



**HAL**  
open science

# Quelques aspects de la violation-CP et interactions de jauge dans le modèle standard et au-delà

Selim Touati

► **To cite this version:**

Selim Touati. Quelques aspects de la violation-CP et interactions de jauge dans le modèle standard et au-delà. Physique des Hautes Energies - Phénoménologie [hep-ph]. Université Grenoble Alpes, 2019. Français. NNT : 2019GREAY040 . tel-02492086

**HAL Id: tel-02492086**

**<https://theses.hal.science/tel-02492086>**

Submitted on 26 Feb 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## THÈSE

Pour obtenir le grade de

### **DOCTEUR DE LA COMMUNAUTE UNIVERSITE GRENOBLE ALPES**

Spécialité : **Physique Théorique**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

**Selim TOUATI**

Thèse dirigée par **Dr. Christopher SMITH**  
et codirigée par **Dr. Jérémie QUEVILLON**

préparée au sein du **Laboratoire de Physique Subatomique et  
de Cosmologie (LPSC)**  
dans l'**École Doctorale de Physique de Grenoble**

## **Quelques aspects de la violation-CP et interactions de jauges dans le modèle standard et au-delà**

Thèse soutenue publiquement le **Vendredi 4 Octobre 2019**,  
devant le jury composé de :

**Pr. Aurélien BARRAU**

Professeur, Université Grenoble-Alpes, Président

**Dr. Marc KNECHT**

Directeur de Recherche, CPT Marseille, Rapporteur

**Dr. Felix BRÜMMER**

Maître de Conférence, Université de Montpellier, Rapporteur

**Pr. Jean ORLOFF**

Professeur, Université Blaise Pascal, Examineur

**Dr. Guillaume PIGNOL**

Maître de Conférence, Université Grenoble-Alpes, Examineur

**Dr. Ana TEIXEIRA**

Chargée de Recherche, LPC Clermont, Examinatrice

**Dr. Christopher SMITH**

Chargé de Recherche, LPSC Grenoble, Directeur de thèse

**Dr. Jérémie QUEVILLON**

Chargé de Recherche, LPSC Grenoble, Co-Directeur de thèse





# Remerciements

---

Je voudrais commencer par remercier Aurélien Barrau pour m'avoir écouté et fait confiance il y a 4 ans en me donnant l'opportunité de poursuivre mes études de physique fondamentale à l'Université Joseph Fourier à Grenoble. J'ai beaucoup apprécié ton geste, merci pour ton humanité.

Je tiens à remercier Arnaud Lucotte, directeur du Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie (LPSC), pour m'avoir accueilli dans cet établissement où j'ai pu réaliser ma thèse dans d'excellentes conditions. Je remercie aussi l'ensemble des membres du LPSC. Merci à David Maurin pour le travail qu'il fait pour les doctorants au Comité de Suivi de Thèse. Merci à Marie-Hélène Genest pour avoir été en charge de mon suivi individuel.

Je remercie également l'ensemble des membres de mon jury de thèse. Merci à Felix Brümmer et à Marc Knecht pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon manuscrit ainsi que pour avoir contribué à améliorer sa qualité. Merci à Aurélien Barrau, Jean Orloff, Guillaume Pignol et Ana Teixeira pour leur disponibilité et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.

Je tiens à remercier vivement mon directeur de thèse Christopher Smith pour m'avoir accordé sa confiance, supervisé ma thèse ainsi que pour la grande liberté qu'il m'a donnée. Merci pour ta disponibilité, ta patience et pour tous tes précieux conseils. Ta rigueur, ton esprit critique et ton honnêteté scientifique m'ont marqué. Merci de m'avoir montré ce qu'est le métier de théoricien et que l'on ne peut vraiment comprendre quelque chose qu'en la faisant réellement.

Un énorme merci à Jérémie Quevillon, codirecteur de cette thèse depuis son arrivée au labo. Outre le lien qui nous unit en tant que Mineurs, travailler avec toi a été un plaisir ! Merci de m'avoir initié au monde des théories effectives, merci pour ton dynamisme, ta disponibilité et pour ta bienveillance. J'espère avoir la chance de travailler de nouveau avec toi par la suite.

Je souhaite remercier chaleureusement l'ensemble des membres du groupe Théorie du LPSC pour leur accueil. Faire ma thèse avec vous a vraiment été super ! J'ai pu apprendre beaucoup aussi bien sur le plan scientifique que sur le fonctionnement d'une équipe de recherche. Je remercie l'ensemble des chercheurs permanents. Merci à Sabine Kraml pour faire vivre le groupe en dehors du labo en organisant les différents dîners avec les visiteurs ou encore les sorties en montagne. Merci à Ingo Schienbein pour les différentes notions de physique des particules qu'il m'a enseigné en tant que professeur ainsi que pour son ouverture d'esprit en tant que personne, c'est toujours un plaisir de parler avec toi. J'ai une pensée également pour Marianne Mangin-Brinet qui j'espère, reviendra dans le groupe au plus vite. Je remercie également l'ensemble des postdoctorants et doctorants du groupe Théorie que j'ai pu croiser durant ma thèse. Merci à Kentarou, Olek, Kimiko, Uschi, Kseniia, Humberto, Pierre-Henri et Rola. Vous êtes tous des personnes incroyables par lesquelles je me suis énormément

enrichit humainement. Merci à mon ami Mohammad pour sa grande gentillesse ainsi que pour tous les moments que nous avons partagés, que ce soit au labo ou pendant les multiples ballades le long de la rivière. I would like to thank Hoa for all the exchanges we had and for having accompanied me through the numerous weekend sessions in the lab during the summer when I was writing the manuscript. Thankfully, there was the legendary “cool room”. Good luck for your Ph.D ! Enfin, je souhaite bonne chance à tous les nouveaux arrivants dans le groupe.

Je souhaite remercier aussi tous les collègues du premier étage, en particulier le groupe UCN pour avoir partagé de nombreuses pauses café ensemble. Merci en particulier à Benoît Clément et à Guillaume Pignol pour leur enthousiasme et leur pédagogie quand il s’agit d’expliquer une notion, toujours avec humour et dans une ambiance conviviale. J’apprécie beaucoup les échanges avec vous. Après vos trolls sur les théoriciens, j’ai finalement appris à utiliser la machine à café. Merci à Sébastien Curtoni pour sa gentillesse et pour être toujours disposé à parler avec joie de son travail en physique médicale. Merci à Mahfoud pour sa positivité en toutes circonstances et de toujours donner le sourire aux personnes qu’il croise dans les couloirs avec ses nombreuses blagues.

Mes années passées à Grenoble n’auraient pas été ce qu’elles sont sans la présence de Thomas Meideck et de Léonard Aubry. Merci à vous pour toutes les discussions intéressantes qu’on a eues sur des sujets très divers mais toujours passionnants, les parties de Go jouées au club ou ailleurs, les débats politiques animés ainsi que pour les nombreuses réunions dans notre QG préféré, la Nat’, où l’on y faisait un peu tout cela à la fois. C’est toujours un plaisir de vous voir !

Je remercie vivement mon partenaire de la première heure, Killian Martineau, qui a toujours été là depuis mes tout débuts à Grenoble. Depuis le binôme choc en PSA, on a continué à évoluer ensemble et il ne se passe pas un jour sans qu’on ait une interaction. Merci pour ton estime à mon égard et pour avoir toujours cru en moi, je ne sais pas si tu es naïf ou fou (en fait si je sais) mais une chose est certaine, tu es un ami formidable ! Nos petites chamailleries et nos éternels débats sur le statut des mathématiques en physique, sur nos visions différentes de la recherche ou encore sur la manière de procéder dans un système conformiste témoignent de nos styles a priori très différents mais comme le yin et le yang, complémentaires. A chaque fois que l’on s’est associé et que l’on a usé de cette complémentarité, on a tout déchiré ! Merci pour tous les échanges qu’on a eus et je suis sûr qu’il y en aura d’autres dans le futur. Je te souhaite beaucoup de succès dans ta carrière de physicien qui démarre, tu le mérites ! Peut-être que le binôme choc se reformera un jour, qui sait ;)

Je remercie également tous les doctorants que j’ai pu croiser durant mon passage au LPSC et avec qui j’ai pu interagir ou partager des moments. Merci à tous les membres du BIDUL pour les évènements qu’ils organisent et le travail qu’ils font pour les doctorants.

Merci à tous les enseignants-chercheurs qui m’ont fait confiance et donné l’opportunité d’enseigner dans leurs Unités d’Enseignements respectives. Merci à Olivier Jacquin, Thierry Dombre et Arnaud Blaise. Je tiens à remercier tout particulièrement Laurent Derome qui m’a donné la chance d’effectuer des travaux dirigés de relativité restreinte. C’était stimulant et pédagogiquement très formateur. J’ai beaucoup apprécié de travailler avec toi. Merci aux étudiants pour leur curiosité, leur intérêt pour la physique fondamentale et pour m’avoir poussé dans mes retranchements avec les nombreux paradoxes à résoudre qu’ils m’ont offert. Grâce à eux, j’ai aussi pu progresser.

Je souhaite remercier également tous les professeurs que j’ai eu durant mes études, surtout ceux

dont la passion transparaît et qui respectent sincèrement leurs étudiants, en passant par les classes prépas, l'École des Mines, l'École Normale Supérieure et le M2 PSA à l'Université Joseph Fourier. Celui qui m'a sans doute le plus marqué est Pierre Salati, qui m'a enseigné la relativité générale à l'ENS et la théorie quantique des champs à l'UJF, tant il honore ce magnifique métier. Je le remercie pour son dévouement envers l'enseignement et ses étudiants ainsi que pour son génie pédagogique. Je n'ai jamais vu un professeur y mettre autant du sien en 12 ans d'études ! Tous les étudiants qui ont eu la chance de l'avoir voient de quoi je parle.

Je remercie aussi tous les tuteurs que j'ai eu durant les précédents stages de recherche que j'ai pu effectuer au cours de mes études, dans des thématiques très variées de physique théorique. Merci à András Borbély et Frédéric Gruy à l'École des Mines de Saint-Etienne, merci à Terai-sensei à Osaka City University et merci à Thomas Buchert au CRAL à Lyon. J'ai beaucoup appris avec chacun de vous !

De manière plus personnelle, je souhaite remercier deux personnes qui ont joué un rôle clef dans mon parcours. Merci à Sadok Kebaier, mon professeur particulier au lycée, pour avoir participé à déclencher ma passion pour les sciences dures. Merci à mon ami Zak et à « son » fameux théorème pour m'avoir donné le goût de la théorie. Cette rencontre a été vraiment déterminante pour moi et dans la direction que j'ai prise par la suite.

Enfin, c'est tout naturellement que j'exprime mes plus profonds remerciements à ma famille, pour leur soutien inconditionnel malgré le chemin tortueux que j'ai emprunté et qui m'a mené à cette thèse. Merci à ma grand-mère sans qui rien de tout cela n'aurait été possible, merci à ma mère pour l'éducation qu'elle m'a donnée et pour m'avoir toujours soutenu quelles que soient les directions prises, merci à mes petites sœurs. J'ai une pensée pour mon grand-père, dont le souhait était de me voir réussir au baccalauréat, j'espère lui faire honneur. Je remercie également tous mes amis proches, ou plutôt ma deuxième famille, qui ont toujours été là pour moi. Ils se reconnaîtront. Merci en particulier à ceux qui sont venus de loin (certains d'un autre continent) pour assister à ma soutenance. Je dédie ce manuscrit à Omar, qui nous a quittés en cours de route.



# Table des matières

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Le modèle standard de la physique des particules</b>	<b>5</b>
1.1 Théories de jauge	5
1.1.1 Théories de jauge abéliennes : cas de l'électrodynamique quantique	6
1.1.2 Théories de jauge non-abéliennes	7
1.2 La chromodynamique quantique : théorie de l'interaction forte	9
1.3 La théorie électrofaible de Glashow-Salam-Weinberg : vers le modèle standard	11
1.4 Brisure spontanée de la symétrie électrofaible	13
1.4.1 Le mécanisme de Higgs	13
1.4.2 Masses des fermions : le secteur de Yukawa	15
1.4.3 Champs et paramètres physiques	15
1.5 Le secteur de la saveur du modèle standard	17
1.5.1 Symétrie de saveur et paramètres libres dans le modèle standard	17
1.5.2 Processus avec changements de saveur à courants chargés et à courants neutres	21
1.6 Succès expérimentaux et problèmes	22
<b>2 Polymorphie de la violation-<math>\mathcal{CP}</math></b>	<b>25</b>
2.1 Sources de violation- $\mathcal{CP}$ dans le MS	26
2.1.1 Secteur faible : les courants chargés de quarks	26
2.1.2 Secteur fort : le terme $\theta$ de QCD et le problème de $\mathcal{CP}$ fort	28
2.2 Au-delà du MS : masse des neutrinos et violation- $\mathcal{CP}$ leptonique	29
2.2.1 Phénomène d'oscillation dans le vide	29
2.2.2 Faits expérimentaux	34
2.2.3 Modèles de masses des neutrinos et brisure de la symétrie de saveur	37
2.2.3.1 Masse de Dirac	37
2.2.3.2 Masse de Majorana et mécanismes de Seesaw	40
2.3 Un processus violent CP : le Moment Dipolaire Électrique	41
2.3.1 Définitions et violations de symétries	41
2.3.2 La quête d'un signal EDM non nul	42
2.3.3 Contraintes établies et impacts sur la nouvelle physique	44
<b>3 Estimation d'observables à l'aide de la symétrie de saveur</b>	<b>47</b>
3.1 Introduction	47
3.2 Méthode d'estimation : Comment exploiter la symétrie de saveur du MS ?	49
3.3 Comment prédire l'EDM généré par la phase CKM ?	52



3.3.1	EDMs de leptons générés par la phase CKM . . . . .	53
3.3.2	EDMs de quarks générés par la phase CKM . . . . .	55
3.3.3	EDMs de quarks et de leptons générés par la phase forte du MS . . . . .	58
3.3.3.1	Anomalie axiale forte . . . . .	58
3.3.3.2	Spurions impliquant la phase forte et EDMs . . . . .	59
3.3.3.3	Contributions d'interaction faible à la phase forte . . . . .	60
3.3.4	Impact de la nouvelle physique sur les EDMs des quarks et des leptons sous MFV . . . . .	61
3.4	Estimations des EDMs en présence des masses des neutrinos . . . . .	63
3.4.1	Masses de Dirac pour les neutrinos . . . . .	64
3.4.2	Masses de Majorana pour les neutrinos . . . . .	66
3.4.3	Mécanismes de seesaw . . . . .	72
3.4.3.1	Mécanisme de seesaw de type II . . . . .	72
3.4.3.2	Mécanismes de seesaw de type I et III . . . . .	74
3.4.4	Termes de masses de Majorana et invariants anomaux . . . . .	78
3.4.4.1	Interactions anomaux électrofaibles . . . . .	78
3.4.4.2	Invariants de Majorana à partir de couplages violant les nombres baryoniques et leptoniques . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Théorie effective des champs (EFT)</b>	<b>83</b>
4.1	Introduction aux EFT . . . . .	83
4.1.1	De la notion de théorie effective . . . . .	83
4.1.2	Principe de construction en théorie quantique des champs . . . . .	84
4.1.3	Comptage de puissance et correspondance à l'arbre . . . . .	85
4.1.4	Groupe de renormalisation . . . . .	88
4.1.5	Correspondance à une boucle . . . . .	92
4.1.6	Redéfinitions des champs . . . . .	95
4.1.7	Equations du mouvement . . . . .	96
4.2	Une théorie effective pour bosons de jauges . . . . .	99
4.2.1	Introduction : le lagrangien d'Euler-Heisenberg . . . . .	99
4.2.2	Interactions effectives de photons . . . . .	100
4.2.3	Interactions effectives de gluons . . . . .	104
4.2.4	Généralisation aux bosons de jauges $SU(N)$ . . . . .	110
4.2.4.1	Réductions vers les groupes $SU(3)$ et $SU(2)$ . . . . .	113
4.2.4.2	Réduction vers $U(1)$ . . . . .	115
4.2.4.3	Réduction vers des groupes produits . . . . .	116
	<b>Conclusion</b>	<b>121</b>
	<b>Annexes</b>	<b>125</b>
	<b>A Théorème de Cayley-Hamilton</b>	<b>125</b>
	<b>B La théorie de grande unification <math>SU(5)</math> GUT quantifiée en jauge non-linéaire</b>	<b>127</b>
	<b>C Invariants de Casimir des algèbres de Lie standard</b>	<b>135</b>

# Introduction

---

Il y a 2600 ans, avec la naissance de la *philosophia naturalis*<sup>1</sup>, les penseurs grecs présocratiques se sont mis à chercher une essence première en toute chose. Autrement dit, ils ont commencé à s'interroger sur la constitution du monde dans lequel ils vivaient. Quoi de plus naturel. Cette démarche marque le début d'une grande aventure pour l'humanité, peut être même la plus grande que l'Homme n'ait jamais entreprise. Elle a commencé avec THALÈS DE MILET il y a 27 siècles et n'a jamais cessé depuis. Au cours des siècles, cette quête a connu de nombreux rebondissements.

La question fondamentale qui guide cette aventure est simple : de quoi le monde est-il fait ?

L'une des premières tentative de réponse a été apportée par EMPÉDOCLE. Pour lui, la Nature était composée de quatre éléments : la Terre, l'Air, le Feu et l'Eau et toutes choses étaient faites de différentes combinaisons de ces quatre éléments. Cette théorie a été complétée par ARISTOTE qui y rajouta deux forces, la gravité qui faisait tomber les éléments Terre et Eau et la légèreté qui faisait monter l'Air et le Feu. Il y avait déjà là un besoin de théoriser seulement par la pensée et le modèle imaginé par ces deux penseurs aboutit à une séparation entre le contenu en matière d'une part et les forces qui s'y appliquent d'autre part qui est toujours d'usage aujourd'hui.

Par ailleurs, une autre interrogation occupait les esprits curieux à cette époque. Il s'agissait de savoir si la matière était indéfiniment sécable ou pas. Pour ARISTOTE et sa théorie des quatre éléments, la matière était continue, c'est à dire que l'on pouvait diviser un bout de matière en bouts plus petits, et ce indéfiniment. Une autre école de pensée en Grèce antique dont le représentant le plus célèbre est DÉMOCRITE formulait l'hypothèse atomiste. Pour lui, la matière était composée de grains élémentaires appelés *atomes*<sup>2</sup>, il y en avait plusieurs types et les différentes manières de les assembler expliquaient la diversité des choses matérielles. De plus, DÉMOCRITE postulait également l'existence du vide, car selon lui, sans vide aucun mouvement de matière n'est possible. Le débat entre les deux écoles de pensée, continue et atomiste, s'est poursuivi sans jamais qu'un des deux camps ne puissent vraiment l'emporter par des preuves solides.

Il faudra attendre 23 siècles pour que le jeune EINSTEIN dans le premier de ses trois articles de 1905 (quelques semaines avant celui sur la relativité restreinte) vienne trancher. Il s'appuie sur l'observation faite par BROWN quelques années auparavant de la dérive d'un grain de pollen dans un fluide, ce dernier était animé d'un mouvement permanent chaotique que BROWN ne parvient pas à expliquer. EINSTEIN comprend alors que si la matière était continue, c'est à dire formée par des éléments infiniment petits et infiniment nombreux, alors en moyenne les collisions provenant de toutes les directions s'équilibreraient à chaque instant et le grain observé ne bougerait pas. Par conséquent, EINSTEIN déduit que le fluide n'est pas continu mais composé de grains de dimensions finies, les molécules. Ainsi, il explique le mouvement brownien attribué alors au hasard comme résultant de collisions entre particules.

---

1. Expression en latin signifiant « philosophie naturelle », la branche de la philosophie dédiée à l'étude objective de la nature et de l'univers physique.

2. Du grec signifiant insécable.

Il calcule même leurs tailles à partir du mouvement qui les animait et fournit la preuve définitive de l'intuition de DÉMOCRITE. Les atomistes l'emportèrent.

A ce stade, il était donc établi que la matière était composée d'atomes et non continue, mais est-ce la fin de l'aventure initiale lancée par THALÈS ? Est-ce que ces atomes ne seraient-ils pas sécables à leur tour ? A l'époque, certains physiciens soupçonnaient déjà que ce soit le cas suite aux travaux d'un certain THOMSON à Cambridge qui avait observé à l'aide d'un système similaire aux tubes cathodiques, une particule de matière chargée négativement et de très faible masse par rapport aux atomes, appelée *électron*. Il a été réalisé rapidement que ces électrons devaient provenir des atomes eux-mêmes. Quelques années plus tard, en 1911, c'est un physicien britannique du nom de RUTHERFORD qui est venu compléter la réponse en étudiant les collisions de particules alpha (émises par des atomes radioactifs) avec des atomes d'or. Il établit que les atomes étaient composés de noyaux chargés positivement, autour desquels il y avait un certain nombre d'électrons, les particules découvertes par THOMSON. Les atomes possédaient donc une structure interne. Comme les noyaux n'avaient pas tous la même charge, il a été alors considéré que ces derniers étaient composés de particules portant une charge élémentaire positive appelées *protons*<sup>3</sup> et leur nombre expliquait la différence entre les noyaux. Les constituants fondamentaux de la matière étaient donc les électrons et les protons.

L'aventure principale aurait pu s'arrêter là, mais en 1932, CHADWICK découvre que le noyau atomique contient une autre particule, de masse à peu près égale à celle du proton mais de charge électrique nulle, *le neutron*. Il fallait donc l'inclure à la liste des briques fondamentales de la matière contenant désormais : le proton, le neutron et l'électron. Cet état de connaissance sur la composition de la matière est resté stable pendant une trentaine d'années.

Cependant, même après toutes ces découvertes, l'esprit humain ne peut pas s'empêcher de relancer l'interrogation initiale des philosophes présocratiques. Est-ce que les protons, les neutrons et les électrons sont insécables ou bien possèdent-ils eux aussi une sous-structure interne ? C'est le jeu des poupées russes. A partir des années 1960s, avec la construction des premiers grands collisionneurs de particules, l'évolution des connaissances sur la matière s'est considérablement accélérée et la liste des particules élémentaires s'est vue étoffée.

En effet, ce type d'expériences consiste à faire entrer en collision à très grande vitesse, des protons entre eux ou avec des électrons. Plus la vitesse des particules est élevée, ou plus généralement l'énergie de la collision, plus petite sera la taille de la structure sondée par l'expérience. Les collisions de protons à haute énergie ont révélé que ces derniers avaient une sous-structure, ils étaient eux-mêmes composés de *quarks*. Au fur et à mesure que ces expériences de collisions se poursuivaient, de nouvelles particules élémentaires étaient découvertes. Par exemple, les quarks se déclinent en six types différents, appelés *saveurs*. Pour l'anecdote, ce terme a été lancé par GELL-MANN en 1971 à son étudiant de l'époque dans un magasin de glace en Californie : « Tout comme les glaces, les quarks possèdent à la fois une couleur et une saveur ».

Aujourd'hui, quelle réponse pourrions-nous apporter à la question posée par les penseurs présocratiques il y a 27 siècles sur la constitution des choses matérielles ?

Le modèle standard de la physique des particules, développé dans le début des années 1970s, résume l'état des connaissances actuelles sur les briques élémentaires qui constituent la matière (recensées dans la figure 1) ainsi que leurs interactions (hormis la gravité). Il est le résultat d'un échange permanent entre théories et expériences s'étalant sur une cinquantaine d'années et impliquant un grand nombre de chercheurs. Il permet d'expliquer la diversité des processus observés et est en accord avec toutes les données expérimentales avec un niveau de précision inégalé dans l'histoire des sciences. Le dernier épisode en date dans l'aventure a eu lieu le 4 Juillet 2012, avec la découverte du boson de Higgs par les collaborations ATLAS et CMS, dernière pièce manquante du modèle standard qui vient couronner

---

3. Du grec signifiant « premier », car considéré comme fondamental.

le tout.

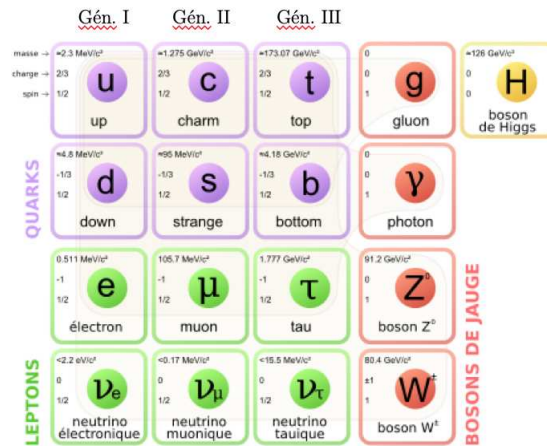


FIGURE 1 – Contenu en particules du Modèle Standard.

Cette thèse s’inscrit dans le cadre de la phénoménologie des particules élémentaires.

Le **Chapitre 1** est consacré au modèle standard de la physique des particules. Il s’agit ici de poser le cadre théorique nécessaire à l’étude des particules élémentaires et de leurs interactions. Après avoir introduit le concept de théorie de jauge à travers l’exemple de l’électrodynamique quantique pour le cas des théories abéliennes puis des théories de Yang-Mills pour le cas non-abélien, nous établirons le lagrangien du MS, en traitant les différentes pièces qui le composent séparément. Cela consistera à traiter les différentes interactions fondamentales, en passant par la chromodynamique quantique pour le cas de l’interaction forte puis du modèle de Glashow-Salam-Weinberg pour la théorie unifiée électrofaible. Ensuite, nous étudierons la notion de brisure spontanée de symétrie électrofaible avec le mécanisme de Higgs et les interactions de Yukawa qui permettent d’introduire les masses dans le MS. Puis, nous nous pencherons sur le secteur de la saveur du MS qui présente un intérêt particulier dans cette thèse. Enfin, nous passerons en revue les succès et les problèmes du MS.

Le **Chapitre 2** traitera de quelques aspects de la violation- $\mathcal{CP}$  dans le cadre du MS et au-delà. Tout d’abord, nous étudierons les sources de violation- $\mathcal{CP}$  présentes dans le MS, à la fois dans le secteur de l’interaction faible et celui de l’interaction forte. Puis, nous étudierons la physique des neutrinos et particulièrement le phénomène d’oscillation, d’abord d’un point de vue théorique puis des faits expérimentaux qui l’ont confirmés. Ce phénomène d’oscillation a permis d’établir au cours des 20 dernières années que les neutrinos avaient une masse. Nous nous intéresserons ensuite à quelques mécanismes de génération de masses des neutrinos, qui seront utiles par la suite (chapitre 3). Pour clore ce chapitre, nous considérerons un phénomène particulier violant la symétrie  $\mathcal{CP}$ , le moment dipolaire électrique (EDM) des particules élémentaires, nous décrirons certaines de ses propriétés ainsi que quelques aspects expérimentaux concernant sa mesure pour enfin lister les différentes contraintes établies et leurs impacts sur la recherche de nouvelle physique.

Le **Chapitre 3** est entièrement basé sur l’article [1]. Dans cette étude, les structures de saveurs des EDMs de quarks et de leptons dans le MS et au-delà seront scrutées en utilisant des outils inspirés de « Minimal Flavor Violation » (MFV). Alors que les invariants de saveurs de type Jarlskog sont adéquats pour estimer la violation- $\mathcal{CP}$  en présence de boucles de fermions, d’autres structures non-invariantes émergent à partir de processus de type rainbow. Le but est de construire systématiquement ces dernières structures de saveurs dans le secteur des quarks et celui des leptons, en considérant différents mécanismes de générations de masses des neutrinos. Numériquement, nous montrerons que ces structures sont généralement beaucoup plus grandes et pas nécessairement corrélées avec

les invariants de type Jarlskog. Finalement, le formalisme est adapté pour traiter avec une troisième classe de structures de saveurs, sensibles aux phases savoureuses  $U(1)$ . Nous utiliserons les méthodes développées pour étudier l'impact de la violation- $\mathcal{CP}$  forte et la relation entre les phases de Majorana de neutrinos et des interactions éventuelles violant les nombres baryoniques et/ou leptoniques.

Le **Chapitre 4** est dédié au concept de théorie effective des champs (EFT). Nous commencerons dans un premier temps par introduire la notion d'EFT et de poser le cadre théorique qui permet son expression. Puis, dans un second temps, nous nous destinerons à la construction d'une théorie effective pour bosons de jauge. Cette étude sera basée sur l'article [2]. Après avoir introduit l'exemple pédagogique que constitue le lagrangien d'Euler-Heisenberg pour l'étude des interactions de photons, considéré comme l'archétype d'une EFT, nous généraliserons leur résultat pour des bosons de jauge d'une symétrie générique, comme par exemple  $SU(2)$ ,  $SU(3)$ , plusieurs groupes de grandes unification ou encore des symétries mixtes comme  $U(1) \otimes SU(N)$  et  $SU(M) \otimes SU(N)$ . En utilisant l'approche diagrammatique, nous effectuerons une procédure de correspondance (matching) détaillée qui restera manifestement invariante de jauge à toutes les étapes, mais ne reposant pas sur les équations du mouvement et sera donc valide off-shell. Nous fournirons les expressions analytiques des coefficients de Wilson des opérateurs de dimensions quatre, six et huit induits par des scalaires, des fermions et des vecteurs siégeants dans des représentations génériques du groupe de jauge. Ces expressions reposent sur une analyse des invariants quartiques de Casimir, pour lesquels nous fournissons une revue avec les conventions adoptées pour le calcul des diagrammes de Feynman. Finalement, nous montrerons qu'à une boucle, certains opérateurs sont redondants quelque soit la représentation ou le spin de la particule intégrée, réduisant l'apparente complexité de la base d'opérateurs qui pourrait être construite uniquement sur des arguments de symétrie.

# CHAPITRE 1

## Le modèle standard de la physique des particules

---

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Théories de jauges</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1.1	Théories de jauges abéliennes : cas de l'électrodynamique quantique . . . . .	6
1.1.2	Théories de jauges non-abéliennes . . . . .	7
<b>1.2</b>	<b>La chromodynamique quantique : théorie de l'interaction forte</b> . . . . .	<b>9</b>
<b>1.3</b>	<b>La théorie électrofaible de Glashow-Salam-Weinberg : vers le modèle standard</b> .	<b>11</b>
<b>1.4</b>	<b>Brisure spontanée de la symétrie électrofaible</b> . . . . .	<b>13</b>
1.4.1	Le mécanisme de Higgs . . . . .	13
1.4.2	Masses des fermions : le secteur de Yukawa . . . . .	15
1.4.3	Champs et paramètres physiques . . . . .	15
<b>1.5</b>	<b>Le secteur de la saveur du modèle standard</b> . . . . .	<b>17</b>
1.5.1	Symétrie de saveur et paramètres libres dans le modèle standard . . . . .	17
1.5.2	Processus avec changements de saveur à courants chargés et à courants neutres	21
<b>1.6</b>	<b>Succès expérimentaux et problèmes</b> . . . . .	<b>22</b>

---

### 1.1 Théories de jauges

Une théorie de jauge est une théorie construite pour être invariante sous certaines transformations internes qui n'agissent pas sur l'espace-temps, appelée transformations de jauges. Ce principe d'invariance de jauge est extrêmement puissant et permet de décrire les interactions entre particules élémentaires. Une interaction donnée possède généralement des symétries<sup>1</sup> et la seule connaissance de ces dernières permet de décrire l'interaction en question en contraignant sa structure grâce au formalisme des théories de jauges.

---

1. Par symétrie, nous entendons un ensemble de transformations qui laissent invariante l'interaction.

### 1.1.1 Théories de jauge abéliennes : cas de l'électrodynamique quantique

L'électrodynamique quantique (QED) est la version quantique de la théorie de l'électromagnétisme. En théorie quantique des champs (TQC), le champ électromagnétique est quantifié et son quanta de champ est le photon. Lorsque deux particules chargées électriquement interagissent, elles le font par l'intermédiaire du champ quantique électromagnétique qui contrairement à sa version classique, présente une structure granulaire. Cette granularité du champ électromagnétique permet de décrire une interaction élémentaire par un échange de grain qui compose le champ véhiculant l'interaction. Ces quantas de champs sont des particules appelées *particules médiatrices* ou encore *bosons de jauge*. Dans le cas de la QED, la seule particule médiatrice est le photon. Ainsi, la QED est donc la théorie des interactions entre fermions et photons. Dans cette partie, nous allons exprimer cette théorie dans un formalisme de théorie de jauge.

D'abord, le lagrangien<sup>2</sup> de Dirac décrivant des fermions libres

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (1.1)$$

possède une symétrie globale  $U(1)$ <sup>3</sup>, c'est à dire qu'il est invariant sous l'action des éléments (transformations) de ce groupe. Les transformations de  $U(1)$  agissent uniquement sur le champ fermionique de la manière suivante :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x), \quad (1.2)$$

avec  $\alpha$  un paramètre arbitraire réel. La transformation est dite globale car  $\alpha$  ne dépend pas du point de l'espace-temps  $x$ .

Pour construire la QED, c'est à dire ajouter les interactions (médiées par les photons) à la théorie des fermions libres précédente, il suffit d'étendre la symétrie globale à une symétrie locale, c'est à dire avec un paramètre qui dépend du point de l'espace-temps  $\alpha \rightarrow \alpha(x)$ , autrement dit une fonction. Afin d'imposer l'invariance de  $\mathcal{L}_0$  sous les transformations  $U(1)$  locales  $\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$  dites transformations de jauge, il est nécessaire de remplacer la dérivée partielle par une *dérivée covariante* contenant un champ vectoriel  $A_\mu$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (1.3)$$

où  $e$  représente la constante de couplage de l'interaction électromagnétique. Dans la construction des théories de jauge, ce remplacement de dérivées est un principe général, appelé *principe de substitution minimale*, qui permet d'introduire les interactions à partir de la théorie libre. Ainsi, le lagrangien invariant de jauge locale sous  $U(1)$  est donné par

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi. \quad (1.4)$$

En développant la dérivée covariante, on obtient le terme d'interaction  $\mathcal{L}_{int}$  entre les fermions et le champ vectoriel médiateur  $A_\mu$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \underbrace{e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu}_{\mathcal{L}_{int}}. \quad (1.5)$$

Pour résumer, afin d'introduire les interactions, nous sommes naturellement amenés à introduire un champ vectoriel médiateur de l'interaction électromagnétique pour appliquer le principe de substitution minimale. Plus généralement, dans une théorie de jauge, l'application du principe de substitution minimale permet d'introduire naturellement les bosons de jauge nécessaires, véhiculant l'interaction. La nature et le nombre de particules médiatrices sont dictés par la structure du groupe de jauge sous lequel la théorie est invariante locale.

2. En fait, c'est la densité lagrangienne que nous appellerons abusivement lagrangien.

3. Le groupe  $U(1)$  est l'ensemble des nombres complexes de module unité. Mathématiquement,  $U(1) = \{e^{i\alpha} | \alpha \in \mathbb{R}\}$ .

Notons que le champ vectoriel médiateur  $A_\mu$  n'est pas dynamique, car il lui manque un terme cinétique dans cette théorie. On ajoute alors un terme cinétique à  $A_\mu$  invariant de jauge locale sous  $U(1)$ , déjà présent dans l'électrodynamique classique, à savoir

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (1.6)$$

où  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  est le tenseur électromagnétique. L'équation du mouvement de  $A_\mu$ , obtenue à partir de l'équation d'Euler-Lagrange appliquée au terme cinétique  $\mathcal{L}_A$ , donne alors les équations de Maxwell dans le vide. On peut alors complètement identifier  $A_\mu$  au photon et le lagrangien de QED est donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi}(\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_A. \end{aligned} \quad (1.7)$$

### 1.1.2 Théories de jagues non-abéliennes

Les étapes de construction de la QED avec le groupe de jauge  $U(1)$  peuvent être étendues à la construction de théories basées sur des groupes de jagues non-abéliens, c'est à dire à des transformations non-commutatives. Dans un premier temps, il s'agit d'identifier les symétries globales du lagrangien libre. Puis, les interactions entrent en action à l'aide du principe de substitution minimal, moyennant l'introduction de nouveaux champs vectoriels de jagues médiateurs de l'interaction. Enfin, les champs vectoriels sont rendus dynamiques en leur ajoutant des termes cinétiques.

Considérons une théorie libre décrite par un multiplet de champs fermioniques de masse  $m$ ,  $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$  ainsi que le lagrangien suivant

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\Psi}(\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi. \quad (1.8)$$

Cette théorie possède une symétrie globale sous les transformations

$$\Psi(x) \rightarrow U(\alpha^1, \dots, \alpha^N)\Psi(x), \quad (1.9)$$

où  $U$  sont des matrices unitaires  $n \times n$  représentant un groupe de Lie non-abélien de rang  $N$ , dépendant de  $N$  paramètres réels  $\alpha^1, \dots, \alpha^N$ . Notons que dans le contexte de ce chapitre et plus généralement celui du modèle standard, les groupes de Lie non-abéliens d'intérêts seront  $SU(2)$  et  $SU(3)$ , avec les champs fermioniques siégeant dans les représentations fondamentales respectives ( $n = 2$ ) et ( $n = 3$ ).

Une propriété cruciale des groupes de Lie simplement connexes est que les éléments du groupe peuvent être exprimés comme une exponentielle des éléments de l'algèbre associée. Une base de l'algèbre de Lie est donnée par les générateurs. Par conséquent, tous les éléments de l'algèbre peuvent être exprimés comme combinaison linéaire des générateurs. Ainsi, les matrices  $U$  peuvent être exprimées de la sorte

$$U(\alpha^1, \dots, \alpha^N) = e^{i(\alpha^1 T_1 + \dots + \alpha^N T_N)}, \quad (1.10)$$

avec  $T_1, \dots, T_N$  les générateurs du groupe de Lie, matrices hermitiennes formant l'algèbre de Lie

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (1.11)$$

où  $f_{abc}$  sont les constantes de structures réelles caractéristiques du groupe. On adopte la convention de normalisation des générateurs

$$Tr(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (1.12)$$



Ensuite, la deuxième étape dans la construction de la théorie de jauge consiste à étendre la symétrie globale précédente à une symétrie locale en faisant dépendre du point d'espace-temps  $x$  les paramètres  $\{\alpha^a, a = 1 \dots N\}$ , c'est à dire en les élevant au statut de fonctions  $\{\alpha^a(x), a = 1 \dots N\}$ . Afin que le lagrangien (1.8) soit invariant sous les transformations de jauge locales, on applique le principe de substitution minimal en introduisant une dérivée covariante

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu \mathbb{1} - ig\mathbb{W}_\mu, \quad (1.13)$$

impliquant un champ de vecteur  $\mathbb{W}_\mu$  ainsi qu'une constante de couplage  $g$ . Comme la dérivée covariante

agit sur les  $n$ -uplets  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ , le champ de vecteur  $\mathbb{W}_\mu$  est nécessairement une matrice carrée de

dimension  $n$  et peut être développé avec les générateurs comme suit

$$\mathbb{W}_\mu(x) = T_a W_\mu^a(x), \quad (1.14)$$

où les  $\{W_\mu^a(x), a = 1 \dots N\}$  sont les  $N$  champs de jauge médiateurs de cette interaction. Par suite, les termes d'interactions sont obtenus de la même manière que précédemment, c'est à dire en développant la dérivée covariante dans le lagrangien (1.8). En effet,

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}, \quad (1.15)$$

avec le terme d'interaction

$$\mathcal{L}_{int} = g\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathbb{W}_\mu\Psi = g\bar{\Psi}\gamma^\mu T_a\Psi W_\mu^a, \quad (1.16)$$

contenant les interactions de  $N$  courants  $j_a^\mu = g\bar{\Psi}\gamma^\mu T_a\Psi$  avec les champs de jauge  $W_\mu^a$ .

Les transformations de jauge locales qui laissent invariante la théorie impliquent la matrice  $U \equiv U(\alpha^1(x), \dots, \alpha^N(x))$  et sont données par

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = U\Psi, \\ \mathbb{W}_\mu &\rightarrow \mathbb{W}'_\mu = U\mathbb{W}_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Pour une transformation infinitésimale  $\alpha^a(x) \ll 1$ , la transformation de jauge pour le champ de vecteur  $\mathbb{W}_\mu$  peut être écrite en termes des champs de jauge  $W_\mu^a$  comme ceci

$$W_\mu^a \rightarrow W'^a_\mu = W_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a + f_{abc}W_\mu^b\alpha^c. \quad (1.18)$$

Remarquons que cette transformation diffère du cas abélien par son dernier terme, nouveau, car d'origine purement non-abélienne.

Finalement, la dernière étape consiste à rendre dynamiques les champs de jauge  $W_\mu^a$  en leur donnant un terme cinétique, obtenu en généralisant le cas de l'électromagnétisme. En effet, le tenseur électromagnétique  $F_{\mu\nu}$  est généralisé comme suit

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = T_a F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu\mathbb{W}_\nu - \partial_\nu\mathbb{W}_\mu - ig[\mathbb{W}_\mu, \mathbb{W}_\nu], \quad (1.19)$$

avec  $N$  tenseurs de champs de jauge (équivalents au tenseur électromagnétique pour le photon)

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf_{abc}W_\mu^b W_\nu^c. \quad (1.20)$$

Sous la transformation de jauge (1.17), le tenseur  $\mathbb{F}_{\mu\nu}$  se transforme selon

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} \rightarrow \mathbb{F}'_{\mu\nu} = U\mathbb{F}_{\mu\nu}U^{-1}. \quad (1.21)$$

Afin de construire un invariant de jauge, on peut prendre la trace du tenseur  $\mathbb{F}_{\mu\nu}$  qui grâce à sa propriété de cyclicité élimine les matrices  $U$  induites par la transformation de jauge. De façon explicite,

$$Tr(\mathbb{F}'_{\mu\nu}\mathbb{F}'^{\mu\nu}) = Tr(U\mathbb{F}_{\mu\nu}U^{-1}U\mathbb{F}^{\mu\nu}U^{-1}) = Tr(U^{-1}U\mathbb{F}_{\mu\nu}U^{-1}U\mathbb{F}^{\mu\nu}) = Tr(\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}), \quad (1.22)$$

où l'on a utilisé l'unitarité de  $U, U^\dagger U = \mathbb{I}$ . Comme le terme cinétique doit obligatoirement être invariant de jauge, il s'ensuit que la version non-abélienne du terme cinétique pour les champs de jauge  $W_\mu^a$  est donc

$$\mathcal{L}_W = -\frac{1}{2}Tr(\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu}. \quad (1.23)$$

La partie quadratique de ce terme cinétique décrit la propagation libre des champs de jauge alors que les parties cubiques et quartiques décrivent l'auto-interaction des champs de jauge, phénomène propre aux théories de jauge non-abéliennes. Ces interactions des champs de jauge avec eux mêmes sont complètement déterminées par la symétrie de jauge. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)(\partial^\mu W^{a,\nu} - \partial^\nu W^{a,\mu}) && \text{propagation des champs libres} \\ &- \frac{g}{2}f_{abc}(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a)W^{b,\mu}W^{c,\nu} && \text{auto-interaction à 3 champs} \\ &- \frac{g^2}{4}f_{abc}f_{ade}W_\mu^b W_\nu^c W^{d,\mu}W^{e,\nu}. && \text{auto-interaction à 4 champs} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Pour finir, notons que les champs de jauge n'ont pas de masses. En effet, des termes de masses du type  $\frac{M^2}{2}W_\mu^a W^{a,\mu}$  ne sont pas invariants sous les transformations locales (1.17) et brise donc la symétrie de jauge.

## 1.2 La chromodynamique quantique : théorie de l'interaction forte

La chromodynamique quantique (QCD) est la théorie décrivant l'interaction forte, cette « force » qui permet la cohésion des noyaux atomiques censés éclater sous l'effet des forces répulsives électromagnétiques s'exerçant entre les protons. La QCD est une théorie de jauge non-abélienne basée sur le groupe de jauge  $SU(3)$ , groupe de Lie spécial unitaire de dimension 3. Les fermions assujettis à l'interaction forte sont les quarks, qui composent les hadrons. La QCD est donc la théorie des quarks en interactions fortes. Les quarks existent sous trois états de *couleurs* différents. La couleur est la « charge forte », elle est à l'interaction forte ce que la charge électrique est à l'interaction électromagnétique.

Les trois états de couleurs des quarks forment la représentation fondamentale du groupe de jauge  $SU(3)$ . La représentation fondamentale étant de dimension 3, les quarks sont représentés par des triplets de champs fermioniques  $\Psi = (q_1, q_2, q_3)^T$  pour chaque type (saveur) de quarks. Le groupe de jauge est alors noté  $SU(3)_c$  avec l'indice  $c$  référant à « couleur ». Le groupe de couleur  $SU(3)_c$  a huit générateurs  $\{T_a | a = 1 \dots 8\}$ , qui s'expriment dans la représentation fondamentale en termes des huit matrices de Gell-Mann  $3 \times 3$ ,  $\{\lambda_a | a = 1 \dots 8\}$

$$T_a = \frac{1}{2}\lambda_a, \quad a = 1 \dots 8, \quad (1.25)$$

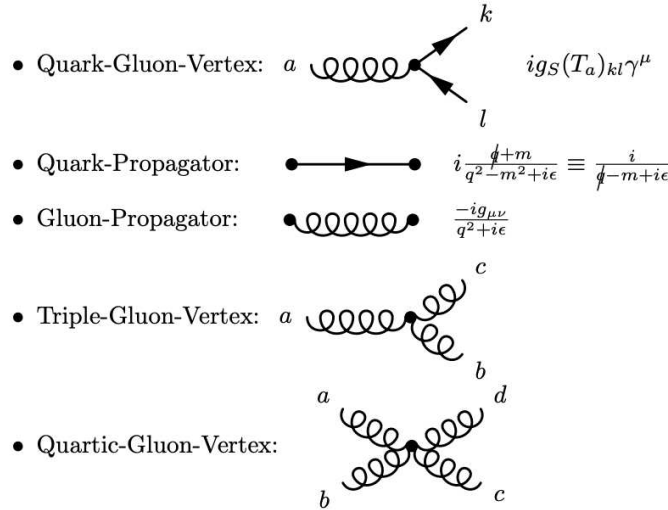


FIGURE 1.1 – Propagateurs et interactions en QCD

Dans le formalisme des théories de jauge vu précédemment, les interactions sont contenues dans la dérivée covariante. Pour la QCD, dans l'étape de construction de la théorie de jauge, afin d'appliquer le principe de substitution minimale sur la théorie libre, on est amené à introduire huit champs vectoriels de jauge  $\{G_\mu^a | a = 1 \dots 8\}$ , médiateurs de l'interaction forte, appelés *les gluons*. Ainsi, la dérivée covariante agissant sur le triplets de couleurs de quarks  $\Psi$  et est donnée par

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s \frac{\lambda}{2} G_\mu^a, \tag{1.26}$$

De plus, les tenseurs de champs de jauge sont définis comme suit

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \tag{1.27}$$

où  $g_s$  est la constante de couplage forte et est communément exprimée en fonction de la constante de structure fine de l'interaction forte  $\alpha_s$  de la manière suivante  $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$ .

Par suite, en utilisant les outils développés dans la partie précédente, on écrit le lagrangien de QCD (pour une saveur donnée) de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\Psi + \mathcal{L}_G \\ &= \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi + g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

Ce lagrangien contient les interactions des courants de quarks et des gluons ainsi que les auto-interactions à 3-gluons et 4-gluons. Ces interactions élémentaires sont représentées en figure 1.1 et leurs règles de Feynman sont données. Notons que pour obtenir le lagrangien complet de QCD, on doit sommer le lagrangien précédent (décrivant uniquement un type de quark) sur les 6 saveurs de quarks du MS  $q = u, d, c, s, b, t$ , chacune représentées par un triplet de couleur  $\Psi_q$  avec leurs masses respectives  $m_q$ . Enfin, nous avons volontairement omis le lagrangien de fixation de jauge sur lequel on reviendra par la suite de façon plus générale.

### 1.3 La théorie électrofaible de Glashow-Salam-Weinberg : vers le modèle standard

La théorie électrofaible [3, 4], proposée par Glashow, Weinberg et Salam est la théorie unifiée de l'interaction électromagnétique et de l'interaction faible<sup>4</sup>. La théorie de Glashow-Salam-Weinberg (GSW) est la formulation la plus complète de la théorie des interactions unifiées électrofaibles et est en accord jusqu'à ce jour avec toutes les données expérimentales d'origine électrofaible. A basse énergie, cette théorie reproduit à la fois la QED et la théorie de Fermi des interactions faibles, qui constituait déjà une très bonne description des interactions nucléaires faibles à basses énergies. De plus, ce modèle est minimal dans le sens où il contient le minimum de degrés de libertés nécessaires permettant de décrire tous les résultats expérimentaux connus.

La théorie GSW est une théorie de jauge non-abélienne basée sur le groupe de jauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Au moment de l'élaboration de la théorie GSW, les résultats de la désormais célèbre expérience de Wu en 1956 [5] qui a établi que l'interaction faible violait la parité de façon maximale, était bien connus. Etant donné que l'interaction faible ne couple que des particules de chiralités gauches, la théorie GSW est chirale dans la mesure où elle traite les composantes de chiralités gauches différemment de celles de chiralités droites. L'indice  $L$  dans le groupe de jauge de l'interaction faible  $SU(2)_L$  fait référence à la chiralité gauche (Left). Mathématiquement, cela signifie que sous l'action du groupe de jauge  $SU(2)_L$ , les fermions gauches et droits se transforment selon différentes représentations du groupe.

En effet, au sein de chaque génération, les fermions gauches sont placés dans des doublets se transformant comme la représentation fondamentale de  $SU(2)_L$  et les fermions droits sont des singlets siégeant dans la représentation triviale de  $SU(2)_L$  car ils n'interagissent pas. Les objets élémentaires de la théorie sont

$$\begin{aligned} \text{Leptons : } & \left( \begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} \right)_L, \left( \begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu \end{array} \right)_L, \left( \begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau \end{array} \right)_L, e_R, \mu_R, \tau_R \\ \text{Quarks : } & \left( \begin{array}{c} u \\ d \end{array} \right)_L, \left( \begin{array}{c} c \\ s \end{array} \right)_L, \left( \begin{array}{c} t \\ b \end{array} \right)_L, u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R. \end{aligned}$$

Ces derniers peuvent être classifiés par la donnée de trois nombres quantiques, à savoir : l'isospin faible  $I$ , sa troisième composante  $I_3$  et l'hypercharge faible  $Y$ . Les champs de chiralité gauche ont un isospin  $I = \frac{1}{2}$  et forment donc des doublets alors que les champs de chiralité droite possède un isospin nul  $I = 0$  et sont alors des singlets. La relation de Gell-Mann-Nishijima lie ces nombres quantiques à la charge électrique  $Q$  de la manière suivante

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (1.29)$$

Les différents nombres quantiques pour les fermions élémentaires (quarks et leptons) sont donnés pour la première génération dans le tableau représenté en figure 1.2. Ceux-ci sont identiques pour les autres générations.

Ainsi, cette structure est incorporée dans un formalisme de théorie de jauge avec des transformations locales du groupe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Ce groupe de Lie non-simple possède quatre générateurs, trois pour  $SU(2)_L$ ,  $\{T_a = I_a | a = 1, 2, 3\}$  et un pour  $U(1)_Y$ ,  $T_4 = Y$ , où les  $I_a$  sont les opérateurs d'isospins et

4. L'interaction faible est l'interaction responsable des désintégrations nucléaires. Elle concerne tous les fermions.

	$\nu_L$	$e_L$	$e_R$	$u_L$	$d_L$	$u_R$	$d_R$
$I_3$	+1/2	-1/2	0	+1/2	-1/2	0	0
$Y$	-1	-1	-2	+1/3	+1/3	+4/3	-2/3
$Q$	0	-1	-1	+2/3	-1/3	+2/3	-1/3

FIGURE 1.2 – Nombres quantiques d’isospin  $I_3$  et d’hypercharge  $Y$  pour les leptons et les quarks de chiralités gauche et droite ainsi que leurs charges électriques

$Y$  l’hypercharge, formant l’algèbre de Lie

$$[I_a, I_b] = i\epsilon_{abc}I_c, \quad [I_a, Y] = 0. \quad (1.30)$$

Le lagrangien complet de la théorie électrofaible est formé de quatre composantes chacune traitant d’un secteur : jauge, Higgs, fermion et Yukawa

$$\mathcal{L}_{EW} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_Y. \quad (1.31)$$

Dans la suite, nous allons nous pencher sur chacune de ces composantes. Les lagrangiens de Higgs et de Yukawa seront traités dans la section suivante consacrée à la brisure spontanée de symétrie.

### Les champs de jauge $\mathcal{L}_G$

Chaque générateurs du groupe de jauge  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  est associé à un boson de jauge. Nous avons alors un triplet de champ vectoriels  $W_\mu^{1,2,3}$  associé aux  $I_{1,2,3}$  ainsi qu’un singlet vectoriel  $B_\mu$  associé à  $Y$ . Ces derniers permettent de définir les tenseurs de champs de jauge suivants

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon_{abc} W_\mu^b W_\nu^c, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \end{aligned} \quad (1.32)$$

En raison du fait que le groupe de jauge soit semi-simple et qu’il contienne deux facteurs, nous avons deux constantes de couplages indépendantes :  $g_2$  pour  $SU(2)_L$  et  $g_1$  pour  $U(1)_Y$ . A partir des tenseurs de champs de jauge définis plus haut, on construit le lagrangien de jauge suivant

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu,a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (1.33)$$

invariant de jauge local sous  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . Notons que des termes de masses explicites pour les champs de jauge sont interdits dans la mesure où ils brisent l’invariance de jauge. Les masses sont données dans un second temps à l’aide du mécanisme de Higgs que nous verrons plus loin.

### Le lagrangien des fermions $\mathcal{L}_F$

Comme les fermions de chiralités différentes vivent dans des représentations différentes, on se doit de distinguer les champs gauches et droits. Pour cela, on utilise les projecteurs chiraux

$$\psi_L = \frac{1 - \gamma^5}{2} \psi, \quad \psi_R = \frac{1 + \gamma^5}{2} \psi. \quad (1.34)$$

Comme nous l’avons vu précédemment, les champs fermioniques gauches de chaque génération  $I \in \{1, 2, 3\}$  de quarks et de leptons sont organisés dans des doublets de  $SU(2)$ , tandis que les champs droits sont représentés par des singlets

$$\psi_L^I = \begin{pmatrix} \psi_{L+}^I \\ \psi_{L-}^I \end{pmatrix}, \quad \psi_{R,\sigma}^I, \quad (1.35)$$

où l'indice  $\sigma = \pm$  dénote les fermions de type up (+) et de type down (-). Tous les multiplets sont des états propres de l'hypercharge faible  $Y$  en sorte que la relation de Gell-Mann-Nishijima (1.29) s'applique. La dérivée covariante est différente pour les champs gauches et droits car ils appartiennent à des représentations différentes et ont donc des générateurs différents. Elle est donnée par

$$D_\mu^{L,R} = \partial_\mu - ig_2 I_a^{L,R} W_\mu^a + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu, \quad \text{avec} \quad I_a^L = \frac{1}{2} \sigma_a, \quad I_a^R = 0 \quad (1.36)$$

et induit les interactions entre les fermions et les champs de jauge

$$\mathcal{L}_F = \sum_I \bar{\psi}_L^I i\gamma^\mu D_\mu^L \psi_L^I + \sum_{I,\sigma} \bar{\psi}_{R,\sigma}^I i\gamma^\mu D_\mu^R \psi_{R,\sigma}^I \quad (1.37)$$

où l'indice  $I$  indexe les générations de particules.

## 1.4 Brisure spontanée de la symétrie électrofaible

Jusque là, nous avons un modèle qui décrit les interactions électrofaibles entre particules élémentaires, le modèle GSW. Cependant, en raison du fait que les termes de masses brisent l'invariance de jauge, nous n'étions pas autorisés à en écrire et de ce fait aucune particule n'est dotée de masse dans ce modèle. Or, nous savons que quasiment toutes les particules ont une masse et il faut donc trouver un moyen de les introduire dans le modèle GSW. La solution à ce problème réside dans le concept de *brisure spontanée de symétrie*, déjà bien connu dans d'autres domaines de la physique comme en matière condensée par exemple. Le mécanisme de brisure spontanée de la symétrie électrofaible a été développé en 1964 indépendamment par Englert et Brout, par Higgs et par Guralnik, Hagen et Kibble. Il est communément appelé simplement « mécanisme de Higgs » au détriment des autres physiciens. Suite à la découverte en 2012 par l'expérience ATLAS au CERN [6] du boson de Higgs prédit par ce mécanisme, le prix Nobel de physique l'année suivante a été décerné à Brout, Englert et Higgs pour leur prédiction alors confirmée.

### 1.4.1 Le mécanisme de Higgs

Le mécanisme de Higgs permet de donner une masse aux particules à partir de la brisure spontanée de la symétrie électrofaible. Nous allons décrire ici comment briser spontanément la symétrie  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  de sorte à conserver le sous-groupe de jauge électromagnétique  $U(1)_{em}$  non brisé. Dans ce but, on introduit un doublet d'isospin faible de champs scalaires complexes d'hypercharge  $Y = 1$

$$H(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Ce champ est appelé *champ de Higgs*. Le champ de Higgs est couplé aux bosons de jauge par l'application du principe de substitution minimal,

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu H)^\dagger (D^\mu H) - V(H), \quad (1.39)$$

avec une dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 \frac{\sigma_a}{2} W_\mu^a + i \frac{g_1}{2} B_\mu, \quad (1.40)$$

où les  $\{\sigma_a | a = 1, 2, 3\}$  sont les matrices de Pauli. Le potentiel  $V(H)$ , qui contient les auto-interactions du champ de Higgs, est donné par

$$V(H) = -\mu^2 H^\dagger H + \frac{\lambda}{4} (H^\dagger H)^2, \quad (1.41)$$

avec  $\mu$  et  $\lambda$  des constantes réelles.

Dans le vide, c'est à dire l'état de plus basse énergie, le potentiel est minoré. Pour  $\mu^2$  et  $\lambda$  tout deux positifs, le minimum n'est pas en  $H = 0$  mais plutôt réalisé par toutes les configurations de champs non-nulles vérifiant  $H^\dagger H = \frac{2\mu^2}{\lambda}$ . En sélectionnant la configuration réelle et neutre électriquement ( $QH = 0$ )

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.42)$$

on obtient alors la *valeur moyenne dans le vide (VEV)*

$$\langle 0|H|0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad v = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}}. \quad (1.43)$$

Bien que le lagrangien soit invariant de jauge sous le groupe  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , le vide  $\langle 0|H|0 \rangle$  quant à lui ne présente pas cette symétrie. Dans ces conditions, on dit que la symétrie a été spontanément brisée. Néanmoins, la configuration vide  $\langle 0|H|0 \rangle$  est toujours symétrique sous l'action du sous-groupe électromagnétique  $U(1)_{em}$  qui est généré par l'opérateur charge électrique  $Q$ . Il s'ensuit que la symétrie de jauge électromagnétique reste donc préservée.

Le champ de Higgs peut être réécrit de la manière suivante

$$H(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \frac{v+h(x)+i\chi(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (1.44)$$

avec les composantes  $\phi^+$ ,  $h$  et  $\chi$  ayant des valeurs moyennes dans le vide nulles. En développant le potentiel  $V(H)$  autour de la VEV en supposant que les autres composantes apportent des petites perturbations autour de cette configuration du vide, on obtient alors un terme de masse pour  $h$  alors que  $\phi^+$  et  $\chi$  restent sans masses. En exploitant la symétrie de jauge du lagrangien, les composantes  $\phi^+$  et  $\chi$  peuvent être éliminées par une transformation de jauge judicieuse, ce qui signifie que ce sont des degrés de libertés non physiques (would-be Goldstone bosons). En choisissant cette jauge particulière où  $\phi^+ = \chi = 0$ , appelée *jauge unitaire*, le champ de Higgs s'écrit simplement sous la forme

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

En ce qui concerne le potentiel  $V(H)$ , il s'exprime dans cette jauge unitaire en fonction de la VEV et du seul degré de liberté physique  $h(x)$  de la manière suivante

$$V(v, h) = \mu^2 h^2 + \frac{\mu^2}{v} h^3 + \frac{\mu^2}{4v^2} h^4 = \frac{m_h^2}{2} h^2 + \frac{m_h^2}{2v} h^3 + \frac{m_h^2}{8v^2} h^4. \quad (1.46)$$

Le degré de liberté physique  $h(x)$  est un champ réel décrivant une particule scalaire neutre et massive, le célèbre *boson de Higgs*, de masse

$$m_h = \sqrt{2}\mu, \quad (1.47)$$

et d'auto-couplages cubiques et quartiques proportionnels à  $m_h^2$ . De plus, les couplages aux champs de jauge sont obtenus à partir du terme cinétique dans le lagrangien de Higgs (1.39) et contiennent les vertex trilineaires  $hWW$ ,  $hZZ$  et quadrilineaires  $hhWW$ ,  $hhZZ$ .

Pour clore cette partie sur le mécanisme de Higgs, notons que ce dernier permet aux bosons de jauge d'acquérir une masse à travers leurs couplages au champ de Higgs contenus dans le terme cinétique. Cependant, les fermions sont toujours de masses nulles. C'est le rôle de la dernière composante non traitée du lagrangien  $\mathcal{L}_{EW}$ , formée des interactions de Yukawa  $\mathcal{L}_Y$ , qui va permettre aux fermions d'acquérir leurs masses.

## 1.4.2 Masses des fermions : le secteur de Yukawa

Afin de doter les fermions d'une masse, on introduit les interactions de Yukawa couplant le champ de Higgs aux champs fermioniques. Pour une génération de quarks et de leptons donnée, le lagrangien de Yukawa invariant de jauge encapsulant ces interactions peut s'exprimer en termes des doublets  $L = (\nu_L, e_L)^T$ ,  $Q = (u_L, d_L)^T$  et du champ de Higgs  $H$  ainsi que son conjugué de charge  $H^c = i\sigma_2 H = (\phi^{0*}, -\phi^-)^T$ , où  $\phi^- = (\phi^+)^{\dagger}$ ,

$$\mathcal{L}_Y = -y_e \bar{L} H e_R - y_d \bar{Q} H d_R - y_u \bar{Q} H^c u_R + h.c. \quad (1.48)$$

En explicitant ce lagrangien en fonction des différentes composantes du champ de Higgs, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= -y_e (\bar{\nu}_L \phi^+ e_R + \bar{e}_R \phi^- \nu_L + \bar{e}_L \phi^0 e_R + \bar{e}_R \phi^{0*} e_L) \\ &= -y_d (\bar{u}_L \phi^+ d_R + \bar{d}_R \phi^- u_L + \bar{d}_L \phi^0 d_R + \bar{d}_R \phi^{0*} d_L) \\ &= -y_u (-\bar{u}_R \phi^+ d_L + \bar{d}_L \phi^- u_R + \bar{u}_R \phi^0 u_L + \bar{u}_L \phi^{0*} u_R). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Par suite, en se plaçant dans la jauge unitaire (1.45), le lagrangien de Yukawa prend la forme plus simple

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_f m_f \bar{\psi}_f \psi_f - \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{\psi}_f \psi_f h, \quad (1.50)$$

qui contient alors les termes de masses des fermions, avec des masses  $m_f$  dépendants de la VEV et de la constante de Yukawa associée au fermion en question

$$m_f = y_f \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (1.51)$$

Hormis les termes de masses, on trouve également dans  $\mathcal{L}_Y$  les interactions entre les fermions massifs et le boson de Higgs dont le couplage est proportionnel à la masse du fermion impliqué  $m_f$ .

Pour conclure, notons que le cas réaliste en présence de trois générations permet à un nouveau phénomène d'émerger, le mélange des quarks. Ce phénomène aura une répercussion sur les courants chargés de quarks en interaction faible et permettra d'avoir de la violation- $\mathcal{CP}$  dans le MS. Nous traiterons ces aspects en détails dans la Section 1.5 ainsi que dans le Chapitre 2 consacré à la violation- $\mathcal{CP}$ .

## 1.4.3 Champs et paramètres physiques

Le terme cinétique du lagrangien de Higgs (1.39) contenant les interactions entre les champs de Higgs et de jauge permet d'avoir des termes de masses pour les bosons vecteurs sous la forme non-diagonale suivante

$$\frac{1}{2} \left( \frac{g_2 v}{2} \right)^2 (W_1^2 + W_2^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{2} \right)^2 (W_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g_2^2 & g_1 g_2 \\ g_1 g_2 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3,\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$



Les champs physiques deviennent apparents en appliquant une rotation aux champs  $W_\mu^a$  et  $B_\mu$  qui sont liés aux générateurs de  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ . On définit alors

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \quad (1.53)$$

ainsi que

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^{3,\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

Exprimé dans cette base, c'est à dire en termes des champs physiques, le terme de masse précédent (1.52) prend une forme diagonale

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2}(A_\mu, Z_\mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_Z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}, \quad (1.55)$$

avec

$$M_W = \frac{1}{2}g_2v, \quad M_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2}. \quad (1.56)$$

L'angle de la rotation effectuée  $\theta_W$  est appelé *angle de Weinberg* et il est donné par

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = \frac{M_W}{M_Z}. \quad (1.57)$$

En effectuant cette rotation sur les interactions du lagrangien des fermions  $\mathcal{L}_F$  et en identifiant  $A_\mu$  au photon se couplant à l'électron avec une constante de couplage  $e$ , on peut relier la charge électrique et les constantes de couplages de jauge de la façon suivante

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad g_2 = \frac{e}{\sin \theta_W}, \quad g_1 = \frac{e}{\cos \theta_W}. \quad (1.58)$$

Ainsi, ces relations nous permettent de remplacer les paramètres originaux de la théorie  $g_1, g_2, \lambda, \mu^2, y_f$  par un jeu de paramètres physiques équivalents  $e, M_W, M_Z, m_h, m_f, V_{CKM}$ <sup>5</sup>. L'intérêt de ces nouveaux paramètres est qu'ils peuvent être mesurés directement dans les expériences. A ce jour, tous ces paramètres ont été mesurés expérimentalement.

Concernant les interactions des fermions avec les champs de jauge, contenues dans le lagrangien  $\mathcal{L}_F$ , on peut également les exprimer en fonction des champs et des paramètres physiques. Ils se manifestent alors comme des couplages entre le courant électromagnétique  $J_{em}^\mu$ , le courant faible neutre  $J_{NC}^\mu$  et le courant faible chargé  $J_{CC}^\mu$  avec les champs vectoriels de jauge correspondants

$$\mathcal{L}_{FG} = J_{em}^\mu A_\mu + J_{NC}^\mu Z_\mu + J_{CC}^\mu W_\mu^+ + J_{CC}^{\mu\dagger} W_\mu^-, \quad (1.59)$$

où les différents courants sont donnés par

$$\begin{aligned} J_{em}^\mu &= -e \sum_f Q_f \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f, \\ J_{NC}^\mu &= \frac{g_2}{2 \cos \theta_W} \sum_f \bar{\psi}_f (C_V^f \gamma^\mu - C_A^f \gamma^\mu \gamma^5) \psi_f, \\ J_{CC}^\mu &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left( \sum_{I=1,2,3} \bar{\nu}^I \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} e^I + \sum_{I,J=1,2,3} \bar{u}^I \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} V_{IJ} d^J \right), \end{aligned} \quad (1.60)$$

5. La matrice CKM traduit le mélange des quarks et sera définie plus tard.

où  $I, J$  sont des indices de saveurs, c'est à dire  $(e^1, e^2, e^3) = (e, \mu, \tau)$  et  $(\nu^1, \nu^2, \nu^3) = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ . De plus, les constantes de couplages intervenant dans les courants neutres dépendent de la charge électrique du fermion  $Q_f$  ainsi que de son isospin  $I_3^f$  comme suit

$$\begin{aligned} C_v^f &= I_3^f - 2Q_f \sin^2 \theta_W, \\ C_A^f &= I_3^f. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Pour conclure cette partie, nous allons réécrire le lagrangien de jauge  $\mathcal{L}_G$  en termes des champs physiques afin de révéler la forme des auto-interactions de bosons de jauge. En effet, comme nous l'avons vu auparavant, le caractère non-abélien du groupe de jauge induit des auto-interactions des champs de jauge complètement déterminées par la structure du groupe. En procédant, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{G,self} &= e \left[ W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu} A^\nu + W_\mu^+ W_\nu^- F^{\mu\nu} + h.c. \right] \\ &+ e \cot \theta_W \left[ W_{\mu\nu}^+ W^{-\mu} Z^\nu + W_\mu^+ W_\nu^- Z^{\mu\nu} + h.c. \right] \\ &- \frac{e^2}{4 \sin^2 \theta_W} \left[ (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\nu^- W_\mu^+) W_\mu^+ W_\nu^- + h.c. \right] \\ &- \frac{e^2}{4} (W_\mu^+ A_\nu - W_\nu^+ A_\mu) (W^{-\mu} A^\nu - W^{-\nu} A^\mu) \\ &- \frac{e^2}{4} \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ Z_\nu - W_\nu^+ Z_\mu) (W^{-\mu} Z^\nu - W^{-\nu} Z^\mu) \\ &+ \frac{e^2}{2} \cot \theta_W (W_\mu^+ A_\nu - W_\nu^+ A_\mu) (W^{-\mu} Z^\nu - W^{-\nu} Z^\mu) + h.c. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Insistons sur le fait que dans le MS, ces constantes d'auto-couplages sont uniquement déterminées par la symétrie de jauge, c'est à dire par la structure du groupe de jauge. Il s'ensuit alors que toutes déviations mesurées à ces constantes ne peut s'expliquer qu'en dehors du MS, autrement dit par des processus de nouvelle physique ayant lieu à des échelles d'énergies supérieures.

## 1.5 Le secteur de la saveur du modèle standard

Cette partie est largement inspirée de [7].

### 1.5.1 Symétrie de saveur et paramètres libres dans le modèle standard

Le modèle standard est une théorie de jauge basée sur le groupe  $G_{SM} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ , où les groupes correspondent respectivement aux interactions forte et électrofaible. Le lagrangien des fermions en interactions est le suivant :

$$\mathcal{L}_{fermions} = \sum_{\psi, I} \bar{\psi}^I (i \not{D}_\psi) \psi^I, \quad (1.63)$$

où la somme est effectuée sur tous les fermions et toutes les saveurs,  $\psi = Q, U, D, L, E$  (voir tableau 1.1) et  $I = 1, 2, 3$  est l'indice de saveur (pour la  $I$ -ème génération). Les bosons de jauge qui médient les différentes interactions sont contenus dans la dérivée covariante :

$$D_\psi^\mu = \partial^\mu - ig_s T_\psi^a G_a^\mu - ig \vec{T}_\psi \cdot \vec{W}^\mu - ig' \frac{Y_\psi}{2} B^\mu, \quad (1.64)$$

Matière $\psi$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{L}$	$G_F$	$G_{SM} :$	$T_\psi^a$	$\vec{T}_\psi$	$Y_\psi/2$
$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	1/3	0	(3, 1, 1, 1, 1)	$(3, 2)_{+1/3}$	$+\lambda^a/2$	$\vec{\sigma}/2$	+1/6
$U = u_R^\dagger$	-1/3	0	(1, 3, 1, 1, 1)	$(3, 1)_{-4/3}$	$-\lambda^a/2$	0	-2/3
$D = d_R^\dagger$	-1/3	0	(1, 1, 3, 1, 1)	$(3, 1)_{+2/3}$	$-\lambda^a/2$	0	+1/3
$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	0	1	(1, 1, 1, 3, 1)	$(1, 2)_{-1}$	0	$\vec{\sigma}/2$	-1/2
$E = e_R^\dagger$	0	-1	(1, 1, 1, 1, 3)	$(1, 1)_{+2}$	0	0	+1

TABLE 1.1 – La première colonne représente le contenu en matière du MS.  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{L}$  sont respectivement les nombres baryonique et leptonique. On trouve les représentations des groupes de saveur  $G_F$  et du MS  $G_{SM}$  sous lesquelles se transforment chaque  $\psi$  ainsi que les générateurs associés à  $SU(3)_C$ ,  $SU(2)_L$  et  $U(1)_Y$ . Les  $\lambda^a$  dénotent les matrices de Gell-Mann et  $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$  les matrices de Pauli. Notons que les fermions droits sont définis à partir du conjugué de leurs spineurs de Weyl gauches. Par  $U$ , on peut comprendre  $u_R^\dagger, \bar{u}_R$  ou  $u_R^C$  qui se transforment tous sous la même représentation  $G_{SM} \times G_F$ .

où  $g_s, g$  et  $g'$  désignent respectivement les constantes de couplages des interactions forte, faible et d'hypercharge et où  $(T_\psi^a, \vec{T}_\psi, \frac{Y_\psi}{2})$  sont les générateurs du groupe dans la représentation de  $G_{SM}$  portée par  $\psi$ . Les différents générateurs pour chaque particules et chaque interactions sont donnés dans le tableau 1.1.

On remarque que la dérivée covariante ne dépend pas de l'indice de saveur. Autrement dit, les interactions de jauge ne dépendent pas de la saveur des fermions. Le lagrangien est invariant sous une permutation des trois indices de saveur et plus généralement sous l'action d'une transformation unitaire qui mélange les saveurs des différents champs fermioniques. Pour chacun des cinq champs de matière  $\psi = Q, U, D, L, E$ , il y a invariance (dans l'espace des saveurs) sous le groupe des matrices unitaires  $3 \times 3$  :  $U(3)_\psi$  :

$$\forall \psi \in \{Q, U, D, L, E\}, \forall g_\psi \in U(3),$$

$$\psi^I \rightarrow \sum_J (g_\psi)^{IJ} \psi^J : \mathcal{L}_{fermions} \rightarrow \sum_{\psi, I} \sum_{J, K} \bar{\psi}^K (g_\psi^\dagger)^{KI} (i\not{D}_\psi) (g_\psi)^{IJ} \psi^J = \mathcal{L}_{fermions}. \quad (1.65)$$

$g_\psi$  étant unitaire, on a bien  $(g_\psi^\dagger)^{IK} (g_\psi)^{KJ} = \delta^{IJ}$ .

Le secteur de jauge du MS est donc invariant sous l'action du groupe de symétrie globale suivant, appelé *groupe de saveur* :

$$G_F = U(3)^5 = U(3)_Q \times U(3)_U \times U(3)_D \times U(3)_L \times U(3)_E. \quad (1.66)$$

L'action de ce groupe sur les champs fermioniques de matière est définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \psi \xrightarrow{G_F} g_\psi \psi & \text{pour les champs de chiralité gauche } \psi = Q, L \\ \psi \xrightarrow{G_F} \psi g_\psi & \text{pour les champs de chiralité droite } \psi = U, D, E \end{cases}, \text{ où } g_\psi \in U(3)_\psi. \quad (1.67)$$

Cependant, cette symétrie n'est pas exacte dans le MS. Elle est explicitement brisée par le secteur de Yukawa (couplage fermion-fermion-Higgs).

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -U^I Y_u^{IJ} Q^J H^{\dagger C} - D^I Y_d^{IJ} Q^J H^\dagger - E^I Y_e^{IJ} L^J H^\dagger + h.c., \quad (1.68)$$

où h.c dénote le conjugué hermitique de l'expression auquel il est ajouté.

En effet, ces couplages de Yukawa brisent la symétrie de saveur ( $G_F$ ) étant donné qu'ils couplent deux types de fermions différents. Sous  $G_F$ , chaque fermion se transforme différemment (avec une matrice unitaire différente). Notons que ce secteur est la source de la majorité des paramètres libres du MS. Comme il y a trois générations de particules, dans l'espace des saveurs  $Y_{u,d,e} \in M_3(\mathbb{C})$  (matrices  $3 \times 3$  à coefficients complexes). Par conséquent, chacune des matrices contient 9 paramètres complexes, soit  $9 \times 2 = 18$  paramètres réels. Au total, le secteur de Yukawa introduit  $18 \times 3 = 54$  paramètres réels. Heureusement, ils ne sont pas tous physiques et en redéfinissant les champs de sorte à ce qu'ils absorbent certains paramètres, nous nous retrouvons avec 13 paramètres libres pour le secteur de Yukawa. Sachant qu'il y en a 19 dans le MS, cela représente encore environ deux tiers des paramètres libres.

Détaillons ceci du point de vue de la symétrie de saveur.

Tout d'abord, remarquons que  $G_F$  n'est pas entièrement brisé par les couplages de Yukawa. En effet, il reste des symétries résiduelles qualifiées d'accidentelles dans le MS :

$$U(3)^5 \rightarrow U(1)_{\mathcal{B}} \times U(1)_{\mathcal{L}_e} \times U(1)_{\mathcal{L}_\mu} \times U(1)_{\mathcal{L}_\tau}, \quad (1.69)$$

où  $\mathcal{B}$  désigne le nombre baryonique et  $\mathcal{L}_{e,\mu,\tau}$  les nombres leptoniques de saveurs.

Comptons le nombre de paramètres physiques. Pour cela, il faut déterminer le nombre de générateurs brisés et ensuite on peut absorber autant de paramètres que de générateurs brisés en redéfinissant les champs. Ainsi, nous avons donc :

$$\#\text{paramètres physiques} = \#\text{paramètres total} - \#\text{générateurs brisés}. \quad (1.70)$$

Ici, le nombre de paramètres total est 54 (secteur de Yukawa). Par ailleurs, une transformation sous  $G_F = U(3)^5$  implique 5 matrices unitaires  $3 \times 3$ , chacune d'entre elles nécessitant 9 paramètres réels pour la décrire<sup>6</sup>, soit un total de  $5 \times 9 = 45$  paramètres réels. Or, tous ne sont pas brisés et il reste quatre paramètres réels (générateurs) correspondant aux quatre U(1)s résiduels. Le nombre de générateurs brisés est donc  $45 - 4 = 41$ . Par conséquent,  $\#\text{paramètres physiques} = 54 - 41 = 13$ .

Bien entendu, cette technique de comptage basée sur la symétrie de saveur ne nous renseigne pas sur la nature de ces paramètres. Pour les identifier, penchons nous de plus près sur les couplages de Yukawa.

Après brisure de symétrie électrofaible (EWSSB<sup>7</sup>), le champ de Higgs acquiert une valeur moyenne dans le vide non nulle (VEV<sup>8</sup>),  $\langle 0 | H | 0 \rangle = v$ , et on l'exprime alors dans la jauge unitaire comme  $H = \begin{pmatrix} 0 & v + h \end{pmatrix}^T$ , où  $h$  est le boson de Higgs. Les termes de Yukawa s'identifient alors à des termes de masses pour les fermions :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -v(\bar{u}_R^I Y_u^{IJ} u_L^J + \bar{d}_R^I Y_d^{IJ} d_L^J + \bar{e}_R^I Y_e^{IJ} e_L^J) \left(1 + \frac{h}{v}\right) + h.c. \quad (1.71)$$

Les matrices de couplages ( $Y_{u,d,e}$ ) ne sont à priori pas diagonales. Afin d'obtenir les états propres de

6. En effet, une matrice U de U(n) possède  $n^2$  paramètres complexes, soit  $2n^2$  paramètres réels. En traduisant la condition d'unitarité  $U^\dagger U = \mathbb{I}$ , on obtient  $n$  contraintes réelles correspondant aux coefficients diagonaux et  $\frac{n(n-1)}{2}$  contraintes complexes correspondant à la partie triangulaire supérieure (ou inférieure) stricte, soit  $2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1)$  contraintes réelles. En tout, on a  $n + n(n-1) = n^2$  contraintes réelles. Par conséquent, le nombre de coefficients indépendants nécessaires pour décrire une matrice de U(n) est  $2n^2 - n^2 = n^2$  coefficients réels.

7. Electroweak Spontaneous Symmetry Breaking.

8. Vacuum Expectation Value.

masses des fermions, on réalise une transformation bi-unitaire<sup>9</sup> :

$$\exists V_R^{u,d,e}, V_L^{u,d,e} \in U(3) \quad \text{telles que} \quad v V_R^{u,d,e} Y_{u,d,e} V_L^{u,d,e} = \mathbb{M}_{u,d,e} \quad (1.72)$$

On réinjecte dans le lagrangien de Yukawa :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -(\bar{u}_R (V_R^u)^\dagger \mathbb{M}_u (V_L^u)^\dagger u_L + \bar{d}_R (V_R^d)^\dagger \mathbb{M}_d (V_L^d)^\dagger d_L + \bar{e}_R (V_R^e)^\dagger \mathbb{M}_e (V_L^e)^\dagger e_L) \left(1 + \frac{h}{v}\right) + h.c. \quad (1.73)$$

On peut alors définir les états propres de masses à partir des états propres d'interactions. Le passage de l'un à l'autre se fait par l'application d'une transformation unitaire, autrement dit, en utilisant la symétrie de saveur. Cependant, la symétrie de jauge nous impose d'appliquer la même transformation unitaire aux deux composantes du doublet de quarks  $Q^I = \begin{pmatrix} u_L^I \\ d_L^I \end{pmatrix}$ . On choisit d'appliquer  $(V_L^u)^\dagger$  au doublet. En redéfinissant les champs de la manière suivante :

$$\begin{cases} (V_L^u)^\dagger u_L = u_L^{mass} \\ (V_L^u)^\dagger d_L = d_L' \end{cases}, \begin{cases} \bar{u}_R (V_R^u)^\dagger = \bar{u}_R^{mass} \\ \bar{d}_R (V_R^d)^\dagger = \bar{d}_R^{mass} \end{cases}, \begin{cases} (V_L^e)^\dagger e_L = e_L^{mass} \\ \bar{e}_R (V_R^e)^\dagger = \bar{e}_R^{mass} \end{cases}, \quad (1.74)$$

On obtient :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -(\bar{u}_R^{mass} \mathbb{M}_u u_L^{mass} + \bar{d}_R^{mass} \mathbb{M}_d V_{CKM}^\dagger d_L' + \bar{e}_R^{mass} \mathbb{M}_e e_L^{mass}) \left(1 + \frac{h}{v}\right) + h.c., \quad (1.75)$$

où la rotation encore nécessaire pour atteindre les états propres de masses des quarks gauches de type down ( $d_L, s_L$  et  $b_L$ ) est la matrice de CABIBBO-KOBAYASHI-MASKAWA (CKM) [8] :

$$V_L^{u\dagger} V_L^d \equiv V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (1.76)$$

La matrice CKM étant unitaire, il faut  $3^2 = 9$  paramètres réels pour la décrire qu'on peut choisir comme étant 3 nombres réels et 6 phases<sup>10</sup>. Or, nous avons vu qu'il y avait 13 paramètres libres dans ce secteur. Parmi ces 13 paramètres, 9 correspondent aux masses des fermions (pas de masses pour les neutrinos dans le MS) et donc il en reste 4. Par conséquent, parmi les 9 paramètres, seuls 4 sont physiques. En fait, en redéfinissant les champs de quarks, on peut absorber 5 phases dans ces derniers. Plusieurs paramétrisations sont possibles, par exemple on peut paramétrer la matrice CKM par 3 angles de mélanges ( $\theta_{12}, \theta_{13}$  et  $\theta_{23}$  qui sont des nombres réels) et une phase ( $\delta$ ) :

Si on note  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  et  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ , on peut exprimer la matrice CKM sous la forme :

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (1.77)$$

Les valeurs actuelles mesurées des coefficients en modules (à partir de processus à courants chargés) sont [9] :

9. Cette procédure appelée *décomposition en valeurs singulières*, est toujours possible.  $\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \exists U, V \in U(n)$  telles que  $VMU^\dagger = D$  avec D diagonale. Les coefficients diagonaux sont des réels positifs appelés valeurs singulières.

10. En effet, une matrice de  $U(n)$  peut être décrites par  $\frac{n(n-1)}{2}$  nombres réels et  $\frac{n(n+1)}{2}$  phases.

$$|V_{CKM}| = \begin{pmatrix} 0.97427 & 0.22534 & 0.00351 \\ 0.2252 & 0.97344 & 0.0412 \\ 0.00867 & 0.0404 & 0.999146 \end{pmatrix} \quad (1.78)$$

Notons que la phase  $\delta$  est l'unique source de violation- $\mathcal{CP}$  faible dans le MS.

Expérimentalement, on a  $s_{13} \ll s_{23} \ll s_{12} \ll 1$ , si on définit le paramètre  $\lambda = s_{12} = \frac{|V_{us}|}{\sqrt{|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2}} \ll 1$  et qu'on effectue un développement limité en  $\lambda$ , on aboutit à la paramétrisation dite de WOLFENSTEIN [10] :

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4), \quad (1.79)$$

où les valeurs actuelles mesurées sont [9]  $\lambda = 0.22548_{-0.00034}^{+0.00068}$ ,  $A = 0.810_{-0.024}^{+0.018}$ ,  $\bar{\rho} \equiv \rho(1 - \frac{\lambda^2}{2}) = 0.145_{-0.007}^{+0.013}$  et  $\bar{\eta} \equiv \eta(1 - \frac{\lambda^2}{2}) = 0.343_{-0.012}^{+0.011}$ . Remarquons que l'unique source de violation- $\mathcal{CP}$  faible, à savoir, la partie imaginaire  $i\eta$  n'intervient qu'à l'ordre 3 en  $\lambda$  (très supprimée).

## 1.5.2 Processus avec changements de saveur à courants chargés et à courants neutres

Les états propres de masses ne sont pas alignés avec les états propres d'interactions. Comme nous l'avons vu, pour atteindre les états propres de masses il faut briser la symétrie de jauge  $SU(2)_L$  en tournant les quarks downs  $d_L \rightarrow V_{CKM}d_L$  tout en laissant  $u_L$  fixe. Ceci affecte directement les courants chargés de quarks :

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_I W_\mu^+ (\bar{\nu}_L^I \gamma^\mu e_L^I + \bar{u}_L^I \gamma^\mu V_{CKM}^{IJ} d_L^J) + h.c. \quad (1.80)$$

Les courants leptoniques sont diagonaux dans l'espace des saveurs et c'est pourquoi les nombres leptoniques de saveurs sont conservés (symétries accidentelles). Les processus violant la saveur dans le secteur leptonique (LFV) sont strictement interdits dans le MS. Par ailleurs, les courants neutres sont également diagonaux. Par exemple, pour le couplage des quarks de type down avec le boson Z et le photon, on a :

$$\mathcal{L}_{NC} \ni \frac{g}{2 \cos \theta_W} Z_\mu \bar{d}_L^I \gamma^\mu (2T_3 - 2 \sin^2 \theta_W Q) d_L^I + e A_\mu \bar{d}_L^I \gamma^\mu Q d_L^I, \quad (1.81)$$

pour les états propres d'interactions. Le passage aux états propres de masses  $d_L \rightarrow V_{CKM}d_L$  laisse le lagrangien invariant du fait de l'unitarité de la matrice CKM.

A l'arbre, les courants chargés sont notre seul accès à  $V_{CKM}$  et par conséquent à la violation- $\mathcal{CP}$ . Expérimentalement, les courants chargés sont sondés à basse énergie à partir de processus avec changement de saveur (voir figure 1.3). Aux ordres supérieurs, les changements de saveurs par courant neutre (FCNC<sup>11</sup>) sont possibles mais défavorisés et ils permettent de tester le MS.

Considérons les diagrammes de la figure 1.3, appelés *pinguins* et *boîtes*.

11. Flavor Changing Neutral Current.

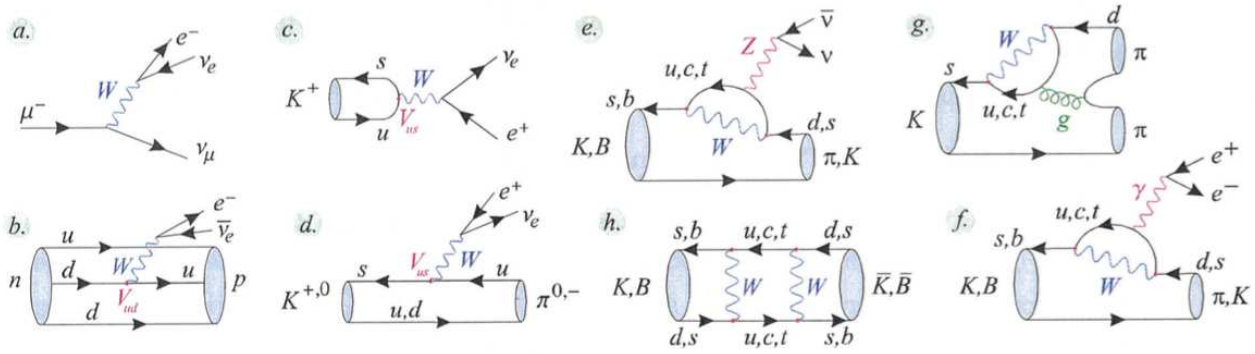


FIGURE 1.3 – (a - d) Processus à courants chargés. (e - h) FCNC. (e, f, g) sont respectivement les pingouins avec Z, photon et gluon. (h) représente un diagramme en boîte (W box). Source : [7].

**Pingouin avec boson Z (diagramme e)** Par exemple, si on prend la transition  $s \rightarrow dZ$  et on somme sur tous les quarks up intermédiaires possibles ( $u, c, t$ ), l'amplitude du processus est donnée par :

$$\mathcal{M} = V_{ud}V_{us}^*f(m_u/M_W) + V_{cd}V_{cs}^*f(m_c/M_W) + V_{td}V_{ts}^*f(m_t/M_W), \quad (1.82)$$

où la fonction d'INAMI-LIM  $f(m_q/M_W)$  contient la dépendance de l'intégrale de boucle en la masse de la particule virtuelle [11]. Si les masses des quarks étaient égales, alors  $f(m_q/M_W)$  serait constante et on peut donc la factoriser dans l'expression de l'amplitude et on obtiendrait  $\mathcal{M} = 0$  du fait de l'unitarité de la matrice CKM  $V_{ud}V_{us}^* + V_{cd}V_{cs}^* + V_{td}V_{ts}^* = 0$ . C'est ce que l'on appelle le *mécanisme GIM* (GLASHOW-ILIOPOULOS-MAIANI) [12]. Le fait que les FCNCs soient possibles est une conséquence directe des différences de masses des quarks.

On peut montrer que l'amplitude peut se réécrire comme :

$$\mathcal{M} \sim G_F \times \frac{e}{4\pi^2 \sin \theta_W} \times \bar{s}_L \gamma_\mu d_L \times Z^\mu \times \sum_q m_q^2 V_{qs}^* V_{qd} F_Z(m_q^2/M_W^2). \quad (1.83)$$

On parle dans ce cas de violation quadratique (du fait du  $m_q^2$ ) du mécanisme GIM.

**Pingouin avec photon (diagramme f)** L'amplitude du processus est donnée par :

$$\mathcal{M} \sim G_F \times \frac{e}{4\pi^2} \times m_s \times \bar{s}_R \sigma_{\mu\nu} d_L \times F^{\mu\nu} \times \sum_q V_{qs}^* V_{qd} F'_Z(m_q^2/M_W^2). \quad (1.84)$$

Notons qu'un basculement de chiralité (chirality flip) est nécessaire car seule la partie gauche du quark est sensible à l'interaction faible.

**Diagrammes en boîtes** Ce cas concerne les oscillations dans les systèmes de mésons  $B - \bar{B}$  ou  $K - \bar{K}$  (figure 1.3 (h)). Les interactions effectives correspondantes présentent une violation quadratique de GIM. En ne retenant que la contribution du quark top (majoritaire), on obtient :

$$\mathcal{M} = \frac{G_F^2 m_t^2}{4\pi^2} \times (V_{ts} V_{td}^*)^2 \times B_{WW}(m_t^2/M_W^2) \times (\bar{s}_L \gamma_\mu d_L)(\bar{s}_L \gamma_\mu d_L). \quad (1.85)$$

## 1.6 Succès expérimentaux et problèmes

Le MS est à ce jour la théorie la plus précise dont on dispose pour décrire les particules élémentaires et leurs interactions. Le MS possède 19 paramètres libres dont la valeur n'est pas fixée par des

principes premiers mais doit être déterminée expérimentalement. Dès lors que ces paramètres libres sont mesurés, le MS permet de faire toutes sortes de prédictions sur des processus et de les confronter aux expériences. Aucune déviation majeure n'a été observée et confirmée jusqu'à présent. Il est un véritable succès d'un point de vue expérimental, comme l'atteste la découverte du boson de Higgs en 2012 par la collaboration ATLAS puis par CMS au LHC [6, 13] pour ne citer que lui. Cependant, plusieurs éléments nous amènent à penser que ce n'est pas la fin de l'histoire. En effet, un certain nombre de points ne sont pas expliqués par le MS et donc nous pensons que le MS est incomplet, il doit s'inscrire dans une théorie plus large dont il est la manifestation à basse énergie. Ces points sont :

- **Les masses des neutrinos** : En effet, dans le MS, les neutrinos n'ont pas de masses. Or, on sait depuis la découverte des oscillations de neutrinos [14, 15, 16] que ces derniers sont massifs. Ce point est le sujet traité dans le Chapitre 2.
- **La gravité** : Le MS n'inclut pas l'interaction gravitationnelle. A l'échelle de Planck  $M_{Planck} = 10^{19} GeV$ , échelle où les effets de gravité quantique ne peuvent plus être négligés, nous savons que le MS n'est plus valable. Au-delà, il faut de la nouvelle physique et notamment une théorie consistante de gravité quantique [17].
- **La matière noire et l'énergie noire** : L'existence de la matière noire est aujourd'hui établie [18]. Le MS ne décrit pas la matière noire dont serait composé plus de 27% de l'univers [19]. Il ne rend pas compte non plus de l'accélération de l'expansion de l'univers.
- **Baryogénèse** : Le MS n'explique pas l'asymétrie matière/antimatière de notre univers. Il semble dominé par la matière [20] alors que matière et antimatière ont été créées en quantités égales dans le plasma primordial. De plus, on sait que pour pouvoir expliquer cette asymétrie, il faut que les conditions dites de Sakharov soient remplies [21]. Or, deux de ces conditions sont les violations de la symétrie  $CP$  et du nombre baryonique  $\mathcal{B}$ , et il n'y a clairement pas assez de ces violations dans le MS pour résoudre ce problème (voir Chapitre 2).

De plus, mis à part ces pièces manquantes, il existe d'autres problèmes dans le MS du côté de ses paramètres libres. Tout d'abord, l'argument « esthétique » consiste à dire que le nombre de paramètres libres (19) est trop important. De plus, les valeurs de ces paramètres ainsi que certains faits appellent à une compréhension plus profonde. Citons quelques uns de ces faits :

- **L'unification des constantes de couplages** : Les constantes de couplages (à priori indépendantes) dépendent de l'énergie et elles se rejoignent autour de  $10^{15} GeV$  [22, 23]. De ce fait, il est tentant de penser que les trois groupes de jauge du MS proviennent d'une brisure spontanée de symétrie d'un groupe de jauge plus large les englobant.
- **Le problème de hiérarchie** : Pourquoi le boson de Higgs est beaucoup plus léger que la masse de Planck alors qu'on s'attendrait à ce que les grandes corrections quantiques fassent que  $M_{Higgs}^2$  devienne énorme, comparable à l'échelle à laquelle une nouvelle physique apparaît, à moins qu'il n'y ait eu une incroyable annulation par ajustement fin (fine-tuning) entre les corrections quadratiques radiatives et la masse nue.
- **La réplication de saveur** : Le nombre de générations dans le MS n'est dicté par aucun principe sous-jacent. Pourquoi la nature a-t-elle bégayé ? Il y a 3 familles identiques à l'exception des masses qui diffèrent. Du fait des masses différentes, ce secteur est responsable de la majorité des paramètres libres du MS.
- **Le problème de la violation- $CP$  forte** : Les mesures effectuées sur les EDM des neutrons [24, 25] contraignent le terme effectif  $\Theta$  de QCD à être proche de zéro (voir Chapitre 2).



Théoriquement, ce paramètre peut prendre toutes les valeurs dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  et il n'existe pas de raison pour qu'il soit faible ou nul.

- **Les symétries accidentelles :** Dans le MS, les nombres leptoniques et baryoniques sont conservés. Or, historiquement, les symétries globales se sont avérées être très peu fiables et rien n'indique que ces symétries sont absolues dans la Nature.

Tous ces points alimentent notre motivation pour rechercher de la physique au-delà du MS. Dans ce manuscrit, nous nous intéressons particulièrement au secteur de la saveur du MS (dans la Section 1.5 ainsi qu'aux Chapitres 2 et 3) qui soulève à lui seul un grand nombre de questionnements. Par exemple, pourquoi y a-t-il 3 familles ? Pourquoi les masses des fermions présentent une aussi forte hiérarchie et pourquoi les transitions inter-familles sont-elles si défavorisées ? Pourquoi l'interaction faible viole-t-elle la symétrie- $CP$  et pourquoi est-elle gérée par un seul paramètre ? Pourquoi les saveurs des leptons chargés sont-elles si bien conservées ? Pourquoi les neutrinos ont-ils une masse quasi-nulle ? Sont-ils des particules de Dirac ou de Majorana ?

# CHAPITRE 2

## Polymorphie de la violation- $CP$

---

### Sommaire

---

<b>2.1 Sources de violation-<math>CP</math> dans le MS</b> . . . . .	<b>26</b>
2.1.1 Secteur faible : les courants chargés de quarks . . . . .	26
2.1.2 Secteur fort : le terme $\theta$ de QCD et le problème de $CP$ fort . . . . .	28
<b>2.2 Au-delà du MS : masse des neutrinos et violation-<math>CP</math> leptonique</b> . . . . .	<b>29</b>
2.2.1 Phénomène d'oscillation dans le vide . . . . .	29
2.2.2 Faits expérimentaux . . . . .	34
2.2.3 Modèles de masses des neutrinos et brisure de la symétrie de saveur . . . . .	37
<b>2.3 Un processus violent CP : le Moment Dipolaire Électrique</b> . . . . .	<b>41</b>
2.3.1 Définitions et violations de symétries . . . . .	41
2.3.2 La quête d'un signal EDM non nul . . . . .	42
2.3.3 Contraintes établies et impacts sur la nouvelle physique . . . . .	44

---

Parmi les pièces manquantes du MS, on y trouve la baryogénèse électrofaible, ce mécanisme qui serait à l'origine de l'asymétrie matière-antimatière dans l'univers. D'après le modèle du big bang, matière et antimatière ont été créés en quantités égales, alors qu'aujourd'hui, il suffit de regarder autour de soi pour se rendre compte que la matière semble avoir pris le pas. Le MS n'inclut pas un tel mécanisme. En 1967, un physicien russe du nom d'Andrei Sakharov a établi trois conditions nécessaires pour que la baryogénèse puisse avoir lieu [21]. Une de ces conditions stipule qu'il aurait existé des interactions violant les symétries  $C$  et  $CP$ . La violation- $CP$  existe déjà dans le MS. En effet, l'interaction faible peut violer  $CP$  (déjà observé en 1964 dans les systèmes de Kaons par exemple [26]) et certains arguments théoriques forts nous pousse à croire que l'interaction forte devrait pouvoir également violer  $CP$ , mais aucun processus de la sorte n'a encore été observé. En somme, il s'avère que la violation- $CP$  présente dans le MS n'est pas suffisante pour expliquer l'asymétrie matière-antimatière. Par conséquent, un des défis de la recherche de physique au-delà du modèle standard est de trouver des sources de violation- $CP$  supplémentaires afin d'atteindre la quantité requise pour la baryogénèse.

## 2.1 Sources de violation- $\mathcal{CP}$ dans le MS

### 2.1.1 Secteur faible : les courants chargés de quarks

Généralement en théorie des champs, la violation- $\mathcal{CP}$  émerge par la présence d'interactions dans un lagrangien ayant des constantes de couplages complexes dont les phases ne peuvent être éliminées avec une redéfinition des champs. De façon schématique, on a

$$\mathcal{L} = \sum_i a_i \mathcal{O}_i + h.c, \quad (2.1)$$

avec  $(\mathcal{CP})\mathcal{O}_i(\mathcal{CP})^\dagger = \mathcal{O}_i^\dagger$ .

Dans le MS, la violation- $\mathcal{CP}$  se manifeste à travers les couplages de Yukawa complexes. En effet, le lagrangien de Yukawa est

$$-\mathcal{L}_{Yukawa} = Y_{ij} \overline{\psi_{L,i}} H \psi_{R,j} + Y_{ij}^* \overline{\psi_{R,j}} H^\dagger \psi_{L,i}, \quad (2.2)$$

où  $i$  et  $j$  sont les indices de saveurs,  $\psi$  les champs fermioniques,  $H$  le champ de Higgs et  $Y_{ij}$  une matrice  $3 \times 3$  de constantes de couplages.

L'action de la symétrie  $\mathcal{CP}$  sur les formes bilinéaires covariantes présentes dans le lagrangien de Yukawa est  $\mathcal{CP}(\overline{\psi_{L,i}} H \psi_{R,j}) = \overline{\psi_{R,j}} H^\dagger \psi_{L,i}$  et donc

$$\begin{aligned} \mathcal{CP}(-\mathcal{L}_{Yukawa}) &= \mathcal{CP}(Y_{ij} \overline{\psi_{L,i}} H \psi_{R,j}) + \mathcal{CP}(Y_{ij}^* \overline{\psi_{R,j}} H^\dagger \psi_{L,i}) \\ &= Y_{ij} \overline{\psi_{R,j}} H^\dagger \psi_{L,i} + Y_{ij}^* \overline{\psi_{L,i}} H \psi_{R,j}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Par conséquent, le lagrangien de Yukawa est invariant sous  $\mathcal{CP}$  si et seulement si  $Y_{ij} = Y_{ij}^*$ , c'est à dire si  $Y_{ij}$  est réelle.

De même, si on se penche sur les courants chargés dans la base des états propres de masses des quarks,

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{u_{L,i}} V_{ij} \gamma^\mu W_\mu^- d_{L,i} + \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{d_{L,i}} V_{ij}^* \gamma^\mu W_\mu^+ u_{L,i} \quad (2.4)$$

ainsi que l'image sous  $\mathcal{CP}$  de ce lagrangien

$$\mathcal{CP}(\mathcal{L}_{CC}) = \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{d_{L,i}} V_{ij} \gamma^\mu W_\mu^+ u_{L,i} + \frac{g}{\sqrt{2}} \overline{u_{L,i}} V_{ij}^* \gamma^\mu W_\mu^- d_{L,i}, \quad (2.5)$$

on s'aperçoit que si le lagrangien des courants chargés de quarks est invariant sous  $\mathcal{CP}$  alors on a nécessairement  $V_{ij} = V_{ij}^*$ , c'est à dire une matrice CKM réelle. La proposition contraposée nous apprend alors que si la matrice CKM n'est pas réelle, c'est à dire complexe, alors le lagrangien des courants chargés n'est pas invariant sous  $\mathcal{CP}$ . D'où le fait que la nature complexe de la matrice CKM, à travers sa phase irréductible bien connue, soit l'origine de la violation- $\mathcal{CP}$  dans le MS.

Pour pouvoir avoir de la violation- $\mathcal{CP}$ , c'est à dire une matrice CKM complexe avec au moins une phase irréductible, Kobayashi et Maskawa ont montré qu'il fallait au moins trois familles de particules. Historiquement, Cronin et Fitch avaient déjà observé en 1964 de la violation- $\mathcal{CP}$  dans les systèmes de Kaons [26]. Suite à ce résultat, Kobayashi et Maskawa ont alors suggéré en 1973 la possibilité qu'il y ait une troisième famille de particules (alors que la deuxième famille n'était pas encore établie !), ce qui expliquerait dans le cadre du MS la violation- $\mathcal{CP}$  observée par Cronin et Fitch 9 ans auparavant. Un an plus tard, la deuxième famille a été complétée puis en 1977 et 1994 les quarks bottom et top ont été respectivement découverts, ce qui a complété la troisième génération de particules et donné raison à Kobayashi et Maskawa. Cette prédiction faite en 1973 leur a valu le prix Nobel de physique en 2008.

Avec trois générations dans le MS, la matrice CKM est donnée par

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Cette matrice est unitaire donc on a  $V_{CKM}^\dagger V_{CKM} = V_{CKM} V_{CKM}^\dagger = \mathbb{I}_3$ . En traduisant  $V_{CKM} V_{CKM}^\dagger = \mathbb{I}_3$  sur les coefficients de la matrice, on aboutit aux relations d'unitarités (sur la diagonale)

$$\begin{aligned} V_{ud} V_{ud}^* + V_{us} V_{us}^* + V_{ub} V_{ub}^* &= 1 \\ V_{cd} V_{cd}^* + V_{cs} V_{cs}^* + V_{cb} V_{cb}^* &= 1 \\ V_{td} V_{td}^* + V_{ts} V_{ts}^* + V_{tb} V_{tb}^* &= 1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

ainsi qu'aux conditions d'orthogonalités (hors diagonale)

$$\begin{aligned} V_{ud} V_{cd}^* + V_{us} V_{cs}^* + V_{ub} V_{cb}^* &= 0 \\ V_{ud} V_{td}^* + V_{us} V_{ts}^* + V_{ub} V_{tb}^* &= 0 \\ V_{cd} V_{ud}^* + V_{cs} V_{us}^* + V_{cb} V_{ub}^* &= 0 \\ V_{cd} V_{td}^* + V_{cs} V_{ts}^* + V_{cb} V_{tb}^* &= 0 \\ V_{td} V_{ud}^* + V_{ts} V_{us}^* + V_{tb} V_{ub}^* &= 0 \\ V_{td} V_{cd}^* + V_{ts} V_{cs}^* + V_{tb} V_{cb}^* &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Seules trois relations d'orthogonalités sont indépendantes dans la mesure où il y a trois identités ainsi que leurs identités conjugués. De plus, on peut obtenir d'autres relations d'orthogonalités dont trois sont indépendantes à l'aide de la condition d'unitarité inverse  $V_{CKM}^\dagger V_{CKM} = \mathbb{I}_3$

$$\begin{aligned} V_{ud}^* V_{us} + V_{cd}^* V_{cs} + V_{td}^* V_{ts} &= 0 \\ V_{ud}^* V_{ub} + V_{cd}^* V_{cb} + V_{td}^* V_{tb} &= 0 \\ V_{us}^* V_{ud} + V_{cs}^* V_{cd} + V_{ts}^* V_{td} &= 0 \\ V_{us}^* V_{ub} + V_{cs}^* V_{cb} + V_{ts}^* V_{tb} &= 0 \\ V_{ub}^* V_{ud} + V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} &= 0 \\ V_{ub}^* V_{us} + V_{cb}^* V_{cs} + V_{tb}^* V_{ts} &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ces relations d'orthogonalités sont des sommes nulles de nombres complexes. Comme chaque nombre complexe représente un vecteur, une somme nulle de trois vecteurs signifie que les vecteurs forment un triangle (relation de Chasles). Il est d'usage de représenter ces relations par des triangles dans le plan complexe appelés *triangle d'unitarité*. A titre d'illustration, un des six triangles d'unitarités indépendants correspondant à la relation  $V_{td} V_{ud}^* + V_{ts} V_{us}^* + V_{tb} V_{ub}^* = 0$  est représenté en figure 2.1.

Du fait de l'unitarité, tous les triangles ont la même aire et celle-ci donne une mesure invariante de la quantité de violation- $\mathcal{CP}$ . L'aire de tous ces triangles est proportionnelle à  $Im(V_{ud} V_{td}^* V_{tb} V_{ub}^*)$ . Notons qu'une dégénérescence des masses de deux quarks de types up ou deux quarks de types down impliquerait une annulation de la violation- $\mathcal{CP}$  dans la mesure où la phase complexe peut être éliminée par redéfinition des phases des champs de quarks. Il a été montré [27] que l'invariant de Jarlskog est une bonne mesure de la violation- $\mathcal{CP}$

$$J = Det([\mathbb{M}_u, \mathbb{M}_d]), \quad (2.10)$$

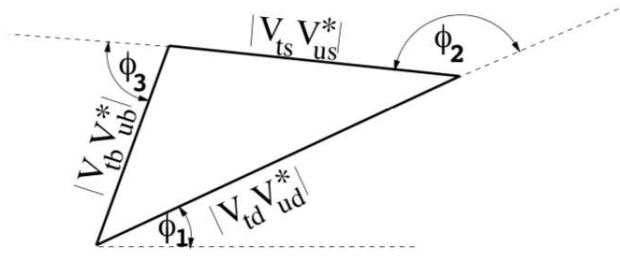


FIGURE 2.1 – Le triangle d’unitarité  $V_{td}V_{ud}^* + V_{ts}V_{us}^* + V_{tb}V_{ub}^* = 0$  avec  $V_{td}V_{ud}^* = |V_{td}V_{ud}^*|e^{i\phi_1}$ ,  $V_{ts}V_{us}^* = |V_{ts}V_{us}^*|e^{i\phi_2}$ ,  $V_{tb}V_{ub}^* = |V_{tb}V_{ub}^*|e^{i\phi_3}$

où  $\mathbb{M}_u$  et  $\mathbb{M}_d$  sont les matrices de masses respectivement des quarks de types up et de types down. On a alors :

$$J = 2i\text{Im}(V_{ud}V_{td}^*V_{tb}V_{ub}^*) \times (m_u - m_c)(m_u - m_t)(m_c - m_t)(m_d - m_s)(m_d - m_b)(m_s - m_b). \quad (2.11)$$

En présence de trois générations, la matrice CKM peut être paramétrée de plusieurs façons différentes par trois angles et une phase complexe. Une paramétrisation possible adoptée dans le PDG [28] consiste à écrire la matrice CKM sous la forme d’un produit de trois rotations et une matrice de phase. En définissant,

$$U_{12} = \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, U_{13} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$U_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix}, U_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\delta_{13}} \end{pmatrix},$$

avec  $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$  et  $c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$ . La paramétrisation standard est alors obtenue par

$$V_{CKM} = U_{23}U_\delta^\dagger U_{13}U_\delta U_{12}. \quad (2.13)$$

### 2.1.2 Secteur fort : le terme $\theta$ de QCD et le problème de $\mathcal{CP}$ fort

Théoriquement, la violation- $\mathcal{CP}$  dans le secteur de l’interaction forte est autorisée à travers un couplage d’origine non-perturbative formé du tenseur de gluons  $G^{\mu\nu}$  et de son tenseur dual  $\tilde{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}G^{\rho\sigma}$  et invariant de jauge sous  $SU(3)_c$  appelé *terme theta de QCD*

$$\mathcal{L}_\theta = -\frac{\alpha_s}{16\pi^2}\bar{\theta}G_a^{\mu\nu}\tilde{G}_{\mu\nu}^a, \quad (2.14)$$

où  $\alpha_s$  est la constante de couplage de l’interaction forte. Le paramètre libre  $\bar{\theta}$ , représentant un angle, peut prendre toutes les valeurs possibles dans l’intervalle  $[0, 2\pi]$ .

Le terme  $\theta$  contribue directement aux moments dipolaires électriques (EDMs) des nucléons. Dans le cas du neutron, la contribution du terme  $\theta$  à l’EDM est

$$d_n^{\bar{\theta}} \approx -10^{-16}\bar{\theta}e \cdot \text{cm}. \quad (2.15)$$

A partir des contraintes expérimentales sur les EDMs de systèmes hadroniques, on peut obtenir un majorant de l'ensemble des valeurs possibles de  $\bar{\theta}$ . En supposant que cette interaction est la seule source de violation-CP et en négligeant les incertitudes sur les facteurs de formes hadroniques et nucléaires, la borne supérieure sur le paramètre  $\bar{\theta}$  est

$$\bar{\theta} \lesssim 10^{-10}. \quad (2.16)$$

Comprendre l'extrême petitesse de cette valeur par rapport à ce qui est attendu constitue « *le problème de CP fort* », un des problèmes les plus sérieux du MS.

Plusieurs solutions à ce problème ont été proposées avec une classe de solutions se démarquant du reste : les solutions axioniques. La solution axionique originale a été proposée en 1977 par Peccei et Quinn [29] et revient à postuler l'existence d'un nouveau champ, l'axion  $a(x)$ , se couplant aux gluons de la manière suivante

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2} \partial^\mu a \partial_\mu a - V(a) - \frac{a(x)}{f_a} \frac{\alpha_s}{8\pi} G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a. \quad (2.17)$$

Le premier terme est le terme cinétique, le second est l'énergie potentiel de l'axion, le troisième terme est le couplage axion-gluon dépendant de la constante de désintégration de l'axion  $f_a$  (analogue à la constante de désintégration du pion  $f_\pi$ ). Le champ axionique acquiert une VEV minimisant le potentiel de l'axion  $V(a)$ , ce qui a pour effet d'induire un décalage de la valeur du paramètre  $\bar{\theta}$  de  $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \frac{\langle a \rangle}{f_a}$  conduisant à une annulation du terme theta. Ce mécanisme expliquerait donc pourquoi la valeur du paramètre  $\bar{\theta}$  est si petite.

## 2.2 Au-delà du MS : masse des neutrinos et violation-CP leptonique

### 2.2.1 Phénomène d'oscillation dans le vide

Lorsqu'il se propage librement dans le vide, un neutrino peut changer spontanément d'une saveur donnée à une autre. Ce phénomène d'origine purement quantique est appelé oscillation des neutrinos et a permis d'établir que les neutrinos avaient une masse et que les leptons se mélangeaient tout comme les quarks, contrairement à ce qui est supposé dans le MS. Nous allons voir en détail dans cette partie le raisonnement qui a permis d'arriver à cette conclusion.

Historiquement, l'idée d'oscillation des neutrinos a été proposée la première fois par Pontecorvo en 1957 [30], en analogie avec les oscillations de Kaons dans les systèmes de mésons  $K$ . A l'époque, seul un type de neutrino était connu, le neutrino électronique  $\nu_e$ , donc Pontecorvo suggéra l'oscillation de ce dernier avec son antiparticule  $\nu_e \leftrightarrow \bar{\nu}_e$ . Cinq ans plus tard, Lederman, Schwartz et Steinberger ont observés le neutrino muonique  $\nu_\mu$  au Brookhaven National Laboratory, expérience qui leur a valu le prix Nobel en 1988. D'autres types de neutrinos pouvaient donc exister. Peu après cette découverte, Maki, Nakagawa et Sakata ont suggéré la possibilité d'avoir des transitions entre les différents types de neutrinos qu'ils appelaient « transmutations virtuelles ». Aujourd'hui, trois saveurs différentes de neutrinos ont été observés correspondant aux trois générations du MS.

Penchons nous de plus près sur la théorie des oscillations des neutrinos dans le vide. En réalité, ce phénomène est une manifestation directe du mélange des leptons. En effet, les états propres d'interactions, c'est à dire ceux qui interagissent par interaction faible et donc observés par nos détecteurs, sont différents des états propres de masses, c'est à dire les états qui se propagent librement avec une masse bien définie. Les états propres d'interactions  $\mathcal{B} = (|\nu_e\rangle, |\nu_\mu\rangle, |\nu_\tau\rangle)$  forment une base de l'espace des saveurs de dimension 3 tout comme les états propres de masses  $\mathcal{B}' = (|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle, |\nu_3\rangle)$ . La

matrice de passage qui permet de passer d'une base à l'autre  $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$  est appelée matrice de mélange leptonique ou encore matrice PMNS (du nom de ses inventeurs Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata). Par conséquent, n'importe quel état propre de masse  $|\nu_i\rangle$  peut se décomposer dans la base propre de saveur  $\mathcal{B}$ , c'est à dire s'exprimer comme une combinaison linéaire des états propres de saveurs. Formellement, on a

$$|\nu_i\rangle = \sum_{\alpha \in \{e, \mu, \tau\}} U_{\alpha i} |\nu_\alpha\rangle \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (2.18)$$

où  $U$  est la matrice de mélange PMNS. La fraction de saveur  $\alpha$  dans l'état propre de masse  $|\nu_i\rangle$  est donnée par  $|U_{\alpha i}|^2$ . La matrice de mélange étant unitaire, elle est inversible ( $U^{-1} = U^\dagger$ ) et la relation précédente peut être inversée afin d'exprimer un état propre d'interaction  $|\nu_\alpha\rangle$  comme combinaison linéaire des états propres de masses, c'est à dire dans la base  $\mathcal{B}'$

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i \in \{1, 2, 3\}} U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad \alpha \in \{e, \mu, \tau\}. \quad (2.19)$$

Une expérience typique d'oscillation de neutrinos est schématisée en figure (2.2). D'abord, une source radioactive produit un neutrino de saveur  $\alpha$  ainsi que le lepton chargé associé  $\bar{\ell}_\alpha$ . Puis, le neutrino  $\nu_\alpha$  se propage librement sur une distance  $L$  jusqu'à un détecteur. A son arrivée, il interagit avec une cible et produit un lepton chargé  $\ell_\beta$  de saveur  $\beta$ , ce qui signifie que le neutrino associé est de saveur  $\beta$ ,  $\nu_\beta$ . Il s'ensuit alors qu'au cours de son voyage entre la source et le détecteur, le neutrino en question s'est transformé, transmuté, métamorphosé en un neutrino de saveur différente. Ce phénomène de changement de saveur  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$  est un effet quantique par essence lié à la superposition des états quantiques, autrement dit à la non-unicité de la base hilbertienne des états.

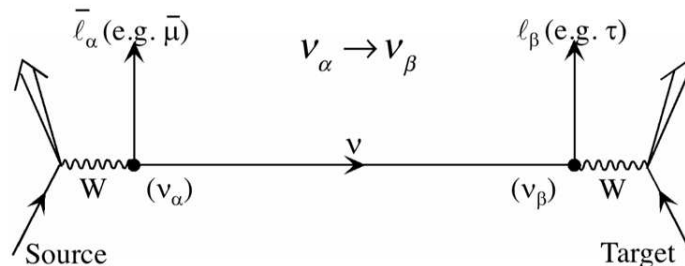


FIGURE 2.2 – Expérience typique d'oscillation de neutrinos. Source : Boris Kayser, Neutrino physics [31]

Calculons la probabilité de changement de saveur, c'est à dire la probabilité de transition  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ . Comme nous l'avons vu plus haut (2.19), un neutrino de saveur  $\alpha$  est une superposition cohérente d'états propres de masses  $|\nu_i\rangle$ . Rappelons que les états propres de masses sont ceux qui se propagent de la source au détecteur dans la figure (2.2). Chacun des trois états propres de masses  $|\nu_1\rangle, |\nu_2\rangle$  et  $|\nu_3\rangle$  est susceptible de s'y trouver. Ainsi, nous devons ajouter chacune de leurs contributions de façon cohérente (voir figure (2.3)).

Pour un  $|\nu_i\rangle$  donné, la transition  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_i \rightarrow \nu_\beta$  peut être décomposé en trois évènements consécutifs. Dans un premier temps, il y a une transition du neutrino initial de saveur  $\alpha$  produit par la source vers l'état propre de masse  $|\nu_i\rangle$ . La probabilité de cet évènement est simplement  $U_{\alpha i}^*$ . Ensuite, il y a la propagation de l'état propre de masse  $|\nu_i\rangle$  produit, d'énergie bien définie  $E$ , sur une distance  $L$ , de la source à la cible. La probabilité de cet évènement est notée  $Prop(\nu_i, E, L)$ . Dans un dernier temps,

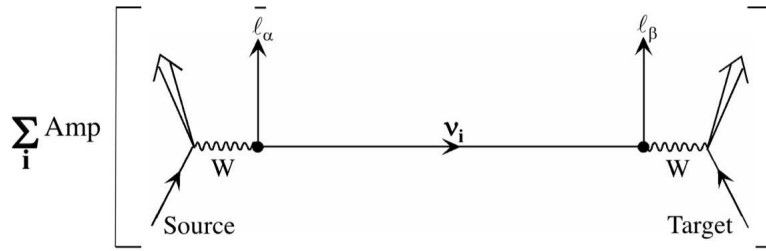


FIGURE 2.3 – Superposition cohérente des différentes contributions des états propres de masses  $|\nu_i\rangle_{i=1,2,3}$ . Source : Boris Kayser, Neutrino physics [31]

l'état propre de masse  $|\nu_i\rangle$  subit une transition en interagissant avec le détecteur vers un état propre d'interaction  $|\nu_\beta\rangle$ . La probabilité de cette transition est  $U_{\beta i}^2$ <sup>1</sup>. Puisque l'évènement dont nous souhaitons calculer la probabilité est l'intersection de ces trois évènements indépendants pris consécutivement, il s'ensuit que la contribution d'un  $|\nu_i\rangle$  à l'amplitude totale sera le produit des probabilités de chacun des trois évènements. En sommant les contributions de chaque état propre de masse de façon cohérente, on obtient l'amplitude totale de transition  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$

$$\mathcal{A}(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = \sum_{i \in \{1,2,3\}} U_{\alpha i}^* \text{Prop}(\nu_i, E, L) U_{\beta i}. \quad (2.20)$$

Il reste à déterminer  $\text{Prop}(\nu_i, E, L)$ , la probabilité que  $|\nu_i\rangle$ , d'énergie  $E$ , se propage de la source au détecteur (distance  $L$ ). Afin d'établir cette amplitude, plaçons nous dans le référentiel propre de  $|\nu_i\rangle$ , où le temps propre est noté  $\tau_i$ . Dans ce référentiel, le vecteur d'état  $|\nu_i(\tau_i)\rangle$  satisfait à l'équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial \tau_i} |\nu_i(\tau_i)\rangle = m_i |\nu_i(\tau_i)\rangle, \quad (2.21)$$

avec  $m_i$  la masse au repos. La solution de cette équation est donnée par

$$|\nu_i(\tau_i)\rangle = e^{-im_i \tau_i} |\nu_i(0)\rangle. \quad (2.22)$$

Par conséquent, la probabilité que  $|\nu_i\rangle$  se propage pendant un temps  $\tau_i$  dans son référentiel propre est donnée simplement par l'amplitude  $\langle \nu_i(0) | \nu_i(\tau_i) \rangle = e^{-im_i \tau_i}$ . Par suite,  $\text{Prop}(\nu_i, E, L)$  est égal à cette même amplitude, avec  $\tau_i$  le temps propre mis par le neutrino pour faire une distance  $L$ , de la source jusqu'au détecteur.

Nous avons déterminé  $\text{Prop}(\nu_i, E, L)$  dans le référentiel propre du neutrino, mais afin qu'il soit utile aux expériences, il est préférable de l'exprimer dans le référentiel du laboratoire, car ce sont les distances et les temps dans ce référentiel que nous mesurons. Les variables dans le référentiel du laboratoire définies par l'expérience sont la distance source-détecteur  $L$ , le temps mis pour faire cette distance  $t$  ainsi que l'énergie  $E_i$  et l'impulsion  $p_i$  de l'état propre de masse  $|\nu_i\rangle$ . Le produit de Minkowski entre le quadri-vecteur énergie-impulsion et le quadri-vecteur position  $P \cdot X$  étant invariant de Lorentz, en l'exprimant dans le référentiel propre (où  $P = (m_i, \vec{0})$  et  $X = (\tau_i, \vec{x})$ ) et dans le référentiel du laboratoire (où  $P = (E_i, p_i, 0, 0)$  et  $X = (t, L, 0, 0)$ ), on exprime la phase dans  $\text{Prop}(\nu_i, E, L) = e^{-im_i \tau_i}$  en fonction des variables du laboratoire

$$m_i \tau_i = E_i t - p_i L. \quad (2.23)$$

1. Le hamiltonien d'interaction couplant le neutrino, le lepton chargé et le boson W étant hermitien, si l'amplitude de la transition  $W \rightarrow \bar{\ell}_\alpha \nu_i$  est  $U_{\alpha i}^*$ , alors l'amplitude de la transition  $\nu_i \rightarrow \ell_\beta W$  est  $U_{\beta i}$



L'impulsion  $p_i$  d'un état propre de masse  $|v_i\rangle$ , d'énergie  $E$  et de masse  $m_i$  est donnée par

$$p_i = \sqrt{E^2 - m_i^2} = E - \frac{m_i^2}{2E} + O\left(\frac{m_i^4}{E^3}\right), \quad (2.24)$$

où l'on a supposé que  $m_i^2 \ll E^2$  dans la dernière égalité et effectué un développement limité, ce qui est raisonnable comme hypothèse pour des neutrinos compte tenu de la petitesse de leurs masses devant leurs énergies cinétiques. En combinant les deux équations précédentes, on réécrit la phase du propagateur comme suit

$$m_i \tau_i \approx E(t - L) + \frac{m_i^2}{2E} L. \quad (2.25)$$

La phase  $E(t - L)$  ne joue aucun rôle dans les interférences des états propres de masses dans la mesure où elle est commune aux trois états cohérents  $|v_i\rangle$ . En définitive, l'expression du propagateur recherchée est donc

$$Prop(v_i, E, L) = e^{-im_i^2 \frac{L}{2E}}. \quad (2.26)$$

En injectant cette expression dans l'équation (2.20), on obtient l'amplitude de transition d'un neutrino de saveur  $\alpha$  en un neutrino de saveur  $\beta$  pendant sa propagation dans le vide avec une énergie  $E$  et sur une distance  $L$

$$\mathcal{A}(v_\alpha \rightarrow v_\beta) = \sum_{i \in \{1,2,3\}} U_{\alpha i}^* e^{-im_i^2 \frac{L}{2E}} U_{\beta i}. \quad (2.27)$$

Finalement, la probabilité étant donnée par le module de l'amplitude élevé au carré, on a

$$\begin{aligned} P(v_\alpha \rightarrow v_\beta) &= |\mathcal{A}(v_\alpha \rightarrow v_\beta)|^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re} \left( U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right) \sin^2 \left( \Delta m_{ij}^2 \frac{L}{4E} \right) \\ &\quad + 2 \sum_{i>j} \text{Im} \left( U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right) \sin \left( \Delta m_{ij}^2 \frac{L}{2E} \right), \end{aligned} \quad (2.28)$$

où  $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$ . Cette formule est valable pour des transitions de neutrinos. Bien évidemment, le phénomène d'oscillation existe aussi pour les antineutrinos et la probabilité de transition pour ces derniers peut être obtenue à partir de celle des neutrinos en invoquant l'invariance  $\mathcal{CPT}$ . En effet, la transition  $\bar{v}_\alpha \rightarrow \bar{v}_\beta$  est l'image par la symétrie discrète  $\mathcal{CPT}$  de  $v_\beta \rightarrow v_\alpha$ . En vertu du théorème  $\mathcal{CPT}$ , on a

$$P(\bar{v}_\alpha \rightarrow \bar{v}_\beta) = P(v_\beta \rightarrow v_\alpha). \quad (2.29)$$

De plus, l'équation (2.28) montre que la probabilité de la transition  $v_\beta \rightarrow v_\alpha$  calculée avec une matrice de mélange  $U$  est la même que celle de la transition inverse  $v_\alpha \rightarrow v_\beta$  calculée avec une matrice de mélange  $U^*$ . Autrement dit, la probabilité reste inchangée si on inverse le processus, à condition que la matrice  $U$  soit remplacée par sa conjuguée. D'où,

$$P(v_\beta \rightarrow v_\alpha; U) = P(v_\alpha \rightarrow v_\beta; U^*). \quad (2.30)$$

A l'aide des deux équations précédentes, on établit alors la probabilité d'oscillation pour des antineutrinos

$$\begin{aligned} P(\bar{v}_\alpha \rightarrow \bar{v}_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{i>j} \text{Re} \left( U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right) \sin^2 \left( \Delta m_{ij}^2 \frac{L}{4E} \right) \\ &\quad - 2 \sum_{i>j} \text{Im} \left( U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right) \sin \left( \Delta m_{ij}^2 \frac{L}{2E} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Quelques commentaires s'imposent par rapport aux formules de probabilité d'oscillation de neutrinos et d'antineutrinos.

Tout d'abord, remarquons que le processus  $\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta$  est l'image par la symétrie discrète  $\mathcal{CP}$  de la transition  $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ . Ainsi, une probabilité différente pour ces deux processus signifierait que la symétrie  $\mathcal{CP}$  n'est plus respectée lors de ces oscillations. A l'aide des formules établies (2.28) et (2.31), on voit que seul le terme impliquant la partie imaginaire diffère entre les neutrinos et leurs antiparticules. Par conséquent, dès lors que la matrice de mélange  $U$  est complexe, on a en général  $P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) \neq P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta)$  et donc une violation de la symétrie  $\mathcal{CP}$ . Jusque-là, la violation- $\mathcal{CP}$  avait été observée uniquement dans le secteur des quarks et donc le phénomène d'oscillation des neutrinos constituait une première indication de violation- $\mathcal{CP}$  leptonique.

D'autre part, si les neutrinos sont de masses nulles alors  $\Delta m_{ij}^2 = 0$  et donc la probabilité de changement de saveur serait nulle  $P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) = 0$ . Il s'ensuit que d'après la proposition contraposée<sup>2</sup> de la précédente, si la probabilité d'oscillation est non-nulle  $P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) \neq 0$ , alors les neutrinos ne sont pas de masses nulles. Il en est de même avec des masses dégénérés. Si les neutrinos avaient des masses égales alors  $\Delta m_{ij}^2 = 0$  et donc la probabilité d'oscillation serait nulle. Par la contraposée, si la probabilité est non-nulle, alors les neutrinos ne sont pas dégénérés. En somme, l'observation d'un changement de saveur de neutrinos ou d'antineutrinos impliquerait immédiatement que les neutrinos sont massifs. C'est d'ailleurs de cette façon que cela a été établi.

En outre, notons que les probabilités d'oscillations de neutrinos (équations (2.28) et (2.31)) ne dépendent que de la différence des carrés des masses  $\Delta m_{ij}^2$  et non de la valeur absolue de ces dernières. Cela signifie que la seule information sur les masses accessible lors d'un changement de saveur est le paramètre  $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ . C'est pourquoi aucune expérience d'oscillation de neutrinos ne pourra déterminer la masse absolue des différents états propres de masses. Pour le dire autrement, les expériences d'oscillations peuvent établir les écarts respectifs entre les différentes valeurs de masses, ce qui fixe une forme, mais ne peuvent pas déterminer l'endroit où commence cette forme (voir figure 2.4).

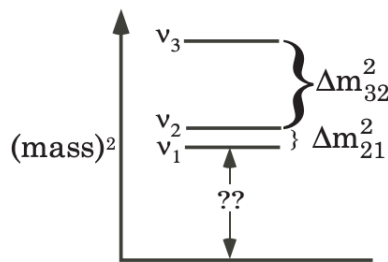


FIGURE 2.4 – Un spectre possible de masses-carrées des neutrinos. Les expériences d'oscillations ne peuvent pas déterminer où commence le spectre. Source : Boris Kayser, Neutrino physics [31]

Pour finir cette partie sur l'oscillation des neutrinos, considérons le cas particulier où seules deux saveurs existent. Supposons qu'on a deux états propres de masses  $\nu_1$  et  $\nu_2$  ainsi que deux états propres d'interactions  $\nu_e$  et  $\nu_\mu$ . Dans ces conditions, un seul paramètre de différence de masses-carrées peut être défini  $\Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2$  et la matrice de mélange prend la forme d'une simple matrice de rotation en

2. En logique, si  $A \Rightarrow B$ , alors  $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$ .

deux dimensions

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

L'angle  $\theta$  est appelé angle de mélange. En utilisant cette matrice de mélange, la probabilité d'oscillation (2.28) devient

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta) = P(\bar{\nu}_\alpha \rightarrow \bar{\nu}_\beta) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \Delta m^2 \frac{L}{4E} \right). \quad (2.33)$$

Même si nous savons déjà qu'au moins trois saveurs de neutrinos existent, ce cas reste une très bonne approximation pour plusieurs expériences d'oscillations. En effet, pour une longueur  $L$  et une énergie  $E$  fixées, les expériences sont sensibles à une plage donnée de  $\Delta m^2$ , et comme les deux paramètres de masses-carrées solaire et atmosphérique sont très différents, ils sont en quelque sorte découplés et on peut alors en étudier un à la fois dans le cadre de cette approximation à deux saveurs.

## 2.2.2 Faits expérimentaux

En général, les expériences d'oscillations de neutrinos peuvent détecter des changements de saveurs de deux manières différentes. Une première façon consiste à observer dans un flux de neutrinos initialement de saveur donnée, l'apparition de neutrinos de saveur différente de l'originale. Ce type d'expérience est appelé « expérience d'apparition ». L'autre façon consiste à commencer avec un flux connu de neutrinos d'une saveur donnée et d'observer la disparition d'une partie de ce flux, c'est ce que l'on appelle une « expérience de disparition ».

Une catégorie d'expériences de neutrinos consiste à utiliser des réacteurs de fissions nucléaires comme sources de neutrinos. En effet, les neutrinos dit de réacteurs sont en fait des antineutrinos électroniques qui sont émis par désintégration- $\beta$  de noyaux instables dans les réacteurs. Plus de 80% des réacteurs commerciaux sont des réacteurs à eau légère et fonctionnent par fissions des isotopes de l'uranium et du plutonium suivants :  $^{235}\text{U}$ ,  $^{238}\text{U}$ ,  $^{239}\text{Pu}$  et  $^{241}\text{Pu}$ . A chaque fission, environ 6 antineutrinos électroniques d'énergies comprises entre 0 – 10 MeV sont émis ainsi qu'une énergie libérée d'environ 200 MeV. En moyenne, les réacteurs nucléaires produisent environ  $2 \times 10^{20} \bar{\nu}_e$  par  $\text{GW}_{th} \cdot \text{s}^3$  avec des énergies moyennes autour de 4 MeV.

De la découverte de l'antineutrino par Reines et Cowan [32, 33, 34] jusqu'aux expériences d'oscillations en passant par l'étude du moment magnétique du neutrino, les expériences de réacteurs ont joué un rôle majeur dans l'histoire de la physique des neutrinos.

L'observation de changement de saveur des neutrinos solaires dans une ligne de base d'environ 100 km avec un grand angle de mélange et un paramètre  $\Delta m^2 \sim 7.1 \times 10^{-5} \text{eV}^2$  confirme que les (anti)neutrinos oscillent dans le vide. Le détecteur d'antineutrinos à scintillation liquide Kamioka (KamLAND) localisé dans le laboratoire sous-terrain de Kamioka au Japon a été spécialement conçu pour mesurer le flux d'antineutrinos  $\bar{\nu}_e$  de réacteurs. En 2003, KamLAND a mis en évidence pour la première fois une disparition d'antineutrinos de réacteurs, suite à une exposition de 162 kt-yr<sup>4</sup>. Durant cette exposition, le détecteur a enregistré 54 évènements de plus de 2.6 MeV, ce qui est moins que les  $86.8 \pm 5.6$  évènements attendus. Le déficit observé dans le flux d'antineutrinos pouvait être expliqué par le phénomène d'oscillation de (anti)neutrinos.

Récemment, KamLAND a publié [35] une mesure encore plus précise du flux de  $\bar{\nu}_e$  de réacteurs et du spectre d'énergie après des données collectées pendant une exposition de 766.3 t-yr<sup>5</sup>. Les résultats sont sans appel et indiquent clairement l'oscillation des antineutrinos de réacteurs. Le spectre

3. GigaWatts thermique-seconde

4. kilotons-year

5. tons-year.

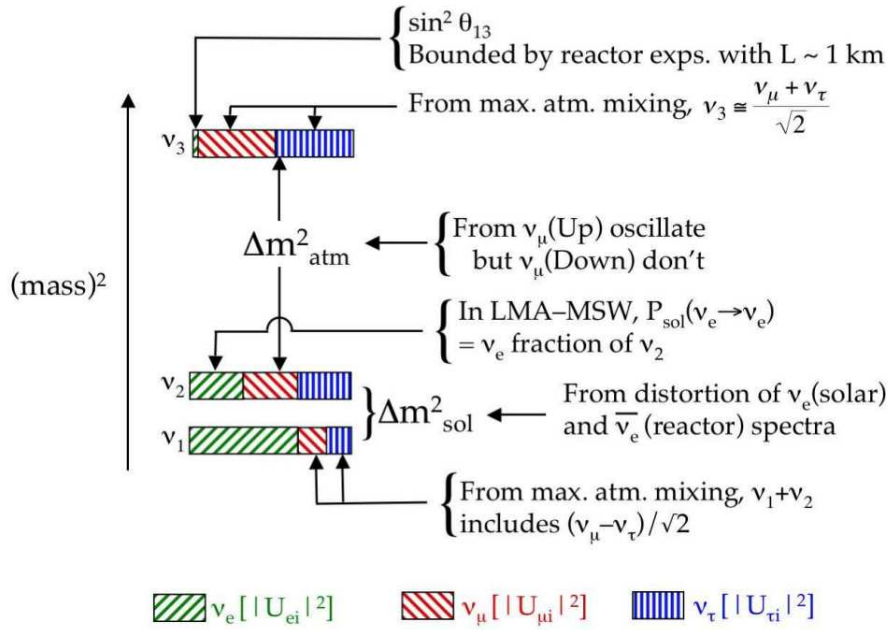


FIGURE 2.5 – Un spectre de masse-carrée pour trois saveurs de neutrinos en accord avec les données expérimentales. Les différentes couleurs représentent les fractions des différents saveurs dans chaque état propre de masse. Source : Boris Kayser, Neutrino physics [31]

d'énergie mesuré par KamLAND est en accord avec l'existence d'oscillations à 99.6% C.L (niveau de confiance). La probabilité de survie du neutrino de départ dépend de son énergie  $E_\nu$  de la manière suivante  $P_{ee} = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \Delta m^2 \frac{L}{E_\nu} \right)$  (événement complémentaire de l'oscillation) et les distorsions spectrales constituent une signature caractéristique des oscillations.

Faisons le point sur ce qui a été établi avec les différentes expériences d'oscillations. Les données d'oscillations de neutrinos proviennent d'une variété d'expériences solaires (Homestake [36], SAGE [37], GALLEX/GNO [38], Super-K [39], SNO [40] and Borexino [41]), atmosphériques [39], de réacteurs (Double-Chooz [42], Daya-Bay [43] et RENO [44]) et d'accélérateurs (MINOS [45] et T2K [46]) [47]. Les expériences de réacteurs, solaires et atmosphériques ont permis de contraindre les paramètres d'oscillations. Les limites posées sont résumées en figure 2.6. De plus, l'analyse des données des différentes expériences d'oscillations un peu partout sur la planète ont permis de déterminer le spectre des masses-carrées des neutrinos représenté en figure 2.5 .

En guise de résumé, les expériences d'oscillations ont confirmé le phénomène de changement de saveur postulé théoriquement ainsi que le mélange des neutrinos (massifs). Les différentes mesures et analyse des données ont fait émerger deux échelles de masses décrivant les oscillations, à savoir  $\Delta m^2_{atm} \sim 2.0 \times 10^{-3} eV^2$  et  $\Delta m^2_{sol} \sim 7.1 \times 10^{-5} eV^2$ . Ces paramètres sont qualifiés de « solaires » et « d'atmosphériques » en raison du rôle important qu'ils jouent respectivement pour les neutrinos solaires (dont l'origine se trouve dans les réactions nucléaires au sein du soleil) et les neutrinos atmosphériques (qui proviennent des désintégrations de pions et de kaons formés dans la haute atmosphère suite aux interactions de rayons cosmiques). Comme expliqué dans la partie précédente, ces valeurs nous permettent de connaître l'écart relatifs des masses mais pas la masse absolue. Il reste donc une ambiguïté à ce propos que certaines expériences récentes se chargent de lever (Mainz [48], PSI [49], ALEPH [50], KATRIN [51]). Compte tenu de ces mesures, deux spectres de masses restent possibles

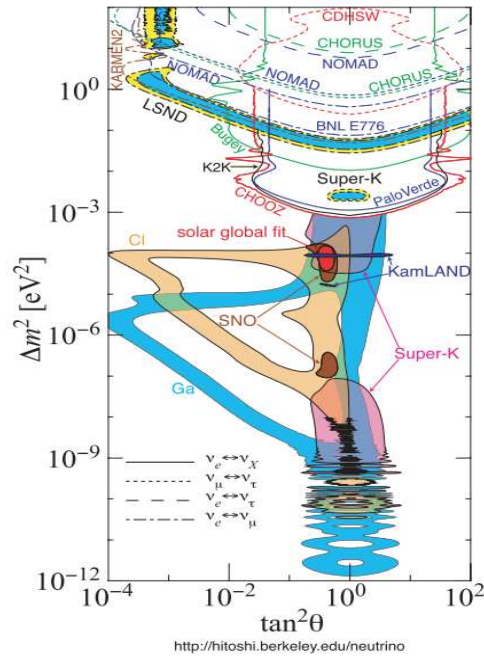


FIGURE 2.6 – Limites actuelles sur les paramètres d’oscillation de neutrinos établies par les expériences atmosphériques, solaires, de réacteurs et d’accélérateurs.

et sont représentés en figure 2.7. En outre, l’angle de mélange associé à la transition solaire est grand et celui associé à la transition atmosphérique est presque maximal (45°).

Maintenant que nous savons que les neutrinos ont une masse, il est donc nécessaire d’étendre le MS de sorte à les inclure. C’est l’objet de la partie suivante.

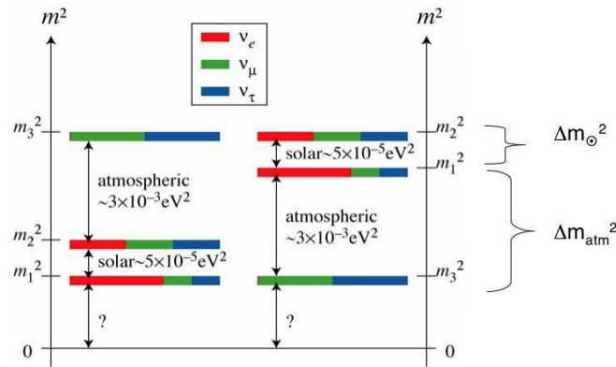


FIGURE 2.7 – Spectres de masses possibles dans le cas de trois neutrinos. Hiérarchie normale ou inversée des masses. Source : [52].

## 2.2.3 Modèles de masses des neutrinos et brisure de la symétrie de saveur

### 2.2.3.1 Masse de Dirac

Les termes de Yukawa couplant la partie gauche et la partie droite des fermions, afin d'écrire un terme de Yukawa pour les neutrinos, nous sommes amenés à introduire un neutrino de chiralité droite dans notre modèle. Nous étendons alors le nombre de particules présentes dans le MS en y ajoutant 3 neutrinos droits correspondant aux 3 saveurs ( $\nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R}$ ). Ces neutrinos ne ressentent aucune des interactions fondamentales (à l'exception de la gravité). En termes plus techniques, ils transforment comme des singlets sous les différents groupes de jauge et donc ils appartiennent à la représentation triviale du groupe de jauge du MS,  $N = \nu_R^\dagger \sim (1, 1)_0$ . De plus, la symétrie quarks-leptons est rétablie dans la mesure où tous les fermions possèdent maintenant une composante gauche appartenant à un doublet faible et une composante droite transformant comme un singlet faible. Le secteur de jauge est toujours invariant sous l'action du groupe de saveur étendu  $G'_F = G_F \times U(3)_N$  :

$$G'_F = U(3)^6 = U(3)_Q \times U(3)_U \times U(3)_D \times U(3)_L \times U(3)_E \times U(3)_N. \quad (2.34)$$

L'action de ce groupe sur le nouveau champ  $N$ , comme pour les autres champs de chiralité droite, est définie par  $N \xrightarrow{G'_F} Ng_N$  avec  $g_N \in U(3)_N$ . Comme nous l'avons vu précédemment, cette symétrie est brisée par les couplages de Yukawa. Ayant introduit les neutrinos droits, on peut donc écrire un terme pour les neutrinos :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -U^I Y_u^{IJ} Q^J H^{\dagger C} - D^I Y_d^{IJ} Q^J H^\dagger - E^I Y_e^{IJ} L^J H^\dagger - N^I Y_\nu^{IJ} L^J H^{\dagger C} + h.c. \quad (2.35)$$

Comptons le nombre de paramètres réels libres du modèle.

Dans l'espace des saveurs  $Y_{u,d,e,\nu} \in M_3(\mathbb{C})$  (matrices  $3 \times 3$  à coefficients complexes). Par conséquent, chacune des matrices contient 9 paramètres complexes, soit  $9 \times 2 = 18$  paramètres réels. Au total, le secteur de Yukawa introduit  $18 \times 4 = 72$  paramètres réels. Cependant, comme dans la partie précédente, ils ne sont pas tous physiques. La symétrie  $G'_F$  n'est pas entièrement brisée et il reste des symétries résiduelles. En revanche, nous n'avons plus conservation des nombres leptoniques de saveurs du fait de l'ajout du neutrino droit qui permet des processus avec changement de saveur dans le secteur des leptons comme nous le verrons plus tard. Néanmoins, nous avons conservation du nombre leptonique

total  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_e + \mathcal{L}_\mu + \mathcal{L}_\nu$  et du nombre baryonique  $\mathcal{B}$ .

$$G'_F = U(3)^6 \rightarrow U(1)_{\mathcal{B}} \times U(1)_{\mathcal{L}}. \quad (2.36)$$

En appliquant la même technique de comptage que dans la Section 1.5, nous pouvons déterminer le nombre de paramètres physiques, voir formule (1.70). Ici, le nombre de paramètres total est 72 pour le secteur de Yukawa. Comme une transformation sous  $G'_F = U(3)^6$  implique 6 matrices unitaires  $3 \times 3$ , chacune d'entre elles nécessitant 9 paramètres réels pour la décrire, soit un total de  $6 \times 9 = 54$  paramètres réels. Or, il reste deux paramètres réels (générateurs non brisés) correspondant aux  $U(1)_{\mathcal{B}}$  et  $U(1)_{\mathcal{L}}$  résiduels. Le nombre de générateurs brisés est donc  $54 - 2 = 52$ . Par conséquent, #paramètres physique =  $72 - 52 = 20$ .

Après la brisure spontanée de symétrie électrofaible, le champ de Higgs acquiert une VEV non nulle,  $\langle 0 | H | 0 \rangle = v$  et il s'exprime alors dans la jauge unitaire comme  $H = \begin{pmatrix} 0 & v + h \end{pmatrix}^T$  avec  $h$  le boson de Higgs. Les termes de Yukawas donnent alors les termes de masse des fermions :

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -v(\bar{u}_R^I Y_u^{IJ} u_L^J + \bar{d}_R^I Y_d^{IJ} d_L^J + \bar{e}_R^I Y_e^{IJ} e_L^J + \bar{\nu}_R^I Y_\nu^{IJ} \nu_L^J)(1 + \frac{h}{v}) + h.c. \quad (2.37)$$

Comme les  $Y_{u,d,e,\nu}$  ne sont pas diagonaux, on réalise une transformation bi-unitaire pour les diagonaliser et obtenir les états propres de masse des fermions,

$$\exists V_R^{u,d,e,\nu}, V_L^{u,d,e,\nu} \in U(3) \quad \text{telles que} \quad v V_R^{u,d,e,\nu} Y_{u,d,e,\nu} V_L^{u,d,e,\nu} = \mathbb{M}_{u,d,e,\nu} \quad (2.38)$$

En réinjectant dans le lagrangien de Yukawa, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa} = & -(\bar{u}_R(V_R^u)^\dagger \mathbb{M}_u(V_L^u)^\dagger u_L + \bar{d}_R(V_R^d)^\dagger \mathbb{M}_d(V_L^d)^\dagger d_L + \bar{e}_R(V_R^e)^\dagger \mathbb{M}_e(V_L^e)^\dagger e_L \\ & + \bar{\nu}_R(V_R^\nu)^\dagger \mathbb{M}_\nu(V_L^\nu)^\dagger \nu_L)(1 + \frac{h}{v}) + h.c. \end{aligned} \quad (2.39)$$

En utilisant la symétrie de saveur, on applique une transformation unitaire sur les états propres d'interaction pour récupérer les états propres de masse. Par ailleurs, la symétrie de jauge nous impose d'appliquer les mêmes transformations unitaires sur les deux composantes du doublet de quarks  $Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$  d'une part et du doublet de leptons  $L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$  d'autre part. On choisit d'appliquer  $(V_L^u)^\dagger$  à  $Q$  et  $(V_L^e)^\dagger$  à  $L$ . En redéfinissant les champs de la manière suivante :

$$\begin{cases} (V_L^u)^\dagger u_L = u_L^{mass} \\ (V_L^u)^\dagger d_L = d_L' \end{cases}, \begin{cases} \bar{u}_R(V_R^u)^\dagger = \bar{u}_R^{mass} \\ \bar{d}_R(V_R^d)^\dagger = \bar{d}_R^{mass} \end{cases}, \begin{cases} (V_L^\nu)^\dagger e_L = e_L^{mass} \\ \bar{e}_R(V_R^e)^\dagger = \bar{e}_R^{mass} \end{cases}, \begin{cases} (V_L^\nu)^\dagger \nu_L = \nu_L' \\ \bar{\nu}_R(V_R^\nu)^\dagger = \bar{\nu}_R^{mass} \end{cases}, \quad (2.40)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa} = & -(\bar{u}_R^{mass} \mathbb{M}_u u_L^{mass} + \bar{d}_R^{mass} \mathbb{M}_d V_{CKM}^\dagger d_L' + \bar{e}_R^{mass} \mathbb{M}_e e_L^{mass} \\ & + \bar{\nu}_R^{mass} \mathbb{M}_\nu U_{PMNS}^\dagger \nu_L')(1 + \frac{h}{v}) + h.c. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De la même façon que pour le secteur des quarks, la non correspondance des deux transformations à appliquer à chacune des composantes du doublet  $L$  pour atteindre leurs états propres de masse ( $V_L^e \neq V_L^\nu$ )

définie la matrice de mélange des leptons appelée matrice de PONTECORVO-MAKI-NAKAGAWA-SAKATA (PMNS) :

$$V_L^{e\dagger} V_L^{\nu} \equiv U_{PMNS} = \begin{pmatrix} V_{e1} & V_{e2} & V_{e3} \\ V_{\mu 1} & V_{\mu 2} & V_{\mu 3} \\ V_{\tau 1} & V_{\tau 2} & V_{\tau 3} \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Motivé par l'expérience, on choisit usuellement de mettre les leptons chargés dans leurs états propres de masse, car ils sont plus facile à détecter. Dans ce cas,  $U_{PMNS}$  lie les états propres de jauge des neutrinos à leurs états propres de masse :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_{\mu} \\ \nu_{\tau} \end{pmatrix}}_{\text{états propres d'interaction}} = U_{PMNS} \underbrace{\begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}}_{\text{états propres de masse}}. \quad (2.43)$$

Comme la matrice CKM, la matrice PMNS est unitaire, il faut donc  $3^2 = 9$  paramètres réels pour la décrire qu'on peut choisir comme étant 3 nombres réels et 6 phases. Or, nous avons déjà les masses des 12 fermions (incluant les neutrinos) élémentaires auxquelles on ajoute 4 paramètres pour la matrice CKM (3 angles et 1 phase), ce qui fait un total de 16 paramètres physiques libres du modèle. Sachant qu'il y en a 20 en tout, seuls  $20 - 16 = 4$  paramètres sont physiques dans la matrice  $U_{PMNS}$ . Par exemple on peut paramétriser la matrice PMNS par 3 angles de mélange ( $\theta_{12}, \theta_{13}$  et  $\theta_{23}$  qui sont des nombres réels) et une phase de violation de  $\mathcal{CP}$  ( $\delta$ ).

Si on note  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  et  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ , on peut exprimer la matrice PMNS sous la forme :

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Les valeurs actuelles des coefficients en modules, mesurées à partir des oscillations de neutrinos sont [53, 54] :

$$|U_{PMNS}| = \begin{pmatrix} 0.82 \pm 0.01 & 0.54 \pm 0.02 & 0.15 \pm 0.03 \\ 0.35 \pm 0.06 & 0.70 \pm 0.06 & 0.62 \pm 0.06 \\ 0.44 \pm 0.06 & 0.45 \pm 0.06 & 0.77 \pm 0.06 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

ainsi que les meilleurs ajustements des angles de mélange et de la phase :  $\theta_{12}[\circ] = 33.36_{-0.78}^{+0.81}$ ,  $\theta_{23}[\circ] = 40.0_{-1.5}^{+2.1}$ ,  $\theta_{13}[\circ] = 8.66_{-0.46}^{+0.44}$  et  $\delta[\circ] = 300_{-138}^{+66}$ .

Dès lors que nous considérons un secteur de neutrinos non trivial, les transitions LFV deviennent possibles. En effet, comme les états propres de masse et d'interaction des neutrinos ne sont plus alignés, le passage de l'un à l'autre nécessite une rotation  $\nu_L \rightarrow U_{PMNS} \nu_L$  et les courants chargés sont affectés de la manière suivante :

$$\mathcal{L}_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \sum_I W_{\mu}^+ (\bar{\nu}_L^J U_{PMNS}^{*JI} \gamma^{\mu} e_L^I + \bar{u}_L^I \gamma^{\mu} V_{CKM}^{IJ} d_L^J) + h.c. \quad (2.46)$$

Le terme leptonique n'est plus diagonal dans l'espace des saveurs et les mélanges de saveurs deviennent possibles.



## 2.2.3.2 Masse de Majorana et mécanismes de Seesaw

On rappelle que le spineur conjugué de charge est défini par  $\psi^C = C(\bar{\psi})^T$ , où C est la matrice de conjugaison de charge  $C = i\gamma^2\gamma^0$ . Les champs libres et leurs conjugués de charge doivent satisfaire la même équation de Dirac avec la même masse :  $(i\not{\partial} - m)\psi = 0$  et  $(i\not{\partial} - m)\psi^C = 0$ . De plus, on a  $(\psi_L)^C = (\psi^C)_R$  et  $(\psi_R)^C = (\psi^C)_L$ , autrement dit le conjugué de charge d'un champ chiral gauche est un champ chiral droit et inversement. Par ailleurs, sous une transformation de Lorentz  $\psi^C$  se transforme comme  $\psi$ . Par conséquent, la forme bilinéaire  $\bar{\psi}\psi^C$  est un invariant de Lorentz aussi acceptable que  $\bar{\psi}\psi$  pour jouer le rôle de terme de masse d'un champ fermionique. Cependant, si  $\psi$  possède une charge scalaire conservée alors le lagrangien est invariant sous  $U(1)$ . Le terme  $\bar{\psi}\psi$  est invariant sous  $U(1)$  ( $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta}\psi$ ). Par contre, le terme  $\bar{\psi}\psi^C$  ne l'est pas  $\bar{\psi}'\psi'^C = e^{-2i\theta}\bar{\psi}\psi^C$ . De ce fait, comme il n'y a pas de symétrie sous  $U(1)$ , il n'y a pas de charge et donc  $\psi$  doit être totalement neutre. Le neutrino est donc un bon candidat pour avoir un terme de masse construit à partir de cette forme bilinéaire  $-\frac{1}{2}\bar{\psi}M\psi^C$ . La masse présente dans ce terme n'a à priori rien à voir avec la masse de Dirac et est appelée *masse de Majorana*.

On introduit une masse de Majorana pour le neutrino :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} - \frac{1}{2}N^I M^{IJ} N^J - N^I (Y_\nu)^{IJ} L^J H + h.c. \quad (2.47)$$

Une des conséquences notable d'un tel terme de masse est que le nombre leptonique total n'est plus conservé. Cela nous montre à quel point sa conservation est accidentelle dans le MS. Celle ci disparaît dès lors qu'on étend son contenu en particules de la façon la plus simple possible. Néanmoins, le point essentiel sans doute est le fait que la masse de Majorana n'est pas liée à l'échelle électrofaible et donc n'a rien à voir avec le mécanisme de Higgs. Conséquemment, elle peut prendre n'importe quelle valeur et en particulier des valeurs (très) grande par rapport à l'échelle électrofaible. Supposons que les neutrinos droits  $N^{I=1,2,3}$  soient très lourds et voyons ce qu'il se passe dans ce cas :

On peut toujours prendre  $M = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$  sans perte de généralité. On résout l'équation d'Euler-Lagrange pour les neutrinos droits :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^I} = M^{IJ} N^J + (Y_\nu)^{IJ} L^J H = 0, \quad (2.48)$$

ce qui nous donne,

$$N^K = -(M^{-1} Y_\nu)^{KJ} L^J H, \quad (2.49)$$

En injectant la solution trouvée dans le lagrangien, on obtient l'opérateur de Weinberg de dimension-5, qui après SSB donne :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \frac{1}{2}(L^I H)(Y_\nu^T M^{-1} Y_\nu)^{IJ}(L^J H) + h.c. \xrightarrow{SSB} \frac{v^2}{2}(Y_\nu^T M^{-1} Y_\nu)^{IJ} \nu_L^I \nu_L^J + h.c., \quad (2.50)$$

qui n'est rien d'autre qu'un terme de masse de Majorana pour les neutrinos gauches. On voit bien que si les masses des neutrinos droits sont assez grandes, celles des neutrinos gauches seront très petites (et inversement). C'est ce que l'on appelle le *mécanisme de seesaw* (ou le *mécanisme de la bascule*). Il est à ce jour considéré comme le mécanisme le plus séduisant pour expliquer les faibles masses des neutrinos sans avoir à ajuster finement les paramètres libres du lagrangien. Cependant, pour expliquer les valeurs mesurées des masses des neutrinos gauches, il faut que  $M_{1,2,3} = 10^9 - 10^{15} \text{GeV}$ , échelle relativement proche de l'échelle GUT<sup>6</sup> (échelle de grande unification). Il est donc tout à fait envisageable que les neutrinos droits acquièrent leurs masses directement à cette échelle<sup>7</sup>.

6. Grand Unified Theories.

7. C'est en fait le cas dans les théories  $SO(10)$  GUT.

A basse énergie, les rotations nécessaires pour passer des états propres de jauge aux états propres de masse des leptons, issues respectivement de la décomposition en valeurs singulières de  $Y_e$  pour les leptons chargés (que nous avons déjà vue dans la Section 1.5) et de la diagonalisation de la matrice symétrique<sup>8</sup>  $\Upsilon_\nu \equiv Y_\nu^T M^{-1} Y_\nu$  pour les neutrinos sont :

$$vV_R^e Y_e V_L^e = \mathbb{M}_e, \quad v^2 V_L^{\nu T} \Upsilon_\nu V_L^\nu = \mathbb{M}_\nu. \quad (2.51)$$

Comme précédemment, on ne peut pas atteindre simultanément (avec une même transformation) les états propre de masse des deux composantes du doublet de lepton  $L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$ . On choisit de tourner  $L$  de  $V_L^e$  et on atteint la base dans laquelle :

$$vY_e = \mathbb{M}_e, \quad v^2 \Upsilon_\nu = V_L^{eT} V_L^{\nu*} \mathbb{M}_\nu V_L^{\nu\dagger} V_L^e \equiv U_{PMNS}^* \mathbb{M}_\nu U_{PMNS}^\dagger, \quad (2.52)$$

où  $U_{PMNS} \equiv V_L^{e\dagger} V_L^\nu$ .

Faisons un point sur les phases. Le terme de masse de Majorana pour l'état propre de masse  $\nu_L$  est donné par :

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \sum_I (m_I \nu_L^I \nu_L^I + m_I^* \nu_L^{I\dagger} \nu_L^{I\dagger}). \quad (2.53)$$

Pour une saveur donné  $I$ , l'équation du mouvement du neutrino est donné par  $(\partial^2 + |m_I|^2) \nu_L^I = 0$  et donc  $M$  et  $\mathbb{M}_\nu$  ne doivent pas forcément être réels. Par convention, ces phases ne sont pas laissées dans  $\mathbb{M}_\nu$ , mais transférées dans la matrice PMNS. En effet, grâce à la présence de  $U_{PMNS}^*$  et de  $U_{PMNS}^\dagger$  dans l'équation (2.52), on peut transférer la phase de chaque coefficient diagonal de  $\mathbb{M}_\nu$  dans  $U_{PMNS}$  dans la mesure où une phase globale n'est pas pertinente. Ces phases appelées *phases de Majorana* sont codées dans la redéfinition :

$$U_{PMNS} \rightarrow U_{PMNS} \cdot \text{diag}(1, e^{i\alpha_M}, e^{i\beta_M}). \quad (2.54)$$

## 2.3 Un processus violant CP : le Moment Dipolaire Électrique

### 2.3.1 Définitions et violations de symétries

Dans une distribution de charges quelconque, dès lors que les barycentres des charges positives et négatives ne coïncident pas, il existe une quantité traduisant cette séparation de charges appelée *moment dipolaire électrique* (EDM) qui est alors non nulle. L'EDM  $\vec{d}$  d'un système est nécessairement de même direction que son moment cinétique moyen  $\hbar \langle J \rangle$ , car étant la seule direction privilégiée. Classiquement, L'EDM est défini relativement à son centre de masse ( $\vec{r} = \vec{0}$ ) de la manière suivante

$$\vec{d} = \int \vec{r} \rho_Q d^3 r = d \frac{\langle \vec{J} \rangle}{J}, \quad (2.55)$$

avec  $\rho_Q$  la distribution de charge volumique. De façon analogue, on définit le moment dipolaire magnétique

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \wedge \vec{J}_Q d^3 r = \mu \frac{\langle \vec{J} \rangle}{J}, \quad (2.56)$$

8. En effet,  $Y_\nu^T M^{-1} Y_\nu$  est symétrique donc diagonalisable orthogonalement.

où  $\vec{J}_Q$  est la densité de courant électrique.

En mécanique quantique non-relativiste, une interaction est décrite par un opérateur hamiltonien (ou lagrangien de façon équivalente). Ainsi, l'interaction entre un champ électromagnétique et un système quantique de moment magnétique  $\mu$  et d'EDM  $D$  est dictée par le hamiltonien suivant

$$H = -(\vec{\mu} \cdot \vec{B} + \vec{D} \cdot \vec{E}) = -\left(\mu \frac{\vec{J} \cdot \vec{B}}{J} + D \frac{\vec{J} \cdot \vec{E}}{J}\right), \quad (2.57)$$

avec  $\vec{J}$  l'opérateur moment cinétique. Le champ magnétique  $\vec{B}$  et l'opérateur moment cinétique  $\vec{J}$  sont tous les deux symétriques sous  $\mathcal{P}$  mais antisymétriques sous  $\mathcal{T}$ . Quant au champ électrique  $\vec{E}$ , il est antisymétrique sous  $\mathcal{P}$  mais symétriques sous  $\mathcal{T}$ . Ainsi, le second terme en  $\vec{J} \cdot \vec{E}$  est alors antisymétrique à la fois sous  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{T}$ . Or, en vertu du théorème  $CP\mathcal{T}$ , une violation de  $\mathcal{T}$  implique une violation de  $CP$ . Donc le terme EDM viole la symétrie  $CP$ .

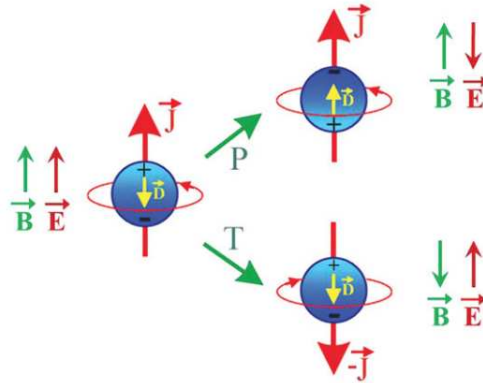


FIGURE 2.8 – Transformations des différentes quantités mises en jeu sous l'action des symétries  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{T}$ . Source : Klaus Jungmann, Searching for electric dipole moments [55]

En théorie quantique des champs, la densité lagrangienne d'interaction correspondante est

$$\mathcal{L}_{dipoles} = -\frac{\mu}{2} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi - i \frac{D}{2} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 F_{\mu\nu} \psi, \quad (2.58)$$

où  $\psi$  est le champ fermionique et  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  le tenseur électromagnétique (contenant  $A_\mu$  le champ vectoriel photonique). Remarquons qu'à la différence du premier terme, le second terme décrivant l'interaction de l'EDM contient la matrice de Dirac  $\gamma^5$ , qui indique une violation de la symétrie  $\mathcal{P}$ , ainsi que le nombre imaginaire  $i$ , dont la présence traduit une violation de  $\mathcal{T}$  et constitue donc d'après l'invariance  $CP\mathcal{T}$ , un signal direct de violation  $CP$ .

### 2.3.2 La quête d'un signal EDM non nul

#### Principe de mesure

L'interaction d'une particule de spin 1/2 avec un champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  est donnée par le hamiltonien suivant

$$H = -\mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B} - d \vec{\sigma} \cdot \vec{E}, \quad (2.59)$$

où  $\mu$  et  $d$  sont respectivement les moments magnétiques et électriques de la particule et  $\vec{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$  les matrices de Pauli.

Lorsque les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  sont statiques et alignés, le spin de la particule précesse autour de cette direction d'alignement des champs. La fréquence de précession est la fréquence de Larmor  $\frac{\omega_L}{2\pi}$  donnée par

$$\hbar\omega_L = -2\mu B - 2dE. \quad (2.60)$$

Afin de mesurer un signal EDM, l'approche usuelle consiste à appliquer un champ électrique aussi intense que possible. Dans ces conditions, la fréquence de précession électrique est quand même très petite devant la fréquence de précession magnétique. Par exemple, pour un champ magnétique de  $1\mu T$ , la fréquence de précession magnétique est  $|f_L| = \left|\frac{\omega_L}{2\pi}\right| = 29Hz$  alors que pour un EDM de  $10^{-26} e \cdot cm$  dans un champ électrique intense de  $20kV/cm$ , la fréquence de précession électrique est de seulement  $10^{-7} Hz$ .

Les expériences sont alors accordées pour mesurer précisément la fréquence de Larmor dans les deux situations où les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont parallèles ou antiparallèles. L'EDM est alors obtenu par

$$d = -\frac{\hbar\Delta\omega_L}{4E}, \quad (2.61)$$

avec  $\Delta\omega_L$  la différence des fréquences dans les deux situations. La fréquence de précession est mesurée en utilisant la méthode de Ramsey des champs oscillants séparés [56].

### Précision

La limite statistique atteignable de précision dans une expérience d'EDM est donnée par

$$\delta d = \frac{\hbar}{P\epsilon\sqrt{N\tau TE}}, \quad (2.62)$$

où  $P$  est la polarisation,  $\epsilon$  l'efficacité (qui peut varier grandement en fonction des expériences et des systèmes),  $T$  le temps de mesure,  $N$  le nombre de particules dans le volume observé,  $\tau$  le temps de cohérence des spins et  $E$  le champ électrique appliqué. Pour des paramètres typiques d'expériences réalistes  $P \approx 1$ ,  $\epsilon \approx 0.1$ ,  $N \approx 10^6$ ,  $\tau \approx 1s$ ,  $E = 10^5 V/cm$ , on obtient une précision de  $\delta d \approx 10^{-27} e \cdot cm$  pour un jour de mesure ( $T \approx 10^5 s$ ). Généralement, la limitation statistique n'est pas l'obstacle principal alors que les effets systématiques sont bien plus limitants et les contrôler nécessite un effort considérable dans les expériences de haute précision. Le lecteur désireux d'en savoir plus à propos des différentes expériences cherchant un EDM permanent pourra se référer à la revue [57].

### Systèmes utilisés pour chercher des EDMs

Plusieurs systèmes différents sont utilisés afin de mesurer un EDM. On distingue quatre grandes catégories de systèmes des plus petits aux plus grands :

- Les particules élémentaires et nucléons (l'électron, le muon, le tau, le neutron ou le proton...).
- Les atomes et les ions (mercure, xenon, thallium, cesium, radon, francium, radium, ...).
- Les molécules (fluorure de thallium (TlF), fluorure d'ytterbium (YbF), oxyde de plomb (PbO), ion fluorure de thorium  $ThF^+$ , ...)
- De la matière condensée (matériaux ferroélectriques, Xenon liquide, ...)

Les systèmes utilisés par les expérimentateurs ainsi que leurs avantages et inconvénients sont résumés dans la figure 2.9.

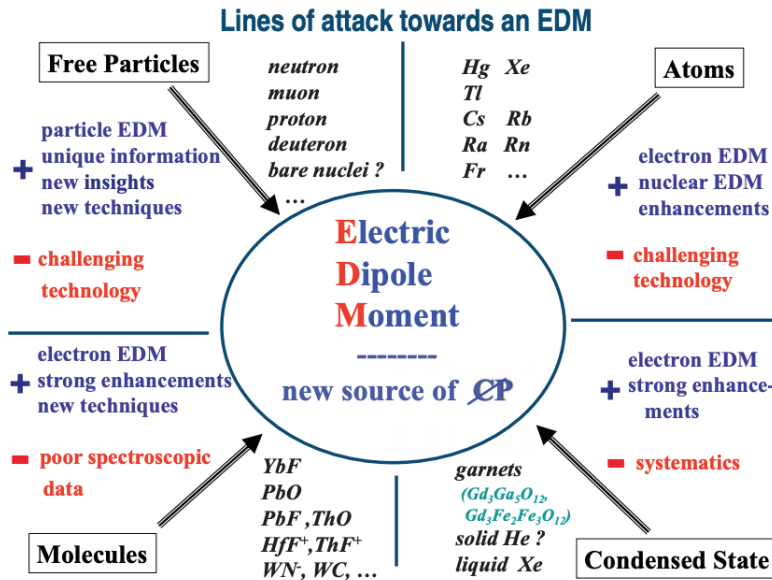


FIGURE 2.9 – Les différentes lignes d’attaques expérimentales dans la recherche d’EDMs. Source : Klaus Jungmann, Searching for electric dipole moments [55]

### 2.3.3 Contraintes établies et impacts sur la nouvelle physique

Plusieurs expériences de précisions impliquant différents systèmes sont réalisées dans le monde afin de mesurer un signal EDM non nul. Le fait de mesurer un EDM de fermion non nul pourrait révéler de nouvelles sources de violations-CP au-delà du MS. La précision des expériences dédiées à cette quête a augmentée considérablement, fruit de plusieurs décennies de développement. Cependant, les résultats sont toujours compatibles avec une valeur d’EDM nulle, et ce pour plusieurs systèmes différents (pour une review récente voir [55]), tous compatibles avec zéro. Il n’en est pas moins que ces expériences ont un potentiel de découverte fort dans la mesure où elles sont sensibles à certains effets de nouvelle physique siégeant à des échelles d’énergies au-delà de ce qui est accessible aux collisionneurs.

Les différentes mesures d’EDMs ont permis d’établir des bornes supérieures de l’ensemble des valeurs (absolues) possibles de ces derniers. Nous présentons ici (figure 2.1) plusieurs limites actuelles sur les EDMs de particules ainsi que les facteurs d’améliorations des précisions expérimentales nécessaires afin d’atteindre les prédictions du MS. Concernant les EDMs des électrons, des neutrons et des muons, plusieurs modèles de physique au-delà du modèle standard prédisent des valeurs atteignables par les expériences actuelles en cours ou proposées pour un futur proche.

Particule	Limite à 95% de confiance [ $e \cdot cm$ ]	Référence	facteur d'écart avec la prédiction du MS
e	$9,7 \times 10^{-29}$	[58]	$10^{11}$
$\mu$	$1,8 \times 10^{-19}$	[59]	$10^8$
$\tau$	$3,9 \times 10^{-17}$	[60]	$10^7$
n	$3,6 \times 10^{-26}$	[61]	$10^4$
p	$0,54 \times 10^{-23}$	[62]	$10^6$
$\nu_{e,\mu}$	$2 \times 10^{-21}$	[63]	pas d'EDM dans le MS <sup>9</sup>
$\nu_\tau$	$5,2 \times 10^{-17}$	[64]	pas d'EDM dans le MS

TABLE 2.1 – Tableau présentant les limites actuelles à 95% de confiance sur les EDMs de certaines particules ainsi que le facteur d'écart par rapport aux prédictions du MS.

### Impact sur la nouvelle physique

De façon générale, outre les deux sources de violation- $\mathcal{CP}$  déjà présentes dans le MS, à savoir la phase complexe de la matrice CKM dans le secteur faible ou encore le terme  $\bar{\theta}$  dans le secteur fort, les nouvelles sources de violation- $\mathcal{CP}$  au-delà du MS sont encapsulées dans un lagrangien effectif  $\mathcal{L}_{BSM}$ . Ainsi, le lagrangien associé à la violation- $\mathcal{CP}$  (CPV) peut s'écrire

$$\mathcal{L}_{CPV} = \mathcal{L}_{CKM} + \mathcal{L}_{\bar{\theta}} + \mathcal{L}_{BSM}. \quad (2.63)$$

Cette approche de théorie effective permet de connecter les résultats expérimentaux aux théories plus fondamentales à haute énergie de façon indépendante des modèles. En effet, l'effet des processus à haute énergie ( $E \ll \Lambda$ ) est codé dans les coefficients de Wilson associés aux opérateurs effectifs non-renormalisables impliquant uniquement les champs du MS. Dans ce formalisme, on effectue un développement limité en  $\frac{v}{\Lambda}$  où  $v$  est la VEV du champs de Higgs. Par conséquent, les amplitudes correspondantes sont en  $\left(\frac{v}{\Lambda}\right)^{d-4}$ , où  $d$  est la dimension en énergie de l'opérateur associé.

La nouvelle physique entre en jeu à partir des opérateurs de dimensions 6

$$\mathcal{L}_{BSM} \rightarrow \mathcal{L}_{CPV}^{eff} = \sum_{k,d} \alpha_k^{(d)} \left(\frac{1}{\Lambda}\right)^{d-4} \mathcal{O}_k^{(d)}, \quad (2.64)$$

où les  $\alpha_k^{(d)}$  sont les coefficients de Wilson associés aux opérateurs  $\mathcal{O}_k^{(d)}$  invariants sous  $SU(2) \times U(1)$  et ne contenant que des champs du MS. L'indice  $k$  indexe les différents opérateurs de dimension  $d$ . Notons que si nous travaillons seulement avec la première génération du MS, il est suffisant de ne considérer que les opérateurs de dimension 6 en tronquant la série ci-dessus. Le travail du phénoménologue consiste alors à transcrire les nouvelles mesures expérimentales en contraintes sur les coefficients de Wilson associés aux opérateurs effectifs de physique au-delà du MS considérés dans  $\mathcal{L}_{CPV}^{eff}$ .

Comme de nouvelles interactions violent  $\mathcal{CP}$  (possiblement médiées par des particules inconnues) sont requises afin d'expliquer l'asymétrie matière-antimatière dans l'univers, un EDM peut être induit par les effets virtuels de ces particules inconnues. Dans cette approche de théorie effective, indépendante des modèles de nouvelle physique considérés, les limites obtenues expérimentalement peuvent être traduites en contraintes sur les modèles violent  $\mathcal{CP}$  au-delà du MS à l'échelle du TeV [24, 65] ou même à l'échelle du PeV [66, 67].

De plus, les EDMs sont très sensibles pour sonder la violation- $\mathcal{CP}$  dans le secteur de Higgs [68, 69]. Par conséquent, les expériences de précisions mesurant des EDMs ont un grand potentiel de découverte

---

et il est important de mesurer les EDMs de différents systèmes (électron, muon, neutron, proton, atomes, molécules, etc...) car elles constituent des informations complémentaires [24, 65, 66, 67, 68, 69, 55, 70].

# CHAPITRE 3

## Estimation d'observables à l'aide de la symétrie de saveur

Cette étude est basée sur l'article [1] dont quelques résultats importants sont exposés dans [71].

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>47</b>
<b>3.2</b>	<b>Méthode d'estimation : Comment exploiter la symétrie de saveur du MS ?</b>	<b>49</b>
<b>3.3</b>	<b>Comment prédire l'EDM généré par la phase CKM ?</b>	<b>52</b>
3.3.1	EDMs de leptons générés par la phase CKM	53
3.3.2	EDMs de quarks générés par la phase CKM	55
3.3.3	EDMs de quarks et de leptons générés par la phase forte du MS	58
3.3.4	Impact de la nouvelle physique sur les EDMs des quarks et des leptons sous MFV	61
<b>3.4</b>	<b>Estimations des EDMs en présence des masses des neutrinos</b>	<b>63</b>
3.4.1	Masses de Dirac pour les neutrinos	64
3.4.2	Masses de Majorana pour les neutrinos	66
3.4.3	Mécanismes de seesaw	72
3.4.4	Termes de masses de Majorana et invariants anomaux	78

---

### 3.1 Introduction

Dans le MS, il y a deux sources de violation- $\mathcal{CP}$ . La première est intimement liée à la physique de la saveur, elle provient des couplages de Yukawa des quarks et est encodée dans la matrice CKM. Pour être ressentie dans des observables, elle nécessite des transitions de saveurs réelles ou virtuelles, et a été largement scrutée expérimentalement dans les systèmes de mésons étranges  $K$  et de mésons beaux  $B$ . Quant à la seconde source, elle est plus particulière. Elle peut également être encodée dans les couplages de Yukawa des quarks mais est intrinsèquement insensible à la saveur et reçoit une contribution de la dynamique de QCD. Elle est censée induire des effets conséquents à travers des



processus sans changement de saveur violant- $\mathcal{CP}$  comme un EDM pour le neutron. Cependant, cela n'est guère confirmé expérimentalement posant l'une des énigmes les plus sérieuses du MS.

Ces deux types de phases violant- $\mathcal{CP}$  peuvent être généralisée au-delà du MS. Le premier type est sensible aux transitions de saveurs et provient des mécanismes générant les masses des quarks et des leptons. Par exemple, dans un contexte supersymétrique, les masses des squarks et des sleptons apporteraient ce type de phases. Dès lors que la violation minimale de saveur<sup>1</sup> [72] est imposée, l'impact de ces nouvelles phases de saveurs sur les observables est limitée, et ce même si l'échelle de nouvelle physique est de l'ordre du TeV. D'autre part, le second type de phases est insensible à la saveur et peut provenir d'un secteur scalaire étendu contenant des paramètres complexes ou encore de la dynamique non-perturbative des champs de jauge. Dans un cadre supersymétrique, les masses des gauginos génèrent aussi des phases de ce type. Etant déjà problématiques dans le MS, ces phases posent un défi pour tout modèle de nouvelle physique voulant les accommoder dans la mesure où aucune dynamique spécifique n'est présente pour les asservir.

Le but de cette étude est d'analyser l'impact des phases savoureuses<sup>2</sup> sur des observables non-savoureuses<sup>3</sup> que sont les EDMs des quarks et des leptons. Pour procéder, on considère le lagrangien effectif où l'on paramétrise les opérateurs magnétiques de la façon suivante

$$\mathcal{L}_{eff} = e \frac{c_u}{\Lambda^2} (\bar{U} \mathbf{Y}_u \mathbf{X}_u \sigma_{\mu\nu} Q) H^\dagger F^{\mu\nu} + e \frac{c_d}{\Lambda^2} (\bar{D} \mathbf{Y}_d \mathbf{X}_d \sigma_{\mu\nu} Q) H^\dagger F^{\mu\nu} + e \frac{c_e}{\Lambda^2} (\bar{E} \mathbf{Y}_e \mathbf{X}_e \sigma_{\mu\nu} L) H^\dagger F^{\mu\nu} + \dots, \quad (3.1)$$

où  $Q, L, U, D, E$  sont respectivement les doublets faibles de quarks et de leptons ainsi que les singlets faibles de quarks de type up, quarks de type down et leptons chargés. Il s'agit alors d'étudier les phases provenant des structures de saveurs  $\mathbf{Y}_{u,d,e} \mathbf{X}_{u,d,e}$ , qui sont des matrices  $3 \times 3$  dans l'espace des saveurs. Cela inclut non seulement toutes les phases savoureuses mais encore les phases non-savoureuses émergeant des couplages de quarks et de leptons au(x) boson(s) de Higgs ou plus généralement celles qui peuvent être absorbées dans ces couplages, comme par exemple la phase de violation- $\mathcal{CP}$  forte dans le secteur des quarks ou la phase globale de Majorana dans le secteur des leptons. Au contraire, les phases non-savoureuses ne provenant pas des couplages de quarks et de leptons sont nécessairement encodées dans les coefficients de Wilson  $c_{u,d,e}$ , considérés comme réels dans la suite.

Dans le MS, les structures de saveurs  $\mathbf{X}_{u,d,e}$  sont des polynômes en  $\mathbf{Y}_{u,d,e}$  étant donné que ce sont les seules structures de saveurs disponibles. A la manière de MFV [72], qui est exact dans le MS, la forme de ces polynômes peut être établie directement en utilisant la symétrie de saveur et en traitant les matrices de couplages de Yukawa brisant cette symétrie comme des spurions. On a alors la partie imaginaire du coefficient 1-1 de la matrice  $\mathbf{X}_e$ ,  $\text{Im} \mathbf{X}_e^{11}$ , contrôlant l'intensité de l'EDM de l'électron, qui sera proportionnelle au déterminant de Jarlskog  $\det[\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u, \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d]$ , car c'est le seul invariant de saveur violant- $\mathcal{CP}$  qui peut être construit dans le MS [27]. Cependant, il s'avère que ce ne soit pas une mesure fiable de la violation- $\mathcal{CP}$  en raison du fait que  $\text{Im} \mathbf{X}_d^{11}$ , contrôlant l'EDM du quark down, est plus grand d'au moins dix ordres de grandeurs. La structure  $\text{Im} \mathbf{X}_d^{11}$  n'est pas proportionnelle au déterminant de Jarlskog mais plutôt au commutateur  $\mathbf{X}_d = [\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u, \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u]$ . L'obtention de ce commutateur à partir de la symétrie de saveur ainsi que ses propriétés seront explorées dans la troisième section de ce chapitre (Section 3.3).

Notons que la structure commutateur n'est pas nouvelle en soit [73]. De plus, des calculs exacts de l'EDM des quarks ont même été menés [74, 75]. Néanmoins, son obtention avec les invariants violant- $\mathcal{CP}$  en utilisant uniquement la symétrie de saveur n'a jamais été présentée auparavant. En outre, cela permettra de mettre en place la méthode en vue de la quatrième section où la masse des neutrinos sera introduite. Les structures de saveurs des neutrinos additionnelles permettent de nouvelles

1. Minimal Flavor Violation (MFV).

2. Flavored phases. Ce sont les phases sensibles aux transitions de saveurs réelles ou virtuelles.

3. Flavor-blind, c'est à dire insensible à la saveur.

manières de générer des parties imaginaires pour  $\mathbf{X}_{u,d,e}$ . Là aussi, les invariants de saveurs ont été largement étudiés (voir par exemple [76] et les références s'y trouvant), mais l'analyse systématique des commutateurs (non-invariants) associés ne l'a pas été. En ce qui concerne les contributions CKM aux EDMs des quarks et des leptons, nous allons montrer que les invariants ne sont pas adéquats pour estimer l'ordre de grandeur des EDMs des leptons, car les commutateurs non-invariants sont en général bien plus grands.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous allons commencer par mettre en place la méthode d'estimation utilisée, basée sur la symétrie de saveur en la calibrant d'abord sur des processus FCNCs de quarks comme ceux vus dans la Section 1.5. Puis, la contribution CKM à l'EDM est analysée dans la troisième section. De plus, nous montrons également comment étendre la méthode pour prendre en compte le terme theta de violation- $\mathcal{CP}$  forte afin d'estimer les EDMs de quarks et de leptons qu'il induit. Dans la quatrième section, les masses des neutrinos entrent en jeu. Les structures de saveurs invariantes et non-invariantes ajustant les EDMs sont construites séparément dans le cas de masses de Dirac, de masses de Majorana ou encore dans le cas des trois mécanismes de seesaw les plus simples. De plus, nous nous penchons également sur les invariants violant le nombre leptonique pouvant exister dans le cas de Majorana et d'estimer leur possible impact sur les EDMs.

## 3.2 Méthode d'estimation : Comment exploiter la symétrie de saveur du MS ?

Le secteur de jauge du MS est invariant sous l'action du groupe de symétrie globale suivant [77]

$$G_F = U(3)^5 = U(3)_Q \otimes U(3)_U \otimes U(3)_D \otimes U(3)_L \otimes U(3)_E, \quad (3.2)$$

appelée *symétrie de saveur*. L'action de ce groupe est définie telle que les doublets gauches et les singlets droits se transforment comme la représentation  $\mathbf{3}$  de leurs  $U(3)$  respectifs, i.e.,  $X \rightarrow g_X X$ ,  $g_X \in U(3)_X$  pour  $X = Q, L, U, D, E$ . Cependant, cette symétrie n'est pas exacte dans le MS. En effet, elle est explicitement brisée par les couplages de Yukawa,

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\bar{U}\mathbf{Y}_u\mathbf{Q}H^{\dagger C} - \bar{D}\mathbf{Y}_d\mathbf{Q}H^{\dagger} - \bar{E}\mathbf{Y}_e\mathbf{L}H^{\dagger} + h.c. . \quad (3.3)$$

Ces interactions brisent  $G_F$  puisqu'ils mélangent différents types de fermions.

Pour mettre en place le cadre pour l'étude ultérieure des EDMs, le but de cette section est de montrer comment la symétrie de saveur  $G_F$  peut être utilisée pour établir immédiatement et analyser les structures de saveurs des FCNCs. Premièrement, si on applique une transformation de  $G_F$  au lagrangien de Yukawa, on obtient

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -(\bar{U}g_U^{\dagger})\mathbf{Y}_u(g_Q\mathbf{Q})H^{\dagger C} - (\bar{D}g_D^{\dagger})\mathbf{Y}_d(g_Q\mathbf{Q})H^{\dagger} - (\bar{E}g_E^{\dagger})\mathbf{Y}_e(g_L\mathbf{L})H^{\dagger} + h.c., \quad (3.4)$$

où  $g_X \in U(3)_X$  avec  $X \in \{Q, U, D, L, E\}$ . On voit qu'on peut formellement restaurer la symétrie  $G_F$  si les matrices de couplages  $Y_{u,d,e}$  sont promues au rang de champs qui se transforment d'une certaine manière sous  $G_F$ , c'est à dire au rang de *spurions*<sup>4</sup>. Pour que le lagrangien du MS soit invariant sous  $G_F$ , il suffit que les spurions transforment ainsi

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_u &\sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{G_F} : \mathbf{Y}_u \xrightarrow{G_F} g_U \mathbf{Y}_u g_Q^{\dagger}, \\ \mathbf{Y}_d &\sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{G_F} : \mathbf{Y}_d \xrightarrow{G_F} g_D \mathbf{Y}_d g_Q^{\dagger}, \\ \mathbf{Y}_e &\sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{3})_{G_F} : \mathbf{Y}_e \xrightarrow{G_F} g_E \mathbf{Y}_e g_L^{\dagger}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

4. Un spurion est un champ statique issue de la promotion d'un paramètre de brisure de symétrie au rang de champ.

Cette manipulation purement formelle va s'avérer très fructueuse. En effet, dès lors que le lagrangien du MS devient invariant sous  $G_F$ , il doit en aller de même pour l'amplitude de n'importe quel processus. En insérant des spurions de Yukawa de manière  $G_F$ -invariante dans l'amplitude du processus, on peut établir sa structure de saveur sans aucuns calculs. De plus, dès lors que nous souhaiterons mettre des chiffres dessus afin d'effectuer des prédictions quantitatives, nous gèlerons à nouveau les spurions à leurs valeurs physiques. Pour les identifier, considérons les couplages de Yukawa après la brisure spontanée de la symétrie électrofaible (SSB),

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -v \left( \bar{u}_R \mathbf{Y}_u u_L + \bar{d}_R \mathbf{Y}_d d_L + \bar{e}_R \mathbf{Y}_e e_L \right) \left( 1 + \frac{h}{v} \right) + h.c. . \quad (3.6)$$

A priori, aucun de ces couplages n'est diagonal dans l'espace des saveurs. De la même manière que dans le Chapitre 1, Section 1.5, on effectue une décomposition en valeurs singulière (équation (1.72))

$$\exists V_R^{u,d,e}, V_L^{u,d,e} \in U(3) \quad \text{telles que} \quad v V_R^{u,d,e} \mathbf{Y}_{u,d,e} V_L^{u,d,e} = \mathbb{M}_{u,d,e}, \quad (3.7)$$

avec les matrices de masses  $\mathbb{M}_{u,d,e}$  diagonales. Ainsi, une transformation de  $G_F$  invariante de jauge avec  $g_{U,D,E} = V_R^{u,d,e}$ ,  $g_L = V_L^e$  et par exemple  $g_Q = V_L^d$  donne

$$v \mathbf{Y}_u \xrightarrow{\text{gelé}} \mathbb{M}_u V_{CKM}, \quad v \mathbf{Y}_d \xrightarrow{\text{gelé}} \mathbb{M}_d, \quad v \mathbf{Y}_e \xrightarrow{\text{gelé}} \mathbb{M}_e, \quad (3.8)$$

où  $V_{CKM} \equiv V_L^u V_L^{d\dagger}$ . Ce sont les valeurs physiques des spurions dans la base d'interaction dans laquelle tous les quarks sauf ceux de type up  $u_L$  sont états propres de masses (la base où tous sauf les quarks de type down  $d_L$  sont états propres de masses transférerait  $V_{CKM}$  dans  $\mathbf{Y}_d$ ). Dans ces conditions, il est immédiat de prévoir que certains processus sont très supprimés par rapport à d'autres en raison de la forte hiérarchie des valeurs numériques dans  $\mathbb{M}_{u,d,e}$  et  $V_{CKM}$ . De plus, on voit aussi directement que les FCNCs leptoniques ne sont pas autorisés étant donné que si on insère le spurion  $\mathbf{Y}_e$  dans une amplitude avec des champs leptoniques externes, il sera gelé à sa valeur diagonale  $\mathbb{M}_e/v$  et ne pourra donc pas induire de transitions de saveurs (hors-diagonale).

Voyons comment cette technique s'applique dans un cas pratique. Afin d'utiliser la symétrie  $G_F$  du secteur de jauge, nous nous placerons avant brisure spontanée de symétrie électrofaible. Tous les couplages renormalisables de dimension-4 en énergie sont déjà contenus dans le lagrangien du MS et n'induisent pas de FCNC. En considérant les opérateurs de dimension-6, on construit le lagrangien effectif suivant pour estimer quatre processus FCNCs pris comme exemples d'applications de la méthode

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{a_1}{\Lambda^2} (\bar{Q} \gamma_\nu Q) D_\mu F^{\mu\nu} + \frac{a_2}{\Lambda^2} (\bar{D} \gamma_\nu D) D_\mu F^{\mu\nu} + \frac{a_3}{\Lambda^2} (\bar{Q} \gamma_\mu Q) H^\dagger D^\mu H + \frac{a_4}{\Lambda^2} (\bar{D} \sigma_{\mu\nu} Q) H^\dagger F^{\mu\nu} + \dots \quad (3.9)$$

Tous ces opérateurs sont générés dans le MS par des processus à boucles (voir figure 3.1), donc on pose  $\Lambda^2 \sim M_W^2/g^2 \sim G_F^{-1}$ . Les coefficients de Wilson sont des matrices  $3 \times 3$  dans l'espace des saveurs, avec par exemple  $a_1 \bar{Q} \gamma_\nu Q \equiv a_1^{IJ} \bar{Q}^I \gamma_\nu Q^J$ . Comme au niveau fondamental les seuls couplages savoureux sont les matrices de couplages de Yukawa, ces coefficients de Wilson sont fonctions de  $\mathbf{Y}_{u,d}$ . En supposant que les dépendances sont polynomiales, la symétrie de saveur  $G_F$  impose les structures suivantes

$$\begin{aligned} a_1, a_3 &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \oplus \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \oplus \dots, \\ a_2 &= \mathbf{1} \oplus \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_d^\dagger \oplus \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \oplus \dots, \\ a_4 &= \mathbf{Y}_d (\mathbf{1} \oplus \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \oplus \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \oplus \dots), \end{aligned} \quad (3.10)$$

où le signe  $\oplus$  sert à indiquer que les coefficients de  $\mathcal{O}(1)$  ne sont pas nécessairement les mêmes dans les différents termes du développement. Une fois que les spurions ont été correctement introduit, pour

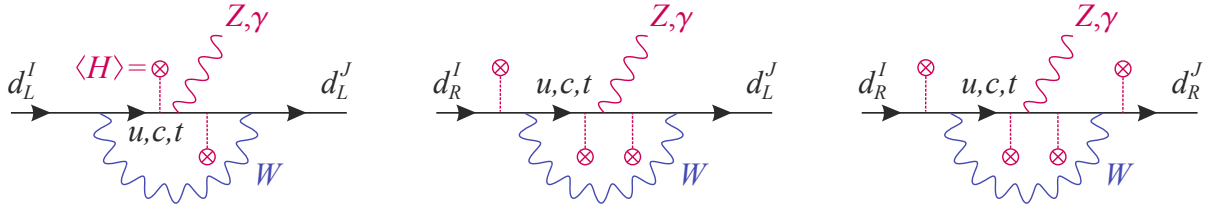


FIGURE 3.1 – Les diagrammes pingouins avec  $Z$  et  $\gamma$  contribuant à l'opérateur FCNC dans l'équation (3.9). Les insertions de spurions de Yukawa, représentées par les tadpoles avec une croix, permettent de briser la symétrie de saveur, voir équation (3.10).

effectuer des prédictions quantitatives, nous pouvons les geler à leurs valeurs physiques selon (3.8). Remarquons que la structure  $Y_u^\dagger Y_u$  est celle qui va induire un changement de saveur étant donné qu'elle est non diagonale. De plus, si les masses des quarks de type up étaient toutes égales ( $m_u = m_c = m_t = m$ ),

on aurait  $\mathbb{M}_u \equiv \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_c & 0 \\ 0 & 0 & m_t \end{pmatrix} = m\mathbb{I}$  et par conséquent,  $vY_u \xrightarrow{\text{gelé}} mV_{CKM}$ ,  $vY_u^\dagger \xrightarrow{\text{gelé}} mV_{CKM}^\dagger$  et donc du

fait de l'unitarité de la matrice CKM  $v^2 Y_u^\dagger Y_u \xrightarrow{\text{gelé}} m^2 \mathbb{I}$  qui est diagonal. Autrement dit, si les masses des quarks up étaient égales, nous n'aurions pas pu induire un changement de saveur. De ce fait, une différence de masse entre les quarks est nécessaire pour avoir un changement de saveur. Le terme  $Y_u^\dagger Y_u$  induit une violation quadratique de GIM du fait de la grande masse du top. Dans ce cas,  $vY_u \xrightarrow{\text{gelé}} \mathbb{M}_u V_{CKM}$ ,  $vY_u^\dagger \xrightarrow{\text{gelé}} V_{CKM}^\dagger \mathbb{M}_u^\dagger$  et donc  $v^2 Y_u^\dagger Y_u \xrightarrow{\text{gelé}} V_{CKM}^\dagger \mathbb{M}_u^\dagger \mathbb{M}_u V_{CKM}$ . Comme  $\mathbb{M}_u$  est diagonale à coefficients réels, elle est donc auto-adjointe  $\mathbb{M}_u^\dagger = \mathbb{M}_u$  et de ce fait  $v^2 Y_u^\dagger Y_u \xrightarrow{\text{gelé}} V_{CKM}^\dagger \mathbb{M}_u^2 V_{CKM}$  qui est alors non diagonal. On a alors

$$v^2 (\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^{IJ} = \sum_{q=u,c,t} m_q^2 V_{qd}^* V_{qd} \approx m_t^2 V_{td}^* V_{td} \ , \quad (3.11)$$

et les coefficients de Wilson sont prédits

$$\begin{aligned} a_{1,3}^{I \neq J} &\rightarrow \alpha_{1,2} \frac{m_t^2}{v^2} V_{tI}^\dagger V_{tJ} \ , \\ a_2^{I \neq J} &\rightarrow \alpha_3 \frac{m_{d'} m_{d''}}{v^2} \frac{m_t^2}{v^2} V_{tI}^\dagger V_{tJ} \ , \\ a_4^{I \neq J} &\rightarrow \alpha_4 \frac{m_{d'}}{v} \frac{m_t^2}{v^2} V_{tI}^\dagger V_{tJ} \ , \end{aligned} \quad (3.12)$$

avec  $\alpha_i$  des nombres réels de  $\mathcal{O}(1)$ . Ceci montre qu'en utilisant seulement la symétrie de saveur, nous sommes en mesure de prévoir correctement non seulement les amplitudes CKM des transitions FCNC mais aussi les basculements de chiralité (chirality flips). Dans le cas ci-dessus, les opérateurs impliquant des quarks de chiralité droites nécessitent des basculements de chiralité car le boson  $W$  ne se couple qu'aux fermions gauches. Cela signifie en particulier que  $a_2 \ll a_1$  car  $m_{d,s,b} \ll v$ , et par conséquent l'opérateur correspondant peut être négligé.

En assemblant les différentes pièces, l'amplitude du pingouin avec photon virtuel, induit par l'opérateur  $(\bar{Q}\gamma_\nu Q)D_\mu F^{\mu\nu}$  est donnée par :

$$\mathcal{M}(\bar{d}^I d^J \rightarrow \gamma^*(q)) \sim \alpha_1 \times G_F \times \frac{e}{4\pi^2} \times \bar{d}_L^I \gamma_\mu d_L^J \times (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \times A_\nu \times \sum_q \frac{m_q^2}{v^2} V_{qd}^* V_{qd} \ . \quad (3.13)$$

L'amplitude du pingouin avec boson  $Z$ , correspondant à l'opérateur  $(\bar{Q}\gamma_\mu Q)H^\dagger D^\mu H$ , est

$$\mathcal{M}(\bar{d}^I d^J \rightarrow Z(q)) \sim \alpha_3 \times G_F \times \frac{e}{4\pi^2 \sin \theta_W} \times \bar{d}_L^I \gamma_\mu d_L^J \times v^2 \times Z^\mu \times \sum_q \frac{m_q^2}{v^2} V_{qd}^* V_{qd^J}. \quad (3.14)$$

Le facteur  $v^2$  d'amélioration par rapport au cas du pingouin avec photon provient de  $H^\dagger D^\mu H \xrightarrow{\text{SSB}} iv^2(g/2 \cos \theta_W)Z^\mu$ . Il découle de la violation de l'identité de Ward du boson  $Z$  qui permet de troquer le projecteur  $q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}$  contre le paramètre de brisure de  $SU(2)_L$ . Finalement, le dernier opérateur est appelé *opérateur magnétique de pingouin avec photon* (*magnetic photon penguin operator*) et jouera un rôle particulier dans cette étude. Après SSB, l'amplitude est

$$\mathcal{M}(\bar{d}^I d^J \rightarrow \gamma(q)) \sim \alpha_4 \times G_F \times \frac{e}{4\pi^2} \times m_{d^I} \times \bar{d}_R^I \sigma_{\mu\nu} d_L^J \times F^{\mu\nu} \times \sum_q \frac{m_q^2}{v^2} V_{qd}^* V_{qd^J}. \quad (3.15)$$

Il est intéressant de comparer ces estimations simples obtenues en utilisant seulement la symétrie de saveur aux calculs à boucles exacts dans le MS (voir par exemple [78] pour une revue). Hormis certains facteurs numériques non-essentiels, la différence principale se trouve dans les termes brisant GIM, où la brisure quadratique simple est remplacée par une fonction de boucle dépendante du processus

$$\sum_q \frac{m_q^2}{v^2} V_{qd}^* V_{qd^J} \rightarrow \sum_q V_{qd}^* V_{qd^J} F(m_q^2/M_W^2). \quad (3.16)$$

La fonction  $F(m_q^2/M_W^2)$  produit une brisure de GIM quadratique pour le pingouin avec  $Z$  mais pas pour les pingouins avec  $\gamma$  [11]. En particulier,  $\bar{d}^I d^J \rightarrow \gamma^*(q)$  est seulement logarithmique, se comportant asymptotiquement comme  $\log m_q/M_W$  aux limites  $m_q \rightarrow 0$  et  $m_q \rightarrow \infty$ . Cette différence est attendue lors de l'utilisation de  $G_F$  seulement. En effet, nous sommes forcés à travailler dans la phase non brisée du MS où les fermions sont de masses nulles. Les insertions de spurions sont comprises comme des insertions de tadpoles de Higgs qui se réduisent après SSB à des insertions de masses. Bien que cela ne pose pas de problème pour prévoir la structure de saveur, certains effets dynamiques sont perdus dans un tel traitement perturbatif des masses des fermions. En particulier, lorsque l'amplitude sans masse est dangereuse dans l'infrarouge, la brisure de GIM quadratique s'adoucit en une brisure logarithmique seulement. Pour notre propos, cela n'a pas de conséquence mais doit être gardé en tête.

### 3.3 Comment prédire l'EDM généré par la phase CKM ?

Le formalisme de la symétrie de saveur peut également être utilisé pour des observables conservant la saveur. Par exemple, considérons les opérateurs magnétiques diagonaux dans l'espace des saveurs de l'équation (3.1). Après SSB, leur structure générale est <sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} &= c \bar{\psi}_L \sigma^{\mu\nu} \psi_R F_{\mu\nu} + c^* \bar{\psi}_R \sigma^{\mu\nu} \psi_L F_{\mu\nu} \\ &= (\text{Re } c) \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu} + i (\text{Im } c) \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi F_{\mu\nu} \equiv e \frac{a}{4m} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu} + i \frac{d}{2} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi F_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

ce qui définit le *moment dipolaire électrique*  $d$  (violant  $C\mathcal{P}$ ) et le *moment magnétique anormal*  $a = (g-2)/2$  (conservant  $C\mathcal{P}$ ) de la particule  $\psi$  (pour des revues récentes, voir par exemple [24, 79, 80])). Les EDM sont très supprimés dans le MS alors que la seconde observable est mesurée avec une grande

5. Rappelons que  $2\sigma^{\mu\nu}\gamma_5 = i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}$  et  $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \equiv 2\tilde{F}^{\mu\nu}$ .

précision pour les leptons légers [24, 79, 80]. En utilisant le formalisme de la symétrie de saveur, au-delà du fait que  $d_\psi \sim m_\psi$  et  $a \sim m_\psi^2$  à partir de la structure gauche-droite des opérateurs magnétiques de l'équation (3.1), on peut aussi prévoir à partir de quel ordre la phase de la matrice CKM peut générer un EDM pour un quark ou un lepton dans le MS, ce que nous allons maintenant décrire en détails.

### 3.3.1 EDMs de leptons générés par la phase CKM

Pour commencer, considérons les EDMs des leptons obtenus à partir de l'opérateur effectif  $EY_e X_e \sigma_{\mu\nu} LH^\dagger F^{\mu\nu}$  dans l'équation (3.1), où  $X_e$  représente une chaîne de spurions insérée de manière  $G_F$ -invariante et  $\Lambda \approx M_W$  dans le MS. Comme il n'y a pas de changement de saveur ici, l'opérateur doit rester diagonal. Comme  $Y_e$  l'est déjà, seuls les éléments diagonaux de  $X_e$  doivent intervenir. Ainsi,  $X_e$  doit contenir  $Y_u$  et  $Y_d$  et l'invariance sous  $G_F$  contraint la structure de la chaîne de spurions à être la matrice identité multipliée par une trace complexe (dans l'espace des saveurs) d'une chaîne de facteurs  $Y_u^\dagger Y_u$  et  $Y_d^\dagger Y_d$ . En raison du fait que ces facteurs soient hermitiens, la plus simple trace complexe de ce type possible ne contient pas moins de douze spurions de Yukawa

$$\begin{aligned} X_e &= \mathbb{I}_3 \times \langle (Y_d^\dagger Y_d)^2 Y_u^\dagger Y_u Y_d^\dagger Y_d (Y_u^\dagger Y_u)^2 - (Y_u^\dagger Y_u)^2 Y_d^\dagger Y_d Y_u^\dagger Y_u (Y_d^\dagger Y_d)^2 \rangle \\ &= 2i\mathbb{I}_3 \text{Im}\langle (Y_d^\dagger Y_d)^2 Y_u^\dagger Y_u Y_d^\dagger Y_d (Y_u^\dagger Y_u)^2 \rangle = \mathbb{I}_3 \times \det[Y_u^\dagger Y_u, Y_d^\dagger Y_d] \equiv 2i\mathbb{I}_3 J_{\mathcal{CP}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Notons que le signe moins dans la première égalité est nécessaire pour éviter des réductions vers des structures plus simples en utilisant les identités de Cayley-Hamilton (CH) [81], voir Annexe A. La dernière égalité découle également du théorème de Cayley-Hamilton<sup>6</sup>. Cette quantité se réduit alors au très supprimé *invariant de Jarlskog* [27] :

$$J_{\mathcal{CP}} = \mathcal{J}_{\mathcal{CP}} \times \prod_{\substack{i>j=d,s,b \\ i>j=u,c,t}} \frac{m_i^2 - m_j^2}{v^2} \approx \mathcal{J}_{\mathcal{CP}} \times \frac{m_b^4 m_s^2 m_c^2}{v^8} \approx 10^{-22}, \quad (3.19)$$

qui dans la paramétrisation standard de la matrice CKM [28] donne

$$\mathcal{J}_{\mathcal{CP}} = \frac{1}{4} \sin(2\theta_{12}) \sin(2\theta_{23}) \cos^2(\theta_{13}) \sin(\theta_{13}) \sin(\delta_{13}) \approx 3 \times 10^{-5}. \quad (3.20)$$

Remarquons que  $J_{\mathcal{CP}}$  s'annule dès que deux quarks de type up ou bien deux quarks de type down sont dégénérés en masses, propriété rappelant que dans ce cas la phase de violation- $\mathcal{CP}$  est réductible, c'est à dire qu'elle peut être éliminée par des rotations des champs.

Cette structure de saveur nous montre que les EDMs de leptons induits par la matrice CKM nécessite au moins trois boucles étant donné qu'une boucle fermée de quarks avec quatre vertex impliquant un boson  $W$  est requise (voir figure 3.2). Si on voit les facteurs  $Y_u$  et  $Y_d$  comme des insertions de masses le long d'une boucle de quark, ce qui n'est pas apparent dans ces expressions est qu'une boucle supplémentaire de QCD est en fait requise [82]. En effet, la dynamique du MS [83, 84, 85] est telle que la fonction de boucle est la même pour les insertions  $(Y_d^\dagger Y_d)^2 Y_u^\dagger Y_u Y_d^\dagger Y_d (Y_u^\dagger Y_u)^2$  et  $(Y_d^\dagger Y_d)^2 (Y_u^\dagger Y_u)^2 Y_d^\dagger Y_d Y_u^\dagger Y_u$  (voir équation (3.18)). Or, comme leur somme est réductible avec les identités CH,  $\mathcal{CP}$  est conservée et le processus à trois boucles ne contribue pas aux EDMs de leptons. Pour briser la symétrie de l'amplitude et générer une combinaison antisymétrique d'insertions de

6. Pour le voir, il suffit d'injecter  $X = [Y_u^\dagger Y_u, Y_d^\dagger Y_d]$  dans l'équation (A.5) de l'Annexe A, qui se simplifie grandement grâce au fait que  $\langle [Y_u^\dagger Y_u, Y_d^\dagger Y_d] \rangle = 0$ . Ainsi,  $\det[Y_u^\dagger Y_u, Y_d^\dagger Y_d]$  est non-nul seulement s'il y a une phase violant  $\mathcal{CP}$  dans  $Y_u^\dagger Y_u$  et/ou  $Y_d^\dagger Y_d$ .

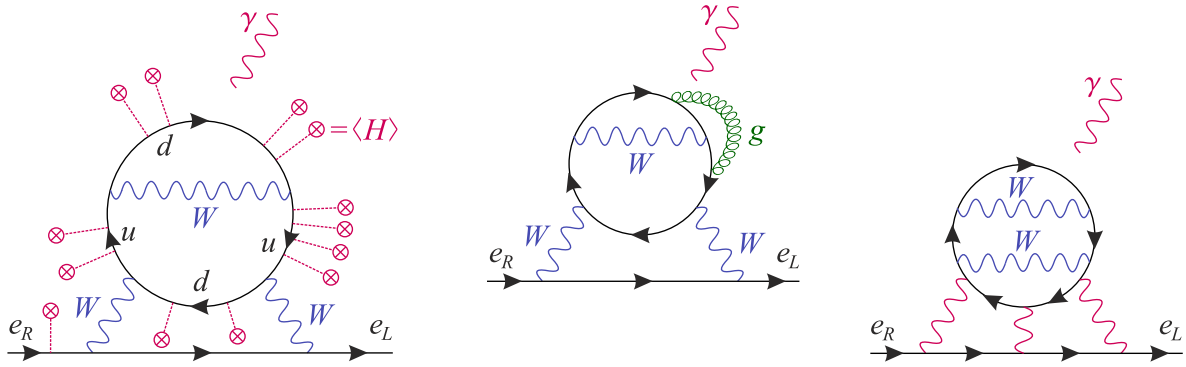


FIGURE 3.2 – Les EDMs de leptons induits par la matrice CKM dans le MS. La contribution électrofaible à trois boucles s’annule car la symétrie de la fonction de boucle est incompatible avec l’antisymétrie de l’invariant de Jarlskog et des corrections de QED ou de QCD sont nécessaires afin d’induire des EDMs de leptons non-nuls.

masses, au moins une boucle supplémentaire est requise, par exemple une correction QED ou QCD (voir figure 3.2). On arrive alors à l’estimation approximative (voir [86]) :

$$d_e \sim e \frac{m_e}{M_W^2} \left( \frac{g^2}{16\pi^2} \right)^3 \frac{\alpha_S}{4\pi} \tilde{J}_{CP} \approx 10^{-48} e \cdot cm, \quad (3.21)$$

à comparer à la limite actuelle  $|d_e| < 8.7 \cdot 10^{-29} e \cdot cm$  (90%) [58]. Pour cette estimation, un facteur d’amélioration  $\tilde{J}_{CP} = J_{CP}(v/M_W)^{12} \approx 10^5$  est inclus. En effet, tandis que  $J_{CP}$  est défini à partir des couplages de Yukawa et implique des rapports de masses de quarks par la VEV électrofaible  $v \approx 174 GeV$ , on s’attendrait plutôt à des rapports de masses de quarks dans la boucle par la masse du  $W$  dans l’approche diagrammatique.

La même boucle de quark contrôle l’EDM du boson  $W$  (il suffit de couper les deux propagateurs de  $W$  du bas dans la figure 3.2) ainsi que ceux des leptons plus lourds. Modulo des effets dynamiques liés aux différentes échelles de ces processus, on s’attend à ce que la relation bien connue

$$\frac{d_e}{m_e} = \frac{d_\mu}{m_\mu} = \frac{d_\tau}{m_\tau} \quad (3.22)$$

soit vérifiée et donc à ce que  $d_\mu$  et  $d_\tau$  soient respectivement 200 et 4000 fois plus grands que  $d_e$ . Bien que ces estimations ne soient pas très précises, elles se trouvent toutes bien au-delà des sensibilités expérimentales dans la mesure où les limites actuelles sont  $|d_\mu| < 1.9 \cdot 10^{-19} e \cdot cm$  (95%) [59] et  $d_\tau \in [-2.2, 4.5] \cdot 10^{-17} e \cdot cm$  (95%) [60]. Ces dernières sont bien plus petites que celles pour  $d_e$  qui exploite le champ électrique très intense présent dans la molécule de  $ThO$ . En revanche, la limite sur  $d_\mu$  a été obtenue par la mesure précise du  $(g-2)_\mu$  et celle sur  $d_\tau$  par l’étude du vertex  $\gamma\tau^+\tau^-$  en utilisant le processus  $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$  à Belle.

A ce stade, adressons un mot d’avertissement à propos des dépendances de masses. Comme pour le pingouin avec photon  $sd \rightarrow \gamma^*$  discuté précédemment, ou encore similairement le pingouin avec gluon  $sd \rightarrow g^*$ , l’approximation d’insertion de masse inhérente à la technique des spurions est incapable de capturer les dépendances de masses logarithmiques. Bien qu’un calcul explicite de cette amplitude à quatre boucles n’a pas encore été fait, de telles dépendances ont été trouvées pour l’opérateur similaire à trois gluons violant- $CP$  induit par CKM,  $f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G^{b,\nu\rho} G_{\rho\mu}^c$  [87]. En particulier, des facteurs de quark lourd comme les deux facteurs de suppressions  $m_b^2/v^2$  dans  $\mathbf{X}_e$  sont remplacés

par des logarithmes de rapports de masses de quarks et de boson  $W$ . C'est pourquoi quelques ordres de grandeurs supplémentaires d'amélioration sont implicites pour des estimations comme dans l'équation (3.21).

### 3.3.2 EDMs de quarks générés par la phase CKM

En ce qui concerne les EDMs de quarks, leurs générations peuvent paraître plus simples à première vue en raison du fait que les quarks sont directement sensibles à la phase complexe de la matrice CKM. Pourtant, la technique des spurions montre que ce n'est pas le cas en pratique. Considérons les interactions  $UY_u\mathbf{X}_u\sigma_{\mu\nu}QH^\dagger F^{\mu\nu}$  et  $DY_d\mathbf{X}_d\sigma_{\mu\nu}QH^\dagger F^{\mu\nu}$  dans le lagrangien effectif (3.1), avec  $\mathbf{X}_{u,d}$  des chaînes de spurions et poisons  $\Lambda \approx M_W$ . Examinons dans un premier temps l'EDM du quark down, la composante  $d_L$  du doublet  $Q$  doit être un état propre de masse, donc nous devons utiliser la base d'interaction de l'équation (3.8) où  $\mathbf{Y}_d$  est diagonale. Dans cette base,  $\mathbf{X}_d$  doit être une chaîne de spurions construite à partir de  $Y_u^\dagger Y_u$  et de  $Y_d^\dagger Y_d$ . Afin de générer un EDM pour le quark down, il faut et il suffit que la partie imaginaire du coefficient 1-1 de la matrice  $\mathbf{X}_d$ ,  $\mathbf{X}_d^{11}$ , soit non nulle. Cependant, avec d'une part  $\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d$  réelle et diagonale dans cette base et d'autre part  $\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u$  hermitienne, cela requiert de nouveau une longue chaîne de spurions. Il en est de même pour l'EDM du quark up, en travaillant dans la base dans laquelle  $\mathbf{Y}_u$  est diagonale.

Afin d'identifier la chaîne de spurions la plus simple, considérons les développements en séries de spurions complètement génériques. Les combinaisons  $\mathbf{X}_u$  et  $\mathbf{X}_d$  se transforment comme des octets sous  $SU(3)_Q$ . En toute généralité, de tels octets peuvent être paramétrisés comme des séries infinies de produits de puissances des matrices hermitiennes  $\mathbf{A}_{u,d} \equiv \mathbf{Y}_{u,d}^\dagger \mathbf{Y}_{u,d}$  [88]

$$\mathbf{X}_{octet} = \sum_{i,j,k,\dots=0,1,2,\dots} z_{ijk\dots} \mathbf{A}_u^i \mathbf{A}_d^j \mathbf{A}_u^k \dots, \quad (3.23)$$

avec  $z_{ijk\dots}$  des coefficients appropriés. Comme notre but est de quantifier l'impact de la phase CKM sur l'EDM, ces coefficients  $z_{ijk\dots}$  sont pris réels. Ainsi, cette série peut être partiellement re-sommée à l'aide des identités CH, ce qui permet d'exprimer les puissances supérieures de n'importe quelle matrice en fonctions de ses puissances inférieures, de traces et de déterminants<sup>7</sup>. Par exemple, le terme  $\mathbf{A}_u^3$  peut être absorbé dans les redéfinitions des coefficients  $z$ ,  $z_1$  et  $z_2$  en utilisant l'équation (A.4). Après réduction complète de la série, l'opérateur octet  $\mathbf{X}_{octet}$  ne contient plus que 17 termes :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{octet} = & x_1 \mathbf{1} + x_2 \mathbf{A}_u + x_3 \mathbf{A}_d + x_4 \mathbf{A}_u^2 + x_5 \mathbf{A}_d^2 + x_6 \{\mathbf{A}_u, \mathbf{A}_d\} + x_7 i[\mathbf{A}_u, \mathbf{A}_d] + x_8 \mathbf{A}_u \mathbf{A}_d \mathbf{A}_u \\ & + x_9 i[\mathbf{A}_d, \mathbf{A}_u^2] + x_{10} \mathbf{A}_d \mathbf{A}_u \mathbf{A}_d + x_{11} i[\mathbf{A}_u, \mathbf{A}_d^2] + x_{12} \mathbf{A}_d \mathbf{A}_u^2 \mathbf{A}_d + x_{13} i[\mathbf{A}_u^2, \mathbf{A}_d^2] \\ & + x_{14} i[\mathbf{A}_u, \mathbf{A}_u \mathbf{A}_d \mathbf{A}_u] + x_{15} i[\mathbf{A}_d, \mathbf{A}_d \mathbf{A}_u \mathbf{A}_d] \\ & + x_{16} i[\mathbf{A}_u, \mathbf{A}_u \mathbf{A}_d^2 \mathbf{A}_u] + x_{17} i[\mathbf{A}_d, \mathbf{A}_d \mathbf{A}_u^2 \mathbf{A}_d]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

La seule réduction non-triviale est celle du terme  $\mathbf{A}_d^2 \mathbf{A}_u \mathbf{A}_d \mathbf{A}_u^2$ , qui peut être établie en injectant  $\mathbf{X} = [\mathbf{A}_u, \mathbf{A}_d]$  dans l'équation (A.4). De plus, nous avons utilisé l'hermiticité de  $\mathbf{A}_{u,d}$  pour exprimer  $\mathbf{X}_{octet}$  entièrement en termes de combinaisons de spurions hermitiennes indépendantes [81].

Notons qu'il est crucial de n'utiliser que les identités CH pour cette réduction et non simplement une projection de  $\mathbf{X}_{octet}$  sur un ensemble de neuf termes formant une base des matrices complexes  $3 \times 3$ . D'abord, la réduction CH ne génère jamais des grands coefficients numériques dans la mesure où les traces vérifient  $\langle \mathbf{A}_{u,d} \rangle \lesssim \mathcal{O}(1)$ . Ensuite, si les  $z_{ijk\dots}$  sont réels, les  $x_i$  peuvent alors développer une

7. Les problèmes liés à la convergence de cette série ont été traités dans [89], et ne devraient pas affecter l'identification de la structure de saveur dominante violant-CP.



partie imaginaire proportionnelle à l'invariant de Jarlskog dans l'équation (3.18). Ainsi, cela assure par exemple que  $\mathbf{X}^{11}$  est soit proportionnel à  $\mathcal{J}_{CP}$ , si par exemple  $x_1 = \xi_1 + i\xi_2\mathcal{J}_{CP}$  avec  $\xi_{1,2}$  réels et  $\xi_{1,2} \lesssim O(1)$ , soit induit directement par une chaîne de spurions non-triviale.

Les chaînes les plus simples ayant une partie imaginaire intrinsèque dans la base d'interaction (3.8) sont celles qui sont associées aux coefficients  $x_{14}$  et  $x_{16}$ . N'importe quelle chaîne plus longue ayant une partie imaginaire intrinsèque peut être réduite à ces deux dernières, ou bien à  $\mathcal{J}_{CP}$ , et sera supprimée par des facteurs de traces du type  $\langle \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \rangle$  ainsi que  $\langle \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \rangle$ . Concernant les EDMs des quarks de type down, le terme dominant est alors <sup>8</sup>

$$\mathbf{X}_d = [\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u, \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u] . \quad (3.25)$$

L'antisymétrie (signe moins) est nécessaire car la somme des deux termes (l'anticommutateur) est hermitienne et possède donc que des coefficients réels sur la diagonale (au-delà du fait qu'elle soit réductible via les identités CH). En revanche, grâce au commutateur,  $\mathbf{X}_d$  possède des coefficients imaginaires purs sur la diagonale, par exemple :

$$\mathbf{X}_d^{11} = -2i\mathcal{J}_{CP} \times \frac{m_b^2 - m_s^2}{v^2} \prod_{i>j=u,c,t} \frac{m_i^2 - m_j^2}{v^2} \approx 10^{-12} , \quad (3.26)$$

à comparer avec  $J_{CP} \approx 10^{-22}$  dans l'équation (3.19). Une telle dépendance en différences de masses de quarks aux carrées a déjà été relevée dans [73]. Elle émerge ici en tant que la plus simple chaîne de spurions antihermitienne ayant des éléments diagonaux non-nuls.

La prédiction pour les EDMs des quarks de type up  $d_u$  est similaire. En effet,  $\mathbf{X}_u$  est obtenu à partir de  $\mathbf{X}_d$  en échangeant  $\mathbf{Y}_d \leftrightarrow \mathbf{Y}_u$  dans l'équation (3.25) et en travaillant dans la base d'interaction où  $\mathbf{Y}_u$  est diagonale. Les termes associés à  $x_{15}$  et  $x_{17}$  ont des tailles comparables étant donné que  $m_t \approx v$ ,

$$\mathbf{X}_u = a_1[\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d, \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d] + a_2[\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d, \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d (\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d] , \quad (3.27)$$

avec  $a_{1,2}$  des coefficients réels de  $O(1)$ . On a alors :

$$\mathbf{X}_u^{11} = 2i\mathcal{J}_{CP} \times \left( a_1 \frac{m_t^2 - m_c^2}{v^2} + a_2 \frac{m_t^4 - m_c^4}{v^4} \right) \prod_{i>j=d,s,b} \frac{m_i^2 - m_j^2}{v^2} \approx 10^{-17} . \quad (3.28)$$

En raison des facteurs supplémentaires de masses de quarks de type down, celui-ci est complètement négligeable devant  $\mathbf{X}_d^{11}$ .

Les diagrammes rainbow électrofaibles derrière de tels processus partagent plusieurs propriétés communes avec ceux générant l'EDM de l'électron  $d_e$ . Deux propagateurs de boson  $W$  sont nécessaires (voir figure 3.3), en plus d'une correction gluonique supplémentaire permettant de briser la symétrie de l'amplitude de boucle sous les permutations des insertions de masses [74, 75]. L'ordre dominant contient trois boucles et a la forme suivante

$$d_d \sim e \frac{m_d}{M_W^2} \left( \frac{g^2}{16\pi^2} \right)^2 \frac{\alpha_S}{4\pi} \frac{m_b^2 m_c^2 m_t^4}{v^8} \mathcal{J}_{CP} \approx 10^{-36} - 10^{-39} e \cdot cm , \quad (3.29)$$

dépendant de quel facteur  $v$  ou  $M_W$  apparaît dans le dénominateur. De plus, là aussi l'approximation de l'insertion de masse ne reproduit pas parfaitement le calcul explicite réalisé dans [75], où par exemple

8. Cette structure a déjà été identifiée dans la littérature, voir par exemple [90]. Cependant, son obtention par l'usage systématique des identités CH n'a jamais été présentée auparavant.

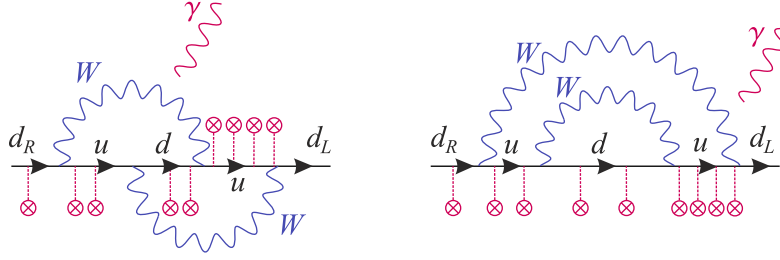


FIGURE 3.3 – Les diagrammes rainbow électrofaibles générant un EDM pour le quark down dans le MS. Pour chaque type, un exemple d'insertion de spurions de Yukawa est représenté. La contribution finale nécessite l'antisymétrisation des insertions sur les deux lignes de quarks de type up.

le facteur  $m_b^2$  s'adoucit en une brisure logarithmique de GIM, améliorant l'estimation de quelques ordres de grandeurs.

On pourrait s'étonner de la non annulation de cette expression lorsque des quarks de type down sont dégénérés. Pour le comprendre, il faut réaliser qu'une base spécifique est implicitement choisie pour ces quarks en forçant les quarks de type down externes à être sur leurs couches de masses (on-shell). Si on imagine que  $m_d = m_s$ , alors les quarks de type down sur couches de masses de la première et de la deuxième génération peuvent être des combinaisons linéaires de ces derniers. En posant

$$\begin{pmatrix} d'_1 \\ d'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{ds} & \sin \theta_{ds} \\ -\sin \theta_{ds} & \cos \theta_{ds} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

en sorte que

$$\mathbf{X}_d^{d_1 d_1} = \cos^2 \theta \mathbf{X}_d^{11} + \sin^2 \theta \mathbf{X}_d^{22} + \cos \theta \sin \theta (\mathbf{X}_d^{12} + \mathbf{X}_d^{21}), \quad (3.31)$$

et de même pour  $\mathbf{X}_d^{d_2 d_2}$ , on trouve que  $\mathbf{X}_d^{d_2 d_2} = \mathbf{X}_d^{d_1 d_1} = 0$  quand  $\theta_{ds} = \theta_{12}$  et  $m_d = m_s$ . Ceci montre que la conservation de  $\mathcal{CP}$  est retrouvée dans la limite dégénérée comme il se doit.

Ainsi, la contribution de courte distance du MS à l'EDM du neutron  $d_n \approx (4d_d - d_u)/3$  est prévue au plus à un ou deux ordres de grandeurs au dessus de  $10^{-36} e \cdot cm$ . Ceci doit être comparé aux contributions de longue distance qui pourrait amplifier la contribution de MS jusqu'à  $d_n \approx 10^{-32} e \cdot cm$  [91], et jusqu'à la limite actuelle se trouvant à  $|d_n| < 2.9 \times 10^{-26} e \cdot cm$  (90%) [92]. Pour finir, notons que

$$\mathbf{X}_d^{11} : \mathbf{X}_d^{22} : \mathbf{X}_d^{33} = m_b^2 - m_s^2 : m_d^2 - m_b^2 : m_s^2 - m_d^2, \quad (3.32)$$

comme attendu de  $\langle \mathbf{X}_d \rangle = 0$ . Comme  $m_b \gg m_{s,d}$ , cela signifie aussi que  $\mathbf{X}_d^{11} \approx \mathbf{X}_d^{22} \gg \mathbf{X}_d^{33}$ . A l'échelle de l'EDM du quark, ces relations impliquent les règles de sommes suivantes

$$\frac{d_d}{m_d} + \frac{d_s}{m_s} + \frac{d_b}{m_b} = 0, \quad \frac{d_d}{m_d} \approx -\frac{d_s}{m_s}, \quad \frac{d_d}{m_d} \approx \frac{m_b^2}{m_s^2}, \quad (3.33)$$

modulo des effets dynamiques au-delà de notre contrôle. Des relations analogues sont également vérifiées pour les quarks de type up.

A ce stade, on peut alors assembler les informations obtenues pour l'EDM de l'électron et l'EDM des quarks pour obtenir

$$\begin{aligned} \frac{\text{Im } \mathbf{X}_d^{11}}{\text{Im } \mathbf{X}_e^{11}} &= \frac{-v^4}{(m_b^2 - m_d^2)(m_s^2 - m_d^2)} \rightarrow \left( \frac{g^2}{16\pi^2} \right) \frac{|d_d|}{m_d} \approx \frac{M_W^4}{m_b^2 m_s^2} \frac{|d_e|}{m_e}, \\ \frac{\text{Im } \mathbf{X}_u^{11}}{\text{Im } \mathbf{X}_e^{11}} &= v^4 \frac{a_1 + a_2(m_t^2 + m_c^2)/v^2}{(m_t^2 - m_u^2)(m_c^2 - m_u^2)} \rightarrow \left( \frac{g^2}{16\pi^2} \right) \frac{|d_u|}{m_u} \approx \frac{M_W^2}{m_c^2} \frac{|d_e|}{m_e}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Numériquement, on s'attend alors à ce que les contributions CKM aux EDMs de fermions dans le MS vérifient  $|d_d| \approx 10^{12} \times |d_e|$  et  $|d_u| \approx 10^7 \times |d_e|$ , modulo des effets dynamiques comme toujours.

### 3.3.3 EDMs de quarks et de leptons générés par la phase forte du MS

Jusque-là, les combinaisons de spurions  $G_F$ -invariantes l'étaient sous la symétrie complète  $U(3)^5$ . Cependant, ceci n'est pas cohérent avec le MS dans la mesure où trois des cinq  $U(1)s$  sont anomaux. Dans ces conditions, seule l'invariance sous  $SU(3)^5$  devrait être imposée [93]. Ce changement se répercute sur la procédure précédente de deux façons. Premièrement, il y a des nouveaux invariants impliquant des tenseurs de Levi-Civita de  $SU(3)^5$ . Etant donnée les propriétés de symétrie des spurions de Yukawa, ces nouveaux invariants peuvent tous être décomposés en invariants de  $U(3)^5$  et de puissances de  $\det \mathbf{Y}_u$  et/ou  $\det \mathbf{Y}_d$ . Deuxièmement, les valeurs physiques des matrices de couplages de Yukawa dans l'équation (3.8) doivent inclure en général des phases supplémentaires violant  $\mathcal{CP}$  car la symétrie  $SU(3)^5$  n'est pas suffisante pour faire que toutes les masses des fermions soient réelles.

#### 3.3.3.1 Anomalie axiale forte

Pour comprendre les implications sur les EDMs des quarks et des leptons, rappelons d'abord comment ces anomalies se manifestent dans le MS. La décomposition en valeurs singulières (SVD) de l'équation (3.7) implique les transformations de  $U(1)^9$   $3\alpha_{QL} = \arg \det V_L^{d,e^\dagger}$  et  $3\alpha_{U,DE} = \arg \det V_R^{u,d,e}$ . Ces phases ne sont pas fixées car les différentes matrices unitaires de la SVD ne sont définies qu'à des phases relatives près. Cependant, ces dernières doivent satisfaire

$$\arg \det \mathbf{Y}_u = 3(\alpha_Q + \alpha_U), \quad \arg \det \mathbf{Y}_d = 3(\alpha_Q + \alpha_D), \quad \arg \det \mathbf{Y}_e = 3(\alpha_L + \alpha_E), \quad (3.35)$$

pour que les masses des fermions soient réelles. En même temps, ces transformations de  $U(1)$  étant anormales, elles induisent un décalage de la constante de couplage de l'opérateur  $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu}$  comme suit

$$\theta_C \rightarrow \theta_C^{eff} = \theta_C - 3(2\alpha_Q + \alpha_U + \alpha_D) = \theta_C - \arg \det \mathbf{Y}_u - \arg \det \mathbf{Y}_d, \quad (3.36)$$

où  $\theta_C$  provient de la structure du vide de QCD. En pratique, on a alors une phase supplémentaire de violation- $\mathcal{CP}$  dans le MS,  $\theta_C^{eff}$ , qu'on peut interpréter librement comme un couplage de  $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu}$  ou bien comme des masses de quarks complexes. Notons qu'au-delà du couplage  $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu}$ , la dynamique d'instanton génère aussi l'interaction suivante [94]

$$\mathcal{H}_{eff}^{axial} \sim \frac{g^{axial}}{\Lambda^{14}} (\varepsilon^{IJK} Q^I Q^J Q^K)^2 (\varepsilon^{IJK} U^{\dagger I} U^{\dagger J} U^{\dagger K}) (\varepsilon^{IJK} D^{\dagger I} D^{\dagger J} D^{\dagger K}) + h.c., \quad (3.37)$$

où  $Q, U, D$  dénotent ici des spineurs de Weyl, et les contractions de Lorentz,  $SU(2)_L$  et  $SU(3)_C$  sont considérés implicitement. Cette interaction est invariante sous  $SU(3)^5$  mais brise explicitement  $U(1)^5$  car faire que les masses des quarks soient réelles décale la phase de ce couplage de

$$g^{axial} \rightarrow g^{axial} \exp 3i(2\alpha_Q + \alpha_U + \alpha_D), \quad (3.38)$$

exactement comme la phase forte  $\theta_C$  dans l'équation (3.36). Indirectement,  $\arg \det \mathbf{Y}_u + \arg \det \mathbf{Y}_d$  est en principe accessible si on connaît  $\arg(g^{axial})$  dans une base donnée. La seule situation où le MS n'impliquerait pas un nouveau paramètre libre serait quand les interactions anormales sont alignées, i.e.,  $\arg(g^{axial}) = \theta_C$  avant SSB. Dans ce cas, faire que les masses des quarks soient réelles décale  $\theta_C \rightarrow \theta_C^{eff}$  et  $\arg(g^{axial}) = \theta_C \rightarrow \arg(g^{axial}) = \theta_C^{eff}$ .

9. Notre convention consiste à décomposer une transformation de  $G_F$ ,  $g_X \in U(3)_X$  comme  $g_X = \exp(i\alpha_X T^0) \exp(i\alpha_X^a T^a)$ , avec  $T^a, a = 1, \dots, 8$  les générateurs de  $SU(3)_X$  et  $T^0 = \mathbf{1}$  est le générateur de  $U(1)_X$ . Puis, en utilisant l'identité  $\det(\exp A) = \exp \langle A \rangle$  et avec  $\langle T^0 \rangle = 3$ , la phase peut être extraite par  $\arg \det g_X = 3\alpha_X$ .

### 3.3.3.2 Spurions impliquant la phase forte et EDMs

Quelque soit la paramétrisation choisie pour  $\theta_C^{eff}$ , cette phase peut induire des EDMs à travers des effets non-perturbatifs de QCD à basse énergie. Pour spécifier, considérons les opérateurs magnétiques effectifs de l'équation (3.1), avec des coefficients de Wilson  $c_{u,d,e}$  réels et des combinaisons de spurions  $\mathbf{Y}_{u,d,e}\mathbf{X}_{u,d,e}$  sensibles à  $\theta_C^{eff}$ . Comme ce paramètre provient de la QCD et qu'il contient potentiellement des grandes contributions de quarks légers, les effets non-locaux à longue distance sont dominants et  $\Lambda$  devrait être fixé à l'échelle hadronique typique. En conséquence, cela repousse le formalisme effectif au-delà de ces limites, mais procédons quand même.

La difficulté principale est d'établir la forme des insertions de spurions. Comme nous souhaitons utiliser la symétrie de saveur  $G_F$  et ses termes de brisure explicite, nous devrions transférer tout le  $\theta_{eff}^C$  sur les masses de quarks afin de se débarrasser du couplage  $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu}$ . Ceci peut être réalisé en modifiant les valeurs physiques de fonds des spurions de la manière suivante (dans la base d'interaction où les quarks de type up sont états propres de masses)

$$\begin{aligned} v\mathbf{Y}_u &\xrightarrow{gelé} e^{i\kappa\theta_C^{eff}\mathbb{M}_u^{-1}}\mathbb{M}_u = \mathbb{M}_u + i\mathbb{I}_3\kappa\theta_C^{eff} + \dots, \\ v\mathbf{Y}_d &\xrightarrow{gelé} e^{i\kappa\theta_C^{eff}\mathbb{M}_d^{-1}}\mathbb{M}_d V_{CKM}^\dagger = (\mathbb{M}_d + i\mathbb{I}_3\kappa\theta_C^{eff} + \dots)V_{CKM}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.39)$$

avec

$$\kappa^{-1} \equiv \langle \mathbb{M}_u^{-1} + \mathbb{M}_d^{-1} \rangle = \frac{1}{m_u} + \frac{1}{m_c} + \frac{1}{m_t} + \frac{1}{m_d} + \frac{1}{m_s} + \frac{1}{m_b}, \quad (3.40)$$

tandis qu'on garde  $v\mathbf{Y}_e \xrightarrow{gelé} \mathbb{M}_e$ . Une infinité d'autres choix de transformations de  $U(1)_Q \otimes U(1)_U \otimes U(1)_D$  pourraient remplacer le couplage  $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu}$ , mais ce choix spécifique possède les propriétés souhaitables suivantes :

- Ces valeurs de fonds des spurions rendent compte correctement de l'ensemble du terme  $\theta_C^{eff}$ , comme cela peut être vérifié en effectuant les rotations anormales inverses pour revenir à la base où  $v\mathbf{Y}_u \xrightarrow{gelé} \mathbb{M}_u$  et  $v\mathbf{Y}_d \xrightarrow{gelé} \mathbb{M}_d V_{CKM}^\dagger$ ,

$$\arg \det \mathbf{Y}_u + \arg \det \mathbf{Y}_d = \arg \det \exp(i\kappa\theta_C^{eff}\mathbf{m}_u^{-1}) + \arg \det \exp(i\kappa\theta_C^{eff}\mathbf{m}_d^{-1}) = \theta_C^{eff}. \quad (3.41)$$

- Si  $g^{axial}$  est réel dans la base (3.39), revenir dans la base où  $v\mathbf{Y}_u \rightarrow \mathbb{M}_u$  et  $v\mathbf{Y}_d \rightarrow \mathbb{M}_d V_{CKM}^\dagger$  aligne automatiquement la phase de la transition de quarks induites par instanton avec  $G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu}$  étant donnée que  $g^{axial} \rightarrow g^{axial} \exp i\theta_C^{eff}$ .
- A partir de la base (3.39), des masses de quarks réelles sont obtenues en agissant seulement sur les champs de chiralité droite et le couplage  $SU(2)_L$  anomal  $W_{\mu\nu}^i \tilde{W}^{i,\mu\nu}$  n'est pas affecté (cela sera discuté dans la dernière section).
- Cette forme assure que les EDMs de quarks et de leptons induits par  $\theta_C^{eff}$  sont contrôlés par  $\kappa$  (défini dans l'équation (3.40)), ce qui garantit que la contribution de  $\theta_C^{eff}$  disparaît dès lors qu'une seule masse de quark est nulle. De plus, cela reproduit le facteur usuel  $m_u m_d m_s / (m_u m_d + m_u m_s + m_d m_s)$  quand  $m_{c,b,t} \rightarrow \infty$  et assure donc la stabilité du vide brisant la symétrie chirale (voir par exemple [95]).
- L'impact de  $\theta_C^{eff}$  est rendu non-savoureux même s'il est introduit à travers les couplages de saveurs grâce à des facteurs appropriés se compensant  $\mathbb{M}_u^{-1}$  et  $\mathbb{M}_d^{-1}$ . A cet égard, notons que  $V_{CKM}$  pourrait être inclus dans l'exponentielle sans affecter les propriétés de la paramétrisation.

Pour estimer l'EDM du quark en utilisant la symétrie  $G_F = SU(5)^5$ , il suffit de poser  $\mathbf{X}_u = \mathbf{X}_d = \mathbb{I}_3$  dans l'équation (3.1) dans la mesure où les  $\mathbf{Y}_{u,d}$  sont directement sensibles à  $\theta_C^{eff}$ . On a alors :

$$d_{u,d} \sim e \frac{1}{\Lambda_{had}^2} \kappa \theta_C^{eff} \approx \theta_{eff} \times 10^{-16} e \cdot cm, \quad (3.42)$$

avec  $\Lambda_{had} \approx 300$  MeV. Cela est similaire aux estimations naïves basées sur des arguments dimensionnels et implique que  $\theta_C^{eff} \lesssim 10^{-10}$  puisque  $|d_n| < 2.9 \times 10^{-26} e \cdot cm$  (90%) [92]. Au niveau de la symétrie  $SU(3)^5$  et de ses termes de brisures, il n'y a pas moyen d'en apprendre plus car la dynamique hadronique à longue distance complexe est hors d'atteinte.

Quant aux EDMs de leptons, la chaîne de spurions la plus simple est  $\mathbf{X}_e = \mathbb{I}_3 \det \mathbf{Y}_{u,d}$ , qui développe une partie imaginaire comme suit

$$\text{Im det } \mathbf{Y}_u \rightarrow \det(\mathbb{M}_u/v) \text{Im det exp}(ik\theta_C^{eff} \mathbb{M}_u^{-1}) \approx ik\theta_C^{eff} \det(\mathbb{M}_u/v) \langle \mathbb{M}_u^{-1} \rangle \approx \theta_C^{eff} \times 10^{-7}. \quad (3.43)$$

Une expression similaire est vérifiée pour  $\text{Im det } \mathbf{Y}_d \approx \theta_C^{eff} \times 10^{-10}$ . Les facteurs de masses de quarks apportent une forte suppression mais sont inévitables pour inclure de façon cohérente  $\theta_C^{eff}$  dans les valeurs de fonds des spurions de Yukawa. De plus, ils ne peuvent pas être représentés comme des insertions de masses le long d'une boucle de quark, qui sont nécessairement invariant sous  $U(3)^5$ . Ainsi, la dépendance de la boucle de quark sur  $\det \mathbf{Y}_{u,d}$  doit provenir plutôt d'effets de QCD non-perturbatifs. Comme nous ne pouvons pas les estimer ici, le mieux qu'on puisse faire est d'établir une limite supérieure de l'EDM de l'électron en attachant la boucle de quark au courant leptonique soit avec trois photons soit avec deux bosons faibles,

$$\begin{aligned} d_e &\lesssim e \frac{m_e}{\Lambda_{had}^2} \left( \frac{e^2}{16\pi^2} \right)^3 \text{Im det } \mathbf{Y}_u \approx \theta_C^{eff} \times 10^{-34} e \cdot cm, \\ d_e &\lesssim e \frac{m_e}{M_W^2} \left( \frac{g^2}{16\pi^2} \right)^2 \text{Im det } \mathbf{Y}_u \approx \theta_C^{eff} \times 10^{-32} e \cdot cm, \end{aligned} \quad (3.44)$$

où  $\Lambda_{had} \approx 300$  MeV représente l'échelle hadronique typique. Ces contributions aux EDMs de leptons sont certainement hors d'atteinte vu que  $\theta_C^{eff} \lesssim 10^{-10}$ . Il est quand même intéressant de noter que ces contributions peuvent être plus grandes que celles de la phase CKM dans l'équation (3.21).

### 3.3.3.3 Contributions d'interaction faible à la phase forte

Les combinaisons violant- $\mathcal{CP}$  de spurions établies dans les sections 3.3.1 et 3.3.2 contrôlent également les contributions d'interaction faible à la phase forte, voir figure 3.4. Pour spécifier, la correction violant- $\mathcal{CP}$  à la propagation du gluon provient de la boucle de quark, équation (3.18), tandis que celles aux masses des quarks de type down est proportionnelle à la combinaison (3.25). Concernant l'EDM, ces expressions prédisent correctement l'ordre de couplage faible, mais ne sont pas suffisantes pour rendre compte des corrections QCD requises pour briser la symétrie des insertions de masses. Il a été montré dans [74] que la correction à la propagation du gluon nécessitait une boucle QCD supplémentaire. Ainsi,

$$\Delta\theta_{eff}^{gluon} \sim \left( \frac{g^2}{4\pi^2} \right)^2 \frac{\alpha_S}{\pi} \tilde{J}_{\mathcal{CP}} \approx 10^{-23}, \quad (3.45)$$

avec  $\tilde{J}_{\mathcal{CP}} = J_{\mathcal{CP}}(v/M_W)^{12} \approx 10^5$ . Ceci est à comparer au calcul dans [74], dans lequel plusieurs facteurs de masses de quarks sont remplacés par des logarithmes de rapports de masses de quarks, de sorte que  $\Delta\theta_{eff}^{gluon} \sim 10^{-19}$ .

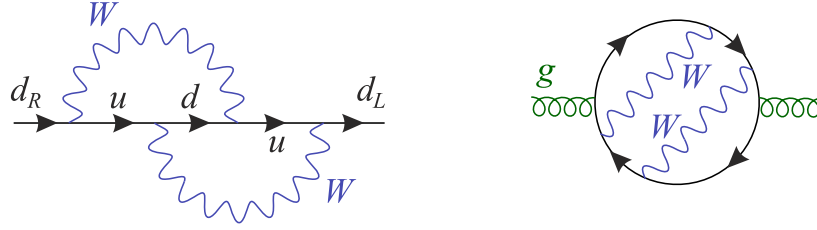


FIGURE 3.4 – Contributions électrofaibles dominantes à  $\theta_{eff}^C$ , provenant soit de la renormalisation des masses de quarks complexes soit de la propagation de gluon.

A partir de l'équation (3.25), la correction violant- $\mathcal{CP}$  à la masse du quark  $d$  doit être contrôlée par

$$\Delta\theta_{eff}^{d\ quark} \sim [\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u, \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u]^{11}. \quad (3.46)$$

Le décalage total de la phase forte étant sommé sur les saveurs des quarks induit une contribution qui s'annule exactement

$$\Delta\theta_{eff}^{d\ quark} + \Delta\theta_{eff}^{s\ quark} + \Delta\theta_{eff}^{b\ quark} = 0, \quad (3.47)$$

et il en est de même pour les quarks de type up. Ceci n'est rien d'autre que la règle de somme (3.33) provenant de  $\langle \mathbf{X}_d \rangle = 0$ . En fait, en l'absence d'effets de QCD et au niveau de l'insertion de masse, la contribution dominante à  $\Delta\theta_{eff}^{all\ quarks}$  doit nécessairement provenir de

$$\Delta\theta_{eff}^{d\ quark} \sim ((\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2 \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d (\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 - (\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u)^2 \mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d \mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u (\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d)^2)^{11}, \quad (3.48)$$

et donc la somme sur les trois saveurs  $d, s, b$  donne  $\Delta\theta_{eff}^{quarks} \sim J_{\mathcal{CP}} \sim \Delta\theta_{eff}^{gluon}$ . Cette observation a été faite dans [96] dans le contexte de l'étude de la contribution électrofaible divergente dominante à  $\theta^{eff}$ .

Dans le monde réel, la règle de somme pourrait être secouée par des corrections QCD dans la mesure où ces dernières adoucissent la brisure de GIM quadratique en une dépendance logarithmique des masses des quarks. Dans [97], il y est trouvé que la contribution dominante émerge à l'ordre  $O(\alpha_S^3)$ , donc nous construisons la tentative d'estimation

$$\Delta\theta_{eff}^{quarks} \sim \left(\frac{g^2}{4\pi^2}\right)^2 \left(\frac{\alpha_S}{\pi}\right)^3 \max_i |\mathbf{X}_d^{ii}| \approx \left(\frac{g^2}{4\pi^2}\right)^2 \left(\frac{\alpha_S}{\pi}\right)^3 \frac{m_b^2 m_c^2 m_t^4}{M_W^8} \mathcal{J}_{\mathcal{CP}} \approx 10^{-16}. \quad (3.49)$$

Un calcul exact à cet ordre n'a pas encore été fait. A ce stade, on doit également mentionner l'évaluation de [98], où les contributions à longue distance sont estimées en faisant correspondre (matching) le processus  $\eta^{(\prime)} \rightarrow \pi\pi$  induit par  $\theta^{eff}$  et celui obtenu au second ordre d'interaction faible, avec comme résultat  $\Delta\theta_{eff}^{LD} \approx 10^{-17}$ .

### 3.3.4 Impact de la nouvelle physique sur les EDMs des quarks et des leptons sous MFV

Dans cette partie, on suppose l'existence de nouvelle physique (NP) en imposant l'hypothèse MFV, de sorte que la totalité du secteur de la saveur reste contrôlé par les matrices de couplages de Yukawa seulement. Si on suppose de plus que le reste de la dynamique de NP conserve  $\mathcal{CP}$ , les mêmes combinaisons de spurions que celles dans le MS sont pertinentes pour décrire toute la violation- $\mathcal{CP}$  diagonale dans l'espace des saveurs.

Bien qu'identiques analytiquement, trois effets altèrent les estimations numériques. Premièrement, la dynamique de NP peut être bien moins restrictive que le MS et ces combinaisons de spurions peuvent

a priori provenir de diagrammes plus simples. Deuxièmement, les valeurs des matrices de couplages de Yukawa peuvent être différentes si plus d'un multiplet de Higgs est présent. Par exemple, considérons le THDM de type II, dans lequel l'équation (3.8) devient

$$v_u \mathbf{Y}_u \xrightarrow{\text{gelé}} \mathbb{M}_u V_{CKM}, \quad v_d \mathbf{Y}_d \xrightarrow{\text{gelé}} \mathbb{M}_d, \quad v_d \mathbf{Y}_e \xrightarrow{\text{gelé}} \mathbb{M}_e, \quad (3.50)$$

avec  $\tan\beta = v_u/v_d$  et  $v_{u,d} = \langle H_{u,d}^0 \rangle$  les VEVs des deux scalaires neutres. Lorsque  $\tan\beta$  est grand,  $\mathbf{Y}_d$  devient aussi grand que  $\mathbf{Y}_u$ , et

$$J_{\mathcal{CP}}^{NP} \approx 10^{-12} \times \left(\frac{\tan\beta}{50}\right)^6, \quad [\mathbf{X}_d^{NP}]^{11} \approx 10^{-9} \times \left(\frac{\tan\beta}{50}\right)^2, \quad [\mathbf{X}_u^{NP}]^{11} \approx 10^{-7} \times \left(\frac{\tan\beta}{50}\right)^6. \quad (3.51)$$

Troisièmement, les échelles apparaissant dans l'équation (3.1) doivent être au dessus de l'échelle électrofaible et est posée à 1 TeV.

En combinant ces trois effets numériques et en supposant que les EDMs sont déjà induits à une boucle, les prédictions pour les contributions savoureuses sont

$$\begin{aligned} d_e &\sim e \frac{m_e}{\Lambda^2} \left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right) J_{\mathcal{CP}}^{NP} \approx 10^{-37} \times \left(\frac{1 \text{ TeV}}{\Lambda}\right)^2 \times \left(\frac{\tan\beta}{50}\right)^6 e \cdot \text{cm}, \\ d_d &\sim e \frac{m_d}{\Lambda^2} \left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right) [\mathbf{X}_d^{NP}]^{11} \approx 10^{-33} \times \left(\frac{1 \text{ TeV}}{\Lambda}\right)^2 \times \left(\frac{\tan\beta}{50}\right)^2 e \cdot \text{cm}, \\ d_u &\sim e \frac{m_u}{\Lambda^2} \left(\frac{g^2}{16\pi^2}\right) [\mathbf{X}_u^{NP}]^{11} \approx 10^{-32} \times \left(\frac{1 \text{ TeV}}{\Lambda}\right)^2 \times \left(\frac{\tan\beta}{50}\right)^6 e \cdot \text{cm}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Ceci correspond par exemple à la situation dans le MSSM pour les contributions provenant des phases violant- $\mathcal{CP}$  présentes dans les couplages savoureux de squarks (avec MFV est imposée, voir [81]). Notons que lorsque  $\tan\beta$  augmente, ces contributions évoluent en

$$\frac{|d_d|}{m_d} \approx 10^3 \times \left(\frac{50}{\tan\beta}\right)^4 \times \frac{|d_e|}{m_e}, \quad \frac{|d_u|}{m_u} \sim 10^5 \times \frac{|d_e|}{m_e}. \quad (3.53)$$

Etant donné les limites actuelles,  $d_e$  et  $d_n$  sont similairement sensibles à la phase de violation- $\mathcal{CP}$  à grand  $\tan\beta$ , et clairement aucuns des deux n'est accessible par les expériences actuelles et en vue dans un futur proche.

Au-delà de ces contributions directes à l'EDM, des boucles similaires décalent  $\theta_{eff}^C$ . La différence principale est que ces contributions ne se découplent pas dans la mesure où elles peuvent provenir directement des self-énergies du gluon ou du quark. Pour spécifier,

$$\Delta\theta_{eff}^{gluon} \sim \left(\frac{g^2}{4\pi^2}\right) J_{\mathcal{CP}}^{NP} \approx 10^{-14} \times \left(\frac{\tan\beta}{50}\right)^6, \quad (3.54)$$

ce qui est plus contraignant que les contributions directes de l'équation (3.52), bien qu'encore compatible avec  $\theta_{eff}^C \lesssim 10^{-10}$ . Notons que si un mécanisme est introduit pour résoudre le problème de  $\mathcal{CP}$  fort du MS en forçant  $\theta_{eff}^C = 0$ , comme par exemple en introduisant un axion, alors ce même mécanisme tuerait aussi  $\Delta\theta_{eff}^{gluon}$ , et les équations (3.52) redeviennent la contribution dominante aux EDMs.

A partir des self-énergies des quarks, le décalage en  $\theta_{eff}^C \lesssim 10^{-10}$  peut être estimé

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{eff}^{d\text{-quarks}} &\sim \left(\frac{g^2}{4\pi^2}\right) [\mathbf{X}_d^{NP}]^{11} \approx 10^{-11} \times \left(\frac{\tan\beta}{50}\right)^2, \\ \Delta\theta_{eff}^{u\text{-quarks}} &\sim \left(\frac{g^2}{4\pi^2}\right) [\mathbf{X}_u^{NP}]^{11} \approx 10^{-10} \times \left(\frac{\tan\beta}{50}\right)^6. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Ces contributions pousseraient  $\theta_{eff}^C \lesssim 10^{-10}$  très proche de sa limite actuelle obtenue par l'EDM du neutron. Cependant, on doit encore sommer sur les trois saveurs. A ce stade, des grandes annulations peuvent être attendues. Premièrement, les insertions de spurions ne proviennent pas forcément des insertions de masses des quarks. Par exemple, dans un contexte supersymétrique, ils pourraient provenir directement des termes de brisure douce (soft-breaking) de squarks sur lesquels on impose MFV. Alternativement, en partant de conditions aux limites universelles, ils émergeraient de l'évolution du groupe de renormalisation jusqu'à l'échelle basse. Deuxièmement, la séparation dynamique des contributions de chaque saveur ne serait probablement pas aussi effective que dans le MS. Dans le MSSM avec MFV, les squarks d'un type donné peuvent être quasi dégénérés. Pour ces raisons, on s'attendrait à ce que la règle de somme (3.47) soit vérifiée, du moins dans une bonne approximation, et donc que  $\Delta\theta_{eff}^{quarks} \approx \Delta\theta_{eff}^{gluon}$  apparaissant dans l'équation (3.54) et qui est hors d'atteinte.

### 3.4 Estimations des EDMs en présence des masses des neutrinos

De façon générale, pour prendre en compte les masses des neutrinos, la dynamique du MS doit être supplémentée par des nouvelles interactions savoureuses. Le contenu minimal de spurions utilisé jusqu'ici doit alors être étendu en y incluant des spurions liés aux neutrinos. De plus, ce contenu en spurions dépend du mécanisme adopté pour la génération des masses des neutrinos. Ainsi, en repartant des trois opérateurs magnétiques de l'équation (3.1), le but de cette section est d'analyser la paramétrisation de  $\mathbf{X}_{u,d,e}$  en présence des nouveaux spurions résultants des scénarios les plus simples de générations de masse des neutrinos.

Quelques propriétés générales peuvent être immédiatement identifiées. D'abord, les contributions aux EDMs des quarks de type up (down) à partir du premier (second) opérateur nécessitent que  $\mathbf{X}_{u(d)}$  soit complexe dans la base où  $\mathbf{Y}_{u(d)}$  est diagonale et réelle. Comme le groupe de saveur des quarks et des leptons reste factorisé dans tous les scénarios considérés ici,  $\mathbf{X}_{u,d,e}$  doit être la matrice identité multipliée par une trace invariante (sous le groupe de saveur) sur les spurions leptoniques. Les EDMs de quarks émergent alors seulement quand ces traces sont complexes, c'est à dire quand

$$\mathbf{X}_{u,d} = \mathbb{I}_3 \times J_{CP} \rightarrow d_{u,d} \sim e \frac{c_{u,d}}{\Lambda^2} m_{u,d} \times \text{Im } J_{CP} , \quad (3.56)$$

avec  $\text{Im } J_{CP} \neq 0$ . De telles traces invariantes de saveur violant- $CP$  ont déjà été largement étudiées dans la littérature pour plusieurs modèles de masses de neutrinos (voir en particulier [76]), mais seront quand même incluses dans la suite par souci de complétude. Parce que la phase de violation- $CP$  provient d'un invariant de saveur et avec  $c_{u,d}$  des combinaisons non-savoureuses de constantes de couplages de jauges et de facteurs de boucles, on s'attend à ce que les relations suivantes

$$\frac{d_u}{m_u} = \frac{d_c}{m_c} = \frac{d_t}{m_t} = \frac{d_d}{m_d} = \frac{d_s}{m_s} = \frac{d_b}{m_b} , \quad (3.57)$$

soient vérifiées, modulo des dépendances sous-dominantes en les masses des particules dans les boucles.

D'autre part, concernant l'opérateur magnétique leptonique,  $\mathbf{X}_e$  doit être une chaîne de spurions leptoniques se transformant comme un octet sous  $SU(3)_L$ . Dans la base où  $\mathbf{Y}_e$  est diagonale réelle, cela induit alors des processus avec changement de saveurs leptoniques<sup>10</sup>  $\ell^I \rightarrow \ell^J \gamma$  dès que la chaîne de spurions n'est pas diagonale,  $\mathbf{X}_e^{IJ} \neq 0$ , avec un taux

$$\Gamma(\ell^I \rightarrow \ell^J \gamma) = \frac{\alpha m_{\ell^I}^5 c_e^2}{8\Lambda^4} \times |\mathbf{X}_e^{IJ}|^2 , \quad (3.58)$$

10. Lepton Flavor Violating processes, LFV.



et des EDMs de leptons  $d_{\ell l}$  dès que ses coefficients diagonaux sont complexes,  $\text{Im } \mathbf{X}_e^{II} \neq 0$

$$d_e \sim e \frac{c_e}{\Lambda^2} m_e \times \text{Im } \mathbf{X}_e^{11} . \quad (3.59)$$

Typiquement, la contribution dominante à  $d_{\ell}$  provient d'une chaîne de spurions de trace nulle  $\langle \mathbf{X}_e \rangle = 0$ , ce qui implique que la règle de somme suivante soit vérifiée

$$\frac{d_e}{m_e} + \frac{d_{\mu}}{m_{\mu}} + \frac{d_{\tau}}{m_{\tau}} = 0 . \quad (3.60)$$

### 3.4.1 Masses de Dirac pour les neutrinos

Dans ce scénario, les masses des neutrinos sont introduites dans le MS en ajoutant trois neutrinos de chiralités droites afin de pouvoir écrire une interaction de Yukawa supplémentaire

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\bar{U} \mathbf{Y}_u Q H^{\dagger C} - \bar{D} \mathbf{Y}_d Q H^{\dagger} - \bar{E} \mathbf{Y}_e L H^{\dagger} - \bar{N} \mathbf{Y}_\nu L H^{\dagger C} + h.c. . \quad (3.61)$$

Ces neutrinos droits possèdent des nombres quantiques de jauge triviaux  $N \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$  sous  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . En présence de la nouvelle structure de saveur  $\mathbf{Y}_\nu$ , il n'est plus possible de se débarrasser de tous les mélanges de saveurs dans le secteur des leptons. Les SVD de  $\mathbf{Y}_e$  et  $\mathbf{Y}_\nu$  sont respectivement  $v V_R^e \mathbf{Y}_e V_L^e = \mathbf{m}_e$  et  $v V_R^\nu \mathbf{Y}_\nu V_L^\nu = \mathbf{m}_\nu$ . La non-concordance des rotations gauches définit la matrice PMNS [99]

$$U_{PMNS}^{\text{Dirac}} \equiv V_L^{e\dagger} V_L^\nu . \quad (3.62)$$

Avec cela, les valeurs de fonds des spurions, dans la base d'états propres de masses des leptons chargés, sont données par

$$v \mathbf{Y}_e \xrightarrow{\text{gé}} \mathbb{M}_e , \quad v \mathbf{Y}_\nu \xrightarrow{\text{gé}} \mathbb{M}_\nu U_{PMNS}^{\text{Dirac}\dagger} . \quad (3.63)$$

Les valeurs des différents paramètres libres, extraites des données d'oscillations de neutrinos, sont prises des meilleurs ajustements de [100] :

$$\begin{aligned} \Delta m_{21}^2 = \Delta m_{\odot}^2 = 7.5_{-0.17}^{+0.19} \times 10^{-5} \text{ eV}^2 , \quad |\Delta m_{31}^2| = \Delta m_{\text{atm}}^2 = 2.524_{-0.040}^{+0.039} \times 10^{-3} \text{ eV}^2 , \\ \theta_{12} = \theta_{\odot} = (33.56_{-0.75}^{+0.77})^\circ , \quad \theta_{23} = \theta_{\text{atm}} = (41.6_{-1.2}^{+1.5})^\circ , \quad \theta_{13} = (8.46 \pm 0.15)^\circ , \end{aligned} \quad (3.64)$$

pour une hiérarchie de masse normale, ce que nous supposerons dans la suite de cette étude. A partir de maintenant, les prédictions pour les FCNCs leptoniques ou encore les contributions de la phase PMNS aux EDMs établissent un parallèle strict avec ce qui a été effectué dans la section 3.2. Pour mettre en place le cadre pour les sections suivantes, établissons les explicitement quand même.

**Lepton flavor violation :** Dans le MS étendu d'un terme de masse de Dirac pour les neutrinos, le processus  $\mu \rightarrow e \gamma$  résulte d'échanges virtuels de  $W$  (voir figure 3.5) et peut être paramétrisée par l'opérateur magnétique effectif de dimension-6 de l'équation (3.1) en posant

$$\frac{c_e}{\Lambda^2} = \frac{G_F}{16\pi^2 \sqrt{2}} , \quad \mathbf{X}_e^{\text{Dirac}} = \mathbf{1} \oplus \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu \oplus \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e + \dots , \quad (3.65)$$

où  $\oplus$  sert à rappeler qu'en principe, différents coefficients de  $\mathcal{O}(1)$  apparaissent devant chaque terme. Dans la base propre de masses des leptons chargés, la contribution dominante vient de  $\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu$ . En gelant

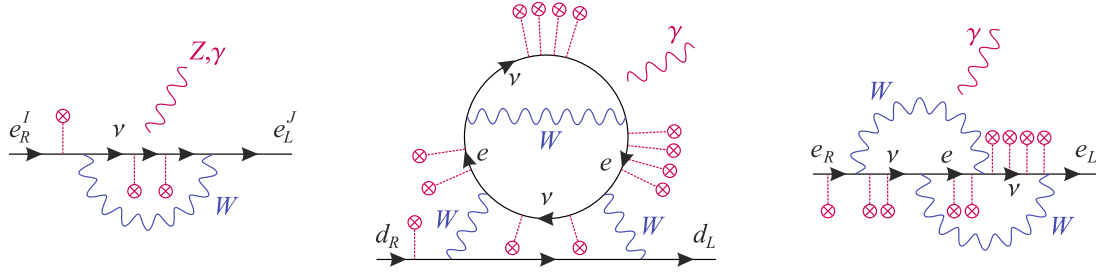


FIGURE 3.5 – Exemples d’insertions de spurions dominantes pour les transitions LFV  $\ell^I \rightarrow \ell^J \gamma$ , EDMs de quarks et de leptons, lorsque les masses des neutrinos sont purement de type Dirac.

les spurions comme dans l’équation (3.63) et sous l’approximation tribimaximale, les prédictions des taux de désintégrations sont les suivantes

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mu \rightarrow e\gamma) &\approx \lambda_\mu \left| \Delta m_\odot^2 / 3v^2 \right|^2 \approx 10^{-58}, \quad [\mathcal{B}^{\text{exp}} < 5.7 \times 10^{-13} \text{ [101]}], \\ \mathcal{B}(\tau \rightarrow e\gamma) &\approx \lambda_\tau \left| \Delta m_\odot^2 / 3v^2 \right|^2 \approx 10^{-59}, \quad [\mathcal{B}^{\text{exp}} < 3.3 \times 10^{-8} \text{ [102]}], \\ \mathcal{B}(\tau \rightarrow \mu\gamma) &\approx \lambda_\tau \left| \Delta m_{\text{atm}}^2 / 2v^2 \right|^2 \approx 10^{-49}, \quad [\mathcal{B}^{\text{exp}} < 4.4 \times 10^{-8} \text{ [102]}], \end{aligned} \quad (3.66)$$

où l’on a posé  $\lambda_\ell = \tau_\ell G_F^2 \alpha m_\ell^5 / 2048 \pi^4$ . Ces valeurs sont extrêmement petites, bien au-delà des sensibilités expérimentales. Notons qu’en raison du mécanisme de GIM, ce sont les différences de masses des particules dans la boucle électrofaible qui importent.

**EDMs de quarks :** Ils sont induits par les traces invariantes de saveurs sur les spurions leptoniques, voir figure 3.5. En complète analogie avec les contributions CKM aux EDMs de leptons, on peut directement écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\text{CP}}^{\text{Dirac}} &\equiv \frac{1}{2i} \det[\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e, \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu] = \frac{1}{2} \text{Im} \langle (\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu)^2 \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2 \rangle \\ &= \mathcal{J}_{\text{CP}}^{\text{Dirac}} \prod_{\substack{i>j=e,\mu,\tau \\ i>j=\nu_1,\nu_2,\nu_3}} \frac{m_i^2 - m_j^2}{v^2} \approx \mathcal{J}_{\text{CP}}^{\text{Dirac}} \frac{m_\tau^4 m_\mu^2 (\Delta m_{\text{atm}}^2)^2 \Delta m_\odot^2}{v^{12}} \approx 10^{-93} \sin(\delta_{13}), \end{aligned} \quad (3.67)$$

avec  $\mathcal{J}_{\text{CP}}^{\text{Dirac}}$  donné par la même expression que pour l’invariant de Jarlskog de l’équation (3.20). Numériquement,  $\mathcal{J}_{\text{CP}}^{\text{Dirac}} \approx 0.033(2) \times \sin(\delta_{13})$  n’est pas très loin de sa valeur maximale  $1/6 \sqrt{3} \approx 0.096$  lorsque  $\delta_{13}$  est  $\mathcal{O}(1)$ . Néanmoins,  $\mathcal{J}_{\text{CP}}^{\text{Dirac}}$  est lourdement supprimé par la dépendance en  $\mathcal{O}(m_\nu^6)$  et ne fait pas le poids face aux contributions CKM à  $d_{u,d}$ .

**EDMs de leptons :** La combinaison  $\mathbf{X}_e$  dans l’équation (3.1) doit être une chaîne de spurions avec des coefficients diagonaux complexes. Ce cas est très similaire à celui des quarks étant donné que les identités CH permettent de construire l’équivalent de la base dans l’équation (3.24), avec  $\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu$  et  $\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e$  au lieu de  $\mathbf{Y}_u^\dagger \mathbf{Y}_u$  et  $\mathbf{Y}_d^\dagger \mathbf{Y}_d$ . La chaîne non-hermitienne la plus simple est donc

$$\mathbf{X}_e^{\text{Dirac}} = [\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu, \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu], \quad (3.68)$$

et correspond aux processus rainbow faibles du second ordre représentés en figure 3.5. Pour l’EDM de l’électron, on obtient

$$(\mathbf{X}_e^{\text{Dirac}})^{11} = 2i \mathcal{J}_{\text{CP}}^{\text{Dirac}} \frac{m_\tau^2 - m_\mu^2}{v^2} \prod_{i>j=\nu_1,\nu_2,\nu_3} \frac{m_i^2 - m_j^2}{v^2} \approx \mathcal{J}_{\text{CP}}^{\text{Dirac}} \frac{m_\tau^2 (\Delta m_{\text{atm}}^2)^2 \Delta m_\odot^2}{v^8} \approx 10^{-82} \sin(\delta_{13}), \quad (3.69)$$

ce qui se traduit en  $d_e \lesssim 10^{-107} e \cdot cm$ . Cette valeur est à peine plus grande que la contribution proportionnelle à  $J_{CP}^{\text{Dirac}}$  dans l'équation (3.67) et très petite devant la contribution CKM de l'équation (3.21). De plus, de la même manière que pour les quarks, cet invariant ne peut pas être obtenu à partir de diagrammes à deux boucles et le prix à payer pour une boucle supplémentaire est une correction électromagnétique. Finalement, la règle de somme (3.60) est vérifiée puisque  $\langle \mathbf{X}_e^{\text{Dirac}} \rangle = 0$ . En fait, on a même  $d_e/m_e \approx -d_\mu/m_\mu$  car  $d_\tau/m_\tau$  est proportionnel à  $m_\mu^2 - m_e^2$  au lieu de  $m_\tau^2 - m_{\mu,e}^2 \approx m_\tau^2$  pour  $d_{e,\mu}$ .

Pour des neutrinos de Dirac, il y a aussi la possibilité d'induire des EDMs de neutrinos avec l'opérateur  $\bar{N}^I (\mathbf{Y}_\nu \mathbf{X}_\nu)^{IJ} \sigma_{\mu\nu} L^J F^{\mu\nu} H$ . La chaîne de spurions  $\mathbf{X}_\nu^{\text{Dirac}}$  est obtenue à partir de  $\mathbf{X}_e^{\text{Dirac}}$  dans l'équation (3.68) en interchangeant  $\mathbf{Y}_\nu \leftrightarrow \mathbf{Y}_e$  et en se plaçant dans la base d'interaction où les neutrinos sont états propres de masses. Il est alors fortement amplifié par les facteurs de masses, avec par exemple

$$\frac{d_{\nu_1}}{d_e} = -\frac{m_{\nu_1}(m_\tau^2 - m_e^2)(m_\mu^2 - m_e^2)}{m_e \Delta m_{atm}^2 \Delta m_\odot^2} \approx 10^{36}, \quad (3.70)$$

pour  $m_{\nu_1} \approx 1$  eV, mais reste quand même totalement hors d'atteinte expérimentalement [103].

### 3.4.2 Masses de Majorana pour les neutrinos

Au lieu d'introduire des neutrinos droits, les neutrinos gauches peuvent être directement dotés d'un terme de masse invariant de jauge mais violant le nombre leptonique de la manière suivante :

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\bar{U} \mathbf{Y}_u Q H^{\dagger C} - \bar{D} \mathbf{Y}_d Q H^\dagger - \bar{E} \mathbf{Y}_e L H^\dagger - \frac{1}{2v} (L^I H) (\mathbf{Y}_\nu)^{IJ} (L^J H) + h.c. . \quad (3.71)$$

L'interaction non-renormalisable de dimension-5, appelée *opérateur de Weinberg* [104], se réduit à un terme de masse de Majorana  $v (\mathbf{Y}_\nu)^{IJ} \nu_L^I \nu_L^J$  lorsque le champ de Higgs acquiert sa VEV. Comme dans le cas de Dirac, il n'y a alors que deux spurions élémentaires à basse énergie. Afin de fixer leurs valeurs de fonds, notons dans un premier temps que les rotations unitaires nécessaires pour passer de la base d'interaction à la base des états propres de masses sont  $v V_R^e \mathbf{Y}_e V_L^e = \mathbb{M}_e$  et  $v V_L^{\nu T} \mathbf{Y}_\nu V_L^\nu = \mathbb{M}_\nu$  où  $\mathbb{M}_\nu = \text{diag}(m_{\nu_1}, m_{\nu_2}, m_{\nu_3})$  sont les masses (réelles) des neutrinos. Pour le spurion de neutrinos, seule une matrice  $V_L^\nu$  apparaît car  $\mathbf{Y}_\nu$  est une matrice symétrique dans l'espace des saveurs et de ce fait la SVD devient une diagonalisation orthogonale. En choisissant d'appliquer la rotation sur le doublet de leptons  $V_L^e$ , on peut atteindre la base d'interaction où

$$v \mathbf{Y}_e \xrightarrow{\text{gelé}} \mathbb{M}_e, \quad v \mathbf{Y}_\nu \xrightarrow{\text{gelé}} V_L^{eT} V_L^{\nu*} \mathbb{M}_\nu V_L^{\nu\dagger} V_L^e \equiv U_{PMNS}^* \mathbb{M}_\nu U_{PMNS}^\dagger, \quad (3.72)$$

où  $U_{PMNS} \equiv V_L^{e\dagger} V_L^\nu$  est reliée à la matrice PMNS vu dans le cas de Dirac comme ceci

$$U_{PMNS} = U_{PMNS}^{\text{Dirac}} \cdot \text{diag}(1, e^{i\alpha_M}, e^{i\beta_M}). \quad (3.73)$$

Contrairement au cas de Dirac, ces phases sont irréductibles et ne peuvent donc pas être éliminées par des rotations essentiellement car le nombre leptonique n'est plus conservé. Une des phases additionnelles est conventionnellement éliminée en tant que phase globale non pertinente, tandis que les deux autres sont appelées *phases de Majorana*.

**Processus LFV :** Si les neutrinos sont purement de Majorana, les processus LFV sont encodés dans l'opérateur de l'équation (3.1) avec  $\mathbf{X}_e$  donnée par

$$\mathbf{X}_e^{\text{Majo}} = \mathbf{Y}_\nu^\dagger \cdot \mathbf{Y}_\nu. \quad (3.74)$$

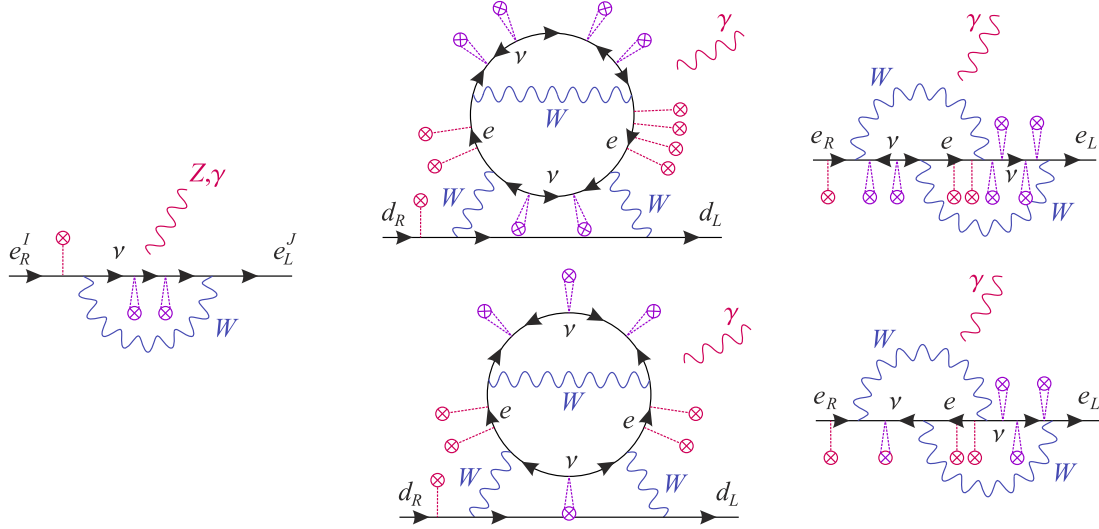


FIGURE 3.6 – Exemples d’insertions de spurions pour les transitions LFV, les EDMs de quarks et de leptons dans le cas des neutrinos purement de Majorana. Les doubles tadpoles dénotent les insertions de masses de Majorana, tandis que les tadpoles simples dénotent des spurions de Yukawa de leptons chargés. Les diagrammes du haut représentent les combinaisons de type Jarlskog des équations 3.77 et 3.80, alors que celles du bas montrent les combinaisons spécifiques au cas de Majorana, équations 3.78 et 3.81.

Ceci est représenté en figure 3.6. Ce mécanisme produit les mêmes amplitudes que dans le cas des neutrinos de Dirac étant donné que

$$\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu = \frac{1}{v^2} U_{PMNS} \mathbb{M}_\nu^2 U_{PMNS}^\dagger = (\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu)^{\text{Dirac}}, \quad (3.75)$$

et les taux en  $\Delta m_\nu^4$  sont les mêmes que dans l’équation (3.66).

**EDMs de quarks :** Le spurion  $\Upsilon_\nu$  se transforme différemment des autres matrices de couplages de Yukawa et par conséquent ouvre plusieurs nouvelles possibilités de contracter les spurions pour former des invariants de saveur. Afin d’organiser le développement, notons d’abord que grâce aux identités CH, une chaîne de spurions quelconque se transformant comme un octet sous  $SU(3)_L$  est nécessairement une combinaison de seulement quatre monômes hermitien élémentaires, se transformant aussi comme des octets de  $SU(3)_L$

$$\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e, \quad \Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu, \quad \Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu, \quad \Upsilon_\nu^\dagger ((\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T)^2 \Upsilon_\nu. \quad (3.76)$$

Les identités CH impliquent également que l’invariant imaginaire pur le plus simple construit uniquement à partir de deux combinaisons de spurions hermitiennes  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  est nécessairement  $\det[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ . Avec trois combinaisons de spurions différentes, l’invariant complexe le plus simple est  $\langle \mathbf{ABC} - \mathbf{CBA} \rangle$ , tandis qu’avec quatre combinaisons, a priori il y a beaucoup de nouveaux invariants.

Pour spécifier, étant donné l’ensemble des combinaisons de spurions se transformant comme des octets, l’analogie de l’invariant de Dirac n’apporte rien de nouveau dans la mesure où l’équation (3.75) reste vérifiée

$$J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},1} = \frac{1}{2i} \det[\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e, \Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu] = J_{\mathcal{CP}}^{\text{Dirac}}. \quad (3.77)$$

La sensibilité aux phases de Majorana est perdue dans  $\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu$ . Par essais et erreurs, l'invariant le plus simple sensible à ces phases s'avère être [76, 105]

$$J_{CP}^{\text{Majo},2} = \frac{1}{2i} \langle \Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu \cdot \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \cdot \Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu - \Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu \cdot \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \cdot \Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu \rangle. \quad (3.78)$$

Bien que cette quantité purement imaginaire s'annule quand tous les leptons chargés ou les neutrinos sont dégénérés en masses, ce n'est pas le cas quand seulement deux leptons ou deux neutrinos le sont. En conséquence, un produit simple de différences de masses ne peut pas être factorisé et cet invariant n'a pas d'expression analytique simple.

Si on cherche un invariant qui ne s'annule pas pour des neutrinos dégénérés, on doit éviter les chaînes dans lesquelles des facteurs  $\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu$  ou  $\Upsilon_\nu \Upsilon_\nu^\dagger = (\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu)^T$  apparaissent, car on a  $\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu = \Upsilon_\nu \Upsilon_\nu^\dagger = (m_\nu^2/v^2)\mathbb{I}_3$  dans la limite dégénérée. Il s'ensuit que toutes occurrences de  $\Upsilon_\nu$  ou de  $\Upsilon_\nu^\dagger$  doit être encadrée par des puissances de  $\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e$  ou de  $(\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T$ . Les invariants de ce type les plus simples sont

$$\begin{aligned} J_{CP}^{\text{Majo},3} &= \text{Im} \langle (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2 \cdot \Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu \cdot \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \cdot (\Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu)^2 \rangle, \\ J_{CP}^{\text{Majo},4} &= \text{Im} \langle (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2 \cdot \Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu \cdot \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \cdot \Upsilon_\nu^\dagger ((\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2)^T \Upsilon_\nu \rangle. \end{aligned} \quad (3.79)$$

L'invariant  $2iJ_{CP}^{\text{Majo},3} = \det[\Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu, \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e]$  a déjà été trouvé dans [106], mais ce n'est pas le plus grand car  $J_{CP}^{\text{Majo},3} = (m_\nu^2/v^2) \times J_{CP}^{\text{Majo},4}$  dans la limite dégénérée. Notons également que pour ces deux invariants, le facteur  $(\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2$  doit apparaître au lieu de simplement  $(\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)$  car sinon les identités CH permettraient de réordonner les termes comme ceci  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^2 + (\text{moins de facteurs})$ , auquel cas les contractions  $\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu$  ou  $\Upsilon_\nu \Upsilon_\nu^\dagger$  apparaîtraient et les invariants s'annuleraient de nouveau dans la limite dégénérée.

**EDMs de leptons :** Pour chacune des traces invariantes précédentes, on peut construire une chaîne de spurions non-hermitienne correspondante. Le raisonnement est similaire au cas de Dirac et là aussi il faut au moins quatre insertions de masses de neutrinos :

$$\mathbf{X}_e^{\text{Majo},1} = [\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu, \Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu], \quad (3.80)$$

$$\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2} = [\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu, \Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu], \quad (3.81)$$

$$\mathbf{X}_e^{\text{Majo},3} = [\Upsilon_\nu^\dagger ((\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2)^T \Upsilon_\nu, \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \cdot \Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu \cdot \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e], \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_e^{\text{Majo},4} &= \Upsilon_\nu^\dagger ((\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2)^T \Upsilon_\nu \cdot \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \cdot \Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu \\ &\quad - \Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu \cdot \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \cdot \Upsilon_\nu^\dagger ((\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^2)^T \Upsilon_\nu. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Ces structures de saveurs partagent plusieurs propriétés avec les  $J_{CP}^{\text{Majo},i}$ . Du fait de l'équation (3.75), la combinaison  $\mathbf{X}_e^{\text{Majo},1}$  reproduit l'invariant de Dirac de l'équation (3.68). Le  $\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2}$  est spécifique au cas de Majorana, il existe car il y a plus de deux combinaisons de spurions se transformant comme des octets et les combinaisons  $\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu$  et  $\Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu$  sont toutes les deux non-diagonales dans la base d'interaction où  $\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e$  est diagonale. En outre, comme  $J_{CP}^{\text{Majo},2}$ , il ne dépend que de façon quartique des masses de neutrinos, est sensible aussi bien à la phase PMNS qu'aux phases de Majorana, a une expression analytique très compliquée, mais s'annule dès lors que les trois leptons chargés ou les trois neutrinos sont dégénérés en masses. D'autres structures de ce type peuvent être construites mais elles impliquent toutes un plus grand nombre d'insertions  $\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e$  ou  $\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu$  et sont donc plus supprimées.

Finalement, les deux derniers  $\mathbf{X}_e^{\text{Majo},3}$  et  $\mathbf{X}_e^{\text{Majo},4}$  sont les combinaisons les plus simples survivant dans la limite dégénérée stricte des masses de neutrinos, lorsque  $\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu \rightarrow (m_\nu^2/v^2)\mathbb{I}_3$ . Dans ce cas,

notons que  $(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},3})^{ii} = (m_{\ell i}/v)^2 \times (\mathbf{X}_e^{\text{Majo},4})^{ii}$  étant donné que la chaîne de spurions  $\mathbf{X}_e^{\text{Majo},3}$  finit ou commence par le facteur diagonal  $\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e$ . Tout de même, la règle de somme (3.60) reste vérifiée dans les deux cas puisqu'on a  $\langle \mathbf{X}_e^{\text{Majo},3} \rangle = \langle \mathbf{X}_e^{\text{Majo},4} \rangle = 0$ .

### Estimations numériques des EDMs :

Pour estimer la taille des EDMs de quarks et de leptons, plusieurs pièces doivent être assemblées. Premièrement, les combinaisons de spurions sont évaluées en y injectant les valeurs de fonds dans l'équation (3.72). A ce stade, les expressions analytiques dans la plupart des cas sont bien trop compliquées pour être écrites explicitement. Néanmoins, afin d'illustrer les dépendances dans les différents paramètres, donnons un exemple. On considère  $J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},2}$  en ne gardant que les termes dominants en  $\mathcal{O}(m_\tau^4)$  et jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(\sin \theta_{13})$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},2} &= \frac{m_\tau^4}{v^8} s_{23}^2 \left( s_{12}^2 c_{12}^2 s_{23}^2 \mu_{12}^4 \sin(2\alpha_M) + s_{12}^2 c_{23}^2 \mu_{13}^4 \sin(2\beta_M) + c_{12}^2 c_{23}^2 \mu_{32}^4 \sin(2(\alpha_M - \beta_M)) \right) \\ &+ s_{13} \frac{2m_\tau^4}{v^8} c_{12} c_{23} s_{12} s_{23}^3 \mu_{12}^4 \left( s_{12}^2 \sin(2\alpha_M + \delta_{13}) - c_{12}^2 \sin(2\alpha_M - \delta_{13}) \right) \\ &+ s_{13} \frac{2m_\tau^4}{v^8} c_{12} c_{23}^3 s_{23} s_{12} \left( \mu_{32}^4 \sin(2\alpha_M - 2\beta_M + \delta_{13}) - \mu_{13}^4 \sin(2\beta_M - \delta_{13}) \right), \end{aligned} \quad (3.84)$$

où l'on a posé  $\mu_{ab}^4 = m_{\nu^a} m_{\nu^b} (m_{\nu^a}^2 - m_{\nu^b}^2)$  ainsi que  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ ,  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ . Cette expression reproduit à 5% près la série complète exacte, sur la plage autorisée pour l'échelle de masse de neutrino. Numériquement, le terme en  $\mathcal{O}(\sin \theta_{13})$  est sous dominant, mais est cependant pertinent quand les phases de Majorana sont suffisamment petites pour permettre à la phase de Dirac de contribuer significativement. Hormis quand  $\alpha_M - \beta_M$  est proche de  $\pi/2$ , le troisième terme domine, tandis que la dépendance en  $\delta_{13}$  provient essentiellement des termes  $\sin(2\beta_M - \delta_{13})$  et  $\sin(2\alpha_M - 2\beta_M + \delta_{13})$ . Notons finalement que l'expression analytique de  $(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2})^{11}$  est similaire et possède en particulier les mêmes dépendances en masses de neutrinos  $\mu_{ab}^4$  (en accord avec les calculs exacts à deux boucles [107, 108, 109]), mais dépend différemment des phases violant- $\mathcal{CP}$ . Explicitement, ses termes dominants en  $\mathcal{O}(m_\tau^2)$  et jusqu'à  $\mathcal{O}(\sin \theta_{13})$  sont,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} (\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2})^{11} &= \frac{m_\tau^2}{v^6} s_{23}^2 s_{12}^2 c_{12}^2 \mu_{12}^4 \sin(2\alpha_M) \\ &+ s_{13} \frac{m_\tau^2}{v^6} c_{12} c_{23} s_{12} s_{23} \mu_{12}^4 \left( s_{12}^2 \sin(2\alpha_M + \delta_{13}) - c_{12}^2 \sin(2\alpha_M - \delta_{13}) \right) \\ &+ s_{13} \frac{m_\tau^2}{v^6} c_{12} c_{23}^3 s_{23} s_{12} \left( \mu_{32}^4 \sin(2\alpha_M - 2\beta_M + \delta_{13}) - \mu_{13}^4 \sin(2\beta_M - \delta_{13}) \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

En pratique, comme aucune des phases de violation- $\mathcal{CP}$  leptonique ne sont connues, on reporte dans le tableau (3.1) les valeurs absolues maximales atteignables lorsque  $\delta_{13}$ ,  $\alpha_M$ , et  $\beta_M$  sont autorisées à prendre n'importe quelles valeurs, c'est à dire varient sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ . La grande plage d'ordres de grandeurs balayée par les différentes combinaisons peut être comprise par les dépendances en masses des leptons chargés et neutrinos. Spécifiquement, le mécanisme de GIM pour les leptons est toujours effectif et toutes les combinaisons de spurions s'annulent dans la limite  $m_e = m_\mu = m_\tau$ . Dans le cas plus restrictif de deux leptons chargés dégénérés, seuls  $J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},1}$  et  $\mathbf{X}_e^{\text{Majo},1}$  s'annulent. D'autre part, le mécanisme de GIM pour les neutrinos est seulement effectif pour  $\Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu \rightarrow \mathcal{O}(\Delta m_\nu^2/v^2)$  et les masses absolues des neutrinos surviennent pour  $\Upsilon_\nu^\dagger (\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T \Upsilon_\nu \rightarrow \mathcal{O}(m_\nu^2 m_\ell^2/v^4)$  et  $\Upsilon_\nu^\dagger ((\mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e)^T)^2 \Upsilon_\nu \rightarrow \mathcal{O}(m_\nu^2 m_\ell^4/v^6)$ . Ces comportements sont illustrés en figure 3.7.

S'il n'y a pas de nouvelle physique au-delà d'un terme de masse de Majorana pour les neutrinos, ces structures de saveurs doivent découler d'interactions électrofaibles, voir figure 3.6. L'ordre EW

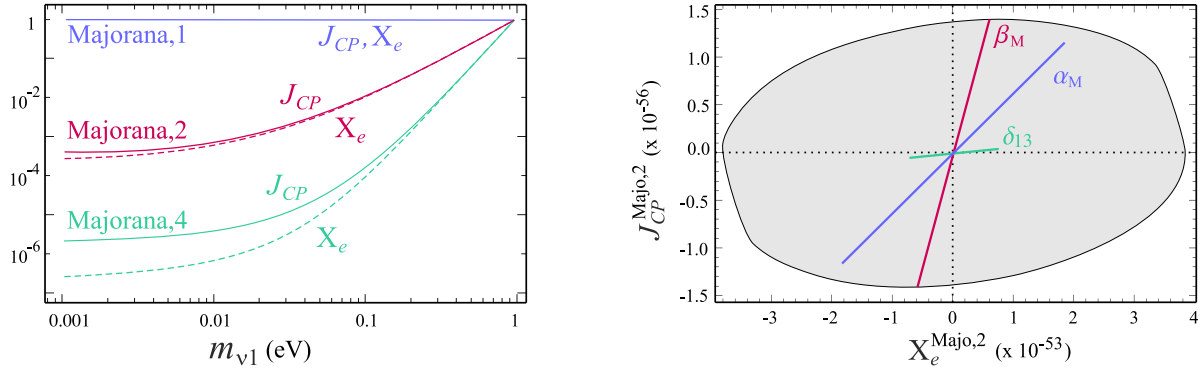


FIGURE 3.7 – **Gauche** : Evolutions de  $J_{CP}^{\text{Majo},i}$  et  $(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},i})^{11}$ ,  $i = 1, 2, 4$ , en fonction de la masse du neutrino le plus légers  $m_{\nu 1}$ , normalisés à leurs valeurs respective pour  $m_{\nu 1} = 1$  eV. Le cas  $i = 1$  correspond à la combinaison de type Jarlskog des équations (3.77) and (3.80) et ne dépend que des différence de masses des neutrinos. Le cas  $i = 2$  représente les combinaisons plus simples des équations (3.78) and (3.81), et  $i = 4$  les combinaisons dominantes survivant dans le cas de neutrinos dégénérés des équations (3.79) et (3.83). **Droite** : Aire balayée par  $J_{CP}^{\text{Majo},2}$  et  $(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2})^{11}$  pour  $m_{\nu 1} = 1$  eV lorsque la phase PMNS  $\delta_{13}$  et les phases de Majorana  $\alpha_M, \beta_M$  sont autorisées à prendre n'importe quelles valeurs. Les droites montrent la corrélation stricte se réalisant quand une seule phase est non nulle. Le non-alignement de ces trois droites explique la décorrélation exhibée par l'aire grise.

auquel cela se produit peut être déterminé en comptant le nombre de transitions de courants chargés, i.e., les contractions entre  $\Upsilon_\nu$  et  $\mathbf{Y}_e$  ou leur transposée (adjoint) dans la chaîne de spurions. Ceci correspond aussi aux nombres de matrices PMNS survivantes. Pour cela, un ordre supplémentaire doit être ajouté pour l'EDM de quarks, car la boucle de lepton doit être connectée au courant hadronique. Les diagrammes avec trois photons contribuent aussi et sont de tailles comparables comme

$$\frac{g^2}{4\pi} \frac{1}{M_W^2} \approx \left(\frac{e^2}{4\pi}\right)^3 \frac{1}{\Lambda_{had}^2} \approx 10^{-6}, \quad (3.86)$$

avec  $\Lambda_{had}$  l'échelle hadronique typique. Finalement, pour le premier invariant  $J_{CP}^{\text{Majo},1} = J_{CP}^{\text{Dirac}}$  et sa structure rainbow associée  $\mathbf{X}_e^{\text{Majo},1} = \mathbf{X}_e^{\text{Dirac}}$ , au moins une boucle électrofaible additionnelle est requise afin d'obtenir des résultats non-nuls, en analogie avec les contributions CKM des équations (3.21) et (3.29). Par opposition, les boucles électrofaibles dans le cas de Majorana  $J_{CP}^{\text{Majo},2}$  et  $\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2}$  ont des propriétés symétriques différentes et aucune boucle supplémentaire n'est nécessaire [107, 108, 109, 110]. A priori, il en est de même pour les cas dégénérés, bien que ça n'ait pas été vérifié explicitement. Quoi qu'il en soit, ce n'est pas pertinent numériquement dans la mesure où les neutrinos étant plus légers qu'environ 1 eV, ils ne sont jamais assez dégénérés pour inverser la forte hiérarchie  $J_{CP}^{\text{Majo},3} \ll J_{CP}^{\text{Majo},4} \ll J_{CP}^{\text{Majo},2}$ . Les ordres totaux EW attendus auxquels chaque combinaison de spurions survient sont listés dans le tableau 3.1.

En tant que dernière pièce pour estimer les EDMs, les basculements de chiralités et l'échelle globale de l'opérateur  $\Lambda \approx M_W$  apparaissant dans les équations (3.56) et (3.59) sont combinés dans les préfacteurs reportés dans le tableau 3.1. De plus, on inclut aussi dans ces préfacteurs les puissances adéquates de  $v/M_W$  pour compenser les normalisations des spurions, vu qu'en pratique des rapports de masses de fermions par  $M_W$  devraient survenir des boucles EW. Bien entendu, ces estimations d'ordres de grandeurs sont à considérer comme très approximatifs dans la mesure où des effets dynamiques sont négligés.

	$m_{\nu 1} \lesssim 0.01 \text{ eV}$		$m_{\nu 1} = 1 \text{ eV}$		EDM scaling		
	Only $\delta_{13}$	All	Only $\delta_{13}$	All	Flavor	Gauge	Prefactor [ $e \cdot \text{cm}$ ]
$J_{CP}^{\text{Majo},1}$	$10^{-93}$	$10^{-93}$	$10^{-93}$	$10^{-93}$	$\frac{(\Delta m_\nu^2)^3 (\Delta m_\ell^2)^3}{v^{12}}$	$\alpha_W^{2+1+1}$	$10^{-14}$
$J_{CP}^{\text{Majo},2}$	$10^{-60}$	$10^{-59}$	$10^{-58}$	$10^{-56}$	$\frac{m_\nu^2 \Delta m_\nu^2 m_\ell^4}{v^8}$	$\alpha_W^{2+1}$	$10^{-15}$
$J_{CP}^{\text{Majo},3}$	$10^{-107}$	$10^{-107}$	$10^{-100}$	$10^{-97}$	$\frac{m_\nu^6 m_\ell^{12}}{v^{18}}$	$\alpha_W^{5+1}$	$10^{-12}$
$J_{CP}^{\text{Majo},4}$	$10^{-83}$	$10^{-80}$	$10^{-77}$	$10^{-75}$	$\frac{m_\nu^4 m_\ell^{12}}{v^{16}}$	$\alpha_W^{4+1}$	$10^{-12}$
$(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},1})^{11}$	$10^{-82}$	$10^{-82}$	$10^{-82}$	$10^{-82}$	$\frac{(\Delta m_\nu^2)^3 \Delta m_\ell^2}{v^8}$	$\alpha_W^{2+1}$	$10^{-16}$
$(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2})^{11}$	$10^{-56}$	$10^{-56}$	$10^{-53}$	$10^{-53}$	$\frac{m_\nu^2 \Delta m_\nu^2 m_\ell^2}{v^6}$	$\alpha_W^2$	$10^{-17}$
$(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},3})^{11}$	$10^{-82}$	$10^{-82}$	$10^{-78}$	$10^{-75}$	$\frac{m_\nu^4 m_e^{10}}{v^{14}}$	$\alpha_W^4$	$10^{-14}$
$(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},4})^{11}$	$10^{-71}$	$10^{-71}$	$10^{-67}$	$10^{-64}$	$\frac{m_\nu^4 m_\ell^8}{v^{12}}$	$\alpha_W^4$	$10^{-15}$

TABLE 3.1 – Estimations numériques des combinaisons de spurions construites dans les sections précédentes. Les valeurs obtenues ne changent pas significativement lorsque la masse du neutrino le plus légers est plus petite qu'environ 0.01 eV, voir figure 3.7. Dans chaque cas, la dépendance en masses de neutrinos et de leptons chargés est indiquée. Les estimations correspondantes des EDMs de quarks et de leptons sont obtenues en multipliant le facteur de jauge, le préfacteur et la combinaison de spurions.

Ayant les structures de saveurs des EDMs de leptons et de quarks, on peut étudier leurs corrélations. Cela nous renseignera sur la sensibilité relative de ces EDMs vis-à-vis des phases de violation- $\mathcal{CP}$  sous-jacentes. Pour les structures de type Jarlskog  $J_{CP}^{\text{Majo},1}$  et  $(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},1})^{11}$ , qui ne dépendent pas de l'échelle de masse absolue des neutrinos ou des phases de Majorana, le rapport des deux expressions (voir équations (3.67) et (3.69)) est entièrement fixé par les masses des leptons

$$\frac{\text{Im}(\mathbf{X}_e^{\text{Dirac}})^{11}}{2J_{CP}^{\text{Dirac}}} = \frac{v^4}{(m_\tau^2 - m_e^2)(m_\mu^2 - m_e^2)} \approx 10^{11}. \quad (3.87)$$

Au contraire, pour les masses de Majorana, la présence de trois sources séparées de violation- $\mathcal{CP}$  décorrèle les EDMs de quarks et de leptons. La figure 3.7 montre le résultat d'un scan faisant varier  $\delta_{13}$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sur toute la plage autorisée et  $m_{\nu 1} \in [0, 1] \text{ eV}$ . De ce graphique, il est apparent que même si les expressions analytiques de  $J_{CP}^{\text{Majo},2}$  et  $(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2})^{11}$  sont similaires, voir les équations (3.84) et (3.85), leurs dépendances différentes à travers les fonctions trigonométriques ont d'importantes conséquences. Bien que cela requiert certainement un niveau d'ajustement fin, il est même possible d'inverser la hiérarchie et d'avoir  $J_{CP}^{\text{Majo},2} > (\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2})^{11}$ . Cependant, augmenter le rapport  $d_{u,d}/d_e$  de cette manière est limité. Lorsque  $(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2})^{11} \lesssim J_{CP}^{\text{Majo},2}$ , la contribution dominante aux EDMs de leptons provient de  $\mathbf{X}_e = \mathbb{I}_3 \times J_{CP}^{\text{Majo},2}$ , voir équation (3.56). Cela correspond à la situation dans laquelle les EDMs de quarks et de leptons sont induits par la même boucle de lepton, voir figure 3.6. Etant contrôlé par le même invariant et à moins d'une annulation finement ajustée entre les contributions rainbow et bubble à  $d_e$ , les EDMs doivent vérifier

$$\frac{d_d}{m_d} \lesssim \frac{d_e}{m_e}. \quad (3.88)$$

Bien sûr, toutes ces valeurs sont bien au-delà des sensibilités prévues mais nous allons discuter dans la prochaine partie comment amplifier ces valeurs afin qu'elles deviennent atteignables par les expériences.



### 3.4.3 Mécanismes de seesaw

Les valeurs de fonds des spurions de neutrinos dans les deux cas de Dirac et de Majorana sont extrêmement supprimés, simplement car les neutrinos sont très légers. Il s'ensuit que les combinaisons de spurions contrôlant les transitions LFV ou les EDMs finissent bien trop supprimées pour les rendre accessibles expérimentalement. D'un point de vue théorique, ces valeurs de fonds sont trop petites pour être naturelle et il est généralement accepté que cette suppression a une origine dynamique. Après tout, l'opérateur de Weinberg duquel le petit terme de masse de Majorana provient n'est pas renormalisable. S'il survient à une échelle très haute, les neutrinos gauches seraient automatiquement légers. Il y a trois façons de réaliser ceci dynamiquement à l'arbre [111], dépendant de comment étendre de façon minimale le contenu en particules du MS. Le mécanisme de seesaw de type I introduit des singlets faibles de neutrinos droits lourds [112, 113, 114, 115], celui de type III ajoute des triplets faibles de neutrinos droits tandis que le seesaw de type II étend le secteur scalaire du MS d'un triplet faible de champs scalaires [116].

Dès lors que la suppression des masses de neutrinos est gérée dynamiquement, on se retrouve avec des structures de saveurs bien moins supprimées. Bien entendu, en l'absence de toute NP, le seul accès à basse énergie à ces structures de saveurs est à travers le terme de masse de neutrinos, les rendant à nouveau inobservables. Cependant, si on suppose que de la NP existe pas trop loin de l'échelle EW, alors les structures de saveurs de neutrinos non supprimées pourraient directement impacter les transitions LFV et les EDMs. C'est l'objet de cette partie de traiter ces scénarios en utilisant les techniques développées dans les précédentes sections.

#### 3.4.3.1 Mécanisme de seesaw de type II

On introduit un triplet faible de champs scalaires  $\Delta_i, i = 1, 2, 3$  avec une hypercharge 2. Les couplages renormalisables autorisés sont (voir par exemple [117] pour une description détaillée)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{SM} + D_\mu \vec{\Delta}^\dagger \cdot D^\mu \vec{\Delta} - \vec{\Delta}^\dagger \vec{\Delta} M_\Delta^2 - \delta V(H, \vec{\Delta}) \\ & + \frac{1}{2} (\bar{L}^C \Upsilon_\Delta \vec{\sigma} L + \lambda_\Delta M_\Delta H^\dagger \vec{\sigma} H^\dagger) \cdot \vec{\Delta} + h.c. , \end{aligned} \quad (3.89)$$

où  $\delta V(H, \vec{\Delta})$  dénote le reste du potentiel scalaire. En intégrant le triplet  $\vec{\Delta}$  donne un terme de dimension-4 ainsi que l'opérateur de Weinberg de dimension-5 :

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{SM} + 2|\lambda_\Delta|^2 (H^\dagger H)^2 + \frac{1}{2} (\bar{L}^C H) \Upsilon_\Delta \frac{\lambda_\Delta}{M_\Delta} (LH) + \dots \quad (3.90)$$

La matrice de masse des neutrinos est alors linéaire en  $\Upsilon_\Delta$  :

$$v \mathbf{Y}_e = \mathbb{M}_e, \quad v \mathbf{Y}_\nu \equiv v^2 \Upsilon_\Delta \frac{\lambda_\Delta}{M_\Delta} \equiv U_{PMNS}^* \mathbb{M}_\nu U_{PMNS}^\dagger . \quad (3.91)$$

Avec un mécanisme de seesaw de type II, la vraie matrice de couplage de saveur élémentaire est  $\Upsilon_\Delta$  de l'équation (3.91), qui peut être d'ordre 1 quand  $M_\Delta/\lambda_\Delta$  est assez grand. Cependant, en l'absence de NP, il n'y a pas de sensibilité directe à  $\Upsilon_\Delta$  étant donné que tout ce qui compte à basse énergie c'est  $\Upsilon_\nu$ . Les taux de transitions LFV sont toujours ceux dans (3.66).

Imaginons qu'il y ait une nouvelle dynamique à une échelle intermédiaire  $\Lambda \ll M_\Delta$ , et que cette nouvelle dynamique soit contrôlée par  $\Upsilon_\Delta$ . La dépendance des taux LFV dans les paramètres de mélanges des neutrinos est inchangée car  $\Upsilon_\Delta$  et  $\Upsilon_\nu$  se transforment de la même manière, cependant ils sont globalement redimensionné par

$$\mathbf{X}_e^{\text{Type II}} = \Upsilon_\Delta^\dagger \Upsilon_\Delta = \left( \frac{M_\Delta}{v \lambda_\Delta} \right)^2 \Upsilon_\nu^\dagger \Upsilon_\nu . \quad (3.92)$$

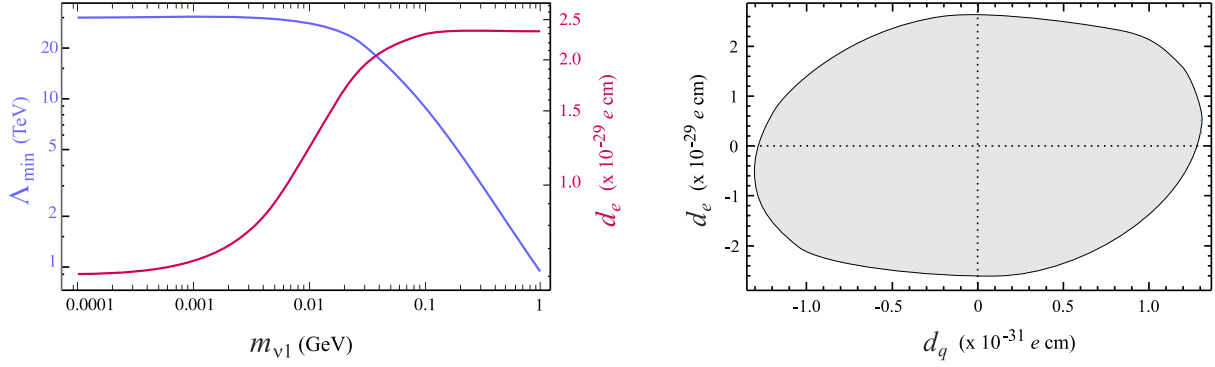


FIGURE 3.8 – **Gauche** : L'échelle minimale  $\Lambda$  des opérateurs magnétiques, équation (3.1), et l'EDM de l'électron correspondant, tel que  $\mu \rightarrow e\gamma$  sature sa limite expérimentale quand  $M_{\Delta}/v\lambda_{\Delta}$  est fixée à la limite de perturbativité, équation (3.94), en fonction de la masse du neutrino le plus légers  $m_{\nu 1}$ . **Droite** : Plage accessible des EDMs de quarks et de leptons dans le seesaw de type II, étant donnée la limite de perturbativité  $\Upsilon_{\Delta}^{IJ} \lesssim 4\pi$  ainsi que la limite expérimentale sur  $\mathcal{B}(\mu \rightarrow e\gamma)$ .

En injectant ceci dans l'équation (3.58), on peut établir à partir de la limite expérimentale une valeur maximale pour le paramètre d'échelle de seesaw  $M_{\Delta}/v\lambda_{\Delta}$  en fonction de l'échelle  $\Lambda$  :

$$\frac{M_{\Delta}}{v\lambda_{\Delta}} \lesssim 10^{12} \times \left[ \frac{\Lambda}{1 \text{ TeV}} \right]. \quad (3.93)$$

Pour ceci, on suppose que les processus LFV se produisent encore à l'ordre de boucle, i.e.,  $c_e \approx g^2/16\pi^2$  dans l'équation (3.58). Fixer  $c_e \approx 1$  diminue la limite d'un ordre de grandeur. D'autre part, la limite de perturbativité  $\Upsilon_{\Delta}^{IJ} \lesssim 4\pi$  limite  $M_{\Delta}/v\lambda_{\Delta}$  à

$$\frac{M_{\Delta}}{v\lambda_{\Delta}} \lesssim \frac{4\pi v}{m_{\nu}^{\max}}. \quad (3.94)$$

Notre but est de vérifier à quel point les EDMs peuvent être grands étant données les deux limites. On suppose que les opérateurs magnétiques surviennent tous à une boucle et contiennent donc un facteur  $g^2/16\pi^2$  dans les amplitudes LFV et EDMs. Sachant que  $\mu \rightarrow e\gamma$  est en  $(M_{\Delta}/v\lambda_{\Delta})^4/\Lambda^4$  tandis que les EDMs sont en  $(M_{\Delta}/v\lambda_{\Delta})^4/\Lambda^2$ , notre stratégie consiste à d'abord fixer  $M_{\Delta}/v\lambda_{\Delta}$  en saturant la limite de perturbativité, et puis de trouver pour cette valeur l'échelle minimale  $\Lambda_{\min}$  pour laquelle  $\mu \rightarrow e\gamma$  est compatible avec sa limite expérimentale, voir figure 3.8. La dépendance de  $\mu \rightarrow e\gamma$  dans les phases violant- $\mathcal{CP}$  est faible, donc cette borne inférieure de  $\Lambda$  est plutôt dure. Avec ces deux données,  $M_{\Delta}/v\lambda_{\Delta}$  et  $\Lambda_{\min}$ , on maximise alors les EDMs de quarks et de leptons en scannant sur les trois phases violant- $\mathcal{CP}$   $\delta_{13}$ ,  $\alpha_M$  et  $\beta_M$ . Comme expliqué dans la partie précédente (voir figure 3.7), les deux types d'EDMs sont décorrélés et balaye uniformément l'aire représentée en figure 3.8. A condition que  $\Upsilon_{\Delta}^{IJ}$  puisse saturer sa borne de perturbativité, l'EDM de l'électron peut se rapprocher de sa limite expérimentale  $|d_e| < 8.7 \cdot 10^{-29} e \cdot \text{cm}$  (90%) [58]. A cet égard, notons que la borne de perturbativité joue le rôle crucial. Si on impose  $\Upsilon_{\Delta}^{IJ} \lesssim 1$  au lieu de  $\Upsilon_{\Delta}^{IJ} \lesssim 4\pi$ , la valeur maximale pour  $M_{\Delta}/v\lambda_{\Delta}$  est réduite de  $4\pi$ , et il en est de même pour  $\Lambda_{\min}$  si la limite de  $\mu \rightarrow e\gamma$  reste saturée, mais l'EDM de l'électron se voit réduit de  $(4\pi)^2 \approx 160$ .

Concernant les quarks, d'abord, la limite  $\mu \rightarrow e\gamma$  implique  $|J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},2}|_{\max} \approx 10^{-6}$ . Naïvement, cela pousserait leurs EDMs provenant des opérateurs magnétiques au-delà de  $10^{-31} e \cdot \text{cm}$ . Néanmoins, en même temps,  $J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},2}$  décale également le terme  $\theta$  de

$$\Delta\theta_{eff}^{\text{quarks}} \sim \frac{g^2}{4\pi^2} \times J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},2} \sim 10^{-8}. \quad (3.95)$$

Etant données les approximations grossières impliquées, on considère ceci comme (à peine) compatible avec la borne  $\theta_C^{eff} \lesssim 10^{-10}$ . Cela montre que l'EDM du neutron induit par des phases de violation- $\mathcal{CP}$  leptoniques pourrait en principe saturer sa limite expérimentale.

Le décalage du terme  $\theta$  pose des contraintes strictes. Considérons par exemple le seesaw de type II étendu pour accommoder plusieurs doublets de Higgs. Les valeurs de fonds des spurions sont alors contrôlées par différentes VEVs,

$$v_d \mathbf{Y}_e = \mathbb{M}_e, \quad v_u \mathbf{Y}_\nu \equiv v_u^2 \mathbf{Y}_\Delta \frac{\lambda_\Delta}{M_\Delta} \equiv U_{PMNS}^* \mathbb{M}_\nu U_{PMNS}^\dagger. \quad (3.96)$$

De façon cruciale, les combinaisons de spurions pertinentes pour les EDMs ont un comportement différent dans la limite de grand  $\tan\beta = v_u/v_d$

$$J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},2} \sim (\tan\beta)^4, \quad (\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2})^{11} \sim (\tan\beta)^2, \quad (3.97)$$

tandis que les taux LFV ne sont pas directement affectés. Si  $\tan\beta$  est grand, la masse du neutrino le plus léger et/ou les phases de violation- $\mathcal{CP}$  doivent être telles que  $J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},2}$  soit loin de sa valeur maximale afin de satisfaire la limite  $\theta_C^{eff} \lesssim 10^{-10}$ . A ce stade, il est possible que  $d_e$  soit trop petit pour être observé, mais  $d_n$  est proche de sa limite expérimentale. Alternativement, un tel grand décalage  $\Delta\theta_{eff}^{\text{quarks}}$  serait totalement non pertinent si le mécanisme résolvant le problème de  $\mathcal{CP}$  fort du MS éliminait complètement  $\theta_C^{eff}$ . Ainsi, l'EDM est encore entièrement induit par les opérateurs magnétiques de l'équation (3.1). Comme  $J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},2}$  augmente plus vite avec  $\tan\beta$  que  $(\mathbf{X}_e^{\text{Majo},2})^{11}$ , on peut même imaginer que la limite actuelle sur l'EDM de l'électron est saturée par un pur  $J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},2}$ . Etant donné  $|d_e| < 8.7 \cdot 10^{-29} e \cdot cm$ , ceci correspond à

$$|J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},2}|_{\text{max}} \approx 10^{-3} \times \left[ \frac{\Lambda_{\text{min}}}{1 \text{ TeV}} \right]^2, \quad (3.98)$$

à comparer à  $|J_{\mathcal{CP}}^{\text{Majo},2}|_{\text{max}} \approx 10^{-6}$  quand  $\tan\beta = 1$ . A ce stade, la borne (3.88) implique que les EDMs de quarks ne peuvent pas au-dessus de  $d_q \approx 10^{-27} e \cdot cm$ , qui représente donc la valeur maximale atteignable en l'absence de  $\theta_C^{eff}$ .

### 3.4.3.2 Mécanismes de seesaw de type I et III

Le mécanisme de seesaw de type I étend le contenu en particules du MS en y ajoutant un triplet de saveurs de neutrinos droits. Les interactions de jauges autorisent alors à la fois un terme de masse de Dirac et de Majorana

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + i\bar{N} \not{\partial} N + \left( -\frac{1}{2} \bar{N}^C \mathbf{M} N - \bar{N}^C \mathbf{Y}_\nu LH + h.c. \right). \quad (3.99)$$

De plus, le terme de masse de Majorana n'a a priori pas de lien avec l'échelle électrofaible et peut très bien être bien plus grand. En supposant  $\mathbf{M} = \text{diag}(M_1, M_2, M_3)$  sans perte de généralité et en intégrant le champ  $N$ , on obtient de nouveau l'opérateur de Weinberg

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{SM} + \frac{1}{2} (\bar{L}^C H) \mathbf{Y}_\nu^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{Y}_\nu (LH) + h.c. . \quad (3.100)$$

A condition que  $\mathbf{M}$  soit suffisamment grand, les masses des neutrinos gauches seront très petits et ce même avec des couplages de Yukawa de neutrinos de taille naturelle,  $\mathbf{Y}_\nu \sim \mathcal{O}(\mathbf{Y}_{u,d,e})$ .

Au lieu d'un triplet de saveurs de singlets faibles  $N$ , on pourrait introduire des triplets de saveurs de triplets faibles  $\Sigma_i, i = 1, 2, 3$ , avec une hypercharge nulle. C'est le seesaw de type III. De tels champs peuvent se coupler aux doublets faibles à travers leur courant vectoriel comme ceci

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + i\bar{\Sigma}_i \not{D}\Sigma_i + \left( -\frac{1}{2}\bar{\Sigma}_i^c \mathbf{M}\Sigma_i - \bar{\Sigma}_i^c \mathbf{Y}_\nu (L\sigma^i H) + h.c. \right). \quad (3.101)$$

Les champs  $\Sigma_i$  étant dans la représentation adjointe, les couplages adéquats aux bosons de jauge sont contenus dans la dérivée covariante et un terme de masse de Majorana invariant de jauge est autorisé. Clairement, du point de vue de la symétrie de saveur, le contenu en spurions est identique à celui du mécanisme de seesaw de type I. En outre, le fait d'intégrer les champs  $\Sigma_i$  produit exactement le même opérateur de Weinberg que dans l'équation (3.100). Dans le reste de cette section, on procédera donc avec le seesaw de type I mais les développements seront tout aussi applicable au mécanisme type III.

A l'échelle de seesaw, il y a deux paramètres élémentaires brisant la symétrie de saveur,  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{Y}_\nu$ , qui se transforment sous le groupe de saveur étendu  $G'_F \equiv G_F \times U(3)_N$  [118]. Cependant, comme  $\nu_R$  n'est pas dynamique à basse énergie, aucune amplitude ne se transforme de façon non-triviale sous  $U(3)_N$ . Seulement les combinaisons de  $\mathbf{Y}_\nu$  et  $\mathbf{M}$  se transformant comme des singlets sous  $U(3)_N$  sont requises. De plus, intégrer  $\nu_R$  génère un développement en masse-inverse et avec  $\mathbf{M} \sim 10^{10} - 10^{13}$  GeV, seules les combinaisons de spurions dominantes doivent être gardées :

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_e &\sim (\bar{\mathbf{3}}, \bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{L,E,N} : \mathbf{Y}_e \xrightarrow{G_F} g_E^\dagger \mathbf{Y}_e g_L^\dagger, \\ \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu &\sim (\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{L,E,N} : \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu \xrightarrow{G_F} g_L \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu g_L^\dagger, \\ \Upsilon_\nu &\equiv \nu \mathbf{Y}_\nu^T (\mathbf{M}^{-1}) \mathbf{Y}_\nu \sim (\bar{\mathbf{6}}, \mathbf{1}, \mathbf{1})_{L,E,N} : \Upsilon_\nu \xrightarrow{G_F} g_L^* \Upsilon_\nu g_L^\dagger. \end{aligned} \quad (3.102)$$

La matrice symétrique  $\Upsilon_\nu^T = \Upsilon_\nu$  correspond au très petit terme de masse de Majorana des neutrinos gauches. L'échelonnement  $\mathbf{Y}_e, \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu \gg \Upsilon_\nu$  est stable étant donné que ces combinaisons de spurions vivent dans des classes de trialités différentes de  $SU(3)^5$ .

Dans ce cas, il n'est pas possible de fixer sans ambiguïtés les valeurs de fonds de  $\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu$  à partir des données de neutrinos disponibles. Sans perte de généralités, cette indétermination peut être paramétrée [119] en termes d'une matrice complexe orthogonale inconnue  $\mathbf{R}$  avec  $\nu \mathbf{Y}_\nu = (\mathbf{M}^{1/2}) \mathbf{R} (\mathbf{m}_\nu^{1/2}) U_{PMNS}^\dagger$  où  $U_{PMNS}^\dagger$  est définie par la diagonalisation de  $\mathbf{Y}_e$  et  $\Upsilon_\nu$  et contient les phases de Majorana, voir équation (3.73). Pour procéder, on suppose que les neutrinos droits sont dégénérés, du moins en bonne approximation [120]. Ceci signifie que  $\mathbf{M}$  ne brise pas complètement  $U(3)_N$  mais laisse un sous-groupe  $O(3)$  conservé, et donc trois paramètres peuvent être éliminés. En effet, en partant de la décomposition polaire  $\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{H}$  avec  $\mathbf{U} = (\mathbf{R}^\dagger \mathbf{R})^{1/2}$  unitaire et  $\mathbf{H} = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{R}$  hermitienne, et en imposant  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbb{I}_3$ , la matrice orthogonale à six paramètres  $\mathbf{R}$  se décompose en  $\mathbf{R} = \mathbf{O} \mathbf{H}$  avec  $\mathbf{O}$  une matrice orthogonale réelle et  $\mathbf{H}$  une matrice hermitienne. La dégénérescence  $\mathbf{M} = M_R \mathbb{I}_3$  permet de se débarrasser de la matrice orthogonale avec la redéfinition inoffensive  $N \rightarrow \mathbf{O}^T N$ , de sorte que  $\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu$  se simplifie de la manière suivante [121]

$$\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu = \frac{M_R}{v^2} U_{PMNS} (\mathbf{m}_\nu^{1/2}) \mathbf{H}^2 (\mathbf{m}_\nu^{1/2}) U_{PMNS}^\dagger, \quad (3.103)$$

avec la matrice  $\mathbf{H}$  exprimée en termes d'une matrice antisymétrique réelle  $\Phi^{IJ} = \varepsilon^{IJK} \phi_K$  comme suit [121, 120]

$$\mathbf{H} = e^{i\Phi} = \mathbf{1} + \frac{\cosh r - 1}{r^2} i\Phi \cdot i\Phi + \frac{\sinh r}{r} i\Phi, \quad r = \sqrt{\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2}. \quad (3.104)$$

Les trois paramètres réels  $\phi_1, \phi_2$  et  $\phi_3$  affectent la taille des coefficients conservant- $\mathcal{CP}$  dans  $\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu$  et induisent des parties imaginaires violant- $\mathcal{CP}$ .

En l'absence de NP au-delà des neutrinos droits, les taux LFV surviendraient seulement à l'ordre  $O(M^{-2})$ ,

$$\mathbf{X}_e^{\text{Type I}} = \mathbf{Y}_\nu^\dagger \frac{v}{M^\dagger} \frac{v}{M} \mathbf{Y}_\nu + \mathbf{Y}_\nu^\dagger \frac{v}{M^\dagger} \mathbf{Y}_\nu^* \mathbf{Y}_\nu^T \frac{v}{M} \mathbf{Y}_\nu + \dots = \frac{v^2}{M_R^2} \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu + \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu + \dots \quad (3.105)$$

Le second terme reproduit exactement le cas de Majorana pur dans l'équation (3.75) et mène aux taux en dépendances quartiques en masses des neutrinos, voir équation (3.66). Le premier terme donne plutôt des taux quadratiques en masses des neutrinos mais n'est que légèrement moins supprimé (la même combinaison de spurions contrôle d'autres opérateurs FCNC, voir par exemple [122]). La situation change si de la NP est présente à une échelle intermédiaire  $\Lambda \ll M_R$ . Cette dynamique pourrait directement amener la sensibilité à  $\mathbf{Y}_\nu$ , de sorte que

$$\mathbf{X}_e^{\text{Type I}} = \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu . \quad (3.106)$$

Ce n'est pas seulement que les taux LFV sont quadratiques en masses des neutrinos au lieu de quartiques, mais ils sont également amplifiés par  $M_R^4/\Lambda^4$  comparé à la situation dans l'équation (3.105). Ceci se produit typiquement à une boucle en supersymétrie, où les masses des squarks et sleptons fixent l'échelle  $\Lambda$  tandis que les termes de brisure douce (soft-breaking) des sleptons apporte la dépendance en  $\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu$ . En injectant ceci dans les taux LFV, on établit à partir de la limite expérimentale sur  $\mu \rightarrow e\gamma$ ,

$$|\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu|^{21} \lesssim (10^{-2} - 10^{-4}) \times \left[ \frac{\Lambda}{1 \text{ TeV}} \right]^2 , \quad (3.107)$$

dépendant de si  $c_e \approx g^2/16\pi^2$  ou  $c_e \approx 1$  dans l'équation (3.58). Ceci est très proche de la borne de perturbativité,  $|\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu| \lesssim 4\pi$ , qui limite indirectement  $M_R$  pour des valeurs données de masses du neutrino légers et des paramètres  $\phi_i$

$$\frac{m_\nu^{\max}}{1 \text{ eV}} \frac{M_R}{10^{13} \text{ GeV}} \lesssim 12\pi e^{-2\sqrt{3} \max \phi_i} . \quad (3.108)$$

Du fait des dépendances exponentielles des  $\phi_i$ , l'échelle de seesaw doit rapidement décroître lorsque les  $\phi_i$  sont au-dessus de l'unité.

Quant aux EDMs, les deux combinaisons de spurions non supprimées par l'échelle de seesaw sont  $\mathbf{Y}_e$  et  $\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu$ , à partir desquels on peut seulement construire :

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{CP}}^{\text{Type I}} &= \frac{1}{2i} \det[\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu, \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e] , \\ \mathbf{X}_e^{\text{Type I}} &= [\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu, \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu \mathbf{Y}_e^\dagger \mathbf{Y}_e \mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu] . \end{aligned} \quad (3.109)$$

D'un point de vue de symétrie, ce sont les mêmes que dans le cas des neutrinos de Dirac, équations (3.67) et (3.68). Au-delà de cette similarité superficielle, la situation est différente étant donné que  $\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu$  possède plus de degrés de libertés et ne dépend que linéairement des masses de neutrinos légers. Par exemple, lorsque  $\phi_i = 0$ , on trouve  $v^2 (\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu)^{\text{Type I}} \rightarrow M_R U_{PMNS} \mathbf{m}_\nu U_{PMNS}^\dagger$  à comparer avec  $v^2 (\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu)^{\text{Dirac}} \rightarrow U_{PMNS} \mathbf{m}_\nu^2 U_{PMNS}^\dagger$  dans le cas de Dirac. Autrement dit,  $J_{\mathcal{CP}}^{\text{Type I}}$  et  $\mathbf{X}_e^{\text{Type I}}$  dépendent linéairement du produit des trois différences de masses de neutrinos dans cette limite et sont insensibles aux phases de Majorana. En revanche, ces deux propriétés sont perdues dès que  $\phi_i \neq 0$  : ni  $J_{\mathcal{CP}}^{\text{Type I}}$  ni  $\mathbf{X}_e^{\text{Type I}}$  ne s'annule quand seulement deux neutrinos sont dégénérés et tous les deux sont sensibles aux phases de Majorana. Ce qui est préservé quand même est leur dépendance en les masses des leptons chargés,

$$J_{\mathcal{CP}}^{\text{Type I}} \sim \prod_{i>j=e,\mu,\tau} \frac{m_i^2 - m_j^2}{v^2} , \quad (\mathbf{X}_e^{\text{Type I}})_{11} \sim \frac{m_\tau^2 - m_\mu^2}{v^2} . \quad (3.110)$$

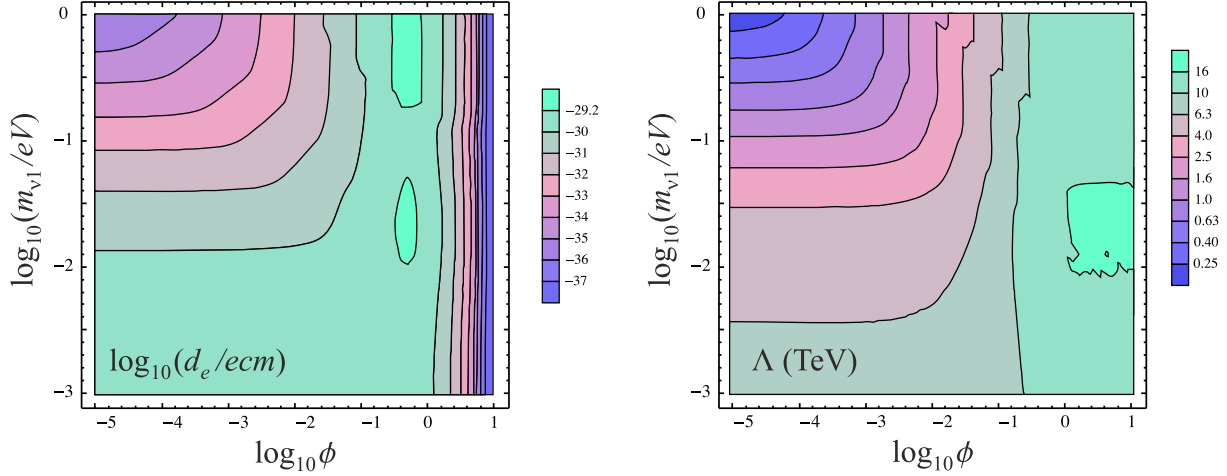


FIGURE 3.9 – EDM de l'électron et échelle minimale de l'opérateur effectif  $\Lambda_{\min}$  à laquelle  $\mu \rightarrow e\gamma$  est compatible avec sa limite expérimentale, en fonction de la masse du neutrino le plus légers et du paramètre  $\phi = \phi_1 = \phi_2 = \phi_3$ . Implicitement, l'échelle de seesaw est fixée pour chaque valeurs de ces paramètres en saturant la borne de perturbativité,  $|\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu| \lesssim 4\pi$ , tandis que l'EDM est maximisé sur les trois phases de violation- $\mathcal{CP}$  (à ce stade des fluctuations numériques peuvent se produire, d'où les petites irrégularités au niveau des contours).

Remarquablement, ces différences de masses de leptons chargés sont multipliées par le même facteur dans les deux expressions, et ce même quand  $\phi_i \neq 0$ . Ceci signifie que contrairement au cas de Majorana (voir figures 3.7 et 3.8), le rapport est fixé à

$$\frac{\text{Im}(\mathbf{X}_e^{\text{Type I}})_{11}}{2J_{\mathcal{CP}}^{\text{Type I}}} = \frac{\text{Im}(\mathbf{X}_e^{\text{Dirac}})_{11}}{2J_{\mathcal{CP}}^{\text{Dirac}}} = \frac{v^4}{(m_\tau^2 - m_e^2)(m_\mu^2 - m_e^2)} \approx 10^{11} \rightarrow \frac{d_q}{m_q} \approx 10^{-11} \times \frac{d_e}{m_e}. \quad (3.111)$$

En nette différence avec le seesaw de type II, les contributions savoureuses aux EDMs de quarks et de leptons sont strictement corrélées dans les mécanismes de seesaw de type I et III, et celle du type III reste beaucoup plus petite que celle du type I. Bien sûr, des effets dynamiques peuvent venir altérer cette stricte corrélation, par exemple à travers des dépendances logarithmiques en les masses de leptons chargés. Néanmoins, les ordres de grandeurs relatifs des EDMs de quarks et de leptons devraient être bien prédits par le comportement de ces combinaisons de spurions.

Une conséquence immédiate de la suppression de  $J_{\mathcal{CP}}^{\text{Type I}}$  se voit dans les EDMs de quarks. Les contributions magnétiques et générées par le décalage du terme  $\theta$  sont contrôlées par  $J_{\mathcal{CP}}^{\text{Type I}}$ , qui est au moins 11 ordres de grandeurs en dessous de  $(\mathbf{X}_e^{\text{Type I}})_{11}$ . L'EDM du neutron reste alors entièrement dominé par les contributions CKM, quoi qu'il arrive dans le secteur leptonique. Cette conclusion reste vraie en présence de deux doublets de Higgs, étant donné que l'équation (3.111) est modifié en

$$\frac{\text{Im}(\mathbf{X}_e^{\text{Type I}})_{11}}{2J_{\mathcal{CP}}^{\text{Type I}}} \approx \frac{v^4}{(m_\tau^2 - m_e^2)(m_\mu^2 - m_e^2)} \frac{1}{(\tan\beta)^4} \approx 10^5 \times \left(\frac{50}{\tan\beta}\right)^4. \quad (3.112)$$

Avec une aussi grande hiérarchie, la limite actuelle de  $d_e$  exclut tout signal dans  $d_q$ .

La situation pour les EDMs de leptons est différente. Afin de trouver les valeurs maximales atteignables (avec  $\tan\beta = 1$ ), suivons la même stratégie que pour le seesaw de type II, avec  $\mu \rightarrow e\gamma$  se comportant comme  $M_R^2/\Lambda^4$  et les EDMs comme  $M_R^3/\Lambda^2$ . Ainsi, pour une masse donnée de neutrino le plus légers  $m_{\nu 1}$ , le paramètre  $\phi \equiv \phi_1 = \phi_2 = \phi_3$ , ainsi que les phases violant- $\mathcal{CP}$ , on ajuste  $M_R$

pour saturer la borne de perturbativité  $|\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu| \lesssim 4\pi$ . Alors, on détermine l'échelle minimale  $\Lambda_{\min}$  pour laquelle  $\mu \rightarrow e\gamma$  est compatible avec sa limite expérimentale, puis on calcule les EDMs en supposant qu'ils surviennent à la même échelle. De plus, pour maintenir le parallèle avec le seesaw de type II discuté précédemment, on inclut un facteur  $g^2/16\pi^2$  pour tous les opérateurs magnétiques. Le résultat de cette analyse est montré en figure 3.9. Comme dans le seesaw de type II, il est possible de ramener  $d_e$  proche de sa limite expérimentale à condition que la borne de perturbativité soit appliquée  $|\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu| \lesssim 4\pi$ . En demandant que  $|\mathbf{Y}_\nu^\dagger \mathbf{Y}_\nu| \lesssim 1$  réduise  $M_R$  de  $4\pi$  tout en augmentant  $\Lambda_{\min}$  de  $\sqrt{4\pi}$ , pour une réduction nette de tous les EDMs de deux ordres de grandeurs,  $(4\pi)^2 \approx 160$ . Dans ce cas, augmenter  $\tan\beta$  est nécessaire pour ramener à nouveau  $d_e$  au-dessus de  $10^{-30} e \cdot \text{cm}$ .

### 3.4.4 Termes de masses de Majorana et invariants anomaux

Le terme de masse de Majorana viole explicitement le nombre leptonique qui n'est rien d'autre qu'une combinaison linéaire spécifique des cinq  $U(1)$ s du groupe de saveur  $U(3)^5$ . Comme dans le secteur des quarks, cela signifie que les invariants de  $SU(3)^5$  devraient être considérés. En effet, en généralisant l'équation (3.73) à  $U_{PMNS} = U_{PMNS}^{\text{Dirac}} \cdot \text{diag}(e^{i\gamma_M}, e^{i\alpha_M}, e^{i\beta_M})$ , les structures de saveurs leptoniques invariantes sous  $SU(3)^5$  mais non sous  $U(3)^5$  impliquent nécessairement

$$\begin{aligned} \text{Im det } \mathbf{Y}_\nu &= \frac{m_{\nu 1} m_{\nu 2} m_{\nu 3}}{\nu^3} \sin(\alpha_M + \beta_M + \gamma_M), \\ \text{Im } \varepsilon^{AJL} \varepsilon^{IKM} \mathbf{Y}_\nu^{IJ} \mathbf{Y}_\nu^{KL} \mathbf{Y}_\nu^{MB} &= \text{Im det } \mathbf{Y}_\nu \varepsilon^{AJL} \varepsilon^{BKL} = 2\delta^{AB} \text{Im det } \mathbf{Y}_\nu. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Avec des masses de neutrinos de l'ordre de 0.1 eV, ces structures sont toutes les deux d'ordre  $\mathcal{O}(10^{-34})$ , i.e., beaucoup plus grandes que celles invariantes sous le  $U(3)^5$  total. De plus, dans un seesaw de type II, on s'attendrait à ce que  $\text{Im det } \mathbf{Y}_\Delta$  apparaisse à la place, ce qui pourrait atteindre des valeurs  $\mathcal{O}(1)$ . La question que nous adressons ici consiste à savoir si ces derniers contribuent aux observables physiques comme des EDMs ou s'ils peuvent être éliminés par des rotations.

#### 3.4.4.1 Interactions anormales électrofaibles

Comme première étape, les relations entre le terme de masse de Majorana et le couplage violant- $\mathcal{CP}$  du MS  $\theta_W W_{\mu\nu} \tilde{W}^{\mu\nu}$  doivent être identifiées. Pour spécifier, sous des transformations de  $U(1)$  de saveureuses avec les paramètres  $3\alpha_{Q,L} = \arg \det V_L^{d,e^\dagger}$  et  $3\alpha_{U,D,E} = \arg \det V_R^{u,d,e}$ , on a

$$\theta_W \rightarrow \theta_W^{eff} = \theta_W - 3(\alpha_L + 3\alpha_Q). \quad (3.114)$$

Dans le MS, vu que  $U(1)_{\mathcal{B}+\mathcal{L}}$  est anomal, il est toujours possible de choisir  $\alpha_L + 3\alpha_Q$  de sorte à fixer  $\theta_W^{eff} = 0$  dans la mesure où  $\alpha_L$  et  $\alpha_Q$  sont laissés libres dès que les trois conditions dans l'équation (3.35) sont imposées. Ceci ne fixe pas séparément  $\alpha_L$  et  $\alpha_Q$  car  $U(1)_{\mathcal{B}-\mathcal{L}}$  reste une symétrie exacte non-anomale. En présence d'un terme de masse de Majorana, les deux groupes  $U(1)_{\mathcal{B}+\mathcal{L}}$  et  $U(1)_{\mathcal{B}-\mathcal{L}}$  sont brisés explicitement et toutes les rotations  $U(1)$  sont fixées. En effet, la convention pour les phases de Majorana détermine  $\alpha_L$  vu qu'en plus des trois conditions (3.35), il y'a maintenant

$$\arg \det \mathbf{Y}_\nu = 2 \arg \det U_{PMNS}^\dagger + 2 \arg \det V_L^{e^\dagger} = -2(\alpha_M + \beta_M + \gamma_M) + 6\alpha_L. \quad (3.115)$$

Dès que  $\alpha_L$  est choisie pour éliminer disons  $\gamma_M$ ,  $\alpha_Q$  doit être ajustée en conséquence pour annuler  $\theta_W^{eff}$ , tandis que  $\alpha_{U,D,E}$  sont fixées par la condition de masses réelles pour les fermions, équation (3.35). La conséquence principale de tout ceci est que la phase de l'invariant  $\det \mathbf{Y}_\nu$  ne peut pas être physique étant donné qu'il est toujours possible de choisir  $\alpha_L = (\alpha_M + \beta_M + \gamma_M)/3$ , auquel cas  $\arg \det \mathbf{Y}_\nu = 0$ .

Notons que ceci explique aussi a posteriori notre choix dans l'équation (3.39). Il est obligatoire de tenir compte de  $\theta_C^{eff}$  en agissant uniquement sur les champs singlets faibles droits, car sinon  $\alpha_Q$  ne serait pas libre mais dépendrait de  $\theta_C^{eff}$ . A son tour,  $\alpha_L$  aurait dû être fixée en termes de  $\theta_C^{eff}$  afin d'éliminer  $\theta_W$ , et les phases de Majorana des neutrinos dépendraient de  $\theta_C^{eff}$ .

La réalité de  $\det \Upsilon_\nu$  repose sur la possibilité de choisir  $\alpha_L$  même après que  $\theta_W$  ait été éliminée. Parce que le lagrangien total sauf le terme  $\Upsilon_\nu$  est invariant sous  $U(1)_{\mathcal{B}-\mathcal{L}}$ , cette symétrie peut être utilisée pour éliminer la phase globale du terme de masse de Majorana. A ce stade, on peut se demander ce qu'il se passerait si d'autres interactions à part  $\Upsilon_\nu$  violaient  $\mathcal{B}$  et/ou  $\mathcal{L}$ . Clairement, les interactions anomales électrofaibles  $\mathcal{B} + \mathcal{L}$

$$g_{SM}^{\mathcal{B}+\mathcal{L}} \sim g_{SM}^{\mathcal{B}+\mathcal{L}} (\varepsilon^{IJK} Q^I Q^J Q^K)^3 \times (\varepsilon^{IJK} L^I L^J L^K), \quad (3.116)$$

ne sont pas affectées par la convention de phase adoptée pour les phases de Majorana dans la mesure où elles se transforment de la façon suivante

$$g_{SM}^{\mathcal{B}+\mathcal{L}} \rightarrow g_{SM}^{\mathcal{B}+\mathcal{L}} \exp 3i(3\alpha_Q + \alpha_L) = g_{SM}^{\mathcal{B}+\mathcal{L}} \exp 3i\theta_W, \quad (3.117)$$

lorsque  $\theta_W^{eff} = 0$ . Vu que la même combinaison  $3\alpha_Q + \alpha_L$  que celle dans l'équation (3.114) apparaît, cette phase est fixée de façon non-univoque dès que l'absence du terme  $W_{\mu\nu} \tilde{W}^{\mu\nu}$  est imposée [123]. Il en est de même pour les opérateurs de Weinberg de dimension-6 [104], puisqu'ils préservent aussi  $\mathcal{B} - \mathcal{L}$ .

### 3.4.4.2 Invariants de Majorana à partir de couplages violant les nombres baryoniques et leptoniques

C'est seulement en présence de couplages violant  $\mathcal{B}$  et/ou  $\mathcal{L}$ , non-alignés ni avec la masse de Majorana ( $\Delta\mathcal{L} = 2n$ ,  $n$  entier) ni avec le couplage anomal  $\mathcal{B} + \mathcal{L}$  que leurs phases ne peuvent être définies sans ambiguïtés. Pour illustrer ce propos, considérons les deux opérateurs de dimension-9 (ici écrits en termes de spineurs de Weyl gauches) [124]

$$\mathcal{H}_{eff} = \delta_1 \frac{EL^2U^3}{\Lambda^5} + \delta_2 \frac{U^2D^4}{\Lambda^5} + h.c., \quad (3.118)$$

où  $\delta_1$  induit des transitions  $\Delta\mathcal{L} = 3, \Delta\mathcal{B} = 1$  et  $\delta_2$  induit des transitions  $\Delta\mathcal{L} = 0, \Delta\mathcal{B} = 2$ . Sous les transformations de  $U(1)^5$ ,

$$\begin{aligned} \delta_1 &\rightarrow \delta_1 \exp i(-\alpha_E + 2\alpha_L - 3\alpha_U) \rightarrow \delta_1 \exp i(3(\alpha_L + \alpha_Q) - \frac{1}{3} \arg \det \mathbf{Y}_e - \arg \det \mathbf{Y}_u), \\ \delta_2 &\rightarrow \delta_2 \exp i(-2\alpha_U - 4\alpha_D) \rightarrow \delta_2 \exp i(6\alpha_Q - \frac{2}{3} \arg \det \mathbf{Y}_u - \frac{4}{3} \arg \det \mathbf{Y}_d), \end{aligned} \quad (3.119)$$

où nous avons imposé l'équation (3.35). Parce-que les deux opérateurs dans  $\mathcal{H}_{eff}$  induisent des différents patterns de  $\Delta\mathcal{B}$  et  $\Delta\mathcal{L}$  que le terme de masse de Majorana ou les couplages anomaux du MS, ils dépendent différemment des rotations  $U(1)$ . Un choix donné pour  $\alpha_L$  et  $\alpha_Q$  peut enlever la violation- $\mathcal{CP}$  de certains couplages, mais ces derniers ne peuvent pas être tous réels simultanément. Ceci ressemble fortement à la façon dont la phase de violation- $\mathcal{CP}$  forte peut être transférée entre le terme  $G_{a,\mu\nu} \tilde{G}^{a,\mu\nu}$  et les termes de masses des quarks, mis à part que les contenus physiques des différents couplages sont très différents ici. En ayant différentes charges  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{L}$ , ceux-ci n'induisent pas les mêmes types d'observables, donc c'est plutôt déroutant de pouvoir déplacer une phase de violation- $\mathcal{CP}$  de cette manière.



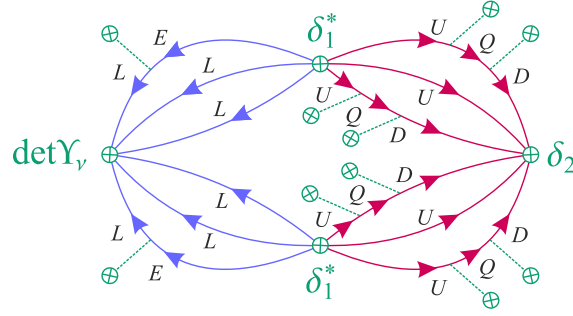


FIGURE 3.10 – Représentation diagrammatique de la contribution à l'EDM provenant de la combinaison des couplages effectifs dans la première équation de (3.120), où les tadpoles représentent des insertions de matrices de couplages de Yukawa.

La clef pour résoudre ceci est de supposer que l'invariant  $\det \Upsilon_\nu$  peut seulement provenir d'une interaction portant une charge globale  $\mathcal{L} = 6$ . Qu'elle soit locale ou pas, cette interaction ne contribue alors jamais directement aux EDMs. Au lieu de cela, au moins deux autres interactions non-alignées violant  $\mathcal{B}$  et/ou  $\mathcal{L}$  sont requises pour construire des combinaisons globales  $\Delta\mathcal{B} = \Delta\mathcal{L} = 0$ . A ce stade, seules les différences de phases entre les couplages impliqués comptent, et celles-ci ne dépendent pas des choix spécifiques faits pour  $\alpha_L$  et  $\alpha_Q$ . Par exemple, en présence des opérateurs anomaux de dimension-9, les phases de violation- $\mathcal{CP}$  induisant potentiellement des EDMs peuvent provenir de

$$\begin{aligned} \arg(\det \Upsilon_\nu \cdot \delta_1^{*2} \cdot \delta_2) - \frac{2}{3} \arg \det \mathbf{Y}_e - \frac{4}{3} \arg \det \mathbf{Y}_u + \frac{4}{3} \arg \det \mathbf{Y}_d &= -2(\alpha_M + \beta_M + \gamma_M), \\ \arg(\det \Upsilon_\nu \cdot \delta_1^{*3} \cdot g_{SM}^{\mathcal{B}+\mathcal{L}}) - \arg \det \mathbf{Y}_e - 3 \arg \det \mathbf{Y}_u &= -2(\alpha_M + \beta_M + \gamma_M), \\ \arg(\det \Upsilon_\nu \cdot \delta_2^3 \cdot (g_{SM}^{\mathcal{B}+\mathcal{L}})^{*2}) + 2 \arg \det \mathbf{Y}_u + 4 \arg \det \mathbf{Y}_d &= -2(\alpha_M + \beta_M + \gamma_M), \end{aligned} \quad (3.120)$$

où  $\delta_{1,2}$  et  $g_{SM}^{\mathcal{B}+\mathcal{L}}$  sont supposés réels, modulo les rotations de  $U(1)^5$  (à savoir,  $\text{Im } \delta_{1,2} = 0$  dans le membre de droite de l'équation (3.119)). Les trois phases de Majorana originales apparaissent dans la même combinaison pour les trois mécanismes, indépendamment des choix des  $\alpha$ 's vu qu'ils s'annulent. Les différents termes  $\arg \det \mathbf{Y}_{u,d,e}$  apparaissent du fait que certaines transitions de saveurs sont nécessaires pour relier les interactions effectives, voir figure 3.10. En définitive, les membres de gauches de ces équations sont invariants sous le groupe total  $U(1)^5$ . Sous cette forme, il est alors clair qu'un choix différent de  $\alpha_{U,D,E}$  dans lequel les phases violant- $\mathcal{CP}$  sont déplacées sur les masses des fermions ne change pas les EDMs. Finalement, notons que dès que la présence des interactions  $\Delta\mathcal{B}$  et  $\Delta\mathcal{L}$  rend physique la combinaison de phases de Majorana, il se pourrait aussi qu'elle soit accessible par d'autres processus. Considérons par exemple la désintégration di-proton, induite par l'interaction  $\delta_1^2$ . La phase  $\mathcal{CP}$  de cette amplitude est accessible seulement par interférence avec une autre amplitude, mais tout ce qui est disponible est  $\delta_2 \det \Upsilon_\nu$ . La différence de phases de ces deux amplitudes est précisément celle donnée dans l'équation (3.120).

En pratique, l'existence de cette contribution supplémentaire à l'EDM n'a pas d'impact si  $\text{Im } \det \Upsilon_\nu \lesssim O(10^{-34})$ . Même dans le cas le plus favorable  $\Upsilon_\Delta \approx 10^{12} \times \Upsilon_\nu$ , le facteur  $\delta_1^{*2} \delta_2$  apporte une suppression prohibitive en  $\Lambda^{-15}$  de sorte que

$$d_e \approx e \frac{m_e}{M_W^2} \frac{M_W^{15}}{\Lambda^{15}} \text{Im}(\det \Upsilon_\Delta \cdot \delta_1^{*2} \cdot \delta_2) \lesssim 10^{-37} \times \left[ \frac{1 \text{ TeV}}{\Lambda} \right]^{15} e \cdot \text{cm}, \quad (3.121)$$

lorsque  $\text{Im}(\det \Upsilon_\Delta \cdot \delta_1^{*2} \cdot \delta_2)$  est d'ordre  $O(1)$ . Alternativement, la limite actuelle sur  $d_e$  nécessite  $\Lambda \gtrsim 250$  GeV. Etant donné que la désintégration du proton ou encore les oscillations neutron-antineutron

devraient pousser  $\Lambda$  au-dessus du TeV, même en supposant que MFV s'applique à ces opérateurs [124], cette contribution est trop petite pour être vue. Bien que la situation décrite ici est plutôt particulière, avec des opérateurs effectifs de grandes dimensions uniquement, cette conclusion devrait être assez robuste. En tout cas, pour rester du bon côté, il vaudrait mieux garder ce mécanisme en tête dès lors que les neutrinos ont des termes de masses de Majorana ainsi que certaines interactions s'avérant aussi violer  $\mathcal{B}$  et/ou  $\mathcal{L}$ .



# CHAPITRE 4

## Théorie effective des champs (EFT)

---

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction aux EFT</b>	<b>83</b>
4.1.1	De la notion de théorie effective	83
4.1.2	Principe de construction en théorie quantique des champs	84
4.1.3	Comptage de puissance et correspondance à l'arbre	85
4.1.4	Groupe de renormalisation	88
4.1.5	Correspondance à une boucle	92
4.1.6	Redéfinitions des champs	95
4.1.7	Equations du mouvement	96
<b>4.2</b>	<b>Une théorie effective pour bosons de jauges</b>	<b>99</b>
4.2.1	Introduction : le lagrangien d'Euler-Heisenberg	99
4.2.2	Interactions effectives de photons	100
4.2.3	Interactions effectives de gluons	104
4.2.4	Généralisation aux bosons de jauges SU(N)	110

---

### 4.1 Introduction aux EFT

Cette section est inspirée des revues [[125](#), [126](#), [127](#)].

#### 4.1.1 De la notion de théorie effective

De la taille d'un quark à la taille de l'univers, la physique (connue) s'étend sur plus de 40 ordres de grandeurs et les phénomènes intéressants mis en jeu à chaque échelle sont d'une grande diversité. Dès lors que l'on s'intéresse à un ensemble de phénomènes ayant lieu à une échelle particulière, il est souhaitable de pouvoir démêler cet ensemble de phénomènes du reste de la physique afin d'être capable de le décrire sans pour autant tout connaître. Le concept de théorie effective, bien qu'étant toujours implicite, est une idée centrale en physique. Lorsque le physicien tente de modéliser un

système, les premières questions auxquelles il est confronté sont : quels sont les degrés de libertés pertinents permettant de décrire ce système ? Et quelles sont les interactions à considérer entre ces derniers ? Les réponses à ces questions définissent une théorie « effective » qui permettra de décrire un phénomène physique. Généralement, la dynamique mise en jeu à une certaine échelle est découplée de celle ayant lieu à une autre échelle (très) différente (basse énergie/haute énergie ou de façon équivalente longue distance/courte distance). Il en résulte que la physique à basse énergie peut être décrite par une théorie effective impliquant seulement quelques degrés de libertés (pertinents à cette échelle), en ignorant ceux qui sont en action à des échelles d'énergies supérieures (ou courtes distances). Comme tous les degrés de libertés et toutes les interactions ne sont pas considérées, les résultats obtenus dans ce cadre sont approximatifs et de ce fait, la question de la précision de ces résultats, c'est à dire de l'erreur commise se pose naturellement. Le cadre des EFT, de par sa transcription mathématique sous forme de développement perturbatif en un certain paramètre d'expansion, fournit une manière de quantifier et contrôler cette erreur en choisissant la précision de façon arbitraire à travers l'ordre auquel est tronqué la série perturbative. Construire une théorie effective consiste donc à trouver le cadre le plus simple (avec le moins de degrés de libertés et d'interactions) qui capture l'essentiel de la physique du phénomène considéré et ce avec une précision arbitraire.

Par exemple, afin de déterminer les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène, Böhr considéra comme seuls degrés de libertés le proton et l'électron en interaction coulombienne sans se préoccuper de la sous-structure du proton (inconnue à l'époque) ou d'autres interactions qui apporteraient de légères corrections à ce résultat. Mais est-ce vraiment nécessaire d'inclure toutes les contributions à une certaine quantité ? Cela dépend de la précision souhaitée. Si le fait de prendre en compte l'existence des quarks ne corrige les valeurs des niveaux d'énergie trouvées que de façon négligeable et au prix de calculs lourds, il serait plus raisonnable d'adopter une approche effective tout en quantifiant l'erreur commise due à l'omission de la contribution des quarks. L'approche EFT simplifie grandement les calculs, car toutes l'information contenue dans le proton est résumée en seulement deux paramètres, sa masse et sa charge. En faisant cela, les résultats obtenus pour les niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène sont satisfaisant en première approximation. Si on souhaite affiner la description, par exemple pour expliquer les niveaux hyperfins de l'atome d'hydrogène, alors il faudrait prendre en compte des paramètres supplémentaires qui sont le spin du proton ainsi que son moment magnétique. On pourrait également obtenir des résultats encore plus précis pour les niveaux d'énergie en considérant que le proton n'est pas ponctuel et en ajoutant aux paramètres déjà considérés le rayon de celui-ci.

En physique des particules, le seul paramètre pertinent est l'échelle d'énergie ou de façon équivalente l'échelle de distance ou de temps<sup>1</sup>. Dans une théorie quantique et relativiste, là où les particules peuvent être créées et annihilées, le concept de théorie effective (quantique) est particulièrement intéressant. L'idée centrale d'une théorie des champs quantiques est qu'à des énergies petites devant une échelle caractéristique  $\Lambda$ , tous les effets des degrés de libertés plus lourds que  $\Lambda$  peuvent être encodés dans de nouvelles interactions entre les champs restés actifs en dessous de  $\Lambda$ . Ce concept s'avère extrêmement utile car il consiste à négliger les phénomènes physiques siégeant au-delà d'une certaine énergie (ou en-deçà d'une certaine distance) et parmi ces effets qui peuvent être ignorés se trouvent toutes les particules trop lourdes pour être produites, même celles qu'on ne connaît pas. Ainsi, en éliminant les particules trop lourdes, la théorie se voit grandement simplifiée.

### 4.1.2 Principe de construction en théorie quantique des champs

La première étape dans la construction d'une théorie effective des champs (EFT) consiste à identifier les degrés de libertés pertinents (généralement les champs légers) pouvant décrire le phénomène

1. En effet, dans un système d'unités naturelles  $\hbar = c = 1$ , on a  $[Energie] = [distance]^{-1} = [temps]^{-1}$ .

physique auquel on s'intéresse. Considérons un exemple simple d'EFT où l'on choisit de décrire le système uniquement avec les particules légères, c'est à dire en omettant les champs lourds de la théorie. Généralement, une échelle d'énergie caractéristique correspondant au seuil de production on-shell des particules peut être définie et établit une séparation entre champs légers et champs lourds. Bien entendu, toutes les théories des champs sont forcément des théories effectives dans la mesure où nous ne connaissons pas tous les états lourds jusqu'à l'échelle de Planck, et donc nous omettons leurs effets (inconnus) de la théorie. En ce sens, les EFTs sont un moyen puissant de paramétrer la nouvelle physique, qui par définition est alors inconnue. Cette technique a été appliquée de façon plus ou moins sophistiquée dans un grand nombre de thématiques [126, 128, 129, 130] et se révèle être un outil puissant.

Dans le formalisme des intégrales de chemins, les champs lourds sont intégrés (integrated out) au niveau de l'action et par conséquent sont éliminés de la théorie

$$\int \mathcal{D}\phi_H e^{i \int \mathcal{L}(\phi_L, \phi_H)} = e^{i \int \mathcal{L}_{eff}(\phi_L)}, \quad (4.1)$$

où  $\phi_L$  et  $\phi_H$  dénotent respectivement les champs légers et lourds de la théorie. Comme souvent en pratique, pour des raisons de simplicité (ou parfois même de faisabilité), les calculs sont réalisés dans l'approche des diagrammes de Feynman plutôt que dans celle des intégrales de chemins. Lorsqu'on intègre les particules lourdes, on obtient une EFT entièrement définie par un nouveau lagrangien effectif impliquant seulement les champs légers (voir équation (4.1)). Le lagrangien effectif alors obtenu peut se décomposer en une composante finie contenant uniquement des opérateurs de dimension en énergie inférieure ou égale à quatre puis d'une autre composante contenant des opérateurs de dimensions supérieures à quatre organisée en série infinie de dimension croissante, appelée « tour d'opérateurs de dimensions supérieures ». Comme une longue phrase ne vaut pas une formule, on a :

$$\mathcal{L}_{eff}(\phi_L) = \mathcal{L}_{d \leq 4} + \sum_i \frac{O_i}{\Lambda^{dim(O_i)-4}}, \quad (4.2)$$

où  $\Lambda$  est une échelle caractéristique d'énergie et  $dim(O_i)$  la dimension en énergie de l'opérateur  $O_i$ . Notons que lorsque ce lagrangien effectif est utilisé pour des processus à basse énergie, c'est à dire  $\Lambda \ll m_{\phi_H}$ , les termes obtenus dans le développement (4.2) sont locaux (dans l'espace-temps).

En pratique, la tour infinie d'opérateurs de dimensions supérieures dans (4.2) est tronquée à un ordre arbitraire et seuls quelques termes s'avèrent être pertinents. L'idée est que la théorie effective doit reproduire les résultats expérimentaux avec une précision finie. Comme la précision d'une expérience est toujours finie, le nombre de termes considérés dans la série l'est aussi. Plus la dimension d'un opérateur est grande et plus sa contribution aux observables à basse énergie est petite. Ainsi, le nombre de termes gardés dans la série sera d'autant plus grand que la précision souhaitée. Ces termes de dimensions supérieures sont constitués d'opérateurs non-renormalisables, or étant donné que la série infinie est tronquée, on se retrouve seulement avec un nombre fini de paramètres libres requis pour pouvoir faire des prédictions, ce qui est exactement la même situation que dans les théories renormalisables. C'est pourquoi dans cette approche, les théories non-renormalisables conviennent tout autant que celles qui le sont.

### 4.1.3 Comptage de puissance et correspondance à l'arbre

Le formalisme des EFTs est basé sur un développement en série systématique en un certain paramètre d'expansion, qui peut être par exemple le rapport des échelles d'énergies considérées<sup>2</sup>. Dans

2. Ces échelles d'énergies peuvent être : les masses des particules lourdes, l'énergie à laquelle se déroule l'expérience, le transfert d'impulsion, etc...

ce cadre, on peut garder une trace des puissances du paramètre d'expansion (ordre de la série), car il est souhaitable que l'EFT construite permette de prédire les ordres de grandeurs des différents termes dans le lagrangien effectif. En comptant les puissances (power counting) d'un terme, on peut alors déduire le comportement de ce dernier lorsque l'énergie est modifiée. Dans les cas les plus aisés, le comptage de puissance se réduit à une simple analyse dimensionnelle en unités naturelles ( $\hbar = c = 1$ ), pour lesquelles toutes les unités peuvent être ramenées à une certaine puissance de l'énergie (ou de façon équivalente de la masse), qu'on appelle la dimension en énergie (ou abusivement la dimension tout court). La dimension d'un champ est généralement déterminée à partir de son terme cinétique dans la densité lagrangienne.

Prenons un exemple de théorie contenant un champ fermionique  $\psi$  sans masse ainsi que deux champs scalaires réels (un léger  $\phi$  de masse  $m$  et un lourd  $\Phi$  de masse  $M \gg m$ ) couplés par une interaction de type Yukawa. Le lagrangien de la théorie UV (à haute énergie) est donc :

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{M^2}{2}\Phi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \lambda\bar{\psi}\psi\Phi - \eta\bar{\psi}\psi\phi. \quad (4.3)$$

On souhaite construire une EFT impliquant seulement les champs légers comme degrés de liberté, à savoir le fermion  $\psi$  et le scalaire léger  $\phi$ . En intégrant le scalaire lourd  $\Phi$ , celui-ci sera éliminé de la théorie UV et ses effets seront encodés dans des nouvelles interactions de dimension supérieure impliquant les champs légers.

Pour commencer, examinons le processus de diffusion  $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$  à l'ordre  $O(\lambda^2\eta^0)$  dans les constantes de couplages, en gardant les termes jusqu'à l'ordre deux en impulsions externes. Les diagrammes à l'arbre y contribuant sont représentés figure 4.1.

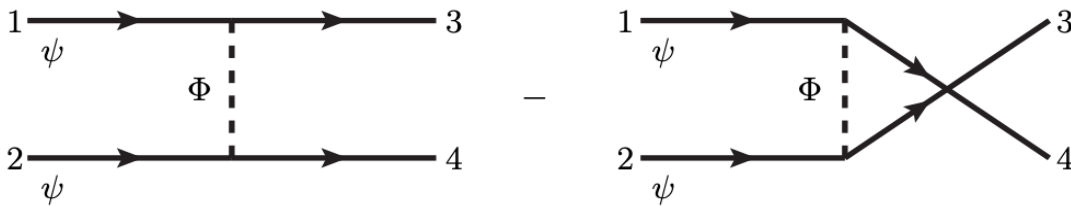


FIGURE 4.1 – Diagrammes à l'arbre contribuant à la diffusion  $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$  à l'ordre  $O(\lambda^2)$ . Source : [127]

Intégrer des champs dans l'approche diagrammatique consiste tout d'abord à calculer l'amplitude du processus considéré d'une part dans la théorie complète (à haute énergie, aussi appelée théorie UV) et d'autre part avec la théorie effective construite (à basse énergie, aussi appelée théorie IR), puis en égalant la limite à basse énergie de l'amplitude UV et l'amplitude EFT. Cette étape clef est appelée la correspondance (matching), car elle fait correspondre les deux théories à basse énergie, comme attendu pour une EFT.

Dans notre exemple, l'amplitude UV à l'ordre  $O(\lambda^2)$  est donnée par les diagrammes à l'arbre sur la figure 4.1, et on obtient :

$$\mathcal{A}_{UV} = \bar{u}(p_3)u(p_1)\bar{u}(p_4)u(p_2)(-i\lambda)^2 \frac{i}{(p_3 - p_1)^2 - M^2} - \{3 \leftrightarrow 4\}, \quad (4.4)$$

où  $\{3 \leftrightarrow 4\}$  signifie le même terme en interchangeant  $p_3$  et  $p_4$ . La structure tensorielle de l'amplitude (ici spinorielle) est la même dans la théorie UV et dans l'EFT donc nous pouvons nous concentrer uniquement sur le propagateur, dont on gardera le développement limité jusqu'à l'ordre 2 en impulsion

externes

$$(-i\lambda)^2 \frac{i}{(p_3 - p_1)^2 - M^2} = i \frac{\lambda^2}{M^2} \frac{1}{1 - \frac{(p_3 - p_1)^2}{M^2}} \approx i \frac{\lambda^2}{M^2} \left(1 + \frac{(p_3 - p_1)^2}{M^2} + \mathcal{O}\left(\frac{p^4}{M^4}\right)\right). \quad (4.5)$$

Ici, le paramètre d'expansion sur lequel est construite l'EFT est le rapport  $\frac{p^2}{M^2}$  et il servira à contrôler la précision souhaitée.

A l'ordre  $\mathcal{O}(p^0)$ , l'amplitude de diffusion  $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$  peut être reproduite par le lagrangien effectif suivant :

$$\mathcal{L}_{p^0, \lambda^2} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{c}{2}\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi, \quad (4.6)$$

où l'on a omis les termes impliquant le scalaire léger car ce dernier ne joue aucun rôle ici. L'amplitude EFT calculée en utilisant ce lagrangien effectif est :

$$\mathcal{A}_{EFT} = \bar{u}(p_3)u(p_1)\bar{u}(p_4)u(p_2)(ic) - \{3 \leftrightarrow 4\}. \quad (4.7)$$

En comparant les amplitudes calculées dans les deux théories, on effectue la correspondance et on obtient  $c = \frac{\lambda^2}{M^2}$ .

A l'ordre suivant  $\mathcal{O}(p^2)$ , le lagrangien effectif suivant peut être construit

$$\mathcal{L}_{p^2, \lambda^2} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{\lambda^2}{2M^2}\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi + d\partial_\mu\bar{\psi}\partial^\mu\psi\bar{\psi}\psi. \quad (4.8)$$

De la même manière qu'à l'ordre précédent, il s'agit de comparer l'amplitude UV à basse énergie et l'amplitude EFT calculée à l'aide de ce lagrangien effectif. Au cours de cette procédure de correspondance, tout choix judicieux d'impulsions externes (par exemple une condition on-shell) qui pourrait simplifier les calculs peut être fait, à condition de faire le même choix dans les deux théories pour la correspondance. En effet, les impulsions des particules externes n'ont rien à voir avec la dynamique à haute énergie. Ici par exemple, on peut faire le choix utile de supposer les champs externes sur couche de masse (on-shell), c'est à dire  $p_{1,2,3,4}^2 = 0$ , ce qui simplifie grandement les expressions dans la mesure où les seules dépendances possibles sont celles qui s'expriment sous la forme d'un produit de Minkowski des 4-impulsions  $p_i \cdot p_j$ . Par conséquent, la seule partie de l'amplitude UV à basse énergie que doit reproduire l'EFT est  $-2i\frac{\lambda^2}{M^2}\frac{p_1 \cdot p_3}{M^2} - \{3 \leftrightarrow 4\}$ . Le terme impliquant le coefficient  $d$  dans le lagrangien effectif  $\mathcal{L}_{p^2, \lambda^2}$  donne l'amplitude

$$\mathcal{A}_{EFT} = id(p_1 \cdot p_3 + p_2 \cdot p_4)\bar{u}(p_3)u(p_1)\bar{u}(p_4)u(p_2) - \{3 \leftrightarrow 4\}. \quad (4.9)$$

En effet, les impulsions  $p_{1,2}$  sont supposées entrantes et contribuent alors à l'amplitude avec  $-ip_{1,2}^\mu$  alors que les impulsions  $p_{3,4}$  sont sortantes et donc contribuent avec  $+ip_{3,4}^\mu$ . La conservation de l'impulsion  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$  nous donne  $p_1 \cdot p_2 = p_3 \cdot p_4$ ,  $p_1 \cdot p_3 = p_2 \cdot p_4$  et  $p_1 \cdot p_4 = p_2 \cdot p_3$ . En somme, on effectue la correspondance entre les deux théories et on obtient  $d = -\frac{\lambda^2}{M^4}$ .

Enfin, remarquons que l'opérateur dérivatif associé au coefficient  $d$  n'est pas le seul possible qu'on puisse écrire avec quatre fermions et deux dérivées. Par exemple, on pourrait inclure également  $(\partial^2\bar{\psi})\psi\bar{\psi}\psi$  ou encore  $\partial_\mu\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\partial^\mu\psi$ . En fait, lorsqu'on construit une EFT en général, il est crucial de considérer tous les termes possibles à un ordre donné. Il peut s'avérer ensuite que certains termes ne soit pas indépendants sous l'application de l'équation du mouvement (EOM) ou par intégration partie (nous verrons ceci plus en détail ultérieurement), dans ce cas le nombre d'opérateur à considérer se voit réduit (comme dans l'exemple ici) mais a priori, il faut tous les considérer dans un premier temps.



### 4.1.4 Groupe de renormalisation

Jusque là, nous avons intégré le scalaire lourd  $\Phi$  de la théorie UV et étudié les interactions effectives du fermion. Néanmoins, nous avons totalement ignoré le deuxième scalaire  $\phi$  présent dans la théorie complète. Nous avons obtenu le lagrangien effectif à l'arbre suivant

$$\mathcal{L}_{p^2, \lambda^2} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{c}{2}\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi + d\partial_\mu\bar{\psi}\partial^\mu\psi\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \eta\bar{\psi}\psi\phi, \quad (4.10)$$

et en effectuant la correspondance avec la théorie UV, nous avons calculé les coefficients  $c$  et  $d$ .

Considérons maintenant les contributions à une boucle à l'amplitude de diffusion  $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$ , à l'ordre  $\mathcal{O}(\lambda^2\eta^2)$ . A une boucle, on s'attendrait à une correction par rapport à l'amplitude à l'arbre de  $\frac{\eta^2}{(4\pi)^2}$ , le facteur  $\frac{1}{(4\pi)^2}$  provient de l'intégration de la boucle. Cependant, cette estimation n'est pas correcte dès lors que plusieurs échelles d'énergies sont en jeu comme ici si on considère le deuxième scalaire. Les deux échelles d'énergies sont les masses des deux scalaires avec  $m \ll M$ . En raison du fait que les deux échelles présentes une forte hiérarchie, l'amplitude peut contenir des grands logarithmes ( $\log(\frac{M}{m})$ ). En effet, dans une EFT, on sépare généralement les contributions à l'amplitude en deux types, ceux qui contiennent des grands logarithmes et ceux qui n'en contiennent pas. La partie sans logarithme provient de la correspondance alors que celle qui en contient est générée dans le processus d'évolution des paramètres sous le groupe de renormalisation (RG). Remarquons que lorsque nous effectuons la correspondance, nous comparons deux théories dont les contenus en particules sont différents vu que dans l'une des deux nous avons intégré (éliminé) des champs. Ainsi, cette étape doit impérativement être réalisée à la même échelle d'énergie pour les deux théories, c'est à dire avec la même échelle de renormalisation. Cette échelle de correspondance (matching scale) est usuellement prise comme étant la masse de la particule lourde qui a été intégrée. Dans ces conditions, une seule échelle d'énergie est en jeu et de ce fait nous ne générerons pas de grands logarithmes. Etant donné que les deux théories sont les mêmes à basse énergie par construction, les logarithmes du rapport de l'échelle de correspondance et d'une échelle d'énergie basse seront identiques dans les deux théories.

Afin de pouvoir changer d'échelle, nous avons besoin d'établir la dépendance en énergie des paramètres de notre lagrangien effectif, autrement dit : les équations du groupe de renormalisation (RGEs). Supposons que nous voulions connaître l'amplitude à l'échelle  $m$ , en négligeant le terme proportionnel à  $d$  dans le lagrangien effectif car nous nous intéresserons seulement à la partie de l'amplitude indépendante des impulsions. Le comptage de puissance nous apprend que l'amplitude recherchée est proportionnelle à  $\frac{\lambda^2\eta^2}{16\pi^2 M^2}$ . Le terme contenant deux dérivées sera proportionnel à  $\frac{1}{M^4}$ , et donc ce dernier doit être supprimé d'un facteur  $\frac{m^2}{M^2}$  par rapport au terme dominant. En fait, ce raisonnement n'est valable que si l'on utilise un régulateur indépendant d'échelle (mass-independent regulator), comme par exemple la régularisation dimensionnelle avec une prescription de soustraction minimal (MS). Généralement, les autres méthodes de régularisation (cut-off, Pauli-Villars etc...) compliquent grandement le comptage de puissance.

Pour établir la dépendance en énergie du coefficient  $c$  (RG running), nous devons déterminer au préalable les constantes de renormalisation perturbative ( $Z$  factors). Tout d'abord, calculons l'amplitude de la self-énergie du fermion  $\mathcal{A}_{self}$ , dont le diagramme est le suivant :

On a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{self} &= (-i\eta)^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i(\not{k} + \not{p})}{(k+p)^2} \frac{i}{k^2 - m^2} = \eta^2 \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{l + (1-x)\not{p}}{(l^2 - \Delta^2)^2} \\ &= \frac{i\eta^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \left( \int_0^1 dx (1-x)\not{p} \right) + \text{termes finis} = \frac{i\eta^2 \not{p}}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{termes finis}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

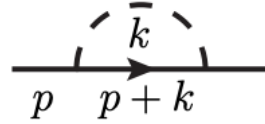


FIGURE 4.2 – Diagramme de Feynman de la self-énergie du fermion.

où l'on a utilisé la technique des paramètres de Feynman pour combiner les dénominateurs puis nous avons translaté l'impulsion de boucle  $l = k + xp$  pour enfin utiliser les résultats standards des intégrales de références. Comme souvent, on effectue un développement en série en la dimension  $d = 4 - 2\epsilon$  puis on garde seulement les termes ayant une structure de pôle en  $\frac{1}{\epsilon}$ , car les termes finis ne jouent pas de rôle dans le calcul des RGEs.

Intéressons nous maintenant aux corrections à une boucle apportées aux vertex effectif à quatre-fermions. Les diagrammes concernés sont représentés en figure 4.3 et correspondent à toutes les façons possibles d'apparier deux lignes externes.

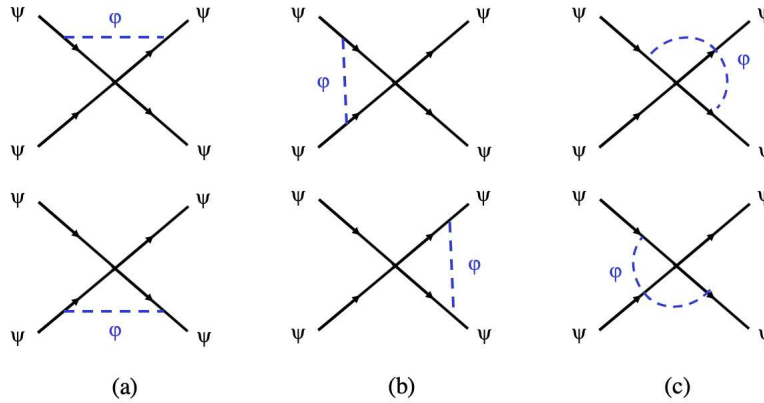


FIGURE 4.3 – Diagramme à une boucle contribuant à la renormalisation de l'interaction à quatre fermion. Figure modifiée à partir de [127].

Tous ces diagrammes possèdent des divergences UV logarithmiques et comme nous sommes uniquement intéressé par les parties divergentes, nous pouvons négliger les impulsions externes ainsi que les masses des particules. En ce qui concerne les deux diagrammes (a) de la figure 4.3, leur partie divergente est :

$$2(-i\eta)^2 ic \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i\cancel{k}}{k^2} \frac{i\cancel{k}}{k^2} \frac{i}{k^2} = -2c\eta^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^4} = -\frac{2ic\eta^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{termes finis.} \quad (4.12)$$

Quant aux diagrammes b, ils sont un peu plus délicats dans la mesure où l'intégration de la boucle implique deux lignes fermioniques différentes. La partie divergente s'écrit :

$$2(-i\eta)^2 ic \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \bar{u}(p_3) \frac{i\cancel{k}}{k^2} u(p_1) \bar{u}(p_4) \frac{-i\cancel{k}}{k^2} u(p_2) \frac{i}{k^2} = \frac{ic\eta^2}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \bar{u}(p_3) \gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma_\mu u(p_2) + \text{termes finis,} \quad (4.13)$$

et est exactement annulée par celle des diagrammes  $c$  :

$$2(-i\eta)^2 ic \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \bar{u}(p_3) \frac{ik}{k^2} u(p_1) \bar{u}(p_4) \frac{ik}{k^2} u(p_2) \frac{i}{k^2}. \quad (4.14)$$

Pour calculer les RGEs, considérons que la partie impliquant le fermion en négligeant le terme proportionnel à  $d$ . Le lagrangien original étant exprimé en termes des champs nus (bare fields) et des paramètres nus, on renormalise ces derniers pour avoir les champs et paramètres renormalisés  $\psi_0 = \sqrt{Z_\psi} \psi$  et  $c_0 = c\mu^{2\epsilon} Z_c$ . Le lagrangien devient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{p^0, \lambda^2 \eta^2 \log} &= i\bar{\psi}_0 \not{\partial} \psi_0 + \frac{c_0}{2} \bar{\psi}_0 \psi_0 \bar{\psi}_0 \psi_0 = iZ_\psi \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \frac{c}{2} Z_c Z_\psi^2 \mu^{2\epsilon} \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi \\ &= i\bar{\psi} \not{\partial} \psi + \mu^{2\epsilon} \frac{c}{2} \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi + i(Z_\psi - 1) \bar{\psi} \not{\partial} \psi + \mu^{2\epsilon} \frac{c}{2} (Z_c Z_\psi^2 - 1) \bar{\psi} \psi \bar{\psi} \psi. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Les contre-termes doivent annuler les divergences obtenues dans les équations (4.11) et (4.12). En imposant cela, les constantes multiplicatives de renormalisation doivent satisfaire :

$$\begin{cases} Z_\psi - 1 &= -\frac{\eta^2}{2(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon} \\ c(Z_c Z_\psi^2 - 1) &= \frac{2c\eta^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}, \end{cases} \quad (4.16)$$

où l'on a utilisé la prescription de soustraction minimal (MS) qui consiste à ne garder que les pôles en  $\frac{1}{\epsilon}$ . En combinant les deux conditions précédentes (4.16), obtient

$$Z_c = 1 + \frac{3\eta^2}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (4.17)$$

La méthode usuelle pour calculer les RGEs repose sur le fait que les quantités nus ne dépendent pas de l'échelle de renormalisation.

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} c_0 = \mu \frac{d}{d\mu} (c\mu^{2\epsilon} Z_c) = \beta_c \mu^{2\epsilon} Z_c + 2\epsilon c \mu^{2\epsilon} Z_c + c \mu^{2\epsilon} \mu \frac{d}{d\mu} Z_c, \quad (4.18)$$

avec  $\beta_c \equiv \mu \frac{dc}{d\mu}$ . De plus, on a  $\mu \frac{d}{d\mu} Z_c = \frac{3}{(4\pi)^2} 2\eta\beta_\eta \frac{1}{\epsilon}$ . En refaisant les mêmes étapes pour  $\eta$ , on obtient  $\beta_\eta = -\epsilon\eta - \eta \frac{d \log Z_\eta}{d \log \mu}$ . Le second terme est d'ordre supérieur donc nous ne garderons que le premier  $\beta_\eta = -\epsilon\eta$ , ce qui donne  $\mu \frac{d}{d\mu} Z_c = -\frac{6\eta^2}{(4\pi)^2}$ . Finalement, on obtient :

$$\beta_c = \frac{6\eta^2}{(4\pi)^2} c. \quad (4.19)$$

Ainsi, à l'ordre dominant, la constante de couplage  $c$  à basse énergie est donné par

$$c(m) = c(M) - \frac{6\eta^2}{(4\pi)^2} c \log\left(\frac{M}{m}\right) = \frac{\lambda^2}{M^2} \left(1 - \frac{6\eta^2}{(4\pi)^2} \log\left(\frac{M}{m}\right)\right). \quad (4.20)$$

A ce stade, les RGEs doivent être résolues afin de pouvoir re-sommer les logarithmes. Sans le faire en détail, en résolvant l'équation pour  $\eta$ , on obtient

$$\frac{1}{\eta^2(\mu_2)} - \frac{1}{\eta^2(\mu_1)} = \frac{10}{(4\pi)^2} \log \frac{\mu_1}{\mu_2}. \quad (4.21)$$

En injectant l'équation (4.21) dans l'équation (4.19) puis en intégrant, on arrive au résultat suivant :

$$c(m) = c(M) \left( \frac{\eta^2(m)}{\eta^2(M)} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.22)$$

Le fait que la fonction beta ne dépende pas de l'échelle de renormalisation est caractéristique de l'utilisation de régulateurs indépendants d'échelle, comme par exemple la régularisation dimensionnelle avec la prescription MS.

Les diagrammes que l'on a dû calculer pour obtenir l'équation (4.20) sont en bijection avec les diagrammes dans la théorie complète (représentés en figure 4.4). Evidemment, les diagrammes dans l'EFT sont plus simples à calculer que ceux de la théorie UV dans la mesure où il y a moins de propagateurs (ceux impliquant les particules intégrées). Dans la théorie complète, on devrait également calculer les contributions finies des diagrammes en boîtes (box diagrams).

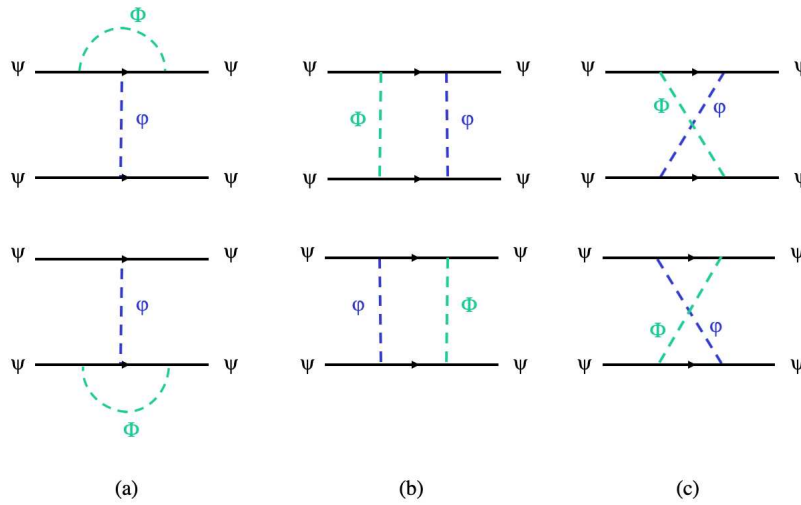


FIGURE 4.4 – Les diagrammes analogues dans la théorie complète de ceux de la figure 4.3 dans l'EFT. La ligne en pointillé bleu représente le scalaire lourd  $\Phi$  tandis que celle en vert le scalaire léger  $\phi$ . Figure modifiée à partir de [127].

En outre, lorsque nous avons intégré le scalaire lourd, le seul opérateur ne dépendant pas des impulsions générés à l'arbre est l'opérateur à quatre fermions  $\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$ . En réalité, ce n'est pas le seul opérateur à quatre fermions sans dérivées, comme par exemple l'opérateur  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$  qui possède la même dimension et le même contenu en particules. Supposons que nous avons intégré un champ vectoriel massif de masse  $M$  et que notre lagrangien effectif soit :

$$\mathcal{L}_{p^0,V} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{c_V}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \eta\bar{\psi}\psi\phi. \quad (4.23)$$

On pourrait alors se poser les mêmes questions concernant la diffusion à basse énergie dans cette théorie, c'est à dire calculer les RGE pour le coefficient  $c_V$ . Le calcul est parfaitement similaire à la seule différence près que le vertex à quatre fermion contient dans ce cas des matrices de Dirac  $\gamma^\mu$ . Les diagrammes *a* donnent une contribution divergente à l'opérateur  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$  alors qu'en sommant les parties divergentes des diagrammes *b* et *c*, il en résulte un terme proportionnel à  $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$  plutôt qu'à l'opérateur de départ. Autrement dit, cela signifie que sous l'évolution des RGE, les deux opérateurs se mélangent. En effet, les deux opérateurs ont la même dimension, le même contenu en

particules ainsi que les mêmes propriétés de symétrie, c'est pourquoi les corrections radiatives peuvent interchanger l'un en l'autre.

Conséquemment, il n'est pas cohérent à une boucle de considérer un seul opérateur à quatre fermions dans le lagrangien effectif (4.23) dans la mesure où un contre-terme supplémentaire est nécessaire afin d'absorber la divergence. A une boucle, le lagrangien effectif suivant est suffisant

$$\mathcal{L}_{p^0,VT} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + \frac{c_V}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + \frac{c_T}{2}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \eta\bar{\psi}\psi\phi. \quad (4.24)$$

Nous ne calculerons pas en détail les fonctions beta pour les nouveaux coefficients mais le calcul est complètement analogue à celui effectué précédemment pour  $\beta_c$ . L'opérateur vectoriel induit une contribution divergente absorbée par lui même et par l'opérateur tensoriel alors que ce dernier génère une contribution divergente entièrement absorbée par l'opérateur vectoriel. Les coefficients pour les contre-terms sont

$$\begin{cases} c_V(Z_V Z_\psi^2 - 1) &= \frac{\eta^2}{(4\pi)^2}(-c_V + 6c_T)\frac{1}{\epsilon}, \\ c_T(Z_T Z_\psi^2 - 1) &= \frac{\eta^2}{(4\pi)^2}c_V\frac{1}{\epsilon}, \end{cases} \quad (4.25)$$

avec des constantes  $Z$  différentes pour les deux opérateurs. On obtient alors les fonctions beta suivantes

$$\begin{cases} \beta_{c_V} &= 12c_T\frac{\eta^2}{(4\pi)^2} \\ \beta_{c_T} &= 2(c_T + c_V)\frac{\eta^2}{(4\pi)^2}. \end{cases} \quad (4.26)$$

### 4.1.5 Correspondance à une boucle

Jusque là, nous avons fait correspondre les deux théories à l'arbre, c'est à dire à l'ordre le plus bas dans le développement perturbatif en constante de couplage. La situation actuelle est que les deux théories reproduisent les mêmes résultats à basse énergie, seulement à l'arbre. En effet, si on augmente la précision des calculs, les deux théories vont commencer à différer. Il est possible de les faire à nouveau correspondre et ce avec la précision souhaitée, moyennant des calculs de plus en plus lourds. Par exemple, afin d'améliorer la précision de la correspondance des deux théories pour le calcul de la diffusion  $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$ , il suffit de faire la correspondance à l'ordre suivant, c'est à dire à une boucle. Comme exemple illustratif, étudions les termes d'ordre  $\mathcal{O}(\lambda^4)$ .

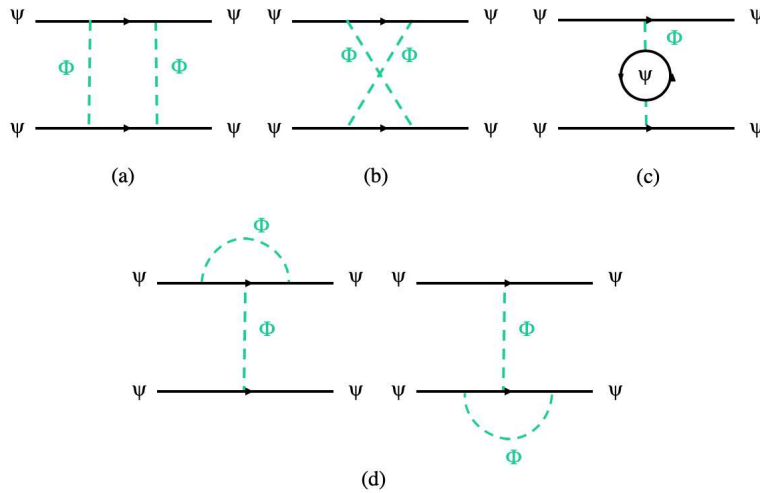
Pour commencer, considérons le lagrangien de la théorie UV (4.3) en négligeant le champ scalaire léger pour le moment dans la mesure où nous nous intéressons qu'au champ scalaire lourd  $\Phi$ . De plus, on y ajoute une petite masse  $\sigma$  au champ fermionique afin d'éviter les problèmes de divergences infrarouges.

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \sigma\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)^2 - \frac{M^2}{2}\Phi^2 - \lambda\bar{\psi}\psi\Phi. \quad (4.27)$$

Les diagrammes à une boucle contribuant à la diffusion  $\psi\psi \rightarrow \psi\psi$  sont représentés en figure 4.5.

Comme précédemment, nous ne considérerons que la partie de l'amplitude indépendante des impulsions et nous n'écriront pas les termes impliquant des échanges de fermions externes. Dans ces conditions, pour le diagramme (a), on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(a)} &= (-i\lambda)^4 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \bar{u}(p_3) \frac{i(\not{k} + \sigma)}{k^2 - \sigma^2} u(p_1) \bar{u}(p_4) i \frac{i(-\not{k} + \sigma)}{k^2 - \sigma^2} u(p_2) \frac{i^2}{(k^2 - M^2)^2} \\ &= \lambda^4 \left[ -\bar{u}(p_3) \gamma^\alpha u(p_1) \bar{u}(p_4) \gamma^\beta u(p_2) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k_\alpha k_\beta}{(k^2 - \sigma^2)^2 (k^2 - M^2)^2} \right. \\ &\quad \left. + \bar{u}(p_3) u(p_1) \bar{u}(p_4) u(p_2) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\sigma^2}{(k^2 - \sigma^2)^2 (k^2 - M^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4.28)$$


 FIGURE 4.5 – Diagrammes dans la théorie complète à l'ordre  $O(\lambda^4)$ . Figure modifiée à partir de [127].

Les intégrales de boucles sont évaluées à l'aide de la paramétrisation de Feynman

$$\frac{1}{(k^2 - \sigma^2)^2(k^2 - M^2)^2} = 6 \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{(k^2 - xM^2 - (1-x)\sigma^2)^4}. \quad (4.29)$$

Finalement, on obtient pour le diagramme (a)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(a)}^{UV} &= \frac{i\lambda^4}{(4\pi)^2} \left[ \frac{U_V}{2} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{xM^2 + (1-x)\sigma^2} + \sigma^2 U_S \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{(xM^2 + (1-x)\sigma^2)^2} \right] \\ &= \frac{i\lambda^4}{(4\pi)^2} \left[ U_V \left( \frac{1}{4M^2} + \frac{\sigma^2}{4M^4} \left( 3 - 2 \log \left( \frac{M^2}{\sigma^2} \right) \right) \right) + U_S \frac{\sigma^2}{M^4} \left( \log \left( \frac{M^2}{\sigma^2} \right) - 2 \right) \right] + \dots, \end{aligned} \quad (4.30)$$

où l'on a noté  $U_S = \bar{u}(p_3)u(p_1)\bar{u}(p_4)u(p_2)$  et  $U_V = \bar{u}(p_3)\gamma^\alpha u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma_\alpha u(p_2)$ . Les points de suspension traduisent l'omission des termes d'ordre  $O(\frac{1}{M^6})$  et plus.

En ce qui concerne le diagramme (b), l'amplitude est quasi identique hormis un signe d'impulsion qui change. On a alors

$$\mathcal{A}_{(b)}^{UV} = \frac{i\lambda^4}{(4\pi)^2} \left[ -U_V \left( \frac{1}{4M^2} + \frac{\sigma^2}{4M^4} \left( 3 - 2 \log \left( \frac{M^2}{\sigma^2} \right) \right) \right) + U_S \frac{\sigma^2}{M^4} \left( \log \left( \frac{M^2}{\sigma^2} \right) - 2 \right) \right] + \dots \quad (4.31)$$

Les diagrammes (c) et (d) sont quant à eux divergents. Pour le (c), on a

$$\mathcal{A}_{(c)}^{UV} = -4 \frac{i\lambda^4}{(4\pi)^2} \frac{\sigma^2}{M^4} U_S \left[ \frac{3}{\hat{\epsilon}} + 3 \log \left( \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) + 1 \right] + \dots, \quad (4.32)$$

avec  $\frac{1}{\hat{\epsilon}} = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \log(4\pi)$  et  $\mu$  l'échelle de régularisation. Ensuite, pour les deux diagrammes (d), on a

$$\mathcal{A}_{(d)}^{UV} = -2 \frac{i\lambda^4}{(4\pi)^2 M^2} U_S \left[ \frac{1}{\hat{\epsilon}} + 1 + \log \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) + \frac{\sigma^2}{M^2} \left( 2 - 3 \log \left( \frac{M^2}{\sigma^2} \right) \right) \right] + \dots \quad (4.33)$$

La somme de toutes ces contributions est alors

$$\mathcal{A}_{\text{totale}}^{UV} = \frac{2i\lambda^4 U_S}{(4\pi)^2 M^2} \left[ -\frac{1}{\hat{\epsilon}} - 1 - \log \left( \frac{\mu^2}{M^2} \right) + \frac{\sigma^2}{M^2} \left( -\frac{6}{\hat{\epsilon}} - 6 - 6 \log \left( \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) + 4 \log \left( \frac{M^2}{\sigma^2} \right) \right) \right]. \quad (4.34)$$

D'autre part, nous avons besoin de calculer la fonction à deux-points du fermion (avec la partie finie) pour la renormalisation de la fonction d'onde dans l'EFT. Le calcul est similaire à celui effectué plus haut pour la self-énergie (4.11). Pour la partie de l'amplitude linéaire en impulsion, on trouve  $i\cancel{p} \frac{\lambda^2}{2(4\pi)^2} \left( \frac{1}{\hat{\epsilon}} + \frac{1}{2} + \log\left(\frac{\mu^2}{M^2}\right) + \dots \right)$ .

Pour faire la correspondance, il faut maintenant calculer l'amplitude à une boucle dans la théorie effective. On a vu qu'une interaction à quatre fermions était déjà induite à l'arbre. Toujours en négligeant le scalaire léger  $\phi$ , le lagrangien effectif est

$$\mathcal{L}_{eff} = iz\bar{\psi}\phi\psi - \sigma\bar{\psi}\psi + \frac{c}{2}\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi. \quad (4.35)$$

De plus, en faisant correspondre les théories UV et EFT à l'arbre dans la partie 4.1.3, nous avons déjà établi précédemment que  $c = \frac{\lambda^2}{M^2}$ . L'amplitude à deux-points est nulle dans la théorie effective. Les diagrammes à quatre-points dans l'EFT sont représentés en figure 4.6. Généralement, le degré superficiel de divergence d'un diagramme donné est plus élevé dans la théorie effective que dans la théorie complète vu qu'il y a moins de propagateurs. En effet, le diagramme (a) dans la théorie UV (figure 4.5) était convergent alors que son équivalent dans l'EFT ((a) dans la figure 4.6) diverge quadratiquement.

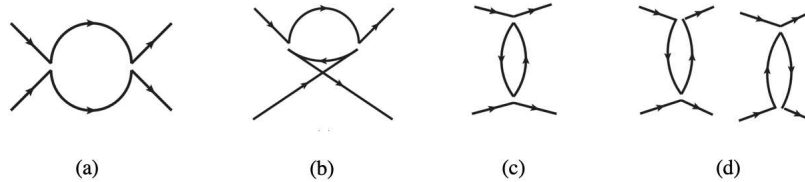


FIGURE 4.6 – Diagrammes dans la théorie effective à l'ordre  $\mathcal{O}(c^2)$ . Les vertex à quatre fermions sont représentés de façon non ponctuelle afin de pouvoir suivre les lignes fermioniques. Figure modifiée à partir de [127].

En premier lieu, considérons les diagrammes (a) et (b) dont les propagateurs fermioniques ne diffèrent que par le signe de leurs impulsions respectives. Dans ce cas, les termes proportionnels à  $U_V$  sont opposés dans les deux diagrammes et s'annulent donc lorsqu'on les somme tandis que la partie proportionnelle à  $U_S$  est la même dans les deux diagrammes et contribue donc à la somme des amplitudes. Ainsi, la partie de l'amplitude qui nous intéresse pour la somme des deux diagrammes (a) et (b) est

$$\mathcal{A}_{(a+b)}^{EFT} = 2 \frac{ic^2\sigma^2}{(4\pi)^2} U_S \left[ \frac{1}{\hat{\epsilon}} + \log\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right) \right] + \dots \quad (4.36)$$

Ensuite, le diagramme (c) est identique dans les deux théories, la partie de l'amplitude indépendante des impulsions s'écrit alors

$$\mathcal{A}_{(c)}^{EFT} = -4 \frac{ic^2\sigma^2}{(4\pi)^2} U_S \left[ \frac{3}{\hat{\epsilon}} + 3 \log\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right) + 1 \right] + \dots \quad (4.37)$$

En dernier lieu, en incluant le facteur 2 pour les deux diagrammes équivalents (d), on a

$$\mathcal{A}_{(d)}^{EFT} = 2 \frac{ic^2\sigma^2}{(4\pi)^2} U_S \left[ \frac{3}{\hat{\epsilon}} + 3 \log\left(\frac{\mu^2}{\sigma^2}\right) + 1 \right] + \dots \quad (4.38)$$

Finalement, la somme de tous les diagrammes est

$$\mathcal{A}_{(a+b+c+d)}^{EFT} = -2 \frac{ic^2 \sigma^2}{(4\pi)^2} U_S \left[ \frac{2}{\hat{\epsilon}} + 2 \log \left( \frac{\mu^2}{\sigma^2} \right) + 1 \right] + \dots \quad (4.39)$$

Les structures des divergences (pôles en  $\frac{1}{\hat{\epsilon}}$ ) sont différentes dans les deux théories. De ce fait, on renormalise les deux théories séparément en y ajoutant les contre-terms adéquats permettant d'absorber les divergences respectives. Par suite, pour effectuer la correspondance, on égale les amplitudes de diffusions physiques,  $c$ 'est à dire renormalisées, obtenues dans les deux théories. Ici, nous allons utiliser la prescription  $\overline{MS}$  qui consiste à retirer les pôles en  $\frac{1}{\hat{\epsilon}}$ . Remarquons que les coefficients de Wilson dans la théorie effective dépendent du choix du régulateur étant donné que nous ajoutons des contre-terms différents aux deux théories. Bien entendu, les résultats physiques n'en dépendent pas.

On choisit comme échelle de correspondance la masse du scalaire lourd intégré  $\mu = M$  et on égale les amplitudes de diffusion à une boucle calculées dans les deux théories :  $\mathcal{A}_{(a+b+c+d)}^{EFT} = \mathcal{A}_{(a+b+c+d)}^{UV}$ .

$$c(\mu = M) = \frac{\lambda^2}{M^2} - \frac{2\lambda^4}{(4\pi)^2 M^2} - \frac{10\lambda^4 \sigma^2}{(4\pi)^2 M^4}, \quad (4.40)$$

où l'on a remplacé le coefficient de Wilson  $c$  par sa valeur déterminée à l'aide de la correspondance à l'arbre :  $c = \frac{\lambda^2}{M^2}$ . Afin de reproduire la fonction à deux-points dans la théorie UV, absente de la théorie effective, il est nécessaire de poser  $z = 1 + \frac{\lambda^2}{4(4\pi)^2}$  (dans la prescription  $\overline{MS}$ ). De plus, pour obtenir une amplitude de diffusion physique, nous devons encore renormaliser le champ fermionique à l'aide du facteur  $Z$  (wave function renormalization), à savoir  $\psi_{physique} = \sqrt{Z}\psi$ . Cette procédure ajoute une contribution supplémentaire au terme  $\frac{\lambda^4}{(4\pi)^2 M^2}$  dans l'amplitude provenant du produit du facteur  $Z$  et de la contribution à l'arbre.

### 4.1.6 Redéfinitions des champs

Les redéfinitions des champs ne modifient pas la matrice de diffusion  $S$ . En effet, considérons la fonctionnelle génératrice

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}[\phi] + J\phi]}. \quad (4.41)$$

Les fonctions de Green

$$\langle 0|T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_r)\}|0\rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi \phi(x_1) \dots \phi(x_r) e^{iS[\phi]}}{\int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}}, \quad (4.42)$$

sont alors obtenues à l'aide de la fonctionnelle génératrice de la façon suivante

$$\langle 0|T\{\phi(x_1) \dots \phi(x_r)\}|0\rangle = \frac{1}{Z[J]} \left( \frac{-i\delta}{\delta J(x_1)} \right) \dots \left( \frac{-i\delta}{\delta J(x_r)} \right) Z[J] \Big|_{J=0}. \quad (4.43)$$

Considérons la redéfinition locale  $\phi(x) = F[\phi'(x)]$ , où  $F : X \mapsto X + c_1 \partial^2 X + c_2 X^3$ . Généralement, l'application  $F$  est la somme d'un polynôme et d'une application contenant un nombre fini d'opérateurs dérivatifs. Suite à la redéfinition du champ  $\phi$ , on obtient alors un nouveau lagrangien  $\mathcal{L}'$  donné par

$$\mathcal{L}[\phi(x)] = \mathcal{L}[F[\phi'(x)]] = \mathcal{L}'[\phi'(x)]. \quad (4.44)$$



Par suite, la nouvelle fonctionnelle génératrice exprimée en fonction de  $\phi'$  et de  $\mathcal{L}'$  s'écrit alors

$$Z'[J] = \int \mathcal{D}\phi' e^{i \int d^4x [\mathcal{L}'[\phi'] + J\phi']} = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}'[\phi] + J\phi]}, \quad (4.45)$$

où l'on a renommé la variable muette d'intégration  $\phi' \rightarrow \phi$  dans la dernière égalité. D'autre part, si on effectue le changement de variable  $\phi(x) = F[\phi'(x)]$  dans l'intégrale fonctionnelle de départ (4.41), on obtient

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi' \left| \frac{\delta F}{\delta \phi'} \right| e^{i \int d^4x [\mathcal{L}'[\phi'] + JF[\phi']]} \quad (4.46)$$

En l'absence d'anomalies et en régularisation dimensionnelle, le jacobien  $\left| \frac{\delta F}{\delta \phi'} \right|$  vaut 1. En renommant la variable d'intégration muette par  $\phi$ , on a donc

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}'[\phi] + JF[\phi]]} \quad (4.47)$$

Ainsi,  $Z[J]$  permet à la fois d'obtenir les fonctions de Green de  $\phi$ , calculées avec  $\mathcal{L}[\phi]$  (avec l'équation (4.41)) et les fonctions de Green de  $F[\phi]$ , calculées avec  $\mathcal{L}'[\phi]$ . En revanche,  $Z'[J]$  permet de calculer les fonctions de corrélations de  $\phi$  en utilisant le nouveau lagrangien  $\mathcal{L}'[\phi]$ . Les deux fonctions de corrélations sont différentes et donc les fonctions de Green changent sous une redéfinition de champ. Par contre, la matrice de diffusion  $S$  est inchangée. En effet,  $Z[J]$  permet de calculer la matrice  $S$  à l'aide du lagrangien  $\mathcal{L}'[\phi]$  et du champ interpolateur  $\phi$ . Le choix du champ interpolateur, c'est à dire de la redéfinition du champ, n'a pas d'effet sur la matrice de diffusion  $S$  tant que  $\langle p|F[\phi]|0\rangle \neq 0$ . Dans ces conditions, la matrice  $S$  est invariante sous une redéfinition des champs.

Enfin, lorsque nous utilisons des lagrangien renormalisables, seules les transformations linéaires sont autorisées pour redéfinir les champs

$$\phi'_i = C_{ij}\phi_j. \quad (4.48)$$

Ce genre de transformation est utilisée pour mettre le terme cinétique sous forme canonique  $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi^i$ .

Pendant, dans une EFT, du fait de la présence d'opérateurs de dimensions supérieures à 4, non renormalisables, il y a plus de libertés dans les redéfinitions de champs. On effectue des redéfinitions de champs qui préservent le comptage de puissance de la théorie effective, par exemple la redéfinition

$$\phi \rightarrow \phi + \frac{1}{\Lambda^2}\phi^3 + \dots, \quad (4.49)$$

permet de travailler ordre par ordre dans le développement en  $\frac{1}{\Lambda}$ . Les redéfinitions de ce genre sont souvent utilisées pour mettre le lagrangien effectif sous forme canonique. Le lagrangien EFT est alors obtenu par correspondance (matching) avec la théorie complète, suivi d'une redéfinition des champs. Il en résulte que les champs dans l'EFT sont différents de ceux dans la théorie UV.

#### 4.1.7 Equations du mouvement

Un cas particulier de redéfinition des champs est l'utilisation de l'équation du mouvement (EOM). En effet, l'équation du mouvement classique  $E[\phi]$  est définie par :

$$E[\phi] \equiv \frac{\delta S}{\delta \phi}. \quad (4.50)$$

Par exemple, prenons le cas de la théorie  $\phi^4$

$$\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{4!}\lambda\phi^4, \quad (4.51)$$

en appliquant l'équation d'Euler-Lagrange, on obtient l'équation du mouvement suivante

$$E[\phi] = -\partial^2 \phi(x) - m^2 \phi(x) - \frac{1}{3!} \lambda \phi^3(x). \quad (4.52)$$

Considérons maintenant un opérateur  $\hat{O}[\phi]$  qui fait manifestement apparaître l'équation du mouvement, c'est à dire qui est « divisible » par  $E[\phi]$

$$\hat{O}[\phi] = \mathcal{F}[\phi]E[\phi] = \mathcal{F}[\phi] \frac{\delta S}{\delta \phi}, \quad (4.53)$$

et considérons la fonctionnelle génératrice

$$Z[J, \tilde{J}] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{\phi^4}[\phi] + J\phi + \tilde{J}\hat{O}[\phi]]}. \quad (4.54)$$

La fonction de corrélation  $\langle 0|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\hat{O}[x]\}|0\rangle$  où l'on a inséré l'opérateur  $\hat{O}$  contenant l'EOM est donnée par

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\hat{O}[x]\}|0\rangle = \frac{1}{Z[J, \tilde{J}]} \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_1)}\right) \dots \left(-i \frac{\delta}{\delta J(x_n)}\right) \left(-i \frac{\delta}{\delta \tilde{J}(x)}\right) Z[J, \tilde{J}] \Big|_{J=\tilde{J}=0}. \quad (4.55)$$

Effectuons le changement de variable  $\phi = \phi' - \tilde{J}F[\phi']$  dans la fonctionnelle génératrice (4.54). On obtient alors

$$\begin{aligned} Z[J, \tilde{J}] &= \int \mathcal{D}\phi' \left| \frac{\delta \phi}{\delta \phi'} \right| e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{\phi^4}[\phi'] - \frac{\delta S}{\delta \phi'} \tilde{J}F[\phi'] + J\phi' - J\tilde{J}F[\phi'] + \tilde{J}\hat{O}[\phi'] + O(\tilde{J}^2)]} \\ &= \int \mathcal{D}\phi' \left| \frac{\delta \phi}{\delta \phi'} \right| e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{\phi^4}[\phi'] + J\phi' - J\tilde{J}F[\phi'] + O(\tilde{J}^2)]}, \end{aligned} \quad (4.56)$$

où on a utilisé l'équation (4.53). Dans le cadre de la régularisation dimensionnelle (adopté ici), le Jacobien  $\left| \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi'(y)} \right|$  de la transformation vaut 1. En renommant par  $\phi$  la variable muette d'intégration fonctionnelle, on a

$$Z[J, \tilde{J}] = \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{\phi^4}[\phi] + J\phi - J\tilde{J}F[\phi] + O(\tilde{J}^2)]}. \quad (4.57)$$

Par suite, appliquons la dérivée fonctionnelle par rapport à  $\tilde{J}$  puis évaluons le résultat en  $\tilde{J} = 0$

$$\int \mathcal{D}\phi \hat{O}(x) e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{\phi^4}[\phi] + J\phi]} = - \int \mathcal{D}\phi J(x) \mathcal{F}[\phi(x)] e^{i \int d^4x [\mathcal{L}_{\phi^4}[\phi] + J\phi]}. \quad (4.58)$$

En dérivant plusieurs fois par rapport  $J$ , on obtient l'identité de Ward qui n'est rien d'autre que l'EOM

$$\langle 0|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\hat{O}[x]\}|0\rangle = i \sum_r \delta(x - x_r) \langle 0|T\{\phi(x_1)\dots\cancel{\phi(x_r)}\dots\phi(x_n)\mathcal{F}[\phi(x_r)]\}|0\rangle. \quad (4.59)$$

L'élément de matrice de diffusion  $S$  avec une insertion de l'opérateur  $\hat{O}$  s'annule

$${}_{out}\langle q_1, \dots, q_m | \hat{O} | p_1, \dots, p_n \rangle_{in} = 0, \quad (4.60)$$

car il est obtenu en choisissant le terme ayant  $m + n$  pôles dans  $\langle 0|T\{\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\hat{O}[x]\}|0\rangle$ . Cependant, le membre droit de l'équation (4.59) montre que l'élément de matrice du  $r$ -ième terme ne possède pas de pôle en  $p_r$  du fait de la présence de la distribution  $\delta$  de Dirac. En définitive, tous les termes de la somme sont nuls et on obtient l'annulation de l'élément de matrice  ${}_{out}\langle q_1, \dots, q_m | \hat{O} | p_1, \dots, p_n \rangle_{in}$ . Par conséquent, les opérateurs EOM peuvent être omis étant donné qu'ils ne contribuent pas à la matrice de diffusion  $S$ .

Remarquons que l'utilisation des EOMs est un cas particulier de la redéfinition d'un champ. En effet, considérons la redéfinition suivante

$$\phi(x) = \phi'(x) + \epsilon \mathcal{F}[\phi'(x)], \quad (4.61)$$

avec  $\epsilon \ll 1$ . Suite à cette redéfinition du champ  $\phi$ , le lagrangien se voit modifié comme suit

$$\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}[\phi'] + \epsilon \mathcal{F}[\phi'] \frac{\delta S[\phi']}{\delta \phi'} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = \mathcal{L}[\phi'] + \epsilon \hat{\mathcal{O}}[\phi'] + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (4.62)$$

Nous avons déjà vu dans la partie précédente que la redéfinition d'un champ ne modifiait pas la matrice  $S$ . C'est pourquoi un élément de matrice donné peut tout aussi bien être calculé avec le nouveau lagrangien qu'avec l'ancien. Ainsi, on peut toujours redéfinir un lagrangien de sorte à lui ajouter des termes EOM vu qu'ils ne contribuent pas. En pratique, les EOMs sont utilisées dans le but d'éliminer des opérateurs contenant des dérivées afin de réduire la base d'opérateurs effectifs.

Comme exemple d'utilisation des EOMs, considérons le lagrangien effectif suivant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{c_1}{\Lambda^2} \phi^3 \partial^2 \phi + \frac{c_6}{\Lambda^2} \phi^6 + \dots, \quad (4.63)$$

puis effectuons la redéfinition du champ suivante  $\phi \rightarrow \phi + \frac{c_1}{\Lambda^2} \phi^3$ , on obtient alors un nouveau lagrangien

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \frac{c_1}{\Lambda^2} \phi^3 \partial^2 \phi + \frac{c_6}{\Lambda^2} \phi^6 \\ &+ \frac{c_1}{\Lambda^2} \phi^3 \left[ -\partial^2 \phi - m^2 \phi - \frac{\lambda}{3!} \phi^3 \right] + \dots \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 - \left[ \frac{\lambda}{4!} + \frac{c_1}{\Lambda^2} m^2 \right] \phi^4 + \left[ \frac{c_6}{\Lambda^2} - \frac{c_1}{\Lambda^2} \frac{\lambda}{3!} \right] \phi^6 + \dots \end{aligned} \quad (4.64)$$

Insistons sur le fait que les deux lagrangien donnent le même élément de matrice. Dans le nouveau lagrangien, l'opérateur  $\phi^3 \partial^2 \phi$  a été éliminé au prix d'une redéfinition des coefficients associés aux opérateurs  $\phi^4$  et  $\phi^6$ . De plus, le comptage de puissance (power counting) de l'EFT est maintenu. En somme, la redéfinition du champ  $\phi$  a permis de réduire la base d'opérateurs effectifs. Conséquemment, il est plus aisé de calculer avec le nouveau lagrangien dans la mesure où il contient moins d'opérateurs indépendants. En général, lors de la procédure de construction de la base d'opérateurs effectifs, les EOMs sont utilisées pour éliminer le maximum d'opérateurs contenant des dérivées possible, afin de réduire le nombre d'opérateurs indépendants qui constituent la base de l'EFT.

Pour conclure cette partie, notons que les opérateurs EOM,  $E_i$ , sont nombreux et que les RGEs ont pour effet de les mélanger entre eux. En effet,

$$\mu \frac{d}{d\mu} E_i = \gamma_{ij} E_j, \quad (4.65)$$

où les  $\gamma_{ij}$  peuvent dépendre de la jauge choisie. Les  $E_i$  ne sont pas des quantités physiques observables et leurs dimensions anomales peuvent dépendre du choix de jauge. Pour des opérateurs non-EOM<sup>3</sup>,  $O_i$ , la dimension anormale s'écrit

$$\mu \frac{d}{d\mu} O_i = \gamma_{ij} O_j + \Gamma_{ik} E_k. \quad (4.66)$$

Sous l'évolution des RGEs, ces derniers peuvent se mélanger avec les opérateurs EOM  $\{E_i\}$ , en raison de leurs contributions nulles aux éléments de matrice de diffusion  $S$ . Comme les opérateurs non-EOM  $\{O_i\}$  sont observables, il en résulte que  $\gamma_{ij}$  est indépendant du choix de jauge, alors que  $\Gamma_{ik}$  peut en dépendre.

3. Un opérateur est dit non-EOM s'il contribue aux éléments de matrice de diffusion.

## 4.2 Une théorie effective pour bosons de jauge

Cette étude est basée sur l'article [2].

### 4.2.1 Introduction : le lagrangien d'Euler-Heisenberg

La théorie de Maxwell de l'électromagnétisme est décrite par le lagrangien classique  $\mathcal{L}_{Maxwell} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ . En lui appliquant les équations d'Euler-Lagrange, on obtient les équations de Maxwell dans le vide qui décrivent la dynamique des champs électromagnétiques. Ces équations différentielles sont linéaires et donc le principe de superposition est vérifié. Par conséquent, deux ondes électromagnétiques dans le vide se propagent indépendamment l'une de l'autre, autrement dit elles n'interagissent pas.

Dans la théorie de Dirac, du fait de l'existence du positron, la structure du vide est différente et des paires électron-positron peuvent être créées en un très court instant<sup>4</sup> puis annihilées aussitôt. Dans ces conditions, l'électrodynamique devient non-linéaire (même dans le vide) et c'est ainsi que deux ondes électromagnétique peuvent interagir indirectement par l'intermédiaire des paires électron-positron créées dans le vide.

En 1936, bien avant le développement de la QED, H. Euler et W. Heisenberg ont calculé les interactions non-linéaires entre photons dans un champ électromagnétique constant induites par des paires virtuelles électron-positron extraites du vide quantique [131]. Leur démarche demeure l'archétype d'une théorie effective et est considéré comme un exemple canonique d'EFT.

En QED, pour des énergies petites devant la masse de l'électron  $m_e$ , les photons peuvent interagir entre eux via une boucle fermionique. Ces interactions sont supprimées par des puissances de l'inverse de la masse de l'électron  $(\frac{1}{m_e})^i$  par rapport au terme de Maxwell et sont donc très petits. En intégrant l'électron dans le lagrangien de QED, on récupère une tour de nouvelles interactions photoniques, qui devraient être invariantes de Lorentz, de jauge et sous parité  $\mathcal{P}$ . La première interaction non-triviale entre photons correspond aux opérateurs de dimension 8 formant le lagrangien d'Euler-Heisenberg

$$\mathcal{L}_{EH} = -\mathcal{F} + \frac{8}{45} \left( \frac{\alpha^2}{m_e^4} \right) \mathcal{F}^2 + \frac{14}{45} \left( \frac{\alpha^2}{m_e^4} \right) \mathcal{G}^2, \quad (4.67)$$

avec

$$\mathcal{F} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2), \quad \mathcal{G} = \frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}F_{\mu\nu}F_{\lambda\rho} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad (4.68)$$

où  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$  sont les champs magnétiques et électriques,  $\alpha = e^2/4\pi$  la constante de structure fine,  $e$  la charge électrique de l'électron et  $\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$  le tenseur complètement antisymétrique. Le premier terme dans (4.67) correspond au lagrangien classique de Maxwell et n'autorise pas l'interaction de deux photons. Cependant, dès lors que les corrections apportées par les deux derniers termes du lagrangien effectif d'Euler-Heisenberg entrent en jeu, deux photons peuvent interagir à travers une boucle. En ce sens, observer la diffusion photon-photon (light-by-light scattering) serait une confirmation de la nature quantique de la QED (effet de boucle).

Le but de cette étude est de généraliser les résultats d'Euler et Heisenberg pour les photons à des bosons de jauge d'un groupe de jauge arbitraire, dont les interactions effectives sont induites par des boucles de champs lourds dans des représentations génériques du groupe de jauge et de spin 0, 1/2 ou 1.

4. En effet, le principe d'incertitude d'Heisenberg peut s'écrire avec les variables énergie-temps, on a alors  $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ .

### 4.2.2 Interactions effectives de photons

Dans l'approche des intégrales de chemins, l'action effective est obtenue en intégrant les champs lourds [132]. En général, cela génère une infinité d'interactions effectives entre les champs légers restants. La renormalisabilité nous permet d'absorber les couplages effectifs de dimensions en énergie inférieures à 4 dans les paramètres libres du lagrangien impliquant les champs légers. Les interactions de dimensions supérieures à 4 sont finies et peuvent être organisées dans un développement perturbatif en l'inverse de la masse du champs lourd [133].

Considérons la fonctionnelle génératrice de QED

$$Z_{QED}[J^\mu, \eta, \bar{\eta}] = \int DA^\mu D\psi D\bar{\psi} \exp i \int dx (\mathcal{L}_{QED} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + J^\mu A_\mu), \quad (4.69)$$

avec

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\mathcal{D} - m)\psi, \quad (4.70)$$

et  $D^\mu$  la dérivée covariante usuelle. Pour des raisons de simplicité, on omet le terme de fixation de jauge ainsi que les fantômes associés. A très basse énergie, c'est à dire à une échelle d'énergie  $\Lambda$  très petite devant la masse de l'électron  $\Lambda \ll m_e$ , seuls les photons sont actifs. Pour construire la théorie effective valide dans ce régime, le champ fermionique doit être intégré. L'intégration se réalise aisément étant donné que la partie fermionique de l'intégrande est gaussienne lorsque les sources  $\eta, \bar{\eta}$  sont éteintes :

$$\begin{aligned} Z_{QED}[J^\mu, 0, 0] &= \int DA^\mu \exp i \int dx \left\{ -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \right\} \times \det(i\mathcal{D} - m) \\ &\equiv \int DA^\mu \exp i \int dx (\mathcal{L}_{eff} + J^\mu A_\mu). \end{aligned} \quad (4.71)$$

En exponentiant le déterminant de l'opérateur de Dirac, on obtient le lagrangien effectif de QED suivant :

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - iTr \ln(i\mathcal{D} - m). \quad (4.72)$$

A ce stade, il s'agit de développer perturbativement  $Tr \ln(i\mathcal{D} - m)$  en  $\frac{1}{m}$ . Plusieurs méthodes existent dans la littérature.

Les techniques universelles les plus puissantes sont celles qui reposent sur des méthodes fonctionnelles comme par exemple l'approche de Gaillard [134] et Cheyette [135] dans laquelle ils introduisent une méthode manifestement covariante de jauge basée sur un développement en série de la dérivée covariante (Covariant Derivative Expansion ou CDE en abrégé). Cette méthode élégante, qui a été récemment remise au goût du jour dans [136], simplifie grandement l'évaluation du terme quadratique en champ lourd dans l'intégrale de chemin et permet d'obtenir la théorie effective à basse énergie.

Cependant, ici nous souhaitons travailler dans l'approche diagrammatique avec des champs de jauges externes. Dans ce cas, la trace est développée de la manière suivante :

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} Tr \left( \frac{1}{i\mathcal{D} - m} \mathcal{A} \right)^n. \quad (4.73)$$

Graphiquement, cette série est représentée par une tour (infinie) de diagrammes 1PI<sup>5</sup> à une boucle contenant des opérateurs de dimensions de plus en plus grandes. Si on tronque la série au-delà des opérateurs de dimension 8, on obtient les diagrammes 1PI à une boucle générant l'action effective

5. One particle irreducible.

de QED jusqu'aux opérateurs de dimension 8 (voir Fig. 4.7). Tous les diagrammes avec un nombre impair de photons externes sont d'amplitude nulle en vertu du théorème de Furry pour la QED<sup>6</sup> [137]). L'avantage principal à exprimer l'action effective en termes de diagrammes 1PI est que des

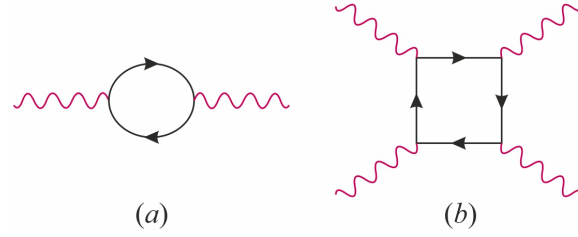


FIGURE 4.7 – Amplitudes 1PI à une boucle générant l'action effective de QED jusqu'aux opérateurs de dimension 8. Les six permutations des photons externes dans le diagramme (b) sont considérées implicitement.

outils informatiques (déjà bien testés) automatisant les calculs existent et permettent de calculer ces amplitudes à une boucle. Pour ce travail, nous nous sommes appuyés sur les bibliothèques Mathematica *FeynArts* [138], *FeynCalc* [139, 140] et *Package X* [141] (implémenté à travers *FeynHelpers* [142]).

Construisons le lagrangien effectif jusqu'à l'ordre  $m^{-4}$  du développement perturbatif, c'est à dire jusqu'aux interactions de dimension 8 en énergie. La contribution à la polarisation du vide de QED d'un fermion de charge unité (de masse  $m$  et de 4-vecteur énergie-impulsion  $p^\mu$ ), une fois développée en l'inverse de la masse du fermion s'écrit

$$\Pi^{\mu\nu}(p^2) = i \frac{8e^2}{(4\pi)^2} (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \left\{ \frac{1}{6} D_\varepsilon + \frac{p^2}{30m^2} + \frac{p^4}{280m^4} + O(p^6/m^6) \right\}, \quad (4.74)$$

où  $D_\varepsilon = 2/\varepsilon - \gamma + \log 4\pi\mu^2/m^2$ . Les interactions effectives correspondantes impliquant deux photons sont les suivantes :

$$\mathcal{L}_{eff}^{(0+2)} = -\frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{\alpha}{3\pi} D_\varepsilon \right\} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{60\pi m^2} F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} - \frac{\alpha}{560\pi m^4} F_{\mu\nu} \square^2 F^{\mu\nu} + O(m^{-6}). \quad (4.75)$$

Avec quatre photons, le lagrangien effectif est donné par les deux couplages suivants :

$$\mathcal{L}_{eff}^{(4)} = \frac{\alpha^2}{90m^4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \frac{7\alpha^2}{360m^4} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2 + O(m^{-6}), \quad (4.76)$$

où le tenseur électromagnétique dual est défini avec la convention  $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ , en sorte que  $(F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2 = 2(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 - 4F_{\mu\nu} F^{\nu\rho} F_{\rho\sigma} F^{\sigma\mu}$ . Le premier terme dans  $\mathcal{L}_{eff}^{(0+2)}$ , divergent (possède un pôle lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), traduit la renormalisation de la fonction d'onde du photon afin d'y absorber la divergence de la polarisation du vide de QED. Le second terme représente l'interaction de Uehling [143] et  $\mathcal{L}_{eff}^{(4)}$  est exactement le lagrangien d'Euler-Heisenberg [131] vu dans la partie précédente.

Notons que dans la plupart des bases d'opérateurs [144, 145], le couplage dérivatif est éliminé à l'aide de l'équation du mouvement (EOM) de la manière suivante :

$$F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \partial^\rho \partial_\rho F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\mu F_\rho{}^\nu + F_{\mu\nu} \partial^\rho \partial^\nu F_\rho{}^\mu = -2\partial^\mu F_{\mu\rho} \partial_\nu F^{\nu\rho} = -2j_\nu j^\nu, \quad (4.77)$$

6. Ce théorème est une conséquence directe de l'invariance de la QED sous l'action de la symétrie discrète de conjugaison de charge C. Sous l'action de C ( $e \rightarrow -e$ ), chaque vertex impliquant un photon est multiplié par -1 et par conséquent un diagramme contenant un nombre impair de photons briserait l'invariance de la QED sous C sauf si cette amplitude est identiquement nulle.

où l'identité de Jacobi  $\partial_\mu F_{\rho\nu} - \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\mu\rho} = 0$  a été utilisée dans la première égalité, suivie d'une intégration par partie et de l'utilisation de l'EOM  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$ . Cela fait sens physiquement car le potentiel de Uehling n'a un effet que sur le couplage entre courants avec un transfert d'impulsion non nul.

Dans la théorie effective considérée ici, tous les fermions ont été intégrés et  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ . Ceci illustre une idée générale du formalisme de l'action effective, à savoir que l'intégralité de l'effet des champs lourds est codé dans les couplages effectifs entre les champs légers à travers les corrections radiatives. Remarquons que les champs légers ne sont jamais supposés sur couche de masse (on-shell) et donc il est possible que certaines interactions effectives ne contribuent jamais aux processus physiques, même si ces dernières sont nécessaires pour encoder toute l'information sur la dynamique sous-jacente du champ lourd.

Notons que les interactions effectives peuvent être construites a priori en invoquant uniquement l'invariance de jauge de QED (sous le groupe  $U(1)_{em}$ ). En effet, la base d'opérateurs pour une dimension en énergie fixée  $D$  sera constituée de tous les couplages invariants de jauge possibles de dimension  $D$ . En appliquant ce principe pour construire les interactions effectives de photons, le lagrangien effectif le plus général obtenu jusqu'aux opérateurs de dimension 8 est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & -\frac{1}{4} \left\{ 1 + \alpha_0 \frac{e^2}{4!\pi^2} \right\} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \alpha_2 \frac{e^2}{5!\pi^2 m^2} \partial^\mu F_{\mu\nu} \partial_\rho F^{\rho\nu} + \alpha_4 \frac{e^2}{6!\pi^2 m^4} \partial^\mu F_{\mu\nu} \square \partial_\rho F^{\rho\nu} \\ & + \gamma_{4,1} \frac{e^4}{6!\pi^2 m^4} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})^2 + \gamma_{4,2} \frac{e^4}{6!\pi^2 m^4} (F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu})^2 + O(m^{-6}) . \end{aligned} \quad (4.78)$$

Les couplages dérivatifs sont écrits sous une forme qui fait manifestement apparaître l'EOM. Ceci s'avérera utile quand il s'agira de comparer avec les résultats obtenus dans le cas non-abélien dans la prochaine sous-section, pour lequel ce choix de base d'opérateurs est bien plus judicieux. La nomenclature adoptée à partir d'ici et pour le reste de cette section consiste à noter respectivement  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$  les coefficients de Wilson associés aux couplages impliquant deux, trois et quatre tenseurs électromagnétiques et à l'ordre  $O(m^{-i})$ . Ces coefficients, à travers leurs valeurs spécifiques, contiennent toute l'information sur le champ lourd. En faisant la correspondance (matching) entre cette théorie effective de photons et la QED à basse énergie, nous avons calculé les coefficients de Wilson induit par un fermion, un scalaire ou un vecteur dans la boucle. Les résultats obtenus sont présentés dans la Table ci-dessous :

	$\alpha_0$	$\alpha_2$	$\alpha_4$	$\gamma_{4,1}$	$\gamma_{4,2}$
Scalar	$\frac{1}{2} D_\varepsilon Q^2$	$-\frac{1}{8} Q^2$	$\frac{3}{56} Q^2$	$\frac{7}{32} Q^4$	$\frac{1}{32} Q^4$
Fermion	$2D_\varepsilon Q^2$	$-Q^2$	$\frac{9}{14} Q^2$	$\frac{1}{2} Q^4$	$\frac{7}{8} Q^4$
Vector	$-\frac{21D_\varepsilon + 2}{2} Q^2$	$\frac{37}{8} Q^2$	$-\frac{159}{56} Q^2$	$\frac{261}{32} Q^4$	$\frac{243}{32} Q^4$

TABLE 4.1 – Coefficients de Wilson des opérateurs effectifs de photons induits par un scalaire, un fermion ou un vecteur de charge  $Q$ . Pour le cas du vecteur, la correspondance des amplitudes 1PI sur les opérateurs invariants de jauge  $U(1)$  de l'équation (4.78) n'est possible qu'en utilisant une jauge non-linéaire pour les vecteurs massifs, et les valeurs reportées de  $\alpha_{1,2,3}$  sont spécifiques à cette jauge ( $\kappa = 1$  dans les équations (4.81) et (4.82)).

Notons que le seul intérêt de la normalisation non conventionnelle des constantes de couplages

dans le lagrangien effectif (4.78) est d'obtenir des coefficients d'ordre  $O(1)$  (pour le cas des fermions) afin de rendre le tableau 4.1 plus lisible.

Le calcul dans le cas d'un scalaire circulant dans la boucle est similaire à celui des fermions et ne présente pas de difficulté supplémentaire. Les sfermions chargés sous  $U(1)_{em}$  (sleptons chargés et squarks) du MSSM ont été utilisés comme particules représentatives pour effectuer les calculs d'amplitudes à boucles et les faire correspondre (à basse énergie) aux amplitudes calculées dans la théorie effective avec (4.78). En intégrant les champs scalaires lourds au niveau de l'intégrale de chemin, on obtient la tour de diagrammes 1PI qui génèrent l'action effective. Si on ne s'intéresse qu'aux opérateurs de dimensions inférieures ou égales à 8 (on tronque la série au delà), les diagrammes 1PI sont représentés dans la figure 4.8 ci-dessous :

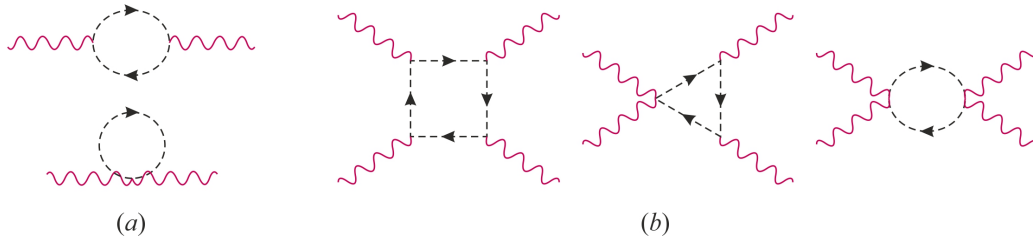


FIGURE 4.8 – Diagrammes 1PI à une boucle scalaire générant l'action effective de QED jusqu'aux opérateurs de dimension 8. Les permutations des photons externes sont considérées implicitement pour les diagrammes (b). Pour les bosons vecteurs massifs, les topologies sont les mêmes mais il faut alors inclure les diagrammes contenant les bosons de Goldstone appropriés et les fantômes.

Cependant, pour le cas des vecteurs circulant dans la boucle, les choses sont nettement moins aisées. En effet, intégrer des vecteurs pose problème à cause de la procédure de fixation de jauge. Afin de comprendre où se trouve le problème précisément, considérons le MS supplémenté du mécanisme de Higgs. Dans la jauge (usuelle) de 't Hooft-Feynman, les identités de Ward de QED ne sont plus respectées au niveau de l'amplitude pour des photons hors de leur couche de masse (off-shell). Par conséquent, la correspondance entre l'amplitude à quatre photons en QED et les couplages effectifs à l'ordre  $O(m^{-4})$  ne peut se faire que si les quatre photons externes sont on-shell [146], et donc la procédure usuelle permettant de construire l'action effective échoue ici. Le problème réside dans la procédure de fixation de jauge. Par exemple, dans la jauge  $R_\xi$ , on ajoute usuellement le terme suivant :

$$\mathcal{L}_{gauge-fixing}^{R_\xi, linear} = -\frac{1}{\xi} |\partial^\mu W_\mu^+ + \xi M_W \phi^+|^2, \quad (4.79)$$

où  $\phi^\pm$  sont les bosons de Goldstone scalaires associés aux  $W^\pm$  (would-be Goldstone ou WBG en abrégé). Ceci brise explicitement  $U(1)_{QED}$ . Bien que l'amplitude de la polarisation du vide de QED reste transverse et est reproduite par les opérateurs effectifs dans (4.78), l'amplitude à quatre photons off-shell n'est pas invariante de jauge et nécessite des opérateurs supplémentaires dès l'ordre  $O(m^{-2})$  [147]. Bien entendu, les processus physiques doivent être invariants de jauge et ceci ne devrait pas avoir de conséquence. Néanmoins, en pratique, il y a des réticences à ajouter des opérateurs non-invariants de jauge au lagrangien effectif. On pourrait essayer de résoudre ce problème en se plaçant dans la jauge unitaire, dans laquelle les couplages des  $W$  aux photons proviennent de :

$$\mathcal{L}_{unitary-gauge} = -\frac{1}{2} (D_\mu W_\nu^+ - D_\nu W_\mu^+) (D^\mu W^{-\nu} - D^\nu W^{-\mu}) + ie F^{\mu\nu} W_\mu^+ W_\nu^- + M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}, \quad (4.80)$$

où  $D_\mu W_\nu^\pm = \partial_\mu W_\nu^\pm \mp ie A_\mu W_\nu^\pm$ . Le terme de moment magnétique  $F^{\mu\nu} W_\mu^+ W_\nu^-$ , invariant de jauge, est donné par la symétrie  $SU(2)_L$  sous-jacente. Comme cela a été montré dans [148], la présence de ce



terme assure un comportement cohérent des amplitudes de diffusion à haute énergie. Cependant, cela n'est pas suffisant pour assurer le bon comportement off-shell et tout comme dans le cas précédent de la jauge linéaire  $R_\xi$ , le matching off-shell échoue encore [149].

La solution à ce problème consiste à utiliser une jauge non-linéaire où l'on remplace la dérivée partielle par la dérivée covariante dans (4.79)  $\partial^\mu W_\mu^\pm \rightarrow D^\mu W_\mu^\pm = \partial^\mu W_\mu^\pm \pm ieA^\mu W_\mu^\pm$ . Cette modification est analogue à la contrainte imposée lors de la construction de la CDE dans l'approche des intégrales de chemin [136]. Dans l'approche diagrammatique considérée ici, du fait de l'utilisation de la jauge non-linéaire [150], l'amplitude à 4-photons est alors invariante de jauge et ce même pour des photons externes off-shell. Nous avons vérifié ceci explicitement en utilisant le model FeynArts dédié [151] pour le MS dans la jauge non-linéaire. et nous avons obtenu un matching cohérent off-shell sur les opérateurs d'Euler-Heisenberg. Les résultats des coefficients de Wilson dans cette jauge sont dans le tableau 4.1. Remarquons que les trois premiers coefficients dépendent de la jauge et seuls  $\gamma_{4,1}$  et  $\gamma_{4,2}$  sont physiques. Afin d'examiner de plus près ces dépendances, considérons le terme de fixation de jauge suivant [152, 153] :

$$\mathcal{L}_{gauge-fixing}^{non-linear} = -\frac{1}{\xi} |\partial^\mu W_\mu^+ + ikeA^\mu W_\mu^+ + \xi M_W \phi^+|^2, \quad (4.81)$$

qui permet d'interpoler entre le cas linéaire ( $\kappa = 0$ ) et non-linéaire en jauge  $U(1)$  (pour  $\kappa = 1$ ). Le développement en  $\frac{1}{m}$  de la polarisation du vide de QED dans la jauge de 't Hooft-Feynman ( $\xi = 1$ ) donne des coefficients dépendant de  $\kappa$  de la manière suivante :

$$\alpha_0 = -\frac{12\kappa + 9}{2} D_\varepsilon - 1, \quad \alpha_2 = \frac{20\kappa + 17}{8}, \quad \alpha_4 = -\frac{84\kappa + 75}{56}. \quad (4.82)$$

Bien évidemment, ces dépendances dans la jauge ne sont pas physiques. A très basse énergie, lorsque le photon est le seul degré de liberté actif restant, le premier coefficient ( $\alpha_0$ ) est absorbé dans le champ de photon tout comme la constante de renormalisation de la fonction d'onde. Les deux autres coefficients ne contribuent pas étant donné que  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ . Si certains champs restent actifs tels que  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \neq 0$ , alors d'autres types de processus sont aussi présents. Dans ce cas, l'opérateur associé à  $\alpha_2$  doit être éliminé en faveur de l'opérateur de dimension 6  $j_\mu j^\mu / m^2$ , pour lequel d'autres diagrammes sont présents. Dans le MS, même si les champs dans le courant  $j^\mu$  ne sont pas couplés directement aux  $W^\pm$ , ils sont nécessairement couplés au boson  $Z$ . La dépendance en  $\kappa$  des contributions des  $W^\pm$  aux polarisations du vide  $Z\gamma$  et  $ZZ$  [154] doit s'annuler avec la dépendance en  $\kappa$  de  $\alpha_2$  et ainsi on obtient un coefficient invariant de jauge et physique pour l'opérateur  $j_\mu j^\mu / m^2$ . La conclusion de ceci est que dans le MS, le potentiel d'Uehling ne peut pas être défini de manière cohérente en terme de l'opérateur  $F_{\mu\nu} \square F^{\mu\nu}$  et on doit utiliser à la place les opérateurs effectifs à 4-fermions. Ceci est cohérent physiquement dans la mesure où le potentiel d'Uehling ne fait sens qu'en présence de champs fermioniques restés actifs à cette échelle d'énergie.

### 4.2.3 Interactions effectives de gluons

Essayons de généraliser l'étude faite sur les interactions de photons aux cas des gluons. L'action effective pour les champs de gluons est construite de la même manière que celle des photons dans l'approche diagrammatique. En intégrant un fermion lourd au niveau de l'intégrale de chemin, on obtient le lagrangien effectif suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} - iTr \ln(i\not{D} - m) \\ &= -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n} Tr \left( \frac{1}{i\not{D} - m} \not{G}^a T^a \right)^n, \end{aligned} \quad (4.83)$$

où les  $T^a$  sont les générateurs de  $SU(3)$  et la trace agit à la fois sur les indices de Dirac et de couleur. Ce développement en série génère la tour infinie d'amplitudes 1PI qui contribuent à l'action effective et si on s'arrête aux opérateurs de dimension 8, les diagrammes 1PI sont ceux représentés dans la figure 4.9.

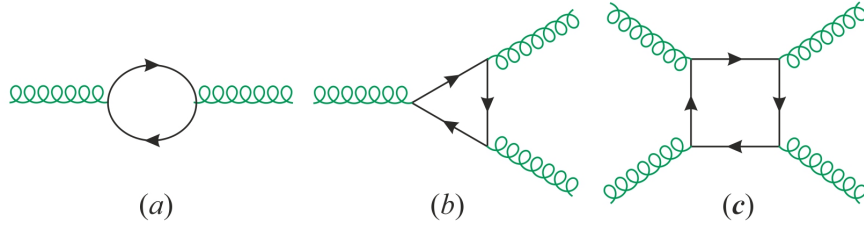


FIGURE 4.9 – Amplitude 1PI à une boucle fermionique générant l'action effective gluonique. Les permutations des gluons sont considérées implicitement pour les diagrammes (b) et (c). Comme pour le cas de la QED (figure 4.8), des diagrammes supplémentaires sont considérés dans les cas d'un scalaire ou vecteur dans la boucle.

Contrairement au cas de la QED avec les photons, les diagrammes possédant un nombre impair de gluons externes ne s'annulent pas. De plus, une autre différence fondamentale avec la QED se trouve dans le caractère non-linéaire du tenseur gluonique ( $G^{\mu\nu}$ ). Cette non-linéarité par nature a pour conséquence d'invalider la relation entre l'ordre  $\mathcal{O}(m^{-i})$  dominant d'une amplitude donnée dans la série en  $\frac{1}{m^i}$  et le nombre de gluons externes. Une autre conséquence directe de la non-linéarité est que les diagrammes à 3-gluons et 4-gluons sont divergents. Néanmoins, ces deux divergences renormalisent le même opérateur local  $G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$  et de ce fait, elles sont cohérentes avec la divergence de la polarisation du vide de QCD (amplitude à 2-gluons). Voyons plus en détail comment cela se passe en pratique.

Tout d'abord, construisons la base d'opérateurs la plus générale possible jusqu'à l'ordre  $\mathcal{O}(m^{-4})$  (opérateurs de dimension 8). Avec deux tenseurs gluoniques, la généralisation du cas de la QED se fait aisément et on obtient le lagrangien effectif suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{(0+2)} = & -\frac{1}{4} \left\{ 1 + \alpha_0 \frac{g_S^2}{4!\pi^2} \right\} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} \\ & + \alpha_2 \frac{g_S^2}{5!\pi^2 m^2} D^\nu G_{\nu\mu}^a D_\rho G^{a,\rho\mu} + \alpha_4 \frac{g_S^2}{6!\pi^2 m^4} D^\nu G_{\nu\mu}^a D^2 D_\rho G^{a,\rho\mu} , \end{aligned} \quad (4.84)$$

avec  $G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$  et  $D_\rho G_{\mu\nu}^a = (\partial_\rho \delta^{ac} + g f^{abc} G_\rho^b) G_{\mu\nu}^c$ . Il ne peut y avoir qu'un seul opérateur dérivatif par ordre  $\mathcal{O}(m^{-i})$  [144, 145]. En effet, remarquons que les dérivées peuvent être déplacées par intégrations par parties de sorte à agir sur un des tenseurs gluoniques. Ainsi, seul un ordre précis des dérivées covariantes est pertinent car le fait de changer l'ordre des dérivées génère un tenseur gluonique supplémentaire étant donné qu'elles ne commutent pas,  $[D^\rho, D^\sigma] G_{\mu\nu}^a = g f^{abc} G_{\rho\sigma}^b G_{\mu\nu}^c$ . Finalement, en combinant ceci avec l'identité de Bianchi

$$D_{[\mu} G_{\rho\sigma]}^a = D_\mu G_{\rho\sigma}^a + D_\rho G_{\sigma\mu}^a + D_\sigma G_{\mu\rho}^a = 0 , \quad (4.85)$$

les opérateurs effectifs peuvent être réécrit sous une forme qui fait manifestement apparaître l'EOM des gluons,  $D^\mu G_{\mu\nu}^a = 0$ . Insistons sur le fait que les EOMs n'ont pas été utilisées car cela rendrait la correspondance avec la QCD à basse énergie impossible.

Considérons maintenant les interactions impliquant trois tenseurs gluoniques. Nous avons un seul opérateur à l'ordre  $\mathcal{O}(m^{-2})$  mais plusieurs à l'ordre  $\mathcal{O}(m^{-4})$ . Cependant, après intégrations par parties,

utilisation de l'identité de Bianchi et en écartant les termes impliquant quatre tenseurs gluoniques ou plus, seules deux contractions non équivalentes subsistent [155]. Là encore, nous faisons en sorte de les écrire sous une forme qui fait apparaître l'EOM des champs de gluons :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{eff}^{(3)} = & \beta_2 \frac{g_S^3}{5! \pi^2 m^2} f^{abc} G_\mu^a G_\nu^b G_\rho^c \\ & + \beta_{4,1} \frac{g_S^3}{6! \pi^2 m^4} f^{abc} G^{a,\mu\nu} D^\alpha G_{\mu\nu}^b D^\beta G_{\alpha\beta}^c + \beta_{4,2} \frac{g_S^3}{6! \pi^2 m^4} f^{abc} G^{a,\mu\nu} D^\alpha G_{\alpha\mu}^b D^\beta G_{\beta\nu}^c . \end{aligned} \quad (4.86)$$

Avec quatre tenseurs gluoniques, les opérateurs jusqu'à l'ordre  $O(m^{-4})$  ne contiennent pas de dérivées covariantes. Pour atteindre un nombre minimal d'opérateurs, on utilise la généralisation de l'identité de QED :

$$G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{b,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^c \tilde{G}^{d,\rho\sigma} = G_{\mu\nu}^a G^{c,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b G^{d,\rho\sigma} + G_{\mu\nu}^a G^{d,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b G^{c,\rho\sigma} - 4G_{\mu\nu}^a G^{c,\nu\rho} G_{\rho\sigma}^b G^{d,\sigma\mu} , \quad (4.87)$$

et notons l'absence de contractions impliquant le tenseur complètement symétrique  $d^{abc}$  du fait de leurs réductions avec l'identité suivante (voir Annexe C) :

$$3d^{abe} d^{cde} = \delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ad} \delta^{bc} + f^{ace} f^{bde} + f^{ade} f^{bce} . \quad (4.88)$$

Les contractions mixtes entre des tenseurs  $f$  (antisymétriques) et des tenseurs  $d$  (symétriques) sont identiquement nulles du fait de leurs propriétés de symétries. En tenant compte de tout cela, on se retrouve avec six opérateurs à l'ordre  $O(m^{-4})$  dans le lagrangien effectif  $\mathcal{Q}_{eff}^{(4)}$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{eff}^{(4)} = & \gamma_{4,1} \frac{g_S^4}{6! \pi^2 m^4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b G^{b,\rho\sigma} + \gamma_{4,2} \frac{g_S^4}{6! \pi^2 m^4} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b \tilde{G}^{b,\rho\sigma} \\ & + \gamma_{4,3} \frac{g_S^4}{6! \pi^2 m^4} G_{\mu\nu}^a G^{b,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^a G^{b,\rho\sigma} + \gamma_{4,4} \frac{g_S^4}{6! \pi^2 m^4} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{b,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^a \tilde{G}^{b,\rho\sigma} \\ & + \gamma_{4,5} \frac{g_S^4}{6! \pi^2 m^4} f^{abe} f^{cde} G_{\mu\nu}^a G^{c,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b G^{d,\rho\sigma} + \gamma_{4,6} \frac{g_S^4}{6! \pi^2 m^4} f^{abe} f^{cde} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{c,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b \tilde{G}^{d,\rho\sigma} . \end{aligned} \quad (4.89)$$

Cette base correspond à celle trouvée dans [156, 157] à la différence de quelques remplacements via l'identité (4.87).

Le caractère non-abélien de la QCD rend le développement en série de l'action effective très différent du cas de la QED. Les opérateurs s'annulant avec l'EOM doivent être gardés car ils contribuent à plusieurs diagrammes 1PI off-shell. Par exemple, l'opérateur  $D^\nu G_{\nu\mu}^a D_\rho G^{a,\rho\mu}$  contribue aux processus 1PI à deux, à trois et à quatre gluons off-shell (représentés figure 4.9) du fait des termes non-abéliens présents dans les tenseurs gluoniques. D'autre part, pour un processus physique impliquant des gluons externes on-shell, ces opérateurs ne doivent pas contribuer et la base se voit simplifiée. Vérifions cela pour un processus simple, à savoir l'amplitude de diffusion gluon-gluon

$$\mathcal{A}(g(p_1, \varepsilon_{p_1}^{\mu_1}) g(p_2, \varepsilon_{p_2}^{\mu_2}) \rightarrow g(p_3, \varepsilon_{p_3}^{\mu_3}) g(p_4, \varepsilon_{p_4}^{\mu_4})) = \varepsilon_{p_1}^{\mu_1} \varepsilon_{p_2}^{\mu_2} \varepsilon_{p_3}^{\mu_3*} \varepsilon_{p_4}^{\mu_4*} \mathcal{M}_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} . \quad (4.90)$$

Cette amplitude est calculée en utilisant le lagrangien effectif jusqu'à l'ordre  $O(m^{-4})$ , les topologies de bases à considérer sont représentées figure 4.10.

Outre les termes locaux à quatre points, nous devons ajouter les contributions non-locales provenant des opérateurs à trois gluons et deux gluons ainsi que le terme à l'arbre contenant la fonction d'onde renormalisée. Après avoir effectué les calculs, on observe que :

- La correction de la fonction d'onde est automatiquement prise en compte en renormalisant le champ et la constante de couplage  $g_s$ .

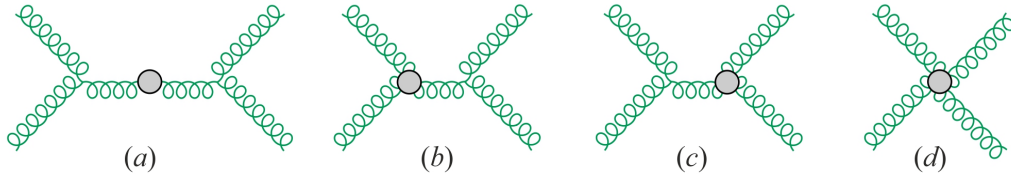


FIGURE 4.10 – Les quatre topologies de bases en voie  $s$  pour l'amplitude de diffusion gluon-gluon. Celles pour les voies  $t$  et  $u$  sont considérées implicitement. Les disques gris représentent les insertions des vertex effectifs.

- Les opérateurs dans  $\mathcal{Q}_{eff}^{(2)}$  contribuent à toutes les topologies, ceux dans  $\mathcal{Q}_{eff}^{(3)}$  contribuent aux topologies  $(b - d)$  et ceux de  $\mathcal{Q}_{eff}^{(4)}$  seulement à la topologie  $(d)$ .
- Pour les opérateurs impliquant l'EOM, toutes leurs contributions s'annulent précisément. Comme attendu, ces derniers ne jouent aucun rôle pour des processus physiques.
- Indépendamment pour chaque opérateur  $Q_i$  ne contenant pas l'EOM, la somme de toutes les contributions  $\mathcal{M}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(Q_i)$  satisfait bien les quatre identités de Ward  $p_k^{\mu_k} \mathcal{M}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(Q_i) = 0, k = 1, 2, 3, 4$ .

Le fait que les opérateurs EOM s'éliminent de l'amplitude physique totale peut être compris qualitativement. Par exemple, en prenant l'opérateur de dimension 6  $D^\nu G_{\nu\mu}^a D_\rho G^{a,\rho\mu}$  dans  $\mathcal{Q}_{eff}^{(2)}$  et en développant les dérivées covariantes, on obtient :

$$\begin{aligned} D^\nu G_{\nu\mu}^a D_\rho G^{a,\rho\mu} &= \partial^\nu G_{\nu\mu}^a \partial_\rho G^{a,\rho\mu} + g f^{abc} G^{b,\nu} G_{\nu\mu}^c \partial_\rho G^{a,\rho\mu} \\ &+ g f^{abc} \partial^\nu G_{\nu\mu}^a G_\rho^b G^{c,\rho\mu} + g^2 f^{abc} f^{ade} G^{b,\nu} G_{\nu\mu}^c G_\rho^d G^{e,\rho\mu}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

En remplaçant le tenseur gluonique par son expression  $G_{\mu\nu}^a \rightarrow \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a$ , les quatre termes obtenus sont précisément ceux qui entrent en jeu dans les quatre topologies de la figure 4.10. On peut voir que l'annulation se réalise car les pôles du propagateur de gluon sont précisément compensés par les contributions à l'ordre dominant provenant du vertex à trois gluons ainsi que par les dérivées dans les trois premiers termes de l'équation (4.91). Un raisonnement similaire est appliqué aux termes non-abélien qui s'annulent de la même manière.

Calculons maintenant les coefficients de Wilson de ces opérateurs effectifs induits par un fermion, un scalaire ou un vecteur dans la représentation fondamentale de  $SU(3)$ . Généralement, la procédure à suivre pour faire correspondre la théorie effective construite et la QCD à basse énergie est la suivante. On commence par la polarisation du vide de QCD (figure 4.9a) qui nous permet de fixer les coefficients  $\alpha_{0,2,4}$ . Ensuite, les amplitudes 1PI à une boucle impliquant 3-gluons (figure 4.9b) génèrent de nouveau les opérateurs de  $\mathcal{Q}_{eff}^{(2)}$  ainsi que ceux de  $\mathcal{Q}_{eff}^{(3)}$ , et ceci permet de fixer  $\beta_2, \beta_{4,1}$  et  $\beta_{4,2}$ . Notons que le choix de la base pour  $\mathcal{Q}_{eff}^{(0+2)}$  influe sur la valeur des trois coefficients de Wilson de  $\mathcal{Q}_{eff}^{(3)}$ . Finalement, les amplitudes 1PI à 4-gluons (figure 4.9c) correspondent avec les opérateurs effectifs locaux impliquant quatre gluons présents dans  $\mathcal{Q}_{eff}^{(0+2+3+4)}$  et connaissant les coefficients trouvés dans les précédentes étapes permet de fixer les six derniers coefficients de Wilson  $\gamma_{4,i}$ . Les résultats finaux trouvés sont exposés dans le tableau 4.2 et sont en accord avec [136] pour les opérateurs de dimension-6.

Cette procédure est directe pour les cas des fermions et des scalaires circulants dans la boucle. Les calculs ont été effectués en utilisant les modèles SM et MSSM implémentés dans FeynArts et en prenant des quarks et des squarks dans la représentation fondamentale comme particules représentatives.

Concernant le cas des vecteurs, le calcul donne bien plus de fil à retordre. En effet, il s'agit d'abord de construire un modèle cohérent qui autorise un champ vectoriel massif dans la représentation

	$\alpha_0$	$\alpha_2$	$\alpha_4$	$\beta_2$	$\beta_{4,1}$	$\beta_{4,2}$
Scalar	$\frac{1}{4}D_\varepsilon$	$-\frac{1}{16}$	$\frac{3}{112}$	$\frac{1}{48}$	$-\frac{1}{28}$	0
Fermion	$D_\varepsilon$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{28}$	$-\frac{1}{24}$	$\frac{1}{14}$	$-\frac{3}{4}$
Vector	$-\frac{21D_\varepsilon + 2}{4}$	$\frac{37}{16}$	$-\frac{159}{112}$	$\frac{1}{16}$	$-\frac{3}{28}$	3
	$\gamma_{4,1}$	$\gamma_{4,2}$	$\gamma_{4,3}$	$\gamma_{4,4}$	$\gamma_{4,5}$	$\gamma_{4,6}$
Scalar	$\frac{7}{768}$	$\frac{1}{768}$	$\frac{7}{384}$	$\frac{1}{384}$	$\frac{1}{96}$	$\frac{1}{672}$
Fermion	$\frac{1}{48}$	$\frac{7}{192}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{96}$	$\frac{1}{96}$	$\frac{19}{672}$
Vector	$\frac{87}{256}$	$\frac{81}{256}$	$\frac{87}{128}$	$\frac{81}{128}$	$-\frac{3}{32}$	$-\frac{27}{224}$

TABLE 4.2 – Coefficients de Wilson des opérateurs effectifs gluoniques pour un scalaire, un fermion et un vecteur dans la représentation fondamentale de  $SU(3)$ . Ceci correspond par exemple aux contributions des squarks dans le MSSM, ou des quarks lourds dans le MS. Dans le cas des vecteurs, nous avons utilisé les leptoquarks du modèle minimal grand-unifié  $SU(5)$  GUT, quantifié en utilisant une jauge non-linéaire (voir Annexe B).

fondamentale de QCD. De plus, nous savons grâce au calcul dans le cas de la QED que travailler dans la jauge unitaire ne fonctionnera pas, et ce même en introduisant un mécanisme approprié du type mécanisme de Higgs pour donner la masse à ces vecteurs. Nous devons alors généraliser la jauge non-linéaire pour qu'elle puisse préserver la symétrie de QCD tout au long de la quantification sinon on ne peut pas faire correspondre les amplitudes 1PI off-shell et les opérateurs effectifs invariants de jauge. Ceci serait particulièrement déroutant ici étant donné que les diagrammes 1PI à 3-gluons sont interdits cinématiquement et ne peuvent exister on-shell. Du fait du caractère non-abélien, les amplitudes 1PI à 3-gluons (nécessairement off-shell) interviennent dans la correspondance des diagrammes à 4-gluons qui doit donc nécessairement se faire off-shell.

Notre stratégie consiste à utiliser le modèle minimal  $SU(5)$  GUT, brisé spontanément en  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$  par un Higgs scalaire dans la représentation adjointe. Au cours de ce processus, douze des bosons de jauge de  $SU(5)$  acquièrent une masse, ce sont les leptoquarks. Ces derniers possèdent précisément les nombres quantiques souhaités. Le doublet faible de leptoquarks ( $X, Y$ ) se transforme comme les antitriplets de couleurs ( $\bar{3}$  de  $SU(3)_C$ ) et donc intégrer les leptoquarks générera les opérateurs effectifs gluoniques. Nous ne nous intéressons pas à la seconde étape de brisure de symétrie  $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{em}$ . Dans l'Annexe B, nous décrivons en détail le modèle minimal  $SU(5)$  GUT dont la quantification est réalisée en jauge non-linéaire pour les leptoquarks. En notant  $H_X^k$  et  $H_Y^k$  les bosons de Goldstone scalaires associés (would-be Goldstone) aux leptoquarks  $X_\mu^k$  et  $Y_\mu^k$ , le point clef consiste à modifier la jauge  $R_\xi$

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{\xi}|\partial^\mu X_\mu^{k+} - i\xi M_{XY}H_X^{k+}|^2 - \frac{1}{\xi}|\partial^\mu Y_\mu^{k+} - i\xi M_{XY}H_Y^{k+}|^2 + \dots \quad (4.92)$$

en remplaçant la dérivée partielle par la dérivée covariante de  $SU(5)$

$$\begin{aligned}\partial^\mu X_\mu^{i+} &\rightarrow \partial^\mu X_\mu^{i+} - ig_5 \left( -\alpha_G X_\nu^{j+} T_{ji}^a G_\mu^a + \frac{\alpha_W}{2} W_\mu^3 X_\nu^{i+} + \frac{\alpha_W}{\sqrt{2}} W_\mu^+ Y_\nu^{i+} + \alpha_B \sqrt{\frac{5}{12}} B_\mu X_\nu^{i+} \right), \\ \partial^\mu Y_\nu^{i+} &\rightarrow \partial^\mu Y_\nu^{i+} - ig_5 \left( -\alpha_G Y_\nu^{j+} T_{ji}^a G_\mu^a - \frac{\alpha_W}{2} W_\mu^3 Y_\nu^{i+} + \frac{\alpha_W}{\sqrt{2}} W_\mu^- X_\nu^{i+} + \alpha_B \sqrt{\frac{5}{12}} B_\mu Y_\nu^{i+} \right),\end{aligned}\tag{4.93}$$

où les  $T^a$  sont les générateurs de  $SU(3)$  dans la représentation fondamentale et  $i, j, k$  les indices correspondants. Les paramètres de jauge  $\alpha_G, \alpha_W, \alpha_B$  servent à interpoler entre la jauge de 't Hooft Feynman ( $\alpha_G = \alpha_W = \alpha_B = 0$ ) et la jauge non-linéaire ( $\alpha_G = \alpha_W = \alpha_B = 1$ ) où les termes 4.93 coïncident avec  $D^\mu X_\mu^{i+}$  et  $D^\mu Y_\nu^{i+}$ . Dans cette limite, les symétries de jauge du modèle standard sont préservées, exactement comme pour le cas du MS avec  $U(1)_{em}$  dans la jauge non-linéaire. D'un point de vue technique, cette jauge possède aussi la plaisante propriété de réduire drastiquement le nombre de diagrammes pour un processus donné [153]. En effet, rappelons que l'intérêt de la jauge  $R_\xi$  usuelle est d'éliminer les termes de mélanges comme  $X_\mu^k \partial^\mu H_X^k$ . Cependant, dès lors que le vecteur est chargé sous une symétrie résiduelle, ce terme est nécessairement de la forme  $X_\mu^k D^\mu H_X^k$  puisqu'il provient du terme cinétique du Higgs scalaire qui est invariant sous les symétries résiduelles. Dans la jauge non-linéaire, tous ces termes sont éliminés et il n'y a donc plus de couplages  $X - V_{SM} - H_X$ . Ainsi, toutes les boucles mélangeant un vecteur massif avec son boson de Goldstone disparaissent, ce qui est apprécié compte tenu du grand nombre de diagrammes.

Afin d'effectuer le calcul en pratique, nous avons là aussi utiliser FeynArts [138] mais avec un fichier-modèle  $SU(5)$  personnalisé que nous avons implémenté. Une fois le calcul effectué, les coefficients de Wilson obtenus sont rapportés dans le tableau 4.2. Quelques commentaires s'imposent :

- La correspondance (matching) ne peut se faire que dans le cas ( $\alpha_G = \alpha_W = \alpha_B = 1$ ). Sans cette condition, des opérateurs effectifs non-invariants de jauge sont nécessaires. Notons qu'en partant de 207 diagrammes 1PI à 4-gluons, une fois la condition ( $\alpha_G = \alpha_W = \alpha_B = 1$ ) de jauge non-linéaire appliquée, on se retrouve avec seulement 21 boucles de bosons de jauge, 21 boucles de Goldstone et 42 boucles de fantômes (ghosts). Le fait d'éliminer les mélanges leptoquarks-WBG réduit le nombre de diagrammes de plus d'un facteur 2.
- Plusieurs propriétés découvertes dans [150] pour les photons survivent à la généralisation non-abélienne, à savoir qu'en jauge non-linéaire, les contributions des fantômes et des bosons de Goldstone sont séparément invariantes de jauge. Faire correspondre séparément les contributions des  $H_X^k$  avec les opérateurs effectifs redonne les mêmes coefficients de Wilson que dans le cas scalaire du tableau 4.2 alors que si on considère uniquement la contribution des fantômes  $c_X$  et  $c_X^\dagger$ , on obtient -2 fois les coefficients dans le cas scalaire du tableau 4.2. Avec la jauge non-linéaire, les fantômes se comportent exactement comme des particules scalaires mais avec la statistique de Fermi-Dirac.
- Comme vérification, nous avons calculé l'amplitude physique de diffusion gluon-gluon en laissant le paramètre de jauge  $\alpha_G$  libre. En incluant des topologies 1PI et non-1PI avec des gluons on-shell, la seule dépendance restante en  $\alpha_G$  peut être absorbée dans la redéfinition de la fonction d'onde. En d'autres termes, le développement en série en  $\frac{1}{m}$  de l'amplitude totale correspond avec les opérateurs effectifs non-EOM (ne faisant pas apparaître l'EOM) et à part pour  $\alpha_0$ , les coefficients de Wilson de ces opérateurs sont indépendants de la jauge, comme il se doit pour un processus physique.
- Pour effectuer des vérifications supplémentaires, nous avons calculer les diagrammes 1PI à deux, trois et quatre bosons de  $SU(2)_L$  externes. Comme la symétrie  $SU(2)_L$  n'est pas brisée et comme

les leptosquarks ( $X, Y$ ) forment un doublet de  $SU(2)_L$ , on peut utiliser (quasiment) la même base d'opérateurs que pour les gluons (moyennant des changements évidents). En effectuant cela, nous retrouvons encore les coefficients du tableau 4.2.

- Finalement, nous avons aussi calculé les opérateurs effectifs impliquant deux et quatre bosons de jauge de  $U(1)_Y$ , et on retrouve bien les mêmes résultats que dans le tableau 4.1 pour les contributions des  $W^\pm$  aux opérateurs effectifs de photons dans la jauge non-linéaire.

Pour conclure cette partie, la même remarque à propos de l'interaction d'Uehling concluant la partie sur les photons peut se faire pour les opérateurs gluoniques EOM. Ces derniers ne jouent pas de rôle pour des processus où les gluons sont on-shell mais contribuent dès lors que d'autres champs comme par exemple des quarks légers restent actifs. Dans ce cas, il est nécessaire d'inclure aussi tous les opérateurs effectifs impliquant les champs de quarks. Bien que les opérateurs EOM sont invariants de jauge par construction, leurs coefficients de Wilson ne le sont pas. Par exemple, la jauge choisie pour les champs de leptosquarks  $X_\mu^k$  et  $Y_\mu^k$  a une influence sur leurs valeurs (l'équation (4.82) reste valable pour la polarisation du vide de QCD). D'un point de vue phénoménologique, il n'y aurait pas vraiment de sens à considérer par exemple l'opérateur  $D^\nu G_{\nu\mu}^a D_\rho G^{a,\rho\mu}$  sans inclure tous les opérateurs à 4-quarks. Dans le cas de  $SU(5)$ , il est clair que les boucles de  $X_\mu^k$  et  $Y_\mu^k$  contribuent à la fois à l'opérateur  $D^\nu G_{\nu\mu}^a D_\rho G^{a,\rho\mu}$  et aux opérateurs à 4-quarks, et seules leur combinaison donnerait un résultat physique, invariant de jauge à l'ordre  $\mathcal{O}(m^{-2})$ . Mentionnons aussi le fait que le coefficient dépendant de la jauge de l'opérateur  $D^\nu G_{\nu\mu}^a D_\rho G^{a,\rho\mu}$  rapporté dans le tableau 4.2, est en accord avec la référence [136], le calcul par la méthode CDE étant réalisé dans la même jauge non-linéaire.

#### 4.2.4 Généralisation aux bosons de jauges $SU(N)$

L'étude réalisée dans le cas de la QCD peut être généralisée à des représentations arbitraires d'autres groupes de Lie. Pour cela, il suffit de remplacer les traces de générateurs de  $SU(3)$  dans la représentation fondamentale apparaissant dans chaque diagrammes 1PI de la partie précédente par des traces de générateurs dans une représentation générique  $\mathbf{R}$ . Les notations utilisées ainsi que plusieurs résultats de théorie des groupes utiles ici sont collectés dans l'Annexe C. De plus, nous nous baserons ici sur le groupe de jauge spécial unitaire  $SU(N)$  mais les résultats s'étendent trivialement à d'autres algèbres de Lie.

D'abord, la polarisation du vide est proportionnelle à  $\text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b) = I_2(\mathbf{R})\delta^{ab}$  avec  $I_2(\mathbf{R})$  l'invariant de Casimir quadratique. Par conséquent, les coefficients  $\alpha_i$  sont simplement obtenus en multipliant ceux du tableau 4.2 par un facteur  $I_2(\mathbf{R})/I_2(\mathbf{F}) = 2I_2(\mathbf{R})$ . De la même manière, les diagrammes à 3-bosons sont proportionnels à :

$$\text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a [T_{\mathbf{R}}^b, T_{\mathbf{R}}^c]) = iI_2(\mathbf{R})f^{abc}. \quad (4.94)$$

Le fait que les amplitudes à deux et à trois bosons soient proportionnelles au même invariant  $I_2(\mathbf{R})$  assure une bonne correspondance avec la théorie effective. En particulier, la divergence des diagrammes à 3-bosons est correctement prise en compte par les couplages de  $\mathcal{Q}_{eff}^{(2)}$ .

En ce qui concerne les amplitudes à 4-bosons, la situation est plus délicate. Les diagrammes 1PI à une boucle, que ce soit dans le cas des fermions, des scalaires ou des vecteurs, sont équivalents deux à deux par renversement de l'impulsion circulant dans la boucle. C'est pourquoi les amplitudes totales peuvent toujours s'écrire sous la forme

$$\mathcal{M}^{abcd} = C_1^{abcd} \mathcal{M}_1 + C_2^{abcd} \mathcal{M}_2 + C_3^{abcd} \mathcal{M}_3, \quad \begin{cases} C_1^{abcd} = \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^d T_{\mathbf{R}}^c) + \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d T_{\mathbf{R}}^b), \\ C_2^{abcd} = \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d) + \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^d T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^b), \\ C_3^{abcd} = \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^d) + \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^d T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c). \end{cases} \quad (4.95)$$

En développant  $\mathcal{M}^{abcd}$  en l'inverse de la masse de la particule (lourde) circulant dans la boucle, seules deux combinaisons de traces indépendantes interviennent aux ordres  $\mathcal{O}(m^0)$  et  $\mathcal{O}(m^{-2})$  et ces dernières peuvent être exprimées entièrement en termes d'invariants quadratiques de la manière suivante :

$$\begin{aligned} D_1^{abcd} &= 2C_1^{abcd} - C_2^{abcd} - C_3^{abcd} = I_2(\mathbf{R})(2f^{ace}f^{bde} - f^{ade}f^{bce}), \\ D_2^{abcd} &= 2C_2^{abcd} - C_1^{abcd} - C_3^{abcd} = I_2(\mathbf{R})(2f^{ade}f^{bce} - f^{ace}f^{bde}), \\ D_3^{abcd} &= 2C_3^{abcd} - C_1^{abcd} - C_2^{abcd} = I_2(\mathbf{R})(-f^{ade}f^{bce} - f^{ace}f^{bde}) = -D_1^{abcd} - D_2^{abcd}, \end{aligned} \quad (4.96)$$

où l'on a utilisé  $[T_{\mathbf{R}}^a, T_{\mathbf{R}}^b] = if^{abc}T_{\mathbf{R}}^c$ , l'équation (4.94) et l'identité de Jacobi  $f^{abe}f^{cde} = f^{ace}f^{bde} - f^{ade}f^{bce}$ . Par suite, la correspondance entre  $\mathcal{M}^{abcd}$  et l'amplitude à 4-bosons calculée avec les couplages effectifs  $\mathcal{L}_{eff}^{(2)}$  et  $\mathcal{L}_{eff}^{(3)}$  aux ordres  $\mathcal{O}(m^0)$  et  $\mathcal{O}(m^{-2})$ .

A l'ordre  $\mathcal{O}(m^{-4})$ , ces mêmes combinaisons de traces  $D_{1,2,3}^{abcd}$  induisent les opérateurs impliquant les constantes de structures (associés aux coefficients de Wilson  $\gamma_{4,5}$  et  $\gamma_{4,6}$ ). Le reste est proportionnel à la trace totalement symétrisée :

$$D_0^{abcd} = C_1^{abcd} + C_2^{abcd} + C_3^{abcd} = \frac{1}{4}S \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d). \quad (4.97)$$

Pour une algèbre  $SU(N)$  générale (voir détail en Annexe C), la trace totalement symétrisée se décompose en invariants quadratiques et quartiques. En injectant la relation (C.3) dans l'équation (4.97), on obtient :

$$D_0^{abcd} = 6I_4(\mathbf{R})d^{abcd} + 6\Lambda(\mathbf{R})(\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{bc}), \quad (4.98)$$

où  $d^{abcd}$  est le symbole d'ordre quatre totalement symétrique, normalisé tel que  $I_4(\mathbf{F}) = 1$  pour la représentation fondamentale et où

$$\Lambda(\mathbf{R}) = \left( \frac{N(\mathbf{A})I_2(\mathbf{R})}{N(\mathbf{R})} - \frac{I_2(\mathbf{A})}{6} \right) \frac{I_2(\mathbf{R})}{2 + N(\mathbf{A})}, \quad (4.99)$$

avec  $\mathbf{A}$  la représentation adjointe et  $N(\mathbf{R})$  la dimension de la représentation  $\mathbf{R}$ . Le terme proportionnel à  $\Lambda(\mathbf{R})$  correspond aux opérateurs associés aux coefficients de Wilson de  $\gamma_{4,1}$  jusqu'à  $\gamma_{4,4}$  alors que le terme proportionnel à  $d^{abcd}$  nécessite d'étendre le lagrangien effectif  $\mathcal{L}_{eff}^{(4)}$  (4.89) en y ajoutant deux opérateurs supplémentaires. Ainsi, le lagrangien effectif total est le suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff}^{(4)} &= \gamma_{4,1} \frac{g_S^4}{6!\pi^2 m^4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b G^{b,\rho\sigma} + \gamma_{4,2} \frac{g_S^4}{6!\pi^2 m^4} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{a,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b \tilde{G}^{b,\rho\sigma} \\ &+ \gamma_{4,3} \frac{g_S^4}{6!\pi^2 m^4} G_{\mu\nu}^a G^{b,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^a G^{b,\rho\sigma} + \gamma_{4,4} \frac{g_S^4}{6!\pi^2 m^4} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{b,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^a \tilde{G}^{b,\rho\sigma} \\ &+ \gamma_{4,5} \frac{g_S^4}{6!\pi^2 m^4} f^{abe} f^{cde} G_{\mu\nu}^a G^{c,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b G^{d,\rho\sigma} + \gamma_{4,6} \frac{g_S^4}{6!\pi^2 m^4} f^{abe} f^{cde} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{c,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b \tilde{G}^{d,\rho\sigma} \\ &+ \gamma_{4,7} \frac{g_S^4}{6!\pi^2 m^4} d^{abcd} G_{\mu\nu}^a G^{b,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^c G^{d,\rho\sigma} + \gamma_{4,8} \frac{g_S^4}{6!\pi^2 m^4} d^{abcd} G_{\mu\nu}^a \tilde{G}^{b,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^c \tilde{G}^{d,\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Le nombre total de huit opérateurs requis pour  $SU(N)$  ainsi que leur structure tensorielle quartique est en accord avec la référence [156, 157]. Cependant, notons que la définition de  $\Lambda(\mathbf{R})$  est conventionnelle et le choix de la convention affecte indirectement la définition de tous les opérateurs effectifs sauf ceux associés à  $\gamma_{4,3}$  et  $\gamma_{4,6}$ . La convention de l'équation (4.99) pour  $\Lambda(\mathbf{R})$  adoptée ici semble optimale car elle assure que  $I_4(\mathbf{R}) = 0$  pour toutes les représentations de  $SU(2)$  et de  $SU(3)$ , comme il se doit puisque ces algèbres ne possèdent pas de tenseur invariant irréductible de rang quatre. Tous ces résultats restent valides pour les algèbres  $SO(N)$ , à l'exception de  $SO(8)$ . En effet, comme cela est



expliqué dans l'Annexe C,  $SO(8)$  à la propriété unique de posséder deux symboles quartiques et en conséquence un terme supplémentaire apparaît dans l'équation (4.98). Dans ce cas, deux opérateurs additionnels sont requis, dont les coefficients de Wilson sont proportionnels au deuxième symbole quartique de l'équation (C.8).

En fait, bien que huit opérateurs indépendants (ou dix pour  $SO(8)$ ) peuvent être construits dans le cas général, les résultats de nos calculs ont montré qu'à une boucle, la plupart de ces opérateurs découlent d'une même trace totalement symétrisée et sont donc toujours corrélés. En particulier, quelque soit la représentation et le spin de la particule circulant dans la boucle, on a :

$$\begin{aligned}\gamma_{4,1} &= \frac{1}{2}\gamma_{4,3}, \\ \gamma_{4,2} &= \frac{1}{2}\gamma_{4,4}.\end{aligned}\tag{4.101}$$

Il s'ensuit alors que deux combinaisons particulières d'opérateurs ne se produisent jamais dans l'action effective à une boucle. D'un point de vue de théorie effective, ceci devrait rester vrai dans la plupart des cas dans la mesure où ce résultat découle de la symétrie de l'amplitude. Au delà d'une boucle, une condition nécessaire pour que ce résultat survive est l'absence de diagrammes ayant une discontinuité du courant de couleur, c'est à dire lorsqu'un produit de traces intervient au lieu d'une unique trace. Ce cas ne se produit jamais lorsqu'un seul état lourd est intégré mais pourrait se réaliser dans des configurations plus générales. Par exemple, dans le MS, si on intègre à la fois des quarks lourds et le boson de Higgs, les diagrammes de la figure 4.11 se présentent à deux boucles.

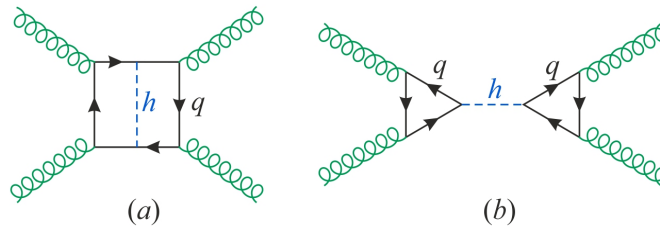


FIGURE 4.11 – Exemples de diagrammes à deux boucles dans le MS préservant (a) ou violant (b) les prédictions à une boucle de l'équation (4.101) sur les opérateurs gluoniques. Les particules circulants dans la boucle sont des quarks lourds et les lignes pointillées représentent le boson de Higgs.

Puisque le couplage effectif Higgs-gluon-gluon conservant CP est de la forme  $h^0 G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$ , il est clair que l'échange de boson de Higgs dans la figure 4.11b contribue à  $\gamma_{4,1}$  mais pas à  $\gamma_{4,3}$ .

Les coefficients de Wilson pour un champ complexe (fermion, scalaire ou vecteur) circulant dans les boucles sont donnés dans le tableau 4.3. Si on considère une particule de Majorana (auto-conjuguée), les valeurs des coefficients de Wilson seront la moitié de ceux rapportés ici. En effet, quand le propagateur n'est pas orienté, certains diagrammes de Feynman sont multipliés par un facteur de symétrie 1/2 supplémentaire alors que pour les autres, l'impulsion dans la boucle doit circuler dans un seul sens et ne peut pas être renversée. Cette dernière situation apporte également un facteur 1/2 car on a  $(T_{\mathbf{R}}^a)^T = -T_{\mathbf{R}}^a$  pour une représentation réelle. Par exemple, au lieu de l'équation (4.94), les diagrammes triangles sont maintenant proportionnels à :

$$\text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c) \Big|_{\text{self-conjugate}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a [T_{\mathbf{R}}^b, T_{\mathbf{R}}^c]) = \frac{1}{2} i I_2(\mathbf{R}) f^{abc}.\tag{4.102}$$

Similairement, les coefficients pour l'amplitude à 4-points satisfont :

$$C_1^{abcd} \Big|_{\text{self-conjugate}} = \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^d T_{\mathbf{R}}^c) = \frac{1}{2} (\text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d T_{\mathbf{R}}^b) + \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d T_{\mathbf{R}}^b)) = \frac{1}{2} C_1^{abcd}.\tag{4.103}$$

Nous avons vérifié cette propriété des coefficients de Wilson dans deux cas pratiques pertinents physiquement, à savoir : les contributions des bosons de Higgs  $H_G^a$  de  $SU(5)$  et des gluinos du MSSM aux coefficients des opérateurs gluoniques, tout deux étant des champs auto-conjugués dans la représentation adjointe de  $SU(3)_C$ .

	$\alpha_0$	$\alpha_2$	$\alpha_4$	$\beta_2$	$\beta_{4,1}$	$\beta_{4,2}$
Scalar	$\frac{1}{2}I_2(\mathbf{R})D_\varepsilon$	$-\frac{1}{8}I_2(\mathbf{R})$	$\frac{3}{56}I_2(\mathbf{R})$	$\frac{1}{24}I_2(\mathbf{R})$	$-\frac{1}{14}I_2(\mathbf{R})$	0
Fermion	$2I_2(\mathbf{R})D_\varepsilon$	$-I_2(\mathbf{R})$	$\frac{9}{14}I_2(\mathbf{R})$	$-\frac{1}{12}I_2(\mathbf{R})$	$\frac{1}{7}I_2(\mathbf{R})$	$-\frac{3}{2}I_2(\mathbf{R})$
Vector	$-\frac{21D_\varepsilon + 2}{2}I_2(\mathbf{R})$	$\frac{37}{8}I_2(\mathbf{R})$	$-\frac{159}{56}I_2(\mathbf{R})$	$\frac{1}{8}I_2(\mathbf{R})$	$-\frac{3}{14}I_2(\mathbf{R})$	$6I_2(\mathbf{R})$
	$\gamma_{4,1} = \gamma_{4,3}/2$	$\gamma_{4,2} = \gamma_{4,4}/2$	$\gamma_{4,5}$	$\gamma_{4,6}$	$\gamma_{4,7}$	$\gamma_{4,8}$
Scalar	$\frac{7}{32}\Lambda(\mathbf{R})$	$\frac{1}{32}\Lambda(\mathbf{R})$	$\frac{1}{48}I_2(\mathbf{R})$	$\frac{1}{336}I_2(\mathbf{R})$	$\frac{7}{32}I_4(\mathbf{R})$	$\frac{1}{32}I_4(\mathbf{R})$
Fermion	$\frac{1}{2}\Lambda(\mathbf{R})$	$\frac{7}{8}\Lambda(\mathbf{R})$	$\frac{1}{48}I_2(\mathbf{R})$	$\frac{19}{336}I_2(\mathbf{R})$	$\frac{1}{2}I_4(\mathbf{R})$	$\frac{7}{8}I_4(\mathbf{R})$
Vector	$\frac{261}{32}\Lambda(\mathbf{R})$	$\frac{243}{32}\Lambda(\mathbf{R})$	$-\frac{3}{16}I_2(\mathbf{R})$	$-\frac{27}{112}I_2(\mathbf{R})$	$\frac{261}{32}I_4(\mathbf{R})$	$\frac{243}{32}I_4(\mathbf{R})$

TABLE 4.3 – Coefficients de Wilson des opérateurs effectifs pour les bosons de jauge de  $SU(N)$  ou  $SO(N \neq 8)$ , induits par des champs complexes de spin 0, 1/2 et 1 siégeant dans la représentation  $\mathbf{R}$ . Pour des champs réels, tous les coefficients sont réduits de moitié.

#### 4.2.4.1 Réductions vers les groupes $SU(3)$ et $SU(2)$

La base générale d'opérateurs effectifs se réduit immédiatement à  $SU(3)$  en retirant les opérateurs proportionnels aux invariants quartiques, c'est à dire en annulant  $\gamma_{4,7}$  et  $\gamma_{4,8}$ . Pour la représentation fondamentale, on a  $I_2^{SU(3)}(\mathbf{F}) = 1/2$  et  $\Lambda^{SU(3)}(\mathbf{F}) = 1/24$  et on retrouve les résultats du tableau 4.2. Cependant, un comportement intéressant apparaît pour des représentations plus générales. A priori, lorsqu'on augmente la dimension des représentations, on s'attendrait à ce que l'intensité des couplages effectifs augmente mécaniquement du fait du plus grand nombre de particules circulant dans la boucle. Toutefois, nous montrons dans la figure 4.12 que  $\Lambda(\mathbf{R})$  croît plus vite que  $N(\mathbf{R})$ . Les croissances les plus rapides concernent les représentations qui sont des produits tensoriels symétriques des représentations fondamentales, pour lesquelles on a :  $\Lambda(\mathbf{R}) \sim N(\mathbf{R})^3$ . Par exemple,  $\Lambda(\mathbf{3}) = 1/24$  mais  $\Lambda(\mathbf{6} = \mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3}) = 17/24$ ,  $\Lambda(\mathbf{10} = \mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3}) = 99/24$  et  $\Lambda(\mathbf{15} = \mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3} \otimes_S \mathbf{3}) = 371/24$ . La représentation adjointe n'en fait pas partie quoique les interactions effectives sont quand même plus fortes qu'attendues naïvement par l'argument de la dimension puisque  $\Lambda^{SU(3)}(\mathbf{8}) = 3/4 = 18 \times \Lambda^{SU(3)}(\mathbf{3})$ . Ceci correspond à des scénarios physiques sensibles comme par exemple celui des gluinos dans le MSSM pour lesquels (en incluant le facteur 1/2 pour les particules auto-conjuguées) :

$$\frac{1}{2} \times \frac{g_S^4}{6! \pi^2 m_{\tilde{g}}^4} \gamma_{4,1} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} 18 \frac{g_S^4}{6! \pi^2 m_{\tilde{g}}^4} = \frac{\alpha_S}{10 m_{\tilde{g}}^4}, \quad (4.104)$$

, ce qui est un ordre de grandeur plus grand que le coefficient des interactions effectives de photons dans le lagrangien d'Euler-Heisenberg.

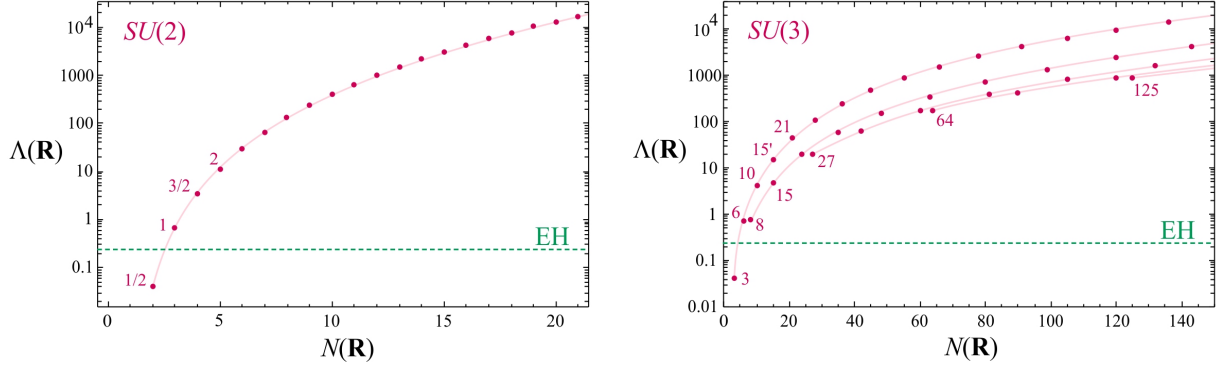


FIGURE 4.12 – Evolution de  $\Lambda(\mathbf{R})$  en fonction de la dimension de la représentation  $N(\mathbf{R})$  pour  $SU(2)$  et  $SU(3)$ . Dans le premier cas, on note l'isospin correspondant des premières représentations. Dans le cas de  $SU(3)$ , plusieurs branches sont illustrées, chacune commençant avec une représentation réelle. Les lignes horizontales en pointillé repèrent la valeur dans le cas d'Euler-Heisenberg, identifiée à  $\Lambda(\mathbf{1}) = 1/3$  pour une particule de charge unité dans la boucle à partir de l'équation (4.111).

Quant à  $SU(2)$ , le lagrangien effectif se simplifie grâce à l'identité

$$f^{abe} f^{cde} \rightarrow \varepsilon^{abe} \varepsilon^{cde} = \delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ad} \delta^{bc}, \quad (4.105)$$

ce qui permet d'éliminer deux opérateurs. En exprimant les quatre opérateurs restants explicitement en termes des états du triplet de  $SU(2)$ , noté  $\{W_\mu^-, W_\mu^3, W_\mu^+\}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff, SU(2)_L}^{(4)} = & \frac{(\gamma_{4,1} + \gamma_{4,3})g^4}{6!\pi^2 m^4} (W_{\mu\nu}^3 W^{3,\mu\nu})^2 + \frac{(\gamma_{4,2} + \gamma_{4,4})g^4}{6!\pi^2 m^4} (W_{\mu\nu}^3 \tilde{W}^{3,\mu\nu})^2 \\ & + \frac{4(\gamma_{4,1} + \gamma_{4,5})g^4}{6!\pi^2 m^4} W_{\mu\nu}^3 W^{3,\mu\nu} W_{\rho\sigma}^+ W^{-,\rho\sigma} + \frac{4(\gamma_{4,2} + \gamma_{4,6})g^4}{6!\pi^2 m^4} W_{\mu\nu}^3 \tilde{W}^{3,\mu\nu} W_{\rho\sigma}^+ \tilde{W}^{-,\rho\sigma} \\ & + \frac{4(\gamma_{4,3} - \gamma_{4,5})g^4}{6!\pi^2 m^4} |W_{\mu\nu}^3 W^{+,\mu\nu}|^2 + \frac{4(\gamma_{4,4} - \gamma_{4,6})g^4}{6!\pi^2 m^4} |W_{\mu\nu}^3 \tilde{W}^{+,\mu\nu}|^2 \\ & + \frac{2(2\gamma_{4,1} + \gamma_{4,3} + \gamma_{4,5})g^4}{6!\pi^2 m^4} (W_{\mu\nu}^+ W^{-,\mu\nu})^2 + \frac{2(\gamma_{4,4} - \gamma_{4,6})g^4}{6!\pi^2 m^4} |W_{\mu\nu}^+ \tilde{W}^{+,\mu\nu}|^2 \\ & + \frac{2(\gamma_{4,3} - \gamma_{4,5})g^4}{6!\pi^2 m^4} |W_{\mu\nu}^+ W^{+,\mu\nu}|^2 + \frac{2(2\gamma_{4,2} + \gamma_{4,4} + \gamma_{4,6})g^4}{6!\pi^2 m^4} (W_{\mu\nu}^+ \tilde{W}^{-,\mu\nu})^2. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Ces opérateurs et coefficients sont obtenus à partir de l'action effective et sont indépendants de la masse invariante des particules externes. Ainsi, ces derniers restent valides pour les bosons de jauge massifs de l'interaction faible en pattes externes, du moins tant que  $m$  est suffisamment grand devant  $M_{Z,W}$ . Cependant, une importante mise en garde, pertinente pour le MS, concerne la présence de fermions chiraux. En effet, ces derniers ne peuvent pas être massifs sans briser la symétrie de jauge et donc le développement en l'inverse de la masse n'est défini que dans la phase brisée. Dans ce cas, des opérateurs non-invariants de jauge peuvent alors être présents aux ordres  $O(m^0)$  et  $O(m^{-2})$ .

Concernant l'intensité des couplages effectifs, ici aussi  $\Lambda(\mathbf{R})$  croît bien plus vite que  $N(\mathbf{R})$ . En fait, comme les représentations de  $SU(2)$  sont plus petites que celles de  $SU(3)$ , la croissance est plus prononcée avec  $\Lambda(\mathbf{R}) \sim N(\mathbf{R})^5$  (voir figure 4.12). Alors que  $\Lambda(\mathbf{F}) = 1/24$ , on gagne déjà un ordre de grandeur avec la représentation adjointe  $\Lambda(\mathbf{3}) = 2/3 = 16 \times \Lambda(\mathbf{2})$ .

Pour finir, il est instructif de se pencher sur ces résultats d'un point de vue de théorie des groupes. Jusque là, les lagrangiens effectifs pour  $SU(2)$  et  $SU(3)$  sont obtenus simplement en mettant  $N = 2$

ou  $N = 3$  dans le résultat général. Néanmoins, si  $N$  est assez grand, de sorte que  $SU(N)$  puisse contenir une sous-algèbre  $SU(2)$  ou  $SU(3)$ , on pourrait alors se demander comment celle-ci se manifesterait au niveau du lagrangien général  $SU(N)$ . Plus généralement, considérons le lagrangien effectif pour une représentation  $\mathbf{R}_M$  de  $SU(M)$ . Ces  $N(\mathbf{R}_M)$  états s'organisent dans des représentations de  $SU(N) \subset SU(M)$ , c'est à dire que  $\mathbf{R}_M$  se décompose en une somme directe de représentations  $\mathbf{R}_N$  de  $SU(N)$ . Par suite, du point de vue de  $SU(N)$ , les coefficients de  $SU(M)$  encodent la circulation d'une collection d'états dans la boucle. Etant donné que ces contributions s'ajoutent simplement, les coefficients de  $SU(M)$  doivent être la somme des coefficients de  $SU(N)$  pour toutes les représentations  $\mathbf{R}_N$  présentes dans la représentation  $\mathbf{R}_M$ . En repartant de l'équation (4.98), on doit alors avoir

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}D_0^{abcd} &= I_4(\mathbf{R}_M)d_M^{abcd} + \Lambda_N(\mathbf{R}_M)(\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{bc}) \\ &= \sum_{\mathbf{R}_N \subset \mathbf{R}_M} I_4(\mathbf{R}_N)d_N^{abcd} + \sum_{\mathbf{R}_N \subset \mathbf{R}_M} \Lambda_N(\mathbf{R}_N)(\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{bc}), \end{aligned} \quad (4.107)$$

où les indices  $a, b, c, d$  dénotent les générateurs de  $SU(M)$  qui correspondent à la sous-algèbre  $SU(N)$ . La difficulté principale est que même restreint à ces générateurs particuliers,  $d_M^{abcd} \neq d_N^{abcd}$  car la définition de l'invariant quartique implique différentes fonctions  $\Lambda_N$  et  $\Lambda_M$ . Pour procéder, supposons que la représentation fondamentale s'embranchement comme ceci  $\mathbf{F}_M \rightarrow \mathbf{F}_N$ . Sachant que  $I_4(\mathbf{F}_M) = I_4(\mathbf{F}_N) = 1$  par définition, on a

$$\begin{aligned} I_4(\mathbf{R}_M) &= \sum_{\mathbf{R}_N \subset \mathbf{R}_M} I_4(\mathbf{R}_N), \\ I_4(\mathbf{R}_M)(\Lambda_N(\mathbf{F}_N) - \Lambda_M(\mathbf{F}_M)) + \Lambda_M(\mathbf{R}_M) &= \sum_{\mathbf{R}_N \subset \mathbf{R}_M} \Lambda_N(\mathbf{R}_N). \end{aligned} \quad (4.108)$$

En utilisant les nombres rapportés dans l'Annexe C ainsi que les règles d'embranchements dans [158], on peut vérifier que les deux formules sont valides pour  $SU(3) \subset SU(4)$  et  $SU(4) \subset SU(5)$ . La seconde s'applique également à  $SU(2) \subset SU(3)$ , auquel cas elle devient une règle de somme pour les fonctions  $\Lambda$  vu que  $I_4(\mathbf{R}) = 0$  dans  $SU(3)$ . D'un point de vue calculatoire, une fois que les règles d'embranchements des représentations de  $SU(M)$  sont connues, ces équations sont particulièrement puissantes, la deuxième permettant même de déterminer  $I_4(\mathbf{R}_M)$  en fonction de  $\Lambda_N$  et  $\Lambda_M$ , c'est à dire exprimé entièrement en termes des invariants quadratiques  $I_2(\mathbf{R}_N)$  et  $I_2(\mathbf{R}_M)$ .

Grâce à la convention (4.99), la règle d'embranchement pour l'invariant  $I_4$  est très simple [159], bien qu'il y ait un prix à payer. Certaines parties des opérateurs  $\gamma_{4,7}$  et  $\gamma_{4,8}$  de  $SU(M)$  sont déplacées dans les opérateurs de  $\gamma_{4,1}$  à  $\gamma_{4,4}$  de  $SU(N < M)$ . Ceci est dû à la définition première des opérateurs en termes de symboles quartiques différents et non à la structure de boucle de l'amplitude ou encore aux règles d'embranchements spécifiques. Par exemple, si pour un groupe d'unification donné, on trouve un mécanisme spécifique qui génère seulement  $\gamma_{4,7}$  et  $\gamma_{4,8}$ , les quatre opérateurs associés à  $\gamma_{4,1}$  à  $\gamma_{4,4}$  sont en général présents dès lors que la symétrie est brisée spontanément simplement car le symbole  $d^{abcd}$  est défini différemment au sein de la sous-algèbre survivante.

#### 4.2.4.2 Réduction vers $U(1)$

En comparant les coefficients  $\gamma_{4,i}$  du tableau 4.3 dans le cas de  $SU(N)$  et les résultats dans le cas d'Euler-Heisenberg dans le tableau 4.1, il apparaît clairement que ces derniers sont liés. De façon heuristique, il est simple de comprendre la relation entre les deux cas en adaptant la décomposition (4.95) pour  $U(1)$ . Lorsqu'un unique générateur intervient, on a  $C_1 = C_2 = C_3 = 2Q^4$ . Ceci assure

l'annulation de la divergence UV et plus généralement l'absence de tous les opérateurs proportionnels aux constantes de structures. L'amplitude totale est alors proportionnelle à

$$D_0 \equiv C_1 + C_2 + C_3 = 6Q^4. \quad (4.109)$$

Comme le même facteur 6 apparaît dans le résultat (4.98) pour  $SU(N)$ , il est clair que  $\gamma_{4,1}^{EH}$  et  $\gamma_{4,2}^{EH}$  peuvent être obtenus de façon équivalente à partir de  $\gamma_{4,1}^{SU(N)}$  et  $\gamma_{4,2}^{SU(N)}$  avec  $\Lambda(\mathbf{R}) \rightarrow Q^4$  ou bien à partir de  $\gamma_{4,7}^{SU(N)}$  et  $\gamma_{4,8}^{SU(N)}$  avec  $I_4(\mathbf{R}) \rightarrow Q^4$ , en accord avec les tableaux 4.3 et 4.1. Bien entendu, ce raisonnement est une identification naïve des coefficients des fonctions de boucles et non une réduction rigoureuse de  $SU(N)$  vers un de ses sous-groupes  $U(1)$  basée sur la théorie des groupes.

Afin de réaliser proprement la réduction, notons  $T^a$  un des générateurs diagonaux de l'algèbre de Cartan de  $SU(N)$ . Ce générateur induit un  $U(1)_\alpha \subset SU(N)$  pour lequel le lagrangien effectif  $SU(N)$  se réduit à

$$\begin{aligned} \Omega_{eff}^{(4)}(U(1)_\alpha \subset SU(N)) &= (\gamma_{4,1} + \gamma_{4,3} + d^{\alpha\alpha\alpha\alpha}\gamma_{4,7}) \frac{g_S^4}{6!\pi^2 m^4} G_{\mu\nu}^\alpha G^{\alpha,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^\alpha G^{\alpha,\rho\sigma} \\ &+ (\gamma_{4,2} + \gamma_{4,4} + d^{\alpha\alpha\alpha\alpha}\gamma_{4,8}) \frac{g_S^4}{6!\pi^2 m^4} G_{\mu\nu}^\alpha \tilde{G}^{\alpha,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^\alpha \tilde{G}^{\alpha,\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (4.110)$$

Le résultat dans le cas d'Euler-Heisenberg doit provenir d'une combinaison de six des huit opérateurs  $SU(N)$ , incluant ceux qui impliquent l'invariant quartique. En regardant à nouveau leurs valeurs pour une représentation donnée  $\mathbf{R}$  dans le tableau 4.3, cette réduction correspond aux résultats dans le tableau 4.1 pour les cas scalaire, fermion et vecteur à condition de satisfaire la seule condition suivante :

$$3\Lambda(\mathbf{R}) + d^{\alpha\alpha\alpha\alpha} I_4(\mathbf{R}) = \sum_{q_\alpha \in \mathbf{R}} q_\alpha^4. \quad (4.111)$$

La somme dans le membre de droite est réalisée sur tous les états vivant dans la représentation  $\mathbf{R}$ . Pour voir que cette condition est vérifiée en général, il suffit de retourner à la définition première de l'invariant quartique (voir Annexe C) qui pour un unique générateur devient alors :

$$\frac{1}{4!} S \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^\alpha T_{\mathbf{R}}^\alpha T_{\mathbf{R}}^\alpha T_{\mathbf{R}}^\alpha) = \text{Tr}((T_{\mathbf{R}}^\alpha)^4) = I_4(\mathbf{R}) d^{\alpha\alpha\alpha\alpha} + 3\Lambda(\mathbf{R}). \quad (4.112)$$

Comme  $T_{\mathbf{R}}^\alpha$  est diagonal, la trace se réduit à une somme des puissances quartiques ses valeurs propres, c'est à dire sur les puissances quartiques des charges  $U(1)_\alpha$  des états de la représentation  $\mathbf{R}$ . La dernière étape pour retrouver le tableau 4.1 consiste à normaliser correctement le générateur  $T_{\mathbf{R}}^\alpha$  de sorte à avoir la charge  $U(1)_\alpha$  en unités de  $Q$ . Notons que cette relation peut être trivialement généralisée à d'autres invariants de Casimir. En particulier, pour les opérateurs de dimension 4 et 6,  $I_2(\mathbf{R}) = \text{Tr}((T_{\mathbf{R}}^\alpha)^2) = \sum_{q_\alpha \in \mathbf{R}} q_\alpha^2$  montrant que les coefficients  $\alpha_i$  pour  $SU(N)$  se réduisent à ceux pour la QED moyennant le remplacement naïf  $I_2(\mathbf{R}) \rightarrow Q^2$  dans le tableau 4.3.

Des applications numériques qui illustrent cette formule sont en Annexe C. Remarquons que pour  $SU(2)$  et  $SU(3)$ , il n'y a pas d'invariant quartique et les coefficients d'Euler-Heisenberg pour un état de charge unité sont formellement obtenus en mettant  $\Lambda(\mathbf{1}) = 1/3$  dans l'équation (4.111). Cette valeur est représentée sur la figure 4.12 pour comparaison.

#### 4.2.4.3 Réduction vers des groupes produits

Le résultat général peut aussi se réduire aux interactions mixtes, c'est à dire impliquant les bosons de jauge de deux différentes algèbres. Avant d'examiner cette réduction, calculons les directement à

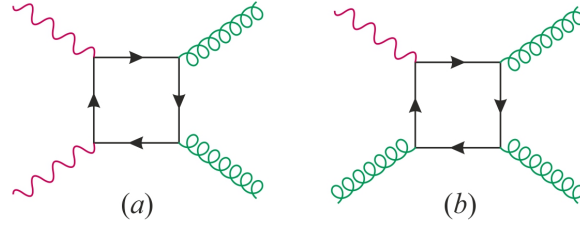


FIGURE 4.13 – Boucles de quarks générant les interactions effectives photon-gluon de dimension 8.

	$\alpha_1 = \alpha_3/2$	$\alpha_2 = \alpha_4/2$	$\beta_1$	$\beta_2$
Scalar	$\frac{7}{16}Q(\mathbf{R})^2I_2(\mathbf{R})$	$\frac{1}{16}Q(\mathbf{R})^2I_2(\mathbf{R})$	$\frac{7}{32}Q(\mathbf{R})I_3(\mathbf{R})$	$\frac{1}{32}Q(\mathbf{R})I_3(\mathbf{R})$
Fermion	$Q(\mathbf{R})^2I_2(\mathbf{R})$	$\frac{7}{4}Q(\mathbf{R})^2I_2(\mathbf{R})$	$\frac{1}{2}Q(\mathbf{R})I_3(\mathbf{R})$	$\frac{7}{8}Q(\mathbf{R})I_3(\mathbf{R})$
Vector	$\frac{261}{16}Q(\mathbf{R})^2I_2(\mathbf{R})$	$\frac{243}{16}Q(\mathbf{R})^2I_2(\mathbf{R})$	$\frac{261}{32}Q(\mathbf{R})I_3(\mathbf{R})$	$\frac{243}{32}Q(\mathbf{R})I_3(\mathbf{R})$

 TABLE 4.4 – Coefficients de Wilson des opérateurs effectifs pour les interactions mixtes, induit par un champ complexe (scalaire, fermion ou vecteur) dans la représentation  $\mathbf{R}$  de  $SU(N)$  et avec une charge  $U(1)$  de  $Q(\mathbf{R})$ . Les coefficients  $\alpha_i$  pour deux bosons de jauge  $SU(N)$  et deux bosons de jauge  $SU(M)$  sont obtenus en remplaçant  $Q(\mathbf{R})^2I_2(\mathbf{R}) \rightarrow I_2^M(\mathbf{R}_M)I_2^N(\mathbf{R}_N)$ .

l'aide des modèles FeynArts. Pour cela, considérons les interactions photon-gluon induites par des boucles de quarks, de squarks ou de leptoquarks de  $SU(5)$  dans la jauge non-linéaire (voir figure 4.13).

On peut alors généraliser aisément les résultats obtenus pour la représentation fondamentale de  $SU(3)_C$  à ceux pour des représentations génériques de  $SU(N)$ . Les boucles sont convergentes et les interactions effectives démarrent avec les opérateurs de dimension 8,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{eff}^{(4)}(U(1) \otimes SU(N)) = & \alpha_1 \frac{g_1^2 g_n^2}{6! \pi^2 m^4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} G_{\rho\sigma}^a G^{a,\rho\sigma} + \alpha_2 \frac{g_1^2 g_n^2}{6! \pi^2 m^4} F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} G_{\rho\sigma}^a \tilde{G}^{a,\rho\sigma} \\
 & + \alpha_3 \frac{g_1^2 g_n^2}{6! \pi^2 m^4} F_{\mu\nu} G^{a,\mu\nu} F_{\rho\sigma} G^{a,\rho\sigma} + \alpha_4 \frac{g_1^2 g_n^2}{6! \pi^2 m^4} F_{\mu\nu} \tilde{G}^{a,\mu\nu} F_{\rho\sigma} \tilde{G}^{a,\rho\sigma} \\
 & + \beta_1 \frac{g_1 g_n^3}{6! \pi^2 m^4} d^{abc} F_{\mu\nu} G^{a,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b G^{c,\rho\sigma} + \beta_2 \frac{g_1 g_n^3}{6! \pi^2 m^4} d^{abc} F_{\mu\nu} \tilde{G}^{a,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^b \tilde{G}^{c,\rho\sigma},
 \end{aligned} \quad (4.113)$$

où  $g_1$  et  $g_n$  sont respectivement les constantes de couplages associées à  $U(1)$  et  $SU(N)$ . Les résultats obtenus pour les valeurs des coefficients de Wilson sont rapportés dans le tableau 4.4.

Ils sont invariants sous l'action de la conjugaison de charge en raison de  $Q(\mathbf{R}^*) = -Q(\mathbf{R})$ ,  $I_2(\mathbf{R}^*) = +I_2(\mathbf{R})$  ainsi que  $I_3(\mathbf{R}^*) = -I_3(\mathbf{R})$ , et ils s'annulent pour une représentation réelle. Notons en particulier que les leptoquarks de  $SU(5)$  donnent  $\beta_i < 0$  étant donné que la charge électrique de l'antitriplet est positive,  $Q(\bar{\mathbf{3}}) = +\sqrt{5/12}$ .

Les quatre premières interactions sont immédiatement étendues aux cas de deux bosons de jauge  $SU(N)$  et deux bosons de jauge  $SU(M)$ . Dans ce cas, les opérateurs sont alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{eff}^{(4)}(SU(M) \otimes SU(N)) = & \alpha_1 \frac{g_m^2 g_n^2}{6! \pi^2 m^4} W_{\mu\nu}^i W^{i,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^a G^{a,\rho\sigma} + \alpha_2 \frac{g_m^2 g_n^2}{6! \pi^2 m^4} W_{\mu\nu}^i \tilde{W}^{i,\mu\nu} G_{\rho\sigma}^a \tilde{G}^{a,\rho\sigma} \\
 & + \alpha_3 \frac{g_m^2 g_n^2}{6! \pi^2 m^4} W_{\mu\nu}^i G^{a,\mu\nu} W_{\rho\sigma}^i G^{a,\rho\sigma} + \alpha_4 \frac{g_m^2 g_n^2}{6! \pi^2 m^4} W_{\mu\nu}^i \tilde{G}^{a,\mu\nu} W_{\rho\sigma}^i \tilde{G}^{a,\rho\sigma},
 \end{aligned} \quad (4.114)$$

où  $g_m$  et  $g_n$  sont respectivement les constantes de couplages associées à  $SU(M)$  et  $SU(N)$ . En regardant la figure 4.13a, on se convainc aisément que les coefficients sont obtenus à partir de ceux de  $U(1)$  dans le tableau 4.4 en remplaçant  $Q(\mathbf{R})^2 I_2(\mathbf{R}) \rightarrow I_2^M(\mathbf{R}_M) I_2^N(\mathbf{R}_N)$  quand les particules circulant dans la boucle sont dans la représentation  $(\mathbf{R}_M, \mathbf{R}_N)$  de  $SU(M) \otimes SU(N)$ .

Pour le MS, le cas  $SU(2)_L \otimes SU(3)_C$  est immédiatement obtenu dans la base  $\{W_\mu^-, W_\mu^3, W_\mu^+\}$  en effectuant les substitutions  $W_{\mu\nu}^i W^{i,\mu\nu} = W_{\mu\nu}^3 W^{3,\mu\nu} + 2W_{\mu\nu}^+ W^{-,\mu\nu}$  et  $g_n \rightarrow g$ ,  $g_m \rightarrow g_s$ . Notons cependant que la même mise en garde que pour les interactions effectives dans (4.106) s'applique. En effet, en présence de fermions chiraux, ces interactions ne sont pas dominantes et des opérateurs de dimension 6 à l'ordre  $O(m^{-2})$  apparaissent, comme par exemple  $\tilde{G}_{\mu\nu}^a G^{a,\nu\rho} Z^{\mu\rho}$  ou encore  $Z_\mu Z_\rho G_{\mu\nu}^a G^{a,\nu\rho}$  induisant  $Z \rightarrow ggg$  [160] et  $gg \rightarrow ZZ$  [161, 162]. Les seules exceptions sont les interactions  $Z \rightarrow ggy$  [163] et  $Z \rightarrow \gamma\gamma\gamma$  [164, 165] pour des gluons et des photons on-shell, qui commencent quand même à l'ordre  $O(m^{-4})$  pour des fermions chiraux car le terme axial du couplage entre le boson  $Z$  et les fermions s'annule. Dans le cas on-shell, ces interactions effectives sont simplement obtenues à partir des résultats pour  $\gamma\gamma \rightarrow gg$  et  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  en normalisant un couplage de photons de sorte à ce qu'il corresponde avec celui du boson  $Z$ .

En raison du fait que  $U(1) \otimes SU(N) \subset SU(M \geq N + 1)$ , les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  dans le tableau 4.4 sont directement reliés aux  $\gamma_{4,i}$  du tableau 4.3, ce qui n'est pas très surprenant en comparant leurs valeurs. Quant à la réduction vers  $U(1)$  de la partie précédente, elle peut être comprise en analysant les coefficients des fonctions de boucles. Pour les coefficients  $\alpha_i$ , la décomposition (4.95) devient  $C_1^{ab} = C_2^{ab} = C_3^{ab} = 2I_2(\mathbf{R})Q^2\delta^{ab}$ , et donc  $D_0^{ab} = 6I_2(\mathbf{R})Q^2\delta^{ab}$ . En comparant avec l'équation (4.98), on remarque que  $\alpha_i = 2\gamma_{4,i}$  avec le remplacement  $\Lambda(\mathbf{R}_M) \rightarrow Q(\mathbf{R}_N)^2 I_2(\mathbf{R}_N)$  dans le tableau 4.3. Le facteur 2 provient des deux différentes manières d'identifier les bosons de jauge de  $U(1)$  et de  $SU(N)$ , e.g.  $(G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu})_M^2 \rightarrow 2(F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma})(G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu})_N$ . Un raisonnement similaire peut être mené pour les coefficients  $\beta_i$ .

Pour dépasser l'identification naïve des fonctions de boucles, notons  $T^a$  le générateur de Cartan de  $SU(M)$  générant  $U(1)$  et  $\{T^i | i = 2, \dots, N^2 - 1\}$  ceux générant  $SU(N)$ . Puisque  $[T^\alpha, T^i] = 0$  implique  $f^{\alpha ia} = 0$ , les contributions UV divergentes disparaissent et les opérateurs associés à  $\gamma_{4,5}^{SU(M)}$  et  $\gamma_{4,6}^{SU(M)}$  ne contribuent pas aux interactions effectives de  $U(1) \otimes SU(N)$ . Quant aux autres coefficients, considérons une représentation spécifique de  $SU(M)$  avec une règle d'embranchement  $\mathbf{R}_M \rightarrow \sum \mathbf{R}_N$ , et notons  $q_\alpha(\mathbf{R}_N)$  les charges  $U(1)_\alpha$  des états de la représentation  $\mathbf{R}_N$ . Mathématiquement, cet embranchement signifie que  $N^2$  des générateurs  $T_{\mathbf{R}_M}$  de  $SU(M)$  peuvent être ramenés sous une forme diagonale par blocs. Ceux qui correspondent à  $SU(N)$  possèdent des blocs contenant les générateurs de  $SU(N)$  dans la représentation  $\mathbf{R}_N$ , alors que le générateur  $T^a$  est une matrice diagonale contenant toutes les charges  $q_\alpha(\mathbf{R}_N)$ , ces dernières sont constantes dans chaque bloc car  $[T^\alpha, T^i] = 0$ . La trace totalement symétrisée impliquant deux ou trois générateurs de  $SU(N)$  prend alors nécessairement la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4!} S \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^\alpha T_{\mathbf{R}}^\alpha T_{\mathbf{R}}^i T_{\mathbf{R}}^j) &= \Lambda(\mathbf{R}_M) \delta^{ij} + d^{\alpha\alpha ij} I_4(\mathbf{R}_M) = \sum_{\mathbf{R}_N \subset \mathbf{R}_M} q_\alpha(\mathbf{R}_N)^2 I_2(\mathbf{R}_N) \delta^{ij}, \\ \frac{1}{4!} S \text{Tr}(T_{\mathbf{R}}^\alpha T_{\mathbf{R}}^i T_{\mathbf{R}}^j T_{\mathbf{R}}^k) &= d^{\alpha ijk} I_4(\mathbf{R}_M) = \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{R}_N \subset \mathbf{R}_M} q_\alpha(\mathbf{R}_N) I_3(\mathbf{R}_N) d^{ijk}. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Ceci montre comment les coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  de  $U(1) \otimes SU(N)$  proviennent des coefficients  $\gamma_{4,i}$  du lagrangien effectif général pour  $SU(M \geq N + 1)$ . D'un point de vue calculatoire, pour vérifier ces identités, il faut d'abord établir la relation entre les symboles symétriques. En général, tout ce qu'on peut dire à partir de la structure diagonale par blocs des générateurs est que  $d_M^{\alpha\alpha ij} = \eta_1 \delta^{ij}$  et  $d_M^{\alpha ijk} = \eta_2 d_N^{ijk}$  (voir Annexe C), bien que les facteurs de proportionnalité  $\eta_1$  et  $\eta_2$  dépendent de la manière avec laquelle  $U(1) \otimes SU(N)$  est intégré dans  $SU(M)$ . Ceci est illustré en Annexe C, où

l'équation (4.115) est utilisée pour obtenir l'invariant de Casimir quartique  $I_4$  de  $SU(5)$  à partir des coefficients d'anomalies  $I_3$  de  $SU(3)$ .

En tant que corollaire intéressant de cette réduction exacte, les identités dans l'équation (4.101) restent valides et impliquent que  $\alpha_{1,2} = \alpha_{3,4}/2$ . D'où le fait qu'il y ait seulement deux opérateurs indépendants à une boucle, et ce quelque soit le spin et la représentation de la particule circulant dans la boucle. Comme précédemment, ceci n'est pas vrai en général si on intègre plus d'un champ. Par exemple, l'analogie du diagramme d'échange du boson de Higgs illustré en figure 4.11b contribue à  $\alpha_1$  seulement car les couplages effectifs du boson de Higgs avec les photons et les gluons sont de la forme  $h^0 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$  et  $h^0 G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu}$ .





# Conclusion

---

Dans cette thèse, la notion de théorie effective des champs a été mise au service de l'étude de la violation- $\mathcal{CP}$  dans un premier temps, dans le MS et au-delà, à travers l'analyse des structures de saveurs des EDMs, puis appliquée à différents secteurs de jauges dans un deuxième temps, dans l'élaboration de l'action effective pour des bosons de jauges.

Dans la première étude, basée sur l'article [1], les structures de saveurs des EDMs dans le MS et au-delà ont été systématiquement analysées en se reposant sur des outils et techniques inspirés de MFV. Il est d'usage d'estimer les EDMs ou plus généralement la taille de la violation- $\mathcal{CP}$  en utilisant des invariants de type Jarlskog. Cependant, ceci est valide seulement pour des processus dans lesquels la violation- $\mathcal{CP}$  survient dans une boucle de fermions. Pour les contributions CKM aux EDMs de quarks, ou les contributions PMNS aux EDMs de leptons, les diagrammes dominants ont une topologie rainbow dont la structure ne se réduit pas à des invariants de saveurs. La symétrie de saveur est bien adaptée pour étudier ces diagrammes, qui avec l'aide des identités de Cayley-Hamilton, permet d'identifier leurs structures de saveurs. De plus, l'étude combinée des structures de type Jarlskog et de type rainbow nous éclaire sur les possibles corrélations entre les EDMs de quarks et de leptons. Curieusement, nous trouvons des comportements opposés pour des neutrinos de Dirac ou de Majorana. Les EDMs de quarks et de leptons sont strictement proportionnels dans le premier cas alors qu'ils deviennent largement indépendants dans le second. En conséquence, l'EDM du quark est nécessairement hors de portée dans le seesaw de type I étant donné que toutes les grandes structures de saveurs sont de type Dirac. En revanche, les EDMs de quarks pourraient être notre meilleure fenêtre sur le seesaw de type II car la structure de saveur amplifiée de neutrino est de type Majorana.

Tout au long de cette étude, une attention particulière a été portée aux phases violant- $\mathcal{CP}$  de singlets de saveurs et en particulier celles associées aux sous-groupes  $U(1)$  du groupe de saveur, dont plusieurs combinaisons s'avèrent être anormales dans le MS. La symétrie de saveur a été adaptée pour traiter ce type de phases, en gardant une trace de ces dernières dans les valeurs de fonds des spurions de Yukawa ou des termes de masses de Majorana. Ceci permet de paramétrer l'impact de l'interaction de violation- $\mathcal{CP}$  forte sur les EDMs de quarks et de leptons ou encore d'analyser les relations entre les phases de Majorana et des éventuelles interactions violant les nombres leptoniques et/ou baryoniques.

Les méthodes développées dans cette étude peuvent aisément être adaptées à des modèles plus compliqués, par exemple en présence de plusieurs neutrinos stériles légers ou encore avec des structures de saveurs additionnelles non-alignées avec celles des mécanismes de seesaw minimaux. Dans ces contextes, il est important de ne pas considérer uniquement les invariants de type Jarlskog mais également les structures de saveurs non-invariantes. Etant en général bien moins supprimées, ces dernières sont d'une importance phénoménologique primordiale et représentent souvent notre seul accès à la physique sous-jacente.

Dans la seconde étude, basée sur l'article [2], l'action effective pour les théories de jauge est revisitée. En intégrant certains champs lourds chargés, les auto-interactions entre bosons de jauge sont encodées dans des opérateurs effectifs. En adoptant une approche diagrammatique, nous construisons explicitement ces interactions jusqu'aux opérateurs de dimension-8 et nous calculons explicitement leurs coefficients de Wilson, induits par des boucles de particules lourdes de spin 0, 1/2 ou 1. Plus spécifiquement,

- Pour poser le cadre et identifier les possibles complications, nous revoyons d'abord en détails la construction des couplages effectifs de photons hors de leur couche de masse (off-shell). Dans l'approche diagrammatique, intégrer des fermions ou des scalaires ne pose pas de problèmes particuliers et nous retrouvons le résultat usuel d'Euler-Heisenberg. Pour des champs de vecteurs lourds, la procédure de correspondance (matching) pose bien plus de problèmes. En effet, dans la jauge de 't Hooft-Feynman, le terme de fixation de jauge requis pour les champs vectoriels massifs brise l'invariance de jauge  $U(1)$ . Par conséquent, l'amplitude à quatre-photons off-shell ne satisfait plus les identités de Ward de QED et la procédure usuelle pour construire l'action effective échoue. Afin de résoudre ce problème, nous adoptons la stratégie de [150] en quantifiant le MS en jauge non-linéaire. Le matching est alors cohérent off-shell et l'approche diagrammatique suit parallèlement la méthode CDE [134, 135], basée sur les intégrales de chemins. Les coefficients de Wilson dans cette jauge sont calculés.
- Le calcul de l'EFT pour photons a été ensuite étendu aux cas des gluons de la QCD. La base la plus générale d'opérateurs gluoniques jusqu'à la dimension-8 est assez différente de celle dans le cas de la QED en raison de la nature non-abélienne de la QCD [156, 157]. Nous calculons explicitement les coefficients de Wilson des opérateurs effectifs pour les cas d'un scalaire, un fermion ou un vecteur dans la représentation fondamentale. Comme dans le cas des photons, intégrer des champs vectoriels lourds nécessite de gérer des dépendances de jauge. Notre stratégie a été d'utiliser le modèle minimal  $SU(5)$  GUT, brisé spontanément par un Higgs scalaire dans la représentation adjointe en gardant la symétrie du MS conservée. Douze des bosons de jauge de  $SU(5)$  acquièrent une masses dans le processus et ces derniers possèdent précisément les nombres quantiques désirés afin d'induire les interactions effectives de gluons. Techniquement, nous montrons également que la jauge non-linéaire possède la propriété confortable de réduire drastiquement le nombre de diagrammes pour un processus donné.
- Ensuite, nous généralisons l'étude dans le cas de la QCD à des groupes de Lie génériques comme groupes de jauge, en prenant  $SU(N)$ ,  $U(1) \otimes SU(N)$  et  $SU(M) \otimes SU(N)$  comme exemples et en autorisant la particule lourde à siéger dans des représentations arbitraires. Les coefficients de Wilson pour un champ complexe de spin 0, 1/2 ou 1 circulant dans les boucles sont calculés pour des bosons de jauge  $SU(N)$  d'une part et pour des groupes de jauge non-simples d'autre part. Suite à ce calcul, une propriété apparente vaut la peine d'être soulignée : à une boucle, certains opérateurs sont redondants quelque soit la représentation ou le spin de la particule circulant dans les boucles. Nous trouvons que deux combinaisons particulières d'opérateurs ne se produisent jamais dans l'action effective à une boucle pour des bosons de jauge  $SU(N)$ . Cela implique que seulement quatre opérateurs au lieu de six sont requis en QCD et uniquement deux opérateurs au lieu de quatre s'avèrent être suffisant pour décrire les interactions mixtes de deux gluons et deux photons. Enfin, la généralisation du résultat de QCD à une algèbre de Lie arbitraire nécessite une analyse minutieuse des invariants quartiques de Casimir. Bien que toutes les informations nécessaires peuvent être récoltées dans la littérature [159, 166], il nous a semblé qu'une courte revue détaillant toutes les définitions et conventions avec une emphase particulière sur les calculs à boucles pratiques manquait, ce qui a été fait en Annexe C.
- D'un point de vue plus technique, la relation entre action effective et correspondance de dia-

grammes de Feynman a été soigneusement analysée. En effet, l'action effective peut être établie à partir des amplitudes 1PI à une boucle off-shell. De cette manière, les coefficients de Wilson de tous les opérateurs, incluant ceux s'annulant sous l'application de l'équation du mouvement, sont obtenus. Néanmoins, ces coefficients ne sont pas nécessairement invariants de jauge. En fait, vu que la correspondance n'est possible qu'en utilisant un terme de fixation de jauge non-linéaire, ils ne sont bien définis que dans cette jauge. Ceci est à comparer avec le calcul des coefficients pour des processus on-shell, où les amplitudes à une boucle on-shell physique correspondent sur un sous-ensemble d'opérateurs. Ces opérateurs qui s'annulent sous l'équation du mouvement sont absents donc l'action effective totale n'est jamais reproduite. En outre, d'un point de vue calculatoire, effectuer la correspondance avec des processus on-shell nécessite de gérer à la fois des amplitudes 1PI et non-1PI. Par exemple, le coefficient de Wilson de l'opérateur à trois gluons  $f^{abc} G_\mu^a G_\nu^b G_\rho^c$  ne peut pas être obtenu à partir d'un processus à trois gluons car il est interdit cinématiquement. A la place, il doit être extrait avec tous les opérateurs à quatre tenseurs de gluons en les faisant correspondre sur les amplitudes physiques à quatre gluons.

Finalement, la construction du lagrangien effectif pour bosons de jauge jusqu'aux opérateurs de dimension-8 est maintenant totalement sous contrôle dans l'approche diagrammatique. Les bases d'opérateurs sont confirmées, leurs propriétés de théorie des groupes sont clarifiées et les coefficients de Wilson sont connus pour les scénarios standards de champs lourds scalaires, fermioniques ou vectoriels. Phénoménologiquement, bien que les couplages effectifs à quatre bosons faibles ou à quatre gluons ne seront probablement jamais observés, étant donné la présence de tels couplages dans le lagrangien à l'arbre, il devrait y avoir de la place pour le processus  $\gamma\gamma \rightarrow gg$ . En tout cas, avoir élaboré une stratégie bien définie pour construire des actions effectives générales impliquant des bosons de jauge s'avèrera utile dans le futur.

Depuis la découverte du boson de Higgs en 2012, aucune nouvelle particule élémentaire n'a été observée au LHC. Néanmoins, de la nouvelle physique n'implique pas forcément de nouvelles particules et peut émerger sous forme de déviations par rapport aux prédictions du modèle standard au fur et à mesure que les précisions des mesures augmentent. Récemment, des déviations de la sorte ont été observées par les fabriques à mésons B dans des processus impliquant des mésons beaux. Ces anomalies doivent être clarifiées en étudiant d'autres canaux de désintégrations dans des expériences futures, en particulier par Belle II au Japon qui fonctionnera avec une luminosité plus élevée réduisant alors les incertitudes. Si ces déviations venaient à être confirmées, elles constitueraient alors la première observation de physique au-delà du modèle standard dans des collisionneurs.

D'autre part, beaucoup d'espoirs sont placés dans les futurs grands collisionneurs comme le *Future Circular Collider (FCC)* qui atteindra une énergie dans le centre de masse de 100 TeV ou encore les améliorations du LHC afin d'en augmenter la luminosité (*HL-LHC*) ou encore l'énergie (*HE-LHC*). D'un côté, l'augmentation de luminosité permettra de gagner en précision et peut être observer des déviations par rapport au modèle standard. Le HL-LHC vise en particulier à étudier les auto-couplages du boson de Higgs, ce qui permettra de sonder le potentiel scalaire et donc l'origine de la brisure spontanée de la symétrie électrofaible qui se trouve par définition au-delà du modèle standard. De l'autre côté, l'augmentation d'énergie permettra d'explorer des territoires jusque-là complètement inconnus se déroulant à des échelles d'énergies de plus en plus grande (ou de façon équivalente des échelles de distances de plus en plus petites). Cette démarche se trouve dans la continuité de l'aventure initiée il y a 27 siècles par les penseurs grecs présocratiques concernant la quête des constituants fondamentaux de la matière. Sur le chemin vers l'échelle de Planck, de nouvelles particules élémentaires seront très probablement découvertes et notre vision actuelle sera une nouvelle fois déconstruite pour laisser place à un nouveau paradigme, comme cela l'a toujours été. Cependant, mon avis personnel est que cette

aventure se verra malheureusement interrompue par la catastrophe écologique grandissante.

# ANNEXE A

## Théorème de Cayley-Hamilton

---

Le théorème de Cayley-Hamilton affirme que toute matrice  $n \times n$  est solution de sa propre équation caractéristique.  $\forall \mathbf{X} \in M_n(\mathbb{C})$ ,

$$p(\lambda) = \det[\mathbf{X} - \lambda \mathbf{1}] \Rightarrow p(\mathbf{X}) = \mathbf{0}_n, \quad (\text{A.1})$$

où  $\mathbf{0}_n$  est la matrice nulle  $n \times n$ . A première vue, on peut penser que c'est trivial. C'est tentant d'écrire  $p(\mathbf{X}) = \det[\mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{1}] = 0$ , mais ceci n'est pas correct car  $\mathbf{X}$  n'a du sens uniquement pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , et  $\det[\mathbf{X} - \mathbf{X} \cdot \mathbf{1}]$  est un scalaire alors que  $p(\mathbf{X})$  doit être égal à la matrice nulle. La démonstration dans le cas où  $\mathbf{X}$  est diagonalisable est directe. Par définition, une valeur propre  $\lambda$  vérifie :

$$p(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_0 \mathbf{1} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.2})$$

Par ailleurs, il existe un vecteur  $v$  tel que  $\mathbf{X} \cdot v = \lambda v$ , ce qui signifie :

$$\mathbf{X}^n \cdot v + c_{n-1}\mathbf{X}^{n-1} \cdot v + \dots + c_0 \mathbf{1} \cdot v = p(\lambda) v, \quad (\text{A.3})$$

Comme ceci est vrai pour toutes les valeurs propres de  $\mathbf{X}$ , nous pouvons en déduire  $\mathbf{X}^n + c_{n-1}\mathbf{X}^{n-1} + \dots + c_0 \mathbf{1} = \mathbf{0}$ , i.e.,  $p(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ . Le théorème est bien évidemment valable pour des matrices non diagonalisable mais nous ne ferons pas la démonstration dans le cas général.

Considérons le cas des matrices  $3 \times 3$  hermitiennes, les trois valeurs propres  $\lambda_{1,2,3}$  de  $\mathbf{X}$  peuvent être exprimées en fonction de traces et du déterminant de  $\mathbf{X}$  :

$$p(\mathbf{X}) = (\mathbf{X} - \lambda_1 \mathbf{1})(\mathbf{X} - \lambda_2 \mathbf{1})(\mathbf{X} - \lambda_3 \mathbf{1}) = \mathbf{X}^3 - \langle \mathbf{X} \rangle \mathbf{X}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{X}(\langle \mathbf{X} \rangle^2 - \langle \mathbf{X}^2 \rangle) - \det \mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (\text{A.4})$$

En prenant la trace de cette équation, on obtient :

$$\det \mathbf{X} = \frac{1}{3} \langle \mathbf{X}^3 \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{X}^2 \rangle + \frac{1}{6} \langle \mathbf{X} \rangle^3. \quad (\text{A.5})$$

D'autres identités supplémentaires peuvent être établies en exprimant  $\mathbf{X} = x_1$  et en isolant une puissance donnée de  $x_1, x_2, \dots$ . Par exemple, en prenant  $\mathbf{X} = x\mathbf{X}$ , et en isolant  $x^2 y$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^2 \mathbf{Y} + \mathbf{X} \mathbf{Y} \mathbf{X} + \mathbf{Y} \mathbf{X}^2 - \langle \mathbf{X}^2 \mathbf{Y} \rangle - \mathbf{X}^2 \langle \mathbf{Y} \rangle - \langle \mathbf{X} \rangle (\mathbf{X} \mathbf{Y} + \mathbf{Y} \mathbf{X} - \langle \mathbf{X} \mathbf{Y} \rangle) \\ = \mathbf{X} (\langle \mathbf{X} \mathbf{Y} \rangle - \langle \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y} \rangle) - \frac{1}{2} (\mathbf{Y} - \langle \mathbf{Y} \rangle) (\langle \mathbf{X} \rangle^2 - \langle \mathbf{X}^2 \rangle). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

En combinant la définition du déterminant,  $\varepsilon^{LMN}\mathbf{X}$ , avec le théorème de Cayley-Hamilton on obtient plusieurs identités utiles. Le point de départ est l'équation (A.5) :

$$\varepsilon^{LMN}\mathbf{X}^{LI}\mathbf{X}^{MJ}\mathbf{X}^{NK} \equiv \varepsilon^{JK} \det \mathbf{X} = \varepsilon^{JK} \left[ \frac{1}{3}\langle \mathbf{X}^3 \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{X}^2 \rangle + \frac{1}{6}\langle \mathbf{X} \rangle^3 \right]. \quad (\text{A.7})$$

On peut établir des identités plus simples impliquant des traces et des contractions antisymétriques en effectuant  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{1} + \mathbf{X}$  puis en développant et ensuite on isole les termes linéaires et quadratiques en  $\mathbf{X}$  :

$$\begin{aligned} \varepsilon^{LJK}\mathbf{X}^{LI} + \varepsilon^{ILK}\mathbf{X}^{LJ} + \varepsilon^{IJL}\mathbf{X}^{LK} &= \varepsilon^{JK}\langle \mathbf{X} \rangle, \\ \varepsilon^{LMK}\mathbf{X}^{LI}\mathbf{X}^{MJ} + \varepsilon^{LJM}\mathbf{X}^{LI}\mathbf{X}^{MK} + \varepsilon^{ILM}\mathbf{X}^{LJ}\mathbf{X}^{MK} &= \varepsilon^{JK}\frac{1}{2}[\langle \mathbf{X} \rangle^2 - \langle \mathbf{X}^2 \rangle]. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

D'autres identités utiles sont dérivées en multipliant la définition du déterminant par  $\mathbf{X}^{-1}$ ,

$$(\mathbf{X}^{-1})^{PK} \varepsilon^{IJP} \det \mathbf{X} = \varepsilon^{LMN}\mathbf{X}^{LI}\mathbf{X}^{MJ}\mathbf{X}^{NP}(\mathbf{X}^{-1})^{PK} = \varepsilon^{LMK}\mathbf{X}^{LI}\mathbf{X}^{MJ}. \quad (\text{A.9})$$

Le membre de gauche peut être simplifié en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton. En multipliant les deux membres de l'équation (A.4) par  $\mathbf{X}^{-1}$  nous donne :

$$\varepsilon^{ILM}\mathbf{X}^{LJ}\mathbf{X}^{MK} = \varepsilon^{LJK}[\mathbf{X}^2 - \langle \mathbf{X} \rangle \mathbf{X} + \frac{1}{2}\langle \mathbf{X} \rangle^2 - \frac{1}{2}\langle \mathbf{X}^2 \rangle]^{LI}. \quad (\text{A.10})$$

Finalement, il y a aussi des identités impliquant plusieurs matrices. Par exemple, en injectant  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} + \mathbf{Y}$  dans l'équation (A.10), on peut dériver :

$$\varepsilon^{ILM}(\mathbf{X}^{LJ}\mathbf{Y}^{MK} + \mathbf{Y}^{LJ}\mathbf{X}^{MK}) = \varepsilon^{LJK}[\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}\} - \langle \mathbf{X} \rangle \mathbf{Y} - \langle \mathbf{Y} \rangle \mathbf{X} + \langle \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y} \rangle - \langle \mathbf{XY} \rangle]^{LI}. \quad (\text{A.11})$$

La relation la plus générale impliquant trois matrices est obtenue en effectuant  $\mathbf{X}$  dans l'équation (A.7),

$$\varepsilon^{LMN}\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}^{LI,MJ,NK} = \varepsilon^{JK}[\langle \mathbf{XYZ} + \mathbf{ZYX} \rangle - \langle \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{ZY} \rangle - \langle \mathbf{Y} \rangle \langle \mathbf{XZ} \rangle - \langle \mathbf{Z} \rangle \langle \mathbf{XY} \rangle + \langle \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y} \rangle \langle \mathbf{Z} \rangle], \quad (\text{A.12})$$

où  $\{\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}\}^{a,b,c} \equiv \mathbf{X}$ . On peut particulariser cette relation en mettant des matrices à l'identité ou en en égalant pour obtenir d'autres relations utiles.

# ANNEXE B

## La théorie de grande unification $SU(5)$ GUT quantifiée en jauge non-linéaire

Cette annexe n'est pas destinée à être une revue du modèle minimal  $SU(5)$ . Il s'agit plutôt d'un guide de construction du lagrangien de  $SU(5)$  brisé en  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , quantifié en utilisant un terme de fixation de jauge non-linéaire et sous une forme appropriée pour l'utilisation d'outils de calculs informatiques. Le principal objectif de cette annexe est d'exprimer tous les termes du lagrangien d'une manière cohérente et traçable. Cela nécessite de spécifier un certain nombre de conventions et de définitions que nous avons pensé utiles de détailler ici.

On commence avec les bosons de jauge de  $SU(5)$  et on va les exprimer en termes de ceux du groupe de jauge  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . Pour cela, nous partons de la règle d'embranchement de la représentation adjointe **24**:

$$\mathbf{24} = (\mathbf{8}, \mathbf{1})_0 + (\mathbf{1}, \mathbf{3})_0 + (\mathbf{3}, \mathbf{2})_5 + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{2})_{-5} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0 . \quad (\text{B.1})$$

En notant  $A, B, \dots = 1, \dots, 24$  les indices de la représentation adjointe de  $SU(5)$ ,  $a, b, \dots = 1, \dots, 8$  les indices adjoints de couleurs, et  $i, j, \dots = 1, 2, 3$  les indices de la représentation fondamentale de  $SU(3)$ , les 24 bosons de jauge  $A_A^\mu$  sont identifiés comme l'octet de gluons  $(\mathbf{8} \otimes \mathbf{1})_0 \sim G_i^\mu = A_i^\mu$ ,  $a = 1, \dots, 8$ , le triplet de bosons faibles  $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{3})_0 \sim W^{\pm\mu} = (A_9^\mu \mp iA_{10}^\mu)/\sqrt{2}$ ,  $W_3^\mu = A_{11}^\mu$ , ainsi que le singlet  $(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_0 \sim B^\mu = A_{24}^\mu$ . Les champs restants correspondent respectivement aux 12 leptosquarks et leurs champs conjugués dans les représentations  $(\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{2})_{5/3}$  et  $(\mathbf{3} \otimes \bar{\mathbf{2}})_{-5/3}$ . Nous définissons ces champs par  $X_1^{\mu\pm} = (A_{12}^\mu \pm iA_{13}^\mu)/\sqrt{2}$ ,  $Y_1^{\mu\pm} = (A_{18}^\mu \pm iA_{19}^\mu)/\sqrt{2}$ , et ainsi de suite. Notons que les leptosquarks sont chargés sous tous les groupes de jauge du MS, et ceux possédant une hypercharge positive se transforment comme des antiquarks sous  $SU(3)_C$ .

Étant donné que la représentation adjointe est contenu dans  $\mathbf{5} \otimes \bar{\mathbf{5}} = \mathbf{24} \oplus \mathbf{1}$ , toutes ces identifications des champs de jauge peuvent être combinées afin de construire une matrice  $5 \times 5$  de trace nulle pour les champs de jauge de  $SU(5)$ :

$$\mathbf{A}^\mu = A_A^\mu T^A = \begin{pmatrix} T_{ij}^a G_\mu^a - \frac{1}{\sqrt{15}} B_\mu \delta_{ij} & \frac{1}{\sqrt{2}} X_\mu^{i-} & \frac{1}{\sqrt{2}} Y_\mu^{i-} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} X_\mu^{j+} & \frac{1}{2} W_\mu^3 + \frac{3}{2\sqrt{15}} B_\mu & \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} Y_\mu^{j+} & \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- & -\frac{1}{2} W_\mu^3 + \frac{3}{2\sqrt{15}} B_\mu \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$



où les  $T^A$  sont les générateurs conventionnels de  $SU(5)$  dans la représentation fondamentale, normalisés par  $\text{Tr}(T^A T^B) = \delta^{AB}/2$ . Cette identification est compatible avec les états propres de l'opérateur charge électrique,

$$Q = T^{11} + \sqrt{5/3}T^{24}, \quad [Q, \mathbf{A}_\mu] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -4/3X_\mu^{i-} & -1/3Y_\mu^{i-} \\ 4/3X_\mu^{j+} & 0 & +W_\mu^+ \\ 1/3Y_\mu^{j+} & -W_\mu^- & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

avec la normalisation de l'opérateur hypercharge  $Y = 2\sqrt{5/3}T^{24}$ . En pratique, nous avons utilisé les bibliothèques Mathematica *FeynArts* [138] et *FeynCalc* [139, 140]. Tous les deux permettent de garder implicite la sommation sur les indices  $SU(3)$ , donc  $\mathbf{A}^\mu$  est donné en entrée sous la forme de la matrice de l'équation (B.2). Une fois que toutes les parties du lagrangien sont implémentées, il est relativement aisé d'extraire les règles de Feynman et de les exporter dans *FeynArts*. Penchons nous maintenant sur les termes du lagrangien qui sont pertinents pour nous.

## Les interactions de jauges

Les auto-couplages de jauges sont obtenus à partir du terme cinétique de Yang-Mills

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{A}_{\mu\nu} \mathbf{A}^{\mu\nu} \rangle = -\frac{1}{4} A_{\mu\nu}^A A^{A,\mu\nu}, \quad (\text{B.4})$$

avec le tenseur de champs de jauge

$$\mathbf{A}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu - ig_5 [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{A}_\nu] = (\partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A + gf^{ABC} A_\mu^B A_\nu^C) T^A. \quad (\text{B.5})$$

Les constantes de structures de  $SU(5)$  sont définies par  $[T^A, T^B] = if^{ABC} T^C$ . Un calcul explicite montre qu'il y a 68  $f^{ABC}$  non-nulles, avec les permutations antisymétriques des indices. Neuf d'entre elles sont celles de  $SU(3)$  et une constitue l'unique  $\varepsilon^{ijk}$  de  $SU(2)$ , qui reproduisent les auto-interactions de la QCD et de l'interaction électrofaible. Toutes les autres constantes de structures non-nulles sont les  $f^{ABC}$  avec  $A, B = 12, \dots, 23$  et  $C = 1, \dots, 11, 24$ . En d'autres termes, elles font intervenir deux fois les champs de leptoquarks, comme on pourrait s'y attendre puisque ces particules sont chargées sous les trois groupes de jauges du MS. La même constante de couplage  $g_5$  intervient dans toutes les interactions entre bosons de jauges. Explicitement, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{2} \langle (\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu) (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) + 4ig_5 \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) - 2g_5^2 \mathbf{A}_\mu \mathbf{A}_\nu [\mathbf{A}^\mu, \mathbf{A}^\nu] \rangle \\ &= -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^+ W^{-,\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^3 W^{3,\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{2} (D_\mu X_\nu^+ - D_\nu X_\mu^+) (D^\mu X^{-\nu} - D^\nu X^{-\mu}) - \frac{1}{2} (D_\mu Y_\nu^+ - D_\nu Y_\mu^+) (D^\mu Y^{-\nu} - D^\nu Y^{-\mu}) \\ &\quad + ig_5 G_{\mu\nu}^a (X_\mu^{j+} (-T_{ji}^a) X_\nu^{i-} + Y_\mu^{j+} (-T_{ji}^a) Y_\nu^{i-}) + i \frac{g_5}{\sqrt{2}} (W^{+,\mu\nu} Y_\mu^{i+} X_\nu^{i-} + W^{-,\mu\nu} X_\mu^{i+} Y_\nu^{i-}) \\ &\quad + i \frac{g_5}{2} W^{3,\mu\nu} (X_\mu^{i+} X_\nu^{i-} - Y_\mu^{i+} Y_\nu^{i-}) + ig_5 \frac{\sqrt{15}}{6} B^{\mu\nu} (X_\mu^{i+} X_\nu^{i-} + Y_\mu^{i+} Y_\nu^{i-}) + \mathcal{O}((X, Y)^4), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

où les tenseurs de champs de jauges des interactions faibles et fortes contiennent implicitement leurs termes non-abéliens respectifs, comme suit

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\nu G_\mu^a - \partial_\mu G_\nu^a + g_5 f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c \rightarrow G_{\mu\nu}^a T^a = \partial_\nu G_\mu^a T^a - \partial_\mu G_\nu^a T^a - ig_5 [G_\mu^b T^b, G_\nu^c T^c],$$

$$W^{i,\mu\nu} = \partial_\nu W_\mu^i - \partial_\mu W_\nu^i + g_5 \epsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k \rightarrow \begin{cases} W^{3,\mu\nu} = \partial_\nu W_\mu^3 - \partial_\mu W_\nu^3 + ig_5 (W_\mu^- W_\nu^+ - W_\mu^+ W_\nu^-), \\ W^{+,\mu\nu} = \partial_\nu W_\mu^+ - \partial_\mu W_\nu^+ + ig_5 (W_\mu^+ W_\nu^3 - W_\mu^3 W_\nu^+), \\ W^{-,\mu\nu} = \partial_\nu W_\mu^- - \partial_\mu W_\nu^- + ig_5 (W_\mu^3 W_\nu^- - W_\mu^- W_\nu^3). \end{cases}$$

La dérivée covariante  $D^\mu = \partial^\mu \mathbf{1} - ig_5 T^A A_A^\mu$  agissant sur les douze leptosquarks siégeant dans la représentation  $(\bar{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{2})_{5/3}$  est donnée par

$$(D_\mu)_{ij} X_\nu^{j+} = \partial_\mu X_\nu^{j+} - ig_5 \left( X_\nu^{j+} (-T_{ji}^a) G_\mu^a + \frac{1}{2} W_\mu^3 X_\nu^{j+} + \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ Y_\nu^{i+} + y \frac{5}{6} B_\mu X_\nu^{j+} \right), \quad (\text{B.7})$$

$$(D_\mu)_{ij} Y_\nu^{j\pm} = \partial_\mu Y_\nu^{j\pm} - ig_5 \left( Y_\nu^{j\pm} (-T_{ji}^a) G_\mu^a - \frac{1}{2} W_\mu^3 Y_\nu^{j\pm} + \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- X_\nu^{i+} + y \frac{5}{6} B_\mu Y_\nu^{j\pm} \right), \quad (\text{B.8})$$

où  $y = \sqrt{3/5}$  est le facteur de normalisation de l'hypercharge. Enfin,  $\mathcal{O}((X, Y)^4)$  dénote les interactions quartiques entre les bosons de jauge  $X$  et  $Y$ , auxquels on ne s'intéressera pas ici. Il est intéressant de remarquer que l'invariance de jauge du MS est satisfaite séparément pour les termes cinétique de  $X$  et  $Y$  (grâce aux dérivées covariantes), les interactions magnétiques (les  $B_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$  et les termes similaires), ainsi que les interactions  $\mathcal{O}((X, Y)^4)$ . Au niveau du MS, l'intensité des interactions magnétiques et  $\mathcal{O}((X, Y)^4)$  ne sont pas contraintes et celles-ci pourraient même être absentes. En revanche, ici, leurs intensités relatives sont fixées par l'invariance de jauge  $SU(5)$  sous-jacente. La situation est similaire dans le MS, avec les intensités relatives des interactions  $(D_\mu W_\nu^+ - D_\nu W_\mu^+)(D^\mu W^{-\nu} - D^\nu W^{-\mu})$  et  $F_{\mu\nu} W_\mu^+ W_\nu^-$  qui sont fixées par la symétrie  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  sous-jacente.

## Interactions de scalaires

Dans cette étude, nous sommes uniquement intéressés par l'étape initiale de brisure

$$SU(5) \rightarrow SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y. \quad (\text{B.9})$$

Pour cela, nous avons besoin d'un scalaire dans la représentation adjointe,  $\bar{\mathbf{H}}_{24} = \sqrt{2} H_A T_A$ . Notons que  $\bar{\mathbf{H}}_{24} = \bar{\mathbf{H}}_{24}^\dagger$ , puisque l'adjointe est une représentation réelle, et en supposant une symétrie  $\bar{\mathbf{H}}_{24} \rightarrow -\bar{\mathbf{H}}_{24}$  pour se débarrasser des interactions cubiques, le lagrangien le plus général est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{scalar}} = \frac{1}{2} \langle D_\mu \bar{\mathbf{H}}_{24} D^\mu \bar{\mathbf{H}}_{24} \rangle + \frac{\mu^2}{2} \langle \mathbf{H}_{24}^2 \rangle - \frac{a}{4} \langle \mathbf{H}_{24}^2 \rangle^2 - \frac{b}{2} \langle \mathbf{H}_{24}^4 \rangle. \quad (\text{B.10})$$

La brisure de la symétrie  $SU(5)$  survient lorsque  $\bar{\mathbf{H}}_{24}$  prend sa valeur moyenne dans le vide ( $vev$ )  $\langle 0 | \bar{\mathbf{H}}_{24} | 0 \rangle \sim v_5 > 0$ , ce qui se réalise pour  $\mu^2 > 0$ . Il y a deux types de minimums dépendant du signe de  $b$ . D'abord, il est possible de trouver des valeurs de  $\mu$ ,  $a$ , et  $b < 0$  tels que le minimum soit de la forme  $\langle 0 | \bar{\mathbf{H}}_{24} | 0 \rangle = \text{diag}(v, v, v, v, -4v)$ . Ceci correspond à  $SU(5) \rightarrow SU(4) \otimes U(1)$ . Le second type de minimum se réalise lorsque  $b > 0$  et est tel que  $\langle 0 | \bar{\mathbf{H}}_{24} | 0 \rangle$  commute avec les générateurs de  $SU(3)_C$ ,  $SU(2)_L$ , et  $U(1)_Y$  :

$$\mathbf{H}_{24}^0 = \langle 0 | \bar{\mathbf{H}}_{24} | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_5 \text{diag}(1, 1, 1, -3/2, -3/2) = -v_5 \sqrt{15/4} T^{24}, \quad v_5^2 = \frac{4\mu^2}{15a + 7b}. \quad (\text{B.11})$$

La valeur de  $v_5$  est déterminée en requérant que ce soit un minimum global du potentiel, ce qui nécessite  $15a + 7b > 0$ .

En injectant cette contrainte dans le potentiel scalaire et en écrivant

$$\mathbf{H}_{24} = \bar{\mathbf{H}}_{24} - \mathbf{H}_{24}^0 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} T_{ij}^a H_G^a - \frac{1}{\sqrt{15}} H_B^0 \delta_{ij} & \frac{1}{\sqrt{2}} H_X^{i-} & \frac{1}{\sqrt{2}} H_Y^{i-} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} H_X^{j+} & \frac{1}{2} H_W^3 + \frac{3}{2\sqrt{15}} H_B^0 & \frac{1}{\sqrt{2}} H_W^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} H_Y^{j+} & \frac{1}{\sqrt{2}} H_W^- & -\frac{1}{2} H_W^3 + \frac{3}{2\sqrt{15}} H_B^0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

les masses des bosons de Higgs sont données par

$$M_{H_W^i}^2 = 4M_{H_G^a}^2 = 5bv_5^2, \quad M_{H_B}^2 = 2\mu^2, \quad M_{H_{X,Y}}^2 = 0.$$

Notons que le  $\sqrt{2}$  est conventionnel, il assure que les termes cinétiques soient correctement normalisés étant donné le lagrangien de l'équation (B.10). Des couplages supplémentaires impliquant trois et quatre scalaires sont obtenus à partir du potentiel, ces couplages sont tous proportionnels à  $v_5$ .

Pour obtenir les couplages scalaires aux bosons de jauge, il suffit alors de développer la dérivée covariante, avec pour la représentation adjointe,

$$D^\mu \bar{\mathbf{H}}_{24} = \partial^\mu \bar{\mathbf{H}}_{24} - ig_5 [\mathbf{A}^\mu, \bar{\mathbf{H}}_{24}] = \partial^\mu \mathbf{H}_{24} - ig_5 [\mathbf{A}^\mu, \mathbf{H}_{24}] - ig_5 [\mathbf{A}^\mu, \mathbf{H}_{24}^0]. \quad (\text{B.13})$$

Cela donne

$$\frac{1}{2} \langle D_\mu \bar{\mathbf{H}}_{24} D^\mu \bar{\mathbf{H}}_{24} \rangle \rightarrow \frac{1}{2} \langle \partial_\mu \mathbf{H}_{24} \partial^\mu \mathbf{H}_{24} \rangle + \mathcal{L}_{\text{mass}} + \mathcal{L}_{\text{mix}} + \mathcal{L}_{\text{gauge-Higgs}}. \quad (\text{B.14})$$

Les couplages  $\mathcal{L}_{\text{mass}}$  sont juste les termes de masses des leptoquarks,

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = -\frac{1}{2} g_5^2 \langle [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{H}_{24}^0] [\mathbf{A}^\mu, \mathbf{H}_{24}^0] \rangle = \frac{25}{16} g_5^2 v_5^2 (X_\mu^{i+} X^{i-\mu} + Y_\mu^{i+} Y^{i-\mu}), \quad (\text{B.15})$$

donc  $M_{XY} = 5g_5 v_5 / 4$ . La partie  $\mathcal{L}_{\text{mix}}$  induit un mélange entre les bosons de jauge  $X^\mu$  et  $Y^\mu$  et leurs bosons de Goldstone associés,

$$\mathcal{L}_{\text{mix}} = -ig_5 \langle [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{H}_{24}^0] \partial^\mu \mathbf{H}_{24} \rangle = iM_{XY} X_\mu^{k-} \partial^\mu H_X^{k+} + iM_{XY} Y_\mu^{k-} \partial^\mu H_Y^{k+} + h.c.. \quad (\text{B.16})$$

Les autres couplages impliquent des bosons de jauges et scalaires,

$$\mathcal{L}_{\text{gauge-Higgs}} = -ig_5 \langle [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{H}_{24}] \partial^\mu \mathbf{H}_{24} \rangle - g_5^2 \langle [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{H}_{24}^0] [\mathbf{A}^\mu, \mathbf{H}_{24}] \rangle - \frac{g_5^2}{2} \langle [\mathbf{A}_\mu, \mathbf{H}_{24}] [\mathbf{A}^\mu, \mathbf{H}_{24}] \rangle. \quad (\text{B.17})$$

Les formes explicites peuvent être obtenues aisément et ne seront pas données ici. Remarquons cependant qu'en raison de la disparition de tous les bosons de jauge du MS de  $[\mathbf{A}_\mu, \mathbf{H}_{24}^0]$ ,  $\mathcal{L}_{\text{AAH}}$  ne couplent que les scalaires aux bosons de jauge massifs, avec des couplages proportionnels à leurs masses.

## Fixation de jauge et interactions de fantômes

La prochaine étape pour quantifier cette théorie est de fixer la jauge et d'ajouter les termes fantômes (ghosts) correspondants. L'ansatz général dans la jauge  $R_\xi$  linéaire est de définir la contrainte en termes

des bosons de Goldstone associés comme ceci

$$\mathbf{G} = \sqrt{2}\partial_\mu \mathbf{A}^\mu + \xi M_{XY} \begin{pmatrix} 0 & iH_X^{i-} & iH_Y^{i-} \\ -iH_X^{j+} & 0 & 0 \\ -iH_Y^{j+} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}T_{ij}^a \partial^\mu G_\mu^a - \sqrt{\frac{2}{15}} \partial^\mu B_\mu \delta_{ij} & \partial^\mu X_\mu^{i-} + i\xi M_{XY} H_X^{i-} & \partial^\mu Y_\mu^{i-} + i\xi M_{XY} H_Y^{i-} \\ \partial^\mu X_\mu^{j+} - i\xi M_{XY} H_X^{j+} & \frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu W_\mu^3 + \sqrt{\frac{3}{10}} \partial^\mu B_\mu & \partial^\mu W_\mu^+ \\ \partial^\mu Y_\mu^{j+} - i\xi M_{XY} H_Y^{j+} & \partial^\mu W_\mu^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \partial^\mu W_\mu^3 + \frac{3}{2\sqrt{15}} \partial^\mu B_\mu \end{pmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

de sorte que

$$\mathcal{L}_{\text{gf}} = -\frac{1}{2\xi} \langle \mathbf{G}^2 \rangle = -\frac{1}{\xi} |\partial^\mu X_\mu^{k+} - i\xi M_{XY} H_X^{k+}|^2 - \frac{1}{\xi} |\partial^\mu Y_\mu^{k+} - i\xi M_{XY} H_Y^{k+}|^2 \quad (\text{B.19})$$

$$- \frac{1}{\xi} |\partial^\mu W_\mu^+|^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu W_\mu^3)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu B_\mu)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu G_\mu^a)^2. \quad (\text{B.20})$$

Vu qu'en pratique, tous nos calculs sont effectués dans la jauge de 't Hooft-Feynman, un paramètre commun  $\xi$  est introduit pour tous les bosons de jauges. Évidemment, les paramètres pour  $G_\mu^a$ ,  $B_\mu$ ,  $W_\mu^3$ , et  $W_\mu^\pm$  peuvent être tous différents étant donné qu'ils apparaissent seulement dans le propagateur respectif et non dans les vertex. Pour  $X_\mu^{i\pm}$  et  $Y_\mu^{i\pm}$ , ne pas prendre un paramètre commun compliquerait les choses puisque ces deux champs forment un doublet de  $SU(2)_L$ . Quand la première ligne est développée, les termes linéaires en  $M_{XY}$  s'annulent précisément avec les termes dans  $\mathcal{L}_{\text{mix}}$ , tandis que les termes quadratiques impliquent  $M_{H_{XY}}^2 = \xi M_{XY}^2$ . Rappelons que les bosons de Goldstone associés (Would-Be Goldstone, WBG) n'acquièrent aucun terme de masse par le potentiel scalaire.

Le but de la fixation de jauge non-linéaire de la Ref. [153] est de maintenir les symétries de jauge non brisées de façon explicite. Cela nécessite des dérivées covariantes générales dans les contraintes impliquant les bosons de jauges massifs. Pour permettre l'interpolation entre la jauge linéaire et non-linéaire, nous introduisons les paramètres  $\alpha_G$ ,  $\alpha_W$ ,  $\alpha_B$  et utilisons:

$$\partial^\mu X_\mu^{i+} \rightarrow \partial^\mu X_\mu^{i+} - ig_5 \left( \alpha_G X_\nu^{j+} (-T_{ji}^a) G_\mu^a + \alpha_W \frac{1}{2} W_\mu^3 X_\nu^{i+} + \alpha_W \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ Y_\nu^{i+} + \alpha_{BY} \frac{5}{6} B_\mu X_\nu^{i+} \right), \quad (\text{B.21})$$

$$\partial^\mu Y_\nu^{i+} \rightarrow \partial^\mu Y_\nu^{i+} - ig_5 \left( \alpha_G Y_\nu^{j+} (-T_{ji}^a) G_\mu^a - \alpha_W \frac{1}{2} W_\mu^3 Y_\nu^{i+} + \alpha_W \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- X_\nu^{i+} + \alpha_{BY} \frac{5}{6} B_\mu Y_\nu^{i+} \right). \quad (\text{B.22})$$

Injecter ceci dans  $\mathcal{L}_{\text{gf}}$  génère de nouvelles contributions à  $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$  et  $\mathcal{L}_{\text{gauge-Higgs}}$ . A ce stade, un des intérêts de cette jauge devient apparent. Les lagrangiens de jauge et de jauge-WBG de la partie précédente doivent être invariants sous la symétrie de jauge du MS. Cela signifie que parmi les interactions de bosons WBG-jauge-jauge, il y a précisément celles nécessaires pour promouvoir les dérivées dans  $\mathcal{L}_{\text{mix}}$  en dérivées covariantes. Cependant, avoir des dérivées covariantes dans  $\mathcal{L}_{\text{gf}}$  les annulent. Par conséquent, quand  $\alpha_i = 1$ , les couplages  $A - A - \text{WBG}$  deviennent plus simples. A cette contrainte correspond le lagrangien des fantômes

$$\mathcal{L}_{\text{ghost}} = c^{A\dagger} \left( (-g_5) \frac{\delta G^A}{\delta \lambda^B} \Big|_{\lambda=0} \right) c^B. \quad (\text{B.23})$$

Pour obtenir les variations de  $G^A$  sous une transformation de jauge, nous devons d'abord avoir celle des champs, exprimés dans la même base physique que les bosons de jauges et les scalaires WBG.

Pour les champs de jauge, la variation sous une transformation de jauge est

$$\delta \mathbf{A}^\mu = \frac{1}{g_5} D_\mu \lambda = \frac{1}{g_5} \partial^\mu \lambda - i [\mathbf{A}^\mu, \lambda] , \quad (\text{B.24})$$

où les paramètres de la base physique sont définis par  $\lambda = \lambda^A T^A$  en complète analogie avec les bosons de jauge. Sous forme explicite, en reconstruisant les transformations des champs individuels, on obtient

$$\delta G_\mu^a = \frac{1}{g_5} \partial^\mu \lambda_G^a + f^{abc} G_\mu^b \lambda_G^c + i(X_\mu^{i+} T_{ij}^a \lambda_X^{j-} - \lambda_X^{i+} T_{ij}^a X_\mu^{j-} + Y_\mu^{i+} T_{ij}^a \lambda_Y^{j-} - \lambda_Y^{i+} T_{ij}^a Y_\mu^{j-}) , \quad (\text{B.25})$$

$$\delta W_\mu^+ = \frac{1}{g_5} \partial^\mu \lambda_W^+ + iW_\mu^+ \lambda_W^3 - iW_\mu^3 \lambda_W^+ + \frac{i}{\sqrt{2}} (\lambda_X^{i+} Y_\mu^{i-} - \lambda_Y^{i-} X_\mu^{i+}) , \quad \delta W_\mu^- = (\delta W_\mu^+)^{\dagger} , \quad (\text{B.26})$$

$$\delta W_\mu^3 = \frac{1}{g_5} \partial^\mu \lambda_W^3 + iW_\mu^- \lambda_W^+ - iW_\mu^+ \lambda_W^- + \frac{i}{2} (\lambda_X^{i+} X_\mu^{i-} - \lambda_X^{i-} X_\mu^{i+} - \lambda_Y^{i+} Y_\mu^{i-} + \lambda_Y^{i-} Y_\mu^{i+}) , \quad (\text{B.27})$$

$$\delta B_\mu = \frac{1}{g_5} \partial^\mu \lambda_B + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} (\lambda_X^{i+} X_\mu^{i-} - \lambda_X^{i-} X_\mu^{i+} + \lambda_Y^{i+} Y_\mu^{i-} - \lambda_Y^{i-} Y_\mu^{i+}) , \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} \delta X_\mu^{i+} &= \frac{1}{g_5} \partial^\mu \lambda_X^{i+} - i(\lambda_X^{k+} T_{ki}^a G_\mu^a - X_\mu^{k+} T_{ki}^a \lambda_G^a) + \frac{i}{\sqrt{2}} (\lambda_W^+ Y_\mu^{i+} - \lambda_Y^+ W_\mu^+) \\ &+ \frac{i}{2} (\lambda_W^3 X_\mu^{i+} - \lambda_X^{i+} W_\mu^3) + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} (\lambda_B X_\mu^{i+} - \lambda_X^{i+} B_\mu) , \quad \delta X_\mu^{i-} = (\delta X_\mu^{i+})^{\dagger} , \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} \delta Y_\mu^{i+} &= \frac{1}{g_5} \partial^\mu \lambda_Y^{i+} + i(\lambda_Y^{k+} T_{ki}^a G_\mu^a - Y_\mu^{k+} T_{ki}^a \lambda_G^a) + \frac{i}{\sqrt{2}} (\lambda_W^- X_\mu^{i+} - \lambda_X^{i+} W_\mu^-) \\ &- \frac{i}{2} (\lambda_W^3 Y_\mu^{i+} - \lambda_Y^{i+} W_\mu^3) + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} (\lambda_B Y_\mu^{i+} - \lambda_Y^{i+} B_\mu) , \quad \delta Y_\mu^{i-} = (\delta Y_\mu^{i+})^{\dagger} . \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

De manière similaire, la transformation des champs scalaires dans la représentation adjointe  $\delta H^A = f^{ABC} H^B \lambda^C$  peut être obtenue sous forme matricielle

$$g \delta \bar{\mathbf{H}}_{24} = i[\lambda, \bar{\mathbf{H}}_{24}] \rightarrow \delta \mathbf{H}_{24} = i[\lambda, \mathbf{H}_{24}] + i[\lambda, \mathbf{H}_{24}^0] .$$

Nous avons uniquement besoin de la règle de transformation des WGBs, étant donné que les autres champs scalaires ne seront pas introduits dans les contraintes de la jauge:

$$\begin{aligned} \delta H_X^{i+} &= -iH_X^{k+} T_{ki}^a \lambda_G^a + \frac{i}{\sqrt{2}} \lambda_W^+ H_Y^{i+} + \frac{i}{2} \lambda_W^3 H_X^{i+} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} \lambda_B H_X^{i+} + i\frac{5}{4} v_5 \lambda_X^{i+} \\ &+ i\lambda_X^{k+} T_{ki}^a H_G^a - \frac{i}{\sqrt{2}} H_W^+ \lambda_Y^{i+} - \frac{i}{2} H_W^3 \lambda_X^{i+} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} H_B \lambda_X^{i+} , \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

$$\begin{aligned} \delta H_Y^{i+} &= -iH_Y^{k+} T_{ki}^a \lambda_G^a + \frac{i}{\sqrt{2}} \lambda_W^- H_X^{i+} - \frac{i}{2} \lambda_W^3 H_Y^{i+} + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} \lambda_B H_Y^{i+} + i\frac{5}{4} v_5 \lambda_Y^{i+} \\ &+ i\lambda_Y^{k+} T_{ki}^a H_G^a - \frac{i}{\sqrt{2}} H_W^- \lambda_X^{i+} + \frac{i}{2} H_W^3 \lambda_Y^{i+} - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{5}{3}} H_B \lambda_Y^{i+} . \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Notons que ces règles de transformations impliquent que seuls les champs de fantômes associés aux bosons de jauge massifs se couplent à tous les bosons de Higgs, comme attendu par l'absence de couplages directs entre les champs scalaires et les bosons de jauge du MS.

Une fois que  $\mathbf{G}$  est exprimée dans la base physique (comme dans l'équation (B.18) pour la jauge linéaire), les paramètres de jauges physiques identifiés à partir de  $\lambda$  et les matrices fantômes définies en complète analogie comme ceci

$$\mathbf{c} = c_A T^A = \begin{pmatrix} T_{ij}^a c_G^a - \frac{1}{\sqrt{15}} c_B \delta_{ij} & \frac{1}{\sqrt{2}} c_X^{i-} & \frac{1}{\sqrt{2}} c_Y^{i-} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} c_X^{j+} & \frac{1}{2} c_W^3 + \frac{3}{2\sqrt{15}} c_B & \frac{1}{\sqrt{2}} c_W^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} c_Y^{j+} & \frac{1}{\sqrt{2}} c_W^- & -\frac{1}{2} c_W^3 + \frac{3}{2\sqrt{15}} c_B \end{pmatrix}, \quad (\text{B.33})$$

on peut procéder en calculant  $-\sqrt{2}g_5 \langle \mathbf{c}^\dagger \delta \mathbf{G} \rangle$  et en remplaçant chacun des  $\lambda$  par le fantôme correspondant, i.e.,  $\lambda_B \rightarrow c_B$ ,  $\lambda_G^a \rightarrow c_G^a$ , etc. Etant donné les nombreux couplages possibles dès que la fixation de jauge non-linéaire est imposée, l'expression finale est très longue et ne sera pas explicitée ici. Remarquons juste que seuls les fantômes associés aux leptosquarks deviennent massifs,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ghost}} = & c_G^{a\dagger} (-\partial^2) c_G^a + c_B^\dagger (-\partial^2) c_B + c_W^{3\dagger} (-\partial^2) c_W^3 + c_W^{\dagger+} (-\partial^2) c_W^- + c_W^{\dagger-} (-\partial^2) c_W^+ \\ & + c_X^{\dagger+} (-\partial^2 - \xi M_{XY}^2) c_X^- + c_X^{\dagger-} (-\partial^2 - \xi M_{XY}^2) c_X^+ + c_Y^{\dagger+} (-\partial^2 - \xi M_{XY}^2) c_Y^- + c_Y^{\dagger-} (-\partial^2 - \xi M_{XY}^2) c_Y^+ \\ & + \mathcal{L}_{\text{CCV}} + \mathcal{L}_{\text{CCH}} + \mathcal{L}_{\text{CCVV}}. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Néanmoins, les fantômes du MS développent de nouvelles interactions avec des paires d'états lourds (un fantôme, un boson de jauge). Notons également que  $\mathcal{L}_{\text{CCVV}}$  provient entièrement de la fixation de jauge non-linéaire.



# ANNEXE C

## Invariants de Casimir des algèbres de Lie standard

Les constantes de structures d'une algèbre de Lie simple sont définies par  $[T_{\mathbf{R}}^a, T_{\mathbf{R}}^b] = i f^{abc} T_{\mathbf{R}}^c$ , avec  $T_{\mathbf{R}}^a$  les générateurs dans la représentation  $\mathbf{R}$ . Les invariants de Casimir quadratiques et cubiques sont définis par la trace totalement symétrisée de deux et de trois générateurs respectivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{2!} S \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b) &= \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b) \equiv I_2(\mathbf{R}) d^{ab}, \\ \frac{1}{3!} S \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c) &= \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a \{T_{\mathbf{R}}^b, T_{\mathbf{R}}^c\}) \equiv \frac{1}{4} I_3(\mathbf{R}) d^{abc}. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

En termes de ces deux invariants, on peut réduire la trace de trois générateurs comme ceci

$$\operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}([T_{\mathbf{R}}^a, T_{\mathbf{R}}^b] T_{\mathbf{R}}^c) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\{T_{\mathbf{R}}^a, T_{\mathbf{R}}^b\} T_{\mathbf{R}}^c) = \frac{I_3(\mathbf{R})}{4} d^{abc} + \frac{i I_2(\mathbf{R})}{2} f^{abc}. \quad (\text{C.2})$$

L'invariant quadratique définit une métrique dans l'espace des générateurs.  $\operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b)$  étant définie positive, il est toujours possible de choisir une base pour les générateurs telle que  $d^{ab} = \delta^{ab}$ . Par convention, les générateurs sont de plus normalisés tels que  $I_2(\mathbf{F}) \equiv c$ , avec  $\mathbf{F}$  la représentation définissante de dimension  $N(\mathbf{F}) = N$  et la constante  $c$  usuellement fixée à  $1/2$  ou  $1$ . Notons également que dès que  $d^{ab} = \delta^{ab}$ ,  $T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^a$  devient proportionnel à l'identité, avec  $T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^a = (N(\mathbf{A}) I_2(\mathbf{R}) / N(\mathbf{R})) \mathbf{1}_{N(\mathbf{R}) \times N(\mathbf{R})}$  où  $N(\mathbf{R})$  dénote la dimension de la représentation  $\mathbf{R}$ , tandis que  $\mathbf{A}$  est la représentation adjointe.

Le tenseur complètement symétrique  $d^{abc}$  est normalisé tel que  $I_3(\mathbf{F}) \equiv 1$  pour les groupes unitaires. Il est absent pour les groupes orthogonaux, hormis pour  $SO(6)$  qui est isomorphe à  $SU(4)$ . Lorsqu'il est défini, le coefficient  $I_3(\mathbf{R})$  est souvent appelé le coefficient d'anomalie de la représentation  $\mathbf{R}$ .

### Symbole symétrique quartique

Pour calculer des traces de quatre générateurs, nous avons besoin d'étendre la base de sorte à y inclure le symbole symétrique quartique et son invariant associé (pour plus d'information, voir [166]). Elles ne sont pas données directement par la trace totalement symétrique de quatre générateurs car le



produit symétrisé de deux symboles symétriques de second ordre est un tenseur symétrique invariant à quatre indices. Pour spécifier, la décomposition la plus générale est :

$$\frac{1}{4!} S \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d) = I_4(\mathbf{R}) d^{abcd} + \Lambda(\mathbf{R})(\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}). \quad (\text{C.3})$$

La constante  $\Lambda(\mathbf{R})$  est conventionnelle, tandis que  $d^{abcd}$  est normalisé en fixant  $I_4(\mathbf{F}) = c$  pour une constante arbitraire  $c$ . Afin de fixer  $\Lambda(\mathbf{R})$ , on choisit de définir le tenseur  $d^{abcd}$  comme étant orthogonal aux invariants de rang inférieur, i.e., tel que  $d_{ab} d_{cd} d^{abcd} = 0$ ,

$$\begin{aligned} I_4(\mathbf{R}) d_{ab} d_{cd} d^{abcd} &= \frac{1}{4!} \delta_{ab} \delta_{cd} S \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d) - \delta_{ab} \delta_{cd} \Lambda(\mathbf{R})(\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}) \\ &= \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^b) + \frac{1}{3} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a [T_{\mathbf{R}}^b, T_{\mathbf{R}}^a] T_{\mathbf{R}}^b) - \Lambda(\mathbf{R})(2 + N(\mathbf{A}))N(\mathbf{A}) \\ &= \left( \frac{N(\mathbf{A})I_2(\mathbf{R})}{N(\mathbf{R})} - \frac{I_2(\mathbf{A})}{6} \right) I_2(\mathbf{R})N(\mathbf{A}) - \Lambda(\mathbf{R})(2 + N(\mathbf{A}))N(\mathbf{A}), \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

où l'on a utilisé  $f^{abc} f^{abc} = I_2(\mathbf{A})\delta^{ad}$ ,  $f^{abc} f^{abc} = I_2(\mathbf{A})N(\mathbf{A})$ . Ainsi,  $d_{ab} d_{cd} d^{abcd}$  s'annule à condition que

$$\Lambda(\mathbf{R}) = \left( \frac{N(\mathbf{A})I_2(\mathbf{R})}{N(\mathbf{R})} - \frac{I_2(\mathbf{A})}{6} \right) \frac{I_2(\mathbf{R})}{2 + N(\mathbf{A})}. \quad (\text{C.5})$$

Cette convention assure que  $d^{abcd}$  n'a pas de partie restante proportionnelle au symbole quadratique. Ceci est particulièrement pratique car  $I_4(\mathbf{R})$  s'annule alors pour toute représentation  $\mathbf{R}$  de  $SU(2)$  et  $SU(3)$ . On rappelle qu'un tenseur  $d^{abcd}$  tel que  $d_{ab} d_{cd} d^{abcd} = 0$  n'existe pas pour  $SU(N \leq 3)$ . Pour  $N = 2, 3$ ,  $\Lambda(\mathbf{F}) = 1/24$  et

$$S \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{F}}^a T_{\mathbf{F}}^b T_{\mathbf{F}}^c T_{\mathbf{F}}^d) \stackrel{N=2,3}{=} \delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}. \quad (\text{C.6})$$

Cette formule fournit également une identité utile pour les constantes de structures de  $SU(3)$

$$\frac{1}{4!} S \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{8}}^a T_{\mathbf{8}}^b T_{\mathbf{8}}^c T_{\mathbf{8}}^d) = \frac{1}{4!} \sum_{\operatorname{perm}(a,b,c,d)} f^{ax_1 x_2} f^{bx_2 x_3} f^{cx_3 x_4} f^{dx_4 x_1} = \frac{3}{4} (\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}), \quad (\text{C.7})$$

sachant que  $\Lambda(\mathbf{8}) = 3/4$ .

La formule (C.3) est valable pour toute algèbre orthogonale ou unitaire, hormis pour  $SO(8)$ . En effet, le symbole de Levi-Civita de dimension  $N$  est un invariant pour  $SO(N)$ , et lorsque  $N$  est pair, il est possible de construire à partir de celui-ci un symbole symétrique avec  $N/2$  indices. Pour le voir, rappelons que la représentation adjointe  $\mathbf{A}$  de  $SO(N)$  est obtenue comme étant le produit tensoriel antisymétrique de la représentation de dimension  $N$  définissante,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{A} = \mathbf{F} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{F}$ . Ainsi les générateurs  $SO(N)$  peuvent être indexés par les combinaisons de deux indices antisymétriques  $i, j = 1, \dots, N$ . Si on dénote  $a = (i, j)$ , avec  $a = 1, \dots, N(N-1)/2$ , alors

$$\Theta^{a_1 \dots a_{N/2}} = \eta \varepsilon^{i_1 \dots i_N}, \quad (\text{C.8})$$

avec  $\eta$  constante, est un tenseur invariant complètement symétrique avec  $N/2$  indices. Ceci explique un aspect de l'isomorphisme  $SO(6) \sim SU(4)$ . Aucune des algèbres orthogonales ne possède un vrai symbole  $d^{abc}$ , mais le tenseur invariant additionnel  $\Theta^{abc}$  de  $SO(6)$  correspond au symbole  $d^{abc}$  de  $SU(4)$ . Pour  $SO(8)$ ,  $\Theta^{abcd}$  est un symbole quartique supplémentaire, orthogonal aux deux structures tensorielles de l'équation (C.3). Ainsi, la trace complètement symétrique de quatre générateurs de  $SO(8)$  ne se projète pas juste sur deux mais trois structures tensorielles.

## Réductions de traces d'ordre quatre

Toute trace de quatre générateurs peut être réduite et exprimée entièrement en termes des tenseurs invariants. Par exemple, pour  $SU(N)$  et  $SO(N \neq 8)$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4!} S \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d) &= \frac{1}{6} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d) + \frac{1}{6} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^d T_{\mathbf{R}}^c) + \frac{1}{6} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^d) \\
&+ \frac{1}{6} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d T_{\mathbf{R}}^b) + \frac{1}{6} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^d T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c) + \frac{1}{6} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^d T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^b) \\
&= \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d) + \frac{2}{6} i f^{dce} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^e) + \frac{3}{6} i f^{cbe} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^e T_{\mathbf{R}}^d) \\
&+ \frac{2}{6} i f^{dbe} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^e) + \frac{1}{6} i f^{dbe} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^e T_{\mathbf{R}}^c) + \frac{1}{6} i f^{dce} \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^e T_{\mathbf{R}}^b) \\
&= \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d) + i \frac{I_3(\mathbf{R})}{8} (f^{dce} d^{abe} + f^{cbe} d^{aed} + f^{dbe} d^{ace}) \\
&+ \frac{I_2(\mathbf{R})}{12} f^{abe} f^{cde} - \frac{I_2(\mathbf{R})}{4} f^{ade} f^{bce} + \frac{I_2(\mathbf{R})}{12} f^{ace} f^{bde}.
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Ou, en introduisant l'invariant quartique :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(T_{\mathbf{R}}^a T_{\mathbf{R}}^b T_{\mathbf{R}}^c T_{\mathbf{R}}^d) &= I_4(\mathbf{R}) d^{abcd} - i \frac{I_3(\mathbf{R})}{8} (f^{dce} d^{abe} + f^{cbe} d^{aed} + f^{dbe} d^{ace}) \\
&- \frac{I_2(\mathbf{R})}{12} (f^{abe} f^{cde} - 3 f^{ade} f^{bce} + f^{ace} f^{bde}) + \Lambda(\mathbf{R}) (\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}).
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Comme cas particuliers, on peut poser  $I_3(\mathbf{R}) = 0$  pour  $SO(N \neq 6)$ ,  $I_4(\mathbf{R}) = 0$  pour  $SU(3)$ , et  $I_4(\mathbf{R}) = I_3(\mathbf{R}) = 0$  pour  $SU(2)$ . Notons que les deux derniers termes peuvent être écrit sous une forme plus simple bien que moins symétrique à l'aide des identités de Jacobi :

$$\begin{aligned}
f^{cde} d^{abe} + f^{ade} d^{bce} + f^{bde} d^{ace} &= 0, \\
f^{abe} f^{cde} - f^{ace} f^{bde} + f^{ade} f^{bce} &= 0.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

La première identité provient de  $\operatorname{Tr}(T_{\mathbf{A}}^a T_{\mathbf{A}}^b T_{\mathbf{A}}^c) = \operatorname{Tr}(T_{\mathbf{A}}^a [T_{\mathbf{A}}^b, T_{\mathbf{A}}^c]) / 2$  en raison de  $(T_{\mathbf{A}}^a)^T = -T_{\mathbf{A}}^a$  pour une représentation réelle.

Dans le cas de  $SU(N)$ , il y a une autre façon d'obtenir le symbole symétrique d'ordre quatre. D'abord, rappelons que,

$$T_{\mathbf{F}}^a T_{\mathbf{F}}^b = \frac{1}{N} I_2(\mathbf{F}) \delta^{ab} + \frac{I_3(\mathbf{F})}{4I_2(\mathbf{F})} d^{abc} T_{\mathbf{F}}^c + \frac{i}{2} I_2(\mathbf{F}) f^{abc} T_{\mathbf{F}}^c. \tag{C.12}$$

Avec ceci, on peut établir

$$\operatorname{Tr} \left[ \{T_{\mathbf{F}}^a T_{\mathbf{F}}^b\} \{T_{\mathbf{F}}^c T_{\mathbf{F}}^d\} \right] = \frac{4I_2(\mathbf{F})^2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} + \frac{I_3(\mathbf{F})^2}{4I_2(\mathbf{F})} d^{abe} d^{cde} = \frac{1}{N} \delta^{ab} \delta^{cd} + \frac{1}{2} d^{abe} d^{cde}. \tag{C.13}$$

D'autre part, cette trace peut être calculée en utilisant la réduction générale en termes d'invariants, ce qui donne

$$\operatorname{Tr} \left[ \{T_{\mathbf{F}}^a T_{\mathbf{F}}^b\} \{T_{\mathbf{F}}^c T_{\mathbf{F}}^d\} \right] = 4I_4(\mathbf{F}) d^{abcd} + \frac{1}{3} I_2(\mathbf{F}) (f^{ace} f^{bde} + f^{ade} f^{bce}) + 4\Lambda(\mathbf{F}) (\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}). \tag{C.14}$$

En combinant les deux,

$$I_4(\mathbf{F}) d^{abcd} = \frac{I_3(\mathbf{F})^2}{16I_2(\mathbf{F})} d^{abe} d^{cde} - \frac{I_2(\mathbf{F})}{12} (f^{ace} f^{bde} + f^{ade} f^{bce}) - \Lambda(\mathbf{F}) (\delta^{ab} \delta^{cd} + \delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}) + \frac{I_2(\mathbf{F})^2}{N} \delta^{ab} \delta^{cd}. \tag{C.15}$$

Avec la convention  $I_4(\mathbf{F}) = 1$ , cette identité permet de calculer le symbole quartique  $d^{abcd}$  directement à partir des invariants de rangs inférieurs. On peut maintenant vérifier que pour  $N = 3$ ,  $I_2(\mathbf{F}) = 1/2$ ,  $I_3(\mathbf{F}) = 1$ ,  $I_4(\mathbf{F}) = 0$  et  $\Lambda(\mathbf{F}) = 1/24$ ,

$$0 = \frac{1}{8}d^{abe}d^{cde} - \frac{1}{24}(f^{ace}f^{bde} + f^{ade}f^{bce}) - \frac{1}{24}(\delta^{ac}\delta^{bd} - \delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ad}\delta^{bc}), \quad (\text{C.16})$$

ce qui redonne l'identité (4.88). Pour  $N = 2$ ,  $I_2(\mathbf{F}) = 1/2$ ,  $I_3(\mathbf{F}) = I_4(\mathbf{F}) = 0$ ,  $\Lambda(\mathbf{F}) = 1/24$ , on retrouve la formule de réduction usuelle pour le tenseur de Levi-Civita :

$$0 = -\frac{1}{24}(\varepsilon^{ace}\varepsilon^{bde} + \varepsilon^{ade}\varepsilon^{bce}) - \frac{1}{24}(\delta^{ac}\delta^{bd} - 2\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ad}\delta^{bc}). \quad (\text{C.17})$$

$SU(2)$										
<b>R</b>	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$N$	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>
$I_2$	1/2	2	5	10	35/2	28	42	60	165/2	110
$\Lambda$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{41}{12}$	$\frac{34}{3}$	$\frac{707}{24}$	$\frac{196}{3}$	$\frac{259}{2}$	236	$\frac{3223}{8}$	$\frac{1958}{3}$
$SU(3)$										
<b>R</b>	(10)	(20)	(11)	(30)	(21)	(40)	(05)	(13)	(22)	(60)
$N$	<b>3</b>	<b>6</b>	<b>8</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>15'</b>	<b>21</b>	<b>24</b>	<b>27</b>	<b>28</b>
$I_2$	1/2	5/2	3	15/2	10	35/2	35	25	27	63
$I_3$	1	7	0	27	14	77	-182	-64	0	378
$\Lambda$	$\frac{1}{24}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{33}{8}$	$\frac{29}{6}$	$\frac{371}{24}$	$\frac{539}{12}$	$\frac{235}{12}$	$\frac{81}{4}$	$\frac{441}{3}$
$SU(4)$										
<b>R</b>	(100)	(010)	(200)	(101)	(011)	(020)	(003)	(400)	(201)	(210)
$N$	<b>4</b>	<b>6</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	<b>20'</b>	<b>20''</b>	<b>35</b>	<b>36</b>	<b>45</b>
$I_2$	1/2	1	3	4	13/2	8	21/2	28	33/2	24
$I_3$	1	0	8	0	-7	0	-35	112	21	48
$I_4$	1	-4	12	8	-11	-56	69	272	57	24
$\Lambda$	$\frac{29}{816}$	$\frac{11}{102}$	$\frac{23}{34}$	$\frac{40}{51}$	$\frac{1313}{816}$	$\frac{128}{51}$	$\frac{1211}{272}$	$\frac{56}{3}$	$\frac{1639}{272}$	$\frac{176}{17}$
$SU(5)$										
<b>R</b>	(1000)	(0100)	(2000)	(1001)	(0003)	(0011)	(0101)	(0020)	(2001)	(0110)
$N$	<b>5</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>24</b>	<b>35</b>	<b>40</b>	<b>45</b>	<b>50</b>	<b>70</b>	<b>75</b>
$I_2$	1/2	3/2	7/2	5	14	11	12	35/2	49/2	25
$I_3$	1	1	9	0	-44	-16	-6	-15	29	0
$I_4$	1	-3	13	10	82	-2	-6	-55	79	-70
$\Lambda$	$\frac{47}{1560}$	$\frac{83}{520}$	$\frac{77}{120}$	$\frac{125}{156}$	$\frac{1841}{390}$	$\frac{1903}{780}$	$\frac{167}{65}$	$\frac{1589}{312}$	$\frac{11123}{1560}$	$\frac{1075}{156}$

TABLE C.1 – Quelques premières représentations de  $SU(N)$ ,  $N = 2, 3, 4, 5$ , indexées par leur indice de Dynkin et leur dimension, les invariants de Casimir quadratiques, cubiques et quartiques avec  $\Lambda(\mathbf{R})$  donné par l'équation (C.5).

$SO(5)$										
<b>R</b>	(10)	(01)	(02)	(20)	(11)	(03)	(30)	(12)	(04)	(21)
$N$	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>10</b>	<b>14</b>	<b>16</b>	<b>20</b>	<b>30</b>	<b>35</b>	<b>35'</b>	<b>40</b>
$I_2$	1	1/2	3	7	6	21/2	27	21	28	29
$I_4$	2	-1/2	-6	26	6	-69/2	162	-6	-132	91
$\Lambda$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{21}{8}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{133}{32}$	$\frac{153}{8}$	$\frac{77}{8}$	$\frac{35}{2}$	$\frac{261}{16}$
$SO(7)$										
<b>R</b>	(100)	(001)	(010)	(200)	(002)	(101)	(300)	(110)	(011)	(003)
$N$	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>21</b>	<b>27</b>	<b>35</b>	<b>48</b>	<b>77</b>	<b>105</b>	<b>112</b>	<b>112</b>
$I_2$	1	1	5	9	10	14	44	45	46	54
$I_4$	2	-1	-2	30	-16	10	220	42	-46	-126
$\Lambda$	$\frac{13}{138}$	$\frac{43}{552}$	$\frac{125}{138}$	$\frac{111}{46}$	$\frac{155}{69}$	$\frac{889}{276}$	$\frac{1474}{69}$	$\frac{735}{46}$	$\frac{187}{12}$	$\frac{2007}{92}$
$SO(9)$										
<b>R</b>	(1000)	(0001)	(0100)	(2000)	(0010)	(0002)	(1001)	(3000)	(1100)	(0101)
$N$	<b>9</b>	<b>16</b>	<b>36</b>	<b>44</b>	<b>84</b>	<b>126</b>	<b>128</b>	<b>156</b>	<b>231</b>	<b>432</b>
$I_2$	1	2	7	11	21	35	32	65	77	150
$I_4$	2	-2	2	34	-18	-50	16	286	106	-54
$\Lambda$	$\frac{17}{228}$	$\frac{10}{57}$	$\frac{245}{228}$	$\frac{517}{228}$	$\frac{329}{76}$	$\frac{1855}{228}$	$\frac{376}{57}$	$\frac{5395}{228}$	$\frac{5005}{228}$	$\frac{850}{19}$
$SO(10)$										
<b>R</b>	(10000)	(00001)	(01000)	(20000)	(00100)	(00002)	(10010)	(00011)	(30000)	(11000)
$N$	<b>10</b>	<b>16</b>	<b>45</b>	<b>54</b>	<b>120</b>	<b>126</b>	<b>144</b>	<b>210</b>	<b>210'</b>	<b>320</b>
$I_2$	1	2	8	12	28	35	34	56	77	96
$I_4$	2	-2	4	36	-16	-50	14	-68	322	144
$\Lambda$	$\frac{19}{282}$	$\frac{103}{564}$	$\frac{160}{141}$	$\frac{104}{47}$	$\frac{770}{141}$	$\frac{2345}{282}$	$\frac{3791}{564}$	$\frac{1792}{141}$	$\frac{7007}{282}$	$\frac{1168}{47}$

TABLE C.2 – Quelques premières représentations de  $SO(N)$ ,  $N = 5, 7, 9, 10$ , indexées par leur indice de Dynkin et leur dimension, les invariants de Casimir quadratiques, cubiques et quartiques avec  $\Lambda(\mathbf{R})$  donné par l'équation (C.5). L'invariant cubique s'annule pour toutes ces algèbres. La normalisation des générateurs et des symboles quartiques est fixée en termes de celle adoptée pour les algèbres  $SU(N)$ , à l'aide de l'équation (C.19). Les algèbres  $SO(4)$  et  $SO(6)$  ne sont pas incluses puisqu'elles sont respectivement isomorphes à  $SU(2) \otimes SU(2)$  et  $SU(4)$ . Notons que les normalisations ne correspondent pas nécessairement, avec par exemple  $I_2(SU(4)) = I_2(SO(6))$  mais  $I_4(SU(4)) = -2I_4(SO(6))$ .

$SO(8)$												
	<b>8</b> ( $I_2, \Lambda = 1, 1/12$ )			<b>112</b> ( $I_2, \Lambda = 54, 45/2$ )			<b>224</b> ( $I_2, \Lambda = 100, 115/3$ )			<b>28</b> ( $I_2, \Lambda = 6, 1$ )		
	(1000)	(0001)	(0010)	(2000)	(0002)	(0020)	(1002)	(1020)	(2001)	<b>(0100)</b>		
$I_4$	2	-1	-1	252	-126	-126	-40	-40	212	0		
$I'_4$	0	-1	1	0	-126	126	-128	128	-44	0		
	<b>35</b> ( $I_2, \Lambda = 10, 7/3$ )			<b>160</b> ( $I_2, \Lambda = 60, 19$ )						<b>300</b> ( $I_2, \Lambda = 150, 65$ )		
	(2000)	(0002)	(0020)	(1100)	(0101)	(0110)	(0012)	(0021)	(2010)	<b>(0200)</b>		
$I_4$	32	-16	-16	72	-36	-36	-172	-172	212	0		
$I'_4$	0	-16	16	0	-36	36	-84	84	44	0		
	<b>56</b> ( $I_2, \Lambda = 15, 13/4$ )			<b>294</b> ( $I_2, \Lambda = 210, 133$ )			<b>567</b> ( $I_2, \Lambda = 324, 162$ )			<b>350</b> ( $I_2, \Lambda = 150, 55$ )		
	(0011)	(1001)	(1010)	(4000)	(0004)	(0040)	(2100)	(0102)	(0120)	<b>(1011)</b>		
$I_4$	-18	9	9	1344	-672	-672	864	-432	-432	0		
$I'_4$	0	9	-9	0	-672	672	0	-432	432	0		

TABLE C.3 – Quelques premières représentations de  $SO(8)$ , indexées par leur indice de Dynkin. En raison de l'invariance du tenseur de Levi-Civita de dimension huit, cette algèbre possède un second tenseur invariant quartique. Sa normalisation est fixée de sorte à rendre manifeste la relation entre les valeurs des deux invariants de Casimir quartiques, et correspond à  $\eta = -1/8$  dans l'équation (C.8). Une deuxième propriété de  $SO(8)$  est sa symétrie de trialité : les dimensions et les invariants de Casimir quadratiques sont les mêmes sous permutations des première, troisième et quatrième racines simples. Les deux invariants de Casimir quartiques s'annulent quand ils sont sommés sur les représentations liées par la symétrie de permutation [159]. Ceci signifie en particulier qu'ils s'annulent identiquement pour la **28**, **300**, and **350**.

## Invariants de Casimir pour les groupes simples

Grâce à la condition d'orthogonalité adoptée pour fixer  $\Lambda(\mathbf{R})$  [159], la formule usuelle peut être employée pour avoir les valeurs explicites de l'invariant  $I_4(\mathbf{R})$  pour plusieurs représentations,

$$\begin{aligned} I_n(\mathbf{R}) &= (-1)^n I_n(\mathbf{R}^\dagger), \\ I_n(\mathbf{R}_1 \oplus \mathbf{R}_2) &= I_n(\mathbf{R}_1) + I_n(\mathbf{R}_2), \\ I_n(\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2) &= I_n(\mathbf{R}_1)N(\mathbf{R}_2) + I_n(\mathbf{R}_2)N(\mathbf{R}_1) = \sum I_n(\mathbf{R}'_i), \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

avec  $n = 2, 3, 4$  et où  $\mathbf{R}_1 \otimes \mathbf{R}_2 = \sum_i \mathbf{R}'_i$ . Tout compte fait, ces relations sont plus que suffisantes pour établir les invariants de Casimir de n'importe quelle algèbre de Lie standard. Nous donnons dans les tableaux C.1, C.2 et C.3 leurs valeurs pour quelques premières représentations de certaines algèbres unitaires et orthogonales de rang  $r \leq 5$ , ainsi que  $\Lambda(\mathbf{R})$ . Nous avons aussi vérifié ces nombres en calculant  $I_{2,3,4}(\mathbf{R})$  directement en utilisant des représentations matricielles explicites pour les premières représentations de chaque algèbre. Ces nombres sont compatibles avec la formule explicite en termes d'indices de Dynkin donnée dans [159], aux conventions de normalisations près.

La normalisation des générateurs adoptée pour les algèbres  $SO(N)$  dans les tableaux C.2 et C.3 n'est pas standard mais inspirée physiquement. Spécifiquement, les invariants d'une algèbre  $M$  peuvent être exprimés en termes de ceux de sa sous-algèbre  $N$ . Par exemple, si une représentation  $\mathbf{R}_M$  se branche sur la somme directe des représentations  $\mathbf{R}_N$ , on a la règle de somme simple :

$$I_n(\mathbf{R}_M) = \eta \sum_{\mathbf{R}_N \subset \mathbf{R}_M} I_n(\mathbf{R}_N), \quad (\text{C.19})$$

où  $\eta$  est une constante reflétant la convention de normalisation adoptée de  $M$  et  $N$ . Dans le tableau C.2, on choisit de fixer  $\eta = 1$ . Par exemple, les générateurs dans la représentation définissante de  $SO(10)$  sont normalisés tels que

$$I_2(\mathbf{10})^{SO(10)} = I_2(\bar{\mathbf{5}})^{SU(5)} + I_2(\mathbf{5})^{SU(5)} = 1, \quad (\text{C.20})$$

étant donné que  $\mathbf{10} \rightarrow \bar{\mathbf{5}} + \mathbf{5}$ . De même, la normalisation du symbole quartique de  $SO(10)$  est alors fixée en imposant  $I_4(\mathbf{10})^{SO(10)} = 2I_4(\mathbf{5})^{SU(5)} = 2$ . Cela fait sens physiquement si on pense à un champ siégeant dans une représentation donnée de  $SO(10)$  circulant dans une boucle. Nos conventions de normalisations font que le matching de cette amplitude avec celle calculée en termes des champs de la sous-algèbre soit plus transparent. Notons que les générateurs ainsi que les symboles quartiques de toutes les algèbres  $SO(N)$  sont fixés dès que ceux de  $SO(10)$  le sont, car  $SO(N) \subset SO(N+1)$ . De plus, nous avons aussi vérifié que ces conventions soient compatibles avec  $SO(3) \otimes SO(7) \subset SO(10)$  et  $SO(4) \otimes SO(6) \subset SO(10)$ , avec  $SO(4) \sim SU(2) \otimes SU(2)$ .

D'autres relations entre les invariants d'une algèbre et ceux de ses sous-algèbres sont données dans le texte, voir en particulier l'équation (4.115) qui donne  $I_n(\mathbf{R}_M)$  en fonction de  $I_{n-1}(\mathbf{R}_N)$ , équation (4.108) qui fixe  $I_4(\mathbf{R}_M)$  en fonction de  $I_2(\mathbf{R}_N)$ , ou l'équation (4.111) qui donne  $I_n(\mathbf{R}_M)$  en termes des charges  $U(1)$  des états  $\mathbf{R}_M$ . Pour clore cette partie, illustrons ces relations avec quelques exemples.

Considérons d'abord la réduction de  $SU(2)$  vers un sous-groupe  $U(1)$  de  $SU(2)$  généré par  $T^3$ . Vu qu'il n'y a pas d'invariant quartique pour  $SU(2)$ , l'équation (4.111) est facile à vérifier. La représentation fondamentale de  $SU(2)$  correspond à deux états complexes de charges  $|T^3| = 1/2$ , alors on peut identifier  $2(1/2)^4 = 3\Lambda^{SU(2)}(\mathbf{2})$  car  $\Lambda^{SU(2)}(\mathbf{2}) = 1/24$ . De même, la représentation complexe adjointe de  $SU(2)$  contient deux états de charges unités, ainsi  $2 = 3\Lambda^{SU(2)}(\mathbf{3})$ , et l'isospin  $3/2$  se décompose en quatre états tels que  $2((1/2)^4 + (3/2)^4) = 3\Lambda^{SU(2)}(\mathbf{4})$ , ce qui redonne les valeurs correctes  $\Lambda^{SU(2)}(\mathbf{3}) = 2/3$  et  $\Lambda^{SU(2)}(\mathbf{4}) = 41/12$ . Le même exercice peut être répétée pour  $SU(3)$ , pour lequel l'absence d'invariant quartique assure que  $\text{Tr}((T^3_{\mathbf{R}})^4) = \text{Tr}((T^8_{\mathbf{R}})^4)$  si  $T^3$  et  $T^8$  sont les générateurs

de Cartan conventionnels (égaux à la moitié des matrices de Gell-Mann correspondantes dans la représentation fondamentale). Afin d'appliquer la même méthodes à  $SU(5)$ , nous avons d'abord besoin de fixer deux paramètres libres. Pour spécifier, on part de

$$3\Lambda(\mathbf{R}) + d^{\alpha\alpha\alpha\alpha} I_4(\mathbf{R}) = \delta \sum_{q_\alpha \in \mathbf{R}} q_\alpha^4, \quad (\text{C.21})$$

La valeur de  $d^{\alpha\alpha\alpha\alpha}$  et la normalisation  $\delta$  du générateur de  $U(1)$  (qui était accidentellement égale à 1 dans l'exemple précédent de  $SU(2)$ ) doivent être fixées. Si on identifie  $T^\alpha$  avec le générateur de l'hypercharge dans la sous-algèbre  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1) \subset SU(5)$ , on peut utiliser les règles d'embranchements [158]

$$\begin{aligned} \mathbf{5} &= (\mathbf{3}, \mathbf{1})_2 + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-3}, \\ \mathbf{10} &= (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_4 + (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{-1} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-6}, \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

et ces deux constantes sont fixées par

$$\begin{cases} I_4(\mathbf{5})d^{\alpha\alpha\alpha\alpha} + 3\Lambda(\mathbf{5}) = \delta(2 \times 3^4 + 3 \times 2^4) \\ I_4(\mathbf{10})d^{\alpha\alpha\alpha\alpha} + 3\Lambda(\mathbf{10}) = \delta(6^4 + 3 \times 4^4 + 3 \times 2 \times 1^4) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \delta = 1/60^2, \\ d^{\alpha\alpha\alpha\alpha} = -5/156. \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

On peut alors vérifier que les  $I_4$  pour les autres représentations de  $SU(5)$  sont correctement reproduits.

Les mêmes règles d'embranchements peuvent être utilisées en rapport avec l'équation (4.115), que nous écrivons

$$I_4(\mathbf{R}_M) = \eta \sum_{\mathbf{R}_N \subset \mathbf{R}_M} q_\alpha(\mathbf{R}_N) I_3(\mathbf{R}_N). \quad (\text{C.24})$$

La sous-algèbre n'a pas besoin d'être maximale donc on considère  $U(1) \otimes SU(3) \subset SU(5)$ . En utilisant les valeurs reportées dans le tableau C.1, la première règle de l'équation (C.22) se traduit en  $I_4^{SU(5)}(\mathbf{5}) = 2\eta I_3^{SU(3)}(\mathbf{3})$  et fixe  $\eta = 1/2$ . Ainsi, on peut vérifier que cette équation est valide pour toutes les autres représentations de  $SU(5)$  listées dans le tableau C.1.





# Bibliographie

---

- [1] C. Smith and S. Touati, *Electric dipole moments with and beyond flavor invariants*, *Nucl. Phys.* **B924** (2017) 417–452, [[1707.06805](#)].
- [2] J. Quevillon, C. Smith and S. Touati, *Effective action for gauge bosons*, *Phys. Rev.* **D99** (2019) 013003, [[1810.06994](#)].
- [3] S. L. Glashow, *Partial Symmetries of Weak Interactions*, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579–588.
- [4] S. Weinberg, *A Model of Leptons*, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264–1266.
- [5] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R. P. Hudson, *Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay*, *Phys. Rev.* **105** (1957) 1413–1414.
- [6] ATLAS collaboration, G. Aad et al., *Measurement of the Higgs boson mass from the  $H \rightarrow \gamma\gamma$  and  $H \rightarrow ZZ^* \rightarrow 4\ell$  channels with the ATLAS detector using  $25 \text{ fb}^{-1}$  of  $pp$  collision data*, *Phys. Rev.* **D90** (2014) 052004, [[1406.3827](#)].
- [7] C. Smith, *Minimal Flavor Violation*. habilitation, LPSC, Grenoble, 2016-09-06.
- [8] M. Kobayashi and T. Maskawa, *CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction*, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652–657.
- [9] CKMFITTER GROUP collaboration, J. Charles, A. Hocker, H. Lacker, S. Laplace, F. R. Le Diberder, J. Malcles et al., *CP violation and the CKM matrix : Assessing the impact of the asymmetric B factories*, *Eur. Phys. J.* **C41** (2005) 1–131, [[hep-ph/0406184](#)].
- [10] L. Wolfenstein, *Parametrization of the Kobayashi-Maskawa Matrix*, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1945.
- [11] T. Inami and C. S. Lim, *Effects of Superheavy Quarks and Leptons in Low-Energy Weak Processes  $k(L) \rightarrow \mu \text{ anti-}\mu$ ,  $K^+ \rightarrow \pi^+ \text{ Neutrino anti-neutrino}$  and  $K^0 \leftrightarrow \text{anti-}K^0$* , *Prog. Theor. Phys.* **65** (1981) 297.
- [12] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, *Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry*, *Phys. Rev.* **D2** (1970) 1285–1292.
- [13] CMS collaboration, C. Collaboration, *Precise determination of the mass of the Higgs boson and studies of the compatibility of its couplings with the standard model*, .
- [14] SUPER-KAMIOKANDE collaboration, Y. Fukuda et al., *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1562–1567, [[hep-ex/9807003](#)].
- [15] SNO collaboration, Q. R. Ahmad et al., *Measurement of the rate of  $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$  interactions produced by  $^8\text{B}$  solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory*, *Phys. Rev. Lett.* **87** (2001) 071301, [[nucl-ex/0106015](#)].

- [16] SNO collaboration, Q. R. Ahmad et al., *Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory*, *Phys. Rev. Lett.* **89** (2002) 011301, [[nucl-ex/0204008](#)].
- [17] C. Rovelli, *Notes for a brief history of quantum gravity*, in *Recent developments in theoretical and experimental general relativity, gravitation and relativistic field theories. Proceedings, 9th Marcel Grossmann Meeting, MG'9, Rome, Italy, July 2-8, 2000. Pts. A-C*, pp. 742–768, 2000. [gr-qc/0006061](#).
- [18] G. Bertone, D. Hooper and J. Silk, *Particle dark matter : Evidence, candidates and constraints*, *Phys. Rept.* **405** (2005) 279–390, [[hep-ph/0404175](#)].
- [19] PLANCK collaboration, N. Aghanim et al., *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, [1807.06209](#).
- [20] L. Canetti, M. Drewes and M. Shaposhnikov, *Matter and Antimatter in the Universe*, *New J. Phys.* **14** (2012) 095012, [[1204.4186](#)].
- [21] A. D. Sakharov, *Violation of CP Invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe*, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **5** (1967) 32–35.
- [22] J. C. Pati and A. Salam, *Unified Lepton-Hadron Symmetry and a Gauge Theory of the Basic Interactions*, *Phys. Rev.* **D8** (1973) 1240–1251.
- [23] H. Georgi and S. L. Glashow, *Unity of All Elementary Particle Forces*, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 438–441.
- [24] M. Pospelov and A. Ritz, *Electric dipole moments as probes of new physics*, *Annals Phys.* **318** (2005) 119–169, [[hep-ph/0504231](#)].
- [25] H.-Y. Cheng, *The Strong CP Problem Revisited*, *Phys. Rept.* **158** (1988) 1.
- [26] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch and R. Turlay, *Evidence for the  $2\pi$  Decay of the  $K_2^0$  Meson*, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 138–140.
- [27] C. Jarlskog, *Commutator of the Quark Mass Matrices in the Standard Electroweak Model and a Measure of Maximal CP Violation*, *Phys. Rev. Lett.* **55** (1985) 1039.
- [28] PARTICLE DATA GROUP collaboration, C. Patrignani et al., *Review of Particle Physics*, *Chin. Phys.* **C40** (2016) 100001.
- [29] R. D. Peccei and H. R. Quinn, *Constraints Imposed by CP Conservation in the Presence of Instantons*, *Phys. Rev.* **D16** (1977) 1791–1797.
- [30] B. Pontecorvo, *Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge*, *Sov. Phys. JETP* **7** (1958) 172–173.
- [31] B. Kayser, *Neutrino physics*, *eConf* **C040802** (2004) L004, [[hep-ph/0506165](#)].
- [32] F. Reines and C. L. Cowan, *Detection of the free neutrino*, *Phys. Rev.* **92** (1953) 830–831.
- [33] C. L. Cowan and F. Reines, *Test of neutrino—antineutrino identity*, *Phys. Rev.* **106** (May, 1957) 825–826.
- [34] F. Reines, C. L. Cowan, F. B. Harrison, A. D. McGuire and H. W. Kruse, *Detection of the free anti-neutrino*, *Phys. Rev.* **117** (1960) 159–173.
- [35] KAMLAND collaboration, K. Eguchi et al., *First results from KamLAND : Evidence for reactor anti-neutrino disappearance*, *Phys. Rev. Lett.* **90** (2003) 021802, [[hep-ex/0212021](#)].
- [36] R. Davis, *A review of the Homestake solar neutrino experiment*, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **32** (1994) 13–32.

- [37] SAGE collaboration, J. N. Abdurashitov et al., *Results from SAGE*, *Phys. Lett.* **B328** (1994) 234–248.
- [38] T. Kirsten, *Retrospect of GALLEX/GNO*, *J. Phys. Conf. Ser.* **120** (2008) 052013.
- [39] Y. Suzuki, *The Super-Kamiokande experiment*, *Eur. Phys. J.* **C79** (2019) 298.
- [40] SNO collaboration, A. Bellerive, J. R. Klein, A. B. McDonald, A. J. Noble and A. W. P. Poon, *The Sudbury Neutrino Observatory*, *Nucl. Phys.* **B908** (2016) 30–51, [[1602.02469](#)].
- [41] BOREXINO collaboration, O. Yu. Smirnov et al., *Borexino : Recent results and future plans*, *Phys. Part. Nucl.* **48** (2017) 1026–1029.
- [42] DOUBLE CHOOZ collaboration, C. Palomares, *Double-Chooz neutrino experiment*, *J. Phys. Conf. Ser.* **335** (2011) 012055.
- [43] DAYA BAY collaboration, J. P. Ochoa-Ricoux, *Latest results from the Daya Bay experiment*, *PoS NuFact2017* (2018) 039.
- [44] RENO collaboration, J. K. Ahn et al., *RENO : An Experiment for Neutrino Oscillation Parameter  $\theta_{13}$  Using Reactor Neutrinos at Yonggwang*, [1003.1391](#).
- [45] MINOS collaboration, J. Evans, *The MINOS Experiment : Results and Prospects*, *Adv. High Energy Phys.* **2013** (2013) 182537, [[1307.0721](#)].
- [46] T2K collaboration, K. Abe et al., *The T2K Experiment*, *Nucl. Instrum. Meth.* **A659** (2011) 106–135, [[1106.1238](#)].
- [47] PARTICLE DATA GROUP collaboration, K. Nakamura et al., *Review of particle physics*, *J. Phys.* **G37** (2010) 075021.
- [48] J. Bonn, B. Bornschein, L. Bornschein, L. Fickinger, B. Flatt, O. Kazachenko et al., *The mainz neutrino mass experiment*, *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* **91** (2001) 273 – 279.
- [49] MU3E collaboration, A.-K. Perrevoort, *Status of the Mu3e Experiment at PSI*, *EPJ Web Conf.* **118** (2016) 01028, [[1605.02906](#)].
- [50] E. Locci, *The ALEPH experiment at CERN*, in *Conference on High-energy Experiments and Methods Bechyně, Czechoslovakia, June 25-30, 1989*, pp. 150–156, 1989.
- [51] KATRIN collaboration, M. Beck, *The KATRIN Experiment*, *J. Phys. Conf. Ser.* **203** (2010) 012097, [[0910.4862](#)].
- [52] K. M. Heeger, *Evidence for neutrino mass : A Decade of discovery*, in *Seesaw mechanism. Proceedings, International Conference, SEESAW25, Paris, France, June 10-11, 2004*, pp. 65–80, 2004. [hep-ex/0412032](#). DOI.
- [53] M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, J. Salvado and T. Schwetz-Mangold, *Global fit to three neutrino mixing : Critical look at present precision*, *Journal of High Energy Physics* **2012** (09, 2012) .
- [54] M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni and T. Schwetz, *Updated fit to three neutrino mixing : status of leptonic CP violation*, *JHEP* **11** (2014) 052, [[1409.5439](#)].
- [55] K. Jungmann, *Searching for electric dipole moments*, *Annalen Phys.* **525** (2013) 550–564.
- [56] N. F. Ramsey, *A Molecular Beam Resonance Method with Separated Oscillating Fields*, *Phys. Rev.* **78** (1950) 695–699.
- [57] K. Kirch, *EDM searches*, *AIP Conf. Proc.* **1560** (2013) 90–94.
- [58] ACME collaboration, J. Baron et al., *Order of Magnitude Smaller Limit on the Electric Dipole Moment of the Electron*, *Science* **343** (2014) 269–272, [[1310.7534](#)].

- [59] MUON (G-2) collaboration, G. W. Bennett et al., *An Improved Limit on the Muon Electric Dipole Moment*, *Phys. Rev.* **D80** (2009) 052008, [[0811.1207](#)].
- [60] BELLE collaboration, K. Inami et al., *Search for the electric dipole moment of the tau lepton*, *Phys. Lett.* **B551** (2003) 16–26, [[hep-ex/0210066](#)].
- [61] J. M. Pendlebury et al., *Revised experimental upper limit on the electric dipole moment of the neutron*, *Phys. Rev.* **D92** (2015) 092003, [[1509.04411](#)].
- [62] V. F. Dmitriev and R. A. Sen'kov, *Schiff moment of the mercury nucleus and the proton dipole moment*, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 212303, [[nucl-th/0306050](#)].
- [63] F. del Aguila and M. Sher, *The Electric dipole moment of the tau*, *Phys. Lett.* **B252** (1990) 116–118.
- [64] T. Ibrahim and P. Nath, *Large Tau and Tau Neutrino Electric Dipole Moments in Models with Vector Like Multiplets*, *Phys. Rev.* **D81** (2010) 033007, [[1001.0231](#)].
- [65] J. Engel, M. J. Ramsey-Musolf and U. van Kolck, *Electric Dipole Moments of Nucleons, Nuclei, and Atoms : The Standard Model and Beyond*, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **71** (2013) 21–74, [[1303.2371](#)].
- [66] D. McKeen, M. Pospelov and A. Ritz, *Electric dipole moment signatures of PeV-scale superpartners*, *Phys. Rev.* **D87** (2013) 113002, [[1303.1172](#)].
- [67] W. Altmannshofer, R. Harnik and J. Zupan, *Low Energy Probes of PeV Scale Sfermions*, *JHEP* **11** (2013) 202, [[1308.3653](#)].
- [68] Y. T. Chien, V. Cirigliano, W. Dekens, J. de Vries and E. Mereghetti, *Direct and indirect constraints on CP-violating Higgs-quark and Higgs-gluon interactions*, *JHEP* **02** (2016) 011, [[1510.00725](#)].
- [69] C.-Y. Chen, H.-L. Li and M. Ramsey-Musolf, *CP-Violation in the Two Higgs Doublet Model : from the LHC to EDMs*, *Phys. Rev.* **D97** (2018) 015020, [[1708.00435](#)].
- [70] T. Chupp and M. Ramsey-Musolf, *Electric Dipole Moments : A Global Analysis*, *Phys. Rev.* **C91** (2015) 035502, [[1407.1064](#)].
- [71] S. Touati, *Electric Dipole Moments and Neutrino Mass Models*, in *53rd Rencontres de Moriond on Electroweak Interactions and Unified Theories (Moriond EW 2018) La Thuile, Italy, March 10-17, 2018*, 2018. [1805.06211](#).
- [72] G. D'Ambrosio, G. F. Giudice, G. Isidori and A. Strumia, *Minimal flavor violation : An Effective field theory approach*, *Nucl. Phys.* **B645** (2002) 155–187, [[hep-ph/0207036](#)].
- [73] E. P. Shabalin, *THE ELECTRIC DIPOLE MOMENT OF THE NEUTRON IN A GAUGE THEORY*, *Sov. Phys. Usp.* **26** (1983) 297.
- [74] I. B. Khriplovich, *Quark Electric Dipole Moment and Induced  $\theta$  Term in the Kobayashi-Maskawa Model*, *Phys. Lett.* **B173** (1986) 193–196.
- [75] A. Czarnecki and B. Krause, *Neutron electric dipole moment in the standard model : Valence quark contributions*, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 4339–4342, [[hep-ph/9704355](#)].
- [76] G. C. Branco, R. G. Felipe and F. R. Joaquim, *Leptonic CP Violation*, *Rev. Mod. Phys.* **84** (2012) 515–565, [[1111.5332](#)].
- [77] R. S. Chivukula and H. Georgi, *Composite Technicolor Standard Model*, *Phys. Lett.* **B188** (1987) 99–104.

- [78] A. J. Buras, *Weak Hamiltonian, CP violation and rare decays*, in *Probing the standard model of particle interactions. Proceedings, Summer School in Theoretical Physics, NATO Advanced Study Institute, 68th session, Les Houches, France, July 28-September 5, 1997. Pt. 1, 2*, pp. 281–539, 1998. [hep-ph/9806471](#).
- [79] M. Raidal et al., *Flavour physics of leptons and dipole moments*, *Eur. Phys. J.* **C57** (2008) 13–182, [[0801.1826](#)].
- [80] J. P. Miller, E. de Rafael and B. L. Roberts, *Muon ( $g-2$ ): Experiment and theory*, *Rept. Prog. Phys.* **70** (2007) 795, [[hep-ph/0703049](#)].
- [81] L. Mercolli and C. Smith, *EDM constraints on flavored CP-violating phases*, *Nucl. Phys.* **B817** (2009) 1–24, [[0902.1949](#)].
- [82] J. F. Donoghue, *T Violation in  $SU(2) \times U(1)$  Gauge Theories of Leptons*, *Phys. Rev.* **D18** (1978) 1632.
- [83] E. P. Shabalín, *Electric Dipole Moment of Quark in a Gauge Theory with Left-Handed Currents*, *Sov. J. Nucl. Phys.* **28** (1978) 75.
- [84] M. J. Booth, *The Electric dipole moment of the W and electron in the Standard Model*, [hep-ph/9301293](#).
- [85] A. Czarnecki and B. Krause, *On the dipole moments of fermions at two loops*, *Acta Phys. Polon.* **B28** (1997) 829–834, [[hep-ph/9611299](#)].
- [86] M. Pospelov and A. Ritz, *Ckm benchmarks for electron electric dipole moment experiments*, *Phys. Rev. D* **89** (Mar, 2014) 056006.
- [87] M. E. Pospelov, *CP odd effective gluonic Lagrangian in the Kobayashi-Maskawa model*, *Phys. Lett.* **B328** (1994) 441–449, [[hep-ph/9402317](#)].
- [88] G. Colangelo, E. Nikolidakis and C. Smith, *Supersymmetric models with minimal flavour violation and their running*, *Eur. Phys. J.* **C59** (2009) 75–98, [[0807.0801](#)].
- [89] C. Smith, *Towards a new paradigm for quark-lepton unification*, *JHEP* **05** (2017) 018, [[1612.03825](#)].
- [90] A. Romanino and A. Strumia, *Electric dipole moments from Yukawa phases in supersymmetric theories*, *Nucl. Phys.* **B490** (1997) 3–18, [[hep-ph/9610485](#)].
- [91] I. B. Khriplovich and A. R. Zhitnitsky, *What Is the Value of the Neutron Electric Dipole Moment in the Kobayashi-Maskawa Model?*, *Phys. Lett.* **109B** (1982) 490–492.
- [92] C. A. Baker et al., *An Improved experimental limit on the electric dipole moment of the neutron*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 131801, [[hep-ex/0602020](#)].
- [93] E. Nikolidakis and C. Smith, *Minimal Flavor Violation, Seesaw, and R-parity*, *Phys. Rev.* **D77** (2008) 015021, [[0710.3129](#)].
- [94] G. 't Hooft, *Computation of the Quantum Effects Due to a Four-Dimensional Pseudoparticle*, *Phys. Rev.* **D14** (1976) 3432–3450.
- [95] H.-Y. Cheng, *The Strong CP Problem Revisited*, *Phys. Rept.* **158** (1988) 1.
- [96] I. B. Khriplovich and A. I. Vainshtein, *Infinite renormalization of Theta term and Jarlskog invariant for CP violation*, *Nucl. Phys.* **B414** (1994) 27–32, [[hep-ph/9308334](#)].
- [97] J. R. Ellis and M. K. Gaillard, *Strong and Weak CP Violation*, *Nucl. Phys.* **B150** (1979) 141–162.
- [98] J.-M. Gérard and P. Mertens, *Weakly-induced strong CP-violation*, *Phys. Lett.* **B716** (2012) 316–321, [[1206.0914](#)].

- [99] B. Pontecorvo, *Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge*, *Sov. Phys. JETP* **26** (1968) 984–988.
- [100] I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, M. Maltoni, I. Martinez-Soler and T. Schwetz, *Updated fit to three neutrino mixing : exploring the accelerator-reactor complementarity*, *JHEP* **01** (2017) 087, [[1611.01514](#)].
- [101] MEG collaboration, J. Adam et al., *New constraint on the existence of the  $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$  decay*, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 201801, [[1303.0754](#)].
- [102] BABAR collaboration, B. Aubert et al., *Searches for Lepton Flavor Violation in the Decays  $\tau^{+-} \rightarrow e^{+-} \gamma$  and  $\tau^{+-} \rightarrow \mu^{+-} \gamma$* , *Phys. Rev. Lett.* **104** (2010) 021802, [[0908.2381](#)].
- [103] S. A. Abel, A. Dedes and H. K. Dreiner, *Dipole moments of the electron, neutrino and neutron in the MSSM without R-parity symmetry*, *JHEP* **05** (2000) 013, [[hep-ph/9912429](#)].
- [104] S. Weinberg, *Baryon and Lepton Nonconserving Processes*, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 1566–1570.
- [105] G. C. Branco, L. Lavoura and M. N. Rebelo, *Majorana Neutrinos and CP Violation in the Leptonic Sector*, *Phys. Lett.* **B180** (1986) 264–268.
- [106] G. C. Branco, M. N. Rebelo and J. I. Silva-Marcos, *Degenerate and quasidegenerate Majorana neutrinos*, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 683–686, [[hep-ph/9810328](#)].
- [107] D. Ng and J. N. Ng, *A Note on Majorana neutrinos, leptonic CKM and electron electric dipole moment*, *Mod. Phys. Lett.* **A11** (1996) 211–216, [[hep-ph/9510306](#)].
- [108] A. de Gouvea and S. Gopalakrishna, *Low-energy neutrino Majorana phases and charged-lepton electric dipole moments*, *Phys. Rev.* **D72** (2005) 093008, [[hep-ph/0508148](#)].
- [109] Y. Liao, *Electric Dipole Moments of Charged Leptons from Their Majorana-type Yukawa Couplings*, *Phys. Lett.* **B672** (2009) 367–371, [[0812.4324](#)].
- [110] J. P. Archambault, A. Czarnecki and M. Pospelov, *Electric dipole moments of leptons in the presence of majorana neutrinos*, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 073006, [[hep-ph/0406089](#)].
- [111] E. Ma, *Pathways to naturally small neutrino masses*, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1171–1174, [[hep-ph/9805219](#)].
- [112] P. Minkowski,  *$\mu \rightarrow e \gamma$  at a Rate of One Out of  $10^9$  Muon Decays ?*, *Phys. Lett.* **67B** (1977) 421–428.
- [113] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, *Complex Spinors and Unified Theories*, *Conf. Proc.* **C790927** (1979) 315–321, [[1306.4669](#)].
- [114] O. Sawada and A. Sugamoto, eds., *Proceedings : Workshop on the Unified Theories and the Baryon Number in the Universe*, (Tsukuba, Japan), Natl.Lab.High Energy Phys., Natl.Lab.High Energy Phys., 1979.
- [115] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, *Neutrino Masses and Mixings in Gauge Models with Spontaneous Parity Violation*, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 165.
- [116] G. B. Gelmini and M. Roncadelli, *Left-Handed Neutrino Mass Scale and Spontaneously Broken Lepton Number*, *Phys. Lett.* **99B** (1981) 411–415.
- [117] E. Ma and U. Sarkar, *Neutrino masses and leptogenesis with heavy Higgs triplets*, *Phys. Rev. Lett.* **80** (1998) 5716–5719, [[hep-ph/9802445](#)].
- [118] V. Cirigliano, B. Grinstein, G. Isidori and M. B. Wise, *Minimal flavor violation in the lepton sector*, *Nucl. Phys.* **B728** (2005) 121–134, [[hep-ph/0507001](#)].

- [119] J. A. Casas and A. Ibarra, *Oscillating neutrinos and muon  $\rightarrow e, \gamma$* , *Nucl. Phys.* **B618** (2001) 171–204, [[hep-ph/0103065](#)].
- [120] V. Cirigliano, G. Isidori and V. Porretti, *CP violation and Leptogenesis in models with Minimal Lepton Flavour Violation*, *Nucl. Phys.* **B763** (2007) 228–246, [[hep-ph/0607068](#)].
- [121] S. Pascoli, S. T. Petcov and C. E. Yaguna, *Quasidegenerate neutrino mass spectrum, mu  $\rightarrow e + \gamma$  decay and leptogenesis*, *Phys. Lett.* **B564** (2003) 241–254, [[hep-ph/0301095](#)].
- [122] A. Broncano, M. B. Gavela and E. E. Jenkins, *The Effective Lagrangian for the seesaw model of neutrino mass and leptogenesis*, *Phys. Lett.* **B552** (2003) 177–184, [[hep-ph/0210271](#)].
- [123] P. Fileviez Perez and H. H. Patel, *The Electroweak Vacuum Angle*, *Phys. Lett.* **B732** (2014) 241–243, [[1402.6340](#)].
- [124] C. Smith, *Proton stability from a fourth family*, *Phys. Rev.* **D85** (2012) 036005, [[1105.1723](#)].
- [125] H. Georgi, *Effective field theory*, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **43** (1993) 209–252.
- [126] A. V. Manohar, *Effective field theories*, *Lect. Notes Phys.* **479** (1997) 311–362, [[hep-ph/9606222](#)].
- [127] W. Skiba, *Effective Field Theory and Precision Electroweak Measurements*, in *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*, pp. 5–70, 2011. [1006.2142](#). DOI.
- [128] I. Z. Rothstein, *TASI lectures on effective field theories*, 2003. [hep-ph/0308266](#).
- [129] D. B. Kaplan, *Effective field theories*, in *Beyond the standard model 5. Proceedings, 5th Conference, Balholm, Norway, April 29-May 4, 1997*, 1995. [nucl-th/9506035](#).
- [130] W. D. Goldberger and I. Z. Rothstein, *An Effective field theory of gravity for extended objects*, *Phys. Rev.* **D73** (2006) 104029, [[hep-th/0409156](#)].
- [131] W. Heisenberg and H. Euler, *Consequences of Dirac’s theory of positrons*, *Z. Phys.* **98** (1936) 714–732, [[physics/0605038](#)].
- [132] F. an introduction, see for example A. Dobado, A. Gomez-Nicola, A. L. Maroto and J. R. Pelaez, *Effective lagrangians for the standard model*, N. Y., Springer-Verlag, 1997.
- [133] T. Appelquist and J. Carazzone, *Infrared Singularities and Massive Fields*, *Phys. Rev.* **D11** (1975) 2856.
- [134] M. K. Gaillard, *The Effective One Loop Lagrangian With Derivative Couplings*, *Nucl. Phys.* **B268** (1986) 669–692.
- [135] O. Cheyette, *Effective Action for the Standard Model With Large Higgs Mass*, *Nucl. Phys.* **B297** (1988) 183–204.
- [136] B. Henning, X. Lu and H. Murayama, *How to use the Standard Model effective field theory*, *JHEP* **01** (2016) 023, [[1412.1837](#)].
- [137] W. H. Furry, *A Symmetry Theorem in the Positron Theory*, *Phys. Rev.* **51** (1937) 125–129.
- [138] T. Hahn, *Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3*, *Comput. Phys. Commun.* **140** (2001) 418–431, [[hep-ph/0012260](#)].
- [139] R. Mertig, M. Bohm and A. Denner, *FEYN CALC : Computer algebraic calculation of Feynman amplitudes*, *Comput. Phys. Commun.* **64** (1991) 345–359.
- [140] V. Shtabovenko, R. Mertig and F. Orellana, *New Developments in FeynCalc 9.0*, *Comput. Phys. Commun.* **207** (2016) 432–444, [[1601.01167](#)].



- [141] H. H. Patel, *Package-X : A Mathematica package for the analytic calculation of one-loop integrals*, *Comput. Phys. Commun.* **197** (2015) 276–290, [[1503.01469](#)].
- [142] V. Shtabovenko, *FeynHelpers : Connecting FeynCalc to FIRE and Package-X*, *Comput. Phys. Commun.* **218** (2017) 48–65, [[1611.06793](#)].
- [143] E. A. Uehling, *Polarization effects in the positron theory*, *Phys. Rev.* **48** (1935) 55–63.
- [144] W. Buchmuller and D. Wyler, *Effective Lagrangian Analysis of New Interactions and Flavor Conservation*, *Nucl. Phys.* **B268** (1986) 621–653.
- [145] B. Grzadkowski, M. Iskrzynski, M. Misiak and J. Rosiek, *Dimension-Six Terms in the Standard Model Lagrangian*, *JHEP* **10** (2010) 085, [[1008.4884](#)].
- [146] H. Fanchiotti, H. O. Girotti and A. Sirlin, *Convergence of the lowest-order photon-photon scattering amplitude in the gauge theories*, *Lett. Nuovo Cim.* **4S2** (1972) 826–828.
- [147] F.-x. Dong, X.-d. Jiang and X.-j. Zhou, *The C coefficients of the amplitudes of  $Z \rightarrow 3$  gamma and gamma gamma  $\rightarrow$  gamma gamma*, *J. Phys.* **G19** (1993) 969–978.
- [148] B. U. S. I. in *Theoretical Physics (1970)*, S. Deser, M. Grisaru and H. Pendleton, *Lectures on elementary particles and quantum field theory*, 1970.
- [149] F. Přeučil and J. Hořejší, *Effective Euler–Heisenberg Lagrangians in models of QED*, *J. Phys.* **G45** (2018) 085005, [[1707.08106](#)].
- [150] F. Boudjema, *The Scattering of Light by Light in the Nonlinear Gauge*, *Phys. Lett.* **B187** (1987) 362–366.
- [151] J. Pasukonis, *Implementation of non-linear gauge-fixing in FeynArts package*. PhD thesis, Vilnius U., 2007. [0710.0159](#).
- [152] M. Bace and N. D. Hari Dass, *Parity Violating Compton Amplitude in Unified Theories*, *Annals Phys.* **94** (1975) 349.
- [153] M. B. Gavela, G. Girardi, C. Malleville and P. Sorba, *A Nonlinear  $R(\xi)$  Gauge Condition for the Electroweak  $SU(2) \times U(1)$  Model*, *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 257–268.
- [154] G. Belanger, F. Boudjema, J. Fujimoto, T. Ishikawa, T. Kaneko, K. Kato et al., *Automatic calculations in high energy physics and Grace at one-loop*, *Phys. Rept.* **430** (2006) 117–209, [[hep-ph/0308080](#)].
- [155] E. H. Simmons, *Higher dimension gluon operators and hadronic scattering*, *Phys. Lett.* **B246** (1990) 471–476.
- [156] J. A. Gracey, *Classification and one loop renormalization of dimension-six and dimension-eight operators in quantum gluodynamics*, *Nucl. Phys.* **B634** (2002) 192–208, [[hep-ph/0204266](#)].
- [157] J. A. Gracey, *Eight dimensional QCD at one loop*, *Phys. Rev.* **D97** (2018) 025009, [[1712.02565](#)].
- [158] R. Slansky, *Group Theory for Unified Model Building*, *Phys. Rept.* **79** (1981) 1–128.
- [159] S. Okubo, *Modified Fourth Order Casimir Invariants and Indices for Simple Lie Algebras*, *J. Math. Phys.* **23** (1982) 8.
- [160] M. L. Laursen, K. O. Mikaelian and M. A. Samuel, *Z0 DECAY INTO THREE GLUONS*, *Phys. Rev.* **D23** (1981) 2795.
- [161] G. Belanger and F. Boudjema, *gamma gamma  $\rightarrow$  W+ W- and gamma gamma  $\rightarrow$  Z Z as tests of novel quartic couplings*, *Phys. Lett.* **B288** (1992) 210–220.

- [162] G. Belanger, F. Boudjema, Y. Kurihara, D. Perret-Gallix and A. Semenov, *Bosonic quartic couplings at LEP-2*, *Eur. Phys. J.* **C13** (2000) 283–293, [[hep-ph/9908254](#)].
- [163] M. L. Laursen, M. A. Samuel, G. B. Tupper and A. Sen,  *$Z^0$  Decay Into Two Gluons and a Photon for Massive Quarks*, *Phys. Rev.* **D27** (1983) 196.
- [164] M. Stohr and J. Horejsi, *Effective lagrangians for the Z boson decay into photons*, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 3775–3778.
- [165] M. Baillargeon, F. Boudjema, E. Chopin and V. Lafage, *New physics with three photon events at LEP*, *Z. Phys.* **C71** (1996) 431–442, [[hep-ph/9506396](#)].
- [166] T. van Ritbergen, A. N. Schellekens and J. A. M. Vermaseren, *Group theory factors for Feynman diagrams*, *Int. J. Mod. Phys.* **A14** (1999) 41–96, [[hep-ph/9802376](#)].





---

## Quelques aspects de la violation-CP et interactions de jauges dans le modèle standard et au-delà

---

**Résumé :** Le modèle standard (MS) de la physique des particules est la théorie la plus précise connue à ce jour pour décrire les constituants élémentaires de la matière et leurs interactions. Dès lors que ses 19 paramètres libres sont mesurés, on peut prédire toutes sortes de processus élémentaires avec une précision inégalée. Jusqu'à ce jour, aucune déviation significative par rapport au MS n'a été observée, ce qui en fait un véritable succès expérimental. Cependant, un certain nombre de pièces manquantes et de faits non compris nous amènent à penser que ce n'est pas la fin de l'histoire et que le MS serait une manifestation à basse énergie d'une théorie plus fondamentale qui le sous-tend. La recherche de nouvelle physique s'inscrit dans ce cadre. Parmi les pièces manquantes, on y trouve la baryogénèse électrofaible, ce mécanisme qui serait à l'origine de l'asymétrie matière-antimatière dans l'univers. D'après le modèle du big bang, matière et antimatière ont été créées en quantités égales, alors qu'aujourd'hui, la matière semble avoir pris le pas. Le MS n'inclut pas un tel mécanisme. En 1967, un physicien russe du nom d'Andrei Sakharov a établi trois conditions nécessaires pour que la baryogénèse puisse avoir lieu. Une de ces conditions stipule qu'il aurait existé des interactions violant les symétries C et CP. La violation-CP existe déjà dans le MS. En effet, l'interaction faible peut violer CP (déjà observé) et certains arguments théoriques forts nous poussent à croire que l'interaction forte devrait pouvoir également violer CP, mais aucun processus de la sorte n'a encore été observé. En somme, il s'avère que la violation-CP présente dans le modèle standard n'est pas suffisante pour expliquer l'asymétrie matière-antimatière. Par conséquent, un des défis de la recherche de physique au-delà du modèle standard est de trouver des sources de violation-CP supplémentaires afin d'atteindre la quantité requise pour la baryogénèse. Dans cette thèse, nous nous penchons dans un premier temps sur quelques manifestations de la violation-CP, comme par exemple les moments dipolaires électriques (EDM) des particules élémentaires, à la fois dans le secteur faible en présence des masses des neutrinos (absentes dans le MS) ainsi que dans le secteur fort. Puis, dans un second temps, nous nous destinons à la construction d'une théorie effective pour bosons de jauges. Nous généralisons le lagrangien d'Euler-Heisenberg pour l'étude des interactions de photons, considéré comme l'archétype d'une théorie effective des champs ; à des bosons de jauges d'algèbres de Lie arbitraires, plusieurs groupes de Grande Unification ou encore des symétries mixtes.

---

## Some aspects of CP-violation and gauge interactions in the Standard Model and beyond

---

**Abstract :** The Standard Model (SM) of particle physics is the most accurate known theory to describe the elementary particles and their interactions. Once its 19 free parameters are measured, all kinds of elementary processes can be predicted with unequalled accuracy. To date, no significant deviation from the SM has been observed, making it a true success. However, a number of missing pieces and unexplained facts lead us to believe that this is not the end of the story and that the SM would be a low-energy expression of a more fundamental theory. The search for physics beyond the SM is part of this framework. Among the missing pieces, there is electroweak baryogenesis, the mechanism that is believed to be at the origin of matter-antimatter asymmetry in the universe. According to the big bang model, matter and antimatter were created in equal quantities whereas today matter seems to have taken over. The SM does not include such a mechanism. In 1967, a Russian physicist named Andrei Sakharov established three necessary conditions for baryogenesis to happen. One of these conditions stipulates that there would have been interactions that violated C and CP symmetries. CP-violation already exists in the SM. Indeed, the weak interaction can violate CP (already observed) and some strong theoretical arguments lead us to believe that strong interaction should also violate CP, but no such process has yet been observed. In short, it appears that the amount of CP-violation present in the SM is not sufficient to explain the matter-antimatter asymmetry. Therefore, one of the challenges of physics beyond the standard model researches is to find additional sources of CP-violation in order to achieve the amount required for baryogenesis. In this PhD thesis, we first look at some manifestations of CP-violation, such as electric dipole moments (EDMs) of elementary particles, both in the weak sector in the presence of neutrino masses (absent in the SM) as well as in the strong sector. Then, in a second study, we build an effective field theory for gauge bosons. We generalize the Euler-Heisenberg Lagrangian for the study of photon interactions, considered as the archetype of an effective field theory ; to gauge bosons of arbitrary Lie algebras, several Grand Unification groups and some mixed symmetries.