Séries formelles et méthodes transcendantes en géométrie modérée Composition du jury

Mickael Matusinski

▶ **To cite this version:**

Mickael Matusinski. Séries formelles et méthodes transcendantes en géométrie modérée Composition du jury. Géométrie algébrique [math.AG]. Mathématiques et Informatique, 2020. tel-02504236v1

HAL Id: tel-02504236

https://theses.hal.science/tel-02504236v1

Submitted on 10 Mar 2020 (v1), last revised 12 Mar 2020 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉMOIRE

présenté pour obtenir

l'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

de

MATHÉMATIQUES

Séries formelles et méthodes transcendantes en géométrie modérée

Mickaël Matusinski

Soutenance le 9 mars 2020 à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251

Composition du jury :

Présidente

Zoé Chatzidakis	Directrice de Recherche CNRS à l'École Normale Supérieure

Rapporteurs

Daniel Panazzolo	Professeur à l'Université de Haute-Alsace
Patrick Speissegger	Professeur à McMaster University
Bernard Teissier	Directeur de Recherche CNRS Émérite à l'Université de Paris

Examinateurs

José Manuel Aroca	Catedratico à l'Université de Valladolid
Alain Yger	Professeur Émérite à l'Université de Bordeaux

Le vrai jardinier
se découvre
devant
la pensée sauvage

Jacques Prévert

A Sophie, pour notre présent partagé,
A Adrien et Raphaël, pour votre avenir à construire

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier très chaleureusement Daniel Panazzolo, Patrick Speissegger et Bernard Teissier d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce mémoire. Ils ont consacré leur temps, leur énergie et mobilisé leurs compétences afin d'expertiser mon travail : c'est un grand honneur pour moi.

Je remercie très vivement José Manuel Aroca, Zoé Chatzidakis et Alain Yger d'avoir accepté de rejoindre ces trois rapporteurs pour faire partie du jury. Ensemble, ces six mathématiciens ont une influence considérable sur mon travail. Par leurs qualités, leur ouverture d'esprit, leur hauteur et largeur de vue, ils m'ont inspiré depuis plus de douze ans et m'offrent aujourd'hui un jury que j'estime tout simplement idéal !

Mes pensées vont également à Jean-Philippe Rolin qui a dirigé ma thèse de doctorat à l'Université de Bourgogne et m'a permis de faire mes premiers pas de chercheur. Outre les qualités mathématiques dont il fait preuve, je le remercie particulièrement pour la confiance qu'il m'a accordée.

C'est l'occasion pour moi de rendre hommage à mes collaborateurs et amis pour nos multiples échanges mathématiques, pavés comme il se doit de découvertes enthousiasmantes et de difficultés harassantes. Merci en particulier à Salma Kuhlmann, qui examina ma thèse de doctorat, m'offrit mes premiers postdocs et avec qui j'ai tissé une collaboration fructueuse, doublée d'une amitié durable. Merci aussi à Vincent Cossart, en particulier pour cette année extraordinaire passée à travailler ensemble à Versailles : sa générosité, la fulgurance de ses intuitions et son incroyable énergie m'accompagnent toujours ! Merci enfin à Michel Hickel avec qui je partage depuis mon arrivée à Bordeaux une entente inestimable.

Enfin, je salue et remercie ma famille et mes amis : ils sont le sel de ma vie ! Et surtout, je rends hommage à ma chère et tendre Sophie : qui s'est arrachée de Paris pour me suivre dans le "Far West" bordelais, qui nous a donné deux magnifiques enfants, et qui toujours de moi exige le meilleur.

Table des matières

Avant-propos **5**

1 Séries de Puiseux et paramétrisations locales des singularités **7**

1.1 Vers une description de la clôture algébrique des séries formelles en plusieurs variables . . . 11

1.1.1 Contexte et stratégie . . . 11

1.1.2 Nos travaux : sur l'algébricité des séries de Puiseux de plusieurs variables . . . 14

1.2 Courbes planes en caractéristique quelconque – Diviseurs dicritiques . . . 17

1.2.1 Contexte . . . 17

1.2.2 Nos travaux . . . 18

2 Géométrie o-minimale et singularités d'équations différentielles **21**

2.1 Trajectoires non oscillantes et corps de Hardy . . . 23

2.1.1 Contexte . . . 23

2.1.2 Nos travaux . . . 24

2.2 Transséries et théorèmes de Puiseux différentiels . . . 26

2.2.1 Contexte . . . 26

2.2.2 Nos travaux . . . 27

2.3 Quasi-ordre minimalité . . . 31

2.3.1 Corps valués et ordonnés . . . 31

2.3.2 Nos travaux : corps quasi-ordonnés aux différences . . . 33

3 Modèles non archimédiens et universels en algèbre différentielle asymptotique **35**

3.1 Vers un théorème de Kaplansky différentiel . . . 38

3.1.1 Contexte . . . 38

3.1.2 Nos travaux : corps de séries généralisées avec dérivations . . . 39

3.2 Séries munies de fonctions exponentielle et logarithmique . . . 42

3.2.1 Contexte . . . 42

3.2.2 Nos travaux : EL-séries avec dérivations . . . 44

3.3 Nombres surréels et séries κ-bornées . . . 45

3.3.1 Les nombres surréels comme domaine universel . . . 45

3.3.2 Nos travaux . . . 47

4 Appendices : exemples pour illustrer les trois précédents chapitres **49**

4.1 Séries de Puiseux de degrés $d_x = 1$ et $d_y = 2$. . . . 49

4.2 Pinceaux transséries en dimension 2 . . . 56

4.3 Dérivations sur des corps de séries généralisées 58
5 Dossier professionnel **61**
5.1 Curriculum Vitae 61
5.2 Liste de publications 63
5.3 Encadrement, responsabilités scientifiques, pédagogiques et administratives 65
5.4 Diffusion des travaux, rayonnement et vulgarisation 67
5.5 Activités d'enseignement 71
Bibliographie **75**

Avant-propos

Ce mémoire – bilan et perspectives – est marqué par le choix de faire une présentation transversale et accessible de différents points de vue. A cette fin, nous avons muni chaque chapitre d'introductions spécifiques. Nos travaux s'inscrivent à la confluence de plusieurs domaines, de la géométrie algébrique et analytique à la théorie des modèles, via la théorie des valuations et la géométrie réelle. Leur commun dénominateur est sans conteste l'objet **série formelle** dans une acception très large, mais constamment dans un contexte de **géométrie modérée** au sens d'A. Grothendieck [Gro97].

En termes généraux, nous nous intéressons au rapport entre les objets géométriques concrets et leur contrepartie formelle. Il peut s'agir de rendre explicite un objet défini implicitement (et vice versa), de le simplifier voire le désingulariser, ou encore de le classifier. Les séries formelles surviennent bien entendu en tant que paramétrisations d'objets algébriques ou analytiques, avec comme support théorique naturel la théorie des valuations (Chapitre 1). En empruntant à J. M. Aroca ses mots dans [Aro00b] : "La réduction des singularités d'une variété algébrique ou analytique a, au moins dans sa formulation locale, un lien proche avec un autre problème, celui de paramétrer le voisinage d'un point sur la variété, c'est-à-dire résoudre, en un certain sens, le système d'équations définissant la variété ".

Les séries formelles apparaissent aussi comme développements asymptotiques d'objets plus transcendants, typiquement des solutions d'équations différentielles ou aux différences, depuis les travaux fondateurs de H. Poincaré [Poi86] jusqu'à ceux récents de J. Ecalle [É92] et Y. Il'Yashenko [Il'91] qui utilisent la notion de transséries. D'une façon complémentaire, des versions plus générales de séries formelles dans la lignée des travaux fondateurs eux-aussi de G.H. Hardy (échelles asymptotiques [Har10]) et H. Hahn (séries généralisées [Hah07]), ont permis de dégager des structures algébriques–analytiques–différentielles très générales, notamment la version actuelle de transséries de M. Aschenbrenner, L. van den Dries et J. van der Hoeven dans [AvdDvdH17] (Chapitre 2).

Cette dernière approche s'inscrit notamment dans un contexte de théorie des modèles. Les bonnes propriétés d'une théorie sont souvent traduisibles en termes d'extensions de ses modèles, et donc via la résolution d'équations. Les (différents types de) séries formelles permettent dans ce cadre aussi d'expliciter des solutions, en fait de construire des modèles non archimédiens. Elles pourront même fournir des domaines

universels pour des structures algébriques fondamentales (au sens de leur théorie du premier ordre) : corps ordonnés et/ou valués et/ou différentiels et/ou exponentiels et/ou aux différences. En particulier, la structure la plus universelle qui rassemble ces propriétés (et bien plus encore...) est celle des nombres surréels (Chapitre 3).

Chapitre 1

Séries de Puiseux et paramétrisations locales des singularités

Pour K un corps et x une indéterminée, $\overline{K}$ désigne la clôture algébrique de K, $K[[x]]$ l'anneau des séries formelles à coefficients dans K et $K((x))$ son corps de fractions. Si K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on note $K\{x\}$ l'anneau des séries convergentes, et $K\{\{x\}\}$ son corps de fractions. Le **théorème de Newton–Puiseux** donne une description de *la* clôture algébrique de ces deux corps fondamentaux :

Théorème 1.0.1 (Newton–Puiseux) *Le corps suivant, où L parcourt l'ensemble des extensions finies de K dans $\overline{K}$, est une clôture algébrique de $K((x))$:*

$$\overline{K((x))} = \varinjlim_{n\in\mathbb{N},n\neq 0} \varinjlim_{L} L((x^{1/n}))$$

Si le corps de base K est un sous-corps de $\mathbb{C}$, on a :

$$\overline{K\{\{x\}\}} = \varinjlim_{n\in\mathbb{N},n\neq 0} \varinjlim_{L} L\{\{x^{1/n}\}\}$$

Ce théorème constitue aussi un résultat fondamental pour comprendre la géométrie locale des singularités de courbes planes algébriques, analytiques, ou même algébroïdes. Rappelons que, quitte à factoriser par un x^k, par le **théorème de préparation de Weierstrass** [ZS75, Chap. VII, Theorem 5], celles-ci sont, au voisinage de l'origine, définies de manière équivalente par une équation polynômiale distinguée en y à coefficients analytiques, respectivement séries formelles, en x. Rappelons aussi d'emblée le lien profond entre résolution formelle et analytique exprimé par le **théorème d'approximation d'Artin** [Art68]. Nous nous proposons ici en guise d'introduction d'effectuer un survol quelque peu biaisé pour reprendre les mots de [Tei07]. Pour plus de détails, nous renvoyons par exemple à ce survol et à [Wal78, Theorem 3.1], [BK86, Chapter III], ainsi qu'à différentes références au fur et à mesure.

La preuve originelle de 1.0.1 dans le cas formel due à I. Newton [New66] consiste à développer de manière algorithmique une solution y_0 de $f(x, y) = 0$ comme développement en puissances fractionnaires *croissantes* de x et avec des coefficients a_k dans une

extension *finie* L de K :

$$\begin{aligned} y_0(x) &= a_n x + a_{2n}x^2 + \cdots + a_{kn}x^k \\ &\quad + a_{\beta_1}x^{m_1/n_1} + a_{\beta_1+e_1}x^{(m_1+1)/n_1} + \cdots + a_{\beta_1+k_1e_1}x^{(m_1+k_1)/n_1} \\ &\quad + a_{\beta_2}x^{m_2/(n_1n_2)} + a_{\beta_2+e_2}x^{(m_2+1)/(n_1n_2)} + \cdots + a_{\beta_2+k_2e_2}x^{(m_2+k_2)/(n_1n_2)} \\ &\quad \cdots \\ &\quad + a_{\beta_g}x^{m_g/(n_1n_2\cdots n_g)} + a_{\beta_g+1}x^{(m_g+1)/(n_1n_2\cdots n_g)} + \cdots \end{aligned}$$

Puiseux a adapté cette méthode dans le cadre des courbes planes analytiques [Pui50, Pui51]. Dans ces notations, on suppose que les (m_i, n_i) sont des couples d'entiers premiers entre eux, appelés les **paires de Puiseux** de la série, et que $n = n_1n_2\cdots n_g$, $\beta_i = nm_i/n_i$ avec $a_{\beta_i} \neq 0$, $i = 1, \ldots, g$. De manière équivalente, on appelle les n et les β_i les **exposants caractéristiques**.

Une telle solution série de Puiseux constitue en fait une **paramétrisation irréductible** $(t^n, \varphi(t))$ (où $\varphi(t) := y_0(t^n) \in L[[t]]$) d'une des composantes irréductibles $f_i = 0$ – on dit aussi **branches** – dans $\overline{K}[[x, y]]$ (ou éventuellement dans $\mathbb{C}\{x, y\}$ si $K \subset \mathbb{C}$), de la courbe $f = f_1^{a_1}\cdots f_r^{a_r} = 0$ (les f_i pouvant même être considérés à un inversible près comme des polynômes distingués en y irréductibles par le théorème de préparation de Weierstrass déjà évoqué). La preuve constructive d'I. Newton s'appuie sur une représentation polygonale du support de l'équation pour déterminer les exposants successifs. Les premiers termes du développement constituent une partie principale qui est commune à différentes branches. Au delà – on dit qu'on a *séparé les branches* – le **polygone de Newton** d'une branche (f_i) est **élémentaire** (i.e. avec un seul côté fini) avec un premier sommet d'ordonnée na_i (naturellement la multiplicité a_i de la branche correspond à la multiplicité de y_0 comme racine). Les séries de Puiseux solutions qu'on détermine alors sont mutuellement conjuguées via le groupe des racines n-èmes de l'unité. En particulier, si $a_i = 1$ (par exemple si la courbe considérée est **réduite**), on est ramené aux hypothèses du **théorème des fonctions implicites** [KP02] formel – une version particulière du **lemme de Hensel** [Nag62] [ZS75, Chap. VIII, Theorem 17] – ou convergent suivant le contexte. Réciproquement on peut reconstruire une équation à partir de la paramétrisation sous la forme $\prod_\omega (y - \varphi(\omega t))$ avec ω parcourant les racines $n$èmes de l'unité et en posant $x = t^n$. Soulignons que, dans le contexte purement algébrique ($f \in K[x, y]$), les questions de réductibilité, théorie de Galois etc. sont plus subtiles : voir ci-dessous et/ou par exemple [vdP93, Tre71, Tre72].

L'union des paramétrisations de Puiseux des branches d'une courbe plane constitue une **résolution locale de sa singularité** : on a un morphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{C},0} \to \prod_{i=1}^r L[[t]]$, c'est-à-dire un morphisme propre birationnel :

$$\bigcup_{i=1}^{r} (\mathbb{A}_K, 0)_i \to (\mathcal{C}, 0),\ (t_1, \ldots, t_r) \mapsto ((t_1{}^{n_1}, y_1(t_1)), \ldots, (t_r{}^{n_r}, y_r(t_r))$$

Dans le contexte analytique, ces paramétrisations des branches expriment l'**uniformisation** de la fonction multiforme $y_0(x)$ modulo un revêtement ramifié en 0 de la droite affine : on retrouve bien qu'une courbe algébrique n'est rien moins qu'une **surface de Riemann**.

D'un point de vue plus algébrique, une telle paramétrisation de Newton d'une branche fournit une incarnation de la **normalisation** en 0 de cette branche : l'anneau $K[[x,y]]/(f_i)$ se plonge via la paramétrisation dans $K[[t]]$ qui est intégralement clos dans son corps de fraction $K((t)) \simeq \mathrm{Frac}(K[[x,y]]/(f_i))$. Dans ce contexte des courbes, rappelons que tout anneau régulier de dimension 1 est en fait un **anneau de valuation**, ce qui identifie la paramétrisation de Puiseux à un processus d'**uniformisation locale** qui correspond aussi ici à une résolution des singularités : l'application suivante est une **valuation discrète** du corps de fonction $\mathrm{Frac}(K[[x,y]]/(f_i))$ sur K dominant $K[[x,y]]/(f_i)$:

$$v : \ \frac{g}{h} \mapsto \mathrm{ord}_t \left(\frac{g(t^n, y(t))}{h(t^n, y(t))} \right)$$

Or toute valuation du corps de fonction de la variété a un centre sur chacun de ses modèles birationnels (**critère valuatif de propreté**). Il y a correspondance entre le processus de résolution algorithmique de Newton, la valuation discrète associée et une suite de transformations quadratiques qui désingularise la courbe (voir e.g. [Hef03]). En général, l'espace des anneaux de valuation du corps de fonctions d'une variété algébrique – l'**espace de Riemann–Zariski** – est un espace localement annelé, quasi–compact pour la topologie de Zariski, qui est l'analogue algébrique de la variété de Riemann d'une courbe plane [Zar44a]. En effet, dans ce contexte des courbes planes, il constitue un schéma (avec comme point générique la valuation triviale) qui est un modèle non singulier de la courbe [MZ39].

Le point de vue valuatif conduit à une autre notion-clé pour la classification des singularités, le **semi-groupe de valeurs** d'une branche plane $(f_i) : \Gamma(f_i) := v(K[[x,y]]/(f_i) \setminus \{0\})$. La donnée d'un système minimal de ses générateurs équivaut à la donnée des paires de Puiseux définies ci-dessus (ou des exposants caractéristiques ou encore de bien d'autres invariants [Wal04, Proposition 4.3.8]). Ces données caractérisent la **classe d'équisingularité** d'une branche plane, c'est-à-dire l'ensemble des branches qui ont même résolution de singularité minimale – ou dans le cas analytique qui sont topologiquement équivalentes – en lien avec le problème des **modules** d'une branche plane : décrire l'espace quotient de sa classe d'équisingularité modulo équivalence formelle, respectivement analytique [HH11] :

Théorème 1.0.2 *[Zar86, Théorème 3.3] Deux branches (algébriques, analytiques ou algébroïdes) sont équisingulières si et seulement si elles ont les mêmes paires de Puiseux.*

L'équisingularité d'une courbe plane réductible, quant à elle, est déterminée par l'équisingularité de chaque branche et la **multiplicité d'intersection** 2 à 2 des branches, celle-ci pouvant être calculées via leurs paramétrisations de Puiseux. Dans le contexte analytique, ces données algébriques sont équivalentes au type topologique local de l'**entrelacs** que forme l'intersection de la courbe plane (vue comme surface de Riemann) avec une petite 3-sphère (notion de **fibration de Milnor** : voir e.g. [BK86].

En caractéristique positive, on peut aussi résoudre les singularités d'une courbe plane par normalisation, ou par éclatement de points, mais on n'a pas de théorème de Puiseux comme ci-dessus. Néanmoins, la méthode de Newton peut s'appliquer et conduit à

des développements formels avec éventuellement des exposants à dénominateur non borné, et donc une description d'une clôture algébrique [Ked01b, Ked01a, Ked17] au sein d'un corps de séries généralisées au sens de H. Hahn [Hah07] (voir Définition 3.0.1). Néanmoins le lien entre ces développements et d'autres éléments caractéristiques d'une courbe plane, par exemple son semi-groupe de valeur, ou encore les **développements de Hamburger-Noether** (d'autres types de développements emboités qui permettent de caractériser l'équisingularité [Cam80]) restent à clarifier.

Une des motivations-clés de l'étude de classes équisingulières par O. Zariski était la résolution des singularités en dimension supérieure selon la stratégie suivante : considérer une projection générique dont la fibre soit équisingulière, puis procéder à une équirésolution. Cette stratégie en caractéristique 0 dans le contexte analytique rejoint celle par **stratification** de Whitney et Thom-Mather et par **variété polaire** de Lê Dũng Tráng et B. Teissier (voir le survol [FT18] et par exemple l'article [PP17]). La résolution des singularités à la Newton-Puiseux a pu être adaptée au cas des surfaces [Jun08, Wal35]. Il s'agit de paramétrer des **coins** (**wedge**) de la surface puis de recoller ces paramétrisations au-dessus du lieu non singulier pour obtenir une variété lisse. Certains ingrédients subsistent en dimension quelconque, comme le théorème d'Abhyankar-Jung [Abh55,PR12,Ron17], ou même la possibilité de paramétrer certains coins [McD95]. Plus généralement, la stratégie de résolution d'O. Zariski consiste à combiner **uniformisation locale** (prouvée en toute dimension pour la caractéristique 0 dans [Zar40]) et **recollement** des solutions locales (prouvé en dim 2 [Zar42] et en dim 3 [Zar44b], mais problème toujours ouvert en dim ≥ 4!). En effet, l'espace de Riemmann–Zariski en dimension >1 n'étant plus même un schéma, il ne constitue pas une résolution des singularités de la variété considérée. En fin de compte, la résolution des singularités des variétés algébriques de dimension quelconque en caractéristique 0 est obtenue par H. Hironaka [Hir64] et utilise une autre approche, basée notamment sur la théorie du **contact maximal** [AHV77, AHV75] (l'existence d'une hypersurface formelle lisse avec mêmes points infiniment voisins que la variété singulière). En caractéristique positive, la résolution des singularités et même l'uniformisation locale ne sont connues qu'en dimension ≤ 3 [Abh98, CP08]. On peut citer S.D. Cutkosky à propos de ces différentes approches de résolution des singularités qu'il présente dans [Cut04] : "Toutes les preuves dans ce livre peuvent être vues comme des généralisations de l'algorithme de Newton, à l'exception de la preuve du fait que les singularités de courbes peuvent être résolues par normalisation."

L'étude des singularités utilise aussi les séries formelles, en particulier des paramétrisations à la Puiseux, via la notion d'**espace des arcs** (correspondant à des **valuations divisorielles** comme ci-dessus) ou des **coins** associé à une variété [Nas95, dF18]. Cette approche a des liens directs avec l'approximation d'Artin, notamment la compréhension de la **fonction d'Artin-Greenberg** (voir [Hic93] ou [Ron18] pour un survol, voir aussi récemment [BKPR18] pour ces différents liens). Des progrès dans la connaissance de la clôture algébrique des séries formelles (voir ci-après) devraient donner des moyens supplémentaires concernant les questions de classifications de singularités. Ce point de vue revient à V. Cossart qui nous a suggéré d'approfondir ces éléments lors de notre collaboration à Versailles, en parallèle d'un travail commun sur les articles récents de

S.S. Abhyankar concernant les **diviseurs dicritiques** (voir Section 1.2). Outre l'intérêt général, bien entendu algébrique et analytique, que présenterait l'obtention d'une description explicite de la clôture algébrique de $K((x_1,\dots,x_n))$ – voire de $K\{\{x_1,\dots,x_n\}\}$ pour $K\subseteq\mathbb{C}$ – à l'instar de 1.0.1.

1.1 Vers une description de la clôture algébrique des séries formelles en plusieurs variables

1.1.1 Contexte et stratégie

Soit K un corps de caractéristique nulle et $\overline{K}$ sa clôture algébrique. Soit $\underline{x} := (x_1,\dots,x_r)$ un r-uplet d'indéterminées où $r\geq 2$. Soient $K[\underline{x}]$ et $K[[\underline{x}]]$ les K-algèbres commutatives de polynômes et de séries formelles à r variables et à coefficients dans K, et leurs corps de fractions respectifs $K(\underline{x})$ et $K((\underline{x}))$. Ces derniers se plongent naturellement dans $K((x_r))((x_{r-1}))\cdots((x_1))$, ce qui permet de voir leurs éléments comme des séries de Laurent. Cela équivaut à considérer ces corps munis de la valuation de rang maximal r (voir Définition 3.0.1)

En appliquant de manière emboitée le **théorème de Newton-Puiseux** 1.0.1, on obtient une description des éléments algébriques comme séries de Puiseux formelles, c'est-à-dire séries de Laurent à exposants rationnels avec dénominateur commun (voir [Ray74, Theorem 3] [Sat83, p.151]) :

Théorème 1.1.1 *On a :*

$$\overline{K((x_r))((x_{r-1}))\cdots((x_1))}=\varinjlim_{p\in\mathbb{N},p\neq 0}\ \varinjlim_{L} L((x_r^{1/p}))((x_{r-1}^{1/p}))\cdots((x_1^{1/p}))$$

où L parcourt l'ensemble des extensions finies de K dans $\overline{K}$.

Vus comme séries multivariées, les éléments de $\overline{K((x_r))((x_{r-1}))\cdots((x_1))}$ ont leur support, à translation près, dans le cône positif de $(1/p)\mathbb{Z}^r$ muni de l'**ordre lexicographique**.

Dans ce contexte, plusieurs résultats permettent de préciser les éléments de $\overline{K((x_r))((x_{r-1}))\cdots((x_1))}$ qui sont en fait *algébriques* sur $K(\underline{x})$ ou $K((\underline{x}))$. Les auteurs fournissent notamment des contraintes nécessaires sur les supports de tels éléments (voir [McD95, Theorem 3.16], [GP00, Théorème 2], [SV06, Theorem 13] [AI09, Theorem 1], [SV11, Theorem 1]). On déduit de ces travaux :

Théorème 1.1.2 *Le sous-corps suivant de $\overline{K((x_r))((x_{r-1}))\cdots((x_1))}$ (où L parcourt l'ensemble des extensions finies de K dans $\overline{K}$) :*

$$\mathcal{K}_r := \varinjlim_{(p,\underline{q})\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^{r-1}}\ \varinjlim_{L}\ L\left(\left(\left(\frac{x_1}{x_2^{q_1}}\right)^{1/p},\dots,\left(\frac{x_{r-1}}{x_r^{q_{r-1}}}\right)^{1/p},x_r^{1/p}\right)\right)$$

est une extension algébriquement close de $K(\underline{x})$ et $K((\underline{x}))$.

Remarquons que $\mathcal{K}_r$ peut en fait être décrit comme un corps de séries formelles comme suit :

$$\mathcal{K}_r = \varinjlim_{(p,\underline{q})\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^{r-1}} \varinjlim_{L} \varinjlim_{\underline{n}\in\mathbb{Z}^r} \left(\frac{x_1}{x_2^{q_1}}\right)^{n_1/p} \cdots \left(\frac{x_{r-1}}{x_r^{q_{r-1}}}\right)^{n_{r-1}/p} x_r^{n_r/p}\, L\left[\left[\left(\frac{x_1}{x_2^{q_1}}\right)^{1/p}, \ldots, \left(\frac{x_{r-1}}{x_r^{q_{r-1}}}\right)^{1/p}, x_r^{1/p}\right]\right].$$

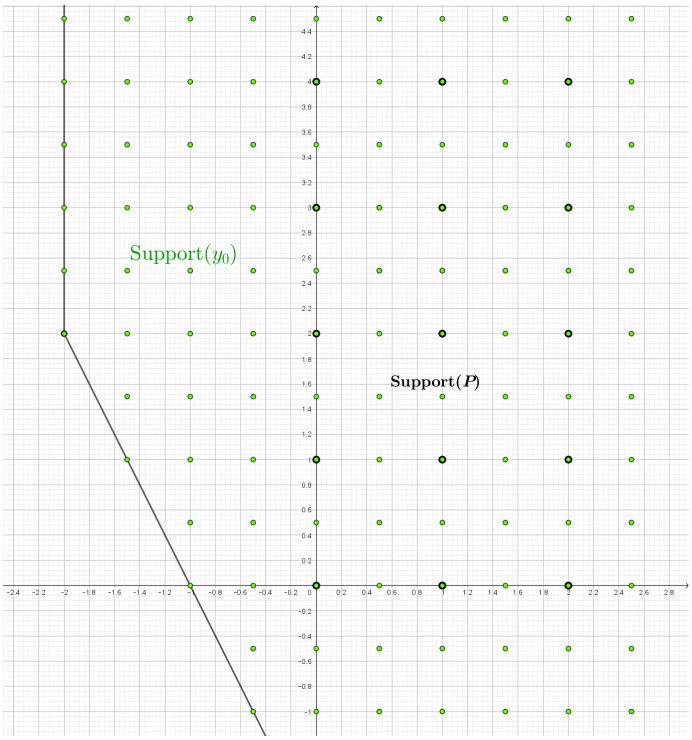
Les preuves des résultats référencés ci-dessus utilisent toutes des variantes de la méthode du **polygone de Newton**. On peut aussi envisager une preuve via le **théorème d'Abhyankar–Jung** [Jun08, Abh55, PR12], en observant que pour toute série formelle dans $K[[\underline{x}]]$ – en particulier le discriminant Δ d'une équation $P(\underline{x}, y) \in K[[\underline{x}]][y]$– peut être monomialisé par une transformation

$$\underline{x} \mapsto \left(\left(\frac{x_1}{x_2^{q_1}}\right)^{1/p}, \ldots, \left(\frac{x_{r-1}}{x_r^{q_{r-1}}}\right)^{1/p}, x_r^{1/p}\right) =: (u_1, \ldots, u_r) \tag{1.1.1}$$

(voir la remarque ci-dessous).

Nous appellerons les éléments de $\mathcal{K}_r$ des **séries de Puiseux polyédrales rationnelles** puisque le support par rapport aux variables x_i de telles séries :

— consiste en des points de $\mathbb{Q}^r$ avec dénominateur borné ;
— est inclus dans le translaté d'un cône polyédral fortement convexe à générateurs rationnels).



Exemple pour $r = 2$, $p = 2$ et $q = 2$

Nous envisageons donc les éléments de $\overline{K((\underline{x}))}$ comme les séries de Puiseux polyédrales rationnelles qui sont algébriques sur $K((\underline{x}))$, c'est-à-dire qui vérifient une équation $P(\underline{x}, y) = 0$ polynômiale selon l'inconnue y et à coefficients dans $K((\underline{x}))$. Bien entendu, toute série dont le support est dans le translaté d'un orthant $(1/p)\mathbb{N}^r$, $p \in \mathbb{N}^*$ – c'est-à-dire dans le cas où $q_1 = \cdots = q_{r-1} = 0$) – est algébrique. Néanmoins, dès que $\underline{q} \neq \underline{0}$, la question de l'algébricité est subtile. Dans [AR19, Theorem 4.5], les auteurs ont déterminé des conditions nécessaires sur le support de ces séries algébriques en termes de lacunarité. Ces résultats s'inscrivent dans divers autres résultats anciens [Kra99] et récents [Dut15].
De plus, même pour un support admissible fixé, l'algébricité d'une série de Puiseux polyédrale rationnelle est tributaire de ses *coefficients*. D'après le théorème 1.1.2 ci-dessus, ces coefficients vivent tous dans une même extension finie L de K. Pour simplifier notre propos, et puisque nous ne rajouterons rien à leur description de ce point de vue, *nous supposerons d'emblée que $K = L$, si ce n'est supposer que $K = \overline{K}$.*

Exemple 1.1.3 .
1. *Soient $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}^2$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. La série suivante*

$$y_0 = \left(\frac{x_1}{x_2^q}\right)^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 + q\alpha_1} \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} \left(\frac{x_1}{x_2^q}\right)^{i/p} x_2^{j/p}$$

est algébrique sur $K[x_1, x_2]$ et donc sur $K[[x_1, x_2]]$ et a pour support

$$(\alpha_1, \alpha_2) + \left(\frac{1}{p}, \frac{-q}{p}\right)\mathbb{N} + \left(0, \frac{1}{p}\right)\mathbb{N}$$

En effet, on peut réécrire la série y_0 sous la forme :

$$\begin{aligned} y_0 &= \left(\frac{x_1}{x_2^q}\right)^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 + q\alpha_1} \sum_{i,j=0}^{p-1} \left(\sum_{k,l\in\mathbb{N}} \left(\frac{x_1}{x_2^q}\right)^k x_2^l\right) \left(\frac{x_1}{x_2^q}\right)^{i/p} x_2^{j/p} \\ &= \left(\frac{x_1}{x_2^q}\right)^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2 + q\alpha_1} \left(\frac{1}{1 - x_2} \frac{x_2^q}{x_2^q - x_1}\right) \sum_{i,j=0}^{p-1} \left(\frac{x_1}{x_2^q}\right)^{i/p} x_2^{j/p} \end{aligned}$$

Il s'agit donc d'un produit et d'une somme finis d'éléments algébriques sur $K[x_1, x_2]$.

2. *Les deux séries suivantes ont même support $(1, -1)\mathbb{N}$ mais la série*

$$\frac{x_2}{x_2 - x_1} = \frac{1}{1 - x_1/x_2} = \sum_{n\geq 0} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n$$

est algébrique sur $K[x_1, x_2]$ et donc sur $K[[x_1, x_2]]$, alors que la série

$$y_0 = e^{x_1/x_2} = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n$$

n'est pas algébrique sur $K[[x_1, x_2]]$.

La remarque suivante est fondamentale :

Remarque 1.1.4 *Par la transformation quadratique* $(x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{x_1}{x_2}, x_2\right) =: (u_1, u_2)$, *tout polynôme* $P = \sum_{j=0}^{d} a_j y^j$ *à coefficients dans* $K[[x_1, x_2]]$ *est transformé en un polynôme* $\tilde{P} = \sum_{j=0}^{d} \tilde{a}_j y^j$ *à coefficients dans* $K[u_1][[u_2]]$ *tels que :*

$$\tilde{a}_j = \sum_{m \geq m_0} \tilde{a}_{m,j}(u_1) u_2^m \text{ avec } m_0 = ord_{x_1} P \text{ et } \deg_{u_1} \tilde{a}_{m,j} \leq m.$$

.

On réécrit $\tilde{P}$ sous la forme :

$$\tilde{P} = \sum_{m \geq m_0} \pi_m(u_1, y) u_2^m$$

avec donc $\pi_{m_0}(u_1, y) \in K[u_1, y] \setminus \{0\}$. Lorsqu'on évalue $\tilde{P}$ en $y_0 = e^{u_1}$, on a donc $\pi_{m_0}(u_1, y_0) \neq 0$, ce qui implique que $\tilde{P}(u_1, u_2, y_0) = P(x_1, x_2, y_0) \neq 0$.

A l'instar de ce qu'exprime la remarque ci-dessus pour $r = 2$, notre approche consiste à caractériser les séries de Puiseux polyédrales rationnelles qui sont algébriques sur $K((\underline{x}))$ avec le point de vue suivant. En appliquant le changement de variables (1.1.1), on considère la série y_0 *avec les mêmes coefficients* et sous la forme :

$$y_0 = \sum_{\underline{n}} c_{\underline{n}}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_s}) u_{i_{s+1}}^{n_1} \cdots u_{i_r}^{n_{r-s}} \in K[[\underline{u}]]$$

où les $c_{\underline{n}}$ sont les séries en les variables $u_i = x_i / x_{i+1}^{q_i}$ pour lesquelles $q_i > 0$. Quant à l'équation annulatrice P de y_0, elle devient une équation $\tilde{P}$ avec un support qui a des *contraintes*, notamment $\tilde{P} \in K[u_{i_1}, \ldots, u_{i_s}][[u_{i_{s+1}}, \cdots, u_{i_r}]]$. Autrement dit, *les séries* $c_{\underline{n}}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_s})$ *sont nécessairement des séries algébriques sur* $K[u_{i_1}, \ldots, u_{i_s}]$. Nous sommes ainsi ramenés à une question similaire : *caractériser parmi les séries formelles celles qui sont algébriques sur* $K[\underline{x}]$*, c'est-à-dire des paramétrisations formelles de composantes irréductibles d'hypersurfaces algébriques.*

1.1.2 Nos travaux : sur l'algébricité des séries de Puiseux de plusieurs variables

Comme discuté précédemment, nous nous intéressons à l'algébricité sur $K(\underline{x})$ d'une série formelle $y_0 = \sum_{\underline{n}} c_{\underline{n}} x^{\underline{n}}$ dans $K[[\underline{x}]]$ – c'est-à-dire l'existence d'un polynôme non nul $P = \sum_{j=0}^{d} a_j y^j \in K[\underline{x}, y]$ tel que $P(\underline{x}, y_0) = 0$ – en termes de ses coefficients. Il existe à ce propos différents résultats :

– [Com64, Sta78, Lip89] y_0 *algébrique* $\Rightarrow$ y_0 *différentiellement finie (**D-finie**)* $\Leftrightarrow$ *les coefficients* c_n *satisfont une relation de récurrence linéaire à coefficients polynômiaux.*

y_0 D-finie signifie que y_0 est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients dans $K[\underline{x}]$. De plus, dans le cas $r = 1$, y_0 vérifie une équation à singularité régulière [CC86, CC87]. Réciproquement [Sin80] : *il existe un algorithme pour déterminer si*

une série y_0 D-finie est algébrique.

– [Fur67, DL87] *y_0 algébrique $\Leftrightarrow$ les coefficients c_n sont exactement ceux de la diagonale du développement d'une fraction rationnelle de deux variables.*
En particulier, pour $r = 1$, si $\dfrac{\partial P}{\partial y}(0,0) \neq 0$, alors $y_0 = \mathrm{Diag}\left(\dfrac{y^2\dfrac{\partial P}{\partial y}(xy,y)}{P(xy,y)}\right)$.

– [FS97, Sok11] *y_0 série **implicite** $\Rightarrow$ les c_n vérifient une formule close explicite en fonction des coefficients de l'équation.*

– [BCS+07] pour $r = 2$: *y_0 algébrique $\Rightarrow$ on calcule algorithmiquement à partir des coefficients de y_0 des **approximants de Hermite-Padé** c'est-à-dire des polynômes bivariés parmi lesquels se trouve un polynôme annulateur de y_0.* Un certificat existe pour déterminer le polynôme annulateur si on suppose *a priori* qu'il est irréductible.

– [Tei07] $K[[t]]$ est vu comme $K[[x,y]]$-module par une paramétrisation de Puiseux $(t^n, \varphi(t))$ d'une courbe algébroïde. On reconstruit alors une équation correspondante à la branche en tant qu'unique générateur du 0ème **idéal de Fitting** de $K[[t]]$, pourvu qu'on puisse calculer les relations inhérentes à la paramétrisation.

Dans [HM17] à une variable, et dans [HM19] à plusieurs variables, nous résolvons les deux problèmes suivants :

• Description des coefficients d'une série de Puiseux polyédrale rationnelle algébrique sur $K[\underline{x}]$ en fonction des coefficients d'un polynôme annulateur de $K[\underline{x}][y]$.
Pour y_0 série de Puiseux polyédrale rationnelle solution simple d'une équation $P(\underline{x}, y) = 0$ avec $P \in K[\underline{x}, y]$, nous déterminons une **formule close** des coefficients de y_0 en fonction des coefficients de P et des coefficients d'une partie principale z_0 de y_0 de longueur contrôlée. Notre preuve s'effectue en 2 étapes. La première étape fait écho au fait suivant classique dans le cas du développement de Puiseux d'une branche de courbe plane : la partie principale z_0 correspond au processus dit de séparation des branches (voir l'introduction de ce chapitre). C'est le développement le plus long que y_0 peut partager en commun avec une autre racine de P. La partie résiduelle $y_0 - z_0$ est quant à elle déterminée de manière unique et automatique comme solution unique d'une équation de type "série implicite" [KP02] ou encore "hensélien" [Nag62] [ZS75, Chap. VIII, Theorem 17]. Nous prouvons en fait que la partie résiduelle $y_0 - z_0$ de y_0 vérifie une équation que nous appelons "de type hensélienne fortement réduite" canoniquement et explicitement déduite de P. Ensuite, nous déterminons une formule close pour les coefficients des séries solutions d'équations henséliennes fortement réduites. Il s'agit en fait d'une généralisation singulière de [Sok11, Theorems 3.5 and 3.6], ceux-ci constituant eux-mêmes une version multivariée de la **formule de Flajolet-Soria** [FS97] (cas $r = 1$). En combinant les deux étapes, nous obtenons :

Théorème 1.1.5 ([HM17] Theorem 2, [HM19] Theorem 3.5) *On suppose les degrés en $\underline{x}$ et en y bornés par d_x et d_y respectivement, et on pose $N := 2d_xd_y$ et $\underline{k}_0 := (0,\dots,0,N{+}1)$. On note $\underline{a} = (a_{\underline{i},j})_{|\underline{i}|\leq d_x, j\leq d_y}$, $\underline{a}^{\underline{s}} = \prod_{\underline{i},j} a_{\underline{i},j}^{s_{\underline{i},j}}$, $\underline{c} = \left(c_{(0,\dots,0,1)}, c_{(0,\dots,1,0)}, \dots, c_{(N,0,\dots,0)}\right)$, $\underline{c}^{\underline{t}} = \prod_{\underline{k}} c_{\underline{k}}^{t_{\underline{k}}}$. Pour tout $\underline{n}$ tel que $|\underline{n}| > N$, le coefficient $c_{\underline{n}}$ s'exprime via une formule* explicite fraction rationnelle *en $\underline{a}$ et $\underline{c}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de la forme suivante :*

$$c_{\underline{n}} = c_{\underline{k}_0+\underline{p}} = \left(\frac{1}{\omega_0}\right)^{2|\underline{p}|} \sum_{\underline{s},\,\underline{t},\,finie} e_{\underline{s},\underline{t}}\, \underline{a}^{\underline{s}}\underline{c}^{\underline{t}},$$

(en particulier, ω_0 est une expression fixée indépendante de *$\underline{n}$ polynômiale en $\underline{a}$ et $\underline{c}$).*

• Reconstruction d'un polynôme annulateur d'une série de Puiseux polyédrale rationnelle algébrique donnée à partir de ses coefficients.
D'après [Wil19] (redécouvert notamment dans [Saf09]), l'algébricité d'une série de Puiseux polyédrale rationnelle y_0 correspond à des relations de récurrence non linéaire entre les coefficients de y_0. Ceci peut être encodé par l'annulation de certains déterminants de matrices de type Hankel construites de façon polynômiale à partir de ces coefficients de y_0. De plus, ces expressions déterminantales, que nous nommons **polynômes de Wilczynski**, nous permettent de reconstruire les coefficients d'un polynôme annulateur pour y_0 à partir de ses propres coefficients. La finitude de ce processus de reconstruction et la capacité de le certifier repose sur un lemme de type "**inégalité de Łojasiewicz**" (voir par exemple le survol [Tei12] et un cas particulier de notre résultat dans [Izu92]) : on contrôle l'ordre d'annulation d'un polynôme évalué en une série formelle algébrique qu'il n'annule pas. Cela nous conduit ainsi, à degrés d'algébricité fixés, à un nombre fini de formules universelles de reconstruction. Remarquons que ces résultats sont valables pour un corps de base K de caractéristique quelconque.

Théorème 1.1.6 ([HM17] Corollary 1, [HM19] Corollary 5.7) *On suppose les degrés en $\underline{x}$ et en y bornés par d_x et d_y respectivement, et on pose $N := 2d_xd_y$. Il existe un ensemble fini de paquets finis de formules polynômiales homogènes explicites – les* ***formules de reconstruction*** *:*

$$\left\{A_{\underline{i},j}^{(\lambda)} \in \mathbb{Z}\left[C_{(0,\dots,0,1)}, C_{(0,\dots,1,0)}, \dots, C_{(N,0,\dots,0)}\right] \;:\; |\underline{i}| \leq d_x,\ j \leq d_y\right\}_{\lambda\in\Lambda}$$

telles que pour toute série $y_0 = \sum_{\underline{n}\geq_{\mathrm{grlex}}(0,\dots,0,1)} c_{\underline{n}}\underline{x}^{\underline{n}} \in K\left[[\underline{x}]\right]$ *algébrique de degrés* $\leq (d_x, d_y)$*, il existe λ tel que le polynôme dans $K\left[\underline{x}, y\right]$ donné par :*

$$P(x,y) := \sum_{(\underline{i},j)} a_{\underline{i},j}\underline{x}^{\underline{i}}y^j \qquad \text{où } a_{\underline{i},j} := A_{\underline{i},j}^{(\lambda)}(c_{(0,\dots,0,1)}, \dots, c_{(N,0,\dots,0)})$$

est non nul et annulateur de y_0.

Par exemple, dans le cas de degré 1 en y, c'est-à-dire pour une série y_0 **rationnelle**, il suffit de considérer un seul polynôme de Wilczynski, celui correspondant à l'expression (1.15) p.401 dans [GKZ94] du **résultant** des deux polynômes définissant y_0 comme quotient.

Nous soulignons que la longueur de la partie principale z_0 ainsi que la "taille" du processus de reconstruction sont contrôlés uniformément par le degré d'algébricité considéré en $\underline{x}$ et en y, et même plus précisément par le support possible de l'équation. Cela nous permet de boucler naturellement les deux parties de nos travaux et d'obtenir le résultat intrigant suivant :

Théorème 1.1.7 ([HM17] Corollary 2, [HM19] Corollary 5.11) *Dans l'ensemble des séries de Puiseux polyédrales rationnelles vu comme espace vectoriel de dimension infinie via les coefficients des séries, le sous–espace des séries algébriques à degrés fixés en $\underline{x}$ et en y est un sous–espace de dimension finie paramétré explicitement par un nombre fini de familles de fractions rationnelles quotients de polynômes de Wilczynski.*

Les différents aspects de ces travaux sont illustrés via un exemple filé dans l'Appendice 4.1.

Voici quelques pistes que nous envisageons de poursuivre prochainement :
- déterminer la théorie de l'élimination des polynômes de Wilczynski
- déterminer la stratégie optimale de calcul des déterminants de Wilczynski afin d'effectuer le processus de reconstruction avec un minimum de calculs.

De plus, nous soulignons que ces travaux pourraient trouver un certain écho d'une part en combinatoire (algébricité des séries génératrices) et en théorie des nombres (corps de fonctions algébriques). A ce propos, nous déduisons de nos résultats dans [HM19] la version multivariée due à K. V. Safonov du théorème d'Eisenstein sur les séries algébriques à coefficients dans $\mathbb{Q}$ [Saf00, Theorem 5].

D'autre part, nous envisageons de poursuivre ces travaux en caractéristique positive, dans le prolongement de [Ked01b, Ked01a, Ked17].

1.2 Courbes planes en caractéristique quelconque – Diviseurs dicritiques

1.2.1 Contexte

La notion de diviseur dicritique apparait au début du $20^{\text{ème}}$ siècle, dans l'étude des singularités isolées d'équations différentielles du plan complexe [Dul06]. Étant donné un germe ω de 1-forme différentielle holomorphe singulière à l'origine $0 \in \mathbb{C}^2$, la singularité est dite **dicritique** s'il existe un nombre infini de (germes de) courbes invariantes passant par 0. Dans ce contexte, lorsqu'on éclate l'origine – typiquement lors d'une

résolution des singularités à la [Sei68] ; voir aussi [MM80] – on appelle **diviseur dicritique** toute composante irréductible du diviseur exceptionnel qui est transverse au (tiré en arrière du) feuilletage correspondant. Comme exemple clé, on peut considérer le cas d'une équation avec intégrale première rationnelle ou méromorphe $\frac{f}{g}$ avec point base à l'origine. Dans ce cas, le feuilletage est donné par le pinceau de courbes planes $\{\lambda f + \mu g = 0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$.

Abhyankar a introduit dans une série d'articles [Abh10a, Abh10b, AL11, etc.] une version algébrique des diviseurs dicritiques, dans un contexte tout à fait général, notamment en caractéristique quelconque, et en lien avec le problème jacobien [TW94]. Nous renvoyons à [HS17] pour un survol de ces travaux. Rappelons que toute application polynômiale de $\mathbb{C}^2$ se prolonge en une fonction rationnelle de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ au-dessus de certain points à l'infini. Soient R un anneau local noethérien régulier de dimension 2, $\mathrm{Frac}(R)$ son corps de fractions, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal et $K := R/\mathfrak{m}$ son corps résiduel. On appelle **diviseur premier** de R tout anneau de valuation R_v pour une valuation discrète v de $\mathrm{Frac}(R)$ dominant R, avec donc un corps résiduel de degré de transcendance 1 sur K. On note K' la clôture algébrique relative de K dans $R_v/\mathfrak{M}_v$, qui est une extension finie de K d'après [Abh56]. On considère aussi un corps quelconque noté k.

Définition 1.2.1 .

- Soit $z = \frac{f}{g} \in \mathrm{Frac}(R)$, $z \neq 0$. On appelle **diviseur dicritique** de z tout diviseur premier R_v de R tel que $z \in R_v$ et $\mathrm{Res}_v(z)$ est transcendant sur K.
- Soit $f \in k[x,y] \setminus k$. On appelle **diviseur dicritique** de f tout anneau de valuation discrète R_v de $k(x,y)$ tel que $k[x,y] \not\subset R_v$, $k(f) \subset R_v$ et $\mathrm{Res}(f)$ transcendent sur k. Autrement dit, R_v est un diviseur dicritique au sens précédent de la fonction rationnelle définie par f en un de ses points à l'infini.

Géométriquement parlant, en un point simple d'une surface, on considère une fonction rationnelle $z = \frac{f}{g}$ qui correspond au pinceau de courbes $\lambda f + \mu g = 0$ en ce point. Un diviseur dicritique de z est donc un diviseur exceptionnel d'une transformation quadratique éliminant les points bases de ce pinceau, tel que en chaque point du diviseur passe une (transformée stricte d'une) courbe du pinceau.

On retrouve les diviseurs dicritiques sous d'autres noms : **diviseurs horizontaux** chez A. Campillo, A. Reguera et O. Piltant [CPR05, Definition 4] et, dans un cadre plus général, diviseurs associés à des valuations de Rees de l'idéal des points base d'un pinceau chez I. Swanson [Swa11, Definition 1.1] [HS06, Ex. 14.18]. Dans [AH11], cela a conduit les auteurs à une généralisation de la notion de diviseur dicritique en dimension supérieure.

1.2.2 Nos travaux

Dans toute cette section, R est un anneau local noethérien régulier de dimension 2. Dans [CM11] avec V. Cossart, nous avons généralisé et simplifié la preuve des principaux résultats de [AL11] :

Théorème 1.2.2 *[CM11, Theorems 3.1 and 3.2, Corollary 4.2] On suppose que $zx^{a_0}y^{b_0} \in R$ pour certains paramètres réguliers x, y de R. Alors, pour tout diviseur dicritique R_v,*

$\mathrm{Res}_v(z)$ *peut s'écrire de manière polynômiale au-dessus de* K'*, sauf dans le cas où* v *est monomiale et* (a_0, b_0) *appartient* à l'intérieur *d'un côté du polygone de Newton de* $zx^{a_0}y^{b_0}$ *dessiné relativement à* x, y *pondérés par* v*.*

Dans le cas d'un diviseur dicritique d'un polynôme $f \in k[x, y]$*,* $\mathrm{Res}_v(f)$ *peut toujours s'écrire de manière polynômiale au-dessus de* k'*.*

Nous procédons par récurrence sur la longueur de la suite d'éclatements le long de la valuation v, longueur qui est finie d'après [Abh56]. Par éclatements successifs, nous sommes ramenés au cas de la valuation $\mathfrak{m}$-adique pour laquelle un dernier éclatement nous indique clairement la contrainte pour obtenir une résidu sous forme polynômiale (par exemple dans $K'[t]$ avec $t = \mathrm{Res}(\frac{y}{x})$ et $[K' : K] < +\infty$).

Dans [CMM14] avec V. Cossart et G. Moreno, nous avons donné des démonstrations plus simples et des prolongements de plusieurs résultats de [Abh10b] :

Théorème 1.2.3 *[CMM14, Propositions 2.2, 3.2, 4.6 et 4.7]*

1. *Tout* $z \in \mathrm{Frac}(R)$ *non nul, respectivement tout polynôme de* $k[x, y]$*, admet un nombre fini non nul de diviseurs dicritiques.*
2. *On a identité entre les diviseurs dicritiques de* $z = \frac{f}{g}$ *et les valuations de Rees de l'idéal* (f, g)*.*

Nous considérons C **courbe générique** du pinceau (f, g) au sens de [CPR05, p.517], c'est–à–dire la courbe C d'équation $(f - gZ)$, d'anneau $S := R[z]_{m[z]}$ (où $R[z] := R[Z]/(f - gZ)$). La clôture intégrale T de S – qui correspond à la normalisation de C – a une décomposition finie en anneaux de valuation discrète deux à deux distincts de $\mathrm{Frac}(R)$:

$$T = V_1 \cap \cdots \cap V_e$$

Ce sont précisément les diviseurs dicritiques de z dans R.

Les **valuations de Rees** d'un idéal I d'un anneau R constituent par définition un ensemble minimal d'anneaux de valuations qui déterminent une décomposition primaire de $\overline{I}^n$ pour tout n, où $\overline{I}$ est la clôture intégrale de I. Nous renvoyons à [Swa11, HS06] pour les propriétés de ces valuations. En particulier, dans notre contexte, cet ensemble est fini non vide, et ainsi on a une autre preuve de 1. comme corollaire de 2.

Rappelons, concernant le pinceau $(\lambda f + \mu g)$ associé à $z = f/g$, qu'une modification qui élimine ses points bases permet de définir un morphisme que nous notons p du diviseur exceptionnel E vers $\mathbb{P}^1$ (un diviseur dicritique est une composante de E pour laquelle p est surjectif). On montre que :

Théorème 1.2.4 *[CMM14, Proposition 4.8 et Corollaire 4.9]*

1. *(Généralisation du théorème de connexité [TW94, p. 377]) La fibre* $p^{-1}(O)$ *est connexe.*
2. *(Généralisation de [AL11]) On suppose que la réduite de la projectivisée de la courbe* (g) *est lisse en les points bases du pinceau. Pour toute composante dicritique* D *de* E*, on a que* $D \cap p^{-1}(O)$ *se réduit à un point fermé* P*. Ainsi* $z := F/G$

peut être défini sur $D \setminus \{P\}$ *qui est une droite affine dont l'anneau de fonctions est une algèbre de polynômes :* $\mathrm{Res}_v(z)$ *peut s'écrire de manière polynômiale au-dessus de* K'*.*

Chapitre 2

Géométrie o-minimale et singularités d'équations différentielles

A la suite d'importants résultats en géométrie algébrique (A. Tarski – A. Seidenberg [Tar51, Sei54], C. Chevalley [CC56]) et analytique réelle (A. Gabrielov [Gab68], S. Lojasiewicz [Łoj71], H. Hironaka [Hir73]), A. Grothendieck a préconisé dans [Gro97] l'étude d'une **géométrie modérée**, en contrepoint de la géométrie générale dans laquelle peuvent survenir des phénomènes "pathologiques" (e.g. ensemble de Cantor, courbe de Péano etc.). A l'interface entre théorie des modèles et géométrie, L. van den Dries [vdD84] et J. Knight, A. Pillay et C. Steinhorn [PS86, KPS86] ont développé la notion de **structure o-minimale** qui remplit en bonne partie les conditions d'un tel programme. En théorie des modèles, une **structure** est l'interprétation d'une **théorie** du premier ordre (relative à un **langage** donné) dans un certain ensemble appelé le **modèle** de la théorie - on dit aussi l'**univers** de la structure. Nous renvoyons à [vdDM96, Tei97, vdD98, Cos00] pour les notions et propriétés principales.

Par exemple, considérons la structure notée $\mathbb{R}_{\exp}$ correspondant au langage $(+, ., 0, 1, \leq, \exp)$ des anneaux ordonnés avec un prédicat pour la fonction exponentielle, interprété sur les nombres réels. En termes géométriques, il s'agit de la famille de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, définis à partir de formules faisant intervenir des composées multivariées de polynômes et des fonctions exp et log, et stables par union, intersection, passage au complémentaire, produit cartésien et projection. La structure est dite **o-minimale** si les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ de la théorie sont des unions finies d'intervalles. La structure est dite **modèle–complète** si l'utilisation du passage au complémentaire est en fait superflue (voir chapitre 3). Un résultat remarquable d'A. Wilkie dans [Wil96] a brillamment illustré ce point de vue :

Théorème 2.0.1 *[Wil96] La structure du corps ordonné des nombres réels muni de la fonction exponentielle est modèle–complète et o-minimale.*

Les conséquences de la o-minimalité d'une structure en termes de modération de la géométrie de ses ensembles sont multiples : nombre fini de composantes connexes,décomposition cellulaire, notion de dimension, triangulabilité, stratification de Whitney,... Les fonctions définissables sont monotones et C^1 par morceaux. Un fait remarquable auquel

nous nous intéressons particulièrement est le suivant : les germes à l'infini de fonctions réelles d'une variable définissables dans une structure o-minimale constituent un **corps de Hardy**, un type particulier de **corps valué différentiel** (voir Définition 2.1.1).

Ces propriétés de modération sont liées à l'existence, au moins au niveau local, d'une **résolution de singularités** [Hir64] pour les ensembles définissables, ou de **monomialisation** [Cut17] pour les fonctions définissables, ou encore d'une **réduction des singularités** [Sei68, Pan06, CMR05] d'équations différentielles. Les propriétés de **décomposition cellulaire** et de **monotonicité et régularité par morceaux** [vdD84, PS84, KPS86] renvoient à celles de **stratification de Whitney** [Whi65] et de **rectilinéarisation** [Hir73] des ensembles définissables [vdDM96, Loi10]. La o-minimalité est souvent déduite de la modèle-complétude (on parle de *théorème du complémentaire*) à l'instar de [Gab68, BM88] pour la structure des réels avec les **fonctions analytiques restreintes** (i.e. analytiques sur un compact, ou encore surconvergentes, ou analytiques globales). Rappelons à l'instar de [Rol17] les ingrédients-clés inspirés de [Gab68, BM88] au delà de ceux classiques comme le **théorème des fonctions implicites** ou la **division par des monômes** des fonctions définissables (lorsqu'on peut le faire formellement) : **éclatements généralisés** [LR97, vdDS98, VRSS13], variantes (dans un contexte plus général mais avec des résultats moins précis) du **théorème de préparation de Weierstrass** [Tou94, Par94, DS02, LR97, RS15, vdDS98], **propriété Λ-Gabrielov** des ensembles définissables via un **fiber-cutting lemma** [Hir73, vdDS98, vdDS00]. On peut aussi obtenir la o-minimalité d'une structure comme corollaire immédiat d'une propriété d'**élimination des quantificateurs** de la théorie correspondante [Tar51, Sei54, DvdD88], le pendant modèle-théorique de la **théorie de l'élimination** [GKZ94, BPR03]. C'est le cas notamment pour la théorie de $\mathbb{R}_{\text{an,exp}}$ [vdDMM94] et pour l'expansion des réels par les fonctions puissances réelles [Mil94]. Soulignons d'ailleurs qu'une des motivations première du résultat-clé d'A. Wilkie ci-dessus est le problème suivant toujours ouvert concernant $\mathbb{R}_{\text{exp}}$ et lié à la question d'élimination des quantificateurs :

Problème de Tarski : *est-ce que la théorie de* $\mathbb{R}_{\text{exp}}$ *est* ***décidable*** *?*

Plusieurs nouvelles structures o-minimales sont construites en ajoutant au langage des solutions **non oscillantes** d'équations différentielles. Par exemple, on peut ajouter les solutions d'**équations différentielles pfaffiennes** [Wil96, Wil99, Spe99] étant données leurs propriétés algébro-géométriques de finitude [Kho91, MR91]. D'autres solutions plus générales sont considérées dans [RSS07, KRS09, LGSS13, LGSS18]. Les séries formelles jouent un rôle clé dans ce contexte, notamment via la propriété de **quasi-analycité** : le développement de Taylor des fonctions les détermine de manière unique, à l'instar du contexte analytique. On peut d'ailleurs construire des structures o-minimales directement à partir de classes de séries qu'on sait resommer : les **séries généralisées convergentes** [vdDS98], les **séries multisommables** [vdDS00]. Plus généralement, l'expansion de $\mathbb{R}$ par une **classe quasi–analytique** est modèle–complète et o-minimale [RSW03, classes quasi-analytiques de Denjoy–Carleman], et sa théorie admet même l'élimination des quantificateurs [RS15]. On comparera ces résultats à d'autres progrès récents concernant les classes quasi-analytiques [BM04, BdSBB17, BdSBC18, dSB19].

Les séries, éventuellement généralisées, fournissent aussi des **paramétrisations** des ensembles définissables – en termes plus modèle-théoriques elles constituent des **modèles non standards** (voir Chapitre 3) – pour les diverses théories o–minimales. Dans [Mat14] nous présentons un survol concernant les séries généralisées (au sens de [Hah07]) avec dérivations et/ou fonctions exponentielles. Un corps de séries constituant un modèle non standard de $\mathbb{R}_{\text{an,exp}}$ joue un rôle tout particulier : le **corps des transséries**, introduit par J. Ecalle dans sa résolution monumentale [É92] du **problème de Dulac** (en lien avec le 16ème problème de Hilbert, voir ci-dessous). En plus d'être un corps muni de fonctions analytiques restreintes et fonctions exp et log, il s'agit d'un corps valué différentiel qui permet de résoudre formellement les équations différentielles dans un cadre très général [vdH97, vdH06]. En ce sens, l'étude de sa théorie des modèles vient de connaître une avancée spectaculaire avec le non moins monumentale ouvrage [AvdDvdH17] où les auteurs prouvent un théorème de modèle–complétude et d'élimination des quantificateurs (voir Section 2.2 et Chapitre 3). Des travaux sont en cours pour prouver la o–minimalité de certaines classes quasi–analytiques ayant des développements asymptotiques en transséries [Spe18, GKS18, KS19], en lien cette fois avec la résolution du problème de Dulac par Y. Il'Yashenko [Il'91]. Une autre question qui remonte à [vdD99] reste en suspens : *est-ce que les fonctions analysables d'Ecalle [É92] engendrent une structure o–minimale ?*

2.1 Trajectoires non oscillantes et corps de Hardy

2.1.1 Contexte

Prolongeant notamment les travaux de P. du Bois-Reymond sur la croissance des fonctions réelles [dB-R75], G.H. Hardy s'est attelé dans sa monographie [Har10] à la question fondamentale suivante :

> **Question d'après Hardy** : *peut-on trouver des échelles asymptotiques ("scale of infinity") universelles ? En particulier, peut-on trouver une échelle asymptotique couvrant les ordres de croissance des fonctions différentiellement algébriques ?*

Par échelle asymptotique, nous entendons ici une famille de fonctions **non oscillantes** et avec des propriétés algébriques qui puissent refléter les opérations effectivement mises en oeuvre dans la résolution de problèmes : structure de corps, relation d'ordre et donc valuation naturelle, dérivation, éventuellement composition. Avec les fonctions logarithmico-exponentielles (**LE-fonctions**), G.H. Hardy fournit un exemple d'une telle échelle asymptotique générale. Ces fonctions interviennent dans d'importants résultats de comparaisons asymptotiques : le théorème des nombres premiers, la formule de Stirling, ou encore concernant des solutions d'équations différentielles (fonctions d'Airy, fonctions hypergéométriques, etc.). Le corps des LE-fonctions est l'exemple fondateur de ce que nous appelons maintenant un corps de Hardy. Soit $\mathcal{G}_{+\infty}$ l'anneau des germes en $+\infty$ de fonctions réelles d'une variable réelle.

Définition 2.1.1 [Bou76, Section V, Appendix] On appelle **corps de Hardy** tout sous-anneau de $\mathcal{G}_{+\infty}$ qui est un corps et qui est stable par la dérivation usuelle des fonctions réelles.

Par exemple, on peut citer le corps des (germes de) fractions rationnelles $\mathbb{R}(x)$ ou le corps des fonctions méromorphes à l'infini $\mathbb{R}\{\{1/x\}\}$. Observons d'emblée que les germes d'un corps de Hardy sont automatiquement "(C^k pour tout k)–non oscillants". Mieux, ils sont mutuellement ordonnables et leurs ordres de grandeurs comparables : il s'agit de **corps ordonnés valués différentiels** [Bos82, Bos86, Bos87, Sha93, etc.] [Ros83a, Ros83b, Ros95, etc.]. La classe des corps de Hardy est close par résolution d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 – ainsi on peut en considérer ladite **clôture liouvillienne** – et de *certaines* équations différentielles linéaires d'ordre 2 (soulignons aussi le travail précurseur [Sjo71]). De plus, elle est close par résolution d'équations pfaffiennes $P(x,y)y' + Q(x,y) = 0$, P, Q polynômes [BMS07]. On peut aussi obtenir des corps de Hardy par adjonction de solutions non oscillantes d'équations d'ordre supérieur [Ram94, RT97, BMS07], ou de fonctions paramétrant les coordonnées de trajectoires non oscillantes de champs de vecteurs [CMR05].

D'autre part, il existe une relation intime et subtile entre les corps de Hardy et la géométrie o-minimale. Pour une expansion o-minimale du corps des nombres réels, les germes de fonctions réelles monovariées définissables constituent nécessairement un corps de Hardy [Mil12]. D'autre part, on peut utiliser les propriétés de non oscillation des germes d'un corps de Hardy dans des preuves d'o-minimalité, comme par exemple dans [vdDMM94] pour $\mathbb{R}_{\text{an,exp}}$. Néanmoins, certains corps de Hardy ne proviennent pas de structures o-minimales [RSS07]. D'après [Bos86], il existe des corps de Hardy avec **fonctions transexponentielles** – en fait tout **corps de Hardy maximal** – mais on ne sait pas s'il existe des structures o-minimales non exponentiellement bornées. Très récemment, M. Aschenbrenner, L. van den Dries et J. van der Hoeven ont montré dans [AvdDvdH19a] que tout corps de Hardy a une extension **ω-free** – en particulier donc, tout corps de Hardy maximal est ω-free (voir [AvdDvdH19a] et le chapitre 3). Ce résultat est une étape vers la conjecture suivante faite par ces auteurs dans [ADH18] :

Conjecture (Aschenbrenner – van den Dries – van der Hoeven). *Tout corps de Hardy admet une extension qui est un corps de Hardy vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires différentielles* (voir Chapitre 3).

2.1.2 Nos travaux

D'après [CMS00, CMS04, CMS02], dans le contexte des champs de vecteurs analytiques réels de dimension 3 avec point singulier isolé, disons le point O, les auteurs s'intéressent aux (germes de) trajectoires en O qui admettent une tangente à l'origine, et même des tangentes itérées le long des points infiniment voisins de 0. Ils appellent **pinceau intégral** tout sous-ensemble de telles trajectoires ayant les mêmes tangentes itérées, et qui ont donc mutuellement un contact plat. Cette notion permet de saisir des propriétés dynamiques importantes, notamment via la dichotomie suivante pour les pinceaux intégraux de courbes **analytiquement non oscillantes** :

- soit le pinceau intégral est **enlacé** (toute paire de trajectoire est enlacée). En fait dans ce cas, [RSS07, Corollary 2.6] [LGSS18], *chacune* (mais jamais deux) de ces telles trajectoires engendre avec les sous-analytiques une structure o-minimale ;
- soit le pinceau intégral est **séparé** (toute paire de trajectoires est séparable

par projection convenable). Dans le cas spécifique d'un système linéaire bidimensionnel, l'ensemble de ces trajectoires engendre une structure o-minimale [LGSS13].

Avec F. Sanz et O. Le Gal, dans un travail en cours [GMSb], nous considérons les notions analogues dans un contexte de **structure o-minimale expansion de $\mathbb{R}$ polynômialement bornée** (c'est-à-dire telle que toute fonction définissable soit dominée à l'infini par une fonction polynômiale) $\mathcal{R}$, et nous travaillons sur les questions suivantes :

(Q1) *A-t-on le même type de dichotomie pour les pinceaux intégraux sur des structures o-minimales polynômialement bornée ?*

(Q2) *Dans ce contexte, est-ce que les trajectoires d'un pinceau intégral séparé engendrent un corps de Hardy ? engendrent-elles une structure o-minimale ?*

On considère un système différentiel à coefficients (f_1, f_2) définissables dans $\mathcal{R}$:

$$(S_F) \quad \begin{cases} {y_1}' &= f_1(x, y_1, y_2) \\ {y_2}' &= f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Cela correspond bien à un champ de vecteurs en dimension 3 à coefficients définissables dans une structure o-minimale, où on effectue une paramétrisation par une des coordonnées x. Pour toute paire de solutions $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ et $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, on note $\mathcal{F}(\gamma, \delta)$ l'anneau des germes de fonctions $x \mapsto f(x, \gamma(x); \delta(x))$ avec f définissable dans $\mathcal{R}$. Nous nous intéressons aux courbes $(x, \gamma_1(x); \gamma_2(x))$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient la propriété que nous appelons de **séparation régulière** en référence à [Łoj71] : pour toute fonction définissable f, on a ultimement soit $f(x, \gamma(x)) = 0$, soit $f(x, \gamma(x)) > x^k$ pour un certain k. On a des propriétés de séparation régulière pour les structures o-minimales polynômialement bornée [Loi16]. Dans le travail en cours [GMSb], nous montrons que :

Théorème 2.1.2 (Le Gal – Matusinski – Sanz) *Soit γ une solution en O du système définissable (S_F) qui vérifie la propriété de séparation régulière. Soit δ une autre solution de (S_F) qui a contact plat avec γ. Alors, soit $\mathcal{F}(x, \gamma, \delta)$ est un corps de Hardy, soit γ et δ sont enlacées.*

Nous en déduisons un résultat qui renforce la dichotomie évoquée ci-dessus, mais sous l'hypothèse de séparation régulière :

Théorème 2.1.3 (Le Gal – Matusinski – Sanz) *Soit ξ un champ de vecteur en dimension 3 à coefficients définissables dans $\mathcal{R}$, et soient Γ, Δ deux trajectoires distinctes de ξ telles que Γ a la propriété de séparation régulière et Γ, Δ ont contact plat. Alors, soit Γ et Δ sont enlacées, soit pour* toute *projection F adaptée à (Γ, Δ), le germe en 0 de $F(\Gamma) \cap F(\Delta)$ est connexe.*

Nous envisageons ces résultats comme une étape vers la conjecture suivante :

Conjecture (Le Gal – Matusinski – Sanz). *Les trajectoires d'un pinceau séparé d'un champ de vecteur o-minimal en dimension 3, notamment dans le cas d'un champ de vecteur analytique, engendrent une structure o-minimale.*

2.2 Transséries et théorèmes de Puiseux différentiels

2.2.1 Contexte

Sur un versant plus formel, on constate un développement similaire et parallèle. En travaillant sur la deuxième partie du **16ème problème de Hilbert** (la finitude du nombre de cycles limites d'un champ de vecteur planaire polynômial), Dulac présenta dans [Dul23] une preuve utilisant des développements asymptotiques généralisés de fonctions comme séries formelles avec exposants réels non seulement de x mais aussi de $\log(x)$, $\exp(x)$. Mais il y avait une lacune dans cette preuve, détectée par Y. Il'Yashenko [Il'02] : comment peut-on s'assurer effectivement que les séries formelles correspondent bien de manière unique aux fonctions impliquées, une propriété de **quasi-analycité** ? Ecalle dans [É92] présenta une preuve monumentale de la conjecture de Dulac dans laquelle il considère un théorie globale de telles séries logarithmico-exponentielles, qu'il a nommées **transséries**, ainsi qu'une théorie d'**accéléro-sommation** de ces séries correspondant à des **fonctions analysables**. La théorie générale des transséries a été développée par J. van der Hoeven dans [vdH97, vdH06] conduisant à différents types de transséries : *réticulées*, *bien ordonnées*, *abstraites*.

A la suite de [DG87], plusieurs types de séries formelles avec exp et log ont été développés aussi comme modèles non standards de la structure o–minimale $\mathbb{R}_{\text{an,exp}}$, éventuellement munies d'une dérivation : les **séries Log-Exp** [vdDMM97, vdDMM01], les diverses **séries Exp-Log** [KK96, Kuh00, KM11] et **κ-bornées** [KS05]. Soulignons que, d'après [KKS97], on ne peut pas munir un corps de séries formelles, même généralisées au sens de [Hah07], avec une application exponentielle surjective. Par contre, on peut obtenir un tel corps logarithmico-exponentiel comme sous corps d'un plus grand corps de séries généralisées, ou en d'autres mots, comme limite inductive d'un procédé itératif d'**extensions exponentielles successives** [Edg10]. Concernant le corps des séries LE, un autre procédé de limite inductive permet de rajouter progressivement les différentes itérées de log, ce qui permet d'obtenir un corps où toute série a une hauteur exponentielle et une profondeur logarithmique *finies*. Dans ces contextes, on définit des dérivations qui imitent la dérivation naturelle dans un corps de Hardy et qui se comportent comme on peut l'espérer sur des séries formelles : elles commutent avec les sommes infinies pour une dérivation termes à termes. Une des principales motivations est ici de fournir des contreparties naturelles aux fonctions réelles **non oscillantes**, en particulier celles qui sont des solutions d'équations différentielles et/ou qui appartiennent à un **corps de Hardy** : voir le survey [Mat14] et la Section 3.

Actuellement, le mot transséries a essentiellement trois acceptions : les **transséries réticulées** correspondant au contexte originel de J. Ecalle (corps noté $\mathbb{T}_g$) ; celles appelées simplement **transséries** et qui étaient auparavant appelées séries Log-Exp, apparentées aux transséries bien-ordonnées (corps noté $\mathbb{T}$, voir [AvdDvdH17, Appendix A]) ; les **transséries abstraites** d'après l'axiomatisation dégagée dans [Sch01]. Plus que le corps des LE–fonctions de G.H. Hardy, les corps $\mathbb{T}_g$ et $\mathbb{T}$ possèdent une structure très riche : ils sont clos par intégration et plus généralement par résolution d'équations différentielles correspondant à des phénomènes non oscillants, et aussi par composition et inversion. A ce propos, la propriété la plus frappante est celle des **valeurs intermé-**

diaires différentielles, démontrée pour $\mathbb{T}_g$ dans [vdH02] et pour $\mathbb{T}$ dans [AvdDvdH19a] en conjonction avec [AvdDvdH17] :

Théorème 2.2.1 (valeurs intermédiaires différentielles VID) *Étant donné un polynôme différentiel $P(Y)$ à coefficients dans $\mathbb{T}$ et $f, g \in \mathbb{T}$ tels que $P(f) < 0 < P(g)$, il existe $h \in \mathbb{T}$ avec $f < h < g$ et $P(h) = 0$.*

Dans [AvdDvdH17], M. Aschenbrenner, L. van den Dries et J. van der Hoeven ont parachevé des années de travaux sur les corps ordonnés valués différentiels et les transséries. Ils y présentent une monumentale preuve de la **modèle–complétude** de la théorie de $\mathbb{T}$ en tant que **corps ordonné *valué* différentiel**, et en déduisent des propriétés de modération, notamment une version faible de la o-minimalité, la **o-minimalité à l'infini** : si $X \subset \mathbb{T}$, alors il existe $a \in \mathbb{T}$ tel que soit $(a, +\infty) \subset X$, soit $(a, +\infty) \cap X = \emptyset$. Est-ce que cette approche permettra de simplifier la preuve de [É92], voire donner des éléments concernant le problème de Hilbert ?

Une preuve indépendante du problème de Dulac due à Y. Il'Yashenko dans [Il'91] utilise aussi des paramétrisations formelles de type transséries. Très récemment, dans [GKS18], Z. Galal, T. Kaiser et P. Speissegger ont montré que les germes des fonctions d'Il'Yashenko appartiennent tous à un même corps de Hardy et peuvent être associés de façon quasi-analytique aux transséries solutions dans le même contexte.

Un résultat fondamental dans l'étude des champs de vecteur planaires – nécessaire aussi bien dans [É92] que dans [Il'91] – est le théorème de **réduction des singularités** de [Sei68]. *En dimension trois*, nous disposons aussi du même type de résultat. Plus précisément, dans [CMR05], F. Cano, R. Moussu et J.-P. Rolin prouvent un théorème d'**uniformisation locale** le long d'une trajectoire non oscillante, et dans [Pan06], D. Panazzolo démontre un théorème de **réduction des singularités** : *par éclatements et ramifications (localement le long d'une trajectoire non oscillante pour le premier résultat), on se ramène à un champ de vecteurs avec partie linéaire non nilpotente.* Nous renvoyons par exemple au survol [Aro00b].

2.2.2 Nos travaux

Des généralisations du **théorème de Newton-Puiseux** au cas différentiel pour les corps de séries généralisées de rang fini ont été prouvées à l'interface de deux grands contextes : la théorie des modèles du point de vue géométrie modérée et corps valués différentiels [GS91, Corollary 3.1], et les équations différentielles du point de vue "résolution des singularités" [Can93, Theorem 1]. En effet, ce dernier résultat est un argument-clé de la preuve du théorème d'uniformisation locale [CMR05, Theorem 5]. Nous renvoyons aussi au survol [Aro00a]. Il s'agit de comprendre le lien entre les exposants de certaines séries formelles (les séries à exposants réels et à support bien ordonnés, i.e. les séries généralisées 3.0.1 de rang 1) solutions d'équations différentielles et les exposants des coefficients de ces équations.

Le résultat le plus général et aussi le plus représentatif de cette interface est [vdH97, Theorem 12.2], publié sous la forme [vdH06, Corollary 8.38] concernant les transséries :

Théorème 2.2.2 (van der Hoeven 2006) *Toute transsérie bien ordonnée solution d'une*
équation différentielle algébrique à coefficients qui sont des transséries réticulées, est en fait elle-même réticulée.

Uniformisation locale des champs de vecteurs et équations différentielles sous-analytiques

Avec J.-P. Rolin, nous avons généralisé au cas de champs de vecteurs analytiques en dimension finie quelconque dans [MR06] le théorème de Puiseux différentiel utilisé en dimension 3 dans [CMR05] :

Théorème 2.2.3 *[MR06, Theorem 1.1] Soient X un champ de vecteurs analytique sur une variété analytique réelle M de dimension n et γ une trajectoire de X transcendante et sous-analytiquement non oscillante. Soit p un point limite de γ et un système de coordonnées locales analytique $(x_1, \ldots, x_n)$ centré en p tel que le graphe de γ appartienne au premier orthant et admette une paramétrisation $x_1 \mapsto (x_1, x_2(x_1), \ldots, x_n(x_1))$. Si chaque composante de γ admet un développement asymptotique $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_1^{\mu_i}$, alors les exposants μ_i appartiennent à un réseau (c'est-à-dire un semi-groupe finiment engendré) de $\mathbb{R}_+$.*

Notre preuve se décompose en 2 étapes :
- la réduction du champ de vecteurs de dimension n a un système de $n-2$ équations différentielles sous-analytiques d'ordre $n-1$: $f_i(y, xy', \ldots, x^{n-1}y^{(n-1)}) = 0$, $i = 1, .., n-2$;
- la preuve d'un théorème de Puiseux différentiel pour de telles équations différentielles sous-analytiques. Nous utilisons notamment la décomposition locale (au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^n$) des fonctions sous-analytiques donnée dans [vdDMM94] ou [LR97], et un argument adapté de [Can93], pour réduire nos équations sous-analytiques à des équations analytiques. Nous concluons alors en appliquant l'adaptation en question du résultat de J. Cano [Can93].

Théorème de Puiseux différentiel dans des corps de séries généralisées de rang fini

Nous considérons le **corps de séries généralisées** au sens de Hahn [Hah07] (voir 3.0.1) de rang fini r quelconque, que nous notons $\mathbb{K}_r$. Ses éléments sont les séries formelles $\sum_{\alpha \in \mathbb{R}^r} a_\alpha t^\alpha$ à coefficients réels et à support bien ordonné dans $\mathbb{R}^r$ muni de l'ordre lexicographique. Cela équivaut à considérer comme groupe de monômes, le groupe abélien totalement ordonné $t_1^{\mathbb{R}} t_2^{\mathbb{R}} \cdots t_r^{\mathbb{R}}$ avec

$$t_1 \prec t_2 \prec \cdots \prec t_r,$$

ce qui modélise le groupe des produits à puissances réelles de r germes de fonctions réelles dans un **corps de Hardy** dans différentes classes de comparaison, par exemple pour $r = 3$ les germes de $1/\log(x)$, $1/x$ et $\exp(-x)$ au voisinage de $+\infty$.

D'abord, nous munissons $\mathbb{K}_r$ d'une **dérivation de Hardy** (c'est-à-dire une dérivation vérifiant les mêmes propriétés valuatives que la dérivation usuelle des germes de fonctions réelles dans un corps de Hardy [Ros81, Hardy type valuation p.992] et [Ros80, Remark p. 314]). Nous montrons que cela revient à se donner de bons axiomes sur la dérivée t_i' de r représentants t_i, $i = 1, \ldots, r$, des classes de comparabilité (voir Exemple 3.1.2).

Les équations différentielles que nous considérons alors sont formelles en l'inconnue y, c'est-à-dire du type :

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = \sum_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} c_I y^{(I)} \in \mathbb{K}_r \left[\left[y, y', \ldots, y^{(n)}\right]\right] \tag{2.2.1}$$

où le support $\text{Supp } F := \bigcup_{I \in \mathbb{N}^{n+1}} \text{Supp } c_I$ est un sous-ensemble bien ordonné de $\mathbb{R}^r$.

Définition 2.2.4 Etant donné X_1 et X_2 deux sous-ensembles bien ordonnés de $(\mathbb{R}^r)_{>0}$ et des éléments $\alpha > 0$ et β de $\mathbb{R}^r$, on appelle **transformations élémentaires** :
- la somme de deux ensembles : $X_1 + X_2 = \{\xi_1 + \xi_2 \mid \xi_1 \in X_1, \xi_2 \in X_2\}$;
- la génération comme semi-groupe additif : $\langle X_1 \rangle = \{k_1\xi_1 + \cdots + k_q\xi_q \mid k_i \in \mathbb{N},\ \xi_i \in X_1,\ q \in \mathbb{N}\}$;
- l'adjonction d'un nouveau générateur : $X_1 + \mathbb{N}\alpha$;
- la translation négative de β : $(X_1)_{\geq\beta} - \beta = \{\alpha \in X_1 \mid \alpha \geq \beta\} - \beta$.

Théorème 2.2.5 *[Mat11, Théorème 1.3] Le support de toute solution $y_0 \in \mathbb{K}_r$ avec $v(y_0^{(i)}) > 0$ de $F = 0$ est déduit de celui de F et des ensembles Supp t_1', $\cdots$, Supp t_r' par un nombre fini de transformations élémentaires.*

Notre notion d'"être déduit par un nombre fini de transformations élémentaires" généralise au cas de supports bien ordonnés celle d'"être réticulé" et d'"appartenir à un réseau (c'est-à-dire à un semi-groupe additif finiment engendré)" [Mat11, Remark 2.13]

Exemple 2.2.6 Pour $n = 3$, les formules $t_1' = t_1 t_2^{-2}$, $t_2' = 1$ et $t_3' = t_2^{-1} t_3^2$ modélisent le cas où $t_1 = \exp(-1/x)$, $t_2 = x$ et $t_3 = -1/\ln(x)$ vus comme germes en 0 de fonctions dans un corps de Hardy avec les relations de domination usuelles (t_1 plat par rapport à t_2 qui est lui-même plat par rapport à t_3). Dans ce cas, $\text{Supp } t_1' = \{(1, -2, 0)\}$, $\text{Supp } t_2' = \{(0, 0, 0)\}$ et $\text{Supp } t_3' = \{(0, -1, 2)\}$.

L'équation d'Euler $t_2{}^2 y' - y + t_2 = 0$ (support $\{(0,0,0), (0,1,0)\}$) admet comme solutions formelles les séries du type $y_0 = \sum_n n! t_2{}^{n+1} + c\, t_1$, avec support $(0,1,0)\mathbb{N} + \{(1,0,0)\}$. L'équation $t_2 y' - y + t_2 = 0$ (support $\{(0,0,0), (0,1,0)\}$) admet pour solution les séries du type $y_0 = -t_2 t_3{}^{-1} + c\, t_2$ avec support $\{(0,1,1), (0,1,0)\}$.

Plus généralement, nous envisageons les t_i comme pouvant être par exemple les coordonnées locales d'une trajectoire d'un champ de vecteurs analytique ou même formel en $0 \in \mathbb{R}^r$ correspondant à des équations $t_i' = \sum_{n_1,\ldots,n_r} s_{i,n_1,\ldots,n_r} t_1{}^{n_1} \cdots t_r{}^{n_r}$, ou même le cas le plus général où les t_i' sont des éléments du corps $\mathbb{K}_r$ lui-même, et ainsi les $\text{Supp } t_i'$ sont des sous-ensembles bien ordonnés de $\mathbb{R}^r$. Dans tous les cas, ces formules sont soumises à certaines contraintes afin de valider les bonnes relations de domination entre

les t_i comme ci-dessus. Le support de la fonction F de l'équation annulatrice $F = 0$ peut quant à lui être n'importe quel sous-ensemble bien ordonné de $\mathbb{R}^3$. Dans tous les cas, une des difficultés consiste à s'assurer de la **sommabilité** a priori de la famille $(c_I y^{(I)})_{I\in\mathbb{N}^{n+1}}$ dans l'expression (2.2.1).

Concernant la preuve du théorème principal, à l'instar des résultats cités précédemment nous utilisons une méthode inductive : étant donné une série différentielle 2.2.1 et une série y_0, nous évaluons 2.2.1 en des parties initiales de plus en plus longues de y_0. Mais au lieu d'utiliser une représentation de type **polygone de Newton-Fine**, nous exprimons directement les relations entre les exposants de y_0 et ceux des coefficients de 2.2.1 à l'aide de la valuation. Pour cela, nous introduisons r nouvelles dérivations déduites de la dérivation initiale :

$$d_i := \frac{1}{\theta_i} d \quad \text{où } \theta_i \text{ est le terme dominant de } \frac{t_i'}{t_i}$$

et nous adaptons l'équation par changement de dérivation en fonction des r différentes parties en lesquelles se décompose naturellement une série y_0 dans $\mathbb{K}_r$. Les autres ingrédients de la démonstration sont les **conjugaisons additive et multiplicative** (terminologie de J. van der Hoeven [vdH06]) qui correspondent à des **éclatements généralisés**. Nous effectuons une récurrence sur un **ordre de Weierstrass** analogue à l'ordre de régularité dans le théorème classique de préparation de Weierstrass.

Notre démonstration possède des aspects constructifs. Nous envisageons de prolonger nos travaux en nous attachant à décrire les coefficients des séries solutions, dans l'esprit de [HM17, HM19]. C'est un sujet sur lequel nous envisageons de travailler en commun avec J. Cano, sachant qu'il a déjà lui-même abordé cette question notamment avec J.-M. Aroca [ACFG05] et avec P. Fortuny [CFA09] pour les séries généralisées de rang 1.

Pinceaux intégraux transséries

Avec O. Le Gal et F. Sanz, dans un autre travail en cours [GMSa], nous développons une notion de **pinceau intégral transsériel** comme contrepartie formelle de la notion usuelle de pinceau intégral (voir Section 2.1.2). Nous nous intéressons à des champs de vecteurs à coefficients séries formelles, c'est-à-dire appartenant à $\mathbb{R}[[x]]$, $\mathbb{R}[[x,y]]$ ou $\mathbb{R}[[x,y,z]]$ suivant la dimension considérée. Dans ce contexte, d'après les théorèmes de Puiseux différentiels évoqués ci-dessus, on considère naturellement pour effectuer les **paramétrisations** des solutions, les transséries réticulées au sens de [vdH06] :

Proposition 2.2.7 (van der Hoeven) *Le corps $\mathbb{T}_g$ des transséries réticulées vérifie :*

- **Structure.** *$\mathbb{T}_g$ est réel clos, donc naturellement valué (valuation notée v), admet des fonctions exponentielle et logarithme, est clos par intégration, intégration logarithmique (on dit donc Liouville clos) etc.*
- **Règle de l'Hospital forte.** *Si $v(a) \neq 0$ et $v(b) \neq 0$, alors $v(a) \geq v(b) \Leftrightarrow v(a') \geq v(b')$;*
- **Règle de la dérivée logarithmique.** *$|v(a)| \gg |v(b)| > 0$ si et seulement si $v(a'/a) < v(b'/b)$.*

Composition et inversion. *Pour tout* $a(t) \in \mathbb{T}_g^{\succ 1}$*, il existe* $b(t) \in \mathbb{T}_g^{\succ 1}$ *telle que* $a(b(t)) = t$*.*

Définition 2.2.8 (Le Gal – Matusinski – Sanz)

— Une **courbe transsérielle** à l'origine en dimension n est la donnée d'un élément $[\underline{x}(t)] = [(x_1(t), \ldots, x_n(t))] \in \mathbb{T}_g^{\prec 1^n}$ à équivalence compositionnelle près. On choisit comme représentant $(x, x_2(x), \ldots, x_n(x))$ où $x := 1/t$ de sorte que $v(x) > 0$.

— Étant donné une équation différentielle formelle en dimension n :

$$\dot{\underline{x}} = X(\underline{x})$$

on appelle **trajectoire transsérielle** toute courbe transsérielle (ayant un représentant) dont les composantes vérifient l'équation. Cela signifie que tout représentant de la courbe vérifie l'équation à multiplication par une transseries non constante près.

— On appelle **pinceau intégral transsériel** une famille de trajectoires transsérielles ayant les mêmes tangentes itérées, de manière équivalente qui ne peuvent pas être différenciées par composition par des séries formelles.

Bien entendu, dans le cas où le champ de vecteurs est non singulier en 0, en toute dimension, par le théorème de redressement formel du flot, on peut conjuguer le champ de vecteurs au champ constant. Ce dernier admet une solution unique de valuation positive : la solution nulle, qui correspond par conjugaison formelle à une unique courbe paramétrée dans $R[[x_1, \ldots, x_n]]$.

On considère que l'origine 0 est une singularité isolée du champ. Puisque nous sommes en dimension au plus trois, en appliquant les théorèmes de réduction de singularité évoqués ci-dessus, nous pouvons nous ramener à une singularité élémentaire, voire simple. De plus, en passant par une **classification formelle** de ces singularités, par exemple via les **formes normales formelles** comme dans [IY08, Proposition 4.29] pour la dimension 2, nous nous ramenons à des équations plus simples, qui nous permettent d'effectuer une résolution explicite en transséries, et donc une description des différents pinceaux. On utilise l'existence d'inverses pour les transséries (formules de type **inversion de Lagrange** [vdH06, Theorems 5.12 and 5.13]) pour revenir aux pinceaux pour l'équation de départ. Dans l'appendice 4.2 nous illustrons cette approche par un exemple en dimension 2.

2.3 Quasi-ordre minimalité

2.3.1 Corps valués et ordonnés

Les **corps valués** depuis leur origine constituent des objets importants en algèbre, en géométrie, en particulier bien entendu en géométries algébrique et analytique. La formalisation de la notion de valuation est due notamment à W. Krull [Kru32] avec une

approche "algèbre de 1er cycle" pour reprendre les mots savoureux de S.S. Abhyankar [Abh76], même si bien des travaux de type "algèbre de lycée" s'appuyaient déjà implicitement sur elle : clôtures algébriques et paramétrisations (I. Newton, V. Puiseux), géométrie non archimédienne (G. Veronese, T. Levi-Civita), échelles asymptotiques généralisées fonctionnelles (G.H. Hardy) ou abstraites (H. Hahn), géométrie arithmétique (R. Dedekind, K. Hensel),... Leur rôle-clé en géométrie a été véritablement révélé par les travaux d'O. Zariski sur les singularités et est confirmé dans ce sens jusqu'à nos jours (voir e.g. les survols [Vaq06] et notre chapitre 1). Leur lien naturel avec l'utilisation de paramétrisations locales en géométrie est justifié notamment par le théorème de plongement de Kaplansky 3.0.3.

Actuellement, de nouveaux progrès importants ont lieu en **géométrie non archimédienne**, avec les corps valués comme corps de base, via les théories de l' **intégration motivique** [Loe09] et des **espaces de Berkovich** [Tem15], ou encore de la **géométrie tropicale** [Ite08]. Les valuations sont aussi considérées en interaction avec d'autres structures via les notions de **corps valués différentiels** (par exemple les corps de Hardy, les H-corps, les corps de transséries et autre séries Exp-Log : voir les sections précédentes de ce chapitre, ainsi que le suivant 3), ou de **corps valués aux différences** [Lev08] : voir ci-dessous.

Rappelons aussi que *tout* corps ordonné admet une dite **valuation naturelle**, basée sur la relation d'équivalence archimédienne [Lam83, PC83]. Cela explique en partie l'ubiquité des corps valués : la valuation naturelle est non triviale dès que le corps est non archimédien. La théorie des modèles des corps valués est étudiée en général comme une théorie avec trois sortes : le corps lui-même, son groupe de valeur (groupe abélien ordonné plus un point à l'infini) et son corps résiduel. Ce point de vue est justifié par les résultats-clés suivants concernant les corps valués henséliens, c'est-à-dire les corps valués pour lesquels on a un **lemme de Hensel** (voir [EP05, Theorem 4.1.3] pour diverses définitions équivalentes) :

Théorème 2.3.1 .

- **Principe d'Ax-Kochen et Ersov [AK65, Ers65]** *Deux corps valués henséliens d'équicaractéristique nulle (ou bien de caractéristique mixte mais avec quelques conditions supplémentaires) sont élémentairement équivalents si et seulement si leurs groupes de valeurs et leurs corps résiduels le sont.*
- **ACVF [Rob56]** *La théorie des corps algébriquement clos valués avec valuation non triviale élimine les quantificateurs dans le langage à trois sortes.*
- **HVF [Pas89]** *La théorie des corps valués hensélien d'équicaractéristique nulle élimine les quantificateurs dans le langage à trois sortes dans lequel on a remplacé l'application résiduelle par une fonction* ***composante angulaire*** *(qui correspond à une fonction "coefficient dominant" pour un corps de séries formelles).*

Plusieurs approches sont en cours de développement pour obtenir une axiomatisation de modération pour la géométrie non archimédienne avec comme corps de base un corps valué : la C-minimalité qui correspond au cas d'un corps de base valué algébriquement clos [CKD16], la dp-minimalité qui est adaptée au cas hensélien mais plus sur un versant combinatoire [JSW17].

2.3.2 Nos travaux : corps quasi-ordonnés aux différences

Avec S. Kuhlmann et F. Point, nous nous intéressons dans [KMP17] aux corps valués ou ordonnés aux différences, c'est-à-dire aux corps K munis d'un automorphisme distingué σ et compatible avec une valuation v ou une relation d'ordre $\leq$ sur K, en un sens que nous allons préciser ci-dessous. Nous avons pu traiter simultanément le cas valuatif et le cas ordonné grâce à la notion de corps quasi-ordonné due à S.M. Fakhruddin [Fak87]

Définition 2.3.2 On appelle **corps quasi-ordonné** un corps K muni d'un quasi-ordre (on dit aussi **préordre**) $\preccurlyeq$ – c'est-à-dire une relation réflexive et transitive - telle que (on note $a \asymp b :\Leftrightarrow (a \preccurlyeq b \wedge b \preccurlyeq a)$) :

(QOF1) $a \asymp 0 \ \Rightarrow \ a = 0$

(QOF2) $(0 \preccurlyeq c \wedge a \preccurlyeq b) \ \Rightarrow ac \preccurlyeq bc$

(QOF3) $(a \preccurlyeq b \wedge b \not\asymp c) \ \Rightarrow a + c \preccurlyeq b + c$

Le résultat principal de [Fak87] est la dichotomie suivante : *un corps quasi-ordonné est soit un corps ordonné avec $\preccurlyeq$ la relation d'ordre (cas où la classe d'équivalence $[1]_{\asymp}$ de 1 pour la relation $\asymp$ est égal à $\{1\}$), soit un corps valué avec $\preccurlyeq$ la relation de domination au sens de Hardy associée (cas où $[1]_{\asymp} \neq \{1\}$).*

Nous commençons dans [KMP17] par utiliser le formalisme unificateur des corps quasi-ordonnés pour reprouver et étendre différentes caractérisations du **rang valuatif** [ZS75, Chap.VI] d'un corps valué et du **rang** et du **rang principal** d'un corps ordonné [Lam83, PC83] à l'instar de [Kuh00, Theorem 3.9] : via les différents quasi-ordres dominant le quasi-ordre initial correspondant aux anneaux de valuation convexe pour le quasi-ordre, via les sous-groupes isolés du groupe de valeurs, via les segments initiaux du rang archimédien du groupe de valeur.

Nous reprenons ensuite cette approche dans le contexte d'un **corps quasi-ordonné aux différences**, c'est-à-dire un corps quasi-ordonné muni d'un automorphisme distingué σ *qui préserve le quasi-ordre*. Cela nous permet d'introduire une notion de **σ-rang** comme (le type d'ordre de) l'ensemble ordonné des anneaux de valuation quasi-ordre-convexes et préservés par σ. Nous obtenons les mêmes différentes caractérisations équivalentes, du corps vers le groupe de valeurs, du groupe de valeurs vers son rang archimédien. De même, nous introduisons et caractérisons une notion de σ-rang principal. Ces notions sont donc des réductions du rang et du rang principal du corps quasi-ordonné, et décrivent l'interaction de σ avec le quasi-ordre : on définit une notion d'autormorphisme **isométrique**, **faiblement isométrique** **ω-dilatant** ou **ω-contractant**.

Nous utilisons ensuite le formalisme des séries généralisées (Définition 3.0.1) pour construire explicitement un corps quasi-ordonné aux différences à partir d'un ensemble ordonné quelconque qui joue le rôle de σ-rang. Ainsi :

Théorème 2.3.3 *[KMP17, Corollaries 4.13 and 5.6] Pour tout type d'ordre τ, il existe un corps ordonné aux différences et un corps valué aux différences de σ-rang τ.*

D'autre part, à propos des corps quasi-ordonné, nous travaillons actuellement avec S. Kuhlmann à exploiter ce formalisme unificateur pour définir une notion de minimalité

qui d'une part généralise la notion d'o–minimalité et d'autre part donne de bonnes propriétés de modération en géométrie sur les corps valués :

(Q) *Déterminer une notion de* ***quasi–ordre minimalité*** *qui axiomatise naturellement des propriétés de modération géométrique et analytique, notamment dans le cadre des corps valués*

Chapitre 3

Modèles non archimédiens et universels en algèbre différentielle asymptotique

La notion de **séries généralisées** dans la continuité des séries de Puiseux prend ses sources en géométrie dans les travaux précurseurs de G. Veronese et T. Levi-Civita en **géométrie non archimédienne** [Ver91, LC94, LC98]. On doit à H. Hahn [Hah07] leur introduction comme **structure algébrique universelle** pour mesurer les ordres de grandeur infinis et infinitésimaux. Ce point de vue a été parachevé par I. Kaplansky dans [Kap42a, Kap42b], sous l'impulsion de S. MacLane [Mac39]. Nous renvoyons à [Ehr95] pour un survol historique concernant ces questions, et à notre propre survol [Mat14] pour les questions plus spécifiquement différentielles qui nous intéressent ci-après.

Définition 3.0.1 .

- Étant donné un ensemble totalement ordonné $(\Phi, \leq)$, on appelle **groupe de Hahn de rang** Φ le sous-groupe du groupe additif $\mathbb{R}^\Phi$ constitué des éléments à support bien ordonné : $\alpha = \sum_{\varphi\in\Phi} \alpha_\varphi \mathbf{1}_\varphi$ où $\mathbf{1}_\varphi$ désigne la fonction indicatrice de l'élément φ dans Φ. Il est naturellement ordonné via l'*ordre lexicographique*. On le notera $\mathrm{H}_\Phi\mathbb{R}$.
- Étant donné un corps K et un groupe abélien totalement ordonné Γ, on appelle **corps de séries généralisées** à exposants dans Γ et à coefficients dans K l'ensemble des séries formelles $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma$, $a_\gamma \in K$, à support bien ordonné dans Γ, muni de l'addition termes à termes, du produit de convolution. Il s'agit d'un corps naturellement valué via la **valuation naturelle** $v : \ a \mapsto \min(\mathrm{Supp}(a))$. On le notera $K((t^\Gamma))$.

Remarque 3.0.2 On appellera aussi indifféremment les éléments t^γ des **monômes**. Ainsi, t^Γ est un groupe abélien multiplicatif totalement ordonné, avec l'ordre

$$t^{\gamma_1} \preccurlyeq t^{\gamma_2} \ \Leftrightarrow \ \gamma_1 \geq \gamma_2.$$

Cet ordre est la restriction du quasi-ordre sur $K((t^\Gamma))$ associé à la valuation naturelle au sens de la section 2.3. Le support des séries dans ce formalisme est anti-bien ordonné.

C'est le point de vue adopté notamment dans [vdDMM01, KM11, KM12, AvdDvdH17], alors que le point de vue de la définition ci-dessus est prévalent par exemple dans [vdDMM94, vdDMM97, Mat14].

Théorème 3.0.3 **Plongement de Hahn [Hah07]** *Tout groupe abélien totalement ordonné* Γ *se plonge dans le groupe de Hahn avec* Φ *l'ensemble ordonné des classes archimédiennes de* Γ.

Plongement de Kaplansky [Kap42a, Kap42b] *Tout corps valué d'équicaractéristique nulle* $\mathcal{K}$ *se plonge dans* $K((t^\Gamma))$ *où* Γ *est le groupe de valuation de* $\mathcal{K}$ *et* K *son corps résiduel. En particulier tout corps réel clos muni de sa valuation naturelle se plonge dans* $\mathbb{R}((t^\Gamma))$.

Ces résultats trouvent écho en géométrie algébrique avec par exemple le **théorème de structure de Cohen** (fondamental pour le passage au complété formel [Coh46]). A. Weil dans [Wei46] appelle **domaine universel** d'une variété irréductible V, un corps qui est une extension de degré de transcendance infini du corps de base de cette variété. Un **point général** – ou point générique selon A. Weil – est alors un point à coordonnées dans le domaine universel et qui n'appartient à aucune sous-variété propre de V. C'est une modélisation abstraite par exemple des points complexes, ou même dans une extension non archimédienne, pour une variété définie sur $\mathbb{Q}$.

Cette notion est elle-même un cas particulier – celui des corps algébriquement clos – de la notion modèle-théorique de **modèle monstre** d'une théorie T [Hod93, Chap 10]. Il s'agit d'un modèle $\mathbb{M}$ de T de grande cardinalité par rapport à celle de T, et particulièrement riche : **saturé** (toute formule à une variable, à paramètres dans un "petit" modèle et consistante avec la théorie admet une réalisation dans $\mathbb{M}$), **universel** (tout "petit" modèle de T se plonge dans $\mathbb{M}$) ; **homogène** (tout isomorphisme entre des "petits" modèles se relève en un automorphisme de $\mathbb{M}$). Une façon d'obtenir un tel $\mathbb{M}$ à partir d'un modèle donné M consiste à en former un **ultraproduit** suffisamment vaste [Sch10]. On peut aussi envisager un modèle monstre qui soit une classe propre (au sens de la théorie des ensembles von Neumann – Bernays – Gödel avec Axiome du Choix [Jec78]) comme dans [TZ12]. C'est le cas du corps des **nombres surréels** [Con01] pour la théorie des corps réels clos (mais aussi pour des théories plus riches : voir ci-dessous).

Concernant les théories de $\mathbb{R}_{\exp}$ et $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$, les divers corps de transséries/séries LE et de séries EL (voir Chapitre 2), ainsi que le corps des nombres surréels muni de fonctions log et exp [Gon86] jouent un tel rôle de domaine universel [vdDMM97, vdDE01b, vdDE01a]. Cela découle des bonnes propriétés de ces théories. La **modèle-complétude** d'une théorie (par exemple celle de $\mathbb{R}_{\exp}$) signifie que tout plongement d'un modèle dans un autre est **élémentaire**, c'est-à-dire préserve la théorie du 1er ordre. De manière équivalente, tout modèle est **existentiellement clos** : pour toute équation ou inéquation, l'existence d'une solution dans un sur-modèle implique l'existence en fait d'une solution dans le modèle. On peut comparer ces caractérisations avec la version géométrique rappelée au chapitre 2. L'**élimination des quantificateurs** est équivalente à la modèle-complétude plus une propriété d'**amalgamation** : étant donné deux plongements d'un modèle, il existe un autre modèle qui domine ces deux plongements.

Nous renvoyons à [Hod93] pour les détails, et par exemple à [Bou98] pour les liens avec la géométrie algébrique.

Un avantage majeur de ces corps de séries (généralisées, LE et EL, transséries) comme du corps des nombres surréels en tant que domaines universels est leur caractère *explicite*, aussi bien comme objets que du point de vue des opérations qu'on fait sur eux. Notamment, on peut effectuer la plupart des calculs de la même façon qu'avec les séries formelles usuelles : méthode de Newton-Puiseux, théorème d'inversion de Lagrange, théorèmes de points fixes ultramétriques etc [Rib92].

Le corps des transséries $\mathbb{T}$, en lien avec le problème de Dulac et via les travaux de J. van der Hoeven (voir Section 2.2), présente de bonnes propriétés pour la résolution d'équations différentielles dans le domaine réel. Ces bonnes propriétés font écho à celles dégagées par M. Rosenlicht et M. Boshernitzan concernant les corps de Hardy (voir Chapitre 2), notamment l'étude des corps de Hardy comme **corps valués différentiels**. M. Aschenbrenner et L. van den Dries, ont poursuivi cette voie en introduisant une version axiomatique abstraite à la fois des corps de Hardy et du corps des transséries :

Définition 3.0.4 [AvdD02,AvdD05] On appelle **H-corps** un corps ordonné différentiel $(K, \leq, d)$ tel que :

(H1) $\forall a \in K,\ a > \ker d \Rightarrow d(a) > 0$

(H2) $R = \ker d + \mathfrak{m}$ où R est l'enveloppe convexe de $\ker d$ et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal

On associe à un H-corps la valuation v dont l'anneau est R (dans le cas d'un corps de Hardy, on a $\ker d = \mathbb{R}$ et v est donc la valuation naturelle d'un corps ordonné). Un tel H-corps vérifie une forme légèrement assouplie des propriétés d'une dérivation de Hardy 3.1.4, à l'instar de celles décrites dans la proposition 2.2.7. La dérivation est dite **petite** si elle préserve l'idéal maximal $\mathfrak{m}$. La première propriété-clé dans ce contexte est celle de **clôture liouvillienne** d'un H-corps, qui signifie close par résolution d'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre (voir [AvdD02, AvdD05] et pour les corps de Hardy [Ros83a]). La deuxième est celle de **ω-freeness**, qui encode la possibilité de résoudre les équations linéaires différentielles homogène du second ordre qui « devraient » avoir une solution non oscillante (propriété déjà en germe dans [Ros95, Bos87]). La troisième est celle de **newtonianité**, qui est une propriété d'**hensélianité différentielle** sous contrainte asymptotique. Ces deux dernières propriétés sont équivalentes pour les H-corps Liouville-clos à celle des valeurs intermédiaires différentielles (VID) 2.2.1. Les auteurs de [AvdDvdH17] introduisent aussi trois autres fonctions : ι qui est la fonction d'inversion comme dans [DvdD88], Λ et Ω qui sont liées à la résolution non oscillante des équations différentielles linéaires d'ordre 1 et certaines d'ordre 2. Le théorème principal de [AvdDvdH17] est :

Théorème 3.0.5 *[AvdDvdH17, Theorems 6 and 7] La théorie du corps ordonné valué différentiel $\mathbb{T}$ est exactement celle des H-corps Liouville clos avec petite dérivation et qui sont ω-free et newtoniens – c'est-à-dire avec VID. Cette théorie est modèle-complète. De plus, si on rajoute au langage ι, Λ et Ω, la théorie admet l'élimination des quantificateurs.*

En particulier, tout modèle de cette théorie – en particulier $\mathbb{T}$ – est **existentiellement clos** : il n'y a pas d'extension différentielle algébrique propre avec même corps de

constante. En termes de modération, cela implique que $\mathbb{T}$ est **o-minimal à l'infini**, c'est-à-dire les sous-ensembles définissables de $\mathbb{T}$ qui ont des valeurs arbitrairement proches de l'infini contiennent en fait tout un voisinage de l'infini (une variante locale de la o-minimalité : voir chapitre 2). D'autre part, les ensembles définissables dans $\mathbb{R}^n$ sont exactement les ensembles semi-algébriques.

Ces résultats montrent que le corps des transséries constitue bien un domaine universel comme corps ordonné valué différentiel (voir aussi Théorème 3.1.1), et les auteurs en déduisent aussi que le corps des nombres surréels est un modèle monstre de cette théorie : voir Théorème 3.3.4. Le pendant du côté fonctionnel de ces résultats serait de montrer que :

Conjecture (Aschenbrenner–van den Dries–van der Hoeven) Tout corps de Hardy admet une extension avec VID.

Une étape-clé dans ce sens serait de montrer que *toute suite pseudo–Cauchy ans un corps de Hardy admet une limite dans une extension corps de Hardy*, une conjecture qui constituerait une avancée en direction celle de **Kaplansky différentiel** : voir [Mat14] et la section suivante.

3.1 Vers un théorème de Kaplansky différentiel

3.1.1 Contexte

Nous considérons un corps de séries généralisées (Définition 3.0.1) pour un groupe d'exposants Γ et un corps de coefficients K. Par exemple, le corps $K((x_r))((x_{r-1}))\cdots((x_1))$ de la Section 1.1.2 est une incarnation de $K((t^\Gamma))$ avec $\Gamma = \mathbb{Z}^r$ muni de l'ordre lexicographique. Le corps $\mathbb{K}_r$ de la Section 2.2.2 est celui correspondant à $\Gamma = \mathbb{R}^r$ et $K = \mathbb{R}$. Lorsque K est ordonné, $K((t^\Gamma))$ l'est naturellement aussi : on considère le signe du terme dominant des séries.

Le résultat-clé sur lequel repose la preuve du théorème de plongement de Hahn est dû à Hölder [Fuc63, Chap. IV, Theorem 1] : *tout groupe totalement ordonné archimédien se plonge dans* $\mathbb{R}$. En fait, on a une version plus précise du théorème, via la notion de **squelette** constitué d'une **colonne vertébrale** – le rang Φ – et de **côtes** – les composantes archimédiennes correspondant à chaque valeur $\varphi \in \Phi$. Mais au lieu de considérer le groupe gradué associé, on construit le produit lexicographique des côtes dans lequel le groupe originel se plonge : voir [Fuc63, Chap. IV, Theorem 16], [Gla99, Theorem 4.C] ou [Kuh00, Theorem 0.26].

A la lueur de nos travaux sur les équations différentielles (Section 2.2.2) et dans le contexte de la théorie des **H–corps** de M. Aschenbrenner et L. van den Dries (version axiomatique des corps de Hardy), nous envisageons avec S. Kuhlmann le même type de résultat que [Kap42a] mais avec dérivations. Une des motivations est de montrer que les séries généralisées munies de dérivations forment un domaine universel pour les corps valués différentiels : cela permettrait d'associer de façon quasi–analytique des développements asymptotiques à des germes de fonctions non oscillantes dans un cadre très général.

Conjecture de plongement de Kaplansky différentiel. [Mat14] *Un corps de Hardy est analytiquement et différentiellement isomorphe à un sous–corps du corps de séries généralisées correspondant muni d'une* bonne dérivation de type Hardy.

Problème de plongement différentiel de Kaplansky. [Mat14] *Déterminer quels corps différentiels valués sont analytiquement et différentiellement isomorphes à un sous–corps du corps de séries généralisées correspondant muni d'une* bonne dérivation de type Hardy.

Les corps de Hardy des structures o-minimales $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}_{\mathrm{an}}$ sont naturellement vus comme corps des séries de Puiseux algébriques ou analytiques respectivement. Ceux de $\mathbb{R}_{\exp}$ ou $\mathbb{R}_{\mathrm{an},\exp}$ sont des corps de (germes de) fonctions exponentielles–logarithmiques qui se plongent naturellement dans $\mathbb{T}$ comme corps ordonné exponentiel–logarithmique et différentiel [vdDMM01]. C'est aussi le cas bien entendu pour les structures obtenues à partir de fonctions correspondant naturellement à des séries formelles via une propriété de quasi-analycité (séries généralisées convergentes, séries multisommables, classes quasi-analytiques... voir chapitre 2). Réciproquement, van der Hoeven introduit dans [vdH09] la notion de **corps de Hardy transsériel**, qui ferait correspondre en tant que corps ordonnés différentiels certains sous-corps de transséries – par exemple le corps $\mathbb{T}_{da}$ des transséries différentiellement algébriques sur $\mathbb{R}$ – avec certains corps de Hardy. D'autres résultats partiels importants ont été obtenus très récemment concernant les H**-corps** par M. Aschenbrenner, L. van den Dries et J. van der Hoeven dans leur imposant travail sur la théorie des modèles des transséries [AvdDvdH17].

Théorème 3.1.1 *[AvdDvdH18, Corollary] Tout H-corps admet une extension H-corps immédiate maximale.*

Par le théorème de plongement de Kaplansky 3.0.3, on obtient que : *tout H-corps est analytiquement et différentiellement isomorphe à un sous-corps d'un certain corps de séries généralisées muni d'une* certaine *dérivation.* Soulignons que, même si une telle extension immédiate est unique, la dérivation quant à elle n'a pas de raison de l'être, et donc pas de raison de coincider avec une bonne dérivation au sens des séries formelles (voir ci-après). Remarquons aussi que le résultat ne dit rien sur l'existence ou non d'un corps de Hardy maximalement valué.

Remarquons aussi qu'Aschenbrenner, van den Dries et van der Hoeven obtiennent dans [AvdDvdH19b] un autre théorème de plongement, cette fois dans les nombres surréels munis d'une bonne dérivation : voir Théorème 3.3.4.

3.1.2 Nos travaux : corps de séries généralisées avec dérivations

Le sujet de notre article [KM12] est la construction de **dérivations de type Hardy** qui respectent la structure de corps de séries formelles pour un corps de séries généralisées $\mathbb{R}((t^{\Gamma}))$. On considère pour simplifier l'exposé des coefficients réels et des exposants dans Γ un groupe de Hahn $\mathrm{H}_{\Phi}\mathbb{R}$ (Définition 3.0.1). L'objectif est de munir $\mathbb{R}((t^{\Gamma}))$ d'une dérivation d (c'est-à-dire un application linéaire vérifiant la règle de Leibniz) analogue à celle des séries formelles usuelles :

— d doit être **fortement linéaire**, c'est-à-dire commuter avec les sommes infinies

$$d\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma t^\gamma\right) = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma d\left(t^\gamma\right) \tag{3.1.1}$$

— d doit suivre une **règle de Leibniz généralisée** : pour tout $\gamma = \sum_{\varphi\in\Phi} \gamma_\varphi \mathbf{1}_\varphi$,

$$\frac{d(t^\gamma)}{t^\gamma} = \sum_{\varphi\in\Phi} \gamma_\varphi \frac{d\left(t^{\mathbf{1}_\varphi}\right)}{t^{\mathbf{1}_\varphi}} \tag{3.1.2}$$

Deux questions s'ensuivent, correspondant à chacune des formules précédentes :

1. Comment s'assurer que $\sum_\gamma a_\gamma d(t^\gamma)$ est bien défini et dans $\mathbb{R}((t^\Gamma))$?
2. Comment s'assurer que $\sum_{\varphi\in\Phi} \gamma_\varphi \frac{d\left(t^{\mathbf{1}_\varphi}\right)}{t^{\mathbf{1}_\varphi}}$ est bien défini et dans $\mathbb{R}((t^\Gamma))$?

Soulignons d'emblée que ces questions ne se posent que lorsque Φ est infini.

Exemple 3.1.2 Le cas de rang fini. Dans le cas où Φ est fini, disons de type d'ordre $r \in \mathbb{N}$, on peut identifier tout monôme t^γ, $\gamma \in \Gamma$, avec $t^\gamma = t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2} \cdots t_r^{\gamma_r}$, et donc pour tout $a \in \mathbb{R}((t^\Gamma))$, on peut appliquer les formules (3.1.2) et (3.1.1) :

$$\begin{aligned}
d(a) &= d\left(\sum_\gamma a_\gamma t^\gamma\right) \\
&= \sum_\gamma a_\gamma d(t^\gamma) \quad \text{(par forte linéarité)} \\
&= \sum_\gamma a_\gamma t^\gamma \left(\gamma_1 \frac{d(t_1)}{t_1} + \cdots + \gamma_r \frac{d(t_r)}{t_r}\right) \quad \text{(par la règle de Leibniz généralisée)} \\
&= \frac{d(t_1)}{t_1}\left(\sum_\gamma (a_\gamma \gamma_1) t^\gamma\right) + \cdots + \frac{d(t_r)}{t_r}\left(\sum_\gamma (a_\gamma \gamma_r) t^\gamma\right)
\end{aligned}$$

Donc $d(a)$ est bien défini dans $k((t^\Gamma))$ quelles que soient les valeurs qu'on assigne à $\frac{d(t_i)}{t_i}$.

Plus généralement, on peut aussi définir des dérivations à l'instar de ce cas lorsque le groupe de valuation a un rang anti-bien-ordonné (le support de tout monôme est automatiquement fini) ou bien en se restreignant au sous-groupe de monômes à support fini et en supposant que les $\frac{d(t_\varphi)}{t_\varphi}$ sont des monômes comme cela a été observé dans [AvdD05, Section 11].

Dans les cas plus généraux où Φ est infini, les deux questions ci-dessus se traduisent comme des problèmes concernant la sommabilité de familles infinies de séries généralisées.

Définition 3.1.3 Soit I un ensemble infini d'indices et $\mathcal{F} = (a_i)_{i\in I}$ une famille de séries de $\mathbb{R}((t^\Gamma))$. $\mathcal{F}$ est dite **sommable** si :

(SF1) l'ensemble Supp $\mathcal{F} := \bigcup_{i\in I} \text{Supp } a_i$ est bien ordonné dans Γ ;

(SF2) pour tout $\gamma \in \text{Supp } \mathcal{F}$, l'ensemble $S_\gamma := \{i \in I \mid \gamma \in \text{Supp } a_i\} \subseteq I$ est fini.

Dans ce cas, avec $a_i = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_{i,\gamma}\gamma$, la **somme** de $\mathcal{F}$ est définie par :

$$\sum_{i\in I} a_i := \sum_{\gamma\in \text{Supp } \mathcal{F}} (\sum_{i\in S_\gamma} a_{i,\gamma})t^\gamma \in \mathbb{R}((t^\Gamma))$$

Notre principal résultat [KM12, Theorem 3.7] dans cet article consiste à déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur la définition d'une fonction $t^{\mathbf{1}_\varphi} \mapsto \frac{d(t^{\mathbf{1}_\varphi})}{t^{\mathbf{1}_\varphi}} \in \mathbb{R}((t^\Gamma))$ pour que les formules (3.1.2) et (3.1.1) impliquent *toujours* des familles sommables. La preuve, par l'absurde, utilise des arguments du type **théorie de Ramsey** [Ros82, Exercise 7.5, p. 112]. L'énoncé et la preuve étant assez techniques, nous présenterons plutôt dans un souci de lisibilité quelques exemples illustrant ce travail dans l'appendice 4.3.

Cela nous permet aussi d'illustrer la variété de corps $\mathbb{R}((t^\Gamma))$ qu'on peut munir de vastes familles de dérivations vérifiant (3.1.2) et (3.1.1). Cela nous conduit à divers problèmes :

— Décrire les corps $\mathbb{R}((t^\Gamma))$, s'ils existent, qu'on ne peut pas munir de telles dérivations. Même problème pour les sous-corps de $\mathbb{R}((t^\Gamma))$.

— Étant donné un corps $\mathbb{R}((t^\Gamma))$, décrire l'espace de telles dérivations. Même question pour les sous-corps de $\mathbb{R}((t^\Gamma))$.

A l'instar de ce que nous avions envisagé dans [Mat11], nous nous intéressons aux dérivations qui ont des propriétés valuatives analogues à celles de la dérivation des (germes de) fonctions réelles dans un corps de Hardy muni de sa valuation naturelle [Ros83b, Ros80, Ros81]. Les transséries et les H-corps vérifient une version un peu assouplie de ces propriétés (voir la proposition 2.2.7).

Définition 3.1.4 Soit (K, v, d) un corps valué différentiel avec $\mathcal{O}_v$ et $\mathfrak{m}_v$ son anneau de valuation et son idéal maximal. Une dérivation $d : K \to K$ est dite **dérivation de Hardy** si :

(HD1) $\mathcal{O}_v = \ker d + \mathfrak{m}_v$;

(HD2) d vérifie une version forte de la **règle de l'Hospital** : $\forall a, b \in K\backslash\{0\}$ avec $v(a) \neq 0$ et $v(b) \neq 0$,

$$v(a) \leq v(b) \Leftrightarrow v(d(a)) \leq v(d(b)).$$

(HD3) Compatibilité valuation – dérivée logarithmique : $\forall a, b \in K$

$$|v(a)| > |v(b)| > 0 \Rightarrow v\left(\frac{d(a)}{a}\right) \leq v\left(\frac{d(b)}{b}\right)$$
$$\textit{avec :} \quad v\left(\frac{d(a)}{a}\right) = v\left(\frac{d(b)}{b}\right) \Leftrightarrow v(a) \sim_+ v(b)$$

Nous établissons dans [KM12, Theorem 4.3] que dans le contexte de nos dérivations, être de type Hardy est caractérisé par une simple condition sur les valuations des dérivées logarithmiques des $t^{\mathbf{1}_\varphi}$, $\varphi \in \Phi$:

(H3) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Phi :\ (\varphi_1 < \varphi_2) \ \Rightarrow\ \left(\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < v\left(\frac{d(t^{\mathbf{1}\varphi_2})}{t^{\mathbf{1}\varphi_2}}\right) - v\left(\frac{d(t^{\mathbf{1}\varphi_1})}{t^{\mathbf{1}\varphi_1}}\right) < \frac{1}{n}\mathbf{1}_{\varphi_1}\right)$

Nous nous intéressons aussi à la possibilité de calculer des primitives. Dans notre contexte, la notion-clé est celle de **primitive asymptotique**, c'est-à-dire, la possibilité de trouver pour série a une série b dont la dérivée $d(b)$ est asymptotiquement équivalente (i.e. au sens valuatif) à a. En exploitant [Ros83b, Proposition 2, Theorem 1], on obtient une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité asymptotique :

$$v(a) \neq \sup_{\varphi \in \Phi} \left\{ v\left(\frac{d(t^{\mathbf{1}\varphi})}{t^{\mathbf{1}\varphi}}\right)\right\}$$

et on donne des formules explicites concernant une **primitive asymptotique monomiale** (c'est-à-dire un b sous la forme ct^{β}). De plus, d'après [Kuh11], l'existence de primitives asymptotiques conduit à intégrer effectivement, par intégration *termes à termes* et *de manière itérative* dans le contexte des séries généralisées.

Nous exploitons dans [KM11] ces derniers résultats pour construire des (pré)logarithmes (voir ci-après). Il serait intéressant de déterminer dans un cadre plus général des formules explicites de primitives par cette méthode.

3.2 Séries munies de fonctions exponentielle et logarithmique

3.2.1 Contexte

Le corps des séries LE (pour Log-Exp) de L. van den Dries, A. Macintyre et D. Marker [vdDMM97, vdDMM01] et les corps de transséries réticulées ou bien ordonnées de J. Ecalle et J. van der Hoeven [É92, vdH97, vdH06] constituent des modèles non archimédiens de la structure $\mathbb{R}_{\text{an,exp}}$ et sont naturellement munis d'une bonne dérivation (au sens de la section précédente : dérivation de Hardy 3.1.4). Les corps de séries EL (pour Exp-Log) de S. Kuhlmann [KK96, Kuh00] constituent une vaste famille de tels modèles, adaptable à partir de tout corps de séries généralisées et avec des fonctions exp et log aux propriétés variées (voir [KT] pour une comparaison entre séries LE et EL). L'objectif principal atteint dans [KM11] était de munir ces corps de EL-séries avec des bonnes dérivations.

Rappelons tout d'abord que les corps de séries généralisées $\mathbb{R}((t^{\Gamma}))$ sont naturellement munis des fonctions analytiques restreintes (cela repose sur la sommabilité des familles de séries $(c_n\varepsilon^n)_{n\in\mathbb{N}}$ où ε est dans l'idéal maximal de $\mathbb{R}((t^{\Gamma}))$ [Neu49]) et sont même des modèles non archimédiens de le théorie de $\mathbb{R}_{\text{an}}$ pour autant que Γ soit divisible et donc que $\mathbb{R}((t^{\Gamma}))$ soit réel clos [vdDMM94]. La construction des EL-séries repose sur une première observation-clé : bien qu'un corps de séries généralisées $\mathbb{R}((t^{\Gamma}))$ au sens de Hahn [Hah07] ne puisse pas être muni d'une structure exp-log [KKS97], on peut très généralement le munir d'un **prélogarithme**, c'est-à-dire une application $\log : \left(\mathbb{R}((t^{\Gamma}))\right)_{>0} \to \mathbb{R}((t^{\Gamma}))$ vérifiant $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$. En effet, puisque toute série $a \in \left(\mathbb{R}((t^{\Gamma}))\right)_{>0}$ peut s'écrire sous la forme $a = a_\gamma t^\gamma(1+\varepsilon)$ avec $a_\gamma > 0$ et

$\gamma = \sum_{\varphi\in\Phi} \gamma_\phi \mathbf{1}_\varphi$, en se donnant un plongement $\lambda : \Phi \hookrightarrow \mathbb{R}((t^\Gamma_{<0}))$, on peut poser :

$$\log(a) := \ln(a_\gamma) + \sum_{\varphi\in\Phi} \gamma_\varphi \lambda(\varphi) + \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1}\varepsilon^n \tag{3.2.1}$$

Il suffit de vérifier que le plongement λ choisi rend bien la famille $\lambda(\varphi)$ de la formule sommable (au sens de la section précédente 3.1.2), ce qui est le cas par exemple en prenant tout simplement $\lambda(\varphi) = t^{-\mathbf{1}_\varphi}$.

En particulier, nous nous intéressons aux logarithmes qui vérifient la propriété importante suivante, par analogie avec la propriété de **croissance à l'infini** de la fonction ln dans un corps de Hardy :

(CI) $\forall \gamma \in \Gamma_{<0},\ \ v(\log(t^\gamma)) > \gamma$.

Rappelons que log ne peut pas être surjectif dans le contexte d'un corps de séries généralisées $\mathbb{R}((t^\Gamma))$ [KKS97]. Afin d'obtenir un corps avec un log surjectif, et donc une application $\exp = \log^{-1}$, on effectue un procédé de **clôture exponentielle** d'un tel corps de séries avec prélogarithme. Étant donné $(\mathbb{R}((t^\Gamma)), \log)$, avec par exemple Γ un groupe de Hahn $\mathrm{H}_\Phi\mathbb{R}$ comme ci-dessus, on a via (3.2.1) un plongement log : $t^\Gamma \hookrightarrow \mathbb{R}((t^{\Gamma<0}))$ *non surjectif*. Une étape d'extension consiste à compléter t^Γ avec les exponentielles des éléments manquants dans l'image de log, c'est-à-dire $\mathbb{R}((t^{\Gamma<0})) \setminus \log(t^\Gamma)$: on pose $\Gamma^\sharp := \mathbb{R}((t^{\Gamma<0}))$ et sa copie multiplicative :

$$t^{\Gamma^\sharp} := \{t^a \mid a \in \mathbb{R}((t^{\Gamma<0})),\ \text{avec } t^{\log(t^\gamma)} := t^\gamma,\ \gamma \in \Gamma\}.$$

Ainsi, $t^\Gamma \subset t^{\Gamma^\sharp}$, et donc le corps de séries généralisées $\mathbb{R}((t^{\Gamma^\sharp}))$ est une extension de $\mathbb{R}((t^\Gamma))$. Mieux, si on définit :

$$\begin{array}{rccc} \log^\sharp : & t^{\Gamma^\sharp} & \hookrightarrow & \mathbb{R}((t^{\Gamma^\sharp_{<0}})) \\ & t^a & \mapsto & a \end{array}$$

$\log^\sharp$ prolonge log : $\left(\mathbb{R}((t^{\Gamma^\sharp})), \log^\sharp\right)$ est une **extension exponentielle** de $\big(\mathbb{R}((t^\Gamma)), \log\big)$. Par extensions exponentielles successives, on obtient $\left(k((t^{\Gamma^{\sharp n}})), \log^{\sharp n}\right)$ pour tout n, ce qui constitue un système inductif d'extensions de corps prélogarithmiques : la clôture exponentielle de $\mathbb{R}((t^\Gamma))$ est par définition la limite inductive de ce système, notée $\big(\mathbb{R}((t^\Gamma))^{\mathrm{EL}}, \log^{\mathrm{EL}}\big)$.

Théorème 3.2.1 *[Kuh00, Theorems 5.6 and 5.7] Pour tout corps de séries généralisées $\mathbb{R}((t^\Gamma))$ muni d'un prélogarithme* log*, on a un isomorphisme de groupes ordonnés :*

$$\log^{\mathrm{EL}} : \big(\mathbb{R}((t^\Gamma))^{\mathrm{EL}}_{>0}, ., \leq\big) \to \big(\mathbb{R}((t^\Gamma))^{\mathrm{EL}}, +, \leq\big),$$

Notons $\exp^{\mathrm{EL}} := \big(\log^{\mathrm{EL}}\big)^{-1}$*. Si de plus,* log *vérifie l'axiome de croissance (CI), alors le corps ordonné $\mathbb{R}((t^\Gamma))^{\mathrm{EL}}$ muni des applications analytiques restreintes et de* $\exp^{\mathrm{EL}}$ *est un modèle non archimédien de la théorie de $\mathbb{R}_{an,\exp}$.*

Soulignons que $\mathbb{R}((t^\Gamma))^{\mathrm{EL}}$ est un sous-corps strict du corps de séries généralisées $\mathbb{R}((t^{\Gamma^{\mathrm{EL}}}))$ où $\Gamma^{\mathrm{EL}} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Gamma^{\sharp n}$. Néanmoins, Γ^{EL} est le groupe de valeur de $\mathbb{R}((t^\Gamma))^{\mathrm{EL}}$ et $\mathbb{R}((t^{\Gamma^{\mathrm{EL}}}))$, et $\mathbb{R}$ est leur corps résiduel, donc $\mathbb{R}((t^\Gamma))^{\mathrm{EL}} \subset \mathbb{R}((t^{\Gamma^{\mathrm{EL}}}))$ est une extension immédiate.

3.2.2 Nos travaux : EL-séries avec dérivations

Dans [KM11], pour munir les corps $\mathbb{R}((t^\Gamma))^{\mathrm{EL}}$ de "bonnes" dérivations de type Hardy, avec bien entendu une **formule de compatibilité** $\log(a)' = a'/a$, nous avons suivi deux approches. D'une part, à la suite de [KM12], nous envisageons un corps de séries généralisées $\mathbb{R}((t^\Gamma))$ muni d'une dérivation de Hardy comme décrit ci-dessus (voir la section précédente). Nous déterminons alors des conditions nécessaires et suffisantes sur cette dérivation, plus spécifiquement sur la fonction $t^{\mathbf{1}_\varphi} \mapsto \frac{d(t^{\mathbf{1}_\varphi})}{t^{\mathbf{1}_\varphi}} \in \mathbb{R}((t^\Gamma))$ qui détermine la dérivation, pour assurer l'existence d'un prélogarithme associé :

Théorème 3.2.2 *[KM11, Theorem 4.10] Soit $\mathbb{R}((t^\Gamma))$ muni d'une dérivation de Hardy d au sens de la Section 3.1.2. Il existe un prélogarithme* log *sur $\left(\mathbb{R}((t^\Gamma))\right)_{>0}$ vérifiant la formule (3.2.1) et compatible avec la dérivation, si et seulement si on a :*

$$\textbf{(PL)} \qquad \sup_{\varphi\in\Phi}\left\{v\left(\frac{d(t^{\mathbf{1}_\varphi})}{t^{\mathbf{1}_\varphi}}\right)\right\} \notin \bigcup_{\varphi\in\Phi} \mathrm{Supp}\ \frac{d(t^{\mathbf{1}_\varphi})}{t^{\mathbf{1}_\varphi}} \subseteq \Gamma_{<0}$$

De plus, ce prélogarithme est unique et vérifie le schéma d'axiomes de croissance (CI).

La première partie de la condition (PL) équivaut à l'obtention de primitives monomiales termes à termes pour chaque $\frac{d(t^{\mathbf{1}_\varphi})}{t^{\mathbf{1}_\varphi}}$. La deuxième partie nous garantit que ces primitives sont bien des monômes infiniment grands comme requis par la formule (3.2.1). La démonstration consiste à montrer que ces propriétés sont robustes par calcul de primitives monomiales itérées, et que ce processus est contractant au sens de l'ultramétrique associée à la valuation. On conclut alors à l'aide d'un *théorème de point fixe ultramétrique*, sachant que les corps de séries généralisées sont *sphériquement complets* [PCR93, Kuh11]. Dans [KM11, Corollary 4.11], nous donnons même une formule explicite pour les termes composant les primitives $\log(t^{\mathbf{1}_\varphi})$ de $\frac{d(t^{\mathbf{1}_\varphi})}{t^{\mathbf{1}_\varphi}}$.

D'autre part, dans [KM11, Section 5], nous sommes partis d'un corps $\mathbb{R}((t^\Gamma))$ muni d'un prélogarithme log comme ci-dessus, et avons cherché à caractériser les dérivations de type Hardy compatibles. Nous obtenons quelques résultats concernant le cas où le prélogarithme correspond à ce que nous nommons, à l'instar de S. Kuhlmann, un **décalage**, c'est-à-dire une application $\sigma : \Phi \to \Phi$ qui préserve l'ordre et telle que $\sigma(\varphi) > \varphi$. Le problème suivant reste à résoudre : décrire l'espace des dérivations de Hardy au sens de la section précédente compatibles avec un prélogarithme vérifiant (3.2.1) donné.

Dans tous les cas, nous prouvons que :

Théorème 3.2.3 *[KM11, Theorem 6.2] Soit un corps de séries généralisées $\mathbb{R}((t^\Gamma))$ muni d'un prélogarithme* log *et d'une dérivation de Hardy compatible d comme ci-dessus. Cette dérivation d s'étend sur $\mathbb{R}((t^\Gamma))^{\mathrm{EL}}$ à une dérivation de Hardy compatible vérifiant aussi (3.1.2) et (3.1.1), et cette extension est déterminée de manière unique.*

Ces résultats nous ont permis avec S. Kuhlmann et A. Shkop dans [KMS13] d'étendre le résultat classique de **Ax − Schanuel** à ces différents corps différentiels exponentiels. Récemment, ce résultat a été utilisé de manière surprenante pour obtenir de nouveaux résultats concernant la **conjecture de Schanuel p-adique** [Ble18].

S. Kuhlman et S. Shelah dans [KS05] ont développé d'autres modèles non archimédiens, les séries κ-bornées, pour κ un cardinal (il s'agit du sous-corps de séries avec support de cardinalité $< \kappa$). Actuellement, avec A. Berarducci, S. Kuhlmann et V. Mantova dans [BKMM], nous travaillons à munir ce type de corps avec des bonnes dérivations.

Une motivation importante est le problème suivant :

Conjecture de plongement de Kaplansky exp-log différentiel. *Un corps de Hardy exponentiel est analytiquement, exponentiellement et différentiellement isomorphe à un sous–corps du corps de* séries κ–bornées correspondant muni d'une bonne dérivation de type Hardy.

Une autre motivation plus immédiate pour nous est d'utiliser ces dérivations pour munir les **nombres surréels** de nouvelles dérivations.

3.3 Nombres surréels et séries κ-bornées

3.3.1 Les nombres surréels comme domaine universel

Les nombres surréels ont été introduits par J.H. Conway dans [Con01] dans le contexte de la théorie des jeux combinatoires. Leur définition est une combinaison de celles des nombres ordinaux de J. von Neumann et des nombres réels de R. Dedekind :

Définition 3.3.1 Un **nombre surréel** est construit récursivement comme la coupure entre deux ensembles de nombres G et D tels que $G < D$, modulo l'égalité de deux nombres s'ils définissent la même coupure. On le note $\{G \,|\, D\}$, avec comme point de départ $\{\emptyset \,|\, \emptyset\}$ qu'on interprète comme le nombre 0. Par exemple, on note $1 := \{0 \,|\, \emptyset\}$, $-1 := \{\emptyset \,|\, 0\}$, $1/2 := \{0 \,|\, 1\}$.

On obtient ainsi une classe propre **No** (au sens de la théorie des ensembles NBG [Jec78]) de nombres totalement ordonnés, qui contient naturellement l'ensemble des nombres réels et la classe propre **On** des nombres ordinaux. De plus, J.H. Conway a aussi introduit les opérations algébriques élémentaires (qui étendent celles sur $\mathbb{R}$ et sur **On**), ainsi que la relation d'équivalence archimédienne associée à la relation d'ordre. Rappelons comme dans la section précédente qu'on appelle corps de séries κ-bornées un sous-corps de $\mathbb{R}((t^\Gamma))$ de séries avec support de longueur $< \kappa$, qu'on note $\mathbb{R}((t^\Gamma))_\kappa$ [vdDE01b,KS05].

Théorème 3.3.2 *[Con01] **No** est un corps réel clos, et un corps de séries généralisées **On**–bornées, c'est-à-dire :*

$$\mathbf{No} = \mathbb{R}((\mathbf{No}))_{\mathbf{On}}$$

L'application $x \mapsto \omega^x$ sur **No** détermine dans **No** un groupe des monômes, c'est-à-dire on encode *à l'aide de **No*** les classes d'équivalences archimédiennes de **No** [Con01, Ch.3, Theorems 19 and 20]. H. Gonshor dans [Gon86] a donné une définition équivalente des nombres surréels, modulo l'existence des nombres ordinaux : un **nombre surréel** (selon H. Gonshor) est une suite de symboles $\oplus$ et $\ominus$ de longueur ordinale. Par exemple, 0 est la suite vide, $-1 := \ominus$, $1 := \oplus$, $1/2 := \oplus\ominus$.

Cela met l'accent sur la vision déjà développée par J.H. Conway de **No** comme un arbre binaire, avec donc une notion de **simplicité** (ordre partiel sur **No** correspondant à la longueur de ces suites). H. Gonshor a aussi muni **No** de fonctions exp et log prolongeant les fonctions sur $\mathbb{R}$. De plus, on peut munir **No** de fonctions analytiques restreintes au sens du chapitre 2 [Con01, All87]. **No** étant κ-saturé pour tout cardinal κ, il constitue un domaine universel, avec de plus la possibilité d'effectuer des plongements de structures en fonction de leur complexité via la relation de simplicité. On a :

Théorème 3.3.3 *[Ehr01, vdDE01b] Tout groupe abélien ordonné, tout corps ordonné, et tout corps de séries généralisées à coefficients réels se plonge dans **No** par simplicité croissante. **No** est aussi un modèle universel de la théorie de $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$.*

Ces propriétés nous amènent à interpréter les surréels comme des contreparties formelles de germes de fonctions non oscillantes, dans le même esprit que Hahn via les corps de séries généralisées. Cela nous a conduit avec S. Kuhlmann et J. van der Hoeven à envisager de munir les nombres surréels d'une bonne dérivation, en passant par la description des surréels comme transséries et/ou séries EL et d'exploiter les travaux de [Sch01, KM11]. Dans cette direction, nous établissons dans [KM15] une sous-classe explicite (en termes de coupures et de suite de symboles) de nombres surréels, les **κ-nombres**, qui codent les **classes d'équivalences exponentielles-logarithmiques** (voir ci-après). Dans [BM18], A. Berarducci et V. Mantova – en étendant nos travaux à une classe plus large de nombres, les λ-nombres qui s'avèrent être les éléments log-atomiques de **No** –démontrent finalement que **No** est une corps de transséries abstraites au sens de [Sch01] et munissent le corps des surréels d'une bonne dérivation de type Hardy (voir la section précédente 3.2.2). Cela a permis à M. Aschenbrenner, L. van den Dries et J. van der Hoeven à l'aide de leurs résultats dans [AvdDvdH17] de montrer que :

Théorème 3.3.4 *[AvdDvdH19b] Tout H-corps, en particulier tout corps de Hardy, se plonge différentiellement dans le corps des nombres surréels munis de la dérivation de Berarducci – Mantova.*

Nous renvoyons à notre survol coécrit avec V. Mantova [MM17] pour une introduction aux nombres surréels et un panorama de ces travaux autour des dérivations. Plus récemment, A. Berarducci et V. Mantova ont déterminé dans [BM19] une notion de composition partielle au sein de **No**, mais aussi montré que leur dérivation n'est pas compatible avec une composition plus globale. Avec A. Berarducci, S. Kuhlmann et V. Mantova, nous travaillons à déterminer de meilleures dérivations en exploitant la flexibilité de la construction des corps de séries κ-bornées de [KS05], ainsi qu'en utilisant notre nouvelle notion de oméga-corps (voir [BKMM19] et ci-après).

Une autre approche proposée dans [ADH18] consiste à étendre le corps de transséries $\mathbb{T}$ en une sous-classe propre **Hy** dans **No** de nombres appelés **hyperséries** en utilisant des itérateurs transfinis de exp et log, avec des résultats partiels dans [vdDvdHK18]. Les auteurs espèrent ainsi développer un domaine naturel de résolution formelle d'équations fonctionnelles, typiquement les équations définissant des fonctions transexponentielles [Bos86] ou les itérées fractionnaires d'exp et log [Sze98].

Ces travaux pourraient donner des indications concernant la question suivante : *existe-t-il une structure o-minimale transexponentielle ?* En effet, le corps de Hardy d'une telle structure serait naturellement équipé d'une composition et d'une dérivation compatibles.

3.3.2 Nos travaux

Dans [KM15] avec S. Kuhlmann, nous avons déterminé une classe propre de représentants des classes d'équivalences exponentielles au sens suivant (voir aussi [Kuh00]) : pour tous $a, b \in \mathbf{No}$,

$$a \sim_{exp} b \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N},\ \log^n(|a|) \leq |b| \leq \exp^n(|a|)$$

Ce sont les nombres κ_a paramétrés par $a \in \mathbf{No}$ définis récursivement par la formule :

$$\forall a \in \mathbf{No},\ \kappa_a := \{\exp^n(0),\ \exp^n(\kappa_{a^G}) \mid \log^n(\kappa_{a^D})\}$$

où a^G et a^D désignent des membres respectifs de G et D pour une représentation canonique $a = \{G, D\}$. Nous avons aussi déterminé dans cet article une expression de ces nombres en suite de symboles $\oplus$ et $\ominus$ selon le formalisme de [Gon86]. Cela implique que ces **κ-nombres** sont des monômes au sens de la forme normale de Conway et qu'ils contiennent tous les ϵ-nombres généralisés.

Les κ-nombres font partie des **λ-nombres** de Berarducci et Mantova dans [BM18] :

$$\forall a \in \mathbf{No},\ \lambda_a := \left\{ n, \exp_n(n \log_n(a^G)) \mid \exp_n\left(\frac{1}{n}\log_n(a^D)\right)\right\}$$

Ces λ-nombres sont à la base de leur description de **No** comme corps de transséries au sens de [Sch01] : ce sont les éléments dits **log-atomiques** (ils restent dans la classe des monômes par composition par log).

De plus, les κ-nombres interviennent dans la formule de définition de leur dérivation sur les λ-nombres, et donc sur **No**. Il s'agit d'une bonne dérivation au sens des sections 3.1.2 et 3.2.2.

Dans l'optique de définir une autre dérivation qui soit quant à elle compatible avec la composition des nombres surréels au sens de [BM19], nous travaillons avec Berarducci, Kuhlmann et Mantova à munir les corps κ-bornés de [KS05] de bonnes dérivations. En effet, **No** est un corps de séries **On**-borné : tout nombre surréel s'écrit comme série généralisée (sa **forme normale de Conway**) à support un ordinal donné, donc un ensemble et non pas une classe propre comme **On**.

Dans [BKMM19], nous suivons une approche parallèle en introduisant la notion de oméga-corps, un corps réel clos $\mathbb{K}$ muni d'un isomorphisme :

$$\omega : (\mathbb{K}, +, 0, <) \cong (G, \cdot, 1, <),$$

où G est un sous-groupe multiplicatif de **monômes** de $\mathbb{K}^{>0}$ (i.e. une section du groupe de valeur de sa valuation naturelle). Cette définition est basée sur la fonction éponyme

de Conway sur **No** évoquée précédemment qui encode le groupe des monômes [Con01, Ch.3, Theorems 19 and 20]. Dans cette article, nous étudions les liens entre l'existence (éventuelle) d'une telle fonction ω et d'une fonction exponentielle exp. Nous nous intéressons en particulier aux corps κ-bornés de [KS05]. Rappelons que ceux-ci admettent une exp dès que κ est un cardinal régulier non dénombrable et $|G| \geq \kappa$. On montre que :

Théorème 3.3.5 (Berarducci – Kuhlmann – Mantova – Matusinski) *Tout oméga-corps de la forme $\mathbb{R}((G))_\kappa$ admet une fonction exponentielle qui en fait un modèle de la théorie de $\mathbb{R}_{\text{an,exp}}$. Réciproquement, toute application ω sur un tel corps provient d'un prélogarithme au sens de Section 3.2 et d'un isomorphisme d'ensembles ordonnés $h : \mathbb{K} \cong \mathbb{K}^{>0}$.*

Subséquemment à ces résultats, nous envisageons d'étudier la possibilité de munir de tels corps de bonnes dérivations, en déterminant l'interaction avec une telle application ω.

Chapitre 4

Appendices : exemples pour illustrer les trois précédents chapitres

4.1 Séries de Puiseux de degrés $d_x = 1$ et $d_y = 2$.

Nous reprenons l'exemple déroulé tout au long de [HM19] afin d'illustrer les idées de la Section 1.1.2. Il s'agit, dans le contexte $r = 2$ d'examiner l'équation générale suivante de degrés $d_x = 1$ en $\underline{x}$ et $d_y = 2$ en y sur un corps K de caractéristique nulle :

$$\tilde{P} = (\tilde{a}_{0,0,2} + \tilde{a}_{0,1,2}x_2 + \tilde{a}_{1,0,2}x_1)\, y^2 + (\tilde{a}_{0,1,1}x_2 + \tilde{a}_{1,0,1}x_1)\, y + \tilde{a}_{0,1,0}x_2 + \tilde{a}_{1,0,0}x_1 = 0 \tag{4.1.1}$$

$$\text{avec } \tilde{a}_{0,1,0}.\tilde{a}_{0,0,2} \neq 0 \tag{4.1.2}$$

Tout d'abord, examinons une résolution constructive de cette équation à la Newton–Puiseux, à l'instar des travaux de [McD95, AI09, SV11], avec le corps $K(x_1, x_2)$ muni de la valuation de rang maximal ($v(x_1) = (1, 0) >_{\text{lex}} (0, 1) = v(x_2)$). L'équation correspondant aux termes de plus petite valuation qu'on appelle initiale est :

$$\tilde{a}_{0,0,2}y^2 + \tilde{a}_{0,1,0}x_2 = 0$$

et ainsi les deux solutions $\tilde{y}_0$ et $\tilde{\tilde{y}}_0$ s'écrivent :

$$\tilde{y}_0 = \tilde{c}_{0,1}{x_2}^{1/2}\,(1 + \tilde{\varepsilon}) \quad \text{et} \quad \tilde{\tilde{y}}_0 = -\tilde{c}_{0,1}{x_2}^{1/2}\left(1 + \tilde{\tilde{\varepsilon}}\right).$$

avec $\tilde{c}_{0,1/2} = \sqrt{\dfrac{-\tilde{a}_{0,1,0}}{\tilde{a}_{0,0,2}}}$. En posant $\tilde{y}_0 = \tilde{c}_{0,1/2}\,{x_2}^{1/2} + {x_2}^{1/2}\tilde{y}_1$, l'équation (4.1.1) devient après division par x_2 :

$$\begin{gathered}(\tilde{a}_{0,0,2} + \tilde{a}_{0,1,2}x_2 + \tilde{a}_{1,0,2}x_1)\, y^2 + \\ \left(2\tilde{a}_{0,0,2}\tilde{c}_{0,1/2} + \tilde{a}_{0,1,1}{x_2}^{1/2} + 2\tilde{a}_{0,1,2}\tilde{c}_{0,1/2}x_2 + \tilde{a}_{1,0,1}x_1{x_2}^{-1/2} + 2\tilde{a}_{1,0,2}\tilde{c}_{0,1/2}x_1\right) y \\ +\tilde{a}_{0,1,1}\tilde{c}_{0,1/2}{x_2}^{1/2} + \tilde{a}_{0,1,2}\tilde{c}^2_{0,1/2}x_2 + \tilde{a}_{1,0,0}x_1{x_2}^{-1} + \tilde{a}_{1,0,1}\tilde{c}_{0,1/2}x_1{x_2}^{-1/2} + \tilde{a}_{1,0,2}\tilde{c}^2_{0,1/2}x_1 = 0\end{gathered}$$

avec $v(y) >_{\text{lex}} (0, 0)$. L'équation initiale est cette fois :

$$2\tilde{a}_{0,0,2}\tilde{c}_{0,1/2}y + \tilde{a}_{0,1,1}\tilde{c}_{0,1/2}{x_2}^{1/2} = 0$$

et restera dorénavant du type

$$2\tilde{a}_{0,0,2}\tilde{c}_{0,1/2}y + c\,{x_1}^{n_1/2}{x_2}^{n_2/2} = 0, \quad \text{avec } n_2 \geq -n_1 \text{ entiers.}$$

C'est une situation d'**équation hensélienne**, c'est-à-dire pour laquelle un **Lemme de Hensel** s'applique ([HM19], Theorem 4.3) : le développement de $\tilde{y}_1$ – et donc celui de $\tilde{y}_0$ et de $\tilde{\tilde{y}}_0$ – est unique dans $L\left[\left[\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/2}, {x_2}^{1/2}\right]\right]$ où $L = K\left[\tilde{c}_{0,1/2}\right]$. Nous retrouvons bien les résultats de [AI09, McD95, SV11] : les solutions ont un support inclus dans un cône polyédral rationnel fortement convexe, en l'occurrence ici $\mathbb{N}(1/2,-1/2)+\mathbb{N}(0,1/2)$.

Nous choisissons d'appliquer *a priori* un changement de variables :

$$(u_1,u_2) := \left(\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/2}, {x_2}^{1/2}\right) \;\Leftrightarrow\; (x_1,x_2) = \left({u_1}^2{u_2}^2, {u_2}^2\right),$$

de sorte que notre problème (4.1.1) équivaut à considérer une équation :

$$P = \\ \left(a_{0,0,2} + a_{0,2,2}{u_2}^2 + a_{2,2,2}{u_1}^2{u_2}^2\right)y^2 + \left(a_{0,2,1}{u_2}^2 + a_{2,2,1}{u_1}^2{u_2}^2\right)y + a_{0,2,0}{u_2}^2 + a_{2,2,0}{u_1}^2{u_2}^2 \\ \text{avec } a_{0,2,0}.a_{0,0,2} \neq 0.$$

qui a ses solutions dans $L[[u_1,u_2]]$, avec $c_{0,1} = \tilde{c}_{0,1}$:

$$y_0 = c_{0,1}u_2 + y_1 \;\text{ and }\; \hat{y}_0 = -c_{0,1}u_2 + \hat{y}_1.$$

Remarquons qu'il s'agit seulement d'un ré-étiquetage des coefficients pour l'équation comme pour les solutions. D'autre part, on observe que, si d'une part les solutions sont maintenant des séries formelles au sens usuel (support dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$), l'équation P a quant à elle des contraintes supplémentaires sur son support. Celui-ci est notamment inclus dans $\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$ où :

$$\mathcal{F} = \{(0,0,2),(0,2,2),(2,2,2),(0,2,1),(2,2,1)\} \;\text{ et }\; \mathcal{G} = \{(0,2,0),(2,2,0)\}.$$

NB : *pour simplifier les notations, nous utiliserons maintenant les variables $\underline{x}$ en lieu et place des variables $\underline{u}$.*

Concernant la description des coefficients de la solution, nous reprenons le calcul ci–dessus après changement de variable. L'équation hensélienne s'écrit :

$$\left(a_{0,0,2} + a_{0,2,2}{x_2}^2 + a_{2,2,2}{x_1}^2{x_2}^2\right)y^2 + \\ \left(2a_{0,0,2}c_{0,1} + a_{0,2,1}x_2 + 2a_{0,2,2}c_{0,1}{x_2}^2 + a_{2,2,1}{x_1}^2x_2 + 2a_{2,2,2}c_{0,1}{x_1}^2{x_2}^2\right)y + a_{0,2,1}c_{0,1}x_2 + \\ a_{0,2,2}{c_{0,1}}^2{x_2}^2 + a_{2,2,0}{x_1}^2 + a_{2,2,1}c_{0,1}{x_1}^2x_2 + a_{2,2,2}{c_{0,1}}^2{x_1}^2{x_2}^2 = 0$$

Le fait que l'équation est devenue hensélienne est corrélé au fait que $c_{0,1}x_2$ (ou de manière équivalente $\tilde{c}_{0,1/2}{x_2}^{1/2}$ pour $\tilde{y}_0$), partie principale du développement de la solution y_0, est racine simple de l'équation initiale, ou encore est le début du développement

d'une racine de P mais pas de $\dfrac{\partial P}{\partial y}$. D'ailleurs, le coefficient $2a_{0,0,2}c_{0,1}$ de y dans l'équation hensélienne est égal au coefficient dominant de $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x_1, x_2, y_0)$. L'équation étant hensélienne, nous sommes en mesure d'appliquer une version multivariée de la **formule de Flajolet–Soria** [FS97] (voir [Sok11], [HM19] Theorem 4.5). Nous obtenons ainsi une formule close pour les coefficients c_{n_1,n_2} suivants en fonction des coefficients $a_{i_1,i_2,j}$ de P et de $c_{0,1}$, où $\omega_0 := 2a_{0,0,2}c_{0,1}$:

$$c_{n_1,n_2} = c_{(0,1)+(n_1,n_2-1)} = \sum_{m=1}^{2(n_1+n_2-1)-1} \left(\frac{-1}{\omega_0}\right)^m \sum_{\underline{s},\, t,\text{finie}} \frac{(m-1)!}{\prod s_{i_1,i_2,j}!}\, \underline{a}^{\underline{s}} {c_{0,1}}^t,$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
c_{0,2} &= \frac{-a_{0,2,1}c_{0,1}}{2\,a_{0,0,2}\,c_{0,1}} = \frac{-a_{0,2,1}}{2\,a_{0,0,2}};\\
c_{0,3} &= -\frac{a_{0,2,2}{c_{0,1}}^2}{2\,a_{0,0,2}\,c_{0,1}} + \frac{{a_{0,2,1}}^2 c_{0,1}}{\left(2\,a_{0,0,2}\,c_{0,1}\right)^2} - \frac{a_{0,0,2}{a_{0,2,1}}^2{c_{0,1}}^2}{\left(2\,a_{0,0,2}\,c_{0,1}\right)^3}\\
&= -\frac{a_{0,2,2}c_{0,1}}{2\,a_{0,0,2}} + \frac{{a_{0,2,1}}^2}{8\,a_{0,0,2}^2\,c_{0,1}};\\
c_{2,1} &= -\frac{a_{2,2,0}}{2\,a_{0,0,2}\,c_{0,1}};\\
c_{0,4} &= \frac{1}{2}\,\frac{a_{0,2,1}a_{0,2,2}}{{a_{0,0,2}}^2};\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Afin d'illustrer le processus de reconstruction des équations, nous nous donnons une série formelle $y_0 = \sum_{\underline{n} \geq_{\text{grlex}} (0,1)} c_{\underline{n}} \underline{x}^{\underline{n}} \in K[[\underline{x}]]$ avec $c_{0,1} \neq 0$ que nous supposons racine d'un polynôme P comme ci-dessus, c'est-à-dire avec un support inclus dans $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$. Nous développons alors toute expression ${x_1}^{i_1}{x_2}^{i_2}{y_0}^j$ comme série formelle via la formule multinomiale et développée le long de la valuation graduée lexicographique (i.e. $(m_1, m_2) \leq_{\text{grlex}} (n_1, n_2) \Leftrightarrow m_1 + m_2 < n_1 + n_2$ ou $(m_1 + m_2 = n_1 + n_2$ et $(m_1, m_2) \leq_{\text{lex}} (n_1, n_2))$). On identifie alors un tel développement à un vecteur infini, et on établit ce que nous nommons la **matrice de Wilczynski** correspondante (où $c^{(2)}_{n_1,n_2}$ indique le coefficient du terme ${x_1}^{n_1}{x_2}^{n_2}$ dans le développement multinomial de ${y_0}^2$) :

$$M := \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{c_{0,1}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
2\ c_{0,1}\ c_{1,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{c_{1,0}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\,c_{0,1}c_{0,2} & 0 & 0 & c_{0,1} & 0 & 0 & 0 \\
2\,c_{0,1}c_{1,1} + 2\,c_{1,0}c_{0,2} & 0 & 0 & c_{1,0} & 0 & 0 & 0 \\
2\,c_{0,1}c_{2,0} + 2\,c_{1,0}c_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\,c_{1,0}c_{2,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\,c_{0,1}c_{0,3} + {c_{0,2}}^2 & {c_{0,1}}^2 & 0 & c_{0,2} & 0 & 0 & 0 \\
\begin{array}{c} 2\,c_{0,1}c_{1,2} + 2\,c_{0,2}c_{1,1} \\ +2\,c_{1,0}c_{0,3} \end{array} & 2\ c_{0,1}\ c_{1,0} & 0 & c_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\
\begin{array}{c} 2\,c_{1,0}c_{1,2} + {c_{1,1}}^2 \\ +2\,c_{0,2}c_{2,0} + 2\,c_{0,1}c_{2,1} \end{array} & {c_{1,0}}^2 & 0 & c_{2,0} & 0 & 0 & 1 \\
\begin{array}{c} 2\,c_{0,1}c_{3,0} + 2\,c_{1,1}c_{2,0} \\ +2\,c_{1,0}c_{2,1} \end{array} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{c_{2,0}}^2 + 2\,c_{1,0}c_{3,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{0,5} & 2\,c_{0,1}c_{0,2} & 0 & c_{0,3} & 0 & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{1,4} & 2\,c_{0,1}c_{1,1} + 2\,c_{1,0}c_{0,2} & 0 & c_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{2,3} & 2\,c_{0,1}c_{2,0} + 2\,c_{1,0}c_{1,1} & 0 & c_{2,1} & c_{0,1} & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{3,2} & 2\,c_{0,1}c_{0,2} & 0 & c_{3,0} & c_{1,0} & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{5,0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{0,6} & 2\,c_{0,1}c_{0,3} + {c_{0,2}}^2 & 0 & c_{0,4} & 0 & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{1,5} & \begin{array}{c} 2\,c_{0,1}c_{1,2} + 2\,c_{0,2}c_{1,1} \\ +2\,c_{1,0}c_{0,3} \end{array} & 0 & c_{1,3} & 0 & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{2,4} & \begin{array}{c} 2\,c_{1,0}c_{1,2} + {c_{1,1}}^2 \\ +2\,c_{0,2}c_{2,0} + 2\,c_{0,1}c_{2,1} \end{array} & {c_{0,1}}^2 & c_{2,2} & c_{0,2} & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{3,3} & \begin{array}{c} 2\,c_{0,1}c_{3,0} + 2\,c_{1,1}c_{2,0} \\ +2\,c_{1,0}c_{2,1} \end{array} & 2\,c_{0,1}\,c_{1,0} & c_{3,1} & c_{1,1} & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{4,2} & {c_{2,0}}^2 + 2\,c_{1,0}c_{3,0} & {c_{1,0}}^2 & c_{4,0} & c_{2,0} & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}$$

La série y_0 est racine d'un polynôme P si et seulement si cette matrice n'est pas de rang maximal (le vecteur des coefficients $(a_{\underline{i},j})_{(\underline{i},j)\in\mathcal{F}\cup\mathcal{G}}$ de P est dans son noyau), ce qui est équivalent à l'annulation de tous les mineurs de taille maximale (ici 7x7). De manière équivalente, nous pouvons considérer la matrice que nous nommons *réduite*, obtenue en supprimant les deux dernières colonnes correspondant à $\mathcal{G}$ et les lignes pour lesquelles ces colonnes ont la valeur 1 (ce sont les coefficients qui correspondent aux termes $a_{\underline{i},0}\underline{x}^{\underline{i}}$ de P qui ne font pas intervenir y_0) :

$$
M^{\mathrm{red}} := \left[\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\ \mathrm{c}_{0,1}\ \mathrm{c}_{1,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{\mathrm{c}_{1,0}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\,c_{0,1}c_{0,2} & 0 & 0 & \mathrm{c}_{0,1} & 0 \\
2\,c_{0,1}c_{1,1} + 2\,c_{1,0}c_{0,2} & 0 & 0 & \mathrm{c}_{1,0} & 0 \\
2\,c_{0,1}c_{2,0} + 2\,c_{1,0}c_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\,c_{1,0}c_{2,0} & 0 & 0 & & \\
2\,c_{0,1}c_{0,3} + {c_{0,2}}^2 & {\mathrm{c}_{0,1}}^2 & 0 & c_{0,2} & 0 \\
\begin{array}{c}2\,c_{0,1}c_{1,2} + 2\,c_{0,2}c_{1,1} \\ +2\,c_{1,0}c_{0,3}\end{array} & 2\ \mathrm{c}_{0,1}\ \mathrm{c}_{1,0} & 0 & c_{1,1} & 0 \\
\begin{array}{c}2\,c_{0,1}c_{3,0} + 2\,c_{1,1}c_{2,0} \\ +2\,c_{1,0}c_{2,1}\end{array} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
{c_{2,0}}^2 + 2\,c_{1,0}c_{3,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{0,5} & 2\,c_{0,1}c_{0,2} & 0 & c_{0,3} & 0 \\
c^{(2)}_{1,4} & 2\,c_{0,1}c_{1,1} + 2\,c_{1,0}c_{0,2} & 0 & c_{1,2} & 0 \\
c^{(2)}_{2,3} & 2\,c_{0,1}c_{2,0} + 2\,c_{1,0}c_{1,1} & 0 & c_{2,1} & \mathrm{c}_{0,1} \\
c^{(2)}_{3,2} & 2\,c_{0,1}c_{0,2} & 0 & c_{3,0} & \mathrm{c}_{1,0} \\
c^{(2)}_{4,1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{5,0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c^{(2)}_{0,6} & 2\,c_{0,1}c_{0,3} + {c_{0,2}}^2 & 0 & c_{0,4} & 0 \\
c^{(2)}_{1,5} & \begin{array}{c}2\,c_{0,1}c_{1,2} + 2\,c_{0,2}c_{1,1} \\ +2\,c_{1,0}c_{0,3}\end{array} & 0 & c_{1,3} & 0 \\
c^{(2)}_{2,4} & \begin{array}{c}2\,c_{1,0}c_{1,2} + {c_{1,1}}^2 \\ +2\,c_{0,2}c_{2,0} + 2\,c_{0,1}c_{2,1}\end{array} & {\mathrm{c}_{0,1}}^2 & c_{2,2} & c_{0,2} \\
c^{(2)}_{3,3} & \begin{array}{c}2\,c_{0,1}c_{3,0} + 2\,c_{1,1}c_{2,0} \\ +2\,c_{1,0}c_{2,1}\end{array} & 2\,\mathrm{c}_{0,1}\,\mathrm{c}_{1,0} & c_{3,1} & c_{1,1} \\
c^{(2)}_{4,2} & {c_{2,0}}^2 + 2\,c_{1,0}c_{3,0} & {\mathrm{c}_{1,0}}^2 & c_{4,0} & c_{2,0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}\right]
$$

Les mineurs de ces matrices sont des expressions polynômiales en les coefficients $c_{\underline{n}}$ de y_0, que nous appelons **polynômes de Wilczynski**. A titre d'exemple, voici les 5 premiers polynômes non triviaux correspondant à des mineurs de taille maximale (en indice on indique les lignes puis les colonnes impliquées dans le calcul du mineur donnant la formule du polynôme) :

$$
\begin{aligned}
Q_{\underline{K},\mathcal{F}} :=&\ -2\,{C_{0,1}}^7 C_{1,0} \ \text{ pour } \underline{K} = ((1,1),(0,3),(0,4),(2,3),(2,4)),\\
Q_{\underline{K},\mathcal{F}} :=&\ -2\,{C_{0,1}}^3 \left(C_{1,0}C_{1,1} + C_{0,1}C_{2,0}\right)\left({C_{0,1}}^2 C_{2,0} - C_{0,2}{C_{1,0}}^2\right)\\
&\quad \text{pour } \underline{K} = ((0,3),(2,1),(0,4),(2,4),(4,2))\\
Q_{\underline{K},\mathcal{F}} :=&\ -2\,{C_{0,1}}^5 \left(-C_{0,1}C_{1,0}C_{0,3} + {C_{0,2}}^2 C_{1,0} + {C_{0,1}}^2 C_{1,2}\right)\\
&\quad \text{pour } \underline{K} = ((0,3),(0,4),(1,3),(2,3),(2,4)),\\
Q_{\underline{K},\mathcal{F}} :=&\ -2\,{C_{0,1}}^4 \left(-C_{0,1}{C_{1,0}}^2 C_{0,3} + {C_{1,0}}^2 {C_{0,2}}^2 + 2\,C_{0,1}C_{1,0}C_{0,2}C_{1,1} + {C_{0,1}}^2 C_{1,0}C_{1,2}\right.\\
&\qquad \left. -{C_{0,1}}^2 {C_{1,1}}^2\right)\\
&\quad \text{pour } \underline{K} = ((1,2),(0,4),(1,3),(2,3),(2,4)).\\
Q_{\underline{K},\mathcal{F}} :=&\ -2\,{C_{0,1}}^6 \left(C_{1,0}C_{2,1} + C_{1,1}C_{2,0} + C_{0,1}C_{3,0}\right)\\
&\quad \text{pour } \underline{K} = ((0,3),(0,4),(3,1),(2,3),(2,4)).
\end{aligned}
$$

La série y_0 est une racine d'un polynôme $P(x,y)$ non trivial comme ci-dessus si et seulement si tous les polynômes de Wilczynski d'ordre 5 s'annulent quand on les évalue en les coefficients $c_{\underline{n}}$. Remarquons qu'ici, puisque $c_{0,1} \neq 0$, cela implique en particulier que :

$$c_{1,0} = c_{2,0} = c_{1,2} = c_{1,1} = c_{3,0} = 0. \tag{4.1.3}$$

Plus généralement, il serait intéressant de déterminer la **théorie de l'élimination** de ces polynômes.

L'idée-clé de notre procédé de reconstruction est illustrée par la remarque suivante. Nous avons l'annulation suivante d'un polynôme d'ordre 5 :

$$
\begin{vmatrix}
2\,c_{0,1}c_{0,2} & 0 & 0 & c_{0,1} & 0\\
2\,c_{0,1}c_{0,3} + {c_{0,2}}^2 & c_{0,1}^2 & 0 & c_{0,2} & 0\\
c_{2,3}^{(2)} & 2\,c_{0,1}c_{2,0} + 2\,c_{1,0}c_{1,1} & 0 & c_{2,1} & c_{0,1}\\
c_{2,4}^{(2)} & \begin{matrix}2\,c_{1,0}c_{1,2} + {c_{1,1}}^2\\ +2\,c_{0,2}c_{2,0} + 2\,c_{0,1}c_{2,1}\end{matrix} & c_{0,1}^2 & c_{2,2} & c_{0,2}\\
c_{3,3}^{(2)} & \begin{matrix}2\,c_{0,1}c_{3,0} + 2\,c_{1,1}c_{2,0}\\ +2\,c_{1,0}c_{2,1}\end{matrix} & 2\,c_{0,1}\,c_{1,0} & c_{3,1} & c_{1,1}
\end{vmatrix} = 0.
$$

mais *aussi* la non nullité du polynôme d'ordre 4 correspondant au sous-mineur suivant pour $\underline{K} = ((0,3),(0,4),(2,3),(2,4))$ et $\underline{I} = ((0,2,1),(2,2,1),(0,2,2),(2,2,2))$:

$$
Q_{\underline{K},\underline{I}} = \begin{vmatrix}
0 & 0 & c_{0,1} & 0\\
{c_{0,1}}^2 & 0 & c_{0,2} & 0\\
2\,c_{0,1}c_{2,0} + 2\,c_{1,0}c_{1,1} & 0 & c_{2,1} & c_{0,1}\\
2\,c_{1,0}c_{1,2} + {c_{1,1}}^2 + 2\,c_{0,2}c_{2,0} + 2\,c_{0,1}c_{2,1} & {c_{0,1}}^2 & c_{2,2} & c_{0,2}
\end{vmatrix} = -{c_{0,1}}^6 \neq 0.
$$

Donc on pose $a_{0,0,2} := (-1)^3(-{c_{0,1}}^6) = {c_{0,1}}^6$ et on a un *système de Cramer* qui nous permet de reconstruire les coefficients de l'équation en termes de déterminants :

$$
\begin{aligned}
a_{0,2,1} &:= (-1)^1 \begin{vmatrix}
2\,c_{0,1}c_{0,2} & 0 & 0 & 0\\
2\,c_{0,1}c_{0,3} + {c_{0,2}}^2 & {c_{0,1}}^2 & 0 & 0\\
c_{2,3}^{(2)} & 2\,c_{0,1}c_{2,0} + 2\,c_{1,0}c_{1,1} & 0 & c_{0,1}\\
c_{2,4}^{(2)} & 2\,c_{1,0}c_{1,2} + {c_{1,1}}^2 + 2\,c_{0,2}c_{2,0} + 2\,c_{0,1}c_{2,1} & {c_{0,1}}^2 & c_{0,2}
\end{vmatrix}\\
&= -2{c_{0,1}}^6 c_{0,2}
\end{aligned}
$$

$$a_{2,2,1} := (-1)^2 \begin{vmatrix} 2\,c_{0,1}c_{0,2} & 0 & 0 & c_{0,1} \\ 2\,c_{0,1}c_{0,3} + {c_{0,2}}^2 & {c_{0,1}}^2 & 0 & c_{0,2} \\ c^{(2)}_{2,3} & 2\,c_{0,1}c_{2,0} + 2\,c_{1,0}c_{1,1} & 0 & c_{2,1} \\ c^{(2)}_{2,4} & 2\,c_{1,0}c_{1,2} + {c_{1,1}}^2 + 2\,c_{0,2}c_{2,0} + 2\,c_{0,1}c_{2,1} & {c_{0,1}}^2 & c_{2,2} \end{vmatrix}$$
$$= -2\,{c_{0,1}}^3 (-2\,c_{0,1}c_{0,3}c_{1,0}c_{1,1} - {c_{0,1}}^2 c_{0,3}c_{2,0} + {c_{0,2}}^2 c_{1,0}c_{1,1} + {c_{0,2}}^2 c_{0,1}c_{2,0} + {c_{0,1}}^2 c_{1,1}c_{1,2}$$
$$+ {c_{0,1}}^2 c_{1,0}c_{1,3} + {c_{0,1}}^3 c_{2,2})$$

$$a_{0,2,2} := (-1)^4 \begin{vmatrix} 2\,c_{0,1}c_{0,2} & 0 & c_{0,1} & 0 \\ 2\,c_{0,1}c_{0,3} + {c_{0,2}}^2 & 0 & c_{0,2} & 0 \\ c^{(2)}_{2,3} & 0 & c_{2,1} & c_{0,1} \\ c^{(2)}_{2,4} & {c_{0,1}}^2 & c_{2,2} & c_{0,2} \end{vmatrix} = -c_{0,1}^4 \left(2c_{0,1}c_{0,3} - c_{0,2}^2\right)$$

$$a_{2,2,2} := (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 2\,c_{0,1}c_{0,2} & c_{0,1} & 0 \\ {c_{0,1}}^2 & 2\,c_{0,1}c_{0,3} + {c_{0,2}}^2 & c_{0,2} & 0 \\ 2\,c_{0,1}c_{2,0} + 2\,c_{1,0}c_{1,1} & c^{(2)}_{2,3} & c_{2,1} & c_{0,1} \\ 2\,c_{1,0}c_{1,2} + {c_{1,1}}^2 + 2\,c_{0,2}c_{2,0} + 2\,c_{0,1}c_{2,1} & c^{(2)}_{2,4} & c_{2,2} & c_{0,2} \end{vmatrix}$$
$$= -c_{0,1} (2\,{c_{0,1}}^4 c_{2,3} + 2\,{c_{0,1}}^3 c_{1,0}c_{1,4} + 2\,{c_{0,1}}^3 c_{2,0}c_{0,4} + {c_{0,1}}^3 {c_{1,2}}^2 + 2\,{c_{0,1}}^3 c_{1,1}c_{1,3} - 2\,{c_{0,1}}^3 c_{0,3}c_{2,1}$$
$$-2\,{c_{0,1}}^2 c_{0,3}c_{0,2}c_{2,0} - 2\,{c_{0,1}}^2 c_{0,3}{c_{1,1}}^2 - 4\,{c_{0,1}}^2 c_{0,3}c_{1,0}c_{1,2} + c_{0,1}c_{0,2}{}^2 {c_{1,1}}^2 + 2\,c_{0,1}c_{0,2}{}^2 c_{1,0}c_{1,2}$$
$$+2\,{c_{0,2}}^2 {c_{0,1}}^2 c_{2,1} + 4\,c_{0,2}c_{0,1}c_{0,3}c_{1,0}c_{1,1} - 2\,{c_{0,2}}^3 c_{1,0}c_{1,1} - 2\,c_{0,2}{c_{0,1}}^2 c_{1,1}c_{1,2} - 2\,c_{0,2}{c_{0,1}}^2 c_{1,0}c_{1,3}$$
$$-2\,{c_{0,1}}^3 c_{0,2}c_{2,2})$$

Un problème-clé ici concerne l'effectivité et la complexité du processus : déterminer la stratégie optimale de calcul des déterminants de Wilczynski afin d'effectuer le processus de reconstruction avec un minimum de calculs.

En considérant les relations qui impliquent $a_{0,2,0}$ et $a_{2,2,0}$ dans la matrice M (lignes $(0,2)$ et $(2,2)$)), on en *déduit* que :

$$\begin{cases} a_{0,2,0} &= -a_{0,2,1}.0 - a_{2,0,1}.0 - a_{0,0,2}.{c_{0,1}}^2 - a_{0,2,2}.0 - a_{2,0,2}.0 \\ &= -{c_{0,1}}^8 \\ a_{2,2,0} &= -a_{0,2,1}\,c_{2,0} - a_{2,0,1}\,0 - a_{0,0,2}\,(2\,c_{1,0}c_{1,2} + {c_{1,1}}^2 + 2\,c_{0,2}c_{2,0} + 2\,c_{0,1}c_{2,1}) - a_{0,2,2}.{c_{1,0}}^2 \\ &\quad -a_{2,0,2}.0 \\ &= -{c_{0,1}}^4 ({c_{0,1}}^2 {c_{1,1}}^2 + 2\,{c_{0,1}}^2 c_{1,0}c_{1,2} + 2\,{c_{0,1}}^3 c_{2,1} - 2\,c_{0,1}{c_{1,0}}^2 c_{0,3} + {c_{1,0}}^2 {c_{0,2}}^2) \end{cases}$$

On a reconstruit les coefficients d'un polynôme $P(\underline{x}, y)$ annulateur de y_0. En exploitant les relations (4.1.3) ci-dessus et en supprimant le facteur commun ${c_{0,1}}^3$ des expressions (une équation est définie à une constante multiplicative près), on a en fait :

$$\begin{cases} a_{0,0,2} &= {c_{0,1}}^3 \\ a_{0,2,1} &= -2{c_{0,1}}^3 c_{0,2} \\ a_{2,2,1} &= -2\,{c_{0,1}}^3 c_{2,2} \\ a_{0,2,2} &= -c_{0,1}\left(2c_{0,1}c_{0,3} - c_{0,2}^2\right) \\ a_{2,2,2} &= -2\,{c_{0,1}}^2 c_{2,3} + 2\,c_{0,1}c_{0,3}c_{2,1} - 2\,{c_{0,2}}^2 c_{2,1} + 2\,c_{0,1}c_{0,2}c_{2,2} \\ a_{0,2,0} &= -{c_{0,1}}^5 \\ a_{2,2,0} &= -2\,{c_{0,1}}^4 c_{2,1} \end{cases}$$

Remarquons enfin que le processus de reconstruction n'utilise que les tous premiers coefficients de y_0 jusqu'à la valuation graduée lexicographique $(4,0)$. C'est encore moins

de coefficients que ce qui est prédit par notre [HM19, Corollary 5.7], à savoir l'utilisation des termes de valuation inférieure à $(2d_xd_y, 0) = (8, 0)$.

En conjuguant cette expression des coefficients $a_{i_1,i_2,j}$ avec l'expression obtenue pour les c_{n_1,n_2} ci-dessus, on obtient des formules fractions rationnelles de ces c_{n_1,n_2} en fonction des premiers coefficients, en l'occurrence de $c_{0,1}$, $c_{0,2}$, $c_{0,3}$, $c_{2,1}$, $c_{2,2}$, $c_{2,3}$:

$$\begin{aligned}
c_{0,2} &= \frac{-a_{0,2,1}}{2\,a_{0,0,2}} = c_{0,2};\\
c_{0,3} &= -\frac{a_{0,2,2}{c_{0,1}}^2}{2\,a_{0,0,2}\,c_{0,1}} + \frac{{a_{0,2,1}}^2}{8\,{a_{0,0,2}}^2\,c_{0,1}} = \frac{1}{2}\,\frac{2\,c_{0,1}c_{0,3} - {c_{0,2}}^2}{c_{0,1}} + \frac{1}{2}\,\frac{{c_{0,2}}^2}{c_{0,1}} = c_{0,3};\\
c_{2,1} &= -\frac{a_{2,2,0}}{2\,a_{0,0,2}\,c_{0,1}} = c_{2,1};\\
c_{0,4} &= \frac{1}{2}\,\frac{a_{0,2,1}a_{0,2,2}}{{a_{0,0,2}}^2} = \frac{c_{0,2}\,(2\,c_{0,1}\,c_{0,3} - {c_{0,2}}^2)}{{c_{0,1}}^2};\\
&\vdots
\end{aligned}$$

4.2 Pinceaux transséries en dimension 2

Nous considérons un champ de vecteurs formel réel en dimension 2 singulier en 0 :

$$X = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y},\ f,g \in \mathbb{R}[[x,y]] \tag{4.2.1}$$

D'après le théorème de réduction des singularités de [Sei68], par changements linéaires de coordonnées et par une suite d'éclatements du point singulier 0, on peut supposer que la singularité est **élémentaire**, c'est-à-dire que la partie linéaire du champ est non nilpotente (en fait on peut même obtenir mieux : une singularité **simple**, voir [Aro00b]). On peut ensuite modulo changement de variable formel, considérer notre champ sous l'une des **formes normales formelles réelles** telles que listées dans [IY08, Proposition 4.29, Table I.1)].

Par exemple, considérons le cas d'un point singulier de type **selle-noeud** (valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \neq 0$), dont la forme normale – sous forme d'équation différentielle associée – est du type :

$$(\pm x^{r+1} + bx^{2r+1})y' = y \text{ pour certains } r \in \mathbb{N}^* \text{ et } b \in \mathbb{R} \tag{4.2.2}$$

On envisage la résolution dans $\mathbb{T}$, ici avec paramétrisation par x au voisinage de 0^+ correspondant à $x = 1/t$ pour t au voisinage de $+\infty$. A l'instar de la résolution des équations analytiques ou formelles par la méthode de Newton, on procède en développant termes à termes une transsérie solution $y(x)$ avec les propriétés algébro-différentielles 2.2.7 : le premier terme de $y(x)$ doit annuler la **forme initiale** de l'équation. Ainsi, outre la solution évidente $y = 0$, on doit avoir :

$$\begin{aligned}
\frac{y'}{y} \sim \frac{\pm 1}{x^{r+1}} &\Leftrightarrow \ln(y) \sim \frac{\mp 1}{rx^r} \text{ (règle de l'Hospital forte)}\\
&\Leftrightarrow y = \exp(\mp 1/rx^r)z \text{ avec } \exp(-1/rx^r) \prec\prec z \text{ (règle de la dérivée logarithmique)}
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\mp = +$, $v(y) < 0$: la solution ne tend pas vers 0. Dans ce cas, le pinceau est réduit à une seule courbe : $\mathcal{P} = \{y \equiv 0\}$. C'est le côté **selle** de la singularité.

Dans le cas où $\mp = -$, on effectue le changement de variable $y = \exp(-1/rx^r)z$ (**conjugaison multiplicative** ou **éclatement généralisé**), ce qui nous permet même ici de résoudre complètement l'équation :

$$\begin{aligned}
(4.2.2) \quad &\Leftrightarrow \quad (x + bx^{r+1})z' = -bz \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z'}{z} = \frac{-b}{x}\frac{1}{1+bx^r} = \frac{-b}{x} + b^2x^{r-1} - b^3x^{2r-1} + \cdots \\
&\qquad\qquad \text{(développement analytique de } 1/(1/1+bx)) \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(z) = c + \ln(x^{-b}) + \frac{b^2}{r}x^r - \frac{b^3}{2r}x^{2r} + \cdots, \quad c \in \mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \quad z = Cx^{-b}(1 + \frac{b^2}{r}x^r + c_2x^{2r} + \cdots) \\
&\qquad\qquad \text{(composition avec le développement analytique de exp)} \\
&\Leftrightarrow \quad y = C\exp(-1/rx^r)x^{-b}(1 + \frac{b^2}{r}x^r + c_2x^{2r} + \cdots), \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

On obtient donc ici une famille à un paramètre de courbes (formelles mais même ici avec une claire incarnation C^∞) que nous notons $\mathcal{C}_C = \{(x, Cy_0(x),\ x \in \mathcal{V}(0^+))\}$ pour tout $C \in \mathbb{R}$. C'est le côté **noeud** de la singularité. Afin de déterminer les pinceaux, nous examinons l'équivalence des courbes $\mathcal{C}_C$ par composition par des séries formelles $F(x,y) \in \mathbb{R}[[x,y]]$. Or, pour tout $F(x,y)$, le signe de $F(x, Cy_0(x))$ est déterminé polynômialement par $C\exp(-1/rx^r)x^{-b}$ qui est transcendant pour $C \neq 0$: les courbes $y = C\exp(-1/rx^r)x^{-b}(1+\frac{b^2}{r}x^r+c_2x^{2r}+\cdots)$ pour tout $C > 0$ ne sont pas formellement discernables. De même pour $C < 0$. On a ici deux pinceaux intégraux de dimension 1 $\mathcal{P}_+ = \{\{y = C\exp(-1/rx^r)x^{-b}(1 + \frac{b^2}{r}x^r + c_2x^{2r} + \cdots)\},\ C > 0\}$ et $\mathcal{P}_- = \{\{y = C\exp(-1/rx^r)x^{-b}(1+\frac{b^2}{r}x^r+c_2x^{2r}+\cdots)\},\ C < 0\}$, et un seul pinceau intégral de dimension 0 $\mathcal{P}_0 = \{y \equiv 0\}$.

Pour revenir à la description des pinceaux pour le champ (4.2.1), on envisage l'inverse d'une suite d'éclatements de l'origine, et d'une composition par une série formelle pour la mise sous forme normale. On a donc un lien du type $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (F(x,y); G(x,y))$ avec $F(x,y), G(x,y) \in \mathbb{R}[[x,y]]$ entre les variables $(\tilde{x}, \tilde{y})$ pour (4.2.1) et (x,y) pour (4.2.2). On obtient les pinceaux de la façon suivante :

- en substituant une solution générale $(x, y(x))$ dans une telle série formelle $F(x,y)$
- en inversant la transsérie qui en résulte : $\tilde{x} = F(x, y(x)) \Leftrightarrow x = \tilde{f}(\tilde{x})$ (théorème d'inversion de Lagrange pour les transséries)
- en substituant la transsérie $\tilde{f}(\tilde{x})$ dans $G(x, y(x))$

Dans notre exemple, tous calculs faits, $\tilde{y}$ s'exprime comme une transsérie qui est en fait une série formelle en $\tilde{x}^{1/j_0}(\ln(\tilde{x}))^{i_0(1+1/j_0)}$, $1/[\ln(\tilde{x})]^{1/r}$ et $\ln(-\ln(\tilde{x}))/\ln(\tilde{x})$. La constante d'intégration C apparait dans les coefficients sous la forme de puissances de $\ln(C)$.

4.3 Dérivations sur des corps de séries généralisées

Nous illustrons les aspects constructifs de notre approche dans [KM12, KM11] pour munir les corps de séries généralisées de dérivation, à travers deux exemples tirés de [KMS13].

Soient $(\Phi, \leq)$ un ensemble totalement ordonné, $G = H(\Phi)$ le groupe de Hahn sur Φ et $\mathbb{R}((G))$ le corps de séries généralisées associé (Définition 3.0.1). Pour tout $\phi \in \Phi$, on note $\mathbb{1}_\phi$ l'élément de G qui est la fonction indicatrice de ϕ dans Φ. Nous allons traiter deux cas assez généraux.

1. Supposons que Φ est muni d'un **décalage à droite**, c'est-à-dire une application $\sigma : \Phi \to \Phi$ qui préserve l'ordre et telle que $\sigma(\phi) > \phi$. Nous construisons une dérivation d sur $\mathbb{R}((G))$ au sens de 3.1.2 de la façon suivante :

— pour tout $\phi \in \Phi$, on pose :

$$d(t^{\mathbb{1}_\phi}) := t^{\mathbb{1}_\phi - \mathbb{1}_{\sigma(\phi)}}$$

— pour tout $g \in G$, $g = \sum_{\phi \in \Phi} g_\phi \mathbb{1}_\phi$, on pose à l'instar de (3.1.2) :

$$d(t^g) := \sum_{\phi \in \Phi} g_\phi t^{g - \mathbb{1}_{\sigma(\phi)}}$$

— pour toute série $a \in \mathbb{R}((G))$, $a = \sum_{g \in G} a_g t^g$, on pose à l'instar de (3.1.1) :

$$d(a) := \sum_{g \in G} a_g d(t^g)$$

Concernant la deuxième étape, la formule de sommation est valide sans difficulté : c'est une somme de monômes $t^{g - \mathbb{1}_{\sigma(\phi)}}$ dont le support, qui est l'ensemble des ϕ pour lesquels $g_\phi \neq 0$, coincide avec celui de g. C'est un sous-ensemble bien ordonné de Φ et fournit donc un ensemble bien ordonné de valuations $g - \mathbb{1}_{\sigma(\phi)}$ de ces monômes.
Concernant la troisième étape, il suffit de vérifier la sommabilité (Définition 3.1.3) de la famille $(t^{g - \mathbb{1}_{\sigma(\phi)}})$ pour $g \in \mathrm{Supp}(a)$ et $\phi \in \mathrm{Supp}(g)$ pour chaque g. Illustrons la situation dans le cas particulier suivant : considérons deux éléments $g_1 = g_{1,\phi_1} \mathbb{1}_{\phi_1} + \cdots < g_2 g_{2,\phi_2} \mathbb{1}_{\phi_1} + \cdots$ du support de a tels que $\phi_1 < \phi_2$. Cela implique que $g_{1,\phi_1} < 0$. Les monômes de $d(t^{g_1})$ et $d(t^{g_2})$ sont de la forme $t^{g_1 - \mathbb{1}_{\sigma(\phi)}}$ et $t^{g_2 - \mathbb{1}_{\sigma(\phi)}}$ respectivement, avec pour tous ces ϕ, $\phi_1 \leq \phi < \sigma(\phi)$. Ainsi, le support de $d(t^{g_1})$ dans son ensemble est strictement inférieur au support de $d(t^{g_2})$: leur union est un sous-ensemble bien ordonné de G. De plus, le coefficient de chaque monôme $t^{g_1 - \mathbb{1}_{\sigma(\phi)}}$, respectivement $t^{g_2 - \mathbb{1}_{\sigma(\phi)}}$, est égal à $a_{g_1} g_{1,\phi}$, respectivement $a_{g_2} g_{2,\phi}$. Plus généralement, on obtient bien dans tous les cas que l'union des supports des $d(t^g)$ est bien un sous-ensemble bien ordonné de G, et que seul un nombre fini de $d(t^g)$ peut contribuer à chacun de ses éléments.

2. Supposons que Φ est isomorphe à un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Nous construisons une dérivation d sur $\mathbb{R}((G))$ au sens de 3.1.2 de la façon suivante :

— on considère f un plongement de Φ dans $\mathbb{R}_{>1}$;
— on considère une suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante et cofinale dans Φ, avec $\phi_0 = \inf(\Phi)$. Cette suite est choisie infinie si Φ n'a pas de plus grand élément, ou bien sinon finie avec $\phi_{n_0} = \max(\Phi)$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$;
— on considère la partition de Φ correspondante constitué des intervalles de Φ de la forme $S_n := [\phi_n, \phi_{n+1})$ (avec éventuellement $S_{n_0} := \{\phi_{n_0}\}$) ;
— pour tout $\phi \in \Phi$, il existe n tel que $\phi \in S_n$. On pose alors :

$$d(t^{\mathbb{1}_\phi}) := t^{\mathbb{1}_\phi - f(\phi)\mathbb{1}_{\phi_{n+1}}}$$

avec éventuellement

$$d(t^{\mathbb{1}_{\phi_{n_0}}}) := t^{\mathbb{1}_{\phi_{n_0}}}$$

— pour tout $g \in G$, $g = \sum_{\phi\in\Phi} g_\phi \mathbb{1}_\phi$, on pose

$$d(t^g) := \sum_\phi g_\phi t^{g - f(\phi)\mathbb{1}_{\phi_{n+1}}}$$

— pour toute série $a \in \mathbb{R}((G))$, $a = \sum_{g\in G} a_g t^g$, on pose :

$$d(a) := \sum_g a_g d(t^g)$$

La formule de $d(t^g)$ est bien définie pour la même raison que précédemment.
Concernant la formule pour $d(a)$, tout élément de son support s'écrit $g - f(\phi)\mathbb{1}_{\phi_{n+1}}$, avec g dans le support de a et ϕ dans le support de g. Supposons qu'on a une suite décroissante de tels éléments : $(g_i - f(\phi_i)\mathbb{1}_{\phi_{n_i+1}})_{i\in\mathbb{N}}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que la suite correspondante $(g_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Donc, pour tout i, puisque $g_i - f(\phi_i)\mathbb{1}_{\phi_{n_i+1}} \geq g_{i+1} - f(\phi_{i+1})\mathbb{1}_{\phi_{n_{i+1}+1}}$, on a

$$0 < g_{i+1} - g_i \leq -f(\phi_i)\mathbb{1}_{\phi_{n_i+1}} + f(\phi_{i+1})\mathbb{1}_{\phi_{n_{i+1}+1}}$$

Cela implique soit que $\phi_{n_{i+1}} < \phi_{n_i}$ ce qui n'est possible qu'un nombre fini de fois puisque la suite $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, soit que $\phi_{n_{i+1}} = \phi_{n_i}$ et $f(\phi_{i+1}) > f(\phi_i)$. Or, puisque f respecte l'ordre, cela signifie qu'on a $\phi_{i+1} > \phi_i$. De plus, puisque ϕ_i appartient au support de g_i, pour que l'inégalité soit vérifiée, on doit avoir annulation avec un terme de g_{i+1} et donc ϕ_i doit aussi appartenir au support de g_{i+1}. Par récurrence, cela conduit ainsi à construire une suite croissante $(\phi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ appartenant à un même g du groupe de Hahn : c'est impossible, et la famille considérée au départ est en fait sommable.

Chapitre 5

Dossier professionnel

5.1 Curriculum Vitae

Mickaël Matusinski

Né le 22 juin 1978 à Autun (71), de nationalité française. Marié, père de deux enfants.
Site web : http://sites.google.com/site/mickaelmatusinski/

Je suis **Maître de Conférence** à l'Université de Bordeaux :

— **Enseignant** au département Génie Mécanique et Productique (GMP) de l'IUT de Bordeaux.
Département Génie Mécanique et Productique
IUT de BORDEAUX - Site de Gradignan
Bâtiment 8A et 8B, bureau 104
15 Rue Naudet
CS 10207
33175 Gradignan Cedex

Téléphone : +33 (0)5 56 84 58 56
Adresse électronique : mickael.matusinski@u-bordeaux.fr

— **Chercheur** à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB) UMR 5251.
Institut de Mathématiques de Bordeaux UMR 5251
Université de Bordeaux
351, cours de la Libération
F 33 405 Talence

Téléphone : +33 (0)5 40 00 61 11
Adresse électronique : mickael.matusinski@math.u-bordeaux.fr

Parcours professionnel

— 2010–2011 : **Maître de Conférence invité** à l'Université de Versailles Saint-Quentin

— 2009–2010 : **Chercheur assistant** à l'Université de Konstanz, Allemagne

— Janvier à juillet 2009 : **Postdoctorant** au Fields Institute, Toronto, Canada

— Mars 2008 - septembre 2008 : **Postdoctorant** à l'Université de Saskatchewan, Saskatoon, Canada

— 2007–2008 : **ATER** à l'Université de Bourgogne

— Avril à juillet 2007 : **Enseignant** de la Formation Continue à l'Université de Bourgogne.

— 2002–2006 : **Allocataire de recherche** à l'Université de Bourgogne

— 2001–2002 : **Bourse** de DEA
— **Doctorat de Mathématiques** de l'Université de Bourgogne. Directeur : J.-P. Rolin
Titre : *Equations différentielles à coefficients dans des corps de séries généralisées*
Archive : http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/36/61/52/PDF/these.pdf
Soutenance le 15 juin 2007 avec mention "Très Honorable"
Jury : J.M. Aroca (Président, U.Valladolid), J. Cano (U.Valladolid), S. Kuhlmann (U.Saskatchewan), R. Moussu (U.Bourgogne), P. Mardesic (U.Bourgogne) et J.-P. Rolin (U.Bourgogne).

— 2001–2002 : **DEA** de Mathématiques à l'Université de Bourgogne (Dijon).

— 2000–2001 : **Maîtrise** de Mathématiques à l'Université de Bourgogne.

— 1999–2000 : **Licence** de Mathématiques à l'Université de Bourgogne.

— 1997–1999 : **Classes Préparatoires** MPSI-MP au lycée Carnot, Dijon.

— 1996–1997 : **Baccalauréat** S, spé. Maths.

Formations suivies :
— Cours d'anglais extensif écrit et intensif oral (février à mai 2020)

— Séminaire-formation "Réussir sa rentrée en IUT" (5-6 juin 2019)

— Cours d'anglais intensif écrit et oral (janvier à mai 2016)

— Concevoir un projet pour répondre aux appels à projet ANR ou autres (1 au 3 octobre 2012)

— Enseigner et apprendre à l'ère numérique (août à octobre 2011)

— Initiation au Métier d'Enseignant dans l'Enseignement Supérieur (Déc. 2007) : http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/33/30/01/PDF/08050.pdf

Compétences informatiques : Matlab, Maple, LaTeX.

Compétences linguistiques : Anglais, Espagnol parlés couramment, bonnes connaissances en Allemand.

Distinction : PEDR depuis octobre 2017.

Thèmes de recherche

— Singularités algébriques et analytiques, en caractéristique nulle ou positive. Singularités d'équations différentielles.

— Théorie des valuations. Corps valués différentiels.

— Géométrie algébrique, analytique et semi-analytique.

— Structures algébriques ordonnées. Théorie des modèles. Structures o-minimales.

— Théorie asymptotique et méthodes sommatoires. Calcul symbolique.

5.2 Liste de publications

Les articles sont disponibles sur arXiv, HAL, ResearchGate et sur la page web : https://sites.google.com/site/mickaelmatusinski/

ARTICLES

1. A. Berarducci, S. Kuhlmann, V. Mantova, and M. Matusinski, *Exponential fields and Conway's omega-map*, arXiv e-prints. To appear in Proc. AMS (2020), arXiv :1810.03029.
2. M. Hickel and M. Matusinski, *About algebraic Puiseux series in several variables*, J. Algebra **527** (2019), 55–108.
3. V. Mantova and M. Matusinski, *Surreal numbers with derivation, Hardy fields and transseries : a survey*, Ordered algebraic structures and related topics, Contemp. Math., vol. 697, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, pp. 265–290.

4. M. Hickel and M. Matusinski, *On the algebraicity of Puiseux series*, Rev. Mat. Complut. **30** (2017), no. 3, 589–620.
5. S. Kuhlmann, M. Matusinski, and F. Point, *The valuation difference rank of a quasi-ordered difference field*, Groups, Modules, and Model Theory - Surveys and Recent Developments, (2017) pp. 399–414, Springer International Publishing, Cham.
6. S. Kuhlmann, M. Matusinski, *The exponential-logarithmic equivalence classes of surreal numbers*, Order **32** (2015), no. 1, 53–68 (English).
7. V. Cossart, M. Matusinski, and G. Moreno-Socías, *Existence des diviseurs dicritiques, d'après S.S. Abhyankar* (French), Valuation theory in interaction. Proceedings of the 2nd international conference and workshop o valuation theory, Segovia and El Escorial, Spain, 18–29 July 2011. EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich (2014), pp. 136–147.
8. M. Matusinski, *On generalized series fields and exponential-logarithmic series fields with derivations*, Valuation theory in interaction. Proceedings of the 2nd international conference and workshop on valuation theory, Segovia and El Escorial, Spain, 18–29 July 2011. EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich (2014), pp. 350–372.
9. S. Kuhlmann, M. Matusinski, and A. C. Shkop, *A note on Schanuel's conjectures for exponential logarithmic power series fields*, Arch. Math. (Basel) **100** (2013), no. 5, 431–436.
10. S. Kuhlmann, M. Matusinski, *Hardy type derivations in generalized series fields.*, J. Algebra **351** (2012), 185–203.
11. S. Kuhlmann and M. Matusinski, *Hardy type derivations on fields of exponential logarithmic series.*, J. Algebra **345** (2011), 171–189.
12. V. Cossart and M. Matusinski, *Dicritical divisors after S. S. Abhyankar and I. Luengo*, J. Algebra **342** (2011), 147–153.
13. M. Matusinski, *A differential Puiseux theorem in generalized series fields of finite rank.*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **20** (2011), no. 2, 247–293 (English).
14. M. Matusinski, *Support of the solutions of differential equations with coefficients in generalized power series fields of finite rank.* (Spanish). Rev. Semin. Iberoam. Mat. 3 (2007), no. 4, 39-50
15. M. Matusinski and J.-P. Rolin, *Generalised power series solutions of sub-analytic differential equations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006), no. 2, 99–102.

THESE

— *Équations différentielles à coefficients dans des corps de séries généralisées*, (2007) Université de Bourgogne. Directeur : Jean-Philippe Rolin.

5.3 Encadrement, responsabilités scientifiques, pédagogiques et administratives

Tuteur de recherche scientifique **Stage de recherche M1** juin-juillet 2016 de Vincent Bagayoko, étudiant en Master à Lyon 1 sur les transséries : étude détaillée du chapitre 3 du livre d'Aschenbrenner–van den Dries–van der Hoeven *Asymptotic differential algebra and model theory of transseries.* Annals of Mathematics Studies, 195. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2017. xxi+849 pp. Ce stage fait suite à un travail à distance engagé depuis septembre 2015 sur les corps ordonnés (sous-corps archimédiens maximaux, notions de hauteur, de parties entières non archimédiennes).

Tuteur de projets transverses

Projets longs Encadrement tous les ans depuis 5 ans d'un groupe de 15 étudiants de 1ère année dans le cadre du module Projet 1ère année du DUT Génie Mécanique et Productique (thèmes transverses alliant sciences, technologie et culture, e.g. fabrication d'un xylophone portatif, divers projets « Autour du roman Flatland : un monde multidimensionnel »).
Encadrement depuis cette année d'un projet technologique avec 4 étudiants GMP et 2 étudiants GEII de 2ème année (conception et fabrication d'une borne arcade pour foyer étudiant).
Contenus de ce type de projets : gestion de projet, conception, fabrication, soutenance devant un jury (réalisations + poster + dossier de revue de projet).

Projets courts Encadrement tous les ans depuis 3 ans d'un groupe de 8 étudiants de 1ère année dans le cadre du module Projet Défi du DUT GMP. C'est un projet de type compétition avec thème imposé, qui se déroule pendant une semaine intensive.

Stages en entreprise Encadrement tous les ans de 2 à 4 stagiaires de fin de 2ème année, DUT GMP (stage de 3 mois en entreprise) avec notamment visite dans l'entreprise et évaluation de stages : le stagiaire doit rédiger un rapport et effectuer une soutenance devant un jury composé du tuteur. La note qui en résulte est très importante dans le 4ème semestre.

Responsabilités scientifiques

— Co-responsable du **séminaire de Géométrie de Bordeaux** d'octobre 2011 à juin 2018

— Membre du **Conseil Scientifique de l'IMB** d'octobre 2015 à juin 2019.

— Membre de la **Commission Consultative CC25 de l'IMB** depuis septembre 2013 (répartition et examen des candidatures monitorat et ATER, préparation et validation de comités de sélections etc). En particulier membre de son **Bureau** de septembre 2013 à décembre 2015

— Membre du **Comité de Sélection** pour un poste de MCF 25 dans mon équipe de Géométrie en avril 2017.

— Membre du **Comité de Sélection** pour un poste de MCF 25 dans mon département d'IUT en avril 2014

— **Examinateur dans le jury de thèse de doctorat** de Felix Alvarez Carnicero Martin le à Valladolid 23 janvier 2018

— **Examinateur dans le jury de thèse de doctorat** de Fahrad Babaee Ghasemabadi le 11 juillet 2014 à Bordeaux

— **Referee** pour différents journaux : Transactions of the AMS, Journal of Algebra, Journal of Symbolic Logic, Journal of Geometric Analysis, Communications in Algebra, Journal of Logic and Analysis, Journal of p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications.

— Auteur de rapports pour **MathReviews** et **Zentralblatt Math**

— Correspondant local du **GDR "Singularités et applications"**

— Correspondant local du **GDR "Equations fonctionnelles et interactions"**

— Membre de la **Société Mathématique de France (SMF)**

Responsabilités pédagogiques et administratives

— **Membre du Conseil de Département** du département GMP de l'IUT de Bordeaux depuis février 2019.

— **Responsable des enseignements de Mathématiques et d'Informatique** (gestionnaire de 2 vacataires et d'un ATER ou 2 moniteurs) dans le département GMP de l'IUT de Bordeaux. Dans ce cadre, mise en place depuis 2 ans d'un module de **Méthodologie Mathématique**, en début de 1ère année, et depuis l'an dernier de **travaux d'été préparatoires "Summer Camp"** visant à favoriser l'intégration et la réussite des divers étudiants qui rejoignent la formation, notamment les étudiants originaires de filières technologiques. Mise en place et suivi de séances de **soutien Maths** hebdomadaires pour les 1ère année conduites par certains étudiants de 2ème année.

— **Correspondant IUT GMP du service PHASE** depuis septembre 2012 (accompagnement des étudiants à besoins spécifiques : étudiants sportifs de bon et haut niveau, en situation de handicap, en situation de longue maladie ou artistes confirmés). Cela implique aussi ponctuellement d'assurer des heures de **soutien scolaire**. NB : cette responsabilité est rémunérée exclusivement en heures complémentaires, en dehors du service

— Avis sur les Mathématiques pour les dossiers de **poursuites d'études** des étudiants en fin de DUT GMP, pour l'intégration en Écoles d'Ingénieurs

— Participation régulière à des **salons** (Salon de l'Etudiant ou Salon Aquitec) sur le stand IUT GMP. Jury de "Course en cours".

5.4 Diffusion des travaux, rayonnement et vulgarisation

Activités d'organisation

— **Co-organisateur d'un Semestre thématique au Fields Institute**, Toronto, de janvier à juin 2022 : "Thematic Program on Tame Geometry, Transseries and Applications to Analysis and Geometry". http ://www.fields.utoronto.ca/activities/21-22/tame

— **Co-organisation d'un Mini-Workshop à Oberwolfach** " Surreal numbers, Surreal analysis, Hahn field and Derivations", 18-23 décembre 2017. Co-animation avec V. Mantova d'une session spéciale "Jeunes chercheurs" à cette occasion, sur le thème "Derivations on the surreals induced by shifts"

— **Co-organisateur d'un Mini-Workshop au Fields Institute** à Toronto (3–4 avril 2009) : *Differential Kaplansky Theory.*

— **Invitation de S. Kuhlmann** (U. Konstanz) **et V. Mantova** (U. Leeds) à l'IMB du 17 au 22 février 2020

— **Invitation de S. Kuhlmann** (U. Konstanz) 2 fois 15 jours en 2019. Elle a donné à cette occasion un cours de 8h pour l'école doctorale sur les corps réels clos et l'arithmétique de Peano suivi par 12 participants.

— **Invitation de F. Sanz** (U. Valladolid) à l'IMB pendant 2 fois 15 jours en tant qu'invité du contingent. Il a donné à cette occasion un cours de 8h pour l'école doctorale sur les systèmes dynamiques, suivi par 6 personnes.

— **Invitation de F. Sanz et O. Le Gal** (Université de Valladolid) pendant 1 semaine au Laboratoire de Mathématiques de Versailles (31 janvier - 4 février 2011) ;

— Invitations de S. Kuhlmann (U. Konstanz), V. Cossart (U. Versailles), D. Trotman (U. Aix-Marseille) au **colloquium de l'IMB**.

— Nombreuses invitations d'orateurs à notre **séminaire de Géométrie de Bordeaux** en tant que co-responsable de ce séminaire.

Séjours de recherche

— Invité par A. Berarducci de l'Université de Pise du 17 au 27 mars 2019.

— Invité par O. Le Gal de l'université de Savoie du 17 au 23 février 2019.

— Invité par F. Sanz de l'équipe "Ecuaciones y singularidades" pendant 2 semaines à Valladolid (15–31 mars 2010).

— Invité par J.-M. Lion de l'équipe "Géométrie analytique" pendant 2 semaines à Rennes (01–15 mars 2010).

— Invité par J. Cano de l'équipe "Ecuaciones y singularidades" pendant 1 semaine à Valladolid (07–16 mars 2007).

Exposés donnés à des congrès et conférences

— **Conference Dynamical systems and beyond** 25-27 mars 2019, Pise, Italie. Exposé : *Non oscillating trajectories of o-minimal vector fields in dim 3.*

— **Conference Real Algebraic Geometry and Model Theory** 8-9 octobre 2018, Konstanz, Allemagne. Exposé : *Omega-fields and exponentiation.*

— Invitation en tant qu'orateur au **6th Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities**, FJV2018 Nha Trang, Vietnam, 15–21 septembre 2018

— Trimestre thématique **Model Theory, Combinatorics and Valued fields**. Séminaire Structures algébriques ordonnées. Exposé : *Surreal numbers as transseries... and vice versa !*. IHP, Paris. 6 février 2018

— **Workshop Surreal numbers, Surreal analysis, Hahn field and Derivations**. 2 Exposés : *Introduction to surreal numbers. / Derivations on generalized series fields induced by shifts.* Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Allemagne 18–23 décembre 2016

— **Workshop Approximation and Combinatorics**. Exposé : *On the algebraicity of Puiseux series.* CIRM, Marseille-Luminy. 20-24 avril 2015

— **Conference Model Theory of fields**. Exposé : *The exponential-logarithmic equivalence classes of surreal numbers.* Université de Mons, Belgique. 18 novembre 2013

— **International Conference and Workshop on Valuation Theory**. Exposé : *Hardy type derivations in generalized series fields* U. de Valladolid, Segovia et El Escorial, Espagne. 18-29 juillet 2011

— **116th Annual Meeting of the American Mathematical Society** (AMS)

(San Francisco). Exposé dans la session spéciale "Surreal Numbers" : *Surreal numbers as transseries*. January 2010

— **Thematic Program on O-minimal Structures and Real Analytic Geometry** (January to June 2009), Fields Institute, Toronto. Exposé dans le séminaire "Geometry and Model Theory" : *A differential Puiseux theorem for generalized power series field of finite rank*. 26/02/2009

— **Second Canada-France Congress of Mathematics**, UQAM Montreal (June 1-5 2008) Exposé dans le groupe Model theory and applications to geometry : *Construction of Hardy type derivations on generalized series fields*.

— **Seminario IberoAmericano de Matematicas**, Tordesillas, U. Valladolid, Espagne. Exposé : *Soporte de las soluciones de las ecuaciones diferenciales con coeficientes en un cuerpo de series generalizadas de rango finito*. 14 mars 2007

Participation à d'autres conférences
Liste exhaustive :
https://sites.google.com/site/mickaelmatusinski/Home/exposes-talks/conferences

Séminaires effectués

Séminaire	Lieu	Date
"Géométrie"	U. Savoie	21/02/2019
"Logic"	U. Manchester	21/02/2018
"Singularités"	FRUMAM, U. Aix-Marseille	25/01/2018
"Analyse"	IRMA, U. Strasbourg	14/03/2017
"Algèbre et Géométrie"	LMV, UVSQ	28/02/2017
"Analyse"	U. de Mulhouse	05/01/2017
"Singularités"	IMJ, équ. Géom. et Dyn.	22/03/2016
GDT "Transséries"	IMJ, équ. de Logique	21/03/2016
"Ecuaciones y singularidades"	U. de Valladolid, Espagne	27/05/2015
"Géométrie"	IMB, équipe de Géométrie	17/04/2015
"Géométrie"	LAMA, U. de Savoie	27/11/2014
"Géométrie Analytique / "Géométrie Algébrique Réelle"	IRMAR, U. Rennes	20/11/2014
"Singularités"	FRUMAM, U. Aix–Marseille	24/01/2013
"Géométrie"	IMB, équ. de Géométrie	09/11/2012
"Géométrie"	IMB, équ. de Géométrie	21/10/2011
"Géométrie et Théorie des Modèles"	DMA/ENS, Paris	07/10/2011
"Géométrie Analytique / "Géométrie Algébrique Réelle"	IRMAR, U. Rennes	06/10/2011
"Modelltheorie"	U. de Konstanz, Allemagne	12/07/2011
"Singularités"	FRUMAM, U. Aix–Marseille	26/05/2011
"Structures algébriques ordonnées"	IMJ, équipe de Logique	08/03/2011
"Structures algébriques ordonnées"	IMJ, équipe de Logique	22/02/2011
"Reelle Geometrie und Algebra"	U. Konstanz, Allemagne	29/10/2010
"Algèbre et Géométrie"	LMV UVSQ	05/10/2010
"Géométrie Analytique / "Géométrie Algébrique Réelle"	IRMAR, U. Rennes	04/03/2010
"Champs et homotopie en géom. alg."	IMT, U. Toulouse	24/11/2009
"Reelle Geometrie und Algebra"	U. Konstanz, Allemagne	13/11/2009
"Sém. Mulhousien de Maths"	U. de Mulhouse	2/12/2008
"Algebra and Logic"	U. de Saskatchewan, Canada	10/11/2008
"Model theory"	U. Mc Master, Canada	28/05/2008
"Algebra and Logic"	U. de Saskatchewan, Canada	mars–avril 2008
"Ecuaciones y singularidades"	U. de Valladolid, Espagne	03/2007
"Equations différentielles et Contrôle"	IMB, U. de Bourgogne	2003–2007

Vulgarisation

Maths en jeans : Animation d'un atelier au lycée Camille Jullian à Bordeaux et au lycée Jean Monnet à Blanquefort sur les nombres surréels (2017/2018 et 2018/2019).

Semaine des Mathématiques : Conférences et **présentations de cours-TD**

universitaires pour des lycéens de 2nde, 1ère et Terminale dans plusieurs lycées d'Aquitaine (avril 2017 à Sarlat, mars 2018 à Bordeaux, avril 2018 à Bordeaux). Titre : "Des nombres réels aux nombres surréels."
Atelier pour l'inauguration de la Semaine des Maths à l'IUT GMP de Bordeaux avec 2 classes de 3èmes : "Les maths au coeur des machines de fabrication".

Histoire des maths : Exposé au séminaire "Women in Mathematics" de l'Université de Konstanz 19/01/2016. Titre : *Sofia Kovalevskaya : mathematician, writer, revolutionary.*

Actions de formation du rectorat Participation tous les ans à l'opération « Profs dans les labos » (exposés introductifs à la recherche en mathématiques pour une dizaine d'enseignants de mathématiques du secondaire dans le cadre d'une action de formation)

Parrainage d'une étudiante lauréate du « Prix de la vocation scientifique et technique des filles » en décembre 2012

5.5 Activités d'enseignement

Maître de conférence à l'IUT GMP de Bordeaux, depuis la rentrée 2011 Les enseignements des départements GMP d'IUT s'articulent en référence au Programme Pédagogique National (PPN) 2013, avec une souplesse d'adaptation locale au plus de 20%.

Pré-accueil. Outils de **révisions et d'auto-évaluation** en ligne à faire avant la rentrée "Summer Camp" http://www.iut.u-bordeaux.fr/gmp/ressources-et-liens/summer-camp/ en vue d'améliorer la prise en charge des primo-arrivants, en lien avec les outils développés par l'IREM et le Rectorat de Bordeaux.

Semestre 1. Module **Méthodologie scientifique** : séances de TP en travail collaboratif à 3 autour de la résolutions d'exercices, pour mettre au point les pré-acquis et pré-requis. Transversalité avec la Mécanique, le Dimensionnement des Structures et l'Expression-Communication (aspects logiques).
Cours, TD, TP **"Outils mathématiques"** : géométrie vectorielle, fonctions d'une variable réelle, arithmétique des polynômes, probabilités et statistiques.
Cours et TP **"Informatique : tableurs et langages de programmation"** : tableurs, algorithmique et langage de programmation.
TP et entretiens individuels **"Projet Personnel Professionnel"** : mieux se connaître, découverte des métiers et des environnements professionnels.
Tutorat de "Projet défi" : voir 5.3

Semestre 2. Cours, TD, TP **"Calcul intégral et Calcul matriciel"** : intégration et équations différentielles, algèbre linéaire.

TP et entretiens individuels **"Projet Personnel Professionnel"** : construction du projet, préparer l'insertion professionnelle.
Tutorat de "Travaux de synthèse et Projet" : voir 5.3

Semestre 3. Cours, TD, TP **"Fonctions de plusieurs variables"** : dérivées partielles, différentielles, calcul d'incertitudes ; étude des extrema ; intégrales multiples.
Cours, TD et TP **"Informatique : bases de données"** : organisation, requêtes, création et manipulation d'une base de données.
Tutorat de "Travaux de synthèse et Projet" : voir 5.3

Semestre 4. Cours, TD, TP **"Courbes planes"** : étude et tracé d'une courbe plane paramétrée ou en coordonnées polaires, longueur d'un arc de courbe, courbure.
Tutorat de stages en entreprise : voir 5.3

Maître de conférence à Versailles, 2010-2011

- **Cours et TD de "Mathématiques générales"** ($1^{\text{ère}}$ année, 36 séances d'1h30, bases).
- **TD de "Méthodes mathématiques pour la chimie"** ($2^{\text{ème}}$ année, 24 séances d'1h30, systèmes dynamiques linéaires).
- **Cours et TD de "Théorie des groupes pour la chimie"** ($2^{\text{ème}}$ année, 36 séances d'1h30, représentation des groupes d'isométries de $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$).
- **Prépa ENSI** ($2^{\text{ème}}$ année, 11 séances d'1h30, préparation au concours DEUG-ENSI).

Chercheur-assistant à Konstanz, 2009-2010

- **Responsable du TD de "Géométrie Algébrique Réelle" ($3^{\text{ème}}$ année)** (conception des 15 feuilles corrigées, encadrement du moniteur assurant les séances). Quelques **conduites du cours** (remplacements).
- **Conduite d'un séminaire étudiant** ($2^{\text{ème}}$ année) "Introduction à l'analyse asymptotique" basé sur certains chapitres du livre de G.H Hardy, "Orders of Infinity".
- **Encadrement d'un travail préliminaire à une thèse de Master (4ème année)** : "Corps de Hardy".
- **Encadrement d'un exposé de séminaire étudiant (3ème année)** "Autour de la conjecture de Schanuel".

ATER, 2007-2008

- **Cours et TD de "Méthodes mathématiques pour la biologie"** ($2^{\text{ème}}$ année, 6 séances de 2 h, systèmes dynamiques élémentaires).
- **TD d' "Analyse 1"** ($1^{\text{ère}}$ opt. Physique-Chimie, 18 séances de 2 h, bases d'analyse).

Formation continue

- **Remise à niveau et préparation d'un concours d'école d'ingénieur** niveau DUT - Licence Pro à l'IUT GMP de Bordeaux, pour un ancien étudiant et cycliste professionnel en reconversion (60h de maths, dont 10h en cours particuliers).
- **Cours et TD de "Mathématiques du traitement du signal"** (salariés au niveau ingénieur, 63 heures, avril à juillet 2007).

Bibliographie

[Abh55] S. S. Abhyankar, *On the ramification of algebraic functions*, Amer. J. Math. **77** (1955), 575–592.

[Abh56] _____, *On the valuations centered in a local domain*, Amer. J. Math. **78** (1956), 321–348.

[Abh76] S. S. Abhyankar, *Historical ramblings in algebraic geometry and related algebra.*, Am. Math. Mon. **83** (1976), 409–448 (English).

[Abh98] S. S. Abhyankar, *Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces*, second ed., Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Abh10a] _____, *Dicritical divisors and Jacobian problem*, Indian J. Pure Appl. Math. **41** (2010), no. 1, 77–97.

[Abh10b] _____, *Inversion and invariance of characteristic terms : Part I*, The legacy of Alladi Ramakrishnan in the mathematical sciences, Springer, New York, 2010, pp. 93–168.

[ACFG05] J. M. Aroca, J. Cano, R. Feng, and X. S. Gao, *Algebraic general solutions of algebraic ordinary differential equations*, ISSAC'05, ACM, New York, 2005, pp. 29–36.

[ADH18] M. Aschenbrenner, L. van den Dries, and J. van der Hoeven, *On numbers, germs, and transseries*, Proc. Int. Cong. of Math. 2018 (Rio de Janeiro), vol. 1, 2018, pp. 1–24.

[AH11] S. S. Abhyankar and W. J. Heinzer, *Existence of dicritical divisors revisited*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **121** (2011), no. 3, 267–290.

[AHV75] J. M. Aroca, H. Hironaka, and J. L. Vicente, *The theory of the maximal contact*, Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas, Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, Madrid, 1975, Memorias de Matemática del Instituto "Jorge Juan", No. 29. [Mathematical Memoirs of the "Jorge Juan" Institute, No. 29].

[AHV77] J.-M. Aroca, H. Hironaka, and J. L. Vicente, *Desingularization theorems*, Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Madrid, 1977.

[AI09] F. Aroca and G. Ilardi, *A family of algebraically closed fields containing polynomials in several variables*, Comm. Algebra **37** (2009), no. 4, 1284–1296.

[AK65] James Ax and Simon Kochen, *Diophantine problems over local fields. I*, Amer. J. Math. **87** (1965), 605–630.

[AL11] S. S. Abhyankar and I. Luengo, *Algebraic theory of dicritical divisors*, Amer. J. Math. **133** (2011), no. 6, 1713–1732.

[All87] N. L. Alling, *Foundations of analysis over surreal number fields*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 141, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 117.

[AR19] F. Aroca and G. Rond, *Support of Laurent series algebraic over the field of formal power series*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **118** (2019), no. 3, 577–605.

[Aro00a] J. M. Aroca, *Puiseux solutions of singular differential equations*, Resolution of singularities (Obergurgl, 1997), Progr. Math., vol. 181, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 129–145.

[Aro00b] ———, *Reduction of singularities for differential equations*, Resolution of singularities (Obergurgl, 1997), Progr. Math., vol. 181, Birkhäuser, Basel, 2000, pp. 109–128.

[Art68] M. Artin, *On the solutions of analytic equations*, Invent. Math. **5** (1968), 277–291.

[AvdD02] M. Aschenbrenner and L. van den Dries, *H-fields and their Liouville extensions*, Math. Z. **242** (2002), no. 3, 543–588.

[AvdD05] ———, *Liouville closed H-fields*, J. Pure Appl. Algebra **197** (2005), 83–139.

[AvdDvdH17] M. Aschenbrenner, L. van den Dries, and J. van der Hoeven, *Asymptotic differential algebra and model theory of transseries*, Annals of Mathematics Studies, vol. 195, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2017.

[AvdDvdH18] ———, *Maximal immediate extensions of valued differential fields*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **117** (2018), no. 2, 376–406.

[AvdDvdH19a] ———, *Hardy Fields, the Intermediate Value Property, and ω-freeness*, working paper or preprint, April 2019.

[AvdDvdH19b] ———, *The surreal numbers as a universal H-field*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **21** (2019), no. 4, 1179–1199.

[BCS+07] A. Bostan, F. Chyzak, B. Salvy, G. Lecerf, and E. Schost, *Differential equations for algebraic functions*, ISSAC 2007, ACM, New York, 2007, pp. 25–32.

[BdSBB17] A. Belotto da Silva, I. Biborski, and E. Bierstone, *Solutions of quasianalytic equations*, Selecta Math. (N.S.) **23** (2017), no. 4, 2523–2552.

[BdSBC18] A. Belotto da Silva, E. Bierstone, and M. Chow, *Composite quasianalytic functions*, Compos. Math. **154** (2018), no. 9, 1960–1973.

[BK86] E. Brieskorn and H. Knörrer, *Plane algebraic curves*, Modern Birkhäuser Classics, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 1986, Translated

from the German original by John Stillwell, [2012] reprint of the 1986 edition.

[BKMM19] A. Berarducci, S. Kuhlmann, V. Mantova, and M. Matusinski, *Exponential fields and Conway's omega-map*, arXiv e-prints. To appear in Proc. AMS (2019), arXiv :1810.03029.

[BKPR18] M. Bilski, K. Kurdyka, A. Parusiński, and G. Rond, *Higher order approximation of analytic sets by topologically equivalent algebraic sets*, Math. Z. **288** (2018), no. 3-4, 1361–1375.

[Ble18] Ali Bleybel, *A note on complex p-adic exponential fields*, p-Adic Numbers Ultrametric Anal. Appl. **10** (2018), no. 4, 267–275.

[BM88] E. Bierstone and P. D. Milman, *Semianalytic and subanalytic sets*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1988), no. 67, 5–42.

[BM04] ———, *Resolution of singularities in Denjoy-Carleman classes*, Selecta Math. (N.S.) **10** (2004), no. 1, 1–28.

[BM18] A. Berarducci and V. Mantova, *Surreal numbers, derivations and transseries*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **20** (2018), no. 2, 339–390.

[BM19] ———, *Transseries as germs of surreal functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), no. 5, 3549–3592.

[BMS07] F. Blais, R. Moussu, and F. Sanz, *Solutions non oscillantes d'une équation différentielle et corps de Hardy*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **57** (2007), no. 6, 1825–1838.

[Bos82] M. Boshernitzan, *New "orders of infinity"*, J. Analyse Math. **41** (1982), 130–167.

[Bos86] ———, *Hardy fields and existence of transexponential functions*, Aequationes Math. **30** (1986), no. 2-3, 258–280.

[Bos87] ———, *Second order differential equations over Hardy fields*, J. London Math. Soc. (2) **35** (1987), no. 1, 109–120.

[Bou76] N. Bourbaki, *Éléments de mathématique. fonctions d'une variable réelle*, Hermann, Paris, 1976, Théorie élémentaire.

[Bou98] E. Bouscaren (ed.), *Model theory and algebraic geometry. An introduction to E. Hrushovski's proof of the geometric Mordell-Lang conjecture.*, vol. 1696, Berlin : Springer, 1998 (English).

[BPR03] S. Basu, R. Pollack, and M.-F. Roy, *Algorithms in real algebraic geometry*, Algorithms and Computation in Mathematics, vol. 10, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[Cam80] A. Campillo, *Algebroid curves in positive characteristic*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 813, Springer, Berlin, 1980.

[Can93] J. Cano, *On the series defined by differential equations, with an extension of the Puiseux polygon construction to these equations*, Analysis **13** (1993), no. 1-2, 103–119.

[CC56] H. Cartan and C. Chevalley, *Ecole Normale Superieure : Seminaire H. Cartan et C. Chevalley : Géométrie algébrique. 8e annee 1955/56.*, Paris : Secretariat Mathematique (1956)., 1956.

[CC86] D.V. Chudnovsky and G.V. Chudnovsky, *On expansion of algebraic functions in power and Puiseux series. I.*, J. Complexity **2** (1986), 271–294 (English).

[CC87] D. V. Chudnovsky and G. V. Chudnovsky, *On expansion of algebraic functions in power and Puiseux series. II*, J. Complexity **3** (1987), no. 1, 1–25.

[CFA09] J. Cano and P. Fortuny Ayuso, *The space of generalized formal power series solution of an ordinary differential equation*, Astérisque (2009), no. 323, 61–81.

[CKD16] Pablo Cubides Kovacsics and Françoise Delon, *Definable types in algebraically closed valued fields*, MLQ Math. Log. Q. **62** (2016), no. 1-2, 35–45.

[CM11] V. Cossart and M. Matusinski, *Dicritical divisors after S. S. Abhyankar and I. Luengo*, J. Algebra **342** (2011), 147–153.

[CMM14] V. Cossart, M. Matusinski, and G. Moreno-Socías, *Existence des diviseurs dicritiques, d'apres S.S. Abhyankar.* (French), Valuation theory in interaction. Proceedings of the 2nd international conference and workshop on valuation theory, Segovia and El Escorial, Spain, July 18–29, 2011. EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2014, pp. 136–147.

[CMR05] F. Cano, R. Moussu, and J.-P. Rolin, *Non-oscillating integral curves and valuations*, J. Reine Angew. Math. **582** (2005), 107–141.

[CMS00] F. Cano, R. Moussu, and F. Sanz, *Oscillation, spiralement, tourbillonnement*, Comment. Math. Helv. **75** (2000), no. 2, 284–318.

[CMS02] ———, *Pinceau intégral enlacé*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **334** (2002), no. 10, 855–858.

[CMS04] ———, *Integral pencils of trajectories of an analytic vector field. (Pinceaux de courbes intégrales d'un champ de vecteurs analytique.)*, Loday-Richaud, Michèle (ed.), Complex analysis, dynamical systems, summability of divergent series and Galois theories. II. Volume in honor of J.-P. Ramis. Proceedings of the conference, Toulouse, France, September 22–26, 2003 held on the occasion of J.-P. Ramis' 60th birthday. Paris : Société Mathématique de France. Astérisque 297, 1-34 (2004)., 2004.

[Coh46] I. S. Cohen, *On the structure and ideal theory of complete local rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **59** (1946), 54–106.

[Com64] L. Comtet, *Calcul pratique des coefficients de Taylor d'une fonction algébrique*, Enseignement Math. (2) **10** (1964), 267–270.

[Con01] J. H. Conway, *On numbers and games*, second ed., A. K. Peters Ltd., Natick, MA, 2001.

[Cos00] M. Coste, *An introduction to o-minimal geometry*, Dipartimento di Matematica Dell'Universita di Pisa, 2000.

[CP08] V. Cossart and O Piltant, *Resolution of singularities of threefolds in positive characteristic. I. Reduction to local uniformization on Artin-Schreier and purely inseparable coverings*, J. Algebra **320** (2008), no. 3, 1051–1082.

[CPR05] A. Campillo, O. Piltant, and A. J. Reguera, *Cones of curves and of line bundles "at infinity"*, J. Algebra **293** (2005), no. 2, 513–542.

[Cut04] S. D. Cutkosky, *Resolution of singularities*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 63, American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

[Cut17] ———, *Local monomialization of analytic maps*, Adv. Math. **307** (2017), 833–902.

[dB-R75] P. du Bois-Reymond, *Ueber asymptotische Werthe, infinitäre Approximationen und infinitäre Auflösung von Gleichungen. Nachträge.*, Math. Ann. **8** (1875), 363–414 (German).

[dF18] T. de Fernex, *The space of arcs of an algebraic variety*, Algebraic geometry : Salt Lake City 2015, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 97, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2018, pp. 169–197.

[DG87] B. I. Dahn and P. Göring, *Notes on exponential-logarithmic terms*, Fund. Math. **127** (1987), no. 1, 45–50.

[DL87] J. Denef and L. Lipshitz, *Algebraic power series and diagonals*, J. Number Theory **26** (1987), no. 1, 46–67.

[DS02] L. van den Dries and P. Speissegger, *O-minimal preparation theorems*, Model theory and applications, Quad. Mat., vol. 11, Aracne, Rome, 2002, pp. 87–116.

[dSB19] A. Belotto da Silva and E. Bierstone, *Monomialization of a quasianalytic morphism*, 2019.

[Dul06] H. Dulac, *Sur les points dicritiques*, J. Math. Pures Appl. (6) **71** (1906), no. 2, 381–402.

[Dul23] ———, *Sur les cycles limites*, Bull. Soc. Math. France **51** (1923), 45–188.

[Dut15] S. Dutter, *Gaps in Taylor series of algebraic functions.*, Bull. Aust. Math. Soc. **91** (2015), no. 3, 412–418 (English).

[DvdD88] J. Denef and L. van den Dries, *p-adic and real subanalytic sets*, Ann. of Math. (2) **128** (1988), no. 1, 79–138.

[É92] J. Écalle, *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Actualités Mathématiques., Hermann, Paris, 1992.

[Edg10] G. A. Edgar, *Transseries for beginners*, Real Anal. Exchange **35** (2010), no. 2, 253–309.

[Ehr95] P. Ehrlich, *Hahn's über die nichtarchimedischen grössensysteme and the development of the modern theory of magnitudes and numbers to measure them*, From Dedekind to Gödel (Boston, MA, 1992), Synthese Lib., vol. 251, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, pp. 165–213.

[Ehr01] ———, *Number systems with simplicity hierarchies : a generalization of Conway's theory of surreal numbers*, J. Symbolic Logic **66** (2001), no. 3, 1231–1258.

[EP05] A. J. Engler and A. Prestel, *Valued fields*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[Ers65] Ju. L. Ershov, *On elementary theories of local fields*, Algebra i Logika Sem. **4** (1965), no. 2, 5–30.

[Fak87] S. M. Fakhruddin, *Quasi-ordered fields*, J. Pure Appl. Algebra **45** (1987), no. 3, 207–210.

[FS97] P. Flajolet and M. Soria, *Coefficients of algebraic series*, Algorithms seminar 1997-1998, Tech. Report, INRIA, 1997.

[FT18] A. G. Flores and B. Teissier, *Local polar varieties in the geometric study of singularities*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **27** (2018), no. 4, 679–775.

[Fuc63] L. Fuchs, *Partially ordered algebraic systems*, Pergamon Press, Oxford, 1963.

[Fur67] H. Furstenberg, *Algebraic functions over finite fields*, J. Algebra **7** (1967), 271–277.

[Gab68] A. M. Gabrielov, *Projections of semianalytic sets*, Funkcional. Anal. i Priložen. **2** (1968), no. 4, 18–30.

[GKS18] Z. Galal, T. Kaiser, and P. Speissegger, *Ilyashenko algebras based on transserial asymptotic expansions*, arXiv e-prints (2018), arXiv :1806.01732.

[GKZ94] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, and A.V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants.*, Boston, MA : Birkhäuser, 1994 (English).

[Gla99] A. M. W. Glass, *Partially ordered groups*, Series in Algebra, vol. 7, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1999.

[GMSa] O. Le Gal, M. Matusinski, and F. Sanz, *Integral pencils via transseries in dimension 3.*

[GMSb] ———, *Strong dichotomy interlaced/hardy for definable ordinary differential equations.*

[Gon86] H. Gonshor, *An introduction to the theory of surreal numbers*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 110, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[GP00] P. D. González Pérez, *Singularités quasi-ordinaires toriques et polyèdre de Newton du discriminant*, Canad. J. Math. **52** (2000), no. 2, 348–368.

[Gro97] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme*, Geometric Galois actions, 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 5–48.

[GS91] D. Y. Grigoriev and M. F. Singer, *Solving ordinary differential equations in terms of series with real exponents*, Transactions Amer. Math. Soc. **327** (1991), no. 1, 329–351.

[Hah07] H. Hahn, *Über die nichtarchimedischen Grössensystem*, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch - Naturwissenschaftliche Klasse (Wien) **116** (1907), no. Abteilung IIa, 601–655.

[Har10] G. H. Hardy, *Orders of infinity : The 'Infinitärcalül' of Paul du Bois-Reymond.*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, vol. 12, Cambridge University Press, 1910.

[Hef03] A. Hefez, *Irreducible plane curve singularities*, Real and complex singularities, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 232, Dekker, New York, 2003, pp. 1–120.

[HH11] A. Hefez and M. E. Hernandes, *The analytic classification of plane branches*, Bull. Lond. Math. Soc. **43** (2011), no. 2, 289–298.

[Hic93] M. Hickel, *Fonction de Artin et germes de courbes tracées sur un germe d'espace analytique.*, Am. J. Math. **115** (1993), no. 6, 1299–1334 (French).

[Hir64] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II*, Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203 ; ibid. (2) **79** (1964), 205–326.

[Hir73] ———, *Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps*, Istituto Matematico "L. Tonelli", Pisa, 1973.

[HM17] M. Hickel and M. Matusinski, *On the algebraicity of Puiseux series*, Rev. Mat. Complut. **30** (2017), no. 3, 589–620.

[HM19] ———, *About algebraic Puiseux series in several variables*, J. Algebra **527** (2019), 55–108.

[Hod93] W. Hodges, *Model theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 42, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[HS06] C. Huneke and I. Swanson, *Integral closure of ideals, rings, and modules*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 336, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[HS17] W. Heinzer and D. Shannon, *Abhyankar's work on dicritical divisors*, 2017.

[Il'91] Yu. S. Il'yashenko, *Finiteness theorems for limit cycles*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 94, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991.

[Il′02] Yu. S. Il′Yashenko, *Centennial history of Hilbert's 16th problem*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. 3, 301–354 (electronic).

[Ite08] I. Itenberg, *Introduction à la géométrie tropicale*, Géométrie tropicale, Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2008, pp. 1–25.

[IY08] Yu. S. Il′Yashenko and Sergei Yakovenko, *Lectures on analytic differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 86, American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[Izu92] S. Izumi, *A criterion for algebraicity of analytic set germs.*, Proc. Japan Acad., Ser. A **68** (1992), no. 10, 307–309 (English).

[Jec78] T. Jech, *Set theory.*, 1978 (English).

[JSW17] Franziska Jahnke, Pierre Simon, and Erik Walsberg, *Dp-minimal valued fields*, J. Symb. Log. **82** (2017), no. 1, 151–165.

[Jun08] H. W. E. Jung, *Darstellung der funktionen eines algebraischen körpers zweier unabhängigen verändlichen x, y in der umgebung einer stelle x = a, y = b*, J. Reine Angew. Math. **133** (1908), 289–314.

[Kap42a] I. Kaplansky, *Maximal fields with valuations*, Duke Math. Journal **9** (1942), 303–321.

[Kap42b] _____, *Maximal fields with valuations, ii*, Duke Math. Journal **12** (1942), 245–248.

[Ked01a] K. S. Kedlaya, *Power series and p-adic algebraic closures*, J. Number Theory **89** (2001), no. 2, 324–339.

[Ked01b] _____, *The algebraic closure of the power series field in positive characteristic.*, Proc. Am. Math. Soc. **129** (2001), no. 12, 3461–3470.

[Ked17] _____, *On the algebraicity of generalized power series*, Beitr. Algebra Geom. **58** (2017), no. 3, 499–527.

[Kho91] A. G. Khovanskiĭ, *Fewnomials*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1991, Translated from the Russian by Smilka Zdravkovska.

[KK96] F.-V. Kuhlmann and S. Kuhlmann, *Explicit construction of exponential-logarithmic power series*, Prépublications de Paris 7, vol. 61, 1995–1996.

[KKS97] F.-V. Kuhlmann, S. Kuhlmann, and S. Shelah, *Exponentiation in power series fields*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), no. 11, 3177–3183.

[KM11] S. Kuhlmann and M. Matusinski, *Hardy type derivations on fields of exponential logarithmic series.*, J. Algebra **345** (2011), 171–189.

[KM12] _____, *Hardy type derivations in generalized series fields.*, J. Algebra **351** (2012), 185–203.

[KM15] _____, *The exponential-logarithmic equivalence classes of surreal numbers*, Order **32** (2015), no. 1, 53–68 (English).

[KMP17] S. Kuhlmann, M. Matusinski, and F. Point, *The valuation difference rank of a quasi-ordered difference field*, Groups, Modules, and Model Theory - Surveys and Recent Developments : In Memory of Rüdiger

Göbel (Manfred Droste, László Fuchs, Brendan Goldsmith, and Lutz Strüngmann, eds.), Springer International Publishing, Cham, 2017, pp. 399–414.

[KMS13] S. Kuhlmann, M. Matusinski, and A. C. Shkop, *A note on Schanuel's conjectures for exponential logarithmic power series fields*, Arch. Math. (Basel) **100** (2013), no. 5, 431–436.

[KP02] S. G. Krantz and H. R. Parks, *The implicit function theorem*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002, History, theory, and applications.

[KPS86] J. F. Knight, A. Pillay, and C. Steinhorn, *Definable sets in ordered structures. II*, Trans. Amer. Math. Soc. **295** (1986), no. 2, 593–605.

[Kra99] S. G. Krantz, *Handbook of complex variables.*, Boston, MA : Birkhäuser, 1999 (English).

[KRS09] T. Kaiser, J.-P. Rolin, and P. Speissegger, *Transition maps at non-resonant hyperbolic singularities are o-minimal*, J. Reine Angew. Math. **636** (2009), 1–45.

[Kru32] W. Krull, *Allgemeine Bewertungstheorie.*, J. Reine Angew. Math. **167** (1932), 160–196 (German).

[KS05] S. Kuhlmann and S. Shelah, *κ-bounded exponential-logarithmic power series fields*, Ann. Pure Appl. Logic **136** (2005), no. 3, 284–296.

[KS19] T. Kaiser and P. Speissegger, *Analytic continuations of* log-exp*-analytic germs*, Trans. Amer. Math. Soc. **371** (2019), no. 7, 5203–5246.

[KT] S. Kuhlmann and M. Tressl, *Comparison of exponential-logarithmic and logarithmic-exponential series*, to appear in MLQ Math. Log. Q. (arXiv :1112.4189).

[Kuh00] S. Kuhlmann, *Ordered exponential fields*, Fields Institute Monographs, vol. 12, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[Kuh11] F.-V. Kuhlmann, *Maps on ultrametric spaces, hensel's lemma, and differential equations over valued fields*, Comm. Algebra **39** (2011), no. 5, 1730–1776.

[Lam83] T. Y. Lam, *Orderings, valuations and quadratic forms*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 52, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1983.

[LC94] T. Levi-Civita, *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici.*, Ven. Ist. Atti **(7)** (1894), IV. 1765–1815 (Italian).

[LC98] ———, *Sui numeri transfiniti.*, Rom. Acc. L. Rend. (5) **7** (1898), no. 1, 91–96, 113–121 (Italian).

[Lev08] A. B. Levin, *Difference algebra.*, vol. 8, New York, NY : Springer, 2008 (English).

[LGSS13] O. Le Gal, F. Sanz, and P. Speissegger, *Non-interlaced solutions of 2-dimensional systems of linear ordinary differential equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 7, 2429–2438.

[LGSS18] O. Le Gal, F. Sanz, and P. Speissegger, *Trajectories in interlaced integral pencils of 3-dimensional analytic vector fields are o-minimal*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), no. 3, 2211–2229.

[Lip89] L. Lipshitz, *D-finite power series.*, J. Algebra **122** (1989), no. 2, 353–373 (English).

[Loe09] F. Loeser, *Seattle lectures on motivic integration*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 745–784.

[Loi10] Ta Lê Loi, *Lecture 2 : Stratifications in o-minimal structures*, The Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities—JARCS III, Proc. Centre Math. Appl. Austral. Nat. Univ., vol. 43, Austral. Nat. Univ., Canberra, 2010, pp. 31–39.

[Loi16] Ta Lê Loi, *Łojasiewicz inequalities in o-minimal structures*, Manuscripta Mathematica **150** (2016), no. 1, 59–72.

[Łoj71] S. Łojasiewicz, *Sur les ensembles semi-analytiques*, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 237–241.

[LR97] J.-M. Lion and J.-P. Rolin, *Théorème de préparation pour les fonctions logarithmico-exponentielles*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **47** (1997), no. 3, 859–884.

[Mac39] S. MacLane, *The universality of formal power series fields.*, Bull. Am. Math. Soc. **45** (1939), 888–890 (English).

[Mat11] M. Matusinski, *A differential Puiseux theorem in generalized series fields of finite rank.*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **20** (2011), no. 2, 247–293 (English).

[Mat14] ———, *On generalized series fields and exponential-logarithmic series fields with derivations*, Valuation theory in interaction. Proceedings of the 2nd international conference and workshop on valuation theory, Segovia and El Escorial, Spain, July 18–29, 2011. EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2014, pp. 350–372.

[McD95] J. McDonald, *Fiber polytopes and fractional power series*, J. Pure Appl. Algebra **104** (1995), no. 2, 213–233.

[Mil94] C. Miller, *Expansions of the real field with power functions*, Ann. Pure Appl. Logic **68** (1994), no. 1, 79–94.

[Mil12] ———, *Basics of o-minimality and Hardy fields*, Lecture notes on o-minimal structures and real analytic geometry, Fields Inst. Commun., vol. 62, Springer, New York, 2012, pp. 43–69.

[MM80] J.-F. Mattei and R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1980), no. 4, 469–523.

[MM17] V. Mantova and M. Matusinski, *Surreal numbers with derivation, Hardy fields and transseries : a survey*, Ordered algebraic structures and related topics, Contemp. Math., vol. 697, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, pp. 265–290.

[MR91] R. Moussu and C. Roche, *Théorie de Hovanskiĭ et problème de Dulac*, Invent. Math. **105** (1991), no. 2, 431–441.

[MR06] M. Matusinski and J.-P. Rolin, *Generalised power series solutions of sub-analytic differential equations*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **342** (2006), no. 2, 99–102.

[MZ39] H. T. Muhly and O. Zariski, *The Resolution of Singularities of an Algebraic Curve*, Amer. J. Math. **61** (1939), no. 1, 107–114.

[Nag62] M. Nagata, *Local rings*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 13, Interscience Publishers a division of John Wiley & Sons New York-London, 1962.

[Nas95] J F. Nash, Jr., *Arc structure of singularities*, vol. 81, 1995, A celebration of John F. Nash, Jr., pp. 31–38 (1996).

[Neu49] B. H. Neumann, *On ordered division rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 202–252.

[New66] I. Newton, *La méthode des fluxions et des suites infinies*, Traduit par M. de Buffon, Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1966.

[Pan06] D. Panazzolo, *Resolution of singularities of real-analytic vector fields in dimension three.*, Acta Math. **197** (2006), no. 2, 167–289 (English).

[Par94] A. Parusiński, *Lipschitz stratification of subanalytic sets*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27** (1994), no. 6, 661–696.

[Pas89] J. Pas, *Uniform p-adic cell decomposition and Igusa local zeta functions*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1989, Thesis (Dr.)–Katholieke Universiteit Leuven (Belgium).

[PC83] S. Prieß-Crampe, *Angeordnete Strukturen*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas], vol. 98, Springer-Verlag, Berlin, 1983, Gruppen, Körper, projektive Ebenen. [Groups, fields, projective planes].

[PCR93] S. Priess-Crampe and P. Ribenboim, *Fixed points, combs and generalized power series*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **63** (1993), 227–244.

[Poi86] H. Poincaré, *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires.*, Acta Math. **8** (1886), 295–344 (French).

[PP17] A. Parusiński and L. Păunescu, *Arc-wise analytic stratification, Whitney fibering conjecture and Zariski equisingularity*, Adv. Math. **309** (2017), 254–305.

[PR12] A. Parusiński and G. Rond, *The Abhyankar-Jung theorem*, J. Algebra **365** (2012), 29–41.

[PS84] A. Pillay and C. Steinhorn, *Definable sets in ordered structures*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **11** (1984), no. 1, 159–162.

[PS86] ———, *Definable sets in ordered structures. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **295** (1986), no. 2, 565–592.

[Pui50] V. Puiseux, *Recherches sur les fonctions algébriques.*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1850), 365–480 (fre).

[Pui51] _____, *Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques.*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (1851), 228–240 (fre).

[Ram94] A. Ramayyan, *On nth order differential equations over Hardy fields*, Kybernetika (Prague) **30** (1994), no. 4, 461–470.

[Ray74] F. J. Rayner, *Algebraically closed fields analogous to fields of Puiseux series*, J. London Math. Soc. (2) **8** (1974), 504–506.

[Rib92] P. Ribenboim, *Fields : algebraically closed and others*, Manuscripta Math. **75** (1992), no. 2, 115–150.

[Rob56] A. Robinson, *Complete theories*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1956.

[Rol17] J.-P. Rolin, *A survey on o-minimal structures*, Real algebraic geometry, Panor. Synthèses, vol. 51, Soc. Math. France, Paris, 2017, pp. 27–77.

[Ron17] G. Rond, *About the algebraic closure of the field of power series in several variables in characteristic zero*, J. Singul. **16** (2017), 1–51.

[Ron18] _____, *Artin approximation*, J. Singul. **17** (2018), 108–192.

[Ros80] M. Rosenlicht, *Differential valuations*, Pacific J. Math. **86** (1980), no. 1, 301–319.

[Ros81] _____, *On the value group of a differential valuation. II*, Amer. J. Math. **103** (1981), no. 5, 977–996.

[Ros82] J. G. Rosenstein, *Linear orderings*, Pure and Applied Mathematics, vol. 98, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1982.

[Ros83a] M. Rosenlicht, *Hardy fields*, J. Math. Anal. Appl. **93** (1983), no. 2, 297–311.

[Ros83b] _____, *The rank of a Hardy field*, Trans. Amer. Math. Soc. **280** (1983), no. 2, 659–671.

[Ros95] _____, *Asymptotic solutions of* $Y'' = F(x)Y$, J. Math. Anal. Appl. **189** (1995), no. 3, 640–650.

[RS15] J.-P. Rolin and T. Servi, *Quantifier elimination and rectilinearization theorem for generalized quasianalytic algebras*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **110** (2015), no. 5, 1207–1247.

[RSS07] J.-P. Rolin, F. Sanz, and R. Schäfke, *Quasi-analytic solutions of analytic ordinary differential equations and o-minimal structures*, Proc. London Math. Soc. **95** (2007), no. 2, 413–442.

[RSW03] J.-P. Rolin, P. Speissegger, and A. J. Wilkie, *Quasianalytic Denjoy-Carleman classes and o-minimality*, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), no. 4, 751–777 (electronic).

[RT97] A. Ramayyan and E. Thandapani, *On higher-order differential equations over Hardy fields*, Indian J. Pure Appl. Math. **28** (1997), no. 7, 887–895.

[Saf00] K. V. Safonov, *On power series of algebraic and rational functions in* $\mathbf{C}^n$, J. Math. Anal. Appl. **243** (2000), no. 2, 261–277.

[Saf09] K. V. Safonov, *An algebraicity criterion for the sum of a power series (a generalization of Kronecker's criterion) and its application.*, Dokl. Math. **79** (2009), no. 1, 13–15 (English).

[Sat83] A. Sathaye, *Generalized Newton-Puiseux expansion and Abhyankar-Moh semigroup theorem*, Inventiones Mathematicae **74** (1983), 149–157, 10.1007/BF01388535.

[Sch01] M.C. Schmeling, *Corps de transséries*, Ph.D. thesis, Université Paris-VII, 2001.

[Sch10] H. Schoutens, *The use of ultraproducts in commutative algebra.*, vol. 1999, Dordrecht : Springer, 2010 (English).

[Sei54] A. Seidenberg, *A new decision method for elementary algebra*, Ann. of Math. (2) **60** (1954), 365–374.

[Sei68] ———, *Reduction of singularities of the differential equation* $A\,dy = B\,dx$, Amer. J. Math. **90** (1968), 248–269.

[Sha93] J. Shackell, *Rosenlicht fields*, Trans. Amer. Math. Soc. **335** (1993), no. 2, 579–595.

[Sin80] M. F. Singer, *Algebraic solutions of nth order linear differential equations*, Proceedings of the Queen's Number Theory Conference, 1979 (Kingston, Ont., 1979), Queen's Papers in Pure and Appl. Math., vol. 54, Queen's Univ., Kingston, Ont., 1980, pp. 379–420.

[Sjo71] G. Sjoedin, *Hardy-fields*, Ark. Mat. **8** (1971), 217–237.

[Sok11] A. D. Sokal, *A ridiculously simple and explicit implicit function theorem*, Sém. Lothar. Combin. **61A** (2009/11), Art. B61Ad, 21.

[Spe99] P. Speissegger, *The Pfaffian closure of an o-minimal structure*, J. Reine Angew. Math. **508** (1999), 189–211.

[Spe18] ———, *Quasianalytic Ilyashenko algebras*, Canad. J. Math. **70** (2018), no. 1, 218–240.

[Sta78] R. P. Stanley, *Generating functions.*, MAA Stud. Math. 17, Studies in Combinatorics, 100-141 (1978)., 1978.

[SV06] M. J. Soto and J. L. Vicente, *Polyhedral cones and monomial blowing-ups*, Linear Algebra Appl. **412** (2006), no. 2-3, 362–372.

[SV11] ———, *The Newton procedure for several variables*, Linear Algebra Appl. **435** (2011), no. 2, 255–269.

[Swa11] I. Swanson, *Rees valuations*, Commutative algebra—Noetherian and non-Noetherian perspectives, Springer, New York, 2011, pp. 421–440.

[Sze98] G. Szekeres, *Abel's equation and regular growth : Variations on a theme by Abel.*, Exp. Math. **7** (1998), no. 2, 85–100 (English).

[Tar51] A. Tarski, *A decision method for elementary algebra and geometry*, University of California Press, Berkeley and Los Angeles, Calif., 1951, 2nd ed.

[Tei97] B. Teissier, *Tame and stratified objects*, Geometric Galois actions, 1, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 242, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 231–242.

[Tei07] ———, *Complex curve singularities : a biased introduction*, Singularities in geometry and topology, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, pp. 825–887.

[Tei12] B. Teissier, *Some resonances of Łojasiewicz inequalities.*, Wiadom. Mat. **48** (2012), no. 2, 271–284 (English).

[Tem15] M. Temkin, *Introduction to Berkovich analytic spaces*, Berkovich spaces and applications, Lecture Notes in Math., vol. 2119, Springer, Cham, 2015, pp. 3–66.

[Tou94] J.-Cl. Tougeron, *Sur les ensembles semi-analytiques avec conditions Gevrey au bord*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27** (1994), no. 2, 173–208.

[Tre71] Marvin Tretkoff, *Algebraic extensions of the field of rational functions*, Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), 491–497.

[Tre72] ———, *Algebraic extensions of the field of rational functions. II*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), 147–149.

[TZ12] Katrin Tent and Martin Ziegler, *A course in model theory.*, vol. 40, Cambridge : Cambridge University Press ; Ithaca, NY : Association of Symbolic Logic (ASL), 2012 (English).

[TW94] Lê Dung Tráng and C. Weber, *A geometrical approach to the Jacobian conjecture for $n = 2$.*, Kodai Math. J. **17** (1994), no. 3, 374–381 (English).

[Vaq06] M. Vaquié, *Valuations and local uniformization*, Singularity theory and its applications, Adv. Stud. Pure Math., vol. 43, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006, pp. 477–527.

[vdD84] L. van den Dries, *Remarks on tarski's problem concerning (**R**, +, ·, exp)*, Logic colloquium '82 (Florence, 1982), North-Holland, Amsterdam, 1984, pp. 97–121.

[vdD98] ———, *Tame topology and o-minimal structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[vdD99] ———, *o-minimal structures and real analytic geometry*, Current developments in mathematics, 1998 (Cambridge, MA), Int. Press, Somerville, MA, 1999, pp. 105–152.

[vdDE01a] L. van den Dries and P. Ehrlich, *Erratum to : "Fields of surreal numbers and exponentiation"*, Fund. Math. **168** (2001), no. 3, 295–297.

[vdDE01b] ———, *Fields of surreal numbers and exponentiation*, Fund. Math. **167** (2001), no. 2, 173–188.

[vdDM96] L. van den Dries and C. Miller, *Geometric categories and o-minimal structures*, Duke Math. J. **84** (1996), no. 2, 497–540.

[vdDMM94] L. van den Dries, A. Macintyre, and D. Marker, *The elementary theory of restricted analytic fields with exponentiation*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), no. 1, 183–205.

[vdDMM97] ———, *Logarithmic-exponential power series*, J. London Math. Soc. (2) **56** (1997), no. 3, 417–434.

[vdDMM01] ———, *Logarithmic-exponential series*, Proceedings of the International Conference "Analyse & Logique" (Mons, 1997), vol. 111, Ann. Pure Appl. Logic, no. 1-2, 2001, pp. 61–113.

[vdDS98] L. van den Dries and P. Speissegger, *The real field with convergent generalized power series*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), no. 11, 4377–4421.

[vdDS00] ———, *The field of reals with multisummable series and the exponential function*, Proc. London Math. Soc. (3) **81** (2000), no. 3, 513–565.

[vdDvdHK18] L. van den Dries, J. van der Hoeven, and E. Kaplan, *Logarithmic Hyperseries*, arXiv e-prints (2018), arXiv :1810.01810.

[vdH97] J. van der Hoeven, *Asymptotique automatique*, Université Paris VII, Paris, 1997, Thèse, Université Paris VII, Paris, 1997, With an introduction and a conclusion in French.

[vdH02] ———, *A differential intermediate value theorem*, Differential equations and the Stokes phenomenon, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2002, pp. 147–170.

[vdH06] ———, *Transseries and real differential algebra*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1888, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[vdH09] ———, *Transserial Hardy fields*, Astérisque (2009), no. 323, 453–487.

[vdP93] A. J. van der Poorten, *Power series representing algebraic functions*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990–91, Progr. Math., vol. 108, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993, pp. 241–262.

[Ver91] G. Veronese, *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più spezie di unita rettilinee esposti in forma elementare.*, Padova. Tipografia del seminario. 5. LVIII + 628 S , 1891 (Italian).

[VRSS13] R. M. Villaverde, J.-P. Rolin, and F. Sanz Sánchez, *Local monomialization of generalized analytic functions*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM **107** (2013), no. 1, 189–211.

[Wal35] R. J. Walker, *Reduction of the singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math. (2) **36** (1935), no. 2, 336–365.

[Wal78] ———, *Algebraic curves*, Springer-Verlag, New York, 1978, Reprint of the 1950 edition.

[Wal04] C. T. C. Wall, *Singular points of plane curves*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 63, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[Wei46] A. Weil, *Foundations of Algebraic Geometry*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 29, American Mathematical Society, New York, 1946.

[Whi65] Hassler Whitney, *Tangents to an analytic variety*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 496–549.

[Wil19] E. J. Wilczynski, *On the form of the power series for an algebraic function.*, Am. Math. Mon. **26** (1919), 9–12 (English).

[Wil96] A. J. Wilkie, *Model completeness results for expansions of the ordered field of real numbers by restricted Pfaffian functions and the exponential function*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), no. 4, 1051–1094.

[Wil99] ———, *A theorem of the complement and some new o-minimal structures*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), no. 4, 397–421.

[Zar40] O. Zariski, *Local uniformization on algebraic varieties*, Ann. of Math. (2) **41** (1940), 852–896.

[Zar42] ———, *A simplified proof for the resolution of singularities of an algebraic surface*, Ann. of Math. (2) **43** (1942), 583–593.

[Zar44a] ———, *The compactness of the Riemann manifold of an abstract field of algebraic functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 683–691.

[Zar44b] ———, *Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties*, Ann. of Math. (2) **45** (1944), 472–542.

[Zar86] ———, *Le problème des modules pour les branches planes*, second ed., Hermann, Paris, 1986, Course given at the Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Paris, October–November 1973, With an appendix by Bernard Teissier.

[ZS75] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra. Vol. II*, Springer-Verlag, New York, 1975, Reprint of the 1960 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 29.