



HAL
open science

Méthodes de faisceaux gaussiens pour la modélisation d'ondes de volume ultrasonores : application à la simulation du contrôle non-destructif

Olivier Jacquet

► **To cite this version:**

Olivier Jacquet. Méthodes de faisceaux gaussiens pour la modélisation d'ondes de volume ultrasonores : application à la simulation du contrôle non-destructif. Acoustique [physics.class-ph]. Sorbonne Université, 2018. Français. NNT : 2018SORUS204 . tel-02492055

HAL Id: tel-02492055

<https://theses.hal.science/tel-02492055>

Submitted on 26 Feb 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sorbonne Université

École doctorale **Sciences Mécaniques, Acoustique, Électronique, Robotique de Paris (SMAER)**

Unité de recherche **CEA/LIST/DISC/LSMA**

Thèse présentée par **Olivier Jacquet**

Soutenue le **5 décembre 2018**

En vue de l'obtention du grade de Docteur de Sorbonne Université

Discipline **Acoustique**

Méthodes de faisceaux gaussiens pour la modélisation d'ondes de volume ultrasonores

Thèse dirigée par Didier CASSEREAU

Composition du jury

<i>Rapporteurs</i>	Daniel BOUCHE	Directeur de recherche – CEA DAM	
	Marc DESCHAMPS	Directeur de recherche – Université de Bordeaux	
<i>Examineurs</i>	Smaine ZEROUG	Directeur de recherche – Schlumberger	
	Christine LETROU	Professeur – Télécom SudParis	
	Régis MARCHIANO	Professeur – Sorbonne Université	
	Nicolas LEYMARIE	Ingénieur de recherche – CEA LIST	Encadrant
<i>Directeur de thèse</i>	Didier CASSEREAU	Maître de conférences – Sorbonne Université	

Mots clés : acoustique physique, contrôle non-destructif, ultrasons, ondes de volume, faisceaux gaussiens

Keywords: physical acoustics, non-destructive testing, ultrasonics, bulk waves, gaussian beams

Cette thèse a été préparée au

CEA/LIST/DISC/LSMA

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives

Institut List | CEA Saclay Digitéo Labs

Bât. 565-PC120

F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex

France

Méthodes de faisceaux gaussiens pour la modélisation d'ondes de volume ultrasonores**Résumé**

Le contexte d'étude est celui du développement de la plate-forme logicielle CIVA, dédiée notamment à la simulation du Contrôle Non-Destructif (CND) par ultrasons. Le calcul de champ hérite de la méthode des rayons, et peut souffrir – dans des configurations particulières – de la présence de caustiques et d'ombrages. Les faisceaux gaussiens sont des candidats pertinents dans la régularisation de ces singularités, et l'objectif est de développer et valider une méthode efficace de calcul de champ par superposition de faisceaux gaussiens. Un travail bibliographique préliminaire a permis de mettre en évidence la problématique associée à l'initialisation de ces faisceaux gaussiens, dont les méthodes diffèrent selon les auteurs et les champs disciplinaires. Du point de vue du CND, la variété physique et la complexité géométrique des pièces à inspecter guide le modélisateur vers un traitement le plus générique possible. Une façon d'initialiser une famille de faisceaux gaussiens consiste à représenter la donnée du problème posé (conditions initiales et/ou aux bords) par un espace fonctionnel vérifiant les propriétés d'un *frame*. En munissant le *frame* d'un noyau gaussien, on génère à l'aide d'algorithmes rapides un ensemble univoque de conditions initiales pour une famille de faisceaux gaussiens. La superposition de ces derniers fournit alors une solution approchée au problème. Dans le cadre de cette thèse, cette stratégie est déclinée en régimes transitoire et harmonique. La contribution majeure de ces travaux réside dans la validation quantitative de cette initialisation par *frame*, par l'application à des configurations représentatives du CND par ondes de volume ultrasonores.

Mots clés : acoustique physique, contrôle non-destructif, ultrasons, ondes de volume, faisceaux gaussiens

Abstract

This work is part of the CIVA software development. CIVA is dedicated to non-destructive testing (NDT) simulation, and especially to efficient ultrasonic bulk wave simulation. However, its modeling approach, based on the ray theory under high frequency assumption, may suffer – in some specific cases – from caustics and shadowing effects. Gaussian beams are known to be suitable candidates for removing those singularities, and the purpose of this research work is to develop and validate an efficient computing method using Gaussian beam superpositions. A preliminary review of literature revealed an underlying problematic related to the Gaussian beam initialization. Indeed, there is no standard method for initializing a relevant set of Gaussian beams: existing approaches differ, depending on the authors and on the examples they discuss. From the perspective of NDT modeling, it is still necessary to develop a numeric solution which is generic enough to indiscriminately handle a wide variety of materials, geometries and input data. One way of addressing Gaussian beam initialization is – for a given problem – to obtain a frame representation of the initial and/or boundary conditions. By choosing a Gaussian kernel, it is then possible to generate an unequivocal set of initial Gaussian beam parameters. Finally, the approximated solution is given by the corresponding propagated Gaussian beams. In this work, we derived this frame approach in both time and frequency domains. The main contribution of this thesis research lies in the quantitative validation of this method, through typical configurations of ultrasonic NDT.

Keywords: physical acoustics, non-destructive testing, ultrasonics, bulk waves, gaussian beams

CEA/LIST/DISC/LSMA

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives – Institut List | CEA
Saclay Digitéo Labs – Bât. 565-PC120 – F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex – France

Table des matières

Résumé	vii
Table des matières	ix
Introduction	1
1 Contexte d'étude	7
1.1 Faisceaux gaussiens : quelques approches historiques	9
1.1.1 Solution de l'équation parabolique	9
1.1.2 Rayonnement paraxial du point source complexe	12
1.1.3 Rayonnement approché d'une source gaussienne	14
1.2 Propagation d'ondes de volume ultrasonores	18
1.2.1 Milieu fluide	19
1.2.2 Milieu solide	22
1.2.3 Régime harmonique	25
1.3 Calcul de champ dans l'approximation hautes fréquences	28
1.3.1 Régime hautes fréquences en contrôle non-destructif	28
1.3.2 Méthode des rayons	31
1.3.3 Tracé de rayon	35
1.3.4 Amplitude rayon	39
1.3.5 Comportements singuliers	42
2 Faisceaux gaussiens ultrasonores	47
2.1 Régime transitoire	49
2.1.1 Ansatz complexe et tracé de rayon	49
2.1.2 Développements paraxiaux	50
2.1.3 Résolution de la fonction de phase	51
2.1.4 Résolution de la fonction d'amplitude	52
2.1.5 Propagation des faisceaux gaussiens transitoires	53
2.2 Régime harmonique	55
2.2.1 Ansatz complexe et tracé de rayon	55
2.2.2 Coordonnées rayon-centrées	56
2.2.3 Développements paraxiaux	56

2.2.4	Tracé dynamique de rayon	57
2.2.5	Propagation des faisceaux gaussiens harmoniques	59
2.3	Caractéristiques physiques	61
2.3.1	Régime transitoire	61
2.3.2	Régime harmonique	66
3	Superposition de faisceaux gaussiens	75
3.1	Résolution asymptotique avec conditions aux bords	77
3.1.1	Modélisation avec conditions aux bords	77
3.1.2	Intégrales de faisceaux gaussiens	81
3.2	Convergence des solutions par faisceaux gaussiens	86
3.2.1	Régime transitoire	86
3.2.2	Régime harmonique	89
3.3	Méthodes d'initialisation de faisceaux par optimisation	92
3.3.1	Multi-faisceaux gaussiens en régime harmonique	92
3.3.2	Décomposition itérative en régime transitoire	100
4	Théorie des frames et initialisation de faisceaux gaussiens	113
4.1	Représentation sur <i>frame</i> des conditions aux bords	115
4.1.1	Représentation atomique de champs oscillants	115
4.1.2	Théorie des <i>frames</i>	116
4.1.3	Stratégie de modélisation appliquée aux faisceaux gaussiens	118
4.2	Régime harmonique et <i>frame</i> de Gabor	119
4.2.1	Représentation sur <i>frame</i> de Gabor d'un piston plan	119
4.2.2	Solution propagée	123
4.2.3	Calcul numérique de la représentation	126
4.3	Régime transitoire et <i>frame</i> de paquets d'onde gaussiens	136
4.3.1	Représentation sur <i>frame</i> d'une donnée de Cauchy	137
4.3.2	Solution propagée	141
4.3.3	Calcul numérique de la représentation	142
5	Simulations de champs ultrasonores rayonnés et propagés	153
5.1	Rayonnement de sources ultrasonores en régime harmonique	155
5.1.1	Transducteur circulaire	156
5.1.2	Transducteur carré	159
5.1.3	Commentaires sur la méthode	161
5.2	Propagation de champ transitoire diffracté	163
5.2.1	Diffraction par un défaut linéique rectiligne	164
5.2.2	Diffraction par un défaut linéique courbe	168
5.2.3	Commentaires sur la méthode	172
	Conclusion et perspectives	173
	Bibliographie	179

A Calculs intermédiaires	193
A.1 Résolution d'une équation de Riccati	195
A.2 Résolution d'une équation de transport	195
A.3 Propagation d'un paquet d'onde gaussien en milieu homogène	197
A.4 Calcul de faisceau gaussien harmonique en milieu homogène	199
Table des figures	203
Liste des tableaux	205

Introduction

Thématique de recherche

Les travaux de thèse rapportés dans ce manuscrit ont été réalisés au Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives (CEA), au sein du Département d'Imagerie et Simulation pour le Contrôle (DISC). Les activités du DISC répondent à la mission d'innovation que se donne le CEA sur les techniques d'imagerie et de contrôle non destructif (CND). La fonction première du CND est d'évaluer l'état de santé mécanique d'une pièce ou d'une structure durant sa phase de fabrication, de mise en service ou de maintenance, sans en altérer son intégrité. Cette évaluation doit conduire à une prise de décision sur la suite de la fabrication ou de l'exploitation de cette pièce, et participe éventuellement à un diagnostic sur les sources d'usure prématurée et d'apparition de défauts. Les techniques et technologies de CND s'appuient sur des mécanismes physiques particulièrement sensibles à l'état de santé de la pièce inspectée, de sorte que la mesure physique contienne une information exploitable dans une démarche d'inspection. Ainsi, les ondes élastiques ultrasonores, les courants de Foucault et la radiographie sont les procédés les plus sollicités en CND.

Modélisation du contrôle non-destructif par ultrasons

A travers ces techniques, les activités du DISC se portent sur le développement de capteurs et de procédés d'inspection, d'outils de simulation et de traitement des données. Dans le cadre de ces travaux de thèse, nous nous sommes intéressés particulièrement aux techniques de CND par ondes de volume ultrasonores. Par l'émission et la réception de tels ultrasons, il est en effet possible d'inspecter une pièce dans son volume et de détecter la présence d'un défaut ou d'une inclusion sub-surfacique, voire de les dimensionner. La mesure finale est toutefois impactée par des perturbations multiples du front d'onde initialement émis, et dont il est nécessaire de caractériser et quantifier les effets *a priori*. Ainsi, pour faciliter l'interprétation de ces mesures, accompagner la conception de nouveaux procédés, mais aussi simuler des études industrielles spécifiques, les activités de recherche et de

développement du Laboratoire de Simulation et Modélisation Acoustique (LSMA) du DISC se concentrent sur le développement et la validation de modèles ultrasonores.

Enjeux de modélisation et types de méthodes

L'éventail des propriétés des matériaux et des géométries des pièces rencontrées étant très large en pratique, les perturbations que sont susceptibles de rencontrer les ultrasons au cours de la propagation sont d'origines multiples : réflexion, réfraction, diffraction, atténuation, conversion de modes, diffusion multiple, *etc.* Or, l'activité de modélisation répond à un besoin quantitatif de description des configurations de contrôle, et ne peut s'affranchir de cette diversité des spécificités physiques. A ces besoins de généralité et de précision s'ajoute la contrainte supplémentaire du temps de calcul, que l'on souhaite toujours le plus bas possible en pratique. Dans ce contexte exigeant, la littérature dédiée met en avant deux classes de méthodes pertinentes.

La première est celle des méthodes dites *purement numériques*, qui regroupe essentiellement la méthode des différences finies [16, 134, 153], des éléments finis [111, 35] et des éléments finis de frontière [12, 36]. Elles sont basées sur la discrétisation directe, dans le domaine de résolution, des équations aux dérivées partielles modélisant la configuration de contrôle. Ces méthodes – également applicables et appliquées à d'autres phénomènes physiques – sont réputées précises, à la condition qu'il y ait un nombre de points de discrétisation suffisant par longueur d'onde. Or dans la plupart des configurations de CND par ultrasons, les informations essentielles du contrôle peuvent se propager sur un très grand nombre de longueurs d'onde. Ainsi, pour des questions de mémoire disponible et de temps de calcul, leur application sur des machines de calcul personnelles reste à ce jour limité à des cas bidimensionnels ou tridimensionnels simplifiés.

La seconde classe regroupe les méthodes dites *asymptotiques*. Elles reposent sur une approximation de régime hautes fréquences, c'est-à-dire qu'elles sont d'autant plus précises que les longueurs d'onde qui caractérisent le champ ultrasonore sont petites devant les dimensions caractéristiques du milieu de propagation. Au vu des limites rencontrées par les méthodes numériques pour modéliser la propagation réaliste des ultrasons sur de longues distances, l'hypothèse d'un régime hautes fréquences est donc une réponse pertinente. Parmi ces méthodes, on distingue d'une part les modèles d'interaction avec des défauts ou des discontinuités géométriques [152, 42, 103] qui reposent sur différentes formes de théorie de la diffraction, et d'autre part les modèles de propagation [72, 29, 60, 33] hérités pour la plupart de la *méthode des rayons* [2, 52]. Grâce à l'approximation hautes fréquences, ces méthodes permettent l'écriture analytique de solutions approchées, et donc de simuler des configurations de contrôle à moindre coût numérique.

La plate-forme CIVA

Depuis plus de 20 ans, la plate-forme CIVA [23], développée au DISC, fournit une réponse logicielle aux besoins de simulation exprimés par l'industrie du CND, à la fois pour les techniques par ultrasons, par courant de Foucault et par radiographie X. Le volet ultrasonore de CIVA est alimenté par les travaux du LSMA, et repose essentiellement sur les méthodes asymptotiques évoquées précédemment. En particulier, le module de calcul de champ propagé repose sur la *méthode des pinceaux* [72]. Inspirée du formalisme développé par DESCHAMPS dans [52], cette méthode développée par GENGEMBRE dans ses travaux de thèse [70] permet de calculer efficacement la réponse impulsionnelle de transducteurs ultrasonores à partir d'une approximation de type rayon, dans des milieux potentiellement complexes et décrits de façon homogène par morceaux. Afin de modéliser la propagation ultrasonore dans des milieux anisotropes continument variables, GARDAHAUT, dans ses travaux de thèse [68], a réinvesti la méthode de *tracé dynamique de rayon* habituellement utilisée en géophysique [29].

Méthode des rayons et comportements singuliers

Que ce soit par la *méthode des pinceaux* ou par la méthode de *tracé dynamique de rayons*, GENGEMBRE et GARDAHAUT ont été confrontés à des complications liées aux caustiques [73, 68]. Les caustiques sont des couches limites de diffraction qui peuvent apparaître dans certaines configurations particulières de contrôle, et dans lesquelles peuvent se concentrer une infinité de rayons. Si les développements asymptotiques des fonctions de phase et d'amplitude portées par ces rayons sont d'ordre trop faible, alors ces fonctions vont respectivement être discontinues et diverger au voisinage des caustiques. Ces comportements singuliers n'ont pas de réalité physique et empêchent toute analyse quantitative du résultat. Les ombrages (zones non atteintes par tracé de rayons) et les ondes de tête (diffraction au voisinage d'un angle critique) sont d'autres exemples de phénomènes ondulatoires singuliers pour des modèles dérivés directement de la méthode des rayons.

Faisceaux gaussiens et problématiques associées

Chercher à développer une méthode asymptotique qui n'est pas limitée par la présence éventuelle de caustiques conduit, notamment, à étudier les faisceaux gaussiens. Les faisceaux gaussiens sont des solutions asymptotiques aux équations de propagation d'onde construites à l'aide d'un développement de Taylor, à coefficients complexes et au voisinage des rayons « classiques », des fonctions d'amplitude et de phase. Ainsi construits, l'énergie portée par ces faisceaux est localisée au voisinage des rayons selon une distribution

d'amplitude gaussienne. Une propriété remarquable est que leurs fonctions d'amplitude et de phase sont bien définies au voisinage des caustiques. C'est cette propriété qui motive les premiers travaux de recherche sur les faisceaux gaussiens, dans le domaine de l'électromagnétisme [104, 51] et de la géophysique [102, 145].

La principale difficulté dans la mise œuvre pratique d'une méthode de faisceaux gaussiens réside dans le choix de leurs paramètres constitutifs. En effet, la construction par développement de Taylor à coefficients complexes introduit des degrés de liberté supplémentaires par rapport à la construction d'un rayon « classique », auxquels il est nécessaire d'affecter des valeurs pertinentes. L'absence de démarche générique pour initialiser ces paramètres constitutifs est une difficulté qui a par exemple été exprimée par POPOV [146]. Une autre difficulté exprimée par BABIČ et POPOV [8] concerne la justification rigoureuse de la convergence de solutions approchées par la superposition de faisceaux gaussiens.

Organisation du manuscrit

Le principal objectif de cette thèse a été d'initier au CEA une étude approfondie et transdisciplinaire des faisceaux gaussiens, en vue de proposer une nouvelle méthode appliquée à la modélisation du CND par ultrasons. La bibliographie de ce manuscrit de thèse rend compte du caractère exploratoire de ces travaux de recherche, et le corps du document vise à appliquer, de façon progressive, la théorie des faisceaux gaussiens à la simulation du CND par ultrasons. A travers cette progression, la problématique liée à l'initialisation des faisceaux est explicitée, et les méthodes finalement choisies reposant sur la théorie des *frames* tentent d'y fournir une réponse générique pour un coût numérique réduit. Ainsi, ce manuscrit de thèse est composé de cinq chapitres :

Chapitre 1 : Contexte d'étude. Le premier chapitre décrit, par thèmes, les contours de ces travaux de thèse. La première section a pour objectif de décrire les faisceaux gaussiens à la lumière de différentes constructions et approches historiques. La section suivante précise le cadre appliqué du CND par ondes de volume ultrasonores, dans lequel on souhaite *in fine* proposer une méthode de faisceaux gaussiens. La troisième section de ce premier chapitre introduit le formalisme asymptotique sur lequel repose la méthode des rayons, base théorique à partir de laquelle les faisceaux gaussiens seront construits par la suite.

Chapitre 2 : Faisceaux gaussiens ultrasonores. A partir du formalisme introduit dans le chapitre précédent par la méthode des rayons, on construit les faisceaux

gaussiens par un *développement paraxial* à coefficients complexes des fonctions d'amplitude et de phase. Les systèmes régissant leur propagation sont obtenus, de façon indépendante, en régime transitoire et en régime harmonique. Différents cas particuliers sont présentés, sous forme d'exemples, et permettent d'étudier la forme de ces solutions. La dernière section de ce chapitre est consacrée à l'évolution au cours de la propagation de la largeur des faisceaux et de la courbure de leur front d'onde.

Chapitre 3 : Superposition de faisceaux gaussiens. Les problèmes de référence que l'on souhaite résoudre à l'aide de faisceaux gaussiens sont posés explicitement, associés à des conditions aux bords précises. La forme potentiellement complexe des solutions que l'on cherche à obtenir nécessite alors de sommer plusieurs faisceaux gaussiens. Afin de justifier la convergence asymptotique de ces superpositions, on s'appuie dans la deuxième section sur des résultats d'analyse mathématique issus de la littérature. Alors que la question de l'initialisation des faisceaux gaussiens reste ouverte à ce stade, on illustre dans la troisième section deux méthodes existantes dont l'optimisation est basée sur la reconstruction optimisée des conditions au bord. La première est exprimée en régime harmonique (méthode multi-faisceaux gaussiens [181]) et la seconde en régime transitoire (méthode de décomposition itérative [171]).

Chapitre 4 : Théorie des frames et initialisation de faisceaux gaussiens. Afin de réduire le temps de calcul associé à l'initialisation optimisée (en régime transitoire) tout en gagnant en généralité (en régime harmonique), on expose succinctement la théorie des *frames*. Cette dernière permet de représenter tout type de conditions aux bords, mesurables, sur des espaces fonctionnels sur-complets. En régime harmonique, c'est un *frame* de Gabor qui est utilisé pour initialiser une famille de faisceaux gaussiens issus d'un terme source plan. En régime transitoire, les faisceaux gaussiens sont initialisés à partir d'une représentation de la donnée de Cauchy sur un *frame* de paquets d'onde gaussiens. Les étapes d'implémentation de la décomposition sur *frame* sont résumées dans les deux cas, et les reconstructions ainsi obtenues sont validées quantitativement par des exemples concrets.

Chapitre 5 : Simulations de champs ultrasonores rayonnés et propagés. Le dernier chapitre de ce manuscrit est dédié à la validation des solutions propagées par superposition de faisceaux gaussiens, initialisés par représentation sur *frame* des

conditions aux bords. La première section, dédiée au régime harmonique, valide quantitativement la méthode basée sur le *frame* de Gabor et est comparée à la méthode usuelle des *multi-faisceaux gaussiens* [181] par le calcul du champ rayonné par des transducteurs caractéristiques du CND. La seconde section est dédiée au régime transitoire, et évalue quantitativement la méthode de *frame* par comparaison avec un code d'éléments finis spectraux [94], dans des cas de champs diffractés par des corps rigides. Un dernier cas d'application illustre la possibilité d'une approche hybride, mêlant les éléments finis spectraux avec des superpositions de faisceaux initialisés sur *frame* de paquets d'onde gaussiens.

Les trois premiers chapitres et la section 4.1.2 doivent être lus dans l'ordre d'apparition. Ensuite, les traitements du régime harmonique (sections 4.2 puis 5.1) et du régime transitoire (sections 4.3 puis 5.2) peuvent être lus indépendamment.

Communications

Ces travaux de thèse ont donné lieu aux communications suivantes :

- 16th Anglo-French Physical Acoustics Conference, janvier 2017, Marseille.
Acte de conférence : *A Gaussian beam method for ultrasonic non-destructive evaluation modeling* [96]
- Les journées COFREND, mai 2017, Strasbourg.
Poster : *Modélisation de CND par ultrasons : évaluation des faisceaux gaussiens pour le traitement des phénomènes critiques et singuliers*
- 13th International Conference on Theoretical and Computational Acoustics, août 2017, Vienne.
Abstract : *A Gaussian wave packets approach for transient ultrasonic NDE modeling*
- 14ème Congrès Français d'Acoustique, avril 2018, Le Havre.
Abstract : *Méthodes de faisceaux gaussiens pour la modélisation de champs ultrasonores transitoires en contrôle non-destructif*
- 3ème Doctoriales COFREND, mai 2018, Marne-la-Vallée.
Abstract : *Méthodes de faisceaux gaussiens pour la modélisation de champs ultrasonores transitoires en contrôle non-destructif*

Chapitre 1

Contexte d'étude

Sommaire

1.1 Faisceaux gaussiens : quelques approches historiques	9
1.1.1 Solution de l'équation parabolique	9
1.1.2 Rayonnement paraxial du point source complexe	12
1.1.3 Rayonnement approché d'une source gaussienne	14
1.2 Propagation d'ondes de volume ultrasonores	18
1.2.1 Milieu fluide	19
1.2.2 Milieu solide	22
1.2.3 Régime harmonique	25
1.3 Calcul de champ dans l'approximation hautes fréquences	28
1.3.1 Régime hautes fréquences en contrôle non-destructif	28
1.3.2 Méthode des rayons	31
1.3.3 Tracé de rayon	35
1.3.4 Amplitude rayon	39
1.3.5 Comportements singuliers	42

L'objectif de ce premier chapitre est de définir précisément la base théorique sur laquelle les faisceaux gaussiens seront construits par la suite. En effet, l'étude et l'utilisation des faisceaux gaussiens dans la littérature scientifique révèle de multiples approches pour les construire ou pour les définir. Parmi celles-ci, nous avons choisi d'en présenter trois dans la première section, jugées significatives et rendant compte de la diversité et de l'évolution des points de vue adoptés. L'approximation paraxiale reste néanmoins le dénominateur commun à toutes ces constructions. L'utilisation appropriée des faisceaux gaussiens pour la modélisation du CND par ondes de volume ultrasonores requiert donc de pouvoir faire cette approximation. Ainsi dans la deuxième section, on profite d'un exposé standard des équations de propagation des ondes de volume ultrasonores pour rappeler les hypothèses classiques de modélisation. Le régime hautes fréquences est ensuite justifié par des exemples concrets, et permet d'introduire dans la dernière section de ce chapitre la méthode asymptotique des rayons. D'une part, ce sont les comportements singuliers – ombrages et caustiques – de cette méthode qui motivent dans cette thèse le recours aux faisceaux gaussiens. De l'autre, c'est à partir des outils théoriques fournis par cette méthode que nous construisons les faisceaux gaussiens dans le chapitre suivant.

1.1 Faisceaux gaussiens : quelques approches historiques

Différentes approches se sont succédées depuis le début des années 1960 et ont permis progressivement de généraliser l'écriture des faisceaux gaussiens. Les contributions théoriques proviennent de plusieurs champs disciplinaires, en particulier de l'optique, de la géophysique et de la mécanique quantique. Dans cette section, nous présentons chronologiquement trois constructions différentes. La première 1.1.1 est solution de l'équation parabolique, déduite de l'équation de Helmholtz homogène dans le cas particulier de champs peu divergents. La seconde 1.1.2 hérite de la fonction de Green en espace libre pour un modèle de point source complexe. La dernière construction 1.1.3 modélise le rayonnement d'une source gaussienne généralisée, obtenu par évaluation asymptotique de l'intégrale de son spectre d'onde plane. L'objectif ici est de montrer que quels que soient les arguments théoriques ou la nature physique invoqués, ces constructions traitent d'une même solution approchée dont la validité repose toujours sur une approximation paraxiale. Cette dernière traduit le fait que les faisceaux gaussiens sont des candidats particulièrement adaptés pour modéliser des champs localement collimatés.

1.1.1 Solution de l'équation parabolique

Historiquement, les faisceaux gaussiens ont été introduits pour la première fois en optique dans les années 1960 afin de modéliser les premières applications *laser* [20, 109, 110]. Nous rappelons l'équation de Helmholtz

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1.1)$$

où Δ est l'opérateur laplacien scalaire, u est un champ scalaire harmonique de longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$. Il a été observé que les faisceaux *laser* sont similaires aux ondes planes, au détail près que leur intensité est concentrée au voisinage de leur direction de propagation, et que le front de phase est légèrement incurvé. A supposer que le faisceau se propage selon la direction z , un tel champ lumineux peut se mettre sous la forme

$$u(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r})e^{ikz},$$

avec $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $U(\mathbf{r}) \in \mathbb{C}$ et $i = \sqrt{-1}$. Dans ce cas particulier, l'approximation paraxiale suggérée par l'observation physique implique

$$\left| \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial U}{\partial z} \right|, \left| \Delta_{\perp} U \right|,$$

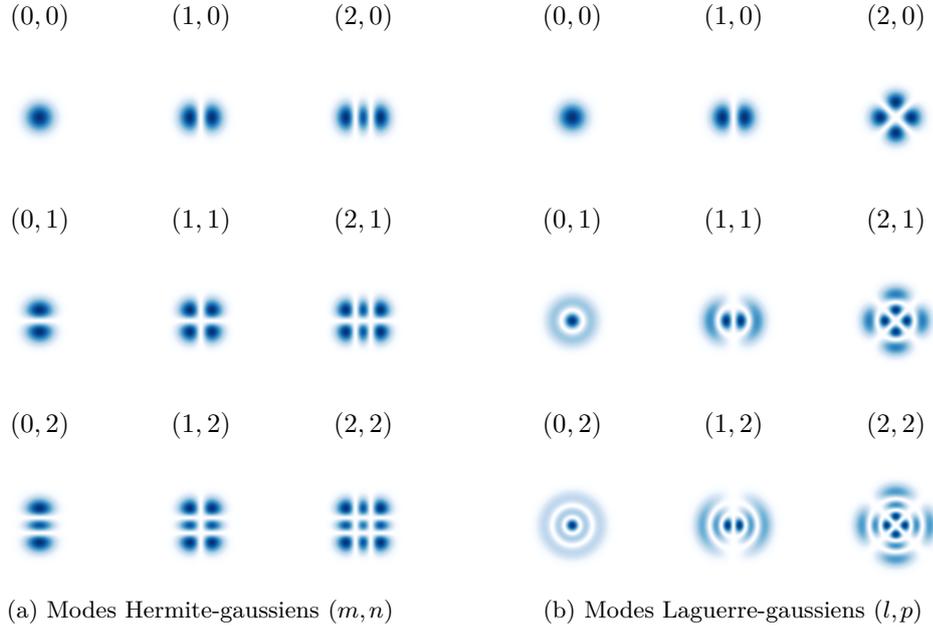


FIGURE 1.1 – Amplitude transverse des premiers modes solutions de l'équation paraxiale (1.2) en niveaux de bleu.

où Δ_{\perp} est l'opérateur laplacien scalaire transverse à la direction z . De l'équation de Helmholtz et de cette approximation paraxiale, on en déduit l'équation parabolique

$$\Delta_{\perp}U + 2ik\frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (1.2)$$

Il a alors été montré[79, 110] que cette équation différentielle portant sur l'amplitude complexe $U(\mathbf{r})$ possède une infinité dénombrable de solutions exactes, dites « modes gaussiens ». En effet, elles peuvent toutes s'écrire sous la forme générique

$$U_{\alpha\beta}(\mathbf{r}) = f_{\alpha\beta}(\mathbf{r})U_{00}(\mathbf{r}). \quad (1.3)$$

En coordonnées cartésiennes $\mathbf{r} = (x, y, z)$, la fonction f est indiquée par un doublet (m, n) qui indique que l'amplitude du mode fondamental U_{00} est modulée par les polynômes de Hermite H_m et H_n , respectivement des coordonnées x et y . On parle alors de modes « Hermite-gaussiens » (voir figure 1.1a). En coordonnées cylindriques $\mathbf{r} = (r, \theta, z)$, la fonction f est indiquée par un doublet (l, p) qui indique que l'amplitude du mode fondamental U_{00} est modulée par le polynôme de Laguerre généralisé L_p^l de la coordonnée r . On parle dans ce cas de modes « Laguerre-gaussiens » (voir figure 1.1b). On observe en

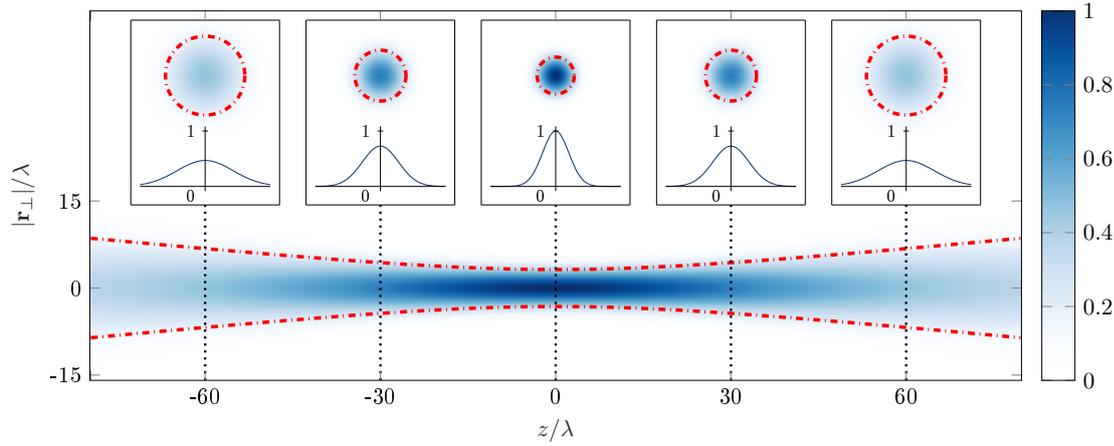


FIGURE 1.2 – Amplitude $|U_{00}(\mathbf{r})|$ en niveaux de bleu d'un faisceau gaussien classique avec (---) sa demi-largeur $w(z)$ et (—) son amplitude transverse $|U_{00}(|\mathbf{r}_\perp|)|$.

particulier que pour $(m, n) = (0, 0)$ ou $(l, p) = (0, 0)$, donc quel que soit le système de coordonnées considéré, le mode gaussien solution de l'équation paraxiale (1.2) a le même profil d'amplitude. Il s'agit du mode fondamental U_{00} , communément noté TEM_{00} (pour *transverse electromagnetic*). Son amplitude transverse en z est de la forme

$$|U_{00}(\mathbf{r}_\perp, z)| \propto \left(\frac{w(0)}{w(z)} \right) \exp \left\{ -\frac{|\mathbf{r}_\perp|^2}{w^2(z)} \right\} \quad (1.4)$$

où \mathbf{r}_\perp est la coordonnée transverse à z , et où la fonction $w(z)$ décrit la demi-largeur du faisceau en z . Il apparaît donc que l'ensemble des solutions de l'équation paraxiale (1.2) dérive du mode fondamental TEM_{00} dont le profil d'amplitude transverse à la direction de propagation est gaussien. Ainsi ce qu'on appellera par la suite un « faisceau gaussien classique », c'est la solution paraxiale

$$u(\mathbf{r}) = U_{00}(\mathbf{r})e^{ikz} \quad (1.5)$$

de l'équation de Helmholtz (1.1). L'évolution de son amplitude dans tout l'espace est représentée figure 1.2.

Cette première écriture a permis par la suite de décrire la propagation de faisceaux lasers dans les systèmes optiques. On peut citer notamment le formalisme des matrices ABCD [110] qui permet de transformer le faisceau gaussien de façon algébrique au cours de sa propagation, au passage d'une interface, d'une lentille ou d'un miroir.

1.1.2 Rayonnement paraxial du point source complexe

Une autre façon d'obtenir un faisceau gaussien est de calculer le rayonnement d'un point source complexe sous hypothèse paraxiale. Un point source complexe est une source ponctuelle dont les coordonnées spatiales sont complexes. Introduit par DESCHAMPS [51] à la fin des années 1960, le point source translaté dans le plan complexe a pour effet de transformer – dans l'espace réel – le rayonnement sphérique en un rayonnement focalisé semblable au faisceau gaussien classique. En effet, le rayonnement d'une source ponctuelle correspond à la fonction de Green en espace libre, soit

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\exp\{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (1.6)$$

où $\mathbf{r} = (x, y, z)$ est le point d'observation et \mathbf{r}_0 est la coordonnée de la source ponctuelle. On suppose à présent que le point source est situé dans l'espace complexe tandis que le point d'observation reste dans l'espace réel. Sans perte de généralité, les coordonnées de la source complexe peuvent s'écrire $\mathbf{r}_0 = (0, 0, ib)$ dans un repère approprié. La distance entre le point source et le point d'observation est désormais complexe, et s'écrit

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| = (x^2 + y^2 + (z - ib)^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.7)$$

La fonction complexe $s \rightarrow s^{1/2}$ est multivaluée, et on adopte la coupure usuelle $D^\pi = \{s \mid \operatorname{Re} s \leq 0, \operatorname{Im} s = 0\}$. Le point de branchement est $s = 0$. On a alors le choix entre deux déterminations, que l'on peut caractériser par

$$\operatorname{Re} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \geq 0, \quad (1.8a)$$

et

$$\operatorname{Im} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \leq 0. \quad (1.8b)$$

Dans le cas (1.8a), la fonction $\mathbf{r} \rightarrow |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ définie par (1.7) admet pour coupure $\bar{\mathcal{D}} = \{\mathbf{r} \mid x^2 + y^2 < b^2, z = 0\}$ et génère une solution de « type source », tandis que considérer (1.8b) génère une solution de « type faisceau¹ » qui admet pour coupure $\mathcal{D} = \{\mathbf{r} \mid x^2 + y^2 > b^2, z = 0\}$. De façon univoque, le point de branchement est le cercle $\mathcal{C} = \{\mathbf{r} \mid x^2 + y^2 = b^2, z = 0\}$. Pour le besoin de cette section on choisit la détermination (1.8b), de type « faisceau ». La fonction de Green $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ correspondante est représentée figure 1.3. On observe que le champ rayonné correspond à un champ collimaté le long de

1. Le lecteur intéressé par les conséquences et l'utilité pratique d'une telle distinction est invité à consulter les travaux de FELSEN [62] et de HEYMAN et STEINBERG [85, 86].

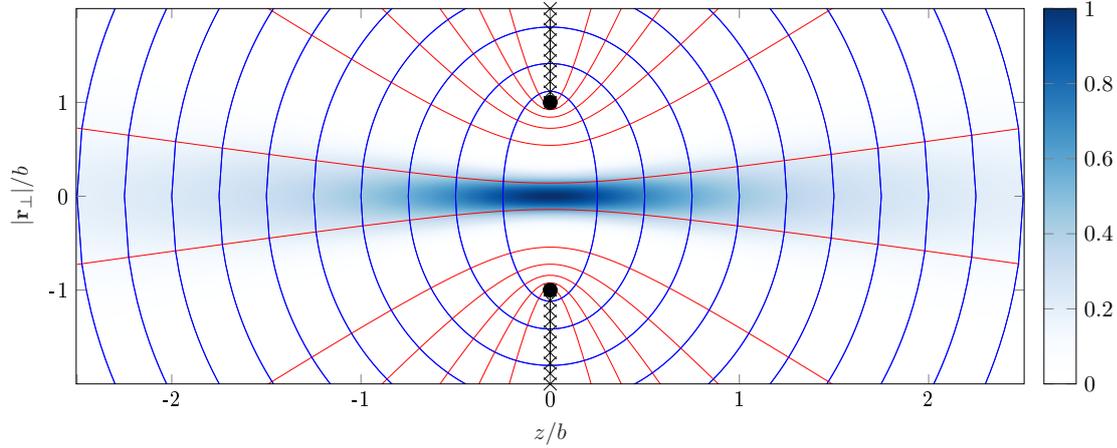


FIGURE 1.3 – Amplitude $|G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)|$ en niveaux de bleu du champ exact rayonné par un point source complexe de coordonnées $\mathbf{r}_0 = (0, 0, ib)$, avec (\times) la coupure $\bar{\mathcal{D}} = \{\mathbf{r} \mid x^2 + y^2 > b^2, z = 0\}$, (\bullet) le point de branchement $\mathcal{C} = \{\mathbf{r} \mid x^2 + y^2 = b^2, z = 0\}$, $(-)$ les surfaces équiampitudes et $(-)$ les surfaces équiphasés de $\exp\{ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|\}$.

l'axe z . Aucune approximation n'ayant été faite dans l'écriture (1.6) de la fonction de Green, ce faisceau est la solution fondamentale exacte de l'équation de Helmholtz pour le point source complexe en $\mathbf{r}_0 = (0, 0, ib)$. On s'intéresse aux points d'observation qui sont proches de la direction principale de rayonnement, soit

$$x^2 + y^2 \ll z^2 + b^2.$$

On pose $q(z) = z - ib$. Toujours dans le cadre du choix (1.8b), on effectue un développement limité de la distance complexe au voisinage de l'axe z , à l'ordre 0 pour l'amplitude et à l'ordre 2 pour la phase. On obtient alors

$$G(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) \approx \frac{\exp\{-kb\}}{4\pi q(z)} \exp\left\{ikz + \frac{ik}{2} \frac{x^2 + y^2}{q(z)}\right\}. \quad (1.9)$$

De (1.9), on montre facilement que pour z fixé, l'amplitude du champ rayonné dans le plan transverse à l'axe z est de la forme

$$|G(\mathbf{r}_\perp, z; \mathbf{r}_0)| \propto \left(\frac{w(0)}{w(z)}\right) \exp\left\{-\frac{|\mathbf{r}_\perp|^2}{w(z)^2}\right\}, \quad (1.10)$$

où $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$ sont les coordonnées transverse à z , et où la fonction $w(z)$ décrit la demi-largeur du faisceau en z (voir figure 1.3). Ainsi dans le cadre de l'approximation

paraxiale, on montre que le rayonnement d'un point source complexe est décrit par un faisceau gaussien classique (1.5). De façon générale, la possibilité d'obtenir un rayonnement collimaté – exact ou approché – par la seule généralisation du point source aux coordonnées complexes a permis le développement de « l'optique géométrique complexe » (ou « méthode de rayons complexes »), notamment grâce aux travaux de DESCHAMPS [52, 180] et de FELSEN [61, 58, 62]. Ce rayonnement collimaté a aussi été exploité pour modéliser directement des capteurs ultrasonores à l'aide de points sources complexes [185].

1.1.3 Rayonnement approché d'une source gaussienne

Jusqu'à présent nous avons obtenu des faisceaux gaussiens circulaires, c'est-à-dire dont la forme est invariante par rotation autour de la direction de propagation. En effet, que ce soit pour le mode fondamental de l'équation parabolique (1.4) ou pour la fonction de Green du point source complexe sous hypothèse paraxiale (1.10), l'amplitude transverse est décrite par une gaussienne de demi-largeur w qui dépend uniquement de la coordonnée z le long de l'axe de propagation. Or dès la fin des années 1960 on cherche à modéliser la propagation de faisceaux gaussiens dans des systèmes optiques astigmatiques, c'est-à-dire qui ne sont pas invariants par rotation autour de leur axe optique [6, 5]. Les transformations induites par de tels systèmes nécessitent d'introduire des faisceaux gaussiens plus généraux, de la forme

$$u(\mathbf{r}) = U(z) \exp \left\{ ikz + ik \frac{1}{2} {}^t \mathbf{r}_\perp \mathbf{M}(z) \mathbf{r}_\perp \right\}, \quad (1.11)$$

où $\mathbf{M}(z)$ est une matrice de taille (2,2), symétrique, complexe à partie imaginaire définie positive et telle que $\forall z, \det \mathbf{M}(z) \neq 0$. L'expression (1.11) définit alors un *faisceau gaussien généralisé*². Si l'on admet l'existence d'une telle solution, alors on peut montrer (voir [157]) que (1.11) est solution de l'équation parabolique (1.2) si la matrice $\mathbf{M}(z)$ vérifie par ailleurs

$$\mathbf{M}(z) = \mathbf{M}(0) \left[\mathbf{I} + z \mathbf{M}(0) \right]^{-1}, \quad (1.12)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité, et que la fonction $U(z)$ est telle que

$$U(z) = \left(\frac{\det \mathbf{M}(z)}{\det \mathbf{M}(0)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.13)$$

2. Cette forme est notamment utilisée dans les ouvrages de SCHMERR pour modéliser des champs ultrasonores en CND.

Il est possible néanmoins de démontrer l'existence de la formulation (1.11) tout en lui donnant un sens physique, en calculant le rayonnement d'une source plane de forme générale

$$u_0(\mathbf{r}_\perp, z = 0) = \exp \left\{ ik \frac{1}{2} {}^t \mathbf{r}_\perp \mathbf{M}_0 \mathbf{r}_\perp \right\}, \quad (1.14)$$

avec $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$, \mathbf{M}_0 une matrice de taille $(2, 2)$, symétrique, complexe à partie imaginaire définie positive et telle que $\det \mathbf{M}_0 \neq 0$. Le profil d'amplitude $|u_0(\mathbf{r}_\perp, 0)|$ est alors gaussien et éventuellement non-circulaire (voir figure 1.4a). Le calcul du champ rayonné par la source plane (1.14) est démontré en détail dans le manuscrit de thèse de LUGARA [125]. Par souci d'efficacité, on reporte ici les principales étapes de la démonstration. Par définition, le spectre d'onde plane \tilde{u}_0 du terme source u_0 a pour expression intégrale

$$\tilde{u}_0(\mathbf{k}_\perp) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} u_0(\mathbf{r}_\perp, 0) e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp} dx dy,$$

où $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$ est la composante spectrale tangente au plan source. De façon exacte, il vient

$$\tilde{u}_0(\mathbf{k}_\perp) = \frac{i}{2\pi k (\det \mathbf{M}_0)^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{i}{2k} {}^t \mathbf{k}_\perp \mathbf{M}_0^{-1} \mathbf{k}_\perp \right\}. \quad (1.15)$$

Le spectre d'onde plane \tilde{u}_0 a également une forme gaussienne centrée en $\mathbf{k}_\perp = (0, 0)$ (voir figure 1.4b). Elle est d'autant plus localisée que k est élevé, et le champ rayonné résultant d'autant plus collimaté. Le champ propagé est calculé par propagation des ondes planes associées au spectre $\tilde{u}_0(\mathbf{k}_\perp)$, soit

$$u(\mathbf{r}) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_0(\mathbf{k}_\perp) e^{i(\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp + k_z z)} dk_x dk_y, \quad (1.16)$$

où la composante spectrale normale vaut

$$k_z = \begin{cases} \sqrt{k^2 - |\mathbf{k}_\perp|^2} & \text{pour } k^2 > |\mathbf{k}_\perp|^2 \\ i\sqrt{|\mathbf{k}_\perp|^2 - k^2} & \text{pour } k^2 < |\mathbf{k}_\perp|^2 \end{cases}.$$

Le premier cas prend en compte les ondes planes se propageant dans la direction $z > 0$ tandis que le second correspond aux ondes évanescentes. L'intégrale (1.16) n'a généralement pas de solution analytique. On cherche donc à l'évaluer dans le cas particulier de l'approximation paraxiale, c'est-à-dire pour lequel les ondes planes considérées se propagent au voisinage de la normale au plan source, portée par la direction z . On peut

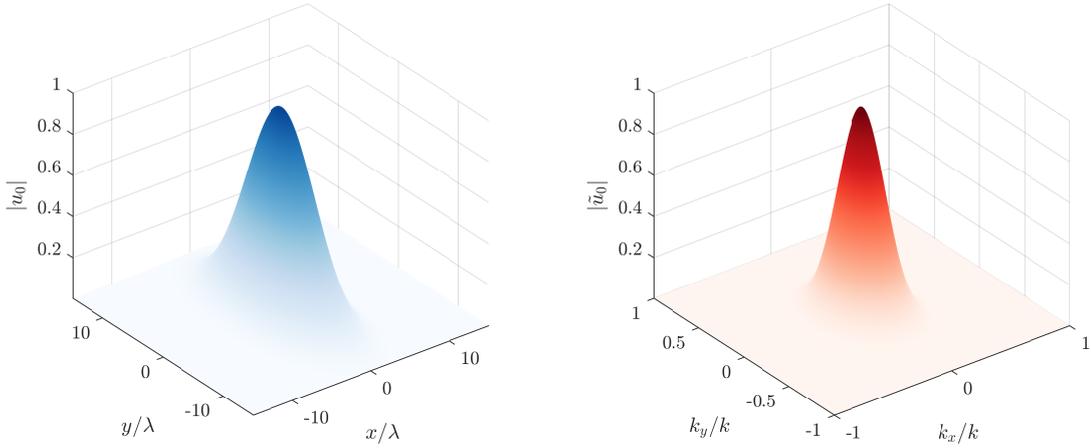
(a) Amplitude $|u_0|$ (b) Spectre d'onde plane $|\tilde{u}_0|$

FIGURE 1.4 – Source plane gaussienne astigmatique

donc traduire l'approximation paraxiale sous la forme

$$|\mathbf{k}_\perp|^2 \ll k^2,$$

ce qui permet à la fois de négliger la contribution des ondes évanescentes dans le calcul du rayonnement, et d'approcher la composante spectrale normale par

$$k_z \approx k - \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k}. \quad (1.17)$$

En utilisant (1.15) et (1.17), on peut écrire (1.16) sous la forme

$$u(\mathbf{r}) = I(k) = \iint f(\mathbf{k}_\perp) \exp\{-kq(\mathbf{k}_\perp)\} dk_x dk_y, \quad (1.18)$$

où f et q sont des fonctions à valeurs complexes telles que pour $|\mathbf{k}_\perp|^2 \ll k^2$,

$$\begin{cases} f(\mathbf{k}_\perp) = \frac{i}{2\pi k (\det \mathbf{M}_0)^{\frac{1}{2}}}, \\ q(\mathbf{k}_\perp) = i \left(\frac{1}{2k^2} {}^t \mathbf{k}_\perp [\mathbf{M}_0^{-1} + z\mathbf{I}] \mathbf{k}_\perp - \frac{\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp}{k} - z \right). \end{cases}$$

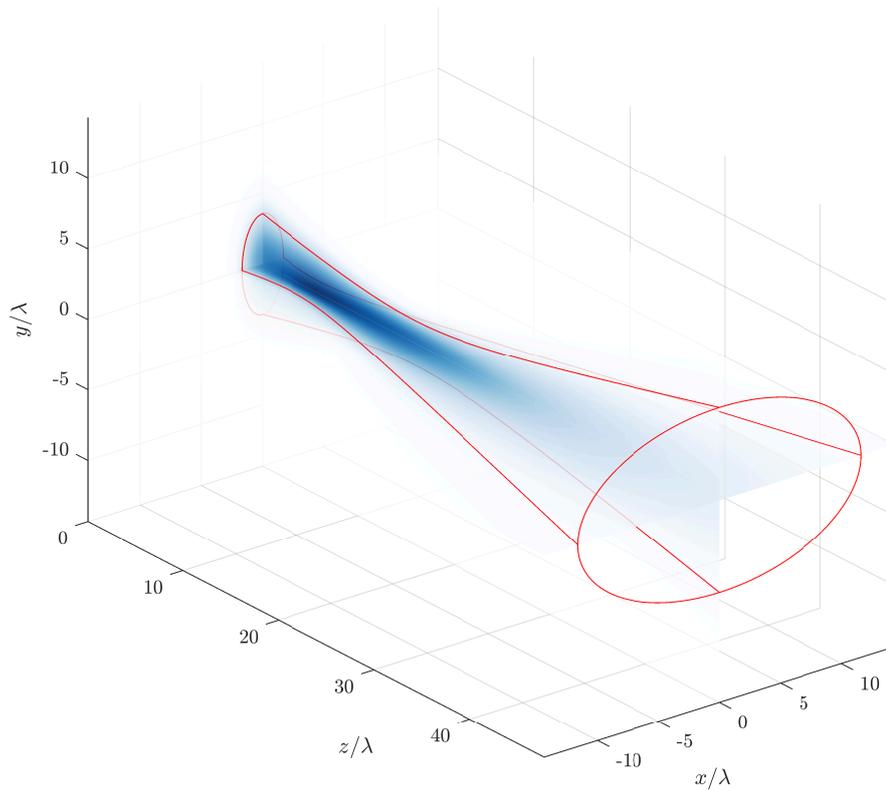


FIGURE 1.5 – Amplitude $|u(\mathbf{r})|$ en niveaux de bleu d'un faisceau gaussien généralisé et (—) les demi-largeurs du faisceau dans les plans $z = 0$, $x = 0$ et $y = 0$.

On peut montrer que la fonction de phase q est stationnaire – c'est à dire $\nabla_{\mathbf{k}_\perp} q = 0$ – en un unique point

$$\mathbf{k}_\perp^s = k \left[z\mathbf{I} + \mathbf{M}_0^{-1} \right]^{-1} \mathbf{r}_\perp.$$

En utilisant une généralisation de la méthode de descente rapide pour les intégrales doubles [14], la solution asymptotique de l'intégrale (1.18) a pour expression

$$I(k) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \left(\frac{2\pi}{k} \right) \frac{f(\mathbf{k}_\perp^s)}{(\det \mathbf{Q}^s)^{\frac{1}{2}}} \exp \{ -kq(\mathbf{k}_\perp^s) \}, \quad (1.19)$$

où \mathbf{Q}^s est la matrice Hessienne de la fonction q évaluée au point de phase stationnaire \mathbf{k}_\perp^s . La solution approchée (1.19) est à rapprocher de la formule de la phase stationnaire pour les intégrales multiples de type Fourier dans le cas où f et q sont à valeurs réelles [15, 64]. En posant

$$\mathbf{M}^{-1}(z) = z\mathbf{I} + \mathbf{M}_0^{-1}, \quad (1.20)$$

on peut expliciter la matrice hessienne de la fonction q ,

$$\mathbf{Q} = \frac{i}{k^2} \mathbf{M}^{-1}(z),$$

et on déduit en particulier \mathbf{Q}^s . En évaluant dans (1.19) les fonctions f et g au point col $\mathbf{k}_\perp^s = k\mathbf{M}(z)\mathbf{r}_\perp$, on retrouve exactement la formulation (1.11) précédemment admise, soit

$$u(\mathbf{r}) = \left(\frac{\det \mathbf{M}(z)}{\det \mathbf{M}(0)} \right)^{1/2} \exp \left\{ ikz + ik \frac{1}{2} {}^t \mathbf{r}_\perp \mathbf{M}(z) \mathbf{r}_\perp \right\}. \quad (1.21)$$

Enfin en posant $\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}_0$, on montre de façon algébrique que (1.20) est équivalent à (1.12). Dans un cas particulier, on représente figure 1.5 l'amplitude $|u(\mathbf{r})|$ du faisceau rayonné dans le demi-espace ($z > 0$). Dans un quelconque plan transverse à la direction z , on observe que la demi-largeur du faisceau dépend de la direction dans laquelle elle est mesurée. Ainsi avec la même hypothèse paraxiale déjà invoquée dans les paragraphes 1.1.1 et 1.1.2, nous avons obtenu une formulation plus générale qui prend en compte l'éventuel astigmatisme que peut présenter un faisceau gaussien. Au-delà de la démonstration mathématique, le calcul asymptotique par spectre d'onde plane permet de générer un faisceau gaussien à partir d'un terme source de forme gaussienne, ce qui n'est pas envisageable avec les constructions précédentes. C'est pourquoi cette démarche intégrale a motivé le calcul du champ diffracté par des sources et/ou des obstacles étendus [59, 128, 32, 76], et ainsi étendu le champ d'applications de ces faisceaux.

1.2 Propagation d'ondes de volume ultrasonores

Dans la section précédente, nous avons détaillé quelques approches historiques nous permettant d'introduire et de décrire les faisceaux gaussiens. Cette démarche n'a pas nécessité de spécifier la nature physique du problème, du moment qu'il peut être modélisé à une fréquence donnée par l'équation de Helmholtz (1.1) dont la fonction de Green en espace libre est connue (1.6), ou que la solution peut être approchée par une représentation intégrale d'ondes planes (1.16). Dans cette section, on cherche à préciser le cadre physique de modélisation.

De façon générale, un « ultrason » (ou « onde ultrasonore ») est une déformation dans un milieu matériel qui se propage de proche en proche et dont le spectre fréquentiel n'est pas perceptible par l'oreille humaine, soit au-delà de 20kHz. Jusqu'à quelques dizaines de MHz, ce régime fréquentiel est particulièrement adapté à des fins de CND (voir tableau 1.1). Les longueurs d'onde ainsi mises en jeu dans les solides contrôlés sont

Fréquence (en Hz)	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
λ_{air} (en m)	$3,3 \times 10^{-2}$	$3,3 \times 10^{-3}$	$3,3 \times 10^{-4}$	$3,3 \times 10^{-5}$	$3,3 \times 10^{-6}$
λ_{eau} (en m)	$1,5 \times 10^{-1}$	$1,5 \times 10^{-2}$	$1,5 \times 10^{-3}$	$1,5 \times 10^{-4}$	$1,5 \times 10^{-5}$
λ_{acier} (en m)	$5,9 \times 10^{-1}$	$5,9 \times 10^{-2}$	$5,9 \times 10^{-3}$	$5,9 \times 10^{-4}$	$5,9 \times 10^{-5}$

TABEAU 1.1 – Longueurs d'onde des ultrasons dans l'air, l'eau et l'acier pour différentes fréquences et domaine d'usage en surbrillance pour le CND

de l'ordre de quelques centaines de microns jusqu'à quelques centimètres, de telle sorte que les ondes ultrasonores associées sont significativement perturbées par d'éventuels défauts de dimensions comparables. La propagation libre de ces ondes ultrasonores est essentiellement gouvernée par la continuité et l'élasticité du matériau considéré, à l'échelle de la longueur d'onde. Nous profitons de la mise en équation de ces propriétés mécaniques élémentaires pour introduire les notations associées aux grandeurs physiques d'intérêt, et pour formuler les hypothèses de modélisation. Il est ainsi d'usage de distinguer le cas du milieu fluide de celui du milieu solide. Dans les deux cas et en l'absence de sources, on en déduit les équations différentielles homogènes à résoudre. La démonstration de ces dernières est classique dans la littérature académique, et dans cette section on s'appuiera notamment sur les ouvrages de ROYER et DIEULESAINT [151] et de ACHENBACH [1]. Nous explicitons les équations de propagation dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel dans le but de distinguer, par la suite, l'utilisation et l'écriture des faisceaux gaussiens en régime transitoire et en régime harmonique.

1.2.1 Milieu fluide

Dans ce paragraphe, nous choisissons la description Eulérienne d'un fluide parfait. Les grandeurs physiques associées au fluide ne sont donc pas liées à des points matériels (description Lagrangienne), mais évaluées dans un référentiel géométrique. Elles dépendent des variables indépendantes d'Euler, qui sont la coordonnée spatiale $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ (où d est la dimension de l'espace considéré) et le temps t . Ainsi pour modéliser l'état du fluide en mouvement, on s'intéresse aux champs de masse volumique $\rho(\mathbf{x}, t)$, de vitesse particulaire $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ et de pression $p(\mathbf{x}, t)$. Afin d'alléger les notations, la dépendance en (\mathbf{x}, t) ne sera indiquée que pour des cas particuliers.

Équations constitutives

En l'absence de source de masse, l'équation locale de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.22)$$

Aussi appelée « équation de continuité », (1.22) traduit le fait que la variation de masse contenue dans un volume élémentaire dV est égale au flux massique vers ce volume.

En négligeant les éventuelles forces extérieures, le bilan local de quantité de mouvement s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p. \quad (1.23)$$

Cette équation, aussi appelée « équation d'Euler », est obtenue en appliquant le principe fondamental de la dynamique appliqué au fluide contenu dans le volume élémentaire dV . Le fluide contenu dans le volume élémentaire dV est considéré parfait. La dissipation y est négligée, de sorte que les mouvements peuvent être considérés adiabatiques. Le système fluide contenu dans le volume dV évolue donc de façon isentropique. Il n'existe pas d'équation d'état universelle pour les milieux fluides parfaits. Mais sous l'hypothèse de faibles perturbations isentropiques d'un état d'équilibre il est possible d'écrire un développement de Taylor de la pression, soit

$$p = p_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left. \frac{\partial^k p}{\partial \rho^k} \right|_{\rho_0, s} (\rho - \rho_0)^k + \mathcal{O}((\rho - \rho_0)^n) \quad (1.24)$$

où ρ_0 et p_0 sont respectivement la pression et la masse volumique à l'état d'équilibre.

Hypothèses d'acoustique linéaire

On caractérise le fluide au repos par les quantités $\rho_0(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ et $p_0(\mathbf{x})$. On fait par ailleurs l'hypothèse que le milieu est sans écoulement ($\mathbf{v}_0 = 0$). Lorsque le fluide subit une perturbation acoustique de la forme $\rho_a(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}_a(\mathbf{x}, t)$ et $p_a(\mathbf{x}, t)$, les champs totaux s'écrivent

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0(\mathbf{x}) + \rho_a(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_a(\mathbf{x}, t), \\ p(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}) + p_a(\mathbf{x}, t). \end{cases}$$

Ces perturbations sont considérées petites, soit

$$|\rho_a| \ll \rho_0, \quad |p_a| \ll p_0, \quad |\mathbf{v}_a| \ll c_0, \quad (1.25)$$

où on définit la célérité du son adiabatique par

$$c_0(\mathbf{x})^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{\rho_0, s}. \quad (1.26)$$

L'hypothèse des petites perturbations (1.25) permet de simplifier les équations constitutives au premier ordre. Dans l'ordre, à partir de (1.22) nous obtenons l'équation de continuité linéarisée

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_a) = 0,$$

à partir de (1.23) l'équation d'Euler linéarisée

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}_a}{\partial t} + \nabla p_a = 0,$$

et à partir de (1.24) et (1.26) l'équation d'état linéarisée

$$p_a = c_0^2(\mathbf{x}) \rho_a. \quad (1.27)$$

Équation de propagation

A l'aide des trois équations constitutives linéarisées et dans l'hypothèse d'un fluide faiblement inhomogène, on montre

$$\frac{\partial^2 p_a}{\partial t^2} - c_0^2(\mathbf{x}) \Delta p_a = 0. \quad (1.28)$$

où $\Delta A = \nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 A}{\partial x_d^2}$ est l'opérateur différentiel *laplacien scalaire*. On obtient alors l'équation des ondes scalaire pour le champ de pression acoustique $p_a(\mathbf{x}, t)$. Grâce à l'équation d'état linéarisée (1.27), on montre que le champ de masse volumique acoustique $\rho_a(\mathbf{x}, t)$ obéit à la même équation scalaire. De la même façon, on obtient

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_a}{\partial t^2} - c_0^2(\mathbf{x}) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_a) = 0.$$

On peut montrer que le champ \mathbf{v}_a est irrotationnel si le fluide est initialement au repos, soit $\nabla \wedge \mathbf{v}_a = 0$, et il vient

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}_a}{\partial t^2} - c_0^2(\mathbf{x}) \Delta \mathbf{v}_a = 0, \quad (1.29)$$

où $\Delta \mathbf{A} = \Delta(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_1) + \dots + \Delta(\mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_d)$ est l'opérateur différentiel *laplacien vectoriel*. On obtient alors l'équation des ondes vectorielle pour le champ de vitesse particulière acoustique $\mathbf{v}_a(\mathbf{x}, t)$. Du fait de l'irrotationnalité de \mathbf{v}_a , il existe un potentiel scalaire ϕ_a tel que

$\mathbf{v}_a = -\nabla\phi_a$. À l'aide des équations constitutives linéarisées, on montre que le potentiel scalaire acoustique $\phi_a(\mathbf{x}, t)$ vérifie la même équation des ondes scalaire (1.28) que les champs scalaires p_a et ρ_a , soit

$$\frac{\partial^2 \phi_a}{\partial t^2} - c_0^2(\mathbf{x})\Delta\phi_a = 0. \quad (1.30)$$

En pratique, on réduira le nombre d'inconnues et on cherchera à résoudre les équations scalaires (1.28) ou (1.30) selon les données du problème.

1.2.2 Milieu solide

De la même façon que pour un milieu fluide, nous choisissons la description Eulérienne pour modéliser un solide élastique. L'état mécanique de ce solide est décrit par le tenseur des déformations \mathbf{S} et le tenseur des contraintes \mathbf{T} , chacun d'ordre deux. Ces grandeurs dépendent des variables indépendantes d'Euler, qui sont la coordonnée spatiale $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et le temps t . Le champ élastique dans le solide est donc constitué des tenseurs $\mathbf{S}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$. Afin d'alléger les notations, la dépendance en (\mathbf{x}, t) ne sera indiquée que pour des cas particuliers. Par ailleurs les calculs tensoriels seront écrits en notation indicielle, soit

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}, t) = (S_{ij})_{1 \leq i, j \leq d} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = (T_{ij})_{1 \leq i, j \leq d},$$

et on adoptera la convention de sommation d'Einstein sur les indices³. Le tenseur des déformations est défini par

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_i)_{1 \leq i \leq d}$ est le champ de déplacement particulaire du solide par rapport à son état au repos. Le tenseur des contraintes est défini par

$$dF_i = (T_{ij}l_j) ds,$$

où $d\mathbf{F}$ est la force qui s'exerce sur un élément de surface infinitésimale ds et de normale \mathbf{l} . Ainsi la grandeur scalaire T_{ij} est la i -ème composante de la force agissant sur un élément de surface perpendiculaire à l'axe j , et est homogène à une force divisée par une surface.

3. La présence d'un indice muet se traduit par une sommation sur toutes les valeurs que peut prendre cet indice. Par exemple, $a_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^d a_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$.

Loi de Hooke généralisée

De la même façon que pour un ressort ou un solide à l'échelle macroscopique, il existe une loi de Hooke dite « généralisée » qui décrit le comportement élastique d'un solide à l'échelle microscopique. Dans la limite des petites déformations, elle s'écrit

$$T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl} \quad (1.31)$$

où $\mathbf{C} = (C_{ijkl})_{1 \leq i,j,k,l \leq d}$ est le tenseur des constantes élastiques du solide, d'ordre quatre. La loi de Hooke généralisée décrit donc la relation linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations dans le cas général d'un solide anisotrope. Sans perte de généralité, on peut montrer que le tenseur \mathbf{C} vérifie les relations de symétrie suivantes

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij},$$

ce qui permet de réécrire la loi de Hooke généralisée (1.31) sous la forme

$$T_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k}. \quad (1.32)$$

Contrairement à un milieu fluide, on privilégiera donc le champ de déplacement particulière au champ de vitesse particulière pour décrire la propagation d'une onde ultrasonore.

Équation fondamentale de l'élastodynamique

En négligeant les éventuelles forces extérieures, l'équation fondamentale de la dynamique appliquée au solide de masse volumique ρ contenu dans le volume élémentaire dV s'écrit

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}. \quad (1.33)$$

En utilisant la loi de Hooke généralisée (1.32), on peut expliciter l'équation du mouvement en l'absence de source,

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right).$$

Cette équation est valide pour un solide anisotrope inhomogène décrit par le tenseur des constantes élastiques $\mathbf{C}(\mathbf{x})$ et la masse volumique $\rho(\mathbf{x})$.

Cas particulier d'un solide isotrope

Pour un solide isotrope faiblement inhomogène, on peut montrer (voir [151] pp. 119–121)

que le tenseur des constantes élastiques s'écrit

$$C_{ijkl}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\mathbf{x})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (1.34)$$

où δ est le symbole de Kronecker⁴ et λ et μ sont les constantes de Lamé, qui s'expriment⁵ en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν . De (1.32) et (1.34), on en déduit la loi d'élasticité pour un solide isotrope, soit

$$T_{ij}(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij} + \mu(\mathbf{x})\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \quad (1.35)$$

De (1.35) et de (1.33), et dans l'hypothèse d'un solide faiblement inhomogène, on en déduit l'équation du mouvement pour un solide isotrope en l'absence de source,

$$\rho(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (1.36)$$

Soit encore en notation vectorielle et en explicitant les opérateurs différentiels,

$$\rho(\mathbf{x})\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}))\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu(\mathbf{x})\Delta \mathbf{u} \quad (1.37)$$

$$= (\lambda(\mathbf{x}) + 2\mu(\mathbf{x}))\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu(\mathbf{x})\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}). \quad (1.38)$$

Pour résoudre (1.38) le champ de déplacement particulière est recherché à l'aide de la décomposition de Helmholtz, soit en notation vectorielle,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_L + \mathbf{u}_T \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{u}_L &= \nabla \Phi, \\ \mathbf{u}_T &= \nabla \wedge \Psi, \end{cases} \quad (1.39)$$

où Φ est un potentiel scalaire et Ψ est un potentiel vecteur⁶. En injectant (1.39) dans (1.38) et en réarrangeant les termes, on montre que

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_L}{\partial t^2} - c_L(\mathbf{x})^2 \Delta \mathbf{u}_L = \mathbf{0}, \quad (1.40)$$

4. $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$; $\delta_{ij} = 0$ sinon

5. $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ et $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$

6. On remarque que (1.39) relie les trois composantes de \mathbf{u} à quatre quantités scalaires données par Ψ et les trois composantes de Ψ . Il est d'usage (voir [1]) de compléter la décomposition de Helmholtz par la condition de jauge $\nabla \cdot \Psi = 0$.

et

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_T}{\partial t^2} - c_T(\mathbf{x})^2 \Delta \mathbf{u}_T = \mathbf{0}. \quad (1.41)$$

Ainsi dans un solide élastique isotrope, les perturbations \mathbf{u}_L associées au potentiel scalaire Φ se propagent à la célérité $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$. C'est une onde longitudinale, qui génère à son passage un déplacement particulaire colinéaire à la direction de propagation et une contrainte de compression pure. Les perturbations \mathbf{u}_T associées au potentiel vecteur Ψ se propagent à la célérité $c_T = \sqrt{\mu/\rho}$. C'est une onde transversale, qui génère à son passage un déplacement particulaire transverse à la direction de propagation et une contrainte de cisaillement pur. En utilisant les définitions des potentiels (1.39), on montre

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c_L(\mathbf{x})^2 \Delta \Phi = 0, \quad (1.42)$$

et

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c_T(\mathbf{x})^2 \Delta \Psi = 0. \quad (1.43)$$

Dans cette section comme dans la précédente, le milieu de propagation a été supposé infini. Nous n'avons donc pas introduit de conditions limites à respecter par les solutions envisagées aux équations de propagation. Cette hypothèse est valable du moment que les dimensions du faisceau ultrasonore sont « petites » devant les dimensions caractéristiques du milieu de propagation. Dans ces conditions les ultrasons traversent le milieu de propagation dans son volume, et on parle alors d'ondes de volume ultrasonores. Lorsqu'on envisage la propagation dans un milieu élancé pour lequel une de ses dimensions est du même ordre de grandeur que les dimensions du faisceau, il est nécessaire de prendre en compte les conditions aux limites dans la forme des solutions. On parle dans ce cas d'ondes guidées, dispersives par nature, et dont la structure caractéristique fait l'objet de méthodes de contrôle particulières. Dans ces travaux de thèse, seules les **ondes de volume** seront traitées.

1.2.3 Régime harmonique

Jusqu'ici nous avons considéré la propagation des ondes de volume ultrasonores dans le domaine temporel (\mathbf{x}, t) . Au-delà de la nature intrinsèquement temporelle des équations de conservation de la masse (1.22) et de quantité de mouvement (1.23) et (1.33), les excitations des systèmes en CND par ultrasons sont généralement transitoires et pulsées de même que les mesures de champ de pression et de contrainte se font directement dans le domaine temporel. Toutefois, il peut être utile de passer dans le domaine fréquentiel,

particulièrement adapté pour modéliser la réponse d'un système supposé linéaire et invariant dans le temps. L'outil usuel pour passer du domaine temporel au domaine fréquentiel (et inversement) est la transformée de Fourier. Afin de préciser la convention et les notations adoptées, nous notons $\hat{s}(\omega)$ la transformée de Fourier d'un signal $s(t)$ définie par

$$\hat{s}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int s(t) e^{i\omega t} dt. \quad (1.44)$$

On en déduit la transformée de Fourier inverse,

$$s(t) = \int \hat{s}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.45)$$

Prenons par exemple le contrôle par ultrasons d'une pièce solide immergée dans l'eau et présentant un défaut, schématisé figure 1.6 . Le capteur piézoélectrique en émission est piloté par une tension V_e , et le capteur piézoélectrique en réception mesure une tension V_m . Dans cet exemple, on fait l'hypothèse que la chaîne de mesure est linéaire et invariante dans le temps. Dans ce cas, la modélisation de la chaîne de mesure ultrasonore en régime fréquentiel s'écrit (voir [154])

$$\hat{V}_m(\omega) = \hat{T}_g(\omega) \hat{T}_a(\omega) \hat{T}_r(\omega) \hat{V}_e(\omega), \quad (1.46)$$

où $\hat{T}_g(\omega)$ est la fonction de transfert qui traduit la génération électro-mécanique à l'émission, $\hat{T}_r(\omega)$ la fonction de transfert qui traduit la conversion mécano-électrique à la réception et $\hat{T}_a(\omega)$ la fonction de transfert acoustique / élastique entre la surface du capteur émetteur et la surface du capteur récepteur, qui modélise la propagation ultrasonore, la diffraction par le défaut et par les capteurs.

La réponse temporelle $V_m(t)$ du système à une excitation transitoire V_e s'obtient alors par transformée de Fourier inverse (1.45) du membre de droite dans (1.46), calculé préalablement à différentes fréquences. Le modèle (1.46) permet donc de traiter séparément les différents mécanismes de transduction, et d'isoler en particulier le modèle de propagation ultrasonore $\hat{T}_a(\omega)$. Ce dernier contient notamment la propagation libre dans le fluide et dans le solide, qui a été mise en équation dans le domaine temporel dans les sections 1.2.1 et 1.2.2. On s'intéresse donc ici à son expression dans le domaine fréquentiel.

Milieu fluide

Sous les hypothèses formulées dans la section 1.2.1, on envisage dans un fluide une source de masse $\rho_0 q$ et une force volumique extérieure \mathbf{f}_a d'excitation sinusoïdale de pulsation ω , soit $q_a(\mathbf{x}, t) = \hat{q}(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}$ et $\mathbf{f}_a(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{f}}_a(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t}$. Par linéarité des

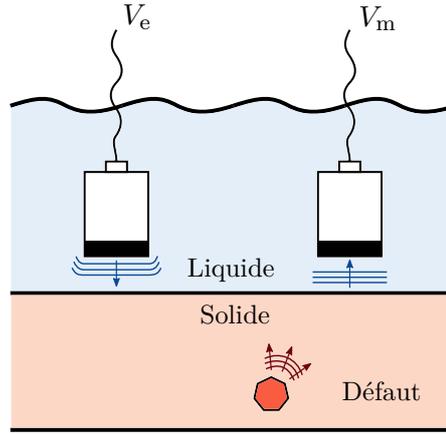


FIGURE 1.6 – Configuration de contrôle en immersion, avec une tension d'entrée V_e et une tension mesurée V_m

équations constitutives linéarisées, les champs de pression et de vitesse particulaire résultant sont également sinusoïdaux, soit respectivement $p_a(\mathbf{x}, t) = \hat{p}_a(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$ et $\mathbf{v}_a(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{v}}_a(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$. On montre alors (voir [29])

$$\Delta \hat{p}_a + k_0^2 \hat{p}_a = (i\omega)\rho_0 \hat{q}_a + \nabla \cdot \hat{\mathbf{f}}_a, \quad (1.47)$$

et dans le cas vectoriel

$$\Delta \hat{\mathbf{v}}_a + k_0^2 \hat{\mathbf{v}}_a = \nabla \hat{q}_a + \frac{ik^2}{\rho_0 \omega} \mathbf{f}_a, \quad (1.48)$$

où $k_0 = \omega/c_0$. (1.47) et (1.48) sont des équations de Helmholtz avec terme source, respectivement scalaire et vectorielle. En particulier pour $\hat{q}_a = 0$ et $\hat{\mathbf{f}}_a = 0$, on obtient les équations de Helmholtz

$$\Delta \hat{p}_a + k_0^2 \hat{p}_a = 0, \quad (1.49)$$

et

$$\Delta \hat{\mathbf{v}}_a + k_0^2 \hat{\mathbf{v}}_a = 0. \quad (1.50)$$

Ces équations modélisent en dehors des sources les champs harmoniques de pression acoustique \hat{p}_a et de vitesse particulaire \mathbf{v}_a . Sans justifier l'existence physique de champs acoustiques harmoniques, on peut également montrer (1.49) et (1.50) en appliquant la transformée de Fourier (1.44) aux équations (1.28) et (1.29) respectivement. De cette façon, appliquée à (1.30), on montre notamment l'équation de Helmholtz pour le potentiel scalaire acoustique ϕ_a , soit

$$\Delta \hat{\phi}_a + k_0^2 \hat{\phi}_a = 0. \quad (1.51)$$

Milieu solide isotrope

De la même façon que pour le milieu fluide et sous les hypothèses formulées dans la section 1.2.1, on introduit une force volumique extérieure \mathbf{f} d'excitation sinusoïdale, soit $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$. Par linéarité de l'équation fondamentale de l'élastodynamique (1.33) et de la loi de Hooke généralisée (1.32), le déplacement particulière résultant est de la forme $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$. On montre alors (voir [29])

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial x_k} \right) + \rho \omega^2 \hat{u}_i = -\hat{f}_i. \quad (1.52)$$

Dans le cas particulier d'un solide isotrope faiblement inhomogène où $\hat{\mathbf{f}} = 0$, on peut directement appliquer la transformée de Fourier (1.44) aux équations des ondes vérifiées par la potentiel scalaire Φ (1.42) et par le potentiel vecteur Ψ (1.43). Il vient alors

$$\Delta \hat{\Phi} + k_L^2(\mathbf{x}) \hat{\Phi} = 0, \quad (1.53)$$

où $k_L(\mathbf{x}) = \omega/c_L(\mathbf{x})$ et,

$$\Delta \hat{\Psi} + k_T^2(\mathbf{x}) \hat{\Psi} = 0, \quad (1.54)$$

où $k_T(\mathbf{x}) = \omega/c_T(\mathbf{x})$. De la même façon que pour un milieu fluide, nous obtenons des équations de Helmholtz.

1.3 Calcul de champ dans l'approximation hautes fréquences

Dans la section précédente, nous avons établi les équations différentielles qui gouvernent la propagation des ondes de volume ultrasonores dans les fluides et dans les solides isotropes. On souhaite à présent les résoudre dans le cas particulier du régime hautes fréquences. Après avoir justifié la pertinence de cette hypothèse de résolution vis-à-vis des conditions physiques usuelles de contrôle par ultrasons, nous rappelons de façon préliminaire la théorie classique des rayons. En particulier, nous mettons en évidence certaines limites des rayons classiques qui motivent l'étude des faisceaux gaussiens dans ces travaux de thèse.

1.3.1 Régime hautes fréquences en contrôle non-destructif par ultrasons

En pratique, dans le cadre d'un contrôle par ondes de volume (voir exemple 1), le faisceau ultrasonore se propage généralement sur un grand nombre de longueurs d'onde avant d'être diffracté par un éventuel défaut à l'échelle de la longueur d'onde, puis d'être

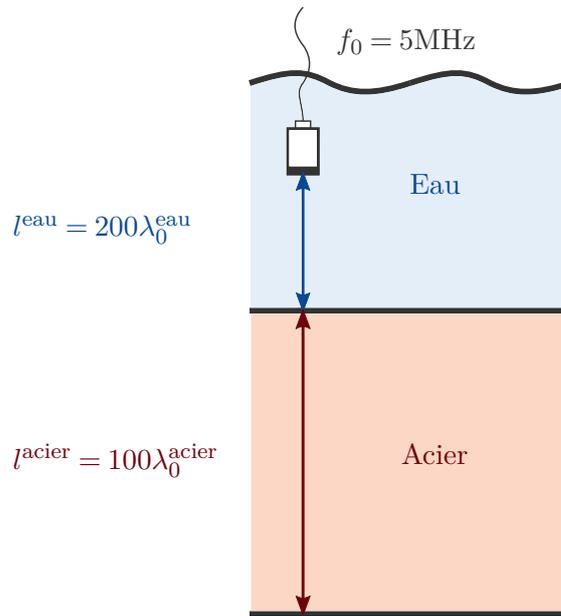


FIGURE 1.7 – Exemple d’inspection en incidence normale d’une pièce en acier immergée dans l’eau.

mesuré. On est donc confronté à une problématique de résolution multi-échelle. Cet aspect concerne également d’autres gammes de fréquence, par exemple la propagation d’ondes sismiques en géophysique ou d’ondes sonores en aéro-acoustique, en acoustique sous-marine et en acoustique des salles.

Exemple 1. Prenons l’exemple (voir figure 1.7) d’un contrôle *pulse-echo* d’une pièce en acier ($c_L^{\text{acier}} = 5900\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) d’une épaisseur $l^{\text{acier}} = 11,8\text{cm}$, immergée dans l’eau ($c_L^{\text{eau}} = 1500\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) avec une hauteur d’eau $l^{\text{eau}} = 6\text{cm}$. La fréquence centrale d’excitation vaut $f_0 = 5\text{MHz}$, de sorte que les longueurs d’onde centrales valent $\lambda_0^{\text{acier}} = 1,18\text{mm}$ dans l’acier et $\lambda_0^{\text{eau}} = 0,3\text{mm}$ dans l’eau. Dans cette configuration, la distance totale parcourue par le faisceau entre l’émission et la réception après réflexion en fond de pièce est alors de 600 longueurs d’onde. ■

Aussi lorsque les dimensions caractéristiques du milieu de propagation sont grandes devant les longueurs d’ondes mises en jeu, on se situe dans un **régime hautes fréquences**. Dans ces conditions, le calcul de la propagation ultrasonore en discrétisant directement les équations de propagation (1.28) et (1.40) est réputé très coûteux, sa précision dépendant directement du nombre d’éléments introduits par longueur d’onde. L’objectif est donc de nous affranchir de la résolution multi-échelle, en partie responsable du coût numérique des méthodes discrètes. Une façon d’y parvenir est de chercher à séparer les échelles

D (mm)	f_0 (MHz)							
	0,5	1	2,3	3,5	5	7,5	10	15
3	×	×	×	×	♦	♦	♦	♦
6	×	×	♦	♦	♦	♦	♦	♦
10	×	×	♦	♦	♦	♦	♦	×
13	×	♦	♦	♦	♦	♦	×	×
19	♦	♦	♦	♦	♦	×	×	×
25	♦	♦	♦	♦	♦	×	×	×
29	♦	♦	♦	♦	×	×	×	×
38	♦	♦	♦	×	×	×	×	×

TABLEAU 1.2 – Caractéristiques de transducteurs ultrasonores standards [28]

et à les traiter séparément. En effet à hautes fréquences, on observe que la longueur caractéristique de variation de l'amplitude d'un faisceau est beaucoup plus grande que la longueur caractéristique d'oscillation (voir exemple 2). Ce constat permet d'envisager des solutions approchées [60, 152] dont l'écriture mathématique suit cette séparation d'échelles d'amplitude et de phase, et dont le coût numérique est indépendant de la fréquence. C'est le cas en particulier de la méthode des rayons, à laquelle nous allons nous intéresser dans la suite de cette section.

Exemple 2. Pour modéliser le champ rayonné par un transducteur circulaire plan en immersion, une façon de caractériser le régime fréquentiel d'utilisation est d'évaluer la quantité k_0D , où k_0 est le nombre d'onde associé à la fréquence centrale f_0 d'excitation du transducteur et où D est son diamètre. Pour $k_0D \gg 1$ et en champ lointain [154], on peut approcher le champ de pression \hat{p} sur l'axe focal z par

$$\hat{p}(z, \omega) \propto \frac{-ikD^2}{2z} e^{ikz}. \quad (1.55)$$

C'est l'*approximation de Fresnel* en champ lointain, qui sépare le terme de phase e^{ikz} qui varie rapidement avec z , du terme d'amplitude $-ikD^2/2z$ qui varie lentement avec z . Pour toute une gamme de transducteurs ultrasonores standards référencés dans le tableau 1.2, on constate figure 1.8 que tous vérifient $k_0D > 10$, et même pour la plupart $k_0D > 100$. Ainsi en pratique la condition $k_0D \gg 1$ est généralement vérifiée et on peut faire l'approximation des hautes fréquences pour modéliser le champ rayonné par un transducteur ultrasonore. ■

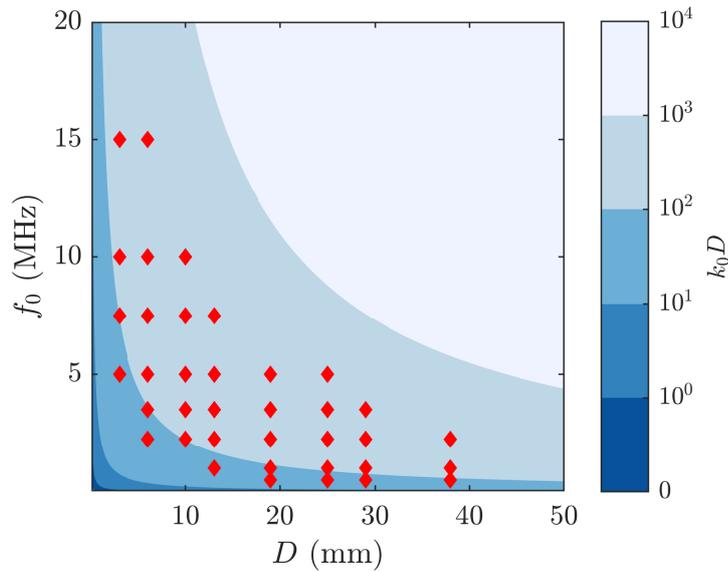


FIGURE 1.8 – Valeurs de $(k_0 D)$ des transducteurs circulaires (\blacklozenge) référencés dans le tableau 1.2, en immersion dans l'eau.

1.3.2 Méthode des rayons

Le développement et la théorisation complète de la méthode des rayons pour la modélisation d'ondes de volumes élastiques provient essentiellement de la communauté géophysique (voir figure 1.10). On peut notamment citer les livres des géophysiciens ČERVENY [29], CHAPMAN [33] et SLAWINSKI [162]. Son utilisation est au cœur de la stratégie de calcul de champ ultrasonore dans la plate-forme CIVA [72]. Au-delà des apports numériques de la méthode dans le cadre de la modélisation en régime hautes fréquences, la méthode des rayons facilite la compréhension des différents mécanismes physiques mis en jeu lors de la propagation d'ondes élastiques dans des milieux parfois complexes. Il est notamment possible de décomposer le champ selon les contributions longitudinales (1.40) et transversales (1.41), et donc de prendre en compte les éventuelles conversions de modes aux interfaces (voir figure 1.9). Que ce soit dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel, la séparation des échelles est le point de départ de la méthode des rayons. Elle fait l'hypothèse qu'il existe un *ansatz* ϕ , c'est-à-dire une solution composée *a priori* d'une fonction d'amplitude à valeurs réelles aux variations lentes et d'une fonction de phase à valeurs réelles aux variations rapides. Dans le domaine temporel, on précise ce type de solution sous la forme du développement asymptotique

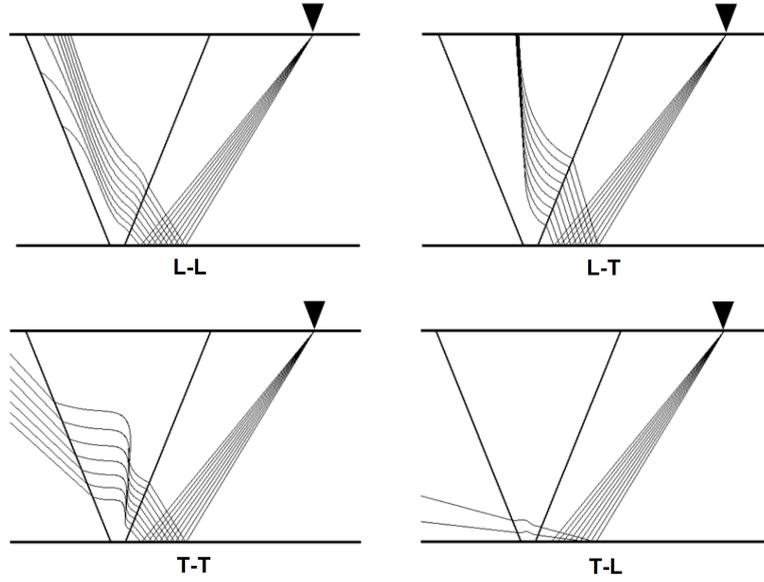


FIGURE 1.9 – Tracé de rayons dans une soudure pour différents types d'onde [38]

de Wentzel-Kramers-Brillouin-Jeffreys (WKBJ), soit

$$\phi(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t)e^{i\omega\tau(\mathbf{x}, t)} \quad \text{où} \quad a(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=0}^N a_n(\mathbf{x}, t)(i\omega)^{-n} + \mathcal{O}(\omega^{-(N+1)}). \quad (1.56)$$

Dans le domaine fréquentiel, le développement asymptotique prend la forme très similaire

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})e^{i\omega T(\mathbf{x})} \quad \text{où} \quad A(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^N A_n(\mathbf{x})(i\omega)^{-n} + \mathcal{O}(\omega^{-(N+1)}). \quad (1.57)$$

Ces formulations sont des développements asymptotiques d'ordre N en puissance inverse de k . La définition de ω est arbitraire tant que $\tau = \mathcal{O}(1)$ (resp. $T = \mathcal{O}(1)$) et que $\omega \rightarrow \infty$. En pratique, il convient de donner un sens physique à ω . Ainsi en régime harmonique, on identifiera ω à la pulsation d'excitation harmonique. En régime transitoire, on prendra par exemple $\omega = 2\pi f_0$ où f_0 est la fréquence centrale de perturbation du milieu. On note par ailleurs que les fonctions τ (resp. T) et a (resp. A) ne dépendent pas de ω . La méthode des rayons⁷ est le cas particulier où l'*ansatz* WKBJ est tronqué pour ne garder que le premier terme, soit $N = 0$. La suite de la méthode consiste donc à déterminer les fonctions τ (resp. T) et $a = a_0$ (resp. $A = A_0$).

⁷. Dans la littérature anglophone, la méthode des rayons porte aussi la dénomination *geometrical optics*.

Domaine temporel

Nous explicitons ici le système d'équations eikonales et de transport dans le cas d'une équation des ondes scalaire du type (1.30) ou (1.42). La substitution de (1.56) dans l'une de ces équations avec une célérité $c(\mathbf{x})$, pour $N = 0$, donne

$$\begin{aligned}
 (i\omega)^0 & \left[a_{tt} - c(\mathbf{x})^2 \Delta a \right] + \dots \\
 (i\omega)^1 & \left[2a_t \tau_t + a \tau_{tt} - c(\mathbf{x})^2 (2(\nabla a) \cdot (\nabla \tau) + a \Delta \tau) \right] + \dots \\
 (i\omega)^2 & \left[(\tau_t)^2 - c(\mathbf{x})^2 |\nabla \tau|^2 \right] a = 0.
 \end{aligned} \tag{1.58}$$

L'évaluation asymptotique de (1.58) pour $\omega \rightarrow \infty$ permet d'annuler les coefficients associées aux puissances non-nulles de $(i\omega)$. L'annulation du coefficient associé à $(i\omega)^2$ permet d'obtenir les deux⁸ **équations eikonales**, et l'annulation de celui associé à $(i\omega)$ permet d'obtenir les deux **équations de transport** (voir tableau 1.3). Dans l'écriture de ces dernières, on a préalablement utilisé les équations eikonales (1.59), et remplacé τ_t par $\mp c(\mathbf{x}) |\nabla \tau|$.

Équations eikonales	$\tau_t \pm c(\mathbf{x}) \nabla \tau = 0$	(1.59)
Équations de transport	$a_t \pm a \frac{c(\mathbf{x})^2 \Delta \tau - \tau_{tt}}{2c(\mathbf{x}) \nabla \tau } \pm c(\mathbf{x}) \frac{(\nabla \tau) \cdot (\nabla a)}{ \nabla \tau } = 0$	(1.60)

TABLEAU 1.3 – Équations eikonales et de transport dans le domaine temporel

Domaine fréquentiel

Dans le domaine fréquentiel, on s'intéresse aux équations de Helmholtz scalaires du type (1.51) et (1.53). La substitution de (1.57) dans l'une de ces équations avec le nombre

8. La factorisation $(\tau_t)^2 - c(\mathbf{x})^2 |\nabla \tau|^2 = (\tau_t + c(\mathbf{x}) |\nabla \tau|)(\tau_t - c(\mathbf{x}) |\nabla \tau|)$ rend compte des deux sens de propagation possibles, et a le même sens que la factorisation (d'Alembert) de l'équation des ondes.

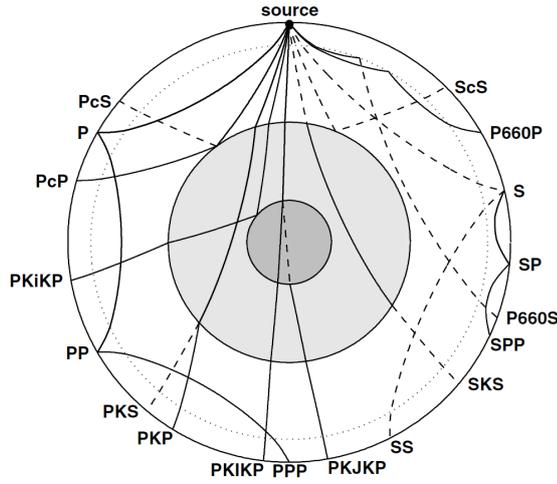


FIGURE 1.10 – Tracé de rayons dans un modèle terrestre simplifié [176]

d'onde $k(\mathbf{x}) = \omega/c(\mathbf{x})$, pour $N = 0$, donne

$$\begin{aligned}
 & (i\omega)^0 [\Delta A] + \dots \\
 & (i\omega)^1 \left[2(\nabla A) \cdot (\nabla T) + A\Delta T \right] + \dots \\
 & (i\omega)^2 \left[|\nabla T|^2 - k(\mathbf{x})^2/\omega^2 \right] A = 0.
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

De la même façon que dans le domaine temporel, l'évaluation asymptotique de (1.61) permet d'annuler les coefficients associés aux puissances $(i\omega)^2$ et $(i\omega)^1$, et d'obtenir respectivement les équations (1.62) et (1.63) dans le domaine fréquentiel (voir tableau 1.4).

Équation eikonale	$ \nabla T = \frac{1}{c(\mathbf{x})}$	(1.62)
Équation de transport	$2(\nabla T) \cdot (\nabla A) + A\Delta T = 0$	(1.63)

TABLEAU 1.4 – Équations eikonale et de transport dans le domaine fréquentiel

Dans le domaine temporel comme dans le domaine fréquentiel, on constate que la forme choisie des *ansätze* conduit à devoir résoudre des équations différentielles non-linéaires.

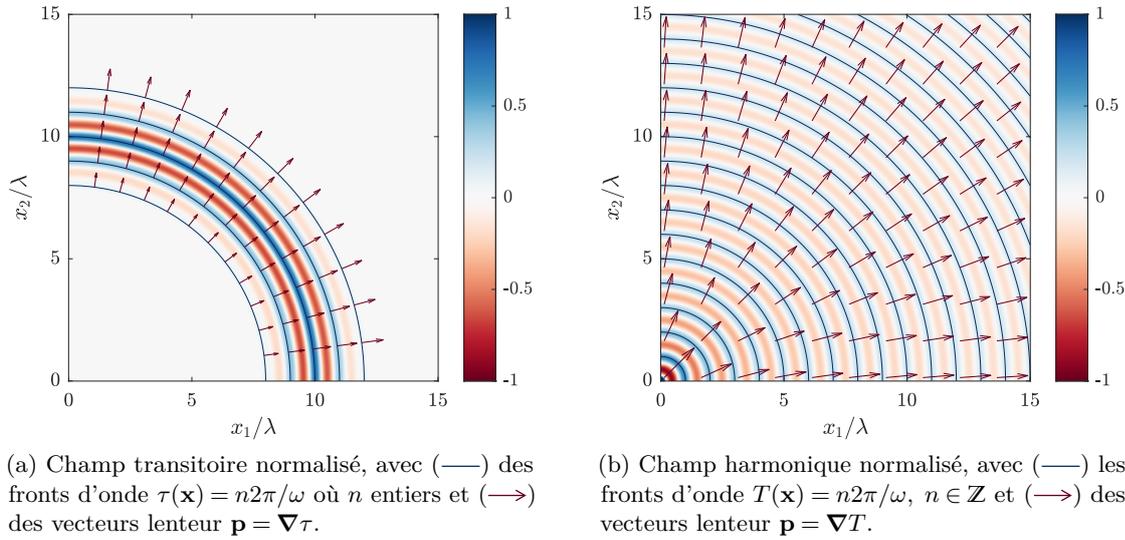


FIGURE 1.11 – Rayonnement d'un point source réel dans un milieu acoustique homogène 2D : fronts d'onde et vecteurs lenteur

L'objectif des deux paragraphes suivants est de transformer ces équations en des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO) pour lesquelles des solutions analytiques ou des outils numériques classiques existent.

1.3.3 Tracé de rayon

On cherche à présent à déterminer la fonction τ (resp. T), et donc à résoudre les équations eikonales non-linéaires (1.59) (ou (1.62)). Elles décrivent l'évolution des temps de vol par rapport à une référence $\tau_0 = \tau(\mathbf{x}_0, t_0)$ (resp. $T_0 = T(\mathbf{x}_0)$). Un front d'onde peut être défini comme une surface équi-phase $\tau(\mathbf{x}, t) = \text{const.}$ (resp. $T(\mathbf{x}) = \text{const.}$), et le vecteur $\mathbf{p} = \nabla\tau$ (resp. $\mathbf{p} = \nabla T$) orthogonal au front d'onde est alors identifiable au vecteur lenteur (voir figure 1.11). En espace libre, les équations eikonales admettent une solution locale bien définie. Ces équations possèdent des courbes caractéristiques, autrement appelées des *rayons*. Ce sont des courbes paramétrées de l'espace le long desquelles l'équation eikonale peut être écrite sous la forme d'un système d'équations différentielles ordinaires. Une façon générique d'identifier ces caractéristiques (ou *rayons*) – et donc de simplifier la résolution des équations eikonales – est de faire appel à la théorie de Hamilton-Jacobi [41]. Cette approche est généralement utilisée dans les études et développements théoriques pour le *tracé de rayon*⁹ [175, 29, 33, 162], mais aussi dans la

9. *Ray Tracing* dans la littérature anglophone.

construction de faisceaux gaussiens [140, 101, 146, 149]. C'est pourquoi nous détaillons ici les étapes importantes de la méthode, en particulier pour la résolution des équations eikonales (1.59) et (1.62).

Domaine temporel

Dans le domaine temporel, on peut voir l'équation eikonale (1.59) comme une équation de type Hamilton-Jacobi sous la forme

$$\tau_t + \mathcal{H}^\pm(\mathbf{x}, \nabla\tau) = 0. \quad (1.64)$$

En effet, en remarquant que $\mathbf{p} = \nabla\tau$, on en déduit que l'hamiltonien \mathcal{H}^\pm a pour expression

$$\mathcal{H}^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \pm c(\mathbf{x})|\mathbf{p}|. \quad (1.65)$$

Soit $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R}^{2d}$ une bicaractéristique liée à l'hamiltonien \mathcal{H}^\pm et paramétrée par le temps t , son évolution est donnée par les équations d'Hamilton (ou équations caractéristiques)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla_{\mathbf{p}}\mathcal{H}^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{p}), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H}^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{p}), & \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, \end{cases} \quad (1.66a)$$

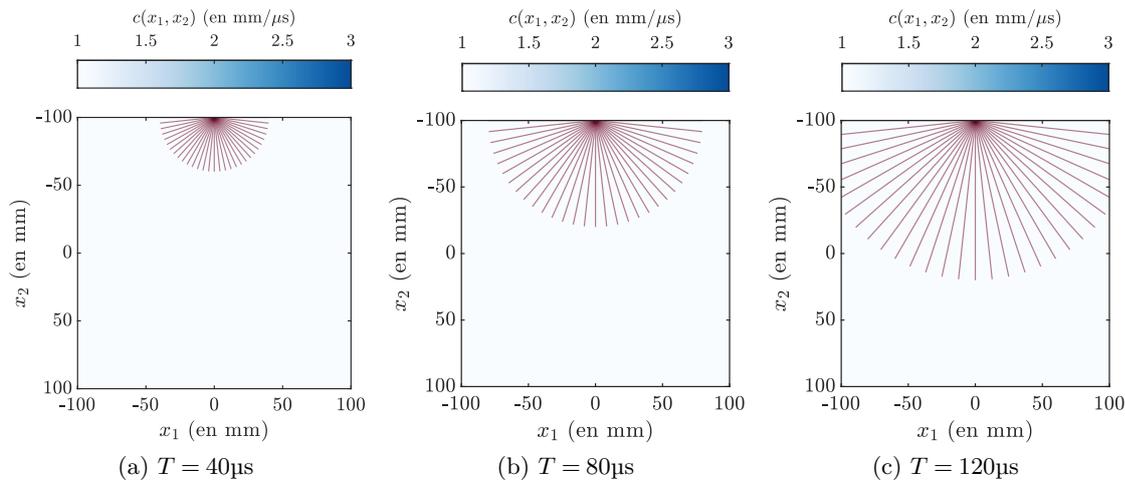
$$\quad (1.66b)$$

où d/dt désigne la dérivée totale par rapport à t . Dans le domaine temporel, un *rayon* est la projection dans l'espace physique $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ de la bicaractéristique $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R}^{2d}$, à un instant $t \geq 0$ particulier, et pour une condition initiale $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ donnée. Ainsi en régime transitoire, le rayon est un point de l'espace, et le *tracé de rayon* revient alors à obtenir le continuum $\mathbf{x}(t)$ de ces points pour tout $t \geq 0$. En utilisant l'expression de l'hamiltonien \mathcal{H}^\pm (1.65) dans le cas de l'équation eikonale (1.59) on peut expliciter les équations d'Hamilton, soit

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \pm c(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\mathbf{p}} = \mp |\mathbf{p}| \nabla c(\mathbf{x}), & \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0. \end{cases} \quad (1.67a)$$

$$\quad (1.67b)$$

On remarque dans (1.67a) qu'à l'instant t , le rayon est tangent au vecteur lenteur $\mathbf{p}(t)$. Dans les milieux homogènes et certains milieux inhomogènes particuliers (voir exemples 3 et 4), les équations d'Hamilton (1.67a) et (1.67b) ont des solutions analytiques. Le cas échéant, on fait appel à des schémas numériques standards pour la résolution de systèmes d'équations différentielles ordinaires, du type Runge-Kutta [54, 22]. Dès lors que l'on

FIGURE 1.12 – Tracé de rayons (—) dans un milieu homogène de célérité $c(\mathbf{x}) = c_0$

a trouvé les bicaractéristiques $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ du système d'équations d'Hamilton, on peut chercher à y évaluer la fonction de phase $\tau(\mathbf{x}(t), t)$. En y dérivant (totalement) τ par rapport au temps, et en utilisant (1.67a) puis (1.59), il vient

$$\frac{d\tau}{dt}(\mathbf{x}(t), t) = \tau_t + \nabla\tau \cdot \dot{\mathbf{x}} = \tau_t \pm c(\mathbf{x}) \nabla\tau \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} = 0. \quad (1.68)$$

On en déduit donc le long des rayons $\mathbf{x}(t \geq 0)$ – et seulement le long des rayons $\mathbf{x}(t \geq 0)$ [140] – que la fonction de phase τ est constante.

Exemple 3. Dans le cas particulier d'un milieu homogène caractérisé par $c(\mathbf{x}) = c_0$, l'Hamiltonien s'écrit $\mathcal{H}^\pm(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \pm c_0 |\mathbf{p}|$ et le système (1.67a) et (1.67b) a pour solution

$$\forall t \geq 0 \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 \pm c_0 t \frac{\mathbf{p}_0}{|\mathbf{p}_0|}, & (1.69a) \\ \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0. & (1.69b) \end{cases}$$

Le tracé de rayon associé est une demi-droite d'origine \mathbf{x}_0 et dirigée par le vecteur $\pm \mathbf{p}_0$ (voir figure 1.12). ■

Domaine fréquentiel

La stationnarité du régime harmonique rend la variable temporelle t inadaptée à la paramétrisation des rayons recherchés. On doit donc envisager des formes alternatives à

l'équation (1.64). Ainsi, on peut écrire l'équation eikonale (1.62) sous la forme

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = 0. \quad (1.70)$$

Plusieurs expressions de $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ permettent de satisfaire (1.70) [29], la plus générale étant

$$H_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\eta} \left[|\mathbf{p}|^\eta - \frac{1}{c(\mathbf{x})^\eta} \right], \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (1.71)$$

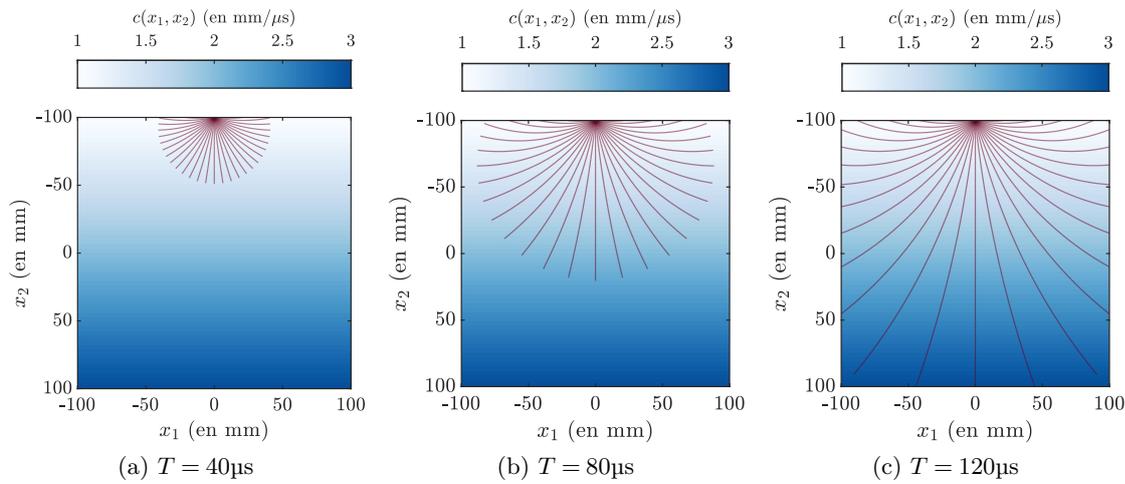
On admet que $\forall \eta \in \mathbb{Z}$, $H_\eta(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ est bien un hamiltonien au sens de la théorie de Hamilton-Jacobi [41] pour l'équation eikonale (1.62). La valeur choisie pour η va définir la nature physique de la paramétrisation du système hamiltonien. Les équations caractéristiques associées à (1.70) sont

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}), & \mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}_0, & (1.72a) \\ \frac{d\mathbf{p}}{ds} = -\nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}), & \mathbf{p}(s_0) = \mathbf{p}_0, & (1.72b) \\ \frac{dT}{ds} = \mathbf{p} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} H(\mathbf{x}, \mathbf{p}), & T(s_0) = T_0, & (1.72c) \end{cases}$$

où s est le paramètre du système. Dans le domaine fréquentiel, un *rayon* est la projection dans l'espace physique $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ de la bicaractéristique $(\mathbf{x}(s), \mathbf{p}(s)) \in \mathbb{R}^{2d}$, pour tout $s \in \mathbb{R}$, et pour une condition initiale $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ donnée. Ainsi en régime harmonique, le rayon est une courbe de l'espace, et le *tracé de rayon* consiste alors à obtenir cette courbe. En utilisant l'expression de l'hamiltonien (1.71) et en faisant tendre η vers 0, on peut expliciter le système d'équations caractéristiques, soit

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = c(\mathbf{x})^2 \mathbf{p}, & \mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}_0, & (1.73a) \\ \frac{d\mathbf{p}}{ds} = -\frac{\nabla c(\mathbf{x})}{c(\mathbf{x})}, & \mathbf{p}(s_0) = \mathbf{p}_0, & (1.73b) \\ \frac{dT}{ds} = 1, & T(s_0) = T_0. & (1.73c) \end{cases}$$

De la même façon que dans le domaine temporel, on remarque dans (1.73a) que le rayon est tangent au vecteur $\mathbf{p}(s)$. De plus en choisissant $\eta \rightarrow 0$, le paramètre s est égal à la

FIGURE 1.13 – Tracé de rayons (—) dans un milieu de célérité $c(\mathbf{x}) = c_0 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}$

phase T à une constante d'intégration près ; il est assimilable à un *temps de vol*¹⁰. Sauf cas particuliers des milieux homogènes et de certains milieux inhomogènes (voir exemples 3 et 4), on fait appel à des schémas numériques standards pour résoudre le système d'équations caractéristiques. Après obtention des bicaractéristiques $(\mathbf{x}(s), \mathbf{p}(s))$, à l'aide de (1.73c) on identifie sans effort la fonction de phase $T(\mathbf{x}(s)) = s + T_0$ sur les rayons tracés.

Exemple 4. Dans le cas particulier d'un milieu inhomogène caractérisé par $c(\mathbf{x}) = c_0 + \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}$ où $\boldsymbol{\alpha}$ est un gradient de célérité constant, on peut montrer [162, 123] que les rayons décrivent des portions de cercle (voir figure 1.13). ■

1.3.4 Amplitude rayon

Dans le paragraphe précédent, nous avons présenté les formulations hamiltoniennes associées aux équations eikonales. L'identification des bicaractéristiques a permis de tracer les rayons, donc de les décrire géométriquement ainsi que de calculer les fonctions de phase localement le long de ces courbes paramétrées. Nous nous intéressons ici au calcul de l'amplitude du champ, et donc à la résolution des équations de transport (1.60)

10. On peut relier le temps de vol s à l'abscisse curviligne l d'un rayon en calculant sa longueur du rayon entre deux points A et B ,

$$L_{AB} = \int_{\mathbf{x}(s_A)}^{\mathbf{x}(s_B)} dl = \int_{s_A}^{s_B} c(\mathbf{x}(s)) ds.$$

et (1.63). On trouve dans la littérature différentes approches pour reformuler et simplifier la résolution de ces équations, conduisant généralement aux mêmes résultats [140, 29, 33, 152, 149]. Nous admettons ici les résultats et invitons le lecteur intéressé à consulter les références bibliographiques citées.

Domaine temporel

NORRIS [140] et QIAN et YING [149] détaillent la résolution de l'équation de transport (1.60) afin de décrire l'évolution de l'amplitude d'un paquet d'onde gaussien au cours de sa propagation (voir la section 2.1). Cette démonstration peut être adaptée dans le cadre de la méthode des rayons. Ainsi, consécutivement au tracé de rayon solution du système (1.67a) et (1.67b), l'amplitude $a(\mathbf{x}, t)$ recherchée peut être évaluée sur la bicaractéristique $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t))$ initialisée par $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$, et mise sous la forme

$$a(\mathbf{x}(t), t) = a(\mathbf{x}_0, 0) \sqrt{\frac{c(\mathbf{x}(t)) \det \mathcal{J}(0)}{c(\mathbf{x}(0)) \det \mathcal{J}(t)}} \quad (1.74)$$

où $\mathcal{J}(t) = \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial \mathbf{x}(0)}$ est la matrice jacobienne¹¹ associée à la transformation géométrique $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(t)$ résultante du tracé de rayon. Ainsi, pour obtenir l'amplitude rayon $a(t)$ à partir de conditions initiales $a(0)$ et $\mathcal{J}(0)$ connues, il suffit de calculer la matrice $\mathcal{J}(t)$. On peut montrer que cette dernière est solution d'un système d'équations différentielles ordinaires [140, 149].

Domaine fréquentiel

La résolution de l'équation de transport (1.63) en régime harmonique [152] est semblable à celle menée en régime transitoire. Ainsi, consécutivement au tracé de rayon solution du système (1.66a) et (1.66a), l'amplitude $A_0(s)$ recherchée peut être évaluée sur la bicaractéristique $(\mathbf{x}(s), \mathbf{p}(s))$ du système (1.73a) et (1.73b) initialisée par $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$. De façon similaire à (1.74), on admet que $A_0(s)$ s'écrit

$$A_0(s) = A_0(0) \sqrt{\frac{c(\mathbf{x}(s)) \det \mathbf{J}(0)}{c(\mathbf{x}(0)) \det \mathbf{J}(s)}} \quad (1.75)$$

11. On trouve dans la littérature [152, 144] des expressions du type

$$a(t) = a(0) \sqrt{\frac{c(t)^2 \det \mathcal{J}^{(\tau)}(0)}{c(0)^2 \det \mathcal{J}^{(\tau)}(t)}}.$$

Dans ce cas, $\mathcal{J}^{(\tau)}$ est la matrice jacobienne de la transformation $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(t)$ exprimée dans le système de coordonnées $\mathbf{x}(t) = (q_1, \dots, q_d)$ où q_1, \dots, q_d sont des *coordonnées rayon-centrées*. On vérifie alors (voir [29]) $\mathcal{J}^{(\tau)}(t) = c^{-1}(t) \mathcal{J}(t)$, ce qui est cohérent avec (1.74).

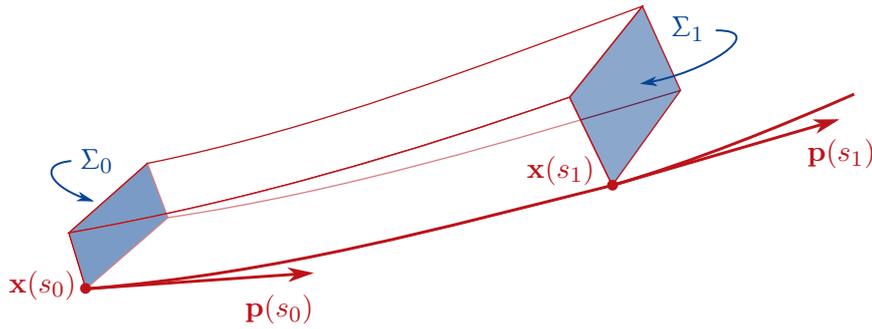


FIGURE 1.14 – Exemple de tube de rayons

où $\mathbf{J}(s) = \frac{\partial \mathbf{x}(s)}{\partial \mathbf{x}(0)}$ est la matrice jacobienne associée à la transformation géométrique $\mathbf{x}_0 \mapsto \mathbf{x}(s)$ résultante du tracé de rayon. De la même façon qu'en régime transitoire, pour obtenir l'amplitude rayon $A_0(s)$ à partir de conditions initiales $A_0(0)$ et $\mathbf{J}(0)$ connues, il suffit de calculer la matrice $\mathbf{J}(s)$. On peut également montrer que $\mathbf{J}(s)$ est solution d'un système d'équations différentielles ordinaires, connu dans la littérature sous le nom de système de *tracé dynamique de rayon* (voir [29], Chapitre 4).

Interprétation géométrique

Une moyen classique d'illustrer et de démontrer de façon géométrique les résultats (1.74) et (1.75) est d'introduire la notion de *tube de rayons*, aussi appelé *pinceau*¹². On définit un tube de rayons comme étant un continuum de rayons, issus d'un rayon principal dont on perturbe les conditions initiales de façon infinitésimale. Par construction, il est possible de modéliser la propagation des pinceaux dans des milieux éventuellement complexes en calculant l'évolution de leurs quantités paraxiales par rapport aux perturbations initiales [70, 72]. Cette approche est à la base du calcul de champ ultrasonore dans la plate-forme CIVIA développée au CEA [71]. On représente figure 1.14 un tube de rayons entre les temps de vol $s = s_0$ et $s = s_1$. En particulier, on représente en rouge les sections du tube Σ_0 et Σ_1 , respectivement aux temps de vol s_0 et s_1 . Pour simplifier, on se place dans le cas particulier du régime harmonique dans un milieu lentement inhomogène (variations lentes de la masse volumique le long du tube de rayons). En remarquant que (1.63) est équivalent à $\nabla \cdot (A^2 \nabla T) = 0$ et en intégrant cette dernière relation sur le volume du tube de rayons, on obtient la relation

$$\frac{A(s_0)^2 \Sigma_0}{c(s_0)} = \frac{A(s_1)^2 \Sigma_1}{c(s_1)}, \quad (1.76)$$

12. *Pencil of rays* dans la littérature anglophone [52].

et il vient

$$A(s_1) = A(s_0) \sqrt{\frac{c(s_1)\Sigma_0}{c(s_0)\Sigma_1}}. \quad (1.77)$$

Géométriquement, on comprend donc que l'amplitude rayon est d'autant plus grande que la section du tube de rayons est petite. La comparaison de (1.77) avec (1.75), en faisant l'hypothèse d'un milieu lentement inhomogène, permet par ailleurs d'identifier $\det \mathbf{J}$ à la section Σ du tube de rayons. Communément appelée *divergence géométrique*¹³, la quantité $\sqrt{\det \mathbf{J}}$ est la grandeur d'intérêt dans le calcul de l'amplitude rayon.

1.3.5 Comportements singuliers

Que ce soit en régime harmonique ou en régime transitoire, on dispose désormais d'une solution approchée aux équations de propagation et dont les fonctions de phase et d'amplitude ont été déterminées dans les paragraphes 1.3.3 et 1.3.4 respectivement. Par construction, ces fonctions ne sont définies que le long de courbes particulières de l'espace, appelées *rayons*. En d'autres termes, le champ n'a de valeur en un point de l'espace que si ce dernier appartient à un rayon. Certaines stratégies dérivées de la méthode des rayons permettent de s'assurer que chaque point de calcul appartient à un rayon [143], d'autres cherchent à interpoler les fronts d'onde à partir des rayons tracés et à en déduire les fonctions d'amplitude et/ou de phase en tout point [179]. Pour certaines configurations, il demeure toutefois des zones de l'espace dans lesquelles il est impossible d'évaluer correctement le champ propagé par la méthode des rayons, et où la solution approchée ne peut pas être définie. Ces limites, que l'on désigne par « comportements singuliers », sont intrinsèquement liées à la nature géométrique des rayons. Dans le cadre appliqué de la modélisation du CND par ultrasons, deux comportements singuliers attirent notre attention : les *ombrages* et les *caustiques*.

Ombres

Sur la figure 1.15, on représente le tracé de rayons correspondant à une onde plane en incidence oblique sur une entaille finie. Cette dernière modélise une discontinuité strictement réfléchissante, par exemple une fissure à bords disjoints dans un milieu solide. La zone représentée en bleu n'est pas accessible par les rayons. Dans l'esprit de l'optique géométrique, c'est ce qu'on appelle un *ombrage*. Il y est donc impossible d'évaluer une amplitude ou une phase par la méthode des rayons, contrairement à la zone « éclairée » représentée en rouge. La solution approchée globale présente donc une

13. *Geometrical spreading* dans la littérature anglophone.

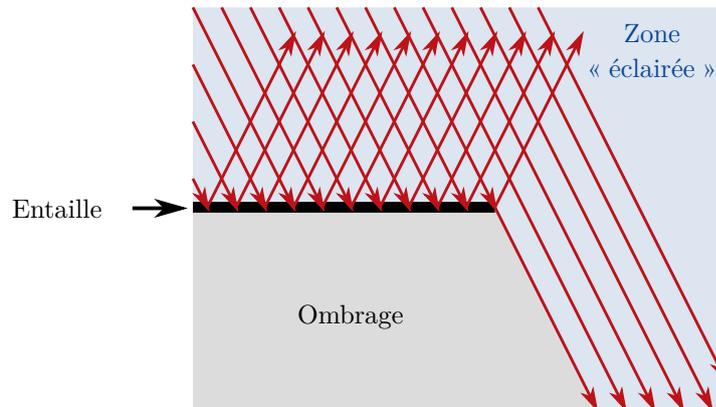


FIGURE 1.15 – Tracé de rayons et ombrage en aval d'une entaille

discontinuité non-physique entre ces deux zones. Dans le cadre appliqué de la modélisation par la méthode des rayons, et en particulier dans le calcul de champ ultrasonore dans la plate-forme logicielle CIVA, ces ombrages sont susceptibles d'apparaître [177] dès lors que des discontinuités physiques et/ou géométriques – modélisant généralement des défauts ou des interfaces – sont introduites dans le modèle. Pour s'en affranchir, des développements spécifiques sont réalisés afin de prendre en compte correctement la diffraction générée par le bord de l'entaille [17, 103, 43].

Caustiques

D'après (1.74) (resp. (1.75)), on observe que l'amplitude $a(t)$ (resp. $A(s)$) n'est pas définie lorsque $\det \mathcal{J}(t) = 0$ (resp. $\det \mathbf{J}(s) = 0$) ; elle diverge, ce qui ne peut refléter la réalité physique. Dans la théorie des rayons, ces points du rayon pour lesquels le Jacobien s'annule sont des points de *caustique*. Géométriquement, ces points singuliers correspondent à l'annulation de la *divergence géométrique*, c'est-à-dire de la section du tube de rayons (voir figure 1.16a). Les caustiques peuvent apparaître pour plusieurs raisons. Par exemple, on représente figure 1.16b le tracé de rayons dans un milieu homogène d'une onde plane incidente sur une inclusion cylindrique. Le tracé en aval de l'inclusion fait apparaître une courbe avec un point de rebroussement. Cette courbe est précisément une caustique dite « pli », et elle est uniquement due à la géométrie de l'inclusion en amont. Les caustiques peuvent être également causées par la nature physique du milieu de propagation, c'est notamment le cas dans des matériaux inhomogènes et/ou anisotropes. On peut ainsi observer la formation d'une caustique dans la soudure figure 1.9, dans le tracé des rayons associés aux ondes longitudinales incidentes, converties en ondes transversales après réflexion par le fond de la pièce.

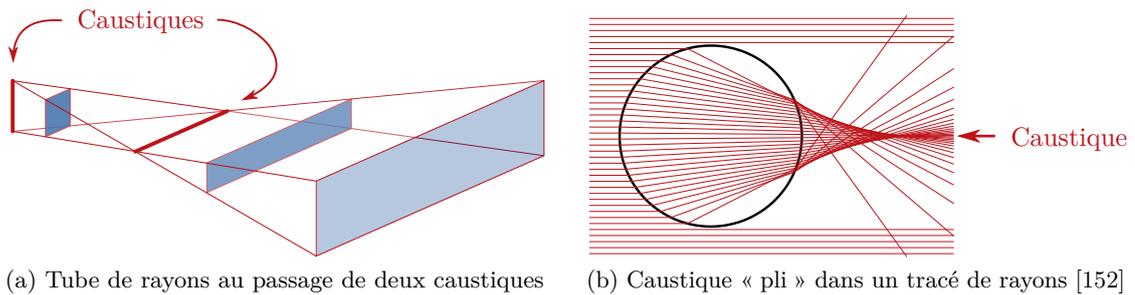


FIGURE 1.16 – Exemples de caustiques

De la même façon que pour le traitement des discontinuités non-physiques générées par les ombrages, il existe des développements spécifiques permettant une modélisation quantitative du champ ultrasonore à l'endroit des caustiques. Une approche consiste à considérer le voisinage d'une caustique comme une couche limite de diffraction, à y réaliser localement un développement asymptotique et à le raccorder avec la solution approchée par les rayons loin de la caustique. Cette méthode a d'abord été développée dans les années 1960 par BUCHAL et KELLER [21] pour des caustiques faiblement courbées par rapport à la longueur d'onde. Ils montrent notamment que ces développements font appel à des fonctions mathématiques particulières (fonction d'Airy, fonction de Pearcey), prédites par ailleurs par la *théorie des catastrophes* [113]. Cette dernière classe les caustiques en fonction de leur forme géométrique, et leur associe des intégrales de diffraction spécifiques qui décrivent le comportement de la phase à leur voisinage.

Plus tard, il a été proposé une nouvelle méthode [130] visant à donner une représentation asymptotique et uniforme du champ, y compris en présence de caustiques, et ne nécessitant donc pas de réaliser des raccordements à des développements asymptotiques locaux pour les régulariser. Il s'agit de la méthode de Maslov. Bien que pertinente dans l'étude théorique de solutions uniformes en présence de caustiques, elle a pour inconvénient majeur que son implémentation algorithmique dépend très fortement de la géométrie des caustiques éventuellement présentes [146].

Singularités et faisceaux gaussiens

C'est notamment dans cette recherche d'une approche générique et « aveugle » devant la présence (ou non) de caustiques que des méthodes utilisant des faisceaux gaussiens ont commencé à voir le jour au début des années 1980 en géophysique [30, 145, 147]. En effet, ce sont des objets asymptotiques qui ne présentent pas de singularité au passage d'une caustique. Prenons par exemple l'expression (1.21) du faisceau gaussien généralisé.

Dès lors que la matrice $\mathbf{M}(0)$ est symétrique et de partie imaginaire définie positive, il est possible de montrer que $\mathbf{M}(z)$ présente les mêmes propriétés pour tout z . Dans ces conditions, on peut aussi montrer que le déterminant $\det \mathbf{M}(z)$ ne diverge jamais, en particulier au passage d'une caustique. Enfin, on remarque dans (1.21) que le champ $u(\mathbf{r})$ n'est pas seulement défini le long de l'axe de propagation, mais également en dehors. De cette façon, si l'on parvient à construire un faisceau gaussien autour d'un rayon, alors il est possible d'avoir une description continue à la frontière entre la zone éclairée et l'ombrage.

Faisceaux gaussiens ultrasonores

Sommaire

2.1 Régime transitoire	49
2.1.1 Ansatz complexe et tracé de rayon	49
2.1.2 Développements paraxiaux	50
2.1.3 Résolution de la fonction de phase	51
2.1.4 Résolution de la fonction d'amplitude	52
2.1.5 Propagation des faisceaux gaussiens transitoires	53
2.2 Régime harmonique	55
2.2.1 Ansatz complexe et tracé de rayon	55
2.2.2 Coordonnées rayon-centrées	56
2.2.3 Développements paraxiaux	56
2.2.4 Tracé dynamique de rayon	57
2.2.5 Propagation des faisceaux gaussiens harmoniques	59
2.3 Caractéristiques physiques	61
2.3.1 Régime transitoire	61
2.3.2 Régime harmonique	66

Dans le chapitre précédent, nous avons souligné le comportement haute fréquence de la propagation ultrasonore en situation de contrôle non-destructif. Cette hypothèse fondamentale de modélisation a ainsi permis de détailler la méthode des rayons et de discuter des limites de ce modèle. Dans la continuité directe de cette théorie appliquée aux ondes élastiques, nous présentons dans ce chapitre le formalisme adopté dans ces travaux de thèse pour calculer les faisceaux gaussiens. On montre alors que ce formalisme hérité de la théorie des rayons englobe les différentes constructions historiques présentées dans la section 1.1. La dernière section de ce chapitre est consacrée à la description des propriétés des faisceaux gaussiens, et de leur comportement caractéristique au cours de la propagation.

2.1 Régime transitoire

Les calculs qui suivent dans cette section sont largement empruntés à la littérature existante [101, 170, 149, 119, 11]. Ils ont pour objectif de construire les faisceaux gaussiens portés par les rayons, tracés dans le domaine temporel dans le paragraphe 1.3.3 du chapitre précédent.

2.1.1 Ansatz complexe et tracé de rayon

On prend pour point de départ l'*ansatz* WKBJ (1.56), tronqué au premier terme du développement, soit

$$\phi(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}, t)e^{i\omega\tau(\mathbf{x}, t)} = a_0(\mathbf{x}, t)e^{i\omega\tau(\mathbf{x}, t)}. \quad (2.1)$$

Jusqu'ici, les fonctions d'amplitude a et de phase τ étaient à valeurs réelles. Ici, nous relâchons cette condition de sorte que a et τ sont désormais des fonctions à valeurs dans le plan complexe. Elles vérifient néanmoins les mêmes équations eikonales et de transport que pour la méthode des rayons, référencées dans le tableau 1.3. On peut donc reprendre les mêmes développements que dans le paragraphe 1.3.3. En particulier, nous allons ici construire les faisceaux gaussiens à partir du système d'équations d'Hamilton, soit

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \nabla_{\mathbf{p}}\mathcal{H}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla_{\mathbf{x}}\mathcal{H}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), & \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, \end{cases} \quad (2.2a)$$

$$(2.2b)$$

où $\mathbf{p} = \nabla\tau$, et où l'hamiltonien \mathcal{H}^{\pm} correspondant aux équations de propagation est de la forme

$$\mathcal{H}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \pm c(\mathbf{x})|\mathbf{p}|. \quad (2.3)$$

Résoudre ce système fournit la bicaractéristique $(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t)) \in \mathbb{R}^{2d}$ associée à l'hamiltonien \mathcal{H}^{\pm} , qui émane du point initial $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ dans l'espace des phases à $t = 0$. Le rayon correspondant est $\mathbf{x}(t \geq 0)$ et est défini dans \mathbb{R}^d . On rappelle également les équations d'Hamilton explicitées grâce à l'expression de l'hamiltonien (2.3), soit

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \pm c(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \\ \dot{\mathbf{p}} = \mp |\mathbf{p}| \nabla c(\mathbf{x}), & \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0. \end{cases} \quad (2.4a)$$

$$(2.4b)$$

Ces résultats seront utiles pour la suite des développements.

2.1.2 Développements paraxiaux

La suite de la construction consiste à faire un développement de Taylor selon \mathbf{x} , à un instant t , des fonctions de phase $\tau(\mathbf{x}, t)$ et d'amplitude $a(\mathbf{x}, t)$ au voisinage du rayon $\mathbf{x}(t)$ (voir figure 2.1a). Supposer valide ces *développements paraxiaux* revient à formuler une hypothèse paraxiale du même type que dans la section 1.1. Soit $f : (\mathbf{x}, t) \mapsto f(\mathbf{x}, t)$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ et à valeur dans \mathbb{C} . Le développement de Taylor selon \mathbf{x} d'ordre N_f de la fonction f au voisinage du rayon $\mathbf{x}(t)$ vaut

$$f(\mathbf{x}, t) = \sum_{|\alpha| \leq N_f} \frac{\partial^\alpha f(\mathbf{x}(t), t)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))^\alpha, \quad (2.5)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ est un multi-indice. On note N_τ l'ordre de développement de la fonction de phase τ et N_a l'ordre de développement de la fonction d'amplitude a . Selon les valeurs de N_τ et N_a , on peut définir différents types de faisceaux gaussiens (voir tableau 2.1). Nous nous intéressons ici spécifiquement aux faisceaux gaussiens du premier ordre, c'est-à-dire tels que $N_\tau = 2$ et $N_a = 0$. Sauf mention contraire, nous ne préciserons pas par la suite l'ordre d'usage $\mathcal{N} = 1$.

\mathcal{N}	$N_\tau = \mathcal{N} + 1$	$N_a = \lceil \frac{\mathcal{N}}{2} \rceil - 1$
1	2	0
2	3	0
3	4	1
...

TABLEAU 2.1 – Ordres \mathcal{N} des faisceaux gaussiens et ordres de développement N_τ et N_a des fonctions de phase et d'amplitude, définis dans [118]

Explicitons à présent les fonctions de phase et d'amplitude d'un tel faisceau. On rappelle d'après (1.68) que le long des rayons $\mathbf{x}(t \geq 0)$ – et uniquement le long des rayons $\mathbf{x}(t \geq 0)$ – la fonction de phase τ est constante. On choisit de façon arbitraire $\forall t \geq 0, \tau(\mathbf{x}(t), t) = 0$, de sorte que le développement (2.5) de la fonction de phase τ au voisinage du rayon $\mathbf{x}(t)$ est réduit à

$$\tau(\mathbf{x}, t) = \sum_{1 \leq |\alpha| \leq 2} \frac{\partial^\alpha \tau(\mathbf{x}(t), t)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t))^\alpha,$$

ou de façon équivalente en notations abrégées (voir annexe ??)

$$\tau(\mathbf{x}, t) = \tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), t) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) + \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \tau_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}(t), t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)). \quad (2.6)$$

Pour ce qui est de la fonction d'amplitude, son développement s'écrit simplement

$$a(\mathbf{x}, t) = a(\mathbf{x}(t), t) = a(t),$$

c'est-à-dire que la valeur de la fonction d'amplitude a du faisceau gaussien est propre uniquement au rayon $\mathbf{x}(t \geq 0)$ et ne dépend que du temps $t \geq 0$.

2.1.3 Résolution de la fonction de phase

On cherche ici à identifier les termes du développement paraxial (2.6) de la fonction de phase, et à les résoudre. Le terme $\tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), t) = \nabla_{\mathbf{x}} \tau(\mathbf{x}(t), t) = \mathbf{p}(t)$ est en fait déjà connu par la résolution des équations d'Hamilton (2.2a) et (2.2b). On note ensuite $\mathcal{M}(t) = \tau_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}(t), t)$ la matrice hessienne complexe de la fonction de phase τ , évaluée à l'instant t sur le rayon $\mathbf{x}(t)$. Par construction, $\mathcal{M}(t)$ est une matrice symétrique. Pour déterminer $\mathcal{M}(t)$, on suit [149] en prenant le gradient de l'équation de Hamilton-Jacobi (1.64) par rapport à \mathbf{x} , soit en notations abrégées

$$\tau_{t,\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\mathbf{x}}^{\pm}(\mathbf{x}, \tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)) + \tau_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}, t) \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^{\pm}(\mathbf{x}, \tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)) = 0. \quad (2.7)$$

En prenant le gradient de (2.7) par rapport à \mathbf{x} et en faisant abstraction des dépendances en (\mathbf{x}, t) et $(\mathbf{x}, \tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t))$, on obtient

$$\tau_{t,\mathbf{xx}} + \mathcal{H}_{\mathbf{xx}}^{\pm} + {}^t\mathcal{H}_{\mathbf{xp}}^{\pm} \tau_{\mathbf{xx}} + \tau_{\mathbf{xx}} \mathcal{H}_{\mathbf{px}}^{\pm} + \tau_{\mathbf{xx}} \mathcal{H}_{\mathbf{pp}}^{\pm} \tau_{\mathbf{xx}} + \tau_{\mathbf{xxx}} \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^{\pm} = 0. \quad (2.8)$$

En remarquant que l'équation (2.8) peut être évaluée sur le rayon $\mathbf{x}(t)$ en particulier, et que d'après (2.2a),

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{\mathbf{xx}}}{dt}(\mathbf{x}(t), t) &= \tau_{\mathbf{xx},t} + \tau_{\mathbf{xxx}} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= \tau_{t,\mathbf{xx}} + \tau_{\mathbf{xxx}} \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^{\pm}, \end{aligned}$$

on peut expliciter la matrice hessienne $\mathcal{M}(t)$ et il vient

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} + \mathcal{H}_{\mathbf{xx}}^{\pm} + \mathcal{M} \mathcal{H}_{\mathbf{px}}^{\pm} + {}^t\mathcal{H}_{\mathbf{xp}}^{\pm} \mathcal{M} + \mathcal{M} \mathcal{H}_{\mathbf{pp}}^{\pm} \mathcal{M} = 0. \quad (2.9)$$

On obtient finalement une équation différentielle qui ne dépend que de la matrice hessienne $\mathcal{M}(t)$ et des tenseurs dérivées secondes de l'hamiltonien \mathcal{H}^\pm . L'équation (2.9) est une équation différentielle non-linéaire de Riccati pour $\mathcal{M}(t)$ (voir [150]).

2.1.4 Résolution de la fonction d'amplitude

On s'intéresse ici à la fonction d'amplitude $a(\mathbf{x}, t) = a(t)$. On pourrait chercher à résoudre directement l'équation de transport (1.60) le long du rayon $\mathbf{x}(t \geq 0)$. Au vu de la forme des premières équations (2.2a), (2.2b) et (2.9) régissant l'évolution d'un faisceau gaussien, il apparaît naturel de faire apparaître l'hamiltonien \mathcal{H}^\pm dans cette équation de transport. Dans un premier temps d'après (1.60) et en remarquant que $\Delta\tau(\mathbf{x}(t), t) = \text{Tr}[\mathcal{M}(t)]$, on obtient en notations abrégées

$$a_t + \frac{a}{2\mathcal{H}^\pm} \left(c^2 \text{Tr}[\mathcal{M}] - \tau_{tt} \right) + \frac{c^2}{\mathcal{H}^\pm} \mathbf{P} \cdot a_{\mathbf{x}} = 0. \quad (2.10)$$

On dérive ensuite l'équation de Hamilton-Jacobi (1.64) par rapport à t ,

$$\tau_{tt}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^\pm(\mathbf{x}, \tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)) \cdot \tau_{\mathbf{x}, t}(\mathbf{x}, t) = 0.$$

D'après (2.7), on peut expliciter la dérivée mixte $\tau_{\mathbf{x}, t} = \tau_{t, \mathbf{x}}$. Ainsi en faisant abstraction des dépendances en (\mathbf{x}, t) et $(\mathbf{x}, \tau_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t))$, il vient

$$\tau_{tt} = \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^\pm \cdot \mathcal{H}_{\mathbf{x}}^\pm + {}^t\mathcal{H}_{\mathbf{p}}^\pm \tau_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^\pm = 0. \quad (2.11)$$

On a donc une expression hamiltonienne de τ_{tt} . Enfin en remarquant que les équations (2.10) et (2.11) peuvent être évaluées sur le rayon $\mathbf{x}(t)$ en particulier, et que d'après (2.4a),

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt}(\mathbf{x}(t), t) &= a_t + a_{\mathbf{x}} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ &= a_t + a_{\mathbf{x}} \cdot \frac{c^2}{\mathcal{H}^\pm} \mathbf{P}, \end{aligned}$$

il vient

$$\frac{da}{dt} + \frac{a}{2\mathcal{H}^\pm} \left(c^2 \text{Tr}[\mathcal{M}] - \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^\pm \cdot \mathcal{H}_{\mathbf{x}}^\pm - {}^t\mathcal{H}_{\mathbf{p}}^\pm \mathcal{M} \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^\pm \right) = 0. \quad (2.12)$$

On obtient finalement une équation différentielle qui ne dépend que de la fonction d'amplitude $a(t)$, de la matrice hessienne $\mathcal{M}(t)$, de l'hamiltonien \mathcal{H}^\pm et de ses dérivées premières.

2.1.5 Propagation des faisceaux gaussiens transitoires

Finalement, la propagation des faisceaux gaussiens définis par

$$\phi(\mathbf{x}, t) = a(t) \exp \left\{ i\omega \left(\mathbf{p}(t) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) + \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \mathcal{M}(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \right) \right\} \quad (2.13)$$

est complètement caractérisée par les équations (2.2a), (2.2b), (2.9) et (2.12). Ces dernières forment le système (\mathcal{E}) d'équations différentielles ordinaires suivant

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^{\pm}, & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, & (2.14a) \\ \dot{\mathbf{p}} = -\mathcal{H}_{\mathbf{x}}^{\pm}, & \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, & (2.14b) \\ \dot{\mathcal{M}} = -\mathcal{H}_{\mathbf{xx}}^{\pm} - \mathcal{M} \mathcal{H}_{\mathbf{px}}^{\pm} - {}^t \mathcal{H}_{\mathbf{xp}}^{\pm} \mathcal{M} - \mathcal{M} \mathcal{H}_{\mathbf{pp}}^{\pm} \mathcal{M}, & \mathcal{M}(0) = \mathcal{M}_0, & (2.14c) \\ \dot{a} = -\frac{a}{2\mathcal{H}^{\pm}} \left(c^2 \text{Tr}[\mathcal{M}] - \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^{\pm} \cdot \mathcal{H}_{\mathbf{x}}^{\pm} - {}^t \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^{\pm} \mathcal{M} \mathcal{H}_{\mathbf{p}}^{\pm} \right), & a(0) = a_0, & (2.14d) \end{cases}$$

où l'hamiltonien vaut $\mathcal{H}^{\pm} = \pm c(\mathbf{x})|\mathbf{p}|$. De la même façon que pour la méthode des rayons, le système (\mathcal{E}) a des solutions analytiques dans les milieux homogènes (voir exemple 5) et dans certains milieux inhomogènes. Pour ces cas particuliers, le calcul numérique d'un faisceau gaussien propagé est immédiat. Le cas échéant, on fait appel aux schémas numériques standards du type Runge-Kutta [54, 22], d'ordre 4 en pratique [100, 118, 112, 11].

Exemple 5. On considère un milieu homogène, caractérisé par une vitesse de propagation constante $c(\mathbf{x}) = c_0$. On cherche dans cet exemple la solution analytique dans le domaine temporel d'un faisceau gaussien propagé à l'instant $t = T \geq 0$, soit

$$\phi(\mathbf{x}, T) = a(T) \exp \left\{ i\omega \left(\mathbf{p}(T) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}(T)) + \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}(T)) \mathcal{M}(T) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(T)) \right) \right\}. \quad (2.15)$$

Cela revient donc à trouver la solution à l'instant $t = T$ du système (\mathcal{E}) simplifié

$$(\mathcal{E}) \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \pm c_0 \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, & (2.16a) \\ \dot{\mathbf{p}} = 0, & \mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_0, & (2.16b) \\ \dot{\mathcal{M}} = \mp \frac{c_0}{|\mathbf{p}|} \mathcal{M} \mathcal{P}_{\perp} \mathcal{M}, & \mathcal{M}(0) = \mathcal{M}_0, & (2.16c) \\ \dot{a} = \mp \frac{ac_0}{2|\mathbf{p}|} \text{Tr}[\mathcal{M} \mathcal{P}_{\perp}], & a(0) = a_0. & (2.16d) \end{cases}$$

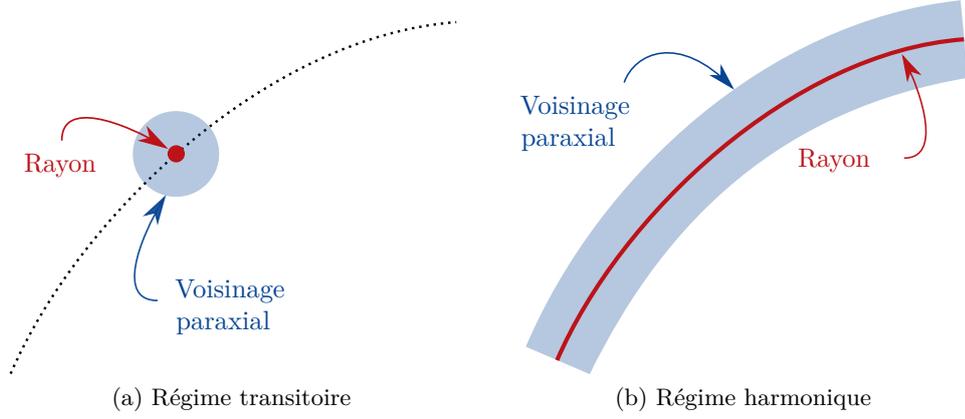


FIGURE 2.1 – Voisins associés aux développements paraxiaux

où $\mathcal{P}_\perp = \mathcal{I} - \mathbf{p}^t \mathbf{p} / |\mathbf{p}|^2$ est la matrice qui projette tout vecteur sur la surface orthogonale au rayon [140], avec \mathcal{I} la matrice identité. Sans surprise, les deux premières équations différentielles (2.16a) et (2.16b) ont pour solution la bicaractéristique donnée dans l'exemple 3 par (1.69a) et (1.69b), et donnant lieu à un tracé de rayon rectiligne. L'équation (2.16c) est une équation de Riccati non-linéaire pour la matrice hessienne $\mathcal{M}(\mathbf{t})$, qu'il est néanmoins possible de résoudre de façon analytique sous certaines conditions (voir annexe A.1) et dont on peut trouver la solution dans [140, 165, 4]. Il vient alors, après résolution de (2.16c), que l'équation différentielle (2.16d) vérifiée par l'amplitude $a(t)$ est linéaire et donne également une solution analytique (voir annexe A.2). Finalement, la résolution complète de (\mathcal{E}) donne

$$\forall T \geq 0 \begin{cases} \mathbf{x}(T) = \mathbf{x}_0 \pm \left(c_0 \frac{\mathbf{p}_0}{|\mathbf{p}_0|} \right) T, & (2.17a) \\ \mathbf{p}(T) = \mathbf{p}_0, & (2.17b) \\ \mathcal{M}(T) = \mathcal{M}_0 \left[\mathcal{A}^\pm(T) \right]^{-1}, & (2.17c) \\ a(T) = a_0 \left(\det \mathcal{A}^\pm(T) \right)^{-\frac{1}{2}}, & (2.17d) \end{cases}$$

où on a introduit la matrice \mathcal{A}^\pm telle que

$$\mathcal{A}^\pm(T) = \left[\mathcal{I} \pm \left(\frac{c_0}{|\mathbf{p}_0|} \mathcal{P}_\perp \mathcal{M}_0 \right) T \right]. \quad (2.18)$$

La solution propagée (2.15) qui en résulte et ses propriétés sont étudiées dans la section 2.3. ■

2.2 Régime harmonique

Alors que les rayons sont des points de l'espace en régime transitoire, ce sont des courbes de l'espace en régime harmonique. C'est pourquoi la démarche pour construire les faisceaux gaussiens diffère ici de celle présentée dans la section précédente. Elle fait notamment appel au *tracé dynamique de rayon*¹, généralisé dans le plan complexe. L'objectif étant ici d'explicitier les équations de propagation associées aux faisceaux gaussiens en régime harmonique, plusieurs résultats propres au *tracé dynamique de rayon* seront admis. Le lecteur intéressé trouvera un exposé complet dans [29], chapitre 4.

2.2.1 Ansatz complexe et tracé de rayon

On prend pour point de départ l'ansatz asymptotique (1.57), tronqué au premier terme du développement, soit

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})e^{i\omega T(\mathbf{x})} = A_0(\mathbf{x})e^{i\omega T(\mathbf{x})}. \quad (2.19)$$

Les fonctions d'amplitude A et de phase T sont désormais des fonctions à valeurs dans le plan complexe. Elles vérifient les mêmes équations eikonale (1.62) et de transport (1.63) que pour la méthode des rayons. On sait d'après (1.70) que plusieurs expressions de l'hamiltonien $H(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ permettent d'obtenir l'équation eikonale. Pour les besoins de la construction, on choisit $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = H_1(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ conformément à la notation (1.71), soit

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = |\mathbf{p}| - \frac{1}{c(\mathbf{x})}. \quad (2.20)$$

A l'aide des équations caractéristiques (1.72a), (1.72b) et (1.72c), on en déduit le système caractéristique associé, soit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, & \mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}_0, & (2.21a) \\ \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{c(\mathbf{x})} \right), & \mathbf{p}(s_0) = \mathbf{p}_0, & (2.21b) \\ \frac{dT}{ds} = \frac{1}{c(\mathbf{x})}, & T(s_0) = T_0. & (2.21c) \end{array} \right.$$

La résolution des équations d'Hamilton associées à l'hamiltonien choisi fournit une bicaractéristique $(\mathbf{x}(s), \mathbf{p}(s)) \in \mathbb{R}^{2d}$, dont on déduit le rayon $\gamma = \{\mathbf{x}(s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ par projection dans l'espace physique $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Ainsi en ayant choisi $\eta = 1$ dans la définition

1. *Dynamic Ray Tracing* dans la littérature anglophone.

de l'hamiltonien, la paramètre rayon s est désormais assimilable à l'abscisse curviligne le long du rayon γ .

2.2.2 Coordonnées rayon-centrées

La suite de la construction consiste à faire un développement de Taylor selon \mathbf{x} des fonctions de phase $T(\mathbf{x})$ et d'amplitude $A(\mathbf{x})$ au voisinage du rayon γ (voir figure 2.1b). Contrairement au régime transitoire pour lequel le rayon est un point de l'espace à un instant donné, la géométrie du rayon $\gamma = \{\mathbf{x}(s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ est une courbe de l'espace en régime harmonique et permanent. Le développement de Taylor requiert dans ce cas de pouvoir évaluer de façon univoque la position d'un point d'observation \mathbf{x} relativement au rayon γ . Il faut donc choisir un système de coordonnées adapté² au rayon. A cet effet, on introduit ici le système de *coordonnées rayon-centrées*. C'est un système orthogonal curviligne de coordonnées (q_1, \dots, q_{d-1}, s) attaché au rayon γ , tel que le « dernier » vecteur unitaire du repère correspondant est tangent à γ , avec pour coordonnée associée l'abscisse curviligne s . Par construction, pour un point \mathbf{x} quelconque de l'espace il existe un repère rayon-centré tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}(0, \dots, 0, s) + (q_1 \mathbf{e}_1 + \dots + q_{d-1} \mathbf{e}_{d-1}) \\ &= \mathbf{x}(s) + \mathbf{q}(s), \end{aligned} \quad (2.22)$$

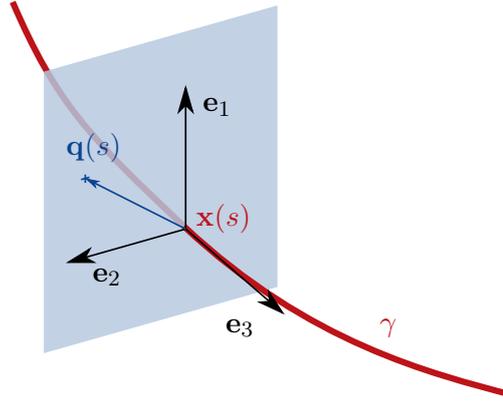
c'est-à-dire que le point \mathbf{x} appartient au plan perpendiculaire au rayon γ en l'abscisse curviligne s (voir figure 2.2). La composante \mathbf{q} ainsi construite définit donc de façon univoque la position du point d'observation \mathbf{x} relativement au rayon γ .

2.2.3 Développements paraxiaux

On souhaite construire un faisceau gaussien du premier ordre, c'est-à-dire tel que les ordres des développements de Taylor des fonctions de phase T et d'amplitude A au voisinage du rayon γ valent respectivement $N_T = 2$ et $N_A = 0$. D'après (2.22), le développement de la fonction de phase dans le système de coordonnées rayon-centrées, en notations abrégées (voir annexe ??), vaut

$$T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}(s)) + T_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}(s)) \cdot \mathbf{q}(s) + \frac{1}{2} {}^t \mathbf{q}(s) T_{\mathbf{q}\mathbf{q}}(\mathbf{x}(s)) \mathbf{q}(s). \quad (2.23)$$

2. On peut citer [29], dans lequel l'auteur développe en détail la théorie des rayons dans plusieurs systèmes de coordonnées : coordonnées cartésiennes, coordonnées rayon-centrées, coordonnées rayons, ...

FIGURE 2.2 – Coordonnées rayon-centrées en dimension $d = 3$

Pour ce qui est de la fonction d'amplitude, son développement s'écrit simplement

$$A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}(s)) = A(s), \quad (2.24)$$

c'est-à-dire que la valeur de la fonction d'amplitude A du faisceau gaussien est propre uniquement au rayon γ et ne dépend que de l'abscisse curviligne s sur ce dernier.

2.2.4 Tracé dynamique de rayon

On cherche ici à identifier et à résoudre les termes des développements paraxiaux (2.23) et (2.24). Le terme d'ordre zéro, $T(\mathbf{x}(s)) = T(s)$, est la phase évaluée sur le rayon γ à l'abscisse curviligne s . L'intégration de l'équation (2.21c) le long du rayon γ donne directement le résultat souhaité, soit

$$T(s) = T_0 + \int_{s_0}^s \frac{d\sigma}{c(\mathbf{x}(\sigma))}.$$

Ensuite par construction, le terme $T_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}(s)) = \mathbf{p}(s)$ tangent au rayon est nécessairement orthogonal aux coordonnées transverses $\mathbf{q}(s)$, ce qui annule le membre du premier ordre. Enfin, on note $T_{\mathbf{q}\mathbf{q}}(\mathbf{x}(s)) = T_{\mathbf{q}\mathbf{q}}(s) = \mathbf{M}(s)$ la matrice hessienne complexe de la fonction de phase T , exprimée dans les coordonnées rayon-centrées et évaluée en l'abscisse curviligne s . Par construction, la matrice $\mathbf{M}(s)$ est symétrique. Il est possible de déterminer $\mathbf{M}(s)$ à l'aide du *tracé dynamique de rayon*. En substance, ce dernier consiste à mettre en équation l'évolution de deux matrices dynamiques, notées $\mathbf{P}(s)$ et $\mathbf{Q}(s)$. Ces matrices rendent compte localement des déviations respectives des vecteurs lenteur \mathbf{p} et position \mathbf{x} d'un rayon γ , induites par une perturbation du même rayon. Le tracé de rayon présenté

dans le paragraphe 1.3.3 est de cette façon enrichi par une description paraxiale au voisinage du rayon γ . Dans notre cas, les coefficients de ces matrices dynamiques peuvent être complexes, et on admet ici que la matrice hessienne $\mathbf{M}(s)$ s'écrit

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{P}(s)\mathbf{Q}^{-1}(s), \quad (2.25)$$

où $\mathbf{P}(s)$ et $\mathbf{Q}(s)$ sont exprimées dans les coordonnées rayon-centrées. Ensuite, la matrice $\mathbf{Q}(s)$ peut être rapprochée de la matrice jacobienne $\mathbf{J}(s)$ utilisée dans (1.75), et on admet que l'amplitude $A(s)$ s'écrit

$$A(s) = A(s_0) \left(\frac{\det \mathbf{Q}(s_0)}{\det \mathbf{Q}(s)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.26)$$

Ainsi pour résoudre la matrice $\mathbf{M}(s)$ et l'amplitude $A(s)$, il suffit de déterminer $\mathbf{P}(s)$ et $\mathbf{Q}(s)$. Dans le cadre des hypothèses de propagation formulées jusqu'ici, on admet finalement que les matrices \mathbf{P} et \mathbf{Q} à coefficients complexes vérifient le système de *tracé dynamique de rayon* qui suit,

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{Q}}{ds} = c(\mathbf{x})\mathbf{P}, & \mathbf{Q}(s_0) = \mathbf{Q}_0, \\ \frac{d\mathbf{P}}{ds} = -\frac{c_{\mathbf{q}\mathbf{q}}(\mathbf{x})\mathbf{Q}}{c^2(\mathbf{x})}, & \mathbf{P}(s_0) = \mathbf{P}_0, \end{cases} \quad (2.27a)$$

$$(2.27b)$$

où $c_{\mathbf{q}\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ est la matrice hessienne au point \mathbf{x} du champ de célérité, exprimée dans les coordonnées rayon-centrées.

2.2.5 Propagation des faisceaux gaussiens harmoniques

Pour résumer, la propagation des faisceaux gaussiens définis par

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = A(s) \exp \left\{ i\omega \left(T(s) + \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) \mathbf{M}(s) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) \right) \right\}, \quad (2.28)$$

est complètement caractérisée par deux systèmes d'équations, (E) et (DRT). Le premier est constitué des équations caractéristiques de la méthode des rayons associées à l'hamiltonien $H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = |\mathbf{p}| - 1/c(\mathbf{x})$, soit

$$(E) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, & \mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.29a) \\ \frac{d\mathbf{p}}{ds} = -\frac{c_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{c(\mathbf{x})^2}, & \mathbf{p}(s_0) = \mathbf{p}_0, \quad (2.29b) \\ \frac{dT}{ds} = \frac{1}{c(\mathbf{x})}, & T(s_0) = T_0. \quad (2.29c) \end{array} \right.$$

On en déduit le rayon $\gamma = \{\mathbf{x}(s) \mid s \in \mathbb{R}\}$, sur lequel on peut intégrer la phase $T(s)$ et duquel on déduit le système (q_1, \dots, q_{d-1}, s) de coordonnées rayon-centrées (voir figure 2.2). Ce dernier permet d'écrire le *tracé dynamique de rayon*, soit

$$(DRT) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\mathbf{Q}}{ds} = c(\mathbf{x})\mathbf{P}, & \mathbf{Q}(s_0) = \mathbf{Q}_0, \quad (2.30a) \\ \frac{d\mathbf{P}}{ds} = -\frac{c_{\mathbf{q}\mathbf{q}}(\mathbf{x})}{c^2(\mathbf{x})}\mathbf{Q}, & \mathbf{P}(s_0) = \mathbf{P}_0. \quad (2.30b) \end{array} \right.$$

En utilisant les équations (2.25) et (2.26), de la résolution du système (DRT) on déduit finalement la matrice hessienne $\mathbf{M}(s)$ et l'amplitude $A(s)$. Les systèmes (E) et (DRT) ont des solutions analytiques dans les milieux homogènes (voir exemple 6) et dans certains milieux inhomogènes. Pour ces cas particuliers, le calcul numérique d'un faisceau gaussien propagé est immédiat. Le cas échéant, on fait appel aux schémas numériques standards du type Runge-Kutta [54, 22], d'ordre 4 en pratique [10, 136].

Exemple 6. On cherche dans cet exemple la solution analytique dans le domaine fréquentiel d'un faisceau gaussien

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = A(s) \exp \left\{ i\omega \left(T(s) + \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) \mathbf{M}(s) (\mathbf{x} - \mathbf{x}(s)) \right) \right\}, \quad (2.31)$$

se propageant dans un milieu homogène caractérisé par une vitesse de propagation constante $c(\mathbf{x}) = c_0$. Dans ce cas le système (E) est simplifié, et a pour solution

$$\forall s \in \mathbb{R} \begin{cases} \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + \left(\frac{\mathbf{p}_0}{|\mathbf{p}_0|} \right) (s - s_0), & (2.32a) \\ \mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_0, & (2.32b) \\ T(s) = T_0 + \frac{s - s_0}{c_0}. & (2.32c) \end{cases}$$

Dès lors, on peut écrire le système (DRT) simplifié dans les coordonnées rayon-centrées, soit

$$(DRT) \begin{cases} \frac{d\mathbf{Q}}{ds} = c_0 \mathbf{P}, & \mathbf{Q}(s_0) = \mathbf{Q}_0, & (2.33a) \\ \frac{d\mathbf{P}}{ds} = 0, & \mathbf{P}(s_0) = \mathbf{P}_0, & (2.33b) \end{cases}$$

dont on déduit les solutions

$$\forall s \in \mathbb{R} \begin{cases} \mathbf{Q}(s) = \mathbf{Q}_0 + c_0(s - s_0)\mathbf{P}_0, & (2.34a) \\ \mathbf{P}(s) = \mathbf{P}_0. & (2.34b) \end{cases}$$

De ces solutions et en utilisant (2.25) d'une part, on montre

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{M}_0 [\mathbf{I} + c_0(s - s_0)\mathbf{M}_0]^{-1}, \quad (2.35)$$

et en utilisant (2.26) d'autre part, on montre

$$A(s) = A(s_0) \left(\frac{\det \mathbf{M}(s)}{\det \mathbf{M}(s_0)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.36)$$

A travers cet exemple, on peut remarquer que la construction de faisceau gaussien par extension de la méthode des rayons est équivalente au *faisceau gaussien généralisé* (1.11) présenté dans le paragraphe 1.1.3, et démontré à l'aide du spectre d'onde plane d'une source gaussienne. En effet, en posant $k = \omega/c_0$ et $\tilde{\mathbf{M}}(s) = c_0\mathbf{M}(s)$, il vient d'après (2.31)

et (2.32c),

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\det \tilde{\mathbf{M}}(s)}{\det \tilde{\mathbf{M}}(s_0)} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ ik(s - s_0) + ik \frac{1}{2} {}^t \mathbf{q} \tilde{\mathbf{M}}(s) \mathbf{q} \right\}. \quad (2.37)$$

Sans perdre en généralité, le rayon rectiligne orienté par \mathbf{p}_0 peut être orienté selon z et on peut choisir $s_0 = 0$. Ainsi $\tilde{\mathbf{M}}(z)$ vérifie (1.12), ce qui montre l'équivalence. ■

2.3 Caractéristiques physiques

Dans les deux sections précédentes, on a construit les faisceaux gaussiens à partir de la méthode des rayons, et explicité les systèmes d'équations qu'ils vérifient au cours de leur propagation. Dans cette section, on s'intéresse à la forme des conditions initiales aux systèmes (\mathcal{E}) en régime transitoire, et (E) et (DRT) en régime harmonique. Dans la continuité des exemples 5 et 6, on représente ensuite l'allure des solutions analytiques obtenues dans les milieux homogènes. En particulier, on décrit – au cours de la propagation – l'évolution de certaines caractéristiques physiques de ces solutions.

2.3.1 Régime transitoire

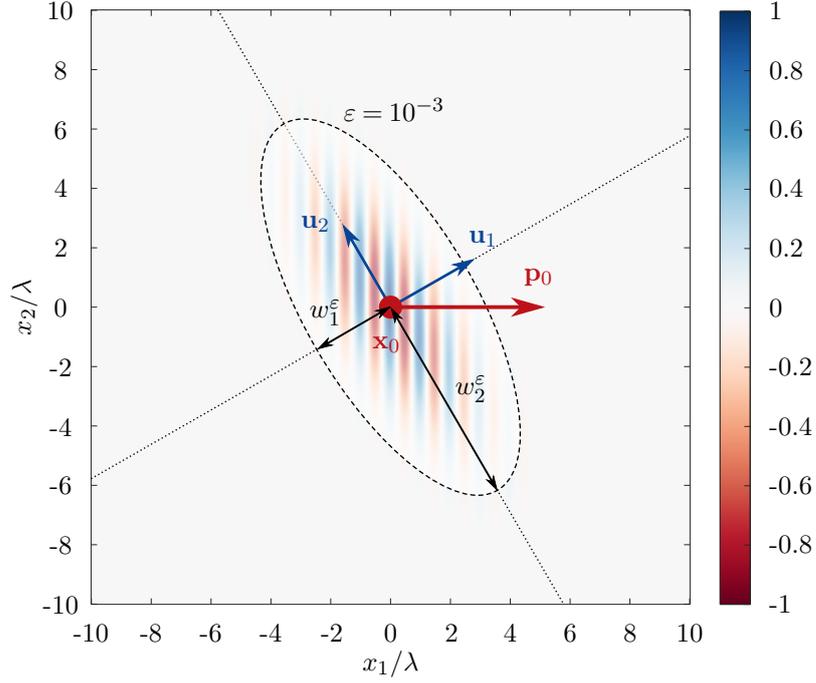
En régime transitoire, le système d'équations différentielles (\mathcal{E}) ((2.14a), (2.14b), (2.14c) et (2.14d)) gouverne la propagation des faisceaux gaussiens, et à pour conditions initiales les grandeurs \mathbf{x}_0 , \mathbf{p}_0 , \mathcal{M}_0 , et a_0 .

Paquet d'onde gaussien initial

À l'instant $t = 0$, la solution a pour expression

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = \phi_0(\mathbf{x}) = a_0 \exp \left\{ i\omega \left(\mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} {}^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathcal{M}_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right) \right\}. \quad (2.38)$$

Les termes \mathbf{x}_0 et \mathbf{p}_0 sont les mêmes conditions initiales que pour le tracé de rayon (1.66a) et (1.66b), ce sont respectivement les vecteurs position et vitesse initiaux. On supposera par la suite que ces vecteurs sont à coefficients réels, ce qui revient à ne pas prendre en compte la modélisation des ondes inhomogènes. Le terme $a_0 \in \mathbb{C}$ est l'amplitude initiale. Autoriser a_0 à prendre des valeurs dans le plan complexe permet d'envisager un déphasage initial non-nul dans la solution ϕ . En effet, en mettant l'amplitude sous la forme $a_0 = |a_0| e^{i\omega\tau_a}$, on identifie τ_a à la constante d'intégration de (1.68). Enfin la matrice hessienne \mathcal{M}_0 de la phase complexe, symétrique par construction, contient une

FIGURE 2.3 – Caractéristiques d'un paquet d'onde gaussien en dimension $d = 2$

partie réelle et une partie imaginaire que l'on peut expliciter dans (2.38), soit

$$\begin{aligned} \phi_0(\mathbf{x}) &= a_0 \exp \{ i\omega \mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ \frac{i\omega}{2} t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \operatorname{Re}(\mathcal{M}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{\omega}{2} t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \operatorname{Im}(\mathcal{M}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right\}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ainsi d'après (2.39), une condition nécessaire pour que $\phi_0(\mathbf{x})$ ne diverge pas loin de \mathbf{x}_0 est que la partie imaginaire $\operatorname{Im}(\mathcal{M}_0)$ soit définie positive. Dans ces conditions, le champ décrit par $\phi_0(\mathbf{x})$ est un *paquet d'onde gaussien*³ (voir figure 2.3). C'est une forme d'onde qui est localisée en espace, et en spectre d'onde plane.

Enveloppe du paquet et courbure du front d'onde

Dans l'équation (2.39), on remarque que $\operatorname{Im}(\mathcal{M}_0)$ et $\operatorname{Re}(\mathcal{M}_0)$ sont des matrices associées à des formes quadratiques. En particulier, $\operatorname{Im}(\mathcal{M}_0)$ définit l'enveloppe du paquet d'onde gaussien centré en \mathbf{x}_0 , tandis que la partie réelle $\operatorname{Re}(\mathcal{M}_0)$ définit la courbure du front d'onde au voisinage de \mathbf{x}_0 . Les deux matrices $\operatorname{Im}(\mathcal{M}_0)$ et $\operatorname{Re}(\mathcal{M}_0)$ sont symétriques et à

3. *Gaussian Wave Packet* (GWP) dans la littérature anglophone.

coefficients réels, et donc chacune diagonalisable d'après le théorème spectral. Soient \mathbf{U} et \mathbf{V} les matrices des vecteurs propres de $\text{Im}(\mathcal{M}_0)$ et $\text{Re}(\mathcal{M}_0)$ respectivement. On a donc

$$\text{Im}(\mathcal{M}_0) = \mathbf{U} \text{diag}(u_1, \dots, u_d) \mathbf{U}^{-1} \quad (2.40)$$

et

$$\text{Re}(\mathcal{M}_0) = \mathbf{V} \text{diag}(v_1, \dots, v_d) \mathbf{V}^{-1}, \quad (2.41)$$

où $\text{diag}(u_1, \dots, u_d)$ (resp. $\text{diag}(v_1, \dots, v_d)$) est la matrice diagonale de taille (d, d) de termes diagonaux (u_1, \dots, u_d) (resp. (v_1, \dots, v_d)). On en déduit les *demi-largeurs principales* w_i^ε ($i = 1 \dots d$) du paquet d'onde définies par

$$w_i^\varepsilon = \sqrt{-\frac{2 \ln \varepsilon}{\omega u_i}}, \quad (2.42)$$

telles que $\exp\{-(\omega/2)u_i(w_i^\varepsilon)^2\} = \varepsilon \leq 1$, et les *courbures principales* κ_i ($i = 1 \dots d$) du front d'onde définies par (voir [29])

$$\kappa_i = c(\mathbf{x}_0)v_i. \quad (2.43)$$

On en déduit les *rayons de courbure* associés $r_i = 1/\kappa_i$ ($i = 1 \dots d$).

Prenons l'exemple du paquet d'onde gaussien figure 2.3 en dimension $d = 2$. Le front d'onde en \mathbf{x}_0 y est plan, de sorte que la matrice $\text{Re}(\mathcal{M}_0)$ est nulle, et les courbures $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. En revanche, la matrice $\text{Im}(\mathcal{M}_0)$ est non nulle. Ses axes principaux sont dirigés par \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 (donnés par \mathbf{U}), et on remarque que $w_1^\varepsilon < w_2^\varepsilon$. Les faisceaux gaussiens en régime transitoire, définis par (2.13), conservent cette structure de paquet d'onde gaussien au cours de la propagation. Ainsi de même que pour le paquet d'onde initial (2.38), il est possible de caractériser la solution propagée par ses demi-largeurs et ses courbures principales. Ce sont des quantités qui évoluent au cours de la propagation (voir exemple 7), et dont les valeurs prises peuvent affecter la validité de l'approximation paraxiale.

Évolution des quantités caractéristiques au cours de la propagation

Afin de faciliter l'étude des demi-largeurs et des courbures principales du paquet d'onde au cours de la propagation, on considère le problème simplifié :

- le milieu est homogène de célérité $c(\mathbf{x}) = c_0$, de dimension $d = 2$;
- le vecteur lenteur \mathbf{p}_0 est unitaire colinéaire à l'axe x_1 ;
- la matrice $\mathcal{M}_0 = i \text{diag}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ est diagonale imaginaire pure dans (x_1, x_2) ;

- on ne s'intéresse qu'à la solution « + », telle que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{p}_0/|\mathbf{p}_0|)c_0t$.

Sous ces hypothèses, nous avons vu dans la section 2.1 de ce chapitre qu'il est possible de calculer la solution propagée de façon analytique. Les calculs pour ce problème simplifié sont développés dans l'annexe A.3, et un cas particulier est étudié dans l'exemple 7. Dans ces conditions particulières, on montre notamment (A.22) que la matrice hessienne $\mathcal{M}(t)$ reste diagonale dans (x_1, x_2) au cours de la propagation. En particulier, d'après (A.25) on peut caractériser la demi-largeur principale le long de x_2 , soit

$$w_2^\varepsilon(t) = w_2^\varepsilon(0) \sqrt{1 + \left(\frac{c_0 \mathcal{M}_2}{|\mathbf{p}_0|} \right)^2 t^2}. \quad (2.44)$$

Pour différentes demi-largeurs initiales $w_2^\varepsilon(0)$, on trace figure 2.4a l'évolution de $w_2^\varepsilon(t)$. Quelle que soit la demi-largeur initiale, cette demi-largeur principale – assimilable à la demi-largeur du faisceau – croît de façon monotone. Comme l'indique le comportement asymptotique de (2.44) pour $t \rightarrow \infty$, cette croissance est linéaire pour les temps longs. Toutes choses égales par ailleurs, la divergence du faisceau est d'autant plus prononcée que la demi-largeur initiale du paquet est plus petite. On montre aussi (A.22) que la partie réelle de la matrice hessienne $\mathcal{M}(t)$, nulle à l'instant $t = 0$, devient non-nulle à un instant ultérieur. On en déduit donc que le front d'onde s'incurve, et en particulier on calcule (A.27) la courbure principale le long de x_2 , soit

$$\kappa_2(t) = \frac{|\mathbf{p}_0|(c_0 \mathcal{M}_2)^2 t}{|\mathbf{p}_0|^2 + (c_0 \mathcal{M}_2)^2 t^2}. \quad (2.45)$$

Pour différentes demi-largeurs initiales $w_2^\varepsilon(0)$, on trace figure 2.4b l'évolution de $\kappa_2(t)$. On observe que le front d'onde s'incurve d'autant plus que la demi-largeur initiale est petite. Aussi quelle que soit la demi-largeur initiale, on observe une tendance similaire de la courbure pour les temps longs confirmée par l'évaluation asymptotique de (2.45), soit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \kappa_2(t) = \frac{|\mathbf{p}_0|}{t}.$$

Ainsi pour les temps longs, la courbure du front d'onde en $\mathbf{x}(t)$ tend vers celle du champ transitoire qui serait rayonné par un point source localisé en \mathbf{x}_0 .

Ainsi vis-à-vis de l'approximation paraxiale, l'étude de ce problème simplifié indique que l'initialisation d'un faisceau gaussien transitoire par un paquet d'onde gaussien de « grande demi-largeur transverse » (devant la longueur d'onde) permet de limiter la divergence du faisceau et l'incurvation du front d'onde.

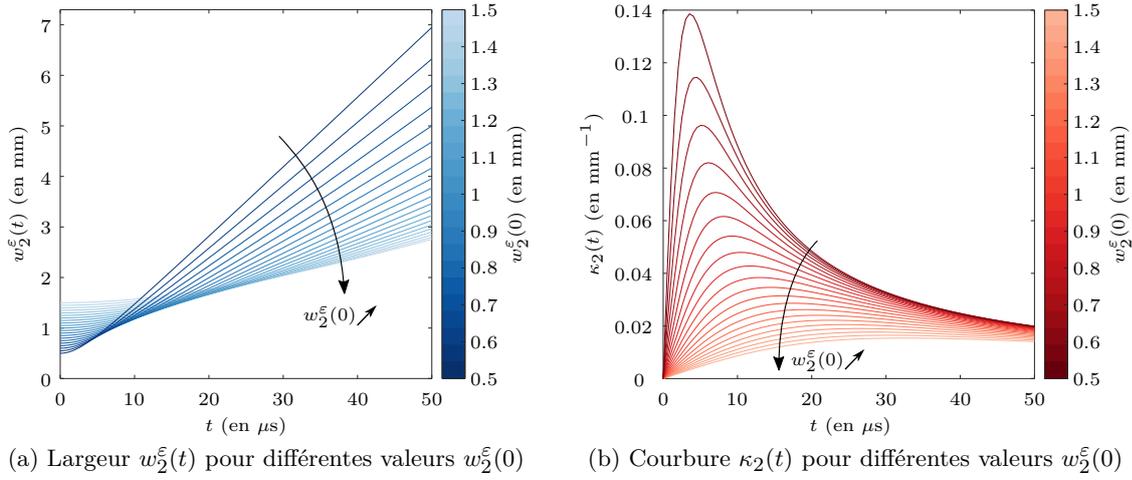


FIGURE 2.4 – Évolution des demi-largeurs et courbures d'un paquet d'onde gaussien en dimension $d = 2$

Exemple 7. On veut ici illustrer la solution transitoire analytique obtenue dans le cas d'un milieu homogène (voir exemple 5). Pour ce faire, on choisit ici $\omega = 15\mu\text{s}^{-1}$, $c_0 = 1\text{mm}/\mu\text{s}$, en dimension $d = 2$ et on prend pour conditions initiales, exprimées dans les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) ,

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_0 = \begin{pmatrix} 12i & 0 \\ 0 & 0.3i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad a_0 = 1. \quad (2.46)$$

Conformément à ces conditions initiales, on observe figure 2.5 à l'instant $t = 0$ que

- le paquet d'onde gaussien initial est centré en $\mathbf{x}_0(0,0)$;
- le front d'onde est plan, car $\text{Re}(\mathcal{M}_0) = 0$;
- le front d'onde est dirigé par l'axe x_1 , car porté par \mathbf{p}_0 ;
- les axes principaux de l'enveloppe du paquet sont les axes x_1 et x_2 , car $\text{Im}(\mathcal{M}_0) = \text{diag}(12, 0.3)$ est déjà diagonalisée ;
- l'enveloppe du paquet d'onde est plus large le long de l'axe x_2 que le long de l'axe x_1 , car $\mathcal{M}_0(1,1) > \mathcal{M}_0(2,2)$.

On observe ensuite la solution "+" propagée aux instants $t = 1\mu\text{s}$, $2\mu\text{s}$, $3\mu\text{s}$, $4\mu\text{s}$ et $5\mu\text{s}$. Ce sont des paquets d'onde gaussiens, centrés aux positions attendues par le tracé de rayon (2.17a) et (2.17a). En accord avec les équations (2.44) et (2.45), on observe également que le faisceau diverge et que le front d'onde s'incurve légèrement au cours de la propagation.

■

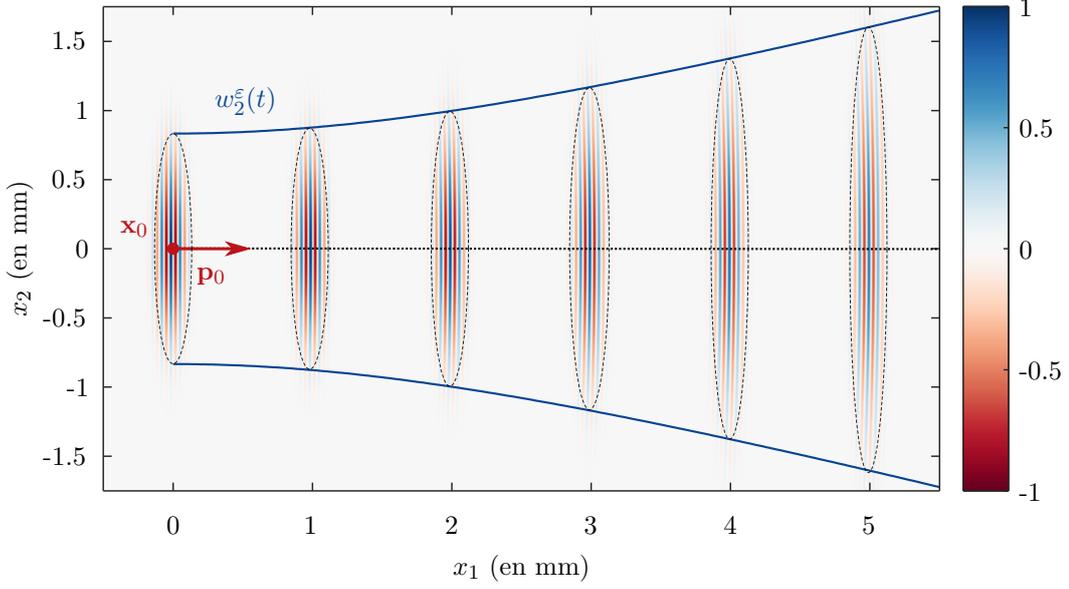


FIGURE 2.5 – Propagation d'un paquet d'onde gaussien, de conditions initiales (2.46), à différents instants ($t = 1\mu\text{s}$, $2\mu\text{s}$, $3\mu\text{s}$, $4\mu\text{s}$ et $5\mu\text{s}$) dans un milieu homogène ($c_0 = 1\text{mm}/\mu\text{s}$) en dimension $d = 2$, avec (—) l'évolution de la demi-largeur principale w_2^ε .

2.3.2 Régime harmonique

En régime harmonique, les systèmes d'équations différentielles (E) ((2.29a), (2.29b), (2.29c)) et (DRT) ((2.30b), (2.30a)) gouvernent la propagation des faisceaux gaussiens, et ont pour conditions initiales les grandeurs \mathbf{x}_0 , \mathbf{p}_0 , T_0 , \mathbf{P}_0 et \mathbf{Q}_0 .

Source plane gaussienne

À l'abscisse curviligne $s = s_0$, l'ensemble des conditions initiales forment un terme source que l'on cherche ici à caractériser. Sans perte de généralité et afin d'alléger l'écriture, on inclut le déphasage initial $\exp\{i\omega T_0\}$ dans le terme d'amplitude complexe $A(s_0)$. Ainsi, on s'intéresse en $s = s_0$ au terme source

$$\hat{\phi}(\mathbf{q}) = A(s_0) \exp\left\{\frac{i\omega}{2} t \mathbf{q} \mathbf{P}_0 \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{q}\right\}, \quad (2.47)$$

Dans (2.47), les points \mathbf{q} où l'on exprime le terme source et les matrices \mathbf{P}_0 et \mathbf{Q}_0 sont exprimés dans les coordonnées rayon-centrées (voir 2.2.2 et figure 2.2), définies en s_0 . Ainsi par construction, la condition initiale au faisceau gaussien harmonique est définie dans l'hyperplan orthogonal au vecteur lenteur \mathbf{p}_0 initial, et passant par la position initiale \mathbf{x}_0 . La matrice $\mathbf{M}_0 = \mathbf{P}_0 \mathbf{Q}_0^{-1}$ est complexe, et possède donc une partie réelle et

une partie imaginaire que l'on peut expliciter dans (2.47), soit

$$\hat{\phi}(\mathbf{q}) = A(s_0) \exp \left\{ \frac{i\omega}{2} t \mathbf{q} \operatorname{Re}(\mathbf{M}_0) \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{\omega}{2} t \mathbf{q} \operatorname{Im}(\mathbf{M}_0) \mathbf{q} \right\} \quad (2.48)$$

De la même façon qu'en régime transitoire, une condition nécessaire pour que $\hat{\phi}(\mathbf{q})$ ne diverge pas loin de \mathbf{x}_0 est que la partie imaginaire $\operatorname{Im}(\mathbf{M}_0)$ soit définie positive. On obtient alors une source plane gaussienne (voir figure 2.6), de forme comparable à (1.14).

Largeurs et courbures principales

Les matrices $\operatorname{Im}(\mathbf{M}_0)$ et $\operatorname{Re}(\mathbf{M}_0)$ jouent des rôles similaires⁴ à leurs analogues temporels : la première caractérise l'enveloppe du terme source centré en \mathbf{x}_0 tandis que la seconde décrit la courbure de sa phase au voisinage de \mathbf{x}_0 . Par définition la matrice \mathbf{M}_0 est symétrique, de sorte que $\operatorname{Im}(\mathbf{M}_0)$ et $\operatorname{Re}(\mathbf{M}_0)$ sont chacune symétriques à coefficients réels, et donc diagonalisables d'après le théorème spectral. On note \mathbf{U} et \mathbf{V} les matrices des vecteurs propres de $\operatorname{Im}(\mathbf{M}_0)$ et $\operatorname{Re}(\mathbf{M}_0)$ respectivement. On a donc

$$\operatorname{Im}(\mathbf{M}_0) = \mathbf{U} \operatorname{diag}(u_1, \dots, u_{d-1}) \mathbf{U}^{-1} \quad (2.49)$$

et

$$\operatorname{Re}(\mathbf{M}_0) = \mathbf{V} \operatorname{diag}(v_1, \dots, v_{d-1}) \mathbf{V}^{-1}, \quad (2.50)$$

où $\operatorname{diag}(u_1, \dots, u_{d-1})$ (resp. $\operatorname{diag}(v_1, \dots, v_{d-1})$) est la matrice diagonale de taille $(d-1, d-1)$ de termes diagonaux (u_1, \dots, u_{d-1}) (resp. (v_1, \dots, v_{d-1})). Les définitions des *demi-largeurs principales* et des *courbures principales* sont donc inchangées et on garde les mêmes notations que dans le paragraphe 2.3.1, soit pour $i = 1 \dots d-1$,

$$w_i^\varepsilon = \sqrt{-\frac{2 \ln \varepsilon}{\omega u_i}}, \quad (2.51)$$

et

$$\kappa_i = c(\mathbf{x}_0) v_i, \quad (2.52)$$

où les *rayons de courbure* associés sont définis par $r_i = 1/\kappa_i$.

4. La seule différence avec le régime transitoire est que la matrice hessienne \mathbf{M}_0 est ici définie dans un hyperplan de dimension $d-1$, contrairement à la matrice hessienne \mathcal{M}_0 définie dans l'espace de dimension d .

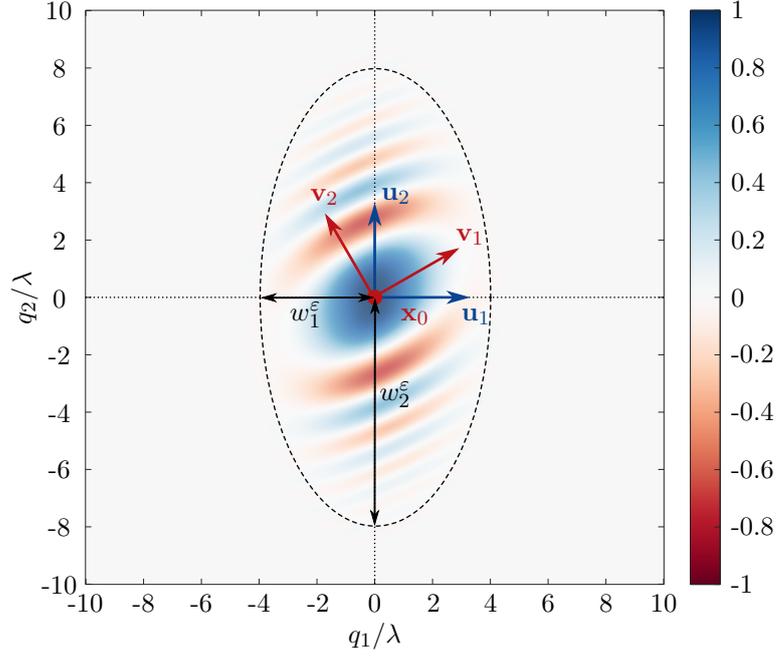


FIGURE 2.6 – Caractéristiques d'une source plane gaussienne en dimension $d = 3$

Un exemple de source plane gaussienne est représenté figure 2.6. Dans ce cas particulier, les axes principaux \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 de l'enveloppe sont alignés avec le système de coordonnées rayon-centrées. L'enveloppe est plus dilatée le long de \mathbf{u}_2 que le long de \mathbf{u}_1 , de sorte que $w_2^\varepsilon > w_1^\varepsilon$. On remarque ensuite que les courbes équiphasées décrivent des ellipses d'axes principaux \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 inclinés par rapport aux coordonnées rayon-centrées. La phase croît plus vite le long de \mathbf{v}_2 que le long de \mathbf{v}_1 , de sorte que $\kappa_2 > \kappa_1$. Les faisceaux gaussiens définis en régime harmonique par (2.28) conservent cette forme initiale le long du rayon γ dans tout hyperplan issu des coordonnées rayon-centrées. Ainsi pour toute abscisse curviligne s , il est possible de définir les quantités w_i^ε et κ_i ($i = 1 \dots d - 1$).

Évolution des quantités caractéristiques le long du faisceau

Afin de faciliter l'étude des demi-largeurs et des courbures principales le long du faisceau gaussien, on considère le problème simplifié suivant :

- le milieu est homogène de célérité $c(\mathbf{x}) = c_0$, de dimension $d = 3$;
- le vecteur lenteur \mathbf{p}_0 est unitaire colinéaire à l'axe x_1 ;
- la matrice $\mathbf{M}_0 = i \text{diag}(M_1, M_2)$ est diagonale imaginaire pure dans (x_1, x_2) .

Sous ces hypothèses, nous avons obtenu dans la section 2.2 de ce chapitre qu'il est possible de calculer la solution des systèmes (E) et (DRT) de façon analytique. Les calculs pour ce problème simplifié sont développés dans l'annexe A.4, et un cas particulier est étudié

dans l'exemple 8. On montre notamment (A.33) que la matrice hessienne $\mathbf{M}(s)$ reste diagonale dans les coordonnées rayon-centrées initiales, conservées tout le long du rayon. D'après (A.37), on en déduit donc les demi-largeurs principales

$$\forall s \in \mathbb{R}, w_i^\varepsilon(s) = w_i^\varepsilon(s_0) \sqrt{1 + c_0^2(s - s_0)^2 M_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (2.53)$$

Pour différentes demi-largeurs initiales $w_i^\varepsilon(s_0)$, on trace figure 2.7a l'évolution de $w_i^\varepsilon(s)$. Quelle que soit la valeur de la demi-largeur initiale, on remarque que la demi-largeur du faisceau est minimale en $s = s_0$, abscisse curviligne pour laquelle la partie réelle $\text{Re}(\mathbf{M}(s))$ de la matrice hessienne est nulle. On appelle cette demi-largeur minimale le *col* du faisceau gaussien⁵. Le *col* du faisceau gaussien est une caractéristique bien connue en optique [169]. Ainsi pour une longueur d'onde $\lambda = 2\pi c_0/\omega$ donnée en régime harmonique, la connaissance seule du *col* suffit à caractériser la divergence spatiale d'un faisceau gaussien (voir (2.53)). En particulier, la divergence du faisceau est d'autant plus prononcée que la valeur du *col* est petite. De la même façon qu'en régime transitoire, on vérifie le comportement asymptotique de (2.53) pour $s \rightarrow \pm\infty$, c'est-à-dire que la demi-largeur du faisceau croît linéairement avec l'abscisse curviligne loin du *col*.

On montre aussi (A.22) que la partie réelle $\text{Re}(\mathbf{M}(s))$ de la matrice hessienne est non-nulle en dehors du *col*, pour $s \neq s_0$. On en déduit donc que le front d'onde s'incurve, et en particulier on peut calculer (A.38) les courbures principales

$$\kappa_i(s) = \frac{c_0^2(s - s_0)M_i^2}{1 + c_0^2(s - s_0)^2 M_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (2.54)$$

Pour différentes valeurs de $\text{col} = w_i^\varepsilon(0)$, on trace figure 2.4b l'évolution de la courbure $\kappa_i(s)$. De la même façon qu'en régime transitoire, on observe que le front d'onde s'incurve d'autant plus le long du faisceau que la valeur du *col* est petite. Aussi quelle que soit la demi-largeur initiale, on observe une tendance similaire de la courbure en champ lointain, confirmée par l'évaluation asymptotique de (2.54), soit

$$\lim_{|s| \rightarrow +\infty} \kappa_i(s) = \frac{1}{|s - s_0|}$$

Ainsi en champ lointain, la courbure du front d'onde en $\mathbf{x}(s)$ tend vers celle du champ harmonique qui serait rayonné par un point source localisé en \mathbf{x}_0 .

On tire de ce problème simplifié une conclusion similaire au régime transitoire : vis-à-vis de l'approximation paraxiale un faisceau gaussien présentant un « grand col » (devant

5. *Beam waist* dans la littérature anglophone

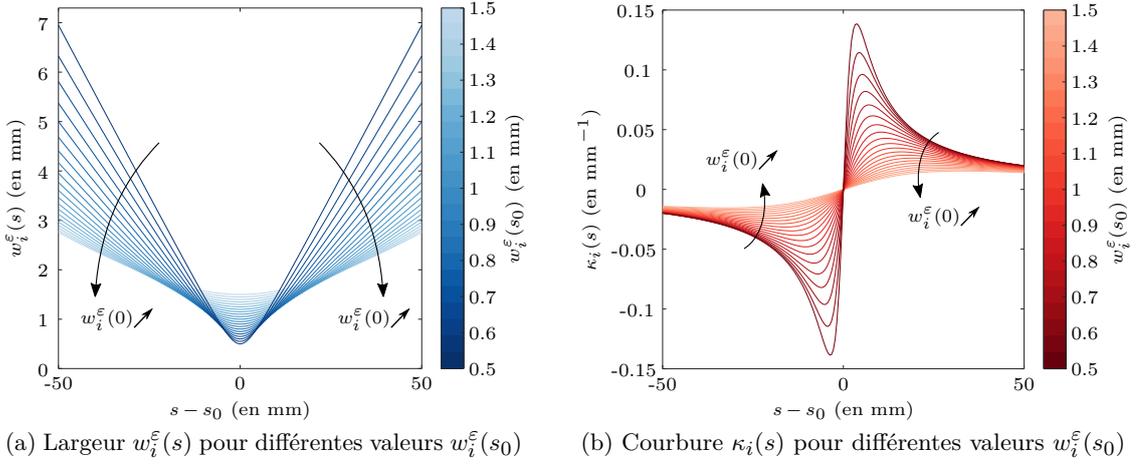


FIGURE 2.7 – Évolution des demi-largeurs et courbures d'un faisceau gaussien

la longueur d'onde) permet de limiter la divergence du faisceau et l'incurvation du front d'onde.

Source « inclinée »

On envisage ici le cas particulier où l'on dispose d'une source plane de la forme

$$\hat{\phi}_0(\bar{\mathbf{x}}) = A_0 \exp \left\{ i\omega \left(\bar{\mathbf{p}}_0 \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0) + \frac{1}{2} {}^t(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0) \Gamma_0 (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0) \right) \right\}, \quad (2.55)$$

où $\bar{\mathbf{x}}$ appartient à un plan P dans lequel on définit également la matrice diagonale $\Gamma_0 = i \text{diag}(\Gamma_0^i, \Gamma_0^i)$, avec $\Gamma_0^i > 0$. La fonction $\hat{\phi}_0$ peut être décrite comme une source plane gaussienne d'enveloppe circulaire centrée en $\bar{\mathbf{x}}_0$ et modulée par une onde plane de vecteur lenteur $\bar{\mathbf{p}}_0$ (voir figure 2.8a). Ce cas de figure correspond notamment à un élément dans un frame de Gabor à fenêtre gaussienne [59, 160], abordé dans le chapitre 4. La modulation par l'onde plane $\exp\{i\omega \bar{\mathbf{p}}_0 \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0)\}$ ne permet pas d'initialiser directement les systèmes (E) et (DRT) avec un tel terme source $\hat{\phi}_0$. En effet, l'écriture du système (DRT) suppose d'avoir construit un système de coordonnées rayon-centrées en tout point $\mathbf{x}(s)$ d'un rayon γ , en particulier à l'abscisse curviligne $s = s_0$. Or nous avons montré (voir paragraphe 2.2.4) que le développement paraxial de la fonction de phase dans un tel système de coordonnées ne présente pas de terme du premier ordre assimilable à une onde plane telle qu'il y apparaît dans (2.55). Ce problème de source « inclinée » a été traité spécifiquement dans la littérature par HADAD et MELAMED [82, 83]. L'option suggérée par les auteurs consiste alors à introduire un système de coordonnées non-orthogonales,

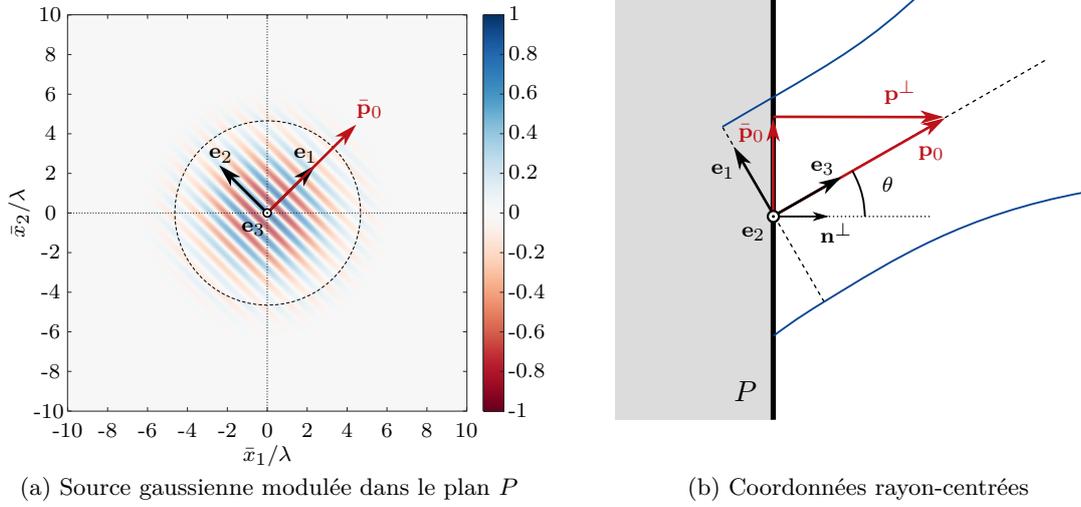


FIGURE 2.8 – Configuration de source « inclinée » et faisceau gaussien harmonique

à la fois parallèles au plan P et à la direction $\mathbf{p}(s)$ du tracé de rayon. Cette approche est toutefois incompatible avec le tracé dynamique de rayon utilisé jusqu'ici, ce dernier faisant appel à un système orthogonal de coordonnées rayon-centrées.

Une autre option permet d'initialiser le système (DRT) à l'aide d'un calcul asymptotique [133] semblable à celui mené dans le paragraphe 1.1.3, mais appliqué au terme source modulé (2.55). Le terme $\hat{\phi}_0$ décrit le profil d'amplitude complexe d'une source plane qui rayonne hors du plan P , à la pulsation ω . Dans le cadre du régime haute fréquence, le rayonnement de la source $\hat{\phi}_0$ est assimilable – au premier ordre – à une onde plane issue de $\bar{\mathbf{x}}_0$ et de vecteur lenteur \mathbf{p}_0 . La modulation par le terme tangentiel $\exp\{i\omega\bar{\mathbf{p}}_0 \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0)\}$ incline la direction de propagation de cette onde plane par rapport à la normale \mathbf{n}^\perp au plan P (voir figure 2.8b), et on peut écrire la décomposition

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}^\perp + \bar{\mathbf{p}}_0, \quad (2.56)$$

où \mathbf{p}^\perp est colinéaire à \mathbf{n}^\perp . D'après la relation de dispersion, on a

$$|\mathbf{p}^\perp|^2 + |\bar{\mathbf{p}}_0|^2 = \frac{1}{c^2(\bar{\mathbf{x}}_0)}. \quad (2.57)$$

Ainsi le terme source $\hat{\phi}_0$ ne propage un faisceau dans le volume que si $|\bar{\mathbf{p}}_0|^2 < 1/c^2(\mathbf{x}_0)$ (cas non-évanescent). Si ces conditions sont respectées, alors on choisit pour le système

(E) les conditions initiales

$$\mathbf{x}(s_0) = \bar{\mathbf{x}}_0, \quad \mathbf{p}(s_0) = \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}^\perp + \bar{\mathbf{p}}_0 \quad \text{et} \quad T(s_0) = 0. \quad (2.58)$$

On construit ensuite un système de coordonnées rayon-centrées en s_0 , dont la dernière direction \mathbf{e}_3 est portée par \mathbf{p}_0 , et de sorte à ce que $\bar{\mathbf{p}}_0$ soit contenu dans le plan $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$. De cette façon, le système de coordonnées ainsi construit est complètement caractérisé par l'angle θ , tel que

$$\sin(\theta) = \frac{|\bar{\mathbf{p}}_0|}{|\mathbf{p}_0|} = c(\bar{\mathbf{x}}_0)|\bar{\mathbf{p}}_0|. \quad (2.59)$$

D'après [133] on peut expliciter la matrice \mathbf{M}_0 , soit

$$\mathbf{M}_0 = i \operatorname{diag} \left(\Gamma_0^i / (\cos \theta)^2, \Gamma_0^i \right), \quad (2.60)$$

et ainsi initialiser le système (DRT). Finalement, la source $\hat{\phi}_0$ (2.55) initialise un faisceau gaussien porté par un vecteur lenteur \mathbf{p}_0 incliné d'un angle θ par rapport à la normale \mathbf{n}^\perp du plan source P . Bien que cette source ait une enveloppe circulaire, on déduit de (2.60) que le faisceau gaussien associé présente un astigmatisme pour $\theta \neq 0$ (voir par exemple la figure 1.5). D'après la définition de la demi-largeur principale (2.51), on montre facilement que la demi-largeur principale $w_1^\varepsilon(s_0)$ est d'autant plus petite que θ tend vers $\pi/2$. Cet astigmatisme a été étudié dans [160, 82], et les auteurs montrent que l'approximation paraxiale est d'autant plus dégradée que θ tend vers $\pi/2$.

Exemple 8. On s'intéresse ici à la solution obtenue pour un faisceau gaussien harmonique dans un milieu homogène en dimension $d = 3$ (voir exemple 6). On profite de cet exemple pour illustrer le cas d'une source « inclinée », rencontré chapitre 4 dans le calcul du rayonnement d'un frame de Gabor. Les conditions initiales sont donc données sous la forme (2.55) dans le plan P de coordonnées (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , avec

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{p}}_0 = \begin{pmatrix} 1/(2c_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0.3i & 0 \\ 0 & 0.3i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_0 = 1. \quad (2.61)$$

On fixe par ailleurs $\omega = 20\pi\mu\text{s}^{-1}$ et $c_0 = 1\text{mm}/\mu\text{s}$. De ces conditions initiales et de l'équation (2.59), il vient $\sin \theta = 1/2$, et donc $\theta = 30^\circ$. On en déduit le vecteur $\mathbf{p}_0 = \bar{\mathbf{p}}_0 + \mathbf{p}^\perp$, et donc les conditions initiales au système (E) exprimées dans les coordonnées cartésiennes

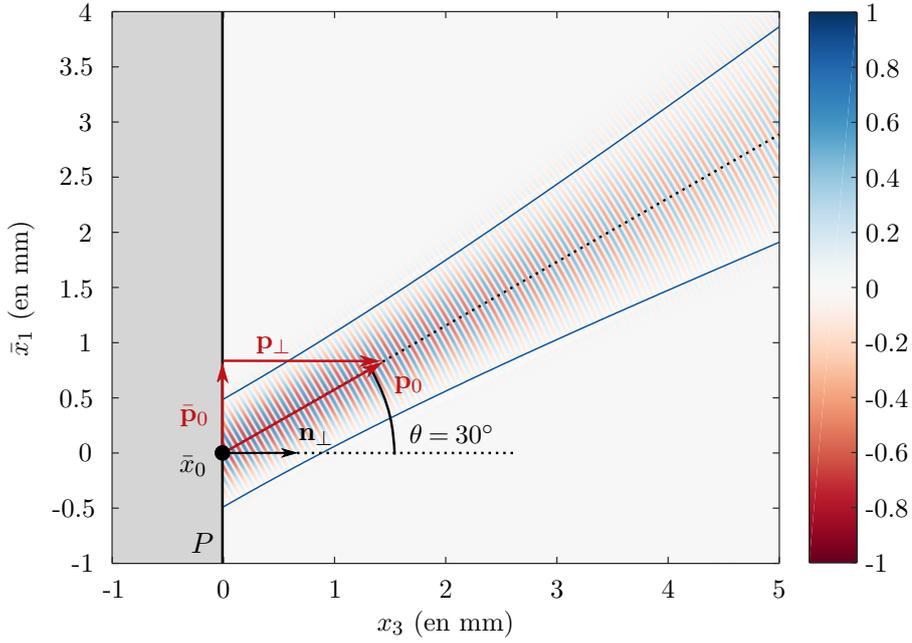


FIGURE 2.9 – Faisceau gaussien harmonique issu d’une source « inclinée » de caractéristiques (2.61), en milieu homogène de dimension $d = 3$

$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3)$, soit

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} |\mathbf{p}^\perp| \\ 0 \\ |\bar{\mathbf{p}}_0| \end{pmatrix} = \frac{1}{c_0} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T(s_0) = 0. \quad (2.62)$$

Le tracé de rayon consécutif est immédiat (voir annexe A.4). On construit ensuite le système de coordonnées rayon-centrées en s_0 , dont les directions $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ sont telles que \mathbf{e}_3 est colinéaire à \mathbf{p}_0 et $\bar{\mathbf{p}}_0$ est contenu dans le plan $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)$. D’après (2.60), on obtient la matrice hessienne initiale \mathbf{M}_0 en fonction de Γ_0 et θ , et d’après (2.35) et (2.36) on déduit de \mathbf{M}_0 la matrice hessienne $\mathbf{M}(s)$ et l’amplitude $A(s)$ du faisceau gaussien recherché. On représente ce dernier figure 2.9. On observe bien l’inclinaison de 30° du rayon central porté par \mathbf{p}_0 par rapport à la normale \mathbf{n}^\perp du plan P . D’après (2.60), la matrice hessienne initiale \mathbf{M}_0 est imaginaire pure en s_0 de sorte que le *col* du faisceau se situe en \mathbf{x}_0 d’après (2.53). On constate en effet que le faisceau diverge le long du rayon tracé, à mesure que l’on s’éloigne du col. De même, le front d’onde s’incurve progressivement, ce qui illustre l’équation (2.54). ■

Chapitre 3

Superposition de faisceaux gaussiens

Sommaire

3.1	Résolution asymptotique avec conditions aux bords	77
3.1.1	Modélisation avec conditions aux bords	77
3.1.2	Intégrales de faisceaux gaussiens	81
3.2	Convergence des solutions par faisceaux gaussiens	86
3.2.1	Régime transitoire	86
3.2.2	Régime harmonique	89
3.3	Méthodes d'initialisation de faisceaux par optimisation	92
3.3.1	Multi-faisceaux gaussiens en régime harmonique	92
3.3.2	Décomposition itérative en régime transitoire	100

Dans les chapitres précédents, nous avons introduit le formalisme et les équations fondamentales régissant la propagation des faisceaux gaussiens. Cet exposé a permis notamment de calculer ces solutions approchées dans des milieux homogènes, et d'appréhender l'impact des conditions initiales sur la validité de l'approximation paraxiale. Dans ce chapitre, nous complétons les équations de propagation par des conditions aux bords et obtenons deux problèmes de référence à résoudre, respectivement en régime transitoire et en régime harmonique. Les conditions aux bords dictent la forme des solutions, qui ne peuvent alors pas – en général – être modélisées correctement par un unique faisceau gaussien, mais par une combinaison linéaire (ou superposition) de plusieurs faisceaux. Ce chapitre est ici dédié à l'étude de ces superpositions. Après un aperçu de récents résultats asymptotiques sur l'erreur commise par ces superpositions, nous proposons une revue sélective de deux méthodes de superposition optimisées pour des conditions aux bords particulières.

3.1 Résolution asymptotique avec conditions aux bords

Jusqu'à présent, nous avons cherché des solutions approchées à des équations de propagation en l'absence de conditions aux limites et de terme source (chapitre 1). Cette démarche a permis de montrer l'existence de solutions asymptotiques sous la forme de faisceaux gaussiens, et d'explicitier les systèmes d'équations différentielles ordinaires qui régissent leur propagation. Elle ne permet cependant pas de prendre en compte les données d'excitation ultrasonore qui sont à l'origine du rayonnement. Dans cette section, nous commençons par formaliser ces données pour les modèles de propagation introduits dans le chapitre 1, ce qui revient à fournir aux équations de propagation des *conditions aux bords* du domaine de résolution. On dispose alors de deux problèmes (au sens de l'analyse fonctionnelle) de référence, un premier en régime transitoire et un second en régime harmonique. Or les solutions à ces problèmes ne peuvent généralement pas être modélisées par un unique faisceau gaussien. Au début des années 1980, BABIČ et POPOV proposent de construire des solutions approchées par sommation de plusieurs faisceaux gaussiens [145]. Dans la suite de cette section, nous nous intéressons donc à la convergence de ce type de solutions approchées, dans la limite hautes fréquences ($\omega \rightarrow +\infty$), vers les solutions exactes des deux problèmes de référence.

3.1.1 Modélisation avec conditions aux bords

Du point de vue physique, la propagation d'ondes de volume ultrasonores que l'on cherche à modéliser est la réponse à une excitation extérieure et/ou la conséquence d'un état perturbé du milieu. Le modèle physique doit nécessairement prendre en compte la donnée de ces conditions aux bords si l'on souhaite obtenir un résultat quantitatif. Dans le cadre particulier de la modélisation du contrôle non-destructif par ultrasons, la typologie des conditions aux bords est connue, de sorte qu'il est possible de les formaliser. Du point de vue mathématique, on doit veiller à ce que le problème possède bien une solution qui dépende des conditions aux limites qui lui sont imposées. L'objectif de ce paragraphe est donc de compléter les équations de propagation (voir section 1.2) par des conditions initiales et/ou limites, d'une part en régime transitoire pour l'équation des ondes scalaire, et d'autre part en régime harmonique pour l'équation de Helmholtz scalaire.

Problème de Cauchy pour l'équation des ondes

En régime transitoire, on cherche à résoudre une équation des ondes scalaire du type (1.28), (1.30) ou (1.42). Il est possible de compléter cette équation par des conditions

aux bords de différentes natures, notamment à la frontière $\partial\Omega$ du domaine spatial $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ de résolution en y spécifiant le champ $u|_{\partial\Omega}$ (condition de Dirichlet), ou sa dérivée normale $\partial_{\mathbf{n}}u|_{\partial\Omega}$ (condition de Neumann), ou une combinaison linéaire des deux. On peut également spécifier des conditions initiales, et se ramener à un problème de Cauchy. Tandis que des travaux très récents [11] traitent du problème de Dirichlet, c'est uniquement le problème de Cauchy – dans la continuité d'une large littérature existante [150, 170, 19, 118] – qui a été traité dans ces travaux de thèse pour une mise en œuvre appliquée des faisceaux gaussiens en régime transitoire. Du point de vue de l'application visée, le problème de Cauchy modélise l'évolution en espace libre d'un champ ultrasonore connu à un instant donné, en dehors de toute source d'excitation. Ce peut être par exemple la donnée – analytique ou éventuellement issue d'une autre méthode numérique – du champ transitoire préalablement rayonné dans Ω par un transducteur, ou diffracté par une hétérogénéité dans le milieu. Dans le cas de l'équation des ondes scalaire, le problème de Cauchy s'écrit

$$(\mathcal{P}_0) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - c^2(\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, +\infty[, \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = g(\mathbf{x}), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

On suppose que la célérité $c(\mathbf{x})$ est une fonction appartenant à $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, et que les fonctions f et g sont définies respectivement dans $H^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$. La solution u au problème (\mathcal{P}_0) (3.1) est donc recherchée dans l'espace de Sobolev $H^s(\Omega)$ d'ordre $s = 1$, dont la norme standard associée $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est définie à l'instant $t \in [0, +\infty[$ par

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} \left(\left| \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right|^2 + |\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t)|^2 \right) d\mathbf{x}. \quad (3.2)$$

La norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est aussi appelée *energy norm* dans la littérature anglophone. Dans un régime hautes fréquences, il peut être utile [115, 4, 118] de mettre la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ à l'échelle de $\omega \gg 1$, et on définit¹ alors

$$\|u(\cdot, t)\|_E^2 = \omega^{-2} \|u(\cdot, t)\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (3.3)$$

1. Cette mise à l'échelle permet en effet de normaliser la mesure de la solution et d'avoir $\|u(\cdot, t)\| = \mathcal{O}(1)$, ce qui permet d'interpréter les résultats du paragraphe 3.2 comme des erreurs relatives.

On utilisera par la suite – entre autres – la norme $\|\cdot\|_E$ pour évaluer la précision des solutions faisceau gaussien en régime hautes fréquences. Mathématiquement, le problème (\mathcal{P}_0) (3.1) est bien posé, c'est-à-dire que la solution u au problème existe, est unique et dépend continûment de la donnée des conditions initiales f et g .

Exemple 9. Dans cet exemple, on considère le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - c^2(\mathbf{x})\Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[, \\ u(\mathbf{x}, 0) = a^0 \exp\{i\omega\tau^0(\mathbf{x})\}, & x \in \mathbb{R}^d, \\ \frac{\partial u(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = b^0 \exp\{i\omega\tau^0(\mathbf{x})\}, & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (3.4)$$

avec

$$\tau^0(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \mathcal{M}_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (3.5)$$

où \mathcal{M}_0 est symétrique et complexe à partie imaginaire définie positive, où a^0 et b^0 sont des coefficients complexes et où $\omega \gg 1$. Ainsi posé, ce problème est donc un cas particulier de (\mathcal{P}_0) en **régime hautes fréquences** et en espace libre avec $\Omega = \mathbb{R}^d$. On peut montrer [149] qu'une solution asymptotique au problème (3.4), pour $t > 0$, est la somme $u(\mathbf{x}, t) = u^+(\mathbf{x}, t) + u^-(\mathbf{x}, t)$ de deux faisceaux gaussiens transitoires du premier ordre tels que

$$u^\pm(\mathbf{x}, t) = a^\pm(t) \exp\left\{i\omega \left(\mathbf{p}^\pm(t) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\pm(t)) + \frac{1}{2} t (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\pm(t)) \mathcal{M}^\pm(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\pm(t)) \right)\right\}$$

où $\mathbf{x}^\pm(t)$, $\mathbf{p}^\pm(t)$, $\mathcal{M}^\pm(t)$ et $a^\pm(t)$ sont solutions du système (\mathcal{E}) , avec pour conditions initiales

$$\mathbf{x}^\pm(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{p}^\pm(0) = \mathbf{p}_0, \quad \mathcal{M}^\pm(0) = \mathcal{M}_0, \quad a^\pm(0) = \frac{1}{2} \left(a^0 + \frac{ib^0}{\mathcal{H}^\pm(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)} \right), \quad (3.6)$$

et où l'hamiltonien en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ vaut $\mathcal{H}^\pm(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) = \pm c(\mathbf{x}_0)|\mathbf{p}_0|$. Dans cet exemple, on vérifie bien que la solution est unique et dépend continument des conditions initiales. ■

Équation de Helmholtz avec conditions aux bords

En régime harmonique, on cherche à résoudre une équation de Helmholtz scalaire du type (1.49), (1.51) et (1.53). De la même façon que pour l'équation des ondes il existe plusieurs façons d'adjoindre des conditions aux bords à l'équation de Helmholtz. Parmi

celles-ci, on considère l'équation de Helmholtz inhomogène

$$(P_0) : \Delta \hat{u}(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{u}(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (3.7)$$

où \hat{f} , assimilable à un terme source, est une fonction définie sur une hypersurface Σ de \mathbb{R}^d . Un cas particulier défini dans un système de coordonnées cartésiennes $(x_1, \dots, x_{d-1}, x_d) = (\bar{\mathbf{x}}, x_d)$ est celui d'une source plane contenue dans le plan de normale \mathbf{e}_d et passant par le point de coordonnées $(0, \dots, 0)$. On peut alors écrire $\hat{f}(\mathbf{x}) = \hat{f}_0(\bar{\mathbf{x}})\delta(x_d)$ où δ est la distribution de Dirac, et où $\hat{f}_0(\bar{\mathbf{x}})$ est défini dans le plan de normale \mathbf{e}_d . Sous une condition – entre autres – de « non-piégeage de rayon ² » [178, 117, 135] portant sur la célérité $c(\mathbf{x})$, il est possible de montrer que le problème (P_0) (3.7) est bien posé localement dans une boule ouverte d'un certain rayon $R > 0$. Dans ce cas et sous des hypothèses complémentaires de régularité du terme source, on peut définir la norme de Sobolev $\|\cdot\|_{H^m(|\mathbf{x}|<R)}$ d'ordre $m = 0, 1, 2$. En particulier pour $m = 0$, on a

$$\|\hat{u}\|_{H^0(|\mathbf{x}|<R)}^2 = \|\hat{u}\|_{L^2(|\mathbf{x}|<R)}^2 = \int_{|\mathbf{x}|<R} |\hat{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (3.8)$$

La norme $\|\hat{u}\|_{H^0(|\mathbf{x}|<R)}$ est donc aussi la norme quadratique de \hat{u} sur la boule ouverte de rayon R , et on pourra prendre une valeur de R suffisamment grande en pratique. On utilisera cette norme par la suite, et on la notera simplement $\|\cdot\|_{L^2}$. Le problème (P_0) (3.7) modélise ici le champ rayonné par une source ultrasonore étendue le long d'une hypersurface, par exemple une surface émettrice dans le volume.

Exemple 10. A titre d'exemple, le problème associé à la « source inclinée » peut s'écrire, en milieu homogène, sous la forme de l'équation de Helmholtz inhomogène

$$\Delta \hat{u}(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{u}(\mathbf{x}) = \left(\frac{2i\omega}{c_0}\right) \hat{\phi}_0(\bar{\mathbf{x}})\delta(x_d), \quad (\bar{\mathbf{x}}, x_d) \in \mathbb{R}^3, \quad (3.9)$$

avec

$$\hat{\phi}_0(\bar{\mathbf{x}}) = A_0 \exp \left\{ i\omega \left(\bar{\mathbf{p}}_0 \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0) + \frac{1}{2} {}^t(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0) \mathbf{\Gamma}_0 (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_0) \right) \right\}.$$

où les différentes conditions initiales indicées par 0 sont précisées dans le paragraphe 2.3, et où $\omega \gg 1$. Le problème (3.9) ainsi posé est un cas particulier du problème (P_0) (3.7) en **régime hautes fréquences**. Nous avons alors montré dans l'exemple 8 qu'une

2. *Nontrapping ray condition* dans la littérature anglophone.

solution asymptotique à ce problème est un faisceau gaussien incliné d'un angle θ tel que représenté figure 2.9. Cette solution est bien unique, et dépend continument – pour $\theta \in [0, \pi/2[$ – des données du problème.

3.1.2 Intégrales de faisceaux gaussiens

En dehors de certains cas particuliers décrits dans les exemples 9 et 10, les solutions générales aux problèmes du type (\mathcal{P}_0) ou (P_0) ne peuvent généralement pas être décrites par un unique faisceau gaussien, même en régime hautes fréquences. Une idée proposée par POPOV [145] a donc été d'utiliser une combinaison linéaire de plusieurs faisceaux gaussiens en s'appuyant sur la linéarité des équations de propagation. Il s'est ainsi inspiré³ de BABIČ et PANKRATOVA [7], qui ont cherché à calculer de façon asymptotique la fonction de Green associée à l'équation de Helmholtz (1.1) à l'aide d'une somme continue (intégrale) de rayons passant au voisinage du point d'observation. La méthode de sommation de faisceaux gaussiens⁴ proposée par POPOV consiste alors à calculer cette même fonction de Green en prenant en compte la contribution d'un continuum de faisceaux gaussiens au point de calcul. La mise en œuvre de cette idée requiert donc de spécifier la ou les variables permettant de générer ce continuum de faisceaux, et donc de paramétrer la représentation intégrale associée. On observe des choix différents de paramétrisation dans la littérature selon le cas d'application.

Paramétrisation angulaire en \mathbf{p}_0

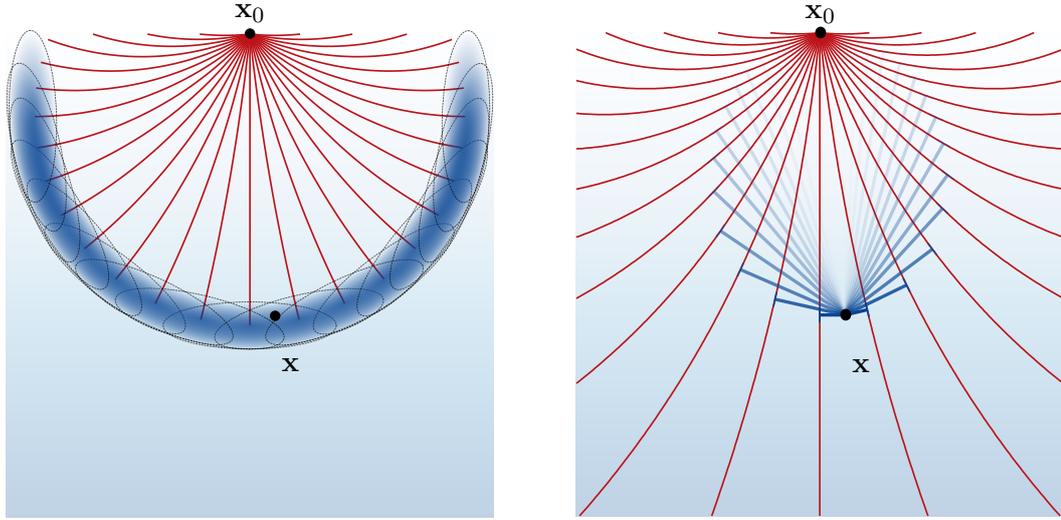
Dans la première proposition de POPOV [145], la fonction de Green en dimension $d = 3$ associée à l'équation de Helmholtz (1.1) est approchée par l'intégrale

$$G(\mathbf{x}) \approx \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \chi(\vartheta, \varphi) \hat{\phi}_{\vartheta, \varphi}(q_1, q_2, s), \quad (3.10)$$

où $0 \leq \vartheta \leq \pi$ et $0 \leq \varphi < 2\pi$ sont respectivement les angles polaire et azimutal en coordonnées sphériques. La fonction $\hat{\phi}_{\vartheta, \varphi}$ décrit un faisceau gaussien harmonique, dont

3. Dans le chapitre 2, nous avons choisi de prendre la méthode des rayons comme point de départ pour construire les faisceaux gaussiens. C'est un choix que l'on retrouve généralement dans la littérature géophysique [29, 146, 33], et qui permet – quand cela est possible – d'extrapoler facilement des développements théoriques ou appliqués des rayons au profit de méthodes basées sur les faisceaux gaussiens.

4. *Gaussian beam summation method* dans la littérature anglophone.



(a) Régime transitoire

(b) Régime harmonique

FIGURE 3.1 – Somme au point \mathbf{x} de faisceaux gaussiens issus du point \mathbf{x}_0

l'indice (ϑ, φ) indique qu'il est construit autour du rayon initialisé par

$$\mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_0 = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

où \mathbf{x}_0 et \mathbf{p}_0 sont ici exprimés dans les coordonnées cartésiennes en dimension $d = 3$. La fonction $\chi(\vartheta, \varphi)$ est une fonction qui pondère la contribution du faisceau gaussien $\hat{\phi}_{\vartheta, \varphi}$ dans la représentation intégrale; dans [145], la fonction $\chi(\vartheta, \varphi)$ est déterminée indépendamment par un calcul asymptotique visant à égaler la représentation intégrale (3.10) avec la fonction Green exacte. La stratégie adoptée ici consiste donc à construire un ensemble de faisceaux gaussiens autour de rayons centraux, tous tracés à partir d'une même position initiale \mathbf{x}_0 , mais avec des lenteurs \mathbf{p}_0 différentes.

Le calcul numérique de l'intégrale (3.11) peut se faire par la méthode des rectangles par exemple, ce qui revient à discrétiser les domaines angulaires d'intégration, à construire un faisceau gaussien pour chaque vecteur \mathbf{p}_0 défini par les couples discrets (ϑ_m, φ_n) , puis à sommer leurs contributions au point d'observation \mathbf{x} pondérées par la fonction

$\chi(\vartheta_m, \varphi_n)$. La fonction de Green approchée vaut alors

$$G(\mathbf{x}) \approx \sum_{m,n} \chi(\vartheta_m, \varphi_n) \hat{\phi}_{\vartheta_m, \varphi_n}(q_1, q_2, s) \Delta\vartheta_m \Delta\varphi_n, \quad (3.12)$$

où $\Delta\vartheta_m$ et $\Delta\varphi_n$ sont les pas de discrétisation des angles polaire et azimutal. Une illustration de cette procédure appliquée dans un milieu de dimension $d = 2$ ayant un gradient vertical de célérité (voir exemple 4) est représentée figure 3.1b. Les rayons γ issus du point source en \mathbf{x}_0 sont tracés en rouge, et les plans transverses à ces rayons passant par \mathbf{x} sont tracés en niveaux de bleu. Le tracé de ces derniers est d'autant plus foncé que le faisceau gaussien considéré est « proche » du point d'observation \mathbf{x} , ce qui mesure qualitativement le niveau de contribution de ce faisceau dans le calcul par sommation discrète. Particulièrement adaptée pour des configurations dont les sources sont modélisables par un ou plusieurs points source, la superposition de faisceaux gaussiens par paramétrisation angulaire a été largement utilisée et approfondie dans la littérature géophysique [30, 74, 8, 87, 141] mais également en acoustique sous-marine [147] et en aéroacoustique [67].

En régime transitoire, la méthode consiste alors à sommer des paquets émis au point source \mathbf{x}_0 à l'instant initial $t = 0$, et propagés le long des mêmes rayons que ceux tracés en régime harmonique (voir figure 3.1a). En pratique, le calcul de la réponse transitoire au point \mathbf{x} est donc différent du champ harmonique en ce même point. En effet, un faisceau gaussien en régime transitoire est calculé directement à l'aide des coordonnées cartésiennes de \mathbf{x} , tandis que l'évaluation d'un faisceau gaussien en régime harmonique requiert au préalable d'exprimer \mathbf{x} dans ses coordonnées rayon-centrées.

Paramétrisation spatiale en \mathbf{x}_0

Dans [136], MOTAMED et RUNBORG cherchent une solution asymptotique au problème intérieur associé à l'équation de Helmholtz en dimension $d = 2$, c'est-à-dire à résoudre

$$\Delta \hat{u}(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2} \hat{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (3.13)$$

pour $\omega \gg 1$ et tel que la solution est connue sur le bord $\partial\Omega$, décrit par une courbe paramétrée $\mathbf{x}_0(s)$ dans \mathbb{R}^2 . En notant $A(\mathbf{x}, s)$ et $T(\mathbf{x}, s)$ les fonctions d'amplitude et de phase associées au faisceau gaussien de position initiale $\mathbf{x}_0(s)$, les auteurs écrivent la solution approchée au problème sous la forme d'une représentation intégrale, soit

$$\hat{u}(\mathbf{x}) \approx \int_{\partial\Omega} A(\mathbf{x}, s) \exp\{i\omega T(\mathbf{x}, s)\} ds. \quad (3.14)$$

Dans [136], cette stratégie est appliquée uniquement au cas d'une onde plane, réduisant ainsi $\partial\Omega$ à une droite le long de laquelle le champ $\hat{u}(\mathbf{x}_0(s))$ est constant. Pour ce cas particulier, les vecteurs lenteur initiaux \mathbf{p}_0 associés aux faisceaux gaussiens sont tous pris égaux dans la direction normale à l'onde plane. Cette fois, le continuum de faisceaux gaussiens à superposer est alors construit autour de rayons centraux issus de différentes positions initiales \mathbf{x}_0 , mais ayant la même lenteur \mathbf{p}_0 .

De la même façon que pour la paramétrisation angulaire, la représentation intégrale (3.14) peut être approchée numériquement par la méthode des rectangles, soit

$$\hat{u}(\mathbf{x}) \approx \sum_n A(\mathbf{x}, s_n) \exp\{i\omega T(\mathbf{x}, s_n)\} \Delta s, \quad (3.15)$$

où Δs est le pas de discrétisation de la coordonnée curviligne s . Cette stratégie a été introduite par KLIMEŠ [107] afin de décomposer un champ connu le long d'une surface en une superposition de faisceaux gaussiens, et appliquée notamment dans [135] dans le cadre d'un schéma adaptatif de synthèse de front d'onde.

Paramétrisation mixte en $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$

La paramétrisation angulaire en \mathbf{p}_0 et la paramétrisation spatiale en \mathbf{x}_0 présentées dans ce paragraphe sont optimales lorsque, respectivement, on assimile la source à un (ou plusieurs) point(s) source ou à une (ou plusieurs) onde(s) plane(s). En dehors de ces configurations canoniques, ces paramétrisations ne sont plus adaptées. Pour des sources plus complexes, il est alors nécessaire de pouvoir faire varier conjointement la position \mathbf{x}_0 et la lenteur \mathbf{p}_0 initiales des faisceaux gaussiens à superposer. Une façon d'y parvenir hérite de l'analyse micro-locale des distributions [80]. En substance, cette discipline mathématique permet de justifier l'étude d'équations aux dérivées partielles dans des espaces d'analyse *ad hoc*, et de définir les outils associés. Parmi ceux-ci, la transformée de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) [92] est une généralisation de la transformée de Fourier qui permet de réaliser localement en espace – à une échelle contrôlée – une analyse spectrale d'une distribution. Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la transformée FBI à l'échelle ϵ est définie [18] par

$$T_\epsilon(f)(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) = 2^{-\frac{d}{2}} (\pi\epsilon)^{-\frac{3d}{4}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x}) e^{i\frac{\mathbf{p}_0 \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\epsilon} - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2}{2\epsilon}} d^d \mathbf{x}. \quad (3.16)$$

Littéralement, $T_\epsilon(f)(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ est le spectre d'onde plane évalué en \mathbf{p}_0 de la fonction f fenêtrée par une gaussienne d'une largeur de l'ordre de $\sqrt{\epsilon}$ et centrée en \mathbf{x}_0 . Dans [19, 18], les auteurs proposent de résoudre un problème semblable à (\mathcal{P}_0) . En particulier, ils évaluent la convergence d'une somme de faisceaux gaussiens initialisés le long d'un

continuum $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$, et dont la pondération utilise la transformée FBI des conditions initiales. Cette approche est également appliquée dans [183] à un modèle géophysique, et utilisée dans [124] pour une étude de convergence. En dépit de l'apport formel de la transformée FBI pour la paramétrisation mixte des faisceaux gaussiens, sa mise en numérique est limitée par le coût du calcul discret de (3.16). En pratique, on lui préférera des transformées rapides reposant sur la *théorie des frames* (voir section 4.1.2 et chapitres suivants).

3.2 Convergence des solutions par faisceaux gaussiens

Dans le cadre de la modélisation quantitative, il est crucial de pouvoir quantifier – sinon majorer – l’erreur commise par rapport à la solution exacte lorsqu’une onde de volume ultrasonore est modélisée par un faisceau gaussien unique ou une superposition de faisceaux gaussiens. En particulier, on veut s’assurer que ces approximations asymptotiques convergent bien vers la solution exacte en régime hautes fréquences, c’est-à-dire que l’erreur décroît lorsque $\omega \rightarrow +\infty$. Tandis que les premières constructions physiques se sont succédées à partir des années 1960 (voir section 1.1), on observe dans la littérature que ce type d’étude mathématique des faisceaux gaussiens est plus tardive. Ce n’est qu’au début des années 1980 – au moment où émergent les premières méthodes de superposition de faisceaux gaussiens – que l’on voit apparaître les premiers résultats asymptotiques pour des faisceaux gaussiens uniques en régime transitoire [150]. L’étude asymptotique de l’erreur commise par une superpositions de faisceaux gaussiens demeure alors un problème difficile (voir la conclusion de [8]), qui n’est pas résolu avant les contributions récentes de BOUGACHA [19, 18] et de LIU, RUNBORG et TANUSHEV [115, 116, 118, 117, 119].

L’objectif de ce paragraphe est de passer en revue les résultats théoriques de cette littérature, de restituer leur évolution, et de montrer en quoi ils légitiment la modélisation en régime hautes fréquences par superposition de faisceaux gaussiens. Afin d’étudier uniquement l’erreur résultant de l’approximation paraxiale, les auteurs font généralement l’hypothèse que les conditions aux bords sont reproduites de façon exacte par ces superpositions. Les ordres de convergence alors obtenus peuvent être sensiblement différents selon les autres hypothèses formulées, notamment sur le choix de la norme pour mesurer l’erreur, et selon les cas la présence ou non de caustique. Le tableau 3.1 en fin de paragraphe résume ces nuances, et le lecteur intéressé par leur démonstration pourra consulter les références citées.

3.2.1 Régime transitoire

En 1982, RALSTON [150] est vraisemblablement le premier à avoir étudié rigoureusement la convergence pour $\omega \rightarrow +\infty$ des faisceaux gaussiens dans la résolution de l’équation des ondes scalaires. On note $u(\mathbf{x}, t)$ la solution exacte au problème (\mathcal{P}_0) à un instant $t \geq 0$ et $u_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}, t)$ la solution approchée par un unique faisceau gaussien d’ordre \mathcal{N} (voir définition tableau 2.1). En faisant l’hypothèse que les conditions initiales du problème (\mathcal{P}_0) sont exactement reproduites par ce faisceau gaussien, c’est-à-dire que $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $u(\mathbf{x}, 0) = u_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}, 0)$ et $\partial_t u(\mathbf{x}, 0) = \partial_t u_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}, 0)$, l’auteur montre que dans la limite

$\omega \rightarrow +\infty$,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_{\mathcal{N}}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_E = \mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{\mathcal{N}}{2}}\right), \quad (3.17)$$

où $[0, T]$ est un intervalle de temps arbitraire durant lequel la solution transitoire se propage. Il montre par ailleurs que cette majoration est « optimale ⁵ », c'est-à-dire que $\mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{\mathcal{N}}{2}}\right)$ est le plus petit majorant de l'erreur commise au sens de la norme $\|\cdot\|_E$ (définie par (3.2)). On observe que l'ordre de convergence dépend uniquement de l'ordre \mathcal{N} du faisceau, et ne dépend donc pas de la dimension d de l'espace ou des caractéristiques du faisceau. Dans le cas particulier des faisceaux gaussiens d'ordre $\mathcal{N} = 1$ que nous étudions jusqu'à présent, on a directement

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u_1(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_E = \mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (3.18)$$

On en déduit que pour des conditions initiales sous la forme d'un ansatz WKBJ (voir exemple 9), la solution faisceau gaussien associée est bien une solution asymptotique, dont l'erreur commise en norme $\|\cdot\|_E$ par rapport à la solution exacte est de l'ordre de $\omega^{-\frac{1}{2}}$.

Ce n'est qu'à partir des années 2010 que les premiers résultats de convergence pour les superpositions de faisceaux gaussiens sont démontrés rigoureusement. En effet, les faisceaux qui sont superposés interfèrent entre eux, et c'est la mesure de ces interférences qui a introduit des difficultés supplémentaires dans les études de convergence. En 2009, LIU et RALSTON [115] cherchent à résoudre de façon asymptotique le problème (\mathcal{P}_0) dans le cas d'une donnée de Cauchy rapidement oscillante, à l'aide d'une superposition de faisceaux gaussiens. Cette dernière est une intégrale de faisceaux gaussiens issus d'une paramétrisation mixte (voir paragraphe précédent), de la forme

$$u_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}, t) \propto \int \left[u_{\mathcal{N}}^+(\mathbf{x}, t; X_0) + u_{\mathcal{N}}^-(\mathbf{x}, t; X_0) \right] dX_0 \quad (3.19)$$

où $u_{\mathcal{N}}^{\pm}(\mathbf{x}, t; X_0)$ sont des faisceaux gaussiens d'ordre \mathcal{N} initialisés par le paramètre mixte $X_0 = (\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ et calculés pour l'hamiltonien $\mathcal{H}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \pm c(\mathbf{x})|\mathbf{p}|$. Les auteurs montrent alors, pour $t \in [0, T]$,

$$\|u_{\mathcal{N}}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_E \leq \mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{\mathcal{N}}{2} + \frac{d-1}{4}}\right). \quad (3.20)$$

Par rapport à (3.17), on remarque d'une part qu'il s'agit d'une simple majoration (non-

5. *Sharp* est le qualificatif employé dans la littérature anglophone.

optimale) de l'erreur au sens de la norme $\|\cdot\|_E$, et d'autre part que la solution approchée est pénalisée par $\omega^{\frac{d-1}{4}}$. Cette pénalisation, qui dépend de la dimension d , rend compte de la présence éventuelle de caustiques. Ainsi, en considérant des faisceaux gaussiens d'ordre $\mathcal{N} = 1$, il vient la majoration

$$\|u_1(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_E \leq \mathcal{O}\left(\omega^{\frac{d-3}{4}}\right). \quad (3.21)$$

On en déduit qu'une telle majoration permet d'assurer la convergence, au sens de la norme $\|\cdot\|_E$, d'une superposition de faisceaux gaussiens d'ordre $\mathcal{N} = 1$ en présence d'une caustique uniquement en dimension $d \leq 2$ (voir figure 3.2). Or dans le même temps, BOUGACHA [18, 19] obtient un résultat plus fort et pour des conditions initiales au problème (\mathcal{P}_0) plus génériques. Ainsi pour $t \in [0, T]$, l'auteur montre la majoration

$$\|u_{\mathcal{N}}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_E \leq \mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{\mathcal{N}}{2}}\right), \quad (3.22)$$

où $u_{\mathcal{N}}$ est ici construit à l'aide de la transformée FBI des conditions initiales au problème de Cauchy générique (3.1) (voir paragraphe précédent). On retrouve ainsi la majoration (3.17) démontrée par RALSTON pour un faisceau gaussien unique, qui contrairement à (3.20) n'est pas pénalisée par la présence éventuelle de caustique dans le domaine de résolution Ω (voir figure 3.2). En particulier pour $\mathcal{N} = 1$, il vient

$$\|u_1(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_E \leq \mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (3.23)$$

Ce résultat (voir figure 3.2) fournit ainsi un premier argument théorique qui garantit la convergence globale des superpositions de faisceaux gaussiens d'ordre $\mathcal{N} = 1$ vers la solution exacte au problème (\mathcal{P}_0) (3.1). Un résultat similaire (3.22) a été ensuite obtenu en 2012 par LIU, RUNBORG et TANUSHEV [118], et généralisé à l'ensemble des équations aux dérivées partielles strictement hyperboliques d'ordre $m \geq 1$.

Enfin, il peut être utile d'utiliser la norme infinie pour mesurer quantitativement les erreurs locales. Pour une fonction continue f définie sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, la norme infinie est définie par

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})|. \quad (3.24)$$

On utilisera cette norme par la suite, et on la notera simplement $\|\cdot\|_{L^\infty}$. En 2015, LIU, RUNBORG et TANUSHEV [119] considèrent à nouveau le problème (\mathcal{P}_0) pour une donnée de Cauchy rapidement oscillante, et cherchent cette fois-ci une solution approchée sous la forme d'une superposition de faisceaux gaussiens d'ordre \mathcal{N} paramétrés spatialement en

\mathbf{x}_0 (voir paragraphe précédent). Notée $u_{\mathcal{N}}$, cette superposition s'écrit

$$u_{\mathcal{N}}(\mathbf{x}, t) \propto \int_{K_0} \left[u_{\mathcal{N}}^+(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) + u_{\mathcal{N}}^-(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) \right] dx_0, \quad (3.25)$$

où $u_{\mathcal{N}}^{\pm}(\mathbf{x}, t; z)$ sont des faisceaux gaussiens d'ordre \mathcal{N} initialisés par la position initiale $\mathbf{x}_0 \in K_0$ et calculés pour l'hamiltonien $\mathcal{H}^{\pm}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \pm c(\mathbf{x})|\mathbf{p}|$. $K_0 \subset \mathbb{R}^d$ correspond au support des données initiales dans (3.4). Au sens de la norme infinie, les auteurs obtiennent deux majorations de l'erreur commise par cette superposition de faisceaux. La première est démontrée en présence de caustiques, soit pour $t \in [0, T]$,

$$\|u_{\mathcal{N}}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{\mathcal{N}-d}{2}}\right). \quad (3.26)$$

Cette simple majoration ne permet de garantir la convergence de $u_{\mathcal{N}}$ au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ que si $\mathcal{N} > d$, et donc ne permet pas de montrer qu'une superposition de faisceaux gaussiens du premier ordre converge en tout point $\mathbf{x} \in \Omega$ vers la solution exacte. Les auteurs indiquent cependant que cette majoration peut être améliorée pour certaines catégories de caustiques [119], et donc que le sujet reste ouvert dans le cas général. La seconde majoration est démontrée en l'absence de caustique, soit pour $t \in [0, T]$,

$$\|u_{\mathcal{N}}(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \mathcal{O}\left(\omega^{-\lceil \frac{\mathcal{N}}{2} \rceil}\right). \quad (3.27)$$

On observe que $\forall \mathcal{N} \geq 1, \forall \omega > 0, \omega^{-\lceil \frac{\mathcal{N}}{2} \rceil} \leq \omega^{-\frac{\mathcal{N}}{2}}$, et donc que la majoration (3.27) au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ – en l'absence de caustique – est plus forte que la majoration (3.22) au sens de la norme $\|\cdot\|_E$ (voir figure 3.2. À l'ordre $\mathcal{N} = 1$ et en l'absence de caustique, il vient

$$\|u_1(\cdot, t) - u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \mathcal{O}\left(\omega^{-1}\right). \quad (3.28)$$

Ainsi en complément de (3.23), la majoration (3.28) fournit un second argument théorique qui garantit cette fois – en l'absence de caustique – la convergence en tout point $\mathbf{x} \in \Omega$ des superpositions de faisceaux gaussiens d'ordre $\mathcal{N} = 1$ vers la solution exacte au problème (\mathcal{P}_0) .

3.2.2 Régime harmonique

Dans la littérature, les premières études [106] des erreurs commises par des superpositions de faisceaux gaussiens en régime harmonique concernent davantage les erreurs de discrétisation liées à l'évaluation numérique des intégrales de faisceaux gaussiens, présentées dans le paragraphe 3.1.2. En 2010, dans la continuité de [106], MOTAMED

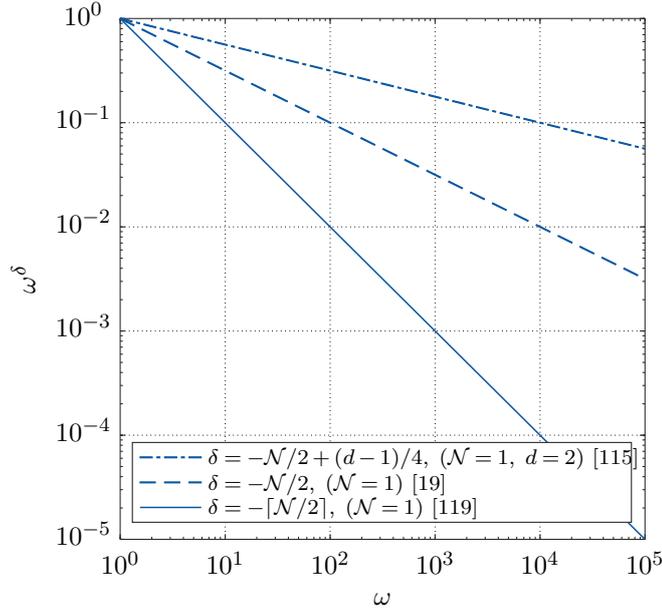


FIGURE 3.2 – Ordres de convergence démontrés dans la littérature pour des superpositions de faisceaux gaussiens en régime transitoire

et RUNBORG [136] se sont intéressés aux erreurs de discrétisation, mais ont également introduit l'étude de l'erreur liée au développement de Taylor de la phase, et donc résultant de l'approximation paraxiale. La superposition que les auteurs cherchent à évaluer est l'intégrale de faisceaux gaussiens (3.14) paramétrés en espace \mathbf{x}_0 présentée dans le paragraphe précédent. En considérant des faisceaux gaussiens d'ordre \mathcal{N} en régime harmonique, cette superposition est notée $\hat{u}_{\mathcal{N}}$. En supposant que l'intégrale (3.14) est évaluée de façon exacte, les auteurs font l'hypothèse qu'il ne reste que l'erreur résultant de l'approximation paraxiale. En l'absence de caustique, ils obtiennent une majoration de cette erreur au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$, soit

$$\|\hat{u}_{\mathcal{N}} - \hat{u}\|_{L^\infty} \leq \mathcal{O}\left(\omega^{-\lceil \frac{\mathcal{N}}{2} \rceil}\right). \quad (3.29)$$

En particulier pour des faisceaux gaussiens d'ordre $\mathcal{N} = 1$, on obtient

$$\|\hat{u}_1 - \hat{u}\|_{L^\infty} \leq \mathcal{O}\left(\omega^{-1}\right). \quad (3.30)$$

On rappelle que ce résultat est montré dans le cas particulier où le domaine d'intégration $\partial\Omega$ de l'intégrale (3.14) est une droite. Il est néanmoins comparable à la majoration (3.28) obtenue en régime transitoire pour la même norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$ et le même type de

superposition paramétrée en espace \mathbf{x}_0 , et garantit – en dehors des caustiques – la convergence en tout point $\mathbf{x} \in \Omega$ de la superposition \hat{u}_1 .

Dans le paragraphe 3.1.1 nous avons invoqué, sans les expliciter, plusieurs hypothèses sur la régularité du terme source et sur la célérité $c(\mathbf{x})$ (condition de « non-piégeage de rayon ») pour que le problème (P_0) soit bien posé. A travers ces hypothèses nécessaires, LIU, RALSTON, RUNBORG et TANUSHEV [117] font le constat que le traitement théorique du problème (P_0) en régime harmonique est plus complexe que celui du problème (\mathcal{P}_0) en régime transitoire. En considérant une superposition $\hat{u}_{\mathcal{N}}$ de faisceaux gaussiens paramétrés en espace $\mathbf{x}_0 \in \Sigma$ où Σ est une hypersurface de \mathbb{R}^d sur laquelle est définie le terme source \hat{f} du problème (P_0) (3.7), les auteurs obtiennent néanmoins une majoration de l'erreur au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, soit

$$\|\hat{u}_{\mathcal{N}} - \hat{u}\|_{L^2} \leq \mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{\mathcal{N}}{2}}\right). \quad (3.31)$$

Pour une superposition de faisceaux gaussiens d'ordre $\mathcal{N} = 1$, il vient donc

$$\|\hat{u}_1 - \hat{u}\|_{L^2} \leq \mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (3.32)$$

Ainsi, de la même façon qu'en régime transitoire, la majoration (3.32) fournit un argument théorique qui garantit la convergence globale pour $\omega \rightarrow +\infty$ des superpositions de faisceaux gaussiens d'ordre $\mathcal{N} = 1$ vers la solution exacte au problème (P_0) .

Année	Réf.	Prob.	Régime	Caustique	Norme	Majoration	$\mathcal{N} = 1$
2009	[115]	(\mathcal{P}_0)	transitoire	oui	$\ \cdot\ _E$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{\mathcal{N}}{2} + \frac{d-1}{4}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{d-3}{4}}\right)$
2009	[19]	(\mathcal{P}_0)	transitoire	oui/non	$\ \cdot\ _E$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{\mathcal{N}}{2}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{1}{2}}\right)$
2010	[136]	(P_0)	harmonique	non	$\ \cdot\ _{L^\infty}$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\lceil \frac{\mathcal{N}}{2} \rceil}\right)$	$\mathcal{O}(\omega^{-1})$
2013	[118]	(\mathcal{P}_0)	transitoire	oui/non	$\ \cdot\ _E$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{\mathcal{N}}{2}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{1}{2}}\right)$
2014	[117]	(P_0)	harmonique	oui/non	$\ \cdot\ _{L^2}$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{\mathcal{N}}{2}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{1}{2}}\right)$
2015	[119]	(\mathcal{P}_0)	transitoire	oui	$\ \cdot\ _{L^\infty}$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{\mathcal{N}-d}{2}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\frac{1-d}{2}}\right)$
				non	$\ \cdot\ _{L^\infty}$	$\mathcal{O}\left(\omega^{-\lceil \frac{\mathcal{N}}{2} \rceil}\right)$	$\mathcal{O}(\omega^{-1})$

TABLEAU 3.1 – Synthèse de résultats de convergence issus de la littérature pour les problèmes (\mathcal{P}_0) et (P_0) , respectivement en régimes transitoire et harmonique

3.3 Méthodes d'initialisation de faisceaux par optimisation

La section précédente a permis de définir les problèmes de référence en régimes transitoire et harmonique incluant les conditions aux bords, et d'introduire les superpositions intégrales de faisceaux gaussiens pour leur résolution. Nous avons alors justifié la convergence pour $\omega \rightarrow +\infty$ de ces solutions approchées à travers une synthèse bibliographique dédiée, en particulier pour les superpositions de faisceaux gaussiens d'ordre $\mathcal{N} = 1$ (voir tableau 3.1) que nous voulons utiliser par la suite. Ces résultats de convergence sont en réalité récents par rapport aux méthodes de superposition déjà existantes dans la littérature, la validité quantitative de ces dernières étant généralement justifiée dans des cas particuliers. Certaines de ces méthodes sont particulièrement adaptées au traitement de nos problèmes de référence appliqués à la modélisation du CND par ultrasons, sans pour autant s'inscrire dans l'approche intégrale présentée dans le paragraphe 3.1.2. Dans cette section, nous présentons deux de ces méthodes et les traduisons dans les notations adoptées jusqu'ici. Elle seront notamment appliquées dans le chapitre 5, et comparées quantitativement aux superpositions de faisceaux gaussiens par *frames*, exposées dans le chapitre 4.

3.3.1 Multi-faisceaux gaussiens en régime harmonique

On cherche ici à résoudre le problème harmonique (P_0). La méthode multi-faisceaux gaussiens⁶ est directement héritée de WEN et BREAZEALE [181]. C'est l'approche généralement adoptée par la communauté du CND quand il s'agit de faire intervenir des faisceaux gaussiens dans la modélisation d'ondes de volume ultrasonores. Dans [181], les auteurs proposent d'utiliser des faisceaux gaussiens en régime harmonique pour calculer le champ ultrasonore rayonné dans un milieu homogène (dimension $d = 3$, célérité c_0) par un « piston bafflé » uniforme, c'est-à-dire pour lequel le champ de vitesse est imposé et uniforme à sa surface, à la pulsation d'excitation ω . Sous ces hypothèses et dans les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2, x_3) , on place le transducteur circulaire plan de rayon a , animé uniformément d'une vitesse normale \hat{v}_0 , dans le plan $x_3 = 0$ (voir figure 3.3).

Méthode d'initialisation

Pour générer les faisceaux gaussiens, le champ de vitesse particulaire normale sur la

6. *Multi-Gaussian Beam* dans la littérature anglophone.

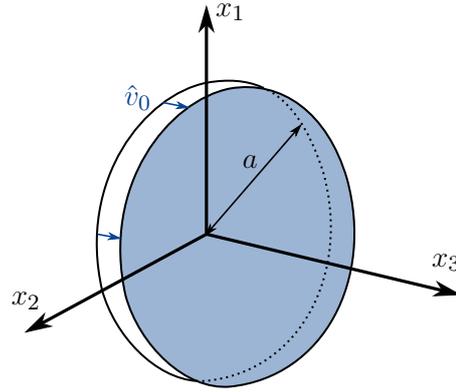


FIGURE 3.3 – Piston bafflé pour le calcul multi-faisceaux gaussiens [181]

surface émettrice est approché par une somme de fonctions gaussiennes, soit

$$\hat{v}(x_1, x_2, 0) \approx \hat{v}_0 \sum_{r=1}^M A_r \exp \left\{ -\frac{B_r \rho^2}{a^2} \right\}, \quad (3.33)$$

où $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$, et où A_r et B_r sont des coefficients complexes. Dans les notations introduites dans le chapitre 2, on peut donc écrire

$$\hat{v}(\mathbf{q}) \approx \sum_{r=1}^M A_0^r \exp \left\{ \frac{i\omega}{2} {}^t \mathbf{q} \mathbf{M}_0^r \mathbf{q} \right\}, \quad (3.34)$$

avec

$$\mathbf{q} = (x_1, x_2), \quad A_0^r = \hat{v}_0 A_r \quad \text{et} \quad \mathbf{M}_0^r = i \left(\frac{2B_r}{a^2 \omega} \right) \mathbf{I}, \quad (3.35)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité de taille 2×2 . Ainsi on déduit des deux équations précédentes qu'en écrivant le terme source sous la forme (3.33), on donne des conditions initiales à M faisceaux gaussiens particuliers. En effet, les coordonnées rayon-centrées $\mathbf{q} = (x_1, x_2)$ indiquent que les M faisceaux sont tous portés par la direction normale, de coordonnée x_3 . On en déduit les conditions initiales du tracé de rayon,

$$\forall r = 1 \dots M, \quad \mathbf{x}_0^r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^r = \frac{1}{c_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

et l'abscisse curviligne $s = x_3$. Par ailleurs dans les coordonnées rayon-centrées $\mathbf{q} = (x_1, x_2)$, chacune des matrices hessiennes initiales \mathbf{M}_0^r est proportionnelle à la matrice identité,

n	A_n	B_n
1	11.428 + 0.95175i	4.0697 + 0.22726i
2	0.06002 - 0.08013i	1.1531 - 20.933i
3	-4.2743 - 8.5562i	4.4608 + 5.1268i
4	1.6576 + 2.7015i	4.3521 + 14.997i
5	-5.0418 + 3.2488i	4.5443 + 10.003i
6	1.1227 - 0.68854i	3.8478 + 20.078i
7	-1.0106 - 0.26955i	2.5280 - 10.310i
8	-2.5974 + 3.2202i	3.3197 - 4.8008i
9	-0.14840 - 0.31193i	1.9002 - 15.820i
10	-0.20850 - 0.23851i	2.6340 + 25.009i

TABLEAU 3.2 – Coefficients A_r et B_r issus de la minimisation de (3.37), extraits de [181]

de sorte que chacun des faisceaux associés est circulaire⁷. Enfin, on rappelle que les coefficients B_r sont complexes et donc éventuellement de partie imaginaire non-nulle. Par suite, d'après (3.35), les parties réelles des matrices hessiennes initiales \mathbf{M}_0^r peuvent être non-nulles, et donc la courbure du front d'onde des faisceaux gaussiens associés être non-nulle dans le plan du transducteur. Ainsi, d'après l'étude des caractéristiques physiques des faisceaux gaussiens dans le chapitre précédent (voir 2.3), il vient que les cols des faisceaux gaussiens associés ne sont pas nécessairement situés dans le plan $x_3 = 0$ du piston. Soit la fonction objective J définie par

$$J(A_1 \dots A_M, B_1 \dots B_M) = \int_0^\infty \left[\text{circ}(\xi^2) - \sum_{r=1}^M A_r \exp\{-B_r \xi^2\} \right]^2 d\xi, \quad (3.37)$$

où

$$\frac{\hat{v}(x_1, x_2, 0)}{\hat{v}_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi^2 = \rho^2/a^2 < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \equiv \text{circ}(\xi^2). \quad (3.38)$$

La fonction J des coefficients A_r et B_r quantifie l'erreur quadratique commise dans l'approximation (3.33) de la vitesse normale à la surface du transducteur. Ainsi une façon de calculer les coefficients A_r et B_r consiste, pour une valeur donnée de M , à les déterminer de telle sorte que J soit minimale. Dans [181], les auteurs réalisent cette minimisation numériquement pour $M = 10$, par une optimisation itérative coûteuse, et explicitent les valeurs des coefficients A_r et B_r ainsi obtenus (voir tableau 3.2). On remarque dans (3.37) que l'expression de J ne dépend ni de ω , ni de a , mais uniquement de la valeur de

7. On rappelle qu'on qualifie de *circulaire* un faisceau gaussien harmonique qui ne présente pas d'astigmatisme, c'est-à-dire dont les demi-largeurs principales à une abscisse curviligne quelconque sont toutes égales entre elles.

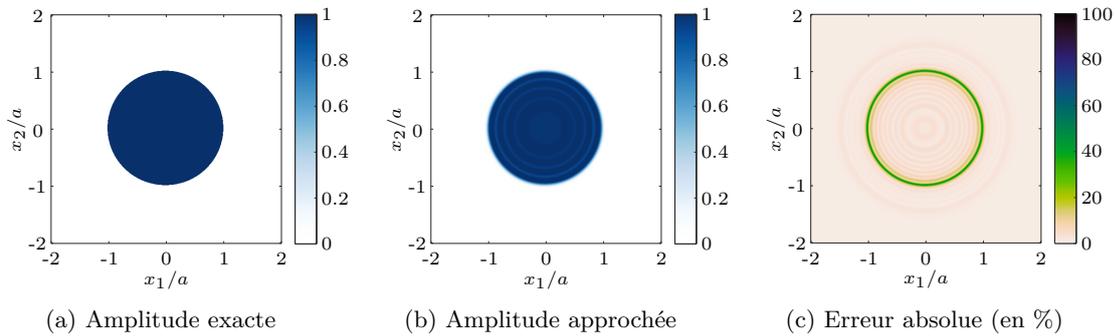


FIGURE 3.4 – Synthèse multi-faisceaux gaussiens (3.33) du champ source d'un transducteur circulaire uniforme de rayon a , à partir des coefficients du tableau 3.2 extrait de [181]

M et de la géométrie circulaire du transducteur. C'est pourquoi, dans la littérature, on trouve plusieurs références dans lesquelles les valeurs numériques des coefficients A_r et B_r sont prises directement dans le tableau 3.2. C'est le cas notamment dans [166, 91, 89, 90, 98], où les auteurs simulent des configurations de contrôle faisant intervenir des transducteurs circulaires. Pour autant, les valeurs numériques des coefficients A_r et B_r ne sont pas uniques. En effet, la fonction J à minimiser n'est pas convexe *a priori*, de sorte que le minimum atteint n'est pas nécessairement global. C'est pourquoi différents auteurs ont proposé des approches alternatives et moins coûteuses en temps de calcul que [181] pour évaluer les coefficients A_r et B_r [105, 120, 156]

Champ source

La figure 3.4b représente en niveaux de bleu l'amplitude de l'approximation (3.33) obtenue avec ces coefficients. Comparée à la donnée exacte (figure 3.4a), la figure (3.4c) représente l'erreur absolue normalisée par $|\hat{v}_0|$. Nous observons qu'en dehors du bord discontinu de la source où l'erreur commise est de l'ordre de 50%, l'approximation (3.33) permet de reproduire la source uniforme avec une erreur absolue inférieure à 5%. Au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, l'erreur commise est de 12.7% de la quantité $\|\hat{v}(\cdot, 0)\|_{L^2}$.

Champ rayonné

D'après (3.36) et (3.35), nous disposons donc de conditions initiales pour les systèmes (E) et (DRT) (voir chapitre 2) ce qui permet de calculer chaque faisceau gaussien. La

8. Pour un transducteur circulaire plan de rayon a excité à une fréquence f dans un milieu fluide de célérité c_0 , la *distance de champ proche* est définie par $N = (2a)^2/4\lambda$ où $\lambda = c_0/f$. Sur l'axe d'un tel transducteur circulaire, le dernier maximum d'amplitude est atteint à cette distance N .

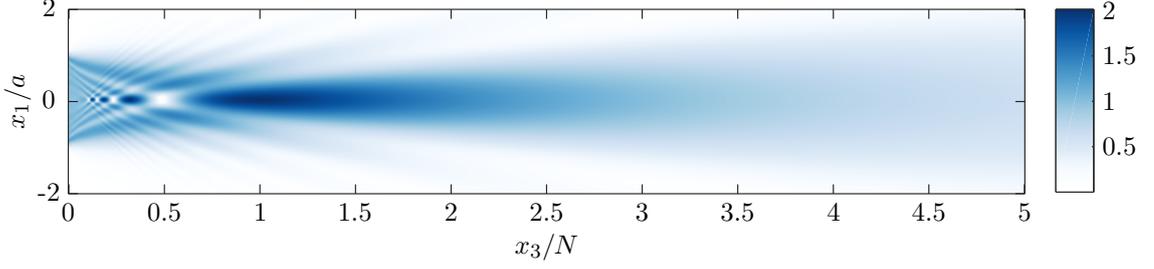


FIGURE 3.5 – Amplitude $|\hat{p}_{\text{MG}}|$ du champ multi-faisceaux gaussiens (3.39) rayonné par un transducteur circulaire de rayon a , de fréquence d'excitation $f = \omega/2\pi$, dans un milieu fluide de célérité c_0 , et de distance de champ proche⁸ notée N

solution complète est alors obtenue par superposition de chacun des faisceaux calculés. En utilisant les solutions analytiques en milieu homogène (voir annexe A.4), il vient le champ de pression \hat{p}_{MG} rayonné par le transducteur dans un fluide homogène, soit

$$\hat{p}_{\text{MG}}(\mathbf{x}) = \rho_0 c_0 \sum_{r=1}^M A^{(r)}(s) \exp \left\{ i\omega \left(T^{(r)}(s) + \frac{1}{2} t(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(r)}(s)) \mathbf{M}^{(r)}(s) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(r)}(s)) \right) \right\}. \quad (3.39)$$

La solution (3.39) est le champ *multi-faisceaux gaussiens*. On représente figure 3.5 l'amplitude $|\hat{p}_{\text{MG}}(\mathbf{x})|$ correspondante. Qualitativement, on observe qu'avec seulement $M = 10$ faisceaux, la solution (3.39) rend compte du régime fortement interférentiel en champ proche ($N < 1$) et de la décroissance progressive en champ lointain ($N > 1$) de l'amplitude harmonique le long de l'axe focal.

Transducteur focalisé sphérique

Tout en conservant la symétrie cylindrique du problème posé par WEN et BREAZEALE [181], il est possible d'étendre la méthode multi-faisceaux gaussiens aux transducteurs uniformes de focalisation sphérique [155]. En effet, dans le cadre de l'approximation paraxiale, il est possible [157] de prendre en compte cette focalisation en écrivant le terme source sous la forme

$$\frac{\hat{v}(x_1, x_2, 0)}{\hat{v}_0} = \text{circ}(\xi^2) \exp \left\{ -i \frac{\omega}{c_0} \frac{\rho^2}{2F} \right\}. \quad (3.40)$$

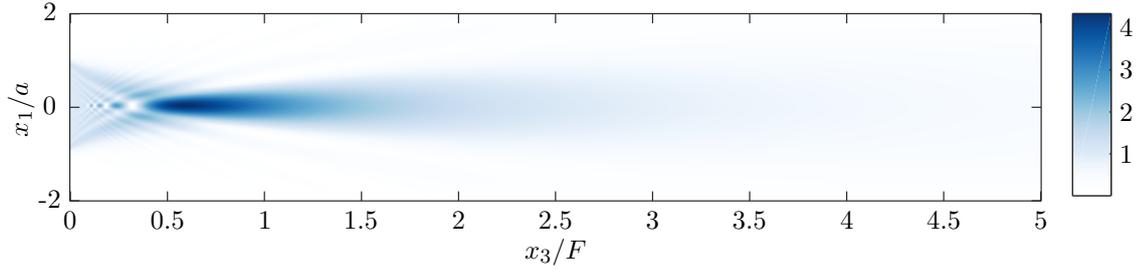


FIGURE 3.6 – Amplitude $|\hat{p}_{\text{MG}}|$ du champ multi-faisceaux gaussiens (3.39) rayonné par un transducteur focalisé sphérique de rayon a et de distance focale géométrique F

où F est la longueur géométrique de focalisation et où la fonction $\text{circ}(\xi^2)$ définie dans (3.38) est approchée par

$$\text{circ}(\xi^2) \approx \sum_{r=1}^M A_r \exp\left\{-\frac{B_r \rho^2}{a^2}\right\}. \quad (3.41)$$

De (3.40), on déduit les coefficients A_r et B_r permettant d'obtenir le champ multi-faisceaux gaussiens dans le cas de la focalisation sphérique, soit

$$A_r \leftarrow A_r \quad \text{et} \quad B_r \leftarrow B_r + i \frac{\omega}{c_0} \frac{a^2}{2F}. \quad (3.42)$$

Dans le cas limite où $F \rightarrow +\infty$, le transducteur est plan et les coefficients A_r et B_r sont bien inchangés. Dans le cas contraire, les conditions initiales des faisceaux gaussiens sont donc modifiées, et le champ multi-faisceaux gaussiens \hat{p}_{MG} rayonné par le transducteur dans un fluide homogène est finalement obtenu en sommant ces nouveaux faisceaux. On représente figure 3.6 l'amplitude $|\hat{p}_{\text{MG}}(\mathbf{x})|$ correspondante, et on observe l'effet de la focalisation au voisinage de $x_3 = 0.6F$.

Transducteur elliptique plan, rectangulaire plan et focalisé bi-cylindrique

Sur la base de la méthode multi-faisceaux gaussiens et en utilisant les coefficients A_r et B_r déjà référencés (tableau 3.2), DING, ZHANG et LIU [53] ont montré qu'il est possible de calculer le champ rayonné par des « pistons bafflés » uniformes de géométries elliptiques ou rectangulaires. Dans le cas rectangulaire de demi-largeurs $a_1 = L_1/2$ et $a_2 = L_2/2$ dans les directions de coordonnées x_1 et x_2 , on a

$$\frac{\hat{v}(x_1, x_2, 0)}{\hat{v}_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } |x_1/a_1| < 1, |x_2/a_2| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \equiv \text{circ}\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}\right) \text{circ}\left(\frac{x_2^2}{a_2^2}\right), \quad (3.43)$$

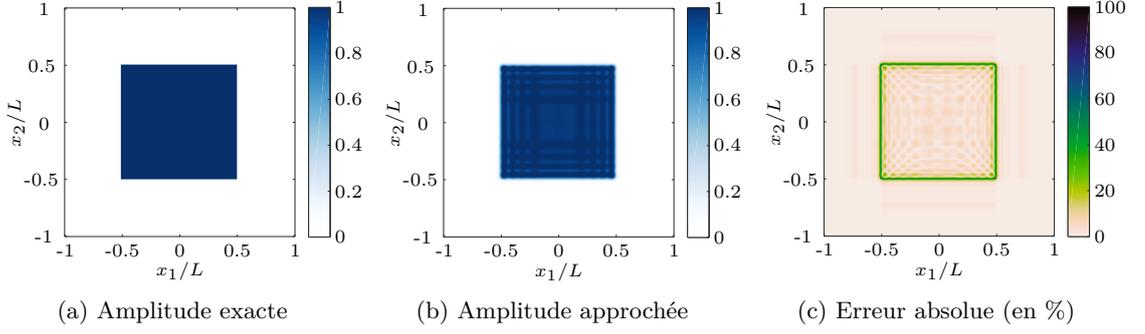


FIGURE 3.7 – Synthèse multi-faisceaux gaussiens (3.33) du champ source d'un transducteur carré uniforme de largeur $L = 2a$

et d'après (3.41) il vient

$$\frac{\hat{v}(x_1, x_2, 0)}{\hat{v}_0} \approx \sum_{r_1}^M \sum_{r_2}^M A_{r_1} A_{r_2} \exp \left\{ -\frac{B_{r_1} x_1^2}{a_1^2} - \frac{B_{r_2} x_2^2}{a_2^2} \right\}. \quad (3.44)$$

La figure 3.7b représente en niveaux de bleu l'amplitude de l'approximation (3.44). Comparée à la donnée exacte (figure 3.7a), la figure 3.7c représente l'erreur absolue normalisée par $|\hat{v}_0|$. En dehors du bord discontinu, l'approximation 3.44 permet de reproduire la source rectangulaire uniforme avec une erreur absolue inférieure à 10%. Au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, l'erreur commise est de 13.1% de la quantité $\|\hat{v}(\cdot, 0)\|_{L^2}$. Cette décomposition du terme source permet d'initialiser $M^2 = 100$ faisceaux gaussiens, tous de coordonnées rayon-centrées $\mathbf{q} = (x_1, x_2)$. Les conditions initiales du tracé de rayon sont

$$\forall (r_1, r_2) \in \llbracket 1, M \rrbracket^2, \quad \mathbf{x}_0^{(r_1, r_2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^{(r_1, r_2)} = \frac{1}{c_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

et dans les notations du chapitre 2, on a

$$\forall (r_1, r_2) \in \llbracket 1, M \rrbracket^2, \quad A_0^{(r_1, r_2)} = \hat{v}_0 A_{r_1} A_{r_2}, \quad \mathbf{M}_0^{(r_1, r_2)} = i \operatorname{diag} \left(\frac{2B_{r_1}}{a_1^2 \omega}, \frac{2B_{r_2}}{a_2^2 \omega} \right). \quad (3.46)$$

De la même façon que dans (3.39), le champ multi-faisceaux gaussiens \hat{p}_{MG} rayonné par le transducteur dans un fluide homogène est alors obtenu en sommant les M^2 faisceaux gaussiens ainsi initialisés. On représente figure 3.8 l'amplitude $|\hat{p}_{\text{MG}}(\mathbf{x})|$ correspondante. La combinaison linéaire de ces champs multi-faisceaux gaussiens et la prise en compte

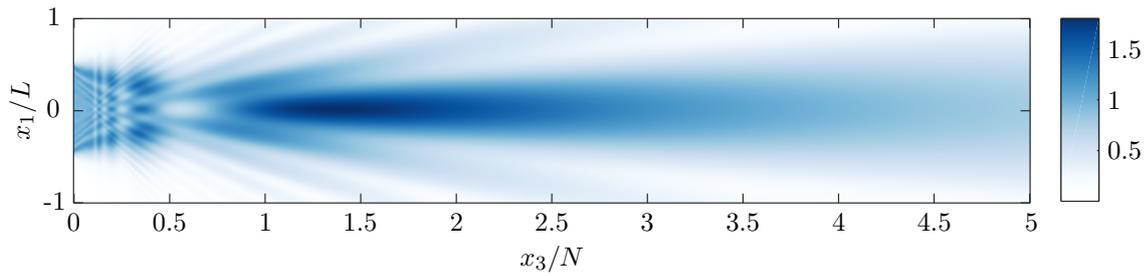


FIGURE 3.8 – Amplitude du champ multi-faisceaux gaussiens rayonné par un transducteur carré de côté L , de fréquence d'excitation $f = \omega/2\pi$, dans un milieu fluide de célérité c_0 , et $N = L^2/4\lambda$ où $\lambda = c_0/f$

de lois de retard a alors permis la modélisation du champ ultrasonore rayonné par des transducteurs multi-éléments⁹ [88, 97, 186, 184, 137] dans différents types de milieux fluides ou solides. Par ailleurs, il est possible [157] de modéliser le champ rayonné par des transducteurs focalisés bi-cylindriques en introduisant des déphasages quadratiques appropriés dans le terme source rectangulaire. Ainsi, comme dans le cas focalisé sphérique (3.42), on en déduit les coefficients A_r et B_r permettant d'obtenir le champ multi-faisceaux gaussiens dans le cas focalisé bi-cylindrique.

Limites de la méthode multi-faisceaux gaussiens

On peut distinguer deux sources d'erreurs dans l'approximation par multi-faisceaux gaussiens. La première résulte des erreurs « initiales » de reconstruction des termes source, illustrées notamment par les figures 3.4c et 3.7c dans les cas des transducteurs circulaire et rectangulaire. La seconde est celle qui demeure dans le cadre de l'approximation paraxiale. En d'autres termes, cette dernière source d'erreur est prédominante lorsque les conditions de propagation ne permettent pas de faire l'approximation paraxiale. C'est notamment le cas dans la zone de champ proche $x_3 < N$, caractérisée par un régime hautement interférentiel et dans laquelle le champ rayonné exact n'est pas collimaté. L'approximation paraxiale est également mise en défaut lorsqu'en présence d'interface entre deux milieux, le coefficient de transmission varie rapidement avec l'angle d'incidence ou lorsque cette même interface présente des variations significatives de courbure à l'échelle de la largeur du faisceau incident [155]. Ainsi par exemple, dans [186], les auteurs font le constat que la méthode multi-faisceaux gaussiens est particulièrement limitée dans la modélisation d'un contrôle par un transducteur multi-élément au contact d'une

9. En pratique, un opérateur disposant d'un transducteur multi-élément a la possibilité de contrôler la profondeur de focalisation et l'orientation de l'axe focal, et l'angle de réfraction en agissant sur les lois de retard soumises à l'ensemble des éléments individuels.

pièce solide. En particulier, pour des angles de réfraction significatifs, la tâche focale et les lobes secondaires présents dans le champ multi-faisceaux gaussiens ne sont pas correctement localisés en espace, et sont d'amplitudes erronées. De façon générale, ces limites de la méthode liées à l'approximation paraxiale sont d'autant plus exacerbées que la méthode multi-faisceaux gaussiens, par construction, superpose des faisceaux gaussiens construits autour du même rayon central.

3.3.2 Décomposition itérative de la donnée de Cauchy en régime transitoire

Dans ce paragraphe, on cherche à initialiser une superposition de faisceaux gaussiens pour trouver une solution approchée au problème transitoire (\mathcal{P}_0) . Dans [171], TANUSHEV, ENGQUIST et TSAI s'inscrivent dans une démarche comparable à celle de WEN et BREAZEALE [181] : il s'agit d'obtenir un champ rayonné en traduisant ses conditions aux bords sous forme de conditions initiales optimisées pour des faisceaux gaussiens à superposer. Pour ce faire, les auteurs choisissent de reconstruire de façon itérative la donnée de Cauchy, à l'aide de paquets d'ondes gaussiens. En effet, ces paquets d'onde étudiés dans le chapitre 2 sont les conditions initiales du système (\mathcal{E}) régissant la propagation des faisceaux gaussiens en régime transitoire.

Approximation de la donnée de Cauchy

L'objectif de la méthode proposée dans [171] est d'obtenir une approximation de la donnée de Cauchy du problème transitoire (\mathcal{P}_0) sous la forme

$$f = u|_{t=0} \approx \sum_{n=1}^N (a^n w^n)|_{t=0} = \tilde{f} \quad \text{et} \quad g = \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} \approx \sum_{n=1}^N \frac{\partial (a^n w^n)}{\partial t}|_{t=0} = \tilde{g}, \quad (3.47)$$

où la fonction w^n définie pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \geq 0$, par

$$w^n(\mathbf{x}, t) = \exp \left\{ i\omega \left(\mathbf{p}^n(t) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}^n(t)) + \frac{1}{2} t (\mathbf{x} - \mathbf{x}^n(t)) \mathcal{M}^n(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}^n(t)) \right) \right\}, \quad (3.48)$$

est multipliée par la fonction d'amplitude $a^n(t)$, de sorte que $a^n w^n$ décrit un faisceau gaussien en régime transitoire. La donnée de Cauchy est donc approchée sous forme d'une somme de paquets d'onde gaussien. Par linéarité de l'équation des ondes, la solution approchée \tilde{u} au problème transitoire (\mathcal{P}_0) est donc la superposition des faisceaux gaussiens $a^n w^n$, soit

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \geq 0, \quad \tilde{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N a^n(t) w^n(\mathbf{x}, t). \quad (3.49)$$

A l'instant initial $t = 0$, on note les conditions initiales,

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \mathbf{x}_0^n = \mathbf{x}^n(0), \quad \mathbf{p}_0^n = \mathbf{p}^n(0) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_0^n = \mathcal{M}^n(0), \quad (3.50)$$

et le paquet d'onde gaussien formé par ces conditions initiales,

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad a_0^n w_0^n(\mathbf{x}) = a^n(0) w^n(\mathbf{x}, 0). \quad (3.51)$$

Le problème posé revient alors à déterminer le nombre N de paquets d'onde gaussiens et à identifier leurs caractéristiques $\{\mathbf{x}_0^n, \mathbf{p}_0^n, \mathcal{M}_0^n, a_0^n\}_{n=1\dots N}$ afin d'obtenir une approximation « acceptable » de f et g dans (3.47). Dans [171], la précision des approximations (3.47) est évaluée à l'aide de l'erreur commise par rapport à la solution $u(\mathbf{x}, 0)$ au sens de la norme $\|\cdot\|_E$ définie dans (3.3). On considère alors que l'approximation $\tilde{u}(\cdot, 0)$ est « acceptable » en regard d'une tolérance ε – dont la valeur est choisie au préalable – si elle vérifie

$$\|u(\cdot, 0) - \tilde{u}(\cdot, 0)\|_E \leq \varepsilon.$$

Formellement, les auteurs cherchent donc à minimiser la quantité

$$\|u(\cdot, 0) - \tilde{u}(\cdot, 0)\|_E^2 = \omega^{-2} \int_{\Omega} \left(|g(\mathbf{x}) - \tilde{g}(\mathbf{x})|^2 + \left| \nabla_{\mathbf{x}}(f(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{x})) \right|^2 \right) d\mathbf{x},$$

ce qui revient à résoudre le problème de minimisation

$$\{\mathbf{x}_0^n, \mathbf{p}_0^n, \mathcal{M}_0^n, a_0^n, \}_{n=1\dots N} = \arg \min \left\{ \|u(\cdot, 0) - \tilde{u}(\cdot, 0)\|_E^2 \right\}. \quad (3.52)$$

Ainsi posé, (3.52) est un problème d'optimisation non-linéaire contenant un grand nombre de degrés de liberté¹⁰. Des algorithmes du type NELDER et MEAD [138] peuvent théoriquement fournir une solution locale au problème (3.52), mais au prix d'un temps de calcul qui n'est pas acceptable. Par ailleurs, il n'est pas possible *a priori* de connaître le nombre de paquets d'onde gaussiens N pour lequel l'approximation sera « acceptable » en regard d'une tolérance ε .

Méthode de décomposition itérative

Plutôt que d'envisager directement le problème d'optimisation (3.52), les auteurs dans [171] cherchent à réduire le plus possible l'énergie résiduelle $\|u(\cdot, 0) - \tilde{u}(\cdot, 0)\|_E$ de façon

¹⁰. En dimension d , on compte 2 degrés de liberté (d.d.l.) pour chaque quantité scalaire complexe (a_0), d d.d.l. pour chaque quantité vectorielle réelle (\mathbf{x}_0 et \mathbf{p}_0) et $d(d+1)$ d.d.l. pour chaque quantité matricielle complexe symétrique (\mathcal{M}_0). En supposant N paquets d'onde gaussiens à déterminer, le nombre de d.d.l. vaut $11N$ en dimension $d = 2$, et $19N$ en dimension $d = 3$.

Algorithme 1 : Procédure de décomposition itérative

Données : $\forall \mathbf{x} \in \Omega, u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \frac{\partial u(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = g(\mathbf{x})$

Résultat : $\{\mathbf{x}_0^n, \mathbf{p}_0^n, \mathcal{M}_0^n, a_0^n\}_{n=1\dots N}$

1 **début**

2 $\mathbf{a}_0 \leftarrow \emptyset, \mathbf{b}_0 \leftarrow \emptyset, \mathbf{G} \leftarrow \emptyset;$

3 $n = 1;$

4 $(v_0^n, (v_0^n)_t) \leftarrow (f, g);$

5 **tant que** $\|v_0^n\|_E > \varepsilon$ **faire**

6 $\mathbf{x}_0^n \leftarrow \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \{F[v_0^n](\mathbf{x})\};$

7 $\mathbf{p}_0^n \leftarrow \arg \max_{\mathbf{p}} \left\{ \left| \mathcal{F} \left(\Pi_{\mathbf{x}_0^n} v_0^n \right) \right| + \left| \mathcal{F} \left(\Pi_{\mathbf{x}_0^n} (v_0^n)_t / \omega \right) \right| \right\};$

8 $\text{Re}(\mathcal{M}_0^n) \leftarrow 0;$

9 $\text{Im}(\mathcal{M}_0^n) \leftarrow \arg \min_{\text{Im}(\mathcal{M}_0)} \left\{ \left\| v_0^n - \frac{\langle v_0^n, w_0 \rangle_E}{\|w_0\|_E^2} w_0 \right\|_E \right\};$

10 \Rightarrow paquet w_0^n défini;

11 **si** « Descente par inversion de la matrice de Gram » **alors**

12 $(\mathbf{b}_0)_{1 \leq k \leq n} \leftarrow \langle u(\cdot, 0), w_0^k \rangle_E;$

13 $(\mathbf{G})_{1 \leq k, l \leq n} \leftarrow \langle w_0^k, w_0^l \rangle_E;$

14 $\mathbf{a}_0 \leftarrow \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}_0;$

15 **sinon**

16 $a_0^n \leftarrow \frac{\langle v_0^n, w_0^n \rangle_E}{\|w_0^n\|_E^2};$

17 **fin**

18 $v_0^n \leftarrow u(\cdot, 0) - \sum_{k=1}^n a_0^k w_0^k \quad \text{et} \quad (v_0^n)_t \leftarrow (v_0^n)_t - \sum_{k=1}^n a_0^k \frac{\partial w^k(\cdot, 0)}{\partial t};$

19 $N \leftarrow n;$

20 $n \leftarrow n + 1;$

21 **fin**

22 **fin**

itérative, en introduisant à chaque itération un nouveau paquet d'onde gaussien optimisé dans l'approximation de la donnée de Cauchy. Les différentes étapes de cette sont résumées dans l'algorithme 1. A l'itération $n \geq 1$, on souhaite donc construire un nouveau paquet d'onde gaussien w_0^n . On dispose d'un champ résiduel v_0^n tel que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad v_0^n(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{n-1} a_0^k w_0^k(\mathbf{x}), \quad (3.53)$$

et de dérivée temporelle $(v_0^n)_t$ telle que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (v_0^n)_t(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^{n-1} a_0^k \frac{\partial w^k(\mathbf{x}, 0)}{\partial t}. \quad (3.54)$$

En utilisant (3.53) et (3.54), on calcule la fonction d'énergie résiduelle $F[v_n]$, définie par

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad F[v_0^n](\mathbf{x}) = \omega^{-2} \left(|(v_0^n)_t(\mathbf{x})|^2 + |\nabla_{\mathbf{x}} v_0^n(\mathbf{x})|^2 \right).$$

La fonction $F[v^n]$ permet d'évaluer localement en tout point $\mathbf{x} \in \Omega$ la densité d'énergie résiduelle au sens de la norme $\|\cdot\|_E$. En particulier, on fait l'hypothèse que $F[v_0^n]$ admet un maximum dans Ω . On pose alors

$$\mathbf{x}_0^n = \arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \{F[v_0^n](\mathbf{x})\},$$

de sorte que le paquet d'onde gaussien unitaire w_0^n est centré spatialement en ce maximum de densité d'énergie résiduelle (algorithme 1, ligne 6). Dans [171], le vecteur lenteur \mathbf{p}_0^n est ensuite estimé (algorithme 1, ligne 7) par transformée de Fourier spatiale (notée $\mathcal{F}(\cdot)$), en restreignant l'analyse spectrale au voisinage de \mathbf{x}_0^n au moyen d'un fenêtrage spatial $\Pi_{\mathbf{x}_0^n}$ centré en \mathbf{x}_0^n , soit

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0^n &= \arg \max_{\mathbf{p}} \left\{ \left| \mathcal{F} \left(\Pi_{\mathbf{x}_0^n} v_0^n \right) \right| + \left| \mathcal{F} \left(\Pi_{\mathbf{x}_0^n} (v_0^n)_t / \omega \right) \right| \right\} \\ &= \arg \max_{\mathbf{p}} \left\{ \left| \int_{\Omega} \Pi_{\mathbf{x}_0^n}(\mathbf{x}) v_0^n(\mathbf{x}) e^{-i\omega \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}} d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{\Omega} \frac{\Pi_{\mathbf{x}_0^n}(\mathbf{x})}{\omega} (v_0^n)_t(\mathbf{x}) e^{-i\omega \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}} d\mathbf{x} \right| \right\}. \end{aligned}$$

On dispose à présent d'un centre spatial \mathbf{x}_0^n et d'un vecteur lenteur \mathbf{p}_0^n , au voisinage desquels on veut approcher à l'ordre deux l'enveloppe et la courbure du champ résiduel v_0^n . Les auteurs font l'hypothèse que le front d'onde est localement plan, c'est-à-dire que la partie réelle de la matrice de courbure complexe $\text{Re}(\mathcal{M}_0^n)$ est nulle (algorithme 1, ligne 8). Concernant la partie imaginaire $\text{Im}(\mathcal{M}_0^n)$, on fait l'hypothèse qu'elle est définie

positive (paquet d'onde localisé) et que la direction de phase portée par \mathbf{p}_0^n fait partie des axes principaux (voir paragraphe 2.3.1). Dès lors, l'enveloppe du paquet w_0^n à construire – caractérisée par $\text{Im}(\mathcal{M}_0^n)$ – est obtenue (algorithme 1, ligne 9) par minimisation du nouveau champ résiduel, soit

$$\text{Im}(\mathcal{M}_0^n) = \arg \min_{\text{Im}(\mathcal{M}_0)} \left\{ \left\| v_0^n - \frac{\langle v_0^n, w_0 \rangle_E}{\|w_0\|_E^2} w_0 \right\|_E \right\}. \quad (3.55)$$

La fonction à minimiser¹¹ dans (3.55) n'est autre que la distance au sens de la norme $\|\cdot\|_E$ entre le paquet d'onde unitaire « candidat » w_0 – construit avec \mathbf{x}_0^n , \mathbf{p}_0^n et $\text{Re}(\mathcal{M}_0^n) = 0$ – et le champ résiduel v_0^n , où on a introduit le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ associé à la norme $\|\cdot\|_E$. À cette étape de la procédure, le paquet unitaire w_0^n est complètement défini (algorithme 1, ligne 10). Pour terminer la construction du paquet d'onde gaussien $a_0^n w_0^n$, il reste à déterminer l'amplitude a_0^n par projection du paquet unitaire w_0^n sur le champ résiduel (algorithme 1, ligne 16), soit

$$a_0^n = \frac{\langle v_0^n, w_0^n \rangle_E}{\|w_0^n\|_E^2}. \quad (3.56)$$

L'étape suivante consiste à soustraire ce nouveau paquet d'onde gaussien au champ résiduel (algorithme 1, ligne 18), ce qui définit le nouveau champ résiduel pour l'itération $n+1$, soit

$$\forall x \in \Omega, \quad v_0^{n+1}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^n a_0^k w_0^k(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad (v_0^{n+1})_t(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - \sum_{k=1}^n a_0^k \frac{\partial w^k(\mathbf{x}, 0)}{\partial t}.$$

On peut montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq \|v_0^{n+1}\|_E \leq \|v_0^n\|_E$, et donc que la procédure est stable. La condition de sortie porte donc sur la norme $\|\cdot\|_E$ du champ résiduel v_0^{n+1} . Soit ε la tolérance définie au préalable, si $\|v_0^{n+1}\|_E \leq \varepsilon$ alors on arrête la décomposition itérative (algorithme 1, ligne 5), et on pose $N = n$. À l'issue de la procédure, on a donc

$$\{\mathbf{x}_0^n, \mathbf{p}_0^n, \mathcal{M}_0^n, a_0^n\}_{n=1 \dots N} \quad \text{t.q.} \quad \left\| u(\cdot, 0) - \sum_{n=1}^N a_0^n w_0^n \right\|_E \leq \varepsilon, \quad (3.57)$$

11. En dimension d , on remarque que ce problème de minimisation ne contient que d degrés de liberté (d.d.l), car les axes principaux de la matrice $\text{Im}(\mathcal{M}_0)$ sont connus. Cette dernière peut donc être pré-diagonalisée.

où

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, w_0^n(\mathbf{x}) = \exp \left\{ i\omega \left(\mathbf{p}_0^n \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^n) + \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^n) \mathcal{M}_0^n (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^n) \right) \right\}.$$

Descente par inversion de la matrice de Gram

A l'étape de calcul des amplitudes a_0^n , il est possible d'accélérer la descente de l'énergie résiduelle (algorithme 1, ligne 14). En effet, on a

$$\forall n \geq 1, u(\cdot, 0) = \sum_{k=1}^n a_0^k w_0^k + v_0^{n+1}. \quad (3.58)$$

En faisant le produit scalaire à droite de (3.58) avec un paquet w_0^l déjà construit, il vient

$$\forall l \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle u(\cdot, 0), w_0^l \rangle_E = \sum_{k=1}^n a_0^k \langle w_0^k, w_0^l \rangle_E + \langle v_0^{n+1}, w_0^l \rangle_E. \quad (3.59)$$

Dans le cas optimal où le résidu v_0^{n+1} est orthogonal au sous-espace généré par la famille $\{w_0^k\}_{1 \leq k \leq n}$ des paquets d'onde gaussiens déjà construits, on a $\forall l \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle v_0^{n+1}, w_0^l \rangle_E = 0$. On peut alors ré-écrire la relation (3.59) sous forme matricielle, soit

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{G} \mathbf{a}_0, \quad (3.60)$$

où $(\mathbf{a}_0)_{1 \leq k \leq n} = a_0^k$, $(\mathbf{b}_0)_{1 \leq k \leq n} = \langle u(\cdot, 0), w_0^k \rangle_E$ et où $(\mathbf{G})_{1 \leq k, l \leq n} = \langle w_0^k, w_0^l \rangle_E$ est la matrice de Gram associée à la famille $\{w_0^k\}_{1 \leq k \leq n}$ des paquets d'ondes gaussiens déjà construits. À chaque fois qu'un nouveau paquet w_0^n est créé (algorithme 1, ligne 9), le vecteur \mathbf{b}_0 et la matrice de Gram \mathbf{G} peuvent être complétés (algorithme 1, lignes 12 et 13). Ainsi, plutôt que de calculer uniquement l'amplitude a_0^n à chaque itération n (algorithme 1, ligne 16), il est possible de mettre à jour l'ensemble des amplitudes $(a_0^k)_{1 \leq k \leq n}$ en résolvant¹²

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}_0. \quad (3.61)$$

Cette accélération, proposée dans [171], s'inspire en réalité de méthodes du type *Orthogonal Matching Pursuit* [142], largement utilisées dans les techniques d'acquisition comprimée. Sauf mention contraire (voir figure 3.10c), l'inversion de la matrice de Gram (3.61) sera privilégiée par rapport à la projection simple (3.56).

12. On peut montrer que si $\forall k \neq l, w_0^k \neq w_0^l$, alors la famille $(w_0^k)_{1 \leq k \leq n}$ est linéairement indépendante [3] et donc que la matrice de Gram \mathbf{G} est inversible.

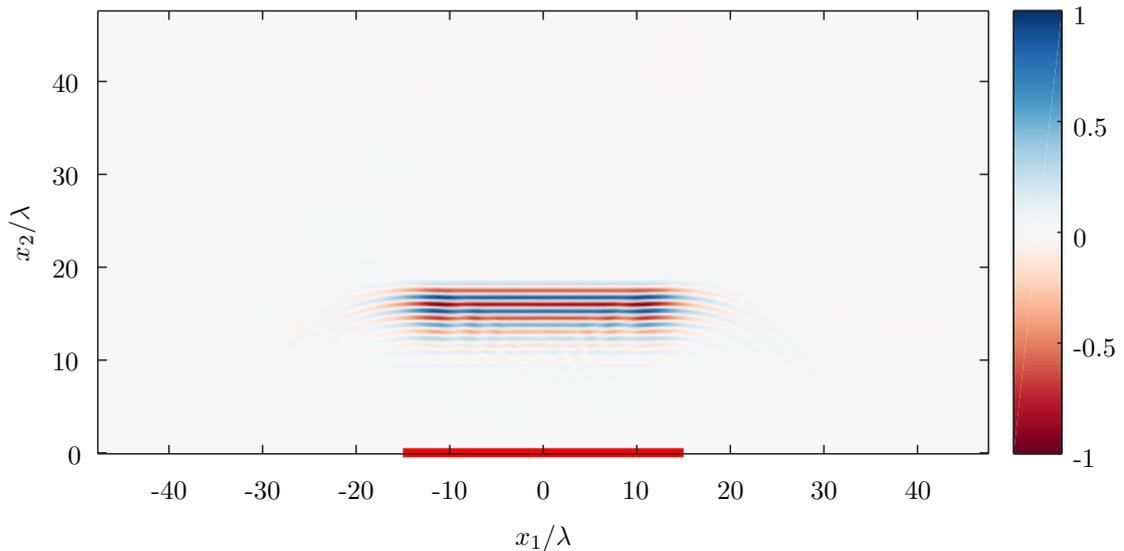


FIGURE 3.9 – Réponse transitoire f d'une ligne source (—) en dimension $d = 2$

Quelques applications dans la littérature

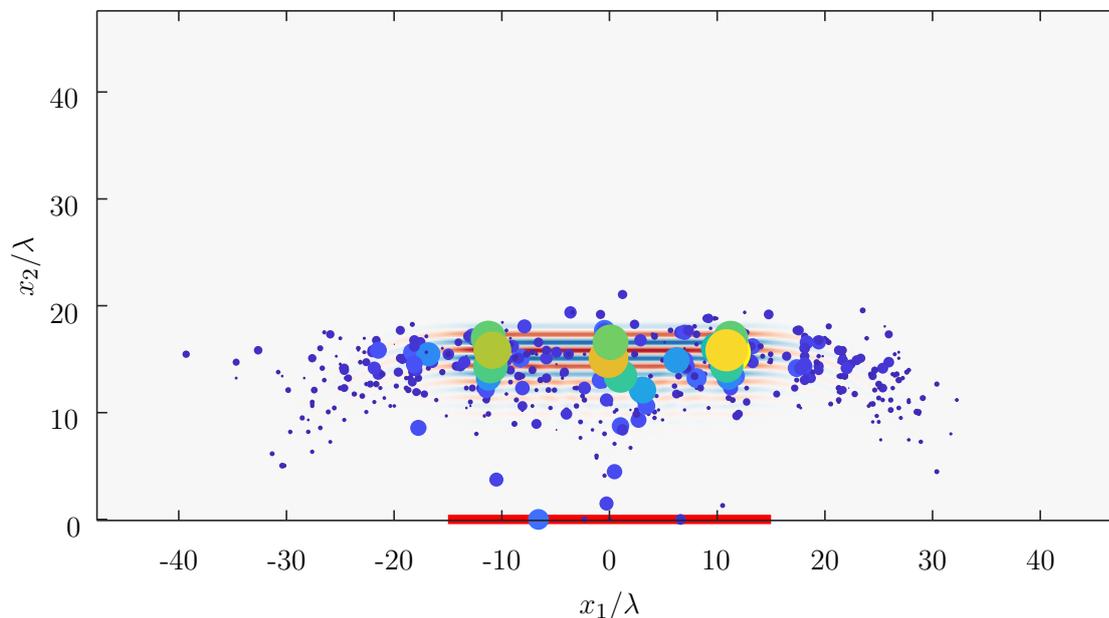
Dans [171], les auteurs appliquent d'abord cette méthode à des fins de preuve de concept, pour des données de Cauchy simples formées par un ou plusieurs paquets d'onde gaussiens. Toujours dans [171], ils appliquent et valident cette même approche pour des données de Cauchy plus complexes, issues de différences finies dans le cas de la diffraction par deux fentes dans un milieu homogène. Ce dernier cas montre qu'il est possible de coupler une méthode « tout numérique » avec une méthode faisceaux gaussiens à travers la décomposition en paquets d'ondes gaussiens de la donnée de Cauchy. Ce couplage, dans le cas des différences finies, est approfondi dans [173] et appliqué dans des milieux inhomogènes. Enfin, la méthode de décomposition itérative peut aussi être utilisée à des fins d'inversion sismologique [172].

Application de la décomposition itérative à la réponse transitoire d'un transducteur

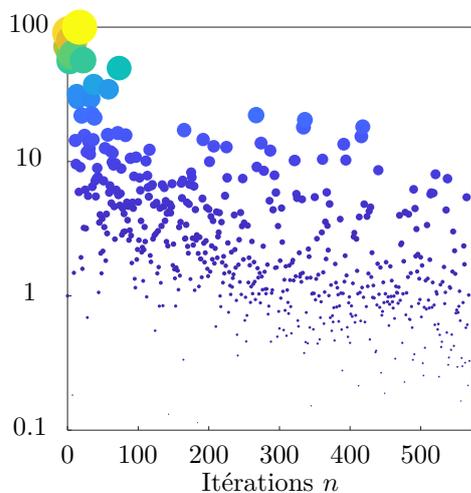
Nous souhaitons ici illustrer la décomposition itérative à une donnée de Cauchy caractéristique du CND par ultrasons. Il s'agit de la réponse transitoire d'un transducteur immergé dans un fluide (célérité c_0), de dimension supposée infinie dans une direction de l'espace. Le modèle permet ainsi de se placer en dimension $d = 2$, et d'assimiler le transducteur immergé à une ligne source finie le long de la direction de coordonnée x_1 . La figure 3.9 donne un exemple¹³ de fonction f issu de ce type de donnée de Cauchy, à

13. Cette donnée de Cauchy a été calculée préalablement par convolution d'une impulsion avec l'intégrale (évaluée numériquement), le long de la ligne source, de la fonction de Green associée à l'équation des

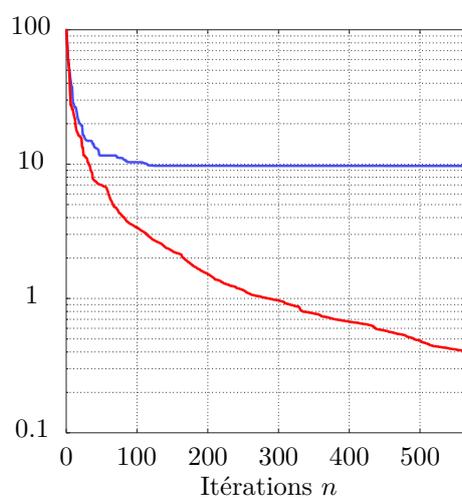
savoir la réponse transitoire à un instant donné d'une ligne source de longueur 30λ , où λ est la longueur d'onde associée à la fréquence centrale du signal d'excitation de la source.



(a) Localisation dans Ω des paquets d'onde gaussiens, symbolisés par des pastilles circulaires



(b) Amplitudes $|a_0^n|$ (en %, normalisée par rapport à $\max_n |a_0^n|$) des paquets d'onde gaussiens symbolisés par des pastilles circulaires



(c) Norme résiduelle $\|v^n\|_E$ (en %, normalisée par rapport à $\|u(\cdot,0)\|_E$), avec (—) et sans (—) inversion de la matrice de Gram

FIGURE 3.10 – Illustration de la décomposition itérative sur la réponse transitoire d'une ligne source (—) en dimension $d = 2$

ondes en espace libre $d = 2$ (théorème de Kirchhoff).

La figure 3.10a représente en surbrillance de la fonction f la position des centres \mathbf{x}_0^n des différents paquets d'onde gaussiens $a_0^n w_0^n$, à l'aide de pastilles circulaires. La taille et la couleur de ces pastilles dépendent de l'amplitude $|a_0^n|$ associée à chacun de ces paquets ; elles sont illustrées figure 3.10b en fonction des itérations n en abscisse, et de l'amplitude normalisée $|a_0^n|/\max_n |a_0^n|$ (en %) en ordonnée, mise à l'échelle logarithmique. On observe que les premiers paquets d'onde créés ont la plus haute amplitude, et sont localisés à l'endroit du front d'onde plan principal. Sauf quelques exceptions, l'amplitude des paquets suivants est moindre, d'un à plusieurs ordres de grandeurs, et sont localisés au voisinage des fronts d'ondes cylindriques secondaires diffractés par les bords de la ligne source. Figure 3.10c, on trace l'évolution de la norme $\|v_0^n\|_E$ du champ résiduel (en %, normalisée par rapport à la norme $\|u(\cdot, 0)\|_E$), en fonction des itérations n , sans inversion (—) et avec inversion (—) de la matrice de Gram. Dans le premier cas, on observe que la décomposition itérative ne parvient pas, à partir de l'itération $n = 120$, à réduire l'erreur absolue en dessous de 10%. Dans le second cas, $\|v_0^n\|_E$ décroît strictement et plus rapidement que dans le cas précédent grâce à l'inversion de la matrice de Gram à chaque itération, de sorte que la superposition de paquets d'ondes gaussiens $a_0^n w_0^n$ converge vers la donnée de Cauchy. De façon arbitraire, la tolérance vaut ici $\varepsilon = 3,8 \cdot 10^{-3} \|u(\cdot, 0)\|_E$, et le nombre d'itérations nécessaires pour l'atteindre est $N = 575$. Il faudra donc un plus grand nombre d'itérations N pour respecter des tolérances ε plus petites. A l'issue de la procédure de décomposition itérative, les fonctions f et g de la donnée de Cauchy sont donc approchées respectivement par \tilde{f} et \tilde{g} , définies par

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \tilde{f}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N a_0^n w_0^n(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N a_0^n \frac{\partial w_0^n(\mathbf{x}, 0)}{\partial t}. \quad (3.62)$$

En particulier, on représente figure 3.11b l'approximation \tilde{f} de la fonction f donnée figure 3.11a. Les deux figures sont visuellement identiques, et on donne alors figure 3.11c l'erreur absolue (en %) commise dans l'approximation de f , c'est-à-dire l'amplitude du « dernier » champ résiduel v_0^{N+1} définie par

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad |v_0^{N+1}(\mathbf{x})| = |f(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{x})| = \left| f(\mathbf{x}) - \sum_{n=1}^N a_0^n w_0^n(\mathbf{x}) \right|, \quad (3.63)$$

normalisée par le maximum d'amplitude initiale $\max_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})|$. On observe alors que pour tout point \mathbf{x} dans le domaine Ω de décomposition, la superposition $\tilde{f}(\mathbf{x})$ de paquets d'onde gaussiens commet une erreur absolue locale inférieure à 6% de l'amplitude maximale de référence.

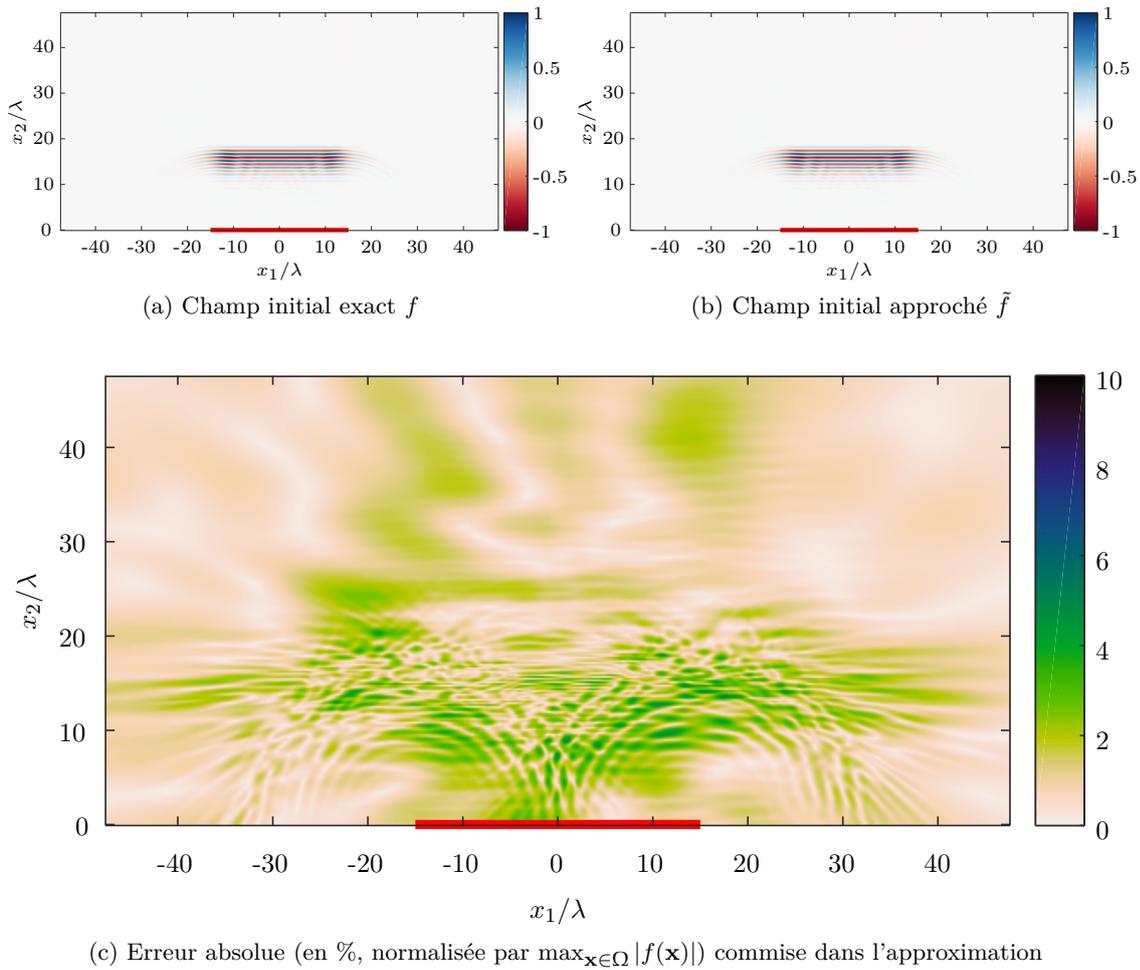


FIGURE 3.11 – Synthèse issue d'une décomposition itérative d'un champ f diffracté par une ligne source (—) en dimension $d = 2$

Propagation et superposition de faisceaux gaussiens

A travers le cas d'application de la ligne source en dimension $d = 2$, on a montré que la méthode de décomposition itérative permet d'approcher une donnée de Cauchy du problème \mathcal{P}_0 à l'aide d'une superposition de paquets d'onde gaussiens, et qu'on peut contrôler la précision de cette approximation – au sens de la norme $\|\cdot\|_E$ – au moyen de la tolérance ε . D'après (3.49), on dispose donc d'une solution approchée $\tilde{u}(\mathbf{x}, t \geq 0)$ au problème (\mathcal{P}_0) par une superposition de faisceaux gaussiens dont on maîtrise l'erreur à l'instant $t = 0$. Figure 3.12b, on représente cette solution à l'instant $t = 22, 2\lambda/c_0$. En comparaison de la figure 3.11b, on constate effectivement la propagation du front et on peut mesurer graphiquement qu'il s'est éloigné de la ligne source (—) d'une distance

égale à $22,2\lambda$. Le temps de vol de la solution approchée est donc correct. En comparaison de la solution de référence $u(\mathbf{x}, t)$ figure 3.12a, calculée de la même façon que la donnée de Cauchy de référence, la solution approchée $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$ figure 3.12b est visuellement identique.

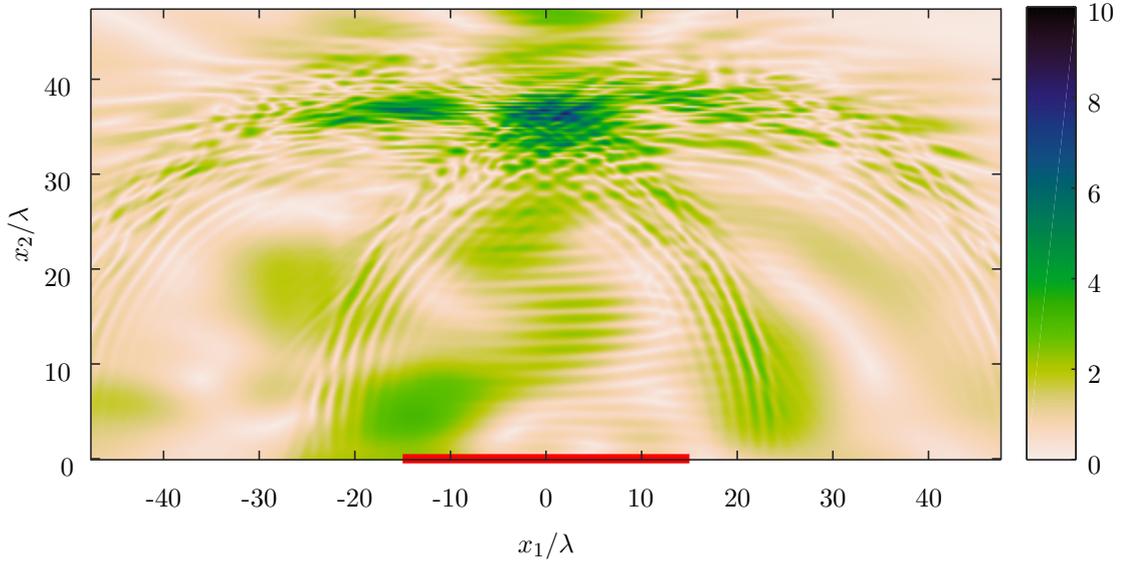
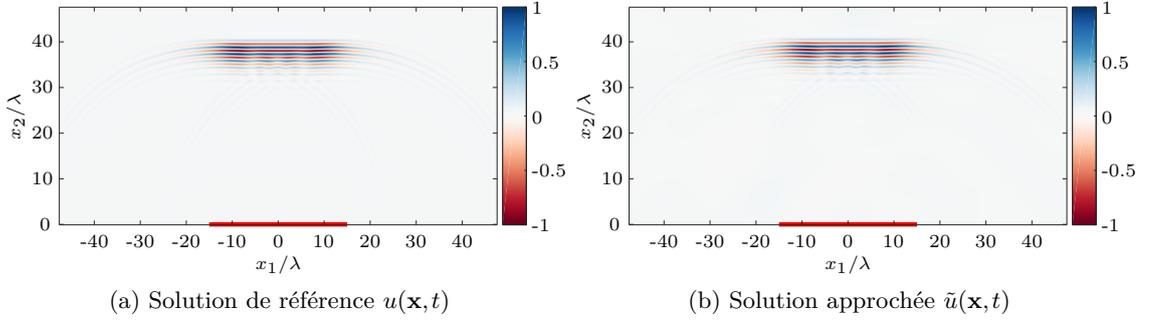


FIGURE 3.12 – Solution $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$ propagée à l'instant $t = 22.2\lambda/c_0$ par superposition de faisceaux gaussiens

Afin d'évaluer de façon quantitative la précision de cette solution approchée, on représente figure 3.12c l'erreur absolue à l'instant $t = 22,2\lambda/c_0$, en %, définie par

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \text{Err}(\mathbf{x}) = \frac{|u(\mathbf{x}, t) - \tilde{u}(\mathbf{x}, t)|}{\max_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x}, t)|}. \quad (3.64)$$

On observe alors que pour tout point $\mathbf{x} \in \Omega$, la solution approchée $\tilde{u}(\mathbf{x}, t)$ commet une erreur absolue locale inférieure à 8,5% de l'amplitude maximale de référence. Le calcul

de la norme résiduelle $\|u(\cdot, t) - \tilde{u}(\cdot, t)\|_E$ au même instant t , et normalisée par rapport à la norme $\|u(\cdot, t)\|_E$ de la solution de référence, donne une erreur globale de 0,53% qui est d'ordre comparable à celle commise à l'instant initial (0,38%).

Limites de la méthode de décomposition itérative

En dépit de la précision acceptable de la solution propagée à l'aide d'un nombre réduit de faisceaux gaussiens, la méthode présentée ici possède certaines limites. Indépendamment de l'approximation paraxiale qui sous-tend l'écriture analytique des faisceaux gaussiens, la procédure de décomposition itérative s'avère être coûteuse en temps de calcul. Ce coût est dû principalement à l'étape (3.55) d'optimisation non-linéaire de l'enveloppe de chaque paquet d'onde, et ce malgré la réduction du nombre de degrés de liberté par rapport au problème d'optimisation complet (3.52). Par ailleurs, il n'est pas possible de prédire le nombre N nécessaire à l'obtention d'une superposition de paquets d'onde gaussiens satisfaisant une tolérance ε définie *a priori*. Or, le temps de calcul associé à la décomposition itérative est directement proportionnel au nombre N . Pour cette raison, il n'est donc pas non plus possible de prédire le temps de calcul nécessaire à une décomposition « acceptable ».

Pour nous affranchir de ces limites, mais aussi de celles de la méthode multi-faisceaux gaussiens, nous nous appuyons dans le chapitre 4 sur la théorie des frames. Cette dernière permet, à l'aide de transformées de Fourier rapides, de traduire les conditions aux bords sous forme d'un ensemble structuré de conditions initiales pour des familles redondantes de faisceaux gaussiens.

Théorie des frames et initialisation de faisceaux gaussiens

Sommaire

4.1 Représentation sur <i>frame</i> des conditions aux bords	115
4.1.1 Représentation atomique de champs oscillants	115
4.1.2 Théorie des <i>frames</i>	116
4.1.3 Stratégie de modélisation appliquée aux faisceaux gaussiens	118
4.2 Régime harmonique et <i>frame</i> de Gabor	119
4.2.1 Représentation sur <i>frame</i> de Gabor d'un piston plan	119
4.2.2 Solution propagée	123
4.2.3 Calcul numérique de la représentation	126
4.3 Régime transitoire et <i>frame</i> de paquets d'onde gaussiens	136
4.3.1 Représentation sur <i>frame</i> d'une donnée de Cauchy	137
4.3.2 Solution propagée	141
4.3.3 Calcul numérique de la représentation	142

Le chapitre précédent a permis d'introduire les superpositions de faisceaux gaussiens, envisagées comme des solutions asymptotiques (régime haute fréquence) aux deux problèmes de référence, en régime transitoire et en régime harmonique. Nous avons alors passé en revue deux méthodes optimisées de superposition de faisceaux gaussiens pour chacun des deux problèmes, à savoir la décomposition itérative en paquets d'onde gaussiens et les multi-faisceaux gaussiens. L'objectif du présent chapitre est de gagner en temps de calcul et en généralité par rapport à ces méthodes existantes. La stratégie de modélisation proposée pour y parvenir peut être résumée en trois étapes : décomposition des conditions aux bords à l'aide d'un frame adapté, propagation de la donnée par faisceaux gaussiens, et synthèse de la solution par superposition des faisceaux. Dans la première section, la théorie des frames fournit un cadre rigoureux dans lequel il est possible de traduire de façon générique, stable et univoque des conditions aux bords variées en une famille de conditions initiales pour un ensemble donné de faisceaux gaussiens. Dans les deux sections suivantes, on spécifie les frames adaptés à l'initialisation de faisceaux gaussiens, respectivement en régime harmonique et en régime transitoire. Dans le cas de conditions aux bords discrétisées, l'évaluation numérique des coefficients de décomposition associés à ces frames fait appel aux algorithmes de transformées de Fourier rapides. On obtient alors des représentations approchées, dont la précision est validée pour des conditions aux bords caractéristiques du CND par ultrasons.

4.1 Représentation sur *frame* des conditions aux bords

Dans la section 3.3, nous avons présenté deux méthodes alternatives aux intégrales de faisceaux gaussiens du paragraphe 3.1.2, permettant de générer un nombre réduit de faisceaux dont la superposition fournit des solutions approchées aux problèmes (\mathcal{P}_0) (3.1) et (P_0) (3.7). Les applications que l'on en trouve dans la littérature rendent compte de résultats quantitatifs satisfaisants, du moment que l'approximation paraxiale est vérifiée. Ces mêmes méthodes révèlent toutefois d'autres limites qui ne sont pas directement dues à l'approximation paraxiale. Dans le cas des multi-faisceaux gaussiens, la superposition est uniaxiale le long de l'axe focal du transducteur, ce qui implique que le voisinage paraxial dans lequel le champ multi-faisceaux gaussiens est valide est aussi restreint que celui d'un unique faisceau. Dans le cas de la décomposition itérative, la principale limite provient du coût numérique lié à l'optimisation de l'enveloppe de chacun des paquets.

Afin de contourner ces limites, nous nous intéressons à présent à la théorie des *frames*. Cette dernière est connue pour jouer un rôle fondamental dans des domaines appliqués, tels que le traitement du signal, le traitement de l'image et la compression de données, mais également dans des études plus théoriques en analyse mathématique. En traitement du signal, la théorie des *frames* fournit un cadre rigoureux dans lequel un signal quelconque peut être reconstruit de façon générique à l'aide d'une famille non-orthogonale et redondante – un *frame* – de signaux élémentaires. Par ailleurs, il est possible de tirer profit des algorithmes de transformées de Fourier rapides pour obtenir ces représentations numériquement. Dans cette section, nous donnons quelques éléments historiques et théoriques permettant de justifier l'utilisation de *frames* pour représenter des champs ultrasonores. En particulier, à l'aide de *frames* « bien choisis », cette propriété de représentation appliquée aux conditions aux bords des problèmes de référence (\mathcal{P}_0) et (P_0) permet de fournir des conditions initiales adaptées à l'initialisation d'une famille structurée de faisceaux gaussiens.

4.1.1 Représentation atomique de champs oscillants

Les *frames* ont été introduits dans les années 1950 par DUFFIN et SCHAEFFER [57] sous forme de séries de Fourier « non-harmoniques ». Ces séries ont la particularité de générer des espaces fonctionnels surcomplets¹, sur lesquels toute fonction peut être décomposée et dont les décompositions présentent des propriétés remarquables de convergence. Ce sont notamment les travaux fondateurs de DAUBECHIES, GROSSMANN et MEYER dans

1. On qualifie de « surcomplet » un espace fonctionnel $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$ de \mathcal{H} dans lequel toute fonction $f \in \mathcal{H}$ peut être exactement reconstruite par différentes combinaisons linéaires.

[46] qui révèlent la puissance applicative de la théorie des *frames* dans le développement des ondelettes, pour l'analyse temps-fréquence des signaux.

Toutefois, l'apport de la théorie des *frames* ne se limite pas au traitement du signal. Ce qui nous intéresse ici tout particulièrement, ce sont des champs ultrasonores $u(\mathbf{x})$ calculés ou mesurés sur un ensemble (continu ou discret) de coordonnées spatiales $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. La transformée de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI), définie par (3.16), et mentionnée dans le paragraphe 3.1.2, fait partie des outils hérités de l'analyse micro-locale des distributions, qui permettent de mesurer localement les propriétés de rayonnement de fronts d'ondes et de fournir des conditions initiales $(\mathbf{x}_0, \mathbf{p}_0)$ à des rayons ou des faisceaux gaussiens. Ce qui justifie ici l'intérêt des *frames*, ce sont donc leurs propriétés d'analyse localisée, qui peuvent être ici appliquées non plus à des signaux temporels, mais à des champs ultrasonores $u(\mathbf{x})$. En particulier, on peut chercher à représenter sur ces *frames* les conditions aux bords des problèmes de référence (P_0) et (\mathcal{P}_0) , et de la même façon que la transformée FBI [174, 69], en extraire des conditions initiales pertinentes pour des superpositions de solutions paraxiales en régime haute fréquence.

Différentes classes de *frames* et de méthodes multi-échelles apparentées ont ainsi été utilisées dans la littérature pour évaluer numériquement les solutions d'équations aux dérivées partielles [13]. Parmi ces *frames*, on peut citer notamment les *curvelets* [26, 24], les *wave atoms* [48, 49, 50] et les *shearlets* [81]. Quel que soit le *frame* considéré, la stratégie de modélisation consiste à traduire les équations aux dérivées partielles en systèmes dynamiques, décrivant l'évolution des paquets d'ondes². La solution au problème est alors envisagée comme étant une superposition de ces paquets. Les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit suivent cette stratégie, et la suite de cette section a pour objectif de présenter comment les *frames* sont utilisés pour permettre la superposition de faisceaux gaussiens.

4.1.2 Théorie des *frames*

La théorie présentée ici est valide pour n'importe quel espace de Hilbert [44, 27], en particulier pour des espaces fonctionnels réels (resp. complexes) munis d'un produit scalaire euclidien (resp. hermitien) adapté. La nature de ces espaces fonctionnels dépend des hypothèses de travail, par exemple de la régularité des solutions recherchées pour une équation aux dérivées partielles particulière. Les espaces fonctionnels qui nous intéressent, déjà introduits dans le paragraphe 3.1.1, sont ré-explicités dans les sections 4.2 et 4.3. Dans ce paragraphe 4.1.2, on fait abstraction de toute spécificité, et on considère un

2. Dans la littérature anglophone, ces paquets d'onde trouvent plusieurs dénominations : *packets*, *wave packets*, ou encore *wave molecules*.

espace fonctionnel de Hilbert quelconque, noté \mathcal{H} , muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$, et de norme associée $\| \cdot \|_{\mathcal{H}}$.

Définition 1. Une famille de fonctions $\{\psi_{\mu}\}_{\mu \in I}$ dans un espace de Hilbert \mathcal{H} forme un *frame* s'il existe deux constantes positives A et B , telles que $0 < A \leq B \leq \infty$, et telles que, pour toute fonction f dans \mathcal{H} ,

$$A\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \sum_{\mu \in I} |\langle f, \psi_{\mu} \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq B\|f\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.1)$$

On note I l'ensemble³ des indices μ . Les constantes A et B sont appelées respectivement les limites inférieure et supérieure du *frame*. Ces constantes ne sont pas uniques, et elles sont dites « optimales », notées A_{opt} et B_{opt} , lorsque $A_{\text{opt}} = \max A$ et $B_{\text{opt}} = \max B$. ■

De façon générale, tout *frame* dans \mathcal{H} forme un espace fonctionnel surcomplet, mais tout espace fonctionnel surcomplet ne satisfait pas nécessairement la définition 1, et donc ne peut être qualifié de *frame*. Un cas particulier est obtenu lorsque $A = B = 1$. Dans ce cas, la famille $\{\psi_{\mu}\}_{\mu \in I}$ constitue une base orthonormée.

Définition 2. Soit $\{\psi_{\mu}\}_{\mu \in I}$ un *frame* dans \mathcal{H} . L'opérateur de *frame* \mathcal{S} est l'opérateur linéaire de \mathcal{H} vers \mathcal{H} défini par

$$\mathcal{S}f = \sum_{\mu \in I} \langle f, \psi_{\mu} \rangle_{\mathcal{H}} \psi_{\mu}. \quad (4.2)$$

■

Proposition 1. D'après (4.1) et 4.2, pour toute fonction $f \in \mathcal{H}$ il vient

$$A\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \langle \mathcal{S}f, f \rangle_{\mathcal{H}} \leq B\|f\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.3)$$

On en déduit que l'opérateur de *frame* \mathcal{S} est borné, soit formellement [44],

$$AI \leq \mathcal{S} \leq BI, \quad (4.4)$$

où \mathcal{I} est l'opérateur identité. ■

Proposition 2. D'après la définition 1 et la proposition 1, une borne inférieure de l'opérateur de *frame* \mathcal{S} – éventuellement optimale – vaut $A > 0$. On en déduit que l'opérateur de *frame* \mathcal{S} possède un inverse, noté \mathcal{S}^{-1} . On a donc $\mathcal{S}\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\mathcal{S} = \mathcal{I}$. ■

3. L'ensemble I des indices μ peut être continu, auquel cas la somme dans (4.1) devient une intégrale.

Définition 3. D'après la proposition 2, il existe un opérateur inverse \mathcal{S}^{-1} , et pour tout $\mu \in I$, on note

$$\varphi_\mu = \mathcal{S}^{-1}\psi_\mu. \quad (4.5)$$

La fonction φ_μ est appelée *fonction duale* de ψ_μ . On peut montrer [44] que la famille de fonctions duales $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I}$ est aussi un *frame*, de limite inférieure B^{-1} et de limite supérieure A^{-1} . Par la suite, on désignera $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$ comme étant le *frame de synthèse* et $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I}$ le *frame d'analyse*, ou *frame dual*. ■

Proposition 3. De la proposition 2 et de la définition 3, on en déduit que l'opérateur \mathcal{S}^{-1} est l'opérateur de *frame* associé au *frame* $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I}$, que l'on peut expliciter pour tout $f \in \mathcal{H}$ par

$$\mathcal{S}^{-1}f = \sum_{\mu \in I} \langle f, \varphi_\mu \rangle_{\mathcal{H}} \varphi_\mu. \quad (4.6)$$

■

Proposition 4. De la définition 2 et de la propriété 3, on en déduit que toute fonction $f \in \mathcal{H}$ peut être représentée à l'aide des *frames* d'analyse $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I}$ et de synthèse $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$, soit

$$f = \sum_{\mu \in I} \langle f, \varphi_\mu \rangle_{\mathcal{H}} \psi_\mu. \quad (4.7)$$

Ainsi littéralement, toute fonction $f \in \mathcal{H}$ peut être exprimée comme une combinaison linéaire des fonctions $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$ du *frame* de synthèse, pondérées par les produits scalaires de f avec les fonctions $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I}$ du *frame* d'analyse. ■

En pratique, le *frame* de synthèse $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$ est construit explicitement, car on choisit *a priori* la forme des fonctions sur lesquelles on veut décomposer une fonction f . Or on ne dispose pas nécessairement d'une formulation explicite de l'opérateur inverse \mathcal{S}^{-1} , et donc du *frame* dual $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I}$. Ce dernier est pourtant nécessaire pour pouvoir calculer la représentation (4.7). Heureusement, il est généralement possible d'obtenir de façon numérique une approximation du *frame* d'analyse [45, 127, 160]. La méthode numérique à utiliser et la précision du *frame* d'analyse approché dépendent directement de la forme du *frame* de synthèse, si bien qu'elles doivent être étudiées au cas par cas.

4.1.3 Stratégie de modélisation appliquée aux faisceaux gaussiens

Les problèmes de référence (P_0) et (\mathcal{P}_0) , respectivement en régime harmonique et en régime transitoire, sont munis de conditions aux bords (voir 3.1.1). En régime harmonique,

cette condition aux bords est notée \hat{f} et est assimilable à un terme source défini sur une hypersurface Σ de \mathbb{R}^d . En régime transitoire, elle constitue la donnée de Cauchy associée à l'équation des ondes, c'est-à-dire les conditions initiales du champ recherché et de sa dérivée temporelle, notées f et g et définies dans \mathbb{R}^d . D'après le paragraphe précédent, il est possible d'obtenir des représentations sur *frames* de ces différentes fonctions (proposition 4). La stratégie de modélisation consiste ici à construire des *frames* de synthèse de sorte à ce qu'ils contiennent un ensemble de conditions initiales univoques pour une famille de faisceaux gaussiens. Autrement dit, les *frames* de synthèse recherchés doivent être des espaces fonctionnels, composés de fonctions assimilables à des conditions initiales pour un ensemble de faisceaux gaussiens. Le calcul et la superposition de ces derniers, étudiés respectivement dans les chapitres 2 et 3, doit alors fournir des solutions approchées aux problèmes de référence (P_0) et (\mathcal{P}_0) . Les deux sections suivantes ont pour objectif d'explicitier les *frames* de synthèse adaptés à l'initialisation de faisceaux gaussiens pour la résolution de ces deux problèmes.

4.2 Régime harmonique et *frame* de Gabor

Dans cette section, nous explicitons d'abord les *frames* de synthèse et d'analyse utilisés pour obtenir une représentation du terme source \hat{f} associé au problème de référence (P_0) . Ce sont des *frames* de Gabor, ici construits dans le cas particulier où \hat{f} modélise un piston monté dans un baffle infiniment rigide, de géométrie plane et de distribution d'amplitude quelconque. Cette représentation de Gabor permet ainsi d'initialiser une superposition de faisceaux gaussiens inclinés, et donc de modéliser le champ rayonné par un transducteur plan. Après avoir explicité l'écriture de la solution approchée, nous nous intéressons à l'implémentation de cette méthode, notamment à sa traduction nécessaire, d'une donnée théorique continue à une donnée discrétisée. Ainsi, la décomposition initiale sur le *frame* de Gabor est d'une part obtenue à l'aide d'algorithmes de transformées de Fourier rapides, et d'autre part compressée sur la base d'arguments physiques (localisation spectro-spatiale du rayonnement) et mathématiques (caractère surcomplet des *frames* utilisés). La qualité de ces représentations sur *frame* de Gabor est enfin illustrée dans des cas de sources planes, représentatives du CND par ultrasons.

4.2.1 Représentation sur *frame* de Gabor d'un piston plan

Soit \hat{f} la fonction décrivant le terme source dans le problème de référence (P_0) (3.7). La fonction \hat{f} est définie sur une hypersurface Σ de \mathbb{R}^d . On fait ici l'hypothèse que la

solution au problème (P_0) est calculée dans un demi-espace fluide ($d = 3$), homogène de célérité c_0 , délimité par la surface Σ supposée plane, et que \hat{f} appartient à l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$ des fonctions de carré intégrable. Pour deux fonctions \hat{f} et \hat{g} à valeurs complexes définies dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$, le produit scalaire hermitien s'écrit

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(\mathbf{x}) \hat{g}^*(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x}, \quad (4.8)$$

où \hat{g}^* désigne le conjugué de la fonction \hat{g} . Dans un tel espace fonctionnel, un *frame* généralement utilisé est le *frame* de Gabor (aussi appelé *frame* de Weyl-Heisenberg [46]).

Revue bibliographique

Le problème de rayonnement – formalisé dans ce manuscrit par le problème de référence (P_0) – est un sujet d'intérêt dans la littérature dédiée à l'électromagnétisme et à la propagation radar. L'utilisation de *frames* de Gabor hérite d'une part des travaux de EINZIGER, RAZ et SHAPIRA [59], d'autre part des travaux de STEINBERG, HEYMAN et FELSEN [168, 167]. Dans ces références, les auteurs calculent le champ diffracté par une large ouverture plane à l'aide d'une superposition de faisceaux gaussiens. Ces derniers sont initialisés par la *représentation de Gabor* de la fonction \hat{f} décrivant l'ouverture. Dans [63, 108], cette même représentation est utilisée pour des ondes élastiques rayonnées dans un solide isotrope. La représentation de Gabor de \hat{f} dont il est question ici est une combinaison linéaire de fonctions gaussiennes translatées en espace et en phase selon une discrétisation dite « critique ». Or, il s'est avéré que le calcul numérique d'une telle décomposition est instable [45]. Cette difficulté a été levée par LUGARA et LETROU [126] en considérant une discrétisation spectro-spatiale plus dense, conduisant ainsi à réaliser une décomposition de \hat{f} sur un *frame* de Gabor.

Grâce au cadre rigoureux de la théorie des *frames* et au calcul stable des représentations sur *frame* de Gabor, plusieurs applications dans la littérature électromagnétique ont suivi cette approche : modélisation d'antennes [127, 128], de radômes [31], de la propagation radar dans des canaux *indoor* [114, 65] et dans des environnements plus complexes [76, 66]. En parallèle de ces applications, la méthode en elle-même a été approfondie de sorte à pouvoir traiter efficacement des problèmes à large bande fréquentielle [161, 160], et donc modéliser des régimes transitoires pulsés [159, 158]. A notre connaissance, la modélisation d'ondes de volume ultrasonores, à l'aide de faisceaux gaussiens, initialisés par un *frame* de Gabor, n'a jamais été traitée dans le domaine du CND par ultrasons avant [96].

Définition d'un *frame* de Gabor

On note $\bar{\mathbf{x}}$ les coordonnées d'un point appartenant au plan Σ , et $\hat{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ une fenêtre explicitée plus loin. Le *frame* de Gabor associé à cette fenêtre est défini par

$$\forall \mu \in I, \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \Sigma, \quad \hat{\psi}_\mu(\bar{\mathbf{x}}) = \hat{\psi}(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}}) e^{i\omega \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}} \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}})}, \quad (4.9)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}} = (m_1 \bar{x}_0, m_2 \bar{x}_0), \\ \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}} = (n_1 \bar{p}_0, n_2 \bar{p}_0), \end{cases} \quad (4.10)$$

et où l'indice $\mu = (m_1, m_2, n_1, n_2) = (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in I \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ spécifie de façon univoque l'élément $\hat{\psi}_\mu$ du *frame* de Gabor. Littéralement, un *frame* de Gabor est donc construit à partir d'une fenêtre génératrice qui est translatée spatialement d'un nombre entier de pas spatiaux \bar{x}_0 dans le repère cartésien de coordonnées x_1 et x_2 , et déphasée dans ce même repère d'un nombre entier de pas spectraux $\omega \bar{p}_0$. Pour que la famille $\{\hat{\psi}_\mu\}_{\mu \in I}$ vérifie la propriété fondamentale (4.1) et puisse être qualifiée de *frame*, une condition nécessaire [126] est que le pas spatial \bar{x}_0 et le pas spectral $\omega \bar{p}_0$ doivent vérifier

$$\omega \bar{x}_0 \bar{p}_0 = 2\pi\nu, \quad (4.11)$$

où $0 < \nu < 1$ est le paramètre dit de *sur-échantillonnage*. Cette inégalité indique qu'une condition nécessaire pour que $\{\hat{\psi}_\mu\}_{\mu \in I}$ soit un *frame* est que l'aire de la cellule unitaire de translation spectro-spatiale doit être inférieure ou égale à 2π . Dans ce cas précis, cette inégalité illustre le caractère intrinsèquement surcomplet d'un *frame*. D'après la proposition 4, on peut écrire le terme source \hat{f} pour tout $\bar{\mathbf{x}} \in \Sigma$ sous la forme

$$\hat{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{\mu \in I} \hat{c}_\mu \hat{\psi}_\mu(\bar{\mathbf{x}}), \quad (4.12)$$

où les coefficients de décomposition \hat{c}_μ sont définis par $\hat{c}_\mu = \langle \hat{f}, \hat{\varphi}_\mu \rangle_{\mathcal{H}}$, avec $\{\hat{\varphi}_\mu\}_{\mu \in I}$ le *frame* dual du *frame* de Gabor $\{\hat{\psi}_\mu\}_{\mu \in I}$. Dans le cas particulier du *frame* de Gabor, il est possible [160] d'approcher simplement le *frame* d'analyse, soit

$$\forall \mu \in I, \quad \forall \bar{\mathbf{x}} \in \Sigma, \quad \hat{\varphi}_\mu(\bar{\mathbf{x}}) \underset{\nu \rightarrow 0}{\approx} \left[\frac{\nu^2}{\|\hat{\psi}\|_{\mathcal{H}}^2} \right] \hat{\psi}_\mu(\bar{\mathbf{x}}). \quad (4.13)$$

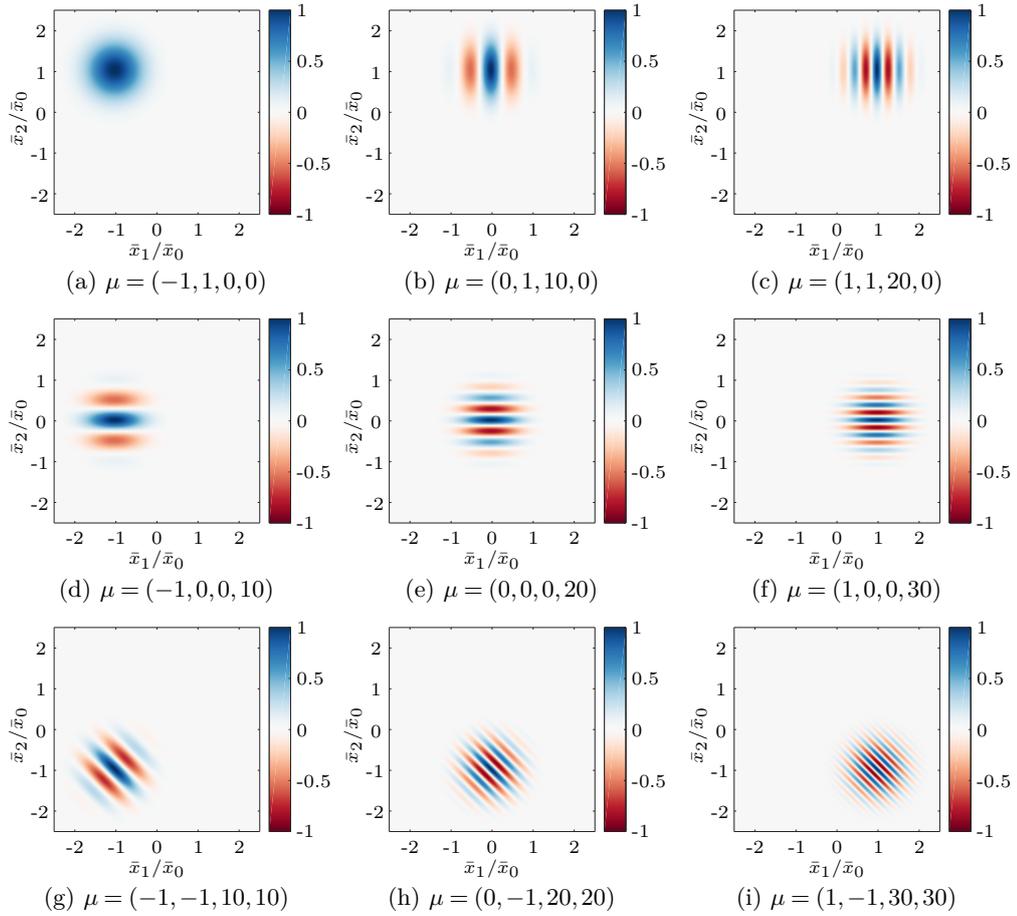


FIGURE 4.1 – *Frame* de Gabor à fenêtre gaussien : $\text{Re}(\hat{\psi}_\mu(\bar{\mathbf{x}}))$ pour différentes valeurs de μ

Cette approximation permet donc d’obtenir directement⁴ le *frame* d’analyse, et ne nécessite pas l’inversion numérique – potentiellement coûteuse – de l’opérateur de *frame* \mathcal{S} . On remarque alors que le *frame* d’analyse $\{\hat{\varphi}_\mu\}_{\mu \in I}$ est également un *frame* de Gabor, de fenêtre génératrice $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ définie par

$$\forall \bar{\mathbf{x}} \in \Sigma, \quad \hat{\varphi}(\bar{\mathbf{x}}) = \left[\frac{\nu^2}{\|\hat{\psi}\|_{\mathcal{H}}^2} \right] \hat{\psi}(\bar{\mathbf{x}}). \quad (4.14)$$

4. La contrepartie réside dans la limite $\nu \rightarrow 0$, qui correspond à la limite d’un sur-échantillonnage infini. Toutefois d’après [160], l’erreur relative commise par rapport au *frame* dual exact en dimension $d = 1$ est inférieure à 2%, pour des valeurs de ν inférieures à 0.3; un tel sur-échantillonnage est admissible en pratique.

Frame de Gabor à fenêtre gaussienne

On définit à présent la fenêtre $\hat{\psi}$, génératrice du *frame* de Gabor $\{\hat{\psi}_\mu\}_{\mu \in I}$, par une distribution gaussienne, soit

$$\forall \bar{\mathbf{x}} \in \Sigma, \quad \hat{\psi}(\bar{\mathbf{x}}) = \exp \left\{ -\frac{k |\bar{\mathbf{x}}|^2}{2z_R} \right\}, \quad (4.15)$$

où $k = \omega/c_0$. Des éléments $\hat{\psi}_\mu$ de ce *frame* de Gabor à fenêtre gaussienne sont représentés figure 4.1 pour différentes valeurs de μ . La signification de la longueur $z_R > 0$ est explicitée dans le paragraphe suivant. A ce stade, on peut néanmoins faire le commentaire que pour une valeur donnée de ω , la longueur z_R agit sur la largeur de la fenêtre $\hat{\psi}$. Or une contrainte essentielle dans la construction d'un *frame* est d'avoir une « bonne » partition de l'unité, de sorte que la représentation 4.12 puisse être fidèle et homogène sur une large gamme spatiale et spectrale. C'est pourquoi, en pratique, on cherche à adapter la valeur de z_R aux valeurs de \bar{x}_0 et \bar{p}_0 pour s'assurer de cette bonne partition [128].

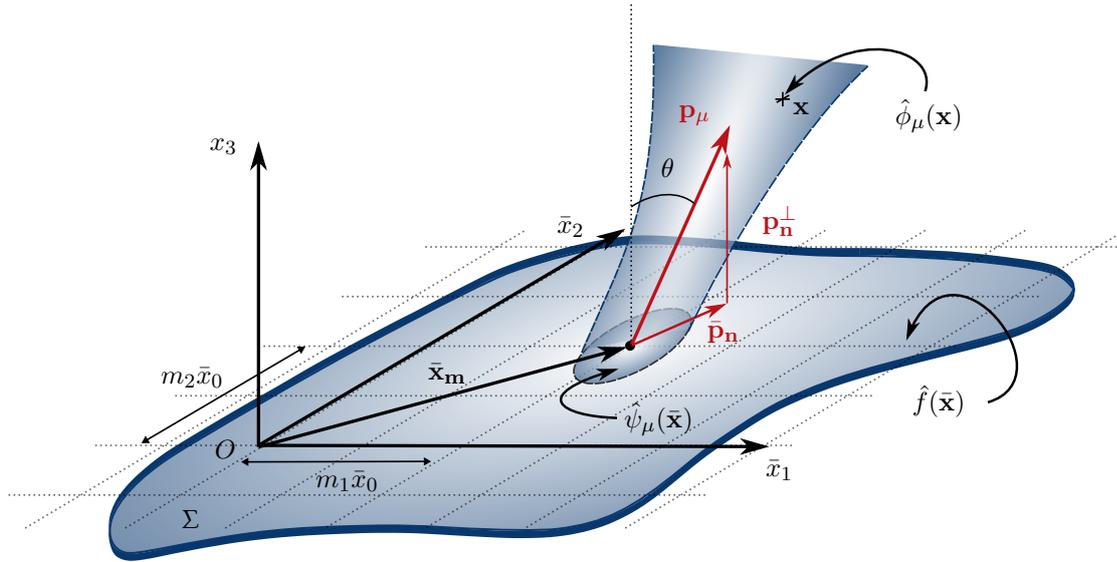


FIGURE 4.2 – Faisceau gaussien initialisé par un *frame* de Gabor

4.2.2 Solution propagée

D'après (4.9) et (4.15), on peut expliciter les éléments du *frame* de Gabor. Soit, pour tout $\mu \in I$,

$$\forall \bar{\mathbf{x}} \in \Sigma, \quad \hat{\psi}_\mu(\bar{\mathbf{x}}) = \exp \left\{ i\omega \left(\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}} \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}}) + \frac{1}{2} t(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}) \Gamma_\mu(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}) \right) \right\}, \quad (4.16)$$

où d'après (4.15),

$$\mathbf{\Gamma}_\mu = \left(\frac{i}{c_0 z_R} \right) \mathbf{I} = i \operatorname{diag} \left(\Gamma_0^i, \Gamma_0^i \right), \quad (4.17)$$

avec \mathbf{I} la matrice identité de taille 2×2 . La matrice $\mathbf{\Gamma}_\mu$ est imaginaire pure et définie positive, si bien qu'on reconnaît dans (4.16) un terme de source « inclinée » tel qu'introduit dans le chapitre 2 (voir (2.55)). Le rayonnement paraxial d'une telle source a déjà été étudié dans la section 2.3.2. On a alors montré qu'un faisceau gaussien harmonique de la forme (2.28) se propage, soit

$$\hat{\phi}_\mu(\mathbf{x}) = A_\mu(s) \exp \left\{ i\omega \left(T_\mu(s) + \frac{1}{2} {}^t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu(s)) \mathbf{M}_\mu(s) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu(s)) \right) \right\}, \quad (4.18)$$

de conditions initiales pour le système (E) (voir paragraphe 2.2.5)

$$\mathbf{x}_\mu(s_0) = \bar{\mathbf{x}}_m, \quad \mathbf{p}_\mu(s_0) = \mathbf{p}_n^\perp + \bar{\mathbf{p}}_n \quad \text{et} \quad T_\mu(s_0) = 0, \quad (4.19)$$

où \mathbf{p}_n^\perp est le vecteur lenteur normal au plan Σ (voir figure 4.2), vérifiant la relation de dispersion

$$|\mathbf{p}_n^\perp|^2 + |\bar{\mathbf{p}}_n|^2 = \left(\frac{1}{c(s_0)} \right)^2. \quad (4.20)$$

On a supposé que le milieu de propagation est homogène ($c(s_0) = c_0$) et on en déduit que le rayon associé au faisceau $\hat{\phi}_\mu$ est rectiligne, de direction $\mathbf{p}_\mu(s_0) = \mathbf{p}_\mu$, et tracé depuis $\bar{\mathbf{x}}_m$. Le système de coordonnées rayon-centrées ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) est tel que la direction \mathbf{e}_3 est portée par \mathbf{p}_μ , et $\bar{\mathbf{p}}_n$ contenu dans le plan ($\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1$). L'angle θ_n est alors défini par

$$\sin(\theta_n) = \frac{|\bar{\mathbf{p}}_n|}{|\mathbf{p}_\mu|} = c_0 |\bar{\mathbf{p}}_n|. \quad (4.21)$$

A partir de ces coordonnées rayon-centrées, on peut expliciter la condition initiale de la matrice \mathbf{M}_μ en fonction de $\mathbf{\Gamma}_\mu$, soit d'après (2.60),

$$\mathbf{M}_\mu(s_0) = i \operatorname{diag} \left(\Gamma_0^i / (\cos \theta_n)^2, \Gamma_0^i \right). \quad (4.22)$$

L'amplitude initiale $A_\mu(s_0)$ est ici unitaire, et d'après les exemples 6 et 8, on peut donc résoudre le système (DRT, voir 2.2.5) et obtenir une expression analytique du faisceau gaussien incliné $\hat{\phi}_\mu$. A cette étape du développement, on peut donner une signification à la longueur z_R intervenant dans la définition 4.15 de la fenêtre génératrice $\hat{\psi}$. On rappelle d'abord l'expression (2.53) des demi-largeurs principales $w_{1,2}^\varepsilon$ d'un faisceau gaussien

harmonique, à savoir

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad w_{1,2}^\varepsilon(s) = w_{1,2}^\varepsilon(s_0) \sqrt{1 + c_0^2 (s - s_0)^2 M_{1,2}(s)^2}, \quad (4.23)$$

où $M_{1,2}(s)$ sont les valeurs propres de la matrice $\text{Im}(\mathbf{M}(s_0))$, et $0 < \varepsilon \leq 1$ définissant l'amplitude normalisée à laquelle ces demi-largeurs sont mesurées. Appliquée à la matrice diagonale $\text{Im}(\mathbf{M}_\mu(s_0))$ et d'après (4.22) et (4.17), on obtient notamment l'expression w_2^ε de la deuxième demi-largeur principale

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad w_2^\varepsilon(s) = w_2^\varepsilon(s_0) \sqrt{1 + \left(\frac{s - s_0}{z_R} \right)^2}. \quad (4.24)$$

En particulier, pour $s - s_0 = z_R$, il vient

$$w_2^\varepsilon(s_0 + z_R) = w_2^\varepsilon(s_0) \sqrt{2}. \quad (4.25)$$

La longueur z_R , appelée⁵ *distance de Rayleigh* du faisceau gaussien, est la distance du col au bout de laquelle la largeur du faisceau s'est élargi d'un facteur $\sqrt{2}$.

Finalement, d'après la décomposition (4.12) du terme source \hat{f} sur *frame* de Gabor et par linéarité du problème de référence (P_0), on en déduit la solution propagée par superposition de faisceaux gaussiens, soit pour tout point $\mathbf{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3 \geq 0)$,

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mu \in I} \hat{c}_\mu \hat{\phi}_\mu(\mathbf{x}). \quad (4.26)$$

Une vue schématisée de cette superposition (4.26) est proposée figure 4.3, dans le plan de coordonnées (\bar{x}_1, x_3) . On remarque que, contrairement à la méthode multi-faisceaux gaussiens présentée dans le paragraphe 3.3.1, les faisceaux gaussiens utilisés dans la synthèse du champ propagé sont portés par des directions multiples (colinéaires à $\{\mathbf{p}_\mu\}_{\mu \in I}$) et ont de multiples positions initiales de tracé (points $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}}$). Ainsi, géométriquement, on montre ici l'apport potentiel de l'initialisation par *frame* de Gabor au domaine de validité de l'approximation paraxiale.

5. Aussi appelée *paramètre de collimation*, la longueur z_R donne une estimation de la profondeur en-deçà de laquelle le faisceau peut être considéré comme collimaté et vérifiant l'approximation paraxiale.

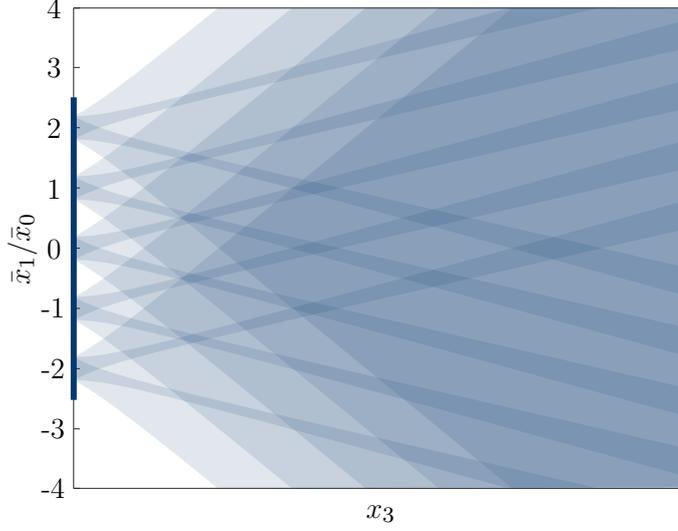


FIGURE 4.3 – Représentation schématique d'une superposition de faisceaux gaussiens (4.26), initialisés par représentation du terme source (—) sur un *frame* de Gabor

4.2.3 Calcul numérique de la représentation

On cherche, *in fine* à calculer la superposition de faisceaux gaussiens (4.26). On sait d'après le chapitre 2 que les faisceaux gaussiens inclinés $\hat{\phi}_\mu$ qui composent cette superposition peuvent être évalués de façon analytique pour tout point \mathbf{x} du demi-espace fluide homogène considéré. Il reste donc à évaluer les coefficients de décomposition $\{\hat{c}_\mu\}_{\mu \in I}$. Dans ce paragraphe, on s'intéresse uniquement au calcul numérique de ces coefficients, et à leur capacité à synthétiser le terme source \hat{f} (4.12). La validation de la solution propagée (4.26) par superposition de faisceaux gaussiens fait l'objet de la section 5.1.

Soit $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ un terme source défini dans le plan Σ , on a par définition

$$\forall \mu \in I, \quad \hat{c}_\mu = \langle \hat{f}, \hat{\phi}_\mu \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Sigma} \hat{f}(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}_\mu^*(\bar{\mathbf{x}}) d^2 \bar{\mathbf{x}}. \quad (4.27)$$

Le *frame* d'analyse $\{\hat{\phi}_\mu\}_{\mu \in I}$ est également un *frame* de Gabor. On peut ainsi expliciter l'intégrale (4.27), soit

$$\forall \mu \in I, \quad \hat{c}_\mu = \int_{\Sigma} \hat{f}(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\phi}_\mu^*(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}}) e^{-i\omega \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}} \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}})} d^2 \bar{\mathbf{x}}. \quad (4.28)$$

A ce stade, l'ensemble $I \subseteq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ des indices μ est infiniment dénombrable. Il ne permet donc pas, en l'état, une application pratique. Afin de modéliser la propagation

d'ondes électromagnétiques en milieu urbain, GHANNOUM, dans son manuscrit de thèse [75], décrit notamment les possibilités de réduire le cardinal de l'ensemble I à l'aide de bornes physiques sur les indices \mathbf{m} et \mathbf{n} . On résume et adapte ici ces principales étapes d'implémentation.

Bornes spatiales

En pratique, une source ultrasonore plane a une extension spatiale finie (voir figures 4.2 et 4.3) tandis que la fenêtre $\hat{\varphi}$ génératrice du *frame* d'analyse, gaussienne d'après l'approximation (4.13), a un support infini. Ainsi, un élément $\hat{\varphi}_\mu$ du *frame* d'analyse peut être centré en un point $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}}$ qui n'appartient pas au support de \hat{f} , et néanmoins avoir un produit non-nul avec \hat{f} . Or du fait de la décroissance à l'infini de la fenêtre gaussienne $\hat{\varphi}$, le produit scalaire hermitien $\langle \hat{f}, \hat{\varphi}_\mu \rangle_{\mathcal{H}} = \hat{c}_\mu$ peut être considéré comme négligeable dès lors que le support effectif de $\hat{\varphi}_\mu$ est suffisamment distant du support de \hat{f} . On peut donc définir un seuil $\varepsilon_{\mathbf{x}}$ sur l'amplitude relative de la fenêtre $\hat{\varphi}$ au-dessous duquel tout produit avec \hat{f} peut être négligé. Cela permet de définir une distance maximale $L_{\varepsilon_{\mathbf{x}}}$ entre les centres $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}}$ et le bord extérieur du support $\text{supp}(\hat{f})$ de la source \hat{f} , au delà de laquelle on néglige tout coefficient \hat{c}_μ , et telle que

$$L_{\varepsilon_{\mathbf{x}}} = \sqrt{\frac{-2z_R \ln \varepsilon_{\mathbf{x}}}{k}}. \quad (4.29)$$

La longueur $L_{\varepsilon_{\mathbf{x}}}$ correspond simplement à la demi-largeur de la fenêtre $\hat{\varphi}$ à l'amplitude relative $\varepsilon_{\mathbf{x}}$. On en déduit [75, 122] les bornes supérieures M_1^{\max} et M_2^{\max} et les bornes inférieures M_1^{\min} et M_2^{\min} , respectivement pour les indices de translation spatiale m_1 et m_2 , et on définit l'ensemble $I_{[\mathbf{m}]} \subset I$ des indices μ tels que m_1 et m_2 soient contenus à l'intérieur de ces bornes, à savoir

$$I_{[\mathbf{m}]} = \left\{ \mu = (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in I, \quad M_1^{\min} \leq m_1 \leq M_1^{\max} \quad \text{et} \quad M_2^{\min} \leq m_2 \leq M_2^{\max} \right\}. \quad (4.30)$$

Bornes spectrales

Le support de la transformée de Fourier d'une fonction à support compact, n'est pas compact. Cette propriété fondamentale s'applique en particulier au cas du terme source \hat{f} qui, de support spatial compact, voit son spectre d'onde plane $\tilde{\hat{f}}$ de support infini. Sauf à considérer que le spectre d'onde plane $\tilde{\hat{f}}$ est négligeable au-delà d'une certaine bande spectrale, il n'est pas possible *a priori* d'avoir le même raisonnement que sur le support

spatial $\text{supp}(\hat{f})$ de \hat{f} . Néanmoins, d'après (4.21), on a nécessairement

$$\sin(\theta_{\mathbf{n}}) = c_0 |\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}}| < 1. \quad (4.31)$$

Si la condition (4.31) n'est pas respectée, alors les composantes du vecteur d'onde normal $|\mathbf{p}_{\mathbf{n}}^\perp|$ deviennent imaginaires pures, ce qui correspond à un régime de rayonnement évanescent. Or, ces travaux de thèse ne permettent pas de décrire ce régime à l'aide de faisceaux gaussiens, si bien que l'on néglige la contribution évanescente au rayonnement total. Le cas d'égalité dans (4.31) correspond à un rayon central rasant, pour lequel il n'est pas non plus possible de construire un faisceau gaussien. Finalement, si on vérifie (4.31), alors on peut exprimer de façon explicite la condition sur les indices n_1 et n_2 de translation spectrale, soit

$$\sqrt{n_1^2 + n_2^2} < \frac{1}{c_0 \bar{p}_0}. \quad (4.32)$$

Afin de disposer de bornes interdépendantes, plus simples à implémenter et comparables à celles obtenues pour les indices spatiaux, on définit l'ensemble $I_{[\mathbf{n}]} \subset I$ associé à cette condition par

$$I_{[\mathbf{n}]} = \left\{ \mu = (\mathbf{m}, \mathbf{n}) \in I, \quad N_1^{\min} \leq n_1 \leq N_1^{\max} \quad \text{et} \quad N_2^{\min} \leq n_2 \leq N_2^{\max} \right\}, \quad (4.33)$$

où $N_1^{\max} = N_2^{\max} = -N_1^{\min} = -N_2^{\min} = \lceil \frac{1}{c_0 \bar{p}_0} \rceil$. Ainsi défini, l'ensemble $I_{[\mathbf{n}]}$ contient des indices μ qui ne vérifient pas nécessairement la condition (4.32). Il conviendra donc, avant de synthétiser la solution propagée \hat{u} , de ne pas les prendre en compte.

Utilisation d'algorithmes de transformées de Fourier rapides

On dispose à présent de bornes pour les indices spatiaux et spectraux de la représentation sur un *frame* de Gabor d'un terme source \hat{f} à support compact. Cela permet d'avoir un nombre fini de termes à sommer dans les synthèses (4.12) et (4.26) – désormais approchées – du terme source \hat{f} et de la solution propagée \hat{u} . On cherche donc à évaluer numériquement

$$\forall \mu \in I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}, \quad \hat{c}_\mu = \int_{\Sigma} \hat{f}(\bar{\mathbf{x}}) \hat{\varphi}^*(\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}}) e^{-i\omega \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}} \cdot (\bar{\mathbf{x}} - \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}})} d^2 \bar{\mathbf{x}}. \quad (4.34)$$

Pour une source \hat{f} quelconque, l'intégrale (4.34) ne peut généralement pas être évaluée de façon analytique. On reconnaît toutefois l'expression d'une transformée de Fourier bidimensionnelle, appliquée à la fonction \hat{f} fenêtrée par la fonction $\hat{\varphi}^*$ centrée en $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}}$, et évaluée en $\bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{n}}$. Il est donc opportun d'utiliser les algorithmes existants de transformées

de Fourier rapides [39] – connus sous le nom anglophone de *Fast Fourier Transform* (FFT) – pour obtenir efficacement les coefficients $\{\hat{c}_\mu\}_{\mu \in I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}}$. Dans le cadre de la modélisation du champ électromagnétique rayonné par des antennes [121], cette démarche est explicitée précisément par LOPEZ dans son manuscrit de thèse [122].

Algorithme 2 : Calcul de représentation sur *frame* de Gabor

Données : $\hat{f}, \hat{\varphi}^*, I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}, \omega, \bar{x}_0, \bar{p}_0$

Résultat : $\forall \mu = (m_1, m_2, n_1, n_2) \in I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}, \hat{c}_\mu = \hat{c}[m_1, m_2, n_1, n_2]$

```

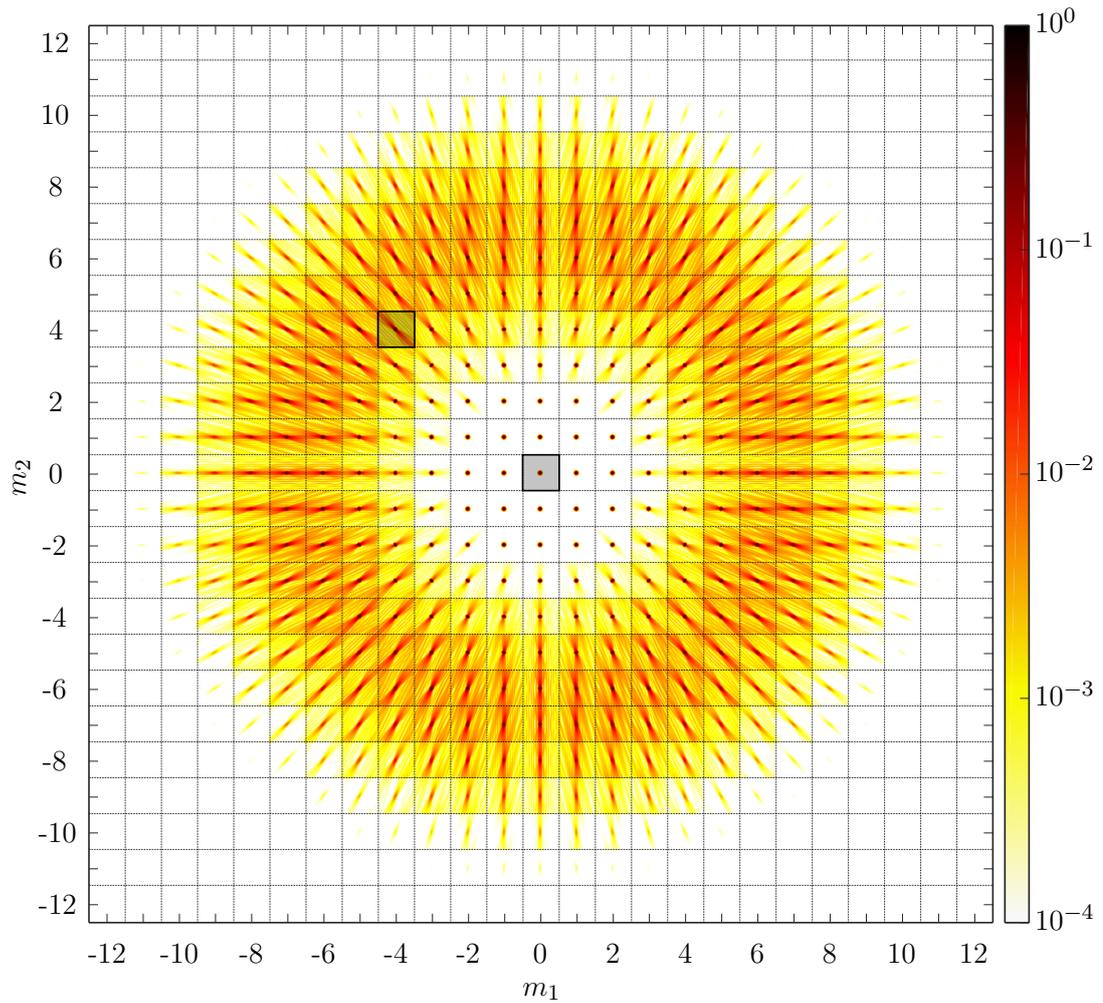
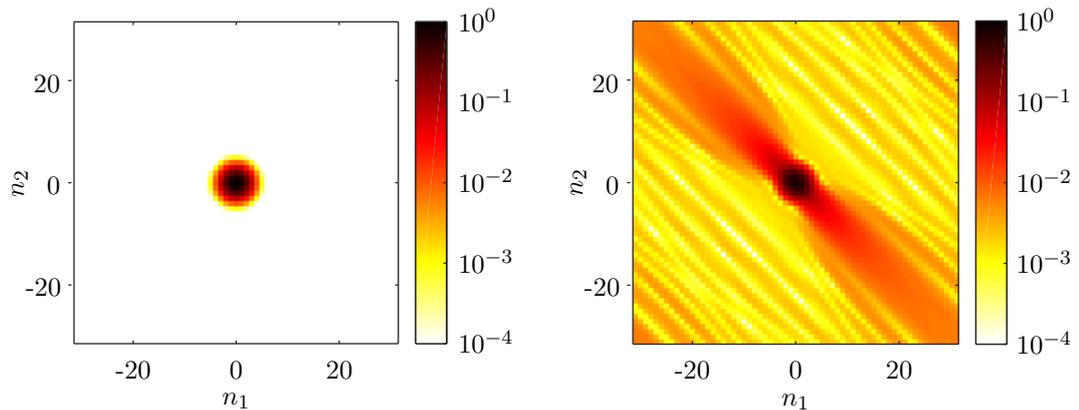
1 pour  $m_1 = M_1^{min}$  à  $M_1^{max}$  faire
2   pour  $m_2 = M_2^{min}$  à  $M_2^{max}$  faire
3      $\forall (i, j), \hat{f}_{\mathbf{m}}[i, j] \leftarrow \hat{f}[i, j] \hat{\varphi}^*(\bar{x}_1[i] - m_1 \bar{x}_0, \bar{x}_2[i] - m_2 \bar{x}_0) ;$ 
4      $\hat{c}[m_1, m_2, n_1, n_2] \leftarrow \text{FFT} \{ \hat{f}_{\mathbf{m}} \} [n_1, n_2] e^{i\omega \bar{p}_0 \bar{x}_0 (n_1 m_1 + n_2 m_2)} ;$ 
5   fin
6 fin

```

Dans l’algorithme 2, on résume très succinctement l’implémentation du calcul des coefficients \hat{c}_μ . On note $(\bar{x}_1[i], \bar{x}_2[j]) \in \mathbb{R}^2$ les coordonnées discrètes sur lesquelles le terme source \hat{f} est connu, et on note $\hat{f}[i, j]$ la valeur en ces coordonnées. Pour chaque couple d’indices (m_1, m_2) issu de $I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}$, on applique, ligne 3, un fenêtrage au terme source \hat{f} , de fenêtre $\hat{\varphi}^*$ translatée en $\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{m}}(m_1 \bar{x}_0, m_2 \bar{x}_0)$. On rappelle que, d’après l’approximation (4.13), la fenêtre d’analyse $\hat{\varphi}$ est gaussienne et proportionnelle à la fenêtre de synthèse $\hat{\psi}$. Le résultat du fenêtrage est noté $\hat{f}_{\mathbf{m}}$. Pour pouvoir évaluer (4.34) à l’aide d’une transformée de Fourier discrète, la fonction $\hat{f}_{\mathbf{m}}$ discrétisée doit être périodisée au préalable⁶. On applique ensuite, ligne 4, l’algorithme FFT à $\hat{f}_{\mathbf{m}}$. A un pré-facteur près dépendant des paramètres de discrétisation et de périodisation (voir [122]), le résultat de cette opération correspond à l’ensemble des coefficients \hat{c}_μ pour le couple (m_1, m_2) .

La figure 4.4 illustre un exemple de résultat du calcul numérique des coefficients $\{\hat{c}_\mu\}_{\mu \in I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}}$ dans le cas où la fonction \hat{f} modélise une source circulaire plane de rayon a . Le pas \bar{x}_0 de translation spatiale vaut $\bar{x}_0 = a/7$. Dans la figure 4.4a, on propose une représentation mixte des amplitudes $|\hat{c}_\mu|$ normalisées par $\max_\mu |\hat{c}_\mu|$. A chaque cellule carrée délimitée par des pointillés correspond un couple (m_1, m_2) particulier. Dans

6. Le lecteur intéressé par les détails techniques liés à la discrétisation des données et aux problématiques consécutives d’échantillonnage, de périodisation et de repliement du spectre, est invité à consulter la référence [122].

(a) Représentation mixte (\mathbf{m}, \mathbf{n}) en niveaux de couleurs des amplitudes $|\hat{c}_\mu|$ normalisées(b) Amplitudes $|\hat{c}_\mu^*|$ en fonction de n_1 et n_2 pour $m_1 = m_2 = 0$ (c) Amplitudes $|\hat{c}_\mu|$ en fonction de n_1 et n_2 pour $m_1 = -4$ et $m_2 = 4$ FIGURE 4.4 – Représentation sur *frame* de Gabor du champ source d'un transducteur circulaire plan uniforme : distribution des amplitudes $|\hat{c}_\mu|$ des coefficients de décomposition

chacune de ces cellules carrées, à un pixel correspond un couple (n_1, n_2) et le niveau de couleur est associé à l'amplitude $|\hat{c}_\mu|$. Les figures 4.4b et 4.4c sont des vues agrandies des cellules grisées dans la figure 4.4a ; elles correspondent respectivement aux couples $(m_1, m_2) = (0, 0)$ et $(m_1, m_2) = (-4, 4)$. Qualitativement, la représentation mixte figure 4.4a rend compte de la localisation spatiale de la représentation sur *frame* de Gabor. En effet, les amplitudes $|\hat{c}_\mu|$ sont non-négligeables uniquement sur et au voisinage du support spatial $\text{supp}(\hat{f})$, qui est ici un disque de rayon $a = 7\bar{x}_0$. La localisation spectrale peut être étudiée à l'aide du contenu de chaque cellule. Dans le cas $(m_1, m_2) = (0, 0)$, c'est-à-dire au centre de la source circulaire, on observe figure 4.4b que les amplitudes $|\hat{c}_\mu|$ sont localisées au voisinage de $(n_1, n_2) = (0, 0)$. Ainsi, d'après la relation de dispersion (4.20), les faisceaux gaussiens rayonnés depuis le centre de la source circulaire sont essentiellement de direction normale au plan Σ de la source. En d'autres termes, le champ « immédiatement » rayonné par la source est localement collimaté, loin des bords. En revanche, dans le cas $(m_1, m_2) = (-4, 4)$, l'analyse est proche du bord de la source. Ainsi on observe figure 4.4c que les amplitudes $|\hat{c}_\mu|$ sont moins localisées dans le domaine spectral que dans le cas précédent. En dehors du voisinage de $(n_1, n_2) = (0, 0)$, ces amplitudes ont des valeurs significatives au voisinage de la droite $n_2 = -n_1$. Le contenu spectral d'un champ diffracté par une arête étant diffus, cet étalement des amplitudes $|\hat{c}_\mu|$ doit être interprété comme étant une signature de la diffraction du bord de la source.

Compression réallouée

En dépit de l'introduction de bornes physiques à l'ensemble des indices I , le caractère surcomplet du *frame* de Gabor génère des représentations généralement redondantes, décrites par un grand nombre de coefficients de décomposition \hat{c}_μ . Or, dans l'écriture (4.26) de la superposition de faisceaux gaussiens, à chaque coefficient \hat{c}_μ est associé un faisceau gaussien. Quand bien même l'écriture d'un faisceau gaussien est analytique dans un milieu homogène, son évaluation numérique a un coût numérique non-nul et l'évaluation numérique de la synthèse (4.26) est donc proportionnelle au cardinal de I . Dans l'exemple illustré figure 4.4, le nombre de coefficients \hat{c}_μ calculés est de l'ordre de $2,5 \cdot 10^6$. L'évaluation du même nombre de faisceaux gaussiens sur une zone étendue de dimension $d \geq 1$ conduit alors à des temps de calcul excessifs. Il paraît donc opportun de chercher à réduire le nombre de ces coefficients.

Pour répondre à ce besoin de compression de la représentation, il est possible par exemple de ne prendre en compte que les coefficients \hat{c}_μ dont l'amplitude est supérieure à un certain seuil [127, 160, 159, 122]. L'hypothèse sous-jacente à l'application de cette technique est que la représentation sur *frame* de Gabor est fortement localisée. C'est

notamment le cas pour l'exemple illustré figure 4.4a, pour lequel un très grand nombre de coefficients \hat{c}_μ sont d'amplitude négligeable. Cette approche est toutefois limitée, pour des valeurs de seuil trop élevées (forte compression), car elles conduisent à une sous-estimation du champ au sens de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$. En effet, quand bien même les contributions individuelles de ces coefficients seraient négligeables, leur somme peut elle être non-négligeable. On propose donc ici une technique [96], dite de *compression réallouée*. Elle vise à restituer l'énergie « éliminée », lors de la compression par seuillage, aux éléments du *frame* qui subsistent dans la représentation compressée.

Soit $\epsilon \in [0, 1]$ le seuil relatif appliqué aux amplitudes $\{|\hat{c}_\mu|\}_{\mu \in I_{[\mathbf{m}]}\cap I_{[\mathbf{n}]}}$, et I_ϵ l'ensemble des indices associés aux coefficients \hat{c}_μ conservés après compression par ce seuillage. L'ensemble I_ϵ est donc défini par

$$I_\epsilon = \left\{ \mu \in I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}, \frac{|\hat{c}_\mu|}{\max_{\mu \in I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}} |\hat{c}_\mu|} \geq \epsilon \right\}. \quad (4.35)$$

Le *taux de compression* τ_ϵ peut être défini par

$$\tau_\epsilon = 1 - \frac{|I_\epsilon|}{|I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}}|, \quad (4.36)$$

où $|I|$ désigne le cardinal de l'ensemble d'indices I . Par exemple, $\tau_\epsilon = 0$ si la compression ne réduit pas le nombre de coefficients ($|I_\epsilon| = |I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}$), et $\tau_\epsilon \rightarrow 1$ lorsque $|I_\epsilon| \rightarrow 0$. Afin de compenser la perte d'énergie induite dans la représentation (4.12) suite à la compression, on introduit un *coefficient de réallocation*, noté α_ϵ , et tel que

$$\alpha_\epsilon = \sqrt{\frac{\sum_{\mu \in I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}} |\hat{c}_\mu|^2}{\sum_{\mu \in I_\epsilon} |\hat{c}_\mu|^2}} \geq 1. \quad (4.37)$$

À l'aide du coefficient de réallocation α_ϵ , on réévalue de façon uniforme chacune des amplitudes $\{|\hat{c}_\mu|\}_{\mu \in I_\epsilon}$, et on note

$$\forall \mu \in I_\epsilon, \forall \epsilon \leq 1, \quad \hat{c}_\mu^* = \alpha_\epsilon \hat{c}_\mu. \quad (4.38)$$

En effet, d'après les définitions (4.35) de I_ϵ et (4.37) de α_ϵ , on montre que

$$\sum_{\mu \in I_\epsilon} |\hat{c}_\mu^*|^2 = \alpha_\epsilon^2 \sum_{\mu \in I_\epsilon} |\hat{c}_\mu|^2 = \sum_{\mu \in I_{[\mathbf{m}]} \cap I_{[\mathbf{n}]}} |\hat{c}_\mu|^2. \quad (4.39)$$

Ainsi, la norme ℓ_2 associée à l'ensemble des coefficients $\{\hat{c}_\mu^*\}_{\mu \in I_\epsilon}$ après compression

ϵ	$ I_\epsilon $	τ_ϵ	$\frac{\ \hat{f}-\hat{f}_\epsilon^*\ _\infty}{\ \hat{f}\ _\infty}$	$\frac{\ \hat{f}-\hat{f}_\epsilon^*\ _{\mathcal{H}}}{\ \hat{f}\ _{\mathcal{H}}}$
5.10^{-3}	$6, 1.10^4$	97,5%	70,9%	7,7%
1.10^{-2}	$4, 3.10^4$	98,3%	65,4%	8,7%
2.10^{-2}	$2, 6.10^4$	99,0%	56,6%	11,0%
3.10^{-2}	$1, 7.10^4$	99,3%	53,7%	12,7%
5.10^{-2}	$1, 1.10^4$	99,6%	52,2%	15,1%

TABLEAU 4.1 – Pour différentes valeurs de seuil relatif ϵ , nombre $|I_\epsilon|$ de coefficients retenus, taux de compression et erreurs commises dans la représentation sur *frame* de Gabor d'un transducteur circulaire

réallouée est égale à la norme ℓ_2 de l'ensemble des coefficients $\{\hat{c}_\mu\}_{\mu \in I_{[m]} \cap I_{[n]}}$ avant compression. Par la suite, on notera \hat{f}_ϵ^* la synthèse du terme source obtenu par représentation compressée réallouée sur *frame* de Gabor, soit pour tout point $\bar{x} \in \Sigma$,

$$\hat{f}_\epsilon^*(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{\mu \in I_\epsilon} \hat{c}_\mu^* \hat{\psi}_\mu(\bar{\mathbf{x}}), \quad (4.40)$$

et on notera \hat{u}_ϵ^* la solution propagée par superposition des faisceaux gaussiens correspondants, soit pour tout point $\mathbf{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3 \geq 0)$,

$$\hat{u}_\epsilon^*(\mathbf{x}) = \sum_{\mu \in I_\epsilon} \hat{c}_\mu^* \hat{\phi}_\mu(\mathbf{x}). \quad (4.41)$$

Synthèse d'une source circulaire plane

Figure 4.5, nous illustrons le cas d'un transducteur circulaire uniforme de rayon a , dont le profil d'amplitude \hat{f} est décrit figure 4.5a. Dans ce cas d'application, le *frame* de Gabor est caractérisé par un pas spatial $\bar{x}_0 = a/7$, un paramètre de sur-échantillonnage $\nu = 0,09$ et une longueur de Rayleigh z_R telle que la demi-largeur $w^{1/2}$ à mi-hauteur de la fenêtre $\hat{\psi}_\mu$ a pour valeur $w^{1/2} = 1,6\bar{x}_0$. Sa représentation complète sur *frame* de Gabor a été donnée figure 4.4.

Dans le tableau 4.1, on calcule les taux de compression τ_ϵ pour différentes valeurs de seuil relatif ϵ . On observe que le taux de compression croît avec le seuil relatif ϵ . Dans le cas particulier où $\epsilon = 1.10^{-2}$, 98,3% des coefficients \hat{c}_μ sont négligés lors de la compression. Cela signifie que tous ces coefficients négligés ont une amplitude inférieure

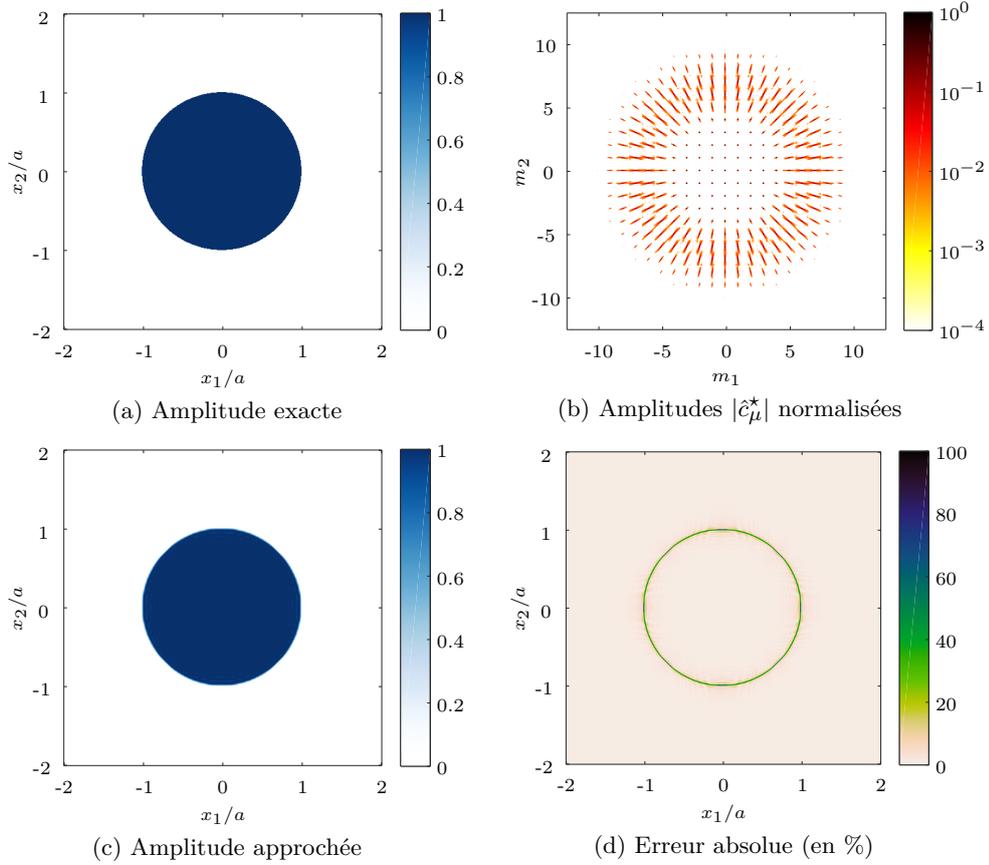


FIGURE 4.5 – Synthèse sur *frame* de Gabor du champ source d'un transducteur circulaire uniforme de rayon a .

à 1% de l'amplitude $\max_{\mu \in I_{[m]} \cap I_{[n]}} |\hat{c}_\mu|$, ce qui rend compte de la forte localisation des amplitudes $|\hat{c}_\mu|$. L'effet de la compression peut être observé figure 4.5b, résultat de la compression réallouée de la représentation figure 4.4a pour un seuil relatif $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$. La représentation compressée est plus creuse que la représentation initiale ($\tau_\epsilon = 95\%$), de sorte que le nombre de coefficients pris en compte est réduit. Pour autant, les signatures de rayonnement collimaté loin des bords et de la diffraction au voisinage des bords sont conservées. On peut donc espérer que la description du champ propagé total ne soit pas trop dégradée – dans ce cas particulier – par l'effet de la compression.

Les erreurs commises par les synthèses \hat{f}_ϵ^* par rapport au terme source exact \hat{f} , au sens des normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, sont aussi répertoriées dans le tableau 4.1 pour différentes valeurs de ϵ . On observe que la quantité $\|\hat{f} - \hat{f}_\epsilon^*\|_{\mathcal{H}}$ est d'autant plus basse que le taux de compression τ_ϵ est faible, tandis que l'erreur $\|\hat{f} - \hat{f}_\epsilon^*\|_\infty$ a un comportement contraire. En d'autres termes, à mesure que le représentation est compressée, la synthèse \hat{f}_ϵ^* converge

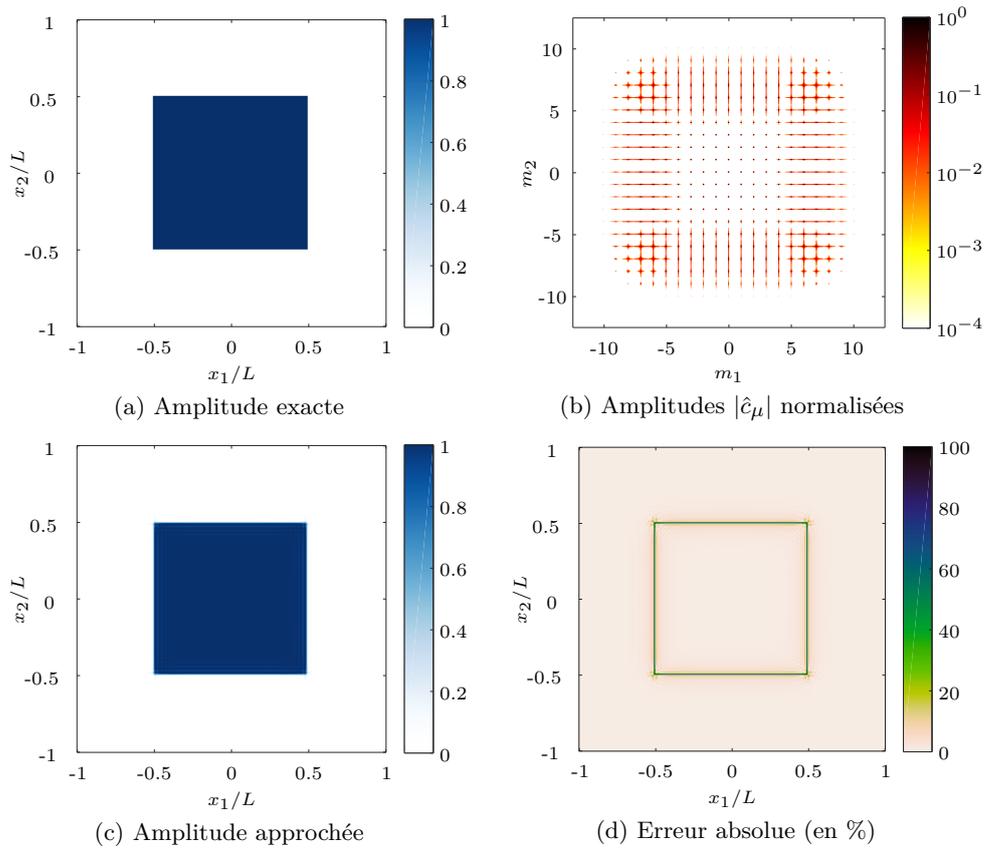


FIGURE 4.6 – Synthèse sur *frame* de Gabor du champ source d'un transducteur carré uniforme de largeur L .

globalement (norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$), mais la différence avec le terme source exact \hat{f} tend à croître localement. Figure 4.5c, on représente \hat{f}_ϵ^* dans le cas où $\epsilon = 5.10^{-3}$, et on observe figure 4.5d que l'erreur absolue commise dans cette synthèse est localisée sur le bord discontinu de la source. Malgré le caractère sur-complet du *frame* de Gabor, cet effet connu sous le nom de *phénomène de Gibbs* en analyse de Fourier [77, 78] ne peut être éliminé. C'est donc cet effet qui est mesuré par la quantité $\|\hat{f} - \hat{f}_\epsilon^*\|_\infty$ et que l'on retrouve dans le tableau 4.1. En dehors, l'erreur absolue commise est inférieure à 5% de l'amplitude nominale. A titre de comparaison, l'erreur commise au sens de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ vaut dans ce cas 7,7% de la quantité $\|\hat{f}\|_{\mathcal{H}}$, tandis qu'elle est de 12,7% dans le même cas traité par la synthèse multi-faisceaux gaussiens dans le paragraphe 3.3.1.

Synthèse d'une source carrée plane

Figure 4.6, nous illustrons le cas d'un transducteur carré de largeur L . Dans ce cas

d'application, le *frame* de Gabor est caractérisé par un pas spatial $\bar{x}_0 = L/14$, un paramètre de sur-échantillonnage $\nu = 0,09$ et une longueur de Rayleigh z_R telle que la demi-largeur $w^{1/2}$ à mi-hauteur de la fenêtre $\hat{\psi}_\mu$ a pour valeur $w^{1/2} = 1,6\bar{x}_0$. Le seuil relatif de compression appliqué à l'ensemble des coefficients $\{\hat{c}_\mu\}_{\mu \in I_{[m]} \cap I_{[n]}}$ vaut $\epsilon = 5.10^{-3}$. La représentation mixte des amplitudes $|\hat{c}_\mu|_{\mu \in I^\epsilon}$ est donnée figure 4.6b, et la synthèse obtenue à partir de ces coefficients est représentée figure 4.6c. De la même façon que dans le cas circulaire, on observe figure 4.6d que le phénomène de Gibbs aux bords discontinu de la source est l'erreur la plus notable. En dehors du bord, l'erreur absolue commise est inférieure à 5% de l'amplitude nominale. A titre de comparaison, l'erreur commise au sens de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ vaut 11,6% de la quantité $\|\hat{f}\|_{L^2}$, tandis qu'elle est de 13,7% dans le même cas traité par la synthèse multi-faisceaux gaussiens dans le paragraphe 3.3.1.

4.3 Régime transitoire et frame de paquets d'onde gaussiens

Cette dernière section du chapitre 4 est consacrée à la représentation sur *frame* de la donnée de Cauchy du problème de référence (\mathcal{P}_0). En effet, on a vu dans le paragraphe 2.3.1 qu'un faisceau gaussien en régime transitoire, à un instant initial $t = 0$, prend la forme d'un paquet d'onde gaussien. Par ailleurs, d'après l'exemple 9 du chapitre 3, le problème défini par

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - c^2(\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[, \\ u(\mathbf{x}, 0) = a^0 w(\mathbf{x}, 0), & x \in \mathbb{R}^d, \\ \frac{\partial u(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = b^0 w(\mathbf{x}, 0), & x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (4.42)$$

où $(a^0, b^0) \in \mathbb{C}^2$ et où $w(\mathbf{x}, 0)$ est un paquet d'onde gaussien d'amplitude unitaire (voir définition (3.48)), a pour solution la somme $u(\mathbf{x}, t) = u^+(\mathbf{x}, t) + u^-(\mathbf{x}, t)$ de deux faisceaux gaussiens transitoires $u^+(\mathbf{x}, t)$ et $u^-(\mathbf{x}, t)$. Ainsi, en vue d'obtenir une solution propagée par superposition de faisceaux gaussiens du type $u^\pm(\mathbf{x}, t)$, on cherche à représenter la donnée de Cauchy du problème (\mathcal{P}_0) à l'aide d'une superposition de paquets d'onde gaussiens. A l'aide de la théorie des *frames* résumée dans la section 4.1.2, l'enjeu ici est donc de construire un *frame* de paquets d'onde gaussiens permettant cette représentation.

Sur la base des travaux de QIAN et YING [149], on explicite d'abord le *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussiens utilisé par la suite. En s'appuyant sur les résultats obtenus dans les chapitres 2 et 3, on donne la forme de la solution propagée générée

par cette représentation initiale. De la même façon qu'en régime harmonique, les étapes importantes du calcul numérique des coefficients de décomposition sont ensuite abordées, à l'aide notamment d'algorithmes de transformées de Fourier rapides. La validité de ces représentations sur *frame* de paquets d'onde gaussien est finalement évaluée pour des champs transitoires représentatifs du CND par ultrasons.

4.3.1 Représentation d'une donnée de Cauchy par paquets d'ondes gaussiens

Soit $f \in H^1(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$ les fonctions décrivant la donnée de Cauchy du problème de référence (\mathcal{P}_0) (3.1), où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. On fait l'hypothèse que la solution au problème transitoire (\mathcal{P}_0) est calculée en dimension $d = 2$ dans un fluide. Les deux fonctions f et g , supposées à valeurs complexes, appartiennent à l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$. Ainsi, pour deux fonctions f_1 et f_2 dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$, le produit scalaire hermitien s'écrit

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f_1(\mathbf{x}) f_2^*(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x},$$

où f_2^* désigne le conjugué de la fonction f_2 . Pour la résolution du problème (\mathcal{P}_0) , dans cet espace de Hilbert, il existe plusieurs types de *frames* exploitables.

Revue bibliographique

Les travaux de CORDOBA et FEFFERMAN [40], puis de SMITH [164, 163], ont montré mathématiquement que certains paquets conservent leur forme au cours de leur propagation, dans des systèmes régis par l'équation des ondes. Appelés parfois *états cohérents* dans la littérature [84, 37, 182, 112] en référence à la mécanique quantique, ces paquets d'onde ont la particularité de vérifier un *principe d'échelle parabolique*. Ce principe, introduit sous le nom anglophone de *parabolic scaling principle* par CANDÈS [25, 26], traduit le fait qu'une approximation corpusculaire peut être faite pour décrire la propagation d'un paquet d'onde dont la longueur d'onde centrale est à peu près égale au carré de la largeur du paquet (transverse à sa direction de phase). Ce principe d'échelle parabolique est en fait une traduction géométrique de l'approximation paraxiale pour la propagation d'un paquet d'onde en régime transitoire. Grâce à cette approximation, la résolution d'un problème du type (\mathcal{P}_0) est simplifiée pour de tels paquets, et c'est ce qui a motivé dans la littérature le développement notable de *frames* de *curvelets* [26, 24], de *wave atoms* [48, 49, 50] et de *shearlets* [81]. Afin de renforcer ce *principe d'échelle parabolique*, la plupart de ces paquets d'onde ont une enveloppe dilatée dans l'hyperplan transverse à leur direction de phase. Pour des paquets d'onde gaussiens, on peut par exemple agir sur les valeurs de la matrice de courbure complexe \mathcal{M}_0 , et donc sur les demi-largeurs principales.

Toutefois, la construction et l'implémentation de *frames* de paquets d'onde gaussiens dont l'enveloppe est dilatée demeurent techniques à ce jour [3, 47]. C'est pourquoi, en pratique, les *frames* utilisés sont généralement composés de paquets d'onde gaussiens d'enveloppe circulaire [149, 9, 112, 11].

Frame multi-échelle de paquets d'onde gaussiens

Par la suite, on choisit d'utiliser le *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussiens, noté $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$, introduit par QIAN et YING [149]. Initialement développé dans une version « simple échelle » pour résoudre l'équation de Schrödinger en mécanique quantique dans [148], les mêmes auteurs ont dû prendre en compte le *principe d'échelle parabolique* pour la résolution du problème (\mathcal{P}_0) . Ainsi, pour tout indice μ , on note

$$\mu = (\ell; \mathbf{m}; \mathbf{n}) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2, \quad (4.43)$$

où les indices d'échelle ℓ , spatiaux $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ et spectraux $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ sont explicités par la suite. D'après [149], les éléments du *frame* $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$ sont définis par

$$\forall \mu \in I, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \psi_\mu(\mathbf{x}) = \left(\frac{\pi \sigma_\ell^2}{L_\ell} \right) e^{-\sigma_\ell^2 \pi^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}}|^2} e^{i2\pi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}}) \cdot \boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}}. \quad (4.44)$$

De la même façon que le *frame* de Gabor à fenêtre gaussienne de la section 4.2, le *frame* de paquets d'onde gaussiens est construit à partir d'une distribution d'amplitude gaussienne, circulaire, translatée en espace par le vecteur $\mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}}$ et translatée en phase par le vecteur $2\pi \boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}$. On relève toutefois trois différences par rapport au *frame* de Gabor défini par (4.9), (4.10) et (4.15). En effet,

- l'amplitude $(\pi \sigma_\ell^2 / L_\ell)$,
- la largeur de la fenêtre génératrice proportionnelle à $1/\sigma_\ell$,
- le vecteur $\boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}$ de translation en phase,

dépendent d'un indice d'échelle ℓ . Afin d'expliciter le rôle de cet indice d'échelle et les différents termes qui interviennent dans l'écriture de (4.44), on décrit à présent la construction multi-échelle [149] dans le domaine spectral (voir figure 4.7). Dans \mathbb{R}^2 , le domaine spectral est d'abord partitionné par des couronnes cartésiennes $\{C_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ telles que

$$\begin{cases} C_1 = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)_{i=1,2}, \xi_i \in [-4, 4]\}, \\ C_{\ell \geq 2} = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_i)_{i=1,2}, |\xi_i| \in [4^{\ell-1}, 4^\ell]\}. \end{cases} \quad (4.45)$$

Ainsi, la partition du domaine spectral dans \mathbb{R}^2 par les couronnes $\{C_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ est complète. Chaque couronne C_ℓ est ensuite subdivisée en cellules $B_{\ell, \mathbf{n}}$ telles que

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad B_{\ell, \mathbf{n}} = \left\{ \boldsymbol{\xi} = (\xi_i)_{i=1,2}, \quad |\xi_i| \in \left[n_i 2^\ell, (n_i + 1) 2^\ell \right] \right\}, \quad (4.46)$$

où pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, les indices spectraux $\mathbf{n} = (n_i)_{i=1,2}$ sont tels que $B_{\ell, \mathbf{n}} \subset C_\ell$. On note $W^\ell = 2^\ell$ la largeur des cellules $B_{\ell, \mathbf{n}}$, et on définit au centre de chaque cellule la coordonnée spectrale $\boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}$, telle que

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \forall B_{\ell, \mathbf{n}} \subset C_\ell, \quad \boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}} = \left(\left(n_i + \frac{1}{2} \right) 2^\ell \right)_{i=1,2}.$$

Pour chaque cellule $B_{\ell, \mathbf{n}}$, on définit également une distribution $\tilde{\psi}_{\ell, \mathbf{n}}$ centrée en $\boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}$, soit

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\psi}_{\ell, \mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}) = \exp \left\{ -\frac{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}|^2}{\sigma_\ell^2} \right\}, \quad (4.47)$$

où $\sigma_\ell = W_\ell/2$. Une telle valeur de σ_ℓ assure une « bonne » couverture du domaine spectral. On pose alors $L_\ell = 4\sigma_\ell = 2W_\ell$, qui est une largeur spectrale caractéristique au-delà de laquelle l'amplitude relative de $\tilde{\psi}_{\ell, \mathbf{n}}$ est inférieure à 2%. A partir de cette fenêtre d'analyse spectrale, on définit ensuite la famille $\{\tilde{\psi}_\mu\}$ où $\mu = (\ell, \mathbf{m}, \mathbf{n})$ et $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$, soit

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad \forall B_{\ell, \mathbf{n}} \subset C_\ell, \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2, \quad \tilde{\psi}_\mu(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{L_\ell} \tilde{\psi}_{\ell, \mathbf{n}} e^{-i2\pi \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}}}, \quad (4.48)$$

où $\mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}} = \mathbf{m}/L_\ell$. Finalement, le *frame* de synthèse $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$ est obtenu par transformée de Fourier inverse de la famille $\{\tilde{\psi}_\mu\}$, soit

$$\forall \mu \in I, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \psi_\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_\ell} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\psi}_\mu(\boldsymbol{\xi}) e^{i2\pi \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d^2 \boldsymbol{\xi}, \quad (4.49)$$

et d'après [149], il vient l'expression (4.44). Ainsi définie, QIAN et YING montrent que la famille $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$ vérifie la propriété fondamentale (4.1), et montrent donc que c'est un *frame*. Par ailleurs, si on note w_ℓ et $\lambda_{\ell, \mathbf{n}}$ la largeur et la longueur d'onde caractéristiques du paquet ψ_μ , alors on remarque que

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad w_{\ell, \mathbf{n}} = \mathcal{O}(1/W_\ell) = \mathcal{O}(2^{-\ell}) \quad \text{et} \quad \lambda_{\ell, \mathbf{n}} = \mathcal{O}(1/|\boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}|) = \mathcal{O}(4^{-\ell}). \quad (4.50)$$

Par conséquent, à toute échelle $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a $\lambda_\ell \sim w_{\ell, \mathbf{n}}^2$ et on en déduit que le *principe d'échelle parabolique* est vérifié. La forme des éléments ψ_μ d'écriture (4.44), pour un

indice d'échelle ℓ donné, est alors comparable⁷ à celle des éléments du *frame* de Gabor en régime harmonique, illustrés figure 4.1.

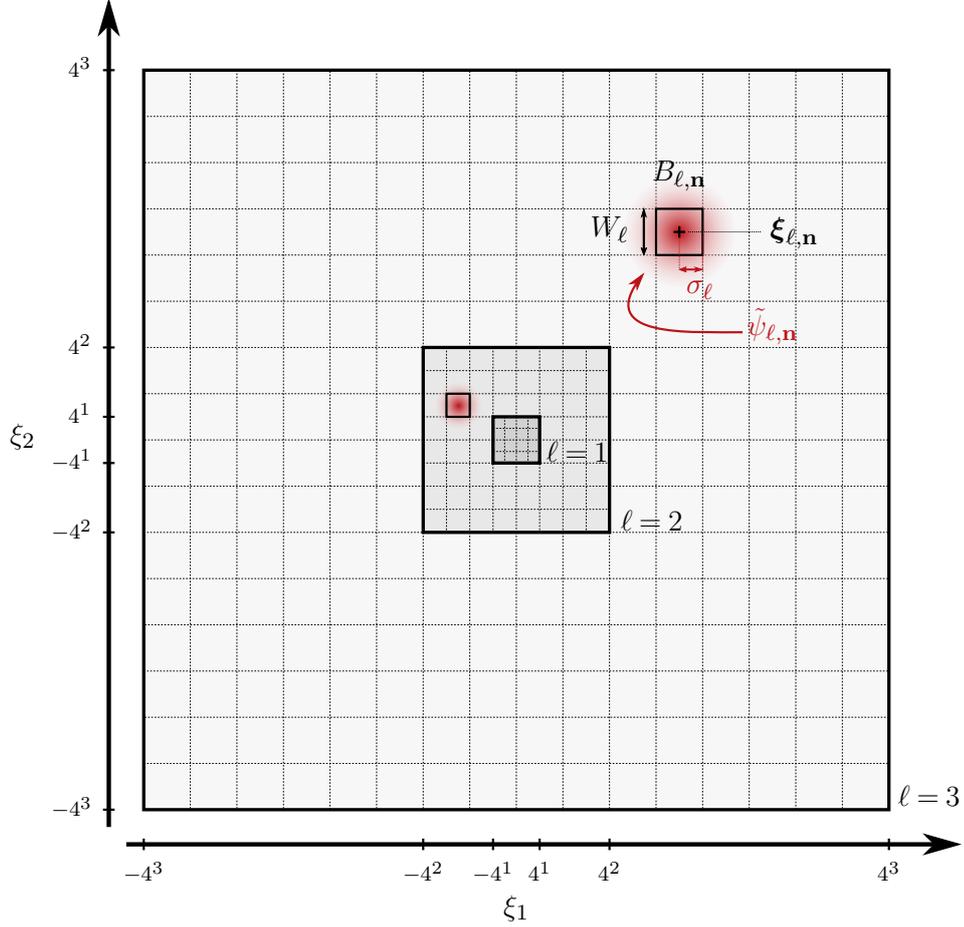


FIGURE 4.7 – Partition multi-échelle du domaine spectral

Frame dual

On dispose à présent d'un *frame* de synthèse $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$ de paquets d'onde gaussiens. D'après la proposition 4, on peut écrire les fonctions f et g de la donnée de Cauchy sous la forme

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \begin{cases} f(\mathbf{x}) = \sum_{\mu \in I} \langle f, \varphi_\mu \rangle_{\mathcal{H}} \psi_\mu(\mathbf{x}), \\ g(\mathbf{x}) = \sum_{\mu \in I} \langle g, \varphi_\mu \rangle_{\mathcal{H}} \psi_\mu(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (4.51)$$

7. Malgré les similitudes avec le *frame* de Gabor utilisé en régime harmonique, soulignons que le *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussiens est utilisé ici pour représenter une donnée de Cauchy, et non un terme source. Les conditions initiales ainsi générées par ces *frames* sont donc de natures très différentes.

avec $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I}$ le *frame* dual de $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$, qu'il reste à déterminer. En suivant [149], on pose

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \forall B_{\ell, \mathbf{n}} \subset C_\ell, \quad \tilde{\varphi}_{\ell, \mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\tilde{\psi}_{\ell, \mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi})}{\sum_{\ell, \mathbf{n}} \tilde{\psi}_{\ell, \mathbf{n}}^2(\boldsymbol{\xi})}. \quad (4.52)$$

De la même façon que pour la *frame* de synthèse, la fenêtre $\tilde{\varphi}_{\ell, \mathbf{n}}$ est génératrice d'une famille $\{\tilde{\varphi}_\mu\}$ où $\mu = (\ell, \mathbf{m}, \mathbf{n})$ et $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$, soit

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \forall B_{\ell, \mathbf{n}} \subset C_\ell, \forall \mathbf{m} \in \mathbb{Z}^2, \quad \tilde{\varphi}_\mu(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{L_\ell} \tilde{\varphi}_{\ell, \mathbf{n}} e^{-i2\pi \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}}}, \quad (4.53)$$

où $\mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}} = \mathbf{m}/L_\ell$. Par transformée de Fourier inverse de la famille $\{\tilde{\varphi}_\mu\}$, on obtient

$$\forall \mu \in I, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi_\mu(\mathbf{x}) = \frac{1}{L_\ell} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\varphi}_\mu(\boldsymbol{\xi}) e^{i2\pi \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}} d^2 \boldsymbol{\xi}. \quad (4.54)$$

D'après [149], la famille $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I}$ ainsi obtenue définit le *frame* dual recherché.

4.3.2 Solution propagée

Pour tout $\mu \in I$, on note $a_\mu^0 = \langle f, \varphi_\mu \rangle_{\mathcal{H}}$ et $b_\mu^0 = \langle g, \varphi_\mu \rangle_{\mathcal{H}}$ les coefficients de décomposition associés aux fonctions f et g de la donnée de Cauchy. Avec ces notations et d'après (4.51), le problème de référence (\mathcal{P}_0) (3.1) peut être écrit sous la forme

$$(\mathcal{P}_0) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - c^2(\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, +\infty[, \\ u(\mathbf{x}, 0) = \sum_{\mu \in I} a_\mu^0 \psi_\mu(\mathbf{x}), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = \sum_{\mu \in I} b_\mu^0 \psi_\mu(\mathbf{x}), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (4.55)$$

où les fonctions ψ_μ sont des paquets d'onde gaussiens. Ainsi, d'après l'exemple 9 du chapitre 3 et par linéarité de l'équation des ondes, une solution asymptotique au problème (4.55) est donnée par

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \geq 0, \quad u(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mu \in I} u_\mu^+(\mathbf{x}, t) + \sum_{\mu \in I} u_\mu^-(\mathbf{x}, t), \quad (4.56)$$

avec, pour tout $\mu \in I$, $\mathbf{x} \in \Omega$ et $t \geq 0$,

$$u_\mu^\pm(\mathbf{x}, t) = a_\mu^\pm(t) \exp \left\{ i\omega \left(\mathbf{p}_\mu^\pm(t) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu^\pm(t)) + \frac{1}{2} t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu^\pm(t)) \mathcal{M}_\mu^\pm(t) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu^\pm(t)) \right) \right\}.$$

Les conditions initiales pour les quantités $\mathbf{x}_\mu^\pm(t)$, $\mathbf{p}_\mu^\pm(t)$, $\mathcal{M}_\mu^\pm(t)$ et $a_\mu^\pm(t)$ sont données par (3.6) dans l'exemple 9. Avec les notations utilisées dans (4.44) pour définir le *frame* de synthèse, et en posant $\omega = |\boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}|$, il vient

$$\forall \mu \in I, \quad \begin{cases} \mathbf{x}_\mu^\pm(0) = \mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}}, \\ \mathbf{p}_\mu^\pm(0) = 2\pi \frac{\boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}}{|\boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}|}, \\ \mathcal{M}_\mu^\pm(0) = i \left(\frac{2\sigma_\ell^2 \pi^2}{|\boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}|} \right) \mathcal{I}, \\ a_\mu^\pm(0) = \frac{\pi \sigma_\ell^2}{2L_\ell} \left(a_\mu^0 \pm \frac{ib_\mu^0}{2\pi c(\mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}})} \right), \end{cases} \quad (4.57)$$

où \mathcal{I} est la matrice identité de taille 2×2 . Finalement, d'après (4.57), on dispose de conditions initiales univoques pour une famille de faisceaux gaussiens $\{u_\mu^+, u_\mu^-\}_{\mu \in I}$, à partir de la représentation sur *frame* (4.51) de la donnée de Cauchy du problème (\mathcal{P}_0) . Dans un milieu fluide homogène de célérité c_0 , d'après l'exemple 5 du chapitre 2 et l'annexe A, les solutions propagées sont connues de façon analytique, et par suite, la superposition de faisceaux gaussiens propagés (4.56).

4.3.3 Calcul numérique de la représentation

Dans le paragraphe précédent, on a montré que la solution (4.56) au problème de référence (\mathcal{P}_0) , par superposition de faisceaux gaussiens, est complètement déterminée par le jeu univoque de conditions initiales (4.57). Dans ces conditions initiales, les derniers termes à déterminer sont les coefficients de décomposition a_μ^0 et b_μ^0 , définis pour tout $\mu \in I$ par

$$a_\mu^0 = \langle f, \varphi_\mu \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \varphi_\mu^*(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} \quad \text{et} \quad b_\mu^0 = \langle g, \varphi_\mu \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \varphi_\mu^*(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x}, \quad (4.58)$$

où f et g constituent la donnée de Cauchy, et où le *frame* dual $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I}$ a été donné dans le paragraphe 4.3.1. Le *frame* dual n'étant explicite que dans le domaine spectral (4.53), il est préférable de calculer les coefficients a_μ^0 et b_μ^0 dans le domaine spectral en utilisant le théorème de Plancherel, soit pour toutes fonctions f_1 et f_2 dans $L^2(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} f_1(\mathbf{x}) f_2^*(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}_1(\boldsymbol{\xi}) \tilde{f}_2^*(\boldsymbol{\xi}) d^2 \boldsymbol{\xi} = \langle \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (4.59)$$

Dans le cas particulier des coefficients a_μ^0 et b_μ^0 , il vient pour tout $\mu \in I$

$$a_\mu^0 = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{f}(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\varphi}_{\ell, \mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i2\pi \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}}} d^2 \boldsymbol{\xi} \quad \text{et} \quad b_\mu^0 = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{g}(\boldsymbol{\xi}) \tilde{\varphi}_{\ell, \mathbf{n}}(\boldsymbol{\xi}) e^{i2\pi \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}}} d^2 \boldsymbol{\xi}. \quad (4.60)$$

Pour une donnée de Cauchy quelconque, ces intégrales ne peuvent généralement pas être évaluées de façon analytique. Néanmoins, on reconnaît dans (4.60) l'expression des transformées de Fourier inverses, appliquées aux fonctions \tilde{f} et \tilde{g} fenêtrées par la fonction $\tilde{\varphi}_{\ell, \mathbf{n}}$, et évaluées en $\mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}}$.

Bornes spatiales, bornes spectrales et indice d'échelle maximal

Afin de simplifier l'exposé de l'implémentation, on fait l'hypothèse que les fonctions f et g de la donnée de Cauchy sont à support compact dans un domaine carré $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sans perdre en généralité, les dimensions du domaine carré sont normalisées, de sorte que $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. La donnée discrète de f est connue sur un maillage cartésien régulier de N^2 points $(x_1[i], x_2[j]) \in \Omega$, N supposé pair, et on note

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket^2, \quad f[i, j] = f(x_1[i], x_2[j]) = f\left(\frac{i}{N}, \frac{j}{N}\right). \quad (4.61)$$

Réciproquement, la transformée de Fourier \tilde{f} est évaluée de façon discrète sur un maillage cartésien régulier de N^2 points $(\xi_1[i], \xi_2[j]) \in \tilde{\Omega}$, et on note

$$\forall (i, j) \in \left[\left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1 \right] \right]^2, \quad \tilde{f}[i, j] = \tilde{f}(\xi_1[i], \xi_2[j]) = \tilde{f}(i, j). \quad (4.62)$$

D'après la construction du *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussiens, il existe donc un indice d'échelle maximal ℓ^{\max} tel que

$$\forall (i, j) \in \left[\left[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1 \right] \right]^2, \quad \forall \ell \geq \ell^{\max}, \quad (\xi_1[i], \xi_2[j]) = (i, j) \in \bigcup_{k=1}^{\ell} C_k. \quad (4.63)$$

De façon explicite, cet indice vaut

$$\ell^{\max} = \left\lceil \frac{\ln(N/2)}{\ln(4)} \right\rceil. \quad (4.64)$$

Il conviendra donc, par la suite, de limiter la construction du *frame* aux indices d'échelles $\ell \leq \ell^{\max}$. Par suite, d'après (4.46) et la figure 4.7, le nombre de cellules $B_{\ell, \mathbf{n}}$ par couronne cartésienne C_ℓ est limité. Autrement dit, pour chaque indice ℓ , le nombre d'indices \mathbf{n} est limité. Enfin, l'ensemble infiniment dénombrable de coordonnées $\mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}} = \mathbf{m}/L_\ell$,

introduites dans (4.53) telles que $\mathbf{m} \in \mathbb{Z}$, est fini en pratique. En effet, la fenêtre de synthèse ψ_μ , d'après (4.44), est une gaussienne centrée à la position $\mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}}$. Or on a fait l'hypothèse que les fonctions f et g de la donnée de Cauchy sont à support compact dans le domaine carré $[0, 1] \times [0, 1]$. Sans plus de démonstration, grâce à la structure de *frame* de la famille $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I}$ et au caractère localisé des fonctions ψ_μ , on fait l'hypothèse que toutes fonctions f et g de la donnée de Cauchy peuvent être synthétisées par (4.51) à l'aide des fonctions ψ_μ telles que $\mathbf{x}_{\ell, \mathbf{m}} \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. On en déduit que pour chaque indice ℓ , on a $0 \leq m_1, m_2 \leq L_\ell < N$. Finalement, l'ensemble I des indices μ est réduit à

$$I = \{\mu = (\ell, \mathbf{m}, \mathbf{n}), \ell \leq \ell^{\max}, B_{\ell, \mathbf{n}} \subset C_\ell, 0 \leq m_1, m_2 \leq L_\ell\}. \quad (4.65)$$

Utilisation d'algorithmes de transformées de Fourier rapides

De la même façon que pour le calcul numérique des coefficients de décomposition sur *frame* de Gabor, il est opportun ici d'utiliser les algorithmes existants de transformées de Fourier rapides [39] – connus sous le nom de *Fast Fourier Transform* (FFT) – pour obtenir efficacement les coefficients a_μ^0 et b_μ^0 . Les considérations techniques liées à la discrétisation et à la périodisation sont abordées dans [149], et particulièrement détaillées dans [24] pour le calcul numérique de représentations sur *frame* de *curvelets*.

Algorithme 3 : Calcul de représentation sur *frame* de paquets d'onde gaussiens

Données : f, N

Résultat : $\forall \mu = (\ell, m_1, m_2, n_1, n_2) \in I, a_\mu^0 = a[\ell, m_1, m_2, n_1, n_2]$

```

1 Pré-calcul du frame :  $\ell^{\max}, I, \{C_\ell\}_{\ell=1 \dots \ell^{\max}}, \{B_{\ell, \mathbf{n}}\}_{(\ell, \mathbf{n}) \in I}, \{\tilde{\varphi}_{\ell, \mathbf{n}}\}_{(\ell, \mathbf{n}) \in I}$  ;
2 pour  $\ell = 1$  à  $\ell^{\max}$  faire
3   |   pour  $B_{\ell, \mathbf{n}} \subset C_\ell$  faire
4     |    $\forall (i, j) \in \left[ \left[ -\frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1 \right] \right]^2, \tilde{f}_{\ell, \mathbf{n}}[i, j] \leftarrow \text{FFT}\{f\}[i, j] \tilde{\varphi}_{\ell, \mathbf{n}}[i, j]$  ;
5     |    $\forall (i, j) \in \llbracket -L_\ell/2, L_\ell/2 \rrbracket^2, \tilde{f}_{\ell, \mathbf{n}}^w[i, j] \leftarrow W(\tilde{f}_{\ell, \mathbf{n}})[i, j]$  ;
6     |    $\forall (m_1, m_2) \in \llbracket 0, L_\ell \rrbracket^2, a[\ell, m_1, m_2, n_1, n_2] \leftarrow \text{FFT}^{-1}\{\tilde{f}_{\ell, \mathbf{n}}^w\}[m_1, m_2]$  ;
7   |   fin
8 fin
```

Dans l'algorithme 3, on résume très succinctement l'implémentation du calcul des coefficients a_μ^0 associés à la fonction f de la donnée de Cauchy. L'algorithme est identique

pour obtenir les coefficients b_μ^0 associés à la fonction g de la donnée de Cauchy. On dispose de la donnée de la fonction f discrétisée régulièrement sur N^2 points $(x_1[i], x_2[j]) \in \Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Plusieurs pré-calculs peuvent être réalisés une fois pour toutes, ligne 1. En effet, d'après (4.64), de la valeur de N on en déduit la valeur de l'indice d'échelle maximal ℓ^{\max} . D'après (4.65), de cet indice ℓ^{\max} on en déduit l'ensemble des indices I . La partition multi-échelle du domaine spectral (voir figure 4.7), composée des couronnes $\{C_\ell\}_{\ell \leq \ell^{\max}}$ et des cellules $\{B_{\ell, \mathbf{n}}\}$, peut alors être pré-construite pour différentes valeurs de $\ell^{\max} \geq 1$. De la même façon, le *frame* d'analyse $\{\varphi_\mu\}_{\mu \in I}$ peut être pré-construit (4.52). Ensuite, pour chaque indice d'échelle ℓ et couple (n_1, n_2) issus de l'ensemble I (4.65), on applique ligne (4) un fenêtrage $\tilde{\varphi}_{\ell, \mathbf{n}}$ à la transformée de Fourier \tilde{f} discrète, calculée numériquement par algorithme FFT. Le résultat est noté $\tilde{f}_{\ell, \mathbf{n}}$. Le fenêtrage $\tilde{\varphi}_{\ell, \mathbf{n}}$ étant localisée au voisinage de $\boldsymbol{\xi}_{\ell, \mathbf{n}}$ sur un support effectif de largeur L_ℓ , le résultat $\tilde{f}_{\ell, \mathbf{n}}$ est ramené ligne 5 en $[-L_\ell/2, L_\ell/2] \times [-L_\ell/2, L_\ell/2]$ par repliements successifs⁸, et est noté $\tilde{f}_{\ell, \mathbf{n}}^w$. Les coefficients de décomposition a_μ^0 sont finalement obtenus ligne 6, pour tout couple (m_1, m_2) , par transformée de Fourier inverse discrète (algorithme FFT) du résultat intermédiaire $\tilde{f}_{\ell, \mathbf{n}}^w$.

Compression par seuillage

Le *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussien, par construction, est surcomplet et donne lieu à des représentations redondantes, décrites par un grand nombre de coefficients a_μ^0 ou b_μ^0 . Or dans l'écriture (4.56) de faisceaux gaussiens superposés, à chaque paire de coefficients (a_μ^0, b_μ^0) sont associés deux faisceaux gaussiens $u_\mu^+(\mathbf{x}, t)$ et $u_\mu^-(\mathbf{x}, t)$. D'après l'exemple 5 du chapitre 2 et l'annexe A, ces faisceaux peuvent être évalués de façon analytique dans les milieux homogènes. Cette évaluation a néanmoins un coût numérique – même minime – pour chacun des faisceaux. Le temps de calcul de la superposition (4.56) est alors proportionnel au nombre de faisceaux mis en jeu, et ainsi proportionnel au nombre de paires de coefficients (a_μ^0, b_μ^0) prises en compte dans la représentation sur *frame*. Dans la perspective de calculs appliqués, on cherche donc à tirer profit de la redondance de la représentation et à réduire le nombre de ces coefficients.

Dans ces travaux de thèse, la compression des représentations sur *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussiens a été réalisée par simple seuillage des amplitudes initiales $|a_\mu^\pm(0)|$ (4.57), composées des coefficients a_μ^0 et b_μ^0 obtenus par l'algorithme 3 appliqué respectivement aux fonctions f et g de la donnée de Cauchy. Il s'agit donc d'un post-traitement sur les représentations obtenues de f et g . Soit $0 \leq \epsilon \leq 1$ le seuil relatif appliqué aux amplitudes initiales $|a_\mu^\pm(0)|$, et I_ϵ l'ensemble des indices associés aux coefficients a_μ^0

8. Dans la littérature anglophone, cette étape est réalisée par *wrapping* [24]

et b_μ^0 conservés après seuillage. L'ensemble I_ϵ est donc défini par

$$I_\epsilon = \left\{ \mu \in I, \frac{|a_\mu^\pm(0)|}{\max_{\mu \in I} |a_\mu^\pm(0)|} \geq \epsilon \right\}. \quad (4.66)$$

Par la suite, on notera f_ϵ et g_ϵ les fonctions de la donnée de Cauchy approchée, telles que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \begin{cases} f_\epsilon(\mathbf{x}) = \sum_{\mu \in I_\epsilon} a_\mu^0 \psi_\mu(\mathbf{x}), \\ g_\epsilon(\mathbf{x}) = \sum_{\mu \in I_\epsilon} b_\mu^0 \psi_\mu(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (4.67)$$

et on notera u_ϵ la solution approchée et propagée par superposition de faisceaux gaussiens, telle que

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t \geq 0, \quad u_\epsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mu \in I_\epsilon} u_\mu^+(\mathbf{x}, t) + \sum_{\mu \in I_\epsilon} u_\mu^-(\mathbf{x}, t). \quad (4.68)$$

Donnée transitoire de champ ultrasonore diffracté

Avant de calculer la solution approchée et propagée u_ϵ (chapitre 5), on souhaite évaluer la précision des fonctions f_ϵ et g_ϵ de la donnée de Cauchy approchée. Pour ce faire, on dispose d'un code développé au sein du DISC, au CEA, basé sur la Méthode des Éléments Finis Spectraux (SFEM) [94, 99]. Il permet notamment, sur la base d'une formulation spécifique, de calculer la seule contribution diffractée par un défaut soumis à un champ ultrasonore extérieur [93]. En d'autres termes, le résultat de ce calcul « tout numérique » est le champ ultrasonore total présent dans le volume, auquel la contribution du champ incident est soustraite. Le champ transitoire fournit alors les fonctions f et g de la donnée de Cauchy à partir desquelles on veut évaluer la précision des fonctions f_ϵ et g_ϵ . Les deux derniers paragraphes de ce chapitre sont consacrés à cette évaluation, à travers deux cas d'application.

Champ diffracté par un corps rigide rectiligne

Dans un premier temps, figure 4.8, on considère un milieu fluide homogène (eau) en dimension $d = 2$ de taille $36 \times 36 \text{mm}^2$, dans lequel est disposé un corps linéique rectiligne (—) supposé infiniment rigide (condition de déplacement nul) d'une longueur de 6mm. A l'aide d'un calcul SFEM, on simule le champ diffracté par ce défaut, résultant d'une onde plane incidente à 45° , excitée par un signal d'enveloppe gaussienne de fréquence

centrale de 1MHz. Les géométries (---) des macro-éléments et (■) des *couches absorbantes parfaitement adaptées* (ou PML, pour *Perfectly Matched Layer* dans la littérature anglophone) utilisés dans ce cas d'application sont également représentées figure 4.8. On observe notamment les fronts d'onde plans réfléchis et transmis, couplés aux fronts d'onde cylindriques diffractés – de moindre amplitude – par les bords gauche et droit.

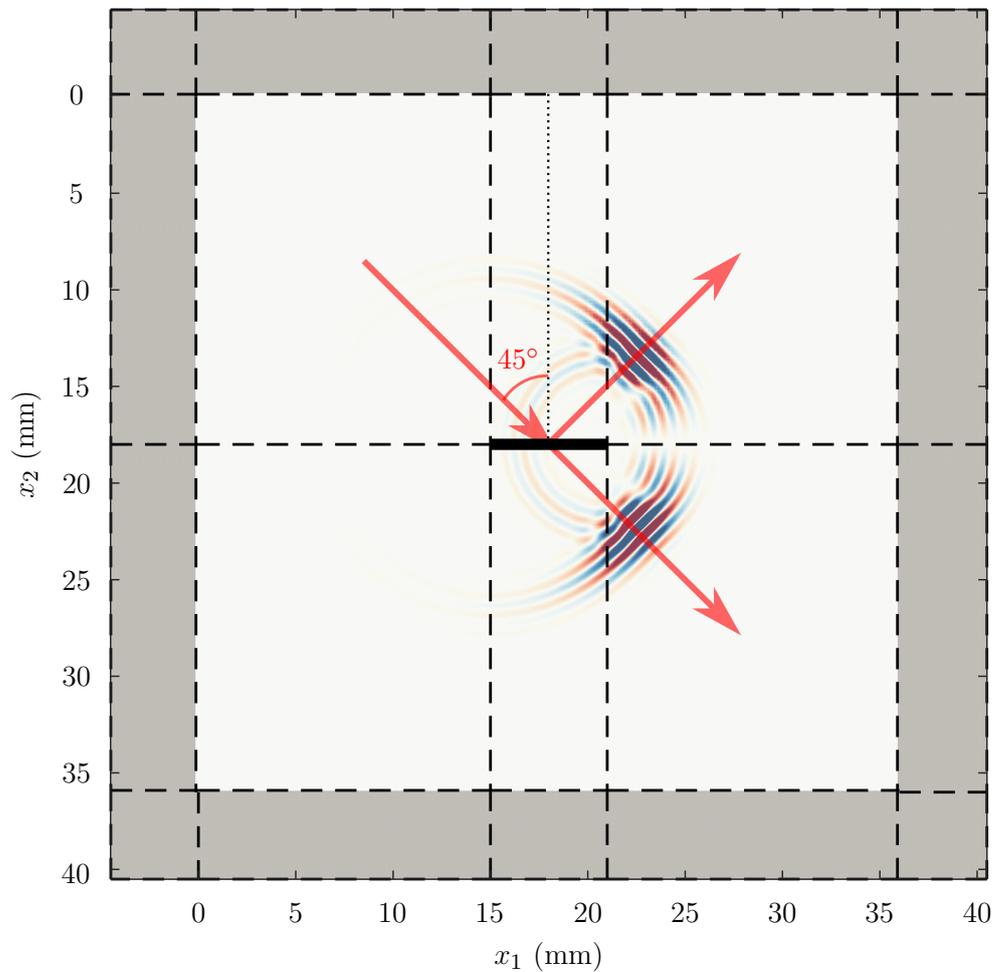


FIGURE 4.8 – Donnée de Cauchy (fonction f) : diffraction d'un faisceau d'onde plane par un corps linéique rectiligne (—), supposé infiniment rigide et en immersion dans l'eau (calcul par éléments finis spectraux)

Pour les besoins du calcul numérique des coefficients a_μ^0 et b_μ^0 , les données f et g sont extrapolées du résultat du calcul par SFEM, sur un maillage cartésien discrétisé régulièrement et composé de N^2 points où $N = 240$. La donnée de f extrapolée est

représentée figure 4.9a. D'après (4.64), l'indice d'échelle maximal vaut $\ell^{\max} = 4$. De cette valeur connue de ℓ^{\max} , d'après l'algorithme 3 on est en mesure de pré-calculer la *frame* (ligne 1) et de calculer numériquement les coefficients $\{a_\mu^0\}_{\mu \in I}$ et $\{b_\mu^0\}_{\mu \in I}$ pour les fonctions f et g . Après compression de la représentation, le champ approché f_ϵ par la superposition (4.67) des paquets d'onde gaussiens $\{\psi_\mu\}_{\mu \in I_\epsilon}$ est représenté figure 4.9b. Dans ce cas, le seuil relatif ϵ est choisi tel que $|I_\epsilon| = 2 \cdot 10^4$. On observe alors que les figures 4.9a et 4.9b sont visuellement identiques.

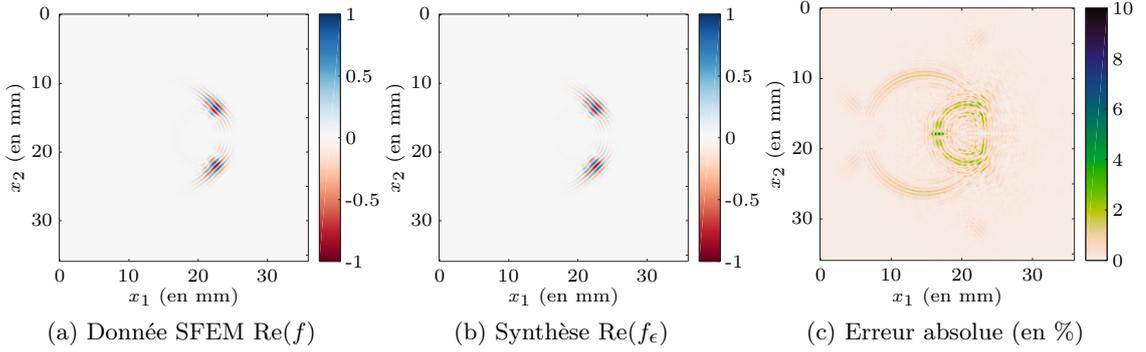


FIGURE 4.9 – Approximation par *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussiens ($|I_\epsilon| = 2 \cdot 10^4$) du champ diffracté par un solide rectiligne immergé dans l'eau

Afin d'évaluer de façon quantitative la précision de f_ϵ , on représente figure 4.9c l'erreur absolue, en %, définie par

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \text{Err}(\mathbf{x}) = \frac{|f(\mathbf{x}) - f_\epsilon(\mathbf{x})|}{\max_{\mathbf{x} \in \Omega} |f(\mathbf{x})|}. \quad (4.69)$$

Sur l'ensemble du domaine Ω , on observe que cette erreur absolue commise par l'approximation f_ϵ est inférieure à 5%. On observe en particulier que les erreurs commises sont localisées à l'endroit des fronts d'onde « secondaires », diffractés par les bords gauche et droit du corps rectiligne.

On souhaite à présent évaluer l'impact de la compression par seuillage sur la précision de la donnée de Cauchy approchée, par superposition de paquets d'onde gaussiens. La figure 4.10 représente l'évolution des différentes erreurs commises en fonction du nombre $|I_\epsilon|$ de paquets d'onde gaussiens pris en compte dans la représentation. Exprimées en % et pour un nombre donné de paquets d'onde, les erreurs $\|f - f_\epsilon\|_\infty / \|f\|_\infty$ et $\|g - g_\epsilon\|_\infty / \|g\|_\infty$ mesurent l'erreur absolue maximale commise sur l'ensemble du domaine Ω , respectivement pour les fonctions f et g de la donnée de Cauchy. On observe que pour $|I_\epsilon| < 9 \cdot 10^4$, ces deux erreurs décroissent de façon monotone pour un nombre croissant de paquets

d'onde gaussiens pris en compte. Pour $|I_\epsilon| > 9.10^4$, on observe que ces deux erreurs sont stabilisées à 0,6%. En particulier pour $|I_\epsilon| = 2.10^4$, on retrouve le niveau maximal d'erreur absolue à 5% commis par f_ϵ dans la figure 4.9. Une troisième erreur, définie par $\|u(\cdot, 0) - u_\epsilon(\cdot, 0)\|_E / \|u(\cdot, 0)\|_E$ où $\|\cdot\|_E$ est l'*energy norm* définie dans le chapitre précédent par (3.3), est représentée figure 4.10 en % en fonction de $|I_\epsilon|$. Elle permet d'évaluer de façon globale, sur le domaine Ω , la précision de la donnée de Cauchy pour la résolution du problème de référence (\mathcal{P}_0). On observe que cette erreur décroît de façon monotone pour un nombre de paquets $|I_\epsilon|$ croissant, et se stabilise à un niveau de 0,8% pour $|I_\epsilon| > 10^5$. Dans le cas de la figure 4.9, pour une synthèse de 2.10^4 paquets, cette erreur est de 5%.

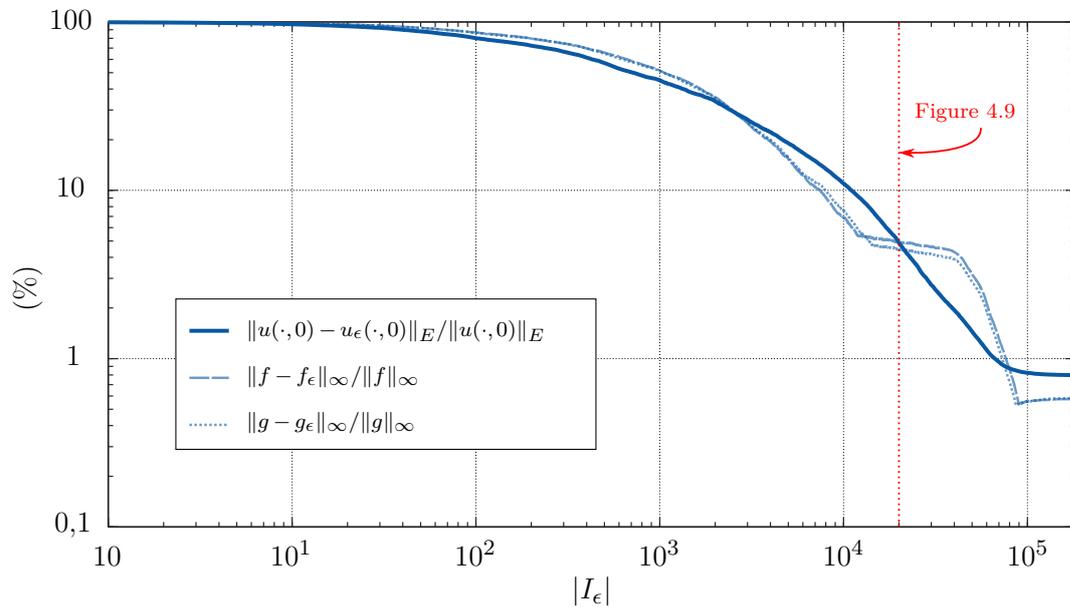


FIGURE 4.10 – Erreurs de synthèse de la donnée de Cauchy dans le cas rectiligne

Champ diffracté par un corps rigide courbe

Toutes choses égales par ailleurs, on considère à présent, figure 4.11, la présence d'un corps linéique courbe (—) de dimensions comparables au défaut rectiligne. Le champ transitoire calculé par SFEM résulte de la diffraction du même faisceau d'onde plane, émis cette fois en incidence normale (0°). On observe notamment les fronts d'onde réfléchis et transmis, couplés aux fronts d'onde cylindriques diffractés – de moindre amplitude – par les bords du défaut courbe. En particulier, la courbure du corps linéique génère une focalisation du front d'onde réfléchi.

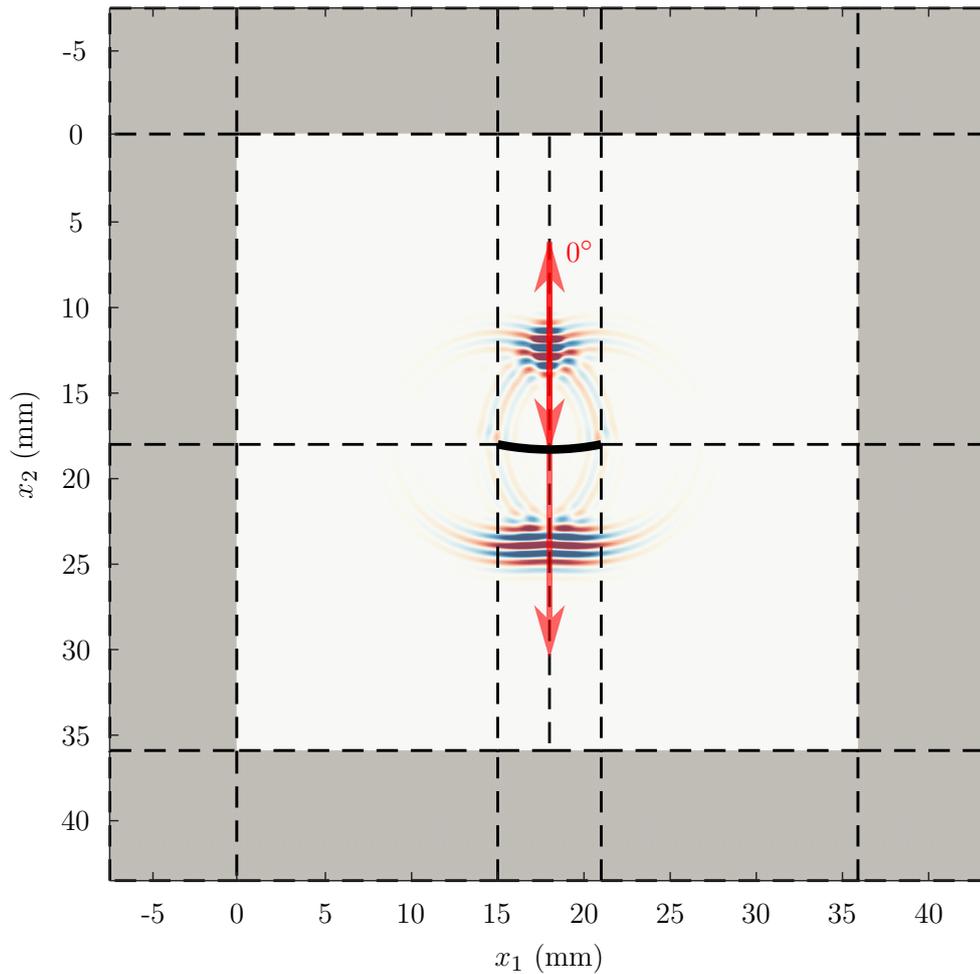


FIGURE 4.11 – Donnée de Cauchy (fonction f) : diffraction d'un faisceau d'onde plane par un corps linéique courbe (—), supposé infiniment rigide et en immersion dans l'eau (calcul par éléments finis spectraux)

La donnée de f , extrapolée sur le même maillage cartésien, est représentée figure 4.12a. Le calcul numérique des coefficients $\{a_\mu^0\}_{\mu \in I}$ et $\{b_\mu^0\}_{\mu \in I}$ pour les fonctions f et g est réalisé, la représentation est compressée de telle sorte que $|I_\epsilon| = 2 \cdot 10^4$, et on obtient figure 4.12b le champ approché f_ϵ . A nouveau, les figures 4.12a et 4.12b sont visuellement identiques. L'erreur absolue définie par (4.69), est représentée figure 4.12c, en %. Sur l'ensemble du domaine Ω , cette erreur est inférieure à 6%. Les erreurs commises sont essentiellement localisées à l'endroit des fronts d'onde « secondaires », diffractés par les bords.

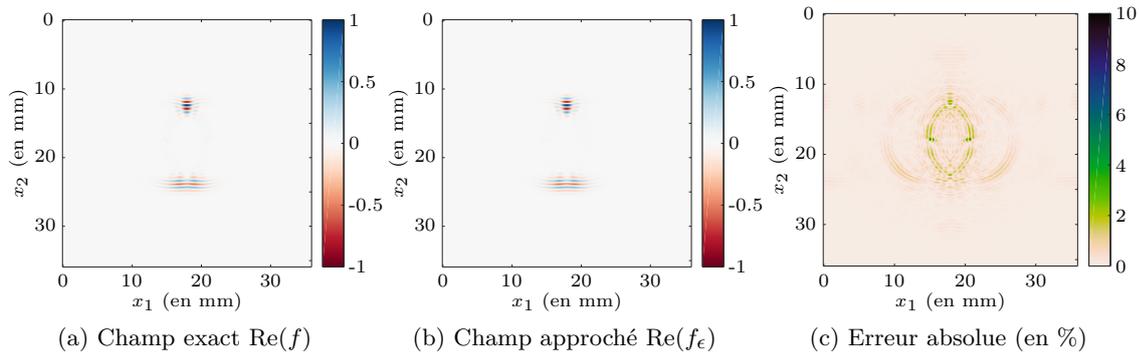


FIGURE 4.12 – Approximation par *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussiens ($|I_\epsilon| = 2 \cdot 10^4$) du champ diffracté par un solide courbe immergé dans l'eau

Les évolutions des erreurs $\|f - f_\epsilon\|_\infty / \|f\|_\infty$, $\|g - g_\epsilon\|_\infty / \|g\|_\infty$ et $\|u(\cdot, 0) - u_\epsilon(\cdot, 0)\|_E / \|u(\cdot, 0)\|_E$ sont données figure 4.13, en %, en fonction du nombre $|I_\epsilon|$ de paquets d'onde gaussiens pris en compte. Ces trois mesures de l'erreur décroissent de façon monotone à mesure que le nombre $|I_\epsilon|$ de paquets augmentent. Les erreurs absolues maximales se stabilisent pour $|I_\epsilon| > 1,3 \cdot 10^5$ à 0,7%, tandis que l'erreur au sens de la norme $\|\cdot\|_E$ se stabilise pour $|I_\epsilon| > 1,5 \cdot 10^5$ à 0,8%.

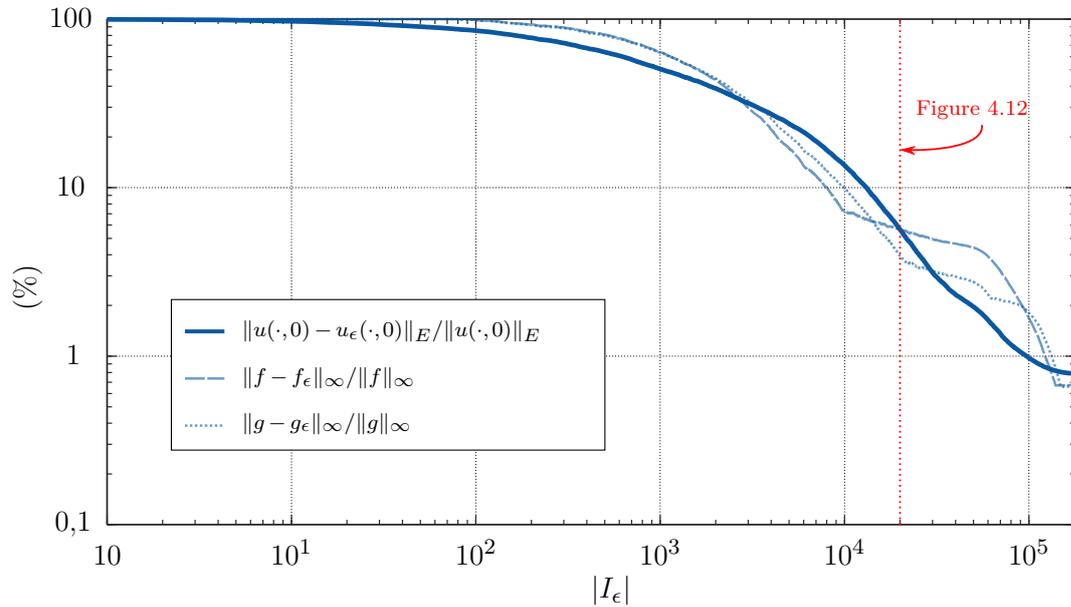


FIGURE 4.13 – Erreurs de synthèse de la donnée de Cauchy dans le cas courbe

À travers des exemples caractéristiques du CND par ultrasons, on a montré dans les sections 4.2 et 4.3 de ce chapitre qu'il est possible de reproduire fidèlement, à l'aide de *frames* bien choisis, les conditions aux bords des problèmes de référence (\mathcal{P}_0) et (P_0) . Ces représentations fournissent un ensemble de conditions initiales univoques pour des familles structurées de faisceaux gaussiens, qu'il est par ailleurs possible de compresser selon la précision initiale souhaitée. La validation des solutions approchées et propagées, obtenues par sommation de ces faisceaux propagés sur plusieurs longueurs d'onde, fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 5

Simulations de champs ultrasonores rayonnés et propagés

Sommaire

5.1 Rayonnement de sources ultrasonores en régime harmonique	155
5.1.1 Transducteur circulaire	156
5.1.2 Transducteur carré	159
5.1.3 Commentaires sur la méthode	161
5.2 Propagation de champ transitoire diffracté	163
5.2.1 Diffraction par un défaut linéique rectiligne	164
5.2.2 Diffraction par un défaut linéique courbe	168
5.2.3 Commentaires sur la méthode	172

Dans le chapitre 4, nous avons présenté les deux méthodes de frame qui ont finalement retenu notre attention pour initialiser des superpositions de faisceaux gaussiens, solutions approchées des problèmes de référence (\mathcal{P}_0) et (P_0) . L'étape de propagation de la donnée repose alors sur les systèmes d'équations différentielles ordinaires développées dans le chapitre 2. Enfin, l'étape de synthèse par superposition des faisceaux gaussiens est a priori validée par les résultats théoriques de la section 3.2. Ces solutions approchées, formulées en régime transitoire et en régime harmonique dans le chapitre 3, permettent de modéliser des configurations d'intérêt pour le contrôle non-destructif par ultrasons. Dans ce chapitre 5, on souhaite d'une part évaluer la genericité et la précision de ces solutions dans le cadre de configurations caractéristiques du contrôle non-destructif par ultrasons. D'autre part, sur la base de ces critères, les situer par rapport aux méthodes de décomposition itérative et de multi-faisceaux gaussiens présentées dans le chapitre 3. La première section de ce chapitre est dédiée aux validations en régime harmonique, tandis que les validations en régime transitoire font l'objet de la seconde section.

5.1 Rayonnement de sources ultrasonores en régime harmonique

Dans cette section, nous cherchons à évaluer la précision de la solution approchée et rayonnée \hat{u}_ϵ^* , qui d'après (4.41), pour tout point $\mathbf{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3 \geq 0)$, vaut

$$\hat{u}_\epsilon^*(\mathbf{x}) = \sum_{\mu \in I_\epsilon} \hat{c}_\mu^* \hat{\phi}_\mu(\mathbf{x}). \quad (5.1)$$

Nous rappelons ici les différentes étapes – déjà détaillées dans les chapitres précédents – qui conduisent à une telle formulation. Le champ harmonique \hat{u}_ϵ^* est une solution approchée au problème de référence (P_0) , défini dans le paragraphe 3.1.1 par

$$(P_0) : \Delta \hat{u}(\mathbf{x}) + \frac{\omega^2}{c^2(\mathbf{x})} \hat{u}(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \quad (5.2)$$

Dans la section 4.2, nous avons formulé des hypothèses associées au problème (P_0) , à savoir :

- la solution au problème (P_0) est calculée dans un demi-espace fluide (de dimension $d = 3$) ;
- le milieu fluide est supposé homogène de célérité c_0 ;
- la fonction \hat{f} est définie sur un plan Σ ;
- la fonction \hat{f} appartient à l'espace $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$ des fonctions de carré intégrable.

Sous ces hypothèses, d'après (4.40), nous avons obtenu une représentation approchée de \hat{f} , de la forme

$$\hat{f}_\epsilon^*(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{\mu \in I_\epsilon} \hat{c}_\mu^* \hat{\psi}_\mu(\bar{\mathbf{x}}), \quad (5.3)$$

où

$$\forall \mu \in I_\epsilon, \quad \hat{c}_\mu^* = \alpha_\epsilon \hat{c}_\mu = \alpha_\epsilon \langle \hat{f}, \hat{\phi}_\mu \rangle_{\mathcal{H}}. \quad (5.4)$$

La famille de fonctions $\{\hat{\psi}_\mu\}$ est un *frame* de Gabor à fenêtre gaussienne, de *frame* dual $\{\hat{\phi}_\mu\}$ (définis dans le paragraphe 4.2.1). L'ensemble d'indices I_ϵ , défini par (4.35), contient les limites spatiales et spectrales de la représentation, et sélectionne les coefficients de décomposition \hat{c}_μ dont l'amplitude relative est supérieure au seuil $0 \leq \epsilon \leq 1$. Le coefficient α_ϵ , défini par (4.37), permet de compenser la perte d'énergie due au seuillage en rehaussant les amplitudes $\{|\hat{c}_\mu|\}_{\mu \in I_\epsilon}$. Nous avons évalué la précision de \hat{f}_ϵ^* dans le paragraphe 4.2.3, dans les cas où \hat{f} modélise des sources ultrasonores circulaires et rectangulaires.

D'autre part, à partir d'un résultat obtenu dans la section 2.3.2, nous avons justifié que pour chaque fonction $\hat{\psi}_\mu$ du *frame* de synthèse rayonne un faisceau gaussien incliné $\phi_\mu(\mathbf{x})$, dont les conditions initiales sont explicitées dans le paragraphe 4.2.2. La solution

approchée et rayonnée (5.1) est alors obtenue par sommation de ces faisceaux gaussiens $\phi_\mu(\mathbf{x})$, pondérés par les coefficients \hat{c}_μ^* (5.4).

Dans la suite de cette section, la solution rayonnée approchée \hat{u}_ϵ^* sera calculée pour des transducteurs ultrasonores circulaires et carrés, et comparée d'une part à des solutions de référence (quasi-)exactes, d'autre part à la méthode multi-faisceaux gaussiens déjà présentée dans le paragraphe 3.3.1.

5.1.1 Transducteur circulaire

Le premier cas d'application, traité dans ce paragraphe, est celui du champ ultrasonore rayonné par un transducteur circulaire plan uniforme, de rayon a . Ce dernier est donc modélisé par un terme source \hat{f} dont le profil d'amplitude est représenté figure 5.1a. Dans le paragraphe 4.2.3, nous avons calculé numériquement les coefficients de décomposition \hat{c}_μ^* , et évalué les erreurs du terme source approché \hat{f}_ϵ^* (voir figure 4.5d et tableau 4.1).

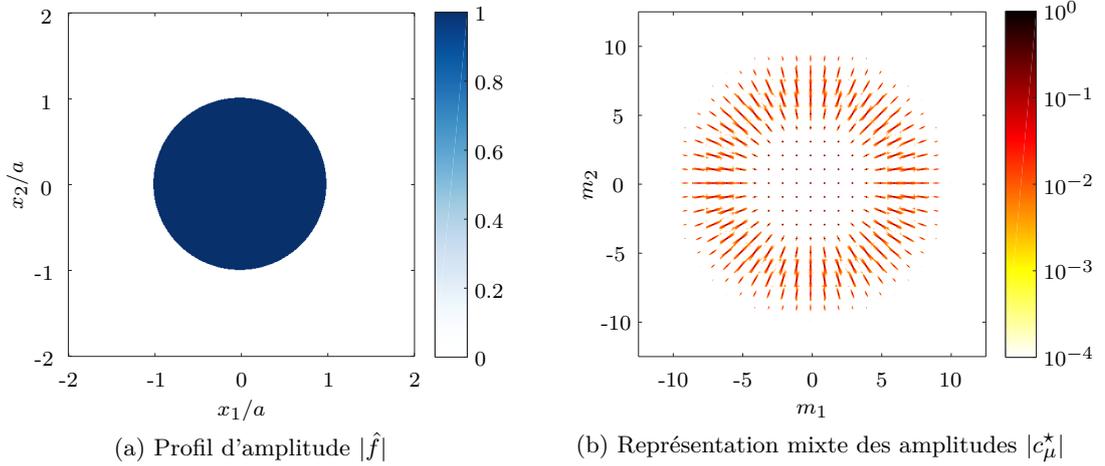
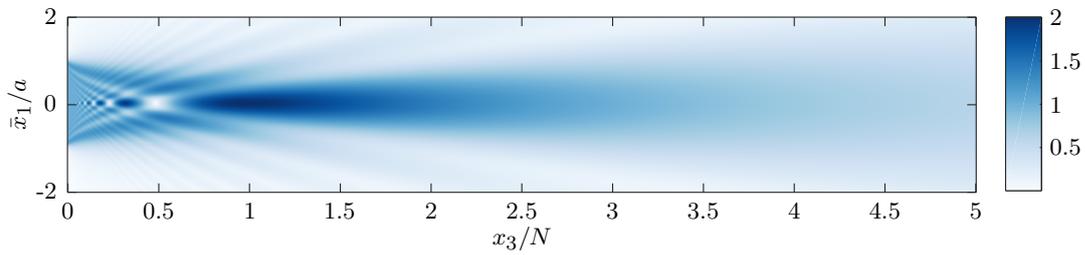


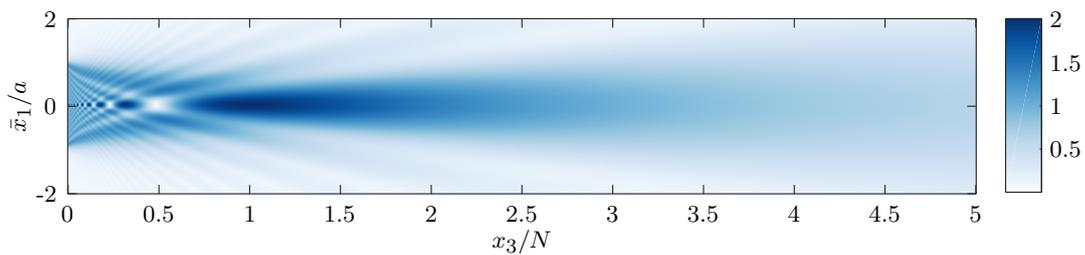
FIGURE 5.1 – Transducteur circulaire : modélisation du terme source \hat{f}

La figure 5.1b illustre la représentation mixte (\mathbf{m}, \mathbf{n}) des amplitudes $|\hat{c}_\mu^*|$, obtenue après compression ($\epsilon = 5.10^{-3}$) et réallocation de l'énergie. Cette visualisation permet d'interpréter géométriquement les conditions initiales $\mathbf{x}_\mu(s_0)$ et $\mathbf{p}_\mu(s_0)$ (4.19) des faisceaux gaussiens inclinés $\hat{\phi}_\mu$. En effet, sur la surface du transducteur circulaire et pour des positions initiales $\mathbf{x}_\mu(s_0)$ éloignées du bord, les amplitudes $|\hat{c}_\mu^*|$ sont significatives au voisinage de $(n_1, n_2) = (0, 0)$, ce qui correspond à des vecteurs lenteur initiaux $\mathbf{p}_\mu(s_0)$ (quasi-)normaux à la surface du transducteur. Pour des positions initiales $\mathbf{x}_\mu(s_0)$ proches du bord du transducteur, les amplitudes $|\hat{c}_\mu^*|$ significatives correspondent à des vecteurs lenteur initiaux $\mathbf{p}_\mu(s_0)$ contenus au voisinage du plan orthogonal à l'arrête de la surface

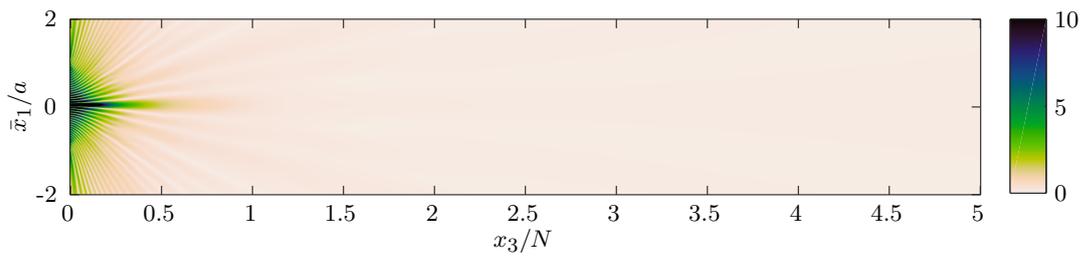
émettrice.



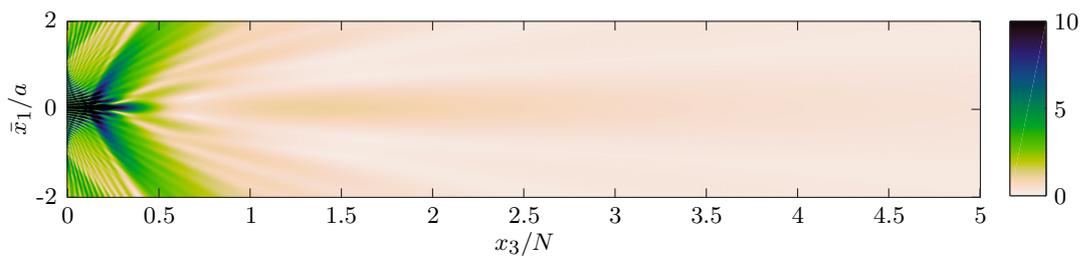
(a) Amplitude du champ approché et rayonné $|\hat{u}_\epsilon^*|$ pour $\epsilon = 5.10^{-3}$



(b) Amplitude de la solution de référence $|\hat{u}|$ d'après [132]



(c) Erreur absolue (en %) commise par la solution approchée \hat{u}_ϵ^*



(d) Erreur absolue (en %) commise par la solution multi-faisceaux gaussiens (voir figure 3.5)

FIGURE 5.2 – Transducteur circulaire : champ rayonné \hat{u}_ϵ^* , évaluation de l'erreur absolue et comparaison avec le champ multi-faisceaux gaussiens (voir paragraphe 3.3.1)

En suivant la démarche résumée dans le préambule de cette section, le champ rayonné \hat{u}_ϵ^* associé aux coefficients \hat{c}_μ^* représentés figure 5.1b est calculé par superposition des

faisceaux gaussiens inclinés $\hat{\phi}_\mu$. La figure 5.2a représente l'amplitude $|\hat{u}_\epsilon^*|$ en niveaux de bleu. A titre de comparaison, la figure 5.2b illustre l'amplitude d'une solution de référence, notée \hat{u} . Cette dernière est obtenue à l'aide d'une méthode de quadrature de Gauss (200 noeuds), appliquée à la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle [132]. Nous observons que les amplitudes $|\hat{u}_\epsilon^*|$ et $|u|$ sont semblables, excepté en champ très proche où les interférences tendent à être lissées. L'erreur absolue, définie pour tout point $\mathbf{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3 \geq 0)$ par

$$\text{Err}(\mathbf{x}) = \frac{|\hat{u}(\mathbf{x}) - \hat{u}_\epsilon^*(\mathbf{x}, t)|}{\max_{\mathbf{x}} |\hat{u}(\mathbf{x})|}, \quad (5.5)$$

est représentée figure 5.2c, en %. Il apparaît que les erreurs commises par la solution approchée u_ϵ^* ne sont significatives qu'en champ proche, pour $x_3 < N/2$, $N = a^2/\lambda$ étant la *distance de champ proche* associée au transducteur circulaire de rayon a . En champ lointain, pour $x_3 > N$, l'erreur commise par la solution approchée \hat{u}_ϵ^* est inférieure à 1%. Dans la même configuration, le champ rayonné par la méthode des multi-faisceaux gaussiens a été également calculé dans le paragraphe 3.3.1, et son amplitude que l'on note ici $|\hat{u}_{\text{MG}}|$ est représentée figure 3.5. L'erreur absolue (5.5) commise par le champ multi-faisceaux gaussiens est également calculée, et représentée figure 5.2d. Elle est globalement plus élevée que celle calculée pour la solution approchée \hat{u}_ϵ^* , en particulier en champ proche pour $x_3 < N$.

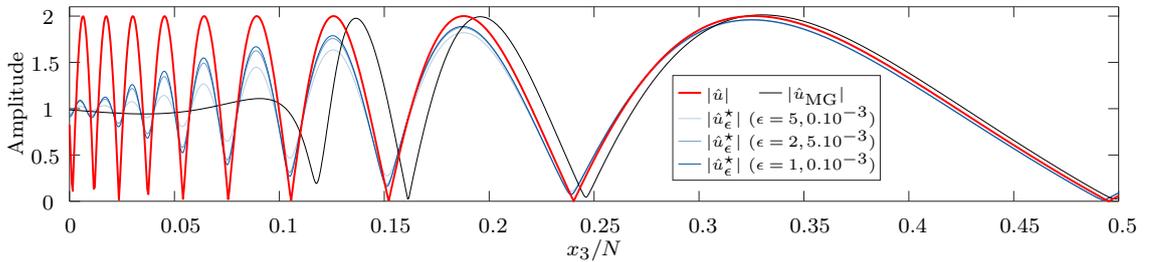


FIGURE 5.3 – Transducteur circulaire : champ rayonné le long de l'axe focal

Les différences notables apparaissant en champ proche, nous restreignons l'analyse à l'amplitude du champ rayonné sur l'axe focal $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ du transducteur, pour $x_3 \leq N/2$. La figure 5.3 représente cette amplitude, calculée par la solution analytique (—) donnée par

$$\forall x_3 \geq 0, \quad \hat{u}(0, 0, x_3) = \left[e^{ikx_3} - e^{ik\sqrt{x_3^2 + a^2}} \right],$$

par la méthode multi-faisceaux gaussiens \hat{u}_{MG} (—), et par la solution approchée \hat{u}_ϵ^* (—) pour différentes valeurs du seuil relatif ϵ . Nous observons que le champ \hat{u}_{MG} ne parvient pas à reproduire le régime fortement interférentiel en champ très proche, et que

les premiers minima de son amplitude ne sont pas correctement localisés. En revanche, la solution \hat{u}_ϵ^* conserve un comportement oscillant pour $x_3 \rightarrow 0$, en « phase » avec la solution exacte. En particulier, les amplitudes de ces oscillations tendent à se rapprocher, pour des valeurs décroissantes de ϵ , de celles décrites par \hat{u} . En d'autres termes, le champ proche décrit par \hat{u}_ϵ^* tend à se dégrader à mesure que l'on compresse la représentation sur *frame* de Gabor.

5.1.2 Transducteur carré

Nous nous intéressons dans ce paragraphe au champ ultrasonore rayonné par un transducteur carré plan uniforme, de largeur L . Il est modélisé par un terme source \hat{f} dont le profil d'amplitude est représenté figure 5.4, et dont la représentation mixte des coefficients \hat{c}_μ^* après compression ($\epsilon = 5.10^3$) et réallocation est illustrée figure 5.4b. Le champ rayonné \hat{u}_ϵ^* associé à ces coefficients \hat{c}_μ^* est calculé par superposition des faisceaux gaussiens inclinés $\hat{\phi}_\mu$. L'amplitude $|\hat{u}_\epsilon^*|$ est représentée figure 5.5a, et figure 5.5b l'amplitude $|\hat{u}|$ d'une solution de référence, à nouveau obtenue par quadrature de Gauss [131].

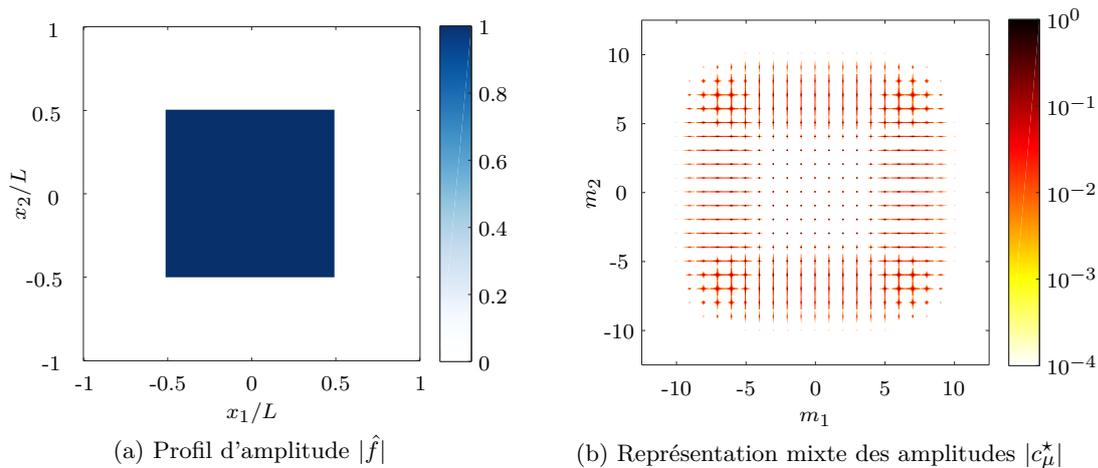
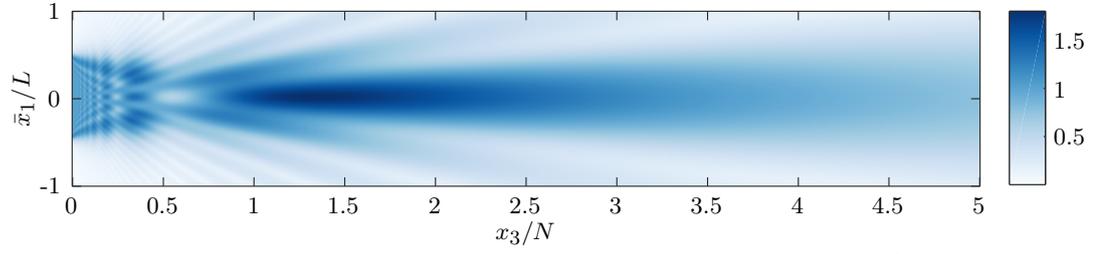


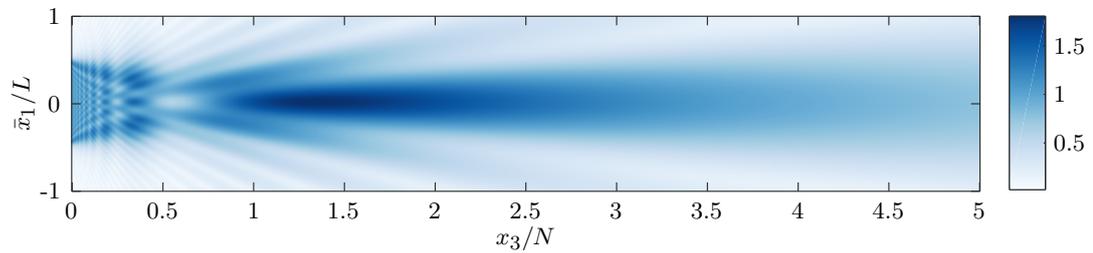
FIGURE 5.4 – Transducteur carré : modélisation du terme source \hat{f}

De la même façon que dans le cas circulaire, les amplitudes sont globalement semblables, à l'exception des interférences du champ très proche, moins contrastées dans la solution approchée. L'erreur absolue, définie pour tout point $\mathbf{x}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3 \geq 0)$ par (5.5), est représentée figure 5.5c, en %. Pour la même valeur de seuil ϵ que dans le cas circulaire, nous observons ici que les erreurs sont moins localisées et globalement plus élevées. Elles restent néanmoins significatives en champ proche uniquement, pour $x_3 < N$,

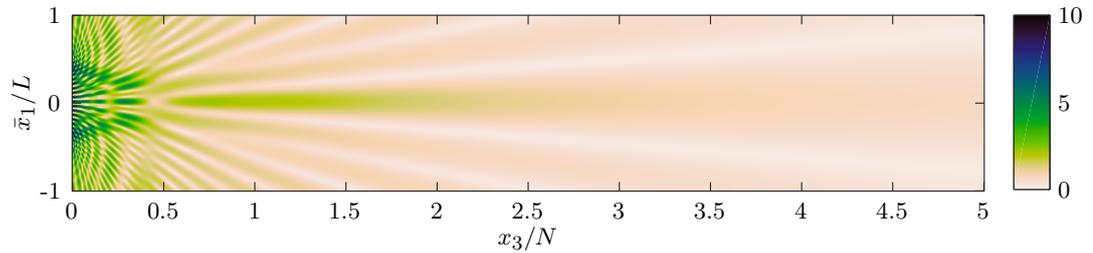
où $N = L^2/4\lambda$ est ici la distance de champ proche associée au transducteur circulaire de largeur L . En champ lointain, pour $x_3 > N$, l'erreur commise par la solution approchée \hat{u}_ϵ^* est inférieure à 2%.



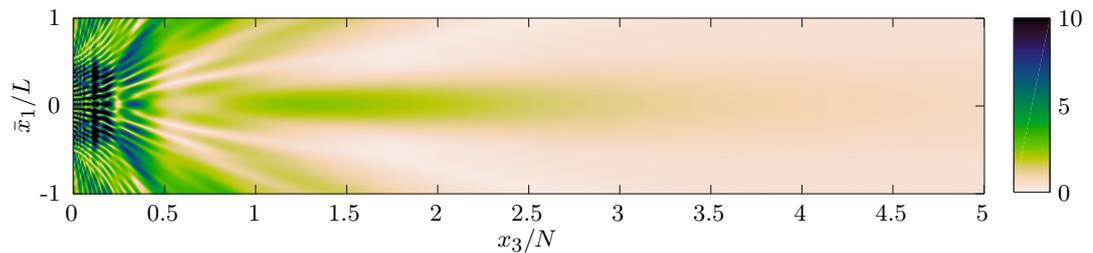
(a) Amplitude du champ approché et rayonné $|\hat{u}_\epsilon^*|$ pour $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$



(b) Amplitude de la solution de référence $|\hat{u}|$ d'après [131]



(c) Erreur absolue (en %) commise par la solution approchée \hat{u}_ϵ^*



(d) Erreur absolue (en %) commise par la solution multi-faisceaux gaussiens (voir figure 3.8)

FIGURE 5.5 – Transducteur carré : champ et rayonné \hat{u}_ϵ^* , évaluation de l'erreur absolue et comparaison avec le champ multi-faisceaux gaussiens (voir paragraphe 3.3.1)

Le champ multi-faisceaux gaussiens obtenu a été également calculé dans le paragraphe 3.3.1 pour cette même configuration, représenté figure 3.5, et son erreur absolue illustrée figure 5.5d. A nouveau, la solution multi-faisceaux gaussiens est globalement moins précise que la superposition \hat{u}_ϵ^* de faisceaux gaussiens inclinés, tout particulièrement en champ proche pour $x_3 < N/2$.

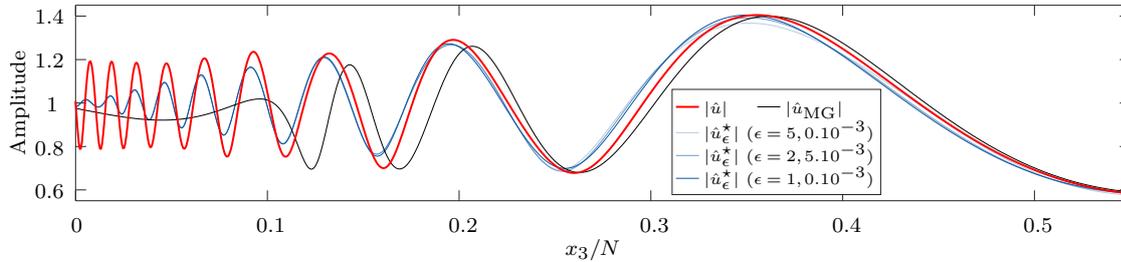


FIGURE 5.6 – Transducteur carré : champ rayonné le long de l’axe focal

Afin de mieux rendre compte des différentes descriptions du champ proche, nous représentons figure 5.6 l’amplitude du champ rayonné le long de l’axe $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$ du transducteur, pour $x_3 \leq 0.55N$. Les modèles et valeurs du seuil ϵ sont les mêmes que ceux utilisés pour la figure 5.3, à l’exception de la référence \hat{u} (—) qui ne peut être exprimée de façon analytique dans le cas d’un transducteur carré. Nous utilisons donc la même méthode de quadrature de Gauss que précédemment [131]. Alors que la solution multi-faisceaux-gaussiens \hat{u}_{MG} aboutit à une description pauvre du régime interférentiel en champ très proche, les solutions \hat{u}_ϵ^* parviennent à restituer les oscillations de l’amplitude de référence $|\hat{u}|$. Toutefois, contrairement au cas circulaire, la diminution du seuil ϵ entre les valeurs $5,0 \cdot 10^{-3}$ et $1,0 \cdot 10^{-3}$ n’améliore pas de façon significative la description du champ proche.

5.1.3 Commentaires sur la méthode

Les deux derniers paragraphes ont permis, dans des cas simples, de valider la stratégie de modélisation d’ondes de volume ultrasonores par superposition de faisceaux gaussiens inclinés, initialisés à l’aide de la représentation sur *frame* de Gabor de la source émettrice. En particulier, une analyse quantitative de l’erreur commise a permis de montrer que ces superpositions – pour un nombre suffisant de faisceaux gaussiens inclinés – sont globalement plus précises que la méthode multi-faisceaux gaussiens, usuelle en CND par ultrasons (voir paragraphe 3.3.1). La redondance de la description sur *frame* de Gabor permet en effet d’élargir le domaine de validité de l’approximation paraxiale, en considérant notamment de multiples directions d’émergence depuis le plan du transducteur.

La pertinence de cette approche pour des configurations plus réalistes et plus complexes (capteurs multi-éléments, présence d'interface, milieux solides, . . .) du CND par ultrasons reste une question ouverte, et nécessiterait des développements complémentaires pour pouvoir y répondre. En effet, dans ces travaux, nous avons essentiellement étudié et cherché à valider l'initialisation des faisceaux gaussiens par *frame* de Gabor. Il est toutefois possible, par exemple, d'étendre les systèmes de propagation obtenus dans le paragraphe 2.2.5 à des milieux solides anisotropes [155, 89, 90] et/ou en présence d'interfaces courbes [91].

5.2 Propagation de champ transitoire diffracté

Dans cette dernière section, nous souhaitons évaluer la précision de la solution approchée et propagée u_ϵ , qui d'après (4.68), pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$ et tout $t \geq 0$, vaut

$$u_\epsilon(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mu \in I_\epsilon} u_\mu^+(\mathbf{x}, t) + \sum_{\mu \in I_\epsilon} u_\mu^-(\mathbf{x}, t), \quad (5.6)$$

où u_μ^+ et u_μ^- sont des faisceaux gaussiens transitoires. En nous appuyant sur les chapitres précédents, nous rappelons les différentes étapes conduisant à l'écriture de u_ϵ . Le champ transitoire u_ϵ est une solution approchée au problème de référence (\mathcal{P}_0) , défini dans le paragraphe 3.1.1 par

$$(\mathcal{P}_0) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} - c^2(\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times [0, +\infty[, \\ u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ \frac{\partial u(\mathbf{x}, 0)}{\partial t} = g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases} \quad (5.7)$$

Dans la section 4.3, nous avons formulé des hypothèses associées au problème (\mathcal{P}_0) , à savoir :

- la solution au problème (\mathcal{P}_0) est calculée dans un espace fluide de dimension $d = 2$;
- le milieu fluide est supposé homogène, de célérité c_0 ;
- le domaine Ω est le carré adimensionné $[0, 1] \times [0, 1]$;
- les fonctions $f \in H^1(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$ sont à support compact dans Ω .

Sous ces hypothèses, d'après (4.67), nous avons obtenu les représentations approchées f_ϵ et g_ϵ des fonctions f et g , soit pour tout $\mathbf{x} \in \Omega$,

$$f_\epsilon(\mathbf{x}) = \sum_{\mu} a_\mu^0 \psi_\mu(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad g_\epsilon(\mathbf{x}) = \sum_{\mu} b_\mu^0 \psi_\mu(\mathbf{x}), \quad (5.8)$$

où

$$a_\mu^0 = \langle f, \varphi_\mu \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad b_\mu^0 = \langle g, \varphi_\mu \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (5.9)$$

La famille de fonctions $\{\psi_\mu\}$ est un *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussiens, de *frame* dual $\{\varphi_\mu\}$ (définis dans le paragraphe 4.3.1). D'après (4.57), on en déduit pour chaque indice μ les conditions initiales des faisceaux gaussiens transitoires u_μ^+ et u_μ^-

intervenant dans l'expression (5.6), en particulier les amplitudes initiales $a_\mu^\pm(0)$ telles que

$$\forall \mu \in I, \quad a_\mu^\pm(0) = \frac{\pi \sigma_\ell^2}{2L_\ell} \left(a_\mu^0 \pm \frac{ib_\mu^0}{2\pi c_0} \right), \quad (5.10)$$

où σ_ℓ et L_ℓ sont des paramètres du *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussiens. Enfin, l'ensemble I_ϵ des indices μ , défini par (4.66), sélectionne les coefficients $a_\mu^\pm(0)$ dont l'amplitude relative est supérieure au seuil $\epsilon \in [0, 1]$.

Dans la suite de cette section, la solution approchée et propagée u_ϵ sera calculée pour les données de Cauchy décomposées dans la section 4.3.3, à savoir la réponse transitoire de champs ultrasonores diffractés par des corps immergés, rectiligne et courbe. Ces solutions approchées u_ϵ seront comparées à des solutions de référence, obtenues par SFEM.

5.2.1 Diffraction par un défaut linéique rectiligne

Dans ce paragraphe, la configuration d'intérêt est celle illustrée par la figure 4.8. Cette dernière représente la fonction f de la donnée de Cauchy au problème (5.7). Il s'agit du champ ultrasonore diffracté, dans un domaine physique Ω de taille $36 \times 36 \text{mm}^2$, par un corps linéique rectiligne (—) d'une longueur 6mm immergé dans l'eau. Calculé par SFEM, ce champ résulte de la diffraction, par ce défaut, d'une onde plane incidente à 45° excitée par un signal d'enveloppe gaussienne de fréquence centrale 1MHz.

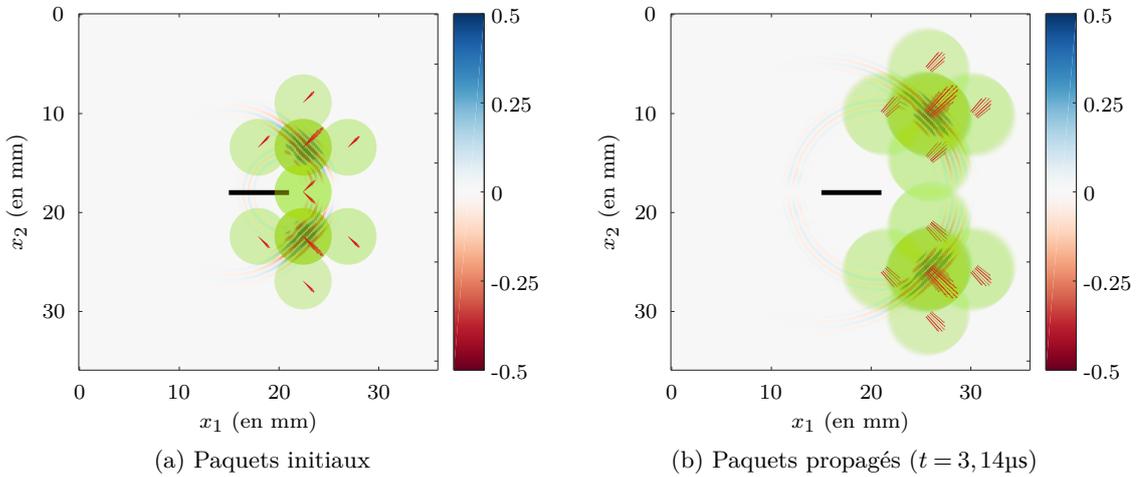


FIGURE 5.7 – Défaut rectiligne : principaux paquets d'onde gaussiens

Les coefficients de décomposition $\{a_\mu^0\}_{\mu \in I_\epsilon}$ et $\{b_\mu^0\}_{\mu \in I_\epsilon}$ associés aux fonctions f et g de cette donnée de Cauchy, de même que les synthèses approchées f_ϵ et g_ϵ , ont été obtenus

dans le paragraphe 4.3.3. En complément de la figure 4.9, la figure 5.7a représente, en surbrillance du champ $\text{Re}(f_\epsilon)$, les principaux paquets d'onde gaussiens ψ_μ résultant de la décomposition de f . Schématiquement, la localisation et la zone effective de leurs enveloppes sont données par des pastilles circulaires transparentes (●), tandis que les vecteurs lenteur initiaux $\mathbf{p}_\mu^\pm(0)$ des faisceaux gaussiens associés sont représentés par des flèches (→). On observe d'une part que les principaux paquets d'onde gaussiens sont localisés – en $\mathbf{x}_\mu^\pm(0)$ – où l'énergie ultrasonore est significative, c'est-à-dire au voisinage des fronts d'ondes principaux, réfléchi et transmis. D'autre part, les vecteurs lenteur initiaux sont bien orientés le long des directions de propagation des fronts réfléchi et transmis. La solution approchée et propagée u_ϵ est ensuite calculée d'après (5.6), pour $t = 3,14\mu\text{s}$. En surbrillance du champ $\text{Re}(u_\epsilon(\cdot, t))$ et avec les mêmes icônes que la figure 5.7a, la figure 5.7b représente les paquets propagés à l'aide des faisceaux gaussiens transitoires u_μ^+ et u_μ^- . Conformément aux résultats analytiques en milieu homogène (voir exemple 5 du chapitre 2), on observe que les paquets d'onde ont chacun été translatés par les vecteurs $(c_0 t)\mathbf{p}_\mu^\pm(0)/|\mathbf{p}_\mu^\pm(0)|$ et que les vecteurs lenteurs (→) sont inchangés. De même, conformément aux résultats du paragraphe 2.3.1, les enveloppes (●) se sont élargies¹. Qualitativement, par transparence, nous remarquons que l'évolution de ces paquets au cours de la propagation est cohérente avec la forme du champ $\text{Re}(u_\epsilon(\cdot, t))$.

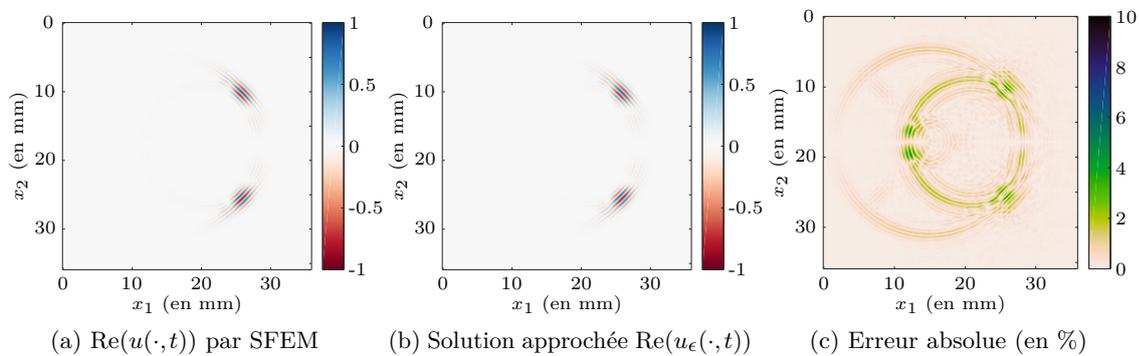


FIGURE 5.8 – Propagation du champ transitoire diffracté par un corps linéique rectiligne : comparaison de u_ϵ (pour $|I_\epsilon| = 2.10^4$) avec la solution calculée par SFEM

La figure 5.8a représente la solution de référence $u(\cdot, t)$, calculée par SFEM pour $t = 3,14\mu\text{s}$. Au même instant t , la solution approchée et propagée $u_\epsilon(\cdot, t)$ est représentée figure 5.8b, avec une valeur du seuil ϵ telle que $|I_\epsilon| = 2.10^4$. Afin d'évaluer de façon

1. Contrairement aux pastilles circulaires (●), les enveloppes propagées sont en réalité elliptiques.

quantitative la précision de u_ϵ à l'instant t , l'erreur absolue, définie par

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \text{Err}(\mathbf{x}) = \frac{|u(\mathbf{x}, t) - u_\epsilon(\mathbf{x}, t)|}{\max_{\mathbf{x} \in \Omega} |u(\mathbf{x}, t)|}, \quad (5.11)$$

est représentée figure 5.8c, en %. Sur l'ensemble du domaine Ω , l'erreur absolue est inférieure à 4,6%. En accord avec les erreurs initiales commises sur f_ϵ (voir figure 4.9c), on observe figure 5.8c que les erreurs du champ propagé sont essentiellement localisées à l'endroit des fronts d'onde cylindriques, issus de la diffraction des bords du défaut.

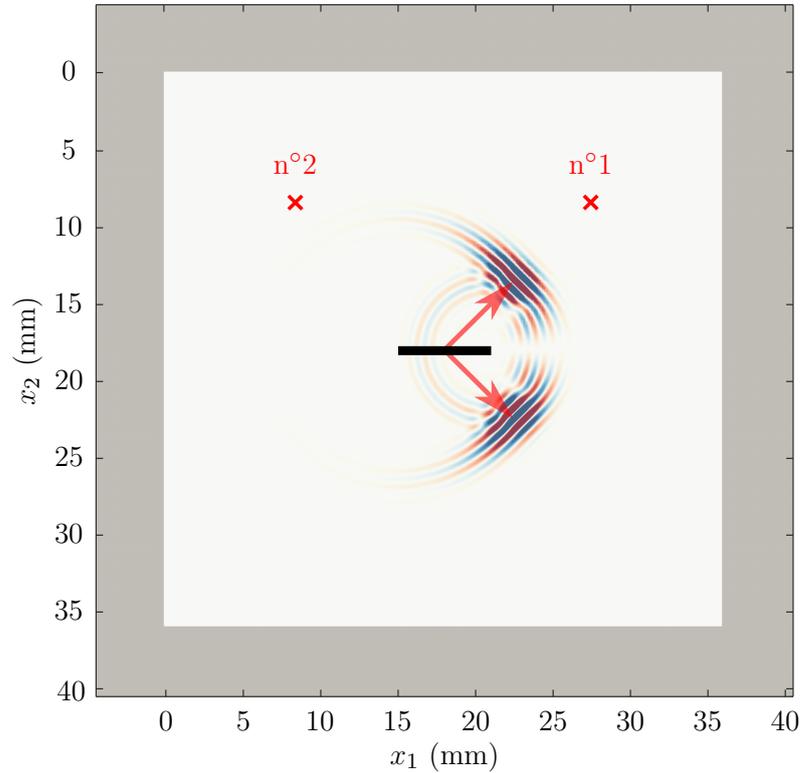


FIGURE 5.9 – Défaut rectiligne : positions des A-scans calculés

Une autre façon d'évaluer la précision de u_ϵ , dans la perspective appliquée de la simulation du CND par ultrasons, consiste à calculer les signaux ultrasonores temporels qui peuvent être mesurés en différents points de l'espace. Aussi appelés « A-scans », ces signaux sont en effet ceux généralement mesurés durant un contrôle par ultrasons. Dans le présent cas d'application, les positions auxquelles nous choisissons de calculer ces A-scans sont indiquées figure 5.9. La position n°1 est située dans la région effective de réflexion du front d'onde, tandis que la position n°2 se trouve dans une zone de

rayonnement dominée par la diffraction des bords. La figure 5.10 illustre différents A-scans, calculés à la position n°1. Le A-scan de référence, calculé par SFEM, est représenté par les points (•). Afin d'évaluer la solution approchée et propagée ainsi que l'effet de la compression sur sa précision, des A-scans générés par u_ϵ pour différentes valeurs du seuil relatif ϵ sont également représentés figure 5.10, par les lignes (—). Qualitativement, nous remarquons d'abord qu'à la position n°1, seul le front d'onde réfléchi par le défaut contribue principalement au signal reçu. Dans le détail, nous observons que pour $|I_\epsilon| = 10^3$, le A-scan généré par $\text{Re}(u_\epsilon(\mathbf{x}, t))$ est sous-évalué en amplitude. En introduisant davantage de faisceaux gaussiens dans la synthèse (5.6), les A-scans approchés convergent vers celui calculé par SFEM.

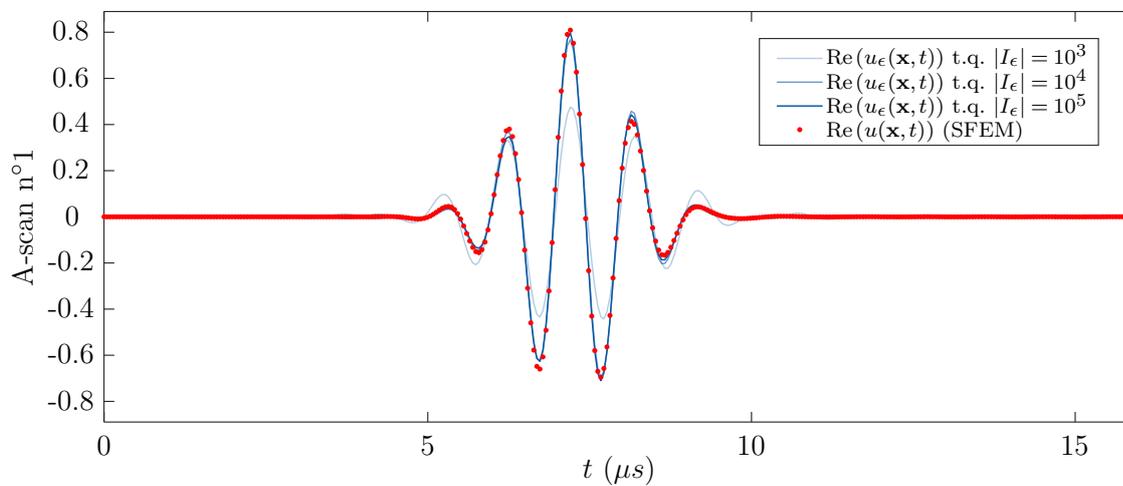


FIGURE 5.10 – Défaut rectiligne : comparaison des A-scans calculés à la position n°1 (voir figure 5.14) par SFEM et par u_ϵ pour différentes valeurs de ϵ

Les A-scans calculés à la position n°2 sont représentés figure 5.11. Ils sont obtenus et représentés de la même façon que pour la figure 5.10. L'allure est cette fois-ci plus complexe et les amplitudes significativement plus faibles qu'à la position n°1. Si on s'en réfère au A-scan calculé par SFEM, on distingue deux paquets d'ondes distincts. Le premier s'avère être la mesure transitoire du front d'onde cylindrique diffracté par le bord gauche, tandis que le second provient de celui diffracté par le bord droit. A ces faibles niveaux d'amplitude, il est nécessaire que la représentation sur *frame* de la donnée de Cauchy soit suffisamment riche pour permettre la reconstruction des fronts d'ondes secondaires. Ainsi, figure 5.11, seule la représentation telle que $|I_\epsilon| = 10^5$ permet à la solution approchée et propagée u_ϵ de reproduire les deux fronts d'onde observés. Nous remarquons toutefois que des écarts persistent pour les dernières oscillations à $t > 12\mu\text{s}$.

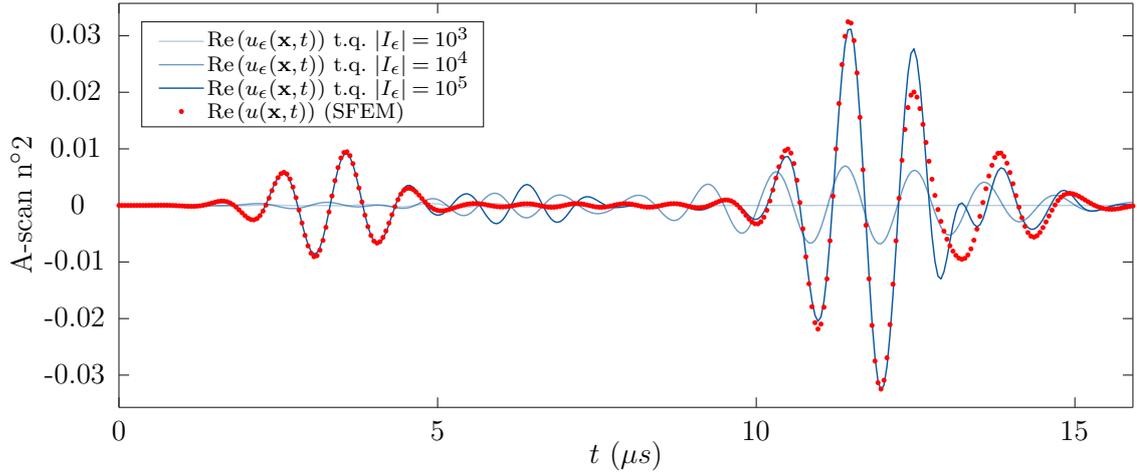


FIGURE 5.11 – Défaut rectiligne : comparaison des A-scans calculés à la position $n^{\circ}2$ (voir figure 5.14) par SFEM et par u_{ϵ} pour différentes valeurs de ϵ

5.2.2 Diffraction par un défaut linéique courbe

La configuration d'intérêt est à présent celle illustrée par la figure 4.11. Dans les mêmes conditions que le cas précédent, la donnée de Cauchy est ici le champ ultrasonore diffracté par un corps linéique courbe (\blacksquare), résultant de la même onde plane, mais en incidence normale (0°).

Les coefficients de décomposition $\{a_{\mu}^0\}_{\mu \in I_{\epsilon}}$ et $\{b_{\mu}^0\}_{\mu \in I_{\epsilon}}$ des fonctions f et g et les synthèses approchées f_{ϵ} et g_{ϵ} , ont été obtenus dans le paragraphe 4.3.3. Avec les mêmes éléments graphiques que dans le paragraphe précédent, les principaux paquets d'onde gaussiens ψ_{μ} résultant de la décomposition de f sont représentés figure 5.7a en surbrillance du champ $\text{Re}(f_{\epsilon})$. On y observe d'abord que les principaux paquets (\bullet) sont localisés au voisinage des fronts d'ondes principaux, réfléchi et transmis. En particulier, la focalisation du champ ultrasonore générée par le défaut courbe est illustrée par une plus forte concentration spatiale des paquets d'onde gaussiens. D'autre part, les vecteurs lenteur initiaux (\rightarrow) partagent un plus grand « éventail » de directions à l'endroit du front d'onde réfléchi qu'au voisinage du front transmis. En effet, à la focalisation en réflexion du défaut courbe s'ajoute un repliement du front d'onde, qui engendre localement un mélange dans les directions de phase. La solution approchée et propagée u_{ϵ} est ensuite calculée d'après (5.6), pour $t = 3,04\mu\text{s}$.

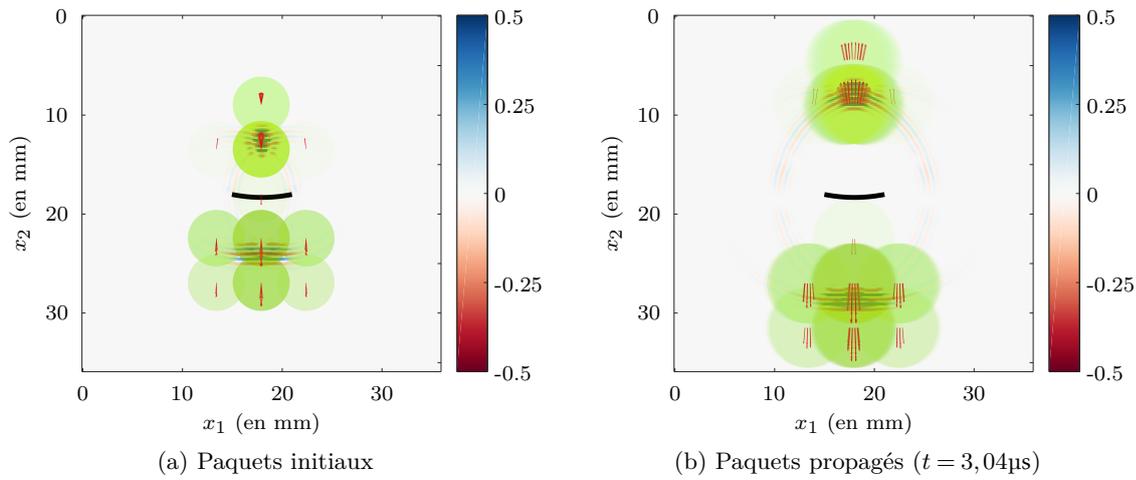
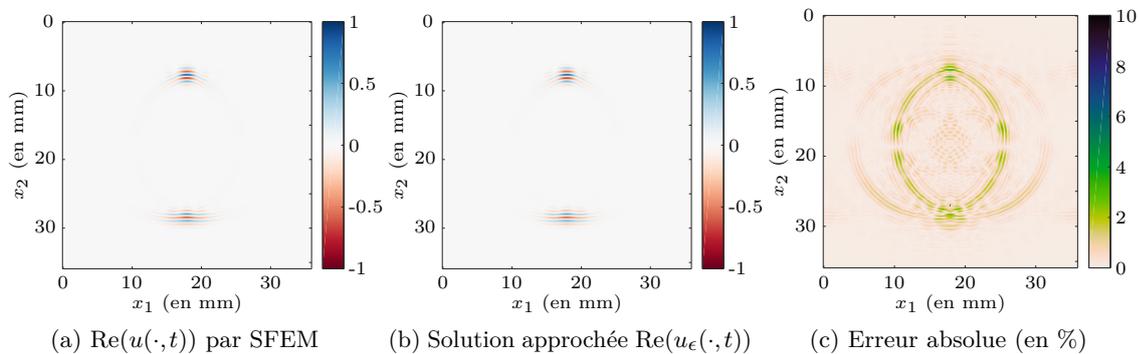


FIGURE 5.12 – Défaut courbe : principaux paquets d'onde gaussiens

En surbrillance de $\text{Re}(u_\epsilon(\cdot, t))$, les principaux paquets propagés sont représentés figure 5.12b. Nous faisons la même analyse que dans le cas du défaut rectiligne, sur la translation et la dilatation des paquets propagés. On observe à nouveau, de façon qualitative, que la localisation des paquets propagés est cohérente avec la propagation du champ diffracté.

FIGURE 5.13 – Propagation du champ transitoire diffracté par un corps linéique courbe : comparaison de u_ϵ (pour $|I_\epsilon| = 2.10^4$) avec la solution calculée par SFEM

Pour le même temps de propagation $t = 3,04\mu\text{s}$, la référence propagée $\text{Re}(u(\cdot, t))$ calculée par SFEM et la solution approchée propagée $\text{Re}(u_\epsilon(\cdot, t))$ (pour $|I_\epsilon| = 2.10^4$) sont représentées figures 5.13a et 5.13b respectivement. Les deux champs sont semblables, et nous donnons figure 5.13c l'erreur absolue définie par (5.11). Sur l'ensemble du domaine Ω , cette erreur absolue est ici inférieure à 3,8%. En particulier, conformément aux erreurs

de décomposition de la donnée de Cauchy (voir figure 4.12), les erreurs commises à la propagation sont localisées à l'endroit des fronts d'onde secondaires, diffractés par les bords du défaut courbe.

Afin d'approfondir l'analyse quantitative de u_ϵ , nous procédons à présent aux calculs de deux A-scans. Leurs positions (n°1 et n°2) sont précisées figure 5.14. La position n°1 est située au voisinage d'une zone de focalisation, tandis que la position n°2 est située dans une région de rayonnement dominée par la diffraction des bords.

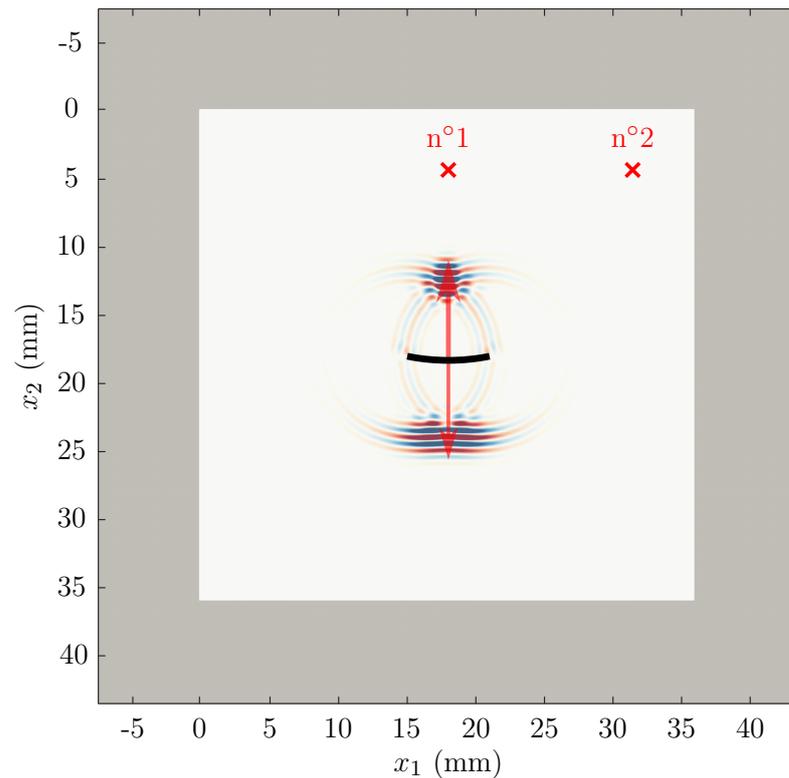


FIGURE 5.14 – Cas rectiligne : positions des A-scans calculés

La figure 5.15 représente différents A-scans calculés à la position n°1, en reprenant les mêmes éléments graphiques que les A-scans représentés dans le paragraphe précédent. Quelle que soit la nature du calcul, nous observons un paquet d'onde principal autour de $t = 8\mu\text{s}$, associé au front d'onde directement réfléchi. Ce dernier est d'autant mieux reconstruit que le nombre de paquets d'onde $|I_\epsilon|$ contenus dans la représentation de la donnée de Cauchy est élevé. Ici, nous observons que les A-scans générés par u_ϵ pour $|I_\epsilon| = 10^4$ et $|I_\epsilon| = 10^5$ sont très proches du signal de référence, calculé par SFEM. Par ailleurs, il est possible d'identifier sur le signal de référence un paquet de très faible

amplitude au voisinage de $t = 14\mu\text{s}$. Ce dernier provient de la deuxième diffraction par les deux bords du défaut.

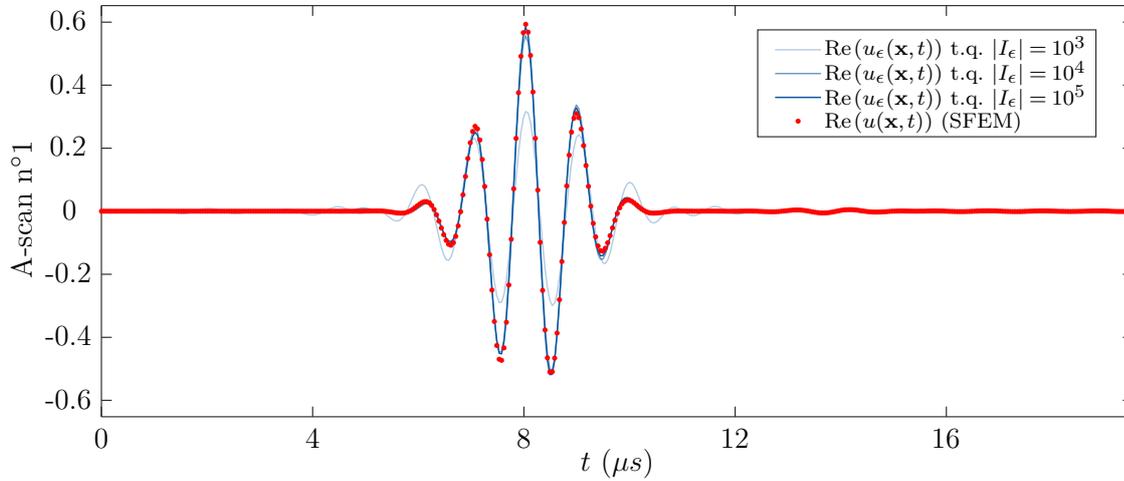


FIGURE 5.15 – Défaut courbe : comparaison des A-scans calculés à la position n°1 (voir figure 5.14) par SFEM et par u_ϵ pour différentes valeurs de ϵ

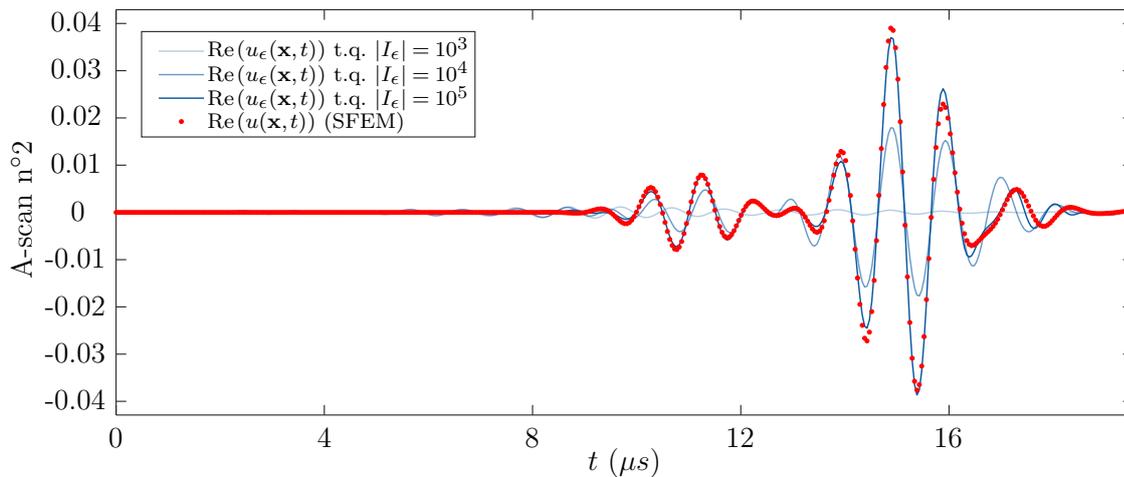


FIGURE 5.16 – Défaut courbe : comparaison des A-scans calculés à la position n°2 (voir figure 5.14) par SFEM et par u_ϵ pour différentes valeurs de ϵ

Les A-scans calculés à la position n°2 sont représentés figure 5.16. De moindre amplitude que ceux calculés à la position n°1, le signal de référence contient deux paquets distincts, le premier étant centré à $t = 11\mu\text{s}$ et le second à $t = 15\mu\text{s}$. Ceux-ci sont issus de la première diffraction, par le bord droit, puis le bord gauche. Pour ces bas niveaux d'amplitude, nous observons que la A-scan généré par u_ϵ , pour $|I_\epsilon| = 10^3$, ne parvient

pas à reproduire le signal de référence. Pour $|I_\epsilon| = 10^4$, les deux fronts sont identifiables, mais d'amplitude inférieure au calcul par SFEM. La représentation initiale composée de $|I_\epsilon| = 10^5$ paquets d'onde gaussiens permet alors de reproduire la signature des deux diffractions, aux bons niveaux d'amplitude. Seules les dernières oscillations, pour $t > 17\mu\text{s}$, ne sont pas reproduites correctement.

5.2.3 Commentaires sur la méthode

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons modélisé la réponse transitoire associée à des données de Cauchy, issues de calcul SFEM de champs diffractés par des corps linéiques immergés. A l'aide d'une superposition u_ϵ de faisceaux gaussiens initialisés par un *frame* multi-échelle de paquets d'ondes gaussiens, nous avons obtenu des résultats satisfaisants d'un point de vue quantitatif, conformes au calcul par SFEM. Ces solutions approchées ont été validées d'une part de façon globale, dans l'ensemble du domaine Ω (voir figures 5.8 et 5.13), et d'autre part de façon locale, dans la synthèse de différents A-scans (voir figures 5.10, 5.11, 5.15 et 5.16).

Dans ces travaux de thèse, seule une compression par seuillage des amplitudes $|a_\mu^\pm(0)|$ a été envisagée. L'ensemble I_ϵ des indices préservés par cette compression est alors défini par (4.66). Par ce critère, il est apparu nécessaire de prendre en compte un nombre $|I_\epsilon| = \mathcal{O}(10^5)$ de paquets d'onde gaussiens pour obtenir une reconstruction précise de la donnée de Cauchy (voir paragraphe 4.3.3) et une solution propagée valide, de façon globale, sur l'ensemble du domaine Ω . Toujours selon la même approche de compression, ce même nombre de paquets d'onde gaussiens s'est avéré être nécessaire dans la synthèse précise de différents A-scans. Or, ce critère portant sur la valeur des amplitudes $|a_\mu^\pm(0)|$ ne prend pas en compte le caractère localisé des A-scans calculés et des faisceaux u_μ^\pm . Ainsi, dans l'exemple du défaut rectiligne (voir figures 5.7 et 5.9), les faisceaux qui contribuent significativement au A-scan calculé à la position n°1 sont issus des principaux paquets de la décomposition initiale. Leur contribution est en réalité négligeable dans le calcul du A-scan n°2, bien que pris en compte dans sa synthèse par l'ensemble I_ϵ . Il conviendra donc, dans la perspective appliquée de modéliser le champ ultrasonore dans des zones réduites de l'espace, de développer des stratégies de compression prenant en compte ces arguments de localisation.

Conclusion et perspectives

Conclusion générale

L'objectif initial de ces travaux de thèse était de proposer une nouvelle approche de modélisation des ondes de volume ultrasonores, à l'aide de faisceaux gaussiens. Cette méthode devait alors se conformer aux contraintes classiques associées à la simulation du CND par ultrasons : la propagation sur un grand nombre de longueurs d'onde, la prise en compte indifférenciée des spécificités des sources ultrasonores en matière de géométrie et de signaux d'excitation, la présence de milieux fluides et/ou solides éventuellement inhomogènes et d'interfaces potentiellement complexes entre ces milieux. Le caractère asymptotique des faisceaux gaussiens devait par ailleurs motiver le développement d'une méthode au coût numérique comparable aux méthodes de type rayon déjà utilisées dans la plate-forme logicielle CIVA, développée au CEA.

L'initiation d'une telle démarche, nouvelle pour le DISC au CEA, a nécessité une revue bibliographique volontairement riche et transdisciplinaire de l'étude des faisceaux gaussiens. Historiquement, les premières constructions de faisceaux gaussiens sont issues de l'électromagnétisme, et ont été obtenues par différents moyens. Ainsi dès le chapitre 1, nous avons mis en avant, successivement, la résolution de l'équation parabolique, le calcul du rayonnement approché d'un point source complexe, puis celui d'une source plane de profil gaussien. Cet exposé a permis de souligner l'hypothèse de l'approximation paraxiale, nécessaire à la construction d'un faisceau gaussien. Toutefois, ces approches seules ne suffisent pas à satisfaire les contraintes de simulation propres au CND par ultrasons.

Nous nous sommes donc tournés vers un formalisme asymptotique plus générique, celui de la *méthode des rayons*. En effet, l'approximation paraxiale est généralement associée à un régime hautes fréquences, pour lequel les longueurs d'onde mises en jeu sont « petites » devant les distances de propagation effective. Nous avons donc justifié,

dans la suite du chapitre 1, son bien-fondé dans le cadre du CND par ondes de volume ultrasonores, à l'aide d'exemples concrets. Cette hypothèse des hautes fréquences permet de séparer, par les équations eikonale et de transport, la résolution de l'amplitude et de la phase des champs ultrasonores propagés. La résolution de ces équations est facilitée par la théorie de Hamilton-Jacobi, et fait apparaître des courbes caractéristiques de l'espace, les rayons.

Le faisceaux gaussiens peuvent être construits autour de ces rayons par un développement paraxial à coefficients complexes des fonctions d'amplitude et de phase. Ce choix de construction, exposé dans le chapitre 2, nous a permis de traiter indépendamment les régimes transitoire et harmonique, mais aussi de nous appuyer sur une littérature exhaustive en géophysique. Le développement paraxial mobilise alors plusieurs quantités caractéristiques des faisceaux gaussiens, parmi lesquelles la matrice de courbure complexe, qui agit à la fois sur l'enveloppe d'amplitude gaussienne et sur la courbure du front d'onde. Dans les régimes transitoire et harmonique, l'ensemble de ces quantités caractéristiques vérifient des systèmes d'équations différentielles ordinaires que nous avons explicités. Afin d'illustrer la forme des faisceaux gaussiens propagés et de faciliter la suite du manuscrit, nous avons démontré et donné des solutions analytiques à ces systèmes en milieux homogènes, pour des conditions initiales particulières.

Jusqu'alors, les équations qui régissent la propagation de faisceaux gaussiens uniques ont été obtenues en l'absence de source. Or, la modélisation quantitative de configurations de CND par ultrasons nécessite la prise en compte des sources ultrasonores, car c'est la forme de ces dernières qui définit l'allure des solutions propagées. Nous avons alors proposé, dans le chapitre 3, deux problèmes de référence à résoudre, munis de conditions aux bords précises. En régime transitoire, il s'agit de l'équation des ondes associée à des conditions initiales portant sur le champ ultrasonore et sa dérivée temporelle (problème de Cauchy). En régime harmonique, c'est l'équation de Helmholtz qui est utilisée, enrichie d'un second membre modélisant un terme source sur un bord du domaine. Sauf cas particuliers, un faisceau gaussien unique ne suffit pas à approcher les solutions, potentiellement complexes, de ces problèmes de référence. La linéarité des équations de propagation permet néanmoins d'envisager des superpositions de faisceaux gaussiens. Dès lors, nous avons été confrontés à deux problématiques essentielles dans la construction de solutions approchées par superposition de faisceaux gaussiens.

La première problématique porte sur la convergence asymptotique de ces solutions approchées. S'il a été observé empiriquement dans la littérature que ces solutions approchées

sont satisfaisantes, la justification rigoureuse de leur convergence est longtemps restée une question ouverte. Néanmoins, une revue de résultats récents d'analyse mathématique a permis, dans le chapitre 3, de nous conforter dans l'idée que ces superpositions, au sens de normes particulières, convergent vers les solutions exactes des problèmes de référence.

La seconde problématique concerne l'initialisation des faisceaux gaussiens. En effet, chacun des faisceaux gaussiens qui composent la superposition est défini par un jeu de quantités caractéristiques, qui vérifient des systèmes différentiels paramétrés. La résolution de ces derniers nécessite que ces quantités caractéristiques soient initialisées. Cette initialisation nécessaire soulève donc deux questions corollaires. À partir de quelles données ces quantités peuvent-elles être initialisées ? De combien de faisceaux doivent être composées ces solutions approchées ? Pour apporter des premiers éléments de réponse, dans la suite du chapitre 3, nous avons passé en revue et implémenté deux méthodes existantes d'initialisation. La première, en régime harmonique, est la méthode *multi-faisceaux gaussiens*. La seconde, en régime transitoire, est une méthode de *décomposition itérative*. Pour les deux méthodes, la réponse apportée à la problématique de l'initialisation réside dans la reconstruction optimisée des conditions aux bords. En d'autres termes, les conditions initiales des faisceaux gaussiens à propager sont obtenues par minimisation de l'erreur entre la superposition et les conditions aux bords données. Bien que les résultats de reconstruction par ces méthodes soient satisfaisants, ces dernières présentent certaines limites pratiques. En régime harmonique, la méthode multi-faisceaux gaussiens n'est applicable que pour des géométries particulières de transducteurs, et n'est valide que pour synthétiser des champs collimatés. En régime transitoire, il n'est pas possible de prédire le temps de calcul nécessaire – potentiellement long – à la décomposition itérative précise d'une donnée de Cauchy quelconque.

La stratégie d'initialisation adoptée dans ces travaux de thèse repose sur la théorie des *frames*. Dans le chapitre 4, nous avons commencé par donner les quelques propriétés associées à ces espaces fonctionnels redondants, qui permettent de reconstruire précisément tous types de conditions aux bords mesurables. En régime harmonique, on a utilisé un *frame* de Gabor pour reconstruire le terme source associé à l'équation de Helmholtz. En régime transitoire, c'est un *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussiens qui permet la reconstruction de la donnée de Cauchy. Ces *frames* sont construits de telle sorte à obtenir un jeu de conditions initiales univoques pour une famille structurée de faisceaux gaussiens. Dans les deux cas, nous avons explicité la construction de ces *frames*, donné les principales étapes d'implémentation pour le calcul numérique des coefficients de décomposition, puis validé la précision des reconstructions obtenues sur des données

concrètes, caractéristiques du CND par ultrasons. A travers ces exemples, nous avons illustré la compressibilité des représentations issues de *frames*, redondants par définition.

A partir de la validation des représentations sur *frame* des conditions aux bords, et de l'initialisation ainsi obtenue, nous avons calculé dans le chapitre 5 les solutions propagées sur plusieurs longueurs d'onde. En régime harmonique, par le calcul du champ rayonné par des transducteurs circulaire, rectangulaire et focalisé, nous avons comparé ces solutions propagées à celles obtenues par la méthode des multi-faisceaux gaussiens. On a alors montré que l'initialisation par *frame* de Gabor permettait d'obtenir des solutions plus précises que les multi-faisceaux gaussiens, en particulier en champ proche. En régime transitoire, les superpositions de faisceaux gaussiens propagés ont été comparées à une solution *purement numérique* de type SFEM. Les deux cas d'application consistaient à reproduire le champ diffracté par des corps rigides linéiques immergés, de géométrie rectiligne dans un premier temps, courbe dans un second temps. Dans les deux cas, les superpositions de faisceaux gaussiens initialisés par *frame* multi-échelle de paquets d'onde gaussiens ont montré un bon accord avec les solutions SFEM.

Perspectives

À l'issue de ces travaux de thèse, les études menées sur les méthodes d'initialisation de faisceaux gaussiens permettent de dégager plusieurs axes d'intérêt à approfondir.

Une perspective majeure de ces travaux concerne le couplage de l'approche présentée en régime transitoire avec une méthode *purement numérique* du type éléments finis. On peut en effet imaginer faire communiquer deux « boîtes éléments finis », distantes l'une de l'autre, et contenant chacune un défaut. En effet, à des instants jugés pertinents, on pourrait considérer le résultat du calcul d'une boîte comme étant la donnée de Cauchy du problème. Cette donnée servirait alors de condition initiale pour une famille de faisceaux gaussiens, qui se propageraient et constitueraient alors une nouvelle donnée d'entrée pour l'autre boîte. Dans la perspective de modéliser des interactions entre deux défauts, une telle stratégie de modélisation permettrait de réduire significativement la taille du domaine de calcul d'une stratégie intégralement basée sur les éléments finis, qui nécessiterait alors d'englober les deux défauts distants. Un autre cas d'application pourrait également porter sur le couplage d'un capteur piézoélectrique modélisé par éléments finis [95] avec un autre domaine éléments finis, contenant un défaut de géométrie complexe.

Un autre axe d'approfondissement est lié à la compressibilité des représentations des conditions aux bords, permise par la redondance des *frames* utilisés. Par exemple, la méthode de décomposition itérative [171] présentée dans le paragraphe 3.3.2 suggère que quelques centaines de paquets d'onde peuvent suffire à reconstruire fidèlement une donnée de Cauchy bidimensionnelle réaliste. Cette observation a déjà motivé certains auteurs à proposer des approches parcimonieuses [56, 3, 139, 55], qui privilégient le calcul rapide permis par la structure de *frame*, et qui contrairement à la décomposition itérative ne font pas intervenir des algorithmes coûteux d'optimisation du type NELDER et MEAD [138]. En particulier, DUCHKOV, ANDERSSON et OJALA [55] utilisent ces représentations parcimonieuses à des fins d'inversion sismique.

Un autre aspect de la compressibilité concerne la connaissance *a priori* de sous-domaines de calcul du champ propagé. En pratique, il est rarement nécessaire de connaître le solution propagée sur l'intégralité de son domaine de définition. En effet, l'information mesurée du point de vue de l'expérimentateur et/ou de l'opérateur est souvent réduite à quelques *A-scans*, c'est-à-dire à la réponse transitoire du milieu en quelques points donnés de l'espace. Or, ces travaux de thèse ont montré à plusieurs reprises que les faisceaux gaussiens sont des objets localisés en espace. On peut donc se convaincre qu'en un point précis du domaine de résolution, une grande partie des faisceaux gaussiens initialisés par un *frame* redondant ne contribue pas, ou de façon négligeable, à la synthèse du *A-scan* simulé. Une perspective consisterait donc à réduire significativement l'ensemble des faisceaux gaussiens propagés, à partir de la connaissance *a priori* du sous-domaine restreint de calcul. Une façon d'y parvenir consisterait à exploiter des méthodes existantes de tracés de rayon en rétro-propagation [34], dont la donnée permettrait d'identifier *a priori* les faisceaux gaussiens qui contribuent réellement dans la zone d'intérêt.

Enfin, une suite cohérente à ces travaux concerne l'application de l'ensemble de la démarche à des milieux solides isotropes. En effet, les cas de validation du chapitre 5 sont présentés en milieu fluide homogène, ce qui limite aujourd'hui l'applicabilité à des cas concrets du CND par ultrasons. Or, l'ensemble du formalisme présenté dans ce manuscrit est valide du moment que la quantité modélisée vérifie une équation des ondes ou une équation de Helmholtz. C'est notamment le cas pour les potentiels scalaire Φ et vectoriel Ψ , qui permettent une décomposition modale des ondes de volume ultrasonores dans les solides isotropes (voir chapitre 1).

Bibliographie

- [1] J.D. ACHENBACH. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Applied Mathematics and Mechanics Series. North-Holland Publishing Company, 1973 (cf. p. 19, 24).
- [2] A.S. ALEKSEEV, V.M. BABICH et B.Y. GELCHINSKII. « The ray method for computing the intensity of wave fronts ». In : *Problems of the dynamic theory of seismic wave propagation* 5 (1961), p. 3-24 (cf. p. 2).
- [3] F. ANDERSSON, M. CARLSSON et L. TENORIO. « On the Representation of Functions with Gaussian Wave Packets ». In : *Journal of Fourier Analysis and Applications* 18.1 (2011), p. 146-181 (cf. p. 105, 138, 177).
- [4] G. ARIEL, B. ENGQUIST, N.M. TANUSHEV et R. TSAI. « Gaussian beam decomposition of high frequency wave fields using expectation–maximization ». In : *Journal of Computational Physics* 230.6 (2011), p. 2303-2321 (cf. p. 54, 78).
- [5] J.A. ARNAUD. « Modes in Helical Gas Lenses ». In : *Applied Optics* 11.11 (1972), p. 2514 (cf. p. 14).
- [6] J.A. ARNAUD et H. KOGELNIK. « Gaussian Light Beams with General Astigmatism ». In : *Applied Optics* 8.8 (1969), p. 1687 (cf. p. 14).
- [7] V.M. BABIČ et T.F. PANKRATOVA. « Discontinuities of Green’s function in a mixed boundary value problem for a wave equation with a variable coefficient ». In : *Theory of functions. Spectral theory. Wave propagation. (A 74-10470 01-23) Leningrad, Izdatel’stvo Leningradskogo Universiteta, 1973, (1973), p. 9-27 (cf. p. 81).*
- [8] V.M. BABIČ et M.M. POPOV. « Gaussian summation method (review) ». In : *Radiophysics and Quantum Electronics* 32.12 (1989), p. 1063-1081 (cf. p. 4, 77, 83, 86).
- [9] G. BAO, J. LAI et J. QIAN. « Fast multiscale Gaussian beam methods for wave equations in bounded convex domains ». In : *Journal of Computational Physics* 261 (2014), p. 36-64 (cf. p. 138).
- [10] P. BERCZYŃSKI, Y. KRAVTSOV et G. ŹEGLINSKI. « Gaussian beam diffraction in inhomogeneous and nonlinear media : analytical and numerical solutions by complex geometrical optics ». In : *Open Physics* 6.3 (2008) (cf. p. 59).

- [11] M. BERRA, M. DE HOOP et J.L. ROMERO. « A multi-scale Gaussian beam parametrix for the wave equation : the Dirichlet boundary value problem ». In : *arXiv preprint arXiv :1705.00337* (2017) (cf. p. 49, 53, 78, 138).
- [12] D.E. BESKOS. « Boundary element methods in dynamic analysis ». In : *Applied Mechanics Reviews* 40.1 (1987), p. 1-23 (cf. p. 2).
- [13] G. BEYLKIN, R. COIFMAN et V. ROKHLIN. « Fast wavelet transforms and numerical algorithms I ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 44.2 (1991), p. 141-183 (cf. p. 116).
- [14] N. BLEISTEIN. *Saddle point contribution for an n-fold complex-valued integral*. 2012 (cf. p. 17).
- [15] N. BLEISTEIN et R.A. HANDELSMAN. *Asymptotic expansions of integrals*. Courier Corporation, 1975 (cf. p. 17).
- [16] E. BOSSY, M. TALMANT et P. LAUGIER. « Three-dimensional simulations of ultrasonic axial transmission velocity measurement on cortical bone models ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 115.5 (2004), p. 2314-2324 (cf. p. 2).
- [17] D. BOUCHE, F. MOLINET et R. MITTRA. *Asymptotic methods in electromagnetics*. Springer Science & Business Media, 2012 (cf. p. 43).
- [18] S. BOUGACHA. « High frequency oscillations in bounded elastic media ». Thèse de doct. Université d'Evry Val d'Essonne, 2009 (cf. p. 84, 86, 88).
- [19] S. BOUGACHA, J.-L. AKIAN et R. ALEXANDRE. « Gaussian beams summation for the wave equation in a convex domain ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 7.4 (2009), p. 973-1008 (cf. p. 78, 84, 86, 88, 90, 91).
- [20] G.D. BOYD et J.P. GORDON. « Confocal Multimode Resonator for Millimeter Through Optical Wavelength Masers ». In : *Bell System Technical Journal* 40.2 (1961), p. 489-508 (cf. p. 9).
- [21] R.N. BUCHAL et J.B. KELLER. « Boundary layer problems in diffraction theory ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13.1 (1960), p. 85-114 (cf. p. 44).
- [22] J.C. BUTCHER. *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. John Wiley et Sons Ltd, 2016. 538 p. ISBN : 1119121507 (cf. p. 36, 53, 59).
- [23] P. CALMON, S. MAHAUT, S. CHATILLON et R. RAILLON. « CIVA : An expertise platform for simulation and processing NDT data ». In : *Ultrasonics* 44 (2006), e975-e979 (cf. p. 3).
- [24] E. CANDÈS, L. DEMANET, D. DONOHO et L. YING. « Fast Discrete Curvelet Transforms ». In : *Multiscale Modeling & Simulation* 5.3 (2006), p. 861-899 (cf. p. 116, 137, 144, 145).
- [25] E.J. CANDÈS. « What is... a curvelet ? » In : *Notices of the American Mathematical Society* 50.11 (2003), p. 1402-1403 (cf. p. 137).

- [26] E.J. CANDÈS et L. DEMANET. « The curvelet representation of wave propagators is optimally sparse ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 58.11 (2005), p. 1472-1528 (cf. p. 116, 137).
- [27] P.G. CASAZZA et G. KUTYNIOK. *Finite frames : Theory and applications*. Springer, 2012 (cf. p. 116).
- [28] *Catalogue immersion probes (IM Series)*. Lien actif le 6 octobre 2018. URL : http://www.imasonic.com/Industry/IM_Series.php (cf. p. 30).
- [29] V. ČERVENÝ. *Seismic Ray Theory*. Cambridge University Press, 2001 (cf. p. 2, 3, 27, 28, 31, 35, 38, 40, 41, 55, 56, 63, 81).
- [30] V. ČERVENÝ, M.M. POPOV et I. PSENCIK. « Computation of wave fields in inhomogeneous media – Gaussian beam approach ». In : *Geophysical Journal International* 70.1 (1982), p. 109-128 (cf. p. 44, 83).
- [31] A. CHABORY, J. SOKOLOFF et S. BOLIOLI. « Novel Gabor-based Gaussian beam expansion for curved aperture radiation in dimension two ». In : *Progress In Electromagnetics Research* 58 (2006), p. 171-185 (cf. p. 120).
- [32] A. CHABORY, J. SOKOLOFF, S. BOLIOLI et P.F. COMBES. « Computation of electromagnetic scattering by multilayer dielectric objects using Gaussian beam based techniques ». In : *Comptes Rendus Physique* 6.6 (2005), p. 654-662 (cf. p. 18).
- [33] C. CHAPMAN. *Fundamentals of seismic wave propagation*. Cambridge university press, 2004 (cf. p. 2, 31, 35, 40, 81).
- [34] H. CHOUH. « Simulations interactives de champ ultrasonore pour des configurations complexes de contrôle non destructif ». Thèse de doct. Université de Lyon, 2016 (cf. p. 177).
- [35] G.C. COHEN. *Higher-Order Numerical Methods for Transient Wave Equations*. Springer Berlin Heidelberg, 2002 (cf. p. 2).
- [36] D. COLTON et R. KRESS. *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Society for Industrial et Applied Mathematics, 2013 (cf. p. 2).
- [37] M. COMBES, J. RALSTON et D. ROBERT. « A Proof of the Gutzwiller Semiclassical Trace Formula Using Coherent States Decomposition ». In : *Communications in Mathematical Physics* 202.2 (1999), p. 463-480 (cf. p. 137).
- [38] G.D. CONNOLLY. « Modelling of the propagation of ultrasound through austenitic steel welds ». Thèse de doct. Department of Mechanical Engineering, Imperial College London, 2009 (cf. p. 32).
- [39] James W. COOLEY et John W. TUKEY. « An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series ». In : *Mathematics of Computation* 19.90 (1965), p. 297-297 (cf. p. 129, 144).
- [40] A. CÓRDOBA et C. FEFFERMAN. « Wave packets and fourier integral operators ». In : *Communications in Partial Differential Equations* 3.11 (1978), p. 979-1005 (cf. p. 137).

- [41] R. COURANT et D. HILBERT. *Methods of Mathematical Physics*. Wiley-VCH Verlag GmbH, 1966 (cf. p. 35, 38).
- [42] M. DARMON, N. LEYMARIE, S. CHATILLON et S. MAHAUT. « Modelling of scattering of ultrasounds by flaws for NDT ». In : *Springer Proceedings in Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 2009, p. 61-71 (cf. p. 2).
- [43] M. DARMON et al. « A system model for ultrasonic NDT based on the Physical Theory of Diffraction (PTD) ». In : *Ultrasonics* 64 (2016), p. 115-127 (cf. p. 43).
- [44] I. DAUBECHIES. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial et Applied Mathematics, 1992 (cf. p. 116-118).
- [45] I. DAUBECHIES. « The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization And Signal Analysis ». In : *Fundamental Papers in Wavelet Theory*. Princeton University Press, 1990 (cf. p. 118, 120).
- [46] I. DAUBECHIES, A. GROSSMANN et Y. MEYER. « Painless nonorthogonal expansions ». In : *Journal of Mathematical Physics* 27.5 (1986), p. 1271-1283 (cf. p. 115, 116, 120).
- [47] M. DE HOOP, K. GRÖCHENIG et J.L. ROMERO. « Exact and Approximate Expansions with Pure Gaussian Wave Packets ». In : *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 46.3 (2014), p. 2229-2253 (cf. p. 138).
- [48] L. DEMANET. « Curvelets, wave atoms, and wave equations ». Thèse de doct. California Institute of Technology, 2006 (cf. p. 116, 137).
- [49] L. DEMANET et L. YING. « Wave atoms and sparsity of oscillatory patterns ». In : *Applied and Computational Harmonic Analysis* 23.3 (2007), p. 368-387 (cf. p. 116, 137).
- [50] L. DEMANET et L. YING. « Wave atoms and time upscaling of wave equations ». In : *Numerische Mathematik* 113.1 (2009), p. 1-71 (cf. p. 116, 137).
- [51] G.A. DESCHAMPS. « Gaussian beam as a bundle of complex rays ». In : *Electronics Letters* 7.23 (1971), p. 684 (cf. p. 4, 12).
- [52] G.A. DESCHAMPS. « Ray techniques in electromagnetics ». In : *Proceedings of the IEEE* 60.9 (1972), p. 1022-1035 (cf. p. 2, 3, 14, 41).
- [53] D. DING, Y. ZHANG et J. LIU. « Some extensions of the Gaussian beam expansion : Radiation fields of the rectangular and the elliptical transducer ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 113.6 (2003), p. 3043 (cf. p. 97).
- [54] J.R. DORMAND et P.J. PRINCE. « A family of embedded Runge-Kutta formulae ». In : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6.1 (1980), p. 19-26 (cf. p. 36, 53, 59).
- [55] A.A. DUCHKOV, F. ANDERSSON et R. OJALA. « Prestack shot-gather depth migration by a rigid flow of Gaussian wave packets ». In : *Studia Geophysica et Geodaetica* 56.1 (2012), p. 83-106 (cf. p. 177).

- [56] A.A. DUCHKOV, F. ANDERSSON et H. WENDT. « Sparse wave-packet representations and seismic imaging ». In : *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2010*. Society of Exploration Geophysicists, 2010 (cf. p. 177).
- [57] R.J. DUFFIN et A.C. SCHAEFFER. « A class of nonharmonic Fourier series ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 72.2 (1952), p. 341-341 (cf. p. 115).
- [58] P.D. EINZIGER et L.B. FELSEN. « Evanescent waves and complex rays ». In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 30.4 (1982), p. 594-605 (cf. p. 14).
- [59] P.D. EINZIGER, S. RAZ et M. SHAPIRA. « Gabor representation and aperture theory ». In : *Journal of the Optical Society of America A* 3.4 (1986), p. 508 (cf. p. 18, 70, 120).
- [60] B. ENGQUIST et O. RUNBORG. « Computational high frequency wave propagation ». In : *Acta Numerica 2003*. Cambridge University Press, 2003, p. 181-266 (cf. p. 2, 30).
- [61] L.B. FELSEN. « Evanescent waves ». In : *Journal of the Optical Society of America* 66.8 (1976), p. 751 (cf. p. 14).
- [62] L.B. FELSEN. « Geometrical theory of diffraction, evanescent waves, complex rays and Gaussian beams ». In : *Geophysical Journal International* 79.1 (1984), p. 77-88 (cf. p. 12, 14).
- [63] L.B. FELSEN, J.M. KLOSNER, I.T. LU et Z. GROSSFELD. « Source field modeling by self-consistent Gaussian beam superposition (two-dimensional) ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 89.1 (1991), p. 63-72 (cf. p. 120).
- [64] L.B. FELSEN et N. MARCUVITZ. *Radiation and scattering of waves*. T. 31. John Wiley & Sons, 1994 (cf. p. 17).
- [65] Anca FLUERASU et Christine LETROU. « Gaussian beam launching for 3D physical modeling of propagation channels ». In : *annals of telecommunications - annales des télécommunications* 64.11-12 (2009), p. 763-776 (cf. p. 120).
- [66] E.A. FNAIECH, C. LETROU, A. GINESTET et G. BEAUQUET. « Frame-based Gaussian beam shooting simulation of back-scattered fields in the presence of a building ». In : *2014 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*. IEEE, 2014 (cf. p. 120).
- [67] Y. GABILLET, H. SCHROEDER et M. ROSEN. « Utilisation de la méthode de sommation de faisceaux gaussiens pour la modélisation des effets du vent sur la propagation acoustique au dessus du sol ». In : *Le Journal de Physique Colloques* 51.C3 (1990), p. C3-73-C3-82 (cf. p. 83).
- [68] A. GARDAHAUT. « Développements d'outils de modélisation pour la propagation ultrasonore dans les soudures bimétalliques ». Thèse de doct. Paris 7, 2013 (cf. p. 3).

- [69] D.A. GEBA et D. TATARU. « A Phase Space Transform Adapted to the Wave Equation ». In : *Communications in Partial Differential Equations* 32.7 (2007), p. 1065-1101 (cf. p. 116).
- [70] N. GENGEMBRE. « Modélisation du champ ultrasonore rayonné dans un solide anisotrope et hétérogène par un transducteur immergé ». Thèse de doct. Paris 7, 1999 (cf. p. 3, 41).
- [71] N. GENGEMBRE. « Pencil method for ultrasonic beam computation ». In : *Proc. of the 5th World Congress on Ultrasonics, Paris*. 2003 (cf. p. 41).
- [72] N. GENGEMBRE et A. LHÉMERY. « Pencil method in elastodynamics : application to ultrasonic field computation ». In : *Ultrasonics* 38.1-8 (2000), p. 495-499 (cf. p. 2, 3, 31, 41).
- [73] N.S GENGEMBRE, A. LHÉMERY et P. CALMON. « Calculation of Wideband Ultrasonic Fields Radiated by Water-Coupled Transducers into Anisotropic Media ». In : *Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation*. Springer US, 1998, p. 899-906 (cf. p. 3).
- [74] T. GEORGE, J. VIRIEUX et R. MADARIAGA. « Seismic wave synthesis by Gaussian beam summation : A comparison with finite differences ». In : *GEOPHYSICS* 52.8 (1987), p. 1065-1073 (cf. p. 83).
- [75] I. GHANNOUM. « Etudes d'outils de calcul de propagation radar en milieu complexe (milieu urbain, présence de multi-trajets) par des techniques de lancer de faisceaux Gaussiens ». Thèse de doct. Institut National des Télécommunications, 2010 (cf. p. 127).
- [76] I. GHANNOUM, C. LETROU et G. BEAUQUET. « Frame based Gaussian beam bouncing ». In : *2010 URSI International Symposium on Electromagnetic Theory*. IEEE, 2010 (cf. p. 18, 120).
- [77] J.W. GIBBS. « Fourier's Series ». In : *Nature* 59.1522 (1898), p. 200-200 (cf. p. 135).
- [78] J.W. GIBBS. « Fourier's Series ». In : *Nature* 59.1539 (1899), p. 606-606 (cf. p. 135).
- [79] G. GOUBAU et F. SCHWERING. « On the guided propagation of electromagnetic wave beams ». In : *IRE Transactions on Antennas and Propagation* 9.3 (1961), p. 248-256 (cf. p. 10).
- [80] A. GRIGIS et J. SJÖSTRAND. *Microlocal analysis for differential operators : an introduction*. T. 196. Cambridge University Press, 1994 (cf. p. 84).
- [81] K. GUO, G. KUTYNIOK et D. LABATE. *Sparse multidimensional representations using anisotropic dilation and shear operators*. 2006 (cf. p. 116, 137).
- [82] Y. HADAD et T. MELAMED. « Non-Orthogonal Domain Parabolic Equation and Its Tilted Gaussian Beam Solutions ». In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 58.4 (2010), p. 1164-1172 (cf. p. 70, 72).
- [83] Y. HADAD et T. MELAMED. « Parametrization of the tilted Gaussian beam waveobjects ». In : *Progress In Electromagnetics Research* 102 (2010), p. 65-80 (cf. p. 70).

- [84] G.A. HAGEDORN. « A particle limit for the wave equation with a variable wave speed ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 37.1 (1984), p. 91-100 (cf. p. 137).
- [85] E. HEYMAN et B.Z. STEINBERG. « Spectral analysis of complex-source pulsed beams ». In : *Journal of the Optical Society of America A* 4.3 (1987), p. 473 (cf. p. 12).
- [86] E. HEYMAN, B.Z. STEINBERG et R. IANCUNESCU. « Electromagnetic complex source pulsed beam fields ». In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 38.7 (1990), p. 957-963 (cf. p. 12).
- [87] N.R. HILL. « Prestack Gaussian-beam depth migration ». In : *GEOPHYSICS* 66.4 (2001), p. 1240-1250 (cf. p. 83).
- [88] R. HUANG, L.W. SCHMERR et A. SEDOV. « Modeling the radiation of ultrasonic phased-array transducers with Gaussian beams ». In : *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics and Frequency Control* 55.12 (2008), p. 2692-2702 (cf. p. 99).
- [89] R. HUANG, L.W. SCHMERR et A. SEDOV. « Multi-Gaussian Beam Modeling for Multilayered Anisotropic Media, I : Modeling Foundations ». In : *Research in Nondestructive Evaluation* 18.4 (2007), p. 193-220 (cf. p. 95, 162).
- [90] R. HUANG, L.W. SCHMERR et A. SEDOV. « Multi-Gaussian Beam Modeling for Multilayered Anisotropic Media, II : Numerical Examples of Slowness Surface and Geometry Effects ». In : *Research in Nondestructive Evaluation* 18.4 (2007), p. 221-240 (cf. p. 95, 162).
- [91] R. HUANG, L.W. SCHMERR et A. SEDOV. « Multi-Gaussian Ultrasonic Beam Modeling for Multiple Curved Interfaces—an ABCD Matrix Approach ». In : *Research in Nondestructive Evaluation* 16.4 (2005), p. 143-174 (cf. p. 95, 162).
- [92] D. IAGOLNITZER. « Appendix Microlocal essential support of a distribution and decomposition theorems — An introduction ». In : *Hyperfunctions and Theoretical Physics*. Springer Berlin Heidelberg, 1975, p. 121-132 (cf. p. 84).
- [93] A. IMPERIALE, N. LEYMARIE, T. FORTUNA et E. DEMALDENT. « Coupling strategies between asymptotic and numerical models with application to ultrasonic non-destructive testing of surface flaws ». In : *Journal of Computational Acoustics* (2018). (à paraître) (cf. p. 146).
- [94] A. IMPERIALE et al. « UT simulation of embedded parametric defects using a hybrid model based upon spectral finite element and domain decomposition methods ». In : *19th World Conference on Non-Destructive Testing*. T. 1. 2016, p. 2184-2189 (cf. p. 6, 146).
- [95] S. IMPERIALE. « Modélisation mathématique et numérique de capteurs piézoélectriques ». Thèse de doct. Paris 9, 2012 (cf. p. 176).

- [96] O. JACQUET, N. LEYMARIE et D. CASSEREAU. « A Gaussian beam method for ultrasonic non-destructive evaluation modeling ». In : *Journal of Physics : Conference Series* 1017 (2018), p. 012006 (cf. p. 6, 120, 132).
- [97] H. JEONG, J.-S. LEE, Y.-H. JEONG et S.-M. BAE. « On the Beam Focusing Behavior of Time Reversed Ultrasonic Arrays Using a Multi-Gaussian Beam Model ». In : *Journal of the Korean Society for Nondestructive Testing* 28.6 (2008), p. 531-537 (cf. p. 99).
- [98] H. JEONG et L.W. SCHMERR. « Ultrasonic beam propagation in highly anisotropic materials simulated by multi-Gaussian beams ». In : *Journal of Mechanical Science and Technology* 21.8 (2007), p. 1184-1190 (cf. p. 95).
- [99] K. JEZZINE et al. « Modeling approaches for the simulation of ultrasonic inspections of anisotropic composite structures in the CIVA software platform ». In : *AIP Conference Proceedings*. T. 1949. 1. AIP Publishing. 2018, p. 130003 (cf. p. 146).
- [100] S. JIN, H. WU et X. YANG. « Gaussian beam methods for the Schrodinger equation in the semi-classical regime : Lagrangian and Eulerian formulations ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 6.4 (2008), p. 995-1020 (cf. p. 53).
- [101] A.P. KACHALOV, M. LASSAS et Y. KURYLEV. *Inverse boundary spectral problems*. Chapman et Hall/CRC, 2001 (cf. p. 36, 49).
- [102] A.P. KACHALOV et M.M. POPOV. « Application of the method of summation of Gaussian beams for calculation of high-frequency wave fields ». In : *Soviet Physics Doklady*. T. 26. 1981, p. 604 (cf. p. 4).
- [103] A. KAMTA DJAKOU, M. DARMON, L. FRADKIN et C. POTEL. « The Uniform geometrical Theory of Diffraction for elastodynamics : Plane wave scattering from a half-plane ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 138.5 (2015), p. 3272-3281 (cf. p. 2, 43).
- [104] J. B. KELLER et W. STREIFER. « Complex Rays with an Application to Gaussian Beams ». In : *Journal of the Optical Society of America* 61.1 (1971), p. 40 (cf. p. 4).
- [105] H.-J. KIM, L.W. SCHMERR et A. SEDOV. « Generation of the basis sets for multi-Gaussian ultrasonic beam models—An overview ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 119.4 (2006), p. 1971-1978 (cf. p. 95).
- [106] L. KLIMEŠ. « Discretization error for the superposition of Gaussian beams ». In : *Geophysical Journal International* 86.2 (1986), p. 531-551 (cf. p. 89).
- [107] L. KLIMEŠ. « Expansion of a high-frequency time-harmonic wavefield given on an initial surface into Gaussian beams ». In : *Geophysical Journal International* 79.1 (1984), p. 105-118 (cf. p. 84).
- [108] J.M. KLOSNER, L.B. FELSEN, I.T. LU et H. GROSSFELD. « Three-dimensional source field modeling by self-consistent Gaussian beam superposition ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 91.4 (1992), p. 1809-1822 (cf. p. 120).

- [109] H. KOGELNIK. « On the Propagation of Gaussian Beams of Light Through Lenslike Media Including those with a Loss or Gain Variation ». In : *Applied Optics* 4.12 (1965), p. 1562 (cf. p. 9).
- [110] H. KOGELNIK et T. LI. « Laser beams and resonators ». In : *Proceedings of the IEEE* 54.10 (1966), p. 1312-1329 (cf. p. 9-11).
- [111] D. KOMATITSCH et J. TROMP. « The spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation ». In : *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2000*. Society of Exploration Geophysicists, 2000 (cf. p. 2).
- [112] X. KONG, A. MARKMANN et V.S. BATISTA. « Time-Sliced Thawed Gaussian Propagation Method for Simulations of Quantum Dynamics ». In : *The Journal of Physical Chemistry A* 120.19 (2016), p. 3260-3269 (cf. p. 53, 137, 138).
- [113] Y.A. KRAVTSOV et Y.I. ORLOV. *Caustics, catastrophes and wave fields*. T. 15. Springer Science & Business Media, 2012 (cf. p. 44).
- [114] C. LETROU. « A Gaussian beam shooting scheme for fast multidimensional physical simulation of propagation channels in wireless communication systems ». In : *2007 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications*. IEEE, 2007 (cf. p. 120).
- [115] H. LIU et J. RALSTON. « Recovery of High Frequency Wave Fields for the Acoustic Wave Equation ». In : *Multiscale Modeling & Simulation* 8.2 (2010), p. 428-444 (cf. p. 78, 86, 87, 90, 91).
- [116] H. LIU et J. RALSTON. « Recovery of High Frequency Wave Fields from Phase Space-Based Measurements ». In : *Multiscale Modeling & Simulation* 8.2 (2010), p. 622-644 (cf. p. 86).
- [117] H. LIU, J. RALSTON, O. RUNBORG et N.M. TANUSHEV. « Gaussian Beam Methods for the Helmholtz Equation ». In : *SIAM Journal on Applied Mathematics* 74.3 (2014), p. 771-793 (cf. p. 80, 86, 91).
- [118] H. LIU, O. RUNBORG et N.M. TANUSHEV. « Error estimates for Gaussian beam superpositions ». In : *Mathematics of Computation* 82.282 (2012), p. 919-952 (cf. p. 50, 53, 78, 86, 88, 91).
- [119] H. LIU, O. RUNBORG et N.M. TANUSHEV. « Sobolev and max norm error estimates for Gaussian beam superpositions ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 14.7 (2016), p. 2037-2072 (cf. p. 49, 86, 88-91).
- [120] W. LIU, P. JI et J. YANG. « Development of a simple and accurate approximation method for the Gaussian beam expansion technique ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 123.5 (2008), p. 3516-3516 (cf. p. 95).
- [121] I.F. Arias LOPEZ et C. LETROU. « Frame-based Gaussian beam shooting from experimental far field data ». In : *2014 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA)*. IEEE, 2014 (cf. p. 129).

- [122] I.F.A. LOPEZ. « Modélisation d'antennes et de systèmes focaux par décomposition sur une famille de faisceaux gaussiens ». Thèse de doct. Evry, Institut national des télécommunications, 2013 (cf. p. 127, 129, 131).
- [123] Bo LÜ. « Modélisation de la propagation et de l'interaction d'une onde acoustique pour la télémétrie de structures complexes ». Thèse de doct. Université du Maine, 2011 (cf. p. 39).
- [124] J. LU et X. YANG. « Convergence of frozen Gaussian approximation for high-frequency wave propagation ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 65.6 (2011), p. 759-789 (cf. p. 85).
- [125] D. LUGARA. « Modélisation d'antennes et de systèmes focaux par décomposition sur une famille de faisceaux gaussiens ». Thèse de doct. Université de Marne-la-Vallée, 2000 (cf. p. 15).
- [126] D. LUGARA et C. LETROU. « Alternative to Gabor's representation of plane aperture radiation ». In : *Electronics Letters* 34.24 (1998), p. 2286 (cf. p. 120, 121).
- [127] D. LUGARA et C. LETROU. « Printed antennas analysis by a gabor frame-based method of moments ». In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 50.11 (2002), p. 1588-1597 (cf. p. 118, 120, 131).
- [128] D. LUGARA et al. « Frame-based Gaussian beam summation method : Theory and applications ». In : *Radio Science* 38.2 (2003), p. 27.1-27.15 (cf. p. 18, 120, 123).
- [129] J.R. MAGNUS et H. NEUDECKER. *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*. Wiley John + Sons, 1999. 422 p. ISBN : 047198633X (cf. p. 196).
- [130] V.P. MASLOV, V.C. BOUSLAEV et V.I. ARNOLD. *Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques*. 1972 (cf. p. 44).
- [131] R.J. MCGOUGH. « Rapid calculations of time-harmonic nearfield pressures produced by rectangular pistons ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 115.5 (2004), p. 1934-1941 (cf. p. 159-161).
- [132] R.J. MCGOUGH, T.V. SAMULSKI et J.F. KELLY. « An efficient grid sectoring method for calculations of the near-field pressure generated by a circular piston ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 115.5 (mai 2004), p. 1942-1954 (cf. p. 157, 158).
- [133] T. MELAMED. « Phase-Space Beam Summation : a Local Spectrum Analysis of Time-Dependent Radiation ». In : *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 11.6 (1997), p. 739-773 (cf. p. 71, 72).
- [134] P. MOCZO, J.O.A. ROBERTSSON et L. EISNER. « The Finite-Difference Time-Domain Method for Modeling of Seismic Wave Propagation ». In : *Advances in Wave Propagation in Heterogenous Earth*. Elsevier, 2007, p. 421-516 (cf. p. 2).

- [135] M. MOTAMED et O. RUNBORG. « A wavefront-based Gaussian beam method for computing high frequency wave propagation problems ». In : *Computers & Mathematics with Applications* 69.9 (2015), p. 949-963 (cf. p. 80, 84).
- [136] M. MOTAMED et O. RUNBORG. « Taylor expansion and discretization errors in Gaussian beam superposition ». In : *Wave Motion* 47.7 (2010), p. 421-439 (cf. p. 59, 83, 84, 89-91).
- [137] K. NAKAHATA et N. KONO. « 3-D modelings of an ultrasonic phased array transducer and its radiation properties in solid ». In : *Ultrasonic waves*. InTech, 2012 (cf. p. 99).
- [138] J. A. NELDER et R. MEAD. « A Simplex Method for Function Minimization ». In : *The Computer Journal* 7.4 (1965), p. 308-313 (cf. p. 101, 177).
- [139] V.V. NIKITIN, A.A. DUCHKOV et F. ANDERSSON. « Parallel algorithm of 3D wave-packet decomposition of seismic data : Implementation and optimization for GPU ». In : *Journal of Computational Science* 3.6 (2012), p. 469-473 (cf. p. 177).
- [140] A.N. NORRIS. « A theory of pulse propagation in anisotropic elastic solids ». In : *Wave Motion* 9.6 (1987), p. 509-532 (cf. p. 36, 37, 40, 54).
- [141] R.L. NOWACK. « Calculation of Synthetic Seismograms with Gaussian Beams ». In : *Seismic Motion, Lithospheric Structures, Earthquake and Volcanic Sources : The Keiiti Aki Volume*. Birkhäuser Basel, 2003, p. 487-507 (cf. p. 83).
- [142] Y.C. PATI, R. REZAIIFAR et P.S. KRISHNAPRASAD. « Orthogonal matching pursuit : recursive function approximation with applications to wavelet decomposition ». In : *Proceedings of 27th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*. IEEE Comput. Soc. Press, 1993 (cf. p. 105).
- [143] V. PEREYRA, W.H.K. LEE et H.B. KELLER. « Solving two-point seismic-ray tracing problems in a heterogeneous medium : Part 1. A general adaptive finite difference method ». In : *Bulletin of the Seismological Society of America* 70.1 (1980), p. 79 (cf. p. 42).
- [144] L. PESUDO. « Une méthode hybride couplant la méthode des équations intégrales et la méthode des rayons en vue d'applications au contrôle non destructif ultrasonore. » Thèse de doct. Université Paris-Saclay, 2017 (cf. p. 40).
- [145] M.M. POPOV. « A new method of computation of wave fields using Gaussian beams ». In : *Wave Motion* 4.1 (1982), p. 85-97 (cf. p. 4, 44, 77, 81, 82).
- [146] M.M. POPOV. *Ray Theory and Gaussian Beam Method for Geophysicists*. EDUFBA, 2002 (cf. p. 4, 36, 44, 81).
- [147] M.B. PORTER et H.P. BUCKER. « Gaussian beam tracing for computing ocean acoustic fields ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 82.4 (1987), p. 1349-1359 (cf. p. 44, 83).
- [148] J. QIAN et L. YING. « Fast Gaussian wavepacket transforms and Gaussian beams for the Schrödinger equation ». In : *Journal of Computational Physics* 229.20 (2010), p. 7848-7873 (cf. p. 138).

- [149] J. QIAN et L. YING. « Fast Multiscale Gaussian Wavepacket Transforms and Multiscale Gaussian Beams for the Wave Equation ». In : *Multiscale Modeling & Simulation* 8.5 (2010), p. 1803-1837 (cf. p. 36, 40, 49, 51, 79, 136, 138, 139, 141, 144).
- [150] J. RALSTON. « Gaussian beams and the propagation of singularities ». In : *Studies in partial differential equations* 23 (1982), p. 206-248 (cf. p. 52, 78, 86, 88).
- [151] D. ROYER et E. DIEULESAINT. *Ondes élastiques dans les solides*. T. 1. Masson, 1996 (cf. p. 19, 23).
- [152] O. RUNBORG. « Mathematical models and numerical methods for high frequency waves ». In : *Commun. Comput. Phys* 2.5 (2007), p. 827-880 (cf. p. 2, 30, 40, 44).
- [153] L. SATYANARAYAN, C. SRIDHAR, C.V. KRISHNAMURTHY et K. BALASUBRAMANIAM. « Simulation of ultrasonic phased array technique for imaging and sizing of defects using longitudinal waves ». In : *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 84.12 (2007), p. 716-729 (cf. p. 2).
- [154] L.W. SCHMERR. *Fundamentals of Ultrasonic Nondestructive Evaluation*. Springer International Publishing, 2016 (cf. p. 14, 26, 30).
- [155] L.W. SCHMERR, H.-J. KIM, R. HUANG et A. SEDOV. « Multi-Gaussian ultrasonic beam modeling ». In : *Proceedings of the World Congress of Ultrasonics*. 2003 (cf. p. 96, 99, 162).
- [156] L.W. SCHMERR, A.L. LOPEZ-SANCHEZ et A. SEDOV. « K-space Prony's method for generating the basis functions of multi-Gaussian beam models ». In : *Ultrasonics* 50.6 (2010), p. 600-605 (cf. p. 95).
- [157] L.W. SCHMERR et S. SONG. *Ultrasonic Nondestructive Evaluation Systems*. Springer US, 2007 (cf. p. 14, 96, 99, 195, 196).
- [158] A. SHLIVINSKI et E. HEYMAN. « Windowed Radon transform frames ». In : *Applied and Computational Harmonic Analysis* 26.3 (2009), p. 322-343 (cf. p. 120).
- [159] A. SHLIVINSKI, E. HEYMAN et A. BOAG. « A phase-space beam summation formulation for ultrawide-band radiation. II : a multiband scheme ». In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 53.3 (2005), p. 948-957 (cf. p. 120, 131).
- [160] A. SHLIVINSKI, E. HEYMAN, A. BOAG et C. LETROU. « A Phase-Space Beam Summation Formulation for Ultrawide-Band Radiation ». In : *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* 52.8 (2004), p. 2042-2056 (cf. p. 70, 72, 118, 120-122, 131).
- [161] A. SHLIVINSKI, E. HEYMAN, A. BOAG et C. LETROU. « Frame-Based Beam-Summation Algorithms for Ultra Wideband Radiation from Extended Apertures ». In : *Ultra-Wideband, Short-Pulse Electromagnetics 6*. Springer US, 2003, p. 101-112 (cf. p. 120).
- [162] M.A. SLAWINSKI. *Waves and rays in elastic continua*. World Scientific, 2010 (cf. p. 31, 35, 39).

- [163] H.F. SMITH. « A Hardy space for Fourier integral operators ». In : *Journal of Geometric Analysis* 8.4 (1998), p. 629-653 (cf. p. 137).
- [164] H.F. SMITH. « A parametrix construction for wave equations with $C^{1,1}$ coefficients ». In : *Annales de l'institut Fourier* 48.3 (1998), p. 797-835 (cf. p. 137).
- [165] M. SPIES. « Elastic waves in homogeneous and layered transversely isotropic media : Plane waves and Gaussian wave packets. A general approach ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 95.4 (1994), p. 1748-1760 (cf. p. 54).
- [166] M. SPIES. « Transducer field modeling in anisotropic media by superposition of Gaussian base functions ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 105.2 (1999), p. 633-638 (cf. p. 95).
- [167] B.Z. STEINBERG, L.B. FELSEN et E. HEYMAN. « Phase-space beam summation for time-harmonic radiation from large apertures ». In : *Journal of the Optical Society of America A* 8.1 (1991), p. 41 (cf. p. 120).
- [168] B.Z. STEINBERG, E. HEYMAN et L.B. FELSEN. « Phase space methods for radiation from large apertures ». In : *Radio Science* 26.1 (1991), p. 219-227 (cf. p. 120).
- [169] Y. SUZAKI et A. TACHIBANA. « Measurement of the μm sized radius of Gaussian laser beam using the scanning knife-edge ». In : *Applied Optics* 14.12 (1975), p. 2809 (cf. p. 69).
- [170] N.M. TANUSHEV. « Superpositions and higher order Gaussian beams ». In : *Communications in Mathematical Sciences* 6.2 (2008), p. 449-475 (cf. p. 49, 78).
- [171] N.M. TANUSHEV, B. ENGQUIST et R. TSAI. « Gaussian beam decomposition of high frequency wave fields ». In : *Journal of Computational Physics* 228.23 (2009), p. 8856-8871 (cf. p. 5, 100, 101, 103, 105, 106, 177).
- [172] N.M. TANUSHEV, R. TSAI, S. FOMEL et B. ENGQUIST. « Gaussian beam decomposition for seismic migration ». In : *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011*. Society of Exploration Geophysicists, 2011 (cf. p. 106).
- [173] N.M. TANUSHEV, Y.H.R. TSAI et B. ENGQUIST. « A Coupled Finite Difference – Gaussian Beam Method for High Frequency Wave Propagation ». In : *Numerical Analysis of Multiscale Computations*. Springer Berlin Heidelberg, 2011, p. 401-420 (cf. p. 106).
- [174] D. TATARU. « Phase space transforms and microlocal analysis ». In : *Phase space analysis of partial differential equations* 2 (2004), p. 505-524 (cf. p. 116).
- [175] C. J. THOMSON et C. H. CHAPMAN. « An introduction to Maslov's asymptotic method ». In : *Geophysical Journal International* 83.1 (1985), p. 143-168 (cf. p. 35).
- [176] Y. TIAN et al. « Dynamic ray tracing and travelttime corrections for global seismic tomography ». In : *Journal of Computational Physics* 226.1 (2007), p. 672-687 (cf. p. 34).
- [177] *Ultrasons - Ombrage*. Lien actif le 6 octobre 2018. URL : <http://www.extende.com/fr/ultrasons-ombrage> (cf. p. 43).

- [178] B.R. VAINBERG. « On short-wave asymptotic behaviour of solutions of stationary problems and the asymptotic behaviour as $\rightarrow \infty$ of solutions of nonstationary problems ». In : *Russian Mathematical Surveys* 30.2 (1975), p. 1-58 (cf. p. 80).
- [179] V. VINJE, E. IVERSEN et H. GJØYSTDAL. « Traveltime and amplitude estimation using wavefront construction ». In : *54th EAEG Meeting*. EAGE, 1992 (cf. p. 42).
- [180] W.D. WANG et G.A. DESCHAMPS. « Application of complex ray tracing to scattering problems ». In : *Proceedings of the IEEE* 62.11 (1974), p. 1541-1551 (cf. p. 14).
- [181] J.J. WEN et M.A. BREAZEALE. « Gaussian Beam Functions as a Base Function Set for Acoustical Field Calculations ». In : *IEEE 1987 Ultrasonics Symposium*. IEEE, 1987 (cf. p. 5, 6, 92-96, 100).
- [182] R.S. WU et L. CHEN. « Wave Propagation and Imaging Using Gabor-Daubechies Beamlets ». In : *Theoretical and Computational Acoustics 2001*. WORLD SCIENTIFIC, 2002, p. 661-670 (cf. p. 137).
- [183] X. YANG, J. LU et S. FOMEL. « Seismic modeling using the frozen Gaussian approximation ». In : *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2013*. Society of Exploration Geophysicists, 2013 (cf. p. 85).
- [184] J. YE et al. « Model-based simulation of focused beam fields produced by a phased array ultrasonic transducer in dissimilar metal welds ». In : *NDT & E International* 44.3 (2011), p. 290-296 (cf. p. 99).
- [185] S. ZEROUG, F.E. STANKE et R. BURRIDGE. « A complex-transducer-point model for finite emitting and receiving ultrasonic transducers ». In : *Wave Motion* 24.1 (1996), p. 21-40 (cf. p. 14).
- [186] X. ZHAO et T. GANG. « Nonparaxial multi-Gaussian beam models and measurement models for phased array transducers ». In : *Ultrasonics* 49.1 (2009), p. 126-130 (cf. p. 99).

Calculs intermédiaires

Sommaire

A.1	Résolution d'une équation de Riccati	195
A.2	Résolution d'une équation de transport	195
A.3	Propagation d'un paquet d'onde gaussien en milieu homogène	197
A.4	Calcul de faisceau gaussien harmonique en milieu homogène	199

Cette annexe regroupe différents calculs dont le développements seraient superflus dans le corps du document. Ils conduisent toutefois à des résultats utiles dans la compréhension et l'implémentation des faisceaux gaussiens.

A.1 Résolution d'une équation de Riccati

On cherche ici à résoudre une équation du type

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \mathcal{M}\mathcal{Q}\mathcal{M}, \quad \mathcal{M}(t=0) = \mathcal{M}_0. \quad (\text{A.1})$$

C'est une équation non-linéaire de Riccati pour la matrice \mathcal{M} , que l'on retrouve dans les paragraphes 2.1 et 2.2, et qui permet alors de calculer l'évolution des matrices de courbures complexes associées à la propagation de faisceaux gaussiens en milieux homogènes. Dans un cas particulier, on peut en trouver une démonstration dans [157]. On suppose que \mathcal{M} est inversible, et on commence par dériver par rapport à t l'identité

$$\mathcal{M}\mathcal{M}^{-1} = \mathcal{I} \quad (\text{A.2})$$

où \mathcal{I} est la matrice identité, soit

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt}\mathcal{M}^{-1} + \mathcal{M}\frac{d\mathcal{M}^{-1}}{dt} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Dans (A.1) on multiplie à droite par \mathcal{M}^{-1} , et d'après (A.3) il vient

$$\mathcal{M}\frac{d\mathcal{M}^{-1}}{dt} = -\mathcal{M}\mathcal{Q}. \quad (\text{A.4})$$

Dans (A.4) on multiplie à gauche par \mathcal{M}^{-1} , ce qui donne

$$\frac{d\mathcal{M}^{-1}}{dt} = -\mathcal{Q}. \quad (\text{A.5})$$

L'intégration de (A.5) donne

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{-1}(t) &= -\mathcal{Q}t + \mathcal{M}_0^{-1} \\ &= [-\mathcal{Q}\mathcal{M}_0t + \mathcal{I}]\mathcal{M}_0^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

et on en déduit la solution de (A.1), soit

$$\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}_0 [\mathcal{I} - \mathcal{Q}\mathcal{M}_0t]^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

A.2 Résolution d'une équation de transport

Dans la continuité de A.1, on cherche ici à résoudre une équation du type

$$\frac{da}{dt} = \frac{a}{2} \text{Tr}[\mathcal{M}\mathcal{Q}], \quad a(t=0) = a_0, \quad (\text{A.8})$$

où $\mathcal{M}(t)$ et $\mathcal{Q}(t)$ sont des matrices vérifiant l'équation de Riccati (A.1), soit

$$\frac{d\mathcal{M}}{dt} = \mathcal{M}\mathcal{Q}\mathcal{M}, \quad \mathcal{M}(t=0) = \mathcal{M}_0. \quad (\text{A.9})$$

L'équation (A.9) est une équation de transport que l'on retrouve notamment dans les paragraphes 2.1 et 2.2, et qui permet de calculer l'évolution de l'amplitude associée à des faisceaux gaussiens se propageant dans des milieux homogènes. De la même façon que pour le calcul A.1, on peut en trouver une démonstration dans un cas particulier dans [157]. On suppose que \mathcal{M} est inversible, et on commence par écrire l'identité

$$\mathcal{M} = \frac{{}^t\text{com}[\mathcal{M}^{-1}]}{\det \mathcal{M}^{-1}}, \quad (\text{A.10})$$

où ${}^t\text{com}[\mathcal{M}^{-1}]$ est la transposée de la comatrice de \mathcal{M}^{-1} . D'après la section précédente A.1, de l'équation de Riccati (A.9) on en déduit l'équation (A.5). Dans cette dernière, on multiplie à gauche par \mathcal{M} , on utilise (A.10) et il vient

$$\mathcal{M}\mathcal{Q} = -\frac{{}^t\text{com}[\mathcal{M}^{-1}]}{\det \mathcal{M}^{-1}} \frac{d\mathcal{M}^{-1}}{dt}. \quad (\text{A.11})$$

Pour la suite de la démonstration, on utilise la relation de Jacobi [129] appliquée à la matrice \mathcal{M}^{-1} , soit

$$\frac{d(\det \mathcal{M}^{-1})}{dt} = -\text{Tr} \left[{}^t\text{com}[\mathcal{M}^{-1}] \frac{d\mathcal{M}^{-1}}{dt} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Ainsi en prenant la trace de l'équation (A.11), il vient

$$\text{Tr}[\mathcal{M}\mathcal{Q}] = \frac{-1}{\det \mathcal{M}^{-1}} \frac{d(\det \mathcal{M}^{-1})}{dt}. \quad (\text{A.13})$$

On peut alors réécrire l'équation de transport (A.8) sous la forme

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\det \mathcal{M}^{-1}} \frac{d(\det \mathcal{M}^{-1})}{dt}, \quad (\text{A.14})$$

soit encore

$$\frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{a(t)}{a(0)} \right) \right] = \frac{d}{dt} \left[\left(-\frac{1}{2}\right) \ln \left(\frac{\det \mathcal{M}^{-1}(t)}{\det \mathcal{M}^{-1}(0)} \right) \right]. \quad (\text{A.15})$$

L'intégration directe de (A.15) donne

$$\frac{a(t)}{a_0} = \left(\frac{\det \mathcal{M}^{-1}(t)}{\det \mathcal{M}_0^{-1}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\det \mathcal{M}(t)}{\det \mathcal{M}_0} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.16})$$

En utilisant (A.7), on en déduit la solution recherchée, soit

$$a(t) = a_0 \det [\mathcal{I} - \mathcal{Q}\mathcal{M}_0 t]^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.17})$$

A.3 Propagation d'un paquet d'onde gaussien en milieu homogène

On se place dans un milieu homogène de célérité $c(\mathbf{x}) = c_0$, de dimension $d = 2$. On souhaite ici expliciter la solution analytique transitoire du système (\mathcal{E}) en milieu homogène ((2.16a), (2.16b), (2.16c) et (2.16d)), et dont les conditions initiales exprimées dans les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) associées au repère orthonormé $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ sont

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{p}(0) = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}(0) = i \text{diag}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2), \quad a(0) = a_0, \quad (\text{A.18})$$

avec $p_0, \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \in \mathbb{R}$ et $a_0 \in \mathbb{C}$. Sans perdre en généralité, on ne s'intéresse qu'à la solution « + », de sorte que d'après l'exemple 5, la solution au système (\mathcal{E}) vaut

$$\forall t \geq 0 \begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \left(c_0 \frac{\mathbf{p}_0}{|\mathbf{p}_0|} \right) t, & (\text{A.19a}) \\ \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0, & (\text{A.19b}) \\ \mathcal{M}(t) = \mathcal{M}_0 [\mathcal{A}^+(t)]^{-1}, & (\text{A.19c}) \\ a(t) = a_0 \left(\det \mathcal{A}^+(t) \right)^{-\frac{1}{2}}, & (\text{A.19d}) \end{cases}$$

où

$$\mathcal{A}^+(t) = \left[\mathcal{I} + \left(\frac{c_0}{|\mathbf{p}_0|} \mathcal{P}_\perp \mathcal{M}_0 \right) t \right] \quad \text{avec} \quad \mathcal{P}_\perp = \mathcal{I} - \mathbf{p}^t \mathbf{p}.$$

Il s'agit donc ici d'expliciter les solutions (A.19a), (A.19b), (A.19c) et (A.19d) en fonction des conditions initiales (A.18).

Position et vecteur lenteur

Sans difficulté, la position $\mathbf{x}(t)$ du paquet propagé vaut

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(0) + (c_0 t) \mathbf{e}_1,$$

et le vecteur lenteur reste inchangé, soit

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{p}(t) = p_0 \mathbf{e}_1. \quad (\text{A.20})$$

Matrice hessienne

Pour calculer la matrice hessienne $\mathcal{M}(t)$, explicitons dans les coordonnées cartésiennes (x_1, x_2) la matrice \mathcal{P}_\perp , puis la matrice $\mathcal{A}^+(t)$. Par définition et d'après (A.20), on a

$$\mathcal{P}_\perp = \text{diag}(0, 1).$$

Il vient donc

$$\mathcal{A}^+(t) = \text{diag} \left(1, 1 + i \frac{c_0 \mathcal{M}_2}{p_0} t \right). \quad (\text{A.21})$$

D'après (A.19c), on peut développer le calcul de $\mathcal{M}(t)$, soit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(t) &= i \text{diag}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \text{diag} \left(1, 1 + i \frac{c_0 \mathcal{M}_2}{p_0} t \right)^{-1} \\ &= i \text{diag} \left(\mathcal{M}_1, \frac{\mathcal{M}_2}{1 + i \frac{c_0 \mathcal{M}_2}{p_0} t} \right) \\ &= \text{diag} \left(0, \frac{\frac{c_0 \mathcal{M}_2^2 t}{p_0}}{1 + \left(\frac{c_0 \mathcal{M}_2}{p_0} \right)^2 t^2} \right) + i \text{diag} \left(\mathcal{M}_1, \frac{\mathcal{M}_2}{1 + \left(\frac{c_0 \mathcal{M}_2}{p_0} \right)^2 t^2} \right) \\ &= \text{diag} \left(0, \frac{p_0 c_0 \mathcal{M}_2^2 t}{p_0^2 + (c_0 \mathcal{M}_2)^2 t^2} \right) + i \text{diag} \left(\mathcal{M}_1, \frac{p_0^2 \mathcal{M}_2}{p_0^2 + (c_0 \mathcal{M}_2)^2 t^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Amplitude

Après avoir explicité la matrice $\mathcal{A}(+)$ dans (A.21), on obtient l'amplitude $a(t)$ à l'aide de (A.19d), soit.

$$a(t) = \frac{a_0}{\sqrt{1 + i \frac{c_0 \mathcal{M}_2}{p_0} t}} \quad (\text{A.23})$$

Largeurs principales

Par définition (2.42), on écrit les deux demi-largeurs principales à l'instant $t = 0$, soit

$$w_1^\varepsilon(0) = \sqrt{-\frac{2 \ln \varepsilon}{\omega \mathcal{M}_1}} \quad \text{et} \quad w_2^\varepsilon(0) = \sqrt{-\frac{2 \ln \varepsilon}{\omega \mathcal{M}_2}}. \quad (\text{A.24})$$

Après avoir explicité la matrice hessienne $\mathcal{M}(t)$ dans (A.22), on remarque que $\text{Im}(\mathcal{M}(t))$ est diagonale. On peut donc directement écrire les deux demi-largeurs principales à l'instant $t \geq 0$, soit

$$w_1^\varepsilon(t) = \sqrt{-\frac{2 \ln \varepsilon}{\omega} \left(\frac{1}{\mathcal{M}_1} \right)} \quad \text{et} \quad w_2^\varepsilon(t) = \sqrt{-\frac{2 \ln \varepsilon}{\omega} \left(\frac{p_0^2 + (c_0 \mathcal{M}_2)^2 t^2}{p_0^2 \mathcal{M}_2} \right)}. \quad (\text{A.25})$$

En combinant (A.24) et (A.25), il vient finalement

$$w_1^\varepsilon(t) = w_1^\varepsilon(0) \quad \text{et} \quad w_2^\varepsilon(t) = w_2^\varepsilon(0) \sqrt{1 + \left(\frac{c_0 \mathcal{M}_2}{p_0} \right)^2 t^2}. \quad (\text{A.26})$$

Courbures principales

Après avoir explicité la matrice hessienne $\mathcal{M}(t)$ dans (A.22), on remarque que $\text{Re}(\mathcal{M}(t))$ est diagonale. Par définition (2.43), on peut donc directement écrire les deux courbures principales à l'instant $t \geq 0$, soit

$$\kappa_1(t) = 0 \quad \text{et} \quad \kappa_2(t) = \frac{p_0(c_0\mathcal{M}_2)^2 t}{p_0^2 + (c_0\mathcal{M}_2)^2 t^2}. \quad (\text{A.27})$$

A.4 Calcul de faisceau gaussien harmonique en milieu homogène

On se place dans un milieu homogène de célérité $c(\mathbf{x}) = c_0$, de dimension $d = 3$. On souhaite ici expliciter la solution analytique harmonique des systèmes (E) et (DRT) en milieu homogène, et dont les conditions initiales exprimées dans les coordonnées rayon-centrées (q_1, q_2, s) sont

$$\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{p}(s_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_0 \end{pmatrix}, \quad T(s_0) = 0, \quad \mathbf{M}_0 = i \text{diag}(M_1, M_2), \quad A(s_0) = A_0, \quad (\text{A.28})$$

avec $p_0, M_1, M_2 \in \mathbb{R}$ et $A_0 \in \mathbb{C}$. D'après l'exemple 6, la solution aux systèmes (E) et (DRT) vaut

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + \begin{pmatrix} \mathbf{p}_0 \\ |\mathbf{p}_0| \end{pmatrix} (s - s_0), & (\text{A.29a}) \\ \mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_0, & (\text{A.29b}) \\ T(s) = T_0 + \frac{s - s_0}{c_0}, & (\text{A.29c}) \\ \mathbf{M}(s) = \mathbf{M}_0 [\mathbf{I} + c_0(s - s_0)\mathbf{M}_0]^{-1}. & (\text{A.29d}) \\ A(s) = A_0 \left(\frac{\det \mathbf{M}(s)}{\det \mathbf{M}_0} \right)^{\frac{1}{2}}. & (\text{A.29e}) \end{array} \right.$$

Il s'agit donc ici d'expliciter les solutions (A.29a), (A.29b), (A.29c), (A.29d) et (A.29e) en fonction des conditions initiales (A.28).

Position, vecteur lenteur et phase sur le rayon

Sans difficulté, la position $\mathbf{x}(s)$ vaut

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + (s - s_0)\mathbf{e}_3 \quad (\text{A.30})$$

et le vecteur lenteur reste inchangé, soit

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{p}(s) = p_0\mathbf{e}_3. \quad (\text{A.31})$$

De façon immédiate, on a également la phase $T(s)$ évaluée sur le rayon, soit

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad T(s) = \frac{s - s_0}{c_0}. \quad (\text{A.32})$$

Matrice hessienne

Pour calculer la matrice hessienne $\mathbf{M}(s)$, on peut directement expliciter les termes dans (A.29d), soit

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(s) &= i \operatorname{diag} \left(M_1, M_2 \right) \operatorname{diag} \left(1 + ic_0(s - s_0)M_1, 1 + ic_0(s - s_0)M_2 \right) \\ &= \operatorname{diag} \left(\frac{iM_1}{1 + ic_0(s - s_0)M_1}, \frac{iM_2}{1 + ic_0(s - s_0)M_2} \right) \\ &= \operatorname{diag} \left(\frac{c_0(s - s_0)M_1^2}{1 + c_0^2(s - s_0)^2M_1^2}, \frac{c_0(s - s_0)M_2^2}{1 + c_0^2(s - s_0)^2M_2^2} \right) \\ &\quad + i \operatorname{diag} \left(\frac{M_1}{1 + c_0^2(s - s_0)^2M_1^2}, \frac{M_2}{1 + c_0^2(s - s_0)^2M_2^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

Amplitude

D'après les équations (A.29d) et (A.29e), on peut écrire

$$A(s) = A_0 \det [\mathbf{I} + c_0(s - s_0)\mathbf{M}_0]^{-\frac{1}{2}}.$$

Or

$$[\mathbf{I} + c_0(s - s_0)\mathbf{M}_0] = \operatorname{diag} \left(1 + ic_0(s - s_0)M_1, 1 + ic_0(s - s_0)M_2 \right),$$

donc il vient finalement

$$A(s) = \frac{A_0}{\sqrt{(1 + ic_0(s - s_0)M_1)(1 + ic_0(s - s_0)M_2)}}. \quad (\text{A.34})$$

Largeurs principales

Par définition (2.51), on écrit les deux demi-largeurs principales à l'instant $t = 0$, soit

$$w_i^\varepsilon(s_0) = \sqrt{-\frac{2 \ln \varepsilon}{\omega M_i}} \quad i = 1, 2. \quad (\text{A.35})$$

Après avoir explicité la matrice hessienne $\mathbf{M}(s)$ dans (A.33), on remarque que $\operatorname{Im}(\mathbf{M}(s))$ est diagonale. On peut donc directement écrire les deux demi-largeurs principales à l'abscisse curviligne $s \in \mathbb{R}$, soit

$$w_i^\varepsilon(s) = \sqrt{-\frac{2 \ln \varepsilon}{\omega} \left(\frac{1 + c_0^2(s - s_0)^2 M_i^2}{M_i} \right)}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{A.36})$$

En combinant (A.35) et (A.36), il vient finalement

$$w_i^\varepsilon(s) = w_i^\varepsilon(s_0) \sqrt{1 + c_0^2 (s - s_0)^2 M_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{A.37})$$

Courbures principales

Après avoir explicité la matrice hessienne $\mathbf{M}(s)$ dans (A.33), on remarque que $\text{Re}(\mathbf{M}(s))$ est diagonale. Par définition (2.52), on peut donc directement écrire les deux courbures principales à l'abscisse curviligne $s \in \mathbb{R}$, soit

$$\kappa_i(s) = \frac{c_0^2 (s - s_0) M_i^2}{1 + c_0^2 (s - s_0)^2 M_i^2}, \quad i = 1, 2. \quad (\text{A.38})$$

Table des figures

1.1	Modes Hermites-gaussiens et Laguerre-gaussiens	10
1.2	Amplitudes transverses et largeur d'un faisceau gaussien classique . .	11
1.3	Rayonnement du point source complexe	13
1.4	Source plane gaussienne astigmatique	16
1.5	Amplitude et largeurs d'un faisceau gaussien généralisé	17
1.6	Configuration standard d'un contrôle standard par ultrasons en immersion	27
1.7	Dimensions caractéristiques pour un contrôle par ultrasons	29
1.8	Caractérisation haute-fréquence de transducteurs ultrasonores standards	31
1.9	Tracé de rayons dans une soudure	32
1.10	Tracé de rayons dans un modèle terrestre simplifié	34
1.11	Rayonnement d'un point source : fronts d'ondes et vecteurs lenteur . .	35
1.12	Tracé de rayons dans un milieu homogène	37
1.13	Tracé de rayons dans un milieu inhomogène	39
1.14	Exemple de tube de rayons	41
1.15	Exemple d'ombrage	43
1.16	Exemples de caustiques	44
2.1	Voisinages associés aux développements paraxiaux	54
2.2	Coordonnées rayon-centrées	57
2.3	Caractéristiques d'un paquet d'onde gaussien	62
2.4	Évolution des largeurs et courbures d'un paquet d'onde gaussien . . .	65
2.5	Propagation d'un paquet d'onde gaussien en milieu homogène	66
2.6	Caractéristiques d'une source plane gaussienne	68
2.7	Évolution des largeurs et courbures d'un faisceau gaussien	70
2.8	Configuration de source « inclinée »	71
2.9	Faisceau gaussien harmonique en milieu homogène	73
3.1	Sommation de faisceaux gaussiens	82
3.2	Ordres de convergence de superposition de faisceaux gaussiens	90
3.3	Piston bafflé pour le calcul multi-faisceaux gaussiens	93
3.4	Synthèse <i>MGB</i> du champ source d'un transducteur circulaire uniforme	95
3.5	Champ multi-faisceaux gaussiens rayonné par un transducteur circulaire	96
3.6	Champ multi-faisceaux gaussiens rayonné par un transducteur focalisé	97

3.7	Synthèse <i>MGB</i> du champ source d'un transducteur carré uniforme . . .	98
3.8	Champ multi-faisceaux gaussiens rayonné par un transducteur carré . . .	99
3.9	Réponse transitoire d'une ligne source en dimension $d = 2$	106
3.10	Illustration de la décomposition itérative	107
3.11	Synthèse issue d'une décomposition itérative	109
3.12	Superposition de faisceaux initialisés par décomposition itérative	110
4.1	<i>Frame</i> de Gabor à fenêtre gaussienne	122
4.2	Faisceau gaussien initialisé par un <i>frame</i> de Gabor	123
4.3	Superposition de faisceaux gaussiens initialisés sur <i>frame</i> de Gabor	126
4.4	Coefficients de décomposition sur un <i>frame</i> de Gabor	130
4.5	Synthèse sur <i>frame</i> de Gabor d'une source circulaire uniforme	134
4.6	Synthèse sur <i>frame</i> de Gabor d'une source carrée uniforme	135
4.7	Partition multi-échelle du domaine spectral	140
4.8	Diffraction par un solide rectiligne immergé	147
4.9	Défaut rectiligne : approximation de la donnée de Cauchy	148
4.10	Défaut rectiligne : erreurs de synthèse	149
4.11	Diffraction par un solide courbe immergé	150
4.12	Défaut courbe : approximation de la donnée de Cauchy	151
4.13	Défaut courbe : erreurs de synthèse	151
5.1	Transducteur circulaire : modélisation du terme source \hat{f}	156
5.2	Transducteur circulaire : champ rayonné \hat{u}_ϵ^*	157
5.3	Transducteur circulaire : champ rayonné le long de l'axe focal	158
5.4	Transducteur carré : modélisation du terme source \hat{f}	159
5.5	Transducteur carré : champ rayonné \hat{u}_ϵ^*	160
5.6	Transducteur carré : champ rayonné le long de l'axe focal	161
5.7	Défaut rectiligne : principaux paquets d'onde gaussiens	164
5.8	Défaut rectiligne : champ diffracté propagé	165
5.9	Défaut rectiligne : positions des A-scans d'intérêt	166
5.10	Défaut rectiligne : A-scan n°1	167
5.11	Défaut rectiligne : A-scan n°2	168
5.12	Défaut courbe : principaux paquets d'onde gaussiens	169
5.13	Défaut courbe : champ diffracté propagé	169
5.14	Défaut courbe : positions des A-scans d'intérêt	170
5.15	Défaut courbe : A-scan n°1	171
5.16	Défaut courbe : A-scan n°2	171

Liste des tableaux

1.1	Longueurs d'onde pour le CND par ultrasons	19
1.2	Caractéristiques de transducteurs ultrasonores standards	30
1.3	Équations eikonales et de transport dans le domaine temporel	33
1.4	Équations eikonale et de transport dans le domaine fréquentiel	34
2.1	Ordres des développements paraxiaux des faisceaux gaussiens	50
3.1	Synthèse de résultats de convergence issus de la littérature	91
3.2	Coefficients A_r et B_r extraits de [181]	94
4.1	Effets de la compression réallouée pour différentes valeurs de ϵ	133

Méthodes de faisceaux gaussiens pour la modélisation d'ondes de volume ultrasonores

Résumé

Le contexte d'étude est celui du développement de la plate-forme logicielle CIVA, dédiée notamment à la simulation du Contrôle Non-Destructif (CND) par ultrasons. Le calcul de champ hérite de la méthode des rayons, et peut souffrir – dans des configurations particulières – de la présence de caustiques et d'ombrages. Les faisceaux gaussiens sont des candidats pertinents dans la régularisation de ces singularités, et l'objectif est de développer et valider une méthode efficace de calcul de champ par superposition de faisceaux gaussiens. Un travail bibliographique préliminaire a permis de mettre en évidence la problématique associée à l'initialisation de ces faisceaux gaussiens, dont les méthodes diffèrent selon les auteurs et les champs disciplinaires. Du point de vue du CND, la variété physique et la complexité géométrique des pièces à inspecter guide le modélisateur vers un traitement le plus générique possible. Une façon d'initialiser une famille de faisceaux gaussiens consiste à représenter la donnée du problème posé (conditions initiales et/ou aux bords) par un espace fonctionnel vérifiant les propriétés d'un *frame*. En munissant le *frame* d'un noyau gaussien, on génère à l'aide d'algorithmes rapides un ensemble univoque de conditions initiales pour une famille de faisceaux gaussiens. La superposition de ces derniers fournit alors une solution approchée au problème. Dans le cadre de cette thèse, cette stratégie est déclinée en régimes transitoire et harmonique. La contribution majeure de ces travaux réside dans la validation quantitative de cette initialisation par *frame*, par l'application à des configurations représentatives du CND par ondes de volume ultrasonores.

Mots clés : acoustique physique, contrôle non-destructif, ultrasons, ondes de volume, faisceaux gaussiens

Abstract

This work is part of the CIVA software development. CIVA is dedicated to non-destructive testing (NDT) simulation, and especially to efficient ultrasonic bulk wave simulation. However, its modeling approach, based on the ray theory under high frequency assumption, may suffer – in some specific cases – from caustics and shadowing effects. Gaussian beams are known to be suitable candidates for removing those singularities, and the purpose of this research work is to develop and validate an efficient computing method using Gaussian beam superpositions. A preliminary review of literature revealed an underlying problematic related to the Gaussian beam initialization. Indeed, there is no standard method for initializing a relevant set of Gaussian beams: existing approaches differ, depending on the authors and on the examples they discuss. From the perspective of NDT modeling, it is still necessary to develop a numeric solution which is generic enough to indiscriminately handle a wide variety of materials, geometries and input data. One way of addressing Gaussian beam initialization is – for a given problem – to obtain a frame representation of the initial and/or boundary conditions. By choosing a Gaussian kernel, it is then possible to generate an unequivocal set of initial Gaussian beam parameters. Finally, the approximated solution is given by the corresponding propagated Gaussian beams. In this work, we derived this frame approach in both time and frequency domains. The main contribution of this thesis research lies in the quantitative validation of this method, through typical configurations of ultrasonic NDT.

Keywords: physical acoustics, non-destructive testing, ultrasonics, bulk waves, gaussian beams

CEA/LIST/DISC/LSMA

Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives – Institut List | CEA
Saclay Digitéo Labs – Bât. 565-PC120 – F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex – France