HAL
open science

Théorie mathématique du transport topologique dans des modèles unitaires sur réseaux

Mohamed Mouneime M'Madi Issimail

To cite this version:

Mohamed Mouneime M'Madi Issimail. Théorie mathématique du transport topologique dans des modèles unitaires sur réseaux. Physique mathématique [math-ph]. Université de Toulon; Ecole nationale d'enseignement supérieur des Comores, 2019. Français. NNT : 2019TOUL0015 . tel-02503119

HAL Id: tel-02503119

https://theses.hal.science/tel-02503119v1

Submitted on 9 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée en vu d'obtenir le diplôme de

Doctorat en Mathématique
Théorie mathématique du transport topologique pour des modèles unitaires sur réseaux

MOHAMED MOUNEIME M'MADI ISSIMAIL

Dirigé par

JOACHIM ASCH

Jury :

WALTER H ASCHBACHER : Président du jury (*Université de Toulon*)
ALAIN JOYE : Rapporteur (*Université de Grenoble Alpes*)
OLIVIER BOURGET : Rapporteur (*Pontificia Universidad Católica de Chile*)
JOACHIM ASCH : Directeur de thèse (*Université de Toulon*)
ANNALISA PANATI : Examinatrice (*Université de Toulon*)
MOHAMED HOUSSEINE ABDOU : Co-encadreur (*Université des Comores*)
VOJKAN JAKSIC : Examinateur (*McGill University*)

11 décembre 2019

Table des matières

1 Introduction **4**

2 Analyse spectrale de deux types de marches quantiques unidimensionnelles **8**
2.1 Quelques résultats spectraux concernant une marche quantique simple 8
2.2 Étude spectrale pour une marche quantique à pas séparés 13

3 Preuve de la conjecture de Kitagawa et al. **17**
3.1 Le degré d'un lacet 18
3.2 Théorie de Fredholm 23
3.2.1 Opérateur et indice de Fredholm 23
3.2.2 Théorème d'indice pour les opérateurs de Toeplitz 27
3.3 Valeurs propres stables pour des opérateurs auto-adjoints à symétrie chirale 29
3.4 Preuve de la conjecture de Kitagawa et al. 33

4 Analyse spectrale et indice non trivial sur une bande du graphe rubis **36**
4.1 Opérateur du graphe rubis 37
4.2 Analyse spectrale 40
4.3 Théorie de l'indice d'une paire de projecteurs 47
4.4 Spectre absolument continu stable sur un modèle d'une bande du graphe rubis 51

5 Exemples de courants quantiques stables **58**
5.1 Introduction 59
5.2 Transport on the Ruby graph 60
5.3 Edge current in two dimensional spin-1/2 Quantum Walks 69
5.4 General results on the flux operator Φ 74

A Appendice **78**
A.1 Matrices de Pauli 78
A.2 Théorème du degré 79
A.3 Preuve de certains résultats 79

Bibliographie **83**

Chapitre 1

Introduction

Dans cette thèse nous contribuons à la recherche mathématique pour des modèles unitaires sur réseaux par lesquels nous entendons un système dynamique quantique défini par un opérateur unitaire

$$U \text{ sur } \ell^2(\mathbf{G}, \mathbb{C}^d)$$

où $\mathbf{G}$ est un ensemble dénombrable de sommets d'un graphe infini. Les orbites du système sont définies par les itérations :

$$\mathbb{Z} \ni n \mapsto U^n \psi$$

avec $\psi \in \ell^2(\mathbf{G}, \mathbb{C}^d)$ la condition initiale.

Par transport nous entendons l'apparition d'un spectre absolument continu de U. Celui-ci est topologique s'il est paramétré par un indice. Notre objectif est de fournir des définitions et des résultats mathématiques précises et pertinents pour les applications scientifiques.

L'immense activité scientifique actuelle concernant les propriétés de transport topologique trouve peut-être son origine dans la volonté de mettre au point des matériaux tridimensionnels à température ambiante avec des propriétés de conductance dirigées et des résistances négligeables. Ceci est analogue à ce qui est connu pour l'effet Hall quantique qui est un phénomène qui se produit en deux dimensions à basse température en présence d'un champ magnétique intense [41, 43]. Ces matériaux, appelés isolants topologiques, sont isolateurs à l'intérieur et conducteurs à la surface, agissant ainsi comme un câble en plastique épais recouvert d'une couche de métal, sauf que le matériau est en fait le même. L'histoire des isolants topologiques est clairement racontée dans [24].

Alors que les modèles "tight binding" hamiltoniens sont standards pour décrire et analyser les phénomènes physiques, les modèles unitaires que nous considérons

ici ont la caractéristique supplémentaire d'être à bande finie, ce qui signifie que pour un $a > 0$ les éléments de la matrice de U dans une base "naturelle" vérifient :

$$U(x, y) = 0 \text{ pour } |x - y| > a.$$

Un tel unitaire est appelé marche quantique. Le nom trouve son origine dans l'informatique quantique [26], où la marche quantique rencontre beaucoup d'interêt en raison de son rôle dans l'élaboration des algorithmes quantiques et des tests d'efficacité de tels algorithmes,[18, 26, 38, 42].

Une deuxième caractéristique des modèles de réseaux unitaires considérés dans cette thèse est leur dépendance d'une famille dénombrable de matrices de $U(d)$ en tant que paramètres. Cela implique qu'un unitaire de cette classe peut avoir tout comportement spectral et la classe est suffisamment large pour étudier les propriétés de transport topologiques par des indices.

Un modèle particulier de ce type de réseau, très étudié en physique théorique et mathématique, est le modèle de Chalker-Coddigton [2, 3, 12] qui permet de décrire numériquement avec succès les transitions de localisation-délocalisation de l'effet Hall quantique. La topologie de ce modèle a été discutée dans [5]. Un autre modèle unitaire bien étudié est celui de Blatter et Browne qui décrit la dynamique des électrons dans un anneau métallique soumis à une force électromotrice constante, voir [10].

La notion des marches quantiques apparaît dans de nombreux contextes [1, 4, 14, 25, 26, 27, 43]. Elles ont été introduites par Aharonov et al. en 1993 comme l'analogie quantique des marches aléatoires classiques [1], aujourd'hui nous en retrouvons de nombreuses réalisations physiques en laboratoire, voir [31] ainsi que des applications polyvalentes dans divers domaines scientifiques, voir par exemples [13, 22, 33, 42]. De plus, les marches quantiques fournissent également des modèles discrets efficaces utilisés pour étudier les atomes piégés dans des réseaux optiques périodiques, les ions dans des pièges magnétiques convenablement réglés ou les photons polarisés se propageant dans des réseaux de guides d'ondes [25, 40, 43].

Le premier résultat que nous présentons dans cette thèse est la formulation mathématique précise et une preuve concise de la conjecture de Kitagawa et al., voir [27, 28]. Ils ont proposé d'explorer les "phases topologiques" par des marches quantiques unidimensionnelles et bi-dimensionnelles. Pour une marche quantique unidimensionnelle, appelée "marche quantique à pas séparés" et sur la base d'observations numériques, ils ont prédit l'existence d'une valeur propre de module 1 indépendamment des paramètres du modèle tant qu'une symétrie chirale est présente et que certaines conditions asymptotiques sont remplies. Nous appelons cette prédiction "la conjecture de Kiatgawa et al." et nous la précisons au chapitre 3.

En outre, nous avons obtenu trois résultats concernant les propriétés de stabilité

du transport, ce qui signifie ici que le spectre absolument continu de U couvre tout le cercle unité pour une classe de paramètres qui est stable au sens topologique.

Notre deuxième résultat concerne un unitaire défini sur une bande du graphe rubis. L'unitaire provient d'un modèle de Chalker-Coddington sur le graphe Kagomé. La bande est invariante en raison des conditions de chiralités aux bords, ce résultat est une généralisation au graphe rubis de ce qui est connu pour le model classique de Chalker-Coddington sur $\mathbb{Z}^2$, voir [6]. Il est présenté dans le chapitre 4.

Notre troisième résultat est une extension du deuxième à tout le graphe rubis bi-dimensionnel et est valable lorsque certaines conditions de chiralités se maintiennent de manière asymptotique le long d'un chemin sur le graphe. Cela généralise au graphe rubis la récente découverte sur $\mathbb{Z}^2$ de [5].

Notre quatrième résultat fournit une preuve mathématique du transport pour une classe de marche quantique bi-dimensionnelle proposées par Kitagawa et al. Voir [28] pour sa faisabilité technique. Cela a été réalisé récemment dans une expérience, voir [15]. Nous présenterons ces deux derniers résultats au chapitre 5 sous forme d'un fac-similé de notre article original soumis en anglais .

Le principal outil mathématique utilisé dans notre analyse spectrale est la théorie spectrale des opérateurs fibrés que nous utiliserons pour donner un aperçu des propriétés spectrales de U, dans le cas où ses paramètres sont invariants par translation. C'est le cas souvent considéré dans la littérature physique.

Pour les considérations topologiques nous utiliserons l'indice de Fredholm qui caractérise complètement les composantes connexes de l'ensemble des opérateurs de Fredholm.

Pour notre preuve de la conjecture de Kitagawa nous prouverons tout d'abord que l'indice d'un certain opérateur de Fredholm sur $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^d)$ fournit l'information pertinente, ensuite nous utiliserons le théorème d'indice de Toeplitz pour déterminer cet indice.

Pour nos preuves des propriétés de transport nous utiliserons l'indice d'une paire de projecteurs P et U^*PU, introduit dans [7, 8], où P est la projection sur un sous-espace de $\ell^2(\mathbf{G}, \mathbb{C}^d)$ choisi par intuition en physique. Cet indice est déterminé par l'indice de Fredholm de PUP . Nous le calculerons par une déformation continue des paramètres à un cas simple en utilisant des arguments de symétrie. Un indice non trivial implique nos résultats spectraux par les résultats généraux récents [6, 7].

La thèse est organisée comme suit : dans le premier chapitre nous présenterons une analyse spectrale de deux types de marches quantiques unidimensionnelles. Nous citérons tout d'abord des résultats des études spectrales de la littérature pour une marche quantique simple et étudierons explicitement le spectre d'une marche quantique à pas séparé.

Le deuxième chapitre est consacré à la preuve de la conjecture de Kitagawa et al. Dans le troisième chapitre nous étudierons le spectre de l'unitaire sur le

graphe rubis dans des cas spéciaux et démontrerons la stabilité du transport sur une bande du graphe. Dans le dernier chapitre nous démontrerons aussi la stabilité du transport sur tout le graphe rubis bi-dimensionnel et sur une classe de marches quantiques bi-dimensionnelles.

Chapitre 2

Analyse spectrale de deux types de marches quantiques unidimensionnelles

Une marche quantique unidimensionnelle est caractérisée par un opérateur unitaire défini sur l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ paramétré par une (ou plusieurs) famille dénombrable de matrices de $\mathrm{U}(2)$. En fonction de ses paramètres, une marche quantique peut avoir différents comportements spectraux. Dans ce chapitre nous faisons l'analyse spectrale de deux types de marches quantiques. Dans la première section nous définirons une marche quantique simple et présenterons un résumé de la littérature sur ses résultats spectraux. Dans la deuxième section nous définirons une marche quantique à pas séparés et étudierons son spectre pour une famille de matrices invariantes par translation qui est suffisamment grande pour nos applications ultérieures.

2.1 Quelques résultats spectraux concernant une marche quantique simple

Une marche quantique simple est caractérisée par un opérateur unitaire sur $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ paramétré par une famille dénombrable de matrice de $\mathrm{U}(2)$. Selon le comportement de ses paramètres, l'étude spectrale de la marche quantique simple fournit différents résultats. Nous présentons les résultats spectraux dans le cas où la famille est asymptotiquement constante, où il y a une asymptotique différente dépendante de la direction dans $\mathbb{Z}$ ainsi que dans le cas où la famille est une variable aléatoire indépendante identiquement distribuée.

Définition 2.1.1. — *Soit S l'opérateur unitaire défini sur $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ par*

$$S := \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T^* \end{pmatrix}$$

où T est l'opérateur de translation unidimensionnel défini par $T : \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \to \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}), T\psi(n) := \psi(n-1)$.

— *Soit $\mathbf{C}$ un opérateur de multiplication unitaire à valeur matricielle de symbole $\{C(n)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset U(2)$, c'est-à-dire :*

$$\mathbf{C}\psi(n) = C(n)\psi(n)$$

— *On appelle marche quantique simple un opérateur défini sur $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$ par la composition*

$$U := S\mathbf{C} \tag{2.1}$$

Remarque 2.1.2. *La marche quantique simple U est unitaire puisque S et $\mathbf{C}$ le sont.*

On connait le spectre d'une marche quantique simple dans le cas où la famille $\{C(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est asymptotiquement constante :

Proposition 2.1.3. *Soit U la marche quantique simple définie par (2.1) avec*

$$\mathbf{C}\psi(n) = C(n)C_\infty\psi(n)$$

où la famille $\{C(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ satisfait

$$|n|^{1+\varepsilon}\|C(n) - \mathbb{1}\|_{n\to\infty} \to 0$$

et

$$C_\infty = e^{-i\alpha}\begin{pmatrix} r & -t \\ \overline{t} & \overline{r} \end{pmatrix}, \ \alpha \in [0, 2\pi] \ r, t \in \mathbb{C} \ |r|^2 + |t|^2 = 1.$$

Alors pour le spectre de U on a :

— *Si $r = 0$, U est pure point et $\sigma_{ess}(U) = \{\pm ie^{-i\alpha}\}$.*

— *Si $r \neq 0$*

$$\sigma_{ess}(U) = B_+ \bigcup B_-$$

avec

$$B_\pm := \left\{ e^{-i\alpha}\left(p \pm i\sqrt{1-p^2}\right) \ p \in [-|r|, |r|] \right\}.$$

En outre, soit

$$\partial\sigma(U) := \left\{ e^{-i\alpha}\left(|r| \pm i\sqrt{1-|r|^2}\right), e^{-i\alpha}\left(-|r| \pm i\sqrt{1-|r|^2}\right) \right\} \tag{2.2}$$

l'ensemble des seuils des bandes spectrales de U. Pour tout ensemble fermé $\Theta \subset \mathbb{S}^1 \setminus \partial\sigma(U)$ on a

$$\sigma_{sc}(U) \bigcap \Theta = \emptyset$$

et il existe au plus un nombre fini de valeurs propres de multiplicité finie dans Θ.

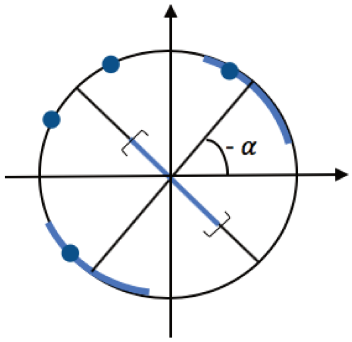


FIGURE 2.1 – Spectre d'une marche quantique simple sous les hypothèses de la Proposition 2.1.3

Preuve. — Si $\mathbf{C}\psi(n) = C_\infty\psi(n)$, la représentation en Fourier de U est un opérateur de multiplication à valeur matricielle défini par

$$M(x) = \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} e^{-i\alpha} \begin{pmatrix} r & -t \\ \overline{t} & \overline{r} \end{pmatrix} \qquad \text{pour } x \in [0, 2\pi)$$

Le spectre de $M(x)$ est $\{\lambda_\pm(x)\}$ avec

$$\lambda_\pm(x) = e^{-i\alpha}\left(p(x) \pm i\sqrt{1 - p^2(x)}\right)$$

où

$$p(x) := |r| \cos\varphi(x) \qquad \text{pour } x \in [0, 2\pi)$$

et $\varphi \in C^0([0, 2\pi))$ satisfaisant $e^{i\varphi(x)} = \frac{r}{|r|}e^{ix}$. L'image de p est $[-|r|, |r|]$ et donc

$$\lambda_\pm([0, 2\pi)) = \left\{e^{-i\alpha}\left(p \pm i\sqrt{1 - p^2}\right),\ p \in [-|r|, |r|]\right\}.$$

On obtient le spectre de U par le Corollaire 4.5 dans [4].

— Si $\mathbf{C}\psi(n) = C(n)C_\infty\psi(n)$ on utilise la théorie de Mourre, voir Proposition 4.1 dans [4].

□

On connait le spectre de la marche quantique simple dans le cas où il y a une asymptotique différente dépendante de la direction dans $\mathbb{Z}$. Ce résultat est une généralisation du résultat de la Proposition 2.1.3.

Proposition 2.1.4. *Soit U la marche quantique simple définie par (2.1) et $C_g, C_d \in U(2), k_g, k_d > 0$ et $\varepsilon_g, \varepsilon_d > 0$ tels que*

$$|n|^{1+\varepsilon_g}\|C(n) - C_g\| \leq k_g \text{ si } n < 0$$

$$|n|^{1+\varepsilon_d}\|C(n) - C_d\| \leq k_d \text{ si } n > 0$$

Soient les opérateurs unitaires

$$U_g := SC_g \text{ et } U_d := SC_d$$

alors

$$\sigma_{ess}(U) = \sigma_{ess}(U_g) \bigcup \sigma_{ess}(U_d).$$

Soit

$$\tau(U) := \partial\sigma(U_g) \bigcup \partial\sigma(U_d)$$

où $\partial\sigma(U_g)$ et $\partial\sigma(U_d)$ désignent respectivement l'ensemble des seuils des spectres de U_g et de U_d (voir (2.2)). Pour tout ensemble fermé $\Theta \subset \mathbb{S}^1 \setminus \tau(U)$ on a

$$\sigma_{sc}(U) \bigcap \Theta = \emptyset$$

et il existe au plus un nombre fini de valeurs propres de multiplicité finie dans Θ.

Preuve. Voir Théorèmes 2.2 et 2.4 dans [36]. □

Si la famille $\{C(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ est aléatoire, le comportement spectral change drastiquement. On a l'information suivante :

Proposition 2.1.5. *Soit U la marche quantique simple définie par (2.1) avec*

$$C(n) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha_n} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & -t \\ \overline{t} & \overline{r} \end{pmatrix} \quad r, t \in [0,1] \quad r^2 + t^2 = 1$$

où $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ et $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et uniformes à densité bornée telle que le support contient un ouvert non vide, alors le spectre de U est pure point presque surement.

Preuve. Voir corollaire du Théorème 2.2 dans [23] et sa preuve dans [19]. □

Afin d'avoir une compréhension pour le cas $r = 0$ de la Proposition 2.1.3 nous présentons explicitement la décomposition spectrale d'une marche quantique simple dans le cas où $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition 2.1.6. *Soit U la marche quantique simple définie par (2.1) avec*

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alors le spectre de U est ponctuel,

$$\sigma(U) = \sigma_{ess}(U) = \{\pm 1\} \quad et \quad U = P_+ - P_-$$

avec

$$P_\pm := \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm U)$$

les projecteurs spectraux de U.

Preuve.

$$U = S\mathbf{C} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U^2 = \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T \\ T^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Pour toute valeur propre λ et son vecteur propre associé φ on a

$$U\varphi = \lambda\varphi \Rightarrow U^2\varphi = \lambda U\varphi = \lambda^2\varphi$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda_\pm = \pm 1.$$

En outre,

$$P_\pm^2 = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm U)\frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm U) = \frac{1}{2}(\mathbb{1} \pm U) = P_\pm$$

et

$$UP_\pm = \pm P_\pm$$

alors $P_\pm$ sont des projecteurs et ils décomposent U. En effet,

$$P_+ - P_- = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + U) - \frac{1}{2}(\mathbb{1} - U) = U.$$

□

2.2 Étude spectrale pour une marche quantique à pas séparés

Une marche quantique à pas séparés est paramétrée par deux familles d'opérateurs de $U(2)$. Dans cette section et dans tout ce qui suit, nous considérons la marche quantique à pas séparés de Werner et al. introduit dans [14] qui est une variante symétrisée de celle de Kitagawa et al. [27]. Nous étudions le spectre de cette marche, en fonctions des paramètres, dans le cas où les familles des paramètres sont invariantes par translation.

Définition 2.2.1. *Dans $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$, on définit les opérateurs de translation conditionnés*

$$S_\downarrow := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & T^* \end{pmatrix} \qquad S_\uparrow := \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

et on appelle marche quantique à pas séparés l'opérateur unitaire défini par la composition

$$U := \mathbf{C}_2 S_\downarrow \mathbf{C}_1 S_\uparrow \mathbf{C}_2 \tag{2.3}$$

où les $\mathbf{C}_k$ (k = 1, 2) sont des opérateurs unitaires de multiplication à valeurs matricielles.

Dans le cas où les familles des matrices $\{C_k(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ($k \in \{1, 2\}$) sont invariantes par translation on a l'information suivante :

Proposition 2.2.2. *Soit U la marche quantique à pas séparés définie par (2.3) avec*

$$\mathbf{C}_k = e^{-i\alpha_k} \begin{pmatrix} r_k & -t_k \\ \overline{t}_k & \overline{r}_k \end{pmatrix}, \ \alpha_k \in [0, 2\pi), \ r_k, t_k \in \mathbb{C} \mid |r_k|^2 + |t_k|^2 = 1, \ k \in \{1, 2\}$$

Pour le spectre de U on a :

— *Si $r_1 = 0$, U est pure point et $\sigma_{ess}(U) = \{\pm i e^{-i(\alpha_1+2\alpha_2)}\}$.*

— *Si $r_1 \neq 0$,*

$$\sigma(U) = \sigma_{ac}(U) = B_+ \bigcup B_-$$

avec

$$B_\pm := \left\{ e^{-i(\alpha_1+2\alpha_2)} \left(p \pm i\sqrt{1-p^2} \right), p \in [\alpha, \beta] \right\}.$$

où

$$\alpha := -|r_1||(r_2^2 - t_2^2)| - \Re e(\bar{t}_1 r_2 t_2) - \Re e(t_1 r_2 \bar{t}_2),$$
$$\beta := |r_1||(r_2^2 - t_2^2)| - \Re e(\bar{t}_1 r_2 t_2) - \Re e(t_1 r_2 \bar{t}_2).$$

Preuve. Pour $x \in [0, 2\pi)$ la représentation en Fourier de U est l'opérateur de multiplication à valeur matricielle défini par

$$M(x) = e^{-i(\alpha_1+2\alpha_2)} \underbrace{\begin{pmatrix} r_2 & -t_2 \\ \bar{t}_2 & \bar{r}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & -t_1 \\ \bar{t}_1 & \bar{r}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & -t_2 \\ \bar{t}_2 & \bar{r}_2 \end{pmatrix}}_{:=N(x)}. \quad (2.4)$$

Le spectre de $M(x)$ est $\{\lambda_\pm(x)\}$, avec

$$\lambda_\pm(x) = e^{-i(\alpha_1+2\alpha_2)} \left(p(x) \pm i\sqrt{1 - p^2(x)}\right) \qquad (x \in [0, 2\pi)) \quad (2.5)$$

où $p(x) := \frac{1}{2}\mathrm{trace} N(x)$. Par le Lemme A.3.1 on a

$$p(x) = |r_1||r_2^2 - t_2^2| \cos\varphi(x) - \Re e(\bar{t}_1 r_2 t_2) - \Re e(t_1 r_2 \bar{t}_2)$$

où $\varphi \in C^0([0, 2\pi))$ satisfaisant $e^{i\varphi(x)} = \frac{r_1}{|r_1|} \frac{r_2^2 - t_2^2}{|r_2^2 - t_2^2|} e^{ix}$.

L'image de p est $[\alpha, \beta]$ et donc

$$\lambda_\pm([0, 2\pi)) = \left\{ e^{-i(\alpha_1+2\alpha_2)} \left(p \pm i\sqrt{1 - p^2}\right),\ p \in [\alpha, \beta] \right\}.$$

□

La marche quantique à pas séparés discutée dans la littérature (par exemple [14, 27]), où les familles $\{C_k(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ($k \in \{1, 2\}$) sont des opérateurs de rotations, est un cas spécial de (2.3). Nous déduisons son spectre de la Proposition 2.2.2 :

Corollaire 2.2.3. *Soient*

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ \theta \in \mathbb{R} \quad (2.6)$$

et U la marche quantique à pas séparés définie par (2.3) avec, pour tout $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{C}_1 = R(\theta_1),\ \mathbf{C}_2 = R(\theta_2/2)$$

alors pour le spectre de U on a :

$$\sigma(U) = B_+ \bigcup B_-$$

avec

$$B_\pm := \left\{ p \pm i\sqrt{1 - p^2},\ p \in [-\cos(\theta_1 - \theta_2), \cos(\theta_1 + \theta_2)] \right\}.$$

Preuve. En posant

$$(\cos\theta_1, \sin\theta_1) = (r_1, t_1)$$

et

$$(\cos\frac{\theta_2}{2}, \sin\frac{\theta_2}{2}) = (r_2, t_2)$$

Le résultat suit la Proposition 2.2.2. □

On remarque que les bandes B_+ et B_- sont symétriques, voir figure 2.2a. Selon le choix des paramètres θ_1, θ_2, le spectre est continu ou ponctuel. En utilisant

$$\cos(\theta_1 \pm \theta_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \mp \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

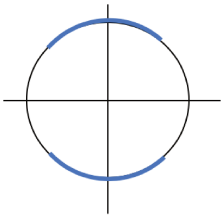
on observe que :

Les bandes dégénèrent en deux points si $\cos\theta_1 \cos\theta_2 = 0$, voir figure 2.2b.

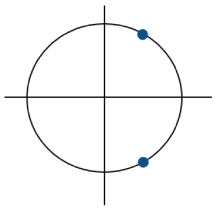
On obtient une seule bande contenant $+1$ mais pas -1 si $\theta_1 = -\theta_2$ (voir figure 2.2c). Cette bande dégénère la valeur propre $+1$ si de plus $\cos\theta_1 \cos\theta_2 = 0$ (voir figure 2.2d).

On obtient une seule bande contenant -1 mais pas $+1$ si $\theta_1 = \theta_2$ (voir figure 2.2e). Cette bande dégénère la valeur propre -1 si de plus $\cos\theta_1 \cos\theta_2 = 0$ (voir figure 2.2f).

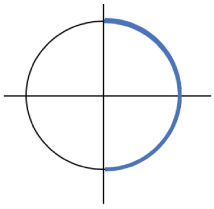
La figure 2.2g illustre un cas où les bandes couvrent tout le cercle.



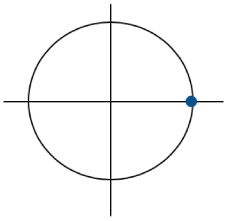
(a) Le spectre de U pour $(\theta_1, \theta_2) = (0, \frac{\pi}{4})$.



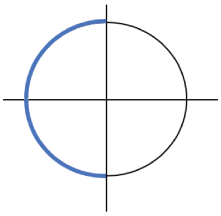
(b) Le spectre de U pour $(\theta_1, \theta_2) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$.



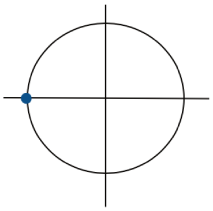
(c) Le spectre de U pour $(\theta_1, \theta_2) = (\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4})$.



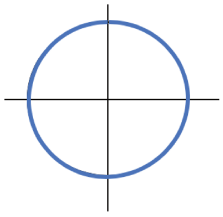
(d) Le spectre de U pour $(\theta_1, \theta_2) = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$.



(e) Le spectre de U pour $(\theta_1, \theta_2) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.



(f) Le spectre de U pour $(\theta_1, \theta_2) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.



(g) Le spectre de U pour $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$.

FIGURE 2.2 – Spectre de la marche quantique du corollaire 2.2.3 en fonction de ses paramètres

Chapitre 3

Preuve de la conjecture de Kitagawa et al.

Dans ce chapitre nous proposons une formulation mathématique précise et une preuve concise de la conjecture de Kitagawa que nous avons expliqué dans le Chapitre 1(voir Théorème 3.4.1). Pour des raisons de clarté, nous considérons la variante symétrisée de la marche quantique de Kitagawa introduit par Werner et al. dans [14]. Remarquons que dans [14] une correspondance de "bulk-edge" a déjà été démontrée. Elle fait appel à des indices abstraits. Notre version de cette conjecture est la suivante :

"Pour la marche quantique à pas séparés définie par (2.3) *et* (2.6)*, il existe un choix des paramètres tel que le nombre de vecteurs propres indépendants pour les valeurs propres* ± 1 *est borné inférieurement par un indice de Fredholm".*

Ce chapitre est composé de quatre sections. Dans la première nous présenterons une méthode géométrique pour calculer le degré d'un lacet différentiable.

Dans la deuxième section nous présenterons certaines propriétés de l'indice de Fredholm, parmi lesquelles les propriétés d'additivité et de stabilité (Corollaire 3.2.11). Ensuite, après avoir introduit les opérateurs de Toeplitz, nous verrons une condition pour qu'ils soient des opérateurs de Fredholm (Corollaire 3.2.17) auquel cas, on utilise le théorème d'indice de Toeplitz pour calculer leurs indice.

Dans la troisième section, nous introduirons les opérateurs auto-adjoints à symétrie chirale et nous verrons que si l'opérateur qui les caractérise est de Fredholm d'indice non-trivial, alors 0 est une valeur propre stable par perturbation compacte et par homotopie (Proposition 3.3.3). La dernière section est réservée à la preuve de la conjecture de Kitagawa.

3.1 Le degré d'un lacet

Dans cette section nous rappelons des aspects de la théorie du degré d'un lacet différentiable. Cette théorie est généralisée dans [9]. On appelle, dans ce travail, un *lacet* une fonction $f \in C^0([0,1],\mathbb{C})$ telle que $f(0) = f(1)$.

Généralement, le degré d'un lacet différentiable f dans le plan complexe est obtenu par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f'(x)}{f(x)}dx \tag{3.1}$$

toutefois, à part la régularité exigée, cette intégrale peut être difficile à calculer. Dans cette section nous rappelons la méthode topologique pour calculer ce degré.

Définition 3.1.1. *Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{C}\setminus\{0\})$, on dit que f est une exponentielle s'il existe une fonction $g \in C^0([0,1],\mathbb{C})$ telle que*

$$f(x) = \exp g(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

Proposition 3.1.2. *Toute fonctions $f \in C^0([0,1],\mathbb{C}\setminus\{0\})$ est une exponentielle. De plus, s'il existe deux fonctions $g, \widehat{g} \in C^0([0,1],\mathbb{C})$ telles que*

$$\exp g(x) = f(x) = \exp \widehat{g}(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

alors il existe un $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$g(x) - \widehat{g}(x) = i2\pi n.$$

Preuve. Voir Proposition 3.2.1 dans [37]. □

A présent nous pouvons définir le degré :

Définition 3.1.3. *Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{C}\setminus\{0\})$ un lacet et $g \in C^0([0,1],\mathbb{C})$ telle que $f(t) = \exp g(t)$. On définit le degré de f par*

$$\deg(f) := \frac{1}{2\pi i}\left(g(1) - g(0)\right) \in \mathbb{Z}. \tag{3.2}$$

Le degré caractérise les composantes connexes par arc de l'espace des lacets. En effet :

Théorème 3.1.4. *Soit $f, \widehat{f} \in C^0([0,1],\mathbb{C}\setminus\{0\})$ deux lacets.*

$$\deg(f) = \deg(\widehat{f}) \text{ si et seulement si } f \text{ et } \widehat{f} \text{ sont homotopes dans } \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

C'est un cas particulier du théorème de Hopf, voir [32].

Preuve. " $\Leftarrow$ " Soit $h \in C^0([0,1] \times [0,1], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ telle que

$$h(s,1) = h(s,0) \ \forall \ s \in [0,1].$$

On a

$$h(0,x) = f(x) \qquad h(1,x) = \widehat{f}(x).$$

L'application

$$[0,1] \ni s \mapsto h(s,.) \in C^0([0,1], \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

est continue dans la topologie uniforme. Alors $\deg h(s,.)$ est constant. Ainsi,

$$\deg h(0,.) = \deg(f) = \deg(\widehat{f}) = \deg h(1,.)$$

" $\Rightarrow$ " Soient $d := \deg(f)$ et $g \in C^0([0,1], \mathbb{C})$ tel que $f(x) = \exp g(x)$. Soit

$$h(s,x) := (1-s)g(x) + 2\pi i d s x.$$

L'application $\exp(h) \in C^0([0,1] \times [0,1], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ est une homotopie entre f et $\exp(2\pi i d x)$. On peut construire, de la même manière, une homotopie entre $\widehat{f}$ et $\exp(2\pi i d x)$. On obtient que f et $\widehat{f}$ sont homotopes. □

Nous remarquons que si f est de classe C^1 nous retrouverons la formule (3.2). Par ailleurs, il suit de la Proposition 3.1.2 que le degré est bien défini. De plus, le degré a la propriété d'additivité, c'est à dire :

Lemme 3.1.5. *Soit $f, \widehat{f} \in C^0([0,1], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ deux lacets, on a :*

$$\deg(f\widehat{f}) = \deg(f) + \deg(\widehat{f}).$$

Preuve. S'il existe $g, \widehat{g} \in C^0([0,1], \mathbb{C})$ telles que

$$f(x) = \exp g(x) \qquad \text{et} \qquad \widehat{f}(x) = \exp \widehat{g}(x)$$

alors

$$f(x)\widehat{f}(x) = \exp g(x) \exp \widehat{g}(x) = \exp(g(x) + \widehat{g}(x))$$

et

$$\deg(f\widehat{f}) = \frac{1}{2\pi i}\left(g(1) - g(0)\right) + \frac{1}{2\pi i}\left(\widehat{g}(1) - \widehat{g}(0)\right).$$

□

Après avoir défini le degré et montré certaines de ses propriétés, nous montrons maintenant comment on le calcule pratiquement. Pour ce faire, nous avons besoin de certains outils :

Définition 3.1.6. *1. On dit que $f \in C^1([0,1], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ est un lacet différentiable si*

$$f(1) = f(0) \qquad \text{et} \qquad f'(1) = f'(0).$$

2. On appelle rayon de direction $u \in \mathbb{S}^1$ la droite

$$\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid z = xu,\ x \in [0, \infty[\}$$

3. Un lacet différentiable est dit transversal au rayon $\mathcal{R}$ de direction $u \in \mathbb{S}^1$ si $\Im m \overline{u}.f'(x) \neq 0\ \forall\ x \in f^{-1}(\mathcal{R})$ et pour ces x, on note

$$\varepsilon_x := \text{signe}(\Im m \overline{u}.f'(x))$$

voir figure 3.1.

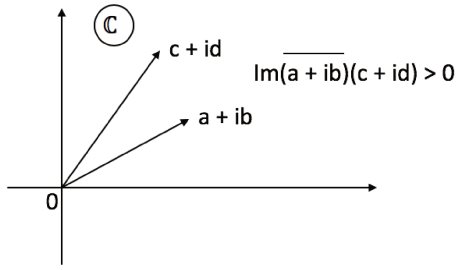


FIGURE 3.1 – $\Im m(\overline{a+ib})(c+id) = \det\{\{a,b\};\{c,d\}\}$

A présent nous pouvons énoncer le théorème du degré.

Théorème 3.1.7. *(Théorème du degré)*
Soit $f \in C^1([0,1], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ un lacet différentiable transversal au rayon $\mathcal{R}$ de direction u (voir figure 3.2) alors $\text{card}\,(f^{-1}(\mathcal{R}))$ *est fini et*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(\mathcal{R})} \varepsilon_x \tag{3.3}$$

Preuve. Voir Proposition 3.4.4 dans [37]. □

On sait, par le théorème de Sard, qu'un tel rayon existe toujours (voir chapitre 3 dans [37]). Par ailleurs, si f est un polynôme trigonométrique on a le résultat du degré suivant :

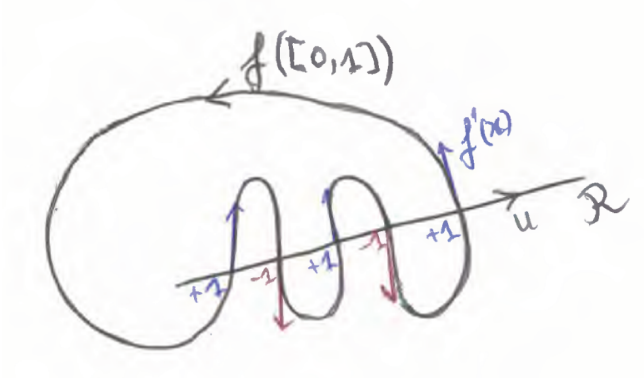


FIGURE 3.2 – Dans cet exemple la courbe de f traverse le rayon $\mathcal{R}$ trois fois avec un signe positif et deux fois avec un signe négatif, alors $\deg(f) = 1$.

Lemme 3.1.8. *Soit pour* $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, *tel que* $|\gamma| \neq |\alpha|$

$$f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \;\; f(x) = \gamma + \alpha \cos x + i\beta \sin x$$

alors

$$\deg(f) = \begin{cases} \text{signe}(\beta) & si \;\; |\alpha| > |\gamma| \\ 0 & si \;\; |\alpha| < |\gamma| \end{cases}$$

Preuve. — Si $|\alpha| > |\gamma|$ (voir figure 3.3)

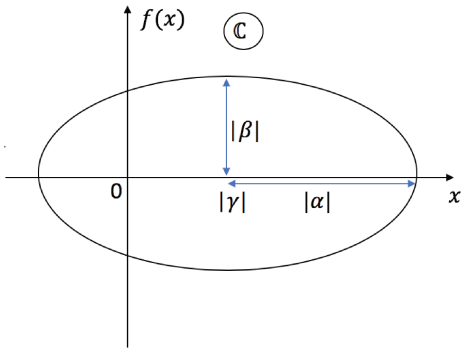


FIGURE 3.3 – La courbe tourne autour de l'origine.

f est transversal au rayon

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x, \;\; x \in [0, \infty[\} \, .$$

et

$$f'(x) = -\alpha \sin x + i\beta \cos x$$

alors $\Im m \overline{u}.f'(x) = \beta \cos x$.

$$x \in f^{-1}(\mathcal{R}) \Leftrightarrow \Im m f(x) = 0 \text{ et } \Re e f(x) > 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Par la formule (3.3) on a :

$$\deg(f) = \text{signe}(\beta \cos(0)) = \text{signe}(\beta).$$

— Si $|\alpha| < |\gamma|$ (voir figure 3.4)

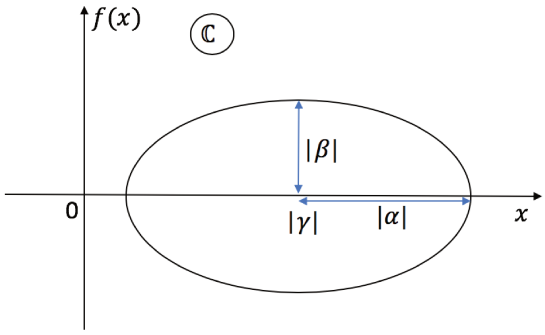


FIGURE 3.4 – La courbe ne tourne pas autour de l'origine.

$x \in f^{-1}(\mathcal{R}) \Leftrightarrow \Im m f(x) = 0$ et $\Re e f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \{0, \pi\}$ alors

$$\deg(f) = \text{signe}(\beta \cos(0)) + \text{signe}(\beta \cos(\pi)) = 0.$$

□

Cela a un corollaire dont nous aurons besoin plus tard :

Corollaire 3.1.9. *Soit pour* $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ *tels que* $|\cos\theta_1 \sin\theta_2| \neq |\sin\theta_1 \cos\theta_2|$ $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *défini par :*

$$g(x) = \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos x + \sin\theta_1 \cos\theta_2 + i \cos\theta_1 \sin x \tag{3.4}$$

$$\deg(g) = \begin{cases} \text{signe}(\cos\theta_1) & si \ |\cos\theta_1 \sin\theta_2| > |\sin\theta_1 \cos\theta_2| \\ 0 & si \ |\cos\theta_1 \sin\theta_2| < |\sin\theta_1 \cos\theta_2| \end{cases}$$

voir le signe de $cos\theta_1$ *sur la figure 3.5 et le diagramme de phase du degré de* g *sur la figure 3.6.*

Preuve. En remplaçant α, β, γ du Lemme 3.1.8 respectivement par $\cos\theta_1 \sin\theta_2$, $\sin\theta_1 \cos\theta_2$, $\cos\theta_1$ on obtient le résultat. □

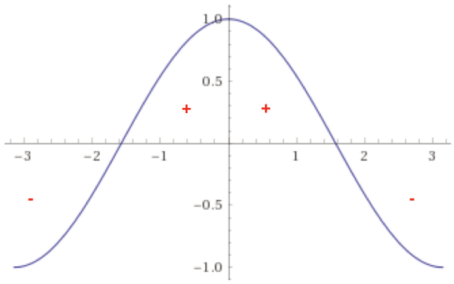


FIGURE 3.5 – Signe de $\cos\theta_1$

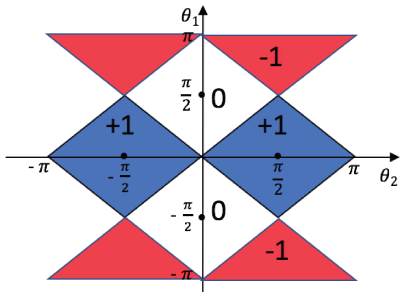


FIGURE 3.6 – Diagramme de phase du degré de g de (3.4). En bleu les zones où $\deg(g) = 1$, en rouge les zones où $\deg(g) = -1$, dans les zones blanches $\deg(g) = 0$ et sur les bords le degré n'est pas défini.

3.2 Théorie de Fredholm

La théorie de Fredholm occupe une place centrale dans ce travail. En effet, pour faire la preuve de la conjecture de Kitagawa et al. nous utiliserons certaines propriétés de l'indice de Fredholm et le théorème d'indice de Toeplitz. Ainsi nous présentons ici la théorie de Fredholm en nous référant au livre de Roe [37]. Nous présentons dans un premier temps les opérateurs et l'indice de Fredholm, ensuite les opérateurs de Toeplitz.

3.2.1 Opérateur et indice de Fredholm

Soit $\mathbb{H}$ un espace de Hilbert et $\mathbb{B}(\mathbb{H})$ l'ensemble des opérateurs bornés sur $\mathbb{H}$.

Définition 3.2.1. *Soit T un opérateur borné sur $\mathbb{H}$. On appelle T un opérateur de Fredholm si* $\dim\ker(T) < \infty$ *et* $\operatorname{codim}\operatorname{Im}(T) < \infty$. *Si T est un opérateur de Fredholm l'indice de Fredholm de T est défini par*

$$\operatorname{ind}(T) = \dim\ker(T) - \operatorname{codim}\operatorname{Im}(T) \in \mathbb{Z}.$$

Nous noterons dans la suite $\mathbb{F}(\mathbb{H})$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm et T^* l'adjoint de T.

Proposition 3.2.2. $T \in \mathbb{F}(\mathbb{H}) \Leftrightarrow T^* \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ *et*

$$\operatorname{ind}(T) = \dim\ker(T) - \dim\ker(T^*) = -\operatorname{ind}(T^*).$$

Preuve. On sait que $\dim \ker(T) = \dim \operatorname{Im}(T^*)^\perp$ et $\dim \operatorname{Im}(T)^\perp = \dim \ker(T^*)$ alors

$$\operatorname{ind}(T) = \dim \ker(T) - \dim \operatorname{Im}(T)^\perp = \operatorname{Im}(T^*)^\perp - \ker(T^*) = -\operatorname{ind}(T^*).$$

□

Théorème 3.2.3. *Un opérateur fermé T est de Fredholm si et seulement si*

$$0 \notin \sigma_{ess}(T^*T) \text{ et } 0 \notin \sigma_{ess}(TT^*) \text{ alors } \operatorname{ind}(T) = \dim \ker(T^*T) - \dim \ker(TT^*)$$

Preuve. Voir Théorème A.4 dans [7]. □

L'indice de Fredholm est additif :

Lemme 3.2.4. *S et $T \in \mathbb{F}(\mathbb{H}) \Leftrightarrow S \oplus T \in \mathbb{F}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$ et*

$$\operatorname{ind}(S \oplus T) = \operatorname{ind}(S) + \operatorname{ind}(T).$$

Preuve. $\ker(S \oplus T) = \ker(S) \oplus \ker(T)$ et $\operatorname{Im}(S \oplus T) = \operatorname{Im}(S) \oplus \operatorname{Im}(T)$. □

L'ensemble $\mathbb{F}(\mathbb{H})$ est stable par multiplication interne et l'indice est stable par multiplication par un opérateur inversible :

Lemme 3.2.5. *1. S et $T \in \mathbb{F}(\mathbb{H}) \Leftrightarrow ST$ et $TS \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$.*

2. Si $T \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ et S est inversible alors $\operatorname{ind}(ST) = \operatorname{ind}(T)$.

Preuve. " $\Leftarrow$ " : Supposons que ST et $TS \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$. On a $\ker(S) \subset \ker(TS)$ et $\operatorname{Im}(S) \supset \operatorname{Im}(ST) \Rightarrow \operatorname{Im}(S)^\perp \subset \operatorname{Im}(ST)^\perp$ alors $S \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$. Par un raisonnement similaire, on peut montrer que $T \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$.

" $\Rightarrow$ " : Supposons que S et $T \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$.

$$\ker(ST) = \{x, Tx \in \ker(S)\} = T^{-1}\left(\ker(S) \bigcap \operatorname{Im}(T)\right)$$

est de dimension finie car $\ker(S)$ et $\ker(T)$ le sont. Soient V et W des sous-espaces de dimension finies complétant respectivement $\operatorname{Im}(S)$ et $\operatorname{Im}(T)$, alors

$$\mathbb{H} = V + S\mathbb{H} = V + S(W + T\mathbb{H}) = V + SW + ST\mathbb{H}$$

alors $V + SW$ complète $ST\mathbb{H}$. □

L'image d'un opérateur de Fredholm est fermée :

Lemme 3.2.6. *$T \in \mathbb{F}(\mathbb{H}) \Rightarrow \operatorname{Im}(T)$ est fermé et $T : \ker(T)^\perp \to \operatorname{Im}(T)$ est un isomorphisme.*

Preuve. Soit V un sous-espace de dimension finie complémentaire de $\mathrm{Im}(T)$. Par le théorème d'isomorphisme de Banach (voir Chapitre 2 dans [11]) l'application

$$\ker(T)^{\perp} \oplus V \to \mathbb{H}, x \oplus y \mapsto Tx + y$$

est un isomorphisme. Donc $T : \ker(T)^{\perp} \to \mathrm{Im}(T)$ est un isomorphisme. □

Un opérateur de Fredholm d'indice nul est une somme d'opérateur compact et inversible :

Théorème 3.2.7. *Soit $T \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$. $\mathrm{ind}(T) = 0$ si et seulement s'il existe un opérateur compact K et inversible S tels que $T = S + K$.*

Preuve. Supposons que $\mathrm{ind}(T) = 0$. On sait par le Lemme 3.2.6 que

$$T : \ker(T)^{\perp} \to \mathrm{Im}(T)$$

est un isomorphisme.

D'autre part, $\dim \ker(T) = \mathrm{codim}\ \mathrm{Im}(T) = \dim \ker(T^*)$ (puisque $\mathrm{ind}(T) = 0$). Comme

$$\mathbb{H} = \ker(T)^{\perp} \oplus \ker(T) = \mathrm{Im}(T) \oplus \ker(T^*)$$

on peut ajouter un isomorphisme K à T, avec $K : \ker(T) \to \ker(T^*)$, pour obtenir un opérateur inversible sur $\mathbb{H}$. Remarquons que K est de rang fini (puisque $\dim \ker(T^*) < \infty$) donc K est compact.

Inversement nous montrons que $\mathrm{ind}(\mathbb{1} + K) = 0$ avec K un opérateur compact. On a :

$$\mathbb{1} + K = \mathbb{1} + A + F$$

avec $\|A\| < \varepsilon$ pour un $\varepsilon \in (0, 1)$ et F de rang fini. Alors

$$\mathbb{1} + K = (\mathbb{1} + A)(\mathbb{1} + (\mathbb{1} + A)^{-1}F).$$

Par le Lemme 3.2.5(2), on a $\mathrm{ind}(\mathbb{1} + K) = \mathrm{ind}(\mathbb{1} + B)$ où $B := (\mathbb{1} + A)^{-1}F$ est un opérateur de rang fini. Soit $\mathbb{H}_1 := \ker B \cap \ker B^*$ donc $\dim \mathbb{H}_1^{\perp} < \infty$ et $B = 0 = B^*$ sur $\mathbb{H}_1$. Donc $B\mathbb{H}_1^{\perp} \subset \mathbb{H}_1^{\perp}$. Donc sur $\mathbb{H} = \mathbb{H}_1^{\perp} \oplus \mathbb{H}_1$, $\mathbb{1} + B = (\mathbb{1} + B_1) \oplus \mathbb{1}$ où $B_1 := B|_{\mathbb{H}_1^{\perp}}$. Donc $\mathrm{ind}(\mathbb{1} + B) = 0$. □

On en déduit :

Corollaire 3.2.8. *(Alternative de Fredholm)*

- *Soit K un opérateur compact. $\mathbb{1} + K \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ et $\mathrm{ind}(\mathbb{1} + K) = 0$.*
- *Soit K un opérateur compact et $\lambda \neq 0$. On a l'alternative suivante : ou bien $\ker(K - \lambda\mathbb{1}) \neq 0$ ou bien $K - \lambda\mathbb{1}$ est inversible.*

Théorème 3.2.9. *(Théorème d'Atkinson) Soit $T \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$ les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *T est un opérateur de Fredholm.*
2. *Il existe un $S \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$ tel que $ST - \mathbb{1}$ et $TS - \mathbb{1}$ sont de rang fini.*
3. *Il existe un $S \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$ tel que $ST - \mathbb{1}$ et $TS - \mathbb{1}$ sont compacts.*

Preuve. $1 \Rightarrow 2$: Par le Lemme 3.2.6 $T : \ker(T)^{\perp} \to \mathrm{Im}(T)$ est un isomorphisme. Soit S l'inverse de T sur $\mathrm{Im}(T)$ et 0 sur $\ker(T^*)$. Comme $TS - \mathbb{1} = 0$ sur $\mathrm{Im}(T)$ et sur $\ker(T)^{\perp}$ alors $ST - \mathbb{1}$ et $TS - \mathbb{1}$ sont de rang fini.
$2 \Rightarrow 3$: Si $ST - \mathbb{1}$ est de rang fini alors il est compact. De même pour $TS - \mathbb{1}$
$3 \Rightarrow 1$: On a $ST = \mathbb{1} + K_1$ et $TS = \mathbb{1} + K_2$ avec $K_i (i = 1, 2)$ des opérateurs compacts. Par l'alternative de Fredholm ST et $TS \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$. On en déduit, par le Lemme 3.2.5(1), que $T \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$. □

L'ensemble des opérateurs de Fredholm est un sous-ensemble ouvert de l'ensemble des opérateurs bornés et l'indice est continu en norme :

Théorème 3.2.10. *$\mathbb{F}(\mathbb{H})$ est ouvert dans $\mathbb{B}(\mathbb{H})$ et* ind *est continu en norme.*

Preuve. Soit $T \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ alors $S = T \oplus T^* \in \mathbb{F}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$ et

$$\mathrm{ind}(S) = \mathrm{ind}(T) + \mathrm{ind}(T^*) = 0 \qquad \text{(par le Lemme 3.2.4)}$$

On en déduit, par le Théorème 3.2.7, que S est la somme d'un opérateur inversible et d'un opérateur compact. Comme l'ensemble des opérateurs inversibles est ouvert, pour tout $A \in \mathbb{B}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$ tel que $\|A\|$ est suffisamment petit $S + A \in \mathbb{F}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$ et $\mathrm{ind}(S + A) = \mathrm{ind}(S)$. En particulier, si $A = B \oplus 0$ où $B \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ tel que $\|B\|$ est suffisamment petit, on a $S + A = (T + B) \oplus T^* \in \mathbb{F}(\mathbb{H} \oplus \mathbb{H})$ et $\mathrm{ind}(S + A) = 0$. Donc $T + B \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ et $\mathrm{ind}(T + B) = \mathrm{ind}(T)$. □

Une des conséquences du Théorème 3.2.10 est que $\mathbb{F}(\mathbb{H})$ et l'indice de Fredholm sont stables par une perturbation compacte :

Corollaire 3.2.11. *Soit $T \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ et K un opérateur compact, on a :*

1. $T + K \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$;
2. $\mathrm{ind}(T + K) = \mathrm{ind}(T)$.

Preuve.

1. Par le théorème d'Atkinson (Théorème 3.2.9) T est un opérateur de Fredholm si et seulement s'il existe un $S \in \mathbb{B}(\mathbb{H})$ tel que $ST - \mathbb{1}$ est compact. Comme

$$S(T + K) - \mathbb{1} = (ST - \mathbb{1}) + SK$$

est compact alors $T + K \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$.

2. xK est compact, pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $T + xK \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ et par le Théorème 3.2.10 l'application $\mathrm{ind}(T + xK) : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ est continue donc constante.

□

Une deuxième conséquence du Théorème 3.2.10 est que l'indice d'un produit d'opérateurs est égal à la somme leurs indices.

Corollaire 3.2.12. *Soient S et $T \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$, on a :*

$$\mathrm{ind}(ST) = \mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(T)$$

Preuve. $\mathrm{ind}(ST) = \mathrm{ind}\begin{pmatrix} ST & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$ tandis que $\mathrm{ind}(S) + \mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$. Soit

$$F(x) = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

une application continue avec $F(0) = ST \oplus \mathbb{1}$ et $F(\pi/2) = S \oplus T$. Le résultat vient du fait que $\mathrm{ind}F(0) = \mathrm{ind}F(\pi/2)$. □

Remarque 3.2.13. *Toute la théorie de Fredholm peut être formulée également pour des opérateurs définis entre des espaces de Hilbert distincts.*

Tout comme le degré caractérise les composantes connexes par arc des lacets continus dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, l'indice de Fredholm caractérise les composantes connexes par arc de l'ensemble des opérateurs de Fredholm.

Théorème 3.2.14. *Les composantes connexes par arc de $\mathbb{F}(\mathbb{H})$ sont*

$$\mathbb{F}_n(\mathbb{H}) := \{T \in \mathbb{F}(\mathbb{H}) \mid \mathrm{ind}(T) = n\},$$

donc (pour $T, S \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ il existe un $h \in C^0([0,1], \mathbb{F}(\mathbb{H}))$ dans la topologie uniforme tel que

$$h(0) = T \text{ et } h(1) = S) \Leftrightarrow \mathrm{ind}(T) = \mathrm{ind}(S).$$

Preuve. Voir Théorème 5.32 dans [17] p.121. □

3.2.2 Théorème d'indice pour les opérateurs de Toeplitz

Nous présentons la relation qui lie l'indice de Fredholm d'un opérateur de Toeplitz noté T_f et le degré de son symbole f(théorème d'indice de Toeplitz). Pour cela, nous définissons dans un premier temps les opérateurs de Toeplitz et montrons ensuite une condition pour qu'un opérateur de Toeplitz soit un opérateur

de Fredholm. Cette condition étant réalisée, la question de l'indice se pose, d'où le théorème d'indice de Toeplitz.

L'espace de Hilbert que nous considérons ici est

$$L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}) = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n;\ \sum |a_n|^2 < \infty,\ a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

où $e_n(z) = z^n$ pour $|z| = 1$ et les opérateurs de Toeplitz sont définis sur l'espace de Hardy

$$H^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}) = \left\{ \sum_{n \geq 0} a_n e_n;\ \sum |a_n|^2 < \infty \right\}$$

qui est un sous-espace de $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$.

Définition 3.2.15. *Soit $P : L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}) \to H^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ un projecteur orthogonale défini par*

$$P\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e_n \right) := \sum_{n \geq 0} a_n e_n.$$

Pour $f \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ soit $T_f : H^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}) \to H^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ défini par

$$T_f := P M_f P$$

où $M_f \in L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ est un opérateur de multiplication par f. On appelle T_f l'opérateur de Toeplitz de symbole f.

Lemme 3.2.16.
1. *Si f est un polynôme trigonométrique alors $[M_f, P]$ est de rang fini.*
2. *$[M_f, P]$ est compact pour tout $f \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C} \setminus \{0\})$.*

Preuve.
1. Soit V l'opérateur de multiplication par z. On a que $P - V^n P V^{-n}$ est un projecteur sur vect$\{e_0, e_1, ..., e_{n-1}\}$. Il est donc de rang fini si $n \geq 1$. Alors $[V^n, P] = (V^n P V^{-n} - P)V^n$ est de rang fini pour $n \geq 1$. En prenant l'adjoint, $[V^n, P]$ est de rang fini pour $n \leq 0$.
2. Si $f \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C} \setminus \{0\})$, f est la limite d'une suite de polynômes trigonométriques. Par (1) on obtient donc que $[M_f, P]$ est compact comme limite d'opérateurs de rang fini.

□

On en déduit :

Corollaire 3.2.17.
1. *Si f et $g \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C} \setminus \{0\})$, alors $T_{fg} - T_f T_g$ est compact.*

2. *Si* $f(\mathbb{S}^1) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *alors* $T_f, T_{f^{-1}} \in \mathbb{F}(H^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}))$.

Preuve. 1. $T_{fg} - T_f T_g = PM_{fg}P - PM_f PM_g P = PM_f(M_g P - PM_g)P = PM_f[M_g, P]P$ est donc compact puisque $[M_g, P]$ est compact.

2. Comme f ne s'annule pas, f^{-1} est bien définie et continue. Alors $T_{ff^{-1}} = T_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$. Par (1) on obtient que $T_f T_{f^{-1}} - \mathbb{1}$ et $T_f T_{f^{-1}} - \mathbb{1}$ sont compacts. Par le théorème d'Atkinson (voir Théorème 3.2.9) on en déduit que $T_f, T_{f^{-1}} \in \mathbb{F}(H^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}))$.

□

Nous énonçons le théorème d'indice de Toeplitz que nous utiliserons pour calculer certains indices.

Théorème 3.2.18. *(Théorème d'indice de Toeplitz) Soit* $f \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ *alors* $T_f \in \mathbb{F}(H^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}))$ *et*

$$\operatorname{ind}(T_f) = -\deg(f).$$

Preuve. Voir Théorème 7.4.2 dans [37]. □

3.3 Valeurs propres stables pour des opérateurs auto-adjoints à symétrie chirale

Nous démontrons la présence de la valeur propre 0 stable par perturbation compacte et par homotopie pour un opérateur auto-adjoint à symétrie chirale qui est asymptotiquement assimilable à deux opérateurs de Toeplitz d'indice distincts.

Soit $\mathbb{H}_1$ un espace de Hilbert, nous commençons par définir un opérateur auto-adjoint à symétrie chirale :

Définition 3.3.1. *On dit qu'un opérateur auto-adjoint* $H \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_1)$ *admet une symétrie chirale si*

$$\{\sigma_3, H\} = 0$$

où $\{\sigma_3, H\} := \sigma_3 H + H\sigma_3$ *et* $\sigma_3 \varphi_1 \oplus \varphi_2 := \varphi_1 \oplus -\varphi_2$ *pour tout* $\varphi_1 \oplus \varphi_2 \in \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_1$.

Un opérateur chiral sur $\mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_1$ est déterminé par un opérateur $a : \mathbb{H}_1 \to \mathbb{H}_1$. En effet :

Proposition 3.3.2. *Soit* $H \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_1)$ *auto-adjoint.* H *admet une symétrie chirale si et seulement si il existe* $a \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_1)$ *tel que*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Preuve. Soit $H := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_1)$. $H = H^* \Leftrightarrow a = a^*, d = d^*$, et $b = c^*$. $\sigma_3 H + H\sigma_3 = 0 \Leftrightarrow a = d = 0$. □

Pour un opérateur auto-adjoint à symétrie chirale, 0 est une valeur propre stable par perturbation compacte et par homotopie :

Proposition 3.3.3. *Soit un opérateur chiral* $H = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}$ *où* $a \in \mathbb{F}(\mathbb{H}_1)$.

(1) Si $\mathrm{ind}(a) \neq 0$ *alors* $0 \in \sigma_{pp}(H)$.

(2) Pour tout opérateur chiral $H' = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{B}(\mathbb{H}_1)$ *tel que* $H - H'$ *est compact ou* $\|H - H'\|$ *est suffisamment petit alors* $0 \in \sigma_{pp}(H')$.

On dit que 0 est une valeur propre protégée par la topologie.

Preuve. (1) Soit $\varphi = \varphi_1 \oplus \varphi_2 \in \ker(H)$.

$$H\varphi = 0 \Leftrightarrow a\varphi_2 = 0 = a^*\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi \in \ker(a^*) \oplus \ker(a).$$

Or $\mathrm{ind}(a) = \dim\ker(a) - \dim\ker(a^*) \neq 0$ alors $\ker(a^*) \neq \{0\}$ ou $\ker(a) \neq \{0\}$. Donc $\ker(H) \neq \{0\} \Leftrightarrow 0 \in \sigma_{pp}(H)$.

(2) Si $H - H'$ est compact ou si $\|H - H'\|$ est suffisamment petit alors $a - b$ est compact ou $\|a - b\|$ est suffisamment petit. Donc $b \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ et $\mathrm{ind}(a) = \mathrm{ind}(b)$. D'après (1), $0 \in \sigma_{pp}(H')$.

□

Corollaire 3.3.4. *Soit* $H = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}$ *où* $a \in \mathbb{F}(\mathbb{H}_1)$, *on a*

$$\dim\ker(H) \geq |\mathrm{ind}(a)|.$$

Preuve.

$$\dim\ker(H) = \dim\ker(a) + \dim\ker(a^*) \geq |\dim\ker(a) - \dim\ker(a^*)| = |\mathrm{ind}(a)|.$$

□

Pour tout $N < \widehat{N} \in \mathbb{Z}$ on définit le projecteur $\chi([N, \widehat{N}])$ sur $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^d)$ par

$$\chi([N, \widehat{N}]) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inx}\varphi(n) := \sum_{n \in [N, \widehat{N}]} e^{inx}\varphi(n). \tag{3.5}$$

Théorème 3.3.5. *Soit un opérateur auto-adjoint à symétrie chirale* $H = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}$ *défini sur* $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^2)$ *avec* $a \in \mathbb{B}(L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}))$. *On suppose que pour tout* $N \in \mathbb{Z}$, $[a, \chi([N, \infty))]$ *est compact et qu'il existe deux lacets* $g_L, g_R \in C^0(\mathbb{S}^1, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ *tels que*

$$\lim_{N\to\infty} \|\chi((-\infty, -N])(a - M_{g_L})\chi((-\infty, -N])\| = 0$$

$$\lim_{N\to\infty} \|\chi([N, \infty))(a - M_{g_R})\chi([N, \infty))\| = 0$$

alors

$$\dim\ker(H) \geq |\deg(g_L) - \deg(g_R)|.$$

Preuve. Nous allons montrer que $a \in \mathbb{F}(L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}))$ et $|\mathrm{ind}(a)| = |\deg(g_L) - \deg(g_R)|$.

Soit pour tout $N \geq 0$,

$$d_N^+ := \chi([N, \infty))(a - M_{g_R})\chi([N, \infty))$$

alors d_N^+ est compact. En effet, soit le projecteur $P_R^N := \chi([N, \infty))$. Pour tout $\widehat{N} \geq N$, on a $P_R^N = \chi([N, \widehat{N})) + P_R^{\widehat{N}}$ et

$$\begin{aligned} P_R^N(a - M_{g_R})P_R^N &= \chi([N, \widehat{N}))(a - M_{g_R})P_R^N + P_R^N(a - M_{g_R})\chi([N, \widehat{N})) \\ &\quad + \chi([N, \widehat{N}))(a - M_{g_R})\chi([N, \widehat{N})) + P_R^{\widehat{N}}(a - M_{g_R})P_R^{\widehat{N}}. \end{aligned}$$

Les trois premiers termes à droite de l'égalité sont de rang fini grâce au facteur de rang fini $\chi([N, \widehat{N}))$. Donc ces trois premiers termes sont compacts. d_N^+ est alors compact, puisque par hypothèse $\lim_{N\to\infty} \|P_R^{\widehat{N}}(a - M_{g_R})P_R^{\widehat{N}}\| = 0$.

Avec un raisonnement pareil on peut montrer que $\forall N \leq 0$,

$$d_N^- := \chi((-\infty, N])(a - M_{g_R})\chi(-\infty, N])$$

est compact.

Soient $P_L^N := \chi((-\infty, -N])$ et $P_M^N := \chi((-N, N))$. Avec P_R^N, P_L^N, P_M^N on peut décomposer $\mathbb{H} := L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C})$ comme suit :

$$\mathbb{H} = P_L^N\mathbb{H} \oplus P_M^N\mathbb{H} \oplus P_R^N\mathbb{H}$$

Soit $a_{j,k} = P_j^N a P_k^N \quad j, k \in \{L, M, R\}$ alors

$$a \cong \begin{pmatrix} a_{L,L} & a_{L,M} & a_{L,R} \\ a_{M,L} & a_{M,M} & a_{M,R} \\ a_{R,L} & a_{R,M} & a_{R,R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{L,L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{R,R} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{L,M} & a_{L,R} \\ a_{M,L} & a_{M,M} & a_{M,R} \\ a_{R,L} & a_{R,M} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le deuxième opérateur à droite de l'égalité est compact. En effet, pour $K \in \{L, M, R\}$, $a_{K,M}$ et $a_{M,K}$ sont de rang fini. D'autre part,

$$a_{L,R} = \chi((-\infty, -N])a\chi([N, \infty)) = \chi((-\infty, -N])[a, \chi([N, \infty)]$$

et

$$a_{R,L} = \chi([N, \infty))a\chi((-\infty, -N]) = -[a, \chi([N, \infty)]\chi((-\infty, -N])$$

sont compacts, puisque $[a, \chi(N, \infty)]$ est compact par hypothèse et $\chi((-\infty, -N])$ est borné.

En outre,

$$\chi([N, \infty))(a - M_{g_R})\chi([N, \infty)) = a_{R,R} - \chi([N, \infty))M_{g_R}\chi([N, \infty))_{N\to\infty} \to 0$$

alors $a_{R,R} \to \chi([N, \infty))M_{g_R}\chi([N, \infty))$. Or, soit l'unitaire $V_N := M_{e^{iNt}}$ défini sur $\mathbb{H}$, on a que

$$\chi([N, \infty))M_{g_R}\chi([N, \infty)) = V_N\chi([0, \infty))M_{g_R}\chi([0, \infty))V_N^{-1} = V_N T_{g_R} V_N^{-1}$$

car $V_N\chi([0, \infty))V_N^{-1} = \chi([N, \infty))$ et $[V_N, M_{g_R}] = 0$. Donc $a_{R,R} \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ pour N suffisamment grand puisque $T_{g_R} \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ d'après le Corollaire 3.2.17(2) et V_N est inversible. Par un raisonnement similaire, on peut montrer que $a_{L,L} \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$. Donc $a \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ comme somme d'un opérateur compact et d'un opérateur de Fredholm. Par le Lemme 3.2.4 on a :

$$\operatorname{ind}(a) = \operatorname{ind}(a_{L,L}) + \operatorname{ind}(a_{R,R})$$

avec $a_{R,R} = P_R^N(a - M_{g_R})P_R^N + P_R^N M_{g_R} P_R^N = d_N^+ + V_N T_{g_R} V_N^{-1}$ pour un N suffisamment grand, et on a

$$\operatorname{ind}(a_{R,R}) = \operatorname{ind}(V_N T_{g_R} V_N^{-1}) = \operatorname{ind}(T_{g_R}) = -\deg(g_R).$$

La première égalité vient du Corollaire 3.2.11(2) puisque d_N^+ est compact, la deuxième égalité vient du Lemme 3.2.5(2) puisque V_N est inversible tandis que la troisième égalité vient du théorème d'indice de Toeplitz (Théorème 3.2.18). De même,

$$a_{L,L} = P_L^N(a - M_{g_L})P_L^N + P_L^N M_{g_L} P_L^N = d_N^- + P_L^N M_{g_L} P_L^N$$

mais $P_L^N M_{g_L} P_L^N$ ne correspond pas à l'opérateur de Toeplitz de symbole g_L. Toutefois, comme $g_L \in C^0(S^1, \mathbb{C} \setminus \{0\})$ M_{g_L} est inversible alors $M_{g_L} \in \mathbb{F}(\mathbb{H})$ (Par Théorème 3.2.9) et $M_{g_L}^* = M_{\overline{g}_L}$. De plus,

$$\ker(M_{g_L}) = \ker(M_{g_L}^*) = \{0\} \text{ donc } \operatorname{ind}(M_{g_L}) = 0.$$

En faisant la même décomposition que pour a, on obtient

$$\operatorname{ind}(M_{g_L}) = \operatorname{ind}((M_{g_L})_{RR}) + \operatorname{ind}((M_{g_L})_{LL}) = 0.$$

Or

$$\operatorname{ind}((M_{g_L})_{RR}) = \operatorname{ind}(T_{g_L}) = -\deg(g_L) \Rightarrow \operatorname{ind}(a_{L,L}) = \deg(g_L)$$

alors

$$\operatorname{ind}(a_{L,L}) + \operatorname{ind}(a_{R,R}) = \deg(g_L) - \deg(g_R)$$

et

$$\dim\ker(H) \geq |\operatorname{ind}(a)| = |\deg(g_L) - \deg(g_R)|.$$

□

3.4 Preuve de la conjecture de Kitagawa et al.

Dans cette section nous précisons la conjecture de Kitagawa et al et sa preuve. Rappelons que la conjecture stipule que : Pour la marche quantique à pas séparés du Corollaire 2.2.3, il existe un choix des paramètres tel que le nombre de vecteurs propres indépendants pour les valeurs propres ± 1 est borné inférieurement par un indice de Fredholm.

Théorème 3.4.1. *Soit pour des suites $\theta_1, \theta_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $U(\theta_1, \theta_2)$ la marche quantique à pas séparés définie par (2.3) avec*

$$\mathbf{C}_1\psi(x) = R(\theta_1(x))\psi(x), \qquad \mathbf{C}_2\psi(x) = R(\theta_2(x)/2)\psi(x), \qquad (x \in \mathbb{Z})$$

et $R(\theta)$ défini par (2.6). On a les deux assertions suivantes :

(1) Il existe des suites θ_1, θ_2 tel que

$$\dim\ker\left(U(\theta_1, \theta_2) - \mathbb{1}\right) + \dim\ker(U(\theta_1, \theta_2) + \mathbb{1}) \geq 2, \tag{3.6}$$

et pour toutes suites θ_1, θ_2 satisfaisant (3.9) ci-dessous, l'inégalité (3.6) est vraie.

(2) Soit de telles suites θ_1, θ_2 et U' une marche quantique à pas séparés telle que $U(\theta_1, \theta_2) - U'$ est compact ou $\|U - U'\|$ est suffisamment petit, alors U' vérifie (3.6).

Preuve. (1) Nous montrons dans un premier temps que $\sigma_1 U - U\sigma_1 = 0$ avec σ_1 la matrice de Pauli (voir Lemme A.1.1).
Par le Lemme A.3.2 on a

$$\sigma_1 S_\uparrow \sigma_1 = S_\downarrow^*, \qquad \sigma_1 S_\downarrow \sigma_1 = S_\uparrow^*, \qquad \sigma_1 R(\theta)\sigma_1 = R(\theta)^*$$

alors, comme $\sigma_1^2 = \mathbb{1}$, on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_1 U \sigma_1 &= \sigma_1 R(\theta_2/2)\sigma_1\sigma_1 S_\downarrow \sigma_1\sigma_1 R(\theta_1)\sigma_1\sigma_1 S_\uparrow \sigma_1\sigma_1 R(\theta_2/2)\sigma_1 \\ &= R^*(\theta_2/2)S_\uparrow^* R^*(\theta_1) S_\downarrow^* R^*(\theta_2/2) = U^*\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{T} := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. On a $\mathcal{T}\sigma_1\mathcal{T} = \sigma_3$ donc pour

$$W := \mathcal{T}^* U \mathcal{T}$$

on a $\sigma_3 W = W^*\sigma_3$. On en déduit que

$$\frac{1}{2i}(W - W^*)$$

est chiral. En effet, $\frac{1}{2i}\sigma_3(W - W^*)\sigma_3 = \frac{1}{2i}(W^* - W)$. Afin d'appliquer le Théorème 3.3.5 nous passons dans $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^2)$ en utilisant la transformé de Fourier (inverse)

$$F : \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^d) \to L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^d), \quad F\psi(x) := \sum \psi_n e^{inx} \tag{3.7}$$

Soit

$$H := F\frac{1}{2i}(W - W^*)F^{-1} = \begin{pmatrix}0 & a\\ a^* & 0\end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Nous soulignons que la deuxième égalité vient de la Proposition 3.3.2 comme H est chiral.
Dans le cas où les suites $\theta_1(n)$ et $\theta_2(n)$ sont constantes (de valeurs θ_1, θ_2) on obtient par le Lemme A.3.3 que

$$a = M_{g_\Theta} \qquad \left(\Theta := (\theta_1, \theta_2) \in \Pi^2\right)$$

avec

$$g_\Theta(x) = i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos x + \sin\theta_1 \cos\theta_2 + i\cos\theta_1 \sin x)$$

On sait, par le Corollaire 3.2.17, que l'opérateur de Toeplitz de symbole g_Θ est de Fredholm si $g_\Theta \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C} \setminus \{0\})$ et, par le théorème d'indice de Toeplitz (Théorème 3.2.18) que $\operatorname{ind}(T_{g_\Theta}) = -\deg(g_\Theta)$. On trouve le degré de $\frac{1}{i}g_\Theta$ dans le Corollaire 3.1.9 (voir figure 3.6) qui est le même que celui de g_Θ puisque la courbe de $\frac{1}{i}g_\Theta$ est une rotation de celle de g_Θ.
Soient

$$\mathbf{Z}_{\text{bleu}} := \left\{\Theta \in \Pi^2 \mid \deg(g_\Theta) = 1\right\}$$

et

$$\mathbf{Z}_{\text{rouge}} := \left\{\Theta \in \Pi^2 \mid \deg(g_\Theta) = -1\right\}$$

Soient $\Theta_B \in \mathbf{Z}_{\text{bleu}}, \Theta_R \in \mathbf{Z}_{\text{rouge}}$ et $\mathbb{Z} \ni N \mapsto (\theta_1(N), \theta_2(N)) =: \Theta(N) \in \mathbb{R}^2$ une suite telle que

$$\lim_{N\to-\infty} \Theta(N) = \Theta_R \quad \text{et} \quad \lim_{N\to+\infty} \Theta(N) = \Theta_B. \tag{3.9}$$

alors

$$\lim_{N\to\infty} \|\chi((-\infty,-N])(a - Mg_{\Theta_R})\chi((-\infty,-N])\| = 0$$

et

$$\lim_{N\to+\infty} \|\chi([N,+\infty))(a - Mg_{\Theta_B})\chi([N,+\infty))\| = 0.$$

Par le Théorème 3.3.5 on a

$$\dim\ker(H) \geq |\deg(g_{\Theta_B}) - \deg(g_{\Theta_R})| = 2$$

$$\text{donc } \dim\ker(FWF^{-1} - \mathbb{1}) + \dim\ker(FWF^{-1} + \mathbb{1}) \geq 2$$

$$\text{et } \dim\ker(U - \mathbb{1}) + \dim\ker(U + \mathbb{1}) \geq 2.$$

(2) La partie imaginaire de U' en Fourier sera $H' = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^* & 0 \end{pmatrix}$ et l'assertion suit de la Proposition 3.3.3(2).

□

Chapitre 4

Analyse spectrale et indice non trivial sur une bande du graphe rubis

Dans ce chapitre nous étudions deux aspects d'un modèle de type Chalker-Coddington sur le graphe rubis qui est déterminé par une famille de matrices de U(2) indexé par un réseau de Bravais bi-dimensionnel. Le comportement dynamique du modèle dépend de cette famille. On se réfère à [2, 3, 6, 12] pour les détails sur les caractéristiques du model de Chalker-Coddington .

Ce chapitre est composé de quatre sections. Dans la première nous introduirons l'unitaire du modèle sur le graphe rubis.

Dans la deuxième section nous analyserons le spectre du modèle dans le cas où la famille de matrices est constante et exhiberons la dynamique dans certains cas spéciaux.

Dans la troisième section nous présenterons un résumé de la théorie d'indice d'une pair de projecteurs orthogonaux introduit dans [7, 8].

Dans la dernière section nous présenterons une interface entre deux demi-plans invariants avec des chiralités différentes et démontrerons l'existence de transport.

Nous commençons par une présentation du graphe rubis orienté. Voir [34] pour une introduction de la théorie des graphe. Soit

$$e_x := \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$e_y := \left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\text{et } \Gamma := \left\{z = xe_x + ye_y,\ (x,y) \in \mathbb{Z}^2\right\}.$$

Pour tout $z \in \Gamma$ le graphe rubis orienté, représenté par la figure 4.1, est composé de 6 noeuds, notés

$$a_1^{\pm}(z) := z \pm \frac{1}{4} e_y;$$

$$a_2^{\pm}(z) := z \pm \frac{1}{4}(e_x + e_y);$$

$$a_3^{\pm}(z) := z \pm \frac{1}{4} e_x.$$

et 12 liens notés

$$\overrightarrow{a_j^+(z)a_{\tau(j)}^+(z)},\ \overrightarrow{a_j^-(z)a_{\tau(j)}^-(z)},\ \overrightarrow{a_3^-(z)a_1^+(z)},\ \overrightarrow{a_3^+(z)a_1^-(z)}$$

$$\overrightarrow{a_1^-(z)a_2^+(z-e_y)},\ \overrightarrow{a_2^-(z)a_3^+(z-e_x)},\ \overrightarrow{a_1^+(z)a_2^-(z+e_y)},\ \overrightarrow{a_2^+(z)a_3^-(z+e_x)}.$$

avec $j \in \{1,2,3\}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ une permutation.

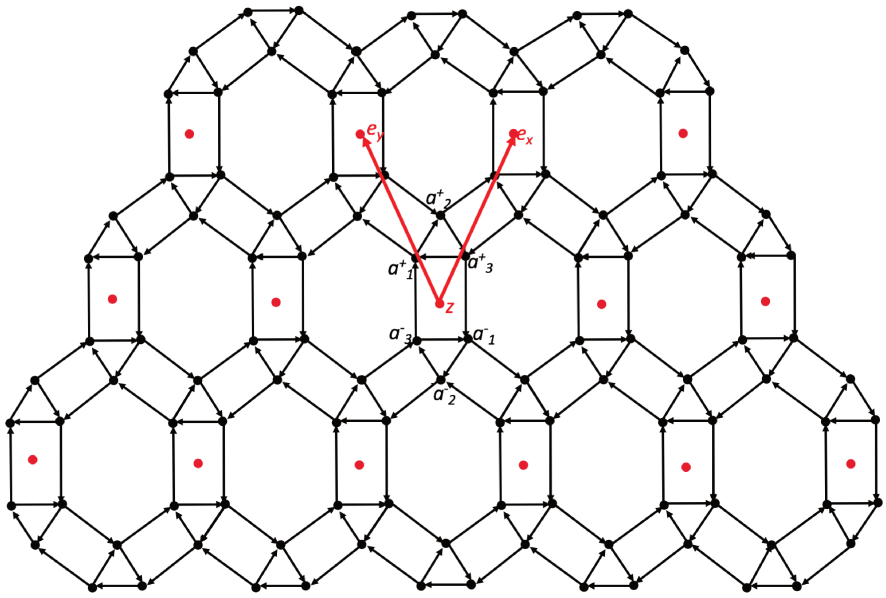


FIGURE 4.1 – Le graphe rubis orienté

4.1 Opérateur du graphe rubis

A chaque noeud $a_j^{\dagger}(z)$ ($z \in \Gamma, j \in \{1,2,3\}, \dagger \in \{+,-\}$), nous associons l'espace vectoriel unidimensionnel vect $\left\{|a_j^{\dagger}(z)\rangle\right\} \simeq \mathbb{C}$ et le graphe est associé à l'espace de

Hilbert $\mathbb{H} := \ell^2(\Gamma, \mathbb{C}^6)$. Les vecteurs de la base de $\mathbb{H}$ sont les suites définies par

$$\Gamma \ni z \mapsto |z_0; a_j^\dagger\rangle := |a_j^\dagger(z_0)\rangle := \begin{cases} a_j^\dagger(z_0) & si \quad z = z_0 \\ 0 & si \quad z \neq z_0 \end{cases}$$

avec

$$a_j^-(z_0) := e_{2j-1} \qquad a_j^+(z_0) := e_{2j}$$

où $\{e_j,\ j = 1, ..., 6\}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^6$.

L'opérateur du modèle de Chalker-Coddington est

$$U_{RB} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$$

défini par un ensemble de matrices 2×2

$$\mathbf{U} : \{1, 2, 3\} \times \Gamma \to U(2),\ (j, z) \to u_j(z). \tag{4.1}$$

Explicitement, U_{RB} est défini comme suit :

$$\begin{pmatrix} U_{RB}\,|z + e_y; a_1^-\rangle \\ U_{RB}\,|z; a_1^+\rangle \end{pmatrix} := u_1(z) \begin{pmatrix} |z + e_y; a_2^-\rangle \\ |z; a_2^+\rangle \end{pmatrix}, \tag{4.2}$$

$$\begin{pmatrix} U_{RB}\,|z + e_x; a_2^-\rangle \\ U_{RB}\,|z; a_2^+\rangle \end{pmatrix} := u_2(z) \begin{pmatrix} |z + e_x; a_3^-\rangle \\ |z; a_3^+\rangle \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

$$\begin{pmatrix} U_{RB}\,|z; a_3^-\rangle \\ U_{RB}\,|z; a_3^+\rangle \end{pmatrix} := u_3(z) \begin{pmatrix} |z; a_1^-\rangle \\ |z; a_1^+\rangle \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

voir figure 4.2.

Lemme 4.1.1. *Soit $T_x, T_y : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ définis par*

$$T_x\,|z; a_j^\pm\rangle := |z - e_x; a_j^\pm\rangle, \qquad T_y\,|z; a_j^\pm\rangle := |z - e_y; a_j^\pm\rangle.$$

Les équations (4.2) et (4.3) deviennent respectivement

$$\begin{pmatrix} U_{RB}\,|z; a_1^-\rangle \\ U_{RB}\,|z; a_1^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_y & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} u_1(z) \begin{pmatrix} T_y^* & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |z; a_2^-\rangle \\ |z; a_2^+\rangle \end{pmatrix}, \tag{4.5}$$

$$\begin{pmatrix} U_{RB}\,|z; a_2^-\rangle \\ U_{RB}\,|z; a_2^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} u_2(z) \begin{pmatrix} T_x^* & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |z; a_3^-\rangle \\ |z; a_3^+\rangle \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Preuve. Nous démontrons (4.5).

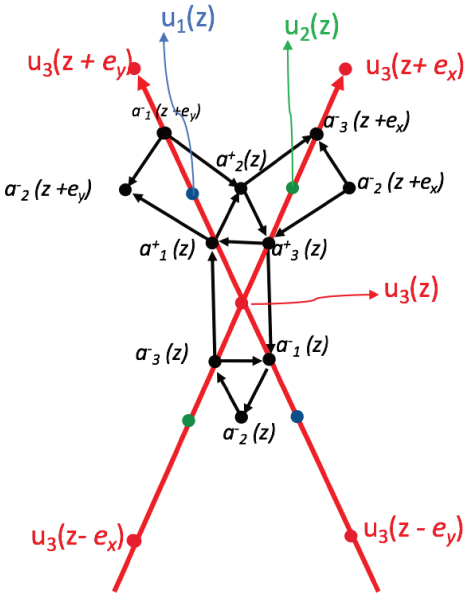


FIGURE 4.2 – Les matrices u_j

Soit $u_1(z) = \begin{pmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{pmatrix}$, en posant $z' = z - e_y$ on a

$$\begin{aligned} U_{RB} \left| z; a_1^- \right\rangle = U_{RB} \left| z' + e_y; a_1^- \right\rangle &= a(z') \left| z' + e_y; a_2^- \right\rangle + b(z') \left| z'; a_2^+ \right\rangle \text{ (par (4.2))} \\ &= a(z - e_y) \left| z; a_2^- \right\rangle + b(z - e_y) \left| z - e_y; a_2^+ \right\rangle . \end{aligned}$$

$$U_{RB} \left| z; a_1^+ \right\rangle = c(z) \left| z + e_y; a_2^- \right\rangle + d(z) \left| z; a_2^+ \right\rangle ; \qquad \text{(par (4.2))}.$$

Alors

$$U_{RB} \begin{pmatrix} \left| z; a_1^- \right\rangle \\ \left| z; a_1^+ \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_y a T_y^* & T_y b \\ c T_y^* & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left| z; a_2^- \right\rangle \\ \left| z; a_2^+ \right\rangle \end{pmatrix} .$$

□

Comme les opérateurs de translations conditionnées et les opérateurs de multiplications de symbole $u_j(z)$ sont unitaires de $L^2(\Gamma, \mathbb{C}^2) \to L^2(\Gamma, \mathbb{C}^2)$ nous déduisons ce résultat :

Lemme 4.1.2. *1. Pour toute famille $\{u_j(z) \in U(2) \mid (j, z) \in \{1, 2, 3\} \times \Gamma\}$, U_{RB} est unitaire.*

2. l'adjoint de U_{RB} est

$$U_{RB}^* \begin{pmatrix} |z+e_y; a_2^-\rangle \\ |z; a_2^+\rangle \end{pmatrix} = u_1^*(z) \begin{pmatrix} |z+e_y; a_1^-\rangle \\ |z; a_1^+\rangle \end{pmatrix};$$

$$U_{RB}^* \begin{pmatrix} |z+e_x; a_3^-\rangle \\ |z; a_3^+\rangle \end{pmatrix} = u_2^*(z) \begin{pmatrix} |z+e_x; a_2^-\rangle \\ |z; a_2^+\rangle \end{pmatrix};$$

$$U_{RB}^* \begin{pmatrix} |z; a_1^-\rangle \\ |z; a_1^+\rangle \end{pmatrix} = u_3^*(z) \begin{pmatrix} |z; a_3^-\rangle \\ |z; a_3^+\rangle \end{pmatrix}.$$

On désigne par

$$\mathbb{S}^n := \left\{ z \in \mathbb{C}^{\frac{n+1}{2}}; \sum_j |z_j|^2 = 1 \right\}$$

la sphère unité de dimension $n \in 2\mathbb{Z}+1$. Pour une paramétrisation des matrices $u_j(z)$, on utilise la convention

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \to U(2), \ \left(e^{-i\alpha_j}, (r_j(z), t_j(z))\right) \mapsto e^{-i\alpha_j} \begin{pmatrix} r_j(z) & -t_j(z) \\ \overline{t}_j(z) & \overline{r}_j(z) \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

voir figure 4.3.

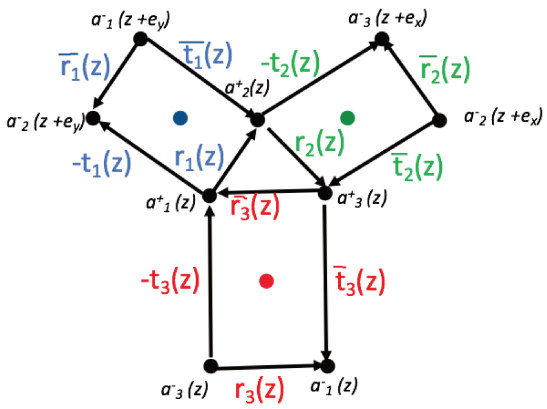


FIGURE 4.3 – Les éléments des matrices u_j

4.2 Analyse spectrale

Nous étudions le spectre de U_{RB} dans le cas où les matrices $u_j(z)$ sont invariantes par translation. Dans ce cas, la représentation en Fourier de U_{RB} est l'opérateur de

multiplication à valeur matricielle défini sur $L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^6)$ par,

$$\widehat{U}_{RB}(k) := FU_{RB}F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{u}_1(k) & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{u}_2(k) \\ \widehat{u}_3(k) & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (k := (k_x, k_y)) \tag{4.8}$$

avec F la transformé de Fourier définie par (3.7) et

$$\widehat{u}_1(k) := F \begin{pmatrix} T_y & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} u_1 \begin{pmatrix} T_y^* & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} F^{-1} = e^{-i\alpha_1} \begin{pmatrix} r_1 & -t_1 e^{ik_y} \\ \overline{t}_1 e^{-ik_y} & \overline{r}_1 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{u}_2(k) := F \begin{pmatrix} T_x & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} u_2 \begin{pmatrix} T_x^* & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} F^{-1} = e^{-i\alpha_2} \begin{pmatrix} r_2 & -t_2 e^{ik_x} \\ \overline{t}_2 e^{-ik_x} & \overline{r}_2 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{u}_3(k) := Fu_3F^{-1} = u_3.$$

Proposition 4.2.1. *Avec la convention (4.7), soit $u_j \in U(2)$ tel que $u_j(z) = u_j$ $\forall z \in \Gamma$, $j \in \{1, 2, 3\}$ et U_{RB} défini dans (4.2)-(4.4). Pour $k = (k_x, k_y) \in [0, 2\pi)^2$, soit*

$$f(k) := \Re e(r_1 r_2 r_3) - |t_1 t_2 r_3| \cos\varphi_1(k) - |r_1 t_2 t_3| \cos\varphi_2(k) - |t_1 r_2 t_3| \cos\varphi_3(k)$$

avec $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^0([0, 2\pi)^2)$ satisfaisant $e^{i\varphi_1(k)} = \dfrac{t_1 t_2 r_3}{|t_1 t_2 r_3|} e^{i(k_y - k_x)}$, $e^{i\varphi_2(k)} = \dfrac{r_1 t_2 t_3}{|r_1 t_2 t_3|} e^{ik_x}$ et $e^{i\varphi_3(k)} = \dfrac{t_1 r_2 t_3}{|t_1 r_2 t_3|} e^{ik_y}$.

Alors $\mathrm{Im}(f) \subset [-1, 1]$ et pour le spectre de U_{RB}^3 on a

$$\sigma_{ac}(U_{RB}^3) = B_+ \bigcup B_-$$

avec

$$B_\pm := \left\{ e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} \left(p \pm i\sqrt{1-p^2} \right), \ p \in \mathrm{Im} f \right\} \tag{4.9}$$

Preuve. Par (4.8) on a

$$\widehat{U}_{RB}(k) = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{u}_1(k) & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{u}_2(k) \\ \widehat{u}_3(k) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\widehat{U}_{RB}^3(k) = \begin{pmatrix} (\widehat{u}_1\widehat{u}_2\widehat{u}_3)(k) & & \\ & (\widehat{u}_2\widehat{u}_3\widehat{u}_1)(k) & \\ & & (\widehat{u}_3\widehat{u}_1\widehat{u}_2)(k) \end{pmatrix}$$

On a :

$$\sigma(\widehat{U}^3_{RB}) = \sigma(\widehat{u}_1\widehat{u}_2\widehat{u}_3)\bigcup\sigma(\widehat{u}_2\widehat{u}_3\widehat{u}_1)\bigcup\sigma(\widehat{u}_3\widehat{u}_1\widehat{u}_2) \equiv \sigma(\widehat{u}_1\widehat{u}_2\widehat{u}_3)$$

Nous déterminons le spectre de $\widehat{u}_1\widehat{u}_2\widehat{u}_3$, avec

$$(\widehat{u}_1\widehat{u}_2\widehat{u}_3)(k) = e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\underbrace{\begin{pmatrix} r_1 & -t_1e^{ik_y} \\ \bar{t}_1e^{-ik_y} & \bar{r}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 & -t_2e^{ik_x} \\ \bar{t}_2e^{-ik_x} & \bar{r}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_3 & -t_3 \\ \bar{t}_3 & \bar{r}_3 \end{pmatrix}}_{:=N(k)} \tag{4.10}$$

Le spectre de $(\widehat{u}_1\widehat{u}_2\widehat{u}_3)(k)$ est $\{\lambda_\pm(k)\}$ avec

$$\lambda_\pm(k) := e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\left(f(k) \pm i\sqrt{1-f^2(k)}\right)$$

où, par le Lemme A.3.4,

$$\frac{1}{2}\text{trace}(N(k)) = f(k).$$

$N(k) \in SU(2)$ donc $\text{Im}(f) \subset [-1,1]$ et

$$\lambda_\pm([0,2\pi)^2) = e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\left(p \pm i\sqrt{1-p^2},\ p \in \text{Im}f\right).$$

On obtient le spectre de U_{RB} par le Corollaire 4.5 dans [4].

□

Nous déterminons explicitement la dynamique et le spectre pour certains cas spéciaux, se référer à la figure 4.4.

Corollaire 4.2.2. *Avec les notations de la Proposition 4.2.1 on a :*

1. *Si toutes les matrices u_j sont diagonales ($t_j = 0\ \forall j \in \{1,2,3\}$) la dynamique est une permutation sur les triangles, c'est-à-dire les sous-espaces*

$$\mathbb{H}^z_{a^-} := \text{vect}\left\{|z;a_1^-\rangle\,;|z;a_2^-\rangle\,;|z;a_3^-\rangle\right\}$$

et

$$\mathbb{H}^z_{a^+} := \text{vect}\left\{|z;a_1^+\rangle\,;|z;a_2^+\rangle\,;|z;a_3+\rangle\right\}.$$

On observe que

$$|z;a_j^-\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z;a^-_{\tau(j)}\rangle \qquad \textit{et} \qquad |z;a_j^+\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z;a^+_{\tau(j)}\rangle$$

avec $\tau = (1\ 2\ 3)$, voir figure 4.4a.
Pour le spectre on a

$$\sigma(U^3_{RB}) = \left\{e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\left(\Re e(r_1r_2r_3) \pm i\sqrt{1-\Re e(r_1r_2r_3)^2}\right)\right\}.$$

2. *Si toutes les matrices u_j sont anti-diagonales ($r_j = 0\ \forall j \in \{1,2,3\}$) la dynamique est une permutation sur les hexagones, c'est-à-dire les sous-espaces*

$$\mathbb{H}^z_{a^\pm} := \mathrm{vect}\{|z; a_1^-\rangle\,; |z + (e_x - e_y); a_1^+\rangle\,; |z + e_x; a_2^-\rangle\,;$$
$$|z - e_y; a_2^+\rangle\,; |z + (e_x - e_y); a_3^-\rangle\,; |z; a_3^+\rangle\}.$$

On observe que

$$|z; a_1^-\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z + (e_x - e_y); a_1^+\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z + e_x; a_2^-\rangle \xrightarrow{U_{RB}}$$
$$\xrightarrow{U_{RB}} |z - e_y; a_2^+\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z + (e_x - e_y); a_3^-\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z; a_3^+\rangle$$

voir figure 4.4c.
Pour le spectre on a

$$\sigma(U_{RB}^3) = \left\{\pm i e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\right\}.$$

3. *Si $t_1 = t_2 = r_3 = 0$ (ou une permutation) la dynamique est une permutation sur les petits hexagones, c'est-à-dire les sous-espaces*

$$\mathrm{vect}\left\{|z; a_1^-\rangle\,; |z; a_1^+\rangle\,; |z; a_2^-\rangle\,; |z; a_2^+\rangle\,; |z; a_3^-\rangle\,; |z; a_3^+\rangle\right\}.$$

On observe que

$$|z; a_1^-\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z; a_2^-\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z; a_3^-\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z; a_1^+\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z; a_2^+\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z; a_3^+\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z; a_1^-\rangle$$

voir figure 4.4e.
Pour le spectre on a

$$\sigma(U_{RB}^3) = \left\{\pm i e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\right\}$$

4. *Si $r_1 = r_2 = t_3 = 0$ (ou une permutation) la dynamique est une somme d'opérateurs de translations. On observe que*

$$\ldots \xrightarrow{U_{RB}} |z - e_x; a_2^+\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z; a_3^-\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z; a_1^-\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z - e_y; a_2^+\rangle \xrightarrow{U_{RB}} \ldots.$$

$$\ldots \xrightarrow{U_{RB}} |z - e_x; a_2^-\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z; a_3^+\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z; a_1^+\rangle \xrightarrow{U_{RB}} |z - e_y; a_2^+\rangle \xrightarrow{U_{RB}} \ldots.$$

voir figure 4.4g.
Pour le spectre on a

$$\sigma(U_{RB}^3) = \mathbb{S}^1$$

5. *Si $r_1, r_2 \in (0,1)$ et $r_3 = 0$ (ou une permutation) la dynamique est arbitraire, voir figure 4.4i.*
   Pour le spectre on a

$$\sigma(U_{RB}^3) = \left\{ e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} \left(p \pm i\sqrt{1-p^2} \right),\ p \in \mathrm{Im} f \right\}$$

   avec

$$\mathrm{Im} f = [-(|r_1 t_2] + |t_1 r_2|), (|r_1 t_2] + |t_1 r_2|)].$$

Preuve. 1. Si $t_j = 0\ \forall j \in \{1,2,3\}$ on a

$$U_{RB} \begin{pmatrix} |z; a_1^-\rangle \\ |z; a_1^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_y & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & \overline{r}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_y^* & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |z; a_2^-\rangle \\ |z; a_2^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 |z; a_2^-\rangle \\ \overline{r}_1 |z; a_2^+\rangle \end{pmatrix}; \tag{4.11}$$

$$U_{RB} \begin{pmatrix} |z; a_2^-\rangle \\ |z; a_2^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & 0 \\ 0 & \overline{r}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x^* & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |z; a_3^-\rangle \\ |z; a_3^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_2 |z; a_3^-\rangle \\ \overline{r}_2 |z; a_3^+\rangle \end{pmatrix}; \tag{4.12}$$

$$U_{RB} \begin{pmatrix} |z; a_3^-\rangle \\ |z; a_3^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_3 & 0 \\ 0 & \overline{r}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |z; a_1^-\rangle \\ |z; a_1^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_3 |z; a_1^-\rangle \\ \overline{r}_3 |z; a_1^+\rangle \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

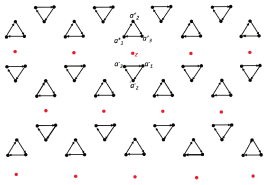
Avec cette hypothèse $f(k) = \Re e(r_1 r_2 r_3)$. Alors

$$B_\pm = \left\{ e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} \left(\Re e(r_1 r_2 r_3) \pm i\sqrt{1 - \Re e(r_1 r_2 r_3)^2} \right) \right\}$$

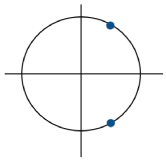
2. Si $r_j = 0\ \forall j \in \{1,2,3\}$ on a

$$U_{RB} \begin{pmatrix} |z; a_1^-\rangle \\ |z; a_1^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_y & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t_1 \\ \overline{t}_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_y^* & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |z; a_2^-\rangle \\ |z; a_2^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_1 |z - e_y; a_2^+\rangle \\ \overline{t}_1 |z + e_y; a_2^-\rangle \end{pmatrix}; \tag{4.14}$$

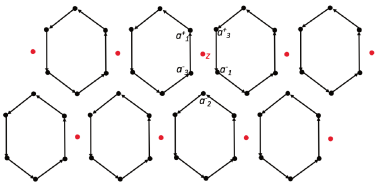
$$U_{RB} \begin{pmatrix} |z; a_2^-\rangle \\ |z; a_2^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -t_2 \\ \overline{t}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x^* & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |z; a_3^-\rangle \\ |z; a_3^+\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t_2 |z - e_x; a_3^+\rangle \\ \overline{t}_2 |z + e_x; a_3^-\rangle \end{pmatrix}; \tag{4.15}$$



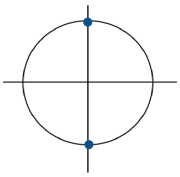
(a) L'action de U_{RB} dans le cas où $t_j = 0\ \forall j \in \{1, 2, 3\}$.



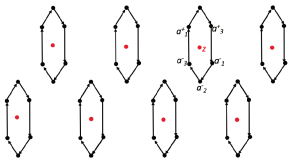
(b) Spectre de U_{RB}^3 dans le cas où $\alpha_j = t_j = 0\ \forall j$ et $\Re e(r_1 r_2 r_3) > 0$.



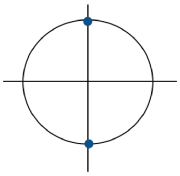
(c) L'action de U_{RB} dans le cas où $r_j = 0\ \forall j \in \{1, 2, 3\}$.



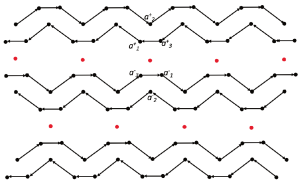
(d) Spectre de U_{RB}^3 dans le cas où $\alpha_j = r_j = 0\ \forall j$.



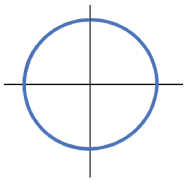
(e) L'action de U_{RB} dans le cas où $t_1 = t_2 = r_3 = 0$. Ici contrairement au cas (c) les hexagones sont centrés en z.



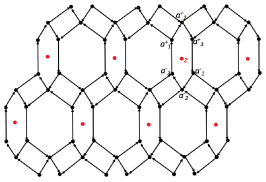
(f) Spectre de U_{RB}^3 dans le cas où $\alpha_j = t_1 = t_2 = r_3 = 0, \forall j$.



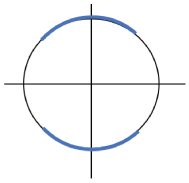
(g) L'action de U_{RB} dans le cas où $r_1 = r_2 = t_3 = 0$.



(h) Spectre de U_{RB}^3 dans le cas où $\alpha_j = r_1 = r_2 = t_3 = 0, \forall j$.



(i) L'action de U_{RB} dans le cas où $r_1, r_2 \in (0, 1)$ et $r_3 = 0$.



(j) Spectre de U_{RB}^3 dans le cas où $r_1, r_2 \in (0, 1)$ et $\alpha_j = r_3 = 0, \forall j$

FIGURE 4.4 – La dynamique et le spectre de U_{RB} dans certains cas spéciaux.

$$U_{RB}\begin{pmatrix}|z;a_3^-\rangle\\|z;a_3^+\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -t_3\\ \bar{t}_3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|z;a_1^-\rangle\\|z;a_1^+\rangle\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t_3\,|z;a_1^+\rangle\\ \bar{t}_3\,|z;a_1^-\rangle\end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Avec cette hypothèse $f(k)=0$. Alors

$$B_\pm=\left\{\pm ie^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\right\}.$$

3. Si $t_1=t_2=r_3=0$ pour le calcul de U_{RB} on se réfère aux équations (4.11), (4.12) et (4.16). De plus, avec cette hypothèse $f(k)=0$ alors

$$B_\pm=\left\{\pm ie^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\right\}.$$

4. Si $r_1=r_2=t_3=0$ pour le calcul de U_{RB} on se réfère aux équations (4.15), (4.16) et (4.13). De plus, avec cette hypothèse $f(k)=|r_3|\cos(\varphi_1(k))$ où $\varphi_1\in C^0([0,2\pi))$ satisfaisant $e^{i\varphi_1(k)}=\dfrac{r_3}{|r_3|}e^{ik}$. Alors

$$B_\pm=\left\{e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\left(|r_3|\cos(\varphi_1(k))\pm i|r_3|\sin(\varphi_1(k))\right)\right\}.$$

5. Si $r_1,r_2\in(0,1)$ et $r_3=0$ pour le calcul de U_{RB} on se réfère aux équations (4.5),(4.6) et (4.16). De plus, avec cette hypothèse $f(k)=-|r_1t_2|\cos\varphi_2(k)-|t_1r_2|\cos\varphi_2(k)$ où $\varphi_1,\varphi_2\in C^0([0,2\pi))$ satisfaisant $e^{i\varphi_1(k)}=\dfrac{r_1t_2}{|r_1t_2|}e^{ik}$ et $e^{i\varphi_2(k)}=\dfrac{t_1r_2}{|t_1r_2|}e^{ik}$. Donc $\mathrm{Im}f=[-|r_1t_2|-|t_1r_2|,|r_1t_2|+|t_1r_2|]$ et

$$B_\pm=\left\{e^{-i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}\left(p\pm i\sqrt{1-p^2}\right),\ p\in\mathrm{Im}f\right\}$$

□

Remarque 4.2.3. *On remarque dans le Corollaire 4.2.2 que :*

1. *Les dynamiques périodiques les cas (2) et (3) sont dans le sens des aiguilles d'une montre (voir figure 4.4c et figure 4.4e) tandis que celle du cas (1) est dans le sens contraire (voir de la figure 4.4a).*
2. *La somme des translations n'est pas stable dans le cas de la figure 4.4g pour r_1,r_2 non nuls et suffisamment petits.*
3. *Dans le cas de la figure 4.4i si $(r_1,t_1)=(r_2,t_2)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ le spectre couvre tout le cercle.*

4.3 Théorie de l'indice d'une paire de projecteurs

Pour prouver l'existence de transport sur une bande du graphe rubis, nous utiliserons l'indice relatif à une paire de projecteurs $\mathbf{Q}$ et $U_{RB}^*\mathbf{Q}U_{RB}$ où $\mathbf{Q}$ sera une projection sur un demi-plan. Par le Théorème 3.11 dans [1] la non trivialité de cet indice implique nos résultats spectrales. Dans [7, 8] il est introduit une théorie qui lie l'indice à la trace, voir Théorème 4.3.6. Pour être complet, nous présentons ici cette théorie et nous l'appliquerons dans le section suivante.

Définition 4.3.1. *Soit P, Q deux projecteurs orthogonaux sur un espace de Hilbert. On dit que (P, Q) est une paire de Fredholm si $QP : \mathrm{Im}P \to \mathrm{Im}Q$ est un opérateur de Fredholm. Dans ce cas, on a*

$$\mathrm{ind}(P, Q) = \mathrm{ind}(QP).$$

Il suit que :

Proposition 4.3.2. *(P, Q) est une paire de Fredholm si et seulement si*

(1) 1 et -1 sont des valeurs propres isolées de $P - Q$.

(2) $\ker(P - Q \mp \mathbb{1})$ sont de dimension finie.

De plus

$$\mathrm{ind}(P, Q) = \mathrm{dimker}(P - Q - \mathbb{1}) - \mathrm{dimker}(P - Q + \mathbb{1}). \tag{4.17}$$

Preuve. Soient $A := P - Q$ et $C := PQ$, ce dernier vu comme une application de $\mathrm{Im}P$ à $\mathrm{Im}Q$. Alors

$$\ker(C \restriction \mathrm{Im}P) = \{\varphi \in \mathrm{Im}P \mid Q\varphi = 0\} = \ker(A - \mathbb{1}) \tag{4.18a}$$

$$\mathrm{Im}(C \restriction \mathrm{Im}P)^{\perp} = \{\varphi \in \mathrm{Im}Q \mid P\varphi = 0\} = \ker(A + \mathbb{1}) \tag{4.18b}$$

donc (4.17) est vérifié une fois qu'on a prouvé que (1) et (2) est équivalant à (P, Q) est une paire de Fredholm.

Pour voir le côté droit de (4.18a), notons que $\mathbb{1} - A = (\mathbb{1} - P) + Q$ est une somme d'opérateurs positifs alors $(\mathbb{1} - A)\varphi = 0$ si et seulement si $(\mathbb{1} - P)\varphi = 0$ et $Q\varphi = 0$. Le côté droit de (4.18b) est obtenu par un raisonnement similaire.

" $\Rightarrow$ " Supposons que (P, Q) est une paire de Fredholm et soit φ_n une suite orthonormale de Weyl pour l'opérateur $A - \mathbb{1}$ alors $\|(A - \mathbb{1})\varphi_n\| \to 0$. Donc $\langle \varphi_n, (P - Q)\varphi_n \rangle \to 1$ alors $\|P\varphi_n\| \to 1$ et $\|Q\varphi_n\| \to 0$. Il suit que $\psi_n = P\varphi_n / \|P\varphi_n\|$ est de norme 1, $\psi_n \to 0$ faiblement et $(PQP)\psi_n \to 0$ donc $0 \in \sigma_{ess}(CC^*)$. Ainsi, puisque (P, Q) est une paire de Fredholm, une telle suite φ_n n'existe pas, ce qui implique que $1 \notin \sigma_{ess}(A)$. En faisant un raisonnement similaire à C^* on obtient que $-1 \notin \sigma_{ess}(A)$. Mais $\pm 1 \notin \sigma_{ess}(A)$ est équivalant à (1) et (2).

" $\Leftarrow$ " Inversement supposons que les assertions (1) et (2) sont vérifiées et posons

$$A = A_0 + F$$

où F est de rang fini et il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $A_0 \leq (1-\varepsilon)\mathbb{1}$. Comme

$$\begin{aligned} PQP &= P(\mathbb{1} - A)P \\ &= -PFP + P(\mathbb{1} - A_0)P \\ &\geq -PFP + \varepsilon P \end{aligned}$$

on voit que $0 \notin \sigma_{ess}(C^*C)$, ce qui implique que (P, Q) est une paire de Fredholm (par le Théorème 3.2.3). $\square$

Il suit :

Proposition 4.3.3. *(P, Q) est une paire de Fredholm si et seulement si*

$$P - Q = F + D$$

où F et D sont deux opérateurs auto-adjoints avec $\|D\| < 1$ et F de rang fini.

Preuve. Si $P - Q = F + D$ alors les assertions (1) et (2) de la Proposition 4.3.2 sont vérifiées.

Inversement supposons que les assertions (1) et (2) de la Proposition 4.3.2 sont vérifiées. Soit $P_\pm$ les projecteurs sur les sous-espaces propres de $P - Q$ associés aux valeurs propres ± 1 et $P_0 = \mathbb{1} - P_+ - P_-$. Alors

$$P - Q = F + D$$

avec $F := P_+ - P_-$ et $D := P_0(P - Q)P_0$. $\square$

Deux projecteurs unitairement équivalents ont un indice trivial :

Théorème 4.3.4. *Soit (P, Q) une paire de Fredholm. Il existe un opérateur unitaire V tel que*

$$VPV^{-1} = Q \qquad \text{et} \qquad VQV^{-1} = P$$

si et seulement si $\operatorname{ind}(P, Q) = 0$.

Preuve. Si un tel V existe, alors $V(P - Q)V^{-1} = Q - P$. Donc par la formule (4.17), on a $\operatorname{ind}(P, Q) = 0$.

Inversement soient (P, Q) une paire de Fredholm, $P_\pm$ les projecteurs sur $\ker(P - Q \mp \mathbb{1})$ et $P_0 := \mathbb{1} - P_+ - P_-$. Si $\operatorname{ind}(P, Q) = 0$ alors $\operatorname{Im}(P_+)$ et $\operatorname{Im}(P_-)$ ont la même

dimension. Il existe un unitaire $U_0 : \mathrm{Im}P_+ \to \mathrm{Im}P_-$. On définit $V_0 : \mathrm{Im}(P_+ + P_-) \to \mathrm{Im}P_- \oplus \mathrm{Im}P_+$ par $V_0(\varphi \oplus \psi) = U_0^* \psi \oplus U_0 \varphi$. Soit $V_1 = \mathrm{signe}(P_+ + P_-) : \mathrm{Im}P_0 = \ker(\mathbb{1} - P - Q)^\perp \to \mathrm{Im}P_0$. Soit $V_0 \oplus V_1$ sur $\mathrm{Im}(P_+ + P_-) \oplus \mathrm{Im}P_0$ alors $VPV^{-1} = Q$ et $VQV^{-1} = P$.

□

L'indice d'une paire de Fredholm a les propriétés suivantes :

Théorème 4.3.5. *(1) Si (P, Q) est une paire de Fredholm alors (Q, P) est une paire de Fredholm et*

$$\mathrm{ind}(Q, P) = -\mathrm{ind}(P, Q).$$

(2) Si (P, Q) est une paire de Fredholm et U un opérateur unitaire alors (UPU^{-1}, UQU^{-1}) est une paire de Fredholm et

$$\mathrm{ind}(UPU^{-1}, UQU^{-1}) = \mathrm{ind}(P, Q).$$

(3) Soient (P, Q) et (Q, R) deux paires de Fredholm. Si $P - Q$ ou $Q - R$ est compact alors (P, R) est une paire de Fredholm et

$$\mathrm{ind}(P, R) = \mathrm{ind}(P, Q) + \mathrm{ind}(Q, R).$$

Preuve. Nous démontrons (3).

On considère le cas où $P - Q$ est compact. Alors

$$PR = P(P - Q)R + PQQR.$$

PQQR est un opérateur de Fredholm comme produit d'opérateurs de Fredholm (Lemme 3.2.5(1)). De plus $P(P - Q)R$ est compact, alors PR est un opérateur de Fredholm comme somme d'opérateurs compact et de Fredholm(Corollaire 3.2.11)

$$\mathrm{ind}(PR) = \mathrm{ind}((PQ)(QR)) = \mathrm{ind}(PQ) + \mathrm{ind}(QR).$$

□

Nous énonçons le théorème que nous utiliserons pour calculer l'indice dans la section suivante :

Théorème 4.3.6. *Soient P et Q deux projecteurs orthogonaux. S'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $(P - Q)^{2n+1}$ est à trace alors*

$$\mathrm{trace}((P - Q)^{2n+1}) = \mathrm{ind}(P, Q) \in \mathbb{Z}.$$

Pour prouver ce théorème nous utiliserons ce lemme :

Lemme 4.3.7. *Soient P et Q deux projecteurs et*

$$A := P - Q;$$
$$B := \mathbb{1} - P - Q.$$

alors :

1. $A^2 + B^2 = \mathbb{1}$;
2. $\{A, B\} := AB + BA = 0$;
3. *Soit* $m_\lambda = \dim\ker(A - \lambda)$. *Alors pour* $\lambda \neq \pm 1$, $m_{\lambda_+} = m_{\lambda_-}$.

Preuve. Soit $P^\perp := \mathbb{1} - P$. $P^\perp$ vérifie

$$P^\perp P = PP^\perp = 0, \qquad P + P^\perp = \mathbb{1}, \qquad B = P^\perp - Q.$$

1. $A^2 + B^2 = P^2 + P^{\perp^2} + 2Q^2 - (P + P^\perp) - Q(P + P^\perp) = P + P^\perp = \mathbb{1}$.
2. $\{A, B\} = Q^2 - PQ - QP^\perp + Q^2 - P^\perp Q - QP^\perp = 2Q^2 - (P + P^\perp)Q - Q(P + P^\perp) = 0$
3. Soient $0 < \lambda < 1$ et

$$\mathcal{H}_{\pm\lambda} := \{\varphi \mid A\varphi = \pm\lambda\varphi\}.$$

Comme $\{A, B\} = 0$. alors B est défini de $\mathcal{H}_{+\lambda}$ à $\mathcal{H}_{-\lambda}$. De plus sur $\mathcal{H}_{+\lambda}$, $B^2 = \mathbb{1} - A^2 = (1 - \lambda^2)\mathbb{1}$. Donc B est inversible alors $\dim\mathcal{H}_{-\lambda} = \dim\mathcal{H}_{+\lambda}$.

□

Preuve. (du Théorème 4.3.6)

Par le théorème de Lidskii (voir [39]),

$$\begin{aligned}
\operatorname{trace}((P - Q)^{2n+1}) &= \sum_\lambda \lambda^{2n+1} m_{\lambda_\pm} \\
&= \sum_\lambda \lambda^{2n+1}(m_{\lambda_+} - m_{\lambda_-}) \\
&= m_1 - m_{-1} \\
&= \operatorname{ind}(P, Q) \qquad \text{par Proposition 4.3.2}
\end{aligned}$$

□

4.4 Spectre absolument continu stable sur un modèle d'une bande du graphe rubis

Dans cette section nous identifions $\Gamma \ni z = xe_x + ye_y$ avec ses composantes $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire $z \cong (x, y)$.

Soit y_0 un entier non négatif, nous considérons la situation où les matrices $u_j(x, y)$ sont diagonales si $y > y_0$ et anti-diagonales si $y < -y_0$ séparé par une bande où les matrices sont arbitraires, voir figure 4.5. . Nous démontrons la stabilité du transport sur cette bande.

Nous exhibons la bande invariante sur le graphe comme suit :

Proposition 4.4.1. *Soit U_{RB} défini par $\boldsymbol{U}$ (c.f.(4.1)) tel que, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$*

$$u_j(x, y) \text{ est } \begin{cases} \text{diagonal} \Leftrightarrow t_j(x, y) = 0 & \text{si} \quad (x, y) \in \mathbb{Z}\times]y_0, +\infty[\\ \text{anti} - \text{diagonal} \Leftrightarrow r_j(x, y) = 0 & \text{si} \quad (x, y) \in \mathbb{Z}\times]-\infty, -y_0[\end{cases}$$

Soit $\mathbf{P}_{y_0}$ un opérateur de multiplication défini sur $\mathbb{H}$ par

$$\mathbf{P}_{y_0} |x, y; a_j^{\pm}\rangle := P_{y_0}(x, y) |x, y; a_j^{\pm}\rangle$$

avec $P_{y_0}(x, y)$ un projecteur défini sur $\mathbb{C}^6$ par

$$P_{y_0}(x, y) = \begin{cases} 0_{\mathbb{C}^6} \text{ si } (x, y) \notin \mathbb{Z}\times]-y_0, y_0[\\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^6} \text{ si } (x, y) \in \mathbb{Z}\times]-y_0, y_0[\\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^6} - \sum_{j=1}^{3} |x, y; a_j^+\rangle \langle x, y; a_j^+| \text{ si } (x, y) \in \mathbb{Z} \times \{y_0\} \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^6} - \sum_{j=1}^{2} |x, y; a_j^-\rangle \langle x, y; a_j^-| - |x, y; a_3^+\rangle \langle x, y; a_3^+| \text{ si } (x, y) \in \mathbb{Z} \times \{-y_0\} \end{cases}$$

alors

$$[U_{RB}, \mathbf{P}_{y_0}] = 0.$$

Preuve. Nous montrons qu'à chaque vecteur $|x, y; a_j^{\pm}\rangle$ de $\mathbf{P}_{y_0}\mathbb{H}$, on a

$$U_{RB}\mathbf{P}_{y_0} |x, y; a_j^{\pm}\rangle = \mathbf{P}_{y_0} U_{RB} |x, y; a_j^{\pm}\rangle .$$

— Si $(x, y) \in \mathbb{Z}\times]y_0, +\infty[$, $P_{y_0}(x, y) = 0$ alors $U_{RB}\mathbf{P}_{y_0} |x, y; a_j^{\pm}\rangle = 0$. De plus, par le Corollaire 4.2.2, U_{RB} est invariant sur les sous-espace $\mathbb{H}^z_{a^-}, \mathbb{H}^z_{a^+}$, alors

$$\mathbf{P}_{y_0} U_{RB} |x, y; a_j^-\rangle = P_{y_0}(x, y) |x, y; a^-_{\tau(j)}\rangle = 0$$

$$\text{et } \mathbf{P}_{y_0} U_{RB} |x, y; a_j^+\rangle = P_{y_0}(x, y) |x, y; a^+_{\tau(j)}\rangle = 0.$$

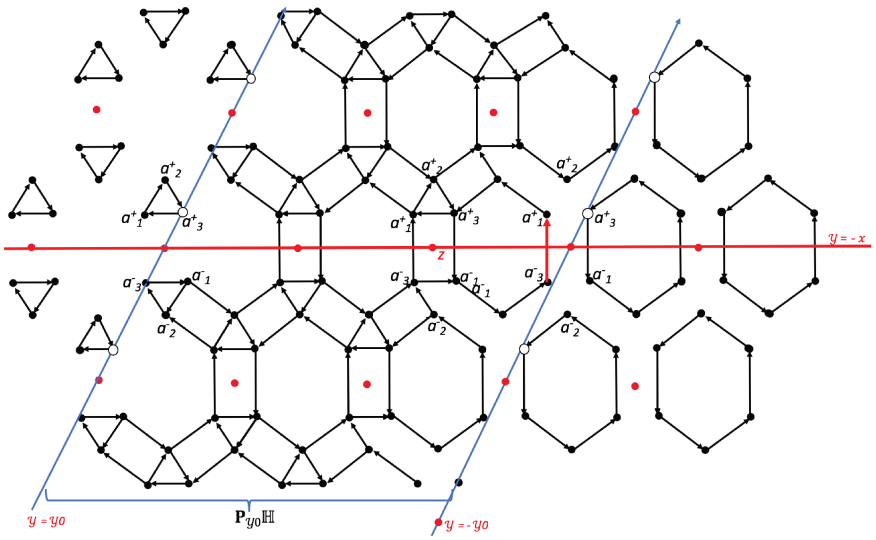


FIGURE 4.5 – Le graphe rubis sous les hypothèses du Lemme 4.4.1.

— Si $(x,y) \in \mathbb{Z}\times]-\infty,-y_0[,\ P_{y_0}(x,y)=0$ alors $U_{RB}\mathbf{P}_{y_0}\left|x,y;a_j^{\pm}\right\rangle$ $= U_{RB}P_{y_0}(x,y)\left|x,y;a_j^{\pm}\right\rangle = 0$. Par le Corollaire 4.2.2, U_{RB} est invariant sur les sous-espace $\mathbb{H}^z_{a^\pm}$ alors $\mathbf{P}_{y_0}U_{RB}\left|x,y;a_j^{\pm}\right\rangle = 0$.
— Si $(x,y) \in \mathbb{Z}\times]-y_0,y_0[,\ P_{y_0}(x,y)=\mathbb{1}$ alors $U_{RB}\mathbf{P}_{y_0} = \mathbf{P}_{y_0}U_{RB} = U_{RB}$.
— Si $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\{y_0\}$ par (4.11)-(4.13) on a :

$$\begin{cases} U_{RB}\mathbf{P}_{y_0}\left|x,y_0;a_j^{+}\right\rangle = U_{RB}P_{y_0}(x,y)\left|x,y_0;a_j^{+}\right\rangle = 0 \\ \mathbf{P}_{y_0}U_{RB}\left|x,y_0;a_j^{+}\right\rangle = \mathbf{P}_{y_0}\left|x,y_0;a^{+}_{\tau(j)}\right\rangle = P_{y_0}(x,y)\left|x,y_0;a^{+}_{\tau(j)}\right\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{RB}\mathbf{P}_{y_0}\left|x,y_0;a_j^{-}\right\rangle & = U_{RB}P_{y_0}(x,y)\left|x,y_0;a_j^{-}\right\rangle = r_j(x,y_0)\left|x,y_0;a^{-}_{\tau(j)}\right\rangle \\ \mathbf{P}_{y_0}U_{RB}\left|x,y_0;a_j^{-}\right\rangle & = r_j(x,y_0)\mathbf{P}_{y_0}\left|x,y_0;a^{-}_{\tau(j)}\right\rangle = r_j(x,y_0)P_{y_0}(x,y)\left|x,y_0;a^{-}_{\tau(j)}\right\rangle \\ & = r_j(x,y_0)\left|x,y_0;a^{-}_{\tau(j)}\right\rangle \end{cases}$$

$$U_{RB}\mathbf{P}_{y_0}\left|x,y_0;a_j^{+}\right\rangle = \mathbf{P}_{y_0}U_{RB}\left|x,y_0;a_j^{+}\right\rangle = r_j(x,y_0)\left|x,y_0;a^{+}_{\tau(j)}\right\rangle$$

— Si $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\{-y_0\}$ par (4.14)-(4.16) on a :

$$U_{RB}\mathbf{P}_{y_0}\left|x,-y_0;a_j^{\pm}\right\rangle = \mathbf{P}_{y_0}U_{RB}\left|x,-y_0;a_j^{\pm}\right\rangle = \begin{cases} 0 \quad si\ j = \ 1,2 \\ -t_3(x,-y_0)\left|x,-y_0;a_1^{+}\right\rangle \quad si\ j=3 \end{cases}$$

□

Par la Proposition 4.4.1 nous obtenons un sous-espace invariant $\mathbf{P}_{y_0}\mathbb{H}$ où les matrices $u_j(x,y)$ sont arbitraires. Sur $\mathbf{P}_{y_0}\mathbb{H}$, nous considérons la projection sur le demi-plan supérieur à la droite d'équation $y=-x$ (la ligne rouge sur la figure 4.5).

Définition 4.4.2. *Soit* $\mathbf{Q}$ *l'opérateur de multiplication défini sur* $\mathbb{H}$ *par*

$$\mathbf{Q}\,|x,y;a_j^{\pm}\rangle := Q(x,y)\,|x,y;a_j^{\pm}\rangle$$

avec $Q(x,y)$ *un projecteur défini sur* $\mathbb{C}^6$ *par*

$$Q(x,y) := \begin{cases} \mathbb{1}_{\mathbb{C}^6} & si\ y>-x \\ \mathbb{1}_{\mathbb{C}^6} - \sum_j^3 |x,y;a_j^-\rangle\langle x,y;a_j^-| & si\ y=-x \\ 0_{\mathbb{C}^6} & si\ y<-x \end{cases}$$

Soit U_s *et* $\mathbf{Q}_s$ *les restrictions respectives de* U_{RB} *et de* $\mathbf{Q}$ *sur* $\mathbf{P}_{y_0}\mathbb{H}$. *On définit l'opérateur auto-adjoint*

$$\Phi := U_s^*\mathbf{Q}_sU_s - \mathbf{Q}_s \tag{4.19}$$

Théorème 4.4.3. *Avec les notations de la Définition 4.4.2, on a*

$$\mathrm{ind}(U_s^*\mathbf{Q}_sU_s,\mathbf{Q}_s)=1$$

Lemme 4.4.4. *Avec la notation de (4.19) on a*

$$\begin{aligned}\Phi =& |-y_0,y_0;a_3^-\rangle\langle -y_0,y_0;a_3^-| \\ &+ \sum_{-y_0\le y\le y_0}\Big(|t_3(-y,y)|^2\,|-y,y;a_3^-\rangle - (r_3t_3)(-y,y)\,|-y,y;a_3^+\rangle\Big)\langle -y,y;a_3^-| \\ &+ \sum_{-y_0\le y\le y_0}\Big(-|t_3(-y,y)|^2\,|-y,y;a_3^+\rangle - (\bar r_3\bar t_3)(-y,y)\,|-y,y;a_3^-\rangle\Big)\langle -y,y;a_3^+|\end{aligned}$$

Preuve. Nous calculons Φ explicitement. Dans certains cas nous utiliserons la permutation $\tau = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$.

1. Si $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ est tel que $y>-x$, $Q(x,y)=\mathbb{1}$ alors $\Phi = U_s^*\mathbb{1}U_s - \mathbb{1} = 0$.
2. Si $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ est tel que $y<-x$, $Q(x,y)=0$ alors $\Phi = U_s^*0U_s - 0 = 0$.
3. Si $(x,y)=(-y_0,y_0)$, par Corollaire 4.2.2 on a

$$|-y_0,y_0;a_j^-\rangle \xrightarrow{U_s} |-y_0,y_0;a_{\tau(j)}^-\rangle \text{ et } \mathbf{Q}_s\,|-y_0,y_0;a_{\tau(j)}^-\rangle = 0 \text{ alors } \Phi\,|-y_0,y_0;a_j^-\rangle = 0$$

Par suit,

$$|-y_0, y_0; a_j^+\rangle \xrightarrow{U_s} |-y_0, y_0; a_{\tau(j)}^+\rangle \text{ et } \mathbf{Q}_s |-y_0, y_0; a_{\tau(j)}^+\rangle = |-y_0, y_0; a_{\tau(j)}^+\rangle$$

$$\text{alors } \Phi |-y_0, y_0; a_j^+\rangle = U_s^* |-y_0, y_0; a_{\tau(j)}^+\rangle - |-y_0, y_0; a_j^+\rangle = 0.$$

4. Si $(x, y) = (y_0, -y_0)$, remarquons tout d'abord que $|y_0, -y_0; a_1^-\rangle$, $|y_0, -y_0; a_2^-\rangle$, et $|y_0, -y_0; a_3^+\rangle \notin \mathbf{P}_{y_0}\mathbb{H}$.
   Pour $j \in \{1, 2, 3\}$ $\mathbf{Q}_s |y_0, -y_0; a_j^+\rangle = |y_0, -y_0; a_j^+\rangle$. De plus, par (4.14) et (4.15) on a

$$U_s |y_0, -y_0; a_1^+\rangle = |y_0, -y_0 + 1; a_2^-\rangle$$
$$U_s |y_0, -y_0; a_2^+\rangle = |y_0 + 1, -y_0; a_3^-\rangle$$

   et $\mathbf{Q}_s = \mathbb{1}$ dans cette zone, alors pour $j = 1, 2$

$$\Phi |y_0, -y_0; a_j^+\rangle = 0$$

$$\begin{aligned}\Phi |y_0, -y_0; a_3^-\rangle &= U_s^* \mathbf{Q}_s U_s |y_0, -y_0; a_3^-\rangle \\ &= U_s^* \mathbf{Q}_s |y_0, -y_0; a_1^+\rangle \\ &= U_s^* |y_0, -y_0; a_1^+\rangle \\ &= |y_0, -y_0; a_3^-\rangle\end{aligned}$$

5. Si $x = -y$ et $-y_0 < y < y_0$

$$\begin{aligned}\Phi |-y, y; a_3^+\rangle &= U_s^* \mathbf{Q}_s U_s |-y, y_0; a_3^+\rangle - |-y, y_0; a_3^+\rangle \\ &= U_s^* \mathbf{Q}_s \left(\overline{r}_3(-y, y) |-y, y + 1; a_1^+\rangle + \overline{t}_3(-y, y) |-y, y; a_1^-\rangle\right) - |-y, y_0; a_3^+\rangle \\ &= \overline{r}_3(-y, y) \left(r_3(-y, y) |-y, y + 1; a_3^+\rangle + \overline{t}_3(-y, y) |-y, y; a_1^-\rangle\right) - |-y, y_0; a_3^+\rangle \\ &= -\overline{r}_3 \overline{t}_3(-y, y) |-y, y; a_1^-\rangle - |t_3(-y, y)|^2 |-y, y_0; a_3^+\rangle .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi |-y, y; a_3^-\rangle &= U_s^* \mathbf{Q}_s U_s |-y, y_0; a_3^-\rangle \\ &= U_s^* \mathbf{Q}_s \left(r_3(-y, y) |-y, y; a_1^-\rangle - t_3(-y, y) |-y, y; a_1^+\rangle\right) \\ &= -t_3(-y, y) \left(r_3(-y, y) |-y, y + 1; a_3^+\rangle + \overline{t}_3(-y, y) |-y, y; a_1^-\rangle\right) \\ &= -r_3 t_3(-y, y) |-y, y; a_3^+\rangle - |t_3(-y, y)|^2 |-y, y_0; a_1^-\rangle .\end{aligned}$$

$$\Phi\left|-y,y;a_1^-\right\rangle = U_s^*\mathbf{Q}_sU_s\left|-y,y_0;a_1^-\right\rangle$$
$$= U_s^*\mathbf{Q}_s\left(\overline{r}_2(-y,y)\left|-y,y;a_2^-\right\rangle - \overline{t}_1(-y,y)\left|-y,y-1;a_2^+\right\rangle\right) = 0.$$

$$\Phi\left|-y,y;a_2^-\right\rangle = U_s^*\mathbf{Q}_sU_s\left|-y,y_0;a_2^-\right\rangle$$
$$= U_s^*\mathbf{Q}_s\left(\overline{r}_2(-y-1,y)\left|-y,y;a_3^-\right\rangle - \overline{t}_2(-y-1,y)\left|-y-1,y;a_3^+\right\rangle\right) = 0.$$

$$\Phi\left|-y,y;a_1^+\right\rangle = U_s^*\mathbf{Q}_sU_s\left|-y,y;a_1^+\right\rangle - \left|-y,y;a_1^+\right\rangle$$
$$= U_s^*\mathbf{Q}_s\left(r_1(-y,y)\left|-y,y;a_2^+\right\rangle - t_1(-y,y)\left|-y,y+1;a_2^-\right\rangle\right) - \left|-y,y;a_1^+\right\rangle$$
$$= \left|t_1(-y,y)\right|^2\left|-y,y;a_1^+\right\rangle - r_1t_1(-y,y)\left|-y,y;a_1^+\right\rangle + r_1t_1(-y,y)\left|-y,y;a_1^+\right\rangle$$
$$+\left|r_1(-y,y)\right|^2\left|-y,y;a_1^+\right\rangle - \left|-y,y;a_1^+\right\rangle = 0.$$

$$\Phi\left|-y,y;a_2^+\right\rangle = U_s^*\mathbf{Q}_sU_s\left|-y,y;a_2^+\right\rangle - \left|-y,y;a_2^+\right\rangle$$
$$= U_s^*\mathbf{Q}_s\left(r_3(-y,y)\left|-y,y;a_3^+\right\rangle + \overline{t}_3(-y,y)\left|-y+1,y;a_2^-\right\rangle\right) - \left|-y,y;a_2^+\right\rangle$$
$$= \left|t_2(-y,y)\right|^2\left|-y,y;a_2^+\right\rangle - r_2t_2(-y,y)\left|-y,y;a_2^+\right\rangle + r_2t_2(-y,y)\left|-y,y;a_2^+\right\rangle$$
$$+\left|r_2(-y,y)\right|^2\left|-y,y;a_2^+\right\rangle - \left|-y,y;a_2^+\right\rangle = 0.$$

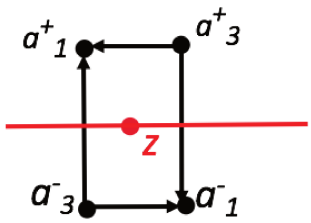


FIGURE 4.6 – $\mathrm{vect}\{\left|-y,y;a_3^+\right\rangle, \left|-y,y;a_3^-\right\rangle\}$

□

Preuve. (du Théorème 4.4.3)
Par le Lemme 4.4.4 on a :

$$\Phi = \left|y_0,-y_0;a_3^-\right\rangle\left\langle y_0,-y_0;a_3^-\right| + \sum_{-y_0<y<y_0}\begin{pmatrix}\left|t_3(-y,y)\right|^2 & -(\overline{r}_3\overline{t}_3)(-y,y)\\ (r_3t_3)(-y,y) & -\left|t_3(-y,y)\right|^2\end{pmatrix}$$

où la matrice est exprimée dans le sous-espace vect$\{|-y,y;a_3^-\rangle, |-y,y;a_3^+\rangle\}$, voir figure 4.6. Alors

$$\mathrm{trace}(\Phi) = 1 + \sum_{-y_0<y<y_0} \left(|t_3(-y,y)|^2 - |t_3(-y,y)|^2\right) = 1.$$

Le résultat suit le Théorème 4.3.6. □

L'information $\mathrm{trace}(\Phi) = \mathrm{ind}(U_s^*\mathbf{Q}_sU_s, \mathbf{Q}_s) \neq 0$ nous donne des informations sur le spectre de U_s. Elle indique, tout d'abord, que $\mathbf{P}_{y_0}\mathbb{H}$ n'admet pas de base de vecteur propre de U_s.

Proposition 4.4.5. *Avec les hypothèses de la Proposition 4.4.1 on a*

$$\sigma_{cont}(U_s) \neq \emptyset$$

pour U_s de la Définition 4.4.2.

Preuve. Par le Théorème 4.4.3, $\Phi = U_s^*\mathbf{Q}_sU_s - \mathbf{Q}_s$ est un opérateur à trace et $\mathrm{trace}(\Phi) \neq 0$

$$\sigma_{cont}(U_s) = \sigma(U_s) \setminus \sigma_{pp}(U_s).$$

Donc si $\sigma_{cont}(U_s) = \emptyset$ le théorème spectral implique qu'il existe une base de vecteurs propres $\{\varphi_j\}$ telle que $U_s\varphi_j = \lambda_j\varphi_j$, avec λ_j une valeur propre de U_s associée à φ_j. Donc

$$0 = \mathrm{trace}(\Phi) = \sum \langle \varphi_j, \Phi\varphi_j\rangle$$

car pour chaque j on a $\langle \varphi_j, \Phi\varphi_j\rangle = \langle \varphi_j, (U_s^*\mathbf{Q}_sU_s - \mathbf{Q}_s)\varphi_j\rangle = 0$ donc $\sigma_{cont}(U_s) \neq \emptyset$. □

Nous obtenons une information plus précise sur le spectre en utilisant les propriétés de stabilité de l'indice exposées dans le chapitre 3.

Nous avons :

Théorème 4.4.6. *Avec les hypothèses de la Proposition 4.4.1 on a pour U_s de la Définition 4.4.2*

$$\sigma_{ac}(U_s) = \mathbb{S}^1.$$

Preuve. Nous allons démontrer qu'il existe une perturbation de rang fini U' de U_s telle que $\sigma_{ac}(U') = \mathbb{S}^1$. Ainsi le résultat suit la stabilité du spectre absolument continu.

U' est défini comme U_s en remplaçant les matrices sur la coupure de la figure 4.7 par

$$u_3(-y,y) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } \ y \in (-y_0, y_0).$$

U' est unitaire et $U' - U_s$ est de rang fini. De plus

$$\mathbf{Q}_s U' \mathbf{Q}_s^{\perp} = |-y_0, y_0; a_1^+\rangle \langle -y_0, y_0; a_3^-| \,,$$

$$\mathbf{Q}_s^{\perp} U' \mathbf{Q}_s = 0.$$

Il suit que :
Pour $\mathcal{L} := \mathrm{vect}\{|-y_0, y_0; a_3^-\rangle\}$

$$U'^n \mathcal{L} \perp \mathcal{L} \qquad \forall\, n \geq 1$$

et par unitarité

$$U'^n \mathcal{L} \perp \mathcal{L} \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Par le Théorème 3.11 dans [6] et le Chapitre 2 dans [41], on a que

$$\mathcal{H}_s := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} U'^n \mathcal{L}$$

est invariant par U' et

$$\sigma_{ac}(U') \supset \sigma_{ac}(U' \restriction \mathcal{H}_s) = \mathbb{S}^1.$$

$\square$

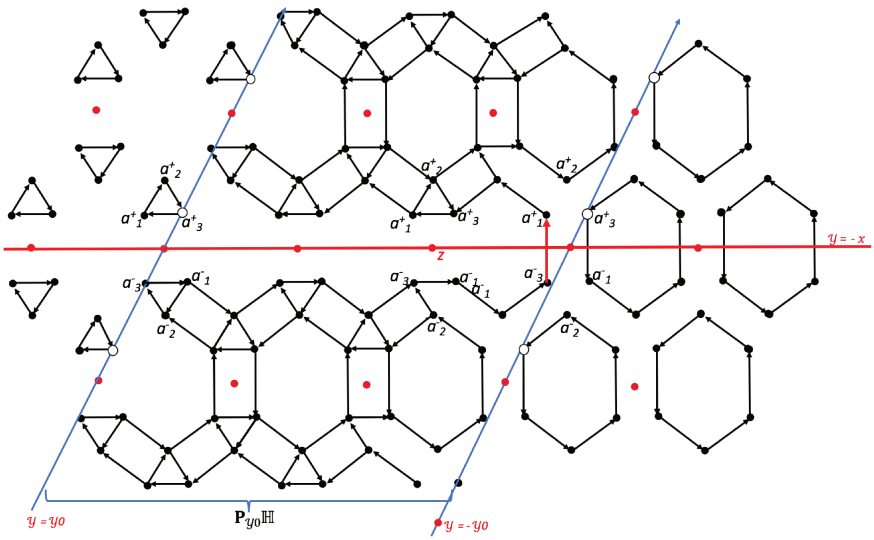


FIGURE 4.7 – Le graphe rubis sous les hypothèses de U'.

Chapitre 5

Exemples de courants quantiques stables

Dans ce chapitre nous reproduisons exactement notre article en anglais qui présente une théorie mathématique pour deux exemples de courants quantiques discutés dans la littérature de la physique théorique et expérimentale : La marche quantique bi-dimensionnelle "spin 1/2" et le réseau quantique Kagomé. Ils s'appliquent à l'apparition de courants quantiques stables. Ceci illustre la théorie du spectre absolument continu stable et des courants stables développée dans [5].

Ce chapitre est composé de trois sections dont la première est une introduction où nous décrivons rigoureusement ce que nous proposons.

Dans la deuxième section nous présenterons les résultats du transport pour le modèle de Chalker-Coddington défini sur le graphe rubis qui décrit le réseau quantique de Kagomé. Nous utiliserons les méthodes développées dans [5], en particulier l'étude d'un opérateur flux pour une projection sur un demi-espace choisi de manière appropriée.

Dans la troisième section nous analyserons les propriétés de transport d'une classe de marches quantiques bi-dimensionnelle "spin 1/2" proposées dans [3] pour lesquelles le transport a été observé expérimentalement, voir [15]. La particularité de ces marches est qu'elles sont paramétrées par deux familles de matrices de U(2). Nous utiliserons une extension des méthodes développées dans [5] (qui s'appliquent aux marches quantiques qui sont paramétrées par une famille de matrice de U(4)) et analyserons le flux sortant sur un sous-espace défini par une projection. Sa non trivialité implique, sous certaines hypothèses, que le spectre absolument continu couvre tout le cercle unité.

arXiv:1908.11689v1 [math-ph] 28 Aug 2019

Examples for stable quantum currents *

Joachim Asch, Mohamed Mouneime †

12/8/19

Abstract

We provide a mathematical analysis of two models advocated in the theoretical and experimental condensed matter literature: the two dimensional spin-$1/2$ Quantum Walk and the Kagome quantum network; they apply to occurrence of stable quantum currents. This illustrates the theory of stable absolutely continuous spectrum and stable currents developed in [4].

1 Introduction

Stable quantum currents of topological origin are of great interest from the points of view of mathematical physics as well as for engineering of topological materials. Here we are in particular interested in the two dimensional spin-$1/2$ Quantum Walk proposed in [14] in order to model topological phases in two dimensions and to be technically feasible; it was recently experimentally realized in a photonic setup [10]. On the other hand oriented quantum network models, originally proposed to quantitatively understand the Quantum Hall localization-delocalization transition [9, 15] continue to be a formidable mathematical challenge [8]. In the present article we concentrate on the delocalization aspect of the Kagome network which leads to the study of the Ruby graph. This was used to describe arrays of coupled optical resonators [16, 11].

Mathematically speaking both models are a discrete quantum dynamically system characterized by a unitary operator U on $\ell^2(\mathcal{V};\mathbb{C}^d)$, $\mathcal{V}$ being the vertices of a graph, which is parametrized by a countable family of $U(2)$ matrices. Depending on this family these models may have any dynamical behavior. Known results which concern delocalization cover the existence of a current and full absolutely continuous spectrum

*Supported by ECOS-Conicyt C15E10

†CNRS, CPT, Aix Marseille Université, Université de Toulon, Marseille, France, asch@cpt.univ-mrs.fr

for the L-lattice network of Chalker Coddington and coined Quantum Walks [4]. Further mathematical results assert that the presence of boundaries and symmetries of the bulk imply occurrence of currents, [18, 11, 12, 19].

We apply the method of [4] concerning the topological properties of the self-adjoint flux operator out of the subspace $\mathrm{Ran}(P)$ of an orthogonal projection

$$\Phi = U^* P U - P.$$

In particular the existence of a wandering subspace is guaranteed by a non vanishing index of Φ; the subspace reduces a perturbation of the evolution operator to a shift. This may be considered as a current; its existence implies gapless absolutely continuous spectrum at all quasienergies under decay assumptions.

In the next section we discuss the Kagome quantum network, exhibit how it leads to the Ruby graph and show under very general conditions that a non trivial flux through a curve exists, see Theorem 2.7 and Remark 2.9.

Then we present our analysis of the two dimensional spin-$1/2$ Quantum Walk and prove the occurrence of an edge state in Theorem 3.5, again under very mild conditions, thus providing a mathematical theory for the experimental findings of [10].

To be self contained we present known results on the flux operator in an Appendix.

2 Transport on the Ruby graph

We present transport results for the Chalker-Coddington model defined on the full two-dimensional Ruby graph which describes the Kagome quantum network. We employ the methods developed in [4], in particular the study of a flux operator for a projection on a suitably chosen half space.

The original Chalker-Coddington model on the L-network was designed for a numerical study of quantum transition events between microscopic currents, for background see [9, 15, 7, 1]. In terms of the physical model the currents are encoded by the vertices of the Ruby graph $\mathcal{R}$ while their microscopic transition events are encoded by a collection of unitary 2×2 matrices

$$\{S_z\}_{z \in \mathcal{K}} \in U(2)$$

indexed by the vertices of the Kagome graph $\mathcal{K}$.

The collection $\{S_z\}_{z \in \mathcal{K}}$, which is a priori arbitrary, represent the parameters of the model. It defines the unitary operator:

$$U : \ell^2(\mathcal{R}; \mathbb{C}) \to \ell^2(\mathcal{R}; \mathbb{C})$$

and we shall study the flux operator $\Phi = U^* P U - P$ for P a projection on a half space.

We now present the details of this model. Let $\{v_1, v_2\}$ be a positively oriented basis of $\mathbb{R}^2$ and denote

$$\mathcal{K}_1 := \{z \in \mathbb{R}^2; z = n_1 v_1 + n_2 v_2, \quad n_1, n_1 \in \mathbb{Z}\}; \quad \mathcal{K}_2 := \mathcal{K}_1 + \frac{1}{2} v_1; \quad \mathcal{K}_3 := \mathcal{K}_3 + \frac{1}{2} v_2.$$

The set of the Kagome vertices is

$$\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \bigcup \mathcal{K}_2 \bigcup \mathcal{K}_3.$$

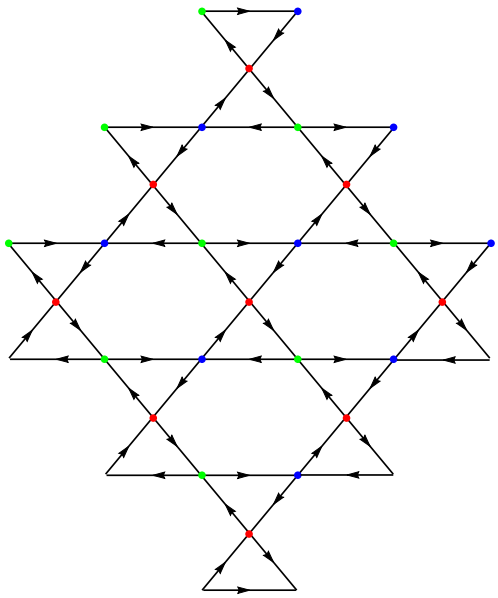


Figure 1: The Kagome scattering network represented as graph with vertices $\mathcal{K}$; its edges connect nearest neighbors, their orientation is anticlockwise around the hexagons and clockwise around the triangles.

The edges connect each vertex to its next neighbors. The faces adjacent to a vertex are in turn: a triangle, a hexagon, a triangle, a hexagon; the orientation of the edges is such that the orientation of the boundaries of the hexagons is anticlockwise, and clockwise for the triangles, see figure (1) for the choice $v_1 = e\left(\frac{\pi}{3}\right), v_2 = e\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

The physical model describes microscopic currents flowing along these edges. The two ingoing currents per vertex are scattered to the two outgoing currents which is encoded by the 2×2 unitary at the vertex. We label an edge (as segment of $\mathbb{R}^2$) by its center. The set of edge-centers are the vertices $\mathcal{R}$ of the Ruby graph, see figure (4). For background on Archimedean Lattices see [17]. Explicitly:

$$\mathcal{R} = \{z \pm \frac{1}{4} v_j; j \in 1, 2, z \in \mathcal{K}_1\} \bigcup \{z + \frac{1}{2} v_1 \pm \frac{1}{4}(v_1 - v_2); z \in \mathcal{K}_1\}.$$

Then for $w \in \mathcal{R}$ and with the canonical base vectors

$$|w\rangle \in \ell^2(\mathcal{R};\mathbb{C}) \text{ defined by } |w\rangle := (\mathcal{R} \ni x \mapsto \delta_{w,x} \in \mathbb{C})\,,$$

the edge with center w is associated to the subspace $span\{|w\rangle\}$; for a vertex z of the Kagome graph define

$$Q_z : \ell^2(\mathcal{R};\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathcal{R};\mathbb{C}) \quad \text{the projection on the subspace incoming to } z \in \mathcal{K};$$

as an example for $z \in \mathcal{K}_1$: $Q_z = \left|z + \frac{1}{4}v_1\right\rangle\left\langle z + \frac{1}{4}v_1\right| + \left|z - \frac{1}{4}v_1\right\rangle\left\langle z - \frac{1}{4}v_1\right|$. As exactly two edges are incident to exactly one vertex we have

$$\ell^2(\mathcal{R};\mathbb{C}) \equiv \bigoplus_{z\in\mathcal{K}} \operatorname{Ran} Q_z$$

and define the unitary U uniquely by the collection of the 2×2-unitaries:

$$U : \ell^2(\mathcal{R};\mathbb{C}) \to \ell^2(\mathcal{R};\mathbb{C}); \qquad U \restriction \operatorname{Ran} Q_z := S_z \restriction \operatorname{Ran} Q_z.$$

The subspace associated to the unique two outgoing edges at $z \in \mathcal{K}$ is $\operatorname{Ran}\widehat{Q}_z$ with the projection

$$\widehat{Q}_z := UQ_zU^*,$$

see figure (2).

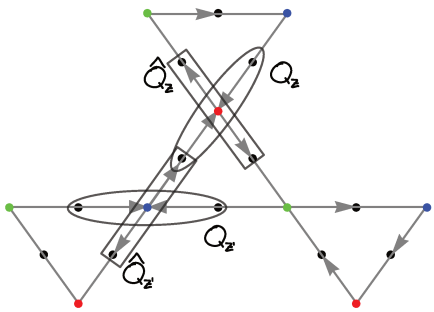


Figure 2: The incoming and outgoing projections Q_z and $\widehat{Q}_z$

Remark 2.1. *Note that $Q_z, \widehat{Q}_z$ do not depend on the collection of scattering matrices.*

The basic tool for the discussion of the flux operator is the following proposition which we adapt form [4], proposition 4.2, including its short intuitive proof.

Proposition 2.2. *Let M be a subset of $\mathcal{R}$ and P the multiplication operator $P = \chi(x \in M)$,*

$$\Phi = U^*PU - P.$$

Then it holds

1. $[\Phi, Q_z] = 0 \quad \forall z \in \mathcal{K}$;

2. $\Phi Q_z = U^*(P\widehat{Q}_z)U - PQ_z$;

3. *ind*(Φ) *is well defined iff for a* $c, R > 0$: $\sup_{|z|>R} \|\Phi Q_z\| \leq c < 1$; *then it holds:*

$$\textit{ind}(\Phi) = \sum_{z,|z|\leq R} \dim \mathrm{Ran}(P\widehat{Q}_z) - \dim \mathrm{Ran}(PQ_z). \tag{1}$$

Proof. By definition $Q_z, \widehat{Q}_z$ are multiplication operators on $\ell^2(\mathcal{R};\mathbb{C})$ thus commute with P, or

$$[\Phi, Q_z] = [U^*PU, Q_z] = U^*[P, \widehat{Q}_z]U = 0.$$

Also $\ker(\Phi^2 - \mathbb{I}) = \bigoplus_{z\in\mathcal{K}} \ker((\Phi^2 - \mathbb{I})Q_z)$ and $\sigma(\Phi^2) = \bigcup_{z\in\mathcal{K}} \sigma(\Phi^2 Q_z)$. By assumption $dist\left(\{1\}, \bigcup_{|z|>R} \sigma(\Phi^2 Q_z)\right) > 0$ thus 1 is an isolated finite dimensional eigenvalue and

$$\mathrm{ind}(\Phi) = \sum_{|z|\leq R} \dim\ker((\Phi - \mathbb{I})Q_z) - \sum_{|z|\leq R} \dim\ker((\Phi + \mathbb{I})Q_z) =$$

$$= \sum_{|z|\leq R} \mathrm{ind}(\Phi Q_z) = \sum_{|z|\leq R} trace(\Phi Q_z) = \sum_{z,|z|\leq R} \dim \mathrm{Ran}(P\widehat{Q}_z) - \dim \mathrm{Ran}(PQ_z).$$

□

In order to efficiently define the projection and to count the relevant dimensions we associate to the family of unitaries U the directed Ruby graph $G = (\mathcal{R}, \mathcal{E})$ whose set of vertices is $\mathcal{R}$ and whose directed edges $\mathcal{E}$ are defined by, c.f. figure (4),

$$\overrightarrow{xy} \in \mathcal{E} \textit{ iff } \langle y, U_c\, x\rangle \neq 0$$

where U_c is the model which has all its scattering matrices $S_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

For a given U we attribute

$$\text{the weight } |\langle y, Ux\rangle| \text{ to the edge } \overrightarrow{xy} \in \mathcal{E}.$$

For a given $z \in \mathcal{K}$ there are four edges, we label the weight by $|r_z|$ (color: black) if the corresponding current is scattered to its left and by $|t_z|$ if it is scattered to its right (color: red). Explicitly we have for $z \in \mathcal{K}_1$

$$\left|\left\langle z - \frac{1}{4}v_2, U(z + \frac{1}{4}v_1)\right\rangle\right| =: |t_z|\,, \qquad \left|\left\langle z + \frac{1}{4}v_2, U(z + \frac{1}{4}v_1)\right\rangle\right| =: |r_z|$$

and all other cases analogously, see figure (3).

Remark that for a choice of a basis in each $\operatorname{Ran} Q_z, \operatorname{Ran} \widehat{Q}_z$ which is compatible with this convention, the parameters are

$$S_z \equiv q_z \begin{pmatrix} r_z & -t_z \\ \bar{t}_z & \bar{r}_z \end{pmatrix} \qquad \text{with } q_z \in S^1, r_z, t_z \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |r_z|^2 + |t_z|^2 = 1.$$

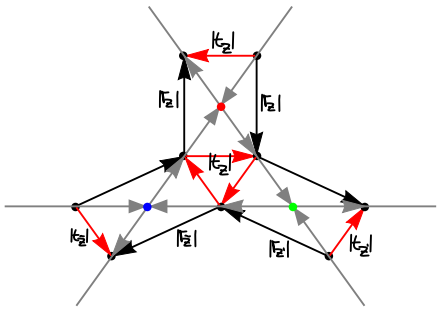


Figure 3: The weights of $(\mathcal{R}, \mathcal{E})$.

The projection P will be defined by a path in the dual graph.

The faces of the Ruby graph figure (4) which are adjacent to a fixed vertex are in turn a triangle, a rectangle, a hexagon, a rectangle. The dual graph

$$G^* = (\mathcal{R}^*, \mathcal{E}^*)$$

has its vertices at the center of the faces of $(\mathcal{R}, \mathcal{E})$ and the dual edges (which we call links to distinguish) are segments which connect to all next neighbors thus bisecting edges of $\mathcal{E}$. Remark that the scattering points are the centers of the rectangles in the Ruby graph: $\mathcal{K} \subset \mathcal{R}^*$.

Now consider a partition of G in two infinite connected subgraphs G_+ and G_-, consider a path in G^* which bisects the edge boundary of G_+ and visualize this path as an injective, continuous, and piecewise unit speed curve of straight segments on the dual graph in $\mathbb{R}^2$

$$\gamma : \mathbb{R} \to G^* \subset \mathbb{R}^2 \text{ such that for integer } t \in \mathbb{Z} : \gamma(t) \in \mathcal{R}^* \text{ and } \overrightarrow{\gamma(t)\gamma(t+1)} \in \mathcal{E}^*$$

oriented such that G_+ is to the left of γ; we call it an admissible path, see figure (5). Let $\mathcal{R}_+$ be the set of vertices of G_+ and consider its projection and flux operator in $\ell^2(\mathcal{R}; \mathbb{C})$:

$$P_\gamma = \chi(x \in \mathcal{R}_+), \quad \Phi_\gamma = U^* P_\gamma U - P_\gamma.$$

In the following we shall give sufficient conditions for non trivial $\operatorname{ind}(\Phi_\gamma)$. By the general theory of Theorem A.1 and Proposition A.2 we know that all vertices which

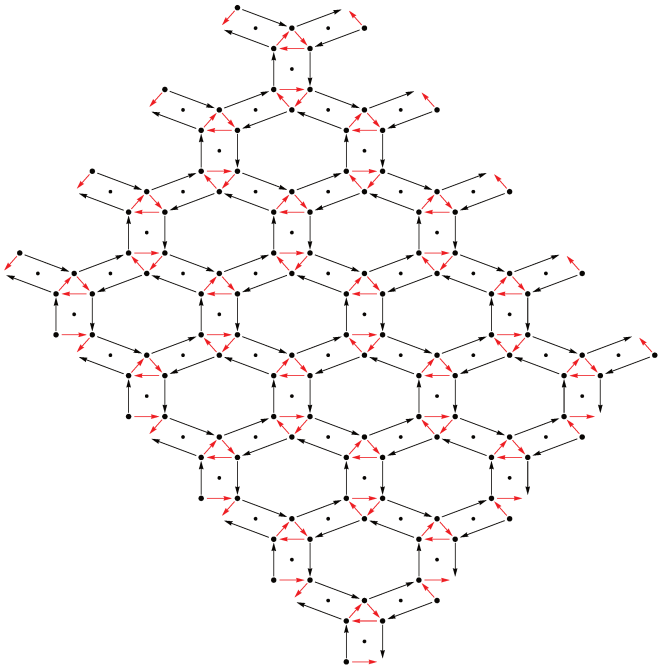


Figure 4: The Ruby graph

are not incident to the edge boundary of G_+ belong to $\ker(\Phi_\gamma)$; in view of the basic formula (1) we label the set of interesting vertices as follows:

Definition 2.3. *Let $\gamma : \mathbb{R} \to G^*$ be an admissible path. We call $\mathcal{E}_\gamma \subset \mathcal{E}$ the set of edges bisected by γ and $\mathcal{K}_\gamma$ the labels of subspaces $\operatorname{Ran} Q_z$ which contain vertices incident to $\mathcal{E}_\gamma$, i.e. :*

$$\mathcal{K}_\gamma := \left\{ z \in \mathcal{K}; P_\gamma^\perp U_c P_\gamma Q_z \neq 0 \text{ or } P_\gamma U_c P_\gamma^\perp Q_z \neq 0 \right\}.$$

From this graphical representation of U and P we can literally read off how to construct a useful admissible path. The basis observation is:

Remark 2.4. *From equation (1) and the fact that Q_z and $\widehat{Q}_z$ are diagonally opposite vertices of the rectangles of the Ruby graph, we observe: consecutively bisected links of type hexagon-rectangle-hexagons as well as triangle-rectangle-triangle do not contribute to the index because at the common dual vertex $z \in \mathcal{K}$ it holds $\dim \operatorname{Ran} PQ_z = \dim \operatorname{Ran} P\widehat{Q}_z$. On the other hand consecutively bisected links of type hexagon-rectangle-triangle as well as triangle-rectangle-hexagon do contribute to the index because $\dim \operatorname{Ran} PQ_z \neq \dim \operatorname{Ran} P\widehat{Q}_z$, see figure (6).*

We define the non contributing parts :

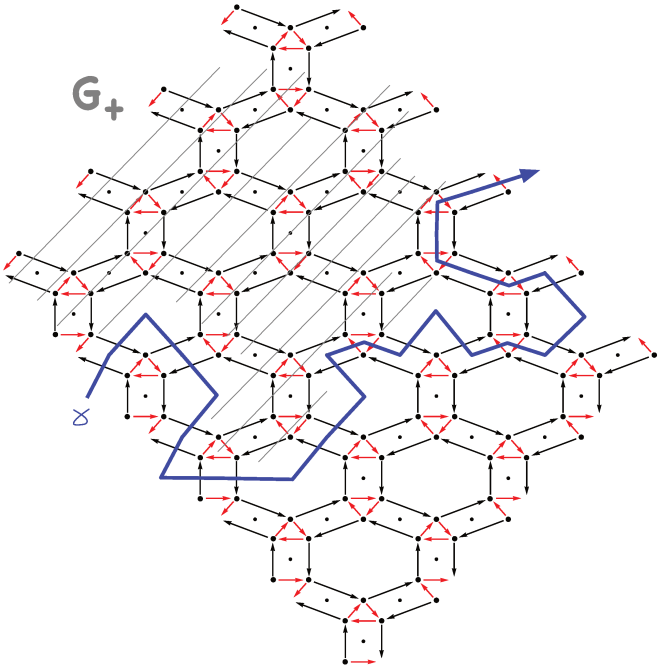


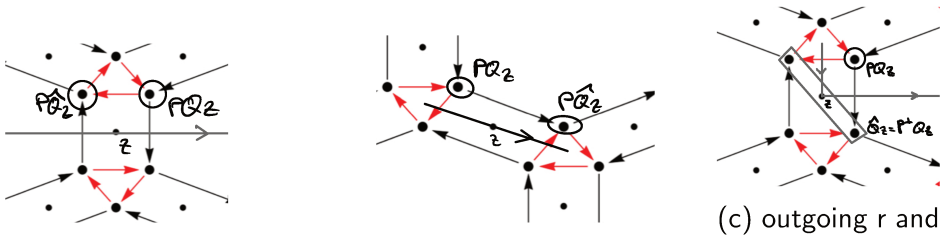
Figure 5: An admissible path defining the projection on the states on its left

Definition 2.5. *Let $I \subset \mathbb{R}$. An admissible path γ is called a r-path in $I \subset \mathbb{R}$ if its restriction to I bisects only edges of weight $|r|$ and a t-path in $I \subset \mathbb{R}$ if its restriction to I bisects only edges of weight $|t|$.*

Concerning the regularity of Φ_γ we have

Lemma 2.6. *Let γ be an admissible r-path in $\mathbb{R}$; then it holds for the operator and the trace norm:*

$$\|\Phi_\gamma\| \leq \sup_{z \in \mathcal{K}_\gamma} |r_z|, \quad \|\Phi_\gamma\|_1 \leq const. \sum_{z \in \mathcal{K}_\gamma} |r_z|.$$



(a) r and r edge (b) t and t edge (c) outgoing r and t edge

Figure 6: Parts contributing and non contributing to ind(Φ)

The analogous statement holds true for a t-path

Proof. Only states with label in $\mathcal{K}_\gamma$ contribute, by Theorem A.2.1: $[\Phi_\gamma^2, Q_z] = 0$ and γ crosses only edges of weight $|r_z|$ thus $\Phi_\gamma^2 Q_z = |r_z|^2 Q_z$, see figure (7), so we have

$$\Phi_\gamma^2 = PU^*P_\gamma^\perp UP_\gamma + P_\gamma^\perp U^* P_\gamma U P_\gamma^\perp = \sum_{z\in\mathcal{K}} \Phi_\gamma^2 Q_z = \sum_{z\in\mathcal{K}_\gamma} \Phi_\gamma^2 Q_z = \sum_{z\in\mathcal{K}_\gamma} |r_z|^2 Q_z.$$

. It follows that $|\Phi_\gamma| = \sum_{z\in\mathcal{K}_\gamma} |r_z| Q_z$ which implies the assertion.

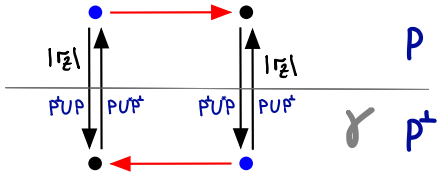


Figure 7: The action of $\Phi^2 Q_z$ for an r-path

□

We are now able to prove that a Chalker Coddington model on the Ruby graph which admits a suitable admissible path defines a projection with non-trivial flux. We show that a path is suitable if it crosses only hexagons and rectangles in the past and only triangles and rectangles in the future, and such that the associated weights are sufficiently regular. Remark that an analogous result was proved in Theorem 4.7 in [4] for the L-network which leads to the original Chalker Coddington model on the associated Manhattan graph. We can adapt this result without essential difficulty to the present situation.

Theorem 2.7. *Let U be a Chalker Coddington model on the Ruby graph such that there exists an admissible path γ which is an r-path in $(-\infty, -N]$ and a t-path in $[N, \infty)$ for an integer $N > 1$, and such that for a $c > 0$*

$$|r_z| \leq c < 1 \quad \forall z \in \mathcal{K}_{\gamma\restriction(-\infty,-N]} \text{ and } |t_z| \leq c < 1 \quad \forall z \in \mathcal{K}_{\gamma\restriction[N,\infty)}.$$

Then ind(Φ_γ) is well defined and it holds

$$|\text{ ind}(\Phi_\gamma)| = 1.$$

In addition

1. *Φ_γ is compact iff $\lim_{s\to-\infty} r_{\gamma(s)} = 0 = \lim_{s\to\infty} t_{\gamma(s)}$ and then*

$$\sigma(U) = S^1.$$

2. Φ_γ *is trace class iff* $\sum_{z\in\mathcal{K}_{\gamma\restriction(-\infty,-N]}}|r_z|+\sum_{z\in\mathcal{K}_{\gamma\restriction[N,\infty)}}|t_z|<\infty$ *and then*

$$\sigma_{ac}(U)=S^1,$$

and a trace class perturbation of U *contains a shift operator.*

Proof. If γ is a path which switches from r to t on one site, i.e : if γ is an r-path in $(-\infty,0)$ and a t-path in $[0,\infty)$, then as a corollary of Proposition 2.2 and Remark 2.4 we have

$$\text{ind}(\Phi)=\sum_{z\in\mathcal{K}_{\gamma\restriction[-N,N]}}\dim\operatorname{Ran}(P\widehat{Q}_z)-\dim\operatorname{Ran}(PQ_z)=\dim\operatorname{Ran}(P\widehat{Q}_{z_0})-\dim\operatorname{Ran}(PQ_{z_0})$$

with $z_0=\gamma(0)$. By the symmetry of the problem the two edges bisected by the links adjacent to $\gamma(0)$ are either incoming or outgoing to G_+ thus $\dim\operatorname{Ran}PQ_{z_0}=1$ and $\dim\operatorname{Ran}P\widehat{Q}_{z_0}=0$ or the other way round, see figure (6c). Thus $|\text{ind}(\Phi_\gamma)|=1$.

If γ switches several times cutting r and t links then choose two integers $N_\pm\in\mathbb{Z}$ such that $\pm N_\pm>\pm N$ and such that $\gamma(N_-)$ is the center of a hexagon and $\gamma(N_+)$ the center of a triangle. Thus all links incident to $\gamma(N_-)$ bisect edges of weight $|r|$ and all links incident to $\gamma(N_+)$ bisect edges of weight $|t|$. Then we can define a new admissible path $\widehat{\gamma}$ replacing the part $\gamma\restriction_{(-N_-,N_+)}$ by an r path inside G_+ connecting $\gamma(N_-)$ to $\gamma(N_+)$, c.f. figure (8). The new path switches from r to t only at $\gamma(N_+)$.The difference $P_\gamma-P_{\widehat{\gamma}}$ is of finite rank thus by the invariance properties of the index

$$\text{ind}(\Phi_\gamma)=\text{ind}(\Phi_{\widehat{\gamma}}).$$

The additional assertions follow from Lemma 2.6 and Theorem A.1. □

As by unitarity we have $|r_z|^2+|t_z|^2=1$ it follows:

Corollary 2.8. *Any Chalker Coddington model on the Ruby graph defined by a collection of scattering matrices such that for* $c_1,c_2\in(0,1)$ *and all* z*:* $0<c_1<|r_z|<c_2<1$*, admits a projection with non trivial index.*

Remark 2.9. *A remarkable situation which is covered by the Corollary is the translation invariant* $0<|r_z|=const\neq 1$ *case with all phases equal to unity; here the spectrum is absolutely continuous and exhibits gaps or not. However, for a* γ *with a* $r-t$ *transition the flux operator* Φ_γ *is not trace class or even compact. The analogous situation is present for perturbations of the translation invariant model, see [2].*

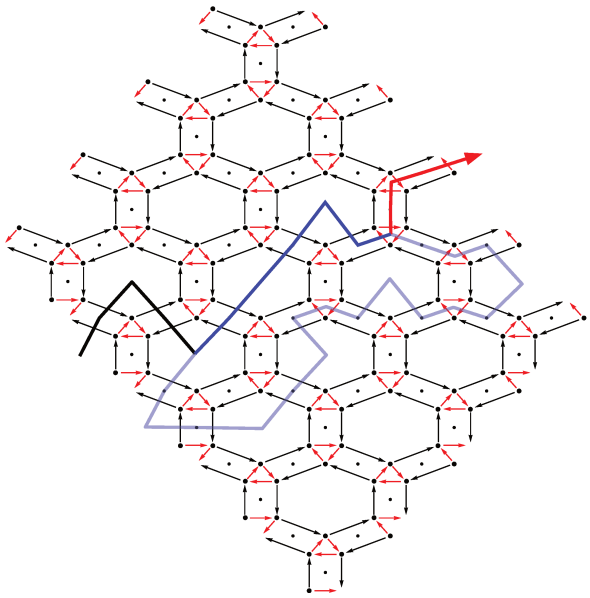


Figure 8: Join r path to t path in figure (5)

3 Edge current in two dimensional spin-$1/2$ Quantum Walks

We analyze transport properties of a class of two dimensional spin-$1/2$ Quantum Walks proposed in [14] for which transport seems to have been experimentally observed [10]. The feature of these walks is that they depend on two $\mathbb{C}^2$ coins. We use the methods which were developed in [4] for coined Quantum Walks which depend on one $\mathbb{C}^4$ coin and analyze the flux out of a subspace defined by a projection which can be interpreted as a quantum lead.

We present the class of models. The Hilbert space is $\mathbb{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{C}^2)$ its canonical scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

For a family of 2×2 matrices $\{M(z)\}_{z \in \mathbb{Z}^2} \subset \mathbb{M}(2; \mathbb{C})$ the multiplication operator $\mathbf{M}$ on $\mathbb{H}$ with symbol M is

$$\mathbf{M}\psi(z) := M(z)\psi(z), \quad \psi \in \mathbb{H}.$$

A coin $\mathbf{C}$ is a multiplication operator with unitary symbol $\{C(z)\}_{z \in \mathbb{Z}^2} \subset U(2)$.

With the canonical basis vectors, e_x, e_y of $\mathbb{Z}^2$ denote $S_j\psi(z) := \psi(z - e_j), \quad j \in \{x, y\}$ the shift in the x or y direction. The corresponding conditional shifts are

$$\mathbf{T}_j : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \quad \mathbf{T}_j\psi(z) := \begin{pmatrix} S_j & 0 \\ 0 & S_j^* \end{pmatrix} \psi(z) = \begin{pmatrix} \psi_1(z - e_j) \\ \psi_2(z + e_j) \end{pmatrix}.$$

We use the expressions $\mathbf{T}_j = S_j \mathbf{P}_+ + S_j^* \mathbf{P}_-$ with the projections $\mathbf{P}_\pm$ whose symbols are $\{P_\pm\}_{z\in\mathbb{Z}^2}$ the projections on the upper resp. lower component of $\mathbb{C}^2$. We also use $\mathbb{Z}^2 \ni z = (x, y)$ and denote the canonical basis vectors of $\mathbb{H}$ by

$$|z_0; +\rangle := \left(\mathbb{Z}^2 \ni z \mapsto \delta_{z,z_0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2\right), \quad |z_0; -\rangle := \left(\mathbb{Z}^2 \ni z \mapsto \delta_{z,z_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2\right).$$

Note that $S_j |z; \pm\rangle = |z + e_j; \pm\rangle$.

The family of unitary operators which we study depends parametrically on two unitary symbols:

Let $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ two coins. Define

$$U : \mathbb{H} \to \mathbb{H}, \qquad U := \mathbf{T}_y C_2 \mathbf{T}_x C_1. \tag{2}$$

In order to fix notations, we parametrize the symbols for $z \in \mathbb{Z}^2$ by

$$C_j(z) = q_j(z) \begin{pmatrix} r_j(z) & -t_j(z) \\ \overline{t_j}(z) & \overline{r_j}(z) \end{pmatrix} \text{ with } q(z) \in S^1, r(z), t(z) \in \mathbb{C} \text{ s.t. } |r(z)|^2 + |t(z)|^2 = 1.$$

To illustrate the action of U, see figure (9), we use the kernel $U(\cdot,\cdot) : \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{M}(2; \mathbb{C})$ such that $(U\psi)(z) = \sum_{w\in\mathbb{Z}^2} U(z, w)\psi(w)$ which is

$$U(z,w) = \begin{cases} (q_2 r_2)(w + e_x) q_1(w) \begin{pmatrix} r_1(w) & -t_1(w) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{if } z = w + e_x + e_y \\ (q_2 \overline{r_2})(w - e_x) q_1(w) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \overline{t_1}(w) & \overline{r_1}(w) \end{pmatrix} & \text{if } z = w - e_x - e_y \\ (-q_2 t_2)(w - e_x) q_1(w) \begin{pmatrix} \overline{t_1}(w) & \overline{r_1}(w) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{if } z = w - e_x + e_y \\ (q_2 \overline{t_2})(w + e_x) q_1(w) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r_1(w) & -t_1(w) \end{pmatrix} & \text{if } z = w + e_x - e_y \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{elsewhere} \end{cases}$$

The basic observation is:

Proposition 3.1. *Let $\mathbf{C}_1.\mathbf{C}_2$ be two coins such that*

$$\begin{array}{ll} r_2(x, \quad 0) = 0 = t_1(x, \quad 0) & x \in \mathbb{Z} \\ t_2(x, -1) = 0 = r_1(x, -1) & x \in \mathbb{Z} \end{array}.$$

Then for $U = \mathbf{T}_y \mathbf{C}_2 \mathbf{T}_x \mathbf{C}_1$ the subspace

$$\mathbb{H}_0 := \bigoplus_{x\in\mathbb{Z}} span\left\{|x, 0; +\rangle, |x, -1; -\rangle\right\}$$

is invariant for U. Furthermore $U \restriction \mathbb{H}_0$ is a two dimensional shift with wandering subspace $\mathbb{L}_0 := span\left\{|-1, 0; +\rangle, |-1, -1; -\rangle\right\}$, i.e. $U^n \mathbb{L}_0 \perp \mathbb{L}_0, \quad \forall n \neq 0$ and $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} U^n \mathbb{L}_0 = \mathbb{H}_0$

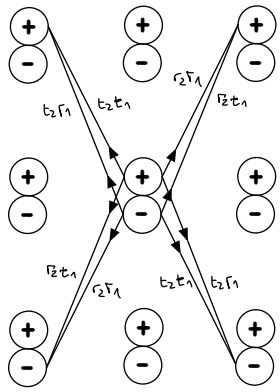


Figure 9: The action of U with the identifications $r_1 \leftrightarrow |q_1 r_1|$ and $r_2 \leftrightarrow |q_2 r_2(\cdot \pm e_x)| \ldots$

Proof. The proof is by explicit calculation which we present for

$$C_2(x,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C_1(x,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_2(x,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C_1(x,-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

because for the general case all the phases which may appear eventually cancel for the projections below. We have for $x \in \mathbb{Z}$

$$|x,0;+\rangle \xrightarrow{\mathbf{C}_1} |x,0;+\rangle \xrightarrow{\mathbf{T}_x} |x+1,0;+\rangle \xrightarrow{\mathbf{C}_2} |x+1,0;-\rangle \xrightarrow{\mathbf{T}_y} |x+1,-1;-\rangle \text{ and}$$

$$|x,-1;-\rangle \xrightarrow{\mathbf{C}_1} |x,-1;+\rangle \xrightarrow{\mathbf{T}_x} |x+1,-1;+\rangle \xrightarrow{\mathbf{C}_2} |x+1,-1;+\rangle \xrightarrow{\mathbf{T}_y} |x+1,0;+\rangle$$

and thus it holds for the projections in these directions

$$U\,|x,0;+\rangle\,\langle x,0;+|\,U^* = |x+1,-1;-\rangle\,\langle x+1,-1;-| \text{ and}$$

$$U\,|x,-1;-\rangle\,\langle x,-1;-|\,U^* = |x+1,0;+\rangle\,\langle x+1,0;+|\,.$$

By induction and unitarity this implies for $n \in \mathbb{Z}$

$$U^n\left(|0,0;+\rangle\,\langle 0,0;+| + |0,-1;-\rangle\,\langle 0,-1;-|\right)U^{*n} = |n,0;+\rangle\,\langle n,0;+| + |n,-1;-\rangle\,\langle n,-1;-|$$

which proves the three assertions. □

Remark 3.2. *Remark that under the conditions of proposition 3.1 the absolutely continuous spectrum of U is the full unit circle but other types of spectra of U typically coexist because: $\sigma_{ac}(U \restriction \mathbb{H}_0) = S^1 \subset \sigma_{ac}(U)$ and the coins $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ are arbitrary on $\mathbb{H}_0^\perp$.*

Now making use of the theory of the index of two projections and its topological invariance we can substantially extend this to a precise result on the existence of a current which was observed in the experiment of [10]. We consider the projection on a two state quantum half line, i.e.:

Definition 3.3. *Let* $\mathbf{P}$ *be the projection valued multiplication operator with symbol* P *defined by*

$$P(x) := \begin{cases} P_+ & x \geq 0 \text{ and } y = 0 \\ P_- & x \geq 0 \text{ and } y = -1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} . \tag{3}$$

It is a corollary of Proposition 3.1 that $\mathbb{L}_0$ is the incoming subspace for $\operatorname{Ran} P$:

Remark 3.4. U *defined in Proposition 3.1 is a forward shift in* $\operatorname{Ran} P$, $U^n\mathbb{L}_0 \perp \mathbb{L}_0, \forall n \in \mathbb{N}$ *and* $\operatorname{Ran} P = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} U^n\mathbb{L}_0$.

This existence of a current holds true for a large class of U in the following precise sense:

Theorem 3.5. *Let* $\mathbf{C}_1.\mathbf{C}_2$ *be two coins such that*

$$\sum_{x\in\mathbb{N}} (|r_2(x,0)| + |t_1(x,0)| + |t_2(x,-1)| + |r_1(x,-1)|) < \infty$$

then it holds for U *defined in (2),* P *in (3) and* $\Phi := U^*PU - P$*:*

$$\Phi \text{ is trace class with } \operatorname{ind}(\Phi) = 2,$$

$$\sigma_{ac}(U) = S^1,$$

and there exist a unitary trace class perturbation $\widehat{U} = S \oplus \widetilde{U}$ *of* U *with* S *a bilateral shift of multiplicity* 2*; further there exists a* 2 *dimensional subspace*

$$\mathbb{L} \subset \ker P^\perp U P^\perp \restriction_{\operatorname{Ran} P^\perp}$$

such that

$$S^n\mathbb{L} \perp \mathbb{L}, \forall \mathbb{Z} \ni n \neq 0 \quad \text{and} \quad S^n\mathbb{L} = PS^n\mathbb{L}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Proof. Separating the phases we write for the parameters of $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$: $r_j = e^{i\rho_j}|r_j| = e^{i\rho_j}\sqrt{1-|t_j|^2}$ and $t_j = e^{i\tau_j}|t_j| = e^{i\tau_j}\sqrt{1-|r_j|^2}$.

Define two coins $\mathbf{C}_1^0, \mathbf{C}_2^0$ by the symbols

$$C_2^0(z) := \begin{cases} q_2 \begin{pmatrix} 0 & -e^{i\tau_2} \\ e^{-i\tau_2} & 0 \end{pmatrix}(z) & \text{if } z = (x,0), \forall x \in \mathbb{N} \\ q_2 \begin{pmatrix} e^{i\rho_2} & 0 \\ 0 & e^{-i\rho_2} \end{pmatrix}(z) & \text{if } z = (x,-1), \forall x \in \mathbb{N} \\ C_2(z) & \text{elsewhere} \end{cases},$$

$$C_1^0(z) := \begin{cases} q_1 \begin{pmatrix} e^{i\rho_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\rho_1} \end{pmatrix}(z) & \text{if } z = (x,0), \forall x \in \mathbb{N} \\ q_1 \begin{pmatrix} 0 & -e^{i\tau_1} \\ e^{-i\tau_1} & 0 \end{pmatrix}(z) & \text{if } z = (x,-1), \forall x \in \mathbb{N} \\ C_1(z) & \text{elsewhere} \end{cases}.$$

For the Hilbert-Schmidt norm $\|\cdot\|_{HS}$ on $\mathbb{M}(2;\mathbb{C})$ we obtain

$$\left\|(C_2 - C_2^0)(z)\right\|_{HS}^2 \leq 4 \begin{cases} |r_2(z)|^2 & z = (x,0), \forall x \in \mathbb{N} \\ |t_2(z)|^2 & z = (x,-1), \forall x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases},$$

$$\left\|(C_1 - C_1^0)(z)\right\|_{HS}^2 \leq 4 \begin{cases} |t_1(z)|^2 & z = (x,0), \forall x \in \mathbb{N} \\ |r_1(z)|^2 & z = (x,-1), \forall x \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}.$$

It follows for the trace norm

$$\|\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_2^0\|_1 + \|\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_1^0\|_1 \leq const. \sum_{z\in\mathbb{Z}^2} \sum_j \|(C_j - C_j^0)(z)\|_{HS} \leq$$

$$\sum_{x\in\mathbb{N}} (|r_1(x,-1)| + |t_2(x,-1)| + |t_1(x,0)| + |r_2(x,0)|) < \infty.$$

For $U^0 := \mathbf{T}_y \mathbf{C}_2^0 \mathbf{T}_x \mathbf{C}_1^0$, $\Phi^0 := U^{0*} P U^0 - P$ it follows that the difference

$$U - U^0 = \mathbf{T}_y(\mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_2^0)\mathbf{T}_x\mathbf{C}_1 + \mathbf{T}_y\mathbf{C}_2\mathbf{T}_x(\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_1^0) \text{ is trace class}$$

and thus

$$\Phi - \Phi^0 \text{ is trace class }.$$

Φ^0 equals minus the orthogonal projection on $\mathbb{L}_0$. It follows that Φ is trace class and that $\text{ind}(\Phi) = 2$.

Now Theorem A.1.3 and the construction of $\mathbb{L}$ in its proof (see [4] Theorem 2.1, adapted by replacing $P \leftrightarrow P^\perp$) implies the assertion. □

As an illustration of this result of the existence of a current in the subspace $\operatorname{Ran} P$ for a trace class perturbation of U, we explicit the non-triviality of the incoming subspace $\mathbb{L}$ for U for a finite rank perturbation of the paradigmatic situation of Proposition 3.1.

Remark 3.6. *Let $\mathbf{C}_1.\mathbf{C}_2$ be two coins such that, c.f. figure (10)*

$$\begin{array}{ll} r_2(x, \quad 0) = 0 = t_1(x, \quad 0) & x \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\} \\ t_2(x,-1) = 0 = r_1(x,-1) & x \in \mathbb{N} \bigcup \{-1,0\} \end{array}.$$

Then for the incoming state $\mathbb{L}$ of Theorem 3.5 it holds $\mathbb{L} := span\{|-1,-1;-\rangle, \psi\}$ where ψ has generically non zero components on all vectors in $\{|-1,0;+\rangle, |1,0;+\rangle, |3,0;+\rangle\}$

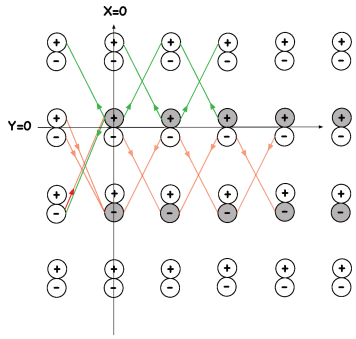


Figure 10: Illustration of the incoming space for U in Remark (3.6). The gray dots represent the states in $\mathrm{Ran}\, P$, green arrows the elements of $P^{\perp}UP$, red arrows the incoming elements of $PUP^{\perp}$

A General results on the flux operator Φ

The important notion of the relative index of two projections was defined in [5]. We list here some of its known properties which are used above. For the proofs we refer to [5] and [4] as concerns the spectral and dynamical implications.

Theorem A.1. *Let U be a unitary operator on a Hilbert space and P an orthogonal projection. For the selfadjoint operator*

$$\Phi := U^*PU - P = U^*\,[P, U]$$

suppose that 1 is an isolated eigenvalue of finite multiplicity of Φ^2 and define the integer

$$\mathit{ind}(\Phi) := \dim\ker\left(\Phi - \mathbb{I}\right) - \dim\ker\left(\Phi + \mathbb{I}\right).$$

If the index does not vanish, $\mathit{ind}(\Phi) = n \neq 0$, then:

there exists a unitary $\widehat{U}$ such that $\widehat{U} = S \oplus \widetilde{U}$ where S is a bilateral shift of multiplicity $|n|$, $\widetilde{U}$ is unitary on its subspace , $[\widetilde{U}, P] = 0$ and :

1. *$\|U - \widehat{U} - F\| = \mathcal{O}(\|\Phi_<\|)$ for a finite rank operator F and $\Phi_<$ the restriction of Φ to its spectral subspace off ± 1 : $\Phi_< := \Phi\chi(\Phi^2 < 1)$;*

2. *if $[P, U]$ is compact then $U - \widehat{U}$ is compact and the essential spectrum of U is the whole unit circle :*
$$\sigma(U) = S^1;$$

3. *if $[P, U]$ is trace class then $U - \widehat{U}$ is trace class and the absolutely continuous spectrum of U is the whole unit circle:*
$$\sigma_{ac}(U) = S^1.$$

Proposition A.2. *With Φ as in Theorem A.1 it holds:*

1. $$\Phi^2 \leq 1; \quad [\Phi^2, P] = 0;$$
$$\ker(\Phi + \mathbb{I}) = \ker(PUP \restriction \operatorname{Ran} P); \quad \ker(\Phi - \mathbb{I}) = \ker\left(P^\perp U P^\perp \restriction \operatorname{Ran} P^\perp\right).$$

2. *If ind(Φ) is defined then PUP is Fredholm on $\operatorname{Ran} P$ and ind(Φ) equals minus its Fredholm index :*
$$\textit{ind}(\Phi) = \dim\ker QU^*Q - \dim\ker QUQ.$$

3. $$\textit{ind}(\Phi) = \dim\ker\left((\Phi^2 - \mathbb{I}) \restriction \operatorname{Ran} P^\perp\right) - \dim\ker\left((\Phi^2 - \mathbb{I}) \restriction \operatorname{Ran} P\right).$$

4. *If $[0,1] \ni t \to U(t)$ is norm continuous and unitary and for $\Phi(t) = U^*(t)PU(t)$: $1 \notin \sigma_{ess}(\Phi(t)^2)$ then $\mathbb{Z} \ni$ ind$(\Phi(t)) = const$.*

5. *For unitaries U_0, U_1 such that $U_1 - U_0$ is a compact operator, it holds for the corresponding flux operators Φ_0, Φ_1:*
$$\textit{ind}(\Phi_0) = \textit{ind}(\Phi_1).$$

6. *A d-dimensional subspace $\mathbb{L}$ is called wandering for a unitary U, if $U^k\mathbb{L} \perp \mathbb{L} \quad \forall k \in \mathbb{N}$. For an orthogonal decomposition $\mathbb{L} = \bigoplus_{j=1}^d \mathbb{L}_j$ into 1-dimensional subspaces and for the U-invariant subspace*
$$\mathbb{M} := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} U^k\mathbb{L} = \bigoplus_{j=1}^{d} \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} U^k\mathbb{L}_j$$
it holds that $S := U \restriction \mathbb{M}$ is a bilateral shift of multiplicity d and $U \restriction \mathbb{M}^\perp$ is unitary on $\mathbb{M}^\perp$. In particular $\sigma_{ac}(U) = \mathbb{S}^1$.

Acknowledgments

This article is part of the requirements for the doctoral thesis of Mohamed Mouneime.

References

[1] Asch, J., Bourget, O., Joye, A., Localization Properties of the Chalker-Coddington Model. *Ann. H. Poincaré*, **11**, 1341–1373, (2010).

[2] Asch, J., Bourget, O., Joye, A., Spectral Stability of Unitary Network Models, *Rev. Math. Phys.*, **27**, 1530004, (2015).

[3] Asch, J., Bourget, O., Joye, A., Chirality induced Interface Currents in the Chalker Coddington Model, Journal of Spectral Theory, to appear (2019).

[4] Asch, J., Bourget, O., Joye, A., Engineering stable quantum currents at bulk boundaries, submitted, arXiv:1906.08181 [math-ph](2019)

[5] Avron, J., Seiler, R., Simon, B., The Index of a Pair of Projections, *J. Func. Anal.*, **120**, 220-237, (1994)

[6] Cedzich, C., Geib, T., Grünbaum, F. A., Stahl, C., Velázquez, L., Werner, A. H., Werner, R. F., The topological classification of one-dimensional symmetric quantum walks. *Ann. H. Poincaré*, 19, 325-383, (2018)

[7] Cardy, J.,Quantum Network Models and Classical Localization Problems in 50 Years of Anderson Localization, edited by E. Abrahams (World Scientific, 2010), pp. 301326.

[8] Cardy, J., Network Models in Class C on Arbitrary Graphs, *Communications in Mathematical Physics*, **258**, 1, 87–102, (2005)

[9] Chalker, J. T., Coddington, P. D. Percolation, quantum tunneling and the integer Hall effect. *J. Phys. C: Solid State Physics*, **21**, 2665, (1988).

[10] Chen, C. et al., Observation of Topologically Protected Edge States in a Photonic Two-Dimensional Quantum Walk, *Physical Review Letters*, **121**, 10, 100502,(2018)

[11] Delplace, P., Fruchart, M., Tauber, C. Phase rotation symmetry and the topology of oriented scattering networks. *Phys. Rev. B*, **95**, 205413, (2017).

[12] Graf, G. M., Tauber, C. Bulk-Edge correspondence for two-dimensional Floquet topological insulators. *Ann. H. Poincaré*, **19**, 709–741, (2018)

[13] E.Hamza, A.Joye : Spectral Transition for Random Quantum Walks on Trees, *Commun. Math. Phys.*, **326**, 415-439, (2014).

[14] Kitagawa, T., Topological phenomena in Quantum Walks, *Quantum Information Processing*, **11**-5, 1107–1148, (2012)

[15] Kramer, B., Ohtsuki, T., Kettemann, S., Random network models and quantum phase transitions in two dimensions, *Physics Reports*, **417**, 211, (2005).

[16] Pasek, M. and Chong, Y D, Network Models of Photonic Floquet Topological Insulators,

[17] J. Richter, J. Schulenburg, and A. Hönecker, in Quantum Magnetism, *Lect. Notes Phys.* **645**, edited by U. Schollwöck et al. (Springer, Berlin, 2008), pp. 85153.

[18] Rudner M.S, Lindner N. H., Berg E., Levin M., "Anomalous edge states and the bulk-edge correspondence for periodically driven two-dimensional systems". *Phys. Rev. X* **3**, 031005 (2013).

[19] Sadel, C., Schulz-Baldes, H. Topological boundary invariants for Floquet systems and quantum walks. *Math Phys Anal Geom* (2017) 20–22.

Annexe A

Appendice

A.1 Matrices de Pauli

Dans un premier temps nous résumons les règles de calcul avec les matrices de Pauli qui font une base de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Lemme A.1.1. *Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on définit les matrices de Pauli :*

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $\overrightarrow{\sigma} := (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Ces matrices ont les propriétés suivantes :

1. *$\forall j \in \{1, 2, 3\}$ σ_j est un opérateur auto-adjoint et unitaire.*
2. *Avec $\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ forme une base dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.*
3. *$\forall\ p \in \mathbb{R}^3$ on a*

$$p.\overrightarrow{\sigma} := \sum_{i=1}^{3} p_i.\sigma_i = \begin{pmatrix} p_3 & p_1 - ip_2 \\ p_1 + ip_2 & -p_3 \end{pmatrix}$$

4. *$\forall\ p, q \in \mathbb{R}^3$ on a*

$$(p.\overrightarrow{\sigma})(q.\overrightarrow{\sigma}) = \langle p, q \rangle_{\mathbb{R}^3} \sigma_0 + ip \wedge q.\overrightarrow{\sigma}$$

5. *$\forall\ n \in \mathbb{S}^2, t \in \mathbb{R}$ on a*

$$e^{itn.\overrightarrow{\sigma}} = \cos t\sigma_0 + i(\sin t)n.\overrightarrow{\sigma}$$

6. $\forall\ n \in \mathbb{S}^2, p \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$

$$e^{i\frac{t}{2}n.\overrightarrow{\sigma}} p.\overrightarrow{\sigma} e^{-i\frac{t}{2}n.\overrightarrow{\sigma}} = R(-t,n)p.\overrightarrow{\sigma}$$

où $R(t,n)$ désigne une rotation d'angle t autour de n.

7. $\forall\ p \in \mathbb{R}^3$ *on a*

$$p.\overrightarrow{\sigma} = |p| \underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_0 + \frac{p}{|p|}.\overrightarrow{\sigma})}_{P_+} - |p| \underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_0 - \frac{p}{|p|}.\overrightarrow{\sigma})}_{P_-}$$

avec $P_\pm$ les projecteurs spectraux et $\{\pm|p|\}$ le spectre de $p.\overrightarrow{\sigma}$.

A.2 Théorème du degré

Nous présentons le théorème du degré dans le cas de deux variétés compactes connexes orientées de même dimension.

Théorème A.2.1. *Soit M,N deux variétés compactes connexes orientées de même dimension d, et $f \in C^\infty(M,N)$. Il existe un entier relatif, appelé degré de f noté* $\deg(f)$*, tel que*

1. $\forall\ \omega$ *forme différentielle de degré d on a*

$$\int_M f^*\omega = \deg(f) \int_N \omega;$$

2. $\forall\ y$ *valeur régulière de f, on a*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{signe}(d_x f)$$

Preuve. C.f Théorème 7.3.1 dans [9] p.283-285. □

A.3 Preuve de certains résultats

Nous présentons certains calculs utilisés dans les chapitres 2,3 et 4.

Lemme A.3.1. *Soit $N(x)$ la matrice définie dans* (2.4)*. Alors*

$$\frac{1}{2}\text{trace}(N(x)) = |r_1||r_2^2 - t_2^2| \cos\varphi(x) - \Re e(\bar{t}_1 r_2 t_2) - \Re e(t_1 r_2 \bar{t}_2)$$

où $\varphi \in C^0([0,2\pi))$ satisfaisant $e^{i\varphi(x)} = \dfrac{r_1(r_1^2 - t_2^2)}{|r_1||r_2^2 - t_2^2|} e^{ix}$.

Preuve.

$$N(x) = \begin{pmatrix} r_2 & -t_2 \\ \bar{t}_2 & \bar{r}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & -t_1 \\ \bar{t}_1 & \bar{r}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 & -t_2 \\ \bar{t}_2 & \bar{r}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1 r_2 - \bar{t}_1 t_2 e^{-ix} & -t_1 r_2 - \bar{r}_1 t_2 e^{-ix} \\ r_1 \bar{t}_2 + \bar{t}_1 \bar{r}_2 e^{-ix} & -t_1 \bar{t}_2 + \bar{r}_1 \bar{r}_2 e^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_2 e^{ix} & -t_2 e^{ix} \\ \bar{t}_2 & \bar{r}_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1 r_2^2 e^{ix} - \bar{t}_1 r_2 t_2 - t_1 r_2 \bar{t}_2 - \bar{r}_1 \bar{t}_2^2 e^{-ix} & -r_1 r_2 \bar{t}_2 e^{ix} + t_1 \bar{t}_2^2 - t_1 r_2^2 - \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{t}_2 e^{-ix} \\ r_1 r_2 t_2 e^{ix} + t_1 \bar{r}_2^2 - \bar{t}_1 t_2^2 + \bar{r}_1 \bar{r}_2 t_2 e^{-ix} & -r_1 t_2^2 e^{ix} - \bar{t}_1 \bar{r}_2 t_2 - t_1 \bar{r}_2 \bar{t}_2 + \bar{r}_1 \bar{r}_2^2 e^{-ix} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathrm{trace}(N(x)) &= r_1 r_2^2 e^{ix} - \bar{t}_1 r_2 t_2 - t_1 r_2 \bar{t}_2 - \bar{r}_1 t_2 \bar{t}_2 e^{-ix} \\ &- r_1 t_2^2 e^{ix} - \bar{t}_1 \bar{r}_2 t_2 - t_1 \bar{r}_2 \bar{t}_2 + \bar{r}_1 \bar{r}_2^2 e^{-ix} \\ &= (r_1 r_2^2 e^{ix} + \bar{r}_1 \bar{r}_2^2 e^{-ix}) - (\bar{r}_1 \bar{t}_2^2 e^{-ix} + r_1 t_2^2 e^{ix}) \\ &- (\bar{t}_1 r_2 t_2 + t_1 \bar{r}_2 \bar{t}_2) - (t_1 r_2 \bar{t}_2 + \bar{t}_1 \bar{r}_2 t_2) \\ &= |r_1||r_2^2 - t_2^2| \cos \varphi(x) - \Re e(\bar{t}_1 r_2 t_2) - \Re e(t_1 r_2 \bar{t}_2) \end{aligned}$$

□

Lemme A.3.2. *Soit $S_\downarrow, S_\uparrow$ de la Définition 2.2.1, $R(\theta)$ défini dans (2.6) et σ_1 la matrice de Pauli, on a*

$$\sigma_1 S_\downarrow \sigma_1 = S_\uparrow^*, \qquad \sigma_1 S_\uparrow \sigma_1 = S_\downarrow^*, \qquad \sigma_1 R(\theta) \sigma_1 = R(\theta)^*$$

Preuve.

$$\sigma_1 S_\uparrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 S_\downarrow \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 R(\theta) \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

□

Lemme A.3.3. *Soit H défini dans (3.8). Dans le cas où les suites $\theta_1(n)$ et $\theta_2(n)$ sont constantes (de valeurs θ_1, θ_2) on a*

$$H = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^* & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$a = M_{g_\Theta} \qquad \Big(\Theta := (\theta_1, \theta_2) \in \Pi^2\Big)$$

et

$$g_\Theta(x) = i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos x + \sin\theta_1 \cos\theta_2 + i\cos\theta_1 \sin x)$$

Preuve.

$$FUF^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2} & -\sin\frac{\theta_2}{2} \\ \sin\frac{\theta_2}{2} & \cos\frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1\!\!1 & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & 1\!\!1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2} & -\sin\frac{\theta_2}{2} \\ \sin\frac{\theta_2}{2} & \cos\frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(x) & -\beta(x) \\ \overline{\beta}(x) & \overline{\alpha}(x) \end{pmatrix}$$

avec

$$\alpha(x) := \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos x - \sin\theta_1 \sin\theta_2$$

$$\beta(x) := \cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos x + \sin\theta_1 \cos\theta_2 + i\cos\theta_1 \sin x$$

Alors

$$FWF^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(x) & -\beta(x) \\ \overline{\beta}(x) & \overline{\alpha}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha(x) - \beta(x) + \overline{\beta}(x) + \overline{\alpha}(x) & -\alpha(x) - \beta(x) - \overline{\beta}(x) + \overline{\alpha}(x)) \\ -\alpha(x) + \beta(x) + \overline{\beta}(x) + \overline{\alpha}(x) & \alpha(x) + \beta(x) - \overline{\beta}(x) + \overline{\alpha}(x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \Re e\alpha(x) - i\Im m\beta(x) & -\Re e\beta(x) - i\Im m\alpha(x) \\ \Re e\beta(x) - i\Im m\alpha(x) & \Re e\alpha(x) + i\Im m\beta(x) \end{pmatrix}$$

Donc

$$H = \frac{1}{2i}\left(FWF^{-1} - FW^*F^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & -\Re e\beta(x) - i\Im m\alpha(x) \\ \Re e\beta(x) - i\Im m\alpha(x) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{i} \begin{pmatrix} 0 & -g(x) \\ \overline{g}(x) & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} g(x) &= i(\Re e\beta(x) + i\Im m\alpha(x)) \\ &= i(\cos\theta_1 \sin\theta_2 \cos x + \sin\theta_1 \cos\theta_2 + i\cos\theta_1 \sin x) \end{aligned}$$

□

Lemme A.3.4. *Soit pour* $k \in ([0,2\pi)^2)$, $N(k)$ *défini dans* (4.10). *Alors*

$$\det(N(k)) = 1$$

et

$$\frac{1}{2}\mathrm{trace}(N(k)) = \Re e(r_1r_2r_3) - |t_1t_2r_3|\cos\varphi_1(k) - |r_1t_2t_3|\cos\varphi_2(k) - |t_1r_2t_3|\cos\varphi_3(k)$$

où $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C^0([0,2\pi)\times[0,2\pi))$ *satisfaisant* $e^{i\varphi_1(k)} = \dfrac{t_1t_2r_3}{|t_1t_2r_3|}e^{i(k_y-k_x)}$, $e^{i\varphi_2(k)} = \dfrac{r_1t_2t_3}{|r_1t_2t_3|}e^{ik_x}$ *et* $e^{i\varphi_3(k)} = \dfrac{t_1r_2t_3}{|t_1r_2t_3|}e^{ik_y}$.

Preuve.

$$N(k) = \begin{pmatrix} r_1 & -t_1e^{ik_y} \\ \overline{t}_1e^{-ik_y} & \overline{r}_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_2 & -t_2e^{ik_y} \\ \overline{t}_2e^{-ik_y} & \overline{r}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_3 & -t_3 \\ \overline{t}_3 & \overline{r}_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(k) & -g(k) \\ \overline{f}(k) & \overline{g}(k) \end{pmatrix}$$

avec

$$f(k) := r_1r_2r_3 - t_1\overline{t}_2r_3e^{ik_x} - t_1\overline{r}_2\overline{t}_3e^{-ik_y} - r_1t_2\overline{t}_3e^{-i(k_x+k_y)}$$
$$g(k) := r_1t_2t_3 - t_1\overline{t}_2t_3e^{ik_x} + t_1\overline{r}_2\overline{r}_3e^{-ik_y} + r_1t_2\overline{r}_3e^{-i(k_x+k_y)}$$

$N(k) \in SU(2)$ comme produit de matrice de $SU(2)$ alors $\det(N(k)) = 1$ et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathrm{trace}N(k) &= r_1r_2r_3 - t_1\overline{t}_2r_3e^{ik_x} - t_1\overline{r}_2\overline{t}_3e^{-ik_y} - r_1t_2\overline{t}_3e^{-i(k_x+k_y)} \\
&+ \overline{r}_1\overline{r}_2\overline{r}_3 - \overline{t}_1t_2\overline{r}_3e^{-ik_x} - \overline{t}_1r_2t_3e^{ik_y} - \overline{r}_1\overline{t}_2t_3e^{i(k_x+k_y)} \\
&= (r_1r_2r_3 + \overline{r}_1\overline{r}_2\overline{r}_3) - (t_1\overline{t}_2r_3e^{ik_x} + \overline{t}_1t_2\overline{r}_3e^{-ik_x}) \\
&- (t_1\overline{r}_2\overline{t}_3e^{-ik_y} + \overline{t}_1r_2t_3e^{ik_y}) - (r_1t_2\overline{t}_3e^{-i(k_x+k_y)} + \overline{r}_1\overline{t}_2t_3e^{i(k_x+k_y)}) \\
&= \Re e(r_1r_2r_3) - |t_1t_2r_3|\cos\varphi_1(k) \\
&- |r_1t_2t_3|\cos\varphi_2(k) - |t_1r_2t_3|\cos\varphi_3(k)
\end{aligned}$$

□

Bibliographie

[1] Aharonov, Y., Davidovich, L., Zagury, N. : Quantum random walks, Phys. Rev. A 48, 1687, (1993).

[2] Asch, J., Bourget, O., Joye, A. : Localization properties of the Chalker-Coddington model. Ann. H. Poincaré, 11, 13411373, (2010).

[3] Asch, J., Bourget, O., Joye, A. : Dynamical localization of the Chalker-Coddington model far from transition, J. Stat. Phys., 147, 194-205, (2012).

[4] Asch, J., Bourget, O., Joye, A. : Spectral stability of unitexpérimentaleary network models, Rev. Math. Phys., 27, 1530004, (2015).

[5] Asch, J., Bourget, O., Joye, A. : Engineering stable quantum currents at bulk boundaries, submitted, arXiv :1906.08181 [math-ph], (2019).

[6] Asch, J., Bourget, O., Joye, A. : Chirality induced Interface currents in the Chalker-Coddington model, Journal of Spectral Theory, to appear, (2019).

[7] Avron, J. E., Seiler, R., Simon, B. : The index of a pair of projections, J. Func. Anal., 120, 220-237, (1994).

[8] Avron, J. E., Seiler, R., Simon, B. : Charge deficiency, charge transport and comparison of dimension, Commun. Math. Phys. 159, 399-422, (1994).

[9] Berger, M., Gostiaux, G. : Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces, Presses Universitaires de France, (1992).

[10] Blatter, G., Browne, D. : Zener tunneling and localization in small conducting rings, Phys.Rev. B 37, 3856, (1988)

[11] Brezis, H. : Analyse fonctionnelle théorie et application, Sciences Sup, Dunod, (2005).

[12] Chalker, J. T., Coddington, P. D. : Percolation, quantum tunnelling and the integer Hall effect. J. Phys. C : Solid state physics, 21, 2665, (1988).

[13] Chandrashekar, C. M., Obuse, H., Busch, Th. : Entanglement properties of localized States in 1D topological quantum walks, arXiv:1502.00436, (2015).

[14] Cedzich, C., Geib, T., Grünbaum, F. A., Stahl, C., Velázquez, L., Werner, A. H., Werner, R. F. : The topological classification of one-dimensional symmetric quantum walks, Ann. Henri Poincaré, (2017).

[15] Chen, C. et al. : Observation of topologically protected edge states in a photonic two-dimensional quantum walk, Physical Review Letters, 121,10, 100502,(2018).

[16] Delplace, P., Fruchart, M., Tauber, C. : Phase rotation symmetry and the topology of oriented scattering networks, Phys. Rev. B 95 , 205413,(2017).

[17] Douglas, R. G. : Banach algebra techniques in operator theory, Springer, (1998).

[18] Gross, D., Nesme, V., Vogts, H., Werner, R. F. : Index theory of one dimensional quantum walks and cellular automata, Comm. Math. Phys., 310, 419-454, (2012).

[19] Hamza, E., Joye, A., Stolz, G. : Dynamical localization for unitary Anderson models. Math. Phys. Anal. Geom. 12, 381-444, (2009).

[20] Hasan, M. Z., Kane, C. L. :Colloquium : Topological insulators,Reviews of Modern Physics, vol 82, (2010).

[21] Hsieh, D., et al. : A topological Dirac insulator in a quantum spin Hall phase, Nature 452, 970, (2008).

[22] Ichihara, A., Matsuoka, L., Segawa, E., Yokoyama, K. : Isotope-selective dissociation of diatomic molecules by terahertz optical pulses, Phys. Rev. A 91, 043404, (2015).

[23] Joye, A., Merkli, M. : Dynamical localization of quantum walks in random environments, J. Stat. Phys. 140, 1025-1053, (2010).

[24] Kane, C., Moore, J. : Topological insulators, Physics World, (2011).

[25] Karski, M., Förster,L., Chioi, J.M., Streffen, A., Alt, W., Meschede, D., Widera, A. : Quantum walk in position space with single optically trapped atoms, science, 325, 174-177, (2009).

[26] Kempe, J. : Quantum random walks : an introductory overview, Contemp. Phys. 44, 307, (2003).

[27] Kitagawa, T., Rudner, M.S., Berg, E., Demler, E. : Exploring topological phases with quantum walks. Phys. Rev. A 82(3), 033429, (2010).

[28] Kitagawa, T. : Topological phenomena in quantum walks : elementary introduction to the physics phases, Quantum Inf Process 11 :1107-1148, (2012).

[29] König, M., et al. :Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells, Science, Vol. 318, numéro 5851, p. 766-770, (2007).

[30] Kramer, B., Ohtsuki, T., Kettemann, S. : Random network models and quantum phase transitions in two dimensions, Physics Reports, 417, 211, (2005).

[31] Manouchehri, K., Wang, J. : Physical implementation of quantum walks, Quantum Science and Technology. Springer, Heidelberg, (2014).

[32] Milnor, J. W. : Topology from the Differentiable Viewpoint, Princeton University Press, (1997).

[33] Portugal, R. : Quantum walks and search algorithms, Springer, (2013).

[34] Pozrikidis, C. : An introduction to girds, graphs, and networks. Oxford University Press, p.53-59, (2014).

[35] Reed, M, Simon, B. : Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators, Academic Press, (1978).

[36] Richard, S., Suzuki, A., Tiedra de Aldecoa, R. : Quantum walks with an anisotropic coin I : spectral theory, arXiv :1703.03488v1, (2017).

[37] Roe, J. : Winding around : the winding number in topology, geometry, and analysis, Student Mathematical Library, Volume 76, (2015).

[38] Santha, M. : Quantum walk based search algorithms, 5th TAMC, LNCS 4978, 31-46, (2008).

[39] Simon, B. : Trace Ideals and their applications, Cambridge University Press, (1979).

[40] Spagnolo,S., Vitelli, C., Aparo, L., Mataloni, P., Sciarrino, F., Crespi, A., Ramponi, R., Osellame,R. : Three-photon bosonic

coalescence in an integrated tritter, Nature Communications 4,1606, (2013).

[41] Sz.-Nagy, B., Foias, C., Berkovici, H., Kérchy, J. : Harmonic analysis of operators in Hilbert spaces, Springer,(2010).

[42] Venegas-Andraca, S. E. : Quantum walks : a comprehensive review, Quantum Inf Process 11(5) : 1015-1106, (2012).

[43] Zahringer, F., Kirchmair, G., Gerritsma, R., Solano, E., Blatt, R., Roos, C. F. : Realization of a quantum walk with one and two trapped ions, Phys. Rev. Lett. 104, 100503, (2010).