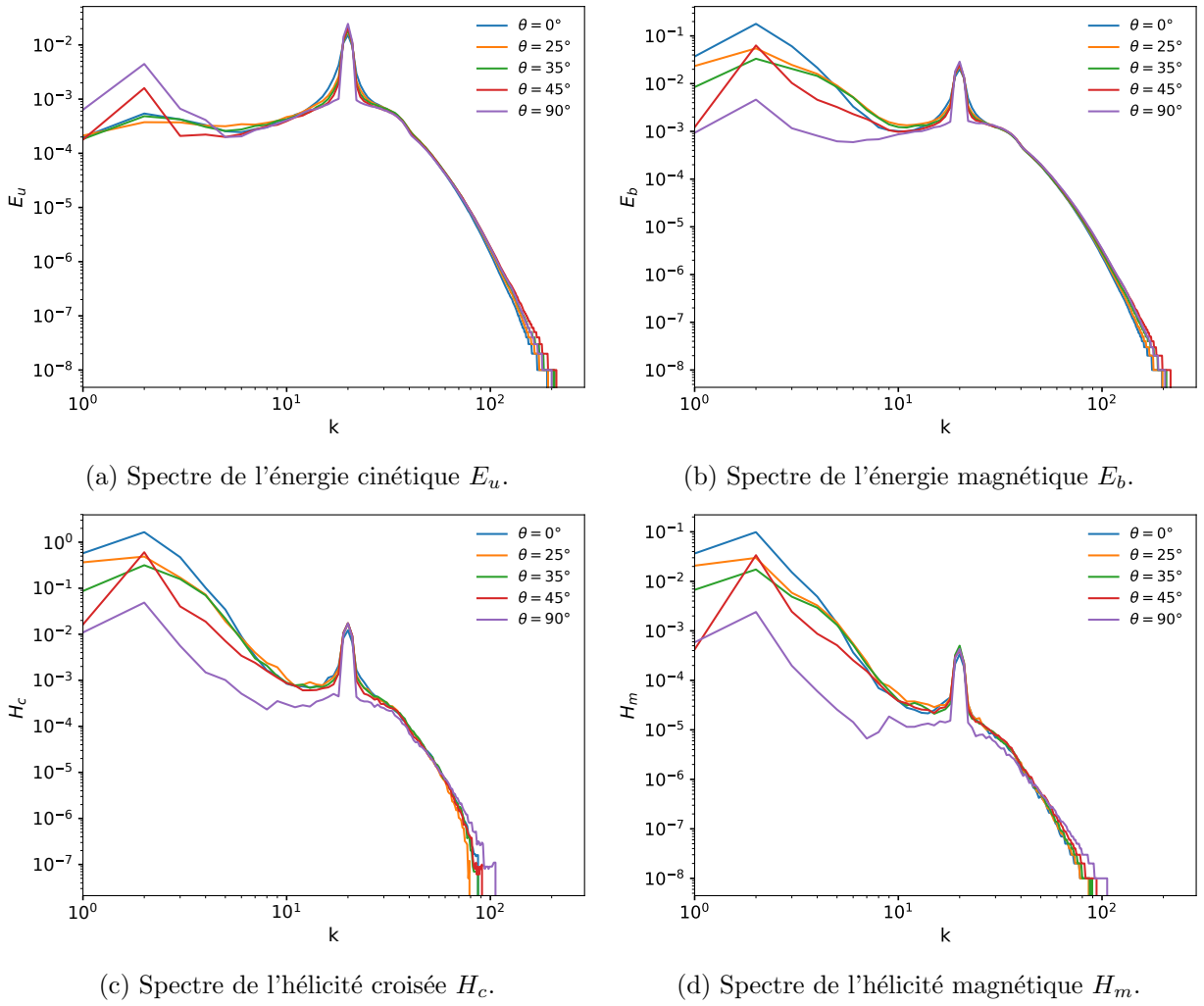


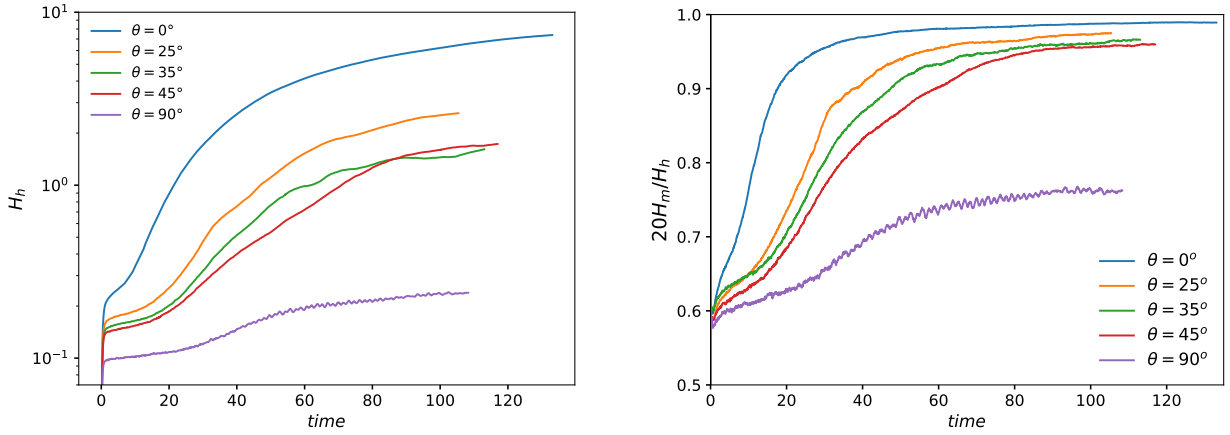
FIGURE 4.16 – Figure comparative des spectres des quatre quantités : E_u , E_b , H_c et H_m pour quatre angles différents. Les spectres ont été tracés à un temps $t \sim 105$.

et magnétique ($E_u(k=2) \sim E_b(k=2) \sim 5 \times 10^{-3}$). Ce résultat était également obtenu pour les cas perpendiculaires sans hypoviscosité. Le cas intermédiaire, à $\theta = 45^\circ$ en rouge, a une répartition analogue, voire même plus piquée, mais conserve en revanche le déséquilibre entre énergies magnétique et cinétique observé aux plus petits angles.

Via ces spectres à $t > 100$, il est possible de compléter le diagnostic tiré des cas sans hypoviscosité : une augmentation de l'angle d'inclinaison diminue progressivement les quantités transférées aux grandes échelles, jusqu'à un certain angle $\theta > 35^\circ$ pour lequel la répartition à travers les différentes échelles change ainsi que les transferts d'énergie cinétique. Ce constat laisse penser qu'une dynamique différente se met en place pour ces valeurs de θ , corrélant les énergies cinétique et magnétique. Pour mieux comprendre ce mécanisme, des diagnostics supplémentaires ont été effectués.

4.3.2 Efficacité du transfert vers les grandes échelles

Premièrement, il est intéressant de comparer l'évolution temporelle de l'hélicité hybride pour chacun des cas. On s'aperçoit notamment qu'une phase de croissance importante a lieu en début de simulation, entre $t \sim 20$ et $t \sim 50$ environ, comme on peut le voir sur la figure 4.17a. Celle-ci



(a) Hélicité hybride au cours du temps. L'axe des ordonnées est en échelle logarithmique afin de mieux distinguer les évolutions de chaque angle.

(b) Evolution de la contribution de l'hélicité magnétique H_m/d à l'hélicité hybride H_h/d .

FIGURE 4.17 – Evolution temporelle de l'hélicité hybride (a) et de la contribution de l'hélicité magnétique à celle-ci (b) pour les cinq valeurs de θ étudiées. L'évolution temporelle de la contribution de l'hélicité croisée, complémentaire de celle de l'hélicité magnétique, est en annexe B.2 (figure B.7).

semble déterminante pour les valeurs à long terme, et différencie rapidement les différents angles, en particulier $\theta = 0^\circ$ (en bleu), qui croît rapidement, et $\theta = 90^\circ$ (en violet), qui évolue peu, des autres valeurs. On remarque par ailleurs que les cas à $\theta = 25, 35, 45^\circ$ sont peu différents en valeurs, mais leurs comportements diffèrent. En particulier, la phase de croissance observée à $\theta = 45^\circ$ est plus lente, mais dure plus longtemps, jusque $t \sim 80$, menant ainsi à un dépassement de la courbe d'hélicité hybride du cas à $\theta = 35^\circ$. A la lumière de ce qui a été observé sur les spectres présentés précédemment, ce qui semble être un détail est probablement la signature d'un processus différent, donnant une allure piquée en $k = 2$ aux spectres et impliquant également l'énergie cinétique.

Sur le second panel de la figure 4.17, l'évolution de H_h est comparée à celle de H_m/d , afin de quantifier la part de l'hélicité magnétique dans le comportement de l'hélicité hybride. Au cours de la première phase, celle de croissance, on s'aperçoit que l'hélicité magnétique divisée par la longueur magnéto-inertielle, compose plus de 50% de l'hélicité hybride mais laisse tout de même une place non négligeable à l'hélicité croisée. Sur des temps longs, l'hélicité magnétique finit par dominer largement. En revanche, en augmentant l'angle d'inclinaison, l'évolution du rapport est plus lente et l'hélicité magnétique domine l'hélicité hybride plus tardivement. Par exemple, alors qu'à $t < 20$, $H_m \sim 90\% H_h$ pour $\theta = 0^\circ$, il faut attendre $t \sim 40, 50, 60$ pour obtenir le même ratio pour les angles $\theta = 25, 35, 45^\circ$. Le cas orthogonal quant à lui, ne permet pas que ce ratio dépasse 0.8, laissant à l'hélicité croisée une part plus importante dans l'hélicité hybride (voir annexe B.2, figure B.7). Il faut tout de même préciser que ce rapport évolue de cette façon à cause de deux effets corrélés : l'augmentation plus rapide de l'hélicité magnétique et la plus grande efficacité de la cascade inverse pour les petits angles.

En s'attardant sur l'étude des flux gouvernant les transferts d'énergie, aucune différence ne paraît à travers les termes de l'équation du mouvement (figure 4.18, ligne supérieure) qui restent très faibles. En revanche, le flux d'énergie transporté par le terme d'induction - ligne du bas à gauche - dépend fortement de l'angle d'inclinaison. A $\theta = 90^\circ$, celui-ci est quasiment nul, tandis que pour les angles d'inclinaison moyens il est deux fois moins négatif qu'à $\theta = 0^\circ$. Le terme d'advection - ligne du bas à droite - est assez actif aux grandes échelles lorsque les axes d'anisotropie

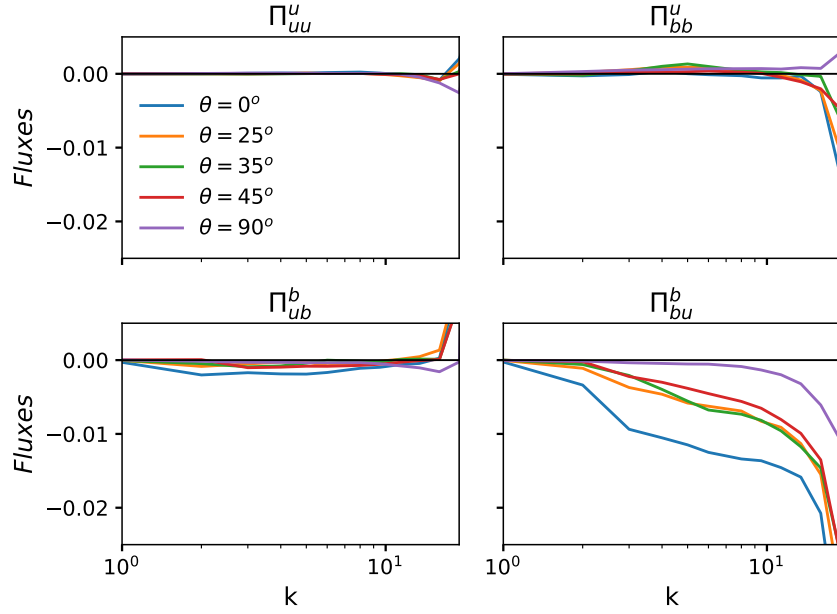


FIGURE 4.18 – Flux des termes contribuant aux équations du moment (ligne supérieure) et d'induction (ligne inférieure) pour les simulations de $\theta = 0^\circ$ à 90° avec hypoviscosité.

sont alignés, mais se rapproche de zéro dès lors que $\theta \neq 0$.

Les flux des différentes hélicités (figure 4.19) montre qu'à nouveau, l'hélicité magnétique domine la dynamique aux grandes échelles, qu'importe la valeur de θ . Étonnamment, les flux à $\theta = 25, 35^\circ$ - en orange et vert- sont les moins importants, tandis que les flux à $\theta = 0, 45, 90^\circ$ se différencient difficilement. L'hélicité hybride cascade donc bien indirectement quelle que soit la valeur de l'angle d'inclinaison. En revanche, alors que le comportement est similaire dans les faits, l'impact de l'angle d'inclinaison est plus délicat à qualifier. Effectivement, pour l'hélicité hybride comme pour l'hélicité magnétique, le passage de $\theta = 0^\circ$ à $\theta = 25, 35^\circ$ est caractérisé par un transfert vers les grandes échelles moins important. Cependant, à partir de $\theta = 45^\circ$, cette évolution change considérablement, et le flux d'hélicité hybride est à nouveau maximal, et ce jusque $k = 1$. Ce résultat est en faveur de l'interprétation proposée auparavant, supposant qu'un processus physique différent est en jeu dès que $\theta > 35^\circ$, bien que celui-ci génère également une cascade inverse d'hélicité magnétique. Le fait que le flux d'hélicité magnétique à 90° soit remarquablement plat est sans doute lié à la faible intensité de la dynamique à ces échelles dans ce cas précis.

Une autre façon de quantifier cette évolution est de mesurer le taux de dissipation des énergies vers les grandes et les petites échelles séparément (voir les définitions en partie 2.1.4). En séparant ces taux de dissipation en une partie cinétique ϵ_u et une partie magnétique ϵ_b , on peut identifier de quelle nature est la dissipation, et par extrapolation l'intensité de la cascade étudiée (Seshasayanan *et al.*, 2014). Puisque dans notre cas $\nu^+ = \eta^+$ et $\nu^- = \eta^-$, ces taux de dissipation associés à chacune des énergies peuvent être comparés.

La figure 4.20 représente les taux de dissipation cinétique et magnétique à grande échelle, normalisés par le taux de dissipation total, pour les cinq angles étudiés. Les valeurs obtenues atteignent avec peine 10^{-2} , puisque la plus grande partie de l'énergie injectée est dissipée aux petites échelles via la cascade directe d'énergie. L'allure des courbes représentant la partie magnétique - en traits

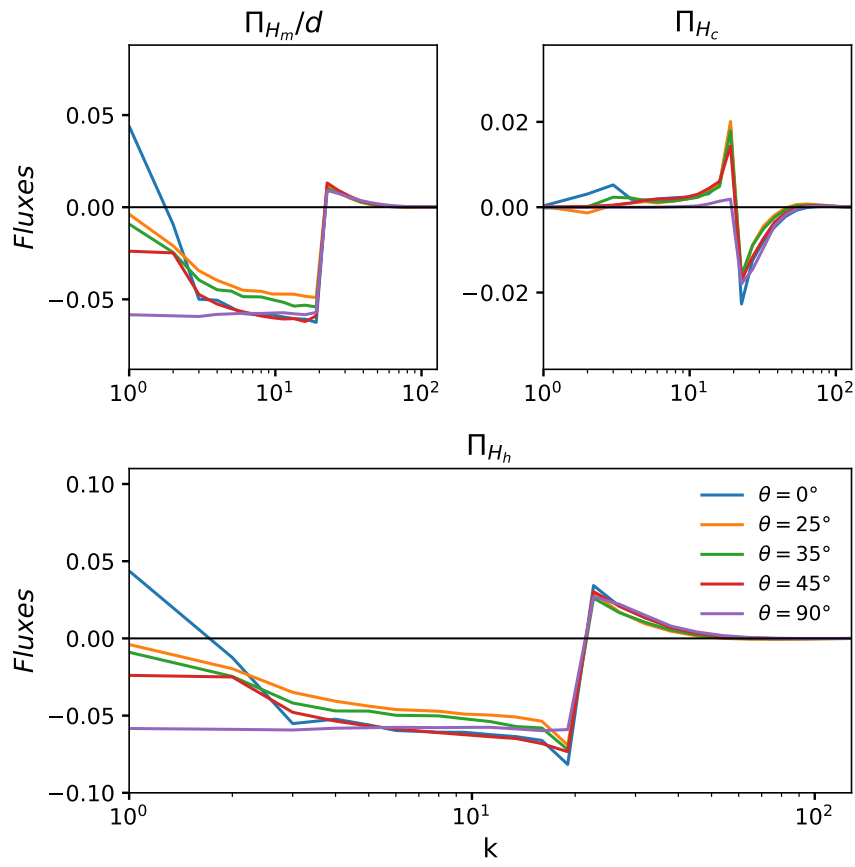


FIGURE 4.19 – Flux de chacune des hélicités calculés pour les simulations de $\theta = 0^\circ$ à 90° avec hypoviscosité.

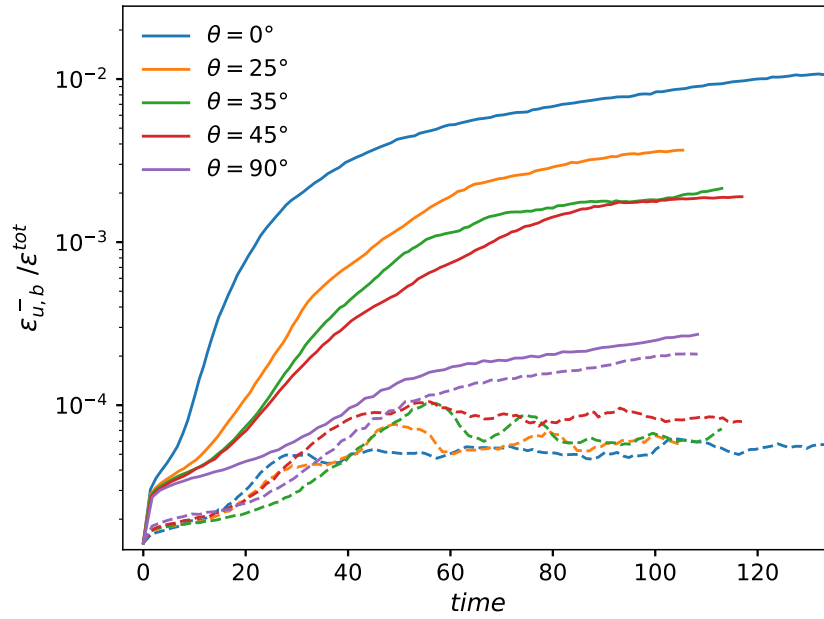


FIGURE 4.20 – Taux de dissipation cinétique (traits tiretés) et magnétique (traits pleins) à grande échelle pour les cinq valeurs de l'angle d'inclinaison, de $\theta = 0^\circ$ à 90° .

pleins - est intéressante, rappelant fortement celle de l'hélicité hybride (figure 4.17a). Pour le cas à $\theta = 0^\circ$, on observe une croissance rapide en début de simulation, avant un état quasi-stationnaire aux temps plus longs. Les simulations à $\theta = 25, 35, 45^\circ$ se comportent de manière similaire au cas aligné, bien que la croissance soit plus lente, tandis que le cas orthogonal évolue peu. Cela corrobore les résultats précédents, attestant que l'efficacité cascade inverse est altérée dès lors que l'angle d'inclinaison est différent de zéro. Dans le cas $\theta = 90^\circ$, $\epsilon_b^- \lesssim 3 \times 10^{-4}$, rendant ainsi cette contribution particulièrement négligeable comparativement à la dissipation à petite échelle ϵ^+ .

L'intérêt spécifique à cette figure est de comparer les taux de dissipation magnétique et cinétique (en traits tiretés). Les taux de dissipation cinétiques à grande échelle sont globalement plus faibles, environ deux ordres de grandeurs inférieurs. Pour les petits angles, $\theta = 0, 25^\circ$, la phase de croissance est fortement réduite, en temps et en intensité, alors que dès que $\theta \geq 35^\circ$, celle-ci se prolonge sur un intervalle de temps du même ordre que celui observé pour les taux de dissipation magnétiques (de $t \sim 20$ à $t \sim 60$). En effet, les évolutions des parties cinétiques et magnétiques en fonction de l'angle d'inclinaison sont antagoniques. Alors que ϵ_b^- diminue fortement lorsque θ augmente, ϵ_u^- augmente légèrement. Sur les temps longs, la différence est particulièrement importante pour le cas $\theta = 90^\circ$, pour lequel les taux de dissipation magnétique est presque deux ordres de grandeurs inférieur au taux de dissipation magnétique pour $\theta = 0^\circ$. En parallèle, le taux de dissipation cinétique augmente jusqu'à atteindre des valeurs du même ordre de grandeur, proches de l'équipartition. Cela est en accord avec le comportement des spectres d'énergie (figure 4.16), fortement corrélés à grande échelle. Ce type de comportement peut être retrouvé analytiquement en turbulence d'ondes (Salhi *et al.*, 2017).

Finalement, l'impact de l'angle d'inclinaison entre l'axe de rotation et du champ magnétique peut se résumer à deux aspects principaux :

Premièrement, une augmentation légère de l'angle d'inclinaison - jusqu'à $\theta \leq 35^\circ$, altère l'efficacité de la cascade inverse conduite par l'hélicité hybride, apparemment sans changer le

phénomène physique en jeu.

Deuxièmement, dès lors que l'angle d'inclinaison est supérieur à 35° , le mécanisme observé semble différent, impliquant notamment des phénomènes cinétiques. Cependant, la cascade inverse n'est pas pour autant inexistante, en partie pour le cas à $\theta = 45^\circ$.

4.4 Conclusions

4.4.1 Dérivation analytique

Une autre manière d'aborder l'impact de l'angle d'inclinaison, est de dériver la relation de dispersion du système en conservant la dépendance en θ . Le type de système étudié, soumis à un champ magnétique moyen, noté $\vec{B}_0$ et un taux de rotation, noté $\vec{\Omega}_0$, est censé héberger des ondes magnétostrophiques, résultant des effets joints des forces de Lorentz et de Coriolis. Il est possible de dériver la relation de dispersion de ces ondes sans faire d'approximation sur la valeur de l'angle d'inclinaison entre les deux axes. A partir du travail de Finlay (2008), on obtient une équation du mouvement de la forme :

$$-4 \left(\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{\nabla} \right)^2 \partial_{t^2}^2 \vec{u} = \left(\partial_{t^2}^2 - \frac{\left(\vec{B}_0 \cdot \vec{\nabla} \right)^2}{\rho\mu} \right)^2 \vec{\nabla}^2 \vec{u}, \quad (4.23)$$

qui, en considérant l'approximation de l'onde plane, donne quatre solutions pour ω décrites par :

$$\omega = \pm \frac{(\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{k})}{|k|} \pm \left(\frac{(\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{k})^2}{k^2} + \frac{(\vec{B}_0 \cdot \vec{k})^2}{\rho\mu} \right)^{1/2}. \quad (4.24)$$

Ces solutions peuvent également s'écrire sous la forme :

$$\omega = \frac{(\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{k})}{|k|} \left[\pm 1 \pm \left(1 + k^2 \frac{(\vec{b}_0 \cdot \vec{k})^2}{(\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{k})^2} \right)^{1/2} \right], \quad (4.25)$$

avec $\vec{b}_0 = \vec{B}_0 / \sqrt{\rho\mu}$. Cette équation fait écho à celle obtenue par Galtier (2014), à un détail près : il n'y a pas de postulat sur l'inclinaison entre les deux axes d'anisotropie. En effet, en considérant que $\vec{\Omega}_0$ et $\vec{B}_0$ sont alignés, on retrouve l'expression en fonction de la longueur magnéto-inertielle $d = b_0 / \omega_0$.

De plus, on observe des propriétés analogues : les deux ondes se renforcent l'une l'autre lorsque les termes sont de même signe, correspondant ainsi à $s\Lambda = 1$ (polarisation droite) ou, lorsque les termes sont de signes opposés, les ondes s'affaiblissent, correspondant à $s\Lambda = -1$ (polarisation gauche).

En prenant l'axe de rotation globale pour référence, permettant ainsi de définir deux directions $k_{\parallel}$ et $k_{\perp}$, on obtient :

$$\omega = \frac{\Omega_0 k_{\parallel}}{|k|} \left[\pm 1 \pm \left(1 + k^2 d^2 \left(\cos(\theta) + \sin(\theta) \frac{k_{\perp}}{k_{\parallel}} \right)^2 \right)^{1/2} \right], \quad (4.26)$$

avec θ l'angle entre l'axe de rotation et celui du champ magnétique. Pour les vecteurs d'onde proches de l'axe de rotation, $k_{\perp} / k_{\parallel} \ll 1$, on obtient une relation qui dépend directement du cosinus

de l'angle d'inclinaison, dont la contribution est maximale pour de petits angles. En revanche, pour les vecteurs d'onde orthogonaux à l'axe de référence, on obtient une relation dépendante du sinus de l'angle d'inclinaison, dont la contribution est maximale aux angles de l'ordre de $\pi/2$.

Pour de petites valeurs de θ , on retrouve la relation de dispersion connue permettant de distinguer les branches inertielle et magnétostrophique à grande échelle. Lorsque θ augmente, le second terme en $\sin(\theta)$ n'est plus négligeable, d'autant plus si $k_{\perp}/k_{\parallel} \gg 1$. Ainsi, des angles élevés ($\theta \sim 90^\circ$) auront tendance à favoriser le second terme, et donc la propagation des ondes dans la direction orthogonale à l'axe de rotation - la direction de $\vec{B}_0$ pour le cas $\theta = 90^\circ$.

Ces conclusions ne contredisent pas l'interprétation des résultats précédents, dans la mesure où deux termes distincts contribuent de façon différente selon la valeur de l'angle d'inclinaison. On remarque par ailleurs que pour $\theta = 45^\circ$, les deux contributions sont du même ordre de grandeur si $k_{\perp} \sim k_{\parallel}$, c'est-à-dire pour un vecteur d'onde orienté selon l'axe du champ magnétique imposé.

4.4.2 Structures

Pour rendre compte des structures et de leurs orientations, la méthode la plus simple consiste à visualiser les champs de vorticité $\vec{w}$ et de densité de courant $\vec{j}$.

La figure 4.21 représente ces champs dans deux plans différents. La première ligne représente le champ de vorticité dans le plan perpendiculaire à l'axe du champ magnétique, pour trois angles différents : $\theta = 0, 45, 90^\circ$. Pour les deux plus petits angles, à droite et au centre, on observe une structure de type tourbillonnaire, au sein de laquelle la vorticité est plus élevée. La taille caractéristique de la plus grande structure semble supérieure dans le cas aligné. Ces vortex sont en réalité la signature d'une structure allongée orientée selon $\vec{z}$. Ces structures n'occupent cependant pas l'ensemble du domaine, ni en taille ni en nombre, comme cela a déjà été observé dans des études de MHD en rotation. Pour le cas orthogonal, aucune structure ne se démarque.

La seconde ligne représente la densité de courant dans un plan selon l'axe du champ magnétique (selon $\vec{z}$ donc). Ces coupes ont été effectuées de sorte à observer un maximum de structures pour chaque cas. Sans grande surprise, pour le cas $\theta = 0^\circ$ on observe une structure presque tubulaire, orientée selon l'axe d'anisotropie, assez étendue (environ un quart de la boîte). Pour le cas à $\theta = 45^\circ$, on observe une figure plus contenue, et semblant légèrement dévier de l'axe du champ magnétique au profit de l'axe de rotation, incliné de 45° selon $\vec{x}$. Ce type de structure n'est pas observé pour le cas orthogonal.

Il est important de garder à l'esprit que ces visualisations ne sont caractéristiques que d'un instant précis, après une longue période de temps. D'autres mécanismes et structures participent certainement à la dynamique plus tôt dans les simulations.

4.4.3 Applications

L'étude de l'impact de l'angle d'inclinaison entre l'axe de rotation et l'axe du champ magnétique sur les transferts d'énergie magnétique aux grandes échelles est particulièrement intéressante pour les dynamos astrophysiques. Dans la banlieue proche, le système solaire, l'ensemble des neuf astres qui le constitue héberge ou a probablement hébergé un effet dynamo. Parmi les échantillons restants, les astres dont les champs magnétiques sont les plus intenses (le Soleil, la Terre, Jupiter, Saturne) ne s'écartent que peu de la configuration alignée avec l'axe de rotation. On retrouve cette tendance dans d'autres astres (cfr partie 1.2.3).

Notre étude, bien que fortement distincte des dynamos astrophysiques, tant en géométrie qu'en valeurs des paramètres, montre l'impact négatif d'un angle d'inclinaison trop élevé sur la cascade

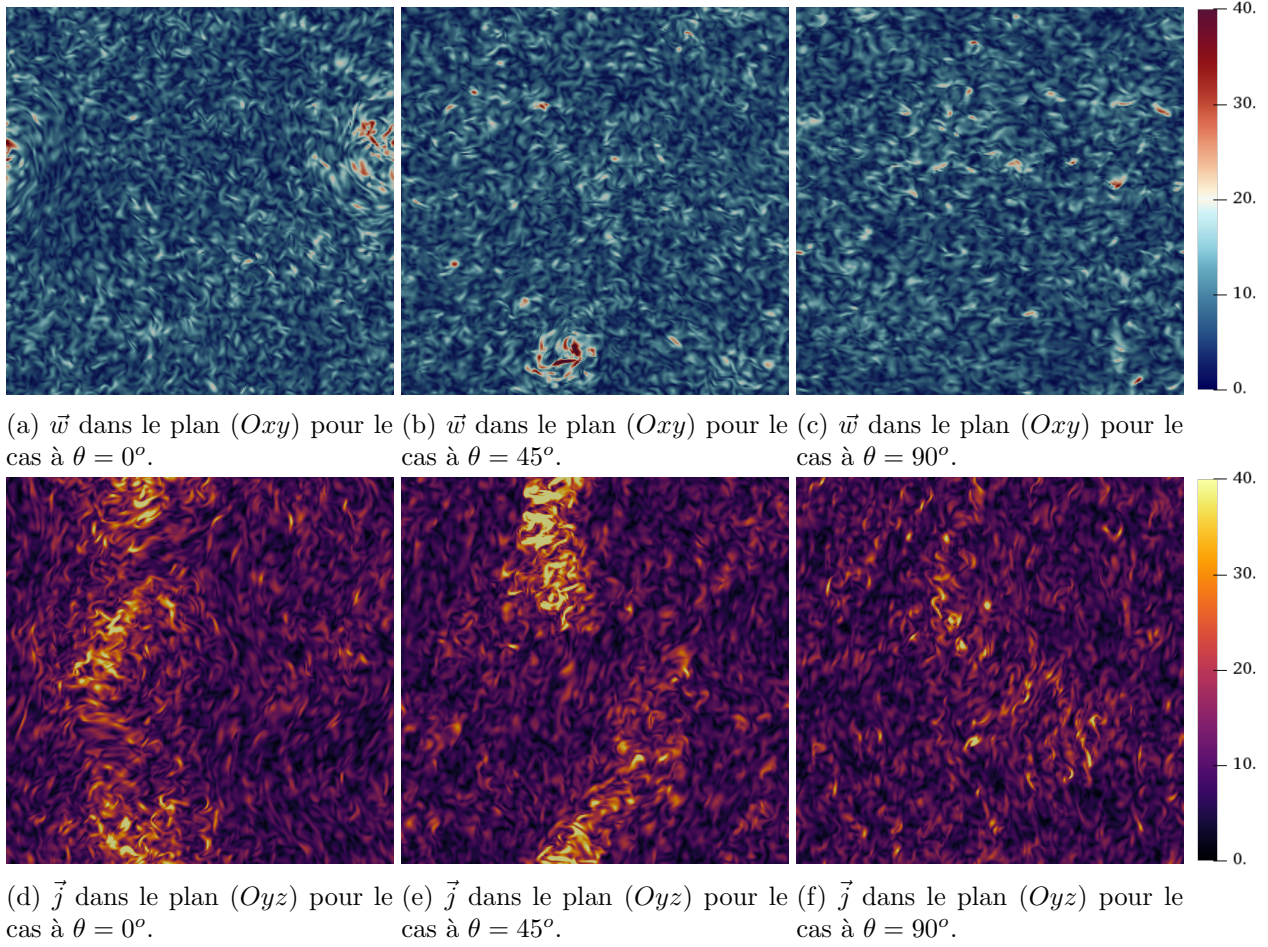


FIGURE 4.21 – Visualisation des champs de vorticité (première ligne) et de densité de courant (seconde ligne) pour les cas à $\theta = 0, 45, 90^\circ$ (de gauche à droite). Les figures ont été prises à des instants similaires à $t \sim 100$.

inverse d'h licite  hybride, et par conséquent sur l'énergie magnétique à grande échelle. Ces résultats laissent supposer qu'il est plus efficace de générer un champ magnétique aligné ou presque avec l'axe de rotation. Quelques zones d'ombre subsistent cependant, notamment les comportements particuliers observés aux angles $\theta = 35, 45^\circ$, ainsi que les mécanismes de turbulence d'ondes en vigueur dans les systèmes étudiés.

4.5 Impact du nombre de Prandtl magnétique

Le nombre de Prandtl magnétique $Pm = \nu/\eta$ est un autre paramètre dont les valeurs sont multiples en astrophysique. Il a été montré que sa valeur a un impact sur différents types de dynamos (Ponty *et al.*, 2005), mais pas encore dans la configuration présentée dans cette thèse. Le cas $Pm = 1$ déjà étudié servira de référence aux quatre autres valeurs choisies : 0.1, 0.5, 2 et 10. Il y a de multiples façons d'obtenir ces valeurs, en faisant varier soit ν , soit η , soit les deux. Les paramètres de ces simulations se trouvent dans la table B.4.

Dans un premier temps, comparons deux façons d'obtenir $Pm = 2$. La figure 4.22 représente les spectres d'énergie magnétique et d'h licite  hybride à plusieurs instants pour les deux combinaisons possibles, à partir du cas de référence. Les traits pleins représentent le cas où la diffusivité

magnétique a été diminuée (cas $Pm2$), les traits tiretés le cas où la viscosité a été augmenté (cas $Pm2b$). Naturellement, les spectres du cas $Pm2b$, à ν et η plus élevés, sont légèrement plus bas, puisque les termes de dissipation sont de facto plus élevés. Les comportements diffèrent essentiellement par la répartition à grande échelle des quantités transportées. A diffusivité plus basse (traits pleins), le spectre semble plus piqué, alors qu'il s'étale sur plusieurs valeurs de k pour le cas à viscosité plus élevée. L'écart entre les deux courbes et la différence de répartition sont conservés au cours du temps.

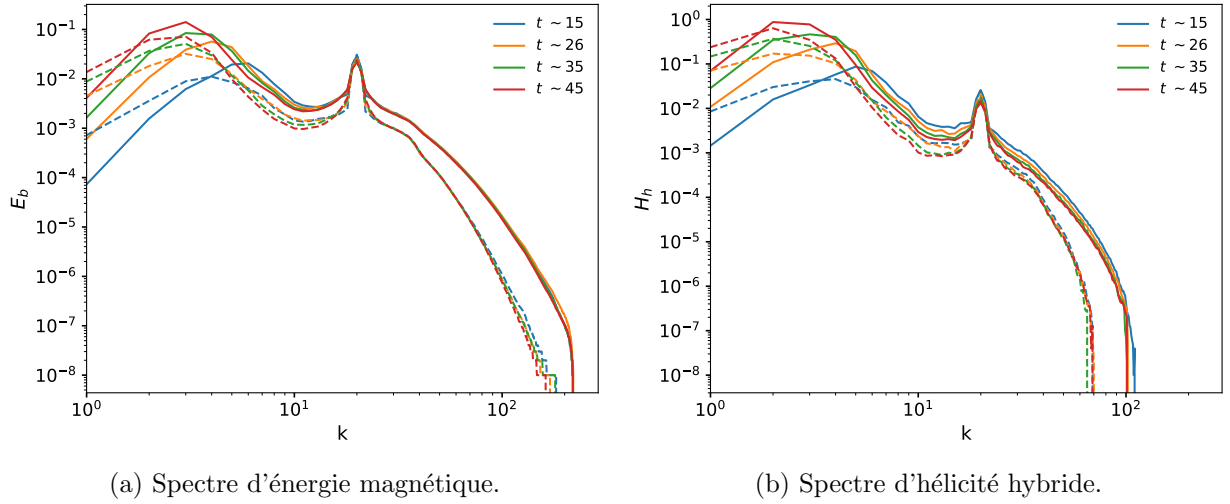


FIGURE 4.22 – Spectres de l'énergie magnétique (a) et de l'hélicité hybride (b) en fonction du temps pour deux façons d'obtenir $Pm = 2$: en trait plein $\nu = 2 \times 10^{-3}$, $\eta = 1 \times 10^{-3}$, en tirets $\nu = 4 \times 10^{-3}$ et $\eta = 2 \times 10^{-3}$, correspondant respectivement aux simulations $Pm2b$ et $Pm2$ dans la table B.4.

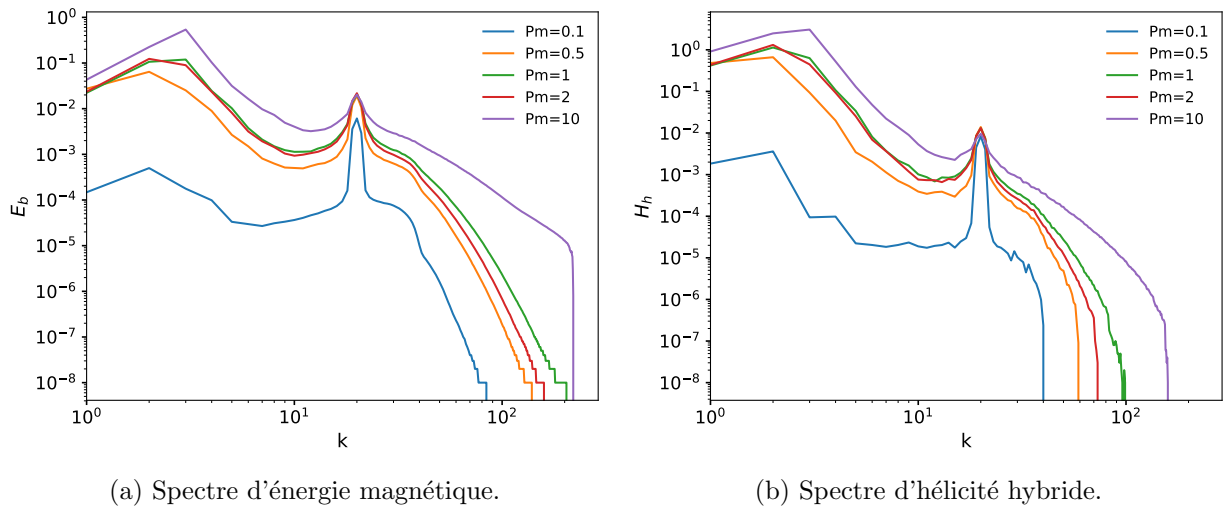


FIGURE 4.23 – Spectres de l'énergie magnétique (a) et de l'hélicité hybride (b) pour différentes valeurs du nombre de Prandtl magnétique comprises entre 0.1 et 10.

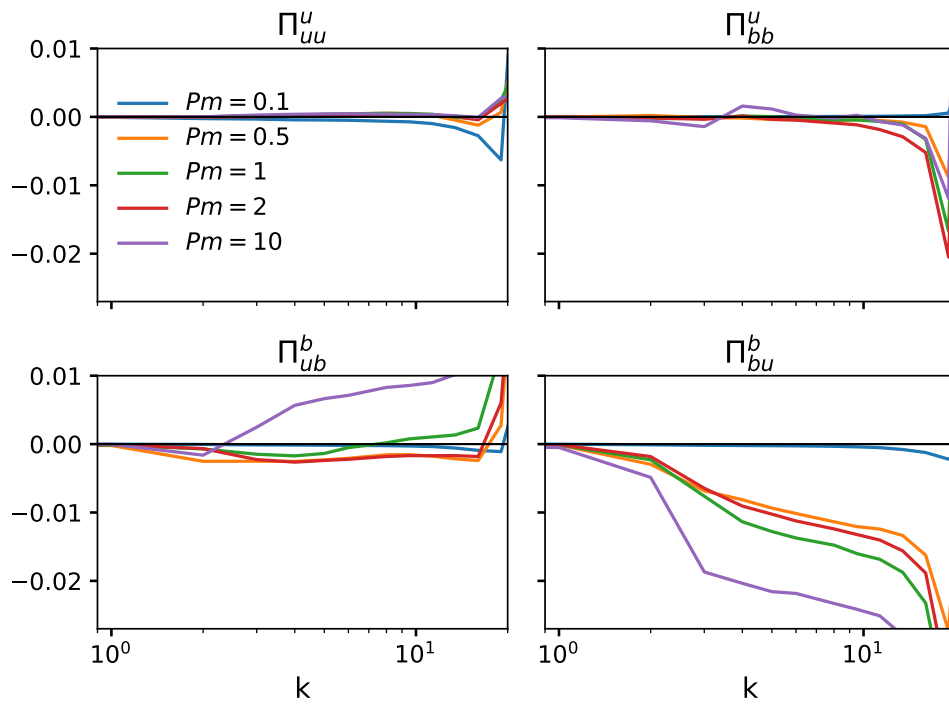
En comparant le cas $Pm2b$ avec le cas de référence à $Pm = 1$ (voir figure 4.23), pour une même valeur de la diffusivité magnétique, on constate que les spectres d'énergie et d'hélicité hybride à $Pm = 1$ (en vert) et $Pm = 2$ (en rouge) sont très proches à grande échelle. La seule différence

entre ces deux simulations est la valeur de la viscosité cinématique ν . Pour les autres cas, les valeurs atteintes par les spectres augmentent graduellement avec la valeur de Pm . On peut donc en conclure que le facteur modifiant les spectres magnétiques à grande échelle n'est pas directement le nombre de Prandtl magnétique, mais principalement la diffusivité magnétique η .

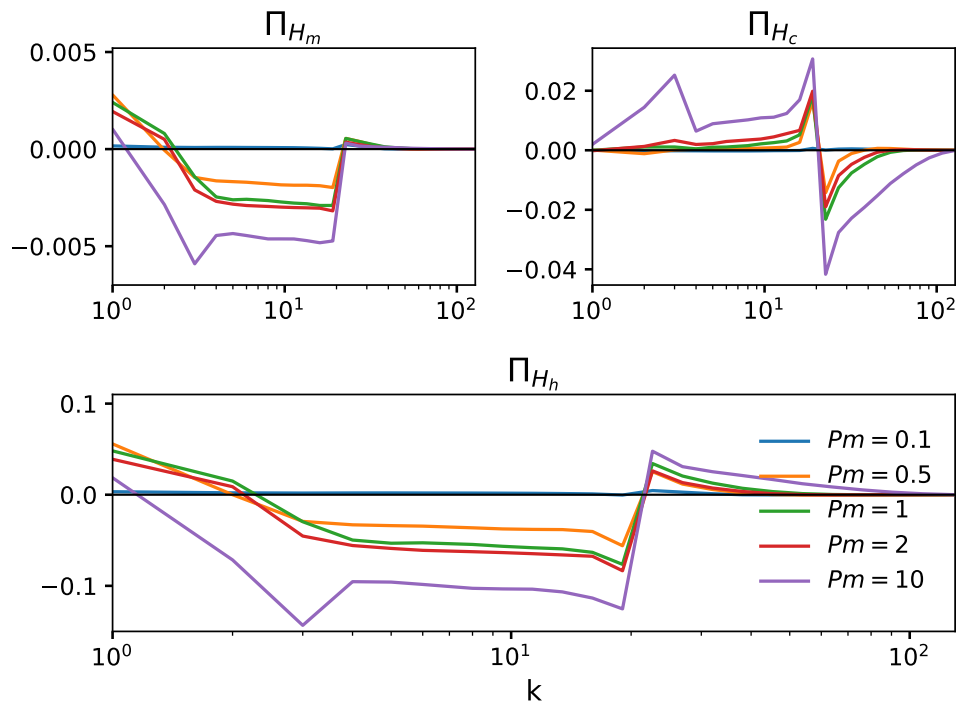
Les flux d'énergie et d'hélicité représentés en figure 4.24 nous en apprennent plus sur le fonctionnement de ce processus. En se focalisant à nouveau sur les cas à $Pm = 1$ (toujours en vert) et $Pm = 2$ (toujours en rouge), on observe que les flux de l'équation d'induction diffèrent. En effet le flux Π_{bu}^b est légèrement moins important pour le cas à viscosité plus élevé, en rouge. Ce déficit semble être compensé par le flux du second terme d'induction Π_{ub}^b , puisque le flux correspondant au cas à $Pm = 2$ est cette fois plus important que celui du cas à $Pm = 1$. Ce diagnostic explique la proximité des spectres magnétiques de ces deux cas, due à leur valeur commune de η . La viscosité quant à elle semble intervenir dans les mécanismes de transport vers les grandes échelles, en distribuant différemment l'énergie dans les différents termes.

Ces figures mettent également en évidence la singularité des deux cas extrêmes, à $Pm = 10$ (en violet) et $Pm = 0.1$ (en bleu). En effet, les flux issus des deux termes d'induction sont presque totalement négligeables à Pm très bas, alors qu'ils deviennent bien plus importants à $Pm = 10$. Dans le premier cas, la diffusivité magnétique est dix fois plus élevée que la viscosité, ce qui explique les très faibles valeurs obtenues; tandis que la diffusivité magnétique est dix fois plus faible dans le second cas. On remarque en particulier le flux non négligeable positif Π_{ub}^b , tandis que tous les autres cas conservent ce flux globalement négatif à ces valeurs de k .

Pour conclure sur l'impact du nombre de Prandtl magnétique, les taux de dissipation cinétique et magnétique vers les grande échelles ont à nouveau été représentés pour les différents cas étudiés (figure 4.25). A nouveau, les cas extrêmes se démarquent des cas à $0.5 \leq Pm \leq 2$. En particulier, à $Pm = 0.1$ en bleu, la cascade inverse d'énergie magnétique étant quasi inexistante, les taux de transferts cinétiques et magnétiques sont du même ordre de grandeurs. A $Pm = 10$, le taux de dissipation magnétique vers les grandes échelles - traits plein en violet - semble également prendre une part moins importante rapporté au taux de dissipation total. Les valeurs de Pm modérées sont relativement similaires, les taux de dissipation magnétique étant plus élevés comparativement au taux de dissipation total et à leur alter ego cinétiques.



(a) Flux d'énergie.



(b) Flux des trois hélicités.

FIGURE 4.24 – Flux d'énergie et d'hélicité pour cinq différentes valeurs du nombre de Prandtl magnétique comprises entre 0.1 et 10.

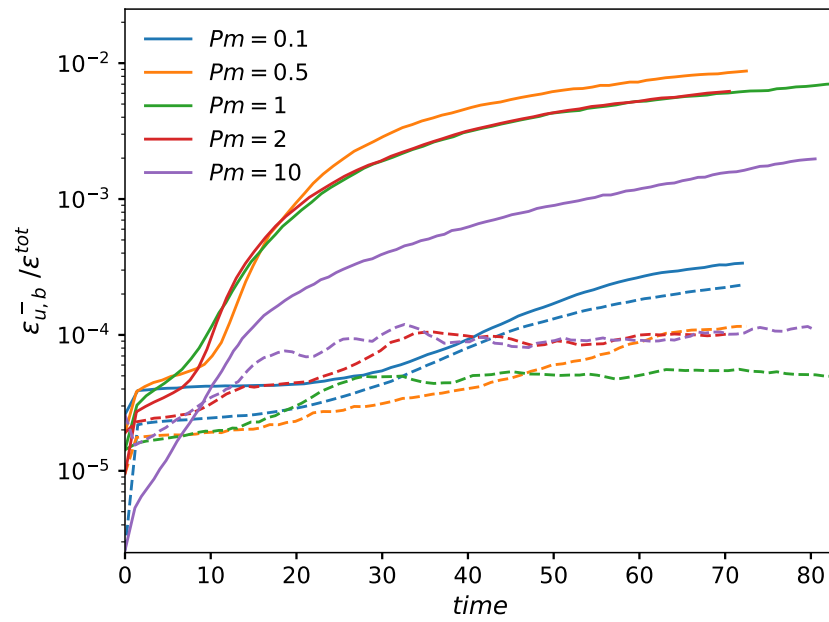


FIGURE 4.25 – Taux de dissipation pour différentes valeurs du nombre de Prandtl magnétique comprises entre 0.1 et 10.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont été naturellement divisés en deux chapitres de par les deux types géométrie utilisées. Dans un premier temps, la topologie du champ magnétique alimenté par les mouvements d'un fluide soumis à un gradient de température entre deux coquilles sphériques a été étudiée dans différents régimes de dynamos. Dans un second temps, le modèle local a permis de mettre en évidence l'impact de certains paramètres sur le transfert d'énergie magnétique vers les grandes échelles dans le cas de la turbulence MHD en rotation avec champ magnétique moyen. Ces deux approches ne se chevauchent pas mais se rejoignent sur plusieurs aspects, constituant ainsi une vision d'ensemble de l'effet dynamo.

En effet, l'approche locale permet d'appréhender l'effet dynamo du point de vue de la magnétohydrodynamique, en considérant une géométrie simple. En présence d'une double anisotropie, les prédictions théoriques prévoient une cascade inverse d'hélicité hybride, second invariant du système¹. Cette étude a permis de vérifier ces prédictions dans des cas plus réalistes, à viscosité et diffusivité non nulles, grâce aux simulations numériques exposées au chapitre 4. En particulier, pour les paramètres étudiés, il a été montré que la cascade inverse est plus efficace dans le cas doublement anisotrope que dans les cas simplement anisotropes. L'influence d'un forçage polarisé a également été vérifié, comparativement à des forçages classiques d'injection d'énergie. En accord avec les prédictions, les cas forçant préférentiellement le régime magnétostrophique (polarisation circulaire droite) sont plus efficaces. Après une décomposition des spectres obtenus, on constate effectivement que quel que soit le forçage choisi, la composante droite est responsable de la dynamique vers les grandes échelles observée sur les spectres d'énergie magnétique. Cette cascade inverse est effectuée via le terme d'induction issu de l'équation éponyme.

Cependant une accumulation d'énergie à grande échelle a tendance à se former dès lors que l'on considère des temps longs. La dynamique attendue étant très lente, un terme d'hypoviscosité a été ajouté aux grandes échelles dans le but d'étudier la cascade inverse sans ce comportement non physique en $k = 1$. Après cette modification, l'impact d'un angle d'inclinaison entre les deux axes d'anisotropie a été étudié en détail. Sans grande surprise, en s'éloignant du cas aligné pour lequel la cascade inverse est obtenue, l'efficacité du transfert vers les grandes échelles diminue. Plus particulièrement, on observe un changement de dynamique aux grandes échelles pour $\theta > 35^\circ$, impliquant alors les composantes cinétiques dans le phénomène de cascade inverse. En calculant les taux de transfert cinétique et magnétique vers les grandes échelles, on obtient effectivement une distribution proche de l'équipartition pour le cas où rotation et champ magnétique sont orthogonaux. Cela se traduit par une absence de grandes structures, contrairement à ce qui est obtenu pour de plus petits angles. Finalement, cinq valeurs du nombre de Prandtl magnétique ont été testées. L'intensité des flux d'énergie et d'hélicité augmente avec le nombre de Prandtl; cependant, le taux de dissi-

1. Pour la MHD idéale tridimensionnelle en rotation avec champ magnétique aligné à l'axe de rotation.

pation magnétique vers les grandes échelles est plus important pour des valeurs de Pm proches de 1.

L'impact du nombre de Prandtl magnétique est au cœur de l'étude effectuée avec le modèle global. En effet, pour des régimes suffisamment turbulents, la valeur de Pm devient décisive dans la topologie du champ magnétique généré. Les limites classiques entre régime dipolaire et régime multipolaire sont transgressées à haut Pm . La transition entre les deux régimes est très nette pour les plus petites valeurs de Pm , alors qu'elle a tendance à s'atténuer pour les Pm modérés, jusqu'à ne plus avoir lieu aux valeurs critiques usuelles. Il n'est alors plus possible de distinguer les deux régimes, dipolaire et multipolaire, simplement grâce aux diagnostics empiriques utilisés dans les précédentes études. Grâce aux spectres indiquant la répartition des forces selon l'échelle, on constate que ces cas transgressifs correspondent aux cas dominés par la force de Lorentz. Ceux-ci sont répartis essentiellement à haut Pm , bien que des valeurs de $Pm \sim 1$ suffisent pour obtenir ce régime à des valeurs du nombre d'Ekman suffisamment faibles.

L'impact de la force de Lorentz sur la transition entre les deux régimes a finalement été étudié plus en détail, notamment via les échelles caractéristiques de l'écoulement. Cependant, cette étude montre qu'elles ne permettent pas de mieux distinguer les cas multipolaires des cas dipolaires obtenus à plus haut Pm , lorsque les autres paramètres sont similaires. En augmentant le forçage convectif le long des branches dominées par la force de Lorentz, il est possible d'obtenir des transitions vers un régime multipolaire spécifique. Ce dernier est proche d'un régime dipolaire dont l'orientation du champ magnétique par rapport à l'axe de rotation oscille entre les deux polarités (aligné ou antialigné). Ces régimes multipolaires ne subissent qu'une baisse temporaire de l'intensité du champ, au moment précis du renversement, avant de retourner à un comportement essentiellement dipolaire avec toutes les caractéristiques qui lui incombent. Malgré les différences observées sur les paramètres dépendant du champ magnétique, le principal point commun entre ces régimes multipolaires est l'importance non négligeable de l'inertie à grande échelle comparativement à la force de Lorentz. Cette observation a conduit à la construction d'une loi phénoménologique pour la transition, déclenchée par l'équilibre entre force de Lorentz et inertie. Le critère classique est retrouvé dans le cas non dominé par la force de Lorentz, et dans le cas contraire ce critère est modifié, permettant ainsi d'expliquer les cas dipolaires violant le critère classique. De plus, les valeurs critiques pour la transition obtenues pour les dynamos dominées par la force de Lorentz sont atteintes pour un des cas multipolaires tardifs étudié, apportant ainsi une valeur ajoutée par rapport au critère classique.

Finalement, un certain nombre de prédictions théoriques ont été vérifiées grâce à la malléabilité du modèle cubique. Pour se rapprocher de conditions plus réalistes, on s'est intéressé particulièrement à différents types de forçages et différentes valeurs du nombre de Prandtl magnétique. En revanche, la géométrie de ce modèle contraint à simplifier le problème, et notamment à imposer un champ magnétique moyen d'orientation fixe. Pour pallier à ces contraintes, plusieurs axes sont envisageables : on peut par exemple modifier légèrement la géométrie et prendre en compte la courbure d'une sphère en conservant un modèle cartésien. Pour encore plus de réalisme, la géométrie sphérique s'impose, et permet notamment d'utiliser un forçage plus pertinent. En outre, il est également possible d'étudier la topologie du champ auto-entretenu et l'évolution temporelle de son orientation. Certains comportements, tels que les renversements périodiques ou non, sont faciles à reproduire dans cette géométrie. Cependant, il est plus difficile d'en comprendre les causes et les conséquences, justement puisque la géométrie est complexe et le champ libre d'évoluer spatialement et temporellement. Pour étudier l'impact d'un champ incliné, comme pendant un renversement, il est donc plus aisé de considérer le modèle local pour lequel l'orientation du champ peut être fixée, permettant ainsi de déterminer les conséquences de cette configuration plus facilement. L'utilisation conjointe de ces modèles permet donc une plus grande liberté de prospection.

Perspectives

Dans le cadre de l'étude globale, il serait souhaitable d'élargir encore l'espace des paramètres exploré, afin d'étudier les dynamos dominées par la force de Lorentz pour des valeurs d'Ekman et du nombre de Prandtl magnétique plus réalistes, c'est-à-dire plus basses. Afin de valider les valeurs critiques obtenues, il serait appréciable d'obtenir d'autres cas multipolaires dominés par la force de Lorentz. Pour cela, il est nécessaire d'explorer des régimes encore plus turbulents que ceux exposés dans cette thèse. Cela permettrait également de confirmer les caractéristiques spécifiques de ces dynamos multipolaires. De plus, atteindre ces gammes de paramètres autoriserait une comparaison plus directe avec les modèles géodynamos récents.

Un espace des paramètres plus vaste permettrait éventuellement de mettre en évidence des lois d'échelle et critères valables pour l'ensemble de l'espace des paramètres exploré. Mieux définir les limites entre les différents régimes est en effet indispensable pour relier les simulations numériques entre elles, et les observations astrophysiques.

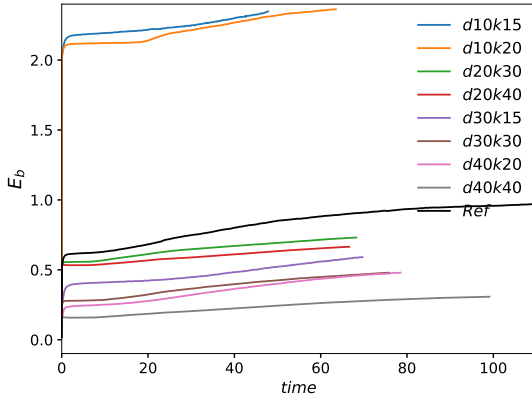
Plusieurs simulations ont déjà été effectuées dans ce sens, mais le temps d'implémentation nécessaire et le coût numérique associé limite considérablement la progression.

Pour diversifier les applications de cette étude, d'autres d'approximations sont envisageables, comme l'approximation anélastique plus appropriée aux intérieurs stellaires. Etudier l'impact de cette approximation sur les résultats obtenus pour les dynamos dominées par la force de Lorentz augmenterait les possibilités de comparaison avec des observations astronomiques. De plus, il serait pertinent de confronter la validité des résultats obtenus pour d'autres types de conditions initiales, au vu des résultats précédents pour d'autres paramètres.

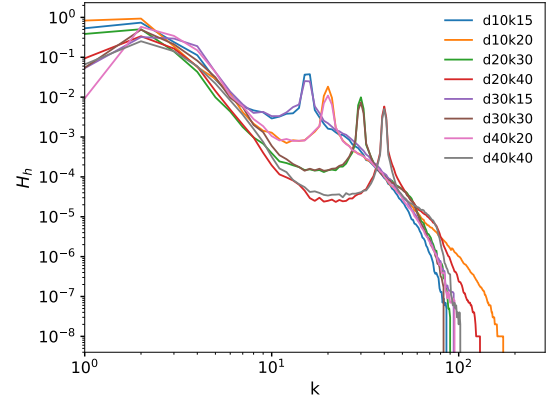
Pour le modèle local, de nombreuses pistes ont été ouvertes au cours de cette thèse. Les simulations présentées ici ont été effectuées à résolution modérée (256^3), mais plusieurs cas similaires ont été résolus pour des résolutions de 512^3 et même 1024^3 . Une résolution plus élevée donne accès à d'autres gammes de paramètres, en viscosité notamment, et également à un plus large domaine de nombres d'onde. Les résultats obtenus pour le moment corroborent ceux déjà présentés. Les simulations à plus haute résolution sont également les candidates privilégiées pour observer simultanément une cascade inverse et directe.

Une étude de l'influence de l'échelle de forçage et du rapport d a également été commencée (cfr les spectres obtenus en figure 5.1, et la table B.5). Des analyses plus poussées sont nécessaires afin de caractériser l'impact de ses changements sur l'efficacité de la cascade inverse déjà observée. Les premiers résultats laissent penser que d est le facteur influant sur la dynamique vers les grandes échelles, tandis que k_f n'influe que peu.

L'adaptation de fonctions permettant de représenter les spectres spatio-temporels a également été entreprise. Cela complèterait cette étude idéalement en permettant de confirmer les types d'ondes présentes dans les systèmes étudiés. Dans le même but, la décomposition des spectres en fonction de $k_\perp$ et $k_\parallel$ pourrait révéler des informations utiles dans une approche de turbulence d'ondes. D'autres possibilités ont également été envisagées, permettant d'étudier la (non-)localité des transferts d'énergie et d'hélicité.



(a) Evolution temporelle de l'énergie magnétique totale pour huit simulations testant des combinaisons de $k_f d$ distinctes. La ligne noire indique le cas de référence à $k_f = 20$ et $d = 1/20$.



(b) Spectre de l'hélicité hybride pour les huit simulations testant des combinaisons de $k_f d$ distinctes.

FIGURE 5.1 – L'énergie magnétique totale (a) évolue globalement de manière similaire pour les différentes combinaisons de $k_f d$ choisies. Quatre valeurs de k_f et quatre valeurs de d ont été choisies, résultant en quatre valeurs de $k_f d$. Les spectres d'hélicité hybride (b) ont été tracés à un temps $t \sim 50$. Se référer au tableau B.5 pour le détail des simulations.

Pour relier les deux approches, un projet incluant une géométrie intermédiaire a été élaboré. En utilisant l'approximation β – *plane* (Rhines, 1975), il est possible de modéliser l'écoulement dans une couche mince entre deux coquilles sphériques à l'aide d'un code cartésien. Il s'agit de définir la rotation globale et le champ moyen variant selon deux directions (ici $\vec{y}$ et $\vec{z}$), de sorte à ce que localement leurs orientations correspondent à celles d'une géométrie sphérique. Avec l'aide de A. Alexakis, ce type de modèle a été implémenté dans le code *GHOST* (Mininni *et al.*, 2011), en imposant une rotation modifiée $\vec{\beta}$ sous la forme :

$$\vec{\beta}(z) = \beta \cos\left(\frac{2\pi z}{nz}\right) \vec{y} + \beta \sin\left(\frac{2\pi z}{nz}\right) \vec{z}, \quad (5.1)$$

avec nz la résolution selon l'axe $\vec{z}$ et z compris dans $[-nz, nz]$. Celle-ci s'ajoute à une éventuelle rotation globale Ω . Pour le moment, différentes valeurs de β ont été testées, pour différentes résolutions et viscosités.

Le but étant de comparer les résultats obtenus avec ceux d'un code sphérique, un forçage particulier, plus proche du forçage imposé dans le code *GHOST*, a été implémenté dans le code *PaRoDy*. Les premiers résultats hydrodynamiques sont prometteurs, mais nécessitent encore des tests numériques validant les changements effectués.

Annexe A

Publications

A.1 Inverse cascade of hybrid helicity in $B\Omega$ -MHD turbulence

Une partie du travail expliqué dans le chapitre 4 a fait l'objet d'une publication dans *Physical Review Fluids*, jointe ci-dessous.

Inverse cascade of hybrid helicity in $B\Omega$ -MHD turbulenceMélissa D. Menu,^{1,2,*} Sébastien Galtier,^{3,†} and Ludovic Petitdemange^{4,‡}¹*Laboratoire de Physique des Plasmas, Université Paris-Sud, Université Paris-Saclay, École polytechnique, CNRS, Sorbonne Université, Observatoire de Paris, F-91128 Palaiseau Cedex, France*²*LERMA, Observatoire de Paris, PSL Research University, CNRS, Sorbonne Université, F-75005 Paris, France*³*Laboratoire de Physique des Plasmas, Université Paris-Sud, Université Paris-Saclay, Institut universitaire de France, École polytechnique, CNRS, Sorbonne Université, Observatoire de Paris, F-91128 Palaiseau Cedex, France*⁴*LERMA, CNRS, Observatoire de Paris, PSL Research University, Sorbonne Université, F-75005 Paris, France*

(Received 20 February 2019; published 12 July 2019)

We investigate the impact of a solid-body rotation Ω_0 on the large-scale dynamics of an incompressible magnetohydrodynamic turbulent flow in presence of a background magnetic field $\mathbf{B}_0$ and at low Rossby number. Three-dimensional direct numerical simulations are performed in a periodic box, at unit magnetic Prandtl number and with a forcing at intermediate wave number $k_f = 20$. When Ω_0 is aligned with $\mathbf{B}_0$ (i.e., $\theta \equiv (\Omega_0, \mathbf{B}_0) = 0$), inverse transfer is found for the magnetic spectrum at $k < k_f$. This transfer is stronger when the forcing excites preferentially right-handed (rather than left-handed) fluctuations; it is smaller when $\theta > 0$ and becomes weak when $\theta \geq 35^\circ$. These properties are understood as the consequence of an inverse cascade of hybrid helicity which is an inviscid/ideal invariant of this system when $\theta = 0$. Hybrid helicity emerges, therefore, as a key element for understanding rotating dynamos. Implication of these findings on the origin of the alignment of the magnetic dipole with the rotation axis in planets and stars is discussed.

DOI: [10.1103/PhysRevFluids.4.073701](https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.4.073701)**I. INTRODUCTION**

The emergence of large-scale magnetic fields in various astrophysical objects (like planets, stars, accretion discs, or galaxies) is mainly attributed to a dynamo mechanism based on the turbulent motions of a conducting fluid described by magnetohydrodynamics (MHD) [1–5]. Because the magnetic flux is conserved in ideal MHD, the stretching of magnetic field lines by the conducting fluid can amplify magnetic fluctuations at small scales. It is thought that these turbulent fluctuations are then transported to large-scales via an inverse cascade of magnetic helicity [6–10], which is an ideal invariant of three-dimensional (3D) MHD [11]. The presence of inverse transfer of magnetic energy in absence of magnetic helicity is also possible as pointed out in Ref. [12] (see also Refs. [13–15]). This transfer is, however, weaker than the one found with magnetic helicity and could be explained, e.g., by the form of the initial spectrum in the subinertial range [16].

Strictly speaking, direct and inverse cascades are expected only for quantities which are invariant of a system in the nondissipative case, whatever the turbulence regime (strong or weak) [17–21].

*melissa.menu@lpp.polytechnique.fr

†sebastien.galtier@lpp.polytechnique.fr

‡ludovic.petitdemange@lra.ens.fr

In 3D incompressible MHD, such invariants are the total energy E , the cross-correlation between the velocity and the magnetic field H_c , and the magnetic helicity H_m [22]. There are many studies devoted to the scaling of the total energy spectrum for which the answer is not unique [23–30]. Much less is known about the magnetic helicity while its importance is recognized, e.g., in solar physics where H_m can be measured in coronal mass ejections [31] or in the solar wind [32]. Recently, several direct numerical simulations have been devoted to the study of the magnetic helicity cascade [10,33,34] (see also Ref. [35] for compressible MHD). In particular, it is shown that the inverse cascade becomes nonlocal in wave-number space when condensation takes place at the largest scale of the system. Under some conditions, a direct cascade of H_m can also be found as a finite magnetic Reynolds number effect [36].

The introduction of a uniform magnetic field $\mathbf{B}_0$ or the Coriolis force with a uniform rotating rate $\mathbf{\Omega}_0$ reduces the number of inviscid/ideal invariants in 3D incompressible MHD. In the first case, H_m is no longer conserved while in the second it is H_c . When both effects are present, (situation called hereafter, $B\Omega$ -MHD) the total energy remains the only invariant of the system, except if $\mathbf{B}_0$ and $\mathbf{\Omega}_0$ are aligned: in this case, there is a second invariant called hybrid helicity H_h , which is a combination of H_c and H_m [37]. While analytical results have been obtained recently for weak $B\Omega$ -MHD turbulence [38] with some predictions about the hybrid helicity spectrum, no detailed numerical study has been done in the strong or weak wave turbulence regime (see, however, the recent study in Ref. [39]). $B\Omega$ -MHD turbulence is, however, a relevant model for studying rotating dynamos like in stars and planets which are often characterized by a magnetic dipole closely aligned with the rotation axis. The reason of this alignment is still unclear and need further investigations. Because of the complexity of the problem, only few physical ingredients are generally included in the modeling (see, e.g., Refs. [40,41]). For example, we may investigate this problem by including a large-scale magnetic field $\mathbf{B}_0$ and/or a solid-body (instead of differential) rotation $\mathbf{\Omega}_0$ (see, e.g., Refs. [42,43]).

In this article, we present a set of 3D direct numerical simulations of $B\Omega$ -MHD turbulence at unit magnetic Prandtl number and low Rossby number. The investigation is focused on the large-scale dynamics (scales larger than the forcing scale). In Sec. II we present the governing equations and the numerical setup. Section III is devoted to the numerical results. When the angle $\theta \equiv (\widehat{\mathbf{\Omega}_0}, \widehat{\mathbf{B}_0})$ between $\mathbf{\Omega}_0$ and $\mathbf{B}_0$ is null, we show that the magnetic spectrum exhibits a significant inverse transfer which is reduced when $\theta > 0$ to become negligible for $\theta \geq 35^\circ$. We also show that this transfer is stronger when the forcing excites preferentially right-handed (rather than left-handed) fluctuations. We explain why these properties can be interpreted as the consequence of an inverse cascade of H_h , which appears as a key element to understand rotating dynamos. Finally, in Sec. IV we present a conclusion.

II. GOVERNING EQUATIONS

The equations governing incompressible $B\Omega$ -MHD can be written as

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla P + \mathbf{u} \times (\mathbf{w} + 2\mathbf{\Omega}_0) + (\nabla \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0) + \nu^+ \nabla^2 \mathbf{u} + \nu^- \nabla^{-2} \mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times [\mathbf{u} \times (\mathbf{b} + \mathbf{B}_0)] + \eta^+ \nabla^2 \mathbf{b} + \eta^- \nabla^{-2} \mathbf{b}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (4)$$

with $\mathbf{u}$ the velocity, P a generalized pressure, $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$ the vorticity and $\mathbf{b}$ the normalized magnetic field. ν^+ , η^+ and ν^- , η^- are small-scale and large-scale dissipation coefficients, respectively.

We can easily check that H_c and H_m are not conserved in $B\Omega$ -MHD since we obtain from Eqs. (1) and (2), with $v^+ = v^- = \eta^+ = \eta^- = 0$,

$$\frac{dH_c}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}}{2} d\mathcal{V} = \boldsymbol{\Omega}_0 \cdot \int (\mathbf{b} \times \mathbf{u}) d\mathcal{V}, \quad (5)$$

$$\frac{dH_m}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \int \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{2} d\mathcal{V} = \mathbf{B}_0 \cdot \int (\mathbf{b} \times \mathbf{u}) d\mathcal{V}, \quad (6)$$

where $\mathbf{a}$ is the vector potential ($\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$) and $\mathcal{V}$ a volume of integration. The hybrid helicity $H_h \equiv H_m/d - H_c$ with $d \equiv B_0/\Omega_0$ is, however, conserved when $\boldsymbol{\Omega}_0$ and $\mathbf{B}_0$ are aligned (this property is checked numerically but not shown). d is called the magnetoinertial length and gives a scale of reference to measure the relative importance of the Coriolis force on the Lorentz force.

The linear solution of MHD is modified by the presence of the Coriolis force; the dispersion relation is [38,44]

$$\omega = \frac{sk_z\Omega_0}{k}(-s\Lambda + \sqrt{1 + k^2d^2}), \quad (7)$$

with k the wave number, k_z the wave number component along $\mathbf{B}_0$ (here, we assume that $\boldsymbol{\Omega}_0$ and $\mathbf{B}_0$ are parallel), $s = \pm 1$ the directional polarity ($sk_z \geq 0$) and $\Lambda = \pm 1$ the wave polarization. The magnetostrophic branch ($\Lambda s = 1$) and the inertial branch ($\Lambda s = -1$) correspond to the right (R) and left (L) circular polarizations, respectively. These are well separated when $kd \ll 1$ and tends to the Alfvén branch when $kd \gg 1$, also the condition $kd = 1$ appears as a critical value. As shown in Ref. [38], the polarization P may be defined as $P \equiv \sigma_m\sigma_c = -s\Lambda$, with σ_m the reduced magnetic helicity and σ_c the reduced cross-correlation

$$\sigma_m = \frac{\hat{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^* + \hat{\mathbf{a}}^* \cdot \hat{\mathbf{b}}}{2|\hat{\mathbf{a}}||\hat{\mathbf{b}}|}, \quad (8)$$

$$\sigma_c = \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{b}}^* + \hat{\mathbf{u}}^* \cdot \hat{\mathbf{b}}}{2|\hat{\mathbf{u}}||\hat{\mathbf{b}}|}, \quad (9)$$

where $\hat{}$ means the Fourier transform and $*$ the complex conjugate. By extension, in our numerical study we define the R and L fluctuations for which we have, respectively, $P < 0$ and $P > 0$. Finally note that the polarization property is lost when $\Omega_0 = 0$, while when $B_0 = 0$ we end up with a L-polarized wave, giving an asymmetric character to the dispersion relation Eq. (7).

Equations (1)–(3) are computed using a pseudo-spectral solver called TURBO [45,46]. The simulation domain is a triply periodic cube discretized by N^3 collocation points. A unit magnetic Prandtl number is taken with $v^+ = \eta^+$; we also take $v^- = \eta^-$. The vector $\mathbf{B}_0$ is fixed along the z direction while $\boldsymbol{\Omega}_0$ may be tilted with an angle θ in such a way that for $\theta = 0$ it is also along the z direction. The nonlinear terms are partially dealiased using a phase-shift method. This system is forced in the Fourier space: kinetic and magnetic energy spectra are excited at wave numbers $19 \leq k_f \leq 21$ with a rate of injection ϵ_u and ϵ_b , respectively, while there is no injection of kinetic helicity [47]. We take $\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ for all simulations. Magnetic helicity and cross-correlation are also injected at k_f with a reduced rate σ_m and σ_c , respectively. We take $\sigma_m = 0.5$, then the sign of σ_c will determine the polarization (left or right). In real systems this type of polarized forcing may find its origin in the excitation of magnetostrophic or inertial waves preferentially (see, e.g., Ref. [48]). Note that the simulations have been stopped at a time $t_f \gg t_{NL} \sim 1$, where t_{NL} is the nonlinear time, i.e., the time needed to form the small-scale ($k > k_f$) spectra. Therefore, the dynamics that we investigate is relatively slow and requires a long numerical computation.

A summary of the different simulations is given in Table I. In particular, the choice of Ω_0 and B_0 is made to keep $k_f d = 1$. Simulations have been computed to obtain a sufficiently large steady state window for the kinetic energy (with a steady state that starts at $t_{\text{steady}} \sim 40$ for cases 20L, 20R, 0R and $t_{\text{steady}} \sim 80$ for all the others). The Rossby, $\text{Ro} = U/(2\Omega_0 L)$, and Reynolds, $\text{Re} = UL/v^+$,

TABLE I. Main parameters of the simulations cited in the text. From left to right we find the name of the simulation, the amplitudes of the rotation rate and of the uniform magnetic field, the hypoviscosity, the normalized cross-correlation, the angle $\theta \equiv (\hat{\Omega}_0, \mathbf{B}_0)$, the Rossby number, the Reynolds number, and the time at which the simulation has been stopped. All the simulations have been performed with a resolution $N = 256^3$ for a box size $L = 2\pi$, a reduced magnetic helicity $\sigma_m = 0.5$, and a viscosity $\nu^+ = \eta^+ = 2 \times 10^{-3}$.

Simulation	Ω_0	B_0	$\nu^- = \eta^-$	σ_c	θ	Ro (10^{-3})	Re	t_f
20L	20	1	0	0.5	0	1.54	1215	69
20R	20	1	0	-0.5	0	1.5	1182	69
0R	0	1	0	-0.5	0	∞	1344	62
20R_B0	20	0	0	-0.5	0	1.45	1147	97
20R₀	20	1	2×10^{-2}	-0.5	0	1.49	1176	133
20R₂₅	20	1	2×10^{-2}	-0.5	25	1.49	1175	105
20R₃₅	20	1	2×10^{-2}	-0.5	35	1.47	1163	113
20R₄₅	20	1	2×10^{-2}	-0.5	45	1.49	1178	117
20R₉₀	20	1	2×10^{-2}	-0.5	90	1.57	1241	108

numbers are calculated from the root mean square value of the velocity field averaged over the entire volume V of the numerical box and time-averaged for $t_{\text{steady}} \leq t \leq t_f$: $U = \langle \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle_V \rangle_t^{1/2}$.

III. RESULTS

A. Impact of the circular polarizations

$B\Omega$ -MHD turbulence is characterized by two types of fluctuations (R and L). We start our analysis by studying the impact on the large-scale dynamics of a forcing which excites preferentially the R (simulation 20R) or the L (simulation 20L) fluctuations. Both magnetic E_b and kinetic E_u energies spectra have been calculated to diagnose the dynamics, however, E_u is nearly constant for these two cases. The behavior of the kinetic energy will be briefly discussed in Sec. III B. Figure 1 shows the results with the time evolution of the magnetic spectrum. The plots are given for approximately the same times. The simulation 20R is stopped before the formation of a condensate at low wave numbers which may have an impact on the dynamics (finite box effect). In both cases inverse transfers of magnetic energy are found for $k < k_f$, however, we clearly see that the efficiency of the transfer is greater when the R-fluctuations are preferentially excited: the magnetic energy transfer to large scales occurring in case 20L (dashed line) is considerably less efficient than in case 20R as the maximum value reached by the magnetic energy at the final time $t \sim 69$ differs by more than an order of magnitude. This difference can be understood by using wave turbulence arguments: the dynamics of the R-fluctuations is mainly driven by the magnetic field while it is mainly driven by the velocity field for the L-fluctuations [38]. Therefore, simulation 20R (solid line) strengthens a dynamics driven by the magnetic field. The efficiency of this transfer is also compared (see insert) to a rotating case without magnetic field (simulation 20R_B0). The same behavior is observed, however, we see that adding a mean magnetic field to the strong rotation enhances slightly the inverse transfer of magnetic energy. The situation is quite different when we remove the rotation (simulation 0R): in this case the fluctuations are not circularly polarized, the large-scale magnetic spectrum is flat and does not evolve very much.

Figure 2 confirms the first picture by showing the spectra of Fig. 1 but only for the final times and decomposed into L- and R-fluctuations (the decomposition is discussed in Ref. [38]; see also Appendix). For both simulations we see that the inverse cascade involves mainly the R-fluctuations and these fluctuations are larger for simulation 20R: the R-fluctuations drive the mechanism of inverse transfer in both simulations, whereas the L-fluctuations are significantly smaller at large scales. This difference can be explained as the condition $k_f d = 1$ leads to a magnetostrophic regime

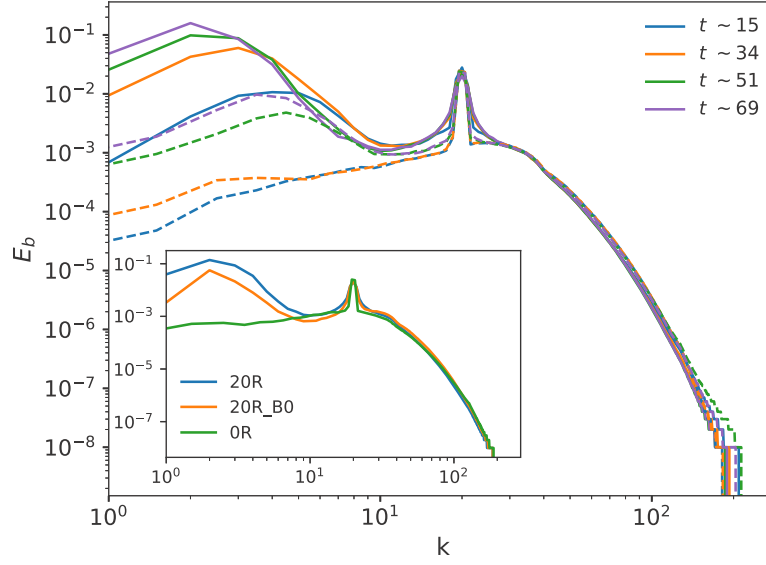


FIG. 1. Temporal evolution of the magnetic spectrum for simulations 20R (solid line) and 20L (dashed line). The parameters of these simulations can be found in Table I. Colors indicate the approximate times at which the spectra have been computed. Note that simulation 20R is stopped before the formation of a condensate. Insert: spectrum of case 20R at $t \sim 62$ compared with two reference cases: without rotation (case 0R) and without magnetic field (case 20R_B0).

(R polarization) at large scales ($k < k_f$). As expected, the efficiency of a L-type forcing (dashed line on Fig. 2) to drive an inverse cascade of magnetic energy is significantly weaker than for a R-type forcing (solid line on Fig. 2). Note that a similar analysis was performed for studying Hall MHD turbulence where a different behavior was also found for the L and R magnetic fluctuations spectra [45].

In Fig. 3 we plot in the spectral space (for simulation 20R) the contributions of the four different terms of $B\Omega$ -MHD to the total energy flux as derived by Dar *et al.* [49] and Verma [50] for $k < k_f$

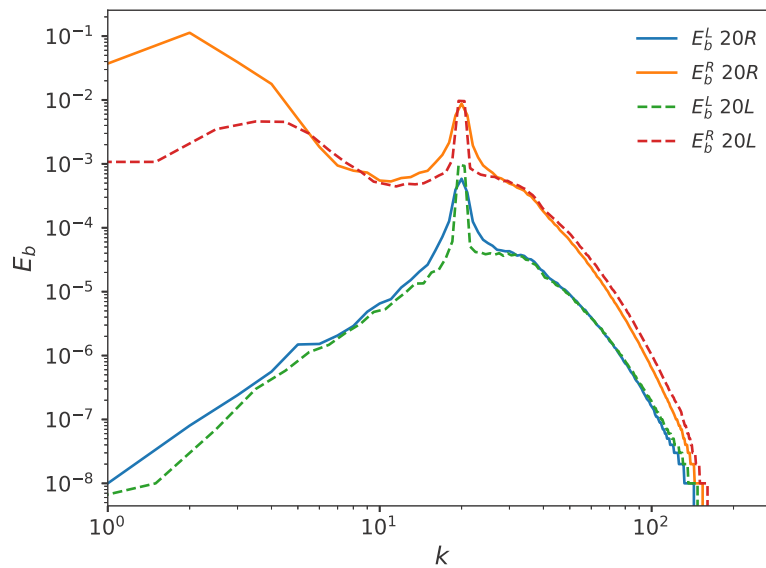


FIG. 2. Magnetic spectra at $t \sim 69$ for simulations 20R (solid line) and 20L (dashed line) decomposed into L (E_b^L) and R (E_b^R) fluctuations. This decomposition highlights the relative importance of each type of fluctuations in a single simulation.

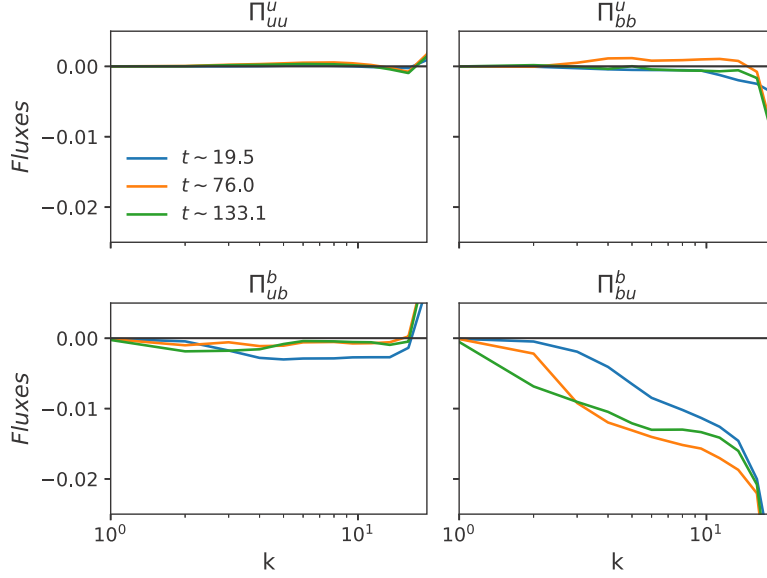


FIG. 3. Spectral flux (in logarithmic-linear coordinates) associated with the four different nonlinear terms of $B\Omega$ -MHD (simulation 20R) for three typical times. The main contribution exhibiting a significant negative flux at large scales ($k < k_f$) comes from Π_{bu}^b .

only. We used the notation $\Pi_{YZ}^X(k)$ for a flux from inside the shell k of the field X to outside the shell k of field Z via field Y . By definition [17,49–53], we have

$$\Pi_{uu}^u(k) = \mathbf{u}_k^< \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_k^>), \quad (10)$$

$$\Pi_{bb}^u(k) = -\mathbf{u}_k^< \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}_k^>), \quad (11)$$

$$\Pi_{ub}^b(k) = \mathbf{b}_k^< \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}_k^>), \quad (12)$$

$$\Pi_{bu}^b(k) = -\mathbf{b}_k^< \cdot (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_k^>), \quad (13)$$

where $\mathbf{u}_k^<$ is the filtered velocity (or magnetic field $\mathbf{b}_k^<$) so that only the modes $|\mathbf{k}| < k$ are being kept. While the contribution from the advection term Π_{uu}^u has the smallest amplitude, we see that the main contribution to the negative flux at large scales ($k < k_f$) comes from Π_{bu}^b . Although the range of scales is narrow, a plateau seems to emerge with time. We also see that there is a non negligible contribution of flux Π_{ub}^b with a negative value. These two fluxes come from the induction equation, which is consistent with our interpretation (a dynamics dominated by the magnetic field). The fluxes at $k_f > 20$ (not presented) have a classical positive and decreasing shape from the forcing wave numbers to the dissipative scales, signature of a direct cascade.

B. Impact of a tilted rotation axis

The hybrid helicity is an invariant of nondissipative $B\Omega$ -MHD only when $\theta = 0^\circ$. Here, we study the impact of this angle on the large-scale dynamics. For this study, a hypoviscosity term has been added ($\nu_- \neq 0$; see Table I) to avoid the condensation observed in Sec. III A and the finite box effects at small wave number. We will assume for the moment that H_h is mainly driven by the magnetic helicity (see Fig. 8 for a justification). Figure 4 shows the results for five different angles. The same forcing as in simulation 20R is applied. A significant decrease of the inverse transfer is observed when the angle θ increases. For $\theta = 90^\circ$ the transfer can be qualified as negligible. This property of $B\Omega$ -MHD turbulence can be interpreted as the direct consequence of the non conservation of H_h : the large-scale dynamics observed for $\theta = 0^\circ$ is explained by the inverse cascade of H_h which decreases when $\theta > 0^\circ$. Whereas from a theoretical point of view we expect the absence of inverse cascade

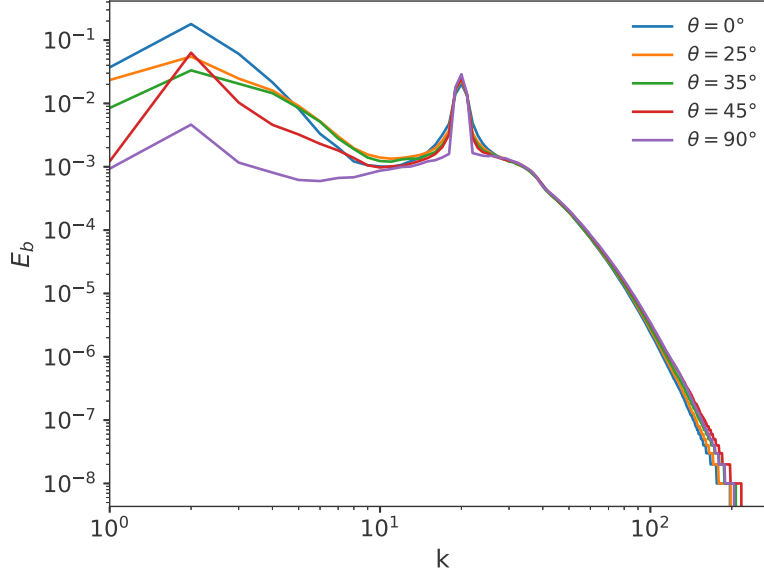


FIG. 4. Magnetic spectra for situations where the angles $\theta = 0^\circ, 25^\circ, 35^\circ, 45^\circ$, and 90° (simulations $20R_0$ to $20R_{90}$). The spectra are plotted approximately at the same time $t \sim 105$. Hypoviscosity (ν^-) has been added to avoid a condensation at small k . At large scales, a similar shape is observed for $\theta \leq 35^\circ$ whereas the behavior seems different when $\theta \geq 45^\circ$.

as soon as $\theta > 0^\circ$, Fig. 4 reveals the existence of a gradual decrease of this cascade. Moreover, the large scale behavior differs when $\theta \geq 45^\circ$ with the presence of a significant peak at wave number $k = 2$ and a curve instead of power law for $k > 2$. Further analysis reveals that this behavior seems correlated with that of E_u .

A better way to quantify this evolution is to measure the dissipation rate of energy at small and large scales:

$$\epsilon^\pm = \nu^\pm \sum_{\mathbf{k} \neq 0} k^{\pm 2} (|\hat{\mathbf{u}}|^2 + |\hat{\mathbf{b}}|^2) = \epsilon_u^\pm + \epsilon_b^\pm. \quad (14)$$

In particular, $\epsilon_{u,b}^-/(\epsilon^+ + \epsilon^-)$ provides a measure of the strength of the inverse cascade [20]. Note that this measure does not require a mechanism of inverse cascade driven by the total energy. Figure 5 displays the result for five angles. For $\theta = 0^\circ$ we see that the fast growth of the large-scale magnetic dissipation observed initially is followed by a phase of slow growth meaning that the stationary state is only reached approximately. Interestingly, the value obtained at the final time of the simulation is around 10^{-2} , which means that most of the magnetic energy flux goes to small-scales, a property expected because of the direct energy cascade. The comparison with the other angles reveals a significant decrease of the large-scale magnetic dissipation and a slight increase of the large-scale kinetic dissipation. For 90° an equipartition of the dissipation rates is almost reached. In this case the magnetic and kinetic energy spectra become very close (not shown). It is interesting to note that this tendency to the equipartition for $\theta = 90^\circ$ can be predicted already at the level of a linear analysis [54]. In conclusion, this new diagnostic confirms the analysis made from Fig. 4 but in addition we can claim that the strength of the inverse cascade becomes significantly weaker (about an order of magnitude) when $\theta \geq 35^\circ$.

The amplitude of the current density is shown on Fig. 6 for the reference case $\theta = 0^\circ$ in 3D space with the vertical axis corresponding to $\mathbf{z}$. Despite the strong rotation imposed, there is no evidence for a strong anisotropy along the Ω_0 direction. Especially no columnar structures leading to a quasi-2D turbulence are observed like for a purely rotational case (see, e.g., Ref. [55]) or a purely magnetic case (see, e.g., Ref. [56]) where, however, hypoviscosity/hyporesistivity was not introduced. By comparing their results to our similar cases (respectively $20R_B0$ and $0R$), this quasi-2D behavior

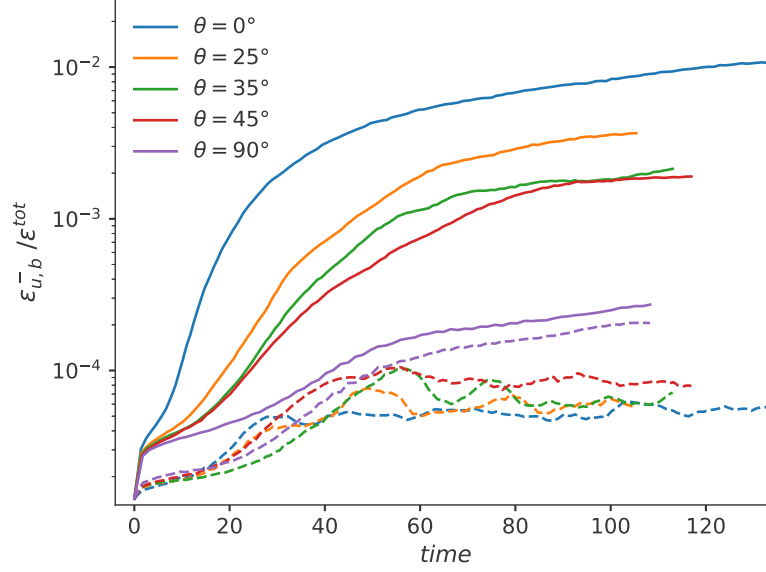


FIG. 5. Time evolution (in linear-logarithmic scales) of the normalized large-scale dissipation rate of kinetic energy ϵ_u^- (dashed lines) and magnetic energy ϵ_b^- (solid lines) for angles $\theta = 0^\circ$, 25° , 35° , 45° , and 90° . $\epsilon^{\text{tot}} \equiv \epsilon^+ + \epsilon^-$ is the total dissipation rate. For $\theta = 0^\circ$ the large-scale dissipation rate is dominated by the magnetic contribution, while for $\theta = 90^\circ$ the contribution of each field is similar.

is not observed neither. This difference can be explained by different parameter ranges and also by a wave-type forcing which may prevent the formation of coherent structures. Vorticity field for the same simulation is pretty similar and therefore not shown. Note that no structures are observed when the rotation axis is tilted.

Figure 7 shows the time evolution of the hybrid helicity with respect to θ . We do not expect the conservation of this quantity in this case since an external forcing is applied. However, a stationary state may be reached in presence of hypoviscosity because of the balance between forcing and dissipation. Although the final times t_f of the simulations are not exactly the same we see a general tendency with an accumulation of hybrid helicity into the system as a consequence of the inverse

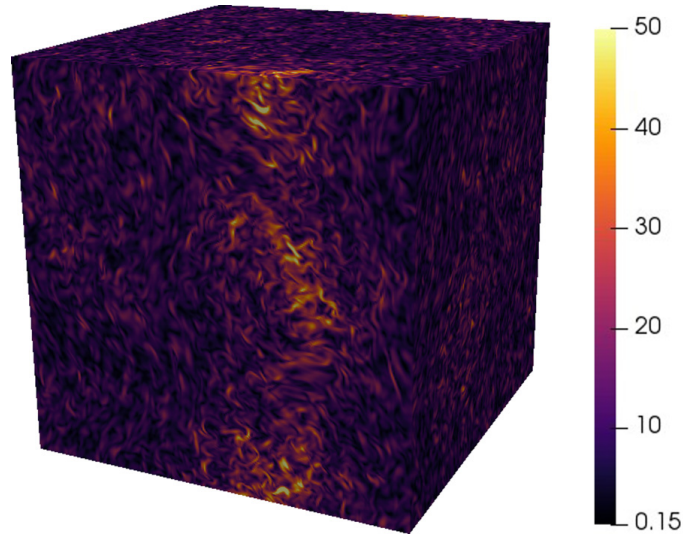


FIG. 6. Amplitude of the current density for case $20R_0$ at $t \sim 105$. The magnetic field is along $\mathbf{z}$, corresponding to the vertical axis on this representation. Despite strong rotation, no strong anisotropy is observed.

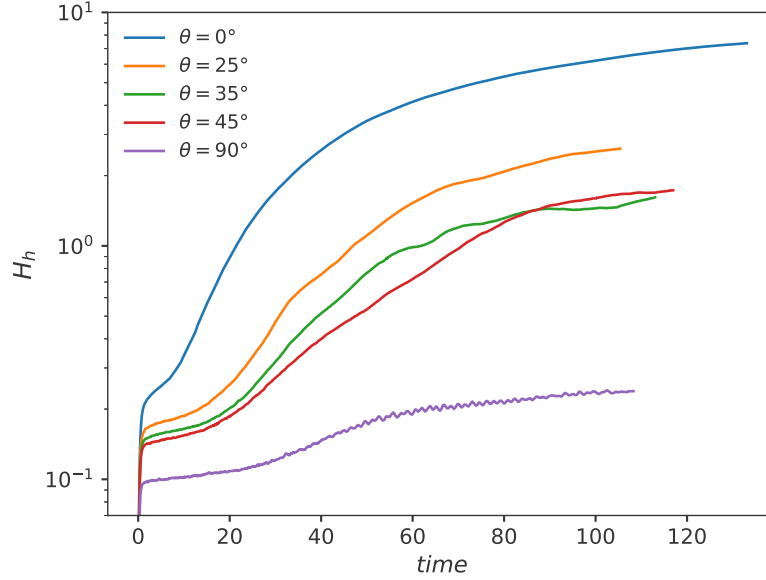


FIG. 7. Time evolution (in linear-logarithmic scales) of the hybrid helicity H_h for the five simulations with different values of θ . Note that the particular behaviors of case $20R_{35}$ and $20R_{45}$ which cross around $t = 90$ seem to have different origins (see Fig. 4). As expected, H_h is much smaller for the orthogonal configuration $20R_{90}$.

cascade. More than an order of magnitude of difference is found at t_f between angles $\theta = 0^\circ$ and 90° . The figure also shows that a stationary state is reached only approximately. Finally, note that the curves at $\theta = 35^\circ$ and 45° intersect around $t = 90$. This observation has to be compared with the spectral behavior found in Fig. 4 at wave number $k = 2$ to understand that the large-scale repartition of energy is different.

To further investigate the dynamics of the hybrid helicity we define the following fluxes

$$\Pi_{H_m}(k) = -\mathbf{b}_k^< \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{b}_k^>), \quad (15)$$

$$\Pi_{H_c}(k) = \frac{1}{2}[\mathbf{b}_k^< \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_k^> - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{b}_k^>) + \mathbf{u}_k^< \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b}_k^> - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_k^>)], \quad (16)$$

$$\Pi_{H_h}(k) = \Pi_{H_m}(k)/d - \Pi_{H_c}(k), \quad (17)$$

for the magnetic helicity, the cross-correlation and the hybrid helicity, respectively. The time evolution of these spectra is shown in Fig. 8 for $\theta = 0^\circ$. This figure provides an additional information: the hybrid helicity spectrum (bottom) tends to be formed with a constant negative flux at large scales. This negative flux can be attributed to the magnetic helicity (top left) whereas the cross-helicity displays only a slight positive flux (top right). It is important to note that unlike total energy, the quantities H_m , H_c , and H_h are not positive defined. However, since the forcing excites preferentially the right fluctuations it is expected to have a positive magnetic helicity (as we checked). Since H_m/d has a dominant contribution to H_h our interpretation about the sign of the hybrid helicity flux is therefore probably correct. Note that a positive flux at the largest scales is also observed in other studies and usually interpreted as an effect of the periodic boundaries of the numerical box.

In Fig. 9 we see how the angle θ affects the flux associated with the four different nonlinear terms of $B\Omega$ -MHD. The most remarkable evolution comes from the bottom-right panel where the main driver of the inverse cascade is plotted: Its flux is drastically reduced when θ increases. The inverse transfer is almost completely damped for a large θ angle.

Finally, the time evolution of the magnetic helicity spectrum is shown in Fig. 10 for $\theta = 0^\circ$ (simulation $20R_0$). As we see the large scale spectrum is well fitted with a power law in k^{-5} . Even

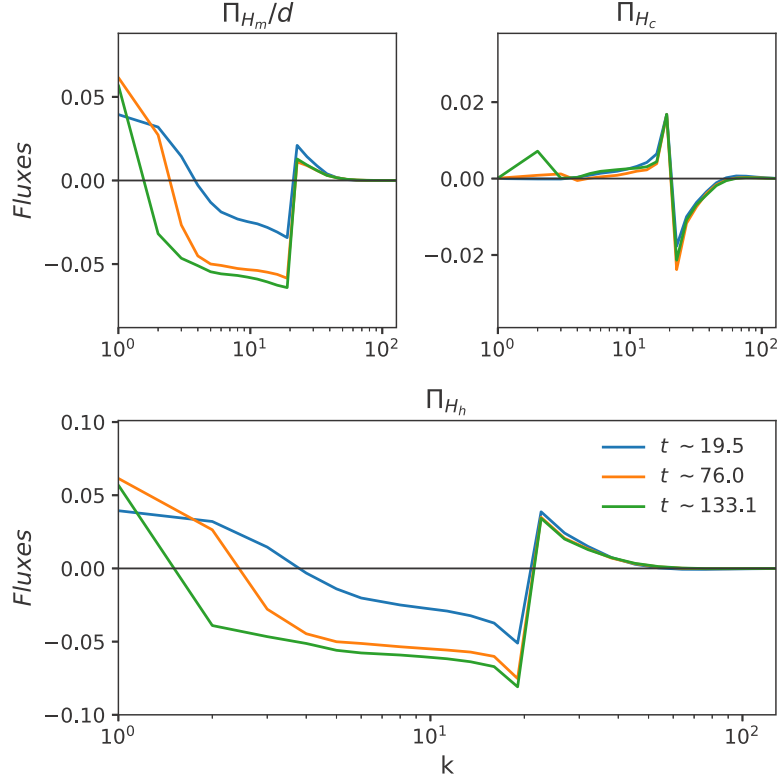


FIG. 8. Spectral fluxes (in logarithmic-linear scales) of the normalized magnetic helicity (top left) divided by d , cross-correlation (top right) and hybrid helicity (bottom) for simulation $20R_0$ at three different times. The hybrid helicity and the magnetic helicity exhibit a plateau at large scale which widens with time.

if a power law is found in a narrow wave number window we may try to compare it with theoretical predictions. The law found is quite different from the pure MHD case ($\Omega_0 = B_0 = 0$) where a direct numerical simulations showed a $k^{-3.6}$ scaling [33] or for which a closure model predicted a

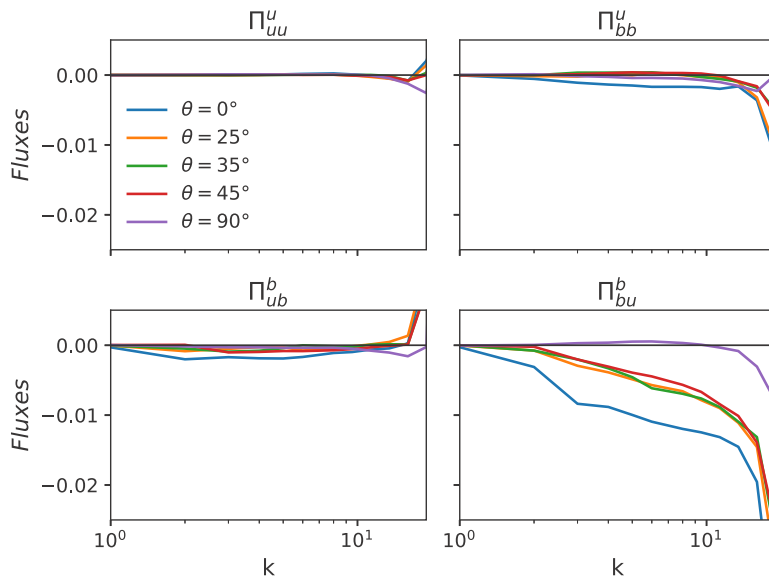


FIG. 9. Spectral fluxes (in logarithmic-linear scales) associated with the four different nonlinear terms of $B\Omega$ -MHD for several angles (simulation $20R_0$ to $20R_{90}$) and at time $t \sim 105$. For the flux Π_{bu}^b , the difference between $\theta = 0^\circ$ and the other angles is undeniable.

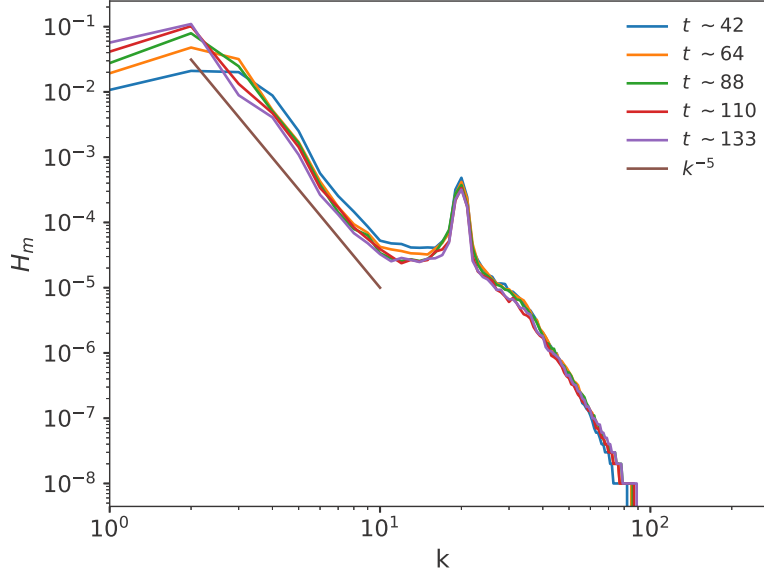


FIG. 10. Time evolution of the magnetic helicity spectrum for simulation $20R_0$. The spectra are compared with a power law in k^{-5} (segment). Note that the spectrum peaks at wave number $k = 2$ from $t \sim 88$.

k^{-2} scaling [7]. It is also different from the weak wave turbulence prediction [38]. Therefore, the spectrum observed remains unexplained.

IV. CONCLUSION

The present study was focused on the impact of a polarized forcing at intermediate scale on the large-scale dynamics of $B\Omega$ -MHD turbulence at low Rossby number. The main property found is that a right-handed polarization is much more efficient than a left-handed to excite large-scale magnetic field fluctuations. This can be explained by invoking wave turbulence arguments and the hybrid helicity H_h which is a conserved quantity when the rotation axis $\mathbf{\Omega}_0$ and the background magnetic field $\mathbf{B}_0$ are aligned. As a consequence of this inviscid property we observe an inverse cascade of H_h with a constant negative flux. This inverse transfer decreases when the angle $\theta \equiv (\mathbf{\Omega}_0, \mathbf{B}_0) > 0^\circ$; it becomes weak when $\theta \geq 35^\circ$. This critical angle is, however, not universal and could be smaller when right- and left-handed fluctuations are equally excited.

Stars and planets are often characterized by a magnetic dipole closely aligned with the rotation axis. Why? The answer to this question is far from trivial because it involves many subquestions linked to the turbulent dynamo problems in a spherical geometry. Usually because of the complexity of the problem, only few physical ingredients are included in the modeling like the thermal convection and the rotation which can be simplified by considering a solid-body instead of a differential rotation. Furthermore, the magnetic Prandtl number P_m can take very different values if one considers stars or planet interiors but generally in both cases $P_m < 1$. Last but not least, the conducting fluid is highly turbulent and requires power numerical resources if one wants to find solutions that cover a wide range of scales.

Our study reveals that the regeneration of a large-scale magnetic field can be done through an inverse cascade of hybrid helicity. We found that the inverse cascade is more efficient when the angle θ is small. This result is an indication that the dynamo mechanism is more efficient when locally the mean magnetic field is aligned with the rotating rate. Generally speaking our study reveals that the hybrid helicity is a fundamental ingredient for the dynamo in $B\Omega$ -MHD turbulence at low Rossby number.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by the LabEX Pla@par and received financial state aid managed by the Agence National de la Recherche, as part of the Programme “Investissements d’Avenir” under Reference No. ANR-11-IDEX-0004-02. This work was granted access to the HPC resources of CINES under Allocation No. 2017 A0030410072 made by GENCI. We thank R. Meyrand for useful discussions.

APPENDIX: HELICITY DECOMPOSITION

The incompressibility conditions Eqs. (3) and (4) allow the projection of the $B\Omega$ -MHD equations on a complex helicity basis, i.e., in a plane orthogonal to $\mathbf{k}$ [38]. We introduce the complex helicity decomposition

$$\mathbf{h}^\Lambda(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{h}_\mathbf{k}^\Lambda = \hat{\mathbf{e}}_\theta + i\Lambda\hat{\mathbf{e}}_\Phi, \quad (\text{A1})$$

where the wave vector $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{e}}_k = \mathbf{k}_\perp + k_z\hat{\mathbf{e}}_z$ ($k = |\mathbf{k}|$, $k_\perp = |\mathbf{k}_\perp|$, $|\hat{\mathbf{e}}_k| = 1$) and $i^2 = -1$ and where

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\Phi \times \hat{\mathbf{e}}_k, \quad (\text{A2})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_\Phi = \frac{\hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_k}{|\hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_k|}, \quad (\text{A3})$$

with $|\hat{\mathbf{e}}_\theta(\mathbf{k})| = |\hat{\mathbf{e}}_\Phi(\mathbf{k})| = 1$. Note that $(\hat{\mathbf{e}}_k, h_\mathbf{k}^+, h_\mathbf{k}^-)$ form a complex basis with the following properties

$$\mathbf{h}_\mathbf{k}^{-\Lambda} = \mathbf{h}_{-\mathbf{k}}^\Lambda, \quad (\text{A4})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_k \times \mathbf{h}_\mathbf{k}^\Lambda = -i\Lambda \mathbf{h}_\mathbf{k}^\Lambda, \quad (\text{A5})$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_\mathbf{k}^\Lambda = 0, \quad (\text{A6})$$

$$\mathbf{h}_\mathbf{k}^\Lambda \cdot \mathbf{h}_\mathbf{k}'^{\Lambda'} = 2\delta_{-\Lambda'\Lambda}. \quad (\text{A7})$$

We project the Fourier transform of the original vectors $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ and $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ on the helicity basis and find

$$\hat{\mathbf{u}}_\mathbf{k} = \sum_\Lambda \mathcal{U}_\Lambda(\mathbf{k}) \mathbf{h}_\mathbf{k}^\Lambda = \sum_\Lambda \mathcal{U}_\Lambda \mathbf{h}_\mathbf{k}^\Lambda, \quad (\text{A8})$$

$$\hat{\mathbf{b}}_\mathbf{k} = \sum_\Lambda \mathcal{B}_\Lambda(\mathbf{k}) \mathbf{h}_\mathbf{k}^\Lambda = \sum_\Lambda \mathcal{B}_\Lambda \mathbf{h}_\mathbf{k}^\Lambda. \quad (\text{A9})$$

If we inverse the system, then we find the following relations for the velocity components:

$$\mathcal{U}_+(\mathbf{k}) = \frac{1}{2kk_\perp} [k_x k_z \hat{u}_x + k_y k_z \hat{u}_y - k_\perp^2 \hat{u}_z + ik(k_y \hat{u}_x - k_x \hat{u}_y)], \quad (\text{A10})$$

$$\mathcal{U}_-(\mathbf{k}) = \frac{1}{2kk_\perp} [k_x k_z \hat{u}_x + k_y k_z \hat{u}_y - k_\perp^2 \hat{u}_z - ik(k_y \hat{u}_x - k_x \hat{u}_y)]. \quad (\text{A11})$$

Similar relations are found for the magnetic field. Then, the kinetic and magnetic energy spectra will be given by $\langle |\mathcal{U}_\Lambda|^2 \rangle$ and $\langle |\mathcal{B}_\Lambda|^2 \rangle$, respectively: for a positive k_z , $\Lambda = +1$ corresponds to the R-fluctuations and $\Lambda = -1$ to the L-fluctuations.

- [1] H. K. Moffatt, An approach to a dynamic theory of dynamo action in a rotating conducting fluid, *J. Fluid Mech.* **53**, 385 (1972).
- [2] A. Brandenburg and K. Subramanian, Astrophysical magnetic fields and nonlinear dynamo theory, *Phys. Rep.* **417**, 1 (2005).
- [3] R. M. Kulsrud and E. G. Zweibel, On the origin of cosmic magnetic fields, *Rep. Prog. Phys.* **71**, 046901 (2008).
- [4] S. Galtier, *Introduction to Modern Magnetohydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2016).
- [5] C. Moutou, E. M. Hébrard, J. Morin, L. Malo, P. Fouqué, A. Torres-Rivas, E. Martioli, X. Delfosse, E. Artigau, and R. Doyon, SPIRou input catalog: Activity, rotation, and magnetic field of cool dwarfs, *Month. Not. Roy. Astron. Soc.* **472**, 4563 (2017).
- [6] U. Frisch, A. Pouquet, J. Leorat, and A. Mazure, Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in magnetohydrodynamic turbulence, *J. Fluid Mech.* **68**, 769 (1975).
- [7] A. Pouquet, U. Frisch, and J. Leorat, Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect, *J. Fluid Mech.* **77**, 321 (1976).
- [8] A. Pouquet and G. S. Patterson, Numerical simulation of helical magnetohydrodynamic turbulence, *J. Fluid Mech.* **85**, 305 (1978).
- [9] M. Meneguzzi, U. Frisch, and A. Pouquet, Helical and Nonhelical Turbulent Dynamos, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 1060 (1981).
- [10] A. Alexakis, P. D. Mininni, and A. Pouquet, On the inverse cascade of magnetic helicity, *Astrophys. J.* **640**, 335 (2006).
- [11] L. Woltjer, A theorem on force-free magnetic fields, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **44**, 489 (1958).
- [12] A. Brandenburg, T. Kahniashvili, and A. G. Tevzadze, Nonhelical Inverse Transfer of a Decaying Turbulent Magnetic Field, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 075001 (2015).
- [13] A. D. Gilbert, U. Frisch, and A. Pouquet, Helicity is unnecessary for alpha effect dynamos, but it helps, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **42**, 151 (1988).
- [14] V. Urpin, Mean electromotive force in turbulent shear flow, *Phys. Rev. E* **65**, 026301 (2002).
- [15] S. M. Tobias and F. Cattaneo, Shear-driven dynamo waves at high magnetic Reynolds number, *Nature* **497**, 463 (2013).
- [16] P. Olesen, Inverse cascades and primordial magnetic fields, *Phys. Lett. B* **398**, 321 (1997).
- [17] U. Frisch, *Turbulence: The legacy of A. N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [18] S. Nazarenko, *Wave Turbulence*, Lecture Notes in Physics Vol. 825 (Springer Verlag, Berlin, 2011).
- [19] D. Banerjee and R. Pandit, Statistics of the inverse-cascade regime in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence, *Phys. Rev. E* **90**, 013018 (2014).
- [20] K. Seshasayanan, S. J. Benavides, and A. Alexakis, On the edge of an inverse cascade, *Phys. Rev. E* **90**, 051003(R) (2014).
- [21] A. Alexakis and L. Biferale, Cascades and transitions in turbulent flows, *Phys. Rep.* **767**, 1 (2018).
- [22] A. Pouquet, Magnetohydrodynamic turbulence, in *Astrophysical Fluid Dynamics*, Les Houches 1987, edited by J.-P. Zahn and J. Zinn-Justin (Elsevier, 1993), pp. 139–227.
- [23] R. H. Kraichnan, Inertial range spectrum in hydromagnetic turbulence, *Phys. Fluids* **8**, 1385 (1965).
- [24] P. Goldreich and S. Sridhar, Toward a theory of interstellar turbulence. 2: Strong alfvénic turbulence, *Astrophys. J.* **438**, 763 (1995).
- [25] S. Galtier, S. V. Nazarenko, A. C. Newell, and A. Pouquet, A weak turbulence theory for incompressible magnetohydrodynamics, *J. Plasma Phys.* **63**, 447 (2000).
- [26] S. Galtier, A. Pouquet, and A. Mangeney, On spectral scaling laws for incompressible anisotropic magnetohydrodynamic turbulence, *Phys. Plasmas* **12**, 092310 (2005).
- [27] S. Boldyrev, Spectrum of Magnetohydrodynamic Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 115002 (2006).
- [28] P. D. Mininni and A. Pouquet, Energy Spectra Stemming from Interactions of Alfvén Waves and Turbulent Eddies, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 254502 (2007).
- [29] E. Lee, M. E. Brachet, A. Pouquet, P. D. Mininni, and D. Rosenberg, Lack of universality in decaying magnetohydrodynamic turbulence, *Phys. Rev. E* **81**, 016318 (2010).

- [30] A. Beresnyak, Spectra of strong magnetohydrodynamic turbulence from high-resolution simulations, *Astrophys. J. Lett.* **784**, L20 (2014).
- [31] E. Priest, *Magnetohydrodynamics of the Sun* (Cambridge University Press, Cambridge, 2014).
- [32] W. H. Matthaeus and M. L. Goldstein, Measurement of the rugged invariants of magnetohydrodynamic turbulence in the solar wind, *J. Geophys. Res.* **87**, 6011 (1982).
- [33] W.-C. Müller, S. K. Malapaka, and A. Busse, Inverse cascade of magnetic helicity in magnetohydrodynamic turbulence, *Phys. Rev. E* **85**, 015302(R) (2012).
- [34] M. Linkmann and V. Dallas, Large-scale dynamics of magnetic helicity, *Phys. Rev. E* **94**, 053209 (2016).
- [35] A. Brandenburg, The inverse cascade and nonlinear alpha-effect in simulations of isotropic helical hydromagnetic turbulence, *Astrophys. J.* **550**, 824 (2001).
- [36] M. Linkmann and V. Dallas, Triad interactions and the bidirectional turbulent cascade of magnetic helicity, *Phys. Rev. Fluids* **2**, 054605 (2017).
- [37] J. V. Shebalin, Ideal homogeneous magnetohydrodynamic turbulence in the presence of rotation and a mean magnetic field, *J. Plasma Phys.* **72**, 507 (2006).
- [38] S. Galtier, Weak turbulence theory for rotating magnetohydrodynamics and planetary flows, *J. Fluid Mech.* **757**, 114 (2014).
- [39] N. Bell and S. Nazarenko, Rotating magnetohydrodynamic turbulence, [arXiv:1902.07524](https://arxiv.org/abs/1902.07524).
- [40] M. Reshetnyak and P. Hejda, Direct and inverse cascades in the geodynamo, *Nonlinear Proc. Geophys.* **15**, 873 (2008).
- [41] L. Petitdemange, Systematic parameter study of dynamo bifurcations in geodynamo simulations, *Phys. Earth Planet. Inter.* **277**, 113 (2018).
- [42] B. Favier, F. Godeferd, and C. Cambon, On the effect of rotation on magnetohydrodynamic turbulence at high magnetic Reynolds number, *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **106**, 89 (2012).
- [43] K. Seshasayanan, V. Dallas, and A. Alexakis, The onset of turbulent rotating dynamos at the low magnetic Prandtl number limit, *J. Fluid Mech.* **822**, R3 (2017).
- [44] C. Finlay, Waves in the presence of magnetic fields, rotation and convection, in *Dynamos*, Les Houches 2007, Vol. 88, edited by P. Cardin and E. s. p. L. F. Cugliandolo (Elsevier, 2008), pp. 403–450.
- [45] R. Meyrand and S. Galtier, Spontaneous Chiral Symmetry Breaking of Hall Magnetohydrodynamic Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 194501 (2012).
- [46] R. Meyrand, S. Galtier, and K. H. Kiyani, Direct Evidence of the Transition from Weak to Strong Magnetohydrodynamic Turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 105002 (2016).
- [47] B. Teaca, C. Lalescu, B. Knaepen, and D. Carati, Controlling the level of the ideal invariant fluxes for MHD turbulence using TURBO spectral solver, [arXiv:1108.2640](https://arxiv.org/abs/1108.2640).
- [48] T. Le Reun, B. Favier, A. J. Barker, and M. Le Bars, Inertial Wave Turbulence Driven by Elliptical Instability, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 034502 (2017).
- [49] G. Dar, M. K. Verma, and V. Eswaran, Energy transfer in two-dimensional magnetohydrodynamic turbulence: Formalism and numerical results, *Physica D: Nonlin. Phenom.* **157**, 207 (2001).
- [50] M. K. Verma, Statistical theory of magnetohydrodynamic turbulence: Recent results, *Phys. Rep.* **401**, 229 (2004).
- [51] K. Seshasayanan and A. Alexakis, Critical behavior in the inverse to forward energy transition in two-dimensional magnetohydrodynamic flow, *Phys. Rev. E* **93**, 013104 (2016).
- [52] R. Kumar and M. K. Verma, Amplification of large-scale magnetic field in nonhelical magnetohydrodynamics, *Phys. Plasmas* **24**, 092301 (2017).
- [53] R. Meyrand, K. H. Kiyani, O. D. Gürcan, and S. Galtier, Coexistence of Weak and Strong Wave Turbulence in Incompressible Hall Magnetohydrodynamics, *Phys. Rev. X* **8**, 031066 (2018).
- [54] A. Salhi, F. S. Baklouti, F. Godeferd, T. Lehner, and C. Cambon, Energy partition, scale by scale, in magnetic Archimedes Coriolis weak wave turbulence, *Phys. Rev. E* **95**, 023112 (2017).
- [55] M. K. Sharma, A. Kumar, M. K. Verma, and S. Chakraborty, Statistical features of rapidly rotating decaying turbulence: Enstrophy and energy spectra and coherent structures, *Phys. Fluids* **30**, 045103 (2018).
- [56] S. Sundar, M. K. Verma, A. Alexakis, and A. G. Chatterjee, Dynamic anisotropy in MHD turbulence induced by mean magnetic field, *Phys. Plasmas* **24**, 022304 (2017).

A.2 Magnetic effects in geodynamo simulations

Un article est en cours de préparation sur le travail effectué dans le chapitre 3. Une version non définitive est incluse ci-dessous.

Magnetic effects in geodynamo simulations

Mélissa D. Menu^{a,b}, Ludovic Petitdemange^b, Sébastien Galtier^c

^a*Laboratoire de Physique des Plasmas, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, École polytechnique, CNRS, Sorbonne Université, Observatoire de Paris, F-91128 Palaiseau Cedex, France*

5 ^b*LERMA, CNRS, Observatoire de Paris, PSL Research University, Sorbonne Université, F-75005 Paris, France*

^c*Laboratoire de Physique des Plasmas, Univ. Paris-Sud, Université Paris-Saclay, Institut Universitaire de France, École polytechnique, CNRS, Sorbonne Université, Observatoire de Paris, F-91128 Palaiseau Cedex, France*

Abstract

The dynamo effect is the most popular candidate to explain the non primordial magnetic fields of astrophysical objects. Although many systematic studies of parameters have already been made to determine the different dynamical regimes explored by direct numerical geodynamo simulations, it is only recently that the regime corresponding to the outer core of the Earth characterized by a balance of forces between the Coriolis and Lorentz forces is accessible numerically. In most previous studies, the Lorentz force played a relatively minor role. For example, they have shown that a purely hydrodynamic parameter (the local Rossby number Ro_ℓ) determines the stability domain of dynamos dominated by the axial dipole (dipolar dynamos). In this study, we show that this result cannot hold when the Lorentz force becomes dominant. We model turbulent geodynamo simulations with a strong Lorentz force by varying the important parameters on several orders of magnitude. This method enables us to question previous results and to argue on the applications of numerical dynamos in order to better understand the geodynamo problem. Strong dipolar fields considerably affect the kinetic energy distribution of convective motions which enables the maintenance of this field configuration. The relative importance of each force depends on the spatial length scale, whereas Ro_ℓ is a global output parameter which ignores the spatial dependency. We show that inertia does not induce a dipole collapse as long as the Lorentz and the Coriolis forces remain dominant at large length scales.

Keywords: Dynamo, Magnetohydrodynamics, Planetary interiors

1. Introduction

The mechanism behind planetary magnetic fields, maintained over millions of years despite ohmic dissipation, is one of the most famous scientific problems. The favorite candidate, the dynamo effect, explains how a magnetic field can be generated by electromotive forces driven by electrically conductive fluid movements in celestial bodies[18, 12]. Dynamo action is an instability by which a conducting fluid transfers part of its kinetic energy to magnetic energy. Planetary magnetic fields result from such processes thought to be driven by convection in electrically conducting fluid regions. For example, turbulent convective motions in the Earth's outer core are mainly subject to two forces: the Coriolis force resulting from global planetary rotation and the Lorentz force which accounts for the back-reaction of magnetic field on the flow from which it is generated. In order to improve our understanding about the Earth's magnetic field, it is of interest to numerically model

*melissa.menu@lpp.polytechnique.fr

turbulent convection in a spherical shell in which the main force balance consists of the Magnetic force, the Buoyancy (Archimede) force and the Coriolis force (the so-called MAC-balance).

Earth-like fields do not only consist of a simple axial dipole field which is maintained over time. Paleomagnetic measurements have allowed us to reconstruct the dynamics of the magnetic field and revealed that the Earth’s dipolar field has reversed its polarity several hundred times during the past 160 million years. These polarity reversals are known to be strongly irregular and chaotic, and such events were observed numerically by Glatzmaier & Roberts [13] for the first time. Since this first fully three-dimensional numerical model [e.g. 13], there have been significant advances in understanding the geodynamo. Many features of the Earth’s magnetic field have been reproduced numerically [5, 6, 4, 35, 7]. However the realistic physical properties of the Earth’s outer core (fast rotation, low dissipation coefficients. . .) differ by several orders of magnitude from the values accessible in direct numerical simulations (DNS). For instance, the Ekman number, ratio of the viscous and Coriolis forces, is approximately $E = 10^{-15}$ in the Earth’s outer core whereas $E \geq 10^{-7}$ can be considered in numerical models (see below for a complete definition of this dimensionless number). Progress in both numerical methods and parallel machine architecture has made it possible to explore an extensive parameter space in order to deduce the physical ingredients responsible for the dominance of the axial dipole field [8, 16, 28, 31, 23]. Olson & Christensen [20] have also inferred some of the physical causes associated with field reversals in planetary interiors from numerical studies. Numerical simulations suggest that reversals may arise from the importance of inertia relative to the Coriolis force in Earth’s outer core.

Observations and numerical simulations indicate that rapid global rotation and thus the ordering influence of the Coriolis force is of major importance for the generation of coherent magnetic fields [34, 14, 3]. Kutzner & Christensen [17] demonstrated the existence of a dipolar and a multipolar dynamo regime, and Christensen & Aubert [8] showed that the transition between these two regimes is governed by a local Rossby number (Ro_ℓ), i.e. the influence of inertia relative to the Coriolis force. Similar results were reported by Sreenivasan & Jones [33], as well. Dipolar models were found for small local Rossby numbers; separated by a fairly sharp regime boundary from multipolar models, where inertia is more important. The models transition from a dipolar morphology to a multipolar state when the local Rossby number reaches a certain value ($Ro_\ell > 0.1$). However, such transitions have been reported by previous systematic parameter studies such as Christensen & Aubert [8] for models that explore a regime in which the Lorentz force does not play a major role (see for instance King & Buffett [15]). Oruba & Dormy [22] have also confirmed the validity of the criteria $Ro_\ell < 0.1$ for dipolar dynamos, but only the data set published by Christensen & Aubert [8] has been used. Here, we study the stability domain of dipolar dynamos in a unexplored regime in which the Lorentz force is dominant.

In DNS, MAC-balance has been obtained either by considering high values of the magnetic Prandtl number Pm [9, 11, 23] or by lowering the Ekman number [26, 30, 29]. In the former case, turbulence plays a minor role as the Reynolds number is low. By comparison, in the latter situation, high Reynolds numbers are considered and the numerical cost of such models increases significantly. Here, we link these two approaches by increasing the influence of inertia (via the buoyant forcing Ra) in models with high magnetic Prandtl number Pm . This method enables us to study the influence of the Lorentz force on the local Rossby number criteria. Consequently, we study the stability domain of dipolar dynamo simulations in a regime where the Lorentz force is not negligible.

After a brief presentation of the model and control parameters used in this study, the validity

of the local Rossby number criteria is tested for these models (see §3.1). Alternative ways to characterise a dipolar model are presented, and used to distinguish two branches of dipolar solutions (§3.3). An explanation of the different behaviours observed for each branch is then proposed (§3.4). Finally these results are compared with observations and previous studies (§4).

2. Model and input/output parameters

We follow previous extensive parameter studies [8, 20, 28, 24] and use the Boussinesq approximation. The fluid freely evolves between an inner and outer spherical shell, respectively at radius r_i and r_o , with no-slip boundary conditions. The aspect ratio is defined as $\chi = r_i/r_o$ and is fixed to 0.35. The evolution is constrained by the classical incompressible magneto-hydrodynamic (MHD) equations with rotation (momentum and induction), and an additional equation constraining the temperature evolution. A temperature contrast ΔT is imposed between the inner and outer shells to generate convection and the magnetic field matches a potential field outside the fluid shell (insulating boundaries).

Length is expressed in boundary shell gap units $D = r_o - r_i$, time in units of D^2/ν , magnetic field $\mathbf{B}$ in units of $(\rho\mu\eta\Omega)^{1/2}$, pressure in units of $\rho\nu\Omega$ and temperature in units of ΔT , where ρ is the density, Ω the rotation rate, ν , μ , η and κ are the kinematic viscosity, magnetic permeability, magnetic diffusivity and thermal diffusivity respectively. These units are used to obtain the dimensionless equations :

$$E\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \nabla^2 \mathbf{u}\right) = -\nabla P - 2\mathbf{z} \times \mathbf{u} + Ra \frac{\mathbf{r}}{r_o} T + \frac{1}{Pm} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{Pm} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4)$$

The nondimensionalization of these equations reveals commonly used dimensionless numbers: the Ekman number $E = \nu/\Omega D^2$ which represents the ratio of viscous to Coriolis forces, the Rayleigh number $Ra = \alpha g_o \Delta T D^3 / \nu \kappa$ which can be seen as the ratio of buoyancy to viscous force, the magnetic Prandtl number $Pm = \nu/\eta$, and the classical Prandtl number $Pr = \nu/\kappa$ which is fixed to 1 in our study.

To solve equations (1) to (4) in spherical coordinates, we use the 3D pseudo-spectral code PaRoDy with the dimensionless quantities defined above as control parameters (see Dormy et al. [10] for more details). All the simulations performed have been started with an initial dipolar magnetic field. To reach high Rayleigh number values, some simulations have been initialised from the solution of a previous simulation with similar parameter values.

The main global output quantities we will use in this article are the Elsasser number, the Rossby number, and the magnetic Reynolds number. The Elsasser number $\Lambda = B_{rms}^2 / 2\Omega\rho\mu\eta$ gives information about the importance of the Lorentz force compared to the Coriolis force. The Rossby number $Ro = u_{rms}/\Omega D$ compares inertia to Coriolis force and the magnetic Reynolds number $Rm = u_{rms}D/\eta$ measures the ratio of the advection to the diffusive term in the induction equation

(2). B_{rms} and u_{rms} stand for the root mean square magnetic field and velocity respectively. Moreover we have chosen to use the Rayleigh number normalised by its critical value Ra_c for convection, whose values has been taken from Christensen & Aubert [8], for ease of reading.

We also compute the local Rossby number Ro_ℓ as introduced by Christensen & Aubert [8] to have a better measurement of the balance between inertia and Coriolis force, taking into account a length scale deduced from the mean spherical harmonic degree of the flow $\bar{\ell}_u$ instead of the shell gap D :

$$Ro_\ell = \frac{Ro}{L_u} \quad \text{with} \quad L_u = \frac{\pi}{\bar{\ell}_u}, \quad \text{where} \quad \bar{\ell}_u = \frac{\sum_\ell \ell \langle \mathbf{u}_\ell \cdot \mathbf{u}_\ell \rangle}{2E_{kin}}, \quad (5)$$

with ℓ the spherical harmonic degree, $E_{kin} = \frac{1}{2} \int \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \rangle dV$ and the brackets $\langle \cdot \rangle$ denotes an average over time, radial and azimuthal directions. The brackets $\langle \cdot \rangle_i$ will be used to denote an average over the quantity i .

Another characteristic length scale, the kinetic dissipation length scale L_ν , can be defined as:

$$L_\nu^2 = \langle \frac{\int \mathbf{u}^2 dV}{\int (\nabla \times \mathbf{u})^2 dV} \rangle_t. \quad (6)$$

This typical length for dissipation enables us to define another local Rossby number $Ro_{L_\nu} = Ro/L_\nu$.

Similarly, a dissipation length scale for the magnetic field exists $L_\eta^2 = \langle \frac{\int \mathbf{B}^2 dV}{\int (\nabla \times \mathbf{B})^2 dV} \rangle_t$. Dormy [9] derived a modified Elsasser number Λ' that is more suitable to measure the relative importance of the Lorentz force compared to the Coriolis force. Indeed, it also takes into account the magnetic dissipation length scale and the magnetic Reynolds number :

$$\Lambda' = \frac{\Lambda D}{Rm L_\eta}. \quad (7)$$

In order to distinguish dynamos with a dominant dipolar component from the others, Christensen & Aubert [8] have calculated the relative dipole field strength f_{dip} , which is the ratio of the mean magnetic dipole component to the others, at the outer shell:

$$f_{dip} = \langle \frac{(B_{l=1} \cdot B_{l=1})^{1/2}}{\sum_{l=1}^{12} (B_l \cdot B_l)^{1/2}} \rangle_{\phi, t}. \quad (8)$$

Only the twelve first modes are considered in order to compare simulations with geomagnetic observations. Smaller length scales cannot be observed. A transition from a dipolar state ($f_{dip} \gtrsim 0.5$) to a non-dipolar one occurs around a value of the local Rossby number $Ro_\ell \sim 0.1$. This empirical result, called the local Rossby number criteria, seems quite robust as it is valid for multiple values of E , Pm and Pr , each of these parameters being varied over at least two orders of magnitude. This feature is interpreted as a boundary between two regimes : dipolar dynamos and multipolar dynamos.

Volume-averaged output parameters enable us to compare models with different input parameters. However, physical interactions and, in particular, force balance can depend on the length scale in turbulent systems. We calculate the different forces as function of the spherical harmonic degree ℓ . To avoid the pressure gradient influence (or the geostrophic balance), we take the azimuthal average of the ϕ component of each force F_i as has been done by Sheyko et al. [30]. For sake

of clarity, we ignored the numerical shells close to the spherical boundaries where viscous effects dominate, took the absolute value and time averaged, leading to $\langle |F_i(\ell)| \rangle$ with

$$F_i(\ell) = \sum_{r > r_i + 0.15D}^{r < r_o - 0.15D} \langle F_i^\phi(l) \rangle_{\phi, t} . \quad (9)$$

Typical resolutions are 288 points in the radial direction (up to 384 points). The spectral decomposition is truncated at a hundred modes (up to $l_{max} = m_{max} = 256$), in order to observe a drop by a factor 100 or more for the kinetic and the magnetic energy spectra of the spherical harmonic degree l and order m from the maximum to the energy cut-off l_{max} and m_{max} . The simulations performed are summarised in Appendix B.

3. Results

3.1. Turbulent dynamos with high Rm and a new definition for dipolar dynamos

At first, it is important to notice different characteristic behaviours observed on the time evolution of output parameters when turbulent dynamos (high buoyant forcing) with Ro_ℓ close to the transitional value 0.12 and high Rm (or Pm). As a result, a need for a more restricted definition of a dipolar dynamo appears. By using this new definition, we will be able to study the stability domain of dipolar dynamos in the next sections.

Considering geodynamo simulations with realistic parameters is still far from being a reality. Except for the magnetic Reynolds number ($Rm \sim 1000$), the other parameters differ from realistic ones by several orders of magnitude. Such a value of Rm was considered by recent studies which employed different strategies. Dormy [9], Petitdemange [23] and Dormy *et al.* [11] have shown that the Lorentz force plays a major role when Rm is sufficiently high. However, these studies reach high values of $Rm = Pm Re$ by considering sufficiently high values of Pm and low values of the Reynolds number $Re = u_{rms} D / \nu$, meaning that their models cannot be really classified as turbulent models. For instance, Dormy [9] considered simulations close to the onset of convection ($Ra < 4Ra_c$). Yadav *et al.* [36], Schaeffer *et al.* [26] and Aubert *et al.* [1] have also obtained a dominant Lorentz force by considering turbulent models with low Pm and low Ekman numbers. In our study, we complete this parameter space and we link the different previous studies by considering turbulent models (high values of Ra/Ra_c) with high Pm . To this end, the Rayleigh number has been gradually increased with a fixed Pm value in order to reach this turbulent regime.

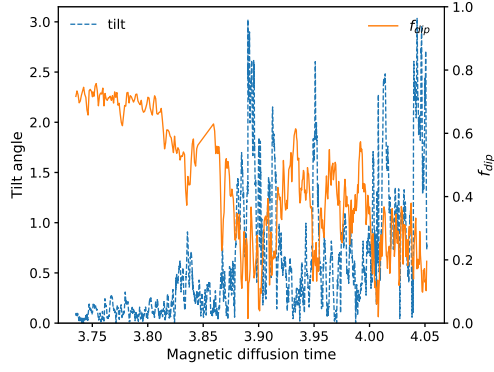
The tilt angle θ , which measures the direction of the magnetic dipole compared to the rotation axis, and the relative dipole field strength f_{dip} as a function of time are shown for different cases (see figure 1) with Ro_ℓ higher than 0.12. Figures 1(a) and 1(b) correspond to simulations with the same Ekman number. The buoyant forcing Ra/Ra_c and the magnetic Prandtl number Pm are slightly higher for figure 1(b). On the one hand, large temporal fluctuations of θ and f_{dip} are observed for the model with $Pm = 3$ (figure 1(a)). The axial dipole is not a dominant component at the surface of the numerical domain (low f_{dip} value) and several reversals of this component are obtained (θ oscillations). On the other hand, figure 1(b) with $Pm = 5$ does not present such a behaviour: although a higher Ra/Ra_c has been employed, the axial dipole dominates at any time with a constant magnetic polarity (no reversal). The latter model can thus be classified as a dipolar dynamo. However, it is important to note that Ro_ℓ exceeds 0.12.

Figures 1(c) and 1(d) show the evolution of, respectively, f_{dip} , θ and Λ , Ro as functions of time for a model with different parameters: $E = 3.10^{-4}$ and $Pm = 6$. After a long period of time (larger than one magnetic diffusion time), the dipole collapses and f_{dip} becomes lower than 0.2. At the same time, the polarity of the magnetic dipole measured by θ fluctuates around $\pi/2$ which indicates that the dominant component of the magnetic dipole is its equatorial dipole component. This situation is only a transient configuration. Then, the axial dipole with an opposite polarity again dominates the other components. This reversal seems to appear between two long periods in which the axial dipole is dominant. It is important to note that large temporal fluctuations of the magnetic energy as measured by Λ are observed for this model. In comparison, relatively constant values of Λ are obtained for figures 1(a) and 1(b) (not shown). The condition $f_{dip} > 0.5$, mentioned by previous studies [8], does not appear as a sufficient condition in order to identify dipolar models since it indicates that this dynamo model with unpredictable reversals and important temporal variations of the magnetic field strength is a dipolar solution. This particular behaviour has been reported before for dynamos with Ro_ℓ close to the transitional value 0.12. Other proxies such as the time evolution of the tilt angle must be taken into account.

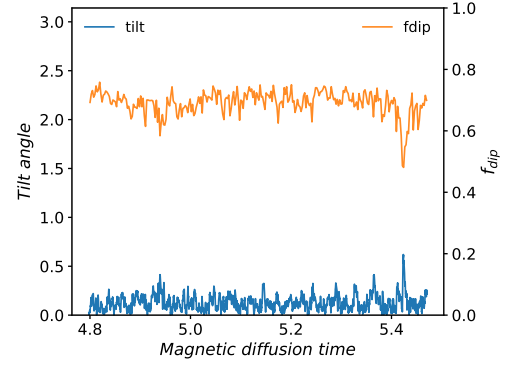
As mentioned, the magnetic energy as measured by the Elsasser number Λ is another useful piece of information. When a transition from a dipolar configuration to a multipolar one occurs, a decrease of Λ is observed in most of the cases. In order to highlight the evolution of Λ in the parameter space, figure 2 shows the evolution of Λ as a function of Ra/Ra_c for different Pm and E . Since we are interested in the relative variations of Λ when a transition occurs, Λ is normalised by its maximum value $\Lambda_{max} = \max(\Lambda(Pm))$. Figure 2 clearly shows that the dipole slump giving rise to multipolar dynamos (square symbols) is accompanied by a decrease of Λ . This effect (loss of magnetic energy) increases as Pm decreases. For example, multipolar dynamos at low Pm values have Λ/Λ_{max} lower than 0.25 i.e. the dipole collapse has induced a loss of 75% of the magnetic energy (see yellow markers in figures 2(b) & 2(c)). Increasing Pm reduces the difference in Λ value between dipolar cases and multipolar cases. Indeed, for the highest Pm at which a transition is observed (green markers in figure 2), it only represents a drop of about 50% or less. Some symbols marked by a dot will be discussed later in this paper.

Figure 2 shows time averaged quantities. However, such quantities can have large temporal fluctuations as shown in figure 1, especially when high Pm are considered. For example, the case represented in figure 1(c) has a particular behaviour: f_{dip} temporarily drops below 0.2 around the period $t \sim 12.7$ while the tilt angle fluctuates around $\pi/2$ at the same time. Later f_{dip} increases again to reach its original value (see above). This reversal of the magnetic field axis attests that this case is not purely dipolar. Looking at the evolution of Λ (figure 1(d)) confirms that the magnetic field strength has been affected by this behaviour. This is another indication supporting the fact that some care must be taken in order to characterise the morphology of geodynamo models. In particular, the time evolution of f_{dip} , θ and Λ appear as important proxies.

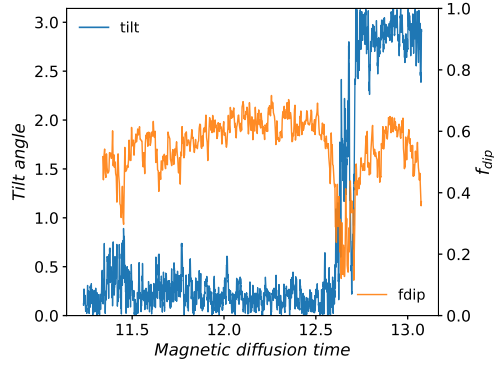
In order to avoid a deep analysis of our numerical results which explore a new parameter set, it seems crucial to have a proper definition of dipolar dynamos. Motivated by modelling geomagnetic fields, this term is restricted to dynamos with a dominant dipolar component ($f_{dip} > 0.5$) at any moment of the time integration. The polarity of the dipole measured by the tilt angle θ has to keep its orientation as well. As mentioned above, the magnetic field strength measured by Λ is also a good proxy. A dynamo model is called a dipolar dynamo when no important fluctuations of Λ are observed during the time integration. This modified definition of dipolar dynamos allows



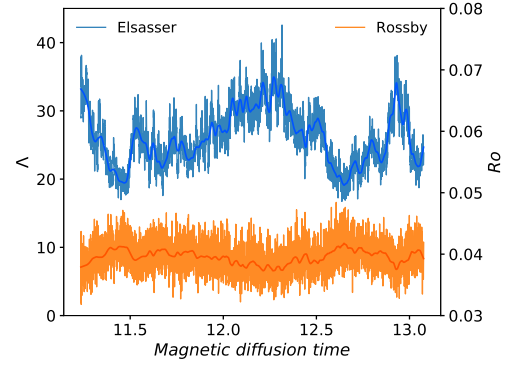
(a) Multipolar dynamo at $E = 10^{-4}$, $Ra/Ra_c = 43.1$, $Pm = 3$, $\Lambda = 12.6$, $Ro_\ell \sim 0.18$, $f_{dip} \sim 0.25$.



(b) Dipolar dynamo at $E = 10^{-4}$, $Ra/Ra_c = 50.2$, $Pm = 5$, $\Lambda = 45.9$, $Ro_\ell \sim 0.18$, $f_{dip} \sim 0.7$.

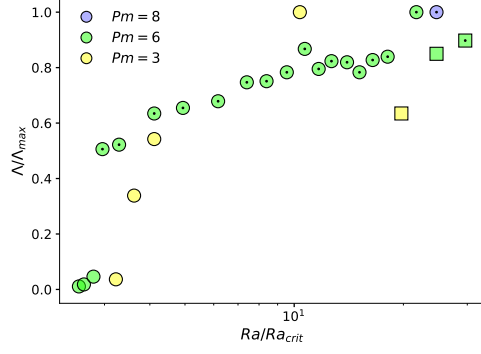


(c) Multipolar dynamo at $E = 3 \times 10^{-4}$, $Ra/Ra_c = 24.7$, $Pm = 6$, $\Lambda = 21.2$, $Ro_\ell \sim 0.17$, $f_{dip} \sim 0.56$.

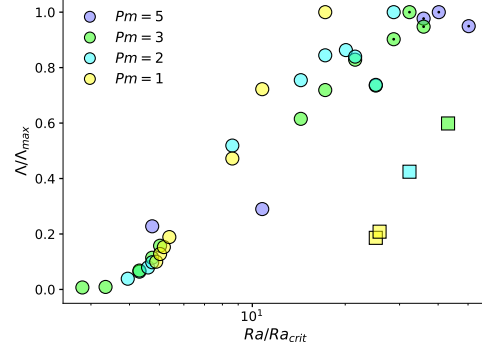


(d) Elsasser (Λ) and Rossby (Ro) number time evolution for the same parameters as figure 1(c).

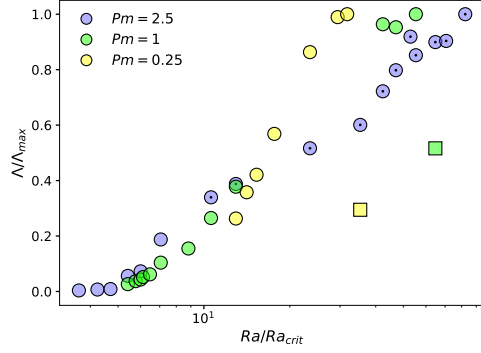
Figure 1: Panels 1(a), 1(b) & 1(c) : Tilt angle (blue) and f_{dip} (orange) evolution through magnetic diffusion time. Panel 1(a) at low Pm value denotes a multipolar simulation, whereas panel 1(b) denotes a dipolar dynamo with a low mean value of f_{dip} . Panel 1(d) : Λ (blue) and Ro (orange) evolution through magnetic diffusion time. This case is very close to a dipolar state, but sometimes explores another configuration.



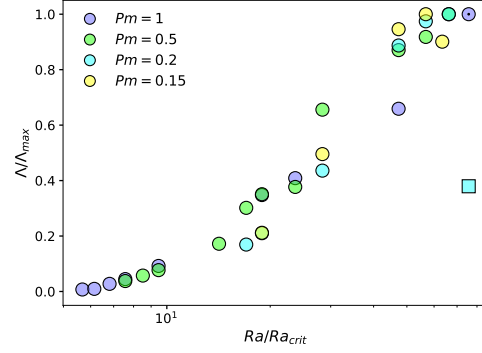
(a) $E = 3 \times 10^{-4}$.



(b) $E = 1 \times 10^{-4}$.



(c) $E = 3 \times 10^{-5}$.



(d) $E = 1 \times 10^{-5}$.

Figure 2: Λ variations with Ra/Ra_c normalised by the maximum value of each Pm branch (colours) for four Ekman values. Circles indicate dipolar dynamos and squares multipolar dynamos. For the same value of Pm , we can observe a sharp decreasing of the Elsasser number for the highest values of Ra , i.e. when the transition to a multipolar state occurs. For a low value of Pm (in yellow - respectively $Pm = 1$ for 2(b) and $Pm = 0.25$ for 2(c)), there is a decline of approximately 75% whereas it is only about 50% for the highest Pm branch (in green). The dot inside some markers distinguishes Lorentz-dominated dynamos (see §3.3).

to clearly identify dynamos dominated by their dipolar component in the parameter space. The previous definition introduced by Christensen & Aubert [8] only based on the time averaged of f_{dip} does not appear as sufficient with our new parameter space and could provide questionable results. For instance, a time averaged of f_{dip} could be higher than 0.5 for a dynamo model with several reversals of its dipole, as the solution presented on figure 1(c). Such models are frequently observed close to the transitional value $Ro_\ell = 0.12$. Here, according to our procedure, such models are not classified as dipolar dynamos.

3.2. The failure of the purely hydrodynamic criterion ($Ro_\ell < 0.12$) for dipolar dynamos

The dipole field strength f_{dip} as a function of Ro_ℓ is shown in figure 3 for our data set. Previous studies have drawn similar figures in order to highlight the critical role of the local Rossby number on the magnetic morphology. We report in figure 3 dipolar dynamos with Ro_ℓ higher than the critical value 0.12 marked by a vertical dotted line. If we limit our data set to lower Pm as considered by previous studies, we also find the same $Ro_\ell < 0.12$ criteria for dipolar dynamos. In other words, the Pm value impacts on the behaviour of the dynamo and in particular on the limit before a transition. Let us discuss our choice for the different symbols corresponding to the magnetic morphology (circles or squares). Dipolar dynamos (circles) have a stable dominant dipolar component ($f_{dip} > 0.5$) with no large temporal fluctuations of f_{dip} , θ and Λ . Otherwise, models are classified as multipolar dynamos (squares).

Despite this more restrictive definition for dipolar dynamos, we report for the first time dipole-dominated solutions with Ro_ℓ significantly higher than 0.12. Figure 3 shows that dipolar dynamos can be maintained above $Ro_\ell > 0.12$ only when Pm is sufficiently high. Otherwise, regardless of the value of the Ekman number, multipolar dynamos (squares) are obtained (see Christensen & Aubert [8]). Here, we question this finding by considering higher Pm which allows the existence of dipolar dynamos in the turbulent regime (i.e. up to $Ro_\ell \sim 0.19$).

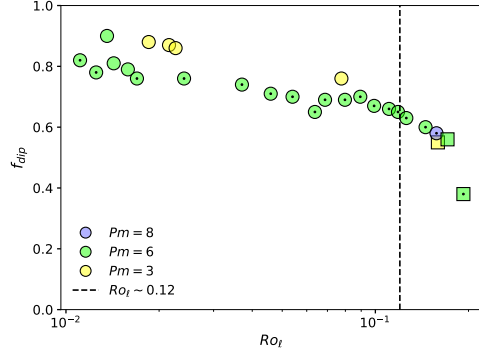
It is particularly clear with $E = 3 \times 10^{-5}$ (see figure 3(c)) that dipolar and multipolar dynamos coexist, when Ro_ℓ exceeds 0.1. In this case, the magnetic morphology depends on the value of Pm : a collapse of the axial dipole component is obtained when Ro_ℓ exceeds 0.1 with $Pm = 1$ whereas this component is still dominant with $Pm = 2.5$ and higher Ro_ℓ .

Since decreasing the Ekman number is numerically demanding, we limit our systematic parameter study to $E \geq 10^{-5}$. At $E = 10^{-5}$, numerical constraints only enable us to reach sufficiently high values of the Rayleigh number ($Ra > 70 Ra_c$) to obtain a dipole collapse (a transition from a dipolar to a multipolar morphology) for $Pm = 0.2$ (see figure 3(d)). Although we do not show dipolar models with $Ro_\ell > 0.12$ at $E = 10^{-5}$, we report for the first time a dipole collapse at $E < 3 \times 10^{-5}$.

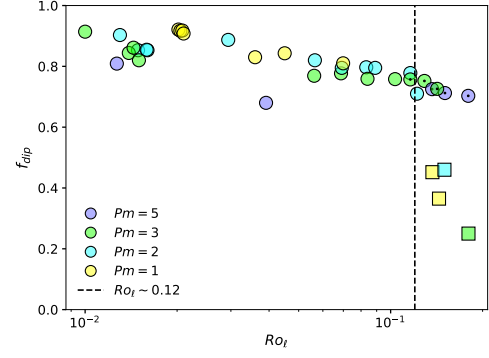
3.3. Lorentz-dominated dynamos in the parameter space

In figure 4, the left-handed panel represents the classical (Ro_ℓ, f_{dip}) -plane, as in Christensen & Aubert [8] (see equation (5)). For several cases, the critical value proposed by these authors is not appropriate (see §3.1 for more details). In the middle sketch, the local Rossby number has been calculated from the kinetic dissipation length scale as defined in equation (6). However, this Ro_ℓ definition does not allow a better distinction between multipolar and dipolar dynamos.

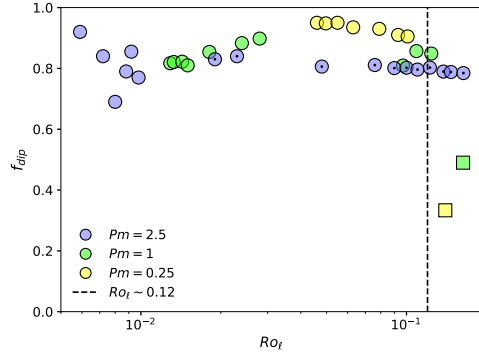
Finally, in the right-handed sketch we use a quantity introduced by Soderlund et al. [31] k_u , the characteristic wavenumber of the flow. It has been used to deduce a length scale taking into account both the spherical harmonic degree ℓ and order m : $L_k = \pi/k_u$ with $k_u = \sqrt{\ell_u^2 + \bar{m}_u^2}$. $\bar{m}_u$



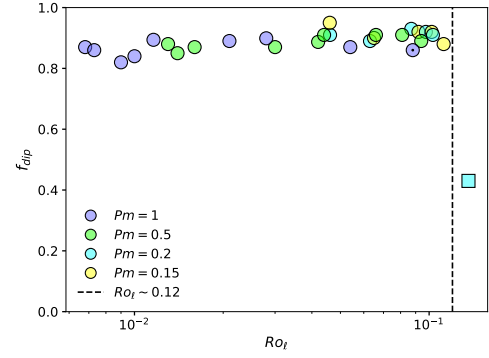
(a) $E = 3 \times 10^{-4}$.



(b) $E = 10^{-4}$.



(c) $E = 3 \times 10^{-5}$.



(d) $E = 10^{-5}$.

Figure 3: Relative dipole field strength f_{dip} as a function of the local Rossby number Ro_ℓ for four values of the Ekman number. As before, the colours on each graph distinguish the magnetic Prandtl number, whereas the marker distinguishes the magnetic field topology : dipolar (circles) or multipolar (squares) dynamos. Previous studies have only obtained dipolar dynamos when Ro_ℓ is lower than 0.12 (vertical dashed lines). Here, we report dipolar dynamos with higher Ro_ℓ .

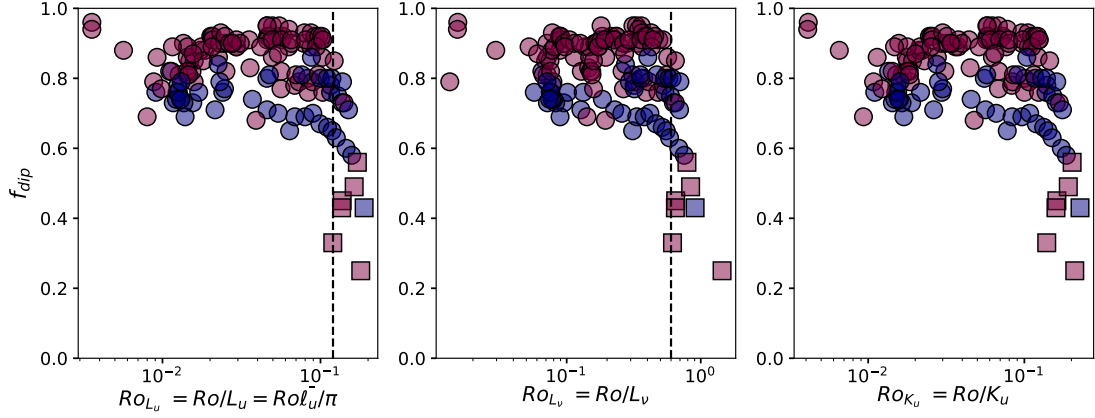


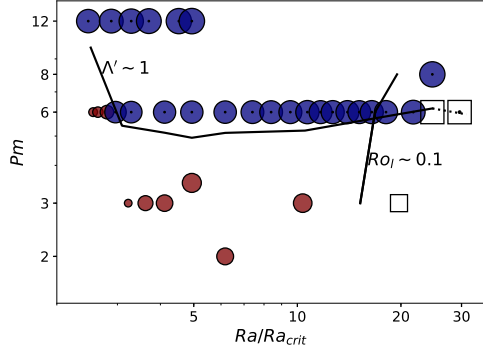
Figure 4: f_{dip} versus Ro_ℓ calculated from the different scales proposed in the literature. Blue denotes Lorentz-dominated dynamos, whereas mauve denotes other cases. None of this scales allow a better distinction between dipolar (circles) and multipolar (squares) regimes for the Lorentz-dominated branch. Indeed, at a certain Ro_ℓ , dipolar and multipolar dynamos coexist.

is the equivalent of $\bar{\ell}_u$ in terms of order instead of degree. Again, it exhibits no correlation between the Ro_ℓ value and the topology of the magnetic field. On the contrary, the behaviour of dynamos at higher Ro value strongly depends on the regime studied (depicted by the colours in figures 4). It can be interpreted as two regimes with different behaviours when Ro_ℓ is sufficiently high (see 3.3).

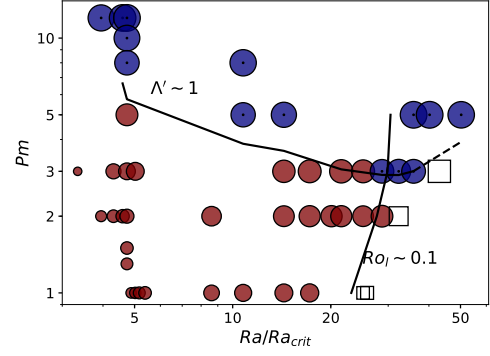
We also tried to define a Ro_ℓ from the l_{upeak} which has been presented by Dormy et al. [11]. However, we have found that the kinetic energy is mainly distributed on one particular length scale in high Pm simulations only when Ra is sufficiently low. Otherwise, the spectra are much flatter and l_{peak} cannot be calculated. Indeed, $\Lambda' > 1$ dynamos have been studied only for Ra values close to the convection threshold by previous studies. In this study, turbulent dipolar dynamos are found at high Ra/Ra_c values, and thus do not present the same features.

Regardless of the definition of the volume averaged velocity field and kinetic length scale used to calculate other local Rossby numbers (see figure 4), the magnetic morphology of turbulent dynamos ($Ro_\ell > 0.12$) depends on the magnetic field regime studied : Lorentz-dominated dynamos (in blue) or the others (in mauve). However, our results are consistent with previous studies at similar values of Ra . Indeed, the empirical value of $Ro_\ell \sim 0.12$ highlighted in Christensen & Aubert [8] corresponds to the limit proposed in §3.4 when the Lorentz force plays a minor role.

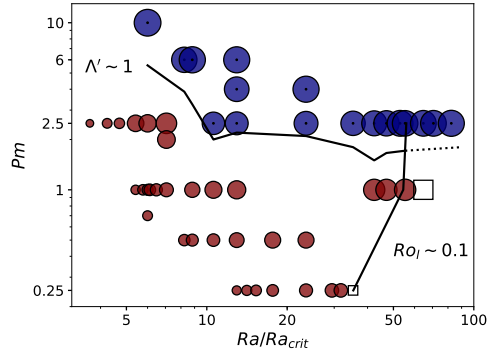
The Lorentz force can play a major role in models with high Pm values. We will use the same modified Elsasser number Λ' as Dormy [9] (see equation (7)) in order to distinguish models strongly influenced by the Lorentz force which have $\Lambda' > 1$. Solutions that meet this criterion are marked with a dot in the figures of §3. For some cases, L_η has not been calculated during the time integration. To complete the missing values, we have used the scaling law $L_\eta \propto Rm^{-1/2}$ introduced by Soderlund et al. [32]. We checked its validity for our set of simulations (see Appendix A) and these additional values appear in the Tables (in Appendix B) with a particular symbol (*).



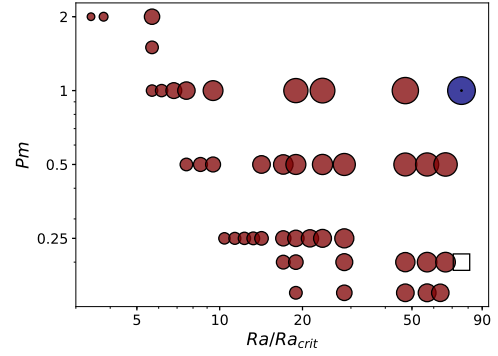
(a) $E = 3 \times 10^{-4}$.



(b) $E = 10^{-4}$.



(c) $E = 3 \times 10^{-5}$.



(d) $E = 10^{-5}$.

Figure 5: Regime diagrams at different values of the Ekman number. Circles are for dipolar dynamos, squares for multipolar dynamos. The colour (mauve or blue) stands for respectively the dipolar dynamos with $\Lambda' > 1$ and $\Lambda' < 1$. The size of the marker is varying with the Elsasser number Λ . When possible, boundaries $\Lambda' \sim 1$ and $Ro_\ell \sim 0.1$ have been represented (black lines).

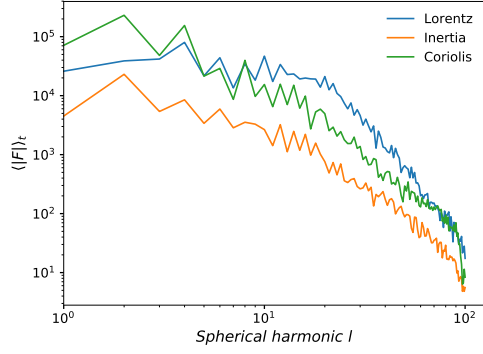
We follow previous studies [8, 23] and show the magnetic field topology in a $(Pm, Ra/Ra_c)$ -plane (see figure 5). Colours have been added to highlight the existence of two dipolar branches. In addition, two curves corresponding to $\Lambda' \sim 1$ and $Ro_\ell \sim 0.1$ have been plotted, from values obtained by linear interpolation. These curves are determined by linearly interpolating Λ' and Ro_ℓ values from our data set. The last part on $\Lambda' \sim 1$ curve has been extrapolated (dashed line). Close to the onset of convection ($Ra < 5Ra_c$), the curve $\Lambda' \sim 1$ is a rapidly decreasing function of Ra . It means that very high values of Pm have to be considered in order to model dipolar dynamos with a dominant Lorentz force ($\Lambda' > 1$). With higher buoyant forcing ($Ra/Ra_c > 10$), the boundary between these two dipolar regimes is almost constant i.e. it is almost horizontal in (Pm, Ra) -planes.

The most striking finding visible in figure 5 is that dipolar dynamos with $Ro_\ell > 0.12$ are exclusively dynamos dominated by the Lorentz force (in blue). Hence, the stability domain of dipolar dynamos extends beyond the former limit $Ro_\ell \sim 0.1$, only if $\Lambda' > 1$. This result seems to be very robust since it is obtained for several Ekman numbers. It is consistent with the behaviour observed for higher Pm in figure 3, where these Lorentz dominated cases are marked by a dot.

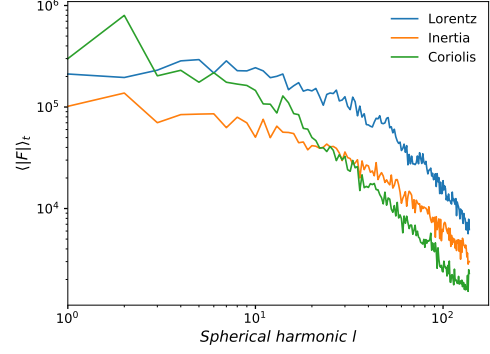
In light of the foregoing, Lorentz-dominated dynamos at $Ro_\ell > 0.12$ have also been studied in terms of force balance (see figure 6). Inertia, Lorentz and Coriolis forces are represented as functions of the spherical harmonic degree ℓ for the two different dipolar regimes. The forces spectra of well-chosen cases at $E = 3 \times 10^{-5}$ allow us to understand the relative importance of the three forces at each scale (see figure 6). The top row (figures 6(a) and 6(b)) represents the force balance for two dipolar solutions not dominated by the Lorentz force on the $Pm = 1$ branch. The Coriolis force (in green) dominates the large scales for both cases despite an important difference in Ra/Ra_c , and thus in Ro_ℓ . Considering the calculation method (equation (9)), it can be interpreted as a quasi-geostrophic balance, i.e. a near balance between the Coriolis force and the pressure gradient.

This needs to be compared to the other dipolar branch, dominated by the Lorentz force (bottom row in figure 6). For this branch, Lorentz and Coriolis forces are almost perfectly balanced at large scales, as expected from the values of Λ' which exceeds 1 for these models. This specific balance is similar to the MAC balance (Magnetic-Archimedian-Coriolis) usually obtained for low viscosity models which are numerically very demanding. A comparison of figure 6(c) and figure 6(d) enables us to understand the effect of increasing Ra . Close to the onset of convection ($Ra/Ra_c = 3.5$, figure 6(c)), inertia has a minor role at any length scale. When Ra/Ra_c becomes sufficiently high, the dominance of the Coriolis force on the inertia term depends on the length scale. At large scale, the effects of global rotation and magnetism are dominant. However for lower length scales, inertia dominates the Coriolis force. It means that in models with high Pm and high Ra/Ra_c , the relative importance of inertia (measured globally by the Rossby number) depends on the characteristic length scale. Such behaviour is also expected for the Earth's outer core [19].

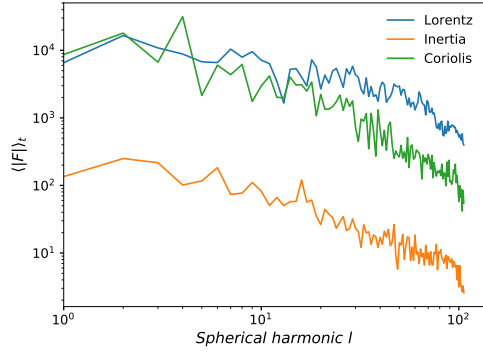
By comparing the top panels ($\Lambda' < 1$) with the bottom one ($\Lambda' > 1$) in figure 6, we note qualitative differences at large scales. If the inertia term seems to play a minor role for the first harmonic degrees l when Λ' exceeds 1, inertia effects are on an equal footing with Lorentz effects when $\Lambda' < 1$. Although inertia and viscous effects cannot be completely ignored, models with $\Lambda' > 1$ seems to explore a quasi-MAC regime. It is even more interesting to note that even if Ro_ℓ exceeds 0.12 the quasi-MAC balance is still effective at large scales when $\Lambda' > 1$ (panel 6(d)). The strong Lorentz force overshadows the effect of inertia enough to prevent a transition to the multipolar state. This particular spectral distribution of force balance seems to provide a consistent explanation for the particular behaviour of the Lorentz-dominated branch at high Ro_ℓ stated in §3.1.



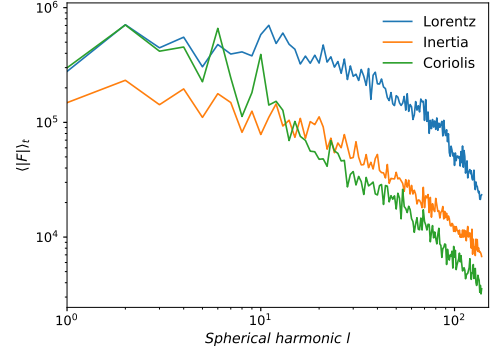
(a) $Ra/Ra_c = 8.8$, $Pm = 1$, $Ro_\ell = 0.02$, $f_{dip} = 0.86$.



(b) $Ra/Ra_c = 55.3$, $Pm = 1$, $Ro_\ell = 0.1225$, $f_{dip} = 0.8$.

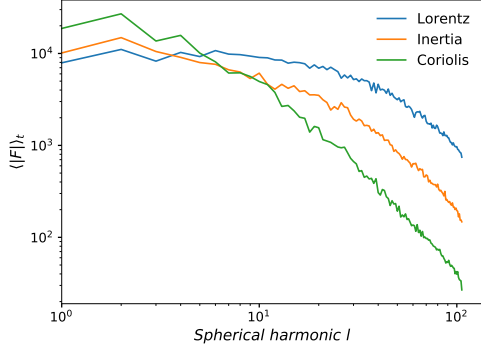


(c) $Ra/Ra_c = 3.5$, $Pm = 10$, $Ro_\ell = 0.005$, $f_{dip} = 0.79$.

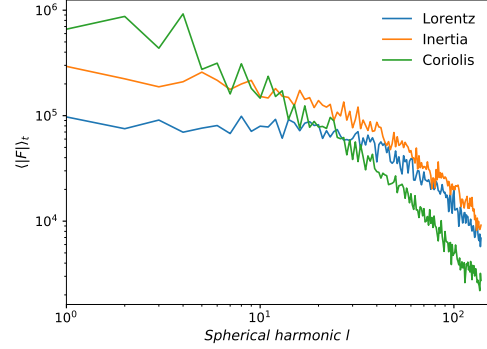


(d) $Ra/Ra_c = 55.3$, $Pm = 2.5$, $Ro_\ell = 0.138$, $f_{dip} = 0.79$.

Figure 6: Force balance as a function of the spherical harmonic degree l for several values of Ra and Pm numbers, and a fixed value $E = 3 \times 10^{-5}$. The three curves distinguish the Lorentz force (blue), inertia (orange) and the Coriolis force (green). On panel 6(d), despite a $Ro_\ell > 0.1$, Lorentz and Coriolis forces balance and dominate the large scales.



(a) $Ra/Ra_c = 29.6$, $Pm = 6$, $Ro_\ell = 0.193$, $f_{dip} = 0.38$.



(b) $Ra/Ra_c = 64.7$, $Pm = 1$, $Ro_\ell = 0.1375$, $f_{dip} = 0.49$.

Figure 7: Force balance for two multipolar cases at $E = 3.10^{-4}$ (figure 7(a)) and $E = 3.10^{-5}$ (figure 7(b)). The behaviour is different at all scales despite a $f_{dip} < 0.5$ for both. In particular, in case 7(a) the Lorentz force is still very important, and dominating small scales.

The parameter space allowing dipolar dynamos has been extended through Lorentz-dominated dynamos and the threshold with the other regime is quite well defined ($\Lambda' \sim 1$, see figure 5). The limits of this dipolar regime at high Ra/Ra_c are studied in §3.4.

3.4. A new criterion for dipolar dynamos taking into account magnetic effects

We report for the first time dipolar solutions with Ro_ℓ higher than 0.12. We have shown that such dynamos exist only if Pm is sufficiently high in order to increase sufficiently the effects of the Lorentz force. The role of this magnetic force seems to be critical for preventing inertia effects responsible for dipole collapse when Ro_ℓ exceeds 0.12 with $\Lambda' < 1$.

Indeed, the behaviour of the Lorentz-dominated branch at $Ro_\ell > 0.12$ is totally different from the usual behaviour. The force balance of two cases with similar parameters except their Pm value highlights the different behaviours of the two dipolar branches. At high Ra/Ra_c value, the $\Lambda' < 1$ branch becomes multipolar as inertia starts to be more important than the Lorentz force at large scales (see figure 7(b)). However, the $\Lambda' > 1$ branch evolves while the Lorentz force maintains the dipolar magnetic field (figure 6(d)). As mentioned before, despite this quasi-MAC balance at large scales, inertia starts to be significant at $Ra/Ra_c > 60$ and $Ro_\ell > 0.16$. These are reasonable grounds to believe that a transition to a multipolar state will occur for higher values of Ro_ℓ .

Increasing Ra/Ra_c for our highest Ekman value leads to Ro_ℓ up to two times the critical value, i.e. 0.2 (see Appendix B). For these values of Ro_ℓ , the transition to the multipolar state occurs. The force balance of this type of dynamo is represented in figure 7(a). Comparing it with the classical multipolar force balance (figure 7(b)) exhibits the importance of Lorentz force at all scales. It is competing with inertia at large scales and dominating medium to small scales, whereas for the non-Lorentz dominated multipolar dynamo the Lorentz force vanishes at large scales and just reaches inertia at smaller scales. This behaviour is consistent with our interpretation of high- Pm and turbulent dynamos as reaching a quasi-MAC balance.

Our results on force balance depending on the length scale suggest that a minor relative importance of inertia at large scales is a necessary condition for dipolar dynamos with $Ro_\ell > 0.12$. In order to better understand this finding, we develop a phenomenological argumentation based on simple force ratios. To get rid of the geostrophic balance i.e. the part of the Coriolis force balanced by the pressure gradient term in the momentum equation, we consider the curl of this equation. The statistical equilibrium between inertia and the Lorentz force can be written as

$$\{\nabla \times ((\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v})\} = \{\nabla \times (\frac{1}{\mu\rho}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})\}, \quad (10)$$

which leads to

$$\frac{v_{rms}^2}{L_{inertia}L_\nu} \sim \frac{B_{rms}^2}{\mu\rho L_B L_\eta}, \quad (11)$$

where $L_{inertia}$ and L_B correspond to the length scales of inertia and the Lorentz force respectively. From our analysis on the force balance depending on length scales, we can argue that inertia affects the stability of dipolar dynamos when this term is on an equal footing with the Lorentz force at large scale. As a result, we can focus on the situation $L_{inertia} \sim L_B$. In this case, we obtain:

$$\frac{L_\eta}{L_\nu} \sim \frac{B_{rms}^2}{\mu\rho v_{rms}^2}. \quad (12)$$

Using the definitions of common dimensionless numbers and equations (7) and (5), this relation can be reduced to :

$$\frac{L_\eta}{L_\nu} \sim \frac{\Lambda}{Ro Rm} \Leftrightarrow \frac{L_\eta}{L_\nu} \sim \frac{\Lambda'}{Ro_{L_\nu}} \frac{L_\eta}{L_\nu}. \quad (13)$$

Finally, we find $\Lambda' \sim Ro_{L_\nu}$. This expression can also be written as $\Lambda' \sim 5 Ro_\ell$ using the scaling (not shown) $L_\nu \sim \ell_u/5$ which gives $5Ro_\ell \sim Ro_{L_\nu}$. Consequently, we have found a simple condition corresponding to a balance between inertia and magnetic effects at large scales in which output dimensionless parameters are involved. Let us test this condition using our data set.

The evolution of a branch at constant Pm in the parameter space Λ' vs Ro_ℓ can be seen for several E numbers in figure 8. The marker legend is the same as in figure 3. Below the horizontal dotted line corresponding to dynamos with $\Lambda' < 1$, the dipole collapse is observed when Ro_ℓ exceeds approximately 0.1 (vertical dotted line) as obtained by previous study. The situation differs above $\Lambda' > 1$ threshold where dipolar dynamos persist with higher Ro_ℓ .

In figure 8, the dashed line represents the condition $\Lambda' = 5Ro_\ell$ as obtained from equation (3.4). For dipolar models above this dashed line, our analysis suggests that inertia effects play a minor role at large scales in comparison with the magnetic and Coriolis effects. Inertia only affects the stability of dipolar fields with $\Lambda' > 1$ in the vicinity of the dashed line. Otherwise, dipolar dynamos are maintained even if high values of Ro_ℓ are considered when $\Lambda' > 1$. However, we report here only transitions for $E \geq 10^{-4}$ when $\Lambda' > 1$. At this point, additional simulations seem to be needed in order to conclude on the critical role of the condition $\Lambda' > 5Ro_\ell$ for Lorentz-dominated dipolar dynamos.

Dynamos approaching this condition (green branches of panels 8(a) and 8(b)) become unbalanced around 0.2. According to our results, this value is the critical value for dynamos with $\Lambda' = 1$ to make the transition to the multipolar state.

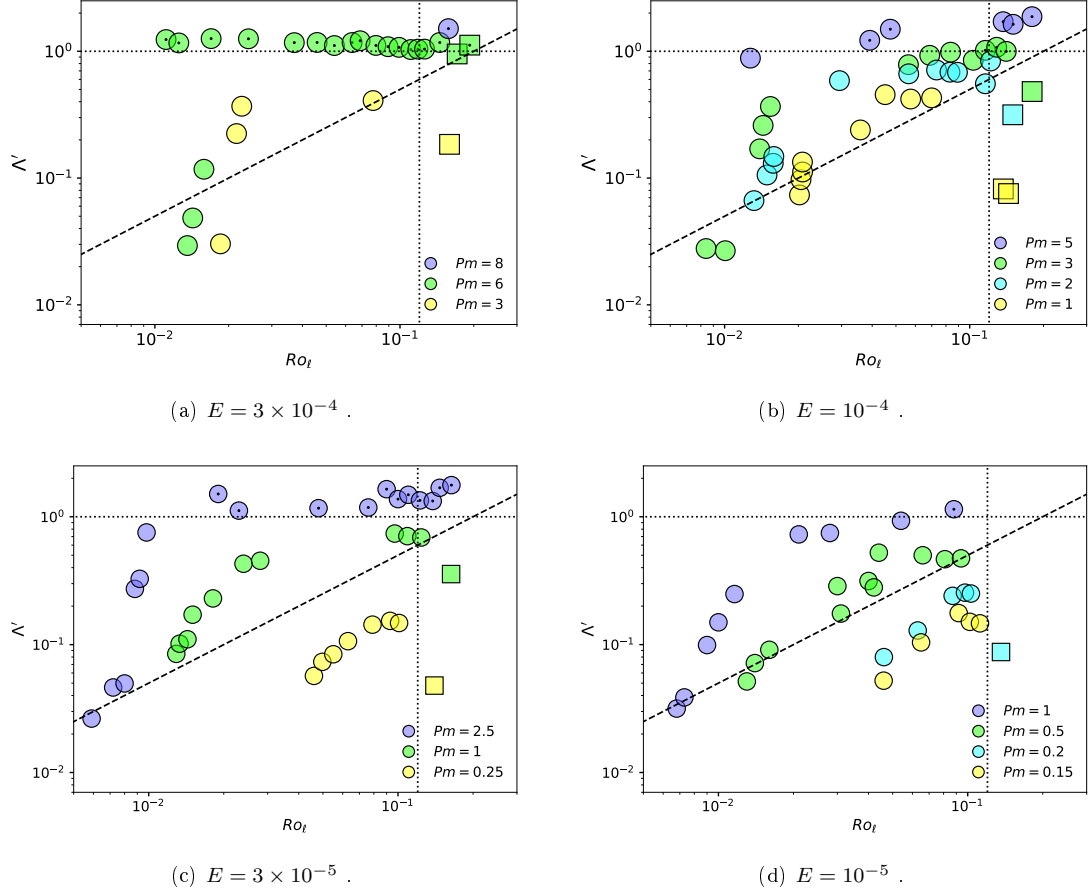


Figure 8: Λ' versus Ro_ℓ for several Ekman numbers. The colours on each graph allow us to distinguish the magnetic Prandtl numbers while the marker corresponds to the magnetic topology: circles for dipolar dynamos and squares for multipolar dynamos. The dotted lines represent $Ro_\ell = 0.12$ (vertical line) and $\Lambda' = 1$ (horizontal line). The dashed line shows the proposed limit $\Lambda' = 5Ro_\ell$ (see the text).

4. Discussion and conclusion

In this paper we have shown that the distinction between the dipolar and the multipolar regimes cannot be established only through the f_{dip} value nor through the Ro_ℓ criterion. When considering sufficiently high Pm values, time evolution of these quantities seems to be an important parameter as well as the Elsasser number variations. For this study a dipolar dynamo is defined as a solution with a stable tilt angle (no reversals throughout the integration time), a mean dipole field strength $f_{dip} > 0.5$ and an Elsasser number not subjected to any significant drop. Despite these more restrictive conditions dipolar dynamos with $Ro_\ell > 0.12$ are reported (§3.1).

By exploring high Pm and Ra/Ra_c values, we have been able to define the boundaries of the Lorentz-dominated dynamos area in the parameter space. This regime characterised by a $\Lambda' > 1$ can be reached for sufficiently high Pm when $Ra/Ra_c \gtrsim 10$. These solutions have proven to be the dipolar dynamos found at high Ro_ℓ values. A thorough investigation of the scale dependence of the forces reveals that the large scales balance depends on the regime studied. Indeed Lorentz-dominated dynamos exhibit an almost perfect balance between Lorentz and Coriolis forces at very large scales, whereas it is only partial for the other regime (§3.3).

Moving towards higher values of Ra/Ra_c allows us to obtain multipolar cases with different force balance. When the Lorentz force does not dominate ($\Lambda' < 1$), inertia becomes more important than the magnetic component leading to a transition to the multipolar state around $Ro_\ell \sim 0.12$. However when the $\Lambda' > 1$, the strong dipolar component of the magnetic field seems to prevent the growth of inertia at large scales even at high Ro_ℓ values. The large scale balance of the Coriolis and Lorentz terms leads to the relation $\Lambda' \sim 5Ro_\ell$. As long as Lorentz dominates, i.e. $\Lambda' > 5Ro_\ell$ dipolar dynamos are found even if $Ro_\ell > 0.12$. This relation enables a better distinction of the three behaviours studied in the (Λ', Ro_ℓ) representation (§3.4).

As seen in §3.4, parameters to obtain a transition depend on the importance of the Lorentz force compared to the others. Correlating dipolarity with the classical Ro_ℓ number is not relevant for all dynamos as the Lorentz force can prevent the effects of inertia at large scales even if Ro_ℓ becomes large. Ro_ℓ is an output parameter which measures the relative importance of inertia by calculating a volume average of the velocity and the length scale of the flow. In the literature, different definitions of Ro_ℓ are proposed. In order to show that the results presented in our study do not depend on the definition of Ro_ℓ , we show in figure 4 f_{dip} as a function of the local Rossby number by using different definitions for this latter parameter. Regardless of this definition, a bistable regime exists in which dipolar and multipolar dynamos coexist where a dichotomy was observed by previous studies. We have shown that the local Rossby number is not the only parameter affecting the stability of dipolar dynamos as soon as the magnetic Prandtl number reaches a certain value depending on the Ekman number (see below and figure 9).

As shown in figure 5, the Lorentz-dominated regime corresponds to higher values of Pm . It is nevertheless important to note that the critical value Pm_c to reach this regime strongly evolves with E and Ra number. In particular it decreases when reducing the Ekman number. For example $E = 10^{-5}$ and $Ra/Ra_c \sim 80$ allows Lorentz-dominated dynamos at Pm as low as 1. When sufficiently high Ra/Ra_c is reached (approximately 10), Pm_c is almost constant. The Pm_c obtained as a function of E is represented in figure 9 (blue spots). From the four values of E presented in this paper, an estimated slope can be deduced. The extreme values of geodynamo simulations

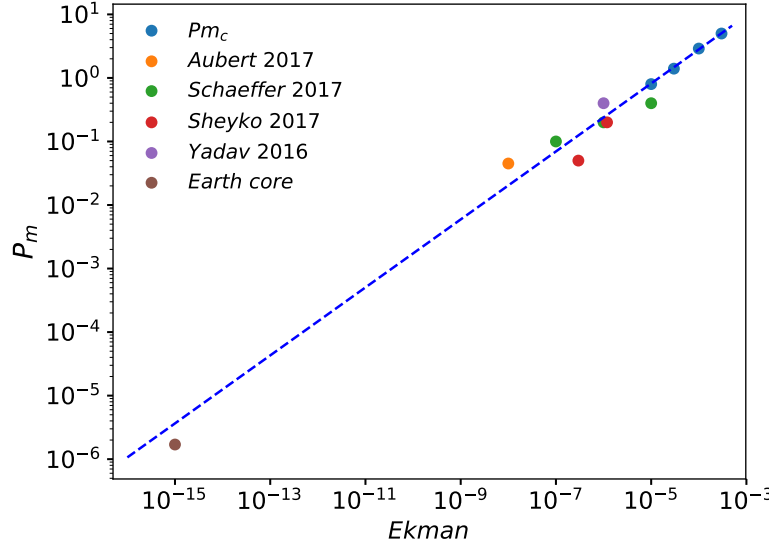


Figure 9: Extrapolation of the critical Pm number required to have a Lorentz-dominated regime. Other studies and the Earth are also represented. The best fitting law obtained from our four points is $Pm_c = 10^{2.43} \times E^{0.494}$

performed by Aubert *et al.* [1], Schaeffer *et al.* [26], Sheyko *et al.* [30], Yadav *et al.* [36] (respectively orange, green, red and purple spots) have also been represented, as well as the Earth core (considering $E \sim 10^{-15}$, $Pm = 2 \times 10^{-6}$, brown spot).

According to our data set, the Earth core parameters place it slightly below the critical value ($Pm_c \sim 10^{-5}$ for $E = 10^{-15}$). It means that the Lorentz force is a priori not dominant at very large scale, but only from a certain scale as argued by Aurnou & King [2]. This can be related with force balance obtained for dynamos with $Pm \lesssim Pm_c$ (see figure 6(b)). A case with parameters above the dashed line on figure 9 has a good chance to be in an almost perfect Lorentz-Coriolis balance at large scales, and thus in the Magnetic-Archimedean-Coriolis (MAC) state. However, as shown on figure 5, this boundary strongly depends on the value of the Rayleigh number, in particular at low supercriticalities. By extension this regime could be obtained either by decreasing the Ekman number at an almost constant Pm value (from case S1 to S2 in Schaeffer *et al.* [26]) or by increasing the Pm value at a constant Ekman number as proposed by Dormy [9].

This analysis emphasises that the Lorentz-dominated regime can not be restricted to high Pm values, and should be seriously considered when decreasing the Ekman number. Indeed, other studies reach lower E numbers with Pm above or close to the critical value to obtain a dynamo in which the Lorentz force plays a major role. Moreover, we have shown in §3.4 that the MAC equilibrium can be studied at higher E and Pm values, with a behaviour similar to cases at lower values which are numerically demanding. Considering higher Ekman numbers with $Pm > Pm_c$ appears as an alternative to low-Ekman geodynamo simulations. In fact, this strategy also enables the study of dynamo models with a dominant Lorentz force.

King & Buffett [15], using the database of [8], highlighted that the extreme planetary values E and Pm could lead to another type of dynamical regime where the Lorentz force can no longer be neglected. The results obtained in §3.3 support this possibility, and even bring to light cases showing polarity reversals with a non-negligible role of the magnetic force. Particularly, figure 9 points out that this regime could be relevant even for current leap towards Earth’s core presented in previous works 37, 1, 27.

For example the simulation at $E = 10^{-7}$ and $Pm = 0.1$ (green dot, S2 simulation of Schaeffer et al. [26]) is slightly above the Pm_c line (figure 9). The spatial distribution of the main forces performed in this study [26] has shown that the force balance depends on the region considered (in or outside of the tangent cylinder). In particular outside the tangent cylinder a magnetostrophic balance emerges, mostly dominated by Lorentz and Coriolis forces with a reduced impact of inertia and buoyancy. This is consistent with our analysis of figure 6, i.e. that an important Lorentz force structures the flow and changes the force balance obtained.

Moreover the vorticity field exhibits different behaviours depending on the branch to which the simulation belongs. For the Lorentz-dominated cases, the field is not organised in Taylor columns as it is for similar parameters at lower Pm values. The Figure 10 compares two identical cases at $Pm = 3$ and $Pm = 0.5$, therefore exploring the two branches. For the Lorentz-dominated branch (figure 10(b)), the meridional cut shows unorganised medium scales structures where the non Lorentz dominated case (figure 10(a)) clearly reveals a geostrophic flow. The equatorial cut confirms this difference, and in particular corroborates the predictions made from the force equilibrium. Indeed, as the inertia effect is overshadowed by the Lorentz force in higher Pm solutions, the case 10(b) shows less large scale structures in favour of medium to small scale structures. These characteristics of Lorentz-dominated dynamos were previously observed in recent studies [29] but only at low Rayleigh number values.

The figure 11 gives new indications to distinguish the Lorentz-dominated cases from the others at such values of Ro_ℓ . Indeed, whereas the case $Pm = 0.5$ (figure 11(a)) just reconfirms our analysis, the Lorentz-dominated case at $Pm = 3$ (figure 11(b)) surprisingly reminds the structures found in previous studies of the MAC-balance (e.g. simulation S2 of [27]). Analogous axisymmetric flow is found inside the tangent cylinder and weak dynamics outside. The comparison with the temperature profile illustrates the correlation between the hot spots at the poles and the large scale flow. These similarities with simulations three order of magnitude lower in Ekman value probably result from a comparable force balance at large scales, and in particular of a non-negligible Lorentz force.

The large parameter space explored in our study sheds light on the impact of the Ekman and magnetic Prandtl numbers when considering different magnetic dipolar regimes for highly turbulent flows. We considered a simple convection model with fixed thermal boundary conditions (as Christensen & Aubert [8]) to easily compare our results with previous geodynamo studies. Changing these boundary conditions would probably affect the behaviour observed (as in Sakuraba & Roberts [25]), in unpredictable way. As strong dipolar magnetic fields have been obtained with more realistic boundary conditions, it would be appropriate to investigate a possible Lorentz-dominated regime. Therefore, the critical values to find behaviours similar to our Lorentz-dominated cases

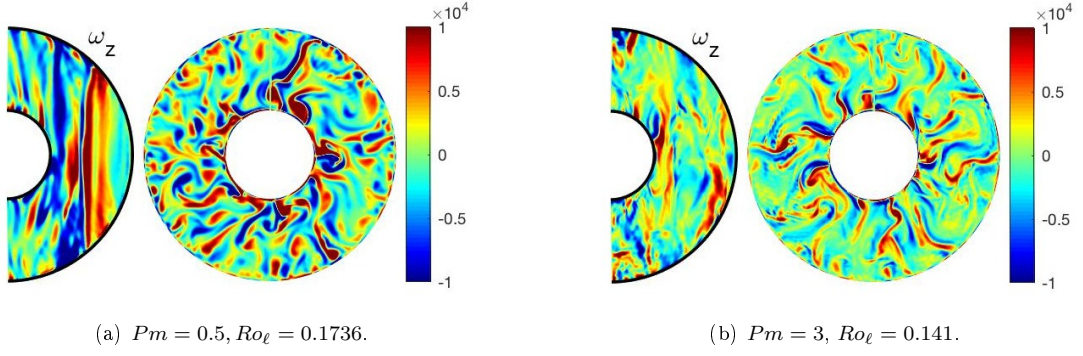


Figure 10: Snapshots of the vorticity component ω_z of two simulations at $E = 10^{-4}$ and $Ra/Ra_c = 29.41$ which differ only in the Pm value. The simulation at a lower Pm value (a) is multipolar, whereas the case (b) is still dipolar. Both of them have $Ro_\ell \geq 0.14$, the other parameters can be found in Appendix B. For each, the left panel represents a meridional cut and the right one an equatorial cut.

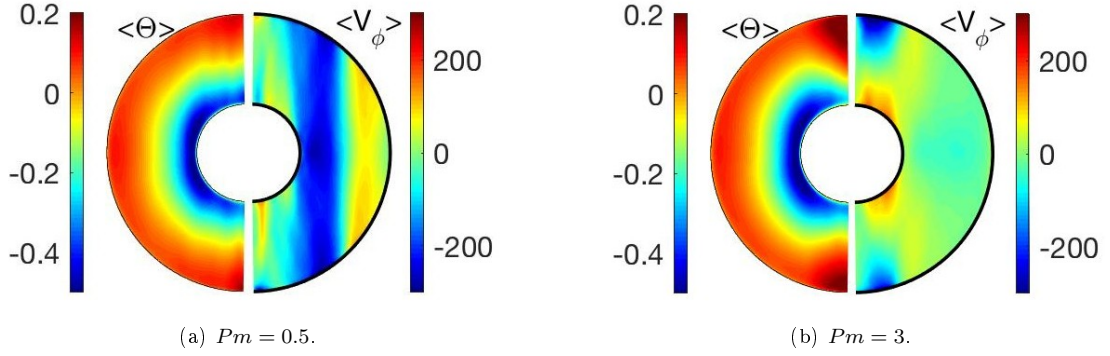


Figure 11: Temperature Θ (left) and ϕ component of the velocity field V_ϕ (right) for the same simulations as figure 10. The fields have been averaged in time.

will certainly change with more realistic models. Uniform heat flux at the surface, heterogeneous heat flux [21] or even compositional convection might be interesting models to explore. It would enable a better understanding of the correlation between a strong dipolar magnetic field and the flow dynamics.

Acknowledgments

This work has been done within the LABEX PLAS@PAR project, and received financial state aid managed by the Agence National de la Recherche, as part of the Programme “Investissements d’Avenir” under the reference ANR-11-IDEX-0004-02. This work was granted access to the HPC resources of MesoPSL financed by the Region Ile de France and the project Equip@Meso (reference ANR-10-EQPX-29-01) of the programme Investissements d’Avenir supervised by the Agence Nationale pour la Recherche.

Appendix A. Scaling laws

For four values of the Ekman number, we obtain $L_\eta \propto Rm^{-1/2}$ (figure A.12). The fitting coefficient is indicated on each figure and decreases with Ekman. Both Lorentz dominated dynamos (in blue) and the non-Lorentz dominated dynamos (in mauve) seem to respect this scaling. Multipolar cases (squares) are indicated but not relevant for this length scale. This scaling has been used for L_η values not computed (depicted by the symbol * in the Tables, Appendix B).

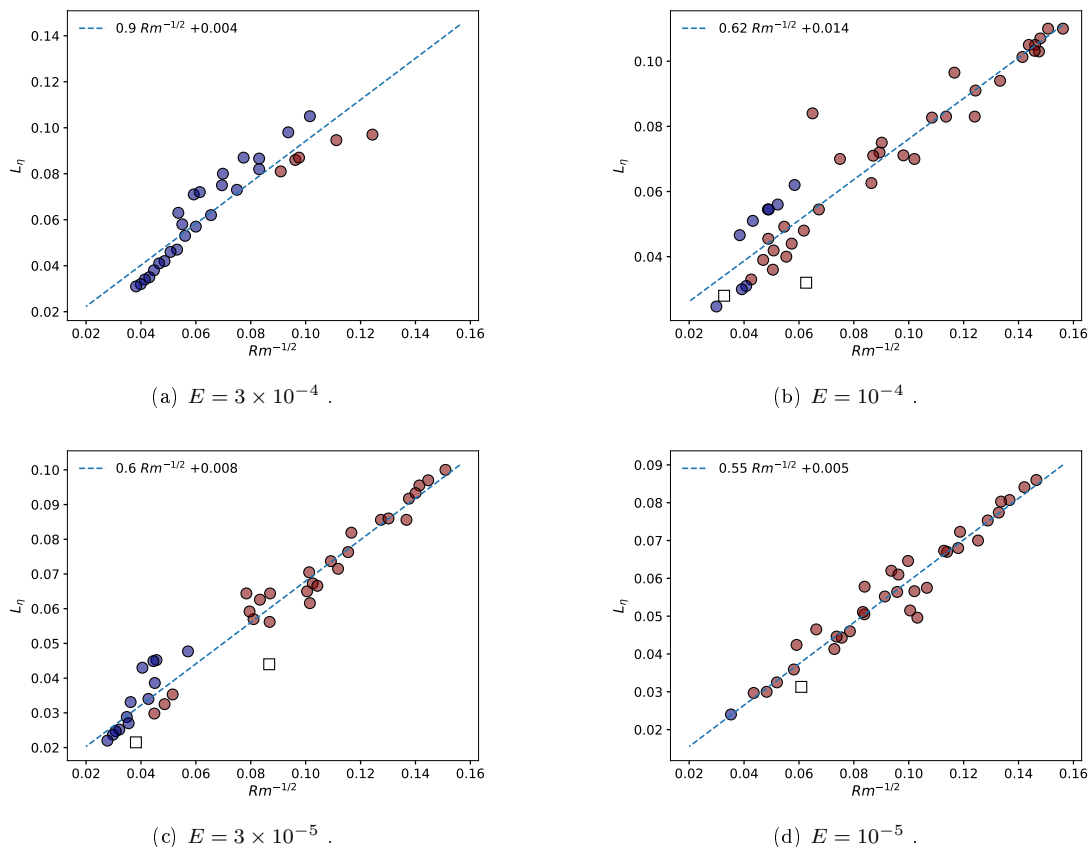


Figure A.12: $L_\eta \propto Rm^{-1/2}$ for four Ekman values. Mauve and blue circles stand distinguish the two dipolar behaviours, respectively non-Lorentz dominated and Lorentz-dominated dynamos. Squares are multipolar cases.

Appendix B. Simulation tables

Table of the simulation presented, with main input and output parameters. (-) stands for a value that has not been computed, stars (*) for values deduced from scaling laws. Nusselt number Nu is defined as the ratio of the total heat flux to the conductive heat flux whereas f_{ohm} is the ratio of ohmic dissipation to total dissipation.

E	Ra/Ra_c	Pm	Rm	Λ	Ro	Nu	$\bar{\ell}_u$	L_ν	L_η	k_u	f_{ohm}	f_{dip}
0.0003	2.15363	12	167	22.65	0.0042	1.495	6.77	—	0.087	8.34	0.66	0.77
0.0003	2.22541	6	104.5	0.27	0.0052	1.29	8.2	0.073	0.088*	9.49	0.063	0.9
0.0003	2.2972	6	108	0.45	0.0054	1.315	8.3	0.0755	0.086	9.6	0.083	0.81
0.0003	2.44078	6	121	1.15	0.006	1.41	8.3	0.076	0.081	9.74	0.17	0.79
0.0003	2.51256	12	205	25.4	0.0051	1.6	7	0.072	0.08	—	0.65	0.75
0.0003	2.58435	6	97	12.6	0.0049	1.56	7.12	0.075	0.105	8.67	0.69	0.82
0.0003	2.81407	3	64.7	0.19	0.0065	1.37	8.95	0.073	0.097	10.69	0.085	0.88
0.0003	2.8715	12	228	30	0.0057	1.675	6.82	—	0.060*	8.27	0.633	0.72
0.0003	2.8715	6	114	13	0.0057	1.64	6.9	0.073	0.098	8.42	0.65	0.78
0.0003	3.15865	3	75.96	1.76	0.0076	1.65	8.9	—	0.103*	11	—	0.87
0.0003	3.23044	12	265	34.65	0.0066	1.85	7.4	0.0695	0.072	9.03	0.623	0.73
0.0003	3.58938	6	145	15.8	0.0072	1.87	7.4	0.071	0.0866	9.44	0.64	0.76
0.0003	3.58938	3	80.89	2.82	0.0081	1.73	8.77	0.071	0.0946	10.75	0.46	0.86
0.0003	3.94831	12	330	39.85	0.0083	2.04	8.14	0.065	0.058	9.94	0.59	0.71
0.0003	4.30725	6	178	16.3	0.0089	2.07	8.5	0.067	0.073	10.44	0.6	0.76
0.0003	4.30725	3.5	105	6	0.009	1.95	8.8	0.07	0.087	10.81	0.54	0.82
0.0003	4.30725	12	390.5	42.38	0.0098	2.23	8.77	—	0.046*	10.7	—	0.7
0.0003	5.38406	6	233	16.9	0.012	2.37	9.7	0.065	0.062	11.94	0.54	0.74
0.0003	5.38406	2	76	3.1	0.011	—	10.5	—	0.103*	13.01	—	0.86
0.0003	6.46088	6	278	18.6	0.014	2.63	10.3	0.0614	0.057	12.64	0.506	0.71
0.0003	7.32233	6	318	18.7	0.016	2.83	10.6	0.062	0.053	12.96	0.47	0.7
0.0003	8.32735	6	354	19.5	0.018	3.03	11.13	0.058	0.047	13.56	0.45	0.65
0.0003	9.04523	3	200	5.2	0.02	3.11	12.2	—	0.064*	14.9	—	0.76
0.0003	9.33238	6	388	21.6	0.019	3.2	11.37	0.057	0.046	13.79	0.44	0.69
0.0003	10.1938	6	424	19.8	0.021	3.37	11.93	0.0555	0.042	14.42	0.41	0.69
0.0003	11.0553	6	460	20.5	0.023	3.56	12.21	0.0551	0.041	14.77	0.39	0.7
0.0003	12.2039	6	500	20.4	0.025	4.75	12.45	0.054	0.038	14.97	0.375	0.67
0.0003	13.2089	6	540	19.5	0.0276	4.95	12.6	0.0535	0.035	15.12	0.36	0.66
0.0003	14.3575	6	583	20.6	0.029	5.15	12.82	0.0525	0.034	15.34	0.36	0.65
0.0003	15.7933	6	628	20.9	0.031	5.35	12.76	0.053	0.032	15.26	0.34	0.63
0.0003	17.229	3	395	3.3	0.039	5.7	12.83	—	0.045*	15.11	0.165	0.55
0.0003	18.9519	6	684.76	24.9	0.035	4.77	13.04	0.051	0.031	15.47	0.36	0.6
0.0003	21.5363	8	1020	40	0.038	6.075	13.03	0.0505	0.026	15.34	0.34	0.58
0.0003	21.5363	6	822.8	21.16	0.041	6.17	13.11	0.052	0.027	15.49	0.3	0.56
0.0003	25.8435	6	763.14	22.35	0.046	6.53	13.15	0.0507	0.0262	15.44	0.3	0.38
0.0003	30.1508	1.5	314.3	1.02	0.063	7.17	12.41	—	0.051*	14.48	0.075	0.37

Table B.1: $Ekman = 3 \times 10^{-4}$.

E	Ra/Ra_c	Pm	Rm	Λ	Ro	Nu	$\bar{\ell}_u$	L_ν	L_η	k_u	f_{ohm}	f_{dip}
0.0001	2.7415	3	85.6	0.19	0.0029	1.336	10.9	0.0615	0.083	12.42	0.125	0.91
0.0001	3.23567	12	341	40.7	0.0029	1.95	9.9	—	0.034*	12.045	0.707	0.76
0.0001	3.23567	2	73	0.41	0.0036	1.56	11.5	0.0556	0.0846	13.39	0.27	0.9
0.0001	3.52983	2	77.5	0.68	0.0039	1.65	12	0.056	0.083	14.37	0.344	0.85
0.0001	3.52983	3	117	1.43	0.0039	1.7	11.2	0.0582	0.0719	13.42	0.4	0.84
0.0001	3.76515	12	422	46.1	0.0035	2.21	10.5	0.0487	0.0545	12.83	0.682	0.73
0.0001	3.76515	2	82.8	0.84	0.0041	1.73	12.1	0.0561	0.0776	14.58	0.38	0.85
0.0001	3.88281	12	416.5	47.7	0.0035	2.19	11.1	0.046	0.0545	13.47	0.675	0.76
0.0001	3.88281	10	366	36.1	0.0037	2.22	10.4	0.0476	0.056	12.58	0.68	0.74
0.0001	3.88281	8	293	24.5	0.0037	2.16	10.7	0.049	0.062	13.11	0.685	0.76
0.0001	3.88281	5	178	11	0.0036	2.04	11.12	0.054	0.07	13.26	0.7	0.81
0.0001	3.88281	3	123	2.4	0.0041	1.81	11	0.057	0.075	13.45	0.47	0.86
0.0001	3.88281	2	85	1.04	0.0043	1.77	11.6	0.0573	0.0827	14.06	0.414	0.85
0.0001	3.88281	1.5	64.7	0.66	0.0043	1.78	12.7	0.0554	0.091	15.52	0.38	0.88
0.0001	3.88281	1.3	56.3	0.53	0.0043	1.77	12.9	0.053	0.094	15.7	0.36	0.89
0.0001	4.00047	1	45.7	0.36	0.0046	1.81	13.8	0.0515	0.107	16.84	0.316	0.92
0.0001	4.11813	3	125.3	3.31	0.0042	1.9	11.5	0.0554	0.072	13.7	0.55	0.82
0.0001	4.11813	1	46	0.46	0.0046	1.85	14	0.052	0.103	17.25	0.36	0.92
0.0001	4.23579	1	46.9	0.55	0.0047	1.9	13.9	0.053	0.105	17.21	0.4	0.92
0.0001	4.41228	1	48.4	0.68	0.0048	1.97	13.6	0.053	0.105	16.79	0.436	0.91
0.0001	7.05965	2	132	5.5	0.0066	2.75	14	0.048	0.071	17.24	0.51	0.89
0.0001	7.05965	1	73.5	1.7	0.0073	2.67	15.41	0.05	0.0965	19.34	—	0.83
0.0001	8.82457	8	670	43.3	0.0084	3.63	14.3	0.0424	0.0385	—	0.56	0.57
0.0001	8.82457	5	419.6	23.3	0.0084	3.53	14.62	0.0432	0.0455	17.84	0.58	0.68
0.0001	8.82457	1	85	2.6	0.0085	3.23	16.7	—	0.067*	20.7	0.52	0.84
0.0001	11.7661	5	524	30.2	0.01	4.18	14.9	0.0423	0.0386	—	0.566	0.67
0.0001	11.7661	3	335	12.92	0.011	4.14	16.06	0.0415	0.0492	19.49	0.515	0.77
0.0001	11.7661	2	221	8	0.011	4.07	16.1	0.0425	0.0545	19.57	0.54	0.82
0.0001	11.7661	1	112.6	3.33	0.0112	3.96	16.11	0.044	0.0704	19.68	0.52	0.89
0.0001	14.1193	3	388	15.1	0.013	4.68	16.6	0.0408	0.0419	20.05	0.52	0.78
0.0001	14.1193	2	262	8.95	0.013	4.64	17.7	0.04	0.048	20.3	0.52	0.79
0.0001	14.1193	1	134	3.6	0.013	4.46	16.9	0.0418	0.0626	20.57	0.48	0.81
0.0001	16.4725	2	304	9.15	0.015	5.15	17.4	0.04	0.044	21.09	0.48	0.8
0.0001	17.6491	3	453.5	17.4	0.015	5.46	17.5	0.0384	0.039	20.96	0.49	0.76
0.0001	17.6491	2	326	8.9	0.016	5.41	17.5	0.039	0.04	21.01	0.465	0.79
0.0001	20.5907	3	551	15.44	0.018	6.04	18.05	0.0375	0.033	21.52	0.46	0.76
0.0001	20.5907	2	392	7.82	0.02	6.16	18.2	0.038	0.036	21.87	0.4	0.78
0.0001	20.5907	1	255	0.67	0.026	6.51	16.57	0.04	0.032	19.51	0.126	0.45
0.0001	21.179	1	257	0.75	0.026	6.65	17.4	—	0.039*	20.88	0.13	0.37
0.0001	23.5322	3	601	18.95	0.02	6.64	18.2	0.037	0.031	21.62	0.46	0.76
0.0001	23.5322	2	416.23	10.6	0.021	6.57	18.2	—	0.030*	21.63	—	0.71
0.0001	26.4737	3	651	21	0.022	6.98	18.4	0.037	0.03	21.7	0.45	0.75
0.0001	26.4737	2	529	4.5	0.026	7.44	18.11	—	0.027*	21.42	—	0.46
0.0001	29.4152	5	1116	47.18	0.023	7.38	18.7	0.0368	0.0247	21.85	0.44	0.73
0.0001	29.4152	3	725	19.9	0.0242	7.5	18.3	0.0375	0.0275	21.74	0.43	0.73
0.0001	29.4152	0.5	176.5	0.25	0.035	9.04	15.58	0.0412	0.0405	18.05	—	0.45
0.0001	32.9451	5	1222.84	48.3	0.025	7.77	18.9	0.036	0.0242	22.03	—	0.71
0.0001	35.2983	3	933	12.57	0.031	8.5	18.22	0.0215	0.028	21.3	0.35	0.25
0.0001	41.1813	5	1513.69	45.86	0.03	8.755	18.8	—	0.016*	21.85	—	0.7

Table B.2: $Ekman = 1 \times 10^{-4}$.

E	Ra/Ra_c	Pm	Rm	Λ	Ro	Nu	$\bar{\ell}_u$	L_ν	L_η	k_u	f_{ohm}	f_{dip}
3e-05	2.83822	10	335.2	22.5	0.001	1.81	11.4	0.0398	0.0566	13.7	0.782	0.79
3e-05	2.93283	2.5	102	0.16	0.0012	1.35	15.5	—	0.059*	17.86	0.22	0.92
3e-05	3.40587	2.5	117	0.3	0.0014	1.44	16.11	—	0.055*	18.8	0.294	0.84
3e-05	3.7843	2.5	132.5	0.37	0.0016	1.51	15.7	0.0113	0.0562	18.31	0.3	0.69
3e-05	4.35194	2.5	152.4	2.37	0.0018	1.97	15.35	0.0134	0.057	18.9	0.64	0.79
3e-05	4.35194	1	68	0.27	0.002	1.8	18	0.0143	0.0727	—	0.373	—
3e-05	4.63576	1	72.4	0.38	0.0022	1.92	18.8	0.0153	0.073	—	0.42	—
3e-05	4.82498	10	609	51.8	0.0018	2.9	15.85	0.0314	0.043	19.23	0.754	0.76
3e-05	4.82498	2.5	158	3.06	0.0019	2.07	15.28	0.0128	0.0592	18.88	0.685	0.86
3e-05	4.82498	1	75	0.44	0.0022	1.97	18.5	—	0.069*	22.76	0.44	0.82
3e-05	4.82498	0.7	53.5	0.31	0.0023	2.03	19.67	0.0156	0.0856	24.29	0.42	0.89
3e-05	4.91958	1	75.5	0.53	0.0023	2.03	18.1	—	0.069*	22.39	0.477	0.82
3e-05	5.20341	1	80	0.63	0.0024	2.14	18.76	0.016	0.0715	23.28	0.493	0.82
3e-05	5.67644	2.5	162.7	7.9	0.002	2.57	15.45	0.0126	0.0644	19.25	0.81	0.77
3e-05	5.67644	2	144	3.35	0.0022	2.34	16.27	0.0143	0.0626	20.33	0.704	0.82
3e-05	5.67644	1	83.9	1.06	0.0025	2.36	18.42	0.0162	0.0737	23.09	0.5825	0.81
3e-05	6.62252	6	480	34	0.0024	3.3	17.2	0.0337	0.0452	20.91	0.745	0.79
3e-05	6.62252	0.5	50	0.5	0.003	2.61	24.1	0.0185	0.0955	30.91	0.47	0.9
3e-05	7.09555	6	504.6	44	0.0025	3.46	16.4	0.0335	0.0449	19.7	0.75	0.74
3e-05	7.09555	1	97.5	1.58	0.0029	2.7	19.58	0.0183	0.0705	24.8	0.609	0.85
3e-05	7.09555	0.5	52.8	0.6	0.0032	2.756	24.3	0.0192	0.0917	31.24	0.459	0.9
3e-05	8.51466	2.5	250	14.3	0.003	3.6	17.3	—	0.038*	—	0.76	0.83
3e-05	8.51466	1	110	2.7	0.0033	3.1	21.76	—	0.057*	27.52	—	0.88
3e-05	8.51466	0.5	61.6	0.72	0.0037	3.07	24.9	0.0214	0.0856	31.97	0.48	0.89
3e-05	10.4068	6	762	42.3	0.0038	4.45	20.4	0.0119	0.0331	24.78	0.765	0.77
3e-05	10.4068	4	493	27.3	0.0037	4.41	19.6	0.0126	0.0386	23.94	0.775	0.79
3e-05	10.4068	2.5	306.5	16.33	0.0037	4.22	19.1	0.0135	0.0477	23.36	0.78	0.84
3e-05	10.4068	1	132	3.85	0.004	3.92	21.77	0.0142	0.0644	27	0.68	0.9
3e-05	10.4068	0.5	73.5	1.4	0.0044	4.03	25.2	0.0225	0.0819	31.54	0.56	0.91
3e-05	10.4068	0.25	43.9	0.25	0.0053	3.85	27.24	0.017	0.1	34.41	0.286	0.95
3e-05	11.3529	0.25	47.8	0.34	0.0057	4.34	27.4	0.0172	0.097	34.38	0.32	0.95
3e-05	12.299	0.25	51	0.4	0.0062	4.8	27.77	0.0172	0.0933	34.56	0.336	0.95
3e-05	14.1911	0.5	95	2	0.0057	5.2	26.1	0.0243	0.0673	31.79	0.57	0.92
3e-05	14.1911	0.25	59	0.54	0.0071	5.61	27.9	0.0206	0.086	34.37	0.366	0.94
3e-05	18.9215	4	824	42.7	0.0062	6.44	23.2	0.0173	0.0288	28.08	0.675	0.8
3e-05	18.9215	2.5	548	21.75	0.0066	6.6	22.6	0.0187	0.034	27.28	0.67	0.81
3e-05	18.9215	0.5	97	2	0.0058	6.5	26.4	0.0254	0.0616	32.06	0.58	0.91
3e-05	18.9215	0.25	75	0.82	0.009	7.15	27.6	0.0211	0.0763	33.55	0.398	0.93
3e-05	23.6518	0.25	92	0.94	0.011	8.42	26.7	0.0226	0.0666	32.22	0.394	0.91
3e-05	25.544	0.25	99	0.95	0.012	8.82	26.37	0.023	0.065	32.6	0.388	0.91
3e-05	28.3822	2.5	793	25.3	0.0095	8.65	25.2	0.0202	0.027	29.99	0.61	0.81
3e-05	28.3822	0.25	133	0.28	0.016	10	23.48	0.026	0.044	27.3	0.18	0.33
3e-05	34.0587	1	376.4	9.82	0.012	9.5	25.28	0.0215	0.0353	30.21	0.586	0.81
3e-05	34.0587	2.5	950	30.4	0.011	9.87	25.8	—	0.019*	30.7	0.58	0.8
3e-05	37.843	2.5	970.57	33.6	0.012	10.09	26.09	0.0224	0.0252	30.72	0.576	0.8
3e-05	37.843	1	423.51	9.71	0.0127	10.3	25.37	0.0224	0.0325	30.26	0.575	0.86
3e-05	42.5733	2.5	1054.3	38.7	0.013	11.06	26.57	0.0225	0.0247	31.18	0.56	0.8
3e-05	44.4655	2.5	1127.47	35.88	0.014	11.55	26.49	0.0229	0.0237	31.1	0.558	0.8
3e-05	44.4655	1	496.6	10.19	0.015	11.79	25.57	0.0232	0.0298	30.41	0.55	0.85
3e-05	52.0341	2.5	1296.45	37.87	0.016	12.7	27.06	0.0229	0.022	31.63	0.53	0.79
3e-05	52.0341	1	686.72	5.26	0.021	14.05	24.44	0.025	0.0215	28.58	0.38	0.49
3e-05	56.7644	2.5	1416.5	38.05	0.017	13.48	27.2	—	0.016*	31.7	0.53	0.79
3e-05	66.2252	2.5	1576.41	42.11	0.019	14.59	27.09	—	0.015*	31.54	0.51	0.78

Table B.3: $Ekman = 3 \times 10^{-5}$.

E	Ra/Ra_c	Pm	Rm	Λ	Ro	Nu	$\bar{\ell}_u$	L_ν	L_η	k_u	f_{ohm}	f_{dip}
1e-05	2.61381	2	94	0.051	0.00049	1.26	22.9	0.0318	0.0496	26.5	0.189	0.96
1e-05	2.90423	2	99	0.073	0.00051	1.28	22	0.0333	0.0515	25.26	0.213	0.94
1e-05	4.35635	2	175	0.53	0.00088	1.71	22.8	0.0318	0.0443	—	0.47	0.83
1e-05	4.35635	1.5	131	0.23	0.00087	1.63	23.25	0.0323	0.0493	—	0.365	0.85
1e-05	4.35635	1	88	0.16	0.00088	1.67	24.3	0.0305	0.0575	—	0.38	0.87
1e-05	4.71938	1	96	0.21	0.00096	1.64	24	0.0314	0.0566	—	0.37	0.86
1e-05	5.22762	1	109	0.61	0.0011	2.19	25.8	0.0284	0.0564	—	0.575	0.82
1e-05	5.80847	1	120	0.99	0.0012	2.6	26.8	0.0283	0.0552	—	0.61	0.84
1e-05	5.80847	0.5	63.75	0.23	0.0013	2.32	31	0.0267	0.07	—	0.453	0.88
1e-05	6.53452	0.5	71.8	0.35	0.0014	2.64	31.5	0.026	0.068	—	0.5	0.85
1e-05	7.26058	1	142	2.04	0.0014	3.26	25.95	0.0267	0.0578	33.1	0.7	0.89
1e-05	7.26058	0.5	77	0.47	0.0015	2.9	32.7	0.0247	0.067	42.1	0.53	0.87
1e-05	7.98664	0.25	46.6	0.16	0.0019	3.12	38.7	0.0243	0.086	49.6	0.35	0.93
1e-05	8.7127	0.25	49.5	0.19	0.002	3.3	39.1	0.0222	0.0841	50.2	0.36	0.92
1e-05	9.43876	0.25	53.5	0.21	0.0021	3.52	39.58	0.0219	0.0807	51	0.37	0.9
1e-05	10.1648	0.25	56.7	0.24	0.0023	3.75	40.1	0.0219	0.0774	51.7	0.374	0.91
1e-05	10.8909	0.5	119	1.05	0.0024	4.3	36	—	0.050*	—	0.57	—
1e-05	10.8909	0.25	60.3	0.31	0.0024	4.11	40.69	0.021	0.0753	52.2	0.4	0.9
1e-05	13.069	0.5	136	1.84	0.0027	5.68	35.4	—	0.047*	44	0.62	0.87
1e-05	13.069	0.25	77	0.51	0.003	5.71	40.56	—	0.063*	50.8	0.45	0.89
1e-05	13.069	0.2	62.6	0.33	0.0031	5.56	40.6	0.0208	0.0765	—	0.39	0.68
1e-05	14.5212	1	227.5	7.7	0.0023	5.82	28.1	0.0237	0.0465	34.5	0.76	0.89
1e-05	14.5212	0.5	153	2.14	0.0031	—	34	—	0.044*	—	0	—
1e-05	14.5212	0.25	84	0.72	0.0034	6.66	39.2	—	0.060*	48.7	0.49	0.89
1e-05	14.5212	0.2	71	0.41	0.0036	6.5	40.2	0.02	0.0723	49.9	0.4075	0.91
1e-05	14.5212	0.15	56	0.235	0.0037	6.31	39	0.0205	0.0803	48.8	0.33	0.95
1e-05	16.3363	0.25	92.8	0.95	0.0037	7.6	38.4	—	0.057*	47.3	0.52	0.9
1e-05	18.1515	1	286	9.05	0.0029	7.02	29.9	0.023	0.0424	36.5	0.77	0.9
1e-05	18.1515	0.5	184	2.3	0.0036	7.4	36.5	0.021	0.0446	44.7	0.61	0.89
1e-05	18.1515	0.25	100.5	1.15	0.004	8.31	38.9	0.0208	0.0646	47.7	0.54	0.91
1e-05	21.7817	0.5	193	4	0.0039	8.73	35.6	—	0.040*	43.5	0.69	0.91
1e-05	21.7817	0.25	114	1.64	0.0046	9.56	38.7	0.0204	0.062	47.5	0.58	0.91
1e-05	21.7817	0.2	108	0.85	0.005	9.82	39.5	0.02	0.061	48	0.48	0.89
1e-05	21.7817	0.15	78.5	0.55	0.0052	9.85	39.5	0.0196	0.0673	48	0.424	0.9
1e-05	36.3029	1	528.21	14.59	0.0053	12.06	32.02	0.0196	0.0297	38.3	0.75	0.87
1e-05	36.3029	0.5	295.83	5.31	0.0059	12.24	34.75	0.0202	0.0359	42.3	0.67	0.91
1e-05	36.3029	0.2	142.3	1.73	0.0071	13.9	38.5	0.0195	0.0505	46.6	0.56	0.93
1e-05	36.3029	0.15	117	1.05	0.0078	14.4	37.2	0.0203	0.0561	44.7	0.49	0.92
1e-05	43.5635	0.5	370	5.6	0.0074	13.9	34.2	0.0206	0.0325	41.4	0.63	0.91
1e-05	43.5635	0.2	162	1.9	0.0081	15.1	37.8	0.0205	0.046	45.5	0.55	0.92
1e-05	43.5635	0.15	144.1	1.11	0.00875	15.81	36.5	0.0193	0.0511	43.7	0.49	0.92
1e-05	48.6459	0.15	153.6	1	0.01	16.9	35.1	—	0.044*	41.7	0.46	0.88
1e-05	50.8241	0.5	430	6.1	0.0086	16	34.4	0.02	0.03	40.8	0.62	0.89
1e-05	50.8241	0.2	188.2	1.95	0.009	16.7	36.09	0.0204	0.0413	43.2	0.55	0.91
1e-05	58.0847	0.2	270	0.74	0.013	20.06	32.88	0.0201	0.0313	38.5	0.31	0.43
1e-05	58.0847	1	805.75	22.14	0.0081	16.47	33.97	0.0201	0.024	40.2	0.694	0.86

28
Table B.4: $Ekman = 1 \times 10^{-5}$.

References

- [1] AUBERT, J., GASTINE, T. & FOURNIER, A. 2017 Spherical convective dynamos in the rapidly rotating asymptotic regime. *Journal of Fluid Mechanics* **813**, 558–593.
- [2] AURNOU, J. M. & KING, E. M. 2017 The cross-over to magnetostrophic convection in planetary dynamo systems. *Proceedings of the Royal Society of London Series A* **473**, 20160731.
- [3] BROWN, B. P., BROWNING, M. K., BRUN, A. S., MIESCH, M. S. & TOOMRE, J. 2010 Persistent Magnetic Wreaths in a Rapidly Rotating Sun. *Astrophysical Journal* **711**, 424–438, arXiv: 1011.2831.
- [4] BUSSE, F.H., HARTUNG, G., JALETZKY, M. & SOMMERMAN, G. 1998 Experiments on thermal convection in rotating systems motivated by planetary problems. *Dyn. At. O.* **27**, 161.
- [5] CHRISTENSEN, U., OLSON, P. & GLATZMAIER, G. A. 1998 A dynamo model interpretation of geomagnetic field structures. *Geophysical Research Letters* **25**, 1565–1568.
- [6] CHRISTENSEN, U., OLSON, P. & GLATZMAIER, G. A. 1999 Numerical modelling of the geodynamo: systematic parameter study. *Geophys. J. Int.* **166**, 97–114.
- [7] CHRISTENSEN, U.R. & WICHT, J. 2007 Numerical dynamo simulations. In Core Dynamics (ed. P. Olson), *Treatise on Geophysics*, vol. 8, pp. 245–282.
- [8] CHRISTENSEN, U. R. & AUBERT, J. 2006 Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophys. J. Int.* **166**, 97–114.
- [9] DORMY, E. 2016 Strong-field spherical dynamos. *Journal of Fluid Mechanics* **789**, 500–513.
- [10] DORMY, E., CARDIN, P. & JAULT, D. 1998 MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth and Planetary Science Letters* **160**, 15–30.
- [11] DORMY, E., ORUBA, L. & PETITDEMANGE, L. 2018 Three branches of dynamo action. *Fluid Dynamics Research* **50** (1), 011415.
- [12] DORMY, E. AND SOWARD, A. M., ed. 2007 Mathematical aspects of natural dynamos. CRC Press.
- [13] GLATZMAIER, G. A. & ROBERTS, P. H. 1995 A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature* **377**, 203–209.
- [14] KÄPYLÄ, P. J., KORPI, M. J. & BRANDENBURG, A. 2009 Large-scale dynamos in rigidly rotating turbulent convection. *Astrophysical Journal* **697**, 1153, arXiv: 0812.1792.
- [15] KING, E. M. & BUFFETT, B. A. 2013 Flow speeds and length scales in geodynamo models: The role of viscosity. *Earth and Planetary Science Letters* **371**, 156–162.
- [16] KING, E. M., SODERLUND, K. M., CHRISTENSEN, U. R., WICHT, J. & AURNOU, J. M. 2010 Convective heat transfer in planetary dynamo models. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems* **11**, Q06016.

- [17] KUTZNER, C. & CHRISTENSEN, U. R. 2002 From stable dipolar towards reversing numerical dynamos. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **131**, 29–45.
- [18] MOFFATT, H. K. 1978 Magnetic field generation in electrically conducting fluids. Cambridge: Cambridge University Press.
- [19] NATAF, H.-C. & SCHAEFFER, N. 2015 8.06 - turbulence in the core. In Treatise on Geophysics (Second Edition), Second edition edn. (ed. Gerald Schubert), pp. 161 – 181. Oxford: Elsevier.
- [20] OLSON, P. & CHRISTENSEN, U. R. 2006 Dipole moment scaling for convection-driven planetary dynamos. *Earth and Planetary Science Letters* **250**, 561–571.
- [21] OLSON, P., LANDEAU, M. & REYNOLDS, E. 2017 Dynamo tests for stratification below the core-mantle boundary. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **271**, 1–18.
- [22] ORUBA, L. & DORMY, E. 2014 Transition between viscous dipolar and inertial multipolar dynamos. *Geophysics Research Letters* **41**, 7115–7120, arXiv: 1406.6581.
- [23] PETITDEMANGE, L. 2018 Systematic parameter study of dynamo bifurcations in geodynamo simulations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **277**, 113–132.
- [24] PETITDEMANGE, L. 2018 Systematic parameter study of dynamo bifurcations in geodynamo simulations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **277**, 113–132, arXiv: 1803.02668.
- [25] SAKURABA, R. & ROBERTS, P. 2009 Generation of a strong magnetic field using uniform heat flux at the surface of the core. *Nature Geoscience* **211**, 802–805.
- [26] SCHAEFFER, N., JAULT, D., NATAF, H.-C. & FOURNIER, A. 2017 Turbulent geodynamo simulations: a leap towards Earth’s core. *Geophysical Journal International* **211**, 1–29, arXiv: 1701.01299.
- [27] SCHAEFFER, N., JAULT, D., NATAF, H.-C. & FOURNIER, A. 2017 Turbulent geodynamo simulations: a leap towards Earth’s core. *Geophysical Journal International* **211**, 1–29.
- [28] SCHRINNER, M., PETITDEMANGE, L. & DORMY, E. 2012 Dipole Collapse and Dynamo Waves in Global Direct Numerical Simulations. *Astrophysical Journal* **752**, 121, arXiv: 1202.4666.
- [29] SCHWAIGER, T, GASTINE, T & AUBERT, J 2019 Force balance in numerical geodynamo simulations: a systematic study. *Geophysical Journal International* .
- [30] SHEYKO, A., FINLAY, C., FAVRE, J. & JACKSON, A. 2017 Strong field, scale separated, ultra low viscosity dynamos. *ArXiv e-prints* .
- [31] SODERLUND, K. M., KING, E. M. & AURNOU, J. M. 2012 The influence of magnetic fields in planetary dynamo models. *Earth and Planetary Science Letters* **333**, 9–20.
- [32] SODERLUND, K. M., SHEYKO, A., KING, E. M. & AURNOU, J. M. 2015 The competition between Lorentz and Coriolis forces in planetary dynamos. *Progress in Earth and Planetary Science* **2**, 24.
- [33] SREENIVASAN, B. & JONES, C. A. 2006 The role of inertia in the evolution of spherical dynamos. *Geophysical Journal International* **164**, 467–476.

- [34] STELLMACH, S. & HANSEN, U. 2004 Cartesian convection driven dynamos at low Ekman number. *Physics Review E* **70** (5), 056312.
- [35] TAKAHASHI, E., MATSUSHIMA, A. & HONKURA, Y. 2005 Simulation of a quasi-Taylor state magnetic field including polarity reversals on the Earth Simulator". *Science* **309**, 459–461.
- [36] YADAV, R. K., CHRISTENSEN, U. R., WOLK, S. J. & POPPENHAEGER, K. 2016 Magnetic Cycles in a Dynamo Simulation of Fully Convective M-star Proxima Centauri. *apjl* **833**, L28.
- [37] YADAV, R. K., GASTINE, T., CHRISTENSEN, U. R., DUARTE, L. D. V. & REINERS, A. 2016 Effect of shear and magnetic field on the heat-transfer efficiency of convection in rotating spherical shells. *Geophysical Journal International* **204**, 1120–1133, arXiv: 1507.03649.

Annexe B

Annexe modèle local

B.1 Tableaux récapitulatifs des simulations effectuées dans l'étude locale

Dans ces tables sont présentées l'ensemble des simulations effectuées avec le code TURBO. Les informations indiquées varient d'une table à l'autre, en fonction des paramètres explorés. La première colonne Ω désigne la magnitude de la rotation globale imposée, B celle du champ magnétique. ν et η désignent respectivement la viscosité cinématique et la diffusivité magnétique du fluide. θ indique l'angle d'inclinaison de $\vec{\Omega}$ par rapport à $\vec{B}$, toujours selon $\vec{z}$. Le nombre d'Ekman est de l'ordre de 10^{-5} ou 10^{-6} selon l'intensité de Ω .

ϵ_u et ϵ_b désignent respectivement les taux d'injection d'énergie magnétique et cinétique ; σ_c et σ_m les coefficients d'injection d'hélicité croisée et magnétique (qu'il faut multiplier par le taux d'injection d'énergie adéquat pour obtenir le taux d'injection d'hélicité, voir partie 2.1).

Sauf mention contraire, les simulations avec forçage ont été effectuées avec $19 < k_{inj} < 21$, et un longueur magnétoinertielle $d = 1/20$ de sorte à conserver une valeur $k_f d = 1$. Le signe de σ_c est changé selon la polarisation circulaire voulue : $\sigma_c = \sigma_m$ favorise la polarisation gauche (branche inertielle), $-\sigma_c = \sigma_m$ la polarisation droite (branche magnétostrophique). σ_k , le coefficient d'injection d'hélicité cinétique est nul pour tous les cas étudiés.

Le temps final de chaque simulation est indiqué dans la colonne *Time*, les nombres de Rossby et de Reynolds ont été calculés pour les simulations ayant tourné assez longtemps (selon les formules données en partie 1.2.1). Les valeurs de ν et η choisies ont été ajustées pour correspondre notamment à la résolution choisie.

Nom	Ω	B	ν, η	Forçage	Time	Resolution
0-0	0	0	5×10^{-3}	None	3	256^3
0-1	0	-1	5×10^{-3}	None	3	256^3
1-0	1	0	5×10^{-3}	None	3	256^3
1-1	1	-1	5×10^{-3}	None	5	256^3
64N	1	-1	5×10^{-3}	init	0.01	64^3
64P	1	1	5×10^{-3}	None	13	64^3
2501E	2.5	-0.1	5×10^{-3}	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $-\sigma_c = \sigma_m = 0$	5	256^3
201R	2	-0.1	5×10^{-3}	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $-\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	409	256^3
101	1	-1	2×10^{-3}	init	0.005	256^3
2501R	2.5	-0.1	1×10^{-3}	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $-\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	62	256^3
2501	2.5	-0.1	2×10^{-3}	init	0.005	256^3
2501	2.5	-0.1	5×10^{-3}	init	6.2	512^3
512L	2	0.1	1×10^{-3}	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	77	512^3
512R	2	0.1	1×10^{-3}	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $-\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	76	512^3

TABLE B.1 – Tests des différents forçages, des valeurs de la viscosité ainsi que de l’orientation du champ magnétique en fonction de la résolution et du taux de rotation. *init* indique les simulations ayant bénéficié d’une injection initiale d’amplitude plus élevée que les autres cas sans forçage, notés *None*.

Nom	Ω	B	Forçage	$Rossby$	Re	$Time$	$Resolution$
001L	0	0.1	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	∞	1344	250	256^3
01L	0	1	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	∞	1344	70	256^3
01R	0	1	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $-\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	∞	1344	30	256^3
H.inj.L	2	0.1	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	1.6×10^{-2}	1261	335	256^3
H.inj.R	2	0.1	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $-\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	1.64×10^{-2}	1298	257	256^3
U.inj	2	0.1	$\epsilon_u = 0.2, \epsilon_b = 0.1$ $\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	1.36×10^{-2}	1077	412	256^3
B.inj	2	0.1	$\epsilon_u = 0.1, \epsilon_b = 0.2$ $\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	1.44×10^{-2}	1137	271	256^3
20L	20	1	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	1.54×10^{-3}	1215	69	256^3
20R	20	1	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $-\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	1.5×10^{-3}	1182	69	256^3
20B0	20	0	$\epsilon_u = \epsilon_b = 0.2$ $-\sigma_c = \sigma_m = 0.5$	1.46×10^{-3}	1150	97	256^3

TABLE B.2 – Etude systématique des différents forçages pour plusieurs valeurs de Ω et B . Toutes les simulations ont pour valeur $\nu = \eta = 2 \times 10^{-3}$.

Nom	Ω	B	θ	ν^+, η^+	ν^-, η^-	$Rosby$	Re	$Time$
20R_20	20	1	$\theta = 20^\circ$	2×10^{-3}	0	—	—	39.2
20R_25	20	1	$\theta = 25^\circ$	2×10^{-3}	0	—	—	30.3
20R_30	20	1	$\theta = 30^\circ$	2×10^{-3}	0	—	—	56.3
20R_90_x	20	1	$\theta = 90^\circ$	2×10^{-3}	0	—	—	49
20R_90_xy	20	1	$\theta = 90^\circ$	2×10^{-3}	0	—	—	21
20R_90_y	20	1	$\theta = 90^\circ$	2×10^{-3}	0	—	—	22
20R_0_hyp	20	1	$\theta = 0^\circ$	2×10^{-3}	2×10^{-2}	1.49×10^{-3}	1176	133
20R_25_hyp	20	1	$\theta = 25^\circ$	2×10^{-3}	2×10^{-2}	1.49×10^{-3}	1175	105.4
20R_35_hyp	20	1	$\theta = 35^\circ$	2×10^{-3}	2×10^{-2}	1.47×10^{-3}	1163	113
20R_45_hyp	20	1	$\theta = 45^\circ$	2×10^{-3}	2×10^{-2}	1.49×10^{-3}	1178	116.9
20R_90_hyp	20	1	$\theta = 90^\circ$	2×10^{-3}	2×10^{-2}	1.57×10^{-3}	1241	108.2

TABLE B.3 – Etude pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison θ , injection de type H_{inj-R} , résolution 256^3 .

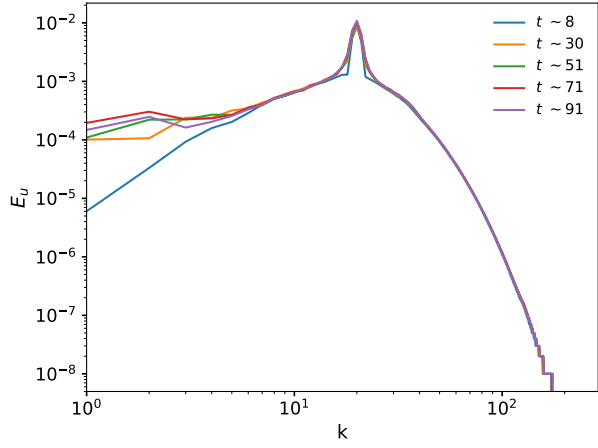
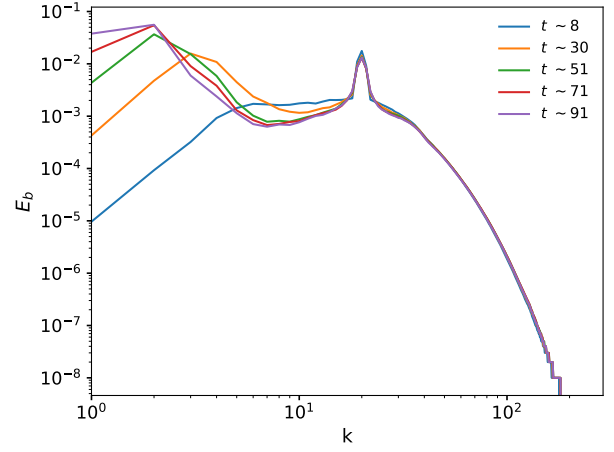
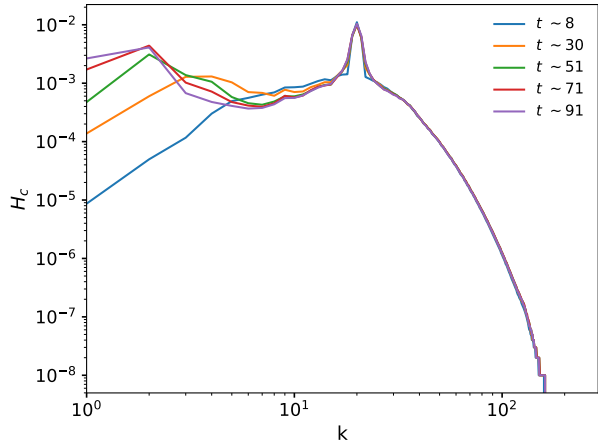
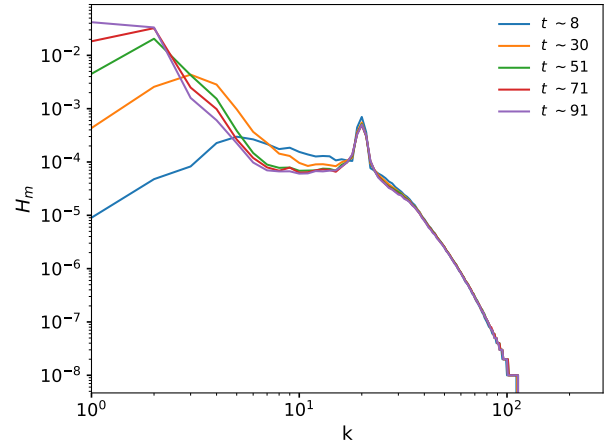
Nom	Ω	B	θ	ν^+	η^+	Pm	$Rosby$	Re	$Time$
Pm01	20	1	0°	2×10^{-3}	2×10^{-2}	0.1	1.7×10^{-3}	1339	73.6
Pm05	20	1	0°	2×10^{-3}	4×10^{-3}	0.5	1.48×10^{-3}	1172	72.5
Pm05t	20	1	45°	2×10^{-3}	4×10^{-3}	0.5	1.53×10^{-3}	1206	66.4
Pm2	20	1	0°	2×10^{-3}	1×10^{-3}	2	---	---	29
Pm2t	20	1	45°	2×10^{-3}	1×10^{-3}	2	---	---	28
Pm2b	20	1	0°	4×10^{-3}	2×10^{-3}	2	1.27×10^{-3}	500	70.5
Pm2bt	20	1	45°	4×10^{-3}	2×10^{-3}	2	1.26×10^{-3}	498	66.2
Pm10	20	1	0°	2×10^{-3}	2×10^{-4}	10	1.59×10^{-3}	1254	80.5

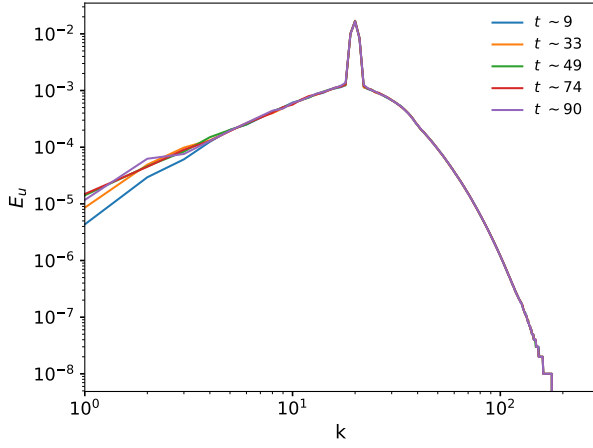
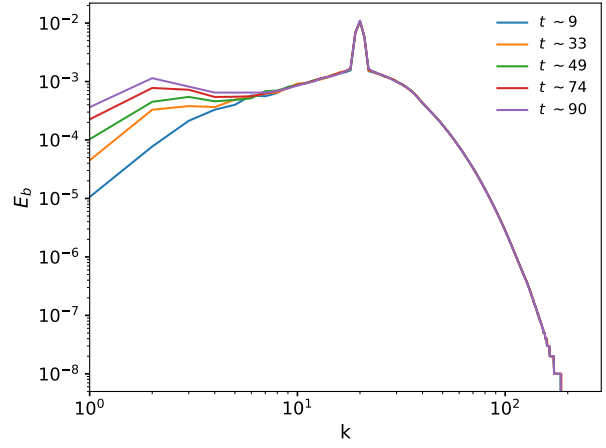
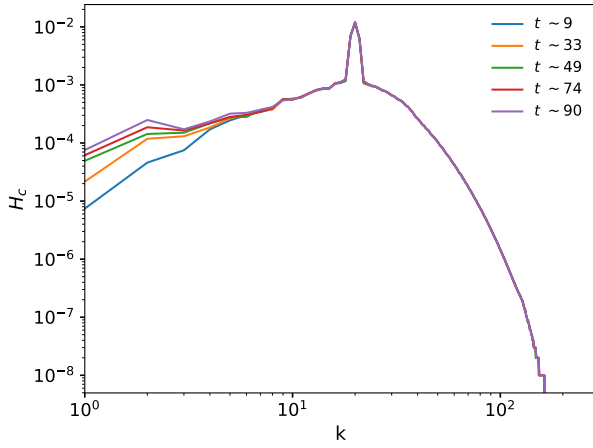
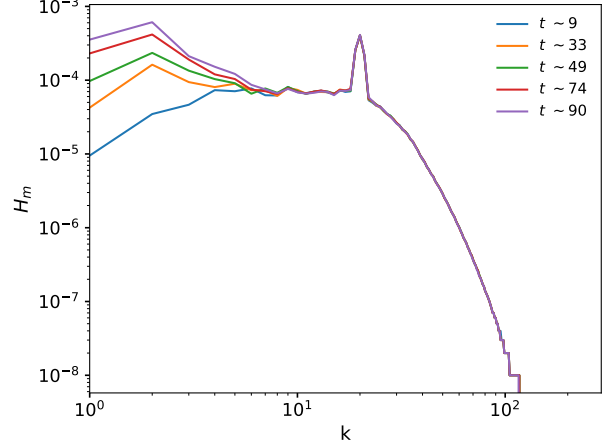
TABLE B.4 – Variations du nombre de Prandtl magnétique. $\nu^- = 10\nu^+$ et $\eta^- = 10\eta^+$. Injection de type H_inj_R , résolution 256^3 .

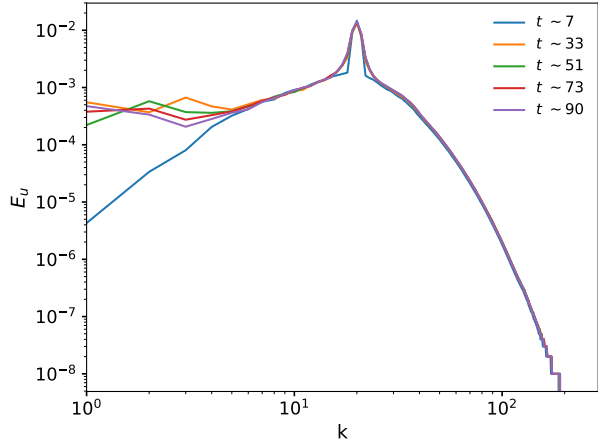
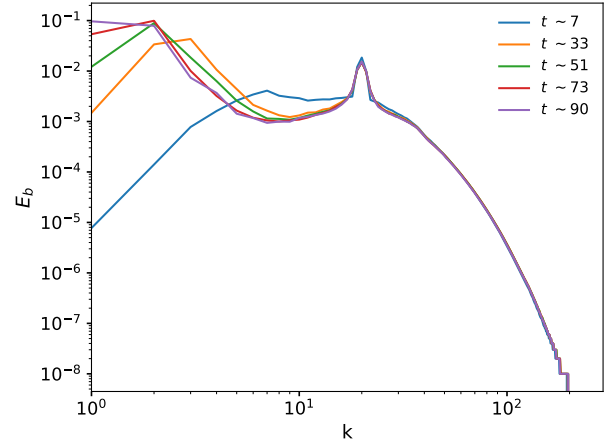
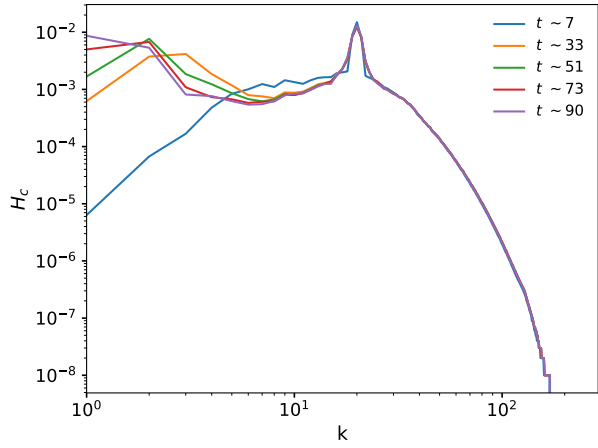
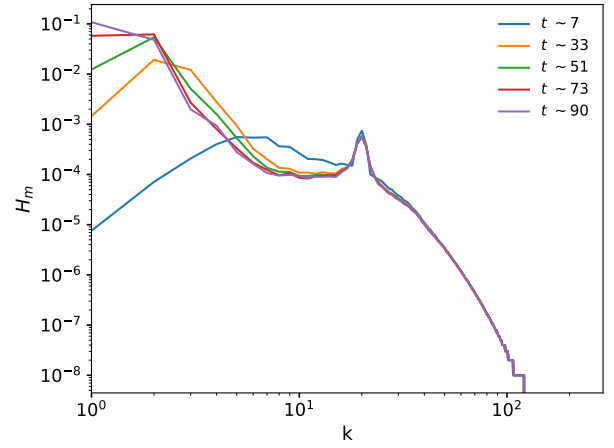
Nom	Ω	B	k_f	$k_f d$	$Rosby$	Re	$Time$
d10k15	20	2	15	1.5	1.75×10^{-3}	1384	47.8
d10k20	20	2	20	2	1.56×10^{-3}	1230	63.5
d20k30	20	1	30	1.5	1.15×10^{-3}	906	68.2
d20k40	20	1	20	2	0.92×10^{-3}	730	66.6
d30k15	20	0.67	15	0.5	1.64×10^{-3}	1296	69.7
d30k30	20	0.67	30	1	1.1×10^{-3}	891	75.9
d40k20	20	0.5	20	0.5	1.46×10^{-3}	1150	78.5
d40k40	20	0.5	40	1	0.91×10^{-3}	715	99.1

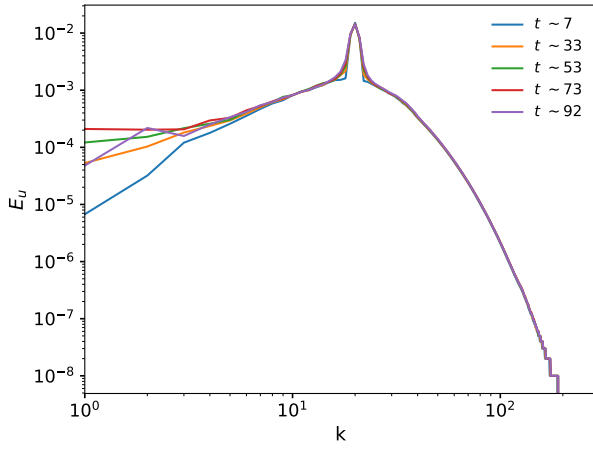
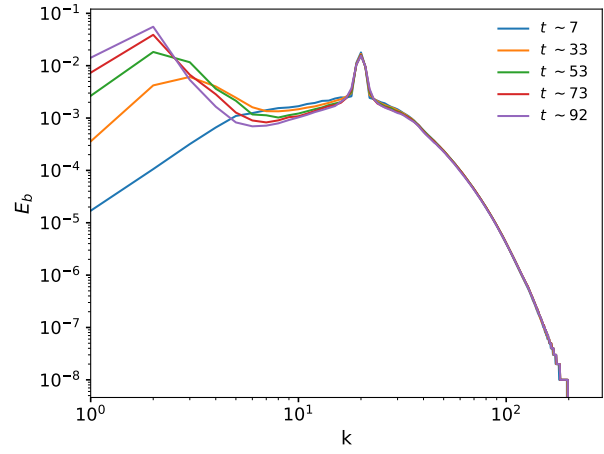
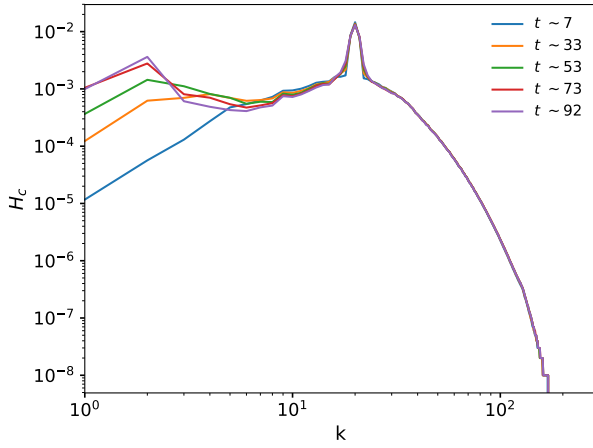
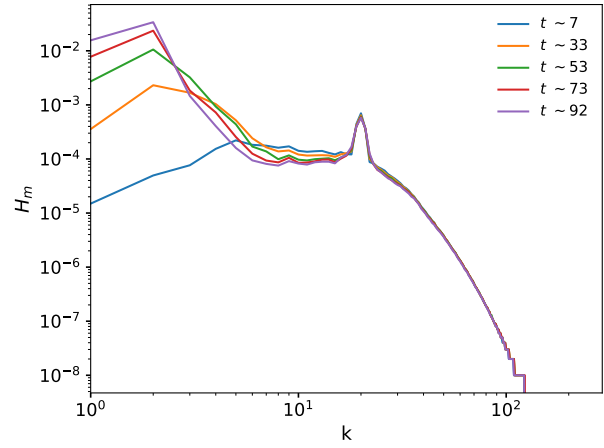
TABLE B.5 – Variations de l'échelle d'injection k_f et du rapport $d = \vec{B}_0/\vec{\Omega}_0$. Les valeurs de ν et η sont fixées à 2×10^{-3} , les valeurs de ν^- et η^- fixées à 2×10^{-2} , la résolution fixée à 256^3 et l'injection est de type H_inj_R .

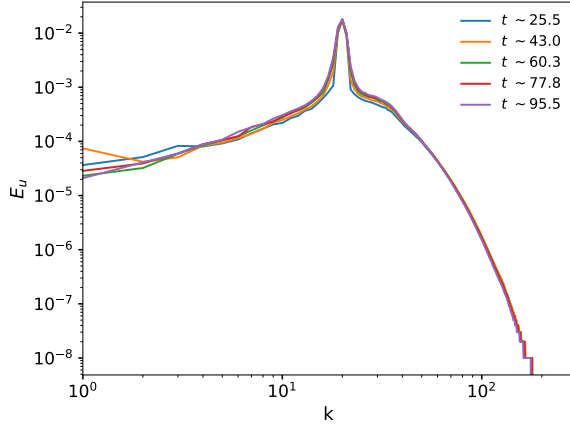
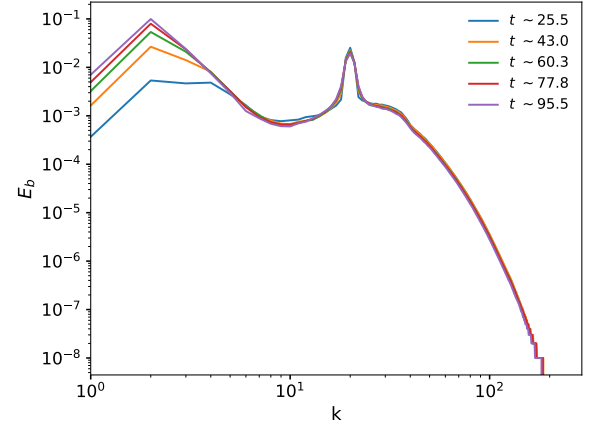
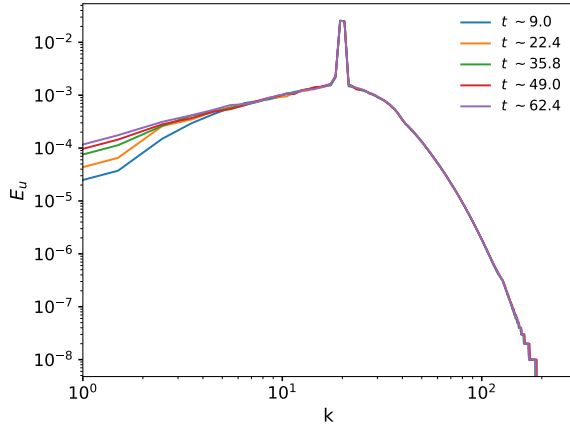
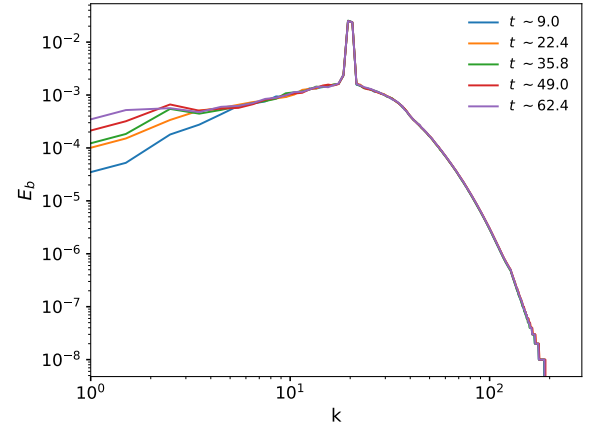
B.2 Figures additionnelles

(a) Spectre de l'énergie cinétique E_u .(b) Spectre de l'énergie magnétique E_b .(c) Spectre de l'hélicité croisée H_c .(d) Spectre de l'hélicité magnétique H_m .FIGURE B.1 – Evolution temporelle des spectres de la simulation *B_inj*.

(a) Spectre de l'énergie cinétique E_u .(b) Spectre de l'énergie magnétique E_b .(c) Spectre de l'hélicité croisée H_c .(d) Spectre de l'hélicité magnétique H_m .FIGURE B.2 – Evolution temporelle des spectres de la simulation U_{inj} .

(a) Spectre de l'énergie cinétique E_u .(b) Spectre de l'énergie magnétique E_b .(c) Spectre de l'hélicité croisée H_c .(d) Spectre de l'hélicité magnétique H_m .FIGURE B.3 – Evolution temporelle des spectres de la simulation H_inj_R .

(a) Spectre de l'énergie cinétique E_u .(b) Spectre de l'énergie magnétique E_b .(c) Spectre de l'hélicité croisée H_c .(d) Spectre de l'hélicité magnétique H_m .FIGURE B.4 – Evolution temporelle des spectres de la simulation H_{inj-L} .

(a) Spectre d'énergie cinétique pour la simulation $20R_B0$.(b) Spectre d'énergie magnétique pour la simulation $20R_B0$.(c) Spectre d'énergie cinétique pour la simulation $0R$.(d) Spectre d'énergie magnétique pour la simulation $0R$.FIGURE B.5 – Spectres d'énergies cinétique et magnétique pour les cas sans rotation $0R$ et sans champ magnétique moyen $20R_B0$.

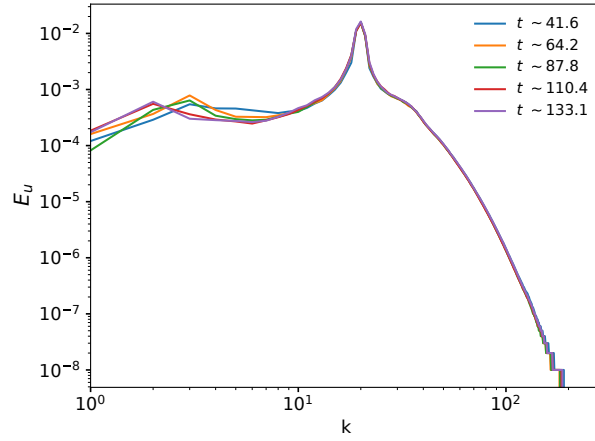
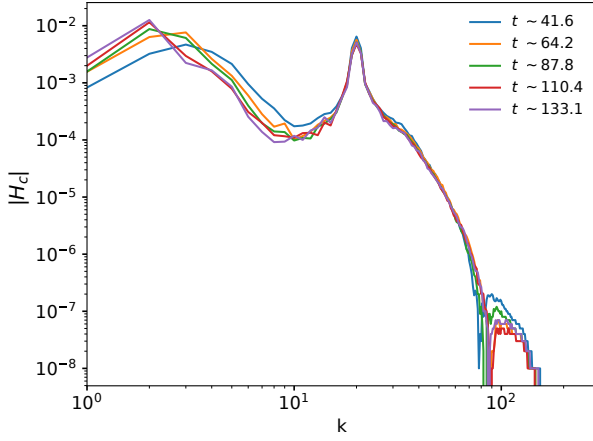
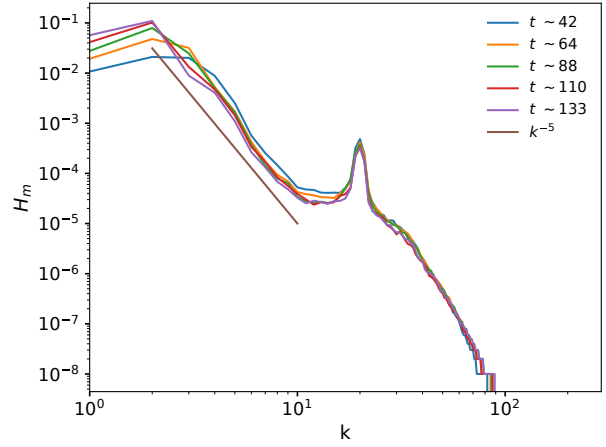
(a) Spectre de l'énergie cinétique E_u .(b) Spectre de l'hélicité croisée H_c .(c) Spectre de l'hélicité magnétique H_m .

FIGURE B.6 – Simulation *20R_0.hypo*. L'hélicité croisée étant négative à toutes les échelles jusqu'à environ $k \sim 90$, la valeur absolue est représentée.

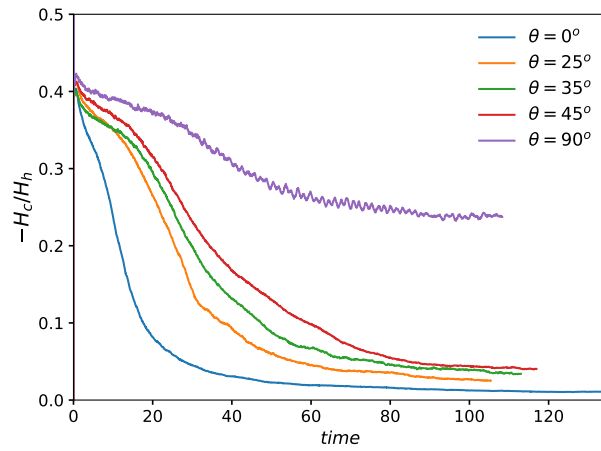


FIGURE B.7 – Contribution de l'hélicité croisée H_c à l'hélicité hybride H_h au cours du temps pour les cinq valeurs de θ étudiées.

Annexe C

Annexe modèle global

Tables de l'ensemble des simulations utilisées dans l'étude globale. Seuls les cas aux Ra/Ra_c les plus élevés ont été effectués dans le cadre de cette thèse, les autres simulations servant de référence pour les autres régimes, ou permettant d'effectuer des comparaisons. Dans ce but, de nombreuses quantités ont été calculées en post-traitement afin de compléter ces tables. De nouveaux diagnostics ont également été réalisés (2.2). Les tirets — indiquent les valeurs non-calculées, les étoiles * les valeurs pour lesquelles une interpolation ou extrapolation a été utilisée. Le nombre de Nusselt Nu correspond au rapport du flux de chaleur total sur le flux de chaleur par conduction, f_{ohm} est la fraction de dissipation ohmique par rapport à la dissipation totale.

E	Ra	Pm	Rm	Λ	Ro	Nu	$\bar{\ell}_u$	L_ν	L_η	k_u	f_{ohm}	f_{dip}
0.0003	150	12	167	22.65	0.0042	1.495	6.77	—	0.087	8.34	0.66	0.77
0.0003	155	6	104.5	0.27	0.0052	1.29	8.2	0.073	0.088*	9.49	0.063	0.9
0.0003	160	6	108	0.45	0.0054	1.315	8.3	0.0755	0.086	9.6	0.083	0.81
0.0003	170	6	121	1.15	0.006	1.41	8.3	0.076	0.081	9.74	0.17	0.79
0.0003	175	12	205	25.4	0.0051	1.6	7	0.072	0.08	—	0.65	0.75
0.0003	180	6	97	12.6	0.0049	1.56	7.12	0.075	0.105	8.67	0.69	0.82
0.0003	196	3	64.7	0.19	0.0065	1.37	8.95	0.073	0.097	10.69	0.085	0.88
0.0003	200	12	228	30	0.0057	1.675	6.82	—	0.060*	8.27	0.633	0.72
0.0003	200	6	114	13	0.0057	1.64	6.9	0.073	0.098	8.42	0.65	0.78
0.0003	220	3	75.96	1.76	0.0076	1.65	8.9	—	0.103*	11	—	0.87
0.0003	225	12	265	34.65	0.0066	1.85	7.4	0.0695	0.072	9.03	0.623	0.73
0.0003	250	6	145	15.8	0.0072	1.87	7.4	0.071	0.0866	9.44	0.64	0.76
0.0003	250	3	80.89	2.82	0.0081	1.73	8.77	0.071	0.0946	10.75	0.46	0.86
0.0003	275	12	330	39.85	0.0083	2.04	8.14	0.065	0.058	9.94	0.59	0.71
0.0003	300	6	178	16.3	0.0089	2.07	8.5	0.067	0.073	10.44	0.6	0.76
0.0003	300	3.5	105	6	0.009	1.95	8.8	0.07	0.087	10.81	0.54	0.82
0.0003	300	12	390.5	42.38	0.0098	2.23	8.77	—	0.046*	10.7	—	0.7
0.0003	375	6	233	16.9	0.012	2.37	9.7	0.065	0.062	11.94	0.54	0.74
0.0003	375	2	76	3.1	0.011	—	10.5	—	0.103*	13.01	—	0.86
0.0003	450	6	278	18.6	0.014	2.63	10.3	0.0614	0.057	12.64	0.506	0.71
0.0003	510	6	318	18.7	0.016	2.83	10.6	0.062	0.053	12.96	0.47	0.7
0.0003	580	6	354	19.5	0.018	3.03	11.13	0.058	0.047	13.56	0.45	0.65
0.0003	630	3	200	5.2	0.02	3.11	12.2	—	0.064*	14.9	—	0.76
0.0003	650	6	388	21.6	0.019	3.2	11.37	0.057	0.046	13.79	0.44	0.69
0.0003	710	6	424	19.8	0.021	3.37	11.93	0.0555	0.042	14.42	0.41	0.69
0.0003	770	6	460	20.5	0.023	3.56	12.21	0.0551	0.041	14.77	0.39	0.7
0.0003	850	6	500	20.4	0.025	4.75	12.45	0.054	0.038	14.97	0.375	0.67
0.0003	920	6	540	19.5	0.0276	4.95	12.6	0.0535	0.035	15.12	0.36	0.66
0.0003	1000	6	583	20.6	0.029	5.15	12.82	0.0525	0.034	15.34	0.36	0.65
0.0003	1100	6	628	20.9	0.031	5.35	12.76	0.053	0.032	15.26	0.34	0.63
0.0003	1200	3	395	3.3	0.039	5.7	12.83	—	0.045*	15.11	0.165	0.55
0.0003	1320	6	684.76	24.9	0.035	4.77	13.04	0.051	0.031	15.47	0.36	0.6
0.0003	1500	8	1020	40	0.038	6.075	13.03	0.0505	0.026	15.34	0.34	0.58
0.0003	1500	6	822.8	21.16	0.041	6.17	13.11	0.052	0.027	15.49	0.3	0.56
0.0003	1800	6	763.14	22.35	0.046	6.53	13.15	0.0507	0.0262	15.44	0.3	0.38
0.0003	2100	1.5	314.3	1.02	0.063	7.17	12.41	—	0.051*	14.48	0.075	0.37

TABLE C.1 – $Ekman = 3 \times 10^{-4}$.

E	Ra	Pm	Rm	Λ	Ro	Nu	$\bar{\ell}_u$	L_ν	L_η	k_u	f_{ohm}	f_{dip}
0.0001	233	3	85.6	0.19	0.0029	1.336	10.9	0.0615	0.083	12.42	0.125	0.91
0.0001	275	12	341	40.7	0.0029	1.95	9.9	–	0.034*	12.045	0.707	0.76
0.0001	275	2	73	0.41	0.0036	1.56	11.5	0.0556	0.0846	13.39	0.27	0.9
0.0001	300	2	77.5	0.68	0.0039	1.65	12	0.056	0.083	14.37	0.344	0.85
0.0001	300	3	117	1.43	0.0039	1.7	11.2	0.0582	0.0719	13.42	0.4	0.84
0.0001	320	12	422	46.1	0.0035	2.21	10.5	0.0487	0.0545	12.83	0.682	0.73
0.0001	320	2	82.8	0.84	0.0041	1.73	12.1	0.0561	0.0776	14.58	0.38	0.85
0.0001	330	12	416.5	47.7	0.0035	2.19	11.1	0.046	0.0545	13.47	0.675	0.76
0.0001	330	10	366	36.1	0.0037	2.22	10.4	0.0476	0.056	12.58	0.68	0.74
0.0001	330	8	293	24.5	0.0037	2.16	10.7	0.049	0.062	13.11	0.685	0.76
0.0001	330	5	178	11	0.0036	2.04	11.12	0.054	0.07	13.26	0.7	0.81
0.0001	330	3	123	2.4	0.0041	1.81	11	0.057	0.075	13.45	0.47	0.86
0.0001	330	2	85	1.04	0.0043	1.77	11.6	0.0573	0.0827	14.06	0.414	0.85
0.0001	330	1.5	64.7	0.66	0.0043	1.78	12.7	0.0554	0.091	15.52	0.38	0.88
0.0001	330	1.3	56.3	0.53	0.0043	1.77	12.9	0.053	0.094	15.7	0.36	0.89
0.0001	340	1	45.7	0.36	0.0046	1.81	13.8	0.0515	0.107	16.84	0.316	0.92
0.0001	350	3	125.3	3.31	0.0042	1.9	11.5	0.0554	0.072	13.7	0.55	0.82
0.0001	350	1	46	0.46	0.0046	1.85	14	0.052	0.103	17.25	0.36	0.92
0.0001	360	1	46.9	0.55	0.0047	1.9	13.9	0.053	0.105	17.21	0.4	0.92
0.0001	375	1	48.4	0.68	0.0048	1.97	13.6	0.053	0.105	16.79	0.436	0.91
0.0001	600	2	132	5.5	0.0066	2.75	14	0.048	0.071	17.24	0.51	0.89
0.0001	600	1	73.5	1.7	0.0073	2.67	15.41	0.05	0.0965	19.34	–	0.83
0.0001	750	8	670	43.3	0.0084	3.63	14.3	0.0424	0.0385	–	0.56	0.57
0.0001	750	5	419.6	23.3	0.0084	3.53	14.62	0.0432	0.0455	17.84	0.58	0.68
0.0001	750	1	85	2.6	0.0085	3.23	16.7	–	0.067*	20.7	0.52	0.84
0.0001	1000	5	524	30.2	0.01	4.18	14.9	0.0423	0.0386	–	0.566	0.67
0.0001	1000	3	335	12.92	0.011	4.14	16.06	0.0415	0.0492	19.49	0.515	0.77
0.0001	1000	2	221	8	0.011	4.07	16.1	0.0425	0.0545	19.57	0.54	0.82
0.0001	1000	1	112.6	3.33	0.0112	3.96	16.11	0.044	0.0704	19.68	0.52	0.89
0.0001	1200	3	388	15.1	0.013	4.68	16.6	0.0408	0.0419	20.05	0.52	0.78
0.0001	1200	2	262	8.95	0.013	4.64	17.7	0.04	0.048	20.3	0.52	0.79
0.0001	1200	1	134	3.6	0.013	4.46	16.9	0.0418	0.0626	20.57	0.48	0.81
0.0001	1400	2	304	9.15	0.015	5.15	17.4	0.04	0.044	21.09	0.48	0.8
0.0001	1500	3	453.5	17.4	0.015	5.46	17.5	0.0384	0.039	20.96	0.49	0.76
0.0001	1500	2	326	8.9	0.016	5.41	17.5	0.039	0.04	21.01	0.465	0.79
0.0001	1750	3	551	15.44	0.018	6.04	18.05	0.0375	0.033	21.52	0.46	0.76
0.0001	1750	2	392	7.82	0.02	6.16	18.2	0.038	0.036	21.87	0.4	0.78
0.0001	1750	1	255	0.67	0.026	6.51	16.57	0.04	0.032	19.51	0.126	0.45
0.0001	1800	1	257	0.75	0.026	6.65	17.4	–	0.039*	20.88	0.13	0.37
0.0001	2000	3	601	18.95	0.02	6.64	18.2	0.037	0.031	21.62	0.46	0.76
0.0001	2000	2	416.23	10.6	0.021	6.57	18.2	–	0.030*	21.63	–	0.71
0.0001	2250	3	651	21	0.022	6.98	18.4	0.037	0.03	21.7	0.45	0.75
0.0001	2250	2	529	4.5	0.026	7.44	18.11	–	0.027*	21.42	–	0.46
0.0001	2500	5	1116	47.18	0.023	7.38	18.7	0.0368	0.0247	21.85	0.44	0.73
0.0001	2500	3	725	19.9	0.0242	7.5	18.3	0.0375	0.0275	21.74	0.43	0.73
0.0001	2800	5	1222.84	48.3	0.025	7.77	18.9	0.036	0.0242	22.03	–	0.71
0.0001	3000	3	933	12.57	0.031	8.5	18.22	0.0215	0.028	21.3	0.35	0.25
0.0001	3500	5	1513.69	45.86	0.03	8.755	18.8	–	0.016*	21.85	–	0.7

TABLE C.2 – $Ekman = 1 \times 10^{-4}$.

E	Ra	Pm	Rm	Λ	Ro	Nu	$\bar{\ell}_u$	L_ν	L_η	k_u	f_{ohm}	f_{dip}
3e-05	400	2.5	132.5	0.37	0.0016	1.51	15.7	0.0113	0.0562	18.31	0.3	0.69
3e-05	460	2.5	152.4	2.37	0.0018	1.97	15.35	0.0134	0.057	18.9	0.64	0.79
3e-05	460	1	68	0.27	0.002	1.8	18	0.0143	0.0727	–	0.373	–
3e-05	490	1	72.4	0.38	0.0022	1.92	18.8	0.0153	0.073	–	0.42	–
3e-05	510	10	609	51.8	0.0018	2.9	15.85	0.0314	0.043	19.23	0.754	0.76
3e-05	510	2.5	158	3.06	0.0019	2.07	15.28	0.0128	0.0592	18.88	0.685	0.86
3e-05	510	1	75	0.44	0.0022	1.97	18.5	–	0.069*	22.76	0.44	0.82
3e-05	510	0.7	53.5	0.31	0.0023	2.03	19.67	0.0156	0.0856	24.29	0.42	0.89
3e-05	520	1	75.5	0.53	0.0023	2.03	18.1	–	0.069*	22.39	0.477	0.82
3e-05	550	1	80	0.63	0.0024	2.14	18.76	0.016	0.0715	23.28	0.493	0.82
3e-05	600	2.5	162.7	7.9	0.002	2.57	15.45	0.0126	0.0644	19.25	0.81	0.77
3e-05	600	2	144	3.35	0.0022	2.34	16.27	0.0143	0.0626	20.33	0.704	0.82
3e-05	600	1	83.9	1.06	0.0025	2.36	18.42	0.0162	0.0737	23.09	0.5825	0.81
3e-05	700	6	480	34	0.0024	3.3	17.2	0.0337	0.0452	20.91	0.745	0.79
3e-05	700	0.5	50	0.5	0.003	2.61	24.1	0.0185	0.0955	30.91	0.47	0.9
3e-05	750	6	504.6	44	0.0025	3.46	16.4	0.0335	0.0449	19.7	0.75	0.74
3e-05	750	1	97.5	1.58	0.0029	2.7	19.58	0.0183	0.0705	24.8	0.609	0.85
3e-05	750	0.5	52.8	0.6	0.0032	2.756	24.3	0.0192	0.0917	31.24	0.459	0.9
3e-05	900	2.5	250	14.3	0.003	3.6	17.3	–	0.038*	–	0.76	0.83
3e-05	900	1	110	2.7	0.0033	3.1	21.76	–	0.057*	27.52	–	0.88
3e-05	900	0.5	61.6	0.72	0.0037	3.07	24.9	0.0214	0.0856	31.97	0.48	0.89
3e-05	1100	6	762	42.3	0.0038	4.45	20.4	0.0119	0.0331	24.78	0.765	0.77
3e-05	1100	4	493	27.3	0.0037	4.41	19.6	0.0126	0.0386	23.94	0.775	0.79
3e-05	1100	2.5	306.5	16.33	0.0037	4.22	19.1	0.0135	0.0477	23.36	0.78	0.84
3e-05	1100	1	132	3.85	0.004	3.92	21.77	0.0142	0.0644	27	0.68	0.9
3e-05	1100	0.5	73.5	1.4	0.0044	4.03	25.2	0.0225	0.0819	31.54	0.56	0.91
3e-05	1100	0.25	43.9	0.25	0.0053	3.85	27.24	0.017	0.1	34.41	0.286	0.95
3e-05	1200	0.25	47.8	0.34	0.0057	4.34	27.4	0.0172	0.097	34.38	0.32	0.95
3e-05	1300	0.25	51	0.4	0.0062	4.8	27.77	0.0172	0.0933	34.56	0.336	0.95
3e-05	1500	0.5	95	2	0.0057	5.2	26.1	0.0243	0.0673	31.79	0.57	0.92
3e-05	1500	0.25	59	0.54	0.0071	5.61	27.9	0.0206	0.086	34.37	0.366	0.94
3e-05	2000	4	824	42.7	0.0062	6.44	23.2	0.0173	0.0288	28.08	0.675	0.8
3e-05	2000	2.5	548	21.75	0.0066	6.6	22.6	0.0187	0.034	27.28	0.67	0.81
3e-05	2000	0.5	97	2	0.0058	6.5	26.4	0.0254	0.0616	32.06	0.58	0.91
3e-05	2000	0.25	75	0.82	0.009	7.15	27.6	0.0211	0.0763	33.55	0.398	0.93
3e-05	2500	0.25	92	0.94	0.011	8.42	26.7	0.0226	0.0666	32.22	0.394	0.91
3e-05	2700	0.25	99	0.95	0.012	8.82	26.37	0.023	0.065	32.6	0.388	0.91
3e-05	3000	2.5	793	25.3	0.0095	8.65	25.2	0.0202	0.027	29.99	0.61	0.81
3e-05	3000	0.25	133	0.28	0.016	10	23.48	0.026	0.044	27.3	0.18	0.33
3e-05	3600	1	376.4	9.82	0.012	9.5	25.28	0.0215	0.0353	30.21	0.586	0.81
3e-05	3600	2.5	950	30.4	0.011	9.87	25.8	–	0.019*	30.7	0.58	0.8
3e-05	4000	2.5	970.57	33.6	0.012	10.09	26.09	0.0224	0.0252	30.72	0.576	0.8
3e-05	4000	1	423.51	9.71	0.0127	10.3	25.37	0.0224	0.0325	30.26	0.575	0.86
3e-05	4500	2.5	1054.3	38.7	0.013	11.06	26.57	0.0225	0.0247	31.18	0.56	0.8
3e-05	4700	2.5	1127.47	35.88	0.014	11.55	26.49	0.0229	0.0237	31.1	0.558	0.8
3e-05	4700	1	496.6	10.19	0.015	11.79	25.57	0.0232	0.0298	30.41	0.55	0.85
3e-05	5500	2.5	1296.45	37.87	0.016	12.7	27.06	0.0229	0.022	31.63	0.53	0.79
3e-05	5500	1	686.72	5.26	0.021	14.05	24.44	0.025	0.0215	28.58	0.38	0.49
3e-05	6000	2.5	1416.5	38.05	0.017	13.48	27.2	–	0.016*	31.7	0.53	0.79
3e-05	7000	2.5	1576.41	42.11	0.019	14.59	27.09	–	0.015*	31.54	0.51	0.78

TABLE C.3 – $Ekman = 3 \times 10^{-5}$.

E	Ra	Pm	Rm	Λ	Ro	Nu	$\bar{\ell}_u$	L_ν	L_η	k_u	f_{ohm}	f_{dip}
1e-05	360	2	94	0.051	0.00049	1.26	22.9	0.0318	0.0496	26.5	0.189	0.96
1e-05	400	2	99	0.073	0.00051	1.28	22	0.0333	0.0515	25.26	0.213	0.94
1e-05	600	2	175	0.53	0.00088	1.71	22.8	0.0318	0.0443	–	0.47	0.83
1e-05	600	1.5	131	0.23	0.00087	1.63	23.25	0.0323	0.0493	–	0.365	0.85
1e-05	600	1	88	0.16	0.00088	1.67	24.3	0.0305	0.0575	–	0.38	0.87
1e-05	650	1	96	0.21	0.00096	1.64	24	0.0314	0.0566	–	0.37	0.86
1e-05	720	1	109	0.61	0.0011	2.19	25.8	0.0284	0.0564	–	0.575	0.82
1e-05	800	1	120	0.99	0.0012	2.6	26.8	0.0283	0.0552	–	0.61	0.84
1e-05	800	0.5	63.75	0.23	0.0013	2.32	31	0.0267	0.07	–	0.453	0.88
1e-05	900	0.5	71.8	0.35	0.0014	2.64	31.5	0.026	0.068	–	0.5	0.85
1e-05	1000	1	142	2.04	0.0014	3.26	25.95	0.0267	0.0578	33.1	0.7	0.89
1e-05	1000	0.5	77	0.47	0.0015	2.9	32.7	0.0247	0.067	42.1	0.53	0.87
1e-05	1100	0.25	46.6	0.16	0.0019	3.12	38.7	0.0243	0.086	49.6	0.35	0.93
1e-05	1200	0.25	49.5	0.19	0.002	3.3	39.1	0.0222	0.0841	50.2	0.36	0.92
1e-05	1300	0.25	53.5	0.21	0.0021	3.52	39.58	0.0219	0.0807	51	0.37	0.9
1e-05	1400	0.25	56.7	0.24	0.0023	3.75	40.1	0.0219	0.0774	51.7	0.374	0.91
1e-05	1500	0.5	119	1.05	0.0024	4.3	36	–	0.050*	–	0.57	–
1e-05	1500	0.25	60.3	0.31	0.0024	4.11	40.69	0.021	0.0753	52.2	0.4	0.9
1e-05	1800	0.5	136	1.84	0.0027	5.68	35.4	–	0.047*	44	0.62	0.87
1e-05	1800	0.25	77	0.51	0.003	5.71	40.56	–	0.063*	50.8	0.45	0.89
1e-05	1800	0.2	62.6	0.33	0.0031	5.56	40.6	0.0208	0.0765	–	0.39	0.68
1e-05	2000	1	227.5	7.7	0.0023	5.82	28.1	0.0237	0.0465	34.5	0.76	0.89
1e-05	2000	0.5	153	2.14	0.0031	–	34	–	0.044*	–	0	–
1e-05	2000	0.25	84	0.72	0.0034	6.66	39.2	–	0.060*	48.7	0.49	0.89
1e-05	2000	0.2	71	0.41	0.0036	6.5	40.2	0.02	0.0723	49.9	0.4075	0.91
1e-05	2000	0.15	56	0.235	0.0037	6.31	39	0.0205	0.0803	48.8	0.33	0.95
1e-05	2250	0.25	92.8	0.95	0.0037	7.6	38.4	–	0.057*	47.3	0.52	0.9
1e-05	2500	1	286	9.05	0.0029	7.02	29.9	0.023	0.0424	36.5	0.77	0.9
1e-05	2500	0.5	184	2.3	0.0036	7.4	36.5	0.021	0.0446	44.7	0.61	0.89
1e-05	2500	0.25	100.5	1.15	0.004	8.31	38.9	0.0208	0.0646	47.7	0.54	0.91
1e-05	3000	0.5	193	4	0.0039	8.73	35.6	–	0.040*	43.5	0.69	0.91
1e-05	3000	0.25	114	1.64	0.0046	9.56	38.7	0.0204	0.062	47.5	0.58	0.91
1e-05	3000	0.2	108	0.85	0.005	9.82	39.5	0.02	0.061	48	0.48	0.89
1e-05	3000	0.15	78.5	0.55	0.0052	9.85	39.5	0.0196	0.0673	48	0.424	0.9
1e-05	5000	1	528.21	14.59	0.0053	12.06	32.02	0.0196	0.0297	38.3	0.75	0.87
1e-05	5000	0.5	295.83	5.31	0.0059	12.24	34.75	0.0202	0.0359	42.3	0.67	0.91
1e-05	5000	0.2	142.3	1.73	0.0071	13.9	38.5	0.0195	0.0505	46.6	0.56	0.93
1e-05	5000	0.15	117	1.05	0.0078	14.4	37.2	0.0203	0.0561	44.7	0.49	0.92
1e-05	6000	0.5	370	5.6	0.0074	13.9	34.2	0.0206	0.0325	41.4	0.63	0.91
1e-05	6000	0.2	162	1.9	0.0081	15.1	37.8	0.0205	0.046	45.5	0.55	0.92
1e-05	6000	0.15	144.1	1.11	0.00875	15.81	36.5	0.0193	0.0511	43.7	0.49	0.92
1e-05	6700	0.15	153.6	1	0.01	16.9	35.1	–	0.044*	41.7	0.46	0.88
1e-05	7000	0.5	430	6.1	0.0086	16	34.4	0.02	0.03	40.8	0.62	0.89
1e-05	7000	0.2	188.2	1.95	0.009	16.7	36.09	0.0204	0.0413	43.2	0.55	0.91
1e-05	8000	0.2	270	0.74	0.013	20.06	32.88	0.0201	0.0313	38.5	0.31	0.43
1e-05	8000	1	805.75	22.14	0.0081	16.47	33.97	0.0201	0.024	40.2	0.694	0.86

TABLE C.4 – $Ekman = 1 \times 10^{-5}$.

Bibliographie

- A. ALEXAKIS : Rotating Taylor-Green Flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 769:46–78, avr. 2015. ISSN 0022-1120, 1469-7645.
- A. ALEXAKIS, P. D. MININNI et A. POUQUET : On the Inverse Cascade of Magnetic Helicity. *The Astrophysical Journal*, 640(1):335–343, mars 2006. ISSN 0004-637X, 1538-4357.
- D. ANDRAULT, J. MONTEUX, M. LE BARS et H. SAMUEL : The deep Earth may not be cooling down. *Earth and Planetary Science Letters*, 443, juin 2016. ISSN 0012-821X.
- J. AUBERT, T. GASTINE et A. FOURNIER : Spherical convective dynamos in the rapidly rotating asymptotic regime. *Journal of Fluid Mechanics*, 813:558–593, fév. 2017.
- J. M. AURNOU, M. A. CALKINS, J. S. CHENG, K. JULIEN, E. M. KING, D. NIEVES, K. M. SODERLUND et S. STELLMACH : Rotating convective turbulence in Earth and planetary cores. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 246:52–71, sept. 2015. ISSN 0031-9201.
- J. M. AURNOU et E. M. KING : The cross-over to magnetostrophic convection in planetary dynamo systems. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 473(2199), mars 2017. ISSN 1364-5021, 1471-2946. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rspa.2016.0731>.
- G. BELMONT, L. REZEAU, C. RICONDA et A. ZASLAVSKY : *Introduction à la physique des plasmas*. ISTE Editions, juil. 2019. ISBN 978-1-78405-461-8.
- D. BISKAMP : Magnetohydrodynamic Turbulence. *Magnetohydrodynamic Turbulence*, p. 310, juil. 2003.
- S. W. BOGUE et R. T. MERRILL : THE CHARACTER OF THE FIELD DURING GEOMAGNETIC REVERSALS. p. 41, 1992.
- A. BRANDENBURG : The Inverse Cascade and Nonlinear Alpha-Effect in Simulations of Isotropic Helical Hydromagnetic Turbulence. *The Astrophysical Journal*, 550(2):824–840, avr. 2001. ISSN 0004-637X, 1538-4357.
- A. BRANDENBURG, A. BIGAZZI et K. SUBRAMANIAN : The helicity constraint in turbulent dynamos with shear. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 325(2):685–692, août 2001. ISSN 0035-8711.
- M. A. CALKINS, J. M. AURNOU, J. D. ELDEREDGE et K. JULIEN : The influence of fluid properties on the morphology of core turbulence and the geomagnetic field. *Earth and Planetary Science Letters*, 359-360:55–60, déc. 2012. ISSN 0012-821X.
- CHANDRASEKHAR : On the stability of the simplest solution of the equations of hydromagnetics. 1956.

- CHANDRASEKHAR : *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Oxford University Press, 1961.
- J. S. CHENG et J. M. AURNOU : Tests of diffusion-free scaling behaviors in numerical dynamo datasets. *Earth and Planetary Science Letters*, 436:121–129, fév. 2016. ISSN 0012-821X.
- U. R. CHRISTENSEN : Dynamo Scaling Laws and Applications to the Planets. *Space Science Reviews*, 152(1-4):565–590, mai 2010. ISSN 0038-6308, 1572-9672.
- U. R. CHRISTENSEN et J. AUBERT : Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields. *Geophysical Journal International*, 166:97–114, juil. 2006.
- U. R. CHRISTENSEN, J. AUBERT et G. HULOT : Conditions for Earth-like geodynamo models. *Earth and Planetary Science Letters*, 296(3):487–496, août 2010. ISSN 0012-821X.
- U. R. CHRISTENSEN, V. HOLZWARTH et A. REINERS : Energy flux determines magnetic field strength of planets and stars. *Nature*, 457(7226):167–169, jan. 2009. ISSN 0028-0836, 1476-4687.
- COWLING : *Solar Electrodynamics - NASA/ADS*, 1953.
- T. G. COWLING : The magnetic field of sunspots. p. 10, 1933.
- E. DORMY : Strong-field spherical dynamos. *Journal of Fluid Mechanics*, 789:500–513, fév. 2016.
- E. DORMY, P. CARDIN et D. JAULT : MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field. *Earth and Planetary Science Letters*, 160:15–30, juil. 1998.
- E. DORMY, L. ORUBA et L. PETITDEMANGE : Three branches of dynamo action. *Fluid Dynamics Research*, 50(1):011415, fév. 2018.
- W. M. ELSASSER : Hydromagnetism. I. A Review. *American Journal of Physics*, 23(9):590–609, déc. 1955. ISSN 0002-9505, 1943-2909.
- W. M. ELSASSER : Hydromagnetism. II. A Review. *American Journal of Physics*, 24(2):85–110, fév. 1956. ISSN 0002-9505, 1943-2909.
- C. FINLAY : Waves in the presence of magnetic field, rotation and convection. 2008.
- U. FRISCH, A. POUQUET, J. LÉORAT et A. MAZURE : Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 68(4):769–778, avr. 1975. ISSN 0022-1120, 1469-7645.
- A. GAILITIS, O. LIELAUSIS, S. DEMENT'EV, E. PLATACIS, A. CIFERSONS, G. GERBETH, T. GUNDRUM, F. STEFANI, M. CHRISTEN, H. HÄNEL et G. WILL : Detection of a Flow Induced Magnetic Field Eigenmode in the Riga Dynamo Facility. *Physical Review Letters*, 84(19):4365–4368, mai 2000. ISSN 0031-9007, 1079-7114.
- S. GALTIER, S. V. NAZARENKO, A. C. NEWELL et A. POUQUET : A weak turbulence theory for incompressible magnetohydrodynamics. *Journal of Plasma Physics*, 63(5):447–488, juin 2000. ISSN 0022-3778, 1469-7807.
- S. GALTIER : Weak turbulence theory for rotating magnetohydrodynamics and planetary dynamos. *Journal of Fluid Mechanics*, 757:114–154, oct. 2014. ISSN 0022-1120, 1469-7645. arXiv : 1405.4091.

- S. GALTIER : *Introduction to Modern Magnetohydrodynamics*. 2016.
- G. A. GLATZMAIER et P. H. ROBERTS : A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal. *Nature*, 377:203–209, sept. 1995.
- R. HELLER, R. T. MERRILL et P. L. MCFADDEN : The variation of intensity of earth’s magnetic field with time. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 131:237–249, août 2002.
- IROSHNIKOV : Turbulence of a conducting fluid in a strong magnetic field. *Astronomicheskii Zhurnal*, 40(4), 1963.
- C. A. JONES : Planetary Magnetic Fields and Fluid Dynamos. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 43:583–614, jan. 2011.
- E. M. KING et B. A. BUFFETT : Flow speeds and length scales in geodynamo models : The role of viscosity. *Earth and Planetary Science Letters*, 371-372:156–162, juin 2013. ISSN 0012-821X.
- E. M. KING, K. M. SODERLUND, U. R. CHRISTENSEN, J. WICHT et J. M. AURNOU : Convective heat transfer in planetary dynamo models : HEAT TRANSFER IN DYNAMOS. *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, 11(6), juin 2010. ISSN 1525-2027.
- A. N. KOLMOGOROV : The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 30-31-32, 1941. ISSN 1364-5021, 1471-2946.
- R. H. KRAICHNAN : Inertial-Range Spectrum of Hydromagnetic Turbulence. *Physics of Fluids*, 8 (7):1385, 1965. ISSN 00319171.
- R. H. KRAICHNAN : Inertial Ranges in Two-Dimensional Turbulence. *Physics of Fluids*, 10(7):1417, 1967. ISSN 00319171.
- C. KUTZNER et U. R. CHRISTENSEN : From stable dipolar towards reversing numerical dynamos. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 131(1):29–45, juin 2002. ISSN 0031-9201.
- P. J. KÄPYLÄ, M. J. KORPI et A. BRANDENBURG : LARGE-SCALE DYNAMOS IN RIGIDLY ROTATING TURBULENT CONVECTION. *The Astrophysical Journal*, 697(2):1153–1163, mai 2009. ISSN 0004-637X.
- B. LEHNERT : Magnetohydrodynamic Waves Under the Action of the Coriolis Force. *The Astrophysical Journal*, 119:647, mai 1954. ISSN 0004-637X, 1538-4357.
- F. MARCOTTE, E. DORMY et A. SOWARD : The Equatorial Ekman Layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 803:395–435, sept. 2016. ISSN 0022-1120, 1469-7645. arXiv : 1602.08647.
- R. T. MERRILL et P. L. MCFADDEN : The geomagnetic axial dipole field assumption. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 139:171–185, oct. 2003.
- P. D. MININNI, D. ROSENBERG et A. POUQUET : Isotropization at small scales of rotating helically driven turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 699:263–279, mai 2012. ISSN 0022-1120, 1469-7645.
- P. D. MININNI, D. ROSENBERG, R. REDDY et A. POUQUET : A hybrid MPI–OpenMP scheme for scalable parallel pseudospectral computations for fluid turbulence. *Parallel Computing*, 37 (6):316–326, juin 2011. ISSN 0167-8191.

- C. MOUTOU, E. M. HÉBRARD, J. MORIN, L. MALO, P. FOUQUÉ, A. TORRES-RIVAS, E. MARTIOLI, X. DELFOSSE, E. ARTIGAU et R. DOYON : SPIROu input catalogue : activity, rotation and magnetic field of cool dwarfs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 472(4):4563–4586, déc. 2017.
- C. NORE, D. C. QUIROZ, L. CAPPANERA et J.-L. GUERMOND : Direct numerical simulation of the axial dipolar dynamo in the Von Kármán Sodium experiment. *EPL (Europhysics Letters)*, 114(6):65002, juin 2016. ISSN 0295-5075.
- P. OLSON et U. R. CHRISTENSEN : Dipole moment scaling for convection-driven planetary dynamos. *Earth and Planetary Science Letters*, 250:561–571, oct. 2006.
- S. A. ORSZAG : Analytical theories of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(2):363–386, avr. 1970. ISSN 1469-7645, 0022-1120.
- L. ORUBA et E. DORMY : Predictive scaling laws for spherical rotating dynamos. *Geophysical Journal International*, 198:828–847, août 2014a.
- L. ORUBA et E. DORMY : Transition between viscous dipolar and inertial multipolar dynamos. *GRL*, 41:7115–7120, oct. 2014b.
- S. OUGHTON, E. R. PRIEST et W. H. MATTHAEUS : The influence of a mean magnetic field on three-dimensional magnetohydrodynamic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 280:95–117, 1994.
- L. PETITDEMANGE : Systematic parameter study of dynamo bifurcations in geodynamo simulations. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 277:113–132, avr. 2018.
- F. PLUNIAN, R. STEPANOV et P. FRICK : Shell Models of Magnetohydrodynamic Turbulence. *Physics Reports*, 523(1):1–60, fév. 2013. ISSN 03701573. arXiv : 1209.3844.
- Y. PONTY, P. D. MININNI, D. C. MONTGOMERY, J.-F. PINTON, H. POLITANO et A. POUQUET : Numerical Study of Dynamo Action at Low Magnetic Prandtl Numbers. *Physical Review Letters*, 94(16):164502, avr. 2005.
- A. POUQUET, U. FRISCH et J. LÉORAT : Strong MHD helical turbulence and the nonlinear dynamo effect. *Journal of Fluid Mechanics*, 77(2):321–354, sept. 1976. ISSN 0022-1120, 1469-7645.
- J. PROUDMAN : On the Motion of Solids in a Liquid Possessing Vorticity. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 92(642):408–424, juil. 1916. ISSN 1364-5021, 1471-2946.
- REYNOLDS : An Experimental Investigation of the Circumstances Which Determine Whether the Motion of Water Shall Be Direct or Sinuous, and of the Law of Resistance in Parallel Channels. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A - Mathematical and Physical Sciences*, 35:17, 1883.
- P. B. RHINES : Waves and turbulence on a beta-plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 69(3):417–443, juin 1975. ISSN 0022-1120, 1469-7645.
- P. H. ROBERTS et A. M. SOWARD : Dynamo Theory. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 24(1):459–512, 1992.
- P. H. ROBERTS et E. M. KING : On the genesis of the Earth’s magnetism. *Reports on Progress in Physics*, 76(9):096801, sept. 2013. ISSN 0034-4885, 1361-6633.

- A. SALHI, F. S. BAKLOUTI, F. GODEFERD, T. LEHNER et C. CAMBON : Energy partition, scale by scale, in magnetic Archimedes Coriolis weak wave turbulence. *Physical Review E*, 95(2):023112, fév. 2017. ISSN 2470-0045, 2470-0053. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.95.023112>.
- N. SCHAEFFER, D. JAULT, H.-C. NATAF et A. FOURNIER : Turbulent geodynamo simulations : a leap towards Earth's core. *Geophysical Journal International*, 211:1–29, oct. 2017.
- M. SCHRINNER, L. PETITDEMANGE et E. DORMY : Dipole Collapse and Dynamo Waves in Global Direct Numerical Simulations. *Apj*, 752:121, juin 2012.
- G. SCHUBERT et K. M. SODERLUND : Planetary magnetic fields : Observations and models. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 187(3):92–108, août 2011. ISSN 0031-9201.
- T. SCHWAIGER, T. GASTINE et J. AUBERT : Force balance in numerical geodynamo simulations : a systematic study. *Geophysical Journal International*, avr. 2019. ISSN 0956-540X, 1365-246X.
- K. SESHASAYANAN, S. J. BENAVIDES et A. ALEXAKIS : On the edge of an inverse cascade. *Physical Review E*, 90(5):051003, nov. 2014. ISSN 1539-3755, 1550-2376. URL <http://arxiv.org/abs/1406.4072>. arXiv : 1406.4072.
- M. K. SHARMA, M. K. VERMA et S. CHAKRABORTY : On the energy spectrum of rapidly rotating forced turbulence. *Physics of Fluids*, 30(11):115102, 2018.
- J. V. SHEBALIN : Ideal homogeneous magnetohydrodynamic turbulence in the presence of rotation and a mean magnetic field. *Journal of Plasma Physics*, 72(4):507–524, août 2006. ISSN 1469-7807, 0022-3778.
- J. V. SHEBALIN, W. H. MATTHAEUS et D. MONTGOMERY : Anisotropy in mhd turbulence due to a mean magnetic field. *Journal of Plasma Physics*, 29(3):525–547, 1983.
- A. SHEYKO, C. FINLAY, J. FAVRE et A. JACKSON : Strong field, scale separated, ultra low viscosity dynamos. *ArXiv e-prints*, jan. 2017.
- A. SHEYKO, C. C. FINLAY et A. JACKSON : Magnetic reversals from planetary dynamo waves. *Nature*, 539(7630):551–554, nov. 2016. ISSN 1476-4687.
- K. M. SODERLUND, E. M. KING et J. M. AURNOU : The influence of magnetic fields in planetary dynamo models. *Earth and Planetary Science Letters*, 333:9–20, juin 2012.
- K. M. SODERLUND, A. SHEYKO, E. M. KING et J. M. AURNOU : The competition between Lorentz and Coriolis forces in planetary dynamos. *Progress in Earth and Planetary Science*, 2:24, déc. 2015.
- B. SREENIVASAN et C. A. JONES : The role of inertia in the evolution of spherical dynamos. *Geophysical Journal International*, 164(2):467–476, fév. 2006. ISSN 0956540X, 1365246X.
- G. I. TAYLOR : Motion of Solids in Fluids When the Flow is Not Irrotational. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 93(648):99–113, mars 1917. ISSN 1364-5021, 1471-2946.
- G. I. TAYLOR : Statistical Theory of Turbulence. p. 25, 1935.
- B. TEACA, M. K. VERMA, B. KNAEPEN et D. CARATI : Energy transfer in anisotropic magneto-hydrodynamic turbulence. *Physical Review E*, 79:046312, Apr 2009.

- M. K. VERMA : Statistical theory of magnetohydrodynamic turbulence : recent results. *Physics Reports*, 401(5):229–380, nov. 2004. ISSN 0370-1573.
- VON KARMAN : On the statistical theory of turbulence. 1937.
- L. WOLTJER : A theorem on force-free magnetic fields. *PNAS*, 44, 1958. URL <https://www.pnas.org/content/pnas/44/6/489.full.pdf>.
- R. K. YADAV, U. R. CHRISTENSEN, S. J. WOLK et K. POPPENHAEGER : Magnetic Cycles in a Dynamo Simulation of Fully Convective M-star Proxima Centauri. *apjl*, 833:L28, déc. 2016.

Titre : Champs magnétiques générés par effet dynamo dans les objets astrophysiques en rotation

Mots clés : Dynamo ; Turbulence ; Simulation numérique ; Mécanique des fluides ; Astrophysique ; Plasmas

Résumé : L'objectif de cette thèse est d'étudier la génération des champs magnétiques astrophysiques via l'effet dynamo. L'impact d'une rotation globale et d'un champ magnétique moyen imposés simultanément, configuration appropriée notamment aux intérieurs planétaires et stellaires, est au cœur de cette étude. Une attention particulière est portée à la dynamique temporelle du système, ainsi qu'à la topologie du champ généré. Dans le but d'obtenir une vision d'ensemble, plusieurs approches numériques ont été utilisées, du modèle cubique (code TURBO) focalisé sur l'étude de phénomènes locaux jusqu'au modèle sphérique (code PaRoDy) permettant une comparaison plus directe avec les observations. Ces deux types de géométrie se complètent dans la mesure où l'approche locale, moins contraignante, permet d'observer précisément les conséquences d'un paramètre tandis que l'approche globale est soumise à des contraintes plus réalistes, telles que la convection thermique. Le modèle local a révélé une cascade inverse d'hélicité hybride, second invariant de la MHD doublement anisotrope, dont l'intensité dépend de plusieurs paramètres. Celle-ci est plus importante lorsque la polarisation favorisée par le forçage cor-

respond aux ondes magnétostrophiques (polarisation droite). Également, l'angle d'inclinaison entre les axes du champ magnétique et de la rotation joue un rôle prépondérant, en particulier lorsque $\theta > 35^\circ$, valeur pour laquelle le processus à l'origine de la cascade change et l'affaiblit. Enfin, augmenter le nombre de Prandtl magnétique (Pm) mène à un transfert de l'énergie magnétique vers les grandes échelles plus rapide et plus important. L'étude globale montre également le rôle clé de Pm dans la génération du champ à grande échelle. En effet, les nouvelles valeurs explorées montrent que de forts champs dipolaires peuvent être maintenus dans des régimes plus turbulents. Ce comportement spécifique correspond aux dynamos pour lesquelles la force de Lorentz est non négligeable à grande échelle. L'importance relative de l'inertie face aux forces magnétiques est décisive dans la topologie du champ observé. Ainsi, la transition d'un régime dipolaire vers un régime multipolaire est retardée par la force de Lorentz, composante essentielle des équilibres de forces en astrophysique. Ces résultats pourraient s'appliquer à divers systèmes astrophysiques, notamment au champ géomagnétique pendant les renversements.

Title : Magnetic fields generated by dynamo in rotating astrophysical objects

Keywords : Dynamo ; Turbulence ; Numerical simulations ; Fluids Mechanics ; Astrophysics ; Plasmas

Abstract : The objective of this thesis is to investigate the generation of astrophysical magnetic fields via the dynamo effect. The impact of a global rotation and an average magnetic field imposed simultaneously, suitable configuration especially for planetary and stellar interiors, is the main issue of this study. Particular attention is paid to the temporal dynamics of the system, as well as to the topology of the generated field. In order to obtain an overview of the phenomenon, several numerical approaches were used, from the cubic model (TURBO code) focused on the study of local phenomena to the spherical model (PaRoDy code) allowing a more direct comparison with observations. These two types of geometry complement each other : the less constraining local approach makes it possible to observe precisely the consequences of a parameter, while the global approach is subject to more realistic constraints, such as thermal convection. The local model revealed an inverse cascade of hybrid helicity, the second invariant of the doubly anisotropic MHD, whose intensity depends on several parameters. The latter is more

important when the polarization favored by the forcing corresponds to magnetostrophic waves (right polarization). Also, the tilt angle between the magnetic field and the rotation axes plays a major role, especially when $\theta > 35^\circ$, the value for which the process causing the cascade changes and weakens it. Finally, increasing the number of magnetic Prandtl (Pm) leads to a faster and more important transfer of magnetic energy to large scales. The global study also shows the key role of Pm in large-scale field generation. Indeed, the new values explored show that strong dipole fields can be maintained in more turbulent regimes. This specific behaviour corresponds to dynamos for which the Lorentz force is not negligible at large scales. The relative importance of inertia compared to magnetic forces is decisive in the topology of the observed field. Thus, the transition from a dipolar regime to a multipolar regime is delayed by the Lorentz force, the essential component of force balances in astrophysics. These results could be applied to various astrophysical systems, including the geomagnetic field during reversals.

