



**HAL**  
open science

# Combinatoire bijective autour d'arbres et de chemins

Lucas Randazzo

► **To cite this version:**

Lucas Randazzo. Combinatoire bijective autour d'arbres et de chemins. Analyse numérique [cs.NA]. Université Paris-Est, 2019. Français. NNT : 2019PESC2059 . tel-02506272

**HAL Id: tel-02506272**

**<https://theses.hal.science/tel-02506272>**

Submitted on 12 Mar 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT

## COMBINATOIRE BIJECTIVE AUTOUR D'ARBRES ET DE CHEMINS

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université Paris-Est

**Spécialité Informatique**

École Doctorale de Mathématiques et des Sciences et Techniques de l'Information et de la  
Communication

Présentée et soutenue publiquement par

Lucas Randazzo

le 11 décembre 2019

**Devant le jury composé de**

|                        |                    |
|------------------------|--------------------|
| Enrica Duchi           | Rapporteur         |
| Matthieu Josuat-Vergès | Directeur de thèse |
| Cyril Nicaud           | Examineur          |
| Viviane Pons           | Examinatrice       |
| Gilles Schaeffer       | Examineur          |
| Jean-Yves Thibon       | Directeur de thèse |
| Jiang Zeng             | Rapporteur         |

Laboratoire d'informatique Gaspard-Monge  
UMR 8049 LIGM

5, bd Descartes, Champs-sur-Marne, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France

## Résumé

Cette thèse située dans le cadre de la combinatoire bijective a pour sujet plusieurs familles d'arbres et de chemins, objets classiques de la combinatoire, et tente de les mettre en relation par la construction de bijections.

Dans un premier temps, motivé par des travaux récents, on s'intéresse aux chemins de basketball, dont la fonction génératrice vérifie une relation non triviale avec les nombres de Catalan. La preuve originale provenant de la méthode du noyau, notre objectif est d'étudier la décomposition de ce chemin pour obtenir une preuve bijective de cette formule. On trouve de plus que cette classe de chemins est en bijection avec les arbres unaires-binaires croissants dont la permutation associée évite 213.

Ensuite on s'intéresse à une formule d'énumération de chemins de Dyck pondérés. Corolaire de l'application d'une formule des équerres généralisée sur les tableaux de Young gauche, on montre que cette formule peut être interprétée comme une fraction continue grâce à la théorie de Flajolet.

On s'intéresse aussi à une généralisation à 4 variables des polynômes de Ramanujan, et leur lien avec certaines familles d'arbres. Tout comme Guo et Zeng l'on fait précédemment avec les arbres planaires et les arbres à moitié mobiles, on interprète ces polynômes comme des fonctions génératrices des arbres de Greg et des arbres de Cayley, en construisant plusieurs bijections les mettant toutes en relation.

Enfin, on s'intéresse à un ensemble partiellement ordonné de fonctions de parking à bulles. En s'intéressant à une représentation arborescente des fonctions de parking, on obtient plusieurs résultats sur la topologie de cet ensemble, notamment des résultats d'épluchabilité et d'énumération de chaînes.

## Bijjective combinatorics on trees and walks

### Abstract

This thesis in bijective combinatorics focuses on the classical combinatorics classes that are trees and walks, and attempts to build bijections around them.

Motivated by recent works, we first work on basketball walks, whose generating function verifies a non-trivial relation involving the Catalan numbers. Since the original proof was using the kernel method to find this result, our objective is to study the decomposition of these walks to bijectively prove this formula. Moreover, we manage to find that these walks are in bijection with increasing unary-binary trees which permutation avoids the pattern 213.

Then we look at an enumerating formula for some weighted Dyck paths. Corollary

to a generalised hook-length formula for skew Young tableaux, we use Flajolet's work to study this result with continued fractions.

Following that, we look at a 4 variables generalization of the Ramanujan polynomials, and their link to different families of trees. As Guo and Zeng did with planar trees and half mobile trees, we interpret these polynomials as generating functions for Greg trees and Cayley trees, whilst building multiple bijections linking them all together.

Finally, we look at a partially ordered set of bubbling parking functions. This tree structure representing parking functions allows us to prove multiple properties of the ordered set, such as shellability and chain enumeration.

**Mots Clés** Combinatoire, bijections, arbres, chemins, fractions continues, polynômes

**Keywords** Combinatorics, bijections, trees, walks, continued fractions, polynomials



# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduction</b>  | <b>1</b>  |
| <b>I Chemins de basketball</b>                                 | <b>9</b>  |
| I.1 Introduction . . . . .                                     | 9         |
| I.2 Marches de basketball et arbres binaires . . . . .         | 13        |
| I.2.1 Généralités . . . . .                                    | 13        |
| I.2.2 La bijection . . . . .                                   | 16        |
| I.2.3 Conservation des statistiques . . . . .                  | 18        |
| I.2.4 Marches sans pas larges . . . . .                        | 20        |
| I.3 Lien avec les arbres binaires-unaires croissants . . . . . | 21        |
| I.3.1 Preuve du Théorème I.1.2 . . . . .                       | 21        |
| I.3.2 Nœuds unaires et pas décalés . . . . .                   | 27        |
| I.3.3 Une bijection explicite pour le Théorème I.1.2 . . . . . | 29        |
| <b>II Formule des équerres, fractions continues</b>            | <b>31</b> |
| II.1 Introduction . . . . .                                    | 31        |
| II.2 Définitions et résultats préliminaires . . . . .          | 32        |
| II.2.1 Permutations alternantes et nombres d'Euler . . . . .   | 32        |
| II.2.2 Chemins de Dyck . . . . .                               | 33        |
| II.2.3 Fonctions hypergéométriques . . . . .                   | 34        |
| II.2.4 Formule des équerres des formes gauches . . . . .       | 36        |
| II.3 Chemins de Dyck et nombres d'Euler . . . . .              | 38        |
| II.3.1 Nombres tangents . . . . .                              | 38        |
| II.3.2 Nombres sécants . . . . .                               | 40        |
| II.4 Permutations $k$ -alternantes . . . . .                   | 42        |
| <b>III Polynômes de Ramanujan et arbres</b>                    | <b>45</b> |
| III.1 Introduction . . . . .                                   | 45        |
| III.2 Préliminaires . . . . .                                  | 47        |

|   |           |
|---|-----------|
| III.3 Arbres de Greg et $R_n$ . . . . .   | 52        |
| III.4 Lien avec les nombres de Ward . . . . .   | 54        |
| III.5 Une bijection pour les arbres de Cayley . . . . .   | 60        |
| III.6 Des arbres de Cayley aux arbres planaires . . . . .   | 63        |
| <b>IV Un ordre partiel des fonctions de parking</b>   | <b>67</b> |
| IV.1 Introduction . . . . .   | 67        |
| IV.2 L'ensemble des fonctions de parking à bulles . . . . .   | 68        |
| IV.2.1 L'ensemble partiellement ordonné des 2-partitions . . . . .  | 68        |
| IV.2.2 Lien avec les fonctions de parking . . . . .   | 70        |
| IV.2.3 Fonctions nilpotentes partielles et arbres de Cayley . . . . .   | 75        |
| IV.2.4 Épluchabilité de l'ensemble des fonctions de parking . . . . .   | 78        |
| IV.3 Calcul de l'action du groupe symétrique sur l'homologie d'un ensemble<br>partiellement ordonné . . . . . | 83        |
| IV.4 Relations entre espèces de chaînes . . . . .   | 84        |
| <b>Conclusion et perspectives</b>   | <b>89</b> |

# Introduction

La *combinatoire*, dans son ensemble, est le domaine des mathématiques consacré à l'étude des ensembles finis d'objets, et se distingue en plusieurs branches. Cette thèse est principalement axée sur la branche de la *combinatoire énumérative*, qui s'intéresse au dénombrement de structures mathématiques discrètes, ainsi qu'aux suites de nombres associées. Les premiers résultats énumératifs remontent à l'antiquité, avec les nombres d'Hipparque [Sch70], qui donne la suite des petits nombres de Schroeder [A001003](#), et le stomachion d'Archimède, ancien problème de pavage qui compte 17152 solutions possibles [NN11]. Durant la Renaissance, plusieurs mathématiciens se sont intéressés à la combinatoire, tels que Pascal, Bernoulli et Euler, et sont à l'origine de nombreux travaux, piliers de la combinatoire énumérative moderne. Un des résultats d'énumération les plus connus est probablement le nombre de façons de choisir  $k$  éléments parmi un total de  $n$  éléments, qui est le nombre binomial  $\binom{n}{k}$ , et dont la suite de nombre forme le triangle de Pascal.

Un des principaux thèmes de la combinatoire énumérative est le *dénombrement*. Soit  $A$  un ensemble d'objets  $t$  auxquels on peut associer une taille  $\mu(t)$  finie.  $A$  est une *classe combinatoire* si les ensembles  $A_n$  d'objets de taille  $n$  sont finis pour tout  $n$ . L'objectif du dénombrement est alors de déterminer le nombre d'objets de taille  $n$ , c'est-à-dire la cardinalité des  $A_n$ . Par exemple, on peut avoir  $A_n = \mathfrak{S}_n$  qui est l'ensemble des permutations de  $n$  éléments, on trouve alors que le nombre d'éléments de  $A_n$  est  $n!$ . Idéalement, on cherche à trouver une forme close pour  $|A_n|$ . La recherche d'une telle formule apporte généralement à dévoiler des propriétés structurelles de l'objet, ou des identités récursives qu'il satisfait. Ainsi, un travail de recherche motivé par le dénombrement résulte naturellement en une compréhension approfondie des objets étudiés. Pour une classe combinatoire, on peut définir sa *fonction génératrice*  $f(x) = \sum_n |A_n|x^n$ , dont l'introduction nous permet d'approcher



les problèmes d'énumération d'un point de vue analytique. Cette idée, inspirée de l'étude des espèces combinatoires [BLL98], est développée dans le cadre de la combinatoire analytique par Flajolet et Sedgewick dans [FS09]. Le principe est de traduire une étude purement structurelle et ensembliste d'un objet combinatoire en propriétés sur des séries formelles. Par exemple, l'union de deux classes combinatoires se traduit par la somme de leurs fonctions génératrices, et le produit cartésien de deux classes se traduit par le produit des fonctions génératrices. Ainsi, des problèmes de nature structurelle sur des objets combinatoires peuvent se traduire en équations sur leur fonction génératrice. Bien que  $f$  soit une série formelle, un grand nombre d'outils issus de l'analyse restent applicables pour analyser  $f$ , et idéalement permettent de trouver une forme close pour  $f$ . On cite par exemple le théorème d'inversion de Lagrange, qui permet de calculer le développement en série de fonctions définies implicitement.

Un autre thème de la combinatoire énumérative est l'approche bijective. Lorsque deux classes combinatoires ont les mêmes cardinalités, alors il est possible de mettre en bijection ces deux classes. Un exemple classique est le théorème de partition d'Euler, qui donne que les partitions d'entiers de  $n$  à parts impaires sont en bijection avec les partitions de  $n$  à parts distinctes [Bla88]. On doit la première preuve bijective de ce théorème à Glaisher en 1883 [Gla83]. Usuellement agissant sur la structure des objets considérés, une bijection entre deux objets combinatoires permet de mettre en évidence des liens entre des classes d'objets potentiellement différents, améliorant ainsi la compréhension de chacune des classes. Pour approfondir cette recherche, il est aussi commun de rechercher des statistiques d'un objet qui se traduisent bijectivement dans l'autre. À l'inverse, trouver une bijection entre deux objets permet aussi de prouver l'égalité entre deux fonctions génératrices, et donc peut mettre en évidence de nouvelles formules combinatoires. Cette branche de la combinatoire est l'origine de nombreux problèmes ouverts, l'un des plus fameux étant la question de l'existence d'une bijection entre les matrices à signe alternant et les partitions du plan totalement symétriques auto-complémentaires [And94].

## Permutations et fractions continues

L'un des premiers objets qui a fait l'étude d'une analyse combinatoire est l'ensemble des permutations de  $n$  éléments. Au nombre de  $n!$ , on date la plus ancienne découverte de leur dénombrement au XVII<sup>e</sup> siècle. Les permutations ont depuis fait l'objet de beaucoup de travaux [Sta11, BS10, Sta03], et il est usuel de les associer avec d'autres objets combinatoires, tels que les arbres [BBMD<sup>+</sup>02] ou les tableaux [SW07]. Un des objets d'intérêt de cette thèse est une sous-classe des permutations, qui sont les

*permutations alternantes*. Il s'agit des permutations d'entiers qui, lues de gauche à droite comme un mot, alternent entre un accroissement et un décroissement. Ce sous-ensemble est lui aussi bien connu [FS73, Sta10], et leur énumération donne les *nombre d'Euler*  $E_n$ . Si l'on considère la fonction génératrice *exponentielle* des permutations alternantes, que l'on note  $g(x) = \sum E_n \frac{x^n}{n!}$ , alors une propriété remarquable de cette fonction génératrice est que  $g = \tan + \sec$ . Cet exemple met bien en évidence le lien étroit qu'il peut y avoir entre la combinatoire et l'analyse.

Une propriété intéressante que vérifie la fonction  $\tan$  est qu'elle peut s'écrire sous la forme d'une *fraction continue*. Une fraction continue est un développement infini de fractions de la forme suivante

$$\frac{a_0}{b_0 - \frac{a_1}{b_1 - \frac{a_2}{b_2 - \ddots}}}$$

où les  $a_i$  et  $b_i$  appartiennent à un corps. Notons qu'une telle fraction continue n'existe qu'à la condition qu'elle converge au sens des séries formelles. Par exemple, si  $b_i = 1 - c_i x$ ,  $a_0 = 1$  et  $a_i = -\lambda_i x^2$ , la condition de convergence est vérifiée, donc la fraction continue est bien définie, et on dit qu'elle est *de type Jacobi*. On doit le développement de la théorie des fractions continues dans le domaine de la combinatoire à Flajolet [Fla80]. Dans le cas de la fonction  $\tan$ , on a la *fraction continue de Lambert*

$$\tan(z) = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3 - \frac{z^2}{5 - \ddots}}}$$

où on a remplacé  $b_i$  par la suite des nombres impairs. De manière plus générale, il existe une famille de séries, appelés les *séries hypergéométriques*  ${}_0F_1$ , définies par  ${}_0F_1(a; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!(a)_n} z^n$  [GR04]. Ces fonctions ont un rôle important dans, entre autres, la théorie des nombres, et l'étude des polynômes de Askey-Wilson. Une de leurs propriétés qui nous intéresse est que le ratio  ${}_0F_1(a+1; z)/{}_0F_1(a; z)$  peut s'exprimer sous forme d'une fraction continue de Jacobi. Il se trouve que  $\sin$  et  $\cos$  appartiennent à cette famille, d'où le développement de  $\tan$  donné précédemment. À l'inverse, Flajolet donne l'interprétation des fractions continues de Jacobi comme fonctions génératrices de *chemins de Motzkin pondérés*, ce qui nous permet donc de faire le lien entre certaines familles de chemins et les nombres d'Euler.

## Arbres et chemins

Une des séquences de nombres les plus étudiées en combinatoire est la suite des *nombres de Catalan*. Initialement attribuée à Euler en tant que nombres de triangulation d'un polygone [Guy67], la suite  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  est le sujet d'une grande quantité de travaux [Sta09, Mot48, FZ97], et est retrouvée dans beaucoup d'autres objets combinatoires. Les objets classiques en lien avec cette séquence sont les arbres binaires, et les chemins de Dyck. De nombreuses bijections existent entre ces deux objets [Vie02], et plus généralement notre compréhension du lien entre les chemins et les arbres se raffine avec ces travaux de nature bijective. Certaines classes de chemins, nommés les chemins de Łukasiewicz, sont connus pour leur bijection naturelle avec certaines classes d'arbres. Une partie de cette thèse s'intéresse à savoir de telles bijections sont encore possibles dans des cas plus complexes.

Un preuve classique du dénombrement des chemins de Dyck utilise le *théorème d'inversion de Lagrange* [Lag70]. Un cas particulier de ce théorème, la *formule de Lagrange-Bürmann*, est la forme sous laquelle le théorème est principalement appliqué en combinatoire.

**Théorème** (Formule de Lagrange-Bürmann). *Soit  $f$  une fonction analytique sans terme constant telle que  $f(z) = z/\phi(z)$ , avec  $\phi$  ne s'annulant pas en 0. Si  $g$  est l'inverse compositionnelle de  $f$ , alors pour toute fonction analytique  $H$ , on a*

$$[z^n]H(g(z)) = \frac{1}{n}[w^n](H'(w)\phi(w)^n),$$

où  $[z^n]$  est l'opérateur qui extrait le coefficient en  $z^n$  dans l'expansion en série de Taylor en 0.

Si  $C(z)$  est la série génératrice des mots de Dyck, avec le coefficient de  $z^n$  le nombre de chemins de longueur  $2n$ , alors la série vérifie  $C(z) = 1 + zC(z)^2$ . En posant  $B(z) = C(z) - 1$ , on a  $B(z) = z(B(z) + 1)^2$ . Remarquons de plus que  $C(z)$  est bien analytique : le coefficient de  $z^n$  étant le nombre de chemins de longueur  $2n$ , et chaque pas ayant deux choix possibles, on peut majorer ce coefficient par  $2^{2n}$ , ce qui implique que le rayon de convergence de  $C(z)$  est supérieur à  $1/4$ . On peut alors appliquer la formule avec  $f = B^{-1}$  et  $\phi = (w + 1)^2$ , ce qui donne bien

$$[z^n]C(z) = [z^n]B(z) = \frac{1}{n}[w^{n-1}](w + 1)^{2n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Une autre application connue de cette formule est une preuve de la *formule de Cayley*. Lorsque l'on considère des objets combinatoires, il est parfois intéressant de

les étiqueter, par exemple numéroter les sommets d'un arbre de 1 à  $n$ . Ces arbres donc obtenus sont les *arbres de Cayley*, et leur énumération est donnée par la formule de Cayley  $(n + 1)^{n-1}$ . Avec un tel étiquetage, on s'intéresse la série génératrice exponentielle :  $f(x) = \sum_n \frac{1}{n!} |A_n| x^n$ . Certaines opérations se traduisent différemment quand on utilise cette forme, par exemple une séquence ayant un nombre arbitraire d'objets devient  $e^{f(x)}$ . Dans le cas des arbre de Cayley, on peut prouver que la série génératrice vérifie l'équation  $f(x) = xe^{f(x)}$ . On a donc que  $f(x) = -W(-x)$ , où  $W$  est la branche principale de la *fonction  $W$  de Lambert*, qui est la solution à l'équation  $W(x)e^{W(x)} = x$  définie en 0. Son développement en série peut aussi s'obtenir avec la formule d'inversion de Lagrange.

## Plan

### Chapitre I

Ce chapitre explore en détails les chemins de basketball. Il s'agit de chemins partant de 0 dont les pas appartiennent à l'ensemble  $\{-2, -1, 1, 2\}$ . Comme ces chemins autorisent un pas négatif autre que  $-1$ , ils ne font pas partie de la famille des chemins de Łukasiewicz, donc l'existence d'une bijection entre ces chemins et une famille d'arbre n'est pas garantie. D'autre part, une des motivations de ce travail provient d'une observation de Banderier, Krattenthaler, Krinik, Kruchinin, Kruchinin, Nguyen et Wallner dans [BKK<sup>+</sup>17], qui donnent une relation entre la série génératrice des chemins de basketball  $G$  et celle des nombres de Catalan  $C$  :

$$1 + G(z) + G^2(z) = \text{Cat}(z).$$

Dans un premier temps, on s'intéresse à prouver bijectivement cette équation, en décomposant les chemins en plusieurs sous chemins. On raffinerait l'énumération des chemins par rapport à certaines statistiques naturelles, comme le nombre de pas d'un certain type. Dans un second temps, on donne une bijection avec une famille d'arbres, les arbres unaires-binaires croissants dont la permutation associée évite 213. Cette bijection permet de plus de traduire les statistiques précédemment introduites en statistiques sur les arbres.

Ce chapitre suit fidèlement l'article [BFMR16].

## Chapitre II

Dans ce chapitre, on s'intéresse à un corollaire dû à Morales, Pak et Panova dans [MPP16], qui donnent une  $q$ -généralisation de la formule des équerres de Naruse [Nar14] sur les tableaux de Young gauches. La formule en question est une formule sommatoire reliant les chemins de Dyck pondérés et les permutations alternantes. L'objectif est de trouver une preuve directe de cette formule, sans utiliser de résultat intermédiaire sur les tableaux de Young gauches.

En utilisant des outils provenant de l'analyse, notamment la théorie des fractions continues développée par Flajolet dans [Fla80], on parvient à donner une preuve directe, ainsi qu'un nouveau développement en fraction continue de la fonction  $q$ -généralisée  $\tan_q$ . On fait ensuite de même pour la fonction  $\sec_q$  en considérant les permutations alternantes décalées. Enfin on traite brièvement du cas des permutations  $k$ -alternantes.

Ce chapitre suit fidèlement l'article [Ran19b].

## Chapitre III

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux arbres de Greg et leur fonction génératrice. La motivation de ce chapitre provient d'une question ouverte posée par Josuat-Vergès dans [JV15], qui demande l'interprétation bijective en termes d'arbres de Greg des *polynômes de Ramanujan*. Ses travaux font de plus suite à ceux de Chapoton [Cha02], et Guo et Zeng [GZ07] qui donnent une généralisation des polynômes de Ramanujan en 4 variables, et leur interprétation avec des arbres planaires.

Le travail effectué dans ce chapitre tourne autour des différentes interprétations combinatoires de ces polynômes généralisés. En premier lieu on donne une interprétation sur les arbres de Greg par analyse récursive, tout en explicitant les différentes statistiques apparaissant dans les polynômes. On discutera de plus du lien entre les arbres de Greg et les arbres phylogénétiques. Ensuite, on donne une bijection entre les arbres de Greg et les arbres de Cayley qui conserve les statistiques, donnant ainsi une nouvelle interprétation des polynômes. Enfin, on retrouve la formule originale de Guo et Zeng, en utilisant une bijection entre les arbres de Cayley et les arbres planaires qui conserve les statistiques.

Ce chapitre suit fidèlement l'article [Ran19a].

## Chapitre IV

Ce chapitre s'intéresse à un ensemble partiellement ordonné des fonctions de parking, et de sa topologie. Initialement, on s'est intéressé à l'étude de la séquence

OEIS [A141618](#) qui, selon Laradji et Umar dans [LU04], donne le nombre de fonction partielles nilpotentes sur  $[n]$  dont l'image est de taille  $r$ . On trouve plusieurs bijections qui relient ces objets avec d'autres, notamment les 2-partitions et les fonctions de parking. L'ensemble partiellement ordonné qui nous intéresse vérifie que son énumération par rangs donne bien cette même séquence.

En utilisant un objet combinatoirement équivalent, les arbres de parking, on trouve plusieurs résultats relatifs à la topologie de l'ensemble partiellement ordonné. On prouve qu'il est CL-épluchable en exhibant un ordre atomique récursif. On trouve aussi une formule close sur les  $k$ -chaînes large de l'ensemble partiellement ordonné, généralisant la séquence [A141618](#).

Ce chapitre s'inspire d'une partie d'un article en cours de rédaction [DOJVR19].



# Chapitre I

## Chemins de basketball

### I.1 Introduction

Une *marche à valeurs entières* est une séquence finie d'entiers, commençant généralement en 0. Ses *pas* sont la différence entre deux valeurs consécutives qu'elle prend. Les marches restreintes à un certain ensemble de pas font le sujet de plusieurs études [Ges80, LY90, Duc00, BF02, BM08, Kra15], et ce que l'on nomme les marches de Łukasiewicz (marches dont l'ensemble de pas  $\mathcal{S}$  satisfait  $-1 \in \mathcal{S}$ , et  $\mathcal{S} \subseteq \{-1, 0, 1, 2, \dots\}$ ) sont d'un intérêt particulier, car elles encodent les arbres planaires dont les sommets ont une arité incluse dans  $\mathcal{S} + 1$  [Lot97, Chapitre 11].

Dans ce chapitre, on considère un cas simple de marche qui n'est pas de Łukasiewicz, les *marches de basketball*. Ces marches ont l'ensemble de pas  $\{-2, -1, +1, +2\}$ ; elles ont été nommées par Ayyer et Zeilberger [AZ07] du fait qu'elle correspondent à la variation de la différence de score entre deux équipes jouant un match de basketball, à l'époque les paniers à trois points n'existant pas. Les excursions de basketball, c'est-à-dire marches positives de basketball commençant et finissant à 0, ont été comptées initialement par Labelle et Yeh [LY89, LY90] (ces marches alors appelées chemins de Dyck de déplacements de cavaliers). Les auteurs donnent une expression algébrique quartique explicite pour leur fonction génératrice. Motivés par la connexion aux problèmes de polymères contraints, Ayyer et Zeilberger [AZ07] étudient la fonction génératrice des excursions de basketball majorées. Les chemins de basketball furent de plus étudiés par Bousquet-Mélou [BM08], qui s'intéresse à la structure des équations algébriques satisfaites par la fonction génératrice des excursions et des excursions majorées. Ces dernières ont aussi été étudiées récemment dans [Bac13].

Plus récemment, utilisant la méthode du noyau, Banderier, Krattenthaler, Krinik, Kruchinin, Kruchinin, Nguyen et Wallner [BKK<sup>+</sup>17] montrèrent que la fonction



génératrice des chemins de basketball de 0 à 1 qui restent strictement positifs après l'origine, comptés avec un poids  $z$  par pas, est donnée par

$$G(z) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 - 3z - 2\sqrt{1 - 4z}}{z}}.$$

Ils en déduisent aussi des expressions sommatoires pour le nombre de chemins d'une taille donnée, et le nombre d'excursions de basketball d'une taille donnée, ainsi que des asymptotes pour ces nombres. Enfin, ils remarquent que la fonction génératrice  $G$  est en relation avec la fonction génératrice de Catalan  $\text{Cat}$  caractérisée par  $\text{Cat}(z) = 1 + z \text{Cat}(z)^2$ , avec l'équation suivante [BKK<sup>+</sup>17, Équation (3.14)] :

$$1 + G(z) + G^2(z) = \text{Cat}(z). \quad (\text{I.1.1})$$

Cette équation marque le point de départ du travail présenté dans ce chapitre. Au lieu de considérer des marches de  $G$ , on préférera étudier les marches de basketball allant de 0 à 0, atteignant la valeur 1 au moins une fois, et sont strictement positives, sauf aux extrémités : on les appelle  $C$ -marches, et on note  $C$  leur fonction génératrice. En décomposant les  $C$ -marches par rapport au premier pas, on a la relation  $C(z) = zG(z) + zG^2(z)$ , car une  $C$ -marche est soit un pas +1 suivi d'une  $G$ -marche inversée, ou un pas +2 suivi de deux  $G$ -marches inversées (car rappelons-le, les  $C$ -marches doivent visiter 1). En termes de fonction génératrice, l'Équation (I.1.1) devient

$$C(z) = z(\text{Cat}(z) - 1), \quad (\text{I.1.2})$$

qui est la fonction génératrice des arbres binaires non triviaux avec un poids  $z$  sur les feuilles. On donnera une interprétation bijective de cette équation. Comme conséquence de cette bijection, on obtient la proposition suivante. On dit qu'un pas dans une marche est *pair* (*impair*) s'il commence à hauteur *pair* (*impaire*).

**Proposition I.1.1.** *Le nombre de marche de basketball de 0 à 0 qui visitent 1 et qui sont strictement positives sauf aux extrémités, avec  $2d$  pas  $\pm 1$ ,  $\ell$  pas +2 impairs ou pas  $-2$  pairs, et  $r$  pas  $-2$  pairs ou pas +2 impairs, est égal à*

$$\frac{1}{d} \binom{2d-2}{d-1} \binom{\ell+r+2d-2}{\ell+r} \binom{\ell+r}{\ell}.$$

Dans la deuxième partie de cet article, on montre comment les marches de basketball sont liées aux arbres unaires-binaires croissants dont la permutation associée évite 213. Un *arbre unaire-binaire* de taille  $n \geq 1$  est un arbre planaire à  $n$

sommets, ayant chacun 0, 1 ou 2 descendants. On dit que l'arbre est *croissant* si ses sommets sont étiquetés bijectivement avec  $[n]$ , et que chaque sommet a une étiquette plus grande que celle de son parent. Autrement dit, chaque branche lue de la racine à une feuille est croissante selon les étiquettes. À chaque arbre croissant, on associe une permutation, que l'on obtient en lisant les étiquettes de gauche à droite, selon une recherche en largeur. On dit qu'une permutation  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  évite le motif  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_k)$  si, pour tout  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , la permutation  $(\sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_k})$  obtenue après renommage dans  $[k]$  est différente de  $\pi$ . On note que, en particulier, une permutation de taille  $n$  évite tout motif de taille strictement supérieure à  $n$ .

L'étude des arbres croissants dont la permutation associée évite un motif particulier débuta avec Riehl (voir par exemple [LPRS16]). Par méthode informatique, elle observa que les premiers termes de la séquence d'arbres unaires-binaires croissants dont la permutation associée évite 213 coïncident avec ceux de la séquence référencée dans le On-Line Encyclopedia of Integer Sequences par [A166135](#). Cette séquence sera plus tard, dans [BKK<sup>+</sup>17], prouvée être la séquence de la fonction génératrice  $G$ . On montre dans ce chapitre qu'il s'agit en effet de la même séquence, ce qui prouve alors [BKK<sup>+</sup>17, Conjecture 5.2].

**Théorème I.1.2.** *Pour tout  $n \geq 0$ , le nombre de marches de basketball à  $n$  pas de 0 à 1 qui sont strictement positives sauf à l'origine est égal au nombre d'arbres unaires-binaires à  $n$  feuilles dont la permutation associée évite 213.*

De plus, on explicitera une bijection entre les classes d'objets apparaissant dans le Théorème I.1.2. Il est connu que les permutations qui évitent 213 sont une classe d'objets combinatoires comptés par les nombres de Catalan. On s'intéresse donc à une famille d'arbres attachée à une structure combinatoire supplémentaire comptée par Catalan. Bien sur, ces deux structures dépendent fortement l'une de l'autre, à cause de la condition de croissance. On verra cependant dans le Lemme I.3.1 que les deux structures peuvent être séparées, et que les conditions que la permutation doit remplir sont complètement encodées dans la séquence obtenue par un parcours en largeur de l'arbre, et notant si les sommets rencontrés sont des feuilles ou des nœuds internes.

Comme conséquence immédiate de ce théorème, pour  $n \geq 1$ , l'expression suivante, prise dans [BKK<sup>+</sup>17, Proposition 3.5]

$$[z^n]G(z) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{2k-2}{k-1} \binom{2n}{n-k} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{2n+1-3i}$$

donne aussi le nombre d'arbres unaires-binaires croissants à  $n$  sommets dont la permutation associée évite 213. De plus, [BKK<sup>+</sup>17, Théorème 3.8] donne une estimation

asymptotique de ce nombre.

Enfin, on étudie un raffinement de la formule précédente, qui prend en paramètre supplémentaire le nombre de nœuds unaires.

**Proposition I.1.3.** *Pour  $n \geq 1$  et  $0 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ , le nombre d'arbres unaires-binaires croissant à  $n$  sommets dont la permutation associée évite 213, et qui ont exactement  $n-1-2k$  nœuds unaires, est égal à*

$$\frac{1}{n} \binom{2n}{k} \binom{n-k}{k+1}.$$

En particulier, on obtient une nouvelle expression pour  $[z^n]G(z)$  :

$$[z^n]G(z) = \frac{1}{n} \sum_{k \geq 0} \binom{2n}{k} \binom{n-k}{k+1}.$$

Aux vues du Théorème I.1.2, il est naturel d'essayer de trouver les statistiques correspondant aux nœuds unaires dans les marches de basketball : il s'agit du nombre de *pas  $\pm 2$  décalés* (voir Figure I.1.1).

**Définition I.1.4.** Soit  $(w_0, w_1, \dots, w_n)$  les hauteurs successives prises par une marche de basketball, et soit, pour tout entier  $1 \leq i \leq n$ ,  $u_i := w_i - w_{i-1}$  la valeur de son  $i$ -ème pas. Pour  $i < j$ , on dit que  $u_i$  et  $u_j$  sont jumelés si  $u_i = +2$ ,  $u_j = -2$ ,  $w_j = w_{i-1}$ , et pour tout  $i < k < j$ , on a  $w_k \geq w_{i-1} + 1$ . Un *pas  $\pm 2$  décalé* est un pas  $\pm 2$  qui n'est pas jumelé avec un autre pas  $\pm 2$ .

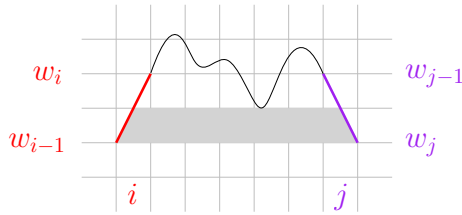


FIGURE I.1.1 – Les  $i$ -ème et  $j$ -ème pas de cette marche sont jumelés. La marche ne rentre pas dans la partie grisée.

**Proposition I.1.5.** *Pour  $n \geq 1$  et  $m \geq 0$ , le nombre de marches de basketball à  $n$  pas de 0 à 1 qui sont strictement positives sauf à l'origine et qui contiennent exactement  $m$  pas  $\pm 2$  décalés est égal au nombre d'arbres unaires-binaires croissants dont la permutation associée évite 213 qui ont exactement  $m$  nœuds unaires.*

La Proposition I.1.3 donne une formule close pour ces nombres. De même, on obtient une expression similaire pour les excursions de basketball à la place des  $G$ -marches.

**Proposition I.1.6.** *Pour  $n \geq 2$ , le nombre de marches de basketball positives à  $(n-1)$  pas de 0 à 0 est égal à*

$$\frac{1}{n} \sum_{k \geq 0} \binom{2n}{k} \binom{n-k-2}{k-1}$$

et, pour  $k \geq 0$ , le terme d'indice  $k$  dans la somme précédente est le nombre de marches avec exactement  $n-1-2k$  pas  $\pm 2$  décalés.

Le reste de ce chapitre comporte deux sections. Dans la Section I.2, on présente et étudie la bijection entre  $C$ -marches et arbres binaires. Dans la Section I.3, on s'intéresse au lien entre les  $G$ -marches et les arbres unaires-binaires croissants dont la permutation associée évite 213.

## I.2 Marches de basketball et arbres binaires

### I.2.1 Généralités

On note  $\mathbf{1}$  (respectivement  $\mathcal{Z}$ ) la classe combinatoire dont le seul élément est de taille 0 (resp. de taille 1), autrement dit, la classe dont la fonction génératrice est  $z \mapsto 1$  (resp.  $z \mapsto z$ ). Pour une classe  $\mathcal{X}$  sans objet de taille 0, on note  $\text{Seq}(\mathcal{X})$  la classe combinatoire des séquences d'éléments de  $\mathcal{X}$ , qui est  $\mathbf{1} + \mathcal{X} + \mathcal{X}^2 + \dots$ , et on note  $\text{Seq}_{\geq k}(\mathcal{X}) = \mathcal{X}^k \text{Seq}(\mathcal{X})$  la classe des séquences de  $\mathcal{X}$  ayant au moins  $k$  éléments.

On définit plusieurs classes combinatoires de chemins de basketball comme suit :

- $\mathcal{C}$  est l'ensemble des marches de 0 à 0 qui visitent 1 et sont strictement positives sauf aux bords ;
- $\mathcal{A}$  est l'ensemble des excursions, c'est-à-dire des marches positives de 0 à 0 ;
- $\mathcal{B}$  est l'ensemble des marches de 0 à 1 qui ne visitent 0 et 1 qu'aux extrémités.

Leurs fonctions génératrices correspondantes  $C$ ,  $A$  et  $B$  comptent les marches de ces classes avec un poids  $z$  sur chaque pas. On appelle une  $X$ -marche un élément de la classe  $\mathcal{X}$ .

Dans cette section, on obtient une décomposition (dans le même esprit que [LY90, Duc00]) mettant en relation les classes de marches de basketball définies précédemment. On déduira de cette décomposition que  $\mathcal{C}$  satisfait  $\mathcal{C} = (\mathcal{Z} + \mathcal{C})^2$ , et donc que c'est la classe de Catalan.

**Notation.** Il sera parfois plus naturel de voir les marches en tant que séquences de pas. Une telle notation peut sembler abusive, puisqu'elle ne prend pas en compte la hauteur originale de la marche ; ainsi cette notation sera utilisée lorsque la hauteur initiale est soit implicite soit inconséquente. On note  $\bar{\mathbf{a}} := (-a_n, \dots, -a_1)$  le retournement de la marche  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ , et  $\mathbf{ab} := (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$  est la concaténation de  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ .

On peut immédiatement remarquer que la classe  $\mathcal{G}$  des marches de basketball de 0 à 1 qui sont strictement positives sauf à l'origine, introduite dans la Section I.1, satisfait  $\mathcal{G} = \mathcal{BA}$  en séparant une  $G$ -marche au moment où elle atteint la hauteur 1 pour la première fois. De plus, on a que  $\mathcal{B} = \mathcal{Z} \text{Seq}(\mathcal{ZA})$  (voir Figure I.2.1b). En effet, une  $B$ -marche est soit un unique pas +1, soit commence par un pas +2, effectue une  $A$ -marche jusqu'à la dernière visite de la hauteur 2, puis finit sur une  $B$ -marche inversée. Ainsi,  $\mathcal{B} = \mathcal{Z} + \mathcal{ZAB}$ , ce qui prouve notre remarque. En conséquence, on obtient

$$\mathcal{G} = \mathcal{ZA} + \mathcal{ZAG}, \quad \text{donc} \quad \mathcal{G} = \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{ZA}). \quad (\text{I.2.1})$$

Dans le reste de la Section I.2, on focalise notre attention sur  $\mathcal{C}$  au lieu de  $\mathcal{G}$ . On revisite  $\mathcal{G}$ , et utilise (I.2.1) dans la Section I.3. En décomposant les  $A$ -marches, on obtient l'identité suivante (voir Figure I.2.1a)

$$\mathcal{A} = \mathbf{1} + \mathcal{ZAZA} + \mathcal{BABA}, \quad (\text{I.2.2})$$

car une  $A$ -marche soit est vide, soit ne visite pas 1 avant de retourner pour la première fois en 0, soit visite 1 avant de retourner pour la première fois en 0.

Séparant une  $C$ -marche aux points où elle visite 1 pour la première et la dernière fois, on voit que  $\mathcal{C} = \mathcal{BAB}$  (voir Figure I.2.1c). Les trois identités  $\mathcal{B} = \mathcal{Z} \text{Seq}(\mathcal{ZA})$ , (I.1.2), et  $\mathcal{C} = \mathcal{BAB}$  suffisent à montrer que  $\mathcal{C}$  satisfait  $\mathcal{C} = (\mathcal{Z} + \mathcal{C})^2$ , et donc qu'elle est la classe de Catalan, dont la fonction génératrice est donnée par (I.1.2). En effet, si on multiplie (I.2.2) par  $\mathcal{B}^2$ , on obtient

$$\mathcal{BAB} = \mathcal{B}^2 + (\mathcal{ZAB})^2 + (\mathcal{BAB})^2 \quad \text{et donc} \quad \mathcal{C} = \mathcal{B}^2 + (\mathcal{ZAB})^2 + \mathcal{C}^2.$$

On observe que, pour toute classe combinatoire  $\mathcal{R}$  sans objet de taille 0, on a

$$\begin{aligned} & \text{Seq}(\mathcal{R})^2 + (\mathcal{R} \text{Seq}(\mathcal{R}))^2 \\ &= \text{Seq}(\mathcal{R}) \text{Seq}(\mathcal{R}) + \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{R}) \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{R}) \\ &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{1} + \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{R}) \cdot \mathbf{1} + \text{Seq}(\mathcal{R}) \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{R}) + \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{R}) \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{R}) \\ &= \mathbf{1} + \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{R}) \text{Seq}(\mathcal{R}) + \text{Seq}(\mathcal{R}) \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{R}) = \mathbf{1} + 2\mathcal{R} \text{Seq}(\mathcal{R})^2, \end{aligned}$$

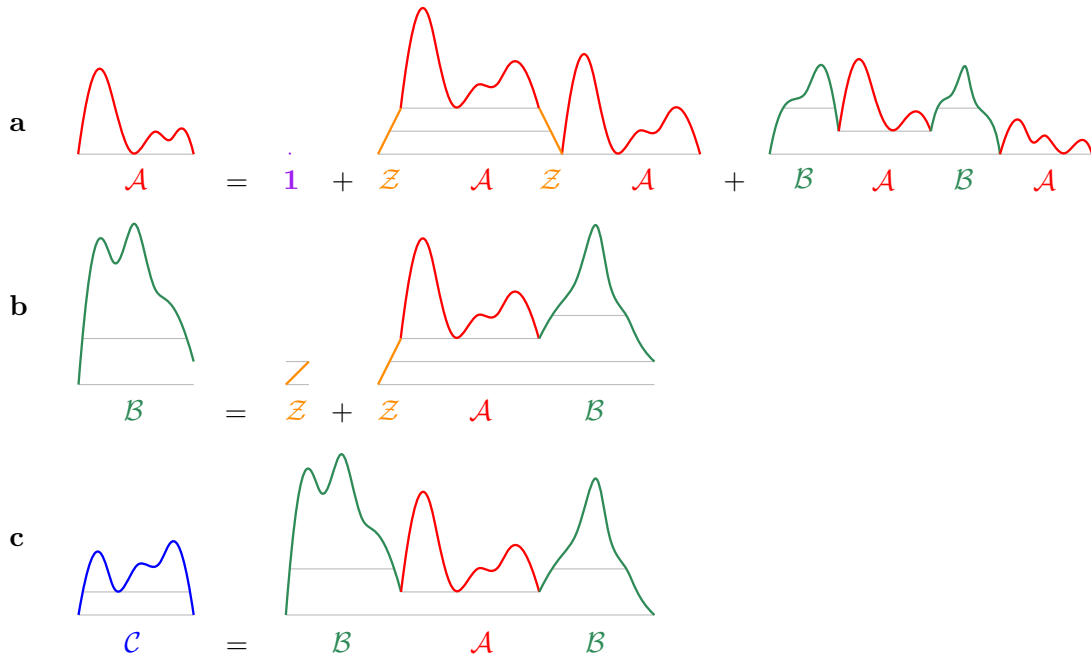


FIGURE I.2.1 – Décomposition d’une  $A$ -marche (a), une  $B$ -marche (b) et une  $C$ -marche (c). Les lignes horizontales sont une aide visuelle mettant en avant les propriétés des  $A$ ,  $B$  et  $C$ -marches.

Pour obtenir la deuxième égalité, on divise  $\text{Seq}(\mathcal{R})^2$  en trois termes, et on combine les deuxième et quatrième termes pour obtenir la troisième égalité. Comme  $\mathcal{B} = \mathcal{Z} \text{Seq}(\mathcal{Z}\mathcal{A})$ , la dernière identité appliquée à  $\mathcal{R} = \mathcal{Z}\mathcal{A}$  donne

$$\mathcal{B}^2 + (\mathcal{Z}\mathcal{A}\mathcal{B})^2 = \mathcal{Z}^2(1 + 2\mathcal{Z}\mathcal{A} \text{Seq}(\mathcal{Z}\mathcal{A})^2) = \mathcal{Z}^2 + 2\mathcal{Z}\mathcal{A}\mathcal{B}^2 = \mathcal{Z}^2 + 2\mathcal{Z}\mathcal{C},$$

ce qui nous donne  $\mathcal{C} = \mathcal{Z}^2 + 2\mathcal{Z}\mathcal{C} + \mathcal{C}^2 = (\mathcal{Z} + \mathcal{C})^2$  comme convenu.

Si on marque chaque pas  $\pm 1$  par  $\mathcal{Z}_1$  et chaque pas  $\pm 2$  par  $\mathcal{Z}_2$ , alors l’identité précédente devient

$$\mathcal{A} = 1 + \mathcal{Z}_2\mathcal{A}\mathcal{Z}_2\mathcal{A} + \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{A}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{Z}_1 \text{Seq}(\mathcal{Z}_2\mathcal{A}), \quad \mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B},$$

ce qui fait que  $\mathcal{C}$  satisfait

$$\mathcal{C} = \mathcal{B}^2 + (\mathcal{Z}_2\mathcal{A}\mathcal{B})^2 + \mathcal{C}^2 = \mathcal{Z}_1^2 + 2\mathcal{Z}_2\mathcal{C} + \mathcal{C}^2.$$

Dans un arbre binaire, on définit comme *feuille double* les feuilles dont le frère est aussi une feuille, et une *feuille simple* est une feuille dont le frère est un nœud interne.

L'identité précédente correspond à la grammaire de décomposition des arbres binaires dont chaque feuille double est marquée par  $\mathcal{Z}_1$  et chaque feuille simple par  $\mathcal{Z}_2$ .

Pour les feuilles simples, on dit qu'il s'agit d'une *feuille gauche* si elle est l'enfant gauche de son parent, et une *feuille droite* si elle est l'enfant droit. Dans la section suivante, on présente une bijection récursive entre  $\mathcal{C}$  et les arbres binaires, qui implémente la décomposition précédente, en associant les pas  $\pm 1$  aux feuilles doubles, et les pas  $\pm 2$  aux feuilles simples. On donne de plus des opérations inverses qui donnent un sens aux deux types de feuilles simples de l'arbre binaire, ce qui explicitera les différents types de pas  $\pm 2$  des  $\mathcal{C}$ -marches correspondantes.

## I.2.2 La bijection

On réécrit la grammaire des marches de basketball pour rendre apparent le lien avec la décomposition de Catalan. On rappelle, avec la Figure I.2.1c, que  $\mathcal{C} = \mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B}$ .

Puisqu'une  $\mathcal{C}$ -marche commence et finit en 0, est strictement positive entre ces deux points, et a des pas d'une envergure d'au plus 2, il semble naturel de considérer la restriction de la suite des hauteurs de la marche à l'ensemble  $\{1, 2\}$ . Par exemple, cette restriction appliquée à la marche  $(0, 2, 3, 4, 2, 3, 1, 2, 3, 5, 4, 2, 3, 1, 3, 1, 2, 0)$  nous donne la séquence  $(2, 2, 1, 2, 2, 1, 1, 2)$ . On classe les  $\mathcal{C}$ -marches par rapport à cette séquence en 4 catégories. Les valeurs encadrées sont obligatoires, chaque  $x$  est soit un 1 soit un 2 (Voir Figure I.2.2).

- (i)  $\boxed{1}$  ;
- (ii)  $2 \dots 2 \boxed{1} \boxed{2} 2 \dots 2 \boxed{1} x \dots x$  ;
- (iii)  $2 \dots 2 \boxed{1} \boxed{2} 2 \dots 2$  ;
- (iv)  $2 \dots 2 \boxed{2} \boxed{1}$  ou  $2 \dots 2 \boxed{1} \boxed{1} x \dots x$ .

Pour chacune de ces classes, on définit une fonction  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{C} \cup \{\varepsilon\})^2$ , où  $\varepsilon$  est un symbole formel. La fonction  $\Phi$  est le point de départ de notre bijection. Voir Figure I.2.2 pour une représentation graphique de la fonction.

**Classe (i).** La seule marche dans la classe (i) est  $(+1, -1)$  ; on pose donc que  $\Phi((+1, -1)) := (\varepsilon, \varepsilon)$ .

**Classe (ii).** Une telle marche est la concaténation de trois sous-marches : une  $B$ -marche  $\mathbf{b}_1$  ( $2 \dots 2 \boxed{1}$ ), une  $\mathcal{C}$ -marche  $\mathbf{c}$  ( $\boxed{1} \boxed{2} 2 \dots 2 \boxed{1}$ ), et la concaténation d'une  $A$ -marche  $\mathbf{a}$  et d'une  $B$ -marche renversée  $\bar{\mathbf{b}}_2$  ( $\boxed{1} x \dots x$ ). On pose  $\Phi(\mathbf{b}_1 \mathbf{c} \mathbf{a} \bar{\mathbf{b}}_2) := (\bar{\mathbf{c}}, \mathbf{b}_1 \mathbf{a} \bar{\mathbf{b}}_2)$ .

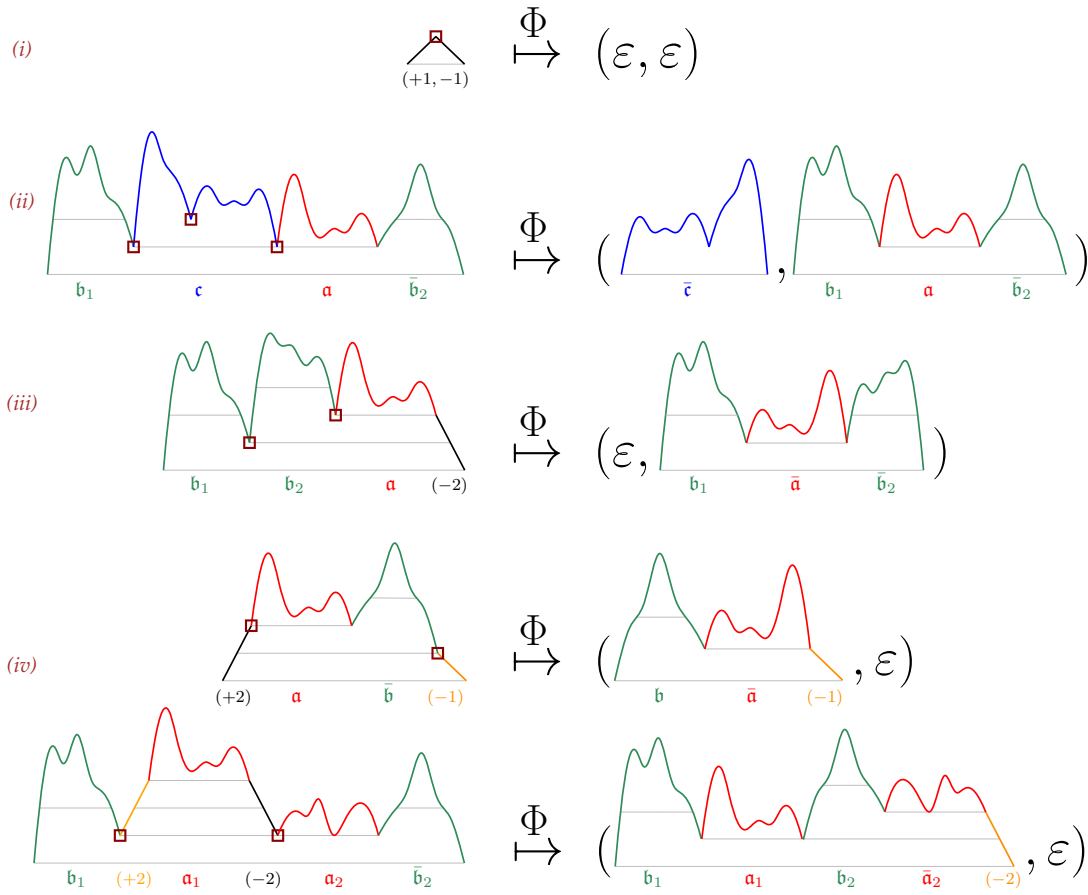


FIGURE I.2.2 – Les quatre différentes classes, et la définition de la fonction  $\Phi$ .

On choisit ici d'utiliser la marche renversée  $\bar{c}$  au lieu de  $c$  ; ce choix aura son importance dans la Section I.2.3.

**Classe (iii).** Une telle marche est composée d'une  $B$ -marche  $b_1$  ( $2 \dots 2 \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ ), une autre  $B$ -marche  $b_2$  ( $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ), une  $A$ -marche  $a$  et un pas  $-2$  ( $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} 2 \dots 2$ ). On pose  $\Phi(b_1 b_2 a(-2)) := (\varepsilon, b_1 \bar{a} \bar{b}_2)$ .

**Classe (iv).** Une marche dans la première sous-classe est composée d'un pas  $+2$  et d'une  $A$ -marche  $a$  ( $2 \dots 2 \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$ ), puis une  $B$ -marche renversée  $\bar{b}$  et un pas  $-1$  ( $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ). Dans ce cas, on pose  $\Phi((+2) a \bar{b}(-1)) := (b \bar{a}(-1), \varepsilon)$ .

Une marche dans la seconde sous-classe se décompose en une  $B$ -marche  $b_1$  ( $2 \dots 2 \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$ ), un pas  $+2$ , une  $A$ -marche  $a_1$  suivi d'un pas  $-2$  ( $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ), et enfin la



concaténation d'une  $A$ -marche  $\mathbf{a}_2$  et d'une  $B$ -marche renversée  $\bar{\mathbf{b}}_2$  ( $\boxed{1} x \dots x$ ). On oublie le pas  $-2$  et on réarrange les parties restantes, pour obtenir la formule suivante,  $\Phi(\mathbf{b}_1(+2)\mathbf{a}_1(-2)\mathbf{a}_2\bar{\mathbf{b}}_2) := (\mathbf{b}_1\mathbf{a}_1\mathbf{b}_2\bar{\mathbf{a}}_2(-2), \varepsilon)$ .

On observe que les marches dans les deux sous-classes précédentes génèrent un pas  $+2$  pair ou impair, ainsi qu'une  $C$ -marche dont le pas final est  $-1$  ou  $-2$  en fonction de la sous-classe.

On obtient de cette classification que  $\mathcal{C} = \mathcal{Z}^2 + \mathcal{C}^2 + \mathcal{Z}\mathcal{C} + \mathcal{Z}\mathcal{C} = (\mathcal{Z} + \mathcal{C})^2$ . Pour faire le parallèle avec la Section I.2.1, les classes considérées correspondent à la décomposition de  $\mathcal{C}$  suivante

$$\mathcal{C} = \underbrace{\mathcal{Z}^2}_{(i)} + \underbrace{\mathcal{Z} \cdot \mathcal{Z} \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{Z}\mathcal{A})}_{(iv).1} + \underbrace{\mathcal{Z} \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{Z}\mathcal{A}) \cdot \mathcal{Z} \text{Seq}(\mathcal{Z}\mathcal{A})}_{(iii)} + \underbrace{\mathcal{Z}^2 \mathcal{A}^2 (\mathcal{Z} \text{Seq}(\mathcal{Z}\mathcal{A}))^2}_{(iv).2} + \underbrace{\mathcal{C}^2}_{(ii)} .$$

La fonction  $\Phi$  équivaut à réarranger  $(iii)$  en

$$\mathcal{Z}\mathcal{Z}\mathcal{A} \text{Seq}(\mathcal{Z}\mathcal{A})\mathcal{Z} \text{Seq}(\mathcal{Z}\mathcal{A}) = \mathcal{Z}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{Z}\mathcal{C}$$

et  $(iv)$  en

$$\mathcal{Z}^3 \mathcal{A} \text{Seq}(\mathcal{Z}\mathcal{A})(\mathbf{1} + \mathcal{Z}\mathcal{A} \text{Seq}(\mathcal{Z}\mathcal{A})) = \mathcal{Z}^3 \mathcal{A} \text{Seq}(\mathcal{Z}\mathcal{A})^2 = \mathcal{Z}\mathcal{B}\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{Z}\mathcal{C}.$$

On peut maintenant utiliser notre analyse pour construire une bijection récursive entre les  $C$ -marches et les arbres binaires. On considère une  $C$ -marche quelconque, et on construit son arbre binaire correspondant comme suit. On part de l'arbre à un seul nœud auquel on associe la  $C$ -marche. Puis, récursivement, on applique la fonction  $\Phi$  aux marches non vides des nœuds de l'arbre, le couple de chemins obtenu correspond aux chemins associés aux deux enfants du nœud. Voir I.2.3 pour un exemple.

En notant  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  les projections de  $\Phi$  sur les coordonnées, et  $|\cdot|$  le nombre de pas dans une marche, de par la définition de  $\Phi$ , on obtient  $|\mathbf{w}| = |\Phi_1(\mathbf{w})| + |\Phi_2(\mathbf{w})|$ , en convenant que  $|\varepsilon| := 1$ . Ainsi, on voit que le nombre de feuilles dans l'arbre binaire correspondant à une marche  $\mathbf{w}$  est  $|\mathbf{w}|$ . On obtient donc, pour tout  $n \geq 1$ , une bijection entre les  $C$ -marches de longueur  $n + 1$ , et les arbres binaires à  $n + 1$  feuilles, qui sont comptés par le  $n$ -ème nombre de Catalan.

### I.2.3 Conservation des statistiques

Dans cette section on étudie quelles quantités se conservent par notre bijection.

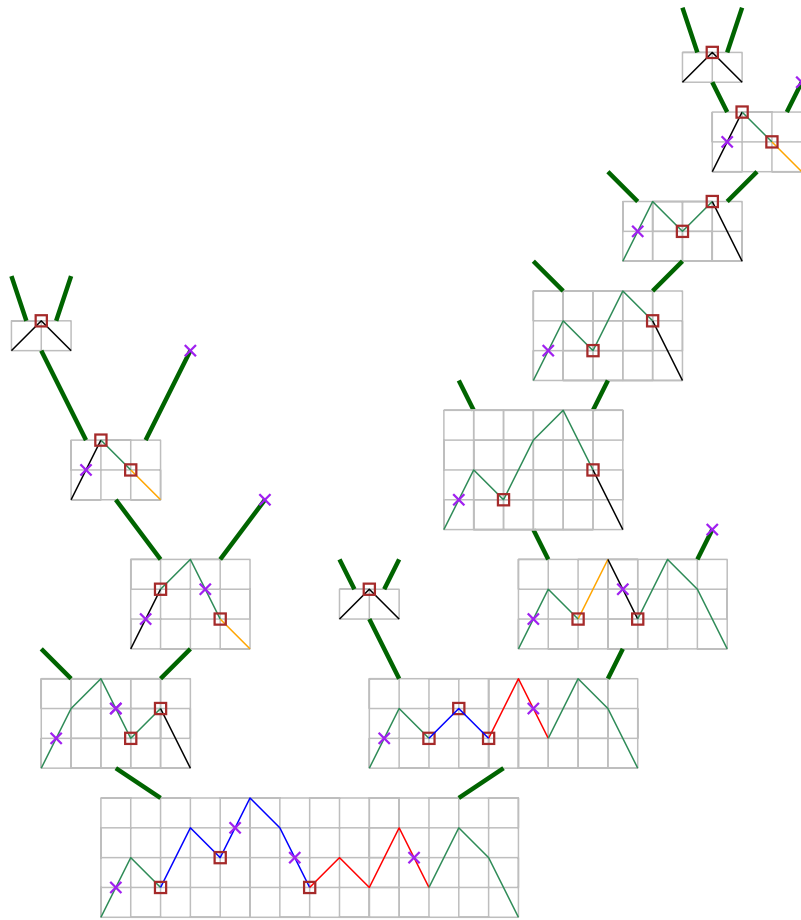


FIGURE I.2.3 – Bijection entre une  $C$  marche de longueur 14, et un arbre binaire à 14 feuilles.

**Proposition I.2.1.** *Soient une  $C$ -marche et son arbre binaire correspondant par la bijection. Alors*

- le nombre de pas  $\pm 1$  de la marche est égal au nombre de feuilles doubles de l'arbre ;
- la somme du nombre de pas  $+2$  impairs et du nombre de pas  $-2$  pairs est égal au nombre de feuilles gauches de l'arbre ;
- la somme du nombre de pas  $-2$  impairs et du nombre de pas  $+2$  pairs est égal au nombre de feuilles droites de l'arbre.

*Démonstration.* On prouve ces égalités par récurrence. Soit  $d(\mathbf{w})$  le nombre de pas  $\pm 1$  d'une marche  $\mathbf{w}$ . Par définition de  $\Phi$ , chaque pas  $k$  se trouve transformé en un

pas  $\pm k$ , donc pour  $\mathbf{w} \in \mathcal{C} \setminus \{(+1, -1)\}$ , on a  $d(\mathbf{w}) = d(\Phi_1(\mathbf{w})) + d(\Phi_2(\mathbf{w}))$ . De plus, la marche  $(+1, -1)$  correspond à un arbre avec deux feuilles doubles, alors qu'aucune autre marche ne crée de feuille double. Cela suffit pour prouver la première égalité.

On rappelle que les  $A$ -marches et les  $C$ -marches commencent et finissent en 0, et les  $B$ -marches commencent en 0 et finissent en 1; De plus, si on note  $\ell(\mathbf{w})$  la somme du nombre de pas  $+2$  impairs et du nombre de pas  $-2$  pairs de  $\mathbf{w}$ , on a  $\ell(\mathbf{w} + 2k) = \ell(\bar{\mathbf{w}} + 2k + 1) = \ell(\mathbf{w})$  pour tout entier  $k$  (où  $\mathbf{w} + p$  correspond à la marche  $\mathbf{w}$  décalée vers le haut de  $p$ ). Autrement dit,  $\ell$  est stable par décalage d'une quantité impaire, et par décalage pair avec renversement. Notons par ailleurs que le choix de  $\Phi$  est tel que, dans la classe  $(i)$ ,  $\ell(\mathbf{w}) = 0$ , dans la classe  $(ii)$ ,  $\ell(\mathbf{w}) = \ell(\Phi_1(\mathbf{w})) + \ell(\Phi_2(\mathbf{w}))$ , dans la classe  $(iii)$ ,  $\ell(\mathbf{w}) = 1 + \ell(\Phi_2(\mathbf{w}))$ , et dans la classe  $(iv)$ ,  $\ell(\mathbf{w}) = \ell(\Phi_1(\mathbf{w}))$ . La deuxième égalité se déduit donc du fait que les marches de la classe  $(iii)$  créent exactement une feuille gauche, alors que les autres classes n'en créent aucune.

La dernière égalité s'obtient par un raisonnement similaire, ou en remarquant que la somme des trois statistiques considérées pour la marche est égale à sa longueur, et que pour l'arbre il s'agit de son nombre de feuilles.  $\square$

La Proposition I.1.1 est une conséquence directe de la Proposition I.2.1, car le nombre voulu est égal au nombre d'arbres binaires avec  $d$  feuilles doubles,  $\ell$  feuilles gauches, et  $r$  feuilles droites. Ce nombre s'obtient aisément avec [MS00, Théorème 4], ou en comptant les arbres unaires-binaires; on donne ici une preuve alternative plus directe.

*Preuve de la Proposition I.1.1.* Un arbre binaire avec  $2d$  feuilles doubles,  $\ell$  feuilles gauches, et  $r$  feuilles droites peut s'obtenir de la manière suivante. En partant d'un arbre binaire à  $d$  feuilles, on ajoute deux arêtes sortantes aux  $d$  feuilles initiales, et on insère  $\ell + r$  nœuds sur les  $2d - 1$  arêtes existantes. Sur  $\ell$  de ces sommets, on ajoute une arête sortante gauche, et sur les  $r$  restantes on ajoute une arête sortante droite. L'opération est clairement bijective, et donne le résultat voulu.  $\square$

## I.2.4 Marches sans pas larges

Considérons les  $C$ -marches sans pas  $\pm 2$ . Il s'agit aussi des  $A$ -marches sans pas  $\pm 2$  dont on a retiré les pas extrémaux, et on retrouve donc les chemins de Dyck. Si  $\mathbf{w}$  est une telle  $C$ -marche, elle est dans la classe  $(i)$  ou  $(ii)$ . De plus, la seule  $B$ -marche sans pas  $\pm 2$  est  $(+1)$ . Donc si  $\mathbf{w}$  est dans la classe  $(ii)$ , elle est de la forme  $(+1, +1)\mathbf{a}_1(-1)\mathbf{a}_2(-1)$  où  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  sont des  $A$ -marches sans pas  $\pm 2$ . Ainsi, on a  $\Phi((+1, +1)\mathbf{a}_1(-1)\mathbf{a}_2(-1)) = ((+1)\bar{\mathbf{a}}_1(-1), (+1)\mathbf{a}_2(-1))$ , et notre bijection est une variante de la bijection classique entre chemins de Dyck et arbres binaires.

La bijection classique peut s'obtenir d'une façon similaire à la nôtre, avec une fonction  $\Psi$  définie sur les chemins de Dyck non vides par  $\Psi((+1)\mathbf{a}_1(-1)\mathbf{a}_2) := (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ . On construit ensuite un arbre binaire récursivement comme pour notre bijection. On note que la longueur d'un chemin de Dyck est le double du nombre de feuilles de son arbre correspondant, moins 2.

Notre bijection donne les mêmes résultats à cela près qu'on attache deux feuilles doubles aux feuilles (car le chemin de Dyck vide donne une feuille dans la bijection classique, et le  $C$ -chemin correspondant  $(+1, -1)$  donne deux doubles feuilles), et chaque sous arbre est inversé à chaque étape (à cause du renversement  $\mathbf{a}_1$ ).

En conclusion, on observe que la restriction de notre bijection aux  $C$ -marches sans pas  $\pm 2$  donne une bijection entre ces marches et les arbres binaires, qui est une variante de l'encodage classique des arbres binaires en chemins de Dyck. Notons que, dans ce cas, la longueur d'une  $C$ -marche est le double du nombre de feuilles dans l'arbre binaire correspondant.

## I.3 Lien avec les arbres binaires-unaires croissants

### I.3.1 Preuve du Théorème I.1.2

Étudions le lien entre les marches de basketball et les arbres unaires-binaires croissants dont la permutation associée évite 213. On commence par donner une caractérisation des permutations autorisées pour un certain arbre unaire-binaire (non-étiqueté). On dit qu'une permutation  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  est *valide* pour un arbre unaire-binaire si  $\sigma$  évite 213, et si en étiquetant l'arbre unaire-binaire par  $\sigma$  de gauche à droite selon un parcours en largeur, alors l'arbre obtenu est croissant.

**Lemme I.3.1.** *Soit un arbre unaire-binaire à  $n$  sommets, et on note  $\mathcal{N} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$  l'ensemble des indices de ses nœuds internes quand on lit ses sommets selon un parcours en largeur. Une permutation  $\sigma$  est valide si et seulement si elle évite 213, et pour tout  $i \in \mathcal{N}$ ,  $\sigma_i = \min_{i \leq j \leq n} \sigma_j$ ; autrement dit,  $\mathcal{N}$  est l'ensemble des indices des minimums droite-gauche.*

**Remarque.** Cette observation a déjà été prouvée dans le cas particulier d'arbres unaires-binaires complets, dont les sommets sont arrangés de telle sorte que les feuilles sont lues après les nœuds internes; voir [LPRS16, Théorème 4].

*Démonstration.* On note  $v_1, \dots, v_n$  les sommets de l'arbre lus selon un parcours en largeur. Par définition,  $\sigma$  est valide pour l'arbre si et seulement si elle évite 213, et pour tout  $i \in \mathcal{N}$ , et tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $v_j$  est un fils de  $v_i$ , on a  $\sigma_i < \sigma_j$ . Par

définition de la recherche en largeur, on a alors  $i < j$ . Ainsi, une permutation pour laquelle les éléments de  $\mathcal{N}$  sont des minimums droite-gauche est immédiatement valide.

Inversement, soit  $\sigma$  une permutation valide, et soit  $i \in \mathcal{N}$ ; il suffit de montrer que  $i$  est l'indice d'un minimum droite-gauche, c'est-à-dire  $\sigma_i < \sigma_k$  pour tout  $k \in \{i + 1, \dots, n\}$ . Soit  $j \in \{1, \dots, n\}$  le plus grand entier tel que  $v_j$  est un fils de  $v_i$ . Déjà,  $\sigma_i < \sigma_j$  car l'arbre est croissant. Ensuite, on doit avoir  $\sigma_i < \sigma_k$  pour tout  $k \in \{i + 1, \dots, j - 1\}$ , car  $\sigma_i < \sigma_j$  et  $(\sigma_i, \sigma_k, \sigma_j)$  doit éviter 213. Enfin, si  $k \in \{j + 1, \dots, n\}$ , alors  $v_k$  doit admettre un ancêtre  $v_{k'}$  pour un certain  $k' \in \{i + 1, \dots, j\}$ , et on voit que  $\sigma_k > \sigma_{k'} > \sigma_i$  de ce qu'on a déduit précédemment.  $\square$

**Lemme I.3.2.** *Pour  $n \geq 1$ , soit  $\mathcal{P}_n$  l'ensemble des permutations de taille  $n$  évitant 213, et pour chaque sous-ensemble non vide  $\mathcal{E} \subseteq \{1, \dots, n - 1\}$ , soit*

$$\mathcal{P}_n^{(\mathcal{E})} := \{\sigma \in \mathcal{P}_n : \text{tout } a \in \mathcal{E} \text{ est l'indice d'un minimum droite-gauche de } \sigma\}.$$

Alors, pour un sous-ensemble  $\mathcal{E} = \{a_1 < \dots < a_k\}$ , on a

$$\mathcal{P}_n^{(\mathcal{E})} \simeq \mathcal{P}_{a_1} \times \mathcal{P}_{a_2 - a_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{a_k - a_{k-1}} \times \mathcal{P}_{n - a_k}.$$

*Démonstration.* La fonction qui à  $\sigma \in \mathcal{P}_n^{(\mathcal{E})}$  associe  $(\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)})$  qui est un élément de  $\mathcal{P}_{a_1} \times \mathcal{P}_{a_2 - a_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{a_k - a_{k-1}} \times \mathcal{P}_{n - a_k}$  est simple : pour  $i \in \{0, \dots, k\}$ , on pose  $\sigma^{(i)}$  la permutation renormalisée induite par  $\sigma$  sur l'ensemble d'indices  $\{a_i + 1, \dots, a_{i+1}\}$  (avec pour convention que  $a_0 = 0$  et  $a_{k+1} = n$ ).

Pour inverser cette fonction, on utilise la propriété qu'une permutation  $\sigma \in \mathcal{P}_n$  avec  $p$  minimums droite-gauche est de la forme  $\sigma = (\sigma^{(0)}, 1, \sigma^{(1)}, 2, \sigma^{(2)}, 3, \dots, \sigma^{(p-1)}, p)$  où  $1, \dots, p$  sont les minimums droite-gauche, et  $\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(p-1)}$  sont les sous-permutations de  $\{p + 1, \dots, n\}$  évitant 213, ayant des supports disjoints, et arrangées par ordre décroissant ( $\min \sigma^{(i)} > \max \sigma^{(j)}$  quand  $i < j$  et  $\sigma^{(i)}, \sigma^{(j)} \neq \emptyset$ ); ces sous-permutations sont les *blocs* de  $\sigma$ .

À partir de  $(\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)}) \in \mathcal{P}_{a_1} \times \mathcal{P}_{a_2 - a_1} \times \dots \times \mathcal{P}_{a_k - a_{k-1}} \times \mathcal{P}_{n - a_k}$ , on arrive à  $\sigma \in \mathcal{P}_n^{(\mathcal{E})}$  comme suit : on concatène  $\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)}$ , et renormalise les valeurs de la seule façon qui permet d'avoir les minimums droite-gauche de  $\sigma$  être ceux de  $\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)}$  dans l'ordre croissant, et que les blocs de  $\sigma$  sont ceux de  $\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)}$ , avec des portées décroissantes; voir Figure I.3.1 pour un exemple. On note que, pour tout  $i \in \{0, \dots, k - 1\}$ , comme le dernier indice dans  $\sigma^{(i)}$  est nécessairement l'indice d'un minimum droite-gauche, l'indice correspondant  $a_{i+1}$  est l'indice d'un minimum droite-gauche dans  $\sigma$ .  $\square$

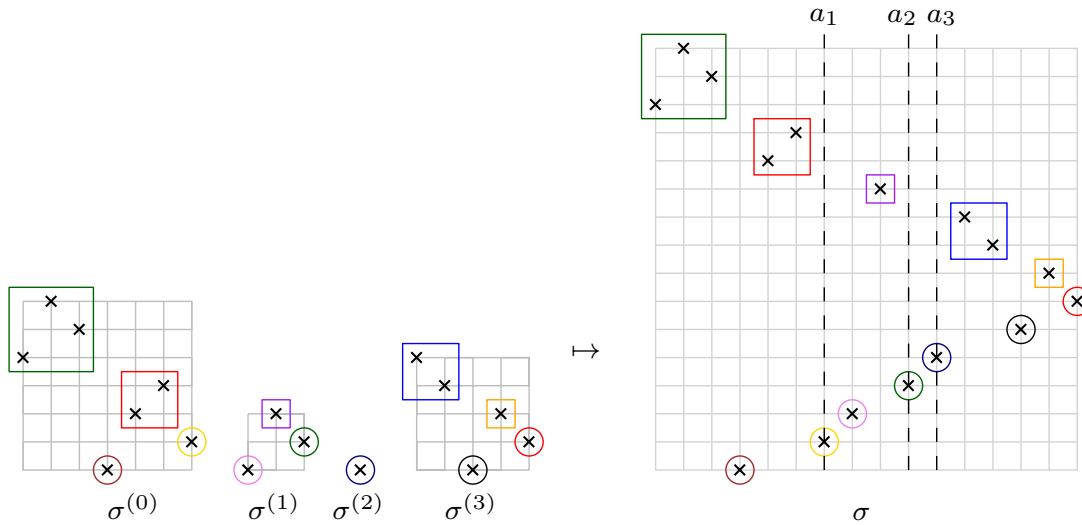


FIGURE I.3.1 – Passage d’une séquence  $(\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)})$  de permutations non vides évitant 213 à une permutation  $\sigma$  évitant 213. Les minimums droite-gauche sont encerclés, et les blocs encadrés.

Avec les deux lemmes précédents, on est en mesure de donner un encodage plus pratique des arbres unaires-binaires dont la permutation associée évite 213. Un *chemin de Motzkin* est une marche dont les pas sont dans  $\{-1, 0, +1\}$ . On appelle une *séquence descendante* d’un chemin de Motzkin une suite maximale de  $-1$ . Un chemin de Motzkin est *décoré* si chacune de ses séquences descendantes est marquée par une permutation évitant 213, dont la taille est égale à la taille de la descente, plus 1.

**Lemme I.3.3.** *Pour  $n \geq 1$ , les arbres unaires-binaires croissants à  $n$  sommets dont la permutation associée évite 213 sont en bijection avec les chemins de Motzkin décorés à  $n$  pas, allant de 0 à 1 et strictement positifs sauf à l’origine.*

La Figure I.3.2 donne un exemple de cet encodage.

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{T}$  un arbre unaire-binaire à  $n$  sommets, et dont la permutation associée  $\sigma$  évite le motif 213. Comme précédemment, on note  $v_1, \dots, v_n$  les sommets de  $\mathbf{T}$  ordonnés selon un parcours en largeur. On encode  $\mathbf{T}$  en un chemin de Motzkin comme suit : si on note  $c(v) \in \{0, 1, 2\}$  le nombre de fils de  $v$ , la marche  $\mathbf{w}$  associée à  $\mathbf{T}$  commence en zéro et suit la séquence de pas  $(+1, c(v_1) - 1, c(v_2) - 1, \dots, c(v_{n-1}) - 1)$ .

On s’occupe maintenant d’encoder les étiquettes de l’arbre, soit  $\mathcal{N} = \{a_i\}$  l’ensemble des indices des nœuds internes de  $\mathbf{T}$  ordonnés par ordre croissant, avec

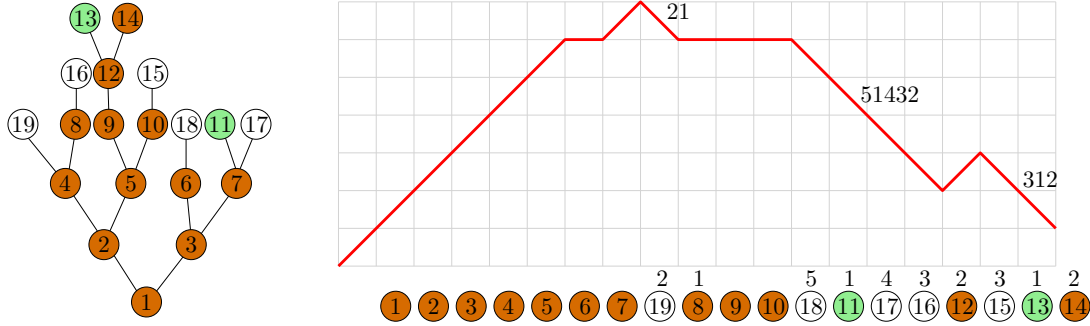


FIGURE I.3.2 – **Gauche** : un arbre unaire-binaire croissant dont la permutation associée évite 213. **Droite** : son encodage par un chemin de Motzkin décoré. Les nœuds internes et la dernière feuille sont en marron, et les autres minimums droite-gauche sont en vert.

$a_1 = 1$ . Avec le Lemme I.3.1, chaque  $a \in \mathcal{N}$  est l'indice d'un minimum droite-gauche de  $\sigma$ . Donc  $\sigma \in \mathcal{P}_n^{(\mathcal{N})}$ , et avec le Lemme I.3.2,  $\sigma$  s'identifie au  $(k+1)$ -uplet  $(\sigma^{(0)}, \dots, \sigma^{(k)})$ , où  $\sigma^{(i)}$  est la permutation induite par  $\sigma$  renormalisée sur l'ensemble d'indices  $\{a_i + 1, \dots, a_{i+1}\}$ .

Dans le chemin de Motzkin  $\mathbf{w}$ , le pas +1 initial correspond à la dernière feuille de  $\mathbf{T}$ , les autres pas +1 et 0 sont les nœuds internes de  $\mathbf{T}$ , et les pas -1 sont les autres feuilles de  $\mathbf{T}$ . Ainsi, pour tout  $i \in \{0, \dots, k\}$  tel que  $a_{i+1} - a_i \geq 2$ , les pas de  $\mathbf{w}$  entre les indices  $a_i + 1$  et  $a_{i+1} - 1$  forment une séquence descendante de longueur  $a_{i+1} - a_i - 1$ . À cette descente, on associe la permutation  $\sigma^{(i)}$ . On obtient alors bien un encodage bijectif en un chemin de Motzkin décoré. Voir Figure I.3.2 pour un exemple.  $\square$

On introduit deux autres fonctions génératrices de chemins, avec un poids  $z$  sur les pas :

- $T$  compte les chemins de Motzkin décorés, allant de 0 à 1, et strictement positifs sauf à l'origine ;
- $M$  compte les chemins de Motzkin décorés, allant de 0 à 1, et strictement positifs sauf à l'origine, et dont le dernier pas qui n'est pas -1 est un pas +1.

*Preuve du Théorème I.1.2.* Pour conclure, il suffit de montrer que  $T = G$ . On montre d'abord que  $\mathcal{T} = \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{M})$ , puis que  $M = A$ . C'est suffisant car on a avec l'Équation (I.2.1) que  $\mathcal{G} = \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{Z}\mathcal{A})$ .

**Première étape** : On prouve d'abord que  $\mathcal{T} = \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{M})$ . En effet, une  $T$ -marche est soit une  $M$ -marche, soit une  $T$ -marche dont le dernier pas qui n'est pas -1 est

un pas 0. Si on se place dans ce dernier cas, soit  $k \geq 0$  le nombre de pas  $-1$  après le dernier pas 0 (qui se situe donc à hauteur  $k + 1$ ), et  $n$  la longueur de la marche. La marche peut se décomposer en trois parties. Entre le départ et le dernier moment où la marche atteint la hauteur  $k$  avant le dernier pas 0, on a un chemin de Motzkin décoré de 0 à  $k$  strictement positif. Jusqu'au pas  $n - k - 1$ , on a ensuite une  $T$ -marche. enfin, on finit avec un pas 0 suivi d'une descente décorée de longueur  $k$ . Voir Figure I.3.3. Si on change le dernier pas 0 en  $+1$ , et que l'on concatène la première partie avec la dernière, on obtient une  $M$ -marche. Ainsi, l'ensemble des  $T$ -marches qui ne sont pas des  $M$ -marches sont en bijection avec les couples formés d'une  $T$ -marche et d'une  $M$ -marche. Donc  $\mathcal{T} = \mathcal{M} + \mathcal{T}\mathcal{M}$ , et  $\mathcal{T} = \text{Seq}_{\geq 1}(\mathcal{M})$ .

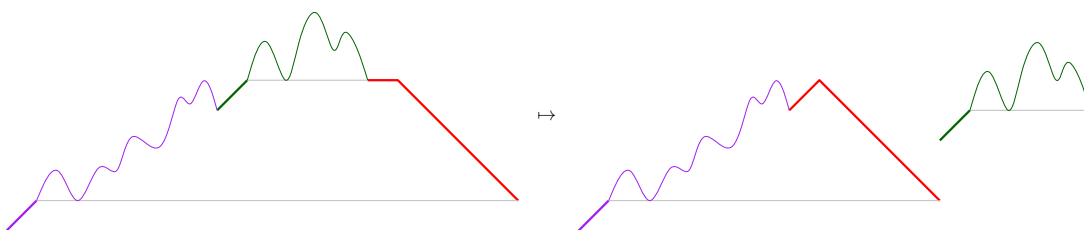


FIGURE I.3.3 – Illustration d'une décomposition d'une  $T$ -marche qui n'est pas une  $M$ -marche en une  $M$ -marche et une  $T$ -marche.

**Deuxième étape :** Montrons que  $M = zA$ . On rappelle des propriétés sur  $A$  et  $B$  vues dans la Section I.2.2. Avec (I.2.1), on a  $B = z/(1 - zA)$ , et de (I.2.2) on a  $A = 1 + (zA)^2 + (BA)^2$ . Ainsi,

$$zA = z \left( 1 + (zA)^2 + \frac{(zA)^2}{(1 - zA)^2} \right).$$

On considère maintenant une  $M$ -marche non triviale. Soit  $k \geq 1$  la taille de sa dernière séquence descendante, et  $\sigma$  la permutation de longueur  $k + 1$  associée à cette descente. On utilise la décomposition de Catalan standard pour séparer  $\sigma$  en deux permutations  $\sigma'$  et  $\sigma''$  évitant 213, de tailles respectives  $i$  et  $k - 1$ . Cela signifie que le premier minimum droite-gauche de  $\sigma$ , qui est 1, est d'indice  $i + 1$ , et on a  $\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_i)$  et  $\sigma'' = (\sigma_{i+2}, \dots, \sigma_{k+1})$  à renormalisation près. Supposons que  $1 \leq i \leq k - 1$ . On divise la  $M$ -marche au dernier moment où elle atteint la hauteur  $i$  avant le dernier pas  $+1$ , et au moment  $n - k - 1$ , voir Figure I.3.4. On concatène la première partie avec la séquence  $(0, -1, \dots, -1)$  de taille  $i$ , à laquelle on associe la permutation  $\sigma'$ . On fait de même pour la deuxième partie et la permutation  $\sigma''$ . On a alors un couple de  $T$ -marches qui ne sont pas des  $M$ -marches. Si  $i = k$ , la première



marche est vide, et si  $i = 0$ , alors la deuxième l'est. Le cas restant est quand la marche initiale est triviale, et dans ce cas elle est comptée par  $z$ . Au total, on obtient  $M = z(1 + TM)^2$ , que l'on réécrit en

$$M = z \left( 1 + \frac{M^2}{1 - M} \right)^2 = z \left( 1 - M + \frac{M}{1 - M} \right)^2 = z \left( 1 + M^2 + \frac{M^2}{(1 - M)^2} \right).$$

Comme  $zA$  et  $M$  satisfont la même équation Lagrangienne de la forme  $X = z\varphi(X)$ , elles sont égales, ce qui conclut la preuve.  $\square$

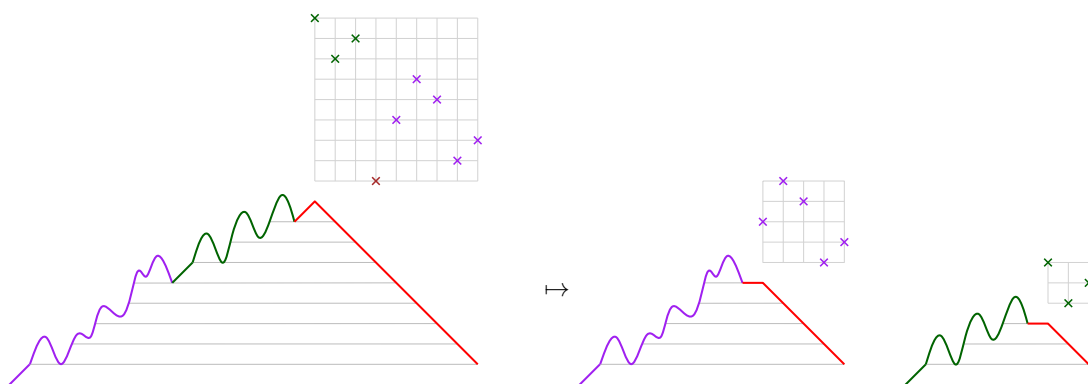


FIGURE I.3.4 – Décomposition récursive d'une  $M$ -marche.

**Note.** En utilisant des décompositions plus fines, on verra dans la Section I.3.2 que l'identité  $M = zA$  reste vraie dans le cas plus général des fonctions génératrices bivariées, avec un deuxième paramètre qui compte les pas 0 dans  $M$ , et les pas  $\pm 2$  décalés dans  $zA$ .

On conclut cette section avec l'observation suivante. On vient de prouver que  $T = G$ , donc (I.1.1) devient  $1 + T + T^2 = \text{Cat}$ . On souhaite donner une interprétation de cette identité.

**Proposition I.3.4.** *Pour tout  $n \geq 1$ , le  $(n - 1)$ -ème nombre de Catalan compte le nombre d'arbres unaires-binaires à  $n$  sommets dont la permutation associée évite 213, et qui vérifient la propriété suivante : si  $\ell_1, \dots, \ell_k$  sont les feuilles lues après le dernier nœud interne dans l'arbre selon un parcours en largeur, alors la dernière feuille a la plus petite étiquette parmi ces feuilles.*

*Démonstration.* Considérons le chemin de Motzkin décoré d'un arbre satisfaisant la condition précédente. On fait une distinction de cas sur son dernier pas.

- Si c'est un pas  $+1$ , alors le chemin est le chemin trivial  $(+1)$ , et correspond à l'arbre à un seul sommet, qui est étiqueté 1.
- Si c'est un pas  $0$ , alors le chemin de Motzkin décoré ne doit pas satisfaire plus de contraintes; l'arbre correspondant finit avec une seule feuille après un nœud unaire.
- Si c'est un pas  $-1$ , soit  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)$  la permutation assignée à la dernière séquence de descentes. La condition se traduit en  $\sigma_k = 1$ . Si on considère la dernière fois que 1 est atteint avant la fin, le chemin de Motzkin peut se décomposer en deux chemins de Motzkin successifs, suivis d'un pas  $-1$  final. Ces chemins héritent des mêmes décorations que le chemin de Motzkin original, avec la dernière descente du deuxième chemin assignée à la permutation  $(\sigma_1 - 1, \dots, \sigma_{k-1} - 1)$ .

Cette classification montre que la fonction génératrice de nos objets est

$$z + zT + zT^2 = z \text{Cat},$$

comme voulu. □

### I.3.2 Nœuds unaires et pas décalés

Dans cette section, on s'intéresse au nombre d'arbres unaires-binaires croissants à  $n$  sommets dont la permutation associée évite 213 pour un nombre fixe de nœuds unaires. On prouve la Proposition I.1.3, puis on identifie la statistique sur les chemins de basketball qui correspond au nombre de nœuds unaires dans un arbre unaire-binaire croissant. On s'intéresse à des fonctions génératrices bivariées de chemins, avec un poids  $z$  sur les pas comme précédemment, et un poids  $u$  pour certains pas que l'on qualifiera plus tard dans la section. Ces fonctions seront notées  $A$ ,  $B$ ,  $G$ ,  $M$  et  $T$ .

*Preuve de la Proposition I.1.3.* On rappelle que les nœuds unaires d'un arbre unaire-binaire correspondent aux pas 0 de son encodage en chemin de Motzkin. Avec cette observation, et le Lemme I.3.3, le nombre d'arbres unaires-binaires croissants à  $n$  sommets dont la permutation associée évite 213 ayant exactement  $n - 1 - 2k$  nœuds unaires est égal à  $[u^{n-1-2k} z^n]T(z, u)$ , où  $u$  marque le nombre de pas 0 dans le chemin de Motzkin.

En reprenant la preuve du Théorème I.1.2 avec les fonctions bivariées, on obtient  $T = M + uTM$  et  $M = z(1 + TM)^2$ , d'où  $T = \psi(M)$  et  $M = z\phi(M)$ , avec

$$\psi(y) := \frac{y}{1 - uy} \quad \text{et} \quad \phi(y) := \left(1 + \frac{y^2}{1 - uy}\right)^2. \quad (\text{I.3.1})$$

Avec le théorème d'inversion de Lagrange, on obtient

$$\begin{aligned} [z^n]T(z, u) &= \frac{1}{n} [y^{n-1}] \psi'(y) \phi(y)^n = \frac{1}{n} [y^{n-1}] \frac{1}{(1 - uy)^2} \left(1 + \frac{y^2}{1 - uy}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{2n}{k} [y^{n-1-2k}] \frac{1}{(1 - uy)^{k+2}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{2n}{k} \binom{n-k}{k+1} u^{n-1-2k} \end{aligned}$$

ce qui prouve le théorème. □

On regarde maintenant la preuve de la Proposition I.1.5. Pour ce faire, on fera référence à la Définition I.1.4, et on rappelle que  $\mathcal{A}$  est la classe des marches de basketball positives de 0 à 0.

*Preuve de la Proposition I.1.5.* Soit  $A(z, u)$  la fonction génératrice bivariée de  $\mathcal{A}$ , où  $z$  marque le nombre de pas, et  $u$  le nombre de pas  $\pm 2$  décalés. Un marche dans  $\mathcal{A}$  est

- (i) soit vide ;
- (ii) soit la concaténation d'un pas +2, une  $A$ -marche, un pas -2 et une  $A$ -marche ;
- (iii) soit visite 1 (au moins une fois) avant de retourner pour la première fois en 0. Dans ce cas, cette marche est la concaténation d'une  $B$ -marche, un  $A$ -marche, un  $B$ -marche renversée, et une  $A$ -marche. On distingue trois sous-cas :
  - (a) les deux  $B$ -marches sont triviales, c'est-à-dire égales à (+1),
  - (b) exactement une des deux  $B$ -marches est triviale,
  - (c) les deux  $B$ -marches sont de longueur 2 ou plus.

On observe que, dans les cas (i), (ii), (iii)(a) et (iii)(b), chaque pas  $\pm 2$  décalé existant dans la marche originale reste décalé dans les sous-marches. Dans le cas (iii)(c), les deux  $B$ -marches sont composées d'un premier pas +2 qui n'est pas décalé dans le

chemin original, puis une  $A$ -marche et une  $B$ -marche renversée. La décomposition donne alors l'identité suivante sur les fonctions génératrices bivariées :

$$A = \underbrace{1}_{(i)} + \underbrace{(zA)^2}_{(ii)} + \underbrace{(zA)^2}_{(iii)(a)} + \underbrace{2zA^2(B-z)}_{(iii)(b)} + \underbrace{(zAB)^2A^2}_{(iii)(c)}.$$

On peut exprimer  $B$  en fonction de  $A$ . Avec la discussion qui a mené à (I.2.1), une  $B$ -marche est soit triviale, soit un pas décalé  $+2$  suivi d'une  $A$ -marche puis d'une  $B$ -marche renversée. Ainsi,  $B = z + uzAB$ , donc  $B = z/(1 - uzA)$ . On a alors

$$\begin{aligned} zA &= z \left( 1 + 2(zA)^2 + 2u \frac{(zA)^3}{1 - uzA} + \frac{(zA)^4}{(1 - uzA)^2} \right) \\ &= z \left( 1 + \frac{2(zA)^2}{1 - uzA} + \frac{(zA)^4}{(1 - uzA)^2} \right) = z \left( 1 + \frac{(zA)^2}{1 - uzA} \right)^2, \end{aligned}$$

qui est aussi l'équation Lagrangienne (I.3.1) vérifiée par  $M$ . Pour conclure, il suffit de remarquer que  $G = AB = zA/(1 - uzA)$ , et que  $T = M/(1 - uM)$ .  $\square$

*Preuve de la Proposition I.1.6.* On a obtenu dans la preuve de la Proposition I.1.5 que  $zA = z\phi(zA)$  où  $\phi$  est définie par (I.3.1). Avec la formule d'inversion de Lagrange, on obtient, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} [z^{n-1}]A(z, u) &= [z^n]zA(z, u) = \frac{1}{n} [y^{n-1}]\phi(y)^n = \frac{1}{n} [y^{n-1}] \left( 1 + \frac{y^2}{1 - uy} \right)^{2n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k \geq 0} \binom{2n}{k} [y^{n-1-2k}] \frac{1}{(1 - uy)^k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k \geq 0} \binom{2n}{k} \binom{n-k-2}{k-1} u^{n-1-2k} \end{aligned}$$

et le résultat s'ensuit. On remarque que la formule  $[y^a](1 - y)^{-b} = \binom{a+b-1}{b-1}$  n'est pas valide pour  $a = 0$  et  $b = 0$ , c'est pour cela que l'on suppose  $n \geq 2$ .  $\square$

### I.3.3 Une bijection explicite pour le Théorème I.1.2

On rappelle que dans la Section I.2.1, on a tout d'abord obtenu une première preuve formelle, en utilisant une grammaire de décomposition, que la classe  $\mathcal{C}$  des marches de basketball est une classe de Catalan. Ensuite, dans la Section I.2.2, on a

transformé cette preuve en une bijection récursive explicite avec des arbres binaires, en réalisant les opérations de la grammaire en manipulations sur les marches.

On peut opérer de la même manière pour obtenir une bijection récursive explicite entre les  $G$ -marches et les arbres unaires-binaires croissants dont la permutation associée évite 213. En vérité, toutes les opérations nécessaires à la construction de la bijection ont été vues dans les sections précédentes. De plus, l'étude du cas bivarié dans la Section I.3.2 donne que la statistique comptée par  $u$  dans  $\mathcal{G}$  correspond à celle comptée par  $u$  dans  $\mathcal{T}$ .

On rappelle l'Équation (I.2.1) et la preuve du Théorème I.1.2. On a prouvé que  $\mathcal{G} = \mathcal{ZA} + \mathcal{ZA}\mathcal{G}$  et  $\mathcal{T} = \mathcal{M} + \mathcal{M}\mathcal{T}$  de manière combinatoire. Cela signifie que l'on peut écrire explicitement un objet de  $\mathcal{G}$  soit comme un objet de  $\mathcal{ZA}$ , soit comme une paire, avec un objet de  $\mathcal{ZA}$  et un de  $\mathcal{G}$ , et de même quand on prend  $\mathcal{M}$  à la place de  $\mathcal{ZA}$  et  $\mathcal{T}$  à la place de  $\mathcal{G}$ . De plus, ces équations restent vraies indépendamment du nombre de variables des fonctions génératrices. Ainsi, il suffit d'expliquer comment  $\mathcal{ZA}$  et  $\mathcal{M}$  peuvent se décomposer isomorphiquement, ce qui a déjà été vu dans la Section I.3.2. En effet, on a vu que

$$\mathcal{ZA} = \mathcal{Z} \left( \mathbf{1} + 2(\mathcal{ZA})^2 + 2u(\mathcal{ZA})^3 \text{Seq}(u\mathcal{ZA}) + (\mathcal{ZA})^4 (\text{Seq}(u\mathcal{ZA}))^2 \right),$$

et que

$$\mathcal{M} = \mathcal{Z} \left( \mathbf{1} + \mathcal{M}^2 \text{Seq}(u\mathcal{M}) \right)^2.$$

La dernière équation peut se réécrire en la première en développant le carré qui, combinatoirement, se traduit par choisir pour chaque élément d'une paire s'il est vide ou non, et en utilisant l'identité  $\text{Seq}(u\mathcal{M}) = \mathbf{1} + u\mathcal{M} \text{Seq}(u\mathcal{M})$ , qui signifie qu'une séquence est soit vide, soit se compose d'un élément suivi d'une autre séquence.

# Chapitre II

## Formule des équerres, fractions continues

### II.1 Introduction

La *formule des équerres* donnant le nombre de tableaux de Young standard pour un diagramme de Young donné est un résultat essentiel de la combinatoire énumérative, et a ainsi été l'étude d'un grand nombre de travaux. Cette formule a été découverte par Frame, Robinson et Thrall [FRT<sup>+</sup>54] en 1954, et plus récemment, une formule similaire a été prouvée dans le cas des tableaux gauches par Naruse [Nar14] en 2014. Deux ans plus tard, Morales, Pak et Panova [MPP16] prouvent une  $q$ -généralisation de la formule de Naruse. De plus, en appliquant cette formule à une certaine famille de tableaux gauches, ils obtiennent une relation non triviale entre permutations alternantes et chemins de Dyck pondérés. Ce chapitre s'intéresse aux différentes implications de cette relation, ainsi qu'à une preuve bijective de la formule n'utilisant pas la formule des équerres généralisée. Cette preuve se base sur la fraction continue de la série exponentielle des nombres d'Euler, bien que la théorie des fractions continues étudiée par Flajolet [Fla80] s'applique principalement aux séries naturelles.

Dans la Section II.2, nous introduisons les principales définitions et les résultats qui seront employés pendant ce chapitre. Nous introduisons les définitions des permutations alternantes et des nombres d'Euler. Nous continuons avec les chemins de Dyck, puis nous présentons les fonctions hypergéométriques ainsi que leur rôle dans la théorie des fractions continues de Flajolet. Enfin nous faisons une présentation de la formule des équerres et ses applications. Dans la Section II.3, nous donnons une preuve du Théorème II.2.11 qui n'utilise pas la formule des équerres, puis nous

prouvons une formule similaire pour les permutations alternantes de taille paire. Dans la Section II.4, nous tentons d'étendre la formule aux permutations  $k$ -alternantes.

## II.2 Définitions et résultats préliminaires

### II.2.1 Permutations alternantes et nombres d'Euler

Les permutations alternantes sont des permutations dont l'ensemble de descentes vérifie plusieurs propriétés naturelles.

**Définition II.2.1.** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , et  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . On décrit l'indice  $i$  comme une *descente* de  $\sigma$  si  $\sigma_i > \sigma_{i+1}$ . L'ensemble de descentes de  $\sigma$ , noté  $D(\sigma)$ , est l'ensemble des indices de  $\sigma$  qui en sont des descentes.

**Définition II.2.2.** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . On définit  $\sigma$  comme *alternante* si

$$D(\sigma) = \{1, 3, \dots, 2 \lfloor n/2 \rfloor - 1\},$$

c'est-à-dire  $\sigma_1 > \sigma_2 < \sigma_3 > \dots$ . On note  $Alt_n$  l'ensemble des permutations alternantes de  $\mathfrak{S}_n$ . Similairement,  $\sigma$  est *alternante renversée* si

$$D(\sigma) = \{2, 4, \dots, 2 \lceil n/2 \rceil - 2\},$$

c'est-à-dire  $\sigma_1 < \sigma_2 > \sigma_3 < \dots$ . On note  $RevAlt_n$  l'ensemble des permutations alternantes renversées de  $\mathfrak{S}_n$ .

Les permutations alternantes de  $\mathfrak{S}_n$  sont comptées par les *nombres d'Euler*  $E_n$ . Dans son article de synthèse [Sta10], Stanley donne quelques propriétés énumératives des permutations alternantes. En particulier,

$$\tan(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{E_{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \sec(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{E_{2n}}{(2n)!} z^{2n}. \quad (\text{II.2.1})$$

Ainsi, les nombres  $\{E_{2n+1}\}$  sont parfois appelés *nombres tangents*, et  $\{E_{2n}\}$  sont les *nombres sécants*. Stanley introduit aussi ce  $q$ -analogue des nombres d'Euler

$$E_n(q) := \sum_{\sigma \in RevAlt_n} q^{\text{maj}(\sigma^{-1})}, \quad E_n^*(q) := \sum_{\sigma \in Alt_n} q^{\text{maj}(\sigma^{-1})},$$

où  $\text{maj}(\sigma) := \sum_{i \in D(\sigma)} i$  est l'*indice majeur* de  $\sigma$ . Notons que  $E_n(1) = E_n^*(1) = E_n$ , et plus généralement on a la relation

$$E_n^*(q) = q^{\binom{n}{2}} E_n(1/q). \quad (\text{II.2.2})$$

Ces raffinements s'étendent aux  $q$ -analogues des fonctions trigonométriques  $\tan$  et  $\sec$ . Pour tout  $a \in \mathbb{N}$ , soit  $(a)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (a+i)$  le symbole de Pochhammer, et

$(a; q)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i)$  son  $q$ -analogue. Si

$$\begin{aligned} \sin_q(z) &:= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{(q; q)_{2n+1}}, & \cos_q(z) &:= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{u^{2n}}{(q; q)_{2n}}, \\ \sin_q^*(z) &:= \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{\binom{2n+1}{2}} \frac{u^{2n+1}}{(q; q)_{2n+1}}, & \cos_q^*(z) &:= \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{\binom{2n}{2}} \frac{u^{2n}}{(q; q)_{2n}}, \end{aligned}$$

alors, avec le Théorème 2.1 de [Sta10], on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{(q; q)_n} E_n(q) &= \frac{\sin_q(z)}{\cos_q(z)} + \frac{1}{\cos_q(z)} := \tan_q(z) + \sec_q(z), \\ \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{(q; q)_n} E_n^*(q) &= \frac{\sin_q^*(z)}{\cos_q^*(z)} + \frac{1}{\cos_q^*(z)} := \tan_q^*(z) + \sec_q^*(z). \end{aligned}$$

De plus, remarquons les identités suivantes, mettant en relation les variantes de  $\cos$  et  $\sin$

$$\cos_q^*(x) = \cos_{1/q}(-x/q), \quad \sin_q^*(x) = \sin_{1/q}(-x/q).$$

**Remarque** Avec (II.2.2), on a directement que  $\tan_q^* = \tan_q$ . Cette égalité résulte aussi d'une simple bijection entre  $RevAlt_n$  et  $Alt_n$  conservant  $\text{maj}(\sigma^{-1})$  quand  $n$  est impair : soit  $\sigma \in Alt_n$ , on définit  $\sigma'$  par  $\sigma'(i) = n - \sigma(n - i)$ . Alors  $\sigma' \in RevAlt_n$ , et  $\text{maj}(\sigma^{-1}) = \text{maj}(\sigma'^{-1})$ .

## II.2.2 Chemins de Dyck

Pour comprendre la relation entre les chemins de Dyck et les permutations alternantes, il est important de connaître l'écriture de la fonction génératrice des chemins de Dyck sous forme d'une fraction continue.



**Définition II.2.3.** Un *chemin de Dyck* de longueur  $2n$  est un chemin dans le quart de plan supérieur droit dont les pas sont soit  $(1, 1)$ , soit  $(1, -1)$ , le chemin commençant en  $(0, 0)$  et finissant en  $(2n, 0)$ . On note  $\mathcal{D}_n$  l'ensemble de ces chemins.

Nous choisissons de représenter les chemins de Dyck par la suite des hauteurs atteintes par le chemin plutôt que par la suite de ses pas. Soit  $(h_0, h_1, \dots, h_{2n}) \in \mathcal{D}_n$ , tel que  $h_0 = h_{2n} = 0$ , et pour tout  $i$ ,  $h_i \geq 0$  et  $|h_i - h_{i+1}| = 1$ . Ainsi,  $h_i$  est la hauteur que le chemin atteint après  $i$  pas. Par la suite dans ce chapitre, afin de représenter les fractions continues, nous utiliserons la notation suivante

$$\frac{a_0}{b_0} - \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} - \dots = \frac{a_0}{b_0 - \frac{a_1}{b_1 - \frac{a_2}{b_2 - \dots}}}$$

Le lemme suivant est un corollaire originaire des résultats de Flajolet sur les fractions continues dans [Fla80].

**Lemme II.2.4.** Soit  $\mathbb{K}$  un corps commutatif, et soit  $\omega : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$  une fonction de poids dépendant de la hauteur d'un chemin de Dyck. Alors la série formelle des chemins de Dyck pondérés est une fraction continue de Stieltjes

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sum_{(h_0, h_1, \dots, h_{2n}) \in \mathcal{D}_n} \prod_{i=0}^{2n} \omega(h_i) z^{2n} &= \frac{\omega(0)}{1} - \frac{\omega(0)\omega(1)z^2}{1} - \frac{\omega(1)\omega(2)z^2}{1} - \dots \\ &= \frac{1}{\omega(0)^{-1}} - \frac{z^2}{\omega(1)^{-1}} - \frac{z^2}{\omega(2)^{-1}} - \dots \end{aligned}$$

**Remarque** La deuxième égalité s'obtient en multipliant par  $\omega(0)^{-1}$  de chaque côté de la première fraction, puis par  $\omega(1)^{-1}$  dans la seconde, et ainsi de suite.

**Remarque** Ce lemme sera principalement utilisé pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{R}(X)$ .

### II.2.3 Fonctions hypergéométriques

Il est parfois utile de voir les fractions continues comme quotient de *fonction hypergéométriques*, qui sont des fonctions qui vérifient le lemme suivant.

**Lemme II.2.5.** *Pour  $i \geq 0$ , soit  $f_i(z) = \sum_{n \geq 0} a_{i,n} z^n$  une famille de série formelles. Si pour tout  $i$ , il existe  $k_i$  tel que  $f_{i-1} - f_i = k_i z f_{i+1}$ , Alors*

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{1}{1 + \frac{k_1 z}{1} + \frac{k_2 z}{1} + \dots}$$

Soit la fonction hypergéométrique  ${}_0F_1$ , définie par

$${}_0F_1(a; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!(a)_n} z^n.$$

Avec le Lemme II.2.5, ces fonctions donnent naturellement des fractions continues non triviales.

**Lemme II.2.6.** *Pour tout  $a \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}_{\leq 0})$ ,*

$$\frac{{}_0F_1(a+1; z)}{{}_0F_1(a; z)} = \frac{1}{a + \frac{z}{a+1} + \frac{z}{a+2} + \dots}$$

*Démonstration.* Ce résultat provient de l'identité

$${}_0F_1(a-1; z) - {}_0F_1(a; z) = \frac{z}{a(a-1)} {}_0F_1(a+1; z),$$

à laquelle on applique le Lemme II.2.5 avec  $f_i = {}_0F_1(i; z)$  et  $k_i = \frac{1}{i(i-1)}$ . □

Puisque

$$\begin{aligned} \cos(z) &= {}_0F_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{z^2}{4}\right), \\ \sin(z) &= z {}_0F_1\left(\frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right), \end{aligned}$$

il est possible d'écrire  $\tan$  comme fraction continue

$$\tan(z) = \frac{z {}_0F_1\left(\frac{3}{2}; -\frac{z^2}{4}\right)}{{}_0F_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{z^2}{4}\right)} = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{3} - \frac{z^2}{5} - \dots} \quad (\text{II.2.3})$$

Cette forme est connue comme la *fraction continue de Lambert*.

Les *fonctions hypergéométriques basiques*  ${}_0\Phi_1$  sont des  $q$ -analogues des fonctions hypergéométriques, et sont définies par

$${}_0\Phi_1(; a; q; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{n(n-1)}}{(a; q)_n (q; q)_n}.$$

**Lemme II.2.7.** *Pour tout  $a \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z}^- \cup \{0\})$ ,*

$$\frac{{}_0\Phi_1(; q^{a+1}; q; qz)}{{}_0\Phi_1(; q^a; q; z)} = \frac{1}{1} + \frac{\frac{1}{(1-q^a)(1-q^{a+1})}z}{1} + \frac{\frac{q}{(1-q^{a+1})(1-q^{a+2})}z}{1} + \dots$$

*Démonstration.* Pour tout  $i \geq 0$ , soit  $f_i = {}_0\Phi_1(; q^{a+i}; q; zq^i)$ . On a

$$\begin{aligned} f_{i-1} - f_i &= {}_0\Phi_1(; q^{a+i-1}; q; zq^{i-1}) - {}_0\Phi_1(; q^{a+i}; q; zq^i) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \frac{q^{n(n-1)+n(i-1)}}{(q^{a+i-1}; q)_n (q; q)_n} - \frac{q^{n(n-1)+ni}}{(q^{a+i}; q)_n (q; q)_n} \right) z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \frac{q^{n(n-1)+n(i-1)}(1 - q^{a+i-1+n})}{(1 - q^{a+i-1})(1 - q^{a+i})} - \frac{q^{n(n-1)+ni}}{(1 - q^{a+i})} \right) \frac{z^n}{(q^{a+i+1}; q)_{n-1} (q; q)_n} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{q^{n(n-1)+n(i-1)}(1 - q^{a+i-1+n}) - q^{n(n-1)+ni}(1 - q^{a+i-1})}{(1 - q^{a+i-1})(1 - q^{a+i})(1 - q^n)} \frac{z^n}{(q^{a+i+1}; q)_{n-1} (q; q)_{n-1}} \\ &= \frac{z}{(1 - q^{a+i-1})(1 - q^{a+i})} \sum_{n \geq 1} (q^{n(n-1)+n(i-1)}) \frac{z^{n-1}}{(q^{a+i+1}; q)_{n-1} (q; q)_{n-1}} \\ &= \frac{zq^{i-1}}{(1 - q^{a+i-1})(1 - q^{a+i})} \sum_{n \geq 1} \frac{q^{(n-1)(i+1)} q^{(n-1)(n-2)} z^{n-1}}{(q^{a+i+1}; q)_{n-1} (q; q)_{n-1}} \\ &= \frac{zq^{i-1}}{(1 - q^{a+i-1})(1 - q^{a+i})} f_{i+1}. \end{aligned}$$

On applique le Lemme II.2.5 pour conclure la preuve.  $\square$

## II.2.4 Formule des équerres des formes gauches

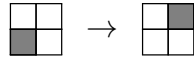
Dans cette section, nous présentons une formule des équerres prouvée par Morales, Pak et Panova dans [MPP16], et montrons comment elle permet de lier les permutations alternantes avec les chemins de Dyck. Posons quelques définitions, soit  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  une partition d'entiers de longueur  $r$ . Sa taille est notée  $|\lambda|$ , et on note  $\lambda'$  la partition conjuguée de  $\lambda$ . Le *diagramme de Young* associé à  $\lambda$ , noté  $[\lambda]$ , est un diagramme formé de carrés, où la  $i$ -ème ligne est comprise de  $\lambda_i$  carrés. Nous choisissons d'utiliser la notation française pour les représenter. La *longueur de l'équerre*  $h(i, j)$  d'un carré  $(i, j)$  est le nombre de carrés directement à droite et au dessus du carré dans  $[\lambda]$ , lui-même étant inclus. Un *tableau de Young standard* de

forme  $\lambda$  est un tableau  $T$  d'entiers  $1, \dots, n$  de forme  $\lambda$ , strictement croissante dans les colonnes, et strictement décroissante dans les lignes. On note  $\text{SYT}(\lambda)$  l'ensemble de ces tableaux. Une *descente* dans un tableau de Young standard  $T$  est un indice  $i$  tel que  $i + 1$  apparait dans une ligne au dessus de  $i$ . L'*indice majeur*  $\text{tmaj}(T)$  est la somme de toutes les descentes de  $T$ . Introduite par Frame, Robinson, et Thrall dans [FRT<sup>+</sup>54], la *formule des équerres* donne le nombre de tableaux de Young standards d'une forme donnée :

**Théorème II.2.8** (Formule des équerres [FRT<sup>+</sup>54]). *Soit  $\lambda$  une partition de  $n$ . On a*

$$|\text{SYT}(\lambda)| = \frac{n!}{\prod_{u \in [\lambda]} h(u)}.$$

Cette formule s'étend aux formes gauches, définies comme suit. Soit  $\lambda$  et  $\mu$  deux partitions d'entiers. On dit que  $\mu \subset \lambda$  si, pour tout  $i$ ,  $\mu_i \leq \lambda_i$ . Auquel cas, on peut définir la *forme gauche*  $\lambda/\mu$  comme la forme obtenue en retirant  $\mu$  de  $\lambda$ . La définition des tableaux de Young standard s'étend naturellement aux formes gauches. Un *diagramme excité* de  $\lambda/\mu$  est un sous-ensemble de  $[\lambda]$  de taille  $|\mu|$  obtenue à partir de  $[\mu]$  par une séquence de transformations comme telles :



Le déplacement  $(i, j) \rightarrow (i+1, j+1)$  est possible seulement si les cases  $(i, j+1), (i+1, j)$  et  $(i+1, j+1)$  sont vacantes. L'ensemble de tous les diagrammes excités de  $\lambda/\mu$  se note  $\mathcal{E}(\lambda/\mu)$ . Naruse dans [Nar14] obtient la formule des équerres généralisée suivante.

**Théorème II.2.9** (Formule des équerres de Naruse [Nar14]). *Soit  $\lambda, \mu$  deux partitions telles que  $\mu \subset \lambda$ . On a*

$$|\text{SYT}(\lambda/\mu)| = |\lambda/\mu|! \sum_{D \in \mathcal{E}(\lambda/\mu)} \prod_{u \in [\lambda] \setminus D} \frac{1}{h(u)}.$$

On peut en vérifier que si  $\mu = \emptyset$ , on obtient la formule originale. Morales, Pak, et Panova dans [MPP16] ont prouvé un  $q$ -analogue de cette dernière formule.

**Théorème II.2.10** (Morales, Pak, Panova, [MPP16]). *Soit  $\lambda, \mu$  deux partitions telles que  $\mu \subset \lambda$ , et  $n = |\lambda/\mu|$ . On a*

$$\sum_{T \in \text{SYT}(\lambda/\mu)} q^{\text{tmaj}(T)} = (q; q)_n \sum_{D \in \mathcal{E}(\lambda/\mu)} \prod_{(i,j) \in [\lambda] \setminus D} \frac{q^{\lambda'_j - i}}{1 - q^{h(i,j)}}.$$

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 6 |   |   |   |
| 1 | 3 |   |   |
|   | 2 | 7 |   |
|   |   | 4 | 5 |

FIGURE II.2.1 – Le tableau de Young standard gauche associé à la permutation alternante  $(6, 1, 3, 2, 7, 4, 5)$ .

À mesure d'exemple, ils ont appliqué leur résultat à la forme gauche suivante. Soit  $\delta_m = (m, m-1, \dots, 1)$  une partition d'entiers ayant la forme d'un escalier de hauteur  $m$ . On considère le ruban sur le bord  $\delta_{m+2}/\delta_m$ . Il est clair que  $\text{SYT}(\delta_{m+2}/\delta_m)$  est en bijection avec les permutations alternantes de longueur  $2m+1$ , comme montré dans la Figure II.2.1. De plus,  $\mathcal{E}(\delta_{m+2}/\delta_m)$  est en bijection avec les chemins de Dyck de longueur  $2m$ . Enfin, on a  $\sum_{\sigma \in \text{Alt}_{2m+1}} q^{\text{maj}(\sigma^{-1})} = \sum_{T \in \text{SYT}(\delta_{m+2}/\delta_m)} q^{\text{tmaj}(T)}$ . Ainsi, en appliquant le Théorème II.2.10, on obtient l'identité suivante

**Théorème II.2.11** (Morales, Pak, Panova, [MPP16]).

$$\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \prod_{i=0}^{2n} \frac{q^{h_i}}{1 - q^{2h_i+1}} = \frac{E_{2n+1}(q)}{(q; q)_{2n+1}}.$$

L'objectif de la section suivante est de donner une preuve alternative de cette identité.

## II.3 Chemins de Dyck et nombres d'Euler

### II.3.1 Nombres tangents

Avant de prouver le Théorème II.2.11, observons la formule corollaire obtenue quand  $q \rightarrow 1$  :

$$\sum_{(h_0, h_1, \dots, h_{2n}) \in \mathcal{D}_n} \frac{(2n+1)!}{\prod_{i=0}^{2n} (2h_i+1)} = E_{2n+1}.$$

Le côté gauche de l'équation s'interprète comme la somme pondérée sur les chemins de Dyck de longueur  $2n$ . Par exemple, si  $n = 3$ , on somme tous les chemins de la

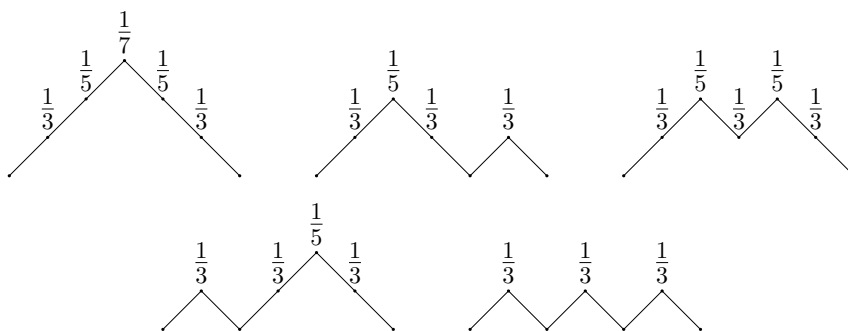


FIGURE II.3.1 – Les cinq chemins pondérés de  $\mathcal{D}_3$ , avec chaque sommet annoté de son poids.

Figure II.3.1, et on a

$$7! \cdot \left( \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3 \cdot 5} + \frac{1}{3^3 \cdot 5} + \frac{1}{3^3 \cdot 5^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} \right) = 272 = E_7.$$

Bien qu'aucun terme de la somme ne soit un entier, leur somme l'est. Cette propriété non triviale suggère l'existence d'une approche plus directe pour prouver la formule générale.

*Preuve du Théorème II.2.11.* Soit  $u(q; z) = \sum_{n \geq 0} \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \prod_{i=0}^{2n} \frac{q^{h_i}}{1 - q^{2h_i+1}} z^{2n}$ . Appliquant le

Lemme II.2.4 pour  $\omega(x) = \frac{q^x}{1 - q^{2x+1}}$ , on a

$$u(q; z) = \frac{1}{1-q} - \frac{\frac{q}{(1-q)(1-q^3)} z^2}{1} - \frac{\frac{q^3}{(1-q^3)(1-q^5)} z^2}{1} - \dots$$

En appliquant le Lemme II.2.7 avec  $z = \frac{-z^2 q^a}{4}$ ,  $a = \frac{1}{2}$  et  $q = q^2$ , on a

$$\frac{1}{1-q} \frac{{}_0\Phi_1(; q^3; q^2; -z^2 q^3)}{{}_0\Phi_1(; q; q^2; -z^2 q)} = u(q; z).$$

On remarque que

$$\frac{z {}_0\Phi_1(; q^3; q^2; -z^2 q^3)}{1-q} = \sin_q^*(z),$$

et

$${}_0\Phi_1(; q; q^2; -z^2 q) = \cos_q^*(z).$$

Ainsi,

$$u(q; z) = \frac{\tan_q^*(z)}{z} = \frac{\tan_q(z)}{z}.$$

□

**Remarque** La preuve met en évidence une fraction continue pour  $\tan_q$ , qui est

$$\tan_q(z) = \frac{z}{1-q} - \frac{z^2}{\frac{1-q^3}{q}} - \frac{z^2}{\frac{1-q^5}{q^2}} - \cdots$$

en prenant  $z = (1-q)z$  et  $q \rightarrow 1$ , on retrouve la fraction continue de Lambert.

Similairement, si on définit  $u_h(q; z)$  comme la fonction génératrice des chemins de Dyck décalés à hauteur  $h$ , on peut prouver que, pour  $h \geq 0$ ,

$$u_h(q; z) = \frac{q^h}{1-q^{2h+1}} \frac{{}_0\Phi_1(; q^{2h+3}; q^2; -z^2 q^{2h+3})}{{}_0\Phi_1(; q^{2h+1}; q^2; -z^2 q^{2h+1})}. \quad (\text{II.3.1})$$

### II.3.2 Nombres sécants

Il existe une formule similaire pour les nombres  $q$ -sécants. Soit la forme gauche  $\delta_{n+2}^*/\delta_n$ , où  $\delta_n^*$  est la forme  $\delta_n$  privé de son carré le plus haut. Cette excision réduit l'équerre de toutes les cases de la première colonne de un. Sur cette forme,  $\text{SYT}(\delta_{n+2}^*/\delta_n)$  est en bijection avec  $\text{Alt}_{2n}$ , et  $\mathcal{E}(\delta_{n+2}^*/\delta_n)$  est en bijection avec les chemins de Dyck de longueur  $2n$  desquels on retire le premier pas. Le poids des sommets des pas est toujours  $\frac{q^h}{1-q^{2h+1}}$  à hauteur  $h$ , sauf pendant la première montée

du chemin, sur laquelle la fonction de poids devient  $\frac{q^h}{1-q^{2h}}$ , et le premier pas est ignoré. Ces remarques s'appliquent similairement au conjugué de la forme gauche. Avec le Théorème II.2.10, ces remarques se traduisent par les formules suivantes

**Théorème II.3.1.**

$$\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \prod_{i=1}^{2n} \frac{q^{h_i}}{1 - q^{2h_i+1-\delta_{h_i,i}}} = \frac{E_{2n}^*(q)}{(q; q)_{2n}},$$

$$\sum_{d \in \mathcal{D}_n} \prod_{i=1}^{2n} \frac{q^{h_i-\delta_{h_i,i}}}{1 - q^{2h_i+1-\delta_{h_i,i}}} = \frac{E_{2n}(q)}{(q; q)_{2n}},$$

où  $\delta_{i,j}$  est le symbole de Kronecker.

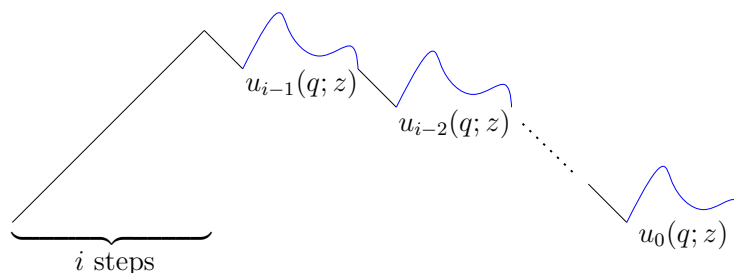


FIGURE II.3.2 – Un élément de  $\mathcal{D}_n$  commençant par exactement  $i$  pas montants. En dessous de chaque portion bleue du chemin est indiqué son poids.

*Démonstration.* Ces deux égalités sont équivalentes à cause de (II.2.2), il suffit donc de prouver la première. Soit  $v(q; z) = \sum_{n \geq 1} \sum_{d \in \mathcal{D}_n} \prod_{i=1}^{2n} \frac{q^{h_i}}{1 - q^{2h_i + 1 - \delta_{h_i, i}}} z^{2n}$  la fonction génératrice des chemins de Dyck pondérés sans leur premier pas. On décompose les pas de la façon suivante : le chemin commence par une montée jusqu'à la hauteur  $i$ , durant laquelle le sommet à hauteur  $h$  a un poids  $\frac{q^h}{1 - q^{2h}}$ . Puis on a  $i$  fois un chemin de Dyck décalé de  $j$  précédé d'un pas descendant, compté par  $u_j(q; z)$ . Cette décomposition est illustrée dans la Figure (II.3.2). Ainsi, on a

$$\begin{aligned} v(q; z) &= \sum_{i \geq 1} \left( \prod_{j=1}^i \frac{zq^j}{1 - q^{2j}} \right) \left( \prod_{j=0}^{i-1} zu_j(q; z) \right) \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{q^{i(i+1)/2}}{(q^2; q^2)_i} \left( \prod_{j=0}^{i-1} u_j(q; z) \right) z^{2i}. \end{aligned}$$

Avec (II.3.1), on a

$$\begin{aligned} v(q, z) &= \sum_{i \geq 1} \frac{q^{i(i+1)/2}}{(q^2; q^2)_i} \left( \prod_{j=0}^{i-1} \frac{q^j}{1 - q^{2j+1}} \frac{{}_0\Phi_1(; q^{2j+3}; q^2; -z^2 q^{2j+3})}{{}_0\Phi_1(; q^{2j+1}; q^2; -z^2 q^{2j+1})} \right) z^{2i} \\ &= \sum_{i \geq 1} \frac{q^{i^2}}{(q^2; q^2)_i (q; q^2)_i} \frac{{}_0\Phi_1(; q^{2i+1}; q^2; -z^2 q^{2i+1})}{{}_0\Phi_1(; q; q^2; -z^2 q)} z^{2i} \\ &= \sec_q^*(z) \left( \sum_{i \geq 0} \frac{q^{i^2}}{(q^2; q^2)_i (q; q^2)_i} {}_0\Phi_1(; q^{2i+1}; q^2; -z^2 q^{2i+1}) z^{2i} \right) - 1. \end{aligned}$$



De plus, on a

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i \geq 0} \frac{q^{i^2}}{(q^2; q^2)_i (q; q^2)_i} {}_0\Phi_1(; q^{2i+1}; q^2; -z^2 q^{2i+1}) z^{2i} \\
 &= \sum_{i, j \geq 0} \frac{q^{i^2}}{(q^2; q^2)_i (q; q^2)_i} \frac{(-z^2 q^{2i+1})^j q^{2j(j+1)}}{(q^2; q^2)_j (q^{2i+1}; q^2)_j} z^{2i} \\
 &= \sum_{i, j \geq 0} \frac{(-1)^j z^{2i+2j} q^{i^2+2ij+2j^2-j}}{(q^2; q^2)_i (q^2; q^2)_j (q; q^2)_{i+j}} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n} q^{n^2}}{(q; q^2)_n} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k q^{k(k-1)}}{(q^2; q^2)_k (q^2; q^2)_{n-k}} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{z^{2n} q^{n^2}}{(q; q)_{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_{q^2} (-1)^k q^{k(k-1)}.
 \end{aligned}$$

Pour conclure, on utilise le *théorème binomial de Cauchy*. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \leq n$ , soit  $\binom{n}{k}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}$  les  $q$  coefficients binomiaux.

**Théorème II.3.2** (Théorème binomial de Cauchy).

$$(a; q)_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q (-a)^k q^{\binom{k}{2}}.$$

Notre expression peut ainsi se simplifier de la façon suivante

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_{q^2} (-1)^k q^{k(k-1)} = (1; q^2)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il suit que

$$v(q, z) = \sec_q^*(z) - 1.$$

□

## II.4 Permutations $k$ -alternantes

Dans cette section nous tentons de généraliser notre analyse aux permutations  $k$ -alternantes.

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 7 |   |   |   |
|   |   | 4 | 5 | 8 |   |
|   |   |   |   | 1 | 3 |

FIGURE II.4.1 – Le tableau de Young standard associé à la permutation 3-alternante  $(2, 6, 7, 4, 5, 8, 1, 3)$ .

**Définition II.4.1.** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . On dit que  $\sigma$  est une *permutation  $k$ -alternante* si

$$D(\sigma) = \{k, 2k, \dots, ([n/k] - 1)k\}.$$

On note  $\mathcal{A}_k(n)$  l'ensemble des permutations  $k$ -alternantes de  $\mathfrak{S}_n$ .

Pour  $k = 2$ , on retrouve les permutations alternantes, puisque  $\mathcal{A}_2(n) = \text{RevAlt}_n$ . Similairement aux permutations alternantes, on peut mettre en bijection  $\mathcal{A}_k(n)$  avec les tableaux de Young standard d'une certaine forme gauche, comme illustré Figure II.4.1. Soit  $\sigma \in \mathcal{A}_k(nk + r)$  avec  $0 < r \leq k$ , on note  $T(\sigma)$  le tableau de Young standard associé à  $\sigma$ , tel que

$$\text{maj}(\sigma^{-1}) = \text{tmaj}(T(\sigma)).$$

Comme pour les permutations alternantes, on définit la fonction génératrice suivante

$$f_{nk+r}(q) = \sum_{\sigma \in \mathcal{A}_k(nk+r)} q^{\text{maj}(\sigma^{-1})}.$$

et en utilisant la formule des équerres de Morales, Pak et Panova, on a

$$\frac{f_{nk+r}(q)}{(q; q)_{nk+r}} = \sum_{d \in \mathcal{D}_{nk+r, k}} \prod_{i=0}^{2n} \frac{q^{h_i}}{1 - q^{h_i + \lfloor \frac{h_i}{k-1} \rfloor + 1}}, \quad (\text{II.4.1})$$

où  $\mathcal{D}_{nk+r, k}$  est l'ensemble des  $k$ -chemins de Dyck de longueur  $nk + r$ , qui est un chemin dans le quart de plan supérieur, dont les pas sont dans  $\{(1, k-1), (1, -1)\}$ , commençant en  $(0, 0)$  et finissant en  $(nk+r, k-r)$ . Kurşungöz et Yee étudient  $f_{nk+r}(q)$  dans [KY11], et obtiennent que, quand  $k \geq 2$  et  $0 < r \leq k$ ,

$$F_r := \sum_{n \geq 0} \frac{f_{nk+r}(q)t^{nk+r}}{(q; q)_{nk+r}} = \frac{\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^{nk+r}}{(q; q)_{nk+r}}}{\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n t^{nk}}{(q; q)_n}}. \quad (\text{II.4.2})$$

Il est possible de prouver directement ce résultat en utilisant un ensemble d'équations différentielles satisfaites par la fonction génératrice. Soit  $\sigma \in \mathcal{A}_n$ , on définit  $\sigma'$  en lui retirant son élément maximal. Alors  $maj(\sigma^{-1}) = maj(\sigma'^{-1})$ . D'où

$$\begin{cases} F'_r = F_{k-1}F_r + F_{r-1} \text{ for } r \geq 2, \text{ et} \\ F'_1 = F_{k-1}F_1 + 1. \end{cases}$$

On peut alors vérifier que (II.4.2) est une solution à ce système d'équations. Si  $k = 2$ , on retrouve les dérivées de  $F_1 = \tan$  et  $F_2 = \sec - 1$ , qui sont

$$\begin{aligned} \sec' &= \tan \cdot \sec \\ \tan' &= \tan^2 + 1. \end{aligned}$$

Cependant, dû aux poids des chemins de Dyck considérés, la recherche d'une preuve directe de l'équation (II.4.1) s'est avérée jusqu'alors sans succès.

# Chapitre III

## Polynômes de Ramanujan et arbres

### III.1 Introduction

Un des résultats combinatoires les plus connus est probablement la *formule de Cayley*. Cette formule nous donne que le nombre d'*arbres étiquetés* enracinés à  $n$  sommets est  $n^{n-1}$ . Si on pose  $a_n = n^{n-1}$ , en raisonnant sur ces *arbres de Cayley* enracinés, on se retrouve avec la relation de récurrence suivante

$$(n-1)a_n = \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}.$$

Cette relation de récurrence est quadratique, on souhaiterait trouver une relation linéaire avec laquelle il serait plus simple de raisonner. Avec des raffinements et des variables catalytiques, il est en effet possible de raffiner la séquence de Cayley. Notamment, l'étude de la séquence de Ramanujan (III.1.1) a permis de trouver de tels raffinements (voir [Ber85, GZ07, Zen99]). Par exemple, le polynôme  $C_n$  ressort de ces travaux, et est défini par

$$C_1 = 1, \quad C_{n+1}(y) = [n(1+y) + y^2 \partial_y] C_n,$$

qui est bien une relation linéaire. On a bien que  $C_n(1) = n^{n-1}$  (voir [Zen99]), ce qui montre que  $C_n$  est une séquence plus générale que celle des  $a_n$ . On a  $C_2 = y + 1$  et  $C_3 = 3y^2 + 4y + 2$ .

La notion d'*arête impropre* a été découverte indépendamment par Shor [Sho95], et par Dumont et Ramamonjisoa [DR96], et sert à interpréter le coefficient de  $y^k$

| $k \setminus r$ | 0 | 1       | 2              | 3                      | 4                                |
|-----------------|---|---------|----------------|------------------------|----------------------------------|
| 1               | 1 | $x - 1$ | $x^2 - 3x + 2$ | $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ | $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$ |
| 2               |   | 1       | $3x - 5$       | $6x^2 - 26x + 26$      | $10x^3 - 80x^2 + 200x - 154$     |
| 3               |   |         | 3              | $15x - 35$             | $45x^2 - 255x + 340$             |
| 4               |   |         |                | 15                     | $105x - 315$                     |
| 5               |   |         |                |                        | 105                              |

TABLE III.1 – Table des valeurs de  $\psi_k(r, x)$ .

dans  $C_n(y)$  comme étant le nombre d'arbres étiquetés enracinés à  $n$  sommets et  $k$  arêtes impropres (pour la séquence, voir [A217922](#)). Zeng [Zen99] prouve ensuite une nouvelle généralisation de ce résultat, en introduisant les polynômes  $P_n$  définis par

$$P_1 = 1, \quad P_{n+1}(x, y) = [x + n + y(n + y\partial_y)] P_n$$

et vérifiant  $P_n(0, y) = C_n(y)$ . Les polynômes  $P_n$  sont appelés les *polynômes de Ramanujan* [Cha02, CG01]. En effet, c'est Ramanujan qui initialement [Ram57] a introduit la double séquence  $\psi_k(r, x)$ , définie par

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x+k)^{r+k} e^{-u(x+k)} u^k}{k!} = \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\psi_k(r, x)}{(1-u)^{r+k}}. \quad (\text{III.1.1})$$

Ramanujan donne alors une formule de récurrence pour  $\psi_k(r, x)$  :

$$\psi_k(r+1, x) = (x-1)\psi_k(r, x-1) + \psi_{k-1}(r+1, x) - \psi_{k-1}(r+1, x-1)$$

où  $1 \leq k \leq r+1$ ,  $\psi_1(0, x) = 1$ , et  $\psi_k(r, x) = 0$  sinon (voir Table III.1). Cette séquence satisfait la propriété remarquable suivante :

$$\sum_{k=1}^{r+1} \psi_k(r, x) = x^r.$$

Berndt *et al.* [Ber85, BEW83] trouvent une nouvelle preuve de (III.1.1) qui de surcroît justifie que les  $\psi_k(r, x)$  sont de polynômes, en prouvant la formule de récurrence suivante :

$$\psi_k(r, x) = (x-r-k+1)\psi_k(r-1, x) + (r+k-2)\psi_{k-1}(r-1, x).$$

De plus, ils définissent les polynômes  $P_n$  comme suit

$$P_n(x, y) = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{k+1}(n-1, x+n)y^k.$$

Chapoton [Cha02] rencontre les polynômes de Ramanujan en 2002, et propose alors une autre généralisation. En continuité de ses travaux, Guo et Zeng étudient dans [GZ07] la séquence polynômiale suivante, attribuée à Chapoton, et qui est une généralisation de la séquence précédente :

$$Q_1 = 1, \quad Q_{n+1}(x, y, z, t) = [x + nz + (y + t)(n + y\partial_y)]Q_n, \quad (\text{III.1.2})$$

vérifiant  $Q_n(x, y, 0, 1) = P_n(x, y)$ . On a  $Q_2 = x + y + t + z$ , et

$$Q_3 = x^2 + 3xy + 3xz + 3xt + 3y^2 + 4yz + 5yt + 2z^2 + 4zt + 2t^2.$$

Ils trouvent une interprétation combinatoire de cette séquence en termes d'*arbres planaires étiquetés*. Cependant, comme l'a remarqué Josuat-Vergès dans [JV15], les polynômes de Ramanujan sont aussi liés aux *arbres de Greg*. Originellement définis par Flight dans [Fli90] afin de modéliser les arbres généalogiques de manuscrits, les arbres de Greg sont des arbres avec deux types de sommets, des sommets étiquetés, et des sommets non étiquetés dont le degré vaut au moins trois.

Notre but dans ce chapitre est de trouver un lien entre  $Q_n$ , les *arbres de Greg* et les *arbres de Cayley*, et donner une nouvelle expression de  $Q_n$  avec les statistiques de ces arbres. Dans la Section III.2, on introduit les différentes notions et définitions nécessaires pour ce chapitre, en particulier on définit la séquence polynômiale  $R_n$  qui sera la clé de voûte de notre raisonnement. Dans la Section III.3, on exprime  $R_n$  en fonction de différentes statistiques des arbres de Greg, en utilisant une formule de récurrence sur  $R_n$ . La Section III.4 fera un aparté sur les nombres de Ward, qui apparaissent naturellement dans  $R_n$ . La Section III.5 présente une interprétation de  $R_n$  avec les arbres de Cayley, mais cette fois en construisant une bijection entre les arbres de Greg et les arbres de Cayley. Enfin dans la Section III.6 on reviendra au lien avec  $Q_n$ , en construisant une bijection entre les arbres de Cayley et les arbres planaires étiquetés.

## III.2 Préliminaires

Un *arbre de Cayley* est un arbre à  $n$  sommets étiquetés sur  $[n]$ , tel que deux sommets n'ont pas la même étiquette. Soit  $\mathcal{C}_n$  l'ensemble des arbres de Cayley de

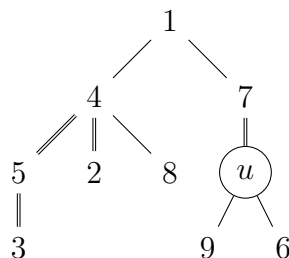


FIGURE III.2.1 – Exemple d’un arbre de Greg de taille 9, avec un sommet non étiqueté noté  $u$ . Les arêtes impropres sont marquées par des arêtes doubles.

taille  $n$  enracinés en 1, la formule de Cayley nous donne que  $|\mathcal{C}_n| = n^{n-2}$ . Un *arbre planaire* est un arbre enraciné étiqueté dans lequel les enfants de chaque sommet sont ordonnés. On note  $\mathcal{O}_n$  l’ensemble des arbres planaires enracinés en 1 et étiquetés sur  $[n]$ . La définition suivante, posée par Flight dans [Fli90], nous décrit une généralisation intéressante des arbres de Cayley.

**Définition III.2.1** (Flight, [Fli90]). Soit  $n \geq 1$ . Un *arbre de Greg* de taille  $n$  est un arbre tel que exactement  $n$  de ses sommets sont étiquetés sur  $[n]$ , et les sommets non étiquetés sont de degré au moins 3.

On note  $\mathcal{G}_n$  l’ensemble des arbres de Greg de taille  $n$  enracinés en 1. On pose  $\text{unl}(T)$  le nombre de sommets non étiquetés de  $T \in \mathcal{G}_n$ . Si  $\text{unl}(T) = 0$ , alors  $T \in \mathcal{C}_n$ . Voir Figure III.2.1 pour un exemple d’arbre de Greg.

Pour un arbre étiqueté  $T$ , en particulier pour les arbres de Greg, il est utile d’introduire  $\lambda_T$  la fonction d’étiquetage de  $T$ , qui à un sommet de  $T$  associe son étiquette. On choisit comme convention que  $\lambda_T$  n’est pas défini sur les sommets non étiquetés d’un arbre de Greg.

Comme tous les arbres que nous étudions sont enracinés, on utilisera une notation orientée pour les arêtes : si  $(i, j)$  est une arête de  $T$ , alors  $i$  est le parent de  $j$ .

Dans une preuve alternative de la formule de Cayley [Sho95], Shor introduit une catégorisation intéressante des arêtes dans un arbre de Cayley, qui peut se généraliser aux arbres de Greg.

**Définition III.2.2** (Shor, [Sho95]). Soit  $T \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{G}_n \cup \mathcal{O}_n$ , et  $i$  un sommet étiqueté de  $T$ . On définit  $\beta_T(i)$  comme étant la plus petite étiquette parmi les descendants de  $i$ , lui-même inclus. Si  $T \in \mathcal{C}_n \cup \mathcal{G}_n$ , soit  $e = (i, j)$  une arête de  $T$ . On dit que  $e$  est une *arête impropre*, ou que  $j$  est un *enfant impropre* de  $i$ , si  $i$  est étiqueté, et  $\lambda_T(i) > \beta_T(j)$ . Sinon,  $e$  est une *arête appropriée*, et  $j$  est un *enfant approprié* de  $i$ .

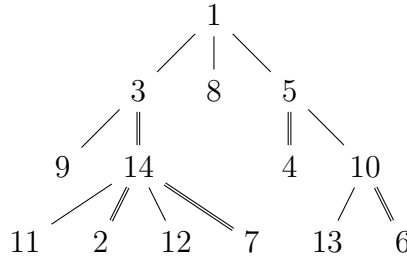


FIGURE III.2.2 – Exemple d’arbre planaire de taille 14. Les arêtes impropres apparaissent doublées.

Par exemple dans la Figure III.2.1, les arêtes impropres sont doublées, et on a  $\beta_T(4) = 2$  et  $\beta_T(7) = 6$ . Naturellement,  $\beta_T$  est aussi défini sur les sommets non étiquetés, et on a  $\beta_T(u) = 6$ . On remarque qu’un sommet non étiqueté ne peut pas être un parent impropre, bien qu’il puisse être un enfant impropre.

En ce qui concerne les arbres planaires, on utilise la généralisation de cette notion donnée par Guo et Zeng dans [GZ07].

**Définition III.2.3.** Soit  $T \in \mathcal{O}_n$ .

- Soit  $j$  un sommet de  $T$ . On dit que  $j$  est *ancien* s’il a un frère  $k$  à sa droite qui vérifie  $\beta_T(k) < \beta_T(j)$ . Sinon, on dit que  $j$  est *jeune*. Soit  $\text{young}_T(i)$  le nombre de fils jeunes de  $i$  dans  $T$ , et  $\text{eld}(T)$  le nombre de sommets anciens de  $T$ .
- Soit  $e = (i, j)$  une arête de  $T$ . On dit que  $e$  est une *arête impropre*, ou que  $j$  est un *enfant impropre* de  $i$ , si  $j$  est un enfant jeune de  $i$ , et  $\lambda_T(i) > \beta_T(j)$ . Sinon,  $e$  est une *arête appropriée*, et  $j$  est un *enfant approprié* de  $i$ .

Un exemple d’arbre planaire, avec ses arêtes impropres doublées, est montré dans la Figure III.2.2. Quelque soit la nature de  $T$ , on note  $\text{impe}(T)$  le nombre d’arêtes impropres de  $T$ . On remarque que si  $T$  est un arbre planaire sans enfant ancien, l’ordre des enfants est donné par ordre croissant de valeurs de  $\beta_T$ . Dans ce cas, les arêtes impropres sont les mêmes que si on retirait l’ordre sur les enfants de  $T$  pour obtenir un arbre de Cayley. Les deux définitions coïncident donc bien sur les arbres de Cayley.

Enfin, on peut étendre la définition d’*impropre* aux sommets, qui exprime si le sommet a des arêtes impropres sortantes ou non.

**Définition III.2.4.** On dit qu’un parent  $i$  est *approprié* s’il n’a pas d’enfant impropre. Sinon on dit que  $i$  est un *parent impropre*. De manière équivalente, un sommet  $i$  est un parent impropre si et seulement si il est étiqueté, et  $\beta_T(i) \neq \lambda_T(i)$ . On note  $\text{impp}(T)$  le nombre de parents impropres de  $T$



Avec ces définitions, on peut maintenant donner le théorème principal de Guo et Zeng dans [GZ07]. Il donne une interprétation combinatoire de  $Q_n$  en termes d'arbres planaires.

**Théorème III.2.5** (Guo et Zeng, [GZ07]).

$$Q_n(x, y, z, t) = \sum_{T \in \mathcal{O}_{n+1}} x^{\text{young}_T(1)-1} t^{\text{eld}(T)} y^{\text{impe}(T)} z^{n-\text{young}_T(1)-\text{eld}(T)-\text{impe}(T)}. \quad (\text{III.2.1})$$

Les auteurs ont aussi trouvé une interprétation de ces polynômes en termes d'arbres à moitié mobiles. De plus, ils ont prouvé la relation suivante, initialement conjecturée par Chapoton :

**Théorème III.2.6** ([GZ07]).

$$Q_n(x, y, z, t) = Q_n(x + nz + nt, y, -t, z)$$

Notre but est de trouver une identité similaire à (III.2.1) pour les arbres de Greg. On considère les polynômes  $H_n$  suivants.

**Définition III.2.7** (Josuat-Vergès, [JV15]).

$$H_1 = 1, \quad H_{n+1}(y) = (2n - 1 + (n + 1)y)H_n(y) + (1 + y)^2 H'_n(y). \quad (\text{III.2.2})$$

Ces polynômes comptent le nombre d'arbres de Greg de taille  $n$  ([A048159](#)). Avec (III.1.2) et (III.2.2), on obtient

$$H_{n+1}(y) = Q_n(1, y + 1, 1, 0). \quad (\text{III.2.3})$$

Cela suggère qu'il existe une corrélation entre les arbres de Greg et les arbres planaires. De plus, on a

**Proposition III.2.8** ([JV15, Zen99]).

$$H_n(y) = \sum_{T \in \mathcal{G}_n} y^{\text{unl}(T)} = \sum_{T \in \mathcal{C}_n} (1 + y)^{\text{impe}(T)}. \quad (\text{III.2.4})$$

La première égalité a été donnée par Josuat-Vergès dans [JV15], alors que la seconde provient des travaux de Zeng [Zen99]. Dans [JV15], l'auteur se pose la question de l'existence d'une preuve bijective pour (III.2.4). Dans la Section III.5, on construira effectivement une telle bijection. Plus précisément, on trouvera une bijection qui généralisera la Proposition III.2.8 pour le polynôme  $R_n$  suivant à 4 variables.

**Définition III.2.9.**

$$R_n(x, y, z, t) = Q_n(x, y + 1, z, t - 1) \quad (\text{III.2.5})$$

Définir  $R_n$  nous permet de construire un intermédiaire entre  $H_n$  et  $Q_n$ . En effet, la suite  $R_n$  est définie de sorte à généraliser  $H_n$ , on a  $R_n(1, y, 1, 1) = H_n(y)$ . Cette nouvelle suite de polynômes vérifie des propriétés remarquables, par exemple on trouve que  $R_{n+1}(0, y, 0, 1) = (2n - 1)!!(y + 1)^n$ , et que  $R_n(0, y, 0, 0)$  donne la suite des nombres de Ward, dont la séquence est [A134991](#). Cette dernière propriété sera expliquée plus en détails dans la Section III.4.

Avant de terminer cette section, on souhaite introduire une dernière statistique sur les arbres.

**Définition III.2.10.** Soit  $T$  un arbre de Greg ou de Cayley. Soit  $i$  un sommet étiqueté de  $T$ . Soit  $L(i) = (1 = a_0, a_1, \dots, a_k = i)$  le seul chemin dans  $T$  partant de la racine 1 et arrivant en  $i$ . On définit le *chemin des grands ancêtres* de  $i$ , noté  $\text{gap}(i) = (a_p, a_{p+1}, \dots, i)$ , le plus long chemin dans  $T$  inclus dans  $L(i)$  et contenant  $i$  tel que, pour tout sommet étiqueté  $j \in \text{gap}(i)$ ,  $\lambda_T(j) \geq \lambda_T(i)$ .

Par exemple, dans la Figure III.2.1, on a  $\text{gap}(3) = (4, 5, 3)$ ,  $\text{gap}(2) = (4, 2)$  et  $\text{gap}(6) = (6)$ .

**Définition III.2.11.** Soit  $i \in T$  et  $\text{gap}(i) = (a_p, \dots, i)$ . On dit que  $i$  est un *sommet dirigeant* si  $\beta_T(a_p) = \lambda_T(i)$ .

On remarque que 1 et 2 sont toujours des sommets dirigeants. On remarque aussi que si  $i$  est un sommet dirigeant, alors pour tout  $j \in \text{gap}(i)$ ,  $\beta_T(j) = \lambda_T(i)$ . Cela implique, avec la Définition III.2.4, que  $i$  est un parent approprié.

On verra que le nombre de sommets dirigeants est important pour les arbres de Greg, mais s'exprime plus simplement dans les arbres de Cayley ou planaires, comme le montre le lemme suivant.

**Lemme III.2.12.** Soit  $T \in \mathcal{C}_n$ . On a

$$\text{lead}(T) = n - \text{impe}(T). \quad (\text{III.2.6})$$

*Démonstration.* Comme chaque arête est soit impropre soit appropriée, on a que  $n - 1 - \text{impe}(T)$  est le nombre d'arêtes appropriées de  $T$ . Ainsi, pour prouver le lemme, on peut exhiber une bijection entre l'ensemble des sommets dirigeants sauf 1, et les arêtes appropriées de  $T$ .

Soit  $i$  un sommet dirigeant de  $T$  qui n'est pas 1. Soit  $\text{gap}(i) = (a_p, \dots, i)$ . Comme  $i$  n'est pas 1, on note  $a_{p-1}$  le parent de  $a_p$ . Soit  $\phi(i) = (a_{p-1}, a_p)$ .

On prouve que  $\phi$  est injective. En effet, soit  $u$  un autre sommet dirigeant de  $T$ , et supposons que  $\phi(u) = \phi(i)$ . On aurait  $a_p \in \text{gap}(i) \cap \text{gap}(u)$ , ce qui nous donnerait  $\beta_T(a_p) = \lambda_T(i)$  et  $\beta_T(a_p) = \lambda_T(u)$ , ce qui est impossible.

On prouve aussi que  $\phi$  est surjective. Soit  $(a, b)$  une arête appropriée de  $T$ . En partant de  $b$ , on peut descendre dans l'arbre en choisissant l'enfant ayant la plus petite valeur pour  $\beta_T$ , jusqu'à ce qu'on trouve un parent approprié  $u$ , ce qui est toujours possible, car les feuilles sont des parents appropriés. Sur le chemin,  $\beta_T$  est constant, égal à  $\lambda(u)$ . Donc ce chemin est un suffixe de  $\text{gap}(u)$ . Comme  $(a, b)$  est une arête appropriée,  $a \notin \text{gap}(u)$ , donc le chemin de  $b$  à  $u$  est  $\text{gap}(u)$ , et  $\phi(u) = (a, b)$ .

Ainsi,  $\phi$  est bijective, ce qui prouve le lemme.  $\square$

### III.3 Arbres de Greg et $R_n$

Notre premier résultat est d'interpréter  $R_n$  en tant que fonction génératrice des arbres de Greg. C'est une généralisation de la première égalité dans la Proposition III.2.8.

#### Théorème III.3.1.

$$R_n(x, y, z, t) = \sum_{T \in \mathcal{G}_{n+1}} y^{\text{unl}(T)} t^{\text{impp}(T)} x^{\text{deg}_T(1)-1} z^{\text{lead}(T)-\text{deg}_T(1)-1}. \quad (\text{III.3.1})$$

*Démonstration.* La définition de  $R_n$  (III.2.5) nous donne la récurrence suivante :

$$R_1 = 1, \quad R_{n+1} = [x + nz + (y + t)(n + (y + 1)\partial_y)]R_n. \quad (\text{III.3.2})$$

Il suffit donc de prouver que le terme de droite dans (III.3.1) est une solution de (III.3.2). On définit sur les arbres de Greg la fonction de poids suivante

$$\omega(T) = y^{\text{unl}(T)} t^{\text{impp}(T)} x^{\text{deg}_T(1)-1} z^{\text{lead}(T)-\text{deg}_T(1)-1}.$$

Cette récurrence peut s'interpréter comme la somme pondérée des différentes façons de rajouter un sommet étiqueté  $n + 2$  à un arbre de Greg de taille  $n + 1$ . Pour la suite de la preuve, on note  $T$  l'arbre de base de taille  $n + 1$ , et  $T'$  le résultat obtenu en rajoutant un sommet étiqueté  $n + 2$  à  $T$ . On a 8 opérations distinctes, notées  $f_i$  pour  $i \in [1, 8]$  :

$$1. \sum_{T' \in f_1(T)} \omega(T') = x\omega(T).$$

On rajoute le nouveau sommet  $n+2$  comme enfant de 1. Ce nouveau sommet est obligatoirement dirigeant, car son parent est plus petit que lui, et  $\beta_T(n+2) = n+2$ , donc  $\text{lead}(T') = \text{lead}(T) + 1$ . On augmente aussi le degré de 1, donc on a bien  $\text{deg}_{T'}(1) = \text{deg}_T(1) + 1$ . Comme

$$\text{lead}(T') - \text{deg}_{T'}(1) = \text{lead}(T) + 1 - (\text{deg}_T(1) + 1) = \text{lead}(T) - \text{deg}_T(1),$$

le degré de  $z$  dans  $\omega(T')$  ne change pas.

$$2. \sum_{f_2(T)} \omega(T') = nz\omega(T).$$

On rajoute le nouveau sommet  $n+2$  comme enfant d'un autre sommet étiqueté autre que 1, on a donc un choix de  $n$  sommets distincts. Comme dans le cas précédent, ce nouveau sommet est dirigeant. Contrairement au cas précédent, le degré de 1 ne change pas, donc on doit multiplier par  $z$  au lieu de  $x$  dans ce cas.

$$3. \sum_{f_3(T)} \omega(T') = y\partial_y\omega(T).$$

On rajoute le nouveau sommet  $n+2$  comme enfant d'un sommet non étiqueté existant  $u$ . On choisit parmi les sommets non étiquetés de  $T$ , qui sont comptés par le degré de  $y$  dans  $\omega(T)$ . Ainsi, on doit mettre en facteur le degré de  $y$ , ce qui se traduit dans l'équation par dériver par rapport à  $y$ , puis multiplier par  $y$  la fonction de poids. Dans notre cas, le nouveau sommet n'est pas dirigeant. En effet, son parent  $u$  n'est pas étiqueté, donc il a au moins deux autres descendants plus petits que  $n+2$ , donc  $\beta_{T'}(u) = \beta_T(u) \neq n+2$ . Le degré de 1 aussi demeure inchangé.

$$4. \sum_{f_4(T)} \omega(T') = t\partial_y\omega(T).$$

On étiquette un sommet non étiqueté avec  $n+2$ . Comme on retire un sommet non étiqueté de  $T$ , on dérive bien par rapport à  $y$ , mais cette fois on ne doit pas multiplier par  $y$  la fonction de poids. Cependant,  $\beta_{T'}(n+2) \neq n+2$ , donc  $n+2$  est un nouveau parent impropre, et ce n'est pas un sommet dirigeant, donc on rajoute seulement un facteur  $t$ .

$$5. \sum_{f_5(T)} \omega(T') = tn\omega(T).$$

On rajoute le nouveau sommet  $n+2$  au milieu d'une arête existante  $(i, j)$ , avec  $j$  étiqueté. On a un choix de  $n$  arêtes, puisque choisir une telle arête équivaut à choisir un sommet étiqueté  $j$  autre que 1. On a que

$$\beta_{T'}(n+2) = \beta_{T'}(j) = \beta_T(j) \neq n+2,$$

donc  $n+2$  est un nouveau parent impropre, et n'est pas un sommet dirigeant.

$$6. \sum_{f_6(T)} \omega(T') = ty \partial_y \omega(T).$$

On rajoute le nouveau sommet  $n + 2$  au milieu d'une arête existante  $(i, j)$ , avec  $j$  non étiqueté. On raisonne de la même manière que dans le cas précédent,  $n + 2$  est un nouveau parent impropre, et n'est pas un sommet dirigeant.

$$7. \sum_{f_7(T)} \omega(T') = yn \omega(T).$$

On rajoute un sommet non étiqueté  $u$  au milieu d'une arête  $(i, j)$ , avec  $j$  étiqueté, puis on rajoute le sommet  $n + 2$  comme deuxième enfant de  $u$ . Comme  $u$  n'est pas étiqueté, il ne peut pas être un parent impropre. De plus, comme dans le cas 3,  $n + 2$  ne peut pas être dirigeant.

$$8. \sum_{f_8(T)} \omega(T') = y^2 \partial_y \omega(T).$$

On rajoute un sommet non étiqueté  $u$  au milieu d'une arête  $(i, j)$ , avec  $j$  non étiqueté, puis on rajoute le sommet  $n + 2$  comme deuxième enfant de  $u$ . On applique le même raisonnement que dans le cas précédent.

On doit aussi vérifier que cette construction ne change pas le nombre de parents impropres ou de sommets dirigeants parmi les  $n + 1$  premiers sommets étiquetés. Cette propriété est cependant facile à montrer, car pour tout sommet  $i \in T$ ,  $\beta_T(i) = \beta_{T'}(i)$ . De plus, dans les cas 4 et 5, on introduit un sommet étiqueté  $a$  au milieu d'une arête  $(i, j)$ , donc  $\beta_{T'}(a) = \beta_{T'}(j)$ , et l'arête  $(i, a)$  est impropre dans  $T'$  si et seulement si  $(i, j)$  est impropre dans  $T$ , tandis que  $(a, j)$  est toujours appropriée. Une autre conséquence est que tout descendant de  $a$  qui était dirigeant dans  $T$  l'est toujours dans  $T'$ .

Pour conclure, soit  $f(T) = \cup f_i(T)$ , on a

$$\sum_{T' \in f(T)} \omega(T') = [x + nz + (y + t)(n + (y + 1)\partial_y)] \omega(T).$$

Comme il est clair que  $\{f(T), T \in (G)_{n+1}\}$  est une partition de  $\mathcal{G}_{n+2}$ , il suffit de sommer l'équation précédente sur  $T \in \mathcal{G}_{n+1}$  pour obtenir (III.3.2). □

### III.4 Lien avec les nombres de Ward

Comme remarqué précédemment, la séquence de polynômes  $R_n(0, y, 0, 0)$  est à coefficients positifs, et donne le triangle des nombres de Ward [A134991](#) (Table III.2). Tout d'abord, cela signifie que  $Q_n(0, y + 1, 0, -1)$  est à coefficients positifs, ce qui n'est pas évident à partir de sa caractérisation dans le Théorème III.2.5. Cette séquence de nombres peut s'interpréter comme le nombre de faces dans l'espace des *arbres*

| $n \setminus k$ | 1 | 2  | 3   | 4    | 5   |
|-----------------|---|----|-----|------|-----|
| 2               | 1 |    |     |      |     |
| 3               | 1 | 3  |     |      |     |
| 4               | 1 | 10 | 15  |      |     |
| 5               | 1 | 25 | 105 | 105  |     |
| 6               | 1 | 56 | 490 | 1260 | 945 |

TABLE III.2 – Premières valeurs de  $[y^k]R_n(0, y, 0, 0)$ , triangle des nombres de Ward [A134991](#).

*phylogénétiques*, notion introduite par Billera, Holmes et Vogtmann dans [BHV01]. Il a été prouvé par Speyer and Sturmfels [SS04] que cet espace est aussi la *Grassmannienne tropicale des lignes*  $\mathcal{G}_{2,n}$ . Pour plus d'informations sur la Grassmannienne et la géométrie tropicale, voir [Pin98, Stu02]. On introduit d'abord quelques définitions.

### Semi-anneau tropical

**Définition III.4.1.** Un *semi-anneau*  $(R, +, \cdot)$  est un ensemble doté d'un zéro  $0_R$  et d'une unité  $1_R$ , tel que

- $R$  est un monoïde commutatif pour l'addition  $+$ , avec  $0_R$  comme neutre,
- $R$  est un monoïde pour la multiplication  $\cdot$ , avec  $1_R$  comme neutre,
- La multiplication est distributive sur l'addition, c'est-à-dire, pour tout  $a, b, c$  dans  $R$ ,
  - $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ ,
  - $(b + c) \cdot a = (b \cdot a) + (c \cdot a)$ ,
- $0_R$  est le zéro de la multiplication :  $a \cdot 0_R = 0_R \cdot a = 0_R$ .

On note que, pour devenir un anneau, un semi-anneau ne manque que l'inverse pour l'addition.

On s'intéresse principalement au *semi-anneau tropical*  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ . Ici, le neutre pour l'addition est  $-\infty$ , et celui de la multiplication est  $0$ . En tant que semi-anneau, il vérifie la plupart des axiomes usuels de l'arithmétique, il est d'ailleurs possible de représenter et d'étudier des polynômes tropicaux, et résoudre des systèmes d'équations polynomiales. Soit  $f$  un polynôme tropical à  $n$  variables  $(x_1, \dots, x_n) = x$ . On l'écrit de la façon suivante :

$$f(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \omega_a x^a.$$

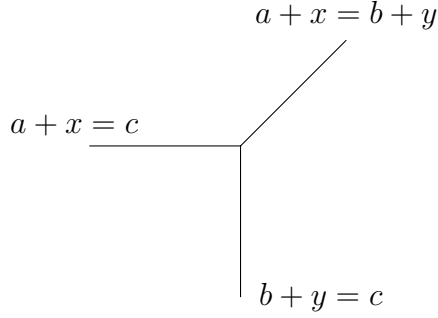


FIGURE III.4.1 – Représentation d’une ligne tropicale dans le plan.

Les coefficients  $\omega_a$  sont dans  $\mathbb{R}$ , et le support  $\mathcal{A}$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{Z}^n$ . On note qu’il est nécessaire de spécifier le support, car tous les monômes sont présents, même si  $\omega_a = 0$ . On a utilisé les notations des opérations du semi-anneau tropical pour représenter  $f$ , mais en utilisant l’arithmétique classique,  $f$  se traduit en

$$f(x) = \max(\{\omega_a + a_1x_1 + \dots + a_nx_n \mid a \in \mathcal{A}\}).$$

On définit la *variété tropicale* de  $f$ ,  $\mathcal{T}(f)$  comme l’ensemble des points de  $\mathbb{R}$  pour lesquels le maximum est atteint au moins deux fois. Par exemple, on peut prendre la fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , et on tente de décrire sa variété tropicale. Cela revient à trouver  $x$  tel que

$$a + 2x = b + x \geq c \text{ or } a + 2x = c \geq b + x \text{ or } b + x = c \geq a + 2x.$$

On trouve alors que la variété tropicale de  $f$  est  $\{b - a, c - b\}$  si  $a + c \leq 2b$ , et  $\{(c - a)/2\}$  sinon. On peut aussi s’intéresser aux variétés tropicales dans le plan. Soit  $f(x, y) = ax + by + c$ . Sa variété tropicale est une *ligne tropicale*, qui est constituée de trois demi-droites provenant d’un même point central  $(c - a, c - b)$ , et se dirigeant vers le sud, l’ouest, et le nord-est, comme on peut le voir Figure III.4.1. Le point central est le seul point où le maximum est atteint pour chacune de ses composantes, vérifiant donc  $a + x = b + y = c$ . Plus généralement, soit un polynôme arbitraire à deux variables :

$$f(x, y) = \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} \omega_{ij} x^i y^j$$

Pour toute paire de points  $(i', j'), (i'', j'')$  dans  $\mathcal{A}$ , on considère le système linéaire d’inégalités :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{A}, \omega_{i'j'} + i'x + j'y = \omega_{i''j''} + i''x + j''y \geq \omega_{ij} + ix + jy.$$

La solution de ce système peut être vide, un point, un segment, ou une demi-droite dans  $\mathbb{R}^2$ . L'union de toutes les solutions est la *courbe tropicale* définie par  $f(x, y)$ .

### La Grassmannienne tropicale

Soit  $\mathbb{C}[p]$  l'anneau polynômial à  $\binom{n}{d}$  variables :

$$\mathbb{C}[p] \doteq \mathbb{C}[p_{i_1 \dots i_d}, 1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq n].$$

L'*idéal de Plücker*  $I_{d,n}$  est l'idéal dans  $\mathbb{C}[p]$  constitué des relations algébriques entre les mineurs  $d \times d$  d'une matrice  $d \times n$  arbitraire. Par exemple,  $I_{2,n}$  est engendré par les quadriques :

$$p_{ij}p_{kl} - p_{ik}p_{jl} + p_{il}p_{jk}, 1 \leq i < j < k < l \leq n.$$

La *Grassmannienne*  $G_{d,n}$  est la variété projective de  $I_{d,n}$ , qui paramètre les sous-espaces linéaires de dimension  $d$  de  $\mathbb{C}^n$ . De même, la *Grassmannienne tropicale*  $\mathcal{G}_{d,n}$  est la variété tropicale  $\mathcal{T}(I_{d,n})$  spécifiée par l'idéal de Plücker  $I_{d,n}$ . C'est un éventail de dimension  $d(n-d) + 1$  dans l'espace  $\mathbb{R}^{\binom{n}{d}}$ . On considère l'application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  à  $\mathbb{R}^{\binom{n}{d}}$  qui envoie un vecteur  $(a_1, \dots, a_n)$  vers le vecteur de taille  $\binom{n}{d}$  de coordonnées  $a_{i_1} + \dots + a_{i_d}$ . Cette application est injective, et son image  $L$  est l'intersection de tous les cônes dans  $\mathcal{G}_{d,n}$ . En intersectant l'image de  $\mathcal{G}_{d,n}$  dans  $\mathbb{R}^{\binom{n}{d}}/L$  avec une sphère, on obtient un complexe polyédral pur  $\mathcal{G}'_{d,n}$  de dimension  $nd - n - d^2$ .

Par exemple, la Grassmannienne tropicale  $\mathcal{G}_{2,5}$  est un éventail de dimension 7 dans  $\mathbb{R}^{10}$ , et sa version réduite est un complexe unidimensionnel à 10 sommets, tous trivalents, et 15 arêtes, c'est le graphe de Petersen.

**Théorème III.4.2** (Speyer, Sturmfels [SS04]). *La Grassmannienne tropicale  $\mathcal{G}'_{2,n}$  est un complexe simplicial connu comme l'espace des arbres phylogénétiques. Il a  $2^{n-1} - n - 1$  sommets,  $(2n - 5)!!$  facettes, et son type d'homotopie est un bouquet de  $(n - 2)!$  sphères de dimension  $n - 4$ .*

### L'espace des arbres phylogénétiques

On s'intéresse maintenant à l'*espace des arbres phylogénétiques* mentionnés dans le Théorème III.4.2 pour comprendre le lien avec les arbres de Greg. Son complexe simplicial  $\mathbf{T}_n$  est étudié en détails dans [BHV01], et se définit de la façon suivante. Son ensemble de sommets  $\text{Vert}(\mathbf{T}_n)$  contient toutes les paires non ordonnées  $\{A, B\}$  où  $A$  et  $B$  forment une partition de  $[n]$ , et sont tous deux de taille au moins 2. On



note que la cardinalité de  $\text{Vert}(\mathbf{T}_n)$  est  $2^{n-1} - n - 1$ . Deux sommets  $\{A, B\}$  et  $\{A', B'\}$  sont connectés par une arête si et seulement si

$$A \subset A' \text{ ou } A \subset B' \text{ ou } B \subset A' \text{ ou } B \subset B',$$

et  $\mathbf{T}_n$  est le complexe de cliques de ce graphe. De manière équivalente, on a que  $\sigma \subseteq \text{Vert}(\mathbf{T}_n)$  est une face de  $\mathbf{T}_n$  si l'ensemble de ses sommets forme une clique, c'est-à-dire sont deux à deux reliés par une arête. Chaque face de  $\mathbf{T}_n$  correspond aussi à un arbre dont seules les feuilles sont étiquetées, de 1 à  $n$ , et les sommets internes sont non étiquetés et sont de degré au moins 3. En d'autres termes, ce sont des arbres de Greg dont les feuilles sont les seuls sommets étiquetés. Chaque arête interne de cet arbre définit une partition  $\{A, B\}$ , qui correspond aux deux ensembles de feuilles obtenus dans les deux arbres que l'on obtiendrait si on supprimait l'arête. On peut donc encoder un arbre par l'ensemble des partitions représentant ses sommets. Cela signifie que le degré d'une face est exactement le nombre de sommets non étiquetés de l'arbre de Greg correspondant à la face. On remarque donc que les faces maximales de  $\mathbf{T}_n$  sont les arbres trivalents.

Cette définition, avec le Théorème III.3.1, suffit pour prouver notre remarque que  $R_n(0, y, 0, 0)$  donne le triangle des nombres de Ward. En effet,

$$R_n(0, y, 0, 0) = \sum_T y^{\text{uml}(T)},$$

où  $\text{deg}_1(T) = 1$ ,  $\text{impp}(T) = 0$ , et  $\text{lead}(T) = 2$ . On rappelle que 1 et 2 sont toujours des sommets dirigeant de  $T$ . On suppose maintenant que  $T$  a au moins un sommet interne étiqueté, et soit  $j \neq 1$  l'un d'entre eux. Dans un premier temps,  $j$  ne peut pas être un parent impropre. Soit  $k$  le plus petit descendant strict de  $j$ , alors  $k$  est forcément dirigeant. Donc  $T$  ne peut pas avoir de sommet interne étiqueté, ce qu'il fallait démontrer.

### Bijection d'objets comptés par les nombres de Ward

Une remarque que l'on peut faire sur le triangle des nombres de Ward est qu'il s'agit aussi du triangle de nombre [A008299](#) lu sur les diagonales. Plus précisément, cela signifie que le nombre d'arbres phylogénétiques à  $n$  feuilles et  $k$  sommets internes est égal au nombre de partitions de l'ensemble  $[n + k - 2]$  en  $k$  parts de taille au moins 2. Pour prouver cet assertion, on décrit maintenant une bijection entre ces deux classes combinatoires.

Soit  $T$  un arbre phylogénétique à  $n$  feuilles et  $k$  sommets internes non étiquetés, que l'on enracine en 1. On étiquette les arêtes internes de  $T$ , distinctement de ses

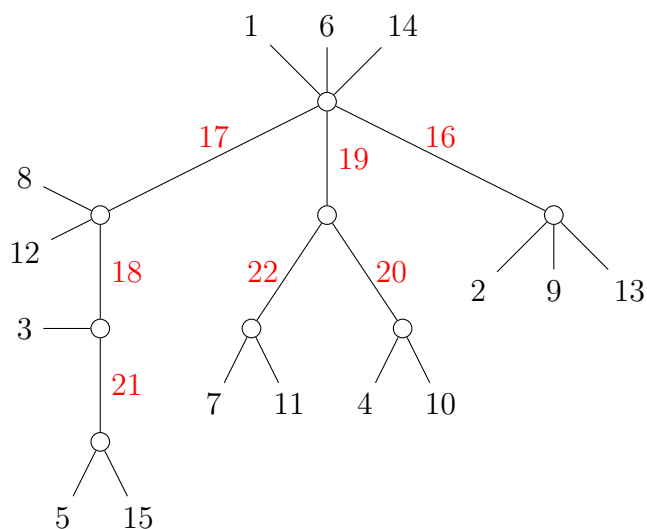


FIGURE III.4.2 – L’arbre phylogénétique en bijection avec la partition à 21 éléments  $\{1, 6, 14, 16, 18\}\{2, 9, 13\}\{3, 20\}\{4, 10\}\{5, 15\}\{7, 11\}\{8, 12, 17\}\{19, 21\}$ . Les étiquettes rouges des arêtes sont celles obtenues dans la construction de la bijection.

sommets, dans l’ensemble  $\{n + 1, \dots, n + k - 1\}$ , et de telle sorte que, si  $(a, b)$  et  $(a', b')$  sont deux arêtes (orientées) distinctes de  $T$ , alors

- Si  $\beta_T(b) > \beta_T(b')$ , alors l’étiquette de  $(a, b)$  est (strictement) plus grande que celle de  $(a', b')$  ;
- Si  $\beta_T(b) = \beta_T(b')$ , alors l’étiquette de  $(a, b)$  est (strictement) plus grande que celle de  $(a', b')$  si et seulement si  $b' \in \text{gap}(b)$ , autrement dit,  $b'$  est plus proche de 1 dans l’arbre que  $b$ .

Cet étiquetage est unique pour un  $T$  donné. La partition de  $[n + k - 2]$  à  $k$  blocs de taille au moins 2 associée à  $T$  s’obtient alors en créant une part pour chaque sommet interne, qui contient toutes les étiquettes des feuilles qui sont directement reliées, et les étiquettes des arêtes internes dont il est le parent. On retire enfin la valeur  $n + 1$  de la part contenant 1, et on décroît toutes les valeurs plus grandes que  $n + 1$  de 1 dans toutes les parts. Remarquons que la partition obtenue n’a aucune part de taille 1, en effet chaque part contient autant de valeurs que le sommet interne associé a de fils et feuilles étiquetées, qui est donc au moins 2 par définition des arbres phylogénétiques. Voir Figure III.4.2 pour un exemple d’application.

Cette opération est inversible. Pour une partition de  $[n + k - 2]$ , on augmente toutes les valeurs plus grandes que  $n + 1$  de 1, puis on rajoute la valeur  $n + 1$  dans la part contenant 1. Chaque part correspond à un sommet interne de l’arbre que l’on

cherche à construire. Chaque élément d'une part qui est strictement supérieur à  $n$  correspond à une arête dirigée vers les feuilles entre ce sommet et un autre sommet interne. En choisissant la part contenant 1 comme racine, il n'y a qu'une seule façon de reconstruire l'arbre pour que l'étiquetage des sommets internes soit valide. En effet, on construit récursivement des sous-arbres à partir de ces sommets. On dit que les arêtes sortantes étiquetées qui ne sont pas rattachées à un autre sommet sont libres. En partant de l'arête  $n + k - 1$  en décroissant jusqu'à  $n + 1$ , on attache à l'arête le sous-arbre qui n'a pas d'arête libre, et qui a la valeur de  $\beta_T$  maximale. La dernière opération rattache un sous-arbre à l'arête  $n + 1$ , qui a comme parent le sommet interne qui est le fils de 1. L'arbre réciproque est alors construit, il faut vérifier que l'étiquetage des sommets de l'arbre résultant est valide, ce qui est facile à vérifier par construction.

### III.5 Une bijection pour les arbres de Cayley

On donne maintenant une nouvelle interprétation de  $R_n$ , qui se base alors sur les arbres de Cayley. La preuve se base sur le théorème précédent, et construit une bijection entre les arbres de Greg et les arbres de Cayley qui conserve les statistiques qui nous intéressent. Ce théorème est une généralisation de la deuxième égalité de la Proposition III.2.8.

#### Théorème III.5.1.

$$R_n(x, y, z, t) = \sum_{T \in \mathcal{C}_{n+1}} (y + 1)^{\text{impe}(T) - \text{impp}(T)} (y + t)^{\text{impp}(T)} x^{\deg_T(1) - 1} z^{\text{lead}(T) - \deg_T(1) - 1}. \quad (\text{III.5.1})$$

*Démonstration.* Pour prouver (III.5.1), on utilise le Théorème III.3.1, et on trouve une bijection entre les arbres de Cayley et les arbres de Greg qui agit convenablement avec les statistiques. Posons quelques définitions.

Soit  $T \in \mathcal{G}_{n+1}$ , pour un sommet  $a \in T$ , on note  $I(a) = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$  son ensemble d'enfants impropres, ordonnés tels que  $\beta_T(b_1) < \beta_T(b_2) < \dots < \beta_T(b_k)$ . Soit  $m(a) \in I(a)$  tel que  $\beta_T(m(a)) = \max_{b \in I(a)} \{\beta_T(b)\}$ . On définit une *fonction de sélection*  $S$  définie sur les parents impropres de  $T$  telle que, pour  $a \in \text{impp}(T)$ ,  $S(a) \subset I(a)$ . Soit  $\text{Sel}(T)$  l'ensemble de ces fonctions. Choisir une fonction de sélection pour  $T$  équivaut à choisir un ensemble des arêtes impropres de  $T$ , c'est-à-dire  $\text{Sel}(T) \cong \mathcal{P}(\text{impe}(T))$ .

On construit une bijection entre l'ensemble  $\{(T, S) \mid S \in \text{Sel}(T)\}$ , qui correspond aux arbres de Cayley avec arêtes impropres pointées, et les arbres de Greg. Soit

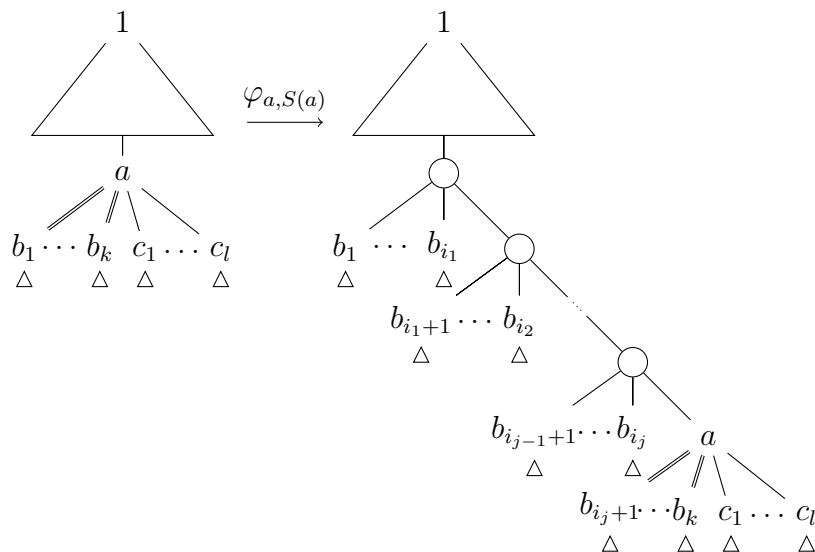


FIGURE III.5.1 – Illustration de l'opération  $\varphi_{a,S(a)}$ . Les enfants sont illustrés ordonnés par valeurs croissantes de  $\beta_T$ .

$a \in \text{impp}(T)$  et  $S(a) = \{b_{i_1}, \dots, b_{i_j}\}$  avec  $i_1 < \dots < i_j$ . L'idée de la bijection est de diviser l'ensemble des enfants impropres pour chaque parent impropre de  $T$ , en rajoutant un sommet non étiqueté pour chaque division effectuée. On définit la transformation  $\varphi_{a,S(a)}(T)$  comme suit : dans  $T$ , on rajoute une chaîne de  $|S(a)|$  sommets non étiquetés comme antécédents directs de  $a$ , et pour chaque enfant  $c$  de  $a$ , si  $\beta_T(b_{i_{m-1}+1}) \leq \beta_T(c) \leq \beta_T(b_{i_m})$ , alors on retire l'arête  $(a, c)$ , et on rajoute une arête entre  $c$  et le  $m$ -ième sommet non étiqueté, comme illustré dans la Figure III.5.1. Il est important de remarquer que si  $m(a) \in S(a)$ , alors  $a$  n'est plus un parent impropre dans l'arbre résultant. On note aussi que si  $a_1, a_2 \in \text{impp}(T)$ , alors  $\varphi_{a_1,S(a_1)}$  et  $\varphi_{a_2,S(a_2)}$  commutent pour la composition pour tout  $S$ . Enfin, on définit  $\varphi$  par  $\varphi(S, T) = \left( \underset{a \in \text{impp}(T)}{\circ} \varphi_{a,S(a)} \right) (T)$ . On a

$$\text{unl}(\varphi(S, T)) = \sum_{a \in \text{impp}(T)} |S(a)|, \text{ et}$$

$$\text{impp}(\varphi(S, T)) = \#\{a \mid m(a) \notin S(a)\}.$$

On note par ailleurs que le degré de 1 et le nombre de sommets dirigeants sont

inchangés par ces transformations. Donc pour  $T \in \mathcal{C}_n$ , on a

$$\sum_{S \in \text{Sel}(T)} y^{\text{unl}(\varphi(S,T))} t^{\text{impp}(\varphi(S,T))} = (y+1)^{\text{impe}(T) - \text{impp}(T)} (y+t)^{\text{impp}(T)}.$$

Cette opération est réversible, pour chaque arbre de Greg on peut retrouver le seul arbre de Cayley duquel il provient. Formellement, on définit un système de réécriture  $\rightarrow$  sur les arbres de Greg. Soit  $G \in \mathcal{G}_{n+1}$ ,  $i \in G$  un sommet non étiqueté, et  $j$  son seul enfant qui vérifie  $\beta_G(i) = \beta_G(j)$ . Soit  $G'$  l'arbre obtenu en fusionnant  $i$  et  $j$ . Alors  $G \rightarrow G'$ . Par exemple, si  $S \in \text{Sel}(T)$ , et  $S'$  est obtenu en retirant un seul élément de  $S$ , alors  $\varphi(S, T) \rightarrow \varphi(S', T)$ .

Ce système de réécriture est localement confluent, car la réécriture d'un sommet non étiqueté est une opération locale dans l'arbre, et n'impacte pas le reste de l'arbre, et ce système termine, car il retire un sommet non étiqueté à chaque étape. Par le Lemme de Newman (voir par exemple [Red90]), ce système est confluent, on peut donc définir  $\psi(G)$  comme le seul arbre minimal de  $G$  dans ce système, qui vérifie  $G \rightarrow^* \psi(G)$  et  $\psi(G) \in \mathcal{C}_{n+1}$ .

Une approche alternative pour trouver l'inverse de  $\varphi$  aurait été d'explicitier l'inverse de chaque  $\varphi_{a,S(a)}$ . L'idée est que si l'on considère tous les sommets non étiquetés introduits par la transformation, ils sont tels que leur enfant ayant la plus grande valeur de  $\beta_T$  est un ancêtre de  $a$ , ce sont les seuls à vérifier cette propriété, et ils forment un chemin dans l'arbre. Cette caractérisation est apparente dans la Figure III.5.1, car on a ordonné les enfants par ordre croissant de  $\beta_T$ . Ainsi l'idée de l'inversion de ces étapes intermédiaires serait de contracter tout un chemin de sommets non étiquetés, au lieu de les fusionner un par un.

**Lemme III.5.2.** *Soit  $T, T' \in \mathcal{C}_n$ ,  $S \in \text{Sel}(T)$  et  $S' \in \text{Sel}(T')$ . On a*

$$\varphi(S, T) = \varphi(S', T') \Rightarrow T = T' \text{ et } S = S'. \quad (\text{III.5.2})$$

*Démonstration.* Premièrement, on remarque que, par construction,  $\psi(\varphi(S, T)) = T$  pour tout  $S \in \text{Sel}(T)$ , ce qui prouve la première implication de (III.5.2). Pour la deuxième partie, on doit prouver qu'on ne peut pas obtenir le même arbre de Greg à partir d'un arbre de Cayley et deux fonctions de sélection différentes. À première vue, en regardant une chaîne de sommets non étiquetés il est difficile de dire s'il s'agit du fruit d'une ou plusieurs applications  $\varphi_{a,S(a)}$ . Cependant, si l'on observe chaque sommet impropre de  $T$  indépendamment les uns des autres, on voit qu'il n'y a qu'une seule façon d'inverser  $\varphi_{a,S(a)}$ . L'idée est alors de construire une preuve récursive sur la taille de  $S$ . Soit  $T \in \mathcal{C}_n$  et  $S, S' \in \text{Sel}(T)$ . Pour  $I \subset \text{impp}(T)$ , on définit  $S|_I$  comme

la restriction de  $S$  à  $I$ , ce qui signifie, pour  $a \in \text{impp}(T)$ ,

$$S|_I(a) = \begin{cases} S(a) & \text{si } a \in I \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

On prouve par induction sur la taille de  $I$  que

$$\varphi(S|_I, T) = \varphi(S'_I, T) \Rightarrow S|_I = S'_I. \quad (\text{III.5.3})$$

Si  $I = \{a\}$ , on a  $\varphi(S|_{\{a\}}, T) = \varphi_{a, S(a)}(T)$ . Cependant,  $J \mapsto \varphi_{a, J}(T)$  est injective, donc  $\varphi(S|_{\{a\}}, T) = \varphi(S'_{\{a\}}, T) \Rightarrow S(a) = S'(a) \Rightarrow S|_{\{a\}} = S'_{\{a\}}$ . Soit  $n \geq 0$  et supposons que (III.5.3) est vraie pour tout  $I \subset \text{impp}(T)$ , avec  $|I| \leq n$ . Soit  $J = \{a\} \cup I$  avec  $|J| = n + 1$  et  $a \notin I$ . Alors on a

$$\varphi(S|_J, T) = \varphi_{a, S(a)}(\varphi(S|_I, T)) = \varphi(S|_{\{a\}}, \varphi(S|_I, T)).$$

D'où

$$\begin{aligned} \varphi(S|_J, T) &= \varphi(S'_J, T) \\ \Rightarrow \varphi(S|_{\{a\}}, \varphi(S|_I, T)) &= \varphi(S'_{\{a\}}, \varphi(S'_I, T)) \\ \Rightarrow S|_{\{a\}} &= S'_{\{a\}} \text{ et } \varphi(S|_I, T) = \varphi(S'_I, T) \\ \Rightarrow S|_{\{a\}} &= S'_{\{a\}} \text{ et } S|_I = S'_I \\ \Rightarrow S|_J &= S'_J. \end{aligned}$$

On conclut en prenant  $I = \text{impp}(T)$  dans (III.5.3).  $\square$

Donc, avec le Lemme III.5.2,  $\{\{\varphi(S, T), S \in \text{Sel}(T)\}, T \in \mathcal{C}_{n+1}\}$  est une partition de  $\mathcal{G}_{n+1}$ . Donc on a

$$\begin{aligned} \sum_{G \in \mathcal{G}_{n+1}} y^{\text{unl}(G)} t^{\text{impp}(G)} &= \sum_{T \in \mathcal{C}_{n+1}} \sum_{S \in \text{Sel}(T)} y^{\text{unl}(\varphi(S, T))} t^{\text{impp}(\varphi(S, T))} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{C}_{n+1}} (y + 1)^{\text{impe}(T) - \text{impp}(T)} (y + t)^{\text{impp}(T)}. \end{aligned}$$

Enfin,  $\varphi$  ne change ni le degré de 1, ni le nombre de sommets dirigeants. On peut donc rajouter les deux variables  $x$  et  $z$  à l'équation, et conclure.  $\square$

## III.6 Des arbres de Cayley aux arbres planaires

En faisant un changement de variable pour travailler sur  $R_n$ , il a été possible d'interpréter les polynômes de Ramanujan multivariés en termes d'arbres de Greg et arbres de Cayley. On souhaite maintenant relier notre travail à l'observation originale

de Guo et Zeng sur les polynômes  $Q_n$ . Avec la définition III.2.9, on a une relation entre les arbres de Cayley et les arbres planaires étiquetés. En particulier, on a l'équation suivante.

**Proposition III.6.1.** *Soit  $n > 1$ . On a*

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{C}_{n+1}} y^{\text{impe}(T)} (t+1)^{\text{impp}(T)} x^{\text{deg}_T(1)-1} z^{\text{lead}(T)-\text{deg}_T(1)-1} \\ = \sum_{T \in \mathcal{O}_{n+1}} y^{\text{impe}(T)+\text{eld}(T)} t^{\text{eld}(T)} x^{\text{young}_T(1)-1} z^{n-\text{impe}(T)-\text{young}_T(1)-\text{eld}(T)}. \end{aligned} \quad (\text{III.6.1})$$

En effet, par changement de variables, la définition de  $R_n$  nous donne

$$R_n(x, y-1, z, yt+1) = Q_n(x, y, z, yt).$$

L'égalité (III.6.1) est un corollaire immédiat des Théorèmes III.2.5 et III.5.1, et de la définition de  $R_n$ . Cependant, la nature sommatoire de cette égalité implique l'existence d'une preuve bijective plus directe. Dans un premier temps, on utilise le Lemme III.2.12 pour décaler les indices, et obtenir la formule équivalente suivante à démontrer

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{C}_n} y^{\text{impe}(T)} (t+1)^{\text{impp}(T)} x^{\text{deg}_T(1)-1} z^{n-\text{impe}(T)-\text{deg}_T(1)} \\ = \sum_{T \in \mathcal{O}_n} y^{\text{impe}(T)+\text{eld}(T)} t^{\text{eld}(T)} x^{\text{young}_T(1)-1} z^{n-\text{impe}(T)-\text{eld}(T)-\text{young}_T(1)}. \end{aligned}$$

Soit  $T \in \mathcal{O}_n$ . Soit  $i$  un sommet jeune et parent impropre de  $T$ . Comme 1 est un parent approprié,  $i$  ne peut pas être étiqueté par 1, on introduit alors  $j$  comme étant le parent de  $i$ .

**Définition III.6.2.** Soit  $\zeta_i(T)$  la transformation suivante : si  $k$  est l'enfant de  $i$  qui vérifie  $\beta_T(i) = \beta_T(k)$ , alors on prend  $k$ , ses voisins de gauche et tous leurs sous-arbres respectifs, que l'on détache alors de  $i$ , et rattache à  $j$  dans le même ordre, directement à la droite de  $i$ .

Voir Figure III.6.1 pour une illustration de cette définition. On note que  $k$  est le premier enfant jeune de  $i$ , donc tous ses voisins de gauche sont des anciens. Comme  $i$  était jeune, tous ses voisins de gauche ont une valeur plus grande pour  $\beta_T$  que  $k$ , donc ils restent anciens après la transformation. De plus,  $\beta_{\zeta_i(T)}(i) > \beta_{\zeta_i(T)}(k)$ , donc  $i$  devient ancien. Comme  $i$  était jeune,  $k$  est toujours jeune dans  $\zeta_i(T)$ . Le reste de l'arbre reste inchangé. On a donc augmenté le nombre d'anciens de 1.

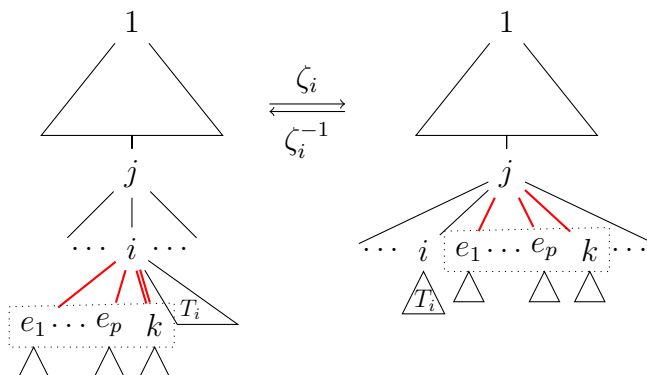


FIGURE III.6.1 – Illustration de l'opération bijective  $\zeta_i$ . Les sommets de  $e_1$  à  $k$  se déplacent ensemble en bloc, d'être les enfants les plus à gauche de  $i$  à être ses voisins de droite directs, *et vice versa*.

Cependant,  $(i, k)$  était une arête impropre, qui a alors été supprimée. Deux cas sont à considérer, premièrement si  $(j, i)$  était appropriée, alors elle reste appropriée, et les nouvelles arêtes le sont aussi. Autrement, si  $(j, i)$  était impropre, elle est désormais appropriée car  $i$  est devenu ancien, mais  $(j, k)$  se retrouve impropre à sa place, car  $\beta_T(i) = \beta_{\zeta_i(T)}(k)$ . Dans tous les cas, le nombre d'arêtes impropres diminue exactement de 1. Ainsi, cette transformation garde la somme  $\text{impe} + \text{eld}$  constante, et crée exactement un ancien. Notons qu'elle ne change pas le nombre d'enfants jeunes de 1. Enfin, cette opération est aisément inversible : pour un sommet ancien  $i$  dans  $T$ , on prend tous ses voisins de droite jusqu'au premier jeune, et on les déplace pour être les enfants de  $i$  les plus à gauche.

On note que si  $i$  et  $j$  sont deux parents impropres de  $T$ , alors  $\zeta_i \circ \zeta_j(T) = \zeta_j \circ \zeta_i(T)$ . Ainsi, on peut définir, pour  $S \subset \text{impp}(T) \cap \text{young}(T)$ ,

$$\zeta(S, T) = \left( \circ_{a \in S} \zeta_a \right) (T).$$

De même, pour  $S \subset \text{eld}(T)$ ,

$$\zeta^{-1}(S, T) = \left( \circ_{a \in S} \zeta_a^{-1} \right) (T).$$

**Définition III.6.3.** Pour  $T \in \mathcal{C}_n$ , on définit l'*arbre planaire canonique* de  $T$ , noté  $R(T) \in \mathcal{O}_n$ , comme étant le seul arbre planaire dont l'arbre de Cayley associé est  $T$ , et qui n'a que des sommets jeunes. En d'autres termes, ses enfants sont ordonnés de gauche à droite par valeurs de  $\beta_T$  croissantes.



On note que  $\deg_T(1) = \text{young}_{\mathbf{R}(T)}(1)$ . Soit  $Z(T) = \{\zeta(S, \mathbf{R}(T)), S \subset \text{impp}(\mathbf{R}(T))\}$ . On peut maintenant conclure en prouvant la proposition énoncée en début de section.

*Preuve de la Proposition III.6.1.* Par construction de  $\zeta$  comme bijection entre  $Z(T)$  et  $\{(S, T), S \subset \text{impp}(T)\}$ , pour tout  $T \in \mathcal{C}_n$ , on a

$$\begin{aligned} & y^{\text{impe}(\mathbf{R}(T))} (t+1)^{\text{impp}(\mathbf{R}(T))} x^{\text{young}_{\mathbf{R}(T)}(1)-1} z^{-\text{impe}(\mathbf{R}(T))-\text{young}_{\mathbf{R}(T)}(1)} \\ &= \sum_{U \in Z(T)} y^{\text{impe}(U)+\text{eld}(U)} t^{\text{eld}(U)} x^{\text{young}_U(1)-1} z^{-\text{impe}(U)-\text{eld}(U)-\text{young}_U(1)}. \end{aligned} \quad (\text{III.6.2})$$

De plus, pour tout  $U \in \mathcal{O}_n$ , on a

$$\exists T \in \mathcal{C}_n, \zeta^{-1}(\text{eld}(U), U) = \mathbf{R}(T).$$

L'idée est d'appliquer  $\zeta^{-1}$  à chaque sommet ancien de  $U$ , pour obtenir un arbre n'ayant que des sommets jeunes, ce qui en fera un arbre planaire canonique pour un certain arbre de Cayley. Cela implique aussi que  $T$  est le seul arbre de Cayley tel que  $U \in Z(T)$ . Donc,  $\{Z(T), T \in \mathcal{C}_n\}$  est une partition de  $\mathcal{O}_n$ . On conclut en sommant (III.6.2) sur  $\mathcal{C}_n$ .  $\square$

# Chapitre IV

## Un ordre partiel des fonctions de parking

### IV.1 Introduction

L'étude des *ensembles partiellement ordonnés*, est un domaine intrinsèquement lié à l'étude d'objets combinatoires. En effets, certains objets se voient naturellement de façon ordonnée, un exemple des plus connus est le treillis de Tamari sur les arbres binaires, comme vu par exemple dans [Cha06]. Dans [Wac06], Wachs présente divers outils et leurs applications à l'étude de la topologie des ensembles partiellement ordonnés, plus particulièrement on utilise dans ce chapitre des outils relatifs à l'homologie et l'*épluchabilité* décrits par Wachs dans son article.

Les *partitions non-croisées* sont des objets initialement décrits par Kreweras dans [Kre72], qui sont désormais considérés comme des objets combinatoires classiques. Dans son papier original, Kreweras a prouvé plusieurs formules maintenant bien connues, comme l'énumération des chaînes saturées, et des  $k$ -chaînes. En l'occurrence, leur énumération est donnée par la suite des nombres de Catalan, et classiquement on met les partitions non croisées en bijection avec les arbres enracinés. Il retrouve de plus que le nombre de chaînes maximales de l'ensemble est  $n^{n-2}$ , ce qu'avait précédemment prouvé Poupard dans [Pou71], qui les mettait en bijection avec les arbres de Cayley. Bien que les ensembles partiellement ordonnés des partitions et des partitions non-croisées font le sujet d'un grand nombre de travaux, beaucoup de questions concernant leur lien restent ouvertes, et suggèrent d'approfondir notre connaissance du sujet.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'action du groupe symétrique sur un ensemble partiellement ordonné de 2-partitions, qui sont des paires constituées

d'une partition et d'une partition non-croisée, mises en relation par une bijection qui préserve leur cardinalité. Cet ensemble a été défini et étudié pour la première fois par Edelman dans [Ede80]. On donnera une interprétation de ces objets en terme d'espèce de parking.

Dans la Section IV.2 on définit cet ensemble partiellement ordonné que l'on nomme *l'ensemble des fonctions de parking à bulles*. Le nom de cet ensemble vient d'un objet que l'on nomme *fonction de parking à bulles*, qui est une représentation arborescente d'une fonction de parking, et qui est en bijection avec les 2-partitions. L'utilisation de plusieurs objets bijectivement équivalents permet de diversifier notre approche pour l'étude de cet ordre partiel. Dans un premier temps, en utilisant les 2-partitions, la propriété de recouvrement dans l'ordre est donnée plus naturellement, on donne alors quelques propriétés intéressantes au sujet de l'ordre partiel, notamment on prouve qu'il est *CL-épluchable*. Dans la Section IV.3, on utilise les arbres de parking à bulles pour étudier l'action du groupe symétrique sur l'ensemble partiellement ordonné. Enfin dans la Section IV.4, on étudie ses chaînes maximales et ses  $k$ -chaînes.

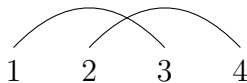
## IV.2 L'ensemble des fonctions de parking à bulles

### IV.2.1 L'ensemble partiellement ordonné des 2-partitions

On commence par donner la définition d'une partition non-croisée.

**Définition IV.2.1.** Soit  $P = \{A_1, \dots, A_k\}$  une partition de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$ . On dit que  $P$  est *non-croisée* si, pour tous  $B, C \in P$ , pour tous  $b_1, b_2 \in B, c_1, c_2 \in C$ , on n'a pas  $b_1 < c_1 < b_2 < c_2$ .

Moins formellement, si on représente les parts de la partition avec des arcs qui relient les éléments d'une part comme dans la Figure IV.2.1, alors les arcs ne se croisent pas. Le plus petit exemple de partition qui n'est pas non croisée est la partition  $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}\}$  de  $[4]$  :



Les objets qui nous intéressent sont les 2-partitions, définis ci-après. On peut voir cet objet comme une variante étiquetée des partitions non croisées.

**Définition IV.2.2** ([Ede80]). Une *2-partition (non-croisée)* de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  est un ensemble  $\{(A_1, B_1), \dots, (A_k, B_k)\}$  tel que

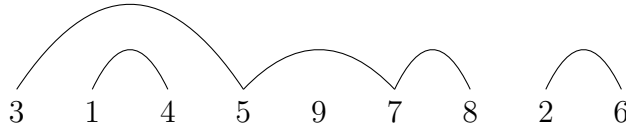


FIGURE IV.2.1 – La 2-partition  $\{(1467, 3578), (23, 14), (5, 9), (89, 26)\}$ . Si on ignore les étiquettes, on obtient sa partition non-croisée associée.

1. les ensembles  $A_1, \dots, A_k$  forment une partition non-croisée de  $\{1, \dots, n\}$ ,
2. les ensembles  $B_1, \dots, B_k$  forment une partition de  $\{1, \dots, n\}$
3.  $|A_j| = |B_j|$  pour tout  $1 \leq j \leq k$ .

La Figure IV.2.1 est un exemple de 2-partition. Lorsqu'on se restreint à un bloc, on décide par convention de représenter les étiquettes dans l'ordre croissant. On remarque donc que tout étiquetage des sommets d'une partition non-croisée n'est pas forcément une 2-partition.

On considère l'ensemble partiellement ordonné  $\mathbb{E}_n$  des 2-partitions d'un ensemble  $\{1, \dots, n\}$  donné, ordonnés par raffinement. Cela signifie qu'une 2-partition recouvre toutes les 2-partitions qui la contiennent. On donne une caractérisation alternative de cet ensemble. Pour une 2-partition  $a$  de taille  $n$ , et  $k \in [1, n]$ , soit  $\eta_a(k)$  la part de la partition non-croisée qui contient  $k$ . Autrement dit, si  $a = \{\{N_1, \dots, N_i\}, \{P_1, \dots, P_i\}\}$ , alors pour tout  $k \in P_j$ ,  $\eta_a(k) = N_j$ . Le lemme suivant se déduit immédiatement de la définition de l'ensemble partiellement ordonné.

**Lemme IV.2.3.** *Soit  $a, b \in \mathbb{E} \setminus \{\hat{1}\}$ . Alors  $a \leq b$  est équivalent à  $\eta_b(k) \subset \eta_a(k)$  pour tout  $k$ .*

Le *polynôme zêta* d'un ensemble partiellement ordonné, défini par Stanley dans [Sta75], est le polynôme qui, évalué en  $k$ , donne le nombre de  $k$ -chaînes de l'ensemble. Edelman calcule dans [Ede80] le polynôme zêta de plusieurs ensembles, par exemple celui des partitions non-croisées de taille  $n$ , qui est  $Z(k) = \frac{1}{n} \binom{nk}{n-1}$ . Cette suite de nombres est aussi connue comme le triangle des nombres de *Fuss-Catalan*, et énumère les arbres  $k$ -aires de taille  $n$  [Ava08]. Edelman prouve aussi que le polynôme zêta de l'ensemble  $\mathbb{E}_n$  est donné par  $Z_{\mathbb{E}_n}(k+1) = (nk+1)^{n-1}$ . Ainsi, les 2-partitions et les fonctions de parking ont la même énumération. On va utiliser une bijection explicite entre ces deux objets pour raffiner ce résultat.

## IV.2.2 Lien avec les fonctions de parking

Commençons par rappeler la définition des fonctions de parking.

**Définition IV.2.4.** Une *fonction de parking* est une suite  $(a_1, \dots, a_n)$  d'entiers strictement positifs telle que, si  $(a'_1, \dots, a'_n)$  est le réarrangement croissant de la suite, alors pour tout  $i$ ,  $a'_i \leq i$ .

L'origine du nom vient de la visualisation suivante. Considérons une rue à sens unique avec  $n$  places de parking, ainsi que  $n$  voitures qui successivement souhaitent s'y garer. La  $i$ -ème voiture souhaite se garer à la place  $a_i$ , si cette place est occupée elle avance jusqu'à trouver une place vide et s'y garer, ou bien sortir de la rue sans avoir trouvé de place. La suite  $(a_1, \dots, a_n)$  est alors de parking si toutes les voitures trouvent à se garer.

Le nombre de fonctions de parking de taille  $n$  est  $(n+1)^{n-1}$ , par exemple pour  $n=3$  on a les 16 fonctions suivantes,

111, 112, 121, 211, 122, 212, 221, 113, 131, 311, 123, 132, 213, 231, 312, 321.

On donne maintenant la définition d'une espèce, ainsi que la définition de l'espèce des fonctions de parking.

**Définition IV.2.5.** Une *espèce*  $\mathcal{F}$  est un foncteur de la catégorie des ensembles finis et bijections vers elle même. Autrement dit, c'est une application  $\mathcal{F}$  qui

- à tout ensemble fini  $V$  associe un ensemble  $\mathcal{F}(V)$ ,
- à toute bijection  $\sigma : V \rightarrow U$  entre les ensembles  $V$  et un autre ensemble  $U$  associe une application  $\mathcal{F}(\sigma) : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$

et telle que  $\mathcal{F}(id_V) = id_{\mathcal{F}(V)}$  pour tout ensemble fini  $V$ , et  $\mathcal{F}(\tau \circ \sigma) = \mathcal{F}(\tau) \circ \mathcal{F}(\sigma)$  pour toutes bijections  $\sigma : V \rightarrow U$  et  $\tau : U \rightarrow W$ .

On a les opérations usuelles sur les espèces, comme l'addition qui se traduit par l'union disjointe des ensembles, et le produit  $(\mathcal{F} \cdot \mathcal{G})(A) = \sum_{A=B \sqcup C} \mathcal{F}(B) \times \mathcal{G}(C)$ . Pour plus de détails sur les espèces, voir [BLL98].

Il y a une action naturelle du groupe symétrique sur les fonctions de parking, que l'on obtient en permutant les lettres de la fonction de parking, on peut donc naturellement construire une espèce de parking qui respect cette action.

**Définition IV.2.6.** Un *arbre de parking* d'un ensemble  $L$  est un couple  $(V, E)$ , où

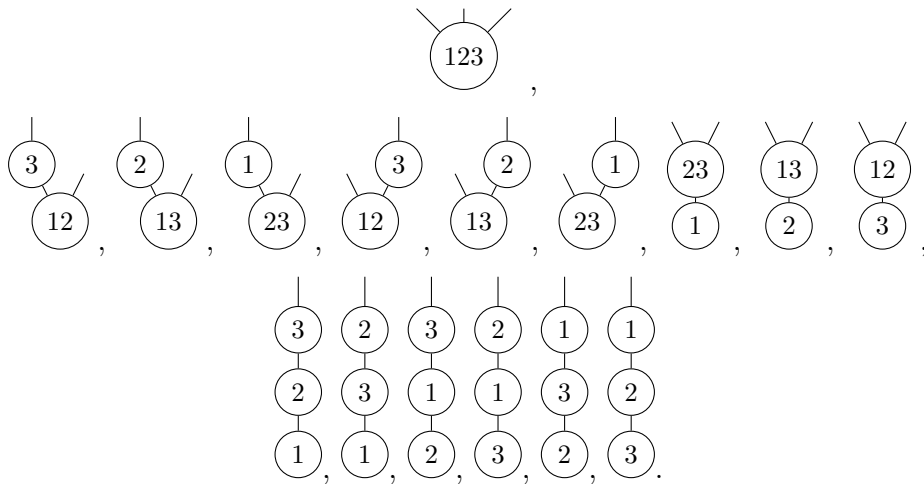
- $V$  est une partition de  $L$  en  $|L| + 1$  parts, certaines pouvant être vides,

—  $E$  est une application injective de  $V$  vers les couples  $(v, i)$ , où  $v \in V$  et  $1 \leq i \leq |v|$ , telle que l'application  $\tilde{E}$  induite de  $V$  vers  $V$  définit les arêtes d'un arbre sur  $V$ .

L'espèce des fonctions de parking (ou espèce de parking) est l'espèce qui à tout ensemble fini  $V$  associe l'ensemble des arbres de parking sur  $V$ .

Un sommet  $v$  d'un arbre de parking a autant d'arêtes sortantes qu'il y a d'éléments dans  $v$ , donc les sommets qui correspondent aux parts vides de la partition sont les feuilles de l'arbre.

**Exemple IV.2.7.** On représente ici les arbres sur  $\{1, 2, 3\}$  :



**Proposition IV.2.8.** Les arbres de parking sur  $\{1, \dots, n\}$  sont en bijection avec les fonctions de parking de longueur  $n$ . De plus, l'espèce  $\mathcal{P}_f$  des fonctions de parking satisfait :

$$\mathcal{P}_f = \sum_{k \geq 1} \mathbb{E}_k \cdot (\mathcal{P}_f)^k, \tag{IV.2.1}$$

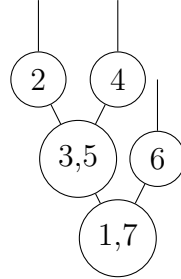
où  $\mathbb{E}_k$  est l'espèce satisfaisant  $\mathbb{E}_k(V) = \{V\}$  si  $|V| = k$  et  $\mathbb{E}_k(V) = \emptyset$  sinon. .

*Démonstration.* Une fonction de parking de longueur  $n$  peut clairement se réécrire comme composition  $(A_1, \dots, A_n)$  de  $\{1, \dots, n\}$ , satisfaisant  $\bigcup_{i=1}^k |A_i| \geq k$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ , avec  $A_i$  l'ensemble des positions de la lettre  $i$  dans la fonction de parking. On définit maintenant une bijection  $\varphi$  de cet ensemble de compositions vers l'ensemble des arbres de parking : les sommets des arbres de parking sont donnés par les ensembles

de composition, et  $A_i$  est le fils le plus à gauche de  $A_{i-1}$  si  $A_{i-1} \neq \emptyset$ , sinon c'est son frère droit.

La bijection réciproque de  $\varphi$  est obtenue en lisant les sommets de l'arbre selon un parcours en profondeur.  $\square$

**Exemple IV.2.9.** Considérons la fonction de parking 1325271 de taille 7. Son encodage défini dans la preuve précédente est  $(\{1, 7\}, \{3, 5\}, \{2\}, \emptyset, \{4\}, \emptyset, \{6\})$ , qui devient alors l'arbre



Les relations de couverture sur les arbres de parking correspondant à l'ensemble partiellement ordonné des 2-partitions sont alors comme suit :

- on choisit un sommet  $A$ , que l'on partitionne en deux ensembles non vides  $A_1$  et  $A_2$ ,
- on déconcatène la liste de ses sous-arbres en trois listes  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$ , telles que  $L_2$  et  $A_2$  ont la même cardinalité,
- on retire les éléments  $A_2$  et  $L_2$  de l'arbre,
- on rajoute les éléments de  $A_2$  dans le descendant vide de  $A_1$  le plus à droite dans  $L_1$ ,
- on ajoute  $L_2$  comme la liste des enfants de  $A_2$ .

Cette opération est représentée graphiquement dans la Figure IV.2.2.

**Proposition IV.2.10.** *L'ensemble des fonctions de parking  $\mathbb{E}$  est un (join-semi) treillis.*

*Démonstration.* Comme notre ensemble contient un élément minimal, il suffit de montrer que c'est un join-semi treillis pour conclure qu'il s'agit d'un treillis. On veut donc montrer que, pour tout  $x, y \in \mathbb{E}$ , il existe un unique élément, noté  $x \vee y$  et appelé le *join* de  $x$  et  $y$ , tel que tout élément plus grand à la fois que  $x$  et  $y$ , est plus grand que ou égal à  $x \vee y$ .

Si  $\hat{1}$  est le seul élément plus grand à la fois que  $x$  et  $y$ , alors l'existence du join est triviale, et  $x \vee y = \hat{1}$ . Supposons qu'il existe  $z \in \mathbb{E} \setminus \{\hat{1}\}$  plus grand que  $x$  et

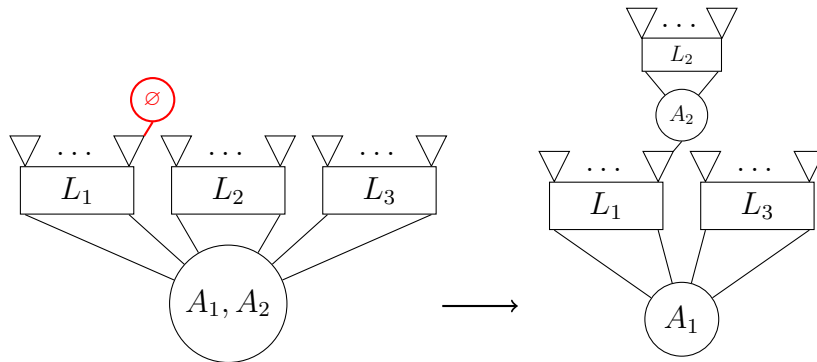


FIGURE IV.2.2 – Opération de recouvrement dans l'ensemble partiellement ordonné des arbres de parking. Le nœud en rouge est la feuille sur laquelle se rattache  $A_2$ .

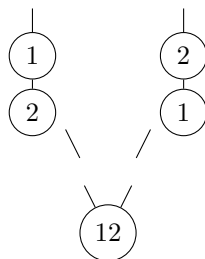


FIGURE IV.2.3 – Ensemble partiellement ordonné des fonctions de parking à bulles sur deux éléments.



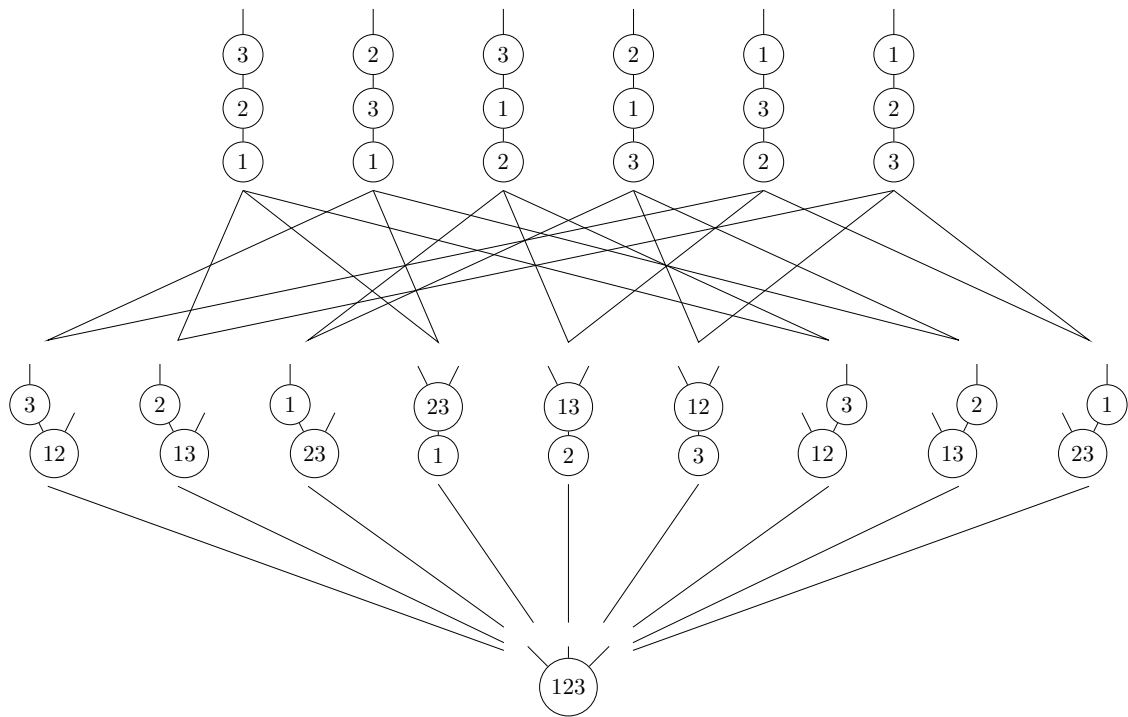


FIGURE IV.2.4 – Ensemble partiellement ordonné des fonctions de parking à bulles sur trois éléments.

$y$ . Avec le Lemme IV.2.3, on a que pour tout  $k$ ,  $\eta_z(k) \subseteq \eta_x(k) \cap \eta_y(k)$ . Comme les  $\eta_x(k)$  et  $\eta_y(k)$  forment deux partitions de  $[n]$ , les  $\eta_x(k) \cap \eta_y(k)$ , à égalité près, sont tous disjoint. Or les  $\eta_z(k)$  forment aussi une partition de  $[n]$ , cela implique que les  $\eta_x(k) \cap \eta_y(k)$  forment une partition de  $[n]$ . On peut donc trouver un élément  $v$  dans l'ensemble tel que  $\eta_v = \eta_x \cap \eta_y$ , qui est plus grand que  $x$  et  $y$ , et qui est plus petit que  $z$ . Donc  $x \vee y = v$ , et  $\mathbb{F}$  est un join-semi treillis.  $\square$

### IV.2.3 Fonctions nilpotentes partielles et arbres de Cayley

Dans cette section, on s'intéresse à différents objets en bijection avec les fonctions de parking de taille  $n$  ayant un rang  $r$  dans l'ensemble partiellement ordonné  $\mathbb{F}$ . En remarquant qu'un élément de rang  $r$  correspond à une fonction de parking ayant exactement  $r + 1$  valeurs distinctes, on a la proposition suivante.

**Proposition IV.2.11.** *Le nombre de fonctions de parking de taille  $n$  à  $r + 1$  valeurs distinctes est*

$$A_{n,r} = \binom{n}{r} S(n, r + 1) r!,$$

Remarquons que pour l'arbre de parking associé,  $r + 1$  est le nombre de sommets de l'arbre. Cette séquence  $\{A_{n,r}\}$  est la séquence OEIS [A141618](#). Edelman retrouve cette séquence dans [Ede80] en comptant le nombre de 2-partitions de taille  $n$  à  $r + 1$  blocs.

*Preuve de la Proposition IV.2.11.* En raisonnant en matière d'arbres de parking,  $S(n, r + 1)$  correspond au choix des sommets et de leurs étiquettes, et  $\binom{n}{r} r!$  au nombre d'agencements possibles pour former un arbre à partir de ces sommets.  $\square$

Cette séquence correspond aussi au nombre de fonctions nilpotentes partielles de taille  $n$  dont l'image est de taille  $r$ .

**Définition IV.2.12.** *Une fonction nilpotente partielle est une fonction  $f$  partiellement définie de  $[n]$  dans  $[n]$ , telle que  $f^n([n]) = \emptyset$ .*

De manière équivalente, on peut représenter une fonction partielle nilpotente comme un mot de longueur  $n$  sur l'alphabet  $\{0, \dots, n\}$ , avec les 0 correspondant aux éléments sur lesquels la fonction n'est pas définie. On remarque que si le mot ne contient pas de 0, alors la fonction n'est pas partielle, et donc n'est pas nilpotente.

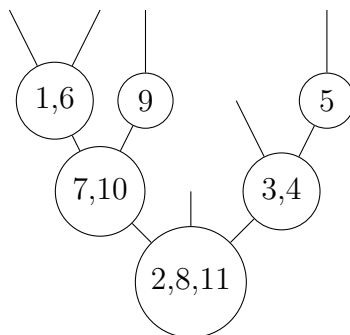


FIGURE IV.2.5 – Arbre de parking en bijection avec la fonction partielle nilpotente  $(10, 0, 11, 11, 4, 10, 2, 0, 7, 2, 0)$ .

**Exemple IV.2.13.** Le mot 010134 correspond à la fonction  $f$  non définie sur 1 et 3, et telle que  $f(4) = f(2) = 1$ ,  $f(6) = 4$  et  $f(5) = 3$ . On a que  $f^2 = 000001$  et  $f^3 = 000000$ , ce qui est équivalent à dire que  $f^3([n]) = \emptyset$ , donc  $f$  est bien nilpotente.

L'ensemble des fonctions partielles nilpotentes sur  $[n]$  telles que  $|\text{Im}(f)| = r + 1$  est aussi de cardinalité  $A_{n,r}$ , leur énumération est due à Laradji et Umar dans [LU04]. On peut donc donner une bijection entre ces fonctions et les fonctions de parking.

### Bijection entre fonctions de parking et fonctions nilpotentes partielles.

On va associer bijectivement un arbre de parking à une fonction partielle nilpotente. Les sommets de l'arbre sont les classes d'équivalence par l'image de  $f$ , c'est-à-dire les  $f^{-1}(i)$  pour  $i \in \text{Im}(f)$ . La racine de l'arbre est  $f^{-1}(\emptyset)$ , et pour toute arête sortante d'une étiquette  $i$ , on attache  $f^{-1}(i)$ . On remarque que cette construction est valide et forme un arbre si et seulement si  $f$  est nilpotente. De plus, cette construction est inversible, d'où la bijection.

**Exemple IV.2.14.** La Figure IV.2.5 montre un exemple d'arbre de parking obtenu à partir de la fonction partielle nilpotente  $(10, 0, 11, 11, 4, 10, 2, 0, 7, 2, 0)$  avec la bijection. La fonction de parking correspondante est alors  $(3, 1, 9, 9, 11, 3, 2, 1, 6, 2, 1)$ . On remarque sans surprise que les classes d'équivalence des deux fonctions sont égales. On remarque de plus que l'opération d'itération sur la fonction partielle nilpotente se traduit sur l'arbre par la fusion de la racine avec ses enfants, et en itérant un nombre suffisant de fois, on obtient l'arbre à un seul nœud, qui correspond à la fonction nulle. Notons enfin qu'on peut appliquer la bijection à une fonction qui n'est pas partielle, mais le résultat contiendra forcément un cycle.

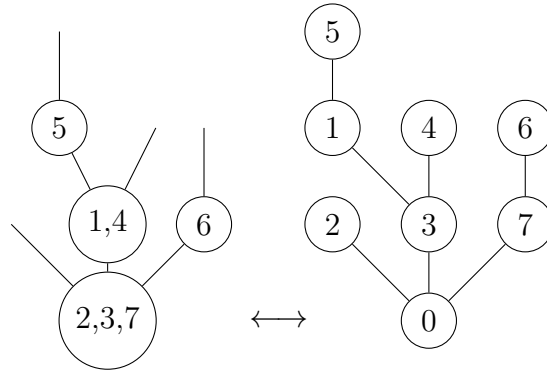


FIGURE IV.2.6 – Exemple de bijection entre arbre de parking et arbre de Cayley préservant le nombre de feuilles.

### Bijection entre arbres de parking et arbres de Cayley.

Les arbres de parking sont aussi en bijection avec les arbres de Cayley, plus précisément  $A_{n,r}$  est le nombre d'arbres de Cayley enracinés de taille  $n + 1$  à  $n - r$  feuilles. En effet, si on considère un arbre de Cayley de taille  $n + 1$  à étiquettes dans  $[0, \dots, n]$ , et si on fixe 0 comme racine, on peut fusionner les sommets qui ont le même parent, et en retirant 0 on obtient bien un arbre de parking. Les sommets qui n'étaient pas des feuilles dans l'arbre de Cayley sont les étiquettes qui portent les sommets dans l'arbre de parking, donc la cardinalité des feuilles est bien  $n - r$ . Cette opération est réversible.

**Exemple IV.2.15.** La Figure IV.2.6 donne un exemple d'application de la bijection. On remarque que l'arbre de Cayley est une autre façon de représenter une fonction partielle nilpotente : les fils du sommet  $i$  sont les antécédents de  $i$  par la fonction  $f$ .

Enfin,  $A_{n,r}$  correspond aussi aux nombre d'arbres de Cayley de taille  $n + 1$  à  $n - r$  pics. On remarque que le nombre de pics d'un arbre de Cayley de taille  $n > 1$  est égal à la somme des pics des sous-arbres issus du sommet d'étiquette minimale. Ainsi on peut donner une récurrence sur la fonction génératrice de ces arbres. Soit

$$F(x) = \sum_{T \in \mathcal{C}} t^{\text{pics}(T)} \frac{x^{|T|}}{|T|!} = \sum_{n,r} B_{n,r} t^r \frac{x^n}{n!}.$$

La remarque se traduit par l'équation suivante

$$\frac{\partial F}{\partial x} = e^{x \frac{\partial F}{\partial x}} - 1 + t.$$

En posant  $U(x) = x \frac{\partial F}{\partial x} - xt + x$ , on a

$$-Ue^{-U} = -xe^{x(t-1)}.$$

Par inversion de Lagrange, on a

$$\begin{aligned} U(x) &= \sum_{n \geq 1} \frac{n^{n-1}}{n!} x^n e^{nx(t-1)} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{l \geq 0} \sum_{r \geq 0} (-1)^r \frac{n^{n+l+r-1} x^{n+r+l}}{n! l! r!} t^r \\ &= \sum_{r \geq 0} \sum_{n \geq r} \frac{t^r}{r!} x^n \sum_{l=0}^{n-r} (-1)^l \frac{(n-l-r)^{n-1}}{(n-l-r)! l!} \\ &= \sum_{r \geq 0} \sum_{n \geq r} \frac{1}{r!} S(n-1, n-r) t^r x^n. \end{aligned}$$

$$\text{D'où } B_{n,r} = \binom{n-1}{n-r-1} S(n-1, n-r) (n-r-1)! = A_{n-1, n-r-1}.$$

#### IV.2.4 Épluchabilité de l'ensemble des fonctions de parking

On s'intéresse à certaines propriétés topologiques de l'ensemble partiellement ordonné des fonctions de parking, en particulier son *épluchabilité*. Soit  $P$  un ensemble partiellement ordonné fini, on définit  $\mathcal{ME}(P)$  l'ensemble des paires  $(c, x \prec y)$  où  $c$  est une chaîne maximale, et  $x \prec y$  une arête de cette chaîne. Un *étiquetage chaîne-arête* de  $P$  est une fonction  $\lambda : \mathcal{ME}(P) \rightarrow \Lambda$ , où  $\Lambda$  est un ensemble partiellement ordonné vérifiant que si deux chaînes maximales coïncident sur leurs  $d$  arêtes inférieures, alors leurs labels coïncident sur ces mêmes arêtes.

Le *complexe d'ordre*  $\Omega(P)$  de  $P$  est le complexe simplicial dont les faces sont les chaînes de  $P$ . La topologie des ensembles partiellement ordonnés a pour sujet l'étude des complexes d'ordre.

**Définition IV.2.16.** Soit un ordre total  $F_1 \succ F_2 \succ \dots$  sur les facettes de  $\Omega(P - \{\hat{0}\})$ , et soit  $n$  la dimension des  $F_i$ . On dit que c'est un *ordre d'épluchage* si, pour tout  $i$ ,  $(\cup_{j < i} F_j) \cap F_i$  est un complexe pur de dimension  $n-1$ . Si un tel ordre existe, on dit alors que  $\Omega(P)$  est *épluchable*.

Graphiquement, on peut imaginer l'épluchabilité comme une façon de construire le complexe d'ordre par recollage successif de facettes. Il est possible de traduire

cette propriété en raisonnant directement sur les chaînes de l'ensemble partiellement ordonné. Soit  $[x, y]$  un intervalle de  $P$ , par définition de  $\lambda$ , il est possible de définir plusieurs restrictions de l'étiquetage à l'intervalle  $[x, y]$ . Toutefois, chaque chaîne maximale  $r$  de  $[\hat{0}, x]$  détermine une unique restriction de  $\lambda$  à  $\mathcal{ME}([x, y])$ . Ainsi on peut comparer les chaînes maximales selon un ordre lexicographique dans les intervalles enracinés  $[x, y]_r$ . On a la définition suivante, due à Björner et Wachs dans [BW82].

**Définition IV.2.17.** Soit  $P$  un ensemble partiellement ordonné fini. Un *étiquetage chaîne-lexicographique* (où *CL-étiquetage*) de  $P$  est un étiquetage chaîne-arête tel que dans chaque intervalle fermé enraciné  $[x, y]_r$  de  $P$ , il existe une unique chaîne maximale strictement croissante, qui est de plus inférieure pour l'ordre lexicographique à toutes les autres chaînes maximales de  $[x, y]_r$ . Un ensemble partiellement ordonné qui admet un CL-étiquetage est dit *CL-épluchable*.

Si un ensemble partiellement ordonné est CL-épluchable, alors son complexe d'ordre est lui-même épluchable. Ainsi on raisonne directement sur l'ensemble pour obtenir des propriétés sur son complexe d'ordre. On se réfèrera aux notes de Wachs [Wac06] pour plus d'informations sur la topologie des ensembles partiellement ordonnés.

**Définition IV.2.18.** Un ensemble partiellement ordonné fini  $P$  admet un *ordre atomique récursif*, si  $P$  est un singleton, ou s'il existe un ordre  $a_1, \dots, a_t$  des atomes de  $P$  tel que

1. Pour tout  $j \in \{1, \dots, t\}$ , l'intervalle  $[a_j, \hat{1}]$  admet un ordre atomique récursif qui vérifie que les atomes de  $[a_j, \hat{1}]$  qui appartiennent aussi à  $[a_i, \hat{1}]$  pour un  $i < j$  sont premiers dans l'ordre.
2. Pour tout  $i < j$ , si  $a_i, a_j < y$ , alors il existe  $k < j$  et un atome  $z$  de  $[a_j, \hat{1}]$  tel que  $a_k < z \leq y$ .

**Théorème IV.2.19** (Björner et Wachs [BW96]). *Un ensemble partiellement ordonné fini  $P$  est CL-épluchable si et seulement si il admet un ordre atomique récursif.*

Il nous suffit donc de montrer que l'ensemble partiellement ordonné des fonctions de parking admet un ordre atomique récursif. Cette approche permet de raisonner directement sur les éléments de l'ensemble, plutôt que de trouver directement un étiquetage chaîne-arête. Dans un premier temps, notons que l'ensemble partiellement ordonné des partitions non-croisées est EL-épluchable [Bjö80], donc il admet un ordre atomique récursif. Ensuite, on introduit la notion suivante :

**Définition IV.2.20.** Le *code* d'une permutation  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  est le mot  $c_n \dots c_1$ , avec  $c_i = \{j < i \mid \sigma^{-1}(j) > \sigma^{-1}(i)\}$ . Combinatoirement,  $c_i$  correspond au nombre d'entiers plus petits que  $i$  qui sont à la droite de  $i$ . On dit aussi que  $c_i$  est le *nombre d'inversions* de  $i$ . Par exemple, 1324 a pour code 0100.

Par rapport à l'ordre lexicographique sur leurs codes, les permutations de taille 3 s'ordonnent de la façon suivante : 123, 213, 132, 231, 312, 321. Soit  $p_0(\sigma)$  la taille du plus long préfixe de  $\text{code}(\sigma)$  qui ne contient que des 0. Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\mathbb{E}$ , si  $b \succ a$ , on note  $N(a, b)$  la part de  $a$  qui est divisée en deux sous-parts pour obtenir  $b$ . On définit aussi  $m(a, b)$  comme le plus grand entier dont le nombre d'inversions augmente strictement de  $a$  à  $b$ . Si  $\text{code}(b) = \text{code}(a)$ , alors  $m(a, b) = 0$ . On remarque que, si  $b_1 \neq b_2$ ,

$$m(a, b_1) < m(a, b_2) \Rightarrow \text{code}(b_1) < \text{code}(b_2).$$

De plus, la réciproque est vraie si  $m(a, b_1) \neq m(a, b_2)$ .

**Définition IV.2.21.** On définit l'ordre atomique sur  $\mathbb{E}$  comme suit :

- On ordonne selon l'ordre lexicographique sur le code de la permutation associée à la 2-partition,
- En cas d'égalité, on utilise l'ordre atomique récursif des partitions non croisées.

La Figure IV.2.7 montre l'ordre atomique récursif sur l'ensemble partiellement ordonné des 2-partitions de taille 3.

**Lemme IV.2.22.** Si  $a \leq b \neq \hat{1}$ , alors  $\text{code}(a) \leq \text{code}(b)$ .

*Démonstration.* On se restreint au cas où  $b \succ a$ , le cas général s'en déduisant par induction. On note  $l$  la taille du plus grand préfixe commun de  $\text{code}(a)$  et  $\text{code}(b)$ , ces deux codes diffèrent donc sur la  $l + 1$ -ème lettre. Alors les valeurs de  $n$  à  $n - l + 1$  dans les permutations de  $a$  et  $b$  sont identiques. Donc  $n - l$  n'a pas pu se déplacer vers la droite entre  $a$  et  $b$ , puisqu'il aurait changé un élément plus grand que lui-même. Donc  $n - l$  s'est déplacé vers la gauche dans la permutation, ce qui augmente  $c_{n-l}$ , donc  $\text{code}(a) \leq \text{code}(b)$ .  $\square$

**Lemme IV.2.23.** Pour tout couple d'atomes  $a_i, a_j$ , si  $a_i \vee a_j \neq \hat{1}$ , alors

$$p_0(a_i \vee a_j) = \min(p_0(a_i), p_0(a_j)).$$

*Démonstration.* Avec le Lemme IV.2.3, on peut facilement vérifier que le join vérifie  $\eta_{a_i \vee a_j}(k) = \eta_{a_i}(k) \cap \eta_{a_j}(k)$ . On sait aussi que  $p_0(a_i \vee a_j) \leq \min(p_0(a_i), p_0(a_j))$  d'après le Lemme IV.2.22. Soit  $l = \min(p_0(a_i), p_0(a_j))$ , alors pour tout  $k \in [n - l + 1, n]$ ,  $k \in \eta_{a_i} \cap \eta_{a_j}(k)$ , donc  $k \in \eta_{a_i \vee a_j}(k)$ , et  $\text{code}_k(a_i \vee a_j) = 0$ . Donc  $p_0(a_i \vee a_j) \geq l$ .  $\square$

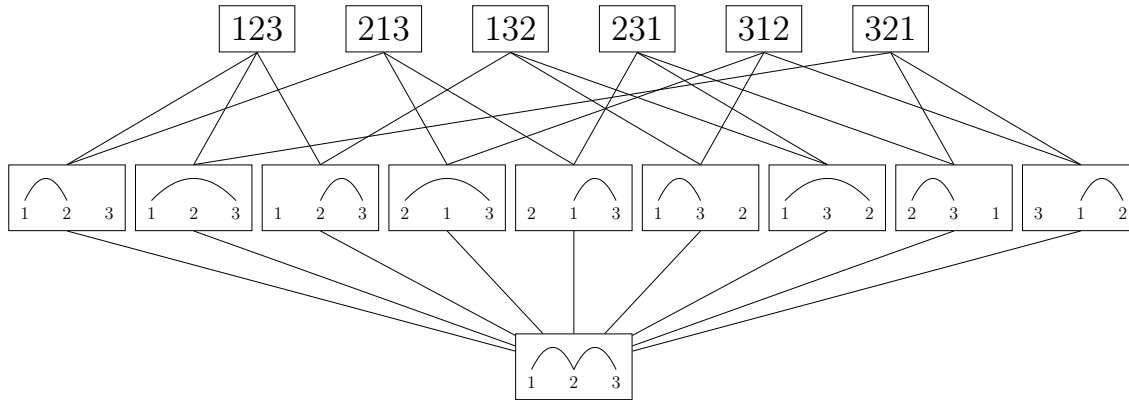


FIGURE IV.2.7 – Ensemble partiellement ordonné des fonctions de parking à bulles de taille 3, représenté avec des 2-partitions, et ordonné selon l'ordre récursif atomique de la Définition IV.2.21.

**Théorème IV.2.24.** *L'ordre lexicographique atomique sur  $\mathbb{F}$  défini précédemment dans la Définition IV.2.21 est un ordre atomique récursif.*

*Démonstration.* Soit  $x$  un élément non maximal de  $\mathbb{F}$ , et notons  $a_1, a_2, \dots$  ses atomes ordonnés comme voulu. Il faut montrer que les deux axiomes de la Définition IV.2.18 sont vérifiés.

**Axiome 1 :** Les atomes de  $a_j$  couvrant  $a_i$  pour un  $i < j$  arrivent premier dans l'ordre.

Soit  $z \succ a_j$ . Si  $z = \hat{1}$ , l'Axiome 1 est vérifié, on se restreindra donc au cas  $z \neq \hat{1}$  pour la suite. Par mesure de clarté, on dit que  $z$  est de *type 1* s'il couvre un élément  $a_i$  avec  $i < j$ , et *type 2* sinon.

Cas A :  $x, a_j$ , et  $z$  ont le même code. On n'utilise que l'ordre atomique récursif des partitions non-croisées, donc les couvertures de  $a_j$  de type 1 précèdent celles de type 2.

Cas A' :  $x$  et  $a_j$  ont le même code, qui est strictement plus petit que celui de  $z$  (on note que de tels  $z$  sont plus grands pour l'ordre des atomes de  $a_j$  que ceux considérés dans le Cas A). Alors  $z$  est de type 2.

Avec les deux Cas A and A', si  $x$  et  $a_j$  ont le même code, Axiome 1 est vrai.

Cas B :  $x$  et  $a_j$  n'ont pas le même code, et  $N(x, a_j) \cap N(a_j, z) = \emptyset$ . alors il existe un seul atome  $a_i$  de  $x$  qui est différent de  $a_j$  et couvert par  $z$ . On l'obtient à partir de  $x$  en effectuant la même division que celle entre  $a_j$  et  $z$ . On a  $N(x, a_i) = N(a_j, z)$  et  $m(x, a_i) = m(a_j, z)$ . On note que  $m(x, a_i) \neq m(x, a_j)$ . Par définition,  $z$  est de type 1 si et seulement si  $\text{code}(x_i) \leq \text{code}(x_j)$ . De même, si  $m(a_j, z) < m(x, a_j)$ , alors  $z$  est



de type 1, et si  $m(a_j, z) > m(x, a_j)$ , alors  $z$  est de type 2. Donc les couvertures de  $a_j$  de type 1 précèdent celles de type 2.

Cas B' :  $x$  et  $a_j$  n'ont pas le même code, et  $N(a_j, z) \subset N(x, a_j)$ . Chaque atome  $a$  de  $x$  couvert par  $z$  vérifie  $N(x, a) = N(x, a_j)$ , donc une seule part de  $x$  est intéressante dans ce cas. On peut supposer, sans perdre de généralité, que  $x = \hat{0}$ . Soit  $p_0(a_j) = l \neq n$ . On remarque que dans  $a_j$ , chaque valeur positionnée entre  $n - l$  et  $n - l + 1$  est plus petite que  $n - l$ , et n'est pas dans une part contenant  $n - l$ . Donc il y a au moins une façon dans  $a_i$  de fusionner deux parts qui diminuerait strictement le nombre d'inversions de  $n - l$ .

Si  $p_0(z) = l$ , alors une telle opération, possible dans  $a_j$ , demeure possible dans  $z$ , et le nombre d'inversions de  $n - l$  dans la 2-partition résultante est plus petite que dans  $a_j$ , diminuant le code. On obtient donc  $a_i$  un atome de  $x$  plus petit que  $a_j$  pour l'ordre atomique, en fusionnant ces deux parts dans  $z$ . Donc  $z$  est de type 1. Évidemment, cette construction reste possible dans le cas général  $x \neq \hat{0}$ , mais la condition sur  $p_0$  n'est plus vraie, et devient la condition  $m(a_j, z) \leq m(x, a_j)$ .

Autrement, si  $p_0(z) < l$ ,  $z$  est de type 2. En effet, le seul atome couvert par  $z$  dont le  $p_0$  est plus grand (au sens large) que  $l$  est  $a_j$  lui-même, car il n'y a qu'une seule façon de diminuer  $p_0$  en fusionnant deux parts de  $z$ . Les autres atomes couverts par  $z$  sont donc plus grands que  $a_j$  pour l'ordre atomique. Dans le cas général, la condition devient  $m(a_j, z) > m(x, a_j)$ .

Avec les Cas B et B', si  $x$  et  $a_j$  n'ont pas le même code,  $z$  est de type 1 si  $m(a_j, z) \leq m(x, a_j)$ , et de type 2 si  $m(a_j, z) > m(x, a_j)$ . Donc Axiome 1 est vrai. Puisque tous les cas ont été pris en compte, Axiome 1 est vrai pour cet ordre atomique.

**Axiome 2** : Soient deux indices  $i, j$ , et  $y \in \mathbb{E}$  tels que  $i < j$ ,  $a_i \leq y$ , et  $a_j \leq y$ , alors il existe  $z \leq y$  et  $k < j$  tels que  $a_j, a_k$  sont tous deux couverts par  $z$ .

Cas a :  $x$  et  $a_j$  ont le même code.

Dans ce cas,  $a_i$  et  $a_i \vee a_j \neq \hat{1}$  ont aussi le même code que  $x$ . Donc  $[x, a_i \vee a_j]$  est isomorphe à un intervalle de l'ensemble partiellement ordonné des partitions non-croisées. On utilise donc l'ordre atomique récursif des partitions non-croisées.

Cas b :  $x$  et  $a_j$  n'ont pas le même code, et  $N(x, a_j) \cap N(x, a_i) = \emptyset$ . Alors on a  $z = a_i \vee a_j \leq y$ , et  $a_k = a_i$ , donc Axiome 2 est vrai.

Case b' :  $x$  et  $a_j$  n'ont pas le même code, et  $N(x, a_i) = N(x, a_j)$ .

Comme dans le Cas B' de l'Axiome 1, on suppose que  $x = \hat{0}$ . D'abord, supposons que  $a_i \vee a_j \neq \hat{1}$ . Avec la Proposition IV.2.10, on sait qu'il existe une chaîne de  $a_j$  à  $y$  qui contient  $a_i \vee a_j$ . De plus, le Lemme IV.2.23 et le Lemme IV.2.22 donnent que  $p_0$  est constant entre  $a_j$  et  $a_i \vee a_j$ . Donc il existe  $a_j \rightarrow z \leq y$  tel que  $p_0(z) = p_0(a_j)$ . De même que dans le Cas B', on a que  $z$  est de type 1, même dans le cas général. Dans le cas où  $a_i \vee a_j = \hat{1}$ , on peut choisir n'importe quel  $z$  de type 1 couvrant  $a_j$ . Cela

nous donne l'existence d'un  $a_k$  comme voulu pour vérifier l'Axiome 2. Chaque cas ayant été couvert, l'Axiome 2 est vrai pour notre ordre atomique. Donc il s'agit bien d'un ordre atomique récursif. □

### IV.3 Calcul de l'action du groupe symétrique sur l'homologie d'un ensemble partiellement ordonné

Une question qui peut se poser lors de l'étude d'un tel ensemble est la nature et le nombre de ses chaînes. Un exemple connu dû à Stanley [Sta97] est le nombre de chaînes maximales de l'ensemble des partitions non-croisées, qui est en bijection avec les arbres de Cayley, et donc sont de cardinalité  $n^{n-2}$ . On définit maintenant l'homologie associée à un ensemble  $\mathcal{P}$  partiellement ordonné doté d'un minimum et d'un maximum. Une telle approche permet en effet, et entre autres, d'étudier des chaînes strictes d'un ensemble partiellement ordonné. En effet, la *formule des traces de Hopf* donne un lien entre l'homologie d'un ensemble partiellement ordonné, et les espaces de ses chaînes strictes. On se référera aux notes de Wachs [Wac06] pour une étude plus approfondie du sujet, et le livre de Munkres [Mun18] pour plus de détails sur l'homologie simpliciale. On introduit la terminologie suivante :

**Définition IV.3.1.** Une *m-chaîne stricte* est un  $m$ -uplet  $(a_1, \dots, a_m)$  où les  $a_i$  sont des éléments non extrémaux de  $\mathcal{P}$ , et  $a_i \prec a_{i+1}$  pour tout  $i \geq 1$ . On note  $\mathcal{C}_m(\mathcal{P})$  l'ensemble des  $m + 1$ -chaînes strictes et  $C_m(\mathcal{P})$  le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel engendré par les  $m + 1$ -chaînes strictes.

L'ensemble  $\cup_{m \geq 0} \mathcal{C}_m(\mathcal{P})$  est donc un complexe simplicial. On définit l'application linéaire  $d_m : C_{m+1}(\mathcal{P}) \rightarrow C_m(\mathcal{P})$  qui associe un  $m + 1$ -simplexe à son bord. Ces fonctions vérifient  $d_{m-1} \circ d_m = 0$ . Les paires  $(C_m(\mathcal{P}), d_m)_{m > 0}$  ainsi obtenues forment un *complexe de chaînes*. On peut alors définir l'homologie d'un ensemble partiellement ordonné.

**Définition IV.3.2.** Le groupe d'homologie de dimension  $m$  d'un ensemble partiellement ordonné  $\mathcal{P}$  est :

$$H_m(\mathcal{P}) = \ker d_m / \text{Im } d_{m+1}.$$

On considère dans cette section l'homologie réduite, notée  $\tilde{H}_i$ . En définissant  $C_{-1}(\mathcal{P}) = \mathbb{C}.e$ , et  $d : C_0 \rightarrow C_{-1}$  la fonction triviale constante égale à  $e$ , on obtient :

$$\dim(\tilde{H}_0(\mathcal{P})) = \dim(H_0(\mathcal{P}) - 1).$$

L'ensemble des  $k$ -chaînes faibles des fonctions de parking sur  $I$  est l'ensemble  $\text{PF}_k^I$  des  $k$ -uplets  $(a_1, \dots, a_k)$  où les  $a_i$  sont des fonctions de parking sur  $I$  et  $a_i \preceq a_{i+1}$ . L'espèce qui à chaque ensemble  $I$  associe l'ensemble  $\text{PF}_k^I$  se note  $\mathcal{C}_{k,t}^l$ . Avec le théorème des traces de Hopf [Wac06, Théorème 2.3.9], et les résultats de [Rho14, Section 8], on a

**Proposition IV.3.3.** *Le caractère de l'action du groupe symétrique sur  $\tilde{H}_{n-2}(\mathbb{E}_n)$  est donné par*

$$\chi(\sigma) = (n-1)^{z(\sigma)-1}.$$

## IV.4 Relations entre espèces de chaînes

**Proposition IV.4.1.** *L'espèce des  $k$ -chaînes faibles satisfait la relation suivante :*

$$\mathcal{C}_{k,t}^l = \sum_{p \geq 1} \mathcal{C}_{k-1,t}^{l,p} \times (\mathcal{C}_{k,t}^l + 1)^p, \quad (\text{IV.4.1})$$

où  $\mathcal{C}_{k-1,t}^{l,p}$  est l'espèce qui coïncide avec  $\mathcal{C}_{k-1,t}^l$  sur tout ensemble de taille  $p$ , et envoie tout autre ensemble sur l'ensemble vide.

*Démonstration.* Soit une  $k$ -chaîne faible de fonctions de parking. Les éléments dans la racine du minimum de la chaîne n'interviennent pas dans le reste de la chaîne. Elle peut donc être divisée en deux parts, sa restriction à la racine, et sa restriction sur chacun de ses sous-arbres. Soit  $p$  le nombre d'éléments dans la racine de l'élément minimal de la chaîne. Comme un sous-arbre est soit vide soit une fonction de parking, et que les sous-arbres sont ordonnés, on obtient un terme  $(\mathcal{C}_{k,t}^l + 1)^p$ . De plus, si l'élément minimal d'une chaîne a seulement un sommet, il peut être ignoré, donc on peut dire qu'une  $k$ -chaîne faible avec un élément trivial est une  $k-1$ -chaîne faible.  $\square$

En séparant la racine d'une fonction de parking et ses sous-arbres, on a la relation suivante :

**Lemme IV.4.2.** *L'espèce des fonctions de parking satisfait :*

$$\mathcal{C}_{1,t}^l = \sum_{p \geq 1} t \mathbb{E}_p (1 + \mathcal{C}_{1,t}^l)^p, \quad (\text{IV.4.2})$$

où  $\mathbb{E}_p$  est l'espèce satisfaisant  $\mathbb{E}_p(I) = \{I\}$  si  $|I| = p$  et  $\mathbb{E}_p(I) = \emptyset$  sinon. D'où,

$$\mathcal{C}_{0,t}^l = t(\mathbb{E} - 1),$$

où  $\mathbb{E}$  est l'espèce des ensembles,  $\mathbb{E}(I) = \{I\}$  pour tout ensemble  $I$ .

Injecter cette expression dans l'Équation (IV.4.1) donne la relation :

$$t(\mathbb{E} - 1) = \sum_{p \geq 1} \mathcal{C}_{-1,t}^{l,p} \times t^p \mathbb{E}^p,$$

En termes de fonctions génératrices, on obtient :

$$t(e^x - 1) = \mathcal{C}_{-1,t}^l \circ (x(1 + te^x - t)), \quad (\text{IV.4.3})$$

$$x = \frac{\mathcal{C}_{-1,t}^l}{t} \circ (\ln(1+x)(1+tx)), \quad (\text{IV.4.4})$$

Ainsi,  $\frac{\mathcal{C}_{-1,t}^l}{t}$  est l'inverse compositionnelle de  $\ln(1+x)(1+tx)$ . Ses coefficients sont donnés par la séquence OEIS [A198204](#).

**Lemme IV.4.3.** *Pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,*

$$\mathcal{C}_{k,t}^l = \mathcal{C}_{k-i,t}^l \circ (x(\mathcal{C}_{k,t}^l + 1)^i). \quad (\text{IV.4.5})$$

*Démonstration.* L'Équation (IV.4.1) donne en termes de fonctions génératrices :

$$\mathcal{C}_{k,t}^l = \mathcal{C}_{k-1,t}^l \circ (x(\mathcal{C}_{k,t}^l + 1)). \quad (\text{IV.4.6})$$

On prouve ce lemme par induction. Supposons que l'Équation (IV.4.5) est vraie pour  $i > 1$ . En ajoutant 1 et multipliant chaque membre de l'équation par  $x(\mathcal{C}_{k,t}^l + 1)^i$ , on obtient :

$$x(\mathcal{C}_{k,t}^l + 1)^{i+1} = (x(\mathcal{C}_{k-i,t}^l + 1)) \circ (x(\mathcal{C}_{k,t}^l + 1)^i). \quad (\text{IV.4.7})$$

En composant par  $\mathcal{C}_{k-i-1,t}^l$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{k-i-1,t}^l \circ (x(\mathcal{C}_{k,t}^l + 1)^{i+1}) &= \mathcal{C}_{k-i-1,t}^l \circ (x(\mathcal{C}_{k-i,t}^l + 1)) \circ (x(\mathcal{C}_{k,t}^l + 1)^i) \\ &= \mathcal{C}_{k-i,t}^l \circ (x(\mathcal{C}_{k,t}^l + 1)^i) \\ &= \mathcal{C}_{k,t}^l, \end{aligned}$$

ce qui prouve l'induction. □

**Proposition IV.4.4.**

$$\mathcal{C}_{k,t}^l = \sum_{n \geq 1} \left( \sum_{l \geq 0} l! \binom{kn}{l} S(n, l+1) t^{l+1} \right) \frac{x^n}{n!}. \quad (\text{IV.4.8})$$

*Démonstration.* L'Équation (IV.4.5) avec  $i = k$  donne :

$$\mathcal{C}_{k,t}^l = \mathcal{C}_{0,t}^l \circ \left( x (\mathcal{C}_{k,t}^l + 1)^k \right). \quad (\text{IV.4.9})$$

En appliquant cette formule à  $x^k$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{k,t}^l(x^k) + 1 &= \frac{x (\mathcal{C}_{k,t}^l(x^k) + 1)}{x} = \mathcal{C}_{0,t}^l \circ \left( x^k (\mathcal{C}_{k,t}^l(x^k) + 1)^k \right) \\ &= \mathcal{C}_{0,t}^l \circ \left( (x (\mathcal{C}_{k,t}^l(x^k) + 1))^k \right). \end{aligned}$$

On applique le théorème d'inversion de Lagrange pour obtenir, pour tout  $n \geq 1$  :

$$[x^{n-1}] (\mathcal{C}_{k,t}^l(x^k) + 1) = \frac{1}{n} [x^{n-1}] (\mathcal{C}_{0,t}^l(x^k) + 1)^n.$$

Autrement dit, on a pour tout  $n \geq 1$  :

$$[x^n] \mathcal{C}_{k,t}^l = \frac{1}{nk+1} [x^n] (\mathcal{C}_{0,t}^l + 1)^{nk+1}. \quad (\text{IV.4.10})$$

Comme  $\mathcal{C}_{0,t}^l = t(E-1)$ , on a :

$$\begin{aligned} [x^n] \mathcal{C}_{k,t}^l &= \frac{1}{nk+1} [x^n] (t(e^x - 1) + 1)^{nk+1} \\ &= \frac{1}{nk+1} \sum_{l \geq 1} \frac{l!}{n!} \binom{nk+1}{l} S(n, l) t^l \\ &= \sum_{l \geq 0} \frac{l!}{n!} \binom{nk}{l} S(n, l+1) t^{l+1}. \end{aligned}$$

□

Alternativement, on propose une preuve bijective de cette formule.

*Démonstration.* On définit un  $k$ -arbre de parking comme un arbre de parking auquel on associe  $k$  arêtes par étiquette. Ces arêtes sont orientées, et on peut considérer qu'elles sont étiquetées de 1 à  $k$ . Considérons un  $k$ -arbre de parking à  $n$  étiquettes et  $l + 1$  sommets. Le choix des sommets est  $S(n, l + 1)$ , celui des arêtes sur lesquelles s'attachent les sommets est  $\binom{kn}{l}$ , et le nombre de façons de faire un arbre, qui correspond à choisir l'ordre dans lesquelles les arêtes sont choisies, est  $l!$ . Il suffit maintenant de prouver que l'ensemble de tels  $k$ -arbres de parking est en bijection avec les  $k$ -chaînes faibles dont l'élément maximal est de rang  $l$ , donc a  $l + 1$  sommets.

Considérons toujours un  $k$ -arbre de parking à  $n$  étiquettes et  $l + 1$  sommets. On définit une chaîne d'arbres de parking  $a_i$  comme suit : pour toute arête dont l'étiquette est plus grande strictement que  $i$ , alors on fusionne les deux sommets reliés par cette arête. Ensuite, dans chaque ensemble d'arêtes, pour les arêtes de 2 à  $i$ , on accroche le sous arbre de l'arête à l'arête la plus à droite du sous-arbre de l'arête 1. On vérifie qu'on obtient bien une  $k$ -chaîne faible de l'ensemble partiellement ordonné comme voulue, et que cette opération est réversible, ce qui prouve la bijection.  $\square$



# Conclusion et perspectives

Les différents travaux de cette thèse sont principalement axés sur l'étude de différents types de chemins, d'arbres, et autres objets combinatoires, en utilisant des outils provenant principalement de la combinatoire bijective et analytique.

L'un des premiers problèmes étudiés fut l'étude des chemins de basketball qui, malgré leurs différences avec des chemins plus classiques, présentent des liens avec les nombres de Catalan et les arbres de Cayley. Un développement possible partant de cette étude pourrait alors porter sur d'autres classes de chemins qui n'appartiennent pas à la famille des chemins de Lukasiewicz, en rajoutant un pas négatif supplémentaire par exemple. Une autre approche pourrait être, à l'inverse, d'étudier plus en détail les arbres croissants dont la permutation associée évite un certain motif, et éventuellement de retrouver des liens bijectifs avec certaines classes de chemins.

On s'est ensuite intéressé à prouver une formule mettant en relation les permutations alternantes avec des chemins de Dyck pondérés. La preuve utilise la théorie de Flajolet des fractions continues appliquée aux chemins de Motzkin. On peut donc se demander s'il est possible d'adapter la preuve pour obtenir des relations similaires avec les chemins de Motzkin, qui prendrait donc en compte les pas horizontaux. Un autre problème qui s'est posé lors de notre recherche est de trouver une preuve directe dans le cas des permutations  $k$ -alternantes. En effet, bien que la formule des équerres généralisée sur les tableaux de Young gauches nous donne bien une formule qui relie les permutations avec des chemins de  $k$ -Dyck pondérés, il nous échappe encore une preuve directe de la formule.

On s'est ensuite intéressé à une généralisation des polynômes de Ramanujan, ainsi que leur interprétation en tant que fonctions génératrices d'arbres planaires, arbres de Cayley, et arbres de Greg. Plus précisément, on s'est intéressé à la version enracinée de ces familles d'arbres. Il serait donc intéressant de regarder le cas des arbres non enracinés, dans lesquels la définition d'arête impropre s'étend aisément, mais rend le problème plus complexe. En effet, la plupart des preuves se reposent sur le fait que 1 est la racine de nos arbres. Des résultats existent déjà dans les travaux originaux de Guo et Zeng pour les arbres planaires, et Josuat-Vergès pour les arbres de Greg, mais



aucun lien bijectif n'a encore été mis en évidence.

Enfin, nous nous sommes intéressés à l'ensemble partiellement ordonné des fonctions de parking, sa topologie, et les différents objets avec lesquels ces fonctions sont en bijection, et qui conservent le même ordre partiel. Plusieurs perspectives sont envisagées, l'une d'entre elles serait d'étudier l'ensemble partiellement ordonné d'objets similaires aux fonctions de parking, telles que les fonctions de parking indivisibles, et les partitions non-croisées de type B.

# Bibliographie

- [And94] George E. Andrews. Plane partitions V: The tsscpc conjecture. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 66(1) :28–39, 1994.
- [Ava08] Jean-Christophe Aval. Multivariate fusc–catalan numbers. *Discrete Mathematics*, 308(20) :4660–4669, 2008.
- [AZ07] Arvind Ayyer and Doron Zeilberger. The number of [old-time] basketball games with final score  $n:n$  where the home team was never losing but also never ahead by more than  $w$  points. *Electron. J. Combin.*, 14(1) :Research Paper 19, 8 pp. (electronic), 2007.
- [Bac13] Axel Bacher. Generalized Dyck paths of bounded height. *Preprint, arXiv: 1303. 2724*, 2013.
- [BBMD<sup>+</sup>02] Cyril Banderier, Mireille Bousquet-Mélou, Alain Denise, Philippe Flajolet, Daniele Gardy, and Dominique Gouyou-Beauchamps. Generating functions for generating trees. *Discrete mathematics*, 246(1-3) :29–55, 2002.
- [Ber85] Bruce C. Berndt. Ramanujan’s second notebooks, part I, Chap. 3: Combinatorial analysis and series inversions, 1985.
- [BEW83] Bruce C. Berndt, Ronald J. Evans, and Bertram M. Wilson. Chapter 3 of Ramanujan’s second notebook. *Advances in Mathematics*, 49(2) :123 – 169, 1983.
- [BF02] Cyril Banderier and Philippe Flajolet. Basic analytic combinatorics of directed lattice paths. *Theoret. Comput. Sci.*, 281(1-2) :37–80, 2002.
- [BFMR16] Jérémie Bettinelli, Éric Fusy, Cécile Mailler, and Lucas Randazzo. A bijective study of basketball walks. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, 77 :B77a, 2016.
- [BHV01] Louis J. Billera, Susan P. Holmes, and Karen Vogtmann. Geometry of the space of phylogenetic trees. *Advances in Applied Mathematics*, 27(4) :733–767, 2001.

- [Bjö80] Anders Björner. Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets. *Transactions of the american mathematical society*, 260(1) :159–183, 1980.
- [BKK<sup>+</sup>17] Cyril Banderier, Christian Krattenthaler, Alan Krinik, Dmitry Kruchinin, Vladimir Kruchinin, David Nguyen, and Michael Wallner. Explicit formulas for enumeration of lattice paths : basketball and the kernel method. *Developments in Mathematics*, pages 78–118, February 2017.
- [Bla88] John D. Blanton. Introduction to analysis of the infinite, 1988.
- [BLL98] François Bergeron, Gilbert Labelle, and Pierre Leroux. *Combinatorial species and tree-like structures*, volume 67. Cambridge University Press, 1998.
- [BM08] Mireille Bousquet-Mélou. Discrete excursions. *Sém. Lothar. Combin.*, 57 :Art. B57d, 23, 2008.
- [BS10] Anders Björner and Richard P. Stanley. *A combinatorial miscellany*. L’Enseignement mathématique, 2010.
- [BW82] Anders Björner and Michelle Wachs. Bruhat order of Coxeter groups and shellability. *Advances in Mathematics*, 43(1) :87–100, 1982.
- [BW96] Anders Björner and Michelle Wachs. Shellable nonpure complexes and posets. I. *Transactions of the American mathematical society*, 348(4) :1299–1327, 1996.
- [CG01] William Y.C. Chen and Victor J.W. Guo. Bijections behind the Ramanujan polynomials. *Advances in Applied Mathematics*, 27(2) :336 – 356, 2001.
- [Cha02] Frédéric Chapoton. Opérades différentielles graduées sur les simplexes et les permutoèdres. *Bulletin de la société mathématique de France*, 130(2) :233–252, 2002.
- [Cha06] Frédéric Chapoton. Sur le nombre d’intervalles dans les treillis de Tamari. *Sém. Lothar. Combin*, 55 :36, 2006.
- [DOJVR19] Bérénice Delcroix-Oger, Matthieu Josuat-Vergès, and Lucas Randazzo. Noncrossing partitions and bubbling parking functions poset. *Travail en cours*, 2019.
- [DR96] Dominique Dumont and Armand Ramamonjisoa. Grammaire de Ramanujan et arbres de Cayley. *Electron. J. Combin*, 3(2), 1996.
- [Duc00] Philippe Duchon. On the enumeration and generation of generalized Dyck words. *Discrete Math.*, 225(1-3) :121–135, 2000. Formal power series and algebraic combinatorics (Toronto, ON, 1998).

- [Ede80] Paul H. Edelman. Chain enumeration and non-crossing partitions. *Discrete Mathematics*, 31(2) :171–180, 1980.
- [Fla80] Philippe Flajolet. Combinatorial aspects of continued fractions. *Discrete Mathematics*, 32(2) :125–161, 1980.
- [Fli90] Colin Flight. How many stemmata? *Manuscripta*, 34(2) :122–128, 1990.
- [FRT<sup>+</sup>54] J. Sutherland Frame, G. de B. Robinson, Robert M. Thrall, et al. The hook graphs of the symmetric group. *Canadian Journal of Mathematics*, 6 :316–324, 1954.
- [FS73] Dominique Foata and Marcel-Paul Schützenberger. Nombres d’Euler et permutations alternantes. *A survey of Combinatorial Theory*, 1 :173–188, 1973.
- [FS09] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University press, 2009.
- [FZ97] Dominique Foata and Doron Zeilberger. A classic proof of a recurrence for a very classical sequence. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 80(2) :380 – 384, 1997.
- [Ges80] Ira M. Gessel. A factorization for formal Laurent series and lattice path enumeration. *J. Combin. Theory Ser. A*, 28(3) :321–337, 1980.
- [Gla83] James Whitbread Lee Glaisher. A theorem in partitions. *Messenger of Math*, 12 :158–170, 1883.
- [GR04] George Gasper and Mizan Rahman. *Basic hypergeometric series*, volume 96. Cambridge university press, 2004.
- [Guy67] Richard K. Guy. *Dissecting a polygon into triangles*. University of Calgary, Department of Mathematics, 1967.
- [GZ07] Victor J.W. Guo and Jiang Zeng. A generalization of the Ramanujan polynomials and plane trees. *Advances in Applied Mathematics*, 39(1) :96–115, 2007.
- [JV15] Matthieu Josuat-Vergès. Derivatives of the tree function. *The Ramanujan Journal*, 38(1) :1–15, 2015.
- [Kra15] Christian Krattenthaler. Lattice path enumeration. In *Handbook of enumerative combinatorics*, Discrete Math. Appl. (Boca Raton), pages 589–678. CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.
- [Kre72] Germain Kreweras. Sur les partitions non croisées d’un cycle. *Discrete mathematics*, 1(4) :333–350, 1972.

- [KY11] Kağan Kurşungöz and Ae Ja Yee. Alternating permutations and the mth descents. *Discrete Mathematics*, 311(22) :2610–2622, 2011.
- [Lag70] Joseph Louis Lagrange. *Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers*. Chez Haude et Spener, Libraires de la Cour & de l’Académie royale, 1770.
- [Lot97] M. Lothaire. *Combinatorics on words*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [LPRS16] Derek Levin, Lara K. Pudwell, Manda Riehl, and Andrew Sandberg. Pattern avoidance in  $k$ -ary heaps. *Australas. J. Combin.*, 64 :120–139, 2016.
- [LU04] A. Laradji and A. Umar. On the number of nilpotents in the partial symmetric semigroup. *Communications in Algebra*, 32(8) :3017–3023, 2004.
- [LY89] Jacques Labelle and Yeong Nan Yeh. Dyck paths of knight moves. *Discrete Appl. Math.*, 24(1-3) :213–221, 1989. First Montreal Conference on Combinatorics and Computer Science, 1987.
- [LY90] Jacques Labelle and Yeong Nan Yeh. Generalized Dyck paths. *Discrete Math.*, 82(1) :1–6, 1990.
- [Mot48] Th. Motzkin. Relations between hypersurface cross ratios, and a combinatorial formula for partitions of a polygon, for permanent preponderance, and for non-associative products. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54(4) :352–360, 1948.
- [MPP16] Alejandro H. Morales, Igor Pak, and Greta Panova. Hook formulas for skew shapes II. Combinatorial proofs and enumerative applications. *SIAM J. Discrete Math.*, 31 :1953–1989, 2016.
- [MS00] Andy McKenzie and Mike Steel. Distributions of cherries for two models of trees. *Math. Biosci.*, 164(1) :81–92, 2000.
- [Mun18] James R. Munkres. *Elements of algebraic topology*. CRC Press, 2018.
- [Nar14] Hiroshi Naruse. Schubert calculus and hook formula. *Slides at 73rd Sémin. Lothar. Combin., Strobl, Austria*, 2014.
- [NN11] Reviel Netz and William Noel. *The Archimedes codex: revealing the secrets of the world’s greatest palimpsest*. Hachette UK, 2011.
- [Pin98] Jean-Eric Pin. Tropical semirings, 1998.
- [Pou71] Yves Poupard. Codage et dénombrement de diverses structures apparentées à celle d’arbre. *Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle Série Recherche*, 16 :7–83, 1971.

- [Ram57] Srinivasa Ramanujan. *Notebooks of Srinivasa Ramanujan, volume II*. Springer, 1957.
- [Ran19a] Lucas Randazzo. Arboretum for a generalization of Ramanujan polynomials. *The Ramanujan Journal*, 2019.
- [Ran19b] Lucas Randazzo. Hook-length formula and applications to alternating permutations. *arXiv preprint arXiv :1904.08374*, 2019.
- [Red90] Uday S. Reddy. Term rewriting induction. In *International Conference on Automated Deduction*, pages 162–177. Springer, 1990.
- [Rho14] Brendon Rhoades. Parking structures: Fuss analogs. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 40(2) :417–473, 2014.
- [Sch70] Ernst Schröder. Vier combinatorische probleme. *Z. Math. Phys*, 15 :361–376, 1870.
- [Sho95] Peter W. Shor. A new proof of Cayley’s formula for counting labeled trees. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 71(1) :154–158, 1995.
- [SS04] David Speyer and Bernd Sturmfels. The tropical grassmannian. *Advances in Geometry*, 4(3) :389–411, 2004.
- [Sta75] Richard P. Stanley. Combinatorial reciprocity theorems. In *Combinatorics*, pages 307–318. Springer, 1975.
- [Sta97] Richard P. Stanley. Parking functions and noncrossing partitions. *Electron. J. Combin*, 4(2) :R20, 1997.
- [Sta03] Richard Stanley. Recent progress in algebraic combinatorics. *Bulletin of the American Mathematical society*, 40(1) :55–68, 2003.
- [Sta09] Richard P. Stanley. Exercises on Catalan and related numbers. *Enumerative combinatorics*, 2 :221–247, 2009.
- [Sta10] Richard P. Stanley. A survey of alternating permutations. *Contemp. Math*, 531 :165–196, 2010.
- [Sta11] Richard P. Stanley. *Enumerative Combinatorics: Volume 1*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2nd edition, 2011.
- [Stu02] Bernd Sturmfels. *Solving systems of polynomial equations*. Number 97. American Mathematical Soc., 2002.
- [SW07] Einar Steingrímsson and Lauren K. Williams. Permutation tableaux and permutation patterns. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 114(2) :211–234, 2007.
- [Vie02] Xavier Gérard Viennot. A Strahler bijection between Dyck paths and planar trees. *Discrete Mathematics*, 246(1-3) :317–329, 2002.

- [Wac06] Michelle L. Wachs. Poset topology: tools and applications. *arXiv preprint math/0602226*, 2006.
- [Zen99] Jiang Zeng. A Ramanujan sequence that refines the Cayley formula for trees. *The Ramanujan Journal*, 3(1) :45–54, 1999.