



HAL
open science

Simulation d'écoulements non-newtoniens en milieu poreux macroscopique par la méthode de lattice-Boltzmann

Romarc Kostenko

► **To cite this version:**

Romarc Kostenko. Simulation d'écoulements non-newtoniens en milieu poreux macroscopique par la méthode de lattice-Boltzmann. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COmUE), 2019. Français. NNT : 2019SACLS561 . tel-02495355

HAL Id: tel-02495355

<https://theses.hal.science/tel-02495355>

Submitted on 2 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Simulation d'écoulements non-newtoniens en milieu poreux macroscopique par la méthode de lattice-Boltzmann

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay
préparée à l'Université Paris-Sud

École doctorale n°579 Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux,
géosciences (SMEMAG)
Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides

Thèse présentée et soutenue à Orsay, le 11/12/2019, par

ROMARIC KOSTENKO

Composition du Jury :

Caroline Nore Professeur U-Paris-Saclay, laboratoire LIMSIS	Présidente
Irina Ginzburg Ingénieur de recherche, IRSTEA	Rapporteur
Azita Ahmadi Professeur, département TREFLE, laboratoire I2M	Rapporteur
Hugues Bodiguel Professeur, Grenoble-INP, laboratoire Rhéologie et Procédés	Examineur
Laurent Talon Chargé de recherche CNRS, Laboratoire FAST	Directeur de thèse
Marc Leconte Collaborateur Andra, Andra	Invité

Remerciements

Cette thèse a pu être menée à bout grâce à mes proches et aux membres du Fast, que je tiens à remercier. Je tiens d'abord à remercier mon jury, dont le regard critique sur mes travaux et leurs nombreuses questions me permettront à l'avenir de combler mes travaux et éventuelles recherches.

Je remercie de plus Laurent, mon directeur de thèse, pour sa patience, son soutien, la culture scientifique qu'il m'a apporté, ainsi que son aide lors des divers rédactions et présentations qu'il m'a fallu préparer. Je souhaite aussi remercier Mai Guerib, gestionnaire du Fast à la patience bien trempée, qui a su supporter le stress administratif que j'ai pu lui poser pendant trois ans. Je remercie aussi tout particulièrement Maxime Brunet, qui a animé le Fast en y organisant divers événements, tels que des visionnages de matchs et de films, ou encore des soirées thématiques telles que le creusage de citrouilles pour Halloween. Je remercie aussi Marguerite Léang pour son accueil lors de ma première année au Fast. Je suis de plus reconnaissant aux autres membres du Fast que je n'ai pas cité ici, qui ont animé mes trois années de doctorat lors des nombreuses discussions lors et après les repas et séminaires.

Parmi mes proches, je tiens tout d'abord à remercier ma famille, qui m'a soutenu comme elle le pouvait lors de la thèse. Je remercie de plus Alexis, Sandrine et Aymeric, qui ont supporté de m'entendre parler de ma thèse de trop nombreuses soirées compte-tenu de ce que j'arrivais vraiment à leur expliquer de ce que je faisais. Je suis aussi reconnaissant envers Stéphane Molina, mon instructeur de Shinkendo, qui enseigne plus que l'art de manier un sabre, ainsi que les autres pratiquants, qui par leur bonne humeur contagieuse m'ont aidé à aller jusqu'au bout de ces trois ans.

Je vous remercie enfin vous, le lecteur égaré qui semble être tombé sur mon manuscrit.

Table des matières

Introduction	7
1 Fluides non-newtoniens, milieux poreux	11
1.1 Introduction	12
1.2 Fluides non-newtoniens en écoulement de Poiseuille	13
1.2.1 Les fluides à seuil	13
1.2.2 Les fluides de Carreau	17
1.2.3 Vers les milieux poreux macroscopiques	19
1.3 Fluides non-newtoniens dans des milieux poreux macroscopiques . .	22
1.3.1 Loi de Darcy pour un fluide à seuil	23
1.3.2 Loi de Darcy pour un fluide de Carreau	24
1.3.3 Commentaire	24
2 Méthode numérique	27
2.1 LBM	27
2.2 TRT	29
2.3 Codes	32
2.3.1 Codes publics	32
2.3.2 Code de l'équipe	33
2.4 Génération des milieux poreux	34
2.5 Adimensionnement	34
2.6 Validation	35
3 Outils mathématiques	39
3.1 La percolation	39
3.2 Le polymère dirigé	43
3.3 Analyse mathématique	45
3.3.1 L'équation de Darcy macroscopique	45
3.3.2 L'équation de Darcy pour un fluide de Bingham	48
3.3.3 L'équation de Darcy pour les fluides de Carreau	50
3.3.4 Commentaires	53

4	Fluide de Bingham	55
4.1	Introduction	55
4.2	Fluide à seuil à l'échelle microscopique	56
4.3	Description du problème	59
4.4	Loi débit-pression	62
	4.4.1 Pression seuil	62
	4.4.2 Loi débit-pression	65
4.5	Propriétés géométriques de l'écoulement	68
	4.5.1 Distribution de tailles	69
	4.5.2 Forme des agrégats et rugosité des chemins	75
4.6	Conclusion	78
5	Les fluides de Carreau	81
5.1	Introduction	81
5.2	Description du problème	81
5.3	Loi débit-pression	84
	5.3.1 Effets de la rhéofluidification	84
	5.3.2 Loi débit-pression	90
5.4	Propriétés géométriques	93
	5.4.1 Forme des agrégats	94
	5.4.2 Distribution de tailles	107
5.5	Conclusion	120
6	Conclusion	121

Introduction

Financement

Depuis que la France a choisi le nucléaire pour assurer son indépendance énergétique, la part d'électricité issue du nucléaire a dépassé soixante-dix pourcents. Cette croissance est liée à l'augmentation du nombre de réacteurs et à leur perfectionnement. Cependant, comme toute activité industrielle, la production d'électricité génère des déchets dont il faut s'occuper. En France, c'est l'Agence nationale pour la gestion des déchets radioactifs (Andra) qui a pour mission d'étudier, de concevoir, d'exploiter et de surveiller les centres de stockages des déchets radioactifs. Le 30 décembre 1991, la loi a fixé une période de quinze années pour étudier des solutions de gestions pour les déchets radioactifs de haute et moyenne activité à vie longue (HA et MA-VL) c'est-à-dire dont la période de demi-vie dépasse trente ans. A partir du travail réalisé pendant ces quinze années, l'Andra a remis un dossier au gouvernement qui conclut à la faisabilité d'un stockage géologique réversible. La loi de programme du 28 juin 2006 relative à la gestion durable des matières et déchets radioactifs renforce le rôle de l'Andra et confirme trois axes de recherches pour la gestion de déchets HA et MA-VL : la séparation et la transmutation des éléments radioactifs à vie longue, le stockage réversible en couche géologique profonde et l'entreposage.

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet de Centre industriel de stockage géologique (Cigéo). Pour étudier le comportement de radionucléides dans un milieu poreux, l'argile dans le cas de Cigéo, sur des échelles de temps de plusieurs centaines de milliers d'années et sur des échelles d'espace allant du centimètre au kilomètre, la simulation numérique est indispensable. Non seulement, les échelles de temps et d'espace sont importantes mais les processus physico-chimiques mis en oeuvre sont nombreux et complexes (écoulement et transport en milieu poreux, transport de chaleur issue des colis de déchet, mécanique, réactions chimiques, couplages entre processus...). Parmi les processus les plus délicats à traiter, on trouve en particulier (i) la représentation de la variation temporelle de porosité d'un milieu poreux liée à la dissolution ou la précipitation d'éléments solubles transportés par l'eau autour du stockage, (ii) l'apparition de fissures autour des ouvrages souterrain liée au

creusement des galerie de stockage ou encore (iii) celles liées à la dégradation des ouvrages de stockages eux-mêmes. En effet, la prise en compte de ces phénomènes conduit à des modifications du champ de vitesse qui peuvent être locales ou globales et pouvant faire apparaître des discontinuités spatiales et temporelles importantes.

La modélisation de l'ensemble de ces phénomènes nécessite ainsi des techniques de résolution numérique adaptées et performantes en termes de précision et de temps calcul. Les méthodes numériques de type différences finies, éléments finis et volumes finis constituent actuellement le socle de la vaste majorité des codes de calcul en raison des nombreux travaux dont elles ont été l'objet ce qui leur a permis d'atteindre un très haut niveau de maturité et d'être utilisées dans tous les domaines de la physique. Comme mentionné plus haut, au-delà de l'aspect de la représentation physique des processus, se pose aussi la problématique des durées des simulations qui peuvent être rédhibitoires vis-à-vis d'échéances imposées par les organismes qui sont amenés à évaluer les travaux réalisés par l'Andra (Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire, Autorité de Sécurité Nucléaire). L'Andra doit alors être en mesure de justifier des simplifications nécessaires à la réalisation des calculs tout en garantissant la fiabilité de ses résultats mais lorsque la complexité des phénomènes augmente, liée par exemple à des couplages ou à des non-linéarités, des simplifications sont de plus en plus difficiles à formuler et l'on doit parfois se satisfaire de durées de simulation très importantes. Les techniques de calcul haute performance qui tirent notamment profit des architectures parallèles des calculateurs actuels apparaissent comme une voie de développement fondamentale pour les outils de simulation permettant de réduire drastiquement les temps calcul. Les premiers algorithmes de parallélisation des schémas numériques classiques se sont alors démocratisés pour être aujourd'hui utilisés de façon intensive. Dans le même temps, la méthode de Boltzmann sur réseau (Lattice Boltzmann Method, LBM) a émergé et s'avère très efficace à la fois pour traiter de nombreux processus physiques, dont l'écoulement et le transport en milieu poreux à l'échelle du pore et à l'échelle macroscopique, mais aussi pour tirer profit du calcul parallèle.

L'objectif de cette thèse est donc d'étudier les possibilités offertes par la LBM à travers l'étude du comportement de fluides non newtoniens en milieu poreux. En effet, l'étude de ce type d'écoulement permet de tester les capacités de la LBM à représenter des variations importantes voire même des discontinuités dans les champs de vitesses résultants.

Les fluides non newtoniens et les milieux poreux

Lorsque l'on parle de fluides, la première image qui nous vient à l'esprit est souvent l'eau, parfois le miel ou l'air. Ces trois exemples de fluides ont en commun

que leur déformation, lorsqu'ils sont soumis à une contrainte, est simple. Leur taux de déformation est proportionnel à la contrainte imposée. Ce sont des fluides newtoniens. Cependant, beaucoup de fluides ne réagissent pas aussi simplement. C'est par exemple le cas de certains pétroles et de certaines boues qui ne peuvent se déformer que s'ils sont soumis à une contrainte suffisante, ou encore dont la viscosité peut changer avec la contrainte imposée. On peut aussi trouver des fluides complexes dans l'agroalimentaire, certains produits d'usage quotidien — tels que le dentifrice — ou encore les fluides biologiques. Comme nous le verrons, la viscosité de certains de ces fluides peut se modéliser par deux régimes liés par une transition, dont la séparation est parfois liée à une certaine contrainte. Une telle transition complexifie l'étude de l'écoulement du fluide.

Les écoulements non newtoniens présentent ainsi un premier degré de complexité. Leur écoulement dans des milieux de géométrie complexe pose alors des problèmes supplémentaires. Des exemples de tels milieux sont les milieux poreux, qui présentent une large distribution de géométries et de surfaces influençant l'écoulement, qui a ainsi lieu dans des régions lui opposant une résistance variable. Or, on retrouve régulièrement des fluides complexes dans des milieux poreux, avec par exemple les pétroles, les fluides utilisés pour la fracturation hydraulique, ou encore le sang dans les os. Ainsi, l'étude d'écoulements non newtoniens en milieux poreux présente un intérêt certain. Il est néanmoins plus simple d'étudier des simulations de tels écoulements que les écoulements réels, les grandeurs à mesurer (vitesse, pression, concentration locale d'un traceur...) étant difficilement accessibles dans les milieux poreux ou dans certaines fractures.

Cependant, les écoulements non newtoniens peuvent être difficiles à simuler [51], principalement du fait de la dépendance de la viscosité du fluide avec des paramètres tels que l'historique de l'écoulement, la contrainte locale, le temps, ou encore à cause de divergences locales. Parmi les méthodes numériques existantes, la méthode de Boltzmann sur réseau attire de plus en plus l'attention, et montre des résultats satisfaisants [27, 78, 38, 48, 31, 49, 1, 55]. Cette méthode est de plus locale, à l'exception d'une étape d'échange de quantités entre deux nœuds voisins, et donc simple à paralléliser. Elle est donc un bon candidat pour étudier les fluides non newtoniens en milieux poreux.

Les études actuelles des écoulements non newtoniens en milieux poreux portent majoritairement sur les asymptotes des différents régimes, ou alors sur la transition en régime à l'échelle microscopique. Dans cette thèse, nous étudions spécifiquement cette transition dans les milieux poreux hétérogènes macroscopiques. En particulier, nous étudierons les propriétés statistiques des régions d'écoulement de chaque régime.

Dans une première partie, nous utiliserons les lois d'écoulement de deux fluides non newtoniens, un de Bingham, et un de Carreau, à l'échelle de Stokes et à celle de

Darcy. Dans la deuxième partie, nous discuterons de la méthode numérique utilisée. Dans la troisième partie, nous expliquerons quelques théories mathématiques utiles à cette thèse, et nous présenterons une étude originale de l'équation de Darcy. Dans la quatrième partie, nous étudierons la transition en régime d'un fluide de Bingham dans un milieu poreux hétérogène macroscopique. Dans la cinquième partie, nous étudierons la transition en régime de fluides de Carreau dans un milieu poreux hétérogène macroscopique. Nous concluons enfin la thèse dans la dernière partie.

Chapitre 1

Fluides non-newtoniens, milieux poreux

Liste des symboles utilisés dans cette thèse :

- κ : perméabilité des milieux poreux,
- σ : pour le fluide de Bingham, écart-type du champ de perméabilité,
- λ_c : longueur de corrélation des milieux poreux générés,
- $\dot{\gamma}$: taux de déformation du fluide,
- τ : contrainte imposée au fluide,
- τ_c : contrainte critique de changement de régime du fluide,
- μ : viscosité dynamique du fluide,
- μ_0 : viscosité dynamique du fluide en régime newtonien,
- μ_{eff} : viscosité dynamique effective du fluide,
- ν : viscosité cinématique du fluide,
- α : exposant régissant la relation débit-pression pour les fluides en loi de puissance,
- G_l : pression seuil locale à laquelle le fluide change de régime,
- G_s : pression à laquelle la taille des agrégats du système divergent,
- Θ : exposant régissant la relation débit-pression dans le régime transitoire,
- τ_f : exposant de la distribution de taille des agrégats,
- γ_f : exposant de la taille de coupure des agrégats en fonction de la pression,
- ζ : exposant du rapport d'aspect des agrégats,
- \tilde{X} : quantité X adimensionnée,
- X_L : pour le fluide de Bingham, indice appliqué aux quantités regardant les propriétés de la longueur des agrégats,
- X_W : pour le fluide de Bingham, indice appliqué aux quantités regardant les propriétés de la largeur des agrégats.
- σ_κ : pour le fluide de Carreau, écart-type du champ de perméabilité,
- σ_G : pour le fluide de Carreau, écart-type du champ de pression seuil,

- δ : pour le fluide de Carreau, exposant de la taille de coupure des agrégats en fonction de la proportion de régions dans un régime,
- X_{inf} : pour le fluide de Carreau, indice appliqué aux quantités regardant les agrégats en dessous du seuil,
- X_{sup} : pour le fluide de Carreau, indice appliqué aux quantités regardant les agrégats au dessus du seuil.

1.1 Introduction

On caractérise les fluides par leur rhéologie, c'est-à-dire par la façon dont ils se déforment sous la contrainte. Plus généralement, la rhéologie est définie par le Groupe Français de Rhéologie comme « la science de la matière en écoulement, des contraintes qu'il faut lui appliquer et des modifications de la structure qui en résultent ». Dans le cas d'un fluide, on qualifie de viscosité la dérivée de la relation entre le taux de cisaillement et la contrainte qu'il subit.

Une première étude de la déformation des liquides est celle d'Isaac Newton, dans son livre *Principia*, publié en 1687. En particulier, il étudie la résistance des liquides à la déformation. De ses mots : "*The resistance which arise from the lack of slipperiness of the parts of the liquid, other things being equal, is proportional to the velocity with which the parts of the liquid are separated from one another*". Autrement dit, la résistance opposée à un objet déformant un fluide est proportionnelle à la vitesse à laquelle il se déforme :

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \tag{1.1}$$

où τ est la contrainte, μ la viscosité, et $\dot{\gamma}$ le taux de déformation. En son hommage, les fluides dont la viscosité est constante sont appelés des fluides newtoniens.

Dans les cas relativement simples de l'eau et du miel, la viscosité est constante, et indépendante de la direction. Cependant, une grande partie des fluides existants sont complexes, en ceci que leur relation contrainte-taux de déformation peut être anisotrope, non linéaire, dépendante du temps ou de l'historique des déformations.

Lorsque la relation entre le taux de déformation et la contrainte est non linéaire et ne dépend pas du temps, on peut classer les fluides en trois grandes catégories, qui sont les fluides à seuil, les fluides rhéoépaississant, et les fluides rhéofluidifiants. Les lois contrainte-taux de déformation de ces trois classes ont été tracées sur la figure 1.1.

Les fluides à seuil ont une contrainte seuil τ_c telle que le taux de déformation est nul pour toute contrainte en dessous du seuil. Au delà de ce seuil, le fluide peut être déformé et donc s'écouler. Les fluides rhéofluidifiants perdent en viscosité lorsque la contrainte augmente. Les fluides rhéoépaississants gagnent en viscosité lorsque la contrainte augmente. Lorsque la relation entre le taux de déformation

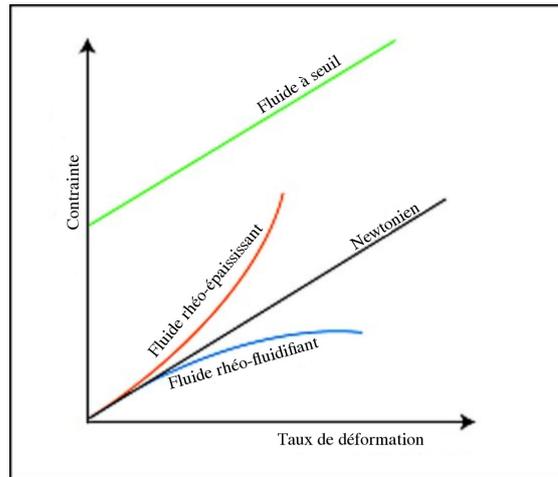


FIGURE 1.1 – Relations contrainte-taux de déformation pour plusieurs types de fluides. En noir, fluide newtonien. En bleu, fluide rhéofluidifiant. En rouge, fluide rhéoépaississant. En vert, fluide à seuil.

et la contrainte dépend du temps, on parle soit de fluide thixotrope, soit de fluide antithixotrope. Dans le premier cas, le fluide, soumis à une contrainte constante, devient moins visqueux avec le temps. Dans le second cas, le fluide devient plus visqueux avec le temps.

1.2 Fluides non-newtoniens en écoulement de Poiseuille

1.2.1 Les fluides à seuil

On trouve des fluides à seuil tout autour de nous : dans l'agroalimentaire, la pâte dentifrice, la pâte à modeler, certaines boues, certains pétroles... Ce type de fluide possède aussi un certain nombre d'applications en milieu poreux. On modélise ainsi des écoulements en milieu poreux, par exemple dans le cas d'écoulement de pétroles dans des sols poreux ou fracturés [29, 2, 5, 7]. Une autre application des fluides à seuil est l'écoulement de mousses en milieu poreux [60, 61, 62]. On peut ainsi utiliser des mousses pour déplacer ou piéger du pétrole. On peut aussi, par exemple, protéger une plage de sable contre des polluants en colmatant l'espace entre les grains par de la mousse. De plus, on peut modéliser le comportement de certains polymères de cette façon [30]. Enfin, les fluides à seuil sont aussi étudiés comme une éventuelle nouvelle méthode de porosimétrie [3, 23, 4].

Les fluides à seuil sont communément décrits avec le modèle de Herschel-

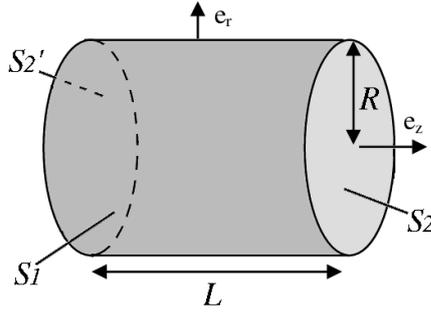


FIGURE 1.2 – Illustration des dimensions L et R du canal, ainsi que des surfaces d'intégration S_1 , S_2 et S_2' .

Bulkley. Pour un fluide cisailé avec un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, ce modèle s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < \tau_c \\ ((\tau - \tau_c)/K)^\alpha & \text{si } \tau \geq \tau_c \end{cases} \quad (1.2)$$

avec α un exposant et K une constante nommée consistance. Pour $\alpha = 1$ (fluide de Bingham) alors $K = \mu$ est la viscosité, l'écoulement est newtonien au delà de la contrainte seuil.

Un tel fluide ne s'écoulera qu'à partir de cette contrainte. Les régions en dessous se comportent alors comme un solide. Celles-ci peuvent alors soit être immobiles, soit être déplacées par l'écoulement environnant.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéresserons aux milieux poreux. Au premier ordre, un milieu poreux peut se modéliser par un ensemble de canaux. Ainsi, il est pour commencer plus approprié de regarder un écoulement de Poiseuille dans un canal avec un fluide de Bingham.

Soit un canal de rayon R , dans lequel s'écoule un fluide soumis à une différence de pression ΔP . L'écoulement est considéré ici stationnaire (le régime d'écoulement est établi). Le problème est symétrique par rotation autour de l'axe \vec{z} . Ce qui implique pour le champ de vitesse que $u_\theta = 0$, et qu'il est invariant par révolution autour de l'axe \vec{z} , et par translation selon \vec{z} , soit $\vec{u} = \vec{u}(r)$. L'équation de conservation de la masse :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1.3)$$

nous permet ensuite de déterminer, avec les hypothèses précédentes, $u_r = 0$. Nous avons ainsi $\vec{u} = \vec{u}_z(r)$.

Isolons un cylindre de rayon $r < R$ et de longueur L , centré sur l'axe du canal (1.2). L'écoulement étant stationnaire, la somme des contraintes σ_{ij} appliquées au

cylindre est nulle :

$$\oiint_S \sigma_{ij} dS = 0, \quad (1.4)$$

avec σ le tenseur des contraintes. L'écoulement étant selon \vec{z} , et ne dépendant que de r , les seules contraintes qui s'appliquent sont σ_{zz} , à l'entrée et à la sortie du sous-cylindre, et σ_{rz} , sur le reste de la surface, avec $\sigma_{XY} = \frac{du_Y}{dX}$. Nous avons alors

$$(\sigma_{zz}(L) - \sigma_{zz}(0))\pi r^2 + 2\pi r L \sigma_{rz}(r) = 0 \quad (1.5)$$

soit

$$\tau = \sigma_{rz} = \frac{\sigma_{zz}(0) - \sigma_{zz}(L)}{2L} r = \frac{\Delta P}{2L} r. \quad (1.6)$$

Nous constatons ainsi qu'à une contrainte seuil τ_c correspond un rayon critique $r_c = \frac{2\tau_c}{L}$. La région en dessous de r_c est à l'état solide. La région au dessus s'écoule. Ainsi, à rayon de canal R , pour une différence de pression inférieure à : $\Delta P = \frac{2L\tau_c}{R}$, tout le matériau sera solide. On peut donc constater que plus le canal est large, plus la pression nécessaire pour s'écouler est faible.

Nous pouvons désormais appliquer l'équation (1.6) pour les fluides de Bingham,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \begin{cases} 0 & \text{si } r < r_c \\ \frac{1}{\mu}(\tau - \tau_c) & \text{si } r \geq r_c \end{cases}. \quad (1.7)$$

Le fluide ne se déformant que pour $r_c < r < R$, la vitesse maximale est atteinte si $r = r_c$, et vaut

$$U_{\max} = \int_{r_c}^R \frac{1}{\mu}(\tau - \tau_c) dr' = \frac{\Delta P}{4L\mu} (R - r_c)^2. \quad (1.8)$$

Le fluide ne se déforme pas pour $0 < r < r_c$. Le profil de vitesse du fluide est alors :

$$u(r > r_c) = U_{\max} - \int_{r'}^R \frac{1}{\mu}(\tau - \tau_c) dr' = U_{\max} \left(1 - \left(\frac{r - r_c}{R - r_c} \right)^2 \right) \quad (1.9)$$

Un écoulement tel que celui-ci, dans le lequel la région centrale est solide mais déplacée est appelé écoulement « bouchon ».

Le profil de vitesse correspondant est tracé sur la Figure 1.3, à gauche. La vitesse moyenne, dès qu'il y a écoulement, vaut

$$\begin{aligned} U_{\text{moy}} &= \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} \int_0^R u(r) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{R^2} \frac{\Delta P}{4\mu L} (R - r_c)^2 \frac{3R^2 + 2Rr_c + r_c^2}{6} \end{aligned} \quad (1.10)$$

avec

$$r_c = \frac{2\tau_c}{L} \quad (1.11)$$

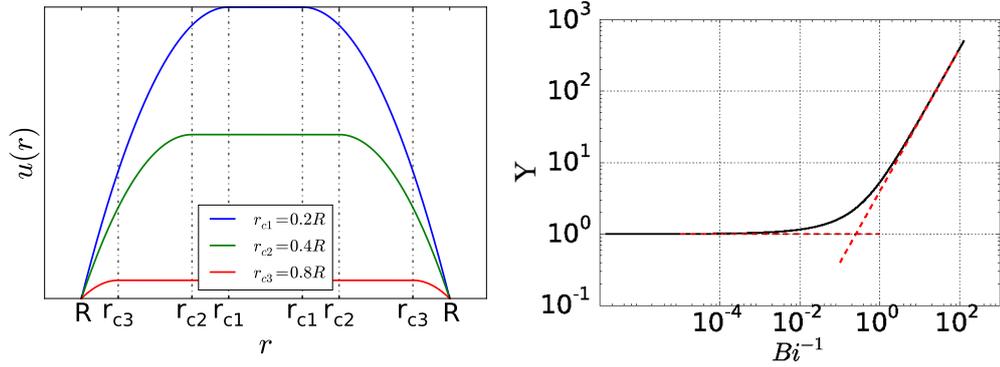


FIGURE 1.3 – Gauche : profil de vitesse pour un fluide de Bingham, pour plusieurs pressions avec $r_{c\{1,2,3\}} = \frac{2\tau_c L}{\Delta P_{\{1,2,3\}}}$. Droite : courbe $Y(Bi)$. Les asymptotes sont en pointillés.

Comme r_c est inversement proportionnel à ΔP , la relation entre la vitesse moyenne (et donc le débit) et la pression n'est pas linéaire. À haute pression cependant, $r_c \rightarrow 0$, et nous retrouvons le cas asymptotique d'un écoulement de Poiseuille newtonien.

Nous pouvons de plus regarder la relation débit-pression, proportionnelle à $U_{moy}(\Delta P)$. À cette fin, nous ré-écrivons l'équation (1.10) avec deux nombres adimensionnés, le nombre de Bingham $Bi = \frac{U_c}{U_{moy}} = \frac{\tau_c R}{\mu U_{moy}}$ avec $U_c = \frac{\tau_c R}{\mu}$ la vitesse construite à partir de la contrainte seuil, et le rapport du rayon et du rayon critique : $Y = \frac{R}{r_c}$:

$$Bi^{-1} = \frac{U_{moy}}{U_c} \begin{cases} \frac{Y^{-3}(Y-1)^2(3Y^2+2Y+1)}{12} & \text{si } Y > 1 \\ 0 & \text{si } Y \leq 1 \end{cases} \quad (1.12)$$

Cette relation est tracée sur la figure 1.3, à droite. Elle représente donc la relation débit-pression adimensionnée, car $Bi^{-1} \propto U_{moy}$ et $Y = \frac{R}{r_c} \propto \Delta P$. Nous avons tracé en rouge les asymptotes de basses et de hautes pressions. Elles correspondent aussi aux cas limites de la relation contrainte-taux de déformation (zéro déformation et fluide newtonien), comme expliqué plus haut. On peut constater qu'il existe un régime transitoire entre ces asymptotes. Ceci est dû à la variation du rayon critique entre 0 et R avec la pression appliquée.

Nous pouvons noter que le nombre de Bingham représente l'inverse du taux de déformation, alors que le nombre Y est proportionnel à l'inverse de la contrainte imposée. Nous avons là un premier effet de transition, purement dû à la relation non linéaire contrainte-taux de déformation. Par ailleurs, si on considère un milieu poreux modèle constitué de multiples canaux de rayons différents, on constate que l'on ajoute un paramètre de désordre supplémentaire, du fait de l'existence de

plusieurs rayons de canaux et donc de plusieurs pressions critiques. Le fluide va ainsi s'écouler dans chaque canal à partir de différentes pressions critiques. Ceci est d'ailleurs l'idée sous-jacente de la porosimétrie par fluide à seuil.

1.2.2 Les fluides de Carreau

Les fluides rhéofluidifiants et rhéoépaississants présentent un grand intérêt pratique. Ils sont en effet présents lors de l'extraction pétrolière mais également utilisés pour la fracturation hydraulique [46]. Effectivement, l'interaction fluide-solide est un élément important de la fracturation [43, 42, 20, 76].

Ils sont aussi présents dans plusieurs produits alimentaires [59], où ils participent à la texture de la nourriture. Beaucoup de fluides biologiques présentent aussi ce genre de comportement. Ainsi, le sang est un fluide rhéofluidifiant, avec cependant un comportement non-monotone lorsque la contrainte devient trop forte [54].

La viscosité d'un fluide de Carreau est décrite par :

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_{\text{inf}} + (\mu_0 - \mu_{\text{inf}})(1 + (\lambda\dot{\gamma})^2)^{\frac{\alpha-1}{2}}, \quad (1.13)$$

avec μ_{inf} la viscosité à cisaillement infini, μ_0 la viscosité à cisaillement nul, λ un temps de relaxation et α un exposant. Si $\alpha < 1$, le fluide est *rhéofluidifiant* : il devient de moins en moins visqueux lorsque la contrainte augmente. Si $\alpha > 1$, le fluide est alors *rhéoépaississant* : il devient de plus en plus visqueux lorsque la contrainte augmente.

Nous avons cependant vu qu'avec un fluide à seuil, il existe déjà dans le cas le plus simple — le canal de Poiseuille — une transition complexe entre les régimes asymptotiques de basse et haute pression. Le fluide de Carreau induit plus de complexité. Nous utiliserons donc une loi simplifiée qui présente un changement de régime à une contrainte particulière τ_c :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\tau}{\mu} & \text{si } \tau < \tau_c \\ \left(\frac{\tau}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}} & \text{si } \tau \geq \tau_c \end{cases}, \quad (1.14)$$

avec μ la viscosité du fluide en régime newtonien. L'introduction d'une contrainte seuil séparant un régime newtonien et un régime de Carreau a pour but de simplifier l'étude des effets de changement de régime. De plus, on choisit ici que la viscosité tende vers 0 pour une pression infinie $\mu_{\text{inf}} = 0$, plutôt que d'atteindre un plateau. Ainsi, on part d'un plateau de viscosité pour $\tau < \tau_c$, et réduisons la viscosité asymptotiquement à 0, en comparaison de (1.13) qui part d'un plateau μ_0 à $\tau = 0$, et voit sa viscosité descendre jusqu'à un plateau asymptotique μ_{inf} .

Nous illustrons ceci sur la figure 1.4, avec à gauche, un tracé de l'équation (1.13) en noir et les asymptotes correspondantes en rouge. À droite est tracée la relation

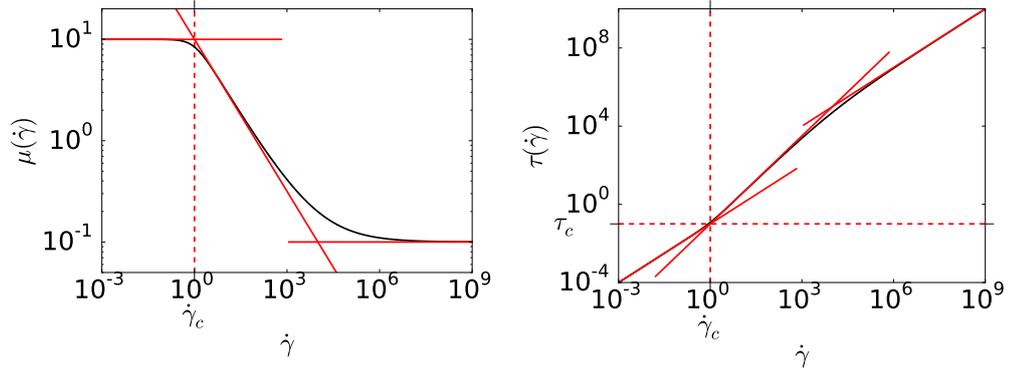


FIGURE 1.4 – Gauche : relation viscosité-taux de déformation (1.13) (noir) avec ses régimes asymptotiques et rhéofluidifiant (rouge). Droite : relation contrainte-taux de déformation correspondant à l'équation (1.13) (noir) avec ses régimes asymptotiques et rhéofluidifiant (rouge). Sont aussi illustré les taux de déformation et contrainte critique γ_c et τ_c .

contrainte-taux de déformation correspondante, avec le même code couleur. Notre cas de figure correspond au cas où la relation contrainte-taux de déformation du fluide suit le premier régime asymptotique et le régime rhéofluidifiant, et change de l'une à l'autre à une contrainte seuil. Cette simplification permet de plus d'étudier les similitudes avec le fluide de Bingham, lors de la transition de régime.

Nous étudions désormais l'écoulement d'un fluide décrit par (1.14) dans un canal cylindrique. De manière identique au cas précédent, la contrainte varie linéairement avec le rayon. On peut donc obtenir un rayon critique de la même manière. L'équation (1.6) appliquée au fluide de Carreau à seuil donne :

$$\begin{aligned} U_{\max} &= \int_0^{r_c} \frac{1}{\mu} \tau dr' + \int_{r_c}^R \left(\frac{\tau}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}} dr' \\ &= \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{4L} r_c^2 + \left(\frac{\Delta P}{2KL}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha+1} (R^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - r_c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}). \end{aligned} \quad (1.15)$$

La vitesse en $r = r_c$ vaut :

$$\begin{aligned} U_{r_c} &= U_{\max} - \int_0^{r_c} \frac{\tau}{\mu} dr' \\ &= \left(\frac{\Delta P}{2KL}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha+1} (R^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - r_c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Pour $r_c < R$, le profil de vitesse du fluide se calcule ainsi :

$$\begin{aligned} u(r) &= U_{\max} - \int_0^r \frac{\tau_{r < r_c}}{\mu} dr' & \text{si } r < r_c \\ u(r) &= U_{r_c} - \int_{r_c}^r \left(\frac{\tau_{r \geq r_c}}{K}\right)^{\frac{1}{\alpha}} dr' & \text{si } r \geq r_c. \end{aligned} \quad (1.17)$$

soit

$$\begin{aligned} u(r) &= \frac{1}{\mu} \frac{\Delta P}{4L} (r_c^2 - r^2) + \left(\frac{\Delta P}{2KL} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha+1} (R^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - r_c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}) \quad \text{si } r < r_c \\ u(r) &= \left(\frac{\Delta P}{2KL} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha}{\alpha+1} (R^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - r^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}) \quad \text{si } r \geq r_c. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Le profil de vitesse correspondant est tracé sur la figure 1.5, à gauche. La vitesse moyenne s'écrit donc :

$$\begin{aligned} U_{moy} &= \left(\frac{\Delta P}{2KL} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\alpha(2\alpha+1)}{(\alpha+1)(3\alpha+1)} \left(R^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - \left(\frac{r_c}{R} \right)^2 r_c^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \right) + \frac{\Delta P}{8\mu L} \frac{r_c^4}{R^2} \quad \text{si } r_c < R \\ U_{moy} &= \frac{\Delta P}{8\mu L} R^2 \quad \text{si } r_c \geq R. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Cette fois encore, on constate dans la relation débit-pression des asymptotes, $r_c = R$ et $r_c \rightarrow 0$, qui correspondent à un écoulement newtonien pur, et à un écoulement rhéofluidifiant en loi de puissance. Entre ces asymptotes se trouve un régime transitoire complexe. On peut ré-écrire l'équation (1.19), avec cette fois trois nombres adimensionnés. Le premier est similaire au nombre de Bingham défini précédemment, $Bi = \frac{U_c}{U_{moy}}$. Le second est le rapport du rayon et du rayon critique $Y = \frac{R}{r_c}$. Le troisième est le rapport $H = \frac{\mu}{K^{\frac{1}{\alpha}} r_c^{1-\frac{1}{\alpha}}}$. Ce dernier correspond

au rapport des taux de déformation à la transition : $\frac{\mu}{\tau_c}$ et $\left(\frac{K}{\tau_c} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

$$Bi^{-1} = \begin{cases} Y^{-3} \left[\frac{\alpha(2\alpha+1)}{(\alpha+1)(3\alpha+1)} \left(Y^{3+\frac{1}{\alpha}} - 1 \right) H + \frac{1}{4} \right] & \text{si } Y \geq 1 \\ \frac{1}{4} & \text{si } Y < 1 \end{cases} \quad (1.20)$$

Nous traçons cette relation sur la figure 1.5, à droite. Notons que pour qu'il y ait continuité à $r = r_c$, il faut $H = 1$.

1.2.3 Vers les milieux poreux macroscopiques

Nous venons d'étudier l'écoulement de fluides non-newtoniens avec changement de régime dans un canal. Comme nous l'avons vu, leur relation débit-pression possède deux régimes asymptotiques, séparés par une phase de transition. De plus, nous avons vu qu'il est possible d'adimensionner leur relation débit-pression à l'aide de Bi et de Y .

Il est, par ailleurs, possible de prédire ces asymptotes à partir de la relation contrainte-taux de déformation de manière qualitative. Effectivement, l'équation (1.6) nous donne

$$\tau = \sigma_{rz} \simeq \frac{\Delta P}{2L} R. \quad (1.21)$$

En introduisant le débit Q , une analyse dimensionnelle permet d'écrire :

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial r} \simeq \frac{u}{R} \simeq Q/R^n, \quad (1.22)$$

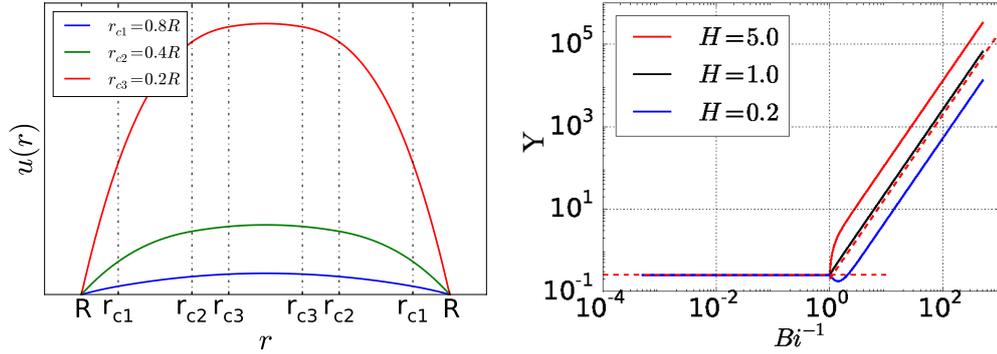


FIGURE 1.5 – Gauche : profil de vitesse pour un fluide de Carreau, pour plusieurs pressions avec $r_{c\{1,2,3\}} = \frac{2\tau_c L}{\Delta P_{\{1,2,3\}}}$, pour $H = 1$. Droite : courbe $Y(Bi^{-1})$ pour différents H . Les asymptotes sont en pointillés.

avec $n = 2$ en deux dimensions, et $n = 3$ en trois dimensions. A partir de la loi $\dot{\gamma}(\tau)$, on peut ainsi prédire une relation asymptotique $Q(\Delta P)$. De plus, on peut déduire une pression critique de la contrainte seuil de changement de régime, $\Delta P_c \simeq \frac{L\tau_c}{R}$. Cette approche est couramment utilisée dans la littérature [11] pour prédire la relation débit-pression en milieu poreux.

Nous avons ainsi déjà, dans un tube, un premier effet de transition entre deux régimes. Cependant, comme nous nous intéresserons à des échelles beaucoup plus grandes que celle des pores, et simplifier le changement d'échelle, nous allons par la suite considérer cette première transition comme négligeable. A l'échelle locale, de Darcy, la relation débit-pression aura donc une transition à une pression donnée.

Un modèle courant pour les milieux poreux est le réseau de canaux parallèles. Lorsque l'on passe d'un canal cylindrique à une distribution de canaux cylindriques, on peut considérer du désordre dans la distributions des rayons. Effectivement, du fait de la relation entre la pression imposée et le rayon critique de changement de régime, à une pression ΔP donnée, les canaux de rayon inférieur au rayon critique r_c seront dans le premier régime d'écoulement tandis que les autres canaux seront dans le second régime. Ainsi, l'ajout de cet effet de désordre complexifie encore plus la transition.

Un milieu poreux réel, souvent, ne peut pas être considéré comme constitué de canaux réguliers. Par exemple, un entassement de billes de tailles aléatoires va former un réseau de pores. Un tel réseau peut être interprété comme un réseau de canaux qui varient en taille, en forme, et qui connectent les pores. Un autre type de milieu poreux est la fracture, et les milieux constitués de réseaux de fractures. Effectivement, une roche fracturée, par exemple, présentera deux surfaces irrégulières dont l'ouverture varie spatialement. Dans un tel milieu, à une pression

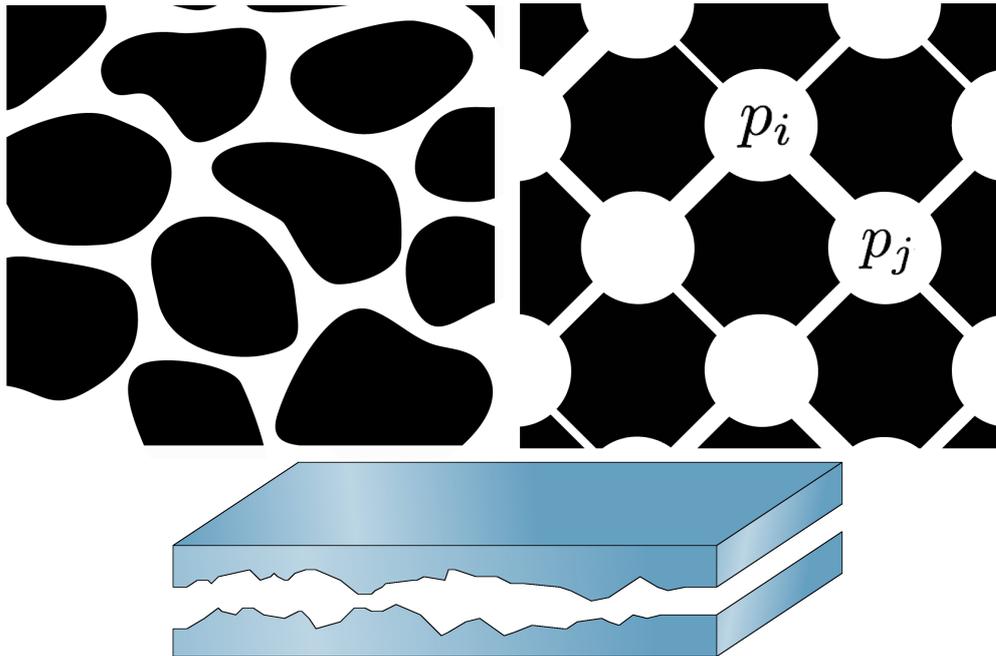


FIGURE 1.6 – En haut : illustration d'un milieu poreux à l'échelle microscopique (gauche) et d'un réseau de pores (droite). En bas : illustration d'une fracture.

donnée, la distance entre les deux surfaces peut être inférieure à la longueur critique du changement de régime. Nous illustrons ces deux types de milieu sur la figure 1.6, avec, en haut, deux réseaux de canaux, et en bas, une fracture.

T. Chevalier et L. Talon [17] ont étudié l'écoulement d'un fluide de Bingham en milieu poreux microscopique, et ont montré l'existence de chemins préférentiels liée au désordre structural. Effectivement, dans un entassement aléatoire de billes, il existe un chemin présentant un seuil en contrainte plus bas que les autres. Chaque chemin étant unique, il est possible de les ordonner entre eux, et le fluide dans chacun s'écoulera à une pression minimale différente. S.P. Sullivan *et al* [67] ont comparé l'écoulement d'un fluide en loi de puissance à celui d'un fluide newtonien dans un canal rempli d'obstacles. Ils ont en particulier montré que le fluide en loi de puissance privilégiait l'écoulement près des murs, en comparaison au fluide newtonien.

Ainsi, lorsque l'on souhaite déduire de la rhéologie microscopique d'un fluide à son comportement mésoscopique (échelle de Darcy) en milieu poreux, plusieurs facteurs complexifient la transition en régime. On s'attend donc à ce qu'un désordre macroscopique ajoute de la complexité dans les transitions de régimes d'écoulement non-newtonien.

Par ailleurs, il n'est pas rare d'observer des variations structurelles (perméabilité, porosité...) à l'échelle géologique. Beaucoup d'études ont été réalisées pour étudier l'influence de ce désordre macroscopique sur différents phénomènes comme les écoulements newtoniens [21, 32], le transport passif ou réactif [22, 66, 8, 72, 19, 73]. D'autres études regardent le déplacement d'un fluide visqueux par un autre [74, 75, 12, 52, 71, 53]. En comparaison, il n'existe à notre connaissance, aucune étude caractérisant l'écoulement de fluides non-newtoniens en milieu poreux macroscopique hétérogène.

1.3 Fluides non-newtoniens dans des milieux poreux macroscopiques

Plusieurs grandeurs sont utilisées pour caractériser un milieu poreux. Une des plus courantes est la perméabilité κ . Cette dernière est définie grâce à l'équation de Darcy, obtenue en moyennant l'équation de Navier-Stokes sur un volume grand. Pour un fluide newtonien, elle s'écrit :

$$\vec{U} = -\frac{\kappa}{\mu} \vec{\nabla} P, \quad (1.23)$$

où μ est la viscosité du fluide et κ la perméabilité qui définit les propriétés géométriques du milieu. Nous considérons ici que la perméabilité est homogène et isotrope, et nous réduisons ainsi le tenseur de perméabilité à un scalaire. L'équation de Darcy telle qu'écrite ci-dessus vaut pour un milieu poreux homogène. Cependant, il est possible de passer à un milieu poreux inhomogène à très grandes échelles, en considérant, toujours pour un fluide newtonien, des grandeurs locales variables :

$$\vec{u}(\vec{r}) = -\frac{\kappa(\vec{r})}{\mu} \vec{\nabla} P(\vec{r}). \quad (1.24)$$

L'équation de Darcy fait cependant l'objet de critiques. En particulier, elle ne tient pas compte des discontinuités dans le milieu. En effet, une discontinuité de perméabilité entraîne une discontinuité des vitesses, ce qui n'est pas physique, mais en plus induit des erreurs numériques. Pour résoudre cela et régulariser les champs de vitesse et de pression, nous utilisons l'équation de Darcy-Brinkman [9, 28] :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} P - \frac{\mu_0}{\kappa(\vec{r})} \vec{u} + \mu_B \Delta \vec{u}, \quad (1.25)$$

avec μ_B un paramètre dépendant de la viscosité et de la géométrie. Cette nouvelle équation tient alors compte des phénomènes de diffusion visqueuse dans le milieu, donc le transport de quantité de mouvement. De plus, la plupart des schémas

numériques comportent des effets de diffusion visqueuse, que l'on peut moduler avec la viscosité du paramètre de Brinkman.

Il est cependant nécessaire de modifier cette équation pour les écoulements de fluides non-newtoniens. En particulier, nous souhaitons tenir compte du changement de régime lorsque le fluide est soumis à une contrainte critique, pour le fluide de Bingham comme pour le fluide de Carreau.

1.3.1 Loi de Darcy pour un fluide à seuil

La loi de Darcy a été étudiée pour plusieurs fluides non-newtoniens. Dans la littérature, de nombreuses études ont été menées pour établir expérimentalement la loi de Darcy pour un fluide de Herschel-Bulkley [29, 58, 2, 77, 10, 14, 6]. Ils ont en particulier montré qu'un terme de pression seuil devait être ajouté à la loi de Darcy :

$$Q^\alpha = M(\nabla P - \nabla P_c), \quad (1.26)$$

avec M un paramètre incluant la consistance et la perméabilité, et α un exposant. On note que cette forme de loi aurait pu être obtenue par le raisonnement de la section 1.2.3. Cette loi proposée est cependant unidimensionnelle. On peut la rendre vectorielle, en supposant que le champ de vitesse \vec{u} est colinéaire (et opposé) au gradient de pression : $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\|\vec{\nabla}P\|}$.

Dans le cas du fluide de Bingham, le fluide ne s'écoule qu'au delà d'un gradient de pression critique G_l , et suit une loi affine en la pression après. L'équation devient :

$$\vec{u} = \begin{cases} \vec{0} & \text{si } \|\vec{\nabla}P\| < G_l \\ -\frac{\kappa}{\mu_0}(\vec{\nabla}P - G_l \frac{\vec{\nabla}P}{\|\vec{\nabla}P\|}) & \text{si } \|\vec{\nabla}P\| > G_l \end{cases} . \quad (1.27)$$

\vec{u} est opposé à $\vec{\nabla}P$, d'où :

$$\vec{u} = -\frac{\kappa}{\mu_0}(\vec{\nabla}P + G_l \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}). \quad (1.28)$$

Donc :

$$\frac{\mu_0}{\kappa}(1 + \frac{\kappa G_l}{\mu_0 \|\vec{u}\|})\vec{u} = -\vec{\nabla}P. \quad (1.29)$$

Nous pouvons alors inclure la correction de Brinkman à seuil :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}P - \frac{\mu_{eff}(\vec{u})}{\kappa}\vec{u} + \mu_B \Delta \vec{u}, \quad (1.30)$$

avec $\mu_{eff} = \mu_0(1 + \frac{\kappa G_l}{\mu_0 \|\vec{u}\|})$.

Comme on le voit, une façon d'introduire un seuil dans l'équation de Darcy-Brinkman est de faire dépendre la viscosité de la vitesse locale. En ce qui concerne la viscosité de Brinkman, pour des raisons de simplicité, nous avons choisi $\mu_B = \mu_0$.

Il est important de noter que la quantité G_l dépend de la géométrie locale du milieu poreux. En conséquence, pour les milieux hétérogènes aux grandes échelles, on s'attend à ce que cette quantité varie spatialement.

1.3.2 Loi de Darcy pour un fluide de Carreau

Pour le fluide de Carreau, l'analyse dimensionnelle de la section 1.2.3 permet également de prédire une loi de Darcy généralisée :

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= -C_1 \|\vec{\nabla} P\| & \text{si } \|\vec{\nabla} P\| \leq G_l \\ \|\vec{u}\|^\alpha &= -C_2 \|\vec{\nabla} P\| & \text{si } \|\vec{\nabla} P\| > G_l. \end{aligned} \quad (1.31)$$

On peut noter que cette équation a récemment été montrée numériquement par Zami-Pierre *et al.* [79]. En équation vectorielle en supposant à nouveau $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\|\vec{\nabla} P\|}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{u} &= -\frac{\kappa}{C_1} \vec{\nabla} P & \text{si } \|\vec{\nabla} P\| \leq G_l \\ \frac{1}{C_2} \|\vec{u}\|^{\alpha-1} \vec{u} &= -\vec{\nabla} P & \text{si } \|\vec{\nabla} P\| > G_l. \end{aligned} \quad (1.32)$$

D'où, en introduisant le terme de Brinkman $\mu_B \Delta \vec{u}$, et en utilisant le même raisonnement que précédemment, nous arrivons à :

$$\vec{0} = -\vec{\nabla} P - \frac{\mu_{eff}(\vec{u})}{\kappa} \vec{u} + \mu_B \Delta \vec{u}, \quad (1.33)$$

avec

$$\begin{aligned} \mu_{eff} &= \mu_0 & \text{si } \|\vec{u}\| \leq u_0 \\ \mu_{eff} &= \mu_0 \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\alpha-1} & \text{si } \|\vec{u}\| > u_0, \end{aligned} \quad (1.34)$$

en posant $u_0 = \frac{\kappa G_l}{\mu_0}$. On note de plus que la constante C_2 a été déterminée par continuité en $u = u_0$. De plus, nous imposons cette fois $\mu_B = \mu_{eff}$. Effectivement, nous choisissons que la diffusion visqueuse peut être celle d'un fluide newtonien ou non-newtonien.

1.3.3 Commentaire

Comme on peut le constater les lois de Darcy pour les fluides de Bingham et Carreau introduisent deux paramètres κ et G_l qui devraient dépendre des propriétés géométriques locales. Par un raisonnement phénoménologique, on peut cependant les relier de manière simple. Effectivement, si on modélise un milieu poreux

comme un ensemble de canaux cylindriques de rayon R , la perméabilité dépend comme $\kappa \simeq R^2$. Par ailleurs, comme nous l'avons vu la pression seuil dans un canal s'écrit : (1.6) :

$$\frac{\Delta P_c}{L} = G_l = 2 \frac{\tau_0}{R}. \quad (1.35)$$

Ainsi, on peut déduire le lien entre la pression seuil et la perméabilité :

$$G_l = \frac{A}{\sqrt{\kappa}}, \quad (1.36)$$

avec A une constante. Cette relation, cependant, est purement phénoménologique, et peut ne pas convenir à tous les milieux poreux. Notons de plus que nous utiliserons deux notations, G_l et G_s . La première correspond au gradient de pression seuil pour le changement de régime local du fluide. La seconde correspond à ce que nous appellerons le gradient de pression critique du système. Pour le fluide de Bingham, il s'agira du gradient de pression au dessous duquel le fluide ne peut pas s'écouler. Pour le fluide de Carreau, il s'agira du gradient de pression à partir duquel il existe un ensemble de régions adjacentes dans un même régime d'écoulement, qui dépasse la taille du système.

Chapitre 2

Méthode numérique

2.1 LBM

Toutes les simulations ont été effectuées en utilisant la méthode de Boltzmann sur réseau (Lattice Boltzmann Method — LBM). Cette méthode s'appuie sur l'équation de Boltzmann, qui décrit la physique des systèmes hors-équilibre. Cette méthode, originellement utilisée sur une grille régulière, se présente comme suit :

- la grille se compose de nœuds, sur lesquels se trouvent un nombre Q de populations, chacune pointant sur un nœud voisin (Fig. 2.1) ;
- pour chaque nœud, on applique un opérateur de collision Ω sur les populations, qui les redistribue entre elles. Cet opérateur contient la physique que l'on souhaite simuler,

$$\tilde{f}_k(\vec{x}_{ij}, t) = f_k(\vec{x}_{ij}, t) + \Omega_k(\vec{x}_{ij}, t), \quad (2.1)$$

où $f_k(\vec{x}_{ij}, t)$ représente la population sur le nœud $(\vec{x})_{ij}$ dans la direction k au temps t . On note de plus \tilde{f}_k la population post-collision ;

- après avoir effectué l'étape de collision, on déplace chaque population sur le nœud vers lequel elle pointe. C'est l'étape de propagation :

$$f_k(\vec{x}_{ij} + \vec{c}_k, t + 1) = \tilde{f}_k(\vec{x}_{ij}, t), \quad (2.2)$$

où \vec{c}_k est le vecteur unitaire pointant dans la direction k .

On note que la somme locale des populations $\sum_k f_k((\vec{x})_{ij})$ représente la densité de fluide au nœud $(\vec{x})_{ij}$ et que la somme $\sum_k f_k((\vec{x})_{ij})\vec{c}_k$ détermine la quantité de mouvement au nœud $(\vec{x})_{ij}$. Le fluide pouvant être compressible, la pression au nœud $(\vec{x})_{ij}$ se détermine à partir de la densité locale $P = \rho c_s^2$, avec c_s un paramètre fixant la vitesse du son dans la simulation.

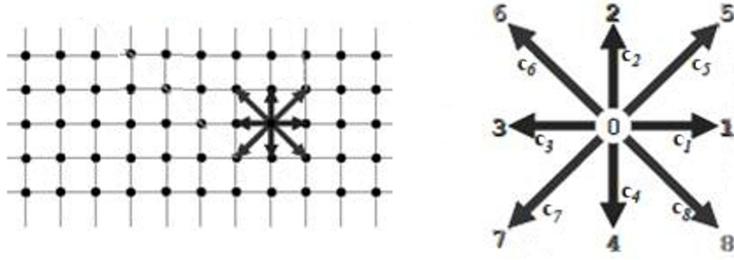


FIGURE 2.1 – Réseau de nœuds, et illustration d'un nœud et des vecteurs unitaires \vec{c}_k

Cette méthode permet de simuler les systèmes retournant à leur état local d'équilibre qui varie lentement. Il existe plusieurs schémas numériques pour l'opérateur de collision, le plus simple à comprendre étant celui de Bhatnagar-Gross-Krook (BGK). Les populations f_k , hors équilibre, convergent vers l'équilibre de façon exponentielle.

$$\Omega_k(\vec{x}_{ij}, t) = -\frac{f_k(\vec{x}_{ij}, t) - f_k^{eq}(\vec{x}_{ij}, t)}{\tau}, \quad \nu_0 = \frac{1}{6}(2\tau - 1) \quad (2.3)$$

où τ est le temps de relaxation, ν_0 la viscosité du fluide et f_k^{eq} est la population à l'équilibre dans la direction k qui dépend de la densité et quantité de mouvement locale.

Ne reste alors plus qu'à calculer les populations à l'équilibre. Cela se fait à l'aide d'expansions de Taylor et de Chapman-Enskog. Si l'on souhaite résoudre, par exemple, les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + (\rho \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{u} &= -\vec{\nabla} p + \rho \nu_0 \Delta \vec{u}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

on trouve que les populations à l'équilibre s'expriment ainsi :

$$f_k^{eq}(\rho, \vec{u}) = t_k \rho \left\{ 1 + \sum_{\alpha, \beta} \left[\frac{c_{i\alpha} u_\alpha}{c_s^2} + \frac{u_\alpha u_\beta}{2c_s^2} \left(\frac{c_{i\alpha} c_{i\beta}}{c_s^2} - \delta_{\alpha\beta} \right) \right] \right\}, \quad (2.5)$$

où les t_k sont des préfacteurs propres à chaque direction, c_s la vitesse du son, paramètre libre fixé pour des raisons de stabilité à $1/\sqrt{3}$, ρ la densité du fluide sur le nœud : $\rho(\vec{x}_{ij}) = \sum_k f_k$, et $\rho \vec{u} = \sum_k f_k \vec{c}_k$.

Si l'on souhaite rajouter une force, une des possibilités est de remplacer la dernière équation \vec{u} par $\vec{U} = \vec{u} + \frac{\tau}{\rho} \vec{F}$.

Il reste alors les conditions aux limites. Plusieurs modèles existent, le plus courant étant de considérer que la limite, le mur, la frontière... est situé à mi-distance entre deux nœuds. À partir de là, on peut implémenter plusieurs conditions :

- Condition périodique : c'est la plus simple à comprendre, les populations au bord du domaine sont déplacées vers les nœuds des bords opposés comme s'ils étaient des nœuds voisins.

- Paroi glissante : pour obtenir cette condition, il faut que les populations "rebondissent" sur les parois. Leur sens dans la direction de la tangente à la paroi est conservée, mais leur sens dans la direction normale à la paroi est inversé. (cf figure 2.2)

- Paroi non-glissante : cette fois, les sens dans les directions tangente et normales sont inversés, et la population portée par le vecteur \vec{c}_k est portée par le vecteur $-\vec{c}_k$.

Nous illustrons ces trois conditions sur la figure 2.2, avec la condition périodique en haut à gauche, la condition aux parois glissante en haut à droite, la condition non-glissante en bas. Nous avons utilisé lors de cette thèse une quatrième condition, qui est une condition d'entrée et de sortie nommée l'anti bounce-back. Les populations en entrée et en sortie sont traitées comme pour le cas de la paroi non-glissante, aux modifications près qu'on ne retourne pas f_q mais $-f_q$, et que l'on ajoute un terme qui ajuste la pression locale à la pression désirée [41].

La méthode de Boltzmann sur réseau possède un certain nombre d'avantages. Pour commencer, elle est aisément parallélisable. Effectivement, chaque opération est locale. Seule l'étape de propagation nécessitera la communication entre processeurs et cœurs, et ne concernera qu'une faible proportion des nœuds.

Elle permet aussi de simuler un grand nombre de phénomènes physiques (milieu multiphasique, fluides newtoniens et non newtoniens, fluides compressibles ou non...), à la condition que la vitesse du fluide considéré varie lentement et soit faible par rapport à la vitesse du son. Ceci vient des développements de Taylor et de Chapman-Enskog, et risque de poser des problèmes de stabilité si la vitesse est trop grande.

2.2 TRT

Il existe plusieurs schémas numériques pour la collision en LBM. La première a été la MRT (Multi Relaxation Times), qui combine les populations entre elles, opère sur ces combinaisons, et assigne un temps de relaxation propre à chacune d'entre elles [40, 26, 56]. Cette méthode a été améliorée pour être plus efficace numériquement, en opérant directement dans l'espace des valeurs propres de la

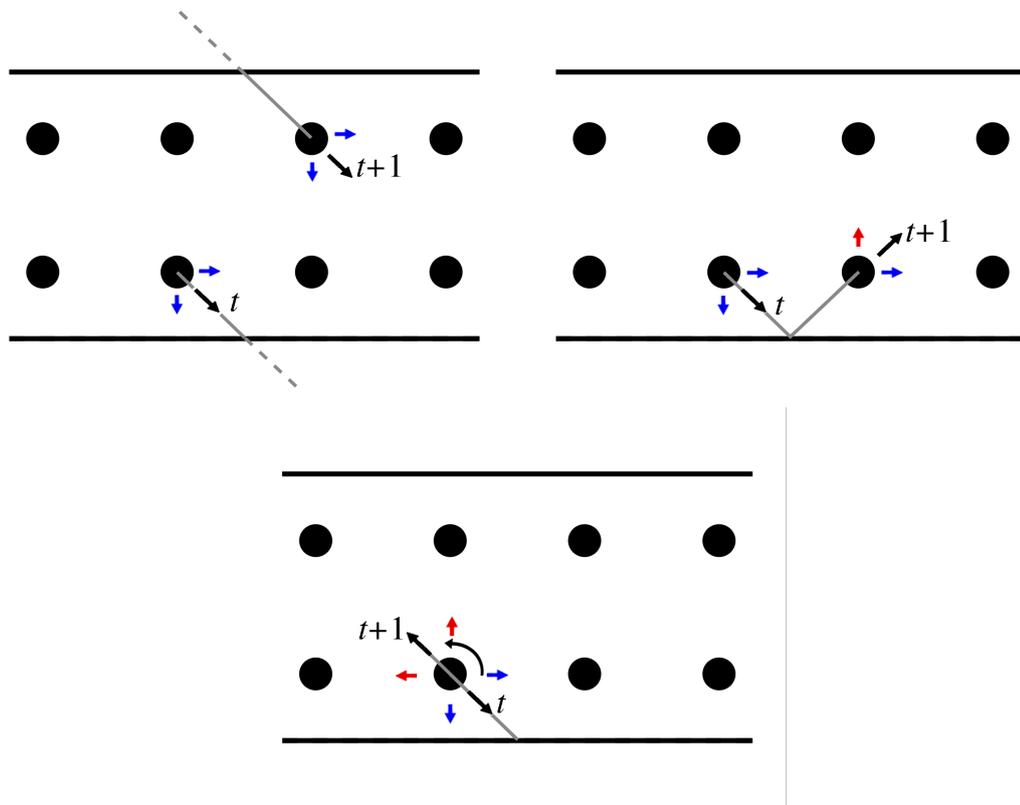


FIGURE 2.2 – Trois types de condition aux limites : périodique (en haut à gauche), glissante (en haut à droite) et non-glissante (en bas).

matrice de collision [25]. Il existe de plus le schéma BGK, qui opère directement sur les populations. Il est plus rapide que le MRT, mais est moins stable, en particulier du fait qu'il possède moins de paramètres : un temps de relaxation, et la vitesse du son.

Pour remédier à cela, Irina Ginzburg a développé le schéma TRT (pour *Two Relaxation Times*) [37, 34, 35, 36], que nous utiliserons par la suite. Le principe est de recombinaison les populations opposées en populations paires et impaires f_q^\pm , et d'associer à chacune un taux s^\pm de relaxation propre :

$$f_q^\pm = \frac{f_q \pm f_{\bar{q}}}{2}, s^\pm = \frac{2}{2\Lambda^\pm + 1}, \Lambda^+ = 3\nu_0, \Lambda^- = \frac{\Lambda}{3\nu_0} \quad (2.6)$$

avec \bar{q} la direction opposée de q : $e_{\bar{q}} = -e_q$, et Λ un paramètre numérique. Ici, q est un entier entre 0 et 4, et les vitesses non-nulles sont ordonnées telles que les quatre premières soient opposées aux quatre dernières. Par la suite, j'utiliserai k lorsque je compte les vitesses de 0 à 8, et q quand je les compte de 0 à 4.

Cependant, pour résoudre l'équation de Darcy-Brinkmann, il est nécessaire d'apporter quelques modifications. En effet, la force de Darcy dépend de la vitesse locale du fluide, ce qui implique une modification des distributions d'équilibre par rapport au schéma TRT. Par ailleurs, le terme de Darcy induit des erreurs sur la viscosité, erreurs qui peuvent être compensées en modifiant la forme de Λ^+ . Ces corrections conduisent au schéma "Improved" TRT proposé par I. Ginzburg [36] :

$$\Lambda^+ = \frac{9(4 + \frac{\nu_{eff}(\vec{u})}{\nu_0\kappa})}{4(3 + 2\Lambda \frac{\nu_{eff}(\vec{u})}{\nu_0\kappa})} \nu_0. \quad (2.7)$$

Il existe d'autres sources d'erreurs, telle que l'inclinaison entre la direction du maillage, et la direction de l'écoulement moyen.

Pour le schéma TRT, l'étape de collision devient alors

$$\begin{aligned} \hat{f}_q(\vec{r}, t) &= [f_q - s^+ n_q^+ - s^- n_q^-], \\ \hat{f}_{\bar{q}}(\vec{r}, t) &= [f_{\bar{q}} - s^+ n_q^+ + s^- n_q^-], \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec

$$n_q^\pm = (f_q^\pm - e_q^\pm), \quad (2.9)$$

e_q^\pm étant les distributions à l'équilibre. Pour les calculer, il faut déterminer la pression et la quantité de mouvement locale :

$$P = \rho c_s^2, \rho = \sum_k f_k, \quad (2.10)$$

$$\rho_0 \vec{u} = \frac{2\vec{J}}{2 + \frac{\nu_0}{\kappa}} \text{ avec } \vec{J} = \sum_k f_k \vec{c}_k, \quad (2.11)$$

la viscosité effective étant calculée au pas de temps précédent en fonction de la vitesse locale et ρ_0 est la densité moyenne du système (en pratique, on prend $\rho_0 = 1$). Les distributions à l'équilibre sont alors :

$$\begin{aligned} e_q^+ &= t_q P, \quad e_0 = \rho - \sum_{k=1}^8 e_k^+ \\ e_q^- &= t_q (\rho_0 \vec{u} \cdot \vec{c}_q + \Lambda^- F_q). \end{aligned} \quad (2.12)$$

\vec{F} est la force volumique, et prend en compte la force de trainée de Darcy. Elle s'écrit ainsi :

$$F_q = -t_q \frac{\nu_0(\vec{u})}{\kappa} \rho_0 \vec{u} \cdot \vec{c}_q \quad (2.13)$$

Ce qui permet de résoudre :

$$\vec{0} = -\nabla \vec{P} - \frac{\rho_0 \nu_{eff}}{\kappa} \vec{u} + \rho_0 \nu_0 \Delta \vec{u}. \quad (2.14)$$

Soit :

$$\vec{0} = -\nabla \vec{P} - \frac{\mu_{eff}}{\kappa} \vec{u} + \mu_0 \Delta \vec{u}. \quad (2.15)$$

2.3 Codes

2.3.1 Codes publics

Les deux codes les plus connus disponibles en ligne à ce jour sont Palabos et OpenLB.

OpenLB et Palabos sont des codes open source en C++ implémentant un certain nombre de modèles LB. En particulier, ils permettent la simulation en deux et trois dimensions. De plus, ils permettent l'usage de différents schémas comme BGK ou MRT, la simulation de fluides multiphasiques, et de thermodynamique. Enfin, ils permettent le raffinement de grille, qui consiste à créer une sous-grille avec des nœuds plus rapprochés à l'intérieur d'une grille plus grossière. Ceci permet de gagner en précision là où c'est nécessaire, sans perdre trop de temps de calcul. Au début de ma thèse, j'ai voulu utiliser le code Palabos pour résoudre nos problématiques. Palabos possède l'avantage d'être modulaire. C'est-à-dire que le code divise les simulations en plusieurs parties relativement indépendantes et assemblables entre elles. Il sera ainsi possible de changer le nombre de voisins ou la physique simulée sans toucher à la grille et aux conditions aux limites. Seul le cas du changement de dimension requiert de retoucher — rapidement — le nombre de voisins, la grille et les conditions aux limites.

Palabos permet aussi, du fait de sa structure, d'implémenter des opérateurs de collision, de nouvelles physiques, des conditions aux limites supplémentaires, ou de nouveaux modèles de nœuds et de grille. Un inconvénient majeur est que la documentation de Palabos n'est pas assez exhaustive. Si la résolution de phénomènes physiques déjà implémentés est faisable bien que fastidieuse, l'implémentation de nouveaux modules (pour non-Newtonien, Darcy, TRT, etc.) demande énormément d'effort de compréhension du code et donc de temps.

2.3.2 Code de l'équipe

Le code de l'équipe, quant à lui, perd en flexibilité pour gagner en rapidité de calcul et en facilité d'implémentation. Effectivement, afin d'être modulable, Palabos procède à un grand nombre d'appel classe (C++), ayant un certain nombre de niveau d'abstraction (héritages multiples, polymorphisme, etc.). En nous limitant aux cas utiles, nous évitons ce grand nombre d'appel et gagnons significativement en vitesse de calcul — un facteur 4 en moyenne.

Nous cherchons à résoudre, dans le cadre de deux fluides différents, l'équation de Darcy-Brinkman pour un fluide non-newtonien

$$\vec{0} = -\vec{\nabla}P - \frac{\mu_{eff}(\|\vec{u}\|)}{\kappa(\vec{r})}\vec{u} + \mu_B\Delta\vec{u}, \quad (2.16)$$

En théorie, pour le fluide de Bingham, il s'agit de simuler un fluide avec une évolution monotone entre deux régimes asymptotiques

$$\mu_{eff} \rightarrow \begin{cases} \infty & \text{si } \nabla P \ll G_l \\ \mu_0 & \text{si } \nabla P \gg G_l \end{cases} \Leftrightarrow |\vec{u}| \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } \nabla P \ll G_l \\ \frac{\kappa}{\mu_0}(|\vec{\nabla}P| - G_l) & \text{si } \nabla P \gg G_l \end{cases}. \quad (2.17)$$

Ainsi, la viscosité diverge pour les faibles vitesses ce qui pose des problèmes numériques de stabilité. Pour résoudre ce problème, la méthode couramment utilisée consiste à régulariser la fonction. Pour cela, deux implémentations différentes ont été essayées. La première consiste à régulariser de manière abrupte :

$$\mu_{eff}(\|\vec{u}\|) = \begin{cases} \mu_{\max} & \text{si } u < u_c \\ \mu_0(1 + \frac{\kappa G_l}{\mu_0 \|\vec{u}\|}) & \text{si } u > u_c \end{cases}, \quad (2.18)$$

où μ_{\max} est un paramètre numérique choisit suffisamment grand pour que le résultat final n'en dépende plus.

Une seconde méthode, comme proposée par Papanastasiou [57], consiste à utiliser un raccord exponentiel entre les deux régimes

$$\mu = (1 - e^{-m\|\vec{u}\|})\left(\frac{\kappa G_l}{\|\vec{u}\|} + \mu_0\right) \quad (2.19)$$

avec m un paramètre grand.

Après comparaison, il s'avère que la première méthode est dix à vingt fois plus rapide que la seconde sans changer le résultat final. Nous l'avons donc préférée pour effectuer nos simulations.

On note que quel que soit la méthode de régularisation, le fluide ne peut plus être immobile. L'état seuillé ne correspond ainsi qu'à une viscosité très grande et donc des vitesses très faibles (plusieurs ordres de grandeur en dessous de la vitesse moyenne). Par abus de langage, je parlerais quand même de fluide immobile lorsque la vitesse locale sera inférieure à u_c .

Pour le fluide de Carreau, aucune régularisation n'est nécessaire, nous avons donc utilisé la viscosité effective $\mu_{eff} = \mu_0$ lorsque $\|\vec{u}\| > \frac{\kappa G_l}{\mu_0} = u_0$, et $\mu_{eff} = \mu_0 \left(\frac{\|\vec{u}\| \mu_0}{\kappa G_l} \right)^{\alpha-1}$ lorsque $\|\vec{u}\| > \frac{\kappa G_l}{\mu_0} = u_0$.

2.4 Génération des milieux poreux

Il reste désormais à définir la méthode de génération des cartes de perméabilité. Nous utilisons, pour ces champs, une distribution log-normale, c'est-à-dire que la distribution $\log(\kappa)$ est gaussienne. Ce type de distribution est largement utilisé depuis les travaux de Gehlar [32] et Dagan [21], qui décrivent les hétérogénéités de la perméabilité à grande échelle. Ainsi, la carte de perméabilité est distribuée :

$$pdf(f = \log(\kappa)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(f - f_0)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (2.20)$$

avec f_0 la moyenne de $\log(\kappa)$ et σ son écart-type. On définit $\kappa_0 = e^{f_0}$, la perméabilité en champ homogène.

Le champ $f = \log(\kappa)$ est de plus corrélé de manière gaussienne avec une longueur de corrélation λ_c :

$$\int f(\vec{r} + \vec{r}_0) f(\vec{r}_0) dx dy = e^{-\frac{\pi}{8\lambda_c^2}(x^2+y^2)} \quad (2.21)$$

Ce champ f corrélé est généré dans l'espace de Fourier. Une fois le champ de perméabilité généré, on en déduit le champ de pression critique, $G_l = \frac{A}{\sqrt{\kappa}}$. Le logarithme d'un champ de perméabilité généré est représenté sur la figure 2.3.

2.5 Adimensionnement

Par la suite, je présenterai des quantités physiques adimensionnées. A cette fin, j'ai utilisé comme longueur caractéristique la longueur de corrélation λ_c pour

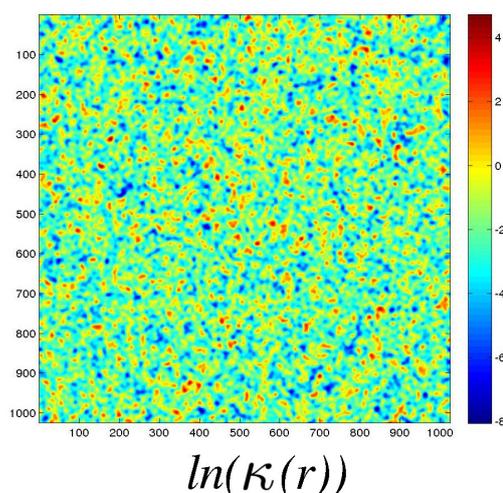


FIGURE 2.3 – Logarithme d'un champ de perméabilité distribué selon une loi log-normale et corrélé.

l'adimensionnement des longueurs. Pour les pressions, j'utiliserai la pression seuil en milieu homogène $A/\sqrt{\kappa_0}$. Ainsi,

$$X = \lambda_c \tilde{X}, \quad P = \frac{A}{\sqrt{\kappa_0}} \tilde{P}, \quad u = \frac{A\sqrt{\kappa_0}}{\mu_0} \tilde{u} \quad (2.22)$$

Par la suite, les quantités adimensionnées seront marquées d'une tilde.

2.6 Validation

Le code pour le fluide à seuil ainsi que celui pour le fluide de Carreau ont été validés en simulant l'écoulement du fluide correspondant dans un milieu poreux saturé de taille $N_x \times N_y$ tel que la carte de perméabilité est invariante dans le sens de l'écoulement (x) et varie de manière sinusoïdale dans le sens transverse (y) :

$$\kappa(x, y) = \frac{\kappa_{\max} - \kappa_{\min}}{2} \sin(2\pi y/N_y) + 2\kappa_{\min} \quad (2.23)$$

avec N_y largeur du milieu. Les conditions aux limites sont périodiques selon l'axe y et une différence de pression est imposée entre l'entrée en $x = 0$ et la sortie en $x = N_x$. Nous noterons par ailleurs la première pression à laquelle le fluide s'écoule, la pression critique globale du système G_s (correspondant ici au minimum de $G_l(y) = A/\sqrt{\kappa(y)}$). Les paramètres utilisés sont $c_s = 1/\sqrt{3}$, $\Lambda = 0.25$ et $\nu_0 = 1$.

J'ai testé plusieurs valeurs de N_y , d'une part car ce paramètre détermine la résolution spatiale du problème (nombre de noeuds sur une longueur d'onde).

De plus, cette quantité se compare à la longueur de corrélation λ de la carte de perméabilité aléatoire. On estime que pour $\lambda \sim 5$ correspond à $N_y \sim 16$.

Ainsi, plusieurs longueurs N_y ($\{5, 8, 16, 32, 64, 128\}$) ont été simulées. N'ayant pas de solution analytique à ce problème, j'ai comparé les résultats à une solution de l'équation (1.30) résolue par différences finies (DF) du second ordre avec une grande résolution spatiale (typiquement $N_y = 512$). L'erreur a été calculée par comparaison au débit total :

$$Err = \frac{|Q_{LBM} - Q_{DF}|}{Q_{DF}}. \quad (2.24)$$

Sur la figure 2.4, à gauche, est représentée la comparaison de profils de vitesse d'un fluide à seuil pour la LBM et les DF, à différentes pressions appliquées, pour $N_y = 16$. Sur la figure de droite sont tracées les erreurs relatives pour différents N_y en fonction de la pression. Comme on peut le constater, l'erreur est relativement faible. Pour $N = 16$, l'erreur est à 3% environs lors du premier changement de régime, et décroît en dessous de 1% avec l'écart au gradient de pression critique. Si on considère nos cartes de perméabilité aléatoires corrélées, on peut ainsi s'attendre à une erreur sur le débit de 1% à 2% à la pression seuil, et de moins de 0.1% plus loin, ce qui nous permet d'estimer l'erreur sur le champ de vitesse. Le temps de convergence typique est d'environ 40000 itérations, pour une variation relative du débit entre deux itérations d'environ 10^{-11} .

Sur la figure 2.5, à gauche, est représentée la comparaison de profils de vitesse d'un fluide de Carreau pour la LBM et les DF, à différentes pressions relatives, pour $N_y = 16$. La courbe pointillée est la vitesse seuil à laquelle le fluide change de régime localement. Sur la figure de droite, on trace les erreurs relatives pour différents N_y à différentes pressions imposée. On constate, cette fois, que l'erreur sur le débit possède trois régimes, un premier constant, lorsque le fluide est entièrement newtonien, un transitoire, et un troisième constant lorsque le fluide a entièrement changé de régime. Pour $N = 8$, l'erreur sur le débit est au maximum de 1%, et pour $N = 16$, elle vaut au plus 0.5%. Pour la carte hétérogène de l'étude sur les fluide de Carreaux, j'ai utilisé le paramètre $\lambda = 3$, ce qui correspond à $N_y \sim 10$ nœuds. On peut s'attendre ainsi à une erreur ne dépassant pas 1%. Le temps de convergence typique est d'environ 50000 itérations, pour une variation relative du débit entre deux itérations d'environ 10^{-11} .

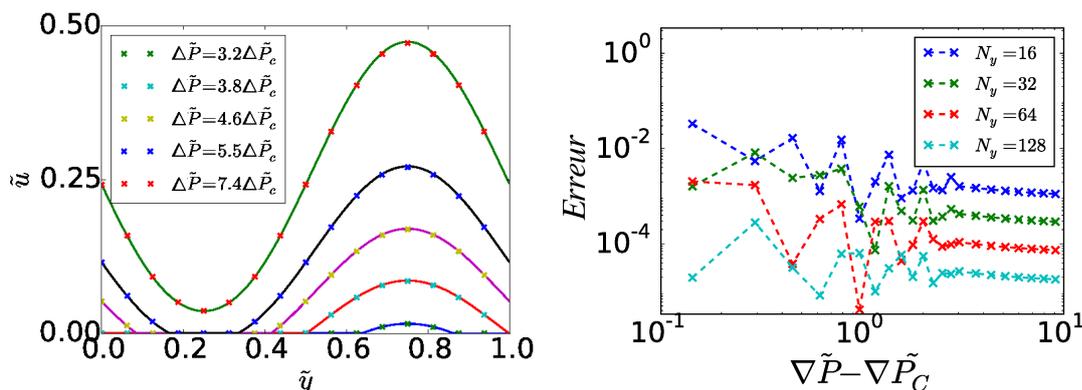


FIGURE 2.4 – Gauche : profils de vitesse d'un fluide à seuil $u(\tilde{y})/u_0$ dans un milieu poreux stratifié à perméabilité sinusoïdale avec $(\kappa_{min}; \kappa_{max}) = (0.01; 0.04)$, simulé avec la LBM sur $N_y = 16$ nœuds (croix) et comparé à la méthode des différences finies sur 512 nœuds (lignes) à plusieurs pressions imposées. Droite : erreur relative sur le débit pour plusieurs discrétisations de largeur N_y nœuds en fonction de l'écart entre le gradient de pression appliqué et le gradient de pression critique.

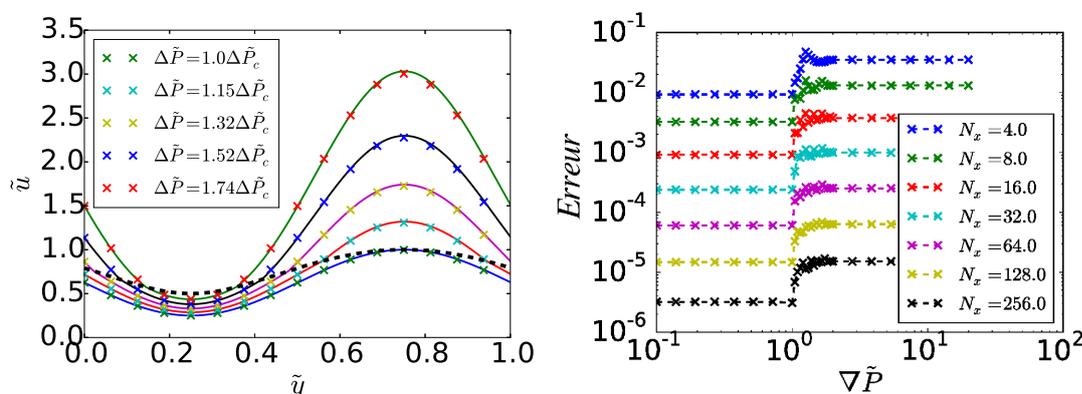


FIGURE 2.5 – Gauche : profils de vitesse d'un fluide de Carreau $u(\tilde{y})/u_0$ dans un milieu poreux stratifié à perméabilité sinusoïdale avec $(\kappa_{min}; \kappa_{max}) = (0.01; 0.04)$, simulé avec la LBM sur $N_y = 16$ nœuds (croix) et comparé à la méthode des différences finies sur 512 nœuds (lignes) à plusieurs pressions imposées. La courbe pointillée est la vitesse critique $u_c(\tilde{y}) = \frac{\kappa G_l}{\mu_0}$. Droite : erreur relative sur le débit pour plusieurs discrétisations de largeur N_y nœuds en fonction du gradient de pression appliqué.

Chapitre 3

Outils mathématiques

3.1 La percolation

La percolation est un modèle mathématique statistique proposé en 1944 par Flory et Stockmayer, afin de décrire la transition de phase de petites molécules se liant aléatoirement entre elles pour former de plus grandes macromolécules. Ce modèle a aussi servi à décrire l'entassement des grains dans les milieux granulaires [39], la géométrie des écoulements diphasiques en milieu poreux [47, 24, 64, 68] et dans bien d'autres situations [69].

Il existe plusieurs façons d'expliquer la percolation. Prenons, par exemple et par simplicité, une grille carrée. Chaque case peut être occupée ou vide, avec respectivement une probabilité p et $1 - p$. Dans notre cas, une case vide sera blanche, et une case occupée sera noire.

À faible p , il y a beaucoup d'espace vide, de telle sorte qu'une case occupée n'a que peu de chance d'avoir des voisins. Cependant, lorsque p augmente, il est de plus en plus probable qu'une case occupée ait des cases voisines également occupées. L'ensemble des cases occupées adjacentes forment alors ce qu'on appelle un *agrégat*. On ne compte généralement comme voisines que des cases occupées

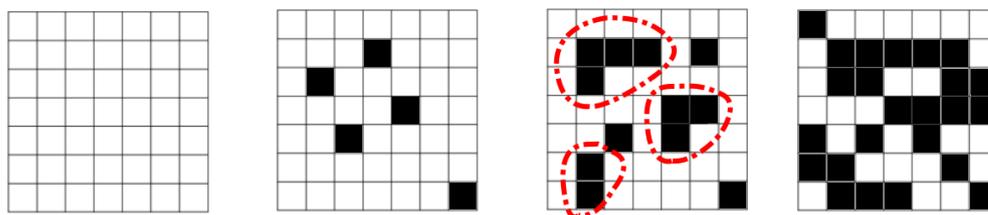


FIGURE 3.1 – Illustration de la notion d'agrégat sur une grille carrée régulière. De gauche à droite, $p = 0$, $p = 0.1$, $p = 0.25$ et $p = 0.5$. Des exemples d'agrégats sont entourés sur la troisième grille.

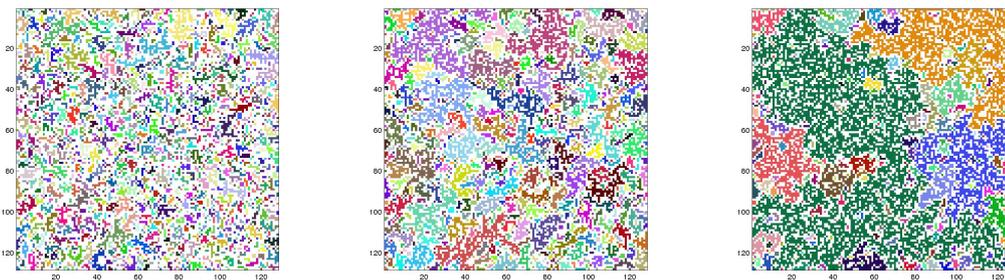


FIGURE 3.2 – Exemple de cartes d'îles de percolations pour différentes valeurs du seuil. De gauche à droite : $p = 0.4$, $p = 0.5$, $p = 0.59$. En code de couleur sont représentées les différents agrégats. On constate sur celle de droite, l'existence d'un agrégat connectant les quatre bords.

qui se touchent par un côté, mais il est possible de considérer comme voisines des cases qui se touchent par un coin, voire des cases plus éloignées encore. La théorie de la percolation porte sur les propriétés statistiques des agrégats.

Lorsque p augmente, le nombre de cellules occupées augmente. Par conséquent, il devient plus probable que deux cases occupées soient adjacentes, et donc que la taille moyenne des agrégats augmente. Si p augmente encore, les agrégats vont s'agglomérer, et à partir d'une probabilité critique p_c , dans un milieu infini, un agrégat infini va apparaître.

Sur la figure 3.1, j'ai tracé quatre grilles carrées régulières. Sur chacune de ces grilles, les cases sont noires avec une probabilité p , croissante de gauche à droite. Nous pouvons constater, pour commencer, qu'à faible p , les cases sont isolées entre elles (deuxième grille). Au fur et à mesure que p va augmenter, des cases occupées vont apparaître à côté d'autres cases précédemment occupées (troisième grille), formant des agrégats. Ils sont sur cette grille entourés en rouge. Ces agrégats vont eux-même se lier entre eux avec l'augmentation de p (quatrième grille).

Notons qu'il existe deux façons de considérer la percolation, la percolation de sites et la percolation de liens. Dans notre exemple de grille, la percolation de sites consiste à occuper aléatoirement des cases, et à considérer les ensembles de cases occupées voisines.

La percolation de liens, consiste à ouvrir aléatoirement les liens entre deux sites. Chaque lien ouvert joindra alors deux sites entre eux, et on considérera alors les ensembles de sites liés par les chaînes de liens ouverts. Ces deux considérations de la percolation mènent à des propriétés critiques différentes.

Ceci expliqué, nous pouvons regarder les agrégats à de plus grandes échelles, comme sur la figure 3.2, où sont représentés par des couleurs différentes les différents agrégats et ceci pour différents p . Il y a plusieurs propriétés statistiques à

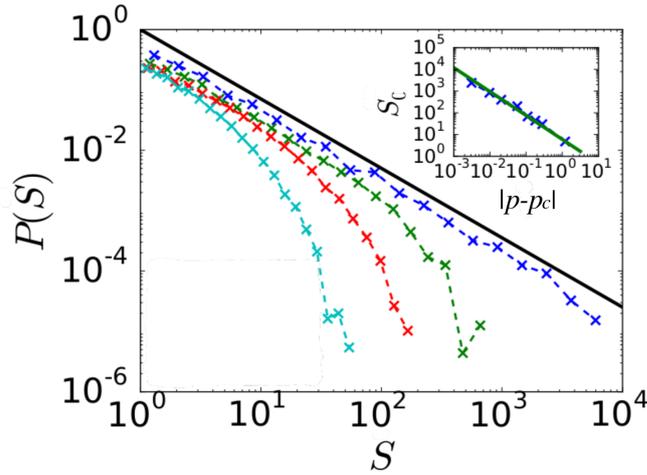


FIGURE 3.3 – Fonction de distribution de probabilité des tailles de agrégat S , avec en sous-figure la relation entre la taille de coupure et la probabilité de présence relative à la probabilité critique.

étudier. Par exemple, la surface occupée par les agrégats, parfois appelée *masse*.

On constate tout d'abord la présence simultanée de beaucoup de tailles différentes. Cependant, on constate cependant que les petits agrégats sont plus nombreux que les grands. De plus, pour les faibles p , on constate l'absence de grands agrégats. C'est ce que l'on appelle la taille de coupure $S_c(p)$.

D'après la théorie de la percolation, pour une taille de agrégat S donnée, la probabilité de présence de l'agrégat est donnée par :

$$P_S \propto S^{-\tau} e^{-S/S_c(p)} \quad (3.1)$$

où τ est une constante, et $S_c(p)$ varie avec p comme :

$$S_c \propto |p - p_c|^{-1/\sigma} \quad (3.2)$$

avec σ une constante. Ceci signifie que lorsqu'on se rapproche de la probabilité critique p_c , la taille de coupure tend vers l'infini. Toutes les tailles sont alors présentes dans le système.

Dans le cadre de la percolation classique, sur une grille bi-dimensionnelle, pour de la percolation de site, $\tau = 187/91$ et $\sigma = 36/91$ sont universels (résultats exacts), et si la grille est carrée régulière, $p_c \simeq 0.592746$.

J'illustre l'équation (3.1) sur la figure 3.3, avec en sous-figure l'équation (3.2). Les courbes ayant été obtenues expérimentalement, sur une percolation différente de la percolation classique, les exposants ne sont pas ceux du paragraphe précédent.

Un second point notable est la dimension fractale des agrégats, c'est-à-dire que leur surface dépend de l'échelle de mesure. Autrement dit, si l'on considère un agrégat d'une certaine taille et des boîtes de taille l , le nombre de boîtes nécessaire pour recouvrir l'agrégat va varier comme $n \propto (1/l)^D$, D étant la dimension fractale de l'agrégat. On parle de phénomène fractal lorsque D n'est pas entier, ou plus généralement quand il n'est pas égal à la dimension dans laquelle se situe l'agrégat.

Une autre façon, équivalente, de mesurer D , est de regarder l'évolution de la longueur L de la plus petite boîte contenant l'agrégat en fonction de sa surface. Effectivement, nous avons alors $n = 1$, $l = L$ et $S \propto L^D$.

Le fait qu'un agrégat soit fractal, signifie que ses propriétés sont similaires par changement d'échelle. Prenons par exemple un agrégat, dont nous extrayons deux parties carrées, de longueurs respectives L_1 et L_2 . Alors, il faudra approximativement autant de carrés de longueur $L_1/100$, par exemple, pour couvrir la surface occupée du premier extrait, qu'il faudra de carrés de longueur $L_2/100$ pour couvrir la surface occupée du second.

De la même manière, si l'on regarde l'enveloppe d'un agrégat dans deux boîtes de longueur L_1 et L_2 , il faudra approximativement autant de segments de longueur $L_1/100$ pour couvrir l'enveloppe de l'agrégat dans la boîte 1 qu'il faudra de segments de longueur $L_2/100$ pour couvrir l'enveloppe de l'agrégat dans la boîte 2. Nous illustrons ces deux derniers exemples sur la figure 3.4.

Sur la figure 3.4, j'ai mis deux exemples célèbres de fractales : à gauche, un triangle de Sierpiński, et à droite, une courbe de Koch. Sur la figure de gauche, nous distinguons deux boîtes carrées, rouge et bleue, de longueur différente L_R et L_B . Pour chacune de ces boîtes, il faut trois sous-boîtes carrées de longueur $L_R/2$ et $L_B/2$ pour couvrir la fractale. Sur la figure de droite, nous avons de même deux boîtes, rouge et bleue, de longueur respective L_R et L_B , et pour chacune de ces boîtes, il faut quatre segments de longueur $L_R/3$ et $L_B/3$ pour parcourir la courbe. Dans nos deux exemples, la taille de la boîte est quelconques, mais les propriétés considérées sont conservées par changement d'échelle. Bien qu'ici les boîtes ne soient pas carrées, l'exemple reste valide.

Notons enfin que les phénomènes de percolations tels qu'expliqués plus haut, ainsi que les exposants, valent tout aussi bien pour les agrégats de cases occupées que vides. Effectivement, le système est symétrique par la transformation $p \rightarrow p^* = (1 - p)$.

Une dernière propriété importante concerne les exposants σ , τ et D . Ils sont en effet dit « universels ». Le type de réseau, la distribution de probabilité (dans une certaine mesure), ou encore la connectivité du réseau (le nombre de nœuds auquel un nœud est lié) n'influencent pas ces exposants, ainsi que d'autres non cités. Cependant, ils dépendent de la dimensionnalité du problème. C'est là un autre aspect remarquable des problèmes de percolation.

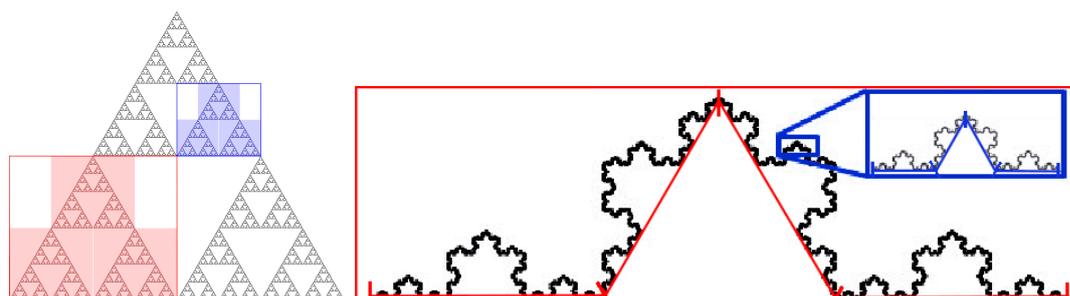


FIGURE 3.4 – À gauche, triangles de Sierpiński. Les rectangles rouge et bleu sont deux sous-parties de la figure d'ensemble. Les rectangles pleins correspondent à un quart de la surface de la boîte de même couleur. Trois de ces boîtes suffisent à trois à couvrir le motif, quelle que soit l'échelle considérée. À droite, courbe de Koch. Pour chaque sous-partie de longueur L_c (rouge et bleue), il faut quatre segments de longueur $L_c/3$ pour couvrir la portion de la courbe.

Il est important de remarquer que la distribution de probabilité n'influence pas la percolation dans l'hypothèse de cartes quelconques faiblement corrélées. On peut s'attendre effectivement à ce que les exposants plus hauts peuvent changer dans le cas de cartes fortement corrélées (par exemple, les distributions auto-affines).

Le phénomène de percolation sera utilisé en particulier pour étudier les propriétés statistiques des régions d'écoulement dans un régime ou un autre. Par exemple, pour le fluide de Carreau, on utilisera la théorie de la percolation pour étudier les régions en régime newtonien, et celles en régime de Carreau.

3.2 Le polymère dirigé

Le problème du polymère dirigé consiste à trouver, dans l'ensemble des chemins \mathbb{C} menant d'un bout de la carte à un autre, le chemin $C_{\in AB}$ qui minimise l'énergie sur une carte d'énergie aléatoire $E(\vec{r})$ [44]. Formellement, on l'écrit

$$E_{min} = \min_{C \in \mathbb{C}_{AB}} \int_C E(\vec{r}) dl. \quad (3.3)$$

Un chemin construit dans une carte d'énergies aléatoires va accumuler les énergies des endroits par lesquelles il passe. Pour minimiser son énergie, le chemin peut passer par des cases de moindre énergie. Cependant, faire des détours rallonge le chemin d'intégration, et ainsi augmente son énergie. Le chemin qui minimise l'énergie va donc résulter d'un équilibre entre ces deux stratégies.

Soit sur une carte $E(X, Y)$, de taille $L_X \times L_Y$, et que nous voulons aller de $X = 0$ à $X = L_X$. Le caractère "dirigé" du polymère provient de la contrainte

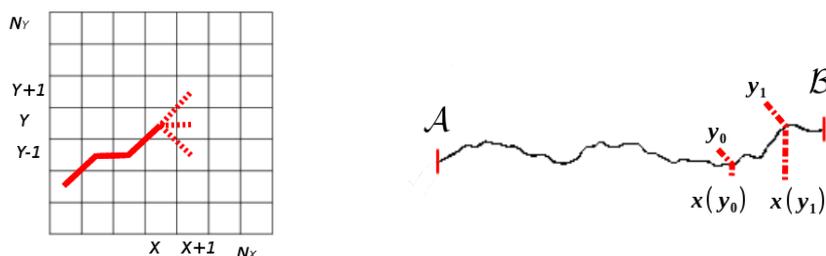


FIGURE 3.5 – À gauche, illustration du polymère dirigé : le chemin, tracé en rouge, et ayant commencé à $X = 0$, et se retrouvant au nœud (X, Y) , peut aller sur les nœuds $(X + 1, Y - 1)$, $(X + 1, Y)$, et $(X + 1, Y + 1)$. À droite, illustration de la rugosité d'un polymère dirigé.

imposée que le chemin doit se diriger dans le sens des X croissants. Sur un grille, cette hypothèse signifie que la pente maximale du chemin est de 45° . Autrement dit, pour passer de la colonne X à la colonne $X + 1$, si le chemin est à la ligne Y , les prochaines positions possibles seront $Y - 1$, Y , et $Y + 1$. Ceci est illustré sur la figure 3.5.

Une des conséquences importantes de cet équilibre est que le chemin va être rugueux, c'est-à-dire qu'il suit une loi auto-affine. Pour deux points aléatoires Y_0 et Y_1 sur le chemin, on a :

$$\langle [X(Y_0)^2 - X(Y_1)^2]^{1/2} \rangle \propto (|Y_1 - Y_0|)^\alpha, \quad (3.4)$$

autrement dit, le chemin est fractal auto-affine. Il a été montré également que l'exposant α est "universel", et vaut $2/3$ en dimension 2 [44]. Ceci est illustré sur la figure 3.5, à droite.

Un exemple de cas analogue au polymère dirigé, est le phénomène de la foudre : si l'on regarde la branche principale, elle va quasiment toujours de bas en haut, sans rebrousser chemin, mais sans aller en ligne droite. Il faut cependant remarquer que dans notre cas, le polymère dirigé recherche le chemin minimal à un instant fixé, alors que la foudre, bien que rapide, n'est pas instantanée, et donc que le chemin qui minimise l'énergie d'un éclair peut ne pas être le même entre le début et la fin de l'événement.

Dans le cadre des milieux poreux, ce modèle peut être utilisé dans un certain nombre de cas. Par exemple, s'il existe un seuil en contrainte à dépasser pour que le fluide s'écoule, il est possible de prédire les chemins préférentiels avec le polymère dirigé. Il est aussi possible d'utiliser cela pour prédire dans un fluide en écoulement le chemin de contrainte minimale, et qui pourra par exemple transporter un traceur le plus rapidement d'un bout à l'autre d'une carte.

3.3 Analyse mathématique

Dans cette partie, nous avons analysé quelques propriétés mathématiques de l'équation de Darcy à l'échelle macroscopique par une approche énergétique. Nous ne regardons pas l'équation de Darcy-Brinkman, car le terme de Brinkman est négligeable. Le but de cette section est de mettre en avant quelques propriétés du champ de vitesse solution de l'équation de Darcy hétérogène, d'abord pour un fluide newtonien, puis un fluide à seuil, et enfin un fluide de Carreau.

3.3.1 L'équation de Darcy macroscopique

Nous allons nous intéresser au champ de vitesse solution de l'équation de Darcy newtonienne. Plus précisément, nous allons commencer par montrer que la distribution de vitesses dans un milieu poreux saturé soumis à un gradient de pression est unique, et minimise une certaine fonction $\Phi(\vec{u})$, qui prend en compte la dissipation visqueuse et le travail des forces de pression. Nous regarderons ensuite quelques conséquences sur la distribution de vitesse en milieu poreux.

Minimisation de Φ Tout d'abord, nous exprimons une fonction du système $\Phi(\vec{u})$. Considérons l'équation de Darcy non linéaire généralisée, écrite comme suit :

$$\vec{u} = -f(|\vec{\nabla}P|) \frac{\vec{\nabla}P}{|\vec{\nabla}P|} \quad (3.5)$$

f est supposée croissante inversible et peut varier spatialement. Nous imposons aussi comme conditions aux limites une pression d'entrée P_{in} et une pression de sortie $P_{out} < P_{in}$. Il est également possible d'inverser cette formulation :

$$\vec{\nabla}P = -g(|\vec{u}|) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}. \quad (3.6)$$

avec $g(X)$ qui est également croissante.

Si nous multiplions l'équation (3.6) par un vecteur \vec{v} quelconque, satisfaisant $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ (conservation de la masse pour un champ de vitesse pour un fluide incompressible), et que nous intégrons sur l'espace, nous obtenons :

$$\int (\vec{\nabla}P) \cdot \vec{v} dr^3 = - \int g(|\vec{u}|) \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} dr^3. \quad (3.7)$$

Cette équation est analogue à celle d'un travail de pression.

Le terme $\int (\vec{\nabla}P) \cdot \vec{v} dr^3$ peut se ré-écrire $\int \vec{\nabla} \cdot (P\vec{v}) dr^3 - \int P \vec{\nabla} \cdot \vec{v} dr^3$. Or, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$, soit $\int \vec{\nabla}P \cdot \vec{v} dr^3 = \int \vec{\nabla} \cdot (P\vec{v})$. De plus, on peut montrer que sur un domaine avec

une surface d'entrée et une surface de sortie, sur lesquelles une pression P_{in} et P_{out} sont imposées, avec le théorème du divergent, on a :

$$\begin{aligned} \int \vec{\nabla} \cdot (P\vec{v}) dr^3 &= \int P\vec{v} \cdot \vec{n} dS = (P_{out} - P_{in}) \int \vec{v} \cdot \vec{n} dS \\ &= -\Delta PQ(\vec{v}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

avec $Q(\vec{v}) = \int \vec{v} \cdot \vec{n} dS$ et $\Delta P = P_{in} - P_{out}$, soit

$$\int \vec{\nabla} P \cdot \vec{v} dr^3 = - \int g(|\vec{u}|) \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} dr^3 = -\Delta PQ(\vec{v}). \quad (3.9)$$

Considérons désormais la fonction $G(|\vec{u}|)$ primitive de $g(|\vec{u}|)$ telle que

$$\begin{aligned} G(|\vec{u}|) &= \int_0^{|\vec{u}|} g(y) dy \\ &= \int_0^{|\vec{u}|} |\vec{\nabla} P|(y) dy \end{aligned} \quad (3.10)$$

On peut alors définir une fonction du système, à partir des deux termes définis plus haut :

$$\Phi(\vec{v}) = \int G(|\vec{v}|) dr^3 - \int g(|\vec{u}|) \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} dr^3. \quad (3.11)$$

soit, avec l'équation (3.9)

$$\Phi(\vec{v}) = \int G(|\vec{v}|) dr^3 - \Delta PQ(\vec{v}). \quad (3.12)$$

La fonction Φ prend donc en compte les pertes visqueuses du système avec le terme $G(|\vec{v}|)$, et le travail des forces de pression dans le système avec le terme $(P_{out} - P_{in})Q(\vec{v})$ pour un champ de vitesse \vec{v} quelconque satisfaisant $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$.

Maintenant, montrons que la solution \vec{u} de l'équation (3.6) est bien celle qui minimise $\Phi(\vec{v})$. Montrons que pour tout vecteur \vec{v} , on a $\Phi(\vec{u} + \vec{v}) - \Phi(\vec{u}) \geq 0$.

Nous avons :

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{u} + \vec{v}) - \Phi(\vec{u}) &= \int G(|\vec{u} + \vec{v}|) - G(|\vec{v}|) - (g(|\vec{u}|) \frac{\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{u})}{|\vec{u}|} - g(|\vec{u}|) \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|}) dr^3 \\ &= \int G(|\vec{u} + \vec{v}|) - G(|\vec{v}|) - g(|\vec{u}|) \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} dr^3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

De plus, comme $g(|\vec{u}|)$ est croissante sa primitive, $G(|\vec{u}|)$, est convexe. Ceci implique :

$$G(|\vec{u} + \vec{v}|) - G(|\vec{u}|) \geq g(|\vec{u}|)(|\vec{u} + \vec{v}| - |\vec{u}|), \quad (3.14)$$

ce qui permet d'écrire, d'après l'équation (3.13) :

$$\Phi(\vec{u} + \vec{v}) - \Phi(\vec{v}) \geq \int \frac{g(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|} (|\vec{u} + \vec{v}| \cdot |\vec{u}| - |\vec{u}|^2 - \vec{u} \cdot \vec{v}) dr^3. \quad (3.15)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u} \leq |\vec{u}+\vec{v}|\cdot|\vec{u}|$, nous permet de plus d'écrire :

$$\int \frac{g(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|} (|\vec{u}+\vec{v}|\cdot|\vec{u}| - \vec{u}^2 - \vec{u}\cdot\vec{v}) dr^3 \geq \int \frac{g(|\vec{u}|)}{|\vec{u}|} ((\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{u} - \vec{u}^2 - \vec{u}\cdot\vec{v}) dr^3. \quad (3.16)$$

$$\geq 0$$

Ainsi, nous avons, pour tout \vec{v} , $\Phi(\vec{u}+\vec{v}) - \Phi(\vec{u}) \geq 0$, donc la solution \vec{u} à l'équation de Darcy avec les conditions aux limites imposées minimise bien la fonction $\Phi(\vec{v})$.

Remarque concernant la relation débit pression On pourrait noter qu'en prenant $\vec{v} = \vec{u}$ dans l'équation (3.9), on a :

$$\Delta P.Q(\vec{u}) = \int g(|\vec{u}|)|\vec{u}| dr^3. \quad (3.17)$$

Cette relation permet d'établir la relation entre le débit et la pression imposée à partir de la distribution de la quantité $g(|\vec{u}|)|\vec{u}|$. On remarquera également que le produit $\Delta P.Q(\vec{u})$ est nécessairement positif ou nul.

Invariance de la distribution de vitesse Dans le cadre newtonien, $g(|\vec{u}|) = \frac{\mu}{\kappa}|\vec{u}|$, $G(|\vec{u}|) = \frac{1}{2}\frac{\mu}{\kappa}|\vec{u}|^2$. La distribution de perméabilité κ est quelconque, et peut varier spatialement. Nous avons

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \arg.\min_{\vec{v}}(\Phi(\vec{v})) \\ &= \arg.\min_{\vec{v}}\left(\frac{1}{2}\frac{\mu}{\kappa}|\vec{v}|^2 - \Delta P.Q(\vec{v})\right), \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec $\arg.\min_{\vec{v}}(\Phi)$ la fonction qui retourne la distribution \vec{u} qui minimise Φ parmi les distributions existantes \vec{v} . Si l'on multiplie la fonction Φ par une constante, par exemple λ^2 , la position du minimum n'est pas changée. Donc,

$$\begin{aligned} \vec{u}(\Delta P) &= \arg.\min_{\vec{v}}\left(\frac{1}{2}\frac{\mu}{\kappa}(\lambda\vec{v})^2 - \lambda\Delta P.Q(\lambda\vec{v})\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\arg.\min_{\vec{v}}\left(\frac{1}{2}\frac{\mu}{\kappa}\vec{v}^2 - \lambda\Delta P.Q(\vec{v})\right) \\ &= \frac{1}{\lambda}\vec{u}(\lambda\Delta P) \end{aligned} \quad (3.19)$$

car $Q(\lambda\vec{v}) = \lambda Q(\vec{v})$ et $\arg.\min_x f(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}\arg.\min_x f(x)$. Autrement écrit

$$\vec{u}(\lambda\Delta P) = \lambda\vec{u}(\Delta P) \quad (3.20)$$

Cela est équivalent à résoudre le problème en effectuant la transformation suivante :

$$\begin{aligned}\Delta P &\rightarrow \lambda \Delta P \\ \vec{u} &\rightarrow \lambda \vec{u} \\ Q(\vec{u}) &\rightarrow \lambda Q(\vec{u}).\end{aligned}\tag{3.21}$$

Comme on peut le constater, multiplier la pression par un scalaire amènera à une augmentation proportionnelle du débit et de la vitesse, mais le champ $\frac{\vec{u}}{Q(\vec{u})}$ restera constant.

3.3.2 L'équation de Darcy pour un fluide de Bingham

Nous regardons ici un fluide obéissant à l'équation (1.27). Pour un tel fluide, la fonction g s'écrit ainsi :

$$g(|\vec{u}|) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < G_l \\ G_l + \frac{\mu_0}{\kappa} |\vec{u}| & \text{si } \tau \geq G_l \end{cases},\tag{3.22}$$

soit

$$G(|\vec{u}|) = \begin{cases} 0 & \text{si } \tau < G_l \\ G_l |\vec{u}| + \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\kappa} |\vec{u}|^2 & \text{si } \tau \geq G_l \end{cases}.\tag{3.23}$$

Ici aussi, les distributions G_l et κ sont quelconques et peuvent varier spatialement.

On peut distinguer deux cas limites, celui des petites vitesses, et celui des grandes vitesses. Aux petites vitesses, le terme $G_l |\vec{u}|$ domine. Aux grandes vitesses, le terme $\frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\kappa} |\vec{u}|^2$ domine. On peut donc décrire le comportement du fluide dans ces deux régimes.

Cas $Q \ll 1$:

Tout d'abord, à bas débit, on a en négligeant le terme quadratique :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \arg \cdot \min_{\vec{v}} \left(\int G_l |\vec{v}| dr^3 - \Delta P Q(\vec{v}) \right) \\ &= \arg \cdot \min_{\vec{v}} \left(Q(\vec{v}) \left(\int G_l \frac{|\vec{v}|}{Q(\vec{v})} dr^3 - \Delta P \right) \right)\end{aligned}\tag{3.24}$$

Cette équation va nous permettre de déterminer le premier chemin à s'écouler et en particulier la présence d'une pression critique ΔP_c en dessous de laquelle il n'y a pas d'écoulement.

Tout d'abord, rappelons que si on choisit $\Delta P > 0$, alors $Q(\vec{u})$ est positif ou nul. Notons tout d'abord que le champ de vitesse uniforme $\vec{u} = \vec{0}$ donne $\Phi(\vec{0}) = 0$. Autrement dit, si pour un ΔP donné on a :

$$\forall \vec{v} \neq \vec{0}, \left(Q(\vec{v}) \left(\int G_l \frac{|\vec{v}|}{Q(\vec{v})} dr^3 - \Delta P \right) \right) > 0,$$

alors le minimum de la fonction est nécessairement $\vec{u} = \vec{0}$ et donc $Q = 0$. Ainsi, si $\Delta P > 0$ ($Q > 0$), pour avoir $\vec{u} \neq 0$, il faut nécessairement :

$$\min_{\vec{v}} \left(Q(\vec{v}) \left(\int G_l \frac{|\vec{v}|}{Q(\vec{v})} dr^3 - \Delta P \right) \right) < 0, \quad (3.25)$$

effectivement, le champ $\vec{v} = \vec{0}$ ne sera alors plus le minimum de Φ . Ainsi, à trop faible pression, le fluide ne s'écoule pas. De plus la pression minimale de transition est atteinte lors de l'existence d'un champ tel que

$$\left(\int G_l \frac{|\vec{v}|}{Q(\vec{v})} dr^3 - \Delta P \right) < 0.$$

Soit :

$$\Delta P_c = \min_{\vec{v}} \left(\int G_l \frac{|\vec{v}|}{Q(\vec{v})} dr^3 \right). \quad (3.26)$$

Autrement dit, il s'agit là de la pression limite pour qu'il existe un écoulement.

On pourrait montrer que le champ de vitesse à cette pression est constitué d'un seul tube de courant. Regardons les propriétés de cette ligne de courant. Un élément dr^3 d'une ligne de courant peut se décomposer en un produit d'un élément de longueur et d'un élément de surface, ainsi : $dr^3 = dl dS$. Le long du chemin, nous avons alors

$$\begin{aligned} |\vec{v}| dr^3 &= \vec{v} (dl dS \vec{n}) \\ &= dq dl \end{aligned} \quad (3.27)$$

avec \vec{n} le vecteur directeur de l'élément de chemin dl , orienté dans le même sens que \vec{v} et dq le débit dans le tube de courant élémentaire. On peut donc écrire :

$$\begin{aligned} \Delta P_c &= \min_{\vec{v}} \left(\iint G_l \frac{dq \cdot dl}{Q(\vec{v})} \right) \\ &= \min_{\vec{v}} \left(\int \frac{(\int G_l dl) dq}{\int dq} \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Comme $\int G_l dl$ est indépendant du débit, nous avons :

$$\Delta P_c = \min_{\vec{v}} \int G_l dl. \quad (3.29)$$

On montre ainsi que la pression critique du système est le chemin qui, parmi tous les chemins d'écoulement possibles, minimise la contrainte totale le long dudit chemin. On constate ainsi que cette équation est analogue à celle du polymère dirigé (3.3).

Cas $Q \gg 1$:

Dans la limite des forts débits, le terme quadratique domine dans l'équation (3.23). Ainsi, la solution $\frac{\vec{u}}{Q(\vec{v})}$ va tendre vers la solution suivante :

$$\vec{u} = \arg . \min_{\vec{v}} \left(Q(\vec{v}) \left(\int \frac{1}{2} \frac{\mu}{\kappa} \frac{|\vec{v}|^2}{Q(\vec{v})} dv - \Delta P \right) \right) \quad (3.30)$$

On constate alors qu'il s'agit exactement de la même équation que pour le fluide newtonien. On en déduit donc que le champ de vitesse d'un fluide de Bingham va tendre vers celui obtenu en résolvant l'équation de Darcy standard. Il est donc intéressant de constater que si on connaît le champ de vitesse \vec{u}_{Darcy} , en rappelant que $\vec{u}_{Darcy}/Q = \vec{\epsilon}$ est indépendant de ΔP , on déduit :

$$\begin{aligned} Q\Delta P &= \int \left[G_l |u_{Darcy}| + \frac{\mu_0}{\kappa} |u_{Darcy}|^2 \right] dr^3 \\ &= \int \left[G_l Q |\epsilon| + Q^2 \frac{\mu_0}{\kappa} |\epsilon|^2 \right] dr^3 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ce qui montre que la relation débit-pression est affine dans la limite des hauts débits :

$$\Delta P = A + BQ, \quad (3.32)$$

avec A et B qui se déterminent à partir des moments de la distribution du champ de vitesse de l'équation de Darcy newtonienne. En effet :

$$A = \int G_l |\vec{\epsilon}| dr^3$$

et

$$B = \int \frac{\mu_0}{\kappa} |\vec{\epsilon}|^2 dr^3.$$

3.3.3 L'équation de Darcy pour les fluides de Carreau

Comportement asymptotique Cette fois ci, le fluide obéit à la loi (1.31). Dans ce cadre, la fonction g s'écrit ainsi :

$$g(|\vec{u}|) = \begin{cases} \frac{\mu_0}{\kappa} |\vec{u}| & \text{si } |\vec{u}| < u_0 \\ \frac{\mu_0}{\kappa} |\vec{u}|^n & \text{si } |\vec{u}| \geq u_0 \end{cases}, \quad (3.33)$$

avec $u_0 = \frac{\kappa G_l}{\mu_0}$. Soit :

$$G(|\vec{u}|) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\kappa} |\vec{u}|^2 & \text{si } |\vec{u}| < u_0 \\ \frac{1}{n+1} \frac{\mu_0}{\kappa} |\vec{u}|^{n+1} & \text{si } |\vec{u}| \geq u_0 \end{cases}. \quad (3.34)$$

Là encore, le fluide possède deux régimes asymptotiques. Le premier, à bas débit, où $G(|\vec{u}|) = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\kappa} |\vec{u}|^2$, est identique au cas newtonien.

Le second régime, quant à lui, obéit à une loi de puissance. Effectivement, si l'on suppose que l'ensemble du milieu est au dessus du seuil et l'on reprend l'équation (3.18) avec $G(|\vec{u}|) = \frac{1}{n+1} \frac{\mu_0}{\kappa} |\vec{u}|^{n+1}$,

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \arg . \min_{\vec{v}} (\Phi(\vec{v})) \\ &= \arg . \min_{\vec{v}} \left(\frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\kappa} |\vec{v}|^{n+1} - \Delta P Q(\vec{v}) \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si l'on multiplie le terme de droite par une constante positive, par exemple λ^{n+1} , on obtient

$$\vec{u} = \arg . \min_{\vec{v}} \left(\frac{1}{2} \frac{\mu_0}{\kappa} |\lambda \vec{v}|^{n+1} - \lambda^n \Delta P \lambda Q(\vec{v}) \right). \quad (3.36)$$

De manière similaire au cas du fluide newtonien, on peut écrire les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta P &\rightarrow \lambda^n \Delta P \\ \vec{v} &\rightarrow \lambda \vec{v} \\ Q(\vec{v}) &\rightarrow \lambda Q(\vec{v}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Il est important de constater que, comme pour le cas newtonien, le champ $\frac{|\vec{u}|}{Q(\vec{v})}$ devient invariante asymptotiquement pour les grands débit. On note cependant que la distribution peut être différente de celle du cas newtonien aux bas débits. De plus, on a un débit en loi de puissance en fonction de ΔP , car il faut une augmentation de la pression d'un facteur λ^n pour que la vitesse augmente d'un facteur λ .

Symétrie débit-pression Une autre propriété intéressante du fluide de Carreau en milieu poreux bi-dimensionnel, est la symétrie débit-pression. Pour montrer cela, nous avons adapté un raisonnement effectué par Matheron [50] dans le cadre d'un fluide newtonien.

Reprenons l'équation (3.5) :

$$\vec{u} = -f(|\vec{\nabla} P|) \frac{\vec{\nabla} P}{|\vec{\nabla} P|}. \quad (3.38)$$

Prenons le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, avec le milieu poreux dans le plan $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, avec \vec{i} colinéaire à la vitesse moyenne. Si l'on effectue un produit vectoriel entre \vec{k} et l'équation (3.38) qui correspond à une rotation de $\pi/2$, nous obtenons

$$\vec{Z} = \frac{f(|\vec{\nabla} P|)}{|\vec{\nabla} P|} \vec{j} \quad (3.39)$$

avec les nouvelles quantités

$$\begin{aligned}\vec{Z} &= \vec{k} \times \vec{u} \\ \vec{J} &= \vec{k} \times \vec{\nabla}P.\end{aligned}\quad (3.40)$$

On peut de plus montrer que $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$ ce qui rend le champ \vec{J} analogue à un champ de vitesse incompressible. On peut également montrer que $\vec{\nabla} \times \vec{Z} = 0$, ce qui montre que \vec{Z} dérive d'un potentiel le rendant analogue à un gradient de pression $\vec{\nabla}P$. Et donc que $\vec{Z} = \vec{\nabla}\Psi$.

Par ailleurs, on peut montrer que les conditions aux bords sont également similaires. En effet, si on impose un débit Q , en intégrant sur tous chemins latéraux le champ \vec{u} , on a :

$$Q = \int_{in} \vec{u} \cdot d\vec{s} \quad (3.41)$$

$$= \int_{in} (\vec{k} \times \vec{u}) \cdot (\vec{k} \times d\vec{s}) \quad (3.42)$$

$$= \int_1^2 (\vec{\nabla}\Psi) \cdot d\vec{l} \quad (3.43)$$

$$= \Psi_2 - \Psi_1, \quad (3.44)$$

avec 1 et 2 les deux bords latéraux. Ce qui montre qu'imposer un débit pour le champ initial équivaut à imposer une différence de pression pour le champ analogue. On pourrait montrer la même chose pour une pression imposée.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\vec{Z} &= \frac{f(|\vec{\nabla}P|)}{|\vec{\nabla}P|} \vec{J} \\ &= f(|\vec{J}|) \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|},\end{aligned}\quad (3.45)$$

soit

$$\begin{aligned}|\vec{Z}| &= f(|\vec{J}|) \\ |\vec{J}| &= f^{-1}(|\vec{Z}|).\end{aligned}\quad (3.46)$$

Ainsi, si la relation débit-pression est inversible, après une rotation de $\pi/2$, nous retrouvons un problème similaire, mais avec une rhéologie inverse. En particulier, on passe d'un rhéofluidifiant à un rhéoépaississant, et réciproquement.

Dans le cas du fluide de Carreau, on a $f(X) = X^{1/n}$, et $f^{-1}(X) = X^n$. Ainsi, nous montrons que lors de l'écoulement d'un fluide de Carreau en milieu poreux, nous avons dans une direction, la vitesse qui obéit à une loi de Carreau, et dans la direction orthogonale, toujours une loi de Carreau mais avec un exposant inverse.

Il est cependant nécessaire de rappeler que ce raisonnement n'est valable uniquement pour le cas bidimensionnel.

3.3.4 Commentaires

Il est important de faire quelques remarques sur les calculs précédents. Tout d'abord, dans un cadre général, nous avons négligé le terme de Brinkman, $\Delta\vec{u}$. Il s'agit d'un terme de diffusion visqueuse. Ce terme prend son importance dès que la distribution de vitesse, de perméabilité ou de viscosité est hétérogène, et varie abruptement.

Dans le cadre du fluide de Bingham, plus particulièrement, cela va se manifester lorsque le fluide dans certaines régions va se mettre à s'écouler, là où auparavant il restait solide, décalant ainsi les «parois» entre lesquelles le fluide s'écoule. Cependant, lorsque la contrainte seuil est négligeable comparée à la contrainte appliquée au fluide, on peut s'attendre à ce que le terme de Brinkman ne modifie plus la distribution de vitesse.

Dans le cadre du fluide de Carreau, plus particulièrement, la vitesse n'augmente pas uniformément avec la pression, du fait de la combinaison entre l'hétérogénéité du champ de contrainte seuil, et de la loi de puissance. De plus, $\Delta\vec{u}$ est un terme linéaire, qui ne va donc pas varier de la même manière que le terme $|\vec{u}|^n$ de la loi de Carreau. Ainsi, on peut s'attendre à ce que le terme de Brinkman joue un rôle pour certaines vitesses. On peut quantifier son importance. Effectivement, si l'on suppose que le fluide est loin au dessus de son seuil de transition, on peut écrire :

$$\vec{0} = \vec{\nabla}P - \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} \frac{\mu}{\kappa} |\vec{u}|^n + \mu_B \Delta\vec{u} \quad (3.47)$$

Avec μ_B la viscosité propre de Brinkman. Si l'on suppose par simplicité $\mu_B = \mu$, une analyse dimensionnelle nous donne :

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mu}{\kappa} |\vec{u}|^n \right] &= \frac{\mu}{\kappa} u^n \\ \left[\mu' \Delta\vec{u} \right] &= \mu \frac{u}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Soit

$$\frac{\left[\frac{\mu}{\kappa} |\vec{u}|^n \right]}{\left[\mu' \Delta\vec{u} \right]} = \frac{u^{n-1}}{\kappa \lambda^2} \quad (3.49)$$

En considérant les deux contributions d'ampleur équivalente, soit $\frac{\mu}{\kappa} u^n \sim \mu \frac{u}{\lambda^2}$, la vitesse de transition à partir de laquelle le terme de Brinkman est non négligeable vaut :

$$u \approx \left(\frac{\lambda^2}{\kappa} \right)^{\frac{1}{1-n}}. \quad (3.50)$$

Nous pouvons désormais quantifier cet effet avec nos paramètres. En effet, dans le cas $n = 0.5$, nous avons pour $\bar{\kappa} = e^{-1}$ et λ de l'ordre de 1 nœud, on trouve une vitesse de transition $u \approx 7.39 \approx 12.8c_s$ avec $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ la vitesse du son fixée dans nos simulations. Pour des raisons de stabilité, nos simulations se situent toujours à

quelques ordres de grandeurs en dessous de c_s . Ainsi, l'effet du terme de Brinkman sur une loi de Carreau établie en milieu poreux peut être considéré négligeable par modification de la pression. Notons cependant que nous ne parlons pas ici de l'influence de différents termes de Brinkman sur les distributions asymptotiques $\frac{\bar{u}}{Q}$.

L'influence de l'hétérogénéité du champ de contrainte critique nous amène à un second commentaire. Outre le terme de Brinkman, les calculs précédents permettent d'étudier les cas asymptotiques des petits et grands débits. Dans un milieu entièrement homogène, si on peut s'attendre à ce que la transition soit brutale, les effets de transition dans un milieu hétérogène restent à étudier. C'est dans ce cadre que les travaux de cette thèse ont eu lieu.

Il y a plusieurs moyen pour caractériser l'écoulement du fluide dans ce régime. Le plus simple à utiliser est la relation débit-pression, qui est aussi utilisé dans le cadre d'expériences sur des fluides réels. Nous pouvons aussi regarder si l'écoulement possède des comportements particuliers, par exemple s'il possède des chemins préférentiels, ou suit des lois multi-échelles. Enfin, il est possible de regarder l'évolution de la distribution des régimes de vitesse.

Chapitre 4

Fluide de Bingham

Liste des symboles spécifiques utilisés dans ce chapitre :

- σ : écart-type du champ de perméabilité,
- Θ : exposant régissant la relation débit-pression dans le régime transitoire,
- G_l : pression seuil locale à laquelle le fluide change de régime,
- G_s : pression à laquelle la taille des agrégats du système divergent,
- τ_f : exposant de la distribution de taille des agrégats,
- γ_f : exposant de la taille de coupure des agrégats en fonction de la pression,
- ζ : exposant du rapport d'aspect des agrégats,
- X_L : indice appliqué aux quantités regardant les propriétés de la longueur des agrégats,
- X_W : indice appliqué aux quantités regardant les propriétés de la largeur des agrégats.

4.1 Introduction

On trouve dans la littérature sur les fluides à seuil en milieu poreux, un certain nombre d'études étudiant les écoulements soit à l'échelle du pore soit à l'échelle macroscopique mais loin du seuil, ou en milieu homogène.

Ainsi, *Roustaei et al* [63] ont simulé l'écoulement d'un fluide à seuil dans des canaux bi-dimensionnels de différentes formes (sinusoïde, fracture, etc). Ils ont en particulier regardé l'évolution de l'écoulement en fonction du gradient de pression, et ont regardé les limites de l'approximation de la loi de Darcy.

Les fluides à seuil sont aussi étudiés en tant que nouvelle méthode de porosimétrie [3, 23, 4]. Effectivement, la porosimétrie s'effectue actuellement avec du mercure. L'état actuel de la méthode permet d'estimer la taille des pores les plus larges accessibles par échantillon de surface, la densité du milieu poreux, et la surface interne du milieu [33]. Cependant, le mercure étant un métal très toxique

des méthodes alternatives sont actuellement explorées. Or, comme nous l'avons vu dans la section 1.2.1, il existe un lien entre la taille d'un pore, et la pression nécessaire pour qu'un fluide à seuil s'y écoule. Ainsi, l'observation de la relation débit-pression pourrait nous renseigner sur la distribution de taille des pores. C'est ce qu'ont fait par exemple *Rodriguez de Castro et al* avec des solutions de xanthan [4], et en comparant les résultats expérimentaux des solutions de xanthan avec des simulations numériques et des résultats de porosimétrie au mercure [23].

De plus, *Chevalier et al* [14] ont mesuré expérimentalement la relation débit-pression pour différents fluides à seuils (Carbopol et émulsions huile-eau) dans un empilement de billes. Plus particulièrement, ils ont déduit une loi de Darcy à seuil en établissant un écoulement dans un milieu poreux. En particulier, ils ont réduit la pression afin de déterminer le plus précisément possible la contrainte seuil. D'autres études expérimentales [13, 15], semblent suggérer que dans leur milieu poreux, il n'y aurait pas de chemins préférentiels. Ceci peut cependant être dû à la difficulté de mesurer précisément des écoulements stationnaires stables [14] proches de la contrainte seuil.

Chevalier et al ont simulé [70, 17, 16, 18] l'écoulement en deux dimensions d'un fluide à seuil dans un réseau de canaux, ainsi que dans des empilements de billes solides. Plus particulièrement, ils ont étudié les propriétés géométriques de l'écoulement lors de la phase transitoire entre le régime solide du fluide, et le régime asymptotique newtonien discuté précédemment. En particulier, ils ont étudié le comportement statistique de chemins d'écoulement préférentiels en fonction du désordre du milieu. Ils ont également montré l'existence d'un régime intermédiaire dans la loi débit-pression en puissance quadratique.

4.2 Fluide à seuil à l'échelle microscopique

L'étude que j'ai faite pour le fluide de Bingham en milieu macroscopique suit les travaux de *Chevalier et al.* Je résume quelques-uns de ses résultats. Nous considérons ici un milieu poreux microscopique bi-dimensionnel, saturé d'un fluide à seuil. *Chevalier et al.* ont simulé de tels écoulements dans des milieux constitués de disques solides [17], en résolvant les équations de Stokes pour les fluides à seuil :

$$\vec{0} = \vec{\nabla}P - \nu_{eff}\Delta\vec{u} \quad (4.1)$$

avec $\nu_{eff} = (1 - e^{-\dot{\gamma}/\dot{\gamma}^0})\tau_0(\frac{1}{2\dot{\gamma}} + \frac{1}{\dot{\gamma}_1})$, une viscosité effective proposée par Papanastasiou [57], qui prend en compte les effets non-newtoniens du fluide à seuil.

Comme vu dans la section 1.2.1, la contrainte imposée à un fluide dans un canal est proportionnelle au gradient de pression imposé au fluide, multiplié par le rayon du canal : $\tau \propto (\nabla P)r$. En conséquence, dans une distribution aléatoire de disques, pour atteindre une contrainte τ_0 aux parois des billes, il faudra appliquer

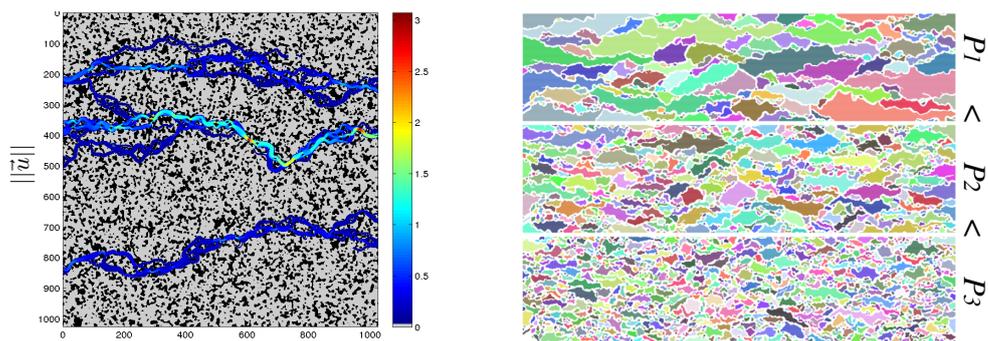


FIGURE 4.1 – À gauche, champ de vitesse pour un fluide de Bingham dans un milieu poreux microscopique. En noir les régions solides. En gris les régions de fluide à l'arrêt. En couleurs le fluide en écoulement. À droite, agrégats pour trois pressions différentes, croissantes de haut en bas, dans un même milieu. Chaque couleur correspond à une région à l'arrêt.

un pression d'autant plus grande que le rayon est petit. Dans un milieu dont les diamètres sont hétérogènes, on s'attend à ce qu'il existe des chemins d'écoulement préférentiels, qui s'ouvriront progressivement au fur et à mesure que la pression atteint leur seuil d'ouverture. Nous illustrons cet écoulement pour trois pressions différentes sur la figure 4.1, à gauche, avec en noir les régions solides, en gris les régions de fluide à l'arrêt, et en couleurs le fluide en écoulement. À droite, nous illustrons les régions de fluide à l'arrêt, que nous appelons des agrégats, chacune avec une couleur différente, délimitées par les chemins d'écoulement en blanc. On constate que plus la pression est grande, plus il y a de chemins mais également plus il y a de petits agrégats. Les agrégats étant délimités par des chemins d'écoulement, les différentes statistiques des agrégats sont alors indicatives du comportement des chemins.

Au début, il n'existe que très peu d'agrégats de fluide à l'arrêt dû au faible nombre de chemins d'écoulement. Au fur et à mesure que des chemins s'ouvrent, ils divisent et délimitent les agrégats existants en de plus petits. Sur la figure 4.2, nous illustrons des agrégats (rouge, vert, et blanc) entourés par des chemins d'écoulement (noir). Ces agrégats peuvent se caractériser par une longueur et une largeur. Sur la figure du haut, nous illustrons la longueur L et la largeur W maximale d'un agrégats. Sur la figure du bas, nous illustrons la largeur locale $w(l)$ à une certaine distance $l < L$ de l'agrégat.

$$W \propto L^\zeta, \quad (4.2)$$

avec $\zeta = 2/3 \pm 0.03$. Les agrégats étant délimités par les chemins d'écoulement, on

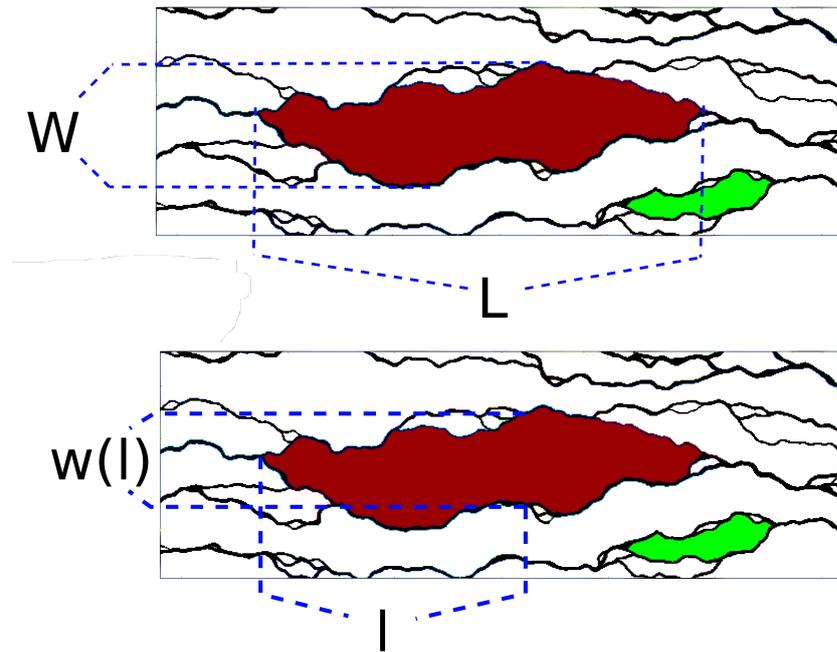


FIGURE 4.2 – Illustration d'agrégats (blanc, rouge, vert) et de chemins d'écoulement (noir), pour l'écoulement d'un fluide de Bingham en milieu poreux macroscopique. Sont illustrées en haut la longueur du agrégat rouge L , sa largeur W , et en bas sa largeur à une longueur donnée $w(l)$ et la longueur en question l .

peut ainsi déduire que pour chaque portion de chemin, un déplacement selon X de δl s'accompagne en moyenne d'un déplacement selon Y de δw avec $\delta w \propto \delta l^\zeta$. Autrement dit, nos chemins sont auto-affines. On constate de plus que l'exposant ζ est le même que celui prédit par le polymère dirigé [17].

Après avoir caractérisé leur forme, T. Chevalier ont montré que la taille des agrégats S suivent une distribution en loi de puissance, avec une loi de coupure :

$$\begin{aligned} P(S) &\propto S^{-\tau} e^{-S/S_0} \\ S_0 &\propto q^{-\gamma} \end{aligned} \quad (4.3)$$

avec q le débit, $\tau = 1.46 \pm 0.06$ et $\gamma = 0.97 \pm 0.07$. Il s'agit là de lois similaires à celles de la distribution de tailles et de la taille de coupure selon la théorie de la percolation, (3.1) et (3.2), avec des exposants différents cependant.

Enfin, T. Chevalier caractérise la relation entre le débit et le gradient de pression relative au gradient de pression seuil, qui est une loi de puissance :

$$q \propto (\delta p - \delta p_c)^\Theta \quad (4.4)$$

avec $\Theta = 2.1 \pm 0.3$. Cette loi, proche d'une loi quadratique, résulte de la combinaison de deux effets. Le premier est l'augmentation linéaire de la vitesse du fluide avec le gradient de pression dans chaque canal ouvert. Le second est l'augmentation du nombre de chemins ouverts avec la pression imposée. Comme proposé par Roux *et al.*[65], en supposant que le nombre de chemins ouverts augmente linéairement avec la pression imposée, on peut expliquer cet exposant deux. Par ailleurs, T. Chevalier a montré que cet exposant quadratique résultait de la statistique des agrégats, en particulier des exposants τ et γ . Ce qui montre que la statistique des agrégats permet en partie de comprendre la loi débit-pression.

4.3 Description du problème

L'objectif de ces travaux est d'étudier le comportement d'un fluide à seuil à une échelle beaucoup plus grande que microscopique. Nous regardons l'influence du désordre sur l'écoulement d'un fluide à seuil en milieu macroscopique. Nous utilisons plus précisément un fluide de Bingham qui obéit à :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= -\vec{\nabla} P - \frac{\mu_{eff}(\vec{u})}{\kappa} \vec{u} + \mu_0 \Delta \vec{u} \\ \mu_{eff} &= \mu_0 \left(1 + \frac{\kappa G_I}{\mu_0 \|\vec{u}\|} \right). \end{aligned}$$

En comparaison à l'équation (1.30), en l'absence de prédiction théorique pour μ_B pour un fluide de Bingham, j'ai choisi $\mu_B = \mu_0$ par simplicité.

La perméabilité est hétérogène et satisfait les équations (2.20) et (2.21). Dans cette étude, la taille est de 1024×4096 nœuds, la longueur de corrélation vaut

$\lambda_c = 5$ noeuds, la perméabilité moyenne est fixé à $\kappa_0 = e^{-1} = 0.36$ et l'amplitude du désordre σ est telle que σ^2 varie de 0.1 à 3. Pour différents σ , à l'amplitude du désordre près, les cartes de perméabilité sont similaires en échelle logarithmique. Pour $\sigma = 1$, nous avons simulé l'écoulement dans cinq milieux différents. La constante A dans (1.36) vaut 10^{-5} . Nous imposons alors une différence de pression ΔP entre l'entrée et la sortie du domaine.

Nous rappelons que l'adimensionnement des quantités physiques utilisées se fait avec la longueur de corrélation λ_c pour les longueurs. Pour les pressions, nous utiliserons la pression seuil en milieu homogène $\langle G_l \rangle = A/\sqrt{\kappa_0}$. Ainsi,

$$X = \lambda_c \tilde{X}, \quad P = \frac{A}{\sqrt{\kappa_0}} \tilde{P}, \quad u = \frac{A\sqrt{\kappa_0}}{\mu_0} \tilde{u} \quad (4.5)$$

Comme dans le cas microscopique, la condition d'écoulement fait que le fluide ne s'écoule pas lorsque la différence de pression imposée est trop faible, le domaine entier restant alors solide. Dans notre cas cependant, pour des raisons numériques, la viscosité n'étant jamais infinie, la vitesse n'est jamais nulle, mais extrêmement faible. Après avoir passé une certaine pression seuil, $\Delta \tilde{P}_c$, un premier chemin va s'ouvrir. Au fur et à mesure que l'on va augmenter la pression, de nouveaux chemins vont s'ouvrir. Ceci est le régime intermédiaire que nous souhaitons étudier. Lorsque tous les chemins sont ouverts et ont fusionné entre eux, la loi débit-pression commence à tendre vers une loi newtonienne. Il faudra cependant attendre que la pression imposée soit suffisamment grande devant la pression d'ouverture du dernier chemin pour observer ce régime.

J'ai tracé sur la figure 4.3 des extraits de profils de vitesse pour plusieurs gradient de pression et plusieurs σ . Les abscisses et les ordonnées sont des longueurs adimensionnées des cartes de vitesse. Sur la première colonne, $\sigma^2 = 0.1$, sur la deuxième, $\sigma^2 = 1$, et sur la troisième, $\sigma^2 = 3$. Par définition, à $\Delta \tilde{P}_c$, un seul chemin devrait être ouvert, cela peut être cependant difficile à obtenir numériquement. En effet, plus σ est faible, et donc plus le milieu est homogène, plus les chemins s'ouvrent rapidement sur une plage courte de pression. Pour des raisons de convergence numérique, la détermination de cette pression critique devient extrêmement coûteuse en temps de calcul.

On peut effectivement constater sur cette figure que le nombre de chemins augmente avec ΔP . Par ailleurs, on pourrait noter que chaque chemin semble s'élargir avec la pression. Un autre point remarquable qu'on peut noter est que la tortuosité des chemins augmente avec le désordre σ .

Nous commençons par étudier les propriétés du débit en fonction de la pression, puis nous regardons les caractéristiques géométriques de l'écoulement.

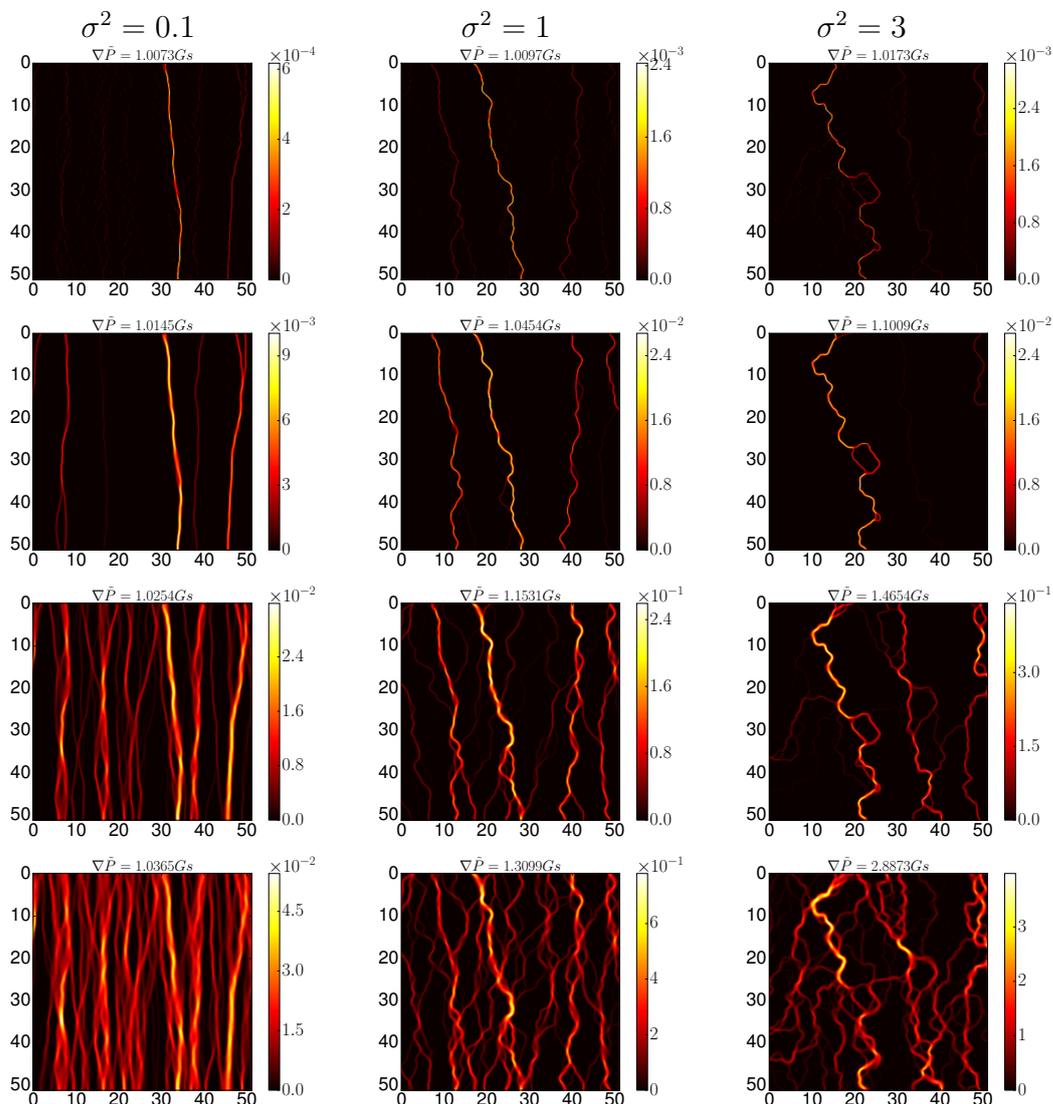


FIGURE 4.3 – Grossissement d’une sélection des cartes de vitesse pour différents gradients de pression et différents σ . La carte de couleurs correspond à $\|\vec{u}\|$. Les chemins sont en couleur et les zones à l’arrêt en noir. À chaque colonne correspond un σ : sur la première colonne, $\sigma^2 = 0.1$, sur la seconde $\sigma^2 = 1$ et sur la troisième $\sigma^2 = 3$. L’organisation des lignes est telle que la pression augmente de haut en bas.

Résultats importants :

- Le nombre de chemins d'écoulement augmente avec la pression
- Plus l'ampleur du désordre σ est importante, plus les chemins sont tortueux,
- Les chemins d'écoulement préférentiels s'élargissent lorsque la pression appliquée augmente.

4.4 Loi débit-pression

4.4.1 Pression seuil

La première caractéristique de l'écoulement est la pression G_s en dessous de laquelle tout est figé. Cette pression est une conséquence du seuil en contrainte du fluide. Soit $\Delta\tilde{P}_0$ la pression critique locale de chaque région, \mathbb{C} l'ensemble des chemins d'écoulement possibles dans le milieu et dl une fraction de chemin, comme démontré dans le chapitre 3.3.2 avec l'équation (3.28), on a :

$$\Delta\tilde{P}_c = \min_{C \in \mathbb{C}_{AB}} \int_C G_l(\vec{r}) dl. \quad (4.6)$$

Un premier constat sur cette équation est que la quantité $\Delta\tilde{P}_c$ augmente avec la longueur du système \tilde{L} . Pour cette raison, nous utiliserons plutôt la quantité :

$$G_s = \frac{\Delta\tilde{P}_c}{\tilde{L}} \quad (4.7)$$

qui représente un gradient moyen critique du système.

Il est de plus possible de remarquer un certain nombre de points quant au comportement de la pression G_s ainsi que du comportement des chemins d'écoulement. En effet, on s'attend à ce que tous deux vont dépendre de l'amplitude du désordre. En particulier le comportement des chemins, leur forme sur la carte de perméabilité, résulte de la compétition entre deux effets, comme décrit dans la section 3.2, à savoir, entre le gain en passant par les régions de plus faible G_l et la perte que subit un chemin en s'allongeant pour faire un détour.

Cette compétition peut être constatée sur la figure 4.3 : à $\sigma^2 = 0.1$, le milieu est plutôt uniforme, le détour est plus coûteux que d'aller tout droit. À $\sigma^2 = 3$, le milieu est très hétérogène, et il peut alors devenir rentable pour un chemin de s'allonger pour passer par une zone de très faible pression critique (forte perméabilité).

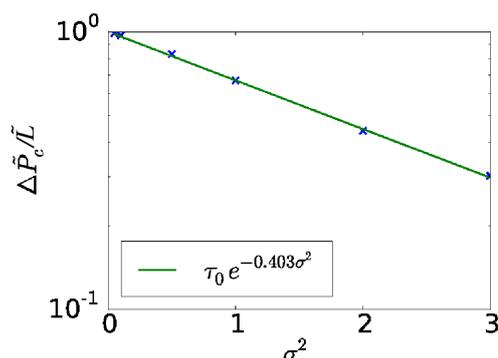


FIGURE 4.4 – Graphe semilogarithmique de la pression seuil en fonction de la variance σ^2 .

Il faut cependant noter que l'augmentation de la tortuosité du chemin optimal avec σ n'est pas forcément si intuitif. En effet, si l'on change la constante A ou que l'on multiplie le champ $G_l(\vec{r})$ par une constante, la valeur moyenne et l'écart-type de la distribution vont changer. Cependant, le champ de perméabilité ayant été modifié linéairement, à partir de l'équation (4.6), on ne s'attend pas à ce que le chemin optimal soit modifié.

Enfin, on peut constater avec les chemins d'écoulement pris par le fluide pour $\sigma^2 = 3$, que le chemin optimal présente des rebroussements ce qui suggère que l'hypothèse du polymère "dirigé" n'est plus forcément valable.

Sur la figure 4.4 est tracée la relation entre G_s et σ . Lorsque, à valeur moyenne fixée, la variance augmente, le milieu poreux explore des zones de plus fortes perméabilité, donc de plus faible pression critique. On s'attend donc à ce que la pression critique du système G_s diminue lorsque σ augmente, tout autre paramètre restant inchangé. Ceci est une conséquence de l'agrandissement de l'écart entre les zones de faible et forte pression seuil. De manière attendue, le maximum de G_s est atteint pour le milieu homogène $G_s(\sigma = 0) = \frac{A}{\sqrt{\kappa_0}}$. Chaque point a été obtenu avec une seule réalisation, cependant, cinq réalisations à $\sigma = 1$ montrent un accord raisonnable sur la valeur de G_s . On constate de plus que la pression critique s'ajuste avec une gaussienne.

$$G_s \approx \tau_0 e^{-0.403\sigma^2} \quad (4.8)$$

Notons enfin que, comme décrit plus haut, à faible σ , le milieu est très uniforme, il devient compliqué de mesurer précisément la pression seuil G_s car beaucoup de chemins s'ouvrent rapidement dans une petite fenêtre de $\nabla \tilde{P}$.

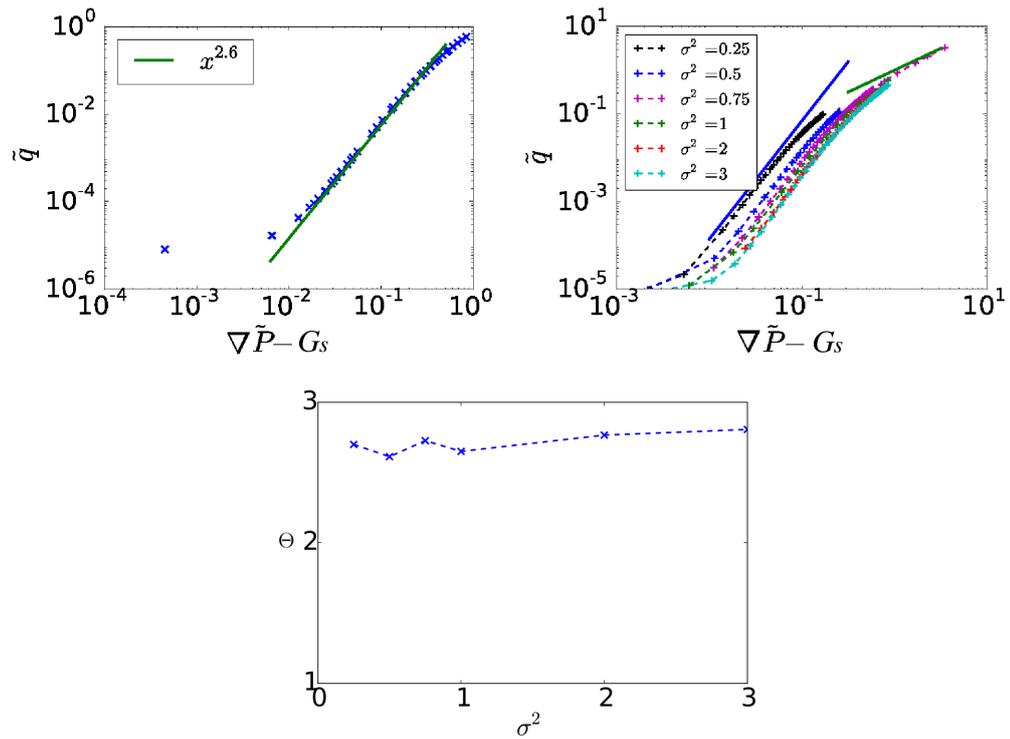


FIGURE 4.5 – En haut à gauche, débit en fonction du gradient de pression $\tilde{q}(\nabla \tilde{P})$ en échelle logarithmique, pour $\sigma = 1$. En haut à droite, débit en fonction du gradient de pression en échelle logarithmique, pour différents σ . La première correspond à une loi de puissance de 2.7, et la seconde à une loi linéaire. En bas, évolution de l'exposant Θ en fonction de σ .

4.4.2 Loi débit-pression

Nous regardons désormais le comportement du débit avec l'augmentation de la pression. Sur la figure 4.5, est tracée la loi débit-pression pour $\sigma = 1$ en haut à gauche et pour plusieurs σ en haut à droite. On constate d'abord l'existence de deux régimes. Dans le premier, pour les faibles débits, le débit suit $\nabla\tilde{P} - G_s$ comme une loi de puissance :

$$\tilde{q} = B(\nabla\tilde{P} - G_s)^\Theta \quad (4.9)$$

avec $\Theta = 2.7 \pm 0.1$. D'un point de vue phénoménologique, ce régime correspond à la plage de pression dans laquelle le nombre de chemin s'écoulant augmente. En bas de la figure 4.5, j'ai tracé l'évolution de cet exposant en fonction de σ^2 . On constate de manière remarquable que cet exposant ne semble pas dépendre du paramètre de désordre σ . Par contre, le préfacteur B semble décroître de manière significative avec σ . Une explication possible à cette tendance pourrait provenir du fait qu'avec le désordre la longueur des chemins augmente ce qui diminue leur perméabilité.

Dans le second régime, la loi débit-pression tend vers une loi linéaire, $\tilde{q} \propto \nabla\tilde{P}$, comme on peut le constater sur la figure en haut à droite. Ce régime n'est atteint que lorsque tous les chemins sont ouverts, et que l'on se trouve relativement loin de la pression critique du système. Dans ce cas, l'ensemble du milieu se trouve dans un régime tendant vers un fluide newtonien.

En principe, on s'attendrait à avoir un autre régime avant les deux présentés qui correspondrait à la gamme de pression, où un seul chemin ne s'écoule. Ce régime étant dans une très petite fenêtre de pression, il est compliqué à étudier, d'autant plus qu'il est très proche de la pression critique du système, et que le temps de convergence des simulations diverge. C'est d'ailleurs une des raisons pour laquelle les premiers points de la courbe s'écartent. D'une part, car la pression critique est difficile à déterminer précisément et d'autre part de la possible présence d'un autre régime dans une courte fenêtre. On s'attend de plus à ce que, dans cette fenêtre, la loi débit-pression soit linéaire. Effectivement, tant qu'aucun autre chemin ne s'ouvre, et que l'élargissement du chemin ouvert est négligeable, l'écoulement dans ce chemin pourrait être décrit par une loi de Darcy à seuil :

$$Q \propto W_c(\nabla P - G_s), \quad (4.10)$$

où W_c est la largeur du chemin.

Le régime qui nous intéresse plus particulièrement est le premier régime non linéaire. Ce comportement est réminiscent de ce que l'on peut observer à l'échelle du pore, où le débit suit aussi $\nabla\tilde{P} - G_s$ avec une loi de puissance. Cependant, à l'échelle microscopique, l'exposant est très différent, valant approximativement 2.

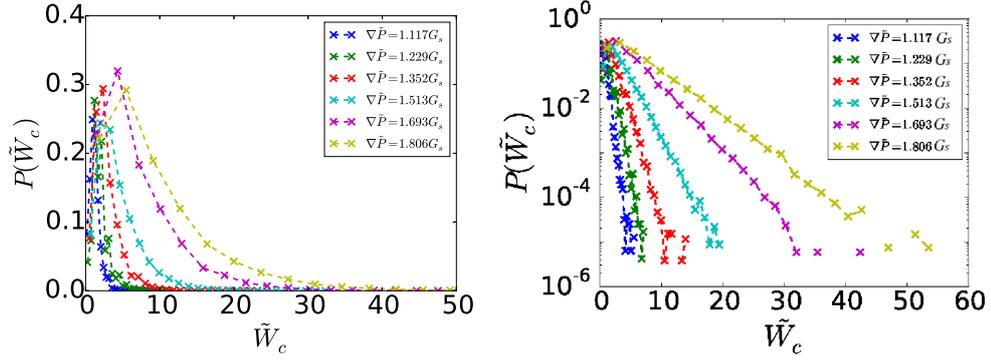


FIGURE 4.6 – À gauche, distribution de la largeur des chemins \tilde{W}_c à différents $\Delta\tilde{P}$, pour $\sigma = 1$. À droite, distribution de la largeur des chemins en semi-logarithmique.

A cette échelle, l'origine de cet exposant provenait de deux effets : d'une part de l'augmentation linéaire du débit à l'intérieur de chaque chemin, et d'autre part, de l'augmentation du nombre de chemins avec la pression.

Pour comprendre cet écart sur la valeur de l'exposant, on pourrait avancer deux phénomènes. Le phénomène qui ne serait plus linéaire pourrait être soit le nombre de chemin, soit le débit dans chacun d'entre eux. Comme nous l'avons observé sur la figure 4.3, les chemins semblent cependant s'élargir avec la pression. Cet effet a été quantifié sur la figure 4.6 sur laquelle j'ai tracé la distribution de taille des canaux. Nous pouvons ainsi constater que celle-ci s'élargit lorsque la pression augmente, ce qui confirme que le nombre de canaux large augmente avec la pression. De plus, j'ai tracé à droite cette même distribution sur un graphe semi-logarithmique. Nous constatons ainsi que la distribution décroît exponentiellement avec la largeur :

$$P(\tilde{W}_c) \propto e^{-c\tilde{W}_c}, \quad (4.11)$$

avec c décroissant avec la pression

On peut quantifier plus précisément cette variation. Tout d'abord, il faut noter que $1/c$ correspond à une largeur, qui peut être vue comme une largeur caractéristique des canaux dépendant de la pression. Physiquement, cet élargissement peut se comprendre par la corrélation de notre carte de pression seuil : lorsqu'un chemin s'ouvre, les régions adjacentes ont une valeur de pression seuil proche de celle du chemin et sont donc elles-mêmes proches de s'ouvrir.

J'ai tracé sur la figure 4.7 l'évolution de $1/c$ en fonction de $\Delta\tilde{P} - \Delta\tilde{P}_c$, en haut gauche sur échelle linéaire, en haut à droite sur un échelle log-log et enfin en bas sur échelle semi-logarithmique.

Nous pouvons constater ainsi pour les pressions proches de $\Delta\tilde{P}_c$, que l'on a une

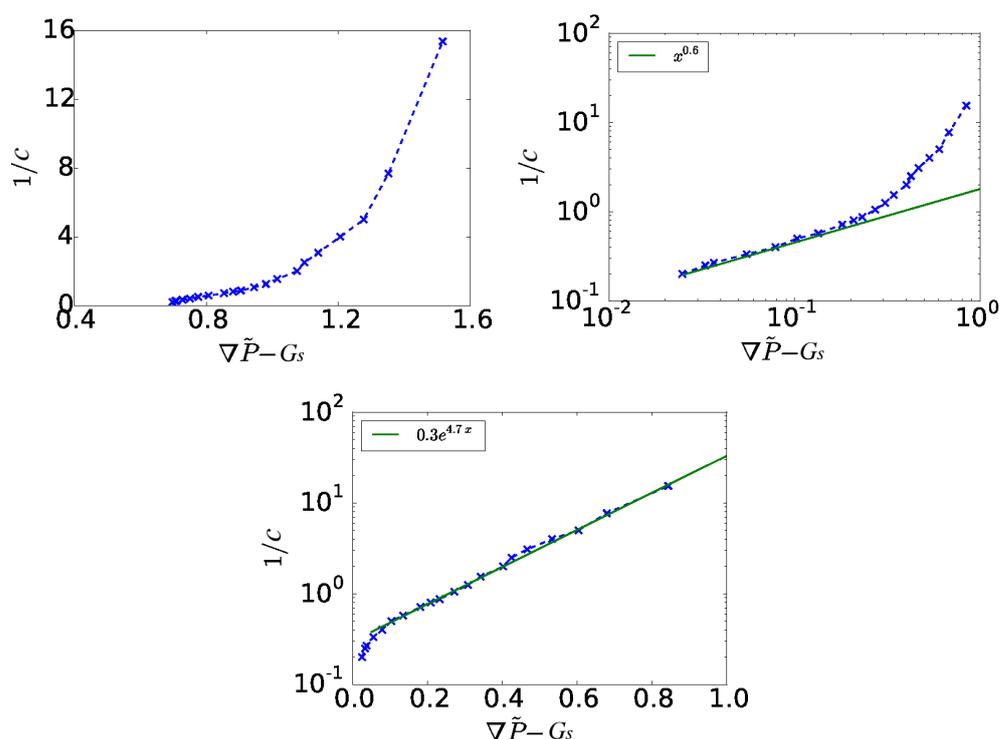


FIGURE 4.7 – Largeur caractéristique des chemins en fonction de la pression. En haut à gauche, en plot normal. En haut à droite, plot logarithmique, avec la loi de puissance correspondant. En bas, plot semi-logarithmique, avec la loi exponentielle correspondante.

dépendance en loi de puissance $1/c \propto (\Delta\tilde{P} - \Delta\tilde{P}_c)^{0.6}$ tandis que pour les hautes pressions on a une variation exponentielle.

Il est assez remarquable que l'exposant 0.6 semble correspondre à la différence entre l'exposant Θ du milieu microscopique et du macroscopique. Nous pouvons ainsi supposer que le nombre de chemin augmente linéairement avec la pression, ce qui quantifierait nos trois contributions à la relation (4.9). De plus, cela signifierait que les chemins s'ouvrent de la même manière avec la pression, aussi bien à l'échelle microscopique que macroscopique.

J'ai essayé de trouver une méthode pour quantifier le nombre de chemin de manière à vérifier l'hypothèse de Roux et Hermann [65]. Malheureusement, je n'ai pas trouvé de méthode satisfaisante pour définir ces chemins et donc quantifier leur évolution. Par ailleurs, il faut souligner que l'hypothèse de linéarité entre le nombre de chemin et la perméabilité du milieu provient d'un modèle de canaux parallèles ce qui n'est manifestement pas le cas ici. On aurait ainsi eu du mal à l'utiliser cet argument même s'il permettait d'expliquer simplement l'exposant 2

en microscopique.

Il est à noter que l'ampleur du désordre σ n'a pas d'effet sur Θ , ce qui est surprenant puisque cela modifie tant les chemins (et donc leur ordre d'ouverture) que l'écart en pression entre deux chemins qui s'ouvrent successivement.

Cependant, σ a un impact important sur le préfacteur B , comme le montre la figure du bas de 4.5. Cela modifie aussi et surtout la fenêtre de pression dans laquelle ce régime en loi de puissance existe. En particulier à très faible σ , le milieu étant pratiquement homogène, tous les chemins s'ouvrent plus ou moins à la même pression.

Résultats importants :

— Il existe des chemins préférentiels d'écoulements, dont le nombre et la largeur augmentent avec la pression appliquée,

— La pression critique suit une loi gaussienne en fonction de l'ampleur du désordre σ :

$$G_s = \tau_0 e^{-0.403\sigma^2}$$

— La loi débit-pression suit une loi de puissance, conséquence de trois phénomènes : l'augmentation de la vitesse dans les chemins d'écoulement avec la pression, l'augmentation du nombre de chemins d'écoulement, et enfin l'augmentation de la largeur de ces chemins :

$$\tilde{q} \propto (\nabla \tilde{P} - G_s)^\Theta, \quad \Theta = 2.7 \pm 0.1$$

— La largeur caractéristique des chemins augmente avec la pression, et contribue ainsi à Θ de 0.6.

4.5 Propriétés géométriques de l'écoulement

Nous allons désormais étudier les propriétés statistiques et géométriques de l'écoulement. Cependant, les propriétés des chemins sont assez difficiles à étudier en elles-mêmes. Aussi, pour obtenir les propriétés qui nous intéressent (longueur des branches, rugosité...), nous allons étudier les propriétés des agrégats. Effectivement, les agrégats sont délimités par des chemins d'écoulement, et la forme d'un agrégat de longueur L nous indiquera le comportement d'un chemin sur une

longueur équivalente. Par exemple, un chemin rugueux parcourant un agrégat sur une longueur l va dévier en largeur de w . Cette déviation va se répercuter sur la largeur maximale de l'agrégat.

La géométrie des agrégats de différentes tailles sera alors liée à la géométrie (rugosité) des chemins de contour. Cela a été proposé par exemple par Kawagoe *et al.* [45] dans un contexte différent. Dans le cadre d'un agrégat délimité par deux chemins de marche aléatoire, la forme de l'agrégat obéit à la loi auto-affine :

$$w \propto l^\zeta, \quad (4.12)$$

où ζ est l'exposant de la marche aléatoire : $\zeta = 1/2$. Les agrégats sont déduites comme suit : on seille d'abord la carte de vitesse pour délimiter les zones d'écoulement des zones à l'arrêt. Ensuite, on utilise l'algorithme d'Hoshen-Kopelman pour étiqueter chaque agrégat séparément, et obtenir sa taille \tilde{S} , sa longueur \tilde{L} et sa largeur \tilde{W} . Ces deux dernières longueurs sont celles du rectangle contenant l'agrégat. Nous avons étudié aussi leur largeur à une position donnée, $\tilde{w}(\tilde{l})$ avec $0 < l < L$.

L'algorithme d'Hoshen-Kopelman, appliquée sur une grille de cases vides et de cases occupées, fonctionne selon les étapes suivantes :

1. Pour une case donnée, on regarde si elle est occupée. Si elle est vide, on passe à la case suivante et on recommence à l'étape (1). Si elle est occupée, on passe à l'étape suivante.
2. On regarde si les deux cases voisines précédentes sont étiquetées. Par exemple, en deux dimensions, en explorant une carte de haut en bas et de gauche à droite, cela signifie regarder la case au dessus et celle à gauche de la case actuelle. S'il n'y a pas de cases étiquetées, on crée une nouvelle étiquette pour la case actuelle. S'il y a des cases étiquetées, on met la case actuelle dans la classe d'équivalence d'une des étiquettes et on réunit toutes les étiquettes sous une même classe d'équivalence. Puis on passe à la case suivante.

4.5.1 Distribution de tailles

Nous commençons par étudier la distribution de probabilité des tailles des agrégats. Sur la figure 4.8, à gauche, j'ai tracé la distribution de taille $P(\tilde{S})$ pour un σ donné (ici, $\sigma = 1$) et pour plusieurs $\Delta\tilde{P}$. On constate qu'à chaque pression appliquée, la distribution suit une loi de puissance pour les petites tailles, et s'effondre ensuite pour les tailles plus grandes. C'est le phénomène de coupure déjà présenté pour le problème de percolation. La taille de coupure \tilde{S}_0 décroît lorsque la différence de pression appliquée augmente. Nous avons pu ajuster chaque distribution avec la loi suivante :

$$P(\tilde{S}) \propto \tilde{S}^{-\tau_f} e^{-\tilde{S}/\tilde{S}_0}. \quad (4.13)$$

De plus, comme on peut le constater sur la sous-figure de la figure 4.8 de gauche, la taille de coupure suit elle-même une loi de puissance, par rapport au débit :

$$\tilde{S}_0 \propto \tilde{q}^{-\gamma_f} \quad (4.14)$$

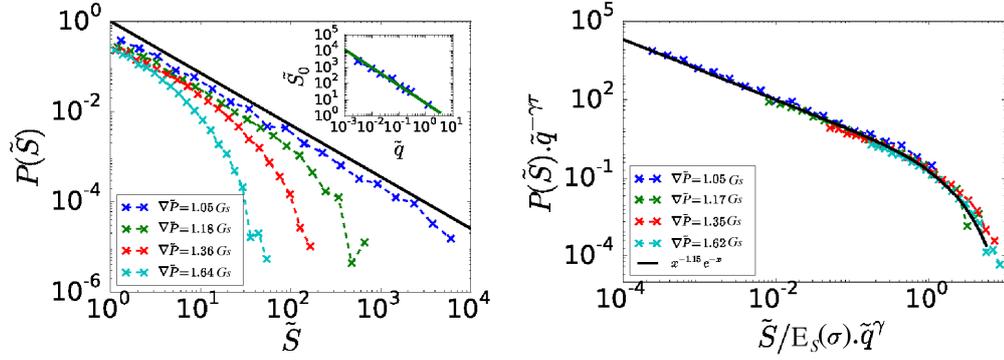


FIGURE 4.8 – À gauche : distribution de probabilité en fonction de la taille des agrégats $P(\tilde{S})$ et, en sous-figure, taille de coupure des agrégats en fonction du débit, $\tilde{S}_0(\tilde{q})$. À droite : distribution de probabilité de taille des agrégats normalisée $P(\tilde{S}) \cdot \tilde{q}^{-\tau_f}$ en fonction de $\tilde{S}/E_S(\sigma) \cdot \tilde{q}^{\gamma_f}$.

À droite de la figure 4.8, j'ai tracé les mêmes courbes, renormalisées selon les équations (4.13) et (4.14). On peut alors constater que toutes les courbes se superposent bien sur une courbe maîtresse. Ce qui confirme ces lois.

Par ailleurs, sur la figure 4.9, j'ai tracé ces mêmes courbes renormalisées pour différentes valeurs du désordre σ . Comme on peut le constater de manière assez surprenante, la courbe maîtresse reste très similaire, avec les mêmes exposants τ_f et γ_f . Cependant, on note que si l'exposant est invariant, le préfacteur de loi de la taille de coupure dépend de σ . Effectivement, j'ai pu ajuster nos courbes de la manière suivante : $\tilde{S}_0 = E_S(\sigma) \tilde{q}^{-\gamma_f}$, avec $E_S(\sigma) = 3\sigma^2$.

Tout d'abord, nous pouvons remarquer que les équations (4.13) et (4.14) rappellent des phénomènes observés à l'échelle microscopique. La distribution en loi de puissance est caractéristique de la nature multi-échelle du phénomène. Lorsque la pression appliquée augmente, les grands agrégats se font de plus en plus rares. Ce qui se traduit par une taille de coupure \tilde{S}_0 de plus en plus petite. Ceci est dû à la création de nouveaux chemins avec la pression, qui scindent les agrégats en plusieurs plus petits.

Cependant, certains exposants des équations à l'échelle macroscopique diffèrent de ceux à l'échelle microscopique. Si, aux deux échelles, on trouve $\gamma_f = 1.0 \pm 0.05$, à l'échelle microscopique, on trouve $\tau_f = 1.5$, alors qu'à l'échelle macroscopique, $\tau_f = 1.15 \pm 0.05$. Ainsi, la dépendance de la taille de coupure en fonction du débit

est similaire, mais la distribution générale des tailles n'est pas la même. Il y a ainsi une différence dans la création des chemins préférentiels, qui peut être due tant à la différence des lois physiques (Darcy contre Navier-Stokes) qu'à la différence de milieu (champ de perméabilité log-normal contre répartition aléatoire de disques solides).

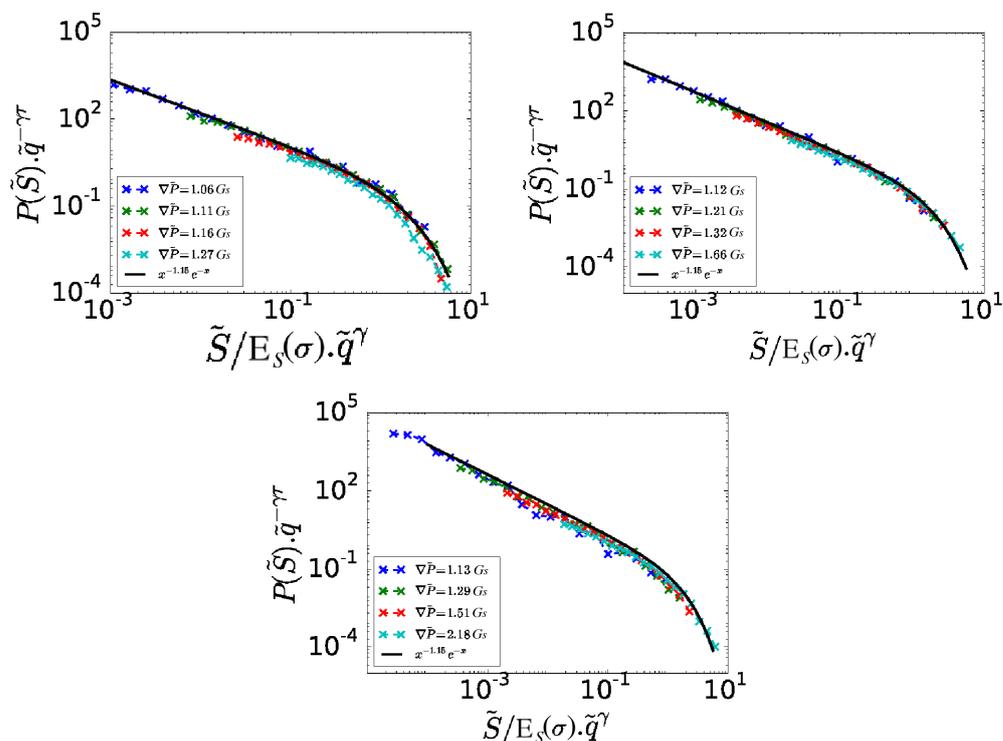


FIGURE 4.9 – Distribution de probabilité de taille des agrégats normalisée $P(\tilde{S}).\tilde{q}^{-\gamma}$ pour $\sigma = 0.5$ (en haut à gauche), $\sigma = 2$ (en haut à droite) et $\sigma = 3$ (en bas). La ligne continue correspond à l'ajustement effectué avec l'équation (3.1).

Ensuite, nous pouvons constater une dépendance du préfacteur de la taille de coupure en σ . Cette dernière dépendance indique que la taille de coupure est dépendante de l'ampleur du désordre, et qu'elle n'est donc pas universelle. On peut cependant faire un lien entre la variation de la taille de coupure avec σ , et les changements d'aspect des agrégats. Comme on peut le constater sur la figure 4.3, à faible σ , les agrégats sont très allongés, comparés à ceux obtenus avec des σ plus forts. Nous étudierons ceci plus en détail dans la section suivante.

Pour mieux comprendre la relation entre S_0 et σ , j'ai regardé les distributions de longueur et de largeur des agrégats. De la même manière que pour les surfaces,

pour plusieurs pressions et plusieurs σ , j'ai observé les lois :

$$\begin{aligned} P(\tilde{L}) &\propto \tilde{L}^{-\tau_{fL}} e^{-\tilde{L}/\tilde{L}_0} \\ \tilde{L}_0 &\propto E_L(\sigma) \tilde{q}^{-\gamma_{fL}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

et

$$\begin{aligned} P(\tilde{W}) &\propto \tilde{W}^{-\tau_{fW}} e^{-\tilde{W}/\tilde{W}_0} \\ \tilde{W}_0 &\propto E_W(\sigma) \tilde{q}^{-\gamma_{fW}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

avec $\tau_{fL,W}$, $\gamma_{fL,W}$ et $E_{L,W}(\sigma)$ les équivalents de τ_f , γ_f et $E_S(\sigma)$ pour L et W . j'ai mesuré

$$\begin{aligned} \tau_{fL} &= 1.3 \pm 0.1 \\ \tau_{fW} &= 1.5 \pm 0.1 \\ \gamma_{fL} &= 0.65 \pm 0.05 \\ \gamma_{fW} &= 0.85 \pm 0.05. \end{aligned} \quad (4.17)$$

J'ai illustré les relations (4.15) et (4.16) sur la figure 4.10 sur laquelle j'ai représenté la distribution de probabilité des longueurs et des largeurs d'agrégats (gauche) ainsi que leur distribution renormalisée, pour $\sigma = 1$.

Il est effectivement possible de déduire $\tau_{fL,W}$ à partir de τ_f et de ζ , de la même façon qu'il est possible de déduire $\gamma_{fL,W}$ à partir de γ_f et de ζ . Plus précisément, cela se fait à partir des équations (4.13), (4.14) et (4.18), en faisant la correspondance avec les équations (4.15) et (4.16). Montrons-le pour \tilde{L} , et commençons par la densité de probabilité sans taille de coupure. Je vais pour cela utiliser un résultat de la section suivante, qui est la relation entre la largeur et la longueur des agrégats :

$$\tilde{W} \propto \tilde{L}^\zeta \quad (4.18)$$

En supposant que l'on a $\tilde{S} \propto \tilde{L}\tilde{W}$, on a :

$$P(\tilde{S}) \propto P(\tilde{L}\tilde{W}) \propto (\tilde{L}\tilde{W})^{\tau_f} \propto (\tilde{L})^{-\tau_f(\zeta+1)} \quad (4.19)$$

De plus, de par les propriétés des probabilités de distribution, on a :

$$|P(\tilde{S})d\tilde{S}| = |P(\tilde{L})d\tilde{L}|. \quad (4.20)$$

Soit :

$$P(\tilde{L}) = P(\tilde{S}) \frac{d\tilde{S}}{d\tilde{L}}.$$

Ainsi :

$$P(\tilde{L}) = \tilde{L}^{-\tau_f(\zeta+1)} \tilde{L}^\zeta, \quad (4.21)$$

ce qui permet de déterminer $P(\tilde{L}) \propto \tilde{L}^{-\tau_{fL}} : \tau_{fL} = \tau_f(\zeta + 1) - \zeta$.

Pour la longueur de coupure, nous avons :

$$S_0 \propto (\tilde{L}_0\tilde{W}_0) \propto \tilde{L}^{\zeta+1} \propto \tilde{q}^{-\gamma_f}. \quad (4.22)$$

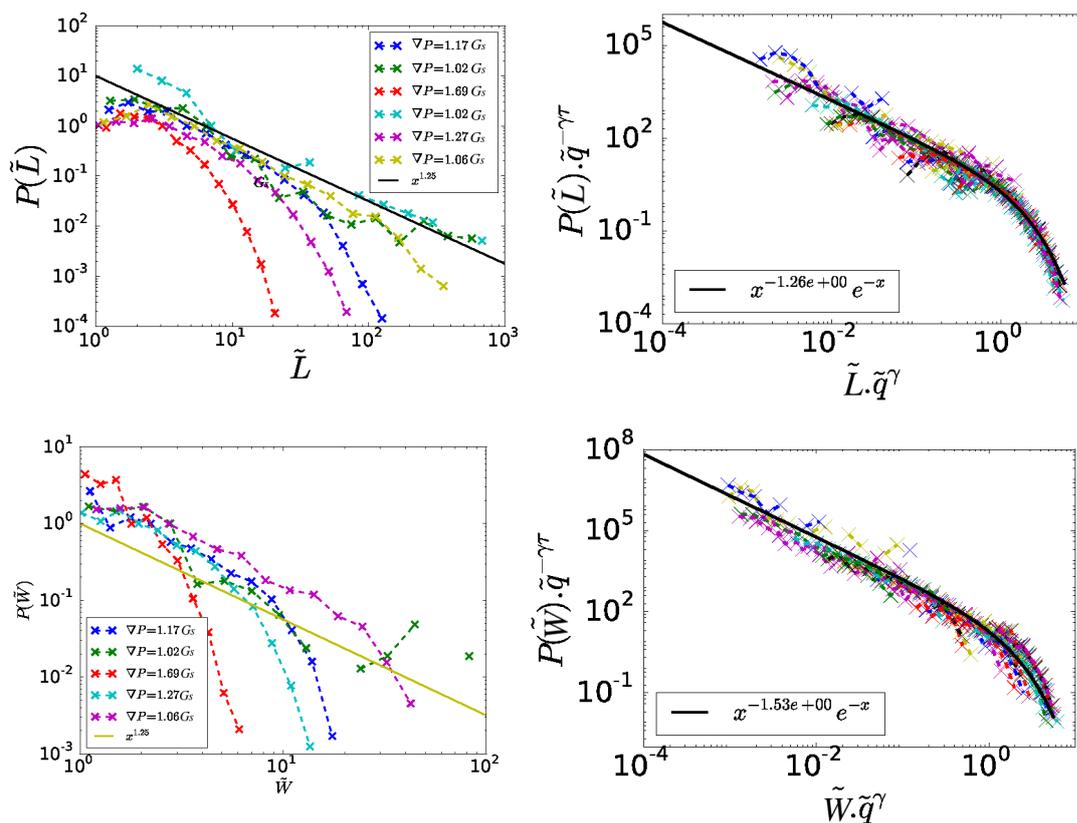


FIGURE 4.10 – Première ligne : distribution de probabilité des longueurs d'agrégats (gauche), et leur distribution de probabilité renormalisée (droite), $\sigma = 1$. Deuxième ligne : distribution de probabilité des largeurs d'agrégats (gauche), et leur distribution de probabilité renormalisée (droite), $\sigma = 1$.

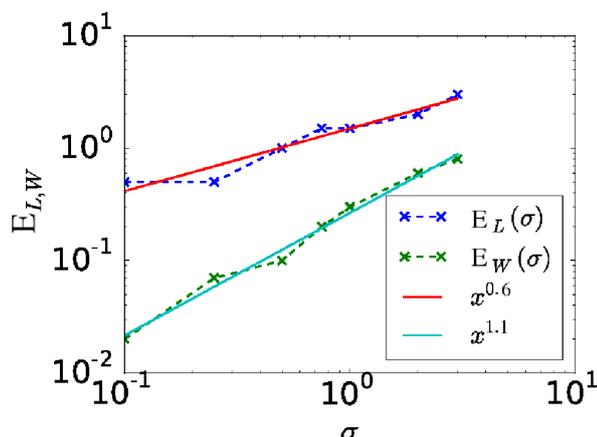


FIGURE 4.11 – E_L et E_W en fonction de σ^2 , avec les ajustements correspondants.

Soit $\tilde{L}_0 \propto \tilde{q}^{-\gamma_{fL}}$ avec $\gamma_{fL} = \gamma_f/(\zeta + 1)$. On peut ainsi montrer les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \tau_{fL} &= (\zeta + 1)\tau_f - \zeta = 1.3 \\
 \gamma_{fL} &= \gamma_f/(\zeta + 1) = 0.63 \\
 \tau_{fW} &= (1/\zeta + 1)\tau_f - 1/\zeta = 1.5 \\
 \gamma_{fW} &= \gamma_f/(1/\zeta + 1) = 0.83.
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

Comme nous avons caractérisé les exposants de la distribution de longueur et de largeur des agrégats, nous pouvons également regarder les préfacteurs $E_{W,L}$. Nous avons tracé sur la figure 4.11 les évolutions de E_L et E_W avec σ . Comme nous pouvons le voir, la longueur et la largeur de coupure sont affectées par σ . On constate aussi que la largeur des agrégats est bien plus affectée que leur longueur. Cependant, il a été délicat de mesurer $E_L(\sigma)$ et $E_W(\sigma)$, et l'erreur de mesure est d'environ 10% pour E_W , et 15% pour E_L . Nous pouvons approcher ces deux préfacteurs par des lois de puissance :

$$\begin{aligned}
 E_L(\sigma) &= 1.3\sigma^{0.6} \\
 E_W(\sigma) &= 0.3\sigma^{1.1}.
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Il est assez surprenant de constater que la somme des exposants de E_W et E_L ne donne pas exactement celui de E_S . On peut cependant attribuer ça à une forte erreur de mesure (10%) sur les exposants en question. Cependant, la différence entre les exposants de E_W et E_L permettent de quantifier l'évolution du rapport de forme avec σ . En effet, on constate ainsi qu'à faible σ , les agrégats sont beaucoup plus allongés que pour les plus forts σ .

Je vais étudier plus en détail les propriétés géométriques des agrégats dans la section suivante.

Résultats importants :

— La distribution de taille des agrégats suit une loi de puissance avec une coupure exponentielle :

$$P(\tilde{S}) \propto \tilde{S}^{-\tau_f} e^{-\tilde{S}/\tilde{S}_0}, \quad \tau_f = 1.15 \pm 0.05,$$

— La taille de coupure des agrégats évolue avec le débit selon une loi de puissance, et dépend quadratiquement de l'ampleur du désordre :

$$\tilde{S}_0 = 3\sigma^2 \tilde{q}^{-\gamma_f}, \quad \gamma_f = 1.5 \pm 0.05,$$

— Les distributions de longueur et largeur d'agrégat suivent des lois de puissance avec une coupure exponentielle, et les exposants peuvent être prédits à partir de ceux de la distribution de taille des agrégats τ_f et γ_f , ainsi qu'avec un exposant régissant la forme des agrégats ζ :

$$\tau_{fL} = (\zeta + 1)\tau_f - \zeta \quad (4.25)$$

$$\gamma_{fL} = \gamma_f / (\zeta + 1)$$

$$\tau_{fW} = (1/\zeta + 1)\tau_f - 1/\zeta \quad (4.26)$$

$$\gamma_{fW} = \gamma_f / (1/\zeta + 1), \quad (4.27)$$

— La dépendance de la taille de coupure des longueurs et largeur des agrégats varie avec σ :

$$E_L(\sigma) = 1.3\sigma^{0.6} \quad (4.28)$$

$$E_W(\sigma) = 0.3\sigma^{1.1}.$$

4.5.2 Forme des agrégats et rugosité des chemins

Pour étudier la forme des agrégats, j'ai moyenné la largeurs de l'ensemble des agrégats ayant une longueur donnée \tilde{L} (en pratique dans une certaine plage autour de \tilde{L} pour des raisons de statistique).

Sur la figure 4.12, à gauche, est tracée le contour $\langle \tilde{w}(\tilde{l}) \rangle_{\tilde{L}}$ pour différentes tailles totales \tilde{L} . De façon prévisible, la largeur locale des agrégats est non-monotone, partant et revenant à 0 (soit $\langle \tilde{w}(\tilde{l} = 0) \rangle_{\tilde{L}} = 0$ et $\langle \tilde{w}(\tilde{l} = \tilde{L}) \rangle_{\tilde{L}} = 0$). Cependant, il est intéressant de noter que les agrégats gardent, quelle que soit \tilde{L} , une forme

similaire. Pour montrer cela, sur cette figure, j'ai tracé la largeur \tilde{w} normalisée par la largeur maximale \tilde{W} en fonction de \tilde{l} renormalisée par \tilde{L} . On peut constater que tous les contours se regroupent sur une parabole maitresse :

$$\frac{\tilde{w}(\tilde{l})}{\tilde{W}} \propto \left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{L}}\right)^\zeta \left(1 - \frac{\tilde{l}}{\tilde{L}}\right)^\zeta, \quad (4.29)$$

avec $\zeta = 0.75 \pm 0.05$. Ainsi, par exemple, sur la figure 4.2 les agrégats rouge et vert, malgré leur différence de taille, ont globalement la même forme.

Par ailleurs, on constate de manière remarquable que cette loi semble indépendante de σ , avec le même exposant ζ .

Sur la figure 4.12, à droite, nous avons tracé la largeur $\tilde{W}(\tilde{L})$ pour différents σ . Comme attendu, nous avons :

$$\tilde{W} \propto \tilde{L}^\zeta. \quad (4.30)$$

Cependant, on peut également observer que le préfacteur de cette loi varie avec le désordre σ , ce qui reflète comme précédemment que le rapport d'aspect change avec σ .

On vérifie enfin, en bas de la figure 4.12, que la surface \tilde{S} des agrégats est bien directement proportionnelle au produit de sa largeur \tilde{W} et de sa longueur \tilde{L} .

Ces résultats démontrent la nature fractale de l'écoulement. À chaque pression, la forme des agrégats est très largement distribuée, mais avec une forme invariante de l'échelle considérée.

De plus et similairement aux constatations précédentes, ce phénomène est comparable à celui de l'échelle microscopique. Cependant, à cette échelle, nous avons $\zeta = 2/3 \pm 0.03$ valeur qui pouvait être justifiée par le problème du polymère dirigé.

Il y a plusieurs arguments pour expliquer ces écarts entre les exposants. Premièrement, du fait des contraintes numériques, l'échantillon statistique à l'échelle macroscopique est relativement faible (une dizaine de milieux). Deuxièmement, la distribution log-normale peut être considérée suffisamment "extrême" pour dévier des modèles standards du polymère dirigé ou de la percolation.

On peut aussi remarquer que les chemins ne suivent pas le modèle du polymère dirigé dans notre cas. Cependant, étonnamment, à faible σ , bien que l'écoulement ne rebrousse pas chemin, les exposants restent les mêmes.

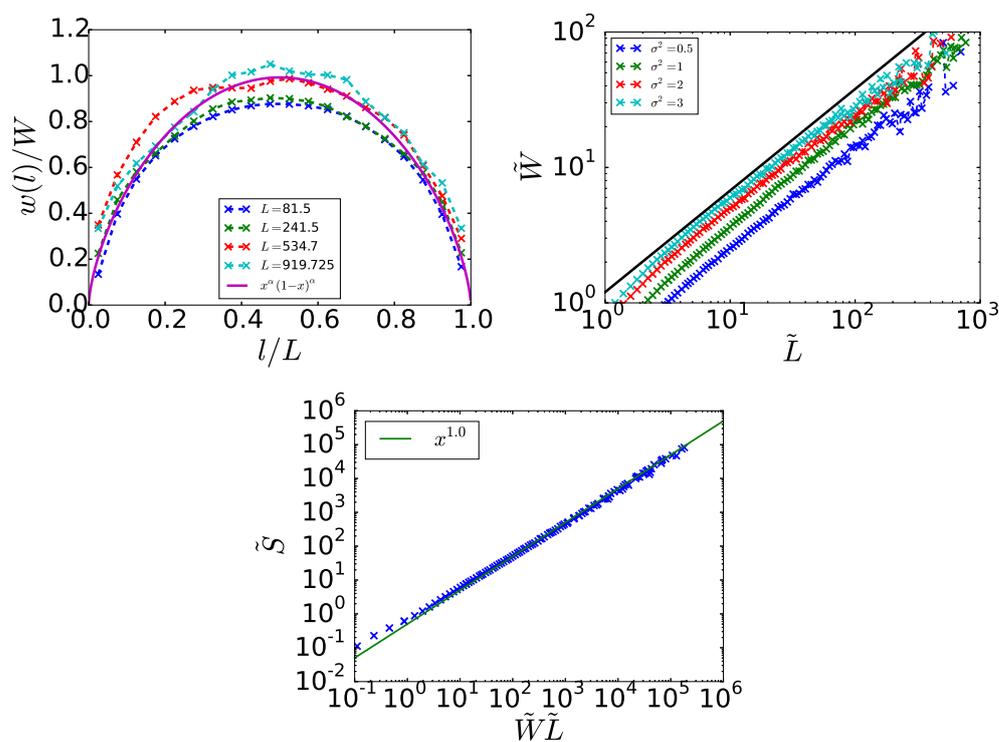


FIGURE 4.12 – À gauche : forme moyennée des agrégats en fonction de leur longueur. La ligne continue représente l'ajustement effectué avec l'équation (4.29). À droite : largeur moyenne des agrégats en fonction de leur longueur $\tilde{W}(\tilde{L})$ pour différents σ . La ligne continue correspond à une loi de puissance avec l'exposant $\zeta = 0.75$. En bas : surface \tilde{S} de l'agrégat comparée au produit de sa longueur et de sa largeur \tilde{L} et \tilde{W} , pour $\sigma = 1$.

Résultats importants :

— La forme des agrégats suit une même courbe quelque-soit leur longueur :

$$\tilde{w}(\tilde{l}) \propto \left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{L}}\right)^\zeta \left(1 - \frac{\tilde{l}}{\tilde{L}}\right)^\zeta, \quad \zeta = 0.75 \pm 0.05$$

— La largeur maximale des agrégats suit leur longueur maximale selon une loi de puissance :

$$\tilde{W} \propto \tilde{L}^\zeta$$

— La surface totale d'un agrégat est proportionnelle au produit de sa largeur et de sa longueur.

4.6 Conclusion

J'ai étudié l'écoulement d'un fluide de Bingham en milieu poreux macroscopique. Comme nous l'avons montré, les phénomènes à l'échelle macroscopique diffèrent de ceux à l'échelle microscopique. Tout d'abord, la relation débit-pression n'est pas la même. Effectivement, à l'échelle microscopique, la loi débit-pression suit une loi de puissance $\tilde{Q} \propto (\Delta\tilde{P} - \Delta\tilde{P}_C)^\Theta$, avec $\Theta = 2.1 \pm 0.3$, alors qu'en milieu macroscopique, nous avons plutôt $\Theta = 2.7 \pm 0.1$.

Effectivement, à l'échelle microscopique, deux phénomènes participent à l'exposant. Tout d'abord, la vitesse du fluide augmente linéairement avec la pression dans chaque chemin. Ensuite, le nombre de chemins ouverts augmente avec la pression. Ce nombre semble lui aussi augmenter linéairement.

À l'échelle macroscopique, il y a trois effets en jeu. Le premier est que la vitesse augmente linéairement avec la pression dans chaque chemin ouvert. Le second, est que leur nombre augmente également avec la pression. Mais un troisième phénomène existe, qui est que les chemins s'élargissent avec la pression. Dans le cas macroscopique cependant, il est plus difficile de quantifier correctement les deux derniers effets. Effectivement, l'augmentation du nombre de chemins est couplée avec l'augmentation de la largeur de ceux-ci. Or, cette dernière tend vers une largeur maximale, que l'on peut estimer à deux ou trois fois la longueur de corrélation λ_c , c'est-à-dire la longueur entre deux pics de la carte de pression seuil. Il est aussi souvent compliqué de dénombrer les chemins. Par exemple, comment compter un chemin qui, à un moment, se divise en deux, délimite un agrégat, et voit ses deux branches se rejoindre ?

Ensuite, les agrégats aux deux échelles obéissent à des lois similaires à celles de

la percolation, avec certains exposants qui diffèrent cependant. De plus, les exposants régissant la forme, la distribution de taille, et la taille de coupure diffèrent entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Avec $P(\tilde{S}) \propto \tilde{S}^{-\tau_f} e^{-\tilde{S}/\tilde{S}_0}$, et $\tilde{S}_0 \propto \tilde{q}^{-\gamma_f}$, l'exposant γ_f est identique et vaut 1.0 ± 0.05 . Autrement dit, la taille de coupure des agrégats dépend identiquement du débit pour les deux échelles. Étant donné que l'exposant de débit en fonction de la pression est différent, on peut déduire que la taille de coupure varie avec la pression avec des exposants différents aux deux échelles. Il faut cependant remarquer que l'exposant liant le débit à la pression, dans le cas macroscopique, est la somme de trois phénomènes, dont deux que l'on suppose similaire à ceux de l'échelle microscopique. Plus particulièrement, nous avons des raisons de penser que le nombre de chemins augmente de la même manière avec la pression aux deux échelles. Étant donné que la taille de coupure est liée à la formation de chemins d'écoulement, il est possible que le phénomène de coupure soit le même aux deux échelles.

On pourrait également comparer l'exposant $\tau_f = 1.15 \pm 0.05$ à celui de la percolation classique $\tau_f = 187/91 \simeq 2.05$. Ce qui montre que bien que similaire, les phénomènes sont très différents.

Enfin, la forme des agrégats varie entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Effectivement, le rapport d'aspect des agrégats à l'échelle microscopiques est $\tilde{W} \propto \tilde{L}^\zeta$ avec $\zeta \approx 2/3$, ce qui est caractéristique du polymère dirigé. À l'échelle macroscopique, nous avons plutôt $\zeta = 0.75 \pm 0.05$. Ainsi, à cette échelle, l'exposant diffère légèrement du cas du polymère dirigé, ce qui peut être une conséquence du choix d'une distribution log-normale pour la carte de perméabilité.

Chapitre 5

Les fluides de Carreau

Liste des symboles spécifiques utilisés dans ce chapitre :

- α : exposant régissant la relation débit-pression dans le régime de Carreau,
- σ_κ : écart-type du champ de perméabilité,
- σ_G : écart-type du champ de pression seuil,
- G_l : pression seuil locale à laquelle le fluide change de régime,
- G_s : pression à laquelle la taille des agrégats du système divergent,
- τ_f : exposant de la distribution de taille des agrégats,
- ν : exposant de la taille de coupure des agrégats en fonction de la pression,
- δ : exposant de la taille de coupure des agrégats en fonction de la proportion de régions dans un régime,
- ζ : exposant du rapport d'aspect des agrégats,
- X_{inf} : indice appliqué aux quantités regardant les agrégats en dessous du seuil,
- X_{sup} : indice appliqué aux quantités regardant les agrégats au dessus du seuil.

5.1 Introduction

5.2 Description du problème

Nous simulons l'écoulement d'un fluide de Carreau avec l'équation constitutive (1.31) dans un milieu de taille 512×512 nœuds, afin de gagner du temps de simulation. Cette fois-ci, nous utilisons deux écarts-types différents pour le champ de perméabilité et pour le champ de pression seuil, σ_κ et σ_G .

Effectivement, nous souhaitons, tout d'abord, comparer les effets de transition de régime pour le fluide de Carreau à ceux du fluide de Bingham, et en particulier l'apparition de chemins préférentiels. De tels chemins sont plus simples à observer

lorsque $\sigma_\kappa = 0$. Ensuite, nous souhaitons explorer plus en profondeur les effets des désordres de G_l et de κ sur la transition en régime et sur l'écoulement.

La génération de champs de pression seuil et de perméabilité vient avec une contrainte. Nous souhaitons en effet retrouver la relation phénoménologique $G_l \propto \frac{1}{\sqrt{\kappa}}$ dans le cas $\sigma_\kappa = \sigma_G$. Pour cela, j'ai généré deux champs log-normaux corrélés avec la même graine aléatoire et la même moyenne, X_1 et X_2 selon la méthode décrite dans la section 2.4 mais avec deux écart-types distincts. L'un sera utilisé pour la perméabilité, et le second pour la pression critique :

$$\kappa = X_1 \quad (5.1)$$

$$G_l = \frac{A}{\sqrt{X_2}} \quad (5.2)$$

On notera σ_κ est l'écart-type du champ de perméabilité, et σ_G l'écart-type du champ de pression seuil.

Nous résolvons donc, pour ces champs de perméabilité et de pression seuil, l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= -\vec{\nabla}P - \frac{\mu_0}{\kappa}\vec{u} + \mu_B\Delta\vec{u} & \text{si } \|\vec{u}\| < u_0 \\ \vec{0} &= -\vec{\nabla}P - \frac{\mu_{eff}}{\kappa}\vec{u} + \mu_{eff}\Delta\vec{u} & \text{si } \|\vec{u}\| > u_0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

avec $\mu_{eff} = \mu_0 \left(\frac{u}{u_0}\right)^{\alpha-1}$ et $u_0 = \frac{G_l\kappa}{\mu_0}$. Dans nos simulations, nous avons utilisé les jeux de paramètres suivants :

α	σ_κ	σ_G
0.25	0	1
	0.01	1
	0.1	1
	0.5	1
	1	0, 0.1, 1
	2	1
	10	1
0.3	0	1
0.4	0	1
0.5	0	0.1, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2
	0.01	1
	0.1	1
	0.5	1
	1	0, 0.1, 0.5, 1, 2, 10
	2	1
	10	1
0.75	0	1
0.9	0	1
2	0	1

De plus, j'ai utilisé $\kappa_0 = e^{-10}$, $\lambda_c = 3$, et $A = 10^{-7}$.

Dans cette partie, je me concentrerai essentiellement sur des fluides rhéofluidifiants ($\alpha < 1$). En effet, comme j'ai pu le montrer dans le chapitre 3.3.3, il existe une analogie entre le rhéofluidifiant et le rhéoépaississant par une simple rotation des champs de vecteurs.

En dessous du minimum de la pression seuil, le fluide s'écoule en obéissant à la loi de Darcy newtonienne. Lorsque la vitesse locale dépasse le seuil d'une région, la viscosité de ce dernier diminue. Alors, le fluide s'y écoule plus rapidement et, par conservation du débit, "aspire" le fluide en amont, diminuant la vitesse dans les régions sur ses côtés, créant ainsi des filaments de fluide à la viscosité moindre. Au fur et à mesure que la pression augmente, les filaments s'élargissent, s'allongent et se connectent entre eux. On distingue deux types de régions : celles en régime de Carreau, et les autres en régime newtonien. À partir de ces régions, on va ainsi pouvoir identifier deux types d'agrégats. Contrairement au fluide de Bingham, s'il y a effectivement l'émergence filaments d'écoulement préférentiel, ceux-ci ne s'étendent plus nécessairement sur toute la longueur du milieu. Aussi nos agrégats sont beaucoup plus désordonnés, comme le montre la figure 5.1. En couleurs, les régions ayant dépassé le seuil. En noir, les régions en dessous du seuil.

Comme on peut s'y attendre, lorsque toutes les cellules sont en dessous du

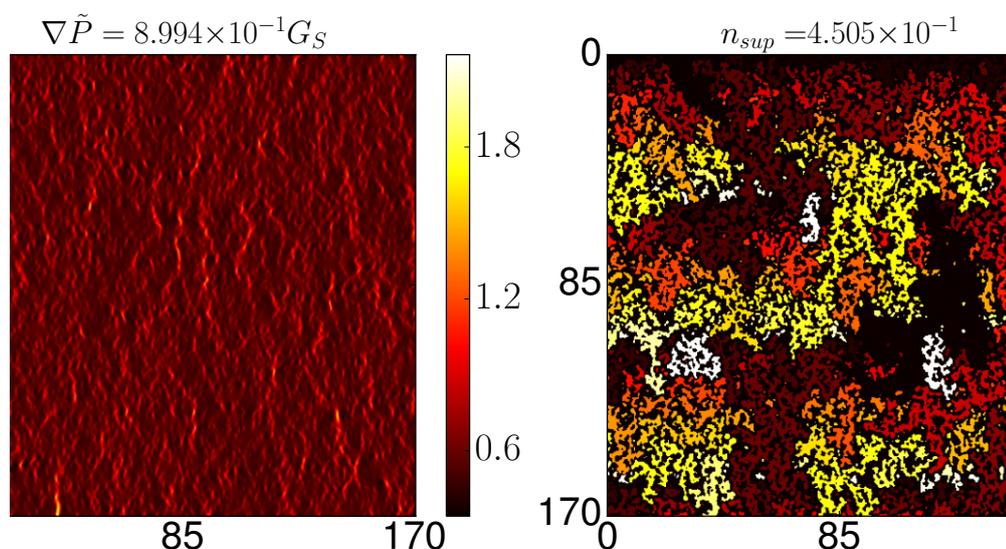


FIGURE 5.1 – À gauche : carte de vitesse du fluide en régime intermédiaire. On constate les filaments de fluide ayant passé le seuil. À droite : carte des agrégats de régions ayant dépassé le seuil (couleurs) pour la carte de vitesse à gauche. Comme on peut le constater, les agrégats sont beaucoup plus désordonnés que pour le fluide de Bingham.

seuil, on est dans le régime newtonien. À l'inverse, lorsque toutes les cellules sont au dessus du seuil, le fluide tend vers un régime d'écoulement dicté par l'exposant α : $Q \propto \nabla P^\alpha$.

Nous étudions dans ce qui suit le régime de transition en débit, ainsi que la géométrie de l'écoulement, ce par la répartition de taille des agrégats ainsi que leur forme. Nous regarderons en particulier l'influence de α , σ_κ et σ_G .

5.3 Loi débit-pression

5.3.1 Effets de la rhéofluidification

Lorsque la pression est en dessous du minimum de $G_l(\vec{r})$, le fluide s'écoule en régime linéaire (newtonien). À partir du moment où une cellule franchit son seuil, elle crée des petits canaux où le fluide s'écoule plus vite qu'au alentours, comme illustré sur la figure 5.2. À très haute pression, le fluide s'écoule comme une loi de puissance en $1/\alpha$, tous les canaux sont au loin au dessus de leur seuil. Comme nous le verrons ensuite, entre ces deux régimes, le débit augmente exponentiellement.

Sur la figure 5.2 est représenté un champ de vitesse pour un milieu poreux à

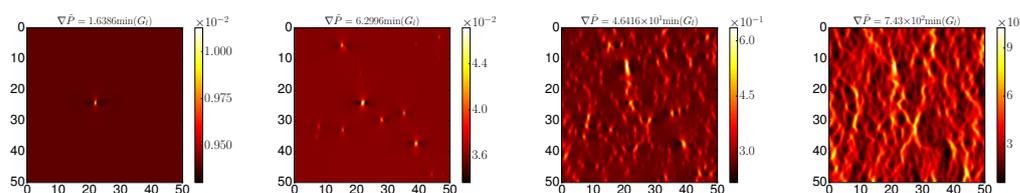


FIGURE 5.2 – Extraits de champs de vitesse pour un milieu poreux à perméabilité homogène à champ de pression seuil hétérogène, pour un fluide de Carreau à $\alpha = 0.5$, pour différentes pressions appliquées. La carte de couleurs correspond à $\|\vec{u}\|$. La taille totale du milieu est de $\tilde{L} \times \tilde{L} = 170 \times 170$. La pression est croissante de gauche à droite. Le gradient de pression est dirigé du haut vers le bas. Plus la couleur est claire, plus le fluide s'écoule vite.

perméabilité homogène, le gradient de pression étant dirigé du haut vers le bas. Tout à gauche, on note la première région à passer au dessus du seuil. Comme on peut le constater, la vitesse est plus grande en amont et en aval de la région, et est plus faible sur les côtés. Effectivement, en étant moins visqueux que ses voisins, la région déseuillée augmente la vitesse du fluide en amont et en aval, et par conservation de la masse, décélère le fluide dans la direction transverse. Le champ suivant correspond à une pression plus élevée, où plusieurs régions sont au dessus du seuil, sans qu'il y ait de connexions entre eux. Sur la troisième figure, le nombre de régions ouvertes sur la carte est suffisant pour qu'ils se connectent entre eux verticalement, formant de plus grands filaments de fluide. Tout à droite, toutes les régions sont passé au dessus du seuil de pression critique local, et la différence de vitesse observée est alors due à la différence de viscosité, elle-même causée par la différence de seuil des différentes régions.

Contrairement à ce qu'il se passait avec le fluide à seuil, σ_κ et σ_G changent peu l'aspect des chemins ouverts. Cela s'explique par le fait que le fluide, pouvant s'écouler partout, n'a pas à faire de détours pour minimiser la pression nécessaire à l'écoulement. La seule chose qui importe est de voir quelle est la cellule la plus proche ouverte. Nous illustrons ceci avec les figures 5.3, 5.4, et 5.5.

Sur la figure 5.3, on trace, pour $\alpha = 0.5$ et $\sigma_\kappa = 0$, les champs de vitesse à pression croissante de haut en bas, pour trois σ_G différents : $\sigma_G = 0.25$ sur la colonne de gauche, $\sigma_G = 1$ sur la colonne du centre et $\sigma_G = 2$ sur la colonne de droite. On constate que σ_G agit non pas sur la tortuosité des chemins, mais sur le contraste de vitesses : plus σ_G est grand, plus l'écart à la vitesse critique entre les régions est grand, et ainsi plus l'écart de viscosité et de vitesse l'est aussi.

On constate cependant que σ_{κ, P_0} modifie grandement le contraste de vitesse entre les chemins ouverts. En effet, les filaments contraignent l'écoulement du

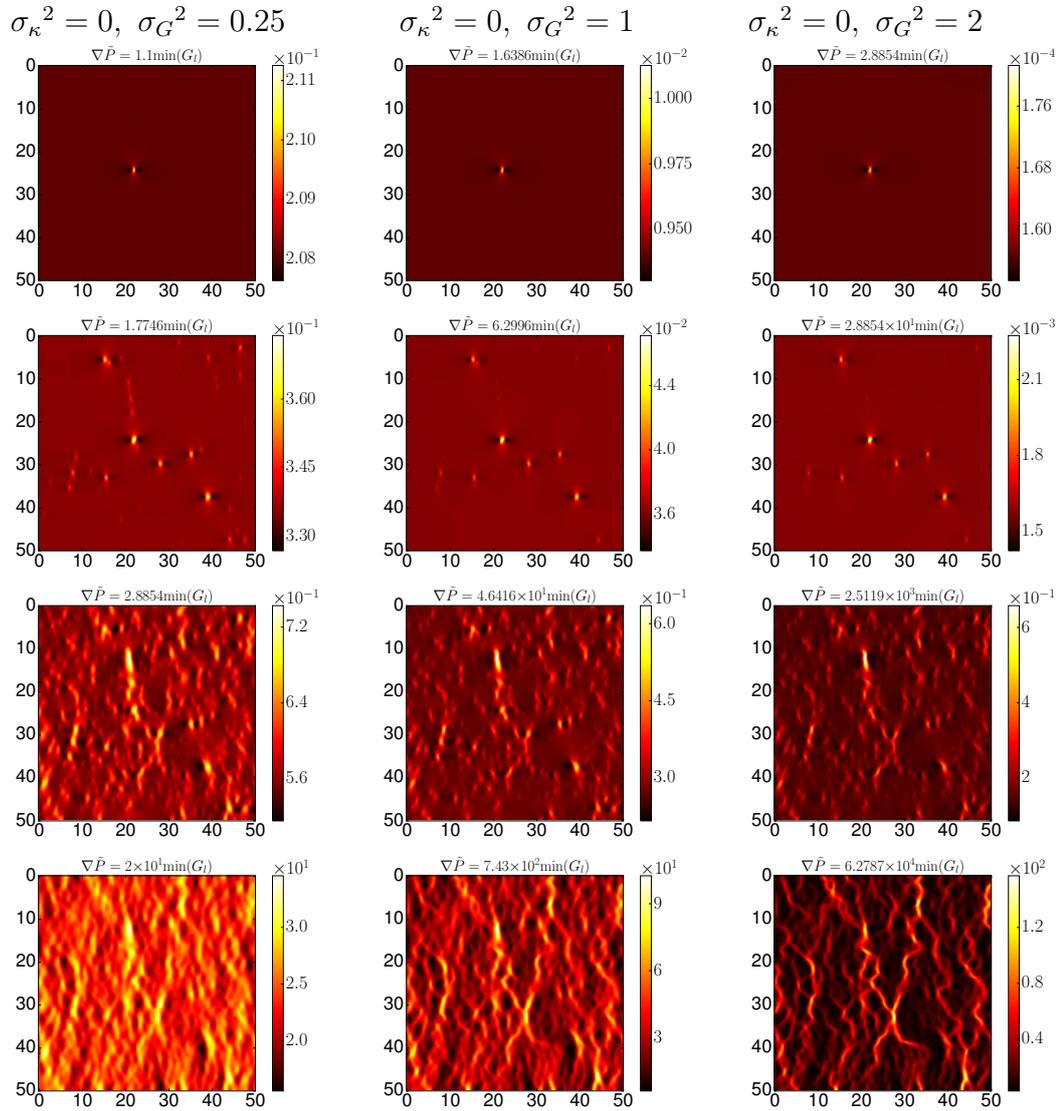


FIGURE 5.3 – Extraits de champs de vitesse pour un milieu poreux à $\sigma_\kappa = 0$ (milieu homogène) et à champ de pression seuil hétérogène, d'écart-type $\sigma_G = 0.25$ (colonne de gauche), $\sigma_G = 1$ (colonne centrale) et $\sigma_G = 2$ (colonne de droite), pour trois fluides de Carreau à $\alpha = 0.5$, pour différentes pressions appliquées. La carte de couleurs correspond à $\|\vec{u}\|$. La pression appliquée est croissante de haut en bas. Plus la couleur est claire, plus le fluide s'écoule vite.

fluide différemment : plus le milieu sera homogène, plus le contraste de vitesse sera faible.

On constate de plus l'influence de α , comme illustré sur la figure 5.4. Sur cette figure sont tracées des cartes de vitesses pour le même milieu, à trois α différents (de gauche à droite : $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.9$), et à quatre pressions appliquées similaires. Les pressions sont comparables du fait que le milieu est le même pour chaque α . On peut alors voir que plus α est petit, plus le contraste de vitesses est grand, ce qui est l'effet inverse de σ_G .

En effet, plus α est grand (proche de 1), moins le contraste de viscosité va être important. Si on considère deux régions de fluide qui changent de régime à des pressions différentes. Il suit que si la région A change de régime avant B , alors $\Delta P - \Delta P_{c,A} > \Delta P - \Delta P_{c,B}$, et pour deux α tels que $1 > \alpha_1 > \alpha_2$, les contrastes de vitesse entre A et B pour α_1 et α_2 vérifient :

$$\left(\frac{\Delta P - \Delta P_{c,A}}{\Delta P - \Delta P_{c,B}} \right)^{1/\alpha_2} > \left(\frac{\Delta P - \Delta P_{c,A}}{\Delta P - \Delta P_{c,B}} \right)^{1/\alpha_1} \quad (5.4)$$

Enfin, sur la figure 5.5, nous regardons l'influence de σ_κ sur le champ de vitesse. Nous traçons ces champs de vitesse pour trois σ_κ différents (de gauche à droite : $\sigma_\kappa = 0.1$, $\sigma_\kappa = 1$, $\sigma_\kappa = 2$), à $\sigma_G = 1$ et $\alpha = 0.5$. La pression est imposée de haut en bas dans le milieu, la pression appliquée est croissante sur la figure de haut en bas. La région extraite du champ de vitesse est la même que pour les figures 5.3 et 5.4. Nous pouvons constater, pour commencer, que l'hétérogénéité du champ de perméabilité rend plus difficile de voir à l'œil nu les changements dans le champ de vitesse. Nous pouvons également constater que plus σ_κ est grand, plus le contraste est fort entre les vitesses. Enfin, nous pouvons constater que les chemins de vitesse maximale sont similaires quelque soit σ_κ . Nous montrerons plus quantitativement que σ_κ , σ_G et α n'affectent pas la géométrie des agrégats plus loin.

Notons de plus que les deux phénomènes de changement de régime et de chemins préférentiels sont plus facile à constater lorsque $\sigma_\kappa = 0$. Effectivement, dans ce cas, la vitesse du fluide, proportionnelle à la perméabilité, est homogène en dessous de $\min(G_l)$. Alors, les premières cellules à perdre en viscosité sont plus facile à voir, puisque seuls quelques points auront une vitesse plus élevée que la moyenne.

Enfin, contrairement au fluide à seuil, il n'y a pas de phénomène particulier dans l'écoulement lorsque les agrégats percolent.

Nous allons étudier l'écoulement, en s'intéressant pour commencer au cas $\sigma_\kappa = 0$.

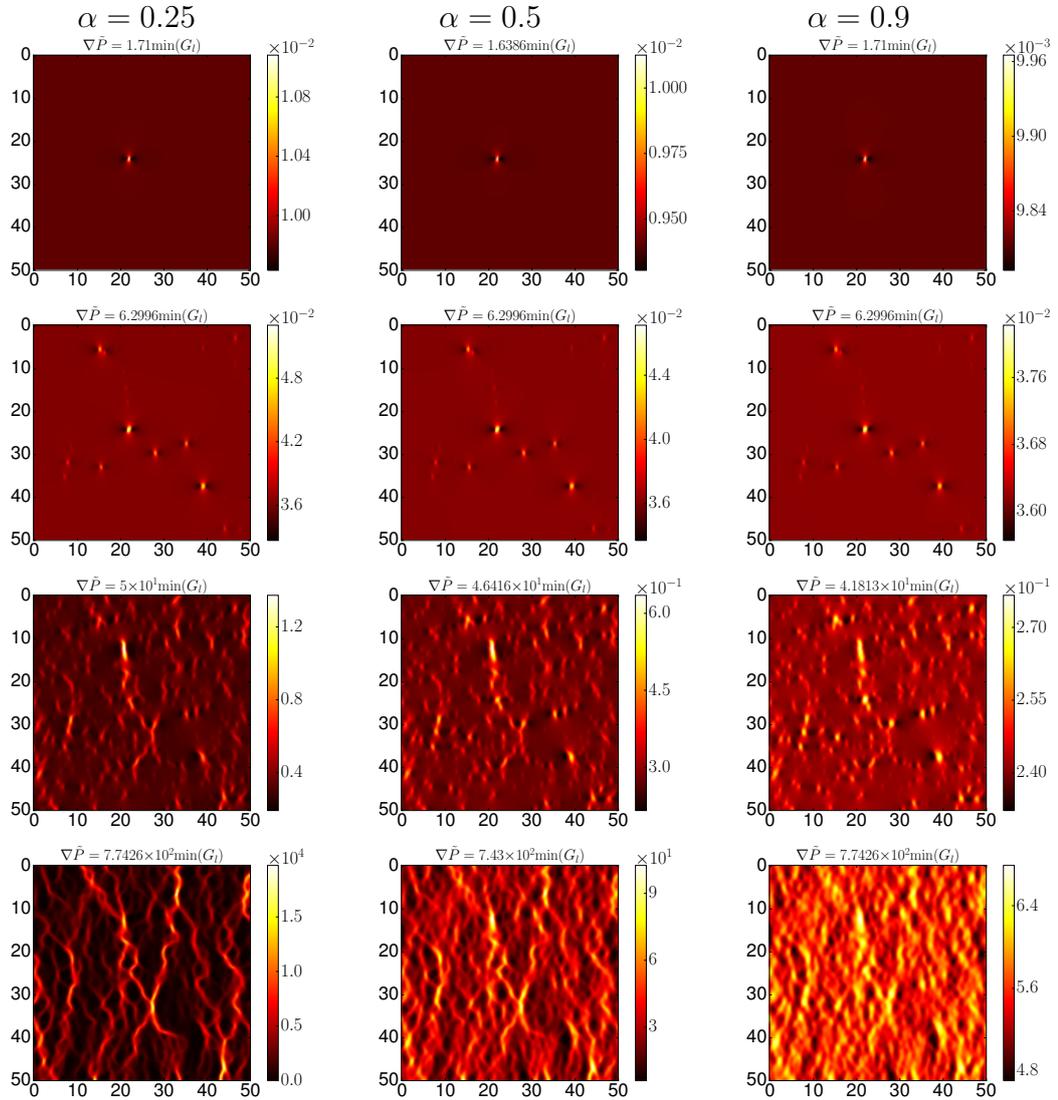


FIGURE 5.4 – Extraits de champs de vitesse pour un milieu poreux à $stdk = 0$ et à champ de pression seuil hétérogène, pour trois fluides de Carreau à $\alpha = 0.25$ (colonne de gauche), $\alpha = 0.5$ (colonne centrale) et $\alpha = 0.9$ (colonne de droite), pour différentes pressions appliquées. La carte de couleurs correspond à $\|\vec{u}\|$. La pression appliquée est croissante de haut en bas. Plus la couleur est claire, plus le fluide s'écoule vite.

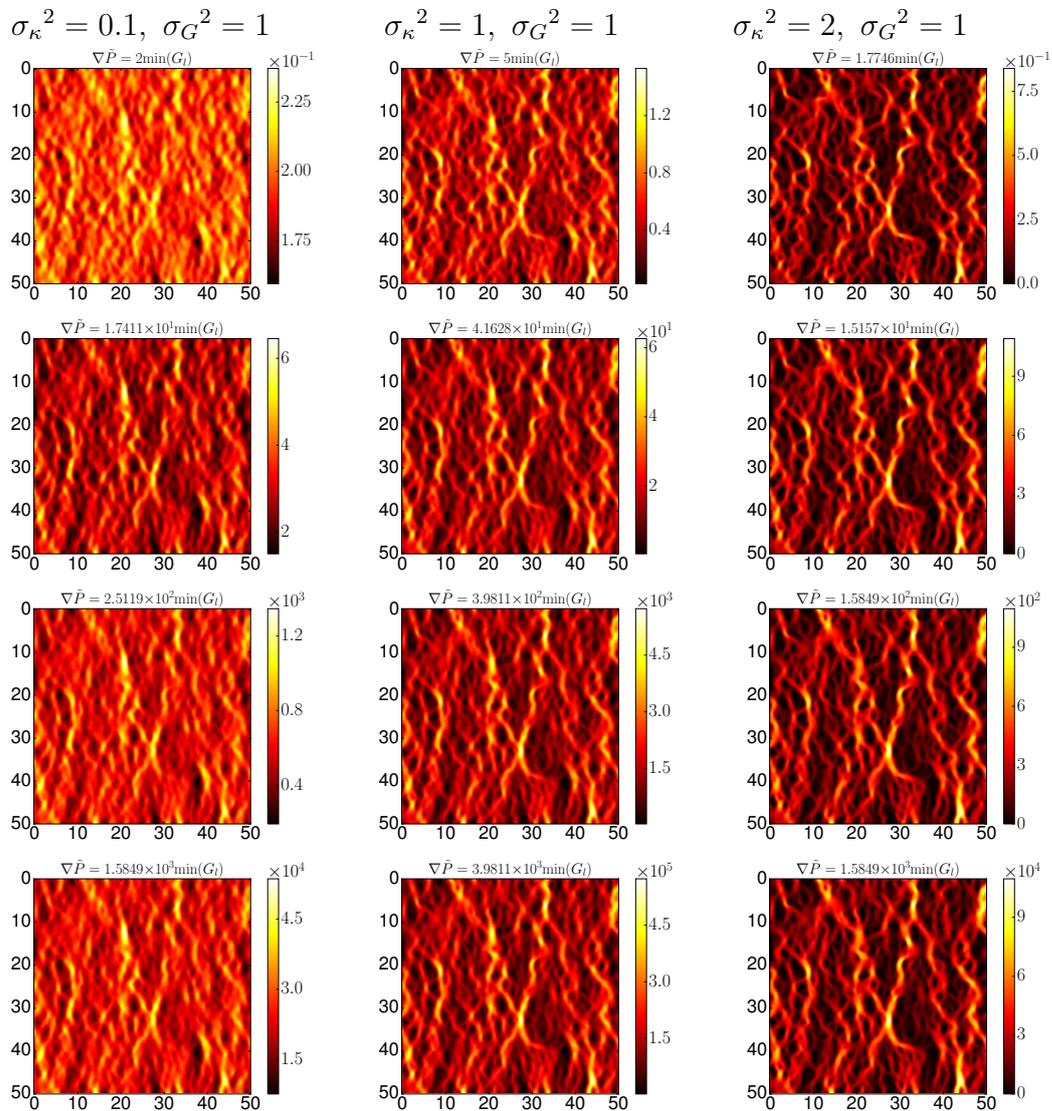


FIGURE 5.5 – Extraits de champs de vitesse pour plusieurs milieux poreux hétérogènes, avec le même champ de pression seuil hétérogène, pour un fluide de Carreau a $\alpha = 0.5$ pour plusieurs pressions imposées différentes, croissantes du haut vers le bas. Sur la colonne de gauche, $\sigma_\kappa = 0.1$, sur celle du centre, $\sigma_\kappa = 1$, et sur celle de droite, $\sigma_\kappa = 2$. La carte de couleurs correspond à $\|\vec{u}\|$.

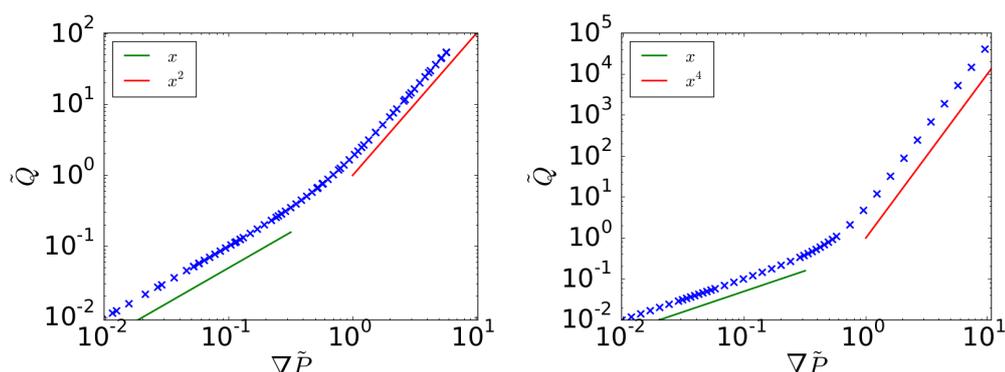


FIGURE 5.6 – À gauche, loi débit-pression pour un fluide de Carreau d'exposant $\alpha = 0.5$. À droite, loi débit-pression pour un fluide de Carreau d'exposant $\alpha = 0.25$. Pour les deux figures, $\sigma_\kappa = 0$ et $\sigma_G = 1$.

Résultats importants :

- Les amplitudes de désordre σ_κ et σ_G , ainsi que l'exposant de Carreau α , ne modifient pas significativement la forme et la position des régions d'écoulement de vitesse maximale,
- Plus α est faible, plus le contraste entre les petits et grands débits est important. À contrario, plus σ_κ ou σ_G sont forts, plus le contraste entre les petits et grands débits est important.

5.3.2 Loi débit-pression

Maintenant, nous regardons la loi débit-pression. Comme expliqué précédemment, il existe trois régimes : le premier qui est linéaire, de par la loi de Darcy. Un second, qui fait transition. Le troisième est en $1/\alpha$, et ne s'observe que lorsque $\nabla P \gg \max(G_l)$, soit lorsque l'effet de la différence des seuils d'ouverture est négligeable. Nous illustrons ceci sur la figure 5.6. À droite, nous traçons la loi débit-pression pour $\alpha = 0.5$, et à gauche, pour $\alpha = 0.25$. On peut constater le premier régime, linéaire, le transitoire, et le final avec $\tilde{Q} \propto \Delta \tilde{P}^{1/\alpha}$.

Le régime intermédiaire est plus complexe à étudier que les deux autres. Plutôt que de le regarder directement, il est plus simple de regarder sa dérivée par rapport à la pression. Sur la figure 5.7, nous avons tracé cette dérivée pour plusieurs jeux de α et σ_G . Comme nous pouvons le constater, ce régime existe quelque soient α et σ_G . Nous avons de plus tracé en rouge les limites auxquelles s'ouvrent le premier et la dernière région, et en noir, le régime de Carreau. Pour la figure en bas à droite,

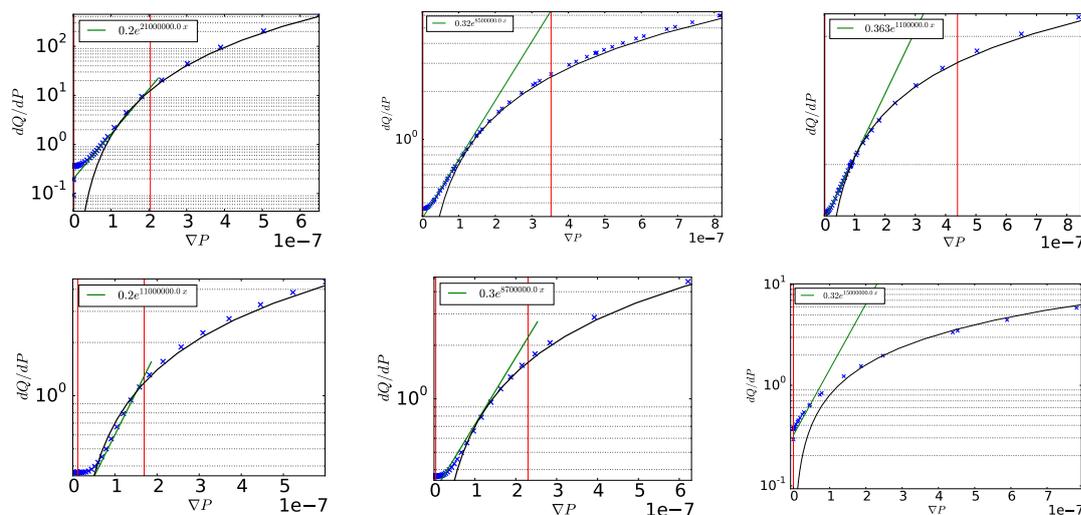


FIGURE 5.7 – Sur la première ligne, courbes de la dérivée du débit en fonction de la pression, pour plusieurs α , avec $\sigma_\kappa = 0$ et $\sigma_G = 1$. De gauche à droite, $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.9$. Sur la deuxième ligne, courbes de la dérivée du débit en fonction de la pression, pour plusieurs σ_G , avec $\alpha = 0.5$ et $\sigma_\kappa = 0$. De gauche à droite, $\sigma_G = 0.5$, $\sigma_G = 0.75$ et $\sigma_G = 2$. Les marques rouges correspondent aux limites hausse et basse de la transition du fluide en régime. La courbe noire, est le régime de Carreau.

avec $\alpha = 0.5$ et $\sigma_G = 2$, nous n'avons pas tracé la limite haute de l'ouverture des régions. Nous pouvons constater que le régime de Carreau est précédé par une transition, qui semble exponentielle pour certains jeux de paramètres. Avant le régime exponentiel, il y a un régime assez court, difficile à caractériser.

Ce régime, cependant, existe sur une plage de pression trop petite pour que l'on puisse affirmer que le débit augmente exponentiellement lors de la phase intermédiaire. En effet, nous pouvons constater avec les limites du changement de régime du fluide sur la figure 5.7, que le régime de transition (courbe verte) est exponentiel sur environ la moitié du régime transitoire pour $\alpha \leq 0.5$ et $\sigma_G \leq 1$, et jusqu'au quart de ce régime, au mieux, sinon. On peut cependant caractériser la pente de chaque transition, et observer qu'elle dépend de α et σ_G pour $\sigma_\kappa = 0$.

Effectivement, chaque jeu de valeurs α et σ_G , semble avoir un exposant ω différent :

$$\frac{dQ}{dP} \propto A e^{\omega(\alpha)\Delta\bar{P}}. \quad (5.5)$$

Plus précisément, pour $\sigma_\kappa = 0$ et $\sigma_G = 1$, nous avons constaté que $\omega/(1 - \alpha)$ suivait une loi de puissance à α , comme montré sur la figure 5.8, en haut à gauche.

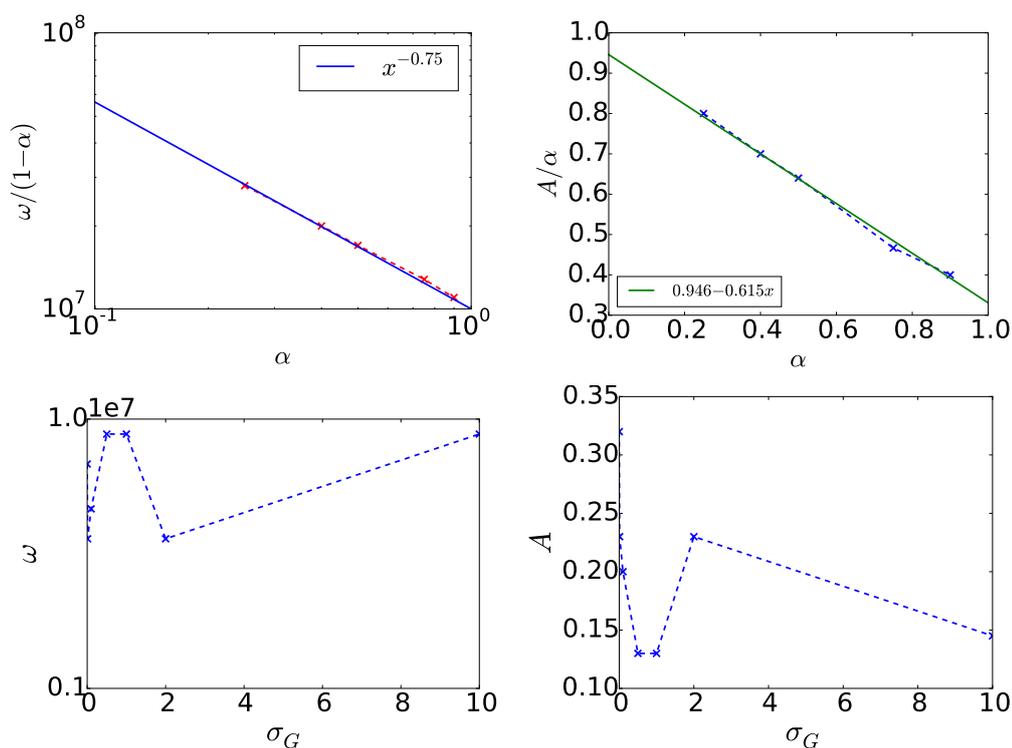


FIGURE 5.8 – À gauche : $\omega/(1-\alpha)$ en fonction de α et son ajustement en loi de puissance. À droite : préfacteur divisé par α , A/α , de la dérivée du débit en fonction de la pression, en fonction de α , et son ajustement.

Ainsi :

$$\omega \propto (1-\alpha)\alpha^{-0.75} \quad (5.6)$$

De plus, comme tracé sur la figure 5.8, en haut à droite, nous avons constaté que le préfacteur de cette dérivée est aussi dépendant de α :

$$A \approx (0.946 - 0.615\alpha)\alpha. \quad (5.7)$$

Les quantités A et ω dépendent clairement de α . En comparaison, leur dépendance en σ_G est erratique, comme illustré sur la figure 5.8, en bas. Il est cependant intéressant de noter que les variations de A avec σ_G sont inverses de celles de ω avec σ_G .

En milieu poreux inhomogène, $\sigma_\kappa \neq 0$, il est plus difficile d'obtenir une loi pour la phase de transition. Comme illustré sur la figure 5.9. Nous y avons tracé, à gauche, la courbe débit-pression pour $\alpha = 0,5$, $\sigma_\kappa = 1$ et $\sigma_G = 1$. À droite, nous avons tracé la dérivée de la courbe débit-pression. On peut constater sur cette

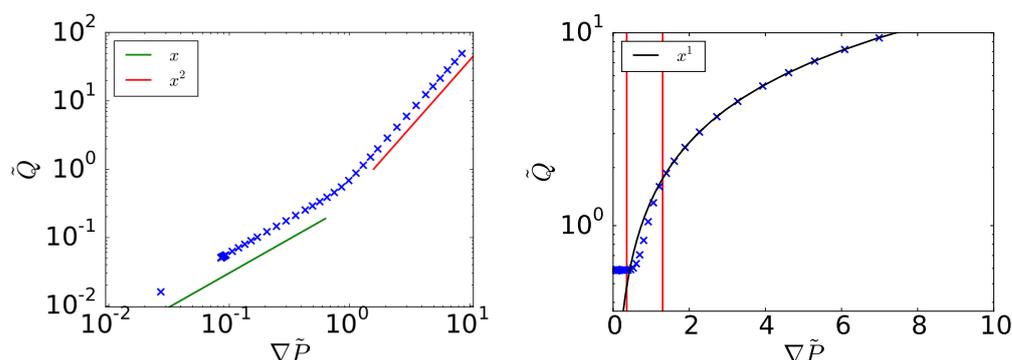


FIGURE 5.9 – À gauche, courbe débit-pression pour $\alpha = 0.5$, $\sigma_\kappa = 1$ et $\sigma_G = 1$, avec les ajustements pour le régime newtonien et le régime en loi de Carreau. À droite, dérivée de la courbe débit-pression pour les mêmes paramètres.

dernière que le régime transitoire est beaucoup moins marqué, et donc plus difficile à analyser. En particulier, bien que le cas représenté ($\alpha = 0.5$, $\sigma_\kappa = 1$, $\sigma_G = 1$) soit celui où le régime transitoire est le plus visible, je n'ai pas pu déterminer si la transition était mieux approximée par une exponentielle ou une autre loi. Il est difficile de caractériser plus loin la relation débit-pression du fluide de Carreau pendant le changement de régime.

Résultats importants :

- On retrouve les régimes asymptotiques du fluide de Carreau à basse et haute pression,
- Il ne semble pas y avoir de loi simple pour décrire la transition entre les régimes asymptotiques. Il est cependant possible de caractériser l'inflexion entre le régime rhéofluidifiant établi, et la sortie du régime newtonien. Cette inflexion semble dépendre majoritairement de α

5.4 Propriétés géométriques

Nous regardons désormais les propriétés géométriques de l'écoulement, comme nous l'avons fait pour le fluide de Bingham. Comme nous l'avons vu sur la figure 5.1, les agrégats ne sont plus compacts, et contiennent eux-même des trous : dans un agrégat de régions au dessus du seuil, on pourra trouver des régions en dessous du seuil, et réciproquement. Pour chacune des classes d'agrégats, nous étudierons

donc leurs propriétés de manière similaire que pour le fluide de Bingham. La surface des agrégats est toujours définie comme la surface qu'il occupe. Par contre, nous regardons également les caractéristiques de leur enveloppe (comme s'ils étaient pleins). Ensuite, nous regarderons la distribution de tailles dans le domaine.

5.4.1 Forme des agrégats

Comme pour le fluide de Bingham, la longueur et la largeur des agrégats sont les dimensions adimensionnées de la boîte les contenant, \tilde{L} et \tilde{W} . La largeur de l'enveloppe d'un agrégat à la position \tilde{l} est notée $\tilde{w}(\tilde{l})$. Nous moyennons enfin les largeurs globales et locales pour les agrégats de même longueur totale, $\langle \tilde{W} \rangle_{\tilde{L}}$ et $\langle \tilde{w} \rangle_{\tilde{L}}$. Nous regardons aussi la dépendance de la surface des agrégats \tilde{S} en le produit de leurs dimensions $\tilde{W}\tilde{L}$.

Nous illustrons ces dimensions sur la figure 5.10. Sur cette figure, en haut, nous pouvons voir qu'un agrégat (ici, le rouge) n'est pas forcément compact, et peut contenir d'autres agrégats. Ainsi, la largeur $w(l)$ prend en compte l'agrégat mesuré ainsi que les agrégats qu'il contient. L'agrégat de régions au dessus du seuil (rouge) contient en particulier des agrégats de régions en dessous du seuil (blanc) mais également d'autres agrégats déconnectés de régions au dessus du seuil (verts).

Par la suite, comme nous étudierons les agrégats en dessous en au dessus du seuil séparément, nous noterons leurs quantités étudiées différemment. Ainsi, une quantité X concerne tous les agrégats, une quantité X_{sup} concerne les agrégats de régions au dessus du seuil, et une quantité X_{inf} concerne les agrégats de régions en dessous du seuil.

Comme nous allons le voir, le rapport d'aspect des agrégats dépend du rapport $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G}$. Aussi, nous regardons d'abord le rapport d'aspect des agrégats en fonction de σ_G en milieu poreux homogène, $\sigma_\kappa = 0$. Nous ferons varier ensuite σ_κ en faisant la distinction entre les cas où $\sigma_\kappa \leq \sigma_G$ et les cas où $\sigma_\kappa > \sigma_G$.

J'illustre ce changement sur la figure 5.11. En haut, $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} = 0$. Au milieu, $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} = 0.5$. En bas, $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} = 2$. Comme nous le voyons, lorsque $\sigma_\kappa = 0$, il semble y avoir une direction privilégiée de percolation, Nous pouvons aussi constater que pour $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} < 1$, les agrégats sont corrélés dans le sens de l'écoulement, comme on s'y attend. Effectivement, lorsqu'une région perd en viscosité, et gagne donc en vitesse, elle augmente aussi la vitesse des régions en amont et en aval, dans le sens de l'écoulement. On peut constater avec surprise que, lorsque $\frac{\sigma_G}{\sigma_\kappa} > 1$, les régions corrélerent dans le sens orthogonal à l'écoulement, alors que le fluide semble bien s'écouler dans la direction du gradient de pression.

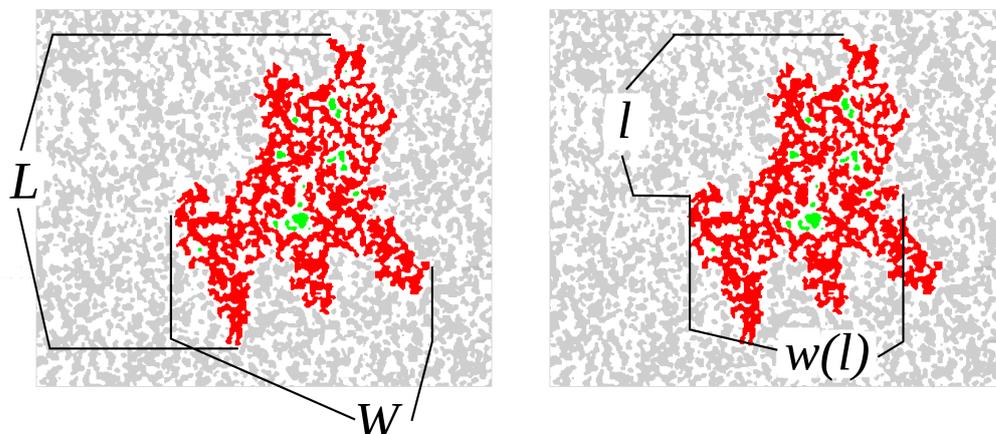


FIGURE 5.10 – En haut, agrégats de régions au dessus du seuil (gris, rouge, vert) et en dessous (blanc) pour l'écoulement d'un fluide de Carreau en milieu poreux macroscopique. A gauche sont illustrées la longueur de l'agrégat rouge L , sa largeur W , et à droite sa largeur à une longueur donnée $w(l)$ et la longueur en question l .

5.4.1.1 Cas $\sigma_\kappa = 0$

Nous regardons ici les agrégats de régions lorsque $\sigma_\kappa = 0$. Nous traçons séparément les agrégats en dessous et au dessus du seuil, respectivement sur les figures 5.12 et 5.13. Sur la figure à droite, j'ai tracé la largeur en fonction de la longueur des agrégats, qui obéit à une loi de puissance,

$$\tilde{W}_{inf,sup} \propto \tilde{L}_{inf,sup}^\zeta. \quad (5.8)$$

avec un exposant $\zeta \approx 0.9$, qui semble être le même tant pour les agrégats en dessous du seuil que ceux au dessus. Aussi nous n'utilisons pas la notation $\zeta_{inf,sup}$, mais simplement ζ . Sur la figure de gauche, nous traçons la surface totale de l'agrégat en fonction du produit de sa longueur et de sa largeur, $\tilde{S}_{inf,sup}(\tilde{W}_{inf,sup}\tilde{L}_{inf,sup})$. Nous constatons que la surface totale des agrégats $\tilde{S}_{inf,sup}$ n'est plus proportionnelle à $\tilde{W}_{inf,sup}\tilde{L}_{inf,sup}$, mais suit une loi de puissance :

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{inf,sup} &\propto (\tilde{W}_{inf,sup}\tilde{L}_{inf,sup})^d \\ &\propto \tilde{L}_{inf,sup}^{d(1+\zeta)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

d'exposant $d = 0.83 \pm 0.05$. Ceci est dû à la fractalité des agrégats : en effet un agrégat, de régions au dessus ou en dessous du seuil peut contenir d'autres agrégats inclus dans l'enveloppe mais pas dans la masse. Ainsi, nous pouvons déterminer

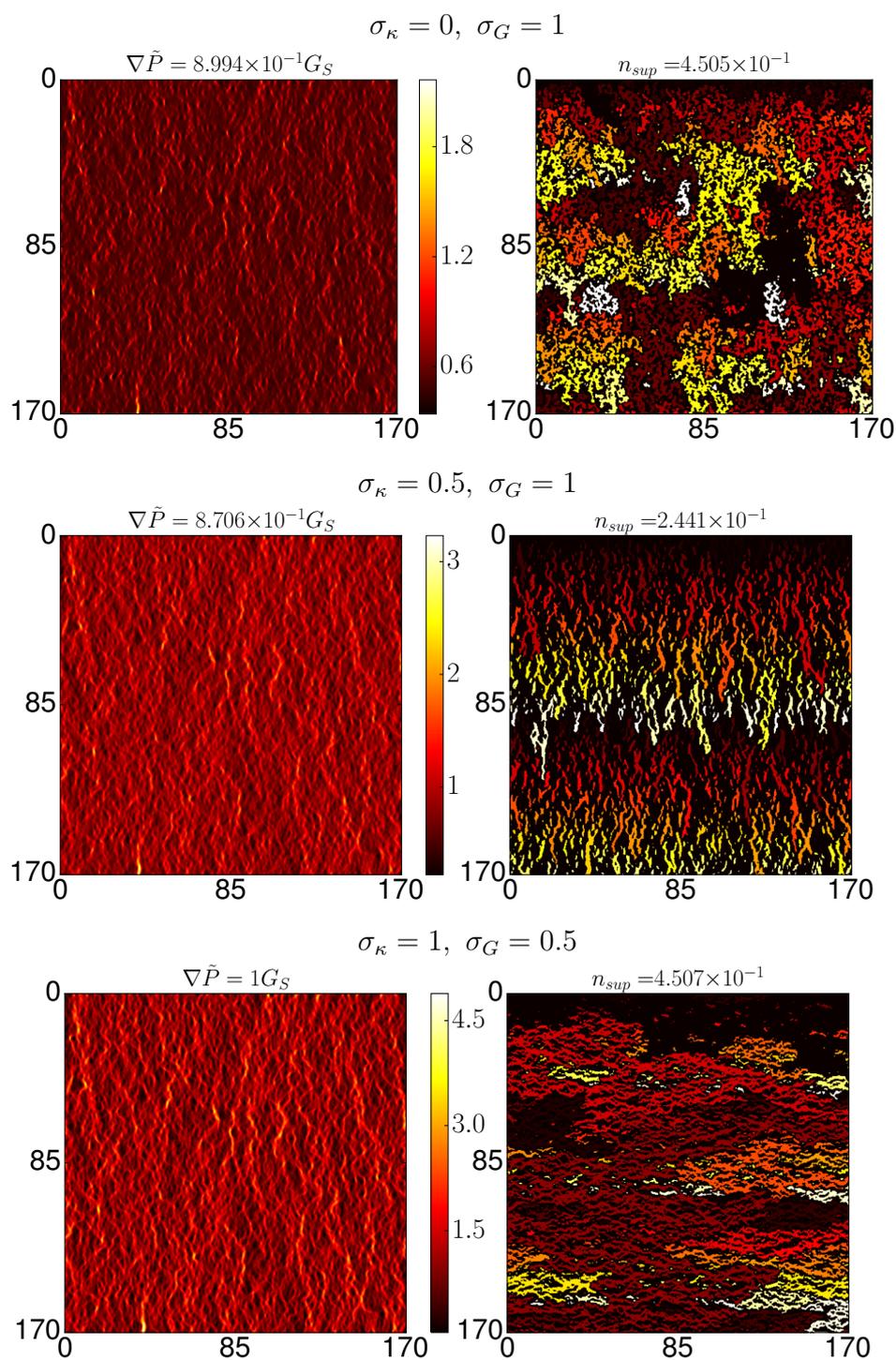


FIGURE 5.11 – Champs de vitesse et agrégats au dessus du seuil pour différents $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G}$ (0 en haut, 0.5 au milieu, 2 en bas). Chaque agrégat a une couleur différente.

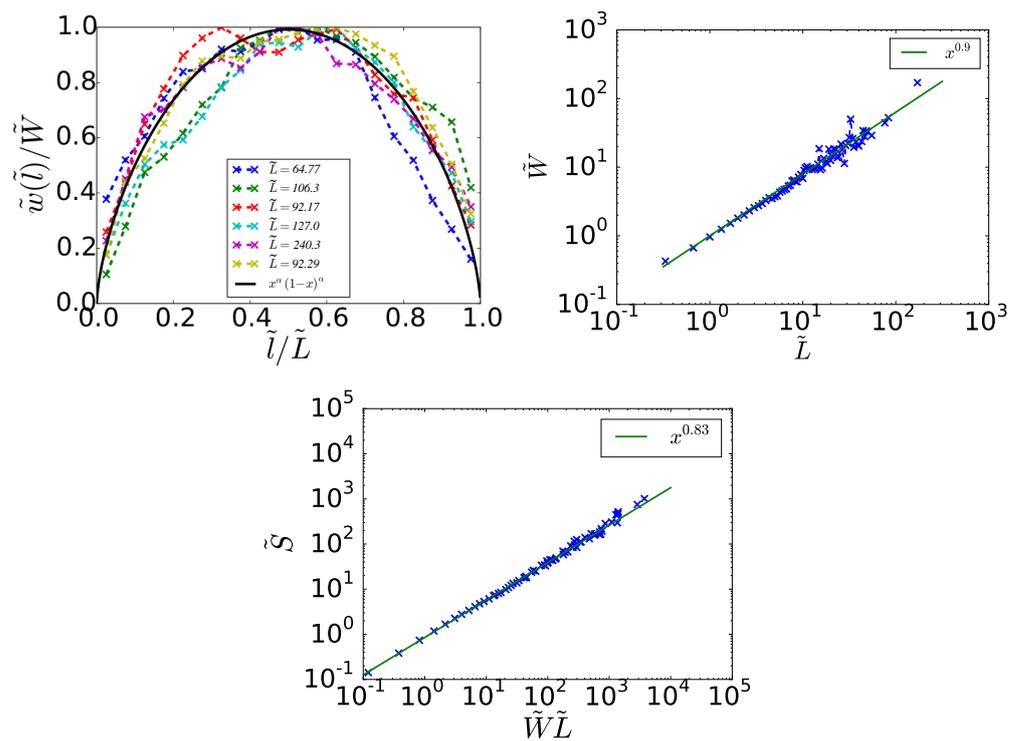


FIGURE 5.12 – À gauche, rapport d'aspect des agrégats, et la loi de puissance correspondante en ζ_{inf} , tracé en échelle logarithmique. À droite, surface des agrégats \tilde{S}_{inf} en fonction du produit de leur longueur et de leur largeur, $\tilde{W}_{inf}\tilde{L}_{inf}$. Ces figures sont faites avec les agrégats de régions en dessous de leur seuil.

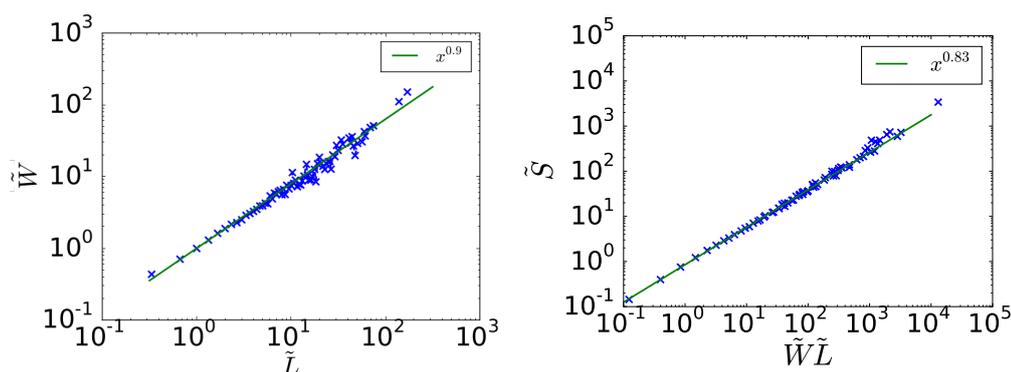


FIGURE 5.13 – À gauche, rapport d’aspect des agrégats, et la loi de puissance correspondante en ζ_{inf} , tracé en échelle logarithmique. À droite, surface des agrégats \tilde{S}_{inf} en fonction du produit de leur longueur et de leur largeur, $\tilde{W}_{inf}\tilde{L}_{inf}$. Ces figures sont faites avec les agrégats de régions en dessous de leur seuil.

la dimension fractale des agrégats, qui est égale à $D = d(1 + \zeta) = 1.6 \pm 0.1$. Il est intéressant de constater que cette valeur est proche de la dimension fractale de la percolation classique. En effet, en dimension 2, cet exposant vaut $D = 1.52$.

Il est intéressant de noter que les deux type d’agrégats, en dessous et en dessus du seuil, ont globalement les mêmes exposants, que ce soit pour leur rapport d’aspect ζ ou leur fractalité $D = d(1 + \zeta)$.

Par ailleurs, de manière assez notable, j’ai pu constater que ces exposants ζ et d sont indépendants de σ_G et α .

Je le montre sur la figure 5.14 . En haut sont tracées, à droite, le rapport d’aspect pour plusieurs α et σ_G pour des agrégats en dessous du seuil, avec un décalage par soucis de lisibilité. En haut à gauche, sont tracées les relations $\tilde{S}(\tilde{W}\tilde{L})$ correspondantes, elles-aussi décalées. J’ai tracé en bas les mêmes relations, pour les agrégats au dessus du seuil.

5.4.1.2 Cas $\sigma_\kappa \neq 0$, $\sigma_\kappa \leq \sigma_G$

Nous nous plaçons désormais en milieu poreux hétérogène, et commençons avec les paramètres tels que $\sigma_\kappa \neq 0$, $\sigma_\kappa \leq \sigma_G$.

Sur la figure 5.15, nous traçons en haut et en bas, respectivement pour les agrégats en dessous et au dessus du seuil, le rapport d’aspect et la dépendance $\tilde{S}(\tilde{W}\tilde{L})$ des agrégats pour plusieurs α . Les rapports d’aspects sont tracés sur la figure de gauche, et la fonction $\tilde{S}(\tilde{W}\tilde{L})$ sur la figure de droite. Comme nous pouvons

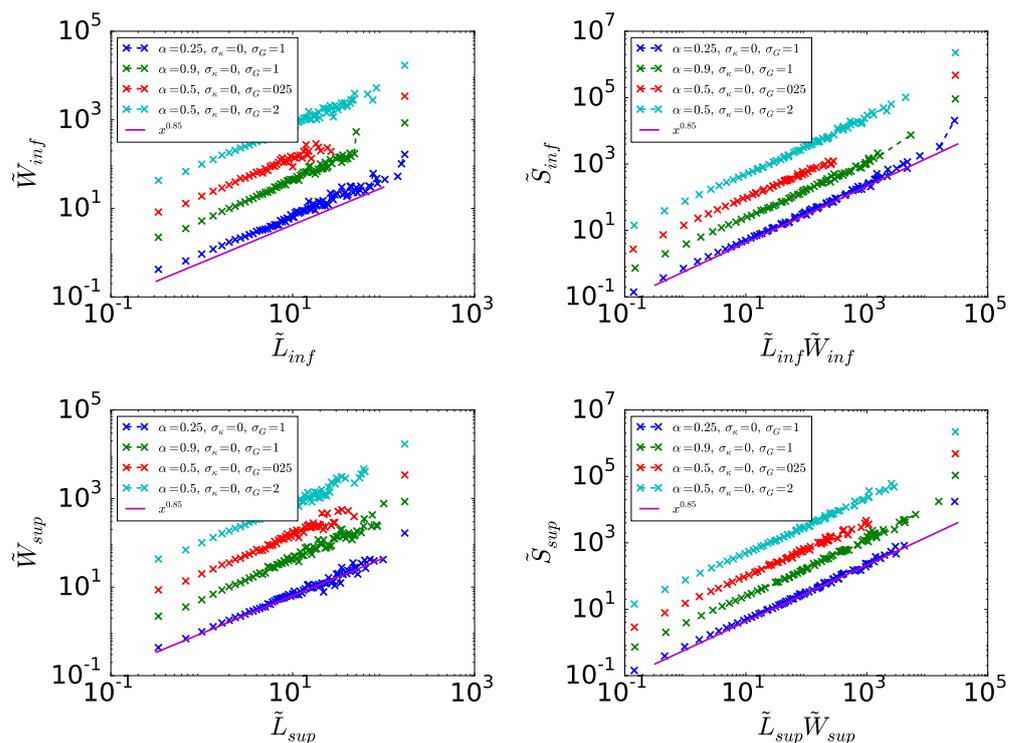


FIGURE 5.14 – Rapport d’aspects pour les agrégats en dessous (en haut à gauche) et au dessus (en bas à gauche) du seuil, et dépendances $\tilde{S}(\tilde{W}\tilde{L})$ pour les agrégats en dessous (en haut à droite) et au dessus (en bas à droite) du seuil.

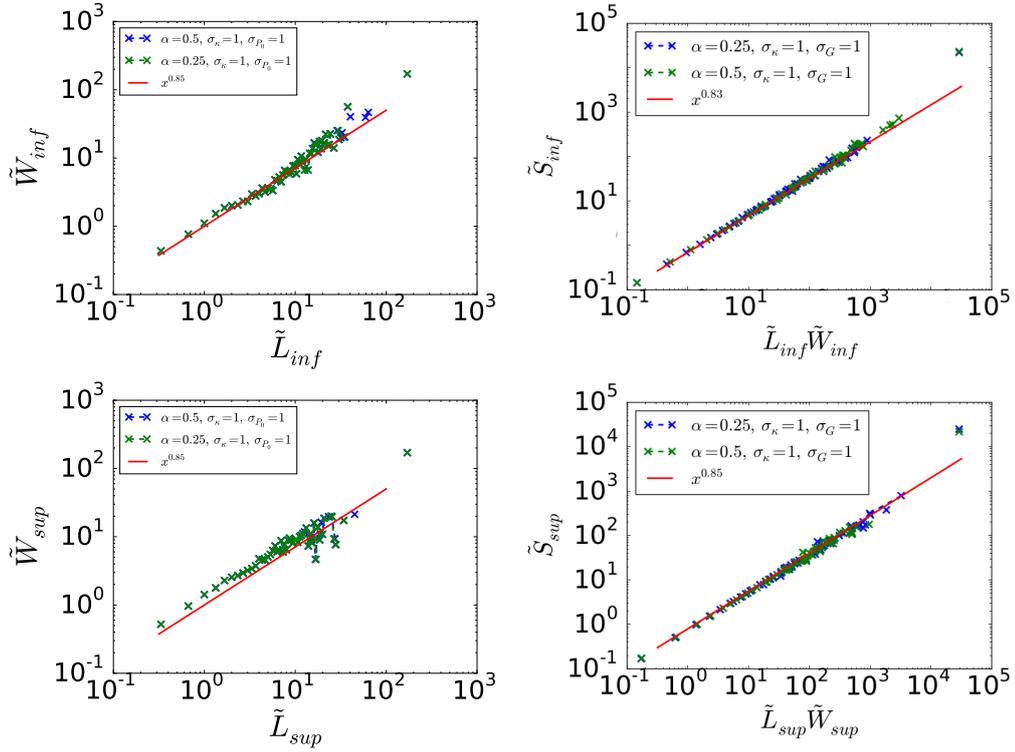


FIGURE 5.15 – En haut : à gauche, largeur des agrégats au dessous du seuil, en fonction de leur longueur pour $\sigma_\kappa = 1$ et $\sigma_G = 1$, pour deux α différents, $\alpha = 0.25$ et $\alpha = 0.5$. À droite, surface des agrégats en fonction du produit de leur largeur et de leur longueur, pour les mêmes paramètres. Nous traçons en bas les mêmes quantités, pour les agrégats au dessus du seuil.

le constater, les deux figures montrent des dépendances en loi de puissance :

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{inf,sup} &\propto \tilde{L}_{inf,sup}^\zeta \\ \tilde{S}_{inf,sup} &\propto (\tilde{W}_{inf,sup} \tilde{L}_{inf,sup})^d, \end{aligned} \quad (5.10)$$

avec $\zeta = 0.9 \pm 0.05$ et $d = 0.85 \pm 0.05$. De plus, il n'y a pas de dépendance des exposants en α .

Sur la figure 5.16, nous traçons en haut et en bas, respectivement pour les agrégats en dessous et au dessus du seuil, le rapport d'aspect et la dépendance $\tilde{S}(\tilde{W}\tilde{L})$ des agrégats pour plusieurs σ_κ et σ_G . J'ai décalé les courbes entre elles par soucis de lisibilité. Comme précédemment, les rapports d'aspects sont tracés sur la figure de gauche, et la fonction $\tilde{S}(\tilde{W}\tilde{L})$ sur la figure de droite. Nous pouvons constater, une fois de plus, que le rapport d'aspect des agrégats et leur dimension fractale obéissent chacun à une loi de puissance.

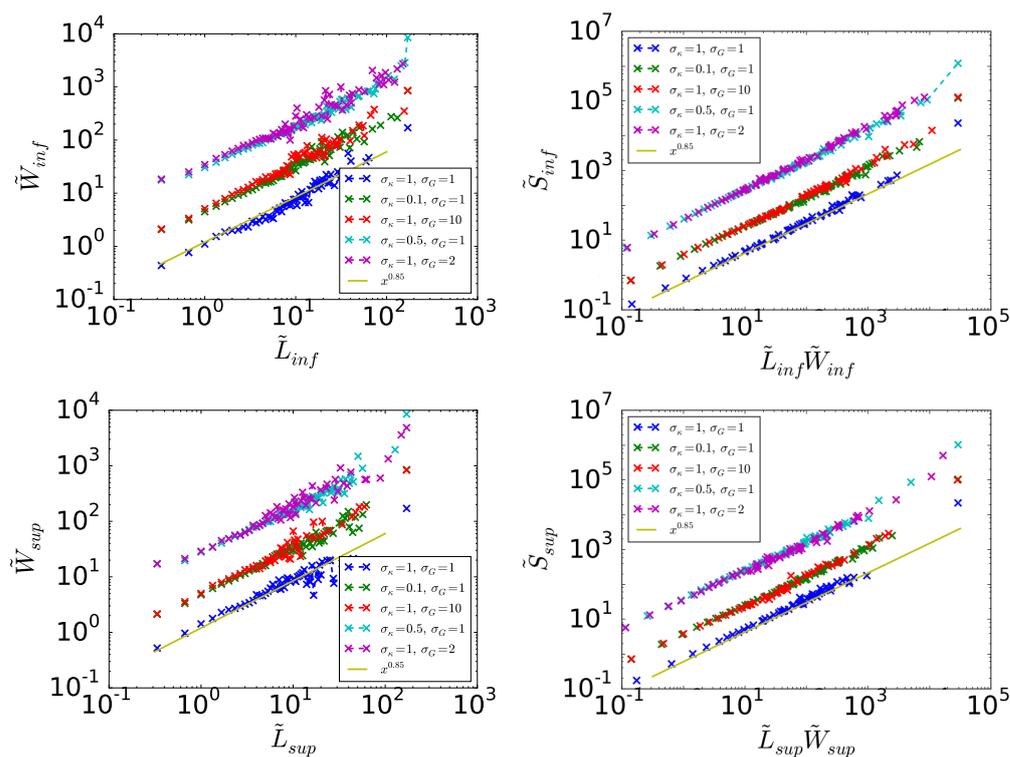


FIGURE 5.16 – En haut : à gauche, largeur des agrégats au dessous du seuil, en fonction de leur longueur pour différents jeux de σ_κ et de σ_G tels que $\sigma_\kappa < \sigma_G$, pour $\alpha = 0.5$. À droite, surface des agrégats en fonction du produit de leur largeur et de leur longueur, pour les mêmes paramètres. Nous traçons en bas les mêmes quantités, pour les agrégats au dessus du seuil.

Bien que cela ne soit pas visible sur la figure 5.16 $\tilde{S}(\tilde{W}\tilde{L})$ ne dépend ni de α , ni de σ_G . J'ai pu constater que le préfacteur de la relation $\tilde{W}(\tilde{L})$ dépend faiblement de σ_κ et de σ_G , mais il n'a pas été possible de formuler une loi appropriée.

5.4.1.3 Cas $\sigma_\kappa \neq 0$, $\sigma_\kappa > \sigma_G$

Nous regardons désormais le cas du milieu poreux hétérogène tel que $\sigma_\kappa > \sigma_G$. Sur la figure 5.17, nous traçons en haut et en bas, respectivement pour les agrégats en dessous et au dessus du seuil, le rapport d'aspect et la dépendance $\tilde{S}(\tilde{W}\tilde{L})$ des agrégats pour plusieurs α . Comme nous pouvons le constater, les deux figures montrent toujours des dépendances en loi de puissance :

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{inf,sup} &\propto \tilde{L}_{inf,sup}^\zeta \\ \tilde{S}_{inf,sup} &\propto (\tilde{W}_{inf,sup}\tilde{L}_{inf,sup})^d,\end{aligned}\tag{5.11}$$

avec toujours $d = 0.85 \pm 0.05$, mais cette fois $\zeta = 1.15 \pm 0.05$. De plus, on n'observe pas de dépendance des exposants ou des préfacteurs de ces lois en α .

Sur la figure 5.18, nous traçons en haut et en bas, respectivement pour les agrégats en dessous et au dessus du seuil, le rapport d'aspect et la dépendance $\tilde{S}(\tilde{W}\tilde{L})$ des agrégats pour plusieurs $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G}$ tels que $\sigma_\kappa > \sigma_G$. Comme précédemment, les rapports d'aspects sont tracés sur la figure de gauche, et la fonction $\tilde{S}(\tilde{W}\tilde{L})$ sur la figure de droite, et volontairement décalés. Nous pouvons constater, ici aussi, que le rapport d'aspect des agrégats et leur dimension fractale obéissent chacun à une loi de puissance, indépendante de σ_G .

De plus, pour $\sigma_\kappa = 10$, on observe un premier régime pour les faibles \tilde{L}_{inf} avec $\tilde{W}_{inf} \propto \tilde{L}_{inf}$, et $\tilde{W}_{sup} \propto \tilde{L}_{sup}^{0.85}$. Pour les grands \tilde{L}_{inf} , on retrouve bien $\tilde{W}_{inf} \propto \tilde{L}_{inf}^\zeta$, et $\tilde{W}_{sup} \propto \tilde{L}_{sup}^\zeta$.

On pourrait supposer que, lorsque l'ampleur du désordre du champ de perméabilité est très grande, le désordre de perméabilité domine aux petites échelles sur les effets de corrélations dûs aux changements de régime. Cet effet semble légèrement différent entre dans le régime de Carreau (agrégats au dessus du seuil) ou newtonien (agrégats au dessous du seuil). Les régions au dessus du seuil de grande taille, cependant, semblent continuer de suivre la loi $\tilde{W}_{inf,sup} \propto \tilde{L}_{inf,sup}^\zeta$

Nous constatons aussi que malgré le changement de rapport d'aspect, la dimension fractale des agrégats reste inchangée.

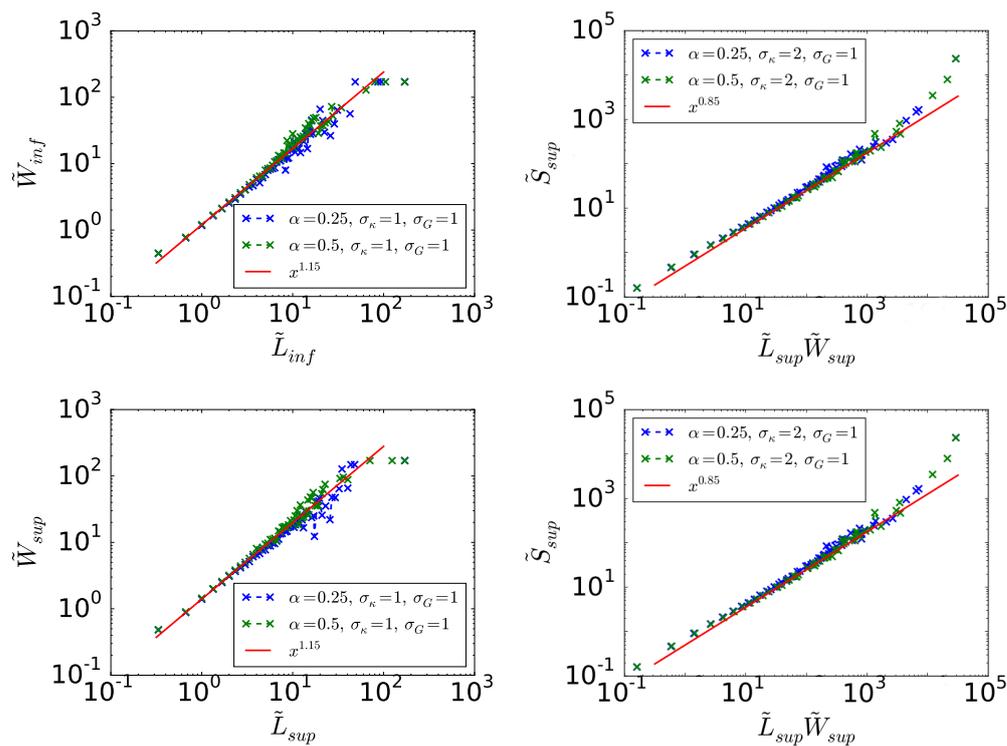


FIGURE 5.17 – En haut : à gauche, largeur des agrégats au dessous du seuil, en fonction de leur longueur pour $\sigma_\kappa = 2$ et $\sigma_G = 1$, pour deux α différents, $\alpha = 0.25$ et $\alpha = 0.5$. À droite, surface des agrégats en fonction du produit de leur largeur et de leur longueur, pour les mêmes paramètres. Nous traçons en bas les mêmes quantités, pour les agrégats au dessus du seuil.

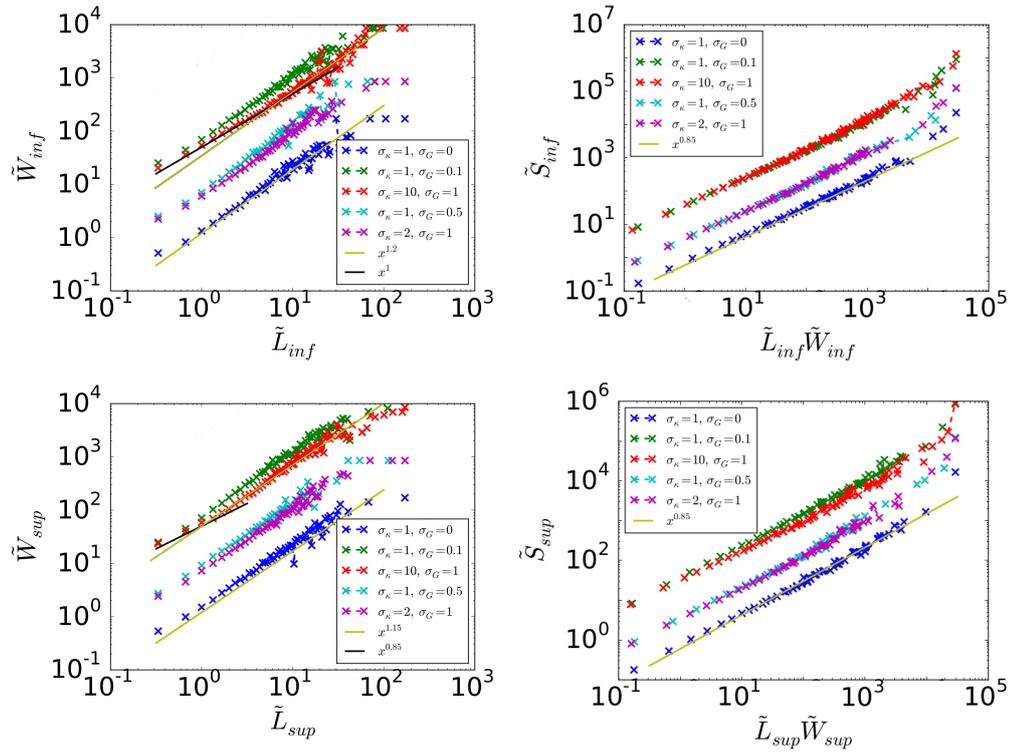


FIGURE 5.18 – En haut ij : à gauche, largeur des agrégats au dessous du seuil, en fonction de leur longueur pour différents jeux de σ_κ et de σ_G tels que $\sigma_\kappa > \sigma_G$, pour $\alpha = 0.5$. À droite, surface des agrégats en fonction du produit de leur largeur et de leur longueur, pour les mêmes paramètres. Nous traçons en bas les mêmes quantités, pour les agrégats au dessus du seuil.

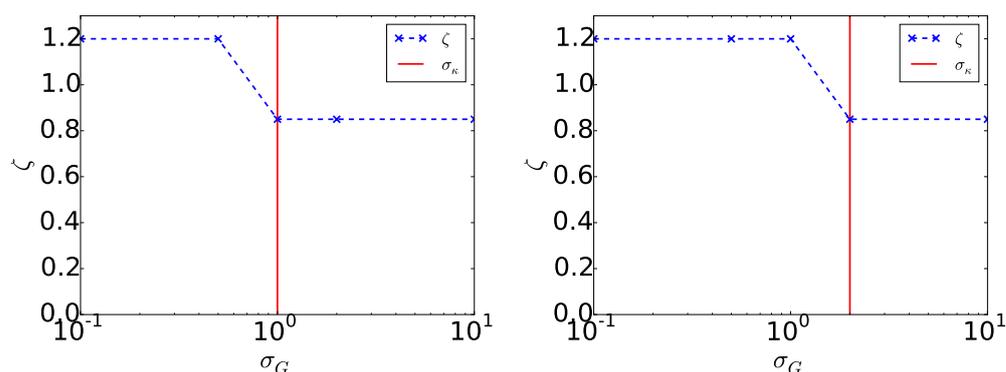


FIGURE 5.19 – Rapport d'aspect des agrégats en fonction de σ_G , pour deux σ_κ différents (gauche : $\sigma_\kappa = 1$, droite : $\sigma_\kappa = 2$).

Résultats importants :

— La largeur maximale des agrégats suit leur longueur selon une loi de puissance :

$$\tilde{W} \propto \tilde{L}^\zeta \quad \zeta = \begin{cases} 0.9 \pm 0.05 & \text{si } \frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} = 0 \\ 0.85 \pm 0.05 & \text{si } \frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} \leq 1 \\ 1.15 \pm 0.05 & \text{si } \frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} > 1 \end{cases},$$

— La surface des agrégats suit le produit de ses dimensions selon une loi de puissance, indépendamment de α , σ_κ ou σ_G :

$$\tilde{S} \propto (\tilde{L}\tilde{W})^d$$

— Les résultats précédents valent pour les agrégats de régions en dessous et au dessus du seuil,

— La dimension D fractale des agrégats est proche de celle des agrégats de la percolation classique D_c : $D = d(1 + \zeta) = 1.6 \pm 0.1$, $D_c = 1.52$.

5.4.1.4 Discussion

Comme nous l'avons vu, les agrégats de régions ont la même forme qu'ils soient au dessus ou en dessous du seuil. Ils ont aussi la même dimension fractale. Nous montrons de plus que ces deux quantités sont indépendantes de α . Enfin, la dimension fractale ne dépend ni de σ_κ ni de σ_G , et la rugosité ne dépend que de σ_κ/σ_G , comme illustré sur la figure 5.19. Plus généralement, la loi $\tilde{W}(\tilde{L})$ ne dépend que de la valeur σ_κ/σ_G ($\sigma_\kappa = 0$, $\sigma_\kappa \leq \sigma_G$, $\sigma_\kappa > \sigma_G$), et $\tilde{S}(\tilde{L}\tilde{W})$ ne dépend ni de α , ni

de σ_κ , ni de σ_G .

Il est surprenant que le rapport d'aspect des agrégats ne dépende pas de α . Effectivement, l'augmentation de vitesse du fluide suit, localement, une loi de puissance en la pression. On pourrait alors s'attendre à ce qu'une variation de α , modifiant non seulement la vitesse de la région en régime de Carreau, mais celle des régions en amont et en aval. Ce qui devrait modifier les propriétés des agrégats.

De la même façon, il est surprenant que le rapport d'aspect ne dépende pas de σ_κ ou σ_G , tant que ces variations satisfont $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} = 0$, $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} \leq 1$ ou $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} > 1$. On s'attendrait en effet à ce que des variations de σ_κ et σ_G affectent différemment la distribution de vitesses et de vitesse critique. En effet, σ_κ affecte directement la distribution de vitesse à travers l'équation de Darcy newtonienne ou de Carreau. Par contre, σ_κ et σ_G modifient le seuil de vitesse critique par définition. Il est cependant possible que cela n'affecte que les petites échelles.

De plus, nous ne nous expliquons pas le changement de ζ en fonction de $0 < \frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} \leq 1$ ou $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} > 1$. Aussi, j'ai observé un changement brusque de ζ au passage de $\sigma_\kappa = 0$ à $\sigma_\kappa \neq 0$. Ce changement semble persistant quel que soit les autres paramètres et sur plusieurs réalisations. Il est possible de partiellement expliquer ce léger écart d'exposant.

Effectivement, dans le cas $\sigma_\kappa = 0$, le champ de vitesse initial est uniforme, alors que le champ de vitesse critique ne l'est pas. En augmentant la pression, la vitesse augmente uniformément tant que le fluide reste newtonien. Ainsi, les premiers points à changer de régime s'obtiennent en déterminant les régions qui ont une vitesse critique inférieure à la vitesse moyenne, ce qui caractérise bien un problème de percolation standard. En revanche, dans le cas $\sigma_\kappa \neq 0$, le champ de vitesse n'est plus uniforme du fait de l'équation de Darcy. De plus, ses fluctuations dépendent de $\kappa(\vec{r})$ qui est lié à $u_c(\vec{r})$. Ce qui modifie la nature du problème de percolation.

Enfin, les exposants ζ et D dans le cadre du fluide de Carreau sont proches de ceux de la percolation. Effectivement, contrairement au fluide de Bingham, une cellule peut changer de régime sans appartenir à un chemin préférentiel, le seul critère étant que la vitesse du fluide dépasse la vitesse seuil de la région. Le seul phénomène allongeant alors les agrégats est l'augmentation de la vitesse du fluide due à la diminution de sa viscosité dans les canaux. Ce qui augmente la corrélation dans la direction de $\vec{\nabla}\tilde{P}$ et la diminue dans la direction orthogonale à $\vec{\nabla}\tilde{P}$.

On peut de plus noter que de manière remarquable, les lois $\tilde{W}(\tilde{L})$ et $\tilde{S}(\tilde{L}\tilde{W})$ sont symétriques par la transformation $S_{inf} \leftrightarrow S_{sup}$ ce qui ne semble pas intuitif.

Enfin, le cas limite $\alpha \rightarrow 1$ est censé nous ramener au cas de la percolation simple. Effectivement, il n'y a alors plus de changement de régime lorsque le seuil en vitesse d'une région est dépassé. Il est alors possible qu'il existe un régime de transition lorsque α est très proche de 1 et que l'effet de la loi de puissance ne se

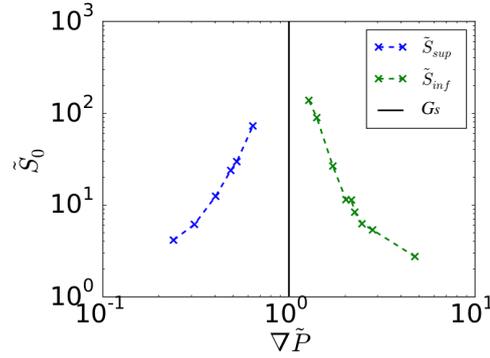


FIGURE 5.20 – Taille maximale des agrégats en dessous et au dessus du seuil, dans leurs régimes de pressions respectifs.

fait presque plus sentir.

5.4.2 Distribution de tailles

Nous regardons désormais la distribution de surface des agrégats. Nous disvi-
sons aussi cette partie, cette fois en deux sous-parties : l'étude pour $\sigma_\kappa = 0$ et celle
pour $\sigma_\kappa \neq 0$. Pour chacune de ces sous-parties, nous commencerons par les agré-
gats de régions n'ayant pas dépassé leur seuil (comportement newtonien), puis sur
les agrégats de régions ayant dépassé leur seuil (comportement en loi de Carreau).
Contrairement au fluide de Bingham, nous ne définissons pas la pression seuil G_s
par rapport à un changement notable de régime de débit. À la place, nous utilisons
la pression à partir de laquelle la taille d'un agrégat en régime de Carreau atteint
la taille du système.

Il est à ce niveau utile de noter que les tailles des régions en régime de Carreau
sont étudiées en dessous de G_s , et les tailles des régions en régime newtonien au
dessus de G_s . Effectivement, les régions en régime de Carreau ont des tailles qui
dépassent celle du système dès lors que $\nabla P > G_s$. Cela vaut réciproquement pour
le régime newtonien lorsque $\nabla P < G_s$. Nous illustrons ceci avec la taille maximale
observée des agrégats sur la figure 5.20 dans la plage correspondante d'étude.

5.4.2.1 Cas $\sigma_\kappa = 0$

Sur la figure 5.21, nous traçons, pour $\sigma_\kappa = 0$, $\sigma_G = 1$, $\alpha = 0.5$, à gauche, la
distribution de probabilité de surface $P(\tilde{S})$. On constate, comme pour le fluide de
Bingham ou la percolation, que la distribution suit une loi de puissance, d'exposant
 $\tau_{inf} = 1.5$, avec une coupure exponentielle :

$$P(\tilde{S}_{inf}) \propto \tilde{S}_{inf}^{-\tau_{inf}} e^{-\tilde{S}_{inf}/S_{0inf}}. \quad (5.12)$$

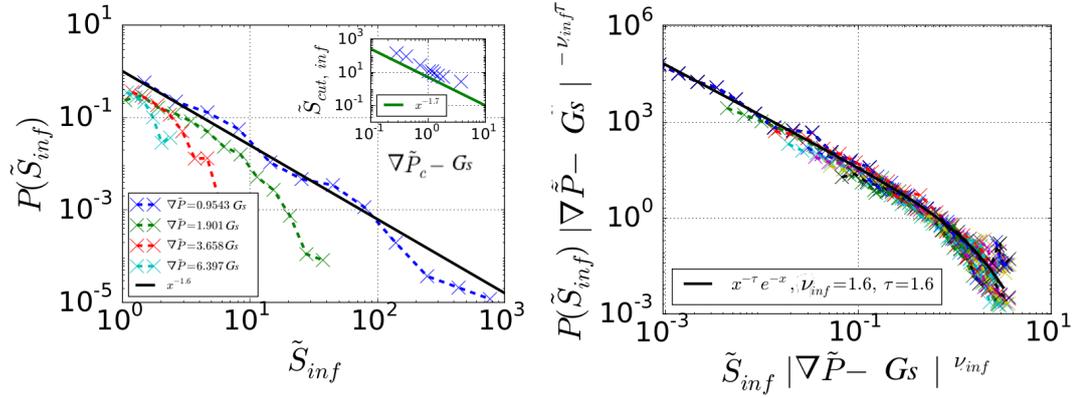


FIGURE 5.21 – À gauche : distribution de probabilité en fonction de la taille des agrégats $P(\tilde{S})$ et, en sous-figure, taille de coupure des agrégats en fonction du débit, $\tilde{S}_0(\tilde{q})$, pour les agrégats de régions en dessous du seuil, pour $\sigma_\kappa = 0$ et $\sigma_G = 1$. À droite : distribution de probabilité de taille des agrégats normalisée $P(\tilde{S}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{inf} \tau_{inf}}$ en fonction de $\tilde{S} \tilde{q}^{\nu_{inf}}$, pour les agrégats de régions en dessous du seuil.

On trace en sous-figure la taille de coupure \tilde{S}_0 en fonction de la pression moins la pression de percolation $\tilde{\nabla} \tilde{P} - \tilde{G}_s$. On constate aussi que la taille de coupure suit l'écart à la pression de percolation selon une loi de puissance d'exposant $\nu_{inf} = 1.6$:

$$\tilde{S}_{0inf} \propto (\tilde{\nabla} \tilde{P} - \tilde{G}_s)^{-\nu_{inf}} \quad (5.13)$$

Ces exposants sont différents de ceux obtenus pour le fluide de Bingham. Effectivement, dans le cas du fluide de Bingham, on avait $\tau_f = 1.15$. Pour la taille de coupure, nous avons $\tilde{S}_{0inf} \propto \tilde{Q}^{\gamma_f}$ et $\tilde{Q} \propto (\tilde{\nabla} \tilde{P} - \tilde{G}_s)^\Theta$, soit $\tilde{S}_{0inf} \propto (\tilde{\nabla} \tilde{P} - \tilde{G}_s)^{\Theta \gamma_f}$, avec $\Theta \gamma_f = 2.7$. On constate ainsi que le phénomène de percolation pour ces deux fluides est différent, tant dans la répartition des tailles des agrégats, qu'avec le phénomène de coupure.

Comme précédemment, nous avons tracé sur la droite de la figure 5.21 les mêmes courbes, renormalisées à l'aide des équations (5.12) et (5.13). Là encore, les courbes se superposent bien sur une courbe maîtresse, ce qui confirme les lois données.

Sur la figure 5.22, on trace les mêmes courbes renormalisées pour $\sigma_\kappa = 0$, $\sigma_G \in [0.5; 0.75; 2]$, $\alpha = 0.5$ (colonne de gauche), et $\sigma_\kappa = 0$, $\sigma_G = 1$, $\alpha \in [0.25; 0.75; 0.9]$ (colonne de droite). Comme on peut le constater, les exposants sont indépendants de σ_G et α , tant que $\sigma_\kappa = 0$. De plus, contrairement au fluide de Bingham pour lequel on avait $\tilde{S}_0 = E(\sigma) \tilde{q}^{\gamma_f}$, la taille caractéristique n'a pas de dépendance en σ_κ ou σ_G . Ceci s'explique aisément : contrairement au cas du fluide de Bingham, σ_G n'a qu'une influence faible sur la forme de nos agrégats, comme expliqué plus

haut.

Sur la figure 5.23, nous traçons, comme pour la figure 5.21, pour $\sigma_\kappa = 0$, $\sigma_G = 1$, $\alpha = 0.5$, à gauche, la distribution de probabilité de surface $P(\tilde{S}_{sup})$, avec en sous-figure la taille de coupure S_{0sup} en fonction de la pression moins la pression de percolation $\vec{\nabla}\tilde{P} - \vec{G}_s$, cette fois ci pour les agrégats de régions au dessus du seuil. Comme précédemment, la distribution suit une loi de puissance avec une taille de coupure. L'exposant de la loi de puissance est le même que pour les clusteurs de régions au dessus et en dessous du seuil, mais l'exposant de la taille de coupure est différent, $\tau_{sup} = 1.5$ et $\nu_{sup} = 3.6$:

$$\begin{aligned} P(\tilde{S}_{sup}) &\propto \tilde{S}_{sup}^{-\tau_{sup}} e^{-\tilde{S}_{sup}/S_{0sup}} \\ S_{0sup} &\propto (\nabla\tilde{P} - G_s)^{-\nu_{sup}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Nous avons de plus tracé, à droite sur la figure 5.23, les distributions de probabilité de présence renormalisées selon les lois (5.14). Encore une fois, ces courbes se superposent bien à la courbe maitresse de l'équation (3.1).

Comme pour les agrégats de régions au dessus du seuil, nous avons regardé l'influence de α et de σ_G à $\sigma_\kappa = 0$. Sur la figure 5.24, on a tracé les courbes de distribution de probabilité de présence renormalisées pour $\sigma_\kappa = 0$, $\sigma_G \in [0.5; 0.75; 2]$, $\alpha = 0.5$ (colonne de gauche), et $\sigma_\kappa = 0$, $\sigma_G = 1$, $\alpha \in [0.25; 0.75; 0.9]$ (colonne de droite). Comme on peut le constater, les exposants sont indépendants de α et σ_G pour $\sigma_\kappa = 0$. Comme nous avons pu le constater, la distribution de taille est similaire, que l'on parle de agrégats de régions en dessous ou au dessus du seuil. Cependant, les agrégats de régions au dessus du seuil ont un exposant de taille de coupure plus grand que celui des agrégats en dessous du seuil. Autrement dit, les grands agrégats de régions au dessus du seuil varient plus fortement en nombre avec une variation de pression, que ceux en dessous du seuil.

On regarde maintenant les exposants de coupure, non plus en fonction de la pression imposée, mais en fonction de la proportion de régions en dessous et au dessus du seuil. Sur la figure 5.25, nous traçons à gauche la relation entre la taille de coupure des agrégats en dessous du seuil S_{0inf} , et la proportion de régions en dessous du seuil à la percolation n_C moins proportion de régions en dessous du seuil n_{inf} . Nous traçons, à droite, la même figure, pour les agrégats de régions au dessus du seuil S_{0sup} . Nous avons ici aussi une relation en loi de puissance, mais ce qui est particulièrement notable est que cette fois, l'exposant est le même pour les deux quantités :

$$\tilde{S}_{0inf,sup} \propto |n_{inf,sup} - n_C|^\delta \quad (5.15)$$

avec $\delta = 3.1 \pm 0.1$. De plus que $n_C = 0.5 \pm 0.05$, indépendamment que l'on regarde les agrégats S_{inf} ou S_{sup} . De plus, les lois qui régissent la taille des agrégats sont inchangées entre les agrégats en dessous et au dessus du seuil, si l'on regarde

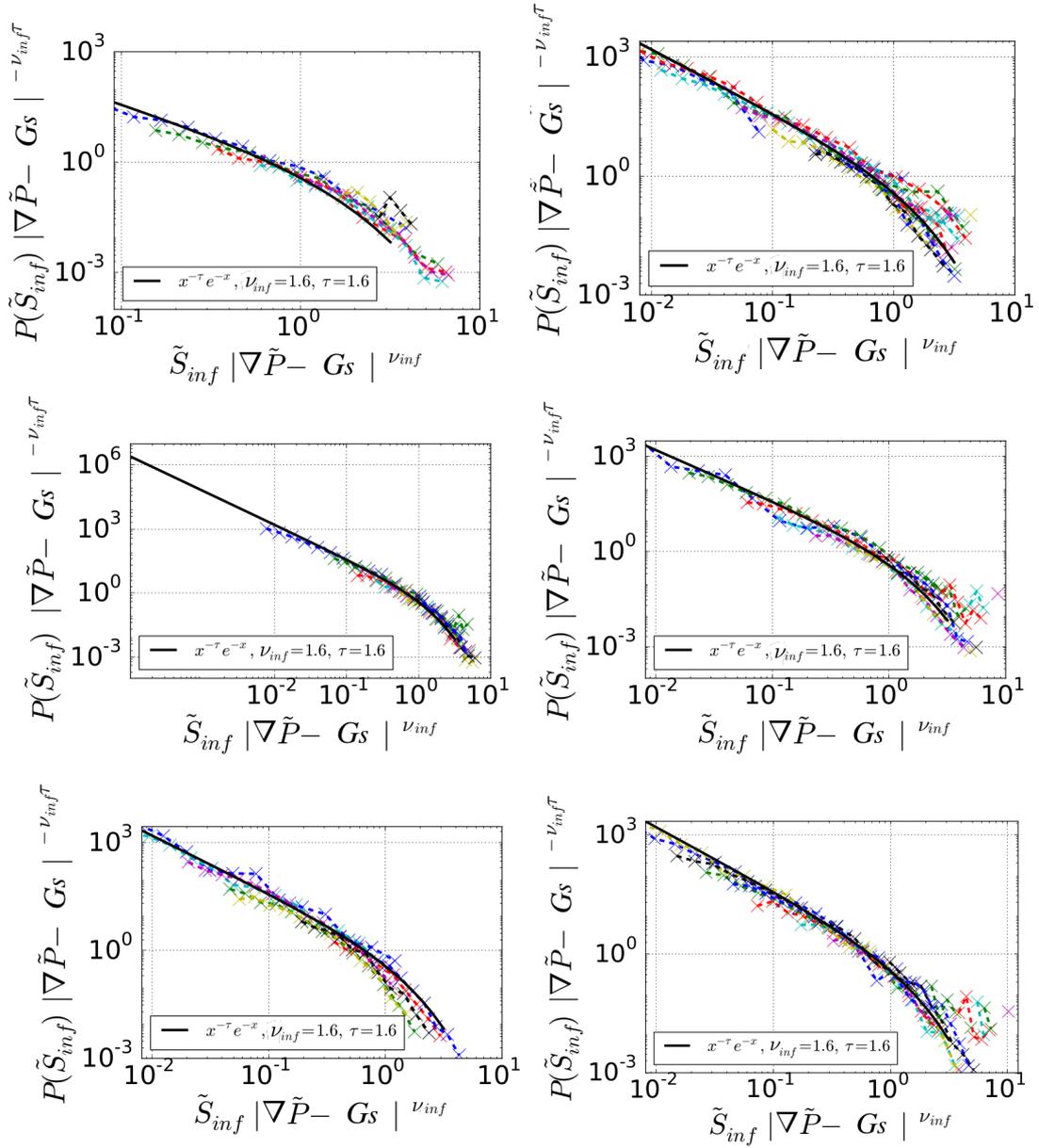


FIGURE 5.22 – Colonne de gauche : de haut en bas, distribution de la taille des agrégats normalisée $P(\tilde{S}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{inf} \tau_{inf}}$ pour $\alpha = 0.5$, $\sigma_\kappa = 0$ et $\sigma_G = [0.5, 0.75, 2]$, la ligne continue correspondant au fit effectué avec l'équation (5.12). Colonne de droite : de haut en bas, distribution de probabilité et taille des agrégats normalisée $P(\tilde{S}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{inf} \tau_{inf}}$ pour $\sigma_\kappa = 0$, $\sigma_G = 1$ et $\alpha = [0.25, 0.75, 0.9]$, la ligne continue correspondant à l'ajustement effectué avec l'équation (5.12).

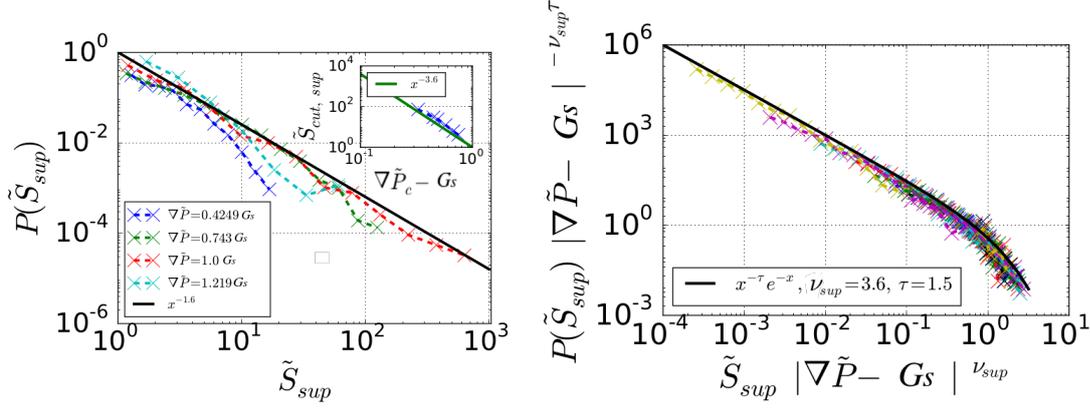


FIGURE 5.23 – À gauche : distribution de probabilité en fonction de la taille des agrégats $P(\tilde{S}_{sup})$ et, en sous-figure, taille de coupure des agrégats en fonction du débit, $\tilde{S}_{sup}(\tilde{q})$, pour les agrégats de régions au dessus du seuil. À droite : distribution de probabilité de taille des agrégats normalisée $P(\tilde{S}_{sup}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{sup}\tau_{sup}}$ en fonction de $\tilde{S}_{sup} \tilde{q}^{\nu_{sup}}$, pour les agrégats de régions au dessus du seuil.

la probabilité n qu'un agrégat soit au dessus ou en dessous du seuil. Ceci semble indiquer que n semble être le paramètre le plus pertinent pour étudier la transition en milieu homogène.

5.4.2.2 Cas $\sigma_\kappa \neq 0$

Nous regardons désormais la distribution de taille des agrégats pour $\sigma_\kappa \neq 0$. Contrairement à l'étude du rapport d'aspect des agrégats, il ne sera pas nécessaire de diviser cette étude entre $\sigma_\kappa \leq \sigma_G$ et $\sigma_\kappa > \sigma_G$. Cette fois-ci cependant, nous ne regarderons que deux α , $\alpha = 0.25$ et $\alpha = 0.5$. Nous regardons pour commencer les agrégats de régions *en dessous* du seuil.

Sur la figure 5.26, nous traçons à gauche la courbe de distribution de probabilité des tailles d'agrégats pour différentes pressions, pour $\alpha = 0.5$, $\sigma_\kappa = 0.5$ et $\sigma_G = 1$. Comme on peut le constater, l'exposant régissant la distribution est le même que pour le cas $\sigma_\kappa = 0$, soit $\tau_{inf} = 1.5 \pm 0.05$. Cependant, l'exposant de la taille de coupure est différent, avec $\nu_{inf} = 2.6 \pm 0.1$. Nous avons tracé à droite, les probabilités de présence renormalisées selon (5.12) et (5.13), et la courbe maitresse donnée par l'équation (3.1).

Sur la figure 5.27, nous avons tracé les courbes de distributions de probabilité des agrégats pour différents jeux de valeur de σ_κ , σ_G et α . Plus précisément, la première colonne correspond à $\alpha = 0.25$ et la seconde à $\alpha = 0.5$. La ligne du haut correspond à $\sigma_\kappa = 0.1$ et $\sigma_G = 1$, la ligne centrale à $\sigma_\kappa = 1$ et $\sigma_G = 1$, et la ligne

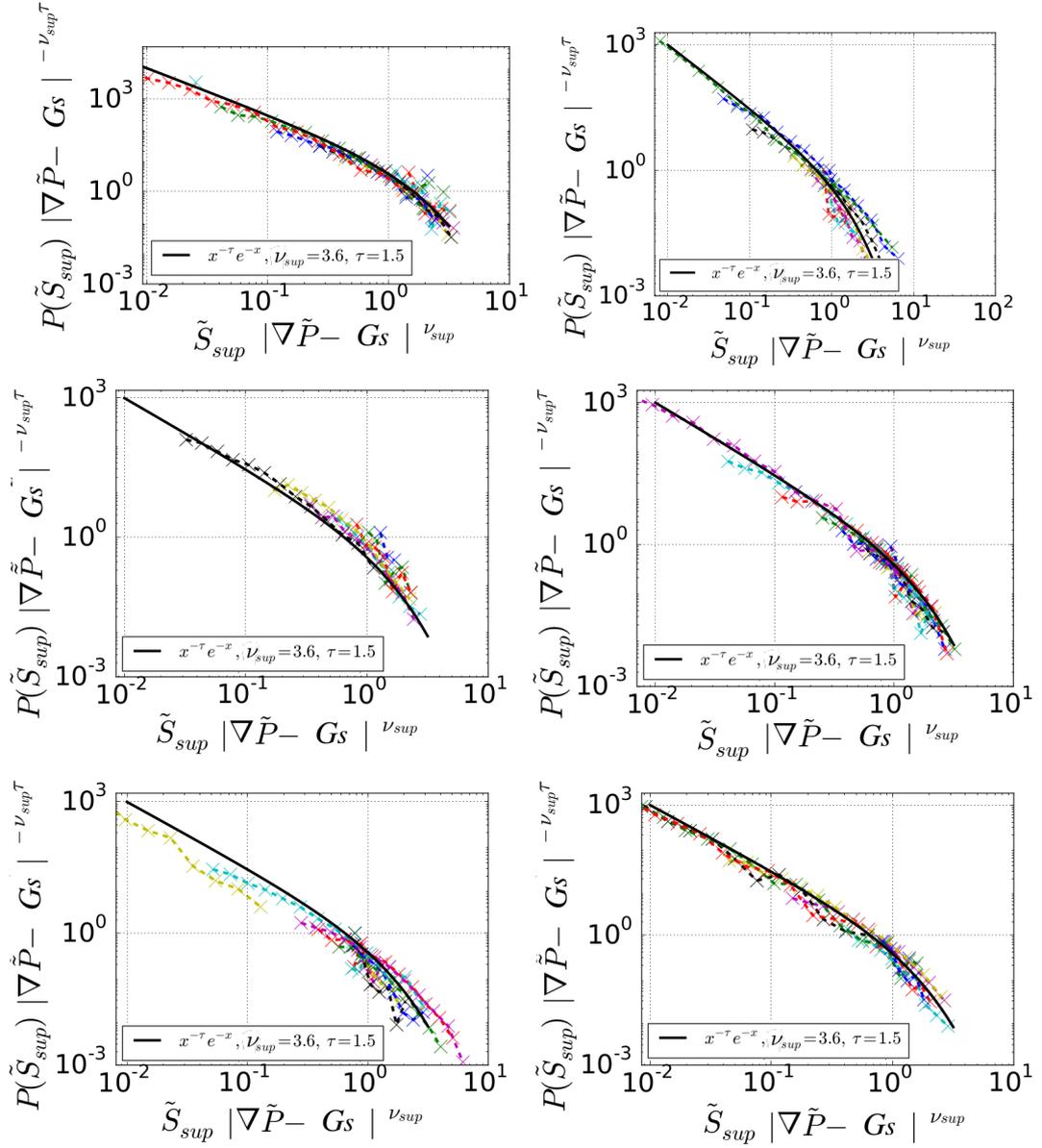


FIGURE 5.24 – Colonne de gauche : de haut en bas, distribution de probabilité te taille des agrégats normalisée $P(\tilde{S}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{sup}\tau_{sup}}$ pour $\alpha = 0.5$, $\sigma_\kappa = 0$ et $\sigma_G = [0.5, 0.75, 2]$, la ligne continue correspondant à l’ajustement effectué avec l’équation (5.12). Colonne de droite : de haut en bas, distribution de probabilité te taille des agrégats normalisée $P(\tilde{S}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{sup}\tau_{sup}}$ pour $\sigma_\kappa = 0$, $\sigma_G = 1$ et $\alpha = [0.25, 0.75, 0.9]$, la ligne continue correspondant à l’ajustement effectué avec l’équation (5.12).

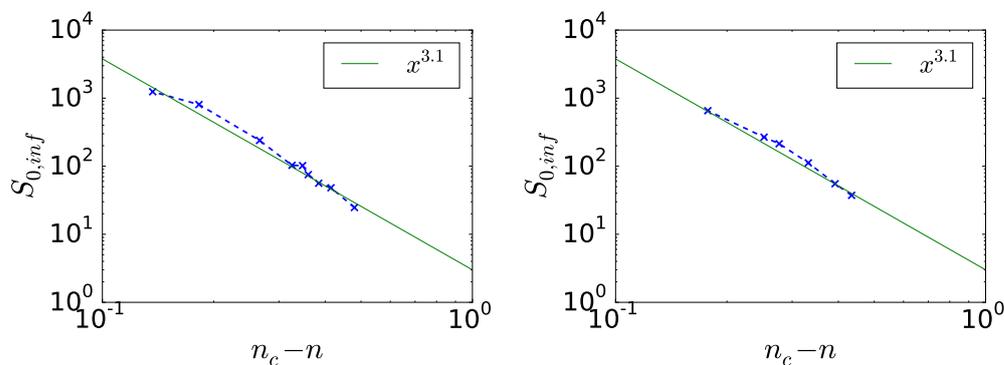


FIGURE 5.25 – Taille de coupure en fonction de la proportion des régions en dessous (gauche) et au dessus (droite) du seuil, par rapport à la proportion critique.

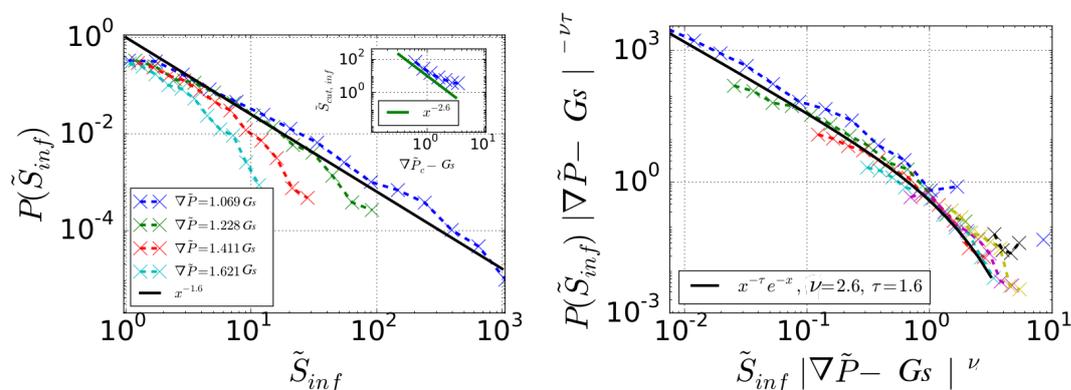


FIGURE 5.26 – À gauche : distribution de probabilité en fonction de la taille des agrégats $P(\tilde{S}_{sup})$ et, en sous-figure, taille de coupure des agrégats en fonction du débit, $\tilde{S}_{0sup}(\tilde{q})$, pour les agrégats de régions en dessous du seuil. À droite : distribution de probabilité de taille des agrégats normalisée $P(\tilde{S}_{sup}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{sup} \tau_{sup}}$ en fonction de $\tilde{S}_{sup} \tilde{q}^{\nu_{sup}}$, pour les agrégats de régions au dessus du seuil.

du bas à $\sigma_\kappa = 1$ et $\sigma_G = 0.1$. Comme nous pouvons le constater, les exposants τ_{inf} et ν_{inf} ne semblent pas dépendre de α , σ_κ ou σ_G . De plus, contrairement à leur rapport d'aspect, la distribution de taille des agrégats et leur taille de coupure ne semble pas dépendre de la condition $\sigma_\kappa > \sigma_G$ ou $\sigma_\kappa \leq \sigma_G$.

Nous traçons maintenant les mêmes courbes pour les agrégats de régions *au dessus* du seuil. Sur la figure 5.28, nous traçons, à gauche, la distributions de probabilité de présence $P(\tilde{S})$ pour différentes pressions. En sous-figure la taille de coupure des agrégats est représentée en fonction de la pression moins la pression de percolation. Nous traçons à droite les probabilités renormalisées selon les équations (5.12) et (5.13), et la courbe maitresse donnée par l'équation (3.1). Comme nous pouvons le constater, cette fois, les exposants régissant la distribution et la taille de coupure *en dessus* sont les mêmes que pour les agrégats de régions *en dessous* du seuil : $\tau_{sup} = 1.5 \pm 0.05$ et $\nu_{sup} = 2.6 \pm 0.05$.

Enfin, nous traçons sur la figure 5.29, comme pour les agrégats de régions *en dessous* du seuil, les courbes renormalisées de distributions de probabilité pour différents jeux de valeur de σ_κ , σ_G et α . Plus précisément, la première colonne correspond à $\alpha = 0.25$ et la seconde à $\alpha = 0.5$. Les lignes correspondent à $(\sigma_\kappa, \sigma_G) = (0.1; 1)$, $(1; 1)$ et $(1; 0.1)$. De même que pour les agrégats de régions en dessous du seuil, les exposants τ_{sup} et ν_{sup} ne semblent pas dépendre de α , σ_κ ou σ_G .

Il est intéressant de noter que le changement d'exposant pour la taille de coupure apparait dès lors que $\sigma_\kappa \neq 0$, indifféremment du rapport $\frac{\sigma_G}{\sigma_\kappa}$, ou même lorsque $\sigma_G = 0$. Ceci signifie qu'il ne s'agit pas d'un effet de corrélation des champs de pression critique et de perméabilité. Il est possible que cela soit dû à la non-uniformité initiale du champ de vitesse comme décrit précédemment.

Nous regardons de plus, comme pour le cas $\sigma_\kappa = 0$, la dépendance de la taille de coupure $S_{0inf,sup}$ en fonction de la proportion de régions en dessous ou au dessus du seuil. Cette fois-ci cependant, l'exposant δ semble dépendre de σ_κ et σ_G . Comme nous pouvons le constater sur la figure 5.30, à gauche, si $\sigma_G = 0$, δ est symétrique pour les agrégats au dessus et en dessous du seuil, et vaut 0.25, pour $\alpha = 0.25 \pm 0.03$. Pour $\sigma_\kappa = 2$ et $\sigma_G = 1$, avec $\alpha = 0.5$, j'ai trouvé $\delta_{inf} = 4.1$ et $\delta_{sup} = 1.9$. Pour $\sigma_\kappa = 0.1$ et $\sigma_G = 1$, $\delta_{sup} = \delta_{inf} = 3.3$, avec $\alpha = 0.5$. Pour $\sigma_\kappa = 0.01$ et $\sigma_G = 1$, $\delta_{sup} = \delta_{inf} = 3.3$, avec $\alpha = 0.5$. Il semble donc que sous certaines conditions, l'exposant δ soit symétrique pour les régions en dessous et au dessus du seuil. De plus, il semblerait que pour $\alpha = 0.5$, $\delta_{inf} + \delta_{sup}$ vaille aux alentours de 6.

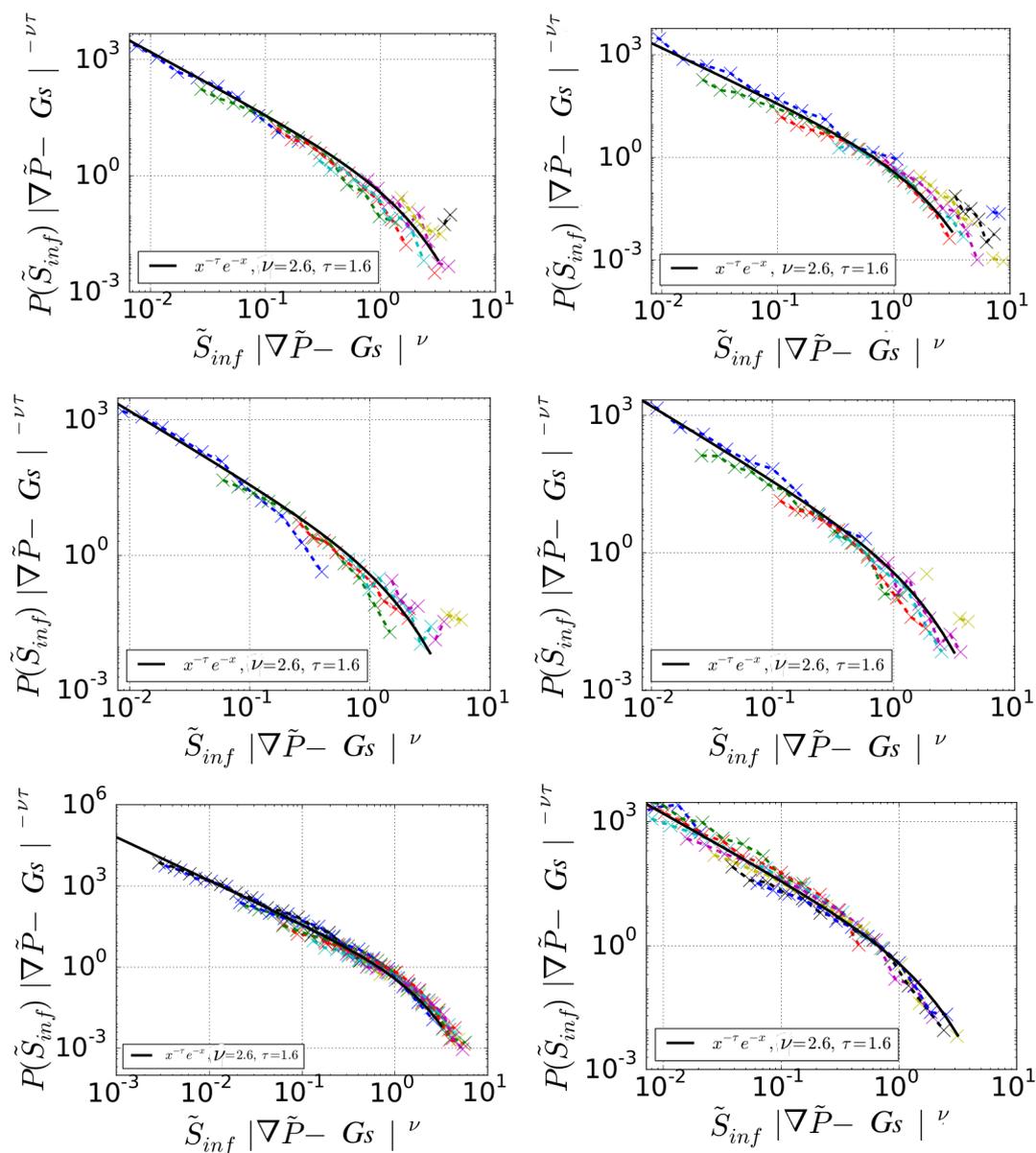


FIGURE 5.27 – Colonne de gauche : distribution de probabilité et taille des agrégats de région en dessous du seuil normalisée $P(\tilde{S}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{inf} \tau_{inf}}$ pour $\alpha = 0.25$. Colonne de droite : distribution de probabilité et taille des agrégats de région en dessous du seuil normalisée $P(\tilde{S}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{inf} \tau_{inf}}$ pour $\alpha = 0.5$. Première ligne : $[\sigma_\kappa, \sigma_G] = [0.1, 1]$. Deuxième ligne : $[\sigma_\kappa, \sigma_G] = [1, 1]$. Troisième ligne : $[\sigma_\kappa, \sigma_G] = [1, 0.1]$. Sur chaque figure, la ligne continue correspondant à l'ajustement effectué avec l'équation (5.12).

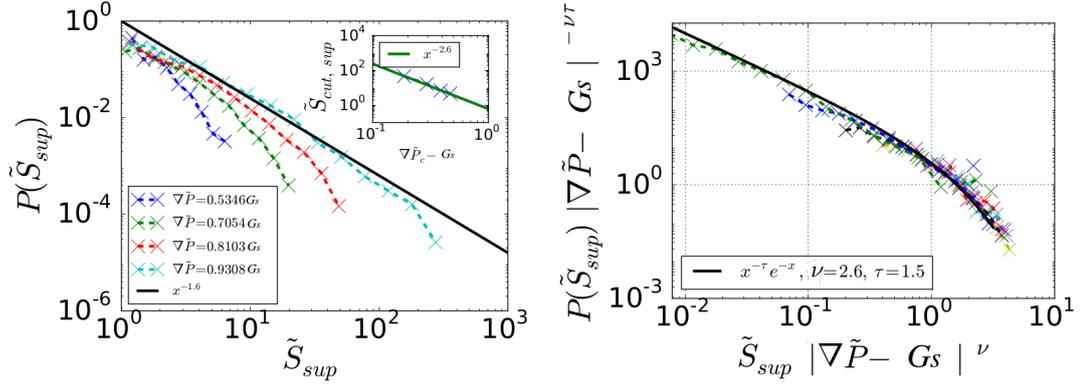


FIGURE 5.28 – À gauche : distribution de probabilité en fonction de la taille des agrégats $P(\tilde{S}_{sup})$ et, en sous-figure, taille de coupure des agrégats en fonction du débit, $\tilde{S}_{0sup}(\tilde{q})$, pour les agrégats de régions au dessus du seuil. À droite : distribution de probabilité de taille des agrégats normalisée $P(\tilde{S}_{sup}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{sup}\tau_{sup}}$ en fonction de $\tilde{S}_{sup} \tilde{q}^{\nu_{sup}}$, pour les agrégats de régions au dessus du seuil.

Résultats importants :

— La surface des agrégats suit une loi de puissance avec une coupure exponentielle. L'exposant est le même pour les régions en dessous et au dessus du seuil, et ne dépend pas de σ_κ :

$$P(\tilde{S}) \propto \tilde{S}^{\tau_{f,inf,sup}} e^{-\tilde{S}/\tilde{S}_0}, \quad \tau_f = 1.5 \pm 0.1 \quad (5.16)$$

— La taille de coupure des agrégats suit la pression imposée comme une loi de puissance. L'exposant peut différer entre les agrégats en dessous et au dessus du seuil. De plus, on constate qu'il dépend de σ_κ :

$$\tilde{S}_0 \propto |\nabla \tilde{P} - G_l|^{\gamma_{f,inf,sup}}(\nu_{inf}, \nu_{sup}) = \begin{cases} (1.6 \pm 0.05, 3.6 \pm 0.05) & \text{si } \sigma_\kappa = 0 \\ (2.6 \pm 0.05, 2.6 \pm 0.05) & \text{si } \sigma_\kappa \neq 0 \end{cases},$$

— La taille de coupure dépend de la proportion des régions dans un régime relativement à la proportion critique, selon une loi de puissance :

$$\tilde{S}_{0sup,inf} \propto (n_C - n_{inf,sup})^{\delta_{inf,sup}},$$

Cependant, la dépendance de $\delta_{inf,sup}$ en α , σ_κ et σ_G reste obscure.

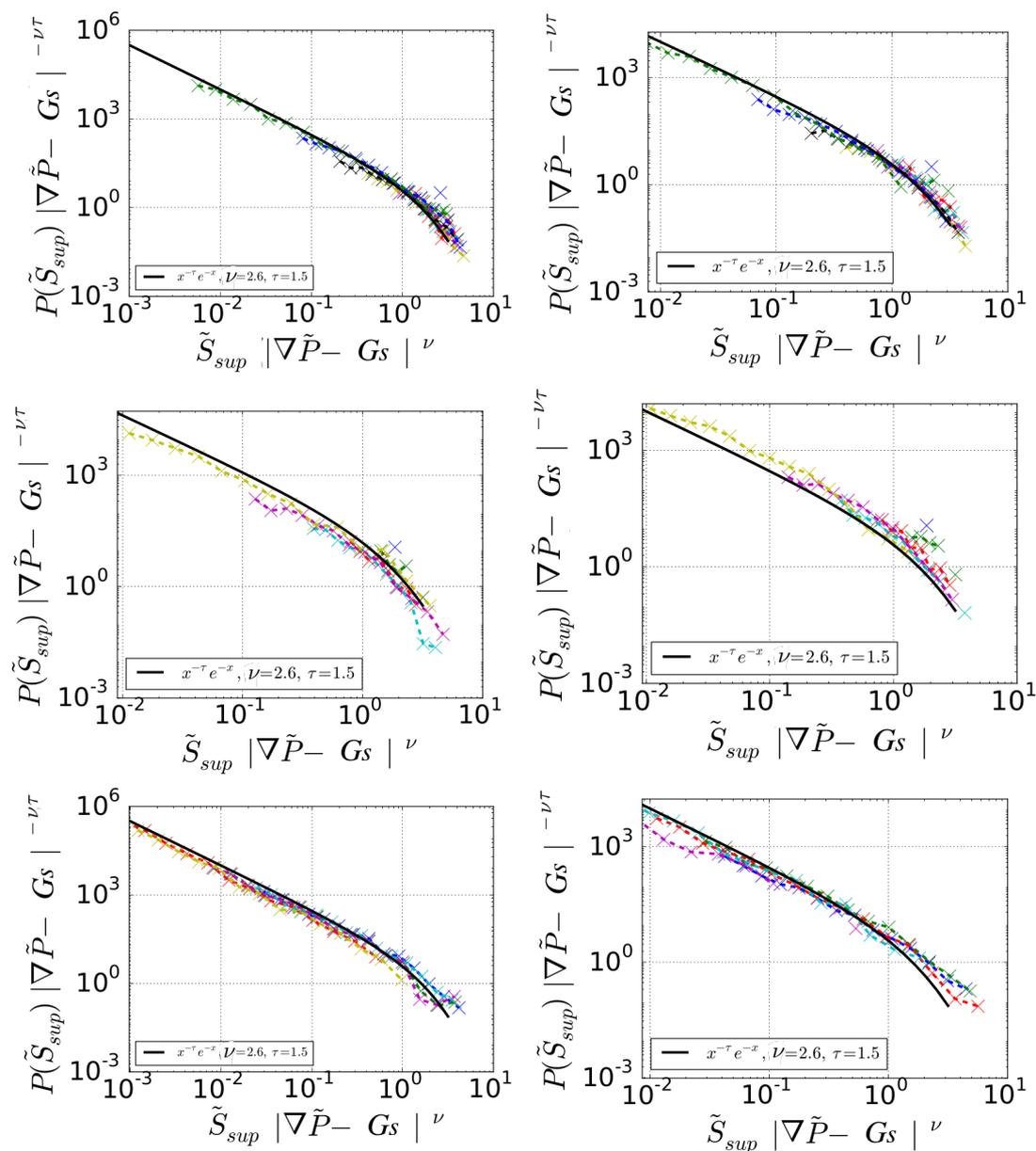


FIGURE 5.29 – Colonne de gauche : distribution de probabilité et taille des agrégats de région au dessus du seuil normalisée $P(\tilde{S}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{sup}\tau_{sup}}$ pour $\alpha = 0.25$. Colonne de droite : distribution de probabilité et taille des agrégats de région au dessus du seuil normalisée $P(\tilde{S}) \cdot \tilde{q}^{-\nu_{sup}\tau_{sup}}$ pour $\alpha = 0.5$. Première ligne : $[\sigma_\kappa, \sigma_G] = [0.1, 1]$. Deuxième ligne : $[\sigma_\kappa, \sigma_G] = [1, 1]$. Troisième ligne : $[\sigma_\kappa, \sigma_G] = [1, 0.1]$. Sur chaque figure, la ligne continue correspondant à l'ajustement effectué avec l'équation (5.12).

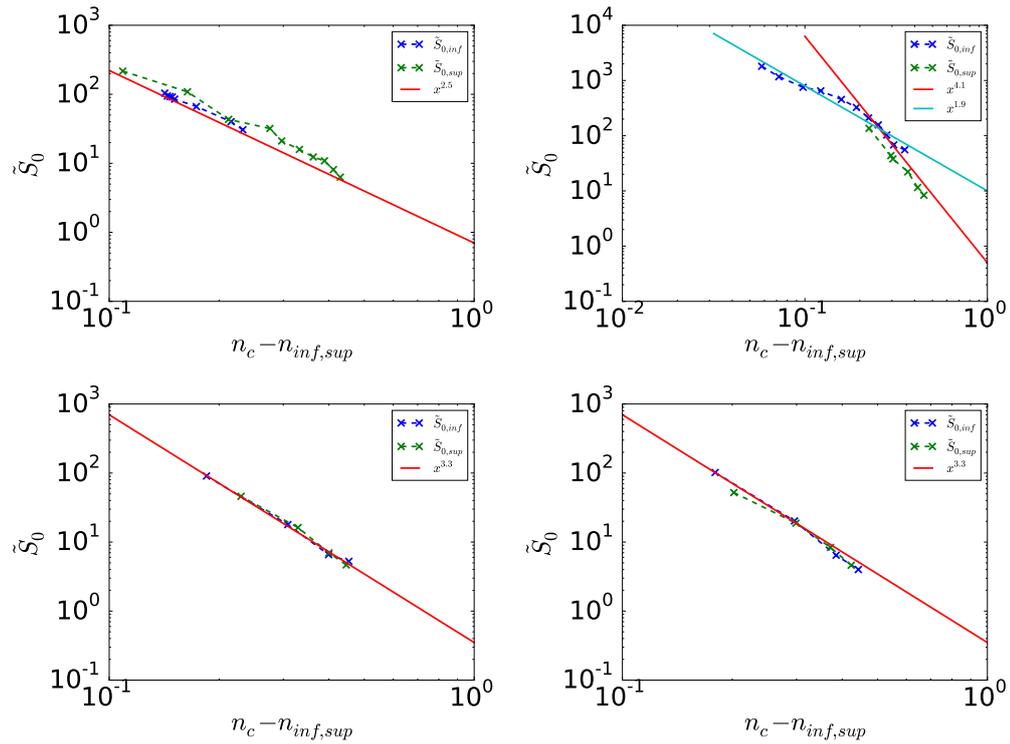


FIGURE 5.30 – Taille de coupure en fonction de la proportion de régions dans chaque régime, pour différents jeux de $(\alpha, \sigma_\kappa, \sigma_G)$ ((0.25, 1, 0) en haut à gauche, (0.5, 2, 1) en haut à droite, (0.5, 0.1, 1) en bas à gauche, (0.5, 0.01, 1) en bas à droite)

5.4.2.3 Discussion

Nous avons montré que la distribution de taille des agrégats suit une loi de puissance, couplée à une coupure exponentielle. Comme nous l'avons vu, l'exposant liant la taille de coupure des agrégats à la pression, et celui liant la taille de coupure à la proportion de régions ouvertes, se comportent différemment. L'exposant lié à la proportion de régions dans un régime ne dépend pas du régime en question, de α , σ_κ ou σ_G , ce qui suggère qu'il s'agit du bon paramètre pour étudier cet écoulement. Cependant, un inconvénient de ce paramètre est qu'il n'est pas contrôlé contrairement à la pression.

L'exposant δ dépend de σ_κ , σ_G et α , et est symétrique selon la transformation $S_{inf} \leftrightarrow S_{sup}$ pour certains paramètres. Dans ces cas de figure, du point de vue de la percolation, les agrégats en dessous et au dessus du seuil se comportent symétriquement. Cependant, dans le cadre de la percolation classique, l'exposant τ_f vaut respectivement $187/91 \simeq 2.05$, alors que dans le cadre du fluide de Carreau, il vaut approximativement 1.5. L'exposant δ , quant à lui, est difficilement comparable à celui de la percolation classique, qui vaut $91/36 \simeq 2.53$. Ainsi, même si la distributions des agrégats obéit à une loi qui semble proche de la percolation classique, nous ne sommes pas dans ce cadre. De plus, l'exposant ζ vaut 0.9 si $\sigma_\kappa = 0$, $\zeta = 0.85$ si $0 < \sigma_\kappa < \sigma_G$, et enfin $\zeta = 1.15$. La dimension fractale des agrégats vaut $D = 1.6$. Les exposants ζ et D sont ainsi relativement proche de ceux de la percolation standard, $\zeta = 1$ et $D = 1.52$.

Le fait que les exposants des lois de distribution de taille des agrégats en fonction de la pression (5.12), (5.13) et (5.14), varient en fonction de σ_κ , est intrigant. Effectivement, lorsque $\sigma_\kappa = 0$, la taille de coupure des agrégats de région en dessous du seuil, S_{0inf} décroît plus lentement que S_{0sup} . Ainsi, la distribution de taille des agrégats de régions en dessous du seuil à $\nabla\tilde{P} - G_s$ sera plus large que la distribution de taille des agrégats de régions au dessus du seuil à distance équivalente $G_s - \nabla\tilde{P}$. Cependant, lorsque $\kappa \neq 0$, cette symétrie ré-apparaît.

Un autre effet surprenant est que, contrairement à la forme des agrégats, les exposants étudiés dans cette section ne dépendent pas du rapport $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G}$, en dehors du cas $\sigma_\kappa = 0$. Ainsi, même si les agrégats changent de rapport d'aspect au passage de $\sigma_\kappa < \sigma_G$ à $\sigma_\kappa > \sigma_G$, la distribution de leur taille ne change pas. Ainsi, il semblerait que le rapport $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G}$ modifie uniquement la direction privilégiée de la corrélation.

De la même façon que pour la forme des agrégats, il est surprenant que les exposants ν_{sup} , ν_{inf} et τ_f ne dépendent pas de α , σ_κ ou σ_G , en dehors du cas expliqué plus haut. Effectivement, la vitesse d'un fluide de Carreau dépend de la pression imposée en loi de puissance, et les cartes de perméabilité et de pression seuil sont distribuées selon une loi log-normale. On s'attendrait ainsi à ce qu'une variation de pression affecte différemment la percolation pour différents α , σ_κ ou σ_G .

5.5 Conclusion

Nous avons étudié l'écoulement d'un fluide de Carreau en milieu poreux macroscopique. Nous avons en particulier étudié les propriétés statistiques des régions en régime newtonien et en régime de Carreau. Effectivement, la relation débit-pression lors de la transition entre les régimes asymptotiques ne semble pas présenter de loi particulière qui permettrait de la caractériser, quelque-soit le jeu de paramètres $[\alpha, \sigma_\kappa, \sigma_G]$ utilisé.

Nous avons pu constater que le rapport d'aspect des agrégats suit une loi de puissance $\tilde{W} \propto \tilde{L}^\zeta$, avec $\zeta = 0.90 \pm 0.05$. Pour $0 < \frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} \leq 1$, nous avons $\zeta = 0.85 \pm 0.05$. Pour $\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_G} > 1$, nous avons $\zeta = 1.15 \pm 0.05$. Nous ne nous expliquons pas ce changement brutal de rapport d'aspect. Dans chacun de ces cas, cependant, la dimension fractale des agrégats est la même et vaut 1.6 ± 0.1 , et est proche de celle de la percolation standard, 1.52.

Nous avons de plus pu constater que la distribution de taille des agrégats suit des lois similaires à celles de la percolation, avec cependant des différences d'exposants. Il s'avère en particulier que la proportion des régions dans un régime prédit souvent, mais pas toujours, plus efficacement le comportement des tailles d'agrégats, que la pression imposée.

Enfin, contrairement au fluide de Bingham, il n'existe pas de chemins d'écoulement préférentiels concentrant la majorité du fluide en écoulement lorsque le fluide change de régime. Cependant, si l'on fait tendre la viscosité initiale vers des valeurs très grandes, on peut s'attendre à retrouver un tel comportement, car il y aurait alors un contraste de viscosité suffisamment grand pour que le fluide s'écoule majoritairement, voire uniquement, dans les régions en régime de Carreau.

Chapitre 6

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié les écoulements non newtoniens en milieu poreux macroscopique. Nous avons commencé par une étude mathématique de l'équation de Darcy pour un fluide de Bingham, et pour des fluides de Carreau. En particulier, nous avons montré que les asymptotes de la relation contrainte-taux de déformation prédisait les asymptotes de la loi débit-pression. Nous avons de plus montré que dans ces régimes asymptotiques, le rapport entre le débit et la distribution de vitesse est invariant avec la pression. Enfin, nous avons montré que lorsqu'un fluide s'écoule dans un milieu poreux bidimensionnel, si sa relation contrainte-taux de déformation est inversible, alors il existe l'équivalent d'un écoulement de rhéologie inverse dans la direction orthogonale à l'écoulement.

J'ai ensuite étudié l'écoulement d'un fluide de Bingham en milieu poreux macroscopique. Cette étude fait suite à celle de Thibault Chevalier, qui a entre autres étudié le régime transitoire d'un écoulement de fluides à seuil dans des réseaux de canaux, soit l'échelle microscopique. Aux deux échelles, lors de la transition entre les deux régimes asymptotiques d'un fluide à seuil, le fluide s'écoule au travers de chemins préférentiels.

J'ai d'abord montré qu'à l'échelle macroscopique, la relation débit-pression diffère de celle à l'échelle du pore. Chevalier *et al.* a montré qu'à l'échelle du pore, cette relation est quadratique, du fait de l'augmentation linéaire de la vitesse dans les canaux avec la pression, et du fait de l'augmentation linéaire du nombre de canaux avec la pression. J'ai montré qu'à l'échelle macroscopique, si nous avons aussi ces deux phénomènes, un troisième s'ajoute : l'augmentation de la largeur des canaux avec la pression.

Il est important de remarquer que dans mon étude, lorsque le fluide d'une région s'écoule, il se trouve localement directement dans le régime asymptotique linéaire. On néglige ainsi le régime de transition microscopique où le débit dépend quadratiquement de la pression sur une certaine plage. Il serait intéressant, pour de futures études, de tenter de prendre ce régime en compte, par exemple en l'utilisant

dans les lois constitutives du fluide.

Nous avons de plus montré qu'aux deux échelles, le comportement exact de ces chemins peut être caractérisé par les statistiques des agrégats de régions à l'arrêt. Effectivement, les agrégats étant délimités par les chemins d'écoulement, la distribution de taille des agrégats est représentative de la distribution de longueur de chemin séparant deux intersection de chemins. De plus, la forme des agrégats correspond à la forme des chemins d'écoulement. Toutes les tailles d'agrégats en dessous d'une taille de coupure sont représentées. Leur distribution de taille obéit à :

$$P(\tilde{S}) \propto \tilde{S}^{\tau_f} e^{-S/S_0} \quad (6.1)$$

$$S_0 \propto \tilde{q}^{\gamma_f} \quad (6.2)$$

Cependant, l'exposant τ_f diffère aux deux échelles. Les agrégats sont ainsi répartis différemment aux deux échelles. Si l'exposant γ_f est inchangé, il faut remarquer que cet exposant est exprimé pour le débit, qui varie différemment avec la pression aux deux échelles, ce qui signifie alors que la taille de coupure dépend différemment de la pression aux deux échelles.

Cependant, il faut rappeler que la relation débit-pression est la conséquence, aux deux échelles, d'une augmentation linéaire du nombre de chemins et de la vitesse dans chaque chemin avec la pression, et d'un troisième à l'échelle macroscopique, l'augmentation de la largeur des chemins avec la pression. Or, on peut supposer que le nombre de chemins est le facteur déterminant de la taille de coupure. Une des solutions pour étudier cette hypothèse, serait de faire varier la viscosité associée au terme de Brinkman. Effectivement, plutôt que de se placer dans le cas où la diffusion visqueuse est maximale en prenant $\mu_B = \mu_0$, il est possible de choisir que cette diffusion visqueuse suive la viscosité effective du fluide μ_{eff} , voire qu'elle soit nulle. Cela affecterait alors l'élargissement des canaux avec la pression, et donc la relation débit-pression.

Il est aussi probablement possible de déterminer la valeur du terme de Brinkman en simulant l'écoulement d'un fluide à seuil dans de très grands réseaux de pores. Effectivement, il serait alors possible de virtuellement diviser ce réseau en plusieurs plus petits sous-réseaux, auxquels on pourrait attribuer une perméabilité. On étudierait ainsi l'écoulement d'un fluide à seuil en milieu poreux mésoscopique, en ayant accès aux deux échelles de mesure.

Enfin, nous avons montré qu'aux deux échelles, la forme moyenne des agrégats suit une courbe définie par $x^\zeta(1-x)^\zeta$, quelle que soit leur longueur, et que le rapport d'aspect des agrégats suit une loi de puissance de même exposant $\tilde{W} \propto \tilde{L}^\zeta$, bien que cet exposant varie entre les échelles.

Il serait possible d'étudier les phénomènes d'advection-diffusion lors de ce régime transitoire. Effectivement, l'existence de chemins d'écoulements et de région

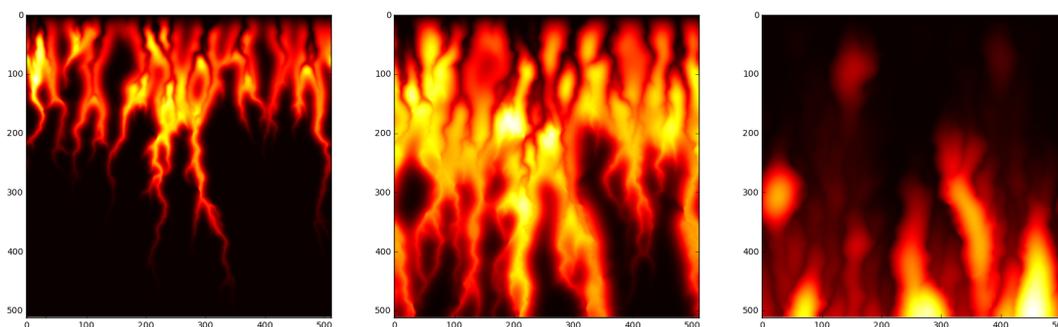


FIGURE 6.1 – Carte de concentration d’un traceur déplacé par l’écoulement d’un fluide à seuil en milieu poreux macroscopique, à trois instants différents, dans l’ordre chronologique. Plus la couleur est claire, plus le traceur est concentré.

à l’arrêt distingue les régions d’advection majoritaire de celles de diffusion majoritaire, comme illustré sur la figure 6.1. Sur cette figure, j’ai tracé trois cartes de concentration d’un dépôt initial d’un traceur déplacé dans le même milieu, à trois instants différents. Nous pouvons constater que le traceur est rapidement déplacé en certains endroits, qui sont les chemins d’écoulement. Ailleurs, le traceur diffuse dans les régions à l’arrêt. Nous pouvons constater sur la troisième image que le traceur, en majorité advecté, laisse cependant des traces dans les régions à l’arrêt, qui diffusent alors le traceur qu’elle contiennent avec le temps, et créent ainsi un décalage en temps dans la sortie du traceur du système. Cela pourrait créer des phénomènes intéressants à étudier.

Enfin, j’ai étudié l’écoulement transitoire de fluides de Carreau en milieu poreux macroscopiques, avec la même méthode que le fluide de Bingham. Cette fois-ci cependant, j’ai fait varier de façon indépendante l’ampleur du désordre de la carte de perméabilité, et celle de la carte de pression seuil. J’ai plus particulièrement étudié la répartition de taille, la forme, et la dimension fractale des régions dans les différents régimes d’écoulement.

Je n’ai pas pu caractériser la relation débit-pression de façon satisfaisante, en raison de la complexité du régime de transition. Cependant, comme pour le fluide de Bingham, la taille des régions étudiées suit une loi de puissance, avec une taille de coupure qui dépend exponentiellement de l’écart entre la pression appliquée, et la pression de percolation. J’ai en particulier comparé les exposants des lois en question en fonction des jeux de paramètres utilisés, et montré certaines invariances. En particulier, aucun exposant ne dépend de l’exposant de Carreau, qui régit la rhéofluidification. Enfin, l’existence d’une distribution de tailles de régions dans deux régimes différents, comme pour le fluide de Bingham, crée un cadre intéressant

pour l'étude de cas d'advection-diffusion, puisque certaines régions transporteront le traceur plus vite que d'autres.

J'ai de plus caractérisé le rapport d'aspect des régions avec leur taille. Mon échantillon ne m'a pas permis, cependant, de déterminer leur forme, et cela pourra être complété par des études ultérieures. J'ai cependant pu constater que la direction dans laquelle les régions se corrèlent entre elles, et donc le rapport d'aspect des régions, dépend du rapport entre l'ampleur du désordre de la carte de perméabilité, et celle de la carte de pression seuil. En particulier, lorsque la première dépasse la seconde, les régions se corrèlent dans le sens orthogonal à l'écoulement, ce qui est grandement contre-intuitif, puisque la diminution de viscosité, et donc l'augmentation de vitesse correspondante, augmente la vitesse du fluide en amont et en aval de la région en régime de Carreau.

Il serait enfin intéressant de poursuivre ces études sur les fluides non newtoniens en milieux poreux, et de les approfondir par exemple en simulant des écoulements tri-dimensionnels, afin de comparer les lois obtenues en deux et trois dimensions.

-
- [1] C. K. Aidun and J. R. Clausen. Lattice-boltzmann method for complex flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 42(1) :439–472, 2010.
- [2] T. Al-Fariss and K. L. Pinder. Flow through porous media of a shear-thinning liquid with yield stress. *Can. J. Chem. Eng.*, 65(3) :391–405, 1987.
- [3] A. Ambari, M. Benhamou, S. Roux, and E. Guyon. Distribution des tailles de pores d’un milieu poreux déterminée par l’écoulement d’un fluide à seuil. *Comptes rendus de l’Académie des sciences. Série 2, Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l’univers, Sciences de la Terre*, 311(11) :1291–1295, 1990. fre.
- [4] A. A.-S. S. L.-F. M. Antonio Rodriguez de Castro, Abdelaziz Omari. Characterizing porous media with the yield stress fluids porosimetry method. *Transport in Porous Media*, 114(1) :213–233, 2016.
- [5] G. Barenblatt, V. Entov, and V. Ryzhik. *Theory of fluid flows through natural rocks*. Norwell, MA (USA); Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [6] Bassom and D. A. S. Rees. Unsteady thermal boundary layer flows of a bingham fluid in a porous medium. *International journal of heat and mass transfer*, 82 :460–467, 2015.
- [7] Bedrikovetsky. Principles of oil and gas production. *Kluwer Academic Publishers*,, 1995.
- [8] B. Berkowitz, J. Klafter, R. Metzler, and H. Scher. Physical pictures of transport in heterogeneous media : Advection-dispersion, random-walk, and fractional derivative formulations. *Water Resour. Res.*, 38(10) :1191–, 2002.
- [9] H. Brinkman. A calculation of the viscous forces exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles. *Appl. Sci. Res.*, sect A1 :27–39, 1947.
- [10] G. Chase and P. Dachavijit. A correlation for yield stress fluid flow through packed beds. *Rheologica Acta*, 44(5) :495–501, 2005.
- [11] G. Chauveteau. Rodlike polymer solution flow through fine pores : Influence of pore size on rheological behavior. *Journal of Rheology*, 26(2) :111–142, 1982.
- [12] C.-Y. Chen and E. Meiburg. Miscible porous media displacements in the quarter five-spot configuration. Part 2. Effects of heterogeneities. *J. Fluid Mech.*, 371 :269–299, 1998.
- [13] T. Chevalier. *Écoulements de fluides à seuil en milieux confinés*. PhD thesis, UNIVERSITÉ PARIS–EST, 2013.
- [14] T. Chevalier, C. Chevalier, X. Clain, J. Dupla, J. Canou, S. Rodts, and P. Coussot. Darcy’s law for yield stress fluid flowing through a porous medium. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 195(0) :57 – 66, 2013.

- [15] T. Chevalier, S. Rodts, C. Chevalier, and P. Coussot. Quantitative exploitation of pfg nmr and mri velocimetry data for the rheological study of yield stress fluid flows at macro- and micro-scales in complex geometries. *Exp Fluids*, 56(1) :1868, 2015.
- [16] T. Chevalier, D. Salin, L. Talon, and A. G. Yiotis. History effects on nonwetting fluid residuals during desaturation flow through disordered porous media. *Phys. Rev. E*, 91 :043015, Apr 2015.
- [17] T. Chevalier and L. Talon. Generalization of Darcy’s law for Bingham fluids in porous media : From flow-field statistics to the flow-rate regimes. *Phys. Rev. E*, 91 :023011, Feb 2015.
- [18] T. Chevalier and L. Talon. Moving line model and avalanche statistics of Bingham fluid flow in porous media. *Eur. Phys. J. E.*, 38 :76, 2015.
- [19] S. K. Choi, Y. M. Ermel, S. L. Bryant, C. Huh, and M. M. Sharma. Transport of a ph-sensitive polymer in porous media for novel mobility-control applications. pages –, 2006.
- [20] S. M. Christian Miehe. Phase field modeling of fracture in multi-physics problems. part iii. crack driving forces in hydro-poro-elasticity and hydraulic fracturing of fluid-saturated porous media. *Computational Methods Applied to Mechanical Engineering*, 304 :619–655, 2016.
- [21] G. Dagan. Stochastic modeling of groundwater flow by unconditional and conditional probabilities. 2. The solute transport. *Water Resour. Res.*, 18 :835–848, 1982.
- [22] G. Dagan. Solute transport in heterogeneous porous formation. *J. Fluid. Mech.*, 145 :151–177, 1984.
- [23] A. R. de Castro, A. Omari, A. Ahmadi-Sénichault, and D. Bruneau. Toward a new method of porosimetry : Principles and experiments. *Transp. Porous Mediaant*, 101(3) :349–364, 2014.
- [24] P. G. De Gennes. Hydrodynamic dispersion in unsaturated porous media. *Journal of Fluid Mechanics*, 136 :189–200, 1983.
- [25] D. d’Humières. Generalized lattice-boltzmann equations, aiaa rarefied gas dynamics : theory and simulations. prog. *Astronaut. Aeronaut. v59*, pages 450–548, 1992.
- [26] D. d’Humières, I. Ginzburg, M. Krafczyk, P. Lallemand, and L.-S. Luo. Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann models in three dimensions. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 360(1792) :437, 2002.

-
- [27] S. C. D. M. D.O. Martinez, W.H. Matthaeus. Comparison of spectral method and lattice boltzmann simulations of two-dimensional hydrodynamics. *Physics of Fluids*, 6, 1994.
- [28] L. Durlofsky and J. Brady. Analysis of the Brinkman equation as a model for flow in porous media. *Phys. Fluids*, 30 :3329–3341, 1987.
- [29] V. Entov. On some two-dimensional problems of the theory of filtration with a limiting gradient. *Prikl. Mat. Mekh.*, 31 :820–833, 1967.
- [30] B. J. F.-A. E. B. J. R. d. B. Felix K. Oppong, Laurent Rubatat. Microrheology and structure of a yield-stress polymer gel. *Physical Review E*, 73, 2006.
- [31] S. Gabbanelli, G. Drazer, and J. Koplik. Lattice boltzmann method for non-newtonian (power-law) fluids. *Phys. Rev. E*, 72 :046312, Oct 2005.
- [32] L. Gelhar and C. Axness. Three-Dimensional Stochastic Analysis of Macrodispersion in Aquifers. *Water Resour. Res.*, 19 :161–180, 1983.
- [33] H. Giesche. Mercury porosimetry : A general (practical) overview. *Particle and Particle Systems Characterization*, 23 :9–19, 2006.
- [34] I. Ginzburg. Consistent lattice boltzmann schemes for the brinkman model of porous flow and infinite chapman-enskog expansion. *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, 77 :066704, 2008.
- [35] I. Ginzburg. Truncation errors, exact and heuristic stability analysis of two-relaxation-times lattice boltzmann schemes for anisotropic advection diffusion equation. *Comm. in Comput. Physics*, to appear.
- [36] I. Ginzburg, G. Silva, and L. Talon. Analysis and improvement of brinkman lattice boltzmann schemes : Bulk, boundary, interface. similarity and distinctness with finite elements in heterogeneous porous media. *Phys. Rev. E*, 91 :023307, Feb 2015.
- [37] I. Ginzburg, F. Verhaeghe, and D. d’Humières. Two-relaxation-time lattice boltzmann scheme : About parametrization, velocity, pressure and mixed boundary conditions. *Commun. Comput. Phys.*, 3 :427–478, 2008.
- [38] Z. Guo and T. Zhao. Lattice boltzmann model for incompressible flows through porous media. *Phys. Rev. E*, 66 :036304, 2002.
- [39] E. Guyon, S. Roux, A. Hansen, D. Bideau, J. P. Troadec, and H. Crapo. Non-local and non-linear problems in the mechanics of disordered systems : application to granular media and rigidity problems. *Reports on Progress in Physics*, 53(4) :373, 1990.
- [40] F. J. Higuera, S. Succi, and R. Benzi. Lattice gas dynamics with enhanced collisions. *Europhysics Letters (EPL)*, 9(4) :345–349, jun 1989.

- [41] D. d. Irina Ginzburg, Frederik Verhaeghe. Two-relaxation-time lattice boltzmann scheme : About parametrization, velocity, pressure and mixed boundary conditions. *Commun. Comput. Phys*, 3(2) :427–478, 2008.
- [42] J.-C. R. Y. Z. J. Zhang, W.B. Standifird. Stress-dependant fluid flow and permeability in fractured media : from lab experiments to engineering applications. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 40(1) :3–21, 2007.
- [43] M. P. C. James R. Rice. Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents. *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 1976.
- [44] M. Kardar and Y.-C. Zhang. Scaling of directed polymers in random media. *Phys. Rev. Lett.*, 58 :2087–2090, May 1987.
- [45] K. Kawagoe, G. Huber, M. Pradas, M. Wilkinson, A. Pumir, and E. Ben-Naim. Aggregation-fragmentation-diffusion model for trail dynamics. *Phys. Rev. E*, 96 :012142, Jul 2017.
- [46] A. Lavrov. Flow of truncated power-law fluid between parallel walls for hydraulic fracturing applications. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, pages 141–146, 2015.
- [47] R. Lenormand and S. Bories. Description of a bond percolation mechanism used for the simulation of drainage with trapping in porous-media. *Comptes Rendus Hebdomadaires Des Seances De L Academie Des Sciences Serie B*, 291(12) :279–282, 1980.
- [48] T. Z. F. D. M. Breuer, J. Bernsdorf. Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods : lattice-boltzmann and finite-volume. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21 :186–196, 2000.
- [49] O. Malaspinas, N. Fiétier, and M. Deville. Lattice boltzmann method for the simulation of viscoelastic fluid flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(23-24) :1637–1653, Dec. 2010.
- [50] G. Matheron and G. De Marsily. Is transport in porous media always diffusive? a counterexample. *Water Resour. Res*, 16(5) :901–917, 1980.
- [51] A. F. Michel Fortin. A new approach for the fem simulation of viscoelastic flows. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, pages 285–310, 1989.
- [52] I. Neuweiler, S. Attinger, W. Kinzelbach, and P. King. Large scale mixing for immiscible displacement in heterogeneous porous media. *Transport in Porous Media*, 51 :287–314, 2003.
- [53] B. Noetinger, V. Artus, and L. Ricard. Dynamics of the water ?oil front for

-
- two-phase, immiscible flow in heterogeneous porous media. 2? isotropic media. *Transport in Porous Media*, 56 :305–328, 2004.
- [54] H. J. M. Oguz K. Basskurt. Blood rheology and hemodynamics. *Semin Thromb Hemost*, 29(5) :435–450, 2003.
- [55] M. Ohta, T. Nakamura, Y. Yoshida, and Y. Matsukuma. Lattice boltzmann simulations of viscoplastic fluid flows through complex flow channels. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(7-8) :404–412, Apr. 2011.
- [56] C. Pan, L.-S. Luo, and C. T. Miller. An evaluation of lattice boltzmann schemes for porous medium flow simulation. *Computers & Fluids*, 35 :898 – 909, 2006.
- [57] T. C. Papanastasiou. Flows of materials with yield. *Journal of Rheology*, 31(5) :385–404, 1987.
- [58] H. Pascal. Nonsteady flow through porous media in the presence of a threshold gradient. *Acta mechanica*, 39 :207–224, 1981.
- [59] C. R. P.J. Fryer, D.L. Pyle, editor. *Chemical Engineering for the Food Industry*. Springer Science & Business Media, 1997.
- [60] W. R. Rossen. Theory of mobilization pressure gradient of flowing foams in porous media : I. incompressible foam. *J. Colloid Interface Sci.*, 136(1) :1 – 16, 1990.
- [61] W. R. Rossen. Theory of mobilization pressure gradient of flowing foams in porous media : Ii. effect of compressibility. *J. Colloid Interface Sci.*, 136(1) :17 – 37, 1990.
- [62] W. R. Rossen. Theory of mobilization pressure gradient of flowing foams in porous media : Iii. asymmetric lamella shapes. *J. Colloid Interface Sci.*, 136(1) :38 – 53, 1990.
- [63] A. Roustaei, T. Chevalier, L. Talon, and I. A. Frigaard. Non-Darcy effects in fracture flows of a yield stress fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 805 :222–261, 10 2016.
- [64] S. Roux and E. Guyon. Temporal development of invasion percolation. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 22(17) :3693, 1989.
- [65] S. Roux and H. J. Herrmann. Disorder-induced nonlinear conductivity. *Europhys. Lett.*, 4(11) :1227, 1987.
- [66] Y. Rubin. Stochastic modeling of macrodispersion in heterogeneous porous media. *Water Resour. Res.*, 26 :133–141, 1990.
- [67] M. J. S. P. Sullivan, L. F. Gladden. Simulation of power-law fluid flow through porous media using lattice boltzmann techniques. *Journal of Non-Newtonian*

- Fluid Mechanics*, 133 :91–98, 2006.
- [68] M. Sahimi. *Applications of percolation theory*. CRC Press, 1994.
- [69] D. Stauffer and A. Aharony. *Introduction to percolation theory*. Taylor and Francis, 1991.
- [70] L. Talon and D. Bauer. On the determination of a generalized Darcy equation for yield-stress fluid in porous media using a lattice-Boltzmann trt scheme. *Eur. Phys. J. E*, 36(12) :1–10, 2013.
- [71] L. Talon, J. Martin, N. Rakotomalala, and D. Salin. Stabilizing viscosity contrast effect on miscible displacement in heterogeneous porous media, using lattice BGK simulations. *Phys. Fluids*, 16 :4408–4411, 2004.
- [72] L. Talon, J. Martin, N. Rakotomalala, D. Salin, and Y. Yortsos. Lattice BGK simulations of macrodispersion in heterogeneous porous media. *Water Resour. Res.*, 39 :1135–1142, 2003.
- [73] A. Vikhansky and I. Ginzburg. Taylor dispersion in heterogeneous porous media : Extended method of moments, theory, and modelling with two-relaxation-times lattice boltzmann scheme. *Physics of Fluids (1994-present)*, 26(2) :022104, 2014.
- [74] A. D. Wit and G. M. Homsy. Viscous fingering in periodically heterogeneous porous media. i. formulation and linear instability. *The Journal of Chemical Physics*, 107(22) :9609–9618, 1997.
- [75] A. D. Wit and G. M. Homsy. Viscous fingering in periodically heterogeneous porous media. ii. numerical simulations. *The Journal of Chemical Physics*, 107(22) :9619–9628, 1997.
- [76] C. L. Wolfgang Ehlers. A phase-field approach embedded in the theory of porous media for the description of dynamic hydraulic fracturing. *Computational Methods Applied to Mechanical Engineering*, 315 :348–368, 2017.
- [77] K. W. P.-A. Wu, Y.-S. Pruess. Flow and displacement of bingham non-newtonian fluids in porous media. *Lawrence Berkeley National Laboratory*, 1990.
- [78] T. C. Yiaoyi He, Gary D. Doolen. Comparison of the lattice boltzmann method and the artificial compressibility method for navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 179 :439–451, 2002.
- [79] F. Zami-Pierre, R. de Loubens, M. Quintard, and Y. Davit. Transition in the flow of power-law fluids through isotropic porous media. *Phys. Rev. Lett.*, 117 :074502, Aug 2016.

Titre : Simulation d'écoulements non-newtoniens en milieu poreux macroscopique par la méthode de lattice-Boltzmann

Mots clés : Milieux poreux ; Simulation numérique : Boltzmann sur réseau ; Fluide à seuil ; Fluide de Carreau

Résumé : Un fluide non-newtonien est un fluide dont la relation entre son taux de déformation et la contrainte qui lui est imposé n'est pas linéaire. Dans un milieu poreux, la contrainte imposée au fluide dépend de la pression imposée mais aussi de la taille des pores, et donc de la perméabilité à l'échelle macroscopique. Certains fluides peuvent avoir une rhéologie qui présente un changement à partir d'un seuil en contrainte. Si la taille des pores est aléatoire, le fluide va alors changer de régime de façon hétérogène dans le milieu. L'écoulement pourra alors présenter un premier régime où tout le fluide est en dessous du seuil, un régime où tout le fluide est au dessus du seuil, et un régime intermédiaire pour lequel les deux types de rhéologie coexistent.

Nous nous intéressons à ce régime intermédiaire pour des écoulements de fluide non-newtonien en milieu poreux macroscopique, étudiés par des simulations. Plus particulièrement, nous regardons l'écoulement d'un fluide de Bingham et celui d'un fluide de Carreau. Le fluide de Bingham ne s'écoule qu'à partir d'une contrainte seuil. En dessous du seuil,

il se comporte comme un solide. Au delà, sa relation taux de déformation/contrainte suis une loi affine. Les fluide de Carreau ont une relation taux de déformation/contrainte qui change de régime entre une loi linéaire et une loi de puissance. L'étude à l'échelle macroscopique se fait en simulant une loi de Darcy-Brinkman dans un champ de perméabilité hétérogène. Nous utilisons pour nos simulations la méthode de Boltzmann sur réseau, avec une grille de nœuds régulière, plus particulièrement le schéma à deux temps de relaxation d'Irina Ginzburg.

Pour chaque fluide, nous regardons la relation débit-pression, ainsi que les propriétés géométriques des différents régimes d'écoulement. Nous caractérisons plus particulièrement les propriétés multi-échelles des régions dans un le même régime d'écoulement (clusters), telles que leur taille ou leur forme. Nous faisons aussi le lien entre ces propriétés géométriques et la théorie de la percolation, qui étudie le comportement de cartes de nœuds s'ouvrant aléatoirement et qui prédit des propriétés fractales.

Title : Simulation of non-newtonian flows in macroscopic porous media with the lattice-Boltzmann method

Keywords : Porous media ; Numerical simulation: Lattice-Boltzmann ; Yield-stress fluid ; Carreau fluid

Abstract : A non-newtonian fluid is a fluid which relation between it's shear rate and the stress under which it is put, is not linear. In a porous medium, the stress imposed to the fluid depends on the imposed pressure, but also on the pores size, and therefore on the macroscopic scale permeability. Some fluids have a rheology such that the fluid show a change of behaviour reaching a yield stress. If the pore size is random, then the fluid will present heterogeneous regime changes in the medium. The flow will then show a first regime where the whole fluid will be under the threshold, a regime where the whole fluid will be far above the threshold, and a intermediate regime for which both rheologies coexists.

We are interested in interdmediate regime for the flow of non-newtonian fluids in macroscopic porous media, and study it with numerical simulations. More particularly, we look at the flow of a Bingham fluid and that of a Carreau fluid. The Bingham fluid doesn't flow

under a yield stress. Under the threshold, it behaves as a solid. Beyond, it's shear-rate/stress relation is an affine law. Carreau fluids have a shear-rate/stress relation that change regime between that of a newtonian fluid, and a power law. The macroscopic scale study is done simulating a Darcy-Brinkman law in a heterogeneous permeability field. We use for our simulations the lattice-Boltzmann method, on a regular node grid, and more specifically Irina Ginzburg two relaxation-time scheme.

For each fluid, we study the flow-pressure relationship, as well as the geometric properties and the multi-scale properties in the fluid regions in the same flow regime (clusters), properties such as their size and shape. We also link these geometrical properties to the percolation theory, which studies the behaviour of randomly opening node maps and predicts fractal properties.

