



HAL
open science

Quelques aspects de cosmologie et de physique des trous noirs en gravitation quantique à boucles

Killian Martineau

► **To cite this version:**

Killian Martineau. Quelques aspects de cosmologie et de physique des trous noirs en gravitation quantique à boucles. Astrophysique [astro-ph]. Université Grenoble Alpes, 2019. Français. NNT : 2019GREAY044 . tel-02494314v1

HAL Id: tel-02494314

<https://theses.hal.science/tel-02494314v1>

Submitted on 28 Feb 2020 (v1), last revised 6 Mar 2020 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE LA COMMUNAUTÉ UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : **Physique Théorique**

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Killian Martineau

Thèse dirigée par **Aurélien Barrau**

préparée au sein du **Laboratoire de Physique Subatomique et
de Cosmologie (LPSC)**
et de l'école doctorale de physique de Grenoble

Quelques aspects de cosmologie et de physique des trous noirs en gravitation quantique à boucles

Thèse soutenue publiquement le **10 octobre 2019**,
devant le jury composé de :

Pr. Pierre Salati

Professeur, LAPTh Annecy, Président

Pr. Martin Kunz

Professeur, Université de Genève, Rapporteur

Pr. Alejandro Perez

Professeur, Université Aix-Marseille, Rapporteur

Pr. Delphine Hardin

Professeur, Sorbonne université, Examinatrice

Dr. Sébastien Renaux-Petel

Chargé de recherche, Institut d'Astrophysique de Paris, Examineur

Pr. Aurélien Barrau

Professeur, Université Grenoble-Alpes, Directeur de thèse



Remerciements

À la fondation CFM pour la recherche, qui a financé cette thèse et qui m'a permis de l'effectuer dans des conditions plus qu'agréables ainsi qu'à Nathalie Bilimoff, chargée des relations entre la fondation et les doctorants, pour sa gentillesse et sa grande efficacité.

À mes rapporteurs, Martin Kunz et Alejandro Perez, qui ont accepté de s'atteler à la lecture de ce manuscrit (au volume plutôt conséquent). Aux autres membres du jury : Delphine Hardin, Sébastien Renaux-Petel et Pierre Salati pour avoir assisté à ma soutenance et pour vos retours. J'ai beaucoup apprécié les discussions (scientifiques ou non) que nous avons pu avoir. Une pensée toute particulière mais certaine vers Pierre, pour tout ce que tu es humainement et en tant qu'enseignant. Ce n'est pas sans raison que tu continues de marquer les esprits de chaque promotion : tu es assurément un professeur d'une qualité hors-norme.

À l'équipe administrative du laboratoire, Christine, Françoise, Colette et Audrey, qui ont eu (l'extrême) patience de m'accompagner durant ces trois ans et ont fourni un service toujours au top !

À Aurélien, parce qu'une thèse c'est avant tout une aventure qui se partage avec son directeur, je ne peux pas ne pas te mentionner¹. Tu es une personne extra-ordinaire (au sens littéral du terme). Je n'ai cessé et ne cesse de surprendre ta manière si à toi d'être un défiant savant. Mais plus encore que le grand scientifique, c'est l'humain qui est derrière que j'ai aimé découvrir. Il est rare de trouver personne si instinctivement attentionnée, si spontanément tournée vers les autres. Je m'estime heureux et chanceux de pouvoir citer : ce n'est pas un directeur que je remercie ici, mais un véritable ami.

À mes médecins, sans eux, sans leurs compétences, je ne sais tout simplement pas où j'en serais aujourd'hui. Alors à Nicolas (Mathieu) et à Jean, dont l'accompagnement au quotidien a rendu tout cela possible. À Safa également, future toubib que je n'hésite pas à placer parmi les grands car je sais que c'est ce qu'elle deviendra.

À l'ensemble de ma famille, petite, certes, mais gaillarde. Plus le temps avance, plus je réalise la chance que j'ai d'avoir une telle maisonnée, implacablement soudée devant les adversités et que rien ne semble pouvoir briser. Chaque membre sans exception est une personne qui m'impressionne, sur laquelle je pourrais écrire des dizaines de lignes sans en effleurer la richesse. De force et de courage sont mes inspireurs. Une pensée particulière pour Corinne qui s'est découvert de merveilleux amis, Bob et Alice, lors de la lecture de ce manuscrit. Et bien sûr une pensée forte pour mon père : cet être exceptionnel, érudit, taillé comme un dieu grec, d'une intelligence unique, que rien ne saurait arrêter.

1. Enfin si je peux, j'ai bien oublié de te remercier le jour de l'oral.

Il est tout pour moi, le plus grand des modèles et je n'aspire qu'à lui ressembler². Plus sérieusement, nul besoin de palabrer ici, tu sais déjà tout : merci, grand.

À Anne, je ne te serais jamais assez reconnaissant pour tout ce qui s'est passé, pour tout ce que tu es ... Tu as grandement contribué à forger la personne que je suis aujourd'hui et j'en suis très heureux. Également à Marie-Anne et Pierre, qui m'ont considéré comme leur fils et que je considère comme mes parents.

À vous tous que j'ai eu la chance de rencontrer ... un profond merci.

Mais bien sûr l'histoire ne s'arrête pas là. Changement de registre, changement de ton. Voici maintenant le moment qui m'a fait repousser l'écriture de ces remerciements au maximum, celui des amis. La pression ! Je vais forcément faire des boulettes, forcément oublier des gens, mais ne m'en voulez pas s'il vous plaît ! Je vous aime à fond aussi.

Commençons par le commencement : les anciens. Les agricoles. Ceux qui sentent bon le terroir. Notamment le fameux trio composé de Lolo (par contre arrête de te multiplier, y'a déjà bien assez de Metral comme ça, ça va foutre un de ces bordels après ...); Yoann, ours de qualité, passé maître dans l'art de rester accroupi derrière un buisson mais qui possède cependant un curieux attrait pour l'or; et teudieu Bozel ! (ouais je sais je t'ai connu plus tard mais je te mets là car toi aussi tu sens bon le fromage). Encore un gros merci pour le pot, vous avez assuré comme des pros (et c'est pas que moi qui le dit). Savoie libre.

Viens ensuite la première promo. Celles et ceux avec qui l'aventure a commencé, avec qui on a arpenté les magnifiques locaux du DLST, découvert la gastronomie du RU (même si des fois y'avait plus de diots!), avec qui on s'est initié à la chartreuse, aux cascades et découvert les stations du coin. Trop de noms, trop de souvenirs, d'anecdotes croustillantes qui pourraient être énumérées ici. Le meilleur des gros Nénels (même si toi t'es pas prêt d'être débarrassé de moi). Poulin le marathonien, merci de m'avoir fait craché mes poumons comme pas possible le long de l'Isère un soir d'hiver. Valentin, qui remplacera bientôt l'icône de la Marianne comme représentation du peuple. Marine (allez avoue tu peux le dire maintenant, j'étais trop chiant comme binôme). Clémence, la batteuse la plus funky du 38. Will, adepte inconditionnel de Landau le divin, qui m'a beaucoup appris sur la physique (par contre faut vraiment que tu laisses de côté ta passion pour les autoroutes à 5h du mat). Dimi, qui à peine connu te fait te sentir comme un proche et Torvic (si un jour tu lis ces lignes donne signe de vie!). Mais il n'y avait pas que des physiciens, il y avait aussi les fameux auto-proclamés lécheurs de cailloux : Théo, LE collègue de ski, dont l'attrait pour les couloirs exigus à 50° où les spatules touchent des deux côtés continue de me dépasser et Audrey, l'aventurière, toujours à l'autre bout du monde à nous faire rêver. J'en profite pour rajouter Isa, la festivalière (encore sept mois avant le prochain TML va falloir tenir!).

Puis la seconde. Tout d'abord Bernerd et Marcel. Bon, par où commencer? Bah en fait ça a commencé par un termos de café à Phitem et ça a fini à Istanbul. Dans le genre anecdotes y'en a suffisamment pour remplir un bouquin. Je me contenterais ici de quelques mots : Montenegro, Elbasan, Denis, Prague, un petit combo : Londres + 100 euros + hôpital. Papito (mi latino, mi quokka), merciiii encore pour la Colombie; Flo, le randonneur, dont la circonférence des mollets restera dans l'histoire; Tiphaine (à quand le prochain concert?); Gaucho, organisateur du mondialement réputé Propiac World

2. Non, ces phrases n'ont pas été écrites sous la contrainte

Festival Arena ; et bien sûr Meuhnon, la meilleure des hippies. Une fille en or. Je te dois beaucoup et j'espère que tu prendras un jour pleinement conscience de toutes tes qualités et de ta fantastiquité.

Et enfin le dernier cru. Je commence par un lot groupé : Hugo, Flo, Antho et Jessy. Les arsouilles, avec qui les soirées révèlent leurs surprises et leurs finesses. Peut être que l'on parviendra un jour à se voir plus d'une fois tous les deux mois. Mimi et ses frisettes, reine incontestée d'une danse qui consiste à bouger une partie de son corps à un rythme endiablé. Mais surtout un bout de personne d'une grande force. Vincent, le photographe qui sublime la montagne. Benoit et sa double personnalité. Homme réfléchi le jour, aux antipodes la nuit. Il faut vraiment que j'assiste à l'un de tes cours. Et puis bien sûr le Narvik crew. Elie, l'ours au grand cœur. Je suis vraiment heureux que tu aies trouvé ta voie. Ju, avec qui j'ai tellement de (très) bons souvenirs. Du Japon au Rialto, nos rigolades et instants complices à travers le(s) monde(s) sont des sources inépuisables de bonheur. C'en est presque déroutant de trouver personne avec laquelle on s'entend à ce point. On l'ouvrira un jour notre salle d'arcade. Elisa et Caro, les meilleures des voisines. Sans oublier Sheeshee, notre styliste officielle. Une fille géniale si l'on omet son attrait pour les endroits fermés.

Un merci aussi aux thésards et post-docs du LPSC : Souchard, Toto, Raton, Raph, Florian et Florian (les rois de Nika2, un prénom qui va marquer à coup sûr l'histoire de la cosmo) ainsi que tous les autres. Une pensée toute particulière pour Floflo (hâte de te voir tout déchirer l'an prochain) ainsi que pour Seb, l'homme au cœur d'or.

Et bien sûr un grand merci à Selim. Nos interminables discussions, entre autres sur la science (ou sur la manière de la pratiquer), resteront à jamais des instants très précieux pour moi. Rarement j'ai rencontré personne avec laquelle j'aime autant discuter, jusqu'à en oublier le cours du temps. Tu es assurément l'un des esprits les plus brillants et singuliers que je connaisse, à différents stades (même si ton caractère entêté me rend parfois chèvre !). Comme l'a dit un jour un grand philosophe : "tu es un ami formidable".

Aux autres que je n'ai su intégrer précédemment : Mael (gloire aux triceps), Sylvain (gloire aux trapèzes), Justine, Lily, Nico, François ou encore Cynthia ...

Merci aussi à toutes celles et ceux dont la présence ne me vient pas spontanément à l'esprit lorsque j'écris ces lignes, mais qui pourtant sont bien présents.

Enfin, parce que la présence d'êtres chers est encore plus importante lorsque les temps sont difficiles, je tiens à remercier de nouveau certaines personnes, qui ont été particulièrement présentes lorsque les circonstances le demandaient. Outre ma famille je pense tout particulièrement à : Aurélien, Manon, Cynthia, Seb, Floflo, Anne, Justine, Isa, Charlotte, Théo, Lily, Selim, Elie, Ju ... Une profonde gratitude pour votre présence durant les moments durs, vous avez clairement contribué à mon rétablissement et donc à la réalisation de cette thèse.

À ceux qui aimeront toujours et encore ...

*Ce matin la souris s'est désengagée
Elle a perdu la peur
Elle a suivi la fleur
Elle va enfin connaître ...*

*Ce matin le cheveu symphonique s'est tu
Bien aimée, elle ne le savait même plus
Quand Isabelle eut rejoint sa dictée
Le poète n'a pas pleuré*

*Ce matin, le chien est venu
Le chemin s'est bridé
Le fils s'est dressé
Ce matin, il neigeait ...*

Liste des publications

Les travaux de recherche présentés dans cette thèse ont donné lieu à plusieurs articles de recherche que nous énumérons ici, par ordre de parution :

Articles publiés

- B. Bolliet, A. Barrau, K. Martineau & F. Moulin. *Class.Quant.Grav.*34 (2017), arXiv :1701.02282
Some Clarifications on the Duration of Inflation in Loop Quantum Cosmology
- K. Martineau, A. Barrau & S. Schander. *Phys.Rev.D*95 (2017), arXiv :1701.02703
Detailed investigation of the duration of inflation in loop quantum cosmology for a Bianchi-I universe with different inflaton potentials and initial conditions
- A. Barrau, K. Martineau & F. Moulin. *Phys.Rev.D*96 (2017), arXiv :1711.05301
Seeing through the cosmological bounce : Footprints of the contracting phase and luminosity distance in bouncing models
- K. Martineau, A. Barrau & J. Grain. *Int.J.Mod.Phys.D*27 (2018), arXiv :1709.03301
A first step towards the inflationary trans-planckian problem treatment in Loop Quantum Cosmology
- A. Barrau, F. Moulin & K. Martineau. *Phys.Rev.D*97 (2018), arXiv :1801.03841
Fast radio bursts and the stochastic lifetime of black holes in quantum gravity
- A. Barrau, P. Jamet, K. Martineau & F. Moulin. *Phys.Rev.D*98 (2018), arXiv :1807.06047
Scalar spectra of primordial perturbations in loop quantum cosmology
- A. Barrau, K. Martineau & F. Moulin. *Universe* 4 (2018), arXiv :1808.08857
A status report on the phenomenology of black holes in loop quantum gravity : Evaporation, tunneling to white holes, dark matter and gravitational waves
- E. Alesci, A. Barrau, G. Botta, K. Martineau & G. Stagno. *Phys.Rev.D*98 (2018), arXiv :1808.10225
Phenomenology of Quantum Reduced Loop Gravity in the isotropic cosmological sector
- K. Martineau & A. Barrau. *Universe* 4 (2018), arXiv :1812.05522
Primordial power spectra from an emergent universe : basic results and clarifications

- F. Moulin, K. Martineau, A. Barrau & J. Grain. *Class.Quant.Grav.* 36 (2019), arXiv :1808.00207
Quantum fields in the background spacetime of a polymeric loop black hole
- A. Barrau, K. Martineau, J. Martinon & F. Moulin. *Phys.Lett.* B795 (2019), arXiv :1906.00603
Quasinormal modes of black holes in a toy-model for cumulative quantum gravity

Articles soumis

- A. Barrau, K. Martineau, F. Moulin & J.F. Ngono. arXiv :1906.09930
Dark matter as Planck relics without too exotic hypotheses
- F. Moulin, A. Barrau & K. Martineau. arXiv :1908.06311
An overview of quasinormal modes in modified and extended gravity

Table des matières

Introduction	15
1 Gravitation quantique à boucles canonique	19
1.1 Les bases classiques de la théorie	22
1.1.1 Formulation au premier ordre de la relativité générale	22
1.1.2 Le formalisme Hamiltonien Arnowitt-Deser-Misner (ADM) de la relativité générale	27
1.1.3 Du Hamiltonien à la contrainte Hamiltonienne : la relativité générale, une théorie totalement contrainte.	32
1.1.4 Tenter de quantifier le champ gravitationnel à partir du formalisme ADM : l'approche de Wheeler et de Witt	33
1.2 La relativité générale en termes des variables d'Ashtekar	33
1.2.1 Les triades	33
1.2.2 Effectuer un "lissage" (<i>smearing</i>) de l'algèbre : utilisation des holonomies et des flux	36
1.2.3 Quid du contenu en matière ?	38
1.3 La quantification	38
1.3.1 La procédure de Dirac	39
1.3.2 Application à l'écriture en termes des variables d'Ashtekar de la relativité générale	39
1.3.3 Quantification de la géométrie	41
1.3.4 Dynamique de l'espace-temps	43
1.4 Sur la testabilité de la théorie	44
2 Cosmologie	47
2.1 Modèle standard de la cosmologie	48
2.1.1 Équations de Friedmann et paramètres cosmologiques	48
2.1.2 Le scénario du Big Bang	52
2.2 Le paradigme inflationnaire	55
2.2.1 Les motivations derrière ce paradigme	55
2.2.2 Modèle d'inflation basé sur un champ scalaire	56
2.2.3 L'inflation à roulement lent	57
2.2.4 Le " <i>reheating</i> "	58
2.3 Théorie des perturbations cosmologiques	59
2.3.1 Perturbations de la métrique et du tenseur énergie impulsion	59
2.3.2 Décomposition scalaire-vecteur-tenseur	60

2.3.3	Le problème de la jauge	61
2.3.4	Équations d'Einstein perturbées	63
2.4	La cosmologie en tant que théorie stochastique	63
2.4.1	Spectre de puissance	63
2.4.2	Fonction de transfert et conditions initiales	66
2.5	Spectres de puissance primordiaux et prédictions de l'inflation	66
2.5.1	L'équation de Mukhanov-Sasaki	66
2.5.2	Quantification des perturbations	70
2.5.3	Le choix du vide	70
2.5.4	L'équation de Mukhanov-Sasaki pour un espace de Sitter	71
2.5.5	Prédictions de l'inflation pour les spectres de puissance primordiaux	72
2.6	Contraintes observationnelles actuelles sur l'inflation et les spectres de puissance primordiaux	74
3	Cosmologie quantique à boucles	77
3.1	Secteur homogène de la théorie	78
3.1.1	Retrouver l'équation de Friedmann à partir du formalisme Hamiltonien de la relativité générale	78
3.1.2	Importer les idées de la théorie mère : la correction d'holonomie	80
3.1.3	L'équation de Friedmann modifiée de la LQC	83
3.1.4	Conséquences cosmologiques	84
3.1.5	Approche quantique de la LQC	86
3.1.6	Au delà de l'espace-temps FLRW	89
3.2	Études portant sur le nombre d' <i>e-folds</i> d'inflation en cosmologie quantique à boucles	90
3.2.1	Étude à caractère exhaustif du nombre d' <i>e-folds</i> d'inflation	90
3.2.2	Quelques précisions sur la durée de l'inflation en LQC	105
3.3	Inhomogénéités en cosmologie quantique à boucles	116
3.3.1	L'approche " <i>Dressed Metric</i> "	116
3.3.2	L'approche " <i>Deformed Algebra</i> "	117
3.4	Spectres de puissance primordiaux en cosmologie quantique à boucles	120
3.4.1	Spectres de puissance primordiaux dans l'approche " <i>Dressed Metric</i> "	122
3.4.2	Spectres de puissance primordiaux dans l'approche " <i>Deformed Algebra</i> "	124
3.4.3	Confrontation aux observations	125
3.4.4	Le problème trans-planckien	126
3.4.5	Précisions sur les spectres de puissance primordiaux scalaires	150
3.5	Un raffinement du rebond : les univers rebond-émergents	158
3.5.1	Phénoménologie de la "Quantum Reduced Loop Gravity" (QRLG)	158
3.5.2	Précisions sur les spectres tenseurs	175
4	Phénoménologie des trous noirs en gravité quantique à boucles	193
4.1	Une brève introduction à la physique des trous noirs	194
4.1.1	La métrique de Schwarzschild	194
4.1.2	Quelques propriétés très élémentaires	195
4.1.3	Quelques éléments de thermodynamique	198
4.1.4	Effet Hawking	199
4.2	Trous noirs en gravitation quantique à boucles	201
4.3	Trous noirs en rebond	202
4.3.1	Le modèle de Haggard et Rovelli	202

4.3.2	Phénoménologie du modèle de Haggard et Rovelli	204
4.3.3	Impact phénoménologique du caractère stochastique du temps de rebond . . .	205
4.4	Coefficients de corps gris	211
4.5	Ondes gravitationnelles et gravité quantique	227
4.5.1	Modes quasi normaux	229
4.5.2	Distance de luminosité	237
4.6	Matière noire sous forme de reliques de Planck	243
4.7	Synthèse de la phénoménologie associée aux trous noirs en gravitation quantique à boucles	251
5	Principe d'incertitude généralisé	279
5.1	Introduction d'une échelle de longueur minimale : généralisation du principe d'incertitude de Heisenberg (GUP)	280
5.2	Obtention d'une relation de dispersion modifiée à partir du GUP	281
5.3	États de lumière compressés (" <i>squeezed light</i> ")	284
5.3.1	États de lumière compressés à un mode (" <i>Single-mode squeezed light</i> ")	285
5.3.2	Lumière compressée à deux modes (" <i>Two-mode squeezed light</i> ")	288
5.3.3	Comment génère-t-on des états optiques compressés en laboratoire ?	289
5.4	Le GUP entraîne-t-il une compression des états de lumière ?	290
5.4.1	Un premier cas "simple"	290
5.4.2	Évolution d'un état à n photons sous Hamiltonien de l'oscillateur harmonique corrigé par le GUP	291
	Conclusions et perspectives	295
A	Calcul du potentiel des modes scalaires en LQC dans le cas d'un potentiel quadratique du champ d'inflaton	299
B	Calcul de l'évolution de la fonction d'onde d'un état cohérent sous Hamiltonien de l'oscillateur harmonique usuel	301

Introduction

L'histoire des sciences est hautement non-linéaire. De longues phases de stagnation et d'errance sont ponctuées par quelques fulgurances, quelques périodes d'éclat, qui permettent la déconstruction des dogmes alors établis et la mise en place de nouveaux paradigmes. Il est de mon ressenti que la physique se trouve depuis un siècle dans un régime relativement stable, un temps de "science normale" si je puis référer à la classification de l'épistémologue Thomas Kuhn. Nul désir ici de nier que de très nombreuses et remarquables avancées ont eu lieu, à la fois dans les secteurs expérimentaux et théoriques. Mais force est de constater que depuis les révolutions qu'ont constitué la mécanique quantique et la relativité générale³, aucun bouleversement majeur n'a eu lieu. Et pour cause : aucune rupture n'était requise. La physique des particules vivait son âge d'or et fournissait une vision extraordinairement cohérente du microcosme tandis que les balbutiements de la cosmologie observationnelle dessinaient un macrocosme conforme aux prédictions relativistes.

La situation s'est depuis complexifiée et un certain nombre de difficultés majeures gangrènent aujourd'hui, de façon notable, les modèles standards. La plus célèbre est sans doute la fameuse matière noire, dont les premiers indices remontent à 1933 et dont la nature nous échappe toujours. La mise en échec du candidat le plus simple par les résultats du grand collisionneur hadronique du CERN a donné lieu à un fleurissement de modèles de plus en plus complexes et exotiques. Autre grande inconnue, l'énergie noire s'impose, quant à elle, comme une énigme majeure de la cosmologie. Bien qu'une simple constante cosmologique, naturellement présente dans les équations d'Einstein, puisse rendre compte d'un univers en expansion accélérée, sa valeur n'est pas compatible avec une interprétation cohérente en termes de théorie des champs. Enfin, la dissymétrie baryonique globale de l'Univers demeure hautement problématique. Presque toute la matière aurait dû s'annihiler avec l'antimatière dans les premiers instants et notre monde devrait n'être pratiquement formé que de lumière. La simple existence de notre Univers tel que nous l'observons constitue donc, elle-aussi, un paradoxe scientifique irrésolu à ce jour. Même si nous aborderons la problématique de la matière noire dans l'une de nos études, aucune de ces trois grandes énigmes ne constitue le cœur de cette thèse. Celle-ci est dévolue à une quatrième énigme, dont l'importance n'a rien à envier aux précédentes : l'existence de singularités gravitationnelles⁴.

La motivation derrière une théorie de gravité quantique n'est pas, comme souvent présenté, celle de l'unification, mais avant tout celle de la cohérence. Cohérence car la relativité générale, tout aussi robuste et séduisante soit-elle, trouve ses limites quand il lui faut par exemple décrire l'Univers primordial ou le cœur des trous noirs. Poussée dans ses retranchements, la théorie fait apparaître des singularités, qui ne traduisent rien d'autre que son incapacité à traiter ces phénomènes. Dans de tels

3. Nous pourrions y adjoindre la physique statistique et la théorie du chaos.

4. Les singularités sont des lieux (ou des temps) auxquels des quantités physiques significatives divergent.

régimes de courbure tout porte à croire que la physique quantique doit être convoquée. La construction d'une version quantifiée de l'espace-temps n'est donc pas un luxe, répondant à un fantasme d'unification, mais une nécessité. Y répondre passe par l'élaboration d'un cadre réconciliant en son sein relativité générale et théorie quantique des champs. Or l'espace-temps, toile de fond fixe et immuable sur laquelle l'une peut s'épanouir est le terrain de jeu, dynamique, de l'autre. Comment concilier les deux points de vue de manière cohérente ? Nous voici face à l'un des (nombreux) dilemmes qui rendent cette réconciliation si difficile.

L'élaboration d'un modèle cohérent de gravité quantique est donc une tâche extrêmement complexe et il n'existe aujourd'hui *aucune* théorie de gravitation quantique qui puisse reproduire la physique basse énergie connue tout en étant exempte de contradictions ou de difficultés majeures. Mais il existe toutefois des pistes prometteuses. La plus discutée d'entre elles est certainement la théorie des cordes, dont l'ambition de constituer une "théorie du tout" se paye au prix d'hypothèses extrêmement lourdes et non-soutenues par la moindre observation. Bien que très populaire elle ne sera ici quasiment pas discutée et c'est à une autre approche, à mon sens plus modeste car reposant sur des principes bien établis, que nous nous intéresserons dans ce manuscrit : la gravitation quantique à boucles. Celle-ci tente de concilier, dans une approche invariante de fond, les grands principes fondateurs de la relativité générale et de la physique quantique. Elle présente un corpus cohérent et (au moins en partie) prédictif. C'est là une vraie force de la théorie, quand on sait à quel point le lien avec les mesures, d'importance heuristique majeure, fait défaut à ce champ de recherches.

C'est dans cette volonté de confronter la gravitation quantique à boucles à des expériences, en développant la phénoménologie associée, que cette thèse trouve son origine.

Nous débuterons naturellement au chapitre 1 par une modeste introduction à la gravitation quantique à boucles. Le chapitre 2 aura lui aussi un caractère introductif et permettra, pour les lecteurs le nécessitant, de se familiariser avec les éléments de cosmologie requis pour la compréhension de nos travaux. Une fois ces deux chapitres passés nous posséderons les outils nécessaires pour nous intéresser à différentes description du système Univers inspirées de la gravitation quantique à boucles. L'objectif du chapitre 3 sera alors d'étudier dans quelle mesure ces descriptions peuvent être confrontées aux données sur le fond diffus cosmologique. Après avoir estimé la durée de la phase inflationnaire pour des cas très généraux, nous quitterons le secteur homogène et calculerons les spectres de puissance primordiaux dans différentes approches. Les formes de ces spectres à la fin de l'inflation sont usuellement associées aux conditions initiales des perturbations en cosmologie. Nous étudierons ici leur sensibilité aux prédictions de la gravité quantique à boucles⁵ quant à la physique pré-inflationnaire. Est-il possible de tester, voir exclure, des modèles de cosmologie quantique à l'aide des spectres de puissance primordiaux ? Peut-on espérer détecter des effets de gravité quantique dans les anisotropies du fond diffus cosmologique ? Voici quelques unes des questions auxquelles nous tenterons d'amener des éléments de réponse nouveaux.

Le chapitre 4 sera consacré aux trous noirs, objets aux propriétés si extra-ordinaires qu'ils ont longtemps été relégués au statut de simple curiosité théorique. Il est alors fascinant de constater que ces astres entrent désormais dans le quotidien de l'astronomie et que la phénoménologie associée semble être à l'aube de ses belles heures. Nous aborderons dans cette partie du manuscrit différents aspects des conséquences potentiellement observables d'un traitement quantique des trous noirs, vaste domaine couvrant des thématiques diverses, qui nous mènera de la matière noire à l'astronomie radio. L'étude des trous noirs est d'autant plus fascinante (d'une part) et pertinente (de l'autre), que nous

5. Plus exactement aux prédictions de divers modèles cosmologiques basés sur la gravitation quantique à boucles.

venons d'entrer dans une ère où les ondes gravitationnelles provenant de coalescences de systèmes binaires ont été (directement) détectées et constituent un sujet dynamique en évolution rapide. La perspective d'observer des effets de gravité quantique dans ces signaux ou, *a minima*, de les utiliser pour contraindre les théories de gravité sous-jacentes est nouvelle et doit être considérée. Nous explorerons donc également cette voie en calculant les modes quasi-normaux émis lors de la relaxation de trous noirs déformés et caractériserons leurs dépendances à des perturbations proches de l'horizon.

Enfin le chapitre 5 sera lui dédié à une étude en cours de réalisation portant sur diverses possibilités pour sonder la structure intime de l'espace au moyen d'un principe d'incertitude généralisé. Nous y établirons une méthodologie permettant d'obtenir une nouvelle relation de dispersion pour les photons et tenterons d'établir comment une généralisation du principe de Heisenberg modifie certaines des propriétés quantiques de la lumière.

Cette thèse n'a évidemment pas la prétention de mettre la gravitation quantique à boucles à l'épreuve de façon décisive. Nous espérons néanmoins qu'elle puisse contribuer, à sa modeste échelle, à établir l'émergence d'une véritable phénoménologie de la gravitation quantique. Cantonné à la physique mathématique depuis des décennies, l'entrée de ce champ de recherches dans le giron de la science expérimentale nous semble être l'une des potentielles avancées majeures de la physique du vingt et unième siècle.

CHAPITRE 1

Gravitation quantique à boucles canonique

Sommaire

1.1 Les bases classiques de la théorie	22
1.2 La relativité générale en termes des variables d'Ashtekar	33
1.3 La quantification	38
1.4 Sur la testabilité de la théorie	44

La rédaction de ce chapitre fut en partie inspirée des travaux de A. Ashtekar [1] (pour la partie introductive), de A. Perez [2], de J. Grain [3], de P. Donà et S. Speziale [4] ainsi que d'enrichissantes discussions avec L. Fabbri.

Avant d'entamer ce chapitre qui tient lieu de modeste introduction aux concepts sous-jacents à la gravitation quantique à boucles, intéressons-nous en premier lieu à la manière dont la question de la gravité quantique a été abordée depuis le siècle dernier. Nous dresserons dans ces quelques lignes introductives un rapide résumé du développement de deux approches au problème.

Le besoin de construire une théorie quantique de la gravitation avait déjà été pressenti dès le début du 20^{ème} siècle par A. Einstein, comme souligné dans l'un de ses papiers issu du "*Preussische Akademie Sitzungsberichte*" de 1916 : "*Nevertheless, due to the inneratomic movement of electrons, atoms would have to radiate not only electromagnetic but also gravitational energy, if only in tiny amounts. As this is hardly true in Nature, it appears that quantum theory would have to modify not only Maxwellian electrodynamics but also the new theory of gravitation.*"

De premières études portant sur la gravitation quantique, menées notamment par Bronstein, Rosenfeld ou encore Pauli, virent le jour dans les années 1930 mais il faudra attendre les années 1960 avant que des travaux plus élaborés ne soient entamés. Aujourd'hui encore aucun modèle ne fait l'unanimité. Mais pourquoi cette quête est-elle si compliquée ? Tout simplement parce que les fondements et implications des deux principales théories concernées, la physique quantique et la relativité générale, sont diamétralement opposés. Par exemple dans le formalisme de la théorie quantique des champs (en espace plat) ces derniers se propagent sur une géométrie fixe donnée par l'espace-temps de Minkowski. Or en relativité générale il n'y a pas de fond absolu et immuable, pas de support inerte sur lequel

une dynamique peut évoluer. L'espace-temps (et donc la géométrie¹) lui-même est traité comme une variable dynamique (via le tenseur métrique). Voici l'un des nombreux dilemmes auquel les chercheurs sont confrontés.

Pour faire face au problème de la gravité quantique deux approches principales se sont développées. La première est basée sur une formulation Hamiltonienne de la relativité générale comme point de départ du procédé de quantification et est appelée *approche canonique*.² La construction de cette approche a été initialement développée par P.G. Bergmann et A. Komar ainsi que R. L. Arnowitt, S. Deser et C. W. Misner (entre autres) [5, 6, 7]. La variable canonique de base³, constituant avec son moment conjugué l'espace des phases, était obtenue après foliation de l'espace-temps et était donnée par la 3-métrique sur les hypersurfaces spatiales. D'après cette vision, la relativité générale s'interprétait donc comme une théorie de la dynamique de 3-géométries et cette ré-écriture Hamiltonienne de la théorie fût baptisée *géomérodynamique* par Wheeler. Ce même Wheeler participa grandement à l'élaboration d'une théorie quantique basée sur cette considération (classique) dans laquelle la physique des particules devait être vue comme une "chimie de la géométrie", les entités matérielles apparaissant suite à un *coarse graining* (une simplification à plus grande échelle) des structures géométriques de base. Cependant cette géomérodynamique quantique se heurta à divers problèmes, en particulier en ce qui concerne le traitement des fermions⁴.

Il est bon de garder en tête qu'une autre approche, plus populaire même, existe. Nommée *approche covariante* [8, 9] car ne nécessitant pas une brisure explicite de la covariance de la théorie par un feuilletage de l'espace-temps, elle met l'accent sur des techniques de calcul et concepts importés de la théorie des champs. Elle est basée sur une séparation du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ en deux parties : $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ où $\bar{g}_{\mu\nu}$ correspond à une métrique de fond, souvent choisie plate et $h_{\mu\nu}$ caractérise les (faibles) déviations à cette métrique. Lors de la quantification seul $h_{\mu\nu}$ est quantifié. On parle alors de quantification perturbative : de manière analogue à la théorie quantique des champs, des quantas de $h_{\mu\nu}$ se propagent sur un espace-temps classique donné par $\bar{g}_{\mu\nu}$. Il est alors possible d'adapter les puissants outils de la physique des particules afin de calculer des amplitudes de diffusion. Une première difficulté apparut néanmoins assez rapidement lors du développement de cette approche : la théorie apparaît n'être pas renormalisable (lorsque des diagrammes à deux boucles sont considérés) et la théorie quantique possède donc un nombre infini de paramètres indéterminés.

De manière caricaturale nous pourrions dire que l'approche canonique a continué à être développée en privilégiant le point de vue de la relativité générale tandis que les avancées de l'approche covariante sont inspirées de la physique des particules. Ces deux modèles, déjà renforcés par les efforts développés dans les années 1970, vont tous deux bénéficier d'un nouvel élan dans les années 1980.

Cette nouvelle ère de l'approche canonique trouve sa source dans l'observation suivante : comme développé dans la suite de ce chapitre, la théorie de la géomérodynamique est grandement simplifiée

1. Au sens lien entre distance et coordonnées.

2. Cette approche est celle qui sera développée dans ce chapitre et les idées associées mises en avant dans ces quelques lignes n'ont donc qu'un caractère introductif.

3. Le terme canonique tire son origine du mot *canon* qui réfère à des textes sacrés considérés comme authentiques par les communautés croyantes. Des variables dites canoniques définissent donc une norme, un modèle, mais sont toujours définies de manière équivoque.

4. Notons que des résultats avaient pu être obtenus dans le secteur cosmologique car dans ce contexte l'entièreté sauf un nombre fini des degrés de libertés se retrouvaient gelés. Néanmoins même dans ce contexte la résolution de la singularité initiale du Big Bang ne se faisait pas sans invoquer un contenu en matière exotique violant certaines conditions d'énergie.

si l'objet de base de la théorie n'est plus une 3-métrique mais une connexion. L'avantage crucial associé à ce changement vient du fait que la relativité générale, lorsque basée sur une connexion, est maintenant semblable au type de théorie de jauge que l'on rencontre en physique des hautes énergies. Le gouffre qui sépare physique des particules et relativité générale semble alors se resserrer sans que l'aspect dynamique de l'espace-temps ait été sacrifié. Par la suite les travaux de T. Jaconson et L. Smollin sur l'introduction d'objets appelés holonomies dans le formalisme d'Ashtekar de la relativité générale ont amené L. Smollin et C. Rovelli à introduire une représentation dite des boucles pour décrire la théorie en dimensions 3+1. Représentation qui donnera son nom à la théorie qui en résulte : la **gravitation quantique à boucles**. Nous dénoterons parfois cette théorie **LQG** par la suite en référence à son acronyme anglais *Loop Quantum Gravity*. C'est cette approche, ou du moins son secteur canonique, qui sera détaillée dans les prochaines pages de ce chapitre. Dans cette théorie les infinis de la théorie classique disparaissent et la géométrie elle-même possède une structure discrète à l'échelle de Planck. L'espace-temps continu de la relativité générale apparaît alors suite à une procédure de "*coarse-graining*"⁵. Nous verrons dans les chapitres suivants que cette structure quantique de la géométrie permet la résolution de problèmes à la fois dans le secteur cosmologique (e.g la disparition de la singularité initiale du Big Bang) et dans le secteur des trous noirs (e.g en permettant une interprétation de l'entropie en termes de micro états gravitationnels).

Bien que l'approche covariante ne constitue pas le sujet de cette thèse précisons tout de même qu'elle s'est vue ressuscitée par le développement d'une autre théorie, introduite dans le secteur de l'interaction forte pour tenter d'expliquer certaines relations entre spin et énergie pour les hadrons, la **théorie des cordes**. Dans cette théorie, les constituants élémentaires de la matière ne sont plus des objets ponctuels mais des objets étendus à une dimension appelés cordes. Les particules de matière sont alors associées aux différents modes d'excitation de ces cordes. Une agréable surprise vint du fait que la théorie des cordes inclut directement une excitation correspondant à une particule sans masse de spin 2, qui fut très vite interprétée comme le graviton. En ce sens, le secteur gravitationnel apparaît spontanément dans la théorie ! Précisons à ce stade que pour que la théorie ne soit pas inconsistante il faut néanmoins que l'espace-temps possède un certain nombre de dimensions : 26 si l'on considère des cordes bosoniques et 10 pour des supercordes. Étant donné que les cordes, comme les champs en théorie quantique des champs, évoluent sur un espace-temps de fond, les techniques de calcul perturbatif peuvent être appliquées. À cause de la nature unidimensionnelle des cordes les diagrammes de Feynmann usuels sont alors remplacés par des *world-sheet diagrams* et la théorie n'aurait même pas besoin d'être renormalisée. Il semblerait donc que toutes les interactions soient unifiées dans cette fameuse "théorie du tout". Seulement ce nouveau cadre théorique possède lui aussi ses limites. Étant donné que cette théorie n'est pas celle qui sera développée dans ce manuscrit nous ne rentrerons ici pas plus dans les détails, mais nous pouvons citer par exemple la difficulté (voir l'incapacité) qu'elle a à obtenir dans le secteur cosmologique des vides de type de Sitter stables. Un lecteur désireux d'en savoir plus pourra se référer aux revues [10, 11].

Ces quelques lignes introductives n'ont en aucun cas la prétention de dresser une revue exhaustive du paysage des différentes théories de gravité quantique. Il existe, en plus des théories jusqu'ici mentionnées, de nombreuses autres approches au problème : "causal dynamical triangulation" [12], "asymptotic safety" [13], géométrie non commutative [14],...

Ce chapitre constitue une modeste base introductive à la gravitation quantique à boucles, plus précisément à son secteur canonique. Les deux premières sections portent sur les bases classiques de

5. Ce résultat n'est clair que dans certains cas particuliers et demeure au stade de conjecture dans le cas général

la théorie. La section 1.1 introduit le lecteur à deux ré-écritures indépendantes de la relativité générale : le formalisme au premier ordre et la formulation Arnowitt-Deser-Misner (ADM). Nous verrons section 1.2 comment combiner ces deux formalismes pour donner lieu à l'écriture de la relativité générale en termes des variables dites d'Ashtekar. La section 1.3 traitera brièvement de la quantification de la théorie à partir de ces variables, ou plus précisément de leurs versions lissées ("smeared"). Nous y discuterons également les principales conséquences de cette quantification. Enfin, nous concluons ce chapitre par quelques remarques sur la testabilité de cette théorie en section 1.4.

1.1 Les bases classiques de la théorie

1.1.1 Formulation au premier ordre de la relativité générale

La formulation usuelle de la relativité générale, basée sur le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$, $\mu = \{0, 1, 2, 3\}$, $\nu = \{0, 1, 2, 3\}$, s'écrit à l'aide de l'action d'Einstein-Hilbert

$$S_{EH}(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2\kappa} \int R(g_{\mu\nu}) \sqrt{-g} d^4x, \quad (1.1)$$

dans laquelle $\kappa = 8\pi$ et R désigne le scalaire de Ricci (ou courbure scalaire), contraction du tenseur symétrique de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, lui-même contraction du tenseur de Riemann $R_{\mu\nu} = g^{\lambda\rho} R_{\lambda\mu\rho\nu}$ ⁶. Ici $g^{\mu\nu}$ correspond au tenseur métrique inverse, de sorte que $g_{\mu\nu} g^{\mu\rho} = \delta_\nu^\rho$.

Remarque : La présence du déterminant du tenseur métrique $g = \det(g_{\mu\nu})$ est due à ce que l'élément de 4-volume d'espace-temps invariant par difféomorphisme (transformation quelconque des coordonnées $d^4x \rightarrow d^4x'$) n'est pas d^4x mais $\sqrt{-g} d^4x$, le déterminant de la matrice Jacobienne J telle que $d^4x = |J| d^4x'$ s'écrivant $|J| = \sqrt{(-g')/(-g)}$.

L'application du principe de moindre action sous variations de $g^{\mu\nu}$ à l'action d'Einstein-Hilbert conduit aux équations d'Einstein de la relativité générale dans le vide :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.2)$$

Considérer la trace de cette équation montre que $R = 0$ et amène à la forme la plus répandue des équations d'Einstein dans le vide :

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.3)$$

Il est possible d'ajouter un terme de matière \mathcal{L}_M à l'action précédente ainsi qu'une constante cosmologique Λ (dont la présence découle du théorème de Lovelock)

$$S(g_{\mu\nu}) = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} (R(g_{\mu\nu}) - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right] \quad (1.4)$$

afin d'obtenir la forme générale des équations d'Einstein :

6. La contraction pour passer du tenseur de Riemann au tenseur de Ricci s'effectue sur les premier et troisième indices car toute autre contraction est soit équivalente (au signe près) soit nulle à cause du caractère antisymétrique du tenseur de Riemann sous permutation de deux de ses indices juxtaposés $R_{\lambda\mu\rho\nu} = -R_{\mu\lambda\rho\nu} = -R_{\lambda\mu\nu\rho}$.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (1.5)$$

Notons que si nous ne nous étions pas placés dans le système d'unités dites "naturelles", de sorte que $c = 1$ et $G = 1$, il y aurait devant le tenseur $T_{\mu\nu}$ un terme en G/c^4 . Sachant que $G \simeq 6.67 \times 10^{-11} m^3.kg^{-1}.s^{-2}$ et $c \simeq 3.00 \times 10^8 m.s^{-1}$ ce terme est extrêmement faible devant l'unité, traduisant l'extrême rigidité de l'espace-temps à des déformations. C'est pourquoi la présence de sources de nature astrophysique ou cosmologique est nécessaire afin de générer des distorsions d'amplitude mesurable.

La courbure scalaire s'exprime en fonction des symboles de Christoffel (ré-écritures de la connexion de Levi-Civita) comme

$$R = g^{\mu\nu} \left[\partial_\rho \Gamma_{\mu\nu}^\rho - \partial_\mu \Gamma_{\rho\nu}^\rho + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\rho - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \right] . \quad (1.6)$$

Ces derniers s'écrivent en fonction de la métrique et ses dérivées premières comme

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left[\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right] . \quad (1.7)$$

L'action d'Einstein-Hilbert n'est donc fonction que du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et de ses dérivées (via le scalaire de Ricci R). Étant donné que des dérivées secondes de la métrique apparaissent dans le Lagrangien, les équations de champ associées, *i.e* les équations d'Einstein, sont des équations différentielles du second ordre par rapport au tenseur métrique. Cette formulation de la relativité générale en termes de l'action d'Einstein-Hilbert (ou des équations d'Einstein) est donc dite de **second ordre**.

Cette formulation, bien que la plus répandue, possède néanmoins plusieurs défauts. Même si elle ne dépend que du tenseur métrique, elle se révèle complexe lorsque l'action d'Einstein-Hilbert (ou respectivement les équations d'Einstein) sont exprimées explicitement en fonction du tenseur métrique. De plus, un défaut d'importance vient de son incapacité à coupler les fermions au champ gravitationnel. C'est ce désir d'avoir une action de la relativité générale permettant un couplage avec les fermions qui va amener à la formulation dite de **premier-ordre** de la relativité générale, point de départ du processus de quantification en LQG. Celle-ci est basée non plus sur le tenseur métrique mais sur les champs de (co)tétrades et la connexion de Lorentz (ou connexion de spin).

Les champs de (co)tétrades

Comme mentionné ci-dessus, la description usuelle du champ gravitationnel à l'aide du tenseur métrique ne permet pas le couplage aux fermions. Cette incompatibilité peut être intuitée en s'intéressant à l'équation de Dirac en espace plat :

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0 . \quad (1.8)$$

Le passage en espace courbe consiste à remplacer la dérivée partielle par une dérivée covariante

$$i\gamma^\mu D_\mu \psi - m\psi = 0 . \quad (1.9)$$

Or les matrices de Dirac γ qui interviennent ici n'étant que des combinaisons de 1, de 0 et du complexe i , elles ne dépendent pas des coordonnées. L'indice μ qui intervient en exposant de ces matrices n'est donc pas un indice de coordonnées et ne caractérise pas le même espace que l'indice μ de la dérivée covariante. Il faut donc distinguer ces deux indices :

$$i\gamma^I D_\mu \psi - m\psi = 0. \quad (1.10)$$

L'équation précédente est bien évidemment incorrecte car non invariante de Lorentz. Pour la rendre correcte il faut invoquer un nouvel objet possédant à la fois un indice de Lorentz (en lettre latine) et un indice de coordonnées (en lettres grecques) :

$$i\gamma^I e^\mu_I D_\mu \psi - m\psi = 0. \quad (1.11)$$

Nous avons ici introduit, pour coupler les champs fermioniques à la gravitation, un ensemble de quatre champs de vecteurs de quatre composantes orthonormés et indépendants : un temporel et trois spatiaux, définis sur une variété Lorentzienne⁷. Comme dit précédemment, ces champs de vecteurs possèdent deux types d'indices :

- Un indice de Lorentz (ou indice interne), dénoté par une lettre latine $I, J, \dots = 0, 1, 2, 3$ qui décrit quel vecteur de la base de l'espace-temps Lorentzien local est choisi. Ces indices peuvent être abaissés ou élevés à l'aide de la métrique de Minkowski ou de son inverse.
- Un indice de coordonnées sur l'espace-temps global, dénoté par une lettre grecque $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ et qui décrit quelle composante du vecteur choisi est considérée. Ces indices sont eux élevés ou abaissés à l'aide de la métrique $g^{\mu\nu}$ ou de son inverse.

Les formes différentielles d'ordre 1, ou 1-formes⁸, e_I associées aux champs de vecteurs $e^\mu_I(x)$ par $e_I := e^\mu_I \partial_\mu$ définissent une base de l'espace tangent $\mathcal{T}_p \mathcal{M}$ à la variété (pseudo-)Riemannienne \mathcal{M} en chaque point $p \in \mathcal{M}$.

Ces quatre champs étant orthonormés en chaque point de l'espace-temps ils satisfont

$$\eta_{IJ} = e^\mu_I(x) e^\nu_J(x) g_{\mu\nu}(x) \quad (1.12)$$

où η_{IJ} est la métrique de Minkowski.

De manière réciproque, si l'on possède uniquement la donnée de ces quatre champs de vecteurs, trouver le référentiel dans lequel ceux-ci sont orthonormés en chaque point permet de définir une variété Riemannienne. Notons que l'égalité Eq.(1.12) est conservée sous transformation de Lorentz. En effet, de manière plus générique, le formalisme des tétrades est invariant sous l'action des éléments du groupe de Lorentz $SO(3, 1)$, i.e invariant de jauge sous la transformation

$$e^\mu_I(x) \rightarrow \Lambda^I_J e^\mu_J(x), \quad (1.13)$$

Λ^I_J étant la matrice de Lorentz.

Les 1-formes e^I associées aux champs de covecteurs $e^\mu_I(x)$ par $e^I := e^\mu_I dx^\mu$ forment, elles, une base de l'espace cotangent $\mathcal{T}_p^* \mathcal{M}$ en chaque point p de \mathcal{M} . Ces covecteurs $e^\mu_I(x)$ peuvent être vus comme des cartes allant de l'espace tangent en x vers l'espace de Minkowski. L'idée de la relativité générale selon laquelle l'espace-temps est, de manière locale, similaire à celui de Minkowski est donc conservée et la métrique $g_{\mu\nu}$ peut être exprimée à partir de la métrique de Minkowski comme

$$g_{\mu\nu}(x) = e^\mu_I(x) e^\nu_J(x) \eta_{IJ}. \quad (1.14)$$

7. Une variété Lorentzienne étant une variété différentielle (i.e un espace topologique localement semblable en chaque point à un espace Euclidien) munie d'une métrique pseudo-Riemannienne de signature $(p, 1)$, i.e possédant p axes de norme positive et un axe de norme négative.

8. Une forme différentielle d'ordre 1, ou 1-forme, est un champ de formes linéaires. Cette notion est donc en lien direct avec celle de champs de vecteurs.

Remarques :

- i) Dans le cas d'un espace temps plat, comme celui considéré usuellement en théorie quantique des champs, les e_μ^I se réduisent simplement au symbole de Kronecker δ_μ^I .
- ii) Tous les tenseurs de la théorie, y compris le tenseur métrique lui même, peuvent être exprimés dans les bases formées par les (co)tétrades et la relativité générale toute entière peut être reformulée dans ce nouveau formalisme.

En résumé les tétrades ici introduites constituent une carte de l'espace tangent à chaque point de l'espace-temps vers le référentiel local inertiel dont la métrique est donnée par celle de Minkowski η_{IJ} .

Un autre ingrédient : la connexion de Lorentz (ou connexion de spin)

Le transport parallèle de champs de vecteurs sur une variété n'est pas défini de manière unique sauf si une connexion est spécifiée. Dans la formulation au second ordre de la théorie on demande à ce que cette connexion, notée ∇ , soit une connexion métrique⁹ i.e $\nabla g = 0$, et sans torsion. Il est alors possible de montrer que la seule connexion possible est celle dite de **Levi-Civita**. Une dérivée covariante est ensuite construite à partir de cette connexion en utilisant les symboles de Christoffel $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$:

$$\nabla_\mu v^\nu = \partial_\mu v^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu v^\rho . \tag{1.15}$$

Notons que l'absence de torsion implique $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Relevons également que le tenseur de courbure de Riemann peut ensuite être construit à l'aide de ces symboles de Christoffel :

$$R_{\nu\rho\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu,\rho}^\mu - \Gamma_{\rho\nu,\sigma}^\mu + \Gamma_{\sigma\nu}^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\mu - \Gamma_{\rho\nu}^\alpha \Gamma_{\sigma\alpha}^\mu \tag{1.16}$$

où la notation $_{,\rho} = \partial_\rho$ est juste une nouvelle manière de noter l'opération $\partial/\partial x^\rho$.

Dans le cas du formalisme des tétrades la notion de dérivée covariante basée sur une connexion doit être étendue pour pouvoir être appliquée à des tenseurs possédant à la fois des indices spatiaux et des indices dans $\mathfrak{su}(2)$. Une nouvelle connexion est donc introduite, notée ω et appelée connexion de Lorentz (ou connexion de spin). C'est une 1-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz qui s'écrit :

$$\omega^{IJ} = \omega_\mu^{IJ} dx^\mu = -\omega_\mu^{JI} dx^\mu = -\omega^{JI} . \tag{1.17}$$

Dans ce nouveau formalisme au premier ordre il est possible de définir un nouveau tenseur de courbure, équivalent au tenseur de Riemann mais basé sur la connexion de spin ω^{IJ} . L'expression de la 2-forme de courbure à valeurs dans l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz associée à ce nouveau tenseur de courbure en fonction de la connexion de spin est donnée par la seconde équation de structure de Cartan :

$$F^{IJ} = d_\omega \omega^{IJ} = d\omega^{IJ} + \omega^{IK} \wedge \omega_K^J , \tag{1.18}$$

où \wedge correspond au produit externe (ou *wedge product* en anglais)¹⁰. Cette écriture est équivalente à

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = 2 \left(\partial_{[\mu} \omega_{\nu]}^{IJ} - \omega_{[\mu}^{IK} \omega_{\nu]K}^J \right) . \tag{1.19}$$

9. C'est une condition souvent demandée afin de faciliter la procédure de mouvement vertical d'indice.

10. Le produit externe \wedge est une généralisation du produit vectoriel pour des tenseurs d'ordre plus élevés. Il peut également être vu comme un cas particulier du produit tensoriel après antisymétrisation totale.

Ce nouveau tenseur de courbure et le tenseur de Riemann sont reliés par

$$F_{\mu\nu}^{IJ} = e^I_\rho e^J_\sigma R^{\rho\sigma}_{\mu\nu} . \quad (1.20)$$

Ce qui donne, pour la 2-forme associée :

$$F^{IJ} = e^I_\rho e^J_\sigma R^{\rho\sigma}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu . \quad (1.21)$$

Dans la formulation au premier ordre de la relativité générale l'action ne dépend plus de la métrique (et ses dérivées secondes) mais de deux nouvelles variables : les 1-formes associées aux co-tétrades ainsi que la connexion de spin ω^{IJ} au travers de la 2-forme de courbure F^{IJ} . Cette action d'Einstein reformulée, dite de Palatini, s'écrit :

$$S_{\text{Pal}}(e, \omega) = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}(\omega) , \quad (1.22)$$

où ϵ_{IJKL} est le tenseur totalement antisymétrique de Levi-Civita. Il apparaît ici car il joue, dans l'écriture basée sur les formes, le même rôle que le tenseur métrique dans l'écriture basée sur les tenseurs, c'est-à-dire qu'il permet le mouvement vertical des indices/exposants.

Remarque : La contraction des indices latins et l'absence d'indices grecs¹¹ dans l'action de Palatini font que cette dernière est respectivement invariante sous transformation de Lorentz ainsi que sous une transformation quelconque des coordonnées (difféomorphisme), assurant la covariance généralisée de la théorie.

Combiner (co)tétrades et connexion de Lorentz pour étendre l'action d'Einstein-Hilbert : vers l'action de Holst

Comme énoncé dans [2] il n'est possible de construire à partir des cotétrades e^I et de la connexion de Lorentz ω^{IJ} que six 4-formes invariantes de jauge, *i.e* invariantes sous une transformation quelconque des coordonnées (ou invariantes sous difféomorphisme), à l'ordre deux en courbure qui peuvent intervenir dans l'action du secteur gravitationnel pur :

$$S(e, \omega) = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \left[\underbrace{\epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}(\omega)}_{\text{Palatini}} + \underbrace{\Lambda \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge e^K \wedge e^L}_{\text{Cosmological constant}} + \underbrace{\alpha_1 e_I \wedge e_J \wedge F^{IJ}(\omega)}_{\text{Holst}} \right. \\ \left. + \underbrace{\alpha_2 (d_\omega e^I \wedge d_\omega e_I - e_I \wedge e_J \wedge F^{IJ}(\omega))}_{\text{Nieh-Yan}} + \underbrace{\alpha_3 F_{IJ}(\omega) \wedge F^{IJ}(\omega)}_{\text{Pontryagin}} + \underbrace{\alpha_4 \epsilon_{IJKL} F^{IJ}(\omega) \wedge F^{KL}(\omega)}_{\text{Euler}} \right] . \quad (1.23)$$

Ici $d_\omega e^I$ correspond à la dérivée externe covariante¹² de e^I et les $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 à des constantes de couplage. Ces termes supplémentaires introduits dans le Lagrangien sont soit identiquement nuls soit sont des termes dits topologiques qui ne modifient pas les équations du mouvement.

Introduisons un nouveau paramètre, dit de Barbero-Immirzi,

$$\gamma := \frac{1}{\alpha_1 + 2\alpha_2} . \quad (1.24)$$

11. ou leur contraction dans son écriture plus développée.

12. *i.e* la dérivée externe pour laquelle la dérivée usuelle est remplacée par une dérivée covariante (ce qui intègre donc le fait qu'une connexion soit définie)

qui va jouer un rôle important dans la formulation Hamiltonienne de la théorie.

Dans la plupart des situations physiques pertinentes les termes Λ , α_2 , α_3 et α_4 peuvent être supposés nuls. Alors

$$\gamma = \frac{1}{\alpha_1} \quad (1.25)$$

et le seul terme additionnel non nul à l'action de Palatini est le terme de Holst dont la constante de couplage est donnée par α_1 . L'action présentée Eq.(1.24) se réduit alors à l'action dite de Holst :

$$\begin{aligned} S_{\text{Holst}} &= \frac{1}{2\kappa} \left[\int d^4x \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}(\omega) + \frac{1}{\gamma} \int d^4x e_K \wedge e_L \wedge F^{KL}(\omega) \right] \\ &= \frac{1}{2\kappa} \left[\int d^4x \epsilon_{IJKL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}(\omega) + \frac{1}{\gamma} \int d^4x \eta_{IK} \eta_{JL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL}(\omega) \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

On peut facilement remarquer que le terme proportionnel à γ (terme de Holst) est, comme précédemment mentionné, nul :

$$\begin{aligned} \eta_{IK} \eta_{JL} e^I \wedge e^J \wedge F^{KL} &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_{IK} \eta_{JL} e_\mu^I e_\nu^J F_{\rho\sigma}^{KL} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_{IK} \eta_{JL} e_\mu^I e_\nu^J e_\alpha^K e_\beta^L R^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} R^{\alpha\beta}_{\rho\sigma} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

Ceci démontre bien que le terme de Holst ne joue pas de rôle dans la théorie classique, les équations de champ obtenues par variations de l'action Eq.(1.26) étant de nouveau les équations d'Einstein dans le vide $R_{\mu\nu} = 0$. Ce terme supplémentaire à l'action de Palatini constitue néanmoins un ingrédient important de la théorie quantique, comme nous le verrons par la suite.

Remarque : Le résultat évoqué ci-dessus est indépendant de la valeur du paramètre γ et ce dernier est très souvent présenté comme un paramètre sans importance dans la théorie classique, n'apparaissant pas dans les équations du mouvement et ne jouant un rôle clef que suite à la quantification. Nous reviendrons par la suite sur l'importance de ce paramètre dans la théorie quantique, mais je désire tout de même nuancer ici un peu cette considération souvent entendue. Il a en effet été montré par A. Perez et C. Rovelli [15] qu'en présence de fermions le paramètre de Barbero-Immirzi n'est en fait pas sans importance et fixe la valeur de la constante de couplage de l'interaction à quatre fermions. Bien que cette interaction soit très faible et n'ait pour l'instant jamais été observée, il est possible qu'elle le devienne, mettant en avant un effet de ce paramètre indépendant de son rôle dans la théorie quantique.

1.1.2 Le formalisme Hamiltonien Arnowitt-Deser-Misner (ADM) de la relativité générale

Le formalisme Hamiltonien Arnowitt-Deser-Misner (ou ADM) de la relativité générale constitue, après la formulation au premier ordre que nous venons de voir, la seconde grande pièce du puzzle des bases classiques de la LQG. Afin de développer une formulation Hamiltonienne de la relativité générale (dans le but de quantifier le champ gravitationnel via une procédure inspirée de celle de Dirac) il nous

faut identifier des variables canoniques conjuguées l'une de l'autre. Or, qui dit moment conjugué dit dérivée temporelle. Il nous faut donc trouver une manière d'isoler une coordonnée temporelle dans une théorie totalement covariante.

C'est ce désir de faire ré-apparaître une telle coordonnée qui donna lieu au formalisme ADM de la relativité générale, initialement développé en 1959 par Richard Arnowitt, Stanley Dessser et Charles W. Misner [16].

Décomposition 3+1 de l'espace-temps.

Dans ce formalisme l'espace-temps de dimension 4, caractérisé par la métrique $g_{\mu\nu}$, est décomposé en effectuant un feuilletage par une famille continue d'hypersurfaces tridimensionnelles le long d'une direction arbitraire. Il faudra évidemment s'assurer que le formalisme que nous développons ici reste insensible à ce choix arbitraire du feuilletage. Cette direction arbitraire est caractérisée par un vecteur \mathbf{t} et les trajectoires qui évoluent dans cette direction sont paramétrées par un paramètre $t \in \mathbb{R}$ jouant le rôle de temps. Les 3-surfaces Σ_t orthogonales à cette direction temporelle représentent alors les hypersurfaces spatiales, labellisées par $t = \text{constante}$. Notons qu'elles peuvent être de topologie quelconque. Les trois coordonnées x^a , $a = \{1, 2, 3\}$, qui décrivent Σ_t correspondent alors aux trois coordonnées d'espace et $x^\mu = \{t, x^a\}$ forme un système de coordonnées sur la variété totale 4-dimensionnelle $\mathcal{M} = \mathbb{R} \times \Sigma_t$. Insistons sur le fait que le choix de la direction donnée par \mathbf{t} et donc du feuilletage qui en résulte est purement arbitraire et une écriture Hamiltonienne de la relativité générale ne doit pas dépendre ce choix. De plus, définir une direction privilégiée revient à briser la covariance de la théorie initiale. Ces deux problèmes seront par la suite résolus via l'ajout de contraintes.

Fonction de laps et vecteur de shift.

Suite au feuilletage que nous venons d'effectuer il existe, pour tout point p appartenant à \mathcal{M} , un réel t tel que p se situe sur Σ_t . On peut alors considérer le champ scalaire \hat{t} défini tel que $t = \hat{t}(p)$ et dont les hypersurfaces de niveau sont les 3-surfaces Σ_t . Le gradient de ce champ ne s'annule pas, assurant le non recouvrement des hypersurfaces spatiales et donc le fait que la variété 4-dimensionnelle \mathcal{M} est entièrement décrite par l'ensemble des Σ_t . Ce gradient est par définition orthogonal aux 3-surfaces Σ_t à tout t et le champ scalaire \hat{t} permet donc de définir le vecteur \mathbf{n} orthonormal aux hypersurfaces Σ_t , dont les composantes covariantes sont : $n_\mu = (N(x^\nu), 0, 0, 0)$, où N est appelée **fonction de laps**.

Le transport de la surface Σ_t en Σ_{t+dt} se fait à l'aide du vecteur d'évolution $\mathbf{m} = N\mathbf{n}$. Ainsi, $\forall p \in \Sigma_t$, $p' = p + mdt \in \Sigma_{t+dt}$. D'un autre côté une base des vecteurs dans l'espace tangent à \mathcal{M} est donnée par $\mathbf{e}_\alpha = \partial_\alpha$, $\alpha = \{1, 2, 3, 4\}$. Notons alors que le vecteur \mathbf{m} ne coïncide en général pas avec le vecteur $\mathbf{e}_t = \partial_t$, vecteur tangent aux lignes pour lesquelles $x^a = \text{constante}$, $\forall a = \{1, 2, 3\}$. Ces deux vecteurs ne seront égaux que si les lignes de coordonnées données par $x^a = \text{constante}$, $\forall a = \{1, 2, 3\}$ sont orthogonales aux 3-surfaces Σ_t , ce qui est toujours possible avec un choix approprié du système de coordonnées. Néanmoins dans le cas général \mathbf{m} et \mathbf{e}_t sont liés par un vecteur $\boldsymbol{\beta}$, de sorte que $\mathbf{e}_t = N\mathbf{n} + \boldsymbol{\beta}$. Le vecteur $\boldsymbol{\beta}$, appelé **vecteur de shift**, est tangent aux 3-surfaces Σ_t et a pour composantes contravariantes $\beta^\mu = (0, N^a)$. Nous appellerons par la suite le 3-vecteur de composantes non nulles N^a **vecteur de shift** également, comme il est d'usage dans la littérature.

Les composantes covariantes ou contravariantes du vecteur \mathbf{n} orthonormal aux hypersurfaces peuvent alors s'exprimer en fonction de la *fonction de laps* N et des composantes non nulles N^a du *vecteur de shift* :

$$n_\mu = (N(x^\nu), 0) \text{ et } n^\mu = \frac{1}{N(x^\nu)} (1, N^a(x^\nu)) . \quad (1.28)$$

Fonction de laps et *vecteur de shift* sont des objets qui s'avèreront importants pour la suite de cette étude car, dans le formalisme ADM, le choix arbitraire d'un certain système de coordonnées est équivalent à celui de N et des trois composantes N^a . Essayons donc de comprendre plus précisément ce que représentent ces objets. La quantité Ndt correspond à l'élément infinitésimal de temps propre entre deux hypersurfaces Σ_t et Σ_{t+dt} mesuré par un observateur dont la quadrivitesse serait le vecteur \mathbf{n} . Le *vecteur de shift* correspond quant à lui au décalage spatial obtenu lorsqu'un point p situé en $x^\mu(p) = (t, x^a)$ sur l'hypersurface Σ_t passe sur l'hypersurface Σ_{t+dt} ; ce point se retrouve alors à la position $x^\mu + dx^\mu = (t + dt, x^a + N^a dt)$. Le sens de ces grandeurs est également représenté Fig.1.1. On voit sur cette figure que l'évolution temporelle, i.e sans variation spatiale, du point a , donnée par $t^\mu dt$, se retrouve en deux étapes en faisant intervenir $Nn^\mu dt$ et $N^a dt$.

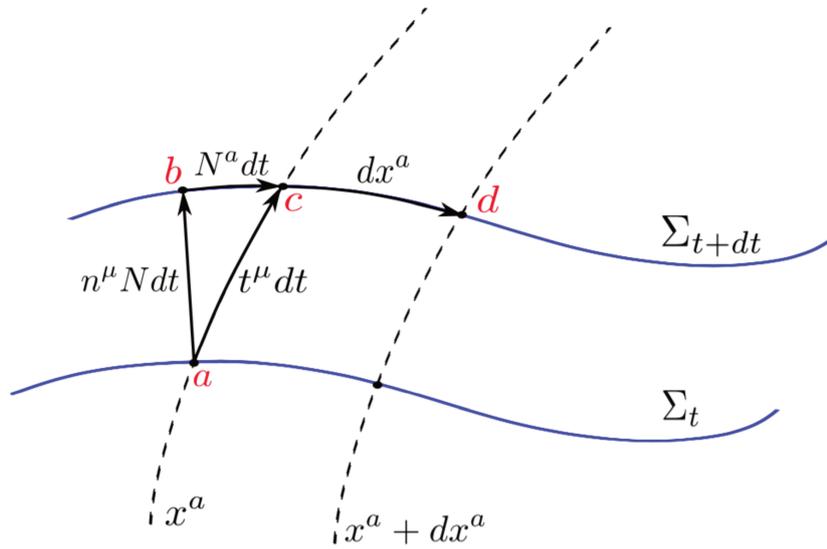


FIGURE 1.1 – Feuilletage d'espace-temps dans le formalisme ADM.

Rappelons que le choix du feuilletage initial étant arbitraire les choix de N et N^a le sont également.

Caractérisation de l'espace des phases.

Même si les hypersurfaces Σ_t sont de topologie quelconque leur métrique q_{ab} peut être définie à l'aide de l'opérateur $\Pi_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ qui permet de projeter les vecteurs de l'espace tangent à la variété quadri-dimensionnelle \mathcal{M} sur l'espace tangent aux hypersurfaces Σ_t . La métrique sur les hypersurfaces s'écrit alors $q_{ab} = g_{\mu\nu} \Pi_a^\mu \Pi_b^\nu$ et $g_{\mu\nu}$ est donnée par l'élément de pseudo-longueur

$$ds^2 = N(t, x)^2 dt^2 - q_{ab}(t, x) (N^a(t, x) dt + dx^a) (N^b(t, x) dt + dx^b) . \quad (1.29)$$

La fonction de laps et le vecteur de shift sont liés aux composantes 00 et 0a de la métrique inverse $g^{\mu\nu}$ par

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2} \text{ et } g^{0a} = \frac{N^a}{N^2} . \quad (1.30)$$

Relevons que le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est symétrique et les 10 degrés de liberté du système se retrouvent dans N (1 degré de liberté), N^a (3 degrés de liberté) et q_{ab} (6 degrés de liberté).

La courbure des hypersurfaces spatiales immergées dans l'espace-temps quadri-dimensionnel est caractérisée par la courbure extrinsèque

$$K_{ab} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{ab} , \quad (1.31)$$

où $\mathcal{L}_n q_{ab}$ correspond à la dérivée de Lie¹³ de la métrique q_{ab} par rapport à \mathbf{n} .

Remarque : La courbure extrinsèque réfère à la courbure d'un objet vue depuis un espace dans lequel celui-ci est immergé. Elle est à différencier de la courbure intrinsèque qui elle est donnée par le produit des courbures selon les directions principales. Un cylindre possède par exemple une courbure extrinsèque nulle, il est évidemment courbé si on l'observe depuis notre espace \mathbb{R}^3 , mais la courbure selon la direction principale qui s'étend dans la longueur du cylindre étant nulle, sa courbure intrinsèque l'est également. A contrario une carte 2D de la Terre possède une courbure extrinsèque nulle mais une courbure intrinsèque non nulle.

Notons que l'expression de la courbure extrinsèque Eq.(1.31) est très proche de celle de la dérivée temporelle de la métrique spatiale

$$\dot{q}_{ab} = \mathcal{L}_t q_{ab} . \quad (1.32)$$

En définitive, la métrique spatiale q_{ab} et la courbure extrinsèque K_{ab} (ou plus précisément le moment conjugué π_{ab} associé à q_{ab} défini à partir de cette courbure extrinsèque) sont les variables qui vont constituer l'espace des phases de cette formulation Hamiltonienne de la gravitation. Il devient alors possible d'écrire un Hamiltonien comme une fonction de q_{ab} et π_{ab} et c'est ce que nous allons faire maintenant.

Le Hamiltonien du formalisme ADM

L'action d'Einstein-Hilbert peut être réécrite, suite à cette décomposition, comme :

$$S_{\text{EH}}(q_{ab}, \dot{q}_{ab}, N, N^a) = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \left[\pi^{ab} \dot{q}_{ab} - NC - N^a C_a \right] \quad (1.33)$$

où, comme mentionné ci-dessus, le moment conjugué à q_{ab} s'exprime en fonction de cette dernière et de la courbure extrinsèque K^{ab} :

$$\pi^{ab} := \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_{ab}} = \sqrt{q} (K^{ab} - K q^{ab}) , \quad (1.34)$$

K étant le scalaire contracté de la courbure extrinsèque et \sqrt{q} la racine carré du déterminant de la 3-métrique q_{ab} . Nous avons de plus

$$C_a = -2 \sqrt{q} \nabla_b \left(\frac{\pi_a^b}{\sqrt{q}} \right) \quad (1.35)$$

et

13. La dérivée de Lie est une généralisation de la dérivée partielle en géométrie différentielle qui permet de dériver des champs de tenseurs comme s'ils étaient des fonctions définies sur la variété.

$$C = \frac{1}{\sqrt{q}} (q_{ac}q_{bd} + q_{ad}q_{bc} - q_{ab}q_{cd}) \pi^{ab} \pi^{cd} \sqrt{q} \mathcal{R}, \quad (1.36)$$

\mathcal{R} étant le scalaire de Ricci des hypersurfaces Σ_t .

Les variations de l'action Eq.(1.33) par rapport à N^a et N donnent respectivement la contrainte dite **contrainte vectorielle** :

$$C_a = 0, \quad (1.37)$$

et celle dite **contrainte scalaire** :

$$C = 0. \quad (1.38)$$

Cette densité (car non intégrée) de contrainte scalaire rétablit l'invariance sous reparamétrisation de la coordonnée temporelle tandis que la densité de contrainte vectorielle va elle être liée au rétablissement de l'invariance sous difféomorphismes spatiaux sur les hypersurfaces. N^a et N jouent alors le rôle de multiplicateurs de Lagrange.

Remarque : Par abus de langage nous désignerons par la suite C_a et C directement comme les (densités) de contraintes vectorielles et scalaire. Nous omettrons également de spécifier que nous avons affaire à des densités de contraintes (car non intégrées) et nous référerons à elles en tant que contraintes.

Lorsque ces contraintes sont satisfaites les solutions des équations du mouvement sont dites physiques (au sens où elles satisfont aux équations de champ) et le système est dit *on-shell*, d'après un vocabulaire emprunté à la physique des particules. Notons également que la région de l'espace des phases qui satisfait à la **contrainte Hamiltonienne**, somme des contraintes scalaire et vectorielles, est appelée *hypersurface des contraintes*. Les évolutions qui sortiront de cette hypersurface seront considérées comme non physiques.

Si la métrique $g_{\mu\nu}$ satisfait les quatre contraintes $C_a = 0$ et $C = 0$ sur une hypersurface Σ_t alors cela signifie qu'elle satisfait également les 10 équations d'Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 0$. Ceci signifie que toute la dynamique contenue dans les équations d'Einstein (dans le vide) est contenue dans ces quatre contraintes.

Le Hamiltonien de la relativité générale dans ce formalisme est obtenu directement depuis l'action donnée Eq.(1.33) :

$$H(q_{ab}, \pi^{ab}, N, N^a) = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma_t} d^3x (NC + N^a C_a). \quad (1.39)$$

Ce Hamiltonien possède une certaine propriété, déroutante au premier abord pour qui découvre le domaine : il est nul pour les systèmes dits *on-shell* qui satisfont aux contraintes (qui sont, rappelons-le, les systèmes dont les solutions sont physiques). Il ne peut plus être interprété comme l'énergie du système. Cette caractéristique trouve sa racine dans l'un des fondements de la relativité générale : l'invariance de la théorie sous difféomorphisme. Pour mieux comprendre ce qui se passe, intéressons-nous à un petit modèle jouet.

1.1.3 Du Hamiltonien à la contrainte Hamiltonienne : la relativité générale, une théorie totalement contrainte.

Comme nous venons de le dire la symétrie sous-jacente à la relativité générale est l'invariance des équations sous difféomorphisme, c'est à dire sous n'importe quelle transformation générale, linéaire ou non, des coordonnées $x \rightarrow x'(x)$. Le temps t n'est alors plus à considérer comme un paramètre d'évolution mais comme une variable canonique, avec son moment conjugué p_t , au même titre qu'une coordonnée spatiale q . L'évolution s'effectue alors en fonction d'un nouveau paramètre, noté s par la suite. Pour avoir une vision la plus simple possible de ce qui se passe en relativité générale, considérons un système classique pour lequel l'action usuelle est re-paramétrée :

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(q, \dot{q}, t, \dot{t}) ds = \int \dot{t} \left(\frac{1}{2} m \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}^2} - V(q) \right) ds, \quad (1.40)$$

où un symbole $\dot{}$ dénote ici une variation par rapport au paramètre s . Notons que la coordonnée t n'est pas présente dans le Lagrangien, mais sa dérivée \dot{t} oui¹⁴. Les moments conjugués associés aux variables canoniques s'écrivent :

$$\begin{cases} p_q = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m \frac{\dot{q}}{\dot{t}}, \\ p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = - \left(\frac{1}{2} m \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}^2} + V(q) \right). \end{cases} \quad (1.41)$$

Il est possible de réécrire l'équation sur p_t comme une contrainte :

$$\Phi(q, t) = p_t + \left(\frac{1}{2} m \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}^2} + V(q) \right) = 0. \quad (1.42)$$

Le Hamiltonien associé au Lagrangien de l'action donnée Eq.(1.40) est obtenu par transformée de Legendre et s'écrit :

$$\mathcal{H}(q, p_q, t, p_t) = p_t \dot{t} + p_q \dot{q} - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t, \dot{t}) = p_t \dot{t} + \left(\frac{1}{2} m \frac{\dot{q}^2}{\dot{t}} + V(q) \dot{t} \right) = \dot{t} \Phi(q, t) = 0. \quad (1.43)$$

Tout comme dans le cas du formalisme ADM le Hamiltonien du système est ici nul. On ne parle alors plus de Hamiltonien mais de **contrainte Hamiltonienne** $\mathcal{H} = 0$. Cette contrainte détermine quelle portion de l'espace des phases correspond aux solutions physiques. De tels systèmes sont dits **totalement contraints**. Pour de tels systèmes, l'interprétation du Hamiltonien en tant qu'énergie n'est plus valable. Il était possible de pressentir un résultat de ce genre dès le départ. En effet, le temps a été élevé au rang de variable canonique et a perdu son statut de paramètre d'évolution. C'est le cœur de ce qui est communément appelé **le problème du temps** en relativité générale. Comme on le dit souvent, "*time is gauge*". Cela ne veut pas dire que les systèmes n'évoluent plus mais que l'évolution est relationnelle. De nombreuses discussions sur ce sujet sont disponibles [17, 18]. De manière très grossière disons que dès lors que la notion de temps disparaît, la notion d'énergie doit également disparaître. Ces deux notions sont en effet très liées en physique, comme mis en avant par le théorème de Noether, la quantité conservée si le système possède une invariance par translation temporelle étant l'énergie. Comment définir une énergie sans temps ?

14. On parle alors de coordonnée cyclique.

1.1.4 Tenter de quantifier le champ gravitationnel à partir du formalisme ADM : l'approche de Wheeler et de Witt

Dans l'approche de gravité quantique développée par Wheeler et de Witt les variables canoniques q_{ab} et π_{ab} (et donc le Hamiltonien associé) obtenues dans le formalisme ADM étaient promues au rang d'opérateurs agissant sur une fonctionnelle d'onde $\Psi(q_{ab})$ donnant l'amplitude de probabilité d'être dans un état de géométrie donné. Or il est dans cette approche impossible de définir correctement un produit scalaire entre différents états quantiques, outil nécessaire de la théorie et les amplitudes de transition entre différents états de géométrie ne peuvent être calculées. Le formalisme ADM seul n'est donc pas suffisant et il faut aller plus loin dans la réécriture de la relativité générale avant de pouvoir entamer un processus de quantification non perturbatif menant à des prédictions claires et non-ambigües. C'est ici que le formalisme au premier ordre introduit précédemment va intervenir.

1.2 La relativité générale en termes des variables d'Ashtekar

La prochaine étape vers une quantification canonique (non perturbative) du champ gravitationnel en relativité générale consiste à regrouper les deux formalismes précédents : il faut appliquer le formalisme des tétrades aux variétés 3-dimensionnelles Σ_t du formalisme ADM.

1.2.1 Les triades

À la différence de ce qui a été vu lors de la présentation du formalisme au premier ordre de la relativité générale, les hypersurfaces issues de la décomposition 3+1 du formalisme ADM que l'on doit décrire à l'aide des tétrades ne sont plus 4-dimensionnelles mais 3-dimensionnelles. On ne parle alors plus de tétrades mais de **triades** e_a^i . Les indices de coordonnées sont désormais dénotés par $a, b = 1, 2, 3$ et les indices de Lorentz par $i, j = 1, 2, 3$. Les covecteur associés, ou co-triades, permettent, de manière analogue aux co-tétrades, de définir la 3-métrique spatiale q_{ab} sur Σ_t à partir des composantes δ^{ij} de la métrique Euclidienne sur \mathbb{R}^3 :

$$q_{ab} = e_a^i e_b^j \delta_{ij}. \quad (1.44)$$

Réciproquement l'inverse de la métrique spatiale $q^{ab} = e_a^i e_b^j \delta^{ij}$ est défini par les triades.

Cette métrique q_{ab} est invariante sous une rotation $SO(3)$ des triades et ces dernières ne sont alors définies qu'aux rotations près. Les algèbres de Lie $\mathfrak{so}(3)$ et $\mathfrak{su}(2)$ étant isomorphes, les co-triades e_a^i peuvent être vues comme des 1-formes à valeur dans $\mathfrak{su}(2)$.

Remarque : Cette propriété des co-triades peut être interprétée ainsi : nous avons précédemment réécrit la relativité générale à l'aide des tétrades e_μ^i qui, vu qu'elles possèdent un et un seul indice de Lorentz, se transforment comme des vecteurs sous transformation de Lorentz. Or cette transformation étant une transformation continue, elle peut être exprimée à l'aide de groupes de Lie. L'algèbre de Lorentz est alors donnée par $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ et génère trois rotations et trois boosts. Lorsque la foliation de l'espace-temps est effectuée dans le formalisme ADM une direction acquiert un statut privilégié (le temps), brisant la symétrie associée à l'algèbre de Lorentz. Ne restent alors qu'une invariance sous les trois rotations spatiales et l'ancienne algèbre $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2)$ se résume désormais uniquement à $\mathfrak{su}(2)$, justifiant que les co-triades soient à valeurs dans cette algèbre. Notons au passage que $\dim(\mathfrak{su}(2)) = 2^2 - 1 = 3$, ce qui correspond bien à la dimension des hypersurfaces Σ_t .

Ces trois degrés de liberté de rotation des triades n'étaient pas présents dans le formalisme ADM et l'espace des phases associé au formalisme des triades est une extension de l'espace des phases ADM. Il faut alors restreindre notre étude à la portion de cet espace des phases étendu qui correspond à celui du formalisme ADM, ce qui est fait par l'ajout de trois contraintes : **les contraintes de Gauss** \mathcal{G}_j .

Les variables canoniques avec lesquelles nous allons travailler ne sont en réalité pas les triades elles-mêmes mais leurs versions renormalisées E_i^a définies par

$$E_i^a := \frac{1}{2} \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} e_b^j e_c^k = \sqrt{\det(q)} e_i^a, \quad (1.45)$$

où $\det(q) = \det(q^{-1})^{-1} = \det(e)^{-2}$ est une fonction des triades.

Les variables canoniques conjuguées des densités de triades et associées à la courbure extrinsèque sont données dans ce formalisme par

$$K_a^i := K_{ab} e_j^b \eta^{ij} \quad (1.46)$$

qui sont, tout comme e_a^i , des 1-formes à valeurs dans $\mathfrak{su}(2)$.

Les trois contraintes de Gauss, ou contraintes de rotation, sont alors données par

$$\mathcal{G}_j = \epsilon_{jk}^l K_a^k E_l^a \quad (1.47)$$

et l'espace des phases étendu est caractérisé par les variables canoniques (K_a^i, E_i^a) de crochets de Poisson

$$\{K_a^i(x), E_j^b(y)\} = \kappa \delta_a^b \delta_j^i \delta^3(x-y). \quad (1.48)$$

Pour tout $\gamma \in \mathbb{C}^*$ la transformation

$$K_a^i \xrightarrow{(\gamma)} K_a^i := \gamma K_a^i \quad E_i^a \xrightarrow{(\gamma)} E_i^a := \frac{1}{\gamma} E_i^a \quad (1.49)$$

ne modifie pas les crochets de Poisson Eq.(1.48). Cette transformation, qui n'est rien d'autre qu'une renormalisation des variables élémentaires, est équivalente à une renormalisation du tenseur métrique $q_{ab} \rightarrow q_{ab}/\gamma^2$. On parle alors de *transformation de Weyl*¹⁵. Le paramètre complexe γ de Barbero-Immirzi n'a ici pas d'impact sur la structure symplectique des crochets de Poisson mais, comme évoqué précédemment, celui-ci trouvera une importance particulière lors de la quantification.

Relevons que les contraintes de Gauss données Eq.(1.47) sont également invariantes sous la transformation donnée Eq.(1.49), i.e :

$$\mathcal{G}_j = \epsilon_{jk}^l K_a^k E_l^a = \epsilon_{jk}^{l(\gamma)} K_a^{k(\gamma)} E_l^a. \quad (1.50)$$

La dérivée covariante associée à la connexion de spin ω_a^i doit satisfaire $D_a e_j^b = 0$ et donc

$$D_a E_j^a = \partial_a E_j^a + \epsilon_{jk}^l \omega_a^k E_l^a = 0. \quad (1.51)$$

Introduire Eq.(1.51) dans les contraintes de Gauss données Eq.(1.47) induit

15. Ces transformations sont d'importance primordiale dans des théories de champs conformes, une théorie conforme étant une théorie invariante sous une telle transformation.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{G}_j &= \epsilon_{jk}^l {}^{(\gamma)}K_a^k E_l^a \\
 &= \partial_a {}^{(\gamma)}E_j^a + \epsilon_{jk}^l \omega_a^k E_l^a + \epsilon_{jk}^l {}^{(\gamma)}K_a^k E_l^a \\
 &= \partial_a {}^{(\gamma)}E_j^a + \epsilon_{jk}^l \left[\omega_a^k + {}^{(\gamma)}K_a^k \right] E_l^a .
 \end{aligned} \tag{1.52}$$

Cette expression suggère l'introduction d'une nouvelle connexion, basée sur la connexion de spin ω_a^i et la 1-forme de courbure K_a^i :

$${}^{(\gamma)}A_a^i = \omega_a^i + {}^{(\gamma)}K_a^i = \omega_a^i + \gamma K_a^i, \tag{1.53}$$

appelée **connexion de Sen-Ashtekar-Barbero (SAB)**. L'ensemble $({}^{(\gamma)}A_a^i, {}^{(\gamma)}E_i^a)$, appelé **variables d'Ashtekar**, forme un ensemble de variables canoniques de crochets de Poisson

$$\left\{ {}^{(\gamma)}A_a^i(x), {}^{(\gamma)}A_b^j(y) \right\} = 0, \tag{1.54}$$

$$\left\{ {}^{(\gamma)}E_i^a(x), {}^{(\gamma)}E_j^b(y) \right\} = 0, \tag{1.55}$$

$$\left\{ {}^{(\gamma)}A_a^i(x), {}^{(\gamma)}E_j^b(y) \right\} = \kappa \gamma \delta_j^i \delta_a^b \delta^3(x-y). \tag{1.56}$$

Remarque : Il est parfois d'usage d'utiliser

$${}^{(\gamma)}P_i^a(x) := \frac{1}{\kappa} {}^{(\gamma)}E_i^a(x) \tag{1.57}$$

plutôt que ${}^{(\gamma)}E_i^a(x)$ comme moment conjugué de ${}^{(\gamma)}A_a^i(x)$ afin de faire disparaître le facteur κ .

L'action gravitationnelle peut être réécrite en fonction de ces variables :

$$S_{\text{grav}} = \frac{1}{2\kappa} \int_{\mathbb{R}} dt \int_{\Sigma_t} d^3x \left[E_i^a A_a^i - (\lambda^j \mathcal{G}_j + N^a C_a + NC) \right] \tag{1.58}$$

où les λ^j , N^a et N jouent le rôle de multiplicateurs de Lagrange. Les expressions des densités de contraintes en fonction des variables d'Ashtekar sont données par :

i) densité de contraintes de Gauss :

$$\mathcal{G}_j := \partial_a E_j^a + \epsilon_{jk}^l A_a^k E_l^a = 0, \tag{1.59}$$

ii) densité de contraintes vectorielles :

$$C_a := F_{ab}^j E_j^b - (1 + \gamma^2) K_a^i \mathcal{G}_i = 0, \tag{1.60}$$

iii) densité de contrainte scalaire :

$$C := C_E + C_L = 0. \tag{1.61}$$

où C_E et C_L correspondent respectivement aux parties dites Euclidienne et Lorentzienne¹⁶ de C et sont données par :

16. Ces appellations viennent de ce que les crochets de Poissons de ces densités de contraintes avec elles mêmes possèdent des signes différents dans la constante qui précède la contrainte.

$$C_E := \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det E}} \epsilon_k^{ij} F_{ab}^k \quad \text{et} \quad C_L = -2(1 + \gamma^2) \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det E}} K_{[a}^i K_{b]}^j. \quad (1.62)$$

L'ensemble des contraintes qui rétablissent l'invariance sous difféomorphisme sur les hypersurfaces spatiales, dites **contraintes de difféomorphisme**, est donné par une combinaison des contraintes vectorielles et de Gauss :

$$\mathcal{D}_a = C_a - A_a^i (D_b E_i^b). \quad (1.63)$$

L'ensemble des trois contraintes de difféomorphisme et de la contrainte scalaire rétablit l'invariance de la théorie sous difféomorphisme total.

Le Hamiltonien associé à l'action Eq.(1.58) est donné par l'intégrale sur Σ_t de la somme des densités de contraintes précédées des multiplicateurs de Lagrange associés :

$$H = \frac{1}{2\kappa} \int_{\Sigma_t} d^3x (\lambda^j \mathcal{G}_j + N^a \mathcal{D}_a + NC). \quad (1.64)$$

Comme mentionné précédemment les quatre contraintes $\mathcal{D}_a = 0$ et $C = 0$ sont équivalentes aux dix équations d'Einstein dans le vide. À cela il faut rajouter les trois contraintes de Gauss traduisant l'invariance sous rotation des triades.

Hélas, même si ce formalisme basé sur les variables d'Ashtekar permet de simplifier la contrainte scalaire il ne permet pas de résoudre les difficultés qui apparaissent dans l'approche historique menée par Wheeler et de Witt. Il est toujours délicat de définir correctement un produit scalaire entre différents états quantiques [19]. Il reste donc impossible de calculer des amplitudes de probabilité à ce stade et une dernière étape est nécessaire avant de pouvoir procéder à la quantification.

1.2.2 Effectuer un "lissage" (*smearing*) de l'algèbre : utilisation des holonomies et des flux

L'idée derrière un tel lissage

Pour se faire une idée de pourquoi un lissage des variables est nécessaire, considérons le cas simple d'une particule soumise à un potentiel et se déplaçant sur un cercle. Sa position est donnée par la variable angulaire $\alpha \in [0, 2\pi[$. Son Hamiltonien s'écrit simplement

$$H = \frac{p^2}{2c} + V(\alpha) \quad (1.65)$$

où c est une constante de dimension $[c] = M.L^2$ et $p = cd\alpha/dt$. Pour décrire le comportement de cette particule de manière quantique il faut considérer l'opérateur $\hat{p} = -i\hbar d/d\alpha$ associé à p , dont le spectre discret des valeurs propres est donné par $p_n = n\hbar$, indépendamment du potentiel. Pourquoi le spectre de \hat{p} est-il discret ? Tout simplement parce que la variable α appartient à un ensemble borné (compact), tout comme dans le cas d'une particule dans un puits de potentiel (ou boîte quantique). De plus, vu que α n'est pas continue sur le cercle (lorsque α passe de 0 à 2π) la relation de commutation $[\hat{\alpha}, \hat{p}] \neq i\hbar$ et diffère du cas standard. Pour éviter une telle discontinuité il est préférable de travailler avec des fonctions continues de α telles que $s = \sin(\alpha)$, $c = \cos(\alpha)$ ou encore $h = e^{i\alpha}$. Nous verrons par la suite que pour cette même raison nous utiliserons non plus la connexion d'Ashtekar comme opérateur élémentaire mais plutôt son exponentiation le long de boucles fermées.

Cet argument donne une idée intuitive de l'origine de boucles dans la théorie mais l'utilisation de tels objets se fonde également sur des arguments plus formels non développés ici (liés aux boucles de Wilson et au tenseur de Riemann) [20].

Flux, holonomies et représentation des boucles

Comme nous le voyons d'après l'action Eq.(1.58) l'espace des phases de la relativité générale est décrit par les variables d'Ashtekar dont les crochets de Poisson sont donnés Eq.(1.56).

Il est possible de lisser la connexion A_a^i afin que son intégration donne, lors de la quantification, des opérateurs correctement définis sur l'espace de Hilbert cinématique \mathcal{H}_{cin} . Étant donné que A_a^i est une 1-forme le contour d'intégration choisi doit être un chemin unidimensionnel γ . Associons à la connexion A_a^i l'élément de $SU(2)$ $A_a \equiv A_a^i \tau_i$, les τ_i correspondant aux générateurs de $\mathfrak{su}(2)$. Cet élément peut ensuite être intégré le long de γ . Si l'évolution le long de ce chemin est paramétrée par $x^a(s) : [0, 1] \rightarrow \Sigma$ nous obtenons :

$$\int_{\gamma} A \equiv \int_0^1 ds A_a^i(x(s)) \frac{dx^a(s)}{ds} \tau_i . \quad (1.66)$$

En retenant la leçon de notre exemple avec la particule qui évolue sur le cercle, la connexion en tant que telle ne peut pas être prise comme variable de quantification et il nous faut considérer son **holonomie**, définie comme le produit ordonné de l'exponentielle de l'intégrale de la connexion le long d'une courbe fermée

$$h_{\gamma} \equiv \mathcal{P} \left[e^{\oint_{\gamma} A} \right] = \mathcal{P} \left[e^{\oint_{\gamma} A_a^i \tau_i dx^a} \right] . \quad (1.67)$$

Remarque sur la notion d'holonomie : Essayons d'avoir une notion un peu plus intuitive de ce qu'est une holonomie, objet d'importance en gravitation quantique à boucles. Une holonomie donne une mesure de la déviation entre les états initiaux et finaux d'un vecteur transporté parallèlement sur un contour fermé. Illustrons ceci pour un cas simple, celui de l'holonomie de la connexion de Levi-Civita sur une variété riemannienne. Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^3$ une surface orientée et $\gamma \subset \mathcal{S}$ un chemin fermé sur cette surface, c'est-à-dire $\gamma(1) = \gamma(0)$, $t = 0 \rightarrow 1$. Soit $v(t) \in \mathcal{T}_{\gamma(t)}\mathcal{S}$ une famille de vecteurs transportés parallèlement le long de γ , où $\mathcal{T}_x\mathcal{S}$ désigne le plan tangent à la surface \mathcal{S} au point $x \in \mathcal{S}$. Les vecteurs $v(0)$ et $v(1)$ appartiennent au même espace tangent $\mathcal{T}_{\gamma(0)}\mathcal{S} = \mathcal{T}_{\gamma(1)}\mathcal{S}$ et sont de même longueur (car le transport parallèle préserve le produit scalaire et donc la norme). $v(1)$ se déduit donc de $v(0)$ par une rotation d'un angle noté $h(\gamma) = (v(0), \hat{v}(1))$ appelé *holonomie* du chemin fermé γ . Notons que cette holonomie $h(\gamma)$ est définie modulo 2π . Bien sûr cet exemple peut être généralisé et le transport parallèle peut être effectué sur un espace \mathcal{M} de dimension n , pour lequel l'espace tangent $T_{\gamma(0)}\mathcal{M}$ est également de dimension n . L'holonomie correspond toujours à une rotation dans cet espace tangent de dimension n et donc $h(\gamma) \in SO(n)$. Il faut alors plus qu'un angle pour caractériser l'holonomie. Enfin, nous pouvons préciser que l'holonomie $h(\gamma)$ dépend évidemment du chemin γ mais est indépendante de la paramétrisation choisie, du point initial $x_{initial} \in \gamma$ et du vecteur initial $v_{initial}$. Attention cette interprétation de l'holonomie comme élément de $SO(n)$ n'est pas générique et est valable lorsque la variété considérée est riemannienne et la connexion celle de Levi-Civita.

Le "lissage" (*smearing*) des densités de triades définies Eq.(1.45) s'effectue avec la même idée. Or ces dernières étant des 2-formes (ce sont des tenseurs antisymétriques) leur intégration doit être effectuée sur une 2-surface $S \in \Sigma_t$. Si l'on note n_a la normale à S , cette intégrale s'écrit :

$$F_i(S) = \int_S d^2\sigma n_a E_i^a. \quad (1.68)$$

La quantité $F_i(S)$ correspond au **flux de densités de triades** à travers la surface S .

Holonomies de la connexion SAB $h_\gamma[A]$ et flux de densité de triades $F_i^S[E]$ constituent les variables canoniques qui vont être utilisées lors de la quantification.

Remarque : L'utilisation d'une holonomie comme variable de quantification semble conservatrice car s'intéresser à la circulation d'un vecteur le long d'un chemin fermé donne déjà une mesure de la courbure en relativité générale et est une manière de définir le tenseur de Riemann. De plus, le théorème de Giles [21] stipule que toute l'information invariante de jauge contenue dans la connexion peut être ré-obtenue en calculant la trace des holonomies associées à tous les contours fermés γ possibles sur la 3-surface Σ_t . Autrement dit, il est possible d'utiliser les holonomies comme base pour toute fonction de la connexion SAB. Or la fonctionnelle d'onde $\Psi[A]$ est justement fonction de cette connexion et peut donc être décomposée sur cette base des holonomies, i.e

$$\Psi[A] = \sum_\gamma \Psi[\gamma] h_\gamma[A]. \quad (1.69)$$

Cette représentation est appelée **représentation des boucles** de la fonctionnelle d'onde.

1.2.3 Quid du contenu en matière ?

Faisons juste un petit aparté car jusqu'ici il n'a été fait nulle part mention du contenu en matière. La nature de celui-ci doit être supposée indépendamment et seul son couplage au champ gravitationnel va influencer la déformation de l'espace-temps. Lorsque nous aborderons par la suite le pendant cosmologique de la LQG, dénotée cosmologie quantique à boucles (ou LQC pour Loop Quantum Cosmology en anglais), nous supposerons en premier lieu que le contenu en matière de l'univers est donné par l'inflaton, d'action

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right). \quad (1.70)$$

L'ajout d'un tel contenu en matière va générer des contributions aux différentes contraintes de difféomorphisme $\mathcal{D}_m[N^a]$ et scalaire $C_m[N]$, qui s'exprimeront en fonction du champ φ et de son moment conjugué π . Nous reviendrons sur l'impact du contenu en matière dans le chapitre suivant dédié à la LQC, aussi nous ne nous attarderons pas plus sur ce point ici.

Notons qu'il est cependant tout à fait possible de définir d'autres champs comme contenu en matière [22].

1.3 La quantification

La procédure complexe de quantification de la théorie n'étant pas au centre des études menées lors de cette thèse, celle-ci n'est expliquée ici que dans les grandes lignes. Un lecteur désireux d'en apprendre plus pourra se référer aux ouvrages [20, 23, 24, 25, 26].

1.3.1 La procédure de Dirac

La procédure de quantification utilisée en gravité quantique à boucles est basée sur le programme dit "de Dirac" qui s'applique ici au système classique avant la résolution des contraintes. Il peut être divisé en trois étapes :

- i) Promotion des variables de l'espace des phases au rang d'opérateurs satisfaisant les relations de commutation $[\cdot, \cdot] = i\hbar \{\cdot, \cdot\}$ et agissant sur un espace de Hilbert dit **cinématique** \mathcal{H}_{cin} .
- ii) Promotion des contraintes au rang d'opérateurs agissant sur \mathcal{H}_{cin} .
- iii) Caractérisation de l'espace de solutions des contraintes, appelé espace **physique**, \mathcal{H}_{phys} .

Cette procédure doit ensuite être complétée par une définition non ambiguë d'un produit scalaire sur \mathcal{H}_{phys} et une interprétation physique des observables quantiques.

1.3.2 Application à l'écriture en termes des variables d'Ashtekar de la relativité générale

Commençons par promouvoir les variables d'Ashtekar au rang d'opérateurs agissant sur un espace de fonctionnelles $\Psi(A)$. Chaque coefficient de la connexion d'Ashtekar est associé à un opérateur multiplicatif

$$\hat{A}_a^i \Psi(A) = A_a^i \Psi(A) \quad (1.71)$$

et les densités de triades sont associées à des dérivées fonctionnelles

$$\hat{E}_i^a \Psi(A) = -i\kappa\gamma \frac{\delta}{\delta A_a^i} \Psi(A) . \quad (1.72)$$

Ces opérateurs sont liés par les relations de commutation

$$\left[\hat{A}_a^i(\vec{x}), \hat{E}_j^b(\vec{y}) \right] = i\hbar\kappa\gamma \delta_b^a \delta_j^i \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (1.73)$$

Rappelons que l'utilisation des variables d'Ashtekar fait de la relativité générale une théorie de jauge SU(2) contrainte par les trois ensembles de contraintes suivants :

- i) $\mathcal{G}_j = 0$: Les contraintes de Gauss qui traduisent l'invariance des triades sous application d'éléments de SU(2).
- ii) $\mathcal{D}_a = 0$: Les contraintes de difféomorphisme qui rétablissent l'invariance sous difféomorphismes spatiaux. On préfère parfois parler simplement des contraintes de moments $C_a = 0$ dont, rappelons le, la combinaison avec les contraintes de Gauss donnée Eq.(1.63) donne les contraintes de difféomorphisme.
- iii) $C = 0$: La contrainte scalaire liée à l'invariance sous reparamétrisation de la coordonnée temporelle.

Ces contraintes doivent être maintenant promues au rang d'opérateurs et il faudra étudier quels sont les états annihilés par leur action. Dit autrement, les états physiques de la théorie quantique seront les états qui appartiennent au noyau de chaque opérateur de contrainte. La construction de l'espace de Hilbert des solutions physique va alors suivre la procédure suivante :

$$\mathcal{H}_{cin} \xrightarrow{\hat{\mathcal{G}}_j \Psi=0} \mathcal{H}_{cin}^0 \xrightarrow{\hat{C}_a \Psi=0} \mathcal{H}_{diff} \xrightarrow{\hat{C} \Psi=0} \mathcal{H}_{phys} . \quad (1.74)$$

\mathcal{H}_{cin} désigne l'espace de Hilbert cinématique de départ, $\mathcal{H}_{\text{cin}}^0$ correspond à ce que l'on appelle l'espace de Hilbert cinématique invariant de jauge et $\mathcal{H}_{\text{diff}}$ à l'espace de Hilbert sous difféomorphismes spatiaux. Enfin, la résolution de la contrainte scalaire aboutira à la caractérisation de l'espace de Hilbert des solutions physiques.

L'espace de Hilbert cinématique \mathcal{H}_{cin}

La difficulté à définir une mesure (et donc un produit scalaire) pour l'espace des 3-métriques qui apparaissait dans l'approche de Wheeler-de Witt est résolue en considérant les holonomies de la connexion comme variables de quantification, variables pour lesquelles il existe une mesure correctement définie : la mesure de Haar [27].

Considérons un ensemble de chemins $l \in \Sigma_t$ que nous appelons **liens** et qui peuvent se rencontrer pour former ce que l'on appelle des **nœuds**. Ces liens et ces nœuds définissent ce que l'on appelle un **graphe** Γ , voir Fig.1.2.

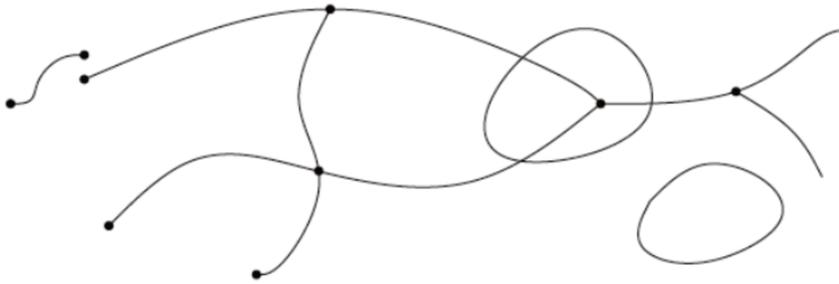


FIGURE 1.2 – Ensemble de liens et de nœuds correspondant à un graphe Γ .

Pour construire un espace de Hilbert \mathcal{H}_Γ à partir d'un graphe $\Gamma \in \Sigma_t$ il faut considérer une fonctionnelle associée au couple (Γ, g) où g est une fonction $g : SU(2)^L \rightarrow \mathbb{C}$ et où L correspond au nombre de liens du graphe Γ , telle que

$$\Psi_{(\Gamma, g)} := g(h_{l_1}[A], \dots, h_{l_L}[A]) . \quad (1.75)$$

On parle alors de fonctionnelle cylindrique. L'espace de ces fonctionnelles formera un espace de Hilbert \mathcal{H}_Γ s'il est muni d'un produit scalaire, ici construit à partir de la mesure de Haar. Cette mesure permet de définir l'intégrale de fonctions sur un groupe compact.

L'ensemble des espaces de Hilbert \mathcal{H}_Γ associés aux différents graphes sur la 3-surface Σ_t permet alors la construction de l'espace de Hilbert cinématique comme

$$\mathcal{H}_{\text{cin}} := \bigoplus_{\Gamma \in \Sigma_t} \mathcal{H}_\Gamma . \quad (1.76)$$

Résolution des contraintes

La résolution des contraintes est une démarche compliquée qui va bien au delà de la portée de ce manuscrit. Nous ne rentrerons donc pas plus dans les détails ici et renvoyons le lecteur vers l'excellente revue [4].

Réseaux de spins

La théorie admet une représentation en termes de **réseaux de spins**. À chaque lien l d'un graphe Γ est associée une représentation de l'algèbre $su(2)$ labellisée suivant sa dimension par un certain **spin**. Le choix d'une représentation particulière revient simplement au choix d'une certaine forme des matrices associées aux générateurs de l'algèbre. Si plusieurs liens de spins différents se rencontrent en un nœud il faut alors introduire un nouvel objet, appelé **intertwiner**, pour "assembler" ces représentations entre elles et évaluer leur action au niveau du nœud. Ces objets jouent donc un rôle analogue aux coefficients de Clebsch-Gordan qui interviennent dans la composition de représentations irréductibles de groupes, comme lorsque l'on considère par exemple le couplage entre différents moments cinétiques. Un graphe avec des liens "colorés" labellisés par des spins et des nœuds au niveau desquels agissent des intertwiners forme un **réseau de spins**, dont un exemple est représenté Fig.1.3.

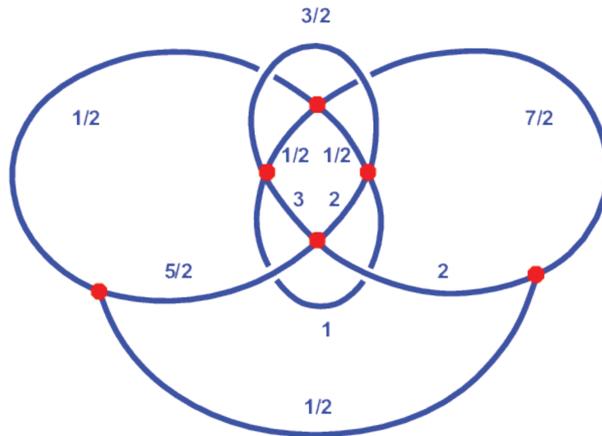


FIGURE 1.3 – Exemple de réseau de spin.

1.3.3 Quantification de la géométrie

La relativité générale lie la géométrie locale de l'espace-temps au champ gravitationnel. Quantifier le champ gravitationnel tel que nous le faisons doit donc naturellement aboutir à des observables de nature géométrique.

Opérateur d'aire

L'observable géométrique la plus simple qu'il est possible de construire en gravité quantique à boucles est donnée par l'**opérateur d'aire**. De manière classique l'aire associée à une surface S peut être formulée en fonction de sa normale n_a et des densités de triades :

$$A(S) = \int_S d\sigma_1 d\sigma_2 \sqrt{E_i^a E_b^j \delta^{ij} n_a n_b} . \tag{1.77}$$

Discretisons désormais la surface S à l'aide de N cellules, chacune perforée par un lien du graphe Γ . L'aire précédente s'écrit alors

$$A(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_N(S) \text{ où } A_N(S) = \sum_{I=1}^N \sqrt{F_i(S_I) F^i(S_I)} , \tag{1.78}$$

$F_i(S_I)$ étant le flux de densités de triades à travers la surface S_I . Si l'on remplace les flux $F_i(S_I)$ par les opérateurs quantiques associés $\hat{F}_i(S_I)$ nous obtenons

$$\hat{A}(S)\Psi_\Gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{I=1}^N \sqrt{\hat{F}_i(S_I)\hat{F}^i(S_I)}\Psi_\Gamma = 8\pi\gamma\ell_{\text{Pl}}^2 \sum_p \sqrt{j_p(j_p + 1)}\Psi_\Gamma, \quad (1.79)$$

où Ψ_Γ est un état de type réseau de spin, p correspond au nombre de perforations de S causées par les liens du graphe Γ , les j_p sont des demi entiers et où nous avons réintroduit les constantes physiques. La deuxième égalité est démontrée dans [4].

Nous venons de mettre en avant l'un des résultats principaux de la gravité quantique à boucles : le spectre de l'opérateur d'aire possède des valeurs discrètes ! Ces quantas d'aire sont portés par les liens du graphe.

Bien que la valeur 0 fasse partie du spectre de l'opérateur d'aire le spin d'un lien ne peut être nul et ce pour permettre la construction de \mathcal{H}_{cin} (la raison détaillée est donnée [20]). Il existe donc une aire minimale en gravité quantique à boucles, donnée par la première valeur propre non nulle de l'opérateur d'aire, ou de manière équivalente par l'écart d'aire minimum entre deux valeurs propres : $\Delta A_{\text{min}} = \Delta\ell_{\text{Pl}}^2$, où $\Delta = 4\pi\gamma\sqrt{3}$ ¹⁷.

Notons également que l'opérateur d'aire agit de manière diagonale sur les états de type réseaux de spin. Ces derniers sont donc vecteurs propres de cet opérateur.

Remarque : L'existence de longueurs ou d'aires discrètes semble nécessairement briser l'invariance de Lorentz au sens usuel du terme. Mais les choses ne sont pas si simples si l'on considère désormais que longueurs et aires doivent être interprétées comme des valeurs propres d'opérateurs quantiques. Un observateur subissant un "boost" de Lorentz peut voir le même spectre de valeurs propres mais pas la même valeur moyenne ("expectation value"). En ce sens, l'invariance de Lorentz pourrait être réconciliée avec les principes de base de la gravitation quantique [20].

L'expression du spectre de l'opérateur d'aire donnée Eq.(1.79) fait intervenir le paramètre de Barbero-Immirzi γ . Ce paramètre de faible importance dans la théorie classique joue donc ici un rôle majeur, il intervient directement dans l'expression du spectre de l'observable géométrique la plus élémentaire de la théorie et notamment dans sa première valeur minimale non nulle qui, comme nous le verrons, sera de grande importance tant en cosmologie¹⁸ qu'en physique des trous noirs¹⁹.

Opérateur de volume

Un autre opérateur qu'il est possible de construire est l'**opérateur de volume**. Nous nous intéressons ici à celui proposé par C. Rovelli et L. Smolin [28]. Comme pour l'opérateur d'aire, commençons par exprimer le volume d'une région tri-dimensionnelle, notée Ω , en fonction des densités de triades :

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} d^3x \sqrt{|\det E|}. \quad (1.80)$$

17. Celui-ci se révélera d'importance pour la phénoménologie de la théorie, comme nous le verrons dans la suite de ce manuscrit.

18. Car elle entrera dans l'expression de la densité d'énergie maximale du contenu en matière de l'univers.

19. Elle interviendra ce coup-ci dans l'expression de l'entropie d'un trou noir.

Nous divisons ensuite Ω en petits volumes tri-dimensionnels de telle sorte que chaque cellule contienne au moins un nœud du graphe. L'intégrale dans l'équation précédente peut alors être remplacée par une somme sur les différents sous-volumes. Comme précédemment le flux de densités de triades est remplacé par son opérateur associé, de sorte que :

$$\hat{V}(\Omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_I \sqrt{\frac{1}{48} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} |\epsilon_{ijk} \hat{F}^i(S_I^\alpha) \hat{F}^j(S_I^\beta) \hat{F}^k(S_I^\gamma)|} \quad (1.81)$$

où ϵ correspond à la longueur des cellules tri-dimensionnelles.

Ainsi, pour un unique nœud dénoté par n ,

$$\hat{v}_n = \sqrt{\frac{1}{48} \sum_{\alpha, \beta, \gamma} |\epsilon_{ijk} \hat{F}^i(S_n^\alpha) \hat{F}^j(S_n^\beta) \hat{F}^k(S_n^\gamma)|} \quad (1.82)$$

La présence du terme ϵ_{ijk} rend l'action de cet opérateur non trivialement nulle uniquement au niveau des nœuds car partout ailleurs il n'y a au plus que deux flux associés aux liens : celui de la source et celui de la cible.

Le spectre de cet opérateur, non donné ici car bien plus complexe que celui de l'opérateur d'aire et non diagonal dans la base des réseaux de spin, est de manière analogue à celui de l'opérateur d'aire, proportionnel au volume de Planck, *i.e* à l_{pl}^3 .

Remarque : De manière surprenante (du moins au premier abord) des ambiguïtés spécifiques apparaissent dans la définition de l'opérateur de longueur en LQG, voir [29] pour les aspects formels et [30] pour quelques remarques physiques. La question de savoir si cette difficulté est purement mathématique ou conceptuelle est encore ouverte. Je terminerais cette remarque en citant John Baez qui considère qu'il y a une raison profonde à ce que les aires soient plus fondamentales que les distances en LQG : "*Cette théorie est fondée sur la quantification du moment angulaire d'un élément de surface orienté.*"

1.3.4 Dynamique de l'espace-temps

Jusqu'ici nous n'avons toujours pas précisé la dynamique de la théorie et la manière dont cette structure quantique de l'espace-temps donnée par les réseaux de spin évolue.

À cause du principe d'incertitude de Heisenberg la notion de trajectoire $x(t)$ disparaît en mécanique quantique. L'évolution temporelle d'un système quantique, mettons des particules, ne donne pas des trajectoires précises pour ces dernières, mais informe sur l'évolution de l'amplitude de probabilité $\Psi(x, t)$ donnée par la fonction d'onde. L'équivalent ici dans le secteur gravitationnel est donné par une amplitude de transition entre deux états configurations géométriques différentes de l'espace-temps.

La dynamique de la structure de l'espace-temps va être donnée par la résolution de la dernière contrainte à implémenter, la contrainte scalaire $C = 0$. Il se trouve qu'à cause de la grande complexité de l'expression de la contrainte scalaire cette étape est en fait extrêmement compliquée. Une fois de plus, nous ne rentrerons pas ici dans les détails mais nous pouvons référer le lecteur à [31, 32]. Stipulons tout de même que même si un nombre infini de solutions à la contrainte scalaire sont connues le spectre de \hat{C} et l'espace physique $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ ne le sont pas. Ceci a amené au développement de deux lignes de recherche : la première s'intitule "*Master Constraint Program*" et consiste en l'implémentation simultanée des contraintes de difféomorphisme et scalaire. La deuxième est appelée "*Spinfoam*"

approach", ou approche des **mousses de spin**. Elle délaisse l'aspect canonique de l'approche présentée jusqu'ici pour se rapprocher d'une vision covariante. À l'aide d'intégrales de chemin elle permet le calcul d'amplitudes de transition entre différents états de réseaux de spin. La dynamique détaillée des états géométriques a été formalisée par Jonathan Engle, Etera Livine, Roberto Pereira et Carlo Rovelli dans [33].

1.4 Sur la testabilité de la théorie

Dans ce chapitre nous avons exposé les bases d'un cadre théorique permettant une quantification non perturbative de la relativité générale. Toute théorie physique se devant évidemment d'avoir des prédictions pouvant être confrontées à des expériences, la prochaine question qui se pose est donc de savoir comment mettre cette dernière à l'épreuve.

Nous avons vu que l'application de la procédure de quantification de Dirac à l'écriture en termes des variables d'Ashtekar (ou plus précisément de leur version lissée) de la relativité générale amène à une structure discrète de l'espace-temps modélisée par des réseaux de spins. Mais cette nouvelle structure n'est observable qu'à des échelles de longueur très petites, typiquement de l'ordre de la **longueur de Planck** qui vaut, rappelons le, $\ell_{Pl} \simeq 10^{-35}m$. L'échelle d'énergie associée à cette longueur, nommée **énergie de Planck**, s'élève elle à $E_{Pl} \simeq 10^{19}GeV$. Ces échelles se situent hélas bien au delà de ce qu'il est actuellement possible de sonder en laboratoire. Il est raisonnable d'espérer gagner un facteur 10 tout au mieux dans les prochaines décennies sur la limite actuellement atteignable en énergie (par rapport à l'accélérateur Large Hadron Collider). Or ce qu'il nous manque pour atteindre l'échelle de Planck est un facteur 10^{15} !

Néanmoins, nous avons aussi vu que cette discrétisation de l'espace-temps entraîne également une discrétisation de différentes observables géométriques. La présence d'une valeur minimale dans le spectre de l'opérateur d'aire va permettre à la théorie de résoudre des divergences ultraviolettes apparaissant en relativité générale, telle que la singularité initiale du Big Bang ou celle se situant au cœur des trous noirs. Cette prédiction va donc avoir de fortes répercussions en cosmologie ou en physique des trous noirs. La construction de modèles cosmologiques ou de trous noirs basés sur les idées de la gravité quantique à boucles, ainsi que leurs phénoménologies associées, seront au cœur de cette thèse. Ces modèles, correspondant à des applications de la théorie mère à des systèmes possédant certaines symétries allégeant considérablement les calculs, sont à ce jour parmi les moyens les plus prometteurs pour tester et contraindre une telle théorie de gravité quantique.

J'ai entendu maintes fois dire que la quête de la gravité quantique, bien que souvent considérée comme l'un des graals de la physique, est sans espoir. Il me paraît clair que la testabilité de théories s'y employant est un sujet qui fait débat dans la communauté scientifique. Toutefois, je ne peux que rejoindre l'avis d'Aurélien (Barrau) lorsqu'il dit que, bien que la gravité quantique ait en effet longtemps été pénalisée par son absence de lien avec les observations, elle entre désormais dans le champ de la science observationnelle. Ceci notamment grâce à la nouvelle génération d'outils astronomiques de haute précision que sont par exemple les interféromètres LIGO-Virgo, dont les résultats vont énormément amener à la physique des objets compacts, ou des projets tels que BICEP ou POLARBEAR (désormais regroupés dans la collaboration Stage4) qui visent, eux, à découvrir le mode B de polarisation des photons du fond diffus cosmologique sur lequel nous reviendrons dans le prochain chapitre.

Au-delà de ces perspectives il n'est pas exclu que des effets de gravitation quantique puissent se manifester à basse énergie. En théorie des cordes, par exemple, il est possible d'utiliser les mesures fines de l'accélération contemporaine de l'Univers pour exclure de larges domaines du paysage des paramètres. En gravitation quantique à boucles (nous y reviendrons) il n'est pas impossible que des signaux radios observés en astronomie soient dûs à des effets de géométrie quantique. De plus, des liens forts semblent émerger entre les caractéristiques fines de l'inflation (conditions initiales, nombres d'*e-folds*, forme du potentiel effectif . . .) et la théorie sous-jacente de gravitation quantique, même si l'échelle d'énergie de l'inflation est très inférieure à l'énergie de Planck. Plusieurs idées émergent pour lier la constante cosmologique à la dimension quantique du champ de gravité. Enfin, l'effet granulaire de l'espace pourrait se manifester dans l'étude des temps d'arrivée des photons (et neutrinos) émanants de sursaut gamma, la petitesse de l'effet étant compensée par les gigantesques distances en jeu. Les directions dans lesquelles une phénoménologie de la gravitation quantique pourrait se manifester sont donc nombreuses.

CHAPITRE 2

Cosmologie

Sommaire

2.1	Modèle standard de la cosmologie	48
2.2	Le paradigme inflationnaire	55
2.3	Théorie des perturbations cosmologiques	59
2.4	La cosmologie en tant que théorie stochastique	63
2.5	Spectres de puissance primordiaux et prédictions de l'inflation	66
2.6	Contraintes observationnelles actuelles sur l'inflation et les spectres de puissance primordiaux	74

Il existe de très nombreuses revues et livres de grande qualité traitant de la cosmologie. La rédaction de ce chapitre fut inspirée entre autres par les travaux de D.Baumann [34, 35], de P. Peter [36], de J. Lesgourgues [37] et de V. Mukhanov [38].

La cosmologie, ou étude de l'Univers, est presque aussi ancienne que la pensée elle-même. Elle n'a néanmoins pris la forme d'une science au sens orthodoxe du terme qu'au début du vingtième siècle, grâce à l'avènement simultané de la théorie de la relativité générale et de techniques d'observation novatrices. À la fin du vingtième siècle, une seconde révolution a vu le jour, faisant entrer la cosmologie dans une ère de précision. Celle-ci est en grande partie due à la mesure du rayonnement cosmologique fossile par COBE (puis par WMAP et Planck). Il est remarquable de constater qu'en dépit de spécificités qui semblaient insurmontables, la cosmologie est devenue crédible non pas à la suite d'avancées conceptuelles radicales mais parce que le foisonnement observationnel a permis de rendre l'édifice stable et prédictif. Dans une certaine mesure, l'histoire de l'Univers est mieux connue que celle de notre propre planète. Mais ceci n'est que partiellement paradoxal : il n'est pas rare qu'un système considéré dans sa globalité soit plus simple que chacune de ses parties scrutée de près. La simplicité du "système-Univers" vient de sa haute symétrie à grande échelle, bien que l'essentiel des études contemporaines se focalisent précisément sur les écarts par rapport à cette symétrie quasi-maximale (homogénéité et isotropie). Le modèle standard de la cosmologie se trouve aujourd'hui dans une position comparable à celui de la physique des particules : il fonctionne remarquablement bien. Il est pourtant certain qu'il ne peut être définitif. Les problèmes de la matière noire, de l'énergie

noire et de la dissymétrie baryonique globale imposent, a minima, des infléchissements. Mais, plus fondamentalement encore, la singularité primordiale – le Big Bang *stricto sensu* – montre que son origine demeure vraisemblablement encore hors d'accès.

Plus concrètement le calcul de spectres de puissance primordiaux dans différents modèles de cosmologie quantique a constitué la majeure partie de mon travail de thèse. Ce chapitre a pour but d'introduire le lecteur aux principales notions nécessaires à la compréhension de ce que sont ces spectres et du rôle qu'ils tiennent dans la cosmologie actuelle. Ces pré-requis comportent notamment la théorie des perturbations cosmologiques, la notion de spectre de puissance et la physique de l'inflation à un champ. Nous commencerons ce chapitre section 2.1 par une très brève vue d'ensemble de ce qu'est la cosmologie en tant qu'étude de notre Univers décrit par un espace-temps homogène. Nous soulèverons ensuite section 2.2 quelques problèmes du modèle standard de la cosmologie et verrons comment le paradigme inflationnaire permet leur résolution. Nous y décrirons également de manière sommaire le modèle le plus répandu d'inflation à un champ. Nous introduirons ensuite le lecteur à la théorie des perturbations cosmologiques section 2.3. Nous aborderons section 2.4 la cosmologie en tant que théorie stochastique et y introduirons la notion de spectre de puissance. Enfin nous verrons section 2.5 quelles sont les conditions initiales sur ces spectres prédites par l'inflation et quelles sont les contraintes observationnelles associées 2.6.

2.1 Modèle standard de la cosmologie

2.1.1 Équations de Friedmann et paramètres cosmologiques

Les équations de Friedmann

La distribution des galaxies et des structures cosmologiques nous entourant est observée isotrope aux grandes échelles ($\sim 100 \text{ Mpc}$). Cette observation, combinée avec le principe Copernicien¹, amène au **principe cosmologique** : *l'univers est homogène et isotrope aux grandes échelles*. Il constitue la pierre fondatrice du modèle standard de la cosmologie.

L'Univers serait donc hautement symétrique, ce qui, comme toujours en physique, simplifie grandement la description formelle du système. Une fois le contenu en matière établi, il est alors possible de résoudre les équations d'Einstein afin de déterminer l'évolution passée, présente et future de l'Univers. La propriété d'homogénéité incite à décomposer l'espace-temps en un feuilletage d'hypersurfaces spatiales 3-dimensionnelles², toutes respectant les symétries d'isotropie et d'homogénéité du principe cosmologique, ordonnées suivant un temps : le temps cosmologique.

La métrique qui décrit cet espace-temps est donnée par la solution dite de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (**FLRW**), aux équations d'Einstein données en Eq.(1.5). Elle s'écrit

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right). \quad (2.1)$$

La variable t correspond ici au temps cosmique et la quantité $a(t)r$ joue le rôle de rayon dans le système de coordonnées considéré. Cette métrique est totalement décrite par une fonction du temps : le facteur d'échelle de l'Univers $a(t)$, ainsi qu'un paramètre k . Ce dernier caractérise la courbure spatiale

1. Principe qui stipule que la Terre n'occupe pas une position privilégiée dans l'Univers.

2. Le feuilletage peut ici être effectué de manière non ambiguë, ce qui ne sera plus le cas lorsque des inhomogénéités seront incorporées à la théorie.

globale de l'Univers, les configurations $k = +1, 0, -1$ correspondant respectivement à un Univers ouvert, plat ou fermé. La présence du terme $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ découle de l'hypothèse d'isotropie de l'espace.

L'évolution temporelle du facteur d'échelle s'obtient en considérant que le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$ des équations d'Einstein décrit un fluide parfait homogène isotrope, *i.e* :

$$T^{\mu}_{\nu} = (\rho + P)u^{\mu}u_{\nu} - P\delta^{\mu}_{\nu}. \quad (2.2)$$

Ici ρ correspond à la densité d'énergie (ou masse volumique si la vitesse de la lumière c est rétablie dans les équations) du contenu en matière de l'univers et P à sa pression. Le quadrivecteur u^{μ} décrit quant-à lui le champ de vitesse du fluide.

La résolution des équations d'Einstein amène alors aux **équations de Friedmann**, équations maîtresses de la cosmologie :

$$H(t)^2 = \left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{\kappa}{3}\rho(t) + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a(t)^2} \quad (2.3)$$

et

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{\kappa}{6}(\rho(t) + 3P(t)) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (2.4)$$

où rappelons-le, $\kappa = 8\pi$. Le paramètre $H(t)$ est appelé **paramètre de Hubble**. Il représente le taux d'expansion de l'Univers à l'instant t . Sa valeur actuelle telle que mesurée par le satellite Planck [39] vaut $H_0 = (67.4 \pm 0.5) \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ ³.

Remarque : Pour aboutir à ces équations le terme associé à la constante cosmologique $\Lambda g^{\mu\nu}$, initialement introduit par Einstein dans ses équations pour générer un Univers statique, a été placé à droite de l'égalité dans le jeu d'équations Eq.(1.5). Effectuer cette manipulation triviale sur le plan mathématique n'est pas vide de sens physique : elle revient à interpréter sa contribution au tenseur énergie-impulsion comme le contenu énergétique du vide. Ce dernier est alors interprété comme un fluide de pression négative d'équation d'état $w(t) = P(t)/\rho(t) = -1$.

Remarque : Les mesures locales du paramètre de Hubble effectuées à partir de Céphéïdes et de supernovæ suggèrent une valeur de H_0 plus élevée et en désaccord avec la valeur mesurée par Planck, obtenue à partir du fond diffus cosmologique et présentée ci-dessus [40, 41]. Cette contradiction entre les données n'est pour le moment explicable par aucun effet systématique de mesure [42, 43, 44] et la possibilité que cette tension soit une trace de nouvelle physique au delà du modèle standard de la cosmologie gagne en importance [45, 46]. De nombreuses pistes sont actuellement explorées : "phantom-like dark energy" [47], "vacuum phase transition" [48], "interacting dark energy" [49], composante supplémentaire à la densité d'énergie sous forme de rayonnement [41] ou encore présence d'une "early dark energy" [50] qui se comporterait comme une constante cosmologique et impliquerait une phase d'accélération de l'expansion supplémentaire à la phase d'inflation dans l'univers primordial. Malgré la prolifération de modèles une solution théorique satisfaisante à ce problème fait néanmoins toujours défaut.

3. Les barres d'erreurs des données Planck présentées dans ce chapitre correspondent à un intervalle de confiance de 68%.

Intéressons-nous maintenant à l'équation de Poisson pour un fluide relativiste :

$$\nabla^2\Phi = \frac{\kappa}{2}(\rho + 3P) . \quad (2.5)$$

Elle souligne que la présence d'une constante cosmologique Λ entraîne celle d'un potentiel Φ répulsif aux grandes échelles. Il est de convention que cette première contribue à la densité d'énergie totale du contenu énergétique de l'univers comme $\rho_\Lambda = \Lambda/\kappa$. Cet apport à la densité d'énergie totale, appelé **énergie noire**, est vraisemblablement responsable de l'accélération observée de l'expansion de l'Univers [51, 52]. Déterminer sa nature exacte constitue l'un des enjeux majeurs de la cosmologie moderne. De grandes expériences telles que le "*Large Synoptic Survey Telescope*"[53, 54] au sol (dont la prise de données devrait débuter d'ici 2022) ou le satellite Euclid [55] (lancement prévu lui aussi pour 2022) devraient permettre, en cartographiant de grandes régions du ciel (l'entièreté dans le cas d'Euclid), d'apporter des éléments de réponse à cette énigme d'ici peu. À l'aide d'une approche multi-sondes (oscillations acoustiques de baryons, cisaillement cosmique et amas de galaxies) elles tenteront de déterminer si (et comment) l'équation d'état de l'énergie noire w dépend du temps, information cruciale pour discriminer entre les différents modèles.

Le contenu en énergie de l'Univers

Il est courant de ré-exprimer la première des deux équations de Friedmann Eq.(2.3) à l'aide d'une densité critique, représentant celle d'un Univers plat, définie comme

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H_0^2}{\kappa} = 1.9 \times 10^{-29} h^2 \text{g.cm}^{-3} . \quad (2.6)$$

Nous avons ici introduit un paramètre adimensionné h , appelé paramètre de Hubble réduit et défini tel que

$$H_0 \equiv 100h \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1} . \quad (2.7)$$

La mesure de H_0 donnée dans [39] amène à $h = 0.674$ (aux incertitudes de mesures près).

Définissons maintenant à l'aide de la densité critique donnée Eq.(2.6) d'autres paramètres adimensionnés :

$$\Omega_I(t) = \frac{\rho_I(t)}{\rho_{\text{crit}}} . \quad (2.8)$$

Ce sont les **paramètres cosmologiques** utilisés pour décrire le contenu en énergie de l'Univers.

Avant de donner leurs valeurs notons que la densité d'énergie totale associée à de la matière (au sens large, par opposition à celle associée à de la courbure) peut se décomposer comme

$$\rho_{\text{tot}} = \rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda, \quad (2.9)$$

où les indices m et r font respectivement référence à de la matière non relativiste (dite froide) caractérisée par $P \ll \rho$ pour l'un et à de la matière relativiste (ou rayonnement) pour l'autre. La densité d'énergie associée à de la matière non relativiste peut de plus être décomposée en une composante baryonique ρ_b et une composante de matière sombre froide ρ_{CDM} . Déterminer la nature de cette matière sombre est probablement la problématique physique qui mobilise le plus d'efforts à l'heure actuelle (en physique fondamentale), voir par exemple [56, 57, 58, 59] pour des revues.

La meilleure mesure des paramètres Eq.(2.8) est obtenue en combinant les données Planck avec des études portant sur les oscillations acoustiques de baryons⁴ [39] :

$$\begin{aligned}
 \Omega_m &= 0.3111 \pm 0.0056 , \\
 \Omega_\Lambda &= 0.6889 \pm 0.0056 , \\
 \Omega_r h^2 &\simeq 2.47 \times 10^{-5} , \\
 \Omega_k &= 1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_\Lambda = 0.001 \pm 0.002 , \\
 \Omega_b h^2 &= 0.02242 \pm 0.00014 , \\
 \Omega_{CDM} h^2 &= 0.11933 \pm 0.00091 .
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Nous voyons ici que la composante dominante dans le contenu en énergie actuel est celle associée à l'énergie noire et qu'environ 84% de la matière est aujourd'hui sous forme de matière non baryonique (ou noire) froide. Ces résultats nous montrent également que l'univers observé est remarquablement plat, la mesure de sa courbure spatiale globale reste à l'heure actuelle encore compatible avec 0. Nous allons ci-après revenir sur cette valeur en évoquant le problème de la platitude, bien connu des cosmologistes.

Cette représentation du contenu d'un Univers de courbure nulle est dénommée Λ CDM car elle correspond à un contenu en énergie Λ -Dominated with Cold Dark Matter.

L'équation de continuité

Introduisons maintenant une autre équation d'importance en cosmologie : l'équation de conservation de la densité d'énergie (ou équation de continuité).

Si le contenu en matière de l'Univers (supposé homogène) est donné par un fluide qui ne dissipe pas, son évolution peut être considérée comme un processus adiabatique. De plus, le fluide étant modélisé par un gaz parfait, la variation de son énergie interne U , obtenue à l'aide des deux premiers principes de la thermodynamique, est donnée par $dU = -PdV$. L'énergie interne d'un volume d'Univers de rayon unité étant $U = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho c^2$, nous obtenons :

$$dU = -PdV \Leftrightarrow \frac{\kappa}{2} a^2 \rho da + \frac{\kappa}{6} a^3 d\rho = -\frac{\kappa}{2} a^2 P da .
 \tag{2.11}$$

Nous en déduisons l'équation de conservation de la densité d'énergie du fluide :

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P) .
 \tag{2.12}$$

Si le fluide est caractérisé par l'équation d'état $w = P/\rho$ cette équation admet comme solution

$$\rho(t) \propto a(t)^{-3(1+w)} .
 \tag{2.13}$$

La matière froide (ou matière non relativiste) caractérisée par $w = 0$ se dilue donc comme $\rho_m(t) \propto a(t)^{-3}$; le rayonnement, caractérisé par $w = 1/3$, comme $\rho_r(t) \propto a(t)^{-4}$ et la densité d'énergie associée à une constante cosmologique caractérisée par $w = -1$ reste bien constante au cours du temps.

4. La densité d'énergie liée au rayonnement est dominée par l'énergie du fond diffus cosmologique (dont nous parlerons ci-après). Ainsi l'origine de la valeur de Ω_r ici présentée diffère. Elle est déduite de la mesure de la température $T_{\text{CMB}} = 2.7255 \pm 0.0006\text{K}$ par l'instrument FIRAS à bord du satellite COBE [60].

Pourquoi le rayonnement ne se dilue-t-il pas comme de la matière froide ? Cette question nous permet d'introduire ici une notion fondamentale en cosmologie, celle de **redshift**⁵. Il faut savoir que tout rayonnement se propageant dans un espace en expansion subit un décalage vers le rouge, d'où le terme "redshift". Noté z , il est défini par

$$1 + z(t) = \frac{a(t_0)}{a(t)}, \quad (2.14)$$

où $a(t)$ correspond au facteur d'échelle au moment de l'émission du photon considéré et $a(t_0)$ au moment de la réception. L'évolution en $a(t)^{-3}$ de la densité d'énergie de matière froide (ou non relativiste) traduit sa dilution dans le volume tri-dimensionnel en expansion. La densité d'énergie d'un rayonnement varie, en revanche, non seulement du fait de cette dilution mais également du fait de l'étirement des longueurs d'ondes modélisé par le *redshift*, d'où l'évolution en $a(t)^{-4}$.

2.1.2 Le scénario du Big Bang

L'évolution de l'Univers dans ce scénario

Nous appelons scénario du Big Bang⁶ l'histoire cosmologique de notre Univers ayant comme pierres fondatrices les équations de Friedmann Eq.(2.3) et Eq.(2.4) ainsi que l'équation de continuité Eq.(2.12). Ce scénario (à distinguer donc du Big Bang lui-même, en tant qu'instant originel) décrit l'évolution d'un Univers caractérisé par le facteur d'échelle $a(t)$ qui s'expand à un taux donné par le paramètre de Hubble $H(t)$. Nous ne le décrirons ici que dans les (très) grandes lignes car je n'ai nul doute que les lecteurs de ce manuscrit sont plus qu'aguerris sur le sujet. Cette histoire de l'Univers a été retracée en détails dans de très nombreux ouvrages, [61, 62, 63, 38] pour n'en citer que quelques uns. Les grands chapitres de cette épopée peuvent être intuités à partir de l'équation (2.13).

La limite $a \rightarrow 0$ met en évidence une divergence de la densité d'énergie dans l'Univers, atteinte en un temps fini. Cette divergence, plus communément nommée **singularité**, n'est clairement pas satisfaisante d'un point de vue conceptuel. Elle correspond en fait à une prédiction des équations de Friedmann (et donc de la relativité générale) hors de leur domaine de validité. À des échelles d'énergies (ou de courbure de l'espace-temps) extrêmement élevées le relai doit être pris par une théorie de gravité quantique. C'est là la motivation première derrière des théories de cosmologie quantique telles que la cosmologie quantique à boucles introduite dans le prochain chapitre de cette thèse.

L'espace-temps et son contenu en matière seraient donc nés d'une singularité. À partir de là et sachant que $\rho_m(t) \propto a(t)^{-3}$, $\rho_r(t) \propto a(t)^{-4}$ et $\rho_\Lambda(t) = \text{cste}$, la trame globale de cette grande histoire peut alors être dessinée. L'état initial est suivi (nous reviendrons ultérieurement sur l'inflation) par une période durant laquelle l'Univers est empli d'un plasma extrêmement dense et chaud totalement dominé par le rayonnement. Puis, alors que l'Univers se dilate et se refroidit, la matière froide prend le dessus. C'est durant cette phase que vont apparaître les premières galaxies et étoiles. Finalement la contribution de la constante cosmologique (ou ce qui en tient lieu) finit par s'imposer. L'Univers actuel subit donc une phase d'expansion accélérée, initialement mise en évidence par [64].

5. Ce redshift $z(t)$ est en bijection avec le facteur d'échelle $a(t)$ (lorsqu'un choix arbitraire de normalisation a été fait), lui même en bijection avec le temps cosmologique t . Il est donc souvent utilisé en cosmologie comme indicateur de l'âge de l'Univers ou de certains évènements de l'histoire cosmologique car il se révèle alors plus pertinent que t ou $a(t)$, notamment lorsque l'on s'intéresse à l'Univers primordial.

6. Le terme de "Big Bang" fût introduit dans une émission radio de la fin des années 1940 par Fred Hoyle, pionnier de la cosmologie, afin de dénigrer ce modèle d'Univers en expansion qui gagnait en popularité et qui a le sérieux problème d'avoir comme origine une singularité.

De nombreux "événements" ont marqué cette histoire cosmologique : nous pouvons entre autre citer la création des premiers éléments légers (appelée nucléosynthèse primordiale [65]) tels que le deutérium et l'hélium⁷ ou celle des grandes structures cosmologiques. L'évènement qui va le plus nous intéresser dans cette thèse s'est déroulé lorsque la température de l'Univers a suffisamment diminué pour atteindre $T \approx 3000K$, à un redshift z proche de 1100. À partir de ce moment, électrons et protons sont capables de s'assembler pour former les premiers atomes neutres : c'est la **recombinaison**. La lumière est désormais découplée du contenu en matière. Le plasma, auparavant opaque, devient transparent et les photons s'y propagent librement en formant alors ce que l'on appelle le **fond diffus cosmologique** ("Cosmic Microwave Background" ou CMB en anglais).

Le fond diffus cosmologique : un fantastique témoin

Cette "première lumière de l'Univers" constitue le meilleur témoin du scénario du Big Bang que nous ayons. L'étude de ses propriétés permet de poser de nombreuses contraintes sur l'état de l'Univers tel qu'il était environ 380 000 ans après le Big Bang, et même bien avant. La découverte accidentelle de ce rayonnement en 1965 par Penzias et Wilson [66] leur valut le prix en Nobel en 1978 et de nombreuses études ont depuis visé à le caractériser. Parmi ces études, les mesures de l'instrument FIRAS, présent sur le satellite COBE, ont joué un rôle déterminant. Le plasma était selon le modèle standard de la cosmologie à l'équilibre thermique à l'époque de la recombinaison. Il est donc attendu que le spectre en longueur d'ondes du fond diffus suive une loi de corps noir. La très impressionnante observation d'un tel spectre d'une température $T_{CMB} = 2.725K$ par l'instrument FIRAS en 1996, montrée Fig.2.1, constitue l'un des succès majeurs du modèle du Big Bang. L'ajustement entre courbe théorique et données est exceptionnel et cette mesure est, à mon avis, l'une des plus belles de la physique.

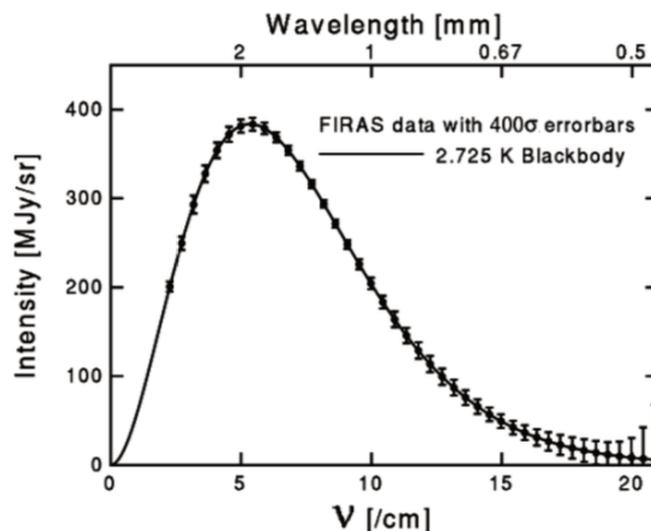


FIGURE 2.1 – Spectre électromagnétique du fond diffus cosmologique tel que mesuré par l'instrument FIRAS du satellite COBE [67]. La courbe noire correspond à une loi de corps noir de température $T_{CMB} = 2.725K$.

7. La capacité du modèle standard à décrire les abondances d'éléments légers observés actuellement dans l'univers constitue un argument fort en faveur de celui-ci, bien que quelques tensions subsistent, en particulier au niveau du Lithium-7.

Les photons du CMB ne possèdent que peu de propriétés mesurables, uniquement leurs longueurs d'onde et leurs polarisations. Le traitement de la polarisation est assez complexe et il est usuel d'utiliser des combinaisons particulières de la décomposition de la polarisation linéaire (et circulaire), telles qu'elles soient invariantes suivant des symétries de parités définies. On parle de mode E quand la parité est paire et B quand elle est impaire. À la suite de la mesure effectuée par FIRAS l'accent a été mis sur la mesure des anisotropies, tant en température qu'en polarisation, de ces photons. Leurs propriétés statistiques sont extraordinairement riches en informations, comme nous le verrons par la suite⁸. Leur étude a par exemple permis d'établir les valeurs des paramètres cosmologiques présentées Eq.(2.10)⁹. La figure 2.2 montre l'évolution de la mesure des anisotropies de température des photons du fond diffus au fil des missions¹⁰. La meilleure d'entre elles est donnée par le satellite Planck et révèle des écarts relatifs à la température moyenne de l'ordre de 10^{-5} .

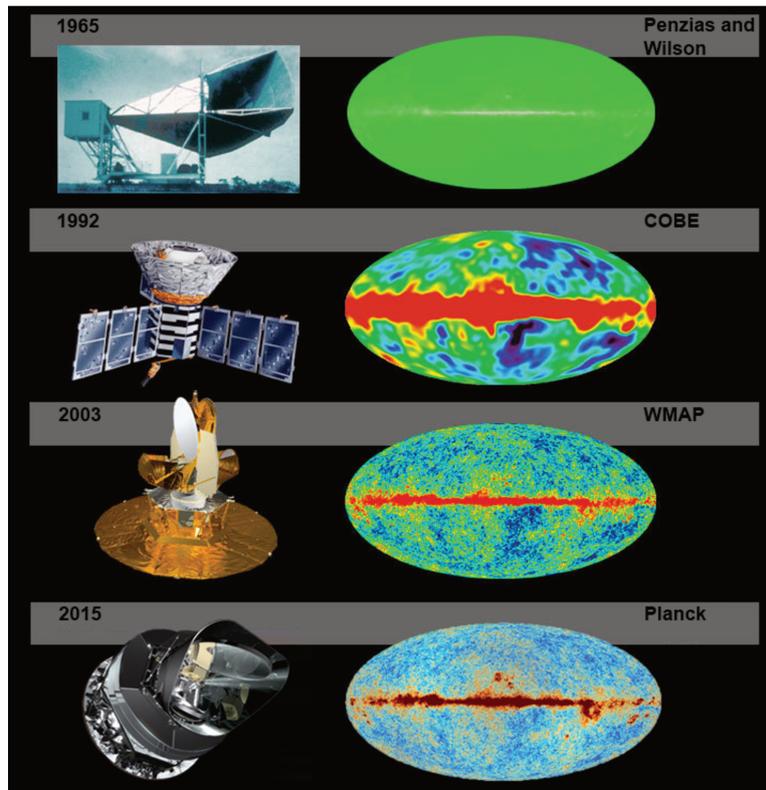


FIGURE 2.2 – Évolution de la mesure des anisotropies en température du CMB au fil de différentes missions. De haut en bas : mesure historique de Penzias et Wilson, mesure par l'instrument DMR du satellite COBE, par la mission WMAP et finalement par la mission Planck.

Maintenant que les anisotropies de ce fond diffus ont été cartographiées avec une grande précision le futur des expériences CMB se décompose en deux volets. Le premier concerne la mesure des modes B dits primordiaux associés aux ondes gravitationnelles primordiales, grands absents des mesures de Planck, sur lesquels nous reviendrons bien plus amplement dans la suite de ce chapitre et de ce manuscrit en général. Le second volet consiste à retourner vers la mesure du spectre de corps noir, non

8. Nous verrons notamment section 2.6 quelles sont les contraintes qu'elles imposent sur la forme des spectres de puissance primordiaux

9. Nous ne précisons pas ici la manière dont ces contraintes ont été posées et renvoyons à l'excellente revue [68] pour les détails.

10. Nous ne présentons ici que les fluctuations de température mais des cartes similaires existent pour la polarisation.

améliorée depuis COBE. En effet de faibles déviations à la loi de corps noir, nommées "distorsions spectrales du CMB" sont attendues. Elles devraient, tout comme les anisotropies, être très riches en informations [69, 70].

2.2 Le paradigme inflationnaire

2.2.1 Les motivations derrière ce paradigme

Bien que nous venions de voir que le modèle standard de la cosmologie est supporté par différentes observations telles que l'abondance des éléments légers dans l'Univers ou le fond diffus cosmologique, il possède néanmoins des failles qu'il faut combler. Tel que proposé initialement au début des années 1980 par A. H. Guth [71] et A. D. Linde [72], l'addition d'une phase d'accélération de l'expansion de l'Univers au début de son évolution permet la résolution de nombre de ces problèmes. Elle permet notamment d'expliquer l'origine des fluctuations primordiales qui sont à la base des mécanismes de formation des grandes structures cosmologiques observées dans notre Univers.

Parmi ces problèmes nous pouvons citer les bien connus problèmes de l'horizon et de la platitude. Ceux-ci étant omniprésents dans les manuels de cosmologie primordiale nous nous contenterons ici de renvoyer un lecteur désireux d'en connaître les détails vers [35, 73].

De manière résumée le problème de l'horizon stipule que l'homogénéité et l'isotropie mesurées de l'espace aux grandes échelles requièrent que les différentes régions observées du ciel aient été en contact causal par le passé afin d'avoir pu thermaliser les unes avec les autres. La taille d'une région causale correspond à la distance maximale qu'a pu traverser la lumière dans un certain intervalle de temps. Cette distance, appelée horizon des particules, correspond (si $c = 1$) à la définition du **temps conforme** η :

$$\eta = \int \frac{dt'}{a(t')} . \quad (2.15)$$

Or la quantité de temps conforme entre un instant initial t_i et la recombinaison t_{rec} n'est dans le modèle standard de la cosmologie pas suffisante pour permettre à toutes les régions du CMB d'avoir été en contact causal. Notons que le temps conforme (et donc la structure causale) peut s'exprimer en fonction du **rayon de Hubble comobile**¹¹ $\mathcal{R}_H(t) = (a(t)H(t))^{-1}$ comme

$$\eta = \int_{\ln(a_i)}^{\ln(a)} \mathcal{R}_H d \ln(a') . \quad (2.16)$$

Augmenter la quantité de temps conforme pour résoudre le problème de l'horizon nécessite la présence d'une phase additionnelle dans l'évolution de l'Univers durant laquelle le rayon de Hubble a décru. Or, les équations de Friedmann montrent qu'une décroissance du rayon de Hubble comobile implique une accélération de l'expansion de l'Univers : $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{aH} \right) \Rightarrow \frac{d^2 a}{dt^2} > 0$ [35]. Pour un Univers dominé par un fluide d'équation d'état $w = P/\rho$, le rayon de Hubble comobile se comporte comme

$$\mathcal{R}_H(t) \propto a(t)^{\frac{1}{2}(1+3w)} . \quad (2.17)$$

11. En cosmologie standard les termes horizon des particules et rayon de Hubble sont souvent interchangeés bien que l'égalité entre les deux ne soit vraie que pour des photons.

Toutes les formes standards de matière respectent la condition d'énergie forte (ou SEC en anglais pour *Strong Energy Condition*) et satisfont $1 + 3w > 0$. Pour un Univers emplit de telles formes de matière le rayon de Hubble comobile n'a fait que croître avec l'expansion. Rajouter du temps conforme dans l'univers primordial (via une phase d'expansion accélérée) n'est donc possible qu'en présence d'un nouveau contenu en matière qui violerait la condition d'énergie forte, *i.e* pour lequel $1 + 3w < 0$.

Le problème de la platitude trouve lui son origine dans la faible valeur de la courbure spatiale globale mesurée de l'univers Ω_k donnée Eq.(2.10). Étant donné que l'espace-temps en relativité générale est dynamique et se courbe en présence de matière pourquoi l'Univers observé est-il si correctement décrit par un espace Euclidien ? Il se trouve que la courbure d'un Univers dominé par un contenu en matière standard satisfaisant à la SEC ne fait qu'augmenter avec le temps. Pour obtenir la valeur mesurée par Planck il faudrait alors que la courbure de l'Univers fût telle que $|1 - \Omega_k| < 10^{-16}$ au moment de la nucléosynthèse primordiale et telle que $|1 - \Omega_k| < 10^{-60}$ en approchant de l'échelle de Planck ! Difficile de croire à un pur hasard sur les conditions initiales. Une fois encore le problème est résolu si la SEC est violée, *i.e* $w < -1/3$, dans l'Univers primordial. Dans ce cas $d\Omega_k/dt < 0$ et la solution de courbure nulle aux temps longs devient un attracteur, ce qui est beaucoup plus satisfaisant d'un point de vue conceptuel.

La présence d'un contenu en matière non standard dans l'Univers primordial permettrait donc de résoudre ces deux problèmes. Le modèle d'inflation à roulement lent dont nous allons parler ci-dessous permet justement d'obtenir l'effet d'une constante cosmologique avec $w = -1$ à partir d'un simple champ scalaire.

Malgré tout le plus gros problème du modèle standard de la cosmologie reste probablement son incapacité à donner une origine aux inhomogénéités observées dans le fond diffus cosmologique et qui, après évolution cosmique, génèreront les grandes structures cosmologiques tels que les amas de galaxies. Nous verrons plus en détails section 2.5 comment l'inflation permet de palier également ce problème à l'aide du formalisme de la théorie quantique des champs.

2.2.2 Modèle d'inflation basé sur un champ scalaire

Il existe une grande zoologie de modèles inflationnaires, voir par exemple [74]. Nous ne considérons dans cette thèse que le modèle le plus répandu, celui d'une inflation à roulement lent à un champ. Bien que simple, ce modèle est essentiellement compatible avec toutes les observations¹². Il est basé sur l'existence d'un unique champ scalaire minimalement couplé¹³ baptisé **inflaton** comme unique contenu de l'Univers dans ses tout premiers instants.

Le système est décrit par la somme de l'action d'Einstein-Hilbert donnée Eq.(1.1) et de l'action d'un champ scalaire :

$$S = S_{EH} + S_{\phi} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R(g^{\mu\nu})}{2\kappa} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - V(\phi) \right]. \quad (2.18)$$

L'équation du mouvement du champ

$$\frac{\delta S_{\phi}}{\delta \phi} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} \left(\sqrt{-g} \partial^{\mu} \phi \right) + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 \quad (2.19)$$

12. Nous reviendrons sur les contraintes observationnelles concernant l'inflation section 2.6

13. Au sens où le champ n'est pas couplé à la courbure scalaire mais à la gravitation uniquement via le terme $d^4x \sqrt{-g}$.

est logiquement donnée par l'équation de Klein-Gordon.

Le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire est quand à lui donné par

$$T_{\mu\nu}^{(\phi)} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi + V(\phi) \right]. \quad (2.20)$$

Considérons maintenant que la métrique $g_{\mu\nu}$ corresponde à la métrique FLRW donnée Eq.(2.1). Considérons également que le champ ϕ est homogène, de sorte que $\phi(t, \vec{x}) = \phi(t)$. Sous ces hypothèses le tenseur énergie-impulsion du champ scalaire est équivalent à celui d'un fluide parfait avec

$$T_0^0 = \rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.21)$$

et

$$T_j^i = -P_\phi \delta_j^i = -\left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \delta_j^i, \quad (2.22)$$

ρ_ϕ et P_ϕ correspondant respectivement à la densité d'énergie et à la pression du champ scalaire.

L'équation de Klein-Gordon Eq.(2.19) ré-écrite sous ces hypothèses est

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (2.23)$$

Cette équation décrit un mouvement oscillant avec un terme de friction $H\dot{\phi}$ dû à la dynamique de l'Univers.

2.2.3 L'inflation à roulement lent

Dans le cas d'un univers empli seulement d'un unique champ scalaire homogène l'accélération du facteur d'échelle est donnée par

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho_\phi + 3P_\phi). \quad (2.24)$$

Introduisons le **premier paramètre de roulement lent** $\epsilon_{\text{SR}} \equiv -\dot{H}/H^2$. Il est possible, à l'aide de l'équation de continuité définie Eq.(2.12), de le ré-exprimer en fonction de l'équation d'état de l'inflaton comme

$$\epsilon_{\text{SR}} \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2}(1 + w_\phi). \quad (2.25)$$

L'équation (2.24) se réécrit alors

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1 - \epsilon_{\text{SR}}). \quad (2.26)$$

Une phase d'accélération de l'expansion se produit donc dès lors que $\epsilon_{\text{SR}} < 1$. Or lorsque l'énergie potentielle du champ d'inflaton domine totalement sur son énergie cinétique, *i.e* $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, alors $\epsilon_{\text{SR}} \rightarrow 0$, $w_\phi \rightarrow -1$ et l'inflaton a le même effet qu'une constante cosmologique : il agit comme un fluide de pression négative. Pour générer une phase d'accélération de l'expansion la dynamique du champ a donc besoin d'être et de rester totalement dominée par son énergie potentielle pendant un certain temps. Il est courant de dire que pour avoir inflation, le champ doit rouler lentement le long de son potentiel. Ce constat va motiver l'emploi en phénoménologie de potentiels à plateau pour $V(\phi)$,

tout simplement car l'inflation à roulement lent y est plus facile à maintenir.

Remarque : Le cas particulier $\epsilon_{\text{SR}} = 0$ (ou $\dot{H} = 0$) correspond à une inflation parfaite (au sens d'éternelle) et l'espace-temps associé est celui de De Sitter.

Remarque : L'inflation est un phénomène tellement violent et tellement bref que les cosmologistes qui travaillent dessus n'utilisent ni le temps cosmologique ni le redshift pour décrire sa durée. Ils utilisent à la place le nombre d'*e-folds* d'inflation N défini tel que

$$N \equiv \ln \left(\frac{a(t_f)}{a(t_i)} \right), \quad (2.27)$$

où $a(t_i)$ et $a(t_f)$ correspondent aux valeurs du facteur d'échelle respectivement au début et à la fin de l'inflation. La présence du logarithme vient de ce que le facteur d'échelle varie exponentiellement durant l'inflation. Comme argumenté par A.R.Liddle et S.M.Leach dans [75], bien que la détermination du nombre minimal d'*e-folds* d'inflation soit une tâche ardue car nécessitant un modèle précis pour l'entièreté de l'histoire de l'Univers, il est possible de fixer sa valeur autour de $N \simeq 60$ *e-folds*. La valeur précise est bien sûr dépendante du modèle mais une valeur trop en dessous de 60 empêcherait la résolution de puzzles majeurs tel que le problème de l'horizon.

Pour avoir une idée approximative du nombre d'*e-folds* nécessaire pour résoudre le problème de l'horizon, il est possible d'ignorer la transition entre la phase de domination du rayonnement et celle de la matière. Durant la phase de rayonnement, le rayon de Hubble comobile $(aH)^{-1}$ croît comme a . Pour résoudre le problème, il faut que l'accroissement durant l'évolution post-inflationnaire soit compensée par une contraction au moins égale durant la phase inflationnaire. Étant donné que durant l'inflation le rayon de Hubble comobile varie comme $1/a$, le nombre minimum d'*e-folds* d'inflation n'est ni plus ni moins que celui nous séparant de la fin de l'inflation : $\ln(a_0/a_{\text{end-infl}}) = \ln(T_{\text{end-infl}}/T_0) \approx 60$ si l'on prend une valeur raisonnable pour la température à la fin de l'inflation à 10^{16} GeV.

La durée de la phase de roulement lent peut également être caractérisée par le **second paramètre de roulement lent**

$$\eta_{\text{SR}} = \frac{d \ln(\epsilon_{\text{SR}})}{dN}. \quad (2.28)$$

La condition $|\eta_{\text{SR}}| < 1$ assure que la variation de ϵ_{SR} par unité de temps de Hubble reste faible et donc que l'inflation perdure.

Les deux paramètres de roulement lent peuvent se ré-exprimer en fonction des dérivées premières et secondes du potentiel du champ d'inflaton comme

$$\epsilon_V \equiv \frac{1}{4K} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \quad \text{et} \quad |\eta_V| \equiv \frac{1}{2K} \frac{|V_{,\phi\phi}|}{V}. \quad (2.29)$$

Le couple de conditions $\{\epsilon_V, |\eta_V|\} \ll 1$ permet d'attester si une phase d'inflation à roulement lent a lieu directement à partir de la forme du potentiel d'inflaton.

2.2.4 Le "reheating"

La phase de "reheating" correspond au début du modèle du Big Bang au sens historique du terme. Lorsque les conditions de roulement lent cessent d'être vérifiées, l'inflaton passe d'un état de sur-amortissement à un état de sous-amortissement et commence à varier rapidement sur des échelles de

temps de l'ordre du temps de Hubble, oscillant dans le fond du potentiel. Ce faisant, il se transforme en matière usuelle. Bien qu'initialement le "*reheating*" ait été supposé assez lent et inefficace, il est aujourd'hui plutôt admis qu'il se déroule via des phénomènes de résonance paramétrique rendant le processus drastiquement plus efficace (en particulier via la phase de "*pre-heating*" qui initie le transfert d'énergie). Il n'existe malgré tout pas encore de paradigme consensuel sur cette question.

2.3 Théorie des perturbations cosmologiques

2.3.1 Perturbations de la métrique et du tenseur énergie impulsion

L'Univers que nous avons décrit jusqu'ici est totalement homogène. Cette approximation n'est évidemment pas en accord avec les observations ; rien n'est parfaitement homogène en physique, comme corroboré par les mesures des anisotropies du fond diffus. Il nous faut donc trouver un formalisme pour traiter les inhomogénéités en cosmologie. La faible valeur des déviations à la moyenne observées incite à l'emploi d'un traitement perturbatif. Or la puissance de l'approche Newtonienne aux perturbations se perd aux grandes échelles (typiquement à partir du rayon de Hubble) et dans le cas de fluides relativistes. Il est alors nécessaire de considérer un traitement perturbatif issu de la relativité générale : c'est la **théorie des perturbations cosmologiques**.

Considérons que la métrique en un point de l'espace-temps se décompose comme la somme d'une métrique de fond $\bar{g}_{\mu\nu}$ ¹⁴ donnée par la métrique FLRW et d'une perturbation $\delta g_{\mu\nu}$, de sorte que

$$g_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + \delta g_{\mu\nu}(t, \vec{x}). \quad (2.30)$$

Soulignons que la métrique de fond n'est fonction que du temps alors que les perturbations (et donc la métrique perturbée) dépendent elles à la fois du temps et de l'espace.

La métrique de l'espace-temps FLRW $\bar{g}_{\mu\nu}$ est donnée, en temps conforme¹⁵, par

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left(-d\eta^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \right). \quad (2.31)$$

L'expression générique de la métrique perturbée $g_{\mu\nu}$ est elle donnée par

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[-(1 + 2A)d\eta^2 + 2B_i d\eta dx^i + (\gamma_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j \right], \quad (2.32)$$

où les perturbations A , B_i et h_{ij} sont des fonctions de l'espace et du temps.

De la même manière, le tenseur énergie impulsion est lui aussi perturbé autour de son expression décrivant un fluide parfait. Les parties perturbées et non perturbées du tenseur énergie impulsion s'écrivent comme

$$\bar{T}_\nu^\mu = (\bar{\rho} + \bar{P}) \bar{U}^\mu \bar{U}_\nu - \bar{P} \delta_\nu^\mu \quad (2.33)$$

et

$$\delta T_{\eta\eta} = a^2 \rho (\delta + 2A), \quad \delta T_{\eta i} = -a^2 \rho [(1 + w)v_i + B_i], \quad \delta T_{ij} = a^2 P \left(\frac{\delta P}{P} \gamma_{ij} + h_{ij} \right). \quad (2.34)$$

14. À partir de maintenant les quantités décrivant le fond homogène seront représentées avec une barre.

15. Nous privilégierons ici le temps conforme η par rapport au temps cosmologique t afin de simplifier la démarche à venir.

Nous avons ici omis d'ajouter une composante venant d'un cisaillement anisotrope (pour "*anisotropic stress*" en anglais) car celle-ci se révèle en pratique négligeable.

2.3.2 Décomposition scalaire-vecteur-tenseur

Les matrices que nous venons de perturber sont des matrices 4x4 symétriques et possèdent donc $(4 \times 5)/2 = 10$ degrés de liberté, ce qui est en pratique beaucoup trop pour travailler avec. Ces dix degrés de liberté décrivent des effets physiques différents et il est donc utile de chercher à les classifier. Pour cela nous allons décomposer les perturbations que nous venons d'introduire sur une base intitulée scalaire-vecteur-tenseur, comme proposé initialement par Bardeen en 1980 [76].

Commençons par invoquer le théorème de Helmholtz-Hodge selon lequel tout champ de 3-vecteurs peut s'écrire comme la somme du gradient d'un champ scalaire et d'un champ vectoriel à divergence nulle, *i.e* :

$$B_i = D_i B + \hat{B}_i, \quad \text{où } D^i \hat{B}_i = 0. \quad (2.35)$$

Le chapeau est ici employé pour dénoter une quantité à divergence nulle.

Remarque : Cette décomposition est équivalente à celle effectuée en hydrodynamique dans laquelle le champ de vitesse est décomposé en un potentiel et un terme de vorticité.

De la même manière n'importe quel tenseur de rang 2 peut s'écrire comme¹⁶

$$h_{ij} = 2 \left[C\gamma_{ij} + D_{(i} D_{j)} E + D_{(i} \hat{E}_{j)} + \hat{E}_{ij} \right] \quad \text{où } D^i \hat{E}_j = 0 \text{ et } D^i \hat{E}_{ij} = 0. \quad (2.36)$$

Nous venons ici de diviser les dix degrés de liberté de la métrique en quatre degrés de liberté **scalaires** (A,B,C et E), deux **vecteurs** (\hat{B}_i et \hat{E}_i) avec chacun deux degrés de liberté et un **tenseur**¹⁷ \hat{E}_{ij} avec lui aussi deux degrés de liberté indépendants.

L'intérêt majeur de cette décomposition vient de ce que les équations d'Einstein pour les modes scalaires, vecteurs et tenseurs sont totalement découplées au premier ordre en perturbations et les différents modes peuvent donc être traités de manière indépendante.¹⁸

Il est possible de montrer à l'aide des équations d'Einstein que les modes scalaires et vectoriels sont supprimés dans le vide et que seuls persistent les modes tenseurs. Ces modes peuvent donc être perçus comme les vrais degrés de liberté physique associés aux perturbations de la métrique, les autres ne correspondant qu'à des réponses de l'espace-temps aux contraintes imposées par un contenu en matière. Il est même d'usage de dire qu'une détection des modes B de polarisation des photons du fond diffus cosmologique générés par ces perturbations tensorielles constituerait une première mise en évidence d'effets de gravité quantique. En effet il est possible de montrer par analyse dimensionnelle [77] que les modes *B* primordiaux ont très certainement une origine de gravitation quantique et correspondraient aux fluctuations quantiques du champ métrique lui même.

16. Nous utilisons ici la notation avec parenthèses souvent utilisée en cosmologie pour décrire la partie symétrisée d'un tenseur : $f_{(ij)} \equiv \frac{1}{2}(f_{ij} + f_{ji})$.

17. Notons que \hat{E}_{ij} est non seulement de divergence nulle mais aussi de trace nulle.

18. Cette indépendance des différents secteurs n'était pas du tout évident au vu de la non linéarité des équations d'Einstein. Elle vient de ce que $SO(3)$ est une symétrie du fond FLRW et les notions de scalaire, vecteur et tenseur sont en lien avec les rotations spatiales tri-dimensionnelles (et donc $SO(3)$).

Remarque : Les modes vectoriels décrivent comment la métrique réagit à la présence d'un fluide avec de la vorticité. Or en cosmologie standard cette dernière décroit avec l'expansion de l'Univers et les modes vectoriels sont rapidement supprimés. Il faudrait considérer par exemple des phénomènes non linéaires ou des transitions de phases pour espérer pouvoir les détecter. Néanmoins dans un modèle d'Univers en rebond comme celui de la cosmologie quantique à boucles, présenté au chapitre suivant, les modes vectoriels ne sont potentiellement plus négligeables. C'est pourquoi ils ont été regardés de près en LQC [78, 79, 80]. Dans ce contexte ils risquent notamment de devenir d'importance dès lors que les contre-réactions ("*backreactions*") des perturbations sur le fond seront prises en compte. Un formalisme capable de décrire ces contre-réactions fait hélas actuellement encore défaut et les modèles cosmologiques que nous consid rerons découplent totalement le fond des perturbations. Nous ne parlerons donc que peu de ces modes dans la suite de ce manuscrit et nous nous concentrerons principalement sur les contributions scalaires et tensorielles.

Les perturbations scalaires sont associées aux fluctuations de densité dans l'Univers primordial. Elles sont donc sources de fluctuations de température ainsi que de modes E de polarisation des photons du fond diffus cosmologique. Les perturbations de type tenseur correspondent ni plus ni moins aux ondes gravitationnelles primordiales tant recherchées actuellement. Leur impact sur les photons du CMB se fera uniquement au niveau de leur polarisation, ces ondes gravitationnelles primordiales étant source de modes E et B . Nous reviendrons section 2.6 sur les contraintes qu'il est possible de mettre sur ces perturbations scalaires et tensorielles à partir de l'étude des propriétés statistiques des photons du CMB.

2.3.3 Le problème de la jauge

Abordons maintenant et dans les grandes lignes uniquement une question subtile, celle du choix de la jauge. Pourquoi nous faut-il ici penser en termes de jauges ? Car à la différence de l'Univers homogène le choix du feuilletage de l'espace-temps (ou "*time-slicing*" en anglais) n'est pas défini de manière unique dans l'Univers perturbé et ce à cause des inhomog nit s. Il y a désormais beaucoup de bonnes manières d'effectuer ce feuilletage et par bonnes nous voulons dire que le choix est fait de sorte que les quantités considérées soient "quasiment homogènes" au premier ordre en perturbations sur chaque hypersurface spatiale.

Par exemple dans l'expression

$$\delta\rho(t, \vec{x}) = \rho(t, \vec{x}) - \bar{\rho}(t), \quad (2.37)$$

$\rho(t, \vec{x})$ correspond à la densité de matière réelle au point de coordonnées (t, \vec{x}) et ne dépend pas du choix du feuilletage. En revanche $\bar{\rho}(t)$ est une quantité non locale qui correspond à la moyenne de ρ sur une des hypersurfaces. Elle dépend du feuilletage et donc la perturbation $\delta\rho(t, \vec{x})$ en dépend également. Un changement de feuilletage peut alors introduire des perturbations fictives.

Ce problème est équivalent à une liberté de jauge. Comment y remédier ? Comment identifier les "vraies" perturbations ?

Deux approches différentes permettent de répondre à ce problème :

- La première possibilité consiste à trouver des quantités invariantes de jauge. Dans ce contexte celles-ci correspondent aux variables de Bardeen.

- La deuxième possibilité consiste à fixer une jauge (c'est à dire fixer un certain feuilletage) et effectuer tous les calculs dans cette jauge étant donné que par définition les quantités physiques obtenues à la fin du processus doivent être indépendantes de la jauge.

Considérons la première approche et commençons par reformuler le problème d'une manière un peu plus technique. La relativité générale est invariante sous difféomorphisme. Or en effectuant un choix du feuilletage nous avons également défini des coordonnées spatiales sur les hypersurfaces associées et donc fixé un jeu de coordonnées. Il nous faut alors trouver de nouvelles variables, combinaisons des perturbations, qui soient invariantes sous changement de coordonnées. C'est le travail qu'avait effectué James Maxwell Bardeen pour aboutir aux variables qui portent désormais son nom.

Considérons un nouvel ensemble de coordonnées \tilde{x}^μ reliées aux anciennes x^μ par la transformation infinitésimale

$$x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu \quad (2.38)$$

où les ξ^μ correspondent à des quantités infinitésimales. L'invariance sous difféomorphisme de la relativité générale nous dit que l'élément ds^2 doit être invariant sous la transformation Eq.(2.38), i.e $d\tilde{s}^2 = ds^2$, où

$$d\tilde{s}^2 = a^2(\eta) \left[-(1 + 2A)d\tilde{\eta}^2 + 2\tilde{B}_i d\tilde{\eta} d\tilde{x}^i + (\gamma_{ij} + \tilde{h}_{ij})d\tilde{x}^i d\tilde{x}^j \right]. \quad (2.39)$$

Considérant que les coordonnées transforment comme $\tilde{\eta} = \eta + T$ et $\tilde{x}^i = x^i + D^i L + \hat{L}^i$ nous obtenons les lois de transformations suivantes pour les quantités scalaires :

$$\tilde{A} = A - (T' + \mathcal{H}T), \quad \tilde{B} = B - (L' - T), \quad \tilde{C} = C - \mathcal{H}T \quad \text{et} \quad \tilde{E} = E - L, \quad (2.40)$$

où un symbole ' représente une dérivée par rapport au temps conforme et $\mathcal{H} = a'/a$ correspond au paramètre de Hubble en temps conforme.

Les transformations des quantités vectorielles sont elles données par

$$\hat{\tilde{B}}^i = \hat{B}^i - (\hat{L}^i)' \quad \text{et} \quad \hat{\tilde{E}}^i = \hat{E}^i - \hat{L}^i. \quad (2.41)$$

Enfin

$$\hat{\tilde{E}}_{ij} = \hat{E}_{ij}. \quad (2.42)$$

Cette dernière transformation est triviale car les ondes gravitationnelles sont naturellement invariantes de jauge.

Les variables invariantes de jauge que l'on peut construire à partir de ces lois de transformations sont données par¹⁹

$$\Psi \equiv -C - \mathcal{H}(B - E'), \quad \Phi \equiv A + (B - E')' + \mathcal{H}(B - E'), \quad \hat{\Phi}^i \equiv (\hat{E}^i)' - \hat{B}^i \quad \text{et} \quad \hat{E}_{ij}. \quad (2.43)$$

Ces variables, appelées **variables de Bardeen**, constituent les vraies perturbations de l'espace-temps. Le même raisonnement peut être appliqué pour les perturbations du tenseur énergie-impulsion. Les lois de transformation sont alors données par :

$$\tilde{\delta\rho} = \delta\rho + \rho'T, \quad \tilde{\nu} = \nu - L', \quad \tilde{\nu}^j = \hat{\nu}^j - (\hat{L}^j)' \quad \text{et} \quad \tilde{\delta P} = \delta P + P'T. \quad (2.44)$$

19. Voir [36] pour le calcul détaillé.

Il est de nouveau possible de construire à partir de ces lois de transformation les variables invariantes de jauge. Nous ne rentrerons ici pas dans les détails car durant ma thèse je ne me suis intéressé qu'à la propagation des perturbations dans le cas où le contenu en matière de l'Univers est donné par le seul champ d'inflaton. Comme nous le verrons par la suite cette hypothèse simplifie grandement les calculs donc nul besoin de formaliser ici plus que nécessaire.

2.3.4 Équations d'Einstein perturbées

Nous avons désormais introduit tous les ingrédients nécessaires pour pouvoir écrire les équations d'Einstein au premier ordre en perturbations :

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi\delta T_{\mu\nu} . \quad (2.45)$$

Ces équations peuvent être résolues en travaillant avec les quantités invariantes de jauge (variables de Bardeen et équivalents pour le tenseur énergie impulsion) précédemment introduites pour les modes scalaires, vecteurs et tenseurs. Leurs solutions respectives décriront l'évolution des perturbations cosmologiques. Celle-ci dépendra bien évidemment des considérations physiques effectuées (choix du contenu en matière de l'Univers, introduction ou non d'anisotropies, ...). La réécriture de ces équations dans le cas des perturbations scalaires et tensorielles est détaillée dans l'article de revue [36].

2.4 La cosmologie en tant que théorie stochastique

Maintenant que la théorie des perturbations cosmologiques a été abordée se pose la question de savoir comment relier ces équations théoriques à des observables. Une réponse peut être amenée en se ré-intéressant au fond diffus cosmologique. Les spectres de puissance du CMB sont des outils d'extrême importance en cosmologie car ils informent sur les propriétés statistiques des inhomogénéités observées dans les différentes cartes (température et polarisation) du fond diffus. Pourquoi parler ici de statistiques ? Tout simplement car aucun modèle cosmologique n'est capable de reconstruire exactement les motifs des inhomogénéités observés. Aucun modèle ne peut dire "La densité en énergie en tel point de l'espace possède telle valeur et telle autre valeur en cet autre point" et ce à cause du caractère déjà stochastique des conditions initiales, comme nous le verrons par la suite. Il est en revanche possible de prédire les propriétés statistiques des fluctuations. Pour cela il va être plus pratique de passer dans l'espace de Fourier et de discuter les propriétés statistiques d'un mode de Fourier \vec{k} . Nous aboutirons ainsi à la notion de spectre de puissance.

2.4.1 Spectre de puissance

Considérons une variable aléatoire $A(t, \vec{x})$ décrite par une certaine densité de probabilité. Cette variable peut représenter n'importe quelle fluctuation (de densité, de pression, de la métrique, ...). Son équivalent $A(t, \vec{k})$ dans l'espace de Fourier est elle aussi une variable aléatoire décrite par une densité de probabilité. L'évolution de la distribution de $A(t, \vec{x})$ est donnée par la théorie linéaire des perturbations. La linéarité de la théorie implique que l'évolution temporelle de la distribution de probabilité se résume uniquement à une dilatation de l'axe des abscisses et la "forme globale" de la distribution reste inchangée, seule sa variance augmentera avec le temps. En particulier si la distribution

initiale est donnée par une gaussienne elle le restera à tout temps.

Pourquoi introduire ici cette notion de distribution gaussienne ?

Il y a deux raisons à cela :

- La première est liée à l'inflation. Comme nous allons le détailler juste après celle-ci fournit des conditions initiales aux perturbations cosmologiques à partir des fluctuations du champ scalaire d'inflaton. Ces perturbations seront quantifiées en supposant qu'elles sont initialement dans leur état fondamental. Or la fonction d'onde de l'état fondamental d'un oscillateur harmonique est donnée par une gaussienne.
- Néanmoins ce sont les observations qui doivent permettre de trancher entre le caractère gaussien ou non des perturbations. Or il se trouve que jusqu'à aujourd'hui aucune trace de déviation à l'hypothèse gaussienne n'a été observée²⁰.

L'étude des propriétés statistiques de la distribution d'une certaine perturbation $A(t, \vec{x})$ peut se faire par le calcul de ses différents moments statistiques²¹. Or la distribution Gaussienne a la généreuse propriété d'être entièrement caractérisée par ses deux premiers moments uniquement, ce qui simplifie ici grandement la tâche. De plus étant donné que nous traitons des perturbations, nous savons déjà que le premier moment est nul et que seul le moment d'ordre deux (la variance) importe. Une estimation de ce dernier est donnée par la fonction de corrélation à deux points. Cette fonction de corrélation contient donc toutes les informations sur le champ gaussien représentant les perturbations.

Elle s'écrit, dans l'espace réel et pour une perturbation arbitraire $A(t, \vec{x})$:

$$\xi_A(t, \vec{x}, \vec{x}') \equiv \langle A(t, \vec{x}) A(t, \vec{x}') \rangle . \quad (2.46)$$

Rappelons nous que l'on souhaite décrire un Univers de Friedmann homogène et isotrope. Bien sûr la perturbation en elle même brise ces propriétés d'homogénéité et d'isotropie mais elles sont tout de même satisfaites statistiquement. Le respect de l'invariance par translation implique

$$\xi_A(t, \vec{x}, \vec{x}') = \xi_A(t, \vec{x}' - \vec{x}) = \xi_A(t, \vec{r}) , \quad (2.47)$$

où nous avons introduit le vecteur $\vec{r} = \vec{x}' - \vec{x}$. De plus la propriété d'isotropie statistique assure que cette fonction de corrélation ne dépend pas de la direction du vecteur de séparation \vec{r} . Ainsi

$$\xi_A(t, \vec{r}) = \xi_A(t, |\vec{r}|) . \quad (2.48)$$

Définissons l'espace de Fourier tel que

$$A(t, \vec{k}) = \int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^{3/2}} A(t, \vec{x}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} , \quad (2.49)$$

$$A(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} A(t, \vec{k}) e^{+i\vec{k} \cdot \vec{x}} . \quad (2.50)$$

En utilisant cette définition ainsi que la propriété $A(t, -\vec{k}) = A^*(t, \vec{k})$ nous obtenons la fonction de corrélation à deux points dans l'espace de Fourier :

20. On sait en revanche que des non gaussianités seront générées plus tard dans l'évolution cosmologique par des phénomènes non linéaires.

21. Ces moments sont estimés en cosmologie en calculant les fonctions de corrélations à deux points, trois points, etc ou de manière équivalente le spectre de puissance, le bi-spectre etc.

$$\langle A(t, \vec{k}) A^*(t, \vec{k}') \rangle = \int \frac{d^3 \vec{x} d^3 \vec{x}'}{(2\pi)^3} \langle A(t, \vec{x}) A(t, \vec{x}') \rangle e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x} + i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} . \quad (2.51)$$

Appliquons le changement de variable $\vec{x}' \rightarrow \vec{r} = \vec{x}' - \vec{x}$ et utilisons

$$\int \frac{d^3 \vec{x}}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{x}} = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad (2.52)$$

afin d'obtenir

$$\langle A(t, \vec{k}) A^*(t, \vec{k}') \rangle = \int d^3 \vec{r} \xi_A(t, r) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{r}} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (2.53)$$

Choisissons un système de coordonnées sphériques tel que $\vec{k}' = (k, 0, 0)$. Après intégration sur la partie angulaire de \vec{r} il vient

$$\langle A(t, \vec{k}) A^*(t, \vec{k}') \rangle = 4\pi \int dr \xi_A(t, r) r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (2.54)$$

Le spectre de puissance de A est alors défini comme

$$P_A(t, k) \equiv 4\pi \int dr \xi_A(t, r) r^2 \frac{\sin(kr)}{kr} , \quad (2.55)$$

de sorte que

$$\langle A(t, \vec{k}) A^*(t, \vec{k}') \rangle = P_A(t, k) \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') . \quad (2.56)$$

L'information sur la variance qui, rappelons le, contient toutes les propriétés statistiques de la perturbation $A(t, \vec{k})$ à un temps donné dans l'hypothèse gaussienne, se retrouve dans le spectre de puissance $P_A(t, k)$. C'est ce constat qui rend cet objet si important en cosmologie. Néanmoins le spectre de puissance couramment utilisé n'est pas exactement donné par $P_A(t, k)$. En effet les quantités observables (en physique des grandes structures par exemple) font souvent intervenir la convolution du spectre de puissance avec une fonction fenêtre $f(k)$ et mettent en avant une nouvelle quantité :

$$\int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} P_A(k) f(k) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int dk k^2 P_A(k) f(k) = \int d \ln(k) \frac{k^3}{2\pi^2} P_A(k) f(k) = \int d \ln(k) \mathcal{P}_A(k) f(k) . \quad (2.57)$$

Nous avons ici introduit le **spectre de puissance adimensionné** $\mathcal{P}_A(k)$ défini comme

$$\mathcal{P}_A(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_A(k) , \quad (2.58)$$

qui correspond au "poids" associé à chaque intervalle logarithmique dans l'intégrale. Il est dit adimensionné car si la perturbation $A(t, \vec{x})$ est sans dimensions le $P_A(k)$ a la dimension de k^{-3} tandis que $\mathcal{P}_A(k)$ est lui sans dimension.

Remarque : L'expression "spectre de puissance (quasi) invariant d'échelle" souvent utilisée en cosmologie (car étant une prédiction des modèles les plus courant d'inflation) fait en fait référence au spectre adimensionné $\mathcal{P}_A(k)$ et non au $P_A(k)$ (qui lui varie alors en k^{-3}). Dans la suite de ce manuscrit et notamment dans mes travaux sous forme d'article l'adjectif "adimensionné" sera souvent omis car implicite.

2.4.2 Fonction de transfert et conditions initiales

La linéarité des équations du mouvement permet de décomposer la perturbation $A(t, \vec{k})$ comme

$$A(t, \vec{k}) = A(t_i, \vec{k}) T(t, k). \quad (2.59)$$

Dans cette équation $A(t_i, \vec{k})$ correspond à l'état initial des perturbations pour chaque \vec{k} tandis que la **fonction de transfert** $T(k, t)$ décrit l'évolution de chaque mode de Fourier. Cette décomposition peut se transposer au niveau du spectre de puissance de sorte que

$$P_A(t, k) = \langle |A(t_i, \vec{k})|^2 \rangle T^2(t, k). \quad (2.60)$$

Pour avoir le spectre de puissance d'une perturbation à n'importe quel instant t donné il faut donc connaître le spectre de puissance initial à l'instant t_i et la fonction de transfert. Ce spectre de puissance initial, appelé **spectre de puissance primordial**, peut être obtenu soit via des hypothèses de départ soit via un paradigme comme l'inflation.

La majeure partie de mon travail de thèse a constitué à calculer de tels spectres de puissance primordiaux dans différents modèles de cosmologie quantique. Avant d'aborder le chapitre suivant dédié à la cosmologie quantique à boucles et contenant certains de mes résultats attardons nous un peu sur la manière dont ces spectres primordiaux sont calculés et sur les prédictions de l'inflation quant à leur forme. Ceci nous permettra de mieux appréhender par la suite les corrections à cette forme usuelle dues à des effets de gravité quantique.

2.5 Spectres de puissance primordiaux et prédictions de l'inflation

Le calcul des spectres de puissance primordiaux se fait à partir de l'équation de Mukhanov-Sasaki. Il est donc nécessaire pour la compréhension des travaux à venir d'établir ce qu'est cette équation et d'en étudier les caractéristiques.

2.5.1 L'équation de Mukhanov-Sasaki

Ré-intéressons nous à la théorie des perturbations cosmologiques mais cette fois-ci dans le cas d'un Univers plat emplit par un champ scalaire ϕ . Le tenseur énergie-impulsion de ce champ scalaire, obtenu par variation de l'action du système sous variations de la métrique, prend une nouvelle fois la forme d'un fluide parfait, tel que défini Eq.(2.2). Ceci va considérablement simplifier les équations d'évolution des perturbations. Hélas même dans ce cadre le calcul explicite amenant des équations d'Einstein perturbées écrites en termes des variables de Bardeen pour les modes scalaires et tenseurs à l'équation de Mukhanov-Sasaki reste long et alourdirait les propos de ce manuscrit. Nous renvoyons donc le lecteur vers [38] pour le calcul détaillé. Retenons ici que ces équations d'évolution se retrouvent grandement simplifiées si l'on introduit deux nouvelles variables, $v(\eta, \vec{x})$ et $z(\eta)$, appelées **variables de Mukhanov**. La variable v est une combinaison invariante de jauge des perturbations de la métrique (*i.e* des variables de Bardeen) et du champ scalaire. L'expression de la variable z dépend elle du type de perturbations considéré :

$$z_S = \frac{a\dot{\phi}}{H} \text{ pour les modes scalaires ,} \quad (2.61)$$

$$z_T = a \text{ pour les modes tenseurs .} \quad (2.62)$$

L'action pour les perturbations cosmologiques est obtenue en développant l'action gravitationnelle au second ordre en perturbations. Dans le cas de perturbations scalaires et de l'Univers plat emplit par un champ scalaire ici considéré cette action s'écrit :

$$S_S = \frac{1}{2\kappa} \int d\eta d^3\vec{x} \left[(v')^2 - (\nabla v)^2 + \frac{z_S''}{z_S} v^2 \right]. \quad (2.63)$$

Un symbole ' traduit ici une dérivée par rapport au temps conforme η . Nous reconnaissons l'action d'un oscillateur harmonique avec une masse effective $m_{\text{eff}}^2 \equiv -z_S''(\eta)/z_S(\eta)$ dépendante du temps. Cette dépendance temporelle traduit l'interaction des perturbations avec le fond dynamique.

Faire varier cette action par rapport à v amène à l'équation du mouvement

$$v''(\eta, \vec{x}) - \Delta v(\eta, \vec{x}) - \frac{z_S''(\eta)}{z_S(\eta)} v = 0. \quad (2.64)$$

Développons maintenant la variable $v(\eta, \vec{x})$ en ses modes de Fourier $v_{\vec{k}}(\eta)$:

$$v(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} v_{\vec{k}}(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}. \quad (2.65)$$

Ses modes ("*temporal mode functions*" en anglais) satisfont à :

$$v_{\vec{k}}''(\eta) + \left[k^2 - \frac{z_S''(\eta)}{z_S(\eta)} \right] v_{\vec{k}}(\eta) = 0. \quad (2.66)$$

Avant d'analyser cette équation précisons que le développement au second ordre en perturbations de l'action d'Einstein-Hilbert peut également être appliqué au cas des modes tenseurs. L'action associée est alors :

$$S_T = \frac{1}{8\kappa} \int d\eta d^3\vec{x} a^2 \left[(h'_{ij})^2 - (\nabla h_{ij})^2 \right]. \quad (2.67)$$

De manière analogue à Eq.(2.65) la perturbation tensorielle se décompose en modes de Fourier comme :

$$h_{ij}(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\gamma=+, \times} \epsilon_{ij}^{\gamma}(k) h_{\vec{k}}^{\gamma}(\eta) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}, \quad (2.68)$$

où $\epsilon_{ii}^{\gamma} = 0$ et $\epsilon_{ij}^{\gamma} \epsilon_{ij}^{\gamma'} = 2\delta_{\gamma\gamma'}$ sont les tenseurs de polarisation. Le champ $h_{\vec{k}}^{\gamma}(\eta)$ représente les deux modes de polarisation (+, \times) des ondes gravitationnelles. Injecter cette décomposition dans l'action Eq.(2.67) permet de la ré-exprimer comme

$$S_T = \frac{1}{\kappa} \sum_{\gamma=+, \times} \int d\eta d^3\vec{k} \frac{a^2}{4} \left[(h_{\vec{k}}^{\gamma})' (h_{\vec{k}}^{\gamma})' - k^2 h_{\vec{k}}^{\gamma} h_{\vec{k}}^{\gamma} \right]. \quad (2.69)$$

Choisissons désormais la normalisation

$$v_{\vec{k}}^\gamma \equiv \frac{a}{2\sqrt{k}} h_{\vec{k}}^\gamma \quad (2.70)$$

de sorte que

$$S_T = \sum_\gamma \frac{1}{2} \int d\eta d^3\vec{k} \left[\left((v_{\vec{k}}^\gamma)' \right)^2 - \left(k^2 - \frac{z_T''}{z_T} \right) v_{\vec{k}}^\gamma \right]^2. \quad (2.71)$$

Nous voyons que cette action est équivalente (à la somme sur les polarisations près) à celle des modes scalaires Eq.(2.63) (une fois que la décomposition en modes de Fourier des v y a été intégrée). De la même manière que pour les modes scalaires il est donc possible d'aboutir à l'équation

$$\left(v_{\vec{k}}^\gamma \right)'' + \left(k^2 - \frac{z_T''}{z_T} \right) v_{\vec{k}}^\gamma = 0. \quad (2.72)$$

Nous regrouperons dans ce manuscrit ces deux équations en une seule, l'**équation de Mukhanov-Sasaki**, donnée par :

$$v_{\vec{k}}'' + \left(k^2 - \frac{z_{S/T}''}{z_{S/T}} \right) v_{\vec{k}} = 0. \quad (2.73)$$

Nous avons ici abandonné l'exposant γ utilisé dans la description des modes tenseurs²² et les indices S/T réfèrent soit aux modes scalaires soit aux modes tenseurs. Attardons nous quelque temps pour analyser cette équation. Tout d'abord soulignons que le nombre d'onde k qui apparaît ici au carré est une quantité comobile indépendante du temps. La quantité physique associée est obtenue en multipliant k par le facteur d'échelle $a(t)$. Ce qui importe le plus dans cette équation, pour déterminer l'évolution des perturbations $v_{\vec{k}}$, est la fréquence effective

$$\omega_{\vec{k}}^2(\eta) \equiv k^2 - \frac{z_{S/T}''(\eta)}{z_{S/T}(\eta)}. \quad (2.74)$$

Le terme $z_{S/T}''(\eta)/z_{S/T}(\eta)$ qui apparaît ici est appelé "**potentiel**". Dans un espace de Sitter, $H(\eta) = \text{cste} = H_*$ et le potentiel possède la même forme pour les modes scalaires et tensoriels, *i.e* $z_S(\eta) = z_T(\eta) = z(\eta) = a(\eta)$. Le potentiel y est donné par

$$\frac{z''(\eta)}{z(\eta)} = 2a^2(\eta)H_*^2 = \frac{2}{\eta^2}. \quad (2.75)$$

Remarque : Durant l'inflation le potentiel de l'équation de Mukhanov-Sasaki se comporte donc comme l'inverse du rayon de Hubble comobile au carré $z''/z = 2/\mathcal{R}_H^2$. Ainsi la question de savoir quel est le signe de $\omega_{\vec{k}}^2(\eta)$ pour caractériser les solutions de l'équation Eq.(2.73) est équivalente à se demander si les modes comobiles k considérés sont à l'intérieur ou à l'extérieur du rayon de Hubble.

Il est intéressant de considérer deux cas limites de l'équation de Mukhanov-Sasaki Eq.(2.73). Pour les modes de longueurs d'ondes bien plus petites que l'horizon nous obtenons :

$$v_{\vec{k}}''(\eta) + k^2 v_{\vec{k}}(\eta) = 0 \quad (\text{modes subhorizon}), \quad (2.76)$$

avec des solutions oscillantes du type $v_{\vec{k}} \propto e^{\pm ik\eta}$. Pour les modes de longueurs d'ondes bien plus grandes que l'horizon nous obtenons :

²². Car l'étude des propriétés statistiques du CMB ne permet pas de remonter à la polarisation de l'onde gravitationnelle initiale.

$$\frac{v_{\vec{k}}''(\eta)}{v_{\vec{k}}(\eta)} = \frac{z''(\eta)}{z(\eta)} \approx \frac{2}{\eta^2} \text{ modes superhorizon .} \quad (2.77)$$

Les perturbations $v_{\vec{k}}$ possèdent dans ce cas une solution croissante $v_{\vec{k}} \propto z \propto \eta^{-1}$ et une solution décroissante $v_{\vec{k}} \propto \eta^2$.

Remarque : Profitons-en pour introduire une quantité de grande importance pour qui s'intéresse aux perturbations cosmologiques dans l'univers primordial : les perturbations de courbure spatiale $\mathcal{R}_{\vec{k}} = v_{\vec{k}}/z_S$. Elles sont appelées ainsi car reliées à une quantité scalaire invariante de jauge qui correspond aux perturbations de courbure sur les hypersurfaces tridimensionnelles du feuilletage. L'évolution du mode croissant des $v_{\vec{k}}$ aux échelles superhorizon est contrebalancée par l'évolution de z_S de sorte que les $\mathcal{R}_{\vec{k}}$ sont constantes (on dit qu'elles sont gelées) aux échelles superHubble. C'est ce qui rend cette quantité si importante ! Leur amplitude n'évoluera pas jusqu'à ce qu'elles ré-entrent dans l'horizon bien plus tard dans l'évolution cosmologique, interagissant alors avec le contenu en matière et laissant des empreintes de leurs propriétés à la fin de l'inflation dans le plasma primordial. C'est un excellent traceur que l'on ait de l'état de l'Univers au moment de l'inflation.

La solution la plus générale de l'équation de Mukhanov-Sasaki Eq.(2.73) peut s'écrire

$$v_{\vec{k}} = a_{\vec{k}}^- v_k(\eta) + a_{-\vec{k}}^+ v_k^*(\eta) \quad (2.78)$$

où $v_k(\eta)$ et son complexe conjugué $v_k^*(\eta)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de Eq.(2.73). Elles ne dépendent pas de la direction de \vec{k} mais uniquement de son module. Les constantes d'intégration²³ $a_{\vec{k}}^-$ et $a_{-\vec{k}}^+$ sont obtenues à l'aide du Wronskien des modes de Fourier donné par

$$W[v_k, v_k^*] \equiv v_k' v_k^* - v_k (v_k^*)' = 2i \text{Im}(v_k' v_k^*) . \quad (2.79)$$

Ainsi

$$a_{\vec{k}}^- = \frac{W[v_k^*, v_{\vec{k}}]}{W[v_k^*, v_k]} \text{ et } a_{\vec{k}}^+ = (a_{\vec{k}}^-)^* . \quad (2.80)$$

Choisissons une normalisation arbitraire des v_k de sorte que

$$W[v_k, v_k^*] \equiv -i . \quad (2.81)$$

La raison derrière un tel choix sera éclaircie juste après.

Injecter Eq.(2.78) dans Eq.(2.65) amène à

$$\begin{aligned} v(\eta) &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[a_{\vec{k}}^- v_k(\eta) + a_{-\vec{k}}^+ v_k^*(\eta) \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \\ &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[a_{\vec{k}}^- v_k(\eta) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + a_{\vec{k}}^+ v_k^*(\eta) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right] . \end{aligned} \quad (2.82)$$

23. Le signe $-$ devant \vec{k} dans $a_{-\vec{k}}^+$ est un choix de commodité qui trouve sa justification Eq.(2.83).

2.5.2 Quantification des perturbations

Nous avons précédemment mentionné que le cadre inflationnaire fournit une origine aux perturbations à partir du formalisme de la théorie quantique des champs. Rentrons un petit peu dans les détails et voyons comment les perturbations sont ici quantifiées au travers de la variable v .

Le moment conjugué à cette variable est donné par

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'} = v' . \quad (2.83)$$

Dans la théorie quantique les variables v et π deviennent des opérateurs \hat{v} et $\hat{\pi}$ de relations de commutation

$$\begin{aligned} [\hat{v}(\eta, \vec{x}), \hat{v}(\eta, \vec{y})] &= [\hat{\pi}(\eta, \vec{x}), \hat{\pi}(\eta, \vec{y})] = 0 , \\ [\hat{v}(\eta, \vec{x}), \hat{\pi}(\eta, \vec{y})] &= i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) . \end{aligned} \quad (2.84)$$

L'opérateur \hat{v} obéit à la même équation que sa variable correspondante v :

$$\hat{v}'' - \Delta \hat{v} - \frac{z''}{z} \hat{v} = 0 . \quad (2.85)$$

Sa solution générale s'écrit

$$\hat{v}(\eta, \vec{x}) = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} \left[\hat{a}_{\vec{k}}^- v_k(\eta) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}}^+ v_k^*(\eta) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \right] , \quad (2.86)$$

où les constantes d'intégration $a_{\vec{k}}^+$ et $a_{\vec{k}}^-$ ont été promues au rang d'opérateurs. Les relations de commutation sur ces opérateurs sont obtenues à partir des relations données Eq.(2.84). Elles s'expriment

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}^-, \hat{a}_{\vec{k}'}^+ \right] = \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \quad \text{et} \quad \left[\hat{a}_{\vec{k}}^+, \hat{a}_{\vec{k}'}^+ \right] = \left[\hat{a}_{\vec{k}}^-, \hat{a}_{\vec{k}'}^- \right] = 0 . \quad (2.87)$$

La normalisation des modes de Fourier effectuée Eq.(2.81) prend ici tout son sens car elle a permis de simplifier ces relations de commutation et d'interpréter les opérateurs $\hat{a}_{\vec{k}}^-$ et $\hat{a}_{\vec{k}}^+$ comme les opérateurs annihilation et création.

2.5.3 Le choix du vide

Le choix du vide est une question complexe en cosmologie primordiale. La pure transposition de la définition de l'état vide en théorie quantique des champs serait $\hat{a}_{\vec{k}}^- |0\rangle = 0$. Or comme clairement expliqué dans [81] ce choix est ici ambiguë car il est possible de trouver une autre base de modes de Fourier pour v qui satisfait également à la normalisation définie Eq.(2.81). Les nouveaux opérateurs création et annihilation associés à cette base, appelons-les $\hat{b}_{\vec{k}}^\pm$, sont alors reliés aux $\hat{a}_{\vec{k}}^\pm$ par une transformation de Bogoliubov. L'état vide dépend donc de la base choisie.

Ce problème peut être assez aisément résolu dans le cas d'un espace-temps statique tel que l'espace de Minkowski. L'équation de Mukhanov-Sasaki dans cet espace prend la forme d'un oscillateur harmonique :

$$v_k'' + k^2 v_k = 0 . \quad (2.88)$$

L'état vide peut être ici défini de manière non ambiguë comme l'état (correspondant ici au choix d'un mode v_k) qui minimise la valeur moyenne du Hamiltonien. La procédure détaillée [81] amène au **vide de Minkowski** :

$$v_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta} . \quad (2.89)$$

Dans un espace-temps non statique en revanche l'état qui minimise la valeur moyenne du Hamiltonien change avec le temps. Le vide ne peut alors être défini que de manière instantanée. Revenons au cas de l'espace-temps quasi de-Sitter inflationnaire. Lorsque l'on remonte dans le passé (*i.e* à des grandes valeurs négatives de η) tous les modes d'intérêt cosmologique étaient subhorizon et satisfaisaient $k/(aH) \sim k|\eta| \gg 1$.

Pour ces modes

$$\omega_k^2 = k^2 - \frac{2}{\eta^2} \rightarrow k^2 \quad (2.90)$$

et l'équation de propagation des perturbations devient similaire à celle de l'espace de Minkowski montrée Eq.(2.88). De manière grossière on pourrait dire que ces modes ne ressentent pas la gravité, leur longueur d'onde est bien plus petite que n'importe quelle échelle spatiale du système et tout se passe pour eux comme si l'espace-temps était plat et statique. Le vide associé à cet espace quasi de Sitter inflationnaire, appelé **vide de Bunch-Davies**, peut donc être défini de manière unique et correspond à une condition initiale de type Minkowski dans la limite $\eta \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{\eta \rightarrow -\infty} v_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta} . \quad (2.91)$$

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant la présence du rebond en cosmologie quantique à boucles nous permettra de définir un tel vide si les conditions initiales pour les perturbations sont placées dans l'Univers en contraction pré-rebond. Nous reviendrons sur l'impact de cette normalisation initiale quant à la forme des spectres de puissance primordiaux.

2.5.4 L'équation de Mukhanov-Sasaki pour un espace de Sitter

Rappelons que dans un espace de Sitter $z_S(\eta) = z_T(\eta) = z(\eta) = a(\eta)$ et l'équation de Mukhanov-Sasaki devient

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2} \right) v_k = 0 , \quad (2.92)$$

de solution

$$v_k(\eta) = \alpha \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right) + \beta \frac{e^{ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 + \frac{i}{k\eta} \right) . \quad (2.93)$$

La condition initiale sur ces modes donnée par le vide de Buch-Davies Eq.(2.91) impose $\beta = 0$ et $\alpha = 1$. Ainsi

$$v_k(\eta) = \frac{e^{-ik\eta}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\eta} \right) . \quad (2.94)$$

La limite au temps longs correspondant à l'évolution future des modes est donnée par :

$$\lim_{k\eta \rightarrow 0} v_k(\eta) = \frac{1}{i\sqrt{2}} \frac{1}{k^{3/2}\eta}. \quad (2.95)$$

L'évolution future des perturbations de courbure \mathcal{R} dans un espace de Sitter est donc, en se rappelant que dans cet espace $z \propto a \propto \eta^{-1}$:

$$\lim_{k\eta \rightarrow 0} \mathcal{R}_k(\eta) = \frac{1}{z} \lim_{k\eta \rightarrow 0} v_k(\eta) = \text{cste}. \quad (2.96)$$

Nous retrouvons ici le résultat qui rend cette quantité \mathcal{R} si intéressante : son amplitude est conservée aux échelles superhorizon.

2.5.5 Prédictions de l'inflation pour les spectres de puissance primordiaux

Abordons enfin la question qui nous intéresse le plus : quelles sont les prédictions de l'inflation quant à la forme des spectres de puissance primordiaux ?

Le spectre de puissance adimensionné associé aux perturbations de courbure $\mathcal{R} = v/z_S$ au moment du croisement des modes avec l'horizon $k = aH$ est donné par

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\epsilon_{\text{SR}}} \frac{H^2}{m_{\text{Pl}}^2} \Big|_{k=aH} \quad \text{où} \quad \epsilon_{\text{SR}} = \frac{\kappa}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{m_{\text{Pl}}^2 H^2} \quad (2.97)$$

et rappelons-le, $m_{\text{Pl}} = \sqrt{\hbar c/G}$. Nous y ferons plus tard référence comme étant le spectre de puissance des perturbations scalaires $\mathcal{P}_S(k) \equiv \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$.

Si H et ϵ_{SR} ne varient pas avec le temps alors ce spectre de puissance est strictement invariant d'échelle (*i.e* il ne dépend pas de k). Or dans le modèle d'inflation à roulement lent présenté dans ce chapitre les deux quantités varient lentement, résultant en une puissance légèrement différente pour des modes de longueurs d'ondes légèrement différente. En pratique il est utile de paramétrer la pente du spectre de puissance (adimensionné) comme

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \equiv A_s \left(\frac{k}{k_{\star}} \right)^{n_s - 1} \quad (2.98)$$

où A_s et n_s correspondent respectivement à l'amplitude et à l'inclinaison (ou "*tilt*" en anglais) du spectre de puissance primordial scalaire. L'échelle k_{\star} est une échelle de référence (ou pivot) usuellement fixée à $k_{\star} = 0.05 Mpc^{-1}$.

Pour des faibles valeurs de ϵ l'indice n_s peut être relié aux paramètres slow-roll par

$$n_s - 1 = -2\epsilon_{\text{SR}} - \eta_{\text{SR}}. \quad (2.99)$$

Il se révèle donc être une bonne sonde pour sonder la dynamique inflationnaire.

Le spectre de puissance adimensionné des modes tenseurs est quand à lui donné par

$$\mathcal{P}_T(k) = \frac{2\kappa}{\pi^2} \frac{H^2}{m_{\text{Pl}}^2} \Big|_{k=aH}. \quad (2.100)$$

De la même manière que son équivalent scalaire celui-ci peut être paramétré de sorte que

$$\mathcal{P}_T(k) \equiv A_t \left(\frac{k}{k_{\star}} \right)^{n_t} \quad (2.101)$$

où A_t et n_t correspondent ici respectivement à l'amplitude et à l'inclinaison du spectre de puissance primordial tensoriel.

Remarque : Dans le cas du spectre scalaire l'invariance d'échelle correspond à $n_s = 1$ alors que dans le cas du spectre tensoriel elle correspond à $n_t = 0$. L'origine de cette différence de convention est avant tout historique.

Ces spectres de puissance peuvent également être directement obtenus à partir des variables de Mukhanov évaluées au moment du croisement de l'horizon :

$$\mathcal{P}_S(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k(\eta)}{z_S(\eta)} \right|^2 \Big|_{k=aH} = |\mathcal{R}_k|^2 \Big|_{k=aH} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_T(k) \equiv \frac{4\kappa k^3}{\pi^2} \left| \frac{v_k(\eta)}{z_T(\eta)} \right|^2 \Big|_{k=aH}. \quad (2.102)$$

C'est la méthode que nous utiliserons dans les travaux présentés au prochain chapitre. Nous résolverons numériquement, à partir de certaines conditions initiales, l'équation de Mukhanov-Sasaki pour chaque mode k fixé et ce jusqu'à ce que le mode sorte de l'horizon lors de l'inflation²⁴. À ce moment là nous récupérerons les valeurs de v_k et $z_{S/T}$ et les utilisons pour calculer les spectres de puissance primordiaux.

Appelons r le ratio de l'amplitude des modes tenseurs sur l'amplitude des modes scalaires :

$$r \equiv \frac{A_t}{A_s}. \quad (2.103)$$

Ces paramètres peuvent être reliés aux paramètres de roulement lent ϵ_{SR} et η_{SR} :

$$r = 16\epsilon_{\text{SR}}, \quad (2.104)$$

$$n_s - 1 = -2\epsilon_{\text{SR}} - \eta_{\text{SR}} \quad (2.105)$$

et

$$n_t = -2\epsilon_{\text{SR}}. \quad (2.106)$$

Remarque : L'amplitude du spectre de puissance scalaire peut être soit rouge ($n_s < 1$) soit bleue ($n_s > 1$). Dans le premier cas les perturbations de faibles k possèdent plus de puissance que celles aux plus grand k et inversement pour le cas bleu. Le spectre tenseur quand à lui ne peut être que rouge ($n_t < 0$).

La relation

$$n_t = -r/8 \quad (2.107)$$

constitue une relation de consistance importante pour tester des modèles inflationnaires.

24. Lorsque cela n'est pas dérangent numériquement le calcul de l'évolution de chaque mode perdure jusqu'à la fin de la phase inflationnaire et les valeurs des variables de Mukhanov sont alors récupérées à ce moment là.

2.6 Contraintes observationnelles actuelles sur l'inflation et les spectres de puissance primordiaux

Comme évoqué précédemment il est possible de mesurer trois propriétés des photons du CMB : leurs températures T et leurs polarisations E et B . Cela nous amène à 6 corrélations possibles : TT , EE , BB , TE , TB et EB . En pratique les deux dernières sont nulles et seules les quatre premières sont pertinentes. Les modes B primordiaux de polarisation du CMB n'ayant hélas toujours pas été détectés²⁵ il ne reste que trois corrélations d'importance : TT , EE et TE . L'étude de ces corrélations et de leurs spectres de puissance a permis, en analyse conjointe avec des études sur les oscillations acoustiques de baryons, de poser les contraintes sur les valeurs des paramètres représentant le contenu en énergie de l'Univers donnés Eq.(2.10) [39].

Cas des perturbations scalaires

Les perturbations scalaires sont associées à des perturbations de densité. Elles génèrent donc des fluctuations de température ainsi qu'une polarisation de type E des photons du CMB. Les contraintes sur A_s et n_s sont donc obtenues à partir de l'étude des trois corrélations TT , EE et TE . Les valeurs obtenues par la collaboration Planck et révélées en 2018 [39] sont

$$10^9 \times A_s = 2.100 \pm 0.030 \quad \text{et} \quad n_s = 0.965 \pm 0.004 . \quad (2.108)$$

Le spectre primordial des perturbations scalaires est donc légèrement orienté vers le rouge.

Cas des perturbations tensorielles

Les perturbations tensorielles, ou ondes gravitationnelles primordiales, ne génèrent quant à elles pas de fluctuations de température mais des polarisations de type E et B . Néanmoins leur contribution dans les modes E est très sous-dominante par rapport aux perturbations scalaires et nous ne disposons pour le moment que d'une borne supérieure sur r pour caractériser le spectre primordial des perturbations tensorielles. Sa valeur actuelle est obtenue en combinant des données Planck avec des données de BICEP2, de "Keck Array Data" ainsi que de différentes études sur les oscillations acoustiques de baryons [39]. Elle vaut

$$r < 0.07 . \quad (2.109)$$

Une meilleure caractérisation des perturbations tensorielles passe donc par la détection des modes B primordiaux. De nombreux projets visent à cela. Nous pouvons citer la mission LiteBIRD [82] côté spatial, dont le lancement est prévu en 2028, ou la dominante collaboration Stage-4 [83] au sol. Cette collaboration de grande envergure regroupe des expériences telles que QUBIC [84] (qui devrait débiter sa campagne de tests fin 2020 en Argentine) ou POLARBEAR-2 [85] (basée sur le plateau de l'Atacama au Chili). Un simple gain d'un facteur dix sur la la borne supérieure de r (*i.e* $r \lesssim 10^{-3}$), atteignable d'ici 2030 grâce à une analyse conjointe LiteBIRD/Stage-4, permettrait déjà d'en apprendre beaucoup plus sur la physique de l'inflation. L'adjectif "primordial" utilisé ici pour caractériser les modes B est introduit en opposition à d'autres sources de modes B telles que la polarisation des

25. Leur composante secondaire due à l'effet de lentille gravitationnelle a en revanche été détectée.

poussières dans les galaxies²⁶ ou les effets de lentille gravitationnelle dûs aux distributions de matière aux grandes échelles²⁷. S'affranchir de ces autres sources de modes B de polarisation des photons du CMB qui viennent "polluer" la mesure des ondes gravitationnelles primordiales constitue une étape obligatoire pour pouvoir sonder l'inflation.

Autres contraintes sur l'inflation

Le modèle simple d'inflation à un champ que nous avons introduit ici est pour l'instant en accord avec toutes les observations. Non content de prédire la bonne forme pour le spectre primordial des fluctuations scalaires, il prédit des perturbations purement adiabatiques²⁸ et gaussiennes, ce qui est parfaitement en accord avec les observations. Ces succès observationnels assurent que ce modèle inflationnaire est un excellent modèle phénoménologique. Il est en revanche plus difficile de le motiver par une quelconque théorie à plus haute énergie qui prédisent en général la présence de plusieurs champs scalaires. C'est par exemple le cas de la supergravité [86] ou de la théorie des cordes dans laquelle la présence de nombre de champs (appelés modules) provient de la compactification de dimensions supplémentaires [87]. Il est donc d'intérêt pour les physiciens théoriciens de trouver un modèle d'inflation multi-champs satisfaisant aux contraintes expérimentales [88, 89].

Par la suite, lorsque nous aborderons la cosmologie quantique à boucles, nous ne sortirons pas du paradigme inflationnaire. Nous proposerons plutôt une complétion de celui-ci. En effet, la singularité initiale ne disparaît pas dans le cadre de l'inflation usuelle et est toujours atteinte à temps fini dans le passé [90]. La cosmologie quantique à boucles permet de résoudre ce problème en présentant une dynamique pré-inflationnaire non pathologique.

26. Bien que ce soient surtout les poussières présentes dans notre galaxie qui soient gênantes pour les observations.

27. Ces deux effets sont également sources de modes E de polarisation.

28. Des fluctuations sont dites adiabatiques lorsque des contenus en matières différents subissent les mêmes fluctuations de densité (par exemple une surdensité adiabatique d'un facteur deux de la densité de photons entraînerait une surdensité d'un facteur deux de la densité d'électrons). Ce n'est pas le cas pour les fluctuations dites entropiques, liées aux perturbations d'iso-courbure par simple changement de base. Or une condition nécessaire pour générer de tels modes est de perturber l'Univers initial avec deux degrés de liberté. La production de tels modes requiert donc une inflation basée sur plusieurs champs scalaires. De plus l'hypothèse d'équilibre thermique supprime les modes entropiques ou d'isocourbure et il est donc difficile de réunir les conditions qui permettraient à de tels modes de survivre jusqu'à aujourd'hui.

CHAPITRE 3

Cosmologie quantique à boucles

Sommaire

3.1	Secteur homogène de la théorie	78
3.2	Études portant sur le nombre d'<i>e</i>-folds d'inflation en cosmologie quantique à boucles	90
3.3	Inhomogénéités en cosmologie quantique à boucles	116
3.4	Spectres de puissance primordiaux en cosmologie quantique à boucles	120
3.5	Un raffinement du rebond : les univers rebond-émergents	158

Les calculs seront dans ce chapitre un peu plus explicités que dans le précédent, d'une part car moins présents dans la littérature et d'autre part car l'équation de Friedmann modifiée que nous allons introduire a constitué, avec l'équation de Mukhanov-Sasaki, le socle de mes travaux dans le secteur cosmologique.

Je tiens également à préciser que certaines parties de ce chapitre s'inspirent de l'excellente revue de E. Wilson-Ewing [91] tandis que d'autres sont issues d'enrichissantes discussions avec J. Mielczarek.

La cosmologie est certainement l'un des domaines les plus prometteurs quand il est question de tester et de contraindre des théories de gravitation quantique. Pour tenter d'accomplir cette tâche ardue (mais pas impossible) les physiciens s'intéressent de près au fond diffus cosmologique. Bien qu'il se soit formé à une période "tardive" où la description purement classique de l'espace-temps fonctionne remarquablement bien il se peut que des effets de gravité quantique présents dans l'Univers primordial aient laissé des empreintes dans les propriétés statistiques de ses inhomogénéités, notamment dans les spectres de puissance primordiaux. C'est pourquoi de gros efforts (relativement à la taille de la communauté) ont été rapidement investis pour chercher à appliquer la gravitation quantique à boucles au système Univers. Ce chapitre est dédié à la description et à l'étude du principal modèle qui en résulte : la cosmologie quantique à boucles (ou LQC pour "*Loop Quantum Cosmology*").

Nous commencerons section 3.1 par nous focaliser sur le secteur homogène de la théorie et

montrons comment la démarche suivie en LQC amène à une modification de l'équation de Friedmann usuelle de la cosmologie. Nous présenterons dans la section 3.2, qui sera également dédiée à la composante homogène de l'Univers, deux études portant sur les prédictions de la LQC vis à vis du nombre d'*e-folds* inflationnaires. Nous aborderons ensuite section 3.3 le cas des inhomogénéités et discuterons des principales approches existantes. La section 3.4 sera consacrée au calcul des spectres de puissance primordiaux scalaire et tenseur dans ces différentes approches. Elle incorporera également deux études, l'une dédiée au problème trans-planckien et la seconde se focalisant sur les spectres primordiaux scalaires. Enfin nous aborderons section 3.5 une autre classe de modèle cosmologique non discutée jusqu'alors : les Univers émergents. Nous y présenterons des travaux portant sur la phénoménologie d'un autre modèle visant à importer la LQG dans le secteur cosmologique : la "*Quantum Reduced Loop Gravity*", ainsi qu'une étude visant à mieux comprendre le devenir des spectres de puissance primordiaux dans le cas d'Univers émergents.

3.1 Secteur homogène de la théorie

3.1.1 Retrouver l'équation de Friedmann à partir du formalisme Hamiltonien de la relativité générale

Considérons l'habituel univers plat, homogène et isotrope, de métrique

$$ds^2 = -N^2 (dx^0)^2 + a(t)^2 \delta_{ab} dx^a dx^b, \quad a, b = 1, 2, 3, \quad (3.1)$$

où le temps cosmique t est relié à dx^0 par $dt = N dx^0$. Dans ce contexte les co-triades et triades prennent respectivement les formes

$$e_a^i(t) = a(t) \delta_a^i, \quad (3.2)$$

et

$$e_i^a(t) = \frac{1}{a(t)} \delta_i^a. \quad (3.3)$$

Cherchons l'expression des variables d'Ashtekar pour ce système. Les densités de triades sont rapidement obtenues en se remémorant Eq.(1.45) et s'expriment ici comme

$$E_i^a(t) = a^2(t) \delta_i^a \equiv p(t) \delta_i^a, \quad (3.4)$$

où nous avons défini $p(t) \equiv a^2(t)$.

L'expression de la connexion de Sen-Ashtekar-Barbero (ou SAB) dans ce système est un petit peu moins directe. L'équation Eq.(1.53) nous indique qu'elle s'écrit en fonction de la connexion de spin ω_a^i et de la courbure extrinsèque K_a^i comme $A_a^i = \omega_a^i + \gamma K_a^i$. Or la connexion de spin s'écrit

$$\omega_a^i = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} e_j^b \left[\partial_a e_b^k - \partial_b e_a^k + \delta_{mn} e_k^l e_a^m \partial_l e_b^n \right] \quad (3.5)$$

et fait intervenir des dérivées spatiales des triades dans tous ses termes. Elle est donc nulle sous l'hypothèse d'homogénéité ici stipulée. La connexion SAB se déduit alors simplement de la courbure extrinsèque par $A_a^i = \gamma K_a^i$ ¹. De même que pour les (co)triades l'expression de la courbure extrinsèque se réduit sous l'action des symétries présentes pour devenir

1. Il est alors équivalent d'utiliser l'une ou l'autre pour décrire le fond homogène.

$$K_a^i(t) = \dot{a}(t)\delta_a^i, \quad (3.6)$$

menant à

$$A_a^i(t) = \gamma K_a^i(t) \equiv c(t)\delta_a^i \quad (3.7)$$

avec $c(t) \equiv \gamma\dot{a}(t)^2$.

L'espace des phases d'un espace-temps homogène isotrope est 2-dimensionnel. Il est caractérisé par le facteur d'échelle $a(t)$ et son moment conjugué, donné par le paramètre de Hubble, ou de manière équivalente par les variables $c(t)$ et $p(t)$ que nous venons d'introduire.

Ré-exprimons à présent le Hamiltonien gravitationnel de la relativité générale Eq.(1.64) en fonction de ces dernières. Les densités de contraintes de difféomorphisme \mathcal{D}_a et de Gauss \mathcal{G}_j sont ici identiquement nulles. L'hypothèse d'homogénéité impose également que la densité de contrainte scalaire soit constante dans l'espace. L'intégrale sur l'hypersurface apparaissant dans l'équation (1.64) diverge alors si intégrée sur un volume infini. Il faut donc restreindre notre étude à un volume fini, noté Ξ et appelé **cellule fiducielle**. Son volume comobile est donné par

$$V_0 = \int_{\Xi} d^3x \quad (3.8)$$

et son volume physique par

$$V = \int_{\Xi} \sqrt{\det(q_{ab})} d^3x = V_0 a^3 = V_0 p^{3/2}. \quad (3.9)$$

L'espace étant homogène cette restriction de l'étude à un volume fini n'est pas un problème³ Il faudra en revanche s'assurer que la dynamique finale ne dépende plus du choix de la cellule fiducielle Ξ .

Les crochets de Poisson entre c et p , obtenus à partir du crochet de Poisson sur les variables d'Ashtekar donné Eq.(1.56), s'expriment comme

$$\{c, p\} = \frac{\kappa\gamma}{3V_0}. \quad (3.10)$$

Le Hamiltonien gravitationnel s'écrit comme l'intégrale de la densité de contrainte scalaire C :

$$\mathcal{H}_G = \int_{\Xi} N C d^3x = \int_{\Xi} N \left(-\frac{E_i^a E_j^b}{\kappa\gamma^2 \sqrt{q}} \epsilon_k^{ij} F_{ab}^k \right), \quad (3.11)$$

où $q = a^6$ correspond au déterminant de la métrique spatiale et F_{ab}^k à la courbure de la connexion SAB $F_{ab}^k = \partial_a A_b^k - \partial_b A_a^k + \epsilon_{lm}^k A_a^l A_b^m$. Injecter les équations (3.4) et (3.7) dans ce Hamiltonien simplifie grandement son expression et amène à

$$\mathcal{H}_G = -\frac{3NV_0}{\kappa\gamma^2} \sqrt{p} c^2. \quad (3.12)$$

Le Hamiltonien de la matière, également supposée homogène, est lui donné par

2. Rappelons qu'un point réfère à une dérivée par rapport au temps cosmique t , $\dot{a} = (1/N)(da/dx^0)$.

3. Plutôt que d'utiliser une approche dans laquelle les variables de base sont données par le facteur d'échelle et le paramètre de Hubble (c'est à dire des paramètres macroscopiques) nous choisissons de travailler sur un bloc dont le volume physique peut être très petit. L'espace est alors donné par un agencement de ces petits blocs et lors de la quantification ce sont eux que l'on quantifiera. Cet autre point de vue, formulé initialement par Martin Bojowald, est purement conceptuel et ne change rien au niveau des équations.

$$\mathcal{H}_m = \int_{\Xi} \sqrt{\det(q_{ab})} N \rho d^3x = NV\rho = NV_0 p^{3/2} \rho . \quad (3.13)$$

où nous avons utilisé que dû à l'homogénéité la densité d'énergie du contenu en matière est constante sur l'espace. Le Hamiltonien total est obtenu en sommant les contributions gravitationnelle et de matière :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_G + \mathcal{H}_m = NV_0 \left(-\frac{3}{\kappa\gamma^2} \sqrt{p} c^2 + p^{3/2} \rho \right) . \quad (3.14)$$

Pour aboutir à l'équation de Friedmann à partir de ce Hamiltonien rappelons que le paramètre de Hubble au carré vaut

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \left(\frac{\dot{p}}{2p} \right)^2 . \quad (3.15)$$

Or la dérivée de p par rapport au temps cosmique t se déduit de sa variation par rapport à la coordonnée x^0 :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{1}{N} \frac{dp}{dx^0} \\ &= \frac{1}{N} \{p, \mathcal{H}\} \\ &= \frac{1}{N} \{c, p\} \left(\frac{\partial p}{\partial c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} - \frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} \right) \\ &= -\frac{\kappa\gamma}{3NV_0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} \\ &= -\frac{2}{\gamma} \sqrt{p} c , \end{aligned} \quad (3.16)$$

Injecter ce résultat dans l'expression du paramètre de Hubble Eq.(3.15) amène, à l'aide de la contrainte Hamiltonienne $\mathcal{H} = 0$, à l'équation de Friedmann usuelle de la cosmologie

$$H^2 = \frac{c^2}{\gamma^2 p} = \frac{\kappa}{3} \rho . \quad (3.17)$$

Nous n'avons donc jusqu'ici fait que reformuler la théorie afin de retrouver un résultat bien établi de la cosmologie.

3.1.2 Importer les idées de la théorie mère : la correction d'holonomie

Inspirons nous de la LQG en ré-écrivant le Hamiltonien Eq.(3.11), ici exprimé en termes des variables conjuguées d'Ashtekar, à l'aide du flux de densité de triades $\mathcal{F}_S^f[E]$ et de son moment conjugué, l'holonomie de la connexion de Sen-Ashtekar-Barbero $h[A]$.

L'expression du flux de densités de triades $\mathcal{F}_S^f[E]$ donnée Eq.(1.68) se simplifie en LQC pour devenir :

$$\mathcal{F}_S^f[E] = \int_S d^2\sigma n_a E_i^a f^i = p \int_S d^2\sigma n_a f^a , \quad (3.18)$$

où f correspond à n'importe quelle fonction définie sur S (on parle alors de fonction test). Une fois S et f fixées le flux $\mathcal{F}_S^f[E]$ se résume à une constante multipliée par p , constante qui peut être arbitrairement fixée à l'unité avec un choix approprié de S et f . L'utilisation de flux plutôt que les densités de triades elles mêmes ne fait donc dans ce contexte aucune différence et le Hamiltonien Eq.(3.11) reste inchangé sous cette considération. Ce ne sera pas le cas lors du passage de la connexion de Sen-Ashtekar-Barbero à l'holonomie associée.

L'holonomie de la connexion SAB qui traduit la déviation d'un vecteur transporté parallèlement le long d'une arête k de longueur μ_k , située dans la direction de la $k^{\text{ième}}$ coordonnée s'écrit :

$$h_k[A] = \mathcal{P} \left[e^{\int_{\mu_k} A_a^i \tau_i dx^a} \right] = e^{c\mu_k \tau_k} = \cos\left(\frac{c\mu_k}{2}\right) \mathbb{1}_d + 2 \sin\left(\frac{c\mu_k}{2}\right) \tau_k, \quad (3.19)$$

où nous avons utilisé la propriété $\sigma_i^2 = \mathbb{1}_d$, $\forall i = 1, 2, 3$, des matrices de Pauli.

Considérons une plaquette carrée \square_{ij} dont les arêtes, toutes de longueur μ , sont alignées avec les directions i et j du système de coordonnées. L'holonomie sur le chemin fermé constitué par les arêtes de la plaquette s'exprime :

$$\begin{aligned} h_{\square_{ij}} &= h_{\mu_i} h_{\mu_j} h_{\mu_i}^{-1} h_{\mu_j}^{-1} & (3.20) \\ &= \left[\cos\left(\frac{c\mu}{2}\right) \mathbb{1}_d + 2 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right) \tau_i \right] \times \left[\cos\left(\frac{c\mu}{2}\right) \mathbb{1}_d + 2 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right) \tau_j \right] \\ &\quad \times \left[\cos\left(\frac{c\mu}{2}\right) \mathbb{1}_d - 2 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right) \tau_i \right] \times \left[\cos\left(\frac{c\mu}{2}\right) \mathbb{1}_d - 2 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right) \tau_j \right] \\ &= \cos\left(\frac{c\mu}{2}\right)^4 \mathbb{1}_d + 2 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right) \cos\left(\frac{c\mu}{2}\right)^3 (\tau_j + \tau_i - \tau_j - \tau_i) \\ &\quad + 4 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{c\mu}{2}\right)^2 (\tau_i \tau_j - \tau_j^2 - \tau_j \tau_i - \tau_i \tau_j - \tau_i^2 + \tau_i \tau_j) \\ &\quad + 8 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right)^3 \cos\left(\frac{c\mu}{2}\right) (\tau_j \tau_i \tau_j + \tau_i^2 \tau_j - \tau_i \tau_j^2 - \tau_i \tau_j \tau_i) \\ &\quad + 16 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right)^4 \tau_i \tau_j \tau_i \tau_j \\ &= \cos\left(\frac{c\mu}{2}\right)^4 \mathbb{1}_d + 4 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{c\mu}{2}\right)^2 \left(\tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i + \frac{1}{2} \mathbb{1}_d \right) \\ &\quad + 4 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right)^3 \cos\left(\frac{c\mu}{2}\right) (\tau_i - \tau_j) - \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right)^4 \mathbb{1}_d \\ &= \left[1 - 2 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right)^4 \right] \mathbb{1}_d \\ &\quad + \sin(c\mu)^2 (\tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i) + 4 \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right)^3 \cos\left(\frac{c\mu}{2}\right) (\tau_i - \tau_j), \end{aligned}$$

où nous avons, en plus de leur propriété précédemment énoncée concernant l'identité, utilisé la propriété $\sigma_i \sigma_j = i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \mathbb{1}_d$ des matrices de Pauli, ϵ_{ijk} étant le symbole de Levi-Civita.

La courbure de la connexion SAB F_{ab}^k peut se ré-exprimer comme la limite, sur un chemin fermé (ou boucle),

$$\begin{aligned}
F_{ab}^k &= -2 \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\text{tr}[\tau_k(h_{\square_{ij}} - \mathbb{1}_d)]}{\mu^2} \frac{e_a^i e_b^j}{\gamma^2} \\
&= \lim_{\mu \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(c\mu)^2}{\mu^2} \epsilon_{ij}^k + \frac{3}{2\mu^2} \sin\left(\frac{c\mu}{2}\right)^3 \cos\left(\frac{c\mu}{2}\right) (\delta_j^k - \delta_i^k) \right] \frac{e_a^i e_b^j}{\gamma^2}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Le second terme se supprime lorsque combiné avec le reste du Hamiltonien et ne reste que

$$F_{ab}^k = \lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\sin(c\mu)^2}{\mu^2} \epsilon_{ij}^k \frac{e_a^i e_b^j}{\gamma^2}. \tag{3.22}$$

Comme mentionné au premier chapitre de cette thèse l'aire minimale en gravitation quantique à boucles n'est pas nulle mais donnée par la plus petite valeur propre non nulle de l'opérateur d'aire $A_{\min} = \Delta \ell_{\text{pl}}^2$ avec $\Delta = 4\pi\gamma\sqrt{3}$. Il n'est donc pas dans l'esprit de la théorie mère de faire tendre μ vers 0 et il nous faut considérer une valeur $\bar{\mu}$ minimale pour μ . Mais quelle valeur prendre ?

Une première approche, somme toute intuitive, avait été de la considérer constante et de la construire tout simplement comme la racine carrée de l'aire minimale Δ , $\bar{\mu} = \sqrt{\Delta}$. Cette approche, baptisée " *μ_0 -scheme*", présente hélas des pathologies, comme la présence d'une densité d'énergie maximale qui dépend du volume de la cellule fiducielle choisie. De plus dans cette vision la taille d'une cellule d'espace croît avec l'expansion. La cellule fiducielle homogène isotrope sur laquelle nous travaillons aurait aujourd'hui la taille de l'Univers observable (au grand minimum), ce qui n'est bien sûr pas convaincant.

Remarque : Nous reviendrons sur la notion d'invariance d'échelle de la description cosmologique lorsque nous aborderons le cas de la "*Quantum Reduced Loop Gravity*", autre modèle à symétries réduites inspiré de la LQG, plus proche de la théorie mère que ne l'est la cosmologie quantique à boucles. Dans cette approche la dépendance au volume de la cellule fiducielle n'est pas supprimée et le volume physique initial de l'Univers se révèle être un paramètre qui doit être contraint par les données. Une plus ample discussion sur ce sujet sera fournie dans l'article "*Phenomenology of Quantum Reduced Loop Gravity in the isotropic cosmological sector*".

Pour se prémunir de ces problèmes et retirer la dépendance au choix de la cellule fiducielle il faut que $\bar{\mu}$ soit une longueur comobile associée à une longueur physique fixée. Le lien entre longueur physique et longueur comobile se faisant via le facteur d'échelle $a = \sqrt{p}$, si nous reprenons l'idée que la longueur physique est donnée par $\sqrt{\Delta}$ ⁴, alors

$$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\Delta}{p}}. \tag{3.23}$$

C'est le " *$\bar{\mu}$ -scheme*". Les cellules d'espace y restent de taille physique constante. Lors de l'expansion de l'Univers, l'espace se dilate et de plus en plus de ces cellules apparaissent.

Une fois ce schéma adopté la courbure dans le Hamiltonien s'exprime comme $F_{ab}^k = \frac{\sin(c\bar{\mu})^2}{\bar{\mu}^2} \epsilon_{ij}^k \frac{e_a^i e_b^j}{\gamma^2}$.

Cette considération est analogue à la modification

4. La longueur physique pertinente pour le choix de $\bar{\mu}$ peut également être vue comme un paramètre libre de la théorie.

$$c^2 \rightarrow \frac{\sin(c\bar{\mu})^2}{\bar{\mu}^2} \quad (3.24)$$

dans le Hamiltonien gravitationnel Eq.(3.11) de la relativité générale. Rappelons que cette correction vient de ce que nous travaillons ici avec l'holonomie de la connexion SAB et non la connexion elle-même. Elle est donc tout naturellement appelée **correction d'holonomie**.

Le Hamiltonien gravitationnel qui tient compte cette correction est donné par

$$\mathcal{H}_G^{\text{c.h}} = -\frac{3NV_0}{\kappa\gamma^2} \sqrt{p} \frac{\sin(c\bar{\mu})^2}{\bar{\mu}^2}, \quad (3.25)$$

où la notation "c.h" indique que celui-ci est corrigé d'holonomie. Le Hamiltonien total est désormais donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\text{c.h}} &= \mathcal{H}_G^{\text{c.h}} + \mathcal{H}_m \\ &= NV_0 \left(-\frac{3}{\kappa\gamma^2} \sqrt{p} \frac{\sin(c\bar{\mu})^2}{\bar{\mu}^2} + p^{3/2} \rho \right) \\ &= NV_0 p^{3/2} \left(-\frac{3}{\kappa\gamma^2 \lambda^2} \sin(c\bar{\mu})^2 + \rho \right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

où $\lambda = \sqrt{\Delta}$.

L'utilisation des holonomies comme variables canoniques induit donc une modification du Hamiltonien par rapport à celui de la relativité générale reformulée à l'aide des variables d'Ashtekar que nous avons obtenu Eq.(3.11).

3.1.3 L'équation de Friedmann modifiée de la LQC

Intéressons nous maintenant à la dynamique classique qui émerge de ce nouvel Hamiltonien. Celle-ci étant indépendante du choix des variables canoniques nous utiliserons simplement c et p , dont les crochets de Poisson ont été donnés Eq.(3.10).

La dérivée temporelle de p vaut désormais

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \frac{1}{N} \{p, \mathcal{H}\} \\ &= -\frac{\kappa\gamma}{3NV_0} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial c} \\ &= \frac{2p}{\gamma\lambda} \cos(c\bar{\mu}) \sin(c\bar{\mu}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

amenant à un paramètre de Hubble en temps cosmique

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{p}}{2p} = \frac{1}{\gamma\lambda} \cos(c\bar{\mu}) \sin(c\bar{\mu}). \quad (3.28)$$

Pour se ramener à une équation analogue à l'équation de Friedmann de la cosmologie Eq.(2.3) il suffit d'élever cette expression au carré

$$H^2 = \frac{1}{\gamma^2 \lambda^2} \cos(c\bar{\mu})^2 \sin(c\bar{\mu})^2 = \frac{1}{\gamma^2 \lambda^2} \sin(c\bar{\mu})^2 (1 - \sin(c\bar{\mu})^2) . \quad (3.29)$$

La contrainte Hamiltonienne $\mathcal{H} = 0$ nous donne

$$\sin(c\bar{\mu})^2 = \frac{\kappa \gamma^2 \lambda^2}{3} \rho , \quad (3.30)$$

ce qui permet une ré-écriture de (3.29) :

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho \left(1 - \frac{\kappa \gamma^2 \lambda^2}{3} \rho \right) = \frac{\kappa}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right) \quad (3.31)$$

dans laquelle nous avons introduit

$$\rho_c = \frac{3}{\kappa \gamma^2 \lambda^2} . \quad (3.32)$$

L'équation (3.31) est une modification de l'équation de Friedmann usuelle donnée Eq.(2.3) qui apparaît suite à l'application de la correction d'holonomie. C'est le résultat principal de la cosmologie quantique à boucles. Remarquons qu'elle redonne l'équation de Friedmann de la cosmologie dans la limite $\rho \ll \rho_c$.

Le paramètre ρ_c , appelé **densité critique**, correspond à la densité maximale que le contenu en énergie peut atteindre. Elle dépend notamment du paramètre de Barbero-Immirzi qui entre à la fois directement dans son expression mais aussi dans celle de λ , soulignant l'importance de son rôle dans le secteur cosmologique. Pour une valeur $\gamma = 0.2375$ justifiée par des calculs sur l'entropie des trous noirs en LQG [92] la densité critique vaut $\rho_c = 0.41 \rho_{\text{Pl}} \approx 10^{96} \text{kg.m}^{-3}$.

Remarque : Bien que nous venions de modifier la dynamique du secteur gravitationnel l'équation de continuité pour le fluide établie au chapitre 2 Eq.(2.12) tient toujours : les effets quantiques n'affectent en LQC que le secteur géométrique de la théorie.

3.1.4 Conséquences cosmologiques

Nous venons d'établir une nouvelle équation de Friedmann, soit. Mais qu'implique-t-elle réellement quant à la dynamique de l'Univers ?

Pour nous faire une idée disons intuitive de ce qu'il se passe intéressons-nous à l'équation de Friedmann usuelle pour un univers plat sans constante cosmologique : $H^2 = (\kappa/3)\rho$. Elle possède deux solutions : $H = +\sqrt{(\kappa/3)\rho}$ ou $H = -\sqrt{(\kappa/3)\rho}$. La première décrit un Univers en expansion et la seconde un Univers en contraction. Le passage continu d'une solution à l'autre requiert $H = 0$ et nécessite donc l'annulation du terme de droite dans l'équation, ce qui ne peut se faire sans introduire de courbure ou des contenus en matière inhabituels, comme le font certains scénarios de type *Big crunch*. Une transition entre Univers en contraction et Univers en expansion (ou l'inverse) nécessite donc dans notre exemple soit un contenu en matière exotique soit une modification du secteur gravitationnel. L'équation de Friedmann effective de la LQC correspond au deuxième cas de figure. Dans cette équation $H = 0$ lorsque $\rho = \rho_c$. Il est alors possible de transiter d'une phase de contraction, se poursuivant jusqu'à ce que la densité d'énergie atteigne sa valeur critique ρ_c , à une phase d'expansion de l'univers. La

singularité initiale est résolue⁵ et le scénario existant du *Big Bang* est remplacé par un "rebond" de l'Univers, ou *Big Bounce* en anglais, dont une vue d'artiste est donnée Fig.3.1.

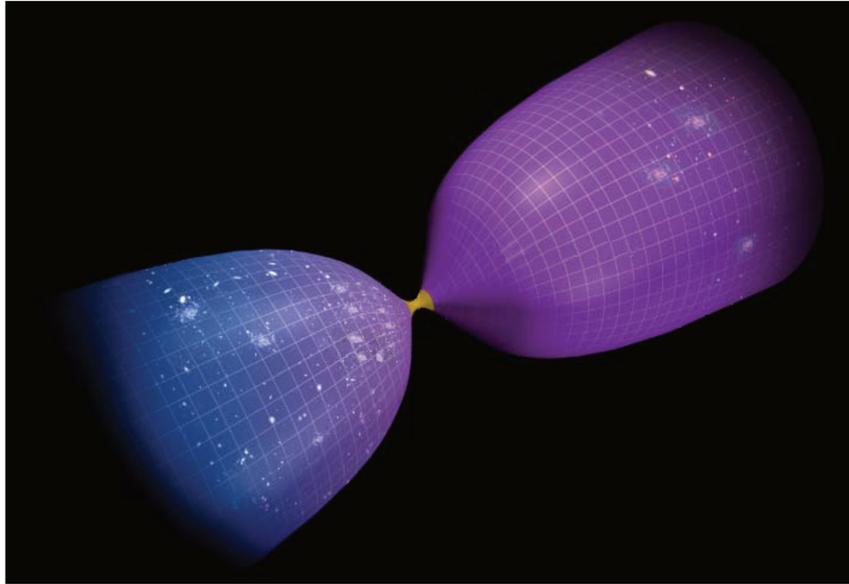


FIGURE 3.1 – Vue d'artiste du rebond.

Ce rebond peut être vu comme l'approximation semi-classique d'un effet tunnel, faisant le lien entre deux solutions classiques (contraction et expansion) de la dynamique. Pour essayer d'avoir une vision un peu plus intuitive de ce qui empêche la densité d'énergie de croître vers des valeurs infinies une analogie peut être faite avec certains effondrements d'étoiles sur elles mêmes : lorsque la matière approche une certaine densité critique une nouvelle force, appelée pression de dégénérescence, s'oppose à la contraction et donc à l'augmentation de la densité du système⁶. Cette force, conséquence directe de la statistique de Fermi-Dirac, est une manifestation macroscopique d'un effet microscopique : le principe d'exclusion de Pauli. Une autre analogie peut être effectuée avec le niveau d'énergie minimal $E_1 = -13,6eV$ de l'atome d'hydrogène en mécanique quantique. D'après ce constat expérimental tout se passe comme si une "force de répulsion quantique" empêchait l'électron d'atteindre des orbitales de plus faible énergie.

Soulignons l'importance du signe négatif devant le second terme du côté droit de l'équation Eq.(3.31), car c'est lui qui rend possible cette dynamique de rebond. Par exemple dans le modèle de Randall-Sundrum [93] (inspiré de la théorie des cordes) l'équation de Friedmann reçoit également une correction en ρ^2 mais accompagnée d'un signe positif, ne rendant pas le rebond possible [94].

À noter que l'équation Eq.(3.31) ne prédit pas un univers oscillant, il n'y a rien dans la théorie qui justifie de passer d'un univers en expansion à un univers en contraction. Si une telle transition expansion vers contraction devait se faire dans le régime classique, elle ne serait probablement pas motivée par des considérations de gravité quantique. Les modèles cycliques présentent d'ailleurs un problème d'entropie [95]. Pour que celle-ci ne cesse de croître il est nécessaire que les cycles soient de

5. La résolution de la singularité qui apparaît dans ce modèle n'est pas en contradiction avec les théorèmes établis par Penrose et Hawking qui ne sont ici plus applicables car la dynamique n'est pas régie par les équations d'Einstein.

6. Sous l'action de cette nouvelle force le système devient stable et l'on parle alors d'étoile à neutrons ou de naine blanche.

plus en plus longs. Ce n'est pas néanmoins une prédiction stricte dans la mesure ou l'évaluation de l'entropie dans un contexte cosmologique est très délicate et sujette à caution.

En dernier commentaire rappelons que la prédiction d'un Univers en rebond n'est pas le propre de la LQC. De nombreux modèles (appelés "*bouncing cosmologies*") sont souvent présentés comme des alternatives à l'inflation. Nous renvoyons le lecteur à l'excellente revue de R. Brandenberger et P. Peter [96] pour plus de détails sur les motivations derrière ces scénarios et les difficultés actuelles qu'ils rencontrent.

3.1.5 Approche quantique de la LQC

Dans tout le cheminement qui nous a menés jusqu'à l'équation de Friedmann modifiée rien n'est réellement quantique et c'est uniquement dans le choix des variables canoniques (holonomies de la connexion SAB et densité de flux de triades) que la LQC s'inspire de la LQG. C'est pourquoi l'approche développée jusqu'ici est dite semi-classique. Cependant l'évolution d'un Univers homogène a également été étudiée dans un paradigme quantique.

Reprenons le cas de l'Univers FLRW. En s'inspirant de la LQG les opérateurs élémentaires sont l'opérateur d'aire associé à $p = a^2$:

$$\hat{p} |p\rangle = p |p\rangle \quad (3.33)$$

et

$$\mathcal{N}(\mu) \equiv e^{\hat{\mu}c} |p\rangle = \left| p - \frac{\kappa\gamma\mu}{3} \right\rangle. \quad (3.34)$$

Bien que ce point ai déjà été abordé dans le premier chapitre dédié à la LQG, effectuons un petit aparté pour bien comprendre pourquoi nous considérons ici l'exponentielle de la connexion. Considérons un modèle jouet où l'Hamiltonien s'exprime très simplement comme $\mathcal{H} = c^2$.

Dans le cas d'un espace continu tel que celui présenté en haut de la figure 3.2 l'opérateur impulsion, ici donné par \hat{c} , est le générateur des transformations infinitésimales de translation et l'opérateur de translation s'écrit

$$\hat{U}(\Delta x) = e^{i\Delta x \hat{c}}. \quad (3.35)$$

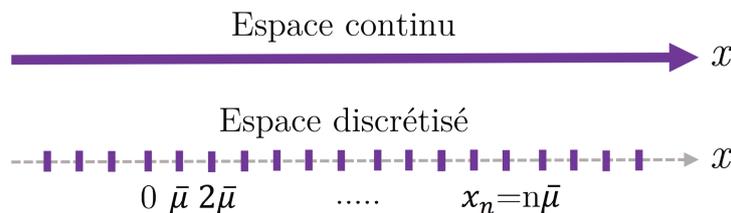


FIGURE 3.2 – Exemples d'espaces continus et discrets.

Dans le cas d'un espace discret (par exemple un réseau de spin unidimensionnel) tel que présenté en bas de la figure 3.2 la fonction d'onde n'est définie qu'aux nœuds du réseau et la quantité \hat{c} est mal

définie. En revanche l'opérateur $\hat{U}(\bar{\mu}) = e^{i\bar{\mu}\hat{c}}$ est lui correctement défini⁷.

Il est également possible de voir émerger ici la correction d'holonomie. En effet comme nous venons de le dire l'opérateur Hamiltonien $\mathcal{H}^2 = \hat{c}^2$ est donc mal défini dans le cas d'un espace discret. La plus simple généralisation de \hat{c} que l'on puisse construire est

$$\hat{c}_{\bar{\mu}} = \frac{\hat{U}(\bar{\mu}) - \hat{U}^\dagger(\bar{\mu})}{2i\bar{\mu}}, \quad (3.36)$$

amenant à l'opérateur Hamiltonien

$$\hat{\mathcal{H}}_{\bar{\mu}} = \hat{c}_{\bar{\mu}}^2 = \left(\frac{\hat{U}(\bar{\mu}) - \hat{U}^\dagger(\bar{\mu})}{2i\bar{\mu}} \right)^2 = \left(\frac{e^{i\bar{\mu}\hat{c}} - e^{-i\bar{\mu}\hat{c}}}{2i\bar{\mu}} \right)^2 = \left(\frac{\widehat{\sin(\bar{\mu}\hat{c})}}{\bar{\mu}} \right)^2. \quad (3.37)$$

Le Hamiltonien classique effectif tenant compte de cette correction est alors obtenu en moyennant cette expression entre deux états :

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \langle \psi | \hat{\mathcal{H}}_{\bar{\mu}} | \psi \rangle = \frac{\sin^2(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}^2} \quad (3.38)$$

Nous voyons ici ré-apparaître l'expression de la correction d'holonomie introduite Eq.(3.24).

Revenons où nous en étions. Nous avons vu que l'espace de Hilbert cinématique du secteur gravitationnel est celui des états $|p\rangle$ associés à $\psi(p)$. La matière étant modélisée par un champ scalaire ϕ les opérateurs élémentaires dans ce secteur sont

$$\hat{\phi}\psi(\phi) = \phi\psi(\phi) \text{ et } \hat{\pi}_\phi\psi(\phi) = -i\hbar \frac{d\psi(\phi)}{d\phi}. \quad (3.39)$$

L'espace de Hilbert total est alors donné par le produit tensoriel des deux espaces de Hilbert $\mathcal{H}_{\text{tot}} = \mathcal{H}_G \otimes \mathcal{H}_m$.

Plaçons nous désormais dans le $\bar{\mu}$ - *scheme*. Étant donné que dans ce schéma l'expression de $\bar{\mu}$, donnée Eq.(3.23), dépend de p l'action de l'opérateur associé à l'exponentielle complexe de $\bar{\mu}c$ sur l'espace de Hilbert du secteur gravitationnel diffère de celle donnée Eq.(3.34). La quantité conjuguée à $b = \bar{\mu}c$ est le volume $V = a^3$. L'expression de leur crochet de Poisson $\{b, V\} = 4\pi\gamma\sqrt{\Delta}$ amène à

$$\widehat{e^{\pm ib}} |V\rangle = |V \mp 4\pi\gamma\sqrt{\Delta}\rangle \quad (3.40)$$

où les kets $|V\rangle$ sont les vecteurs de base dans la représentation de volume, qui n'est qu'une ré-indexation des vecteurs de base la représentation d'aire $|p\rangle$ (les états propres de \hat{p} sont également états propres de $\hat{V} = |\hat{p}|^{3/2}$). L'action de la contrainte Hamiltonienne, ici équivalente à la contrainte scalaire, sur les états de l'espace de Hilbert des solutions physiques⁸ prend la forme

$$-\frac{\partial^2 \Psi(V, \phi)}{\partial \phi^2} = C_{V+} \Psi(V_+, \phi) + C_0 \Psi(V, \phi) + C_{V-} \Psi(V_-, \phi) \quad (3.41)$$

où $V_{\pm} = V \pm \kappa\gamma\sqrt{\Delta}$. La forme des C_{\pm} est explicitée par A. Ashtekar, T. Pawłowski et P. Singh dans [97] pour le travail historique ou dans [98] (en compagnie d'I. Agullo et de W. Nelson) pour une

7. Nous prenons ici le cas de l'exponentielle de \hat{c} mais toute fonction continue de \hat{c} l'est et il serait possible de considérer d'autres séries entières de fonctions telles qu'un sinus ou un cosinus.

8. C'est à dire les états annihilés par l'opérateur de contrainte Hamiltonienne (ou scalaire dans ce cas) $C\Psi = 0$.

version plus récente. Cette équation, qui ne prend pas la forme d'une équation différentielle à cause du caractère discret de la géométrie quantique, donne l'évolution de la fonction d'onde $\Psi(V, \phi)$. Cette évolution est relationnelle dans le sens où c'est le champ scalaire ϕ qui joue ici le rôle d'horloge.

Le code CHIMERA développé par P. Diener, B. Gupt et P. Singh en 2014 étudie le comportement de ces fonctions d'onde [99] en les faisant évoluer à l'aide de l'équation (3.41) à partir d'un état initial $\Psi(V, \phi_0)$ à un "instant" ϕ_0 donné. Ceci a tout d'abord été fait pour des états piqués autour d'une solution aux équations de Friedmann classique à une densité d'énergie suffisamment basse pour que les effets de gravité quantique soient initialement négligeables [100]. Deux conclusions majeures émergent de cette étude :

- (i) Si l'état est initialement piqué il le reste tout au long de l'évolution.
- (ii) Les trajectoires des états quantiques piqués suivent celles de la théorie semi-classique présentée dans les pages précédentes, bien que la justesse de l'approximation semi-classique diminue lorsque la dispersion de la fonction d'onde d'un état augmente.

Ces résultats sont assez remarquables car ils soulignent la qualité de l'approximation semi-classique pour des états initialement piqués autour d'une solution classique. Se pose alors la question de la pertinence de cette forme initiale piquée de ces états. Comme nous le verrons juste après l'équation de Friedmann effective que nous avons établi décrit un modèle d'univers en rebond. L'emploi d'états piqués semble alors totalement raisonnable car l'évolution commence à partir d'un état classique dans l'Univers en contraction pré-rebond. Il serait bien moins évident de justifier leur utilisation dans des modèles de type Big Bang.

Il avait été montré en 2015 par A. Ashtekar et B. Gupt [101] que considérer des états de plus grande dispersion amène à d'autres équations effectives pour décrire la dynamique de V et ϕ . Il se trouve (de manière assez surprenante) que ces équations sont équivalentes à l'équation de Friedmann modifiée présentée Eq.(3.31) avec comme seule différence une expression différente de ρ_c . Plus la dispersion des états augmente, moins la densité d'énergie au rebond est élevée. Plus récemment, en 2017, I. Agullo, A. Ashtekar et B. Gupt ont montré [102] que l'utilisation d'états plus dispersés ne modifie pas la forme des spectres de puissance primordiaux (du moins les spectres scalaires) par rapport à la forme typique en LQC (qui sera expliquée en détails un peu plus loin). L'effet de la dispersion des états quantiques dans le régime Planckien sur les spectres est dégénéré avec l'impact du nombre d'*e-folds* pré-inflationnaires entre le rebond et le début de l'inflation.

Ces résultats semblent indiquer qu'il n'est nul besoin de compliquer la procédure en passant à un traitement quantique⁹. C'est pourquoi la grande majorité des études menées en LQC, notamment celles dédiées à la phénoménologie de la théorie, sont effectuées à partir de l'équation de Friedmann effective Eq.(3.31).

Malgré tout la démarche que nous adoptons ici n'est en soi pas totalement satisfaisante. En effet la quantification y est effectuée après réduction des symétries, une fois que le système est homogène et isotrope. Or il n'y a *a priori* aucune raison que ces deux opérations (quantification et application des symétries) commutent. Améliorer le lien entre théorie cosmologique et théorie mère constitue donc l'objet d'un nombre important de travaux au sein de la communauté et différents modèles en cours de développement tels que la "*Quantum Reduced Loop Gravity*" [103, 104] ou le modèle de Dapor-Liegener [105, 106] visent à combler la brèche.

9. C'est une aubaine car si les fonctions d'ondes des états du fond devenaient par exemple pluri-modales la notion même de facteur d'échelle (macroscopique) disparaîtrait et la limite classique ne serait alors tout simplement plus réalisable.

Malgré tout la LQC constitue un cadre théorique intéressant, capturant certaines des idées maîtresses de la LQG et dans laquelle il est possible d'effectuer des prédictions sur différentes observables, ce qui est déjà en soit un grand avancement par rapport à la genèse de la théorie il y a une trentaine d'années.

3.1.6 Au delà de l'espace-temps FLRW

Nous nous sommes restreints tout au long de ce chapitre à l'espace FLRW mais de nombreux autres espace-temps homogènes ont également été étudiés au sein de la théorie. Citons par exemple les espaces FLRW fermés [107, 108] et ouverts [109] ou les espaces anisotropes de type Bianchi¹⁰ I [110], Bianchi II [111] et Bianchi IX [112]. D'autres contenus en matière tel que du rayonnement [113] ont également été considérés.

Dans tous les cas mentionnés ici la singularité du Big Bang est systématiquement remplacée par un rebond, confortant cette prédiction de la LQC.

De plus une dynamique de rebond avec une équation de la dynamique similaire à Eq.(3.31) a également été mise en avant en "*Group Field Theory*". Dans cette théorie la variété différentielle de base est un groupe de Lie. Ce formalisme très général et invariant de fond permet d'étudier la dynamique de la LQG. Il est en particulier adapté pour s'intéresser à l'émergence de la géométrie à partir de degrés de liberté fondamentaux "pré-géométriques" (*i.e* sans notions de métrique, de distance,...). Or, il apparait que certains types de condensats peuvent y être interprétés comme des géométries classiques homogènes de type cosmologiques. Moyennant l'ajout d'un terme cinétique assez général, l'évolution de ces états conduit à une dynamique cosmologique très proche de celle de la LQC usuelle. Il s'agit d'une remarquable approche pour dériver l'équation de Friedmann à partir d'une théorie de géométrie quantique possiblement fondamentale. Le calcul explicite repose sur une approximation de type hydrodynamique. Strictement parlant, la *Group Field Theory* permet d'obtenir dans le secteur géométrique l'analogue de l'équation de Gross-Pitaevskii pour les condensats de Bose-Einstein [114, 115].

Notons également que la LQC est compatible avec l'introduction d'une constante cosmologique Λ positive [116, 117] ou négative [118], la seule condition étant que la densité d'énergie associée à cette constante soit plus faible que la densité critique ρ_c . En revanche la LQC, ou la LQG de manière plus générale, ne prédit pour l'instant pas sa valeur, ce qui ne constitue pas nécessairement un problème [119]. De plus l'idée que la constante cosmologique soit expliquée en termes de diffusion bruitée de l'énergie depuis les degrés de liberté "basse énergie" de la physique des particules vers la granularité fondamentale à l'échelle de Planck a été émise [120]. Le modèle fonctionne bien au niveau des ordres de grandeur et offre une nouvelle perspective sur la constante cosmologique.

Remarque : Bien que l'essentiel de la LQC ait été développée dans le cadre de la formulation Hamiltonienne de la théorie mère, des études portent également sur une théorie cosmologique basée sur l'approche covariante. La dynamique des mousses de spin est néanmoins mieux adaptée au traitement de questions conceptuelles qu'à la résolution de problèmes cosmologiques spécifiques car il est alors nécessaire de pousser les expansions jusqu'à des ordres très élevés [121]. Globalement, les résultats établis jusqu'alors corroborent les conclusions de la LQC.

10. Les Univers de Bianchi sont nommés ainsi d'après L. Bianchi qui avait effectué une classification des algèbres de Lie réelles de dimension 3 utilisables en cosmologie pour classifier les espace-temps homogènes de dimension 3+1.

Remarque : On peut également noter qu'en plus des corrections d'holonomie implémentée dans l'approche semi-classique de la LQC développée dans cette thèse, il existe une seconde correction, dite d'inverse-volume. Celle-ci est associée aux puissances inverses des densités de triades qui, quand elles sont quantifiées, deviennent des opérateurs contenant "zéro" dans la partie discrète du spectre [32]. Ces corrections sont néanmoins nettement moins bien comprises et contraintes que celles d'holonomies. Pour ces raisons, nous ne les considérons pas ici.

3.2 Études portant sur le nombre d'*e-folds* d'inflation en cosmologie quantique à boucles

Nous avons maintenant suffisamment d'outils en main pour savoir dans quel contexte se sont placés une partie des travaux auxquels j'ai participé durant ma thèse.

Toujours en nous focalisant sur la composante homogène de l'Univers intéressons-nous à un paramètre en particulier : le nombre d'*e-folds* N d'inflation. Pourquoi s'y intéresser ? Car pour savoir si les spectres de puissance primordiaux scalaires et tenseurs sont compatibles avec les contraintes sur n_s et r il nous faut savoir quelle région (*i.e* quelle gamme de k comobiles) de ces spectres correspond aux échelles observées par le satellite Planck. Or la position de cette fenêtre observable dépend du nombre d'*e-folds* entre l'état initial de l'Univers et la recombinaison et donc du nombre d'*e-folds* inflationnaires. C'est ce constat qui rend ce paramètre d'importance dès lors que l'on désire contraindre et tester des modèles physique inflationnaires ou pré-inflationnaires à partir des données sur le CMB. En cosmologie standard $N \in [N_{\min} \simeq 60, 10^{14}]$ ¹¹ et la valeur de ce paramètre peut varier sur près de treize ordres de grandeur. Il est donc tout sauf contraint. Voyons son devenir en LQC.

3.2.1 Étude à caractère exhaustif du nombre d'*e-folds* d'inflation

Nous avons donc décidé de caractériser au mieux la manière dont la valeur de N varie en cosmologie quantique à boucles et ce en fonction des trois inconnues principales du modèle.

La première de ces inconnues correspond au taux d'anisotropies. Jusqu'ici nous avons toujours considéré que l'Univers est isotrope aux grandes échelles et décrit par un espace-temps FLRW, ce qui est une excellente approximation de son état au moment de la recombinaison. Or les anisotropies évoluent comme $1/a^6$ et gagnent donc de plus en plus en importance lorsque l'on remonte dans le passé, allant même jusqu'à dominer la dynamique au moment du rebond. Elles sont donc d'importance primordiale dans tout modèle de cosmologie en rebond et c'est pourquoi les modèles de Bianchi I, II et IX ont été étudiés en LQC. Dans notre travail nous avons implémenté les anisotropies en considérant un Univers de type Bianchi I qui correspond à une généralisation de la métrique plate FLRW au cas où chaque direction spatiale possède son propre facteur d'échelle. Il s'avère qu'en pratique la majeure partie des résultats physiques obtenus avec d'autres types d'univers anisotropes correspondent à ceux obtenus avec un Univers de type Bianchi I. Bien que simple ce modèle rend donc très bien compte des effets dus aux anisotropies.

La seconde inconnue est liée à la manière de mettre les conditions initiales, tant pour le contenu en matière que pour le fond lui même. Deux écoles de pensée prédominent. Dans la première les

11. La borne supérieure est estimée en considérant une densité d'énergie initiale valant celle de Planck.

conditions initiales sont placées au moment du rebond. Ce choix est discutable d'une part car la dynamique est à ce moment là totalement dominée par les effets quantiques et c'est donc à ce moment là qu'elle est le moins bien retranscrite par l'approche effective utilisée. D'autre part car il n'y a (à notre connaissance) aucun paramètre sur lequel il est possible de mettre des conditions initiales issues d'une intuition physique. Comme expliqué plus en détails dans l'article qui suit la situation est différente si les conditions initiales sont placées avant le rebond, dans la phase classique décrivant l'Univers en contraction. À ce moment là un paramètre sur lequel il est possible de définir une fonction de distribution de probabilité de l'état initial ayant un sens physique émerge. En effet dans ce régime l'équation de Klein-Gordon qui dicte l'évolution du champ scalaire se simplifie pour devenir celle d'un simple oscillateur-harmonique. Il semble donc raisonnable de choisir comme condition initiale pour le contenu en matière une fonction de distribution de probabilité (ou PDF) plate entre 0 et 2π pour la phase initiale de ce champ. De plus il a été montré [122] que la forme de cette PDF est conservée dans le temps (tant que le régime reste classique). Nul besoin donc de définir un instant privilégié. Bien qu'il soit de notre point de vue favorable de placer les conditions initiales dans la phase classique pré-rebond nous avons tout de même considéré les deux possibilités afin d'être le plus exhaustif possible.

Enfin la dernière grande inconnue du modèle est tout simplement la forme que doit prendre le contenu en énergie de l'Univers, qui n'est pas du tout prédite par la théorie. Le contenu dominant de l'Univers à haute énergie (tant dans la phase d'expansion que dans la phase de contraction) étant supposé donné par un champ scalaire la question de savoir quel contenu en énergie considérer se résume au choix de la forme du potentiel d'inflaton. Pour cette étude nous avons choisi différents potentiels parmi les plus favorisés par Planck¹².

La manière dont N varie en cosmologie quantique à boucles pour un Univers Bianchi I, avec un potentiel quadratique du champ d'inflaton et des conditions initiales placées dans la phase classique en contraction avait déjà été étudiée par L. Linsefors et A. Barrau dans [123]. Nous élargissons ici leur étude en considérant d'autres formes du potentiel d'inflaton plus en accord avec les observations et des conditions initiales pouvant également être mises au rebond. Ceci afin d'avoir un caractère plus exhaustif et de mieux cerner la manière dont le nombre d'*e-folds* inflationnaires varie en LQC.

12. Nous avons également considéré le cas du potentiel quadratique qui, bien que non favorisé par les observations, reste un cas de référence intéressant à regarder, ne serait-ce que par but comparatif avec d'autres études.

Detailed investigation of the duration of inflation in loop quantum cosmology for a Bianchi I universe with different inflaton potentials and initial conditions

Killian Martineau,^{1,*} Aurélien Barrau,^{1,†} and Susanne Schander^{2,‡}¹*Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Université Grenoble-Alpes, CNRS-IN2P3 53, Avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France*²*Institute for Quantum Gravity, University of Erlangen-Nürnberg, Staudtstraße 7B, D-91058 Erlangen, Germany*

(Received 11 January 2017; published 10 April 2017)

There is a wide consensus on the correct dynamics of the background in loop quantum cosmology. In this article we make a systematic investigation of the duration of inflation by varying what we think to be the most important “unknowns” of the model: the way to set initial conditions, the amount of shear at the bounce and the shape of the inflaton potential.

DOI: [10.1103/PhysRevD.95.083507](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.95.083507)

I. INTRODUCTION

Loop quantum gravity (LQG) is a promising attempt to perform a nonperturbative background-invariant quantization of general relativity (GR). General reviews can be found, e.g., in [1–10]. Loop quantum cosmology (LQC) is a quantum theory inspired by LQG that takes into account the cosmological symmetries. Some recent reviews can be found, e.g., in [11–22]. The status of perturbations in LQC is still not fully clear. On the one hand, the *deformed algebra* approach, which puts the emphasis on the consistency of the effective gauge theory, has been investigated in detail (see, e.g., [23–29]). On the other hand, the *dressed metric* approach, which puts the emphasis on the quantum treatment of the background and the perturbations, has been pushed forward (see, e.g., [30–32]). Other attempts have also been suggested, for example in [33] and [34]. At this stage, there is no wide consensus on LQC predictions for the primordial power spectra although some general trends can be underlined [35].

Concerning the dynamics of the LQC background however, different approaches lead to the very same dynamical equations, underlining the robustness of the model. The effective modified Friedmann equation,

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right), \quad (1.1)$$

is one of the general predictions of LQC. In this equation H stands for the Hubble parameter, ρ for the energy density, $\rho_c \sim \rho_{\text{Pl}}$ for the maximum energy density, and $\kappa = 8\pi$. Beyond the standard Hamiltonian LQC calculation, the above equation has even been rederived in quantum

reduced loop gravity [36] and in group field theory [37,38] (with a possible slight shift in the bounce energy). In this article, we focus on this robust background dynamics. Remarkably, in this cosmological paradigm, inflation occurs naturally, this being a consequence of the strong attractor status of its solutions when one considers a scalar field as the content of the Universe. Probably, the most interesting output of the LQC framework is that the duration of inflation itself can, to some extent, be predicted.

Still, even at the background level, three main uncertainties remain to be addressed systematically. The first one is the way to choose initial conditions. There are two schools of thought: one sets them in the remote past of the contracting branch, and the other one sets them at the bounce. The important question here is not related with the conditions themselves (they are in a one-to-one correspondence with one another), but with the variable to which a known (and presumably flat) probability distribution function (PDF) can be assigned. This is an important conceptual issue that will be discussed later in this article. The second uncertainty is associated with the amount of anisotropic shear at the bounce. As it will be diluted very fast during the expansion it might be very high at the bounce and remain compatible with observational data. In this study, we focus on the Bianchi I dynamics and consider different contributions from the shear. Since anisotropies scale as a^{-6} in a Bianchi I universe, a being the scale factor, they inevitably grow during the contracting phase and they are expected to play an important role in any bouncing model. The third main uncertainty is associated with the inflaton potential as LQG does not make any predictions concerning the matter content of the Universe. So far, the status is unclear and the matter content has to be assumed independently. In this paper we focus on four different potentials which are favored by the latest Planck results [39].

*martineau@lpsc.in2p3.fr

†Aurelien.Barrau@cern.ch

‡susanne.schander@gravity.fau.de

II. FORMALISM

The metric for a homogeneous Bianchi I universe is given by

$$ds^2 = -dt^2 + a_1^2 dx^2 + a_2^2 dy^2 + a_3^2 dz^2. \quad (2.1)$$

Anisotropies appear through three independent directional scale factors $\{a_1, a_2, a_3\}$.

The spatial hypersurface Σ of this spacetime has an \mathbb{R}^3 topology. Since it is not compact, many spatial integrals will diverge, but one can use the fundamental property of homogeneous spaces to restrict the study to a fiducial cell \mathcal{V} on the spatial manifold which will not appear in the final results. Its finite fiducial volume is given by $V_0 = l_1 l_2 l_3$, and its edges are chosen to lie along the fiducial orthonormal triads e_a^i . Fiducial orthonormal cotriads ω_a^i are also introduced in a such a way that the fiducial spatial metric can be written as $\overset{\circ}{q}_{ab} = \overset{\circ}{\omega}_a^i \overset{\circ}{\omega}_b^j \delta_{ij}$. The Ashtekar connection A_a^i and the densitized triads E_i^a can be reduced using the symmetries of the spatial manifold of the homogeneous Bianchi I spacetime:

$$A_a^i = c^i (l_i)^{-1} \overset{\circ}{\omega}_a^i \quad \text{and} \quad E_i^a = \frac{p_i l_i}{V_0} \sqrt{\det(\overset{\circ}{q}_{ab})} \overset{\circ}{e}_i^a, \quad (2.2)$$

where the coefficients c^i and p_i are the symmetry-reduced coefficients of the Ashtekar connection and of the densitized triad. They form a canonical set with the following Poisson brackets:

$$\{c^i, p_j\} = \kappa \gamma \delta_j^i, \quad (2.3)$$

where $\gamma = 0.2375$ is the Barbero-Immirzi parameter whose value has been obtained by evaluating the black hole entropy in LQG [40]. The specific choice of this parameter is still a source of debates, but the precise numerical value is not fundamental for the study presented here (the γ -dependence of the energy density available at the bounce is quite trivial).

The p_i coefficients can be expressed in terms of the cosmological directional scale factors:

$$\begin{cases} p_1 = \epsilon_1 l_2 l_3 |a_2 a_3|, \\ p_2 = \epsilon_2 l_1 l_3 |a_1 a_3|, \\ p_3 = \epsilon_3 l_1 l_2 |a_1 a_2|, \end{cases} \quad (2.4)$$

where $\epsilon_i = \pm 1$ depending on the orientation of the triads. Without any loss of generality, we fix $\epsilon_i = +1$ and $l_i = 1$, leading to $V_0 = 1$.

The directional scale factors can be written in terms of the reduced densitized triads:

$$a_1 = \sqrt{\frac{p_2 p_3}{p_1}}, \quad \text{and cyclic expressions,} \quad (2.5)$$

leading to the directional Hubble parameters,

$$H_1 := \frac{\dot{a}_1}{a_1} = -\frac{\dot{p}_1}{2p_1} + \frac{\dot{p}_2}{2p_2} + \frac{\dot{p}_3}{2p_3}, \quad \text{and cyclic expressions,} \quad (2.6)$$

where the dots refer to derivatives with respect to cosmic time.

We define a mean scale factor,

$$a := (a_1 a_2 a_3)^{1/3}, \quad (2.7)$$

in order to obtain a mean Hubble parameter

$$H := \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{3}(H_1 + H_2 + H_3). \quad (2.8)$$

The classical evolution of the metric is given by the following Hamiltonian:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{Grav}}(c_i, p_i) + \mathcal{H}_M(p_i, \Phi, \pi), \quad (2.9)$$

where Φ is a scalar field, and π is its conjugate momentum. The gravitational and matter Hamiltonians are respectively given by [41]

$$\mathcal{H}_{\text{Grav}} = -\frac{N}{\kappa \gamma^2} (a_1 c_2 c_3 + a_2 c_1 c_3 + a_3 c_1 c_2), \quad (2.10)$$

and

$$\mathcal{H}_M = N \sqrt{p_1 p_2 p_3} \rho, \quad (2.11)$$

where N is the lapse function.

Quantization of the above cosmological model within the lines of LQC requires the introduction of *holonomy corrections*. At the effective level, this procedure basically consists of the following replacement:

$$c_i \rightarrow \frac{\sin(\bar{\mu}_i c_i)}{\bar{\mu}_i}, \quad (2.12)$$

where $\bar{\mu}_i$ are given by

$$\bar{\mu}_i = \frac{\lambda}{a_i}, \quad (2.13)$$

with $\lambda = \sqrt{\Delta} = \sqrt{4\sqrt{3}\pi\gamma}$, the square root of the minimum eigenvalue of the area operator in LQG.

We introduce three fundamental parameters h_i :

$$h_i := \bar{\mu}_i c_i = \frac{\lambda c_i}{a_i}. \quad (2.14)$$

Those three parameters are gauge-invariant variables which can be interpreted as the classical limits of the quantum equivalents of the directional Hubble parameters. After implementing the holonomy corrections, the effective gravitational Hamiltonian becomes

$$\mathcal{H}_{\text{Grav}} = -\frac{N\sqrt{p_1 p_2 p_3}}{\kappa\gamma^2\lambda^2} [\sin(h_1)\sin(h_2) + \sin(h_2)\sin(h_3) + \sin(h_1)\sin(h_3)]. \quad (2.15)$$

Besides, the functional form of the matter Hamiltonian does not get changed as the matter Hamiltonian does not depend on the c_i coefficients. We therefore assume that it remains unchanged by the quantization procedure.

Following the pioneering work of [42] and rewriting the effectively quantized Hamiltonian constraint, $\mathcal{H} = 0$, one can find the generalized Friedmann equation for a Bianchi I universe with holonomy corrections [43]:

$$H^2 = \sigma_Q^2 + \frac{\kappa}{3}\rho - \lambda^2\gamma^2 \left(\frac{3}{2}\sigma_Q^2 + \frac{\kappa}{3}\rho \right)^2, \quad (2.16)$$

where σ_Q^2 corresponds to the quantum shear and can be expressed in terms of the h_i coefficients:

$$\sigma_Q^2 := \frac{1}{3\lambda^2\gamma^2} \left(1 - \frac{1}{3} [\cos(h_1 - h_2) + \cos(h_2 - h_3) + \cos(h_3 - h_1)] \right). \quad (2.17)$$

It should be stressed that the way anisotropies are defined here, in agreement with [43], differs from the usual cosmological definition. Upper limits for ρ and σ_Q^2 can easily be obtained by requiring $H^2 > 0$ in Eq. (2.16):

$$\rho \leq \rho_c = \frac{3}{\kappa\lambda^2\gamma^2}, \quad \text{obtained when } \sigma_Q^2 = 0, \quad (2.18)$$

$$\sigma_Q^2 \leq \sigma_{Q_c}^2 = \frac{4}{9\lambda^2\gamma^2}, \quad \text{obtained when } \rho = 0. \quad (2.19)$$

The dynamics of the p_i -functions is given by

$$\dot{p}_1 = \frac{1}{N} \{p_1, \mathcal{H}\} = \frac{p_1}{\gamma\lambda} \cos(h_1) [\sin(h_2) + \sin(h_3)],$$

and cyclic expressions. (2.20)

From this, the classical directional Hubble parameters, H_i , can be expressed as functions of the h_i 's:

$$H_1 = -\frac{\dot{p}_1}{2p_1} + \frac{\dot{p}_2}{2p_2} + \frac{\dot{p}_3}{2p_3}$$

$$= \frac{1}{2\gamma\lambda} [\sin(h_1 - h_2) + \sin(h_1 - h_3) + \sin(h_2 + h_3)],$$

and cyclic expressions. (2.21)

The total Hubble parameter then reads

$$H = \frac{1}{6\gamma\lambda} [\sin(h_1 + h_2) + \sin(h_1 + h_3) + \sin(h_2 + h_3)]. \quad (2.22)$$

In the same way, the dynamics of the h_i 's is given by the following equations:

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{N} \{h_1, \mathcal{H}\}$$

$$= \frac{1}{2\gamma\lambda} [(h_2 - h_1)(\sin(h_1) + \sin(h_3)) \cos(h_2)$$

$$+ (h_3 - h_1)(\sin(h_1) + \sin(h_2)) \cos(h_3)]$$

$$- \frac{\kappa\gamma\lambda}{2} (\rho + P) \quad \text{and cyclic expressions,} \quad (2.23)$$

where the pressure P is defined to fulfill the continuity equation $\dot{\rho} = 3H(\rho + P)$.

In this study, the matter content of the Universe is assumed to be a scalar field $\Phi(t)$. Its evolution is given by the Klein-Gordon equation:

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{dV}{d\Phi} = 0. \quad (2.24)$$

The previous equations drive the dynamics of the system. They are the basis for the subsequent simulations.

III. SIMULATIONS

A. Description of the chosen potentials

For the purpose of this study, we choose four different potentials, which are all in good agreement with the most recent Planck data [39] as far as standard cosmological models are concerned.

- (i) The most common potential when dealing with slow-roll inflation is the quadratic one:

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} m^2 \Phi^2. \quad (3.1)$$

Although it is not the best fit to the most recent CMB measurements, a massive scalar field is very useful in order to compare different approaches. For this potential, we fix $m_{\text{quadratic}} = 1.21 \times 10^{-6} m_{\text{Pl}}$, as suggested by the Planck data [39].

- (ii) The large tensor-to-scalar ratio r initially reported by BICEP2 [44] can be generated by an inflation based on a simple monomial effective potential $V(\Phi) \propto \Phi^p$. Although the initial analysis was shown to be incorrect and values $p > 2$ are now strongly disfavored by Planck [39], some values of $p < 2$, like $p = 2/3$, $p = 1$ or $p = 4/3$ are still in good agreement with the data. In addition to the quadratic potential previously mentioned, we therefore explore the LQC dynamics with the potential associated with $p = 1$:

$$V(\Phi) = \Lambda^3 \Upsilon |\Phi|, \quad (3.2)$$

with the following parametrization: $\Lambda = 1.23 \times 10^{-3}$ and $\Upsilon = 1.22 \times 10^{-1}$ [45]. The mass of the scalar field with this potential is given by $m_{\text{monomial}, p=1} \sim \Lambda \times \Upsilon \sim 1.50 \times 10^{-4} m_{\text{Pl}}$ [45].

- (iii) Inflation can also be motivated by supergravity and string theory. In the context of type IIB string compactifications, and with a simple string model of inflation, the effective inflaton potential is well approximated by [46]

$$V(\Phi) \simeq \frac{C_2}{\langle \nu \rangle^{10/3}} \left[(3 - R) - 4 \left(1 + \frac{1}{6} R \right) e^{-\frac{\Phi}{\sqrt{3}}} + \left(1 + \frac{2}{3} R \right) e^{-\frac{4\Phi}{\sqrt{3}}} + R e^{\frac{2\Phi}{\sqrt{3}}} \right], \quad (3.3)$$

where the following parametrization has been chosen: $C_2 = 5157.35$, $R = 2.3 \times 10^{-6}$ and $\langle \nu \rangle = 1709.55$ [46]. The mass $m_{\text{stringy}} = 5.87 \times 10^{-4} m_{\text{Pl}}$ of the inflaton field is given by the curvature of the potential around its minimum $V''(0)$. Although this study is focused on LQG, we investigate this string-inspired potential as a good phenomenological description of inflation.

- (iv) The last potential we will focus on is the Starobinsky potential. Even if the statistical significance of this statement is to be taken with care, models with the Starobinsky potential have the best accordance [47] with observational data [39]. The potential is given by

$$V(\Phi) = \frac{3m^2}{4\kappa} \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\Phi} \right)^2. \quad (3.4)$$

The mass value for this potential is fixed to be $m_{\text{Starobinsky}} = 2.51 \times 10^{-6} m_{\text{Pl}}$ [48].

The shapes of the string-inspired potential and of the Starobinsky potential are displayed in Fig. 1.

B. Duration of slow-roll inflation

Once the inflaton potential $V(\Phi)$ has been chosen, the key question to address is the one of the associated duration of inflation for the given initial conditions.

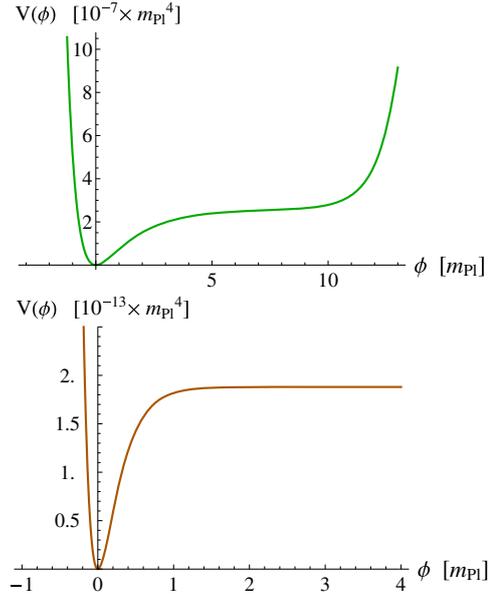


FIG. 1. Upper panel: String-theory-inspired inflaton potential according to the chosen parametrization. Lower panel: Starobinsky potential for a mass of the inflaton field $m_{\text{Starobinsky}} = 2.51 \times 10^{-6} m_{\text{Pl}}$.

For this purpose, we express the number of e -folds of slow-roll inflation as the integral

$$N = \int_{a_i}^{a_f} d \ln(a) = \left| \int_{\Phi_i}^{\Phi_f} \frac{1}{\sqrt{2\epsilon_V}} \sqrt{\kappa} \frac{d\Phi}{m_{\text{Pl}}} \right|. \quad (3.5)$$

In this expression, Φ_i stands for the value of the scalar field at the beginning of the slow-roll phase and Φ_f is such that $\epsilon_V(\Phi_f) = 1$, where

$$\epsilon_V(\Phi) \equiv \frac{1}{2\kappa} \left(\frac{V_{,\Phi}}{V} \right)^2 m_{\text{Pl}}^2 \quad (3.6)$$

is the first slow-roll parameter which is equivalent to the first Hubble flux parameter under slow-roll assumptions.

This expression for N leads to the following results for the different potentials considered in this study:

$$\text{Quadratic potential: } N = 2\pi\Phi_i^2 - \frac{1}{2}, \quad (3.7)$$

$$\text{Linear potential: } N = 4\pi\Phi_i^2 - \frac{1}{4}, \quad (3.8)$$

Starobinsky potential:

$$N = \frac{3}{4} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \frac{3}{4} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{\frac{3\kappa}{8}} \Phi_i + \frac{3}{4} e^{\sqrt{\frac{2\kappa}{3}}\Phi_i}. \quad (3.9)$$

In the case of the string theory potential the integral is computed numerically.

The last ingredient needed to fully describe the dynamics of the Universe is the choice of a set of initial conditions. As mentioned in the Introduction, there are two main schools of thought about the way to implement initial conditions in LQC. The first line of thought [49,50] follows the argumentation that setting initial conditions in the remote past makes sense since it is the classical phase where physics is well under control, and this is logically consistent if causality is to be taken seriously. In addition, there is then a variable to which a flat PDF can naturally be assigned: the phase of the oscillations of the scalar field. This flat PDF is, in addition, preserved over time when quantum corrections remain small. The other point of view [51] is to set initial conditions at the bounce, which is the only special moment in the cosmic history. The relevant variable to which one can assign a flat PDF is then the fraction of potential energy at the bounce. In the following, we will study both possibilities and investigate the effects of anisotropies in each case. We will, however, argue that setting initial conditions in the remote past is in our opinion more consistent.

C. Initial conditions in the remote past

Using a Taylor expansion, we assume that all potentials can be approximated by a quadratic form far enough from the bounce in the classical contracting phase. This is possible because when the energy density is very small, as expected in the remote past of the prebounce branch, the field is near the bottom of its potential.

1. Initial conditions for the matter sector

In order to describe the evolution of the scalar field, we introduce two dynamical parameters, the potential energy parameter x and the kinetic energy parameter y , defined by

$$x(t) := \sqrt{\frac{V(\Phi)}{\rho_c}}, \quad y(t) := \sqrt{\frac{\dot{\Phi}^2}{2\rho_c}}. \quad (3.10)$$

They satisfy

$$x^2(t) + y^2(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c}. \quad (3.11)$$

In the case of the quadratic potential, $x(t)$ becomes

$$x(t) = \frac{m\Phi(t)}{\sqrt{2\rho_c}}. \quad (3.12)$$

The Klein-Gordon equation (2.24) can therefore be written as

$$\begin{cases} \dot{x} = my, \\ \dot{y} = -3Hy - mx. \end{cases}$$

The evolution of the scalar field is driven by two different time scales: the classical one $1/m$, and the quantum one $1/\sqrt{3\kappa\rho_c}$. The ratio of these two time scales is given by

$$\Gamma := \frac{m}{\sqrt{3\kappa\rho_c}}. \quad (3.13)$$

In the classical phase before the bounce, we assume that the following conditions are satisfied:

$$H(t) < 0, \quad \sigma_Q^2(t) \ll \frac{\kappa}{3}\rho(t) \quad \text{and} \quad \sqrt{\frac{\rho(t)}{\rho_c}} \ll \Gamma. \quad (3.14)$$

As long as the assumption $\sqrt{\rho/\rho_c} \ll \Gamma$ holds, the Klein-Gordon equation (2.24) reduces to the one of a simple harmonic oscillator, and x and y are thus given by

$$\begin{cases} x(t) \approx \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho_c}} \sin(mt + \delta), \\ y(t) \approx \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho_c}} \cos(mt + \delta). \end{cases} \quad (3.15)$$

The δ -parameter, i.e. the phase of the oscillating scalar field, plays an important role in this study. Still under the hypothesis given by Eq. (3.14), and by using the derivative of the Friedmann equation restricted to lowest order terms in x and y , one obtains the expression for the energy density:

$$\rho(t) \approx \rho_c \left(\frac{\Gamma}{\alpha}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{2\alpha} \left(mt + \frac{1}{2} \sin(2mt + 2\delta)\right)\right]^{-2}, \quad (3.16)$$

where α is a free parameter set to ensure that Eq. (3.14) remains valid. It has been shown in [52] that the shape of the PDF of the duration of slow-roll inflation does not depend on the value of α as long as it is high enough. For the purpose of this study, we have chosen $\alpha = 17/4\pi + 1$. This value induces enough oscillations of the field in the contracting phase (more than 10) and is convenient to derive analytical solutions in the case of the quadratic potential.

Setting $t = 0$ in Eqs. (3.18) and (3.16) gives the initial conditions for the matter sector:

$$\begin{cases} \Phi(0) = \sqrt{2\rho(0)} \sin(\delta)/m, \\ \dot{\Phi}(0) = \sqrt{2\rho(0)} \cos(\delta), \end{cases} \quad (3.17)$$

and

$$\rho(0) = \rho_c \left(\frac{\Gamma}{\alpha}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{4\alpha} \sin(2\delta)\right]^{-2}. \quad (3.18)$$

Since we have no constraint on the initial PDF of the quantum shear $\sigma_Q^2(0)$, except that it must fulfill Eq. (3.14), we express the initial quantum shear as a fraction of the initial energy density:

$$\sigma_Q^2(0) = f \frac{\kappa}{3} \rho(0). \quad (3.19)$$

The parameter $f \ll 1$ represents the ratio of the initial quantum shear over the initial energy density.

For fixed values of α and f , the only free variable which remains to be chosen in order to fix the initial parameters $\{\Phi(0), \dot{\Phi}(0), \rho(0), \sigma_Q^2(0)\}$ completely is the initial phase of the scalar field δ . The question of how to fix δ is therefore crucial to determine the dynamics. The most reasonable PDF choice for the δ -parameter is a flat one, since the phase of the field is purely contingent without any physically preferred value. Most importantly, as shown in [52], and as explained before, this PDF is preserved over time as long as one does not approach the bouncing phase. The fact that there exists a specific variable to which a physically well-motivated PDF can be assigned is a very important feature of the model. This is the main reason why predictions for the duration of inflation can be made.

2. Initial conditions for the background dynamics

Far before the bounce, one can approximate Eqs. (2.17) and (2.22) by their Taylor development at first order. This leads to the following initial conditions:

$$H(0) \simeq \frac{1}{3\gamma\lambda} (h_1(0) + h_2(0) + h_3(0)), \quad (3.20)$$

and

$$\sigma_Q^2(0) \simeq \frac{1}{18\gamma^2\lambda^2} [(h_1(0) - h_2(0))^2 + (h_1(0) - h_3(0))^2 + (h_2(0) - h_3(0))^2]. \quad (3.21)$$

We define a symmetry variable for the anisotropy:

$$S := \frac{(h_2 - h_1) - (h_3 - h_2)}{(h_3 - h_1)}. \quad (3.22)$$

Without any loss of generality, we choose the following labeling,

$$h_1 \leq h_2 \leq h_3, \quad (3.23)$$

such that $0 \leq |S| \leq 1$.

Solving Eqs. (3.20) and (3.21) with Eq. (3.22) provides the initial conditions for the h_i -parameters:

$$\begin{cases} h_1(0) \simeq \gamma\lambda H(0) - \gamma\lambda \frac{3+S}{\sqrt{3+S^2}} \sqrt{\sigma_Q^2(0)}, \\ h_2(0) \simeq \gamma\lambda H(0) + \gamma\lambda \frac{2S}{\sqrt{3+S^2}} \sqrt{\sigma_Q^2(0)}, \\ h_3(0) \simeq \gamma\lambda H(0) + \gamma\lambda \frac{3-S}{\sqrt{3+S^2}} \sqrt{\sigma_Q^2(0)}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Since it has been shown in [50] that the value of S has no influence on the duration of slow-roll inflation, it will be set to zero in the following.

Finally, the initial Hubble parameter can also be expressed as

$$H(0) = -\sqrt{\sigma_Q^2(0) + \frac{\kappa}{3}\rho(0) - \lambda^2\gamma^2 \left(\frac{3}{2}\sigma_Q^2(0) + \frac{\kappa}{3}\rho(0) \right)^2}. \quad (3.25)$$

Equations (3.30) and (3.25) define the initial conditions for the background dynamics.

3. Simulations

The histograms in the first columns of Figs. 2, 3, 4 and 5 are estimators of the PDFs of the duration of slow-roll inflation, with respect to the measure dN , and for different values of the initial rate of anisotropies: $f = 0$, $f = 10^{-4}$ and $f = 10^{-2}$. They tend toward the real PDFs in the limits $\Delta\delta \rightarrow 0$ and $\Delta N \rightarrow 0$. The second columns of those figures represent the duration of inflation as a function of the initial phase of the inflaton field for a given value of f . This investigation has already been performed for a quadratic potential [50], and it was shown that, as anisotropies grow up, the mean value of the PDF for the number of e -folds decreases. We recover this result in Fig. 2. For high amounts of shear, the distribution becomes bimodal, one

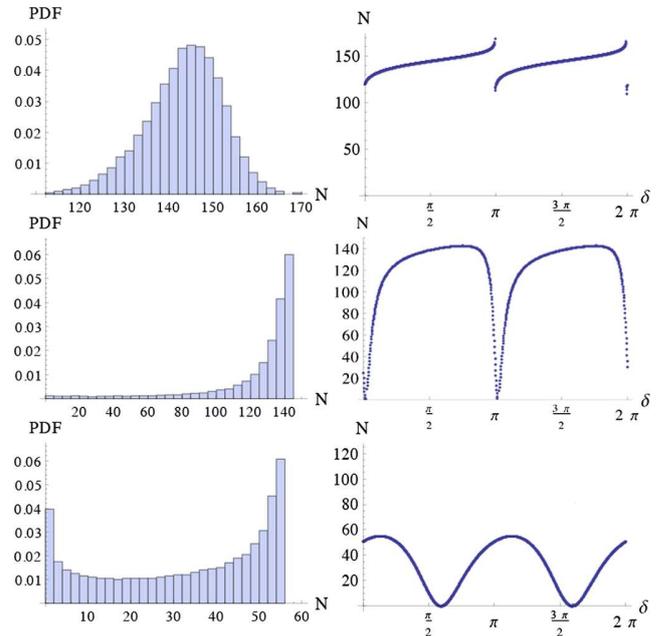


FIG. 2. Quadratic inflaton potential with initial conditions set before the bounce. Left column: Probability distribution functions for the number of e -folds of inflation. Right column: Number of e -folds of inflation as a function of the initial phase of the inflaton field. Upper panels: Isotropic universe, $f = 0$. Middle panels: Anisotropic universe, $f = 10^{-4}$. Lower panels: Anisotropic universe, $f = 10^{-2}$.

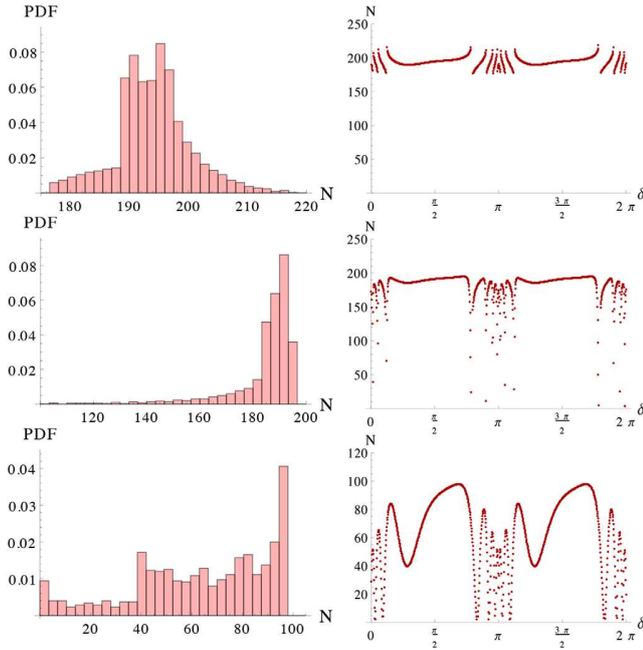


FIG. 3. Linear inflaton potential with initial conditions set before the bounce. Left column: Probability distribution functions for the number of e -folds of inflation. Right column: Number of e -folds of inflation as a function of the initial phase of the inflaton field. Upper panels: Isotropic universe $f = 0$. Middle panels: Anisotropic universe, $f = 10^{-4}$. Lower panels: Anisotropic universe, $f = 10^{-2}$.

side corresponding to “energy-dominated” bounces and the other one to “shear-dominated” bounces.

An important comment is here in order. When considering models leading to very high numbers of e -folds, a logarithmic scale is useful for a better visualization of the full dynamics. In this case, however, the usual PDF normalization fails to capture the most important feature. The standard normalization is indeed such that the sum of the contents of each bin multiplied by its width is equal to 1. With this choice, the contents of the last bins—when using a log scale—will be very suppressed in the plot just because the width is large, thus giving the wrong feeling that a high number of e -folds is improbable. For this reason, when using a logarithmic scale, we superimpose on each plot the PDF and what we call the probability estimator function (PEF). This estimator uses a normalization such that the sum of the contents of the bins is unitary. Although not strictly a PDF this estimator is more intuitive and allows the reader to immediately see what is the most probable number of e -folds. We recommend to base the conclusions on the PEF rather than on the PDF when both are given. When using linear scales, both estimators coincide (with just a different y scale). To avoid making the text too heavy we use the term PDF as a generic one in the following. However, when a log scale is used on the plot, the trend which is mentioned will appear more clearly on the PEFs.

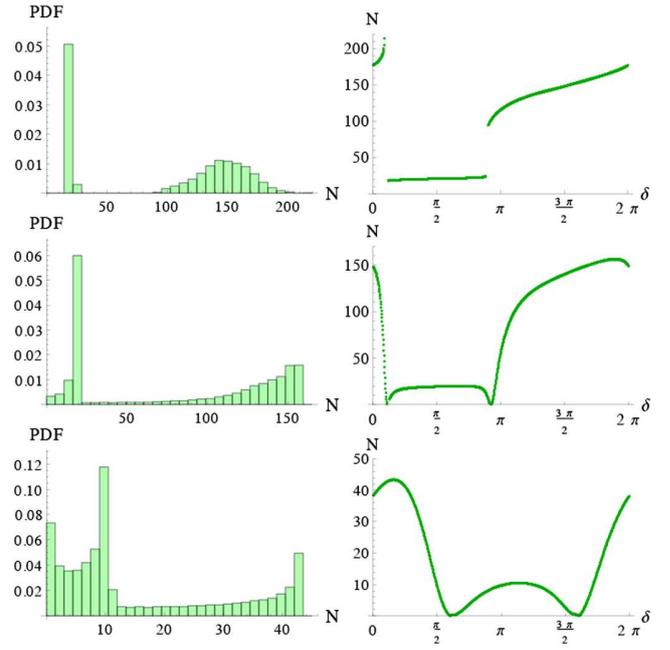


FIG. 4. String theory inflaton potential with initial conditions set before the bounce. Left column: Probability distribution functions for the number of e -folds of inflation. Right column: Number of e -folds of inflation as a function of the initial phase of the inflaton field. Upper panels: Isotropic universe $f = 0$. Middle panels: Anisotropic universe, $f = 10^{-4}$. Lower panels: Anisotropic universe, $f = 10^{-2}$.

When a PDF is represented alone on a plot it is always a solid line; however when it is superimposed with a PEF, the PDF is then represented as a dotted line to emphasize the clearer interpretation of the PEF.

It can be seen in Figs. 3, 4 and 5 that this trend also appears for the other potentials. This, however, is not surprising when considering models with anisotropic shear: the three scale factors associated to the three spatial directions will not reach their minimum value at the same time during the contraction phase. Thus, the maximum amount of energy density available for the scalar field during the bouncing phase will be lower than in the isotropic case. The inflaton field will not be pushed along its potential as far as in the isotropic case, leading to a shorter phase of slow-roll inflation. The major effect of anisotropies is therefore not a modification in the dynamical equations of the Universe¹ but a shift in the maximum amount of energy available for the scalar field at the bounce. It is mainly this effect which leads to a smaller number of e -folds of slow-roll inflation.

As explained above, one of the most important features of LQC relies on the fact that the duration of slow-roll inflation is well constrained when initial conditions are set

¹Since anisotropies scale as a^{-6} , the dynamics is almost always equivalent to the isotropic LQC one.

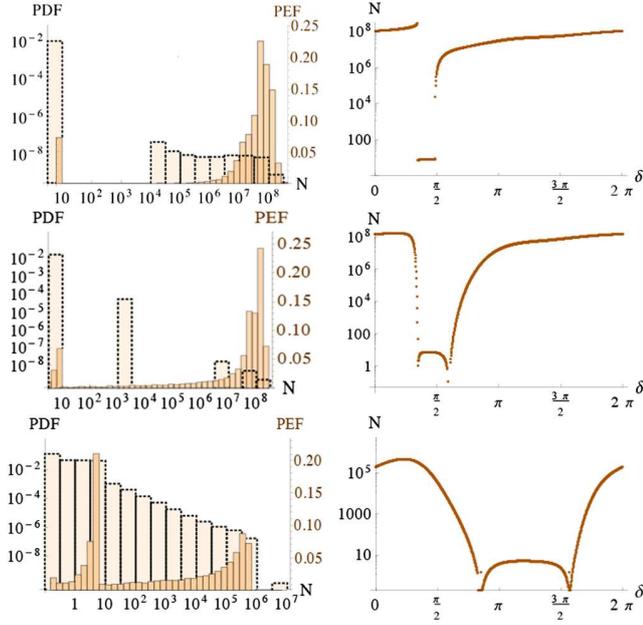


FIG. 5. Starobinsky potential with initial conditions set before the bounce. Left column: Probability distribution functions (and PEFs when useful) for the number of e -folds of inflation. Right column: Number of e -folds of inflation as a function of the initial phase of the inflaton field. Upper panels: Isotropic universe $f = 0$. Middle panels: Anisotropic universe, $f = 10^{-4}$. Lower panels: Anisotropic universe, $f = 10^{-2}$.

in the contracting phase. This remains partially true when anisotropies are taken into account, although the relative widths of the PDFs increase and their mean values decrease. It should however be emphasized that this important feature of LQC is actually only true as long as the inflaton potential is sufficiently confining. If one considers for example the Starobinsky potential, as shown in Fig. 5, the period of slow-roll inflation lasts much longer compared to the cases with other potentials. This is because of the large “plateau.” We recall here that this potential has initially been introduced for quantum gravity reasons, and, at the phenomenological level, for obtaining a long enough phase of inflation, even when the energy density remains small. However, the LQC dynamics automatically provides highly energetic field configurations at the onset of inflation. The inflaton field is therefore “pushed” far away on the plateau, leading to a very long phase of slow-roll inflation. The period of slow-roll inflation (without shear) of the number of e -folds around 150–200 e -folds, which is generic for confining potentials in LQC, is now shifted to very different values around 10^8 .

In addition, the bimodal shape of the PDFs in the cases of the string theory and of the Starobinsky potentials is due to the fact that those two potentials are highly asymmetric, as described in [46] and [48]. The low- N peaks correspond to cases where the scalar field is negative at the beginning of inflation, i.e. in the region where the potential is sharp.

On the other hand, the high- N peak corresponds to positive values of the scalar field at the beginning of inflation, i.e. where the potentials have a plateau.

It is important to underline that for all the considered potentials, the way the number of e -folds varies with respect to the phase δ is highly nontrivial. This is one of the reasons why exhaustive simulations are necessary. From the phenomenological viewpoint, it is worth stressing that for all potentials but the Starobinsky potential, the predicted number of e -folds, especially when anisotropies are taken into account, is not much higher than the minimum value favored by observations (around 70 e -folds). We want to stress that this provides an opportunity to make quantum gravity effects potentially observable. If inflation lasts much longer than 70 e -folds, physical modes with the size of a Planck length at the bouncing time become larger than the Hubble radius at present times, which would make the detection of possible quantum gravity effects very difficult, if not hopeless. But if inflation was not much longer than 70 e -folds, an interesting window opens up on LQC phenomenology.

D. Initial conditions at the bounce

In this section, we consider the case in which initial conditions are set at the bounce ($t = 0$ now refers to the bouncing time). The variable to which a presumably known PDF can be assigned is no longer the initial phase of the scalar field δ , but the initial potential energy parameter $x(0)$. A flat PDF will be assumed for $x(0)$, as in [51] and many historical studies, although it is far less motivated than the flat PDF for the δ -parameter used in the previous section.

The initial shear is still introduced as a fraction of the initial energy density, $\sigma_Q^2(0) = f\kappa/3\rho(0)$, in order to be able to properly compare the effects of anisotropies with what happened in the previous case, where initial conditions were set before the bounce. The initial value of f is obtained by averaging its values over all phases at the bounce in the case of initial conditions set in the remote past.

The value of the initial energy density can easily be calculated:

$$\begin{aligned}
 H(0) = 0 &\Leftrightarrow \sigma_Q^2(0) + \frac{\kappa}{3}\rho(0) \\
 &\quad - \lambda^2\gamma^2 \left(\frac{3}{2}\sigma_Q^2(0) + \frac{\kappa}{3}\rho(0) \right)^2 \\
 = 0 &\Leftrightarrow \rho(0) = 3 \frac{f+1}{\kappa\lambda^2\gamma^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{2}f\right)^2}. \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

To obtain the initial conditions for the h_i -coefficients, we fix one of them to $h_i(0) = n\pi/2$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$ and the two others [$h_j(0)$ and $h_k(0)$, $j, k = 1, 2, 3$, $i \neq j \neq k$] are then fixed by the following constraints,

$$\sin(h_1 + h_2) + \sin(h_1 + h_3) + \sin(h_2 + h_3) = 0, \quad (3.27)$$

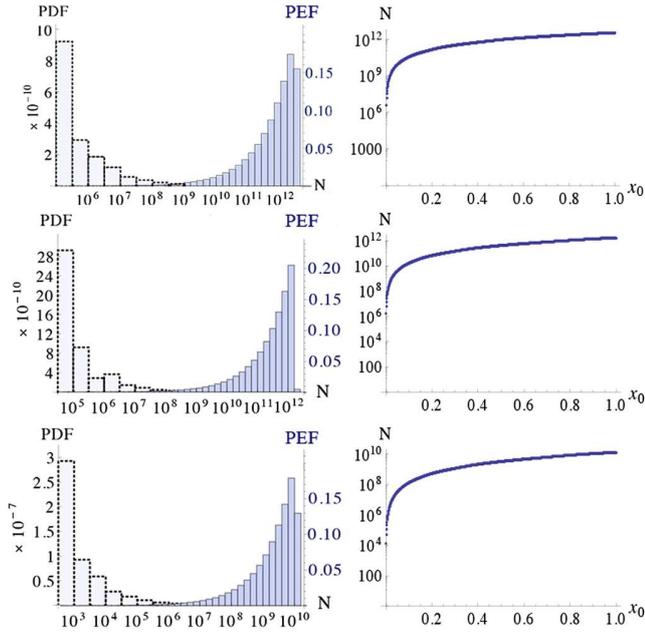


FIG. 6. Quadratic inflaton potential with initial conditions set at the bounce and positive values of $\Phi(0)$ and $\dot{\Phi}(0)$. Left column: Probability distribution functions (and PEFs) for the number of e -folds of inflation. Right column: Number of e -folds of inflation as a function of x_0 . Upper panels: Isotropic universe $f = 0$. Middle panels: Anisotropic universe, $f = 0.57$. Lower panels: Anisotropic universe, $f = 118$.

and

$$\begin{aligned} & \cos(h_1 - h_2) + \cos(h_1 - h_3) + \cos(h_2 - h_3) \\ &= 3 - 9f \frac{f + 1}{(1 + 3f/2)^2}, \end{aligned} \quad (3.28)$$

obtained from Eqs. (2.22) and (2.17). One of the $h_i(0)$'s must be a multiple of π ; otherwise solutions to this system are nonreal.

Figures 6 and 7 display the results of the simulations obtained for the quadratic and the linear potentials, for positive values of $\Phi(0)$ and $\dot{\Phi}(0)$. It is clear that anisotropies have no significant effects on the shapes of the probability distribution functions for N . However, the mean value of N decreases when f increases, similar to the behavior of N when initial conditions are set in the prebouncing phase. This is not surprising since the major effect of the shear is a decrease in the energy density available for the scalar field at the bounce. It should also be underlined that N increases significantly when $x(0)$ grows up. Those large values of N were nearly never reached in the previous scenario, when initial conditions are set before the bounce, because a very high level of fine-tuning of the initial phase δ would have been required to generate a nontiny value of $x(0)$. Obviously, the duration of inflation is less constrained when initial conditions are set at the bounce with a flat PDF on $x(0)$. The total number of e -folds

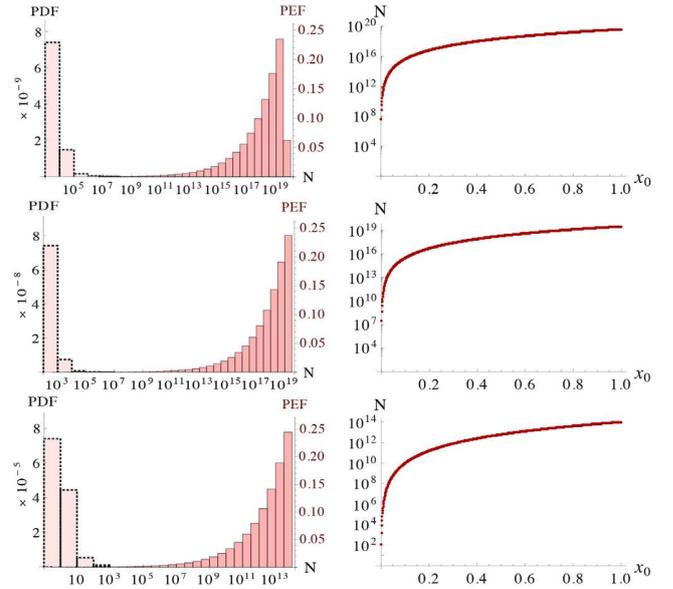


FIG. 7. Linear inflaton potential with initial conditions set at the bounce and positive values of $\Phi(0)$ and $\dot{\Phi}(0)$. Left column: Probability distribution functions (and PEFs) for the number of e -folds of inflation. Right column: Number of e -folds of inflation as a function of x_0 . Upper panels: Isotropic universe $f = 0$. Middle panels: Anisotropic universe, $f = 8.73 \times 10^{-2}$. Lower panels: Anisotropic universe, $f = 288$.

is much higher than $N^* \sim 60\text{--}70$ which would correspond to visible inflation.

It should be underlined that a flat PDF for $x(0)$ may not be relevant when setting initial conditions in the case of non-symmetric potentials, such as the string theory potential or the Starobinsky potential. For those potentials, a given value of $V(\Phi)$ corresponds to two different values of $|\Phi|$, and consequently to two different evolutions of the scalar field.

The case of the string theory potential is presented in Fig. 8. Positive values of $\Phi(0)$ and $\dot{\Phi}(0)$ were chosen in order to probe the right part of the potential, and in order to be comparable with the two previous potentials. The first two lines show that in the cases $f = 0$ and $f = 0.31$, the duration of slow-roll inflation does not vary a lot with $x(0)$. This behavior is due to the fact that for nearly all the displayed values of $x(0)$, the value of the potential energy at the beginning of the slow-roll phase is higher than the plateau. On the third line, however, the amount of shear becomes high enough so that, at low $x(0)$, the potential energy becomes lower than the plateau. This implies much shorter durations of inflation.

The case of the Starobinsky potential is slightly more complicated. The initial value of the inflaton field $\Phi(0)$ can be expressed as a function of $x(0)$:

$$\Phi(0) = -\sqrt{\frac{3}{2\kappa}} \log \left(1 \mp \sqrt{\frac{4\kappa\rho_c}{3m^2} x(0)} \right), \quad (3.29)$$

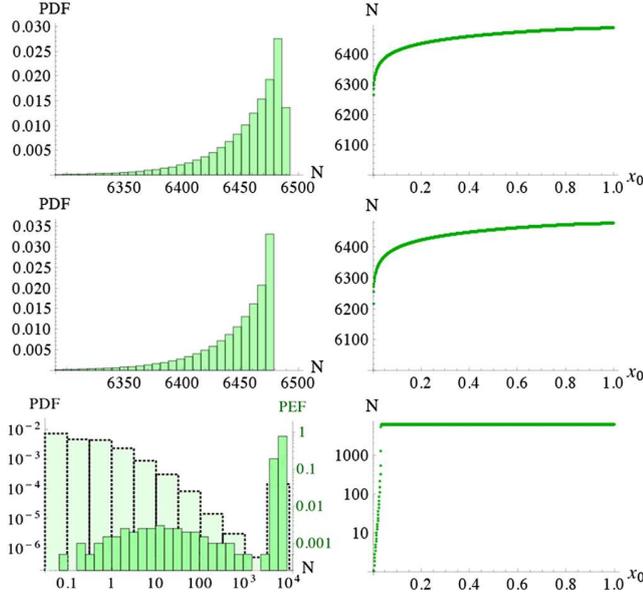


FIG. 8. String-theory inflaton potential with initial conditions set at the bounce and positive values of $\Phi(0)$ and $\dot{\Phi}(0)$. Left column: Probability distribution functions (and PEFs when useful) for the number of e -folds of inflation. Right column: Number of e -folds of inflation as a function of x_0 . Upper panels: Isotropic universe $f = 0$. Middle panels: Anisotropic universe, $f = 0.31$. Lower panels: Anisotropic universe, $f = 355$.

where the “minus” solution in the logarithm corresponds to positive values of $\Phi(0)$ whereas the “plus” solution corresponds to negative ones. If we consider positive values of $\Phi(0)$, a specific value of $x(0)$ appears:

$$x_c(0) = \sqrt{\frac{3m^2}{4\kappa\rho_c}} = 6.77 \times 10^{-7}. \quad (3.30)$$

It corresponds to the value of $x(0)$ for which the potential energy is equal to the value of the plateau of the potential: $x_c(0) = \sqrt{\frac{V_{\text{plate}}}{\rho_c}}$.

We distinguish two cases:

- (i) $x(0) < x_c(0)$: For those values of $x(0)$, the initial potential energy density at the bounce is lower than the plateau. As mentioned previously, a single value of V corresponds to two different values of Φ , one of them being positive and the other one negative.
- (ii) $x(0) > x_c(0)$: These values of $x(0)$ correspond to potential energy densities which are higher than the plateau. For a given value of V , there is now only one negative value of Φ .

Since $x_c(0) \ll 1$, if one wants to vary $x(0)$ between 0 and 1, and probe the plateau part of the potential, it is necessary to take negative values of $\Phi(0)$, together with positive values of $\dot{\Phi}(0)$. It remains possible to probe the plateau with positive values of $\Phi(0)$ and $\dot{\Phi}(0)$ if

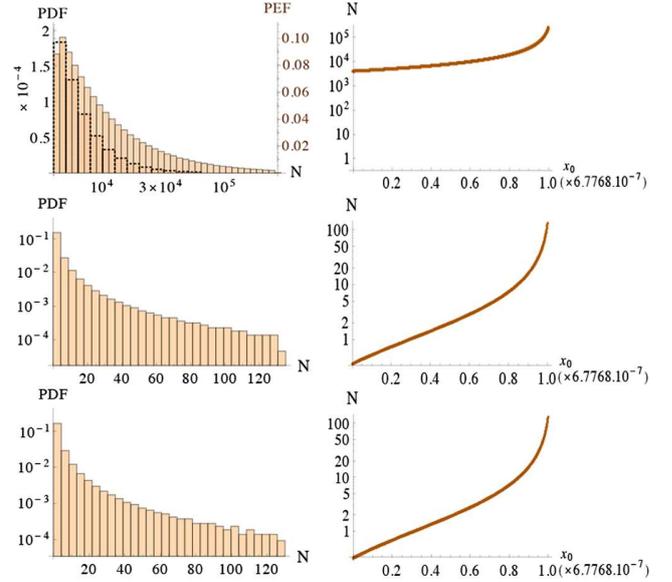


FIG. 9. Starobinsky inflaton potential with initial conditions set at the bounce and positive values of $\Phi(0)$ and $\dot{\Phi}(0)$. Left column: Probability distribution functions (and PEFs when useful) for the number of e -folds of inflation. Right column: Number of e -folds of inflation as a function of x_0 . Upper panels: Isotropic universe $f = 0$. Middle panels: Anisotropic universe, $f = 3.87$. Lower panels: Anisotropic universe, $f = 28.0$.

$x(0) \in [0, x_c(0)]$. It should be noticed that, if initial conditions are set in the contracting phase, positive values of the field at the bounce are highly favored in the isotropic case, and remain favored in the presence of anisotropic shear, as shown in Fig. 5.² We therefore choose to show some results associated with $\Phi(0)$ and $\dot{\Phi}(0)$ with $x(0) \in [0, x_c(0)]$ in Fig. 9. It can be seen that without shear the inflaton field is pushed far away on the plateau, leading to large numbers of e -folds. However, when the initial shear is nonvanishing, the energy density which remains available for the scalar field is smaller, such that the field cannot reach the plateau anymore. This leads to a shorter slow-roll phase. It is difficult to probe the plateau with a flat PDF for $x(0)$ if anisotropies are taken into account. Since the cosmological interest of the Starobinsky potential is mostly associated with the plateau, this means that setting initial conditions at the bounce, at least in the presented way, is not very relevant in this case.

From the viewpoint of phenomenology, it is important to notice that the predicted number of e -folds, if initial conditions are believed to be set at the bounce, is generically very high. Unless a huge amount of fine-tuning is applied, the observation of possible quantum gravity effects in the CMB is virtually impossible. Only in the case of a

²In most cases, the field has the same sign at the bounce and at the beginning of the slow-roll phase.

strongly shear-dominated bounce does the number of e -folds become close to the observational bound.

The usually much smaller number of e -folds of inflation when initial conditions are set in the classical prebounce phase can be understood as follows: setting initial conditions, i.e. fixing the initial phase of the inflaton field, when the energy density is very small leads—for almost all values of the phase—to solutions without deflation. This has already been (implicitly) shown in the frame of standard cosmology by Gibbons and Turok [53] and the consequences of these results for LQC were explained in detail in [54]. Solutions to the given set of differential equations without deflation cannot bring the field to high values at the bounce, since the accelerated contraction stops almost immediately. One therefore encounters a kinetic-energy dominated bounce which subsequently leads to a small number of e -folds, as shown in Fig. 2 of [54]. On the other hand, varying the value of the field at the bounce—hence making potential-energy dominated bounce scenarios likely—results in very large numbers of e -folds for many solutions. The above arguments were shown for the quadratic potential, but they still hold for the linear potential and the string-theory-inspired potentials. Taking anisotropies into account makes the energy density available for the scalar field even smaller and subsequently decreases the resulting number of e -folds for a particular solution.

IV. DISCUSSION AND CONCLUSION

A. Discussion

Let us begin by discussing the issue of the best choice for initial conditions. If the word “initial” is taken in its literal sense, it is certainly reasonable to set them in the remote past and respect the causal evolution of the system. As shown in [49], the evolution across the bounce is not time symmetric. From the mathematical viewpoint this is however not necessary and some physical arguments are required. It seems to us that assigning a flat PDF to the phase of the field in the remote past of the contracting branch is a better choice than assigning a flat PDF to the fraction of potential energy at the bounce. The first reason for this is that the vicinity of the bounce is the most “quantum” period in the history of the Universe. It is therefore the one where the semiclassical approach used here is the most questionable—backreaction might not be negligible—and hence the worst one to assign specific values to the dynamical variables. This is precisely the time when the considered system is not under perfect control and obviously not the most natural one to set initial conditions in a safe way. The second reason is that a flat PDF for the fraction of potential energy is a completely arbitrary choice. It has no physical motivation; the PDF could be chosen to be anything else with the same credibility. There is no reason to chose all potential energies with the same

probability. Describing the very same system with other variables to which flat PDFs could be assigned would lead to completely different PDFs for the fraction of potential energy and to completely different results for the number of expected e -folds. This is to be contrasted with the flat PDF assigned to the phase of the oscillations. In this case, the phase has a clear physical meaning and is a random variable with a known PDF during an oscillatory process. One could discuss the details of the PDF but the rough shape is known just because the field is an oscillator. It could be argued that the fraction of potential energy is also known and this is true, but not at the bounce time where the dynamics is modified with respect to the trivial nearly oscillatory process. The third reason is that a flat PDF assigned to the phase is preserved over time. This is very important and means that this choice is consistent in the sense that it does not depend on the chosen hypersurface at which initial conditions are set. Obviously, a flat PDF for the fraction of potential energy is not time preserved and there is no reason for the bounce to be the precise time when assigning a flat PDF to this variable.

Knowing the PDF for any dynamical variable describing the system allows one to know the PDF for the number of e -folds. There are two kinds of “predictive powers” that need to be distinguished at this stage. Let us call “strong predictive power” the case in which the number of e -folds of inflation is (roughly) known and “weak predictive power” the case in which the PDF for the number of e -folds is known. The strong case basically requires that the PDF is not only known (that is, the weak case) but also requires that it is highly peaked.

B. Conclusion

This study is dedicated to the systematic investigation of the duration of inflation in LQC with holonomy corrections. We have addressed the three main unknown points: the way to set initial conditions, the amount of shear and the shape of the inflaton potential. The conclusions of this study are the following: (i) As far as the capability of the model to predict the distribution of the number of e -folds is concerned, it is, in our opinion, more appealing to set initial conditions in the remote past of the classical contracting branch of the Universe. In this case, a flat PDF can easily be associated to the δ -parameter for all the potentials. (ii) Furthermore, in this case, the duration of inflation is indeed severely constrained, and most interestingly to values which are not much higher than the minimum value required by observations (but only for “confining” potentials). (iii) When anisotropies are taken into account the PDF of the number of e -folds is widened and its mean value decreases, confirming the strong predictive power of LQC for a massive scalar field. (iv) For potentials with a plateau such that the favored value of the amount of potential energy at the beginning of the slow-roll phase is larger than the height of the plateau,

the predicted number of e -folds can become very large and the predictive power is only weak. (v) When the potential is asymmetric, the PDF can become bimodal. (vi) When initial conditions are set at the bounce, even the weak predictive power of LQC is basically lost as everything is then determined by the arbitrary choice of the variable to which a known PDF is assigned.

In summary, if the shape of the inflaton potential can be experimentally determined (this is already partially the case) and if, following the logics of causality, the initial conditions are set in the remote past, there is an obviously interesting predictive power of LQC for the duration of inflation. This predictive power is strong if the potential is confining and weak if the potential has a plateaulike shape. It is not so because of the specific quantum dynamics but because of the existence of a preferred amount of potential energy at the onset of inflation which is naturally selected

by the semiclassical trajectory. The most difficult point to address remains the one of anisotropies as no simple physical argument allows one to choose a preferred amount of shear. If the potential is confining enough this is however not necessarily a problem as the predicted number of e -folds is then restricted to a quite small interval (bounded from above by the model in the isotropic case and from below by observations as $N > N^* \approx 70$) which happens to be the most interesting one for phenomenology.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank B. Bolliet for helpful discussions. K. M. is supported by a grant from the Capital Fund Management (CFM) foundation. S. S. is supported by grants from the Heinrich-Böll-Stiftung e.V. and the Studienstiftung des deutschen Volkes e.V.

-
- [1] C. Rovelli and F. Vidotto, *Covariant Loop Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2014), ISBN 9781107069626.
 - [2] R. Gambini and J. Pullin, *A First Course in Loop Quantum Gravity* (Oxford University Press, Oxford, 2011), ISBN 0199590753.
 - [3] C. Rovelli, Proc. Sci. QGQGS2011 (2011) 003 [arXiv:1102.3660].
 - [4] P. Dona and S. Speziale, <http://inspirehep.net/record/860342/files/arXiv:1007.0402.pdf>.
 - [5] T. Thiemann, *Lect. Notes Phys.* **631**, 41 (2003).
 - [6] T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2008), ISBN 0521741874.
 - [7] C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007), ISBN 0521715962.
 - [8] C. Rovelli, *Living Rev. Relativ.* **11**, 5 (2008).
 - [9] L. Smolin, arXiv:hep-th/0408048.
 - [10] A. Perez, arXiv:gr-qc/0409061.
 - [11] A. Ashtekar and A. Barrau, *Classical Quantum Gravity* **32**, 234001 (2015).
 - [12] A. Barrau, T. Cailleteau, J. Grain, and J. Mielczarek, *Classical Quantum Gravity* **31**, 053001 (2014).
 - [13] A. Barrau and J. Grain, arXiv:1410.1714.
 - [14] I. Agullo and A. Corichi, arXiv:1302.3833.
 - [15] G. Calcagni, *Ann. Phys. (Amsterdam)* **525**, 323 (2013); *Ann. Phys. (Berlin)* **525**, A165(E) (2013).
 - [16] M. Bojowald, *Classical Quantum Gravity* **29**, 213001 (2012).
 - [17] K. Banerjee, G. Calcagni, and M. Martín-Benito, *SIGMA* **8**, 016 (2012).
 - [18] M. Bojowald, *Quantum Cosmology* (Springer-Verlag, New York, 2011), ISBN 978-1-4419-8275-9.
 - [19] A. Ashtekar and P. Singh, *Classical Quantum Gravity* **28**, 213001 (2011).
 - [20] M. Bojowald, *Living Rev. Relativ.* **11**, 4 (2008), <http://www.livingreviews.org/lrr-2008-4>.
 - [21] A. Ashtekar, *Gen. Relativ. Gravit.* **41**, 707 (2009).
 - [22] A. Ashtekar, M. Bojowald, and J. Lewandowski, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7**, 233 (2003).
 - [23] M. Bojowald and G. M. Paily, *Phys. Rev. D* **86**, 104018 (2012).
 - [24] A. Barrau, M. Bojowald, G. Calcagni, J. Grain, and M. Kagan, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **05** (2015) 051.
 - [25] J. Mielczarek, T. Cailleteau, A. Barrau, and J. Grain, *Classical Quantum Gravity* **29**, 085009 (2012).
 - [26] T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau, and J. Grain, *Classical Quantum Gravity* **29**, 095010 (2012).
 - [27] T. Cailleteau, A. Barrau, J. Grain, and F. Vidotto, *Phys. Rev. D* **86**, 087301 (2012).
 - [28] L. Linsefors, T. Cailleteau, A. Barrau, and J. Grain, *Phys. Rev. D* **87**, 107503 (2013).
 - [29] S. Schander, A. Barrau, B. Bolliet, L. Linsefors, J. Mielczarek, and J. Grain, *Phys. Rev. D* **93**, 023531 (2016).
 - [30] I. Agullo, A. Ashtekar, and W. Nelson, *Classical Quantum Gravity* **30**, 085014 (2013).
 - [31] I. Agullo, A. Ashtekar, and W. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 251301 (2012).
 - [32] I. Agullo, A. Ashtekar, and W. Nelson, *Phys. Rev. D* **87**, 043507 (2013).
 - [33] E. Wilson-Ewing, *Classical Quantum Gravity* **29**, 215013 (2012).
 - [34] L. C. Gomar, M. Martín-Benito, and G. A. M. Marugán, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06** (2015) 045.
 - [35] B. Bolliet, J. Grain, C. Stahl, L. Linsefors, and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **91**, 084035 (2015).
 - [36] E. Alesci and F. Cianfrani, *Europhys. Lett.* **111**, 40002 (2015).
 - [37] S. Gielen, D. Oriti, and L. Sindoni, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 031301 (2013).

- [38] S. Gielen, D. Oriti, and L. Sindoni, *J. High Energy Phys.* **06** (2014) 013.
- [39] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration), *Astron. Astrophys.* **594**, A13 (2016).
- [40] K. A. Meissner, *Classical Quantum Gravity* **21**, 5245 (2004).
- [41] A. Ashtekar and E. Wilson-Ewing, *Phys. Rev. D* **79**, 083535 (2009).
- [42] B. Gupt and P. Singh, *Classical Quantum Gravity* **30**, 145013 (2013).
- [43] L. Linsefors and A. Barrau, *Classical Quantum Gravity* **31**, 015018 (2014).
- [44] P. A. R. Ade, R. W. Aikin, D. Barkats, S. J. Benton, C. A. Bischoff, J. J. Bock, J. A. Brevik, I. Buder, E. Bullock, C. D. Dowell *et al.* (BICEP2 Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **112**, 241101 (2014).
- [45] K. Harigaya, M. Ibe, K. Schmitz, and T. T. Yanagida, *Phys. Rev. D* **90**, 123524 (2014).
- [46] M. Cicoli, C. Burgess, and F. Quevedo, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **09** (2009) 013 (2009).
- [47] J. Martin, C. Ringeval, and V. Vennin, *Phys. Dark Univ.* **5–6**, 75 (2014).
- [48] B. Bonga and B. Gupt, *Gen. Relativ. Gravit.* **48**, 71 (2016).
- [49] L. Linsefors and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **87**, 123509 (2013).
- [50] L. Linsefors and A. Barrau, *Classical Quantum Gravity* **32**, 035010 (2015).
- [51] A. Ashtekar and D. Sloan, *Gen. Relativ. Gravit.* **43**, 3619 (2011).
- [52] L. Linsefors and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **87**, 123509 (2013).
- [53] G. W. Gibbons and N. Turok, *Phys. Rev. D* **77**, 063516 (2008).
- [54] B. Bolliet, A. Barrau, K. Martineau, and F. Moulin, [arXiv:1701.02282](https://arxiv.org/abs/1701.02282).

3.2.2 Quelques précisions sur la durée de l'inflation en LQC

L'étude précédente a montré que dès lors que les conditions initiales sont placées dans la phase pré-rebond et que le potentiel d'inflaton est confinant la LQC possède un réel pouvoir prédictif quant au nombre d'*e-folds* inflationnaires N . Il se trouve que ces valeurs sont, dans la plupart des cas étudiés, très proches de la borne minimale $N \simeq 60 - 70$, ce qui correspond au cas de figure le plus intéressant pour la phénoménologie. Une aubaine en quelque sorte. Comme dit dans l'article cette prédiction vient de ce que si les conditions sont mises dans la phase classique en contraction, avec comme conditions initiales une PDF plate sur la phase initiale des oscillations du champ δ , la quasi totalité des trajectoires convergent vers une dynamique sans déflation¹³ et donc un rebond totalement dominé par l'énergie cinétique, avec des valeurs de $x(t_b)$ au moment du rebond typiquement de l'ordre de 10^{-6} . Or un rebond totalement dominé par l'énergie cinétique amène, dans le cas de potentiels sans plateaux, à de faibles valeurs de N . Une fois les conditions initiales placées dans la phase de contraction avec une PDF plate sur δ et la forme du potentiel d'inflaton fixée c'est la valeur de ρ_c qui déterminera la valeur moyenne de la PDF de N . Dans le cas d'un potentiel quadratique de l'inflaton il avait été montré que $N = (2/3) \ln \left[(2/m) \sqrt{(\kappa/3)} \rho_c \right]^2$ [124]. Il était cependant espéré par certains membres de la communauté que des corrections quantiques à la dynamique¹⁴, se manifestant dans l'expression précise de l'équation de Friedmann modifiée de la LQC, impactent la PDF de N . Bien que cela semblait très improbable à d'autres nous avons mené une étude pour essayer de trancher le débat.

Le but de l'analyse effectuée dans l'article "*Some Clarifications on the Duration of Inflation in Loop Quantum Cosmology*" qui suit était donc d'évaluer l'impact de la forme spécifique de l'équation de Friedmann effective donnée Eq.(3.31) sur la prédiction standard de la LQC $N \simeq 145$ correspondant au cas d'un potentiel quadratique de l'inflaton. Est-il possible d'aboutir à la même prédiction avec une dynamique différente ?

Pour répondre à cette question nous avons considéré dans cette étude, en plus du scénario LQC, un scénario de rebond inspiré par la relativité générale et gouverné par l'équation de Friedmann usuelle de la cosmologie dans lequel le signe du paramètre de Hubble est changé "à la main" de négatif à positif dès que la densité d'énergie atteint la valeur ρ_c typique de la LQC. Bien sûr le paramètre de Hubble n'est dans ce modèle pas continu au moment du rebond et la démarche peut sembler audacieuse. Néanmoins les autres quantités importantes gouvernant la dynamique du système (facteur d'échelle et densité d'énergie du champ scalaire) sont elles continues tout au long de l'évolution. Il n'est pas du tout ici question de construire un scénario alternatif réaliste mais simplement de comprendre l'influence des différents paramètres qui gouvernent la dynamique. Le résultat de cette étude est que la distribution de probabilité du nombre d'*e-folds* d'inflation N est quasiment similaire dans les deux scénarios (LQC et rebond forcé). La dynamique précise du facteur d'échelle donnée par l'équation de Friedmann modifiée ne joue que très peu. Ce qui est réellement important et qui fixe la valeur de N est donc bien la valeur de la densité d'énergie critique ρ_c atteinte au moment du rebond (pour des conditions initiales et une forme du potentiel d'inflaton données).

Il est également montré dans cet article que le rebond en LQC amène, pour la quasi totalité de l'espace des paramètres, à une phase d'inflation et à une distribution de N piquée autour de $N \simeq 145$ dans le cas d'un potentiel quadratique et de conditions initiales mises dans la phase en contraction. Ce statut attracteur de l'inflation en LQC dès lors que le contenu en matière est modélisé par un champ

13. Phase de contraction accélérée de l'Univers.

14. Autres que la prédiction du rebond.

scalaire massif avait déjà été mis en évidence par L. Linsefors et A Barrau dans [124]. La nouveauté est qu'il est ici retrouvé à l'aide de l'argument de Turok et Gibbons. Nous montrons à l'aide de cet argument qu'une longue phase de déflation, donc un rebond dominé par l'énergie potentielle, est peu probable.

Remarque : Le calcul dans cet article des spectres de puissance primordiaux scalaires et tensoriels ne servant que (très) peu le propos nous invitons le lecteur à ne pas s'y attarder pour le moment. Le devenir des inhomogénéités et le calcul des spectres en LQC sera explicité juste après cette étude.

Some clarifications on the duration of inflation in loop quantum cosmology

Boris Bolliet[✉], Aurélien Barrau, Killian Martineau and Flora Moulin

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Université Grenoble-Alpes, CNRS/IN2P3 53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France

E-mail: boris.bolliet@lpsc.in2p3.fr

Received 12 January 2017, revised 29 May 2017

Accepted for publication 6 June 2017

Published 20 June 2017



CrossMark

Abstract

The prediction of a phase of inflation whose number of e-folds is constrained is an important feature of loop quantum cosmology. This work aims at giving some elementary clarifications on the role of the different hypotheses leading to this conclusion. We show that the duration of inflation does not depend significantly on the modified background dynamics in the quantum regime.

Keywords: loop quantum cosmology, inflation, quantum gravity

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

Loop quantum gravity (LQG) is a nonperturbative and background-independent quantization of general relativity (GR). It relies on the Sen–Ashtekar–Barbero variables, that is $SU(2)$ valued connections and conjugate densitized triads. The quantization is obtained using holonomies of the connections and fluxes of the densitized triads. Loop quantum cosmology (LQC) is an effective theory based on a symmetry reduced version of LQG. In LQC, the big bang is believed to be replaced by a bounce due to repulsive quantum geometrical effects (see [1] for a review). For the flat homogeneous and isotropic background cosmology that we consider in this work, the effective LQC-modified Friedmann equation is

$$H^2 = \frac{\rho}{3} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_B} \right), \quad (1)$$

where $H \equiv (\dot{a}/a)$ is the Hubble parameter, ρ is the total energy density and ρ_B is the critical density at the bounce (expected to be of the order of the Planck density). The dot refers to a coordinate time derivative. Throughout all this article we use reduced Planck units: $\sqrt{8\pi G} = 1$. So, in these units, the Planck mass is $m_{\text{Pl}} \equiv 1/\sqrt{G} = \sqrt{8\pi}$. We assume that the dominating energy component in the early universe is a scalar field ϕ , with potential $V = \frac{1}{2}m^2\phi^2$. As shown in [2], a massive scalar field is now disfavored by data. This choice however remains interesting so as to compare our study with other results (a quantitative estimate of the effect

of choosing, for example, the Starobinsky potential, used in [3], can be found in [4]). The total energy density can be written as $\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V$. As explained in details in [5] it should be made clear that the existence of an inflationary phase is not in itself a consequence of LQC, but of the choice of an appropriate scalar field as the content of the Universe. Based on cosmic microwave background (CMB) measurements and under most reasonable assumptions for the length of *observable inflation* (between horizon exit of the pivot scale and the end of the inflationary phase), one obtains $m \simeq 10^{-6}m_{\text{Pl}}$. The equation of motion for the scalar field is

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0. \quad (2)$$

There are different ways to statistically estimate the duration of inflation in this framework.

At a fixed energy density, ρ_0 , one can first ask the following question: for a given number of e-folds N , what is the fraction of trajectories, i.e. solutions to equation (2), that lead to a phase of slow-roll inflation lasting more than N e-folds? It should be noticed that the set of trajectories can be parametrized by $\{a_0, \phi_0\}$. As the energy density has been fixed, the initial time derivative of the scalar field, $\dot{\phi}_0$, is determined in terms of ρ_0 and ϕ_0 . This also implies that ϕ_0 can only take values within a finite interval, ranging from $-(\sqrt{2\rho_0}/m)$ to $(\sqrt{2\rho_0}/m)$. In a flat universe, the value of the scale factor has no physical meaning. The number of e-folds of inflation depends on ϕ_0 but not on a_0 : $N = N(\phi_0; m, \rho_0)$. So the fraction of trajectories that achieve a phase of inflation lasting more than N e-folds can be written as $\mu = (m\Delta\phi_0)/(2\sqrt{2\rho_0})$, where $\Delta\phi_0$ is the range of initial values of the scalar field that yields the required inflationary phase. It is then necessary to evaluate μ as a function of N . There are two cases in which this can be done analytically: (i) at *low energy*, $\rho_0 \ll m^2$, and (ii) at *high energy* $\rho_0 \gg m^2$. At low energy, the calculation of Gibbons and Turok of the probability for inflation can be used to show that [6]

$$\mu(N) = \mathcal{C}mN^{-\frac{1}{2}} \exp(-3N)\{1 + 1/(6N)\}, \quad (3)$$

where \mathcal{C} is a numerical factor that does not depend on m or ρ_0 . For $N \simeq 60$ e-folds, as required to explain the CMB temperature anisotropy, this leads to $\mu(N) \ll 1$. It should be noticed that the conclusions of [6] are to be contrasted with those of [7], which shows the importance of working with well defined probability distribution functions. At high energy, one reaches the opposite conclusion. In this case, one can compute $\Delta\phi_0$ as follows. For a massive quadratic potential the total number of e-folds of inflation can be expressed in terms of the amplitude of the scalar field at the start of the inflationary phase, ϕ_1 , as $N \approx (\phi_1^2/4)$. In turn, ϕ_1 can be expressed in terms of the initial value of the scalar field as [8]:

$$\phi_1 = \phi_0 + \text{sgn}(\dot{\phi}_0)\sqrt{(2/3)\text{Arcsinh}\left(\Gamma\sqrt{2/\ln(z)}\right)}, \quad (4)$$

with $z \equiv 8\Gamma^2 \exp(\sqrt{6}\phi_0)$ and $\Gamma \equiv \sqrt{3\rho_0}/m$. This formula for the amplitude of the scalar field at the start of inflation is valid in LQC, with the modified Friedmann equation given by equation (1). For the standard flat FLRW dynamics, without LQC modifications, the analytical calculations suggest that at the start of inflation the scalar field reaches a maximum value given by (4) minus $(\ln 2/\Gamma)$. In both cases, we find that the range of values of ϕ_0 that do not yield an inflationary phase longer than N e-folds is an interval of size $4\sqrt{N}$ centered on $\phi_0 = 0$. Hence,

$$\mu(N) = 1 - m\sqrt{(2N/\rho_0)}, \quad (5)$$

and $\mu(60) \simeq 0.99999$ (for $\rho_0 = 1$), which means that all but a tiny fraction of the possible trajectories do not go through a long inflationary phase. It might be tempting to interpret μ as a probability measure. This is however not that simple. The phase space of the flat FLRW

universe presents a serious ambiguity: the Liouville measure is proportional to the scale factor and the scale factor can be rescaled arbitrarily. In addition, as explained just before, μ depends on the choice of the surface of initial data. More importantly, the fundamental question to ask is: is there a variable on which a flat (or at least known) probability distribution function (PDF) can be assigned? There is no reason to assume implicitly that the initial values of the field should have a flat PDF.

This work is somehow complementary to what was studied in [9] and sheds a new light on the difference between different predictions made in quantum and classical cosmology.

In [10] it was argued that the two first issues mentioned above can be solved in LQC. It was indeed claimed that the scale factor can be rigorously factored out of the Liouville measure, and that the bounce provides a preferred choice for the surface of initial data. In this study, following [11, 12] we choose a different perspective. We decide, the other way round, to set initial conditions in the remote past of the contracting branch, when the Universe is classical and well understood ($\rho_0 \ll \rho_B$). This is not only technically justified but also conceptually necessary if the bounce has to be taken seriously in a causal way. Still, we naturally choose a time which is close enough to the bounce so that it is reasonable to assume a scalar field as the main component of the Universe. The phase of the oscillations of the scalar field in the contracting branch is an obvious variable to which a flat PDF can be assigned [11]. In addition, the key point is that this PDF is preserved over time (as long as one remains in the classical phase when the field oscillates). The numerical analysis of [11] shows that at fixed ρ_0 , nearly all possible initial values for the scalar field, ϕ_0 , yield an inflationary phase whose number of e-folds is peaked around $N = 142$ e-folds (with $\rho_B = 0.41 m_{\text{pl}}^4$).

The procedure to derive this result is simple:

- Consider an initial energy density $\rho_0 = \rho_{\text{pl}}/\alpha^2$, with α large enough so that the evolution starts in the remote past of the contracting phase.
- Choose an initial value for the scalar field and its time derivative by a random sampling of the phase θ_0 between 0 and 2π , where θ_0 is defined such as $\phi_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\Gamma}{\alpha} \sin \theta_0$.
- Solve the dynamics, across the bounce, until the end of slow-roll inflation in the expanding branch.
- For each θ_0 , collect the corresponding number of e-folds.

Finally, one can produce the associated histogram which, in a probabilistic interpretation, is the PDF for the number of e-folds. This is illustrated on the right panel of figure 1 where we also present the PDFs for several initial energy densities corresponding to different values of $\alpha \equiv \sqrt{\rho_{\text{pl}}/\rho_0}$ in order to show that for large values of α the PDF becomes independent of the initial energy density, as explained analytically in [11]. Interestingly, the peakedness of the PDF can be understood as follows. The calculation Gibbons and Turok is often considered controversial in standard cosmology because they somehow set ‘initial conditions’ for the *final* state. However, in the case of a bouncing Universe it implies that almost none of all the possible trajectories, starting at low energy in the *contracting* branch, have a significant phase of pre-bounce exponential contraction, that is of so-called *deflation*. A trajectory with deflation in the contracting phase leading to $(\phi_B, \dot{\phi}_B)$ can be identified with a trajectory with inflation in the expanding phase with $(\phi_B, -\dot{\phi}_B)$. Equation (4) can be used to calculate the value of the scalar field at the bounce corresponding to the trajectory with no deflation. One simply has to solve equation (4) with respect to ϕ_B for $\phi_1 = 0$ and $\dot{\phi}_B < 0$. In the limit of large Γ , the solution is well approximated by

$$\phi_B^{\text{GT}} \equiv \sqrt{(2/3)} \ln \left(2\Gamma/\sqrt{\ln \Gamma} \right). \quad (6)$$

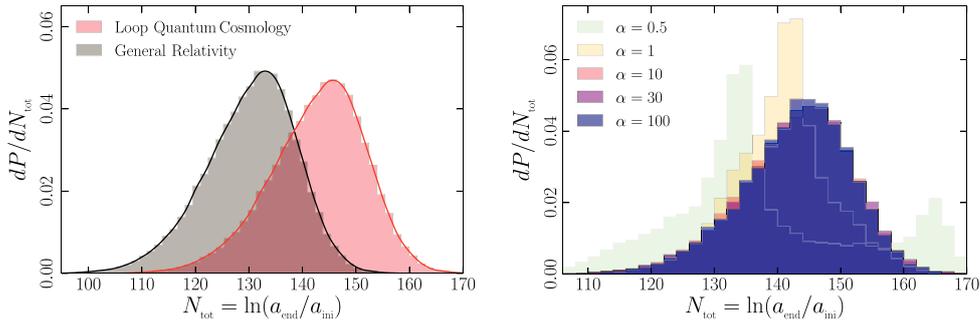


Figure 1. Probability distribution of the number of inflationary e-folds. On the left panel, the black histograms corresponds to a ‘GR’ like dynamics (using the standard Friedmann equation throughout the evolution). The red histogram is the prediction of loop quantum cosmology. With the standard Friedmann equation the most likely value is $N_{\text{tot}} = 133$, while in LQC we find $N_{\text{tot}} = 145$. The right panel shows that the probability density function does not depend on the value of the energy density as long as the surface of initial data is set at $\rho \ll \rho_{\text{Pl}}$. The different histograms are labeled by $\alpha = \sqrt{\rho_{\text{Pl}}/\rho}$. The probability density function converges as soon as α becomes larger than 10.

This can then be inserted back into equation (4), with $\dot{\phi}_{\text{B}} > 0$, in order to obtain the value of the field at the start of inflation in the expanding phase and the corresponding number of e-folds of inflation. With the standard values for m and ρ_{B} , this calculation yields $N = 142$, in excellent agreement with the numerics (figure 1). Moreover, a closer look at Gibbons and Turok’s PDF for the number of e-folds suggests that most trajectories starting in the remote past have less than one e-folds of deflation, see figure 2. This means that nearly all trajectories end up with a value of ϕ_{B} that belongs to an interval of size $\Delta\phi_{\text{B}} \approx 4$ centered around $\phi_{\text{B}}^{\text{GT}}$. In terms of number of e-folds this translates into $\Delta N \approx 4\sqrt{N}$, also in agreement with the numerics as can be seen on figure 1.

We shall now investigate to which extent the specific modified dynamics is responsible for the peakedness of the probability density function of the number of e-folds in loop quantum cosmology. The argument we have developed in the previous section did not refer to the modified LQC dynamics. It was essentially based on Gibbons and Turok’s analysis combined with the presence of the bounce at Planckian energy density. It can therefore already be guessed that the peakedness does not depend strongly on the LQC modification to the Friedmann equation. To address this question in more details, we consider an artificial bouncing cosmological scenario where the Friedmann equation is left unchanged even at Planckian energy. In this ‘GR-like’ cosmological scenario, initial conditions for a given trajectory are set in the remote past of the contracting branch at the same energy density and with the same values of ϕ_0 and $\dot{\phi}_0$ than for a trajectory which follows the LQC dynamics (as previously considered). The dynamics is divided into two parts: the contracting branch with a negative Hubble parameter and the expanding branch with a positive Hubble parameter. The evolution, starting in the contracting branch, is artificially stopped when the energy density reaches the LQC critical energy density ρ_{B} . The values of ϕ_{B} and $\dot{\phi}_{\text{B}}$ are collected and used as initial conditions for the dynamics in the expanding branch where the initial Hubble parameter is now positive. At the junction between both phases, the Hubble parameter and therefore $\ddot{\phi}$ are discontinuous but a , ϕ and $\dot{\phi}$ are continuous, as illustrated in figures 3, 4 and 5.

The numerical result for the PDF of the number of e-folds in the GR-like scenario is plotted against the LQC prediction on the left panel of figure 1. The PDF has the same width and shape than in LQC. This confirms that the peakedness does not depend strongly on the specific

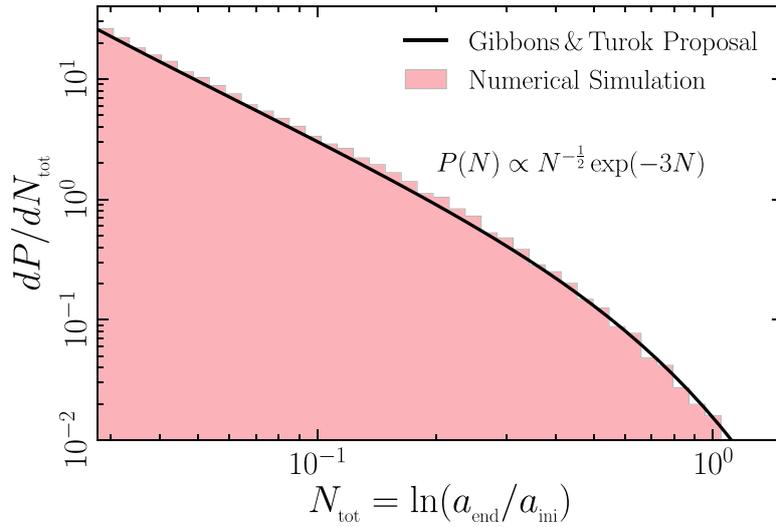


Figure 2. Probability distribution of the number of e-folds, when the surface of initial data is set at low energy density, in a agreement with the result of Gibbons and Turok.

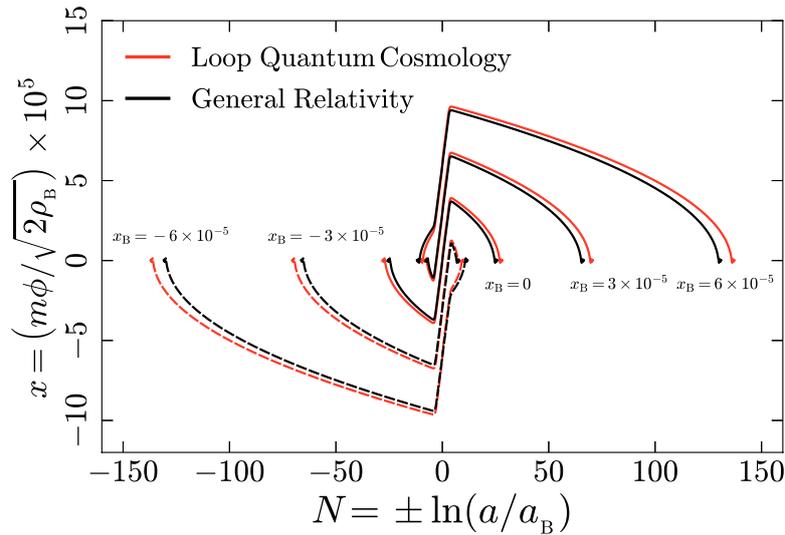


Figure 3. Evolution of the potential energy parameter in the GR-like scenario (black) compared to loop quantum cosmology (red), for different values of x_B , linearly distributed between -10^{-6} and 10^{-6} . Dashed lines correspond to negative initial values for x_B .

LQC modified dynamics, and suggests that this feature would remain in case one incorporates additional quantum gravity corrections to the LQC effective equations. Nevertheless, the number of e-folds corresponding to the peak of the PDF is slightly different in the GR-like scenario than in LQC. This can be explained as follows. First, it should be noticed that the difference between the GR-like scenario and LQC becomes significant when $\rho \approx \rho_{Pl}$. Second, as shown in the previous sections, the fraction of trajectories that have a significant phase of deflation in the contracting branch is tiny. This means that at high energy density, the

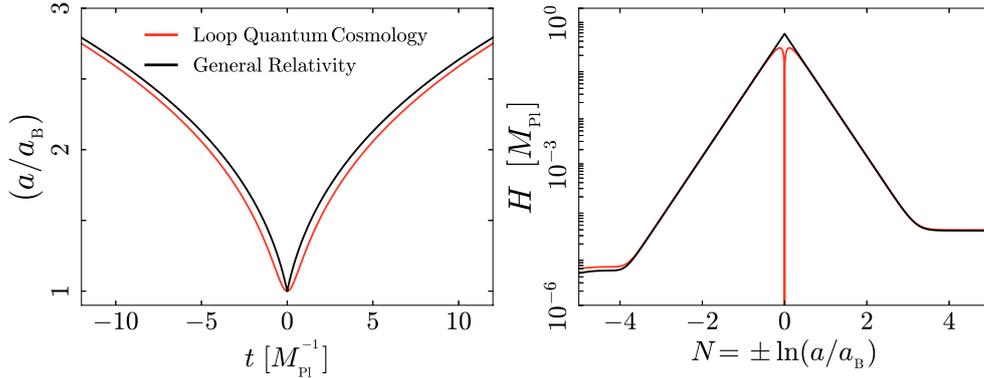


Figure 4. Evolution of the scale factor (left) and the Hubble parameter (right) in loop quantum cosmology (red) and in the GR-like scenario (black).

dynamics of most trajectories is largely kinetic energy dominated. In simplistic terms, deflation can not bring the amplitude of the scalar field to large values because it stops nearly immediately. To investigate the difference between the GR-like scenario and LQC, the equation of motion of the scalar field at high energy, and for kinetic energy domination, need to be studied. It is natural to introduce $x \equiv \phi/\sqrt{2\rho_B}$ and $y \equiv \dot{\phi}/\sqrt{2\rho_B}$, the so-called potential and kinetic energy parameters. As the duration of inflation depends on the scalar field amplitude, it is sufficient to focus on the potential energy parameter. It is easy to show that in the regime compatible with observations

$$x^{\text{GR}} \simeq x_B + (3/\Gamma) \ln a, \quad (7a)$$

$$x^{\text{LQC}} \simeq x_B + (3/\Gamma) \ln a + (\ln 2/\Gamma). \quad (7b)$$

In LQC the scalar field is *boosted* by a short phase of super-inflation, $\dot{H} > 0$, during which its amplitude accumulates a surplus of $(\ln 2/\Gamma)$ compared to the standard FLRW dynamics. This yields a difference of $\sqrt{8/3} \ln 2 \sqrt{N_{\text{GR}}}$ between the number of e-folds in both scenarios. With the standard numerical values of m and ρ_B , one gets $N_{\text{LQC}} - N_{\text{GR}} \simeq 13$, in agreement with the numerical results.

Although an exhaustive investigation would in principle be necessary it can be quite safely conjectured that most results derived in this study do not depend on the details of the considered bounce scenario. Actually, the key parameter is the energy density at which the bounce takes place.

One can also study the differences between the primordial power spectra of cosmological perturbations in the GR-like scenario and in LQC (the interested reader can consider [13] for a detailed study in the dressed metric approach and [14] in the deformed algebra approach). As a toy model to focus on the difference between both background dynamics, we set initial conditions for perturbations at an energy density corresponding to the bounce energy density, choosing the Bunch–Davies vacuum as the initial state. The resulting power spectra are shown on figure 6 and compared with the usual slow-roll inflation expectation (dotted lines). Such spectra (and their variants including more subtle LQC effects) are the main observables associated with loop quantum cosmology. Assuming a Bunch Davies state is a valid assumption only for modes with a wavelength small compared to the curvature radius at the bounce, or the Planck length in the ‘GR-like’ scenario. For such modes, the Bunch Davies state is the ‘preferred’ vacuum state (selected by the regularity conditions and the symmetry group of flat

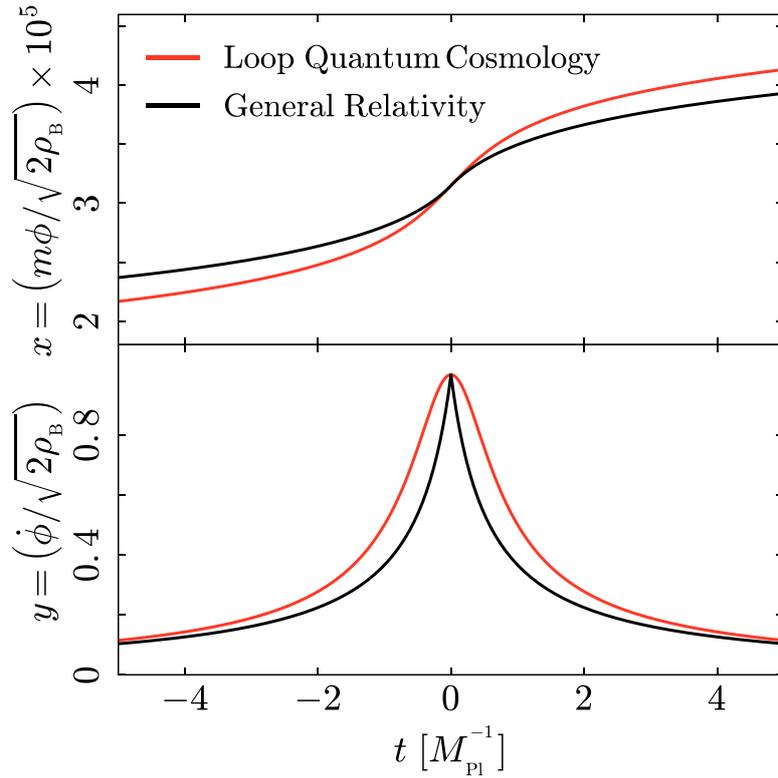


Figure 5. The fraction of potential and kinetic energy in general relativity (black) and loop quantum cosmology (red).

space-time). However, for modes with larger wavelength there is some freedom for the choice of the initial state. Here, our goal is not to discuss the impact of different initial state on the power spectrum, but rather to investigate the effects of two different dynamical models for the background cosmology (‘GR-like’ and LQC) on the power spectrum resulting from the evolution of modes starting at the same energy density (Planckian) and in the same state.

The duration of inflation is crucial because it determines the location of the window of wavenumbers relevant for the cosmic microwave background anisotropy measurements, with respect to the characteristic LQC scale $k_{\text{LQC}} \equiv a_{\text{B}}\sqrt{\rho_{\text{B}}}$. On infrared scales, the mode functions remain in the Bunch–Davies state with $\mathcal{P}(k) \propto k^2$. We see that in both LQC and the GR-like scenario the power spectra agree with the slow-roll expectations in the ultraviolet regime. Oscillations are present in both scenarios in the range $10^{-3} < k/k_{\text{LQC}} < 1$. The amplitude is larger in the GR-like scenario than in LQC, however the period of the oscillations does not seem to be affected by the specific modified LQC dynamics. This shows that oscillations in themselves are a bounce feature but not a specific LQC feature. This motivates the search for complementary probes such as primordial non-gaussianity [15]. For a more detailed comparison of the different kinds of power spectra expected in LQC under different assumptions for the mode propagation, see [16].

The most reliable result of loop quantum cosmology is the modified Friedmann equation describing the background dynamics. It receives a quadratic correction in density which prevents the Universe from collapsing into a singularity. In this article, we have investigated the influence of this modified dynamics on the duration of inflation. The conclusion is that the modification of the Friedmann equation has a very small (but non vanishing) impact on the

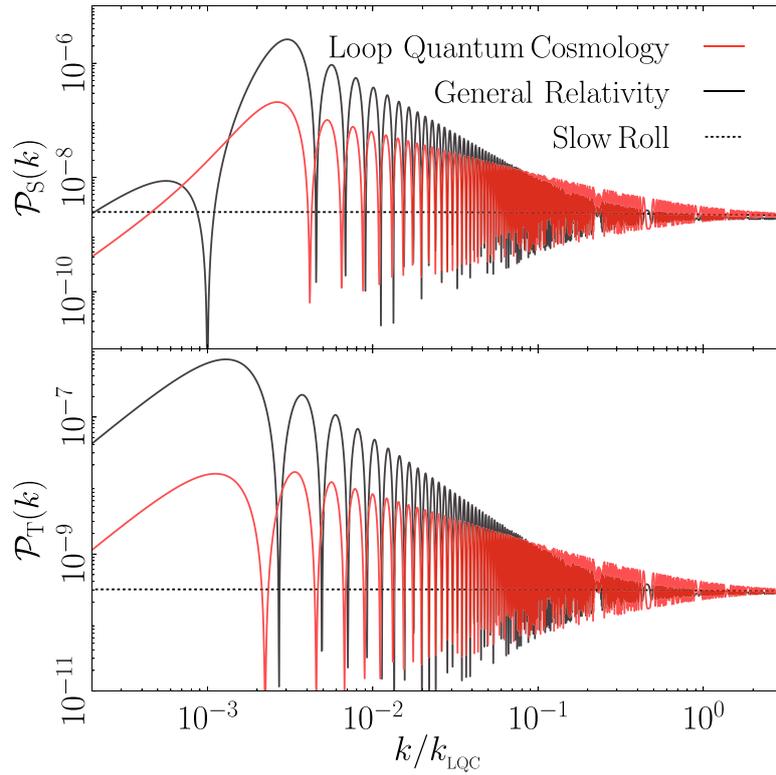


Figure 6. Primordial power spectra of scalar (top) and tensor (bottom) perturbations for the GR-like dynamics in black (standard Friedmann equation, initial condition at the energy density corresponding to the energy density of the LQC bounce) and LQC dynamics in red (initial conditions at the bounce) plotted against the slow-roll expectation (dotted lines). On the x -axis, $k_{\text{LQC}} = a_{\text{B}}\sqrt{\rho_{\text{B}}}$. The spectrum becomes scale invariant in the UV limit.

duration of inflation. The key role played by LQC in ‘predicting’ inflation—or more precisely the duration of inflation—is not due to the modified dynamics in itself. It is grounded in two different aspects. First, LQC sets the energy scale. This is the fundamental point. As far as the Universe is assumed to be filled by a massive scalar field, inflation happens naturally if the energy scale ‘before’ inflation is high enough, $\rho \gg m^2$. But whereas starting at the Planck energy density in GR is somehow arbitrary, in LQC the bounce energy density can be calculated (modulo some hypotheses) and derived from the full theory, providing a natural energy scale. This is the first important aspect. Second, LQC selects favored conditions at the bounce, see formula (6), corresponding to a favored duration of inflation $N \simeq 145$, for $\rho_{\text{B}} = 0.41m_{\text{Pl}}^4$. This is an interesting prediction rooted in the existence of a pre-bounce phase where a natural variable to which a known PDF can be assigned was identified. This cannot be produced in standard cosmology and is specific to bouncing models.

Acknowledgments

The work of BB was supported by a grant from ENS Lyon and a Fulbright Grant from the Franco-American commission.

ORCID

Boris Bolliet  <https://orcid.org/0000-0003-4922-7401>

References

- [1] Ashtekar A and Singh P 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 213001
- [2] Ade P *et al* 2015 (Planck)
- [3] Bonga B and Gupt B 2016 *Gen. Relativ. Gravit.* **48** 71
- [4] Martineau K, Barrau A and Schander S 2017 *Phys. Rev. D* **95** 083507
- [5] Barrau A and Bolliet B 2016 *Int. J. Mod. Phys. D* **25** 1642008
- [6] Gibbons G W and Turok N 2008 *Phys. Rev. D* **77** 063516
- [7] Kofman L, Linde A D and Mukhanov V F 2002 *J. High Energy Phys.* JHEP10(2002)057
- [8] Bolliet B, Barrau A, Grain J and Schander S 2016 *Phys. Rev. D* **93** 124011
- [9] Corichi A and Karami A 2011 *Phys. Rev. D* **83** 104006
- [10] Ashtekar A and Sloan D 2011 *Gen. Relativ. Gravit.* **43** 3619
- [11] Linsefors L and Barrau A 2013 *Phys. Rev. D* **87** 123509
- [12] Linsefors L and Barrau A 2015 *Class. Quantum Grav.* **32** 035010
- [13] Agullo I, Ashtekar A and Nelson W 2013 *Class. Quantum Grav.* **30** 085014
- [14] Barrau A, Bojowald M, Calcagni G, Grain J and Kagan M 2015 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP05(2015)051
- [15] Agullo I 2015 *Phys. Rev. D* **92** 064038
- [16] Bolliet B, Grain J, Stahl C, Linsefors L and Barrau A 2015 *Phys. Rev. D* **91** 084035

3.3 Inhomogénéités en cosmologie quantique à boucles

Bien que la dynamique du fond homogène et la prédiction du rebond fassent actuellement consensus dans la communauté¹⁵ le traitement des perturbations fait lui toujours débat. La volonté est d'établir quels seraient les idées et effets de la LQC au niveau des inhomogénéités et de déterminer l'évolution de perturbations cosmologiques se propageant sans contre-réactions sur un fond donné par la LQC, avec un champ scalaire ϕ comme contenu en matière. Plusieurs procédures tendent à cela, les principales étant les approches dites "*Dressed Metric*" et "*Deformed Algebra*". Durant ma thèse j'ai étudié comment ces deux approches peuvent être confrontées aux observations du CMB afin de savoir si des effets de gravité quantique (importants au moment du rebond) ont pu laisser des traces dans les spectres de puissance primordiaux. Une autre approche a plus récemment gagné en popularité. Baptisée "*Hybrid Quantization*", elle repose sur des idées proches de l'approche *Dressed Metric*. Bien qu'il existe certaines différences entre les deux elles sont équivalentes du point de vue de la phénoménologie. Nous nous contenterons donc de décrire uniquement l'approche *Dressed Metric* et les conclusions que nous en tirerons quant à la phénoménologie pourront être étendues au cas de l'approche *Hybrid Quantization*.

3.3.1 L'approche "*Dressed Metric*"

L'approche appelée "*Dressed Metric*" (ou DM) aux perturbations cosmologiques en LQC, initialement développée par I. Agullo, A. Ashtekar et W. Nelson en 2012 [125, 98, 126], met l'accent sur un traitement quantique de perturbations évoluant sur un fond lui aussi quantique. Les degrés de liberté associés au fond et aux perturbations sont traités de manières différentes. Le fond FLRW est quantifié avec une procédure inspirée de la LQG (comme en LQC) tandis que les perturbations sont quantifiées "à la Fock". Nous nous intéressons donc ici à la dynamique des perturbations v évoluant sur un fond décrit par la fonction d'onde $\Psi(a, \phi)$. Il se trouve que cette évolution est équivalente à celle de perturbations se propageant sur une "*dressed metric*" (ou métrique habillée)

$$\tilde{g} = \tilde{a}^2 \left(-d\tilde{\eta}^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j \right). \quad (3.42)$$

Dans cette équation \tilde{a} correspond à un facteur d'échelle habillé ("*dressed scale factor*") et $\tilde{\eta}$ à un temps conforme habillé, d'expressions

$$\tilde{a}^4 = \left\langle \hat{H}_0^{-\frac{1}{2}} \hat{a}^4 \hat{H}_0^{-\frac{1}{2}} \right\rangle \left\langle \hat{H}_0^{-1} \right\rangle^{-1} \quad \text{et} \quad d\tilde{\eta} = \tilde{a}^2 \left\langle \hat{H}_0^{-1} \right\rangle d\phi \quad (3.43)$$

où \hat{H}_0 est l'opérateur associé à un demi de la contrainte scalaire $\frac{1}{2}C$ donnée Eq.(1.61). Les chevrons traduisent eux des valeurs moyennes effectuées sur l'état associé à la fonction d'onde $\Psi(a, \phi)$. Une explication détaillée est fournie dans [125].

Tout ce qu'il nous faut savoir pour calculer les spectres de puissance c'est ce qu'il advient de l'équation d'évolution des perturbations dans cette approche. Est-elle toujours donnée par l'équation de Mukhanov-Sasaki ? Pour y répondre intéressons nous à l'équation du mouvement obtenue à partir de la version quantique de l'Hamiltonien au second ordre en perturbations :

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{\tilde{z}_{S/T}''}{\tilde{z}_{S/T}} \right) v_k = 0. \quad (3.44)$$

Pour des perturbations tensorielles $\tilde{z}_T = \tilde{a}$. Le cas des perturbations scalaires est plus délicat car $z_S = a\dot{\phi}/H$ et donc le potentiel z_S''/z_S implique le potentiel d'inflaton (voir Eq.A8 de [126] pour

15. Tant que l'on reste bien évidemment dans le cadre de la LQC.

les expressions détaillées). La question est maintenant de savoir si l'évolution de $\tilde{z}_{S/T}$ pour un état donné $\Psi(a, \phi)$ suit les trajectoires (dans l'espace des phases) obtenues avec l'approche semi-classique. Heureusement la réponse est "oui". La variable habillée $\tilde{z}_{S/T}$ est correctement approximée par son homologue classique $z_{S/T}$ (autant pour les perturbations tensorielles que scalaires) et l'équation (3.44) est correctement approximée par l'équation de Mukhanov-Sasaki (2.73).

Le point faible majeur de cette approche tient à ce que sa cohérence n'est pas démontrée. En effet fixer une jauge avant quantification est souvent supposé sans conséquences. Or il est plus que probable que les contraintes ici considérées reçoivent des corrections quantiques. Les transformations de jauge associées diffèreraient alors de leurs formes classiques. Le fait de fixer une jauge avant quantification serait alors inconsistant car la jauge serait fixée vis à vis de transformations qui seront par la suite (lors de la quantification) modifiées. Une théorie consistante serait donc une théorie qui utiliserait des transformations de jauge cohérentes avec sa dynamique modifiée. On ne peut fixer l'une (la jauge) pour calculer la seconde (la dynamique).

3.3.2 L'approche "Deformed Algebra"

La construction de cette approche, initiée par M. Bojowald dès 2006 [127, 128, 129] puis raffinée par T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau et F. Vidotto en 2012 [130, 131, 132, 133], a été motivée par le succès de l'approximation semi-classique et de l'équation de Friedmann effective pour traiter la dynamique du fond. Un tel succès peut-il se produire au niveau des inhomogénéités ? Peut-on trouver sur la même base de raisonnement une équation de Mukhanov-Sasaki effective ? La difficulté consiste ici à développer un modèle intégrant la correction d'holonomie et dont la cohérence soit assurée.

Le point de départ est de considérer les contraintes scalaires et de difféomorphisme classiques de la relativité générale, de les exprimer en termes des variables d'Ashtekar A et E , puis d'y incorporer des modifications motivées par la LQC.

En définissant les contraintes scalaire et de difféomorphisme intégrées

$$\begin{aligned} S [N] &= \int d^3x NC \\ D [N^a] &= \int d^3x N^a C_a \end{aligned} \quad (3.45)$$

nous avons en relativité générale :

$$\begin{aligned} \{D [M^a], D [N^a]\} &\approx 0, \\ \{D [M^a], S [N]\} &\approx S [M^a \partial_a N - N \partial_a M^a], \\ \{S [M], S [N]\} &\approx D [q^{ab} (M \partial_b N - N \partial_b M)]. \end{aligned} \quad (3.46)$$

où un symbole \approx signifie que l'égalité est satisfaite sur l'hypersurface des contraintes.

Désignons maintenant par $F_{I,J,K}$ n'importe quelle contrainte du système. Une évolution cohérente¹⁶ requiert

$$\{F_I, F_J\} = f_{IJ}^K(A, E) F_K, \quad (3.47)$$

16. *i.e* une évolution dans laquelle les solutions ne sortent pas de la région de l'espace des phases satisfaisant aux contraintes.

où les $f_{IJ}^K(A, E)$ sont des fonctions de structure qui dépendent des variables d'Ashtekar. La covariance généralisée de la théorie classique assure que les crochets de Poisson entre deux contraintes soient proportionnels à une combinaison linéaire de contraintes. On parle alors d'algèbre fermée, ou algèbre de première classe. L'introduction de corrections quantiques, ici sous forme de la correction d'holonomie Eq.(3.24), dans les contraintes scalaire et de difféomorphisme entraîne une modification de leur algèbre. De nouveaux termes \mathcal{A}_{IJ} , appelés anomalies, apparaissent désormais dans la structure de crochets de Poisson

$$\{F_I^Q, F_J^Q\} = f_{IJ}^K(A, E)F_K^Q + \mathcal{A}_{IJ} \quad (3.48)$$

où l'indice Q indique simplement que les contraintes ont subi des corrections quantiques. À cause de ces anomalies l'algèbre n'est plus fermée et des trajectoires peuvent désormais sortir de la région de l'espace des phases qui satisfait aux contraintes (*i.e* l'hypersurface des contraintes). De telles trajectoires ne satisfont alors plus aux caractéristiques physiques du système. Par exemple la covariance des équations n'est plus assurée. Pour compenser ces anomalies et recouvrer une algèbre fermée des contre-termes α_i sont ajoutés dans les contraintes avec correction d'holonomie, contre-termes qui doivent disparaître dans la limite classique et corriger les anomalies dans le cas quantique. L'algèbre des contraintes sans anomalies est déformée par rapport à l'algèbre classique et s'écrit

$$\begin{aligned} \{D^Q[M^a], D^Q[N^a]\} &\approx 0, \\ \{D^Q[M^a], S^Q[N]\} &\approx S^Q[M^a\partial_a N - N\partial_a M^a], \\ \{S^Q[M], S^Q[N]\} &\approx \Omega D^Q[q^{ab}(M\partial_b N - N\partial_b M)]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Le terme d'importance se trouve dans le crochet de Poisson entre les deux contraintes scalaires. Il s'agit de la fonction Ω , d'expression

$$\Omega = \cos(2\bar{\mu}c) = 1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}. \quad (3.50)$$

Il paraît assez miraculeux que les lourds calculs effectués pour calculer cette algèbre se simplifient au final et condensent toute l'information dans la seule donnée de Ω . De plus l'équation d'évolution des perturbations (plus exactement de leurs modes) est donnée dans cette approche par

$$v_k'' + \left(\Omega k^2 - \frac{z_{T/S}''}{z_{T/S}} \right) v_k = 0. \quad (3.51)$$

Nous y retrouvons le fameux Ω . À basse densité d'énergie (basse devant celle de Planck) $\rho \ll \rho_c$ et cette équation d'évolution est équivalente à l'équation de Mukhanov-Sasaki. Néanmoins à plus haute énergie la présence du terme Ω modifie la dynamique des perturbations. Nous détaillerons dans les pages suivantes son impact sur la forme des spectres de puissance primordiaux. Soulignons ici un fait important : à très haute densité d'énergie $\rho > \rho_c/2$ et Ω devient négatif. Ce changement de signe de Ω autour du rebond est lourd de conséquences : interprété comme un changement de signe dans la métrique, il signifie que la structure de l'espace devient euclidienne¹⁷. Si l'espace à très haute énergie est euclidien, sans direction temporelle, comment faire évoluer les perturbations ? Comment l'espace lorentzien émerge-t-il à plus basse énergie ? Voici quelques unes des questions passionnantes mais complexes qui émergent autour de ce changement de signe. Le champ de ses implications est l'objet de

17. Il est remarquable que ce résultat, souvent postulé de façon ad-hoc, apparaisse ici de façon naturelle. Nous pouvons également souligner que nous trouvons ici une réalisation dynamique et non arbitraire du proposal de Hartle-Hawking.

recherches, voir par exemple [134], et nous sommes encore loin d'en avoir une compréhension globale. Pour ce qui est de nos études nous nous contenterons de laisser son signe varier dans l'équation (3.51) et verrons ce que cela implique quant à la forme des spectres de puissance primordiaux.

Mieux comprendre la provenance de Ω : utilisation d'un modèle jouet

Essayons de comprendre un peu mieux la présence de ce terme Ω , si spécifique à cette approche, dans les crochets de Poisson. Considérons pour cela un modèle jouet 2-dimensionnel avec une dimension d'espace et une de temps. La contrainte scalaire intégrée s'écrit

$$S[N] = \int dx N \left[c^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} \phi \frac{d^2\phi}{dx^2} \right] \quad (3.52)$$

avec $\{\phi(x), c(y)\} = \delta(x - y)$.

Le crochet de Poisson qui nous intéresse est celui entre deux contraintes scalaires, car c'est lui qui fera intervenir Ω . Il s'écrit en fonction de la contrainte de difféomorphisme comme :

$$\{S [M], S [N]\} = D \left[\left(\frac{dM}{dx} N - \frac{dN}{dx} M \right) \right]. \quad (3.53)$$

Modifions maintenant le terme cinétique en remplaçant c^2 par une fonction de $c : c^2 \rightarrow f(c)$. La contrainte scalaire établie Eq.(3.52) s'écrit désormais

$$S[N] = \int dx N \left[f(c) - \frac{1}{4} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} \phi \frac{d^2\phi}{dx^2} \right] \quad (3.54)$$

et le crochet de Poisson entre deux de ces contraintes est maintenant

$$\{S [M], S [N]\} = D \left[\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dc^2} \left(\frac{dM}{dx} N - \frac{dN}{dx} M \right) \right]. \quad (3.55)$$

Nous voyons que la modification du terme cinétique effectuée modifie cette relation de crochets de Poisson et fait apparaître un nouveau terme $\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dc^2}$, qui n'est rien d'autre que l'équivalent dans ce modèle de la fonction Ω . Bien sûr si $f(c) = c^2$, alors $\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dc^2} = 1$ et nous retrouvons le crochet de Poisson établi Eq.(3.53).

La correction d'holonomie effectuée en cosmologie quantique à boucles, donnée Eq.(3.24), revient à considérer

$$f(c) = \left(\frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}} \right)^2 \xrightarrow{\bar{\mu} \rightarrow 0} c^2. \quad (3.56)$$

Dans ce cas

$$\Omega \equiv \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dc^2} = \cos(2\bar{\mu}c) \quad (3.57)$$

et nous retrouvons l'expression précédemment établie pour Ω .

3.4 Spectres de puissance primordiaux en cosmologie quantique à boucles

Calculons maintenant les spectres de puissance primordiaux dans ces approches et comparons les aux contraintes venant des mesures dans la fenêtre de longueurs d'ondes observables. La compréhension du devenir des perturbations v passe par la compréhension des potentiels scalaire z''_S/z_S et tenseur z''_T/z_T apparaissant dans l'équation de Mukhanov-Sasaki.

Le potentiel tenseur z''_T/z_T en LQC

Commençons par le cas du potentiel tensoriel, bien plus simple que son homologue scalaire. Dans les approches "*Dressed Metric*" et "*Deformed Algebra*" $z_T = a$ et le potentiel s'exprime simplement $z''_T/z_T = a''/a$. Nous rappelons qu'un symbole ' désigne une dérivée par rapport au temps conforme η . Étudions son évolution en partant de l'Univers en contraction pré-rebond.

$$\frac{z''_T}{z_T} = \frac{a''}{a} = \dot{a}^2 + a\ddot{a}. \quad (3.58)$$

Dériver l'équation de Friedmann effective Eq.(3.31) par rapport à ce temps amène, à l'aide de l'équation de continuité $\dot{\rho} = -3H(\rho + P)$ introduite au chapitre 2, à

$$\dot{H} = -\frac{\kappa}{2}\dot{\phi}^2 \left(1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}\right). \quad (3.59)$$

Si nous nous plaçons dans l'Univers en contraction, suffisamment loin du rebond de sorte que $\rho \ll \rho_c$ ¹⁸, cette équation devient $\dot{H} \simeq -(\kappa/2)\dot{\phi}^2$. Or

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}a - \dot{a}^2}{a^2} \Rightarrow \ddot{a}a - \dot{a}^2 \simeq -\frac{\kappa}{2}a^2\dot{\phi}^2. \quad (3.60)$$

Ainsi, lors de la contraction,

$$\frac{z''_T}{z_T} \simeq \dot{H} + 2\dot{a}^2 = -\frac{\kappa}{2}a^2\dot{\phi}^2 + 2\dot{a}^2 = a^2 \left(-\frac{\kappa}{2}\dot{\phi}^2 + 2H^2\right). \quad (3.61)$$

Comme évoqué dans les articles précédents l'équation de Klein-Gordon Eq.(2.23) prédit un comportement oscillant du champ d'inflaton dans la phase en contraction¹⁹ du type $\dot{\phi}(t) = \sqrt{2\rho(t)} \cos(\omega t + \delta)$. Élever cette expression au carré nous donne

$$\dot{\phi}^2(t) = 2\rho(t) \cos^2(\omega t + \delta) = \rho(t) [1 + \cos(2\omega t + 2\delta)]. \quad (3.62)$$

Injecter cette expression dans celle du potentiel donnée Eq.(3.61) amène à

$$\frac{z''_T}{z_T} \simeq a^2 \left[-\frac{\kappa}{2}\rho(1 + \cos(2\omega t + 2\delta)) + 2 \times \frac{\kappa}{3}\rho \right] = a^2 \rho \left[\frac{\kappa}{6} - \frac{\kappa}{2} \cos(2\omega t + 2\delta) \right]. \quad (3.63)$$

Dans la phase de contraction le potentiel tenseur oscille donc à une fréquence deux fois plus élevée que celle du champ (ou de sa dérivée temporelle). L'amplitude de ces oscillations diminue lorsque l'on remonte dans le passé (*i.e* lorsque l'on s'éloigne du rebond) comme $a^2(t)\rho(t)$. Ces tendances ont été confirmées numériquement et sont mises en avant Fig.3.3.

18. Tout en restant à une densité d'énergie suffisamment élevée pour que l'inflaton constitue toujours un candidat raisonnable pour le contenu en énergie.

19. Tant que le potentiel peut être approximé par un potentiel quadratique proche de son minimum.

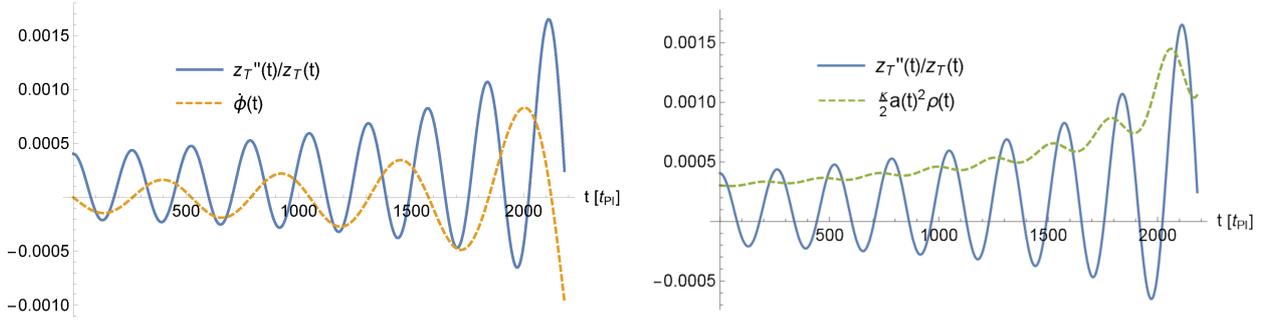


FIGURE 3.3 – Caractéristiques du potentiel tenseur dans la phase de contraction, en unités de Planck. À gauche : Comparaison de la fréquence de ses oscillations à celles de la dérivée temporelle du champ scalaire. À droite : Comparaison de son amplitude au terme $a^2\rho$. Le rebond a lieu à $t_b = 2321t_{\text{Pl}}$.

Lors du rebond la dynamique du facteur d'échelle et de ses dérivées varie fortement sur de courtes échelles de temps, ce qui induit un soubresaut dans le potentiel tenseur. Ce ressaut, suivi par le comportement en $2/\eta^2$ standard de l'inflation²⁰, peuvent être observés Fig.3.4.

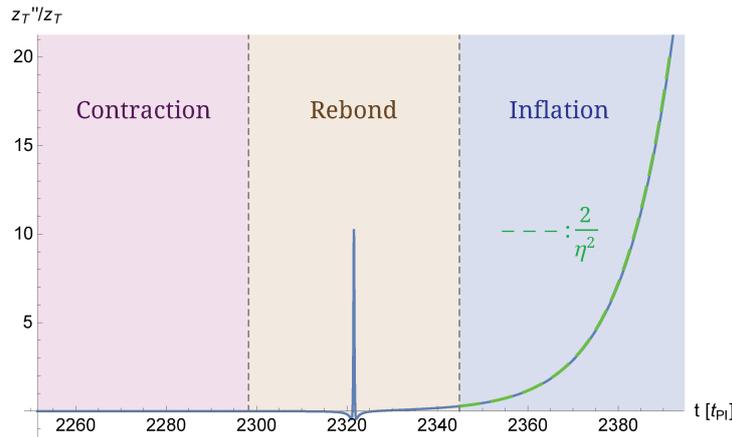


FIGURE 3.4 – Évolution typique du potentiel tenseur en cosmologie quantique à boucles, donnée en unités de Planck. Le contenu en matière est modélisé par un champ scalaire massif.

Le potentiel tenseur z_S''/z_S en LQC

Le cas du potentiel scalaire est plus complexe et invoque la forme du potentiel d'inflaton. Le calcul donnant son expression dans le cas d'un potentiel quadratique du champ d'inflaton est fourni en annexe A et mène à

$$z_S''/z_S = a^2 \left(-m^2 + 2H^2 - 2\kappa\Omega m^2 \frac{\phi\dot{\phi}}{H} - \frac{7}{2}\kappa\Omega\dot{\phi}^2 + \frac{\kappa^2}{2}\Omega^2 \frac{\dot{\phi}^4}{H^2} + \frac{3\kappa}{\rho_c}\dot{\phi}^4 \right). \quad (3.64)$$

Nous avons introduit $\Omega = 1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}$ pour une meilleure lisibilité, bien que cette notation soit souvent associée à l'approche "Deformed Algebra".

20. Une phase d'inflation étant présente en LQC dès lors que le champ scalaire est massif.

Remarque : Contrairement au cas du potentiel tenseur où la forme du potentiel du champ scalaire n'intervient que via la dynamique du facteur d'échelle, le potentiel d'inflaton intervient ici directement dans les calculs menant à cette expression.

L'évolution de ce potentiel est donnée Fig.3.5.

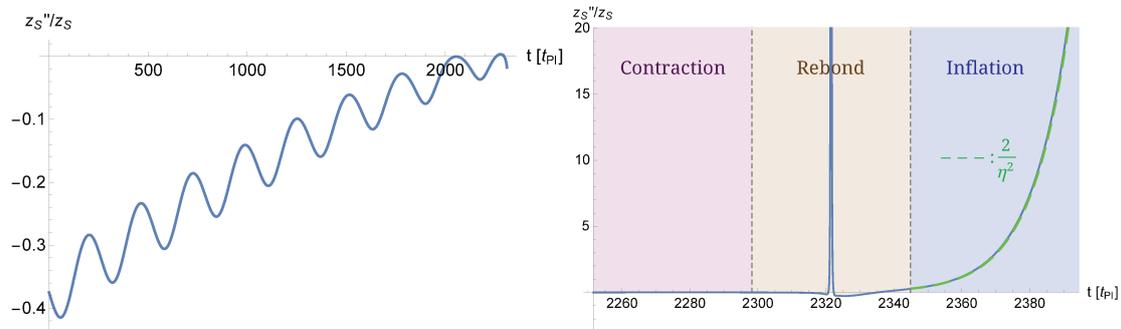


FIGURE 3.5 – Evolution typique du potentiel scalaire en cosmologie quantique à boucles dans le cas d'un potentiel quadratique du champ d'inflaton. À gauche : Zoom sur la phase de contraction. À droite : Évolution globale jusqu'à la période inflationnaire. Les échelles sont données en unités de Planck.

Contrairement au potentiel tenseur le potentiel scalaire ne tend pas vers zéro dans l'infini passé avant le rebond. Ce comportement sera source de problèmes au moment de définir les conditions initiales pour les perturbations ; nous y reviendrons juste après. Son évolution au moment du rebond et lors de l'inflation est en revanche analogue à celle du potentiel tenseur.

Conditions initiales pour les perturbations en LQC

De la même manière que pour le fond les conditions initiales pour les perturbations sont placées dans la phase en contraction pré-rebond. Comme nous venons de le voir l'amplitude des oscillations du potentiel tenseur dans ce régime tend vers zéro lorsque l'on s'éloigne du rebond et une condition initiale de type "vide de Bunch-Davies" est spontanément présente. Les modes tenseurs sont donc normalisés comme dans le paradigme inflationnaire. La situation est plus délicate pour les modes scalaires car comme l'indique la figure 3.5 le potentiel associé diverge dans la limite $t \rightarrow -\infty$ et il n'est plus possible de définir une normalisation de type Minkowski en remontant arbitrairement loin dans le passé. L'implication que cela aura sur la forme des spectres de puissance primordiaux scalaires va être discutée juste après.

3.4.1 Spectres de puissance primordiaux dans l'approche "*Dressed Metric*"

La forme des spectres de puissance primordiaux scalaire et tenseur de perturbations traitées dans l'approche "*Dressed Metric*" et évoluant sur un fond donné par la LQC avec un potentiel quadratique de l'inflaton est donnée Fig.3.6.

Il est aisé de remarquer que trois régimes se distinguent dans les deux spectres :

- (i) Un régime infrarouge dans lequel soit la puissance augmente avec le nombre d'onde (cas des perturbations scalaires) soit le spectre est quasiment invariant d'échelle avec une légère orientation vers le rouge (cas des perturbations tensorielles).

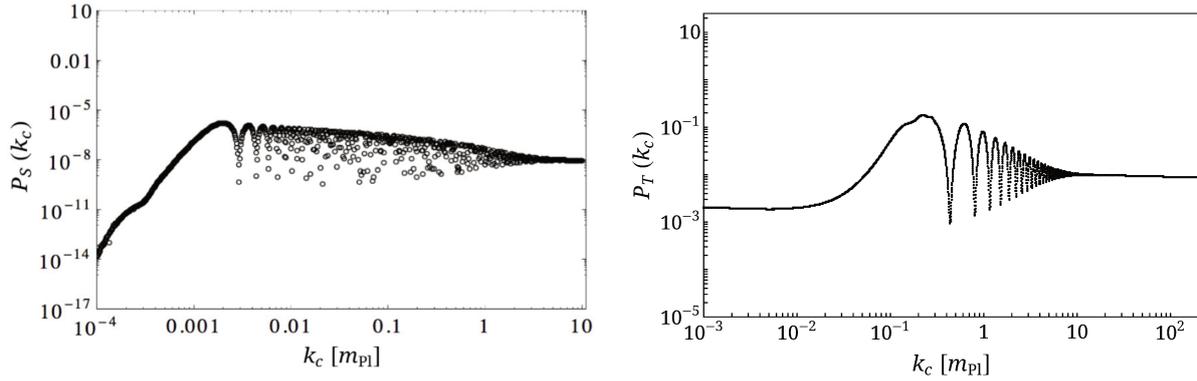


FIGURE 3.6 – Spectres de puissance primordiaux scalaire (à gauche) et tensoriel (à droite) de perturbations traitées dans l'approche "Dressed Metric" et évoluant sur un fond donné par la LQC. L'indice c souligne le caractère comobile des nombres d'ondes ici représentés.

- (ii) Un régime intermédiaire où les deux spectres oscillent avec k .
- (iii) Un régime ultraviolet dans lequel les spectres sont tous les deux quasi invariants d'échelles avec toujours une légère orientation vers le rouge.

Explicitons un peu l'origine de ces différents régimes.

Le régime infrarouge (ou IR) est associé à des modes de grandes longueurs d'ondes, qui satisfont $k^2 \ll |z''_{T/S}/z_{T/S}|$ durant la phase de contraction. On dit que ces modes sont sortis de l'horizon durant cette phase puis sont gelés durant le rebond et la phase d'inflation qui ensuit. Or, comme montré dans [135], durant la contraction le rayon de Hubble comobile s'écrit $aH \simeq 2/\eta$, menant à $z''_T/z_T = a''/a \simeq 2/\eta^2$. Sachant que les modes sont initialement dans un vide de Bunch-Davies nous retombons donc sur la prédiction usuelle de l'inflation pour les modes IR, avec un spectre tenseur quasiment invariant d'échelle. Le cas des perturbations scalaires est plus complexe étant donné qu'il n'est pas possible de définir un vide de Bunch-Davies en condition initiale pour les perturbations. De plus le potentiel scalaire n'a, à ma connaissance, aucune raison de se comporter en $2\eta^2$ comme dans un espace de Sitter. Ces conditions réunies font que la non invariance d'échelle n'est pas surprenante, bien qu'il soit difficile (de part l'expression complexe du potentiel scalaire) de comprendre avec précision la valeur de la pente du spectre dans ce régime. Cette difficulté à interpréter le comportement IR du spectre scalaire n'est néanmoins pas un problème car nous verrons que, sauf ajustement énorme des paramètres, ce régime correspond à des modes bien plus grands que ceux observés. La sensibilité du régime infrarouge des spectres scalaire à la manière de définir les conditions initiales sera tout de même développée dans l'article "*Scalar spectra of primordial perturbations in loop quantum cosmology*" présenté ci-après.

Les oscillations présentes dans le régime intermédiaire sont une conséquence directe de la présence du rebond. Elles peuvent être associées à des états quasi liés si l'équation de Mukhanov-Sasaki est interprétée comme une équation de Schrödinger. Nous verrons dans l'article "*Primordial power spectra from an emergent universe : basic results and clarifications*" comment certaines caractéristiques de ces oscillations peuvent se déduire de celles du rebond.

Enfin le régime ultraviolet (ou UV) est le plus simple à comprendre. Le nombre d'onde associé au maximum du potentiel (*i.e* à la courbure) au moment du rebond s'écrit $k_{b,S/T} = \sqrt{|z''_{S/T}(t_b)/z_{S/T}(t_b)|}$.

Les modes de grands nombres d'ondes (comobiles) qui satisfont $k \gg k_{b,S/T}$ ne sont pas impactés par la présence du rebond. Les v_k associés oscillent (dans le temps) à partir de leur état initial donné par le vide de Bunch-Davies et sortent de l'horizon lors de l'inflation sans avoir été sensibles à la dynamique pré-inflationnaire, menant à la prédiction usuelle d'un spectre de puissance quasi invariant d'échelle.

Une expression analytique de k_b dans le cas de perturbations tensorielles et d'une forme quadratique du potentiel d'inflaton avait été donnée dans [135]. Elle s'écrit $k_{b,T} \equiv a(t_b) \sqrt{k\rho_c}$, t_b correspondant au moment du rebond et donne $k_b \simeq 3.2m_{\text{Pl}}$ pour $\rho_c = 0.41\rho_{\text{Pl}}$ et une normalisation du facteur d'échelle à l'unité au rebond.

La différence d'amplitude entre les spectres scalaire et tenseur observée Fig.3.6 vient de ce que la masse de l'inflaton a été changée d'un spectre à l'autre. Elle est fixée à la valeur usuelle $m = 1.21 \times 10^{-6}m_{\text{Pl}}$ dans le cas des spectres scalaires et est montée à $m = 1.21 \times 10^{-2}m_{\text{Pl}}$ dans le cas tensoriel. Augmenter la masse du champ réduit drastiquement le temps de simulation et permet donc de pousser le calcul des spectres vers les plus grands nombres d'ondes comobiles. Nous pouvons nous le permettre car la masse n'intervient pas directement dans le potentiel tenseur, uniquement dans la dynamique du fond. À moins qu'elle change drastiquement l'évolution du facteur d'échelle elle ne devrait pas être d'un grand impact sur la forme des spectres tensoriels. Ceci a été confirmé dans [135] où il a été montré qu'une variation de la masse induit un décalage du spectre tenseur mais ne modifie pas sa forme globale. La situation est en revanche différente pour les perturbations scalaires. Dans ce cas la masse du champ scalaire intervient directement dans l'expression du potentiel z_S''/z_S ; c'est pourquoi nous nous cantonnons à la valeur standard $m = 1.21 \times 10^{-6}m_{\text{Pl}}$ pour le calcul des spectres associés.

3.4.2 Spectres de puissance primordiaux dans l'approche "Deformed Algebra"

La forme des spectres de puissance primordiaux scalaires et tensoriels dans l'approche "Deformed Algebra" est donnée Fig.3.7.

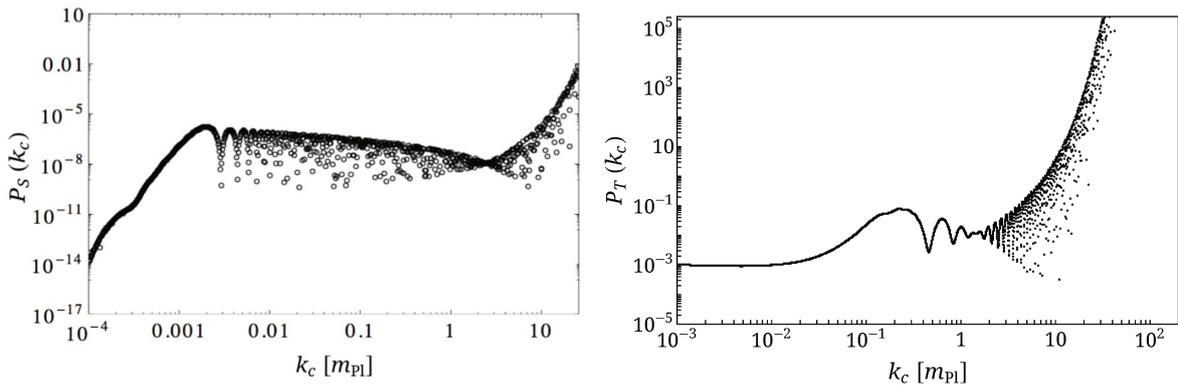


FIGURE 3.7 – Spectres de puissance primordiaux scalaire (à gauche) et tensoriel (à droite) de perturbations traitées dans l'approche "Deformed Algebra" et évoluant sur un fond donné par la LQC.

Les calculs numériques montrent une différence avec l'approche "Dressed Metric" dans le régime ultraviolet, où les spectres scalaire et tenseur semblent exhiber une pathologie : des oscillations dont l'amplitude croît exponentiellement avec le nombre d'onde. Pour les modes de grand nombre d'onde la fréquence effective $\Omega k^2 - z_{S/T}''/z_{S/T}$ qui intervient dans l'équation de Mukhanov-Sasaki est dominée par Ωk^2 durant la quasi-totalité de l'évolution pré-inflationnaire. Or $\Omega = 1 - 2\rho/\rho_c$ change de signe à très

haute énergie, lorsque $\rho > \rho_c/2$, passant de positif à négatif. Ce changement de signe, associé à la phase euclidienne, transforme les solutions de l'équation de Mukhanov-Sasaki d'exponentielles complexes en exponentielles réelles. Les perturbations (et donc le spectre de puissance associé) subissent alors une amplification exponentielle, estimée par $v_{k \rightarrow \infty} \propto \exp\left(k \times \int_{\Delta\eta} \sqrt{|\Omega|} d\eta\right)$ où l'intégration est effectuée sur l'intervalle de temps conforme $\Delta\eta$ associé à la phase euclidienne.

3.4.3 Confrontation aux observations

Une estimation rapide de la position de la région observable des spectres de puissance primordiaux est donnée par le nombre d'onde comobile associé à la taille de l'Univers observable au moment de la recombinaison. La taille physique de l'Univers observable au moment de la recombinaison est de l'ordre de (en unités de Planck)

$$L_{\text{rec}} \sim 4 \times 10^{58}. \quad (3.65)$$

Le nombre d'onde physique associé est $k_{\varphi,\text{rec}} = 2\pi/L_{\text{rec}} \sim 10^{-58}$. Pour passer de coordonnées physiques à des coordonnées comobiles il nous faut connaître le nombre d'*e-folds* entre le moment du rebond et la recombinaison²¹. Ce nombre d'*e-folds* se décompose comme la somme du nombre N d'*e-folds* d'inflation et du nombre N' d'*e-folds* entre la fin de l'inflation (*reheating*) et la recombinaison. Ce dernier dépend de la bien connue température de découplage [136] et de la bien moins connue température de reheating

$$N' = \ln\left(\frac{T_{\text{rh}}}{T_{\text{dec}}}\right) \simeq \ln\left(\frac{T_{\text{rh}}}{0.2\text{eV}}\right). \quad (3.66)$$

Si T_{rh} est par exemple donnée par l'échelle de grande unification GUT (afin de se donner une idée de l'ordre de grandeur) alors $N' \simeq 59$. Le nombre d'onde comobile associé à $k_{\varphi,\text{rec}} = 10^{-58}$ est alors

$$k_{c,\text{rec}} = k_{\varphi,\text{rec}} a(t_{\text{rec}}) = k_{\varphi,\text{rec}} a(t_b) e^{59+N} = 10^{-58} e^{59+N}. \quad (3.67)$$

La dépendance de la position de la fenêtre observable au nombre d'*e-folds* d'inflation est ici explicite. Notons que $k_{c,\text{rec}} \simeq 1$ lorsque $N = 75$.

Reprenons les conclusions de l'article "*Detailed investigation of the duration of inflation in loop quantum cosmology for a Bianchi-I universe with different inflaton potentials and initial conditions*". Si les conditions initiales pour le fond sont fixées au moment du rebond alors la fenêtre observable se situe (très !) loin dans le régime UV pour la quasi totalité de l'espace des paramètres. Sonder les oscillations ayant pour origine le rebond requiert une durée de l'inflation très proche de sa borne minimale et donc un ajustement fin des paramètres (typiquement $x_b = \sqrt{V(\phi)/\rho_c}|_{t=t_b} \sim 10^{-6}$). La situation peut être différente dans le cas où les conditions initiales du fond sont placées dans la phase pré-rebond. Bien que la prédiction usuelle $N \simeq 145$ amène à $k_{c,\text{rec}} \sim 10^{30}$ et donc une fenêtre observable située également très loin dans le régime UV la prise en compte d'anisotropies peut centrer la PDF de N sur des valeurs proches de 75, voir inférieures, ce qui permettrait alors de sonder les oscillations²².

La tendance dominante reste néanmoins que la région observable se situe dans le secteur UV, quelque soit la manière de fixer les conditions initiales. Or dans ce régime l'approche "*Dressed Metric*" reproduit les prédictions de l'inflation et est donc en accord avec la valeur mesurée de n_S . L'approche

21. Il est d'usage en LQC de normaliser le facteur d'échelle à l'unité au moment du rebond.

22. Ceci est vrai tant que le potentiel d'inflaton reste bien confinant.

"*Deformed Algebra*" semble en revanche être exclue dû à la croissance exponentielle de la puissance. Voici un constat intéressant. Nous avons deux (trois si l'on compte également l'approche "*Hybrid Quantization*") approches dominantes aux perturbations et trouvons que l'une semble être en bon accord avec les observations tandis que l'autre semble exclue. Problème réglé. La capacité à exclure un modèle de gravité quantique à l'aide de données est une chose qui a longtemps été crue irréalisable et bien que l'apparente exclusion de l'approche "*Deformed Algebra*" n'élimine en rien la théorie mère c'est un résultat qui reste en soit assez remarquable.

Remarque : Nous n'avons pas abordé la question de la normalisation des spectres car l'amplitude du spectre scalaire donnée Eq.(2.97) est en H^2/ϵ_{SR} . Elle dépend donc, de manière dégénérée, de l'échelle d'énergie de l'inflation H^2 et du paramètre de roulement lent ϵ_{SR} , dont la valeur n'est pas contrainte tant que les conditions de roulement lent sont satisfaites. L'amplitude du spectre tensoriel donnée Eq.(2.100) dépend elle uniquement de H^2 . Dans les deux cas la normalisation dépend fortement des caractéristiques de l'inflation et des effets fins dûs à de la gravité quantique se manifestant à ce niveau pourraient être facilement contrebalancés par une légère modification de la dynamique inflationnaire. C'est pourquoi nous n'en parlerons que peu (voir pas) dans nos études.

Nous venons d'établir l'état d'esprit qui régnait lorsque j'ai débuté ma thèse, mais nuanceons ici le propos. Ce qui est exclu n'est, comme souligné dans [137], qu'un unique scénario de l'approche "*Deformed Algebra*" dans lequel beaucoup d'éléments restent négligés. Par exemple les contre-réactions des perturbations sur le fond ne sont pas prises en compte, les anisotropies n'ont pas été implémentées au niveau des perturbations, le potentiel d'inflaton utilisé est quadratique et surtout il n'a été aucunement tenu compte du caractère trans-planckien des modes dans le régime UV.

3.4.4 Le problème trans-planckien

Jusqu'à présent l'accent a été mis sur les effets de densité et les effets de longueur ont été négligés. Or dès que $N > 70$ les modes pertinents pour la cosmologie étaient au moment du rebond des ordres de grandeur plus petits que la longueur de Planck. Ce problème de l'inflation, dénommé **problème trans-planckien**, est bien connu en cosmologie [138]. Ne pas modifier le comportement des modes à des échelles sub-planckiennes pose évidemment problème, notamment dans une théorie comme la LQG qui prédit une modification drastique de la structure de l'espace à cette échelle.

Pour le moment aucune des trois approches aux perturbations ("*Deformed Algebra*", "*Dressed Metric*" et "*Hybrid Quantization*") ne fait clairement face à ce problème. Bien que la situation ne semble pas pouvoir être définitivement résolue tant que le spectre de l'opérateur de longueur n'aura pas été correctement défini en LQG²³ nous avons tout de même choisi de nous attaquer au problème trans-planckien en s'inspirant des travaux de J. Martin et R. Brandenberger [138, 141] qui ont montré que l'emploi de relations de dispersion modifiées (MDRs) pour les perturbations cosmologiques se transpose dans l'équation de Mukhanov-Sasaki en remplaçant le nombre d'onde physique k_φ par une fonction de ce nombre d'onde $\mathcal{F}(k_\varphi)$. La forme de cette fonction est donnée par la relation de dispersion considérée.

Étant donné qu'il n'existe pour le moment (et à notre connaissance) pas de relations de disper-

23. Nous avons mentionné au chapitre un que c'est une tâche difficile restant pour le moment à accomplir, voir [29, 139, 140] pour des tentatives à cet égard.

sion inspirées de la LQG assez robustes pour pouvoir être utilisées nous nous sommes tournés en premier lieu vers des relations de dispersion bien établies en cosmologie et en physique des trous noirs. L'idée n'est absolument pas de statuer définitivement sur le problème trans-planckien mais plutôt de se faire une idée de l'impact de MDRs quant à la forme des spectres de puissance primordiaux.

Nous avons montré dans l'article que suivant la MDR considérée le comportement ultraviolet des spectres, qui correspond aux modes trans-planckiens, peut être totalement altéré. Par exemple la croissance pathologique exponentielle de la puissance dans l'approche "*Deformed Algebra*" peut disparaître pour laisser place à un spectre oscillant à des amplitudes (quasi) invariantes d'échelle, rendant le modèle en accord avec les observations.

Bien sûr cette étude méritera d'être réitérée lorsque des MDRs inspirées de la théorie mère seront bien établies. En attendant cela nous avons cherché à considérer dans nos travaux des relations de dispersion de formes différentes afin d'anticiper les types de modifications qui pourraient émerger.

Il me semble désormais clair que le traitement du problème trans-planckien doit être une priorité en cosmologie quantique à boucles. Tant qu'il n'aura pas été correctement résolu je pense qu'il nous sera impossible de statuer quoi que ce soit quand au sort des perturbations dans le régime UV, domaine d'importance car il correspond dans la vaste majorité des cas à la région observable.

A first step towards the inflationary trans-Planckian problem treatment in loop quantum cosmology

Killian Martineau^{*,†}, Aurélien Barrau^{*,§} and Julien Grain^{†,¶}

**Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie,
Université Grenoble-Alpes, CNRS-IN2P3,
53, Avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France*

*†Institut d'astrophysique spatiale, Université Paris-Sud, CNRS,
Bâtiments 120 à 121, Université Paris Sud, 91405 ORSAY, France*

‡martineau@lpsc.in2p3.fr

§Aurelien.Barrau@cern.ch

¶julien.grain@ias.u-psud.fr

Received 27 November 2017

Revised 12 January 2018

Accepted 15 January 2018

Published 1 February 2018

For most initial conditions, cosmologically relevant physical modes were trans-Planckian at the bounce time, often by many magnitude orders. We improve the usual loop quantum cosmology calculation of the primordial power spectra — in the inflationary framework — by accounting for those trans-Planckian effects through modified dispersion relations. This can induce drastic changes in the spectrum, making it either compatible or incompatible with observational data, depending on the details of the choices operated.

Keywords: Loop quantum cosmology; modified dispersion relations.

PACS Number(s): 04.60.Bc, 04.60.Pp

1. Introduction

Even though loop quantum gravity (LQG) is one of the most studied attempts to nonperturbatively and consistently quantize general relativity (GR), the derivation of fully clear experimental predictions is still missing. Together with black holes (see, e.g. Refs. 1–8 for recent studies), cosmology is the natural sector of the theory to consider to search for links with observations (see, e.g. Ref. 9 and references therein for a recent and comprehensive review). Many important results have been obtained in loop quantum cosmology (LQC). In particular, primordial spectra have been calculated in the so-called dressed metric approach (see, e.g. Ref. 10), in the deformed algebra approach (see, e.g. Refs. 11 and 12 for a comparison of both approaches), and in the separate Universe approach (see, e.g. Ref. 13).

It is fair to say that the background dynamics is now well established in LQC (see, e.g. Ref. 14 and references therein). The well-known modified Friedmann equation is not only confirmed by numerical simulations,¹⁵ but also (mostly) by new calculations in group field theory (GFT)¹⁶ (building on Ref. 17), and in quantum reduced loop gravity (QRLG).¹⁸

The situation is however quite different for perturbations. Not only because, as previously mentioned, different settings are being considered, but also — and most importantly — because trans-Planckian effects are mostly neglected or, to say the least, not treated as a dominant process. It is our feeling that too much emphasis has been put on *density* effects and not enough on *length* effects. The former do indeed trigger the bounce, but the latter cannot be ignored in a theory that basically states that there is nothing smaller than the Planck length.^a As soon as the number of e-folds of inflation is higher than 70, all modes of physical interest were trans-Planckian (i.e. their physical length was smaller than the Planck length) at the bounce time. This is a well-known cosmological problem,²² but the specific setting of LQG imposes to take a special look at this question. This is especially true as the number of e-folds can, to some extent, be “predicted” in LQC when the Universe is filled with a scalar field yielding a phase in inflation. There is no consensus on this value (see Ref. 23 for a school of thought, Ref. 24 for another one, and Ref. 25 for a general study), but it is anyway generically much higher than 70. If one takes a quite “standard” GR value like $N = 10^{13}$, it means that modes seen in the cosmic microwave background (CMB) were approximately $e^{10^{13}}$ times smaller than the Planck length at the bounce time! Even with smaller values, like $N = 145$ as favored by the specific dynamics of LQC,²⁴ the relevant lengths are typically 10^{33} times smaller than the Planck length at the bounce time. This cannot be ignored. This problem is obviously related with inflation — and can be evaded in this framework only by assuming arbitrarily the smallest possible value $N \sim 70$ — but does not appear in the matter bounce scenario²⁶ or in the ekpyrotic setting.²⁷

As a first elementary step to account for trans-Planckian effects, we suggest to use modified dispersion relations (MDRs) in the LQC framework. This is obviously not the final word on this question. For sure, trans-Planckian effects should ideally be considered in the full theory (following for example, Ref. 28), but we believe that MDRs are a meaningful first step. This is at least a way to take into account the trans-Planckian problem, which is especially interesting in a bouncing-Universe framework as MDRs are known to have, in this case, possible observational consequences without involving negative energies^{29,30} or arbitrary vacuum states.

In this paper, we study the effects of two different well-motivated MDRs on the primordial spectra obtained both in the deformed algebra and in the dressed metric approach to perturbations in LQC. The MDRs we consider in this work both

^aThis is actually more complicated than this as the length operator has not been studied in as much detail as the area or volume operator in LQG. There are several consistent proposals,^{19–21} but a totally unambiguous picture is still missing.

have an energy–momentum dependence which grows less (or even decreases) than the usual linear behavior in the Planckian regime. Intuitively, from the statistical viewpoint, this means that the energy required to excite trans-Planckian (from the momentum viewpoint) modes is less than naively expected. From the microscopic viewpoint, this is just a very rudimentary way of taking into account the granular structure of spacetime. We do not consider in this study Corley–Jacobson MDRs³¹ as the frequency either becomes negative for $k > k_{\text{Pl}}$ (case $\omega^2 = k^2 - k^4/k_0^4$) — raising serious stability issues and being hard to trust in the trans-Planckian regime which is critical for this study — or rises faster with k (cubic model), making the situation worse than usual.

2. Background Dynamics in LQC

2.1. *The two main equations*

The background evolution equation in LQC is given by

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right), \quad (2.1)$$

where $\kappa = 8\pi G$, $H = \dot{a}/a$ stands for the Hubble parameter, ρ is the energy density and $\rho_c = 0,41\rho_{\text{Pl}}$ is a maximum energy density. This equation obviously leads to a bounce. We assume that the Universe to be filled with a massive scalar field Φ , that is a potential $V(\Phi) = m^2\Phi^2/2$. This potential is not favored by Planck data, but is useful for comparison with other studies and the main argument of this study is not potential shape-dependent.

The evolution of the field is given by the following Klein–Gordon equation:

$$\ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{dV(\Phi)}{d\Phi} = 0. \quad (2.2)$$

With this content, and using the continuity equation

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P), \quad (2.3)$$

P being the pressure in the rest-frame of the fluid, the derivative of Eq. (2.1) becomes

$$\dot{H} = -\frac{\kappa}{2}\dot{\Phi}^2 \left[1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}\right]. \quad (2.4)$$

The Klein–Gordon equation (2.2) together with Eq. (2.4) constitute the set of equations that drives the background dynamics.

2.2. *The background initial conditions*

The scalar field evolution can be described by two variables (related to one another), the potential energy parameter x and the kinetic energy parameter y , defined by

$$x(t) = \frac{m\Phi(t)}{\sqrt{2\rho_c}}, \quad y(t) := \frac{\dot{\Phi}}{\sqrt{2\rho_c}}, \quad (2.5)$$

that satisfy

$$x^2(t) + y^2(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c}. \quad (2.6)$$

The Klein–Gordon equation (2.2) can then be recast into a set of two first-order ordinary differential equations (ODEs):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = my(t), \\ \dot{y}(t) = -3H(t)y(t) - mx(t). \end{cases}$$

The ratio of the two timescales $1/m$ and $1/\sqrt{3\kappa\rho_c}$ is given by

$$\Gamma := \frac{m}{\sqrt{3\kappa\rho_c}}. \quad (2.7)$$

In the classical contracting phase, $\sqrt{\rho(t)/\rho_c} \ll \Gamma$ holds, thus the Klein–Gordon equation (2.2) reduces to a simple harmonic oscillator. In this case, x and y are well-approximated by

$$\begin{cases} x(t) \simeq \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho_c}} \sin(mt + \delta), \\ y(t) \simeq \sqrt{\frac{\rho(0)}{\rho_c}} \cos(mt + \delta). \end{cases} \quad (2.8)$$

The scalar field oscillation phase δ is not fundamentally relevant since the background dynamics is mostly independent of its value²⁴ (this statement is not true anymore when considering flat potentials²⁵). The energy density in the classical phase can be expressed as

$$\rho(t) \simeq \rho_c \left(\frac{\Gamma}{\alpha}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{2\alpha} \left(mt + \frac{1}{2} \sin(2mt + 2\delta)\right)\right]^{-2}, \quad (2.9)$$

where $\alpha = 17/4\pi + 1$ is a free parameter set to ensure that $\sqrt{\rho(t)/\rho_c} \ll \Gamma$ remains valid and so that a sufficiently high number of field oscillations takes place in the contracting phase (more than 10), making it convenient to derive analytical solutions in the quadratic potential case.

To obtain the initial conditions for the matter sector, one evaluates Eqs. (2.8) and (2.9) at $t = 0$, leading to

$$\begin{cases} \Phi(0) = \sqrt{2\rho(0)} \frac{\sin(\delta)}{m}, \\ \dot{\Phi}(0) = \sqrt{2\rho(0)} \cos(\delta) \end{cases} \quad (2.10)$$

and

$$\rho(0) = \rho_c \left(\frac{\Gamma}{\alpha}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{4\alpha} \sin(2\delta)\right]^{-2}. \quad (2.11)$$

For fixed values of α , the only free variable which remains to be chosen to completely determine the initial parameters $\{\Phi(0), \dot{\Phi}(0), \rho(0)\}$ is the scalar field initial

phase δ . As previously mentioned, except if one performs an hyper-fine tuning, the dynamics is basically independent of its value, thus we arbitrarily choose $\delta = \pi/2$.

Nevertheless, the choice of initial conditions for the background is not the key-point for this study and the main results do *not* depend on the particular initial conditions chosen.

3. Perturbations on LQC Background

3.1. The Mukhanov–Sasaki perturbations equation in the usual algebra

The perturbed Einstein equations for a flat Universe filled with a scalar field lead to the gauge-invariant Mukhanov–Sasaki equation:

$$v''(\eta, \mathbf{x}) - c_s^2 \Delta v(\eta, \mathbf{x}) - \frac{z''_{T/S}(\eta)}{z_{T/S}(\eta)} v(\eta, \mathbf{x}) = 0, \quad (3.1)$$

where f' denotes a derivative with respect to the conformal time η . The canonical variable v is a gauge-invariant combination of the metric coordinate perturbations (Bardeen variables) and of the scalar field perturbations. The variable z depends on the kind of perturbations considered and the indices T/S refer to tensor or scalar modes.

The evolution of cosmological perturbations is equivalent to a free scalar field v with a time-dependent mass $m^2 = -z''_{T/S}/z_{T/S}$ in a Minkowski spacetime. The mass time dependence is due to interactions between the perturbations and the expanding background (the energy is not conserved and they can be excited by borrowing energy from the expansion).

The functions v are promoted to be operators and the associated Fourier temporal mode functions satisfy

$$v''_k(\eta) + \left(k_c^2 - \frac{z''_{T/S}(\eta)}{z_{T/S}(\eta)} \right) v_k(\eta) = 0, \quad (3.2)$$

where k_c refers to the considered comoving wave number. As it will be important in the following to switch to physical wave numbers, one rewrite this equation as

$$v''_k(\eta) + \left(a^2(\eta) k_\varphi^2 - \frac{z''_{T/S}(\eta)}{z_{T/S}(\eta)} \right) v_k(\eta) = 0, \quad (3.3)$$

where $k_\varphi(\eta) = k_c/a(\eta)$.

The aim of this study is to introduce modified dispersion relations in the Mukhanov–Sasaki equation, so as to account effectively for quantum length effects at the Planck scale. Those modified relations are relevant when applied to physical quantities and are therefore introduced in Eq. (3.3) by the replacement: $k_\varphi \rightarrow \mathcal{F}(k_\varphi)$. The function $\mathcal{F}(k_\varphi)$ depends on the chosen dispersion relation. The

classical case corresponds to $\mathcal{F}(k_\varphi) = k_\varphi$. The fundamental equation then becomes

$$v_k''(\eta) + \left(a^2(\eta)\mathcal{F}(k_\varphi)^2 - \frac{z_{T/S}''(\eta)}{z_{T/S}(\eta)} \right) v_k(\eta) = 0. \quad (3.4)$$

This can also be rewritten in cosmic time:

$$\ddot{v}_k(t) + H(t)\dot{v}_k(t) + \left(\mathcal{F}(k_\varphi)^2 - \frac{\dot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)}H(t) - \frac{\ddot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)} \right) v_k = 0. \quad (3.5)$$

When introducing the new parameter $h_k(t) = v_k(t)/a(t)$, Eq. (3.5) becomes

$$\ddot{h}_k(t) + 3H(t)\dot{h}_k(t) + \left[H(t)^2 + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \mathcal{F}(k_\varphi)^2 - H(t)\frac{\dot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)} - \frac{\ddot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)} \right] h_k(t) = 0. \quad (3.6)$$

A second parameter $g_k(t) = a(t)\dot{h}_k(t)$ can also be introduced in order to rewrite Eq. (3.6) as a set of two first-order ODE:

$$\begin{cases} \dot{h}_k(t) = \frac{1}{a(t)}g_k(t), \\ \dot{g}_k(t) = -2H(t)g_k(t) - a(t)h_k(t) \\ \quad \times \left[H(t)^2 + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \mathcal{F}(k_\varphi)^2 - H(t)\frac{\dot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)} - \frac{\ddot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)} \right]. \end{cases} \quad (3.7)$$

3.1.1. Equations for tensor modes

In the case of tensor modes, $z_T(t) = a(t)$, and the previous set of ODEs becomes

$$\begin{cases} \dot{h}_k(t) = \frac{1}{a(t)}g_k(t), \\ \dot{g}_k(t) = -2H(t)g_k(t) - a(t)\mathcal{F}(k_\varphi)^2h_k(t). \end{cases} \quad (3.8)$$

3.1.2. Equations for scalar modes

In the case of scalar modes, $z_S(t) = a(t)\frac{\dot{\Phi}(t)}{H(t)}$, Φ being the background variable of the scalar field that fills the Universe. Then, the set of Eqs. (3.7) become

$$\begin{cases} \dot{h}_k(t) = \frac{1}{a(t)}g_k(t), \\ \dot{g}_k(t) = -2H(t)g_k(t) - a(t)h_k(t) \\ \quad \times \left[\mathcal{F}(k_\varphi)^2 + m^2 - 2m^2\frac{\Phi(t)}{\dot{\Phi}(t)}\frac{\dot{H}(t)}{H(t)} - 2\left(\frac{\dot{H}(t)}{H(t)}\right)^2 + \frac{\ddot{H}(t)}{H(t)} \right]. \end{cases} \quad (3.9)$$

As explained in Ref. 32, the divergence at the bounce, when $H(t) = 0$, can be removed by the change of variable $\mathcal{R}(t) = v(t)/z(t)$. The curvature scalar \mathcal{R} is a

gauge-invariant quantity, related to the Ricci scalar, used to describe the intrinsic curvature.

3.2. The Mukhanov–Sasaki perturbations equation in the deformed algebra

The physical motivation for the deformed algebra approach to perturbations in LQC, given in details in Ref. 11, will be recalled later in this paper. Here, we just mention how the previous results are modified.

The basic logics is the same. The Mukhanov–Sasaki equation in conformal time now reads

$$v_k''(\eta) + \left(\Omega(\eta)k_c^2 - \frac{z_{T/S}''(\eta)}{z_{T/S}(\eta)} \right) v_k(\eta) = 0 \quad (3.10)$$

with $\Omega(t) = 1 - 2\rho(t)/\rho_c$. The Mukhanov variable z is modified for tensor modes and becomes $z_T(\eta) = a(\eta)/\sqrt{\Omega(\eta)}$, whereas z_S remains unchanged. The variables h_k and g_k are redefined as $h_k = v_k/z$ and $g_k = a\dot{h}_k/\Omega$, so that the set of first-order differential equations for tensor modes becomes

$$\begin{cases} \dot{h}_k(t) = \frac{\Omega(t)}{a(t)}g_k(t), \\ \dot{g}_k(t) = -2H(t)g_k(t) - a(t)\mathcal{F}(k_\varphi)^2h_k(t). \end{cases} \quad (3.11)$$

For scalar modes, there is no need to redefine h_k and g_k . The new set of equations is

$$\begin{cases} \dot{h}_k(t) = \frac{1}{a(t)}g_k(t), \\ \dot{g}_k(t) = -2H(t)g_k(t) - a(t)h_k(t) \left[\Omega(t)\mathcal{F}(k_\varphi)^2 + m^2 \right. \\ \left. + \kappa m^2 \left(1 - 2\frac{\rho(t)}{\rho_c} \right) \frac{\Phi(t)\dot{\Phi}(t)}{H(t)} - 2 \left(\frac{\dot{H}(t)}{H(t)} \right)^2 + \frac{\ddot{H}(t)}{H(t)} \right], \end{cases} \quad (3.12)$$

where the difference with Eq. (3.9) also comes from the appearance of the Ω factor, this time in the second equation. The expression for the power spectrum $\mathcal{P}_S(k_c)$ remains unchanged.

3.3. Initial conditions for perturbations

In this study, and following the logics of causality, initial conditions are set in the contracting branch, where the MDR effects vanish, so that $a(\eta)\mathcal{F}(k_\varphi) \simeq a(\eta)k_\varphi = k_c$.

Moreover, the tensor effective potential term $z_{T/S}''/z_{T/S}$ tends to zero in the contracting phase both in the standard view and in the deformed algebra approach.

It is therefore possible to find, for every comoving wave number k_c , a time η_i in the contracting phase such that $k_c \gg z_T''(\eta_i)/z_T(\eta_i)$. As long as this assumption is valid, solutions to Eq. (3.3) can be written as

$$v_k(\eta) = c_1 e^{ik_c \eta} + c_2 e^{-ik_c \eta}. \quad (3.13)$$

The two constants c_1 and c_2 are constrained by the Wronskian condition:

$$v_k \frac{dv_k^*}{d\eta} - v_k^* \frac{dv_k}{d\eta} = i, \quad (3.14)$$

which comes from relations on the commutators $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{q}}^\dagger] = \delta^{(3)}(\mathbf{k}-\mathbf{q})$ introduced for the temporal mode functions operator in the Heisenberg picture: $\hat{v}_{\mathbf{k}}(\eta) = v_k(\eta)\hat{a}_{\mathbf{k}} + v_k^*(\eta)\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger$. This condition implies

$$|c_2|^2 - |c_1|^2 = \frac{1}{2k_c}. \quad (3.15)$$

Choosing $c_1 = 0$ and $c_2 = 1/\sqrt{2k_c}$ in order to describe a wave propagating in the positive time direction, the mode functions read

$$v_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k_c}} e^{-ik_c \eta}. \quad (3.16)$$

This normalization, called *Minkowski Vacuum*, can be transposed to the h_k and g_k coefficients:

$$\begin{cases} h_k(t_i) = \frac{1}{a(t_i)} \frac{1}{\sqrt{2k_c}}, \\ g_k(t_i) = \frac{-i}{a(t_i)} \frac{\sqrt{k_c}}{\sqrt{2}} - H(t_i) \frac{1}{\sqrt{2k_c}}. \end{cases} \quad (3.17)$$

The case of scalar modes is slightly more delicate due to the z_S''/z_S scalar potential behavior in the contracting branch. In this regime, $z_S''/z_S \simeq -m^2 a(t)^2$. The potential is proportional to the scale factor squared and cannot be neglected anymore. This issue has already been addressed in Ref. 32 and initial conditions were set using a WKB approximation and fixing a precise time at which this approximation is valid. We have applied the same strategy in this study. It is probably not the final word on this issue and the infrared behavior of the scalar spectra, directly sensitive to the initial normalization, must not be considered too seriously. However, since MDR effects appear in the UV regime, this is not a major concern for this study.

4. Unruh-Like MDR

4.1. Physical justification

We will first consider the MDR introduced by Unruh in Ref. 33. The idea was to investigate the sensitivity of the naive calculation of the black hole evaporation spectra to possible modified dispersion relation at high frequencies.

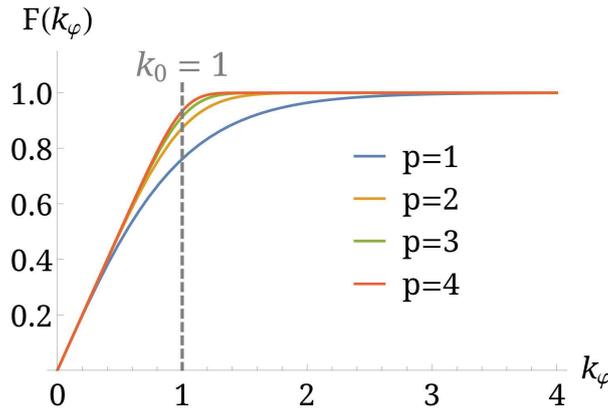


Fig. 1. Unruh-like dispersion relation for different values of p and $k_0 = 1$.

This MDR writes

$$\mathcal{F}(k_\varphi) = k_0 \tanh \left[\left(\frac{k_\varphi}{k_0} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} = k_0 \tanh \left[\left(\frac{k_c}{a(t)k_0} \right)^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (4.1)$$

where k_0 is a physical wave number, expected to be of the order of the Planck value, which determines the transition scale at which $\mathcal{F}(k_\varphi)$ switches from a linear behavior in k_φ to a constant. The p parameter determines the sharpness of the transition, as it can be seen in Fig. 1.

Clearly, our problematic is quite different from the one initially considered by Unruh. This MDR might however phenomenologically capture some quantum gravity effects. When the “effective” physical wave number becomes trans-Planckian, the energy does not grow anymore. Intuitively, this can be thought of as a kind of saturation taking place at the Planck scale. It is important to stress once again that this might happen when the Universe *density* is far from Planckian. In the contracting branch, for example, the wavelength of a given mode can reach the Planck size when the background density is still very small and the dynamics fully described by the classical (contracting) Friedmann equation.

4.2. Primordial power spectra

4.2.1. Deformed algebra approach

In Fig. 2, we recall the results previously obtained^{12,32,34} on the tensor and scalar power spectra in the deformed algebra approach. The spectra are, respectively, defined by

$$\mathcal{P}_T(k_c) = \frac{4\kappa k^3}{\pi^2} \left| \frac{v_k(\eta_e)}{z_T(\eta_e)} \right|^2 \quad (4.2)$$

and

$$\mathcal{P}_S(k_c) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{v_k(\eta_e)}{z_S(\eta_e)} \right|^2, \quad (4.3)$$

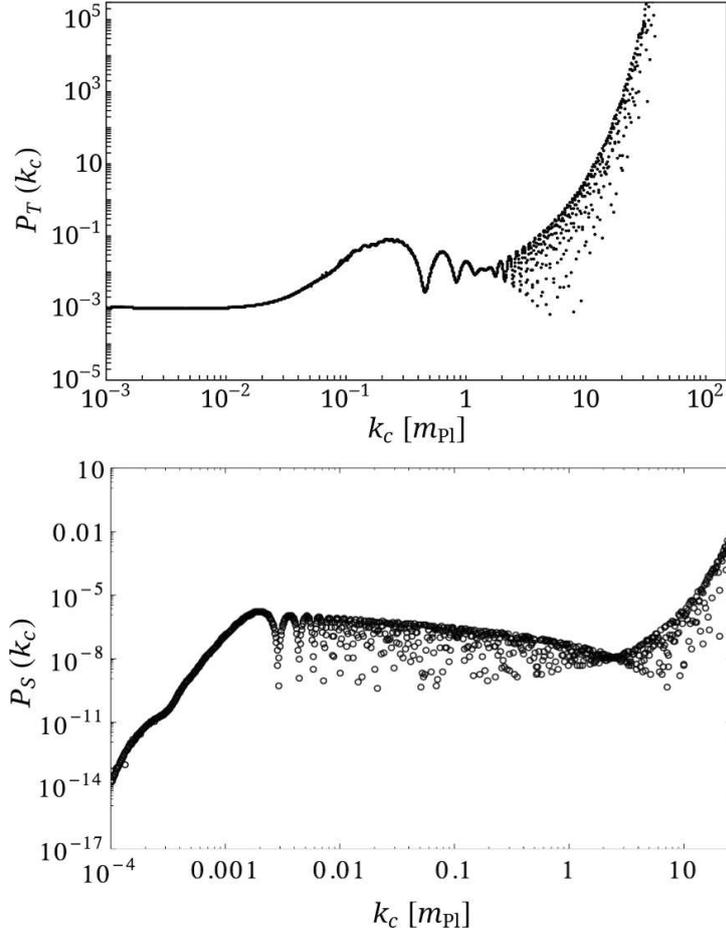


Fig. 2. Upper: Primordial tensor power spectrum. Lower: Primordial scalar power spectrum. Both spectra are obtained in the Deformed Algebra approach and with the usual dispersion relation $\mathcal{F}(k_\varphi) = k_\varphi$.

where η_e stands for the conformal time at the end of the inflationary period. For all scalar spectra presented in this paper, the scalar field mass is fixed at $m = 1.2 \times 10^{-6} m_{\text{Pl}}$, as favored by Planck data.³⁵ However, since tensor perturbations are only metric fluctuations, the scalar field mass does not appear explicitly in the Mukhanov–Sasaki equation and it has been shown in Ref. 12 that a modification of this mass does not modify the spectrum shape. In order to decrease the simulation running time, we have therefore set $m = 1.2 \times 10^{-2} m_{\text{Pl}}$ for all the tensor spectra.

The deformed algebra approach puts a specific emphasis on gauge issues that are critical in gravity (it is not *a priori* clear whether the first class nature of the system of constraints can persist when leading order quantum corrections are included, see Ref. 36). In the constraints, the gravitational connection is basically replaced by its holonomy. The quantum-corrected constraints are calculated for the perturbations up to the desired order and the Poisson brackets are evaluated. Anomalies are cancelled by suitable counter-terms, which are required to vanish in the classical limit. The resulting theory is not only anomaly free, but is also uniquely defined when matter is included.^{37–39} Although the calculations involve intricate expressions, the resulting final algebra is simple and depends on a unique structure

function which encodes all the modifications: $\Omega = 1 - 2\rho/\rho_c$. The resulting spectra, at least when perturbations are propagated through the bounce (other possibilities are studied in Refs. 40–42), exhibit three different regimes: either a scale-invariant behavior or a growth $\propto k^3$ in the IR,^b depending on the nature of the perturbations, oscillations in the intermediate part and an exponential divergence in the UV. As such, those spectra are excluded by data.⁴³

The shape of the spectra after implementing the Unruh MDR, as shown in Fig. 3 for tensor modes and Fig. 4 for scalar modes, can be quite easily understood. For simplicity, we skip the explicit time dependence of the modes. Around the bounce, Ω is negative and the equation of motion can be written as

$$v'' - \left(|\Omega| a^2 \mathcal{F}^2(k_\varphi) + \frac{z''}{z} \right) v = 0. \quad (4.4)$$

Assuming that close to the bounce, z''/z varies relatively slow and can be approximated by a time-independent constant, as a crude approximation which should just be considered as a way to get an intuition of the main behavior, one obtains (keeping only the growing solution)

$$v \approx A e^{|\Omega| a^2 \mathcal{F}^2(k_\varphi) + z''/z} \approx B e^{|\Omega| a^2 \mathcal{F}^2(k_\varphi)}. \quad (4.5)$$

When no MRD is implemented, $a^2 \mathcal{F}^2(k_\varphi) = k_c^2$ and one can easily observe the exponential behavior. With the Unruh's MDR, $\mathcal{F}(k_\varphi) \approx k_0$ when $k > k_0$ and one simply expect a constant behavior.

The upper panel of Fig. 3 also shows that the precise value of p plays, as expected, no significant role. We therefore fix it to $p = 1$ in the other plots.

Importantly, this study shows that when an Unruh-like MRD is used, the pathology exhibited by the deformed algebra spectrum is fully cured as long as the “transition” wave number k_0 is not taken at unnaturally high value. Trans-Planckian effects can therefore drastically modify the UV part of the primordial power spectra.

4.2.2. Dressed metric approach

The dressed metric approach^{10,44,45} deals with quantum fields on a quantum background. It relies on a minisuperspace strategy where the homogeneous and inhomogeneous degrees of freedom are both quantized. The former quantization follows the loop approach whereas the latter is performed with the help of Fock-like procedure. The physical perturbations are given by the Mukhanov–Sasaki variables derived from the linearized classical constraints. The full Hilbert space is the tensor product of the Hilbert space for the background with the Hilbert space of the perturbed degrees of freedom. The Schrödinger equation for the perturbations was shown to be formally identical to the Schrödinger equation for the quantized perturbations evolving on a classical background and feeling a dressed metric that

^bThe IR behavior of the scalar mode spectrum is highly dependent on the way to set initial conditions and remains an open issue.

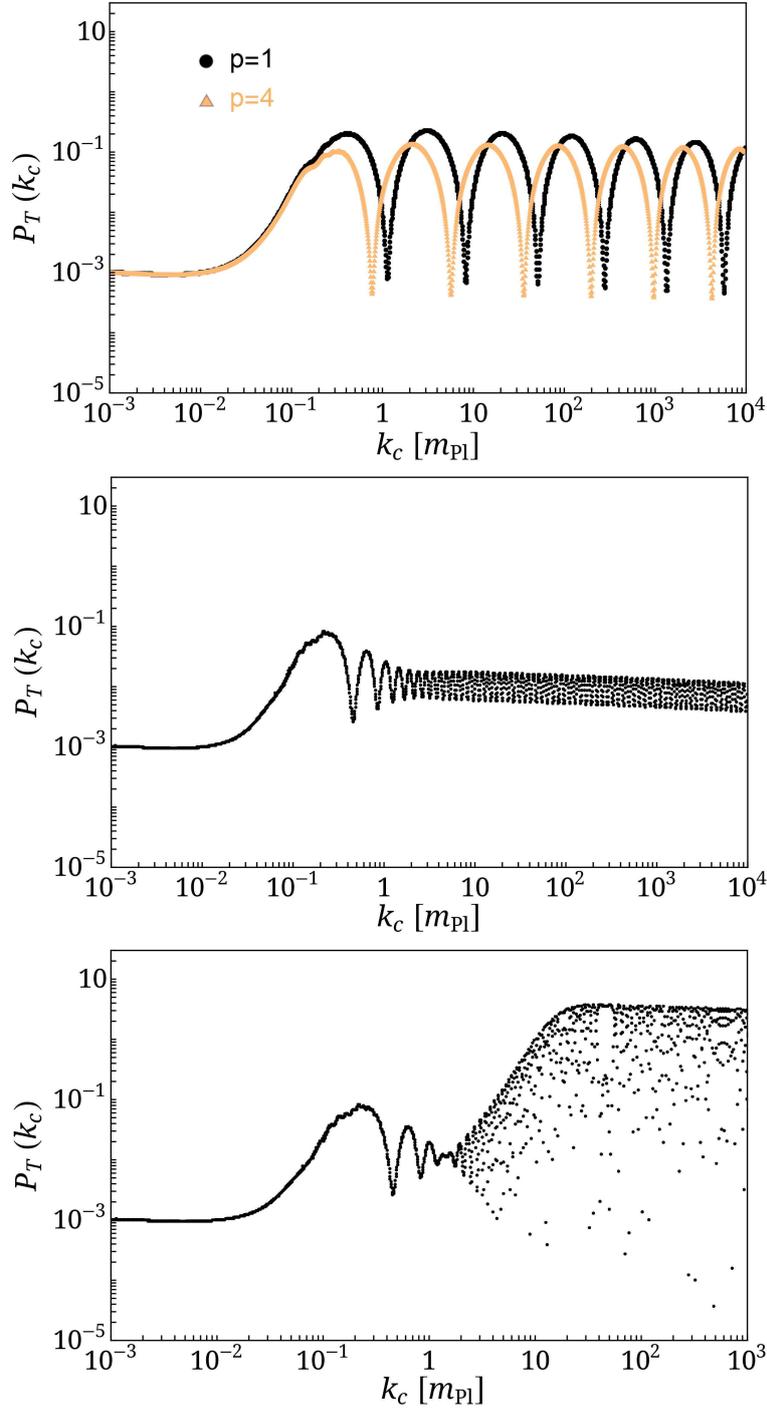


Fig. 3. Primordial tensor power spectra obtained in the Deformed Algebra approach with the Unruh-like MDR $\mathcal{F}(k_\varphi) = k_0 \tanh[(k_c/(a(t)k_0))^p]^{1/p}$, for different k_0 and P values. Upper: $k_0 = 0.1$, $p = 1$ and $p = 4$. Middle: $k_0 = 1$, $p = 1$. Lower: $k_0 = 10$, $p = 1$.

takes into account the quantum nature of this background. The full consistency is however not yet established in the sense that it is not clear that the constraints still constitute a “first class” system. If this important symmetry of the classical theory is lost, one may obtain meaningless (gauge-dependent) results. Gauge-fixing before quantization is often harmless in physics, but the case of gravity is peculiar as dynamics is part of the gauge system.¹¹

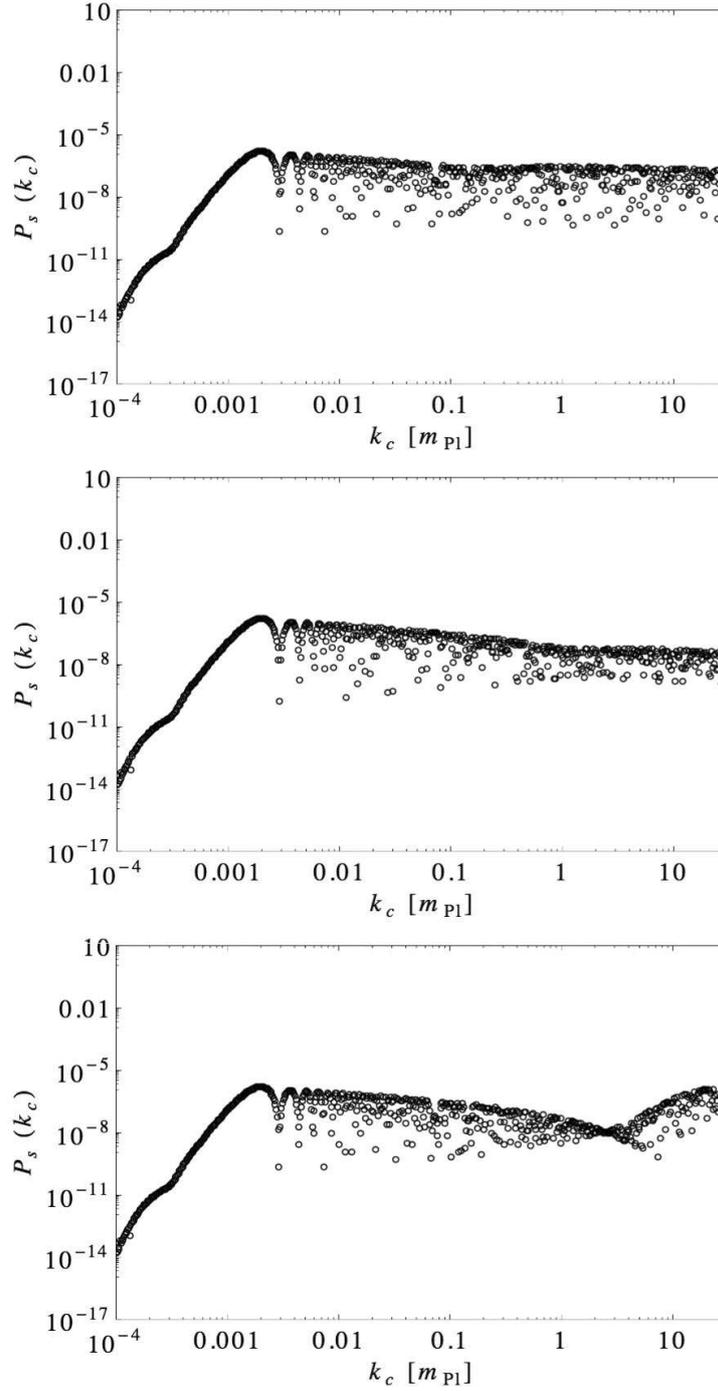


Fig. 4. Primordial scalar power spectra obtained in the Deformed Algebra approach with the Unruh-like MDR $\mathcal{F}(k_\varphi) = k_0 \tanh[(k_c/(a(t)k_0))^p]^{1/p}$, for $p = 1$ and different k_0 values. Upper: $k_0 = 0.1$. Middle: $k_0 = 1$. Lower: $k_0 = 10$.

Interestingly, for sharply peaked states, this approach basically leads to the same equation of motion for the perturbations than the usual GR one. The results given here (and in the “dressed metric” paragraph of the next section) can therefore either be considered as showing the MDR effects on the dressed metric approach itself or as the MDR effects on standard perturbations moving in an LQC-like background.

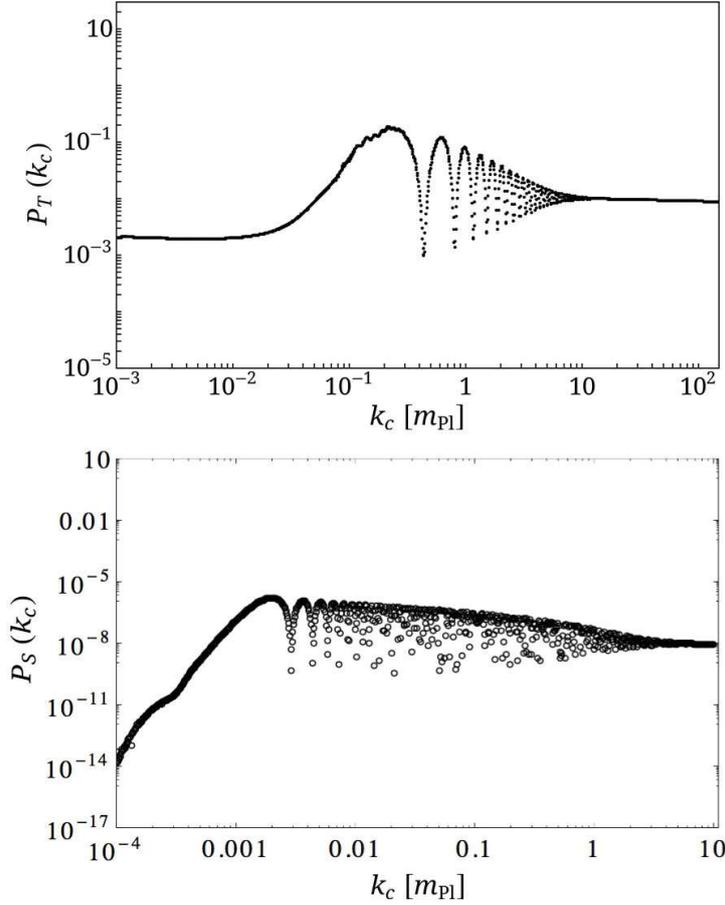


Fig. 5. Upper: Primordial tensor power spectrum. Lower: Primordial scalar power spectrum. Both spectra are obtained in the Dressed Metric approach and with the standard dispersion relation $\mathcal{F}(k_\varphi) = k_\varphi$.

As seen in Figs. 6 and 7, the implementation of this MDR does not change the dressed metric nearly scale-invariant UV power spectrum obtained without MDR, presented in Fig. 5.

There are however few quantitative features induced by the MDR that are worth to be mentioned. For the tensor modes first, the frequency of the oscillations can become rather large for small values of k_0 , as clearly seen on the upper panel of Fig. 6 for $k_0 = 0.1$. In full generality, any feature in the primordial power spectrum can be transferred into features in the angular power spectra, C_ℓ , of the CMB anisotropies. Without MDR, however, the oscillations in the \mathcal{P}_T are washed out because the transfer functions (acting as a kernel translating primordial inhomogeneities into CMB anisotropies) are wide enough in the k -space, as compared to the oscillations, to smooth them. With an Unruh-like MDR and assuming a small-enough value of k_0 , this may not be the case anymore for the oscillations which become wide enough (for example with $k_0 = 0.1$, the frequency of oscillations is first roughly constant per logarithmic band with a rough value of 1, i.e. there is one oscillation per decade in k).

For the scalar modes, the prediction without MDR for wave numbers greater than few m_{pl} is a slightly red-tilted spectrum because the amplification of these

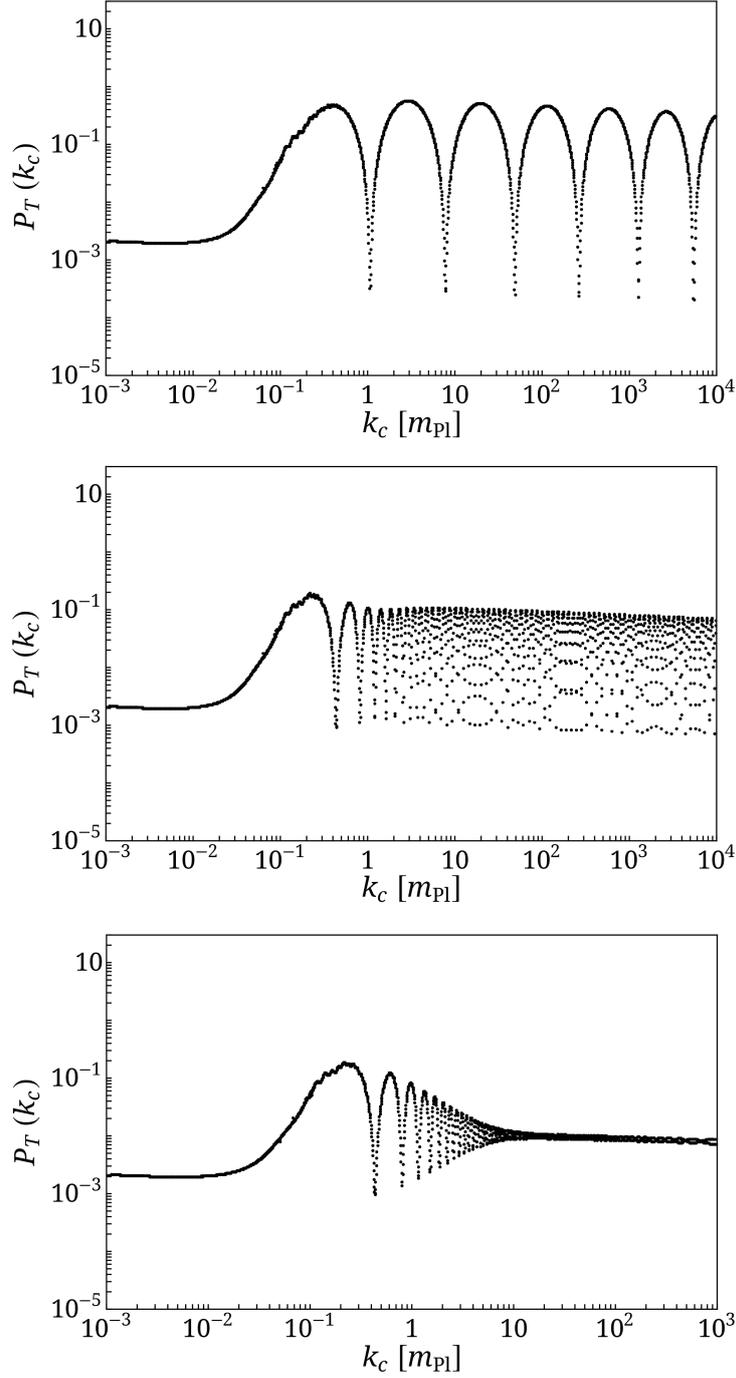


Fig. 6. Primordial tensor power spectra obtained in the Dressed Metric approach with the Unruh-like MDR $\mathcal{F}(k_\varphi) = k_0 \tanh[(k_c/(a(t)k_0))^p]^{1/p}$, for $p = 1$ and different k_0 values. Upper: $k_0 = 0.1$. Middle: $k_0 = 1$. Lower: $k_0 = 10$.

modes is dominated by the inflationary phase following the bounce. As can be seen in Fig. 7, accounting for the MDR slightly reduces the steepness of this tilt for $k > k_0$. This can be understood as follows: with the Unruh-like MDR, the primordial power spectrum for $k > k_0$ is roughly such that $\mathcal{P}_S(k > k_0) \sim \mathcal{P}_S(k_0)$.

At this stage, it is however unclear if such quantitative differences are large enough to be tested.

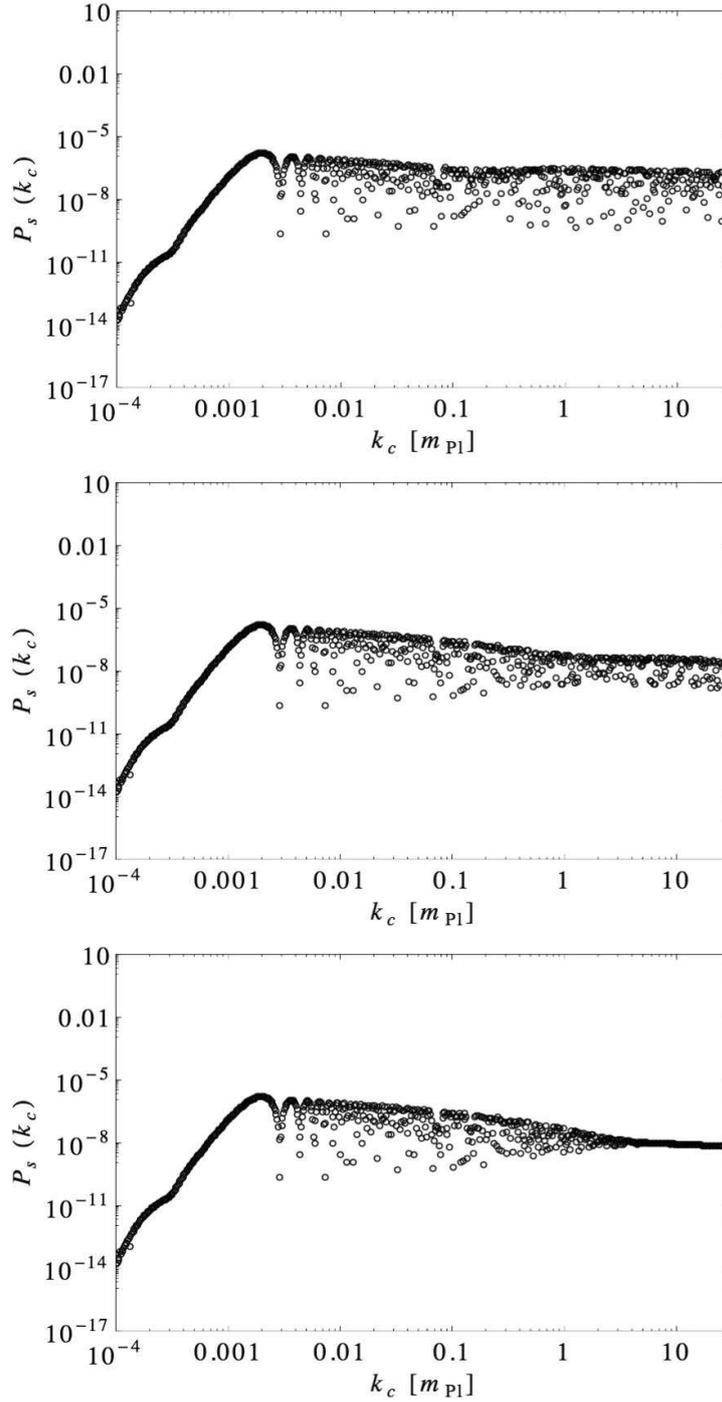


Fig. 7. Primordial scalar power spectra obtained in the Dressed Metric approach with the Unruh-like MDR $\mathcal{F}(k_\varphi) = k_0 \tanh[(k_c/(a(t)k_0))^p]^{1/p}$, for $p = 1$ and different k_0 values. Upper: $k_0 = 0.1$. Middle: $k_0 = 1$. Lower: $k_0 = 10$.

5. Exponentially Suppressed Dispersion Relation

5.1. Physical justification

We consider here another MDR given by

$$\mathcal{F}(k_\varphi)^2 = k_\varphi^2 e^{-\frac{k_\varphi^2}{k_0^2}}. \quad (5.1)$$

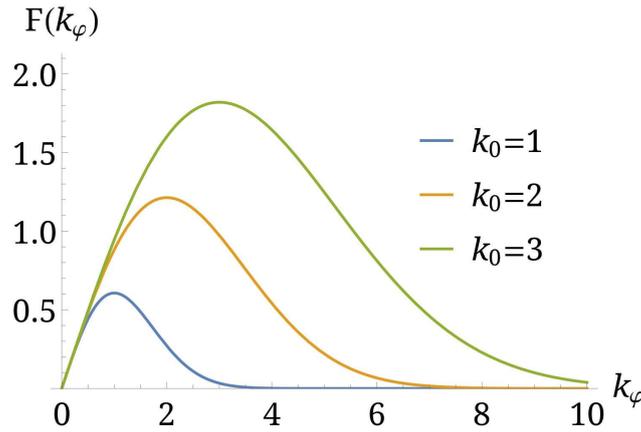


Fig. 8. Exponentially suppressed dispersion relation for different values of k_0 .

It was explicitly used in Ref. 46, inspired by a slightly different proposal made in Ref. 47. This relation is, as it should be, linear in the IR. It reaches a maximum around k_0 and then decreases to zero. The physical interpretation of this MDR is different from Unruh’s one. Here, a vanishing energy is associated with modes characterized by an effective trans-Planckian wave number, so as to account for their “effective” disappearance. The shape of $\mathcal{F}(k_\varphi)$ is shown in Fig. 8. A similar form of MDRs appears in effective string theory as a consequence of the T -duality symmetry (equivalence between strings compactified around a circle of radius R and $1/R$). In this case, the string length l_s directly enters the formula and some cosmological consequences were considered in Ref. 48.

5.1.1. Deformed algebra approach

As it can be seen in Fig. 9, this MDR leads to a very blue UV spectrum. Intuitively, one can interpret this behavior as a kind of “remapping” of the spectrum: the function $\mathcal{F}(k_\varphi)$ replaces k_φ in the equations of motion. But, $\mathcal{F}(k_\varphi)$ is now decreasing with k_φ in the trans-Planckian regime. It means that the shape of spectrum when going to higher values of k_φ , beyond k_0 , is expected to mimic the (possibly stretched) behavior of the spectrum when going to smaller values of k_φ below k_0 . The observed rise for wave numbers greater than k_0 is therefore connected with the red envelope of the oscillations of the spectrum for wave numbers smaller than k_0 .

In this section (and in the following one), we only show the tensor spectrum because, as previously mentioned, the IR behavior of the scalar spectrum (which is quite controversial as it heavily depends on the way to set initial conditions) would be reflected in the UV through the MDR. There is therefore no point studying it in details here.

5.1.2. Dressed metric approach

Figure 10 shows, for the reason given in the previous section, that the spectrum now exhibits a deeply blue behavior at small scales, as for the deformed algebra

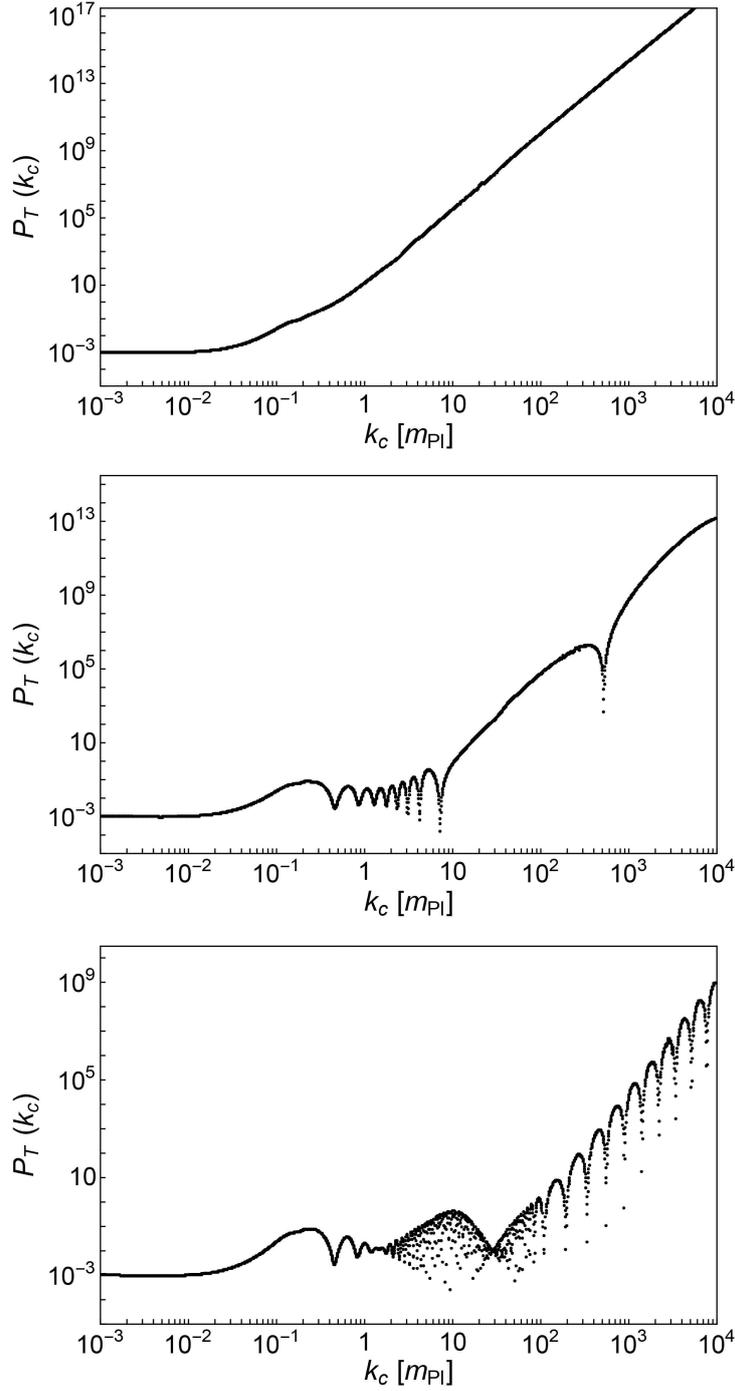


Fig. 9. Primordial tensor power spectra obtained in the Deformed Algebra approach with the exponentially-suppressed MDR $\mathcal{F}(k_\varphi)^2 = k_\varphi^2 e^{-k_\varphi^2/k_0^2}$, for different k_0 values. Upper: $k_0 = 0.1$. Middle: $k_0 = 1$. Lower: $k_0 = 10$.

spectrum. This is interesting as it was believed that quantum gravity effects were, in this framework, only affecting the IR modes. The reason for that was that those modes are, at the bounce time, larger than the curvature radius of the Universe and are therefore “feeling” the curvature. They are thus excited and not in the Bunch–Davies vacuum. This quantum-gravity effect was only due to the background dynamics and therefore to the density. In the case of the MDR here implemented,

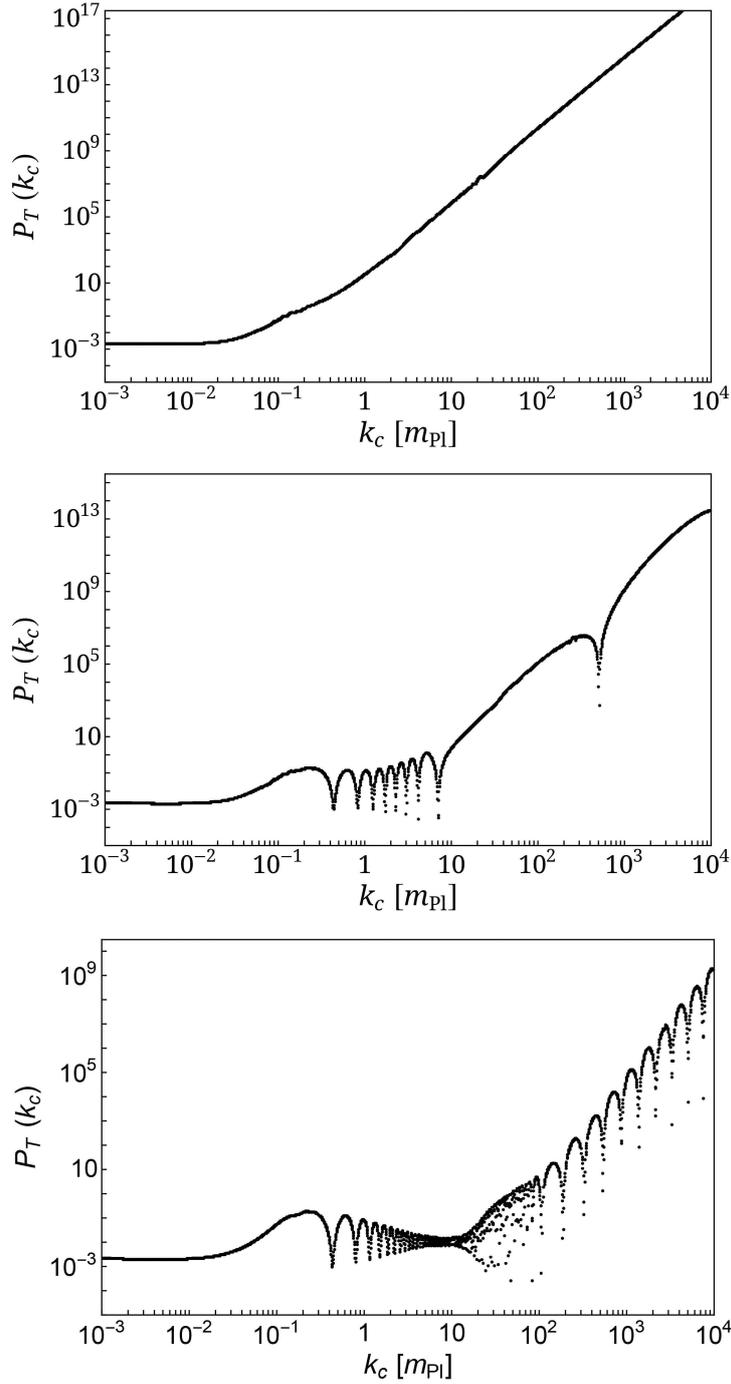


Fig. 10. Primordial tensor power spectra obtained in the Dressed Metric approach with the exponentially-suppressed MDR $\mathcal{F}(k_\varphi)^2 = k_\varphi^2 e^{-k_\varphi^2/k_0^2}$, for different k_0 values. Upper: $k_0 = 0.1$. Middle: $k_0 = 1$. Lower: $k_0 = 10$.

the physical size of the mode also plays a role and the UV part of the spectrum is affected.

6. Conclusion

In the framework of LQC, the background behavior when the density becomes Planckian is quite well known and understood. The effects of the resulting bouncing

dynamics on the spectrum of primordial perturbations have also been intensively studied. In this paper, we have focused on another issue: the consequences of quantum gravity affects the *length* of the considered mode, independently of the *density* of the background.

As a first step in this direction, we have considered two different modified dispersion relations to take into account the existence of a minimum scale in LQG: the Unruh's one and the exponentially suppressed one. The first lesson of this study is that the trans-Planckian behavior of the MDR does matter and changes the spectrum. In particular,

- the pathological behavior of the “naive” (i.e. with a quadratic potential and no backreaction) deformed algebra spectrum can be cured by an Unruh-like MDR;
- the correct behavior of the dressed metric spectrum can become pathological if an exponentially decreasing MDR is implemented.

This makes the situation particularly interesting in the sense that the anomaly-free approach is now shown, when trans-Planckian effects are taken into account, to be possibly in agreement with data. But, this does not mean that the spectra are insensitive to the details of quantum gravity effects as some MDRs are clearly incompatible with measurements. Those effects cannot be ignored as, for a typical duration of inflation, the modes observed in the current Universe were deeply trans-Planckian at the bounce time.

In the black hole sector,^{49–51} it is now known that MDRs have a very small impact on the characteristics of the Hawking radiation. This means that the predictions are quite insensitive to trans-Planckian physics. This is also true in the cosmological sector⁵² when dealing with the usual inflationary paradigm. However, we have shown here that this is not the case anymore when dealing with a quantum-gravity induced bouncing scenario (as already suggested in Ref. 29). This obviously means that the predictions are less robust, but this also opens an interesting window on trans-Planckian physics.

As a next step in this direction, it would be important to use less *ad hoc* hypotheses for the shape of the MDRs but, instead, to derive them from the full theory. Although the task is quite hard if taken fully rigorously, some toy models inspired by solid state physics approaches can certainly be built.

Acknowledgment

K. M. is supported by a grant from the CFM foundation.

References

1. C. Rovelli and F. Vidotto, *Int. J. Mod. Phys. D* **23** (2014) 1442026, arXiv: 1401.6562.
2. A. Barrau and C. Rovelli, *Phys. Lett. B* **739** (2014) 405, arXiv: 1404.5821.
3. H. M. Haggard and C. Rovelli, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 104020, arXiv: 1407.0989.
4. A. Barrau, C. Rovelli and F. Vidotto, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 127503, arXiv: 1409.4031.

5. A. Barrau, B. Bolliet, F. Vidotto and C. Weimer, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1602** (2016) 022, arXiv: 1507.05424.
6. A. Barrau, X. Cao, K. Noui and A. Perez, *Phys. Rev. D* **92** (2015) 124046, arXiv: 1504.05352.
7. A. Barrau, B. Bolliet, M. Schutten and F. Vidotto, *Phys. Lett. B* **772** (2017) 58, arXiv: 1606.08031.
8. A. Barrau, *Phys. Rev. Lett.* **117** (2016) 271301, arXiv: 1605.06613.
9. E. Wilson-Ewing, *C. R. Phys.* **18** (2017) 207, arXiv: 1612.04551.
10. I. Agullo, A. Ashtekar and W. Nelson, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 043507, arXiv: 1211.1354.
11. A. Barrau, M. Bojowald, G. Calcagni, J. Grain and M. Kagan, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1505** (2015) 051, arXiv: 1404.1018.
12. B. Bolliet, J. Grain, C. Stahl, L. Linsefors and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **91** (2015) 084035, arXiv: 1502.02431.
13. E. Wilson-Ewing, *Int. J. Mod. Phys. D* **25** (2016) 1642002, arXiv: 1512.05743.
14. A. Ashtekar and P. Singh, *Class. Quantum Grav.* **28** (2011) 213001, arXiv: 1108.0893.
15. P. Diener, B. Gupt and P. Singh, *Class. Quantum Grav.* **31** (2014) 025013, arXiv: 1310.4795.
16. D. Oriti, L. Sindoni and E. Wilson-Ewing, *Class. Quantum Grav.* **33** (2016) 224001, arXiv: 1602.05881.
17. S. Gielen, D. Oriti and L. Sindoni, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 031301, arXiv: 1303.3576.
18. E. Alesci and F. Cianfrani, *Europhys. Lett.* **111** (2015) 40002, arXiv: 1410.4788.
19. T. Thiemann, *J. Math. Phys.* **39** (1998) 1236, arXiv: hep-th/9601105.
20. E. Bianchi, *Nucl. Phys. B* **807** (2009) 591, arXiv: 0806.4710.
21. Y. Ma, C. Soo and J. Yang, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 124026, arXiv: 1004.1063.
22. J. Martin and R. H. Brandenberger, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 123501, arXiv: hep-th/0005209.
23. A. Ashtekar and D. Sloan, *Gen. Relativ. Gravit.* **43** (2011) 3619, arXiv: 1103.2475.
24. L. Linsefors and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 123509, arXiv: 1301.1264.
25. K. Martineau, A. Barrau and S. Schander, *Phys. Rev. D* **95** (2017) 083507, arXiv: 1701.02703.
26. E. Wilson-Ewing, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1303** (2013) 026, arXiv: 1211.6269.
27. T. Cailleteau, P. Singh and K. Vandersloot, *Phys. Rev. D* **80** (2009) 124013, arXiv: 0907.5591.
28. A. Ashtekar, W. Kaminski and J. Lewandowski, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 064030, arXiv: 0901.0933.
29. R. H. Brandenberger, S. E. Joras and J. Martin, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 083514, arXiv: hep-th/0112122.
30. R. H. Brandenberger and J. Martin, *Class. Quantum Grav.* **30** (2013) 113001, arXiv: 1211.6753.
31. S. Corley and T. Jacobson, *Phys. Rev. D* **54** (1996) 1568, arXiv: hep-th/9601073.
32. S. Schander, A. Barrau, B. Bolliet, L. Linsefors, J. Mielczarek and J. Grain, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 023531, arXiv: 1508.06786.
33. W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 2827.
34. L. Linsefors, T. Cailleteau, A. Barrau and J. Grain, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 107503, arXiv: 1212.2852.
35. Planck Collab. (P. A. R. Ade *et al.*), arXiv: 1502.01589.
36. A. Ashtekar and A. Barrau, *Class. Quantum Grav.* **32** (2015) 234001, arXiv: 1504.07559.

37. J. Mielczarek, T. Cailleteau, A. Barrau and J. Grain, *Class. Quantum Grav.* **29** (2012) 085009, arXiv: 1106.3744.
38. T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau and J. Grain, *Class. Quantum Grav.* **29** (2012) 095010, arXiv: 1111.3535.
39. T. Cailleteau, A. Barrau, J. Grain and F. Vidotto, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 087301, arXiv: 1206.6736.
40. M. Bojowald and J. Mielczarek, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **1508** (2015) 052, arXiv: 1503.09154.
41. J. Mielczarek, L. Linsefors and A. Barrau, arXiv: 1411.0272.
42. A. Barrau and J. Grain, arXiv: 1607.07589.
43. B. Bolliet, A. Barrau, J. Grain and S. Schander, *Phys. Rev. D* **93** (2016) 124011, arXiv: 1510.08766.
44. I. Agullo, A. Ashtekar and W. Nelson, *Class. Quantum Grav.* **30** (2013) 085014, arXiv: 1302.0254.
45. I. Agullo, A. Ashtekar and W. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 251301, arXiv: 1209.1609.
46. M. Lemoine, M. Lubo, J. Martin and J.-P. Uzan, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 023510, arXiv: hep-th/0109128.
47. L. Mersini-Houghton, M. Bastero-Gil and P. Kanti, *Phys. Rev. D* **64** (2001) 043508, arXiv: hep-ph/0101210.
48. P. R. Chouha and R. H. Brandenberger, arXiv: hep-th/0508119.
49. G. Amelino-Camelia, M. Arzano, Y. Ling and G. Mandanici, *Class. Quantum Grav.* **23** (2006) 2585, arXiv: gr-qc/0506110.
50. Y. Ling, B. Hu and X. Li, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 087702, arXiv: gr-qc/0512083.
51. J. Tao, P. Wang and H. Yang, *Nucl. Phys. B* **922** (2017) 346, arXiv: 1505.03045.
52. A. A. Starobinsky, *J. Exp. Theor. Phys. Lett.* **73** (2001) 371, arXiv: astro-ph/0104043.

3.4.5 Précisions sur les spectres de puissance primordiaux scalaires

La motivation derrière la prochaine étude part d'un constat simple : la plupart des travaux réalisés jusqu'ici sur les spectres primordiaux scalaires en LQC considèrent (à notre connaissance) une forme quadratique du potentiel d'inflaton. Or l'expression de ce dernier entre directement dans celle du potentiel z_S''/z_S et peut donc avoir une forte influence sur l'évolution des perturbations scalaires. La forme quadratique du potentiel d'inflaton, bien que constituant une première considération correcte de part sa simplicité et la comparaison facile qu'elle offre avec d'autres modèles présents dans la littérature n'est tout de même pas favorisée par les données [142]. Il est donc justifié de désirer étendre les études réalisées sur les spectres scalaires à d'autres formes du potentiel d'inflaton, d'autant plus qu'étant donné la complexité de l'expression de z_S''/z_S il nous paraissait hautement non trivial d'avoir une intuition nette du devenir des spectres primordiaux scalaires dans le cas d'une classe plus étendue de potentiels.

Nous en avons également profité pour essayer de caractériser la sensibilité du spectre à la manière dont nous plaçons les conditions initiales pour les perturbations. Il est attendu qu'une sensibilité se manifeste dans le régime infrarouge, les plus grandes longueurs d'ondes étant en général initialement normalisées à la Minkowski.

Scalar spectra of primordial perturbations in loop quantum cosmology

Aurélien Barrau,^{*} Pierre Jamet,[†] Killian Martineau,[‡] and Flora Moulin[§]

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Université Grenoble-Alpes, CNRS-IN2P3 53, Avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France



(Received 18 July 2018; published 1 October 2018)

This article is devoted to the study of scalar perturbations in loop quantum cosmology. It aims at clarifying the situation with respect to the way initial conditions are set and to the specific choice of an inflaton potential. Several monomial potentials are studied. Both the dressed metric and deformed algebra approaches are considered. We show that the calculation of the ultraviolet part of the spectrum, which is the physically relevant region for most background trajectories, is reliable, whereas the infrared and intermediate parts do depend on some specific choices that are made explicit.

DOI: [10.1103/PhysRevD.98.086003](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.086003)

I. INTRODUCTION

The calculation of primordial cosmological power spectra is an important way to connect speculative theories of quantum gravity with observations (see [1] for a recent review). Among those theories, loop quantum gravity (LQG) (see, e.g., [2]) has now reached the point where explicit calculations can be performed. At this stage, it remains, however, extremely difficult to derive rigorous cosmological predictions from the full theory. But, in the specific case of loop quantum cosmology (LQC), which can be viewed as the quantization of symmetry reduced general relativity using techniques from LQG (see, e.g., [3,4]), quite a lot of results have already been obtained, beginning with the replacement of the usual big bang by a big bounce. Recently, important improvements were proposed, e.g., in group field theory [5–7], in quantum reduced loop gravity [8–11], in refined coherent state approaches [12], in diffeomorphism invariance derivation [13] or in analogies with a Kasner transition [14], to cite only a few.

Together with hybrid quantization [15,16], two main approaches have been developed in this framework to study inhomogeneities: the dressed metric [17–19] and the deformed algebra [20–23]. The first deals with quantum fields on a quantum background, while the second puts the emphasis on the consistency and covariance of the effective theory. This led to clear predictions about the power spectra [24–29]. Other complementary paths were also considered to investigate perturbations [30–34].

Many works were devoted to tensor perturbations that are easier to handle both for gauge and for anomaly issues. Scalar modes are, however, more important from the observational

viewpoint (see, e.g., [24,35–38] for recent works in LQC). This article focuses on scalar spectra and aims at clarifying how previous LQC results obtained for a simple massive scalar field can be generalized to other monomial potentials and to which extent the spectrum is sensitive to initial conditions (i.e., to a vacuum choice) for perturbations. It is essentially impossible to derive fully generic results, so we explicitly investigate different solutions and show the associated numerical computations so that they can be accounted for in future studies.

II. GENERIC FRAMEWORK

We consider here a spatially flat and isotropic FLRW spacetime filled with a minimally coupled scalar field with a monomial potential. We neglect backreaction and trans-Planckian effects.

We first come back to the study developed by some of the authors of this article in [27]. As in this work, we adopt here a causal viewpoint and put the initial conditions, both for the background and the perturbations, as far as possible in the contracting phase preceding the bounce.

The basic ingredients are the following. The Friedmann equation, modified by holonomy corrections, reads as

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c} \right), \quad (2.1)$$

where ρ_c is the critical density (expected to be of the order of the Planck density), and $H = \dot{a}/a$ is the Hubble parameter. The Klein-Gordon equation for the background is given by

$$\ddot{\varphi} = -3H\dot{\varphi} - \partial_\varphi V(\varphi), \quad (2.2)$$

where φ is here used for $\bar{\varphi}$, the average scalar field. The differential system for the background can be summarized as (we choose the convention $a(t_{\text{init}}) = 1$)

^{*}Aurelien.Barrau@cern.ch
[†]pierre.jamet@vivaldi.net
[‡]martineau@lpsc.in2p3.fr
[§]flora.moulin@lpsc.in2p3.fr

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\partial\varphi}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\ddot{\varphi}(t) = -3H(t)\dot{\varphi}(t) - \partial_\varphi V(\varphi(t)), \quad (2.4)$$

$$\dot{H}(t) = -\frac{\kappa}{2}\dot{\varphi}^2(t) \left(1 - 2\frac{\dot{\varphi}^2(t)/2 + V(\varphi(t))}{\rho_c} \right), \quad (2.5)$$

$$\dot{a}(t) = H(t)a(t). \quad (2.6)$$

Perturbations are described in the Fourier space by the gauge invariant Mukhanov-Sasaki equation,

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_k = 0, \quad (2.7)$$

where $z = \frac{a\dot{\varphi}}{H}$, and the derivation is with respect to the conformal time $d\eta = \frac{1}{a}dt$. One can easily show that

$$\frac{\ddot{z}}{z} = \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} + \frac{\ddot{\varphi}}{\dot{\varphi}} \left(2H - 2\frac{\dot{H}}{H} \right) + H^2 - \dot{H} + 2\left(\frac{\dot{H}}{H} \right)^2 - \frac{\ddot{H}}{H}. \quad (2.8)$$

Introducing

$$\Omega = 1 - 2\frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.9)$$

and using

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (2.10)$$

leads to the final expression,

$$\frac{z''}{z} = a^2 \left(-\partial_\varphi^2 V(\varphi) + 2H^2 - 2\kappa\Omega \frac{\dot{\varphi}\partial_\varphi V(\varphi)}{H} - \frac{7}{2}\kappa\Omega\dot{\varphi}^2 + \frac{3\kappa}{\rho_c}\dot{\varphi}^4 + \kappa^2\Omega^2 \frac{\dot{\varphi}^4}{2H^2} \right). \quad (2.11)$$

This is the intricate effective potential that has to be dealt with. In the next two sections, we study perturbations as described by the dressed metric approach [17–19], which is very close to the hybrid quantization one as far as phenomenology is concerned [33]. Interestingly, at the effective level, the equation of motion (2.7) is formally the same than in general relativity, even though the value of z''/z is of course heavily modified. We then switch to the deformed algebra approach where an effective change of signature shows up.

III. QUADRATIC POTENTIAL

The resulting typical evolution of the scalar field is shown in Fig. 1: pseudo-oscillations are followed by the bounce and by an inflationary stage. The details obviously depend on the phase of the field during the contracting

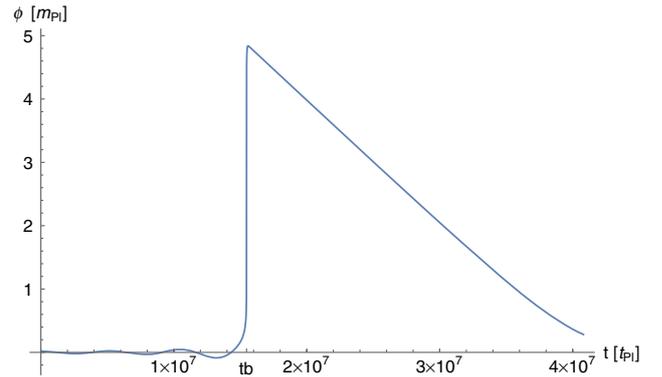


FIG. 1. Temporal evolution of the scalar field, for a mass $m = 1.2 \times 10^{-6}$.

period but, as shown in [39–41], what is displayed in Fig. 1 is a quite generic behavior. The probability to have, e.g., a phase of deflation is much smaller. All numbers are given in Planck units.

The way to choose initial conditions for the perturbations is more subtle. The usual Minkowski solution,

$$v_k(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad (3.1)$$

is approached in the so-called Bunch-Davies vacuum. The main requirement to set the vacuum is that the effective potential is negligible so that the equation of motion becomes nearly the one of an harmonic oscillator. In addition, if the causal evolution of the Universe during the bounce is taken seriously and if the word “initial” is taken literally, it makes sense to put initial conditions far away before the bounce, this later constituting in addition the most “quantum” and less controlled moment in the whole cosmic history (see e.g., [42] for a discussion). As it will become clear later, this requirement is actually in tension with the first one (which should be considered as the mandatory one).

The evolution of the absolute value of the effective potential $\frac{z''}{z}$ is shown in Fig. 2 during the full integration time interval. It should be noticed that it increases both in the past and in the future of the bounce (which is located around $t = 1.5 \times 10^7$ on the plot). This raises an issue which is fundamental for bouncing models and should be taken into account with care, as studied later in this article.

Figure 3 shows the effective potential between the beginning of the integration interval and the bounce. The shape is highly complex and very different from what happens either in standard cosmology or in LQC for tensor modes. In the standard cosmological model it vanishes when going backward in time, deep into the de Sitter inflationary phase. This is also true for bouncing models when going far away in the past of the contracting phase, but only for tensor modes. In the considered case, due to the large (negative) value taken by the potential in the remote

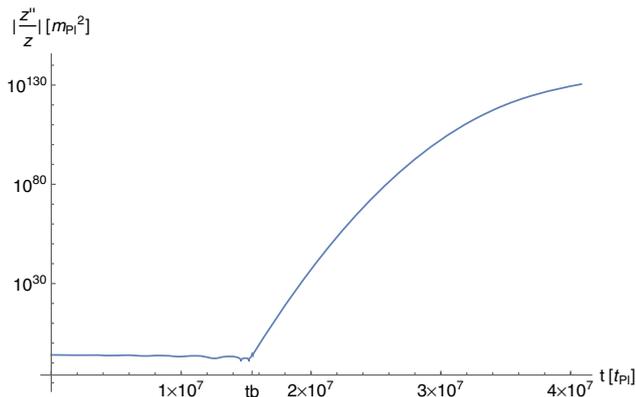


FIG. 2. Temporal evolution of the absolute value of effective potential $\frac{z''}{z}$ over the full integration interval.

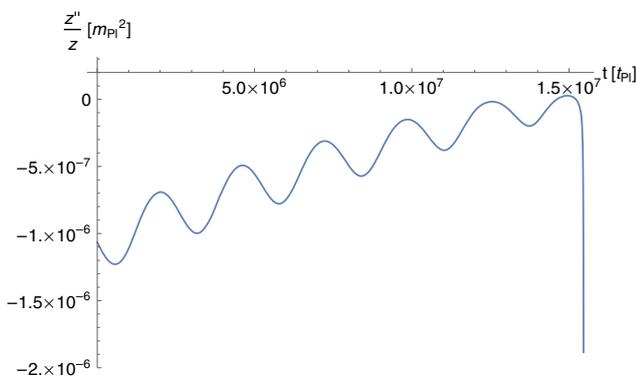


FIG. 3. Temporal evolution of the effective potential $\frac{z''}{z}$ between the beginning of the integration and just before the bounce.

past it is impossible to put stable initial conditions very far from the bounce. Strictly speaking, it might make sense to set initial conditions in this way but the interesting selection criterion associated with the Bunch–Davies vacuum would be lost. If one wants to remain in a framework where a Bunch–Davies–like initial state—which is at least justified to compare with other results—is used, there are two moments which can be chosen such that $\frac{z''}{z}$ vanishes. However, those points are not far from the bounce and the fact that “initial” conditions have to be set at very specific moments is something that deserves to be better understood in the future and should be, at this stage, considered as a weakness (at least at the heuristic level) of those models.

As a first step in a better understanding of the situation, we present in Fig. 4 the primordial power spectra resulting from a full simulation of the evolution of perturbations with initial conditions set both at the first zero, i.e., at $t_i = 1.46 \times 10^7$, corresponding to the earliest time in cosmic history, and at the second zero of the effective potential at $t_i = 1.52 \times 10^7$.

First, it should be emphasized that the ultraviolet (UV) part of the spectrum is the same for both ways of putting

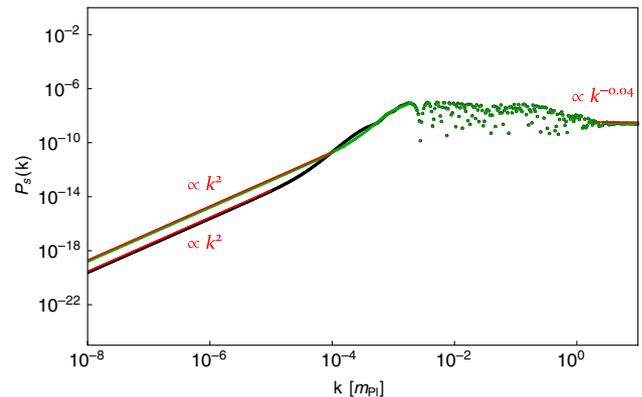


FIG. 4. Primordial scalar power spectra, as a function of the comoving wave number, for a quadratic potential and initial conditions put whether at the first zero of $\frac{z''}{z}$, i.e., $t_i = 1.46 \times 10^7$ (lower plot in the IR, black disks), or at the last zero of $\frac{z''}{z}$, i.e., $t_i = 1.52 \times 10^7$ (upper plot in the IR, green triangles).

initial conditions and is compatible with observations, that is nearly scale invariant with a very slight tilt due to the slow roll of the field during the inflationary stage. This is particularly important as the UV part of the spectrum is most probably the one which is experimentally probed. This last fact entirely depends on the number of e -folds of inflation: the conversion of the comoving wave number into a physical wave number requires the knowledge of the expansion factor of the Universe. Except if the background initial conditions are hyper-fine-tuned, inflation lasts long enough [39–41] so that the observational cosmological microwave background (CMB) window clearly falls in the UV part of the spectrum. In principle, this would require a specific trans-Planckian treatment (see [28,43] for first attempts in this direction) which is not the topic of this study and which is anyway partially accounted for in the dressed metric approach. The oscillations in the intermediate part of the spectra—due to quasi-bound states in the effective Schrödinger equation—are basically the same in both cases, together with the deep infrared (IR) part (throughout all the article we call “infrared” the rising part of the spectrum and “ultraviolet” the scale-invariant one). However, some differences do remain in the junction between the IR and the oscillatory regimes. We have checked that they are not due to numerical issues. Although this is not of high phenomenological significance, this shows that the way initial conditions are set, even around a vanishing effective potential, can influence the resulting power spectrum.

We have also checked that when moving slowly away from the exact point where $\frac{z''}{z} = 0$, the spectrum slowly changes. This is obviously expected but the details of the changes are very hard to guess as the effective potential is very complicated. Basically, the spectrum evolves from a full k^2 to a full k^3 behavior in the IR. Figure 5 presents an intermediate case, and this should be taken into account when interpreting results given in [27].

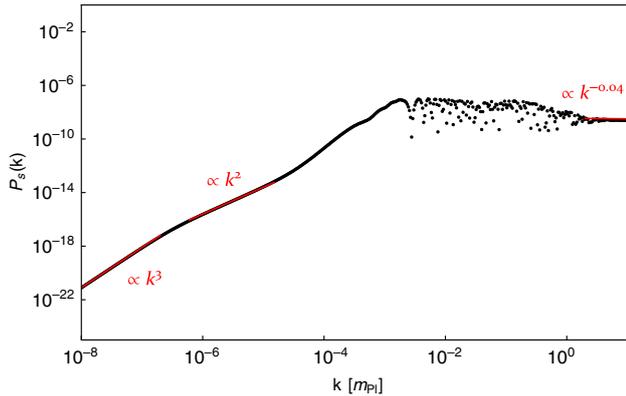


FIG. 5. Primordial scalar power spectrum, as a function of the comoving wave number, for a quadratic potential and initial conditions set $0.6t_{\text{Pl}}$ before the Bunch-Davies vacuum at $t_i = 1.46 \times 10^7$.

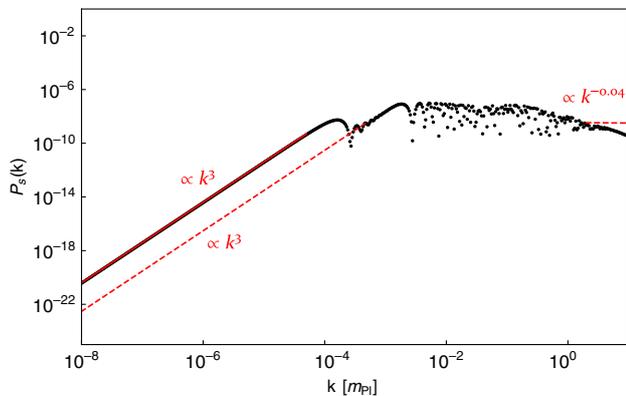


FIG. 6. Primordial scalar power spectrum, as a function of the comoving wave number, for a quadratic potential and initial conditions at local extrema far away from the bounce, at $t_i = 2.00 \times 10^6$. From the dot line to the plain line, one goes deeper in the remote past.

Finally, in Fig. 6, the spectrum is plotted for initial conditions set at a local extremum further away from the bounce, at $t_i = 2.00 \times 10^6$. The plain line corresponds to a point deeper in the past than the dotted line.

This shows that although the global shape of the spectrum is under control—especially in the region of phenomenological significance—the detailed structure is quite sensitive to the way initial conditions are set. In models where the effective potential does not vanish in the remote past, this raises nontrivial issues. This means by no way that those approaches are inconsistent but that some uncertainties associated with the loss of a strong selection criterion on initial conditions have to be included in the analysis.

IV. GENERALIZED POTENTIALS

It is important to investigate whether the scalar spectra obtained hold for other inflaton potential shapes (not to be confused with the effective potential felt by perturbations),

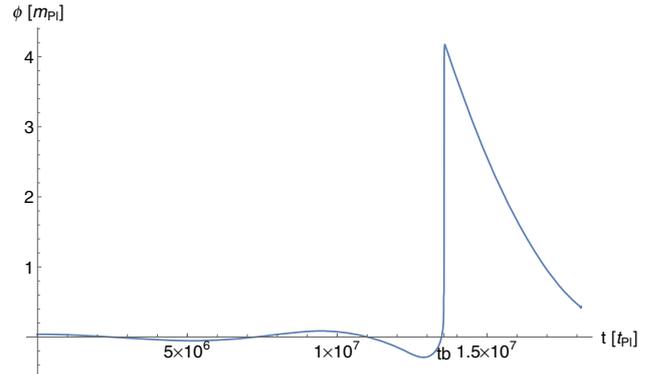


FIG. 7. Evolution of the scalar field for $n = 3$.

beyond the massive scalar field which is not favored by data [44]. The case of plateau-like potentials is very specific in bouncing models (see [41]), so we restrain ourselves to confining monomial potentials of the form:

$$V(\varphi) = \frac{1}{n} \lambda_n \varphi^n. \quad (4.1)$$

No general analytical solution in the deep contracting phase can be found anymore but it is still possible to set initial conditions for the background as done previously. The evolution of the scalar field is qualitatively weakly depending on n . As an example, we show the result for $n = 3$ in Fig. 7.

The situation is more complicated when one considers the details of the effective potential. Figure 8 shows the evolution of z''/z up to the respective bounces for $n = 3, 4, 4/3, 5/2$.

Clearly, the shape of the behavior of the effective potential depends on the value of n . The number of points where the potential identically vanishes is finite in each case, leading to a finite number of ways to set a rigorous instantaneous Bunch-Davis vacuum. In all cases, there is also an infinite

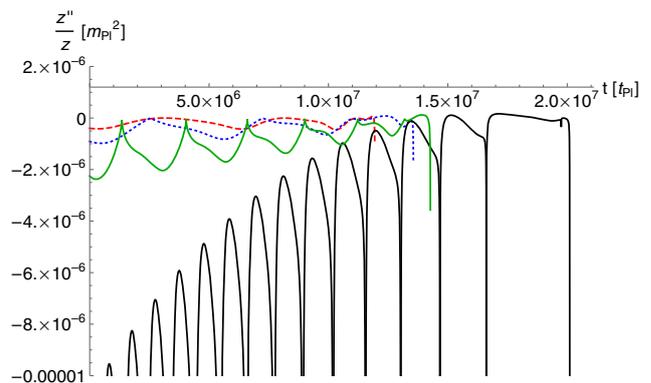


FIG. 8. Evolution of $\frac{z''}{z}$ in the contracting universe up to the respective bounces for $V(\varphi) = \frac{1}{n} \lambda_n \varphi^n$ and $n = 3$ (blue dotted line), $n = 4$ (red dashed line), $n = 4/3$ (black solid line) and $n = 5/2$ (green solid line).

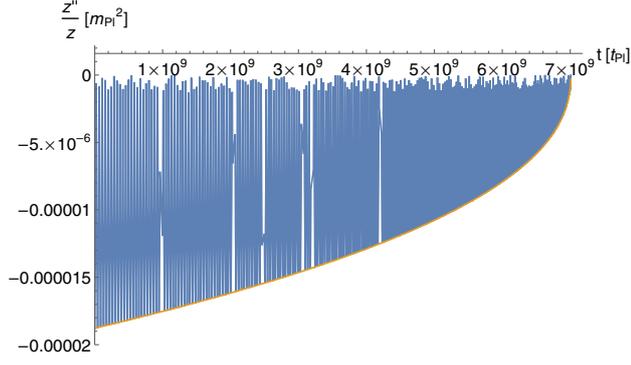


FIG. 9. Evolution of $\frac{V''}{z''}$, together with its envelop, in the contracting universe, up to the bounce on a wide time interval.

number of local minima that can be used as approximate vacua, depending on the range of wave numbers relevant for the considered study. We insist once more that the details of the spectrum *do* depend on this choice.

Figure 9 shows the envelope of the effective potential for $n = 3$ when going deeper into the past. It can be empirically fitted by a power law $(t - t_b)^{0.45}$. The oscillations themselves get quite chaotic, reflecting the nonlinearity of the equations. The situation is very different from what happens for the effective potential of tensor modes. It might be that, from the bounce, time flows in two opposite directions. Then it would make sense to put initial conditions at the bounce, as in [17–19]. If, however, the evolution remains globally causal with a unique time direction, the questions raised here cannot be ignored.

As “extreme” examples, we show in Fig. 10 (respectively, Fig. 11) the scalar spectra for $n = 4/3$ (respectively, $n = 5/2$) with initial conditions set close to the bounce and in the deep past. This reinforces the previous conclusions: the “small scales” part of the spectra is nearly scale invariant in all cases (although small differences do exist), making the results compatible with observation for the vast

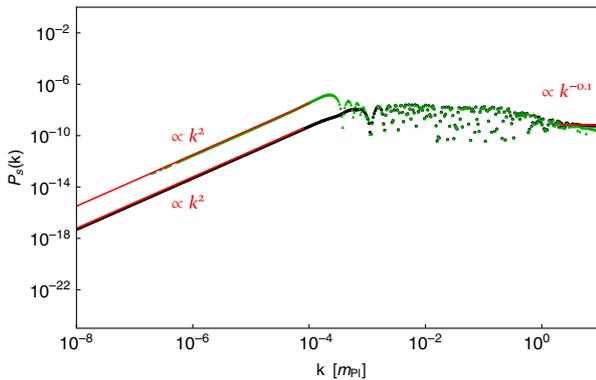


FIG. 10. Spectrum for $n = \frac{4}{3}$ with initial conditions whether close to the bounce, at $t_i = 1.87 \times 10^7 t_{\text{Pl}}$ (lower plot in the IR, black disks), or far from it at $t_i = 1.49 \times 10^7$ (upper plot in the IR, green triangles).

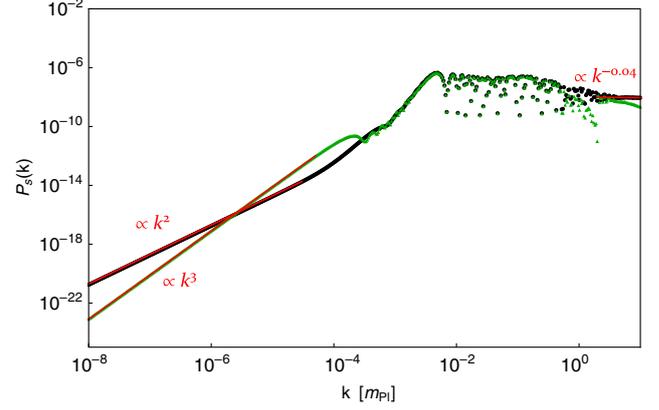


FIG. 11. Spectrum for $n = \frac{5}{2}$ with initial conditions whether close to the bounce, at $t_i = 1.35 \times 10^7$ (k^2 behavior in the IR, black disks), or far from it at $t_i = 1.35 \times 10^6 t_{\text{Pl}}$ (k^3 behavior in the IR, green triangles).

majority of the parameter space which leads to an inflationary stage so long that the observable part falls in the deep UV range. However, the IR part and some of the oscillations can be sensitive to the details of the inflaton potential shape and to the way initial conditions are set.

V. DEFORMED ALGEBRA

Another approach to LQC, the so-called deformed algebra, relies on a different view of the situation [20–23, 45,46]. In this case, the emphasis is put on the consistency of the effective theory. The Poisson brackets are calculated between (holonomy) quantum corrected constraints. Anomalies do appear in general. To ensure covariance, counter-terms with a vanishing classical limit are added to the constraints, so that the system remains “first class” in the Dirac sense. The resulting algebra (including the matter content) is closed and reads as

$$\{D[N_1^a], [N_2^a]\} = 0, \quad (5.1)$$

$$\{H[N], D[N^a]\} = -H[\delta N^a \partial_a \delta N], \quad (5.2)$$

$$\{H[N_1], H[N_2]\} = D \left[\Omega \frac{\bar{N}}{\bar{p}} \partial^a (\delta N_2 - \delta N_1) \right], \quad (5.3)$$

where $D[N^i]$ is the full diffeomorphism constraint and $H[N]$ is the full scalar constraint. The important feature is the $\Omega = (1 - 2\rho/\rho_c)$ term in the last Poisson bracket. It becomes negative close to the bounce and leads to an effective change of signature. The Mukhanov equation of motion in Fourier space reads, in this framework, as

$$\ddot{\mathcal{R}}_k - \left(3H + 2m^2 \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\varphi}} + 2 \frac{\dot{H}}{H} \right) \dot{\mathcal{R}}_k + \Omega \frac{k^2}{a^2} \mathcal{R}_k = 0, \quad (5.4)$$

with

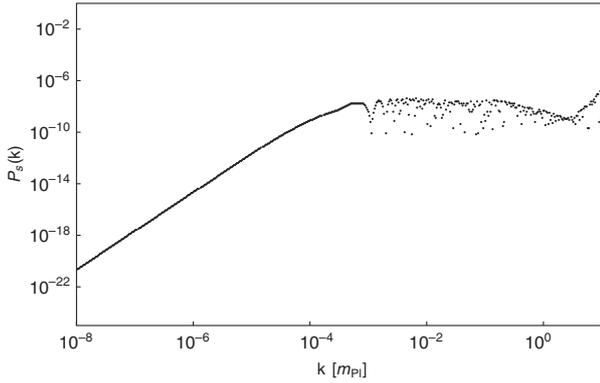


FIG. 12. Spectrum for $n = \frac{4}{3}$ within the deformed algebra approach and initial conditions set at $t_i = 1.87 \times 10^7$.

$$\mathcal{R} := \frac{v}{z}, \quad (5.5)$$

where v is the gauge-invariant perturbation and z is the background variable. Phenomenologically, the main consequence of this model, if a causal view is chosen and a massive scalar field is assumed to fill the Universe, is an exponential growth of the spectrum in the UV [26,27]. It is obviously not compatible with data [29], but this conclusion clearly relies on heavy assumptions that might be radically altered when considering trans-Planckian effects [28] or other ways of setting initial conditions [47,48].

We have readdressed the question of the propagation of scalar perturbations in the deformed algebra framework with new potentials. As can be seen in Figs. 12–14, the UV rise of the spectrum clearly remains present whatever the chosen potential. All the conclusions about the features of this model, therefore, remain valid beyond the massive scalar field approximation. The subtle modifications of the IR shape are actually due to the way the initial vacuum is chosen which is inevitably impacted by the choice of the potential.

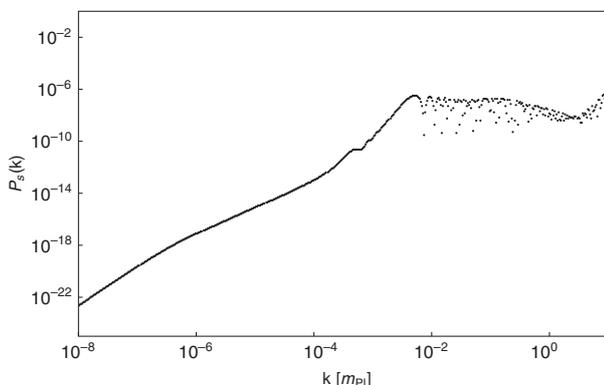


FIG. 13. Spectrum for $n = 3$ within the deformed algebra approach and initial conditions set at $t_i = 1.17 \times 10^7$.

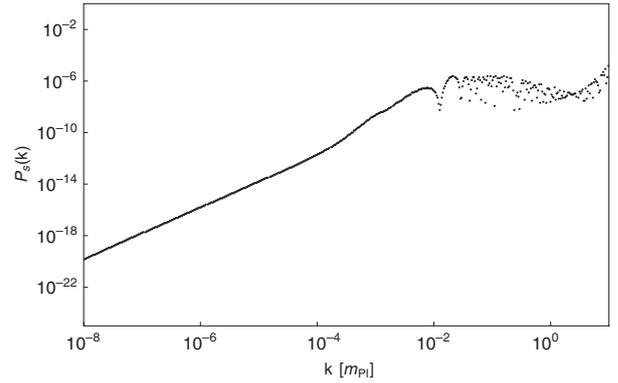


FIG. 14. Spectrum for $n = 4$ within the deformed algebra approach and initial conditions set at $t_i = 1.19 \times 10^7$.

VI. CONCLUSION

In this article, we have addressed the question of the primordial power spectrum of scalar perturbations in a bouncing universe described by loop quantum cosmology by studying the gauge-invariant Mukhanov-Sasaki equation with the appropriate effective potential associated with different inflation potentials. A full numerical simulation was developed. The conclusions are the following:

- (i) the temporal behavior of the effective z''/z potential is, in general, highly complicated with a pseudo-periodic structure which depends on the details of the inflaton potential $V(\varphi)$.
- (ii) the ultraviolet part of the power spectrum, which is the most relevant one from the observational perspective, is mostly independent of the way initial conditions are set and of the choice of the potential. This makes the main LQC predictions robust.
- (iii) the intermediate and infrared parts of the spectrum do depend on the initial conditions and on the inflaton potential. The IR slope varies between k^2 and k^3 depending on the type of vacuum chosen and the amplitude of the oscillations can vary substantially.

This study shows that the main conclusions regarding the compatibility of the spectrum with CMB observations (for most of the parameter space span by initial conditions for the background) in LQC are reliable. However, if the initial values for the inflaton field and its momentum are fine-tuned so that the number of e -folds of inflation is small, the observational window might fall on the intermediate or IR part of the spectrum. In that case, LQC predictions do depend on the way initial conditions (for perturbations) are set and on the choice of the inflaton potential. This should be taken into account in future studies.

ACKNOWLEDGMENTS

K. M. is supported by a grant from the CFM foundation.

- [1] A. Barrau, *C.R. Phys.* **18**, 189 (2017).
- [2] C. Rovelli and F. Vidotto, *Covariant Loop Quantum Gravity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2014).
- [3] A. Ashtekar and P. Singh, *Classical Quantum Gravity* **28**, 213001 (2011).
- [4] A. Ashtekar and A. Barrau, *Classical Quantum Gravity* **32**, 234001 (2015).
- [5] F. Gerhardt, D. Oriti, and E. Wilson-Ewing, [arXiv:1805.03099](https://arxiv.org/abs/1805.03099).
- [6] D. Oriti, *C.R. Phys.* **18**, 235 (2017).
- [7] D. Oriti, L. Sindoni, and E. Wilson-Ewing, *Classical Quantum Gravity* **34**, 04LT01 (2017).
- [8] E. Alesci, G. Botta, F. Cianfrani, and S. Liberati, *Phys. Rev. D* **96**, 046008 (2017).
- [9] E. Alesci and F. Cianfrani, *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1642005 (2016).
- [10] E. Alesci and F. Cianfrani, *Phys. Rev. D* **92**, 084065 (2015).
- [11] E. Alesci and F. Cianfrani, *Phys. Rev. D* **87**, 083521 (2013).
- [12] A. Dapor and K. Liegener, *Classical Quantum Gravity* **35**, 135011 (2018).
- [13] J. Engle and I. Vilensky, *Phys. Rev. D* **98**, 023505 (2018).
- [14] E. Wilson-Ewing, *Classical Quantum Gravity* **35**, 065005 (2018).
- [15] M. Fernández-Mndez, G. A. Mena Marugn, and J. Olmedo, *Phys. Rev. D* **88**, 044013 (2013).
- [16] D. Martín-de Blas, M. Martín-Benito, and G. A. Mena Marugán, *Springer Proc. Math. Stat.* **60**, 327 (2014).
- [17] I. Agullo, A. Ashtekar, and W. Nelson, *Classical Quantum Gravity* **30**, 085014 (2013).
- [18] I. Agullo, A. Ashtekar, and W. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 251301 (2012).
- [19] I. Agullo, A. Ashtekar, and W. Nelson, *Phys. Rev. D* **87**, 043507 (2013).
- [20] J. Mielczarek, T. Cailleteau, A. Barrau, and J. Grain, *Classical Quantum Gravity* **29**, 085009 (2012).
- [21] T. Cailleteau, J. Mielczarek, A. Barrau, and J. Grain, *Classical Quantum Gravity* **29**, 095010 (2012).
- [22] T. Cailleteau, A. Barrau, J. Grain, and F. Vidotto, *Phys. Rev. D* **86**, 087301 (2012).
- [23] A. Barrau, M. Bojowald, G. Calcagni, J. Grain, and M. Kagan, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **05** (2015) 051.
- [24] I. Agullo and N. A. Morris, *Phys. Rev. D* **92**, 124040 (2015).
- [25] B. Bolliet, J. Grain, C. Stahl, L. Linsefors, and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **91**, 084035 (2015).
- [26] L. Linsefors, T. Cailleteau, A. Barrau, and J. Grain, *Phys. Rev. D* **87**, 107503 (2013).
- [27] S. Schander, A. Barrau, B. Bolliet, L. Linsefors, J. Mielczarek, and J. Grain, *Phys. Rev. D* **93**, 023531 (2016).
- [28] K. Martineau, A. Barrau, and J. Grain, *Int. J. Mod. Phys. D* **27**, 1850067 (2018).
- [29] B. Bolliet, A. Barrau, J. Grain, and S. Schander, *Phys. Rev. D* **93**, 124011 (2016).
- [30] E. Wilson-Ewing, *Classical Quantum Gravity* **29**, 215013 (2012).
- [31] S. Gielen and D. Oriti, [arXiv:1709.01095](https://arxiv.org/abs/1709.01095).
- [32] I. Agullo, *Gen. Relativ. Gravit.* **50**, 91 (2018).
- [33] E. Wilson-Ewing, *C.R. Phys.* **18**, 207 (2017).
- [34] B. Elizaga Navascus, D. Martín de Blas, and G. A. Mena Marugn, *Phys. Rev. D* **97**, 043523 (2018).
- [35] B. Bonga and B. Gupta, *Gen. Relativ. Gravit.* **48**, 71 (2016).
- [36] B. Bonga and B. Gupta, *Phys. Rev. D* **93**, 063513 (2016).
- [37] I. Agullo, A. Ashtekar, and B. Gupta, *Classical Quantum Gravity* **34**, 074003 (2017).
- [38] A. Ashtekar and B. Gupta, *Classical Quantum Gravity* **34**, 035004 (2017).
- [39] L. Linsefors and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **87**, 123509 (2013).
- [40] L. Linsefors and A. Barrau, *Classical Quantum Gravity* **32**, 035010 (2015).
- [41] K. Martineau, A. Barrau, and S. Schander, *Phys. Rev. D* **95**, 083507 (2017).
- [42] A. Barrau and B. Bolliet, *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1642008 (2016).
- [43] A. Espinoza-Garca and E. Torres-Lomas, [arXiv:1709.03242](https://arxiv.org/abs/1709.03242).
- [44] P. A. R. Ade *et al.* (Planck), *Astron. Astrophys.* **594**, A20 (2016).
- [45] M. Bojowald and G. M. Paily, *Phys. Rev. D* **86**, 104018 (2012).
- [46] T. Cailleteau, L. Linsefors, and A. Barrau, *Classical Quantum Gravity* **31**, 125011 (2014).
- [47] J. Mielczarek, L. Linsefors, and A. Barrau, *Int. J. Mod. Phys. D* **27**, 1850050 (2018).
- [48] M. Bojowald and J. Mielczarek, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **08** (2015) 052.

3.5 Un raffinement du rebond : les univers rebond-émergents

3.5.1 Phénoménologie de la "Quantum Reduced Loop Gravity" (QRLG)

Tenter de disposer d'un modèle cosmologique effectif plus proche de la théorie mère est naturellement l'un des enjeux majeurs de la cosmologie quantique. Une piste fort intéressante dans cette direction est celle de la "*Quantum Reduced Loop Gravity*" (ou QRLG) [143]. L'idée de cette démarche consiste à considérer la dynamique avant de procéder à la réduction symétrique de type mini-superspace. Au prix d'un choix de jauge et de l'utilisation d'un réseau régulier, il est ainsi possible de disposer d'une dynamique quantique beaucoup plus fiable que dans les approximations initiales de la LQC. De nombreux développements ont récemment eu lieu : dérivation explicite de l'opérateur Hamiltonien, extensions aux champs scalaires et vectoriels, extension aux champs de jauge, dérivation d'une évolution intermédiaire entre les schémas $\bar{\mu}$ et μ_0 , etc. L'application explicite de ces idées à la cosmologie a montré que l'évolution vers le passé à partir de l'Univers classique contemporain conduit bien à un rebond. Mais à la différence de la LQC usuelle, celui-ci n'est pas précédé par une phase de contraction mais par une phase stationnaire [144]. De façon étonnante, cette approche semble donc conduire à une vision synthétique (ou hybride) entre les deux principaux types de cosmologies non-singulières.

Nous avons entrepris de mener à bien une investigation plus systématique des conséquences phénoménologiques de ce modèle. En particulier, nous avons étudié la manière dont le nombre d'*e-folds* inflationnaires varie en fonction des différents paramètres et montré qu'il était toujours plus grand que la limite observationnelle. Nous avons également sondé la sensibilité du spectre primordial tenseur aux différents paramètres du modèle, en insistant sur l'importance du volume fiduciel qui revêt ici un sens physique.

Remarque : Je conseille au lecteur de s'intéresser à cette remarque après lecture de l'article.

Dans cette étude les conditions initiales pour le champ scalaire n'ont pas été définies comme nous l'avons fait en LQC (avec une distribution de probabilité plate entre 0 et 2π sur la valeur initiale de la phase) car les simulations ne permettaient pas de remonter assez loin dans le passé pour que l'évolution du champ soit similaire à celle d'un oscillateur harmonique. La contrainte Hamiltonienne était systématiquement violée avant que les conditions $3H\dot{\phi} \ll \ddot{\phi}$ et $3H\dot{\phi} \ll dV/d\phi$ ne soient satisfaites. Autrement dit nous ne pouvions plus faire confiance aux simulations en remontant trop loin dans la phase pseudo-statique.

De plus il n'y a pour le moment aucun argument analytique justifiant clairement que le facteur d'échelle tende bien vers une constante dans l'infini passé. Le fait que l'amplitude des oscillations de a tend vers zéro dans la limite $t \rightarrow -\infty$ est juste à ce stade une intuition, sans doute bien fondée, mais une intuition quand même.

Néanmoins G. Stagno est actuellement en train de développer un nouveau code qui nous permettra de remonter la dynamique beaucoup plus loin dans le passé. Nous verrons alors si les conditions $3H\dot{\phi} \ll \ddot{\phi}$ et $3H\dot{\phi} \ll dV/d\phi$ sont initialement satisfaites. Si oui alors il est prévu que nous fassions une nouvelle étude dans laquelle nous placerons les conditions initiales pour le champ comme en LQC, avec une PDF plate sur la valeur initiale de sa phase. Cette perspective me semble intéressante car de telles conditions initiales pour le champ ne sont pas anodines, rappelons que ce sont elles qui généraient des trajectoires menant à la forme piquée de la PDF autour de $N \simeq 145$ (l'une des prédictions phénoménologiques de la LQC les plus intéressantes à ce jour).

Phenomenology of quantum reduced loop gravity in the isotropic cosmological sector

Emanuele Alesci,¹ Aurélien Barrau,² Gioele Botta,³ Killian Martineau,² and Gabriele Stagno^{4,5}

¹*Institute for Gravitation and the Cosmos, Penn State, University Park, Pennsylvania 16802, USA*

²*Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Université Grenoble-Alpes, CNRS/IN2P3, 53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France*

³*Faculty of Physics, University of Warsaw, Pasteura 5, 02-093 Warsaw, Poland*

⁴*Sapienza University of Rome, P.le Aldo Moro 5, 00185 Roma, Italy*

⁵*Aix Marseille Université, Université de Toulon, CNRS, CPT, UMR 7332, 13288 Marseille, France*



(Received 3 September 2018; published 27 November 2018)

Quantum reduced loop gravity is designed to consistently study symmetry reduced systems within the loop quantum gravity framework. In particular, it bridges the gap between the effective cosmological models of loop quantum cosmology and the full theory, addressing the dynamics before the minisuperspace reduction. This mostly preserves the graph structure and $SU(2)$ quantum numbers. In this article, we study the phenomenological consequences of the isotropic sector of the theory, the so-called emergent bouncing universe model. In particular, the parameter space is scanned and we show that the number of inflationary e -folds is almost always higher than the observational lower bound. We also compute the primordial tensor power spectrum and study its sensitivity upon the fundamental parameters used in the model.

DOI: [10.1103/PhysRevD.98.106022](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.98.106022)

I. INTRODUCTION

The Higgs boson discovery [1] and the direct observation of gravitational waves [2] have strengthened the reliability of well corroborated theories: the standard model of particle physics (based on quantum field theory) on the one hand, and general relativity (GR) on the other hand. Beside these recent observations, the long-standing issue of quantizing gravity still calls for a solution. All physical theories must make contact with experiments or observations and this often constitutes one of the main difficulties for quantum gravity. Loop quantum gravity [3–5] (LQG) is a consistent attempt in this direction, as witnessed by the recent effort on dealing with the black hole quantum dynamics (both within the canonical [6,7] and covariant formulations [8]), together with the prediction of the big bang singularity resolution [9–11] and the power spectrum calculation [12–14] made possible by loop quantum cosmology (LQC).

This article is about the observable consequences of LQG in cosmology, when the full theory structure is taken into account. This can be done using a suitable gauge fixed version of the theory called quantum reduced loop gravity (QRLG) [15–20]. Differences between LQC and QRLG are both in the philosophy and the methodology. The former is a LQG-inspired, polymerlike [21,22] quantization of a classically symmetry reduced system, while the latter is a subsector of LQG adapted to the symmetry of the system one is interested in. In the two approaches, quantization and symmetry reduction are in reverse order: LQC quantizes a

classical reduced system, QRLG selects a symmetric subsector from the full quantum theory. If LQC can be seen as the simplest and most straightforward application of LQG ideas, starting from the beginning with less degrees of freedom to quantize, from the QRLG perspective it can be trusted as a first order quantum correction to the classical dynamics, since relevant structures of LQG are lost and have to be “injected” in the process. On the contrary, QRLG retains all the features of the full theory and, moreover, does indeed recover LQC at first order [23,24].

In this article we extend the study of QRLG addressing inflation and discussing features of the power spectrum for cosmological perturbations. In isotropic QRLG, the Friedman Lemaitre Robertson Walker (FLRW) background is replaced by an emergent bouncing universe [25]. Here we focus on observable signatures of this scenario and compare them to the ones provided by LQC. As shown in [23,24], the corrections are subleading only up to the (first) bounce—when going backward in time—and, for earlier times, they grow and lead to a complete different dynamics. Thus, the observational consequences of the QRLG scenario have to be studied as they may differ from LQC ones. Before introducing our model, we briefly review LQG in order to make possible the understanding of our results also to the reader unfamiliar with the full theory.

LQG is a background free, nonperturbative Hamiltonian quantization of gravity whose starting point is the $3 + 1$ foliation of the GR first order tetradic formulation. It is a modern canonical quantization that takes advantage of a

new set of phase space variables—the Ashtekar variables [26]—in order to cast the classical theory in a form close to the one of a local $SU(2)$ gauge theory. The Ashtekar variables $A_a^i(x; t)$, $E_i^a(x; t)$ are an $su(2)$ connection and a (densitized) triad field, which are canonically conjugate, $\{A_a^i(x), E_j^b(y)\} = 8\pi G\gamma\delta_a^b\delta_j^i\delta^3(x-y)$, and read $A_a^i := \omega_a^i + \gamma K_a^i$, $E_i^a := \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}e^{abc}e_b^je_c^k$, where i, j, k are $su(2)$ algebra indices, a, b, c space ones, ω_a^i is the spin-connection compatible with the triad e_b^j , K_a^i is the (mixed triadic projection of the) extrinsic curvature tensor and γ is a parameter that enters this formulation of GR. This so-called Barbero-Immirzi parameter γ is expected to have a value close to 0.24 if one considers the black hole entropy calculation [27]. It enters in the spectrum of the geometrical operators like area and volume, but does not change the classical equations of motion, i.e., Einstein's equations. Like all gauge theories, GR is a constrained system, more specifically, a *totally* constrained one, as its Hamiltonian vanishes on physical trajectories. Written in Ashtekar variables, it turns out to be encoded in three constraints generating $SU(2)$ gauge transformations (the Gauss constraint), spatial diffeomorphisms (the diffeomorphism constraint) and time reparametrization (the Hamiltonian constraint).

Quantization starts using a “technology” borrowed from lattice gauge theories in order to provide a (background-independent) smearing of the canonical algebra generated by $A_a^i(x; t)$ and $E_i^a(x; t)$, leading to the holonomy-flux algebra. The Ashtekar connection $A_a^i(x)$ is replaced by its holonomy $h_l[A]$ along arbitrary paths l - and the densitized triad $E_i^a(x)$ is replaced by its flux $E_i(S)$ across a surface S . Quantization follows implementing the (unique [28]) quantum representation of the holonomy-flux algebra and computing the kernel of all the quantum operator-promoted constraints of the theory, according to Dirac's procedure [29] for constrained systems. Solving the Gauss and diffeomorphism constraints leads to the definition of a Hilbert space with states $|\Gamma, j, i\rangle$. Those states are labeled by graphs Γ given by links associated to the holonomies (dual to the surfaces used for defining fluxes) and nodes. Links are colored by spins j , i.e., by representations of $SU(2)$, and nodes by intertwiners i , i.e., $SU(2)$ invariant tensors. Geometric quantities can be turned in Hermitian operators and it turns out that they have a discrete spectrum [30]. The area operator has a spectrum with a minimal nonvanishing eigenvalue $\Delta = 4\sqrt{3}\pi G\gamma l_p^2$ proportional to the Barbero-Immirzi parameter γ and the square of the Planck length $l_p := \sqrt{\hbar G/c^3}$. The picture provided by LQG is clear and beautiful: quantum gravity appears as a quantum theory of geometry, in which the spacetime continuum disappears leaving place to a relational net of fuzzy quanta of space.

Beside these achievements, problems arise when addressing the Hamiltonian constraint. Only trivial and formal

solutions [31] are indeed known and a complete characterization of the full spectrum is still missing. A retrospective look at this difficulty is not so discouraging: after all, the general solution to the analogue classical problem, i.e., Einstein's equations, is still unknown too, but this has not prevented GR to become a powerful tool for gravity. During the past years several paths to overcome the issue of quantum dynamics have been followed, both implementing different reformulations, e.g., using spinfoam models [32], and/or addressing the dynamics of *symmetric* sectors of the full theory. The pioneering spin-off of LQG that follows this last direction is the “minisuperspace” quantization of spacetimes pursued by LQC.

Calculating the Ashtekar variables for a chosen spacetime, LQC follows a polymerlike quantization that *mimics* the one pursued by LQG and provides the quantum dynamics for symmetry reduced models at the classical level, such as FLRW and Bianchi spacetimes [33]. The resolution of the cosmological singularity comes out naturally, replacing the big bang scenario by a nonsingular bouncing universe. Looking forward in time, there is a contracting phase which ends when the density and the curvature reach near-Planckian values, then a bounce happens and an expanding phase follows (the late-time behavior is exactly as in GR). The singularity is resolved because even though zero is in the spectrum of the volume operator, it is never dynamically reached. Despite this remarkable result, one should look at traditional LQC as a first attempt in applying LQG ideas to the simplest class of gravitational symmetry-reduced systems. The limits of this approach are mainly due to the fact that the quantization is performed only after a classical symmetry reduction and this does not prevent ambiguities in the corresponding quantum theory (see e.g., [34]). Working only with few degrees of freedom, LQC needs to import from the full theory both a graph structure and a minimum value for physical areas in order to regularize the symmetry-reduced Hamiltonian operator.

QRLG is a program that attempts to implement a dynamical reduction of the full theory to a given symmetry-reduced setting, i.e., first quantizes and then reduces. This is achieved in several steps: one begins by implementing a gauge fixing at the quantum level (defining a gauge-fixed kinematical Hilbert space, called the reduced Hilbert space \mathcal{H}^R) and then one uses coherent states peaked on symmetric spaces over which one evaluates the operator version of a new set of constraints that preserve the gauge (built according to the gauge unfixing procedure [35–37]).

In the cosmological setting of the FLRW geometry (and Bianchi models), this reduced space is selected by (partially) gauge fixing the $SU(2)$ and the diffeomorphism gauge of the full theory to diagonal metrics and triads. Only a small class of spatial diffeomorphisms are still compatible with this choice (called *reduced diffeomorphisms*), leading to the result that at the quantum level only cuboidal graphs [colored with $U(1)$ representation numbers] are allowed, i.e., the ones with links parallel to the fiducial triad field.

Computing expectation values of the (gauge preserving part of the) LQG Hamiltonian constraint, QRLG effective Hamiltonians for the FLRW and Bianchi I cases can be explicitly obtained [24]. They depend on the choice of coherent states used to define the symmetry-reduced sectors.

Importantly, the much discussed μ_0 or $\bar{\mu}$ LQC regularization schemes appear in QRLG as particular choices of coherent states. QRLG allows to reproduce LQC schemes and to generalize them [24,25] with the so-called statistical regularization. This is based on ensembles of coherent states peaked on homogeneous phase space points defining macrostates. Every homogenous coherent state at a fixed graph represents a given cosmological *macrostate* and statistical superposition of graphs can be considered. To the same macrostate [labeled by (a, \dot{a}) , for FLRW] corresponds several coherent *microstates* labeled by different quantum numbers and graphs. For each given probability distribution counting the occurrence of microstates associated to a fixed macrostate, an effective Hamiltonian can be computed taking the expectation value of the Hamiltonian operator over the chosen ensemble, as done in the aforementioned references where Gaussian ensembles were chosen.

All the computed QRLG effective Hamiltonians bring corrections to the LQC ones *that are subleading only much after the big bounce*. For the FLRW case, at earlier times, the Universe oscillates and eventually reaches a stationary phase of constant finite volume (the meaning of the “volume of the Universe” will be discussed later on). Looking forward in time, a Planckian universe *emerges* from the infinite past. It is stationary until a transient phase is reached and, after few bounces, the dynamics matches the LQC’s one from the (last) big bounce all the way to the far future. This emergent behavior is a peculiar property of the isotropic sector and exploring its observational consequences constitutes the main goal we address in the rest of the paper. As far as perturbations are concerned, we use here the usual formalism and we apply only QRLG correction to the background. This is a heavy hypothesis.

In the next section, the effective quantum background is described. Then, the corresponding basic features are investigated. At the background level, the duration of inflation is calculated for most of the parameter space. Regarding perturbations, the tensor power spectra are computed and scalar ones discussed. Finally, the effects of the inflaton field mass are considered.

II. EFFECTIVE QUANTUM BACKGROUNDS

A. FLRW loop quantum cosmology

We briefly review here the quantization of the (spatially flat) FLRW spacetime as pursued by LQC, focusing on the effective equations of motion it provides. Starting from the FLRW line element

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \delta_{ij} e_a^i e_b^j dx^a dx^b, \quad (1)$$

where $e_a^i := \delta_a^i$, is a fiducial triad field in Cartesian comoving coordinates (t, x, y, z) and $a(t)$ is the scale factor. The associated Ashtekar variables are computed in order to write the FLRW Hamiltonian provided by GR in terms of them. To this aim, a fiducial cell of coordinate volume V_0 is introduced¹ so as to avoid spurious divergences due to the open topology this geometry is (here implicitly) endowed with. Now, thanks to the symmetries of (1), the spin connection is vanishing, the extrinsic curvature tensor is proportional to the time derivative of the scale factor and the Ashtekar variables assume the simple expressions

$$A_a^i(t) = c(t) \delta_a^i V_0^{-1/3}, \quad E_i^a(t) = p(t) \delta_i^a V_0^{-2/3}, \quad (2)$$

where

$$c := V_0^{1/3} \gamma \dot{a}, \quad p := a^2 V_0^{2/3} \quad \text{and} \quad \{c, p\} = \frac{8\pi\gamma}{3}, \quad (3)$$

and the FLRW Hamiltonian constraint reads

$$\mathcal{H} = -\frac{3}{8\pi\gamma^2} \sqrt{p} c^2 = 0, \quad (4)$$

as one can easily check computing the associated Hamilton equations of motion. The usual Friedmann equations are obtained from them once a and \dot{a} are inverted from (3) and the appropriate matter content is added. The next step consists in switching from this classical model to its quantum version by implementing a suitable quantum representation of the canonical variables (2): LQC mimics LQG by computing holonomies from the Ashtekar connection and fluxes from the triads. Thanks to the symmetry of the FLRW spacetime, one can consider only holonomies $h_\mu(c)$ along edges of the fiducial cell and fluxes $E(S)$ across faces S of V_0 :

$$h_\mu(c) := e^{i\mu c/2}, \quad E(S) := p, \quad (5)$$

where μ is the ratio between the coordinate length of a path parallel to an edge of the fiducial cell and the length of the edge itself.

Once the classical constraint² (4) is written in terms of (5), it can be promoted to be a quantum operator after a

¹This regulator can be removed at the end: the usual Friedmann equation of motions as well as the effective LQC ones (14) and (15) do not depend on it. Note that for the QRLG model, this is not the case and the initial physical volume of the Universe turns out to be a parameter that has to be constrained by data—this will be discussed later.

²This is the only constraint one remains with, as the Gauss and diffeomorphism ones are trivially fulfilled thanks to the symmetry reduction.

regularization for the final chosen expression. LQC takes again inspiration from LQG, where geometry is discretized and areas exhibit of a minimum area gap Δ (on regularizations in LQC see [24]). This feature also arises in this reduced setting through a regularization (so-called “improved” [11]) achieved by promoting the μ parameter entering in the holonomies to a be a *function* $\bar{\mu} := \bar{\mu}(p)$. Computing the expectation value of the resulting Hamiltonian operator over coherent states peaked in the classical phase space of the FLRW geometry (c, p) , one obtains an effective Hamiltonian [38,39] H^{LQC} that we can simply introduce by the following “rule,” also called “polymer” substitution in (4),

$$c \rightarrow \frac{\sin(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}}, \quad \text{where } \bar{\mu} := \sqrt{\frac{\Delta}{p}}, \quad (6)$$

which leads to the following effective LQC Hamiltonian for the geometric sector:

$$\mathcal{H}_{\text{grav}}^{\text{LQC}} := -\frac{3}{8\pi\gamma^2} \sqrt{p} \frac{\sin^2(\bar{\mu}c)}{\bar{\mu}^2}. \quad (7)$$

In the quantum theory, the basic variables are (5) and there exist no quantum operator \hat{c} corresponding to c . The polymer substitution can be considered as a trigonometric approximation of \hat{c} , when written as the derivative of h_μ evaluated in $\mu = 0$,

$$c = \frac{2}{i} \frac{d}{d\mu} h(c) \Big|_{\mu=0} \approx \frac{2}{i} \frac{h_{2\mu}(c) - h_{-2\mu}(c)}{2\mu}, \quad (8)$$

followed by the replacement $\mu \rightarrow \bar{\mu}$ that defines the specific regularization adopted by LQC.

When the FLRW geometry is sourced by a (minimally coupled) massless scalar field, one adds to the effective Hamiltonian (7) its kinetic contribution, i.e., $\mathcal{H}_\phi := P_\phi^2/(4\pi\gamma v)$, where P_ϕ is the momentum conjugate to the field $\phi(t)$, $\{\phi, P_\phi\} = 1$, and the complete Hamiltonian reads

$$\mathcal{H}_{\text{grav}+\phi}^{\text{LQC}} := -\frac{3v}{4\Delta\gamma} \sin^2(b\sqrt{\Delta}) + \mathcal{H}_\phi, \quad (9)$$

after the change of variables $(c, p) \rightarrow (b, v)$, where

$$b := \frac{c}{p^{1/2}}, \quad v := \frac{p^{3/2}}{2\pi\gamma}, \quad \left\{ \frac{b}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}} \right\} = 1. \quad (10)$$

Finally, the effective dynamics is obtained through the Hamilton equations of motion:

$$\dot{Q}_i = \{Q_i, \mathcal{H}_{\text{grav}+\phi}^{\text{LQC}}\}, \quad \dot{P}_i = \{P_i, \mathcal{H}_{\text{grav}+\phi}^{\text{LQC}}\}, \quad (11)$$

where

$$Q_i := \left(\frac{b}{\sqrt{2}}, \phi \right) \quad \text{and} \quad P_i := \left(\frac{v}{\sqrt{2}}, P_\phi \right), \quad (12)$$

and the Poisson brackets are defined on the whole phase space $(b, v) \times (\phi, P_\phi)$:

$$\{, \} := \sum_i \frac{\partial}{\partial Q_i} \frac{\partial}{\partial P_i} - \frac{\partial}{\partial P_i} \frac{\partial}{\partial Q_i}, \quad (13)$$

giving

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} \rho_m \left(1 - \frac{\rho_m}{\rho_{\text{crit}}} \right); \quad (14)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi\rho_m \left(1 - 2\frac{\rho_m}{\rho_{\text{crit}}} \right), \quad (15)$$

where $\rho_m := P_\phi^2/(8\pi^2\gamma^2 v^2)$ is the scalar field energy density and $\rho_{\text{crit}} = 3/(8\pi\gamma^2\Delta)$ is the critical energy density (depending on the LQG minimum area gap Δ) at which the Universe undergoes a bounce. In fact, one can immediately see that $\rho_m = \rho_{\text{crit}}$ in (14) and (15) corresponds to a stationary point. The “repulsive force” encoded in the ρ_m^2 correction to the Friedmann equation reacts to classical gravity when the energy density reaches a near-Planckian value and the singularity is tamed. The discreteness of space predicted by LQG, and imported in LQC, leads to the singularity resolution. In this framework, the bounce happens to occur when a Planckian value of the *energy density* is reached, regardless of the volume of the Universe—or of the “fundamental cell”—that can be anything, as (14) and (15) depend only on the scale factor (and the chosen value for P_ϕ).

The big bounce scenario is a robust prediction of LQC, as witnessed by its persistence when nonvanishing potentials are added [33,40]. This remains true with curvature [41] and with a cosmological constant [42]. In the following we will focus on inflation and consider the case of a *massive* scalar field with a quadratic potential. The LQC dynamics associated to the corresponding effective Hamiltonian,

$$\mathcal{H}_{\text{grav}+\phi^2}^{\text{LQC}} := \mathcal{H}_{\text{grav}}^{\text{LQC}} + \frac{P_\phi^2}{2V} + V \frac{m^2\phi^2}{2}, \quad (16)$$

where $V := 2\pi\gamma v$ gets (qualitatively) unchanged until the beginning of the slow-roll inflationary phase generated by the massive field.

B. QRLG emergent-bouncing universe

The approach pursued by QRLG greatly simplifies the LQG computational task, especially when addressing

isotropic cosmology. In particular, one can easily calculate the effective dynamics for a quantum corrected FLRW universe, evaluating the expectation value of the LQG Hamiltonian constraint over a mixture of coherent states based on cubical graphs with different numbers of nodes N , and peaked on the classical FLRW phase space coordinates.

The model provided by QRLG has the same symplectic structure than LQC, defined by (10), the only difference being in the Hamiltonian and the effective dynamics. We report here its final expression computed within the so-called volume counting statistical regularization scheme [24], where a Gaussian distribution of coherent states centered on $N = V\tilde{\Delta}^{-3/2}$ is chosen:

$$\mathcal{H}_{\text{full}}^{\text{QRLG}}(V, b) = -\frac{3}{8\pi\gamma^2} V^{1/3} \times \frac{\int_1^{2V\tilde{\Delta}^{-3/2}} e^{-\frac{(N-V\tilde{\Delta}^{-3/2})^2}{V\tilde{\Delta}^{-3/2}}} N^{2/3} \sin^2\left(\frac{bV^{1/3}}{N^{1/3}}\right) dN}{\int_1^{2V\tilde{\Delta}^{-3/2}} e^{-\frac{(N-V\tilde{\Delta}^{-3/2})^2}{V\tilde{\Delta}^{-3/2}}} dN}, \quad (17)$$

where V is a physical volume ($V = a^3 V_0$) and $\tilde{\Delta}$ is related to the LQG area gap by $\tilde{\Delta} := 2^{2/3} \sqrt{3} \Delta$. [It should be noticed that there are two different Δ parameters for two reasons. In QRLG, the “reduced flux” operator—from which the QRLG area operator is built—turns out to have eigenvalues that are proportional to m and not to $\sqrt{j(j+1)}$, like in LQG, thus only for $j \gg 1$ do the two definitions match. Beside, a further deviation from the “standard” Δ comes from the actual density matrix chosen to regularize the effective Hamiltonian within the statistical regularization scheme.] The Hamiltonian defines the geometrical sector of the model. Adding the usual kinetic contribution for a massless scalar field ϕ and considering the first order contribution to the saddle point approximation for $V \gg 1$, one is led to the following approximated Hamiltonian that describes geometry and matter:

$$\mathcal{H}_{\text{1ord}}^{\text{QRLG}} + \mathcal{H}_\phi = -\frac{3v}{4\tilde{\Delta}\gamma} \sin^2(b\sqrt{\tilde{\Delta}}) + \frac{P_\phi^2}{4\pi\gamma v} - \frac{b^2 \tilde{\Delta}^{3/2}}{48\pi\gamma^2} \cos(2b\sqrt{\tilde{\Delta}}) + \frac{\sqrt{\tilde{\Delta}}}{48\pi\gamma^2} \sin^2(b\sqrt{\tilde{\Delta}}), \quad (18)$$

and already captures the relevant features of the model, allowing analytical considerations for the qualitative behavior of the associated dynamics. In the first line, one immediately recognizes an LQC-like contribution [which up to the area gap $\tilde{\Delta}$ redefinition, exactly coincides with the expression (9)] while the second and third lines correspond to the (first order) QRLG corrections: those are subleading

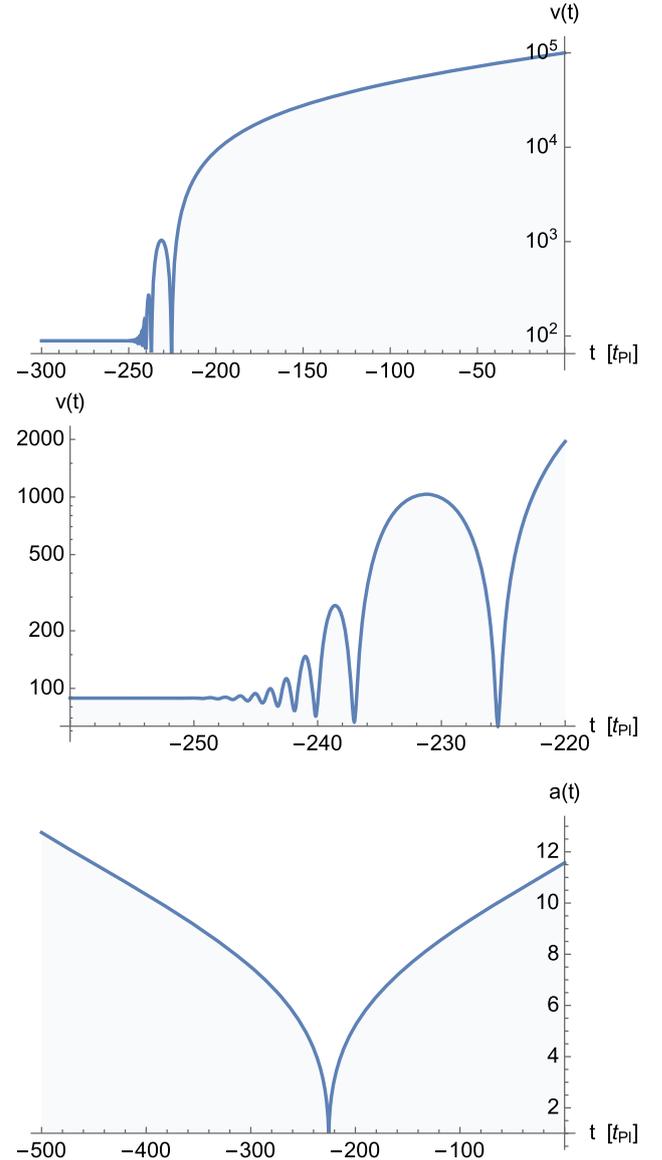


FIG. 1. Upper panel: $v(t)$ backward evolution, starting from $t = 0$. Middle panel: Zoom on the emergent phase. Lower panel: The LQC scale factor backward evolution obtained starting from the same initial conditions at $t = 0$.

in the semiclassical regime $b/v \ll 1$, where LQC and QRLG dynamics match, but become leading orders in the deep quantum epoch, giving a very different dynamics, as discussed below and shown in the upper panel of Fig. 1.

Using $\mathcal{H}_{\text{1ord}}^{\text{QRLG}} + \mathcal{H}_\phi$ and neglecting terms that are subdominant in a $1/v$ expansion,³ the following modified Friedmann equation are found

³In writing Eq. (19) the last term in the rhs of (18) has been neglected but all the numerical studies have been done keeping also that contribution.

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \left(\frac{8\pi}{3} \rho_m + \frac{\rho_g}{\gamma^2} \right) (1 - 2\Omega_g)^{-1} \times \left(1 - \frac{\Omega_m - \Omega_g}{1 - 2\Omega_g} \right), \quad (19)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = - \left(\frac{3}{\tilde{\Delta} \gamma^2} \sin^2(b\sqrt{\tilde{\Delta}}) + 4\pi\rho_m \right) \times (1 - 2\sin^2(b\sqrt{\tilde{\Delta}})), \quad (20)$$

where

$$\begin{aligned} \rho_g &:= -\frac{b^2 \tilde{\Delta}^{3/2}}{18V}, & \bar{\rho}_{cr} &:= -\frac{1}{\tilde{\Delta}}, \\ \rho_m &:= \frac{P_\phi^2}{2V^2}, & \rho_{cr} &:= \frac{3}{8\pi\gamma^2 \tilde{\Delta}}, \\ \Omega_g &:= \frac{\rho_g}{\bar{\rho}_{cr}}, & \Omega_m &:= \frac{\rho_m}{\rho_{cr}}. \end{aligned} \quad (21)$$

The quantity ρ_g is interpreted as a pure quantum gravitational (negative) energy density, vanishing for $\tilde{\Delta} \rightarrow 0$, and $\bar{\rho}_{cr}$ is the critical energy density at which an empty universe ($\rho_m = 0$) would undergo a bounce. The former is a key quantity of the model since for $\rho_g \rightarrow 0$ Eqs. (20) and (21) give back the LQC effective dynamics, i.e., (14) and (15) with an area gap $\tilde{\Delta}$. Two conditions lead to a stationary point:

$$\Omega_g + \Omega_m = 1, \quad \Omega_g = \Omega_m. \quad (22)$$

The first is similar to what happens in LQC, since for $\Omega_g \rightarrow 0$ it gives $\Omega_m = 1$. When the sum of the ratio between $\rho_g/\bar{\rho}_{cr}$ and ρ_m/ρ_{cr} is equal to 1, the Universe bounces reaching a local minimum of the volume. The second condition is the main novelty brought by QRLG: when quantum gravity effects compensate the evolution driven by the matter content, maxima are reached and, going back in time, the LQC prebounce dynamics is replaced by oscillations with decreasing amplitudes (see upper and middle panels of Fig. 1).

The picture provided by the isotropic sector of QRLG is an asymmetric scenario of the primordial universe: the Universe emerges from the infinite past with a finite Planckian volume and eventually undergoes a transient phase during which expanding and contracting phases succeed until the geometric energy density gets enough diluted (as b decreases) to leave the Universe expanding forever according to the classical dynamics. As we will show later, this behavior, discovered for a massless scalar field, is qualitatively unchanged for a massive scalar field.

III. BACKGROUND DYNAMICS: BASIC FEATURES

The phenomenology of QRLG is a tricky task. There is indeed a fundamental tension between the basis of QRLG and usual cosmology. Friedmann equations are invariant under a rescaling of the scale factor. There is no preferred length scale in cosmology. If the curvature is null or negative, the size of the Universe is infinite at all times. This is why, in usual LQC (see e.g., [13,43]), the bounce is driven by *density* effects (together with the shear). However, in QRLG, there is a physical scale associated with the fundamentally discrete structure of space. This does not mean that QRLG is inconsistent: the other way around, this is expected at the quantum geometrical level. It means, as advocated e.g., by Bojowald [44], that quantum cosmology might not be about quantizing the scale factor and its conjugate variable (say the Hubble parameter) but about the dynamics of elementary and identical cells of space. What is usually referred to as the volume of the Universe should probably be actually understood as the volume of an elementary patch. Although there is therefore no logical inconsistency, several issues about making concrete predictions in this framework remain open due to the nontrivial transition between the effective quantum description and the classical regime.

The background evolution is driven by the full Hamiltonian given in the previous section but the matter content is now chosen to be a massive scalar field with a mass $m = 1.21 \times 10^{-6}$ (unless otherwise stated Planck units are now used). Although slightly disfavored by recent data [45], this is a standard choice in cosmology which is also frequently done in LQC, in order to make comparisons between models easier. The following results may depend on the field mass and this will be addressed later in the text.

The status of initial conditions in QRLG remains a complicated question, as there are no *a priori* preferred probability density functions for the different parameters in the quantum regime (we shall address this point again in the final discussion). However, the late classical universe is described by a large v value and a small b value. Taking this into account, the background evolution can be explicitly computed, as a first step, evolving the state backward in time. We used a numerical simulation with initial conditions set in the classical phase as in previous works in QRLG [25],

$$\begin{aligned} v_{\text{class}} &= 100000, \\ b_{\text{class}} &= 0.0005, \\ P_{\phi,\text{class}} &= 88. \end{aligned} \quad (23)$$

The initial condition on the last parameter ϕ_{class} is obtained thanks to the Hamiltonian constraint $\mathcal{H} = 0$.

This backward evolution leads, as explained before, to bounces of decreasing amplitudes that converge to a (quasi)

static phase, as shown on Fig. 1. This is an interesting mixture between emergent and bouncing models. It should be noticed that this dynamics is basically the same for different sets of initial conditions in the classical phase, as long as v_{class} is large and b_{class} is small. The lower panel of Fig. 1 represents the scale factor evolution in LQC, obtained from the same classical initial conditions at $t = 0$. It can be observed that the QRLG evolution is indeed the same as the LQC one up to the bounce (when evolving backward in time) but the LQC dynamics then leads to a classical contracting branch.

The values of $\{v, b, \phi, P_\phi\}$ in the static phase, i.e., at $t = -300$ in our simulation, obtained from this backward evolution are then used as preferred initial conditions to perform simulations forward in time. In the following, those new initial conditions are denoted as $\{v_{\text{in}}, b_{\text{in}}, \phi_{\text{in}}, P_{\phi, \text{in}}\}$. This procedure is helpful for the gravitational variables $\{v, b\}$, as their values in the quantum (quasi)static regime is set by physical arguments requiring a correct classical behavior. However, this does not constrain the matter content: the value of the scalar field and its momentum are still free. The consequences of the possible choices for initial field conditions on the different observables will be studied later.

The forward evolution of the b parameter which, together with v , characterizes the gravitational sector of the background dynamics, is shown in the upper panel of Fig. 2. As expected, one can check that this parameter nearly vanishes in the classical regime. The lower panel shows the field evolution during the emergent phase and it can be noticed that, unlikely to what happens in the contracting branch of the usual LQC bounce (see e.g., [46]), the field does not oscillate. Instead, it remains almost constant. We have studied different field trajectories associated with many different initial conditions and, although the field value does vary during the static phase, oscillations have never been observed. The evolution of b shows “kinks” which start at times corresponding to a scale factor local minimum and last until the next minimum is reached. In LQC, only one minimum is present (at the big bounce). Anyway, both in LQC and QRLG, it just corresponds to phases where b suddenly speeds up. Those phases connect an initial (postbounce) and final (prebounce) evolution during which b is almost constant.

As it is well known, inflation is a strong attractor once the correct matter content is set (see e.g., [46–49] for recent results on this point in the framework of LQC). This is not a specific LQC feature but this comes as a result of the presence of a scalar field together with a high enough initial energy density [50,51]. It is therefore no surprise that in QRLG too the static phase is generically followed by an inflationary stage, as can be seen in Fig. 3. In this figure ω is the dimensionless ratio between the scalar field pressure

$$\mathcal{P}(t) = E_{\text{kin}}(t) - E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} \frac{P_\phi(t)^2}{(2\pi\gamma v(t))^2} - \frac{1}{2} m^2 \phi(t)^2, \quad (24)$$

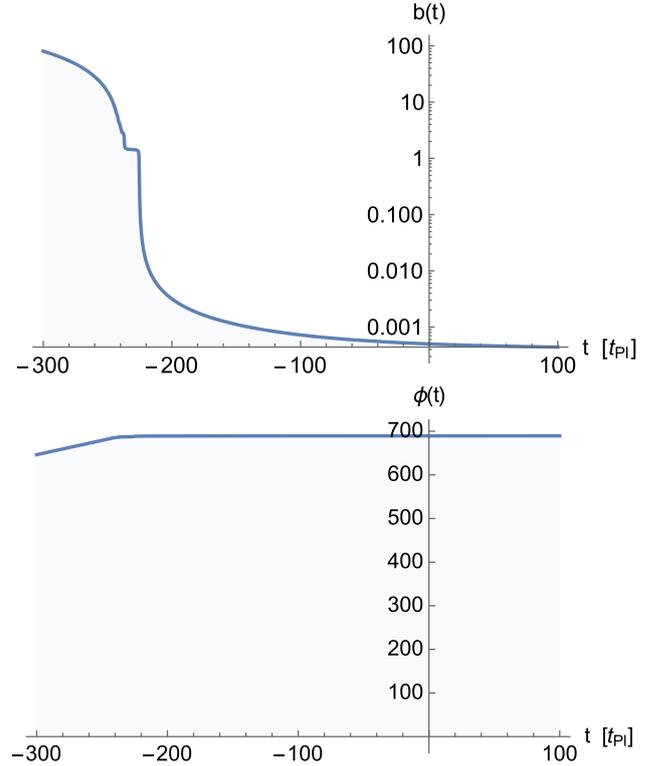


FIG. 2. Upper panel: $b(t)$ forward evolution, starting from the (quasi)static phase at $t = -300$. Lower panel: $\phi(t)$ forward evolution, also starting from the (quasi)static phase at $t = -300$.

and the scalar field energy density

$$\rho(t) = E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} \frac{P_\phi(t)^2}{(2\pi\gamma v(t))^2} + \frac{1}{2} m^2 \phi(t)^2. \quad (25)$$

It characterizes the cosmological perfect fluid equation of state. When $\omega \rightarrow -1$ the scalar field acts as a positive cosmological constant and generates inflation in a quasi-de Sitter stage.

The equation of state parameter evolution, presented in the upper panel of Fig. 3, together with the field evolution presented in the lower panel of Fig. 3, are typical of a slow-roll inflationary phase.⁴ The duration of the phase of slow-roll inflation has no influence on the shape of the primordial power spectra given as a function of the comoving wave number (as long as it lasts long enough to ensure the freezing of the considered modes). The number of inflationary e -folds is however of crucial importance to relate the computed primordial power spectra to cosmological microwave background (CMB) observations. This number determines the portion of the

⁴On those plots the initial field value $\phi_{\text{in}} = 4$ has been chosen smaller than for the plots presented in Fig. 2 in order to make the figure easier to read. The ω and ϕ behaviors remain qualitatively equivalent, the only difference being the duration of inflation.

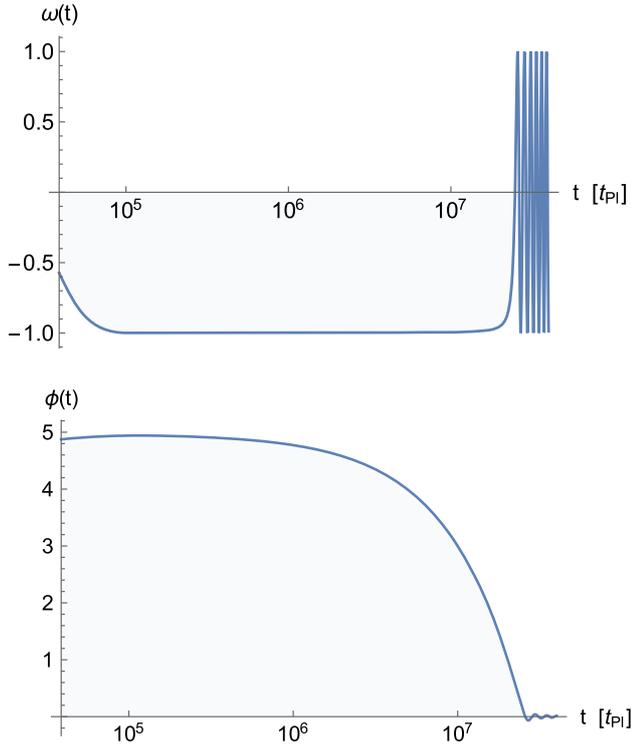


FIG. 3. Upper panel: $\omega(t) = \mathcal{P}(t)/\rho(t)$ evolution during the slow-roll phase. Lower panel: Scalar field evolution during the slow-roll phase.

comoving spectrum which falls into the observational window.

IV. INFLATION DURATION

As stated previously, the knowledge of the number of inflationary e -folds is necessary as soon as one wants to compare the primordial power spectra with CMB observations: the position of the observed interval depends on this parameter. If the spectrum is fully scale invariant, this is of course nonrelevant—this is why the total number of inflationary e -folds can be anything above 60–70 in usual cosmology—but as soon as some specific features (like in LQC and QRLG) exist in the spectrum this is mandatory knowledge.

A crude estimate of the observational window position is given by the comoving wave number associated with the size of the observable universe at the recombination time. The physical size of the observable universe at this time is of the order of (we still use Planck units)

$$L_{\text{rec}} \sim 4 \times 10^{58}. \quad (26)$$

The associated physical wave number is therefore of the order of $k_{\varphi, \text{rec}} = 2\pi/L_{\text{rec}} \sim 10^{-58}$.

To switch from physical coordinates to comoving ones, one needs to know the number of e -folds between the

stationary state of the Universe and the recombination period, as the scale factor is normalized in the initial state (the chosen value is of course in itself arbitrary). This total number of e -folds can be expressed as the sum of the number of inflationary e -folds and the number of e -folds between the end of inflation and the recombination. The number of e -folds of inflation can be expressed as

$$N = \ln\left(\frac{a(t_e)}{a(t_i)}\right) = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{v(t_e)}{v(t_i)}\right), \quad (27)$$

where t_i and t_e respectively correspond to the beginning and the end of the inflationary period. The number of e -folds between the end of the inflationary phase and recombination, denoted as N' , depends both on the well-known decoupling temperature (see, e.g., [52]) and on the far less-constrained reheating one:

$$N' = \ln\left(\frac{T_{\text{rh}}}{T_{\text{dec}}}\right) \simeq \ln\left(\frac{T_{\text{rh}}}{0.2 \text{ eV}}\right) \simeq 59, \quad (28)$$

for a reheating temperature around the grand unification scale (to fix the orders of magnitude).

The comoving wave number associated to the physical wave number $k_{\varphi, \text{rec}} = 10^{-58}$ is therefore given by

$$k_{c, \text{rec}} = k_{\varphi, \text{rec}} a(t_{\text{rec}}) = k_{\varphi, \text{rec}} a(t_i) e^{59+N}. \quad (29)$$

This makes the observational window dependence on the number of inflationary e -folds explicit. It can be noticed that when $N = 75$, $k_{c, \text{rec}} \sim 1$ for $a(t_i) = 1$ (as usually chosen). This is why, as soon as the number of e -folds is substantially higher than the minimum required value, the part of the spectrum which is probed corresponds to modes with $k_c \gg 1$.

In the following, we focus on the duration of inflation for different sets of initial conditions. Both for numerical convenience and because the stationary phase is, by definition, time translation invariant, the initial conditions are set just at the end of the static phase (corresponding to $t = -240$ in the simulation), before any significant growth of the physical volume. The situation is slightly more subtle when dealing with perturbations. Since we cannot explore fully the four-dimensional parameter space, we fix b_{in} to the value obtained from the backward evolution. This is not an arbitrary choice—unlike it would be for the matter content—and this parameter does not enter the field energy density expression given in Eq. (25). Three variables are therefore remaining free: $\{v_{\text{in}}, \phi_{\text{in}}, P_{\phi, \text{in}}\}$. Since the relevant study for our purpose is the impact of both v_{in} and ϕ_{in} on the duration of inflation, we set $P_{\phi, \text{in}}$ such that the initial Hamiltonian constraint is satisfied.

The main results are displayed in Fig. 4. It can be seen that N increases both with v_{in} and ϕ_{in} . The ϕ_{in} dependence

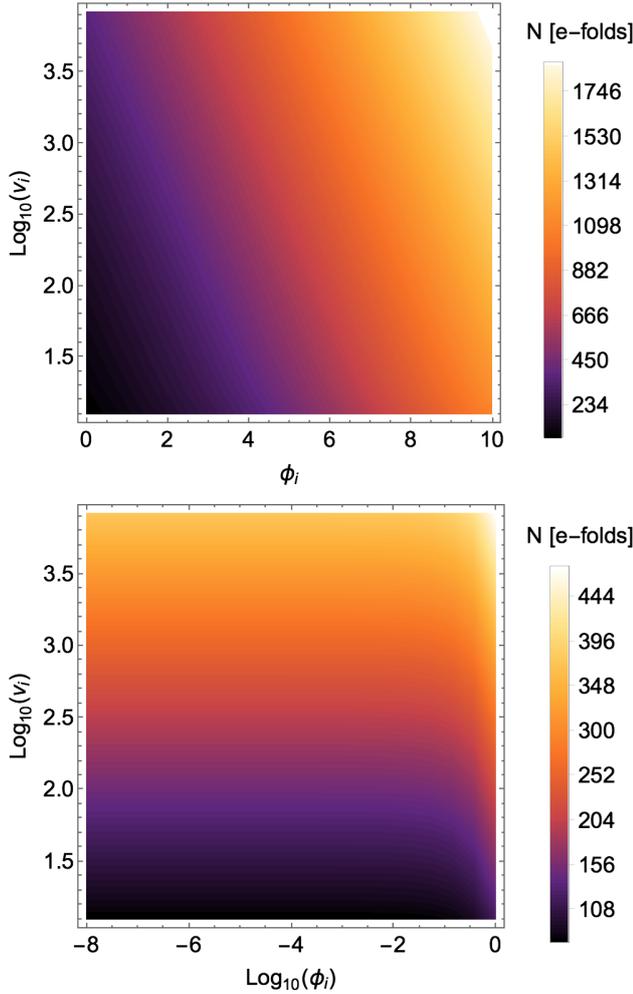


FIG. 4. Upper panel: The number of inflationary e -folds N as a function of v_{in} and ϕ_{in} . Lower panel: Zoom on the small values of ϕ_{in} in order to probe the low values of N .

is the same as in the LQC framework when initial conditions are set at the bounce.

The comparison with LQC is however subtle. In LQC, nearly any number of inflationary e -folds, including $N = N^* \approx 60$ (which is interesting for phenomenology as this makes the nontrivial features observable) is possible if initial conditions are fine-tuned. If they are set at the bounce, there is no obvious preferred initial value for the field—or alternatively for the sometimes used x variable defined as the dimensionless square root of the potential energy density—and it is hard to find a preferred inflation duration. The other way around, if initial conditions are set in the remote past of the contracting branch, and if the bounce energy density is fixed (the usual value being $\rho_c \approx 0.24$), a preferred value close to $N \approx 140$ does appear [46–48].

In QRLG, the prediction of the number of e -folds is therefore similar to what happens in LQC, but only when initial conditions are set at the bounce, in the sense that the

selection criterion for a preferred field value is lost. However, in QRLG the number of e -folds also depends on other parameters: N clearly increases with v_{in} .

Numerical investigations show that, with this procedure, it is necessary to have $v_{\text{in}} > 12.4$, otherwise the Hamiltonian constraint cannot be fulfilled. This means that low values of v_{in} are inaccessible, making a small number of e -folds, close to N^* , even less probable than in LQC, not to say strictly impossible. The way v_{in} does depend on N may seem strange at first sight since the field energy density $\rho_{\text{in}} \propto v_{\text{in}}^{-2}$. In general the higher the density, the bigger the number of e -folds. However this effect is “overcompensated” by the fact that ρ_{in} is also proportional to $P_{\phi_{\text{in}}}^2$ which increases when v_{in} increases (in order to satisfy the Hamiltonian constraint). The initial field energy density v_{in} dependence can be seen in Fig. 5.

For slow-roll inflationary models with a single inflaton field in the LQC framework, the number of e -folds depends

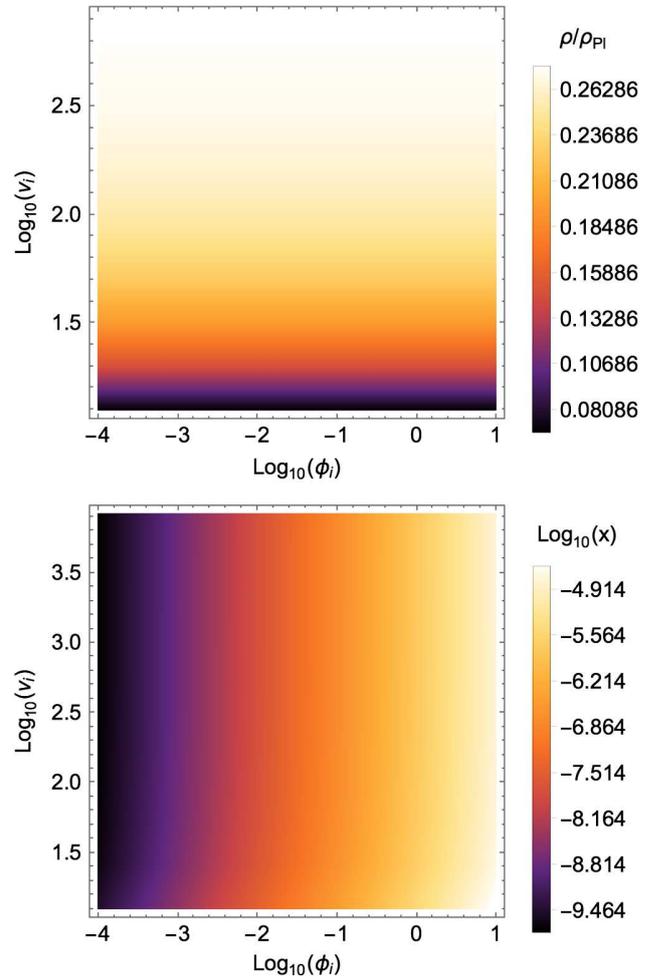


FIG. 5. Upper panel: The field energy density at the end of the static phase as a function of v_{in} and ϕ_{in} . Lower panel: The dimensionless ratio x at the end of the static phase as a function of v_{in} and ϕ_{in} .

on two parameters: the field energy density and the dimensionless ratio,

$$x = \sqrt{\frac{E_{\text{pot}}(t)}{\rho(t)}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}m^2\phi(t)^2}{\frac{1}{2}\frac{P_\phi(t)^2}{(2\pi\gamma v(t))^2} + \frac{1}{2}m^2\phi(t)^2}}, \quad (30)$$

at the beginning of the inflationary phase. It increases when those parameters increase. Basically $N \propto x^2$ and $N \propto \rho_{\text{in}}$ [46]. There is also a known field mass dependence $N \propto \ln\left(\frac{2}{m} \sqrt{\frac{k}{3}\rho_{\text{in}}}\right)$.

In Fig. 5, we show the dependence of both ρ and x at the end of the stationary phase (i.e., at $t = -240$), upon initial conditions. As previously mentioned, since the mass is set to $m = 1.21 \times 10^{-6}$, the field energy density is kinetically dominated in the range of ϕ_{in} values presented here. The energy density therefore increases with v_{in} but remains constant when ϕ_{in} varies. It would be possible to probe initial field values close to 10^6 to study how ρ varies when the potential term is no longer negligible. It is however not relevant to go into the details when $\phi_{\text{in}} \gg 10$ as the number of e -folds is in this case (and whatever the other parameters are) very high, as shown Fig. 4. On the other hand, this switches on the dependence for x_{in} . Since ρ_{in} is almost constant with respect to variations of v_{in} , the value of x_{in} only depends on the initial field value. If we consider together the v_{in} and ϕ_{in} dependence of both x_{in} and ρ_{in} this leads to the trend which appears in the upper panel of Fig. 4. This confirms that the duration of inflation in QRLG, as in LQC, depends on the couple $\{x, \rho\}$ at the beginning of the inflationary period.

In summary, the duration of inflation in QRLG can be set close to the lower boundary $N^* = 60$ but it requires a very high level of fine-tuning, even more important than in LQC when setting initial conditions at the bounce. For almost all the probed initial parameter space, the inflation duration is lengthy, pushing the observational window far in the ultraviolet part of the spectra. That is quite bad news for phenomenology as this makes the specific features of the model nearly impossible to observe. But this is good news for the consistency: the model agrees with observations (assuming that the observed tensor spectrum will be scale free) for nearly all its parameter space.

Now that the background dynamics has been defined and characterized, cosmological perturbations can be propagated on this background to derive the primordial power spectra. As precise calculations for perturbations in QRLG are still missing, we make here the hypothesis that perturbations are described by the usual theory.

V. PRIMORDIAL POWER SPECTRA

When dealing with a flat universe filled with a scalar field, the first-order perturbed Einstein equations are equivalent to the gauge-invariant Mukhanov-Sasaki equation:

$$\nu''(\eta, \vec{x}) - c_s^2 \Delta \nu(\eta, \vec{x}) - \frac{z_{T/S}''(\eta)}{z_{T/S}(\eta)} \nu(\eta, \vec{x}) = 0, \quad (31)$$

in which:

- (i) ν is a gauge-invariant canonical variable built as a combination of the metric coordinate (Bardeen variables) and of the scalar field perturbations.
- (ii) z is the background variable that models the background impact on the perturbations and whose expression depends on the kind of inhomogeneities considered. The T/S indices refer either to tensor or to scalar modes.
- (iii) c_s is the speed of sound, which is equal to the speed of light $c_s = 1$ for a canonical scalar field.
- (iv) The $'$ symbol corresponds to a derivative with respect to the conformal time η .

As it can be seen from (31), the evolution of cosmological perturbations is equivalent to the one of a scalar field ν with a time-dependent mass $m^2 = -z_{T/S}''/z_{T/S}$ in a Minkowski space-time. Because of the dynamical background, the energy of the perturbations is not conserved (they can extract energy from the background evolution), hence the mass time dependence.

When quantizing the theory, the ν functions and their conjugate momenta become operators. The associated Fourier temporal mode functions satisfy

$$\nu_k''(\eta) + \left(k_c^2 - \frac{z_{T/S}''(\eta)}{z_{T/S}(\eta)}\right) \nu_k(\eta) = 0, \quad (32)$$

in which k_c corresponds to a comoving wave number.

This equation can be recast in cosmic time:

$$\ddot{\nu}_k(t) + H(t)\dot{\nu}_k(t) + \left[\left(\frac{k_c}{a}\right)^2 - \frac{\dot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)}H(t) - \frac{\ddot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)}\right] \nu_k(t) = 0. \quad (33)$$

We introduce a new parameter $h_k(t) = \nu_k(t)/a(t)$ such that (33) becomes

$$\ddot{h}_k(t) + 3H(t)\dot{h}_k(t) + h_k(t) \left[H(t)^2 + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{k_c}{a}\right)^2 - H(t) \frac{\dot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)} - \frac{\ddot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)} \right] = 0. \quad (34)$$

For the purpose of writing (34) as a set of two first order ordinary differential equations (ODE) we introduce a second parameter, $g_k(t) = a(t)\dot{h}_k(t)$, such that

$$\begin{aligned} \dot{h}_k(t) &= \frac{1}{a(t)} g_k(t), \\ \dot{g}_k(t) &= -2H(t)g_k(t) - a(t)h_k(t) \\ &\quad \times \left[H(t)^2 + \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} + \left(\frac{k_c}{a}\right)^2 - H(t) \frac{\dot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)} - \frac{\ddot{z}_{T/S}(t)}{z_{T/S}(t)} \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

Finally the primordial power spectra are respectively defined by

$$\mathcal{P}_T(k_c) = \frac{4\kappa k^3}{\pi^2} \left| \frac{\nu_k(t_e)}{z_T(t_e)} \right|^2 \quad (36)$$

for tensor modes, and

$$\mathcal{P}_S(k_c) = \frac{k^3}{2\pi^2} \left| \frac{\nu_k(t_e)}{z_S(t_e)} \right|^2 \quad (37)$$

for scalar ones, in which t_e stands for the cosmic time at the end of the slow-roll phase.

Since the scale factor is deduced from $v(t)$ by

$$a(t) = \left(\frac{2\pi\gamma v(t)}{V_0} \right)^{1/3}, \quad (38)$$

the value of V_0 will have an impact on the spectra. This dependence will be later discussed.

In this article we assume “usual” perturbations on a QRLG background. This is obviously only a first step in the direction of a full QRLG treatment. The question of perturbations in LQC is a tricky one. On the one hand, the dressed metric [53–55] (which is close to hybrid quantization [56] from the observational viewpoint) puts the emphasis on the quantum aspects of both the background and the perturbations, while the deformed algebra [57–59] highlights the consistency and gauge aspects. Those issues will need to be dealt with in QRLG in the future.

Another point that needs to be addressed is the question of initial conditions for perturbations, which is a well-known and tricky one. Basically, the idea is to go far enough in the past so that the effective potential $z_{T/S}''/z_{T/S}$ is negligible compared to k_c^2 and the evolution equation becomes the one of a harmonic oscillator. This is the case in the de Sitter background of standard inflation. This is also the case in the contracting phase of the LQC bounce for tensor modes. A detailed discussion for the more complicated case of scalar perturbations in LQC can be found in [60] for the philosophy followed in this study. (Another approach based on the definition on a fourth order adiabatic vacuum at the bounce can be found in [53–55].)

In the following, the simulations presented rely on an initial state for perturbations defined in the Minkowski vacuum. The choice of the precise initial vacuum is however not crucial at this stage as the aim of the study is to investigate the way in which the spectra depend on the QRLG parameters. Considering different vacua generally induces only small modifications in this framework. This point has been investigated for LQC and it was shown that although the vacuum choice makes some differences in the IR, most of the features of the spectrum remain unchanged [61]. We have effectively tested different vacua and, as it

could have been expected, the results and conclusions drawn below were checked not to depend on the precise choice.

It should be mentioned that several interesting features of the primordial power spectra have been derived in [62] for a background behavior similar to the model considered in this work. In particular, damped oscillation appears at scales smaller than a characteristic value and the reddening of the spectrum increases at all the scales when the number of small bounces increases.

A. Primordial tensor power spectra

For tensor perturbations, the background variable is given by $z_T(t) = a(t)$, and the previous set of ODEs (35) becomes

$$\begin{aligned} \dot{h}_k(t) &= \frac{1}{a(t)} g_k(t), \\ \dot{g}_k(t) &= -2H(t)g_k(t) - \frac{k_c^2}{a(t)} h_k(t). \end{aligned} \quad (39)$$

What matters for the shape of primordial spectra is the tensor potential $z_T''(t)/z_T(t) = a''(t)/a(t)$. More precisely, the key point is the relative value of the potential and of the comoving wave number k_c . The evolution of this potential in QRLG is presented in Fig. 6.

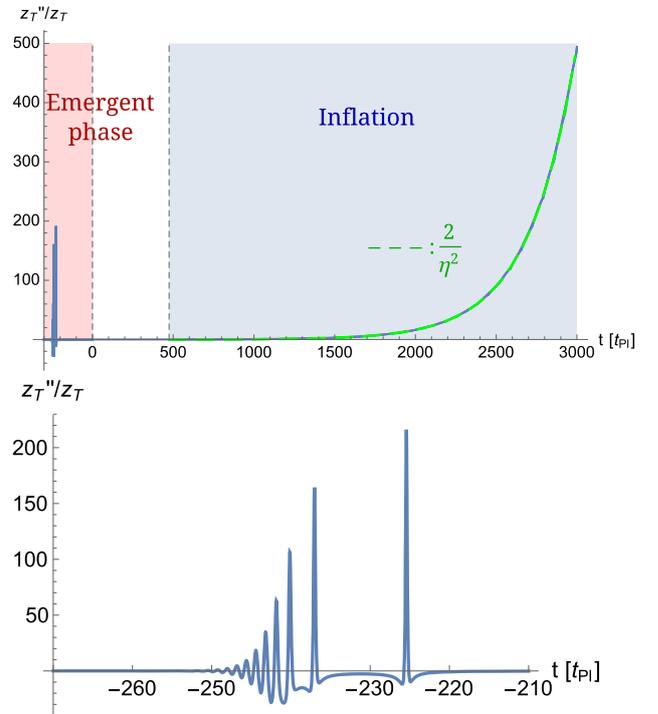


FIG. 6. The tensor potential z_T''/z_T . Upper panel: Full range including the beginning of the inflationary phase. Lower panel: Zoom on the emergent phase.

The evolution of the potential should be slightly contrasted with what happens in LQC when initial conditions are set in the classical contracting branch. In usual LQC, the tensor potential converges quickly toward zero and a Bunch-Davies vacuum can be properly defined for all modes as long as initial conditions are set sufficiently far away from the bounce. This initial normalization, combined with the potential behavior $z_T''/z_T \simeq 2/\eta^2$ during the slow-roll phase, leads to a scale invariant spectrum for all modes of cosmological interest.⁵ In addition, the bounce leads to a peak in the potential that creates oscillation in the intermediate part of the spectrum [63–65]. In the specific case of the deformed algebra approach a UV divergence also occurs, due to an effective change of signature of the metrics [66], but this situation will not be considered here.

In QRLG, the tensor potential also exhibits a $2/\eta^2$ evolution during the inflationary phase, as it can be seen in the upper panel of Fig. 6. When the simulation is started, the potential is of the order of $z_T''(t_i)/z_T(t_i) \simeq 10^{-5}$, for $V_0 = 1$. It is, at this stage, not easy to analytically demonstrate that the potential strictly vanishes in the remote past. Thus, the choice of the initial state as a vacuum [in the sense $k_c^2 \gg z_T''(t_i)/z_T(t_i)$] is no more physical for comoving wave numbers that do not satisfy $k_c^2 \gg 10^{-5}$. This means that the IR limit of the spectrum might not be fully reliable and deserves future investigation. This is however not important for phenomenology as the observational window anyway falls in the intermediate or UV part. As in standard LQC, the bounces induce peaks in the potential leading to oscillations in the spectra.

The primordial tensor power spectrum is represented in the upper panel of Fig. 7, with arbitrarily chosen values $V_0 = 1$ and $\phi_{\text{in}} = 4$. The spectrum dependence upon those parameters will be discussed in the following paragraphs. As expected, one can notice a rising IR part, a scale-invariant UV part (corresponding to $k_c > 30$ in this case) and an intermediate oscillatory part with a richer structure than in usual LQC due to the multiple minibounces. For an easy comparison, the typical LQC spectrum is shown on the lower panel of 7 (the difference in amplitude is just due to a different mass value chosen for numerical convenience).

Following the study of the previous section on the duration of inflation, it can be concluded that for almost all the parameter space of initial conditions, the observable part of the QRLG primordial power spectrum is nearly scale invariant, as in GR. Probing deviations with respect to GR, that is the oscillatory intermediate regime, the initial conditions have to be highly fine-tuned so that N approaches N^* .

⁵It should be noticed that this only holds for tensor modes, as it is impossible to properly define a Bunch-Davies vacuum in the same way for scalar perturbations.

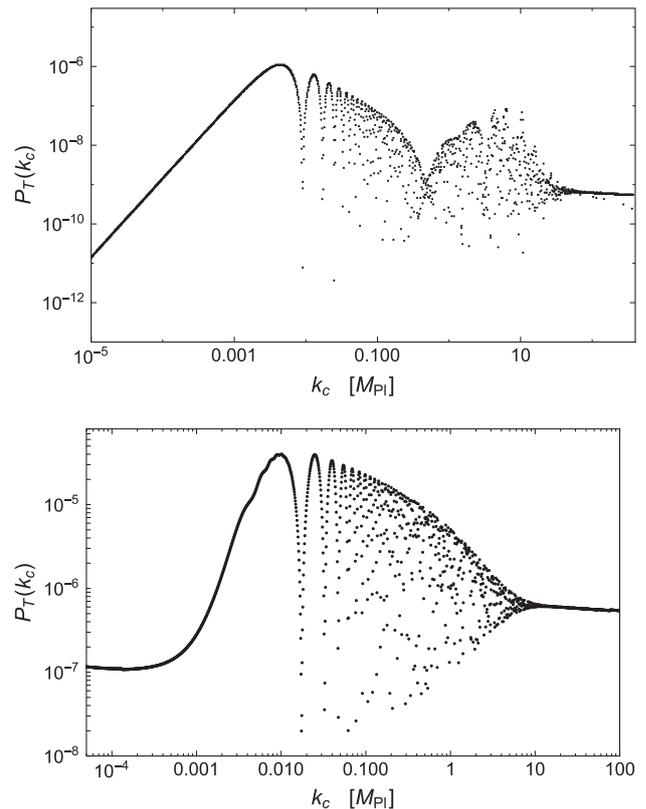


FIG. 7. Upper panel: Primordial tensor power spectrum of cosmological perturbations on a QRLG background, with $V_0 = 1$ and $\phi_{\text{in}} = 4$. Lower panel: Primordial tensor power spectrum of cosmological perturbations on a LQC background (with a larger inflaton mass).

In Fig. 8, we show the impact of the initial value of the scalar field on the spectra. For the initial field values chosen here, $\{10^{-3}, 10^{-1}, 10^1, 10^3\}$, the field energy density—which is the physical parameter—is (due to the low mass of the field) fully kinetic energy dominated and equal to 0.24. The spectrum amplitude increases with the initial

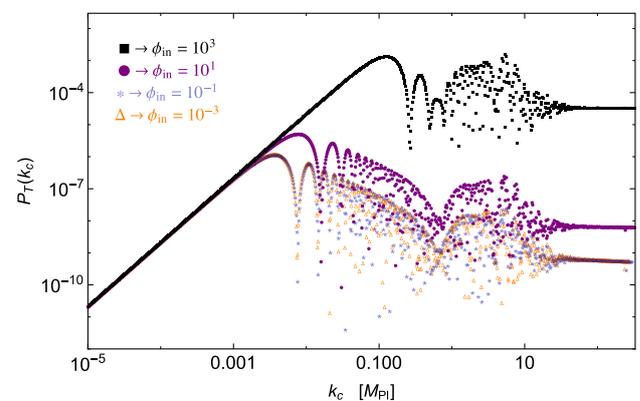


FIG. 8. Primordial tensor power spectrum for different initial values of the scalar field ϕ_{in} in the static phase and $V_0 = 1$.

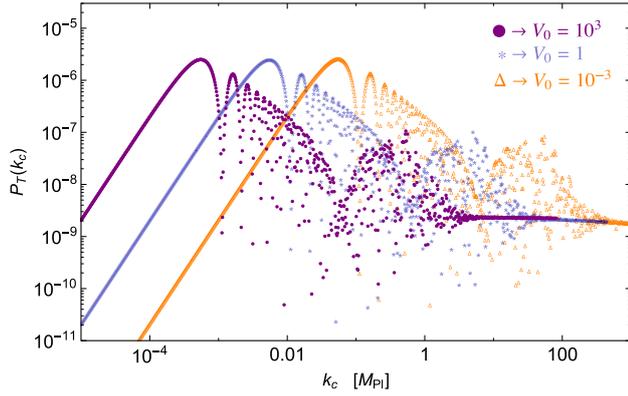


FIG. 9. Primordial tensor power spectra of cosmological perturbations on a QRLG background for different values of V_0 .

field value, and reaches a level which is in disagreement with observations when the initial value is $\gtrsim 10$, taking into account the upper bound on the tensor to scalar ratio [67]. This sets a bound on possible initial field values: $\phi_{\text{in}} \lesssim 10$. It is interesting to notice that spectra with $\phi_{\text{in}} = \{10^{-3}, 10^{-1}\}$ perfectly overlap. The field value is mostly irrelevant, regarding the tensor spectra, as soon as it is $\lesssim 0.1$.

In Fig. 9, the impact of different choices for V_0 are shown. Since the tensor potential writes

$$\begin{aligned} \frac{z_T''(t)}{z_T(t)} &= a(t)\ddot{a}(t) + \dot{a}(t)^2 \\ &= \left(\frac{2\pi\gamma}{V_0}\right)^{2/3} [v(t)^{1/3}\ddot{v}(t)^{1/3} + (v(t)^{1/3})^2] \propto V_0^{-2/3}, \end{aligned} \quad (40)$$

and as this value should be compared to the squared comoving wave number, the horizontal shift of the spectra, proportional to $V_0^{-1/3}$, can easily be anticipated. This agrees with the numerical results.

It is therefore in principle possible to constrain V_0 by requiring the appropriate properties of the spectrum in the observable window. Once N is fixed the observable window position, given by $k_{c,\text{rec}}$, depends only on a_0 , and thus on $V_0^{1/3}$ if v_{in} is fixed. As the tensor power spectrum has not yet been measured and as there is still a degeneracy with the number of e -folds this is only a prospective claim at this stage.

B. Primordial scalar power spectra

This study focuses on tensor modes. Scalar perturbations are more closely related to available observation but are substantially more difficult to deal with. In the case of scalar perturbations, the usual background variable is $z_S(t) = a(t)\frac{\dot{\phi}(t)}{H(t)}$ and Eq. (35) cannot be solved analytically.

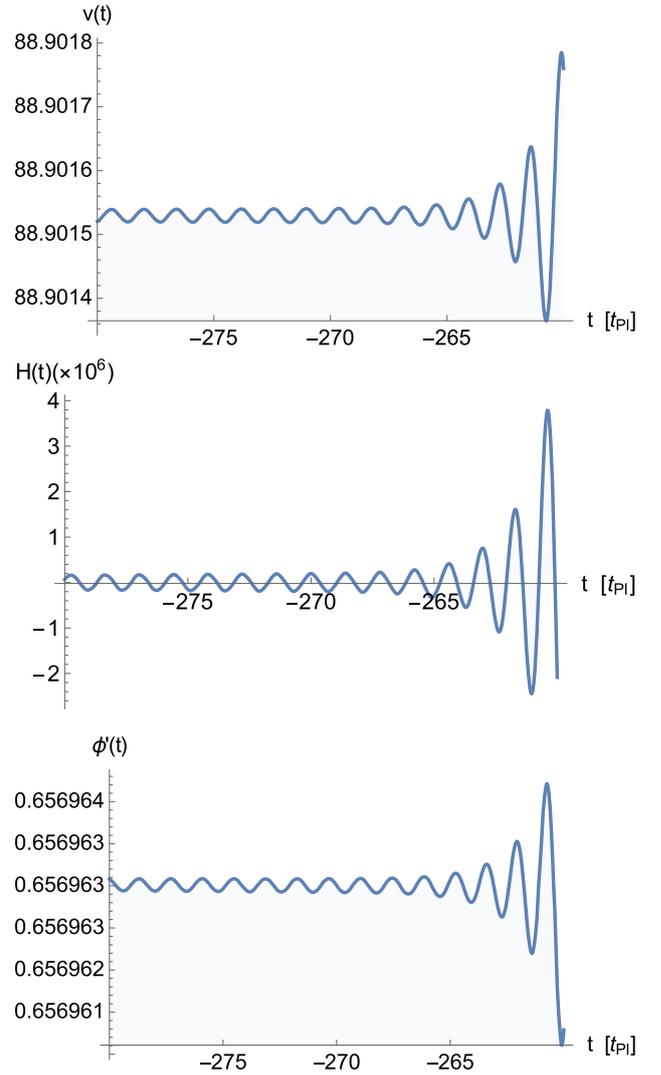


FIG. 10. Oscillatory behavior of the different parameters that compose the background scalar variable z_S during the static phase. Upper panel: Background variable $v(t)$. Middle panel: Hubble parameter. Lower panel: Time derivative of the field.

Because of the more complex shape of the scalar potential, the fate of scalar perturbations is not as clear as for the tensor ones.⁶

Due to the oscillating behavior of $v(t)$ in the static phase, as it can be seen in the upper panel of Fig. 10, the Hubble parameter $H(t)$ oscillates around 0, as shown in the middle panel of Fig. 10. This induces a nontrivial behavior of $z_S(t)$. The scalar potential in the static phase therefore exhibits very fast oscillations of small amplitude that will amplify scalar perturbations. The resulting power spectrum is not physical. This is however not a clear conclusion as:

⁶This is already the case in usual LQC where the definition of a proper vacuum state is tricky.

- (i) It is probable that oscillations are actually damped when going far enough in the past, making the choice of a nonambiguous initial vacuum possible. Currently available simulations do not, however, allow to answer unambiguously this question because the case of scalar perturbations is quite intricate. The knowledge of the scale factor behavior is not sufficient and one needs the full constraint. The difficulty is however purely numerical and should be solved in a near future.
- (ii) The Mukhanov-Sasaki variables might be modified in QRLG and their usual expressions might not hold anymore. The fact that usual perturbations are propagated is of course a very heavy hypothesis of this study. Building a fully self-consistent QRLG perturbation theory is a huge task.

VI. INFLUENCE OF THE FIELD MASS

The QRLG cosmological sector is very different from usual cosmology. Thus, the relevance of the usual mass field value $m = 1.21 \times 10^{-6}$ can be challenged. In the following, we consider different field masses around the usual one: $m = 1.21 \times 10^n$, with $n = \{-10, -8, -6, -4, -3, -2\}$. Changing the value of n results in a small shift of the emergent background dynamics, which has no phenomenological importance, see Fig. 11. In this figure the

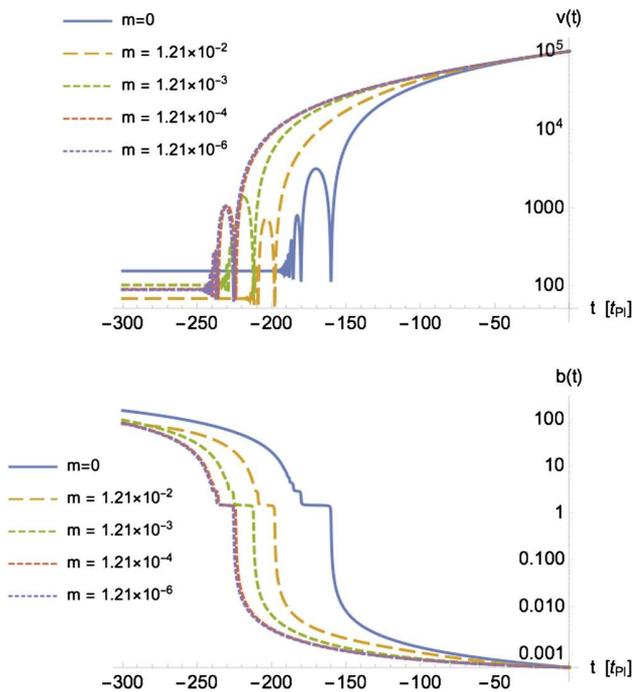


FIG. 11. Upper panel: $v(t)$ backward evolution for different values of the scalar field mass, starting from $t = 0$. Lower panel: $b(t)$ backward evolution for different values of the scalar field mass, starting from $t = 0$.

trajectories for all masses $m < 1.21 \times 10^{-6}$ perfectly overlap, both for v and b .

However, a modification of the scalar field mass also modifies the postemergent dynamics, and notably the inflationary period.

The primordial tensor spectra for $n = \{-8, -6, -4\}$ are represented Fig. 12. It appears that, if initial conditions are chosen such that $\{v_{\text{in}}, b_{\text{in}}, \phi_{\text{in}}\}$ are fixed, and $P_{\phi, \text{in}}$ varies according to the Hamiltonian constraint, the general trend of the spectra, namely the rising IR behavior, the oscillations in the intermediate regime, and the scale invariance in the UV, do not depend on the mass. Different masses only result in a shift of the spectra, mostly as in LQC [64]. However, numerical simulations suggest that for extremely low values of the mass (typically $m < 10^{-7}$), the shape of the power spectrum, even in the UV, is not scale-invariant anymore. This might be used as a constraint for the parameters of the model but this anyway requires a deeper treatment of the perturbations in QRLG.

If initial conditions are set such that $\{v_{\text{in}}, b_{\text{in}}, P_{\phi, \text{in}}\}$ are fixed and the initial field ϕ_{in} varies according to the constraint, then ϕ_{in} is lower by a factor 10^{n+6} with respect to the usual case $n = -6$. For example, if the field mass is close to the Planck mass, such as $n = -2$, then ϕ_{in} is divided by 10^4 . Those small values of ϕ_{in} , together with the increase of the potential steepness with m , lead to very small numbers of inflationary e -folds. The combination of those two effects can even prevent the slow-roll phase from happening. The associated tensor spectra are deeply modified, with a non-scale-invariant behavior presumably excluded by future observations.

The mass dependence of both the number of e -folds N and of the tensor spectra shape highly depends on the way one deals with the Hamiltonian constraint. Variations of the mass can either induce a simple shift of the spectra or deeply modify the previously studied behavior. But substantial modifications only appear when large deviations (at least by 2 orders of magnitudes) from the usual value

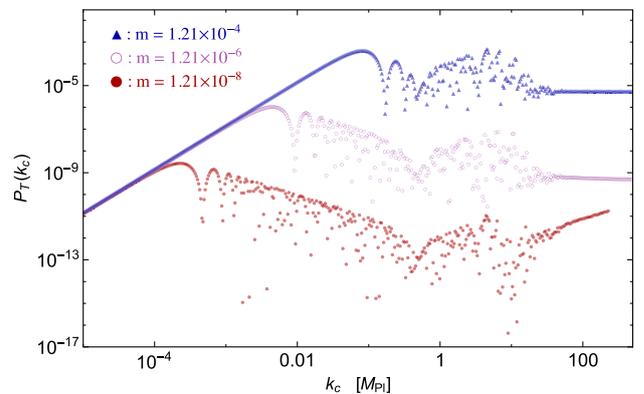


FIG. 12. Primordial tensor power spectra with $V_0 = 1$, $\phi_{\text{in}} = 4$, and different field masses given by $n = \{-8, -6, -4\}$.

$m = 1.21 \times 10^{-6}$ are considered. For reasonable deviations, all the conclusions previously stated still hold.

We also recall that the conclusions mentioned here are probably no longer true for scalar perturbations as the background variable z_S directly depends on the field. The mass term therefore has a direct impact on the scalar potential, thus on the spectra, and may have a deeper effect than the simple shift observed in Fig. 12.

VII. CONCLUSION

Quantum reduced loop gravity is an important step in trying to bridge that gap between full quantum gravity and effective quantum cosmology. As the kinematics is defined before the minisuperspace reduction, some important features of LQG, such as the graph structure and $SU(2)$ quantum numbers, are preserved although simplified to make relevant calculations analytically tractable. The key point is to impose the gauge-fixing conditions to the diagonal spatial metric. The minisuperspace reduction is then implemented at the dynamical level, keeping terms preserving the diagonality conditions.

The main result of QRLG is the replacement of the usual LQC bounce by an “emergent + bounce” scenario. In this article we have studied the inflationary dynamics in this framework. The main result when scanning the full parameter space is that the number of inflationary e -folds is always greater than the experimental lower bound around 60–70. This is not fully true in LQC where the number of e -folds can be tuned to an arbitrary small number by choosing appropriate initial conditions.

We have also calculated the tensor power spectrum and shown its dependence upon the parameters of the model.

The IR part is blue, the intermediate part is oscillatory and the UV part is nearly scale invariant. Following the study on the number of e -folds, the observational window falls on the UV part and a flat tensor power spectrum is therefore predicted.

Several improvements are possible for future studies:

- (i) The scalar power spectrum should be better investigated. This requires a deeper understanding of the background behavior in the remote past of the static phase.
- (ii) It might be possible to assign a known probability distribution function to a parameter driving the dynamics (like in [46,48]), but this requires a “harmonic oscillator-like” behavior in the deep past and this is not established at this stage.
- (iii) Cosmological perturbations should also be QRLG corrected.
- (iv) The anisotropic version of QRLG should be investigated as the shear is expected to be possibly important at the bounce.

Refining quantum cosmological models is a major challenge. Although quite a lot of subtleties do appear when going from LQC or QRLG or group field theory [68,69], it is interesting that the main global features seem to be preserved, making the overall picture more and more reliable.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported in part by the NSF Grant No. PHY-1505411, and the Eberly research funds of Penn State. K.M. is supported by a grant from the C.F.M. foundation.

-
- [1] G. Aad *et al.* (ATLAS Collaboration), *Phys. Lett. B* **716**, 1 (2012).
 - [2] B. P. Abbott *et al.* (Virgo and LIGO Scientific Collaborations), *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016).
 - [3] A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Classical Quantum Gravity* **21**, R53 (2004).
 - [4] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2004).
 - [5] T. Thiemann, *arXiv:gr-qc/0110034*.
 - [6] E. Alesci, S. Bahrami, and D. Pranzetti, *Phys. Rev. D* **98**, 046014 (2018).
 - [7] A. Ashtekar, J. Olmedo, and P. Singh, *arXiv:1806.02406*.
 - [8] M. Christodoulou, C. Rovelli, S. Speziale, and I. Vilensky, *Phys. Rev. D* **94**, 084035 (2016).
 - [9] M. Bojowald, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5227 (2001).
 - [10] A. Ashtekar, T. Pawłowski, and P. Singh, *Phys. Rev. D* **73**, 124038 (2006).
 - [11] A. Ashtekar, T. Pawłowski, and P. Singh, *Phys. Rev. D* **74**, 084003 (2006).
 - [12] I. Agullo, A. Ashtekar, and W. Nelson, *Classical Quantum Gravity* **30**, 085014 (2013).
 - [13] A. Ashtekar and A. Barrau, *Classical Quantum Gravity* **32**, 234001 (2015).
 - [14] I. Agullo, B. Bolliet, and V. Sreenath, *Phys. Rev. D* **97**, 066021 (2018).
 - [15] E. Alesci and F. Cianfrani, *Europhys. Lett.* **104**, 10001 (2013).
 - [16] E. Alesci and F. Cianfrani, *Phys. Rev. D* **87**, 083521 (2013).
 - [17] E. Alesci and F. Cianfrani, *Phys. Rev. D* **90**, 024006 (2014).
 - [18] E. Alesci and F. Cianfrani, *Europhys. Lett.* **111**, 40002 (2015).
 - [19] E. Alesci and F. Cianfrani, *Phys. Rev. D* **92**, 084065 (2015).
 - [20] E. Alesci and F. Cianfrani, *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1642005 (2016).

- [21] I. Agullo and P. Singh, *Loop Quantum Gravity: The First 30 Years*, edited by A. Ashtekar and J. Pullin (WSP, 2017), pp. 183–240.
- [22] A. Corichi, T. Vukasinac, and J. A. Zapata, *Phys. Rev. D* **76**, 044016 (2007).
- [23] E. Alesci and F. Cianfrani, [arXiv:1604.02375](https://arxiv.org/abs/1604.02375).
- [24] E. Alesci, G. Botta, and G. V. Stagno, *Phys. Rev. D* **97**, 046011 (2018).
- [25] E. Alesci, G. Botta, F. Cianfrani, and S. Liberati, *Phys. Rev. D* **96**, 046008 (2017).
- [26] A. Ashtekar, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2244 (1986).
- [27] K. A. Meissner, *Classical Quantum Gravity* **21**, 5245 (2004).
- [28] J. Lewandowski, A. Okolow, H. Sahlmann, and T. Thiemann, *Commun. Math. Phys.* **267**, 703 (2006).
- [29] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science of Yeshiva University, 1964).
- [30] C. Rovelli and L. Smolin, *Nucl. Phys.* **B442**, 593 (1995); **456**, 753(E) (1995).
- [31] E. Alesci, T. Thiemann, and A. Zipfel, *Phys. Rev. D* **86**, 024017 (2012).
- [32] A. Perez, *Living Rev. Relativity* **16**, 3 (2013).
- [33] A. Ashtekar and P. Singh, *Classical Quantum Gravity* **28**, 213001 (2011).
- [34] B. Gupt and P. Singh, *Phys. Rev. D* **85**, 044011 (2012).
- [35] P. Mitra and R. Rajaraman, *Phys. Lett. B* **225**, 267 (1989).
- [36] P. Mitra and R. Rajaraman, *Ann. Phys. (N.Y.)* **203**, 137 (1990).
- [37] J. A. Neto, [arXiv:0904.4711](https://arxiv.org/abs/0904.4711).
- [38] V. Taveras, *Phys. Rev. D* **78**, 064072 (2008).
- [39] A. Ashtekar and B. Gupt, *Phys. Rev. D* **92**, 084060 (2015).
- [40] T. Zhu, A. Wang, G. Cleaver, K. Kirsten, and Q. Sheng, *Phys. Rev. D* **96**, 083520 (2017).
- [41] P. Singh and A. Toporensky, *Phys. Rev. D* **69**, 104008 (2004).
- [42] T. Pawłowski and A. Ashtekar, *Phys. Rev. D* **85**, 064001 (2012).
- [43] A. Ashtekar and P. Singh, *Classical Quantum Gravity* **28**, 213001 (2011).
- [44] M. Bojowald, *Rep. Prog. Phys.* **78**, 023901 (2015).
- [45] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration), *Astron. Astrophys.* **594**, A20 (2016).
- [46] L. Linsefors and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **87**, 123509 (2013).
- [47] L. Linsefors and A. Barrau, *Classical Quantum Gravity* **32**, 035010 (2015).
- [48] K. Martineau, A. Barrau, and S. Schander, *Phys. Rev. D* **95**, 083507 (2017).
- [49] A. Ashtekar and D. Sloan, *Gen. Relativ. Gravit.* **43**, 3619 (2011).
- [50] B. Bolliet, A. Barrau, K. Martineau, and F. Moulin, *Classical Quantum Gravity* **34**, 145003 (2017).
- [51] A. Barrau, *Scholarpedia* **12**, 33321 (2017).
- [52] E. W. Kolb and M. S. Turner, *Front. Phys.* **69**, 1 (1990).
- [53] I. Agullo, A. Ashtekar, and W. Nelson, *Classical Quantum Gravity* **30**, 085014 (2013).
- [54] I. Agullo, A. Ashtekar, and W. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 251301 (2012).
- [55] I. Agullo, A. Ashtekar, and W. Nelson, *Phys. Rev. D* **87**, 043507 (2013).
- [56] L. C. Gomar, M. Martin-Benito, and G. A. M. Marugan, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **06** (2015) 045.
- [57] M. Bojowald and G. M. Paily, *Phys. Rev. D* **86**, 104018 (2012).
- [58] A. Barrau, M. Bojowald, G. Calcagni, J. Grain, and M. Kagan, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **05** (2015) 051.
- [59] T. Cailleteau, A. Barrau, J. Grain, and F. Vidotto, *Phys. Rev. D* **86**, 087301 (2012).
- [60] S. Schander, A. Barrau, B. Bolliet, L. Linsefors, J. Mielczarek, and J. Grain, *Phys. Rev. D* **93**, 023531 (2016).
- [61] A. Barrau, P. Jamet, K. Martineau, and F. Moulin, *Phys. Rev. D* **98**, 086003 (2018).
- [62] R. Brandenberger, Q. Liang, R. O. Ramos, and S. Zhou, *Phys. Rev. D* **97**, 043504 (2018).
- [63] J. Mielczarek, T. Cailleteau, J. Grain, and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **81**, 104049 (2010).
- [64] B. Bolliet, J. Grain, C. Stahl, L. Linsefors, and A. Barrau, *Phys. Rev. D* **91**, 084035 (2015).
- [65] I. Agullo and N. A. Morris, *Phys. Rev. D* **92**, 124040 (2015).
- [66] L. Linsefors, T. Cailleteau, A. Barrau, and J. Grain, *Phys. Rev. D* **87**, 107503 (2013).
- [67] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration), *Astron. Astrophys.* **594**, A13 (2016).
- [68] S. Gielen and D. Oriti, [arXiv:1709.01095](https://arxiv.org/abs/1709.01095).
- [69] F. Gerhardt, D. Oriti, and E. Wilson-Ewing, *Phys. Rev. D* **98**, 066011 (2018).

3.5.2 Précisions sur les spectres tenseurs

Afin d'avoir une meilleure compréhension des résultats du précédent article nous avons décidé de construire un modèle jouet d'Univers émergent dans lequel nous implémentons à la main la présence d'un ou plusieurs rebonds et étudions la forme des spectres de puissance tensoriels en fonction des différentes caractéristiques de la dynamique du fond. Nous avons choisi de nous limiter au cas des spectres tenseurs afin que l'étude ne dépende pas du contenu en matière choisi et soit la plus générique possible.

Nous confirmons dans l'article "*Primordial power spectra from an emergent universe : basic results and clarifications*" que la présence d'un rebond induit des oscillations dans le spectre de puissance primordial tensoriel et montrons comment les caractéristiques du rebond influent sur certaines propriétés de ces oscillations.

Nous discutons également, dans ce cadre spécifique, le raisonnement selon lequel une normalisation initiale des perturbations de type Buch-Davies combinée à une phase d'inflation amène automatiquement à un spectre primordial invariant d'échelle. Nous montrons notamment que la présence de la phase stationnaire a en fait un impact sur la forme des spectres.

Article

Primordial Power Spectra from an Emergent Universe: Basic Results and Clarifications

Killian Martineau and Aurélien Barrau * 

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Université Grenoble-Alpes, CNRS/IN2P3 53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble CEDEX, France; killian.martineau@gmail.com

* Correspondence: barrau@in2p3.fr

Received: 30 November 2018; Accepted: 15 December 2018; Published: 18 December 2018



Abstract: Emergent cosmological models, together with the Big Bang and bouncing scenarios, are among the possible descriptions of the early Universe. This work aims at clarifying some general features of the primordial tensor power spectrum in this specific framework. In particular, some naive beliefs are corrected. Using a toy model, we investigate the conditions required to produce a scale-invariant spectrum and show to what extent this spectrum can exhibit local features sensitive to the details of the scale factor evolution near the transition time.

Keywords: Emergent universe; quantum cosmology; primordial tensor spectrum

1. Introduction

The term “Big Bang” is somewhat ambiguous. In a sense, it just refers to the expansion of space and to the fact that the entire observable universe was, in the past, much smaller, denser, and hotter. This is obviously non-controversial. In another sense, it refers to the initial singularity in and of itself. In this stronger meaning, the very idea of the Big Bang is far from obvious. It is a generic prediction of general relativity (GR)—remaining usually true in the inflationary paradigm [1,2]—which can, however, be violated in some circumstances.

The first important class of models without a Big Bang (in the strong sense) are bouncing models. Among the very numerous ways to get a bounce (an excellent review can be found in [3]), it is worth mentioning the violation of the null energy condition [4], the violation of the strong energy condition [5], the existence of ghost condensates [6], galileons [7], S-branes [8], quintom fields [9], higher derivatives [10,11], non-standard couplings in the Lagrangian [12], supergravity [13], and loop quantum cosmology [14,15]. These are only some examples, and an exhaustive list should also include the ekpyrotic and cyclic scenarios [16,17] and, in a way, string gas cosmology [18]. Those ideas are also being investigated in the black hole sector; see [19] and the references therein.

The second important class of models beyond the Big Bang are those based on an emergent scenario. Instead of decreasing and then increasing, the scale factor is, in this case, constant until, at some point, a transition occurs and leads to the current expansion of the Universe. As examples, one can think of (some versions of) nonlinear sigma models [20], Horava–Lifshitz gravity [21,22], Einstein–Gauss–Bonnet theory [23], exotic matter [24], branes [25], Kaluza–Klein cosmology [26], the particle creation mechanism [27], microscopic effects [28], quantum reduced loop gravity [29], and quintom matter (see [30] for the background dynamics and [31] for the associated perturbations). This leads to interesting consequences reviewed for example in [32–36].

In this article, we focus on emergent models. We do not choose a specific theory, but instead, we try to highlight generic features from a purely phenomenological approach. The aim is not to demonstrate new outstanding results. It simply consists of clarifying the situation, correcting some common misunderstandings and explaining the expected observational features, which, to the best

of our knowledge, have not been presented so far in a systematic way in the literature. We basically use an “ad hoc” evolution of the scale factor from a static phase ($a = cte$) to an inflationary phase ($a \propto e^{H_0 t}$) (the subscript 0 does not refer in this context to the value of the Hubble parameter now, but to its nearly constant value during inflation). As this transition is expected to be triggered by some event occurring in the evolution of the Universe, we add a small distortion of the scale factor evolution around the transition time. This distortion can be a bounce (i.e., a phase of contraction followed by a phase of expansion) or an anti-bounce (the opposite), which we usually also call a bounce. Both are expected to capture some basic features of emergent models, but are also motivated by explicit results obtained, e.g., in loop quantum cosmology or in quantum reduced loop gravity (see the detailed behavior of the scale factor in [29,37]). The existence of an inflationary stage is natural as soon as a massive scalar field is assumed to be the dominant content of the universe. This will be our implicit hypothesis. In this case, inflation is a strong attractor [38] and occurs nearly inevitably.

We investigate how the primordial tensor power spectrum is affected by variations in the physical characteristics of the features present in the evolution of the scale factor so as to draw a wide picture of the observational characteristics of emergent models. We deliberately decide to focus on tensor perturbations, as the scalar spectrum does not depend only on the scale factor evolution.

Throughout this work, we use Planck units.

2. Primordial Tensor Power Spectra

2.1. The Mukhanov–Sasaki Equation for Tensor Perturbations

The first order perturbed Einstein equations are equivalent, for a flat FLRW universe and a single matter content modeled by a scalar field, to the gauge-invariant Mukhanov–Sasaki equation:

$$v''(\eta, \vec{x}) - \Delta v(\eta, \vec{x}) - \frac{z''_{T/S}(\eta)}{z_{T/S}(\eta)} v(\eta, \vec{x}) = 0. \tag{1}$$

The ' symbol refers to a derivative with respect to conformal time η such that $ad\eta = dt$. This equation depends on two variables v and $z_{T/S}$, called the Mukhanov variables. The canonical variable, v , is obtained from a gauge-invariant combination of both the metric coordinate perturbations and the perturbations of the scalar field. The nature of the considered perturbations is encoded in the background variable $z_{T/S}$, in which the T/S indices refer either to tensor or scalar modes.

Since the background variable writes $z_S(t) = a(t)\dot{\Phi}(t)/H(t)$ for scalar modes, Φ being the scalar field background, the associated evolution highly depends on the matter evolution. We will therefore not consider scalar perturbations anymore in this study, even if they are currently the most relevant ones for observations. Instead, we will focus on tensor modes, for which the background variable is simply given by $z_T(t) = a(t)$. The results and conclusions will therefore be fully generic and usable for any model in which the scale factor behaves, at least partially, in the way described below, independent of the cause.

The Mukhanov–Sasaki equation, that is Equation (1), reduces the cosmological evolution of perturbations to the propagation equation of a free scalar field, v , with a time-dependent mass $m^2 = -z''_T/z_T$ in the Minkowski space-time. The time-dependence of the mass represents the perturbations' sensitivity to the dynamical background.

During the quantization procedure, the variable v is promoted to be the operator. Its associated Fourier modes satisfy:

$$v''_k(\eta) + \left(k_c^2 - \frac{z''_T(\eta)}{z_T(\eta)} \right) v_k(\eta) = 0, \tag{2}$$

where k_c refers to comoving wavenumbers. This equation can be re-written in cosmic time:

$$\begin{aligned} & \ddot{v}_k(t) + H(t)\dot{v}_k(t) \\ & + \left(\frac{k_c^2}{a(t)^2} - \frac{\dot{z}_T(t)}{z_T(t)}H(t) - \frac{\ddot{z}_T(t)}{z_T(t)} \right) v_k = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{v}_k(t) + H(t)\dot{v}_k(t) + \left(\frac{k_c^2}{a(t)^2} - H(t)^2 - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} \right) v_k = 0.$$

We introduce a new parameter $h_k(t) = v_k(t)/a(t)$ such that Equation (3) becomes:

$$\ddot{h}_k(t) + 3H(t)\dot{h}_k(t) + \frac{k_c^2}{a(t)^2}h_k(t) = 0. \tag{4}$$

It is convenient to introduce a second parameter $g_k(t) = a(t)\dot{h}_k(t)$ in order to rewrite Equation (4) as a set of two first order ordinary differential equations (ODEs):

$$\begin{cases} \dot{h}_k(t) = \frac{1}{a(t)}g_k(t), \\ \dot{g}_k(t) = -2H(t)g_k(t) - \frac{k_c^2}{a(t)}h_k(t). \end{cases} \tag{5}$$

2.2. Initial Conditions

By definition, in the static phase, the scale factor is constant. The propagation equation is then the one of a standard harmonic oscillator,

$$v_k''(\eta) + k_c^2 v_k(\eta) = 0, \tag{6}$$

which can be used to set the usual Bunch–Davies vacuum. The initial conditions chosen in this work are therefore of the usual type, comparable to what is done in the remote past of a de Sitter state (inflationary model) or in the remote past of a bouncing scenario. Whatever the considered wavenumber, even in the bouncing case, it is always possible to find a time such that the curvature radius can be neglected: the mode effectively “feels” a Minkowski-like spacetime. As far as initial conditions for the perturbations are concerned, the emergent universe is not different from other usual models. This is true only for tensor modes, as the situation is much trickier for scalar ones [39].

3. Purely Emergent Universe

We model the evolution of an emergent universe by a static phase followed by an inflationary stage:

$$a(t) = A + Ae^{H_0(t-t_{\text{transition}})}, \tag{7}$$

in which A and H_0 are two constants and $t_{\text{transition}}$ characterizes the time at which the transition between the static and the inflationary phase occurs. If we arbitrarily set $t_{\text{transition}} = 0$, without any loss of generality, then the scale factor is simply given by $a(t) = A + Ae^{H_0t}$. The corresponding evolution, with the constants set to $A = 1$ and $H_0 = 0.01$, is plotted in arbitrary units in Figure 1.

Obviously, the constant A in itself has no meaning and can be absorbed in any rescaling of the scale factor. In addition, a modification of the constant in front of the exponential term, such that $a(t) = A + AC_1e^{H_0t}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{*+}$, is simply equivalent to the definition of a new $t_{\text{transition}} = -\ln(C_1)/H_0$.

The primordial tensor power spectrum, defined by:

$$\mathcal{P}_T(k_c) = \frac{32k_c^3}{\pi} \left| \frac{v_k(t_e)}{z_T(t_e)} \right|^2, \tag{8}$$

where t_e refers to a post-inflationary time (chosen so that the considered modes have exited the horizon), can be explicitly calculated for the evolution of the scale factor given by Figure 1. The result, obtained for different values of H_0 , is shown in Figure 2.

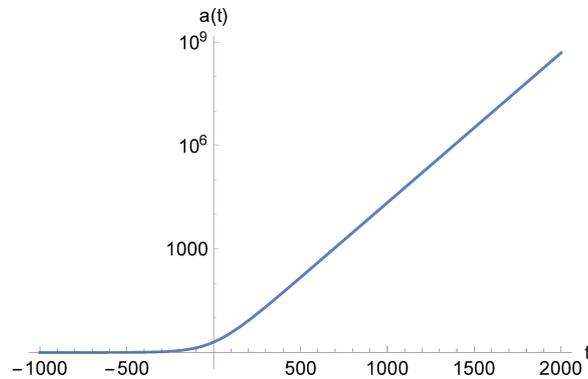


Figure 1. Scale factor evolution with $A = 1$ and $H_0 = 0.01$.

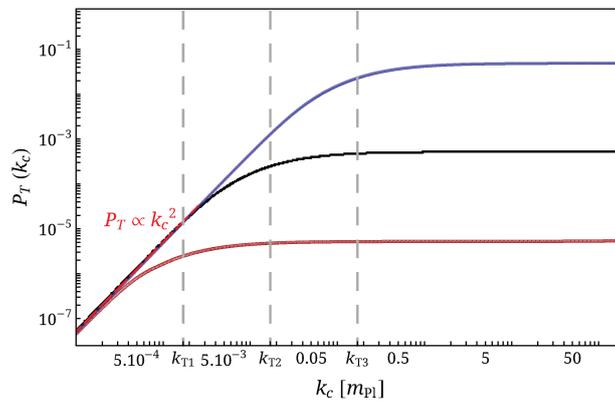


Figure 2. Primordial tensor power spectra from the emergent evolution for different values of H_0 . Lower curve (red): $H_0 = 0.001$; middle curve (black): $H_0 = 0.01$; and upper curve (blue): $H_0 = 0.1$.

Clearly, two regimes do appear in those spectra. First, one can notice a scale-invariant behavior in the ultraviolet (UV), that is for large values of k_c . Then, a power law behavior appears in the infrared (IR), corresponding to low k_c values. The transition scale k_T between those two regimes corresponds to the square root of the tensor potential at the transition time, i.e, at $t = 0$ in our setting. The tensor potential is given by:

$$\frac{z_T''}{z_T} = \ddot{a}a + \dot{a}^2 = A^2 H_0^2 e^{H_0 t} + 2A^2 H_0^2 e^{2H_0 t} \tag{9}$$

and its value at the transition is then:

$$\left. \frac{z_T''}{z_T} \right|_{t=0} = 3A^2 H_0^2 . \tag{10}$$

For example, in the case $H_0 = 0.01$ displayed in the middle curve of Figure 2, the transition scale is $k_{T2} = \sqrt{\left. \frac{z_T''}{z_T} \right|_{t=0}} = \sqrt{3 \cdot 10^{-4}} \simeq 1.7 \times 10^{-2}$. The dependence of the transition scale on H_0 also appears clearly since $k_{T1} \simeq 1.7 \times 10^{-3}$ and $k_{T3} \simeq 1.7 \times 10^{-1}$.

This already raises two basic points. First, the naive view according to which the causal contact made possible by the static phase, where $H = 0$ ($R_H \rightarrow \infty$), would be sufficient to ensure a spectrum compatible with observation is obviously wrong. Inflation (or other processes leading to scale

invariance) is still needed. Second, the way inflation begins does matter and sets the scale above which the spectrum becomes (nearly) flat.

4. Emergent Universe with a Bounce

The previously-considered situation is clearly over-simplified. We now make the model slightly more complicated by adding a “feature” in the evolution of the scale factor before the transition to the inflationary period. As mentioned in the previous section, the interesting—and somehow usually under-estimated—fact about emergent models is that the spectrum does depend on the details of the transition period. Some information on this specific period might therefore be observationally attainable. In addition, some concrete models of quantum gravity lead to a “mini-bounce” before the transition. This is, for example, the case in quantum reduced loop gravity [29,37]. This model was designed to study symmetry reduced systems consistently within the loop quantum gravity framework (see, e.g., [40]). In particular, it bridges the gap between effective cosmological models of loop quantum cosmology [41] and the full theory, addressing the dynamics before any minisuperspace reduction [42]. This basically preserves the graph structure and SU(2) quantum numbers. It was explicitly shown that this model leads to a little bounce (or even to several mini-bounces) preceding the inflationary stage. Beyond this specific case, one can generically expect a footprint in the evolution of the scale factor of whatever physical phenomenon has triggered the transition. In the following, we therefore perturb the scale factor evolution just before the inflationary stage to study how the primordial tensor power spectrum is sensitive to the details of this distortion.

The scale factor evolution is now modeled by the following function:

$$a(t) = A + Ae^{H_0t} + \frac{A \times C}{\arctan(B_1\sigma_1) - \arctan(B_2\sigma_2)} \times \{\arctan[B_1(t - (\mu - \sigma_1))] - \arctan[B_2(t - (\mu - \sigma_2))]\} \tag{11}$$

The constant C characterizes the bounce amplitude, and μ is its mean value; σ_1 and σ_2 allow setting the width, and B_1 and B_2 correspond to the steepness. The term $[\arctan(B\sigma_1) - \arctan(B\sigma_2)]^{-1}$ is just a normalization to ensure that the bounce amplitude remains constant under variations of B, σ_1 , and σ_2 . In the following, we set $B_1 = B_2 = B$, to focus on symmetrical bounces. The influence of an asymmetry is a higher order effect, which is beyond the scope of this study. We also choose $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$. The scale factor is finally expressed as:

$$a(t) = A + Ae^{H_0t} + \frac{A \times C}{2 \arctan(B\sigma)} \times \{\arctan[B(t - (\mu - \sigma))] - \arctan[B(t - (\mu + \sigma))]\} \tag{12}$$

Arbitrarily choosing $A = 1$ and $H_0 = 10^{-2}$, as in the case without any bounce, and fixing $C = 1$, $\mu = -400$, $\sigma = 2$, and $B = 0.4$, the scale factor evolution is displayed in the first panel of Figure 3. The second panel shows the associated tensor potential around the bounce. It is worth noticing that the “sign” of the bounce has no influence on the spectrum. It is displayed in Figure 3 as a local increase of the scale factor, but should we choose the other sign, leading to a decrease of the scale factor, the spectrum would remain the same, as will be shown later.

The primordial tensor power spectrum computed with this background evolution is given in Figure 4.

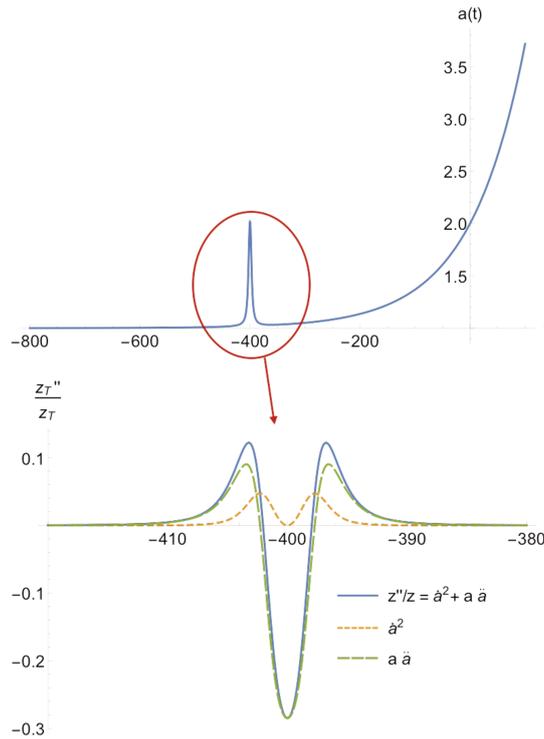


Figure 3. (First panel) Scale factor evolution with one bounce characterized by $C_1 = 1$, $\mu = -400$, $\sigma = 2$, and $B = 0.4$. (Second panel) Tensor potential around the bounce.

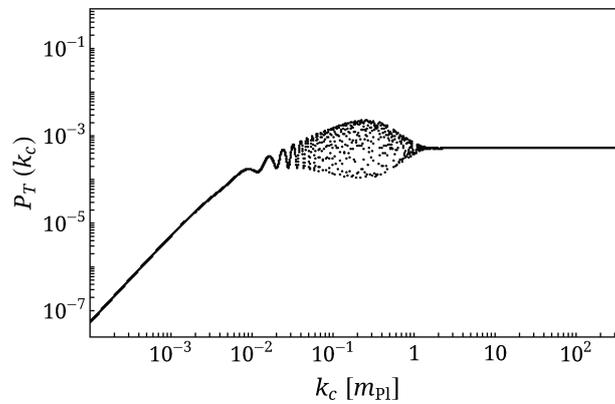


Figure 4. Primordial tensor power spectrum obtained from the scale factor evolution with one bounce characterized by $C = 1$, $\mu = -400$, $\sigma = 2$, and $B = 0.4$.

First, one can notice that the general trend is the same as in the case without bounce, which is not surprising, as the main tendencies are driven by the choice of the initial state and the existence of an inflationary stage. The spectrum is still scale-invariant in the UV and grows proportionally to k_c^2 in the IR. However, the bounce does have an impact on the spectrum: it induces oscillations in the k_c space. The envelope of the oscillations forms a kind of “bullet” in the spectrum. Those oscillations can be traced back to the time evolution of the mode functions, which becomes highly k_c -dependent in the presence of a bounce. This clearly establishes an observational window on the detailed behavior of the Universe close to the emergent time (and even before). This also contradicts a second naive belief according to which whatever happens before inflation is washed out by inflation. The details of the transition regime might be observationally probed.

This spectrum will be the reference one for the rest of this study. We now investigate how it depends (amplitude, IR and UV limits, shape of the “bullet”, etc.) on the different parameters of the model.

As previously mentioned, all the results derived in this work remain valid if the bounce is of negative sign, that is it corresponds to a transition between a (locally) contracting and an expanding phase. A negative bounce of this kind is shown in Figure 5, together with the corresponding potential. The resulting spectrum is displayed in Figure 6 and can hardly be distinguished from the reference one.

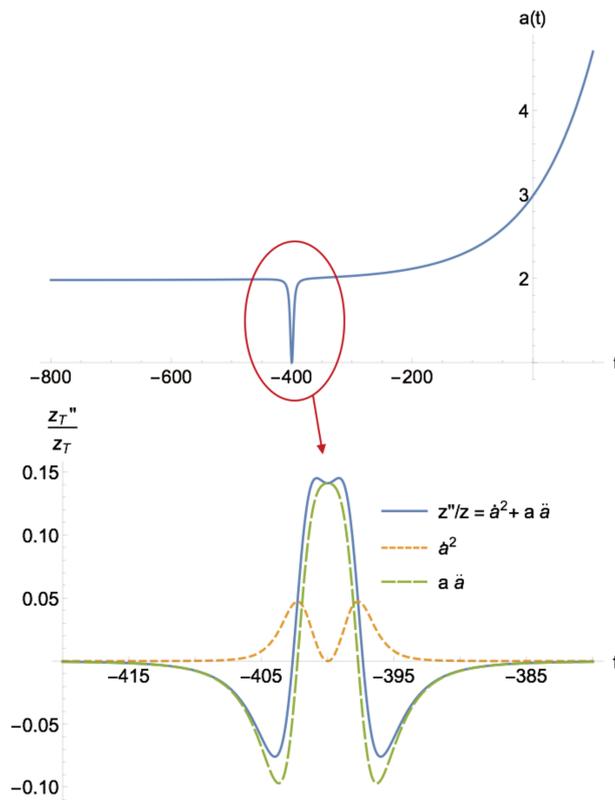


Figure 5. (First panel) Scale factor evolution with one bounce of negative sign characterized by $C = 1$, $\mu = -400$, $\sigma = 2$, and $B = 0.4$. (Second panel) Tensor potential around the bounce.

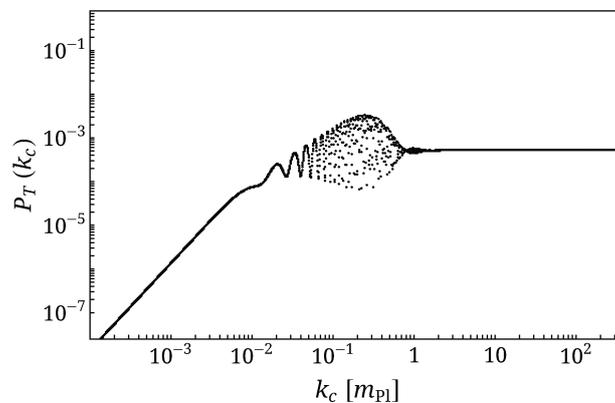


Figure 6. Primordial tensor power spectrum associated with the scale factor evolution with one bounce of negative sign characterized by $C = 1$, $\mu = -400$, $\sigma = 2$, and $B = 0.4$.

4.1. Impact of the Bounce Parameters on the Primordial Tensor Power Spectra

The aim of this section is to study how variations of the bounce parameters B , C , μ , and σ modify the shape of the primordial tensor power spectrum. Even if those oscillations cannot be currently observed, it is still interesting to see if general trends appear. Many experiments are being operated or considered to measure B-modes in the cosmological microwave background (CMB). Since the toy-model presented in this article is basically independent of the details of the quantum cosmology or modified gravity theory considered (as long as the Mukhanov–Sasaki equation remains valid), the results presented can easily be applied or adapted to forthcoming emergent, bouncing, or emergent-bouncing cosmological models.

4.1.1. The Position of the Bounce μ

First, let us study whether the position of the bounce in the static phase plays an important role in the characteristics of the spectrum. To this aim, it is enough to change the value of μ . It appears that the bounce position in the static phase has almost no consequence on the primordial tensor power spectrum. For example, Figure 7 shows the spectrum obtained for a bounce similar to the reference one, but shifted to $\mu = -800$. It can easily be seen that this spectrum is very close to the reference one. The numerical investigations show, beyond this particular example, that the position of the bounce has no significant influence on the spectrum whatever its position in the static phase. This, in principle, opens an observational window on arbitrarily-remote times in the history of the Universe. Once the “instability” is triggered, the time at which it takes place is basically of no relevance.

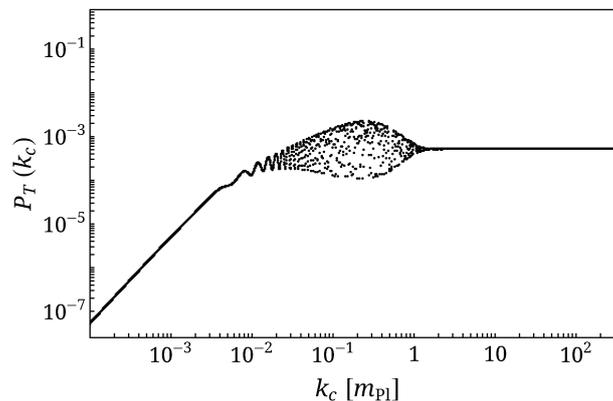


Figure 7. Primordial tensor power spectrum associated with an evolution with a bounce identical to the reference case, i.e., $C = 1$, $\sigma = 2$, and $B = 0.4$, but shifted to $\mu = -800$.

4.1.2. The Steepness of the Bounce B

To study the impact of the bounce steepness, i.e., its “slope”, we vary the parameter B . The bounce dependence on this parameter is presented in Figure 8, together with the associated tensor potentials. Since the tensor potential is highly sensitive to variations of the bounce steepness (as it includes derivatives of the scale factor), only small variations of B are represented.

The larger the value of B , the steeper the bounce. The (local) maximum value of the potential at the bounce thus increases with B . We therefore expect that the range of k_c corresponding to modes impacted by (or sensitive to) the bounce is shifted to higher k_c values compared to the reference case. Let us consider a cosmic evolution where the bounce has been highly steepened when compared to the reference case. We choose $B = 40$ (one hundred times higher than the value of the reference case), the values of the other parameters being the same as in the reference case. The resulting power spectrum is shown in the first panel of Figure 9. The two frequencies appearing in the plot are associated with the two scales of the problem (width of the bounce and rise time of the edge).

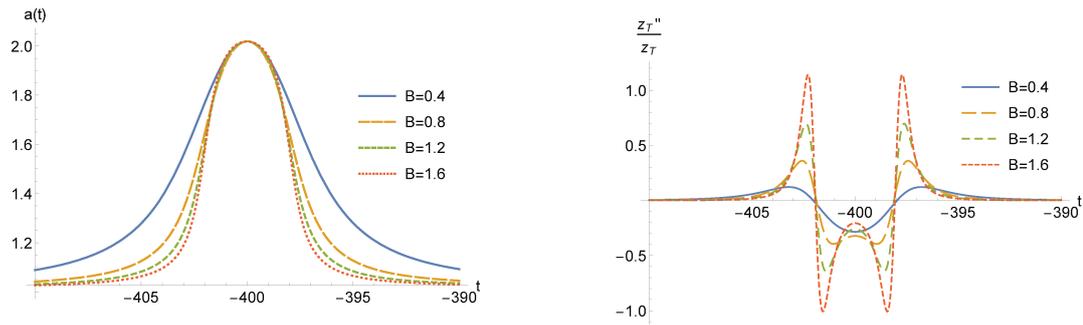


Figure 8. (First panel) Evolution of the scale factor with $C = 1$, $\mu = -400$, $\sigma = 2$, but different values of B . (Second panel) Associated tensor potentials around the bounce.

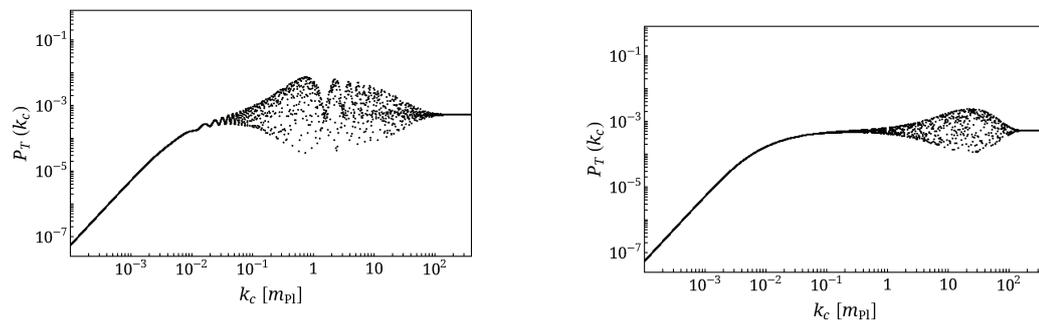


Figure 9. (First panel) Primordial tensor power spectrum obtained with a steep bounce characterized by $C = 1$, $\mu = -400$, $\sigma = 2$, and $B = 40$. (Second panel) Spectrum with a narrower bounce (than in the first panel): $\sigma = 0.02$.

The size of the “bullet” (or range of oscillations) in the k_c space is extended up to higher values. This is an interesting point as the “low”- k_c features are often considered to be hard to probe experimentally. For example, in loop quantum cosmology, deviations from scale invariance, in the form of oscillations, happen in the IR (see [43,44]). They are often considered as extremely difficult to probe as this would require a very high level of fine-tuning. The comobile values of the wavenumbers that can be seen in the CMB are actually set by the duration (number of e-folds) of inflation. In loop quantum cosmology, the interesting IR features can only be seen if this number is arbitrarily set to its lowest experimentally-allowed value [45]. This makes the model difficult to probe unless new specific features appear in the UV, e.g., through trans-Planckian effects [46] or because of a change of signature [47]. The effect underlined here, that is the displacement or widening of the “bullet” to larger values of k_c because of the steepness of the mini-bounce, is therefore of potential observational significance. The specific features might be probed without fine-tuning the number of inflationary e-folds to its lowest allowed value (around $N \sim 60$). It is worth reminding that, in principle, if the evolution starts at the Planck density and if the Universe is filled with a massive scalar field, the number of e-folds can be anything between zero and a few 10^{14} (and remains compatible with observations). In some bouncing cases, this number of e-folds can be predicted [48,49] by the model, but this remains an open issue for emergent scenarios (finding a known probability distribution function for initial conditions is tricky unless the existence of an oscillating phase for the field is demonstrated).

The second panel of Figure 9 corresponds to a reduction of the width of the bounce (by a factor of one hundred) with respect to the previous case. The shape of the distortion gets closer to the reference one but, as expected, the “bullet” is translated toward the higher k_c regime.

Obviously, if the bounce is smoothed (by a decrease of B), the maximum of the tensor potential decreases, and the opposite effect occurs: the oscillations are shifted to the IR regime, which is far less interesting for phenomenology.

A modification of the steepness of the bounce—presumably associated with the triggering of the transition from the static to the inflationary phase—has a strong impact on the shape of the tensor potential at the bounce. The range of comoving modes sensitive to the bounce thus highly depends on the steepness of the evolution of the scale factor. This establishes that, as far as phenomenology is concerned, a very steep bounce is more likely to be observable, even if it occurs in the most remote past of the Universe.

4.1.3. The Amplitude of the Bounce C

We now study the consequences of variations of the bounce amplitude on the primordial tensor spectrum. Figure 10 displays, in the first panel, the effect of a variation of the factor C entering the scale factor evolution. The second panel shows the associated potentials.

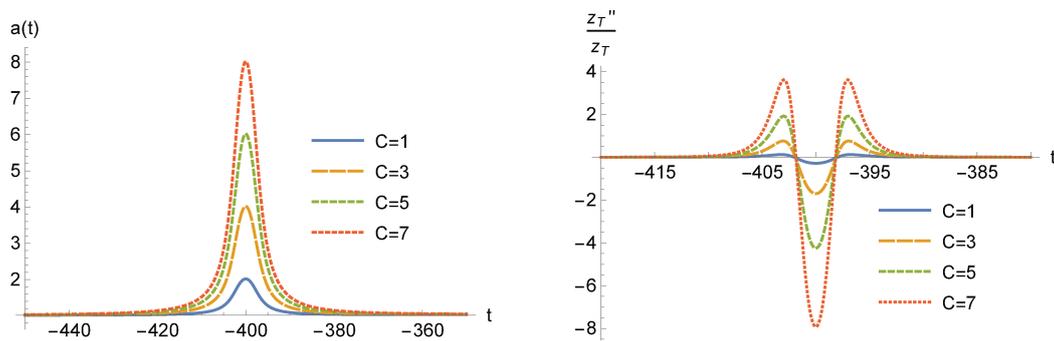


Figure 10. (First panel) Scale factor evolution around the bounce. From bottom to top: increasing values of C . (Second panel) Associated tensor potentials.

The amplitude of the bounce in itself has no meaning. The important parameter is the ratio between the extremal value of the scale factor at the bounce and its value in the static phase. This is the relevant parameter, which is varied.

The primordial tensor power spectra, for A , H_0 , B , and σ taken as in the reference case but for different values of the bounce amplitude, given by $C = 0.1$, $C = 1$ (reference case), and $C = 10$, are shown in Figure 11. It can easily be seen that an increase in the amplitude of the bounce amplifies the oscillations in the k_c space. This both opens a possible observational window and allows, in principle, putting constraints on the amplitude of the bounce using upper limits on the tensor-scalar ratio.

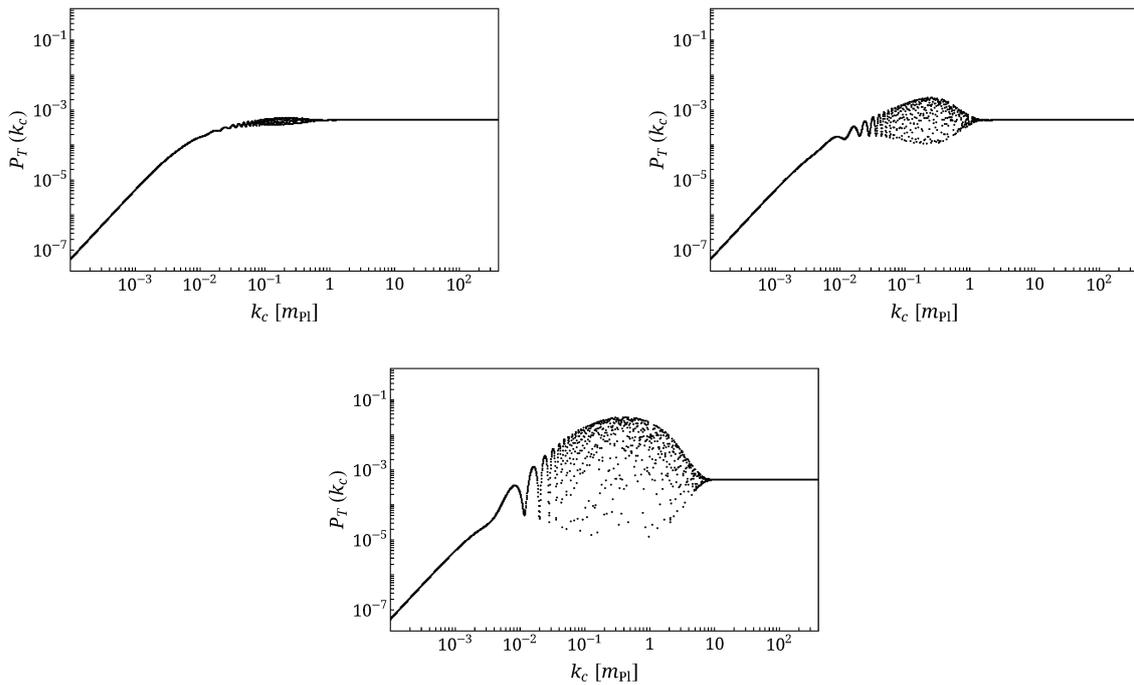


Figure 11. Primordial tensor spectra for different values of the bounce amplitude \mathcal{C} , the other parameters being unchanged with respect to the reference case. (First panel) $\mathcal{C} = 0.1$, (Second panel) $\mathcal{C} = 1$ (reference case), and (Third panel) $\mathcal{C} = 10$.

4.1.4. The Width of the Bounce σ

We turn to the study of the bounce width. The considered variations and their consequences on the tensor potential are shown in Figure 12.

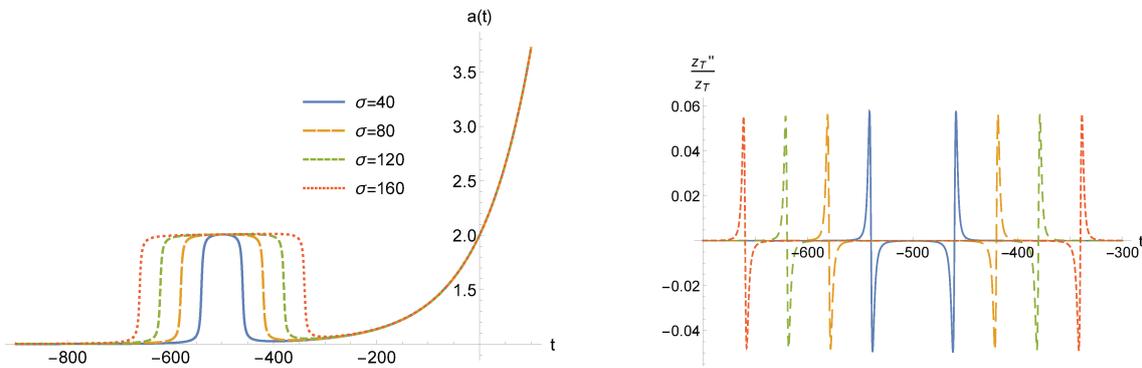


Figure 12. (First panel) Evolution of the scale factor with a bounce centered on $\mu = -500$ and different values of σ . The other parameters of the model are unchanged with respect to the reference case. (Second panel) Associated tensor potentials.

The impact of a modification of the width of bounce on the primordial tensor spectrum is shown in Figure 13. For clarity and without any explicit consequence, the bounce position has been shifted to $\mu = -500$. The values of σ are varied, the amplitude and the steepness remaining, as usual, unchanged. The main characteristics of the power spectrum are not significantly affected. Unless compensating for the steepness variation, as explained previously, the width of the bounce is unlikely to produce any spectacular observational consequence.

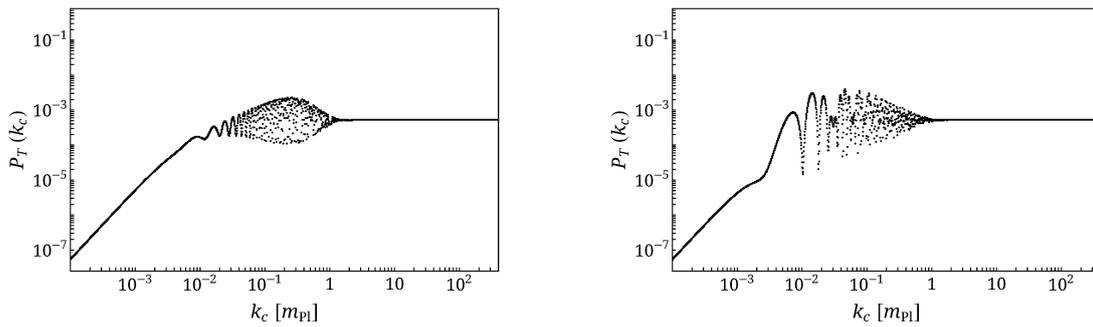


Figure 13. (First panel) Spectrum of reference. (Second panel) Spectrum with a wider bounce described by $\sigma = 100$ and shifted to $\mu = -500$, the other bounce parameters remaining unchanged with respect to the reference case.

4.2. Impact of the Parameters Unrelated to the Bounce

4.2.1. The Hubble Parameter during Inflation H_0

In this section, we focus on the consequences of the inflationary stage on the tensor spectrum. As is well known, a long enough inflationary phase leads, when combined with an appropriate choice of initial vacuum, to a scale-invariant spectrum. We have varied H_0 and studied the impact on the spectrum. The results for $H_0 = 0.01$, $H_0 = 0.1$, and $H_0 = 1$ are given in Figure 14.

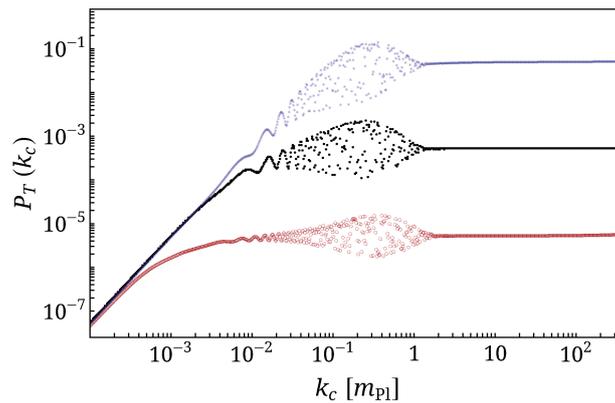


Figure 14. Primordial tensor power spectra obtained from an evolution with a bounce characterized by $C = 1$, $\mu = -400$, $\sigma = 2$, and $B = 0.4$, and three different values of the Hubble parameter during inflation. From top to bottom: $H_0 = 0.1$ (blue stars), $H_0 = 0.01$ (reference case, black disks), and $H_0 = 0.001$ (red circles).

Changing the value of H_0 modifies the amplitude of the power spectrum in the ultraviolet regime. More precisely, exactly as expected, the power is proportional to H_0^2 , as in standard cosmology. Varying the value of the Hubble parameter does not change the picture beyond any standard and expected effect.

4.2.2. The Normalization of the Scale Factor

In this section, H_0 is kept fixed to $H_0 = 0.01$, and we investigate the impact of the variations of the constant A . In principle, this is just an unphysical rescaling of the scale factor. However, the case of effective quantum cosmology is slightly more subtle, as an extra fundamental scale (presumably of the order of the Planck length) might enter the game. This is not the case in the toy model we consider here, but this is clearly the case in quantum reduced loop gravity [29,37]. In this situation, the conjugate variables (a and H) should not be understood as describing the Universe as a whole, but instead as referring to a fundamental (or elementary) cell [50,51]. To make the use of our results

simple in another context, we therefore present in Figure 15 the effects of a variation of the constant A . As expected, a rescaling of the scale factor just shifts the spectrum such that the physical wavenumber values remain unchanged.

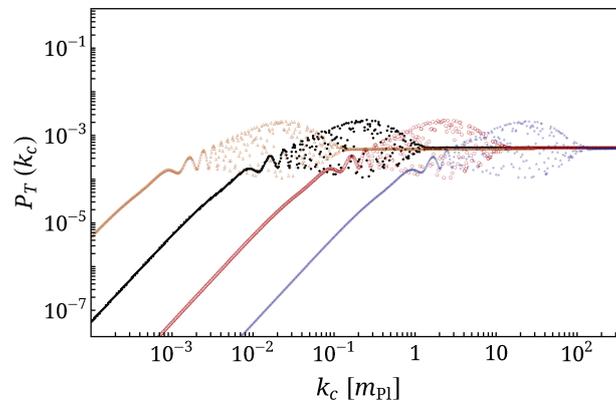


Figure 15. Primordial tensor power spectra obtained from an evolution with a bounce characterized by $C = 1$, $\mu = -600$, $\sigma = 2$, and $B = 0.4$, and different values of A . From left to right: $A = 0.1$ (orange triangles), $A = 1$ (reference case, black disks), $A = 10$ (red circles) and $A = 100$ (blue stars).

5. Multiple Bounces

It is worth considering, in addition to the first reference bounce, another perturbation of the scale factor in the static phase, that is a scale factor given by:

$$\begin{aligned}
 a(t) = & A + Ae^{H_0 t} + A \frac{C}{2 \arctan(B\sigma)} \times \\
 & \{ \arctan [B(t - (\mu - \sigma))] - \arctan [B(t - (\mu + \sigma))] \} \\
 & + A \frac{C^*}{2 \arctan(B^*\sigma^*)} \{ \arctan [B^*(t - (\mu^* - \sigma^*))] \\
 & - \arctan [B^*(t - (\mu^* + \sigma^*))] \} ,
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

in which the parameters labeled with the “*” symbol are the analogues of C , B , μ , and σ for the new additional bounce. Once again, although this possibility is in principle generic and fully phenomenological, it is also motivated by some quantum gravity results.

The spectrum corresponding to an evolution with two bounces of different steepnesses is shown in Figure 16. One can notice the presence of two “bullet” features, one for each bounce of the scale factor. It is possible to vary the characteristics of each bounce, thus the characteristics of each “bullet”, independently by adjusting the parameters appropriately. If the two bounces have the same width, even if their positions are far from the one another, then the two bumps are perfectly superposed in the spectrum. If, however, the shapes of the bounces differ, they might be distinguishable in the tensor spectrum, and observational footprints of the details of the transition phase might be expected.

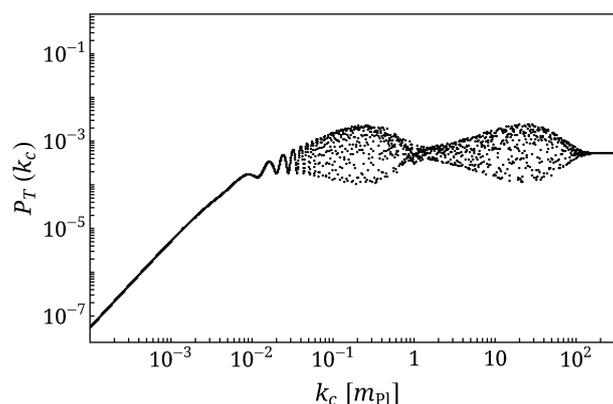


Figure 16. Primordial tensor power spectrum obtained from an evolution with two bounces of different steepness, the first one being described by $C = 1$, $\mu = -400$, $\sigma = 2$, and $B = 0.4$ and the second by $C^* = 1$, $\mu^* = -400$, $\sigma^* = 2$, and $B^* = 40$. The Hubble parameter during inflation is $H_0 = 0.01$.

6. Conclusions

In this article, we have clarified some general properties of the primordial cosmological tensor power spectrum in emergent models. Following a purely phenomenological approach, we have studied how different features in the behavior of the scale factor around the transition time (or before) can affect the spectrum. The main results are the following:

- in and of itself, the existence of a static phase in the remote past of the Universe does not lead to a scale-invariant power spectrum.
- if the static phase is followed by a long enough stage of inflation, the spectrum might become flat in the observable range of wavenumbers.
- the consequences of the details of the evolution of the scale factor around the transition time, modeled as a mini-bounce (or anti-bounce), are not erased by inflation and appear as a “bullet” feature in the spectrum.
- the position of the mini-bounce has only a small influence on the shape of the “bullet”, but its steepness and amplitude control, respectively, the comobile position and the size of the bullet.
- multiple bounces can leave complex features in the spectrum. Bounces with different characteristics might leave distinguishable imprints in the tensor spectrum.

This work establishes that non-trivial features occurring at the transition time in an emergent universe might be detectable in the primordial tensor spectrum. The detection of the CMB B-modes is a very active field involving big collaborations. On the ground, progress is expected from the BICEP2 POLARBEAR (now grouped into Stage 4) experiments and, in space, potentially from LiteBIRD. At this stage, trying to detect those modes is probably the best path toward finding traces of quantum gravity effects in the CMB. The features studied in this work may therefore be observable in the not so distant future, if the duration and energy scale of inflation are favorable.

It would clearly be interesting to go beyond the tensor spectrum and to investigate scalar perturbations that are currently observed. This, however, requires an explicit specific model as the evolution of the scale factor is no longer enough to compute the evolution of perturbations.

Author Contributions: conceptualization, K.M. and A.B.; methodology, K.M. and A.B.; software, K.M.; validation, K.M.; formal analysis, K.M. and A.B.; investigation, K.M. and A.B.; resources, A.B.; writing—original draft preparation, K.M. and A.B.; writing—review and editing, K.M. and A.B.; project administration, A.B.

Funding: This research received no external funding.

Acknowledgments: K.M. is supported by a grant from the CFM foundation.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

References

1. Borde, A.; Vilenkin, A. Eternal inflation and the initial singularity. *Phys. Rev. Lett.* **1994**, *72*, 3305–3309. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
2. Borde, A.; Vilenkin, A. Singularities in Inflationary Cosmology: A Review. *Int. J. Mod. Phys. D* **1996**, *5*, 813–824. [[CrossRef](#)]
3. Brandenberger, R.; Peter, P. Bouncing cosmologies: Progress and problems. *Found. Phys.* **2017**, *47*, 797–850. [[CrossRef](#)]
4. Peter, P.; Pinto-Neto, N. Has the Universe always expanded? *Phys. Rev. D* **2002**, *65*, 023513. [[CrossRef](#)]
5. Falciano, F.T.; Lilley, M.; Peter, P. Primordial Black Holes from Inflaton Fragmentation into Oscillons. *Phys. Rev. D* **2008**, *77*, 083513. [[CrossRef](#)]
6. Lin, C.; Brandenberger, R.H.; Perreault Levasseur, L. A Matter Bounce By Means of Ghost Condensation. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2011**, *2011*, 19. [[CrossRef](#)]
7. Qiu, T.; Evslin, J.; Cai, Y.-F.; Li, M.; Zhang, X. Bouncing Galileon Cosmologies. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2011**, *2011*, 36. [[CrossRef](#)]
8. Kounnas, C.; Partouche, H.; Toumbas, N. Thermal duality and non-singular cosmology in d-dimensional superstrings. *Nucl. Phys. B* **2012**, *855*, 280–307. [[CrossRef](#)]
9. Cai, Y.-F.; Qiu, T.; Piao, Y.-S.; Li, M.; Zhang, X. Bouncing Universe with Quintom Matter. *J. High Energy Phys.* **2007**, *2007*, 71. [[CrossRef](#)]
10. Biswas, T.; Mazumdar, A.; Siegel, W. Bouncing Universes in String-inspired Gravity. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2006**, *2006*, 9. [[CrossRef](#)]
11. Biswas, T.; Brandenberger, R.; Mazumdar, A.; Siegel, W. Reconstruction of the Scalar-Tensor Lagrangian from a Λ CDM Background and Noether Symmetry. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2007**, *2007*, 11. [[CrossRef](#)]
12. Langlois, D.; Naruko, A. Bouncing cosmologies in massive gravity on de Sitter. *Class. Quant. Grav.* **2013**, *30*, 205012. [[CrossRef](#)]
13. Koehn, M.; Lehnert, J.-L.; Ovrut, B.A. A Cosmological Super-Bounce. *Phys. Rev. D* **2014**, *90*, 025005. [[CrossRef](#)]
14. Bojowald, M. Absence of Singularity in Loop Quantum Cosmology. *Phys. Rev. Lett.* **2001**, *86*, 5227–5230. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
15. Ashtekar, A.; Barrau, A. Loop quantum cosmology: From pre-inflationary dynamics to observations. *Class. Quant. Grav.* **2015**, *32*, 234001. [[CrossRef](#)]
16. Khoury, J.; Ovrut, B.A.; Steinhardt, P.J.; Turok, N. The Ekpyrotic Universe: Colliding Branes and the Origin of the Hot Big Bang. *Phys. Rev. D* **2001**, *64*, 123522. [[CrossRef](#)]
17. Steinhardt, P.J.; Turok, N. Cosmic Evolution in a Cyclic Universe. *Phys. Rev. D* **2002**, *65*, 126003. [[CrossRef](#)]
18. Battefeld, T.; Watson, S. String Gas Cosmology. *Rev. Mod. Phys.* **2006**, *78*, 435. [[CrossRef](#)]
19. Barceló, C.; Carballo-Rubio, R.; Garay, L.J. Gravitational echoes from macroscopic quantum gravity effects. *J. High Energy Phys.* **2017**, *2017*, 54. [[CrossRef](#)]
20. Beesham, A.; Chervon, S.V.; Maharaj, S.D. An emergent universe supported by a nonlinear sigma model. *Class. Quant. Grav.* **2009**, *26*, 075017. [[CrossRef](#)]
21. Wu, P.; Yu, H.W. Emergent universe from the Horava-Lifshitz gravity. *Phys. Rev. D* **2010**, *81*, 103522. [[CrossRef](#)]
22. Mukerji, S.; Chakraborty, S. Emergent universe in Horava gravity. *Astrophys. Space Sci.* **2011**, *331*, 665–671. [[CrossRef](#)]
23. Mukerji, S.; Chakraborty, S. Emergent Universe in Einstein-Gauss-Bonnet Theory. *Int. J. Theor. Phys.* **2010**, *49*, 2446–2455. [[CrossRef](#)]
24. Paul, B.C.; Ghose, S.; Thakur, P. Emergent Universe from A Composition of Matter, Exotic Matter and Dark Energy. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **2011**, *413*, 686–690. [[CrossRef](#)]
25. Debnath, U.; Chakraborty, S. Emergent Universe with Exotic Matter in Brane World Scenario. *Int. J. Theor. Phys.* **2011**, *50*, 2892–2898. [[CrossRef](#)]
26. Rudra, P. Emergent Universe with Exotic Matter in Loop Quantum Cosmology, DGP Brane World and Kaluza-Klein Cosmology. *Mod. Phys. Lett. A* **2012**, *27*, 1250189. [[CrossRef](#)]
27. Chakraborty, S. Is Emergent Universe a Consequence of Particle Creation Process? *Phys. Lett. B* **2014**, *732*, 81–84. [[CrossRef](#)]

28. Perez, A.; Sudarsky, D.; Bjorken, J.D. A microscopic model for an emergent cosmological constant. *arXiv* **2018**, arXiv:1804.07162.
29. Alesci, E.; Botta, G.; Cianfrani, F.; Liberati, S. Cosmological singularity resolution from quantum gravity: The emergent-bouncing universe *Phys. Rev. D* **2017**, *96*, 046008. [[CrossRef](#)]
30. Cai, Y.-F.; Li, M.; Zhang, X. Emergent Universe Scenario via Quintom Matter. *Phys. Lett. B* **2012**, *718*, 248–254. [[CrossRef](#)]
31. Cai, Y.-F.; Wan, Y.; Zhang, X. Cosmology of the Spinor Emergent Universe and Scale-invariant Perturbations. *Phys. Lett. B* **2014**, *731*, 217–226. [[CrossRef](#)]
32. Paul, B.C.; Thakur, P. Observational Constraints on EoS parameters of Emergent Universe. *Astrophys. Space Sci.* **2017**, *362*, 73. [[CrossRef](#)]
33. Labraña, P. Emergent universe scenario and the low CMB multipoles. *Phys. Rev. D* **2015**, *91*, 083534. [[CrossRef](#)]
34. Zhang, K.; Wu, P.; Yu, H. Emergent universe in spatially flat cosmological model. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2014**, *2014*, 48. [[CrossRef](#)]
35. Ghose, S.; Thakur, P.; Paul, B.C. Observational Constraints on the Model Parameters of a Class of Emergent Universe. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **2012**, *421*, 20–24. [[CrossRef](#)]
36. del Campo, S.; Guendelman, E.I.; Herrera, R.; Labrana, P. Emerging Universe from Scale Invariance. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2010**, *2010*, 26. [[CrossRef](#)]
37. Alesci, E.; Barrau, A.; Botta, G.; Martineau, K.; Stagno, G. Phenomenology of Quantum Reduced Loop Gravity in the isotropic cosmological sector. *arXiv* **2018**, arXiv:1808.10225.
38. Bolliet, B.; Barrau, A.; Martineau, K.; Moulin, F. Some Clarifications on the Duration of Inflation in Loop Quantum Cosmology. *Class. Quant. Grav.* **2017**, *34*, 145003. [[CrossRef](#)]
39. Barrau, A.; Jamet, P.; Martineau, K.; Moulin, F. Scalar spectra of primordial perturbations in loop quantum cosmology. *Phys. Rev. D* **2018**, *98*, 086003. [[CrossRef](#)]
40. Rovelli, C. Zakopane lectures on loop gravity. *arXiv* **2011**, arXiv:1102.3660.
41. Ashtekar, A.; Singh, P. Loop Quantum Cosmology: A Status Report. *Class. Quant. Grav.* **2011**, *28*, 213001. [[CrossRef](#)]
42. Alesci, E.; Cianfrani, F. Loop Quantum Cosmology from Loop Quantum Gravity. *Europhys. Lett.* **2015**, *111*, 40002. [[CrossRef](#)]
43. Ashtekar, A.; Wilson-Ewing, E. Loop quantum cosmology of Bianchi I models. *Phys. Rev. D* **2009**, *79*, 083535. [[CrossRef](#)]
44. Bolliet, B.; Grain, J.; Stahl, C.; Linsefors, L.; Barrau, A. Comparison of primordial tensor power spectra from the deformed algebra and dressed metric approaches in loop quantum cosmology. *Phys. Rev. D* **2015**, *91*, 084035. [[CrossRef](#)]
45. Barrau, A.; Bolliet, B. Some conceptual issues in loop quantum cosmology. *arXiv* **2016**, arXiv:1602.04452.
46. Martineau, K.; Barrau, A.; Grain, J. A first step towards the inflationary trans-Planckian problem treatment in Loop Quantum Cosmology. *Int. J. Mod. Phys. D* **2018**, *27*, 1850067. [[CrossRef](#)]
47. Schander, S.; Barrau, A.; Bolliet, B.; Linsefors, L.; Mielczarek, J.; Grain, J. Primordial scalar power spectrum from the Euclidean Big Bounce. *Phys. Rev. D* **2016**, *93*, 023531. [[CrossRef](#)]
48. Linsefors, L.; Barrau, A. Duration of inflation and conditions at the bounce as a prediction of effective isotropic loop quantum cosmology. *Phys. Rev. D* **2013**, *87*, 123509. [[CrossRef](#)]
49. Martineau, K.; Barrau, A.; Schander, S. Detailed investigation of the duration of inflation in loop quantum cosmology for a Bianchi-I universe with different inflaton potentials and initial conditions. *Phys. Rev. D* **2017**, *95*, 083507. [[CrossRef](#)]
50. Barrau, A.; Bojowald, M.; Calcagni, G.; Grain, J.; Kagan, M. Anomaly-free cosmological perturbations in effective canonical quantum gravity. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2015**, *2015*, 51. [[CrossRef](#)]
51. Bojowald, M. Quantum cosmology: A review. *Rept. Prog. Phys.* **2015**, *78*, 023901. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]



CHAPITRE 4

Phénoménologie des trous noirs en gravité quantique à boucles

Sommaire

4.1	Une brève introduction à la physique des trous noirs	194
4.2	Trous noirs en gravitation quantique à boucles	201
4.3	Trous noirs en rebond	202
4.4	Coefficients de corps gris	211
4.5	Ondes gravitationnelles et gravité quantique	227
4.6	Matière noire sous forme de reliques de Planck	243
4.7	Synthèse de la phénoménologie associée aux trous noirs en gravitation quantique à boucles	251

Non contents de faire partie des objets les plus étranges et les plus fascinants de l'Univers, les trous noirs constituent également des sondes privilégiées pour tester la relativité générale et ses possibles extensions. Solution des équations d'Einstein dans le vide ils sont les seuls objets connus ne possédant aucune échelle propre : ils peuvent exister à toutes les masses, depuis la masse de Planck jusqu'à la masse de Hubble. Quelques revues récentes peuvent être trouvées dans [145, 146, 147].

Bien que les trous noirs aient été envisagés, d'un point de conceptuel, dès la fin du dix-huitième siècle, il aura fallu attendre la relativité générale pour les comprendre plus en détails. Cela ne fait que quelques décennies qu'ils sont rentrés dans le quotidien de la science. Ils sont même devenus aujourd'hui des astres avec un caractère presque "banal", observés à la fois via les disques d'accrétion qui se déploient autour d'eux [148, 149], par les jets de particules relativistes qu'ils émettent [149], par les ondes gravitationnelles qu'ils produisent lors de coalescences [150, 151] et par imagerie directe (en recourant à l'interférométrie) dans le domaine des radiofréquences [152].

Dans ce chapitre nous nous intéresserons à la phénoménologie associée aux trous noirs en gravitation quantique à boucles. Celle-ci intervient sur une grande variété de fronts : de l'évaporation de Hawking aux ondes gravitationnelles, en passant par matière noire, la phénoménologie associée aux

trous noirs est un domaine riche.

Après une courte introduction à la physique des trous noirs section 4.1 nous aborderons de manière plus succincte encore leur traitement en gravitation quantique à boucles en section 4.2. À la suite de cette composante introductive nous attaquerons la partie dédiée à nos travaux. Nous aborderons tout d'abord section 4.3 le cas des trous noirs en rebond où nous montrerons notamment l'importance du caractère stochastique du temps de rebond pour la phénoménologie associée. Nous calculerons ensuite section 4.4 les coefficients de corps gris entrant dans l'expression du spectre d'évaporation d'un trou noir pour une métrique inspirée de la LQG. La section 4.5 sera dédiée au lien entre gravitation quantique et ondes gravitationnelles. Elle traitera d'une part ce que je juge comme notre contribution principale à ce domaine : l'étude systématique de la dépendance des modes dits quasi-normaux à des perturbations spécifiques de la métrique au niveau de l'horizon. D'autre part nous verrons comment la distance de luminosité, paramètre d'importance pour toutes mesures de flux ou d'ondes gravitationnelles, évolue dans un Univers en contraction. Dans la section 4.6 nous traiterons de la création de trous noirs primordiaux par diffusion de particules trans-planckiennes dans l'Univers primordial. Enfin la section 4.7 sera tout simplement constituée d'une revue résumant la phénoménologie qui a été effectuée jusqu'alors sur les trous noirs en gravitation quantique à boucles.

4.1 Une brève introduction à la physique des trous noirs

4.1.1 La métrique de Schwarzschild

L'enjeu consiste à chercher une métrique statique et à symétrie sphérique dans le but de décrire la géométrie autour de la plupart des astres. Elle peut s'écrire sous la forme

$$ds^2 = e^{2\phi} dt^2 - e^{2\Lambda} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (4.1)$$

La démarche est analogue à celle effectuée pour la cosmologie. Les symétries avaient alors permis d'écrire la forme générale de la métrique FLRW, puis les équations d'Einstein conduisirent à déterminer le seul paramètre libre qui y demeurait : le facteur d'échelle, dont les équations de Friedmann permettent de connaître le comportement en fonction du contenu en énergie. De la même manière il nous faut ici recourir aux équations d'Einstein pour déterminer les paramètres des fonctions exponentielles. Il est possible de montrer que la composante (00) conduit à

$$e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (4.2)$$

où M est la masse du corps considéré, tandis que la composante (11) conduit quant-à-elle à

$$\phi = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (4.3)$$

Cela nous permet d'écrire la métrique de Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (4.4)$$

Cette métrique n'est pas spécifique aux trous noirs, elle décrit l'espace-temps au voisinage de tout corps massif sphérique et statique. Introduisons le **rayon de Schwarzschild** $R_s = 2M$. Un trou noir est un objet tel que la région $r < 2M$ soit effectivement accessible. Pour la Terre ou le Soleil, la sphère $r = 2M$ est très largement à l'intérieur de l'astre : ce ne sont pas des trous noirs. Et ils ne le

deviendraient pas, même pour un spéléologue qui creuserait vers le centre, puisque la masse contenue dans la sphère de Gauss diminuerait de telle façon qu'il n'atteindrait jamais $r = 2M$.

Il est amusant de constater que l'argument strictement non relativiste qui consiste à estimer le rayon gravitationnel définissant l'horizon¹, en demandant que la vitesse de libération soit égale à celle de la lumière conduit, fortuitement, au bon résultat : $R_s = 2M$.

Remarque : Il peut être utile, notamment pour la phénoménologie, d'avoir en mémoire que le rayon de Schwarzschild (exprimé en mètres) d'un trou noir de masse M vaut $R_s \simeq 3 \times 10^3 \times (M/M_\odot)$ m et $M_\odot \simeq 10^{33}g$ étant la masse du soleil.

Un autre calcul illicite conduit également à un résultat étonnamment proche de la vérité : celui de l'énergie d'une particule de masse m en chute libre sur un trou noir lorsqu'elle parvient à l'horizon. L'estimation simpliste $E = mM/(2M) = m/2$ nous dit que l'énergie atteinte par la particule avant de pénétrer dans le trou noir correspond à la moitié de son énergie de masse. C'est une valeur énorme (ici un peu surestimée), considérablement supérieure par exemple à l'énergie libérée lors d'une fusion nucléaire. C'est pourquoi les quasars, ces trous noirs supermassifs entourés de disques d'accrétion qui sont au centre des galaxies, sont parmi les objets les plus brillants de l'Univers. La gravitation est certes une force faible en termes de couplage mais l'énergie qui y est associée à la surface des trous noirs est sans équivalent en astrophysique.

Remarque : En relativité générale, un trou noir est décrit par 3 paramètres [153] : sa masse, son moment angulaire et sa charge électrique. La métrique intégrant ces paramètres, dite de Kerr-Newman, est considérablement plus complexe que celle de Schwarzschild. Les effets quantiques présentés dans cette thèse n'ayant été considérés que dans le cas des trous noirs dépourvus de rotation et de charge, nous nous focaliserons dans cette introduction sur la seule métrique de Schwarzschild. C'est une hypothèse relativement lourde puisqu'elle correspond *stricto sensu* à une zone de mesure nulle dans l'espace des paramètres physiques.

4.1.2 Quelques propriétés très élémentaires

Il est bon de constater que la métrique de Schwarzschild présente les bons comportements asymptotiques : elle se ramène à celle de Minkowski pour $r \rightarrow \infty$ et $M \rightarrow 0$. Le facteur $(1 - \frac{2M}{r})$ présent devant le dr^2 montre que la circonférence mesurée d'un corps massif sphérique n'est pas égale à son rayon multiplié par $2\pi^2$. Le facteur $(1 - \frac{2M}{r})^{-1}$ présent devant le dt^2 témoigne quant-à-lui du décalage vers le rouge (ou "*redshift*") gravitationnel. C'est ce terme qui permet d'associer les trous noirs à des machines à voyager dans le futur pour qui réside au voisinage de l'horizon.

Vitesse à l'horizon

Considérons la trajectoire d'une particule en chute libre émettrice qui émettrait des "flashes" de lumière dans la géométrie de Schwarzschild. La quantité conservée lors du mouvement, l'énergie, s'écrit

1. Nous n'effectuons pour le moment pas de distinction entre les différents types d'horizons. Ils seront introduits ultérieurement en fonction des besoins.

2. Pour la Terre la différence serait de l'ordre du millimètre.

$$E = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau}, \quad (4.5)$$

où τ est le temps propre.

Considérons maintenant une particule au repos à l'infini. Son énergie est tout simplement $E = m$. Par conséquent, en utilisant Eq.(4.5), il vient :

$$\left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{dt}{d\tau} = 1. \quad (4.6)$$

Insérons cette expression dans la métrique de Schwarzschild :

$$d\tau^2 = ds^2 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) - \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2, \quad (4.7)$$

ce qui conduit à³

$$\frac{dr}{dt} = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2}. \quad (4.8)$$

Introduisons maintenant un nouveau jeu de coordonnées dites "coquilles", définies par

$$dt_{\text{coq}} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{1/2} dt \quad (4.9)$$

et

$$dr_{\text{coq}} = \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1/2} dr. \quad (4.10)$$

L'équation Eq.(4.8) s'écrit alors :

$$\frac{dr_{\text{coq}}}{dt_{\text{coq}}} = - \left(\frac{2M}{r} \right)^{1/2}. \quad (4.11)$$

Le point nodal tient à ce que la vitesse donnée par Eq.(4.8) tend vers 0 à l'horizon tandis que celle donnée par Eq.(4.11) tend vers -1 (c'est-à-dire la vitesse de la lumière, avec un signe "-" puisque la particule tombe vers le trou noir). On démontre donc ainsi facilement que l'observateur local voit un objet en chute libre sur un trou noir pénétrer dans celui-ci à la vitesse de la lumière tandis que l'observateur lointain l'observe se figeant sur l'horizon. Bien que radicalement opposés les deux points de vue sont corrects et cohérents dans leurs référentiels respectifs.

L'horizon correspond-il à une singularité ?

Une autre question importante à laquelle une réponse très simple peut être donnée est celle de la singularité de l'horizon. La métrique de Schwarzschild semble être singulière en $R = 2M$. Le terme en facteur de dr^2 tend vers l'infini à l'horizon. Considérons les coordonnées "en chute libre". Elles sont définies, de façon différentielle, pas une transformation de Lorentz à partir des coordonnées "coquilles" :

3. Nous considérons la solution négative car nous nous intéressons à une particule qui tombe vers le trou noir et pour laquelle r diminue.

$$dt_{chute} = -\gamma V_{rel} dr_{coq} + \gamma dt_{coq}, \quad (4.12)$$

où $V_{rel} = dr_{coq}/dt_{coq}$ est la vitesse relative locale entre les deux référentiels. En utilisant les définitions Eqs. (4.9) et (4.10) nous obtenons :

$$dt = \frac{dt_{chute}}{\gamma \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}} + \frac{V_{rel} dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}. \quad (4.13)$$

En remplaçant γ par sa valeur $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}$ et en reportant Eq.(4.13) dans la métrique de Schwarzschild, ainsi qu'en utilisant Eq.(4.11) pour exprimer V_{rel} , nous parvenons à :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt_{chute}^2 - 2 \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt_{chute} dr - dr^2. \quad (4.14)$$

Bien que cette dernière expression utilise un système de coordonnées mixte assez peu pratique, elle montre que la singularité à l'horizon était un artefact dû au système de coordonnées initial et qu'elle est dépourvue de sens physique. La singularité centrale est en revanche belle et bien réelle⁴.

Propriétés basiques de l'intérieur

Étudions le comportement de lumière en mouvement radial à l'intérieur d'un trou noir. Pour ce faire, repartons de la métrique Eq.(4.14). Pour un photon $ds^2 = 0$, ce qui conduit à :

$$\frac{dr^2}{dt_{chute}^2} + 2 \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \frac{dr}{dt_{chute}} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0. \quad (4.15)$$

Cette équation du second degré possède deux solutions :

$$\frac{dr}{dt_{chute}} = - \left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \pm 1, \quad (4.16)$$

qui correspondent respectivement au mouvement "vers l'extérieur" et au mouvement "vers le centre". Or à l'intérieur de l'horizon $r < 2M$ et les deux solutions sont alors manifestement négatives. Ce qui signifie que même un photon émis "vers l'extérieur" se déplace vers la singularité centrale. Rien de surprenant, nous retrouvons juste ici le résultat bien établi qui stipule qu'il est impossible de ressortir d'un trou noir, rien ne pouvant se déplacer plus vite que la lumière.

Il est également intéressant de considérer le mouvement, à l'intérieur du trou noir d'une particule lancée sans vitesse à l'infini. En reprenant Eq.(4.8) et en introduisant le temps propre τ , tel que $dr/d\tau = -(2M/r)^{1/2}$, le temps propre passé à l'intérieur du trou noir est évalué par :

$$\tau = - \int_{2M}^0 \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} dr = \frac{4}{3}M. \quad (4.17)$$

Un objet en chute libre dans un trou noir atteint donc la singularité en un temps fini et non nul. L'horizon étant, en relativité générale, dépourvu de matérialité (nous n'abordons pas dans ce manuscrit l'hypothèse des firewalls [154]), un certain temps de vie est envisageable dans les trous noirs supermassifs pour lesquels l'effet de marée demeure relativement faible à la surface. Littéralement parlant, la singularité étant d'ailleurs une ligne horizontale dans le diagramme de Penrose d'un trou

4. L'invariant de Kretschmann $\mathcal{R} = R^{abcd}R_{abcd}$, notamment, y diverge.

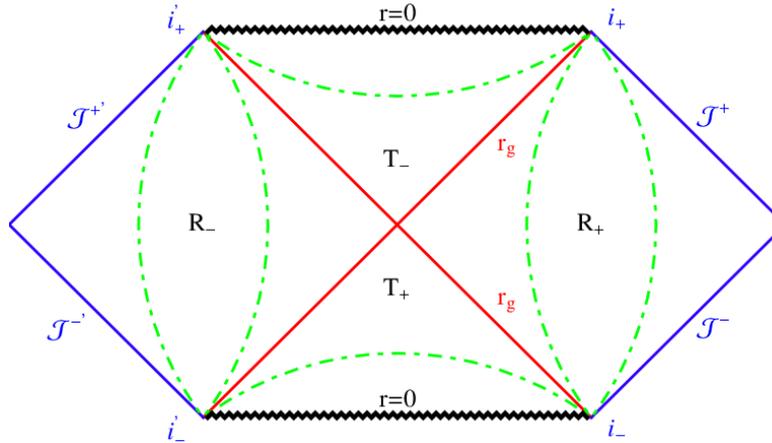


FIGURE 4.1 – Diagramme de Penrose d’un trou noir de Schwarzschild. L’espace est en abscisse et le temps en ordonnée. Les trajectoires physiques sont confinées à 45 degrés maximum de la verticale. L’horizon des événements est en rouge, i_- est l’infini passé, i_+ est l’infini futur, i_0 (le point à l’extrême droite) est l’infini spatial. Notre Univers est le losange à droite. Les lignes vertes verticales correspondent à des exemples de géodésiques de type temps et celles horizontales à des exemples de courbes de type espace.

noir de Schwarzschild (voir Fig. 4.1), elle est d’avantage une "fin du temps" qu’un lieu spatialement déterminé.

4.1.3 Quelques éléments de thermodynamique

La thermodynamique est adaptée à la compréhension de systèmes dont les propriétés peuvent être décrites par un petit nombre de paramètres. Les trous noirs étant précisément décrits par trois paramètres, les circonstances semblent propices au recours à la thermodynamique. Manque néanmoins une entropie. Le fait que l’aire d’un trou noir ne puisse que croître (classiquement) a poussé Bekentsein à supposer que l’entropie d’un trou noir est proportionnelle à son aire [155, 156] :

$$S = \frac{A}{4}, \tag{4.18}$$

où la constante de proportionnalité est fixée par différentes expériences de pensée et pour des raisons de cohérences (voir [157] pour une revue des aspects informationnels des trous noirs). À la suite de cette percée les lois de la thermodynamique des trous noirs ont pu être édictées :

- Loi zéro : l’horizon présente une gravité de surface constante. Il s’agit de l’analogie de la loi thermodynamique usuelle qui stipule que la température est homogène dans un corps à l’équilibre.
- Première loi : les perturbations d’un trou noir sont décrites par

$$S dE = \frac{K}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ, \tag{4.19}$$

E étant l’énergie, K la gravitation de surface, Ω la vitesse angulaire, J le moment angulaire, Φ le potentiel électrique et Q la charge. C’est l’équivalent de la loi de conservation de l’énergie en thermodynamique usuelle (le terme $(K/(8\pi))dA$ joue ici le rôle du terme TdS).

• Deuxième loi : dès lors que les conditions d'énergie faibles⁵ sont respectées l'aire ne peut décroître :

$$\frac{dA}{dt} \geq 0. \quad (4.20)$$

C'est l'analogie de la loi sur l'augmentation de l'entropie pour les systèmes isolés.

• Troisième loi : de la même manière qu'il est impossible d'atteindre le zéro absolu en thermodynamique usuelle il n'est pas possible pour un trou noir de présenter une gravité de surface nulle.

L'un des points nodaux de cette approche thermodynamique tient à l'apparition d'une température qui ne peut être correctement interprétée que dans le cadre de l'effet Hawking.

4.1.4 Effet Hawking

S. Hawking a montré que, contrairement à la vision classique, les trous noirs peuvent perdre de la masse et émettre un rayonnement [158]. Il existe de multiples manières de comprendre et de calculer l'effet Hawking. La vision la plus naïve consiste à le penser en termes d'effets de marée sur les fluctuations quantiques du vide : le trou noir brise la paire particule-antiparticule et l'un des corpuscules se trouve éjecté à l'infini. Cette description relève naturellement d'une simple image. La manière la plus simple de montrer l'effet Hawking est certainement en le présentant comme un cas particulier de l'effet Unruh [159] qui stipule, à l'aide de transformations de Bogolyubov, qu'un observateur soumis à une accélération a voit un bain thermique de particules à la température $T = a/(2\pi)$. Nul besoin de recourir à une théorie de gravité quantique pour aboutir à cette prédiction, elle émerge "rapidement" lorsque l'on considère la théorie quantique des champs en espace courbe.

Essayons de calculer la température d'évaporation afin de voir comment celle-ci dépend des propriétés du trou noir, *i.e* sa masse M dans le cas d'un trou noir de Schwarzschild. La démarche la plus simple en partant de la métrique de Schwarzschild consiste à considérer un observateur stationnaire en

$$r = 2M + \frac{\rho^2}{8M}. \quad (4.21)$$

Celui-ci ressent alors une accélération qui vaut $1/\rho$ et "voit" alors autour de lui un champ excité à la température

$$T_{loc} = \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\rho} = \frac{1}{4\pi\sqrt{2M(r-2M)}}. \quad (4.22)$$

La température à la distance R s'obtient en appliquant le facteur de décalage vers le rouge (ou "redshift") gravitationnel $g_{00}(r)/g_{00}(R)$:

$$T(R) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2Mr(1-\frac{2M}{R})}}. \quad (4.23)$$

Sa valeur à l'infini vaut

$$T(\infty) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2Mr}}, \quad (4.24)$$

5. Données par $T_{\mu\nu}X^\mu X^\nu \leq 0$ pour un champ vectoriel X de type temps.

ce qui conduit, avec $r = 2M$, à

$$T_H = \frac{1}{8\pi M}. \quad (4.25)$$

Cette température, en unités complètes $T_H = \hbar c^3 / (8\pi G k_B M)$, a cela de magnifique qu'elle fait intervenir toutes les constantes fondamentales de la physique. Elles témoignent que l'évaporation des trous noirs est un phénomène qui convoque à la fois gravitation, physique quantique, physique statistique et relativité.

L'effet Hawking est très spécifique car explosif. À la différence d'un morceau de métal, plus un trou noir rayonne plus il se réchauffe. En effet lorsqu'un trou noir émet des particules sa masse diminue, augmentant sa température. Pour l'illustrer considérons un système isolé constitué d'un trou noir de température initiale $T_i = (8\pi M_i)^{-1}$, M_i étant sa masse initiale. Ce trou noir émet un photon d'énergie ω . L'énergie d'un système isolé étant conservée la masse du trou noir après émission s'écrit $M_f = M_i - \omega < M_i$ et sa température $T_f = (8\pi M_f)^{-1} > T_i$.

Le temps mis par un trou noir pour s'évaporer entièrement peut être rapidement évalué en considérant l'énergie rayonnée par un corps sphérique de température de surface T et de rayon R :

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4, \quad (4.26)$$

σ étant la constante de Stefan-Boltzmann. La perte (d'énergie) de masse d'un trou noir s'écrit alors

$$\frac{dM}{dt} = -4\pi R^2 \sigma T^4 = -4\pi (2M)^2 \sigma \left(\frac{1}{8\pi M} \right)^4 \quad (4.27)$$

pour un trou noir de Schwarzschild. Le temps d'évaporation associé à un tel trou noir de masse M est donc, en tenant compte de la valeur de σ ,

$$t_e = 5120\pi M^3 \propto M^3. \quad (4.28)$$

Une fois les unités du système international rétablies, il peut être bon d'avoir les ordres de grandeur suivants en tête :

$$t_e \sim 6 \times 10^{74} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3 s \simeq 6 \times 10^{57} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^3 t_H \quad (4.29)$$

où M_\odot est la masse du soleil et $t_H \simeq 10^{17} s$ le temps de Hubble. Un trou noir s'évapore donc d'autant plus vite que sa masse est faible, *i.e* que sa température est élevée. Sachant qu'un trou noir peut émettre toute sorte de particules tant que leur masse est inférieure à sa température un trou noir émet donc tous les types de particules élémentaires lors de son évaporation⁶. Le spectre thermique des particules émises sera discuté dans la partie de ce chapitre dédiée aux coefficients de corps gris.

Le processus d'évaporation est négligeable pour les trous noirs astrophysiques, qui présentent une température de Hawking inférieure à celle du rayonnement cosmologique fossile. En revanche, il devient extrêmement important pour les trous noirs de faible masse. L'existence de tels trous noirs n'est pas aujourd'hui avérée et leur hypothétique présence ne pourrait résulter que de conditions particulières dans l'Univers primordial [160] (ou de processus exotiques tels que la collision de particules

6. Ce qui ne veut pas dire qu'il émet tous types de particules tout au long de son évaporation.

trans-planckiennes dans l'Univers contemporain). L'effet Hawking semble néanmoins avoir été observé dans des systèmes analogues de trous noirs acoustiques [161].

Bien que l'évaporation des trous noirs soit, en tant que telle, bien comprise et peu sujette à caution, elle est intimement liée à un paradoxe central en physique théorique, celui de la perte d'information. Que de l'information soit perdue pour le monde extérieur quand elle entre dans un trou noir n'est pas paradoxal. Elle est simplement "ailleurs". Le problème vient de ce que l'évaporation semble transformer le trou noir en un spectre (quasi-)thermique. À l'issue de celle-ci, l'information est belle est bien perdue, ce qui entre en conflit avec la théorie quantique des champs (voir [162] pour une introduction pédagogique). De très nombreuses solutions sont proposées à ce paradoxe : depuis l'existence de reliques stables jusqu'à l'existence de corrélations subtiles entre les quanta émis [163], mais aucun consensus n'existe sur cette question. Elle est d'ailleurs liée à un autre point fondamental : le sens physique de l'entropie des trous noirs. Que sont les micro-états comptés par l'entropie thermodynamique ?

4.2 Trous noirs en gravitation quantique à boucles

Il est très probable que la solution aux paradoxes mentionnés à la fin de la section précédente ne puisse venir que d'une théorie quantique de la gravitation. Nous nous focalisons ici naturellement sur la gravitation quantique à boucles. Le traitement des trous noirs dans ce cadre théorique n'ayant pas constitué l'objet de nos recherches il ne sera ici que (très) brièvement introduit. Des revues pédagogiques sur le devenir des trous noirs en LQG peuvent être trouvées dans [2, 164, 165, 166].

Fondamentalement, le concept de trou noir en LQG repose sur celui d'horizon isolé [167, 168, 169, 170, 171]. C'est une notion quasi-locale⁷ qui s'affranchit de la dimension téléologique associée à la définition usuelle d'un horizon des événements. D'un point de vue pratique, un horizon isolé permet en outre de disposer d'une description Hamiltonienne et d'une notion locale d'énergie [172].

Très schématiquement, l'horizon isolé joue le rôle d'une frontière et, pour une aire macroscopique A donnée, les états de géométrie associés émergent des perforations ("*punctures*" en anglais) de la sphère par le réseau de spin. Pour un paramètre de lissage Δ , et compte tenu du spectre de l'opérateur d'aire, les liens du réseau perforant l'horizon satisfont :

$$A - \Delta \leq 8\pi\gamma \sum_p \sqrt{j_p(j_p + 1)} \leq A + \Delta, \quad (4.30)$$

où γ est le paramètre de Barbero-Immirzi, p réfère aux différentes perforations et les j_p sont des demi-entiers. En plus des nombres quantiques j_p renseignant sur l'aire chaque lien porte un second nombre quantique m_p qui renseigne lui sur la courbure. Pour assurer que la topologie soit bien sphérique il faut alors imposer

$$\sum_p m_p = 0. \quad (4.31)$$

L'un des plus grands succès de la LQG dans le secteur des trous noirs tient à sa capacité à retrouver l'entropie de Bekenstein-Hawking, avec des corrections en $\log(A)$, à partir des micro-états de géométrie.

7. Nous pourrions ici dire "locale" au sens où, à la différence d'un horizon usuel, il n'est pas nécessaire d'avoir une connaissance de toute l'espace-temps. Néanmoins cette notion d'horizon isolé s'étend quand même sur toute l'aire du trou noir, d'où l'ajout du mot "quasi".

À la suite du travail pionnier de [173], de nombreux travaux ont été développés pour raffiner le calcul de l'entropie des trous noirs. En particulier, la présence explicite, ou non, du paramètre de Barbero-Immirzi dans l'expression de l'entropie est aujourd'hui débattue. Les modèles LQG-holographiques semblent offrir une synthèse cohérente permettant à plusieurs visions d'être conciliées [174].

4.3 Trous noirs en rebond

4.3.1 Le modèle de Haggard et Rovelli

Qu'advient-il de la matière qui s'effondre lors de la formation d'un trou noir ?

Cette question a été étudiée par H. M. Haggard et C. Rovelli (entre autres) à la suite des travaux de C. Rovelli et F. Vidotto [175]. Leur article initial sur le sujet [176] s'inspire des travaux de P. Hájíček et C. Kiefer [177] qui ont étudié la dynamique de coquilles de lumière (pour "*null shells*") sphériques couplées à la gravité. La théorie classique possède deux ensembles de solutions indépendantes : celles où la coquille se contracte (trou noir) et celles où la coquille est en expansion (trou blanc⁸). Hájíček et Kiefer avaient montré que suite à une quantification du système la dynamique de la fonction d'onde d'une coquille en contraction "rebondit" et transite vers celle d'une coquille en expansion. Voilà qui n'est pas sans rappeler ce qui se passe en cosmologie quantique à boucles.

H. M. Haggard et C. Rovelli se sont donc basés sur ce constat pour construire un modèle dans lequel, lorsque la densité de matière atteint celle de Planck, les effets de géométrie quantique génèrent une pression effective suffisante pour contrebalancer l'effondrement. Celui-ci s'arrête alors avant la formation de la singularité centrale et la matière fini par ressortir lorsque la géométrie décrit un trou blanc. La question que se sont posés Haggard et Rovelli dans [176] est : "Existe-t-il une métrique effective qui décrirait ce rebond et serait compatible avec les équations d'Einstein hors de la région quantique?". La réponse est oui et elle s'écrit, en coordonnées de Kruskal (u, v, θ, ϕ)

$$ds^2 = -F(u, v)dudv + r^2(u, v) \left[d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2 \right]. \quad (4.32)$$

Cette métrique est entièrement déterminée par la donnée de deux fonctions de u et v , dont les expressions détaillées sont données dans [176].

Son existence montre qu'il est possible d'avoir une transition trou noir vers trou blanc sans modifier la structure de l'espace-temps aux longues distances.

Une question d'importance pour la phénoménologie associée est celle de la durée du processus. Quel est le temps de rebond ? Comment varie-t-il en fonction de la masse du trou noir ?

Pour amener un élément de réponse effectuons une petite digression.

Aparté : Des effets quantiques en dehors de l'horizon ?

Des effets de gravité quantique sont généralement attendus dans les régimes où la courbure de l'espace-temps est extrêmement élevée, typiquement $R \sim \ell_{\text{pl}}^{-2}$ avec R le scalaire de Ricci. Si le domaine de validité du régime classique est estimé via la petitesse du scalaire de Kretschmann

8. Un trou blanc étant le symétrique par renversement de la variable temporelle d'un trou noir.

$\mathcal{R}^2 = R^{abcd}R_{abcd} = (48M^2)/r^6$ (pour un trou noir de Schwarzschild de masse M) alors ils sont attendus faibles dans une région de courbure faible⁹. Néanmoins cette considération ne tient pas compte du caractère potentiellement cumulatif des effets quantiques. Considérons par exemple une particule qui pourrait transiter d'un puits de potentiel à un autre par effet tunnel. Même si la probabilité de transition est faible, après un temps suffisamment élevé il y a de fortes chances que la particule ait tunnelé. Si nous prenons cet effet en considération alors la durée de l'évènement devient un paramètre important dont il faut tenir compte et le domaine de validité de la théorie classique correspond en fait à

$$q = \ell_{\text{Pl}}\tau\mathcal{R} \ll 1, \quad (4.33)$$

τ étant le temps propre asymptotique. Injecter l'expression du scalaire de Kretschmann donnée plus haut et celle du temps propre asymptotique donnée Eq.(4.6) amène à [178]

$$q(r) = \frac{M}{r^3} \sqrt{1 - 2\frac{M}{r}}t, \quad (4.34)$$

dont le maximum est atteint pour

$$r = \frac{7}{6}R_S. \quad (4.35)$$

Les effets quantiques, de part leur caractère cumulatif, semblent donc affecter l'extérieur de l'horizon de Schwarzschild. Le temps asymptotique à partir duquel ils deviendraient non négligeables, obtenu en inversant la formule Eq.(4.34) tout en demandant $q = 1$, varie comme

$$\tau \propto M^2. \quad (4.36)$$

Pour reprendre les mots de Haggard et Rovelli : "*Il n'y a pas de raisons de croire la théorie classique hors de l'horizon pour des temps arbitrairement longs et en étant suffisamment proche de $r = 2M$* ". La croyance selon laquelle il ne peut y avoir d'effets quantiques en dehors de l'horizon est donc ici mise en défaut.

Bien que cet argument puisse être débattu il a, du point de vue de la phénoménologie, l'avantage de prédire des effets hors de l'horizon et donc potentiellement observables.

Revenons à la question du temps de rebond. En combinant les différentes parties de la métrique effective et en utilisant l'expression du temps nécessaire pour que les effets de gravité quantique s'accumulent hors de l'horizon Haggard et Rovelli ont estimé dans [176] la durée du processus

$$\tau_{\text{rebond}} > 4kM^2 \propto M^2, \quad (4.37)$$

où $k \simeq 0.05$. Ce temps de rebond augmente moins rapidement avec la masse que le temps d'évaporation de Hawking qui est lui proportionnel à M^3 . Pour se faire une idée un trou noir primordial d'une masse $M \sim 10^{26}g$ (un dixième de la masse de la Terre, ou la masse de Mars) aurait un temps de rebond proche du temps de Hubble, en considérant la valeur minimale $4 \times 0.05 \times M^2$. Son temps d'évaporation serait lui bien plus élevé, environ 10^{36} fois le temps de Hubble. Pour que le temps d'évaporation corresponde au temps de Hubble la masse du trou noir doit être d'environ $10^{15}g$ (environ

9. Rappelons que le champ gravitationnel à l'horizon d'un trou noir est d'autant plus faible que le trou noir est massif : $g \propto M/R_S^2 \propto 1/M$. La courbure au niveau de l'horizon diminue donc lorsque M augmente.

la masse d'une montagne)¹⁰.

Bien qu'extrêmement rapide en temps propre comobile avec la coquille relativiste s'effondrant, à cause du décalage vers le rouge gravitationnel le rebond est vu comme un processus quasiment gelé pour un observateur lointain. Pour reprendre une phrase de C. Rovelli : "*A black hole is a star that is collapsing and bouncing seen at very slow motion from the exterior*".

Remarque : Il est d'usage de dire que $\tau_{\text{rebond}} = 4kM^2$ et de laisser k varier sur un intervalle de borne inférieure $k_{\text{min}} = 0.05$. La borne supérieure est elle définie de sorte que le temps de rebond soit inférieur au temps de Hawking. C'est cette convention que nous utiliserons dans la suite de cette thèse.

Le calcul précis de l'amplitude de transition entre les deux états classiques a été plus récemment étudié dans le contexte de la gravitation quantique à boucles [179] mais la démarche est de (très) grande difficulté et il n'est pour l'instant pas clair que le temps de rebond soit effectivement proportionnel à M^2 .

Avant de poursuivre mentionnons l'existence d'un nouveau modèle, plus récent, construit par E. Bianchi, M. Christodoulou, F. D'Ambrosio, C. Rovelli et Hal. M. Haggard, parut courant 2018 [180]. Dans ce modèle le facteur de suppression associé au processus de "*tunneling*" varie comme $\exp(-M^2/m_{\text{pl}}^2)$. Lorsqu'un trou noir s'évapore sa probabilité de tunneler vers l'état trou blanc augmente avec le temps, le facteur de suppression allant ici jusqu'à disparaître avant que le trou noir atteigne l'échelle sub-planckienne. Le modèle prédit que le trou blanc obtenu forme alors une relique, non pas éternelle, mais d'une très longue durée de vie $\tau_{\text{rel}} \sim m_0^4/\hbar^{3/2}$ où m_0 est la masse initiale du trou noir avant évaporation. La phénoménologie associée à ce modèle reste à ma connaissance à effectuer et c'est un projet sur lequel nous aimerions nous pencher dans l'avenir.

4.3.2 Phénoménologie du modèle de Haggard et Rovelli

Maintenant que nous avons très brièvement introduit les motivations derrière l'existence de trous noirs en rebond se pose la question qui nous intéresse dans cette thèse : celle de leur détectabilité.

Les caractéristiques précises du signal associé au rebond ne sont actuellement pas encore définies et deux pistes sont explorées :

- (i) **Le canal basse énergie** : Une seule échelle de longueur est présente dans tout le problème : la taille de l'horizon. Par simple argument dimensionnel il serait donc attendu que l'énergie du signal émis soit telle que la longueur d'onde associée fasse la taille du diamètre de l'horizon.
- (ii) **Le canal haute énergie** : Associée à des longueurs d'ondes plus petites, elle se base sur la symétrie temporelle du rebond : ce qui ressort du trou blanc correspond à ce qui est rentré dans le trou noir. Le décalage vers le bleu en entrée est compensé par la même quantité de décalage vers le rouge en sortie. Si les trous noirs considérés se sont formés dans l'Univers jeune par effondrement de perturbations alors à une certaine masse du trou noir est associé une époque connue, donc une température de l'Univers connue. Il est alors possible de savoir quelles sont les spécificités de la matière entrante et donc les caractéristiques du signal émis.

10. Il est amusant de constater que le rayon de Schwarzschild d'un trou noir ayant la masse d'une montagne est de l'ordre du fermi.

L'étude des caractéristiques des signaux sortant des canaux haute et basse énergie, l'émission diffuse de fond due à une distribution de trous noirs en rebond sont des exemples d'études phénoménologiques qu'il est possible de mener sur ce genre de modèle. Ces études seront résumées dans la revue "*A status report on the phenomenology of black holes in loop quantum gravity : Evaporation, tunneling to white holes, dark matter and gravitational waves*" donnée en fin de ce chapitre.

Remarque : La phase d'explosion semblerait être en fait beaucoup plus courte que la phase trou noir [181]. Néanmoins il est probable, à notre avis, que les conséquences de ce caractère asymétrique pour la phénoménologie soient faibles.

4.3.3 Impact phénoménologique du caractère stochastique du temps de rebond

L'idée d'une possible détection d'un signal de rebond a été émise dans [182]; adaptée au modèle de rebond plus récent dans [183]; raffiné en prenant en compte un possible fond diffus et différents effets de propagation dans [184].

De plus lorsque l'on s'intéresse à la phénoménologie d'objets tels que les trous noirs en rebond il est courant de se demander si le signal émis par le processus colle naturellement avec des signaux astrophysiques encore mal expliqués. Ainsi la possibilité que l'excès de rayons gammas venant du centre galactique soit ainsi expliquée a été explorée dans [185]. Dans l'article "*Fast radio bursts and the stochastic lifetime of black holes in quantum gravity*" donné ci-après nous nous intéressons au cas des "*Fast Radio Bursts*" (ou FRB). Ces phénomènes astrophysiques de haute énergie d'une courte durée, typiquement quelques millisecondes, observés depuis 2007 et détectés par des radio-télescopes tels que celui de Parkes ou le Molonglo Observatory Synthesis Telescope (MOST)¹¹, restent pour le moment inexpliqués. Le nombre de détections, répertoriées pour la plupart sur le catalogue en ligne <http://frbcat.org/>, augmente rapidement et aujourd'hui plus d'une centaine d'évènements ont été reportés. Le fait que ces FRB nous parviennent depuis l'entièreté du ciel et ne semblent pas concentrés dans le plan de la voie lactée¹² indique qu'ils seraient d'origine extra-galactique.

Pour être honnête je ne miserais pas sur des trous noirs en rebond comme source de ces évènements, d'autres possibilités astrophysiques telles que des coalescences d'étoiles à neutrons ou des supernovae particulièrement énergétiques semblant bien plus probables.

Je suis d'autant plus réservé qu'un évènement est particulièrement intrigant, le FRB recensé en 2012 sous le (doux) nom de FRB 121102 [186]. C'est un répéteur [187, 188]. De plus, non content de se répéter, sa période (au sens durée entre deux répétitions) varie d'une mesure à l'autre, allant de l'échelle de la minute à celle du jour. Il en va de même pour son intensité. Bien évidemment cet évènement ne peut être expliqué par un trou noir en rebond, même si cela n'exclue pas la possibilité pour les autres évènements car il est tout à fait possible, voire probable, que différentes classes de sources existent.

Il se trouve qu'un second répéteur a été récemment identifié [189]. Il n'est donc pas non plus totalement déraisonné de penser que parmi les FRB détectés d'autres se répètent en réalité et que leurs répétitions n'aient pas été identifiées pour des raisons observationnelles : temps d'observations trop courts, mauvaise localisation des bursts (quelques arcmin) rendant difficile l'association d'un évènement à un autre évènement passé, ... Plus de données sont nécessaires pour trancher.

11. Tous deux situés en Australie.

12. Ce constat est bien évidemment biaisé du fait que les localisations des FRB connus sont situées dans les portions de ciel observables par les télescopes radio.

Le message derrière l'étude à venir n'est donc pas de chercher à justifier à tout prix les FRB par des trous noirs en rebond, mais plutôt de quantifier l'impact sur la forme du signal émis d'un élément négligé jusqu'alors : le caractère stochastique, aléatoire, du temps de rebond.

Malgré les réserves que j'ai émises force est d'admettre qu'à ce jour aucune hypothèse astrophysique simple ne permette d'expliquer les FRB de manière pleinement satisfaisante. Il est donc raisonnable de chercher des hypothèses du côté de la physique fondamentale. De plus l'idée que des effets de gravitation quantique puissent se manifester dans le domaine radio est excitante, d'autant plus que nous montrons dans cette étude que la dépendance spécifique en "*redshift*" du signal permet de le distinguer des autres hypothèses et rend le modèle falsifiable.

Fast radio bursts and the stochastic lifetime of black holes in quantum gravity

Aurélien Barrau, Flora Moulin, and Killian Martineau

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Université Grenoble-Alpes, CNRS/IN2P3 53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France

(Received 4 January 2018; published 22 March 2018)

Nonperturbative quantum gravity effects might allow a black-to-white hole transition. We revisit this increasingly popular hypothesis by taking into account the fundamentally random nature of the bouncing time. We show that if the primordial mass spectrum of black holes is highly peaked, the expected signal can in fact match the wavelength of the observed fast radio bursts. On the other hand, if the primordial mass spectrum is wide and smooth, clear predictions are suggested and the sensitivity to the shape of the spectrum is studied.

DOI: [10.1103/PhysRevD.97.066019](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.97.066019)

I. INTRODUCTION

Finding observational consequences of quantum gravity is obviously a major challenge. In the last decade most attempts have focused on the early Universe, evaporating black holes, or Lorentz invariance violation (see Ref. [1] for a recent overview). In the last years, the idea that quantum gravity effects could be seen in higher-mass black holes has attracted a lot of interest [2–6]. In particular, it was suggested that the quite mysterious fast radio bursts (FRBs) [7] could be explained by bouncing black holes [8]. There are unquestionably simpler astrophysical explanations that we consider to be more probable, but this hypothesis is worth a deeper look. At the heuristic and intuitive level, this bounce can be understood as a phenomenon quite similar to what is expected to happen to the Universe in loop quantum cosmology [9,10]. In the cosmological framework, the classically contracting branch is linked to the classically expanding one by a quantum tunneling, whereas in the black hole sector the classically collapsing solution is glued to the classically exploding one (on the double cover of the Kruskal map [3]). The usual event horizon is replaced by a trapping horizon [11]. In this brief article we revisit this hypothesis by taking into account the fundamental randomness of the tunneling process that was previously ignored. In Sec. II we assume a peaked mass spectrum for the bouncing black holes and show that the 3 orders of magnitude in energy thought to be missing to explain FRBs can easily be accounted for. In Sec. III we consider a wide mass spectrum and investigate the sensitivity of the signal to the spectral index. We show that the expected emission remains compatible with measurements and make clear predictions.

II. PEAKED MASS SPECTRUM

The heuristic arguments given by Rovelli, Haggard, and Vidotto in the previously mentioned articles suggested that

the black hole lifetime could be of the order of M^2 in Planck units (those units are used throughout the rest of the article except otherwise stated). As this is shorter than the Hawking evaporation time (of the order of M^3), this means that black holes might bounce before they evaporate: the Hawking effect would just be a dissipative correction. An exact calculation of this lifetime is in principle possible in loop quantum gravity (see, e.g., Ref. [12]), but it is still hard to perform accurately at this stage [13]. The previous phenomenological works around this hypothesis have focused on gamma-ray bursts [14], FRBs [8], the space-integrated signal [15], and trying to explain the Fermi excess [16]. In all of them the lifetime was taken (as a first approximation) to be deterministic, fixed at the value $\tau = kM^2$ where k was chosen to be of the order of 0.05 (however, in one of the studies [15] its value was varied). We also assume this value in the present article as it the most phenomenologically interesting one (and the smallest one theoretically allowed). However, as the black-to-white hole transformation is to be understood as a tunneling process, the lifetime of a black hole should be considered as a random variable.

The probability that a black hole has not yet bounced after a time t is given by

$$P(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}. \quad (1)$$

This is the usual “nuclear decay” behavior which comes directly from the fact that the number of bouncing black holes during a time interval dt is proportional to the full number of black holes and to dt . We focus in this study on local effects and neglect the redshift integration as this will play only a minor role in the analysis carried out. The black holes we are interested in can be considered to have been produced in the early Universe, as the range of masses (far below a solar mass) leading to bounces occurring in the

contemporary Universe can only be associated with primordial black holes (PBHs; see Ref. [17] for a rather recent review on the limits on the PBH abundance and references therein for possible formation mechanisms). In general, the number of black holes of a given type bouncing after a time t_H (taken to be the Hubble time as we are considering present-day phenomena) in a time interval dt is

$$dN = \frac{N_0}{kM^2} e^{-\frac{t_H}{kM^2}} dt, \quad (2)$$

where N_0 is the initial abundance. The exponential function entering this calculation comes directly from the random nature of the bounce, as in the previous formula. Let us assume that the initial differential mass spectrum of the considered PBHs is given by dN/dM .

In this study, we focus on the so-called bouncing black hole *low-energy* component as this is the one that is relevant for a possible link with FRBs. This specific component is based on a simple dimensional analysis: photons are assumed to be emitted with a characteristic wavelength that is of the order of the size of the black hole, which is the only length scale of the problem. As in Ref. [16], we model the shape of the signal emitted by a single black hole by a simple Gaussian function:

$$\frac{dN_\gamma^{\text{BH}}}{dE} = Ae^{-\frac{(E-E_0)^2}{2\sigma_E^2}}, \quad (3)$$

where $E_0 = 1/(2R_S) = 1/(4M)$, R_S is the Schwarzschild radius, and M is the mass of the considered black hole. This choice is arbitrary and simply taken as an example. The width is typically fixed to be $\sigma_E = 0.1E_0$, but the results do not critically depend on this value or the detailed shape of the distribution.

The full signal due to a local distribution of bouncing black holes is given by

$$\frac{dN_\gamma}{dE} = \int_{M_{\text{Pl}}}^{\infty} Ae^{-\frac{(E-E_0)^2}{2\sigma_E^2}} \cdot \frac{dN}{dM}(M) \cdot \frac{1}{kM^2} e^{-\frac{t_H}{kM^2}}. \quad (4)$$

The point we want to raise in this study is that the mean energy of the detected signal might *not* be the naively expected one, that is, may *not* be $E \sim 1/(4M_{t_H})$, where M_{t_H} is the mass satisfying $t_H = kM_{t_H}^2$ (this would correspond to black holes having a characteristic lifetime equal to the age of the Universe). The naive expectation $E \sim 1/(4M_{t_H})$ is not in the radio band, but rather 3 orders of magnitude higher in energy, in the infrared band. If the initial mass spectrum is peaked around a value M_0 , e.g., according to

$$\frac{dN}{dM} \propto e^{-\frac{(M-M_0)^2}{2\sigma_M^2}}, \quad (5)$$

which can in principle be different than $\sqrt{t_H/k}$, the energy will however be peaked around $1/(4M_0)$ which can differ

from $1/(4M_{t_H})$. This is possible precisely because of the distributional nature of the actual bouncing time.

Considering a peaked mass spectrum is not arbitrary and can be justified if PBHs are created, for example, because of a phase transition in the early Universe (see, e.g., Ref. [18]). As the primordial cosmological power spectrum is now clearly known not to be blue [19] (at least on large scales), the naturally expected density contrast is not high enough to produce PBHs [20] and specific post-inflationary phenomena are generically required (see, e.g., Ref. [21]).

In Fig. 1, the expected emitted flux is shown for different values of the central mass M_0 of the initial mass spectrum: M_{t_H} , $10M_{t_H}$, $100M_{t_H}$, and $1000M_{t_H}$. As expected, this shows that the energy of the signal depends on the mass spectrum even if the parameters of the model are fixed. Naturally, when the mass spectrum is peaked at masses well above M_{t_H} , the amplitude of the expected signal decreases as BHs that are exploding today constitute an increasingly smaller fraction of the full population. However, the key point we stress here is that a given mean lifetime $\tau = kM^2$ does not imply a fixed expected energy.

In particular, it was previously emphasized that the expected mean wavelength (obtained by fixing $\tau = t_H$) of the electromagnetic emission associated with bouncing black holes was basically one thousand times smaller than required to explain the FRBs. If the mass spectrum is peaked at masses higher than M_{t_H} , it is however perfectly possible to precisely account for the expected wavelength. The curve on the left in Fig. 1 is peaked around 1.5 GHz, which corresponds to the typical wavelength of FRBs. At this stage, there is no obvious motivation for choosing a specific value for the peak mass. Interesting proposals were recently suggested, for example, in the framework of critical Higgs inflation [22], but (as pointed out in the mentioned reference) the actual peak value could differ from the naively calculated one by several orders of magnitude due to accretion and merging, and many other models do exist that suggest other mass values.

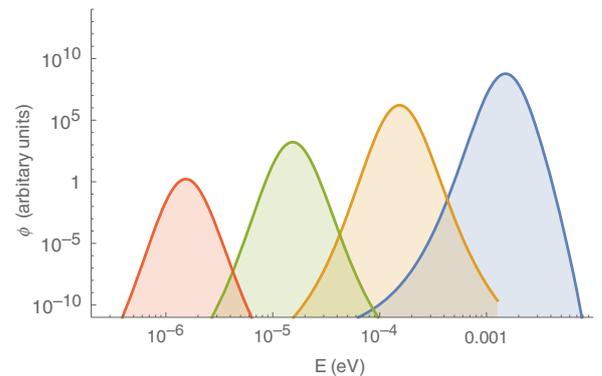


FIG. 1. Differential electromagnetic flux emitted by bouncing PBHs for a central mass M_0 equal (from right to left) to M_{t_H} , $10M_{t_H}$, $100M_{t_H}$, and $1000M_{t_H}$. The normalization is such that the total mass going into PBHs is the same in all cases.

In Fig. 1 the normalization between the different curves is such that the total mass going into black holes is the same:

$$\int_{M_{\text{Pl}}}^{\infty} M \frac{dN}{dM} = cte. \quad (6)$$

This is somehow justified if one tries to account for dark matter with PBHs. The point we want to stress with this remark is simply that the decrease in flux when one moves below the “natural” mass M_{T_H} is not drastic. Accounting for the observed events by shifting the peaked mass to higher values requires a higher density of PBHs. This cannot be done up to arbitrary values, as the upper bounds on the density of PBHs would then be violated. However, orders of magnitude show that the density of PBHs required to account for observed events is very far below the known bounds, and this does not limit the present proposal as the rate of FRBs is actually very small [23]. There is no point in performing a detailed normalization of the expected spectrum at this stage, as the initial mass spectrum normalization is totally unknown and the calculation of any observable would directly depend on it.

We have also considered a second normalization, such that the total number of black holes is the same,

$$\int_{M_{\text{Pl}}}^{\infty} \frac{dN}{dM} = cte, \quad (7)$$

and this basically leads to the exact very same results.

Beyond FRBs—which can be explained by astrophysical phenomena—the point raised here is simply the fact that when the probabilistic nature of the bouncing time is accounted for, the mean energy of the emitted signal is also determined by the mass spectrum and not only by the lifetime of the black holes.

III. WIDE MASS SPECTRUM

It is also possible that the mass spectrum of PBHs is quite wide. As a toy model, if it is directly produced by scale-invariant density perturbations in a perfect fluid with equation of state $w = p/\rho$, the mass spectrum can be approximated by [20]

$$\frac{dN}{dM} \propto M^{-1-\frac{1+3w}{1+w}}. \quad (8)$$

In this study, we just consider (as a first approximation) a spectrum

$$\frac{dN}{dM} \propto M^{\alpha}, \quad (9)$$

where α is an unknown parameter. In Fig. 2 we present the expected signal for $\alpha = \{-3, -2, -1, 0\}$ (a spectrum rising with an increasing mass on a wide interval would be rather unphysical). Once again, the shape of the mass spectrum

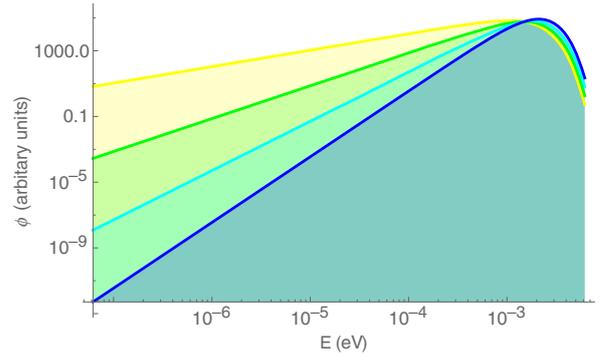


FIG. 2. Signal expected from a wide mass spectrum, with $\alpha = \{-3, -2, -1, 0\}$ from the lower curve to the upper curve at 10^{-6} eV.

does influence the expected signal as the probabilistic nature of the lifetime is now taken into account: black holes with masses smaller or larger than M_{T_H} do also contribute to the emitted radiation, and changing their relative weights does change the result.

This leads to another way of addressing the discrepancy between the “natural” wavelength (around $0.02 \text{ cm} \sim 2 \times 10^{-6} \text{ eV}$) of bouncing black holes and the observed wavelength (around $20 \text{ cm} \sim 2 \times 10^{-3} \text{ eV}$) of FRBs. It could indeed be that most bouncing black holes do lead to a signal of wavelength $\sim 0.02 \text{ cm}$ and that only the tail (which exists because of the probabilistic nature of the lifetime) of the distribution is observed in the radio band. If the peak is in the infrared—which should occur if the mass spectrum is wide—it might be that it is simply unobserved today. Detectors in the infrared band have proper time constants that are much too high to allow for the measurement of such fast transient phenomena and there are no deep surveys being carried out.

In this case, as shown in Fig. 2, a clear prediction of this model for future observations is that one should expect a higher flux as the energy increases (up to the infrared band). The slope of this increase reflects that of the mass spectrum. This is qualitatively quite independent of the details of the mass spectrum.

IV. CONCLUSION

The possible existence of a black-to-white hole transition through a kind of tunneling process has recently received a lot of attention in quantum gravity. In this brief article we have taken into account the fundamentally random nature of the black hole lifetime in those models. We showed that this can induce a substantial shift with respect to previous studies in which the characteristic lifetime τ [either derived from the full theory (first attempts can be found in Ref. [13]) or inferred by heuristic arguments] was taken as an actual bouncing time.

In a Poisson process, the distribution of time intervals is wide and exponentially decreasing. A bounce can occur after a time which is very different from its characteristic

timescale, with the smallest time being always the most probable one. This should be taken into account (and this was indeed accounted for in Ref. [24]).

Beyond this quite trivial statement, we have shown that, because of this stochastic process, the mean energy of the emitted signal can be different than that previously considered. In particular, if the mass spectrum of PBHs is peaked, it is perfectly possible to match the observed FRBs.

In addition, if the mass spectrum of PBHs is wide and continuous it is still possible to explain the data, and a prediction was suggested for future observations.

The main point of this study was not to revive at any price the hypothesis that FRBs are due to bouncing black holes. Our point was to show that the randomness of the lifetime of black holes in quantum gravity can drastically change the spectral characteristic of the expected signal when the mass spectrum is highly peaked and can lead to interesting predictions in any case.

ACKNOWLEDGMENTS

K. M. is supported by a grant from the CFM Foundation.

-
- [1] A. Barrau, C. R. Phys. **18**, 189 (2017).
 - [2] C. Rovelli and F. Vidotto, *Int. J. Mod. Phys. D* **23**, 1442026 (2014).
 - [3] H. M. Haggard and C. Rovelli, *Phys. Rev. D* **92**, 104020 (2015).
 - [4] C. Barcel, R. Carballo-Rubio, and L. J. Garay, *J. High Energy Phys.* **01** (2016) 157.
 - [5] C. Barcel, R. Carballo-Rubio, and L. J. Garay, *J. High Energy Phys.* **05** (2017) 054.
 - [6] H. M. Haggard and C. Rovelli, *Int. J. Mod. Phys. D* **25**, 1644021 (2016).
 - [7] J. I. Katz, *Mod. Phys. Lett. A* **31**, 1630013 (2016).
 - [8] A. Barrau, C. Rovelli, and F. Vidotto, *Phys. Rev. D* **90**, 127503 (2014).
 - [9] A. Ashtekar and P. Singh, *Classical Quantum Gravity* **28**, 213001 (2011).
 - [10] A. Barrau, *Scholarpedia* **12**, 33321 (2017).
 - [11] A. Ashtekar and B. Krishnan, *Living Rev. Relativity* **7**, 10 (2004).
 - [12] C. Rovelli, *Proc. Sci.*, QGQGS (2011) 003, [arXiv:1102.3660](https://arxiv.org/abs/1102.3660).
 - [13] M. Christodoulou, C. Rovelli, S. Speziale, and I. Vilenky, *Phys. Rev. D* **94**, 084035 (2016).
 - [14] A. Barrau and C. Rovelli, *Phys. Lett. B* **739**, 405 (2014).
 - [15] A. Barrau, B. Bolliet, F. Vidotto, and C. Weimer, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **02** (2016) 022.
 - [16] A. Barrau, B. Bolliet, M. Schutten, and F. Vidotto, *Phys. Lett. B* **772**, 58 (2017).
 - [17] B. J. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda, and J. Yokoyama, *Phys. Rev. D* **81**, 104019 (2010).
 - [18] J. L. G. Sobrinho, P. Augusto, and A. L. Goncalves, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **463**, 2348 (2016).
 - [19] P. A. R. Ade *et al.* (Planck Collaboration), *Astron. Astrophys.* **594**, A13 (2016).
 - [20] B. J. Carr, *Astrophys. J.* **201**, 1 (1975).
 - [21] K. Jedamzik and J. C. Niemeyer, *Phys. Rev. D* **59**, 124014 (1999).
 - [22] J. M. Ezquiaga, J. Garcia-Bellido, and E. Ruiz Morales, *Phys. Lett. B* **776**, 345 (2018).
 - [23] A. Fialkov and A. Loeb, *Astrophys. J.* **846**, L27 (2017).
 - [24] A. Raccanelli, F. Vidotto, and L. Verde, [arXiv:1708.02588](https://arxiv.org/abs/1708.02588).

4.4 Coefficients de corps gris

Revenons maintenant sur le phénomène d'évaporation des trous noirs. Pourquoi cela ? Car le spectre des particules émises durant l'évaporation dépend de la théorie de gravitation considérée et le rayonnement de Hawking constitue une sonde potentielle du modèle de gravité sous-jacent.

Comme nous l'avons mentionné un trou noir s'évapore en émettant toutes les particules du modèle standard, voir des particules au delà du modèle standard lorsque sa température est suffisamment élevée. La prédiction usuelle d'un spectre d'émission thermique suivant une loi de corps noir émerge lorsque l'on néglige un élément : la présence d'un potentiel centrifuge et gravitationnel autour du trou noir. Pour se représenter ce potentiel donnons son expression dans la configuration la plus simple possible : celle d'un trou noir de Schwarzschild et dans le cas où le spin de la particule est négligé. Elle s'écrit, avec m la masse de la particule incidente, L son moment angulaire, et M la masse du trou noir :

$$V(r) = m^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2} \right) \quad (4.38)$$

pour des particules massives et

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{L^2}{r^2} \quad (4.39)$$

dans le cas de particules non massives (photon). Ces expressions s'annulent en $r = R_s = 2M$. La présence de cette barrière de potentiel n'est pas anodine et entraîne des conséquences qui peuvent paraître surprenantes au premier abord. Considérons une particule en chute libre vers un trou noir de Schwarzschild. Si cette particule possède suffisamment d'énergie pour franchir la barrière de potentiel (qui apparaît si le moment angulaire est suffisant) elle suivra une orbite liée instable et finira par tomber dans le trou noir. Mais si son énergie est inférieure au maximum de la barrière de potentiel cette particule sera (rétro)diffusée par la barrière et finira par s'échapper de l'attraction du trou noir ! De façon encore plus surprenante il est possible que cette particule suive une orbite liée stable autour de l'astre, sans jamais tomber dedans ¹³.

Le maximum du potentiel étant situé au delà de l'horizon (par exemple à $r = 3M$ dans le cas du potentiel donné Eq.(4.39)) et les particules émises par radiation Hawking étant elles générées au niveau de l'horizon il est possible, en appliquant le même raisonnement, que celles-ci soient en fait rétro-diffusées par la barrière de potentiel et retombent dans le trou noir. Le spectre thermique d'émission n'est donc pas donné par une loi de corps noir mais une loi dite de **corps gris**. Le nombre de particules émises par unité de temps t s'écrit alors comme le produit de trois composantes : une distribution thermique, la **section efficace d'émission** σ associée à la probabilité d'échappement compte tenu de la présence du potentiel et un terme d'espace de phase :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T_H}} - (-1)^{2s}} \times \sigma(M, s, \omega) \times \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (4.40)$$

où M correspond à la masse du trou noir, s le spin de la particule et ω son énergie. Le produit de la section efficace par le terme d'espace de phase, noté $\Gamma(M, s, \omega)$, est appelé **coefficient de corps gris**. De nature hautement non triviale, ces coefficients (ou de manière analogue la section efficace) dépendent de la structure sous-jacente de l'espace-temps. Ils ont été calculés par D. N. Page dans le

13. Dans le modèle le plus simple possible de potentiel présenté ici seules les particules massives peuvent suivre une orbite stable. Les photons, eux, ne le peuvent pas. Ce constat est bien évidemment appelé à changer de manière non triviale si le spin de la particule et/ou le moment cinétique du trou noir étaient par exemple pris en considération.

cas de trous noirs de Schwarzschild et de Kerr, pour des particules scalaires, des fermions et des bosons de spin 1 [190, 191, 192].

Dans l'article "*Quantum fields in the background spacetime of a polymeric loop black hole*" qui suit nous avons calculé cette section efficace σ dans le cas de particules scalaires et fermioniques et en considérant la métrique obtenue par E. Alesci et L. Modesto dans [193]. Cette métrique a été précisément élaborée pour étudier des phénomènes dynamiques tels que l'évaporation de Hawking. En pratique, elle consiste à définir la contrainte Hamiltonienne en utilisant les holonomies sur un graphe donné. La contrainte est alors résolue après avoir remplacé la connexion par son holonomie. La solution est ensuite étendue à tout l'espace, conduisant à une métrique de Schwarzschild corrigée. L'hypothèse forte consiste à choisir un graphe spécifique régulier et à opérer un prolongement analytique de la solution. La métrique résultante est néanmoins très cohérente et intègre clairement des effets de gravitation quantique qui se manifestent de manière effective par un "paramètre polymérique".

Bien sûr d'un point de vue purement phénoménologique l'étude des facteurs de corps gris peut sembler pour le moment futile, car ils correspondent au calcul de modifications fines d'un phénomène (l'évaporation) qui n'est pour le moment toujours pas observé. Mais les facteurs de corps gris sont d'une grande importance théorique. Ils encodent toute la subtilité gravitationnelle présente dans l'effet Hawking et il est tout à fait possible que des théories de gravitation paraissant proches de la relativité générale aient en fait des prédictions très différentes en ce qui concerne ces coefficients. Dit de manière crue ils peuvent permettre de comprendre des effets gravitationnels subtils que l'on ne voit que comme ça.

Quantum fields in the background spacetime of a polymeric loop black hole

Flora Moulin¹, Killian Martineau¹, Julien Grain²
and Aurélien Barrau^{1,3} 

¹ Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Université Grenoble-Alpes, CNRS/IN2P3 53 avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France

² Institut d'astrophysique spatiale, Université Paris-Sud, CNRS Bâtiments 120 à 121, Université Paris Sud, 91405 ORSAY, France

E-mail: barrau@in2p3.fr

Received 17 December 2018, revised 12 April 2019

Accepted for publication 9 May 2019

Published 28 May 2019



CrossMark

Abstract

The description of black holes in loop quantum gravity is a hard and tricky task. In this article, we focus on a minisuperspace approach based on a polymerization procedure. We consider the resulting effective metric and study the propagation of quantum fields in this background. The cross sections for scalar particles and fermions are explicitly calculated. The Teukolsky–Chandrasekhar procedure used to derive the fermionic radial equation of motion for usual spacetimes is entirely generalized to a much larger class. The resulting radial equation can be used in quite a lot of other contexts.

Keywords: black holes, loop quantum gravity, greybody factors

(Some figures may appear in colour only in the online journal)

Introduction

Loop quantum gravity (LQG) is a mature framework which is mathematically consistent and can be approached by several complementary paths, from canonical quantization to spin-foams (see, e.g. [1–4] and references therein). The ideas of the theory have been successfully applied to the Universe, leading to the loop quantum cosmology (LQC) paradigm (see, e.g. the reviews [5–12], and references therein) and to black holes (BHs) (see, e.g. the reviews [13–17], and references therein).

In this article, we focus on the BH issue and consider the propagation of quantum fields. There are many different attempts to deal with BHs in LQG and to describe their dynamics. In this study, we use an effective corrected metric derived in [18]. This spacetime structure is

³ Author to whom any correspondence should be addressed.

in no way a final word on the question of the exterior background of an LQG BH. It relies on heavy hypothesis that should be questioned. But it constitutes an interesting phenomenological framework to investigate the questions of cross-sections and greybody factors in an effective quantum gravity-corrected background. Within this spacetime, we investigate in details the scattering of quantum fields. We first draw the general picture used to model BHs in this framework. Then we explain how cross sections are calculated and their meaning. We turn to the explicit computation for scalar particles. Finally, we derive the propagation equation for fermions. Conclusions and perspectives are outlined.

Black holes in loop gravity

BHs are fascinating objects that have been intensively investigated in the framework of LQG [13–17]. To give just one example, the Bekenstein–Hawking entropy is now correctly recovered, although different ways to compute it are still considered (see, e.g. [17]). In microcanonical calculations taking into account only the quantum geometrical degrees of freedom [19] this requires a specific fixing of the Barbero–Immirzi parameter, depending on the details of the state counting [20]. This is not anymore the case in recent holographic models [21–25].

In this study, we use the metric obtained in [18], building on [26]. This framework was precisely set-up to investigate the creation of BHs and their subsequent Hawking evaporation. This question is intimately related to the information paradox which is itself closely linked to the singularity resolution. An interesting approach consists in using the 4-dimensional static model derived in [26] and to make it dynamical. This allows one to reproduce the Hawking calculation of particle creation in a classical BH background and to demonstrate that the whole process is unitary. The spirit of the framework in the line of the long history of ‘non-singular’ BHs (see, e.g. [27–30], and references therein).

In canonical LQG, the basic variables are the holonomy of the Ashtekar connexion and the flux of the densitized triads. In the covariant formulation, space is described by a spin network whose edges are labelled by irreducibles representations of $SU(2)$ and nodes are intertwiners [31]. Intuitively, the edges carry quanta of area and the vertices carry elementary volumes. One of the most important result of LQG is that the area is quantized according to:

$$A(j) = 8\pi\gamma l_p^2 \sqrt{j(j+1)}, \quad (1)$$

where γ is the Barbero–Immirzi parameter, l_p is the Planck length and j is a half-integer. In [18], several hypotheses were made to describe LQG BHs beginning, as expected, by spherical symmetry which is used to reduce the number of variables. In addition, instead of all *a priori* possible closed graphs, a regular lattice with edges of lengths δ_b and δ_c has been chosen. Details on the structure of lattices possibly used can be found in [32]. The resulting dynamical solution inside the horizon was then analytically continued to the region outside the horizon, showing that it is possible to reduce the two unknown parameters by requiring that the minimum area in the solution is equal to minimum area of LQG (exactly as done in LQC). The remaining free parameter δ_b will now be called δ and referred to as the ‘polymeric parameter’. Together with $A_{\min} = A(1/2)$, it determines how ‘different’ from the usual general relativity (GR) solution the considered BH is.

In practice, the procedure consists in first defining the Hamiltonian constraint by the use of holonomies along the considered fixed graph. It is important to underline that the influence of the choice of a specific graph has not been studied in details and this should be considered as a weakness of the considered approach. Both the diffeomorphism and Gauss constraints are identically vanishing: the first one is zero because of homogeneity and the second one is

zero because the spacetime is of the Kantowski–Sachs form. The Hamiltonian constraint is solved after replacing the connection by the holonomy. Finally, the solution is expanded to the full spacetime, leading to the effective LQG-corrected geodesically complete Schwarzschild metric:

$$\begin{aligned} ds^2 &= G(r)dt^2 - \frac{dr^2}{F(r)} - H(r)d\Omega^2, \\ G(r) &= \frac{(r - r_+)(r - r_-)(r + r_x)^2}{r^4 + a_o^2}, \\ F(r) &= \frac{(r - r_+)(r - r_-)r^4}{(r + r_x)^2(r^4 + a_o^2)}, \\ H(r) &= r^2 + \frac{a_o^2}{r^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

where $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, $r_+ = 2m$ and $r_- = 2mP^2$ are the two horizons (being respectively future and past horizons for observers in the two asymptotically flat regions of the associated causal diagram), and $r_x = \sqrt{r_+r_-} = 2mP$, P being the polymeric function defined by $P = (\sqrt{1 + \epsilon^2} - 1)/(\sqrt{1 + \epsilon^2} + 1)$, with $\epsilon = \gamma\delta$, and the area parameter a_o is given by $a_o = A_{\min}/8\pi$. In principle ϵ is not bounded but the approach is rigorous only when $\epsilon \ll 1$ (at this state no phenomenological bound has been derived on ϵ). The parameter m in the solution is related to the ADM mass M by $M = m(1 + P)^2$ (inferred from what is observed at asymptotic infinity). This metric should be considered as a ‘toy model’ and not taken as a final statement about the spacetime structure around an LGQ BH. It is however very convenient and meaningful for first phenomenological investigations. The associated Penrose digram is given in figure 1. From now, we use only Planck units.

Let us discuss a bit more this solution. The considered spacetime is a particular example of a Kantowski–Sachs spacetime. In the construction, the interior of a spherically symmetric BH is treated as homogeneous, but not explicitly as isotropic. As usual, the connection is replaced by the holonomy in the Hamiltonian constraint and the equation of motion are solved, together with the Hamiltonian constraint. The outcome is an exact solution of a minisuperspace model valid inside the event horizon [26]. Finally, the solution is analytically extended to the whole spacetime. In other words, the metric was assumed to be valid everywhere and it was explicitly proven with a coordinate transformation that the singularities at the two horizons (event horizon and Cauchy internal horizon) were just coordinate singularities. The resulting metric has a simple, geodesically complete, analytic form in the whole spacetime. The weaknesses are the following. First, the metric cannot be considered a rigorous ‘full LQG’ solution, although it captures some features of LQG as the minimum area and the use of holonomies. Second, this metric builds on the initial version of LQC. In the future it would be interesting to replace the polymeric parameter by a rescaled one, in the same sense than the μ_0 scheme in LQC has been replaced by the $\bar{\mu}$ one (see [6]). Finally, it is assumed that matter couples minimally to the effective metric.

It should be underlined that the model considered in this article is far from being the only possible one within the LQG framework. It is somehow ‘unusual’ in the sense that it might lead to possible large quantum gravity effects outside the horizon. Although not something fully exotic (this possibility is e.g. advocated on a different grounding in [33]), it is fair to say that this is not a generic prediction. It is however the specific case where quantum gravity might have an impact on observations and this is why we focus here on this specific setting which is anyway quite well justified in its physical motivations.

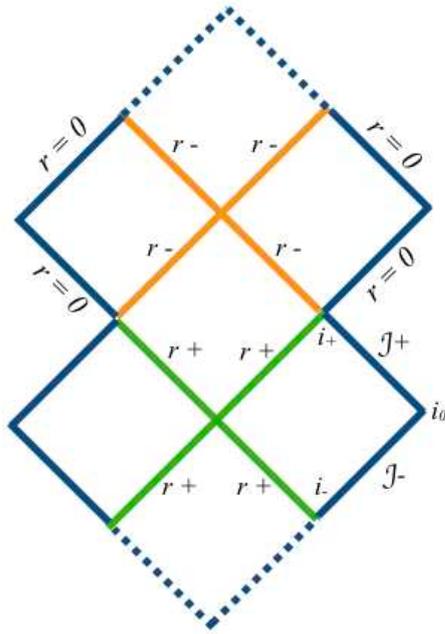


Figure 1. Penrose diagram for the metric considered in this study. The horizons are denoted as r_+ and r_- .

Cross section for evaporating black holes

The Hawking evaporation [34] (as a specific case of the Unruh effect [35]) is one of the most important aspects of BH physics. Although it can be described as semi-classical process in the ‘large mass’ regime, it requires a quantum gravity treatment near the endpoint. Several attempts to describe it in the framework of LQG were made [36–38]. In this study we focus on another aspect. Basically, the ‘naive’ Hawking spectrum is described by a blackbody law, in agreement with the Unruh effect which predicts that an accelerated observer sees a bath of thermal particles with temperature $T = a/(2\pi)$. In the case of black holes, the temperature is $T_H = 1/(8\pi M)$: the lighter the BH, the highest its temperature, which makes the whole process very explosive in the last stages (a BH with a mass above the mass of the Moon has a temperature smaller than the one of the cosmological microwave background). However, the real spectrum is slightly more complicated as the emitted particles have to cross a potential barrier before escaping to infinity. This induces a modification, captured by the cross section σ , to the pure blackbody spectrum which is known to encode quite a lot of information on the gravitational theory or spacetime structure considered. The spectrum reads as:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T_H}} \pm 1} \sigma(M, s, \omega) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad (3)$$

with M the BH mass, s the particle spin, ω its energy and k its momentum.

Cross sections have already been calculated for many metrics, beginning by the pioneering works on Schwarzschild, Kerr, and Reissner–Nordstrom BHs in the case of scalar, fermion and vector fields [39–41]. They have also been investigated for extra-dimensional Schwarzschild–de–Sitter black hole [42], for Lovelock gravity [43], for tachyonic fields [44], for scalar fields

in an Einstein–Maxwell background [45], for $f(R)$ gravity minimally coupled to a cloud of strings in $2 + 1$ dimensions [46], for Einstein–Gauss–Bonnet–de Sitter black holes [47], for black strings [48], for Einstein–Born–Infeld dilaton spacetimes [49], for dRGT massive gravity [50], for Reissner–Nordström–de Sitter black holes [51], for extra-dimensional Kerr black holes [52], for Myers–Perry black holes [53], for dilatonic black holes [54], for rotating charged Goedel black holes [55], to cite only a few remarkable results. In each case the cross section captures some specific and non-trivial characteristics of the considered spacetime. In this article, we calculate the cross sections for a so-called loop BH (LBH), as described by the metric (2), which is static and spherical symmetric. Given those spacetime symmetries, and according to the optical theorem, the cross section reads

$$\sigma(M, s, \omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2j+1)\pi}{\omega^2} |A_{l,s}|^2, \quad (4)$$

where $A_{l,s}$ is the transmission coefficient of the angular momentum mode l , and $j = l + s$ is the total angular momentum.

Massless scalar field

The dynamics of a massless scalar field minimally coupled to the gravitational field is described by the generalized Klein–Gordon equation:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_{\nu} \Phi) = 0, \quad (5)$$

where $\Phi \equiv \Phi(t, r, \theta, \phi)$. Since we work within a static and spherically symmetric setting, the scalar field can be written as:

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = R(r)S(\theta)e^{i(\omega t + m' \phi)}, \quad (6)$$

where w is the frequency and m' is an integer. When inserting this ansatz in the Klein–Gordon equation (5) with the metric (2), the radial equation reads

$$\frac{\sqrt{GF}}{H} \frac{\partial}{\partial r} \left(H \sqrt{GF} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \left(\omega^2 - \frac{G}{H} l(l+1) \right) R(r) = 0, \quad (7)$$

with l the orbital quantum number. This result uses the squared angular momentum operator $L^2 = - \left[\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]$, whose eigenvalues are $l(l+1)$.

As usually done to study this kind of problems, we introduce the tortoise coordinate. Focusing on the two non-trivial coordinates, the metrics (2) reduces to

$$ds^2 = -G(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)}, \quad (8)$$

and the null geodesics are given by $ds^2 = 0$, that is $dt^2 = \frac{dr^2}{GF} \equiv dr^{*2}$ with r^* the tortoise coordinate. This new coordinate tends to $-\infty$ when r tends to r_+ . By introducing a new radial field $\Psi(r) \equiv \sqrt{HR}(r)$ and writing equation (7) with respect to r^* , we obtain:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} + \omega^2 - V(r^*) \right) \Psi(r) = 0, \quad (9)$$

$$V(r) = \frac{G}{H}l(l+1) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GF}{H}}\frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\frac{GF}{H}}\frac{\partial H}{\partial r}\right). \quad (10)$$

The potential $V(r)$ vanishes at the horizon r_+ and at spatial infinity.

At the horizon r_+ , \sqrt{H} tends to the constant $\sqrt{H(r_p)}$ and the radial part of the wavefunction R is a plane wave with respect to the tortoise coordinate:

$$R(r^*) = A_{\text{in}}^h e^{i\omega r^*} + A_{\text{out}}^h e^{-i\omega r^*}, \quad (11)$$

with A_{in}^h (respectively A_{out}^h) the probability amplitude for the incoming modes (resp. outgoing modes) at the horizon. For convenience, we choose the absorption point of view. With this convention, there are incoming and outgoing modes infinitely far from the BH and only incoming ones at the horizon. We therefore impose $A_{\text{out}}^h = 0$.

Infinitely far away from the horizon, \sqrt{H} tends to r and the radial wavefunction is a spherical wave with respect to the coordinate r :

$$R(r) = \frac{A_{\text{in}}^\infty}{r} e^{i\omega r} + \frac{A_{\text{out}}^\infty}{r} e^{-i\omega r}. \quad (12)$$

For a scalar particle, the transmission amplitude for the mode l is given by:

$$|A_l|^2 = r_+^2 \left| \frac{A_{\text{in}}^h}{A_{\text{in}}^\infty} \right|^2 = 1 - \left| \frac{A_{\text{out}}^\infty}{A_{\text{in}}^\infty} \right|^2. \quad (13)$$

The calculation of the cross section relies on the following steps. For each quantum number l , we solve the radial equation (7) so as to determine the transmission coefficients A^∞ . Numerical computations must be performed from the horizon (where the radial wavefunction takes the form of equation (11)) until infinity (where the radial wave function takes the form of equation (12)). In practice, the numerical solving begins at $r_{\text{ini}} = r_+ + 10^{-3}r_+$ and stops sufficiently far at $r_{\text{end}} \approx 300/\omega$ which can be considered as infinity at the chosen accuracy.

We decompose the radial wavefunction $R(r)$ into its real part $U(r)$ and its imaginary part $V(r)$. At $r_{\text{ini}} \approx r_+$, the normalization condition $R(r_{\text{ini}}) = 1$ ensures that there are only incoming modes and $\frac{dR(r_{\text{ini}})}{dr} = \frac{i\omega}{\sqrt{G(r_{\text{ini}})F(r_{\text{ini}})}}$. Technical details are given in appendix A.

The radial equation is solved with a fifth order Runge Kutta method until r_{end} . The radial wavefunction is fitted with the function given by equation (12) so as to obtain the coefficients A_{out}^∞ and A_{in}^∞ . Then the $|A_l|^2$ can be obtained from equation (13). The bigger the l , the smaller the $|A_l|^2$ and numerical investigations have shown that stopping at $l = 10$ is sufficient. Finally, equation (4) is used to evaluate the cross section. The results are presented in figure 2.

The cross section does decrease when ϵ increases. One can also notice a slight energy shift of the pseudo-periodic oscillations toward a lower frequency (in $M\omega$) when ϵ increases. When $\epsilon < 10^{-0.8}$, it is hard to distinguish between the solutions. As far as phenomenology is concerned, it seems that taking into account the quantum corrections does not influence substantially the cross section of a scalar field for reasonable values of ϵ (that is $\epsilon \ll 1$). The main trend is however clear.

Spin $\frac{1}{2}$ field

For spacetimes such that $ds^2 = f(r)dt^2 - f^{-1}(r)dr^2 - r^2d\Omega^2$, the radial equation is given by the Teukolsky master equation [56]. The metric given by equation (2), without any specified expressions for $G(r)$, $F(r)$ and $H(r)$, is however more general and basically includes

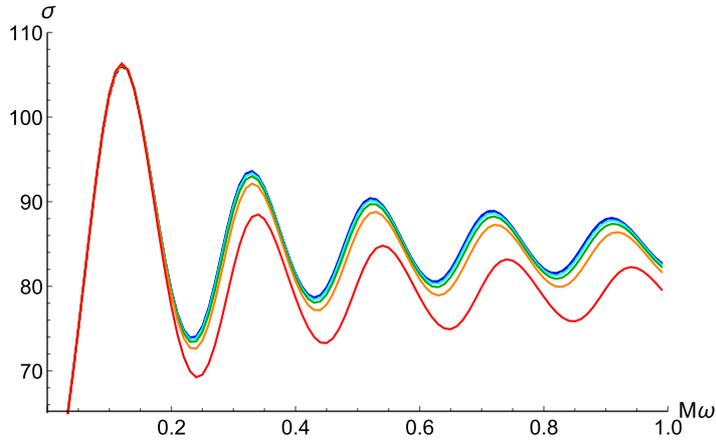


Figure 2. Emission cross section for a scalar field with energy ω in the background spacetime of a LBH of mass M for different values of ϵ ($\epsilon = \gamma\delta$ measures the ‘quantumness’ of spacetime). From bottom to top: $\epsilon = 10^{\{-0.3, -0.6, -0.8, -1, -3\}}$. The blue line, corresponding to $\epsilon = 10^{-3}$ is superposed with the cross section for a Schwarzschild BH.

all the static and spherical spacetimes. To the best of our knowledge, the fermionic radial equation for such spacetimes has not been explicitly derived. In the following, we derive this equation by generalizing the Teukolsky–Chandrasekhar procedure [57]. This can be used in other contexts.

To this aim, we have used the Newmann–Penrose formalism [58], which is, among other desirable properties, well-suited for spherical BHs. In this formalism, we have chosen a null basis consisting of a pair of real null vectors \mathbf{l} and \mathbf{n} and a pair of complex conjugate null vectors \mathbf{m} and $\bar{\mathbf{m}}$:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{m} = \bar{\mathbf{m}} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0. \quad (14)$$

The orthogonality conditions are imposed:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{l} \cdot \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{m}} = 0. \quad (15)$$

We also require the following normalization:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 1 \text{ and } \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{m}} = -1. \quad (16)$$

This normalization condition is not necessary in the Newmann–Penrose formalism, but it is convenient for our purpose. Any basis with the properties given by equations (14)–(16) can be used. We choose the basis vectors:

$$l^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{G}}, -\sqrt{F}, 0, 0 \right), \quad (17)$$

$$n^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{G}}, \sqrt{F}, 0, 0 \right), \quad (18)$$

$$m^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{H}}, \frac{i}{\sqrt{H} \sin \theta} \right), \quad (19)$$

$$\bar{m}^i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(0, 0, \frac{1}{\sqrt{H}}, \frac{-i}{\sqrt{H} \sin \theta} \right). \quad (20)$$

When δ tends to zero and a_0 vanishes, this basis tends to the Carter tetrad, which can be used to describe a Schwarzschild BH [59]. However, usually, the Kinnersley tetrad is preferred for Schwarzschild BHs [57]. Different choices for the tetrads will lead to different spin coefficients and finally to apparently different, but actually *equivalent*, radial equations.

For spin $\frac{1}{2}$ fields, the wavefunction is represented by a pair of spinors, P^A and $\bar{Q}^{A'}$, with $A = 0, 1$ and $A' = 0, 1$. The Dirac equation in the Newmann–Penrose formalism can be written as [57]:

$$(D + \epsilon - \rho)P^0 + (\delta^* + \pi - \alpha)P^1 = i\mu_*\bar{Q}^{1'}, \quad (21)$$

$$(\Delta + \mu - \gamma)P^1 + (\delta + \beta - \tau)P^0 = -i\mu_*\bar{Q}^{0'}, \quad (22)$$

$$(D + \epsilon^* - \rho^*)\bar{Q}^{0'} + (\delta + \pi^* - \alpha^*)\bar{Q}^{1'} = -i\mu_*P^1, \quad (23)$$

$$(\Delta + \mu_* - \gamma^*)\bar{Q}^{1'} + (\delta^* + \beta^* - \tau^*)\bar{Q}^{0'} = i\mu_*P^0, \quad (24)$$

with

$$D = l^i \partial_i; \quad \Delta = n^i \partial_i; \quad \delta = m^i \partial_i; \quad \delta^* = \bar{m}^i \partial_i \quad (25)$$

μ_* is related to the mass of the fermion m_e by $\mu_*\sqrt{2} = m_e$. The spin-coefficients are derived from the rotation coefficients. In the tetrad formalism (for more details, see, e.g. [57]), the λ -symbols are defined as:

$$\lambda_{abc} = e_{bij}[e_a^j e_c^j - e_d^j e_c^i], \quad (26)$$

the a, b et c indices do indicate the vector of the basis, while the i and j indices are the coordinates. The correspondence reads as $e_1 = l, e_2 = n, e_3 = m$ and $e_4 = \bar{m}$ with $e^1 = e_2, e^2 = e_1, e^3 = -e_4$ and $e^4 = -e_3$. For example, $e_{12,3}$ represents the second component of l , derived with respect to θ . The rotation coefficients are defined as:

$$\gamma_{cab} = e_c^k e_{ak;i} e_b^i. \quad (27)$$

Then, from the λ -symbols, the rotation coefficients are obtained with the relation:

$$\gamma_{cab} = \frac{1}{2}(\lambda_{abc} + \lambda_{cab} - \lambda_{bca}). \quad (28)$$

The λ -symbols (26) and the rotation coefficients (27) should not be confused with the spin coefficients λ and γ . The spin coefficients are defined with the rotation coefficients (see appendix B). So first we have calculated the λ -symbols and then we have deduced the spin coefficients:

$$\kappa = \sigma = \lambda = \nu = \tau = \pi = 0, \quad (29)$$

$$\rho = \mu = \frac{\sqrt{FH'}}{2\sqrt{2H}}, \quad (30)$$

$$\epsilon = \gamma = -\frac{\sqrt{FG'}}{4\sqrt{2G}}, \quad (31)$$

$$\alpha = -\beta = -\frac{\cot\theta}{2\sqrt{2H}}. \quad (32)$$

Given the symmetries, the wavefunctions can be written as $\Psi(t, r, \theta, \phi) = R(r)S(\theta)e^{i(\omega t + m'\phi)}$ where, as for scalars, ω is the frequency and m' is an integer. We use the following ansatz:

$$P^0 = \frac{e^{i(\omega t + m'\phi)}}{\sqrt{H(r)}(G(r)F(r))^{\frac{1}{8}}} R_+(r)S_+(\theta), \quad (33)$$

$$P^1 = \frac{e^{i(\omega t + m'\phi)}}{\sqrt{H(r)}(G(r)F(r))^{\frac{1}{8}}} R_-(r)S_-(\theta), \quad (34)$$

$$\bar{Q}^{0'} = -\frac{e^{i(\omega t + m'\phi)}}{\sqrt{H(r)}(G(r)F(r))^{\frac{1}{8}}} R_+(r)S_-(\theta), \quad (35)$$

$$\bar{Q}^{1'} = \frac{e^{i(\omega t + m'\phi)}}{\sqrt{H(r)}(G(r)F(r))^{\frac{1}{8}}} R_-(r)S_+(\theta). \quad (36)$$

This is useful as it makes the system separable into a radial and an angular parts. The normalisation with $1/(\sqrt{H(r)}(G(r)F(r))^{\frac{1}{8}})$ is only chosen for convenience. By inserting the previous expressions in Dirac equation (21), we obtain:

$$-(\sqrt{HF}\mathcal{D}^\dagger R_+ + im_e\sqrt{HR}_-)S_+ + R_-\mathcal{L}S_- = 0, \quad (37)$$

with \mathcal{D} a radial operator

$$\mathcal{D} = \partial_r + \left(\frac{G'}{8G} - \frac{F'}{8F} \right) + \frac{i\omega}{\sqrt{GF}}, \quad (38)$$

and \mathcal{L} an angular operator

$$\mathcal{L} = \partial_\theta + \frac{m'}{\sin\theta} + \frac{\cot\theta}{2}. \quad (39)$$

\mathcal{D}^\dagger is the complex conjugate of \mathcal{D} and \mathcal{L}^\dagger is $-\mathcal{L}$ once replacing θ by $\pi - \theta$.

Equation (37) implies:

$$\mathcal{L}S_- = \lambda_1 S_+, \quad (40)$$

$$\sqrt{HF}\mathcal{D}^\dagger R_+ + im_e\sqrt{HR}_- = \lambda_1 R_-, \quad (41)$$

with λ_1 a constant of separation. Proceeding in the same way with equations (22)–(24), three other constants of separation do appear: respectively denoted λ_2 , λ_3 and λ_4 . Among the eight equations, there is some redundancy and only four are actually independent. The consistency implies: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \equiv \lambda$. This separation constant λ is neither a λ -symbol nor a spin coefficient, we simply use the notation of [57].

The Dirac equations finally reduce to the following radial and angular systems:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{HF}\mathcal{D} & -(\lambda + im_e\sqrt{H}) \\ -(\lambda - im_e\sqrt{H}) & \sqrt{HF}\mathcal{D}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_- \\ R_+ \end{pmatrix} = 0, \quad (42)$$

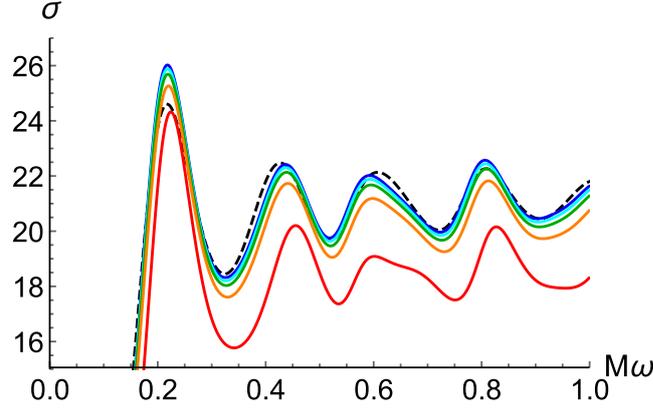


Figure 3. Emission cross section for a fermionic field, with energy ω , in the background spacetime of a LBH of mass M . From bottom to top: $\epsilon = 10^{\{-0.3, -0.6, -0.8, -1, -3\}}$. The dashed dark curve corresponds to the Schwarzschild cross section.

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L} & -\lambda \\ \lambda & \mathcal{L}^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_- \\ S_+ \end{pmatrix} = 0. \quad (43)$$

By eliminating R_- in equation (42), we obtain the radial equation for R_+ :

$$\sqrt{HF}\mathcal{D} \left(\frac{\sqrt{HF}\mathcal{D}^\dagger R_+}{\lambda - im_e\sqrt{H}} \right) - (\lambda + im_e\sqrt{H})R_+ = 0. \quad (44)$$

The radial equation for R_- is the conjugate of equation (44). This equation generalizes the Teukolsky equation [56]. The separation constant λ is obtained by solving the angular equation, which is the same than in the Schwarzschild case: $\lambda^2 = j(j+1) - s(s-1)$ [60], that is $\lambda^2 = (l+1)^2$ for fermions.

Setting $m_e = 0$ leads to:

$$\sqrt{HF}\mathcal{D} \left(\sqrt{HF}\mathcal{D}^\dagger R_+ \right) - \lambda^2 R_+ = 0. \quad (45)$$

This equation of motion can be used to determine the fermionic cross section. We study the asymptotic solutions, near the horizon and at spacial infinity. The function R is splitted into its real part U and its Imaginary part V . Both equations are then solved thanks to equation (44).

For a massless fermionic field, at the horizon, equation (44) tends to:

$$\frac{\partial^2 R_+}{\partial r^2} + \frac{1}{2(r-r_+)} \frac{\partial R_+}{\partial r} + \left(\frac{\omega^2}{C_1} + i \frac{\omega}{\sqrt{C_1}} \right) \frac{R_+}{(r-r_+)^2} = 0, \quad (46)$$

with $C_1 = \frac{(r_+ - r_-)^2 r_+^4}{(r_+^4 + a_0^2)^2}$. With respect to the tortoise coordinate r^* , equation (46) reads as:

$$\frac{1}{C_1} \frac{\partial^2 R_+}{\partial r^{*2}} - \frac{1}{2\sqrt{C_1}} \frac{\partial R_+}{\partial r^{*2}} + \left(\frac{\omega^2}{C_1} + i \frac{\omega}{\sqrt{C_1}} \right) R_+ = 0. \quad (47)$$

The determinant of the characteristic equation of equation (47) is $\det = \frac{1-16\omega(4\omega M+i)}{4C_1}$. There are two roots but, from the absorption point of view, there should be only an incoming

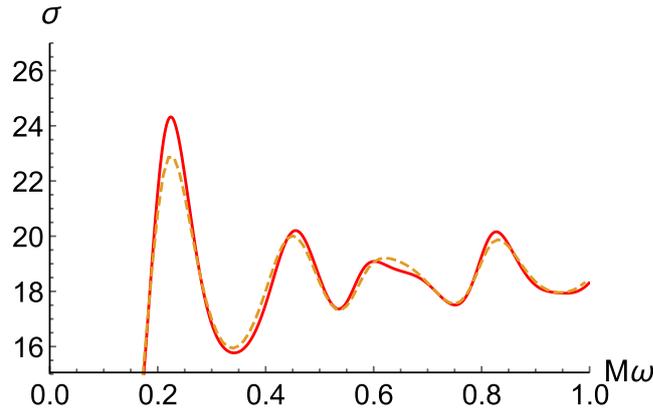


Figure 4. Emission cross section for a fermionic field, with energy ω , in the background spacetime of a LBH of mass M , for $\epsilon = 10^{-0.3}$. The dashed curved corresponds to $a_0 = 0$ and the plain curve to the usual LQG value, $a_0 = A_{\min}/8\pi = \sqrt{3}\gamma/2$.

mode at the horizon. The root x_1 is therefore chosen with a positive imaginary part. Near the horizon, the radial part reads as:

$$R_+(r^*) = Ae^{x_1 r^*}, \quad (48)$$

with A a complex number. As before, we normalize such that $R_+(r_{\text{ini}}) = 1$, which leads to $\frac{dR_+(r_{\text{ini}})}{dr} = \frac{x_1}{\sqrt{G(r_{\text{ini}})F(r_{\text{ini}})}}$. At spacial infinity, the solution is a plane wave.

It has been shown in [61] that the transmission coefficient for spin 1/2 fields is given by:

$$|A_l|^2 = \left| \frac{A_{\text{in}}^h}{A_{\text{in}}^\infty} \right|^2. \quad (49)$$

As for the scalar case, we numerically solve equation (44), fit the solution in order to obtain A_{in}^∞ for each $l \leq 10$, and then obtain the cross section. The result is shown in figure 3. Once again, the general trend is to decrease the cross section when the ‘quantumness’ increases. As the relative effect is getting bigger with an increasing energy of the emitted particle, this should leave a footprint through a distortion of the instantaneous Hawking spectrum which will exhibit slight suppression of its UV tail.

Finally, in figure 4, we show that the effect of sending to 0 the minimum area a_0 does not have a dramatic effect. However, choosing a non-vanishing a_0 leads to a slight increase of the cross section on the first peak. The cross section itself is of course a continuous function of a_0 . This parameter has a clearly different influence than the polymerization parameter.

Conclusion

In this article, we have studied the propagation of quantum fields in the vicinity of a black hole undergoing quantum gravity corrections. It is shown that the effects are generically small but the trend is quite clear. Phenomenologically, large values of the polymerization parameter could be probed by a decreased cross section, together with a slight frequency shift for fermions. In addition, the non-vanishing minimum area leaves a specific footprint on the first peak.

This sets a framework for futures studies, both in LQG or in modified gravity. In the specific case of loop black holes, it would be most interesting to investigate, using the tools developed in this study, the cross sections for recent BH models published in [62] and [63, 64], among others.

As the Hawking evaporation of a black hole is considered to be one of the rare possible probes of quantum gravity, it is mandatory to calculate the cross sections for quantum fields in the associated background spacetime. This article is only a first step in this direction for LQG. It already shows that different quantum corrections—still in the LQG framework—will lead to different effects on the behavior of cross section. This is both useful for accurate calculations of the Hawking spectrum (to refine, e.g. what was done in [65]) and as a probe, in itself, on the intricate spacetime structure.

Acknowledgments

KM is supported by a grant from the CFM foundation.

Appendix A

The initial conditions for solving the radial equation (7) are $R(r_{\text{ini}}) = A_{\text{in}}^h e^{i\omega r^*} = 1$ and $\frac{dR(r_{\text{ini}})}{dr} = \frac{i\omega}{\sqrt{GF}}$. To solve this complex equation, both the real and the imaginary parts have to be solved. Writing $R(r) = U(r) + iV(r)$, the initial conditions are:

$$\begin{aligned} U(r_{\text{ini}}) &= 1, & V(r_{\text{ini}}) &= 0, \\ \frac{dU(r_{\text{ini}})}{dr} &= 0, & \frac{dV(r_{\text{ini}})}{dr} &= \frac{\omega}{\sqrt{GF}}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Far from the BH, we have:

$$U(r) = \frac{a_1}{r} \cos(\omega r) + \frac{b_1}{r} \sin(\omega r), \quad (\text{A.2})$$

$$V(r) = \frac{a_2}{r} \cos(\omega r) + \frac{b_2}{r} \sin(\omega r), \quad (\text{A.3})$$

with $a_1 = \Re(A_{\text{in}}^\infty) + \Re(A_{\text{out}}^\infty)$, $b_1 = \Im(A_{\text{out}}^\infty) - \Im(A_{\text{in}}^\infty)$, $a_2 = \Im(A_{\text{in}}^\infty) + \Im(A_{\text{out}}^\infty)$ and $b_2 = \Re(A_{\text{in}}^\infty) - \Re(A_{\text{out}}^\infty)$. With a fifth order Runge Kutta method, we solve the real and imaginary parts of equation (44) with the initial conditions given by equation (A.1). At r_{end} , we fit the solutions of U and V with functions given in equations (A.2) and (A.3) to obtain the coefficients a_1 , b_1 , a_2 , and b_2 so as to deduce A_{in}^∞ and A_{out}^∞ .

Appendix B

The spin coefficients defined with the rotation coefficient are given by:

$$\begin{aligned} \kappa &= \gamma_{311} & \rho &= \gamma_{314} & \epsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{211} + \gamma_{341}) \\ \sigma &= \gamma_{313} & \mu &= \gamma_{243} & \gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{212} + \gamma_{342}) \\ \lambda &= \gamma_{244} & \tau &= \gamma_{312} & \alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{214} + \gamma_{344}) \\ \nu &= \gamma_{242} & \pi &= \gamma_{241} & \beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{213} + \gamma_{343}). \end{aligned}$$

ORCID iDs

Aurélien Barrau  <https://orcid.org/0000-0003-1670-2966>

References

- [1] Rovelli C 2004 *Quantum Gravity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [2] Thiemann T 2008 *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [3] Rovelli C and Vidotto F 2014 *Covariant Loop Quantum Gravity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [4] Ashtekar A and Pullin J (ed) 2017 *Loop Quantum Gravity (100 Years of General Relativity vol 4)* (Singapore: World Scientific)
- [5] Bojowald M 2008 *Living Rev. Relativ.* **11** 4
- [6] Ashtekar A and Singh P 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 213001
- [7] Barrau A, Cailleteau T, Grain J and Mielczarek J 2014 *Class. Quantum Grav.* **31** 053001
- [8] Ashtekar A and Barrau A 2015 *Class. Quantum Grav.* **32** 234001
- [9] Agullo I and Corichi A 2014 *Springer Handbook of Spacetime* ed A Ashtekar and V Petkov (Berlin: Springer) pp 809–39
- [10] Wilson-Ewing E 2017 *C. R. Phys.* **18** 207
- [11] Agullo I and Singh P 2017 *Loop Quantum Gravity: the First 30 Years* ed A Ashtekar and J Pullin (Singapore: World Scientific Publishing) pp 183–240
- [12] Barrau A and Bolliet B 2016 *Int. J. Mod. Phys. D* **25** 1642008
- [13] Ashtekar A, Baez J C and Krasnov K 2000 *Adv. Theor. Math. Phys.* **4** 1
- [14] Gürsel H and Sakalli I 2018 *Adv. High Energy Phys.* **2018** 8504894
- [15] Barbero G J F and Perez A 2017 *Loop Quantum Gravity: the First 30 Years* ed A Ashtekar and J Pullin (Singapore: World Scientific Publishing) pp 241–79
- [16] Olmedo J 2016 *Universe* **2** 12
- [17] Perez A 2017 *Rep. Prog. Phys.* **80** 126901
- [18] Alesci E and Modesto L 2014 *Gen. Relativ. Gravit.* **46** 1656
- [19] Rovelli C 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 3288
- [20] Agullo I, Fernando Barbero G J, Borja E F, Diaz-Polo J and Villasenor E J S 2009 *Phys. Rev. D* **80** 084006
- [21] Ghosh A, Noui K and Perez A 2014 *Phys. Rev. D* **89** 084069
- [22] Frodden E, Geiller M, Noui K and Perez A 2014 *Europhys. Lett.* **107** 10005
- [23] Ben Achour J, Mouchet A and Noui K 2015 *J. High Energy Phys.* JHEP06(2015)145
- [24] Asin O, Ben Achour J, Geiller M, Noui K and Perez A 2015 *Phys. Rev. D* **91** 084005
- [25] Ben Achour J and Noui K 2016 *PoS FFP14* 158
- [26] Modesto L 2010 *Int. J. Theor. Phys.* **49** 1649
- [27] Frolov V P, Markov M A and Mukhanov V F 1989 *Phys. Lett. B* **216** 272
Frolov V P, Markov M A and Mukhanov V F 1990 *Phys. Lett. B* **216** 52
- [28] Balbinot R, Brady P R, Israel W and Poisson E 1991 *Phys. Lett. A* **161** 223
- [29] Hayward S A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 031103
- [30] Spallucci E, Smailagic A and Nicolini P 2009 *Phys. Lett. B* **670** 449
- [31] Rovelli C 2011 *PoS QGGS2011* 003
- [32] Alesci E and Cianfrani F 2015 *Phys. Rev. D* **92** 084065
- [33] Haggard H M and Rovelli C 2016 *Int. J. Mod. Phys. D* **25** 1644021
- [34] Hawking S 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
- [35] Unruh W G 1976 *Phys. Rev. D* **14** 870
- [36] Ashtekar A and Bojowald M 2005 *Class. Quantum Grav.* **22** 3349
- [37] Barrau A, Cailleteau T, Cao X, Diaz-Polo J and Grain J 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 251301
- [38] Gambini R and Pullin J 2014 *Class. Quantum Grav.* **31** 115003
- [39] Page D N 1976 *Phys. Rev. D* **13** 198
- [40] Page D N 1976 *Phys. Rev. D* **14** 1509
- [41] Page D N 1977 *Phys. Rev. D* **16** 2402

- [42] Kanti P, Grain J and Barrau A 2005 *Phys. Rev. D* **71** 104002
- [43] Grain J, Barrau A and Kanti P 2005 *Phys. Rev. D* **72** 104016
- [44] Gursel H and Sakall I 2018 (arXiv:1806.03446)
- [45] Panotopoulos G and Rincón A 2018 *Phys. Rev. D* **97** 085014
- [46] Ovgün A and Jusufi K 2018 *Ann. Phys.* **395** 138
- [47] Zhang C-Y, Li P-C and Chen B 2018 *Phys. Rev. D* **97** 044013
- [48] Ahmed J and Saifullah K 2017 *Eur. Phys. J. C* **77** 885
- [49] Panotopoulos G and Rincón A 2017 *Phys. Rev. D* **96** 025009
- [50] Boonserm P, Ngampitipan T and Wongjun P 2018 *Eur. Phys. J. C* **78** 492
- [51] Ahmed J and Saifullah K 2018 *Eur. Phys. J. C* **78** 316
- [52] Jorge R, de Oliveira E S and Rocha J V 2015 *Class. Quantum Grav.* **32** 065008
- [53] Boonserm P, Chatrabhuti A, Ngampitipan T and Visser M 2014 *J. Math. Phys.* **55** 112502
- [54] Abedi J and Arfaei H 2014 *Class. Quantum Grav.* **31** 195005
- [55] Li W, Xu L and Liu M 2009 *Class. Quantum Grav.* **26** 055008
- [56] Teukolsky S A 1973 *Astrophys. J.* **185** 635
- [57] Chandrasekhar S 1992 *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford: Clarendon Press) p 646
Chandrasekhar S 1985 *The Mathematical Theory of Black Holes* 1st edn (Oxford: Clarendon Press) p 646
- [58] Newman E and Penrose R 1962 *J. Math. Phys.* **3** 566
- [59] Batic D, Nowakowski M and Morgan K 2016 *Universe* **2** 31
- [60] Kanti P 2004 *Int. J. Mod. Phys. A* **19** 4899
- [61] Cvetič M and Larsen F 1998 *Phys. Rev. D* **57** 6297
- [62] Ben Achour J, Lamy F, Liu H and Noui K 2018 *EPL* **123** 20006
- [63] Ashtekar A, Olmedo J and Singh P 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 241301
- [64] Ashtekar A, Olmedo J and Singh P 2018 (arXiv:1806.02406)
- [65] Barrau A, Cao X, Noui K and Perez A 2015 *Phys. Rev. D* **92** 124046

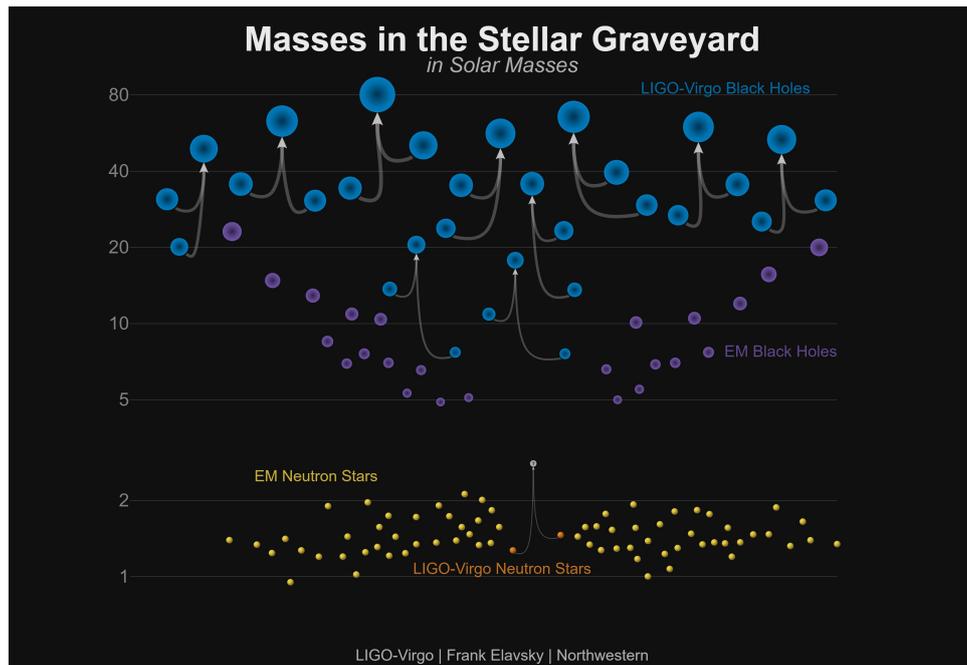


FIGURE 4.2 – Masses des systèmes binaires compacts détectés par les collaborations LIGO-Virgo. Crédits : LIGO/Virgo/Northwestern Univ./Frank Elavsky.

4.5 Ondes gravitationnelles et gravité quantique

Les récentes observations effectuées par les collaborations LIGO-Virgo¹⁴ ont marqué le début d'une nouvelle ère : celle de l'astronomie des ondes gravitationnelles. Omniprésentes dans la littérature, les études portant sur leur utilisation pour de possibles tests de nouvelle physique ne cessent de se multiplier, reflétant l'intérêt des chercheurs pour le sujet.

Durant leurs deux premières phases d'observation, les observatoires LIGO-Virgo ont recensé dix coalescences de systèmes binaires de trous noirs¹⁵. La figure 4.2 donne les masses des astres ainsi détectés et les compare aux estimations issues des observations de binaires X.

La coalescence de deux trous noirs peut être décrite comme la succession de trois régimes :

- (i) La phase dite "*inspiral*" : Les deux trous noirs sont en rotation l'un autour de l'autre. L'émission d'ondes gravitationnelles qui accompagne ce mouvement va modifier leur orbite : ils se rapprochent l'un de l'autre et leur période orbitale diminue. L'énergie emportée par les ondes gravitationnelles devient de plus en plus grande au fur et à mesure que la rotation du système accélère. Durant la partie initiale de cette phase les trous noirs sont suffisamment séparés pour permettre une description **post-newtonienne** simple de l'orbite¹⁶. La partie finale requiert quant à elle soit de pousser le développement post-newtonien à des ordres élevés soit de recourir à des

14. Plus exactement les versions dénommées "*Advanced LIGO*" et "*Advanced Virgo*".

15. Pour une seule coalescence d'étoiles à neutrons.

16. L'approche newtonienne correspond à la description de l'orbite circulaire que suivent deux trous noirs de masses M_1 et M_2 séparés d'une distance R . Les tenseurs spatiaux de polarisation $h_+(t)$ et $h_\times(t)$ des ondes gravitationnelles émises sont alors des quantités oscillantes à la fréquence f et de phase ϕ . Néanmoins cette approximation newtonienne ne possède pas la précision nécessaire pour modéliser les orbites quasi-stationnaires d'un système binaire de ce genre. Pour augmenter la précision il faut alors considérer une approche dite post-newtonienne au problème, où des corrections sont ajoutées en puissances de $1/c^2$.

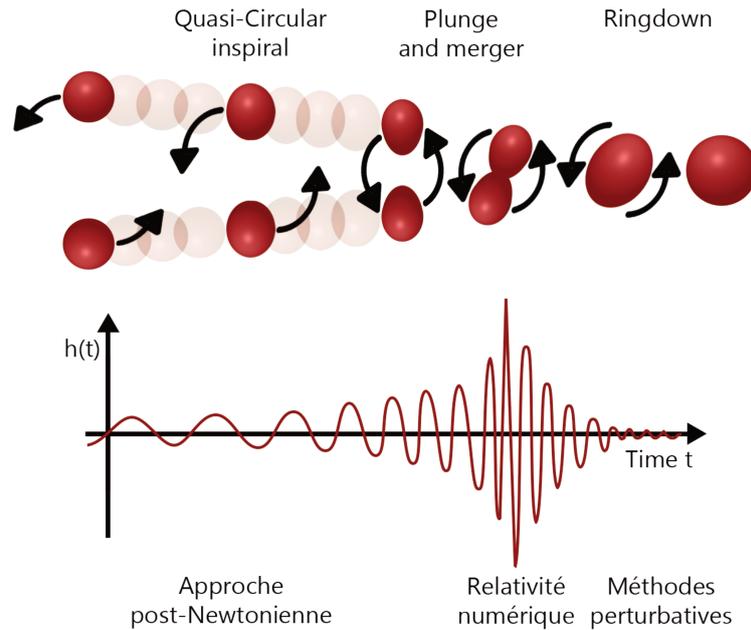


FIGURE 4.3 – Principales étapes de la coalescence de deux trous noirs et forme schématisique du signal associé.

techniques numériques.

- (ii) La phase de "**merging**" : La phase où les trous noirs fusionnent. C'est le domaine de la **relativité numérique** : dans ce régime la dynamique ne peut être déterminée analytiquement et les équations d'Einstein doivent être résolues à l'aide d'outils numériques puissants.
- (iii) La phase de "**ringdown**" : Dernière étape du procédé, elle démarre après fusion des deux horizons. En se relaxant vers sa configuration sphérique finale le système continue d'émettre des ondes gravitationnelles. La manière dont un trou noir relaxe d'un horizon perturbé vers un état stable est un problème grandement étudié en physique des trous noirs. Cette relaxation s'accompagne notamment de l'émission de **modes quasi-normaux**, modes qui vont nous intéresser dans l'étude à venir.

Les différentes phases sus-mentionnées ainsi que la forme (schématisée) attendue pour le signal associé sont représentées Fig.4.3. Cette description colle remarquablement avec les signaux détectés, comme le montre l'exemple de l'évènement GW170814 donné Fig.4.4.

Imaginons désormais qu'une quelconque théorie au delà de la relativité générale prédise des modifications de la métrique (par rapport au cas standard) au niveau de l'horizon, ou un peu au delà. Ces modifications se transposent-elles dans la forme de l'onde gravitationnelle émise ? Si oui, quelle partie du signal peut en témoigner ?

Lors de la phase "*inspiral*" les trous noirs sont trop éloignés l'un de l'autre pour que l'onde gravitationnelle émise soit sensible à de petites modifications de l'espace-temps au niveau de l'horizon. On pourrait en revanche supposer que celles-ci soient observables dans la partie du signal associée à la phase de "*merging*". Hélas la dynamique de ce régime est tellement complexe que des effets si fins restent pour le moment hors de portée. Reste la phase de *ringdown*. Les modes quasi-normaux émis lors de la relaxation du trou noir final sont en définitive probablement les meilleurs candidats à disposition pour répondre à cette question.

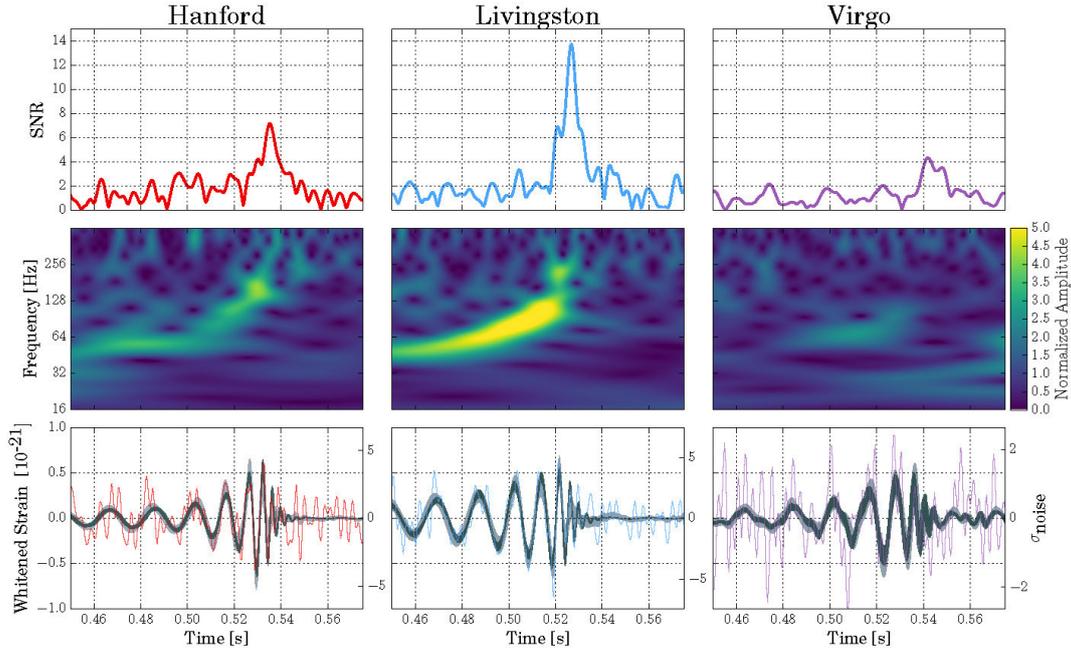


FIGURE 4.4 – L'évènement GW170814 tel que détecté par chacun des trois observatoires LIGO Handford, LIGO Livingston et Virgo. Crédits : LIGO/Caltech/MIT/LSC.

4.5.1 Modes quasi normaux

Les modes quasi-normaux (ou QNMs pour "*QuasiNormal Modes*"), initialement introduits pour répondre à la problématique "Un trou noir reste-t-il stable sous l'action d'une perturbation ?" [194, 195] sont souvent présentés comme les vibrations intrinsèques d'un trou noir. Mais que veut-on dire par là ? Également présents lorsque l'on s'intéresse à l'étude d'autres astres (comme par exemple des étoiles), ces modes sont alors plus faciles à appréhender. Une étoile peut en effet osciller sous l'action de perturbations à des fréquences et des taux d'amortissement dépendants de ses caractéristiques. Ces oscillations sont des perturbations du fluide qui compose l'étoile. Mais quel serait l'équivalent du fluide dans le cas d'un trou noir ? On pourrait penser à l'horizon mais ce n'est pas un support matériel, il ne faut pas le voir comme une membrane. Les oscillations sont en fait dans ce cas des oscillations de l'espace-temps lui-même. Nous constatons une fois de plus que l'espace-temps en relativité générale n'est pas le théâtre sur lequel les processus physiques se passent. C'est une entité dynamique à part entière, tout comme le fluide d'une étoile.

Les QNMs correspondent donc à la dissipation, d'enveloppe exponentielle, des asymétries d'un trou noir, dans le régime linéaire. Ces modes ne sont pas normaux¹⁷ mais quasi-normaux car le système perd de l'énergie en émettant des ondes gravitationnelles. Leur pulsation complexe dépend des propriétés intrinsèques du trou noir. S'écrivant $\omega = \omega_R + i\omega_I$ elle possède une partie réelle associée à la fréquence de l'onde et une partie imaginaire qui correspond à l'inverse de l'échelle temporelle associée à l'amortissement exponentiel¹⁸. Plus $|\omega_I|$ augmente, plus l'amortissement est rapide.

17. Un mode normal, ou mode propre d'oscillation, d'un système oscillant est une oscillation qui apparaît après qu'un système ait été perturbé autour d'un état d'équilibre (stable). Les fréquences associées à de tels modes sont ni plus ni moins que les fréquences de résonance du système.

18. Cet amortissement est très court, typiquement $0.35ms$ pour un trou noir d'une masse solaire.

L'étude des perturbations d'un trou noir se réduit à celle d'équations d'ondes (l'équation de Regge-Wheeler pour les perturbations axiales et l'équation de Zerilli pour les polaires) avec un terme de potentiel correspondant au potentiel gravitationnel et centrifuge du trou noir, dont la forme dépend rappelons-le de la structure sous-jacente de l'espace-temps. Tout comme les coefficients de corps gris les QNMs constituent donc des sondes privilégiées pour tester différentes théories de gravitation. C'est ce constat qui, combiné à leur potentielle détectabilité dans les signaux d'ondes gravitationnelles issus de coalescences, rend les QNMs si intéressants et justifie leur abondance dans la littérature récente.

La principale différence avec l'étude des coefficients de corps gris vient des conditions aux limites. Dans le cas des facteurs de corps gris elles sont prises¹⁹ purement sortantes à l'infini spatial et mixtes (*i.e* de composantes entrantes et sortantes) au niveau de l'horizon. Les QNMs correspondent eux à des solutions aux équations d'ondes qui satisfont les nouvelles conditions aux limites : purement sortantes à l'infini spatial et purement entrantes à l'horizon. D'une part le régime associé n'est plus stationnaire, *i.e* pour que le trou noir reste stable il faut que les perturbations décroissent avec le temps et d'autre part toutes les fréquences ne sont pas permises. De telles conditions aux limites ne peuvent en effet être satisfaites que pour un ensemble discret de fréquences $\omega = \{\omega_n\}$ où l'entier $n = 0, 1, \dots$ labélise les modes. Ces fréquences complexes sont celles des modes quasi-normaux.

Remarque : L'étude des QNMs est d'un point de vue technique très proche de celle des coefficients de corps gris. Malgré tout, bien que les équations d'ondes soient très similaires (du moins pour les perturbations axiales) la problématique diffère d'un cas à l'autre. Dans le cas des facteurs de corps gris nous résolvons l'équation d'onde (radiale), cherchons les solutions asymptotiques puis sommions sur les moments angulaires. Des solutions existent pour chaque fréquence, alors que dans le cas des QNMs nous cherchons justement quelles sont les fréquences qui permettent d'avoir une solution au problème. La précédente étude concernant la manière dont des champs quantiques diffusent au voisinage d'un trou noir nous a tout de même permis de développer un savoir faire que nous pouvons ici réutiliser.

Dans l'article "*Quasinormal modes of black holes in a toy-model for cumulative quantum gravity*" présenté juste après nous modifierons l'espace-temps au voisinage de l'horizon en ajoutant à la main une perturbation gaussienne. Nous donnerons ensuite des formules explicites permettant d'évaluer le déplacement de la partie réelle et de la partie imaginaire des QNM en fonction de l'amplitude, de la largeur et de la position de la perturbation et essaierons de voir si des comportements génériques peuvent être mis en évidence. Cette démarche est en ce sens similaire à celle que nous avons suivi dans l'article "*Primordial power spectra from an emergent universe : basic results and clarifications*".

La détermination des fréquences des QNMs est une tâche complexe et de nombreuses approches au problème existent (voir références présentées dans l'article ci-après). Nous avons choisi d'opter pour une approche WKB au problème car nous ne cherchons pas à calculer avec une grande précision les valeurs des fréquences complexes des QNMs, juste à mettre en avant des tendances et la méthode WKB constitue souvent une bonne approximation sans nécessiter un recours à des techniques numériques plus lourdes.²⁰

La détectabilité actuelle et future des QNMs sera brièvement discutée dans l'article.

Remarque : La fréquence complexe du QNM étant proportionnelle à l'inverse de la masse du trou noir de Schwarzschild $\omega \propto M^{-1}$ il est d'usage de multiplier les parties réelles et imaginaires des

19. En appliquant le point de vue dit "d'émission".

20. Calculer les valeurs précises des fréquences complexes dans notre cas serait d'autant moins pertinent que nous considérons un trou noir de Schwarzschild, qui ne correspond évidemment pas à un trou noir astrophysique en rotation.

fréquences des QNMs par M pour les représenter dans des graphiques, de sorte que les déviations par rapport aux valeurs standard correspondant à de la nouvelle physique ne soient pas altérées (voire supprimées) en fonction de la valeur de M .



Quasinormal modes of black holes in a toy-model for cumulative quantum gravity



Aurélien Barrau^{*}, Killian Martineau, Jeremy Martinon, Flora Moulin

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Université Grenoble-Alpes, CNRS/IN2P3, 53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France

ARTICLE INFO

Article history:

Received 31 May 2019

Received in revised form 13 June 2019

Accepted 15 June 2019

Available online 18 June 2019

Editor: H. Peiris

ABSTRACT

The idea that quantum gravity effects might “leak” outside the horizon of a black hole has recently been intensively considered. In this study, we calculate the quasinormal modes as a function of the location and amplitude of a generic metric perturbation distorting to the Schwarzschild spacetime. We conclude on the possible observability of quantum metric corrections by current and future gravitational wave experiments.

© 2019 The Authors. Published by Elsevier B.V. This is an open access article under the CC BY license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>). Funded by SCOAP³.

1. Introduction

Naively, quantum gravity is expected to show up at very small physical scales, around the Planck length (see [1] for a recent review of the phenomenology of quantum gravity). This is indeed where predictions become precise and might lead to a clear discrimination between models. In the black hole (BH) sector, it has therefore been widely believed that quantum gravity effects are confined to the vicinity of the central singularity. This is clearly the most conservative and natural hypothesis. In such a case, quantum modifications to the spacetime structure are screened by the event horizon and the external observer is not expected to notice any measurable effect, at least for macroscopic black holes. In this article, we focus on a different perspective, namely the possibility that quantum corrections to the metric “leak” outside the horizon, even for stellar or supermassive BHs. This is obviously motivated by phenomenological reasons. There are, however, quite good physical motivations to consider quantum gravity effects well beyond the vicinity of the singularity. Studying their impact, in a very simple model, on the ringdown phase of BHs is the purpose of this study.

It has recently been argued in [2] and [3] that the observation of black holes with the Event Horizon Telescope might reveal quantum gravity effects. Consistency between general relativity (GR) and quantum mechanics (QM) might require quantum effects

at very large scale. Interestingly, the authors suggest that the time dependence of the shape and size of the shadow that a black hole casts on its surrounding emission might be seen around the BH at the center of the M87 galaxy (which has recently been effectively observed [4,5]). On the extreme other side, in the firewall proposal, the usual geometry might break down a Planck length away from the horizon [6,7]. Many other possibilities with strong metric modifications outside the horizon (or what replaces it) have been considered: gravastars [8], fuzzballs where string theory configurations replace the smooth manifold outside the horizon [9], or massive remnants [10]. The study of maximally entangled states of black holes has even shed a new light on the possibility of more drastic geometric effects far away from the horizon [11]. To give a final example, bouncing black holes – with quite different time-scales – are also intensively considered [12,13].

In this article, we focus on a different approach which is based on heuristic considerations [14]. This is to be considered as a toy-model or a kind of “prototype” of what could be expected in optimistic quantum gravity scenarii. Our aim is to calculate the displacement of quasinormal modes and quantify the amplitude of the metric modification that would be required for an experimental detection. This might be used beyond this specific model. Focusing only on non-rotating BHs we do not search for accurate results, that would be meaningless at this stage, but just try to estimate the orders of magnitude for future studies. In the next section we briefly explain the method used to evaluate the frequency and amplitude of the ringing modes of BHs. Then, we explain the model used and explicitly show our results.

^{*} Corresponding author.

E-mail address: barrau@in2p3.fr (A. Barrau).

2. Quasinormal modes

Quasinormal modes (QNMs) are the decaying modes of black holes. As BHs are vacuum solutions of the Einstein field equation, QNMs can be regarded as the intrinsic vibrational and damping properties of spacetime itself. After a BH has been perturbed, three phases can be distinguished: the transient event, the quasinormal mode ringdown, and the damped tail.

The ringdown phase of a BH does not lead to precisely “normal” modes because the system loses energy through gravitational waves. The wave equation for the metric perturbation is unusual because of its boundary conditions: the wave should be purely outgoing at infinity and purely ingoing at the BH horizon. The radial part of the oscillation can be written (see [15] for an intuitive introductory review) as $\phi \propto e^{-i\omega t} = e^{-i(\omega_R + i\omega_I)t}$ where the complex pulsation ω decomposes in a real part ω_R and an imaginary part ω_I , which is the inverse timescale of the damping. The process is stable only when $\omega_I < 0$. Technically, the calculation of QNMs is quite reminiscent of the one of greybody factors (see, e.g., [16] for a recent derivation with a quantum-gravity modified metric) which describes the scattering of quantum fields in a BH background.

The perturbations of the Schwarzschild metric are of two different types. One is called “axial”, it gives small values to the metric coefficients that were zero, inducing a frame dragging and rotation of the black hole. The other is called “polar” and gives small increments to the already non-zero metric coefficients. They are governed by two different equations. Perturbations with the axial parity are given by the Regge-Wheeler equation with the potential

$$V_\ell^{\text{RG}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right], \quad (1)$$

while perturbations with the polar parity are given by the Zerilli equation with potential

$$V_\ell^{\text{Z}}(r) = \frac{2}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \times \frac{9M^3 + 3a^2Mr^2 + a^2(1+a)r^3 + 9M^2ar}{(3M+ar)^2}, \quad (2)$$

where $a = \ell(\ell+1)/2 - 1$. For gravitational perturbations, one needs $\ell \geq 2$. Importantly, those equations have the same spectrum of quasinormal modes. This isospectrality property [17] is not always true in modified gravity (those considerations are well beyond the scope of this article and will be studied in another paper [18]). Quasinormal modes are characterized by their overtone number n and their multipole number ℓ . For example, the fundamental quadrupolar mode ($n = 0$ and $\ell = 2$) for a Schwarzschild BH is given by $M\omega \approx 0.374 - 0.0890i$.

The calculation of quasinormal modes is nearly an art in itself (see [19,20] for historical reviews and [21,22] for an example of more recent results based on numerical approaches). In this study, we use a WKB approach described in [23] for D-dimensional BHs. The WKB method for QNMs was first introduced in [24–27] and has then been widely developed. The WKB formalism is very useful to obtain good approximations without having to rely on heavy numerical techniques. The higher the multipole number and the lower the overtone, the better the accuracy. We restrict ourselves to $n < l$ as the approximations otherwise break down. Details on the validity of the WKB approximation can be found in [24] but, in any case, it requires the multipole number to be smaller than (or equal to, if the accuracy requirement is relaxed) the overtone number, otherwise the basic condition $|k'| \ll k^2$ (where k^2 is the potential of the considered effective Schrödinger equation) does not hold.

In order to have a good numerical accuracy, we have used the 6th order WKB method developed by Konoplya. It is presented in details in [23] (see also [28]). This allows one to recast the potential appearing in the effective Schrödinger equation ($\frac{d^2\Psi}{dx^2} = k(x)\Psi(x)$) felt by gravitational perturbations in the form

$$\frac{ik_0}{\sqrt{2k_0'}} - \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_4 - \Lambda_5 - \Lambda_6 = n + \frac{1}{2}, \quad (3)$$

where the terms Λ_i are complicated – but known – expressions given in [23] whereas k_0 stands for the maximum of the potential and the derivative is to be understood with respect to the tortoise coordinate r_* (defined by $dr_* = dr/f$ where f is the metric function).

3. The model and its consequences

We now focus on the toy model developed in [14]. The idea is very simple. The curvature scale is of the order of $l_R \sim \mathcal{R}^{-1/2}$, where the Kretschmann scalar is $\mathcal{R}^2 := R_{\mu\nu\rho\lambda}R^{\mu\nu\rho\lambda}$. If one estimates the intensity of quantum gravitational effects through the ratio of Planck length over the curvature scale, the result is vanishingly small for stellar or supermassive BHs. This vision however disregards possible cumulative effects (also considered in [29–32]). Dimensional arguments lead to the conclusion that the “quantumness” of spacetime, integrated over a proper time τ , might be given by $q = l_P \mathcal{R} \tau$. As the proper time is related to the Schwarzschild time by

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} t, \quad (4)$$

one is led to

$$q(r) = \frac{M}{r^3} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}} t. \quad (5)$$

Throughout all this study, we use Planck units. The maximum of this function is reached for $r = 2M(1 + \frac{1}{6})$ and this is therefore where quantum gravity effects could be expected to be intense.

The arguments previously given are obviously purely heuristic and should be considered as a rough indication of what might happen when time-integrated quantum corrections are optimistically considered. To remain quite generic, we parametrize a possible metric modification outside the horizon by a simple Gaussian function:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (6)$$

with

$$f(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + Ae^{-\frac{(r-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)^2. \quad (7)$$

This Gaussian truncation of the Schwarzschild metric is *not* justified by any serious theoretical arguments. It should be seen as an effective metric encoding possible cumulative quantum effects outside the horizon. In addition it has the advantage not to shift the event horizon position. By varying the parameters A, μ, σ , one can explore different shapes and positions for the “quantum bump”. In the following, we shall quantify the displacement of the real and imaginary parts of the QNMs as a function of the parameters (μ and σ are expressed in units of M).

The complex frequencies are displayed in Fig. 1. The black dots correspond to the general relativistic case whereas the blue ones,

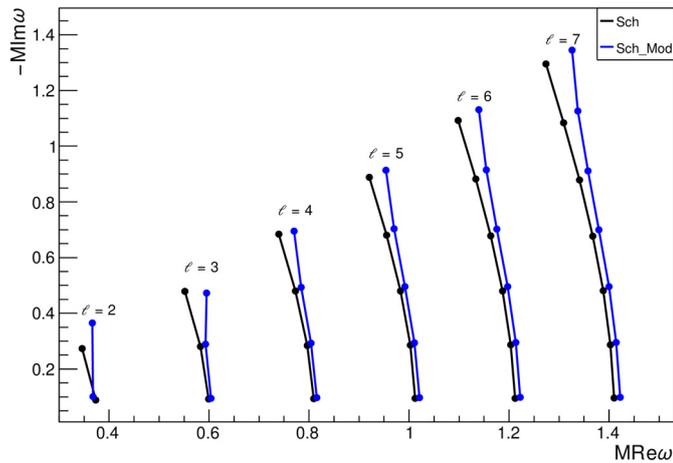


Fig. 1. Quasinormal mode complex frequencies for different multipolar orders (from $\ell = 2$ to $\ell = 7$ from the left to the right) and for different overtone numbers n (increasing from the lower points to the upper points). The black dots on the left correspond to the usual Schwarzschild case and the blue dots on the right correspond to the modified metric with $\mu/M = 2.3$ and $\sigma/M = 1.5$.

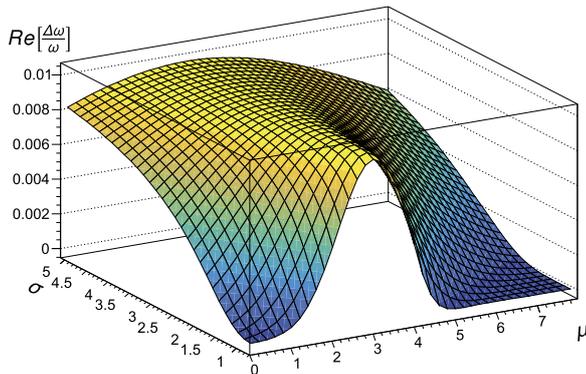


Fig. 2. Relative displacement of the real part of the quasinormal mode ($\ell = 8, n = 0$) as a function of μ and σ for $A = 0.01$.

on the right, correspond to the considered modified case with $\mu = (7/6)R_S$, $A = 0.01$, and $\sigma/M = 1.5$.

In Fig. 2, the relative displacement of the real part of the quasinormal mode ($\ell = 8, n = 0$) is displayed as a function of μ and σ for $A = 0.01$. The trend does not radically depend on the specific mode chosen. We have therefore plotted here a quite high multipolar number as the WKB approximation is more reliable in this case. Interestingly – but not that surprisingly – it appears that the maximum displacement is obtained for $\mu \approx 3M$. In the limit of very large l , the value tends exactly to $3M$, which corresponds to the photon sphere and to the maximum of the potential. We have also considered in this figure a case where the maximum of the quantum correction is inside the horizon. Then, only the “tail” of the Gaussian does affect the external spacetime. Even if the effect is smaller, it is still clearly non-vanishing. Interestingly the 2-dimensional surface is actually an ensemble of Gaussian functions whose width on the μ axis happens to be (non trivially) equal to the considered value of σ .

In Fig. 3, the relative displacement of the imaginary part of the quasinormal mode ($\ell = 8, n = 0$) is displayed as a function of μ and σ for $A = 0.01$. For quite low values of σ , the displacement can be either positive or negative for different values of μ . This means that depending on its position the “metric bump” can either increase or decrease the damping of gravitational waves.

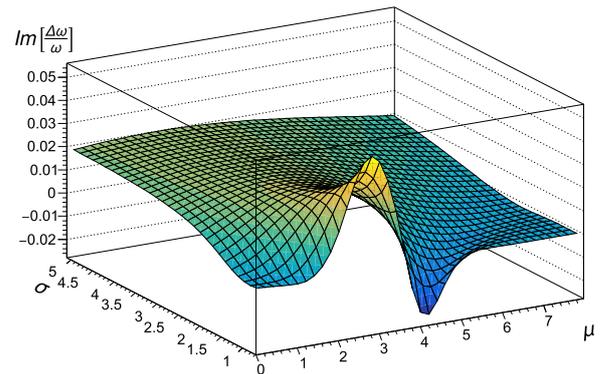


Fig. 3. Relative displacement of the imaginary part of the quasinormal mode ($\ell = 8, n = 0$) as a function of μ and σ for $A = 0.01$.

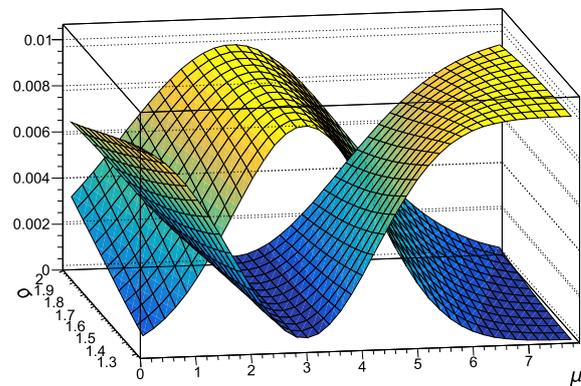


Fig. 4. Relative displacement of the real part of the quasinormal mode ($\ell = 8, n = 0$) as a function of μ and σ for $A = 0.01$ (upper curve at $\mu = 3$) and $A = -0.01$.

Finally, Fig. 4 shows the influence of the sign of the parameter A . The displacement is basically symmetrical.

For most of the considered parameter space, the displacement of the real part – that is of the frequency – is of the same order than the one of the imaginary part – that is of the damping time. The easiest effect to measure is probably a frequency shift which happens to be always positive. Quite obviously, when the metric perturbation is very wide, its precise position loses any notable influence.

4. Observability

Although gravitational waves have been “detected” decades ago thanks to the Hulse-Taylor binary pulsar, the recent LIGO-Virgo detections (see [33] for the seminal paper and [34] for a first catalogue) have completely changed the game. Real astrophysical objects have spin and a modified Kerr solution should be considered, which is far beyond this prospective study. However, the global trends are expected to be the same and the orders of magnitude of the effects should be correct. Surprisingly, the very first event measured, GW150914, has already led to a detection of the fundamental quasinormal mode. It is not obvious to determine precisely the accuracy at which the characteristics of the QNMs are constrained by the current measurements. A relative accuracy of 50% is a conservative estimate. In the future, the Einstein Telescope (ET) should lead to a one order of magnitude better precision [35].

The most important parameter for this study is obviously the constant A which determines the amplitude of the correction. We have checked that the displacement of the QNMs complex fre-

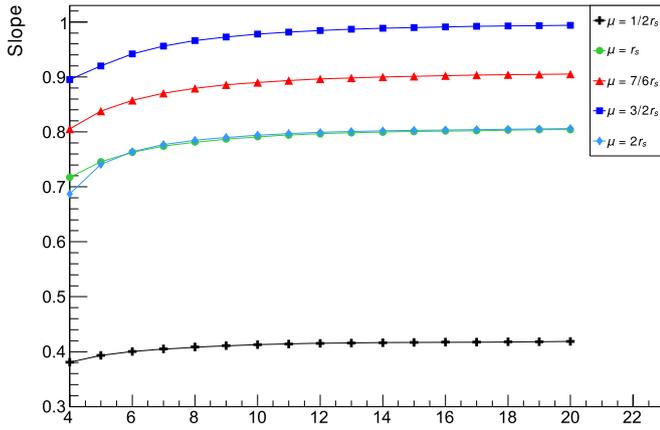


Fig. 5. Slope x of the real part of the quasinormal modes ($n = 0$) relative frequency evolution as a function of A for $\sigma/M = 1.5$. The different curves correspond to different values of μ .

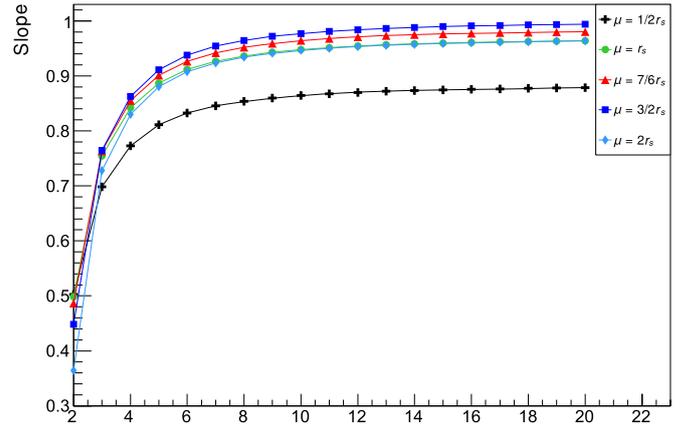


Fig. 7. Slope x of the real part of the quasinormal modes ($n = 0$) relative frequency evolution as a function of A for $\sigma/M = 4$. The different curves correspond to different values of μ .

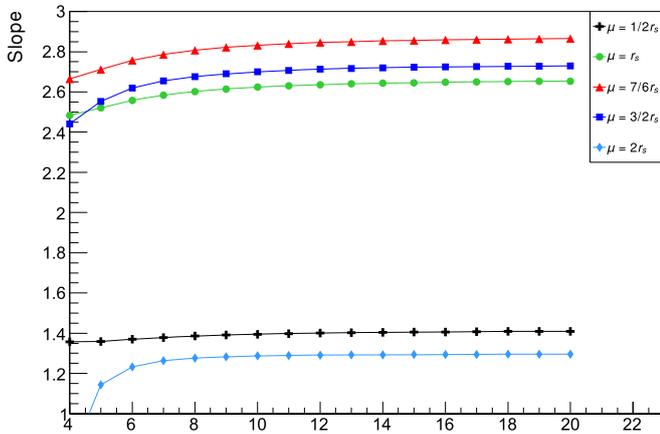


Fig. 6. Slope y of the imaginary part of the quasinormal modes ($n = 0$) relative frequency evolution as a function of A for $\sigma/M = 1.5$. The different curves correspond to different values of μ .

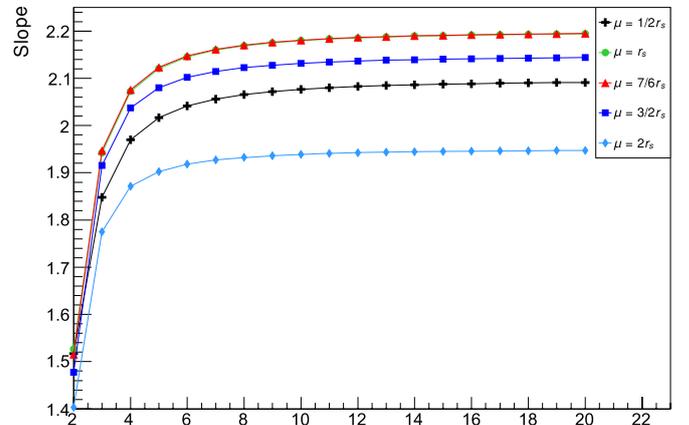


Fig. 8. Slope y of the imaginary part of the quasinormal modes ($n = 0$) relative frequency evolution as a function of A for $\sigma/M = 4$. The different curves correspond to different values of μ .

quency is linear as a function of A over the interesting range. In Fig. 5, we plot the slope of the real part of the QNM displacement versus A (i.e. the x parameter of $Re(\Delta\omega/\omega) = xA$) as a function of ℓ , for $\sigma/M = 1.5$. The different curves correspond to different values of the position μ of the quantum bump. In Fig. 6, the very same thing is represented for the imaginary part of the QNM (i.e. the y parameter of $Im(\Delta\omega/\omega) = yA$). In Fig. 7 and Fig. 8, the value $\sigma/M = 4$ is instead chosen. It should be pointed out that in some cases the lowest values of ℓ are not displayed as the WKB approximation breaks down and calculations could therefore be dubious.

Let us now get an order of magnitude of how those estimates relate to the toy model previously considered. As the x and y slopes are of order one, and as the relative displacement that could be measured is also of order one, this means that the A parameter has to be of order unity so that the kind of quantum gravity effects studied here could be measured. If A is assumed to be roughly comparable to the “quantumness” q introduced in the second section, one is led to the conclusion that q should be of order one. It is easy to check that

$$q_{max} = \left(\frac{3}{7}\right)^3 \sqrt{\frac{1}{7} \frac{t}{M^2}}. \quad (8)$$

If one sets t to be the age of the Universe, the mass value required so that the quantum gravity effects can be observed is of

the order of 10^{-8} (or less) solar mass, that is roughly the mass of the Moon. Although far smaller than the mass of stellar black holes, this value is not ridiculously small and way higher than the Planck mass. An important property of the QNMs lies in the fact that the relevant value is the one of $M\omega$: it is the product of the mass by the frequency that has a given (complex) value. The characteristics of the QNMs of a lighter BH are exactly the same than those of a heavier one, they are simply shifted to higher frequencies by the mass ratio. Some quantum corrections might explicitly break this scaling law. This is the case of the Hayward metric considered below.

It should first be pointed out that the work presented here aims at being quite generic and is not directly linked with the proposal [14]. The plots previously shown can be used to get an estimate of the QNMs displacement for any model with a roughly gaussian modification to the metric. In addition, and very speculatively, it could be argued that the maximum possible time to be used to evaluate the mass (the higher the time, the higher the mass) is not necessarily bounded by the age of the Universe: in quantum gravity a “bounce” is possible [36] and black holes could survive during this bounce [37]. In principle it is therefore conceivable that a time much larger than the inverse Hubble parameter could be used [38,39], leading to measurable quantum gravity effects in QNMs at much higher masses

5. The Hayward metric

Recently, an effective metric for Planck stars [13] has been proposed in [40]. The idea is to cure two usual inconsistencies of most metrics: the absence of a correct treatment of the time dilatation between the center and infinity and the failure to reproduce 1-loop quantum corrections (as calculated e.g. in [41]). As a step in this direction, the authors make use of the Hayward metric (revived in a quantum gravity context [42]):

$$F(r) = 1 - \frac{2m(r)}{r}. \quad (9)$$

Several proposals were made for the function $m(r)$. We consider here the original version [43] where

$$m(r) = \frac{Mr^3}{r^3 + 2ML^2}, \quad (10)$$

where L has the dimensions of a length. We consider only the case where $L < \frac{4}{3\sqrt{3}}M$, otherwise there is no horizon. We have investigated the displacement of QNMs as a function of L – which intuitively quantifies the scale of “quantumness” – for a given mass. As expected, the minimal required value of L , for a given relative QNM move, is proportional to M . If we require $(\frac{\Delta\omega}{\omega})$ to be of the order of a few percent (that is in the ET sensitivity range), the minimum value of L is of the order of 0.7 mass units. More specifically $(\frac{\Delta\omega}{\omega}) \sim 5\%$ is achieved for $L/M \sim 0.72$. For a macroscopic BH, this is much larger than the Planck length and this means that in such approaches the quantum modifications would need to be extending substantially beyond the usually assumed length scale.

6. Conclusion and prospects

We have shown that if quantum gravity effects leak outside the horizon of a Schwarzschild black hole, the quasinormal modes can – as expected – be substantially modified. Using a gaussian truncation of the metric structure, we have studied the influence of all the parameters describing the perturbations. In particular, we have quantified the amplitude of the quantum bump required for observation. Using a toy-model, we have translated the derived values into an upper limit on the mass leading to observable effects.

In the future, this approach should be refined by considering a rotating black hole. It would also be important to estimate the possible degeneracies: could the change in frequency and damping rate mimic a usual BH of different mass and spin?

Finally, it would be welcome to consider more realistic metrics based on heuristic quantum gravity arguments, in particular based either on loop quantum gravity black holes (see [44] for a review) or on string black holes (see [9] for interesting new ideas).

Acknowledgements

K.M is supported by a grant from the CFM foundation. The authors thank deeply R.A. Konoplya who provided us with his code.

References

- [1] A. Barrau, C. R. Phys. 18 (2017) 189, arXiv:1705.01597.
- [2] S.B. Giddings, D. Psaltis, Phys. Rev. D 97 (2018) 084035, arXiv:1606.07814.
- [3] S.B. Giddings, arXiv:1904.05287, 2019.
- [4] K. Akiyama, et al., Event Horizon Telescope, Astrophys. J. 875 (2019) L1.
- [5] K. Akiyama, et al., Event Horizon Telescope, Astrophys. J. 875 (2019) L6.
- [6] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, J. Sully, J. High Energy Phys. 02 (2013) 062, arXiv:1207.3123.
- [7] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, D. Stanford, J. Sully, J. High Energy Phys. 09 (2013) 018, arXiv:1304.6483.
- [8] P.O. Mazur, E. Mottola, Proc. Natl. Acad. Sci. USA 101 (2004) 9545, arXiv:gr-qc/0407075.
- [9] S.D. Mathur, arXiv:0810.4525, 2008.
- [10] S.B. Giddings, Phys. Rev. D 46 (1992) 1347, arXiv:hep-th/9203059.
- [11] J. Maldacena, L. Susskind, Fortsch. Phys. 61 (2013) 781, arXiv:1306.0533.
- [12] C. Barceló, R. Carballo-Rubio, L.J. Garay, J. High Energy Phys. 05 (2017) 054, arXiv:1701.09156.
- [13] H.M. Haggard, C. Rovelli, Phys. Rev. D 92 (2015) 104020, arXiv:1407.0989.
- [14] H.M. Haggard, C. Rovelli, Int. J. Mod. Phys. D 25 (2016) 1644021, arXiv:1607.00364.
- [15] C. Chirenti, Braz. J. Phys. 48 (2018) 102, arXiv:1708.04476.
- [16] F. Moulin, K. Martineau, J. Grain, A. Barrau, arXiv:1808.00207, 2018.
- [17] S. Chandrasekhar, Clarendon, Oxford, UK, 1992, p. 646, Clarendon, Oxford, UK, 1985, p. 646.
- [18] Flora Moulin, Aurélien Barrau, Isospectrality of quasinormal modes for black holes beyond Schwarzschild, arXiv:1906.05633 [gr-qc], 2019.
- [19] K.D. Kokkotas, B.G. Schmidt, Living Rev. Relativ. 2 (1999) 2, arXiv:gr-qc/9909058.
- [20] H.-P. Nollert, Class. Quantum Gravity 16 (1999) R159.
- [21] E. Berti, V. Cardoso, S. Yoshida, Phys. Rev. D 69 (2004) 124018, arXiv:gr-qc/0401052.
- [22] E.N. Dorband, E. Berti, P. Diener, E. Schnetter, M. Tiglio, Phys. Rev. D 74 (2006) 084028, arXiv:gr-qc/0608091.
- [23] R.A. Konoplya, Phys. Rev. D 68 (2003) 024018, arXiv:gr-qc/0303052.
- [24] B.F. Schutz, C.M. Will, Astrophys. J. 291 (1985) L33.
- [25] S. Iyer, C.M. Will, Phys. Rev. D 35 (1987) 3621.
- [26] S. Iyer, Phys. Rev. D 35 (1987) 3632.
- [27] K.D. Kokkotas, B.F. Schutz, Phys. Rev. D 37 (1988) 3378.
- [28] R.A. Konoplya, A. Zhidenko, A.F. Zinhailo, arXiv:1904.10333, 2019.
- [29] C. Rovelli, F. Vidotto, Int. J. Mod. Phys. D 23 (2014) 1442026, arXiv:1401.6562.
- [30] A. Barrau, C. Rovelli, Phys. Lett. B 739 (2014) 405, arXiv:1404.5821.
- [31] A. Barrau, C. Rovelli, F. Vidotto, Phys. Rev. D 90 (2014) 127503, arXiv:1409.4031.
- [32] A. Barrau, F. Moulin, K. Martineau, Phys. Rev. D 97 (2018) 066019, arXiv:1801.03841.
- [33] B.P. Abbott, et al., LIGO Scientific, Virgo, Phys. Rev. Lett. 116 (2016) 061102, arXiv:1602.03837.
- [34] B.P. Abbott, et al., LIGO Scientific, Virgo, arXiv:1811.12907, 2018.
- [35] B. Sathyaprakash, et al., Class. Quantum Gravity 29 (2012) 124013, Erratum: Class. Quantum Gravity 30 (2013) 079501, arXiv:1206.0331.
- [36] A. Ashtekar, P. Singh, Class. Quantum Gravity 28 (2011) 213001, arXiv:1108.0893.
- [37] T. Clifton, B. Carr, A. Coley, Class. Quantum Gravity 34 (2017) 135005, arXiv:1701.05750.
- [38] B. Carr, T. Clifton, A. Coley, arXiv:1704.02919, 2017.
- [39] A. Barrau, K. Martineau, F. Moulin, Phys. Rev. D 96 (2017) 123520, arXiv:1711.05301.
- [40] T. De Lorenzo, C. Pacilio, C. Rovelli, S. Speziale, Gen. Relativ. Gravit. 47 (2015) 41, arXiv:1412.6015.
- [41] N.E.J. Bjerrum-Bohr, J.F. Donoghue, B.R. Holstein, Phys. Rev. D 67 (2003) 084033, Erratum: Phys. Rev. D 71 (2005) 069903, arXiv:hep-th/0211072.
- [42] V.P. Frolov, J. High Energy Phys. 05 (2014) 049, arXiv:1402.5446.
- [43] S.A. Hayward, Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 031103, arXiv:gr-qc/0506126.
- [44] A. Barrau, K. Martineau, F. Moulin, Universe 4 (2018) 102, arXiv:1808.08857.

4.5.2 Distance de luminosité

Le caractère dynamique de l'espace en cosmologie nous amène à considérer différentes notions de distance. Celle utilisée pour des mesures de flux est appelée **distance de luminosité**. Elle est définie, pour une source astrophysique de luminosité L , via :

$$F = \frac{L}{4\pi D_L^2}, \quad (4.41)$$

F correspondant au flux observé.

Dans l'article "*Seeing through the cosmological bounce : Footprints of the contracting phase and luminosity distance in bouncing models*" qui suit nous mettons en avant des comportements non triviaux de la distance de luminosité dans un Univers en contraction, dépendants du contenu en matière considéré. Supposons par exemple que l'Univers se contracte comme $a(t) = k(-t)^n$ (t étant fixé à 0 au moment du rebond). Si $n > 1/2$ ²¹ alors $D_L \rightarrow 0$ lorsque l'instant d'émission de la source t_e tend vers $-\infty$. Dit autrement, plus la source d'émission se situe loin dans la phase en contraction (*i.e* loin dans le passé), plus elle apparaît brillante. Cet effet, surprenant à la base, n'est en réalité pas si exotique. Un analogue apparaît en effet pour des espaces de courbure positive. Prenons l'exemple d'un espace sphérique. Le flux émis par une source, mettons de lumière, ne décroît plus constamment en fonction de r ²² mais passe par un minimum avant d'augmenter avec r . En effet les circonférences des cercles correspondant aux fronts d'ondes de la lumière augmentent progressivement pour atteindre un maximum au niveau de "l'équateur" (le flux associé y est alors minimal). Mais dès "l'équateur" passé les circonférences des fronts d'ondes deviennent de plus en plus petites et la lumière se concentre de plus en plus. Le flux associé augmente, jusqu'à devenir singulier (divergence vers l'infini) à l'antipode. Ainsi passé une certaine distance les sources apparaissent d'autant plus lumineuses qu'elles sont lointaines. Nous retrouvons un effet analogue à celui mis en avant dans notre étude, sauf qu'il est ici dû à la géométrie de l'espace et non à sa dynamique.

L'étude menée dans la seconde partie de l'article part de deux observations. Tout d'abord le fait que les ondes gravitationnelles soient très faiblement couplées à la matière suggère qu'elles pourraient survivre à un rebond de l'Univers tel que celui prédit par la LQC, ce qui ouvre la perspective assez fascinante de la détection d'évènements pré-rebonds. De plus l'expression de l'amplitude h de l'onde gravitationnelle émise par un système binaire fait intervenir (en première approximation) la distance de luminosité, voir l'équation (8) de l'article ci-après pour l'expression détaillée. Ces deux constats réunis nous ont amené à utiliser les résultats établis quant aux comportements de D_L dans un Univers en contraction pour s'atteler à la question de la détectabilité d'évènements ayant eu lieu avant le rebond. Nous tenterons notamment de caractériser l'amplitude typique d'un signal d'ondes gravitationnelles provenant d'une coalescence de trous noirs dans l'Univers en contraction pré-rebond et étudierons les différents régimes qui apparaissent suivant les équations d'état considérées.

21. Rappelons que $n = 1/2$ correspond à un Univers dominé par du rayonnement et $n = 2/3$ à un Univers dominé par de la matière froide.

22. r correspond ici à la distance parcourue sur la sphère au non pas au rayon de cette dernière.

Seeing through the cosmological bounce: Footprints of the contracting phase and luminosity distance in bouncing models

Aurélien Barrau, Killian Martineau, and Flora Moulin

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Université Grenoble-Alpes, CNRS/IN2P3 53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France

(Received 14 September 2017; published 18 December 2017)

The evolution of the luminosity distance in a contracting universe is studied. It is shown that for quite a lot of natural dynamical evolutions, its behavior is far from trivial and its value can even decrease with an increasing time interval between events. The consequences are investigated and it is underlined that this could both put stringent consistency conditions on bouncing models and open a new observational window on “pre-big bang” physics using standard gravitational waves.

DOI: 10.1103/PhysRevD.96.123520

I. INTRODUCTION

The big bang is a prediction of general relativity (GR) in a regime where the theory is not valid anymore. Singularities are most probably pathologies of the models, not of spacetime itself. It is therefore natural to consider alternatives to the naive big bang image. Importantly, most models replacing the initial singularity by “something else” were not designed to this aim but produce this desirable effect as a consequence of their application to the early universe (see [1,2] and references therein for recent reviews). Among the countless ways to obtain a cosmological bounce, one can mention the null energy condition violation [3], the strong energy condition violation with a positive curvature [4], ghost condensates [5], galileons [6], S-branes [7], quantum fields [8], higher derivative terms [9,10], non-standard couplings [11], supergravity [12], and loop quantum cosmology [13,14]. These are only some examples among a much longer list which also includes, in a way, the ekpyrotic and cyclic scenarios [15,16], together with string gas cosmology [17]. Bouncing models are natural extensions of the big bang scenario and it comes as no surprise that they arise in many theories beyond GR. (Interestingly, those ideas are also being investigated in the black hole sector, see [18] for a recent review).

All those models are obviously missing an observational confirmation or, at least, strong experimental constraints. As a legitimate step in this direction, many efforts were recently devoted to the calculation of primordial cosmological power spectra. Predictions for the cosmological microwave background (CMB) were made for nearly all the above-mentioned models (as examples for specific settings, explaining the global strategy, one can consider [19,20]).

In this article we follow another path. We investigate the unusual luminosity distance behavior in a contracting universe. We show that it is highly nontrivial. As a consequence, we raise some consistency issues for bouncing cosmological models. We finally suggest possible observational footprints of the contracting phase that could be observed through “usual” gravitational waves.

II. THE LUMINOSITY DISTANCE IN A CONTRACTING UNIVERSE

As far as observations are concerned, an important parameter is the luminosity distance D_L . It is defined by $f = L/(4\pi D_L^2)$, where f is the observed flux from a given astrophysical source and L is its luminosity. Intuitively, the luminosity distance is the “equivalent” distance at which an object of the same luminosity should be in a usual euclidean space to lead to the same observed flux. In a flat expanding universe (in the presence of spatial curvature, the general expression involves trigonometric and hyperbolic functions [21]), it reads as

$$D_L = c(1+z) \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}, \quad (1)$$

where H is the Hubble parameter and z is the redshift. For our purpose, it is convenient to rewrite this formula as a function of time:

$$D_L = c(1+z)a(t_r) \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2)$$

where t_e and t_r are the emission and reception cosmic times of the considered signal and $a(t)$ is the scale factor. To study a contracting universe it is even better to get rid of the redshift and write the expression as

$$D_L = c \frac{a(t_r)^2}{a(t_e)} \int_{t_e}^{t_r} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3)$$

When one considers the contracting branch of a bouncing scenario, interesting and unusual phenomena can take place. Let us choose $t = 0$ at the bounce time and assume that the universe contracts as $a(t) = k(-t)^n$ before the bounce (with $n = 2/3$ for a matter-dominated phase and $n = 1/2$ for a radiation-dominated phase). The detailed evolution around the bounce could be e.g., given by the loop quantum cosmology modified Friedmann equation [22]

$$H^2 = \frac{\kappa}{3}\rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right), \quad (4)$$

where ρ_c depends on the details of the model but can be guessed to be close to the Planck density. However we have checked that the observables calculated in this article do not depend on the detailed shape of the modified equation of motion. We therefore approximate the scale factor by a constant function between $-t_B$ and t_B . Let t_e and t_r both be negative—that is in the contracting branch—with $t_e < t_r$. It is then easy to show that:

$$D_L = c \frac{(-t_r)^{2n}}{n-1} \left[\frac{(-t_r)^{1-n}}{(-t_e)^n} - (-t_e)^{1-2n} \right]. \quad (5)$$

When $n < 1/2$, $D_L \rightarrow \infty$ when $t_e \rightarrow -\infty$. This is in agreement with the intuitive behavior.

However, when $n > 1/2$, $D_L \rightarrow 0$ when $t_e \rightarrow -\infty$. This is one of the important results we want to stress here. This strange behavior never happens in an expanding universe. It means that, for a fixed reception time t_r , an event that took place earlier in the contracting phase will be seen as *brighter*. Of course, the luminosity distance first increases with higher values of $-t_e$, reaches a maximum, and then decreases. The maximum can be shown (when $n \neq 1$) to be reached when

$$-t_e = \left[\frac{2n-1}{n} \right]^{\frac{1}{n-1}} (-t_r). \quad (6)$$

When $n = 1/2$, $D_L \rightarrow 2ca(t_r)^2/k^2$ when $t_e \rightarrow -\infty$. This means that events arbitrarily far away in the past will be detected at the same brightness once the asymptotic regime is reached.

Figure 1 shows the luminosity distance evolution for three different values of n . It can be seen that D_L is

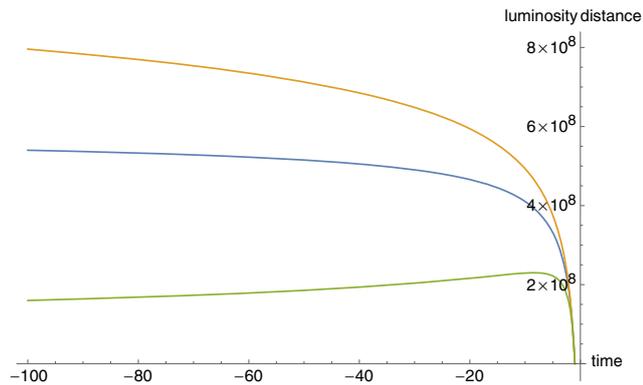


FIG. 1. Luminosity distance (m) as a function of the emission time t_e (s) in the contracting branch for the power law contraction. The reception time t_r has been set to 1 second before the bounce. The lower curve corresponds to $n = 2/3$, the mid curve to $n = 1/2$ and the upper curve to $n = 0.45$.

asymptotically constant in the remote past when $n = 1/2$ and tends to 0 when $n > 2/3$. The numerical values are not relevant and the plot aims at showing the global behavior.

In Fig. 2 we consider the luminosity distance between an event in the contracting phase and the contemporary universe, as a function of the “bounce duration.” Figure 2 shows that the detailed value of t_B does not care in the following analysis: the contribution of the bounce phase to the full integral is negligible.

Finally, it is worth considering the cosmological constant case, $a(t) = ke^{-\alpha t}$, where $\alpha = |H| > 0$. The luminosity distance then reads

$$D_L = c \frac{e^{\alpha(t_e - 2t_r)}}{\alpha} [e^{\alpha t_r} - e^{\alpha t_e}]. \quad (7)$$

Clearly, in this case again, $D_L \rightarrow 0$ when $t_e \rightarrow -\infty$, as illustrated in Fig. 3. Sources located in the remote past have their flux intensely amplified.

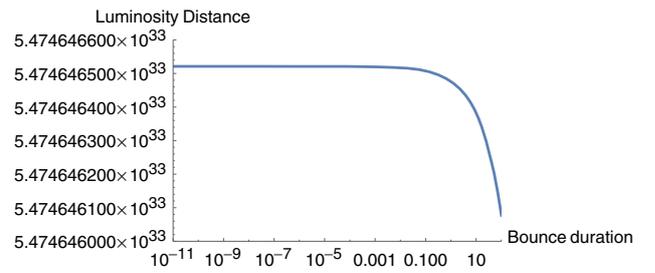


FIG. 2. Luminosity distance (m) as a function of the bounce duration (s) between an event in the contracting phase and the current universe (including radiation dominated and matter dominated phases).

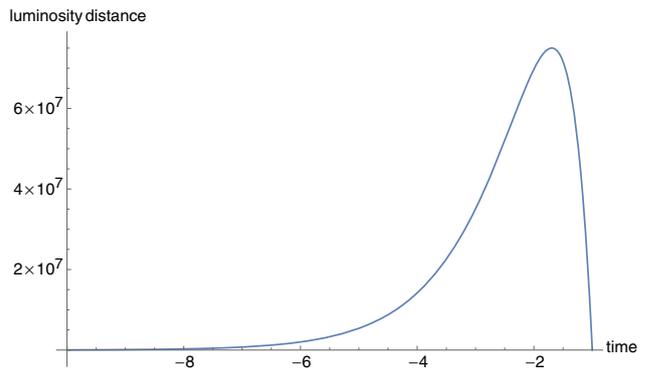


FIG. 3. Luminosity distance (m) as a function of the emission time t_e (s) in the contracting branch for an exponential contraction. The reception time t_r has been set to 1 second before the bounce and α was arbitrarily set to 1 in order to increase the readability.

III. CONSISTENCY CONDITIONS

The results given in the previous section do raise some questions. The case $n > 1/2$ is in no way exotic from the point of view of the equation of state. It actually corresponds to a usual matter dominated universe, as naively expected far away from bounce. The behavior of the luminosity distance is then such that sources that have emitted light in an arbitrary distant past will lead to a measured flux which is arbitrarily amplified by the contraction of the scale factor. This basically means that the energy density will diverge at all points in space, leading to a kind of *new Olbers paradox* worsened by the contraction. In addition the frequency will also become arbitrarily high. As a consequence, the Universe cannot have been forever in a contraction phase with $n > 1/2$ and filled with objects emitting energy. The energy density growth would anyway trigger the bounce—at least in quantum-gravity models where the energy density is bounded from above by quantum geometry repulsive effects. This consistency condition has to be taken into account when building a consistent bouncing universe.

The case $n = 1/2$ is not fundamentally different. The luminosity distance being nearly constant, the energy amount received by each space point would also diverge in a forever-contracting universe. It should be pointed out that even for $n < 1/2$ the space integral of any homogeneous source term will obviously diverge, as this is already the case in a static Minkowski universe.

The exponential contraction case is slightly more subtle. The luminosity distance is rapidly going to zero. The amplification due to the fast contraction of the Universe is thus very intense. However the horizon and physical distances relative evolutions are such that the comoving Hubble radius is shrinking when going backward in time in the contracting branch (as when going forward in time in the expanding branch). The number density of sources causally linked to any space point will therefore also tend to zero and eventually solve the apparent paradox.

IV. SEEING THROUGH THE BOUNCE

Those considerations raise the important question of the possible observation of events having taken place before the bounce. Obviously, most signals or objects possibly existing in the contracting branch will be destroyed of washed out by the huge density reached—in most models—around the bounce time. The only exception could be gravitational waves. This is the only signal coupled weakly enough to matter so that it could propagate through the bounce (the details depend on the specific model considered). This has been investigated in different cases (see, e.g., [23,24]) but focusing only on geometrical aspects—ignoring the aforementioned amplification—and considering consequences on the cosmological microwave background (CMB) spectra.

Let us consider here a different scenario. The hypothesis is that an event emitting intense gravitational waves has taken place before the bounce, e.g., the coalescence of two massive black holes (BHs). Clearly we do not know what the Universe looked like before the bounce. We however assume here that events comparable to what happens in our expanding branch took place in the contracting branch. At the lowest order the wave amplitude produced by a binary system and observed far away can be written [25]:

$$h = \frac{4}{D_L} \left[\frac{G\mathcal{M}}{c^2} \right]^{\frac{5}{3}} \left[\frac{\pi f}{c} \right]^{\frac{2}{3}} g(\tau, \Phi(f)), \quad (8)$$

where \mathcal{M} is the chirp mass, f is the gravitational wave frequency at the observer location, g is a sum and product of trigonometric functions (different for different polarizations) depending on τ , the angle of the orbital plane, and on the phase $\Phi(f)$.

As quite a lot of bouncing models are justified as alternatives to inflation (although bounces are compatible with inflation [26]), it is instructive to focus on a non-inflationary scenario and to study whether a pre-big bounce signal can be detected. (An inflationary phase would obviously dilute the signal to a vanishingly small amplitude.) We consider the following toy model: a contracting radiation-dominated phase, followed by a stationary bouncing phase, followed by the usual radiation-dominated and matter dominated stages. The number of e-folds between the bounce and today is of course a relevant parameter that we express through the temperature of the Universe at the bouncing time. On Fig 4, we have plotted the amplitude of gravitational waves emitted by the coalescence of 100 millions and one billion solar masses BHs as a function of the bouncing temperature. Interestingly, for a radiation dominated contracting phase, because the luminosity distance rapidly reaches an asymptotic value, it is not necessary to specify the merging time as long as it is far enough before the bounce. As it can be noticed from the curves, as soon as the temperature is chosen at a reasonable value, the

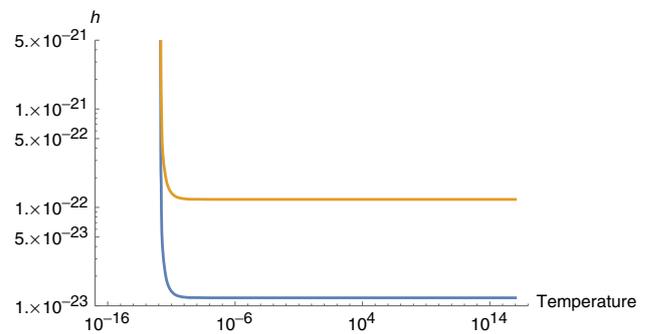


FIG. 4. Gravitational wave amplitude today as a function of the bounce temperature (GeV). The upper curve is for 10^9 solar masses BHs and the lower curve for 10^8 solar masses BHs, both merging in the contracting phase.

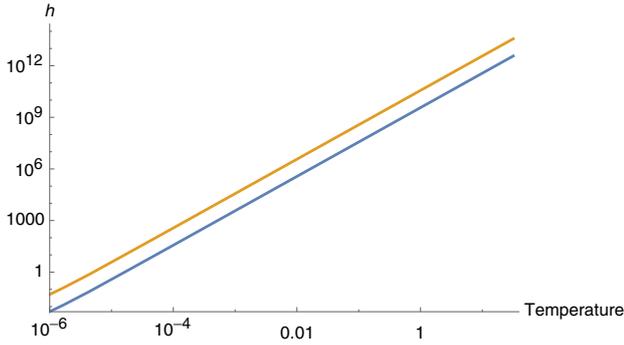


FIG. 5. Gravitational wave amplitude at the bounce time as a function of the bounce temperature (GeV). The upper curve is for 10^9 solar masses BHs and the lower curve for 10^8 solar masses BHs, both merging in the contracting phase.

amplitude is constant and becomes non-negligible and comparable to the sensitivity of current or next-generation experiments. The h asymptotic behavior—which might appear as quite strange at first sight—is just due to the converging property of the integral of $1/a$ which enters the definition of the luminosity distance.

An obvious limitation of this calculation comes from the perturbative treatment. As it can be seen in Fig. 5, as long as the bounce temperature is set much above the nucleosynthesis temperature, the gravitational waves amplitude at the bounce becomes too large to justify a perturbative calculation. This is a limitation to the presented study—which requires a deeper treatment for this case—but not to the presented idea in itself.

However, if the bounce temperature is set to the lowest possible one, the amplitude at the bounce is marginally compatible with a perturbative approach and this study shows—in a consistent way—that, in principle, gravitational waves from events occurring in the contracting phase of bouncing models could be detected in the contemporary universe.

One could also consider a phase of matter domination preceding the radiation dominated era in the contracting branch. If sources are located in this matter dominated phase, the amplitude does depend on the time at which the coalescence takes place. It is then possible to achieve nearly any value by choosing an emission time in the deep past. But the breakdown of the perturbative treatment would then become drastic and the whole result would be questionable. We therefore restrict ourselves to the radiation dominated case.

Another limitation is associated with the homogeneous and isotropic treatment of the bouncing universe. This should be considered as a toy-model approximation. It is

however not fully irrelevant. First, it should be pointed out that many bouncing models have been shown to resist the inclusion of anisotropies (see, e.g., [27] for the case of loop gravity) with a quite minor modification of the Friedmann equation [28]. Anisotropic stress on gravitational waves could even be a way to discriminate between models. The homogeneous treatment is harder to justify and should obviously be seen as a first step. Recent calculations [29] have however shown that exact solutions describing a regular lattice of black holes in a cosmological bouncing background do exist.

V. CONCLUSION

In this article we have shown that the luminosity distance in a contracting universe has a highly nontrivial behavior. Because of the “competition” between the expanding wave dilution and the amplification due to the decreasing scale factor, in some cases ($n > 1/2$), the luminosity distance between two events in the contracting branch does *decrease* with an increasing time difference.

As a consequence, some violent events releasing gravitational waves and taking place in the contracting branch of the Universe could be detected today. The question of their frequency is hard to be answered unequivocally as it obviously depends on the precise emission time which, in the case $n = 1/2$, has strictly no impact on the luminosity distance. We leave for a future study the associated statistical analysis, together with the systematic study of the characteristic signatures of “prebounce” signals.

It can already be underlined that several possible ways of discriminating between “prebounce” events and usual “postbounce” events do exist. The most obvious approach is purely statistical: the number of events should simply be higher than expected if sources located before the bounce contribute to the measured events. Beyond this obvious statement, one should also look for the absence of electromagnetic counterparts. Although not demonstrated, electromagnetic signals are usually expected to be associated with merging supermassive BHs. Third, the measured luminosity distances for some events should lie outside of the usual range (either too large or too small). Finally, the measured luminosity distance (inferred from the frequency, the frequency evolution and the amplitude, see e.g., [30] or [31]) might mismatch the real one in a way which is observationally measurable.

ACKNOWLEDGMENTS

K. M is supported by a grant from the CFM foundation.

- [1] R. Brandenberger and P. Peter, *Found. Phys.* **47**, 797 (2017).
- [2] D. Battefeld and P. Peter, *Phys. Rep.* **571**, 1 (2015).
- [3] P. Peter and N. Pinto-Neto, *Phys. Rev. D* **65**, 023513 (2001).
- [4] F. T. Falciano, M. Lilley, and P. Peter, *Phys. Rev. D* **77**, 083513 (2008).
- [5] C. Lin, R. H. Brandenberger, and L. Perreault Levasseur, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **04** (2011) 019.
- [6] T. Qiu, J. Evslin, Y.-F. Cai, M. Li, and X. Zhang, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **10** (2011) 036.
- [7] C. Kounnas, H. Partouche, and N. Toumbas, *Nucl. Phys.* **B855**, 280 (2012).
- [8] Y.-F. Cai, T. Qiu, Y.-S. Piao, M. Li, and X. Zhang, *J. High Energy Phys.* **10** (2007) 071.
- [9] T. Biswas, A. Mazumdar, and W. Siegel, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **03** (2006) 009.
- [10] T. Biswas, R. Brandenberger, A. Mazumdar, and W. Siegel, *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **12** (2007) 011.
- [11] D. Langlois and A. Naruko, *Classical Quantum Gravity* **30**, 205012 (2013).
- [12] M. Koehn, J.-L. Lehners, and B. A. Ovrut, *Phys. Rev. D* **90**, 025005 (2014).
- [13] M. Bojowald, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5227 (2001).
- [14] A. Ashtekar and A. Barrau, *Classical Quantum Gravity* **32**, 234001 (2015).
- [15] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok, *Phys. Rev. D* **64**, 123522 (2001).
- [16] P. J. Steinhardt and N. Turok, *Phys. Rev. D* **65**, 126003 (2002).
- [17] T. Battefeld and S. Watson, *Rev. Mod. Phys.* **78**, 435 (2006).
- [18] C. Barcel, R. Carballo-Rubio, and L. J. Garay, *J. High Energy Phys.* **05** (2017) 054.
- [19] P. Peter and J. Martin, [hep-th/0402081](https://arxiv.org/abs/hep-th/0402081).
- [20] F. Finelli, P. Peter, and N. Pinto-Neto, *Phys. Rev. D* **77**, 103508 (2008).
- [21] D. W. Hogg, [astro-ph/9905116](https://arxiv.org/abs/astro-ph/9905116).
- [22] A. Ashtekar and P. Singh, *Classical Quantum Gravity* **28**, 213001 (2011).
- [23] V. G. Gurzadyan and R. Penrose, *Eur. Phys. J. Plus* **128**, 22 (2013).
- [24] W. Nelson and E. Wilson-Ewing, *Phys. Rev. D* **84**, 043508 (2011).
- [25] M. Maggiore, *Gravitational Waves. Vol. 1: Theory and Experiments*, Oxford Master Series in Physics (Oxford University Press, New York, 2007), ISBN 9780198570745, 9780198520740, URL <http://www.oup.com/uk/catalogue/?ci=9780198570745>.
- [26] A. Barrau, T. Cailleteau, J. Grain, and J. Mielczarek, *Classical Quantum Gravity* **31**, 053001 (2014).
- [27] A. Ashtekar and E. Wilson-Ewing, *Phys. Rev. D* **79**, 083535 (2009).
- [28] L. Linsefors and A. Barrau, *Classical Quantum Gravity* **31**, 015018 (2014).
- [29] T. Clifton, B. Carr, and A. Coley, *Classical Quantum Gravity* **34**, 135005 (2017).
- [30] D. E. Holz and S. A. Hughes, *Astrophys. J.* **629**, 15 (2005).
- [31] B. F. Schutz, *ESA SP* **420**, 229 (1997).

4.6 Matière noire sous forme de reliques de Planck

Le problème de la matière noire est l'un des plus anciens et des plus importants de la physique contemporaine. Il est connu depuis soixante ans et pourtant aucune explication consensuelle n'a pour le moment émergé. Les approches de type "gravitation modifiée" peinent à y remédier, en partie car la matière noire se manifeste à des échelles très diverses (des galaxies aux échelles cosmologiques). À la différence du problème de l'énergie noire, il est presque certain qu'une part de "nouvelle physique" est indispensable. Depuis que les modèles supersymétriques les plus simples ont été écartés par les résultats du LHC, la physique des particules produit une grande quantité de modèles fortement exotiques pour rendre compte de cette matière sombre. Nous proposons ici un scénario faisant intervenir relativement peu (bien que ce jugement soit subjectif) de nouvelle physique.

Fondamentalement, il s'agit de proposer que la matière noire soit constituée de reliques de trous noirs primordiaux. L'idée n'est pas nouvelle mais nous agençons de façon originale les différentes parties du puzzle.

D'abord il faut que les petits trous noirs ne s'évaporent pas entièrement. Nous donnons plusieurs arguments pour plaider en faveur de l'existence de reliques stables qui nous semblent plus "naturelles" qu'une évaporation totale à plus d'un titre.

Ensuite, nous proposons que ces trous noirs légers ne se sont pas formés à partir des fluctuations de densité primordiales, comme il est d'usage avec les trous noirs primordiaux, mais directement par collisions de particules trans-planckiennes. Nous soulignons que si l'énergie de "*reheating*" n'est pas trop basse, la queue de distribution thermique au-delà de l'énergie de Planck peut suffire à produire suffisamment de trous noirs pour rendre ce mécanisme valide.

Enfin, nous suggérons des méthodes originales pour tester ce scénario qui pourrait sembler *a priori* totalement infalsifiable, dans la mesure où les reliques n'interagissent pratiquement pas du tout avec le monde extérieur.

Nous en profitons également pour discuter le problème de la naturalité des hypothèses dans une vision bayésienne.

Remarque : Il est pour nous clair que l'échelle d'énergie anormalement élevée de l'inflation supposée ici est l'hypothèse exotique de ce travail. Nous soulignons néanmoins que contrairement à une vision commune cette hypothèse n'entre pas nécessairement en tension radicale avec la limite supérieure connue sur le rapport tenseur-scalaire. Il n'en demeure pas moins que la compatibilité avec la normalisation observée du spectre scalaire requiert une violation des conditions de roulement lent. Ce point nécessite de plus amples réflexions et constitue la principale faiblesse de ce modèle.

Dark matter as Planck relics without too exotic hypotheses

Aurlien Barrau,¹ Killian Martineau,¹ Flora Moulin,¹ and Jean-Frédéric Ngoni¹

¹*Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Université Grenoble-Alpes, CNRS/IN2P3
53, avenue des Martyrs, 38026 Grenoble cedex, France*

(Dated: August 23, 2019)

The idea that dark matter could be made of stable relics of microscopic black holes is not new. In this article, we revisit this hypothesis, focusing on the creation of black holes by the scattering of trans-planckian particles in the early universe. The only new physics required in this approach is an unusually high energy scale for inflation. We show that dark matter emerges naturally and we study the question of fine-tuning. We finally give some lines of thoughts for a possible detection.

INTRODUCTION

Dark matter is a very old problem. On the experimental side, it is being actively searched for, by direct detection (see, *e.g.*, [1–3] for reviews), by indirect detection (see, *e.g.*, [4–6] for reviews), and by accelerator production (see, *e.g.*, [7, 8] for reviews). Many “little anomalies” are known, from the Fermi excess of GeV gamma-rays [9] to the PAMELA and AMS-02 over-abundance of positrons [10–12]. All of them can however be quite simply accounted for by conventional astrophysical processes and at this stage no clear signal for non-baryonic dark matter has been non-ambiguously recorded.

On the theoretical side, many hypotheses are being considered. They are actually too numerous to be exhaustively mentioned here (see, *e.g.*, [13] for an introductory review). From supersymmetry [14] to axions [15], most of them imply some amount of “new physics”. Recent developments even include an impressive list of highly speculative hypotheses.

Obviously, estimating the “exoticity” of a model is quite subjective. In this brief article, we revisit the idea of dark matter made of Planck relics and we argue that this scenario might be much less exotic than most models. The only non-standard hypothesis is a higher than usual reheating temperature.

TRANS-PLANCKIAN SCATTERING

Most studies considering primordial black holes (PBHs) are relying on production mechanisms that involve the collapse of overdense regions (see, *e.g.*, [16] for an early detailed calculation, [17, 18] for studies of phase transitions, and [19, 20] for reviews). Those scenarios are however very unlikely as the density contrast required to form a PBH is close to one whereas the primordial power spectrum measured in the cosmological microwave background (CMB) has a much lower normalisation. This bound could have been circumvented by a blue

power spectrum as the scales involved in the formation of PBHs are much smaller than those probed by the CMB. The actual spectrum however happens to be red ($n_s \approx 0.965$) [21], making the production of primordial black holes by “historical” mechanisms very difficult. Other scenarios like the collapse of cosmic strings were also considered [22] but they are also disfavored – if not ruled out – by recent measurements. Interesting new ideas are however now being considered [23, 24].

Nevertheless, there exist a very different way to produce small black holes, namely through the scattering of trans-planckian particles. As initially argued in [25], when the impact parameter is smaller than the Schwarzschild radius (associated with the considered center-of-mass energy of a particle collision), the cross section for the scattering of trans-planckian particles is dominated by an inelastic process leading to the formation of a single black hole. The key-point is that the main features of high energy scattering above the Planck energy can be studied from semiclassical considerations in general relativity (GR) and are therefore reliable. In [26], the study was refined and it was also concluded that the cross section for black hole production should be of the order of $\sigma(s) = F(s)\pi R_S^2(s)$ with $F(s)$ a factor of order one, \sqrt{s} the center of mass energy, and R_S the Schwarzschild radius. The details obviously depend on the considered quantum gravity theory but the main features are basically model-independent.

Those ideas were applied to the possible production and observation of microscopic black holes at colliders (see, *e.g.*, [26–29] for early works) in theories with a low Planck scale – typically in the TeV range (usually associated with the existence of large extra-dimensions [30] or with many new particle species [31]). A nice review including astrophysical effects, like those mentioned in [32], can be found in [33]. In this article, we do not rely on the existence of extra-dimensions and we do not assume a low Planck scale.

STABLE RELICS

The Hawking temperature $T_H = 1/(8\pi M)$ [34] is vanishingly small for astrophysical black holes but becomes significant for very small black holes. The mass loss rate during the evaporation is proportional to M^{-2} and the process is therefore highly explosive. In itself, the evaporation mechanism is well understood from many different perspectives and is very consensual (see, *e.g.*, [35] for a simple introduction). Although it has not been observationally confirmed, there are indications that it might have been revealed in analog systems [36].

The status of the endpoint of the evaporation process is less clear. Obviously, the semi-classical treatment breaks down in the last stages and the divergence of the temperature together with the appearance of a naked singularity are non-physical. Many different arguments have been pushed forward in favor of the existence of stable Planck relics at the end of the evaporation process (see [37–50] to mention only a few historical references, among many others). There are excellent arguments from quantum gravity, string gravity or modified gravity theories in favor or remnants. Those are however obviously based on “new physics”. One of the best argument for Planck relics using only known physics was given by Giddings in [51]. Locality, causality and energy conservation considered within the information paradox framework (see, *e.g.*, the first sections of [52] for a precise description) do suggest that the time scale for the final decay of BHs is larger than the age of the Universe.

Although no clear consensus does exist on the status of BHs at the end of the evaporation process, it is fair to suggest that the existence of relics is somehow simpler from the viewpoint of usual physics. A recent review on the pros and cons of stable remnants can be found in [53]. It is concluded that if relics contain a large interior geometry – which is supported by [54, 55] –, they help solving the information loss paradox and the firewall controversy.

REHEATING SCALE

The idea that dark matter could be made of Planck relics was first suggested in [56]. This seminal work was however focused on PBHs formed by the collapse of overdense regions (or similar mechanisms), which is now believed to be extremely unlikely as previously pointed out. We focus here on the possibility that PBHs are formed by the collision of trans-plankian particles in the early Universe. This has already been considered in [57] and in [58, 59] (see also references therein) for the case with extra-dimensions.

In this work, we won’t assume a lower than usual Planck scale due to extra-dimensions. We quite simply consider the standard cosmological scenario in a (3+1)-dimensional spacetime and just take into account the “tail” of trans-plankian particles at the reheating time. The key-point lies in the fact that the potentially produced relics will behave non-relativistically and will therefore be much less diluted (their energy density scaling as a^{-3}) than the surrounding radiation (whose energy density scales as a^{-4}). Hence, it is possible to reach a density of relics (normalized to the critical density) close to one, $\Omega_{rel} \equiv \rho_{rel}/\rho_{cr} \approx 1$, with only a tiny fraction of relics at the formation time. The relative “amplification” of the relics density compared to the radiation density between the reheating and the equilibrium times is given by $T_{RH}/T_{eq} \approx 3 \times 10^{27} T_{RH}$ when T_{RH} is given in Planck units. To fix ideas, for a reheating temperature at the GUT scale, a relics fraction of only 10^{-24} at the formation time would be enough to nearly close the Universe at the equilibrium time.

For a thermal distribution of particles at temperature T , the number of particles above $E_{th} > T$ is exponentially suppressed. This is why, even with the amplification factor given above, the scenario presented here requires a reheating temperature not much below the Planck scale. This constitutes, in our view, the only “non-standard” input of this model. The Planck experiment final results lead to an upper limit on the tensor-to-scalar ratio of primordial perturbations $r < 0.1$ [60] which is even tightened to $r < 0.064$ by combining the data with the BICEP2/Keck Array BK14 measurements. This is usually interpreted as an upper limit on the energy scale of inflation around the GUT scale (the higher the energy scale, the larger the amount of tensor modes), which is too low for the process considered here. There are however at least two ways to circumvent this bound (we assume for simplicity a sudden reheating).

The first one consists in noticing that the upper limit on the energy scale of inflation holds firmly only for rudimentary models. In k -inflation [61], the relation basically becomes $r = -8C_S n_t$ (instead of $r = -8n_t$), where n_t is the tensor index and $C_S < 1$ is the speed of sound for perturbations. This relaxes the bound. In 2-field inflation [62], the upper limit is also relaxed to $r = -8n_t \sin^2(\theta)$, where θ accounts for the possible evolution of adiabatic scalar modes on super-Hubble scales. In multi-field inflation the relation between r and n_T even becomes an inequality.

A second and probably more provocative argument would be the following. Whereas temperature anisotropies originate from usual quantum physics, namely from the quantum fluctuations of the inflaton field, the tensor perturbations leading to B-modes in the CMB should come from the quantum fluctuations of the polarisation modes of the graviton. In a sense (and

although some counter-examples have been constructed but for “artificial” models), B-modes would be a signature of perturbative quantum gravity (dimensional arguments are given in [63]). Quantum gravity is a fascinating area of research but it has still no connection with experiments and assuming gravity not to be quantized is also legitimate, especially when considering how difficult and paradoxical is the quantization of the gravitational field [64]. It is therefore meaningful to consider the possibility that *no* B-mode is produced, even with a very high energy scale for inflation, just because gravity might not be quantum in nature (this would also raise many consistency questions but this is obviously worth being considered, as advocated in [65, 66]). In such a case, the usual upper bound could also be ignored.

Obviously, the normalization of the scalar spectrum would also be in tension with such a high scale (violating the slow-roll conditions in the most simple cases). We do *not* mean that a higher than usual energy scale for inflation is unavoidable or even favored. We simply state that this is not ruled out by the tensor-to-scalar ratio and is, in our opinion, less “exotic” than most assumptions required for usual DM candidates.

DARK MATTER ABUNDANCE

The threshold energy E_t to produce a BH in a head on collision of particles is expected to be of the order of the Planck energy but, depending on the details of the considered model, might be slightly different and we keep it as a free parameter. To estimate the number density of particles above E_t , one simply needs to integrate the thermal distribution, which leads to

$$n_{part} \approx T_{RH} e^{-E_t/T_{RH}},$$

where we use Planck units (as everywhere in this work except otherwise specified). Obviously, if the reheating temperature is too small when compared to the threshold energy of BH production, the number of PBHs will be exponentially suppressed and the process will be inefficient. The cross section in principle depends on the energy of the collision but, as a first step, can be assumed to be a constant σ_{BH} above the threshold. The collision rate is therefore given by $\Gamma = n_{part}\sigma_{BH}v \approx n_{part}\sigma_{BH}$. The energy density of radiation is

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T_{RH}^4,$$

with g_* the total number of effectively massless degrees of freedom, that is species with masses $m_i \ll T_{RH}$. The Hubble parameter is

$$H = 1.66 g_*^{1/2} T_{RH}^2.$$

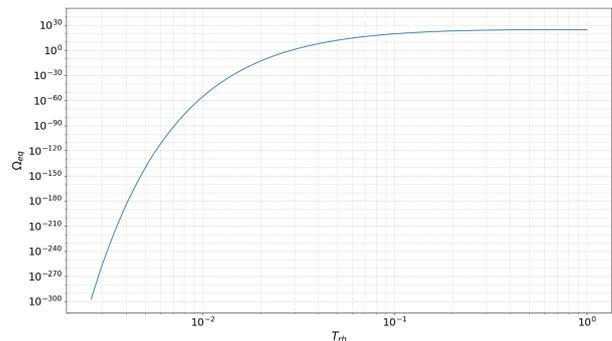


FIG. 1. Fraction of relics at the equilibrium time as a function of the reheating temperature (in Planck units).

If relics are assumed to have a mass m_{rel} (necessarily lower than E_{th}), the energy density of relics will be given by

$$\rho_{rel} \approx \frac{n_{part} m_{rel} \Gamma}{H} \approx \frac{e^{-\frac{2E_t}{T_{RH}}} \sigma_{BH} m_{rel}}{1.66 g_*^{1/2}}.$$

The relative density of relics at the formation time is

$$\Omega_{rel}^f = \frac{30 \sigma_{BH} m_{rel}}{1.66 \pi^2 g_*^{3/2}} \cdot \frac{e^{-\frac{2E_t}{T_{RH}}}}{T_{RH}^4},$$

leading, in agreement with [59], to a relative density at the equilibrium time of

$$\Omega_{rel}^{eq} = \frac{30 \sigma_{BH} m_{rel}}{1.66 \pi^2 g_*^{3/2}} \cdot \frac{e^{-\frac{2E_t}{T_{RH}}}}{T_{eq}^4 T_{RH}^3}.$$

Let us first first assume that the cross section is of order one in Planck units ($\sigma \sim A_{Pl}$) above the threshold and that the mass of the relics is also of order one in Planck units ($m_{rel} \sim m_{Pl}$). In Fig 1, the relative abundance of relics at the equilibrium time is plotted at the function of the reheating temperature. Figure 2 is a zoom on the relevant region. For a reheating temperature slightly above 10^{-2} , one is led to a density of relics that can account for dark matter.

Although the influence is negligible, from now on we use the cross section $\sigma(s) = F(s) \pi R_S^2(s)$, where $R_S = 2s$. We set $F = 1$ above the threshold but the dependency being linear it is easy to extrapolate to any reasonable value. In Fig. 3, we show the influence of the threshold energy. The influence of the threshold energy is – as expected – very large. Interestingly, if non-perturbative effects were to lower the threshold by one order of magnitude with respect to the expected value, a reheating temperature around the GUT scale would be enough to produce the required density of remnants.

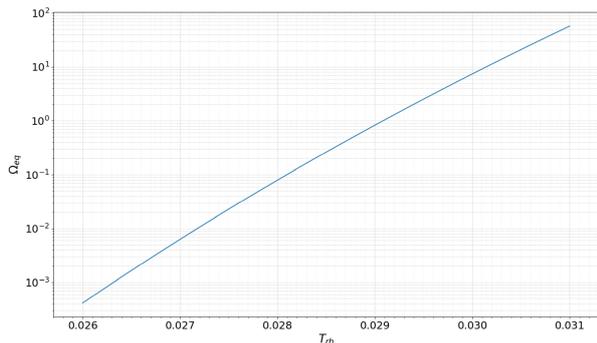


FIG. 2. Fraction of relics at the equilibrium time as a function of the reheating temperature (in Planck units).

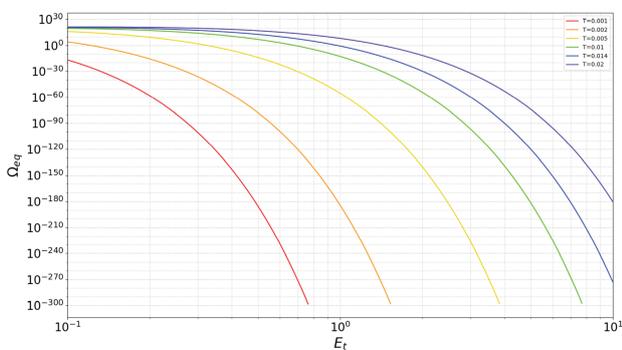


FIG. 3. Fraction of relics at the equilibrium time as a function of the energy threshold for different reheating temperatures (in Planck units), from 10^{-3} to 2×10^2 from bottom to top.

THE FINE-TUNING ISSUE

The model presented here seems to require a high level of fine-tuning. In particular, as the dependency upon the reheating temperature is exponential, varying slightly its value leads to a large variation in the density of relics. The question of fine-tuning is however tricky. The fact that if the laws of physics were different, the World would then be different is not in itself a problem. Nor is the fact that our history is contingent and full of highly improbable events. The collision of the Earth with a meteorite 65 millions years ago, leading to the extinction of dinosaurs and making our own existence possible, has a nearly vanishing *a priori* probability and this obviously does not invalidate any biological or astronomical model. Let us state it otherwise. If one plays a huge roulette with one billion squares, the *a priori* probability of any result is very small. And there is nothing strange in observing the system indeed

selecting a square with a probability of 10^{-9} . However, if there is only one green square, which is somehow “objectively” different from the others, and if the system selects this specific one in just one roll, then there is an issue. It is important that the specificity is defined *a priori* because *a posteriori* everything might seem very specific, including the existence of human beings, leading to a highly biased conception of “naturalness”.

In the cosmological framework, the value $\Omega = 1$ (with Ω the total density normalised to the critical density) can be considered as the green square. It is a very special value associated with a very particular physical behavior of the Universe. The question is not to know whether a different reheating temperature would lead – or not – to a different state of the Universe. The answer is obviously yes. In this model, this would change the relative density of relics and therefore the equilibrium time, etc. There is nothing wrong with this. The question is to know if a different value of the contingent parameters would lead to a departure from the specific value $\Omega = 1$. The answer turns out to be negative. As very well known, inflation fixes a vanishing (or nearly so) curvature. Basically, as $(\Omega^{-1} - 1) = -\frac{3k}{8\pi\rho a^2}$ with ρ remaining constant and the scale factor increasing by at least 60 e-folds, Ω is fixed (close) to 1 at the end of inflation. There is nothing magical here as Ω involves a normalisation to the critical density which, itself, depends on the Hubble parameter. If the content of the Universe were different, we would still have $\Omega = 1$, with simply a different expansion rate.

Another fine-tuning question is related to the “why now” question. Why is the dark energy density comparable to the matter density basically now? This is mostly a dark energy problem, not a dark matter problem. Should the dark matter be much less abundant than its actual value, dark energy would still dominate at a comparable time in the history of the Universe. Furthermore, as noticed in [67], this coincidence is highly dependent on the way it is considered and expressed. Finally, one might focus on the reason why dark matter and visible matter have roughly the same density. First, there is more than one order of magnitude of difference between both densities. Second, this question is mostly a kind of “numerology” issue and not a real strangeness from a bayesian point of view. It is somehow like asking why the electron to proton mass ratio is what it is. The observed ratio of dark matter over visible matter does not correspond an *a priori* specific value. It is a bit paradoxical that, in contemporary theoretical physics, both ratios close to one and very different from one, appear as “unnatural”. The fine-tuning issue should be raised with care.

DETECTABILITY

Testing this model is challenging. A Planck relic has the weight of a grain of dust and no other interaction than gravity to reveal itself to the outer World. Even though the Planck mass is very small from the gravitational viewpoint, it is very large from the particle physics viewpoint. The number density of relics is therefore extremely small, even if they are to account for all the dark matter. A density of 10^{-18} relics per cubic meter – that is one relic per volume of a million times the one of planet Earth – is enough to close the universe. Detection seems hopeless. The cross-section (or greybody factor) hopefully does *not* tend to zero for the absorption of fermions in the low-energy limit [68]. However, even avoiding this catastrophic suppression (which does exist for higher spins), the area involved is of the order of the Planck one, 10^{-66}cm^2 , which indeed makes direct detection impossible in practice.

We consider here another possibility associated with the coalescences of relics that have occurred during the history of the Universe. Contrarily to what is sometimes done for PBHs we shall not focus on the emission of gravitational waves whose amplitude would be negligible and frequency way too high for any detector. However, something else is also expected to happen in this model. When two remnants merge, a higher-mass black hole is formed and evaporates until it reaches again $m_{rel} \sim m_{Pl}$ assumed to be the minimal one. This should happen preferably via the emission of one (or a few) quantum close to the Planck energy. Each merging should therefore emit about a Planck-energy particle which is in principle detectable. This sketch should of course be refined but the hypothesis is realistic enough to investigate whether this path is potentially fruitful.

We estimate the merging rate following [69], which builds on [70]. It is not hard to show that the probability of coalescence in the time interval $(t, t + dt)$ is given by

$$dP = \frac{3}{58} \left[- \left(\frac{t}{T} \right)^{3/8} + \left(\frac{t}{T} \right)^{3/37} \right] \frac{dt}{t},$$

where $T \equiv \bar{x}^4 \frac{3}{170} (Gm_{rel})^{-3}$,

$$\bar{x} = \left(\frac{M_{rel}}{\rho_{rel}(z_{eq})} \right)^{1/3} = \frac{1}{(1 + z_{eq})} \left(\frac{8\pi G m_{rel}}{3H_0^2 \Omega_{rel}} \right)^{1/3}$$

being the mean separation of relics at the equilibrium time. In the previous formula, we have reinserted the constants to make the use easier. The event rate is then given by

$$n_{merg} = \frac{3H_0^2 \Omega_{rel}}{8\pi G m_{rel}} \frac{dP}{dt} \Big|_{t_0}.$$

This is of the order of $10^{-45}\text{m}^{-3}\text{s}^{-1}$. It is then straightforward to estimate the measured flux on a detector of surface S_d and solid angle acceptance Ω_{acc} , integrated up to a distance R_{max} :

$$\Phi_{mes} = \int_0^{R_{max}} n_{merg} S_d \frac{\Omega_{acc}}{4\pi} dR.$$

Although it is well known that TeV photons are absorbed by interactions with the infrared background and PeV photons by interactions with the cosmological microwave background (CMB) photons, there is no strong absorption to be expected for Planck-energy photons. The wavelength of the background photons that would lead to a center-of-mass energy close to the electron mass is way larger than any expected background. The R_{max} value can therefore be assumed to be much larger than for usual high energy cosmic-ray estimations. For detectors like Auger [71], the expected flux is too small for a detection. For Euso-like instruments [72] – looking at the atmosphere from the space station – we are led to an order of magnitude not far from a fraction of an event per year. For speculative ideas about using giant planets as cosmic-ray detectors [73], we reach a dozen of events per year. This is obviously a hard task but, interestingly, the model is clearly not unfalsifiable.

CONCLUSION

The idea that dark matter could be made of Planck relics is not new. Nor is the possibility that black holes could be formed by the scattering of trans-planckian particles in the early universe. In this article we have gathered all the ingredients and argued that the resulting model is not (that) exotic. Unquestionably, the very high reheating temperature required raises questions. We have however explained that the upper bounds usually considered can be circumvented. Still, building a consistent cosmological model with such a high scale for inflation is not trivial and should be considered as a challenge.

There is no obvious solution to the dark matter problem, which is one of the oldest enigmas of contemporary cosmology. The scenario suggested here is based on a minimum amount of “new physics”, if not only on known physics. It requires a quite unusual cosmological behavior but no new particle physics input is needed. From this point of view, it might be worth being considered seriously.

ACKNOWLEDGMENTS

K.M is supported by a grant from the CFM foundation.

-
- [1] B. Censier, EAS Publ. Ser. **53**, 59 (2012), 1110.0191.
- [2] J. Gascon, EPJ Web Conf. **95**, 02004 (2015).
- [3] F. Mayet et al., Phys. Rept. **627**, 1 (2016), 1602.03781.
- [4] M. Cirelli, Pramana **79**, 1021 (2012), 1202.1454.
- [5] J. Conrad, in *Interplay between Particle and Astroparticle physics (IPA2014) London, United Kingdom, August 18-22, 2014* (2014), 1411.1925.
- [6] J. M. Gaskins, Contemp. Phys. **57**, 496 (2016), 1604.00014.
- [7] F. Kahlhoefer, Int. J. Mod. Phys. **A32**, 1730006 (2017), 1702.02430.
- [8] M. Felcini, in *53rd Rencontres de Moriond on Cosmology La Thuile, Italy, March 17-24, 2018* (2018), 1809.06341.
- [9] M. Ackermann et al. (Fermi-LAT), Astrophys. J. **840**, 43 (2017), 1704.03910.
- [10] O. Adriani et al. (PAMELA), Nature **458**, 607 (2009), 0810.4995.
- [11] L. Accardo et al. (AMS), Phys. Rev. Lett. **113**, 121101 (2014).
- [12] M. Aguilar et al. (AMS), Phys. Rev. Lett. **113**, 121102 (2014).
- [13] M. Bauer and T. Plehn (2017), 1705.01987.
- [14] E. A. Bagnaschi et al., Eur. Phys. J. **C75**, 500 (2015), 1508.01173.
- [15] V. B. Klaer and G. D. Moore, JCAP **1711**, 049 (2017), 1708.07521.
- [16] B. J. Carr, Astrophys. J. **201**, 1 (1975).
- [17] D. B. Cline, Nucl. Phys. **A610**, 500C (1996).
- [18] K. Jedamzik and J. C. Niemeyer, Phys. Rev. **D59**, 124014 (1999), astro-ph/9901293.
- [19] B. J. Carr, K. Kohri, Y. Sendouda, and J. Yokoyama, Phys. Rev. **D81**, 104019 (2010), 0912.5297.
- [20] A. M. Green, Fundam. Theor. Phys. **178**, 129 (2015), 1403.1198.
- [21] N. Aghanim et al. (Planck) (2018), 1807.06209.
- [22] S. W. Hawking, Phys. Lett. **B231**, 237 (1989).
- [23] J. Garca-Bellido, B. Carr, and S. Clesse (2019), 1904.11482.
- [24] B. Carr, S. Clesse, and J. Garca-Bellido (2019), 1904.02129.
- [25] T. Banks and W. Fischler (1999), hep-th/9906038.
- [26] S. B. Giddings and S. D. Thomas, Phys. Rev. **D65**, 056010 (2002), hep-ph/0106219.
- [27] S. Dimopoulos and G. L. Landsberg, Phys. Rev. Lett. **87**, 161602 (2001), hep-ph/0106295.
- [28] A. Barrau, J. Grain, and S. O. Alexeyev, Phys. Lett. **B584**, 114 (2004), hep-ph/0311238.
- [29] B. C. Paul and D. Paul, Phys. Rev. **D74**, 084015 (2006), hep-th/0511003.
- [30] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Lett. **B429**, 263 (1998), hep-ph/9803315.
- [31] G. Dvali, Fortsch. Phys. **58**, 528 (2010), 0706.2050.
- [32] A. Barrau, C. Feron, and J. Grain, Astrophys. J. **630**, 1015 (2005), astro-ph/0505436.
- [33] P. Kanti, Int. J. Mod. Phys. **A19**, 4899 (2004), hep-ph/0402168.
- [34] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975), [167(1975)].
- [35] P.-H. Lambert, PoS **Modave2013**, 001 (2013), 1310.8312.
- [36] J. Steinhauser, Nature Phys. **12**, 959 (2016), 1510.00621.
- [37] J. D. Barrow, E. J. Copeland, and A. R. Liddle, Phys. Rev. **D46**, 645 (1992).
- [38] Y. B. Zeldovich and I. D. Novikov, *RELATIVISTIC ASTROPHYSICS*. (1983), ISBN 9780226979571.
- [39] Y. Aharonov, A. Casher, and S. Nussinov, Phys. Lett. **B191**, 51 (1987).
- [40] T. Banks, A. Dabholkar, M. R. Douglas, and M. O'Loughlin, Phys. Rev. **D45**, 3607 (1992), hep-th/9201061.
- [41] T. Banks, M. O'Loughlin, and A. Strominger, Phys. Rev. **D47**, 4476 (1993), hep-th/9211030.
- [42] M. J. Bowick, S. B. Giddings, J. A. Harvey, G. T. Horowitz, and A. Strominger, Phys. Rev. Lett. **61**, 2823 (1988).
- [43] S. R. Coleman, J. Preskill, and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **67**, 1975 (1991).
- [44] K.-M. Lee, V. P. Nair, and E. J. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **68**, 1100 (1992), hep-th/9111045.
- [45] G. W. Gibbons and K.-i. Maeda, Nucl. Phys. **B298**, 741 (1988).
- [46] T. Torii and K.-i. Maeda, Phys. Rev. **D48**, 1643 (1993).
- [47] C. G. Callan, Jr., R. C. Myers, and M. J. Perry, Nucl. Phys. **B311**, 673 (1989).
- [48] R. C. Myers and J. Z. Simon, Phys. Rev. **D38**, 2434 (1988).
- [49] B. Whitt, Phys. Rev. **D38**, 3000 (1988).
- [50] S. Alexeyev, A. Barrau, G. Boudoul, O. Khovanskaya, and M. Sazhin, Class. Quant. Grav. **19**, 4431 (2002), gr-qc/0201069.
- [51] S. B. Giddings, Phys. Rev. **D46**, 1347 (1992), hep-th/9203059.
- [52] S. D. Mathur, Pramana **79**, 1059 (2012), 1201.2079.
- [53] P. Chen, Y. C. Ong, and D.-h. Yeom, Phys. Rept. **603**, 1 (2015), 1412.8366.
- [54] M. Christodoulou and C. Rovelli, Phys. Rev. **D91**, 064046 (2015), 1411.2854.
- [55] M. Christodoulou and T. De Lorenzo, Phys. Rev. **D94**, 104002 (2016), 1604.07222.
- [56] J. H. MacGibbon, Nature **329**, 308 (1987).
- [57] A. Saini and D. Stojkovic, JCAP **1805**, 071 (2018), 1711.06732.
- [58] J. A. Conley and T. Wizansky, Phys. Rev. **D75**, 044006 (2007), hep-ph/0611091.
- [59] T. Nakama and J. Yokoyama, Phys. Rev. **D99**, 061303 (2019), 1811.05049.
- [60] Y. Akrami et al. (Planck) (2018), 1807.06211.
- [61] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. **B458**, 209 (1999), hep-th/9904075.
- [62] D. Wands, Lect. Notes Phys. **738**, 275 (2008), astro-ph/0702187.
- [63] L. M. Krauss and F. Wilczek, Int. J. Mod. Phys. **D23**, 1441001 (2014), 1404.0634.
- [64] D. Oriti, *Approaches to quantum gravity: Toward a new understanding of space, time and matter* (Cambridge University Press, 2009), ISBN 9780521860451, 9780511512407, URL <http://www.cambridge.org/catalogue/catalogue.asp?isbn=9780521860451>.
- [65] T. Jacobson, Phys. Rev. Lett. **75**, 1260 (1995), gr-qc/9504004.
- [66] C. Eling, R. Guedens, and T. Jacobson, Phys. Rev. Lett. **96**, 121301 (2006), gr-qc/0602001.
- [67] E. Bianchi and C. Rovelli (2010), 1002.3966.
- [68] J. H. MacGibbon and B. R. Webber, Phys. Rev. **D41**, 3052 (1990).

- [69] M. Sasaki, T. Suyama, T. Tanaka, and S. Yokoyama, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 061101 (2016), [erratum: *Phys. Rev. Lett.*121,no.5,059901(2018)], 1603.08338.
- [70] T. Nakamura, M. Sasaki, T. Tanaka, and K. S. Thorne, *Astrophys. J.* **487**, L139 (1997), astro-ph/9708060.
- [71] C. Covault et al. (Telescope Array), *EPJ Web Conf.* **210**, 05004 (2019).
- [72] N. Inoue, K. Miyazawa, and Y. Kawasaki (JEM-EUSO), *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **196**, 135 (2009).
- [73] P. B. Rimmer, C. R. Stark, and C. Helling, *Astrophys. J.* **787**, L25 (2014), 1405.1604.

4.7 Synthèse de la phénoménologie associée aux trous noirs en gravitation quantique à boucles

Il existe désormais plusieurs articles de synthèse de grande qualité traitant de la cosmologie quantique à boucles et de la phénoménologie associée mais aucune ne parle de la phénoménologie associée aux traitements des trous noirs en gravitation quantique à boucles. C'est en partant de ce constat que nous avons décidé d'en rédiger une. Mêlant différents aspects : évaporation, trous noirs en rebond, matière noire et ondes gravitationnelles elle essaie de recenser et résumer l'avancée des travaux effectués jusqu'alors.

Article

A Status Report on the Phenomenology of Black Holes in Loop Quantum Gravity: Evaporation, Tunneling to White Holes, Dark Matter and Gravitational Waves

Aurélien Barrau * , Killian Martineau and Flora Moulin

Laboratoire de Physique Subatomique et de Cosmologie, Université Grenoble-Alpes, CNRS-IN2P3 53, Avenue des Martyrs, 38026 Grenoble Cedex, France; martineau@lpsc.in2p3.fr (K.M.); moulin@lpsc.in2p3.fr (F.M.)

* Correspondence: barrau@in2p3.fr

Received: 28 August 2018; Accepted: 21 September 2018; Published: 2 October 2018

Abstract: The understanding of black holes in loop quantum gravity is becoming increasingly accurate. This review focuses on the possible experimental or observational consequences of the underlying spinfoam structure of space-time. It addresses both the aspects associated with the Hawking evaporation and the ones due to the possible existence of a bounce. Finally, consequences for dark matter and gravitational waves are considered.

Keywords: loop quantum gravity; loop quantum cosmology; black holes

1. Introduction

The Planck length is 10^{15} -times smaller than scales probed at colliders. Linking quantum gravity with observations is therefore extremely hard (see, e.g., [1] for a recent review and [2–4] for complementary viewpoints). Most works devoted to the connection of quantum gravity with experiments are focused on cosmology or astroparticle physics. In the cosmological sector, the main goal consists of calculating scalar and tensor power spectra (see, e.g., [5,6]), together with the background dynamics (see, e.g., [7,8]). In the astroparticle physics sector, the main idea is to investigate the possible consequences of the granular structure of space (see, e.g., [9] for a recent investigation).

Although black holes (BH) have been intensively studied in quantum gravity, those investigations were mostly disconnected from observations and focused on consistency issues. Recovering, at the leading order, the Bekenstein–Hawking entropy is, for example, obviously a major requirement for all tentative theories (see, e.g., [10] and the references therein). Curing the central singularity—understood as a classical pathology—is another one (see, e.g., [11,12]). Solving the information paradox (see, e.g., [13] and the references therein) would also be highly desirable (this is clearly connected to the previous issues).

In this article, we focus on black holes as possible probes for loop quantum gravity (LQG). We begin by a very short summary of the basics of black hole physics in this framework. We then switch to consequences for the Hawking evaporation, considering different possible perspectives. The quite recent (within the LQG setting) hypothesis of black holes bouncing into white holes is presented with the possible associated signals. Finally, we critically review the possible links with dark matter and conclude with the prospect for gravitational waves.

2. Basics of Black Holes in Loop Quantum Gravity

The study of black holes is an incredibly fruitful field of theoretical physics. Black holes are simple objects. They are pure geometry. There is no equation of state needed: they are just vacuum solutions

to the Einstein equations. This is their first fundamental characteristic. The second specificity of black holes lies in the fact that they are (classically) scale invariant [14]. They can, in principle, exist at any mass.

As far as quantum gravity is concerned, the major breakthrough came from black hole thermodynamics. Because of the no-hair theorem, in Einstein gravity, the most general stationary black hole geometry is described by the Kerr–Newman (KN) solution with mass M , electric charge q and angular momentum j as the only parameters. One can define three length scales characterizing the BH [14]: $m \equiv GMc^{-2}$, $Q \equiv \sqrt{G}qc^{-2}$ and $a \equiv jM^{-1}c^{-1}$. There exists a BH solution only when $Q^2 + a^2 \leq m^2$. One can show, from the area expression, that:

$$d(Mc^2) = \Theta dA + \Phi dQ + \Omega dj \tag{1}$$

with

$$\Theta \equiv c^4(2GA)^{-1}(r_g - m), \tag{2}$$

$$\Phi \equiv qr_g(r_g^2 + a^2)^{-1}, \tag{3}$$

$$\Omega \equiv jm^{-1}(r_g^2 + a^2)^{-1}, \tag{4}$$

$r_g = 2m$ being the gravitational radius. The parameters Θ , Φ and Ω can be understood as the surface gravity, the electrostatic potential and the angular momentum.

As Mc^2 is the energy, this equation looks like the first law of thermodynamics $TdS = dE - \Phi dQ - \Omega dj$. This led to the introduction of a temperature:

$$T_H = (2c\hbar/A)\sqrt{M^2 - Q^2 - a^2}, \tag{5}$$

and entropy:

$$S_{BH} = A/4\ell_p^2, \tag{6}$$

yielding the evaporation process [15]. The second BH law expresses the fact that the sum of the BH entropy together with the entropy outside the BH cannot decrease (from now on, unless otherwise stated, we use Planck units).

The description of BHs in LQG heavily relies on the concept of isolated horizons (IH) [16–20]. This is an intrinsically quasilocal notion, which has the advantage of not requiring the knowledge of whole spacetime to determine whether horizons are present, as is the case with event horizons. The most important characteristics of isolated horizons are [10]: their quasilocality, the availability of a Hamiltonian description for the sector of GR containing the IH, the possibility of finding physical versions of the laws of BH thermodynamics and the existence of local definitions of the energy and angular momentum.

This article focuses on the consequences and not on the theoretical definition of an LQG BH, but recent pedagogical reviews on BH in LQG can be found, e.g., [21–27].

Very schematically, the isolated horizon plays the role of a boundary for the underlying manifold before quantization. Given the area A of a Schwarzschild BH horizon, the geometry states of the BH horizon arise from a punctured sphere. Each puncture carries quantum numbers (see, e.g., [28–31] for details): two labels (j, m) , where j is a spin half-integer carrying information about the area and m is the corresponding projection carrying information about the curvature. They fulfill the condition:

$$A - \Delta \leq 8\pi\gamma \sum_p \sqrt{j_p(j_p + 1)} \leq A + \Delta, \tag{7}$$

where γ is the Barbero–Immirzi parameter entering the definition of LQG (see, e.g., [32]), Δ is the “smearing” area parameter (or coarse-graining scale) used to recover the classical description and p refers to different punctures. In addition, one requires:

$$\sum_p m_p = 0, \quad (8)$$

which means that the horizon has a spherical topology. Many aspects of the BH entropy were studied in this framework, and we shall mention some of them in the following.

3. Modified Hawking Spectrum

One cannot directly measure the entropy of a BH. Therefore, even if some quantum gravity approaches do predict some corrections with respect to the Bekenstein–Hawking law, this can hardly be considered as a smoking gun for observational aspects of quantum geometry. On the other hand, one might observe the evaporation of a black hole. This would require light black holes (the temperature of a solar-mass BH is far below the one of the cosmological microwave background) whose existence is far from obvious. At this stage, the Hawking evaporation of BHs therefore remains purely theoretical (although there are some hints that this could have been observed in analog systems [33]). However, it is in principle observable and might constitute a path toward experimental quantum gravity.

There exist quite a few attempts to deal with evaporating black holes in effective approaches to quantum gravity. Among such attempts, one can mention results derived from the generalized uncertainty principle, which aims at generalizing the Heisenberg uncertainty relation by introducing gravity effects. In this framework, one case shows that there exist a maximum and a minimum temperature for BHs [34–36]. Some models also lead to a vanishing temperature close to the end of the evaporation (see, e.g., [36,37]). The path considered in the following is different and tries to use the exact area spectrum from the full theory. There are no bounds on the temperature (beyond trivial ones), but the energy spectrum of emitted particles can become discrete and keep the footprints of the underlying quantum gravity theory.

3.1. Global Perspective

The first obvious idea to investigate LQG footprints is to consider the deep Planckian regime of an evaporating BH by taking into account the discrete structure of the area operator eigenvalues in LQG. An edge with spin representation j of $SU(2)$ carries an area of eigenvalue:

$$A_j = 8\pi\gamma\sqrt{j(j+1)}, \quad (9)$$

where j is, again, a half-integer. A BH surface punctured by N edges therefore exhibits, as explained previously, a spectrum given by:

$$A_j = 8\pi\gamma \sum_{n=1}^N \sqrt{j_n(j_n+1)}, \quad (10)$$

where the sum is carried out over all intersections of the edges with the isolated horizon. As the area spectrum is discrete, BHs can only make discontinuous jumps, and the evaporation spectrum will inevitably be modified.

In [38], a Monte Carlo simulation was carried out to investigate to what extent the associated line structure can be discriminated from the usual continuous (envelope of the) spectrum. The algorithm was based on an improved version of the method given in [39], enhanced by an efficient numeration scheme based on a breadth-first search. The probability for the transition from a BH state to another is expressed as the exponential of the entropy difference, weighted by the greybody factor. As the optical limit was not satisfactory to derive accurate results, the full greybody factor obtained by solving the wave equation in the (classical) Schwarzschild background was used. The simulation was started at $200 A_{Pl}$, where A_{Pl} is the Planck area.

At each step n of the simulation, starting from a BH mass M_n , a new mass M_{n+1} is randomly determined within the available spectrum, according to the probability law previously given. A particle

type is then randomly selected from the standard model, according to the weighted number of internal degrees of freedom (and among those with a mass smaller than ΔM). The available energy $M_n - M_{n+1}$ is assigned to this particle, and the process is repeated. The analysis presented in the following was carried out considering only the emitted photons, that is approximately 1.5% of the emitted quanta. This choice is motivated by the fact that they keep their initial energy (quarks and gluons lead to jets), and they are easy to detect (neutrinos are not), stable (muons or tau leptons do decay) and unaffected by magnetic fields (electrons are).

The simulation was repeated many times to account for different possible realizations of the process. As expected, the time-integrated spectrum exhibits lines that are not present in the standard Hawking spectrum. The time integrated differential Hawking spectrum scales as E^{-3} , where E is the energy of the emitted photons. In this case, it becomes a truncated power-law as the available energy is limited. To test to what extent the LQG spectrum can be distinguished from a standard Hawking spectrum, a Kolmogorov–Smirnov (K-S) test was implemented. The K-S statistics measures the distance between the cumulative distribution functions of the considered distributions and can be used for a systematic study of discrimination capabilities.

Figure 1 shows the number of evaporating BHs, seen in their final stages, that would be required to discriminate at a given confidence level between the Hawking spectrum and the LQG spectrum, depending on the experimental uncertainty of the measure of the energy of the detected photons. This latter parameter is mandatory. If the resolution were infinite, a single photon could nearly allow one to discriminate, but this is obviously never the case. The results are theoretically appealing, but experimentally challenging.

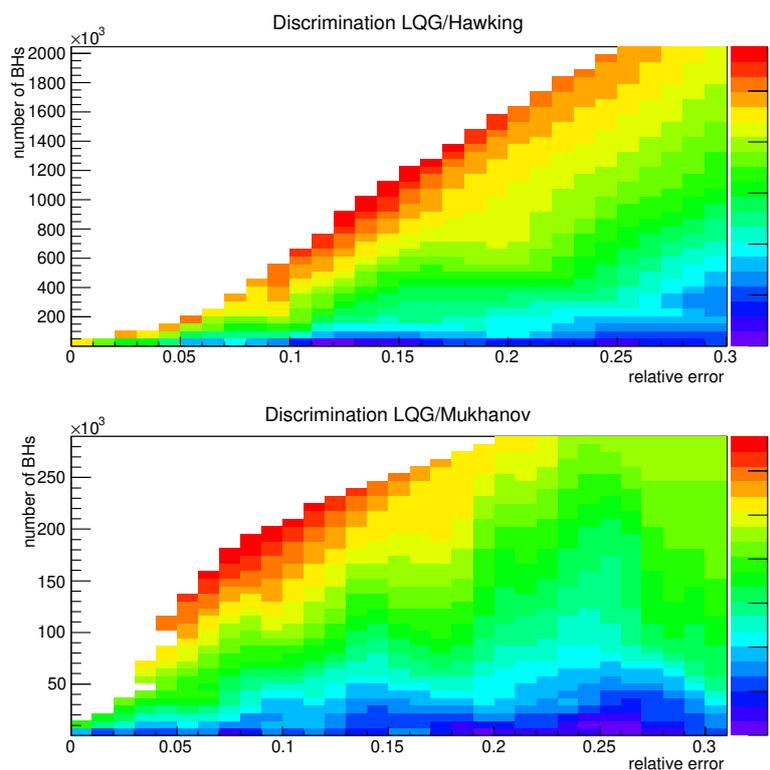


Figure 1. Number of BHs that would have to be observed as a function of the relative error on the energy measurement for different confidence levels (the color scale corresponds to the number of standard deviations). Upper plot: discrimination between loop quantum gravity (LQG) and the Hawking spectrum. Lower plot: discrimination between LQG and the Mukhanov–Bekenstein hypothesis [40]. From [38].

Another interesting feature is the following. The end of the evaporation in the LQG framework consists of the emission of a few particles, whose energies are given by the mass difference between BH states. In the usual Hawking view, the situation is very different. The evaporation is expected to stop somehow slowly (when compared to the previous stages). Because the energy available inevitably becomes, at some point, smaller than it should be (in the sense that M becomes smaller than the associated temperature $1/(8\pi M)$), the process slows down and the energy of the emitted particles decreases. In [38], it was shown that this might be used as another discrimination tool between models.

It could also be that a periodicity with broader peaks does appear in the emitted spectrum, due to the “large scale” structure of the area spectrum. This has been discussed in [39]. In that case, the Hawking/LQG spectra could also be discriminated for higher mass black holes [38]. This possibility is however extremely unlikely, and we will not discuss it further, as a damping in the pseudo-periodicity is expected to take place [41–43].

This analysis was pushed further in [44], where recent results are accounted for. The fundamental excitations are now better understood as living on the horizon and as being elements of the Hilbert space of a $SU(2)$ Chern–Simons theory [45,46]. The quantization of such a Chern–Simons theory with a compact gauge group is well defined, and the kinematical characteristics of a quantum black hole become quite clear [47–49]. The role of the Barbero–Immirzi parameter γ was studied in detail, and recovering the Bekenstein–Hawking entropy has been considered as a way to fix its value. It is however the coupling constant with a topological term in the action of gravity, with no consequence on the classical equations of motion. The strong dependence of the entropy calculation on γ therefore remains controversial. Much progress has been recently made [50–54]. The canonical ensemble formulation of the entropy making use of a quasi-local description shed a new light on the subject. The semi-classical thermodynamical properties can actually be recovered for any value of γ if one assumes a non-trivial chemical potential conjugate to the number of horizon punctures. A possible fundamental explanation to the exponential degeneracy would be to consider the area degeneracy as an analytic function of γ and to make an analytical continuation from real γ to complex γ . This suggests that the quantum gravitational theory, defined in terms of self-dual variables, could account for the holographic degeneracy of the area spectrum of the BH horizon.

Two models of black holes were studied by a full MC simulation in [44]. The first is based on the naive microcanonical view. It takes into account only the quantum geometry excitations, leading to [55]:

$$S = \frac{\gamma_0}{\gamma} \frac{A}{4} + o(\log(A)), \quad (11)$$

where γ_0 is of order one. Then, holographic black holes, where one uses the matter degeneracy suggested by quantum field theory with a cut-off at the vicinity of the horizon (that is, an exponential growth of vacuum entanglement in terms of the BH area), were considered. The entropy becomes:

$$S = \frac{A}{4} + \sqrt{\frac{\pi A}{6\gamma}} + o(\sqrt{A}). \quad (12)$$

The simulation has been performed with 10^7 evaporating black holes. Figure 2 shows the results for different values of the Barbero–Immirzi parameter γ . This γ dependence interestingly shows up even though the leading order term of the black hole entropy, which mainly governs the transitions during the evaporation process, does not depend on γ . This phenomenon is fully quantum gravitational in nature and is both due to the fact that γ enters in the discretization of the area spectrum and shows up in the sub-leading corrections to the entropy. The effects of a detector finite energy resolution are shown in Figure 3.

This shows that the Hawking spectrum of a LQG BH has two distinct parts: a nearly continuous background corresponding to the semi-classical stages of the evaporation and a series of discrete peaks associated with the deep quantum structure. Interestingly, γ has an effect on both parts and becomes

somehow measurable. In all cases, there are significant differences with the usual Hawking picture in the last stages.

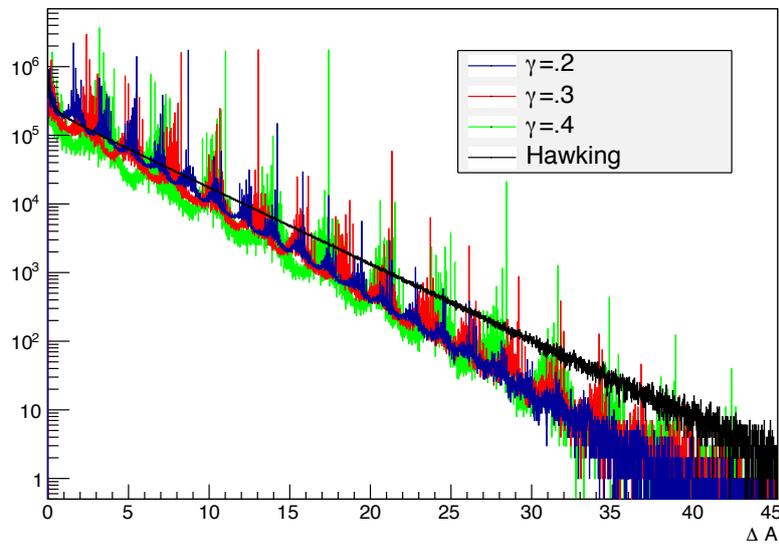


Figure 2. Spectrum of a holographic black hole for different values of γ as a function of ΔA . From [44].

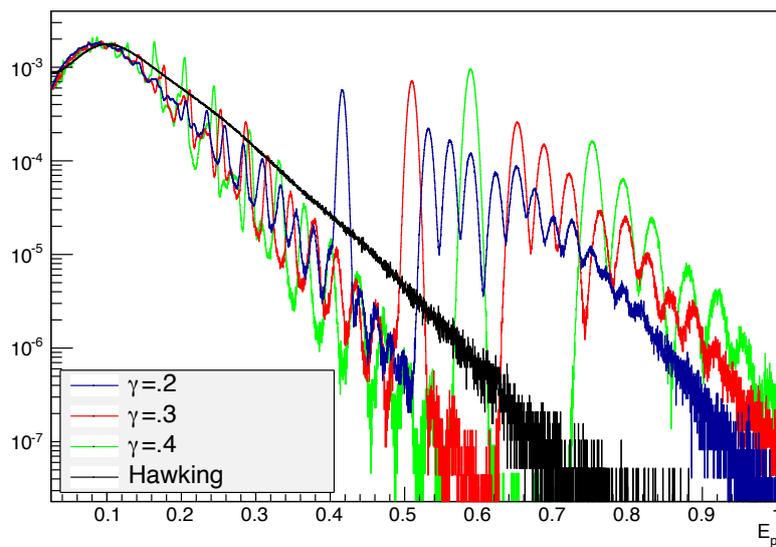


Figure 3. γ dependence of the integrated spectrum, as function of the energy of the emitted particle, in the holographic model, with a detector energy resolution of 5%. From [44].

3.2. Greybody Factors

When dealing with evaporating black holes, a key element is the greybody factor; closely related to the absorption cross-section. The Hawking effect is approximated by a blackbody spectrum at temperature $T_H = 1/(8\pi M)$ with M the mass of the BH. However, the emitted particles have to cross a (gravitational and centrifugal) potential barrier before escaping to infinity. This induces a slight modification of the spectrum, captured by the cross-section σ . The spectrum reads as:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T_H}} \pm 1} \sigma(M, s, \omega) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \tag{13}$$

with s the particle spin, ω its energy and k its momentum. The cross-section is, in general, given by:

$$\sigma(\omega)_s = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2j+1)\pi}{\omega^2} |A_{l,s}|^2, \tag{14}$$

where $A_{l,s}$ is the transmission coefficient of the mode with angular momentum l and $j = l + s$ is the total angular momentum. It has been shown, in many different frameworks, to encode much information on the chosen gravitational theory or on the underlying background spacetime. In the framework of LQG, those cross-sections have been studied only in [56].

The emphasis was put on BHs as described in [57,58], where, instead of all a priori possible closed graphs, a regular lattice with edges of lengths δ_b and δ_c was chosen. The resulting dynamical solution inside the horizon is analytically continued to the region outside the horizon. Requiring that the minimum area is the one found in the LQG area operator spectrum, the model is reduced to one free parameter δ , the so-called dimensionless polymeric parameter. The effective LQG-corrected Schwarzschild metric is then given by:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -G(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + H(r)d\Omega^2, \\ G(r) &= \frac{(r-r_+)(r-r_-)(r+r_*)^2}{r^4 + a_0^2}, \\ F(r) &= \frac{(r-r_+)(r-r_-)r^4}{(r+r_*)^2(r^4 + a_0^2)}, \\ H(r) &= r^2 + \frac{a_0^2}{r^2}, \end{aligned} \tag{15}$$

where $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$, $r_+ = 2m$ and $r_- = 2mP^2$ are the two horizons and $r_* = \sqrt{r_+r_-} = 2mP$, P being the polymeric function defined by $P = (\sqrt{1 + \epsilon^2} - 1)/(\sqrt{1 + \epsilon^2} + 1)$, with $\epsilon = \gamma\delta$, and the area parameter a_0 is given by $a_0 = A_{min}/8\pi$. The parameter m in the solution is related to the ADM mass M by $M = m(1 + P)^2$.

The case of massless scalar fields is quite easy to deal with. Since the BH is static and spherical, the field can be written as $\Phi(r, \theta, \phi, t) = R(r)S(\theta)e^{i(\omega t + m\phi)}$ and the generalized Klein-Gordon equation is:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \Phi) = 0, \tag{16}$$

Leading the metric given in Equation (15) to the radial equation:

$$\frac{\sqrt{GF}}{H} \frac{\partial}{\partial r} \left(H\sqrt{GF} \frac{\partial R(r)}{\partial r} \right) + \left(\omega^2 - \frac{G}{H} l(l+1) \right) R(r) = 0. \tag{17}$$

Using the tortoise coordinate $dr^{*2} \equiv \frac{dr^2}{GF}$, one can impose the appropriate boundary conditions, fit the asymptotic solutions and sum over the different values of l to get the final cross-section, which is given in Figure 4.

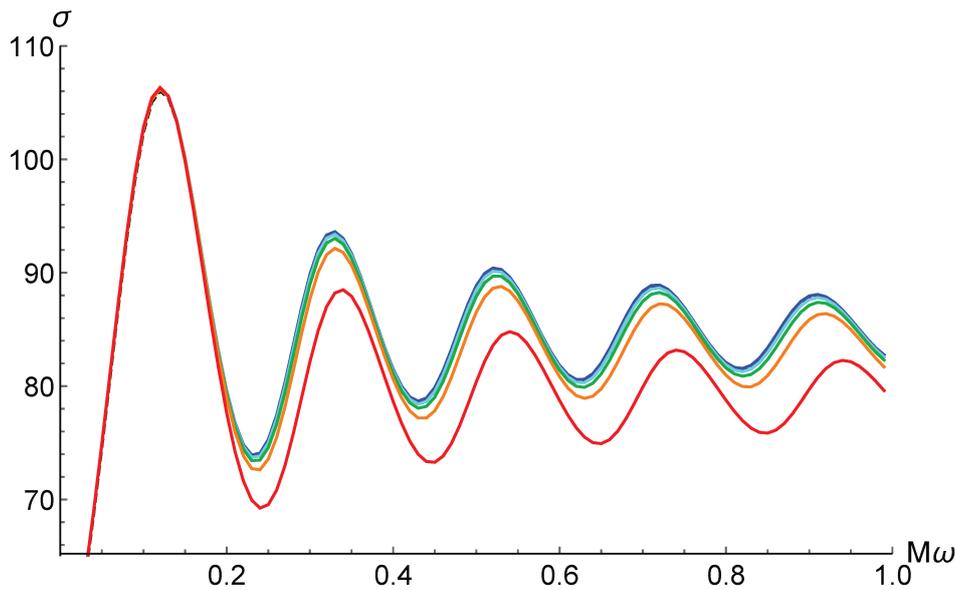


Figure 4. Emission cross-section for a scalar field with energy ω for a loop BH of mass M for different values of ϵ . From bottom to top: $\epsilon = 10^{\{-0.3, -0.6, -0.8, -1, -3\}}$. The blue line, corresponding to $\epsilon = 10^{-3}$, is superposed with the cross-section for a Schwarzschild BH. From [56].

The cross-section decreases when ϵ increases. One can also notice a shift of the pseudo-periodic oscillations toward a lower frequency (in $M\omega$). When $\epsilon < 10^{-0.8}$, it is hard to distinguish between the solutions. From the phenomenological viewpoint, it seems that taking into account the quantum corrections does not substantially influence the cross-section of a scalar field for reasonable values of ϵ (that is $\epsilon \ll 1$). The main trend is however clear, and if the actual value of ϵ happened to be unexpectedly high, it could be probed by a reduced cross-section.

The case of fermions is more complicated, and a specific derivation of the Dirac equation in the Newman–Penrose formalism had to be developed in [56].

The Dirac equation in the Newman–Penrose formalism reads:

$$(D + \epsilon - \rho)P^0 + (\delta^* + \pi - \alpha)P^1 = i\mu_*\bar{Q}^{1'}, \tag{18}$$

$$(\Delta + \mu - \gamma)P^1 + (\delta + \beta - \tau)P^0 = -i\mu_*\bar{Q}^{0'}, \tag{19}$$

$$(D + \epsilon^* - \rho^*)\bar{Q}^{0'} + (\delta + \pi^* - \alpha^*)\bar{Q}^{1'} = -i\mu_*P^1, \tag{20}$$

$$(\Delta + \mu^* - \gamma^*)\bar{Q}^{1'} + (\delta^* + \beta^* - \tau^*)\bar{Q}^{0'} = i\mu_*P^0, \tag{21}$$

Using the tetrad given in [56] and the following ansatz:

$$P^0 = \frac{e^{i(\omega t + m' \phi)}}{\sqrt{H(r)}(G(r)F(r))^{\frac{1}{8}}} R_+(r)S_+(\theta), \tag{22}$$

$$P^1 = \frac{e^{i(\omega t + m' \phi)}}{\sqrt{H(r)}(G(r)F(r))^{\frac{1}{8}}} R_-(r)S_-(\theta), \tag{23}$$

$$\bar{Q}^{0'} = -\frac{e^{i(\omega t + m' \phi)}}{\sqrt{H(r)}(G(r)F(r))^{\frac{1}{8}}} R_+(r)S_-(\theta), \tag{24}$$

$$\bar{Q}^{1'} = \frac{e^{i(\omega t + m' \phi)}}{\sqrt{H(r)}(G(r)F(r))^{\frac{1}{8}}} R_-(r)S_+(\theta), \tag{25}$$

which makes the system separable. Basically, one is led to the following equation for the R_+ component of the Dirac spinor (the equation for R_- is the conjugate):

$$\sqrt{HF}\mathcal{D}\left(\frac{\sqrt{HF}\mathcal{D}^\dagger}{\lambda - im_e\sqrt{H}}R_+\right) - (\lambda + im_e\sqrt{H})R_+ = 0, \tag{26}$$

with \mathcal{D} a radial operator:

$$\mathcal{D} = \partial_r + \left(\frac{G'}{8G} - \frac{F'}{8F}\right) + \frac{i\omega}{\sqrt{GF}}. \tag{27}$$

The separation constant λ is obtained by solving the angular equation, leading to $\lambda^2 = (l + 1)^2$ for fermions. Results are given in Figure 5. Once again, the general trend is a decrease of the cross-section when the “quantumness” increases. In addition, it was shown that the existence of a non-vanishing a_0 is the reason for the slight increase of the cross-section on the first peak. The polymerization parameter and the minimal area do have different consequences.

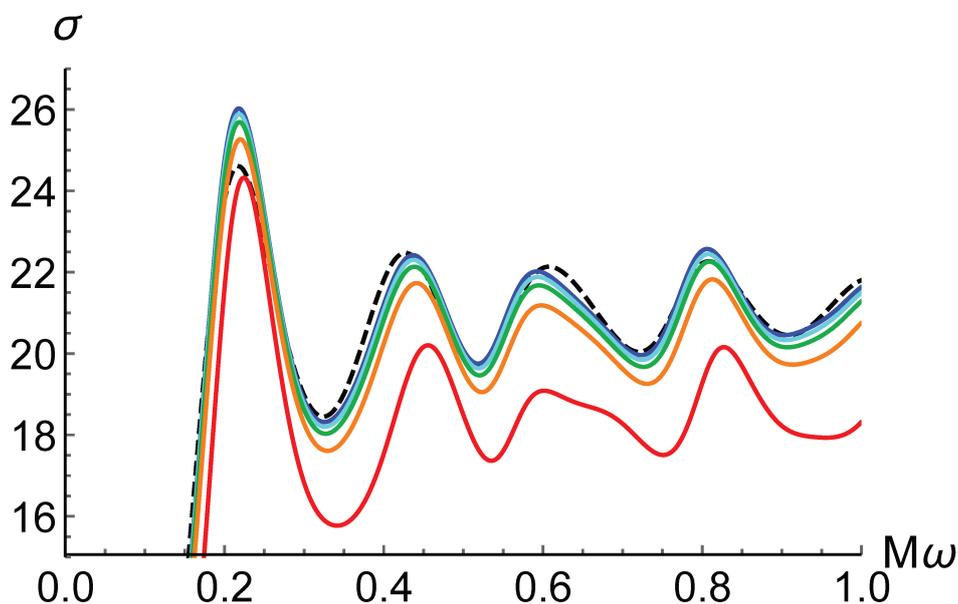


Figure 5. Emission cross-section for a fermionic field, with energy ω , for a loop BH of mass M . From bottom to top: $\epsilon = 10^{\{-0.3,-0.6,-0.8,-1,-3\}}$. The dashed dark curve corresponds to the Schwarzschild cross-section. From [56].

The considered polymerized model [57] is just a first attempt and by no means a final statement on the quantum corrected geometry around an LQG BH. The same work on greybody factors should be carried out for models like [59–61], to cite only a few. This however shows that some non-trivial features can be expected.

3.3. Local Perspective

The previous view is based on the idea that the Hawking evaporation should be considered as a global phenomenon. The BH emits a particle and undergoes a transition from one area eigenstate to another one. When the BH is large, the density of states grows exponentially and reads (we make the Newton constant dependance explicit here) as $\rho(M) \sim \exp(M\sqrt{4\beta G/3})$, which means that the spectral lines are virtually dense in frequency for high enough masses. No quantum gravity effects are therefore expected well above the Planck mass.

This view is however not that straightforward. When the BH undergoes a transition from the mass M_1 to the mass M_2 , which is extremely close to M_1 if the black hole is massive, the quantum state after the jump is—in the global perspective—completely different from the initial one. The final state corresponds to values of the spins (labeling the $SU(2)$ representations of the edges puncturing the horizon or colors of the graph) that are generically deeply different from the ones of the initial state. Assuming that the quasidegenerate distribution of states is correct requires a full reassigning of the quantum numbers for every single transition, which is in tension with a quantum gravitational origin of the evaporation process. As we will explain later, if, instead, one assumes that the evaporation is due to a change of state of an “elementary area cell”, there is no reason for all of the other surfaces paving the horizon to change simultaneously their quantum state (as argued, e.g., in [62]). This even raises a causality issue: how can a “far away” elementary cell know how it should change to adjust to the others?

Another view, to account for this issue, was however suggested in [63] (somehow in the line of [64]), assuming that each particle emitted is basically due to the relaxation of the BH following a change of state of a single elementary cell. This was called a local quantum gravity dynamics. This does not assume that local processes magically know the global BH quantities like temperature, entropy and mass: after the quantum jump, without any a priori knowledge of the picture, the BH relaxes through a semiclassical process consistent with the energy available. This naturally leads to a spectrum whose properties fit the Hawking description.

This hypothesis leads to phenomenological results comparable to those of [40], but with a clear foundation in the LQG framework. The key point is that the same change of area dA ($\sim A_{Pl}$) implies a relative peak separation in the spectrum dE/T , which is independent of the BH mass. Quantum gravity effects can therefore be expected to be measured for masses arbitrarily far above the Planck mass. This deeply contrasts with what was believed to be expected in initial LQG studies. The density of reachable states is no longer quasidegenerate.

The eigenvalues of the area operator given by Equation (44) are not equally spaced: only in the large- j limit does a regular line spectrum arise. It is shown in [63] that this interesting feature could allow one to distinguish between different LQG models of black holes (in particular those in the line of [28] favoring low spin values and the holographic ones [51] where higher spins could dominate).

If one calls $nA_0/2$ the area variation associated with one quantum jump, n being an integer and A_0 the basic area $\sim A_{Pl}$, the relative variation of energy of the emitted particles between emissions is $\Delta E/E \approx nA_0/(2A)$. The change in energy is therefore negligible, and the line structure should be observable if it exists: the BH mass evolution during its evaporation does not erase this feature.

The criterion for the detection of a signal coming from an evaporating primordial black hole (PBH) [65] consists of asking for a mean time Δt between two measured photons smaller than a given reference time interval Δt_0 . This allows one to estimate a maximum distance for detection of:

$$R_{max} \approx \sqrt{\frac{S\Delta t_0}{M}}. \quad (28)$$

The realistic case however corresponds to the signal emitted by a distribution of PBHs with different masses. Does the global line structure remain? It was shown that if the temperature of the universe does not change by more than 5–10% during the formation of the considered PBHs, the line structure holds.

Another issue had to be considered seriously: when the temperature of the BH is higher than the quantum chromodynamics (QCD) confinement scale, the evaporating BH also emits partons that

will fragment into hadrons. Some of those will then decay into gamma-rays, denoted as “secondary”. The secondary instantaneous spectrum reads as:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_\gamma}{dE dt} &= \sum_j \int_{Q=E}^\infty \alpha_j \Gamma_j(Q, T) \left(e^{\frac{Q}{T}} - (-1)^{2s_j} \right)^{-1} \\ &\times \frac{dg_{j\gamma}(Q, E)}{dE} dQ, \end{aligned} \tag{29}$$

where $j = 1, \dots, 6$ is the flavor, $s_j = 1/2 \forall j$, $dg(Q, E)/dE$ is the normalized differential fragmentation function (determined using the “Lund Monte Carlo” PYTHIAcode [66]), Q being the quark energy, T the temperature of the black holes, α the number of degrees of freedom, Γ the cross-section and E the photon energy. The time-integrated spectrum is then given by:

$$\frac{dN_\gamma}{dE} = \int_{M_i}^{M_f} \frac{d^2 N_\gamma}{dE dt} \frac{dt}{dM} dM. \tag{30}$$

Those secondary photons will obviously not exhibit the line structure of quantum gravitational origin. The numerical simulation performed in [63] however shows that, quite surprisingly, those electromagnetic quanta are not numerous enough to wash out the primary signal and its line structure, which could indeed still be measured. The amplitude of the secondary component is indeed comparable to the amplitude of the primary one.

If this local view for the evaporation of black holes is correct, this means that this should lead to a line structure in the spectrum, even arbitrarily far away from the Planck mass.

4. Bouncing Black Holes

4.1. The Model

Recently, the possibility that black holes could actually be bouncing objects has been revived. In its current “LQG-compatible” version, the model was first introduced in [67], and its consequences were studied in [68]. It was then refined in [69,70]. Basically, the idea is that what happens to the Universe in LQC, that is a bounce, should also happen to black holes. As the contracting Friedmann solution is connected to the expanding one by a quantum tunneling, the classical black hole solution is expected to be glued to the white hole one by quantum gravitational effects. This is in line with other works based on different assumptions, e.g., [71,72]. The process takes a time proportional to M^2 , whereas the Hawking process requires a time of order M^3 . Black holes would therefore bounce before they evaporate, and the Hawking radiation would be seen as a kind of a dissipative correction.

The important result of [69] is that a metric exists for a bouncing black-to-white hole. It is a solution to the Einstein equations outside a finite region and beyond a finite time duration. This means that it is possible to have a bounce from a black hole into a white hole without any spacetime modification at a large radius. The quantum region extends slightly outside the Schwarzschild radius and can have a short duration. The associated Penrose diagram is shown in Figure 6.

Because of the gravitational redshift, the bounce is seen as nearly “frozen” by a distant observer, but it is extremely fast for a clock co-mobile with the collapsing null shell. In this sense, a BH is a star that is collapsing and bouncing, seen at very slow motion from the exterior.

The key-point is to assume that classicality might not be determined by, e.g., the Kretschmann invariant ($\mathcal{R}^2 = R^{abcd} R_{abcd}$), but by:

$$q = l_p^{2-b} \mathcal{R} \tau^b, \tag{31}$$

with b of order unity and τ the (asymptotic) proper time. In this expression, units have been reinserted for clarity. This opens the door to a possible cumulative effect like in the decay of an unstable nucleus.

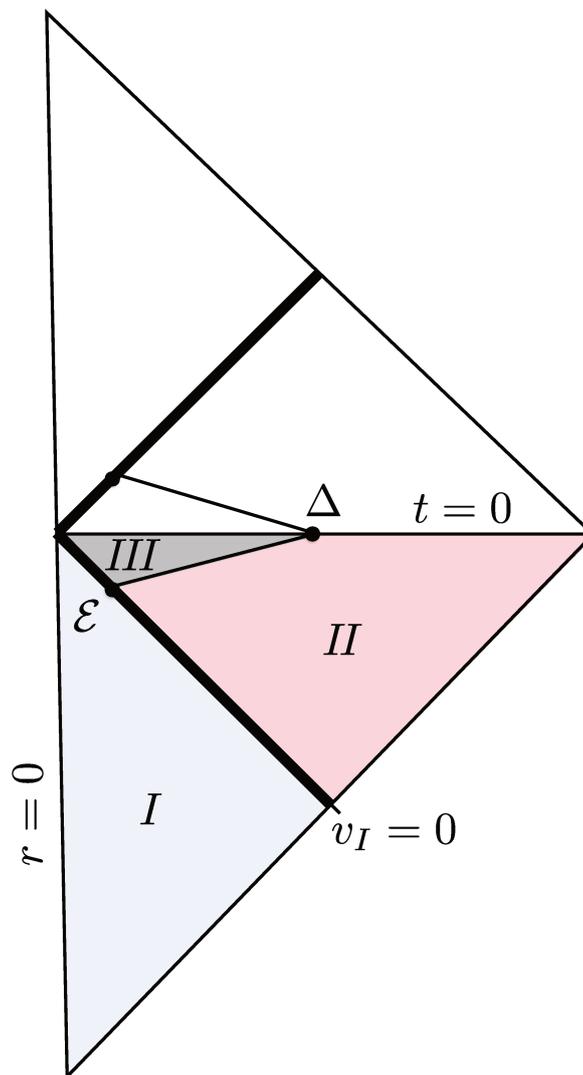


Figure 6. Causal diagram for a bouncing black hole, from [69]. (I) is flat; (II) is Schwarzschild; and (III) is the “quantum gravity” region.

The metric is entirely determined by two functions of u and v ,

$$ds^2 = -F(u, v)dudv + r^2(u, v)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \tag{32}$$

whose explicit expression has been calculated in [69]. Interestingly, this also means that strong quantum gravity effects may appear outside the event horizon (which becomes, in this context, a trapping horizon) at $R = (7/6)R_S$ [73]. As far as this study is concerned, the key-point is that the bouncing time is given by $\tau = 4kM^2$ (although this expression is hard to recover from the full theory [74]). The k parameter has a lower bound ($k > 0.05$) and will be varied in the next sections.

4.2. Individual Events and Fast Radio Bursts

The question of the detectability of those bouncing black holes naturally arises. At this stage, a detailed model for the emission from the white hole is missing. Two hypothesis can however reasonably be made.

The first one is simply based on dimensional analysis. The hole size is the only scale of the problem. It is therefore expected that the wavelength of the emitted radiation is of the order of the

bouncing BH diameter. This makes clear sense, and this is in agreement with what happens, e.g., during the Hawking evaporation. The associated signal is called the low-energy component.

The second hypothesis relies on the symmetry of the process (this might not be completely true [75], but this does not change the argument). What goes out of the white hole is what went in the black hole. In this model, the bouncing star is formed by a collapsing null shell. The energy of the emitted radiation should therefore be the same as the one of the incoming photons. If we consider PBHs formed in the early universe by the collapse of over-densities, the correspondence between the mass and the time is known. Time is also in one-to-one correspondence with the temperature of the Universe. Therefore, for a given BH mass, one can calculate the energy of the emitted radiation, called the high-energy component.

The idea of explaining fast radio bursts (FRBs) by bouncing black holes was suggested in [76]. Basically, FRBs are intense radio signals with a very brief duration. Events were, among others, observed at the Parkes radio telescope [77–79] and by the Arecibo Observatory [80]. Could they be explained by (the low-energy component of) bouncing black holes?

As mentioned before, the bouncing time can be estimated to be of the order of:

$$\tau = 4k M^2. \tag{33}$$

For the phenomenology of FRBs, one sets the parameter to its lowest possible value: $k = 0.05$. PBHs with an initial mass around:

$$M_{t_H} = \sqrt{\frac{t_H}{4k}} \sim 10^{26} \text{ g}, \tag{34}$$

where t_H is the Hubble time, would therefore be expected to explode today. One can notice that, naturally, this mass is much higher than $M_\star \sim 10^{15} \text{ g}$, corresponding to black holes that would require a Hubble time to evaporate by the Hawking process. In the case of the low energy channel of bouncing BH, the emitted radiation wavelength should be of the order of 200 microns, three orders of magnitude below the measured 20 cm of FRBs.

This apparent discrepancy has been addressed and solved in [81]. The key idea lies in the fact that if the black-to-white hole transition is to be understood as a tunneling process, the lifetime of a BH should be considered as a random variable. The probability for a black hole not to have bounced after a time t is given by:

$$P(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}. \tag{35}$$

Let us model the shape of the signal emitted by a single black hole by a simple Gaussian function of width σ_E . The full signal due to a local distribution of bouncing black holes is given by:

$$\frac{dN_\gamma}{dE} = \int_{M_{pl}}^\infty A e^{-\frac{(E-E_0)^2}{2\sigma_E^2}} \cdot \frac{dN}{dM}(M) \cdot \frac{1}{4kM^2} e^{-\frac{t_H}{4kM^2}}. \tag{36}$$

The key-point is that the mean energy of the detected signal is not necessarily the naively expected one, that is may not be $E \sim 1/(4M_{t_H})$ where M_{t_H} is such that $t_H = 4kM_{t_H}^2$ (this corresponds to BHs having a characteristic lifetime of the order of the age of the Universe, leading to the emitted wavelength three orders of magnitude too small to account for FRBs). If the mass spectrum of PBHs is however peaked around a mass M_0 ,

$$\frac{dN}{dM} \propto e^{-\frac{(M-M_0)^2}{2\sigma_M^2}}, \tag{37}$$

which can be different than M_{t_H} , the mean emitted energy will be around $1/(4M_0)$, which can differ from $1/(4M_{t_H})$. This happens because of the distributional nature of the bouncing time.

In Figure 7, the emitted photon flux is shown for different values of the mean mass M_0 of the mass spectrum: M_{t_H} , $10M_{t_H}$, $100M_{t_H}$ and $1000M_{t_H}$. This shows that the energy of the radiation does depend on this value, even if the parameters of the model are otherwise fixed. Since a given mean lifetime $\tau = 4 \text{ km}^2$ does not imply a fixed expected energy, the three orders of magnitudes needed to match the measured energy of FRBs can be accounted for with a mass $M_0 = 1000M_{t_H}$, which corresponds to the left curve in Figure 7.

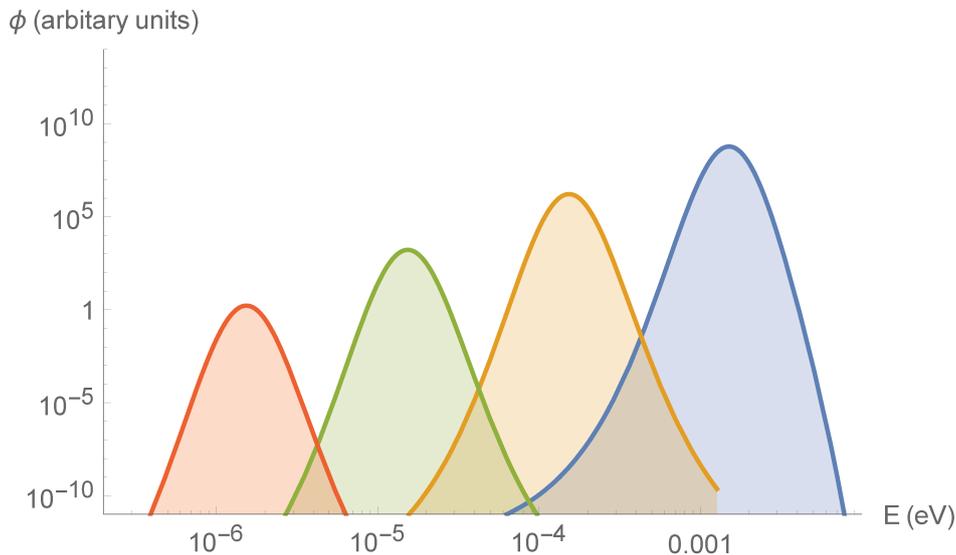


Figure 7. Electromagnetic flux emitted by bouncing BHs for a mean mass M_0 of (from right to left) M_{t_H} , $10M_{t_H}$, $100M_{t_H}$ and $1000M_{t_H}$, normalized such that the total mass going into primordial black holes (PBHs) is the same. From [81].

This explanation for FRBs is unquestionably exotic when compared to more conventional astrophysical interpretations (especially when considering that one “repeater” has been observed; it could however well be that there are different populations of FRBs). What makes the scenario however meaningful is that it is testable, due to a specific redshift dependence. When observing a galaxy at redshift z , the measured energy of the signal emitted by any astrophysical object (including decaying dark matter) will be $E/(1+z)$ for a rest-frame energy E . This is not the case for bouncing black holes: BHs that have bounced far away and are observed today had a shorter bouncing time and consequently a smaller mass. The energy of the emitted radiation is therefore higher, and this compensates for the redshift effect. The observed wavelength of the signal from an object at redshift z can be written as:

$$\lambda_{obs}^{BH} \sim \frac{2Gm}{c^2}(1+z) \times \sqrt{\frac{H_0^{-1}}{6k\Omega_\Lambda^{1/2}} \sinh^{-1} \left[\left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} \right)^{1/2} (z+1)^{-3/2} \right]}, \tag{38}$$

where we have reinserted the physical constants; H_0, Ω_Λ and Ω_M being respectively the Hubble rate, the cosmological constant and the matter density. This is to be contrasted with what happens for standard sources whose measured wavelength is related to the observed wavelength by:

$$\lambda_{obs}^{other} = (1+z)\lambda_{emitted}^{other}, \tag{39}$$

as shown in Figure 8.

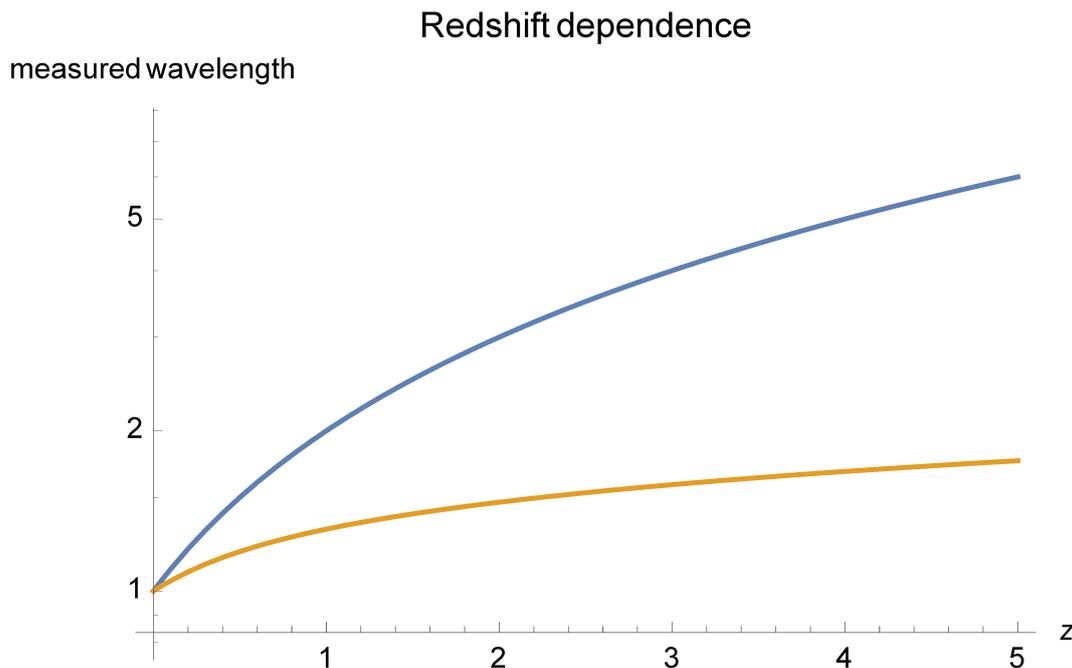


Figure 8. Measured wavelength, normalized to the rest-frame one, as a function of the redshift. The upper curve is for a conventional astrophysical signal, and the lower one is for bouncing black holes. Reproduced from [82], with the permission of AIP Publishing.

Importantly, it was also shown in [81] that even if the mass spectrum is wide, it could still be possible to explain FRBs. It could be that most bouncing BHs lead to a signal of a wavelength of 0.02 cm and that only the tail (whose existence is due to the probabilistic nature of the lifetime) of the distribution is actually detected by radio-telescopes. If the real emission peak is in the infrared band—which should naturally occur if the mass spectrum is, itself, not peaked—it could very well be that it is just unobserved today. Observatories in the infrared have time constants that are too high to allow for the measurement of fast transient phenomena, and no large survey is being carried out. In this case, a prediction of the model is that one should expect a higher flux as the energy increases.

Finally, it is worth considering the high-energy emission. The bouncing BHs then act as “redshift freezing machines” for collapsing fields, which are emitted back at the energy they had when being absorbed. However, in the meantime, the age of the surrounding Universe has grown tremendously. In simple models, PBHs form with a mass of the order of the Hubble mass at the formation time. For BH masses as considered here (around 10^{26} g), this corresponds to a temperature of the Universe around the TeV. New very high energy telescopes, like the Cherenkov Telescope Array (CTA), could detect bursts in this energy range, as suggested by this model.

The redshift dependence for this component is qualitatively the same as for the low-energy one, but for different reasons. For a BH exploding at redshift z and cosmic time t , the energy is determined by the temperature of the Universe when the formation took place. It is proportional to the inverse square root of the time, which is in turn proportional to the horizon mass, that is to the BH mass. Therefore, the emitted wavelength is proportional to the square root of the mass of the BH. This leads to an observed wavelength:

$$\lambda_{obs} \propto (1+z) \left(\sinh^{-1} \left[\left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} \right)^{\frac{1}{2}} (z+1)^{-\frac{3}{2}} \right] \right)^{\frac{1}{4}}. \tag{40}$$

As previously stated, this is a flatter dependance than for astrophysical effects.

It is meaningful to evaluate the maximal distance at which one could observe a bouncing black hole. This question was addressed in [83], allowing the k parameter, which determines the bouncing time, to vary. The minimum value of k is such that the quantum effects have enough time to make the bounce happen, and the maximum is such that the bouncing time remains smaller than the Hawking time. The study was carried out taking into account the size of the detector (and its detection efficiency), the absorption during the propagation over cosmological distances and the number of measured photons required for the detection to be statistically significant. As k increases, the global trend is a decrease of the maximum distance at which the bouncing BH can be observed. This comes both from the fact that BHs are lighter for higher values of k (for a given bouncing time) and from the fact that they emit higher energy (and therefore fewer) particles. However, quite subtle effects also appear. For example, the distance can slightly decrease above the threshold of emission of a new stable particle (leaving less energy available for the considered photons), whereas it can increase when new particles decaying into gamma-rays are produced. For k varying between 0.05 and 10^{22} , the maximum detectable distance varies from the Hubble scale to 10^{19} m for the low-energy component, as shown in Figure 9, and from 10^{24} – 10^{16} m for the high energy component.

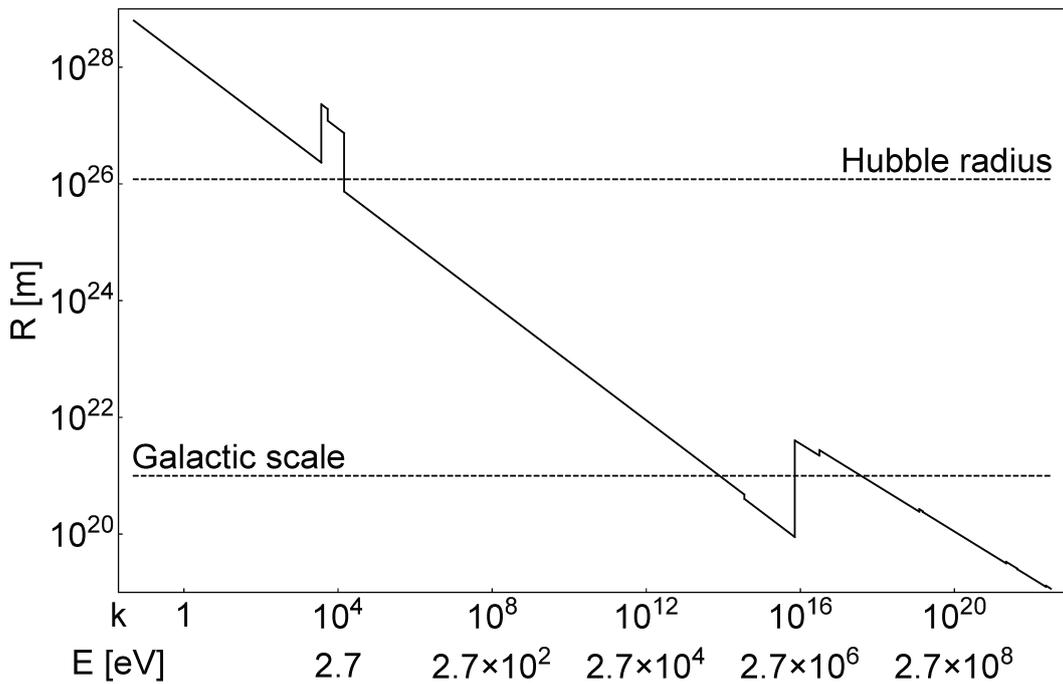


Figure 9. Maximum distance at which a single bouncing BH can be observed through its low-energy component, as a function of the k parameter, from [83] (Copyright IOP Publishing. Reproduced with permission. All rights reserved.).

4.3. Background

It is also important to consider a possible background emission. In this case, one does not look for a single event, but from the diffuse emission due to a distribution of BHs. The number of photons detected per time unit, surface unit and energy unit is given by:

$$\frac{dN_{mes}}{dEdtdS} = \int \Phi_{ind}((1+z)E, R) \cdot n(R) \cdot A(E) \cdot f(E, R) dR, \tag{41}$$

where $\Phi_{ind}(E, R)$ is the flux emitted by a single BH at distance R and at energy E , $n(R)$ is the number of BHs bouncing at distance R per unit time and volume, $A(E)$ is the acceptance of the detector convoluted with its efficiency and $f(E, R)$ is the absorption. The $n(R)$ term does depend on the shape of the initial mass spectrum of PBHs, which is unknown. It has however been checked that varying this shape has no significant impact on the results.

The study was carried out for both the low-energy and the high-energy components. In this latter case, it is important to take into account the hadronization of emitted quarks that will produce hadrons potentially decaying into gamma-rays. This was modeled using the PYTHIA Monte Carlo program [66]. Quite surprisingly, the result is that, due to a kind of redshift-compensation effect, the integrated signal is very similar to the single event one. It basically appears as a distorted Gaussian function [83].

This also raised the question about whether it could be possible to explain the gamma-ray excess coming from the galactic center, as observed by the Fermi satellite. This has been reported in [84–86] and even observed at higher galactic latitudes [86,87]. Once again, many astrophysical interpretations have been suggested. Millisecond pulsars are probably the most convincing hypothesis (see, e.g., [88]); it is however not yet fully satisfactory [87], and there is room for new physics. Interestingly, it was demonstrated in [82] that bouncing BHs can indeed explain the Fermi excess if the k parameter is chosen at its higher possible value. It is worth noticing that the values required to explain either the FRBs or the GeV gamma-ray excess are not “random”, but either the smallest or the highest possible ones.

In [82], the secondary spectrum, mostly due to the decay of neutral pions, was shown to be well approximated by:

$$f(E, \epsilon) = \frac{a\epsilon^b}{\pi\gamma} \left[\frac{\gamma^2}{(\epsilon - \epsilon_0)^2 + \gamma^2} \right] e^{-\left(\frac{\epsilon}{E}\right)^3}, \tag{42}$$

E being the quark energy, ϵ the photon energy, $a = 50.7$, $b = 0.847$, $\gamma = 0.0876$ and $\epsilon_0 = 0.0418$ (the energies being in GeV), whereas the direct emission due to the low-energy component (the high-energy component cannot be smaller than a TeV and is not relevant for this study) is given by:

$$g(E, \epsilon) = Ae^{-\frac{(\epsilon-E)^2}{2\sigma^2}} + 3N\sqrt{2\pi}A\sigma f(E, \epsilon), \tag{43}$$

where N is the number of flavors of quarks with $m < E$.

The best fit is shown in Figure 10. The fact that the bouncing BH signal can account for the data is in itself non-trivial. It is, for example, absolutely impossible to reproduce the measurements with evaporating BHs. In addition, the most important result here lies in the amplitude of the little bump on the left of the plot. It is associated with the secondary emission (that is the one coming from the hadronization and subsequent decay of emitted partons). As the number of emitted quarks and gluons is much higher than the number of directly emitted photons (responsible for the main bump), it could have been (wrongly) expected that this indirect emission conflicts with the background displayed as the horizontal green dashed line on the plot. Due to the subtle energy distribution in the jets, this is not the case, and at this stage, the explanation by bouncing BHs does work satisfactorily.

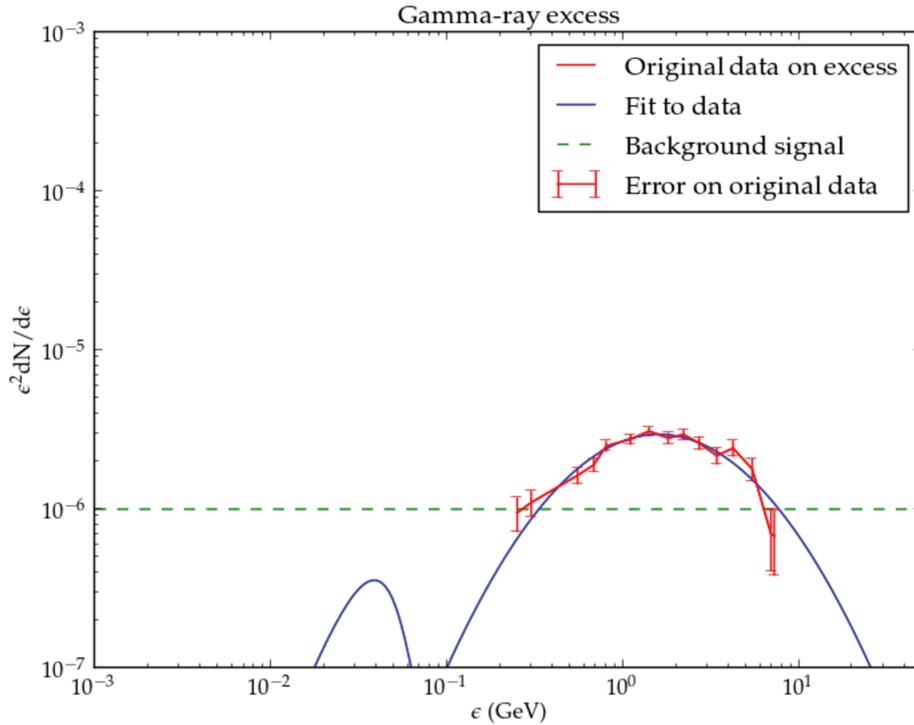


Figure 10. Fit to the Fermi excess with bouncing black holes. Reprinted from [82].

5. Dark Matter

The idea that if bouncing BHs are a substantial part of dark matter (DM), this might have an effect on galaxy clustering was introduced in [89]. Several possible constraints were considered.

Only recently, however, was a new scenario for the evolution of black holes proposed [90], with possible important consequences for DM, but in a different way than what was suggested in [91,92]. In this model, a black hole first evaporates, according to the usual Hawking process. The whole process preserves unitarity. When it becomes Planckian, the tunneling probability to turn into a white hole, estimated to be of the order of:

$$P \sim e^{-\frac{M_i^2}{M_p^2}}, \tag{44}$$

becomes large. Old black holes have a large interior volume [93]: even if the Schwarzschild radius is fixed, the “physical” volume available inside does increase with time. This remains true for the formed white hole, although its mass is small (the volume is of the order of M_i^4 where M_i is the initial mass). The white hole lifetime is also of the order of M_i^4 . This scenario meets the conditions required to solve the information paradox.

It can be seen as a “less radical” proposal than the one presented in the previous sections. There is still a black-to-white hole transition, in agreement with the arguments given before, but instead of the very small bouncing time M_i^2 , it takes the time suggested by the usual instanton solution. This is probably a more conservative and natural scenario.

In addition, following [91], it was suggested that dark matter could be formed by such white hole relics [94]. In [95], the central argument is pushed forward. For those objects to be still present in the contemporary Universe, one needs their lifetime to be larger than the Hubble time t_H , that is:

$$M_i^4 > t_H. \tag{45}$$

On the other hand, for those relics to be formed by evaporated black holes, one needs:

$$M_i^3 < t_H, \tag{46}$$

where M_i^3 is the Hawking evaporation time. This leads to:

$$10^{10} \text{ g} < M_i < 10^{15} \text{ g}. \tag{47}$$

It is argued in [95] that this corresponds to typical Hubble masses at reheating, making the scenario convincing.

It should be emphasized that quite a few models leading to stable relics at the end of the Hawking evaporation process have been proposed so far, relying on many different assumptions (see [37,96–108] to mention only a few historical references among many others). In those models, the relics are completely stable. This makes the situation easier: the only constraint is then that initial primordial black holes did evaporate within the Hubble time, but there is no lower bound on M_i . From this point of view, the new model [95] is more challenging than the usual pictures, which does not make it wrong.

The key-point is of course to find a way to produce enough primordial black holes so that the white hole relics account for dark matter, without relying on too exotic physics, as this is one of the motivations for this new scenario. As the CMB-measured amplitude and slope of the primordial power spectrum would lead to a vanishingly small number of primordial black holes, an extra input is obviously needed. A possibility would be to follow [109] and use Starobinsky’s broken scale invariance spectrum [110]. The main idea is that power is increased at small scales through a step in the power spectrum.

Let us call $M_{H,e}$ the Hubble mass at the end of inflation, p^2 the ratio of the power on large scales with respect to that on small scales, δ_{min} the minimum density contrast required to form a black hole, M_{WH} the mass of the white hole, $\Omega_{WH,0}^2$ the abundance of white holes today, LW the Lambert-W function and σ_H the mass variance. One can then show that:

$$p \approx \frac{\sigma_H^{CMB}}{\delta_{min}} \sqrt{LW \left\{ \frac{8.0 \times 10^{-6}}{2\pi\Omega_{WH,0}^2} \left[\frac{M_{WH}}{M_p} \right]^2 \left[\frac{10^{15} \text{ g}}{M_{H,e}} \right]^3 \right\}}. \tag{48}$$

Requiring $\Omega_{WH,0} \approx 0.3$, $\delta_{min} \approx 0.7$ and $M_{WH} \approx M_p$ allows one to perform an explicit evaluation of p , and this fixes the parameters of the scenario assuming that the reheating temperature is high enough.

However, a major problem remains to be solved. If the white hole relics are to be made by primordial black holes with initial masses between 10^{10} g and 10^{15} g, one must consider the severe constraints associated with nucleosynthesis. The D/H , Li^6/Li^7 and He^3/D ratios must not be distorted by the evaporation of black holes (assumed to be the “seeds” of the white hole relics) beyond observed values [65]. This forbids the easy formation of enough relics, unless a way to evade those constraints is found. This is the major challenge for future studies (which is fortunately easier to deal with when extended mass functions are taken into account [111]).

Another possibility was imagined in [112]. Here, the objects are assumed to be formed before the bounce in a cosmological model where the Big Bang singularity is replaced by a tunneling between the classically contracting and the classically expanding Friedmann solutions, as suggested by loop quantum cosmology [113]. This is in principle consistent, and other theories of quantum gravity might lead to this new paradigm. This evades the previously mentioned problem. However, in a different setting, the possibility was already considered in [114–116].

Very interestingly, the proposal is also related to the idea that the entropy and arrow of time could be perspectival [117]. This approach sheds new light on the old paradox of the apparently low entropy of the initial state of the Universe: the Universe is not anymore homogeneous at the bounce, and our observed entropy is determined by the fact that we cannot access the huge volume inside the abundant white hole remnants. It might seem puzzling that the authors explain the “un-naturally” low entropy

of the Universe by arguing that the probability for us to be where we are (outside of a relic) is only one part in 10^{120} . It is however meaningful in the sense that a special position is much more anthropically “acceptable” than a special state.

More importantly, it seems hard for the dark matter remnants to be already present at the bounce time. The current density of the universe is $\rho_0 \sim 10^{-30} \text{ g cm}^{-3}$. If we assume the usual cosmological evolution, we had at least 60 e-folds of inflation followed by approximately 60 e-folds of radiation, matter and cosmological constant-dominated expansion. This means that the scale factor has increased by at least a factor 10^{52} since the bounce. The density of remnants should then be at least $10^{156} \times 10^{-30} = 10^{126} \text{ g.cm}^{-3}$ at the bounce, that is $10^{33} \rho_{Pl}$. Leaving apart the fact that this value is probably unphysical (the bounce would have happened before when thinking in the positive time direction), this is anyway incompatible with Planck mass and Planck size remnants (which cannot lead to a density higher than the Planck density without merging).

This could be evaded by assuming that no inflation took place, but this would require a quite exotic cosmological evolution. A nice feature of bouncing models is precisely to be compatible with inflation [7,8,118–120]. However, a possible way out could be to focus on a matter bounce (as white hole remnants would probably behave as pressure-less matter from the viewpoint of cosmological evolution) [121]. This requires a much lower-than-Planckian density at the bounce time.

The new scenario put forward in [90] constitutes an exciting new paradigm in black hole physics. It would be very nice to link it with the dark matter mystery, but quite a great deal remains to be understood.

6. Gravitational Waves

Gravitational waves from merging black holes are now observed for real by interferometers [122–126]. This opens a new era with important interesting constraints on black hole physics and modified gravity.

6.1. Spin in Gravitational Wave Observations

For a rotating black hole, the Bekenstein–Hawking entropy is given by:

$$S(M, j) = 2\pi M^2 (1 + \sqrt{1 - j^2}), \quad (49)$$

where $j = J/M^2$ is the dimensionless spin parameter. It follows from Equation (49) that, at fixed mass M , BHs with larger spin have a smaller entropy. If one assumes that PBHs were indeed formed in the early Universe, following a microcanonical ensemble statistics, and if we make a statistical interpretation of the BH entropy in terms of microstates, the previous statement indicates that there are fewer microstates with large spin than with small spin. In this context, the existence of a population of black holes with nearly vanishing spins is naturally predicted [127]. This is to be contrasted with astrophysical black holes, formed by the collapse of rotating stars, which are expected to be generically rotating quite fast.

If gravitational wave interferometers were to observe a specific distribution of events with very small spins, this would both be evidence for the primordial origin of the considered BHs (at microcanonical equilibrium) and for the physical relevance of the Hawking–Bekenstein entropy formula.

To go in this direction, one would need to consider the entropic factor $e^{S(m,j)}$ as the weighting of a spin distribution of PBHs determined by the physical process responsible for their creation. This distribution is however not known at this time (which means in no way that it can be approximated by a flat distribution).

6.2. Quasinormal Modes

In the current LIGO/Virgo era, it would be highly desirable to make clear predictions about gravitational waves in LQG. The possibility of detecting gravitational waves emitted by BHs before the bounce was mentioned in [128]. This could be extremely promising for opening a new window on the pre-bounce Universe thanks to the non-trivial behavior of the luminosity distance in the contracting

phase, leading to a natural amplification of the signal (if the Universe is, e.g., matter dominated). This, however, does not address the question of the specific modification to the gravitational wave shape induced by LQG corrections.

The best way to face this difficult question is probably to focus first on quasinormal modes (QNMs). They correspond to the ringdown phase between the transient and the exponential or power law tail in a BH merging. The radial part of the perturbed metric is described by:

$$\Psi = Ae^{-i\omega t} = Ae^{-i(\omega_R + i\omega_I)t}, \quad (50)$$

where ω_R characterizes the oscillations and ω_I the characteristic damping timescale τ :

$$\tau = \frac{1}{\omega_I}.$$

Very importantly, the frequencies of the QNMs form a countable set of discrete frequencies [129]. There are actually two types of perturbations (axial and polar) in the linearized Einstein field equations described by the Regge–Wheeler and Zerilli equations. In GR, those equations are isospectral, but it is not clear whether this fundamental property still holds in LQG.

The Regge–Wheeler equation is very close to the one used to calculate greybody factors (although the question is different: the problem of QNM is to study the relaxation of the BH itself, not the way it scatters a quantum field). It reads for a Schwarzschild BH:

$$V_\ell^{\text{axial}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right], \quad (51)$$

for a mode of angular momentum ℓ . The know-how recently gained on greybody factors could therefore be usefully recycled for this purpose. It should however be clear that the technique is different (one does not search for the solution of an equation for all frequencies, but for the values of the frequencies allowing for a solution with different boundary conditions) and that only models leading to substantial metric modification around the horizon might lead to observational effects. This is one of the most promising ways to relate LQG corrections to BHs with observations.

7. Conclusions

The description of black holes in loop quantum gravity has much improved in the last years. A globally consistent picture is now emerging. In this article, we have reviewed its possible experimental consequences.

The main results are the following:

- First, the Hawking evaporation spectrum should be modified in its last stages. We have shown that it could not only allow for the observation of a clear signature of LQG effects, but also, in principle, to the discrimination between different LQG models. In particular, holographic models lead to specific features. The value of the Barbero–Immirzi parameter could even be measured.
- Second, attempts to calculate the greybody factors were presented. They should keep a subtle footprint of the polymerization of space and of the existence of a non-vanishing minimum area gap.
- Third, it was emphasized that a local quantum gravity perspective would lead to an observable modification to the Hawking spectrum (line structure), even arbitrarily far away from the Planck mass. This prediction is not washed out by the secondary emission from the BH.
- Fourth, a model with BHs bouncing into white holes with a characteristic time proportional to M^2 was presented and shown to have astrophysical consequences. It can be fine-tuned to explain either fast radio bursts or the Fermi gamma-ray excess, depending on the values of the parameters. The possible associated background was also studied. A specific redshift dependence allows one to discriminate the model from other possible explanations.

- Fifth, the possibility of having a large amount of dark matter in the form of white holes appearing after quantum gravitational tunneling is presented together with possible weaknesses and future improvements of the model.
- Sixth, observable effects on gravitational wave detections associated with the BHs' spin distribution expected are presented.
- Seventh, promising prospects for quasinormal modes are outlined.

It could be that black holes will play a major role in making quantum gravity become an experimental science.

Author Contributions: Conceptualization, A.B. and K.M.; Methodology, A.B., K.M. and F.M.; Software, K.M. and F.M.; Validation, A.B., K.M. and F.M.; Formal Analysis, A.B., K.M. and F.M.; Investigation, A.B., K.M. and F.M.; Writing—Original Draft Preparation, A.B. and K.M.; Writing—Review & Editing, A.B. and K.M.; Visualization, A.B. and K.M.; Supervision, A.B.; Project Administration, A.B.

Funding: This research was funded by CFM foundation.

Conflicts of Interest: The authors declare no conflict of interest.

References

1. Barrau, A. Testing different approaches to quantum gravity with cosmology: An overview. *C. R. Phys.* **2017**, *18*, 189–199. [[CrossRef](#)]
2. Hossenfelder, S.; Smolin, L. Phenomenological Quantum Gravity. *Phys. Can.* **2010**, *66*, 99–102.
3. Liberati, S.; Maccione, L. Quantum Gravity phenomenology: Achievements and challenges. *J. Phys. Conf. Ser.* **2011**, *314*, 012007. [[CrossRef](#)]
4. Amelino-Camelia, G. Quantum Spacetime Phenomenology. *Living Rev. Rel.* **2013**, *16*, 5. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
5. Barrau, A.; Bojowald, M.; Calcagni, G.; Grain, J.; Kagan, M. Anomaly-free cosmological perturbations in effective canonical quantum gravity. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2015**, *2015*, 051. [[CrossRef](#)]
6. Agullo, I.; Ashtekar, A.; Nelson, W. A Quantum Gravity Extension of the Inflationary Scenario. *Phys. Rev. Lett.* **2012**, *109*, 251301. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
7. Martineau, K.; Barrau, A.; Schander, S. Detailed investigation of the duration of inflation in loop quantum cosmology for a Bianchi-I universe with different inflaton potentials and initial conditions. *Phys. Rev. D* **2017**, *95*, 083507. [[CrossRef](#)]
8. Ashtekar, A. Sloan, D. Probability of Inflation in Loop Quantum Cosmology. *Gen. Relat. Grav.* **2011**, *43*, 3619. [[CrossRef](#)]
9. Vasileiou, V.; Granot, J.; Piran, T.; Amelino-Camelia, G. A Planck-scale limit on spacetime fuzziness and stochastic Lorentz invariance violation. *Nat. Phys.* **2015**, *11*, 344–346. [[CrossRef](#)]
10. Barbero, G.J.F.; Perez, A. Quantum Geometry and Black Holes. *arXiv* **2015**, arXiv:1501.02963.
11. Ashtekar, A.; Bojowald, M. Quantum geometry and the Schwarzschild singularity. *Class. Quant. Grav.* **2006**, *23*, 391–411. [[CrossRef](#)]
12. Bojowald, M. Nonsingular Black Holes and Degrees of Freedom in Quantum Gravity. *Phys. Rev. Lett.* **2005**, *95*, 061301. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
13. Mathur, S.D. The information paradox: A pedagogical introduction. *Class. Quant. Grav.* **2009**, *26*, 224001. [[CrossRef](#)]
14. Bekenstein, J.D. Black holes and information theory. *Contemp. Phys.* **2003**, *45*, 31–43. [[CrossRef](#)]
15. Hawking, S.W. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.* **1975**, *43*, 199–220. [[CrossRef](#)]
16. Ashtekar, A.; Beetle, C.; Fairhurst, S. Isolated Horizons: A Generalization of Black Hole Mechanics. *Class. Quant. Grav.* **1999**, *16*, L1–L7. [[CrossRef](#)]
17. Ashtekar, A.; Beetle, C.; Fairhurst, S. Mechanics of Isolated Horizons. *Class. Quant. Grav.* **2000**, *17*, 253–298. [[CrossRef](#)]
18. Ashtekar, A.; Beetle, C.; Dreyer, O.; Fairhurst, S.; Krishnan, B.; Lewandowski, J.; Wisniewski, J. Generic Isolated Horizons and their Applications. *Phys. Rev. Lett.* **2000**, *85*, 3564–3567. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
19. Lewandowski, J. Space-Times Admitting Isolated Horizons. *Class. Quant. Grav.* **2000**, *17*, L53–L59. [[CrossRef](#)]
20. Lewandowski, J.; Pawłowski, T. Geometric Characterizations of the Kerr Isolated Horizon. *Int. J. Mod. Phys. D* **2002**, *11*, 739–746. [[CrossRef](#)]

21. Perez, A. Black Holes in Loop Quantum Gravity. *Rep. Prog. Phys.* **2017**, *80*, 126901. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
22. Olmedo, J. Brief review on black hole loop quantization. *Universe* **2016**, *2*, 12. [[CrossRef](#)]
23. Gambini, R.; Pullin, J. An introduction to spherically symmetric loop quantum gravity black holes. In Proceedings of the Cosmology and gravitation in the Southern Cone (CosmoSur II), Valparaiso, Chile, May 27-31, 2013.
24. Gambini, R.; Olmedo, J.; Pullin, J. Quantum black holes in Loop Quantum Gravity. *Class. Quant. Grav.* **2014**, *31*, 095009. [[CrossRef](#)]
25. Roken, C. On the Nature of Black Holes in Loop Quantum Gravity. *Class. Quant. Grav.* **2013**, *30*, 015005. [[CrossRef](#)]
26. Agullo, I.; Fernando Barbero, G.J.; Borja, E.F.; Diaz-Polo, J.; Villasenor, E.J.S. Black hole entropy in loop quantum gravity. *J. Phys. Conf. Ser.* **2012**, *360*, 012035. [[CrossRef](#)]
27. Diaz-Polo, J.; Pranzetti, D. Isolated Horizons and Black Hole Entropy in Loop Quantum Gravity. *Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **2012**, *8*, 48–58. [[CrossRef](#)]
28. Ashtekar, A.; Baez, J.; Corichi, A.; Krasnov, K. Quantum Geometry and Black Hole Entropy. *Phys. Rev. Lett.* **1998**, *80*, 904–907. [[CrossRef](#)]
29. Ashtekar, A.; Baez, J.C.; Krasnov, K. Quantum Geometry of Isolated Horizons and Black Hole Entropy. *Adv. Theor. Math. Phys.* **2000**, *4*, 1–94. [[CrossRef](#)]
30. Corichi, A.; Diaz-Polo, J.; Fernandez-Borja, E. Black hole entropy quantization. *Phys. Rev. Lett.* **2007**, *98*, 181301. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
31. Corichi, A.; Diaz-Polo, J.; Fernandez-Borja, E. Quantum geometry and microscopic black hole entropy. *Class. Quant. Grav.* **2007**, *24*, 243–251. [[CrossRef](#)]
32. Rovelli, C.; Vidotto, F. *Covariant Loop Quantum Gravity*; Cambridge Monographs on Mathematical Physics; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2014; ISBN 1107069629, 9781107069626, 9781316147290.
33. Steinhauer, J. Observation of quantum Hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole. *Nat. Phys.* **2016**, *12*, 959. [[CrossRef](#)]
34. Nowakowski, M.; Arraut, I. The Minimum and Maximum Temperature of Black Body Radiation. *Mod. Phys. Lett. A* **2009**, *24*, 2133. [[CrossRef](#)]
35. Arraut, I.; Batic, D.; Nowakowski, M. Comparing two approaches to Hawking radiation of Schwarzschild-de Sitter black holes. *Class. Quant. Grav.* **2009**, *26*, 125006. [[CrossRef](#)]
36. Nowakowski, M.; Arraut, I. Living with Λ . *Braz. J. Phys.* **2008**, *38*, 425–430. [[CrossRef](#)]
37. Alexeyev, S.; Barrau, A.; Boudoul, G.; Khovanskaya, O.; Sazhin, M. Black-hole relics in string gravity: Last stages of Hawking evaporation. *Class. Quant. Grav.* **2002**, *19*, 4431–4444. [[CrossRef](#)]
38. Barrau, A.; Cailleteau, T.; Cao, X.; Diaz-Polo, J.; Grain, J. Probing Loop Quantum Gravity with Evaporating Black Holes. *Phys. Rev. Lett.* **2011**, *107*, 251301. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
39. Agullo, I.; Fernando Barbero, J.; Borja, E.F.; Diaz-Polo, J.; Villasenor, E.J.S. Detailed black hole state counting in loop quantum gravity. *Phys. Rev. D* **2010**, *82*, 084029. [[CrossRef](#)]
40. Bekenstein, J.D.; Mukhanov, V.F. Spectroscopy of the quantum black hole. *Phys. Lett. B* **1995**, *360*, 7–12. [[CrossRef](#)]
41. Barbero, G.J.F.; Villasenor, E.J.S. On the computation of black hole entropy in loop quantum gravity. *Class. Quant. Grav.* **2009**, *26*, 035017.
42. Fernando Barbero, G.J.; Villasenor, E.J.S. Statistical description of the black hole degeneracy spectrum. *Phys. Rev. D* **2011**, *83*, 104013. [[CrossRef](#)]
43. Cao, X.; Barrau, A. The entropy of large black holes in loop quantum gravity: A combinatorics/analysis approach. *arXiv* **2011**, arXiv:1111.1975.
44. Barrau, A.; Cao, X.; Noui, K.; Perez, A. Black hole spectroscopy from Loop Quantum Gravity models. *Phys. Rev. D* **2015**, *92*, 124046. [[CrossRef](#)]
45. Engle, J.; Noui, K.; Perez, A.; Pranzetti, D. Black hole entropy from an SU(2)-invariant formulation of Type I isolated horizons. *Phys. Rev. D* **2010**, *82*, 044050. [[CrossRef](#)]
46. Engle, J.; Noui, K.; Perez, A.; Pranzetti, D. The SU(2) Black Hole entropy revisited. *J. High Energy Phys.* **2011**, *2011*, 016. [[CrossRef](#)]
47. Buffenoir, E.; Noui, K.; Roche, P. Hamiltonian Quantization of Chern-Simons theory with SL(2,C) Group. *Class. Quant. Grav.* **2002**, *19*, 4953. [[CrossRef](#)]

48. Noui, K. Three Dimensional Loop Quantum Gravity: Particles and the Quantum Double. *J. Math. Phys.* **2006**, *47*, 102501. [[CrossRef](#)]
49. Noui, K. Three dimensional Loop Quantum Gravity: Towards a self-gravitating Quantum Field Theory. *Class. Quant. Grav.* **2007**, *24*, 329–360. [[CrossRef](#)]
50. Ghosh, A.; Perez, A. Black hole entropy and isolated horizons thermodynamics. *Phys. Rev. Lett.* **2011**, *107*, 241301. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
51. Ghosh, A.; Noui, K.; Perez, A. Statistics, holography, and black hole entropy in loop quantum gravity. *Phys. Rev. D* **2014**, *89*, 084069,
52. Solodukhin, S.N. Entanglement entropy of black holes. *Living Rev. Rel.* **2011**, *14*, 8. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
53. Geiller, M.; Noui, K. Near-Horizon Radiation and Self-Dual Loop Quantum Gravity. *EPL (Europhys. Lett.)* **2014**, *105*, 60001. [[CrossRef](#)]
54. Ben Achour, J.; Mouchet, A.; Noui, K. Analytic Continuation of Black Hole Entropy in Loop Quantum Gravity. *J. High Energy Phys.* **2015**, *2015*, 145.
55. Agullo, I.; Fernando Barbero, G.J.; Borja, Diaz-Polo, E.F.; Villasenor, J. Combinatorics of the SU(2) black hole entropy in loop quantum gravity. *Phys. Rev. D* **2009**, *80*, 084006. [[CrossRef](#)]
56. Moulin, F.; Martineau, K.; Grain, J.; Barrau, A. Quantum fields in the background spacetime of a loop quantum gravity black hole. *arXiv* **2018**, arXiv:1808.00207.
57. Alesci, E.; Modesto, L. Particle Creation by Loop Black Holes. *Gen. Relat. Grav.* **2014**, *46*, 1656. [[CrossRef](#)]
58. Modesto, L. Space-Time Structure of Loop Quantum Black Hole. *Int. J. Theor. Phys.* **2010**, *49*, 1649. [[CrossRef](#)]
59. Ben Achour, J.; Lamy, F.; Liu, H.; Noui, K. Polymer Schwarzschild black hole: An effective metric. *EPL (Europhys. Lett.)* **2018**, *123*, 20006. [[CrossRef](#)]
60. Ashtekar, A.; Olmedo, J.; Singh, P. Quantum Transfiguration of Kruskal Black Holes. *arXiv* **2018**, arXiv:1806.00648.
61. Ashtekar, A.; Olmedo, J.; Singh, P. Quantum Extension of the Kruskal Space-time. *arXiv* **2018**, arXiv:1806.02406.
62. Makela, J. Partition Function of the Schwarzschild Black Hole. *Entropy* **2011**, *13*, 1324–1354. [[CrossRef](#)]
63. Barrau, A. Evaporation Spectrum of Black Holes from a Local Quantum Gravity Perspective. *Phys. Rev. Lett.* **2016**, *117*, 271301. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
64. Yoon, Y. Quantum corrections to the Hawking radiation spectrum. *J. Korean Phys. Soc.* **2016**, *68*, 730. [[CrossRef](#)]
65. Carr, B.J.; Kohri, K.; Sendouda, Y.; Yokoyama, J. New cosmological constraints on primordial black holes. *Phys. Rev. D* **2010**, *81*, 104019. [[CrossRef](#)]
66. Sjöstrand, T.; Ask, S.; Christiansen, J.R.; Corke, R.; Desai, N.; Ilten, P.; Mrenna, S.; Prestel, S.; Rasmussen, C.O.; Skands, P.Z. An Introduction to PYTHIA 8.2. *Comput. Phys. Commun.* **2015**, *191*, 159–177. [[CrossRef](#)]
67. Rovelli, C.; Vidotto, F. Planck stars. *Int. J. Mod. Phys. D* **2014**, *23*, 1442026. [[CrossRef](#)]
68. Barrau, A.; Rovelli, C. Planck star phenomenology. *Phys. Lett. B* **2014**, *739*, 405–409. [[CrossRef](#)]
69. Haggard, H.M.; Rovelli, C. Black hole fireworks: quantum-gravity effects outside the horizon spark black to white hole tunneling. *Phys. Rev. D* **2015**, *92*, 104020. [[CrossRef](#)]
70. Haggard, H.M.; Rovelli, C. Black to white hole tunneling: An exact classical solution. *Int. J. Mod. Phys. A* **2015**, *30*, 1545015. [[CrossRef](#)]
71. Giddings, S.B. Black Holes and Massive Remnants. *Phys. Rev. D* **1992**, *46*, 1347–1352. [[CrossRef](#)]
72. Hajicek, P.; Kiefer, C. Singularity avoidance by collapsing shells in quantum gravity. *Int. J. Mod. Phys. D* **2001**, *10*, 775–780. [[CrossRef](#)]
73. Haggard, H.M.; Rovelli, C. Quantum Gravity Effects around Sagittarius A*. *Int. J. Mod. Phys. D* **2016**, *25*, 1644021. [[CrossRef](#)]
74. Christodoulou, M.; Rovelli, C.; Speziale, S.; Vilensky, I. Realistic Observable in Background-Free Quantum Gravity: The Planck-Star Tunnelling-Time. *Phys. Rev. D* **2016**, *94*, 084035. [[CrossRef](#)]
75. De Lorenzo, T.; Perez, A. Improved Black Hole Fireworks: Asymmetric Black-Hole-to-White-Hole Tunneling Scenario. *Phys. Rev. D* **2016**, *93*, 124018. [[CrossRef](#)]
76. Barrau, A.; Rovelli, C.; Vidotto, F. Fast Radio Bursts and White Hole Signals. *Phys. Rev. D* **2014**, *90*, 127503. [[CrossRef](#)]
77. Lorimer, D.R.; Bailes, M.; McLaughlin, M.A.; Narkevic, D.J.; Crawford, F. A bright millisecond radio burst of extragalactic origin. *Science* **2007**, *318*, 777–780. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
78. Keane, E.F.; Stappers, B.W.; Kramer, M.; Lyne, A.G. On the origin of a highly-dispersed coherent radio burst. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **2012**, *425*, L71–L75. [[CrossRef](#)]

79. Thornton, D.; Stappers, B.; Bailes, M.; Barsdell, B.R.; Bates, S.D.; Bhat, N.D.R.; Burgay, M.; Burke-Spolaor, S.; Champion, D.J.; Coster, P.; et al. A Population of Fast Radio Bursts at Cosmological Distances. *Science* **2013**, *341*, 53–56. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
80. Spitler, L.G.; Cordes, J.M.; Hessels, J.W.T.; Lorimer, D.R.; McLaughlin, M.A.; Chatterjee, S.; Crawford, F.; Deneva, J.S.; Kaspi, V.M.; Wharton, R.S.; et al. Fast Radio Burst Discovered in the Arecibo Pulsar ALFA Survey. *Astrophys. J.* **2014**, *790*, 101. [[CrossRef](#)]
81. Barrau, A.; Moulin, F.; Martineau, K. Fast radio bursts and the stochastic lifetime of black holes in quantum gravity. *Phys. Rev. D* **2018**, *97*, 066019. [[CrossRef](#)]
82. Barrau, A.; Bolliet, B.; Schutten, M.; Vidotto, F. Bouncing black holes in quantum gravity and the Fermi gamma-ray excess. *Phys. Lett. B* **2017**, *772*, 58. [[CrossRef](#)]
83. Barrau, A.; Bolliet, B.; Vidotto, F.; Weimer, C. Phenomenology of bouncing black holes in quantum gravity: A closer look. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2016**, *1602*, 022. [[CrossRef](#)]
84. Hooper, D.; Goodenough, L. Dark Matter Annihilation in The Galactic Center As Seen by the Fermi Gamma Ray Space Telescope. *Phys. Lett. B* **2011**, *697*, 412–428. [[CrossRef](#)]
85. Abazajian, K.N.; Kaplinghat, M. Detection of a Gamma-Ray Source in the Galactic Center Consistent with Extended Emission from Dark Matter Annihilation and Concentrated Astrophysical Emission. *Phys. Rev. D* **2012**, *86*, 083511. [[CrossRef](#)]
86. Gordon, C.; Macias, O. Dark Matter and Pulsar Model Constraints from Galactic Center Fermi-LAT Gamma Ray Observations. *Phys. Rev. D* **2013**, *88*, 083521. [[CrossRef](#)]
87. Daylan, T.; Finkbeiner, D.P.; Hooper, D.; Linden, T.; Portillo, S.K.N.; Rodd, N.L.; Slatyer, T.R. The Characterization of the Gamma-Ray Signal from the Central Milky Way: A Compelling Case for Annihilating Dark Matter. *Phys. Dark Univ.* **2016**, *12*, 1. [[CrossRef](#)]
88. Bartels, R.; Krishnamurthy, S.; Weniger, C. Strong Support for the Millisecond Pulsar Origin of the Galactic Center GeV Excess. *Phys. Rev. Lett.* **2016**, *116*, 051102. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
89. Raccanelli, A.; Vidotto, F.; Verde, L. Effects of primordial black holes quantum gravity decay on galaxy clustering. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2018**, *2018*, 003. [[CrossRef](#)]
90. Bianchi, E.; Christodoulou, M.; D'Ambrosio, F.; Rovelli, C.; Haggard, H.M. White Holes as Remnants: A Surprising Scenario for the End of a Black Hole. *arXiv* **2018**, arXiv:1802.04264.
91. MacGibbon, J.H. Can Planck-mass relics of evaporating black holes close the Universe? *Nature* **1987**, *329*, 308–309. [[CrossRef](#)]
92. Adler, R.J.; Chen, P.; Santiago, D.I. The Generalized Uncertainty Principle and Black Hole Remnants. *Gen. Relat. Grav.* **2001**, *33*, 2101–2108. [[CrossRef](#)]
93. Christodoulou, M.; Rovelli, C. How big is a black hole? *Phys. Rev. D* **2015**, *91*, 064046. [[CrossRef](#)]
94. Vidotto, F.; Rovelli, C. White-hole dark matter and the origin of past low-entropy. *arXiv* **2018**, arXiv:1804.04147.
95. Rovelli, C.; Vidotto, F. Small black/white hole stability and dark matter. *arXiv* **2018**, arXiv:1805.03872.
96. Barrow, J.D.; Copeland, E.J.; Liddle, A.R. The cosmology of black hole relics. *Phys. Rev.* **1992**, *D46*, 645. [[CrossRef](#)]
97. Zeldovich, Y.B.; Novikov, I.D. *Relativistic Astrophysics*; University of Chicago Press: Chicago, IL, USA, 1983; ISBN 9780226979571.
98. Aharonov, Y.; Casher, A.; Nussinov, S. The unitarity puzzle and Planck mass stable particles. *Phys. Lett. B* **1987**, *191*, 51–55. [[CrossRef](#)]
99. Banks, T.; Dabholkar, A.; Douglas, M.R.; O'Loughlin, M. Are horned particles the end point of Hawking evaporation? *Phys. Rev. D* **1992**, *45*, 3607. [[CrossRef](#)]
100. Banks, T.; O'Loughlin, M.; Strominger, A. Black hole remnants and the information puzzle. *Phys. Rev. D* **1993**, *47*, 4476–4482. [[CrossRef](#)]
101. Bowick, M.J.; Giddings, S.B.; Harvey, J.A.; Horowitz, G.T.; Strominger, A. Axionic Black Holes and an Aharonov-Bohm Effect for Strings. *Phys. Rev. Lett.* **1988**, *61*, 2823. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
102. Coleman, S.R.; Preskill, J.; Wilczek, F. Growing hair on black holes. *Phys. Rev. Lett.* **1991**, *67*, 1975. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
103. Lee, K.-M.; Nair, V.P.; Weinberg, E.J. A Classical Instability of Reissner-Nordstrom Solutions and the Fate of Magnetically Charged Black Holes. *Phys. Rev. Lett.* **1992**, *68*, 1100–1103. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
104. Gibbons, G.W.; Maeda, K.I. Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields. *Nucl. Phys. B* **1988**, *298*, 741–775. [[CrossRef](#)]

105. Torii, T.; Maeda, K.I. Black holes with non-Abelian hair and their thermodynamical properties. *Phys. Rev. D* **1993**, *48*, 1643. [[CrossRef](#)]
106. Callan, C.G., Jr.; Myers, R.C.; Perry, M.J. Black holes in string theory. *Nucl. Phys. B* **1989**, *311*, 673–698. [[CrossRef](#)]
107. Myers, R.C.; Simon, J.Z. Black-hole thermodynamics in Lovelock gravity. *Phys. Rev. D* **1988**, *38*, 2434–2444. [[CrossRef](#)]
108. Whitt, B. Spherically symmetric solutions of general second-order gravity. *Phys. Rev. D* **1988**, *38*, 3000. [[CrossRef](#)]
109. Barrau, A.; Blais, D.; Boudoul, G.; Polarski, D. Peculiar Relics from Primordial Black Holes in the Inflationary Paradigm. *Ann. Phys.* **2004**, *13*, 115. [[CrossRef](#)]
110. Starobinsky, A.A. Spectrum of adiabatic perturbations in the universe when there are singularities in the inflation potential. *JETP Lett.* **1992**, *55*, 489–494.
111. Carr, B.; Raidal, M.; Tenkanen, T.; Vaskonen, V.; Veermäe, H. Primordial black hole constraints for extended mass functions. *Phys. Rev. D* **2017**, *96*, 023514. [[CrossRef](#)]
112. Rovelli, C.; Vidotto, F. Pre-big-bang black-hole remnants and the past low entropy. *arXiv* **2018**, arXiv:1805.03224.
113. Ashtekar, A.; Singh, P. Loop Quantum Cosmology: A Status Report. *Class. Quant. Grav.* **2011**, *28*, 213001. [[CrossRef](#)]
114. Carr, B.J.; Coley, A.A. Persistence of black holes through a cosmological bounce. *Int. J. Mod. Phys. D* **2011**, *20*, 2733. [[CrossRef](#)]
115. Clifton, T.; Carr, B.; Coley, A. Persistent Black Holes in Bouncing Cosmologies. *Class. Quant. Grav.* **2017**, *34*, 135005. [[CrossRef](#)]
116. Carr, B.; Clifton, T.; Coley, A. Black holes as echoes of previous cosmic cycles. *arXiv* **2017**, arXiv:1704.02919.
117. Rovelli, C. Is Time's Arrow Perspectival? *arXiv* **2015**, arXiv:1704.02919.
118. Linsefors, L.; Barrau, A. Duration of inflation and conditions at the bounce as a prediction of effective isotropic loop quantum cosmology. *Phys. Rev. D* **2013**, *87*, 123509. [[CrossRef](#)]
119. Linsefors, L.; Barrau, A. Exhaustive investigation of the duration of inflation in effective anisotropic loop quantum cosmology. *Class. Quant. Grav.* **2015**, *32*, 035010. [[CrossRef](#)]
120. Bolliet, B.; Barrau, A.; Martineau, K.; Moulin, F. Some Clarifications on the Duration of Inflation in Loop Quantum Cosmology. *Class. Quant. Grav.* **2017**, *34*, 145003. [[CrossRef](#)]
121. Wilson-Ewing, E. The Matter Bounce Scenario in Loop Quantum Cosmology. *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **2013**, *2013*, 026. [[CrossRef](#)]
122. Abbott, B.P.; Jawahar, S.; Lockerbie, N.A.; Tokmakov, K.V. [LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration]. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.* **2016**, *116*, 061102. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
123. Abbott, B.P.; Jawahar, S.; Lockerbie, N.A.; Tokmakov, K.V. [LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration]. GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.* **2016**, *116*, 241103. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
124. Abbott, B.P.; Jawahar, S.; Lockerbie, N.A.; Tokmakov, K.V. [LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration]. GW170104: Observation of a 50-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence at Redshift 0.2. *Phys. Rev. Lett.* **2017**, *118*, 221101. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
125. Abbott, B.P.; Jawahar, S.; Lockerbie, N.A.; Tokmakov, K.V. [LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration]. GW170608: Observation of a 19-solar-mass Binary Black Hole Coalescence. *Astrophys. J.* **2017**, *851*, L35. [[CrossRef](#)]
126. Abbott, B.P.; Jawahar, S.; Lockerbie, N.A.; Tokmakov, K.V. [LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration]. GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence. *Phys. Rev. Lett.* **2017**, *119*, 141101. [[CrossRef](#)] [[PubMed](#)]
127. Bianchi, E.; Gupta, A.; Haggard, H.; Sathyaprakash, B. Unpublished work in progress. 2018.
128. Barrau, A.; Martineau, K.; Moulin, F. Seeing through the cosmological bounce: Footprints of the contracting phase and luminosity distance in bouncing models. *Phys. Rev. D* **2017**, *96*, 123520. [[CrossRef](#)]
129. Chirenti, C. Black hole quasinormal modes in the era of LIGO. *Braz. J. Phys.* **2018**, *48*, 102. [[CrossRef](#)]



CHAPITRE 5

Principe d'incertitude généralisé

Sommaire

5.1 Introduction d'une échelle de longueur minimale : généralisation du principe d'incertitude de Heisenberg (GUP)	280
5.2 Obtention d'une relation de dispersion modifiée à partir du GUP	281
5.3 États de lumière compressés (" <i>squeezed light</i> ")	284
5.4 Le GUP entraîne-t-il une compression des états de lumière ?	290

Ce chapitre est de nature particulière et n'est pas à appréhender comme ses prédécesseurs. Il est en effet dédié à une étude en cours de réalisation qui en est pour le moment à un stade assez primaire et est de ce fait à prendre comme un ajout facultatif, un "bonus" si je puis dire, aux travaux de thèse jusqu'alors présentés.

Réalisé conjointement avec A. Barrau, J. Mielczarek et F. Moulin le travail que nous introduisons se base sur une généralisation du principe d'incertitude de Heisenberg (dénommée **GUP** pour "*Generalized Uncertainty Principle*") qui tiendrait compte de l'existence d'une échelle de longueur minimale.

Après une introduction au GUP section 5.1 nous proposerons section 5.2 une méthode permettant de calculer une nouvelle relation de dispersion pour la lumière qui découle de ce nouveau principe d'incertitude. La section 5.3 sera purement bibliographique et aura pour objectif d'introduire le lecteur à la notion d'**état de lumière compressé** (pour "*squeezed light*"), notion certes répandue en optique quantique mais qui est probablement plus exotique pour qui n'est pas du domaine. Une fois cette introduction faite nous aurons tous les ingrédients requis pour nous atteler à l'étude de la problématique suivante : "Est-ce que l'existence d'une échelle de longueur minimale génère une compression (pour "*squeezing*") des états de lumière?". Nous tenterons d'y répondre en section 5.4. Nous y présenterons notamment notre méthodologie ainsi que certains des calculs déjà effectués sur le sujet.

Bien que les concepts et outils introduits dans ce chapitre empruntent en bonne partie à un domaine jusqu'alors non discuté, l'optique quantique, les travaux que nous y présentons ne sont pour autant pas décorrés du reste du manuscrit. En effet quand il est question de sonder des effets de gravitation

quantique les deux grandes pistes que sont la cosmologie et la physique des trous noirs, bien que privilégiées, n'ont pas non plus le monopole. Une troisième grande voie est également assidument explorée : celle des **effets intégrés**. Ceux-ci résultent d'une modification de la structure intime de l'espace. De nature faible, ils sont dits intégrés car ont besoin d'être accumulés sur de longues distances pour être potentiellement observables¹. Le travail présenté dans ce chapitre se place dans un cadre similaire, avec un désir de sonder la structure de l'espace à très petite échelle.

5.1 Introduction d'une échelle de longueur minimale : généralisation du principe d'incertitude de Heisenberg (GUP)

L'existence d'une échelle de longueur minimale apparaît dans la majorité des approches à la gravitation quantique. Ce constat suggère une modification du principe d'incertitude de Heisenberg.

Le principe d'incertitude généralisé (ou GUP) le plus couramment étudié prenant en compte l'existence d'une échelle de longueur minimale est donné par :

$$\Delta X \Delta P_X \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta \Delta P_X^2), \quad (5.1)$$

où β est un paramètre inconnu qui détermine l'incertitude minimale sur la position : $\Delta X_{\min} = \hbar \sqrt{\beta}$. Ce principe d'incertitude est généré par les relations de commutations généralisées suivantes :

$$[\hat{X}, \hat{P}_X] = i\hbar (1 + \beta \hat{P}_X^2). \quad (5.2)$$

Pour générer une telle relation de commutation P. Pedram a proposé dans [197] de considérer les opérateurs position et impulsion généralisés suivants :

$$\hat{X} = \hat{x} \text{ et } \hat{P}_X = \frac{\tan(\sqrt{\beta} \hat{p}_x)}{\sqrt{\beta}}, \quad (5.3)$$

où \hat{x} et \hat{p}_x sont les variables canoniques standard satisfaisant $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$. Au premier ordre en β l'opérateur impulsion généralisé s'exprime $\hat{P}_X = \hat{p}_x + \frac{1}{3}\beta \hat{p}_x^3$.

Il peut être aisément montré que ces variables généralisées possèdent bien la relation de commutation souhaitée :

$$\begin{aligned} [\hat{X}, \hat{P}_X] &= \left[\hat{x}, \hat{p}_x + \frac{1}{3}\beta \hat{p}_x^3 \right] \\ &= [\hat{x}, \hat{p}_x] + \frac{1}{3}\beta ([\hat{x}, \hat{p}_x] \hat{p}_x^2 + \hat{p}_x [\hat{x}, \hat{p}_x^2]) \\ &= [\hat{x}, \hat{p}_x] + \frac{1}{3}\beta ([\hat{x}, \hat{p}_x] \hat{p}_x^2 + \hat{p}_x ([\hat{x}, \hat{p}_x] \hat{p}_x + \hat{p}_x [\hat{x}, \hat{p}_x])) \\ &= i\hbar + \frac{1}{3}\beta (i\hbar \hat{p}_x^2 + i\hbar \hat{p}_x^2 + i\hbar \hat{p}_x^2) \\ &= i\hbar (1 + \beta \hat{P}_X^2) \text{ au premier ordre en } \beta. \end{aligned} \quad (5.4)$$

1. C'est pourquoi il est intéressant pour étudier ces effets de s'intéresser à des signaux astrophysiques dont les sources sont extra-galactiques, comme les "Gamma Ray Bursts"[196].

Ces relations de commutation modifiées impliquent, entre autres, une modification des spectres en énergie de différents modèles tels que l'oscillateur harmonique quantique. En effet le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique s'écrit, suite à la transformation proposée par Pedram, comme :

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \frac{1}{2} (\hat{P}_x^2 + \omega^2 \hat{X}^2) \\
 &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\tan(\sqrt{\beta} \hat{p}_x)}{\sqrt{\beta}} \right)^2 + \omega^2 \hat{x}^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} (\hat{p}_x^2 + \omega^2 \hat{x}^2) + \frac{\beta}{3} \hat{p}_x^4 + O(\beta^2) \\
 &= \hat{H}_0 + \frac{\beta}{3} \hat{p}_x^4 + O(\beta^2) \\
 &= \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \text{ au premier ordre en } \beta
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

où $\hat{H}_0 = \frac{1}{2} (\hat{p}_x^2 + \omega^2 \hat{x}^2)$ et $\hat{H}_1 = \frac{\beta}{3} \hat{p}_x^4$.

5.2 Obtention d'une relation de dispersion modifiée à partir du GUP

Des modifications potentielles de la relation de dispersion des photons dans le vide sont souvent recherchées pour tenter de sonder la structure de l'espace aux très petites échelles. Nous présentons ci-dessous une méthodologie permettant de calculer une nouvelle relation de dispersion pour la lumière qui tiendrait compte du GUP.

La plupart des propriétés de la lumière (excepté sa polarisation) peuvent être saisies en s'intéressant à un simple champ scalaire non massif $\phi(\vec{x}, t)$, dont la décomposition de Fourier s'écrit

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \tilde{\phi}_{\vec{k}}(t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}},
 \tag{5.6}$$

où la somme sur les \vec{k} désigne une somme sur les modes. Son moment conjugué $\pi(\vec{x}, t)$ peut être décomposé de manière similaire et ses composantes de Fourier sont notées $\tilde{\pi}_{\vec{k}}(t)$. L'étude est ici restreinte à un volume tridimensionnel fini V afin de n'avoir à considérer que des symboles de Kronecker et non des deltas de Dirac. Bien que les composantes de Fourier du champ et de son moment conjugué soient complexes, ϕ et π sont eux réels. Ceci nous permet d'écrire, parmi d'autres possibilités,

$$\tilde{\phi}_{\vec{k}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \phi_{\vec{k}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \phi_{-\vec{k}}}{\sqrt{2}} \text{ et } \tilde{\pi}_{\vec{k}} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \pi_{\vec{k}} + e^{-i\frac{\pi}{4}} \pi_{-\vec{k}}}{\sqrt{2}}
 \tag{5.7}$$

où $\phi_{\vec{k}}, \pi_{\vec{k}} \in \mathbb{R}$ et $\{\phi_{\vec{k}}, \pi_{\vec{k}'}\} = \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$.

Le Hamiltonien d'un champ scalaire non massif, d'expression

$$H_\phi = \int_V d^3x \left(\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \delta^{ab} \partial_a \phi \partial_b \phi \right)
 \tag{5.8}$$

2. Le spectre en énergie de ce nouvel Hamiltonien sera calculé un peu plus loin.

peut alors se ré-écrire comme

$$H_\phi = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (\pi_{\vec{k}}^2 + k^2 \phi_{\vec{k}}^2), \quad (5.9)$$

où $k = \sqrt{\vec{k} \cdot \vec{k}}$. Cette forme du Hamiltonien, qui décrit une somme infinie d'oscillateurs harmoniques découplés labellisés par différents vecteurs d'onde k , permet de mieux cerner l'analogie entre champ scalaire et lumière.

En effet le champ électrique, ou plus exactement ses oscillations, sont décrites en optique quantique à l'aide d'un oscillateur dit électromagnétique analogue à l'oscillateur harmonique³. Le Hamiltonien associé est donné par

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + k^2 \hat{q}^2) \quad (5.10)$$

pour un unique mode ou

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \hat{H}_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (\hat{p}_{\vec{k}}^2 + k^2 \hat{q}_{\vec{k}}^2) \quad (5.11)$$

pour un ensemble de modes \vec{k} . Nous retrouvons donc l'équivalent quantifié du Hamiltonien du champ scalaire sans masse donné Eq.(5.9). Les opérateurs \hat{p} et \hat{q} , appelés quadratures, jouent les rôles des opérateurs position et impulsion du cas standard. Cette modélisation de la lumière permet la description soit d'ondes planes soit de modes normaux si la lumière est piégée dans une cavité.

Or une fois le GUP pris en compte les quadratures doivent également être généralisées⁴. La transformation de Pedram donne donc, conformément à l'équation (5.3) : $\hat{Q} = \hat{q}$ et $\hat{P} = \frac{\tan(\sqrt{\beta}\hat{p})}{\sqrt{\beta}}$, ou $\hat{P} = \hat{p} + (1/3)\beta\hat{p}^3$ au premier ordre en β .

Le Hamiltonien donnant l'énergie (quantifiée) du champ électrique s'écrit donc, au premier ordre en β , de manière analogue au Hamiltonien donné Eq.(5.5) :

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (\hat{p}_{\vec{k}}^2 + k^2 \hat{q}_{\vec{k}}^2) + \frac{\beta}{3} \sum_{\vec{k}} \hat{p}_{\vec{k}}^4. \quad (5.12)$$

Pour calculer la nouvelle relation de dispersion à partir de ce stade nous pensons nous inspirer de la méthodologie suivie dans l'article [199], que je retranscris ici dans les grandes lignes⁵. Ré-utilisons l'analogie avec le champ scalaire non massif. La fonction de corrélation à deux points dans l'état fondamental s'écrit

$$\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}, t) \hat{\phi}(\vec{y}, t') | 0 \rangle = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}} \int \frac{d\omega}{2\pi} D_{(\omega, \vec{k})} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{x} - \vec{y}) - i\omega(t - t')} \quad (5.13)$$

où $\Delta E_n = E_n^{(1)} - E_0^{(1)}$ et $D_{(\omega, \vec{k})}$ le propagateur. En considérant $p^2 = -\omega^2 + k^2$ celui-ci s'écrit

3. Le champ magnétique étant proportionnel aux variations du champ électrique, si ce dernier oscille le premier oscille aussi. Un tel oscillateur décrit donc également les oscillations du champ magnétique.

4. Bien que l'équivalence sur le plan purement analytique entre les quadratures électromagnétiques $\{\hat{q}, \hat{p}\}$ et les opérateurs position et impulsion $\{\hat{x}, \hat{p}_x\}$ soit évidente il n'est pour le moment toujours pas clair pour moi pourquoi le GUP, qui se manifeste sur la quantité physique "longueur" et son moment conjugué "impulsion", affecte également les opérateurs \hat{q} et \hat{p} , comme il est d'usage de le faire dans la littérature, voir par exemple [198]).

5. Les équations que nous retranscrivons ici ont pour vocation d'éclairer sur la démarche mais devront être spécifiées pour le cas particulier de notre étude.

$$D_{(\omega, \vec{k})} = \sum_n \frac{2i\Delta E_n |c_n|^2}{p^2 + \Delta E_n^2 - k^2 - i\epsilon}. \quad (5.14)$$

La relation de dispersion est alors obtenue en calculant le pôle (ou les pôles) du propagateur, qui dépend(ent) :

1. De $\Delta E_n = E_n^{(1)} - E_0^{(1)}$, que nous pourrions calculer une fois le nouveau spectre en énergie du système connu.
2. Des coefficients $|c_n|^2$, qui correspondent aux coefficients de développement des nouveaux états de base (du Hamiltonien modifié par le GUP) dans la base des vecteurs propres du Hamiltonien de l'oscillateur harmonique quantique standard.

Calcul des nouveaux états d'énergie de l'oscillateur harmonique

La modification du Hamiltonien de l'oscillateur harmonique par le GUP donnée Eq.(5.5) induit une modification des états d'énergie associés. L'expression du nouveau spectre avait été d'abord obtenue en 1995 par A. Kempf, G. Mangano et R.B Mann dans [200] avec une prescription plus ancienne (et apparemment problématique [197]) des opérateurs position et impulsion généralisés que celle proposée par Pedram. Ce dernier a néanmoins montré que le spectre en énergie obtenu avec les nouveaux opérateurs généralisés donnés Eq.(5.3) coïncide exactement avec celui de Kempf, Mangano et Mann [197].

Le nouveau spectre en énergie s'exprime donc :

$$E_n(\omega) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\beta \frac{m\hbar\omega}{2} + \sqrt{1 + \beta^2 \frac{m^2 \hbar^2 \omega^2}{4}} \right) + \beta \frac{m\hbar^2 \omega^2}{2} n^2. \quad (5.15)$$

Au plus bas ordre en β il se réduit à

$$E_n(\omega) = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \beta \frac{m\hbar^2 \omega^2}{4} (2n^2 + 2n + 1). \quad (5.16)$$

Nous voyons que, à β fixé, celui-ci s'écarte du spectre standard pour de grandes valeurs du nombre quantique n . Notamment, à la différence du spectre usuel, il croit asymptotiquement comme n^2 . Cette expression au premier ordre en β , suffisante pour notre étude, peut être rapidement retrouvée en calculant $\langle n | \hat{H} | n \rangle$. En effet, en utilisant $\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a^\dagger + a)$ et $\hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^\dagger - a)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} E_n &= \langle n | \hat{H} | n \rangle & (5.17) \\ &= \langle n | \hat{H}_0 + \hat{H}_1 | n \rangle \\ &= \langle n | \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right) | n \rangle + \langle n | \frac{\beta}{3} \hat{p}^4 | n \rangle \\ &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\beta}{3} \left(\frac{\hbar\omega}{2} \right)^2 \langle n | (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^4 | n \rangle \\ &= \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) + \beta \frac{\hbar^2 \omega^2}{12} \langle n | (\hat{a}^\dagger)^4 - (\hat{a}^\dagger)^3 a - (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} \hat{a}^\dagger + (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 \\ &\quad - \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^3 \\ &\quad - \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^3 + \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \\ &\quad + \hat{a}^2 (\hat{a}^\dagger)^2 - \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a}^3 \hat{a}^\dagger + \hat{a}^4 | n \rangle. \end{aligned}$$

Puisque les $\{|n\rangle\}$ forment une base orthonormée les seuls termes non nuls sont ceux avec un nombre identique d'opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger . Ainsi

$$\begin{aligned}
E_n &= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \beta\frac{\hbar^2\omega^2}{12} \langle n | (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 | n \rangle + \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle \\
&\quad + \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a}^2 \hat{a}^\dagger | n \rangle + \langle n | \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a} | n \rangle \\
&\quad + \langle n | \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger | n \rangle + \langle n | \hat{a}^2 (\hat{a}^\dagger)^2 | n \rangle \\
&= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \beta\frac{\hbar^2\omega^2}{12} \times [n(n-1) + n^2 + n(n+1) + n(n+1) + (n+1)^2 + (n+1)(n+2)] \\
&= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \beta\frac{\hbar^2\omega^2}{12} (6n^2 + 6n + 3) \\
&= \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \beta\frac{\hbar^2\omega^2}{4} (2n^2 + 2n + 1).
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Nous retrouvons donc bien l'expression approximée au premier ordre en β provenant de la solution complète.

Maintenant que nous avons le nouveau spectre en énergie du système il nous sera possible, une fois les $|c_n|^2$ obtenus (ce qu'il nous reste à faire), de calculer les pôles du propagateur afin d'obtenir la nouvelle relation de dispersion de la lumière qui tient compte de l'existence d'une longueur minimale.

Une modification de la relation de dispersion est *a priori* mesurable. Nous avons donné des exemples dans le chapitre lié à la cosmologie : le comportement ultra-violet des spectres primordiaux y est sensible. Des effets sont également envisageables dans le secteur des trous noirs (voir par exemple [201]). Mais c'est avant tout la propagation des astroparticules (photons et neutrinos) sur des distances cosmologiques qui pourrait signer de tels effets. La plupart des études concluent à ce jour pour une absence d'anomalie significative, d'autant que des effets purement astrophysiques peuvent naturellement induire une variation du temps d'arrivée de photons en fonction de leur énergie. Quelques indications intéressantes d'effets potentiellement liés à la structure granularité de l'espace existent néanmoins pour les photons d'énergie supérieure à 40 GeV (voir [202] et [203]). Il serait pertinent d'incorporer dans de telles études des relations de dispersion obtenues avec la méthodologie ici proposée.

Abandonnons maintenant le GUP quelques instants pour nous intéresser au second constituant majeur de notre projet : les états de lumière compressés.

5.3 États de lumière compressés ("*squeezed light*")

Ayant peu de recul sur ce sujet auquel je m'attelle tout juste et supposant que le lecteur coutumier des trous noirs et de la cosmologie primordiale peut n'être pas expert en optique quantique, j'ouvre ce chapitre par une synthèse de l'article de revue de A. I. Lvovsky [204].

Les états dits compressés du champ électromagnétique, observés pour la première fois en 1985, peuvent être générés par de nombreux procédés d'optique non linéaire (voir [205] pour une revue des différentes techniques). Ils sont notamment d'un intérêt particulier en information quantique [206] et métrologie quantique [207, 208]. Nous chercherons ici à savoir si leurs propriétés peuvent également être utilisées pour sonder la structure propre de l'espace, notamment la potentielle existence d'une

échelle de longueur minimale. Plus précisément nous désirons voir si le GUP induit une compression de différents états optiques. Avant de poursuivre il nous faut donc préciser ce que l'on entend par "état compressé".

5.3.1 États de lumière compressés à un mode ("*Single-mode squeezed light*")

Pour se faire une idée de ce que l'on dénomme par compression, ou "*squeezing*", considérons un oscillateur harmonique quantique. La fonction d'onde de son état vide dans la base (adimensionnée) des positions est

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (5.19)$$

Sa transformée de Fourier donne la fonction d'onde correspondante dans la base (adimensionnée) des impulsions⁶ :

$$\tilde{\Psi}_0(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx} \Psi_0(x) dx = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{p^2}{2}}. \quad (5.20)$$

Nous voyons que la forme de la fonction d'onde de l'état vide est identique et donnée par une gaussienne dans les deux bases. De ce fait les variances des observables canoniques position et impulsion de l'état vide sont également identiques et valent $\langle 0 | \Delta x^2 | 0 \rangle = \langle 0 | \Delta p^2 | 0 \rangle = 1/2$.

Introduisons un nouveau paramètre $R > 0$ appelé **facteur de compression** ("*squeezing factor*"). La fonction d'onde de l'état vide compressé ("*squeezed-vacuum state*") $|sq_R\rangle$ s'écrit alors à partir de l'état vide initial comme

$$\Psi_R(x) = \frac{\sqrt{R}}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{(Rx)^2}{2}} \quad (5.21)$$

dans la base des positions et

$$\tilde{\Psi}_R(p) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{R}} e^{-\frac{(p/R)^2}{2}} \quad (5.22)$$

dans la base des impulsions. Les variances des deux observables x et p sont alors données par

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{1}{2R^2} \quad \text{et} \quad \langle \Delta p^2 \rangle = \frac{R^2}{2}. \quad (5.23)$$

Nous pouvons donc discerner deux cas :

- (i) Si $R > 1$ la variance de la position est plus faible que celle de l'état vide usuel. On dit alors que l'état vide $|sq_R\rangle$ est compressé selon la position ("*position-squeezed*").
- (ii) Si $R < 1$ alors l'état vide $|sq_R\rangle$ est ce coup-ci compressé selon l'impulsion ("*momentum-squeezed*").

Remarque : L'intensité du bruit du champ électrique associé à des états de lumière compressés tombe, pour certaines valeurs de la phase, sous le bruit associé à l'état vide. Dit autrement il est possible à l'aide de lumière compressée d'observer moins de bruit que s'il n'y avait pas de lumière du tout.

6. Afin d'alléger les écritures nous abandonnons ici l'indice x qui servait auparavant à différencier l'impulsion p_x de la quadrature électromagnétique p et notons l'impulsion uniquement p .

Voilà une bien curieuse (et intéressante) propriété.

La **fonction de Wigner**, équivalent quantique de la densité de (quasi-)probabilité dans l'espace des phases, permet de bien se représenter le phénomène de compression, comme illustré Fig.5.1.

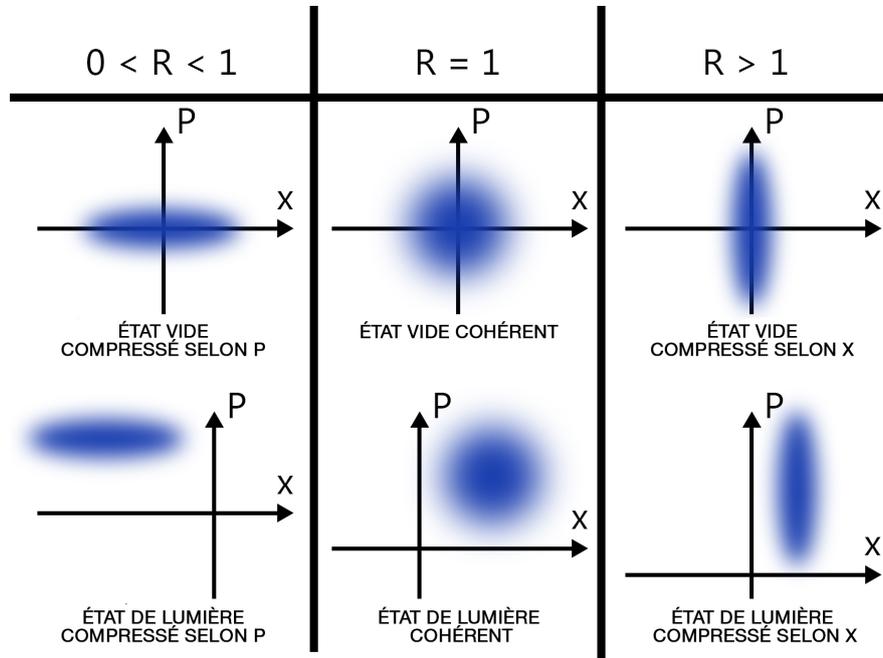


FIGURE 5.1 – Fonctions de Wigner de différents états à un mode.

Rappel : Les états dits **cohérents** correspondent aux vecteurs propres de l'opérateur annihilation $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, où $\alpha \in \mathbb{C}$. Ce sont les états quantiques les plus "classiques" qui existent au sens où ils minimisent le principe d'incertitude de Heisenberg de manière symétrique, *i.e* $\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}$ avec $\Delta x = \Delta p = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Notons que l'état vide usuel de l'oscillateur harmonique est un état cohérent gaussien⁷.

Nous voyons également Fig.5.1 que les états de lumière diffèrent des états vides en cela que leur fonction de Wigner n'est pas centrée sur l'origine de l'espace des phases⁸.

Or il est facilement possible déplacer le centre de la fonction de Wigner, permettant ainsi de passer par exemple d'un état vide à un état de lumière (ou inversement), à l'aide de l'**opérateur de déplacement dans l'espace des phases** $\hat{D}(\alpha)$, dont l'action dans la représentation de Heisenberg est

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha. \quad (5.24)$$

7. D'une manière purement terminologique il n'est pas clair pour moi le vide de l'oscillateur harmonique soit un état cohérent. En effet de tels états s'écrivent $|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\right) |n\rangle$. Ils correspondent donc à une superposition d'états avec des nombres de particules différents, le poids étant déterminé par la condition de normalisation $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$. Ainsi un état cohérent ne possède pas un nombre de particules déterminé, la probabilité de trouver un nombre de photons n pour un état cohérent suit une distribution de Poisson. C'est d'ailleurs la raison je pense pour laquelle il est vecteur propre de l'opérateur annihilation. Retirer une particule ne change pas le système. Il est vrai que l'état vide est lui aussi vecteur propre de \hat{a} (de valeur propre 0) mais ce coup-ci car il n'y a rien à annihiler. La situation me semble donc légèrement différente.

8. Ce que je dénomme ici par "État de lumière compressé" est parfois appelé "État cohérent compressé". C'est à ma connaissance une fois de plus une simple question de terminologie qui se résume je pense à savoir si un état cohérent minimise simplement le principe d'incertitude de Heisenberg ou s'il le minimise de manière symétrique *i.e* avec $\Delta x = \Delta p$.

Cet opérateur peut également être exprimé comme

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}} . \quad (5.25)$$

Un état de lumière cohérent peut donc s'exprimer à partir de l'état vide (cohérent) comme $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle$.

Bien que cela ne soit pas directement utile pour nos travaux (pour le moment du moins) il est je pense intéressant de montrer le lien entre compression et transformée de Bogoliubov.

Considérons l'**opérateur de compression** (pour "*Squeezing operator*")

$$\hat{S}(\xi) = e^{(\xi \hat{a}^2 - \xi^* (\hat{a}^\dagger)^2)/2} , \quad (5.26)$$

où $\xi = r e^{i\phi}$ avec $r = \ln(R)$ et ϕ une phase qui détermine l'angle de la quadrature compressée. Nous supposons cette phase nulle de sorte que $\xi = r$. En définissant un temps $t = r/\alpha$ l'opérateur de compression s'écrit $\hat{S}(r) = e^{-i(\hat{H}/\hbar)t}$, où

$$\hat{H} = i\hbar\alpha [\hat{a}^2 - (\hat{a}^\dagger)^2] / 2 . \quad (5.27)$$

Étudier l'action de l'opérateur de compression sur un état revient donc à considérer son évolution sous le Hamiltonien ci-dessus. Il est alors possible de montrer que

$$\dot{\hat{a}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}] = -\alpha \hat{a}^\dagger \quad (5.28)$$

et

$$\dot{\hat{a}^\dagger} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = -\alpha \hat{a} . \quad (5.29)$$

En se rappelant que

$$\hat{x} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \hat{p} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}i} \quad (5.30)$$

nous pouvons ré-écrire les équations Eq.(5.28) et Eq.(5.29) comme

$$\dot{\hat{x}} = -\alpha x \quad (5.31)$$

$$\dot{\hat{p}} = \alpha p , \quad (5.32)$$

ce qui nous amène, après un temps t , à

$$\hat{x}(t) = \hat{S}^\dagger(r) \hat{x}(0) \hat{S}(r) = \hat{x}(0) e^{-r} = \hat{x}(0)/R \quad (5.33)$$

$$\hat{p}(t) = \hat{S}^\dagger(r) \hat{p}(0) \hat{S}(r) = \hat{p}(0) \times R . \quad (5.34)$$

Cette évolution amène donc, comme attendu, à compression de la position et un élargissement de l'impulsion d'un facteur $R = e^r$. La transformation des opérateurs création et annihilation associée est donnée par

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0) \cosh(r) - \hat{a}^\dagger(0) \sinh(r) \quad (5.35)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0) \cosh(r) - \hat{a}(0) \sinh(r) \quad (5.36)$$

ce qui correspond ni plus ni moins à une **transformation de Bogoliubov**. Ce type de transformation est couramment utilisé lors de la description de champs quantiques en espace courbe, notamment pour rendre compte de la création de particules par des tours noirs ou lors de la fin de la phase inflationnaire.

5.3.2 Lumière compressée à deux modes ("*Two-mode squeezed light*")

Les états de lumière compressés à deux modes sont des états non pas d'un, mais de deux oscillateurs (mécaniques ou électromagnétiques), auxquels il est d'usage d'associer les expérimentateurs fictifs Alice et Bob. Si nous appelons x_a et x_b leurs observables de position alors la fonction d'onde associée au produit tensoriel des états vides des deux oscillateurs $|0\rangle \otimes |0\rangle$ s'écrit, dans la base des positions,

$$\Psi_{00}(x_a, x_b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x_a^2}{2}} e^{-\frac{x_b^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x_a-x_b)^2}{4}} e^{-\frac{(x_a+x_b)^2}{4}}. \quad (5.37)$$

Elle est représentée dans la partie supérieure gauche de la figure 5.2. Son équivalent dans la base des impulsions $\Psi_{00}(p_a, p_b)$ s'écrit de manière analogue. Nous l'avons représenté dans le coin supérieur droit de la figure 5.2.

Tout comme pour des états mono-mode il est possible de définir un vide compressé à deux modes. Noté $|TMSV\rangle$ pour "*two-mode squeezed vacuum state*", sa fonction d'onde dans la représentation des positions est donnée par

$$\Psi_R(x_a, x_b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x_a+x_b)^2}{4R^2}} e^{-R^2 \frac{(x_a-x_b)^2}{4}}. \quad (5.38)$$

Sa contrepartie dans la base des impulsions est obtenue de celle dans la base des positions par transformée de Fourier et s'écrit

$$\tilde{\Psi}_R(p_a, p_b) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(p_a-p_b)^2}{4R^2}} e^{-R^2 \frac{(p_a+p_b)^2}{4}}. \quad (5.39)$$

Nous voyons qu'à la différence du double vide usuel le TMSV est un état intriqué. Par exemple pour des $R > 1$ les positions de Alice et Bob deviennent corrélées et leurs impulsions anti-corrélées.

En effet de manière similaire à l'état à un mode la compression d'un état à deux modes s'obtient sous action d'un opérateur de compression, dont l'expression est désormais

$$\hat{S}_2(\xi) = e^{-\xi \hat{a} \hat{b} + \xi^* \hat{a}^\dagger \hat{b}^\dagger}. \quad (5.40)$$

En appliquant la même démarche que pour le cas mono-mode, c'est à dire en supposant de nouveau un $\xi = r$ réel et en introduisant un Hamiltonien pour dicter la dynamique il est possible de montrer que

$$\hat{x}_a(t) \pm \hat{x}_b(t) = [\hat{x}_a(0) \pm \hat{x}_b(0)] e^{\pm r} \quad (5.41)$$

$$\hat{p}_a(t) \pm \hat{p}_b(t) = [\hat{p}_a(0) \pm \hat{p}_b(0)] e^{\mp r}, \quad (5.42)$$

où rappelons-le $r = \ln(R)$. Nous voyons ici que l'évolution à partir d'un état vide dans lequel ni les positions ni les impulsions de Alice et Bob ne sont corrélées entraîne une corrélation de leurs positions et une anti-corrélation de leurs impulsions.

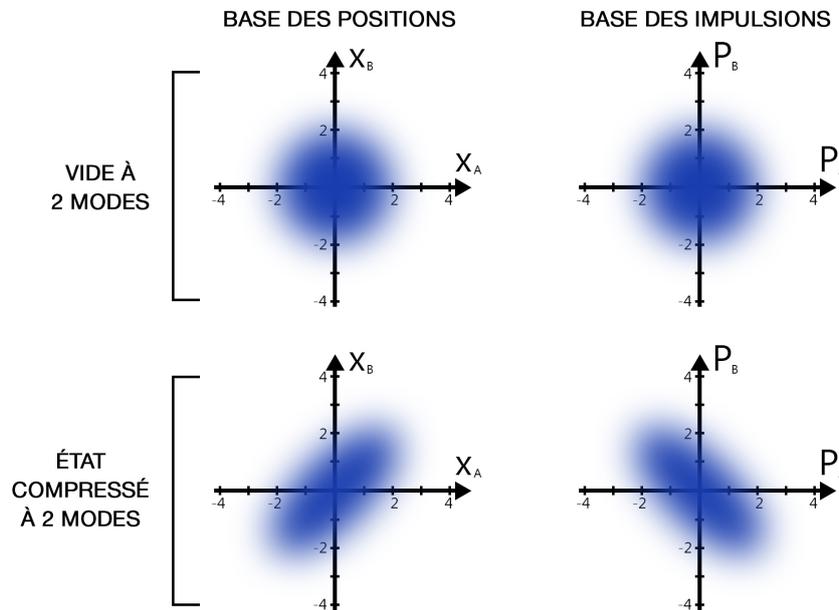


FIGURE 5.2 – Représentations dans les bases position et impulsion de fonctions d'onde décrivant différents états à deux modes. Partie supérieure : Le vide à deux modes n'est pas corrélé dans les deux cas. Partie inférieure : État compressé à deux modes présentant des observables de position corrélées et des observables d'impulsion anti-corrélées.

Remarque : L'état TMSV n'implique pas une compression individuelle de chaque mode. C'est même le contraire. En effet les positions et impulsions d'Alice et Bob dans le TMSV sont données par des distributions de probabilité gaussiennes de variances

$$\langle \Delta x_a^2 \rangle = \langle \Delta x_b^2 \rangle = \langle \Delta p_a^2 \rangle = \langle \Delta p_b^2 \rangle = \frac{1 + R^4}{4R^2}, \tag{5.43}$$

qui sont supérieures à celles de l'état vide non compressé dès lors que $R \neq 1$.

5.3.3 Comment génère-t-on des états optiques comprimés en laboratoire ?

La technique la plus couramment utilisée se base sur le procédé d'optique non linéaire appelé "*Spontaneous Parametric Down-conversion*", ou SPDC, selon lequel un photon issu d'un laser se propageant à travers un milieu optique non linéaire de second ordre⁹ peut fissionner en deux photons

9. Un milieu optique non-linéaire est un milieu dans lequel la polarisation de la matière induite par le champ électrique de la lumière qui s'y propage peut posséder des composantes non proportionnelles au champ lui-même. Cette polarisation induit un déplacement électronique. Cet effet est toujours faible et modélisé par la théorie des perturbations. Un milieu non-linéaire est dit de second ordre lorsque la polarisation de la matière induite par le passage de la lumière possède des termes quadratiques. Le déplacement électronique induit sera alors à l'origine de l'émission d'un nouveau champ électrique dont la longueur d'onde n'est pas identique à celle du champ incident mais à celle du terme quadratique lié au déplacement électronique.

de plus basse énergie. L'état quantique du mode optique qui en résulte et dans lequel les paires de photons sont émises est alors un état compressé.

Plus précisément l'état compressé de sortie ne possède qu'un seul mode lorsque le procédé de SPDC est dégénéré, *i.e* les deux photons qui en résultent sont indistinguables l'un de l'autre quelque soit le paramètre regardé : fréquence, direction, sens et polarisation. Les configurations non dégénérées correspondent elles à des états compressés à deux modes : les photons dans chacune des paires ainsi générées sont émis en deux modes distinguables caractérisés par l'état TMSV.

Remarque : La lumière compressée joue un grand rôle dans les mesures de distances qui requièrent une grande précision. De telles mesures sont en effet généralement effectuées à l'aide de méthodes interférométriques. Or le bruit de phase quantique ("*quantum phase noise*") constituait *a priori* une limite ultime à la précision qu'il était possible d'atteindre avec ces procédés. Mais l'utilisation d'états compressés de la lumière a permis de repousser cette limite sous la barrière définie par la "*Standard Quantum Limit*". De telles techniques sont notamment utilisées dans les nouvelles générations de grands interféromètres dédiés à la détection d'ondes gravitationnelles.

Quelques propriétés

Énumérons ci-dessous quelques propriétés qu'il peut être utile de garder en mémoire :

- (i) Le vide compressé à un mode possède un nombre pair de photons par mode, c'est pourquoi il était auparavant appelé "état cohérent à deux photons".
- (ii) Le vide compressé à deux modes possède lui un nombre moyen de photons par mode donné par $\langle n \rangle = \sinh^2(r)$. Son spectre en énergie est donné par une distribution de Boltzmann.
- (iii) Il est possible d'obtenir deux états vides compressés à un mode non intriqués à partir d'un TMSV.

5.4 Le GUP entraîne-t-il une compression des états de lumière ?

Laissons maintenant de côté le travail bibliographique et retournons à la problématique qui nous intéresse : la compression de différents états quantiques dont l'évolution est gouvernée par le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique corrigé par le GUP $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ donné Eq.(5.5).

Pour étudier la compression il nous faudra donc calculer la fonction de Wigner d'un état

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\Psi_0\rangle \quad (5.44)$$

où l'opérateur d'évolution est donné par

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t - \frac{i}{\hbar}\hat{H}_1t} . \quad (5.45)$$

L'état initial $|\Psi_0\rangle$ peut lui être donné par un état à n-photons $|n\rangle$, un état cohérent $|\alpha\rangle$, etc.

5.4.1 Un premier cas "simple"

Au titre de clarification avec un système simple, commençons par calculer l'évolution sous Hamiltonien de l'oscillateur harmonique usuel \hat{H}_0 d'une fonction d'onde dont l'état initial est un état cohérent.

Remarque : Ayant considéré un oscillateur harmonique usuel nous ne nous attendons pas à mettre en avant de la compression. En effet une évolution sous Hamiltonien de l'oscillateur harmonique standard correspond à une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre de l'espace des phases autour de son origine, ce qui ne génère pas de compression. L'enjeu est ici uniquement de se familiariser avec le formalisme.

L'opérateur d'évolution associé à cet Hamiltonien est

$$\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} = e^{-\frac{i}{\hbar}\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}\mathbb{1})t} \quad (5.46)$$

La fonction d'onde dans la base des "x" qui décrit l'évolution de l'état cohérent $|\alpha\rangle$ sous cet opérateur est

$$\Psi(x, t) = \langle x | \hat{U}(t) | \alpha \rangle . \quad (5.47)$$

Or souvenons-nous qu'un état cohérent peut être obtenu à partir de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique par action de l'opérateur de déplacement donné Eq.(5.25), de sorte que $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$.

La fonction d'onde du système s'écrit alors

$$\Psi(x, t) = \langle x | \hat{U}(t) \hat{D}(\alpha) | 0 \rangle . \quad (5.48)$$

Le calcul de cette fonction d'onde est donné dans l'annexe B. L'idée est surtout de montrer les démarches que nous souhaitons effectuer plus qu'un résultat définitif. Une fois notre résultat confirmé (ou infirmé) il nous faudra calculer la fonction de Wigner associée, définie comme

$$W(x, p) \equiv \frac{1}{\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x+y) \Psi(x-y) e^{\frac{2ipy}{\hbar}} dy . \quad (5.49)$$

C'est l'étude de cette fonction qui nous permettra par la suite de mettre en évidence une potentielle compression des états optiques considérés. Comme énoncé précédemment dans le cas ici considéré nous n'attendons pas de compression, celle-ci n'est potentiellement attendue que si le Hamiltonien donnant l'évolution diffère de celui de l'oscillateur harmonique usuel.

5.4.2 Évolution d'un état à n photons sous Hamiltonien de l'oscillateur harmonique corrigé par le GUP

Complexifions maintenant l'exercice en considérant une évolution sous Hamiltonien de l'oscillateur harmonique corrigé par le GUP. Nous cherchons donc ici à calculer l'évolution d'un état à n photons (plus simple que le cas d'un état cohérent) sous $\hat{U} = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$, où maintenant $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$.

La fonction d'onde dans la représentation des impulsions au temps t en commençant d'un état initial à n photons est donnée par :

$$\begin{aligned}
\Psi(x, t) &= \langle x | \hat{U}(t) | n \rangle & (5.50) \\
&= \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)t} | n \rangle \\
&= \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)t} \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)t} (\hat{a}^\dagger)^n \int dy | y \rangle \langle y | 0 \rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dy \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)t} (\hat{a}^\dagger)^n | y \rangle \Psi_0(y)
\end{aligned}$$

Le terme exponentiel peut être décomposé en produit d'exponentielles à l'aide de la formule de Zassenhaus :

$$\begin{aligned}
e^{t(X+Y)} &= e^{tX} e^{tY} e^{-\frac{t^2}{2}[X,Y]} e^{\frac{t^3}{6}([X,[X,Y]] + 2[Y,[X,Y]])} & (5.51) \\
&\quad \times e^{-\frac{t^4}{24}([[[X,Y],X],X] + 3[[[X,Y],X],Y] + 3[[[X,Y],Y],Y])} \dots
\end{aligned}$$

Pour effectuer cette décomposition il nous faut donc commencer par calculer le commutateur $[\hat{H}_0, \hat{H}_1]$. Cela peut être facilement fait en utilisant la propriété

$$\begin{aligned}
[\hat{N}, (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^k] &= [\hat{a}^\dagger \hat{a}, (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^k] & (5.52) \\
&= \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^k - (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^k \hat{a}^\dagger \hat{a} \\
&= \hat{a}^\dagger (n(\hat{a}^\dagger)^{n-1} + (\hat{a}^\dagger)^n a) \hat{a}^k - (\hat{a}^\dagger)^n (k\hat{a}^{k-1} + \hat{a}^\dagger \hat{a}^k) \hat{a} \\
&= (n - k)(\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^k .
\end{aligned}$$

Cela donne

$$\begin{aligned}
[\hat{H}_0, \hat{H}_1] &= \left[\hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right), \frac{\beta}{3} \hat{p}^4 \right] & (5.53) \\
&= \beta \frac{\hbar^3 \omega^3}{12} \left[\hat{N}, (\hat{a}^\dagger)^4 - 4(\hat{a}^\dagger)^3 \hat{a} + 6(\hat{a}^\dagger)^2 \hat{a}^2 - 4\hat{a}^\dagger \hat{a}^3 + \hat{a}^4 - 6(\hat{a}^\dagger)^2 - 6\hat{a}^2 + 12\hat{a}^\dagger \hat{a} + 3\mathbb{1} \right] \\
&= \beta \frac{\hbar^3 \omega^3}{12} (4 \times ((\hat{a}^\dagger)^4 - 2(\hat{a}^\dagger)^3 \hat{a} + 2\hat{a}^\dagger \hat{a}^3 - \hat{a}^4 - 3(\hat{a}^\dagger)^2 + 3\hat{a}^2)) \\
&\neq 0 .
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la relation de commutation $[\hat{H}_0, [\hat{H}_0, \hat{H}_1]]$, toujours en utilisant la propriété donnée Eq.(5.53) :

$$\begin{aligned}
[\hat{H}_0, [\hat{H}_0, \hat{H}_1]] &= \left[\hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \mathbb{1} \right), \beta \frac{\hbar^3 \omega^3}{12} (4(\hat{a}^\dagger)^4 - 8(\hat{a}^\dagger)^3 \hat{a} + 8\hat{a}^\dagger \hat{a}^3 - 4\hat{a}^4 - 12(\hat{a}^\dagger)^2 + 12\hat{a}^2) \right] & (5.54) \\
&= \beta \frac{\hbar^4 \omega^4}{12} \left[\hat{N}, 4(\hat{a}^\dagger)^4 - 8(\hat{a}^\dagger)^3 \hat{a} + 8\hat{a}^\dagger \hat{a}^3 - 4\hat{a}^4 - 12(\hat{a}^\dagger)^2 + 12\hat{a}^2 \right] \\
&= \beta \frac{\hbar^4 \omega^4}{12} (8 \times (2(\hat{a}^\dagger)^4 - 2(\hat{a}^\dagger)^3 \hat{a} - 2\hat{a}^\dagger \hat{a}^3 + 2\hat{a}^4 - 3(\hat{a}^\dagger)^2 - 3\hat{a}^2)) \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Si nous associons $\hat{H}_0 \leftrightarrow X$ et $\hat{H}_1 \leftrightarrow Y$ dans la formule de Zassenhaus donnée Eq.(5.52), tous les termes qui contiennent plus de un symbole Y peuvent être négligés comparé aux termes avec seulement zéro ou un Y (car Y est proportionnel à β).

La fonction d'onde s'écrit

$$\begin{aligned}
 \Psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dy \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)t} (\hat{a}^\dagger)^n | y \rangle \Psi_0(y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dy \langle x | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t} e^{-(-\frac{i}{\hbar}t)^2 [\hat{H}_0, \hat{H}_1]} e^{-(-\frac{i}{\hbar}t)^3 [\hat{H}_0, [\hat{H}_0, \hat{H}_1]]} \dots (\hat{a}^\dagger)^n | y \rangle \Psi_0(y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dy \langle x | \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t} e^{-(-\frac{i}{\hbar}t)^2 [\hat{H}_0, \hat{H}_1]} \\
 &\quad \times e^{-(-\frac{i}{\hbar}t)^3 [\hat{H}_0, [\hat{H}_0, \hat{H}_1]]} \dots (\hat{a}^\dagger)^n \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle \langle m| y \rangle \Psi_0(y) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n!}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \int dy \langle x | n \rangle \langle n | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t} e^{-(-\frac{i}{\hbar}t)^2 [\hat{H}_0, \hat{H}_1]} \\
 &\quad \times e^{-(-\frac{i}{\hbar}t)^3 [\hat{H}_0, [\hat{H}_0, \hat{H}_1]]} \dots (\hat{a}^\dagger)^n | m \rangle \langle m | y \rangle \Psi_0(y)
 \end{aligned} \tag{5.55}$$

Remarque : Ici $\langle x | n \rangle$ et $\langle m | y \rangle$ représentent les fonctions propres (ou leurs formes duales) du Hamiltonien de l'oscillateur harmonique généralisé dans les bases "x" et "y". Elles sont données dans le cas de l'oscillateur harmonique quantique standard par des polynômes de Hermite sous leur forme physique (c.f Annexe B), mais correspondent dans le cas présent à des fonctions hypergéométriques, ce qui compliquera la tâche.

Poursuivons le développement :

$$\begin{aligned}
 \Psi(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dy \langle x | n \rangle \langle n | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} \sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle \langle k| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t} \sum_{l=0}^{\infty} |l\rangle \langle l| e^{-(-\frac{i}{\hbar}t)^2 [\hat{H}_0, \hat{H}_1]} \\
 &\quad \times \sum_{p=0}^{\infty} |p\rangle \langle p| e^{-(-\frac{i}{\hbar}t)^3 [\hat{H}_0, [\hat{H}_0, \hat{H}_1]]} \dots \sum_{q=0}^{\infty} |q\rangle \langle q| (\hat{a}^\dagger)^n | m \rangle \langle m | y \rangle \Psi_0(y) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int dy \langle x | n \rangle \langle n | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} |k\rangle \langle k| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_1 t} |l\rangle \langle l| e^{-(-\frac{i}{\hbar}t)^2 [\hat{H}_0, \hat{H}_1]} |p\rangle \\
 &\quad \times \langle p | e^{-(-\frac{i}{\hbar}t)^3 [\hat{H}_0, [\hat{H}_0, \hat{H}_1]]} \dots |q\rangle \langle q| (\hat{a}^\dagger)^n | m \rangle \langle m | y \rangle \Psi_0(y)
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Le terme associé à l'oscillateur harmonique quantique standard est simple à traiter. Il s'écrit

$$\begin{aligned}
 \langle n | e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t} |k\rangle &= \langle n | e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}\mathbb{1})t} |k\rangle \\
 &= e^{-i\omega(k + \frac{1}{2})t} \langle n | k \rangle \\
 &= e^{-i\omega(k + \frac{1}{2})t} \delta_{nk} .
 \end{aligned} \tag{5.57}$$

La situation devient en revanche rapidement plus complexe lorsque l'on s'intéresse au terme perturbé du Hamiltonien :

$$\begin{aligned}
\langle k | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_1 t} | l \rangle &= \langle k | \sum_{b=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{i}{\hbar}\right) \hat{H}_1^b t^b}{b!} | l \rangle \\
&= \langle k | \sum_{b=0}^{\infty} \frac{\left(-i \frac{\beta \hbar \omega^2}{12} t\right)^b}{b!} (\hat{a}^\dagger - \hat{a})^{4b} | l \rangle
\end{aligned} \tag{5.58}$$

Remarque : Pour poursuivre il nous faut développer l'identité $(\hat{a}^\dagger - \hat{a})^{4b}$. Trouver une expression utilisable pratiquement de $(A + B)^n$ quand $[A, B] \neq 0$ constitue donc la prochaine étape non-triviale de cette étude.

La valeur non nulle des commutateurs $[\hat{H}_0, \hat{H}_1]$, $[\hat{H}_0, [\hat{H}_0, \hat{H}_1]]$ (et probablement de commutateurs "d'ordres plus élevés") rend donc la décomposition de $\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(\hat{H}_0 + \hat{H}_1)t\right\}$ compliquée et il nous faut trouver une solution pour résoudre ou contourner cette difficulté.

Voici donc l'état de l'art de cette étude. Nous sommes encore loin du but et la question initiale demeure à ce stade hors d'atteinte. C'est néanmoins un projet potentiellement pertinent et en dépit du caractère bien préliminaire du niveau de développement que nous avons atteint, il me semblait opportun de le présenter brièvement ici.

Sur la question de la détectabilité

Au-delà de l'aspect purement formel, ce projet serait plus motivant encore s'il pouvait conduire à des effets mesurables. Rien n'est moins sûr. Les sources astrophysiques de lumière cohérente sont rares. Suivant [209] nous pouvons d'abord citer certains plasmas dont l'émission se fait en plusieurs étapes (ondes Langmuir et conversion de la turbulences en rayonnement). Ensuite l'émission maser, essentiellement associée à l'accélération par un champ électrique parallèle au sein d'une zone de lignes magnétiques convergentes. Enfin, l'émission radio des pulsars. De plus, même en recourant à ces sources (en partie exotiques et mal comprises) rien n'assure que les effets ici calculés soient mesurables, d'autant que la cohérence concerne surtout les émissions basse fréquence. À ce stade, il est donc raisonnable de conclure que le lien avec les observations est loin d'être établi. Mais il n'est pas, en principe, impossible.

Conclusions et perspectives

Bien que la gravitation quantique à boucles (LQG) soit l'une des approches les plus convaincantes vers une description quantique de la gravitation, ses prédictions expérimentales nécessitent encore d'être consolidées. Dans ce manuscrit nous avons considéré trois de ses cadres d'application : le système Univers, les trous noirs et les astroparticules. Le troisième n'a été qu'esquissé mais les deux premiers ont été étudiés plus en détails.

Résumé des travaux effectués

Dans le secteur cosmologique

La cosmologie est sans nul doute l'une des voies les plus prometteuses pour tenter d'établir des liens avec les observations. Plus particulièrement, les spectres de puissance primordiaux permettent de combler la brèche entre théories de gravité quantique et données et ont de fait été calculés dans différents modèles cosmologiques basés sur la LQG. Le plus populaire de ces modèles, baptisé cosmologie quantique à boucles (LQC), prédit notamment l'existence d'un rebond cosmologique en remplacement de la singularité initiale du Big Bang.

Afin de confronter les formes des spectres de puissance primordiaux prédites par un quelconque modèle aux données sur le fond diffus cosmologique (CMB) il nous faut savoir quelle région de ces spectres correspond aux échelles observées dans le CMB. L'emplacement de cette fenêtre observable dépend du nombre d'*e-folds* entre le moment du rebond et la recombinaison et donc du nombre d'*e-folds* d'inflation N , démontrant l'importance de ce paramètre pour nos travaux. Plusieurs études portant sur la durée de l'inflation en LQC sont antérieures aux nôtres mais elles supposaient, entre autres, une forme quadratique du potentiel de l'inflaton, non favorisée par les données. Nous avons généralisé ces travaux en considérant non seulement d'autres potentiels du champ d'inflaton, mais également d'autres possibilités de définir les conditions initiales et différents taux d'anisotropies ; ceci dans un but d'exhaustivité. Nous confirmons que, sous certaines hypothèses conservatives, la LQC, à la différence de la cosmologie standard, a la remarquable propriété de prédire une fonction de densité de probabilité (PDF) de N piquée sur des valeurs étonnamment proches de la valeur minimale $N \simeq 60 - 70$. Nous avons également mené une autre étude visant à éclaircir l'origine de cette capacité prédictive dans laquelle nous montrons que la valeur de N est déterminée par la densité d'énergie critique atteinte au moment du rebond (pour des conditions initiales et une forme du potentiel d'inflaton données).

Suite à ces études sur la durée de l'inflation en LQC nous sommes en mesure de savoir quelle région des spectres de puissances primordiaux est sujette aux contraintes expérimentales. Les formes des spectres de puissance primordiaux scalaire et tenseur en LQC avaient déjà été obtenues lorsque j'ai débuté cette thèse, mais plusieurs éléments intervenant dans les calculs n'étaient pas sous contrôle et avaient besoin d'être précisés. Le plus important d'entre eux est sans aucun doute le problème trans-

planckien. Nous avons montré son importance capitale pour confronter les modèles aux observations. Nous avons également étudié la sensibilité du spectre scalaire aux conditions initiales ainsi qu'à la forme du potentiel d'inflaton. Nous avons montré la robustesse de ce spectre dans la région correspondant aux modes d'intérêt cosmologique, renforçant les prédictions déjà établies de la LQC.

La "*Quantum reduced loop gravity*" (QRLG) est une nouvelle proposition visant à importer les idées et concepts de la LQG dans le secteur cosmologique. À la différence de la LQC l'application des symétries y est effectuée après la quantification. Dans ce modèle la singularité initiale du Big Bang est maintenant remplacée par un scénario mélangeant rebonds et Univers émergent. Nous avons commencé à développer la phénoménologie associée, à la fois dans les secteurs homogène et inhomogène. Il s'avère que le modèle est en accord avec les données pour la quasi totalité de l'espace des paramètres exploré. En complément de ces travaux nous avons effectué une autre étude sur les Univers rebond-émergents qui nous a permis de mettre en avant la manière dont les propriétés des rebonds sont liées à celles des oscillations qu'ils engendrent dans les spectres primordiaux. Nous y avons également montré que, contrairement à ce qui peut être pensé, une normalisation initiale de type Bunch-Davies suivie par une phase d'inflation ne mène pas forcément à des spectres (quasi) invariants d'échelle.

Dans le secteur des trous noirs

Des manifestations du caractère quantique du champ gravitationnel sont également attendues dans le secteur des trous noirs. Il a été avancé qu'une meilleure prise en compte des effets quantiques amène, de manière analogue au rebond cosmologique présent en LQC, à un modèle de trou noir en rebond, ou plus précisément à la prédiction d'une transition tunnel d'un état trou noir vers un état trou blanc. Durant ma thèse nous avons montré l'importance du caractère stochastique du temps de rebond pour l'énergie du signal associé. En plus de cela nous avons calculé les coefficients de corps gris pour un espace-temps décrit par une métrique inspirée par la LQG. Suivant l'engouement suscité par les récentes observations d'ondes gravitationnelles provenant de coalescences de systèmes binaires nous sommes également intéressés aux modes quasi-normaux de relaxation des trous noirs. Nous avons notamment montré que la présence d'effets de gravité quantique hors de l'horizon entraîne une déviation de ces modes, observable pour des trous noirs bien plus lourds que la masse de Planck. Dans une autre étude nous avons mis en évidence des comportements non triviaux de la distance de luminosité dans un Univers en contraction, ré-ouvrant la question de la détectabilité d'évènements pré-rebond. Enfin nous avons reconsidéré la possibilité que la matière noire soit composée de reliques stables de trous noirs microscopiques en postulant ce coup-ci que ces trous noirs aient été formés par collision de particules trans-planckiennes. Au prix d'une température de "*reheating*" plus élevée que l'ordinaire nous retrouvons une densité de reliques correspondant à celle de la matière noire. À une époque où les candidats à la matière noire se font de plus en plus complexes et exotiques l'idée d'un modèle faisant appel à peu de nouvelle physique est alléchante.

En plus de ces différents travaux j'ai participé à la rédaction d'un article de synthèse couvrant la phénoménologie associée aux trous noirs en gravité quantique à boucles. Les sujets traités reprennent ceux énoncés ci-dessus et couvrent donc un large spectre, allant du rayonnement de Hawking aux ondes gravitationnelles, en passant par la matière noire ...

Dans le secteur des astroparticules

L'existence d'une échelle de longueur minimale, prédite par la majorité des théories de gravité quantique, requiert une généralisation du principe d'incertitude de Heisenberg. Dans ce manuscrit nous avons abordé un projet actuellement en cours dans lequel nous proposons une méthodologie pour calculer une nouvelle relation de dispersion de la lumière à partir du principe d'incertitude généralisé

le plus usuel. Nous prévoyons bien évidemment de mettre en application cette méthodologie dès que possible. Nous exposons également le début de nos travaux visant à déterminer si ce principe d'incertitude généralisé modifie certaines des propriétés quantiques de la lumière.

Conclusions et perspectives

Conclusions

Nous avons vu que la gravitation quantique à boucles a engendré différents modèles cosmologiques qui possèdent des prédictions claires quant au devenir de l'Univers homogène à haute densité d'énergie, ce qui constitue déjà un résultat remarquable en soi. Cependant le désir de comparer ces différents modèles aux données sur le fond diffus cosmologique se heurte à une difficulté pour le moment radicale : le problème trans-planckien. Une description cohérente et non ambiguë du comportement sub-planckien des modes doit être une, si ce n'est la, priorité dans le secteur cosmologique. Tant que celle-ci n'aura pas été correctement établie il me semble difficile, si ce n'est impossible, d'espérer exclure ou corroborer les différents modèles à l'aide des contraintes venant du CMB. L'importance de ce problème a également été mise en avant par d'autres cosmologistes et sa résolution constitue à mon avis le prochain challenge majeur pour la communauté.

Les trous noirs peuvent potentiellement permettre d'observer des effets de gravité quantique à basse énergie (nous avons par exemple discuté dans ce manuscrit la possibilité qu'ils émettent des signaux radios). Cette perspective justifierait à mon avis à elle seule de continuer à développer la phénoménologie associée. Mais la conjoncture actuelle est bien plus réjouissante. Les mesures d'ondes gravitationnelles par les grands interféromètres et l'effervescence qui les accompagne font que nous nous trouvons à une période privilégiée pour la physique des trous noirs et il est de pensée commune que ces derniers constituent plus que jamais des sondes remarquables vers de potentiels effets de gravité quantique.

Perspectives

L'avenir proche de la cosmologie s'articule majoritairement autour de deux axes :

- D'une part les expériences LSST et Euclid vont permettre à relativement court terme de mieux contraindre l'accélération de l'expansion en déterminant si l'équation d'état de l'énergie noire est constante ou dynamique. Il est hélas peu probable que les nouvelles contraintes qu'elles apporteront soient utiles au développement de la LQG, bien que des liens entre gravité quantique et énergie noire puissent exister (l'idée que des corrections à l'équation de Wheeler-DeWitt puissent rendre compte de l'accélération actuelle de l'expansion a par exemple été émise [210]).
- D'autre part de grands efforts sont actuellement déployés pour détecter les modes B primordiaux. La confrontation de la relation de consistance de l'inflation (qui lie les indices scalaire et tenseur au rapport tenseur-scalaire) à cette mesure constituera un véritable test du modèle inflationnaire. Une mise en défaut de ce dernier laisserait la porte ouverte à des modèles de cosmologie quantique. Néanmoins il n'est pas évident que l'indice spectral tenseur puisse être mesuré avec la prochaine génération d'instruments. En tout cas, dans un domaine de recherche où chaque lien avec les observations est précieux, l'arrivée de nouvelles contraintes permettant d'affiner les modèles est évidemment bénéfique.

Concernant les trous noirs il n'y a à ma connaissance aucune raison de penser que l'effet Hawking puisse être observé dans un futur proche (si nous mettons de côté les systèmes analogues). Les espoirs

se tournent donc une fois de plus vers les ondes gravitationnelles, où les perspectives sont beaucoup plus réjouissantes. L'arrivée de la troisième génération de grands interféromètres avec le *Einstein Telescope* va permettre, en améliorant la résolution sur le fondamental des modes quasi-normaux et en mettant éventuellement en évidence les premières harmoniques, d'affiner grandement les contraintes associées. Contraintes qui sont d'un intérêt particulier car généralement très spécifiques et non redondantes.

Nous pouvons également mentionner que la possibilité de détecter des effets de gravité quantique à l'aide de la très récente et magnifique observation effectuée par l'*Event Horizon Telescope* (EHT) n'est pas nulle. Il a en effet été avancé dans [211] que la présence de corrections quantiques à des échelles proches de l'horizon induit une variabilité temporelle de la métrique potentiellement observable sur les images de l'EHT.

En définitive

Depuis un siècle la recherche d'une théorie quantique de la gravitation est considérée comme l'un des graals de la physique. Après avoir été longtemps pénalisée par son absence de lien avec les observations, la gravité quantique est désormais entrée dans le champ de la science observationnelle. Sa mise en évidence n'est certes pas encore du domaine du réel, mais déjà de celui du réalisable. L'objectif me semble être désormais à notre portée.

ANNEXE A

Calcul du potentiel des modes scalaires en LQC dans le cas d'un potentiel quadratique du champ d'inflaton

Nous cherchons ici à exprimer le potentiel des modes scalaires z''_S/z_S en fonction du paramètre de Hubble H ainsi que des caractéristiques du champ d'inflaton.

Rappelons que $z_S = a\dot{\phi}/H = a^2\dot{\phi}/\dot{a}$.

De plus $z'_S = a\dot{a}\dot{z}_S + a^2\ddot{z}_S$, donc

$$\frac{z''_S}{z_S} = \frac{a\dot{a}\dot{z}_S + a^2\ddot{z}_S}{\frac{a\dot{\phi}}{H}} = a^2 \left(\frac{H^2}{a\dot{\phi}} \dot{z}_S + \frac{\dot{a}}{\dot{\phi}a^2} \ddot{z}_S \right).$$

Commençons par calculer \dot{z}_S :

$$\begin{aligned} \dot{z}_S &= \frac{(2a\dot{a}\dot{\phi} + a^2\ddot{\phi})\dot{a} - \ddot{a}(a^2\dot{\phi})}{\dot{a}^2} \\ &= 2a\dot{\phi} + \frac{a^2}{\dot{a}}(-3H\dot{\phi} - m^2\phi) - \ddot{a}\frac{a^2}{\dot{a}^2}\dot{\phi} \\ &= 2a\dot{\phi} - 3a\dot{\phi} - m^2\frac{a^2\phi}{\dot{a}} - \frac{a^2}{\dot{a}^2}\dot{\phi}[a(\dot{H} + H^2)] \\ &= -a\dot{\phi} - m^2\frac{a^2\phi}{\dot{a}} + \frac{\kappa}{2}\dot{\phi}^3\Omega\frac{a^3}{\dot{a}^2} - a\dot{\phi} \\ &= -2a\dot{\phi} - m^2\frac{a\phi}{H} + \frac{\kappa}{2}\Omega\dot{\phi}^3\frac{a}{H^2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{H^2}{a\dot{\phi}}\dot{z}_S = -2H^2 - m^2\frac{\phi}{\dot{\phi}}H + \frac{\kappa}{2}\Omega\dot{\phi}^2.$$

Calculons maintenant \ddot{z}_S :

$$\begin{aligned}\ddot{z}_S &= -2\dot{a}\dot{\phi} - 2a\ddot{\phi} - m^2 \left[\frac{(\dot{a}\phi + a\dot{\phi})H - \dot{H}a\phi}{H^2} \right] + \frac{\kappa}{2} \left[\dot{\Omega} \left(\dot{\phi}^3 \frac{a}{H^2} \right) + \Omega \frac{d}{dt} \left(\dot{\phi}^3 \frac{a}{H^2} \right) \right] \\ &= -2\dot{a}\dot{\phi} - 2a\ddot{\phi} - m^2 \left(\frac{\dot{a}\phi}{H} + \frac{a\dot{\phi}}{H} - \frac{a\phi\dot{H}}{H^2} \right) + \frac{\kappa}{2} \dot{\Omega} \dot{\phi}^3 \frac{a}{H^2} + \frac{\kappa}{2} \Omega \left[3\dot{\phi}\dot{\phi}^2 \frac{a}{H^2} + \dot{\phi}^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{a}{H^2} \right) \right] \\ &= -2\dot{a}\dot{\phi} - 2a(-3H\dot{\phi} - m^2\phi) - m^2 \frac{\dot{a}\phi}{H} - m^2 \frac{a\dot{\phi}}{H} + m^2 \frac{a\phi\dot{H}}{H^2} + \frac{\kappa}{2} \dot{\Omega} \dot{\phi}^3 \frac{a}{H^2} + \frac{3\kappa}{2} \Omega \dot{\phi}\dot{\phi}^2 \frac{a}{H^2} \\ &\quad + \frac{\kappa}{2} \Omega \dot{\phi}^3 \frac{\dot{a}}{H^2} - \kappa \Omega \frac{\dot{\phi}^3 \dot{H} a}{H^3} .\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{\dot{a}}{\dot{\phi}a^2} \ddot{z}_S &= -2H^2 + 6Ha\dot{\phi} \frac{\dot{a}}{\dot{\phi}a^2} + 2am^2\phi \frac{\dot{a}}{\dot{\phi}a^2} - m^2 \frac{H^2\phi}{H\dot{\phi}} - m^2 + m^2 \frac{H\phi\dot{H}}{\dot{\phi}H^2} + \frac{\kappa}{2} \dot{\Omega} \frac{\dot{\phi}^2}{H} + \frac{3\kappa}{2} \Omega \frac{\dot{\phi}\dot{\phi}}{H} \\ &\quad + \frac{\kappa}{2} \Omega \dot{\phi}^2 - \kappa \Omega \frac{\dot{\phi}^2 \dot{H}}{H^2} \\ &= -2H^2 + 6H^2 + 2m^2 \frac{\phi}{\dot{\phi}} H - m^2 H \frac{\phi}{\dot{\phi}} - m^2 + m^2 \frac{\phi\dot{H}}{\dot{\phi}H} + \frac{\kappa}{2} \dot{\Omega} \frac{\dot{\phi}^2}{H} + \frac{3\kappa}{2} \Omega \frac{\dot{\phi}\dot{\phi}}{H} + \frac{\kappa}{2} \Omega \dot{\phi}^2 - \kappa \Omega \dot{\phi}^2 \frac{\dot{H}}{H^2} .\end{aligned}$$

Le potentiel des modes scalaires s'écrit en fonction de la somme des deux précédents termes :

$$\begin{aligned}\frac{z_S''}{z_S} &= a^2 \left(\frac{H^2}{a\dot{\phi}} \dot{z}_S + \frac{\dot{a}}{\dot{\phi}a^2} \ddot{z}_S \right) \\ &= a^2 \left[2H^2 - m^2 + m^2 \frac{\phi}{\dot{\phi}} \frac{\dot{H}}{H} + \kappa \Omega \dot{\phi}^2 + \frac{\kappa}{2} \dot{\Omega} \frac{\dot{\phi}^2}{H} + \frac{3\kappa}{2} \Omega \frac{(-3H\dot{\phi} - m^2\phi)\dot{\phi}}{H} - \kappa \Omega \dot{\phi}^2 \frac{\dot{H}}{H^2} \right] \\ &= a^2 \left[-m^2 + 2H^2 + \kappa \Omega \dot{\phi}^2 + m^2 \frac{\phi}{\dot{\phi}H} \left(\frac{-\kappa}{2} \dot{\phi}^2 \Omega \right) + \frac{\kappa}{2} \dot{\Omega} \frac{\dot{\phi}^2}{H} - \frac{9\kappa}{2} \Omega \dot{\phi}^2 - \frac{3\kappa}{2} \Omega m^2 \frac{\phi\dot{\phi}}{H} - \kappa \Omega \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \left(-\frac{\kappa}{2} \dot{\phi}^2 \Omega \right) \right] \\ &= a^2 \left(-m^2 + 2H^2 - 2\kappa \Omega m^2 \frac{\phi\dot{\phi}}{H} - \frac{7}{2} \kappa \Omega \dot{\phi}^2 + \frac{\kappa^2}{2} \Omega^2 \frac{\dot{\phi}^4}{H^2} + \frac{\kappa}{2} \dot{\Omega} \frac{\dot{\phi}^2}{H} \right) .\end{aligned}$$

Or dans le cas d' un potentiel quadratique du champ d'inflaton $\dot{\Omega} = 6H\dot{\phi}^2/\rho_c$, menant à

$$\frac{z_S''}{z_S} = a^2 \left(-m^2 + 2H^2 - 2\kappa \Omega m^2 \frac{\phi\dot{\phi}}{H} - \frac{7}{2} \kappa \Omega \dot{\phi}^2 + \frac{\kappa^2}{2} \Omega^2 \frac{\dot{\phi}^4}{H^2} + \frac{3\kappa}{\rho_c} \dot{\phi}^4 \right) .$$

ANNEXE B

Calcul de l'évolution de la fonction d'onde d'un état cohérent sous Hamiltonien de l'oscillateur harmonique usuel

Le Hamiltonien de l'oscillateur harmonique est donné, avec la reparamétrisation $p \rightarrow p/\sqrt{m}$, $x \rightarrow \sqrt{m}x$, par :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 \hat{X}^2 . \quad (\text{B.1})$$

En effectuant le changement de variables

$$\hat{X} = \sqrt{\omega} \hat{x} \quad \text{et} \quad \hat{P} = \frac{\hat{p}}{\sqrt{\omega}} \quad (\text{B.2})$$

et en introduisant les opérateurs annihilation et création

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P}) \quad \text{et} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P}) \quad (\text{B.3})$$

cet Hamiltonien peut être ré-écrit comme

$$\hat{H} = \frac{\omega}{2}(\hat{X}^2 + \hat{P}^2) = \omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\mathbb{1}\right) , \quad (\text{B.4})$$

où $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ correspond à l'opérateur de nombre.

L'état fondamental du système est défini par

$$\begin{aligned} \hat{a}|0\rangle = 0 &\Leftrightarrow \left(X + \frac{d}{dX}\right)\Psi_0(X) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Psi_0(X) = C e^{-\frac{X^2}{2}} . \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

La constante $C = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{i\varphi}$ est obtenue à l'aide de la normalisation $\langle 0|0\rangle = 1$. L'état fondamental est alors

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{i\varphi} e^{-\frac{1}{2}\omega x^2} \quad \text{ou} \quad \Psi_0(X) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{i\varphi} e^{-\frac{X^2}{2}} . \quad (\text{B.6})$$

La fonction d'onde dans la base des "x" qui décrit l'évolution d'un état cohérent $|\alpha\rangle$ sous le précédent Hamiltonien est donnée par

$$\Psi(x, t) = \langle x | \hat{U}(t) | \alpha \rangle \quad (\text{B.7})$$

où $\hat{U}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}\mathbb{1})t}$ correspond à l'opérateur évolution associé au Hamiltonien Eq.(B.4).

L'état cohérent est obtenu à partir de l'état fondamental à l'aide de l'opérateur déplacement $\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}}$, de sorte que $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle$.

La fonction d'onde peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \langle x | \hat{U}(t) \hat{D}(\alpha) | 0 \rangle \\ &= \langle x | \hat{U}(t) \hat{D}(\alpha) \int dy |y\rangle \langle y|0\rangle \\ &= \int dy \langle x | \hat{U}(t) \hat{D}(\alpha) |y\rangle \Psi_0(y) , \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

où nous avons utilisé la relation de fermeture $\mathbb{1} = \int dy |y\rangle \langle y|$. Pour obtenir la fonction d'onde il nous faut donc calculer les éléments de matrice $\langle x | \hat{U}(t) \hat{D}(\alpha) |y\rangle$.

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{U}(t) \hat{D}(\alpha) |y\rangle &= \langle x | \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| \hat{U}(t) \hat{D}(\alpha) \sum_{m=0}^{\infty} |m\rangle \langle m|y\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \langle x|n\rangle \langle n| \hat{U}(t) \hat{D}(\alpha) |m\rangle \langle m|y\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

où nous avons utilisé la version discrète de la relation de fermeture $\mathbb{1} = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|$. Les termes $\langle x|n\rangle$ et $\langle m|y\rangle$ représentent les fonctions propres de l'oscillateur harmonique (ou leurs formes duales) dans les bases x et y . Vient alors

$$\langle n | \hat{U}(t) \hat{D}(\alpha) |m\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle n | \hat{U}(t) |k\rangle \langle k | \hat{D}(\alpha) |m\rangle , \quad (\text{B.10})$$

avec

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{U}(t) |k\rangle &= \langle n | e^{-\frac{i}{\hbar}\omega(\hat{N} + \frac{1}{2}\mathbb{1})t} |k\rangle \\ &= e^{-i\omega(k + \frac{1}{2})t} \langle n | k \rangle \\ &= e^{-i\omega(k + \frac{1}{2})t} \delta_{nk} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

et

$$\begin{aligned} \langle k | \hat{D}(\alpha) |m\rangle &= \langle k | e^{\alpha\hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^*\hat{a}} |m\rangle e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \langle k | e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |l\rangle \langle l | e^{-\alpha^*\hat{a}} |m\rangle e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

De plus

$$\begin{aligned} \langle k | e^{\alpha \hat{a}^\dagger} | l \rangle &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha^i}{i!} \langle k | (\hat{a}^\dagger)^i | l \rangle \\ &= \begin{cases} \frac{\alpha^{k-l}}{(k-l)!} \sqrt{\frac{k!}{l!}}, & k \geq l \\ 0, & k < l \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

et

$$\begin{aligned} \langle l | e^{-\alpha^* \hat{a}} | m \rangle &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^*)^i}{i!} \langle l | \hat{a}^i | m \rangle \\ &= \begin{cases} \frac{(-\alpha^*)^{m-l}}{(m-l)!} \sqrt{\frac{m!}{l!}}, & m \geq l \\ 0, & m < l \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

En insérant les équations (B.13) et (B.14) dans l'équation (B.12) nous obtenons :

$$\langle k | \hat{D}(\alpha) | m \rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k-l}}{(k-l)!} \frac{(-\alpha^*)^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\sqrt{k!m!}}{l!}, \quad k \geq l \quad m \geq l \quad (\text{B.15})$$

et l'équation (B.10) est donnée par

$$\begin{aligned} \langle n | \hat{U}(t) \hat{D}(\alpha) | m \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i\omega(k+\frac{1}{2})t} \delta_{nk} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k-l}}{(k-l)!} \frac{(-\alpha^*)^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\sqrt{k!m!}}{l!}, \quad k \geq l \quad m \geq l \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\alpha^{n-l}}{(n-l)!} \frac{(-\alpha^*)^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\sqrt{n!m!}}{l!}, \quad n \geq l \quad m \geq l. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Finalement Eq.(B.9) devient

$$\begin{aligned} \langle x | \hat{U}(t) \hat{D}(\alpha) | y \rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\langle x | n \rangle e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\alpha^{n-l}}{(n-l)!} \frac{(-\alpha^*)^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\sqrt{n!m!}}{l!} \langle m | y \rangle \right], \quad n \geq l \quad m \geq l, \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=l}^{\infty} \sum_{m=l}^{\infty} \langle x | n \rangle e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} \frac{\alpha^{n-l}}{(n-l)!} \frac{(-\alpha^*)^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\sqrt{n!m!}}{l!} \langle m | y \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Or les états propres de \hat{N} dans la base des "x" s'écrivent :

$$\langle x | n \rangle = \Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\sqrt{\omega} x - \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{d}{dx} \right)^n \Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \hat{H}_n(\sqrt{\omega} x) \Psi_0(x) \quad (\text{B.18})$$

où les $\hat{H}_n(\sqrt{\omega}x)$ correspondent aux polynômes d'Hermite sous leur forme physique. Nous avons également

$$\langle m|y\rangle = \Psi_m^*(y) = \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} \left(\sqrt{\omega}y + \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{d}{dy} \right)^m \Psi_0^*(y) = \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} \hat{H}_m(\sqrt{\omega}y) \Psi_0^*(y). \quad (\text{B.19})$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \langle x|\hat{U}(t)\hat{D}(\alpha)|y\rangle &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=l}^{\infty} \sum_{m=l}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \hat{H}_n(\sqrt{\omega}x) \Psi_0(x) e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\alpha^{n-l}}{(n-l)!} \frac{(-\alpha^*)^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\sqrt{n!m!}}{l!} \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} \hat{H}_m(\sqrt{\omega}y) \Psi_0^*(y) \right] \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2^{n'+l}}} \hat{H}_{n'+l}(X) \Psi_0(x) e^{-i\omega(n'+l+\frac{1}{2})t} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\alpha^{n'}}{n'!} \frac{(-\alpha^*)^{m'}}{m'!} \frac{1}{l!} \frac{1}{\sqrt{2^{m'+l}}} \hat{H}_{m'+l}(Y) \Psi_0^*(y) \right] \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} \Psi_0(x) \Psi_0^*(y) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{n+l}}} \frac{1}{\sqrt{2^{m+l}}} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{(-\alpha^*)^m}{m!} \frac{1}{l!} e^{-i\omega(n+l)t} \hat{H}_{n+l}(X) \hat{H}_{m+l}(Y). \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

La fonction d'onde exprimée dans la base des "x" définie Eq.(B.7) est alors donnée par

$$\begin{aligned} \Psi(x,t) &= \int dy \left[e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} \Psi_0(x) \Psi_0^*(y) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{n+l}}} \frac{1}{\sqrt{2^{m+l}}} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\alpha^n}{n!} \frac{(-\alpha^*)^m}{m!} \frac{1}{l!} e^{-i\omega(n+l)t} \hat{H}_{n+l}(X) \hat{H}_{m+l}(Y) \right] \Psi_0(y) \\ &= \left[e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} \Psi_0(x) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{n+l}}} \frac{1}{\sqrt{2^{m+l}}} \right. \\ &\quad \times \left. \frac{\alpha^n}{n!} \frac{(-\alpha^*)^m}{m!} \frac{1}{l!} e^{-i\omega(n+l)t} \hat{H}_{n+l}(X) \right] \int dy |\Psi_0(y)|^2 \hat{H}_{m+l}(Y). \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Utiliser $\hat{H}_0(Y) = 1$ permet de ré-écrire l'intégrale de la précédente équation comme :

$$\begin{aligned} \int dy |\Psi_0(y)|^2 \hat{H}_{m+l}(\sqrt{\omega}y) &= \int dy \hat{H}_0(Y) \hat{H}_{m+l}(Y) |\Psi_0(y)|^2 \\ &= \int dy \hat{H}_0(Y) \hat{H}_{m+l}(Y) \sqrt{\frac{\omega}{\pi}} e^{-\omega y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dY \hat{H}_0(Y) \hat{H}_{m+l}(Y) e^{-Y^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

La propriété d'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}_n(x) \hat{H}_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m} \quad (\text{B.23})$$

implique

$$\int dy |\Psi_0(y)|^2 \hat{H}_{m+l}(\sqrt{\omega}y) = \delta_{0,m+l} \Rightarrow m+l=0 \Rightarrow m=0 \text{ and } l=0. \quad (\text{B.24})$$

La fonction d'onde s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} \Psi_0(x) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^{n+l}}} \frac{1}{\sqrt{2^{m+l}}} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{(-\alpha^*)^m}{m!} \frac{1}{l!} e^{-i\omega(n+l)t} \hat{H}_{n+l}(X) \delta_{0,m+l} \quad (\text{B.25}) \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} \Psi_0(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^n}} \frac{\alpha^n}{n!} e^{-i\omega t n} \hat{H}_n(X). \end{aligned}$$

En utilisant

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \hat{H}_n(x) = e^{2tx-t^2} \quad (\text{B.26})$$

nous pouvons finalement exprimer la fonction d'onde au temps t comme

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{-i\frac{\omega t}{2}} \Psi_0(x) e^{\sqrt{2}\alpha e^{-i\omega t} X - \left(\frac{\alpha e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}\right)^2} \quad (\text{B.27}) \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2} + \sqrt{2}\alpha\sqrt{\omega}\cos(\omega t)x - \frac{\alpha^2}{2}\cos(2\omega t)} e^{-i\left(\frac{\omega t}{2} + \sqrt{2}\alpha\sqrt{\omega}\sin(\omega t)x - \frac{\alpha^2}{2}\sin(2\omega t)\right)} \Psi_0(x). \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Abhay Ashtekar. Introduction to loop quantum gravity and cosmology. *Lect. Notes Phys.*, 863 :31–56, 2013, arXiv :1201.4598.
- [2] Alejandro Perez. Black Holes in Loop Quantum Gravity. *Rept. Prog. Phys.*, 80(12) :126901, 2017, arXiv :1703.09149.
- [3] Julien Grain. *Towards a microphysical construction of the cosmological paradigm : predictions and observations in a quantum universe*. Habilitation à diriger des recherches, Université Paris Sud, June 2014.
- [4] Pietro Dona and Simone Speziale. Introductory lectures to loop quantum gravity. In *Gravitation Théorie et Expérience.Proceedings, Troisième école de physique théorique de Jijel : Jijel, Algeria, September 26 October 03, 2009*, pages 89–140, 2013, 1007.0402.
- [5] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. The Dynamics of general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 40 :1997–2027, 2008, gr-qc/0405109.
- [6] Arthur Komar. The quantization program for general relativity. In Moshe Carmeli, Stuart I. Fickler, and Louis Witten, editors, *Relativity*, pages 19–29, Boston, MA, 1970. Springer US.
- [7] P. G. Bergmann and A. Komar. The phase space formulation of general relativity and approaches toward its canonical quantization. 1981.
- [8] B. S. Dewitt. *Covariant Quantum Geometrodynamics*, page 409. 1972.
- [9] M. Duff. Covariant quantization. In C. J. Isham, R. Penrose, and D. W. Sciama, editors, *Quantum Gravity*, 1975.
- [10] Keith R. Dienes. String theory and the path to unification : A Review of recent developments. *Phys. Rept.*, 287 :447–525, 1997, hep-th/9602045.
- [11] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hiroshi Ooguri, and Yaron Oz. Large N field theories, string theory and gravity. *Phys. Rept.*, 323 :183–386, 2000, hep-th/9905111.
- [12] Renate Loll. Discrete approaches to quantum gravity in four dimensions. *Living Reviews in Relativity*, 1(1) :13, Dec 1998.
- [13] Max Niedermaier and Martin Reuter. The asymptotic safety scenario in quantum gravity. *Living Reviews in Relativity*, 9(1) :5, Dec 2006.
- [14] A. Connes. *Noncommutative Geometry*. Elsevier Science, 1995.
- [15] Alejandro Perez and Carlo Rovelli. Physical effects of the Immirzi parameter. *Phys. Rev.*, D73 :044013, 2006, gr-qc/0505081.
- [16] R. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner. Dynamical structure and definition of energy in general relativity. *Phys. Rev.*, 116 :1322–1330, Dec 1959.

- [17] C. J. Isham. Canonical quantum gravity and the problem of time. pages 0157–288, 1992, gr-qc/9210011. [NATO Sci. Ser. C409,157(1993)].
- [18] C. Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge University Press, nov 2004.
- [19] J. J. Halliwell. Probabilities in quantum cosmological models : A decoherent histories analysis using a complex potential. *Phys. Rev. D*, 80 :124032, Dec 2009.
- [20] Carlo Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004.
- [21] R. Giles. Reconstruction of gauge potentials from wilson loops. *Phys. Rev. D*, 24 :2160–2168, Oct 1981.
- [22] Ghanashyam Date and Golam Mortuza Hossain. Matter in Loop Quantum Gravity. *SIGMA*, 8 :010, 2012, 1110.3874.
- [23] Carlo Rovelli and Francesca Vidotto. *Covariant Loop Quantum Gravity : An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*. Cambridge University Press, 2014.
- [24] Thomas Thiemann. *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2007.
- [25] Carlo Rovelli. Zakopane lectures on loop gravity. *PoS, QGQGS2011* :003, 2011, 1102.3660.
- [26] Alejandro Perez. The spin-foam approach to quantum gravity. *Living Reviews in Relativity*, 16(1) :3, Feb 2013.
- [27] Henri Cartan. Sur la mesure de haar. 1940.
- [28] Carlo Rovelli and Lee Smolin. Discreteness of area and volume in quantum gravity. *Nucl.Phys.*, B442 :593–622, 1995, gr-qc/9411005.
- [29] T. Thiemann. A Length operator for canonical quantum gravity. *J. Math. Phys.*, 39 :3372–3392, 1998, gr-qc/9606092.
- [30] Carlo Rovelli. Loop quantum gravity. *Living Reviews in Relativity*, 1(1) :1, Jan 1998.
- [31] T. Thiemann. Anomaly - free formulation of nonperturbative, four-dimensional Lorentzian quantum gravity. *Phys. Lett.*, B380 :257–264, 1996, gr-qc/9606088.
- [32] T. Thiemann. Quantum spin dynamics (QSD). *Class. Quant. Grav.*, 15 :839–873, 1998, gr-qc/9606089.
- [33] Jonathan Engle, Etera Livine, Roberto Pereira, and Carlo Rovelli. Lqg vertex with finite immirzi parameter. *Nuclear Physics B*, 799(1) :136 – 149, 2008.
- [34] Daniel Baumann. Primordial Cosmology. *PoS, TASI2017* :009, 2018, 1807.03098.
- [35] Daniel Baumann. Inflation. In *Physics of the large and the small, TASI 09, proceedings of the Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics, Boulder, Colorado, USA, 1-26 June 2009*, pages 523–686, 2011, 0907.5424.
- [36] Patrick Peter. Cosmological Perturbation Theory. In *15th Brazilian School of Cosmology and Gravitation (BSCG 2012) Mangaratiba, Rio de Janeiro, Brazil, August 19-September 1, 2012*, 2013, 1303.2509.
- [37] Julien Lesgourgues. Cosmological Perturbations. In *Proceedings, Theoretical Advanced Study Institute in Elementary Particle Physics : Searching for New Physics at Small and Large Scales (TASI 2012) : Boulder, Colorado, June 4-29, 2012*, pages 29–97, 2013, 1302.4640.
- [38] Viatcheslav Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2005.

- [39] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. 2018, arXiv :1807.06209.
- [40] Adam G. Riess, Lucas M. Macri, Samantha L. Hoffmann, Dan Scolnic, Stefano Casertano, Alexei V. Filippenko, Brad E. Tucker, Mark J. Reid, David O. Jones, Jeffrey M. Silverman, Ryan Chornock, Peter Challis, Wenlong Yuan, Peter J. Brown, and Ryan J. Foley. A 2.4% determination of the local value of the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, 826(1) :56, jul 2016.
- [41] Adam G. Riess et al. Milky Way Cepheid Standards for Measuring Cosmic Distances and Application to Gaia DR2 : Implications for the Hubble Constant. *Astrophys. J.*, 861(2) :126, 2018, 1804.10655.
- [42] G. E. Addison, Y. Huang, D. J. Watts, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, and J. L. Weiland. Quantifying discordance in the 2015 planck cmb spectrum. *The Astrophysical Journal*, 818(2) :132, feb 2016.
- [43] N. Aghanim et al. Planck intermediate results. LI. Features in the cosmic microwave background temperature power spectrum and shifts in cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 607 :A95, 2017, arXiv :1608.02487.
- [44] Kevin Aylor, MacKenzie Joy, Lloyd Knox, Marius Millea, Srinivasan Raghunathan, and W. L. Kimmy Wu. Sounds Discordant : Classical Distance Ladder & Λ CDM -based Determinations of the Cosmological Sound Horizon. *Astrophys. J.*, 874(1) :4, 2019, 1811.00537.
- [45] Wendy L. Freedman. Cosmology at a crossroads. *Nature Astronomy*, 1 :0121 EP –, 05 2017.
- [46] Stephen M Feeney, Daniel J Mortlock, and Niccolò Dalmaso. Clarifying the Hubble constant tension with a Bayesian hierarchical model of the local distance ladder. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 476(3) :3861–3882, 02 2018, <http://oup.prod.sis.lan/mnras/article-pdf/476/3/3861/24510928/sty418.pdf>.
- [47] Eleonora Di Valentino, Alessandro Melchiorri, Eric V. Linder, and Joseph Silk. Constraining dark energy dynamics in extended parameter space. *Phys. Rev. D*, 96 :023523, Jul 2017.
- [48] Abdolali Banihashemi, Nima Khosravi, and Amir H. Shirazi. Ups and Downs in Dark Energy : phase transition in dark sector as a proposal to lessen cosmological tensions. 2018, arXiv :1808.02472.
- [49] Suresh Kumar and Rafael C. Nunes. Probing the interaction between dark matter and dark energy in the presence of massive neutrinos. *Phys. Rev. D*, 94 :123511, Dec 2016.
- [50] Vivian Poulin, Tristan L. Smith, Tanvi Karwal, and Marc Kamionkowski. Early Dark Energy Can Resolve The Hubble Tension. *Phys. Rev. Lett.*, 122(22) :221301, 2019, 1811.04083.
- [51] Daniel J. Eisenstein et al. Detection of the baryon acoustic peak in the large-scale correlation function of SDSS luminous red galaxies. *The Astrophysical Journal*, 633(2) :560–574, nov 2005.
- [52] Saul Perlmutter, Michael S. Turner, and Martin White. Constraining dark energy with type ia supernovae and large-scale structure. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :670–673, Jul 1999.
- [53] Paul A. Abell et al. LSST Science Book, Version 2.0. 2009, 0912.0201.
- [54] Alexandra Abate et al. Large Synoptic Survey Telescope : Dark Energy Science Collaboration. 2012, arXiv :1211.0310.
- [55] R. Scaramella, Y. Mellier, J. Amiaux, C. Burigana, C.S. Carvalho, J.C. Cuillandre, A. da Silva, J. Dinis, A. Derosa, E. Maiorano, and et al. Euclid space mission : a cosmological challenge for the next 15 years. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 10(S306) :375–378, 2014.

- [56] Martin Bauer and Tilman Plehn. Yet Another Introduction to Dark Matter. *Lect. Notes Phys.*, 959 :pp.–, 2019, 1705.01987.
- [57] Jennifer M. Gaskins. A review of indirect searches for particle dark matter. *Contemporary Physics*, 57, 03 2016.
- [58] Felix Kahlhoefer. Review of LHC Dark Matter Searches. *Int. J. Mod. Phys.*, A32(13) :1730006, 2017, 1702.02430.
- [59] J. Gascon. Direct dark matter searches review. In *European Physical Journal Web of Conferences*, volume 95 of *European Physical Journal Web of Conferences*, page 02004, May 2015.
- [60] D. J. Fixsen. The temperature of the cosmic microwave background. *The Astrophysical Journal*, 707(2) :916–920, nov 2009.
- [61] Steven Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, New York, 1972.
- [62] J. A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, 1998.
- [63] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. 1973.
- [64] S. et al. Perlmutter. Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae. *apj*, 517 :565–586, 1999, astro-ph/9812133.
- [65] David Tytler, John M. O’Meara, Nao Suzuki, and Dan Lubin. Review of Big Bang nucleosynthesis and primordial abundances. *Phys. Scripta*, T85 :12, 2000, astro-ph/0001318.
- [66] Arno A. Penzias and Robert Woodrow Wilson. A Measurement of excess antenna temperature at 4080-Mc/s. *Astrophys. J.*, 142 :419–421, 1965.
- [67] D. J. Fixsen, E. S. Cheng, J. M. Gales, J. C. Mather, R. A. Shafer, and E. L. Wright. The Cosmic Microwave Background Spectrum from the Full COBE FIRAS Data Set. *apj*, 473 :576, December 1996, astro-ph/9605054.
- [68] Max Tegmark. Doppler peaks and all that : cmb anisotropies and what they can tell us. In *Proc. Enrico Fermi, Course CXXXII, Varenna, 1995*, 1995, astro-ph/9511148.
- [69] Jens Chluba. Science with CMB spectral distortions. In *Proceedings, 49th Rencontres de Moriond on Cosmology : La Thuile, Italy, March 15-22, 2014*, pages 327–334, 2014, 1405.6938.
- [70] J. Chluba et al. Spectral Distortions of the CMB as a Probe of Inflation, Recombination, Structure Formation and Particle Physics. 2019, arXiv :1903.04218.
- [71] Alan H. Guth. Inflationary universe : A possible solution to the horizon and flatness problems. *Phys. Rev. D*, 23 :347–356, Jan 1981.
- [72] A. D. Linde. A new inflationary universe scenario : A possible solution of the horizon, flatness, homogeneity, isotropy and primordial monopole problems. *Physics Letters B*, 108 :389–393, February 1982.
- [73] Patrick Peter and Jean-Philippe Uzan. *Primordial cosmology*. Oxford Graduate Texts. Oxford Univ. Press, Oxford, 2009.
- [74] D. Langlois. Lectures on inflation and cosmological perturbations. *Lect. Notes Phys.*, 800 :1–57, 2010, 1001.5259.
- [75] Andrew R. Liddle and Samuel M. Leach. How long before the end of inflation were observable perturbations produced? *Phys. Rev. D*, 68 :103503, Nov 2003.
- [76] James M. Bardeen. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Phys. Rev. D*, 22 :1882–1905, Oct 1980.

- [77] Lawrence Krauss and Frank Wilczek. From b modes to quantum gravity and unification of forces. *International Journal of Modern Physics D*, 23, 04 2014.
- [78] Martin Bojowald and Golam Mortuza Hossain. Cosmological vector modes and quantum gravity effects. *Classical and Quantum Gravity*, 24(18) :4801–4816, sep 2007.
- [79] Martin Bojowald and Golam Mortuza Hossain. Loop quantum gravity corrections to gravitational wave dispersion. *Phys. Rev. D*, 77 :023508, Jan 2008.
- [80] Jakub Mielczarek, Thomas Cailleteau, Aurelien Barrau, and Julien Grain. Anomaly-free vector perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 29, 06 2011.
- [81] Daniel Baumann. Quantum field theory in de sitter space, Ressource internet actuellement non disponible.
- [82] A. Suzuki et al. The LiteBIRD Satellite Mission - Sub-Kelvin Instrument. *J. Low. Temp. Phys.*, 193(5-6) :1048–1056, 2018, 1801.06987.
- [83] Kevork N. Abazajian et al. CMB-S4 Science Book, First Edition. 2016, 1610.02743.
- [84] Aniello Mennella et al. QUBIC - the Q&U Bolometric Interferometer for Cosmology. *PoS, EPS-HEP2017* :044, 2017, 1801.03730.
- [85] Y. Inoue et al. POLARBEAR-2 : an instrument for CMB polarization measurements. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, 9914 :99141I, 2016, 1608.03025.
- [86] M. N. Dubinin, E. Yu. Petrova, E. O. Pozdeeva, M. V. Sumin, and S. Yu. Vernov. MSSM-inspired multifield inflation. *JHEP*, 12 :036, 2017, 1705.09624.
- [87] Ana Achúcarro and Gonzalo A. Palma. The string swampland constraints require multi-field inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2019(02) :041–041, feb 2019.
- [88] Sebastian Garcia-Saenz, Sébastien Renaux-Petel, and John Ronayne. Primordial fluctuations and non-gaussianities in sidetracked inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(07) :057–057, jul 2018.
- [89] Jacopo Fumagalli, Sebastian Garcia-Saenz, Lucas Pinol, Sébastien Renaux-Petel, and John Ronayne. Hyper non-Gaussianities in inflation with strongly non-geodesic motion. 2019, arXiv :1902.03221.
- [90] Arvind Borde, Alan H. Guth, and Alexander Vilenkin. Inflationary spacetimes are incomplete in past directions. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :151301, Apr 2003.
- [91] Edward Wilson-Ewing. Testing loop quantum cosmology. *Comptes Rendus Physique*, 18(3) :207 – 225, 2017. Testing different approaches to quantum gravity with cosmology / Tester les théories de la gravitation quantique à l’aide de la cosmologie.
- [92] Krzysztof A Meissner. Black-hole entropy in loop quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 21(22) :5245–5251, oct 2004.
- [93] Lisa Randall and Raman Sundrum. An alternative to compactification. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :4690–4693, Dec 1999.
- [94] James M. Cline, Christophe Grojean, and Géraldine Servant. Cosmological expansion in the presence of an extra dimension. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :4245–4248, Nov 1999.
- [95] R. C. Tolman. *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology*. Oxford : Clarendon Press, 1934.
- [96] Robert Brandenberger and Patrick Peter. Bouncing Cosmologies : Progress and Problems. *Found. Phys.*, 47(6) :797–850, 2017, 1603.05834.

- [97] Abhay Ashtekar, Tomasz Pawłowski, and Parampreet Singh. Quantum nature of the big bang : Improved dynamics. *Phys. Rev. D*, 74 :084003, Oct 2006.
- [98] Ivan Agullo, Abhay Ashtekar, and William Nelson. Extension of the quantum theory of cosmological perturbations to the planck era. *Phys. Rev. D*, 87 :043507, Feb 2013.
- [99] Peter Diener, Brajesh Gupt, and Parampreet Singh. Numerical simulations of a loop quantum cosmos : robustness of the quantum bounce and the validity of effective dynamics. *Class. Quant. Grav.*, 31 :105015, 2014, 1402.6613.
- [100] Abhay Ashtekar, Tomasz Pawłowski, and Parampreet Singh. Quantum Nature of the Big Bang : Improved dynamics. *Phys. Rev.*, D74 :084003, 2006, gr-qc/0607039.
- [101] Abhay Ashtekar and Brajesh Gupt. Generalized effective description of loop quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, 92 :084060, Oct 2015.
- [102] Ivan Agullo, Abhay Ashtekar, and Brajesh Gupt. Phenomenology with fluctuating quantum geometries in loop quantum cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 34(7) :074003, mar 2017.
- [103] Emanuele Alesci and Francesco Cianfrani. Improved regularization from Quantum Reduced Loop Gravity. 2016, arXiv :1604.02375.
- [104] Emanuele Alesci, Gioele Botta, and Gabriele V. Stagno. Quantum reduced loop gravity effective Hamiltonians from a statistical regularization scheme. *Phys.Rev.D*, 97(4) :046011, 2018.
- [105] Andrea Dapor and Klaus Liegener. Cosmological effective hamiltonian from full loop quantum gravity dynamics. *Physics Letters B*, 785 :506 – 510, 2018.
- [106] Andrea Dapor and Klaus Liegener. Cosmological coherent state expectation values in loop quantum gravity i. isotropic kinematics. *Classical and Quantum Gravity*, 35(13) :135011, jun 2018.
- [107] Kevin Vandersloot. Loop quantum cosmology and the $k = -1$ robertson-walker model. *Phys. Rev. D*, 75 :023523, Jan 2007.
- [108] Łukasz Szulc, Wojciech Kamiński, and Jerzy Lewandowski. Closed friedmann–robertson–walker model in loop quantum cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 24(10) :2621–2635, apr 2007.
- [109] Abhay Ashtekar, Tomasz Pawłowski, Parampreet Singh, and Kevin Vandersloot. Loop quantum cosmology of $k = 1$ frw models. *Phys. Rev. D*, 75 :024035, Jan 2007.
- [110] Abhay Ashtekar and Edward Wilson-Ewing. Loop quantum cosmology of bianchi type i models. *Phys. Rev. D*, 79 :083535, Apr 2009.
- [111] Abhay Ashtekar and Edward Wilson-Ewing. Loop quantum cosmology of bianchi type ii models. *Phys. Rev. D*, 80 :123532, Dec 2009.
- [112] Edward Wilson-Ewing. Loop quantum cosmology of Bianchi type IX models. *Phys. Rev.*, D82 :043508, 2010, 1005.5565.
- [113] Tomasz Pawłowski, Roberto Pierini, and Edward Wilson-Ewing. Loop quantum cosmology of a radiation-dominated flat FLRW universe. *Phys. Rev.*, D90(12) :123538, 2014, 1404.4036.
- [114] Steffen Gielen, Daniele Oriti, and Lorenzo Sindoni. Cosmology from group field theory formalism for quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 111 :031301, Jul 2013.
- [115] Daniele Oriti, Lorenzo Sindoni, and Edward Wilson-Ewing. Bouncing cosmologies from quantum gravity condensates. *Class. Quant. Grav.*, 34(4) :04LT01, 2017, 1602.08271.

- [116] Wojciech Kamiński and Tomasz Pawłowski. Loop quantum cosmology evolution operator of an frw universe with a positive cosmological constant. *Phys. Rev. D*, 81 :024014, Jan 2010.
- [117] Tomasz Pawłowski and Abhay Ashtekar. Positive cosmological constant in loop quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, 85 :064001, Mar 2012.
- [118] Eloisa Bentivegna and Tomasz Pawłowski. Anti-de sitter universe dynamics in loop quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, 77 :124025, Jun 2008.
- [119] Eugenio Bianchi and Carlo Rovelli. Why all these prejudices against a constant? 2010, 1002.3966.
- [120] Alejandro Perez, Daniel Sudarsky, and James D. Bjorken. A microscopic model for an emergent cosmological constant. *Int. J. Mod. Phys.*, D27(14) :1846002, 2018, 1804.07162.
- [121] David A. Craig and Parampreet Singh. Cosmological dynamics in spin-foam loop quantum cosmology : challenges and prospects. *Class. Quant. Grav.*, 34(7) :074001, 2017, 1612.08800.
- [122] Linda Linsefors and Aurelien Barrau. Duration of inflation and conditions at the bounce as a prediction of effective isotropic loop quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, 87 :123509, Jun 2013.
- [123] Linda Linsefors and Aurelien Barrau. Exhaustive investigation of the duration of inflation in effective anisotropic loop quantum cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 32(3) :035010, 2015, 1405.1753.
- [124] Linda Linsefors and Aurelien Barrau. Duration of inflation and conditions at the bounce as a prediction of effective isotropic loop quantum cosmology. *Phys. Rev.*, D87(12) :123509, 2013, 1301.1264.
- [125] Ivan Agullo, Abhay Ashtekar, and William Nelson. Quantum gravity extension of the inflationary scenario. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :251301, Dec 2012.
- [126] Ivan Agullo, Abhay Ashtekar, and William Nelson. The pre-inflationary dynamics of loop quantum cosmology : confronting quantum gravity with observations. *Classical and Quantum Gravity*, 30(8) :085014, apr 2013.
- [127] Martin Bojowald, Mikhail Kagan, Parampreet Singh, Hector H. Hernández, and Aureliano Skirzewski. Hamiltonian cosmological perturbation theory with loop quantum gravity corrections. *Phys. Rev. D*, 74 :123512, Dec 2006.
- [128] Martin Bojowald, Golam Mortuza Hossain, Mikhail Kagan, and S. Shankaranarayanan. Anomaly freedom in perturbative loop quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 78 :063547, Sep 2008.
- [129] Martin Bojowald, Golam Mortuza Hossain, Mikhail Kagan, and S. Shankaranarayanan. Gauge invariant cosmological perturbation equations with corrections from loop quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 79 :043505, Feb 2009.
- [130] Thomas Cailleteau and Aurelien Barrau. Gauge invariance in loop quantum cosmology : Hamilton-jacobi and mukhanov-sasaki equations for scalar perturbations. *Phys. Rev. D*, 85 :123534, Jun 2012.
- [131] Thomas Cailleteau, Aurélien Barrau, Francesca Vidotto, and Julien Grain. Consistency of holonomy-corrected scalar, vector, and tensor perturbations in loop quantum cosmology. *Phys. Rev. D*, 86 :087301, Oct 2012.
- [132] Thomas Cailleteau, Jakub Mielczarek, Aurelien Barrau, and Julien Grain. Anomaly-free scalar perturbations with holonomy corrections in loop quantum cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 29 :095010, 2012, 1111.3535.

- [133] Thomas Cailleteau, Linda Linsefors, and Aurelien Barrau. Anomaly-free perturbations with inverse-volume and holonomy corrections in loop quantum cosmology. *Classical and Quantum Gravity*, 31(12) :125011, jun 2014.
- [134] Jakub Mielczarek, Linda Linsefors, and Aurelien Barrau. Silent initial conditions for cosmological perturbations with a change of space-time signature. *International Journal of Modern Physics D*, 27, 11 2014.
- [135] Boris Bolliet, Julien Grain, Clement Stahl, Linda Linsefors, and Aurelien Barrau. Comparison of primordial tensor power spectra from the deformed algebra and dressed metric approaches in loop quantum cosmology. *Phys.Rev.*, D91(8) :084035, 2015, 1502.02431.
- [136] Edward W. Kolb and Michael S. Turner. The Early Universe. *Front. Phys.*, 69 :1–547, 1990.
- [137] Boris Bolliet, Aurélien Barrau, Julien Grain, and Susanne Schander. Observational exclusion of a consistent loop quantum cosmology scenario. *Phys. Rev.*, D93 :124011, 2016, 1510.08766.
- [138] Jerome Martin and Robert H. Brandenberger. The TransPlanckian problem of inflationary cosmology. *Phys. Rev.*, D63 :123501, 2001, hep-th/0005209.
- [139] Eugenio Bianchi. The length operator in loop quantum gravity. *Nuclear Physics B*, 807(3) :591 – 624, 2009.
- [140] Yongge Ma, Chopin Soo, and Jinsong Yang. New length operator for loop quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 81 :124026, Jun 2010.
- [141] Robert H. Brandenberger and Jerome Martin. Trans-Planckian Issues for Inflationary Cosmology. *Class. Quant. Grav.*, 30 :113001, 2013, 1211.6753.
- [142] Planck collaboration. Planck 2015 results - xx. constraints on inflation. *A&A*, 594 :A20, 2016.
- [143] Emanuele Alesci and Francesco Cianfrani. Quantum reduced loop gravity : Universe on a lattice. *Phys. Rev.*, D92 :084065, 2015, 1506.07835.
- [144] Emanuele Alesci, Gioele Botta, Francesco Cianfrani, and Stefano Liberati. Cosmological singularity resolution from quantum gravity : the emergent-bouncing universe. *Phys. Rev.*, D96(4) :046008, 2017, 1612.07116.
- [145] Cosimo Bambi. Astrophysical Black Holes : A Review. 2019, arXiv :1906.03871.
- [146] Gustavo E. Romero and Gabriela S. Vila. Introduction to Black Hole Astrophysics. *Lect. Notes Phys.*, 876 :pp.1–318, 2014.
- [147] Piotr T. Chrusciel. Black holes. In Abhay Ashtekar, editor, *100 Years Of Relativity : space-time structure : Einstein and beyond*, pages 93–123. 2005.
- [148] Feng Yuan and Ramesh Narayan. Hot accretion flows around black holes. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 52(1) :529–588, 2014, <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-082812-141003>.
- [149] Feng Yuan and Ramesh Narayan. Hot accretion flows around black holes. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 52(1) :529–588, 2014, <https://doi.org/10.1146/annurev-astro-082812-141003>.
- [150] B. P. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116(6) :061102, 2016, 1602.03837.
- [151] The LIGO Scientific Collaboration, the Virgo Collaboration, B. P. Abbott, R. Abbott, T. D. Abbott, S. Abraham, F. Acernese, K. Ackley, C. Adams, R. X. Adhikari, and et al. GWTC-1 : A Gravitational-Wave Transient Catalog of Compact Binary Mergers Observed by LIGO and Virgo during the First and Second Observing Runs. November 2018, arXiv :1811.12907.

- [152] Kazunori Akiyama et al. First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. *Astrophys. J.*, 875(1) :L1, 2019, 1906.11238.
- [153] Charles W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [154] Gerard 't Hooft. Singularities, horizons, firewalls, and local conformal symmetry. *Springer Proc. Phys.*, 208 :1–12, 2018, 1511.04427.
- [155] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev.*, D7 :2333–2346, 1973.
- [156] Jacob D. Bekenstein. Generalized second law of thermodynamics in black hole physics. *Phys. Rev.*, D9 :3292–3300, 1974.
- [157] Jacob D. Bekenstein. Black holes and information theory. *Contemp. Phys.*, 45 :31–43, 2003, quant-ph/0311049.
- [158] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43 :199–220, 1975. [,167(1975)].
- [159] W. G. Unruh. Notes on black hole evaporation. *Phys. Rev.*, D14 :870, 1976.
- [160] B. J. Carr, Kazunori Kohri, Yuuiti Sendouda, and Jun'ichi Yokoyama. New cosmological constraints on primordial black holes. *Phys. Rev.*, D81 :104019, 2010, 0912.5297.
- [161] Jeff Steinhauer. Observation of quantum Hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole. *Nature Phys.*, 12 :959, 2016, 1510.00621.
- [162] Samir D. Mathur. The Information paradox : A Pedagogical introduction. *Class. Quant. Grav.*, 26 :224001, 2009, 0909.1038.
- [163] Jeff Steinhauer. Measuring the entanglement of analogue Hawking radiation by the density-density correlation function. *Phys. Rev.*, D92(2) :024043, 2015, 1504.06583.
- [164] Javier Olmedo. Brief review on black hole loop quantization. *Universe*, 2(2) :12, 2016, 1606.01429.
- [165] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. An introduction to spherically symmetric loop quantum gravity black holes. *AIP Conf. Proc.*, 1647 :19–22, 2015, 1312.5512.
- [166] Ivan Agullo, J. Fernando Barbero G., Enrique F. Borja, Jacobo Diaz-Polo, and Eduardo J. S. Villasenor. Black hole entropy in loop quantum gravity. *J. Phys. Conf. Ser.*, 360 :012035, 2012.
- [167] Abhay Ashtekar, Christopher Beetle, and Stephen Fairhurst. Isolated horizons : A Generalization of black hole mechanics. *Class. Quant. Grav.*, 16 :L1–L7, 1999, gr-qc/9812065.
- [168] Abhay Ashtekar, Christopher Beetle, and Stephen Fairhurst. Mechanics of isolated horizons. *Class. Quant. Grav.*, 17 :253–298, 2000, gr-qc/9907068.
- [169] Abhay Ashtekar, Christopher Beetle, Olaf Dreyer, Stephen Fairhurst, Badri Krishnan, Jerzy Lewandowski, and Jacek Wisniewski. Isolated horizons and their applications. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :3564–3567, 2000, gr-qc/0006006.
- [170] Jerzy Lewandowski. Space-times admitting isolated horizons. *Class. Quant. Grav.*, 17 :L53–L59, 2000, gr-qc/9907058.
- [171] Jerzy Lewandowski and Tomasz Pawłowski. Geometric characterizations of the Kerr isolated horizon. *Int. J. Mod. Phys.*, D11 :739–746, 2002, gr-qc/0101008.
- [172] J. Fernando Barbero G. and Alejandro Perez. Quantum Geometry and Black Holes. In Abhay Ashtekar and Jorge Pullin, editors, *Loop Quantum Gravity : The First 30 Years*, pages 241–279. WSP, 2017, 1501.02963.

- [173] Carlo Rovelli. Black hole entropy from loop quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :3288–3291, 1996, gr-qc/9603063.
- [174] Amit Ghosh, Karim Noui, and Alejandro Perez. Statistics, holography, and black hole entropy in loop quantum gravity. *Phys. Rev.*, D89(8) :084069, 2014, 1309.4563.
- [175] Carlo Rovelli and Francesca Vidotto. Planck stars. *Int. J. Mod. Phys.*, D23(12) :1442026, 2014, 1401.6562.
- [176] Hal M. Haggard and Carlo Rovelli. Quantum-gravity effects outside the horizon spark black to white hole tunneling. *Phys. Rev.*, D92(10) :104020, 2015, 1407.0989.
- [177] Petr Hájíček and Claus Kiefer. Singularity avoidance by collapsing shells in quantum gravity. *International Journal of Modern Physics D*, 10(06) :775–779, 2001, <https://doi.org/10.1142/S0218271801001578>.
- [178] Hal M. Haggard and Carlo Rovelli. Quantum gravity effects around sagittarius a*. *International Journal of Modern Physics D*, 25(12) :1644021, 2016, <https://doi.org/10.1142/S0218271816440211>.
- [179] Marios Christodoulou, Carlo Rovelli, Simone Speziale, and Ilya Vilensky. Planck star tunneling time : An astrophysically relevant observable from background-free quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 94 :084035, Oct 2016.
- [180] Eugenio Bianchi, Marios Christodoulou, Fabio D’Ambrosio, Hal M. Haggard, and Carlo Rovelli. White holes as remnants : A surprising scenario for the end of a black hole. *Classical and Quantum Gravity*, 35(22), 10 2018.
- [181] Tommaso De Lorenzo and Alejandro Perez. Improved black hole fireworks : Asymmetric black-hole-to-white-hole tunneling scenario. *Phys. Rev. D*, 93 :124018, Jun 2016.
- [182] Aurélien Barrau and Carlo Rovelli. Planck star phenomenology. *Phys. Lett.*, B739 :405–409, 2014, 1404.5821.
- [183] Aurélien Barrau, Carlo Rovelli, and Francesca Vidotto. Fast Radio Bursts and White Hole Signals. *Phys. Rev.*, D90(12) :127503, 2014, 1409.4031.
- [184] Aurélien Barrau, Boris Bolliet, Francesca Vidotto, and Celine Weimer. Phenomenology of bouncing black holes in quantum gravity : a closer look. *JCAP*, 1602(02) :022, 2016, 1507.05424.
- [185] Aurélien Barrau, Boris Bolliet, Marrit Schutten, and Francesca Vidotto. Bouncing black holes in quantum gravity and the Fermi gamma-ray excess. *Phys. Lett.*, B772 :58–62, 2017, 1606.08031.
- [186] L. G. Spitler et. al. Fast radio burst discovered in the arecibo pulsar alfa survey. *The Astrophysical Journal*, 790(2) :101, jul 2014.
- [187] P. Scholz et al. The repeating fast radio burst frb 121102 : Multi-wavelength observations and additional bursts. *The Astrophysical Journal*, 833(2) :177, dec 2016.
- [188] Bing Li, Long-Biao Li, Zhi-Bin Zhang, Jin-Jun Geng, Li-Ming Song, Yong-Feng Huang, and Yuan-Pei Yang. Statistical properties of the repeating fast radio burst source frb 121102. *Int. J. Cosmol. Astron. Astrophys.*, pages 22–32, 2019, arXiv :1901.03484.
- [189] M. et al. Amiri and The CHIME/FRB Collaboration. A second source of repeating fast radio bursts. *Nature*, 566(7743) :235–238, 2019.
- [190] Don N. Page. Particle Emission Rates from a Black Hole : Massless Particles from an Uncharged, Nonrotating Hole. *Phys. Rev.*, D13 :198–206, 1976.
- [191] Don N. Page. Particle Emission Rates from a Black Hole. 2. Massless Particles from a Rotating Hole. *Phys. Rev.*, D14 :3260–3273, 1976.

- [192] Don N. Page. Particle Emission Rates from a Black Hole. 3. Charged Leptons from a Nonrotating Hole. *Phys. Rev.*, D16 :2402–2411, 1977.
- [193] Emanuele Alesci and Leonardo Modesto. Particle Creation by Loop Black Holes. *Gen. Rel. Grav.*, 46 :1656, 2014, 1101.5792.
- [194] Tullio Regge and John A. Wheeler. Stability of a schwarzschild singularity. *Phys. Rev.*, 108 :1063–1069, Nov 1957.
- [195] Frank J. Zerilli. Gravitational field of a particle falling in a schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics. *Phys. Rev. D*, 2 :2141–2160, Nov 1970.
- [196] G. Amelino-Camelia, John Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos, and Subir Sarkar. Tests of quantum gravity from observations of gamma-ray bursts. *Nature*, 393(6687) :763–765, 1998.
- [197] Pouria Pedram. New approach to nonperturbative quantum mechanics with minimal length uncertainty. *Phys. Rev. D*, 85 :024016, Jan 2012.
- [198] Claudio Conti. Planckian signatures in optical harmonic generation and supercontinuum. 2018, arXiv :1805.11716.
- [199] Jakub Mielczarek and Tomasz Trześniewski. The nonlinear field space theory. *Physics Letters B*, 759 :424 – 429, 2016.
- [200] Achim Kempf, Gianpiero Mangano, and Robert B. Mann. Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation. *Phys. Rev. D*, 52 :1108–1118, Jul 1995.
- [201] Yoshiaki Himemoto and Takahiro Tanaka. A Generalization of the model of Hawking radiation with modified high frequency dispersion relation. *Phys. Rev.*, D61 :064004, 2000, gr-qc/9904076.
- [202] Giovanni Amelino-Camelia, Giacomo D’Amico, Fabrizio Fiore, Simonetta Puccetti, and Michele Ronco. In-vacuo-dispersion-like spectral lags in gamma-ray bursts. 2017, arXiv :1707.02413.
- [203] Giovanni Amelino-Camelia, Giacomo D’Amico, Giacomo Rosati, and Niccoló Loret. In vacuo dispersion features for gamma-ray-burst neutrinos and photons. *Nature Astronomy*, 1 :0139 EP –, 06 2017.
- [204] A. I. Lvovsky. Squeezed light. 2014, arXiv :1401.4118.
- [205] Ulrik L Andersen, Tobias Gehring, Christoph Marquardt, and Gerd Leuchs. 30 years of squeezed light generation. *Physica Scripta*, 91(5) :053001, apr 2016.
- [206] Francesco et al. Lenzini. Integrated photonic platform for quantum information with continuous variables. *Science Advances*, 4(12), 2018, <https://advances.sciencemag.org/content/4/12/eaat9331.full.pdf>.
- [207] Petr M. Anisimov, Gretchen M. Raterman, Aravind Chiruvelli, William N. Plick, Sean D. Huver, Hwang Lee, and Jonathan P. Dowling. Quantum metrology with two-mode squeezed vacuum : Parity detection beats the heisenberg limit. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :103602, Mar 2010.
- [208] Christian Gross. Spin squeezing, entanglement and quantum metrology with bose–einstein condensates. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 45(10) :103001, may 2012.
- [209] D. B. Melrose. Coherent emission mechanisms in astrophysical plasmas. *Reviews of Modern Plasma Physics*, 1(1) :5, 2017.
- [210] William Nelson and Mairi Sakellariadou. On the possibility of dark energy from corrections to the wheeler-dewitt equation. *Physics Letters B*, 661(1) :37 – 41, 2008.
- [211] Steven B. Giddings. Searching for quantum black hole structure with the Event Horizon Telescope. 2019, arXiv :1904.05287.