



HAL
open science

Problème inverse statistique multi-échelle pour l'identification des champs aléatoires de propriétés élastiques

Tianyu Zhang

► **To cite this version:**

Tianyu Zhang. Problème inverse statistique multi-échelle pour l'identification des champs aléatoires de propriétés élastiques. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Paris-Est, 2019. Français. NNT : 2019PESC2068 . tel-02506242

HAL Id: tel-02506242

<https://theses.hal.science/tel-02506242v1>

Submitted on 12 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Paris-Est
École doctorale Sciences, Ingénierie et Environnement

THÈSE

présentée par
Tianyu ZHANG

pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université Paris-Est

Discipline
Mécanique

Problème inverse statistique multi-échelle pour l'identification des champs aléatoires de propriétés élastiques

Soutenue publiquement à Marne-la-Vallée le 11 décembre 2019
devant le jury composé de :

Samuel FOREST	Professeur, École des Mines ParisTech	Président
Régis COTTEREAU	Chargé de recherches, CNRS	Rapporteur
Justin DIRRENBARGER	Maître de conférences, Cnam	Rapporteur
Christian SOIZE	Professeur, Université Paris-Est	Examinateur
Florent PLED	Maître de conférences, Université Paris-Est	Encadrant
Christophe DESCÉLIERS	Professeur, Université Paris-Est	Directeur de thèse

Me voici à un carrefour de ma vie qui représente à la fois la fin de ma formation universitaire et le début de ma carrière professionnelle. J'ai été vraiment très honoré de pouvoir passer cette période particulière de trois ans à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, et surtout de pouvoir me former et évoluer dans un environnement scientifique de haut niveau offert par les chercheurs renommés du laboratoire MSME.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse, Monsieur Christophe Desceliers, sans qui l'accomplissement de ce travail n'aurait pas été possible : merci non seulement de m'avoir proposé un sujet aussi passionnant, mais aussi de m'avoir guidé tout au long de ces trois années avec une grande confiance et un suivi extrêmement attentif, les innombrables fichiers « test » sur le serveur et les multiples fiches de notes dans le tiroir peuvent en témoigner. Je voudrais également adresser mes sincères remerciements à mon encadrant, Monsieur Florent Pled : merci pour ta rigueur scientifique et ton enthousiasme permanent, sans oublier les longues discussions autour de sujets variés, ainsi que les mille et une relectures du manuscrit et les « push » envoyés à trois heures du matin. Enfin, je ne sais pas comment adresser ma profonde reconnaissance à Monsieur Christian Soize, qui ne faisait pas partie de mon encadrement, mais qui a tout de même consacré énormément de son temps précieux pour me former, et surtout pour m'avoir transmis le goût et le plaisir de la recherche, souvent autour d'une discussion riche en idées et en inspirations. Par ailleurs, j'ai eu la chance d'observer de près comment ils travaillaient au quotidien au cours de ces années, et si aujourd'hui je possède quelques qualités professionnelles en tant que chercheur débutant, c'est essentiellement grâce à eux.

Je voudrais ensuite remercier l'ensemble des membres de mon jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail : merci à Monsieur Samuel Forest de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury ; merci à Monsieur Régis Cottreau et à Monsieur Justin Dirrenberger pour avoir eu la gentillesse et la patience de relire attentivement et minutieusement ce mémoire ; merci aussi à Monsieur Christian Soize d'avoir bien voulu y participer. Cela a été un véritable enrichissement pour moi d'avoir pu échanger avec vous avec des critiques constructives, des remarques pertinentes, ainsi que des réflexions intéressantes de votre part, tant sur les applications industrielles de la méthodologie développée que sur ses approfondissements scientifiques pour les futurs travaux.

Je remercie également tous les permanents et non-permanents du laboratoire MSME pour m'avoir fait bénéficier d'une vie universitaire riche en projets collectifs et en moments conviviaux, notamment en me permettant d'assister et de participer à de nombreux séminaires internes ou colloques internationaux, ou encore aux quelques déjeuners très instructifs et en même temps très amusants. Un grand merci en particulier à Monsieur Julien Yvonnet, avec qui j'ai fait mes premières armes de numéricien en stage, et qui a laissé son bureau grand ouvert tout au long de ma thèse : merci pour le temps consacré, les idées partagées et les conseils apportés. Je n'oublierai pas non plus les merveilleux instants intra- ou extra-universitaires passés avec mes collègues et amis : Mu, Liang, Peng, Xiaoxin, Daicong, Meng, Zhou, Yang,

Dengke, Yanghao, Pengfei, Yifu, Weizhi, Yangyang, Xu, Yi, Qiaojuan, Xing, Jinhai, Yuchen, Jian, Thanh Tung, Ludovic, Ibrahim, Robin, Minh, Brian, Rémi, Quentin, Justin, Anthony P., Anthony H., Hanane, Darwish, Dat, Thibault : merci pour votre bienveillance, votre disponibilité et vos sourires.

Je n'aurais certainement pas pu terminer cette thèse sans le soutien constant de mes proches : ma famille ; Vaag, mon ami ; Madame Paulette, Madame Anne-Sophie et Monsieur Gérard, ma « famille adoptive » ; Ruozhou, Jianfeng, Ruiming, Zhaojie, Yao, Dalla, Shuangshuang et Yanfei, les personnes sur qui je sais que je peux toujours compter ; Madame Camille et Madame Anne-Marie, Monsieur Gilles et Monsieur Jean-Marc, les personnes qui m'ont toujours ouvert les bras au cours de mes dix ans de séjour en France ; Wenliang, une rencontre tardive à Paris mais peut-être la plus belle. C'est dans leurs encouragements inconditionnels et l'accompagnement silencieux des moments les plus difficiles que j'ai appris les choses les plus précieuses de la vie.

Mais ma dette la plus considérable est à l'égard de mes parents : aucun théorème existant et aucune équation établie ne pourrait bien mesurer l'immensité et la profondeur de l'amour que vous m'avez accordé durant ces trente ans. J'espère simplement avoir le temps pour vous dire et redire « je vous aime ».

Merci enfin à tous ceux que j'aurais pu oublier mais qui à l'occasion d'une rencontre ou d'un échange ont contribué à ce travail de recherche.

À mes parents

*« Poursuis seulement,
et dirige tes pas vers l'endroit où te conduit le chemin de la sagesse. »*

Résumé

Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire, la modélisation et la simulation numérique du comportement mécanique des matériaux hétérogènes à microstructure aléatoire complexe soulèvent de nombreux défis scientifiques à différentes échelles. Bien qu'à l'échelle macroscopique, ces matériaux soient souvent modélisés comme des milieux homogènes et déterministes, ils sont non seulement hétérogènes et aléatoires à l'échelle microscopique, mais ils ne peuvent généralement pas non plus être explicitement décrits par les propriétés morphologiques et mécaniques locales de leurs constituants. Par conséquent, une échelle mésoscopique est introduite entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique, pour laquelle les propriétés mécaniques d'un tel milieu élastique linéaire aléatoire sont décrites par un modèle stochastique *prior* non-gaussien paramétré par un nombre faible ou modéré d'hyperparamètres inconnus. Afin d'identifier ces hyperparamètres, une méthodologie innovante a été récemment proposée en résolvant un problème statistique inverse multi-échelle en utilisant uniquement des données expérimentales partielles et limitées aux deux échelles macroscopique et mésoscopique. Celui-ci a été formulé comme un problème d'optimisation multi-objectif qui consiste à minimiser une fonction-coût multi-objectif (à valeurs vectorielles) définie par trois indicateurs numériques correspondant à des fonctions-coût mono-objectif (à valeurs scalaires) permettant de quantifier et minimiser des distances entre les données expérimentales multi-échelles mesurées simultanément aux deux échelles macroscopique et mésoscopique sur un seul échantillon soumis à un essai statique, et les solutions des modèles numériques déterministe et stochastique utilisés pour simuler la configuration expérimentale multi-échelle sous incertitudes. Ce travail de recherche vise à contribuer à l'amélioration de la méthodologie d'identification inverse statistique multi-échelle en terme de coût de calcul, de précision et de robustesse en introduisant (i) une fonction-coût mono-objectif (indicateur numérique) supplémentaire à l'échelle mésoscopique quantifiant la distance entre la (les) longueur(s) de corrélation spatiale des champs expérimentaux mesurés et celle(s) des champs numériques calculés, afin que chaque hyperparamètre du modèle stochastique *prior* ait sa propre fonction-coût mono-objectif dédiée, permettant ainsi d'éviter d'avoir recours à l'algorithme d'optimisation globale (algorithme génétique) utilisé précédemment et de le remplacer par un algorithme plus performant en terme d'efficacité numérique, tel qu'un algorithme itératif de point fixe, pour résoudre le problème d'optimisation multi-objectif avec un coût de calcul plus faible, et (ii) une représentation stochastique *ad hoc* des hyperparamètres impliqués dans le modèle

stochastique *prior* du champ d'élasticité aléatoire à l'échelle mésoscopique en les modélisant comme des variables aléatoires, pour lesquelles les distributions de probabilité peuvent être construites en utilisant le principe du maximum d'entropie sous un ensemble de contraintes définies par les informations objectives et disponibles, et dont les hyperparamètres peuvent être déterminés à l'aide de la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance avec les données disponibles, afin d'améliorer à la fois la robustesse et la précision de la méthode d'identification inverse du modèle stochastique *prior*. En parallèle, nous proposons également de résoudre le problème d'optimisation multi-objectif en utilisant l'apprentissage automatique (ou « machine learning » en anglais) par des réseaux de neurones artificiels. Finalement, la méthodologie améliorée est tout d'abord validée sur un matériau virtuel fictif dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D contraintes planes et en 3D (avec des données simulées multi-échelles obtenues par des calculs numériques), puis illustrée sur un matériau biologique hétérogène réel (os cortical de bœuf) dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D contraintes planes (avec des données expérimentales multi-échelles obtenues par un essai mécanique suivi par corrélation d'images numériques).

Mots clés : Méthode inverse statistique, Identification expérimentale multi-échelle, Tenseur d'élasticité, Champ d'élasticité aléatoire, Matériaux hétérogènes, Microstructure aléatoire complexe hiérarchique, Méthode de simulation numérique de Monte Carlo, Modélisation stochastique, Principe du maximum d'entropie, Méthode d'estimation du maximum de vraisemblance, Apprentissage automatique, Réseau de neurones artificiels

Abstract

Within the framework of linear elasticity theory, the numerical modeling and simulation of the mechanical behavior of heterogeneous materials with complex random microstructure give rise to many scientific challenges at different scales. Despite that at macroscale such materials are usually modeled as homogeneous and deterministic elastic media, they are not only heterogeneous and random at microscale, but they often also cannot be properly described by the local morphological and mechanical properties of their constituents. Consequently, a mesoscale is introduced between macroscale and microscale, for which the mechanical properties of such a random linear elastic medium are represented by a *prior* non-Gaussian stochastic model parameterized by a small or moderate number of unknown hyperparameters. In order to identify these hyperparameters, an innovative methodology has been recently proposed by solving a multiscale statistical inverse problem using only partial and limited experimental data at both macroscale and mesoscale. It has been formulated as a multi-objective optimization problem which consists in minimizing a (vector-valued) multi-objective cost function defined by three numerical indicators corresponding to (scalar-valued) single-objective cost functions for quantifying and minimizing distances between multiscale experimental data measured simultaneously at both macroscale and mesoscale on a single specimen subjected to a static test, and the numerical solutions of deterministic and stochastic computational models used for simulating the multiscale experimental test configuration under uncertainties. This research work aims at contributing to the improvement of the multiscale statistical inverse identification method in terms of computational efficiency, accuracy and robustness by introducing (i) an additional mesoscopic numerical indicator allowing the distance between the spatial correlation length(s) of the measured experimental fields and the one(s) of the computed numerical fields to be quantified at mesoscale, so that each hyperparameter of the *prior* stochastic model has its own dedicated single-objective cost-function, thus allowing the time-consuming global optimization algorithm (genetic algorithm) to be avoided and replaced with a more efficient algorithm, such as the fixed-point iterative algorithm, for solving the underlying multi-objective optimization problem with a lower computational cost, and (ii) an *ad hoc* stochastic representation of the hyperparameters involved in the *prior* stochastic model of the random elasticity field at mesoscale by modeling them as random variables, for which the probability distributions can be constructed by using the maximum entropy principle under a set of constraints defined by the available and

objective information, and whose hyperparameters can be determined using the maximum likelihood estimation method with the available data, in order to enhance both the robustness and accuracy of the statistical inverse identification method of the *prior* stochastic model. Meanwhile, we propose as well to solve the multi-objective optimization problem by using machine learning based on artificial neural networks. Finally, the improved methodology is first validated on a fictitious virtual material within the framework of 2D plane stress and 3D linear elasticity theory (using multiscale simulated data obtained through numerical computations) and then illustrated on a real heterogeneous biological material (beef cortical bone) within the framework of 2D plane stress linear elasticity (using multiscale experimental data obtained through mechanical testing monitored by digital image correlation).

Keywords : Statistical inverse method, Multiscale experimental identification, Elasticity tensor, Random elasticity field, Heterogeneous materials, Hierarchical complex random microstructure, Monte Carlo (MC) numerical simulation method, Stochastic modeling, Maximum Entropy (MaxEnt) principle, Maximum Likelihood Estimation (MLE) method, Machine learning, Artificial Neural Network (ANN)

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	xi
Notations et abréviations	1
Introduction	7
1 Contexte et positionnement de la recherche	7
2 Problématique et objectifs de la recherche	12
3 Organisation du mémoire	14
1 Rappels théoriques en élasticité linéaire	17
1 Modélisation stochastique du champ d'élasticité aléatoire	18
1.1 Représentation matricielle et modèle stochastique <i>prior</i> du champ d'élasticité aléatoire	18
1.2 Représentation algébrique <i>prior</i> et propriétés fondamentales du champ d'élasticité aléatoire	22
1.3 Définition et construction des germes stochastiques gaussiens .	24
1.4 Hyperparamètres du modèle stochastique <i>prior</i> du champ d'élasticité aléatoire	26
2 Méthodes d'homogénéisation numérique stochastique en élasticité linéaire	27
2.1 Définition des tenseurs d'élasticité et de souplesse effectifs . .	28
2.2 Méthode d'homogénéisation en déformations homogènes . . .	30
2.3 Méthode d'homogénéisation en contraintes homogènes	31
3 Bilan	33
2 Problème inverse statistique multi-échelle	35
1 Introduction	36
2 Hypothèses retenues et stratégie proposée pour l'identification inverse statistique multi-échelle	38
2.1 Hypothèses retenues	38

2.2	Problème inverse statistique multi-échelle et difficultés associées	39
2.3	Stratégie proposée	42
2.4	Améliorations de la méthode d'identification inverse statistique multi-échelle	43
3	Configuration expérimentale multi-échelle	44
4	Construction des indicateurs numériques macroscopique, mésoscopiques et multi-échelle	47
4.1	Construction de l'indicateur numérique macroscopique	47
4.2	Construction des indicateurs numériques mésoscopiques	48
4.3	Construction de l'indicateur numérique macroscopique-mésoscopique (multi-échelle) associé à l'homogénéisation numérique stochastique	52
5	Problème d'optimisation multi-objectif associé au problème inverse statistique multi-échelle	55
5.1	Formulation du problème d'optimisation multi-objectif	55
5.2	Résolution du problème d'optimisation multi-objectif	56
5.3	Modèle probabiliste des hyperparamètres aléatoires	64
6	Bilan	67
3	Validation numérique de la méthode d'identification multi-échelle sur des matériaux virtuels fictifs en élasticité linéaire 2D et 3D	69
1	Introduction	70
2	Introduction d'une méthode de Shinozuka modifiée pour la représentation de champs aléatoires gaussiens	71
3	Validation numérique sur un essai virtuel de compression en élasticité linéaire 2D contraintes planes	74
3.1	Paramétrage des modèles macroscopique et mésoscopique	75
3.2	Études de convergence	81
3.3	Analyse de sensibilité des indicateurs numériques	89
3.4	Résolution du problème d'optimisation mono-objectif à l'échelle macroscopique	94
3.5	Résolution du problème d'optimisation multi-objectif à l'échelle mésoscopique	94
4	Validation numérique sur un essai virtuel de compression en élasticité linéaire 3D	107
4.1	Paramétrage des modèles macroscopique et mésoscopique	108
4.2	Étude de convergence de l'approximation spectrale du germe stochastique gaussien en fonction de l'ordre d'approximation	111
4.3	Résolution du problème d'optimisation mono-objectif à l'échelle macroscopique	112
4.4	Résolution du problème d'optimisation multi-objectif à l'échelle mésoscopique	113
5	Bilan	115

4	Application numérique de la méthode d'identification multi-échelle à l'os cortical de fémur de bœuf en élasticité linéaire 2D	129
1	Introduction	131
2	Étude de la convergence de l'approximation spectrale du germe stochastique gaussien en fonction de l'ordre d'approximation	135
3	Résolution du problème d'optimisation mono-objectif à l'échelle macroscopique	136
4	Résolution du problème d'optimisation multi-objectif à l'échelle mésoscopique	137
5	Bilan	139
	Conclusion	141
	Bibliographie	145

Table des figures

2.1	Configuration expérimentale multi-échelle : champ de déplacement $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ mesuré à l'échelle macroscopique dans le domaine Ω^{macro} et champ de déplacement $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ mesuré à l'échelle mésoscopique dans un sous-domaine $\Omega^{\text{meso}} \subset \Omega^{\text{macro}}$	46
2.2	Problèmes aux limites (a) à l'échelle macroscopique et (b) à l'échelle mésoscopique	48
2.3	Exemples de rangées de lignes (a) $\mathcal{L}_1^{(1)}, \mathcal{L}_1^{(2)}, \mathcal{L}_1^{(3)}$ (en bleu, pour $\alpha = 1$ dans la direction x_1) et (b) $\mathcal{L}_2^{(1)}, \mathcal{L}_2^{(2)}, \mathcal{L}_2^{(3)}$ (en rouge, pour $\alpha = 2$ dans la direction x_2) pour un sous-domaine carré $\Omega^{\text{meso}} \subset \mathbb{R}^2$	53
2.4	Exemples de rangées de lignes (a) $\mathcal{L}_1^{(1)}, \mathcal{L}_1^{(2)}, \mathcal{L}_1^{(3)}$ (en bleu, pour $\alpha = 1$ dans la direction x_1), (b) $\mathcal{L}_2^{(1)}, \mathcal{L}_2^{(2)}, \mathcal{L}_2^{(3)}$ (en rouge, pour $\alpha = 2$ dans la direction x_2) et (c) $\mathcal{L}_3^{(1)}, \mathcal{L}_3^{(2)}, \mathcal{L}_3^{(3)}$ (en vert, pour $\alpha = 3$ dans la direction x_3) pour un sous-domaine cubique $\Omega^{\text{meso}} \subset \mathbb{R}^3$	54
2.5	Ensemble des solutions non-inférieures (ou optimales de Pareto) et faiblement non-inférieures situées sur le front optimal de Pareto d'une fonction-coût bi-objectif $\mathcal{J}(\mathbf{p}) = (\mathcal{J}_1(\mathbf{p}), \mathcal{J}_2(\mathbf{p}))$, avec la solution utopique située en dehors de l'ensemble admissible	58
3.1	Comparaison d'une réalisation de W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale initiale (3.2) (à gauche) avec $\gamma = 10$ (correspondant à $\gamma^2 = 100$ termes) et de l'approximation spectrale modifiée (3.3) (à droite) avec $\gamma = 100$ (correspondant à $\gamma = 100$ termes également) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso}	74
3.2	Évolutions de la fonction d'autocorrélation $R_{W^\gamma}(\eta, 0)$ en fonction de η (en bleu), au centre d'un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} , du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) avec $\gamma = 10$ pour différentes valeurs de N_s , et de la fonction d'autocorrélation exacte ρ (en rouge) définie par (1.22)	75
3.3	Évolutions de la fonction d'autocorrélation $R_{W^\gamma}(0, \eta)$ en fonction de η (en bleu), au centre d'un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} , du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) avec $\gamma = 10$ pour différentes valeurs de N_s , et de la fonction d'autocorrélation exacte ρ (en rouge) définie par (1.22)	76

3.4	Réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différents ordres γ	82
3.5	Réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} pour différents ordres γ	84
3.6	Évolution de la fonction $\text{conv}^{\text{det}}(n_e)$ en fonction du nombre d'éléments n_e , montrant la convergence en maillage pour la réponse déterministe macroscopique	85
3.7	Évolution de la fonction $\text{conv}^{\text{sto}}(n_G = 0.5, N_s)$ en fonction du nombre N_s de réalisations statistiquement indépendantes, montrant la convergence statistique pour la réponse stochastique mésoscopique	86
3.8	Évolution de la fonction $\text{conv}^{\text{sto}}(n_G, N_s = 500)$ en fonction du nombre n_G de points d'intégration par longueur de corrélation spatiale, montrant la convergence en maillage pour la réponse stochastique mésoscopique	87
3.9	Évolution de la fonction $\text{conv}^{\text{sto}}(B^{\text{VER}})$ en fonction de la taille B^{VER} du VER Ω^{VER} , montrant la convergence vis-à-vis de la taille du VER	88
3.10	Convergence statistique de $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ sur $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$ avec $\delta = 0.5$, $\ell = 20 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$	89
3.11	Convergence statistique de $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ sur $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$ avec $\delta = 0.5$, $\ell = 20 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$	90
3.12	Convergence statistique de $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ sur Ω^{VER} avec $\kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 13.901 \text{ GPa}$, $\mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = \mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 3.685 \text{ GPa}$, $\delta = 0.5$, $\ell = 20 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$	90
3.13	Analyse de la sensibilité de $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ par rapport à δ sur $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$ avec $\ell = \ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 125 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$	91
3.14	Analyse de la sensibilité de $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ par rapport à ℓ sur $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$ avec $\delta = \delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.40$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$	92
3.15	Analyse de la sensibilité de $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ par rapport à $\underline{\kappa}$ avec $\delta = \delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.40$, $\ell = \ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 125 \mu\text{m}$, $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$, $\kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = \kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 13.901 \text{ GPa}$ et $\mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = \mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 3.685 \text{ GPa}$	93
3.16	Analyse de la sensibilité de $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ par rapport à $\underline{\mu}$ avec $\delta = \delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.40$, $\ell = \ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 125 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$, $\kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = \kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 13.901 \text{ GPa}$ et $\mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = \mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 3.685 \text{ GPa}$	93
3.17	Algorithme itératif de point fixe : fonctions de densité de probabilité p_D , p_L , p_K et p_M des variables aléatoires D , L , K et M , respectivement	98
3.18	Algorithme itératif de point fixe : évolutions des valeurs optimales globales identifiées δ^{opt} , ℓ^{opt} , $\underline{\kappa}^{\text{opt}}$ et $\underline{\mu}^{\text{opt}}$ en fonction du nombre Q de sous-domaines mésoscopiques considéré	99

3.19	Différents coupes du front de Pareto avec l'ensemble des solutions non-inférieures représentées par des étoiles rouges \star et la meilleure solution optimale entourée d'un cercle vert \bigcirc pour le sous-domaine mésoscopique Ω_1^{meso}	101
3.20	Algorithme génétique : fonctions de densité de probabilité p_D , p_L , p_K et p_M des variables aléatoires D , L , K et M , respectivement	103
3.21	Représentation du meilleur réseau de neurones (a) à 2 couches, avec 1 couche intermédiaire cachée contenant 30 neurones cachés et 1 couche de sortie contenant 4 neurones, et (b) à 3 couches, avec 2 couches intermédiaires cachées contenant chacune 80 et 10 neurones cachés, respectivement, et 1 couche de sortie contenant 4 neurones	104
3.22	Réseaux de neurones à (a) 2 couches et (b) 3 couches : évolutions de la fonction de performance (erreur quadratique moyenne normalisée) en fonction du nombre d'itérations pour les données d'entraînement (courbes bleues), de validation (courbes vertes) et de test (courbes rouges). La meilleure performance de validation (indiquée par des lignes en tirets verts) est de 0.1983% (resp. 0.1531%) à l'itération 607 (resp. 1651) pour le meilleur réseau à 2 couches (resp. 3 couches).	106
3.23	Réseau de neurones à 2 couches : courbes de régression linéaire entre les sorties du réseau et les cibles correspondantes pour chacun des hyperparamètres δ , ℓ , $\underline{\kappa}$ et $\underline{\mu}$, pour les ensembles de données d'entraînement (en haut à gauche), de validation (en haut à droite), de test (en bas à gauche) et complet (en bas à droite). Dans chaque graphe, les sorties du réseau et les cibles sont représentés par des cercles, la correspondance parfaite (sorties exactement égales aux cibles) est représentée par une ligne en pointillé, et la meilleure correspondance linéaire (régression linéaire entre sorties et cibles) est représentée par une ligne continue pour les ensembles de données d'entraînement (ligne bleue), de validation (ligne verte), de test (ligne rouge) et complet (ligne grise). Le coefficient de régression R est donné en haut de chaque graphe	117

3.24	Réseau de neurones à 3 couches : courbes de régression linéaire entre les sorties du réseau et les cibles correspondantes pour chacun des hyperparamètres δ , ℓ , κ et μ , pour les ensembles de données d'entraînement (en haut à gauche), de validation (en haut à droite), de test (en bas à gauche) et complet (en bas à droite). Dans chaque graphe, les sorties du réseau et les cibles sont représentés par des cercles, la correspondance parfaite (sorties exactement égales aux cibles) est représentée par une ligne en pointillé, et la meilleure correspondance linéaire (régression linéaire entre sorties et cibles) est représentée par une ligne continue pour les ensembles de données d'entraînement (ligne bleue), de validation (ligne verte), de test (ligne rouge) et complet (ligne grise). Le coefficient de régression R est donné en haut de chaque graphe	118
3.25	Réseaux de neurones artificiels à 2 couches (courbes bleues en trait plein) et à 3 couches (courbes rouges en pointillé) : fonctions de densité de probabilité p_D , p_L , p_K et p_M des variables aléatoires D , L , K et M , respectivement	119
3.26	Réseaux de neurones artificiels à (a) 2 couches et (b) 3 couches : évolutions de l'erreur quadratique moyenne normalisée sur le sous-ensemble de données de test en fonction du nombre de données dans les sous-ensembles d'entraînement et de validation pour l'ensemble des 19 configurations du réseau à 2 couches et des 48 configurations du réseau à 3 couches	120
3.27	Illustration de l'échantillon occupant le domaine macroscopique cubique Ω^{macro} (en vert) qui contient un sous-domaine mésoscopique cubique Ω^{meso} (en rouge) pour la validation numérique en élasticité linéaire 3D	121
3.28	Plan de coupe (x_1, x_2) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différents ordres γ . . .	122
3.29	Plan de coupe (x_1, x_3) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différents ordres γ . . .	123
3.30	Plan de coupe (x_2, x_3) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différents ordres γ . . .	124
3.31	Plan de coupe (x_1, x_2) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} pour différents ordres γ	125
3.32	Plan de coupe (x_1, x_3) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} pour différents ordres γ	126

3.33	Plan de coupe (x_2, x_3) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} pour différents ordres γ	127
3.34	Algorithme itératif de point fixe : fonctions de densité de probabilité p_D et p_L des variables aléatoires D et L , respectivement	128
4.1	Composantes $u_{\text{exp},1}^{\text{macro}}$ (en haut) et $u_{\text{exp},2}^{\text{macro}}$ (en bas) du champ de déplacement expérimental macroscopique $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ sur le domaine macroscopique Ω^{macro} avant (à gauche) et après (à droite) application du filtre spatial gaussien	133
4.2	Composantes $u_{\text{exp},1}^{\text{meso}}$ (en haut) et $u_{\text{exp},2}^{\text{meso}}$ (en bas) du champ de déplacement expérimental mésoscopique $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} avant (à gauche) et après (à droite) application du filtre spatial gaussien	134
4.3	Os cortical : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différents ordres γ	136

Liste des tableaux

3.1	Erreurs relatives pour différentes valeurs de N_s pour les estimateurs statistiques des fonctions d'autocorrélation $\eta \mapsto R_{W\gamma}(\boldsymbol{\eta})$ avec $\boldsymbol{\eta} = (\eta, 0)$ et $\eta \mapsto R_{W\gamma}(\boldsymbol{\eta})$ avec $\boldsymbol{\eta} = (0, \eta)$	73
3.2	Comparaison entre la valeur optimale identifiée $\boldsymbol{a}^{\text{macro}}$ et la valeur expérimentale de référence $\boldsymbol{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$	94
3.3	Algorithme itératif de point fixe : comparaison entre la valeur optimale globale $\boldsymbol{b}^{\text{opt}}$ obtenue à partir des 16 valeurs identifiées $\boldsymbol{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \boldsymbol{b}_{16}^{\text{meso}}$ pour chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, et la valeur expérimentale de référence $\boldsymbol{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	97
3.4	Algorithme itératif de point fixe : comparaison entre la valeur optimale globale $\boldsymbol{b}^{\text{opt}}$ et la valeur expérimentale de référence $\boldsymbol{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ pour différentes valeurs du nombre N_s de réalisations indépendantes générées pour l'estimation statistique des espérances mathématiques dans les différents indicateurs numériques	100
3.5	Algorithme génétique : comparaison entre la valeur optimale globale $\boldsymbol{b}^{\text{opt}}$ obtenue à partir des 16 valeurs identifiées $\boldsymbol{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \boldsymbol{b}_{16}^{\text{meso}}$ pour chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, et la valeur expérimentale de référence $\boldsymbol{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	102
3.6	Réseau de neurones artificiels à 2 couches : comparaison entre la valeur optimale globale $\boldsymbol{b}^{\text{opt}}$ obtenue à partir des 16 valeurs identifiées $\boldsymbol{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \boldsymbol{b}_{16}^{\text{meso}}$ pour chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, et la valeur expérimentale de référence $\boldsymbol{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	108
3.7	Réseau de neurones artificiels à 3 couches : comparaison entre la valeur optimale globale $\boldsymbol{b}^{\text{opt}}$ obtenue à partir des 16 valeurs identifiées $\boldsymbol{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \boldsymbol{b}_{16}^{\text{meso}}$ pour chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, et la valeur expérimentale de référence $\boldsymbol{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	109
3.8	Comparaison entre la valeur optimale identifiée $\boldsymbol{a}^{\text{macro}}$ et la valeur expérimentale de référence $\boldsymbol{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$	113
3.9	Algorithme itératif de point fixe : comparaison entre la valeur optimale globale $\boldsymbol{b}^{\text{opt}}$ obtenue à partir des 3 valeurs identifiées $\boldsymbol{b}_1^{\text{meso}}, \boldsymbol{b}_2^{\text{meso}}, \boldsymbol{b}_3^{\text{meso}}$ pour chacun des 3 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \Omega_2^{\text{meso}}, \Omega_3^{\text{meso}}$, et la valeur expérimentale de référence $\boldsymbol{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	115

4.1	Valeur optimale identifiée $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ du paramètre $\mathbf{a} = (\kappa_T, \mu_T)$	137
4.2	Algorithme itératif de point fixe : valeur optimale identifiée \mathbf{b}^{meso} de l'hyperparamètre $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\kappa}_T, \underline{\mu}_T)$ pour le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso}	138
4.3	Réseaux de neurones à 2 et 3 couches : valeur optimale identifiée \mathbf{b}^{meso} de l'hyperparamètre $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\kappa}_T, \underline{\mu}_T)$ pour le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso}	139

Liste des algorithmes

1	Algorithme itératif de point fixe pour la résolution du problème d'optimisation multi-objectif (2.18)	61
---	---	----

Notations et abréviations

Notations générales

Variable déterministe : une variable déterministe scalaire est notée par une lettre minuscule, comme e.g. x .

Vecteur déterministe : un vecteur déterministe est noté par une lettre minuscule en gras, comme e.g. $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$.

Matrice déterministe : une matrice déterministe est notée par une lettre majuscule entre crochet, comme e.g. $[A]$.

Variable aléatoire : une variable aléatoire à valeur scalaire est notée par une lettre majuscule, comme e.g. X .

Vecteur aléatoire : un vecteur aléatoire (ou variable aléatoire à valeurs vectorielles) est noté par une lettre majuscule en gras, comme e.g. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)$.

Matrice aléatoire : une matrice aléatoire (ou variable aléatoire à valeurs matricielles) est notée par une lettre majuscule en gras entre crochets, comme e.g. $[\mathbf{A}]$.

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)$: vecteur dans \mathbb{R}^d .

$\|\mathbf{x}\|$: norme euclidienne usuelle sur \mathbb{R}^d telle que $\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{\alpha=1}^d x_\alpha^2$ pour un vecteur $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq d}$ de \mathbb{R}^d .

$\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire euclidien usuel sur \mathbb{R}^d tel que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{\alpha=1}^d x_\alpha y_\alpha$ pour deux vecteurs $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq d}$ et $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq d}$ de \mathbb{R}^d .

$[A]^T$: opérateur transposée (ou opérateur de transposition) pour une matrice réelle $[A] \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$.

$\text{tr}([A])$: opérateur trace tel que $\text{tr}([A]) = \sum_{i=1}^n [A]_{ii}$ pour une matrice réelle $[A] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ (avec des composantes $[A]_{ij}$).

$\det([A])$: opérateur déterminant pour une matrice réelle $[A] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

$\|[A]\|_F$: norme de Frobenius (ou de Hilbert-Schmidt) telle que $\|[A]\|_F^2 = \text{tr}([A]^T[A]) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} [A]_{ij}^2$ pour une matrice réelle $[A] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ (avec des composantes $[A]_{ij}$)

δ_{ij} : symbole de Kronecker tel que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

$[I_n]$: matrice identité (ou matrice unité) dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $[I_n]_{ij} = \delta_{ij}$.

\mathbf{I} : tenseur identité (ou tenseur unité) symétrique d'ordre quatre tel que $\{\mathbf{I}\}_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$.

$\mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x})$: fonction indicatrice de l'ensemble Ω telle que $\mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x} \in \Omega$ et $\mathbb{1}_\Omega(\mathbf{x}) = 0$ si $\mathbf{x} \notin \Omega$.

i : nombre imaginaire pur vérifiant $i^2 = -1$.

\bar{z} : conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ tel que $\bar{z} = a - ib$, où a et b sont des nombres réels.

\hat{f} : transformée de Fourier d'une fonction f intégrable (ou de carré intégrable) définie de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

\otimes : produit tensoriel usuel.

$::$: produit tensoriel doublement contracté (ou de contraction double) usuel.

∇ : opérateur gradient d'un champ à valeur vectorielles par rapport à \mathbf{x} .

div : opérateur divergence d'un champ de tenseur d'ordre deux par rapport \mathbf{x} .

\mathbb{E} : espérance mathématique.

$\mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{R})$: ensemble des matrices réelles de taille $(n \times m)$.

$\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées réelles de taille $(n \times n)$.

$\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrée réelles symétriques de taille $(n \times n)$.

$\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrée réelles symétriques définies positives de taille $(n \times n)$.

\mathbb{R} : ensemble des nombres réels.

\mathbb{R}^* : ensemble $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ des nombres réels non nuls.

\mathbb{R}^+ : ensemble $[0, +\infty[$ des nombres réels nul ou positifs.

\mathbb{R}^d : espace vectoriel euclidien de dimension d .

\emptyset : ensemble vide.

Notations spécifiques

Ω^{macro} : domaine macroscopique.

$\partial\Omega^{\text{macro}}$: frontière de Ω^{macro} .

Γ_N^{macro} : partie de $\partial\Omega^{\text{macro}}$ où sont appliquées les conditions aux limites de Neumann.

Γ_D^{macro} : partie de $\partial\Omega^{\text{macro}}$ où sont appliquées les conditions aux limites de Dirichlet.

$|\Omega^{\text{macro}}|$: mesure de volume de Ω^{macro} .

$\mathbf{n}^{\text{macro}}$: vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega^{\text{macro}}$.

C^{macro} : tenseur d'élasticité à l'échelle macroscopique.

$[C^{\text{macro}}]$: représentation matricielle de C^{macro} .

$[C_{2D}^{\text{macro}}]$: représentation matricielle de C^{macro} en 2D.

S^{macro} : tenseur de souplesse à l'échelle macroscopique.

$[S^{\text{macro}}]$: représentation matricielle de S^{macro} .

$[S_{2D}^{\text{macro}}]$: représentation matricielle de S^{macro} en 2D.

\mathbf{a} : paramètre inconnu à l'échelle macroscopique.

$\mathbf{a}^{\text{macro}}$: valeur optimale de \mathbf{a} .

$\mathcal{A}^{\text{macro}}$: ensemble admissible de \mathbf{a} .

$\mathbf{f}^{\text{macro}}$: champ de force surfacique uniformément réparti sur Γ_N^{macro} .

$\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$: champ de déplacement expérimental à l'échelle macroscopique.

$\mathbf{u}^{\text{macro}}$: champ de déplacement à l'échelle macroscopique.

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$: champ des déformations expérimentales (linéarisé) à l'échelle macroscopique.

$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{macro}}$: champ des déformations (linéarisé) à l'échelle macroscopique.

$\boldsymbol{\sigma}^{\text{macro}}$: champ des contraintes de Cauchy à l'échelle macroscopique.

Ω^{meso} : sous-domaine mésoscopique.

$\partial\Omega^{\text{meso}}$: frontière de Ω^{meso} .

$|\Omega^{\text{meso}}|$: mesure de volume de Ω^{meso} .

\mathbf{n}^{meso} : vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega^{\text{meso}}$.

\mathbf{C}^{meso} : champ de tenseur d'élasticité aléatoire à l'échelle mésoscopique.

$[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$: représentation matricielle de \mathbf{C}^{meso} .

$[\mathbf{C}_{2\text{D}}^{\text{meso}}]$: représentation matricielle de \mathbf{C}^{meso} en 2D.

\mathbf{S}^{meso} : champ de tenseur de souplesse aléatoire à l'échelle mésoscopique.

$[\mathbf{S}^{\text{meso}}]$: représentation matricielle de \mathbf{S}^{meso} .

$[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{meso}}]$: représentation matricielle de \mathbf{S}^{meso} en 2D.

\mathbf{b} : hyperparamètre inconnu à l'échelle mésoscopique.

\mathbf{b}^{meso} : valeur optimale de \mathbf{b} identifiée avec une seule mesure expérimentale.

\mathbf{b}^{opt} : valeur optimale de \mathbf{b} identifiée avec plusieurs mesures expérimentales.

$\mathcal{B}^{\text{meso}}$: ensemble admissible de \mathbf{b} .

$\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}}$: ensemble admissible réduit de \mathbf{b} .

$\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$: champ de déplacement expérimental à l'échelle mésoscopique.

\mathbf{U}^{meso} : champ de déplacement aléatoire à l'échelle mésoscopique.

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$: champ des déformations expérimentales (linéarisé) à l'échelle mésoscopique.

$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{meso}}$: champ des déformations (linéarisé) aléatoire à l'échelle mésoscopique.

$\boldsymbol{\Sigma}^{\text{meso}}$: champ des contraintes de Cauchy aléatoire à l'échelle mésoscopique.

Ω^{VER} : domaine d'un volume élémentaire représentatif.

$\partial\Omega^{\text{VER}}$: frontière de Ω^{VER} .

$|\Omega^{\text{VER}}|$: mesure de volume de Ω^{VER} .

\mathbf{n} : vecteur normal unitaire sortant de $\partial\Omega^{\text{VER}}$.

\mathbf{C} : champ de tenseur d'élasticité aléatoire dans Ω^{VER} à l'échelle mésoscopique.

\mathbf{S} : champ de tenseur de souplesse aléatoire dans Ω^{VER} à l'échelle mésoscopique.

\mathbf{C}^{eff} : tenseur d'élasticité aléatoire effectif dans Ω^{VER} à l'échelle macroscopique.

$[\mathbf{C}^{\text{eff}}]$: représentation matricielle de \mathbf{C}^{eff} .

\mathbf{S}^{eff} : tenseur de souplesse aléatoire effectif dans Ω^{VER} à l'échelle macroscopique.

\mathbf{U} : champ de déplacement aléatoire dans Ω^{VER} à l'échelle mésoscopique.

\mathcal{E} : champ des déformations (linéarisé) aléatoire dans Ω^{VER} à l'échelle mésoscopique.

\mathcal{E}^{eff} : tenseur des déformations (linéarisé) aléatoire effectif dans Ω^{VER} à l'échelle macroscopique.

$\mathbf{\Sigma}$: champ des contraintes de Cauchy aléatoire dans Ω^{VER} à l'échelle mésoscopique.

$\mathbf{\Sigma}^{\text{eff}}$: tenseur des contraintes de Cauchy aléatoire effectif dans Ω^{VER} à l'échelle macroscopique.

\mathbf{A} : champ de tenseur de localisation des déformations aléatoire dans Ω^{VER} à l'échelle mésoscopique.

\mathbf{B} : champ de tenseur de concentration des contraintes aléatoire dans Ω^{VER} à l'échelle mésoscopique.

Abréviations

p.s. : presque sûrement.

VER : volume élémentaire représentatif.

CCD : « Charge-Coupled Device » en anglais.

CMOS : « Complementary Metal-Oxide-Semiconductor » en anglais.

DIC : « Digital Image Correlation » en anglais.

DVC : « Digital Volume Correlation » en anglais.

μ CT : « micro-Computed Tomography » en anglais.

MRI : « Magnetic Resonance Imaging » en anglais.

OCT : « Optical Coherence Tomography » en anglais.

LS : « Least Squares » en anglais.

MLE : « Maximum Likelihood Estimation » en anglais.

MaxEnt : « Maximum Entropy » en anglais.

KL : Karhunen-Loève.

PC : « Polynomial Chaos » en anglais.

MC : Monte Carlo.

HDH : homogénéisation en déformations homogènes.

HCH : homogénéisation en contraintes homogènes.

RandMat : « Random Matrices » en anglais.

RandField : « Random Fields » en anglais.

FP : « Fixed-Point » en anglais.

GA : « Genetic Algorithm » en anglais.

NN : « Neural Network » en anglais.

GPU : « Graphics Processing Unit » en anglais.

Introduction

1 Contexte et positionnement de la recherche

Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire, la modélisation et la simulation numérique du comportement mécanique des matériaux hétérogènes à microstructure aléatoire complexe (couvrant souvent plusieurs échelles) soulèvent de nombreux défis scientifiques. La modélisation de tels matériaux hétérogènes constitue un enjeu scientifique avec de nombreuses applications, par exemple en ce qui concerne les roches sédimentaires, les matériaux composites naturels (e.g. du bois) ou artificiels à renforcement fibreux (e.g. des cermets à base de fibres céramiques incorporées dans une matrice d'aluminium), les matériaux à base de ciment (e.g. certains bétons ou des mortiers constitués d'une pâte de ciment avec des particules de sable incrustées), certains milieux poreux (e.g. des plaques de plâtre), certains tissus biologiques vivants (e.g. des os corticaux ou des membranes biologiques), entre autres [Torquato 2002]. Bien qu'à l'échelle macroscopique ces matériaux soient souvent considérés et modélisés comme des milieux élastiques homogènes et déterministes dans la plupart des applications pratiques, ils sont non seulement hétérogènes et aléatoires à l'échelle microscopique, mais ils ne peuvent généralement pas non plus être explicitement ou correctement décrits par les propriétés morphologiques et mécaniques locales de leurs constituants, et facilement reconstruits dans un cadre de modélisation numérique en présence d'interfaces multiples.

Ainsi, la modélisation et l'identification des propriétés élastiques pour ce type de matériaux à des échelles méso- ou microscopiques ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche ces dernières décennies. Désormais, avec les récents développements réalisés autour de la construction de modèles stochastiques pour décrire des champs de tenseurs d'élasticité aléatoires et de l'identification inverse expérimentale à l'aide de techniques d'imagerie de champs, une des approches les plus prometteuses consiste à introduire un modèle stochastique *ad hoc* (non-gaussien) représentant les propriétés élastiques apparentes (hétérogènes et aléatoires) de la microstructure considérée à une échelle mésoscopique donnée. Notons que cette échelle mésoscopique correspond généralement à l'échelle de la longueur de corrélation spatiale de la microstructure, et que pour des matériaux à structure hiérarchique tels que l'os cortical ou le tendon, différentes échelles mésoscopiques peuvent être définies. Une telle modélisation

stochastique de milieux élastiques hétérogènes aléatoires à l'échelle mésoscopique peut ensuite être utilisée pour caractériser les propriétés mécaniques macroscopiques (effectives) dans le cadre de l'homogénéisation numérique stochastique sur un volume élémentaire représentatif (VER) qui doit être, lorsqu'il existe, suffisamment grand par rapport à l'échelle microscopique (i.e. l'échelle fine à laquelle les hétérogénéités sont définies) et suffisamment petite par rapport à l'échelle macroscopique (i.e. l'échelle grossière à laquelle les simulations numériques ou les essais expérimentaux sur des structures en ingénierie mécanique sont généralement effectués). Dans ce cadre probabiliste, une question majeure concerne l'identification inverse statistique d'un modèle stochastique *prior* paramétré par un nombre faible ou modéré d'hyperparamètres en utilisant uniquement des données expérimentales partielles et limitées.

D'une part, les méthodes inverses d'identification expérimentale des propriétés élastiques de matériaux homogènes ou hétérogènes à l'échelle macroscopique et/ou mésoscopique ont été le sujet de nombreux travaux de recherche au cours des trois dernières décennies. Les premières méthodes relatives à la caractérisation expérimentale et à la description des morphologies de microstructures aléatoires en utilisant des techniques d'analyse d'images ont été introduites et développées à la fin des années 1980 [Jeulin 1987, Jeulin 1989, Jeulin 2000, Jeulin 2001a, Jeulin 2001b, Jeulin 2012] pour la modélisation et la simulation numérique de microstructures aléatoires constituées de matériaux hétérogènes. Depuis le début des années 1990, les avancées technologiques significatives dans le domaine des instruments de mesure optique, comme l'apparition des caméras numériques équipées de capteurs CCD (« Charge-Coupled Device » en anglais) ou CMOS (« Complementary Metal-Oxide-Semiconductor » en anglais) et d'objectifs de microscope, ont largement contribué à l'émergence des techniques d'imagerie telles que la corrélation d'images numériques (DIC pour « Digital Image Correlation » en anglais) bidimensionnelles (2D) ou tridimensionnelles (3D). Les techniques DIC [Sutton et al. 1983, Sutton et al. 1986, Pan et al. 2009, Sutton et al. 2009, Hild et Roux 2012] sont maintenant couramment utilisées en mécanique des solides et en science des matériaux pour l'obtention de mesures expérimentales de champs de déplacement élastique sur des échantillons soumis à un chargement externe [Kahn-Jetter et al. 1994, Vendroux et Knauss 1998a, Vendroux et Knauss 1998b, Hild et al. 2002, Roux et al. 2002, Besnard et al. 2006, Hild et Roux 2006, Roux et Hild 2008, Réthoré et al. 2008, Bornert et al. 2009, Bornert et al. 2010] afin d'identifier les propriétés mécaniques de matériaux hétérogènes à microstructure complexe [Constantinescu 1995, Baxter et Graham 2000, Chevalier et al. 2001, Geymonat et al. 2002, Geymonat et Pagano 2003, Graham et al. 2003, Bonnet et Constantinescu 2005, Hild et Roux 2006, Avril et Pierron 2007, Avril et al. 2008a, Avril et al. 2008b] pour différentes classes de symétrie matérielle. Les récentes évolutions des systèmes d'acquisition de données et des logiciels de traitement d'images 3D obtenues par exemple par microtomographie à rayons X (μ CT pour « micro-Computed Tomography » en anglais) [Flannery et al. 1987, Kak et Slaney 1988, Baruchel et al. 2000, Stock 2008, Desrues et al. 2010, Maire et Withers 2014], résonance magnétique nucléaire (MRI pour « Magnetic Resonance Imaging » en anglais) [van den Elsen

et al. 1993, Maintz et Viergever 1998, Liang et Lauterbur 2000, Hill et al. 2001], tomographie par cohérence optique (OCT pour « Optical Coherence Tomography » en anglais) [Beaurepaire et al. 1998, Schmitt 1999, Fercher 2010, Gambichler et al. 2011, Popescu et al. 2011] ou toute autre technique non-invasive et non-destructive pour la reconstruction d'images 3D en haute résolution, ont permis l'obtention de mesures tridimensionnelles de champs de déplacement par corrélation d'images numériques volumiques (DVC pour « Digital Volume Correlation » en anglais) [Bay et al. 1999, Verhulp et al. 2004, Bay 2008, Roux et al. 2008, Réthoré et al. 2008, Rannou et al. 2010, Hild et Roux 2012, Madi et al. 2013, Roberts et al. 2014, Fedele et al. 2014, Hild et al. 2016, Bouterf et al. 2017, Buljac et al. 2018]. De telles mesures de champs 3D complets offrent la possibilité d'identifier des modèles stochastiques de champs d'élasticité aléatoires 3D à valeurs tensorielles (dont la classe de symétrie matérielle est potentiellement incertaine) à différentes échelles pour la caractérisation mécanique de microstructures réelles 3D constituées de matériaux hétérogènes.

D'autre part, au milieu des années 2000, de nombreux travaux de recherche ont été menés sur l'identification inverse statistique de modèles stochastiques du champ d'élasticité aléatoire à valeurs tensorielles en petite ou grande dimension stochastique à l'échelle macroscopique et/ou mésoscopique pour des microstructures complexes modélisées par des milieux élastiques linéaires hétérogènes aléatoires isotropes ou anisotropes [Desceliers et al. 2006, Ghanem et Doostan 2006, Desceliers et al. 2007, Youssef M. Marzouk and Habib N. Najm and Larry A. Rahn 2007, Arnst et al. 2008, Das et al. 2006, Das et al. 2009, Desceliers et al. 2009, Guillemot et al. 2009, Ma et Zabaras 2009, Marzouk et Najm 2009, Arnst et al. 2010, Das et al. 2010, Ta et al. 2010, Soize 2010, Soize 2011]. Les méthodologies proposées pour résoudre le problème inverse statistique lié à l'identification d'un champ aléatoire non-gaussien à valeurs tensorielles (tel que le champ d'élasticité apparent d'une microstructure élastique hétérogène anisotrope à l'échelle mésoscopique) à l'aide de données expérimentales (souvent partielles et limitées) reposent principalement sur (i) les formulations mathématiques de l'analyse fonctionnelle pour les problèmes aux limites (stochastiques), (ii) les outils statistiques issus de la théorie des probabilités, de la théorie de l'information, des statistiques mathématiques et de l'optimisation stochastique, tels que la méthode des moindres carrés (LS pour « Least Squares » en anglais) [Lawson et Hanson 1995, Soize 2017], la méthode d'estimation du maximum de vraisemblance (MLE pour « Maximum Likelihood Estimation » en anglais) [Serfling 1980, Papoulis et Pillai 2002, Spall 2005, Soize 2017], le principe du maximum d'entropie (MaxEnt pour « Maximum Entropy » en anglais) [Jaynes 1957a, Jaynes 1957b, Sobezyk et Trębicki 1990, Kapur et Kesavan 1992, Jumarie 2000, Jaynes 2003, Cover et Thomas 2006, Soize 2017], les statistiques non-paramétriques [Serfling 1980, Bowman et Azzalini 1997], les méthodes d'inférence bayésienne [Beck et Katafygiotis 1998, Bernardo et Smith 2001, Congdon 2007, Carlin et Louis 2009, Stuart 2010, Tan et al. 2010, Soize 2017], les problèmes inverses statistiques et les algorithmes d'optimisation stochastiques associés [Collins et al. 1974, Walter et Pronzato 1997, Spall 2005, Kaipio et Somersalo 2005, Tarantola 2005, Isakov 2006], (iii) des techniques avancées de

représentation fonctionnelle et des méthodes probabilistes, comme la décomposition de Karhunen-Loève (KL) [Karhunen 1946, Loève 1977, Loève 1978] pour la construction de modèles stochastiques d'ordre réduit, et le développement par chaos polynomial (PC pour « Polynomial Chaos » en anglais) [Ghanem et Spanos 1991, Ghanem 1999, Xiu et Karniadakis 2002, Soize et Ghanem 2004, Wan et Karniadakis 2006] pour une représentation stochastique en grande dimension adaptée à des champs aléatoires du second ordre non-gaussiens, (iv) les méthodes spectrales [Ghanem et Spanos 1991, Xiu et Hesthaven 2005, Babuška et al. 2007, Nouy 2008, Le Maître et Knio 2010] et les approches basées sur l'échantillonnage [Cafisch 1998, Schuëller et Spanos 2001, Rubinstein et Kroese 2016] pour résoudre les problèmes aux limites stochastiques, et (v) les méthodes d'homogénéisation numérique stochastique [Sanchez-Palencia 1980, Sanchez-Palencia et Zaoui 1985, Francfort et Murat 1986, Suquet 1987, Huet 1990, Sab 1992, Nemat-Nasser et Hori 1993, Jikov et al. 1994, Suquet 1997, Andrews et Wright 1998, Forest et Sab 1998, Pradel, F. et Sab, K. 1998, Forest et al. 2000, Bornert et al. 2001, Jeulin 2001a, Jeulin 2001b, Torquato 2002, Zaoui 2002, Kanit et al. 2003, Bourgeat et Piatnitski 2004, Sab et Nedjar 2005, Ostoja-Starzewski 2006, Ostoja-Starzewski 2007, Soize 2008, Xu et Chen 2009, Tootkaboni et Graham-Brady 2010, Guilleminot et al. 2011, Jeulin 2012] pour relier l'échelle méso- ou microscopique et l'échelle macroscopique. La combinaison de ces méthodes probabilistes et statistiques avancées a conduit aux premiers travaux fondamentaux sur l'identification inverse statistique de champs aléatoires non-gaussiens à valeurs scalaires ou tensorielles en petite ou grande dimension à partir de données expérimentales partielles et limitées. Ces travaux ont été principalement dédiés à l'identification inverse statistique des hyperparamètres de modèles stochastiques *prior* en petite dimension stochastique, tels que un champ moyen (correspondant à la fonction moyenne du champ aléatoire), un paramètre (ou champ) de dispersion (quantifiant le niveau de fluctuations statistiques du champ aléatoire), une (des) longueur(s) de corrélation spatiale (liée(s) à la structure de corrélation spatiale du champ aléatoire) ou encore les coefficients déterministes d'une décomposition chaos du champ aléatoire [Desceliers et al. 2006, Ghanem et Doostan 2006, Desceliers et al. 2007, Arnst et al. 2008, Das et al. 2006, Das et al. 2009, Desceliers et al. 2009, Guilleminot et al. 2009, Ma et Zabarar 2009, Marzouk et Najm 2009, Arnst et al. 2010, Das et al. 2010, Ta et al. 2010, Cottureau et al. 2011, Desceliers et al. 2012, Clouteau et al. 2013]. A ce jour, les travaux les plus récents et les plus avancés portent sur l'identification inverse de modèles stochastiques *posterior*, qui sont des représentations stochastiques en grande dimension (qui peuvent, dans certains cas, être construit comme des développements KL et/ou PC à coefficients aléatoires [Soize et Ghanem 2009], ou directement par l'inférence bayésienne) de modèles stochastiques *prior* de champs aléatoires à valeurs scalaires ou tensorielles non-gaussiens [Oliveira et al. 1997, Wang et Zabarar 2004a, Wang et Zabarar 2004b, Desceliers et al. 2006, Ghanem et Doostan 2006, Desceliers et al. 2007, Youssef M. Marzouk and Habib N. Najm and Larry A. Rahn 2007, Das et al. 2006, Soize et Ghanem 2009, Guilleminot et al. 2009, Das et al. 2009, Ma et Zabarar 2009, Marzouk et Najm 2009, Soize 2010, Arnst et al. 2010, Das et al. 2010, Soize 2011, Soize 2012, Perrin et al. 2012, Perrin et al.

2013, Clouteau et al. 2013, Nouy et Soize 2014] .

Dans la continuité de ces travaux, une méthodologie innovante a été récemment proposée pour l'identification inverse statistique multi-échelle d'un modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité apparent aléatoire [Nguyen et al. 2015]. Celle-ci a été formulée dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire 3D sous les hypothèses suivantes : (i) à l'échelle macroscopique, le tenseur d'élasticité effectif est déterministe (i.e. séparation des échelles) et homogène (i.e. constant dans l'espace) ; (ii) à une échelle mésoscopique donnée, le champ d'élasticité aléatoire à valeurs tensorielles est la restriction à un sous-domaine mésoscopique d'un champ aléatoire statistiquement homogène (ou spatialement stationnaire)¹ indexées sur \mathbb{R}^d , ce qui permet de rester cohérent avec l'hypothèse d'existence d'un VER dans le cadre de l'homogénéisation stochastique [Soize 2008, Soize 2017].

L'objectif principal de cette nouvelle méthodologie consiste donc à identifier le modèle stochastique *prior* introduit dans [Soize 2006] et utilisé pour modéliser le champ de tenseur d'élasticité apparent (hétérogène et aléatoire) à l'échelle mésoscopique, à partir de mesures expérimentales partielles et limitées. Ce modèle stochastique *prior* est construit en utilisant le principe du MaxEnt [Jaynes 1957a, Jaynes 1957b, Sobezyk et Trębicki 1990, Kapur et Kesavan 1992, Jumarie 2000, Jaynes 2003, Cover et Thomas 2006, Soize 2017] dans le cadre de la théorie de l'information [Shannon 1948, Shannon 2001, Balian 1968]. On obtient alors un champ aléatoire non-gaussien (potentiellement non-homogène), continu en moyenne d'ordre deux, à valeurs dans l'ensemble des matrices carrées réelles symétriques définies positives. Une représentation algébrique explicite *ad hoc* a par ailleurs été établie dans [Soize 2006]. Ce modèle stochastique *prior* de champ d'élasticité aléatoire a été utilisé, notamment, pour les problèmes aux limites elliptiques stochastiques tels que les problèmes d'élasticité linéaire en statique [Soize 2006, Soize 2008, Soize 2017]. Il est classiquement paramétré par un nombre faible ou modéré d'hyperparamètres à valeurs scalaires, vectorielles et/ou tensorielles, à savoir le champ d'élasticité moyen à valeurs tensorielles, un champ de coefficient de dispersion à valeurs scalaires (ou un coefficient de dispersion si celui-ci est indépendant de la position spatiale) contrôlant le niveau des fluctuations statistiques du champ d'élasticité aléatoire (autour de sa fonction moyenne) et des longueurs de corrélation spatiale (à valeurs scalaires).

Le problème de l'identification inverse statistique de ce modèle stochastique *prior* est formulé comme un problème d'optimisation multi-objectif dont les paramètres optimaux sont les valeurs identifiées des hyperparamètres du modèle stochastique.

1. Un champ aléatoire indexé sur \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$ étant la dimension spatiale) est dit statistiquement homogène (ou spatialement stationnaire) si son système de lois marginales est invariant par translation, i.e. invariant pour la translation des coordonnées spatiales dans \mathbb{R}^d [Torquato 2002, Soize 2017]. Par ailleurs, un champ aléatoire indexé sur \mathbb{R}^d est dit statistiquement isotrope si son système de lois marginales est invariant par rotation, i.e. invariant pour la rotation des coordonnées spatiales dans \mathbb{R}^d [Torquato 2002].

Cependant, dans le cadre cette méthodologie, il est établi que la fonction moyenne (ou valeur moyenne le cas échéant) du champ d'élasticité aléatoire ne peut pas être directement identifiée à l'aide des seules mesures expérimentales de champs cinématiques disponibles à l'échelle mésoscopique. Il faudrait aussi connaître les valeurs expérimentales des contraintes associées aux champs cinématiques observés expérimentalement à l'échelle mésoscopique, ces valeurs n'étant pas disponibles. Inversement, les autres hyperparamètres ne peuvent pas être identifiés en utilisant seulement des mesures expérimentales de champs disponibles à l'échelle macroscopique. Par conséquent, une telle procédure d'identification inverse statistique nécessite des mesures expérimentales multi-échelles de champs qui doivent être effectuées simultanément aux échelles macroscopique et mésoscopique, étant donné qu'un seul échantillon soumis à un chargement externe donné à l'échelle macroscopique est expérimentalement testé. Une méthode d'homogénéisation stochastique est alors utilisée pour propager les incertitudes à l'échelle mésoscopique vers l'échelle macroscopique sous l'hypothèse classique de séparation des échelles, de sorte qu'un sous-domaine mésoscopique suffisamment grand puisse être défini dans le domaine macroscopique de l'échantillon et considéré comme un VER. Notons cependant qu'il n'est pas nécessaire pour ce VER d'avoir la même taille que le(s) sous-domaine(s) mésoscopique(s) sur le(s)quel(s) les mesures expérimentales sont effectuées. Ainsi, le problème inverse statistique multi-échelle est formulé comme un problème d'optimisation multi-objectif qui consiste à minimiser une fonction-coût multi-objectif (à valeurs vectorielles) définie par trois indicateurs numériques correspondant à des fonctions-coût mono-objectif (à valeurs scalaires) [Nguyen et al. 2015], à savoir (i) un indicateur numérique à l'échelle macroscopique permettant de quantifier la distance (définie par rapport à une métrique donnée) entre les champs expérimentaux mesurés à l'échelle macroscopique et les champs numériques simulés à la même échelle, (ii) un indicateur numérique à l'échelle mésoscopique permettant de quantifier la distance entre les fluctuations statistiques des champs expérimentaux mesurés à l'échelle mésoscopique et celles des champs numériques simulés à la même échelle, et (iii) un indicateur numérique macroscopique-mésoscopique (multi-échelle) permettant de quantifier la distance entre le tenseur d'élasticité à l'échelle macroscopique et le tenseur d'élasticité effectif (aléatoire) construit par homogénéisation numérique stochastique du champ d'élasticité apparent aléatoire dans un VER à l'échelle mésoscopique.

2 Problématique et objectifs de la recherche

La méthode d'identification expérimentale multi-échelle des propriétés mécaniques, initialement proposée et validée par simulation numérique sur un matériau virtuel fictif dans [Nguyen et al. 2015], a été appliquée avec succès à la caractérisation expérimentale des propriétés élastiques d'un tissu biologique (de l'os cortical de bœuf) dans le cadre de l'élasticité linéaire 2D en contraintes planes à partir de mesures optiques multi-échelles de champs de déplacement (obtenues par une méthode DIC

2D) réalisées simultanément aux échelles macroscopique et mésoscopique sur un seul échantillon d'os cortical de bœuf (qui est un tissu biologique vivant avec une microstructure hiérarchique complexe et aléatoire) soumis à un chargement externe statique (compression uni-axiale verticale) à l'échelle macroscopique [Nguyen et al. 2016]. Néanmoins, la méthode proposée présente certains inconvénients qui limitent son utilisation. Premièrement, il est à noter que les fonctions-coût (indicateurs numériques) introduites pour le problème d'optimisation multi-objectif ne sont pas dédiées à un hyperparamètre particulier du modèle stochastique *prior* du champ aléatoire à identifier. Par conséquent, la seule approche envisagée pour la résolution du problème d'optimisation multi-objectif a consisté à utiliser un algorithme d'optimisation globale (algorithme génétique) qui appartient à la classe des algorithmes de recherche aléatoire, génétiques et évolutifs [Cunha et Polak 1967, Censor 1977, Yu 1985, Dauer et Stadler 1986, Goldberg 1989, Deb 2001, Marler et Arora 2004, Konak et al. 2006, Coello Coello 2006, Coello et al. 2007, Deb 2014] pour explorer aléatoirement l'ensemble admissible des hyperparamètres. Malgré un paramétrage adapté (taille de population à chaque nouvelle génération, génération aléatoire de la population initiale, technique de sélection pour la reproduction incluant les opérateurs de croisement et de mutation, nombre d'élites, fraction de croisement, taux de mutation, critères d'arrêt, etc.) de l'algorithme génétique utilisé dans [Nguyen et al. 2015] et l'utilisation du traitement et du calcul en parallèle sur plusieurs dizaines de processeurs, le coût numérique de la résolution du problème d'optimisation multi-objectif est élevé. Ceci s'explique en raison de la grande dimension stochastique du champ d'élasticité aléatoire à valeurs tensorielles. Deuxièmement, lors de la validation et de la mise en application de la méthode d'identification multi-échelle proposée dans [Nguyen et al. 2015], il a été constaté que, pour différents sous-domaines mésoscopiques au sein d'un même domaine macroscopique, l'optimisation de la fonction-coût multi-objectif conduisait à des valeurs optimales des hyperparamètres différentes d'un sous-domaine à un autre. En effet, les mesures expérimentales et champs sur chaque sous-domaine mésoscopique peuvent être modélisés comme des champs aléatoires différents (pas nécessairement statistiquement indépendants), et par conséquent la fonction-coût multi-objectif sur chaque sous-domaine mésoscopique est une fonction déterministe de ces champs aléatoires. Cela explique que les statistiques (lois de probabilité) de la fonction-coût multi-objectif sont différentes d'un sous-domaine mésoscopique à un autre. Dans [Nguyen et al. 2015], la fonction-coût multi-objectif a été remplacée (naïvement) par la moyenne des fonctions-coût multi-objectif calculées sur chacun des sous-domaines mésoscopiques.

L'objectif de cette thèse est d'améliorer la méthodologie initialement proposée dans [Nguyen et al. 2015] en se plaçant toujours dans le cadre de l'élasticité linéaire. Les améliorations envisagées peuvent être recensées autour de deux points majeurs. Tout d'abord, on introduira une fonction-coût mono-objectif (indicateur numérique) supplémentaire à l'échelle mésoscopique permettant de quantifier la distance entre la (les) longueur(s) de corrélation spatiale des champs expérimentaux mesurés et celle(s)

des champs numériques calculés, afin que chaque hyperparamètre du modèle stochastique *prior* ait sa propre fonction-coût dédiée, permettant ainsi d'envisager d'autres stratégies pour la résolution du problème d'optimisation que le recours à l'algorithme génétique utilisé dans [Nguyen et al. 2015]. Dans ce travail de thèse, on cherchera donc à le remplacer par un algorithme plus efficace en terme de coût de calcul, tel qu'un algorithme itératif de type point fixe, pour résoudre le problème d'optimisation multi-objectif sous-jacent. Par ailleurs, nous pourrions construire une base de données numériques associée à l'ensemble de ces indicateurs numériques qui permettra d'entraîner un réseau de neurones artificiels pour l'identification des hyperparamètres du modèle stochastique *prior* du champ aléatoire de tenseur d'élasticité apparent. Un tel réseau de neurones artificiels n'est à entraîner qu'une seule fois indépendamment des mesures expérimentales alors qu'avec la stratégie d'optimisation utilisant l'algorithme itératif de point fixe ou l'algorithme génétique, les calculs doivent être réalisés à nouveau pour chaque nouvelle mesure expérimentale. On espère ainsi diminuer le coût de calcul pour l'identification. Un second axe d'amélioration consiste, dans le cas où des mesures expérimentales de champs sont disponibles sur plusieurs sous-domaines mésoscopiques, à ne pas remplacer « naïvement » la fonction-coût multi-objectif par sa moyenne empirique sur l'ensemble des sous-domaines mésoscopiques, mais à considérer un problème d'optimisation multi-objectif sur chaque sous-domaine mésoscopique. Ainsi, chaque sous-domaine mésoscopique permet de calculer une solution possible des valeurs des hyperparamètres. Chacune de ces valeurs est modélisée comme une réalisation d'un vecteur aléatoire d'hyperparamètres dont le modèle probabiliste *prior* est construit par le principe du MaxEnt, puis identifié par la méthode MLE avec les réalisations ainsi calculées. On espère ainsi améliorer à la fois la robustesse et la précision de la méthode d'identification inverse statistique du modèle stochastique *prior*.

3 Organisation du mémoire

Le mémoire est divisé en quatre chapitres, organisés de la manière suivante.

- Le *premier chapitre* dresse un bref rappel sur la construction et le paramétrage du modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique pour une microstructure complexe aléatoire, ainsi que le cadre théorique lié à l'homogénéisation numérique stochastique sur un VER et deux méthodes d'homogénéisation numériques utilisées dans ce travail pour calculer le tenseur d'élasticité effectif (aléatoire) et/ou le tenseur de souplesse effectif (aléatoire) à l'échelle macroscopique.
- Le *deuxième chapitre* est consacré à la formulation du problème inverse statistique multi-échelle et aux stratégies de résolution associées. Les hypothèses retenues et la stratégie avec les améliorations proposées pour l'identification

inverse statistique multi-échelle du modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité aléatoire sont tout d'abord présentées. La construction des différents indicateurs numériques macroscopique, mésoscopiques et multi-échelle est ensuite détaillée. Le problème inverse statistique multi-échelle est alors formulé comme (i) un problème d'optimisation mono-objectif pour l'identification des paramètres intervenant dans le modèle déterministe du tenseur d'élasticité effectif (homogène et déterministe) à l'échelle macroscopique, et (ii) un problème d'optimisation multi-objectif pour l'identification des hyperparamètres intervenant dans le modèle stochastique *prior* du champ de tenseur d'élasticité aléatoire à l'échelle mésoscopique. L'algorithme itératif de point fixe ainsi que l'entraînement d'un réseau de neurones artificiels introduits dans ce travail pour la résolution du problème d'optimisation multi-objectif (à la place de l'algorithme génétique utilisé dans [Nguyen et al. 2015]) sont également décrits. Enfin, dans le cas où des mesures expérimentales sont disponibles sur plusieurs sous-domaines mésoscopiques, une modélisation probabiliste *ad hoc* des hyperparamètres du modèle stochastique *prior* est introduite afin d'améliorer la robustesse et la précision de la méthode d'identification inverse statistique.

- Le *troisième chapitre* fait l'articulation entre la méthode d'identification présentée au deuxième chapitre et une application expérimentale présentée au quatrième chapitre. Une validation numérique de la méthode d'identification statistique multi-échelle est proposée sur des matériaux virtuels fictifs dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D contraintes planes et en 3D (en accord avec les hypothèses retenues) avec des données expérimentales multi-échelles simulées numériquement. Les différents algorithmes d'optimisation utilisés pour la résolution du problème d'optimisation multi-objectif, à savoir l'algorithme génétique, l'algorithme itératif de point fixe et l'entraînement d'un réseau de neurones artificiels sont comparés en terme de précision et de coût de calcul.
- Enfin, le *quatrième et dernier chapitre* est dédié à la mise en application de la méthode d'identification proposée sur un matériau biologique hétérogène réel dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D contraintes planes avec des mesures expérimentales multi-échelles de champs 2D obtenues à partir d'un seul essai statique de compression uni-axiale réalisé sur un échantillon d'os cortical de fémur de bœuf et suivi par corrélation d'images numériques 2D aux deux échelles macroscopique et mésoscopique. Le protocole expérimental ainsi que le traitement d'images numériques sont brièvement exposés. Les résultats numériques de la méthode d'identification multi-échelle proposée sont finalement comparés à des valeurs représentatives trouvées dans la littérature pour ce type de matériaux biologiques.

Le mémoire se termine par des conclusions et des perspectives suivies des références bibliographiques utilisées dans ce travail.

Chapitre 1

Rappels théoriques en élasticité linéaire

Sommaire

1	Modélisation stochastique du champ d'élasticité aléatoire	18
1.1	Représentation matricielle et modèle stochastique <i>prior</i> du champ d'élasticité aléatoire	18
1.2	Représentation algébrique <i>prior</i> et propriétés fondamentales du champ d'élasticité aléatoire	22
1.3	Définition et construction des germes stochastiques gaussiens	24
1.4	Hyperparamètres du modèle stochastique <i>prior</i> du champ d'élasticité aléatoire	26
2	Méthodes d'homogénéisation numérique stochastique en élasticité linéaire	27
2.1	Définition des tenseurs d'élasticité et de souplesse effectifs	28
2.2	Méthode d'homogénéisation en déformations homogènes	30
2.3	Méthode d'homogénéisation en contraintes homogènes	31
3	Bilan	33

1 Modélisation stochastique du champ d'élasticité aléatoire

Dans cette première partie du chapitre 1, nous rappelons brièvement les principaux points autour de la construction du modèle stochastique *prior* utilisé à l'échelle mésoscopique afin de modéliser les fluctuations statistiques du champ de tenseur d'élasticité apparent d'une microstructure élastique anisotrope hétérogène. Ce modèle stochastique *prior* doit satisfaire, par construction, certaines propriétés algébriques et statistiques [Soize 2006, Soize 2008], notamment des propriétés de symétrie, d'ellipticité (donc de définie positivité), d'inversibilité en moyenne d'ordre deux, induisant une dépendance statistique entre les composantes du champ de tenseur d'élasticité aléatoire, et potentiellement l'existence d'une borne inférieure définie positive presque sûrement. En outre, il est paramétré par un petit nombre d'hyperparamètres, ce qui rend plus facile la résolution du problème inverse statistique. Par la suite, un modèle stochastique *posterior* (paramétré par un nombre d'hyperparamètres beaucoup plus grand) peut être construit à partir du modèle stochastique *prior* et des données disponibles en utilisant une méthode d'inférence bayésienne [Soize 2010, Soize 2011, Soize 2012, Perrin et al. 2012, Perrin et al. 2013, Nouy et Soize 2014] afin d'améliorer et d'enrichir la description des propriétés élastiques mésoscopiques et de mieux représenter les mesures expérimentales.

1.1 Représentation matricielle et modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité aléatoire

Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire, le milieu élastique aléatoire est modélisé par un champ de tenseur d'élasticité aléatoire d'ordre quatre \mathbf{C}^{meso} indexé sur un domaine mésoscopique ouvert borné $\Omega^{\text{meso}} \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$ étant la dimension de l'espace) qui satisfait presque sûrement (p.s.) les propriétés classiques de symétrie majeure et mineure, c'est-à-dire pour $1 \leq i, j, k, l \leq d$ et pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$,

$$\{\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})\}_{ijkl} = \{\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})\}_{klij} = \{\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})\}_{jikl} = \{\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})\}_{ijlk}. \quad (1.1)$$

De plus, le champ de tenseur d'élasticité aléatoire \mathbf{C}^{meso} est défini positif, c'est-à-dire pour tout tenseur d'ordre deux réel non-nul symétrique $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$, on a la propriété suivante pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$,

$$\boldsymbol{\zeta} : \mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\zeta} = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq d} \{\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})\}_{ijkl} \zeta_{ij} \zeta_{kl} > 0, \quad (1.2)$$

où le symbole deux-points $:$ désigne le produit tensoriel doublement contracté (ou de contraction double) classique. Ainsi, \mathbf{C}^{meso} peut être décrit par sa représentation matricielle $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$, qui est un champ aléatoire indexé sur Ω^{meso} et à valeurs dans

l'ensemble $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ (avec $n = d(d+1)/2$ en élasticité linéaire) des matrices réelles symétriques définies positives de taille $(n \times n)$. Cette représentation peut être écrite en utilisant par exemple une notation de Kelvin-Mandel [Rychlewski 1984, Mehrabadi et Cowin 1990, Bóna et al. 2007] ou de Voigt-Mandel [Voigt 1910].

Contrairement à un modèle stochastique paramétrique qui consisterait à modéliser les fluctuations statistiques d'un ou plusieurs paramètre(s) intervenant dans le modèle numérique et à modéliser les fluctuations statistiques du champ aléatoire de tenseur d'élasticité dans une classe de symétrie *a priori*, la modélisation stochastique non-paramétrique permet de prendre en compte les fluctuations statistiques du champ d'élasticité aléatoire non décrites par la classe de symétrie, ce qui est typiquement le cas de la modélisation des propriétés mécaniques d'une microstructure complexe aléatoire à l'échelle mésoscopique. Dans ce travail de thèse, nous nous limitons à une modélisation *prior* à travers la construction de la fonction de densité de probabilité du champ d'élasticité aléatoire à valeurs matricielles $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ indexé sur un domaine ouvert borné $\Omega^{\text{meso}} \subset \mathbb{R}^d$. De plus, comme les données expérimentales dont nous disposons sont partielles et limitées, on adopte une représentation paramétrique du champ d'élasticité aléatoire $[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$ qui dépend d'un hyperparamètre à valeurs vectorielles \mathbf{b} appartenant à un ensemble admissible $\mathcal{B}^{\text{meso}}$. Il convient de noter que, même si on disposait d'un grand nombre de réalisations expérimentales de $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ (ce qui est très rarement le cas en pratique), il ne serait pas possible de construire directement le modèle stochastique de $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ à l'aide des méthodes statistiques non-paramétriques [Serfling 1980, Bowman et Azzalini 1997], car les propriétés mathématiques et statistiques requises (telles que les propriétés de symétrie, de définie positivité, de variance finie, d'inversibilité en moyenne d'ordre deux, d'existence d'une borne inférieure ou supérieure déterministe ou aléatoire, les conditions d'ellipticité et la structure de corrélation spatiale, par exemple) ne seraient pas satisfaites.

La construction du modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité aléatoire à valeurs matricielles $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ s'appuie sur le principe du maximum d'entropie (MaxEnt) [Jaynes 1957a, Jaynes 1957b, Jaynes 2003, Soize 2017] combiné aux théories des matrices aléatoires (RandMat pour « Random Matrices » en anglais) et des champs aléatoires (RandField pour « Random Fields » en anglais) [Soize 2005, Soize 2006, Soize 2016a]. Le principe du MaxEnt est une procédure d'optimisation issue de la théorie de l'information [Shannon 1948, Shannon 2001, Balian 1968] qui conduit à la construction explicite d'une représentation paramétrique de distributions de probabilité sous un ensemble de contraintes (algébriquement indépendantes) définies par les informations disponibles [Sobczyk et Trębicki 1990, Kapur et Kesavan 1992, Jumarie 2000, Cover et Thomas 2006]. Seules les informations nécessaires et pertinentes doivent être prises en compte afin que les problèmes de simulation directe et d'identification inverse statistique soient mathématiquement bien posés et physiquement cohérents. Ainsi, en exploitant et en intégrant toutes les informations utiles et disponibles comme un ensemble de contraintes, le principe du MaxEnt consiste à maximiser l'entropie de Shannon et permet de construire explicitement une représentation algébrique *ad*

hoc de la fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]}(\cdot; \mathbf{x})$ de la matrice d'élasticité aléatoire $[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]$ en tout point $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$.

Dans le présent travail de recherche, les informations disponibles pour la construction du modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité apparent aléatoire à valeurs matricielles $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ sont les suivantes :

1. sa valeur moyenne statistique $[\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}]$ (champ d'élasticité moyen) est supposée non seulement connue mais aussi appartenir à une certaine classe de symétrie¹ $\mathbb{M}_n^{\text{sym}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{M}_n^+$: pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$,

$$[\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}(\mathbf{x})] = \mathbb{E}\{[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]\} \in \mathbb{M}_n^{\text{sym}}(\mathbb{R}), \quad (1.3)$$

où \mathbb{E} désigne l'espérance mathématique ;

2. $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ est considéré comme la restriction à un sous-domaine mésoscopique ouvert borné Ω^{meso} d'un champ aléatoire statistiquement homogène (ou spatialement stationnaire) indexé sur \mathbb{R}^d : pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$ et tout $\Delta\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$,

$$p_{[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]}([\mathbf{C}^{\text{meso}}]; \mathbf{x}) = p_{[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})]}([\mathbf{C}^{\text{meso}}]; \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}), \quad (1.4)$$

ce qui implique que $p_{[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]}$ est indépendant des coordonnées spatiales \mathbf{x} et donc que la fonction moyenne statistique $[\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}] \in \mathbb{M}_n^{\text{sym}}(\mathbb{R})$ est indépendante de \mathbf{x} . Dans la suite, nous utiliserons la même notation $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ pour désigner le champ aléatoire indexé sur \mathbb{R}^d et sa restriction à Ω^{meso} pour alléger et simplifier les notations ;

3. $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ est un champ aléatoire du second ordre : pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$,

$$\mathbb{E}\{\|[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]\|_F^2\} < +\infty, \quad (1.5)$$

afin de pouvoir mener des analyses statistiques d'ordre deux, où $\|\cdot\|_F$ est la norme de Frobenius (ou de Hilbert-Schmidt) telle que $\|[A]\|_F^2 = \text{tr}([A]^T[A]) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} [A]_{ij}^2$, dans laquelle tr désigne l'opérateur trace pour une matrice réelle $[A] \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ (avec des composantes $[A]_{ij}$), où $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices réelles de taille $(n \times n)$, et l'exposant T désigne l'opérateur transposée (ou opérateur de transposition) ;

4. son inverse $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]^{-1}$ est également un champ aléatoire du second ordre : pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$,

$$\mathbb{E}\{\|[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]^{-1}\|_F^2\} < +\infty, \quad (1.6)$$

afin d'obtenir une solution aléatoire du second ordre du problème aux limites elliptique stochastique sous-jacent. Dans la construction du modèle stochastique *prior* par le principe du MaxEnt, cette propriété est imposée en prenant en compte la contrainte plus forte suivante (voir [Soize 2000, Soize 2001]) : pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$, $\mathbb{E}\{\log(\det([\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})])\} = \nu_{\mathbf{C}}$ avec $|\nu_{\mathbf{C}}| < +\infty$ un paramètre donné, où \det désigne l'opérateur déterminant.

1. D'après les observations physiques, on postule généralement que la classe de symétrie du champ d'élasticité moyen du matériau à l'échelle mésoscopique est la même que celle du tenseur (ou champ de tenseur) d'élasticité à l'échelle macroscopique.

L'existence des moments d'ordre deux de $[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]$ et de son inverse $[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]^{-1}$, avec la propriété de définie positivité de $[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]$, assure l'existence et l'unicité d'une solution aléatoire du second ordre au problème aux limites elliptique stochastique sous-jacent.

Par ailleurs, il convient de noter que d'autres ensembles (ou classes) de modèles stochastiques *prior* et des générateurs aléatoires associés pour des matrices (ou champs) d'élasticité aléatoires non-gaussiennes présentant des fluctuations statistiques dans une classe de symétrie donnée (différente de la classe de symétrie purement anisotrope initialement considérée dans [Soize 2000, Soize 2001, Soize 2005] pour le cas des matrices aléatoires et dans [Soize 2006, Soize 2008, Soize 2012] pour le cas des champs aléatoires) ont été proposés dans [Ta et al. 2010, Guillemot et Soize 2011, Guillemot et Soize 2012a, Guillemot et Soize 2012b, Guillemot et Soize 2012c, Guillemot et Soize 2013b] (voir [Guillemot et Soize 2012a, Guillemot et Soize 2012b, Guillemot et Soize 2012c] pour le cas des matrices aléatoires et [Ta et al. 2010, Guillemot et Soize 2011, Guillemot et Soize 2013b] pour le cas des champs aléatoires). Certains ensembles considèrent également des contraintes de borne inférieure ou supérieure [Das et Ghanem 2009, Guillemot et al. 2011, Guillemot et Soize 2012b, Soize 2016a] (voir [Das et Ghanem 2009] et [Guillemot et al. 2011] pour des contraintes de bornes déterministes dans le cas des matrices aléatoires et des champs aléatoires, respectivement, ainsi que [Guillemot et Soize 2012b, Soize 2016a] pour des contraintes de bornes stochastiques dans le cas des matrices aléatoires). En outre, d'autres modèles stochastiques *prior* et des générateurs aléatoires associés pour des matrices (ou tenseurs) d'élasticité aléatoires présentant p.s. certaines propriétés de symétrie matérielle ont été développés dans [Guillemot et Soize 2013a]. Enfin, des modèles stochastiques *prior* plus avancés pour des matrices (ou champs) d'élasticité aléatoires présentant des fluctuations statistiques dominantes dans une classe de symétrie donnée (de sorte que la matrice d'élasticité aléatoire soit, en moyenne, proche de cette classe de symétrie) avec des fluctuations statistiques (plus ou moins) anisotropes autour de cette classe de symétrie (chacun des niveaux de fluctuations statistiques étant contrôlé indépendamment l'un de l'autre) ont été proposés récemment dans [Guillemot et Soize 2012c, Guillemot et Soize 2013b, Soize 2016b] (voir [Guillemot et Soize 2012c] pour le cas des matrices aléatoires, et [Guillemot et Soize 2013b, Soize 2016b, Soize 2017] pour le cas des champs aléatoires). Ces modèles stochastiques *prior* permettent de prendre en compte des contraintes non seulement sur le niveau des fluctuations statistiques de la matrice (ou champ) d'élasticité aléatoire dans une classe de symétrie (élastique linéaire) arbitraire donnée, mais aussi potentiellement sur le niveau des fluctuations statistiques anisotropes de la matrice (ou champ) d'élasticité aléatoire autour de la classe de symétrie considérée.

1.2 Représentation algébrique *prior* et propriétés fondamentales du champ d'élasticité aléatoire

Pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$, la matrice d'élasticité aléatoire $[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]$ est p.s. symétrique définie positive, non-gaussienne, du second ordre, dont la valeur moyenne statistique $\mathbb{E}\{[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]\}$ est donnée par la matrice réelle symétrique définie positive $[\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}]$ (indépendante de \mathbf{x} et appartenant à une classe de symétrie matérielle donnée $\mathbb{M}_n^{\text{sym}}(\mathbb{R})$) et dont l'inverse $[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]^{-1}$ est une matrice aléatoire du second ordre, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})] &\in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \text{ a.s.}, & \mathbb{E}\{[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]\} &= [\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}] \in \mathbb{M}_n^{\text{sym}}(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}), \\ \mathbb{E}\{\|[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]\|_F^2\} &< +\infty, & \mathbb{E}\{\|[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty. \end{aligned}$$

Par construction, pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$, la matrice d'élasticité aléatoire $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ peut être décomposée en la représentation algébrique suivante

$$[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})] = [\underline{\mathbf{L}}]^T [\mathbf{G}(\mathbf{x})] [\underline{\mathbf{L}}], \quad (1.7)$$

où la matrice déterministe $[\underline{\mathbf{L}}]$ est une matrice réelle triangulaire supérieure inversible (à coefficients diagonaux strictement positifs, i.e. $[\underline{\mathbf{L}}] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$) correspondant à la factorisation de Cholesky de la matrice d'élasticité moyenne symétrique définie positive $\mathbb{E}\{[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})]\} = [\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}]$ telle que

$$[\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}] = [\underline{\mathbf{L}}]^T [\underline{\mathbf{L}}]. \quad (1.8)$$

Pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$, $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]$ est une matrice aléatoire réelle p.s. symétrique définie positive, non-gaussienne, normalisée, du second ordre, dont la valeur moyenne statistique $\mathbb{E}\{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]\}$ est la matrice identité (ou matrice unité) $[I_n]$ de taille $(n \times n)$ et l'inverse $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]^{-1}$ est une matrice aléatoire du second ordre :

$$\begin{aligned} [\mathbf{G}(\mathbf{x})] &\in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \text{ p.s.}, & \mathbb{E}\{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]\} &= [I_n], \\ \mathbb{E}\{\|[\mathbf{G}(\mathbf{x})]\|_F^2\} &< +\infty, & \mathbb{E}\{\log(\det([\mathbf{G}(\mathbf{x})]))\} &= \nu_{\mathbf{G}}, \end{aligned}$$

avec $|\nu_{\mathbf{G}}| < +\infty$ un paramètre donné et où la condition $\mathbb{E}\{\log(\det([\mathbf{G}(\mathbf{x})]))\} = \nu_{\mathbf{G}}$ sert à assurer l'inversibilité de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]$ et l'intégrabilité au second ordre de son inverse $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]^{-1}$. On montre alors, dans [Soize 2006], que la fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]}$ de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]$ par rapport à la mesure $d^S G = 2^{n(n-1)/4} \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} dG_{ij}$ sur l'ensemble $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles symétriques de taille $(n \times n)$ (avec dG_{ij} la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , voir [Soize 2000, Soize 2001, Soize 2016a]) de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]$ est définie de $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^+ par

$$p_{[\mathbf{G}(\mathbf{x})]}([G]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G]) c_{\mathbf{G}} \det([G])^\beta \exp(-\alpha \text{tr}([G])), \quad (1.9)$$

où $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}$ est la fonction indicatrice de l'ensemble $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G]) = 1$ si $[G] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G]) = 0$ si $[G] \notin \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$, et $c_{\mathbf{G}}$ est la constante de normalisation donnée par

$$c_{\mathbf{G}} = \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4} \alpha^{6\alpha}}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)}, \quad (1.10)$$

dans laquelle, pour tout $z > 0$, $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$, et $\alpha_i = (n+1)/(2\delta^2) + (1-i)/2$, $\alpha = (n+1)/(2\delta^2)$, $\beta = \alpha(1-\delta^2) = (n+1)(1-\delta^2)/(2\delta^2) = (n+1)(1/\delta^2 - 1)/2$, et où δ est le coefficient de dispersion contrôlant le niveau des fluctuations statistiques du champ aléatoire $[\mathbf{G}]$ autour de sa valeur moyenne $[I_n]$ et défini par

$$\delta = \left(\frac{\mathbb{E}\{\|[\mathbf{G}(\mathbf{x})] - [I_n]\|_F^2\}}{\|[I_n]\|_F^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \mathbb{E}\{\|[\mathbf{G}(\mathbf{x})]\|_F^2\} - 1 \right)^{1/2}, \quad (1.11)$$

Le coefficient de dispersion δ est indépendant de \mathbf{x} , strictement positif (par définition) et borné supérieurement tel que

$$0 < \delta < \delta_{\text{sup}}, \quad \text{avec} \quad \delta_{\text{sup}} = \sqrt{\frac{n+1}{n+5}} < 1, \quad (1.12)$$

afin d'assurer l'intégrabilité du second ordre de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]^{-1}$ (i.e. $\mathbb{E}\{\|[\mathbf{G}(\mathbf{x})]^{-1}\|_F^2\} < +\infty$). Le paramètre de dispersion δ est souvent considéré comme un des hyperparamètres dans le paramétrage du modèle stochastique *prior* (voir section 1.4). Par ailleurs, dans [Soize 2006], une représentation algébrique de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]$ est donnée. En effet, puisque $[\mathbf{G}(\mathbf{x})]$ est p.s. symétrique définie positive, alors sa factorisation de Cholesky s'écrit

$$[\mathbf{G}(\mathbf{x})] = [\mathbf{L}(\mathbf{x})]^T [\mathbf{L}(\mathbf{x})], \quad (1.13)$$

où $[\mathbf{L}(\mathbf{x})]$ est une matrice aléatoire réelle triangulaire supérieure à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$. On montre alors que les $n(n+1)/2$ composantes $\{[\mathbf{L}(\mathbf{x})]_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$ sont des variables aléatoires à valeurs réelles, statistiquement indépendantes, du second ordre, telles que pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$ et tout $1 \leq i \leq j \leq n$,

$$[\mathbf{L}(\mathbf{x})]_{ij} = \begin{cases} \sigma W_{ij}(\mathbf{x}) & \text{si } i < j, \\ \sigma \sqrt{2\mathcal{G}_i(\mathbf{x})} & \text{si } i = j, \end{cases} \quad (1.14)$$

où $\sigma = \delta/\sqrt{n+1}$ est un paramètre déterministe qui est directement lié au coefficient de dispersion δ contrôlant le niveau des fluctuations statistiques du champ aléatoire à valeurs matricielles $[\mathbf{G}]$ (autour de sa valeur moyenne $[I_n]$). Les $n(n+1)/2$ champs aléatoires $\{W_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$ sont à valeurs réelles, gaussiens normalisés, indépendants statistiquement, statistiquement homogènes (ou spatialement stationnaires), du second ordre, continus en moyenne d'ordre deux, tels que pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{meso}}$, on ait $\mathbb{E}\{W_{ij}(\mathbf{x})\} = 0$ et $\mathbb{E}\{W_{ij}(\mathbf{x})^2\} = 1$, et dont la définition et la construction sont données dans la section 1.3. Une telle famille de $n(n+1)/2$ champs aléatoires

gaussiens $\{W_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$ peut être vue comme les germes stochastiques des champs aléatoires non-gaussiens $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ et $[\mathbf{G}]$, puisque les structures de corrélation spatiale de $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ et $[\mathbf{G}]$ sont induites par la structure de corrélation spatiale de $\{W_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$, qui est typiquement caractérisée par un vecteur de d longueurs de corrélation spatiale $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d)$ (voir section 1.3). De plus, dans (1.14), les n variables aléatoires $\{\mathcal{G}_i(\mathbf{x})\}_{1 \leq i \leq n}$ sont définies comme des transformations non-linéaires déterministes $\mathcal{G}_i(\mathbf{x}) = \mathcal{G}(W_{ii}(\mathbf{x}); \alpha_i)$ des variables aléatoires gaussiennes $\{W_{ii}(\mathbf{x})\}_{1 \leq i \leq n}$, avec $w \mapsto \mathcal{G}(w; \alpha_i)$ définie de \mathbb{R} dans $]0, +\infty[$ par

$$\mathcal{G}(w; \alpha_i) = F_{\Gamma_{\alpha_i}}^{-1}(F_W(w)) \quad \forall w \in \mathbb{R}, \quad (1.15)$$

où $\alpha_i = 1/(2\sigma^2) + (1 - i)/2 = (n + 1)/(2\delta^2) + (1 - i)/2$ et $F_W: w \mapsto F_W(w)$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs réelles W gaussienne normalisée, définie de \mathbb{R} dans $]0, 1[$ par

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^w \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt \quad \forall w \in \mathbb{R}, \quad (1.16)$$

et $F_{\Gamma_{\alpha}}^{-1}: p \mapsto F_{\Gamma_{\alpha}}^{-1}(p)$ est la fonction réciproque (ou inverse), définie de $]0, 1[$ dans $]0, +\infty[$, de la fonction de répartition $F_{\Gamma_{\alpha}}: \gamma \mapsto F_{\Gamma_{\alpha}}(\gamma)$ d'une variable aléatoire à valeurs positives Γ_{α} suivant une loi Gamma de paramètre $\alpha > 0$, définie de $]0, +\infty[$ dans $]0, 1[$ par

$$F_{\Gamma_{\alpha}}(\gamma) = \int_0^{\gamma} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad \forall \gamma > 0. \quad (1.17)$$

Finalement, le champ aléatoire à valeurs matricielles $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ est défini comme une transformation non-linéaire déterministe \mathcal{G} définie de $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ par

$$[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{x})] = \mathcal{G}(\mathbf{W}(\mathbf{x})), \quad \text{avec} \quad \mathbf{W}(\mathbf{x}) = (W_{ij}(\mathbf{x}))_{1 \leq i \leq j \leq n}. \quad (1.18)$$

1.3 Définition et construction des germes stochastiques gaussiens

La famille de champs aléatoires gaussiens $\{W_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$ peut être vue comme $n(n + 1)/2$ copies indépendantes d'un unique champ aléatoire à valeurs réelles W gaussien normalisé, statistiquement homogène (ou spatialement stationnaire), du second ordre, continu en moyenne d'ordre deux. Le champ aléatoire gaussien W est alors complètement défini et de manière unique par sa fonction d'autocorrélation normalisée R_W de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , telle que pour tout $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$R_W(\mathbf{0}) = 1, \quad R_W(\boldsymbol{\eta}) = \mathbb{E}\{W(\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta})W(\mathbf{x})\}. \quad (1.19)$$

La fonction d'autocorrélation R_W est généralement caractérisée par d longueurs de corrélation spatiale ℓ_1, \dots, ℓ_d et nous introduisons le vecteur des longueurs de corrélation spatiale $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d)$ telles que, pour $\alpha = 1, \dots, d$,

$$\ell_{\alpha} = \int_0^{+\infty} |R_W(0, \dots, 0, \eta_{\alpha}, 0, \dots, 0)| d\eta_{\alpha}, \quad (1.20)$$

et qui sont généralement introduites comme des hyperparamètres dans le paramétrage du modèle stochastique *prior* (voir section 1.4). Bien que toute fonction d'autocorrélation R_W vérifiant (1.19) puisse être *a priori* choisie (voir [Guilleminot et Soize 2013b] pour une discussion), elle est généralement supposée être une fonction continue et bornée sur \mathbb{R}^d , de sorte que le champ aléatoire W soit continu en moyenne d'ordre deux. Dans ce travail de recherche, nous considérons la fonction d'autocorrélation R_W suivante, initialement introduite dans [Soize 2006] puis réutilisée entre autres dans [Soize 2008, Guilleminot et Soize 2013b, Soize 2017, Soize 2018], qui est définie par

$$R_W(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\ell}) = \prod_{\alpha=1}^d \rho(\eta_\alpha; \ell_\alpha) = \rho(\eta_1; \ell_1) \times \dots \times \rho(\eta_d; \ell_d), \quad (1.21)$$

où $\eta \mapsto \rho(\eta; \ell)$ est la fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ par

$$\rho(\eta; \ell) = \begin{cases} 1 & \text{si } \eta = 0, \\ \text{sinc}\left(\frac{\pi\eta}{2\ell}\right)^2 & \text{si } \eta \neq 0, \end{cases} \quad (1.22)$$

avec $\text{sinc}: x \mapsto \text{sinc}(x)$ la fonction sinus cardinal définie par

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1.23)$$

La fonction de densité spectrale de puissance S_W du champ aléatoire W est une fonction intégrable définie de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^+ telle que pour tout $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$R_W(\boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\eta} \rangle) S_W(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (1.24)$$

où i désigne le nombre imaginaire pur vérifiant $i^2 = -1$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire euclidien usuel sur \mathbb{R}^d tel que $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{\alpha=1}^d x_\alpha y_\alpha$ pour deux vecteurs $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq d}$ et $\mathbf{y} = (y_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq d}$ de \mathbb{R}^d . Si R_W est une fonction intégrable (ou de carré intégrable) sur \mathbb{R}^d , alors S_W peut être définie pour tout $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{R}^d$ par

$$S_W(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\langle \mathbf{k}, \boldsymbol{\eta} \rangle) R_W(\boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}, \quad (1.25)$$

Pour la fonction d'autocorrélation normalisée particulière $\boldsymbol{\eta} \mapsto R_W(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\ell})$ définie par (1.21) et (1.22) et paramétrée par $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d)$, la fonction de densité spectrale de puissance $\mathbf{k} \mapsto S_W(\mathbf{k}; \boldsymbol{\ell})$ est une fonction triangulaire multidimensionnelle continue définie de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} par

$$S_W(\mathbf{k}; \boldsymbol{\ell}) = \prod_{\alpha=1}^d s(k_\alpha; \ell_\alpha) = s(k_1; \ell_1) \times \dots \times s(k_d; \ell_d), \quad (1.26)$$

avec

$$s(k; \ell) = \frac{\ell}{\pi} \operatorname{tri} \left(k \frac{\ell}{\pi} \right) = \begin{cases} \frac{\ell}{\pi} \left(1 - \left| k \frac{\ell}{\pi} \right| \right) & \text{si } |k| \leq \frac{\pi}{\ell}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.27)$$

où $\operatorname{tri}: \tau \mapsto \operatorname{tri}(\tau)$ est la fonction triangulaire (également appelée fonction triangle ou fonction chapeau) à support compact normalisé $[-1, 1]$ définie de \mathbb{R} dans $[0, 1]$ par

$$\operatorname{tri}(\tau) = \max(1 - |\tau|, 0) = \mathbb{1}_{[-1, 1]}(\tau) (1 - |\tau|), \quad (1.28)$$

de sorte que la fonction unidimensionnelle $k \mapsto s(k; \ell)$ ait un support compact $\operatorname{supp}(s) \subset \mathbb{R}$ défini par

$$\operatorname{supp}(s) = [-\pi/\ell, \pi/\ell]. \quad (1.29)$$

La taille du support $\operatorname{supp}(s)$ est donc inversement proportionnelle à ℓ . Le champ aléatoire gaussien W est alors entièrement défini par ses d longueurs de corrélation spatiale ℓ_1, \dots, ℓ_d qui sont directement liées au support $\operatorname{supp}(S_W) \subset \mathbb{R}^d$ défini par

$$\operatorname{supp}(S_W) = [-\pi/\ell_1, \pi/\ell_1] \times \dots \times [-\pi/\ell_d, \pi/\ell_d]. \quad (1.30)$$

Dans le cadre de la méthode de simulation numérique de Monte Carlo (MC) [Kalos et Whitlock 1986, Fishman 1996, Caffisch 1998, Schuëller et Spanos 2001, Schuëller 2009, Rubinstein et Kroese 2016], les réalisations statistiquement indépendantes de $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ peuvent être générées en utilisant (1.18) et un générateur de réalisations aléatoires de $\{W_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$. En pratique, la discrétisation spatiale des champs aléatoires $\{W_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$ sera directement liée à la discrétisation spatiale du problème aux limites elliptique stochastique (posé sur un domaine arbitraire ouvert borné $\Omega^{\text{meso}} \subset \mathbb{R}^d$ et caractérisé par un opérateur différentiel elliptique stochastique) par la méthode des éléments finis. Dans ce travail de recherche, les valeurs des champs aléatoires $\{W_{ij}\}_{1 \leq i \leq j \leq n}$ sont calculées sur les P points d'intégration de Gauss $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^P$ du maillage éléments finis du domaine mésoscopique $\Omega^{\text{meso}} \subset \mathbb{R}^d$. Un aperçu des méthodes numériques permettant la représentation algébrique et la simulation numérique (génération de réalisations) de champs aléatoires gaussiens et statistiquement homogènes, à valeurs réelles ou vectorielles peut être trouvée dans [Soize 2006, Soize 2008]. Dans la section 2 du chapitre 3, on rappellera brièvement la méthode de représentation spectrale (également appelée méthode de Shinozuka), ainsi qu'une extension développée dans le cadre de ce travail de thèse, dont l'objectif commun est de construire explicitement des réalisations indépendantes d'un vecteur aléatoire gaussien centré $\mathbf{V} = (W(\mathbf{x}^1), \dots, W(\mathbf{x}^P))$.

1.4 Hyperparamètres du modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité aléatoire

Le modèle stochastique *prior* présenté en sections 1.2 et 1.3 fait intervenir (par construction) seulement un petit nombre d'hyperparamètres constitués de trois

composantes caractérisant les informations probabilistes (ou statistiques) complètes du champ d'élasticité aléatoire $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ à l'échelle mésoscopique, qui sont :

1. un paramètre de dispersion positif borné δ (supposé indépendant de \mathbf{x} dans ce travail) défini par (1.11) et satisfaisant (1.12), qui contrôle le niveau des fluctuations statistiques présentées par le champ aléatoire $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$ autour de sa valeur moyenne statistique $[\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}]$;
2. un vecteur de d longueurs de corrélation spatiale positives $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d)$ défini par (1.20), caractérisant la structure de corrélation spatiale des germes stochastiques (gaussiens) du champ aléatoire (non-gaussien) $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$;
3. la représentation vectorielle $\underline{\mathbf{c}}$ regroupant les composantes algébriquement indépendantes de la matrice déterministe réelle symétrique définie positive $[\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}]$ (supposée indépendante de \mathbf{x} et appartenant à une classe de symétrie matérielle donnée $\mathbb{M}_n^{\text{sym}}(\mathbb{R})$) correspondant à la valeur moyenne statistique du champ aléatoire $[\mathbf{C}^{\text{meso}}]$.

Le vecteur des hyperparamètres (ou hyperparamètre à valeurs vectorielles) $\mathbf{b} = (\delta, \boldsymbol{\ell}, \underline{\mathbf{c}})$ du modèle stochastique *prior* de $[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$ est donc constitué du paramètre de dispersion δ , du vecteur des d longueurs de corrélation spatiale $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d)$ et de la représentation vectorielle $\underline{\mathbf{c}}$ de $[\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}] \in \mathbb{M}_n^{\text{sym}}(\mathbb{R})$. L'ensemble admissible $\mathcal{B}^{\text{meso}}$ pour $\mathbf{b} = (\delta, \boldsymbol{\ell}, \underline{\mathbf{c}})$ est alors défini par $\mathcal{B}^{\text{meso}} =]0, \delta_{\text{sup}}[\times]0, +\infty[^d \times \mathbb{R}^{n_{\text{sym}}}$ avec $n_{\text{sym}} \leq n(n+1)/2$ la dimension de la classe de symétrie $\mathbb{M}_n^{\text{sym}}$ pour $[\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}]$.

2 Méthodes d'homogénéisation numérique stochastique en élasticité linéaire

La deuxième partie de ce chapitre de rappels concerne les différentes méthodes d'homogénéisation numérique stochastique en élastostatique linéaire développées à partir des méthodes d'homogénéisation numérique déterministe, qui constituent aujourd'hui des outils numériques très efficaces pour déterminer les propriétés élastiques effectives (spatialement homogènes) équivalentes d'une microstructure hétérogène aléatoire. Ces techniques d'homogénéisation sont basées sur l'hypothèse qu'il existe une séparation des échelles entre le domaine macroscopique, où les propriétés du matériau sont considérées comme homogènes et déterministes, et des sous-domaines méso- ou microscopiques, où les propriétés du matériau varient dans l'espace selon la position des différentes phases constitutives de la microstructure et sont donc hétérogènes. L'objectif de l'homogénéisation numérique est ainsi de relier les échelles grossière (macroscopique) et fine (méso- ou microscopique) par l'introduction d'un volume élémentaire représentatif (VER), dans lequel les champs locaux méso- ou microscopiques sont décrits et regroupés pour ensuite être « homogénéisés » à l'échelle du domaine macroscopique par le calcul des propriétés effectives équivalentes [Bornert et al. 2001]. De plus, de nombreux travaux de recherche ont soulevé la difficulté de

définir précisément la taille du VER dans le cas d'une microstructure aléatoire [Sab 1992, Nemat-Nasser et Hori 1993, Sab et Nedjar 2005, Soize 2008, Guilleminot et al. 2009]. En effet, la convergence des propriétés élastiques apparentes obtenues pour différentes conditions aux limites et pour différentes réalisations d'une microstructure aléatoire vers les propriétés effectives ne peut être atteinte en théorie que lorsque la taille du VER tend vers l'infini (i.e. lorsque le VER tend vers \mathbb{R}^d). En pratique, il convient de se donner un critère de convergence sur une quantité d'intérêt appropriée, telle que les fluctuations statistiques du tenseur d'élasticité effectif (homogénéisé) à l'échelle macroscopique [Soize 2008] par exemple, pour définir la taille du VER qui doit être « suffisamment grande » par rapport à la taille des hétérogénéités de la microstructure (typiquement dix fois les longueurs de corrélation spatiale du champ d'élasticité aléatoire) et « suffisamment petite » par rapport à la taille de la structure.

2.1 Définition des tenseurs d'élasticité et de souplesse effectifs

On considère un domaine ouvert borné Ω^{VER} dans \mathbb{R}^d (avec $d = 3$) à l'échelle mésoscopique, qui constitue un milieu élastique linéaire anisotrope hétérogène aléatoire et qui sera par la suite considéré comme un VER, avec une frontière $\partial\Omega^{\text{VER}}$ suffisamment régulière (e.g. de Lipschitz). On note \mathbf{U} le champ de déplacement aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^d , indexé sur Ω^{VER} , et \mathcal{E} le champ de tenseur des déformations linéarisé aléatoire défini pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{VER}}$ par

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{U}(\mathbf{x}))^T), \quad (1.31)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}$ désigne l'opérateur linéaire déterministe qui transforme le champ de déplacement en le champ des déformations correspondant et ∇ désigne l'opérateur gradient d'un champ à valeur vectorielles par rapport à \mathbf{x} . Le champ de tenseur des contraintes de Cauchy aléatoire est noté $\boldsymbol{\Sigma}$. Il est relié à \mathcal{E} par la loi de comportement locale suivante : pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{VER}}$,

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \mathcal{E}(\mathbf{x}), \quad (1.32)$$

ou de manière équivalente,

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}), \quad (1.33)$$

où \mathbf{C} (resp. \mathbf{S}) est le champ de tenseur d'élasticité aléatoire (champ de tenseur de souplesse aléatoire) caractérisant les propriétés mécaniques de la microstructure aléatoire constituant le domaine Ω^{VER} . Par définition, \mathbf{C} est un champ de tenseur aléatoire d'ordre quatre p.s. symétrique défini positif qui vérifie les propriétés classiques de symétrie majeure et mineure. Par ailleurs, les tenseurs des déformations

et des contraintes effectifs (homogénéisés) aléatoires $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}$ et $\boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}}$, respectivement, se déduisent de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{\Sigma}$ par moyennage spatial sur le VER Ω^{VER} :

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}} = \frac{1}{|\Omega^{\text{VER}}|} \int_{\Omega^{\text{VER}}} \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.34a)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}} = \frac{1}{|\Omega^{\text{VER}}|} \int_{\Omega^{\text{VER}}} \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.34b)$$

dans lesquels $|\Omega^{\text{VER}}|$ est la mesure de volume de Ω^{VER} . Notons que $\boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}$ sont des champs de tenseur aléatoires qui sont reliés par la loi de comportement homogénéisée suivante :

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}} = \mathbf{C}^{\text{eff}} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}, \quad (1.35)$$

ou de manière équivalente,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}} = \mathbf{S}^{\text{eff}} : \boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}}, \quad (1.36)$$

où \mathbf{C}^{eff} (resp. \mathbf{S}^{eff}) est le tenseur d'élasticité (resp. de souplesse) aléatoire effectif qui est un tenseur aléatoire d'ordre quatre p.s. symétrique défini positif calculé par résolution d'un problème aux limites elliptique stochastique dit « problème de localisation ». Cette localisation a pour objectif de déterminer des champs locaux à partir de données macroscopiques. Classiquement, on distingue deux types de formulations du problème de localisation en fonction des conditions aux limites imposées sur la frontière $\partial\Omega^{\text{VER}}$: (i) localisation avec des conditions aux limites de Dirichlet (correspondant à une homogénéisation en déformations homogènes ou HDH), et (ii) localisation avec des conditions aux limites de Neumann (correspondant à une Homogénéisation en contraintes homogènes ou HCH). Ces deux approches d'homogénéisation vérifient la condition dite de Hill (également connue sous le nom de condition de macro-homogénéité de Hill, ou condition de Hill-Mandel) qui énonce l'équivalence énergétique suivante [[Hill 1963](#), [Nemat-Nasser et Hori 1993](#), [Guilleminot et al. 2011](#)] :

$$\frac{1}{|\Omega^{\text{VER}}|} \int_{\Omega^{\text{VER}}} \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}} : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}. \quad (1.37)$$

Les deux méthodes HDH et HCH sont équivalentes pour les problèmes aux limites formulés dans le cadre de l'élasticité linéaire 3D lorsque $|\Omega^{\text{VER}}|$ tend vers $+\infty$. En revanche, la méthode HDH (resp. HCH) ne peut pas être mise en œuvre dans le cadre de l'élasticité linéaire 2D sous l'hypothèse des contraintes planes (resp. déformations planes).

Par la suite, ces deux méthodes d'homogénéisation numérique (stochastique) HDH et HCH permettant de calculer le tenseur d'élasticité effectif (aléatoire) \mathbf{C}^{eff} et le tenseur de souplesse effectif (aléatoire) \mathbf{S}^{eff} sont brièvement rappelées. Des informations complémentaires sur les méthodes d'homogénéisation basées sur le concept de VER avec différents types de conditions aux limites (Dirichlet, Neumann ou périodique) peuvent être trouvées dans [[Nemat-Nasser et Hori 1993](#), [Bornert et al. 2001](#), [Zaoui 2002](#), [Bourgeat et Piatnitski 2004](#)] et les références qui y figurent.

2.2 Méthode d'homogénéisation en déformations homogènes

Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire et de la théorie de l'homogénéisation locale stochastique, la méthode d'homogénéisation stochastique en déformations homogènes (HDH) consiste à introduire un ensemble de $n = d(d+1)/2$ problèmes aux limites elliptiques stochastiques définis sur le domaine Ω^{VER} (dont la microstructure est aléatoire) avec des conditions aux limites de Dirichlet $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}} \cdot \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega^{\text{VER}}$. On cherche alors \mathbf{U} et $\boldsymbol{\Sigma}$ qui sont solutions du problème aux limites elliptique stochastique suivant :

$$-\mathbf{div}(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega^{\text{VER}}, \quad (1.38a)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\mathcal{E}} \quad \text{dans } \Omega^{\text{VER}}, \quad (1.38b)$$

$$\mathbf{U} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}} \cdot \mathbf{x} \quad \text{sur } \partial\Omega^{\text{VER}}, \quad (1.38c)$$

où \mathbf{div} désigne l'opérateur divergence d'un champ de tenseur d'ordre deux par rapport \mathbf{x} . En utilisant le théorème de la divergence (aussi connu sous le nom de théorème de Green-Ostrogradski) et les conditions aux limites de Dirichlet (1.38c) sur $\partial\Omega^{\text{VER}}$, on peut facilement montrer que la solution \mathbf{U} vérifie alors (1.34a). La décomposition du tenseur aléatoire $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}$ sur la base canonique des tenseurs symétriques du second ordre s'écrit

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}} = \{\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}\}_{kl} \mathbf{p}^{kl}, \quad (1.38d)$$

où la (i, j) -ème composante $\{\mathbf{p}^{kl}\}_{ij}$ de \mathbf{p}^{kl} correspond à la (i, j, k, l) -ème composante $\{\mathbf{I}\}_{ijkl}$ du tenseur identité (ou tenseur unité) symétrique d'ordre quatre \mathbf{I} :

$$\{\mathbf{p}^{kl}\}_{ij} = \{\mathbf{I}\}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad (1.38e)$$

avec δ_{ij} le symbole de Kronecker tel que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Pour $1 \leq k \leq l \leq d$, on note \mathbf{U}^{kl} le champ de déplacement aléatoire solution du problème aux limites stochastique (1.38) avec les conditions aux limites de Dirichlet $\mathbf{U}^{kl}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{kl} \cdot \mathbf{x}$ pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega^{\text{VER}}$, et on note $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{kl} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}^{kl})$ le champ des déformations aléatoire associé. Comme la solution \mathbf{U} du problème aux limites stochastique (1.38) dépend linéairement de $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}$, on montre que le champ des déformations aléatoire $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ associé à \mathbf{U} peut s'écrire comme : pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{VER}}$,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}(\mathbf{x})) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}^{kl}(\mathbf{x})) \{\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}\}_{kl} = \boldsymbol{\mathcal{E}}^{kl}(\mathbf{x}) \{\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}\}_{kl}. \quad (1.39)$$

On a alors : pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{VER}}$,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}, \quad (1.40)$$

où \mathbf{A} est le champ de localisation des déformations aléatoire associé au problème aux limites stochastique (1.38) qui est un champ de tenseur aléatoire d'ordre quatre

dont la (i, j, k, l) -ème composante correspond à la (i, j) -ème composante du champ de tenseur des déformations aléatoire $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{kl}$, tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\text{VER}}$,

$$\{\mathbf{A}(\boldsymbol{x})\}_{ijkl} = \{\boldsymbol{\mathcal{E}}^{kl}(\boldsymbol{x})\}_{ij}, \quad (1.41)$$

et qui satisfait les propriétés classiques de symétrie majeure et mineure $\{\mathbf{A}(\boldsymbol{x})\}_{ijkl} = \{\mathbf{A}(\boldsymbol{x})\}_{klij} = \{\mathbf{A}(\boldsymbol{x})\}_{jikl} = \{\mathbf{A}(\boldsymbol{x})\}_{ijlk}$ pour $1 \leq i, j, k, l \leq d$ et pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\text{VER}}$ (en raison de la symétrie des tenseurs d'ordre deux $\boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}$).

En utilisant la relation de localisation des déformations définie par (1.40), la loi de comportement locale (1.32) peut alors être réécrite sous la forme : pour tout $\boldsymbol{x} \in \Omega^{\text{VER}}$,

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{x}) : \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}. \quad (1.42)$$

En prenant la moyenne volumique spatiale dans Ω^{VER} et en utilisant la propriété (1.34b), on obtient

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}} = \left(\frac{1}{|\Omega^{\text{VER}}|} \int_{\Omega^{\text{VER}}} \mathbf{C}(\boldsymbol{x}) : \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x} \right) : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{eff}}. \quad (1.43)$$

Le tenseur d'élasticité effectif (homogénéisé) aléatoire \mathbf{C}^{eff} défini par (1.35) peut alors être écrit comme

$$\mathbf{C}^{\text{eff}} = \frac{1}{|\Omega^{\text{VER}}|} \int_{\Omega^{\text{VER}}} \mathbf{C}(\boldsymbol{x}) : \mathbf{A}(\boldsymbol{x}) \, d\boldsymbol{x}. \quad (1.44)$$

On note que, par construction, \mathbf{C}^{eff} est un tenseur aléatoire d'ordre quatre, mais si le champ de tenseur aléatoire d'ordre quatre $\mathbf{C} : \mathbf{A}$ était ergodique pour sa moyenne, alors \mathbf{C}^{eff} convergerait en loi vers un tenseur déterministe quand $|\Omega^{\text{VER}}| \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire les fluctuations statistiques de \mathbf{C}^{eff} tendraient vers zéro, ce qui en accord avec l'hypothèse de séparation des échelles. Cette hypothèse a été vérifiée numériquement dans [Soize 2008] pour le modèle stochastique *prior* considéré dans ce travail. On peut ensuite en déduire le tenseur de souplesse effectif (homogénéisé) aléatoire \mathbf{S}^{eff} en inversant (1.44) :

$$\mathbf{S}^{\text{eff}} = (\mathbf{C}^{\text{eff}})^{-1}. \quad (1.45)$$

Finalement, la méthode d'homogénéisation en déformations homogènes (HDH) consiste à (i) calculer le champ de localisation des déformations aléatoire \mathbf{A} défini par (1.41) en résolvant les $n = d(d+1)/2$ problèmes aux limites stochastiques dont les solutions sont $\{\mathbf{U}^{kl}\}_{1 \leq k \leq l \leq d}$, puis (ii) calculer le tenseur d'élasticité effectif aléatoire \mathbf{C}^{eff} défini par (1.44) et, si nécessaire, le tenseur de souplesse effectif aléatoire \mathbf{S}^{eff} défini par (1.45).

2.3 Méthode d'homogénéisation en contraintes homogènes

Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire et de la théorie de l'homogénéisation locale stochastique, la méthode d'homogénéisation stochastique en contraintes

homogènes (HCH) consiste à introduire un ensemble de $n = d(d+1)/2$ problèmes aux limites elliptiques stochastiques définis sur le domaine Ω^{VER} (dont la microstructure est aléatoire) avec des conditions aux limites de Neumann $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega^{\text{VER}}$. On cherche alors \mathbf{U} et $\boldsymbol{\Sigma}$ qui sont solutions du problème aux limites elliptique stochastique suivant :

$$-\text{div}(\boldsymbol{\Sigma}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega^{\text{VER}}, \quad (1.46a)$$

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\Sigma} \quad \text{dans } \Omega^{\text{VER}}, \quad (1.46b)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\Omega^{\text{VER}}. \quad (1.46c)$$

En utilisant le théorème de la divergence (aussi connu sous le nom de théorème de Green-Ostrogradski) et les conditions aux limites homogènes de Neumann (1.46c) sur $\partial\Omega^{\text{VER}}$, on peut facilement montrer que la solution $\boldsymbol{\Sigma}$ vérifie alors (1.34b). La décomposition du tenseur aléatoire $\boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}}$ sur la base canonique des tenseurs symétriques du second ordre s'écrit

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}} = \{ \boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}} \}_{kl} \mathbf{p}^{kl}, \quad (1.46d)$$

où la (i, j) -ème composante $\{ \mathbf{p}^{kl} \}_{ij}$ de \mathbf{p}^{kl} correspond à la (i, j, k, l) -ème composante $\{ \mathbf{I} \}_{ijkl}$ du tenseur identité (ou tenseur unité) symétrique d'ordre quatre \mathbf{I} , qui est définie par (1.38e). Pour $1 \leq k \leq l \leq d$, on note $\boldsymbol{\Sigma}^{kl}$ le champ des contraintes de Cauchy aléatoire solution du problème aux limites stochastique (1.46) avec les conditions aux limites de Neumann $\boldsymbol{\Sigma}^{kl}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^{kl} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$ pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega^{\text{VER}}$. Comme la solution $\boldsymbol{\Sigma}$ du problème aux limites stochastique (1.46) dépend linéairement de $\boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}}$, on montre que le champ des contraintes aléatoire $\boldsymbol{\Sigma}$ peut s'écrire comme : pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{VER}}$,

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma}^{kl}(\mathbf{x}) \{ \boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}} \}_{kl}, \quad (1.47)$$

On a alors : pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{VER}}$,

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}}, \quad (1.48)$$

où \mathbf{B} est le champ de concentration des contraintes aléatoire associé au problème aux limites stochastique (1.46) qui est un champ de tenseur aléatoire d'ordre quatre dont la (i, j, k, l) -ème composante correspond à la (i, j) -ème composante du champ de tenseur des contraintes aléatoire $\boldsymbol{\Sigma}^{kl}$, tel que pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{VER}}$,

$$\{ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \}_{ijkl} = \{ \boldsymbol{\Sigma}^{kl}(\mathbf{x}) \}_{ij}, \quad (1.49)$$

et qui satisfait les propriétés classiques de symétrie majeure et mineure $\{ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \}_{ijkl} = \{ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \}_{klij} = \{ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \}_{jikl} = \{ \mathbf{B}(\mathbf{x}) \}_{ijlk}$ pour $1 \leq i, j, k, l \leq d$ et pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{VER}}$ (en raison de la symétrie des tenseurs d'ordre deux $\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x})$ et $\boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}}$).

En utilisant la relation de concentration des contraintes définie par (1.48), la loi de comportement locale (1.33) peut alors être réécrite sous la forme : pour tout $\mathbf{x} \in \Omega^{\text{VER}}$,

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \mathbf{B}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}}. \quad (1.50)$$

En prenant la moyenne volumique spatiale dans Ω^{VER} et en utilisant la propriété (1.34a), on obtient

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{eff}} = \left(\frac{1}{|\Omega^{\text{VER}}|} \int_{\Omega^{\text{VER}}} \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) : \boldsymbol{\Sigma}^{\text{eff}}. \quad (1.51)$$

Le tenseur de souplesse effectif (homogénéisé) aléatoire \mathbf{S}^{eff} défini par (1.36) peut alors être écrit comme

$$\mathbf{S}^{\text{eff}} = \frac{1}{|\Omega^{\text{VER}}|} \int_{\Omega^{\text{VER}}} \mathbf{S}(\mathbf{x}) : \mathbf{B}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.52)$$

On note que, par construction, \mathbf{S}^{eff} est un tenseur aléatoire d'ordre quatre, mais si le champ de tenseur aléatoire d'ordre quatre $\mathbf{S} : \mathbf{B}$ était ergodique pour sa moyenne, alors \mathbf{S}^{eff} convergerait en loi vers un tenseur déterministe quand $|\Omega^{\text{VER}}| \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire les fluctuations statistiques de \mathbf{S}^{eff} tendraient vers zéro, ce qui est en accord avec l'hypothèse de séparation des échelles. Cette hypothèse a été vérifiée numériquement dans [Soize 2008] pour le modèle stochastique *prior* considéré dans ce travail. On peut ensuite en déduire le tenseur d'élasticité effectif (homogénéisé) aléatoire \mathbf{C}^{eff} en inversant (1.52) :

$$\mathbf{C}^{\text{eff}} = (\mathbf{S}^{\text{eff}})^{-1}. \quad (1.53)$$

Finalement, la méthode d'homogénéisation en contraintes homogènes (HCH) consiste à (i) calculer le champ de concentration des contraintes aléatoire \mathbf{B} défini par (1.49) en résolvant les $n = d(d+1)/2$ problèmes aux limites stochastiques dont les solutions sont $\{\boldsymbol{\Sigma}^{kl}\}_{1 \leq k \leq l \leq d}$, puis (ii) calculer le tenseur de souplesse effectif aléatoire \mathbf{S}^{eff} défini par (1.52) et, si nécessaire, le tenseur d'élasticité effectif aléatoire \mathbf{C}^{eff} défini par (1.53).

3 Bilan

Dans ce premier chapitre de rappels, nous avons présenté un modèle stochastique *prior* et deux méthodes d'homogénéisation numérique stochastique qui ont été développés et mis en place pour la description et l'homogénéisation du champ d'élasticité (ou de souplesse) aléatoire d'un domaine à l'échelle mésoscopique constitué d'un matériau hétérogène à microstructure aléatoire complexe. Étant donné que ce type de matériau ne peut pas être décrit en termes de phases constitutives avec des propriétés bien définies, un modèle stochastique *prior* non-paramétrique *ad hoc* vérifiant les propriétés algébriques et statistiques fondamentales du champ d'élasticité aléatoire a été introduit. Les propriétés mathématiques et physiques requises pour que le problème inverse statistique soit bien posé ont été démontrées dans [Soize 2006]. La représentation algébrique et la construction mathématique de ce modèle stochastique *prior* ont été présentées. Des détails supplémentaires concernant la distribution de probabilité des matrices aléatoires intervenant dans la construction,

leurs propriétés fondamentales algébriques et statistiques ainsi que la construction explicite de l'application déterministe non-linéaire définissant la transformation des germes stochastiques gaussiens en le champ d'élasticité aléatoire non-gaussien peuvent être trouvés dans [Soize 2006, Soize 2008, Soize 2017]. Par ailleurs, ce modèle stochastique *prior* a été récemment utilisé avec succès pour modéliser et identifier les propriétés élastiques apparentes de l'os cortical à l'échelle mésoscopique [Desceliers et al. 2012, Naili et al. 2015, Nguyen et al. 2015, Soize 2018]. En outre, un tel modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité aléatoire non-gaussien offre également la possibilité d'obtenir le tenseur d'élasticité (ou de souplesse) effectif aléatoire, dans le cadre de la séparation des échelles et de l'homogénéisation numérique stochastique, à l'échelle macroscopique pour un VER donné.

Chapitre 2

Problème inverse statistique multi-échelle

Sommaire

1	Introduction	36
2	Hypothèses retenues et stratégie proposée pour l'identification inverse statistique multi-échelle	38
2.1	Hypothèses retenues	38
2.2	Problème inverse statistique multi-échelle et difficultés associées	39
2.3	Stratégie proposée	42
2.4	Améliorations de la méthode d'identification inverse statistique multi-échelle	43
3	Configuration expérimentale multi-échelle	44
4	Construction des indicateurs numériques macroscopique, mésoscopiques et multi-échelle	47
4.1	Construction de l'indicateur numérique macroscopique	47
4.2	Construction des indicateurs numériques mésoscopiques	48
4.3	Construction de l'indicateur numérique macroscopique-mésoscopique (multi-échelle) associé à l'homogénéisation numérique stochastique	52
5	Problème d'optimisation multi-objectif associé au problème inverse statistique multi-échelle	55
5.1	Formulation du problème d'optimisation multi-objectif	55
5.2	Résolution du problème d'optimisation multi-objectif	56
5.3	Modèle probabiliste des hyperparamètres aléatoires	64
6	Bilan	67

1 Introduction

Dans la section 1 du chapitre 1, un modèle stochastique *prior* a été présenté pour la représentation stochastique non-paramétrique du champ de tenseur d'élasticité aléatoire d'ordre quatre $\{\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) ; \mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}\}$ décrivant les propriétés mécaniques (élastiques) d'un domaine à l'échelle mésoscopique $\Omega^{\text{meso}} \subset \mathbb{R}^d$ occupé par une microstructure complexe anisotrope hétérogène et aléatoire, afin de surmonter les difficultés liées à la modélisation et la simulation numérique pour la caractérisation d'un tel milieu élastique hétérogène aléatoire. Les deux principaux avantages d'un tel modèle stochastique *prior* sont : (i) il est paramétré par un nombre optimal d'hyperparamètres $\mathbf{b} = (\delta, \boldsymbol{\ell}, \underline{\mathbf{c}})$, à savoir le paramètre de dispersion δ , le vecteur des d longueurs de corrélation spatiale $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d)$, ainsi que la représentation vectorielle $\underline{\mathbf{c}}$ regroupant les composantes algébriquement indépendantes du tenseur d'élasticité moyen $\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}$, et (ii) il possède les propriétés mathématiques et statistiques fondamentales requises par le champ d'élasticité aléatoire pour la construction des opérateurs aux dérivées partielles elliptiques stochastiques intervenant dans les problèmes aux limites elliptiques stochastiques (tels que le problème d'élasticité linéaire statique avec un champ de tenseur d'élasticité aléatoire considéré dans ce travail) [Soize 2006, Soize 2008, Soize 2017]. L'identification inverse statistique des hyperparamètres de ce modèle stochastique *prior* avec de l'information expérimentale est faite en cherchant la solution optimale \mathbf{b}^{opt} d'un problème d'optimisation d'une fonction-coût multi-objectif par rapport au vecteur des hyperparamètres \mathbf{b} du modèle stochastique *prior*.

Les deux plus grandes difficultés pour résoudre un tel problème inverse statistique multi-échelle sont : (i) toutes les composantes du vecteur des hyperparamètres \mathbf{b} ne peuvent pas être identifiées par résolution du problème inverse statistique formulé à partir du problème aux limites elliptique stochastique (problème d'élasticité linéaire statique stochastique) défini sur un sous-domaine Ω^{meso} à l'échelle mésoscopique avec les mesures expérimentales de champs disponibles à cette échelle, et (ii) un seul échantillon est testé expérimentalement et soumis à un chargement externe statique imposé à l'échelle macroscopique, ce qui implique que les mesures expérimentales de champs sont non seulement partielles et limitées, mais aussi qu'elles doivent être effectuées simultanément sur l'unique échantillon aux deux échelles macroscopique et mésoscopique. Face à la complexité du problème inverse statistique considéré, une première tentative de réponse a été apportée par les travaux de recherche précédemment menés dans [Nguyen et al. 2015] et a conduit à l'élaboration d'une méthodologie d'identification multi-échelle (à deux échelles) innovante à partir de mesures expérimentales obtenues aux deux échelles (macroscopique et mésoscopique) en introduisant, d'une part un problème aux limites elliptique déterministe modélisant la configuration expérimentale de l'échantillon à l'échelle macroscopique, et d'autre part un problème aux limites elliptique stochastique modélisant la configuration expérimentale d'un sous-domaine à l'échelle mésoscopique, et en utilisant une

méthode d'homogénéisation numérique stochastique pour transférer les informations statistiques de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique sous l'hypothèse classique de séparation des échelles. Le problème inverse statistique multi-échelle est alors formulé comme un problème d'optimisation multi-objectif qui vise à minimiser une fonction-coût multi-objectif (à valeurs vectorielles) constituée de plusieurs indicateurs numériques qui sont des fonctions-coût mono-objectif (à valeurs scalaires) sensibles à la variation des hyperparamètres à identifier. Ces indicateurs numériques permettent de quantifier et minimiser la distance (définie par rapport à une métrique donnée) entre des quantités d'intérêt provenant des mesures expérimentales multi-échelles de champs aux échelles macroscopique et mésoscopique d'une part, et leurs homologues obtenus par des simulations numériques du modèle déterministe à l'échelle macroscopique et du modèle stochastique à l'échelle mésoscopique d'autre part. Cette procédure d'identification multi-échelle a été appliquée avec succès à l'identification expérimentale des propriétés élastiques d'un tissu biologique (de l'os cortical de bœuf) dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D contraintes planes à partir de mesures optiques multi-échelles de champs de déplacement réalisées simultanément aux échelles macroscopique et mésoscopique sur un seul échantillon soumis à un chargement externe statique (compression uni-axiale verticale) à l'échelle macroscopique [Nguyen et al. 2016].

Dans ce travail de recherche, on propose une amélioration de la formulation du problème d'optimisation multi-objectif multi-échelle à travers l'introduction d'une fonction-coût mono-objectif (indicateur numérique) supplémentaire à l'échelle mésoscopique permettant de quantifier la distance (par rapport à une métrique donnée) entre la (les) longueur(s) de corrélation spatiale des champs cinématiques mesurés expérimentalement et celles des champs correspondant simulés numériquement. Cette reformulation du problème d'optimisation multi-objectif a pour objectif de munir chaque hyperparamètre du modèle stochastique *prior* de sa propre fonction-coût dédiée, afin d'éviter l'emploi d'un algorithme d'optimisation globale (tel que l'algorithme génétique utilisé dans [Nguyen et al. 2015]) qui peut s'avérer très coûteux en terme de temps de calcul, et d'utiliser à la place un algorithme plus efficace numériquement, tel qu'un algorithme itératif de point fixe, pour accélérer la résolution du problème d'optimisation multi-objectif sous-jacent. Par ailleurs, nous construirons une base de données associée à l'ensemble de ces indicateurs numériques qui permettra d'entraîner un réseau de neurones artificiels pour l'identification des hyperparamètres \mathbf{b} . Un tel réseau de neurones artificiels n'est à entraîner qu'une seule fois indépendamment des mesures expérimentales alors qu'avec la stratégie d'optimisation utilisant l'algorithme itératif de point fixe ou l'algorithme génétique, les calculs doivent être réalisés à nouveau pour chaque nouvelle mesure expérimentale.

Par ailleurs, si des mesures expérimentales des champs cinématiques étaient disponibles sur plusieurs sous-domaines mésoscopiques, il n'est pas évident que l'information expérimentale contenue dans chacune de ces mesures expérimentales

soit identique. Numériquement, il a été vérifié que ce n'était pas le cas. Par conséquent, si l'identification multi-échelle des hyperparamètres n'était menée qu'avec une seule mesure expérimentale donnée, nous obtiendrions très probablement une valeur identifiée \mathbf{b}^{opt} du vecteur des hyperparamètres différente de celle obtenue si l'identification était menée avec une autre mesure expérimentale. Ainsi, la valeur optimale identifiée \mathbf{b}^{opt} du vecteur des hyperparamètres n'est pas robuste par rapport à la mesure expérimentale. C'est la raison pour laquelle dans [Nguyen et al. 2015], plusieurs mesures expérimentales ont été utilisées à partir de différents sous-domaines mésoscopiques pour améliorer la robustesse de l'identification de \mathbf{b}^{opt} en moyennant les valeurs identifiées $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_Q^{\text{meso}}$ des hyperparamètres obtenues avec Q mesures expérimentales. Dans ce présent travail, une autre stratégie sera développée et consistera à construire un modèle probabiliste *prior* du vecteur \mathbf{b} des hyperparamètres en utilisant le principe du MaxEnt et l'information disponible. Ainsi, on introduit un vecteur aléatoire $\mathbf{B} = (D, \mathbf{L}, \mathbf{C})$ dont $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_Q^{\text{meso}}$ sont supposés être Q réalisations statistiquement indépendantes.

2 Hypothèses retenues et stratégie proposée pour l'identification inverse statistique multi-échelle

Dans cette partie, nous rappelons tout d'abord les hypothèses retenues dans [Nguyen et al. 2015] pour la résolution du problème inverse statistique multi-échelle, qui restent valables dans ce travail de recherche. Nous présentons ensuite un aperçu de la stratégie de résolution qui est toujours basée sur la méthodologie précédemment établie dans [Nguyen et al. 2015], en mettant l'accent sur les améliorations proposées dans ce travail de recherche permettant d'accroître l'efficacité numérique (en terme de coût de calcul), la précision et la robustesse de la procédure d'identification.

2.1 Hypothèses retenues

Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire, de la théorie des probabilités et de l'homogénéisation numérique stochastique en micro-mécanique et en mécanique multi-échelle des matériaux hétérogènes, nous faisons les hypothèses suivantes (relatives à la séparation d'échelles et aux propriétés de stationnarité et d'ergodicité) concernant la résolution du problème inverse statistique multi-échelle :

- il existe une séparation des échelles macroscopique et mésoscopique, de sorte qu'on peut définir un sous-domaine mésoscopique dont la taille est suffisamment grande par rapport à la taille des hétérogénéités de la microstructure (longueur caractéristique de l'échelle microscopique) et suffisamment petite par rapport à la taille du domaine macroscopique (longueur caractéristique de l'échelle macroscopique) pour être considéré comme un VER sur lequel une procédure d'homogénéisation numérique peut être appliquée ;

- le champ de tenseur d'élasticité apparent aléatoire à l'échelle mésoscopique est la restriction à un ou plusieurs sous-domaine(s) mésoscopique(s) d'un champ aléatoire statistiquement homogène (ou spatialement stationnaire) indexé sur \mathbb{R}^d , de sorte que la valeur moyenne statistique du champ d'élasticité aléatoire à l'échelle mésoscopique peut être considérée comme homogène (i.e. constante dans l'espace) et par conséquent indépendante des coordonnées spatiales ;
- le champ de tenseur d'élasticité apparent aléatoire à l'échelle mésoscopique est ergodique en moyenne d'ordre deux (i.e. pour la convergence en moyenne d'ordre deux, bien que tout autre mode de convergence puisse être considéré [Guilleminot et al. 2011]) pour sa moyenne, de sorte que le tenseur d'élasticité homogénéisé à l'échelle macroscopique calculé par homogénéisation stochastique du champ d'élasticité apparent aléatoire dans un sous-domaine mésoscopique correspondant à un VER peut être considéré comme effectif (presque déterministe), dans la mesure où (i) sa valeur moyenne spatiale atteint une convergence asymptotique (avec un niveau de probabilité très élevé) pour une taille de sous-domaine mésoscopique suffisamment grande (par rapport à la taille des hétérogénéités définissant l'échelle microscopique), et par conséquent (ii) son niveau de fluctuations statistiques (autour de sa valeur moyenne statistique) à l'échelle macroscopique peut être considéré comme (presque) négligeable, conduisant ainsi à un tenseur d'élasticité homogénéisé (presque) déterministe à l'échelle macroscopique.

L'hypothèse de séparation d'échelles entre l'échelle macroscopique et l'échelle mésoscopique (requis pour l'existence d'un VER) semble être raisonnable. De plus, remarquons que, si une telle hypothèse de séparation d'échelles n'était pas satisfaite, alors le problème inverse statistique multi-échelle considéré serait un problème mal posé si une seule mesure expérimentale de champs à l'échelle macroscopique était disponible, car dans ce cas le tenseur d'élasticité macroscopique (ou le tenseur de souplesse macroscopique) doit être modélisé par un tenseur aléatoire et une seule mesure expérimentale est insuffisante pour extraire une information statistique permettant l'identification des hyperparamètres du modèle stochastique du tenseur d'élasticité macroscopique (ou du tenseur de souplesse macroscopique).

2.2 Problème inverse statistique multi-échelle et difficultés associées

A l'échelle macroscopique, le domaine $\Omega^{\text{macro}} \subset \mathbb{R}^d$ occupé par l'échantillon est considéré comme un milieu élastique linéaire homogène déterministe pour lequel les propriétés mécaniques effectives sont représentées par un modèle déterministe du tenseur d'élasticité d'ordre quatre $C^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ indépendant de la position spatiale \mathbf{x} et paramétré par un vecteur \mathbf{a} appartenant à un ensemble admissible $\mathcal{A}^{\text{macro}}$. Le paramètre à valeurs vectorielles \mathbf{a} est constitué des coefficients algébriquement

indépendants du tenseur d'élasticité à l'échelle macroscopique $\mathbf{C}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ appartenant à une classe de symétrie donnée induite par des symétries matérielles élastiques linéaires. Par exemple, dans le cas particulier d'un matériau isotrope (resp. isotrope transverse), le vecteur \mathbf{a} n'implique que 2 (resp. 5) composantes algébriquement indépendantes, à savoir le module d'Young et le coefficient de Poisson (resp. le module d'Young longitudinal, le coefficient de Poisson longitudinal et le module de cisaillement longitudinal suivant l'axe de symétrie de rotation, ainsi que le module d'Young transverse et le coefficient de Poisson transverse dans le plan d'isotropie), tandis que dans le cas général d'un matériau purement anisotrope, le paramètre à valeurs vectorielles \mathbf{a} implique au total 21 composantes algébriquement indépendantes dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire 3D. Le paramètre à valeurs vectorielles \mathbf{a} contient alors autant de composantes que la dimension de la classe de symétrie considérée (plus le niveau de symétries est élevé, moins le nombre de composantes algébriquement indépendantes est grand), à savoir 2 en isotrope, 3 en cubique, 5 en isotrope transverse, 7 (ou 6 avec un paramétrage réduit) en trigonal (ou rhomboédrique) et en tétragonal (ou quadratique), 9 en orthotrope, 13 en monoclinique et 21 en triclinique (ou purement anisotrope) [Guilleminot et Soize 2013a, Soize 2017].

A l'échelle microscopique, rappelons que nous nous intéressons à des matériaux (ou milieux) hétérogènes anisotropes pour lesquels la microstructure complexe aléatoire ne peut pas être décrite correctement et caractérisée numériquement à partir des propriétés morphologiques et mécaniques de ses micro-constituants. Une solution potentielle alternative consiste à changer l'échelle d'observation et de modélisation en considérant une échelle intermédiaire (mésoscopique) entre l'échelle macroscopique et l'échelle microscopique. Une telle modélisation à l'échelle mésoscopique permet de décrire les propriétés élastiques hétérogènes par un champ aléatoire continu avec des fluctuations spatiales et statistiques relativement faibles par rapport à celles d'une description à l'échelle microscopique. A l'échelle mésoscopique, la microstructure complexe est alors vue comme un milieu élastique linéaire hétérogène aléatoire pour lequel les propriétés mécaniques apparentes sont représentées par un modèle stochastique *prior* du champ de tenseur d'élasticité aléatoire d'ordre quatre $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, introduit dans [Soize 2006] et rappelé dans la section 1 du chapitre 1, qui dépend de la position spatiale \mathbf{x} et qui est paramétré par un petit nombre d'hyperparamètres regroupés dans un vecteur \mathbf{b} appartenant à un ensemble admissible $\mathcal{B}^{\text{meso}}$. L'hyperparamètre à valeurs vectorielles \mathbf{b} est constitué de trois composantes caractérisant les informations probabilistes (ou statistiques) complètes du champ d'élasticité aléatoire $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, à savoir (i) un paramètre de dispersion δ positif, borné et supposé indépendant de la position spatiale \mathbf{x} , contrôlant le niveau des fluctuations statistique de $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, (ii) un vecteur de d longueurs de corrélation spatiale positives $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d)$ caractérisant la structure de corrélation spatiale de $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ dans chacune des directions, et (iii) le vecteur $\underline{\mathbf{c}}$ regroupant les composantes algébriquement indépendantes de la valeur moyenne statistique $\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}$ de $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, qui est homogène (i.e. constante dans l'espace) et donc indépendante de \mathbf{x} en raison de la stationnarité du champ aléatoire

$\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$.

Le modèle déterministe de $\mathbf{C}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ à l'échelle macroscopique et le modèle stochastique *prior* de $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ à l'échelle mésoscopique sont *a priori* inconnus et doivent être identifiés en déterminant la valeur optimale $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ du paramètre à valeurs vectorielles $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}$ et celle \mathbf{b}^{meso} de l'hyperparamètre à valeurs vectorielles $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$ à partir des mesures expérimentales (par exemple, des mesures de champs de déplacement) disponibles aux deux échelles macroscopique et mésoscopique. Alors que le paramètre \mathbf{a} peut être complètement identifié en résolvant un problème inverse déterministe mono-échelle (à l'échelle macroscopique) en utilisant seulement les mesures expérimentales de champs disponibles à l'échelle macroscopique, l'hyperparamètre \mathbf{b} ne peut pas être identifié en résolvant un problème inverse statistique mono-échelle (à l'échelle mésoscopique) en utilisant seulement les mesures expérimentales de champs disponibles à l'échelle mésoscopique. Plus précisément, l'identification du paramètre de dispersion δ et du vecteur des longueurs de corrélation spatiale ℓ nécessite uniquement des mesures expérimentales de champs à l'échelle mésoscopique, tandis que l'identification de $\underline{\mathbf{c}}$ requiert des mesures expérimentales de champs supplémentaires à l'échelle macroscopique. En effet, une étape clé pour l'identification de la valeur moyenne $\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}$ (ou sa représentation vectorielle $\underline{\mathbf{c}}$) du champ aléatoire $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ est le transfert des informations probabilistes (ou statistiques) complètes (moyenne et fluctuations statistiques) du champ aléatoire $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ à l'échelle mésoscopique vers l'échelle macroscopique afin de lier les échelles mésoscopique et macroscopique. Un choix naturel pour un tel transfert d'informations (de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique) consiste à effectuer un changement d'échelles par homogénéisation numérique stochastique dans un sous-domaine mésoscopique supposé suffisamment grand pour être (presque) considéré comme un VER de la microstructure, en calculant le tenseur d'élasticité effectif $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$ qui est spatialement homogène et, en raison de l'ergodicité du champ aléatoire $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$: \mathbf{A} pour la moyenne (où \mathbf{A} est le champ de localisation des déformations aléatoire défini dans la section 2 du chapitre 1), le tenseur d'élasticité effectif $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$ peut être considéré comme (presque) déterministe et égal au tenseur d'élasticité macroscopique $\mathbf{C}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$. Ainsi, contrairement au paramètre \mathbf{a} , l'hyperparamètre \mathbf{b} nécessite des mesures expérimentales multi-échelles de champs (à l'échelle macroscopique et à l'échelle mésoscopique) pour être complètement identifié, conduisant à un problème inverse statistique multi-échelle difficile à résoudre. Étant donné que par hypothèse un seul échantillon est testé expérimentalement sous un chargement externe statique donné à l'échelle macroscopique, les mesures expérimentales de champs doivent être réalisées simultanément aux échelles macroscopique et mésoscopique sur le seul échantillon testé.

2.3 Stratégie proposée

De part les difficultés majeures mentionnées ci-dessus et induites par la complexité du problème inverse statistique multi-échelle, une première méthodologie complète concernant une telle identification multi-échelle a été récemment proposée dans [Nguyen et al. 2015], dans laquelle une stratégie d'identification inverse statistique multi-échelle est introduite et développée pour une microstructure élastique à fluctuations statistiques anisotropes et spatialement hétérogènes dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire 3D. La stratégie proposée permet l'identification (i) de la valeur optimale $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ du paramètre \mathbf{a} (dans l'ensemble admissible $\mathcal{A}^{\text{macro}}$), et (ii) de la valeur optimale \mathbf{b}^{meso} de l'hyperparamètre \mathbf{b} (dans l'ensemble admissible $\mathcal{B}^{\text{meso}}$), en utilisant les mesures expérimentales de champs de déplacement (ou des champs de déformations associées) aux échelles macroscopique et mésoscopique. La méthodologie d'identification expérimentale multi-échelle consiste à introduire et construire différents indicateurs numériques permettant de formuler le problème inverse statistique multi-échelle comme un problème d'optimisation multi-objectif. Dans ce travail de recherche, nous introduisons quatre indicateurs numériques sensibles à la variation des hyperparamètres à identifier, qui sont :

1. un indicateur numérique à l'échelle macroscopique $\mathcal{J}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$, dédié à l'identification du paramètre \mathbf{a} , qui quantifie la distance entre le champ des déformations (linéarisé) expérimental $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ (associé au champ de déplacement expérimental $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$) mesuré avec une résolution macroscopique sur le domaine macroscopique Ω^{macro} , et le champ des déformations (linéarisé) $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ (associé au champ de déplacement $\mathbf{u}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$) calculé à l'aide d'un problème aux limites déterministe avec la même résolution macroscopique et des conditions aux limites de Dirichlet et de Neumann modélisant la configuration expérimentale à l'échelle macroscopique, dans lequel intervient le tenseur d'élasticité déterministe inconnu $\mathbf{C}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ qui doit être identifié ;
2. un indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_{\delta}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, dédié à l'identification de l'hyperparamètre δ , qui quantifie la distance entre un pseudo-coefficient de dispersion $\delta_{\text{exp}}^{\varepsilon}$ représentant le niveau des fluctuations spatiales du champ des déformations (linéarisé) expérimental $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ (associé au champ de déplacement expérimental $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$) mesuré avec une résolution mésoscopique sur un sous-domaine mésoscopique $\Omega^{\text{meso}} \subset \Omega^{\text{macro}}$, et un pseudo-coefficient de dispersion aléatoire $D^{\mathcal{E}}(\mathbf{b})$ représentant le niveau des fluctuations statistiques du champ des déformations (linéarisé) aléatoire $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ (associé au champ de déplacement aléatoire $\mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$) calculé à l'aide d'un problème aux limites stochastique avec la même résolution mésoscopique et des conditions aux limites de Dirichlet modélisant la configuration expérimentale à l'échelle mésoscopique, dans lequel intervient le champ de tenseur d'élasticité aléatoire $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ avec un niveau de fluctuations statistiques inconnu δ qui doit être identifié ;
3. un autre indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_{\ell}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, dédié à l'identification

de l'hyperparamètre $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d)$, qui quantifie la distance entre les pseudo-longueurs de corrélation spatiale $\ell_{\text{exp},1}^\varepsilon, \dots, \ell_{\text{exp},d}^\varepsilon$ du champ des déformations (linéarisé) expérimental $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ dans chacune des d directions spatiales, mesuré avec une résolution mésoscopique sur un sous-domaine mésoscopique $\Omega^{\text{meso}} \subset \Omega^{\text{macro}}$, et les pseudo-longueurs de corrélation spatiale $L_1^\mathcal{E}(\mathbf{b}), \dots, L_d^\mathcal{E}(\mathbf{b})$ des fluctuations statistiques du champ des déformations (linéarisé) aléatoire $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ dans chacune des d directions spatiales, calculé à partir du même problème aux limites stochastique que $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, dans lequel intervient le champ de tenseur d'élasticité aléatoire $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ avec une structure de corrélation spatiale induite et caractérisée par un vecteur de longueurs de corrélation spatiale inconnues $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d)$ qui doit être identifié ;

4. un indicateur numérique macroscopique-mésoscopique (multi-échelle) $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, dédié à l'identification de l'hyperparamètre $\underline{\mathbf{c}}$, qui quantifie la distance entre le tenseur d'élasticité homogène déterministe à l'échelle macroscopique $\mathbf{C}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$, et le tenseur d'élasticité effectif (aléatoire) $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$ résultant d'une homogénéisation numérique stochastique dans un VER à l'échelle mésoscopique du champ de tenseur d'élasticité aléatoire $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, dont la valeur moyenne statistique $\underline{\mathbf{C}}^{\text{meso}}$ (ou de manière équivalente, sa représentation vectorielle $\underline{\mathbf{c}}$) est inconnue et doit être identifiée.

Le problème inverse statistique multi-échelle consiste alors à identifier les valeurs optimales $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ et \mathbf{b}^{meso} du paramètre \mathbf{a} dans $\mathcal{A}^{\text{macro}}$ et de l'hyperparamètre \mathbf{b} dans $\mathcal{B}^{\text{meso}}$, respectivement, en résolvant un problème d'optimisation multi-objectif qui consiste à minimiser la fonction-coût multi-objectif $\mathcal{J}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathcal{J}^{\text{macro}}(\mathbf{a}), \mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b}), \mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b}), \mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$ constituée des quatre indicateurs numériques qui sont des fonctions-coût mono-objectif. Toutefois, il est possible de réduire le coût de calcul engendré par la résolution du problème d'optimisation multi-objectif en décomposant celui-ci en (i) un problème d'optimisation mono-objectif qui consiste à minimiser $\mathcal{J}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ pour l'identification du paramètre optimal $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ en utilisant uniquement les mesures expérimentales de champs à l'échelle macroscopique, et (ii) un problème d'optimisation multi-objectif qui consiste à minimiser $\mathcal{J}^{\text{meso}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b}) = (\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b}), \mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b}), \mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b}))$ en utilisant les mesures expérimentales de champs à l'échelle mésoscopique et en exploitant le paramètre optimal $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ identifié précédemment à l'étape (i).

2.4 Améliorations de la méthode d'identification inverse statistique multi-échelle

Il est à noter que dans [Nguyen et al. 2015], l'indicateur $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ n'avait pas été introduit. La formulation améliorée proposée dans ce travail de recherche est plus avancée que celle initialement proposée dans [Nguyen et al. 2015] dans la mesure où elle met en jeu un indicateur numérique mésoscopique supplémentaire, à savoir $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, afin que le paramètre \mathbf{a} et les trois composantes δ , $\boldsymbol{\ell}$ et $\underline{\mathbf{c}}$ de

l'hyperparamètre \mathbf{b} aient chacun leur propre indicateur numérique dédié. Ainsi, le nombre de fonctions-coût mono-objectif étant identique au nombre de paramètres à optimiser, il est possible de remplacer l'algorithme d'optimisation globale utilisé dans [Nguyen et al. 2015], qui appartient à la classe des algorithmes de recherche aléatoire, génétiques et évolutifs [Cunha et Polak 1967, Censor 1977, Yu 1985, Dauer et Stadler 1986, Goldberg 1989, Deb 2001, Marler et Arora 2004, Konak et al. 2006, Coello Coello 2006, Coello et al. 2007, Deb 2014], par un algorithme d'optimisation plus efficace numériquement, tel que l'algorithme itératif de point fixe considéré dans ce travail. En effet, même en utilisant les outils de traitement et de calcul parallèle, le coût de calcul engendré par l'algorithme d'optimisation globale reste élevé en raison de la grande dimension stochastique du champ de tenseur d'élasticité aléatoire $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, et le problème d'optimisation multi-objectif pourrait même s'avérer impossible à résoudre numériquement (avec les ressources informatiques actuellement disponibles) en très grande dimension stochastique pour des modèles numériques (non-)linéaires à grande échelle de microstructures aléatoires tridimensionnelles. Par ailleurs, nous envisageons aussi d'explorer la possibilité d'utiliser l'apprentissage automatique à partir d'une base de données générée par le modèle stochastique *prior* pour entraîner un réseau de neurones artificiels et pour résoudre le problème inverse statistique. Comme expliqué dans l'introduction et le chapitre 1, il est intéressant de vérifier si une telle approche par l'apprentissage automatique permet ou pas un gain sur le coût de calcul. Enfin, il est à noter que nous allons utiliser un indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ différent de celui introduit dans [Nguyen et al. 2015] sans en dégrader les performances en terme de précision.

En outre, comme expliqué dans le dernier paragraphe de la section 1, nous construirons le modèle probabiliste *prior* du vecteur aléatoire \mathbf{B} des hyperparamètres du modèle stochastique *prior* de \mathbf{C}^{meso} . La valeur identifiée \mathbf{b}^{opt} sera obtenue en utilisant la méthode MLE [Serfling 1980, Papoulis et Pillai 2002, Spall 2005, Soize 2017] avec des réalisations statistiquement indépendantes $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_Q^{\text{meso}}$ de \mathbf{B} obtenues pour différentes mesures expérimentales à l'échelle mésoscopique, et non pas en moyennant les valeurs $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_Q^{\text{meso}}$, comme ce qui a été fait dans [Nguyen et al. 2015].

Dans la suite, la dépendance spatiale (en \mathbf{x}) des champs déterministes ou aléatoires à valeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles sera souvent omise par soucis de lisibilité et pour simplifier les notations. Étant donné que la méthodologie d'identification présentée est développée dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire, la terminologie « champ des déformations » est adoptée pour faire référence au « champ des déformations linéarisé » par soucis de concision.

3 Configuration expérimentale multi-échelle

Dans cette section, nous rappelons brièvement la configuration expérimentale multi-échelle d'un essai statique de compression uni-axiale observé à deux échelles

macroscopique et mésoscopique, conçue spécifiquement pour l'acquisition des données expérimentales multi-échelles nécessaires à l'égard de l'information expérimentale nécessaire pour la résolution du problème inverse statistique présenté dans ce chapitre. Soulignons que les difficultés relatives à l'acquisition des mesures expérimentales sont induites non seulement par la nature complexe de la microstructure élastique anisotrope hétérogène mais aussi par la nécessité d'obtenir des mesures multi-échelles de champs cinématiques à deux échelles différentes (macroscopique et mésoscopique) pour un seul échantillon testé (sous des conditions de chargement statique données) par corrélation d'images numériques (DIC) multi-échelle réalisée simultanément aux échelles macroscopique et mésoscopique. Pour surmonter ces difficultés, un protocole expérimental spécifique (incluant la préparation de l'échantillon, le développement d'un banc de mesure, le système d'acquisition d'images numériques et la méthode DIC) a été mis en place dans [Nguyen et al. 2016] pour l'acquisition de mesures optiques multi-échelles de champs de déplacement (obtenues par une méthode DIC 2D) réalisées simultanément aux échelles macroscopique et mésoscopique sur un seul échantillon d'os cortical de bœuf soumis à un essai statique de compression uni-axiale verticale.

Le seul échantillon disponible occupe un domaine ouvert borné $\Omega^{\text{macro}} \subset \mathbb{R}^d$ avec une frontière $\partial\Omega^{\text{macro}}$ suffisamment régulière (e.g. de Lipschitz). La frontière $\partial\Omega^{\text{macro}}$ de Ω^{macro} est constituée de deux parties disjointes et complémentaires Γ_N^{macro} (où sont appliquées les conditions aux limites de Neumann) et Γ_D^{macro} (où sont appliquées les conditions aux limites de Dirichlet) telles que $\partial\Omega^{\text{macro}} = \Gamma_N^{\text{macro}} \cup \Gamma_D^{\text{macro}}$ et $\Gamma_N^{\text{macro}} \cap \Gamma_D^{\text{macro}} = \emptyset$, avec $|\Gamma_D^{\text{macro}}| \neq 0$, où $|\Gamma_D^{\text{macro}}|$ désigne la mesure de surface de Γ_D^{macro} . Un champ de force surfacique déterministe uniformément réparti $\mathbf{f}^{\text{macro}}$ est appliqué sur Γ_N^{macro} , tandis que des conditions de Dirichlet homogènes (nulles) sont appliquées sur Γ_D^{macro} , de sorte que les déplacements soient bloqués dans toutes les directions et ainsi qu'il n'y ait pas de mouvement de corps rigide durant l'essai. Soit Ω^{meso} un sous-domaine mésoscopique ouvert borné de Ω^{macro} avec une frontière $\partial\Omega^{\text{meso}}$ suffisamment régulière (e.g. de Lipschitz). On suppose que le domaine macroscopique Ω^{macro} occupé par l'unique échantillon peut contenir plusieurs (au moins un) sous-domaines mésoscopiques sans recouvrement entre eux $\{\Omega_q^{\text{meso}}\}_{1 \leq q \leq Q}$ (avec $Q \geq 1$). Au cours de l'essai mécanique, le champ de déplacement expérimental $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ à l'échelle macroscopique et le champ de déplacement expérimental $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ à l'échelle mésoscopique peuvent être mesurés simultanément sur le domaine macroscopique Ω^{macro} et sur les Q différents sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$ contenus dans Ω^{macro} , respectivement, en utilisant soit deux caméras numériques optiques réglées chacune à une résolution spatiale pré-définie adaptée à son échelle d'observation (macroscopique ou mésoscopique) pour l'acquisition simultanée des mesures optiques (images) de champs de déplacement aux deux échelles macroscopique et mésoscopique, soit une seule caméra numérique optique réglée à la résolution mésoscopique (nécessitant un post-traitement des images acquises à l'échelle mésoscopique pour reconstruire les images à l'échelle macroscopique), puis en appliquant une méthode de corrélation

d'images numériques (DIC) d'une part à l'échelle macroscopique et d'autre part à l'échelle mésoscopique. Dans [Nguyen et al. 2016], une seule caméra a été utilisée et placée devant la machine d'essai au cours du test de compression pour l'acquisition du champ de déplacement $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ mesuré à l'échelle mésoscopique sur l'ensemble du domaine macroscopique Ω^{macro} . Les champs de déformations expérimentaux $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ associés respectivement au champ de déplacement expérimental $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ mesuré dans Ω^{macro} à l'échelle macroscopique et à celui $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ mesuré dans $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$ à l'échelle mésoscopique peuvent être déduits des mesures brutes de champs (de déplacement) correspondantes par post-traitement via des techniques d'interpolation. La figure 2.1 donne un aperçu graphique de la configuration expérimentale multi-échelle de l'échantillon à l'échelle macroscopique et à l'échelle mésoscopique.

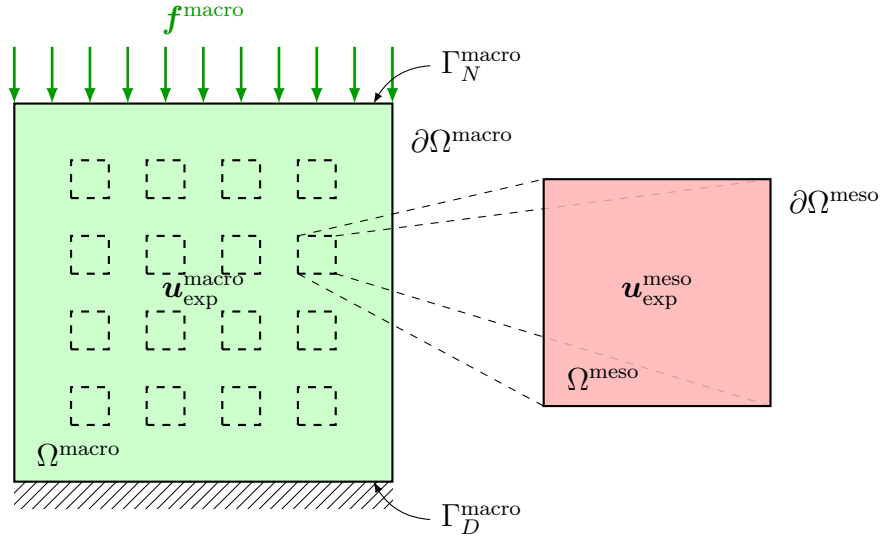


FIGURE 2.1 – Configuration expérimentale multi-échelle : champ de déplacement $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ mesuré à l'échelle macroscopique dans le domaine Ω^{macro} et champ de déplacement $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ mesuré à l'échelle mésoscopique dans un sous-domaine $\Omega^{\text{meso}} \subset \Omega^{\text{macro}}$

Dans la suite, un problème aux limites elliptique déterministe à l'échelle macroscopique et un problème aux limites elliptique stochastique à l'échelle mésoscopique sont introduits pour modéliser l'échantillon dans sa configuration expérimentale (géométrie, propriétés du matériau et conditions aux limites) à l'échelle macroscopique et à l'échelle mésoscopique, respectivement. De plus, le tenseur d'élasticité effectif (aléatoire) est calculé à partir d'un VER en utilisant une des méthodes d'homogénéisation numérique stochastique présentées en section 2 du chapitre 1 pour transférer les informations probabilistes (ou statistiques) complètes (moyenne et fluctuations statistiques) du champ d'élasticité aléatoire à l'échelle mésoscopique vers l'échelle macroscopique.

4 Construction des indicateurs numériques macroscopique, mésoscopiques et multi-échelle

4.1 Construction de l'indicateur numérique macroscopique

A l'échelle macroscopique, le problème aux limites elliptique déterministe modélisant la configuration expérimentale décrite en section 3 sur le domaine Ω^{macro} de l'échantillon dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire consiste à trouver le champ de déplacement déterministe $\mathbf{u}^{\text{macro}}$ et le champ des contraintes de Cauchy associé $\boldsymbol{\sigma}^{\text{macro}}$ satisfaisant les équations d'équilibre locales, la loi de comportement locale et les conditions aux limites de Neumann et de Dirichlet :

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^{\text{macro}}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega^{\text{macro}}, \quad (2.1a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{macro}} = C^{\text{macro}}(\mathbf{a}) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{macro}} \quad \text{dans } \Omega^{\text{macro}}, \quad (2.1b)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{macro}} \cdot \mathbf{n}^{\text{macro}} = \mathbf{f}^{\text{macro}} \quad \text{sur } \Gamma_N^{\text{macro}}, \quad (2.1c)$$

$$\mathbf{u}^{\text{macro}} = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_D^{\text{macro}}, \quad (2.1d)$$

où $\mathbf{n}^{\text{macro}}$ est le vecteur normal unitaire sortant de la surface $\partial\Omega^{\text{macro}}$ du domaine Ω^{macro} et $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{macro}}$ est le champ des déformations associé au champ de déplacement $\mathbf{u}^{\text{macro}}$ à l'échelle macroscopique et défini par

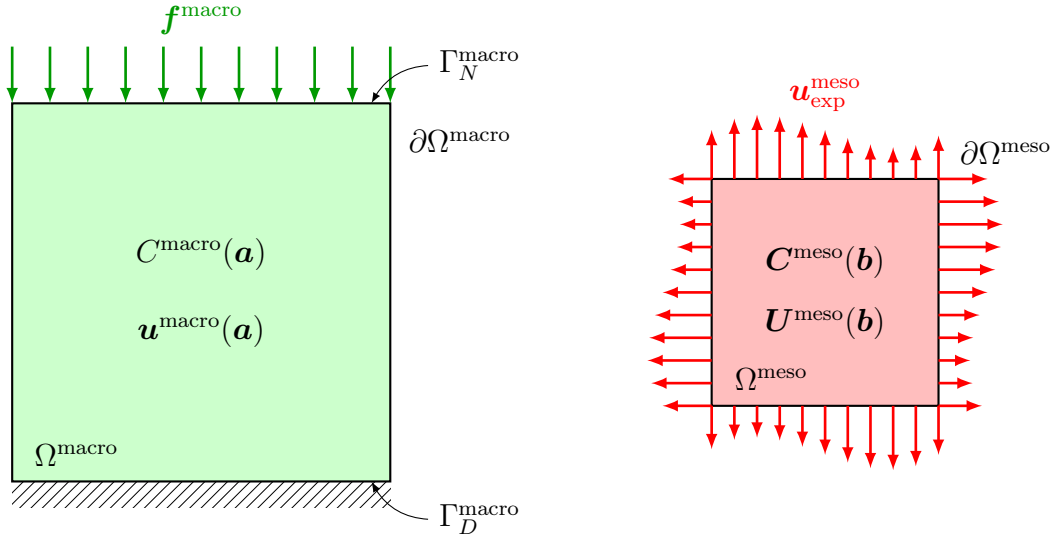
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{macro}} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{\text{macro}}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^{\text{macro}} + (\nabla \mathbf{u}^{\text{macro}})^T). \quad (2.1e)$$

Comme le matériau est supposé être homogène et déterministe à l'échelle macroscopique, le tenseur d'élasticité d'ordre quatre inconnu $C^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ intervenant dans la loi de comportement (2.1b) est indépendant de la position spatiale \mathbf{x} et paramétré par un paramètre \mathbf{a} appartenant à un ensemble admissible $\mathcal{A}^{\text{macro}}$ (qui dépend de la classe de symétrie du matériau considéré à l'échelle macroscopique) tel que $\{C^{\text{macro}}(\mathbf{a}) ; \mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}\}$. La figure 2.2a montre une représentation graphique du problème aux limites déterministe à l'échelle macroscopique en 2D.

Dans le contexte de l'identification inverse, la valeur optimale identifiée $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ peut être déterminée en exploitant la sensibilité du champ des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{macro}}$ par rapport à \mathbf{a} et en utilisant le champ des déformations expérimental $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ à travers l'introduction d'un indicateur numérique macroscopique $\mathcal{J}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ défini pour tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}$ par

$$\mathcal{J}^{\text{macro}}(\mathbf{a}) = \frac{1}{|\Omega^{\text{macro}}|} \int_{\Omega^{\text{macro}}} \|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{macro}}(\mathbf{x}; \mathbf{a}) - \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{macro}}(\mathbf{x})\|_F^2 d\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

où $|\Omega^{\text{macro}}|$ désigne la mesure de volume du domaine Ω^{macro} .



(a) Problème aux limites déterministe caractérisé par le tenseur d'élasticité déterministe $C^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ à l'échelle macroscopique : champ de déplacement déterministe $\mathbf{u}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ calculé à l'échelle macroscopique dans Ω^{macro}

(b) Problème aux limites stochastique caractérisé par un champ de tenseur d'élasticité aléatoire $C^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ à l'échelle mésoscopique : champ de déplacement aléatoire $\mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ calculé à l'échelle mésoscopique dans Ω^{meso}

FIGURE 2.2 – Problèmes aux limites (a) à l'échelle macroscopique et (b) à l'échelle mésoscopique

4.2 Construction des indicateurs numériques mésoscopiques

A l'échelle mésoscopique, le problème aux limites elliptique stochastique modélisant la configuration expérimentale décrite en section 3 d'un sous-domaine donné $\Omega^{\text{meso}} \subset \Omega^{\text{macro}}$ dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire consiste à trouver le champ de déplacement aléatoire \mathbf{U}^{meso} et le champ des contraintes de Cauchy aléatoire associé $\boldsymbol{\Sigma}^{\text{meso}}$ satisfaisant les équations d'équilibre locales, la loi de comportement locale et les conditions aux limites de Dirichlet :

$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{\Sigma}^{\text{meso}}) = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega^{\text{meso}}, \quad (2.3a)$$

$$\boldsymbol{\Sigma}^{\text{meso}} = \mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) : \boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{meso}} \quad \text{dans } \Omega^{\text{meso}}, \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{U}^{\text{meso}} = \mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}} \quad \text{sur } \partial\Omega^{\text{meso}}, \quad (2.3c)$$

où $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{meso}}$ est le champ des déformations aléatoire associé au champ de déplacement aléatoire \mathbf{U}^{meso} à l'échelle mésoscopique et défini par

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{meso}} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}^{\text{meso}}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U}^{\text{meso}} + (\nabla \mathbf{U}^{\text{meso}})^T). \quad (2.3d)$$

Notons que les conditions aux limites non-homogènes (2.3c) sont imposées sur toute la frontière $\partial\Omega^{\text{meso}}$ de Ω^{meso} , qui correspond à la restriction sur $\partial\Omega^{\text{meso}}$ du champ de déplacement expérimental $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$. Par ailleurs, $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ est le champ de tenseur d'élasticité aléatoire *prior* introduit dans la section 1 du chapitre 1, et dont $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$ est le vecteur des hyperparamètres. Il est à noter que le champ de déplacement aléatoire $\mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et le champ des déformations aléatoire associé $\mathcal{E}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ ne sont *a priori* pas statistiquement homogènes (ou spatialement stationnaires). La figure 2.2b montre une représentation graphique du problème aux limites stochastique à l'échelle mésoscopique en 2D.

Dans le contexte de l'identification inverse statistique, les valeurs optimales identifiées δ^{meso} et $\boldsymbol{\ell}^{\text{meso}} = (\ell_1^{\text{meso}}, \dots, \ell_d^{\text{meso}})$ peuvent être déterminées en exploitant la sensibilité de certaines quantités d'intérêt du problème aux limites elliptique stochastique (2.3) par rapport à δ et $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d)$, respectivement, et en utilisant leurs homologues issus des mesures expérimentales de champs cinématiques, à travers l'introduction de deux indicateurs numériques $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ à l'échelle mésoscopique.

4.2.1 Construction de l'indicateur numérique mésoscopique associé au paramètre de dispersion

Un premier indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ est introduit pour identifier le paramètre de dispersion δ contrôlant le niveau des fluctuations statistiques du champ de tenseur d'élasticité aléatoire $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ à l'échelle mésoscopique. Il est défini pour tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$ par

$$\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \left(\frac{\mathbb{E}\{D^\mathcal{E}(\mathbf{b})\} - \delta_{\text{exp}}^\varepsilon}{\delta_{\text{exp}}^\varepsilon} \right)^2, \quad (2.4)$$

où $D^\mathcal{E}(\mathbf{b})$ est un pseudo-coefficient de dispersion aléatoire caractérisant le niveau des fluctuations spatiales du champ des déformations aléatoire $\mathcal{E}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ autour de sa moyenne volumique spatiale $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, et $\delta_{\text{exp}}^\varepsilon$ est le pseudo-coefficient de dispersion (déterministe) correspondant pour le champ des déformations expérimental $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ autour de sa moyenne volumique spatiale $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$, qui sont respectivement définis par

$$D^\mathcal{E}(\mathbf{b}) = \frac{\sqrt{V^\mathcal{E}(\mathbf{b})}}{\|\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})\|_F} \quad \text{et} \quad \delta_{\text{exp}}^\varepsilon = \frac{\sqrt{V_{\text{exp}}^\varepsilon}}{\|\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\|_F}, \quad (2.5)$$

où $V^\mathcal{E}(\mathbf{b})$ est une pseudo-variance aléatoire du champ des déformations aléatoire $\mathcal{E}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $V_{\text{exp}}^\varepsilon$ est la pseudo-variance aléatoire correspondante pour le champ des déformations expérimental $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ à l'échelle mésoscopique, qui sont respectivement définies par

$$V^\mathcal{E}(\mathbf{b}) = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}|} \int_{\Omega^{\text{meso}}} \|\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})\|_F^2 d\mathbf{x}, \quad (2.6a)$$

$$V_{\text{exp}}^{\varepsilon} = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}|} \int_{\Omega^{\text{meso}}} \|\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) - \underline{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}\|_F^2 d\mathbf{x}, \quad (2.6b)$$

où $|\Omega^{\text{meso}}|$ désigne la mesure de volume de Ω^{meso} , $\underline{\varepsilon}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\underline{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ sont respectivement définies par

$$\underline{\varepsilon}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}|} \int_{\Omega^{\text{meso}}} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) d\mathbf{x}, \quad (2.7a)$$

$$\underline{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}|} \int_{\Omega^{\text{meso}}} \varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.7b)$$

En appliquant le théorème de Green à (2.7a) et (2.7b), on obtient

$$\underline{\varepsilon}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}|} \int_{\partial\Omega^{\text{meso}}} \frac{1}{2} (\mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b}) \otimes \mathbf{n}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{U}^{\text{meso}}(\mathbf{x}; \mathbf{b})) d\mathbf{x}, \quad (2.8a)$$

$$\underline{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = \frac{1}{|\Omega^{\text{meso}}|} \int_{\partial\Omega^{\text{meso}}} \frac{1}{2} (\mathbf{u}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}^{\text{meso}}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{u}^{\text{meso}}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad (2.8b)$$

où le symbole \otimes désigne le produit tensoriel classique et \mathbf{n}^{meso} est le vecteur normal unitaire sortant de la surface $\partial\Omega^{\text{meso}}$ du sous-domaine Ω^{meso} . Ensuite, en utilisant les conditions aux limites de Dirichlet (2.3c) sur $\partial\Omega^{\text{meso}}$, on peut facilement montrer que $\underline{\varepsilon}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \underline{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ pour tout $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$.

L'indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_{\delta}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ défini par (2.4) permet de quantifier la distance relative entre la valeur moyenne statistique du pseudo-coefficient de dispersion aléatoire $D^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{b})$ du champ des déformations aléatoire du second ordre $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et le pseudo-coefficient de dispersion correspondant $\delta_{\text{exp}}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ du champ des déformations expérimental $\varepsilon_{\text{exp}}^{\text{meso}}$. Il est à noter qu'un indicateur numérique mésoscopique semblable à celui-ci avait été introduit dans [Nguyen et al. 2015], mais avec des expressions différentes de celles (2.4) et (2.6) pour les définitions de $\mathcal{J}_{\delta}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $V^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{b})$, respectivement.

4.2.2 Construction de l'indicateur numérique mésoscopique associé aux longueurs de corrélation spatiale

Un second indicateur numérique $\mathcal{J}_{\boldsymbol{\ell}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ est introduit et associé à l'identification du vecteur des longueurs de corrélation spatiale $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d)$. Supposons que Ω^{meso} soit un domaine parallélépipédique (e.g. un carré) si $d = 2$ ou bien un domaine hexaédrique (e.g. un cube) si $d = 3$, de taille B_{α} dans la direction α , et que le maillage éléments finis de Ω^{meso} soit structuré et régulier, constitué d'éléments quadrangles à 4 nœuds (si $d = 2$) ou d'éléments hexaèdres à 8 nœuds (si $d = 3$). Un tel maillage définit naturellement des rangées de lignes ou de colonnes d'éléments dans les directions spatiales x_1, \dots, x_d tous traversés en leur centre par des lignes définissant ainsi un

ensemble de n_c rangées de lignes $\mathcal{L}_1^{(1)}, \dots, \mathcal{L}_1^{(n_c)}$ dans la direction x_1 , un ensemble de n_c rangées de lignes $\mathcal{L}_2^{(1)}, \dots, \mathcal{L}_2^{(n_c)}$ dans la direction x_2 et un ensemble de n_c rangées de lignes $\mathcal{L}_3^{(1)}, \dots, \mathcal{L}_3^{(n_c)}$ dans la direction x_3 (voir la figure 2.3 pour $d = 2$ et la figure 2.4 pour $d = 3$). Soit un champ scalaire quelconque y défini sur \mathbb{R}^d et à valeurs dans \mathbb{R} . On note alors $y_1^{(c)}, \dots, y_d^{(c)}$ les restrictions de y sur les lignes $\mathcal{L}_1^{(c)}, \dots, \mathcal{L}_d^{(c)}$, respectivement, avec $c = 1, \dots, n_c$. Soient $\widehat{y}_1^{(c)}, \dots, \widehat{y}_d^{(c)}$ les transformées de Fourier de $y_1^{(c)} - \underline{y}_1, \dots, y_d^{(c)} - \underline{y}_d$, respectivement, où, pour tout $\alpha = 1, \dots, d$, on a introduit la fonction \underline{y}_α comme étant la moyenne de $y_\alpha^{(1)}, \dots, y_\alpha^{(n_c)}$. Soient S_1, \dots, S_d les fonctions définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ telles que pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$S_1(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n_c} \sum_{c=1}^{n_c} \widehat{y}_1^{(c)}(k) \overline{\widehat{y}_1^{(c)}(k)}, \quad (2.9a)$$

⋮

$$S_d(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n_c} \sum_{c=1}^{n_c} \widehat{y}_d^{(c)}(k) \overline{\widehat{y}_d^{(c)}(k)}, \quad (2.9b)$$

où les approximations suivantes des transformées de Fourier sont utilisées

$$\widehat{y}_1^{(c)}(k) = \int_0^{B_1} \left(y_1^{(c)}(x) - \underline{y}_1(x) \right) \exp(-ikx) dx, \quad (2.10a)$$

⋮

$$\widehat{y}_d^{(c)}(k) = \int_0^{B_d} \left(y_d^{(c)}(x) - \underline{y}_d(x) \right) \exp(-ikx) dx. \quad (2.10b)$$

La procédure décrite ci-dessus nous permet donc d'introduire des applications déterministes $\mathbb{S}_1, \dots, \mathbb{S}_d$ qui, à tout champ scalaire y défini sur \mathbb{R}^d et à valeurs dans \mathbb{R} , lui associe les fonctions S_1, \dots, S_d définies de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^+ telles que celles définies dans (2.9a) et (2.9b). On notera, pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{S}_1(y; k) = S_1(k), \dots, \mathbb{S}_d(y; k) = S_d(k). \quad (2.11)$$

On introduit les processus stochastiques $\widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_d$ indexés sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}^+ comme étant des transformations non-linéaires du champ des déformations aléatoire $\mathcal{E}^{\text{meso}}$ et tels que, en omettant provisoirement d'indiquer la dépendance implicite de $\mathcal{E}^{\text{meso}}$ avec \mathbf{b} , pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{T}_1(k) = \left(\sum_{1 \leq p \leq q \leq d} \mathbb{S}_1(\mathcal{E}_{pq}^{\text{meso}}; k)^2 \right)^{1/2}, \dots, \widehat{T}_d(k) = \left(\sum_{1 \leq p \leq q \leq d} \mathbb{S}_d(\mathcal{E}_{pq}^{\text{meso}}; k)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.12a)$$

De même, on introduit les fonctions déterministes $\widehat{T}_{\text{exp},1}, \dots, \widehat{T}_{\text{exp},d}$ définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R}^+ telles que pour tout $k \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{T}_{\text{exp},1}(k) = \left(\sum_{1 \leq p \leq q \leq d} \mathbb{S}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp},pq}^{\text{meso}}; k)^2 \right)^{1/2}, \dots, \widehat{T}_{\text{exp},d}(k) = \left(\sum_{1 \leq p \leq q \leq d} \mathbb{S}_d(\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp},pq}^{\text{meso}}; k)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.12b)$$

Soient T_1, \dots, T_d et $T_{\text{exp},1}, \dots, T_{\text{exp},d}$ les transformées de Fourier inverses des processus stochastiques $\widehat{T}_1, \dots, \widehat{T}_d$ et des fonctions déterministes $\widehat{T}_{\text{exp},1}, \dots, \widehat{T}_{\text{exp},d}$, respectivement. On introduit alors les variables aléatoires $L_1^{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dots, L_d^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ , correspondant à des pseudo-longueurs de corrélation spatiale aléatoires des fluctuations statistiques du champ des déformations aléatoire $\boldsymbol{\varepsilon}$, ainsi que les scalaires positifs $\ell_{\text{exp},1}^{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dots, \ell_{\text{exp},d}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$, correspondant à des pseudo-longueurs de corrélation spatiale du champ des déformations expérimental $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$, respectivement définis par

$$L_1^{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{T_1(0)} \int_0^{+\infty} T_1(\eta) d\eta, \dots, L_d^{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{T_d(0)} \int_0^{+\infty} T_d(\eta) d\eta, \quad (2.13a)$$

et

$$\ell_{\text{exp},1}^{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{T_{\text{exp},1}(0)} \int_0^{+\infty} T_{\text{exp},1}(\eta) d\eta, \dots, \ell_{\text{exp},d}^{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{T_{\text{exp},d}(0)} \int_0^{+\infty} T_{\text{exp},d}(\eta) d\eta. \quad (2.13b)$$

On introduit alors l'indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ défini pour tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$ par

$$\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \sum_{\alpha=1}^d \left(\frac{\mathbb{E}\{L_\alpha^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{b})\} - \ell_{\text{exp},\alpha}^{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\ell_{\text{exp},\alpha}^{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right)^2. \quad (2.14)$$

L'indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ défini par (2.14) permet de quantifier la distance relative entre la valeur moyenne statistique des pseudo-longueurs de corrélation spatiale aléatoires $L_1^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{b}), \dots, L_d^{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{b})$ du champ des déformations aléatoire $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et les pseudo-longueurs de corrélation spatiale correspondantes $\ell_{\text{exp},1}^{\boldsymbol{\varepsilon}}, \dots, \ell_{\text{exp},d}^{\boldsymbol{\varepsilon}}$ du champ des déformations expérimental $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$.

4.3 Construction de l'indicateur numérique macroscopique-mésoscopique (multi-échelle) associé à l'homogénéisation numérique stochastique

Un indicateur numérique macroscopique-mésoscopique (multi-échelle) $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est introduit pour identifier le tenseur d'élasticité moyen $\underline{C}^{\text{meso}}$ ou de manière équivalente, sa représentation vectorielle $\underline{\mathbf{c}}$. Il est défini pour tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}$ et tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$ par

$$\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left(\frac{\|\mathbb{E}\{\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})\} - \mathbf{C}^{\text{macro}}(\mathbf{a})\|_F}{\|\mathbf{C}^{\text{macro}}(\mathbf{a})\|_F} \right)^2, \quad (2.15)$$

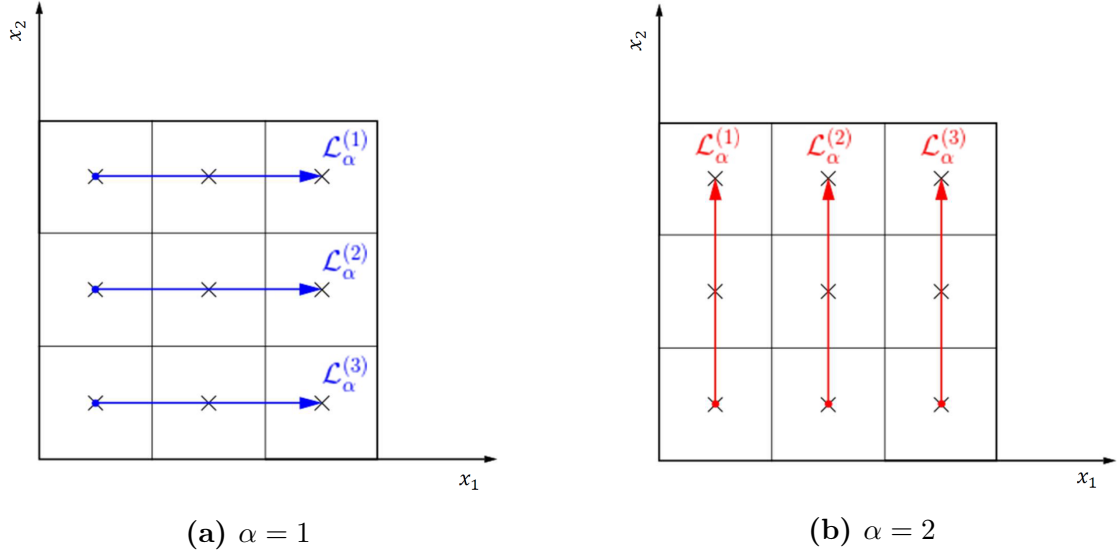


FIGURE 2.3 – Exemples de rangées de lignes (a) $\mathcal{L}_1^{(1)}, \mathcal{L}_1^{(2)}, \mathcal{L}_1^{(3)}$ (en bleu, pour $\alpha = 1$ dans la direction x_1) et (b) $\mathcal{L}_2^{(1)}, \mathcal{L}_2^{(2)}, \mathcal{L}_2^{(3)}$ (en rouge, pour $\alpha = 2$ dans la direction x_2) pour un sous-domaine carré $\Omega^{\text{meso}} \subset \mathbb{R}^2$

où $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$ est le tenseur d'élasticité effectif (aléatoire) obtenu par une des méthodes d'homogénéisation numérique stochastique présentées dans la section 2 du chapitre 1 en considérant un sous-domaine mésoscopique ouvert borné Ω^{VER} correspondant à un VER et mécaniquement décrit par le champ de tenseur d'élasticité aléatoire $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ à l'échelle mésoscopique. En théorie, sous l'hypothèse de séparation des échelles, le tenseur d'élasticité effectif $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$ devrait être considéré comme déterministe. Néanmoins, comme la microstructure est aléatoire et le VER est défini dans un cadre probabiliste, $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$ est en fait un tenseur aléatoire dont le niveau des fluctuations statistiques reste faible pour un sous-domaine mésoscopique Ω^{VER} suffisamment grand, mais n'est pas rigoureusement nul (sauf dans le cas limite où la taille du domaine Ω^{VER} tend vers l'infini, i.e. lorsque le domaine Ω^{VER} tend vers \mathbb{R}^d) [Soize 2008, Guilleminot et al. 2011, Soize 2017]. C'est la raison pour laquelle on considère la valeur moyenne statistique $\mathbb{E}\{\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})\}$ dans la définition (2.15) de $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ en lieu et place du tenseur d'élasticité effectif $\mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b})$ lui-même, qui est aléatoire bien que quasi-déterministe pour une taille de sous-domaine mésoscopique Ω^{VER} suffisamment grande.

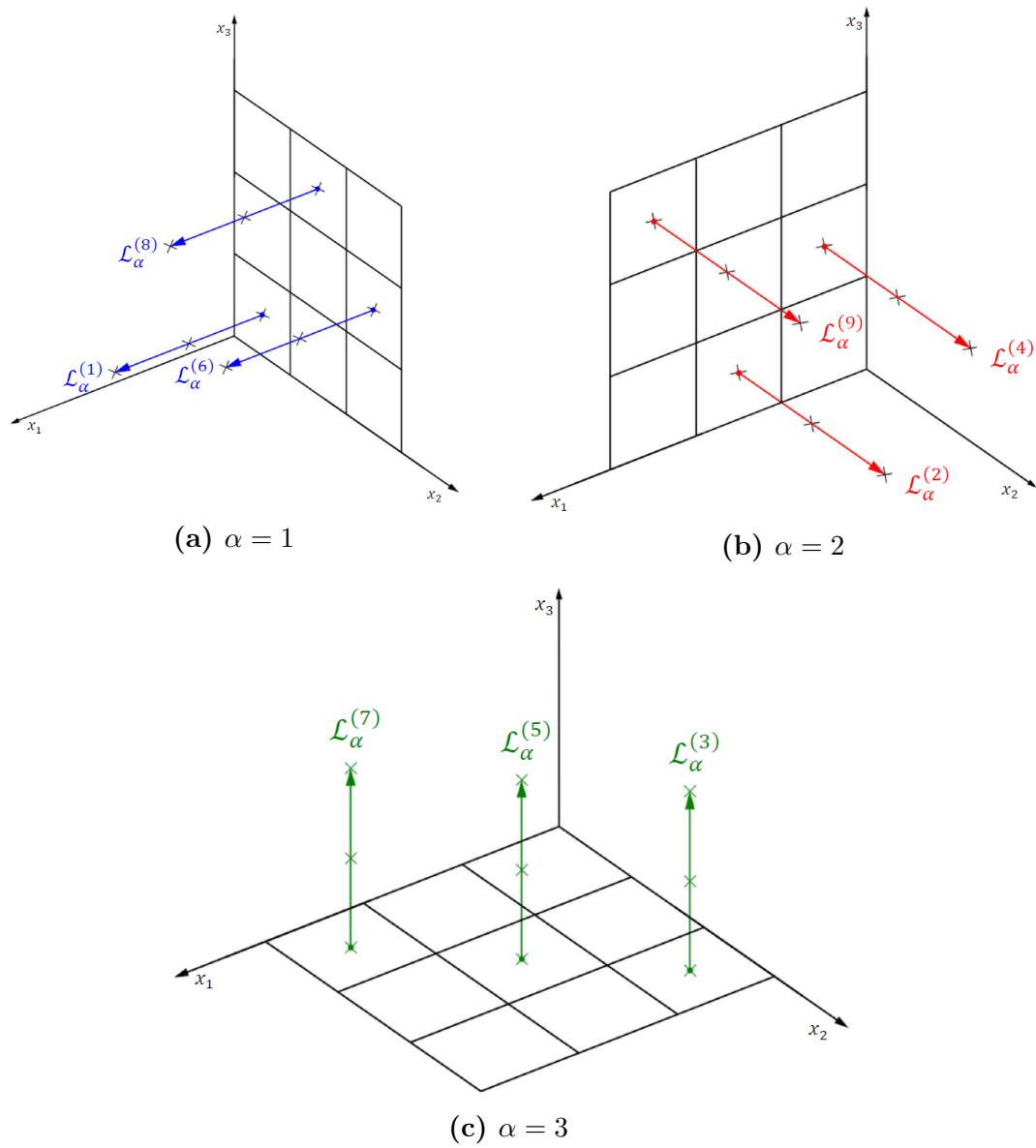


FIGURE 2.4 – Exemples de rangées de lignes (a) $\mathcal{L}_1^{(1)}, \mathcal{L}_1^{(2)}, \mathcal{L}_1^{(3)}$ (en bleu, pour $\alpha = 1$ dans la direction x_1), (b) $\mathcal{L}_2^{(1)}, \mathcal{L}_2^{(2)}, \mathcal{L}_2^{(3)}$ (en rouge, pour $\alpha = 2$ dans la direction x_2) et (c) $\mathcal{L}_3^{(1)}, \mathcal{L}_3^{(2)}, \mathcal{L}_3^{(3)}$ (en vert, pour $\alpha = 3$ dans la direction x_3) pour un sous-domaine cubique $\Omega^{\text{meso}} \subset \mathbb{R}^3$

5 Problème d'optimisation multi-objectif associé au problème inverse statistique multi-échelle

5.1 Formulation du problème d'optimisation multi-objectif

L'identification inverse statistique multi-échelle du paramètre \mathbf{a} et de l'hyperparamètre \mathbf{b} peut être réalisée simultanément en formulant le problème inverse statistique multi-échelle comme un problème d'optimisation multi-objectif, tel que

$$(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b}^{\text{meso}}) = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}, \mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}} \mathcal{J}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad (2.16a)$$

où $\mathcal{J}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ est la fonction-coût multi-objectif constituée des quatre indicateurs numériques définis en section 4 et définie pour tout vecteur $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}$ et tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$ par

$$\mathcal{J}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathcal{J}^{\text{macro}}(\mathbf{a}), \mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b}), \mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b}), \mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}, \mathbf{b})). \quad (2.16b)$$

En accord avec la stratégie proposée pour résoudre le problème d'optimisation (voir section 2.3), l'identification inverse statistique du paramètre \mathbf{a} et de l'hyperparamètre \mathbf{b} sera menée de manière séquentielle, en décomposant le problème d'optimisation multi-objectif (2.16) en deux sous-problèmes d'optimisation résolus l'un après l'autre :

1. un problème inverse à l'échelle macroscopique formulé comme un problème d'optimisation mono-objectif qui consiste à minimiser l'indicateur numérique macroscopique $\mathcal{J}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ par rapport au paramètre \mathbf{a} dans son espace admissible $\mathcal{A}^{\text{macro}}$ afin d'identifier la valeur optimale $\mathbf{a}^{\text{macro}}$:

$$\mathbf{a}^{\text{macro}} = \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}} \mathcal{J}^{\text{macro}}(\mathbf{a}). \quad (2.17)$$

2. un problème inverse statistique à l'échelle mésoscopique formulé comme un problème d'optimisation multi-objectif qui consiste à minimiser simultanément les deux indicateurs numériques mésoscopiques $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ ainsi que l'indicateur numérique mésoscopique-macroscopique (multi-échelle) $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ (en utilisant le paramètre optimal $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ précédemment calculé) par rapport à l'hyperparamètre $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{c})$ dans son ensemble admissible $\mathcal{B}^{\text{meso}}$ afin d'identifier la valeur optimale \mathbf{b}^{meso} :

$$\mathbf{b}^{\text{meso}} = \arg \min_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}} \mathcal{J}^{\text{meso}}(\mathbf{b}), \quad (2.18a)$$

où $\mathcal{J}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ est la fonction-coût multi-objectif définie pour tout vecteur $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$ par

$$\mathcal{J}^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = (\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b}), \mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b}), \mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})). \quad (2.18b)$$

5.2 Résolution du problème d'optimisation multi-objectif

Le problème aux limites déterministe (2.1) défini à l'échelle macroscopique sur le domaine Ω^{macro} et le problème aux limites stochastique (2.3) défini à l'échelle mésoscopique sur un sous-domaine $\Omega^{\text{meso}} \subset \Omega^{\text{macro}}$ sont tous deux discrétisés en utilisant la méthode des éléments finis classique (formulée en déplacement) [Ciarlet 1978, Hughes 1987, Zienkiewicz et Taylor 2000, Zienkiewicz et al. 2005]. Les espérances mathématiques intervenant dans les trois indicateurs numériques $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ sur les quantités d'intérêt issues de la résolution du problème aux limites stochastique (2.3) et de l'homogénéisation numérique stochastique sont évaluées par la méthode de simulation numérique de Monte Carlo (MC) [Kalos et Whitlock 1986, Fishman 1996, Caffisch 1998, Schuëller et Spanos 2001, Schuëller 2009, Rubinstein et Kroese 2016] avec N_s réalisations statistiquement indépendantes $\{C^{\text{meso}(r)}\}_{1 \leq r \leq N_s}$ du champ d'élasticité aléatoire \mathbf{C}^{meso} indexé sur Ω^{meso} . Rappelons que la méthode numérique de MC est l'une des méthodes basées sur les techniques d'échantillonnage parmi les plus efficaces et les plus populaires dans la mesure où elle est (i) non-intrusive (vis-à-vis des codes de calcul déterministes disponibles dans les progiciels, ou paquets logiciels, commerciaux), (ii) bien adaptée au calcul parallèle intensif (tirant ainsi parti des architectures de calcul parallèle modernes sans nécessiter de développement logiciel), (iii) dont la convergence peut être contrôlée par le nombre de réalisations N_s avec une erreur d'approximation qui peut être estimée à la volée (durant les calculs), et (iv) dont la vitesse de convergence, bien que relativement lente (en $1/\sqrt{N_s}$), est indépendante de la dimension stochastique du problème (permettant ainsi la résolution numérique de problèmes stochastiques en grande dimension) [Soize 2017].

Pour le calcul de la valeur optimale $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ du paramètre $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}$, le problème d'optimisation mono-objectif (2.17) est résolu en utilisant l'algorithme du simplexe de Nelder-Mead [Spendley et al. 1962, Nelder et Mead 1965, Walters et al. 1991, Lagarias et al. 1998, McKinnon 1998, Walters 1999, Kolda et al. 2003, Press et al. 2007]. Il s'agit d'une méthode numérique heuristique de recherche directe pour résoudre les problèmes d'optimisation mono-objectif multidimensionnels non-contraints pour lesquels les dérivées de la fonction objectif peuvent ne pas être connues.

Pour le calcul de la valeur optimale \mathbf{b}^{meso} de l'hyperparamètre $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$, le problème d'optimisation stochastique multi-objectif (2.18) n'est pas trivial dans la mesure où il n'admet pas une solution optimale globale unique mais a par nature un ensemble (fini ou infini) de solutions optimales, appelés *optima* de Pareto. En effet, ces solutions optimales résultent d'un compromis entre les trois composantes $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ de la fonction-coût multi-objectif (à valeurs vectorielles) $\mathcal{J}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ qui sont en compétition et *a priori* en conflit. En s'appuyant sur le concept de non-infériorité [Zadeh 1963] (également appelé non-domination, efficacité de Pareto ou optimalité de Pareto [Cunha et Polak 1967, Censor 1977, Yu

1985, Dauer et Stadler 1986, Deb 2001, Marler et Arora 2004, Konak et al. 2006, Coello Coello 2006, Coello et al. 2007, Deb 2014, Deb et al. 2017]) pour la caractérisation des différentes composantes (à valeurs scalaires) de la fonction-coût multi-objectif (à valeurs vectorielles), une solution non-inférieure (également appelée non-dominée, efficace de Pareto ou optimale de Pareto) est telle qu'une amélioration pour n'importe quelle composante (fonction mono-objectif) nécessite une dégradation d'au moins une des autres composantes (i.e. une amélioration ne peut être obtenue dans aucune composante sans détériorer au moins une des autres composantes), tandis qu'une solution inférieure est telle qu'une amélioration peut être obtenue dans toutes les composantes sans porter préjudice à une des composantes¹. L'ensemble de toutes les solutions non-inférieures dans l'espace d'admissible des paramètres est appelé l'ensemble optimal de Pareto, et l'ensemble des valeurs correspondantes de la fonction-coût multi-objectif dans son ensemble admissible multidimensionnel est appelé le front optimal de Pareto (ou la frontière d'efficacité de Pareto, voir figure 2.5 pour une illustration sur une fonction-coût bi-objectif $\mathcal{J}: \mathbf{p} \mapsto \mathcal{J}(\mathbf{p}) = (\mathcal{J}_1(\mathbf{p}), \mathcal{J}_2(\mathbf{p}))$). En général, un problème d'optimisation multi-objectif peut admettre une infinité de solutions non-inférieures (ou optimales de Pareto). Pour la plupart des problèmes d'optimisation multi-objectif, le cardinal de l'ensemble optimal de Pareto (i.e. le nombre de solutions optimales de Pareto) est très grand (voire infini) et augmente généralement avec le nombre de composantes (ou fonctions-coût mono-objectif à valeurs scalaires) de la fonction-coût multi-objectif à valeurs vectorielles du problème d'optimisation multi-objectif considéré [Konak et al. 2006]. Les méthodes de résolution et les algorithmes associés pour les problèmes d'optimisation multi-objectif permettent soit de générer et sélectionner des solutions non-inférieures (ou optimales de Pareto) dans l'ensemble optimal de Pareto (ou dans un sous-ensemble représentatif de cet ensemble), soit de transformer la fonction-coût multi-objectif à valeurs vectorielles (impliqué dans le problème d'optimisation multi-objectif) en une fonction-coût mono-objectif à valeurs scalaires *ad hoc* en combinant et pondérant mathématiquement les composantes de la fonction-coût multi-objectif (à valeurs vectorielles) de sorte que le problème d'optimisation multi-objectif soit reformulé et résolu comme un problème d'optimisation mono-objectif avec une fonction-coût mono-objectif à valeurs scalaires. Le lecteur intéressé peut se référer à [Deb 2001, Marler et Arora 2004, Konak et al. 2006, Coello Coello 2006, Coello et al. 2007, Deb 2014, Deb et al. 2017] pour plus de détails sur les méthodes d'optimisation multi-objectif (ou optimisation vectorielle) non-linéaire incluant les principes fondamentaux, des conditions sur la (quasi-)non-infériorité (ou (quasi-)optimalité de Pareto) ainsi qu'une liste non-exhaustive d'algorithmes d'optimisation traditionnels et évolutifs. Dans [Nguyen et al. 2015], le problème d'optimisation multi-objectif considéré a été résolu avec succès

1. Certaines méthodes d'optimisation multi-objectif ne fournissent que des solutions faiblement non-inférieures (également appelées solutions faiblement optimales de Pareto), qui sont telles qu'une amélioration ne peut être obtenue dans toutes les composantes (fonctions mono-objectif) simultanément. Toutes les solutions optimales de Pareto sont faiblement optimales, mais la réciproque n'est pas vraie.

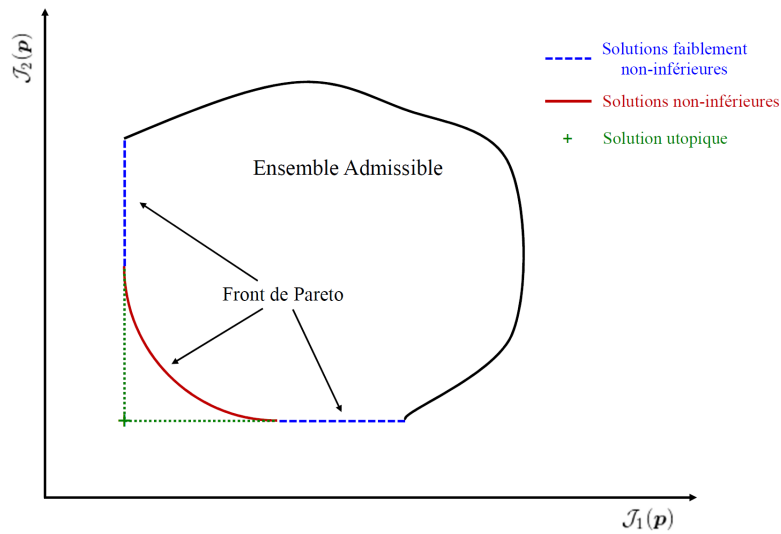


FIGURE 2.5 – Ensemble des solutions non-inférieures (ou optimales de Pareto) et faiblement non-inférieures situées sur le front optimal de Pareto d'une fonction-coût bi-objectif $\mathcal{J}(\mathbf{p}) = (\mathcal{J}_1(\mathbf{p}), \mathcal{J}_2(\mathbf{p}))$, avec la solution utopique située en dehors de l'ensemble admissible

en utilisant l'algorithme génétique [Deb 2001, Deb 2014] qui permet de construire et trouver un ensemble fini de solutions optimales de Pareto qui soit suffisamment représentatif de l'ensemble optimal de Pareto (complet) avec des solutions aussi nombreuses et diverses que possible en vue d'une sélection future [Konak et al. 2006, Deb et al. 2017]. La meilleure solution optimale (i.e. celle qui réalise le meilleur compromis) est sélectionnée parmi toutes les solutions optimales de Pareto potentielles comme celle qui minimise la distance à une solution utopique. Une telle solution utopique est généralement construite comme la solution idéale constituée des solutions optimales individuelles de chacune des composantes en conflit (qui sont des fonctions-coût mono-objectif à valeurs scalaires) de la fonction-coût multi-objectif à valeurs vectorielles et qui correspond à l'origine du front de Pareto. Notons que cette solution idéale est une solution optimale de Pareto si et seulement si les solutions optimales de toutes les fonctions-coût mono-objectif sont identiques, et elle correspond à l'origine de l'espace multidimensionnel de la fonction-coût multi-objectif si et seulement si toutes ses composantes (qui sont des fonctions-coût mono-objectif) atteignent zéro. L'algorithme génétique qui a été initialement choisi dans [Nguyen et al. 2015] permet une exploration aléatoire dans l'ensemble admissible $\mathcal{B}^{\text{meso}}$ en utilisant seulement des évaluations de la fonction-coût multi-objectif, évitant ainsi de calculer son gradient ou sa hessienne. En outre, étant une approche heuristique stochastique évolutive basée sur une population, l'algorithme génétique est particulièrement bien adapté pour traiter et résoudre des problèmes d'optimisation multi-objectif sous contraintes ou non, dans lesquels la fonction-coût mono- ou multi-objectif multidimensionnelle peut être non-convexe, discontinue, non-différentiable, stochastique ou même fortement non-

linéaire. L'algorithme génétique modifie de manière répétée une population de vecteurs solutions (appelés individus ou membres ou parfois génomes). L'algorithme génétique commence par créer un ensemble initial de vecteurs solutions (appelé population initiale) généralement généré de manière aléatoire, mais qui peut également être spécifié pour accélérer la convergence vers le vecteur solution optimal global. À chaque itération, l'algorithme génétique sélectionne au hasard un groupe d'individus (appelés parents) dans la population actuelle et utilise les entrées/composantes de ces vecteurs (appelés gènes) pour produire une nouvelle population d'individus (appelés enfants) qui constituent la prochaine génération. Chaque population successive correspond à une nouvelle génération. Au fil des générations, la population « évolue » vers un vecteur solution optimal correspondant au meilleur individu dans la population finale. Pour créer la génération suivante à partir de la population actuelle, l'algorithme génétique effectue des calculs stochastiques basés sur des générateurs de nombres (pseudo-)aléatoires et utilise trois principaux types de règles à chaque itération, à savoir (i) des règles de sélection pour sélectionner les parents qui contribuent à la population pour la génération suivante et les enfants d'élite (correspondant aux individus de la population actuelle avec les meilleures valeurs de la fonction objectif) qui sont automatiquement transmis à la génération suivante, (ii) des règles de croisement pour combiner des couples de parents dans la population actuelle pour former des enfants croisés pour la génération suivante, et (iii) des règles de mutation pour appliquer de petites modifications aléatoires aux gènes des parents afin de former des enfants mutés pour la génération suivante. Le croisement permet à l'algorithme génétique d'extraire les meilleurs gènes de différents individus et de les recombinaison pour créer des enfants potentiellement supérieurs (avec de meilleures valeurs de la fonction objectif), tandis que la mutation confère de la diversité génétique à une population (de sorte que la distance moyenne entre les individus dans une population soit élevée) et permet à l'algorithme génétique de rechercher dans une région de l'espace plus large et ainsi favoriser la génération d'individus avec de meilleures valeurs de la fonction objectif.

Dans le présent travail, un indicateur numérique (fonction-coût mono-objectif à valeurs scalaires) a été construit spécifiquement pour chacune des composantes de l'hyperparamètre à valeurs vectorielles $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{c})$, permettant ainsi l'utilisation d'un algorithme d'optimisation multi-objectif plus simple et plus efficace, à savoir un algorithme itératif de point fixe. À partir de valeurs initiales convenablement choisies (afin d'accélérer la convergence de l'algorithme et trouver une solution optimale globale), l'algorithme itératif de point fixe consiste à résoudre successivement (de manière séquentielle) une série de problèmes d'optimisation mono-objectif en prenant tour à tour chacune des composantes de la fonction-coût multi-objectif (à valeurs vectorielles) comme fonction-coût mono-objectif (à valeurs scalaires) à minimiser. Cet algorithme itératif de point fixe est présenté dans l'algorithme 1. En ce qui concerne le critère de convergence, le processus itératif est arrêté lorsque la norme du résidu entre deux itérations devient inférieure à une certaine tolérance spécifiée en amont par

l'utilisateur pour chacun des trois problèmes d'optimisation mono-objectif (2.19a), (2.19b) et (2.19c). Des résultats numériques ont montré que l'algorithme itératif de point fixe peut atteindre la même précision que l'algorithme génétique en terme de convergence mais avec un coût de calcul plus faible (voir les exemples numériques de validation et d'application aux chapitres 3 et 4). L'inconvénient principal d'un tel algorithme d'optimisation numérique réside dans le choix des valeurs initiales utilisées pour démarrer l'algorithme, ce qui peut être critique pour la localisation de la région de convergence globale finale. En effet, si les valeurs initiales choisies sont trop éloignées de la solution optimale globale du problème d'optimisation, la convergence peut être atteinte avec un coût de calcul beaucoup plus élevé et pour certaines solutions optimales locales. Néanmoins, pour le problème d'optimisation multi-objectif considéré dans ce travail et résultant d'un problème inverse statistique multi-échelle, il est possible de donner une estimation raisonnable (suffisamment proche de la solution optimale globale) de la valeur initiale pour chacune des composantes de l'hyperparamètre $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{c})$ à partir de considérations physiques.

Enfin, on propose de résoudre le problème d'identification inverse statistique multi-échelle en utilisant l'apprentissage automatique à travers l'entraînement et l'utilisation d'un réseau de neurones artificiels [Haykin 1994, Hagan et al. 1996, Demuth et al. 2014]. Les réseaux de neurones sont particulièrement bien adaptés pour résoudre les problèmes d'approximation de fonctions et de régression non-linéaire. Dans les problèmes d'approximation de fonctions multidimensionnelles, un réseau de neurones est entraîné sur un ensemble d'entrées et un ensemble correspondant de cibles (définissant les sorties désirées du réseau de neurones) afin d'apprendre une relation entrée-sortie non-linéaire. Dans notre problème d'identification inverse statistique multi-échelle, les entrées du réseau correspondent à des quantités d'intérêt de sortie du modèle numérique stochastique et les sorties du réseau correspondent aux hyperparamètres d'entrée du modèle numérique stochastique. Le problème inverse statistique multi-échelle est alors formulé comme un problème d'approximation de fonctions et résolu en utilisant un réseau de neurones artificiels avec des entrées et des sorties aléatoires. Un réseau de neurones est alors conçu pour apprendre la relation non-linéaire (transformation stochastique) entre les hyperparamètres d'entrée et certaines quantités d'intérêt de sortie du modèle numérique stochastique durant une phase d'apprentissage préliminaire « hors ligne » (« offline learning phase » en anglais) potentiellement coûteuse numériquement. Le (meilleur) réseau de neurones entraîné peut alors être utilisé pour identifier la valeur optimale \mathbf{b}^{meso} du vecteur des hyperparamètres \mathbf{b} à partir d'un vecteur de quantités d'intérêt issues des mesures expérimentales durant une phase de calcul « en ligne » (« online computing phase » en anglais) peu coûteuse numériquement. La stratégie proposée consiste à (i) construire une base de données simulées numériquement en utilisant le modèle numérique stochastique à l'échelle mésoscopique pour collecter un ensemble de vecteurs d'hyperparamètres d'entrée (uniformément distribués dans un ensemble admissible donné $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}}$) et un ensemble de vecteurs de quantités d'intérêt (suffisamment sensibles à

Algorithme 1 Algorithme itératif de point fixe pour la résolution du problème d'optimisation multi-objectif (2.18)

Entrées: Valeur initiale $\mathbf{b}^0 = (\delta^0, \boldsymbol{\ell}^0, \underline{\mathbf{c}}^0)$ de l'hyperparamètre \mathbf{b} , avec $\delta^0 \in]0, \delta_{\text{sup}}[$, $\boldsymbol{\ell}^0 = (\ell_\alpha^0)_{1 \leq \alpha \leq d} \in]0, +\infty[^d$ et $\underline{\mathbf{c}}^0 \in \mathbb{R}^{n_{\text{sym}}}$ avec n_{sym} la dimension de la classe de symétrie

Sorties: Valeur optimale $\mathbf{b}^{\text{meso}} = (\delta^{\text{meso}}, \boldsymbol{\ell}^{\text{meso}}, \underline{\mathbf{c}}^{\text{meso}})$ de l'hyperparamètre \mathbf{b}

- 1: Démarrer avec la valeur initiale $\mathbf{b}^0 = (\delta^0, \boldsymbol{\ell}^0, \underline{\mathbf{c}}^0)$
- 2: Mettre $i \leftarrow 1$
- 3: **tant que** critère de convergence non-vérifié **faire**
- 4: Calculer $\boldsymbol{\ell}^i = (\ell_\alpha^i)_{1 \leq \alpha \leq d}$ en résolvant le problème d'optimisation mono-objectif

$$\boldsymbol{\ell}^i = \arg \min_{\boldsymbol{\ell} \in]0, +\infty[^d} \mathcal{J}_{\boldsymbol{\ell}}^{\text{meso}}(\delta^{i-1}, \boldsymbol{\ell}, \underline{\mathbf{c}}^{i-1}), \quad (2.19a)$$

- 5: Calculer δ^i en résolvant le problème d'optimisation mono-objectif

$$\delta^i = \arg \min_{\delta \in]0, \delta_{\text{sup}}[} \mathcal{J}_{\delta}^{\text{meso}}(\delta, \boldsymbol{\ell}^i, \underline{\mathbf{c}}^{i-1}), \quad (2.19b)$$

- 6: Calculer $\underline{\mathbf{c}}^i$ en résolvant le problème d'optimisation mono-objectif

$$\underline{\mathbf{c}}^i = \arg \min_{\underline{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{n_{\text{sym}}}} \mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \delta^i, \boldsymbol{\ell}^i, \underline{\mathbf{c}}), \quad (2.19c)$$

- 7: Mettre à jour la valeur courante $\mathbf{b}^i = (\delta^i, \boldsymbol{\ell}^i, \underline{\mathbf{c}}^i)$

- 8: Mettre $i \leftarrow i + 1$

9: **fin tant que**

- 10: **retourner** la valeur optimale $\mathbf{b}^{\text{meso}} = (\delta^{\text{meso}}, \boldsymbol{\ell}^{\text{meso}}, \underline{\mathbf{c}}^{\text{meso}}) = \mathbf{b}^i$ obtenue à la dernière itération i
-

la variation des hyperparamètres à identifier) de sortie du modèle numérique stochastique (processus d'acquisition des données), (ii) entraîner un réseau de neurones artificiels afin de construire une représentation algébrique *ad hoc* de la transformation non-linéaire stochastique entre le vecteur aléatoire \mathbf{B} des hyperparamètres d'entrée et un vecteur aléatoire \mathbf{Q} de quantités d'intérêt de sortie du modèle numérique stochastique (processus d'entraînement/apprentissage et processus de validation), (iii) évaluer les performances du réseau de neurones entraîné en terme d'erreur quadratique moyenne et d'analyse de régression linéaire sur un ensemble de données de test (processus de test), et (iv) utiliser le (meilleur) réseau de neurones entraîné pour l'identification inverse statistique de la valeur optimale $\mathbf{b}^{\text{meso}} = (\delta^{\text{meso}}, \boldsymbol{\ell}^{\text{meso}}, \underline{\mathbf{c}}^{\text{meso}})$ du vecteur des hyperparamètres $\mathbf{b} = (\delta, \boldsymbol{\ell}, \underline{\mathbf{c}})$ sur un sous-domaine mésoscopique en utilisant la mesure expérimentale associée en entrée du réseau de neurones (processus d'identification). Cette procédure d'identification peut être menée directement sans

faire appel au modèle numérique stochastique (durant la phase de calcul « en ligne »), ce dernier étant utilisé uniquement pour construire la base de données nécessaire à l'apprentissage du réseau de neurones (durant la phase d'apprentissage « hors ligne »). En conséquence, cette méthode d'identification par réseau de neurones est peu coûteuse numériquement, facile à implémenter et à utiliser.

Le modèle numérique stochastique à l'échelle mésoscopique est utilisé pour générer une (grande) base de données numériques (indépendamment des mesures expérimentales) à partir de laquelle un réseau de neurones artificiels sera entraîné pour apprendre la transformation non-linéaire stochastique \mathcal{N} du vecteur aléatoire \mathbf{Q} des quantités d'intérêt en le vecteur aléatoire \mathbf{B} des hyperparamètres, telle que

$$\mathbf{B} = \mathcal{N}(\mathbf{Q}). \quad (2.20)$$

Le vecteur aléatoire \mathbf{Q} des quantités d'intérêt du modèle numérique stochastique est défini par $\mathbf{Q} = (D^\mathcal{E}, \mathbf{L}^\mathcal{E}, \mathbf{L}^{\text{eff}})$, où $D^\mathcal{E}$ est le pseudo-coefficient de dispersion aléatoire $D^\mathcal{E}$ défini par (2.5) et intervenant dans l'indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathbf{L}^\mathcal{E} = (L_1^\mathcal{E}, \dots, L_d^\mathcal{E})$ est le vecteur des pseudo-longueurs de corrélation spatiale définies par (2.13a) et intervenant dans l'indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, et \mathbf{L}^{eff} est le vecteur aléatoire regroupant les $n(n+1)/2$ composantes de la matrice aléatoire $[\mathbf{L}^{\text{eff}}]$ correspondant à la factorisation de Cholesky de la représentation matricielle $[\mathbf{C}^{\text{eff}}]$ du tenseur d'élasticité effectif aléatoire \mathbf{C}^{eff} intervenant dans l'indicateur numérique macroscopique-mésoscopique (multi-échelle) $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$.

La base de données numériques requise contient un ensemble de vecteurs d'entrée et de vecteurs cibles (sorties désirées du réseau), où les vecteurs d'entrée sont des réalisations statistiquement indépendantes du vecteur aléatoire \mathbf{Q} des quantités d'intérêt (correspondant à des sorties du modèle numérique stochastique), et les vecteurs cibles sont des réalisations statistiquement indépendantes du vecteur aléatoire \mathbf{B} des hyperparamètres (correspondant à des entrées du modèle numérique stochastique). Une telle base de données a été simulée numériquement et construite en résolvant le problème aux limites stochastique (2.3) défini à l'échelle mésoscopique sur un ou plusieurs sous-domaines mésoscopiques pour différentes valeurs du vecteur aléatoire \mathbf{B} des hyperparamètres tirées aléatoirement dans un ensemble admissible réduit convenablement choisi $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}} \subset \mathcal{B}^{\text{meso}}$. Pour chaque réalisation $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\mathbf{c}})$ de $\mathbf{B} = (D, \mathbf{L}, \underline{\mathbf{C}})$, une réalisation du champ aléatoire gaussien W est générée en utilisant la représentation spectrale modifiée présentée dans la section 2 du chapitre 3, et la réalisation correspondante du champ d'élasticité aléatoire $[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$ est calculée en utilisant la représentation algébrique *prior* présentée dans la section 1.2 du chapitre 1. Enfin, pour cette réalisation du champ d'élasticité aléatoire, une réalisation de chacune des composantes $D^\mathcal{E}$, $\mathbf{L}^\mathcal{E}$ et \mathbf{L}^{eff} du vecteur aléatoire \mathbf{Q} des quantités d'intérêt est calculée en résolvant le problème aux limites stochastique (2.3) défini à l'échelle mésoscopique et une des méthodes d'homogénéisation numérique stochastique présentées dans la section 2 du chapitre 1.

Cette base de données associée à l'ensemble des indicateurs numériques est ensuite utilisée pour entraîner un réseau de neurones artificiels. Un réseau de neurones a une

structure organisée en plusieurs couches de nœuds (ou neurones) connectés entre eux. L'architecture d'un réseau de neurones multi-couches (« multilayer neural network » en anglais) combine ainsi plusieurs couches de traitement non-linéaires, ces dernières contenant et étant interconnectées via des nœuds (ou neurones) fonctionnant en parallèle. Un réseau est constitué d'une couche initiale (appelée couche d'entrée) suivie de plusieurs couches intermédiaires (appelées couches cachées) et se termine par une couche finale (appelée couche de sortie) produisant la sortie du réseau. Les connections entre les neurones sont appelées les poids. La complexité d'un réseau de neurones augmente avec le nombre de couches cachées et le nombre de neurones cachés. Les réseaux de neurones traditionnels, dits peu profonds (« shallow neural networks » en anglais), contiennent généralement une à trois couches cachées avec plusieurs dizaines de neurones cachés dans chaque couche cachée (nécessitant une base de données de petite dimension pour l'entraînement du réseau), tandis que les réseaux de neurones dits profonds (« deep neural networks » en anglais) peuvent avoir des dizaines voire des centaines de couches cachées avec plusieurs dizaines ou centaines de neurones cachés dans chaque couche cachée (nécessitant une base de données de grande dimension pour l'entraînement du réseau). Chacune des couches cachées et la couche de sortie est paramétrée par des poids et des biais qui constituent les paramètres ajustables du réseau de neurones. Les valeurs des poids et des biais sont ajustées durant la phase d'entraînement (ou d'apprentissage) du réseau afin d'optimiser les performances du réseau à travers l'optimisation d'une fonction de performance (typiquement l'erreur quadratique moyenne normalisée entre les cibles et les sorties du réseau) . Le processus d'apprentissage automatique pour la conception d'un réseau de neurones multi-couches comprend les étapes principales suivantes :

1. Collecte/Acquisition des données ;
2. Chargement et pré-traitement de la base de données ;
3. Définition de l'architecture, de la configuration et de l'algorithme d'apprentissage du réseau de neurones, et partitionnement de l'ensemble des données en un sous-ensemble de données d'entraînement, de validation et de test ;
4. Initialisation des paramètres ajustables (poids et biais) du réseau de neurones ;
5. Entraînement (ou apprentissage) du réseau de neurones à partir du sous-ensemble des données d'entraînement pour optimiser les poids et les biais selon la fonction de performance (erreur moyenne quadratique normalisée) ;
6. Validation (ou post-entraînement) du réseau de neurones à partir du sous-ensemble des données de validation pour stopper l'algorithme d'apprentissage au cours de l'entraînement du réseau ;
7. Utilisation du réseau de neurones entraîné pour évaluer ses performances à partir du sous-ensemble des données de test ;
8. Processus itératif pour trouver le meilleur réseau de neurones entraîné.

5.3 Modèle probabiliste des hyperparamètres aléatoires

En suivant la stratégie présentée dans la section 2.3 et en utilisant les méthodes et les algorithmes associés décrits dans la section 5.2 pour le problème inverse statistique multi-échelle, la résolution du problème d'optimisation mono-objectif (2.17) conduit au paramètre optimal (déterministe) $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ du modèle déterministe du tenseur d'élasticité $\mathbf{C}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ à l'échelle macroscopique, puis la résolution du problème d'optimisation multi-objectif (2.18) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} donné conduit à l'hyperparamètre optimal (déterministe) \mathbf{b}^{meso} du modèle stochastique *prior* du champ de tenseur d'élasticité $\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ à l'échelle mésoscopique. Néanmoins, lorsque la méthode d'identification inverse statistique est appliquée sur plusieurs (différents) sous-domaines mésoscopiques (sans recouvrement entre eux) au sein du même domaine macroscopique, les résultats numériques obtenus montrent une légère variation dans la valeur optimale \mathbf{b}^{meso} identifiée d'un sous-domaine mésoscopique à un autre, bien que la convergence statistique des espérances mathématiques intervenant dans les trois indicateurs numériques $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ soit maîtrisée. L'explication en a été donnée dans le dernier paragraphe de la section 1. Comme déjà évoqué, nous construisons ci-après le modèle probabiliste du vecteur aléatoire $\mathbf{B} = (D, \mathbf{L}, \mathbf{C})$ dont $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_Q^{\text{meso}}$ sont supposés être Q réalisations statistiquement indépendantes obtenues en résolvant le problème d'optimisation multi-objectif (2.18) en utilisant Q informations expérimentales (pour Q différents sous-domaines mésoscopiques). Le modèle probabiliste de \mathbf{B} est construit à l'aide du principe du MaxEnt, ce qui permet de déterminer la fonction de densité de probabilité $p_{\mathbf{B}}: \mathbf{b} \mapsto p_{\mathbf{B}}(\mathbf{b})$ du vecteur aléatoire \mathbf{B} . En supposant que les trois composantes D , \mathbf{L} et \mathbf{C} de \mathbf{B} soient statistiquement indépendantes, la fonction de densité de probabilité $p_{\mathbf{B}}$ peut être simplement définie comme le produit des fonctions de densité de probabilité p_D , $p_{\mathbf{L}}$ et $p_{\mathbf{C}}$ de D , \mathbf{L} et \mathbf{C} , respectivement, et on a, pour tout $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \mathbf{c}) \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$,

$$p_{\mathbf{B}}(\mathbf{b}) = p_D(\delta) \times p_{\mathbf{L}}(\ell) \times p_{\mathbf{C}}(\mathbf{c}). \quad (2.21)$$

Pour le paramètre de dispersion aléatoire D , outre la condition de normalisation usuelle qui doit être satisfaite par sa fonction de densité de probabilité p_D , la propriété fondamentale qu'il convient de prendre en compte comme information disponible dans la construction du modèle probabiliste de D est la suivante : le support de p_D est connu et donné par $\text{supp}(p_D) =]0, \delta_{\text{sup}}[$, avec $\delta_{\text{sup}} = \sqrt{(n+1)/(n+5)} = \sqrt{7/11} \approx 0.7977 < 1$ (avec $n = 6$ en élasticité linéaire), i.e. D est une variable aléatoire à valeurs positives p.s. bornée supérieurement par δ_{sup} . Par la suite, en considérant cette information disponible comme la seule contrainte à satisfaire, le principe du MaxEnt conduit à une loi uniforme sur $]0, \delta_{\text{sup}}[$:

$$p_D(\delta) = \frac{1}{\delta_{\text{sup}}} \mathbb{1}_{]0, \delta_{\text{sup}}[}(\delta), \quad (2.22)$$

où $\mathbb{1}_{]0, \delta_{\text{sup}}[}$ est la fonction indicatrice de l'intervalle $]0, \delta_{\text{sup}}[$ telle que $\mathbb{1}_{]0, \delta_{\text{sup}}[}(\delta) = 1$ si $\delta \in]0, \delta_{\text{sup}}[$ et $\mathbb{1}_{]0, \delta_{\text{sup}}[}(\delta) = 0$ si $\delta \notin]0, \delta_{\text{sup}}[$.

Pour le vecteur aléatoire des longueurs de corrélation spatiale $\mathbf{L} = (L_1, \dots, L_d)$, les d composantes aléatoires (à valeurs positives) L_1, \dots, L_d sont modélisées comme des variables aléatoires statistiquement indépendantes, et par conséquent la fonction de densité de probabilité $p_{\mathbf{L}}$ de \mathbf{L} correspond au produit des fonctions de densité de probabilité p_{L_1}, \dots, p_{L_d} des longueurs de corrélation spatiale aléatoires L_1, \dots, L_d . On a alors, pour tout $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{R}^d$,

$$p_{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\ell}) = p_{L_1}(\ell_1) \times \dots \times p_{L_d}(\ell_d). \quad (2.23)$$

Outre la condition de normalisation usuelle qui doit être satisfaite par les fonctions de densité de probabilité p_{L_1}, \dots, p_{L_d} , les propriétés fondamentales qu'il convient de prendre en compte comme informations disponibles sont les suivantes : (i) les supports de p_{L_1}, \dots, p_{L_d} sont connus et donnés par $\text{supp}(p_{L_1}) = \dots = \text{supp}(p_{L_d}) =]0, +\infty[$, (ii) les valeurs moyennes $\mathbb{E}\{L_1\}, \dots, \mathbb{E}\{L_d\}$ sont connues et données par les estimations statistiques $\frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \ell_{1,q}^{\text{meso}}, \dots, \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \ell_{d,q}^{\text{meso}}$, respectivement, et (iii) $\mathbb{E}\{\log(L_1)\} = \nu_1, \dots, \mathbb{E}\{\log(L_d)\} = \nu_d$ avec $|\nu_1|, \dots, |\nu_d| < +\infty$ des paramètres donnés (voir [Soize 2000, Soize 2001]), ce qui implique que $L_1^{-1}, \dots, L_d^{-1}$ sont des variables aléatoires du second ordre (i.e. $\mathbb{E}\{L_1^{-2}\} < +\infty, \dots, \mathbb{E}\{L_d^{-2}\} < +\infty$), et donc la probabilité qu'elles prennent des valeurs proches de zéro est quasi-nulle, ce qui interdit un champ aléatoire de propriétés élastiques dégénéré en un bruit. Le principe du MaxEnt implique alors que L_1, \dots, L_d sont des variables aléatoires statistiquement indépendantes de loi Gamma avec des paramètres positifs $(a_1, b_1), \dots, (a_d, b_d)$, respectivement. On introduit les vecteurs des hyperparamètres $\mathbf{s}_1 = (a_1, b_1), \dots, \mathbf{s}_d = (a_d, b_d) \in]0, +\infty[^2$.

Pour la modélisation probabiliste du vecteur aléatoire $\underline{\mathbf{C}}$, on considère un modèle probabiliste *ad hoc* pour les tenseurs d'élasticité aléatoire qui présente p.s. certaines propriétés de symétrie matérielle. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [Guilleminot et Soize 2013a] pour une construction détaillée de ce modèle probabiliste et une caractérisation rigoureuse de la dépendance statistique entre les composantes algébriquement indépendantes des tenseurs d'élasticité aléatoires ayant p.s. certaines propriétés de symétrie matérielle parmi les six classes de symétrie élastique linéaire les plus élevées (allant de l'isotropie jusqu'à l'orthotropie). Nous présentons ici le modèle probabiliste d'une matrice d'élasticité aléatoire qui appartient p.s. à la classe de symétrie isotrope $\mathbb{M}_n^{\text{iso}}(\mathbb{R})$ (correspondant aux exemples numériques présentés aux chapitres 3 et 4). Tout d'abord, en utilisant les représentations algébriques usuelles de Walpole établies dans [Walpole 1984] pour les tenseurs d'élasticité possédant des propriétés de symétrie matérielle, on montre que la matrice d'élasticité aléatoire $[\underline{\mathbf{C}}]$, qui appartient p.s. à la classe de symétrie isotrope $\mathbb{M}_n^{\text{iso}}(\mathbb{R})$ de dimension $n_{\text{sym}} = 2$, peut être décomposée sous la forme [Guilleminot et Soize 2013a]

$$[\underline{\mathbf{C}}] = 3\underline{\mathbf{C}}_1[E_1] + 2\underline{\mathbf{C}}_2[E_2], \quad (2.24)$$

où les deux composantes $\underline{C}_1 = \underline{K}$ et $\underline{C}_2 = \underline{M}$ du vecteur aléatoire \underline{C} sont des variables aléatoires à valeurs positives, correspondant respectivement au module d'élasticité isostatique aléatoire et au module de cisaillement aléatoire de la matrice d'élasticité aléatoire $[\underline{C}]$ à valeurs dans la classe de symétrie isotrope $\mathbb{M}_n^{\text{iso}}(\mathbb{R})$. $\{[E_1], [E_2]\}$ est la représentation matricielle de la base tensorielle classique de Walpole $\{E_1, E_2\}$ des tenseurs d'élasticité isotrope d'ordre quatre, où E_1 et E_2 sont les deux tenseurs symétriques d'ordre quatre définis par $\{E_1\}_{ijkl} = (\delta_{ij}\delta_{kl})/3$ et $\{E_2\}_{ijkl} = \{\mathbf{I}\}_{ijkl} - \{E_1\}_{ijkl}$, respectivement, avec \mathbf{I} le tenseur identité (ou tenseur unité) symétrique d'ordre quatre tel que $\{\mathbf{I}\}_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$, avec δ_{ij} le symbole de Kronecker tel que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Outre la condition de normalisation usuelle qui doit être satisfaite par la fonction de densité de probabilité $p_{\underline{C}}$, les propriétés fondamentales qu'il convient de prendre en compte sont les suivantes : (i) la valeur moyenne $\mathbb{E}\{\underline{C}\}$ est connue et donnée par l'estimation statistique $\frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q \underline{c}_q^{\text{meso}}$, et (ii) $\mathbb{E}\{\log(\det([\underline{C}]))\} = \nu_{\underline{C}}$ avec $|\nu_{\underline{C}}| < +\infty$ un paramètre donné (voir [Soize 2000, Soize 2001]), ce qui implique que $[\underline{C}]$ et son inverse $[\underline{C}]^{-1}$ sont des matrices aléatoires du second ordre (i.e. $\mathbb{E}\{\|[\underline{C}]\|_F^2\} < +\infty$ et $\mathbb{E}\{\|[\underline{C}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty$) et par conséquent on assure, avec la propriété de définie positivité de $[\underline{C}]$, que le problème aux limites elliptique stochastique sous-jacent admet une solution aléatoire du second-ordre unique. Le principe du MaxEnt implique que \underline{C}_1 et \underline{C}_2 sont deux variables aléatoires statistiquement indépendantes qui suivent toutes les deux une loi Gamma avec les paramètres positifs $(1 - \lambda, 1/\lambda_1)$ et $(1 - 5\lambda, 1/\lambda_2)$, respectivement, où $\lambda \in]-\infty, 1/5[$, $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. La fonction de densité de probabilité $p_{\underline{C}}$ du vecteur aléatoire $\underline{C} = (\underline{C}_1, \underline{C}_2)$ correspond au produit des fonctions de densité de probabilité $p_{\underline{C}_1}$ et $p_{\underline{C}_2}$ des variables aléatoires \underline{C}_1 and \underline{C}_2 . On a alors, pour tout $\mathbf{c} = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,

$$p_{\underline{C}}(\mathbf{c}) = p_{\underline{C}_1}(c_1) \times p_{\underline{C}_2}(c_2), \quad (2.25)$$

où les fonctions de densité de probabilité marginales $p_{\underline{C}_1} : c_1 \mapsto p_{\underline{C}_1}(c_1)$ et $p_{\underline{C}_2} : c_2 \mapsto p_{\underline{C}_2}(c_2)$ de \underline{C}_1 et \underline{C}_2 sont respectivement définies de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ par

$$p_{\underline{C}_1}(c_1) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(c_1) k_1 c_1^{-\lambda} \exp(-\lambda_1 c_1), \quad (2.26a)$$

$$p_{\underline{C}_2}(c_2) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(c_2) k_2 c_2^{-5\lambda} \exp(-\lambda_2 c_2), \quad (2.26b)$$

dans lesquelles $k_1 = \lambda_1^{1-\lambda}/\Gamma(1-\lambda)$ et $k_2 = \lambda_2^{1-5\lambda}/\Gamma(1-5\lambda)$ sont les constantes de normalisation. On introduit le vecteur des hyperparamètres $\underline{\mathbf{s}} = (\lambda, \lambda_1, \lambda_2) \in]-\infty, 1/5[\times]0, +\infty[^2$.

Finalement, le modèle probabiliste de $\mathbf{B} = (D, \mathbf{L}, \underline{C})$ fait intervenir le vecteur des hyperparamètres inconnu $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d, \underline{\mathbf{s}}) = (a_1, b_1, \dots, a_d, b_d, \lambda, \lambda_1, \lambda_2)$ appartenant à l'ensemble admissible $\mathcal{S} = (]0, +\infty[^2)^d \times]-\infty, 1/5[\times]0, +\infty[^2$ et contenant tous les hyperparamètres des différents modèles probabilistes construits explicitement ci-dessus qui doivent être identifiés. La valeur optimale \mathbf{s}^{opt} de \mathbf{s} est déterminée en utilisant la méthode MLE avec les données disponibles qui sont les Q réalisations statistiquement indépendantes $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_Q^{\text{meso}}$ du vecteur aléatoire \mathbf{B} résultant de

la procédure d'identification inverse statistique appliquée sur les Q différents sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$ sans recouvrement entre eux. La méthode MLE consiste alors à calculer la valeur optimale \mathbf{s}^{opt} de \mathbf{s} qui maximise la fonction de log-vraisemblance en résolvant le problème d'optimisation suivant

$$\mathbf{s}^{\text{opt}} = \arg \max_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \mathcal{L}(\mathbf{s}; \mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_Q^{\text{meso}}), \quad (2.27a)$$

où $\mathbf{s} \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_Q^{\text{meso}}; \mathbf{s})$ est la fonction de log-vraisemblance pour les Q réalisations indépendantes $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_Q^{\text{meso}}$ de \mathbf{B} qui est définie pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ par

$$\mathcal{L}(\mathbf{s}; \mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_Q^{\text{meso}}) = \sum_{q=1}^Q \log(p_{\mathbf{B}}(\mathbf{b}_q^{\text{meso}}; \mathbf{s})). \quad (2.27b)$$

La précision de la valeur optimale identifiée \mathbf{s}^{opt} est d'autant plus élevée que le nombre Q de sous-domaines mésoscopiques est grand mais au détriment d'un coût de calcul plus élevé.

Enfin, la valeur optimale \mathbf{b}^{opt} de l'hyperparamètre $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$ est calculée en résolvant le problème d'optimisation suivant

$$\mathbf{b}^{\text{opt}} = \arg \max_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}} p_{\mathbf{B}}(\mathbf{b}; \mathbf{s}^{\text{opt}}). \quad (2.28)$$

La valeur optimale \mathbf{b}^{opt} de \mathbf{b} correspond à la valeur la plus probable prise par le vecteur aléatoire \mathbf{B} suivant la loi de probabilité identifiée et représentée par sa fonction de densité de probabilité $p_{\mathbf{B}}(\cdot; \mathbf{s}^{\text{opt}})$ paramétrée par \mathbf{s}^{opt} .

6 Bilan

Dans ce deuxième chapitre, nous avons présenté les hypothèses retenues dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire, la stratégie d'identification statistique multi-échelle avec les améliorations proposées dans ce travail, incluant la construction des différents indicateurs numériques pour la reformulation du problème inverse statistique multi-échelle en un problème d'optimisation multi-objectif et les méthodes numériques pour la résolution du problème d'optimisation multi-objectif. La méthode d'identification statistique multi-échelle permet d'identifier le modèle déterministe du tenseur d'élasticité à l'échelle macroscopique et le modèle stochastique *prior* du champ de tenseur d'élasticité aléatoire à l'échelle mésoscopique pour un matériau constitué par une microstructure hétérogène aléatoire pour laquelle il existe une séparation d'échelles entre les échelles macroscopique et mésoscopique. Ce problème inverse statistique multi-échelle est formulé comme un problème d'optimisation multi-objectif multi-échelle puis décomposé en un problème d'optimisation mono-objectif

pour identifier les paramètres du modèle déterministe à l'échelle macroscopique, et un problème d'optimisation multi-objectif pour identifier les hyperparamètres du modèle stochastique *prior* à l'échelle mésoscopique. Les améliorations apportées par rapport à la méthodologie initialement introduite dans [Nguyen et al. 2015] portent sur (i) l'introduction d'un indicateur numérique mésoscopique supplémentaire dans la formulation du problème d'optimisation multi-objectif permettant l'emploi d'un algorithme d'optimisation plus efficace numériquement que l'algorithme génétique utilisé dans [Nguyen et al. 2015], à savoir un algorithme itératif de point fixe, afin de réduire le coût de calcul de la méthode d'identification statistique multi-échelle considérée, et (ii) l'introduction d'une modélisation probabiliste *ad hoc* des hyperparamètres du modèle stochastique *prior* afin d'améliorer la robustesse de la méthode d'identification inverse statistique lorsque cette dernière est appliquée sur plusieurs sous-domaines mésoscopiques contenus dans le domaine macroscopique de l'échantillon.

Chapitre 3

Validation numérique de la méthode d'identification multi-échelle sur des matériaux virtuels fictifs en élasticité linéaire 2D et 3D

Sommaire

1	Introduction	70
2	Introduction d'une méthode de Shinozuka modifiée pour la représentation de champs aléatoires gaussiens	71
3	Validation numérique sur un essai virtuel de compression en élasticité linéaire 2D contraintes planes	74
3.1	Paramétrage des modèles macroscopique et mésoscopique	75
3.2	Études de convergence	81
3.3	Analyse de sensibilité des indicateurs numériques	89
3.4	Résolution du problème d'optimisation mono-objectif à l'échelle macroscopique	94
3.5	Résolution du problème d'optimisation multi-objectif à l'échelle mésoscopique	94
4	Validation numérique sur un essai virtuel de compression en élasticité linéaire 3D	107
4.1	Paramétrage des modèles macroscopique et mésoscopique	108
4.2	Étude de convergence de l'approximation spectrale du germe stochastique gaussien en fonction de l'ordre d'approximation	111
4.3	Résolution du problème d'optimisation mono-objectif à l'échelle macroscopique	112
4.4	Résolution du problème d'optimisation multi-objectif à l'échelle mésoscopique	113
5	Bilan	115

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une validation numérique de la méthodologie d'identification multi-échelle améliorée développée au chapitre 2 dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D sous l'hypothèse des contraintes planes et en 3D sur des matériaux virtuels fictifs pour lesquels les propriétés mécaniques macroscopiques et mésoscopiques sont connues. Les champs cinématiques « expérimentaux » multi-échelles requis sont obtenus par des simulations numériques en utilisant une réalisation aléatoire du champ d'élasticité aléatoire (voir section 1 du chapitre 1) non pas restreint de \mathbb{R}^d à un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} mais restreint au domaine macroscopique entier Ω^{macro} de l'échantillon pour une valeur expérimentale donnée $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ de l'hyperparamètre $\mathbf{b} \in \mathcal{B}^{\text{meso}}$. La solution d'un problème aux limites déterministe sur ce domaine macroscopique Ω^{macro} est alors calculée pour une réalisation d'un champ d'élasticité hétérogène aléatoire dont les longueurs de corrélation spatiale correspondent aux tailles caractéristiques des hétérogénéités à l'échelle microscopique. Ce problème aux limites déterministe est résolu par une méthode numérique classique (méthode des éléments finis) dont le coût numérique est élevé et potentiellement prohibitif en 3D (i.e. pour $d = 3$), ce que permet d'éviter les méthodes d'homogénéisation numérique, mais nous en avons besoin pour simuler complètement la base de données « expérimentales » multi-échelles. Les champs cinématiques « expérimentaux » requis à l'échelle mésoscopique sont alors calculés comme la (les) restriction(s) des champs cinématiques solutions de ce problème aux limites sur un ou plusieurs sous-domaine(s) mésoscopique(s) $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$ (avec $Q \geq 1$). La valeur « expérimentale » $\mathbf{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ du paramètre $\mathbf{a} \in \mathcal{A}^{\text{macro}}$ est calculée en utilisant une des méthodes d'homogénéisation numérique stochastique présentées dans la section 2 du chapitre 1 en prenant comme VER le domaine macroscopique entier Ω^{macro} . Enfin, les données « expérimentales » requises à l'échelle macroscopique sont calculées comme la solution d'un problème aux limites déterministe sur le domaine macroscopique Ω^{macro} . Nous précisons tout d'abord les caractéristiques de la configuration expérimentale, nous spécifions ensuite les modèles numériques déterministe et stochastique utilisés, et nous présentons enfin des études de convergence et de sensibilité avant d'exposer les résultats de la méthode d'identification multi-échelle.

Avant d'entreprendre les exemples de validation numérique, nous allons tout d'abord présenter une modification de la méthode de représentation spectrale (ou méthode d'approximation de Shinozuka) utilisée dans ce travail de recherche pour la génération des germes stochastiques gaussiens dans la construction du modèle stochastique *prior* de $\mathcal{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ (voir section 1.3 du chapitre 1). Les améliorations présentées ici permettront de gommer la quasi-périodicité du champ stochastique gaussien que l'on observe numériquement pour un pas d'échantillonnage spectral trop élevé mais que l'on souhaite limiter car le coût numérique de la représentation spectrale classique (3.1) devient très vite prohibitif lorsqu'elle est utilisée conjointement avec la

méthode de simulation numérique de MC et, que les longueurs de corrélation spatiale ℓ_1, \dots, ℓ_d du champ stochastique gaussien W sont très petites devant la taille du (des) sous-domaine(s) mésoscopique(s) considéré(s).

2 Introduction d'une méthode de Shinozuka modifiée pour la représentation de champs aléatoires gaussiens

La représentation algébrique du tenseur aléatoire d'élasticité apparent à l'échelle mésoscopique, pour lequel nous utilisons un modèle stochastique *prior*, introduit un certain nombre de champs gaussiens normalisés, que nous appelons « germes stochastiques gaussiens ». Dans le cadre de la méthode de simulation numérique de MC, il est nécessaire de construire des réalisations statistiquement indépendants des « germes stochastiques gaussiens », et pour cela, nous utilisons la représentation spectrale introduite dans [Shinozuka 1971, Shinozuka et Wen 1972, Shinozuka et Jan 1972], puis détaillée dans [Poirion et Soize 1989, Poirion et Soize 1995]. Cette représentation permet une utilisation directe de la méthode de simulation numérique de MC puisqu'elle nous donne une expression entre les « germes stochastiques gaussiens » et un ensemble de variables aléatoires statistiquement indépendantes. Une forme améliorée de cette représentation spectrale de champs aléatoires gaussiens est donnée dans [Poirion et Soize 1989, Poirion et Soize 1995] sous la forme suivante

$$W^\gamma(\mathbf{x}) = \sqrt{2 \times \frac{2\pi}{\gamma\ell_1} \times \dots \times \frac{2\pi}{\gamma\ell_d}} \sum_{\beta_1=1}^{\gamma} \dots \sum_{\beta_d=1}^{\gamma} \sqrt{s(k_{\beta_1}; \ell_1) \times \dots \times s(k_{\beta_d}; \ell_d)} \\ \times Z_{\beta_1 \dots \beta_d} \cos(\Phi_{\beta_1 \dots \beta_d} + k_{\beta_1}x_1 + \dots + k_{\beta_d}x_d), \quad (3.1)$$

où la fonction s est définie par (1.27) dans la section 1.3 du chapitre 1, avec $Z_{\beta_1 \dots \beta_d} = \sqrt{-\log(\Psi_{\beta_1 \dots \beta_d})}$, où $\{\Phi_{\beta_1 \dots \beta_d}, \Psi_{\beta_1 \dots \beta_d}\}_{1 \leq \beta_1, \dots, \beta_d \leq \gamma}$ est un ensemble de variables aléatoires à valeurs positives statistiquement indépendantes telles que $\Phi_{\beta_1 \dots \beta_d}$ soit de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$ et $\Psi_{\beta_1 \dots \beta_d}$ soit de loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour une telle représentation, il a été prouvé que, pour tout $\gamma \geq 1$, W^γ est un champ aléatoire gaussien, centré, stationnaire en moyenne d'ordre deux et dont la fonction d'autocorrélation R_{W^γ} s'écrit

$$R_{W^\gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbb{E}\{W^\gamma(\mathbf{x}) W^\gamma(\mathbf{x}')\} \\ = \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\gamma\ell_1} \times \dots \times \frac{2\pi}{\gamma\ell_d} \sum_{\beta_1=1}^{\gamma} \dots \sum_{\beta_d=1}^{\gamma} s(k_{\beta_1}; \ell_1) \times \dots \times s(k_{\beta_d}; \ell_d) \\ \times \cos(k_{\beta_1}(x_1 - x'_1) + \dots + k_{\beta_d}(x_d - x'_d)), \quad (3.2)$$

telle que $R_{W^\gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \rightarrow R_W(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ lorsque $\gamma \rightarrow +\infty$ au sens des fonctions intégrables sur \mathbb{R}^d . On en retient que, pour cette représentation spectrale, le champ aléatoire W^γ

converge en loi vers le « germe stochastique gaussien » W introduit dans la section 1.3 du chapitre 1, que cette représentation contient γ^d termes, que pour tout $\gamma \geq 1$, W^γ est p.s. un champ aléatoire gaussien centré, et que sa fonction d'autocorrélation converge vers celle de W quand $\gamma \rightarrow +\infty$. Des difficultés numériques apparaissent lorsque le domaine sur lequel est simulé W^γ est grand devant les longueurs de corrélation spatiale ℓ_1, \dots, ℓ_d . Dans ce cas, nous observons une périodicité des valeurs simulées numériquement du champ aléatoire W^γ . La figure 3.1 (à gauche) montre un exemple de simulation numérique de W^γ pour $d = 2$, $\gamma = 10$, $\ell_1 = \ell_2 = 20 \mu\text{m}$ sur un sous-domaine mésoscopique $\Omega^{\text{meso}} =]0, 10^{-3}[\times]0, 10^{-3}[$ en [m]. On observe bien la périodicité de la simulation numérique du champ aléatoire W^γ . Notre objectif est de proposer une représentation spectrale alternative des « germes stochastiques gaussiens » qui puisse gommer cette périodicité pour de faibles valeurs du nombre de termes. La représentation spectrale modifiée que nous proposons pour une telle accélération de convergence est présentée ci-dessous,

$$W^\gamma(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2}{\gamma} \times \frac{2\pi}{\ell_1} \times \dots \times \frac{2\pi}{\ell_d}} \sum_{\beta=1}^{\gamma} \sqrt{s(K_1^\beta; \ell_1) \times \dots \times s(K_d^\beta; \ell_d)} \\ \times Z^\beta \cos(\Phi^\beta + K_1^\beta x_1 + \dots + K_d^\beta x_d), \quad (3.3)$$

où la fonction s est définie par (1.27) dans la section 1.3 du chapitre 1, et dans laquelle nous avons introduit γ variables aléatoires statistiquement indépendantes $\mathbf{K}^1, \dots, \mathbf{K}^\gamma$ à valeurs dans \mathbb{R}^d qui s'écrivent $\mathbf{K}^\beta = (K_1^\beta, \dots, K_d^\beta)$ pour tout $\beta = 1, \dots, \gamma$ et où $K_1^\beta, \dots, K_d^\beta$ sont d variables aléatoires statistiquement indépendantes de lois uniformes sur $[-\pi/\ell_1, \pi/\ell_1], \dots, [-\pi/\ell_d, \pi/\ell_d]$, respectivement; $\Phi^1, \dots, \Phi^\gamma$ sont γ variables aléatoires à valeurs positives statistiquement indépendantes et de lois uniformes sur $[0, 2\pi]$; et enfin Z^1, \dots, Z^γ sont γ variables aléatoires à valeurs positives statistiquement indépendantes qui s'écrivent $Z^\beta = \sqrt{-\log(\Psi^\beta)}$, où $\Psi^1, \dots, \Psi^\gamma$ sont γ variables aléatoires à valeurs positives statistiquement indépendantes et de lois uniformes sur $[0, 1]$. Pour cette représentation spectrale modifiée, on peut montrer que, pour tout $\gamma \geq 1$, W^γ est un champ aléatoire centré et dont la fonction d'autocorrélation est telle que

$$R_{W^\gamma}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbb{E}\{W^\gamma(\mathbf{x}) W^\gamma(\mathbf{x}')\} = R_W(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.4)$$

Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, soit la variable aléatoire Y^β définie par

$$Y^\beta = \sqrt{2 \times \frac{2\pi}{\ell_1} \times \dots \times \frac{2\pi}{\ell_d}} \sqrt{s(K_1^\beta; \ell_1) \times \dots \times s(K_d^\beta; \ell_d)} \\ \times Z^\beta \cos(\Phi^\beta + K_1^\beta x_1 + \dots + K_d^\beta x_d). \quad (3.5)$$

Il est trivial que les variables aléatoires Y^1, \dots, Y^γ sont centrées et statistiquement indépendantes et de même loi de probabilité. Ainsi, d'après le théorème de la limite

centrale, la suite de variables aléatoires $\{1/\sqrt{\gamma} \sum_{\beta=1}^{\gamma} Y^{\beta}\}_{\gamma \geq 1}$ converge en loi quand $\gamma \rightarrow +\infty$ vers une variable aléatoire de loi gaussienne. Ceci permet de montrer que la représentation spectrale modifiée de W^{γ} converge en loi vers un champ aléatoire gaussien quand $\gamma \rightarrow +\infty$. On en retient que, pour cette représentation spectrale modifiée, le champ aléatoire W^{γ} converge en loi vers un champ gaussien, que cette représentation contient γ termes, que pour tout $\gamma \geq 1$, le champ aléatoire W^{γ} est centré et sa fonction d'autocorrélation est égale à celle de W . La figure 3.1 (à droite) montre un exemple de simulation numérique de W^{γ} pour $d = 2$, $\gamma = 100$, $\ell_1 = \ell_2 = 20 \mu\text{m}$ sur un sous-domaine mésoscopique $\Omega^{\text{meso}} =]0, 10^{-3}[\times]0, 10^{-3}[$ en [m]. Contrairement à la représentation spectrale initiale (3.2) (sur la figure à gauche), on observe aucune périodicité dans la représentation spectrale modifiée (3.3) (sur la figure à droite) pour le même nombre de termes dans la représentation spectrale ($\gamma^2 = 10^2 = 100$ à gauche et $\gamma = 100$ à droite). Cette accélération de convergence se paye au prix que W^{γ} n'est plus un champ gaussien quelque soit la valeur de γ . Cependant, contrairement à la représentation spectrale initiale, la fonction d'autocorrélation de W^{γ} est égale à celle de W pour toute valeur de γ . La périodicité est gommée pour de petites valeurs $\gamma \geq \gamma_0$, avec γ_0 un entier dépendant du rapport entre la taille du domaine mésoscopique et les longueurs de corrélation spatiale, grâce aux nombres d'ondes aléatoires K_{α}^{β} qui font que les harmoniques des termes de la représentation spectrale sont de période non commensurable. L'étude de la convergence statistique de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation $R_{W^{\gamma}}$ est présentée sur les figures 3.2 et 3.3, avec une valeur de $\gamma = 10$, pour un nombre $N_s = 10$ (figures 3.2a et 3.3a), $N_s = 100$ (figures 3.2b et 3.3b), $N_s = 1\,000$ (figures 3.2c et 3.3c) et $N_s = 10\,000$ (figures 3.2d et 3.3d), de réalisations statistiquement indépendantes de W^{γ} . Dans le tableau 3.1, les erreurs relatives au sens des fonctions de carré intégrables des estimateurs statistiques de $\eta \mapsto R_{W^{\gamma}}(\boldsymbol{\eta})$ avec $\boldsymbol{\eta} = (\eta, 0)$ et $\eta \mapsto R_{W^{\gamma}}(\boldsymbol{\eta})$ avec $\boldsymbol{\eta} = (0, \eta)$ sont reportées en fonction de N_s . On observe, pour les deux estimateurs statistiques, un taux de décroissance de l'erreur relative en $1/\sqrt{N_s}$, ce qui correspond au taux de convergence normal pour la méthode de simulation numérique de MC.

TABLEAU 3.1 – Erreurs relatives pour différentes valeurs de N_s pour les estimateurs statistiques des fonctions d'autocorrélation $\eta \mapsto R_{W^{\gamma}}(\boldsymbol{\eta})$ avec $\boldsymbol{\eta} = (\eta, 0)$ et $\eta \mapsto R_{W^{\gamma}}(\boldsymbol{\eta})$ avec $\boldsymbol{\eta} = (0, \eta)$

N_s	10	100	1 000	10 000
Erreur relative suivant x_1 [%]	285	101	33	13
Erreur relative suivant x_2 [%]	215	116	38	18

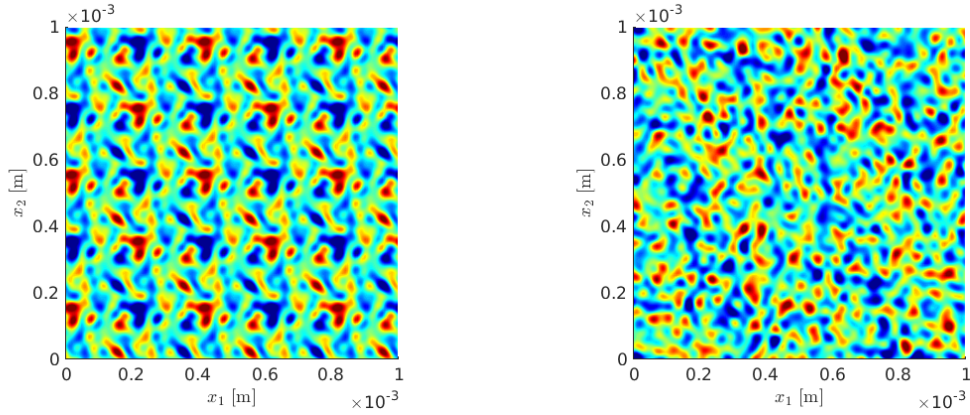


FIGURE 3.1 – Comparaison d'une réalisation de W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale initiale (3.2) (à gauche) avec $\gamma = 10$ (correspondant à $\gamma^2 = 100$ termes) et de l'approximation spectrale modifiée (3.3) (à droite) avec $\gamma = 100$ (correspondant à $\gamma = 100$ termes également) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso}

3 Validation numérique sur un essai virtuel de compression en élasticité linéaire 2D contraintes planes

Pour ce premier exemple de validation numérique en élasticité linéaire 2D sous l'hypothèse des contraintes planes, on considère un domaine macroscopique carré ouvert borné $\Omega^{\text{macro}} \subset \mathbb{R}^2$, défini dans un repère cartésien fixe (O, x_1, x_2) de l'espace physique euclidien bidimensionnel \mathbb{R}^2 , tel que $\Omega^{\text{macro}} =]0, 10^{-2}[\times]0, 10^{-2}[$ en [m] (de dimensions $1 \times 1 \text{ cm}^2$) (voir figure 2.1). On introduit également un ensemble de $Q = 16$ sous-domaines mésoscopiques carrés $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$ sans recouvrement entre eux contenus dans Ω^{macro} et de dimensions $1 \times 1 \text{ mm}^2$ (voir figure 2.1). D'une part, des conditions aux limites de Neumann non-homogènes sont appliquées sur la frontière supérieure $\Gamma_{N,f}^{\text{macro}} = \{x_1 \in [0, 10^{-2}], x_2 = 10^{-2}\} \subset \partial\Omega^{\text{macro}}$ en [m], qui est soumise à un champ de force linéique déterministe donné $\mathbf{f}^{\text{macro}}$ uniformément réparti, dirigé suivant la direction (verticale descendante) $-x_2$ avec une intensité de 5 kN telle que $\|\mathbf{f}^{\text{macro}}\| = 500 \text{ kN/m}$, tandis que des conditions aux limites de Neumann homogènes (nulles) (i.e. des conditions de bord libre d'effort) $\mathbf{f}^{\text{macro}} = \mathbf{0}$ sont imposées sur les frontières gauche et droite $\Gamma_{N,0}^{\text{macro}} = \{x_1 \in \{0, 10^{-2}\}, x_2 \in [0, 10^{-2}]\} \subset \partial\Omega^{\text{macro}}$ en [m]. D'autre part, des conditions aux limites de Dirichlet homogènes (nulles) $\mathbf{u}^{\text{macro}} = \mathbf{0}$ sont appliquées sur la frontière inférieure $\Gamma_D^{\text{macro}} = \{x_1 \in [0, 10^{-2}], x_2 = 0\} \subset \partial\Omega^{\text{macro}}$ en [m], qui est par conséquent bloquée en déplacement (ou encastée).

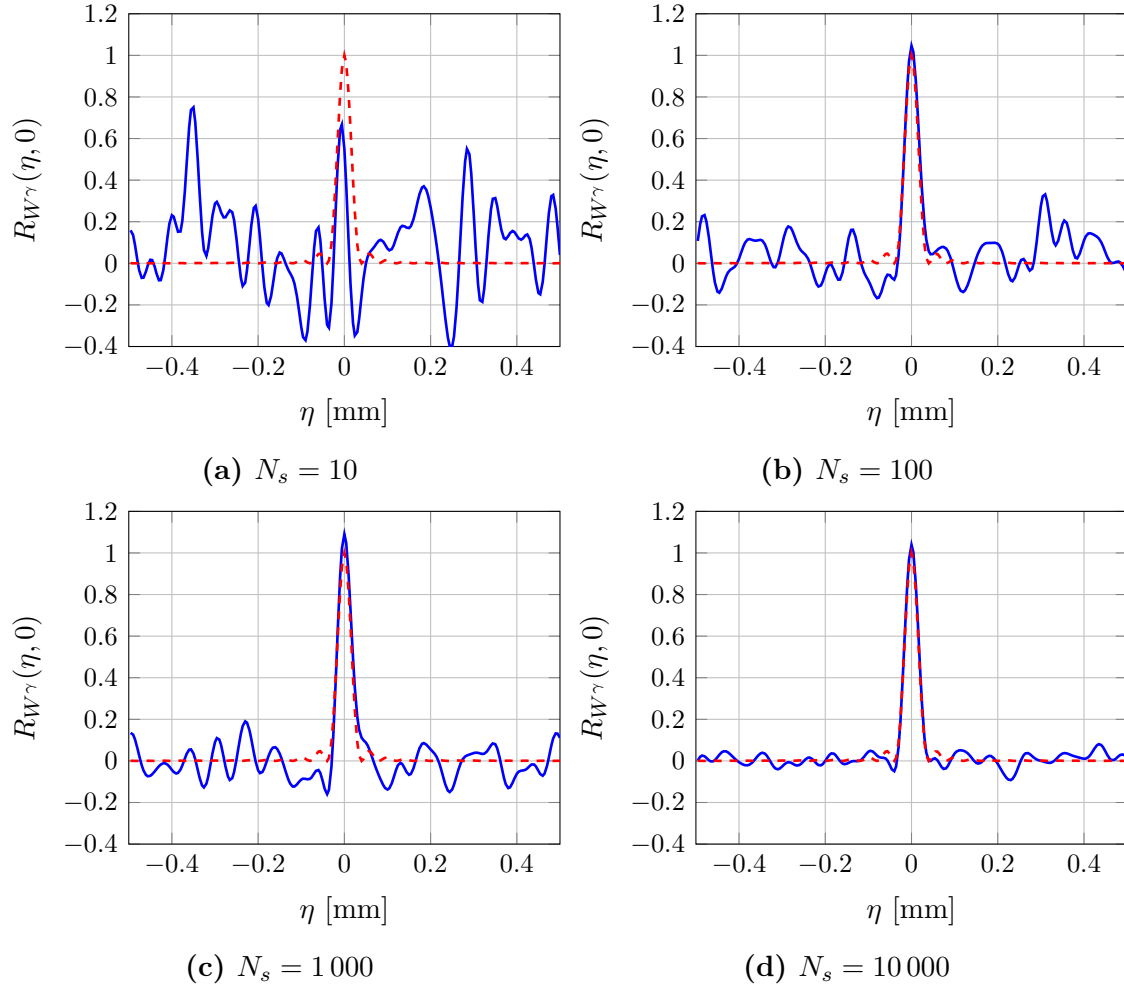


FIGURE 3.2 – Évolutions de la fonction d'autocorrélation $R_{W^\gamma}(\eta, 0)$ en fonction de η (en bleu), au centre d'un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} , du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) avec $\gamma = 10$ pour différentes valeurs de N_s , et de la fonction d'autocorrélation exacte ρ (en rouge) définie par (1.22)

3.1 Paramétrage des modèles macroscopique et mésoscopique

À l'échelle macroscopique, le matériau est supposé être déterministe, homogène (i.e. constant dans l'espace, et donc indépendant de \mathbf{x}), à comportement élastique linéaire isotrope. Pour la modélisation et l'identification dans le cadre de l'élasticité linéaire 2D, la représentation matricielle $[S^{\text{macro}}]$ du tenseur de souplesse effectif déterministe d'ordre quatre S^{macro} et celle $[C^{\text{macro}}] \in \mathbb{M}_n^{\text{iso}}(\mathbb{R})$ du tenseur d'élasticité effectif déterministe d'ordre quatre C^{macro} , avec $n = d(d + 1)/2 = 6$ en élasticité

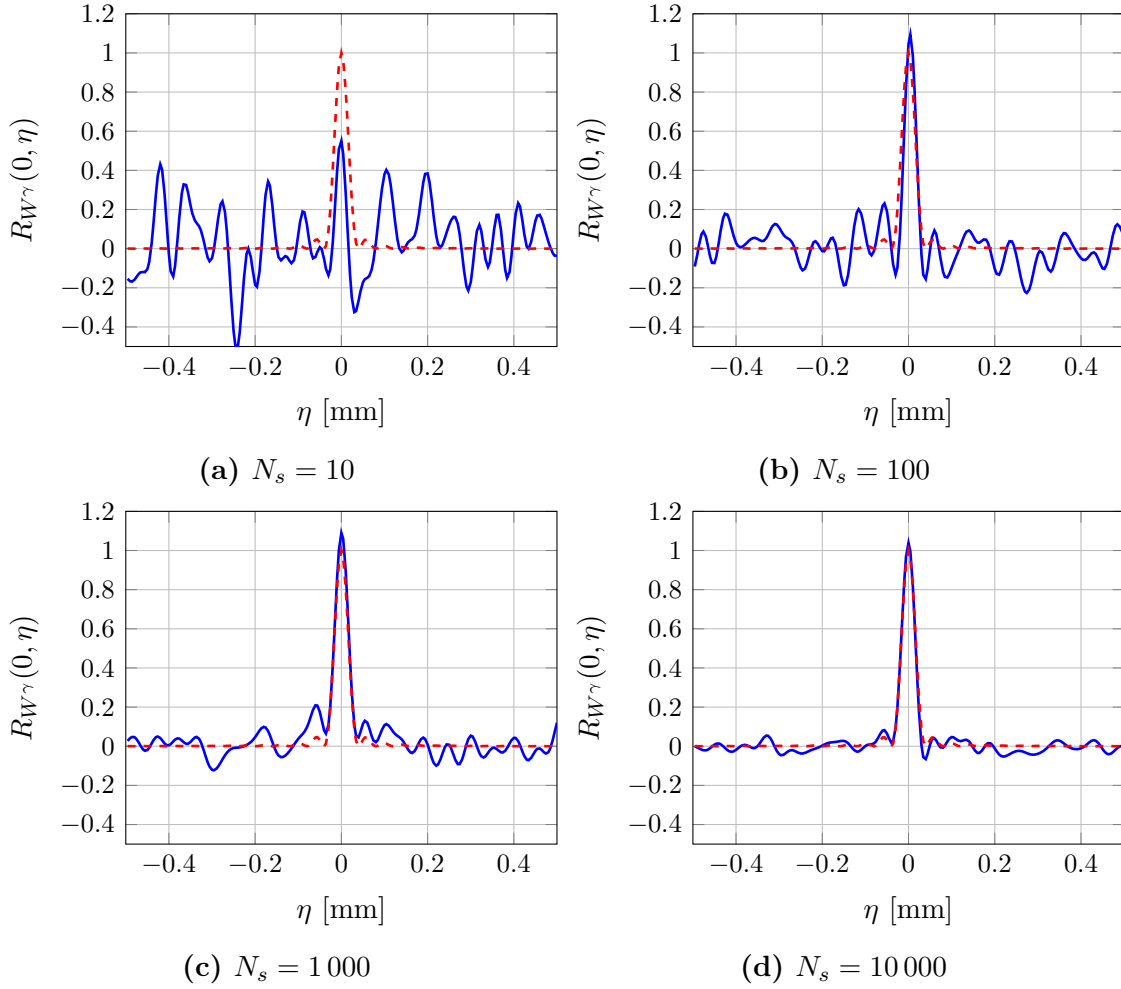


FIGURE 3.3 – Évolutions de la fonction d'autocorrélation $R_{W^\gamma}(0, \eta)$ en fonction de η (en bleu), au centre d'un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} , du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) avec $\gamma = 10$ pour différentes valeurs de N_s , et de la fonction d'autocorrélation exacte ρ (en rouge) définie par (1.22)

linéaire 3D (pour $d = 3$), sont introduites en utilisant une notation non-classique de Voigt-Mandel [Nguyen et al. 2015], telles que

$$\begin{aligned} [S^{\text{macro}}]_{[e]_{ij}[e]_{kl}} &= \{S^{\text{macro}}\}_{ijkl}, \\ [C^{\text{macro}}]_{[e]_{ij}[e]_{kl}} &= \{C^{\text{macro}}\}_{ijkl}, \end{aligned} \quad \text{avec} \quad [e] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

ou de manière équivalente, $[S^{\text{macro}}]_{IJ} = \{S^{\text{macro}}\}_{ijkl}$ et $[C^{\text{macro}}]_{IJ} = \{C^{\text{macro}}\}_{ijkl}$ pour $1 \leq I, J \leq 6$, où l'indice I (resp. J) correspond aux indices ij (resp. kl)

conformément aux règles de correspondance (non-classiques)¹ : $1 \leftrightarrow 11$, $2 \leftrightarrow 22$, $3 \leftrightarrow 12$ ou 21 , $4 \leftrightarrow 33$, $5 \leftrightarrow 23$ ou 32 , $6 \leftrightarrow 13$ ou 31 . Une telle représentation matricielle (avec une numérotation non-usuelle) est particulièrement bien adaptée à la modélisation en élasticité linéaire 2D, dans la mesure où la matrice $[C_{2D}^{\text{macro}}]$ d'élasticité (3×3) correspond au premier bloc (3×3) en haut à gauche de la matrice $[C^{\text{macro}}]$ d'élasticité macroscopique (6×6) sous l'hypothèse des déformations planes, tandis que la matrice $[S_{2D}^{\text{macro}}]$ de souplesse (3×3) correspond au premier bloc (3×3) en haut à gauche de la matrice $[S^{\text{macro}}]$ de souplesse macroscopique (6×6) sous l'hypothèse des contraintes planes. Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire 3D, la matrice de souplesse effective $[S^{\text{macro}}]$ et la matrice d'élasticité effective correspondante $[C^{\text{macro}}] = [S^{\text{macro}}]^{-1} \in \mathbb{M}_6^{\text{iso}}(\mathbb{R})$ peuvent alors être écrites comme

$$[S^{\text{macro}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & \frac{\nu}{E} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{E} & \frac{\nu}{E} & 0 & \frac{1}{E} & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & \frac{1}{E} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} \quad (3.7a)$$

et

$$[C^{\text{macro}}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 & \nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 0 & 1-\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.7b)$$

dans lesquelles E et ν sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau élastique isotrope à l'échelle macroscopique. En 2D sous l'hypothèse des contraintes planes, la matrice de souplesse effective $[S_{2D}^{\text{macro}}]$ et la matrice

1. Contrairement à la représentation matricielle non-classique (3.6), la représentation matricielle classique de Voigt-Mandel est définie par la matrice de correspondance

$$[e] = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix},$$

ou de manière équivalente, par les règles de correspondance classiques entre l'indice I (resp. J) et les indices ij (resp. kl) : $1 \leftrightarrow 11$, $2 \leftrightarrow 22$, $3 \leftrightarrow 33$, $4 \leftrightarrow 23$ ou 32 , $5 \leftrightarrow 13$ ou 31 , $6 \leftrightarrow 12$ ou 21 .

d'élasticité effective correspondante $[C_{2D}^{\text{macro}}] = [S_{2D}^{\text{macro}}]^{-1} \in \mathbb{M}_3^{\text{iso}}(\mathbb{R})$ peuvent être écrites comme

$$[S_{2D}^{\text{macro}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\nu)}{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\kappa + \mu}{9\kappa\mu} & -\frac{3\kappa - 2\mu}{18\kappa\mu} & 0 \\ -\frac{3\kappa - 2\mu}{18\kappa\mu} & \frac{3\kappa + \mu}{9\kappa\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix}, \quad (3.8a)$$

et

$$[C_{2D}^{\text{macro}}] = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\mu(3\kappa + \mu)}{3\kappa + 4\mu} & \frac{2\mu(3\kappa - 2\mu)}{3\kappa + 4\mu} & 0 \\ \frac{2\mu(3\kappa - 2\mu)}{3\kappa + 4\mu} & \frac{4\mu(3\kappa + \mu)}{3\kappa + 4\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (3.8b)$$

dans lesquelles $\kappa = E/(3(1-2\nu))$ et $\mu = E/(2(1+\nu))$ sont respectivement le module d'élasticité isostatique et le module de cisaillement du matériau élastique isotrope à l'échelle macroscopique. Rappelons que $[S_{2D}^{\text{macro}}]$ peut être obtenue directement par extraction du premier bloc (3×3) en haut à gauche de la matrice $[S^{\text{macro}}]$ de souplesse macroscopique (6×6) en raison de la notation de Voigt-Mandel non-classique considérée, tandis que $[C_{2D}^{\text{macro}}]$ peut être obtenue indirectement par inversion de $[S_{2D}^{\text{macro}}]$ et ne correspond à aucun bloc (3×3) de la matrice $[C^{\text{macro}}]$ d'élasticité macroscopique (6×6) (ni avec la numérotation de Voigt-Mandel classique ni avec la numérotation non-classique considérée ici). Les deux matrices $[S_{2D}^{\text{macro}}(\mathbf{a})]$ et $[C_{2D}^{\text{macro}}(\mathbf{a})]$ dépendent d'un paramètre à valeurs vectorielles $\mathbf{a} = (\kappa, \mu)$ impliquant seulement deux constantes élastiques algébriquement indépendantes pour un matériau élastique isotrope, à savoir le module d'élasticité isostatique κ et le module de cisaillement μ à l'échelle macroscopique, correspondant à un module d'Young macroscopique $E = 9\kappa\mu/(3\kappa + \mu)$ et à un coefficient de Poisson macroscopique $\nu = (3\kappa - 2\mu)/(2(3\kappa + \mu))$. En particulier, nous avons choisi la valeur expérimentale $\mathbf{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}} = (\kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}}, \mu_{\text{exp}}^{\text{macro}})$ avec $\kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 13.901$ GPa et $\mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 3.685$ GPa, correspondant à $E_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 10.158$ GPa et $\nu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 0.3782$.

À l'échelle mésoscopique, le matériau est supposé être aléatoire, hétérogène, à comportement élastique linéaire anisotrope, avec un modèle moyen isotrope (similaire à celui du modèle déterministe à l'échelle macroscopique) et des fluctuations statistiques anisotropes. Rappelons que le champ de tenseur d'élasticité aléatoire d'ordre quatre \mathbf{C}^{meso} et le champ de souplesse aléatoire correspondant \mathbf{S}^{meso} sont représentés par le champ d'élasticité aléatoire $[C^{\text{meso}}]$ à valeurs dans $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$ et le champ de souplesse aléatoire correspondant $[S^{\text{meso}}]$ à valeurs dans $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$ en utilisant la notation de Voigt-Mandel non-classique introduite précédemment. Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire 3D, la matrice de souplesse moyenne $[\underline{S}^{\text{meso}}]$ et la

matrice d'élasticité moyenne correspondante $[\underline{C}^{\text{meso}}] = [\underline{S}^{\text{meso}}]^{-1} \in \mathbb{M}_6^{\text{iso}}(\mathbb{R})$ peuvent alors être écrites comme

$$[\underline{S}^{\text{meso}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{E}} & -\frac{\underline{\nu}}{\underline{E}} & 0 & -\frac{\underline{\nu}}{\underline{E}} & 0 & 0 \\ -\frac{\underline{\nu}}{\underline{E}} & \frac{1}{\underline{E}} & 0 & -\frac{\underline{\nu}}{\underline{E}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\underline{\nu})}{\underline{E}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\underline{\nu}}{\underline{E}} & -\frac{\underline{\nu}}{\underline{E}} & 0 & \frac{1}{\underline{E}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\underline{\nu})}{\underline{E}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2(1+\underline{\nu})}{\underline{E}} \end{bmatrix}, \quad (3.9a)$$

et

$$[\underline{C}^{\text{meso}}] = \frac{\underline{E}}{(1+\underline{\nu})(1-2\underline{\nu})} \begin{bmatrix} 1-\underline{\nu} & \underline{\nu} & 0 & \underline{\nu} & 0 & 0 \\ \underline{\nu} & 1-\underline{\nu} & 0 & \underline{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\underline{\nu}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\nu} & \underline{\nu} & 0 & 1-\underline{\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\underline{\nu}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\underline{\nu}}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.9b)$$

dans lesquelles \underline{E} et $\underline{\nu}$ sont respectivement le module d'Young moyen et le coefficient de Poisson moyen à l'échelle mésoscopique. En 2D sous l'hypothèse des contraintes planes, la matrice de souplesse moyenne $[\underline{S}_{2D}^{\text{meso}}]$ et la matrice d'élasticité moyenne $[\underline{C}_{2D}^{\text{meso}}] = [\underline{S}_{2D}^{\text{meso}}]^{-1} \in \mathbb{M}_3^{\text{iso}}(\mathbb{R})$ peuvent être écrites comme

$$[\underline{S}_{2D}^{\text{meso}}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\underline{E}} & -\frac{\underline{\nu}}{\underline{E}} & 0 \\ -\frac{\underline{\nu}}{\underline{E}} & \frac{1}{\underline{E}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(1+\underline{\nu})}{\underline{E}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\underline{\kappa} + \underline{\mu}}{9\underline{\kappa}\underline{\mu}} & -\frac{3\underline{\kappa} - 2\underline{\mu}}{18\underline{\kappa}\underline{\mu}} & 0 \\ -\frac{3\underline{\kappa} - 2\underline{\mu}}{18\underline{\kappa}\underline{\mu}} & \frac{3\underline{\kappa} + \underline{\mu}}{9\underline{\kappa}\underline{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\underline{\mu}} \end{bmatrix}, \quad (3.10a)$$

et

$$[\underline{C}_{2D}^{\text{meso}}] = \begin{bmatrix} \frac{\underline{E}}{1-\underline{\nu}^2} & \frac{\underline{E}\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}^2} & 0 \\ \frac{\underline{E}\underline{\nu}}{1-\underline{\nu}^2} & \frac{\underline{E}}{1-\underline{\nu}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\underline{E}}{2(1+\underline{\nu})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4\underline{\mu}(3\underline{\kappa} + \underline{\mu})}{3\underline{\kappa} + 4\underline{\mu}} & \frac{2\underline{\mu}(3\underline{\kappa} - 2\underline{\mu})}{3\underline{\kappa} + 4\underline{\mu}} & 0 \\ \frac{2\underline{\mu}(3\underline{\kappa} - 2\underline{\mu})}{3\underline{\kappa} + 4\underline{\mu}} & \frac{4\underline{\mu}(3\underline{\kappa} + \underline{\mu})}{3\underline{\kappa} + 4\underline{\mu}} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\mu} \end{bmatrix}, \quad (3.10b)$$

dans lesquelles $\underline{\kappa} = \underline{E}/(3(1 - 2\nu))$ et $\underline{\mu} = \underline{E}/(2(1 + \nu))$ sont le module d'élasticité isostatique moyen et le module de cisaillement moyen à l'échelle mésoscopique. Rappelons que $[\underline{S}_{2D}^{\text{meso}}]$ peut être obtenue directement par extraction du premier bloc (3×3) en haut à gauche de la matrice $[\underline{S}^{\text{meso}}]$ de souplesse moyenne mésoscopique (6×6) en raison de la notation non-classique de Voigt-Mandel considérée, tandis que $[\underline{C}_{2D}^{\text{meso}}]$ peut être obtenue indirectement par inversion de $[\underline{S}_{2D}^{\text{meso}}]$ et ne correspond à aucun bloc (3×3) de la matrice $[\underline{C}^{\text{meso}}]$ d'élasticité moyenne mésoscopique (6×6) (ni avec la numérotation classique de Voigt-Mandel ni avec la numérotation non-classique considérée ici). De manière similaire aux matrices de souplesse $[\underline{S}_{2D}^{\text{macro}}(\mathbf{a})]$ et d'élasticité $[\underline{C}_{2D}^{\text{macro}}(\mathbf{a})]$ à l'échelle macroscopique qui dépendent d'un paramètre à valeurs vectorielles $\mathbf{a} = (\kappa, \mu)$, les matrices de souplesse moyenne $[\underline{S}_{2D}^{\text{meso}}(\underline{\mathbf{c}})]$ et d'élasticité moyenne $[\underline{C}_{2D}^{\text{meso}}(\underline{\mathbf{c}})]$ à l'échelle mésoscopique dépendent d'un hyperparamètre à valeurs vectorielles $\underline{\mathbf{c}} = (\underline{\kappa}, \underline{\mu})$ impliquant seulement deux constantes élastiques algébriquement indépendantes pour un matériau élastique isotrope, à savoir le module d'élasticité isostatique moyen $\underline{\kappa}$ et le module de cisaillement moyen $\underline{\mu}$ à l'échelle mésoscopique, correspondant à un module d'Young moyen mésoscopique $\underline{E} = 9\underline{\kappa}\underline{\mu}/(3\underline{\kappa} + \underline{\mu})$ et à un coefficient de Poisson moyen mésoscopique $\underline{\nu} = (3\underline{\kappa} - 2\underline{\mu})/(2(3\underline{\kappa} + \underline{\mu}))$.

Dans ce travail, nous avons choisi le paramétrage $\underline{\mathbf{c}} = (\underline{\kappa}, \underline{\mu})$ (et non $\underline{\mathbf{c}} = (\underline{E}, \underline{\nu})$), car il est compatible avec la modélisation probabiliste des hyperparamètres en présence de plusieurs mesures expérimentales (voir section 5.3 du chapitre 2). Le modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité aléatoire $[\underline{C}_{2D}^{\text{meso}}]$ (resp. du champ de souplesse aléatoire $[\underline{S}_{2D}^{\text{meso}}]$) à valeurs matricielles est alors classiquement paramétré par l'hyperparamètre à valeurs vectorielles $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\mathbf{c}})$ impliquant seulement (i) un paramètre de dispersion δ contrôlant le niveau des fluctuations statistiques de $[\underline{C}_{2D}^{\text{meso}}]$ (resp. de $[\underline{S}_{2D}^{\text{meso}}]$) autour de sa valeur moyenne $[\underline{C}_{2D}^{\text{meso}}]$ (resp. $[\underline{S}_{2D}^{\text{meso}}]$), (ii) une longueur de corrélation spatiale ℓ caractérisant la structure de corrélation spatiale du germe stochastique (gaussien) W du champ aléatoire (non-gaussien) $[\underline{C}_{2D}^{\text{meso}}]$ (resp. $[\underline{S}_{2D}^{\text{meso}}]$), qui est supposée être la même dans chaque direction spatiale (i.e. $\ell = \ell_1 = \ell_2$) pour rester cohérent avec le modèle effectif isotrope à l'échelle macroscopique et avoir un paramétrage minimal du modèle stochastique *prior*, et (iii) un hyperparamètre à valeurs vectorielles $\underline{\mathbf{c}} = (\underline{\kappa}, \underline{\mu})$ regroupant le module d'élasticité isostatique moyen $\underline{\kappa}$ et le module de cisaillement moyen $\underline{\mu}$ à l'échelle mésoscopique. En particulier, nous avons choisi la valeur expérimentale $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = (\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}}, \ell_{\text{exp}}^{\text{meso}}, \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}}, \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}})$, avec $\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.40$, $\ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 125 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$, correspondant à $\underline{E}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 9.900 \text{ GPa}$ et $\underline{\nu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.380$.

En outre, en pratique on dispose généralement d'informations expérimentales permettant de restreindre la zone d'exploration de l'hyperparamètre \mathbf{b} et de rechercher sa valeur optimale dans un sous-ensemble beaucoup plus petit et plus pertinent que tout l'ensemble admissible $\mathcal{B}^{\text{meso}}$. Cette étape préliminaire est nécessaire pour que le problème d'optimisation multi-objectif puisse être résolu avec un coût numérique raisonnable sans dégrader la précision des résultats de l'identification. De ce fait, on considère dans la suite un ensemble admissible réduit

$\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}} \subset \mathcal{B}^{\text{meso}}$ pour l'hyperparamètre à valeurs vectorielles $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\kappa}, \underline{\mu})$ tel que $\delta \in [0.25, 0.50]$, $\ell \in [20, 250] \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} \in [8.5, 17] \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} \in [2.15, 4.50] \text{ GPa}$, à la place de l'ensemble admissible complet $\mathcal{B}^{\text{meso}} =]0, \delta_{\text{sup}}[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ avec $\delta_{\text{sup}} = \sqrt{(n+1)/(n+5)} = \sqrt{7/11} \approx 0.7977 < 1$ (avec $n = 6$ en élasticité linéaire). Cet ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}}$ est ensuite discrétisé en $n_V = 10$ points équidistants dans chaque dimension sur lesquels nous évaluerons et comparerons les valeurs des trois indicateurs numériques $\mathcal{J}_{\delta}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_{\ell}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ définis dans la section 4 du chapitre 2.

La méthode des éléments finis est utilisée pour la discrétisation spatiale et la résolution numérique des problèmes aux limites elliptiques déterministe et stochastique définis respectivement par (2.1) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} et (2.3) sur chacun des $Q = 16$ sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$. Comme le domaine macroscopique Ω^{macro} et les sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$ sont des domaines carrés (donc de taille identique dans chacune des deux directions spatiales), on considère pour chacun d'entre eux une discrétisation spatiale avec un maillage régulier constitué par des éléments quadrangulaires (ou quadrangles) à 4 nœuds. Le solveur stochastique utilisé pour la résolution du problème aux limites stochastique (2.3) est basé sur la méthode de simulation numérique de MC.

3.2 Études de convergence

3.2.1 Convergence de l'approximation spectrale du germe stochastique gaussien en fonction de l'ordre d'approximation

Dans cette section, nous étudions la convergence vis-à-vis de l'ordre γ du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} . Dans la section 1.3, nous avons vu que l'ordre d'approximation γ est proportionnel au rapport entre la taille du domaine et la longueur de corrélation spatiale, c'est-à-dire pour un domaine de taille donnée, plus la longueur de corrélation spatiale ℓ est petite, plus l'ordre d'approximation γ doit être élevé pour éviter la présence de périodicité dans la simulation numérique du champ aléatoire. De ce fait, en conservant le même ordre d'approximation γ pour toutes les longueurs de corrélation spatiale comprises dans l'intervalle $[20, 250] \mu\text{m}$, l'étude de convergence est effectuée pour la plus petite valeur de longueur de corrélation spatiale, soit $\ell = 20 \mu\text{m}$. On considère un sous-domaine mésoscopique $\Omega^{\text{meso}} =]0, 10^{-3}[\times]0, 10^{-3}[$ en [m] discrétisé en utilisant un maillage éléments finis de $100 \times 100 = 10\,000$ éléments quadrangles de taille uniforme $h^{\text{meso}} = 10 \mu\text{m} = 10^{-5} \text{ m}$.

La figure 3.4 montre des réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différentes valeurs de l'ordre $\gamma \in \{10, 100, 1000\}$. Il est à noter que même si les champs semblent être périodiques pour $\gamma = 10$ (voir figure 3.4a),

sur le domaine macroscopique Ω^{macro} avec une résolution mésoscopique, il est nécessaire d'effectuer la même étude de convergence sur l'ordre γ du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique $\Omega^{\text{macro}} =]0, 10^{-2}[\times]0, 10^{-2}[$ en [m] discrétisé en utilisant un maillage éléments finis de $1\,000 \times 1\,000 = 1\,000\,000$ éléments quadrangles de taille uniforme $h^{\text{meso}} = 10\ \mu\text{m} = 10^{-5}$ m (identique à celle du maillage utilisé pour la discrétisation d'un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso}).

La figure 3.5 montre des réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} pour différentes valeurs de l'ordre $\gamma \in \{50, 500, 5\,000\}$. Une fois de plus, il est à noter que même si les champs semblent être périodiques pour $\gamma = 50$ (voir figure 3.5a), numériquement les valeurs sont différentes et l'écart relatif n'est pas de l'ordre du zéro machine, ce qui serait le cas pour la représentation spectrale initiale (3.2) avec un ordre d'approximation équivalent (voir section 1.3). Ainsi, on peut conclure des résultats présentés sur ces figures, qu'il convient de prendre un ordre d'approximation $\gamma \geq 500$ pour avoir une bonne représentation spectrale W^γ du champ aléatoire gaussien normalisé W avec une longueur de corrélation spatiale $\ell = 20\ \mu\text{m}$ dans le domaine macroscopique $\Omega^{\text{macro}} =]0, 10^{-2}[\times]0, 10^{-2}[$ en [m]. Dans la suite, nous retenons la valeur $\gamma = 500$ pour la génération des germes stochastiques (gaussiens) du champ d'élasticité aléatoire (non-gaussien) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} .

3.2.2 Convergence en maillage pour la réponse déterministe

Dans cette section, nous étudions la convergence du maillage éléments finis utilisé pour la discrétisation spatiale et la résolution numérique du problème aux limites elliptique déterministe défini par (2.1) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} . Rappelons que la méthode des éléments finis fournit une approximation de la solution exacte d'un problème aux limites gouverné par une équation aux dérivées partielles, et contrôler la convergence de la solution approchée et l'erreur commise est primordial pour trouver un bon compromis entre précision et coût de calcul. Rappelons également que comme le domaine Ω^{macro} est un carré de taille identique dans les deux directions, on considère une discrétisation spatiale avec un maillage régulier constitué par des éléments quadrangles à 4 nœuds. On note n_e le nombre d'éléments du maillage, $[K]$ la matrice de rigidité déterministe construite à partir de la matrice d'élasticité déterministe $[C_{2D}^{\text{macro}}(\mathbf{a})]$, \mathbf{u} le vecteur solution résultant de la discrétisation spatiale du champ de déplacement déterministe $\mathbf{u}^{\text{macro}}$ sur Ω^{macro} . La convergence de la réponse déterministe vis-à-vis du nombre d'éléments n_e du maillage éléments finis peut être examinée à l'aide de la fonction conv^{det} définissant l'énergie de déformation totale du système dans Ω^{macro} en fonction du nombre d'éléments n_e , telle que

$$\text{conv}^{\text{det}} : n_e \mapsto \text{conv}^{\text{det}}(n_e) = \frac{1}{2} \mathbf{u}(n_e)^T [K(n_e)] \mathbf{u}(n_e). \quad (3.11)$$

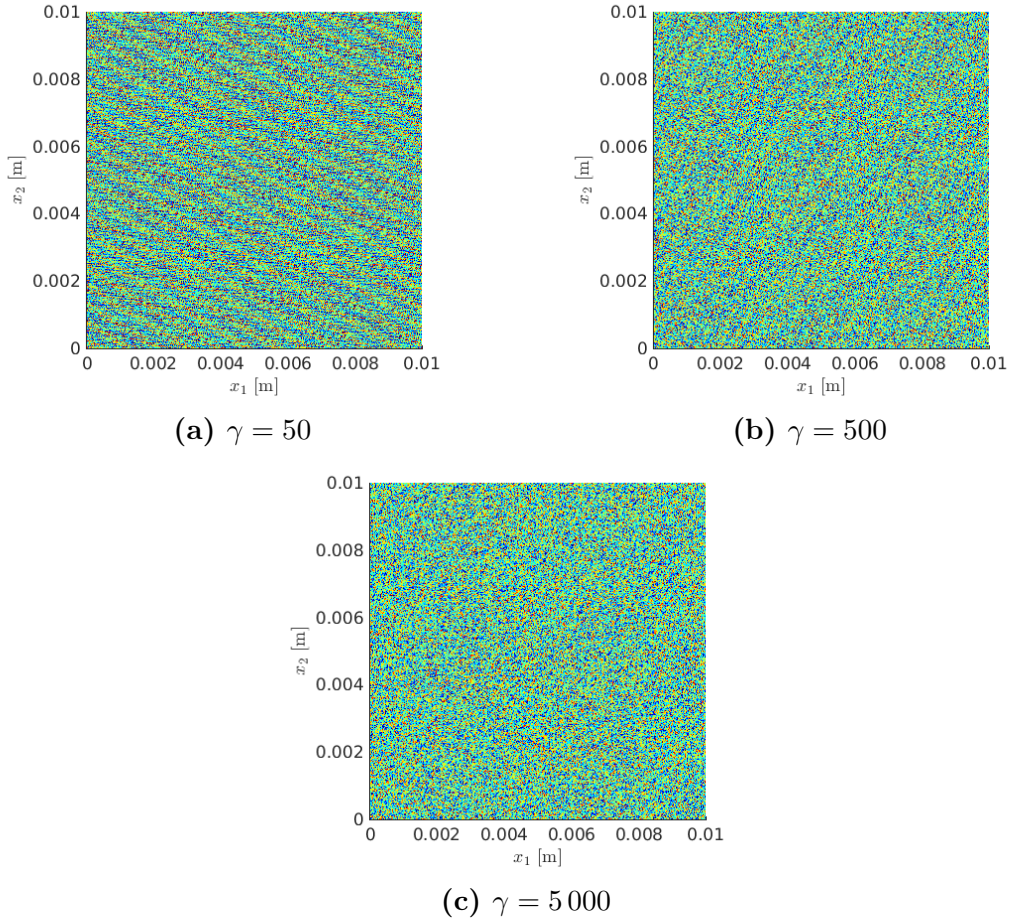


FIGURE 3.5 – Réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} pour différents ordres γ

La figure 3.6 montre que la convergence du maillage du modèle éléments finis pour la réponse déterministe macroscopique est atteinte pour $n_e \geq 500$. Dans la suite, on prend un nombre d'éléments $n_e = 625$, c'est-à-dire un maillage régulier de $25 \times 25 = 625$ éléments quadrangles de taille uniforme $h^{\text{macro}} = 0.4 \text{ mm} = 4 \times 10^{-4} \text{ m}$.

3.2.3 Convergence en maillage pour la réponse stochastique

Dans cette section, nous étudions la convergence du maillage éléments finis utilisé pour la discrétisation spatiale et la résolution numérique du problème aux limites elliptique stochastique défini par (2.3) sur chacun des $Q = 16$ sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$ contenus dans Ω^{macro} avec un maillage régulier constitué par des éléments quadrangles à 4 nœuds. Pour ce faire, on propose d'étudier la convergence de la matrice de souplesse effective aléatoire $[\mathbf{S}_{2D}^{\text{eff}}(\mathbf{b})]$ homogénéisée avec

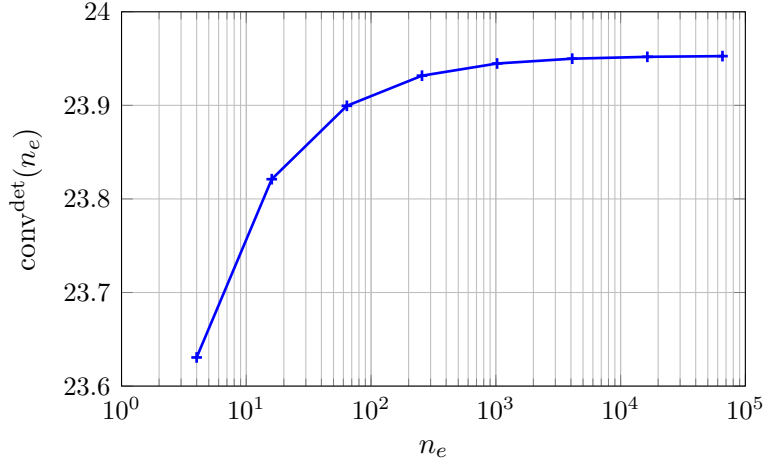


FIGURE 3.6 – Évolution de la fonction $\text{conv}^{\text{det}}(n_e)$ en fonction du nombre d’éléments n_e , montrant la convergence en maillage pour la réponse déterministe macroscopique

la méthode d’homogénéisation numérique stochastique en contraintes homogènes (présentée à la section 2.3 du chapitre 1) sur un domaine Ω^{VER} décrit par le champ de souplesse aléatoire $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{meso}}]$ indexé sur Ω^{VER} en élasticité 2D sous l’hypothèse des contraintes planes avec la matrice de souplesse moyenne $[\underline{\mathbf{S}}_{2\text{D}}^{\text{meso}}]$. Il convient tout d’abord de s’assurer de la convergence statistique de la matrice de souplesse effective aléatoire $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{eff}}(\mathbf{b})]$ en utilisant par exemple la méthode de simulation numérique de MC, de sorte que les fluctuations statistiques de $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{eff}}(\mathbf{b})]$ autour de sa valeur moyenne statistique puissent être considérées comme négligeables. On peut ensuite étudier la convergence de la valeur moyenne statistique de $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{eff}}(\mathbf{b})]$ en fonction de la taille du domaine Ω^{VER} . Comme la structure du champ continu aléatoire $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$ est contrôlée spatialement par sa longueur de corrélation spatiale ℓ et discrétisée aux points d’intégration, la convergence de la réponse dépend directement du nombre n_G de points d’intégration de Gauss-Legendre par longueur de corrélation spatiale dans chaque direction. Par conséquent, on introduit la fonction conv^{sto} suivante pour l’étude de la convergence en maillage pour la réponse stochastique

$$\text{conv}^{\text{sto}}: (n_G, N_s) \mapsto \text{conv}^{\text{sto}}(n_G, N_s) = \left(\frac{1}{N_s} \sum_{r=1}^{N_s} \|[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{eff}}(n_G; \theta_r)]\|_F^2 \right)^{1/2} / \|[\underline{\mathbf{S}}_{2\text{D}}^{\text{meso}}]\|_F, \quad (3.12)$$

où $\{[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{eff}}(n_G; \theta_r)]\}_{1 \leq r \leq N_s}$ est un ensemble de N_s réalisations statistiquement indépendantes du champ aléatoire à valeurs matricielles $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$. On choisit de se placer dans la configuration la plus défavorable pour les valeurs des (hyper)paramètres qui contrôlent les fluctuations statistiques et la discrétisation spatiale pour que cette étude de convergence statistique soit valable pour toutes les autres valeurs dans l’ensemble admissible réduit, c’est-à-dire le paramètre de dispersion le plus élevé $\delta = 0.5$, la longueur de corrélation spatiale la plus petite $\ell = 20 \mu\text{m}$ (correspondant

à la variation spatiale la plus rapide) et un maillage grossier avec un nombre de points d'intégration par longueur de corrélation spatiale $n_G = 0.5$. Par ailleurs, on considère un domaine carré $\Omega^{\text{VER}} =]0, B^{\text{VER}}[\times]0, B^{\text{VER}}[$ suffisamment grand, de taille $B^{\text{VER}} = 20 \times \ell = 400 \mu\text{m} = 4 \times 10^{-4} \text{ m}$, afin de limiter le niveau des fluctuations statistiques entre les différentes réalisations $\{\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{eff}}(n_G; \theta_r)\}_{1 \leq r \leq N_s}$ dans le but d'accélérer la vitesse de convergence statistique.

La figure 3.7 montre l'évolution de la fonction $N_s \mapsto \text{conv}^{\text{sto}}(n_G = 0.5, N_s)$ pour N_s variant de 1 à 10^3 . On constate que la convergence statistique pour la réponse stochastique mésoscopique est atteinte pour un nombre de réalisations statistiquement indépendantes $N_s \geq 500$.

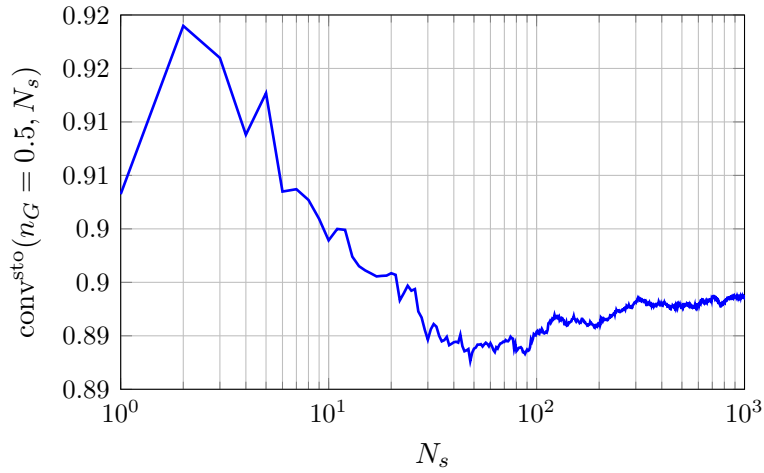


FIGURE 3.7 – Évolution de la fonction $\text{conv}^{\text{sto}}(n_G = 0.5, N_s)$ en fonction du nombre N_s de réalisations statistiquement indépendantes, montrant la convergence statistique pour la réponse stochastique mésoscopique

Ensuite, en conservant la valeur $N_s = 500$ avec $\delta = 0.5$, $\ell = 20 \mu\text{m}$ et $B^{\text{VER}} = 4 \times 10^{-4} \text{ m}$, la figure 3.8 montre l'évolution de la fonction $n_G \mapsto \text{conv}^{\text{sto}}(n_G, N_s = 500)$ pour n_G variant de 0.5 à 10. On constate que la convergence en maillage du modèle éléments finis pour la réponse stochastique mésoscopique est atteinte pour $n_G \geq 4$, i.e. au moins quatre points d'intégration de Gauss-Legendre par longueur de corrélation spatiale, ce qui revient à prendre deux éléments quadrangles (avec deux points d'intégration par direction dans chaque élément) par longueur de corrélation spatiale, soit une taille d'élément $h^{\text{meso}} \geq \ell / (n_G / 2) = (20 \mu\text{m}) / 2 = 10 \mu\text{m} = 10^{-5} \text{ m}$. Dans la suite, on considère donc un maillage régulier de $100 \times 100 = 10\,000$ éléments quadrangles de taille uniforme $h^{\text{meso}} = 10 \mu\text{m} = 10^{-5} \text{ m}$ pour chacun des $Q = 16$ différents sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$.

Il convient de noter que, bien que la finesse du maillage convergé en terme de réponse stochastique sur un sous-domaine mésoscopique donné Ω^{meso} soit fonction de la longueur de corrélation spatiale ℓ du champ aléatoire $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$ considéré, dans le contexte de l'identification inverse expérimentale statistique on doit conserver le

même maillage pour toutes les longueurs de corrélation spatiale, car en réalité ce dernier est imposé par les mesures expérimentales de champs.

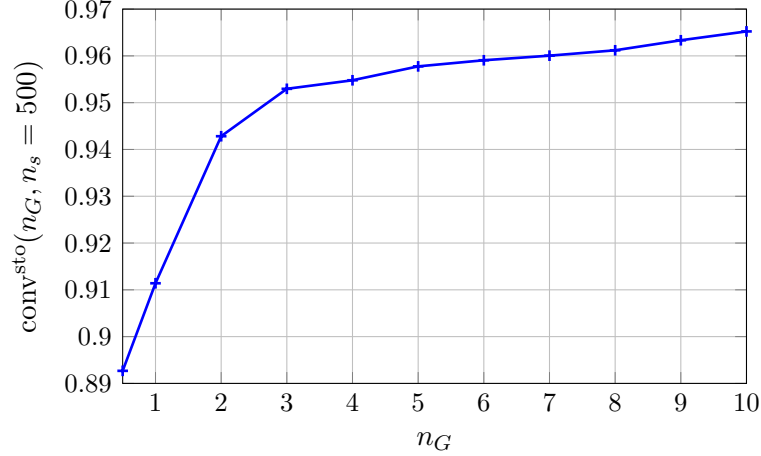


FIGURE 3.8 – Évolution de la fonction $\text{conv}^{\text{sto}}(n_G, N_s = 500)$ en fonction du nombre n_G de points d'intégration par longueur de corrélation spatiale, montrant la convergence en maillage pour la réponse stochastique mésoscopique

3.2.4 Convergence vis-à-vis de la taille du VER

Dans la section précédente 3.2.3, nous avons considéré un domaine carré $\Omega^{\text{VER}} =]0, B^{\text{VER}}[\times]0, B^{\text{VER}}[$ avec une taille B^{VER} suffisamment grande pour pouvoir procéder à l'homogénéisation numérique stochastique. Dans cette section, nous étudions la convergence vis-à-vis de la taille B^{VER} du domaine Ω^{VER} non seulement pour valider les résultats obtenus précédemment mais aussi pour la construction de l'indicateur numérique macroscopique-mésoscopique (multi-échelle) $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ (voir section 4.3 du chapitre 2). Pour ce faire, on considère une nouvelle fois la fonction de convergence conv^{sto} définie par (3.12), mais qui prend cette fois B^{VER} comme argument avec $N_s = 500$, $\delta = 0.5$, $\ell = 20 \mu\text{m}$ et $n_G = 4$:

$$\text{conv}^{\text{sto}} : B^{\text{VER}} \mapsto \text{conv}^{\text{sto}}(B^{\text{VER}}) = \left(\frac{1}{N_s} \sum_{r=1}^{N_s} \|\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{eff}}(B^{\text{VER}}; \theta_r)\|_F^2 \right)^{1/2} / \|\underline{\mathcal{S}}_{2\text{D}}^{\text{meso}}\|. \quad (3.13)$$

La figure 3.7 montre l'évolution de la fonction $B^{\text{VER}} \mapsto \text{conv}^{\text{sto}}(B^{\text{VER}})$ pour B^{VER} variant de 2×10^{-5} à 8×10^4 m. On constate que la convergence est atteinte pour une taille de VER $B^{\text{VER}} \geq 4 \times 10^{-4}$ m = 0.4 mm, ce qui permet de valider la taille $B^{\text{VER}} = 20 \times \ell$ choisie dans la section précédente 3.2.3. Pour la construction de l'indicateur numérique macroscopique-mésoscopique (multi-échelle) $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$, on prendra une taille de VER $B^{\text{VER}} = 20 \times \ell$ qui est fonction de la longueur

de corrélation spatiale ℓ des germes stochastiques du champ aléatoire à valeurs matricielles $[\mathbf{S}_{2D}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$ considéré.

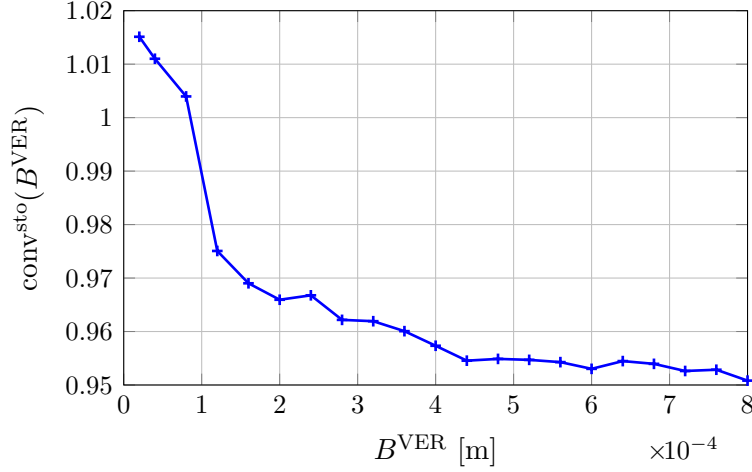


FIGURE 3.9 – Évolution de la fonction $\text{conv}^{\text{sto}}(B^{\text{VER}})$ en fonction de la taille B^{VER} du VER Ω^{VER} , montrant la convergence vis-à-vis de la taille du VER

3.2.5 Convergence statistique des indicateurs numériques

Dans cette section, nous étudions la convergence statistique des espérances mathématiques intervenant dans les indicateurs numériques mésoscopiques $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, respectivement définis par (2.4) et (2.14), ainsi que dans l'indicateur numérique multi-échelle $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$, défini par (2.15), par la méthode de simulation numérique de MC en introduisant les estimateurs statistiques suivants :

$$\hat{\mathcal{J}}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \left(\frac{1}{N_s} \sum_{r=1}^{N_s} D^\mathcal{E}(\mathbf{b}; \theta_r) - \delta_{\text{exp}}^\mathcal{E} \right)^2 / (\delta_{\text{exp}}^\mathcal{E})^2, \quad (3.14a)$$

$$\hat{\mathcal{J}}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b}) = \sum_{\alpha=1}^d \left(\frac{1}{N_s} \sum_{r=1}^{N_s} L_\alpha^\mathcal{E}(\mathbf{b}; \theta_r) - \ell_{\text{exp},\alpha}^\mathcal{E} \right)^2 / (\ell_{\text{exp},\alpha}^\mathcal{E})^2, \quad (3.14b)$$

$$\hat{\mathcal{J}}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b}) = \left\| \frac{1}{N_s} \sum_{r=1}^{N_s} \mathbf{C}^{\text{eff}}(\mathbf{b}; \theta_r) - \mathbf{C}^{\text{macro}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}) \right\|_F^2 / \|\mathbf{C}^{\text{macro}}(\mathbf{a}^{\text{macro}})\|_F^2. \quad (3.14c)$$

On se place dans la configuration la plus défavorable pour cette étude de convergence statistique des indicateurs numériques, c'est-à-dire en prenant $\delta = 0.5$, $\ell = 20 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$, $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$, et $\mathbf{a}^{\text{macro}} =$

$\mathbf{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}} = (\kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}}, \mu_{\text{exp}}^{\text{macro}}) = (13.901, 3.685)$ en [GPa], en utilisant le maillage régulier de $100 \times 100 = 10\,000$ éléments retenu lors de l'étude de convergence en maillage pour la réponse stochastique (voir section 3.2.3) pour chacun des $Q = 16$ sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$, et en prenant une taille $B^{\text{VER}} = 20 \times \ell = 400 \mu\text{m} = 4 \times 10^{-4} \text{ m}$ pour le domaine Ω^{VER} discrétisé en utilisant un maillage de $40 \times 40 = 1\,600$ éléments quadrangles (avec $n_G = 4$ points d'intégration par longueur de corrélation spatiale). Les figures 3.10, 3.11 et 3.12 montrent que les convergences statistiques des trois indicateurs numériques $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ définis respectivement par (2.4) (2.14) et (2.15), et évalués à partir des estimateurs statistiques $\hat{\mathcal{J}}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\hat{\mathcal{J}}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\hat{\mathcal{J}}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ définis respectivement par (3.14a), (3.14b) et (3.14c), sont atteintes sur l'ensemble des 16 sous-domaines mésoscopiques pour un nombre $N_s \geq 500$ de réalisations statistiquement indépendantes (obtenues par simulation numérique de MC). Par la suite, nous retenons la valeur $N_s = 500$.

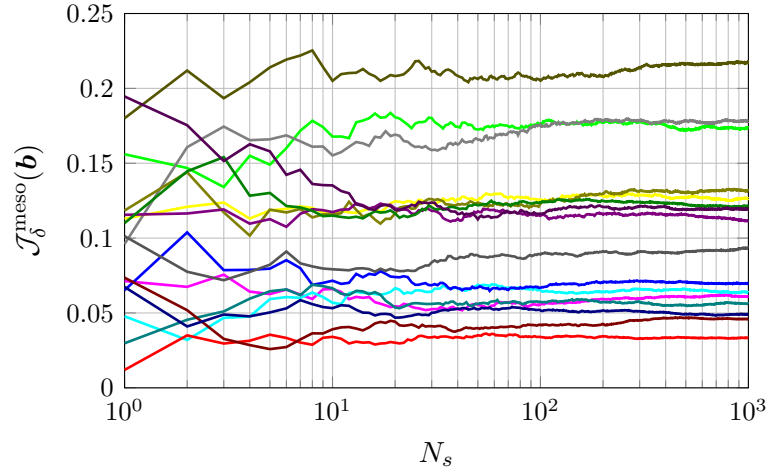


FIGURE 3.10 – Convergence statistique de $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ sur $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$ avec $\delta = 0.5$, $\ell = 20 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$

3.3 Analyse de sensibilité des indicateurs numériques

Dans cette section, nous présentons une analyse de la sensibilité de l'indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ défini par (2.4) par rapport au paramètre de dispersion δ , de l'indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ défini par (2.14) par rapport à la longueur de corrélation spatiale ℓ , et de l'indicateur numérique multi-échelle $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ défini par (2.15) par rapport au vecteur $\underline{\mathbf{c}} = (\underline{\kappa}, \underline{\mu})$ regroupant le module d'élasticité isostatique moyen mésoscopique $\underline{\kappa}$ et le module de cisaillement moyen mésoscopique $\underline{\mu}$. En faisant varier tour à tour les valeurs de chacun des hyperparamètres dans l'ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}} = [0.25, 0.50] \times$

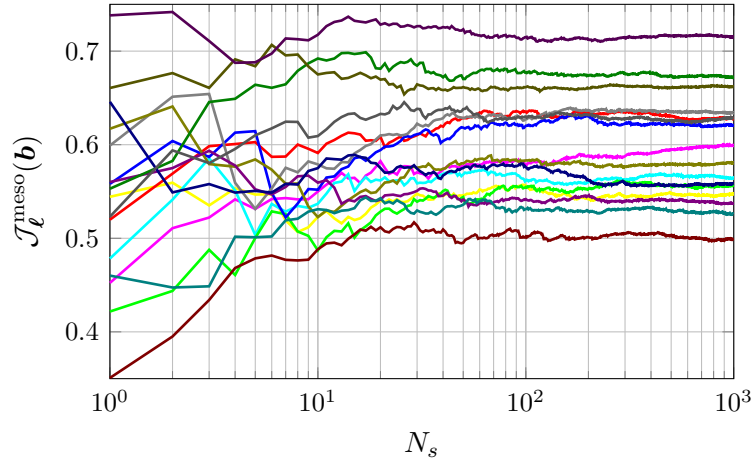


FIGURE 3.11 – Convergence statistique de $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ sur $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$ avec $\delta = 0.5$, $\ell = 20 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$

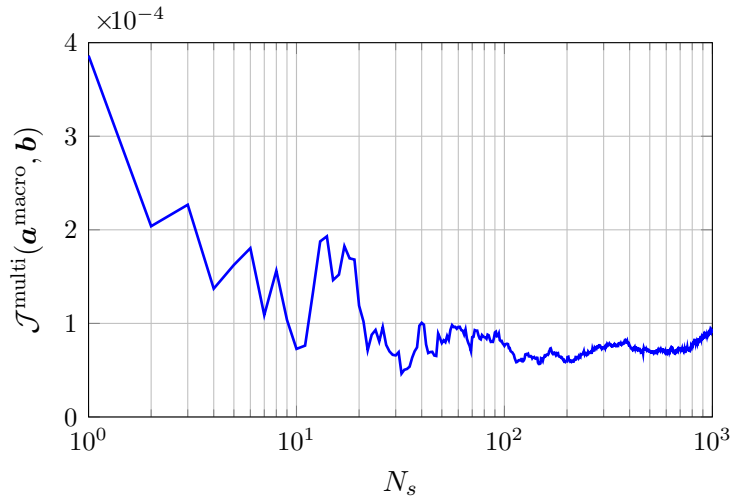


FIGURE 3.12 – Convergence statistique de $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ sur Ω^{VER} avec $\kappa^{\text{macro}} = \kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 13.901 \text{ GPa}$, $\mu^{\text{macro}} = \mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 3.685 \text{ GPa}$, $\delta = 0.5$, $\ell = 20 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$

[20, 250] $\mu\text{m} \times [8.5, 17] \text{ GPa} \times [2.15, 4.50] \text{ GPa}$ et en fixant les autres hyperparamètres, on peut montrer que chaque indicateur numérique est une fonction suffisamment sensible à la variation d'un hyperparamètre à identifier avec l'existence d'une valeur optimale globale, et que le problème d'optimisation multi-objectif est bien posé. On rappelle que les mesures « expérimentales » utilisées, c'est-à-dire le champ des déformations aléatoire $\boldsymbol{\mathcal{E}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ à l'échelle mésoscopique et la matrice d'élasticité déterministe $C^{\text{macro}}(\mathbf{a}^{\text{macro}})$ à l'échelle macroscopique, ont été simulées en prenant les valeurs expérimentales $\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.40$, $\ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 125 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$, $\underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$, $\kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 13.901 \text{ GPa}$ et $\mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 3.685 \text{ GPa}$. Le nombre de simulations

numériques réalisées pour l'estimation statistique des espérances mathématiques des trois indicateurs numériques est fixé à $N_s = 500$.

La figure 3.13 montre la sensibilité de l'indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ par rapport au paramètre de dispersion δ avec $\ell = \ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 125 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$ pour chacun des $Q = 16$ sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$. On constate que la fonction $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ est suffisamment sensible à la variation de δ , et la convexité de ces 16 courbes avec des valeurs minimales autour de la valeur expérimentale $\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.40$ assure que le problème d'optimisation mono-objectif (2.19b) formulé avec $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ soit bien posé et que les valeurs optimales identifiées correspondent à des valeurs approchées de la valeur choisie pour construire la base de données « expérimentales » simulées. On constate aussi que les *optima* calculés par minimisation de cet indicateur numérique sont différents pour chacune des mesures expérimentales utilisées. Cela justifie ainsi la stratégie adoptée de modéliser l'hyperparamètre δ par une variable aléatoire D , et de modéliser les valeurs identifiées pour chaque mesure expérimentale comme les $Q = 16$ réalisations statistiquement indépendantes $\delta_1^{\text{meso}}, \dots, \delta_Q^{\text{meso}}$ de D .

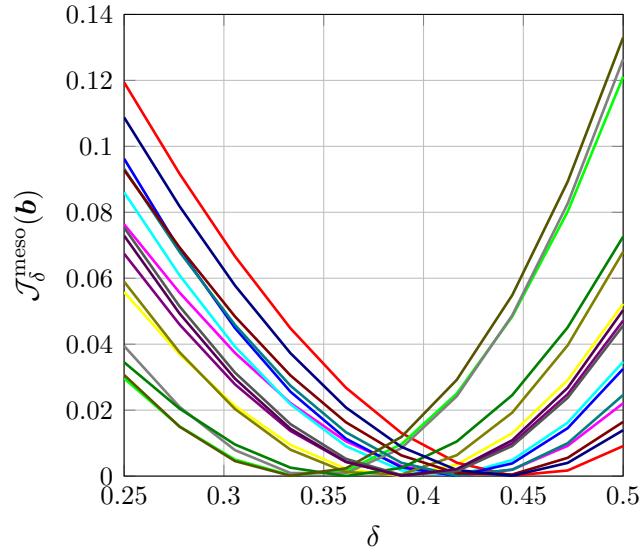


FIGURE 3.13 – Analyse de la sensibilité de $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ par rapport à δ sur $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$ avec $\ell = \ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 125 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$

La figure 3.14 montre la sensibilité de l'indicateur numérique mésoscopique $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ par rapport à la longueur de corrélation spatiale ℓ avec $\delta = \delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.40$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$ pour chacun des $Q = 16$ sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$. On constate que la fonction $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ est suffisamment sensible à la variation de ℓ , et la convexité de ces 16 courbes avec des valeurs minimales autour de la valeur expérimentale $\ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 125 \mu\text{m}$ assure que le problème d'optimisation mono-objectif (2.19a) formulé avec $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ soit bien posé

et que les valeurs optimales identifiées correspondent à des valeurs approchées de la valeur choisie pour construire la base de données « expérimentales » simulées. On constate aussi que les *optima* calculés par minimisation de cet indicateur numérique sont différents pour chacune des mesures expérimentales utilisées. Cela justifie ainsi la stratégie adoptée de modéliser l'hyperparamètre ℓ par une variable aléatoire L , et de modéliser les valeurs identifiées pour chaque mesure expérimentale comme les $Q = 16$ réalisations statistiquement indépendantes $\ell_1^{\text{meso}}, \dots, \ell_Q^{\text{meso}}$ de L .

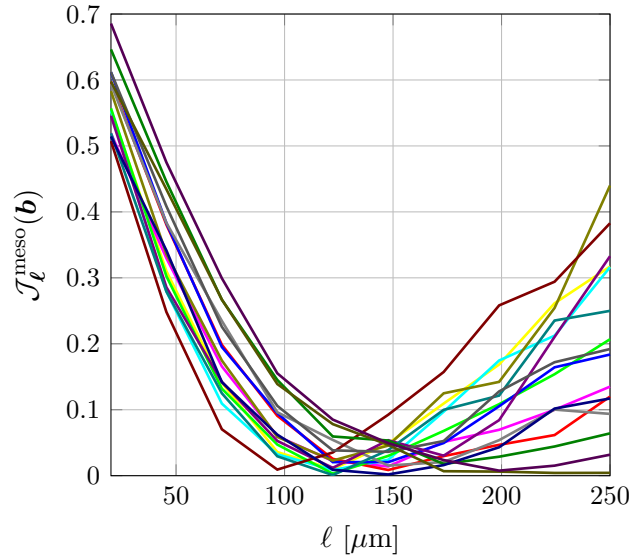


FIGURE 3.14 – Analyse de la sensibilité de $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ par rapport à ℓ sur $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$ avec $\delta = \delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.40$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75$ GPa et $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587$ GPa

Les figures 3.15 et 3.16 montrent la sensibilité de l'indicateur numérique macroscopique-mésoscopique (multi-échelle) $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ par rapport au module d'élasticité isostatique moyen mésoscopique $\underline{\kappa}$ et au module de cisailment moyen mésoscopique $\underline{\mu}$, respectivement, avec $\kappa^{\text{macro}} = \kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 13.901$ GPa, $\mu^{\text{macro}} = \mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 3.685$ GPa, $\delta = \delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.40$ et $\ell = \ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 125$ μm . On constate que la fonction $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ est suffisamment sensible à la variation de $\underline{\kappa}$ et $\underline{\mu}$, et la convexité de ces deux courbes avec des valeurs minimales autour des valeurs expérimentales $\underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75$ GPa et $\underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587$ GPa, respectivement, assure que le problème d'optimisation mono-objectif (2.19c) formulé avec $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ soit bien posé et que les valeurs optimales identifiées correspondent à des valeurs approchées des valeurs choisies pour construire la base de données « expérimentales » simulées.

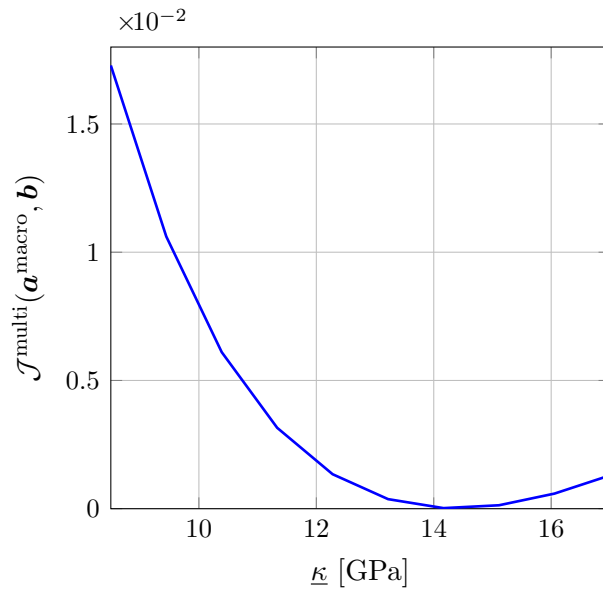


FIGURE 3.15 – Analyse de la sensibilité de $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ par rapport à $\underline{\kappa}$ avec $\delta = \delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.40$, $\ell = \ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 125 \mu\text{m}$, $\underline{\mu} = \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 3.587 \text{ GPa}$, $\kappa^{\text{macro}} = \kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 13.901 \text{ GPa}$ et $\mu^{\text{macro}} = \mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 3.685 \text{ GPa}$

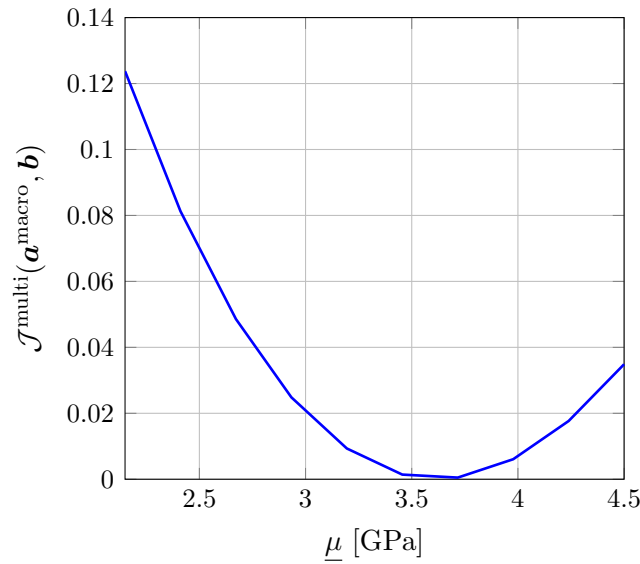


FIGURE 3.16 – Analyse de la sensibilité de $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ par rapport à $\underline{\mu}$ avec $\delta = \delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.40$, $\ell = \ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 125 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} = \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 13.75 \text{ GPa}$, $\kappa^{\text{macro}} = \kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 13.901 \text{ GPa}$ et $\mu^{\text{macro}} = \mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 3.685 \text{ GPa}$

3.4 Résolution du problème d'optimisation mono-objectif à l'échelle macroscopique

On rappelle que le problème inverse statistique multi-échelle pour l'identification expérimentale de la valeur optimale $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ du paramètre \mathbf{a} dans son ensemble admissible $\mathcal{A}^{\text{macro}}$ et de la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} du paramètre \mathbf{b} dans son ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}}$ a été formulé en deux problèmes d'optimisation qui doivent être résolus successivement (voir section 5.1 du chapitre 2). Dans cette section, nous présentons les résultats du premier problème d'optimisation mono-objectif (2.17) à l'échelle macroscopique qui consiste à minimiser l'indicateur numérique macroscopique $\mathcal{J}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ construit dans le domaine macroscopique Ω^{macro} afin d'identifier la valeur optimale $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ de \mathbf{a} à l'échelle macroscopique. Le domaine macroscopique $\Omega^{\text{macro}} =]0, 10^{-2}[\times]0, 10^{-2}[$ en [m] est discrétisé avec un maillage de $25 \times 25 = 625$ éléments quadrangles de taille uniforme $h^{\text{macro}} = 0.4 \text{ mm} = 4 \times 10^{-4} \text{ m}$. Le problème d'optimisation mono-objectif (2.17) à l'échelle macroscopique a été résolu en utilisant l'algorithme du simplex de Nelder-Mead.

Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau 3.2 et montrent que l'erreur relative entre la valeur optimale identifiée $\mathbf{a}^{\text{macro}} = (13.901, 3.685)$ en [GPa] et la valeur expérimentale de référence $\mathbf{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}} = (14.328, 3.670)$ en [GPa] utilisée pour construire la base de données « expérimentales » simulées reste faible (inférieure à 3% et 0.5% pour κ^{macro} et μ^{macro} , respectivement), ce qui permet de valider dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D contraintes planes la méthodologie d'identification proposée pour la résolution du problème d'optimisation mono-objectif (2.17) à l'échelle macroscopique.

TABLEAU 3.2 – Comparaison entre la valeur optimale identifiée $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ et la valeur expérimentale de référence $\mathbf{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$

	κ [GPa]	μ [GPa]
$\mathbf{a}^{\text{macro}}$	13.901	3.685
$\mathbf{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$	14.328	3.670
Erreur relative [%]	2.980	0.4009

3.5 Résolution du problème d'optimisation multi-objectif à l'échelle mésoscopique

Dans cette section, nous présentons les résultats du second problème d'optimisation multi-objectif (2.18) à l'échelle mésoscopique qui consiste à minimiser simultanément les trois indicateurs numériques $\mathcal{J}_{\delta}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_{\ell}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ construits dans chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$ en

utilisant le paramètre optimal $\mathbf{a}^{\text{macro}} = (13.901, 3.685)$ en [GPa] précédemment identifié à l'échelle macroscopique en section 3.4 afin de pouvoir ensuite identifier la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} de \mathbf{b} à l'échelle mésoscopique. On rappelle que chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$ est discrétisé avec un maillage de $100 \times 100 = 10\,000$ éléments quadrangles de taille uniforme $h^{\text{meso}} = \ell / (n_G / 2) = (20 \mu\text{m}) / 2 = 10 \mu\text{m} = 10^{-5} \text{ m}$ (avec $n_G = 4$ points d'intégration par longueur de corrélation spatiale). Comme déjà expliqué dans la section 3.2.4, la taille B^{VER} du VER Ω^{VER} dépend de la longueur de corrélation spatiale ℓ des germes stochastiques du champ aléatoire $[\mathcal{S}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$ et est choisie telle que $B^{\text{VER}} = 20 \times \ell = 20 \times 20 \mu\text{m} = 400 \mu\text{m} = 4 \times 10^{-4} \text{ m}$. Le problème d'optimisation multi-objectif (2.18) a été résolu avec l'algorithme itératif de point fixe d'une part, avec l'algorithme génétique d'autre part et enfin avec l'apprentissage automatique d'un réseau de neurones artificiels à des fins de comparaison. Afin d'analyser l'efficacité numérique de ces trois approches, au lieu d'évaluer le temps de calcul qui dépend fortement de la machine de calcul utilisée, on choisit dans ce travail de comparer le nombre d'évaluations de la solution aléatoire du problème aux limites stochastique à l'échelle mésoscopique (i.e. le nombre d'appels au modèle numérique déterministe à l'échelle mésoscopique) requis par chaque algorithme pour atteindre la convergence voulue. Il est à noter qu'en ce qui concerne les approches par l'algorithme itératif de point fixe et par l'algorithme génétique, la solution du problème d'optimisation multi-objectif (2.18) est recherchée sur une grille multidimensionnelle de $n_V \times n_V \times n_V \times n_V$ points dans l'ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}} \subset \mathbb{R}^4$. La résolution de cette grille pourrait être affinée mais cela augmenterait le coût de calcul. Une telle grille de recherche n'est pas utilisée pour l'approche par réseau de neurones artificiels. On s'attend alors à ce que l'approche par réseau de neurones artificiels soit plus précise que les deux autres approches.

Le tableau 3.3 présente les résultats obtenus en utilisant l'algorithme itératif de point fixe pour l'ensemble des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, à savoir l'ensemble des 16 valeurs identifiées $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_{16}^{\text{meso}}$ et des 16 nombres d'itérations n_1, \dots, n_{16} nécessaires pour atteindre la convergence souhaitée, avec un critère de convergence sur la norme du résidu entre deux itérations qui doit être inférieure à une tolérance fixée à 10^{-9} , ainsi que la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} calculée par la méthode MLE. On constate des variations plus importantes entre les valeurs identifiées $\ell_1^{\text{meso}}, \dots, \ell_{16}^{\text{meso}}$ et $\delta_1^{\text{meso}}, \dots, \delta_{16}^{\text{meso}}$ d'un sous-domaine à un autre, ce qui reflète le fait que les deux indicateurs numériques mésoscopiques associés $\mathcal{J}_{\delta}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}_{\ell}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ dépendent directement des mesures expérimentales de champs sur chaque sous-domaine mésoscopique. En revanche, la variabilité beaucoup plus faible entre les valeurs identifiées $\underline{\kappa}_1^{\text{meso}}, \dots, \underline{\kappa}_{16}^{\text{meso}}$ et $\underline{\mu}_1^{\text{meso}}, \dots, \underline{\mu}_{16}^{\text{meso}}$ d'un sous-domaine à un autre peut s'expliquer par le fait que l'indicateur numérique multi-échelle associé $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ ne dépend pas directement des mesures expérimentales de champs sur chaque sous-domaine mésoscopique mais est plutôt conditionné par les valeurs $\ell_1^{\text{meso}}, \dots, \ell_{16}^{\text{meso}}$ et $\delta_1^{\text{meso}}, \dots, \delta_{16}^{\text{meso}}$ identifiées sur chaque sous-domaine mésoscopique. Ainsi, les erreurs relatives calculées sur ces deux hyperparamètres sont essentielle-

ment dues à la qualité de la discrétisation de l'ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}}$. L'étude de la convergence statistique réalisée dans la section 3.2.5 nous permet de fixer le nombre de réalisations indépendantes pour l'estimation statistique des espérances mathématiques dans les indicateurs numériques $\mathcal{J}_{\delta}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_{\ell}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ à une valeur $N_s = 500$. Le nombre d'évaluations du modèle numérique stochastique requis par l'algorithme itératif de point fixe est donné par $n_{\text{tot}}^{\text{FP}} = 3n_V N_s \sum_{q=1}^{16} n_q$, où l'exposant ^{FP} fait référence à « Fixed-Point » en anglais et n_V est le nombre d'évaluations d'un indicateur numérique pour la recherche du minimum vis-à-vis de l'hyperparamètre qui lui est associé. La figure 3.17 montre les fonctions de densité de probabilité p_D , p_L , $p_{\underline{K}}$ et $p_{\underline{M}}$ définies dans la section 5.3 du chapitre 2, associées respectivement aux variables aléatoires D , L , \underline{K} et \underline{M} . On obtient finalement la valeur optimale globale $\mathbf{b}^{\text{opt}} = (0.391, 135.328, 12.273, 3.717)$ en $(-, [\mu\text{m}], [\text{GPa}], [\text{GPa}])$ avec des erreurs relatives inférieures à 3%, 9%, 11% et 4% pour δ^{opt} , ℓ^{opt} , $\underline{\kappa}^{\text{opt}}$ et $\underline{\mu}^{\text{opt}}$, respectivement, par rapport à la valeur expérimentale de référence $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = (0.40, 125, 13.75, 3.587)$ en $(-, [\mu\text{m}], [\text{GPa}], [\text{GPa}])$ utilisée pour construire la base de données « expérimentales » simulées, ce qui permet de valider dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D contraintes planes la méthodologie d'identification proposée pour la résolution du problème d'optimisation multi-objectif (2.18) à l'échelle mésoscopique.

La figure 3.18 montre l'évolution des valeurs optimales globales δ^{opt} , ℓ^{opt} , $\underline{\kappa}^{\text{opt}}$ et $\underline{\mu}^{\text{opt}}$ estimées par maximum de vraisemblance (méthode MLE) en fonction du nombre Q de sous-domaines mésoscopiques considéré, c'est-à-dire du nombre de réalisations indépendantes $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_Q^{\text{meso}}$ du vecteur aléatoire $\mathbf{B} = (D, L, \underline{K}, \underline{M})$. Bien que le nombre Q de sous-domaines considéré reste faible (inférieur ou égal à 16), on observe que chacune des valeurs optimales globales tend à converger vers une valeur objective quand le nombre Q de sous-domaines mésoscopiques augmente, ce qui démontre que le traitement (par la méthode MLE) proposé dans ce travail permet d'avoir une identification robuste de l'hyperparamètre $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\kappa}, \underline{\mu})$.

En terme d'efficacité de calcul, on peut voir dans le tableau 3.3 que les nombres d'itérations n_1, \dots, n_{16} nécessaires pour atteindre la convergence souhaitée sont relativement faibles (inférieurs ou égaux à 4) sur chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, conduisant à un nombre d'appels au modèle numérique déterministe à l'échelle mésoscopique de 855 000. Le tableau 3.4 regroupe les valeurs optimales globales \mathbf{b}^{opt} et les erreurs relatives correspondantes (par rapport à la valeur expérimentale de référence $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$) obtenues pour différentes valeurs $N_s \in \{5, 50, 500\}$ du nombre de réalisations indépendantes générées pour l'estimation statistique des espérances mathématiques dans les différents indicateurs numériques. On constate qu'une forte diminution de la valeur de N_s permet un gain considérable en temps de calcul tout en conservant des résultats d'identification des valeurs optimales globales similaires, ce qui peut être expliqué par l'utilisation de la méthode MLE qui rend la résolution du problème d'identification statistique inverse plus robuste vis-à-vis de la convergence des estimateurs statistiques utilisés dans les indicateurs numériques du problème d'optimisation multi-objectif (2.18). Néanmoins, il a été

TABLEAU 3.3 – Algorithme itératif de point fixe : comparaison entre la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} obtenue à partir des 16 valeurs identifiées $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_{16}^{\text{meso}}$ pour chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, et la valeur expérimentale de référence $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$

	δ	ℓ [μm]	$\underline{\kappa}$ [GPa]	$\underline{\mu}$ [GPa]	n_q
$\mathbf{b}_1^{\text{meso}}$	0.306	147.778	13.222	3.717	3
$\mathbf{b}_2^{\text{meso}}$	0.500	224.444	11.333	3.717	4
$\mathbf{b}_3^{\text{meso}}$	0.417	122.222	12.278	3.717	3
$\mathbf{b}_4^{\text{meso}}$	0.417	122.222	12.278	3.717	3
$\mathbf{b}_5^{\text{meso}}$	0.444	147.778	12.278	3.717	3
$\mathbf{b}_6^{\text{meso}}$	0.417	122.222	12.278	3.717	4
$\mathbf{b}_7^{\text{meso}}$	0.361	147.778	12.278	3.717	4
$\mathbf{b}_8^{\text{meso}}$	0.361	147.778	12.278	3.717	4
$\mathbf{b}_9^{\text{meso}}$	0.444	147.778	12.278	3.717	3
$\mathbf{b}_{10}^{\text{meso}}$	0.333	147.778	12.278	3.717	4
$\mathbf{b}_{11}^{\text{meso}}$	0.333	122.222	12.278	3.717	4
$\mathbf{b}_{12}^{\text{meso}}$	0.389	96.667	12.278	3.717	3
$\mathbf{b}_{13}^{\text{meso}}$	0.389	147.778	12.278	3.717	4
$\mathbf{b}_{14}^{\text{meso}}$	0.389	122.222	12.278	3.717	3
$\mathbf{b}_{15}^{\text{meso}}$	0.389	147.778	12.278	3.717	4
$\mathbf{b}_{16}^{\text{meso}}$	0.361	122.222	12.278	3.717	4
\mathbf{b}^{opt}	0.391	135.328	12.273	3.717	-
$\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	0.400	125.000	13.750	3.587	-
Erreur relative [%]	2.344	8.262	10.740	3.611	-
$n_{\text{tot}}^{\text{FP}}$	855 000				

observé que l'algorithme itératif de point fixe pouvait ne pas converger, mais osciller entre plusieurs valeurs, si la valeur de N_s est trop faible. Cela dépend bien entendu des réalisations aléatoires utilisées dans les générateurs de nombres pseudo-aléatoires des langages de calcul (fonctions *rand* et *randn* dans Matlab). Nous l'avons observé pour le cas $N_s = 5$ et une solution possible consiste à utiliser un autre état numérique des générateurs de nombres pseudo-aléatoires.

Le tableau 3.5 présente les résultats obtenus en utilisant l'algorithme génétique pour l'ensemble des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, à savoir l'ensemble des 16 valeurs identifiées $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_{16}^{\text{meso}}$ et des 16 nombres de générations

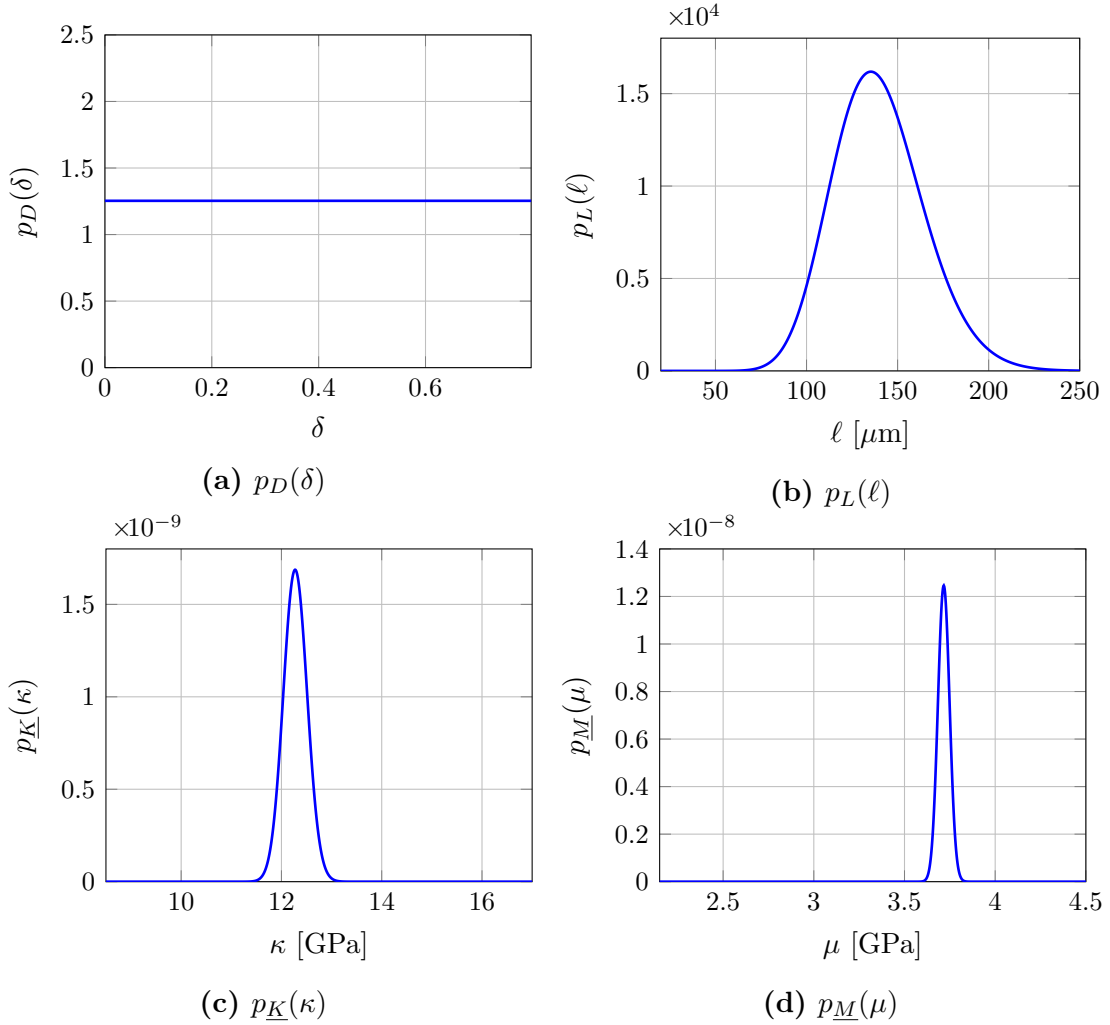


FIGURE 3.17 – Algorithme itératif de point fixe : fonctions de densité de probabilité p_D , p_L , p_K et p_M des variables aléatoires D , L , K et M , respectivement

de population n_1, \dots, n_{16} nécessaires pour atteindre la convergence souhaitée, ainsi que la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} calculée par la méthode MLE. Une population initiale de $n_I = 40$ individus est considérée pour démarrer l'algorithme génétique. La figure 3.19 montre un exemple de différentes coupes du front de Pareto pour le premier sous-domaine mésoscopique Ω_1^{meso} . La solution optimale retenue correspond au point marqué d'un cercle vert sur les différentes coupes du front de Pareto, car conformément aux explications données en section 5.2 du chapitre 2, elle est choisie parmi l'ensemble des solutions non-inférieures générées et sélectionnées dans l'ensemble optimal de Pareto (représentées par des étoiles rouge sur la figure 3.19) comme celle qui minimise la distance à l'origine du front de Pareto dans l'espace multidimensionnel (de dimension 3) de la fonction-coût multi-objectif $\mathcal{J}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$. Pour des raisons de limitation en terme de coût de calcul, le nombre N_s de réalisations

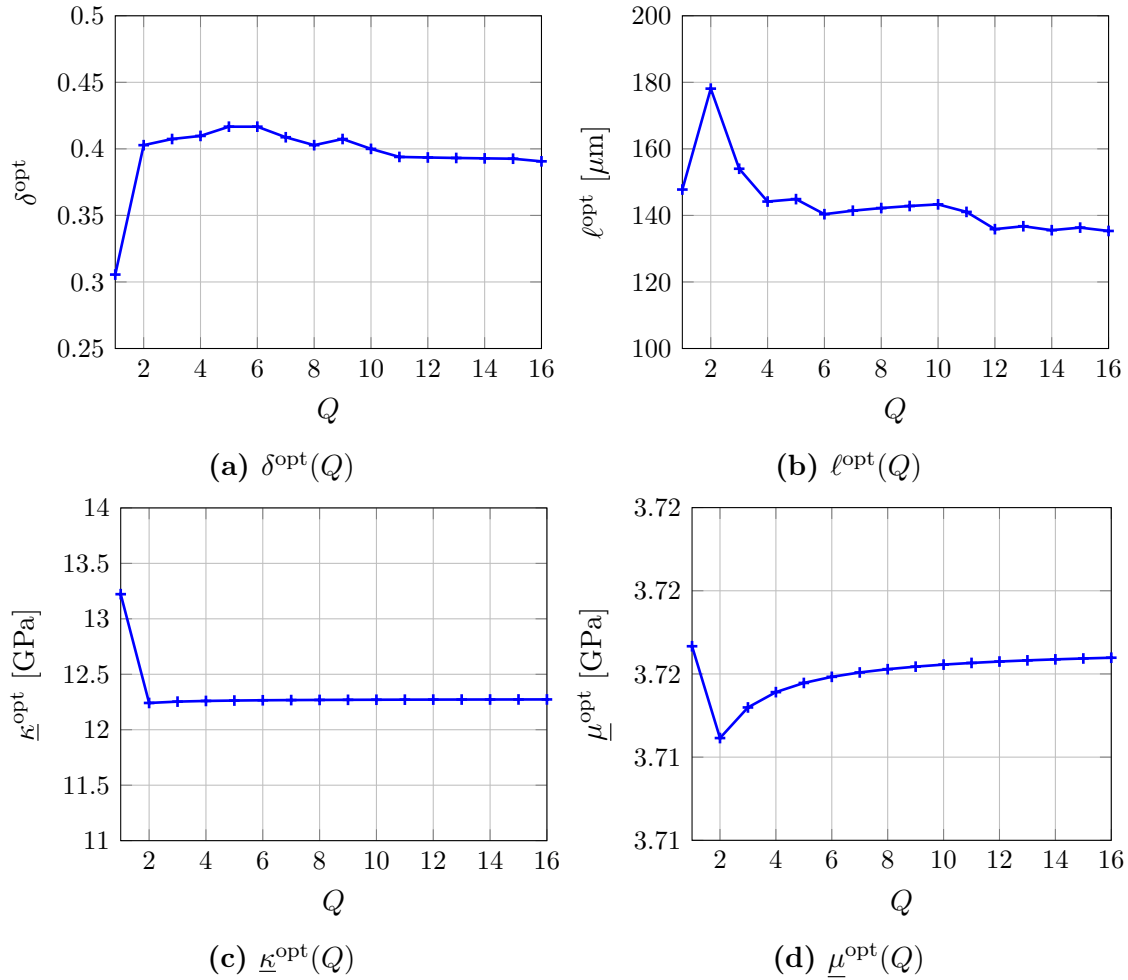


FIGURE 3.18 – Algorithme itératif de point fixe : évolutions des valeurs optimales globales identifiées δ^{opt} , ℓ^{opt} , $\underline{\kappa}^{\text{opt}}$ et $\underline{\mu}^{\text{opt}}$ en fonction du nombre Q de sous-domaines mésoscopiques considéré

indépendantes utilisées pour l'estimation statistique des espérances mathématiques dans les indicateurs numériques $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ est réduit à $N_s = 50$. Bien que la convergence statistique des trois indicateurs numériques ne soit pas atteinte d'après l'étude de convergence présentée dans la section 3.2.5, les résultats du tableau 3.4 montrent que, grâce à la modélisation probabiliste des hyperparamètres et à l'estimation du maximum de vraisemblance, les résultats de la méthode d'identification statistique inverse n'étaient pas sensiblement affectés par une diminution de la valeur de N_s et étaient donc robustes vis-à-vis des fluctuations statistiques des différents indicateurs numériques. Le nombre d'évaluations du modèle numérique stochastique requis par l'algorithme génétique est donné par $n_{\text{tot}}^{\text{GA}} = 3 n_I N_s \sum_{q=1}^{16} n_q$, où l'exposant ^{GA} fait référence à « Genetic Algorithm » en anglais. La figure 3.20 montre les fonctions de densité de probabilité

TABLEAU 3.4 – Algorithme itératif de point fixe : comparaison entre la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} et la valeur expérimentale de référence $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ pour différentes valeurs du nombre N_s de réalisations indépendantes générées pour l'estimation statistique des espérances mathématiques dans les différents indicateurs numériques

	δ	ℓ [μm]	$\underline{\kappa}$ [GPa]	$\underline{\mu}$ [GPa]	$n_{\text{tot}}^{\text{FP}}$
$\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	0.400	125.000	13.750	3.587	-
\mathbf{b}^{opt} ($N_s = 500$)	0.391	135.328	12.273	3.717	855 000
Erreur relative [%]	2.344	8.262	10.740	3.611	-
\mathbf{b}^{opt} ($N_s = 50$)	0.387	134.859	12.217	3.717	87 000
Erreur relative [%]	3.212	7.887	11.153	3.611	-
\mathbf{b}^{opt} ($N_s = 5$)	0.396	140.220	12.335	3.717	9 000
Erreur relative [%]	1.042	12.176	10.293	3.611	-

p_D , p_L , p_K et p_M des variables aléatoires D , L , K et M , respectivement. On en déduit finalement la valeur optimale globale $\mathbf{b}^{\text{opt}} = (0.372, 128.401, 11.656, 3.306)$ en $(-, [\mu\text{m}], [\text{GPa}], [\text{GPa}])$ avec des erreurs relatives inférieures à 8%, 3%, 16% et 8% pour δ^{opt} , ℓ^{opt} , $\underline{\kappa}^{\text{opt}}$ et $\underline{\mu}^{\text{opt}}$, respectivement, par rapport à la valeur expérimentale de référence $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = (0.40, 125, 13.75, 3.587)$ en $(-, [\mu\text{m}], [\text{GPa}], [\text{GPa}])$, ce qui est acceptable et similaire aux erreurs obtenues par l'algorithme itératif de point fixe. On constate tout de même une fluctuation des valeurs $\underline{\kappa}_1^{\text{meso}}, \dots, \underline{\kappa}_{16}^{\text{meso}}$ et $\underline{\mu}_1^{\text{meso}}, \dots, \underline{\mu}_{16}^{\text{meso}}$ identifiées sur chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, ce qui n'était pas le cas pour l'algorithme itératif de point fixe. Cela est sous-jacent à la résolution numérique du front de Pareto obtenu, lequel dépend du nombre n_V de valeurs dans chaque dimension de l'hypercube de recherche de la solution. En terme d'efficacité de calcul, on peut voir que le nombre $n_{\text{tot}}^{\text{GA}} = 19\,176\,000$ d'évaluations du modèle numérique stochastique requis par l'algorithme génétique (qui résulte du nombre d'individus $n_I = 40$ dans la population initiale et des nombres de générations de population n_1, \dots, n_{16}) est beaucoup plus élevé que celui $n_{\text{tot}}^{\text{FP}} = 87\,000$ requis par l'algorithme itératif de point fixe avec $N_s = 50$ (voir tableau 3.4).

Pour l'approche par réseaux de neurones, une (grande) base de données numériques a été construite en faisant appel au modèle numérique stochastique. La base de données est construite en tirant uniformément des valeurs du vecteur des hyperparamètres $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\kappa}, \underline{\mu})$ dans l'ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}} \subset \mathcal{B}^{\text{meso}}$ tel que $\delta \in [0.25, 0.65]$, $\ell \in [20, 250]$ μm , $\underline{\kappa} \in [8.5, 17]$ GPa et $\underline{\mu} \in [2.15, 5.00]$ GPa. Cet ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}}$ est choisi suffisamment grand de sorte que le(s) réseau(x) de neurone(s) entraîné(s) puisse(nt) être utilisé(s) pour l'identification de la valeur optimale \mathbf{b}^{meso} de \mathbf{b} sur chacun des sous-domaines mésoscopiques considérés dans l'exemple de validation 2D présenté dans ce chapitre et sur le sous-domaine mésoscopique considéré dans l'exemple d'application 2D du chapitre 4.

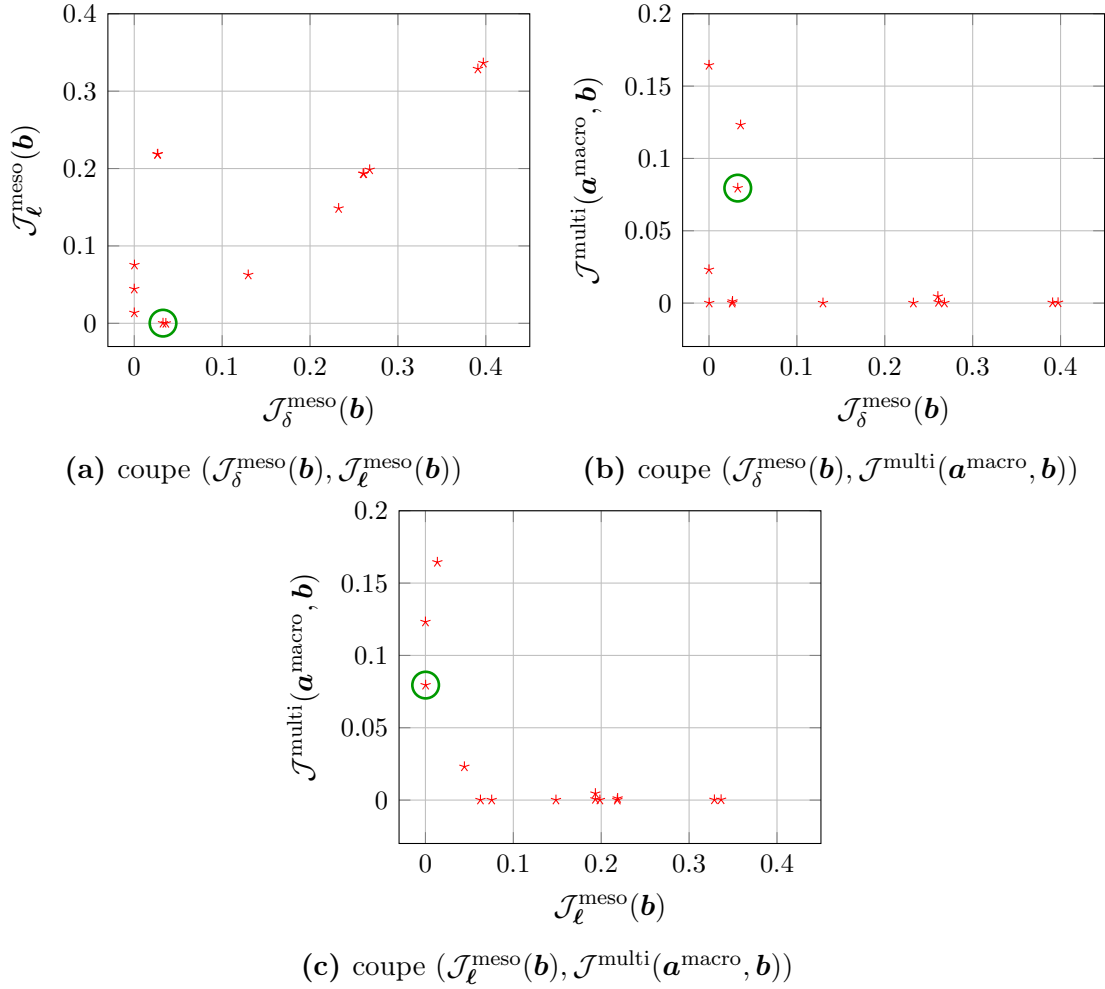


FIGURE 3.19 – Différents coupes du front de Pareto avec l’ensemble des solutions non-inférieures représentées par des étoiles rouges \star et la meilleure solution optimale entourée d’un cercle vert \circ pour le sous-domaine mésoscopique Ω_1^{meso}

La base de données totale contient un ensemble de 100 000 vecteurs d’entrée de dimension 9, correspondant à des réalisations des 9 quantités d’intérêt aléatoires $D^\mathcal{E}$, $\mathbf{L}^\mathcal{E} = (L_1^\mathcal{E}, L_2^\mathcal{E})$ et $\mathbf{L}^{\text{eff}} = (\log([\mathbf{L}^{\text{eff}}]_{11}), [\mathbf{L}^{\text{eff}}]_{12}, [\mathbf{L}^{\text{eff}}]_{13}, \log([\mathbf{L}^{\text{eff}}]_{22}), [\mathbf{L}^{\text{eff}}]_{23}, \log([\mathbf{L}^{\text{eff}}]_{33}))$, et de 100 000 vecteurs cibles de dimension 4, correspondant aux sorties désirées du réseau qui sont les 4 hyperparamètres δ , ℓ , κ et μ du modèle stochastique *prior*, pour chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, soit au total un ensemble de $100\,000 \times 16 = 1\,600\,000$ vecteurs d’entrée et vecteurs cibles. Afin d’étudier l’influence du nombre de vecteurs dans la base de données, on a considéré différentes bases de données avec 160, 400, 800, 1 200, 1 600, 4 000, 8 000, 12 000, 16 000, 40 000, 80 000, 120 000, 160 000, 400 000 et 800 000 vecteurs pour les sous-ensembles de données d’entraînement et de validation (dont 85% pour l’entraînement et 15% pour la

TABLEAU 3.5 – Algorithme génétique : comparaison entre la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} obtenue à partir des 16 valeurs identifiées $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_{16}^{\text{meso}}$ pour chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, et la valeur expérimentale de référence $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$

	δ	ℓ [μm]	$\underline{\kappa}$ [GPa]	$\underline{\mu}$ [GPa]	n_q
$\mathbf{b}_1^{\text{meso}}$	0.361	122.222	16.056	2.411	193
$\mathbf{b}_2^{\text{meso}}$	0.333	147.778	9.444	2.933	202
$\mathbf{b}_3^{\text{meso}}$	0.417	198.889	13.222	3.194	189
$\mathbf{b}_4^{\text{meso}}$	0.333	147.778	13.222	3.456	197
$\mathbf{b}_5^{\text{meso}}$	0.444	147.778	11.333	4.239	207
$\mathbf{b}_6^{\text{meso}}$	0.417	173.333	12.278	2.933	201
$\mathbf{b}_7^{\text{meso}}$	0.278	147.778	10.389	3.717	192
$\mathbf{b}_8^{\text{meso}}$	0.278	147.778	12.278	3.194	199
$\mathbf{b}_9^{\text{meso}}$	0.389	96.667	14.167	3.978	210
$\mathbf{b}_{10}^{\text{meso}}$	0.333	96.667	11.333	2.933	205
$\mathbf{b}_{11}^{\text{meso}}$	0.278	96.667	15.111	2.933	203
$\mathbf{b}_{12}^{\text{meso}}$	0.417	122.222	12.278	4.239	198
$\mathbf{b}_{13}^{\text{meso}}$	0.472	122.222	14.167	3.456	194
$\mathbf{b}_{14}^{\text{meso}}$	0.389	96.667	12.278	2.672	208
$\mathbf{b}_{15}^{\text{meso}}$	0.361	122.222	14.167	3.456	190
$\mathbf{b}_{16}^{\text{meso}}$	0.444	173.333	9.444	3.978	208
\mathbf{b}^{opt}	0.372	128.401	11.656	3.306	-
$\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	0.400	125.000	13.750	3.587	-
Erreur relative [%]	7.118	2.721	15.228	7.844	-
$n_{\text{tot}}^{\text{GA}}$	19 176 000				

validation), et on a gardé 1 000 vecteurs pour le sous-ensemble de données de test afin de tester les performances du réseau de neurones.

Le réseau de neurones multi-couches peu profond est constitué d'une couche d'entrée avec 9 neurones, d'une couche de sortie avec 4 neurones, et d'une (ou deux) couche(s) intermédiaire(s) cachée(s) avec des neurones cachés. Différentes configurations ont été testées pour les réseaux à 2 couches (i.e. à 1 couche cachée et 1 couche de sortie) et à 3 couches (i.e. à 2 couches cachées et 1 couche de sortie). Pour le réseau à 2 couches, on a fait varier le nombre de neurones cachés dans la couche cachée de 10 à 100 par pas de 5, soit au total 19 configurations différentes. Pour le réseau à 3 couches, on a fait varier le nombre de neurones cachés dans la première

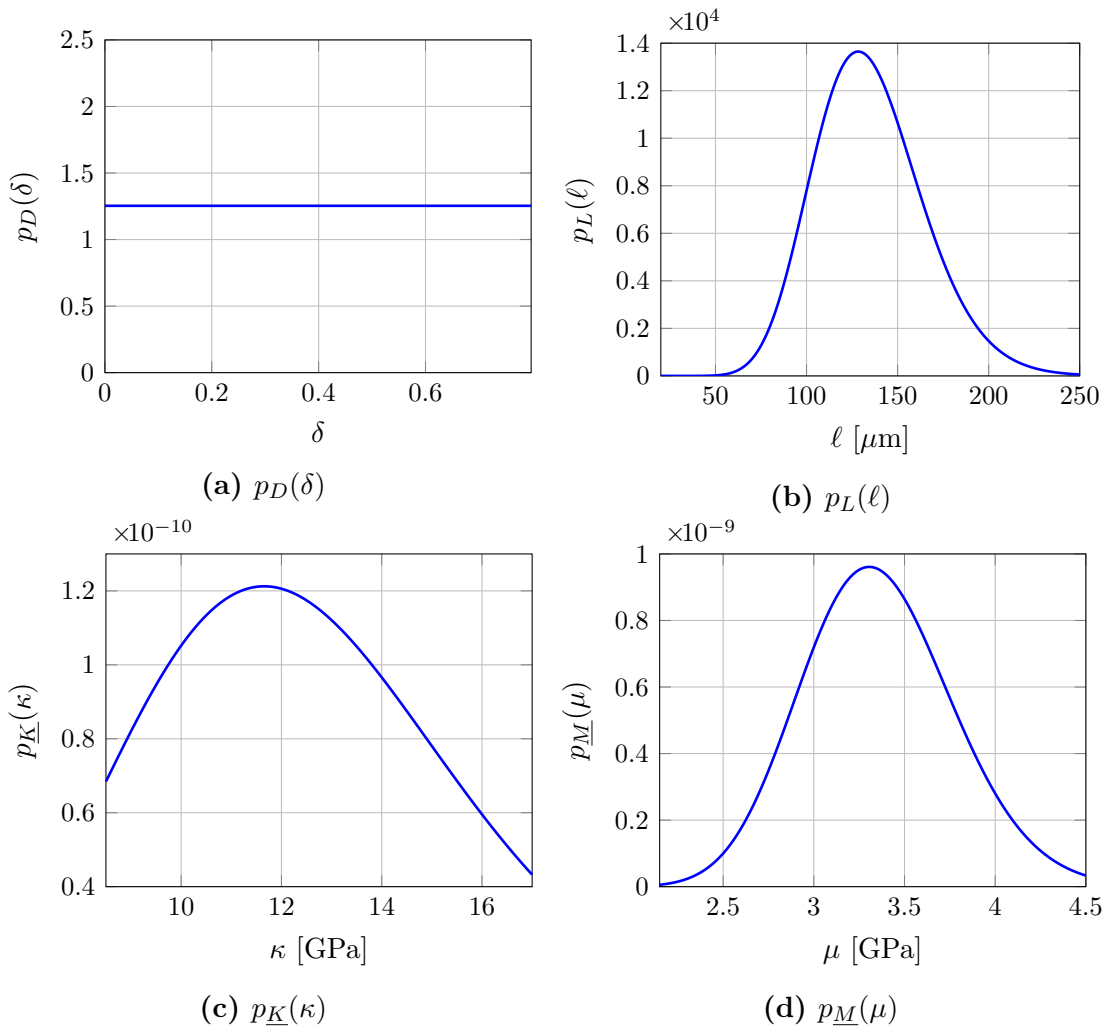


FIGURE 3.20 – Algorithme génétique : fonctions de densité de probabilité p_D , p_L , p_K et p_M des variables aléatoires D , L , K et M , respectivement

(resp. seconde) couche cachée de 10 à 80 (resp. de 10 à 60) par pas de 10, soit au total 48 configurations différentes. Tous les calculs ont été effectués en utilisant la Neural Network Toolbox™ [Beale et al. 1992] de MATLAB (qui fait désormais partie de la Deep Learning Toolbox™). Comme l’entraînement des réseaux de neurones peut nécessiter des ressources de calcul importantes (selon le matériel informatique, les options d’entraînement et la configuration du réseau) en raison de la grande taille de la base de données, nous avons effectué les calculs sur un processeur graphique (GPU pour « Graphics Processing Unit » en anglais) pour accélérer l’entraînement et l’utilisation des réseaux de neurones en tirant parti de l’architecture massivement parallèle des GPUs.

Les performances des réseaux de neurones artificiels sont évaluées, d’une part en calculant l’erreur quadratique moyenne normalisée entre les sorties du réseau et les

cibles correspondantes, et d'autre part en effectuant une analyse de régression linéaire. Cette dernière permet de déterminer le coefficient de corrélation R entre les sorties et les cibles tel que $R = 1$ (resp. R proche de 1) indique une relation sortie-cible parfaitement (resp. presque) linéaire, correspondant à une corrélation parfaite (resp. très bonne) entre les sorties et les cibles, tandis que $R = 0$ (resp. R proche de 0) indique une relation sortie-cible aléatoire (resp. presque aléatoire), correspondant à aucune corrélation (resp. à une corrélation très faible) entre les sorties et les cibles.

Le meilleur réseau de neurones artificiels obtenu en utilisant un algorithme rétrograde de gradient conjugué mis à l'échelle (« scaled conjugate gradient backpropagation algorithm » en anglais) comme algorithme d'apprentissage a été sélectionné comme celui qui présente la meilleure performance (i.e. l'erreur quadratique moyenne la plus faible) sur l'ensemble des données de test. Le meilleur réseau à 2 couches contient 30 neurones dans la couche intermédiaire cachée pour un total de 424 paramètres (poids et biais), tandis que le meilleur réseau à 3 couches contient 80 neurones dans la première couche cachée et 10 neurones dans la seconde couche cachée pour un total de 1 654 paramètres (poids et biais). La figure 3.21 montre une représentation graphique des meilleurs réseaux de neurones entraînés à 2 couches et à 3 couches.

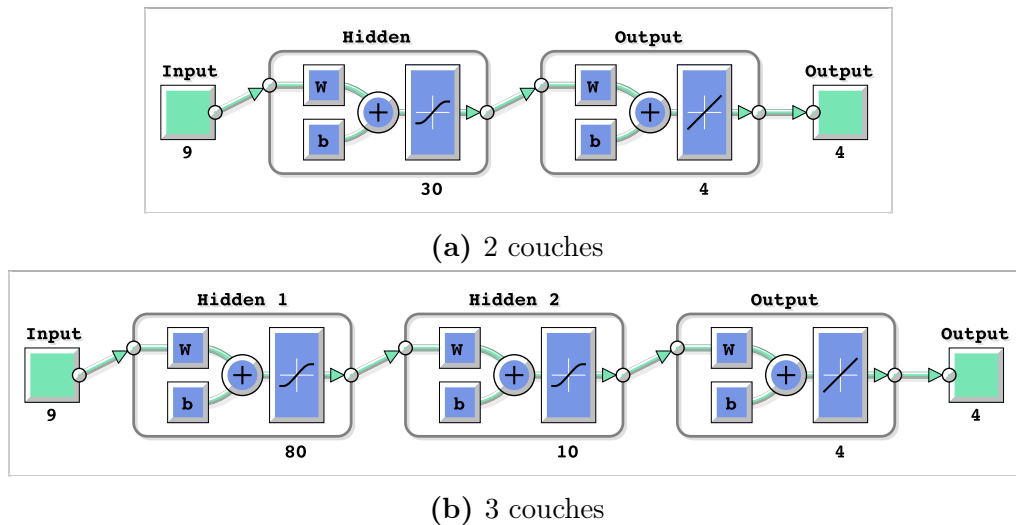


FIGURE 3.21 – Représentation du meilleur réseau de neurones (a) à 2 couches, avec 1 couche intermédiaire cachée contenant 30 neurones cachés et 1 couche de sortie contenant 4 neurones, et (b) à 3 couches, avec 2 couches intermédiaires cachées contenant chacune 80 et 10 neurones cachés, respectivement, et 1 couche de sortie contenant 4 neurones

La figure 3.22 montre les évolutions de la fonction de performance (erreur quadratique moyenne normalisée) en fonction du nombre d'itérations pour évaluer les performances du meilleur réseau entraîné à 2 couches et à 3 couches, respectivement. L'erreur quadratique moyenne normalisée est tracée en échelle logarithmique. L'en-

entraînement du réseau est arrêté lorsque la fonction de performance de validation (erreur quadratique moyenne sur le sous-ensemble des données de validation) croît pendant 6 itérations. La fonction de performance de validation atteint un minimum à l'itération 607 (resp. 1651) pour le meilleur réseau à 2 couches (resp. 3 couches) et l'entraînement s'est poursuivi durant 6 itérations supplémentaires avant d'être stoppé. Les erreurs quadratiques moyennes normalisées décroissent rapidement durant les premières itérations puis convergent lentement (jusqu'à l'arrêt de validation) pour chacun des sous-ensembles de données d'entraînement, de validation et de test. Les courbes de performance (erreurs quadratiques moyennes normalisées en fonction du nombre d'itérations) sont similaires pour les sous-ensembles de données de validation et de test, ce qui indique qu'il n'y pas de surajustement significatif. L'erreur quadratique moyenne normalisée obtenue à l'itération finale 607 (resp. 1651), correspondant à l'itération à laquelle on obtient la meilleure performance de validation pour le réseau à 2 couches (resp. 3 couches), est relativement faible et similaire pour chacun des sous-ensembles de données d'entraînement, de validation et de test. La meilleure performance du réseau (erreur quadratique moyenne calculée sur l'ensemble des données) est égale à 1.611% (resp. 1.551%), et les performances d'entraînement, de validation et de test (erreurs quadratiques moyennes normalisées sur les sous-ensembles des données d'entraînement, de validation et de test, respectivement) sont égales à 1.610%, 1.617% et 1.614% (resp. 1.547%, 1.574% et 1.568%) pour le meilleur réseau de neurones à 2 couches (resp. 3 couches).

Les courbes de régression linéaire entre les sorties du réseau et les cibles correspondantes sont tracées pour l'ensemble des données ainsi que pour les sous-ensembles de données d'entraînement, de validation et de test sur la figure 3.23 pour le meilleur réseau à 2 couches et sur la figure 3.24 pour le meilleur réseau à 3 couches. Les vecteurs de sortie du réseau entraîné ont été calculés pour tous les vecteurs d'entrée de la base de données complète, puis les vecteurs de sortie et les vecteurs cibles correspondant appartenant à chacun des sous-ensembles de données d'entraînement, de validation et de test ont été extraits, et enfin les sorties du réseau ont été tracées en fonction des cibles pour les sous-ensembles de données d'entraînement, de validation et de test ainsi que pour la base de données complète. La meilleure correspondance linéaire entre les sorties du réseau et les cibles correspondantes, bien que non parfaite, est relativement bonne pour l'ensemble des données et pour chacun des sous-ensembles de données avec des coefficients de régression R de l'ordre de 0.94 (resp. 0.95) pour δ , 0.95 (resp. 0.96) pour ℓ , 0.69 (resp. 0.70) pour $\underline{\kappa}$ et 0.98 (resp. 0.98) pour $\underline{\mu}$ pour le meilleur réseau à 2 couches (resp. 3 couches). On observe une dispersion des valeurs relativement faible pour $\underline{\mu}$, un peu plus élevée pour δ et ℓ , et très élevée pour $\underline{\kappa}$, ce qui reflète le fait que la transformation non-linéaire entre le vecteur aléatoire \mathbf{B} des hyperparamètres et le vecteur aléatoire \mathbf{Q} des quantités d'intérêt est stochastique.

Les tableaux 3.6 et 3.7 présentent les résultats obtenus en utilisant les meilleurs réseaux de neurones à 2 couches et 3 couches, respectivement, pour l'ensemble des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, à savoir l'ensemble des 16 valeurs identifiées $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_{16}^{\text{meso}}$ ainsi que la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} calculée par la

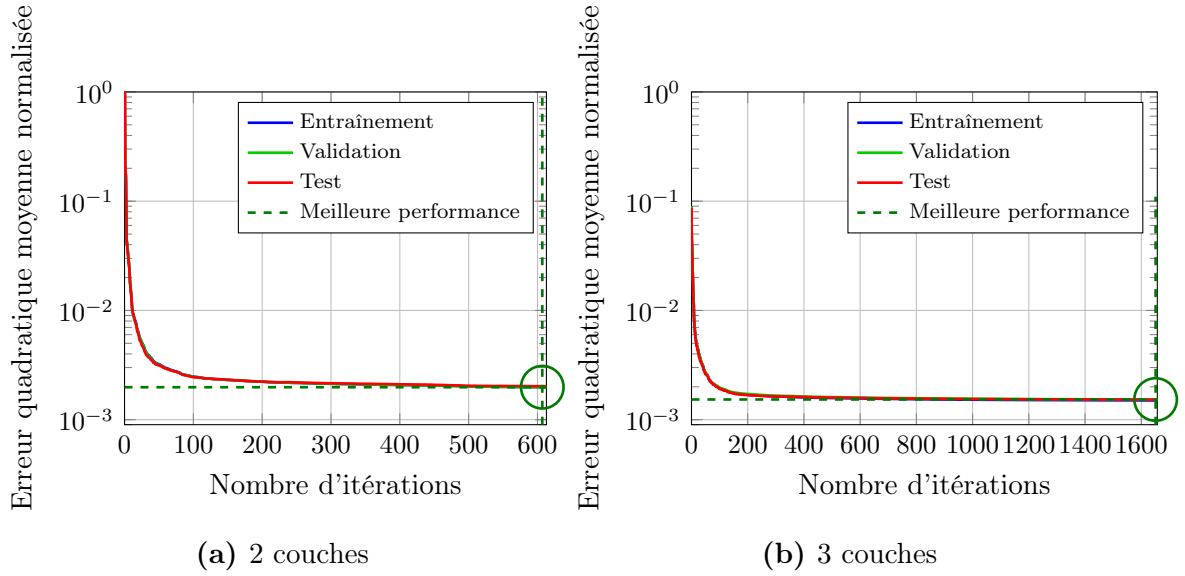


FIGURE 3.22 – Réseaux de neurones à (a) 2 couches et (b) 3 couches : évolutions de la fonction de performance (erreur quadratique moyenne normalisée) en fonction du nombre d'itérations pour les données d'entraînement (courbes bleues), de validation (courbes vertes) et de test (courbes rouges). La meilleure performance de validation (indiquée par des lignes en tirets verts) est de 0.1983% (resp. 0.1531%) à l'itération 607 (resp. 1651) pour le meilleur réseau à 2 couches (resp. 3 couches).

méthode MLE. A l'instar de l'algorithme itératif de point fixe et de l'algorithme génétique, on constate des variations plus importantes entre les valeurs identifiées $\ell_1^{\text{meso}}, \dots, \ell_{16}^{\text{meso}}$ et $\delta_1^{\text{meso}}, \dots, \delta_{16}^{\text{meso}}$ d'un sous-domaine à un autre. En revanche, les valeurs identifiées $\underline{\kappa}_1^{\text{meso}}, \dots, \underline{\kappa}_{16}^{\text{meso}}$ et $\underline{\mu}_1^{\text{meso}}, \dots, \underline{\mu}_{16}^{\text{meso}}$ présentent des variabilités beaucoup plus faibles d'un sous-domaine à un autre. Le nombre d'évaluations du modèle numérique stochastique requis pour construire la base de données utilisée pour entraîner et valider chacun des réseaux de neurones est noté $n_{\text{tot}}^{\text{NN}}$, où l'exposant NN fait référence à « Neural Network » en anglais. La figure 3.25 montre les fonctions de densité de probabilité p_D , p_L , p_K et p_M des variables aléatoires D , L , K et M , respectivement, pour les meilleurs réseaux de neurones à 2 couches et à 3 couches. On en déduit finalement la valeur optimale globale $\mathbf{b}^{\text{opt}} = (0.398, 138.779, 13.734, 3.590)$ (resp. $\mathbf{b}^{\text{opt}} = (0.394, 121.104, 14.013, 3.616)$) en $(-, [\mu\text{m}], [\text{GPa}], [\text{GPa}])$ avec des erreurs relatives inférieures à 0.6%, 12%, 0.2% et 0.1% (resp. 1.6%, 3.2%, 2.0% et 0.8%) pour δ^{opt} , ℓ^{opt} , $\underline{\kappa}^{\text{opt}}$ et $\underline{\mu}^{\text{opt}}$, respectivement, par rapport à la valeur expérimentale de référence $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = (0.40, 125, 13.75, 3.587)$ en $(-, [\mu\text{m}], [\text{GPa}], [\text{GPa}])$. L'approche par réseau de neurones artificiels est donc beaucoup plus précise que les approches par l'algorithme itératif de point fixe et par l'algorithme génétique pour l'identification des valeurs optimales δ^{opt} , $\underline{\kappa}^{\text{opt}}$ et $\underline{\mu}^{\text{opt}}$ du paramètre de dispersion optimal δ , du module d'élasticité isostatique moyen mésoscopique $\underline{\kappa}$ et du module de cisaillement moyen mésoscopique $\underline{\mu}$, respectivement. En revanche, les erreurs numériques sont du

même ordre de grandeur pour les différentes approches par l'algorithme itératif de point fixe, par l'algorithme génétique et par réseau de neurones artificiels pour l'identification de la valeur optimale ℓ^{opt} de la longueur de corrélation spatiale ℓ . En terme d'efficacité de calcul, on peut voir que le nombre $n_{\text{tot}}^{\text{NN}} = 400\,000$ (resp. $n_{\text{tot}}^{\text{NN}} = 800\,000$) d'évaluations du modèle numérique stochastique utilisé pour construire la base de données d'entraînement et de validation du meilleur réseau de neurones à 2 couches (resp. 3 couches) reste élevé. Une étude de convergence de l'erreur quadratique moyenne normalisée sur le sous-ensemble de données de test a été menée en fonction du nombre de données dans les sous-ensembles d'entraînement et de validation pour les 19 configurations du réseau à 2 couches (voir figure 3.26a), et pour les 48 configurations du réseau à 3 couches (voir figure 3.26b). On constate qu'il suffit de prendre un nombre de données $n_{\text{tot}}^{\text{NN}} = 100\,000$ (resp. $n_{\text{tot}}^{\text{NN}} = 10\,000$) dans la base de données d'entraînement et de validation pour atteindre la convergence pour chacune des 19 configurations testées du réseau à 2 couches (resp. des 48 configurations testées du réseau à 3 couches). Il est ainsi possible d'entraîner un réseau de neurones à 2 ou 3 couches avec seulement 10 neurones dans la (les) couche(s) cachée(s) à partir d'une base de données construite en faisant un nombre d'évaluations du modèle numérique stochastique bien moins élevé que ceux requis par l'algorithme itératif de point fixe et par l'algorithme génétique, ce qui permet un gain de calcul considérable.

4 Validation numérique sur un essai virtuel de compression en élasticité linéaire 3D

On considère dans cette section un second exemple de validation numérique en élasticité linéaire 3D. Pour des raisons de limitation en terme de capacité maximale de stockage en mémoire dans cet exemple de validation 3D, on considère $Q = 3$ échantillons cubiques occupant les 3 domaines macroscopiques ouverts bornés $\Omega_1^{\text{macro}}, \dots, \Omega_Q^{\text{macro}}$, définis dans un repère cartésien fixe (O, x_1, x_2, x_3) de l'espace physique euclidien tridimensionnel \mathbb{R}^3 , tels que $\Omega_q^{\text{macro}} =]0, 2 \times 10^{-3}[\times]0, 2 \times 10^{-3}[\times]0, 2 \times 10^{-3}[$ en [m] (de dimensions $2 \times 2 \times 2 \text{ mm}^3$) pour tout $q \in \{1, 2, 3\}$. Chaque domaine macroscopique Ω_q^{macro} contient un sous-domaine mésoscopique carré Ω_q^{meso} de dimensions $0.5 \times 0.5 \times 0.5 \text{ mm}^3$ (voir figure 3.27). D'une part, des conditions aux limites de Neumann non-homogènes sont appliquées sur la surface supérieure $\Gamma_{N,f}^{\text{macro}} = \{x_1 \in [0, 2 \times 10^{-3}], x_2 \in [0, 2 \times 10^{-3}], x_3 = 2 \times 10^{-3}\} \subset \partial\Omega^{\text{macro}}$ en [m], qui est soumise à un champ de force surfacique déterministe donné $\mathbf{f}^{\text{macro}}$ uniformément réparti, dirigé suivant la direction (verticale descendante) $-x_3$ avec une intensité de 2 kN telle que $\|\mathbf{f}^{\text{macro}}\| = 5 \times 10^5 \text{ kN/m}^2$, tandis que des conditions aux limites de Neumann homogènes (nulles) (i.e. des conditions de bord libre d'effort) $\mathbf{f}^{\text{macro}} = \mathbf{0}$ sont imposées sur les quatre surfaces latérales. D'autre part, des conditions limites de Dirichlet homogènes (nulles) $\mathbf{u}^{\text{macro}} = \mathbf{0}$ sont appliquées sur la surface inférieure $\Gamma_D^{\text{macro}} = \{x_1 \in [0, 2 \times 10^{-3}], x_2 \in [0, 2 \times 10^{-3}], x_3 = 0\} \subset \partial\Omega^{\text{macro}}$ en [m], qui est par

TABLEAU 3.6 – Réseau de neurones artificiels à 2 couches : comparaison entre la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} obtenue à partir des 16 valeurs identifiées $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_{16}^{\text{meso}}$ pour chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, et la valeur expérimentale de référence $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$

	δ	ℓ [μm]	$\underline{\kappa}$ [GPa]	$\underline{\mu}$ [GPa]
$\mathbf{b}_1^{\text{meso}}$	0.388	167.823	13.608	3.608
$\mathbf{b}_2^{\text{meso}}$	0.440	180.691	13.498	3.615
$\mathbf{b}_3^{\text{meso}}$	0.410	143.766	13.641	3.592
$\mathbf{b}_4^{\text{meso}}$	0.448	136.484	13.669	3.581
$\mathbf{b}_5^{\text{meso}}$	0.375	138.015	13.713	3.594
$\mathbf{b}_6^{\text{meso}}$	0.407	167.214	13.539	3.610
$\mathbf{b}_7^{\text{meso}}$	0.353	136.552	13.931	3.588
$\mathbf{b}_8^{\text{meso}}$	0.374	123.818	13.876	3.578
$\mathbf{b}_9^{\text{meso}}$	0.415	125.237	13.867	3.576
$\mathbf{b}_{10}^{\text{meso}}$	0.419	120.863	13.758	3.574
$\mathbf{b}_{11}^{\text{meso}}$	0.423	136.943	13.615	3.589
$\mathbf{b}_{12}^{\text{meso}}$	0.394	171.300	13.636	3.608
$\mathbf{b}_{13}^{\text{meso}}$	0.430	155.397	13.596	3.596
$\mathbf{b}_{14}^{\text{meso}}$	0.375	110.753	13.851	3.575
$\mathbf{b}_{15}^{\text{meso}}$	0.337	118.182	14.048	3.578
$\mathbf{b}_{16}^{\text{meso}}$	0.374	132.947	13.925	3.585
\mathbf{b}^{opt}	0.398	138.779	13.734	3.590
$\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	0.400	125.000	13.750	3.587
Erreur relative [%]	0.5709	11.0231	0.1137	0.0929
$n_{\text{tot}}^{\text{NN}}$	400 000			

conséquent bloquée en déplacement (ou encastrée).

4.1 Paramétrage des modèles macroscopique et mésoscopique

À l'échelle macroscopique, le matériau est supposé être déterministe, homogène (i.e. constant dans l'espace, et donc indépendant de \mathbf{x}), à comportement élastique linéaire isotrope. Par la suite, on utilise la notation classique de Voigt-Mandel (voir section 3.1) pour la représentation matricielle $[C^{\text{macro}}] \in \mathbb{M}_n^{\text{iso}}(\mathbb{R})$ du tenseur

TABLEAU 3.7 – Réseau de neurones artificiels à 3 couches : comparaison entre la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} obtenue à partir des 16 valeurs identifiées $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \dots, \mathbf{b}_{16}^{\text{meso}}$ pour chacun des 16 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_{16}^{\text{meso}}$, et la valeur expérimentale de référence $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$

	δ	ℓ [μm]	$\underline{\kappa}$ [GPa]	$\underline{\mu}$ [GPa]
$\mathbf{b}_1^{\text{meso}}$	0.386	156.689	13.935	3.625
$\mathbf{b}_2^{\text{meso}}$	0.433	174.693	13.796	3.619
$\mathbf{b}_3^{\text{meso}}$	0.405	126.920	13.969	3.617
$\mathbf{b}_4^{\text{meso}}$	0.436	121.019	13.985	3.604
$\mathbf{b}_5^{\text{meso}}$	0.373	116.559	14.007	3.624
$\mathbf{b}_6^{\text{meso}}$	0.403	156.286	13.865	3.620
$\mathbf{b}_7^{\text{meso}}$	0.354	112.946	14.161	3.620
$\mathbf{b}_8^{\text{meso}}$	0.374	106.941	14.116	3.617
$\mathbf{b}_9^{\text{meso}}$	0.409	106.572	14.107	3.601
$\mathbf{b}_{10}^{\text{meso}}$	0.412	105.594	14.031	3.609
$\mathbf{b}_{11}^{\text{meso}}$	0.415	118.762	13.939	3.613
$\mathbf{b}_{12}^{\text{meso}}$	0.390	159.032	13.966	3.626
$\mathbf{b}_{13}^{\text{meso}}$	0.422	141.946	13.934	3.615
$\mathbf{b}_{14}^{\text{meso}}$	0.373	93.2582	14.060	3.619
$\mathbf{b}_{15}^{\text{meso}}$	0.341	100.327	14.195	3.615
$\mathbf{b}_{16}^{\text{meso}}$	0.374	108.562	14.153	3.612
\mathbf{b}^{opt}	0.394	121.104	14.013	3.616
$\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	0.400	125.000	13.750	3.587
Erreur relative [%]	1.5677	3.1169	1.9144	0.8099
$n_{\text{tot}}^{\text{NN}}$	800 000			

d'élasticité déterministe d'ordre quatre C^{macro} , avec $n = d(d + 1)/2 = 6$ en élasticité linéaire 3D (pour $d = 3$), telle que

$$[C^{\text{macro}}] = \begin{bmatrix} \kappa + \frac{4\mu}{3} & \kappa - \frac{2\mu}{3} & \kappa - \frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \kappa - \frac{2\mu}{3} & \kappa + \frac{4\mu}{3} & \kappa - \frac{2\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \kappa - \frac{2\mu}{3} & \kappa - \frac{2\mu}{3} & \kappa + \frac{4\mu}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Nous avons choisi ici le paramétrage $\mathbf{a} = (\kappa, \mu)$ pour le modèle déterministe de $[C^{\text{macro}}(\mathbf{a})]$ pour les raisons évoquées précédemment dans la section 3.1, impliquant seulement les deux constantes élastiques algébriquement indépendantes pour un matériau élastique isotrope, à savoir le module d'élasticité isostatique macroscopique κ et le module de cisaillement macroscopique μ , correspondant à un module d'Young macroscopique $E = 9\kappa\mu/(3\kappa + \mu)$ et à un coefficient de Poisson macroscopique $\nu = (3\kappa - 2\mu)/(2(3\kappa + \mu))$. En particulier, nous avons choisi la valeur expérimentale $\mathbf{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}} = (\kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}}, \mu_{\text{exp}}^{\text{macro}})$ avec $\kappa_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 138.783$ GPa et $\mu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 64.355$ GPa, correspondant à $E_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 167.218$ GPa et $\nu_{\text{exp}}^{\text{macro}} = 0.2992$.

À l'échelle mésoscopique, le matériau est supposé être aléatoire, hétérogène, à comportement élastique linéaire anisotrope, avec un modèle moyen isotrope (similaire à celui du modèle déterministe à l'échelle macroscopique) et des fluctuations statistiques anisotropes. Le champ de tenseur d'élasticité aléatoire d'ordre quatre \mathbf{C}^{meso} est représenté par le champ d'élasticité aléatoire $[C^{\text{meso}}]$ à valeurs dans $\mathbb{M}_6^+(\mathbb{R})$ en utilisant la notation classique de Voigt-Mandel. Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire 3D, la matrice d'élasticité moyenne $[\underline{C}^{\text{meso}}] \in \mathbb{M}_6^{\text{iso}}(\mathbb{R})$ peut alors être écrite comme

$$[\underline{C}^{\text{meso}}] = \begin{bmatrix} \underline{\kappa} + \frac{4\underline{\mu}}{3} & \underline{\kappa} - \frac{2\underline{\mu}}{3} & \underline{\kappa} - \frac{2\underline{\mu}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\kappa} - \frac{2\underline{\mu}}{3} & \underline{\kappa} + \frac{4\underline{\mu}}{3} & \underline{\kappa} - \frac{2\underline{\mu}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \underline{\kappa} - \frac{2\underline{\mu}}{3} & \underline{\kappa} - \frac{2\underline{\mu}}{3} & \underline{\kappa} + \frac{4\underline{\mu}}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{\mu} \end{bmatrix}, \quad (3.16)$$

qui dépend d'un hyperparamètre à valeurs vectorielles $\underline{\mathbf{c}} = (\underline{\kappa}, \underline{\mu})$ impliquant seulement les deux constantes élastiques algébriquement indépendantes pour un matériau élastique isotrope, à savoir le module d'élasticité isostatique moyen $\underline{\kappa}$ et le module de cisaillement moyen $\underline{\mu}$ à l'échelle mésoscopique, correspondant à un module d'Young moyen $\underline{E} = 9\underline{\kappa}\underline{\mu}/(3\underline{\kappa} + \underline{\mu})$ et à un coefficient de Poisson moyen $\underline{\nu} = (3\underline{\kappa} - 2\underline{\mu})/(2(3\underline{\kappa} + \underline{\mu}))$. Le modèle stochastique *prior* du champ de matrice d'élasticité aléatoire $[C^{\text{meso}}]$ est alors classiquement paramétré par l'hyperparamètre à valeurs vectorielles $\underline{\mathbf{b}} = (\delta, \ell, \underline{\mathbf{c}})$ impliquant seulement (i) un paramètre de dispersion δ contrôlant le niveau des fluctuations statistiques de $[C^{\text{meso}}]$ autour de sa valeur moyenne $[\underline{C}^{\text{meso}}]$, (ii) une longueur de corrélation spatiale ℓ caractérisant la structure de corrélation spatiale du germe stochastique (gaussien) W du champ aléatoire (non-gaussien) $[C^{\text{meso}}]$, qui est supposée être la même dans chaque direction spatiale (i.e. $\ell = \ell_1 = \ell_2 = \ell_3$) pour rester cohérent avec le modèle effectif isotrope à l'échelle macroscopique et avoir un paramétrage minimal du modèle stochastique *prior*, et (iii) un hyperparamètre à valeurs vectorielles $\underline{\mathbf{c}} = (\underline{\kappa}, \underline{\mu})$ regroupant le module d'élasticité isostatique moyen $\underline{\kappa}$ et le module de cisaillement moyen $\underline{\mu}$ à l'échelle mésoscopique. En particulier,

nous avons choisi la valeur expérimentale $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = (\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}}, \ell_{\text{exp}}^{\text{meso}}, \underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}}, \underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}})$, avec $\delta_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.32$, $\ell_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 80 \mu\text{m}$, $\underline{\kappa}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 145 \text{ GPa}$ et $\underline{\mu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 67.3 \text{ GPa}$, correspondant à $\underline{E}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 174.85 \text{ GPa}$ et $\underline{\nu}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = 0.2990 \text{ GPa}$.

Comme déjà mentionné dans la section 3.1, on peut restreindre l'ensemble admissible complet $\mathcal{B}^{\text{meso}} =]0, \delta_{\text{sup}}[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[^2$ (avec $\delta_{\text{sup}} = \sqrt{7/11} \approx 0.7977 < 1$) de l'hyperparamètre à valeurs vectorielles $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\kappa}, \underline{\mu})$ à un ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}} \subset \mathcal{B}^{\text{meso}}$ tel que $\delta \in [0.20, 0.45]$, $\ell \in [50, 120] \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} \in [87.5, 200] \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} \in [40.5, 95.0] \text{ GPa}$. Cet ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}}$ est ensuite discrétisé en $n_V = 10$ points équidistants dans chaque dimension sur lesquels nous évaluerons et comparerons les valeurs des trois indicateurs numériques $\mathcal{J}_{\delta}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_{\ell}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ définis dans la section 4 du chapitre 2.

La méthode des éléments finis est utilisée pour la discrétisation spatiale et la résolution numérique des problèmes aux limites elliptiques déterministe et stochastique définis respectivement par (2.1) sur chacun des $Q = 3$ domaines macroscopiques $\Omega_1^{\text{macro}}, \dots, \Omega_Q^{\text{macro}}$ et (2.3) sur chacun des $Q = 3$ sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$. Comme les domaines macroscopiques $\Omega_1^{\text{macro}}, \dots, \Omega_Q^{\text{macro}}$ et les sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$ sont des domaines cubiques (donc de taille identique dans chacune des trois directions spatiales), on considère pour chacun d'entre eux une discrétisation spatiale avec un maillage régulier constitué par des éléments hexaédriques (ou hexaèdres) à 8 nœuds. Le solveur stochastique utilisé pour la résolution du problème aux limites stochastique (2.3) est basé sur la méthode de simulation numérique de MC.

4.2 Étude de convergence de l'approximation spectrale du germe stochastique gaussien en fonction de l'ordre d'approximation

Comme pour l'exemple de validation 2D, nous étudions la convergence vis-à-vis de l'ordre γ du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} . L'étude de convergence est, une fois de plus, effectuée pour la plus petite valeur de longueur de corrélation spatiale, soit $\ell = 50 \mu\text{m}$. On considère un sous-domaine mésoscopique $\Omega^{\text{meso}} =]0, 5 \times 10^{-4}[\times]0, 5 \times 10^{-4}[\times]0, 5 \times 10^{-4}[\text{ en [m] discrétisé en utilisant un maillage éléments finis de $20 \times 20 \times 20 = 8\,000$ éléments hexaèdres de taille uniforme $h^{\text{meso}} = \ell/(n_G/2) = (50 \mu\text{m})/2 = 25 \mu\text{m} = 2.5 \times 10^{-5} \text{ m}$ (avec $n_G = 4$ points d'intégration de Gauss-Legendre par longueur de corrélation spatiale). Les figures 3.28, 3.29 et 3.30 montrent des réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différentes valeurs de l'ordre $\gamma \in \{5, 50, 500\}$ dans des plans de coupe (x_1, x_2) , (x_1, x_3) et (x_2, x_3) , respectivement. Une fois de plus, on observe une quasi-périodicité$

pour $\gamma = 5$ (voir figures 3.28a, 3.29a et 3.30a), et on peut conclure qu'il convient de prendre un ordre $\gamma \geq 50$ pour avoir une bonne représentation spectrale W^γ du champ aléatoire gaussien normalisé W avec une longueur de corrélation spatiale $\ell = 50 \mu\text{m}$ dans un sous-domaine mésoscopique $\Omega^{\text{meso}} =]0, 5 \times 10^{-4}[\times]0, 5 \times 10^{-4}[\times]0, 5 \times 10^{-4}[$ en [m]. Dans la suite, nous retenons la valeur $\gamma = 50$ pour la génération des germes stochastiques (gaussiens) du champ d'élasticité aléatoire (non-gaussien) sur l'ensemble des $Q = 3$ sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \dots, \Omega_Q^{\text{meso}}$.

Afin d'obtenir le champ de déplacement « expérimental » simulé numériquement sur le domaine macroscopique Ω^{macro} avec une résolution mésoscopique, il est nécessaire d'effectuer la même étude de convergence sur l'ordre γ du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique $\Omega^{\text{macro}} =]0, 2 \times 10^{-3}[\times]0, 2 \times 10^{-3}[\times]0, 2 \times 10^{-3}[$ en [m] discrétisé en utilisant un maillage éléments finis de $80 \times 80 \times 80 = 512\,000$ éléments hexaèdres de taille uniforme $h^{\text{meso}} = 25 \mu\text{m} = 2.5 \times 10^{-5}$ m (identique à celle du maillage utilisé pour la discrétisation d'un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso}). Les figures 3.31, 3.32 et 3.33 montrent des réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} pour différentes valeurs de l'ordre $\gamma \in \{25, 250, 2500\}$ dans des plans de coupe (x_1, x_2) , (x_1, x_3) et (x_2, x_3) , respectivement. Une fois de plus, nous observons une quasi-périodicité pour $\gamma = 25$ (voir figures 3.31a, 3.32a et 3.33a), et on peut conclure qu'il convient de prendre un ordre $\gamma \geq 250$ pour avoir une bonne représentation spectrale W^γ du champ aléatoire gaussien normalisé W avec une longueur de corrélation spatiale $\ell = 50 \mu\text{m}$ dans le domaine macroscopique $\Omega^{\text{macro}} =]0, 2 \times 10^{-3}[\times]0, 2 \times 10^{-3}[\times]0, 2 \times 10^{-3}[$ en [m]. Dans la suite, nous retenons la valeur $\gamma = 250$ pour la génération des germes stochastiques (gaussiens) du champ d'élasticité aléatoire (non-gaussien) sur l'ensemble des $Q = 3$ domaines macroscopiques $\Omega_1^{\text{macro}}, \dots, \Omega_Q^{\text{macro}}$.

4.3 Résolution du problème d'optimisation mono-objectif à l'échelle macroscopique

On rappelle que le problème inverse statistique multi-échelle pour l'identification expérimentale de la valeur optimale $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ du paramètre \mathbf{a} dans son ensemble admissible $\mathcal{A}^{\text{macro}}$ et de la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} du paramètre \mathbf{b} dans son ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}}$ a été formulé en deux problèmes d'optimisation qui doivent être résolus successivement (voir section 5.1 du chapitre 2). Dans cette section, nous présentons les résultats du premier problème d'optimisation mono-objectif (2.17) à l'échelle macroscopique qui consiste à minimiser l'indicateur numérique macroscopique $\mathcal{J}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ construit dans chacun des 3 domaines macroscopiques $\Omega_1^{\text{macro}}, \Omega_2^{\text{macro}}, \Omega_3^{\text{macro}}$ afin d'identifier la valeur optimale $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ de \mathbf{a} à l'échelle macroscopique. Pour cet exemple de validation 3D, on considère un maillage éléments finis qui a la même

finesse que celui utilisé pour l'exemple de validation 2D à l'échelle macroscopique, c'est-à-dire un maillage régulier de $25 \times 25 \times 25 = 15\,625$ éléments hexaèdres de taille uniforme $h^{\text{macro}} = 80 \mu\text{m} = 8 \times 10^{-5}$ m. Le problème d'optimisation mono-objectif (2.17) à l'échelle macroscopique a été résolu en utilisant l'algorithme du simplexe de Nelder-Mead.

Les résultats obtenus sont répertoriés dans le tableau 3.8 et montrent que l'erreur relative entre la valeur optimale identifiée $\mathbf{a}^{\text{macro}} = (138.783, 64.355)$ en [GPa] et la valeur expérimentale de référence $\mathbf{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}} = (138.758, 64.377)$ en [GPa] utilisée pour construire la base de données « expérimentales » simulées reste très faible (inférieure à 0.02% et 0.04% pour κ^{macro} et μ^{macro} , respectivement), ce qui permet de valider dans le cadre de l'élasticité linéaire en 3D la méthodologie d'identification proposée pour la résolution du problème d'optimisation mono-objectif (2.17) à l'échelle macroscopique.

TABLEAU 3.8 – Comparaison entre la valeur optimale identifiée $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ et la valeur expérimentale de référence $\mathbf{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$

	κ [GPa]	μ [GPa]
$\mathbf{a}^{\text{macro}}$	138.783	64.355
$\mathbf{a}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$	138.758	64.377
Erreur relative [%]	0.018	0.034

4.4 Résolution du problème d'optimisation multi-objectif à l'échelle mésoscopique

Dans cette section, nous présentons les résultats du second problème d'optimisation multi-objectif (2.18) à l'échelle mésoscopique qui consiste à minimiser simultanément les trois indicateurs numériques $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ construits dans chacun des 3 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \Omega_2^{\text{meso}}, \Omega_3^{\text{meso}}$ en utilisant le paramètre optimal $\mathbf{a}^{\text{macro}} = (138.783, 64.355)$ en [GPa] précédemment identifié à l'échelle macroscopique en section 4.3 afin de pouvoir ensuite identifier la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} de \mathbf{b} à l'échelle mésoscopique. Pour cet exemple de validation 3D, on considère un maillage éléments finis qui a la même finesse que celui utilisé pour l'exemple de validation 2D à l'échelle mésoscopique et dont la taille de maille est fonction de la plus petite longueur de corrélation spatiale, c'est-à-dire un maillage régulier de $20 \times 20 \times 20 = 8\,000$ éléments hexaèdres de taille uniforme $h^{\text{meso}} = \ell / (n_G / 2) = (50 \mu\text{m}) / 2 = 25 \mu\text{m} = 2.5 \times 10^{-5}$ m (avec $n_G = 4$ points d'intégration par longueur de corrélation spatiale) pour chacun des 3 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \Omega_2^{\text{meso}}, \Omega_3^{\text{meso}}$. Comme pour l'exemple de validation 2D, la taille B^{VER} du VER Ω^{VER} est définie en fonction de la longueur de corrélation spatiale ℓ des germes stochastiques du champ aléatoire $[\mathbf{C}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$, telle que

$B^{\text{VER}} = 20 \times \ell = 20 \times 50 \text{ } \mu\text{m} = 1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$. En revanche, contrairement à l'exemple de validation 2D, le problème d'optimisation multi-objectif (2.18) a été résolu uniquement avec l'algorithme itératif de point fixe en utilisant le même critère de convergence sur la norme du résidu entre deux itérations qui doit être inférieure à une tolérance fixée à 10^{-9} et en recherchant la solution du problème d'optimisation multi-objectif (2.18) sur une grille multidimensionnelle de $n_V \times n_V \times n_V \times n_V$ points dans l'ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}} \subset \mathbb{R}^4$. L'algorithme génétique n'a pas été utilisé car le coût numérique était bien trop élevé avec les ressources de calcul disponibles. Le nombre de réalisations indépendantes pour l'estimation statistique des espérances mathématiques dans les indicateurs numériques $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ est fixé à la valeur $N_s = 500$. Le nombre d'évaluations du modèle numérique stochastique requis par l'algorithme itératif de point fixe est donné par $n_{\text{tot}}^{\text{FP}} = 3 n_V N_s \sum_{q=1}^3 n_q$.

Le tableau 3.9 présente les résultats obtenus (en utilisant l'algorithme itératif de point fixe) pour l'ensemble des 3 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \Omega_2^{\text{meso}}, \Omega_3^{\text{meso}}$, à savoir l'ensemble des 3 valeurs identifiées $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}, \mathbf{b}_2^{\text{meso}}, \mathbf{b}_3^{\text{meso}}$ et des 3 nombres d'itérations n_1, n_2, n_3 nécessaires pour atteindre la convergence souhaitée (avec une tolérance fixée à 10^{-9}), ainsi que la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} calculée par la méthode MLE. Comme pour l'exemple de validation 2D, on observe des variations plus importantes entre les valeurs de $\ell_1^{\text{meso}}, \ell_2^{\text{meso}}, \ell_3^{\text{meso}}$ et $\delta_1^{\text{meso}}, \delta_2^{\text{meso}}, \delta_3^{\text{meso}}$ d'un sous-domaine à un autre, ce qui reflète à nouveau le fait que les deux indicateurs numériques mésoscopiques associés $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ dépendent directement des mesures expérimentales de champs sur chaque sous-domaine mésoscopique. Les valeurs identifiées $\underline{\kappa}_1^{\text{meso}}, \underline{\kappa}_2^{\text{meso}}, \underline{\kappa}_3^{\text{meso}}$ et $\underline{\mu}_1^{\text{meso}}, \underline{\mu}_2^{\text{meso}}, \underline{\mu}_3^{\text{meso}}$ étant quasi-identiques pour chacun des 3 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \Omega_2^{\text{meso}}, \Omega_3^{\text{meso}}$, on identifie directement les valeurs optimales globales $\underline{\kappa}^{\text{opt}}$ et $\underline{\mu}^{\text{opt}}$ sans avoir recours à la méthode MLE pour les variables aléatoires \underline{K} et \underline{M} . La figure 3.34 montre les fonctions de densité de probabilité p_D et p_L définies dans la section 5.3 du chapitre 2, associées aux variables aléatoires D et L , respectivement. On obtient finalement la valeur optimale globale $\mathbf{b}^{\text{opt}} = (0.330, 91.236, 150.000, 64.722)$ en $(-, [\mu\text{m}], [\text{GPa}], [\text{GPa}])$ avec des erreurs relatives inférieures à 4% pour $\delta^{\text{opt}}, \ell^{\text{opt}}, \underline{\kappa}^{\text{opt}}$ et $\underline{\mu}^{\text{opt}}$ par rapport à la valeur expérimentale de référence $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = (0.32, 80, 145, 67.3)$ en $(-, [\mu\text{m}], [\text{GPa}], [\text{GPa}])$ utilisée pour construire la base de données « expérimentales » simulées, ce qui permet de valider dans le cadre de l'élasticité linéaire en 3D la méthodologie d'identification proposée pour la résolution du problème d'optimisation multi-objectif (2.18) à l'échelle mésoscopique.

Enfin, en terme d'efficacité de calcul, on peut voir dans le tableau 3.9 que les nombres d'itérations n_1, n_2, n_3 nécessaires pour atteindre la convergence souhaitée sont relativement faibles (inférieurs ou égaux à 4) sur chacun des 3 sous-domaines mésoscopiques $\Omega_1^{\text{meso}}, \Omega_2^{\text{meso}}, \Omega_3^{\text{meso}}$, conduisant à un nombre d'appels au modèle numérique déterministe à l'échelle mésoscopique de 150 000.

TABLEAU 3.9 – Algorithme itératif de point fixe : comparaison entre la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} obtenue à partir des 3 valeurs identifiées $\mathbf{b}_1^{\text{meso}}$, $\mathbf{b}_2^{\text{meso}}$, $\mathbf{b}_3^{\text{meso}}$ pour chacun des 3 sous-domaines mésoscopiques Ω_1^{meso} , Ω_2^{meso} , Ω_3^{meso} , et la valeur expérimentale de référence $\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$

	δ	ℓ [μm]	$\underline{\kappa}$ [GPa]	$\underline{\mu}$ [GPa]	n_q
$\mathbf{b}_1^{\text{meso}}$	0.311	65.556	150.000	64.722	3
$\mathbf{b}_2^{\text{meso}}$	0.367	88.889	150.000	64.722	4
$\mathbf{b}_3^{\text{meso}}$	0.311	81.111	150.000	64.722	3
\mathbf{b}^{opt}	0.330	77.271	150.000	64.722	-
$\mathbf{b}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$	0.320	80.000	145.000	67.300	-
Erreur relative [%]	3.009	3.411	3.448	3.831	-
$n_{\text{tot}}^{\text{FP}}$	150 000				

5 Bilan

Dans ce troisième chapitre, nous avons tout d'abord proposé une modification de la méthode d'approximation de Shinozuka pour la génération des germes stochastiques gaussiens dans la construction du modèle stochastique *prior* du champ d'élasticité aléatoire non-gaussien. Les améliorations présentées permettent d'une part de gommer la quasi-périodicité des germes stochastiques (champs aléatoires) gaussiens dans la représentation spectrale classique de Shinozuka lorsque les longueurs de corrélation spatiale du champ stochastique gaussien sont très petites devant la taille du (des) sous-domaine(s) mésoscopique(s) considéré(s), et d'autre part de réduire considérablement le coût numérique tout en gardant la même précision. Par la suite, nous avons présenté deux exemples de validation numérique, dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D sous l'hypothèse des contraintes planes et en 3D sur des matériaux virtuels fictifs, de la méthodologie d'identification multi-échelle des champs aléatoires de propriétés élastiques présentée au chapitre 2. Afin de s'assurer que les problèmes d'optimisation mono- ou multi-objectif sont bien posés et correctement résolus, des études de convergence et des analyses de sensibilité des indicateurs numériques du problème d'optimisation multi-objectif vis-à-vis des hyperparamètres à identifier ont été menées au préalable. Les résultats d'identification des paramètres du modèle déterministe à l'échelle macroscopique et des hyperparamètres du modèle stochastique *prior* à l'échelle mésoscopique pour ces deux exemples de validation en élasticité linéaire 2D contraintes planes et 3D, pour lesquels les valeurs expérimentales de référence sont connues *a priori*, viennent confirmer l'efficacité, la précision et la robustesse de la méthodologie d'identification améliorée, ce qui nous permet de l'appliquer par la suite au chapitre 4 à un matériau biologique réel (de l'os cortical de fémur de bœuf) avec de vraies mesures expérimentales de champs. Enfin, l'algorithme

itératif de point fixe et l'utilisation d'un réseau de neurones artificiels introduits dans ce travail pour la résolution du problème d'optimisation multi-objectif permettent un gain considérable en terme de coût de calcul par rapport à l'algorithme génétique utilisé dans [Nguyen et al. 2015].

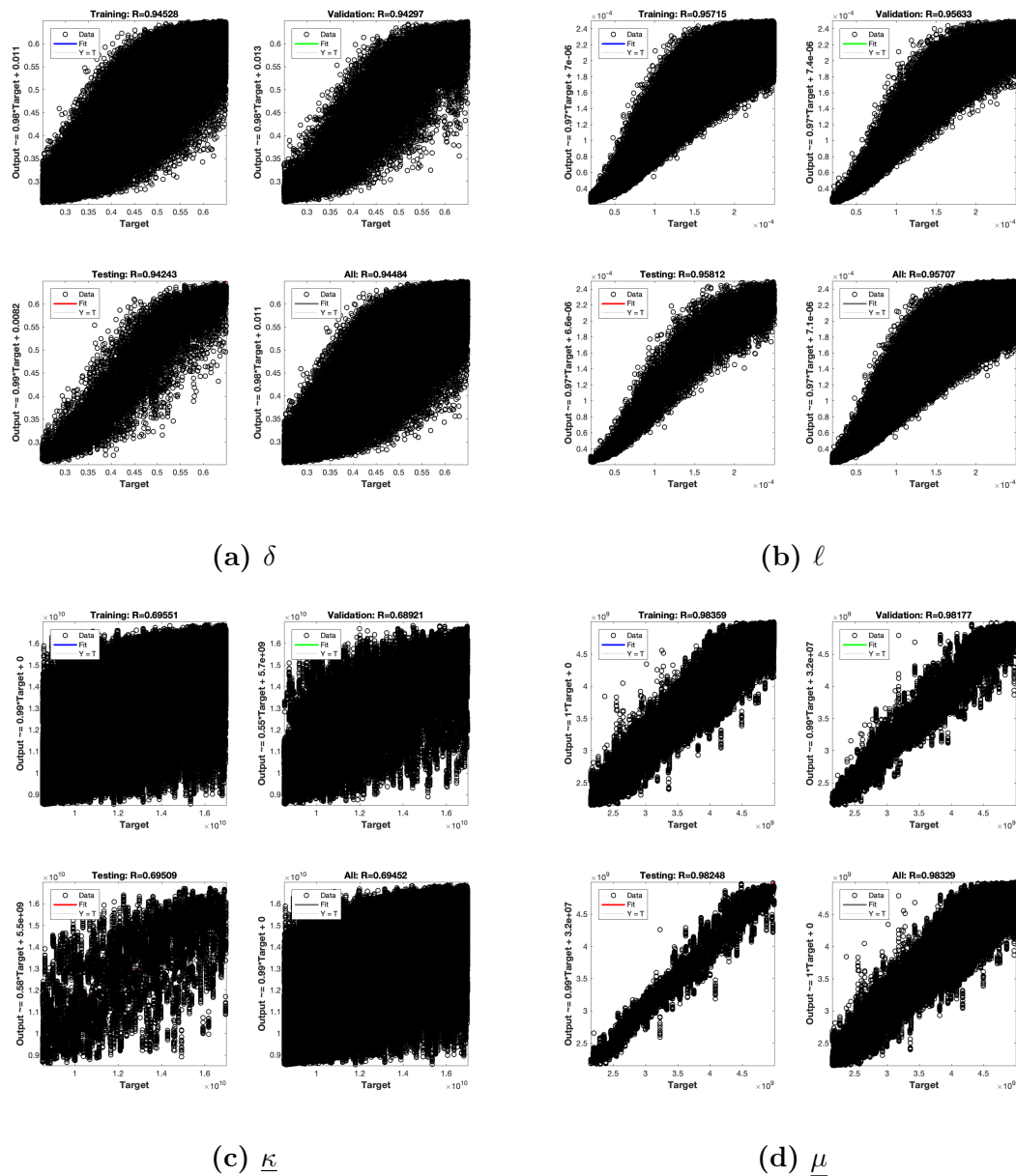


FIGURE 3.23 – Réseau de neurones à 2 couches : courbes de régression linéaire entre les sorties du réseau et les cibles correspondantes pour chacun des hyperparamètres δ , ℓ , κ et $\underline{\mu}$, pour les ensembles de données d’entraînement (en haut à gauche), de validation (en haut à droite), de test (en bas à gauche) et complet (en bas à droite). Dans chaque graphe, les sorties du réseau et les cibles sont représentés par des cercles, la correspondance parfaite (sorties exactement égales aux cibles) est représentée par une ligne en pointillé, et la meilleure correspondance linéaire (régression linéaire entre sorties et cibles) est représentée par une ligne continue pour les ensembles de données d’entraînement (ligne bleue), de validation (ligne verte), de test (ligne rouge) et complet (ligne grise). Le coefficient de régression R est donné en haut de chaque graphe

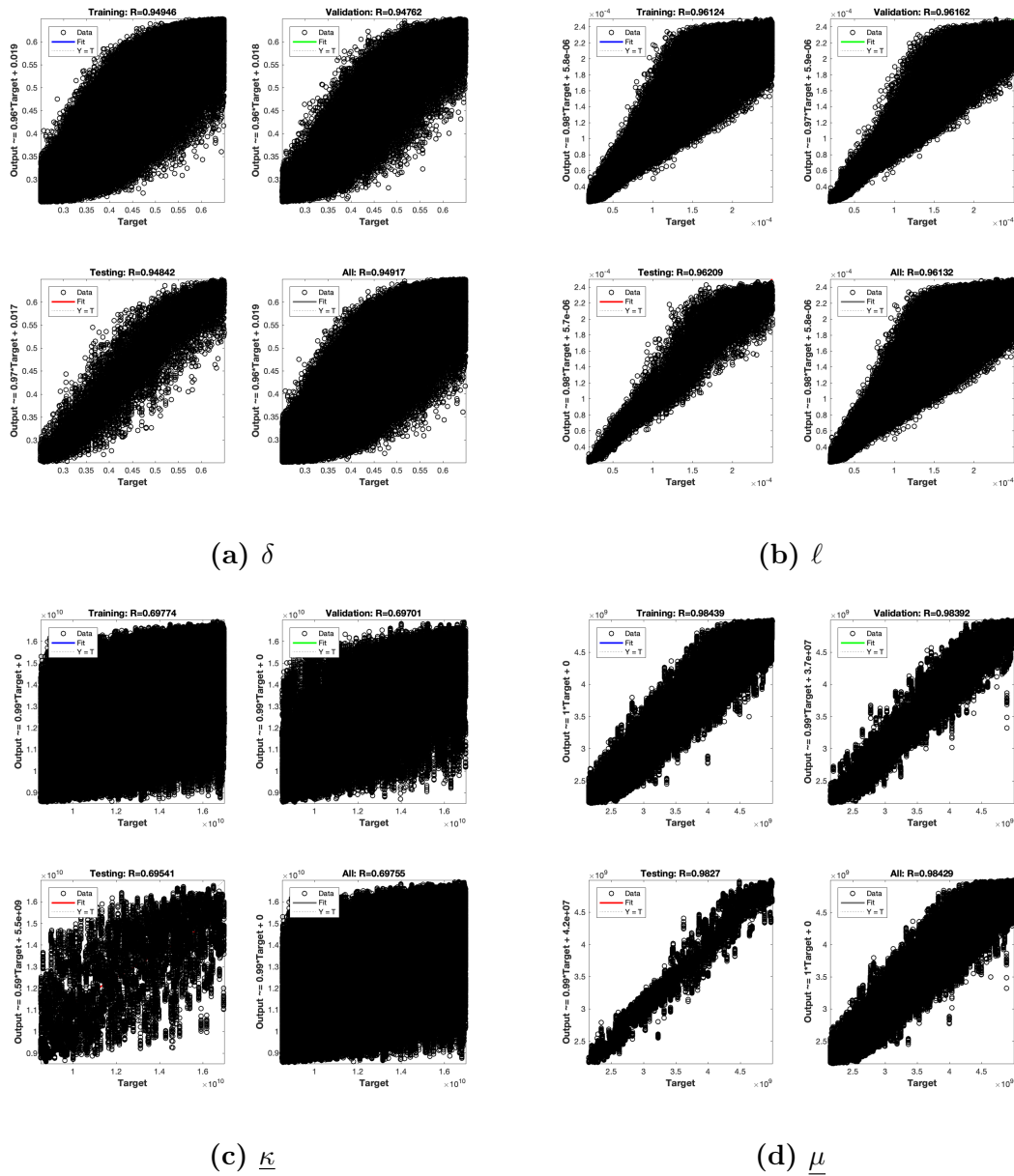


FIGURE 3.24 – Réseau de neurones à 3 couches : courbes de régression linéaire entre les sorties du réseau et les cibles correspondantes pour chacun des hyperparamètres δ , ℓ , κ et μ , pour les ensembles de données d'entraînement (en haut à gauche), de validation (en haut à droite), de test (en bas à gauche) et complet (en bas à droite). Dans chaque graphe, les sorties du réseau et les cibles sont représentés par des cercles, la correspondance parfaite (sorties exactement égales aux cibles) est représentée par une ligne en pointillé, et la meilleure correspondance linéaire (régression linéaire entre sorties et cibles) est représentée par une ligne continue pour les ensembles de données d'entraînement (ligne bleue), de validation (ligne verte), de test (ligne rouge) et complet (ligne grise). Le coefficient de régression R est donné en haut de chaque graphe

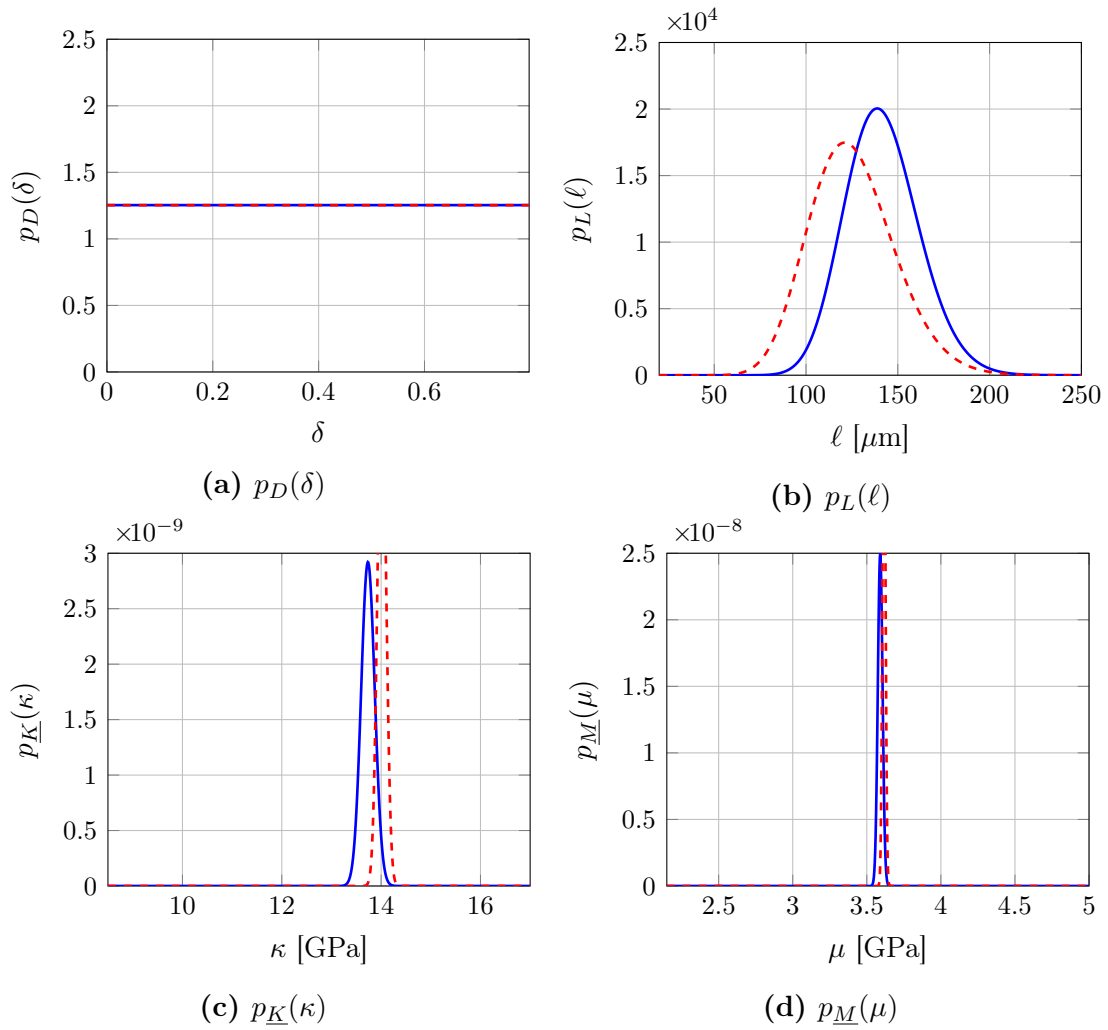
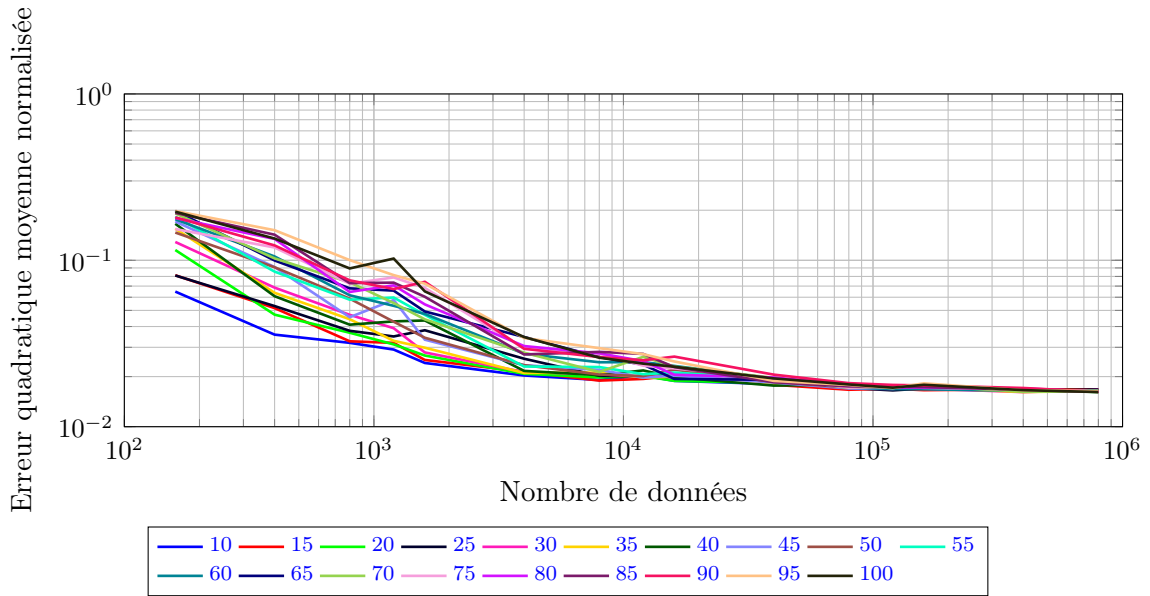
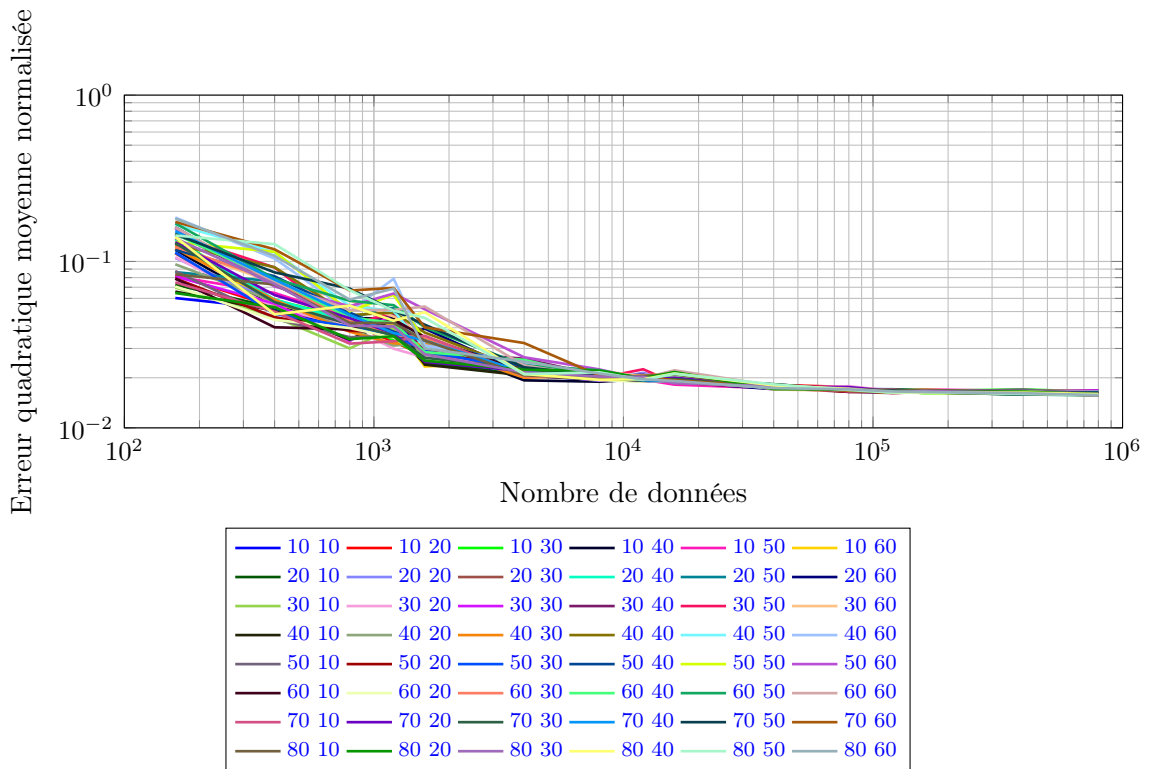


FIGURE 3.25 – Réseaux de neurones artificiels à 2 couches (courbes bleues en trait plein) et à 3 couches (courbes rouges en pointillé) : fonctions de densité de probabilité p_D , p_L , $p_{\underline{K}}$ et $p_{\underline{M}}$ des variables aléatoires D , L , \underline{K} et \underline{M} , respectivement



(a) 2 couches, avec un nombre de neurones cachés variant de 10 à 100 dans la couche cachée



(b) 3 couches, avec un nombre de neurones cachés variant de 10 à 80 dans la première couche cachée et de 10 à 60 pour la seconde couche cachée

FIGURE 3.26 – Réseaux de neurones artificiels à (a) 2 couches et (b) 3 couches : évolutions de l'erreur quadratique moyenne normalisée sur le sous-ensemble de données de test en fonction du nombre de données dans les sous-ensembles d'entraînement et de validation pour l'ensemble des 19 configurations du réseau à 2 couches et des 48 configurations du réseau à 3 couches

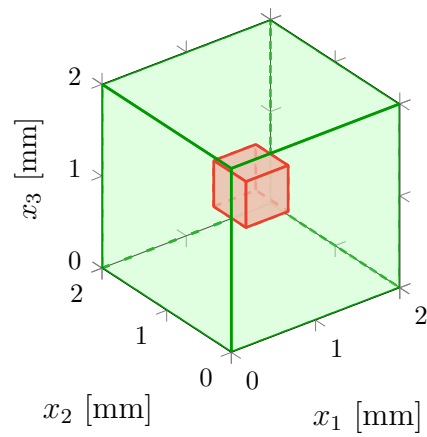


FIGURE 3.27 – Illustration de l'échantillon occupant le domaine macroscopique cubique Ω^{macro} (en vert) qui contient un sous-domaine mésoscopique cubique Ω^{meso} (en rouge) pour la validation numérique en élasticité linéaire 3D

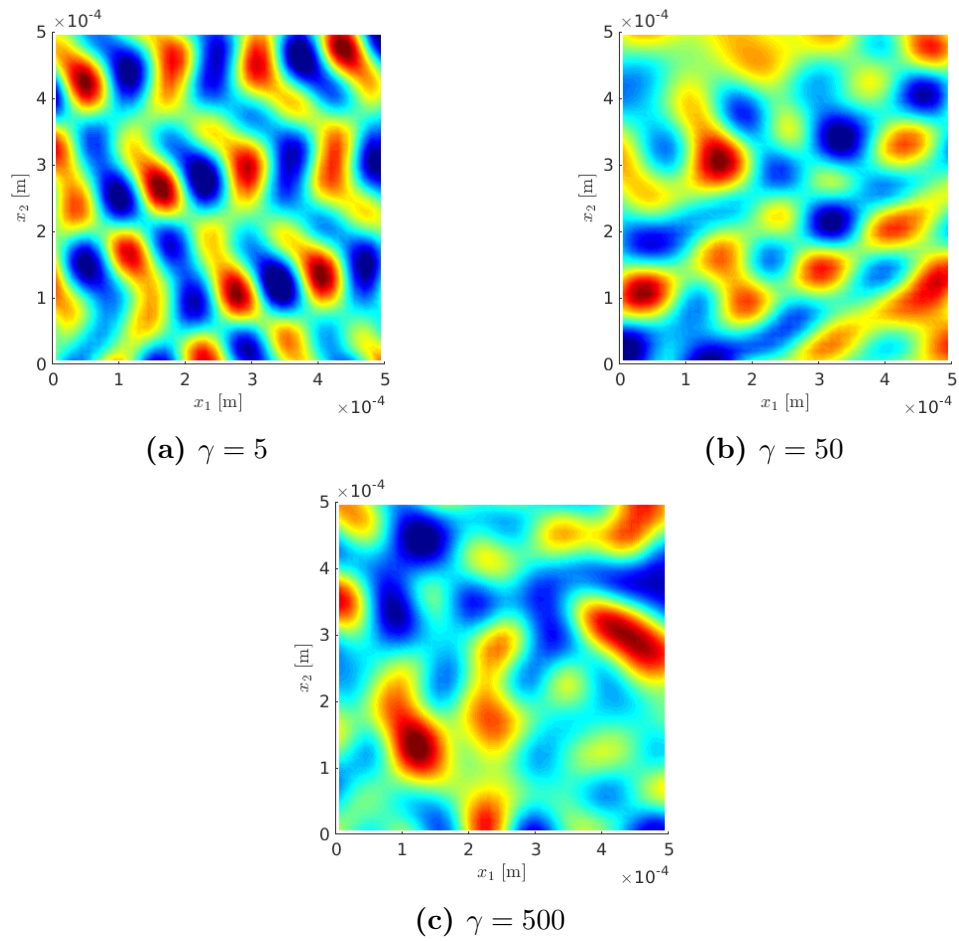


FIGURE 3.28 – Plan de coupe (x_1, x_2) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différents ordres γ

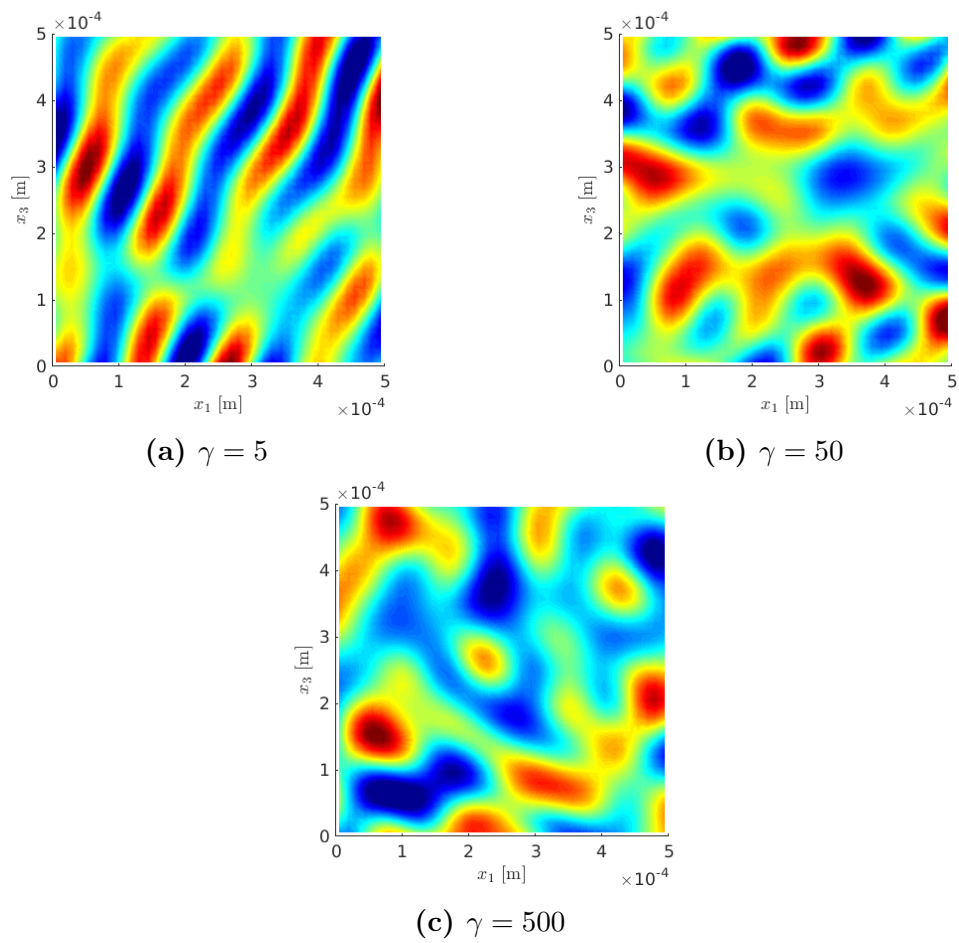


FIGURE 3.29 – Plan de coupe (x_1, x_3) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l’approximation spectrale modifiée (3.3) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différents ordres γ

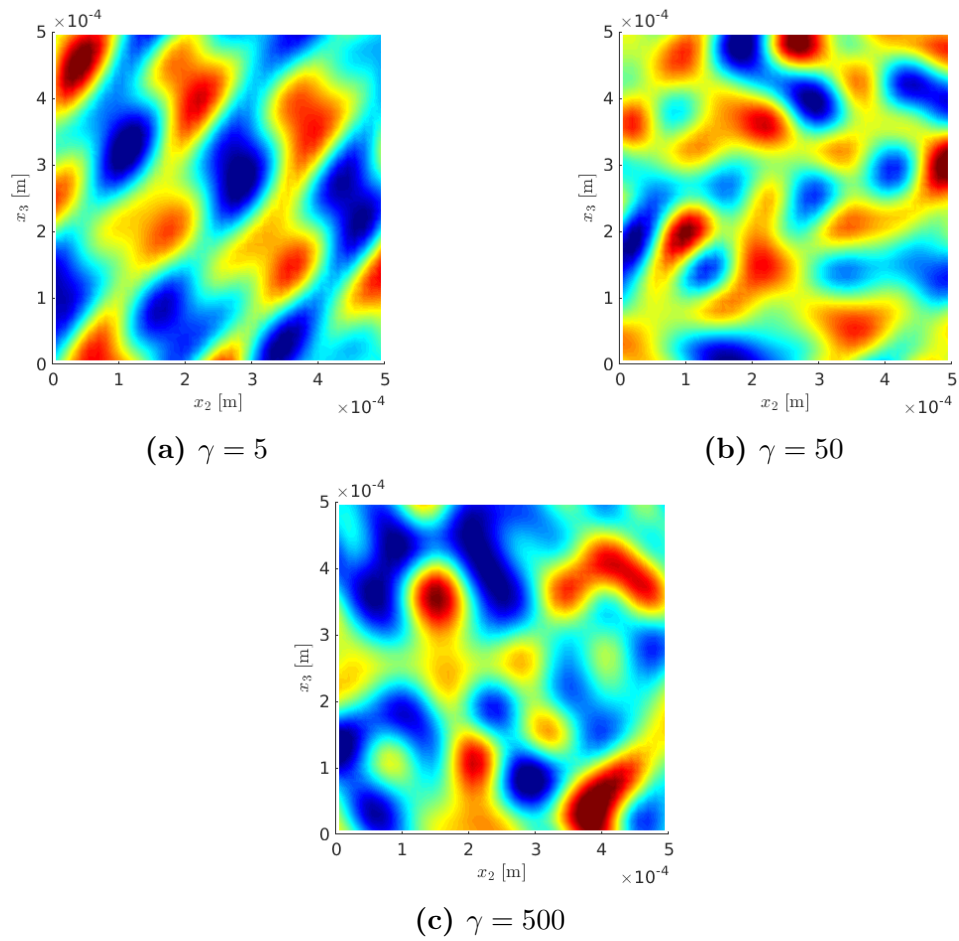


FIGURE 3.30 – Plan de coupe (x_2, x_3) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différents ordres γ

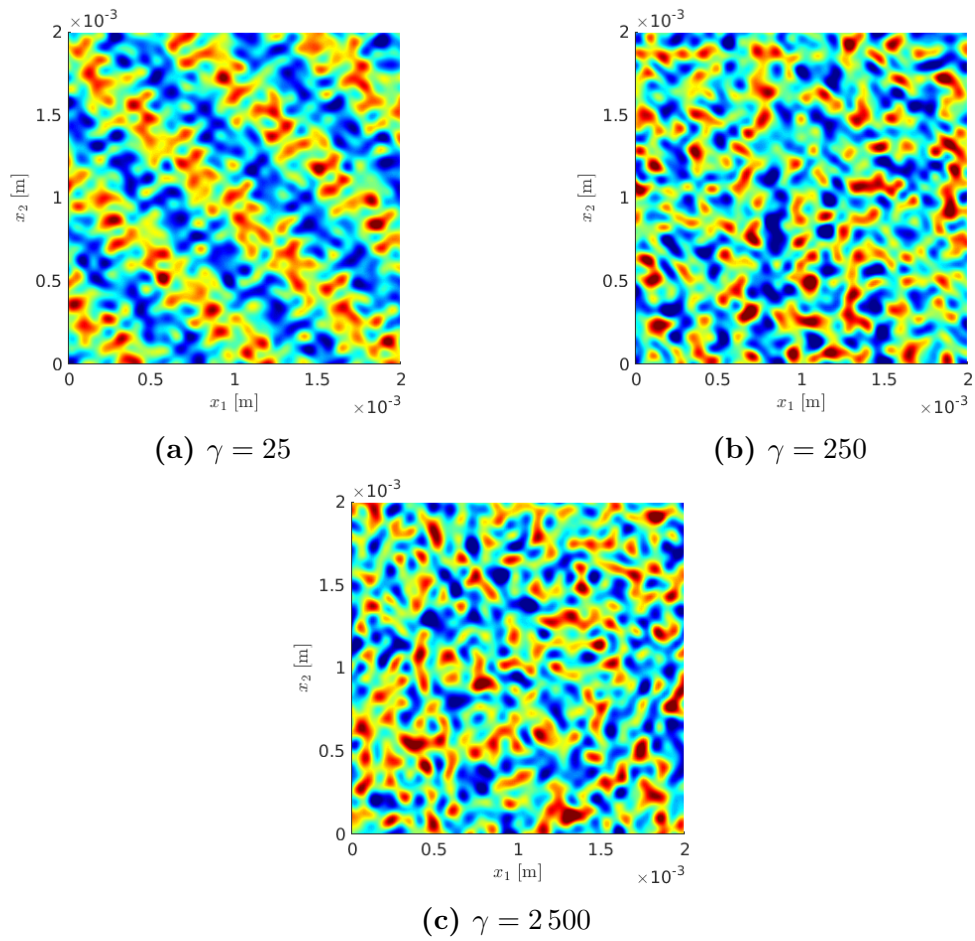


FIGURE 3.31 – Plan de coupe (x_1, x_2) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} pour différents ordres γ

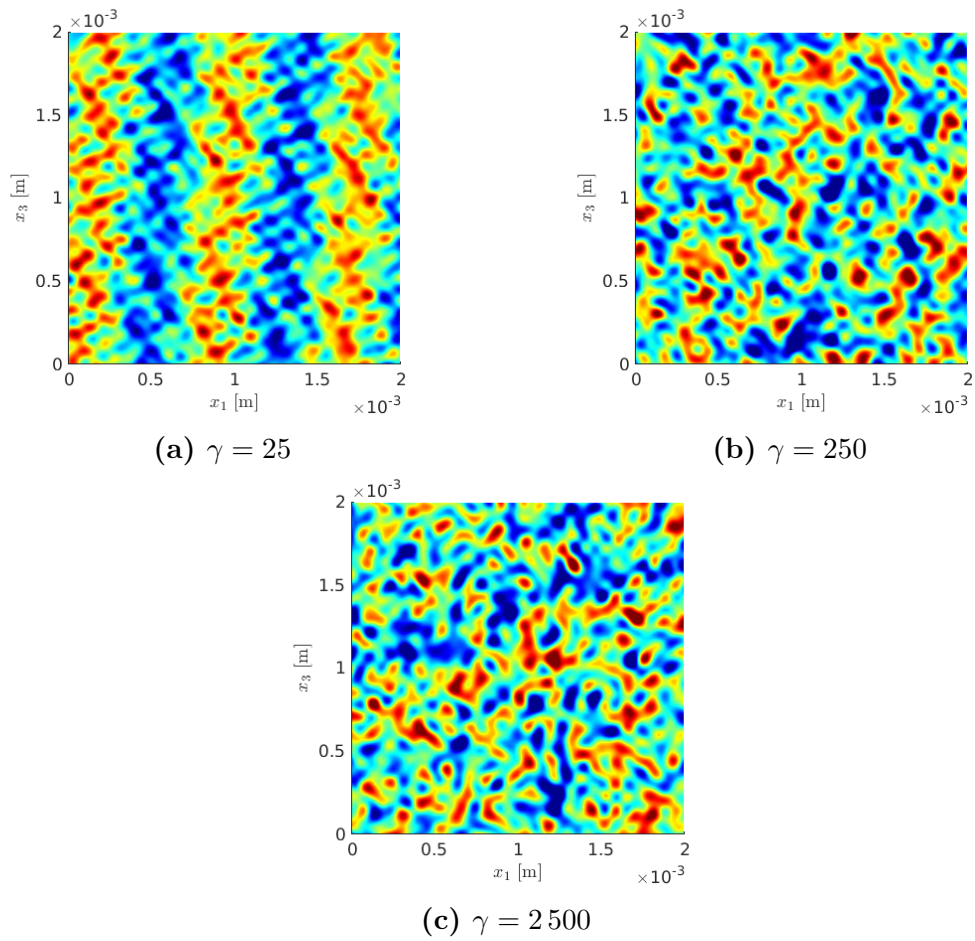


FIGURE 3.32 – Plan de coupe (x_1, x_3) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} pour différents ordres γ

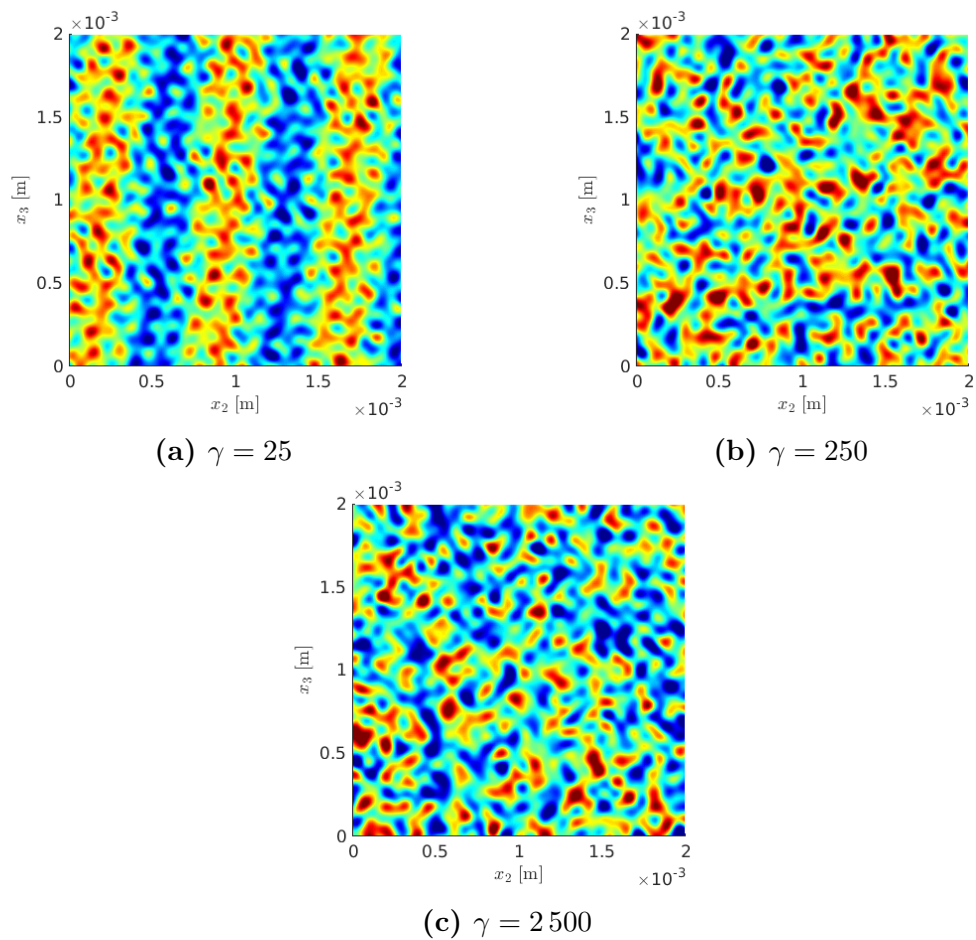


FIGURE 3.33 – Plan de coupe (x_2, x_3) : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} pour différents ordres γ

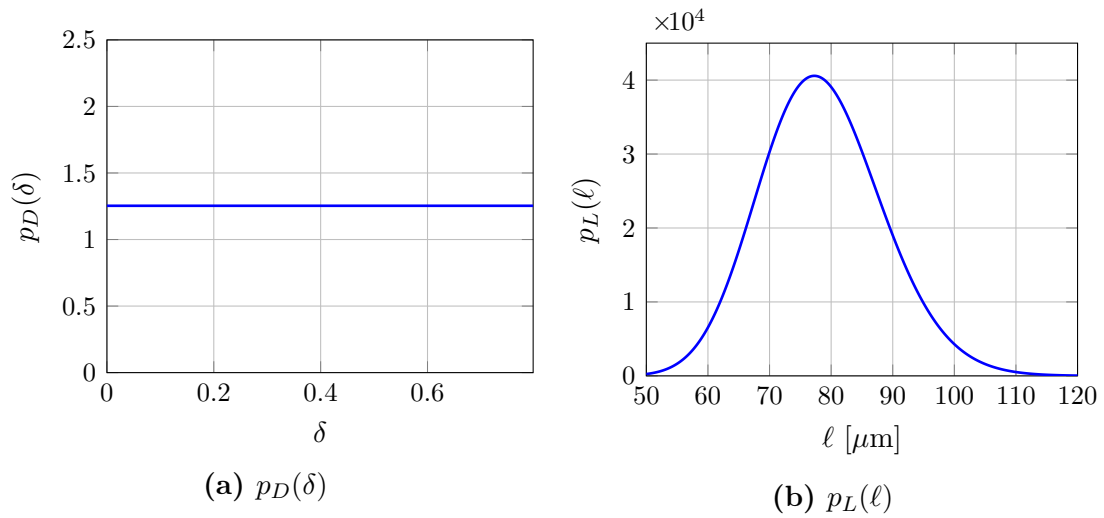


FIGURE 3.34 – Algorithme itératif de point fixe : fonctions de densité de probabilité p_D et p_L des variables aléatoires D et L , respectivement

Chapitre 4

Application numérique de la
méthode d'identification
multi-échelle à l'os cortical de fémur
de bœuf en élasticité linéaire 2D

Sommaire

1	Introduction	131
2	Étude de la convergence de l'approximation spectrale du germe stochastique gaussien en fonction de l'ordre d'approximation	135
3	Résolution du problème d'optimisation mono-objectif à l'échelle macroscopique	136
4	Résolution du problème d'optimisation multi-objectif à l'échelle mésoscopique	137
5	Bilan	139

1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, nous présentons une application numérique de la méthodologie d'identification multi-échelle développée au chapitre 2 dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire en 2D sous l'hypothèse des contraintes planes en utilisant une base de données expérimentales réelles constituée de mesures optiques multi-échelles 2D de champs de déplacement obtenues par une méthode de corrélation d'images numériques (DIC) 2D sur un seul échantillon constitué par un matériau biologique réel, à savoir de l'os cortical provenant d'un fémur de bœuf. La configuration expérimentale multi-échelle correspond à celle décrite dans la section 3 du chapitre 2 et déjà considérée dans les exemples de validation numérique 2D et 3D présentés dans les sections 3 et 4 du chapitre 3. On rappelle qu'afin de surmonter les difficultés liées à l'acquisition des mesures optiques expérimentales multi-échelles de champs qui sont principalement dues à la nature complexe de la microstructure (hétérogène, anisotrope et aléatoire) et à la nécessité d'obtenir simultanément des mesures de champs à deux échelles différentes (macroscopique et mésoscopique), un protocole expérimental spécifique (comprenant la préparation de l'échantillon, le développement d'un banc de mesure, le système d'acquisition d'images numériques et la méthode DIC) a été mis en place dans [Nguyen et al. 2016]. Nous rappelons ici brièvement quelques points importants concernant la configuration expérimentale multi-échelle.

L'unique échantillon testé à l'échelle macroscopique est préparé à partir d'os cortical bovin pour avoir une forme cubique de dimensions $1 \times 1 \times 1 \text{ cm}^3$. Même si un tel tissu biologique est souvent considéré et modélisé comme un milieu homogène et déterministe avec un comportement linéaire élastique isotrope transverse à l'échelle macroscopique ($\geq 10 \text{ mm}$), sa microstructure à l'échelle mésoscopique (de $500 \mu\text{m}$ à 10 mm) contient des ostéons disposés de manière aléatoire avec des cavités de résorption (lacunes), qui sont les principaux types d'inclusions/hétérogénéités, immergées dans une matrice constituée de lamelles interstitielles circonférentielles entourant les canaux de Havers. Par conséquent, il s'agit d'un matériau composite (hétérogène) anisotrope avec une structure hiérarchique complexe, qui peut être considéré et modélisé comme un milieu linéaire élastique aléatoire à l'échelle mésoscopique, et est donc parfaitement adapté à l'application expérimentale de la méthodologie d'identification multi-échelle développée dans ce travail de recherche. L'unique échantillon est encastré sur sa face inférieure et chargé sous compression uni-axiale verticale sur sa face supérieure avec une force résultante maximale de 9 kN afin de préserver un comportement linéaire du matériau élastique.

Les mesures expérimentales multi-échelles ont été réalisées au cours de travaux précédents dans [Nguyen et al. 2016] et déjà utilisées dans [Nguyen et al. 2015] pour l'identification des propriétés élastiques apparentes de l'os cortical à l'échelle mésoscopique. Ces mesures de champs cinématiques ont été effectuées simultanément aux échelles macroscopique et mésoscopique sur une face 2D $\Omega^{\text{macro}} =]0, 10^{-2}[\times$

$]0, 10^{-2}[\subset \mathbb{R}^2$ en [m] (de dimensions $1 \times 1 \text{ cm}^2$) de l'échantillon 3D cubique qui est perpendiculaire à l'axe principal de symétrie de rotation noté x_3 (correspondant à la direction longitudinale moyenne des canaux de Havers des ostéons de l'os cortical) et correspond à un plan d'isotropie noté (x_1, x_2) . On rappelle qu'une seule caméra équipée d'un seul objectif numérique optique de microscope avec des capteurs d'imagerie CCD est installée devant la machine d'essai et réglée à la résolution mésoscopique. En parcourant horizontalement et verticalement tout le domaine macroscopique carré Ω^{macro} (correspondant à la face éclairée de l'échantillon cubique), elle effectue l'acquisition de 90 images optiques au cours de l'essai mécanique sur des sous-domaines mésoscopiques carrés de dimensions $1 \times 1 \text{ mm}^2$ avec une grille de discrétisation régulière de $100 \times 100 = 10\,000$ points (soit $99 \times 99 = 9\,801$ éléments quadrangles), conduisant à une résolution spatiale mésoscopique $h^{\text{meso}} \approx 10.10 \mu\text{m} \approx 1.010 \times 10^{-5} \text{ m}$. Cependant, seule l'image numéro 42, qui correspond à un sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} situé proche du centre de la face observée de l'échantillon cubique (afin de limiter les effets de bord), est choisie pour constituer la base de données expérimentales à l'échelle mésoscopique. En effet, à partir des images prises avant et après application du chargement et à l'aide de la méthode DIC, on peut reconstruire le champ de déplacement expérimental $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ à l'échelle mésoscopique et en déduire le champ des déformations linéarisé associé $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ à l'échelle mésoscopique sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} . Par ailleurs, en utilisant un logiciel de traitement d'images, on peut regrouper les 90 images obtenues à l'échelle mésoscopique afin de reconstruire l'image correspondante à l'échelle macroscopique sur toute la face observée (correspondant au domaine macroscopique) Ω^{macro} avec une grille de discrétisation régulière de $10 \times 10 = 100$ points (soit $9 \times 9 = 81$ éléments quadrangles), conduisant à une résolution spatiale macroscopique $h^{\text{macro}} \approx 1.111 \text{ mm} \approx 1.111 \times 10^{-3} \text{ m}$. On obtient alors le champ de déplacement expérimental $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ et le champ des déformations linéarisé associé $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ à l'échelle macroscopique sur le domaine macroscopique Ω^{macro} . De plus, afin de réduire les bruits de mesure (induits par la technique de mouchetis, l'éclairage de la face 2D observée, le système d'acquisition d'images optiques, etc.), un filtre spatial gaussien classiquement utilisé dans le traitement d'images numériques a été appliqué pour lisser les champs de déplacement expérimentaux $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}} = (u_{\text{exp},1}^{\text{macro}}, u_{\text{exp},2}^{\text{macro}})$ et $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}} = (u_{\text{exp},1}^{\text{meso}}, u_{\text{exp},2}^{\text{meso}})$ mesurés respectivement à l'échelle macroscopique et à l'échelle mésoscopique. Les figures 4.1 et 4.2 représentent les deux composantes du champ de déplacement expérimental macroscopique $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ sur le domaine macroscopique Ω^{macro} et celles du champ de déplacement expérimental mésoscopique $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} , respectivement, avant et après application du filtre spatial gaussien.

Conformément à la configuration expérimentale et aux mesures multi-échelles réalisées, les modèles numériques déterministe et stochastique utilisés aux échelles macroscopique et mésoscopique sont les mêmes que ceux utilisés pour l'exemple de validation numérique en 2D présenté à la section 3 dans le cadre de l'élasticité linéaire

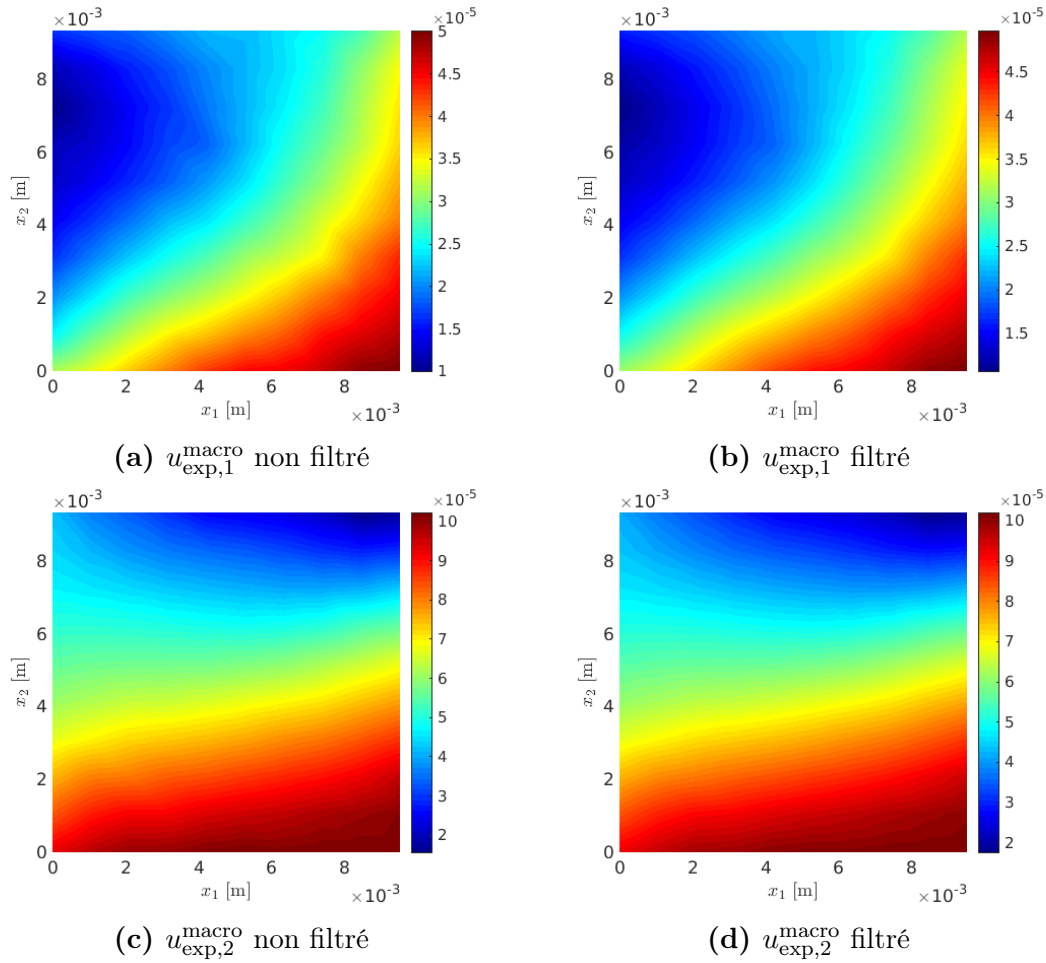


FIGURE 4.1 – Composantes $u_{\text{exp},1}^{\text{macro}}$ (en haut) et $u_{\text{exp},2}^{\text{macro}}$ (en bas) du champ de déplacement expérimental macroscopique $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{macro}}$ sur le domaine macroscopique Ω^{macro} avant (à gauche) et après (à droite) application du filtre spatial gaussien

2D en contraintes planes dans le plan d'isotropie (x_1, x_2) . A l'échelle macroscopique, les propriétés mécaniques (élastiques) du matériau sont représentées par la matrice d'élasticité isotrope homogène déterministe $[\mathbf{C}_{2\text{D}}^{\text{macro}}(\mathbf{a})]$ qui dépend du paramètre à valeurs vectorielles $\mathbf{a} = (\kappa_T, \mu_T)$ avec deux composantes algébriquement indépendantes à identifier, correspondant au module d'élasticité isostatique transverse macroscopique κ_T et au module de cisaillement transverse macroscopique μ_T dans le plan d'isotropie (x_1, x_2) . A l'échelle mésoscopique, les propriétés mécaniques (élastiques) du matériau sont représentées par le modèle stochastique *prior* du champ de souplesse aléatoire à valeurs matricielles $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$ (resp. du champ d'élasticité aléatoire à valeurs matricielles $[\mathbf{C}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$), qui présente des fluctuations statistiques anisotropes autour de la matrice de souplesse moyenne $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{meso}}]$ (resp. de la matrice d'élasticité moyenne $[\mathbf{C}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\underline{\mathbf{c}})]$) appartenant à la même classe de symétrie (isotrope) que le modèle déterministe à l'échelle macroscopique. On rappelle que le modèle stochastique

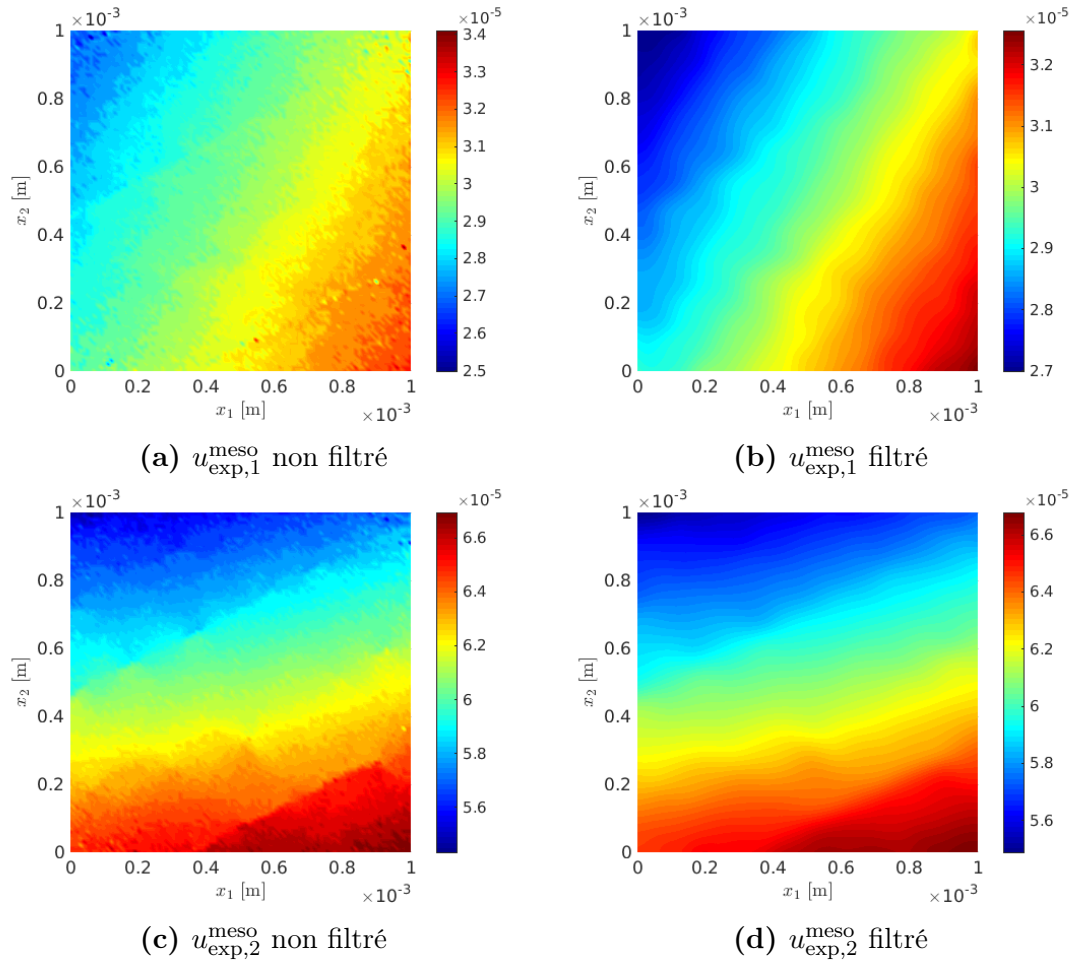


FIGURE 4.2 – Composantes $u_{\text{exp},1}^{\text{meso}}$ (en haut) et $u_{\text{exp},2}^{\text{meso}}$ (en bas) du champ de déplacement expérimental mésoscopique $\mathbf{u}_{\text{exp}}^{\text{meso}}$ sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} avant (à gauche) et après (à droite) application du filtre spatial gaussien

prior de $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$ (resp. de $[\mathbf{C}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$) est alors paramétré par l'hyperparamètre à valeurs vectorielles $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\kappa}_T, \underline{\mu}_T)$ avec quatre composantes algébriquement indépendantes à identifier, correspondant au paramètre de dispersion δ contrôlant le niveau des fluctuations statistiques de $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$ (resp. de $[\mathbf{C}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$) autour de sa valeur moyenne $[\underline{\mathbf{S}}_{2\text{D}}^{\text{meso}}]$ (resp. $[\underline{\mathbf{C}}_{2\text{D}}^{\text{meso}}]$), à la longueur de corrélation spatiale ℓ caractérisant la structure de corrélation spatiale du germe stochastique (gaussien) W du champ aléatoire (non-gaussien) $[\mathbf{S}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$ (resp. $[\mathbf{C}_{2\text{D}}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$) et supposée être identique dans chaque direction spatiale (i.e. $\ell = \ell_1 = \ell_2$) pour rester cohérent avec le modèle effectif isotrope à l'échelle macroscopique, au module d'élasticité isostatique transverse moyen $\underline{\kappa}_T$ et au module de cisaillement transverse moyen $\underline{\mu}_T$ à l'échelle mésoscopique.

L'hyperparamètre $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\kappa}, \underline{\mu})$ est recherché dans un ensemble admissible réduit

$\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}} \subset \mathcal{B}^{\text{meso}}$ construit à partir des informations existantes dans la littérature tel que $\delta \in [0.30, 0.65]$, $\ell \in [50, 100] \mu\text{m}$, $\underline{\kappa} \in [9.5, 11] \text{ GPa}$ et $\underline{\mu} \in [3.5, 5.0] \text{ GPa}$, à la place de l'ensemble admissible complet $\mathcal{B}^{\text{meso}} =]0, \delta_{\text{sup}}[\times]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ avec $\delta_{\text{sup}} = \sqrt{(n+1)/(n+5)} = \sqrt{7/11} \approx 0.7977 < 1$ (avec $n = 6$ en élasticité linéaire). Comme pour l'exemple de validation 2D, cet ensemble admissible réduit $\mathcal{B}_{\text{ad}}^{\text{meso}}$ est discrétisé en $n_V = 10$ points équidistants dans chaque dimension sur lesquels nous évaluerons et comparerons les valeurs des trois indicateurs numériques $\mathcal{J}_{\delta}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_{\ell}^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ définis dans la section 4 du chapitre 2.

La méthode des éléments finis est utilisée pour la discrétisation spatiale et la résolution numérique des problèmes aux limites elliptiques déterministe et stochastique définis respectivement par (2.1) sur le domaine macroscopique Ω^{macro} et (2.3) sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} . Comme le domaine macroscopique Ω^{macro} et le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} sont des domaines carrés (donc de taille identique dans chacune des deux directions spatiales), on considère pour les deux une discrétisation spatiale avec un maillage régulier constitué par des éléments quadrangles à 4 nœuds pour rester cohérent avec les grilles de discrétisation utilisées pour l'acquisition des données expérimentales. Le solveur stochastique utilisé pour la résolution du problème aux limites stochastique (2.3) est basé sur la méthode de simulation numérique de MC.

2 Étude de la convergence de l'approximation spectrale du germe stochastique gaussien en fonction de l'ordre d'approximation

Comme pour les exemples de validation, une étude de convergence vis-à-vis de l'ordre γ du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} avec la plus petite valeur de longueur de corrélation spatiale dans l'espace admissible réduit, c'est-à-dire $\ell = 50 \mu\text{m}$ dans ce cas d'application 2D. On rappelle que le sous-domaine mésoscopique considéré $\Omega^{\text{meso}} =]0, 10^{-3}[\times]0, 10^{-3}[$ en [m] est discrétisé en utilisant un maillage éléments finis de $99 \times 99 = 9801$ éléments quadrangles de taille uniforme $h^{\text{meso}} \approx 10.10 \mu\text{m} \approx 1.010 \times 10^{-5} \text{ m}$. Les figures 4.3a, 4.3b et 4.3c montre des réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différentes valeurs de l'ordre $\gamma \in \{5, 50, 500\}$. Ainsi, on peut conclure à partir de ces résultats qu'il convient de prendre un ordre d'approximation $\gamma \geq 50$ pour avoir une bonne représentation spectrale W^γ du champ aléatoire gaussien normalisé W avec une longueur de corrélation spatiale $\ell = 50 \mu\text{m}$ dans un sous-domaine mésoscopique $\Omega^{\text{meso}} =]0, 10^{-3}[\times]0, 10^{-3}[$ en [m]. Dans la suite, nous retenons la valeur $\gamma = 50$ pour

la génération des germes stochastiques (gaussiens) du champ d'élasticité aléatoire (non-gaussien) sur les sous-domaines mésoscopiques Ω^{meso} .

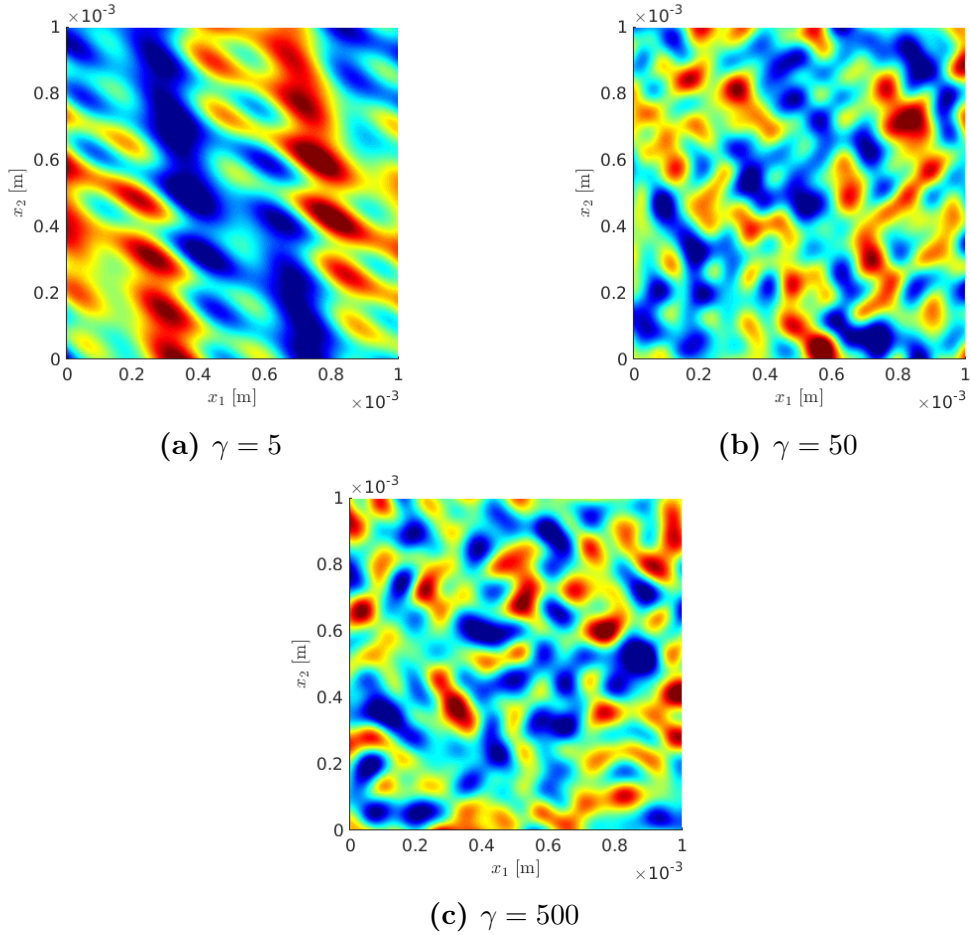


FIGURE 4.3 – Os cortical : réalisations du champ aléatoire W^γ simulé numériquement à partir de l'approximation spectrale modifiée (3.3) sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} pour différents ordres γ

3 Résolution du problème d'optimisation mono-objectif à l'échelle macroscopique

Dans cette section, nous présentons les résultats du premier problème d'optimisation mono-objectif (2.17) à l'échelle macroscopique qui consiste à minimiser l'indicateur numérique macroscopique $\mathcal{J}^{\text{macro}}(\mathbf{a})$ construit dans le domaine macroscopique Ω^{macro} afin d'identifier la valeur optimale $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ de \mathbf{a} à l'échelle macroscopique. On rappelle que le domaine macroscopique $\Omega^{\text{macro}} =]0, 10^{-2}[\times]0, 10^{-2}[$ en [m] est

discrétisé avec un maillage régulier de $9 \times 9 = 81$ éléments quadrangles de taille uniforme $h^{\text{macro}} = 1.111 \text{ mm} = 1.111 \times 10^{-3} \text{ m}$. Le problème d'optimisation mono-objectif (2.17) à l'échelle macroscopique a été résolu en utilisant l'algorithme du simplexe de Nelder-Mead.

Le tableau 4.1 donne la valeur optimale identifiée $\mathbf{a}^{\text{macro}} = (11.335, 4.781)$ en [GPa], correspondant à un module d'élasticité isostatique transverse macroscopique $\kappa_T^{\text{macro}} = 11.335 \text{ GPa}$ et à un module de cisaillement transverse macroscopique $\mu_T^{\text{macro}} = 4.781 \text{ GPa}$, ou de manière équivalente, à un module d'Young transverse macroscopique $E_T^{\text{macro}} = 12.575 \text{ GPa}$ et à un module de cisaillement macroscopique $\nu_T^{\text{macro}} = 0.3151$, qui sont cohérentes et réalistes avec les valeurs existantes que nous pouvons trouver dans la littérature pour ce type de matériau biologique.

TABLEAU 4.1 – Valeur optimale identifiée $\mathbf{a}^{\text{macro}}$ du paramètre $\mathbf{a} = (\kappa_T, \mu_T)$

	κ_T [GPa]	μ_T [GPa]
$\mathbf{a}^{\text{macro}}$	11.335	4.781

4 Résolution du problème d'optimisation multi-objectif à l'échelle mésoscopique

Dans cette section, nous présentons les résultats du second problème d'optimisation multi-objectif (2.18) à l'échelle mésoscopique qui consiste à minimiser simultanément les trois indicateurs numériques $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ construits dans le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} en utilisant le paramètre optimal $\mathbf{a}^{\text{macro}} = (11.335, 4.781)$ en [GPa] précédemment identifié à l'échelle macroscopique en section 3 afin de pouvoir identifier la valeur optimale globale \mathbf{b}^{opt} de \mathbf{b} à l'échelle mésoscopique. On rappelle que le sous-domaine mésoscopique $\Omega^{\text{meso}} =]0, 10^{-3}[\times]0, 10^{-3}[$ en [m] est discrétisé avec un maillage régulier de $99 \times 99 = 9801$ éléments quadrangles de taille uniforme $h^{\text{meso}} = 10.10 \mu\text{m} = 1.010 \times 10^{-5} \text{ m}$. Comme déjà expliqué dans la section 3.2.4, la taille B^{VER} du VER Ω^{VER} est définie en fonction de la longueur de corrélation spatiale ℓ des germes stochastiques du champ aléatoire $[\mathbf{S}^{\text{meso}}(\mathbf{b})]$, telle que $B^{\text{VER}} = 20 \times \ell$. Le problème d'optimisation multi-objectif (2.18) a été résolu avec l'algorithme itératif de point fixe (avec un critère de convergence sur la norme du résidu entre deux itérations qui doit être inférieure à une tolérance fixée à 10^{-9}) d'une part, et avec l'apprentissage automatique d'un réseau de neurones artificiels d'autre part, à des fins de comparaison. Une étude de convergence statistique a permis de fixer le nombre de réalisations indépendantes pour l'évaluation des espérances mathématiques dans les indicateurs numériques $\mathcal{J}_\delta^{\text{meso}}(\mathbf{b})$, $\mathcal{J}_\ell^{\text{meso}}(\mathbf{b})$ et $\mathcal{J}^{\text{multi}}(\mathbf{a}^{\text{macro}}, \mathbf{b})$ à la valeur $N_s = 500$. Le nombre d'évaluations du modèle numérique stochastique requis par l'algorithme de point fixe est donné par $n_{\text{tot}}^{\text{FP}} = 3 n_V N_s n^{\text{FP}}$, où n^{FP} est

le nombre d'itérations nécessaire pour atteindre la convergence souhaitée pour le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} considéré.

Le tableau 4.2 donne la valeur optimale identifiée $\mathbf{b}^{\text{meso}} = (0.533, 61.111, 10.500, 4.667)$ en $(-, [\mu\text{m}], [\text{GPa}], [\text{GPa}])$ obtenue en utilisant l'algorithme itératif de point fixe, correspondant à un paramètre de dispersion $\delta^{\text{meso}} = 0.533$, à une longueur de corrélation spatiale $\ell^{\text{meso}} = 61.111 \mu\text{m}$, à un module d'élasticité isostatique transverse moyen mésoscopique $\underline{\kappa}_T^{\text{meso}} = 10.500 \text{ GPa}$ et à un module de cisaillement transverse moyen mésoscopique $\underline{\mu}_T^{\text{meso}} = 4.667 \text{ GPa}$, ou de manière équivalente, à un module d'Young transverse moyen mésoscopique $\underline{E}_T^{\text{meso}} = 12.194 \text{ GPa}$ et à un module de cisaillement moyen mésoscopique $\underline{\nu}_T^{\text{meso}} = 0.3064$. Le nombre d'itérations n^{FP} nécessaire pour atteindre la convergence souhaitée avec l'algorithme itératif de point fixe sur le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso} est $n^{\text{FP}} = 5$, conduisant à un nombre d'évaluations du modèle numérique stochastique égal à $n_{\text{tot}}^{\text{FP}} = 7\,500$. Les résultats d'identification obtenus à l'échelle mésoscopique sont également en accord avec les informations fournies dans la littérature pour ce type de matériau biologique. En effet, d'un point de vue physique, la longueur de corrélation spatiale optimale identifiée $\ell^{\text{meso}} = 61.111 \mu\text{m}$ est du même ordre de grandeur que la distance moyenne entre deux lamelles adjacentes d'un ostéon dans l'os cortical bovin (fémur de bœuf). Par ailleurs, une telle valeur de longueur de corrélation spatiale nous permet également de valider l'hypothèse de séparation des échelles macroscopique et mésoscopique.

TABLEAU 4.2 – Algorithme itératif de point fixe : valeur optimale identifiée \mathbf{b}^{meso} de l'hyperparamètre $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\kappa}_T, \underline{\mu}_T)$ pour le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso}

	δ	$\ell [\mu\text{m}]$	$\underline{\kappa}_T [\text{GPa}]$	$\underline{\mu}_T [\text{GPa}]$	n^{FP}
\mathbf{b}^{meso}	0.533	61.111	10.500	4.667	5
$n_{\text{tot}}^{\text{FP}}$	7 500				

Le tableau 4.3 donne la valeur optimale identifiée $\mathbf{b}^{\text{meso}} = (0.605, 60.618, 11.155, 4.607)$ (resp. $\mathbf{b}^{\text{meso}} = (0.601, 62.815, 10.910, 4.607)$) en $(-, [\mu\text{m}], [\text{GPa}], [\text{GPa}])$ obtenue en utilisant le meilleur réseau de neurones entraîné à 2 couches (resp. à 3 couches), correspondant à un paramètre de dispersion $\delta^{\text{meso}} = 0.605$ (resp. $\delta^{\text{meso}} = 0.601$), à une longueur de corrélation spatiale $\ell^{\text{meso}} = 60.618 \mu\text{m}$ (resp. $\ell^{\text{meso}} = 62.815 \mu\text{m}$), à un module d'élasticité isostatique transverse moyen mésoscopique $\underline{\kappa}_T^{\text{meso}} = 11.155 \text{ GPa}$ (resp. $\underline{\kappa}_T^{\text{meso}} = 10.910 \text{ GPa}$) et à un module de cisaillement transverse moyen mésoscopique $\underline{\mu}_T^{\text{meso}} = 4.607 \text{ GPa}$ (resp. $\underline{\mu}_T^{\text{meso}} = 4.590 \text{ GPa}$), ou de manière équivalente, à un module d'Young transverse moyen mésoscopique $\underline{E}_T^{\text{meso}} = 12.149 \text{ GPa}$ (resp. $\underline{E}_T^{\text{meso}} = 12.076 \text{ GPa}$) et à un module de cisaillement moyen mésoscopique $\underline{\nu}_T^{\text{meso}} = 0.3185$ (resp. $\underline{\nu}_T^{\text{meso}} = 0.3155$). Les résultats obtenus à l'échelle mésoscopique en utilisant chacun des deux réseaux

de neurones sont très proches de ceux obtenus en utilisant l'algorithme itératif de type point fixe, ce qui permet de valider l'approche par réseau de neurones pour l'identification expérimentale multi-échelle de la valeur optimale \mathbf{b}^{meso} de \mathbf{b} .

TABLEAU 4.3 – Réseaux de neurones à 2 et 3 couches : valeur optimale identifiée \mathbf{b}^{meso} de l'hyperparamètre $\mathbf{b} = (\delta, \ell, \underline{\kappa}_T, \underline{\mu}_T)$ pour le sous-domaine mésoscopique Ω^{meso}

	δ	ℓ [μm]	$\underline{\kappa}_T$ [GPa]	$\underline{\mu}_T$ [GPa]
\mathbf{b}^{meso} (réseau à 2 couches)	0.605	60.618	11.155	4.607
\mathbf{b}^{meso} (réseau à 3 couches)	0.601	62.815	10.910	4.590

5 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons présenté un exemple d'application numérique de la méthodologie d'identification multi-échelle des champs aléatoires de propriétés élastiques présentée au chapitre 2, à partir d'une base de données expérimentales réelles constituées de mesures multi-échelles de champs pour un matériau biologique hétérogène réel (de l'os cortical de fémur de bœuf) dans le cadre de l'élasticité linéaire 2D sous l'hypothèse des contraintes planes. A l'échelle macroscopique, le matériau est supposé appartenir à la classe de symétrie isotrope transverse et caractérisé dans un plan d'isotropie (orthogonal à l'axe de symétrie de rotation), tandis qu'à l'échelle mésoscopique il présente des fluctuations statistiques anisotropes autour d'un modèle moyen appartenant aussi à la classe de symétrie isotrope transverse et caractérisé dans un plan d'isotropie (orthogonal à l'axe de symétrie de rotation). Les résultats obtenus sont cohérents et réalistes par rapport aux données connues et publiées dans la littérature et par rapport aux valeurs attendues pour les hyperparamètres du modèle stochastique *prior* (niveau des fluctuations statistiques et longueur de corrélation spatiale).

Conclusion

Dans ce travail de thèse, nous avons revisité la méthodologie d'identification des champs aléatoires de propriétés élastiques récemment proposée dans [Nguyen et al. 2015] dans le cadre d'élasticité linéaire 3D à travers la résolution d'un problème inverse statistique à partir d'une base de données expérimentales multi-échelles (macroscopique et mésoscopique) partielle et limitée obtenue avec uniquement un seul échantillon constitué d'un matériau hétérogène à microstructure aléatoire complexe anisotrope pour lequel il existe une séparation des échelles macroscopique et mésoscopique. En effet, le problème statistique inverse multi-échelle a été formulé comme un problème d'optimisation multi-objectif qui peut être décomposé en un premier problème d'optimisation mono-objectif défini à l'échelle macroscopique et un second problème d'optimisation multi-objectif défini à l'échelle mésoscopique, dans lesquels nous construisons des fonctions-coût (indicateurs numériques) suffisamment sensibles à la variation des paramètres et des hyperparamètres à identifier. Ces indicateurs numériques permettent de quantifier et minimiser la distance entre des quantités d'intérêts pertinentes issues d'une part des mesures expérimentales multi-échelles de champs aux échelles macroscopique et mésoscopique, et d'autre part des résultats de simulations numériques des modèles macroscopique et mésoscopique correspondant à la configuration expérimentale.

Nous avons tout d'abord rappelé le modèle stochastique *prior* paramétré par un nombre faible ou modéré d'hyperparamètres et utilisé pour la modélisation et la simulation numérique du champ de tenseur d'élasticité (ou de souplesse) aléatoire non-gaussien d'une microstructure élastique hétérogène aléatoire à l'échelle mésoscopique. Ce modèle stochastique *prior* satisfait, par construction, les propriétés mathématiques et statistiques requises, notamment les propriétés de symétrie, d'ellipticité (donc de définie positivité) et d'inversibilité en moyenne d'ordre deux. Par ailleurs, dans ce travail de recherche, nous avons introduit une version modifiée de la représentation spectrale des germes stochastiques gaussiens pour la construction du champ d'élasticité aléatoire non-gaussien, qui permet de gommer la périodicité de l'approximation spectrale du champ stochastique avec un ordre moins élevé dans le cas où les longueurs de corrélation spatiale sont très petites devant la taille du domaine considéré. De plus, nous avons vu qu'en combinant cette modélisation stochastique du champ de tenseur d'élasticité (ou de souplesse) à l'échelle mésoscopique avec une méthode d'homogénéisation numérique stochastique, nous obtenons un outil puissant qui nous permet de donner une définition probabiliste de la notion

de VER pour un matériau à microstructure complexe aléatoire et donc d'établir le lien entre la caractérisation des hétérogénéités aléatoires d'un tel matériau à l'échelle mésoscopique et son comportement macroscopique, qui est supposé être homogène et déterministe, à travers le calcul du tenseur d'élasticité (ou de souplesse) effectif homogénéisé.

Nous avons ensuite proposé deux améliorations principales de la méthodologie d'identification statistique inverse multi-échelle du modèle stochastique *prior*. Premièrement, l'introduction d'une fonction-coût mono-objectif (indicateur numérique) supplémentaire à l'échelle mésoscopique dédiée à l'identification de la (les) longueur(s) de corrélation spatiale du modèle stochastique *prior* nous a permis d'avoir recours à des méthodes et des algorithmes de résolution plus efficaces en terme de coût de calcul que l'algorithme d'optimisation globale (algorithme génétique) utilisé dans [Nguyen et al. 2015], tel qu'un algorithme itératif de point fixe, pour résoudre le problème d'optimisation multi-objectif sous-jacent nouvellement formulé. En parallèle, nous avons également entraîné un réseau de neurones artificiels à partir d'une base de données numériques associée à l'ensemble des indicateurs numériques afin de résoudre ce problème d'identification. Les résultats d'identification obtenus par l'algorithme itératif de point fixe et par l'approche par réseau de neurones artificiels sont très encourageants. Deuxièmement, une modélisation probabiliste *ad hoc* des hyperparamètres intervenant dans le modèle stochastique *prior* identifiés sur différents sous-domaines mésoscopiques nous a permis d'améliorer à la fois la robustesse et la précision de la méthode d'identification inverse du modèle stochastique *prior*.

Nous avons enfin validé cette méthodologie d'identification améliorée sur des matériaux virtuels fictifs dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D contraintes planes et en 3D avec des données expérimentales multi-échelles simulées numériquement, avant de l'appliquer à matériau biologique hétérogène réel dans le cadre de l'élasticité linéaire en 2D contraintes planes avec de vraies mesures expérimentales multi-échelles de champs cinématiques 2D obtenues à partir d'un essai statique de compression uni-axiale réalisé sur un seul échantillon constitué d'os cortical bovin et suivi par corrélation d'images numériques 2D aux deux échelles macroscopique et mésoscopique. Les résultats obtenus sont satisfaisants en terme de précision des paramètres identifiés du modèle déterministe à l'échelle macroscopique et des hyperparamètres identifiés du modèle stochastique *prior* à l'échelle mésoscopique. En outre, l'algorithme itératif de point fixe et l'utilisation d'un réseau de neurones artificiels introduits dans ce travail pour la résolution du problème d'optimisation multi-objectif permettent un gain substantiel en terme de coût de calcul par rapport à l'algorithme génétique utilisé dans [Nguyen et al. 2015].

Dans le prolongement de ce travail, plusieurs perspectives peuvent être envisagées sur différents aspects de la méthode d'identification inverse statistique :

- concernant le champ aléatoire gaussien généré par l'approximation spectrale modifiée, il conviendrait de construire un modèle probabiliste plus approprié des variables aléatoires correspondant aux nombres d'onde en utilisant le

- principe du MaxEnt sous un ensemble de contraintes objectives définissant les informations disponibles ;
- concernant la méthode de résolution, il serait intéressant de comparer la performance d'un réseau de neurones artificiels entraîné à partir d'une base de données expérimentales « transformées » (telle que celle considérée dans ce travail et constituée d'un pseudo-coefficient de dispersion et de pseudo-longueurs de corrélation spatiale des champs cinématiques) d'une part, et d'un réseau de neurones artificiels entraîné directement à partir des données expérimentales « brutes » (i.e. les champs cinématiques expérimentaux) d'autre part ;
 - concernant l'utilisation de la méthodologie proposée, il serait possible de l'appliquer à des mesures expérimentales de champs de déplacement multi-échelles 3D complets obtenues, par exemple, par microtomographie à rayons X et corrélation d'images numériques volumiques, et également à d'autres types de matériaux hétérogènes aléatoires ;
 - concernant l'amélioration de la méthodologie proposée, une voie prometteuse consisterait à identifier un modèle stochastique *posterior* du champ de tenseur d'élasticité (ou de souplesse) aléatoire non-gaussien en grande dimension stochastique à l'échelle mésoscopique pour une microstructure élastique linéaire hétérogène anisotrope, en utilisant le modèle stochastique *prior* identifié.

Bibliographie

- [Andrews et Wright 1998] K. T. Andrews et S. Wright. Stochastic homogenization of elliptic boundary-value problems with L^p -data. *Asymptotic Analysis*, 17(3):165–184, 1998. ISSN 0921-7134. URL <https://www.ingentaconnect.com/content/ios/asy/1998/00000017/00000003/aa300>. (Cité en page 10.)
- [Arnst et al. 2008] M. Arnst, D. Clouteau, et M. Bonnet. Inversion of probabilistic structural models using measured transfer functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6):589–608, 2008. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2007.08.011>. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Arnst et al. 2010] M. Arnst, R. Ghanem, et C. Soize. Identification of Bayesian posteriors for coefficients of chaos expansions. *Journal of Computational Physics*, 229(9):3134–3154, 2010. ISSN 0021-9991. URL <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.12.033>. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Avril et Pierron 2007] S. Avril et F. Pierron. General framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurements in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 44(14–15):4978–5002, 2007. ISSN 0020-7683. URL <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018>. (Cité en page 8.)
- [Avril et al. 2008a] S. Avril, M. Bonnet, A.-S. Bretelle, M. Gr diac, F. Hild, P. Ienny, F. Latourte, D. Lemosse, S. Pagano, E. Pagnacco, et F. Pierron. Overview of Identification Methods of Mechanical Parameters Based on Full-field Measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4):381, 2008a. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-008-9148-y>. (Cité en page 8.)
- [Avril et al. 2008b] S. Avril, F. Pierron, Y. Pannier, et R. Rotinat. Stress Reconstruction and Constitutive Parameter Identification in Plane-Stress Elastoplastic Problems Using Surface Measurements of Deformation Fields. *Experimental Mechanics*, 48(4):403–419, 2008b. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-007-9084-2>. (Cité en page 8.)
- [Babuška et al. 2007] I. Babuška, F. Nobile, et R. Tempone. A Stochastic Collocation Method for Elliptic Partial Differential Equations with Random Input Data. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 45(3):1005–1034, 2007. URL <https://doi.org/10.1137/050645142>. (Cité en page 10.)

- [Balian 1968] R. Balian. Random matrices and information theory. *Il Nuovo Cimento B (1965-1970)*, 57(1):183–193, Sep 1968. ISSN 1826-9877. URL <https://doi.org/10.1007/BF02710326>. (Cité en pages 11 et 19.)
- [Baruchel et al. 2000] J. Baruchel, J. Y. Buffiere, et E. Maire. *X-ray tomography in material science*. Hermes science publications, France, 2000. ISBN 2-7462-0115-1. URL http://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:31031064. (Cité en page 8.)
- [Baxter et Graham 2000] S. C. Baxter et L. L. Graham. Characterization of Random Composites Using Moving-Window Technique. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(4):389–397, 2000. URL [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2000\)126:4\(389\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2000)126:4(389)). (Cité en page 8.)
- [Bay 2008] B. K. Bay. Methods and applications of digital volume correlation. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 43(8):745–760, 2008. URL <https://doi.org/10.1243/03093247JSA436>. (Cité en page 9.)
- [Bay et al. 1999] B. K. Bay, T. S. Smith, D. P. Fyhrie, et M. Saad. Digital volume correlation : Three-dimensional strain mapping using X-ray tomography. *Experimental Mechanics*, 39(3):217–226, 1999. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/BF02323555>. (Cité en page 9.)
- [Beale et al. 1992] M. H. Beale, M. T. Hagan, et H. B. Demuth. Neural network toolbox user’s guide. *The MathWorks Inc*, 1992. (Cité en page 103.)
- [Beaurepaire et al. 1998] E. Beaurepaire, A. C. Boccara, M. Lebec, L. Blanchot, et H. Saint-Jalmes. Full-field optical coherence microscopy. *Opt. Lett.*, 23(4):244–246, Feb 1998. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-23-4-244>. (Cité en page 9.)
- [Beck et Katafygiotis 1998] J. L. Beck et L. S. Katafygiotis. Updating Models and Their Uncertainties. I : Bayesian Statistical Framework. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(4):455–461, 1998. URL [https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1998\)124:4\(455\)](https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:4(455)). (Cité en page 9.)
- [Bernardo et Smith 2001] J. M. Bernardo et A. F. M. Smith. Bayesian Theory. *Measurement Science and Technology*, 12(2):221, 2001. URL <https://doi.org/10.1088/0957-0233/12/2/702>. (Cité en page 9.)
- [Besnard et al. 2006] G. Besnard, F. Hild, et S. Roux. “Finite-Element” Displacement Fields Analysis from Digital Images : Application to Portevin–Le Châtelier Bands. *Experimental Mechanics*, 46(6):789–803, 2006. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-006-9824-8>. (Cité en page 8.)
- [Bóna et al. 2007] A. Bóna, I. Bucataru, et M. A. Slawinski. Coordinate-free Characterization of the Symmetry Classes of Elasticity Tensors. *Journal of Elasticity*, 88(2):185–186, Aug 2007. ISSN 1573-2681. URL <https://doi.org/10.1007/s10659-007-9126-0>. (Cité en page 19.)

- [Bonnet et Constantinescu 2005] M. Bonnet et A. Constantinescu. Inverse problems in elasticity. *Inverse Problems*, 21(2):R1–R50, 2005. URL <http://stacks.iop.org/0266-5611/21/i=2/a=R01>. (Cité en page 8.)
- [Bornert et al. 2001] M. Bornert, T. Bretheau, et P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1. Matériaux aléatoires élastiques et milieux périodiques*. Hermès Science publications, Paris, 2001. ISBN 2746201992 9782746201996. (Cité en pages 10, 27 et 29.)
- [Bornert et al. 2009] M. Bornert, F. Brémand, P. Doumalin, J.-C. Dupré, M. Fazzini, M. Grédiac, F. Hild, S. Mistou, J. Molimard, J.-J. Orteu, L. Robert, Y. Surrel, P. Vacher, et B. Wattrisse. Assessment of Digital Image Correlation Measurement Errors : Methodology and Results. *Experimental Mechanics*, 49(3):353–370, 2009. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-008-9204-7>. (Cité en page 8.)
- [Bornert et al. 2010] M. Bornert, F. Valès, H. Gharbi, et D. Nguyen Minh. Multiscale Full-Field Strain Measurements for Micromechanical Investigations of the Hydromechanical Behaviour of Clayey Rocks. *Strain*, 46(1):33–46, 2010. ISSN 1475-1305. URL <https://doi.org/10.1111/j.1475-1305.2008.00590.x>. (Cité en page 8.)
- [Bourgeat et Piatnitski 2004] A. Bourgeat et A. Piatnitski. Approximations of effective coefficients in stochastic homogenization. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, 40(2):153–165, 2004. ISSN 0246-0203. URL <https://doi.org/10.1016/j.anihpb.2003.07.003>. (Cité en pages 10 et 29.)
- [Bouterf et al. 2017] A. Bouterf, J. Adrien, E. Maire, X. Brajer, F. Hild, et S. Roux. Identification of the crushing behavior of brittle foam : From indentation to oedometric tests. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 98:181–200, 2017. ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509616302459>. (Cité en page 9.)
- [Bowman et Azzalini 1997] A. W. Bowman et A. Azzalini. *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis*. Oxford University Press, Oxford, 1997. (Cité en pages 9 et 19.)
- [Buljac et al. 2018] A. Buljac, C. Jailin, A. Mendoza, J. Neggers, T. Taillandier-Thomas, A. Bouterf, B. Smaniotto, F. Hild, et S. Roux. Digital Volume Correlation : Review of Progress and Challenges. *Experimental Mechanics*, 58(5):661–708, Jun 2018. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-018-0390-7>. (Cité en page 9.)
- [Caffisch 1998] R. E. Caffisch. Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods. *Acta Numerica*, 7:1–49, 1998. URL <https://dx.doi.org/10.1017/S0962492900002804>. (Cité en pages 10, 26 et 56.)
- [Carlin et Louis 2009] B. P. Carlin et T. A. Louis. *Bayesian methods for data analysis*. Texts in statistical science. CRC Press, Boca Raton, FL, 3rd éd., 2009. URL <http://cds.cern.ch/record/1393415>. (Cité en page 9.)

- [Censor 1977] Y. Censor. Pareto optimality in multiobjective problems. *Applied Mathematics and Optimization*, 4(1):41–59, Mar 1977. ISSN 1432-0606. URL <https://doi.org/10.1007/BF01442131>. (Cité en pages 13, 44 et 56.)
- [Chevalier et al. 2001] L. Chevalier, S. Calloch, F. Hild, et Y. Marco. Digital image correlation used to analyze the multiaxial behavior of rubber-like materials. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 20(2):169–187, 2001. ISSN 0997-7538. URL [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(00\)01135-9](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(00)01135-9). (Cité en page 8.)
- [Ciarlet 1978] P. G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, Amsterdam, 1978. (Cité en page 56.)
- [Clouteau et al. 2013] D. Clouteau, R. Cotttereau, et G. Lombaert. Dynamics of structures coupled with elastic media—A review of numerical models and methods. *Journal of Sound and Vibration*, 332(10):2415–2436, 2013. ISSN 0022-460X. URL <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.10.011>. (Cité en page 10.)
- [Coello et al. 2007] C. A. C. Coello, G. B. Lamont, D. A. Van Veldhuizen, et al. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*, vol. 5. Springer, Boston, MA, 2007. URL <https://doi.org/10.1007/978-0-387-36797-2>. (Cité en pages 13, 44, 56 et 57.)
- [Coello Coello 2006] C. A. Coello Coello. Evolutionary multi-objective optimization : a historical view of the field. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 1(1):28–36, Feb 2006. ISSN 1556-603X. (Cité en pages 13, 44, 56 et 57.)
- [Collins et al. 1974] J. D. Collins, G. C. Hart, T. K. Haselman, et B. Kennedy. Statistical Identification of Structures. *AIAA Journal*, 12(2):185–190, 2018/11/14 1974. URL <https://arc.aiaa.org/doi/abs/10.2514/3.49190>. (Cité en page 9.)
- [Congdon 2007] P. Congdon. *Bayesian Statistical Modelling*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester, 2nd éd., 2007. (Cité en page 9.)
- [Constantinescu 1995] A. Constantinescu. On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements. *Inverse Problems in Engineering*, 1(4):293–313, 1995. URL <https://doi.org/10.1080/174159795088027587>. (Cité en page 8.)
- [Cotttereau et al. 2011] R. Cotttereau, D. Clouteau, H. B. Dhia, et C. Zaccardi. A stochastic-deterministic coupling method for continuum mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(47-48):3280–3288, 2011. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.07.010>. (Cité en page 10.)
- [Cover et Thomas 2006] T. M. Cover et J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. A Wiley-Interscience publication. Wiley, New York, NY, USA, 2006. ISBN 0471241954. (Cité en pages 9, 11 et 19.)

- [Cunha et Polak 1967] N. D. Cunha et E. Polak. Constrained minimization under vector-valued criteria in finite dimensional spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 19(1):103–124, 1967. ISSN 0022-247X. URL [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(67\)90025-X](https://doi.org/10.1016/0022-247X(67)90025-X). (Cité en pages 13, 44 et 56.)
- [Das et Ghanem 2009] S. Das et R. Ghanem. A Bounded Random Matrix Approach for Stochastic Upscaling. *Multiscale Modeling & Simulation*, 8(1):296–325, 2009. URL <https://doi.org/10.1137/090747713>. (Cité en page 21.)
- [Das et al. 2006] S. Das, R. Ghanem, et J. C. Spall. Asymptotic Sampling Distribution for Polynomial Chaos Representation of Data : A Maximum Entropy and Fisher information approach. *Dans Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 4139–4144, Dec 2006. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Das et al. 2009] S. Das, R. Ghanem, et S. Finette. Polynomial chaos representation of spatio-temporal random fields from experimental measurements. *Journal of Computational Physics*, 228(23):8726–8751, 2009. ISSN 0021-9991. URL <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2009.08.025>. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Das et al. 2010] S. Das, J. C. Spall, et R. Ghanem. Efficient Monte Carlo computation of Fisher information matrix using prior information. *Computational Statistics & Data Analysis*, 54(2):272–289, 2010. ISSN 0167-9473. URL <https://doi.org/10.1016/j.csda.2009.09.018>. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Dauer et Stadler 1986] J. P. Dauer et W. Stadler. A survey of vector optimization in infinite-dimensional spaces, part 2. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 51(2):205–241, 1986. URL <https://doi.org/10.1007/BF00939823>. (Cité en pages 13, 44 et 56.)
- [Deb 2001] K. Deb. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*. John Wiley & Sons, Chichester, England, 2001. (Cité en pages 13, 44, 56, 57 et 58.)
- [Deb 2014] K. Deb. *Multi-objective Optimization*, p. 403–449. Springer US, Boston, MA, 2014. ISBN 978-1-4614-6940-7. URL https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6940-7_15. (Cité en pages 13, 44, 56, 57 et 58.)
- [Deb et al. 2017] K. Deb, K. Sindhya, et J. Hakanen. Multiobjective optimization. *Dans* R. N. Sengupta, A. Gupta, et J. Dutta,  ds, *Decision Sciences : Theory and Practice*, chap. 3. CRC Press, Boca Raton, FL, 1  dn, 2017. ISBN 9781315183176. URL <https://doi.org/10.1201/9781315183176>. (Cité en pages 56, 57 et 58.)
- [Demuth et al. 2014] H. B. Demuth, M. H. Beale, O. De Jess, et M. T. Hagan. *Neural Network Design*. Martin Hagan, USA, 2nd  dn, 2014. ISBN 0971732116, 9780971732117. (Cité en page 60.)
- [Desceliers et al. 2006] C. Desceliers, R. Ghanem, et C. Soize. Maximum likelihood estimation of stochastic chaos representations from experimental data. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 66(6):978–1001,

2006. ISSN 1097-0207. URL <https://doi.org/10.1002/nme.1576>. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Desceliers et al. 2007] C. Desceliers, C. Soize, et R. Ghanem. Identification of Chaos Representations of Elastic Properties of Random Media Using Experimental Vibration Tests. *Computational Mechanics*, 39(6):831–838, 2007. ISSN 1432-0924. URL <https://doi.org/10.1007/s00466-006-0072-7>. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Desceliers et al. 2009] C. Desceliers, C. Soize, Q. Grimal, M. Talmant, et S. Naili. Determination of the random anisotropic elasticity layer using transient wave propagation in a fluid-solid multilayer : Model and experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(4):2027–2034, 2009. URL <https://doi.org/10.1121/1.3087428>. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Desceliers et al. 2012] C. Desceliers, C. Soize, S. Naili, et G. Haiat. Probabilistic model of the human cortical bone with mechanical alterations in ultrasonic range. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 32:170–177, 2012. ISSN 0888-3270. URL <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2012.03.008>. Uncertainties in Structural Dynamics. (Cité en pages 10 et 34.)
- [Desrues et al. 2010] J. Desrues, G. Viggiani, et P. Besuelle. *Advances in X-ray Tomography for Geomaterials*, vol. 118. John Wiley & Sons, 2010. ISBN 9781905209606. URL <https://doi.org/10.1002/9780470612187>. (Cité en page 8.)
- [Fedele et al. 2014] R. Fedele, A. Ciani, et F. Fiori. X-ray Microtomography under Loading and 3D-Volume Digital Image Correlation : A Review. *Fundamenta Informaticae*, 135(1-2):171–197, 2014. URL <https://doi.org/10.3233/FI-2014-1117>. (Cité en page 9.)
- [Fercher 2010] A. F. Fercher. Optical coherence tomography – development, principles, applications. *Zeitschrift f r Medizinische Physik*, 20(4):251–276, 2010. ISSN 0939-3889. URL <https://doi.org/10.1016/j.zemedi.2009.11.002>. (Cité en page 9.)
- [Fishman 1996] G. S. Fishman. *Monte Carlo : Concepts, Algorithms, and Applications*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer-Verlag New York, 1  dn, 1996. ISBN 978-1-4757-2553-7. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-54339-0>. (Cité en pages 26 et 56.)
- [Flannery et al. 1987] B. P. Flannery, H. W. Deckman, W. G. Roberge, et K. L. D’amico. Three-Dimensional X-ray Microtomography. *Science*, 237(4821):1439–1444, 1987. ISSN 0036-8075. URL <https://science.sciencemag.org/content/237/4821/1439>. (Cité en page 8.)
- [Forest et Sab 1998] S. Forest et K. Sab. Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communications*, 25(4):449–454, 1998. ISSN 0093-6413. URL [https://doi.org/10.1016/S0093-6413\(98\)00059-7](https://doi.org/10.1016/S0093-6413(98)00059-7). (Cité en page 10.)

- [Forest et al. 2000] S. Forest, F. Barbe, et G. Cailletaud. Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials. *International Journal of Solids and Structures*, 37(46):7105–7126, 2000. ISSN 0020-7683. URL [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(99\)00330-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(99)00330-3). (Cité en page 10.)
- [Francfort et Murat 1986] G. A. Francfort et F. Murat. Homogenization and optimal bounds in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 94(4):307–334, Dec 1986. ISSN 1432-0673. URL <https://doi.org/10.1007/BF00280908>. (Cité en page 10.)
- [Gambichler et al. 2011] T. Gambichler, V. Jaedicke, et S. Terras. Optical coherence tomography in dermatology : technical and clinical aspects. *Archives of Dermatological Research*, 303(7):457–473, Sep 2011. ISSN 1432-069X. URL <https://doi.org/10.1007/s00403-011-1152-x>. (Cité en page 9.)
- [Geymonat et Pagano 2003] G. Geymonat et S. Pagano. Identification of Mechanical Properties by Displacement Field Measurement : A Variational Approach. *Meccanica*, 38(5):535–545, 2003. ISSN 1572-9648. URL <https://doi.org/10.1023/A:1024766911435>. (Cité en page 8.)
- [Geymonat et al. 2002] G. Geymonat, F. Hild, et S. Pagano. Identification of elastic parameters by displacement field measurement. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(6):403–408, 2002. ISSN 1631-0721. URL [https://doi.org/10.1016/S1631-0721\(02\)01476-6](https://doi.org/10.1016/S1631-0721(02)01476-6). (Cité en page 8.)
- [Ghanem 1999] R. Ghanem. Stochastic Finite Elements with Multiple Random Non-Gaussian Properties. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(1):26–40, 1999. URL [https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1999\)125:1\(26\)](https://ascelibrary.org/doi/abs/10.1061/(ASCE)0733-9399(1999)125:1(26)). (Cité en page 10.)
- [Ghanem et Doostan 2006] R. G. Ghanem et A. Doostan. On the construction and analysis of stochastic models : Characterization and propagation of the errors associated with limited data. *Journal of Computational Physics*, 217(1):63–81, 2006. ISSN 0021-9991. URL <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.01.037>. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Ghanem et Spanos 1991] R. G. Ghanem et P. D. Spanos. *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1991. ISBN 0-387-97456-3. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3094-6>. (Cité en page 10.)
- [Goldberg 1989] D. E. Goldberg. *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1st édn, 1989. ISBN 0201157675. (Cité en pages 13 et 44.)
- [Graham et al. 2003] L. Graham, K. Gurley, et F. Masters. Non-Gaussian simulation of local material properties based on a moving-window technique. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 18(3):223–234, 2003. ISSN 0266-8920. URL [https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(03\)00026-2](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(03)00026-2). (Cité en page 8.)

- [Guilleminot et Soize 2011] J. Guilleminot et C. Soize. Non-Gaussian positive-definite matrix-valued random fields with constrained eigenvalues : Application to random elasticity tensors with uncertain material symmetries. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 88(11):1128–1151, 2011. ISSN 1097-0207. URL <https://doi.org/10.1002/nme.3212>. (Cité en page 21.)
- [Guilleminot et Soize 2012a] J. Guilleminot et C. Soize. Stochastic modeling of anisotropy in multiscale analysis of heterogeneous materials : A comprehensive overview on random matrix approaches. *Mechanics of Materials*, 44:35–46, 2012a. ISSN 0167-6636. URL <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2011.06.003>. (Cité en page 21.)
- [Guilleminot et Soize 2012b] J. Guilleminot et C. Soize. Probabilistic modeling of apparent tensors in elastostatics : A MaxEnt approach under material symmetry and stochastic boundedness constraints. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 28:118–124, 2012b. ISSN 0266-8920. URL <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2011.07.004>. (Cité en page 21.)
- [Guilleminot et Soize 2012c] J. Guilleminot et C. Soize. Generalized stochastic approach for constitutive equation in linear elasticity : a random matrix model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(5):613–635, 2012c. ISSN 1097-0207. URL <https://doi.org/10.1002/nme.3338>. (Cité en page 21.)
- [Guilleminot et Soize 2013a] J. Guilleminot et C. Soize. On the Statistical Dependence for the Components of Random Elasticity Tensors Exhibiting Material Symmetry Properties. *Journal of Elasticity*, 111(2):109–130, 2013a. ISSN 1573-2681. URL <https://doi.org/10.1007/s10659-012-9396-z>. (Cité en pages 21, 40 et 65.)
- [Guilleminot et Soize 2013b] J. Guilleminot et C. Soize. Stochastic Model and Generator for Random Fields with Symmetry Properties : Application to the Mesoscopic Modeling of Elastic Random Media. *Multiscale Modeling & Simulation*, 11(3):840–870, 2013b. URL <https://doi.org/10.1137/120898346>. (Cité en pages 21 et 25.)
- [Guilleminot et al. 2009] J. Guilleminot, C. Soize, et D. Kondo. Mesoscale probabilistic models for the elasticity tensor of fiber reinforced composites : Experimental identification and numerical aspects. *Mechanics of Materials*, 41(12):1309–1322, 2009. ISSN 0167-6636. URL <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2009.08.004>. (Cité en pages 9, 10 et 28.)
- [Guilleminot et al. 2011] J. Guilleminot, A. Noshadravan, C. Soize, et R. Ghanem. A probabilistic model for bounded elasticity tensor random fields with application to polycrystalline microstructures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(17):1637–1648, 2011. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.01.016>. (Cité en pages 10, 21, 29, 39 et 53.)

- [Hagan et al. 1996] M. T. Hagan, H. B. Demuth, et M. H. Beale. *Neural Network Design*. PWS Publishing Co., Boston, MA, USA, 1996. ISBN 0-534-94332-2. (Cité en page 60.)
- [Haykin 1994] S. Haykin. *Neural Networks : A Comprehensive Foundation*. Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, USA, 1st éd., 1994. ISBN 0023527617. (Cité en page 60.)
- [Hild et Roux 2006] F. Hild et S. Roux. Digital Image Correlation : from Displacement Measurement to Identification of Elastic Properties – a Review. *Strain*, 42(2):69–80, 2006. ISSN 1475-1305. URL <https://doi.org/10.1111/j.1475-1305.2006.00258.x>. (Cité en page 8.)
- [Hild et Roux 2012] F. Hild et S. Roux. *Optical Methods for Solid Mechanics. A Full-Field Approach*, chap. Digital Image Correlation, p. 183–228. Wiley-VCH, Weinheim (Germany), 2012. (Cité en pages 8 et 9.)
- [Hild et al. 2002] F. Hild, B. Raka, M. Baudequin, S. Roux, et F. Cantelaube. Multiscale displacement field measurements of compressed mineral-wool samples by digital image correlation. *Appl. Opt.*, 41(32):6815–6828, Nov 2002. URL <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-41-32-6815>. (Cité en page 8.)
- [Hild et al. 2016] F. Hild, A. Bouterf, L. Chamoin, H. Leclerc, F. Mathieu, J. Neggers, F. Pled, Z. Tomičević, et S. Roux. Toward 4D Mechanical Correlation. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 3(1):17, May 2016. ISSN 2213-7467. URL <https://doi.org/10.1186/s40323-016-0070-z>. (Cité en page 9.)
- [Hill et al. 2001] D. L. G. Hill, P. G. Batchelor, M. Holden, et D. J. Hawkes. Medical image registration. *Physics in Medicine and Biology*, 46(3):R1–R45, feb 2001. URL <https://doi.org/10.1088/0031-9155/46/3/201>. (Cité en page 8.)
- [Hill 1963] R. Hill. Elastic properties of reinforced solids : Some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(5):357–372, 1963. ISSN 0022-5096. URL [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90036-X](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90036-X). (Cité en page 29.)
- [Huet 1990] C. Huet. Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 38(6):813–841, 1990. ISSN 0022-5096. URL [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(90\)90041-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(90)90041-2). (Cité en page 10.)
- [Hughes 1987] T. J. R. Hughes. *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987. (Cité en page 56.)
- [Isakov 2006] V. Isakov. *Inverse Problems for Partial Differential Equations*, vol. 127. Springer, Cham, 2006. ISBN 978-3-319-51658-5. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-51658-5>. (Cité en page 9.)

- [Jaynes 1957a] E. T. Jaynes. Information Theory and Statistical Mechanics. *Phys. Rev.*, 106:620–630, 1957a. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.106.620>. (Cité en pages 9, 11 et 19.)
- [Jaynes 1957b] E. T. Jaynes. Information Theory and Statistical Mechanics. II. *Phys. Rev.*, 108:171–190, 1957b. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.108.171>. (Cité en pages 9, 11 et 19.)
- [Jaynes 2003] E. T. Jaynes. *Probability Theory : The Logic of Science*. Cambridge university press, 2003. (Cité en pages 9, 11 et 19.)
- [Jeulin 1987] D. Jeulin. Microstructure modeling by random textures. *J. Microsc. Spectrosc. Electron.*, 12:133–140, 1987. (Cité en page 8.)
- [Jeulin 1989] D. Jeulin. Morphological modeling of images by sequential random functions. *Signal Processing*, 16(4):403–431, 1989. ISSN 0165-1684. URL [https://doi.org/10.1016/0165-1684\(89\)90033-9](https://doi.org/10.1016/0165-1684(89)90033-9). (Cité en page 8.)
- [Jeulin 2000] D. Jeulin. Random texture models for material structures. *Statistics and Computing*, 10(2):121–132, Apr 2000. ISSN 1573-1375. URL <https://doi.org/10.1023/A:1008942325749>. (Cité en page 8.)
- [Jeulin 2001a] D. Jeulin. Caractérisation Morphologique et Modèles de Structures Aléatoires. *Homogénéisation en Mécanique des Matériaux*, 1:95–132, 2001a. (Cité en pages 8 et 10.)
- [Jeulin 2001b] D. Jeulin. *Random Structure Models for Homogenization and Fracture Statistics*, p. 33–91. Springer Vienna, Vienna, 2001b. ISBN 978-3-7091-2780-3. URL https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2780-3_2. (Cité en pages 8 et 10.)
- [Jeulin 2012] D. Jeulin. Morphology and effective properties of multi-scale random sets : A review. *Comptes Rendus Mécanique*, 340(4):219 – 229, 2012. ISSN 1631-0721. URL <https://doi.org/10.1016/j.crme.2012.02.004>. Recent Advances in Micromechanics of Materials. (Cité en pages 8 et 10.)
- [Jikov et al. 1994] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, et O. A. Oleinik. *Homogenization of Differential Operators and Integral Functionals*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1 éd., 1994. ISBN 978-3-642-84661-8. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-642-84659-5>. (Cité en page 10.)
- [Jumarie 2000] G. Jumarie. *Maximum Entropy, Information Without Probability and Complex Fractals : Classical and Quantum Approach*, vol. 112 de *Fundamental Theories of Physics*. Springer Science & Business Media, Dordrecht, 2000. URL <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9496-7>. (Cité en pages 9, 11 et 19.)
- [Kahn-Jetter et al. 1994] Z. L. Kahn-Jetter, N. K. Jha, et H. Bhatia. Optimal image correlation in experimental mechanics. *Optical Engineering*, 33(4):1099–1105, 1994. URL <https://doi.org/10.1117/12.166931>. (Cité en page 8.)
- [Kaipio et Somersalo 2005] J. Kaipio et E. Somersalo. *Statistical and Computational Inverse Problems*, vol. 160 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag

- New York, 1^{édn}, 2005. ISBN 978-0-387-27132-3. URL <https://doi.org/10.1007/b138659>. (Cité en page 9.)
- [Kak et Slaney 1988] A. C. Kak et M. Slaney. *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, United States, 1988. URL <https://ci.nii.ac.jp/naid/10026361800/en/>. (Cité en page 8.)
- [Kalos et Whitlock 1986] M. H. Kalos et P. A. Whitlock. *Monte Carlo Methods. Vol. 1 : Basics*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 1986. ISBN 0-471-89839-2. (Cité en pages 26 et 56.)
- [Kanit et al. 2003] T. Kanit, S. Forest, I. Galliet, V. Mounoury, et D. Jeulin. Determination of the size of the representative volume element for random composites : statistical and numerical approach. *International Journal of Solids and Structures*, 40(13):3647–3679, 2003. ISSN 0020-7683. URL [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00143-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00143-4). (Cité en page 10.)
- [Kapur et Kesavan 1992] J. N. Kapur et H. K. Kesavan. *Entropy Optimization Principles and Their Applications*, p. 3–20. Springer Netherlands, Dordrecht, 1992. ISBN 978-94-011-2430-0. URL https://doi.org/10.1007/978-94-011-2430-0_1. (Cité en pages 9, 11 et 19.)
- [Karhunen 1946] K. Karhunen. *Zur Spektraltheorie stochastischer Prozesse*, vol. 34 de *Series A. 1, Mathematica-physica*. Annales Academiae scientiarum Fennicae, 1946. URL <http://books.google.fr/books?id=X3F3SwAACAAJ>. (Cité en page 10.)
- [Kolda et al. 2003] T. Kolda, R. Lewis, et V. Torczon. Optimization by Direct Search : New Perspectives on Some Classical and Modern Methods. *SIAM Review*, 45(3):385–482, 2003. URL <https://doi.org/10.1137/S003614450242889>. (Cité en page 56.)
- [Konak et al. 2006] A. Konak, D. W. Coit, et A. E. Smith. Multi-objective optimization using genetic algorithms : A tutorial. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(9):992–1007, 2006. ISSN 0951-8320. URL <https://doi.org/10.1016/j.ress.2005.11.018>. Special Issue - Genetic Algorithms and Reliability. (Cité en pages 13, 44, 56, 57 et 58.)
- [Lagarias et al. 1998] J. Lagarias, J. Reeds, M. Wright, et P. Wright. Convergence Properties of the Nelder–Mead Simplex Method in Low Dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1):112–147, 1998. URL <https://doi.org/10.1137/S1052623496303470>. (Cité en page 56.)
- [Lawson et Hanson 1995] C. Lawson et R. Hanson. *Solving Least Squares Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995. URL <https://doi.org/10.1137/1.9781611971217>. (Cité en page 9.)
- [Le Maître et Knio 2010] O. P. Le Maître et O. M. Knio. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification With Applications to Computational Fluid Dynamics*. Springer Netherlands, 2010. URL <https://doi.org/10.1007/978-90-481-3520-2>. (Cité en page 10.)

- [Liang et Lauterbur 2000] Z.-P. Liang et P. C. Lauterbur. *Principles of magnetic resonance imaging : a signal processing perspective*. IEEE Press series in biomedical engineering. SPIE Optical Engineering Press, Bellingham Wash, 2000. URL <http://cds.cern.ch/record/1480847>. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society, sponsor. (Cité en page 8.)
- [Loève 1977] M. Loève. Probability Theory I. *Graduate Texts in Mathematics*, 45, 1977. (Cité en page 10.)
- [Loève 1978] M. Loève. Probability Theory II. *Graduate Texts in Mathematics*, 46, 1978. (Cité en page 10.)
- [Ma et Zabaras 2009] X. Ma et N. Zabaras. An efficient Bayesian inference approach to inverse problems based on an adaptive sparse grid collocation method. *Inverse Problems*, 25(3):035013, 2009. URL <http://stacks.iop.org/0266-5611/25/i=3/a=035013>. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Madi et al. 2013] K. Madi, G. Tozzi, Q. Zhang, J. Tong, A. Cossey, A. Au, D. Hollis, et F. Hild. Computation of full-field displacements in a scaffold implant using digital volume correlation and finite element analysis. *Medical Engineering & Physics*, 35(9):1298–1312, 2013. ISSN 1350-4533. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1350453313000362>. (Cité en page 9.)
- [Maintz et Viergever 1998] J. Maintz et M. A. Viergever. A survey of medical image registration. *Medical Image Analysis*, 2(1):1–36, 1998. ISSN 1361-8415. URL [https://doi.org/10.1016/S1361-8415\(01\)80026-8](https://doi.org/10.1016/S1361-8415(01)80026-8). (Cité en page 8.)
- [Maire et Withers 2014] E. Maire et P. J. Withers. Quantitative X-ray tomography. *International Materials Reviews*, 59(1):1–43, 2014. URL <https://doi.org/10.1179/1743280413Y.0000000023>. (Cité en page 8.)
- [Marler et Arora 2004] R. Marler et J. Arora. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(6):369–395, Apr 2004. ISSN 1615-1488. URL <https://doi.org/10.1007/s00158-003-0368-6>. (Cité en pages 13, 44, 56 et 57.)
- [Marzouk et Najm 2009] Y. M. Marzouk et H. N. Najm. Dimensionality reduction and polynomial chaos acceleration of Bayesian inference in inverse problems. *Journal of Computational Physics*, 228(6):1862–1902, 2009. ISSN 0021-9991. URL <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.11.024>. (Cité en pages 9 et 10.)
- [McKinnon 1998] K. McKinnon. Convergence of the Nelder–Mead Simplex Method to a Nonstationary Point. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1):148–158, 1998. URL <https://doi.org/10.1137/S1052623496303482>. (Cité en page 56.)
- [Mehrabadi et Cowin 1990] M. M. Mehrabadi et S. C. Cowin. Eigentensors of linear anisotropic elastic materials. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 43(1):15–41, 1990. URL <https://doi.org/10.1093/qjmam/43.1.15>. (Cité en page 19.)

- [Naili et al. 2015] S. Naili, V.-H. Nguyen, M.-B. Vu, C. Desceliers, et C. Soize. Modeling of transient wave propagation in a heterogeneous solid layer coupled with fluid : Application to long bones. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(2):668–678, 2015. URL <https://doi.org/10.1121/1.4906838>. (Cité en page 34.)
- [Nelder et Mead 1965] J. A. Nelder et R. Mead. A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal*, 7(4):308–313, 01 1965. ISSN 0010-4620. URL <https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308>. (Cité en page 56.)
- [Nemat-Nasser et Hori 1993] S. Nemat-Nasser et M. Hori. *Micromechanics : Overall Properties of Heterogeneous Materials*, vol. 37 de *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*. North-Holland, 1993. (Cité en pages 10, 28 et 29.)
- [Nguyen et al. 2015] M.-T. Nguyen, C. Desceliers, C. Soize, J.-M. Allain, et H. Gharbi. Multiscale identification of the random elasticity field at mesoscale of a heterogeneous microstructure using multiscale experimental observations. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 13(4):281–295, 2015. ISSN 1543-1649. URL <https://doi.org/10.1615/IntJMultCompEng.2015011435>. (Cité en pages 11, 12, 13, 14, 15, 34, 36, 37, 38, 42, 43, 44, 50, 57, 58, 68, 76, 116, 131, 141 et 142.)
- [Nguyen et al. 2016] M.-T. Nguyen, J.-M. Allain, H. Gharbi, C. Desceliers, et C. Soize. Experimental multiscale measurements for the mechanical identification of a cortical bone by digital image correlation. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, 63:125–133, 2016. ISSN 1751-6161. URL <https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2016.06.011>. (Cité en pages 13, 37, 45, 46 et 131.)
- [Nouy 2008] A. Nouy. Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : Invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 (51–52):4718–4736, 2008. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.06.012>. (Cité en page 10.)
- [Nouy et Soize 2014] A. Nouy et C. Soize. Random field representations for stochastic elliptic boundary value problems and statistical inverse problems. *European Journal of Applied Mathematics*, 25(3):339–373, 2014. URL <https://doi.org/10.1017/S0956792514000072>. (Cité en pages 10 et 18.)
- [Oliveira et al. 1997] V. D. Oliveira, B. Kedem, et D. A. Short. Bayesian Prediction of Transformed Gaussian Random Fields. *Journal of the American Statistical Association*, 92(440):1422–1433, 1997. URL <https://doi.org/10.1080/01621459.1997.10473663>. (Cité en page 10.)
- [Ostoja-Starzewski 2006] M. Ostoja-Starzewski. Material spatial randomness : From statistical to representative volume element. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21(2):112–132, 2006. ISSN 0266-8920. URL <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2005.07.007>. (Cité en page 10.)

- [Ostoja-Starzewski 2007] M. Ostoja-Starzewski. *Microstructural Randomness and Scaling in Mechanics of Materials*. Chapman and Hall/CRC Taylor & Francis, New York, 1st édn, 2007. URL <https://doi.org/10.1201/9781420010275>. (Cité en page 10.)
- [Pan et al. 2009] B. Pan, K. Qian, H. Xie, et A. Asundi. Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement : a review. *Measurement Science and Technology*, 20(6):062001, 2009. URL <http://stacks.iop.org/0957-0233/20/i=6/a=062001>. (Cité en page 8.)
- [Papoulis et Pillai 2002] A. Papoulis et S. U. Pillai. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill Higher Education, New York, fourth  dn, 2002. (Cité en pages 9 et 44.)
- [Perrin et al. 2012] G. Perrin, C. Soize, D. Duhamel, et C. Funfschilling. Identification of Polynomial Chaos Representations in High Dimension from a Set of Realizations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(6):A2917–A2945, 2012. URL <https://doi.org/10.1137/11084950X>. (Cité en pages 10 et 18.)
- [Perrin et al. 2013] G. Perrin, C. Soize, D. Duhamel, et C. Funfschilling. Karhunen–Loève expansion revisited for vector-valued random fields : Scaling, errors and optimal basis. *Journal of Computational Physics*, 242:607–622, 2013. ISSN 0021-9991. URL <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.02.036>. (Cité en pages 10 et 18.)
- [Poirion et Soize 1989] F. Poirion et C. Soize. Numerical simulation of homogeneous and inhomogeneous Gaussian stochastic vector fields. *La Recherche Aeronautique (English edition)*, 1(-):41–61, 1989. URL <https://hal-upec-upem.archives-ouvertes.fr/hal-00770316>. (Cité en page 71.)
- [Poirion et Soize 1995] F. Poirion et C. Soize. Numerical methods and mathematical aspects for simulation of homogeneous and non homogeneous gaussian vector fields. Dans P. Kr e et W. Wedig,  ds, *Probabilistic Methods in Applied Physics*, p. 17–53, Berlin, Heidelberg, 1995. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-44725-2. URL https://doi.org/10.1007/3-540-60214-3_50. (Cité en page 71.)
- [Popescu et al. 2011] D. P. Popescu, L.-P. Choo-Smith, C. Flueraru, Y. Mao, S. Chang, J. Disano, S. Sherif, et M. G. Sowa. Optical coherence tomography : fundamental principles, instrumental designs and biomedical applications. *Biophysical Reviews*, 3(3):155, Aug 2011. ISSN 1867-2469. URL <https://doi.org/10.1007/s12551-011-0054-7>. (Cité en page 9.)
- [Pradel, F. et Sab, K. 1998] Pradel, F. et Sab, K. Homogenization of discrete media. *J. Phys. IV France*, 08:Pr8–317–Pr8–324, 1998. URL <https://doi.org/10.1051/jp4:1998839>. (Cité en page 10.)
- [Press et al. 2007] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, et B. P. Flannery. *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*, chap. Section 10.5. Downhill Simplex Method in Multidimensions. Cambridge University Press,

- New York, NY, USA, 3^e éd., 2007. ISBN 0521880688, 9780521880688. (Cité en page 56.)
- [Rannou et al. 2010] J. Rannou, N. Limodin, J. Réthoré, A. Gravouil, W. Ludwig, M.-C. Baietto-Dubourg, J.-Y. Buffière, A. Combescure, F. Hild, et S. Roux. Three dimensional experimental and numerical multiscale analysis of a fatigue crack. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(21–22):1307–1325, 2010. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.09.013>. (Cité en page 9.)
- [Réthoré et al. 2008] J. Réthoré, J.-P. Tinnes, S. Roux, J.-Y. Buffière, et F. Hild. Extended three-dimensional digital image correlation (X3D-DIC). *Comptes Rendus Mécanique*, 336(8):643–649, 2008. ISSN 1631-0721. URL <https://doi.org/10.1016/j.crme.2008.06.006>. (Cité en pages 8 et 9.)
- [Roberts et al. 2014] B. C. Roberts, E. Perilli, et K. J. Reynolds. Application of the digital volume correlation technique for the measurement of displacement and strain fields in bone : A literature review. *Journal of Biomechanics*, 47(5):923–934, 2014. ISSN 0021-9290. URL <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2014.01.001>. (Cité en page 9.)
- [Roux et Hild 2008] S. Roux et F. Hild. Digital Image Mechanical Identification (DIMI). *Experimental Mechanics*, 48(4):495–508, 2008. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-007-9103-3>. (Cité en page 8.)
- [Roux et al. 2002] S. Roux, F. Hild, et Y. Berthaud. Correlation image velocimetry : a spectral approach. *Appl. Opt.*, 41(1):108–115, Jan 2002. URL <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-41-1-108>. (Cité en page 8.)
- [Roux et al. 2008] S. Roux, F. Hild, P. Viot, et D. Bernard. Three-dimensional image correlation from X-ray computed tomography of solid foam. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(8):1253–1265, 2008. ISSN 1359-835X. URL <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2007.11.011>. (Cité en page 9.)
- [Rubinstein et Kroese 2016] R. Y. Rubinstein et D. P. Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*, vol. 10 de *Wiley Series in Probability and Statistics*. John Wiley & Sons, 2016. URL <https://dx.doi.org/10.1002/9780470230381>. (Cité en pages 10, 26 et 56.)
- [Rychlewski 1984] J. Rychlewski. On Hooke’s law. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 48(3):303–314, 1984. ISSN 0021-8928. URL [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(84\)90137-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(84)90137-0). (Cité en page 19.)
- [Sab 1992] K. Sab. On the homogenization and the simulation of random materials. *European journal of mechanics. A. Solids*, 11(5):585–607, 1992. (Cité en pages 10 et 28.)
- [Sab et Nedjar 2005] K. Sab et B. Nedjar. Periodization of random media and representative volume element size for linear composites. *Comptes Rendus*

- Mécanique*, 333(2):187–195, 2005. ISSN 1631-0721. URL <https://doi.org/10.1016/j.crme.2004.10.003>. (Cité en pages 10 et 28.)
- [Sanchez-Palencia 1980] E. Sanchez-Palencia. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, vol. 127 de *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1 éd., 1980. ISBN 978-3-540-10000-3. URL <https://doi.org/10.1007/3-540-10000-8>. (Cité en page 10.)
- [Sanchez-Palencia et Zaoui 1985] E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui. *Homogenization Techniques for Composite Media*, vol. 272 de *Lecture Notes in Physics*, p. IX. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1 éd., 1985. ISBN 978-3-540-47720-4. URL <https://doi.org/10.1007/3-540-17616-0>. (Cité en page 10.)
- [Schmitt 1999] J. M. Schmitt. Optical coherence tomography (OCT) : a review. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 5(4):1205–1215, July 1999. ISSN 1077-260X. URL <https://doi.org/10.1109/2944.796348>. (Cité en page 9.)
- [Schueller 2009] G. Schueller. Efficient Monte Carlo simulation procedures in structural uncertainty and reliability analysis-recent advances. *Structural Engineering and Mechanics*, 32(1):1–20, 2009. URL <https://dx.doi.org/10.12989/sem.2009.32.1.001>. (Cité en pages 26 et 56.)
- [Schuëller et Spanos 2001] G. Schuëller et P. D. Spanos. *Monte Carlo Simulation*. A.A. Balkema, 2001. (Cité en pages 10, 26 et 56.)
- [Serfling 1980] R. Serfling. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. Wiley, New York, 1980. ISBN 9780471137306. URL <https://dx.doi.org/10.1002/9780470316481>. (Cité en pages 9, 19 et 44.)
- [Shannon 1948] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27(3):379–423, July 1948. ISSN 0005-8580. URL <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x>. (Cité en pages 11 et 19.)
- [Shannon 2001] C. E. Shannon. A Mathematical Theory of Communication. *SIG-MOBILE Mob. Comput. Commun. Rev.*, 5(1):3–55, Jan. 2001. ISSN 1559-1662. URL <http://doi.acm.org/10.1145/584091.584093>. (Cité en pages 11 et 19.)
- [Shinozuka 1971] M. Shinozuka. Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Processes. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 49 (1B):357–368, 1971. URL <https://doi.org/10.1121/1.1912338>. (Cité en page 71.)
- [Shinozuka et Jan 1972] M. Shinozuka et C.-M. Jan. Digital simulation of random processes and its applications. *Journal of Sound and Vibration*, 25(1):111–128, 1972. ISSN 0022-460X. URL [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(72\)90600-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(72)90600-1). (Cité en page 71.)

- [Shinozuka et Wen 1972] M. Shinozuka et Y. K. Wen. Monte Carlo Solution of Nonlinear Vibrations. *AIAA Journal*, 10(1):37–40, 1972. URL <https://doi.org/10.2514/3.50064>. (Cité en page 71.)
- [Sobezyk et Trębicki 1990] K. Sobezyk et J. Trębicki. Maximum entropy principle in stochastic dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 5(3):102–110, 1990. ISSN 0266-8920. URL [https://doi.org/10.1016/0266-8920\(90\)90001-Z](https://doi.org/10.1016/0266-8920(90)90001-Z). (Cité en pages 9, 11 et 19.)
- [Soize 2000] C. Soize. A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3):277–294, 2000. ISSN 0266-8920. URL [https://doi.org/10.1016/S0266-8920\(99\)00028-4](https://doi.org/10.1016/S0266-8920(99)00028-4). (Cité en pages 20, 21, 22, 65 et 66.)
- [Soize 2001] C. Soize. Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(5):1979–1996, 2001. URL <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/109/5/10.1121/1.1360716>. (Cité en pages 20, 21, 22, 65 et 66.)
- [Soize 2005] C. Soize. Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12–16):1333–1366, 2005. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.06.038>. Special Issue on Computational Methods in Stochastic Mechanics and Reliability Analysis. (Cité en pages 19 et 21.)
- [Soize 2006] C. Soize. Non-Gaussian positive-definite matrix-valued random fields for elliptic stochastic partial differential operators. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(1–3):26–64, 2006. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.12.014>. (Cité en pages 11, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 33, 34, 36 et 40.)
- [Soize 2008] C. Soize. Tensor-valued random fields for meso-scale stochastic model of anisotropic elastic microstructure and probabilistic analysis of representative volume element size. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 23(2–3):307–323, 2008. ISSN 0266-8920. URL <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2007.12.019>. 5th International Conference on Computational Stochastic Mechanics. (Cité en pages 10, 11, 18, 21, 25, 26, 28, 31, 33, 34, 36 et 53.)
- [Soize 2010] C. Soize. Identification of high-dimension polynomial chaos expansions with random coefficients for non-Gaussian tensor-valued random fields using partial and limited experimental data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(33–36):2150–2164, 2010. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2010.03.013>. (Cité en pages 9, 10 et 18.)
- [Soize 2011] C. Soize. A computational inverse method for identification of non-Gaussian random fields using the Bayesian approach in very high dimension. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(45–46):3083–3099, 2011. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.07.005>. (Cité en pages 9, 10 et 18.)

- [Soize 2012] C. Soize. *Stochastic Models of Uncertainties in Computational Mechanics*, vol. 2 de *Lecture Notes in Mechanics*. American Society of Civil Engineers (ASCE), Reston, VA, 2012. (Cité en pages 10, 18 et 21.)
- [Soize 2016a] C. Soize. *Random Matrix Models and Nonparametric Method for Uncertainty Quantification*, p. 1–69. Springer International Publishing, Cham, 2016a. ISBN 978-3-319-11259-6. URL https://doi.org/10.1007/978-3-319-11259-6_5-1. (Cité en pages 19, 21 et 22.)
- [Soize 2016b] C. Soize. *Random Vectors and Random Fields in High Dimension : Parametric Model-Based Representation, Identification from Data, and Inverse Problems*, p. 1–53. Springer International Publishing, Cham, 2016b. ISBN 978-3-319-11259-6. URL https://doi.org/10.1007/978-3-319-11259-6_30-1. (Cité en page 21.)
- [Soize 2017] C. Soize. *An Accelerated Course with Advanced Applications in Computational Engineering*, vol. 47 de *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer International Publishing, 1 éd., 2017. ISBN 978-3-319-54339-0. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-319-54339-0>. (Cité en pages 9, 11, 19, 21, 25, 34, 36, 40, 44, 53 et 56.)
- [Soize 2018] C. Soize. Design optimization under uncertainties of a mesoscale implant in biological tissues using a probabilistic learning algorithm. *Computational Mechanics*, 62(3):477–497, Sep 2018. ISSN 1432-0924. URL <https://doi.org/10.1007/s00466-017-1509-x>. (Cité en pages 25 et 34.)
- [Soize et Ghanem 2004] C. Soize et R. Ghanem. Physical Systems with Random Uncertainties : Chaos Representations with Arbitrary Probability Measure. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 26(2):395–410, 2004. URL <https://doi.org/10.1137/S1064827503424505>. (Cité en page 10.)
- [Soize et Ghanem 2009] C. Soize et R. G. Ghanem. Reduced Chaos decomposition with random coefficients of vector-valued random variables and random fields. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21–26):1926–1934, 2009. ISSN 0045-7825. URL <https://doi.org/10.1016/j.cma.2008.12.035>. Advances in Simulation-Based Engineering Sciences – Honoring J. Tinsley Oden. (Cité en page 10.)
- [Spall 2005] J. C. Spall. *Introduction to Stochastic Search and Optimization : Estimation, Simulation, and Control*, vol. 65. John Wiley & Sons, 2005. URL <https://dx.doi.org/10.1002/0471722138>. (Cité en pages 9 et 44.)
- [Spendley et al. 1962] W. Spendley, G. R. Hext, et F. R. Himsworth. Sequential application of simplex designs in optimisation and evolutionary operation. *Technometrics*, 4(4):441–461, 1962. URL <https://doi.org/10.1080/00401706.1962.10490033>. (Cité en page 56.)
- [Stock 2008] S. R. Stock. Recent advances in X-ray microtomography applied to materials. *International Materials Reviews*, 53(3):129–181, 2008. URL <https://doi.org/10.1179/174328008X277803>. (Cité en page 8.)

- [Stuart 2010] A. M. Stuart. Inverse problems : A Bayesian perspective. *Acta Numerica*, 19:451–559, 2010. URL <https://doi.org/10.1017/S0962492910000061>. (Cité en page 9.)
- [Suquet 1997] P. Suquet. *Continuum Micromechanics*, vol. 377 de *CISM International Centre for Mechanical Sciences*. Springer-Verlag Wien, 1 éd., 1997. ISBN 978-3-211-82902-8. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-2662-2>. (Cité en page 10.)
- [Suquet 1987] P. M. Suquet. Introduction. Dans E. Sanchez-Palencia et A. Zaoui, éd., *Homogenization Techniques for Composite Media*, p. 193–198, Berlin, Heidelberg, 1987. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-47720-4. (Cité en page 10.)
- [Sutton et al. 1983] M. Sutton, W. Wolters, W. Peters, W. Ranson, et S. McNeill. Determination of displacements using an improved digital correlation method. *Image and Vision Computing*, 1(3):133–139, 1983. ISSN 0262-8856. URL [https://doi.org/10.1016/0262-8856\(83\)90064-1](https://doi.org/10.1016/0262-8856(83)90064-1). (Cité en page 8.)
- [Sutton et al. 1986] M. Sutton, C. Mingqi, W. Peters, Y. Chao, et S. McNeill. Application of an optimized digital correlation method to planar deformation analysis. *Image and Vision Computing*, 4(3):143–150, 1986. ISSN 0262-8856. URL [https://doi.org/10.1016/0262-8856\(86\)90057-0](https://doi.org/10.1016/0262-8856(86)90057-0). (Cité en page 8.)
- [Sutton et al. 2009] M. A. Sutton, J.-J. Orteu, et H. Schreier. *Image correlation for shape, motion and deformation measurements : basic concepts, theory and applications*. Springer US, 2009. ISBN 978-0-387-78746-6. URL <https://doi.org/10.1007/978-0-387-78747-3>. (Cité en page 8.)
- [Ta et al. 2010] Q.-A. Ta, D. Clouteau, et R. Cottreau. Modeling of random anisotropic elastic media and impact on wave propagation. *European Journal of Computational Mechanics*, 19(1-3):241–253, 2010. URL <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.3166/ejcm.19.241-253>. (Cité en pages 9, 10 et 21.)
- [Tan et al. 2010] M. T. Tan, G.-L. Tian, et K. W. Ng. *Bayesian Missing Data Problems : EM, Data Augmentation and Noniterative Computation*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2010. ISBN 9781420077490 (hbk.). URL <http://www.tandfonline.com>. Formerly CIP. (Cité en page 9.)
- [Tarantola 2005] A. Tarantola. *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005. URL <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9780898717921>. (Cité en page 9.)
- [Tootkaboni et Graham-Brady 2010] M. Tootkaboni et L. Graham-Brady. A multi-scale spectral stochastic method for homogenization of multi-phase periodic composites with random material properties. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(1):59–90, 2010. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.2829>. (Cité en page 10.)

- [Torquato 2002] S. Torquato. *Random Heterogeneous Materials : Microstructure and Macroscopic Properties*, vol. 16. Springer-Verlag New York, 2002. ISBN 978-1-4757-6355-3. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6355-3>. (Cité en pages 7, 10 et 11.)
- [van den Elsen et al. 1993] P. A. van den Elsen, E. . D. Pol, et M. A. Viergever. Medical image matching-a review with classification. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 12(1):26–39, March 1993. ISSN 0739-5175. URL <https://doi.org/10.1109/51.195938>. (Cité en page 8.)
- [Vendroux et Knauss 1998a] G. Vendroux et W. G. Knauss. Submicron deformation field measurements : Part 1. Developing a digital scanning tunneling microscope. *Experimental Mechanics*, 38(1):18–23, 1998a. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/BF02321262>. (Cité en page 8.)
- [Vendroux et Knauss 1998b] G. Vendroux et W. G. Knauss. Submicron deformation field measurements : Part 2. Improved digital image correlation. *Experimental Mechanics*, 38(2):86–92, 1998b. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/BF02321649>. (Cité en page 8.)
- [Verhulp et al. 2004] E. Verhulp, B. Rietbergen, et R. Huiskes. A three-dimensional digital image correlation technique for strain measurements in microstructures. *Journal of Biomechanics*, 37(9):1313–1320, 2004. ISSN 0021-9290. URL <https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2003.12.036>. (Cité en page 9.)
- [Voigt 1910] W. Voigt. *Lehrbuch der Kristallphysik (mit Ausschluss der Kristallographik)*. B.G. Teubner, Leipzig ; Berlin, 1910. URL <https://doi.org/10.1007/978-3-663-15884-4>. (Cité en page 19.)
- [Walpole 1984] L. J. Walpole. Fourth-rank tensors of the thirty-two crystal classes : multiplication tables. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 391(1800):149–179, 1984. ISSN 0080-4630. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/391/1800/149>. (Cité en page 65.)
- [Walter et Pronzato 1997] E. Walter et L. Pronzato. *Identification of Parametric Models : from Experimental Data*. Communications and Control Engineering. Springer-Verlag London, 1 édn, 1997. ISBN 978-3-540-76119-8. URL <https://www.springer.com/gp/book/9783540761198>. (Cité en page 9.)
- [Walters 1999] F. Walters. Sequential Simplex Optimization - An Update. *Analytical Letters*, 32(2):193–212, 1999. URL <https://doi.org/10.1080/00032719908542815>. (Cité en page 56.)
- [Walters et al. 1991] F. H. Walters, L. R. Parker, S. L. Morgan, et S. N. Deming. *Sequential Simplex Optimization*. CRC Press, Boca Raton, FL, 1991. (Cité en page 56.)
- [Wan et Karniadakis 2006] X. Wan et G. E. Karniadakis. Multi-Element Generalized Polynomial Chaos for Arbitrary Probability Measures. *SIAM Journal on*

- Scientific Computing*, 28(3):901–928, 2006. URL <https://doi.org/10.1137/050627630>. (Cité en page 10.)
- [Wang et Zabaras 2004a] J. Wang et N. Zabaras. A Bayesian inference approach to the inverse heat conduction problem. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 47(17):3927–3941, 2004a. ISSN 0017-9310. URL <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2004.02.028>. (Cité en page 10.)
- [Wang et Zabaras 2004b] J. Wang et N. Zabaras. Hierarchical Bayesian models for inverse problems in heat conduction. *Inverse Problems*, 21(1):183–206, dec 2004b. URL <https://doi.org/10.1088/0266-5611/21/1/012>. (Cité en page 10.)
- [Xiu et Hesthaven 2005] D. Xiu et J. Hesthaven. High-order collocation methods for differential equations with random inputs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(3):1118–1139, 2005. URL <https://doi.org/10.1137/040615201>. (Cité en page 10.)
- [Xiu et Karniadakis 2002] D. Xiu et G. Karniadakis. The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2):619–644, 2002. URL <https://doi.org/10.1137/S1064827501387826>. (Cité en page 10.)
- [Xu et Chen 2009] X. F. Xu et X. Chen. Stochastic homogenization of random elastic multi-phase composites and size quantification of representative volume element. *Mechanics of Materials*, 41(2):174–186, 2009. ISSN 0167-6636. URL <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2008.09.002>. (Cité en page 10.)
- [Youssef M. Marzouk and Habib N. Najm and Larry A. Rahn 2007] Youssef M. Marzouk and Habib N. Najm and Larry A. Rahn. Stochastic spectral methods for efficient bayesian solution of inverse problems. *Journal of Computational Physics*, 224(2):560–586, 2007. ISSN 0021-9991. URL <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.10.010>. (Cité en pages 9 et 10.)
- [Yu 1985] P.-L. Yu. *Multiple-Criteria Decision Making : Concepts, Techniques, and Extensions*. Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering. Springer US, 1  dn, 1985. ISBN 978-1-4684-8395-6. URL <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-8395-6>. (Cité en pages 13, 44 et 56.)
- [Zadeh 1963] L. Zadeh. Optimality and non-scalar-valued performance criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 8(1):59–60, January 1963. ISSN 0018-9286. URL <https://doi.org/10.1109/TAC.1963.1105511>. (Cité en page 56.)
- [Zaoui 2002] A. Zaoui. Continuum Micromechanics : Survey. *Journal of Engineering Mechanics*, 128(8):808–816, 2002. URL [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:8\(808\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:8(808)). (Cité en pages 10 et 29.)
- [Zienkiewicz et Taylor 2000] O. Zienkiewicz et R. Taylor. *The Finite Element Method*, vol. 1 de *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, 2000. ISBN 9780340759813. URL <https://books.google.fr/books?id=nVABAAAACAAJ>. (Cité en page 56.)

- [Zienkiewicz et al. 2005] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, et J. Z. Zhu. *The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2005.
(Cité en page [56](#).)